HAL
open science

Analyse numérique d'une méthode énergétique pour la résolution du problème de Cauchy avec prise en compte des effets de bruit

Romain Rischette

To cite this version:

Romain Rischette. Analyse numérique d'une méthode énergétique pour la résolution du problème de Cauchy avec prise en compte des effets de bruit. Autre. INSA de Lyon, 2011. Français. NNT : 2011ISAL0075 . tel-00715810

HAL Id: tel-00715810

https://theses.hal.science/tel-00715810v1

Submitted on 9 Jul 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N ° d'ordre 2011-ISAL-0075 Année 2011

THÈSE

Analyse numérique d'une méthode énergétique pour la résolution du problème de Cauchy avec prise en compte des effets de bruit

Présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale :

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :

MÉCANIQUE

par

Romain RISCHETTE

Thèse soutenue le 8 septembre 2011 devant la Commission d'examen

Jury

Marc Bonnet	Directeur de recherche, CNRS - INRIA - ENSTA	Président
Stéphane Andrieux	Professeur, ParisTech, École des Ponts	Rapporteur
Faker Ben Belgacem	Professeur, UTC, Laboratoire de Mathématiques	Rapporteur
Laurent Bourgeois	Ingénieur, Enseignant chercheur, ENSTA	Examinateur
B. Tomas Johansson	Senior Lecturer, University of Birmingham	Examinateur
Yves Renard	Professeur, LaMCoS, INSA de Lyon	Examinateur
Thouraya N. Baranger	Maître de conférence HDR, LaMCoS, UCB Lyon 1	Directeur
Naima Debit	Maître de conférence, ICJ, UCB Lyon 1	Co-directeur

LaMCoS - UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales - Quadriennal 2007-2010

SIGLE	ÉCOLE DOCTORALE	NOM et COORDONNÉES DU RESPONSABLE
CHIMIE	**chimie de lyon** http://sakura.cpe.fr/ED206 M. Jean Marc LANCELIN INSA : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN ✉Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment CPE 43, Boulevard du 11 Novembre 1918 69622 Villeurbanne Cédex ☎ 04 72 43 13 95 ✉ lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	**éléctronique, électrotechnique, automatique** http://www.insa-lyon.fr/eea M. Alain NICOLAS INSA : C. PLOSSU ✉ ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE ☎ A.M. 64 43 🖷 64 54	M. Alain NICOLAS ✉École Centrale de Lyon Bâtiment H9 36, Avenue Guy de Collongue 69134 Écully ☎ 04 72 18 60 97 🖷 04 78 43 37 17 ✉ eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	**évolution, écosystème, microbiologie, modélisation** http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 M. Jean-Pierre FLANDROIS INSA : H. CHARLES	M. Jean-Pierre FLANDROIS ✉CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment G. Mendel 69622 Villeurbanne Cédex ☎ 04 26 23 59 50 🖷 04 26 23 59 49 📱 06 07 53 89 13 ✉ e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDISS	**interdisciplinaire sciences-santé** M. Didier REVEL Secrétariat : S. BOUDJEMA INSA : M. LAGARDE	M. Didier REVEL ✉Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28, Avenue Doyen Lépine 69500 Bron ☎ 04 72 68 49 09 🖷 04 72 35 49 16 ✉ didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
INFOMATHS	**informatique et mathématiques** http://infomaths.univ-lyon1.fr M. Alain MILLE	M. Alain MILLE ✉Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43, Boulevard du 11 Novembre 1918 69622 Villeurbanne Cédex ☎ 04 72 44 82 94 🖷 04 72 43 13 10 ✉ infomaths@bat710.univ-lyon1.fr ✉ alain.mille@liris.cnrs.fr
Matériaux	**matériau de lyon** M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON ☎ 83 85	M. Jean Marc PELLETIER ✉INSA DE LYON MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7, Avenue Jean Capelle 69621 Villeurbanne Cédex ☎ 04 72 43 83 18 🖷 04 72 43 85 28 ✉ jean-marc.pelletier@insa-lyon.fr
MEGA	**mécanique, énergétique, génie civil, acoustique** http://infomaths.univ-lyon1.fr M. Jean Louis GUYADER Secrétariat : M. LABOUNE ☎ P.M. 71 70 🖷 87 12	M. Jean Louis GUYADER ✉INSA DE LYON Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 *bis*, Avenue Jean Capelle 69621 Villeurbanne Cédex ☎ 04 72 18 71 70 🖷 04 72 43 72 37 ✉ mega@lva.insa-lyon.fr
ScSo	**scso*** M. Obadia Lionel INSA : J.Y. TOUSSAINT	M. Obadia Lionel Université Lyon 2 86, Rue Pasteur 69365 Lyon Cédex 07 ☎ 04 78 77 23 88 🖷 04 37 28 04 48 ✉lionel.obadia@univ-lyon2.fr

*scso : Histoire, Geographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

A ma mère, Myriam
A Romain Perraud, André Perret, Rechid Kheitmi
Et à ceux qui sont restés
A Faustine
A mon père, ma sœur et mon frère, Patrick, Emma et Yann

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Remerciements

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé à l'Institut National des Sciences appliquées (INSA) de Lyon au sein de Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) sous la direction de Thouraya Nouri Baranger et Naima Debit.

Je remercie Faker Ben Belgacem et Stéphane Andrieux d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail.

Je remercie également Marc Bonnet, Laurent Bourgeois, B. Tomas Johansson et Yves Renard pour leur participation au jury.

J'exprime ma sincère gratitude à Thouraya Nouri Baranger et Naima Debit qui ont su me guider dans ce travail. Je les remercie pour leurs précieux conseils et encouragements.

Je remercie les membres du LaMCoS et les occupants, légitimes ou non, des locaux du CDCSP pour leur cordiale compagnie.

Je remercie les enseignants que j'ai côtoyé et qui m'ont encouragé dans cette voie, en particulier Thierry Clopeau et Abdellatif Agouzal (Université Claude Bernard Lyon 1) ; je remercie également Alain Cartalade (CEA, Saclay) qui m'a permis de débuter dans la recherche.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Résumé

Ce travail concerne l'étude mathématique et l'analyse numérique d'une méthode de résolution du problème de Cauchy basée sur la minimisation d'une fonctionnelle énergétique. Depuis les travaux de J. Hadamard, le problème de Cauchy est connu pour être mal posé et les méthodes de résolution de ce type de problème présentent une importante instabilité numérique dans le cas de données bruitées.

Dans le premier chapitre, le problème de Cauchy est introduit et des résultats théoriques classiques sont donnés. La méthode énergétique et le problème de minimisation associé sont présentés, la théorie du contrôle optimal est utilisée pour l'étude mathématique de ce problème de minimisation.

Le deuxième chapitre est consacré à l'application de la méthode énergétique pour l'équation de la chaleur stationnaire. Une fois le cadre variationnel défini, la discrétisation éléments finis de la méthode et des estimations d'erreur *a priori* tenant compte des données bruitées sont données. Lorsque les données sont bruitées, l'erreur atteint une valeur minimale avant d'exploser numériquement tandis que la fonctionnelle atteint assymptotiquement un seuil dépendant du taux de bruit. Une estimation du seuil atteint par la fonctionnelle en fonction du bruit est donnée et aboutit à la proposition d'un critère d'arrêt pour le processus de minimisation permettant de contrôler l'explosion numérique due au bruit. Enfin, les résultats théoriques sont validés numériquement, la robustesse et l'efficacité du critère d'arrêt proposé sont illustrées par différents tests numériques.

La méthode énergétique est ensuite appliquée à l'équation de la chaleur en régime transitoire et est analysée en suivant la méthodologie introduite dans le cas stationnaire.

Mots clés : Problème inverse, problème mal posé, problème de Cauchy, complétion de données, identification de conditions limites, contrôle optimal, éléments finis, bruit, estimation d'erreur *a priori*.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Abstract

Numerical analysis of an energy-like minimization method for solving Cauchy problem with data noise effects

The purpose of this work is the mathematical study and the numerical convergence analysis of a method based on minimization of an energy-like functional for solving Cauchy problem. Since J. Hadamard's works, the Cauchy problem is known to be ill-posed and many resolution methods for this kind of problem present an important numerical instability in the case of noisy data.

In the first chapter, we give the Cauchy problem and report classical theoretical results. The energy-like method and the related minimization problem are introduced, the optimal control theory is used for the mathematical study of this minimization problem.

The second chapter is devoted to the application of the method for the steady state heat transfer equation. Afterwards the variational framework has been defined, the discretization of the method and *a priori* error estimates taking into account noisy data are given. When noise is introduced on the Cauchy data, we observe during the optimization process that the error reaches a minimum before increasing very fast and leading to a numerical explosion. At the same time, the energy-like functional attains asymptotically a minimal threshold depending on the noise. An estimation is given for the threshold reached by the functional and leads to a stopping criterion wich allows to control the numerical explosion due to noise. Finally, numerical validation of theoretical results is performed, robustness and efficiency of the proposed stopping criterion are illustrated by different numerical experiments.

Then, the energy-like method is applied to the time dependent heat transfer equation and analysed following the methodology introduced in the stationary case.

Keywords : Inverse problem, ill-posed problem, Cauchy problem, data completion, boundary conditions identification, optimal control, finite elements, noise, *a priori* error estimates.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Table des matières

Liste des symboles **xi**

Introduction **1**

1 La méthode énergétique **7**
1.1 Préliminaires mathématiques 7
1.2 Complétion de données et minimisation 9
1.3 Un problème de contrôle optimal 10
1.3.1 Position du problème 10
1.3.2 Existence et unicité du contrôle optimal 11
1.3.3 Caractérisation du contrôle optimal 13
1.4 Restriction au cas elliptique 13

2 Problème de Cauchy stationnaire **15**
2.1 Position du problème 15
2.2 Analyse mathématique de la méthode énergétique 17
2.2.1 Cadre variationnel 17
2.2.2 Contrôle optimal 19
2.3 Discrétisation, analyse de convergence 22
2.3.1 Estimation d'erreur 22
2.3.2 Introduction de données bruitées et estimation d'erreur . . 23
2.3.3 Déduction d'un critère d'arrêt pour le processus de minimisation 24
2.4 Mise en œuvre et résultats numériques 25
2.4.1 Procédure numérique 25
2.4.2 Résultats numériques 28

3 Problème de Cauchy évolutif **41**
3.1 Position du problème 41
3.2 Analyse mathématique de la méthode énergétique 42
3.2.1 Cadre variationnel 42
3.2.2 Contrôle optimal 44
3.3 Discrétisation, analyse de convergence 47
3.3.1 Discrétisation spatiale 47
3.3.2 Discrétisation totale 49
3.3.3 Introduction de données bruitées et estimations d'erreur . 51
3.3.4 Dérivation d'un critère d'arrêt du processus de minimisation 54

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

3.4 Mise en œuvre et résultats numériques 56
3.4.1 Procédure numérique 56
3.4.2 Résultats numériques 59

Conclusion **73**

A Précisions mathématiques **75**
A.1 Données de Cauchy et densité 75
A.2 Traces et restrictions 75
A.3 Propriétés des formes linéaire et bilinéaire 77
A.4 Précision sur le contrôle 78
A.5 Éléments finis et estimation d'erreur 79
A.6 Solutions analytiques des cas tests paraboliques 80
A.6.1 Cas axisymétrique 80
A.6.2 Solution analytique en deux dimensions 81

B Au cours du processus d'optimisation **83**
B.1 Problème de Cauchy elliptique 83
B.2 Problème de Cauchy parabolique 87

C Publications **89**

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Liste des symboles

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$	domaine borné à frontière Lipschitzienne et de dimension $d = 2, 3$.
$\Gamma = \partial\Omega$	frontière du domaine Ω.
$\vec{n}$	normale unitaire extérieure au bord Γ.
Γ_m	partie du bord sur laquelle on dispose de conditions limites surabondantes.
Γ_u	partie du bord sur laquelle on ne dispose pas de conditions limites.
x	point générique de Ω.
D	temps final.
$t \in [0, D]$	variable de temps.
Q	$= \Omega \times]0, D[$.
Σ_m	$= \Gamma_m \times]0, D[$.
Σ_u	$= \Gamma_u \times]0, D[$.
ϕ, T	données de Cauchy, respectivement le flux et la température sur Γ_m pour l'équation de la chaleur
ϕ^δ, T^δ	données de Cauchy bruitées.
η, τ	inconnues du problème de complétion de données, respectivement le flux et la température sur Γ_u pour l'équation de la chaleur.
$u_1(\eta), u_2(\tau)$	fonctions solutions des deux problèmes bien posés issus de la décomposition du problème de complétion de données. Dans le cas elliptique elles sont fonctions de x : $u_1(x;\eta), u_2(x;\tau)$; dans le cas parabolique elles sont fonctions de x et t : $u_1(x;\eta), u_2(x;\tau)$ ou $u_1(t;\eta), u_2(t;\tau)$ ou encore $u_1(x,t;\eta), u_2(x,t;\tau)$.
$E(\eta, \tau)$	fonctionnelle énergétique.
η^*, τ^*	solution du problème de minimisation associé à la méthode énergétique.
V, H	espaces de Hilbert sur Ω tels que $V \subset H = H' \subset V'$ avec injection dense et continue.
C	constante strictement positive.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

$L^\infty(\Omega)$ espace des fonctions f définies sur Ω, mesurables et telles que $|f(x)| < C$ presque partout sur Ω.

$\|\cdot\|_{\infty,\Omega}$ norme dans $L^\infty(\Omega)$.

$L^2(\Omega)$ espace des fonctions de carré intégrable.

$(\cdot,\cdot)_{0,\Omega}$ produit scalaire usuel de $L^2(\Omega)$.

$\|\cdot\|_{0,\Omega}$ norme dans $L^2(\Omega)$.

$H^m(\Omega)$ espace des fonctions de carré intégrable dont les dérivées d'ordre inférieur ou égal à m sont également de carré intégrable.

$(\cdot,\cdot)_{m,\Omega}$ produit scalaire dans $H^m(\Omega)$.

$\|\cdot\|_{m,\Omega}, |\cdot|_{m,\Omega}$ norme et semi-norme dans $H^m(\Omega)$.

$|||\cdot|||_{m,\Omega}$ semi-norme dans l'espace produit $(H^m(\Omega))^2$.

$H^1_{0,\gamma}(\Omega)$ $:= \{v \in H^1(\Omega); v|_\gamma = 0\}$, $\gamma \subset \Gamma$.

$\mathscr{C}^n(\bar{\Omega})$ espace des fonctions n fois continûment différentiables sur $\bar{\Omega}$, n entier ≥ 0.

$H^{1/2}(\gamma)$ espace des restrictions sur $\gamma \subset \Gamma$ des fonctions de $H^{1/2}(\Gamma) = tr\Big(H^1(\Omega)\Big)$.

$\|\cdot\|_{1/2,\gamma}$ norme dans $H^{1/2}(\gamma)$.

$H^{-1/2}(\gamma)$ dual topologique de $H^{1/2}(\gamma)$.

$\|\cdot\|_{-1/2,\gamma}$ norme dans $H^{-1/2}(\gamma)$.

$\langle\cdot,\cdot\rangle_{1/2,\gamma}$ produit scalaire dans la dualité $H^{-1/2}(\gamma)$, $H^{1/2}(\gamma)$.

$E^\delta_h(\eta,\tau)$ fonctionnelle discrète bruitée.

$L^2(0,D;E)$ espace des fonctions de carré intégrable sur $[0,D]$ à valeurs dans E.

$\mathscr{C}^n(0,D;E)$ espace des fonctions n fois continûment différentiables dans $[0,D]$ à valeurs dans E.

$\mathscr{D}'(]0,D[)$ espace des distributions sur $]0,D[$.

P_m, resp. P_u opérateur de prolongement des fonctions de $H^{1/2}(\Gamma_m)$ resp. $H^{1/2}(\Gamma_u)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$.

$\mathscr{R}$ opérateur de relèvement des fonctions de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^1(\Omega)$.

$\mathscr{U}$ $:= H^{-1/2}(\Gamma_u) \times H^{1/2}(\Gamma_u)$, espace des contrôles.

σ $:= (\eta,\tau) \in \mathscr{U}$, contrôle.

$u(\sigma)$ état du système associé au problème de contrôle, solution de la forme variationnelle globale.

$J(\sigma)$ fonction de coût du problème de contrôle.

ω $= (\eta^*,\tau^*)$, contrôle optimal.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

X_h	espace éléments finis.
V_h	$\subset V$, espace d'approximation de dimension finie.
$u_h(t)$	solution du problème semi-discret (3.40).
$t_n = n\Delta t, 0 \leq n \leq N$ où Δt est le pas de temps.	
u_h, u_h^n	solutions des problèmes discrets elliptique (2.44) et parabolique (3.49), respectivement.
$u_h^\delta, u_{h\delta}^n$	solutions des problèmes discrets bruités elliptique (2.48) et parabolique (3.72), respectivement.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Introduction

Le problème de Cauchy considéré ici consiste à résoudre une équation aux dérivées partielles sur un domaine pour lequel des conditions limites surabondantes sont données uniquement sur une partie de sa frontière. Cela revient à résoudre un problème de complétion de données et à reconstituer les conditions limites manquantes sur la partie restante de la frontière. Ce type de problème intervient dans de nombreuses applications industrielles ou biomédicales. Parmi ces applications, on peut citer par exemple l'électrocardiographie, la reconstruction de la température sur le mur intérieur d'un pipeline et la détection de contacts.

L'électrocardiographe mesure à la surface du thorax les potentiels électriques générés par l'activité cardiaque. Cependant, cet outil ne permet pas de connaître les valeurs de ces potentiels à la surface du cœur. Si l'on considère le domaine délimité par le thorax et illustré par la figure 1, sa frontière est constituée d'une frontière externe, la surface du thorax, et d'une frontière interne, la surface du cœur. Les mesures fournies par l'électrocardiogramme donnent les conditions limites sur la frontière externe. La résolution numérique du problème de Cauchy permet d'identifier les potentiels électriques à la surface du cœur.

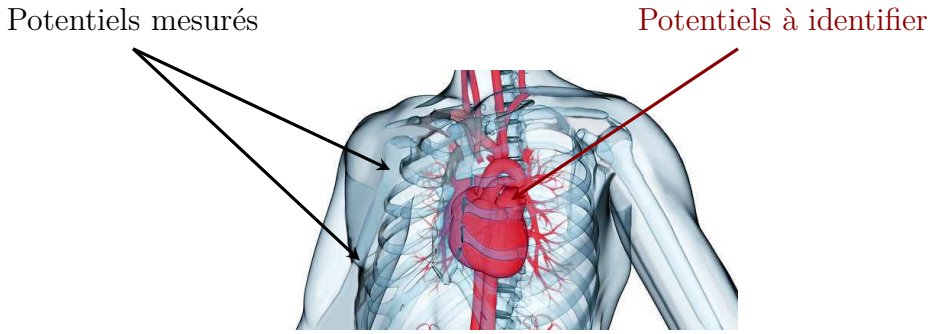


Fig. 1: Thorax

En thermique, considérons l'exemple de la reconstruction de la température et du flux dans un pipeline représenté par la figure 2 à partir de mesures sur sa frontière externe. Cette application intervient dans de nombreux processus industriels. La stratification thermique d'un fluide parcourant un pipeline génère des contraintes mécaniques pouvant provoquer des dégradations du matériel telles que des fissures. La connaissance de la température sur le mur intérieur d'un pipeline est donc essentielle pour contrôler l'état du matériel. Nous reviendrons sur cet exemple dans le cadre des expérimentations numériques.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

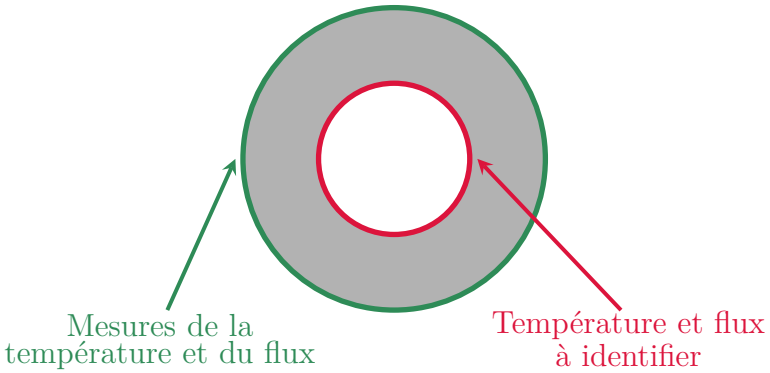


Fig. 2: Pipeline

Le dernier exemple que l'on citera concerne la détection de contacts. On considère un solide inclus dans un autre. A partir de mesures de déplacements sur la frontière atteignable, on souhaite identifier les zones de contact et de frottement entre ces deux solides. Cet exemple est illustré par la figure 3.

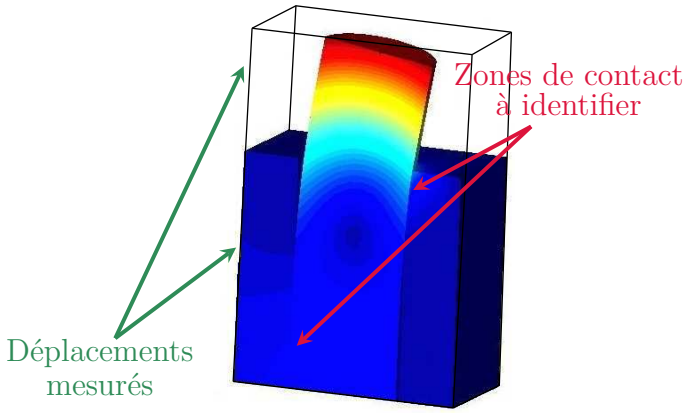


Fig. 3: Inclusion

Depuis les travaux de J. Hadamard [HAD 23], le problème de Cauchy est connu pour être mal posé et une importante instabilité numérique peut perturber la résolution de ce type de problème, en particulier dans le cas de données bruitées. Cette problématique fournit aux chercheurs un défi intéressant pour la mise au point de méthodes numériques permettant d'approcher la solution du problème de Cauchy. De nombreux travaux théoriques et appliqués portant sur ce sujet ont été proposés. En voici une énumération non exhaustive :

F. Ben Belgacem et H. El Fekih ont posé les bases d'un cadre variationnel adapté au problème de Cauchy et proposent une formulation, par le biais d'un opérateur de Steklov-Poincaré associant une condition limite de Dirichlet à un condition limite de Neumann, du problème de Cauchy comme un problème de Steklov-Poincaré. Une analyse mathématique de ce problème est effectuée. Ils proposent une investigation sur différentes méthodes et approximations numériques de la solution et discutent la nécessité et la façon d'utiliser les méthodes de régularisation. Avec M. Azaïez, ils s'intéressent également à la construction d'une

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

solution stable du problème de Steklov-Poincaré utilisant ces méthodes de régularisation [BEN 05, AZA 06]. Avec F. Jessali, ils utilisent la méthode de Laurentiev pour la régularisation du problème de complétion de données écrit sous la forme variationnelle de Steklov-Poincaré. Un critère *a priori* de convergence « super-optimale » est proposé [BEN 08]. F. Ben Belgacem évalue le degré d'instabilité du problème de Cauchy [BEN 07].

A. Cimetière *et al.* se proposent d'utiliser, pour la résolution du problème de Cauchy, des méthodes de régularisation itératives dues à A. Tikhonov [TIK 76, ENG 79, PLA 90] où le terme de régularisation additionnel est la distance entre les solutions obtenues d'une itération à l'autre. Ils montrent que la solution est le point fixe d'un opérateur approprié et analysent la convergence de l'algorithme vers ce point fixe [CIM 01].

L. Bourgeois utilise une méthode non itérative de quasi-réversibilité due à J.L. Lions et R.Lattès [LIO 67]. Cette méthode est facilement implémentable en utilisant des différences finies ou des éléments finis de classe $\mathscr{C}^1$. L'auteur propose une formulation permettant la mise en œuvre de cette méthode pour la résolution du problème de Cauchy avec des éléments finis de classe $\mathscr{C}^0$ plus couramment utilisés [BOU 05].

L. Marin *et al.* ont déterminé des approximations de la solution du problème de Cauchy à l'aide de différentes variantes de la méthode BEM (Boundary Element Method). Ils présentent une méthode BEM itérative qui réduit le problème de Cauchy à la résolution successive de problèmes bien posés [MAR 03, MAR 01] ainsi qu'une méthode BEM couplée à une méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD) [MAR 02] ou à la méthode de Landweber [MAR 04]. Ces méthodes sont appliquées à l'équation de Helmholtz et aux problèmes d'élasticité linéaire. Une extension à l'équation de la chaleur stationnaire dans les FGMs (Functionally Graded Materials) anisotropes est mise en œuvre par L. Marin [MAR 05]. Il s'intéresse également aux méthodes MEM (Minimal Errors Methods) [MAR 09].

H-J. Reinhardt, D.N. Hào, J. Frohne et F-T. Suttmeier couplent la méthode de régularisation de Tikhonov avec l'algorithme du gradient conjugué utilisé pour la résolution du problème variationnel associé à un problème de Cauchy parabolique en deux dimensions [REI 07].

B. Tomas Johansson propose une procédure itérative pour déterminer un champ de température à partir de données de Cauchy sur une partie de la frontière du domaine de résolution. A chaque itération, une série de problèmes bien posés est résolue pour l'opérateur de la chaleur et son adjoint. Une preuve de la convergence dans l'espace des fonctions de carré intégrable est donnée, ainsi qu'un critère d'arrêt dans le cas de données bruitées [JOH 06], [JOH 07]. B. Tomas Johansson et Vladimir A. Kozlov proposent une procédure alternative à l'algorithme de A. Kozlov et V.G. Maz'ya [KOZ 91, KOZ 90] pour la résolution du problème de Cauchy dans le cas d'opérateurs non coercifs du second ordre comme l'opérateur de Helmholtz [JOH 09].

J. Baumeister et J. Leitão réalisent des investigations sur une méthode itérative mise au point par A. Kozlov et V.G. Maz'ya (voir [KOZ 91, KOZ 90]) pour résoudre des problèmes mal posés régis par des équations aux dérivées

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

partielles elliptiques, paraboliques ou hyperboliques. Ils donnent une preuve alternative de la convergence de la méthode utilisant la théorie spectrale et considèrent les problèmes avec données bruitées [BAU 01]. H. Egger et J. Leitão étudient une méthode de régularisation non linéaire et une méthode de « surfaces de niveau », LSM (Level Set Methods), qu'ils appliquent à un problème de Cauchy elliptique [EGG 09].

Ce travail concerne une méthode, dite énergétique, pour la résolution du problème de Cauchy introduite par S. Andrieux, T.N. Baranger et A. Ben Abda [AND 05, AND 06]. Cette méthode consiste à introduire deux champs distincts, chacun étant solution d'un problème bien posé auquel on a attribué une inconnue et une donnée de Cauchy, et à minimiser l'écart entre ces deux champs. Dans le cas d'un problème de thermique stationnaire, les données de Cauchy sont la température et le flux sur la partie de la frontière accessible à la mesure et les inconnues du problème de complétion de données sont la température et le flux sur la partie de la frontière pour laquelle on ne dispose pas de conditions limites. On définit ensuite une fonctionnelle dépendant des inconnues du problème de complétion de données et mesurant l'écart entre les champs précédemment introduits que l'on va ensuite chercher à minimiser. Les paramètres pour lesquels la fonctionnelle atteint son minimum sont alors solution du problème de complétion de données à une constante près dans le cas d'opérateur elliptique pour l'inconnue de Dirichlet. De plus, les champs introduits sont alors égaux, à une constante près dans le cas d'opérateur elliptique, et sont solutions du problème de Cauchy. Cette méthode a été traitée et adaptée à différents problèmes : en thermique stationnaire [AND 06, BAR 11], en élasticité linéaire [BAR 07, AND 08a], pour des opérateurs elliptiques non linéaires, des équations d'évolution [AND 09, AND 08b], en mécanique des fluides [ESC 08b, ESC 08a, ESC 10] ou à des problèmes d'électrocardiographie en deux dimensions [HAR 10].

La méthode énergétique a permis d'obtenir des résultats prometteurs. Elle présente l'avantage d'être facilement implémentable, d'être adaptable à différents types de problèmes régis par des opérateurs elliptiques, paraboliques ou hyperboliques voire non linéaires et de pouvoir prendre en compte une éventuelle hétérogénéité ou anisotropie des matériaux. Néanmoins, comme de nombreuses méthodes numériques d'approximation de solution de problèmes mal posés, elle présente une importante instabilité numérique lorsque les données sont bruitées. Les symptômes sont les suivants : lorsque les données de Cauchy sont compatibles, la fonctionnelle tend vers 0 tandis que l'erreur d'approximation de la solution tend vers l'erreur induite par les méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles utilisées. Cependant, lorsque les données sont bruitées, la fonctionnelle atteint un seuil non nul dépendant du bruit et l'erreur, après avoir atteint une valeur minimale dépendant également du bruit, explose numériquement.

La stratégie choisie pour la compréhension et la maîtrise de ce phénomène est l'analyse mathématique et numérique de la méthode énergétique. Cette méthode, consistant à minimiser une fonctionnelle dont les paramètres sont

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

régis par des équations aux dérivées partielles, peut être formulée comme un problème de contrôle optimal tel que défini par J.L. Lions [LIO 68a]. La théorie du contrôle optimal fournit alors les outils pour l'analyse mathématique continue de la méthode énergétique. Après avoir défini un cadre fonctionnel et variationnel adapté, on introduit les méthodes numériques pour la discrétisation et la résolution des deux problèmes bien posés intervenant dans la méthode. On utilise ici des éléments finis de Lagrange et, lorsque l'opérateur différentiel dépend du temps, un schéma d'Euler implicite. On effectue alors une analyse de convergence numérique de la méthode qui aboutit à l'écriture d'une estimation d'erreur *a priori* tenant compte du bruit sur les données de Cauchy. Cette estimation permet d'approcher, toujours en fonction du bruit, le seuil vers lequel tend la fonctionnelle lorsque les paramètres optimaux sont atteints. On peut alors proposer un critère d'arrêt dépendant du bruit, plus précisément de la norme de la différence entre les données bruitées et non bruitées, et permettant de stopper le processus d'optimisation dès que la fonctionnelle atteint ce seuil et ainsi d'éviter l'explosion numérique de la solution identifiée. On détaille également la procédure numérique implémentée et on donne une expression du critère d'arrêt proposé dans le cas réaliste où l'on ne dispose que de données bruitées. Des expérimentations numériques sont présentées, dans un premier temps pour une solution analytique et régulière du problème de Cauchy puis avec des données singulières telles que l'exemple du point source ou du fluide stratifié déjà abordé (figure 2). Ces tests numériques mettent en évidence l'efficacité et la robustesse du critère d'arrêt proposé et illustrent la cohérence des solutions identifiées avec un taux de bruit pouvant être important. Cette analyse est effectuée pour des problèmes de Cauchy elliptique (équation de la chaleur stationnaire) et parabolique (équation de la chaleur évolutive).

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Dans le premier chapitre, le problème de Cauchy avec un opérateur parabolique général est introduit de manière formelle. La notion de problème mal posé est abordée dans le cas particulier du problème de Cauchy et des résultats théoriques classiques sont donnés. A partir du problème de complétion de données qui est également introduit, on explicite les problèmes bien posés dont les solutions, dépendant des inconnues du problème de complétion de données, interviennent dans l'expression de la fonctionnelle à minimiser. On introduit ensuite le problème de minimisation mais sans expliciter la fonctionnelle puisque sa forme peut dépendre du problème traité. Le problème de minimisation étant introduit, on donne les éléments théoriques nécessaires à la formulation de la méthode énergétique comme un problème de contrôle optimal dans un cadre fonctionnel général. On présente les premiers résultats associés à cette formulation, notamment les propriétés du problème de minimisation et l'ensemble des équations donnant le contrôle optimal et donc la solution du problème de complétion de données.

Le deuxième chapitre est consacré à l'analyse de la méthode énergétique pour l'équation de la chaleur stationnaire. Dans un premier temps, on définit le cadre fonctionnel et variationnel associé à la méthode énergétique. Puis, on donne l'ex-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

pression du gradient de la fonctionnelle dépendant des états adjoints préalablement définis en utilisant la théorie du contrôle. On donne ensuite les espaces et problèmes discrets pour l'approximation éléments finis des deux problèmes bien posés associés à la méthode énergétique. On peut alors effectuer l'analyse de convergence numérique de la méthode et on donne une estimation d'erreur *a priori* tenant compte du bruit sur les données. A partir de cette estimation, on donne une estimation de la valeur de la fonctionnelle lorsque les paramètres optimaux sont atteints, on déduit alors de cette estimation un critère d'arrêt dépendant du bruit et permettant de stopper l'algorithme d'optimisation avant explosion numérique de la solution. La procédure numérique pour l'implémentation de la méthode énergétique, puis des expérimentations numériques avec données analytiques et singulières sont présentées.

Le troisième chapitre est dédié au problème de Cauchy parabolique. Comme dans le deuxième chapitre, on étudie la méthode énergétique mais cette fois pour l'équation de la chaleur évolutive. On s'intéresse également aux propriétés du problème de minimisation par le biais de la théorie du contrôle. En plus de la discrétisation en espace, on introduit un schéma d'intégration temporelle et on effectue une analyse de convergence numérique tenant compte du bruit. Cela nous conduit, comme précédemment, à l'écriture d'un critère d'arrêt adapté. La procédure numérique est détaillée et des expérimentations numériques sont menées. Ces tests numériques mettent en évidence les difficultés particulières dues aux opérateurs paraboliques pour cette méthode, c'est à dire la présence d'un bruit numérique perturbant le processus d'optimisation et l'accumulation d'erreur d'estimation à chaque pas de temps pour la dérivation d'un critère d'arrêt.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Chapitre 1

La méthode énergétique

1.1 Préliminaires mathématiques

On considère le domaine Ω borné de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ de frontière Lipschitzienne avec $\vec{n}$ la normale unitaire extérieure au bord $\Gamma = \partial\Omega$. La partie de la frontière sur laquelle les données de Cauchy sont définies est notée Γ_m (m pour *measure*), la partie restante est désignée par Γ_u (u pour *unknown*). On suppose que Γ_m et Γ_u, chacun de mesure non nulle, forment une partition de Γ telle que $\bar{\Gamma}_u \cap \bar{\Gamma}_m = \emptyset$ et $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_m$. Dans la suite, la variable $x = (x_1, ..., x_d)$ désigne un point générique de $\bar{\Omega}$.

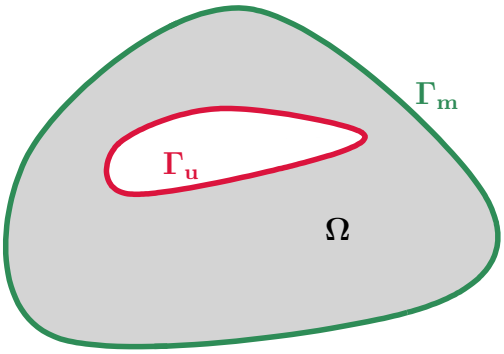


Fig. 1.1: Exemple de géométrie 1

Remarque 1 Pour une meilleure lisibilité, nous traitons ici le cas où l'intersection des adhérences des frontières Γ_u et Γ_m est vide, ceci simplifiant le cadre fonctionnel. Néanmoins, les développements qui vont suivre restent valables dans le cas général pour lequel nous donnerons des éléments complémentaires dans la remarque 2 et en annexe A.2.

Soit $D_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, ..., d$, l'opérateur de différenciation partielle par rapport à la $j^{\text{ème}}$ coordonnée x_j. On définit

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d} \text{ pour tout multi-indice } \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d),\ \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, ..., d,$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

et on introduit alors l'opérateur différentiel linéaire général suivant :

$$P = \sum_{\alpha} a_\alpha(x) D^\alpha, \text{ où les } a_\alpha(x) > 0 \text{ sont des fonctions de } L^\infty(\Omega). \tag{1.1}$$

On note $|\alpha| = \max_{\alpha}\{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d\}$ l'ordre de l'opérateur différentiel P.

La variable t désigne le temps, on suppose que $t \in]0, D[$ avec $0 < D < \infty$ où D est le temps final. On introduit les ensembles

$$Q = \Omega \times]0, D[, \quad \Sigma_u = \Gamma_u \times]0, D[, \quad \Sigma_m = \Gamma_m \times]0, D[.$$

Le problème de Cauchy considéré ici consiste à résoudre une équation aux dérivées partielles parabolique sur le domaine Ω pour lequel on dispose de conditions limites surabondantes uniquement sur Γ_m. Formellement, ce problème peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - Pu = f \text{ dans } Q \\ \dfrac{\partial^k u}{\partial \vec{n}^k} = g_k, \ k = 0, ..., |\alpha| - 1 \text{ sur } \Sigma_m \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

Il est connu que, en raison d'une condition de compatibilité sur les données, ce problème est mal posé au sens de Hadamard. Il convient tout d'abord d'introduire la notion de problème conditionnellement bien posé et de préciser ce que l'on entend par compatibilité des données.

On considère l'équation

$$y = Tx, \tag{1.3}$$

où T est un opérateur continu défini sur X, sous espace d'un espace de Banach, à valeurs dans Y, sous espace d'un autre espace de Banach. Ainsi, y donné dans Y est obtenu à partir de x donné dans X.

On dit que l'équation (1.3) est bien posée au sens de Hadamard si l'opérateur inverse de T est continu de Y dans X. Ce qui revient à dire que les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) Unicité de la solution : pour tout $x \in X$, il y a au plus un $y \in Y$ satisfaisant (1.3).

(ii) Existence de la solution : pour tout $x \in X$, il existe au moins une solution $y \in Y$.

(iii) Stabilité de la solution : si $y, y^\bullet \in Y$ sont des solutions de l'équation (1.3) associées respectivement aux données $x, x^\bullet \in X$, alors $\|y - y^\bullet\|_Y \to 0$ lorsque $\|x - x^\bullet\|_X \to 0$.

Dans le cas du problème de Cauchy, l'extension du théorème de Holmgren aux espaces de Sobolev [ISA 97] garantit l'unicité d'une éventuelle solution

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

au problème de Cauchy sous certaines hypothèses. Le théorème de Cauchy-Kowalevsky [LIO 99] assure l'existence d'une solution dans le cas restrictif de données analytiques et d'une frontière non caractéristique. Dans ses travaux, J. Hadamard considère une fonction f quelconque, et donc non analytique, comme condition de Dirichlet sur une partie du bord caractéristique d'un domaine fini. Il met en évidence dans le cas particulier de l'équation du potentiel logarithmique, la condition que doit vérifier la fonction g, condition limite de Neumann sur la partie du bord considérée, pour que le problème de Cauchy soit possible avec les données f et g. Il précise également que, dans la cas général, le problème de Cauchy peut être impossible à résoudre sans que les conditions nécessaires d'existence de la solution puissent être exprimées. Par conséquent, l'existence de la solution dépend de la vérification d'une condition de compatibilité sur les données difficilement formulable explicitement. En ce qui concerne la stabilité de la solution, on sait que, pour une donnée fixée, l'ensemble des données compatibles est dense dans l'ensemble des données possibles. Cette notion est précisée en annexe par le lemme A.1.1. Cela signifie que tout voisinage de tout couple de données non compatibles contient au moins un couple de données compatibles ou que, dans le cas d'espaces métriques, tout couple de données non compatibles est la limite d'une suite de données compatibles. Ainsi, si on se place dans le cadre de l'équation (1.3), il existe des données compatibles $x \in X$ et des données non compatibles $x^\bullet \in X$ telles que $\|x - x^\bullet\|_X \to 0$. Les données $x^\bullet$ n'étant pas compatibles, la solution $y^\bullet$ n'est pas définie. Ainsi, $\|y - y^\bullet\|_Y$ ne tend pas vers 0 et la condition de stabilité n'est pas vérifiée. Le problème de Cauchy est donc mal posé au sens de Hadamard, la solution du problème n'étant pas continue par rapport aux données.

1.2 Complétion de données et minimisation

Le problème de Cauchy (1.2) peut s'écrire comme un problème de complétion de données. On cherche alors $\{\varphi_k\}_{i=1,\dots,|\alpha|-1}$ de telle sorte qu'il existe u vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - Pu = f \text{ dans } Q \\ \dfrac{\partial^k u}{\partial \vec{n}^k} = g_k,\ k = 0, ..., |\alpha| - 1 \text{ sur } \Sigma_m \\ \dfrac{\partial^k u}{\partial \vec{n}^k} = \varphi_k,\ k = 0, ..., |\alpha| - 1 \text{ sur } \Sigma_u \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

On suppose ici que $|\alpha| = 2$. On introduit deux variables distinctes u_1, u_2 et on décompose le problème de complétion de données en deux sous problèmes bien posés. Cette méthode permet de ramener la résolution du problème de Cauchy mal posé à la résolution de deux problèmes bien posés. On note (η, τ) respectivement les inconnues de Neumann et Dirichlet, les fonctions u_1 et u_2 sont solutions

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

des deux problèmes suivants :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - Pu_1 = f \text{ dans } Q \\ u_1 = g_0 \text{ sur } \Sigma_m \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} = \eta \text{ sur } \Sigma_u \\ u_1(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - Pu_2 = f \text{ dans } Q \\ u_2 = \tau \text{ sur } \Sigma_u \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial \vec{n}} = g_1 \text{ sur } \Sigma_m \\ u_2(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

La méthode consiste ensuite à définir une fonctionnelle, notée $E(\eta, \tau)$, mesurant l'écart entre les champs u_1 et u_2. On cherchera alors à minimiser cette fonctionnelle, ce qui revient à résoudre le problème de minimisation

$$(\eta^*, \tau^*) = \underset{(\eta,\tau)}{\operatorname{argmin}}\, E(\eta, \tau). \tag{1.7}$$

La fonctionnelle, qui sera définie explicitement ultérieurement, s'annulant à l'optimum lorsque les données sont compatibles, les champs u_1 et u_2 ainsi obtenus sont identiques et vérifient non seulement l'équation aux dérivées partielles définie sur Ω mais aussi les conditions limites correspondant aux données de Cauchy sur Γ_m. Ils fournissent ainsi la solution du problème de Cauchy dont les traces d'ordres 0 et 1 restreintes à Γ_u sont solutions du problème de complétion de données.

1.3 Un problème de contrôle optimal

Dans cette section, nous formulerons la méthode énergétique comme un problème de contrôle optimal tel que défini dans [LIO 68a]. Ainsi, nous nous donnerons les outils permettant d'étudier le problème de minimisation précédemment introduit et également d'écrire les équations caractérisant la solution de ce problème.

1.3.1 Position du problème

Soient V et H deux espaces de Hilbert sur Ω. On suppose que

$$V \subset H, \text{ avec injection dense et continue.}$$

On identifie H à son dual. On peut alors écrire

$$V \subset H = H' \subset V'.$$

On désigne par $\sigma = (\eta, \tau) \in \mathscr{U}$ le contrôle où $\mathscr{U}$, appelé l'espace des contrôles, est un espace de Hilbert et par $u(\sigma) = (u_1(\eta), u_2(\tau)) \in L^2(0, D; V)$ l'état du système.

Notations : La fonction $u(\sigma)$ dépend également de x et de t. Si la notation explicite de x ou de t est nécessaire à la lisibilité du résultat, cette fonction peut être notée $u(x; \sigma)$, $u(x, t; \sigma)$ ou encore $u(t; \sigma)$. Les fonctions u_1 et u_2

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

qui dépendent respectivement de η et τ mais aussi de x et t adopteront les mêmes notations. Bien entendu, dans le cas d'opérateur elliptique, l'argument t n'apparaîtra pas.

On se donne l'opérateur A défini par

$$Au(\sigma) = (Pu_1(\eta), Pu_2(\tau)) \,. \tag{1.8}$$

On associe à l'opérateur A une forme bilinéaire, continue et V-elliptique définie de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$a(u, v; t) = (Au(t), v)_{V',V}. \tag{1.9}$$

On peut alors préciser que $A \in \mathscr{L}\left(L^2(0, D; V), L^2(0, D; V')\right)$. On introduit l'espace

$$W(0, D) = \left\{ v \in L^2(0, D; V) \text{ telles que } \frac{dv}{dt} \in L^2(0, D; V') \right\}. \tag{1.10}$$

Précisons que $W(0, D)$ est un espace de Hilbert et que toute fonction de $W(0, D)$ est continue sur $[0, D]$ et à valeurs dans H (*cf.* [LIO 68a, LIO 68b]).

On se donne également l'opérateur $B \in \mathscr{L}\left(\mathscr{U}, L^2(0, D; V')\right)$, $F \in L^2(0, D; V')$ et $u_{00} = (u_0, u_0) \in H$ de telle sorte que les problèmes (1.5) et (1.6) puissent s'écrire

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u(\sigma) \in W(0, D) \text{ telle que} \\ &\frac{du}{dt} + Au(\sigma) = F + B\sigma, \\ &u(0) = u_{00}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

En outre, on se donne les opérateurs $M \in \mathscr{L}\left(L^2(0, D; V), \mathscr{H}\right)$, où $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert et $N \in \mathscr{L}(H, H)$. On définit ainsi la fonction de coût $J(\sigma)$ par

$$J(\sigma) = \|Mu(\sigma)\|^2_{\mathscr{H}} + \|Nu(D; \sigma)\|^2_H. \tag{1.12}$$

Le problème de contrôle est alors donné par

$$\text{Trouver } \omega \in \mathscr{U} \text{ tel que } J(\omega) = \inf_{\sigma \in \mathscr{U}} J(\sigma). \tag{1.13}$$

Ce problème de contrôle doit être défini de telle sorte qu'il soit équivalent au problème de minimisation (1.7) afin que les résultats qui lui sont associés soient également valables pour la méthode énergétique.

1.3.2 Existence et unicité du contrôle optimal

Soient $\pi(\sigma_1, \sigma_2)$ une forme bilinéaire continue sur $\mathscr{U} \times \mathscr{U}$ et $l(\sigma)$ une forme linéaire et continue sur $\mathscr{U}$ définies par

$$\begin{aligned} \pi(\sigma_1, \sigma_2) = 2\Big(M\Big(u(\sigma_1) - u(0)\Big), M\Big(u(\sigma_2) - u(0)\Big)\Big)_{\mathscr{H}} + \\ + 2\Big(N\Big(u(D; \sigma_1) - u(D; 0)\Big), N\Big(u(D; \sigma_2) - u(D; 0)\Big)\Big)_H, \end{aligned} \tag{1.14}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

$$l(\sigma) = -2\Big(M\Big(u(\sigma) - u(0)\Big), Mu(0)\Big)_{\mathscr{H}} + \\ - 2\Big(N\Big(u(D;\sigma) - u(D;0)\Big), Nu(D;0)\Big)_H. \quad (1.15)$$

La forme $\sigma \mapsto u(\sigma)$ étant affine d'après (1.11), la fonction de coût peut s'écrire

$$J(\sigma) = \frac{1}{2}\pi(\sigma,\sigma) - l(\sigma) + c, \quad \text{où } c > 0 \text{ est une constante.} \quad (1.16)$$

La forme bilinéaire $\pi(\sigma_1, \sigma_2)$ est définie positive et non dégénérée. En effet, on voit de manière immédiate que $\pi(\sigma,\sigma) \geq 0,\ \forall\, \sigma \in \mathscr{U}$. De plus,

$$\pi(\sigma,\sigma) = \|M(\frac{d}{dt}+A)^{-1}B\sigma\|^2_{\mathscr{H}} + \|N\Big(u(D;\sigma) - u(D;0)\Big)\|^2_H > 0, \ \ \forall\, \sigma \neq 0. \quad (1.17)$$

On peut alors vérifier, pour tout $\lambda \in]0,1[$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathscr{U}$, que

$$J(\lambda\sigma_1 + (1-\lambda)\sigma_2) - \lambda J(\sigma_1) - (1-\lambda)J(\sigma_2) = -\frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)\pi(\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_1 - \sigma_2) < 0.$$

La fonctionnelle $J(\cdot)$ est donc strictement convexe. Ainsi, si $J(\cdot)$ atteint son minimum sur $\mathscr{U}$, alors il est unique.

Soit σ_n une suite minimisante (i.e. $J(\sigma_n) \to \inf\limits_{\sigma\in\mathscr{U}} J(\sigma)$). Supposons que cette suite soit bornée, il existe donc une constante $c > 0$ telle que $\|\sigma_n\| < c$. On peut alors extraire de σ_n une sous suite σ_m telle que $\sigma_m \to \omega$ dans $\mathscr{U}$ faiblement. De plus, $\pi(\cdot,\cdot)$ et $l(\cdot)$ sont continues, donc $J(\cdot)$ est semi-continue inférieurement, ce qui implique que

$$\begin{aligned} & \liminf J(\sigma_n) \geq J(\omega), \\ \text{d'où} \quad & J(\omega) \leq \inf_{\sigma\in\mathscr{U}} J(\sigma), \\ \text{et enfin} \quad & J(\omega) = \inf_{\sigma\in\mathscr{U}} J(\sigma). \end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que ω est solution du problème de contrôle.

Cependant, cela est basé sur le caractère borné de la suite minimisante, ce qui découle de

$$\lim_{\|\sigma\|\to\infty} J(\sigma) = \infty. \quad (1.18)$$

Or, on sait seulement que $J(\sigma) \geq 0$ pour tout $\sigma \in \mathscr{U}$. La forme $\pi(\cdot,\cdot)$ n'étant pas nécessairement coercive, on ne peut pas s'assurer de (1.18). La suite minimisante σ_n peut ainsi ne pas être bornée et l'existence du contrôle optimal ne peut être prouvée. Néanmoins, le fait de ne pouvoir prouver l'existence du contrôle optimal n'est pas restrictif puisque, comme nous le verrons plus tard, nous sommes capables de produire une méthode numérique stable permettant d'approcher la solution de ce problème de contrôle. Cela signifie uniquement qu'il n'est pas possible d'écrire explicitement la condition garantissant l'existence du contrôle optimal.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

1.3.3 Caractérisation du contrôle optimal

Pour un contrôle $\sigma \in \mathscr{U}$, on introduit l'état adjoint $p(\sigma) \in L^2(0, D; V)$. D'après [LIO 68a], le contrôle optimal ω est caractérisé par les équations suivantes :

$$\frac{dp}{dt}(\omega) + A^* p(\omega) = M^* \Lambda_{\mathscr{H}} \left(M u(\omega) \right), \tag{1.19}$$

$$p(D; \omega) = N^* \left(N u(D; \omega) \right), \tag{1.20}$$

$$\frac{1}{2} \nabla J(\omega) = \Lambda_{\mathscr{U}}^{-1} B^* p(\omega) = 0, \tag{1.21}$$

où $\Lambda_{\mathscr{H}}$ et $\Lambda_{\mathscr{U}}$ sont respectivement les isomorphismes canoniques de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}'$ et de $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{U}'$.

De plus, ce problème de contrôle optimal peut être écrit comme un problème d'optimisation sous contraintes [BON 82] en définissant le Lagrangien suivant :

$$L(u, p, \sigma) = J(\sigma) - \Big(\Big(p, \frac{du}{dt} + Au - f - B\sigma \Big) \Big), \tag{1.22}$$

où $((\cdot, \cdot))$ est le produit scalaire dans la dualité $L^2(0, D; V), L^2(0, D; V')$. Ainsi, les conditions d'optimalité sur ce Lagrangien permettent de retrouver les équations caractérisant le contrôle optimal mentionnées précédemment.

1.4 Restriction au cas elliptique

Dans le cas elliptique, les développements précédents permettent également d'étudier la résolution du problème de Cauchy par la méthode énergétique. Dans cette section, on introduit les éléments qui différencient les cas elliptique et parabolique. Nous laisserons le lecteur se rapporter à la section précédente pour plus de détails.

Le problème de Cauchy s'écrit

$$\begin{cases} Pu = f \text{ dans } \Omega \\ \dfrac{\partial^k u}{\partial \vec{n}^k} = g_k, \ k = 0, ..., |\alpha| - 1 \text{ sur } \Gamma_m \\ \dfrac{\partial^k u}{\partial \vec{n}^k} = \varphi_k, \ k = 0, ..., |\alpha| - 1 \text{ sur } \Gamma_u. \end{cases} \tag{1.23}$$

La séparation du problème de complétion de données donne les deux problèmes bien posés suivants :

$$\begin{cases} Pu_1 = f \text{ dans } \Omega \\ u_1 = g_0 \text{ sur } \Gamma_m \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} = \eta \text{ sur } \Gamma_u, \end{cases} \tag{1.24}$$

$$\begin{cases} Pu_2 = f \text{ dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial \vec{n}} = g_1 \text{ sur } \Gamma_m \\ u_2 = \tau \text{ sur } \Gamma_u. \end{cases} \tag{1.25}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

On considère alors une fonctionnelle $E(\eta, \tau)$ mesurant l'écart entre u_1 et u_2 que l'on explicitera par la suite, la solution du problème de complétion de données étant donnée par la résolution du problème de minimisation (1.7).

On se donne les opérateurs $A \in \mathscr{L}(V, V')$, $B \in \mathscr{L}(\mathscr{U}, V')$ ainsi que $F \in V'$ de telle sorte que les problèmes (1.24) et (1.25) soient équivalents au problème

$$\begin{gathered}\text{Trouver } u(\sigma) \in V \text{ telle que} \\ Au(\sigma) = F + B\sigma.\end{gathered} \tag{1.26}$$

En outre, on se donne l'opérateur $M \in \mathscr{L}(V, \mathscr{H})$ et on définit la fonction de coût $J(\sigma)$ par

$$J(\sigma) = \|Mu(\sigma)\|^2_{\mathscr{H}}. \tag{1.27}$$

Ce problème de contrôle doit être équivalent au problème de minimisation associé à la méthode énergétique. A l'instar du cas parabolique, les conditions garantissant l'existence du contrôle optimal ne sont pas formulables. En revanche, l'unicité du contrôle optimal n'est ici pas garantie en raison de l'absence du terme de contrôle au temps final assurant la convexité stricte de la fonctionnelle dans le cas parabolique.

Pour un contrôle $\sigma \in \mathscr{U}$, on introduit l'état adjoint $p(\sigma) \in V$. Le contrôle optimal ω est caractérisé par les équations suivantes :

$$A^* p(\omega) = M^* \Lambda_{\mathscr{H}} \left(Mu(\omega) \right), \tag{1.28}$$

$$\frac{1}{2} \nabla J(\omega) = \Lambda_{\mathscr{U}}^{-1} B^* p(\omega) = 0. \tag{1.29}$$

Comme précédemment, ce problème de contrôle optimal peut être écrit comme un problème d'optimisation sous contraintes en définissant le Lagrangien

$$L(u, p, \sigma) = J(\sigma) - \Big(p, Au - f - B\sigma \Big)_{V', V}. \tag{1.30}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Chapitre 2

Problème de Cauchy stationnaire

Dans ce chapitre, nous introduisons plus précisément la méthode énergétique pour l'équation de la chaleur stationnaire. La fonctionnelle dont la minimisation fournit la solution du problème de complétion de données est explicitée, l'analyse mathématique et numérique qui mènera à l'écriture d'un critère d'arrêt dans le cas de données bruitées est détaillée et des expérimentations numériques avec données analytiques et singulières sont menées.

Notations : L'espace des fonctions de carré intégrable $L^2(\Omega)$ est muni du produit scalaire naturel noté $(\cdot,\cdot)_{0,\Omega}$, la norme associée s'écrit $\|\cdot\|_{0,\Omega}$. On note $H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre m des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées d'ordre inférieur ou égal à m sont aussi dans $L^2(\Omega)$. Sa norme et sa semi-norme sont respectivement données par $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ et $|\cdot|_{m,\Omega}$. De plus, soit $u = (u_1, u_2) \in (H^m(\Omega))^2$, la semi-norme de cet espace est notée $|||u|||_{m,\Omega} = \Big(|u_1|^2_{m,\Omega} + |u_2|^2_{m,\Omega}\Big)^{1/2}$. Soit $\gamma \subset \Gamma$, on définit l'espace $H^1_{0,\gamma}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v_{|\gamma} = 0\}$ et $H^{1/2}(\gamma)$ est l'espace des restrictions sur γ des fonctions de $H^{1/2}(\Gamma) = tr\Big(H^1(\Omega)\Big)$. Son dual topologique s'écrit $H^{-1/2}(\gamma) = \Big(H^{1/2}(\gamma)\Big)'$, les normes associées sont respectivement notées $\|\cdot\|_{1/2,\gamma}$ et $\|\cdot\|_{-1/2,\gamma}$. Le produit scalaire dans la dualité est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1/2,\gamma}$. Dans la suite, C désigne une constante strictement positive. On note $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions définies sur Ω, mesurables et telles que $|f(x)| < C$ presque partout sur Ω, sa norme est notée $\|\cdot\|_{\infty,\Omega}$.

2.1 Position du problème

Étant donné un terme source f, une conductivité thermique k définis sur Ω, un flux ϕ et une température T donnés sur le bord Γ_m, on souhaite identifier le flux et la température sur Γ_u. Ce problème peut s'écrire sous la forme du problème de Cauchy suivant :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Trouver u tel que

$$\begin{cases} -\nabla.\Big(k(x)\nabla u\Big) = f \text{ dans } \Omega \\ k(x)\nabla u \cdot \vec{n} = \phi \text{ sur } \Gamma_m \\ u = T \text{ sur } \Gamma_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

Ce problème est sévèrement mal posé. En effet, seule l'unicité d'une éventuelle solution est assurée [ISA 97] et l'instabilité de cette hypothétique solution remet en cause son existence.

Le problème de complétion de données associé au problème de Cauchy (2.1) s'écrit

Trouver (η_d, τ_d) sur Γ_u tels qu'il existe u vérifiant

$$\begin{cases} -\nabla.\Big(k(x)\nabla u\Big) = f \text{ dans } \Omega \\ u = T,\ k(x)\nabla u \cdot \vec{n} = \phi \text{ sur } \Gamma_m \\ u = \tau_d,\ k(x)\nabla u \cdot \vec{n} = \eta_d \text{ sur } \Gamma_u. \end{cases} \tag{2.2}$$

Suivant la procédure décrite dans [AND 06], on introduit deux champs distincts u_1 et u_2 qui diffèrent par les conditions limites qui leur sont imposées. Sur Γ_m, u_1 vérifie la condition de Dirichlet et u_2 la condition de Neumann et inversement sur Γ_u. On considère alors, pour tout couple (η, τ) correspondant aux inconnues du problème de complétion de données, les deux problèmes bien posés suivants dont les champs u_1 et u_2 sont solutions :

$$\begin{cases} -\nabla.\Big(k(x)\nabla u_1\Big) = f \text{ dans } \Omega \\ u_1 = T \text{ sur } \Gamma_m \\ k(x)\nabla u_1 \cdot \vec{n} = \eta \text{ sur } \Gamma_u, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} -\nabla.\Big(k(x)\nabla u_2\Big) = f \text{ dans } \Omega \\ u_2 = \tau \text{ sur } \Gamma_u \\ k(x)\nabla u_2 \cdot \vec{n} = \phi \text{ sur } \Gamma_m. \end{cases} \tag{2.4}$$

On considère la fonctionnelle

$$E(\eta, \tau) = \int_\Omega k(x)\Big(\nabla u_1(\eta) - \nabla u_2(\tau)\Big)^2\, dx. \tag{2.5}$$

La méthode énergétique consiste alors à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$(\eta^*, \tau^*) = \underset{(\eta,\tau)}{\operatorname{argmin}}\ E(\eta, \tau). \tag{2.6}$$

On a ainsi introduit explicitement les problèmes bien posés (2.3) et (2.4), la fonctionnelle (2.5) et le problème de minimisation (2.6) pour la méthode énergétique. Dans la section suivante, nous introduirons le cadre fonctionnel et variationnel, notamment les espaces de traces pour les données et les inconnues. Nous montrerons que la méthode énergétique permet bien d'identifier la solution du problème de complétion de données et nous étudierons le problème de minimisation.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

2.2 Analyse mathématique de la méthode énergétique

2.2.1 Cadre variationnel

On suppose que $f \in L^2(\Omega)$ et que $k(x) \in L^\infty(\Omega)$ est strictement positive. Les solutions faibles des problèmes (2.3) et (2.4) sont des fonctions $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$. L'espace fonctionnel des fonctions u_1, u_2 étant défini, le théorème de traces permet de préciser les espaces auxquels appartiennent les données (ϕ, T) et les inconnues (η, τ). En effet, d'après ce théorème donné en annexe A.2, pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\nabla.(k(x)\nabla u) \in L^2(\Omega)$, on a

$$u|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma) \text{ et } \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{2.7}$$

On suppose donc que $(\phi, T) \in H^{-1/2}(\Gamma_m) \times H^{1/2}(\Gamma_m)$ et que $(\eta, \tau) \in H^{-1/2}(\Gamma_u) \times H^{1/2}(\Gamma_u)$ ce qui définit l'espace $\mathscr{U}$.

Remarque 2 Considérons le cas plus général $\Gamma = \bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_m$ avec $\bar{\Gamma}_u \cap \bar{\Gamma}_m \neq \emptyset$, illustré par la figure suivante :

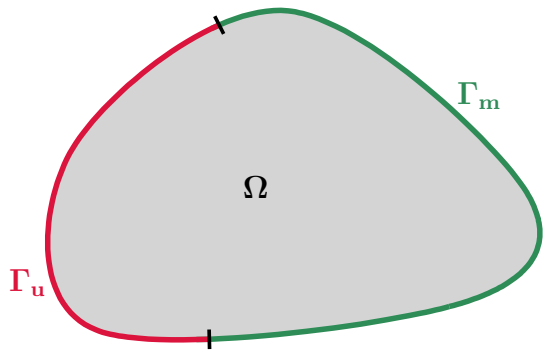


Fig. 2.1: Exemple de géométrie 2

Dans ce cas, on ne peut restreindre les fonctions de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma_m)$ sans s'assurer de la continuité du prolongement par 0 sur Γ des fonctions de $H^{1/2}(\Gamma_m)$. Ce résultat est démontré en annexe A.2. L'espace approprié pour la donnée de Dirichlet est alors $H^{1/2}_{00}(\Gamma_m)$. On note alors $H^{-1/2}(\Gamma_m)$ le dual topologique de $H^{1/2}_{00}(\Gamma_m)$ et l'espace des données (ϕ, T) est donc $H^{-1/2}(\Gamma_m) \times H^{1/2}_{00}(\Gamma_m)$. Pour les mêmes raisons, les inconnues (η, τ) appartiennent dans ce cas à l'espace $H^{-1/2}(\Gamma_u) \times H^{1/2}_{00}(\Gamma_u)$. Notons que le cadre fonctionnel introduit ici n'est pas restrictif car les espaces $H^{1/2}_{00}(\Gamma_u)$ et $H^{1/2}_{00}(\Gamma_m)$ sont denses respectivement dans $H^{1/2}(\Gamma_u)$ et $H^{1/2}(\Gamma_m)$. Ce qui signifie que pour tout élément de $H^{-1/2}(\Gamma_m) \times H^{1/2}(\Gamma_m)$, il existe, dans son voisinage, un élément de $H^{-1/2}(\Gamma_m) \times H^{1/2}_{00}(\Gamma_m)$.

Le cadre fonctionnel pour les fonctions sur le bord ou une partie du bord de la frontière ayant été introduit, on donne maintenant le résultat suivant concernant les solutions des problèmes de complétion de données et de minimisation :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Proposition 2.2.1 *Si les données (ϕ, T) sont compatibles et si la solution (η^*, τ^*) du problème de minimisation (2.6) existe, alors (η^*, τ^*) est solution du problème de complétion de données (2.2) à une constante près pour l'inconnue de Dirichlet. En outre, lorsque le minimum est atteint, on a*

$$\nabla u_1(\eta^*) = \nabla u_2(\tau^*) \quad \textit{et} \quad u_1(\eta^*) = u_2(\tau^*) + c \textit{ dans } \bar{\Omega} \textit{ où } c \textit{ est une constante.} \tag{2.8}$$

Démonstration : Si les données (ϕ, T) sont compatibles, il existe une unique solution u_d au problème de Cauchy. L'unique solution du problème de complétion de données est donc donnée par

$$(\eta_d, \tau_d) = (u_{d|\Gamma_u}, k(x)\nabla u_d \cdot \vec{n}_{|\Gamma_u}) \text{ sur } \Gamma_u \tag{2.9}$$

On a donc

$$u_1(\eta_d) = u_2(\tau_d) = u_d \text{ dans } \bar{\Omega}, \tag{2.10}$$

d'où

$$0 \leq E(\eta^*, \tau^*) \leq E(\eta_d, \tau_d) = 0. \tag{2.11}$$

Ce qui implique

$\nabla u_1(\eta^*) = \nabla u_2(\tau^*)$ et donc $u_1(\eta^*) = u_2(\tau^*) + c$ dans $\bar{\Omega}$, où c est une constante.

Par conséquent, pour tout $x \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} u_1(x;\eta^*)_{|\Gamma} &= u_2(x;\tau^*)_{|\Gamma} + c = \\ &= \mathbb{1}_{\{x\in\Gamma_u\}}(x)\,(\tau^*(x) + c) + \mathbb{1}_{\{x\in\Gamma_m\}}(x)T(x) = u_{d|\Gamma}(x) \in H^{1/2}(\Gamma) \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} \text{et } k(x)\nabla u_1(x;\eta^*)_{|\Gamma} \cdot \vec{n} &= k(x)\nabla u_2(x;\tau^*)_{|\Gamma} \cdot \vec{n} = \\ &= \mathbb{1}_{\{x\in\Gamma_u\}}(x)\eta^*(x) + \mathbb{1}_{\{x\in\Gamma_m\}}(x)\phi(x) = k(x)\nabla u_d \cdot n_{|\Gamma} \in H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned} \tag{2.13}$$

D'où, $(\eta^*, \tau^* + c) = (\eta_d, \tau_d)$. ■

La solution du problème de minimisation est donc bien solution du problème de complétion de données à une constante près pour l'inconnue de Dirichlet.

De façon à se ramener à des problèmes homogènes, il est nécessaire d'introduire la notion de relèvement des conditions limites de Dirichlet. Cependant, les opérateurs de relèvement étant définis dans les espaces $H^s(\Gamma)$, il est nécessaire de prolonger T et τ sur l'ensemble de la frontière. Il existe deux opérateurs linéaires et continus P_m et P_u définis par

$$\begin{aligned} &P_m \in \mathscr{L}\left(H^{1/2}(\Gamma_m), H^{1/2}(\Gamma)\right), && \text{et} \quad P_u \in \mathscr{L}\left(H^{1/2}(\Gamma_u), H^{1/2}(\Gamma)\right), \\ &P_m g = g \text{ p.p. sur } \Gamma_m,\ \forall\, g \in H^{1/2}(\Gamma_m), && P_u g = g \text{ p.p. sur } \Gamma_u,\ \forall\, g \in H^{1/2}(\Gamma_u). \end{aligned}$$

On pose alors

$$\tilde{T} = P_m T \quad \text{et} \quad \tilde{\tau} = P_u \tau \quad \in H^{1/2}(\Gamma). \tag{2.14}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

D'après le théorème de traces, il existe un opérateur de relèvement continu et surjectif défini par

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{R} : H^{1/2}(\Gamma) & \longrightarrow & H^1(\Omega) \\ g & \longmapsto & \bar{u} = \mathscr{R} g, \end{array} \tag{2.15}$$

et tel que

$$\bar{u}|_\Gamma = g. \tag{2.16}$$

Posons $\bar{u}_1 = \mathscr{R}\tilde{T}$ et $\bar{u}_2(\tau) = \mathscr{R}\tilde{\tau}$. On effectue les changements de variables $\tilde{u}_i = u_i - \bar{u}_i, \quad i = 1, 2$. En multipliant les équations d'état par une fonction test et en intégrant sur Ω, on obtient les formulations faibles des problèmes (2.3) et (2.4)

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \tilde{u}_1 \in H^1_{0,\Gamma_m}(\Omega) \text{ tel que} \\ \qquad a_1(\tilde{u}_1, v_1) = l_1(v_1), \quad \forall\, v_1 \in H^1_{0,\Gamma_m}(\Omega), \end{array} \tag{2.17}$$

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \tilde{u}_2 \in H^1_{0,\Gamma_u}(\Omega) \text{ tel que} \\ \qquad a_2(\tilde{u}_2, v_2) = l_2(v_2), \quad \forall\, v_2 \in H^1_{0,\Gamma_u}(\Omega), \end{array} \tag{2.18}$$

avec

$$a_i(\tilde{u}_i, v_i) = \int_\Omega k(x) \nabla \tilde{u}_i \nabla v_i \; dx, \quad i = 1, 2, \tag{2.19}$$

$$l_1(v_1) = \int_\Omega f v_1 \; dx - a_1(\bar{u}_1, v_1) + \langle \eta, v_1 \rangle_{1/2,\Gamma_u}, \tag{2.20}$$

$$l_2(v_2) = \int_\Omega f v_2 \; dx - a_2(\bar{u}_2, v_2) + \langle \phi, v_2 \rangle_{1/2,\Gamma_m}. \tag{2.21}$$

On a alors par sommation la formulation variationnelle globale

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } u = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in V \text{ tel que} \\ \qquad a(u, v) = L(v), \; \forall\, v = (v_1, v_2) \in V, \\ \text{avec } a(u, v) = a_1(\tilde{u}_1, v_1) + a_2(\tilde{u}_2, v_2) \\ \text{et } L(v) = l_1(v_1) + l_2(v_2). \end{array} \tag{2.22}$$

où $V = H^1_{0,\Gamma_m}(\Omega) \times H^1_{0,\Gamma_u}(\Omega)$ et $\|v\|_V = (\|v_1\|^2_{1,\Omega} + \|v_2\|^2_{1,\Omega})^{1/2}$ est la norme associée à l'espace V. On définit également l'espace $H = \left(L^2(\Omega)\right)^2$ muni du produit scalaire $(u, v)_H = \left((u_1, u_2)^2_{0,\Omega} + (v_1, v_2)^2_{0,\Omega}\right)^{1/2}$.

La forme linéaire $L(\cdot)$ étant continue et la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ étant continue et V-elliptique (annexe A.3), on peut dire, d'après le théorème de Lax-Milgram, que le problème variationnel (2.22) admet une unique solution.

2.2.2 Contrôle optimal

On souhaite ici formuler le problème de minimisation (2.6) comme un problème de contrôle optimal tel qu'introduit dans le chapitre 1 de façon à écrire explicitement le gradient de la fonctionnelle.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

2.2.2.1 Position du problème

Dans le but de mettre en évidence explicitement le contrôle τ lors du calcul du gradient de la fonctionnelle, on est contraint d'appliquer la formule de Green sur la forme bilinéaire $a_2(\cdot,\cdot)$. Il est alors nécessaire, pour donner un sens aux dérivées d'ordre 2, de supposer plus de régularité sur les solutions et les fonctions tests. On se place donc, conformément aux formulations faibles des problèmes (2.3) et (2.4), dans l'espace $V = H^1_{0,\Gamma_m}(\Omega) \times \left(H^1_{0,\Gamma_u}(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$.

On désigne par $\sigma = (\eta, \tau)$ le contrôle défini dans $\mathscr{U}$, appelé l'espace des contrôles, et par $u(\sigma) = (\tilde{u}_1(\eta), \tilde{u}_2(\tau)) \in V$ l'état du système. La forme $v \mapsto a(u,v)$ étant linéaire et continue, on peut donc écrire $a(u,v) = (Au, v)_{V',V}$ pour tout $u = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ dans V, ce qui définit l'opérateur $A \in \mathscr{L}(V', V)$.

On définit également l'opérateur $B \in \mathscr{L}(\mathscr{U}, V')$ donné par

$$(B\sigma, v)_{V',V} = \langle \eta, v_1 \rangle_{1/2,\Gamma_u} - a(\bar{u}_2(\tau), v_2). \tag{2.23}$$

On peut alors définir $F \in V'$ de telle sorte que les problèmes (2.3) et (2.4) puissent s'écrire sous la forme

$$\begin{gathered} \text{Trouver } u(\sigma) \in V \text{ telle que} \\ Au(\sigma) = F + B\sigma. \end{gathered} \tag{2.24}$$

De plus, on pose $\mathscr{H} = L^2(\Omega)$ et on définit l'opérateur $M \in \mathscr{L}(V, \mathscr{H})$ par

$$M : u(\sigma) \in V \longmapsto \sqrt{k(x)}\left(\nabla \tilde{u}_1(\eta) - \nabla \tilde{u}_2(\tau)\right). \tag{2.25}$$

La fonction de coût s'écrit alors

$$J(\sigma) = \|Mu(\sigma)\|^2_{\mathscr{H}}. \tag{2.26}$$

Ainsi, le problème de contrôle

$$\text{Trouver } \omega \in \mathscr{U} \text{ tel que } J(\omega) = \inf_{\sigma \in \mathscr{U}} J(\sigma) \tag{2.27}$$

est équivalent au problème de minimisation (2.6) (voir annexe A.4). On note alors $\omega = (\eta^*, \tau^*)$ le contrôle optimal. De plus, lorsque le contrôle optimal est atteint, on a

$$\nabla \tilde{u}_1(\eta^*) = \nabla \tilde{u}_2(\tau^*) \text{ et } \nabla \bar{u}_1 = \nabla \bar{u}_2(\tau^*) \text{ p.p. sur } \Omega. \tag{2.28}$$

2.2.2.2 États adjoints et gradient de la fonctionnelle

Le problème de contrôle étant posé, on souhaite maintenant expliciter le gradient de le fonctionnelle. Pour ce faire, il est nécessaire dans un premier temps de mettre en évidence l'état adjoint $p(\sigma) = (p_1(\eta), p_2(\tau)) \in V$ associé au problème de contrôle.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

D'après (1.28), pour que ω soit contrôle optimal, l'équation suivante doit être satisfaite :

$$A^*p(\omega) = M^*\Lambda_{\mathscr{H}}(Mu(\omega)). \tag{2.29}$$

Soit $v = (v_1, v_2) \in V$ une fonction test, on prend le produit scalaire dans la dualité V', V des deux membres de (2.29) avec v, on obtient

$$(A^*p(\omega), v)_{V',V} = (M^*\Lambda_{\mathscr{H}}Mu(\omega), v)_{V',V}\,. \tag{2.30}$$

Par définition des opérateurs adjoints et $\mathscr{H} = L^2(\Omega)$ s'identifiant à son dual, on a

$$(Av, p(\omega))_{V',V} = \Big(Mu(\omega), Mv\Big)_{\mathscr{H}',\mathscr{H}}. \tag{2.31}$$

Par définition des opérateurs $A \in \mathscr{L}(V', V)$ et $M \in \mathscr{L}(V, \mathscr{H})$ et en appliquant la formule de Green, il vient

$$\begin{aligned}\int_\Omega -\nabla.\left(k(x)\nabla p_1\right) v_1\ dx + \int_\Omega -\nabla.\left(k(x)\nabla p_2\right) v_2\ dx + \int_{\Gamma_u} k(x)\nabla p_1 \cdot \vec{n} \cdot v_1\ d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_m} k(x)\nabla p_2 \cdot \vec{n} \cdot v_2\ d\Gamma = \int_\Omega \nabla.\left(k(x)\nabla\left(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\right)\right) v_1\ dx \\ + \int_\Omega \nabla.\left(k(x)\nabla\left(\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1\right)\right) v_2\ dx + \int_{\Gamma_u} \left(\eta - k(x)\nabla\bar{u}_1 \cdot \vec{n} - k(x)\nabla\tilde{u}_2 \cdot \vec{n}\right) v_1\ d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_m} \left(\phi - k(x)\nabla\bar{u}_2 \cdot \vec{n} - k(x)\nabla\tilde{u}_1 \cdot \vec{n}\right) v_1\ d\Gamma.\end{aligned} \tag{2.32}$$

On obtient alors par identification et en tenant compte de (2.28), les deux problèmes adjoints

$$\begin{cases} \nabla.\Big(k(x)\nabla p_1(\eta^*)\Big) = \nabla.\Big(k(x)\nabla(u_1(\tau^*) - u_2(\eta^*))\Big) \text{ dans } \Omega \\ p_1(\eta^*) = 0 \text{ sur } \Gamma_m \\ k(x)\nabla p_1(\eta^*) \cdot \vec{n} = \eta^* - k(x)\nabla u_2(\tau^*) \cdot \vec{n} \text{ sur } \Gamma_u, \end{cases} \tag{2.33}$$

$$\begin{cases} \nabla.\Big(k(x)\nabla p_2(\tau^*)\Big) = \nabla.\Big(k(x)\nabla(u_2(\eta^*) - u_1(\tau^*))\Big) \text{ dans } \Omega \\ p_2(\tau^*) = 0 \text{ sur } \Gamma_u \\ k(x)\nabla p_2(\tau^*) \cdot \vec{n} = \phi - k(x)\nabla u_1(\eta^*) \cdot \vec{n} \text{ sur } \Gamma_m. \end{cases} \tag{2.34}$$

La résolution des problèmes (2.33) et (2.34) fournit l'état adjoint. On peut maintenant s'intéresser au calcul du gradient de la fonctionnelle. Pour que le contrôle ω soit optimal, il doit également vérifier d'après (1.29)

$$\frac{1}{2}\nabla J(\omega) = B^*p(\omega) = 0, \tag{2.35}$$

d'où,

$$\left(\frac{1}{2}\nabla J(\omega), \xi\right)_{\mathscr{U}',\mathscr{U}} = (B^*p(\omega), \xi)_{\mathscr{U}',\mathscr{U}}\,, \quad \forall \xi = (\mu, \nu) \in \mathscr{U}\,. \tag{2.36}$$

Par définition des opérateurs adjoints, il vient

$$\left(\frac{1}{2}\nabla J(\omega), \xi\right)_{\mathscr{U}',\mathscr{U}} = (B\xi, p(\omega))_{V',V}\,, \quad \forall \xi = (\mu, \nu) \in \mathscr{U}\,. \tag{2.37}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

On a alors

$$\left(\frac{1}{2}\nabla J(\omega), \xi\right)_{\mathscr{U}',\mathscr{U}} = \langle \mu, p_1(\eta^*)\rangle_{1/2,\Gamma_u} - a_2(\bar{u}_2(\nu), p_2(\tau^*), \quad \forall \xi = (\mu,\nu) \in \mathscr{U}. \tag{2.38}$$

De plus, d'après la proposition 2.2.1 et (2.34), on a

$$\nabla.\,(k(x)\nabla p_2(\tau^*)) = \nabla.\,(k(x)\nabla u_2(\tau^*) - u_1(\eta^*)) = 0 \text{ dans } \Omega \tag{2.39}$$

$$\text{et} \quad k(x)\nabla p_2(\tau^*)\cdot\vec{n} = \phi - k(x)\nabla u_1(\eta^*)\cdot\vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_m, \tag{2.40}$$

d'où, en appliquant la formule de Green,

$$\begin{aligned}\langle \mu, \nabla_\eta J(\omega)\rangle_{1/2,\Gamma_u} + \langle \nabla_\tau J(\omega), \nu\rangle_{1/2,\Gamma_u} = \\ = \langle \mu, 2p_1(\eta^*)\rangle_{1/2,\Gamma_u} + \langle -2k(x)\nabla p_2(\tau^*)\cdot\vec{n}, \nu\rangle_{1/2,\Gamma_u}.\end{aligned} \tag{2.41}$$

On a enfin

$$\nabla J(\omega) = (2p_1(\eta^*), -2k(x)\nabla p_2(\tau^*)\cdot\vec{n}) \in \mathscr{U}'. \tag{2.42}$$

On a ainsi pu expliciter le gradient de la fonctionnelle en fonction des états adjoints p_1 et p_2.

2.3 Discrétisation, analyse de convergence

2.3.1 Estimation d'erreur

Soit X_h l'espace éléments finis pour lequel les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- (i) Ω est un ouvert polyédrique de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$.
- (ii) $\mathscr{T}_h$ est une triangulation régulière de $\bar{\Omega}$ *i.e.* $h = \max\limits_{K\in\mathscr{T}_h} h_K \to 0$ et $\max\limits_{K\in\mathscr{T}_h} \dfrac{h_K}{\rho_K} \leq c$ où c est une constante indépendante de h et h_k et ρ_k sont respectivement le diamètre et le diamètre du cercle (sphère pour $d = 3$) inscrit de l'élément K.
- (iii) Γ_u et Γ_m peuvent s'écrire comme l'union d'arêtes de $K \in \mathscr{T}_h$.
- (iv) L'espace éléments finis X_h est tel que, pour tout h, on peut lui associer une famille (K, P_K, Σ_K), $K \in \mathscr{T}_h$ affine-équivalente à un élément de référence $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ de classe $\mathscr{C}^0$.
- (v) L'inclusion suivante est vérifiée $P_l \subset \hat{P} \subset H^1(\hat{K})$.

Ces hypothèses impliquent que $X_h \subset \mathscr{C}^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$. On définit alors

$$X_{uh} = \{v_h \in X_h;\ v_{h|\Gamma_u} = 0\} \quad \text{et} \quad X_{mh} = \{v_h \in X_h;\ v_{h|\Gamma_m} = 0\} \tag{2.43}$$

et on pose $V_h = X_{mh} \times X_{uh}$ l'espace d'approximation de dimension finie. Le problème discret s'écrit alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned}&\text{Trouver } u_h = (u_{1h}, u_{2h}) \in V_h \text{ tel que}\\ &\qquad a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h = (v_{1h}, v_{2h}) \in V_h,\\ &\text{où } \ a(u_h, v_h) = a_1(u_{1h}, v_{1h}) + a_2(u_{2h}, v_{2h})\\ &\text{et } \ L(v_h) = l_1(v_{1h}) + l_2(v_{2h}).\end{aligned} \tag{2.44}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Étant donné les propriétés des formes linéaires $a(\cdot,\cdot)$ et $L(\cdot)$, on peut dire, d'après le lemme de Lax-Milgram, que le problème discret (2.44) admet une unique solution.

Proposition 2.3.1 *En plus des hypothèses (i)-(v), on suppose qu'il existe un entier $l \geq 1$ tel que l' inclusion suivante soit satisfaite :*

$$H^{l+1}(\hat{K}) \subset \mathscr{C}^s(\hat{K}) \text{ avec injection continue,} \tag{2.45}$$

où s est l'ordre maximal des dérivées partielles intervenant dans la définition de l'ensemble $\hat{\Sigma}$.

Alors, si la solution du problème variationnel $u \in V \cap \left(H^{l+1}(\Omega)\right)^2$ et pour tout $(\eta,\tau) \in \mathscr{U}$ fixé, il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch^l(|||u|||_{l+1,\Omega}), \tag{2.46}$$

où $u_h \in V_h$ est la solution discrète.

Démonstration : En appliquant le théorème A.5.2 à chaque terme de la norme brisée

$$\|u - u_h\|_V = \left(\|u_1 - u_{1h}\|^2_{1,\Omega} + \|u_2 - u_{2h}\|^2_{1,\Omega}\right)^{1/2}, \tag{2.47}$$

on retrouve (2.46). ■

2.3.2 Introduction de données bruitées et estimation d'erreur

On souhaite déterminer ici des estimations d'erreur prenant en compte l'influence de données bruitées. On note (ϕ^δ, T^δ) les données bruitées, le problème discret bruité s'écrit alors

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u_h^\delta = (u_{1h}^\delta, u_{2h}^\delta) \in V_h \text{ tel que} \\ &a(u_h^\delta, v_h) = L^\delta(v_h), \quad \forall v_h = (v_{1h}, v_{2h}) \in V_h, \end{aligned} \tag{2.48}$$

où $L^\delta(\cdot)$ est la forme linéaire associée aux données bruitées et est donnée par

$$\begin{aligned} L^\delta(v_h) = (f, v_{1h})_{0,\Omega} + (f, v_{2h})_{0,\Omega} - a_1(\bar{u}_1^\delta, v_1 h) - a_2(\bar{u}_2(\tau), v_{2h}) \\ + \langle \eta, v_{1h}\rangle_{1/2,\Gamma_u} + \langle \phi^\delta, v_{2h}\rangle_{1/2,\Gamma_m}, \end{aligned} \tag{2.49}$$

avec $\bar{u}_1^\delta$ le relèvement de la donnée de Dirichlet bruitée T^δ prolongée sur tout Γ, soit $\bar{u}_1^\delta = \mathscr{R} P_m T^\delta$.

Proposition 2.3.2 *Sous les hypothèses de la proposition 2.3.1, si la solution du problème variationnel $u \in V \cap \left(H^{l+1}(\Omega)\right)^2$, alors il existe, pour tout $(\eta,\tau) \in \mathscr{U}$ fixé, une constante C indépendante de h et des données telle que*

$$\begin{aligned} \|u - u_h^\delta\|_V \leq C \Big\{ h^l \, |||\, u|||_{l+1,\Omega} \\ + (\|T - T^\delta\|^2_{1/2,\Gamma_m} + \|\phi - \phi^\delta\|^2_{-1/2,\Gamma_m})^{1/2} \Big\}, \end{aligned} \tag{2.50}$$

où $u_h^\delta = (u_{1h}^\delta, u_{2h}^\delta) \in V_h$ est la solution discrète bruitée.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Démonstration : La différence entre les problèmes discret (2.44) et discret bruité (2.48), donne

$$a(u_h - u_h^\delta, v_h) = -a_1(\mathscr{R}P_m(T - T^\delta, v_{1h}) + \langle \phi - \phi^\delta, v_{2h}\rangle_{1/2,\Gamma_m}. \tag{2.51}$$

A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par continuité des opérateurs de relèvement, de trace et de prolongement, il existe une constante C telle que

$$|a(u_h - u_h^\delta, v_h)| \leq C \Big\{ \|T - T^\delta\|_{1/2,\Gamma_m} \|v_{1h}\|_{1,\Omega} + \|\phi - \phi^\delta\|_{-1/2,\Gamma_m} \|v_{2h}\|_{1,\Omega} \Big\}. \tag{2.52}$$

L'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ donne

$$|a(u_h - u_h^\delta, v_h)| \leq C \left\{ \left(\|T - T^\delta\|^2_{1/2,\Gamma_m} + \|\phi - \phi^\delta\|^2_{-1/2,\Gamma_m} \right)^{1/2} \|v_h\|_V \right\}. \tag{2.53}$$

En prenant $v_h = u_h - u_h^\delta$ comme fonction test et la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ étant V-elliptique, il vient

$$\|u_h - u_h^\delta\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \left(\|T - T^\delta\|^2_{1/2,\Gamma_m} + \|\phi - \phi^\delta\|^2_{-1/2,\Gamma_m} \right)^{1/2}. \tag{2.54}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\|u - u_h^\delta\|_V = \|u - u_h + u_h - u_h^\delta\|_V \leq \|u - u_h\|_V + \|u_h - u_h^\delta\|_V, \tag{2.55}$$

on obtient alors (2.50) en appliquant (2.46) et (2.54) sur (2.55). ■

2.3.3 Déduction d'un critère d'arrêt pour le processus de minimisation

Lorsque les données sont bruitées, on observe au cours du processus d'optimisation que l'erreur atteint un minimum avant de croître très rapidement. Dans le même temps, la fonctionnelle atteint assymptotiquement un seuil strictement positif dépendant du taux de bruit. Après avoir atteint ce seuil les variations de la fonctionnelle sont insignifiantes par rapport à son ordre de grandeur. On souhaite donc estimer ce seuil théoriquement de façon à déterminer un critère d'arrêt qui nous permettra de stopper l'algorithme d'optimisation avant explosion numérique de la solution.

Soit

$$E_h^\delta(\eta, \tau) = \int_\Omega k(x) \Big(\nabla u_{1h}^\delta(\eta) - \nabla u_{2h}^\delta(\tau) \Big)^2 \, dx \tag{2.56}$$

la fonctionnelle discrète avec données bruitées.

Proposition 2.3.3 *Sous les hypothèses de la proposition 2.3.1, si la solution du problème variationnel* $u \in V \cap \Big(H^{l+1}(\Omega)\Big)^2$ *et si* (η^*, τ^*) *est la solution du problème de minimisation (2.6), alors il existe une constante* C *indépendante de* h *et des données telle que*

$$E_h^\delta(\eta^*, \tau^*) \leq C \Big\{ h^{2l} \, |||\, u|||^2_{l+1,\Omega} + \Big(\|T - T^\delta\|^2_{1/2,\Gamma_m} + \|\phi - \phi^\delta\|^2_{-1/2,\Gamma_m} \Big) \Big\}. \tag{2.57}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Démonstration : Soit (η^*, τ^*) la solution du problème de minimisation (2.6). En tenant compte du fait que $\nabla u_1(\eta^*) = \nabla u_2(\tau^*)$, on peut écrire

$$E_h^\delta(\eta^*, \tau^*) = \int_\Omega k(x)\Big[\Big(\nabla u_{1h}^\delta(\eta^*) - \nabla u_1(\eta^*)\Big) - \Big(\nabla u_{2h}^\delta(\tau^*) - \nabla u_2(\tau^*)\Big)\Big]^2\, dx. \quad (2.58)$$

L'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ donne

$$E_h^\delta(\eta^*, \tau^*) \leq 2\|k\|_{\infty,\Omega}\Big(|u_{1h}^\delta(\eta^*) - u_1(\eta^*)|_{1,\Omega}^2 + |u_{2h}^\delta(\tau^*) - u_2(\tau^*)|_{1,\Omega}^2\Big), \quad (2.59)$$

d'où

$$E_h^\delta(\eta^*, \tau^*) \leq 2\|k\|_{\infty,\Omega}\|u - u_h^\delta\|_V^2. \quad (2.60)$$

Ainsi, d'après la proposition 2.3.2, on a (2.57). ■

On peut maintenant proposer un critère d'arrêt basé sur la précédente proposition. En effet, quand la fonctionnelle discrète avec données bruitées (2.56) atteint son minimum, si h est suffisamment petit, on a d'après (2.57)

$$E_h^\delta(\eta^*, \tau^*) \sim O\Big(\|T - T^\delta\|_{1/2,\Gamma_m}^2 + \|\phi - \phi^\delta\|_{-1/2,\Gamma_m}^2\Big). \quad (2.61)$$

Ainsi, on stoppe le processus de minimisation lorsque l'ordre de grandeur des variations de la fonctionnelle devient inférieur à l'ordre de grandeur de la fonctionnelle elle-même.

On note E_j la valeur de la fonctionnelle discrète bruitée à l'itération j de l'algorithme d'optimisation. On obtient le critère d'arrêt suivant :

$$|E_j - E_{j-1}| \leq (\|T - T^\delta\|_{1/2,\Gamma_m}^2 + \|\phi - \phi^\delta\|_{-1/2,\Gamma_m}^2). \quad (2.62)$$

2.4 Mise en œuvre et résultats numériques

2.4.1 Procédure numérique

Nous allons décrire dans cette section la méthode de calcul des éléments nécessaires au processus d'optimisation, en particulier les états adjoints et le gradient de la fonctionnelle. On choisit de calculer les états adjoints des problèmes discrétisés. Cette méthode a l'avantage de donner exactement le gradient de la fonctionnelle discrète à minimiser et d'être facilement implémentable. L'algorithme de minimisation utilisé est la méthode des régions de confiance avec gradient conjugué préconditionné pour la résolution des sous problèmes associés. Cette méthode permet de garantir une décroissance de la fonctionnelle suffisamment régulière pour l'utilisation du critère d'arrêt (2.62). Nous préciserons également la mise en oeuvre de ce critère d'arrêt dans le cas réaliste où l'on ne dispose que de données bruitées.

Supposons que la triangulation $\mathscr{T}_h$ de $\bar{\Omega}$ soit caractérisée par n nœuds. Soit p et q les nombres de nœuds respectivement sur les frontières Γ_u et Γ_m et $(\omega_i)_{1\leq i\leq n} = (\omega_{1i}, \omega_{2i})_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de l'espace d'approximation

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

V_h. On note X_η et X_τ les vecteurs correspondant aux inconnues de Neumann et Dirichlet, Φ et T les vecteurs correspondant aux données de Neumann et Dirichlet, U_1 et U_2 les vecteurs correspondant aux champs u_1 et u_2. On introduit les notations suivantes $(K_1)_{kl} = a_1(\omega_{1k}, \omega_{1l})$, $(K_2)_{kl} = a_2(\omega_{2k}, \omega_{2l})$, $(F_1)_k = l_1(\omega_{1k})$, $(F_2)_k = l_2(\omega_{2k}), L_u \in \mathscr{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ et $L_m \in \mathscr{M}_{q\times n}(\mathbb{R})$ sont des matrices contenant uniquement des 0 et des 1 et permettant de conserver les valeurs de U_1 et U_2 respectivement sur Γ_u et Γ_m.

Remarque 3 Les formes bilinéaires $a_1(\cdot,\cdot)$ et $a_2(\cdot,\cdot)$ étant identiques, on note $K = K_1 = K_2$.

Problèmes discrets On considère les systèmes linéaires suivants issus de la discrétisation des problèmes (2.3) et (2.4) :

$$\begin{cases} KU_1 = F_1(X_\eta) \\ L_m U_1 = \mathrm{T} \quad \text{(condition de Dirichlet sur } \Gamma_m), \end{cases} \tag{2.63}$$

$$\begin{cases} KU_2 = F_2(\Phi) \\ L_u U_2 = X_\tau \quad \text{(condition de Dirichlet sur } \Gamma_u). \end{cases} \tag{2.64}$$

On définit le lagrangien suivant :

$$L(U_1, p_1) = \frac{1}{2} U_1^T K U_1 - U_1 F_1 + p_1^T (L_m U_1 - \mathrm{T}). \tag{2.65}$$

Le point selle est caractérisé par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial U_1} = 0 \Leftrightarrow KU_1 + p_1^T L_m - F_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial p_1} = 0 \Leftrightarrow L_m U_1 - \mathrm{T} = 0. \end{cases} \tag{2.66}$$

Le système (2.63) est donc équivalent à

$$\begin{cases} KU_1 + L_m^T p_1 = F_1(X_\eta) \\ L_m U_1 = \mathrm{T}. \end{cases} \tag{2.67}$$

De la même façon, le système (2.64) peut s'écrire

$$\begin{cases} KU_2 + L_u^T p_2 = F_2(\Phi) \\ L_u U_2 = X_\tau. \end{cases} \tag{2.68}$$

Fonctionnelle discrète et lagrangien sur la paire (X_η, X_τ) On considère la fonctionnelle discrète suivante :

$$E(X_\eta, X_\tau) = (U_1 - U_2)^T K (U_1 - U_2). \tag{2.69}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

On pose donc

$$\mathscr{L}(U_1, U_2, \lambda_1, \lambda_2; X_\eta, X_\tau) = E(X_\eta, X_\tau) - \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ q_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} KU_1 + L_m^T p_1 - F_1 \\ L_m U_1 - \mathrm{T} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

$$- \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ q_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} KU_2 + L_u^T p_2 - F_2 \\ L_u U_2 - X_\tau \end{bmatrix}. \quad (2.71)$$

Notons (X_η^*, X_τ^*) le point selle et dérivons le lagrangien.

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial X_\eta} = \frac{dU_1}{dX_\eta}\Big(2K(U_1 - U_2) - \lambda_1^T K - q_1^T L_m\Big) - \lambda_1^T L_m^T \frac{dp_1}{dX_\eta} - \lambda_1^T \frac{dF_1}{dX_\eta}, \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial X_\tau} = \frac{dU_2}{dX_\tau}\Big(2K(U_2 - U_1) - \lambda_2^T K - q_2^T L_u\Big) - \lambda_2^T L_u^T \frac{dp_2}{dX_\tau} - q_2^T \frac{dX_\tau}{dX_\tau}. \quad (2.73)$$

On sait que

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial X_\eta}(X_\eta^*) = 0,$$

d'où

$$\begin{cases} K\lambda_1 + L_m^T q_1 = 2K(U_1 - U_2) \\ L_m \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad (2.74)$$

et il nous reste

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial X_\eta}(X_\eta^*) = \frac{dF_1}{dX_\eta}^T \lambda_1 = L_u \lambda_1. \quad (2.75)$$

De la même façon,

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial X_\tau}(X_\tau^*) = 0 \quad (2.76)$$

implique

$$\begin{cases} K\lambda_2 + L_u^T q_2 = 2K(U_2 - U_1) \\ L_u \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad (2.77)$$

et on a

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial X_\tau}(X_\tau^*) = L_u L_u^T q_2. \quad (2.78)$$

Les équations (2.75) et (2.78) donnent alors le gradient de la fonctionnelle

$$\nabla E(X_\eta, X_\tau) = \begin{bmatrix} L_u \lambda_1 \\ L_u[2K(U_2 - U_1) - K\lambda_2] \end{bmatrix}. \quad (2.79)$$

On considère maintenant le cas d'applications réelles pour lesquelles on ne dispose que de données (T^δ, ϕ^δ) mesurées avec un taux de bruit $0 < a < 1$. Il n'est alors pas possible de calculer exactement la norme de la différence entre les données exactes et bruitées requise pour la mise en œuvre du critère d'arrêt (2.62). Il est donc nécessaire d'estimer cette norme uniquement en fonction des données bruitées et du taux de bruit. Dans notre cas, le bruit appliqué sur les données est de la forme

$$T(x_i) = \left(1 + a\frac{X_i}{\max\limits_{1 \le j \le p} |X_j|}\right) T(x_i), \quad \text{pour } i = 1, ..., q; \quad (2.80)$$

où les $(x_i)_{1 \le j \le q}$ sont les noeuds de Γ_m

et les $(X_i)_{1 \le j \le q}$ sont les réalisations d'une variable aléatoire $X \sim \mathscr{N}(0, 1)$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

On peut alors majorer la norme de la différence entre les données exactes et bruitées :

$$T(x) - aT(x) \leq T^\delta(x) \leq T(x) + aT(x), \quad \forall\, x \in \Gamma_m, \tag{2.81}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{-a}{1+a} T^\delta(x) \leq T(x) - T^\delta(x) \leq \frac{a}{1-a} T^\delta(x), \tag{2.82}$$

$$\text{et donc} \quad \|T - T^\delta\|_{1/2,\Gamma_m} \leq \max\left\{\frac{a}{1-a}, \frac{a}{1+a}\right\} \|T^\delta\|_{1/2,\Gamma_m}. \tag{2.83}$$

En procédant de la même façon pour la condition limite de Neumann, le critère d'arrêt (2.62) peut s'écrire de la façon suivante :

$$|E_j - E_{j-1}| \leq \frac{a^2}{(1-a)^2} \left(\|T^\delta\|^2_{1/2,\Gamma_m} + \|\phi^\delta\|^2_{-1/2,\Gamma_m}\right). \tag{2.84}$$

Dans le cas d'applications réelles, la mise en évidence d'un tel critère d'arrêt ne dépendant pas des données exactes inconnues nécessite évidemment une connaissance suffisante de la forme du bruit de mesure.

2.4.2 Résultats numériques

On considère ici le problème de Cauchy suivant sur le domaine Ω donné par la figure 2.2 :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = f_D \text{ sur } \Gamma_m \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = f_N \text{ sur } \Gamma_m, \end{cases} \tag{2.85}$$

où f_D et f_N sont les données de Cauchy extraites de la solution que l'on souhaite approcher.

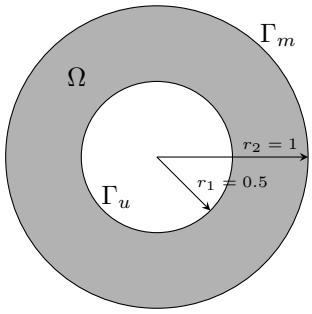


Fig. 2.2: Anneau

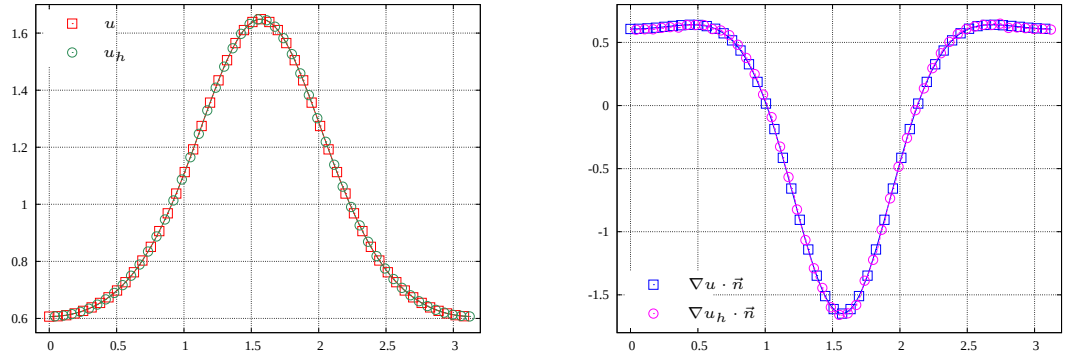
2.4.2.1 Exemple analytique

Une solution analytique du problème précédent est donnée par

$$u(x, y) = e^x \cos(y). \tag{2.86}$$

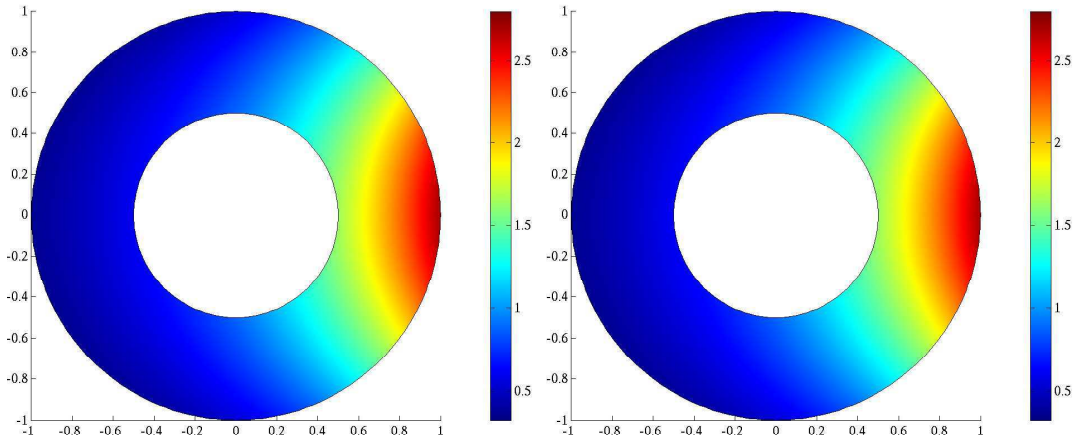
Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

La figure 2.3 représente la solution exacte fournie par (2.86) et la solution éléments finis obtenue par la méthode énergétique du problème de complétion de données. On peut voir que la température et le flux identifiés sont proches de leurs analogues exacts. La figure 2.4 représente les champs de température exact et identifié.



(a) Température sur Γ_u (b) Flux sur Γ_u

Fig. 2.3: Température et flux exacts (□) et identifiés (○) sur Γ_u pour l'exemple analytique, $h = 0.03$.



(a) Exact (b) Identifié

Fig. 2.4: Champs de température pour l'exemple analytique, $h = 0.03$

La figure 2.5 représente l'erreur de discrétisation éléments finis par rapport à la taille maximale des arêtes du maillage. Ce résultat est en accord avec l'estimation (2.46).

On introduit ensuite un bruit aléatoire Gaussien de moyenne nulle dont l'amplitude dépend d'un taux a et des données elles-mêmes. Les figures 2.6 et 2.7 représentent respectivement l'erreur et la fonctionnelle à chaque itération du processus d'optimisation et pour différents taux de bruit. Le comportement décrit précédemment, c'est à dire l'explosion numérique de l'erreur au moment où la fonctionnelle atteint son seuil, est clairement visible et justifie l'analyse numérique de la méthode et la mise en place d'un critère d'arrêt adéquat.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

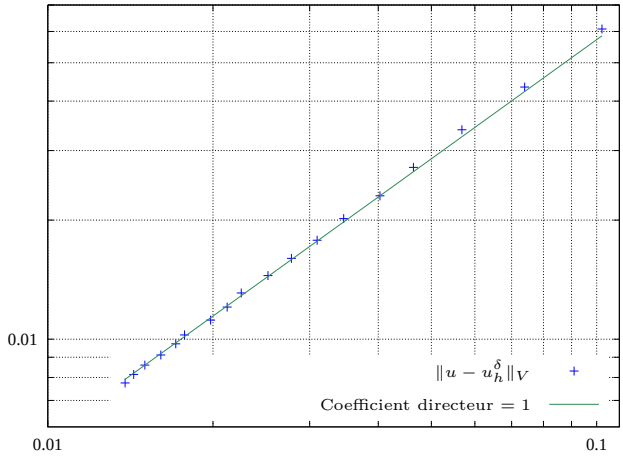


Fig. 2.5: Évolution de $\|u - u_h^\delta\|_V$ par rapport à h.

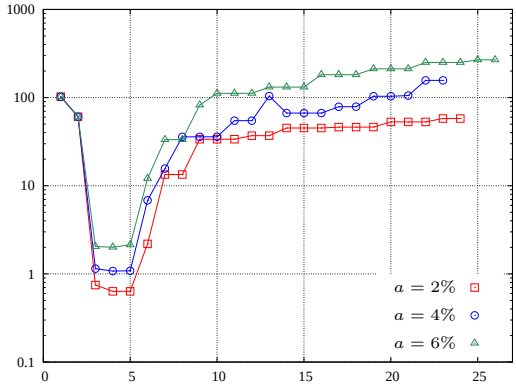


Fig. 2.6: Évolution de $\|u - u_h^\delta\|_V$ durant le processus d'optimisation et pour différents taux de bruit.

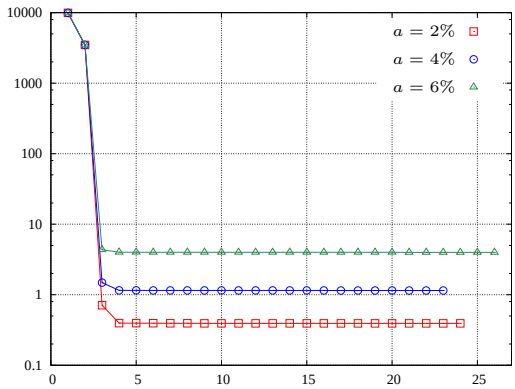


Fig. 2.7: Évolution de $E_h^\delta(\eta, \tau)$ durant le processus d'optimisation et pour différents taux de bruit.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

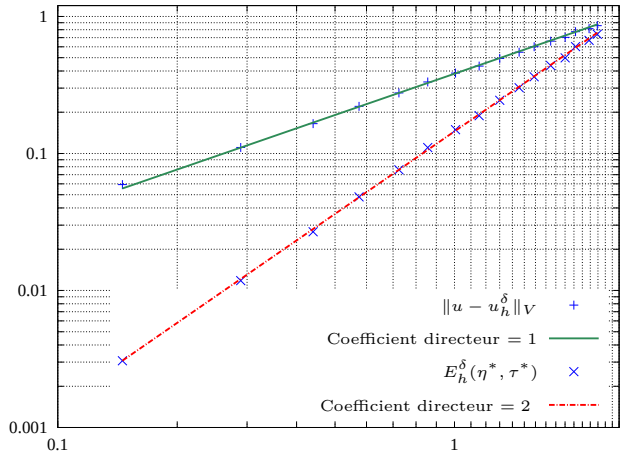


Fig. 2.8: Évolution de $\|u - u_h^\delta\|_V$ et $E_h^\delta(\eta, \tau)$ par rapport à la norme du bruit.

Ensuite on choisit un h suffisamment petit de telle sorte que le terme d'erreur associé à la discrétisation éléments finis soit négligeable en comparaison de l'erreur due au bruit. On observe alors les comportements de l'erreur et de la fonctionnelle par rapport à la norme du bruit définie par

$$\|\delta\| = (\|T - T^\delta\|^2_{1/2,\Gamma_m} + \|\phi - \phi^\delta\|^2_{-1/2,\Gamma_m})^{1/2}. \tag{2.87}$$

Ces résultats, représentés par la figure 2.8, sont en accord avec les estimations (2.50) et (2.57).

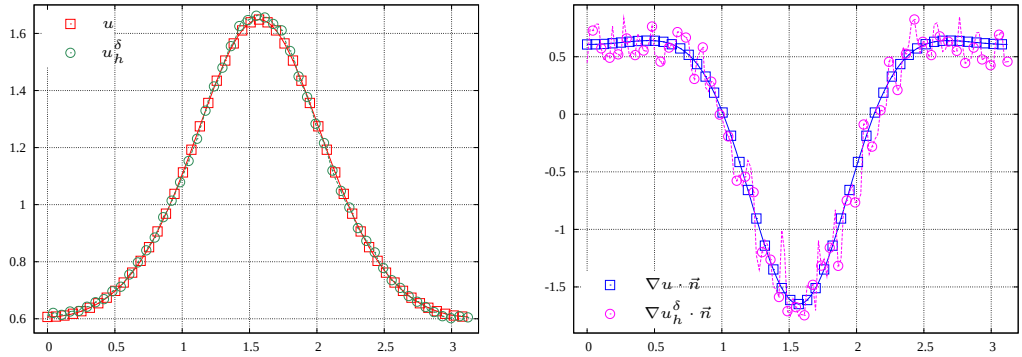
Le comportement de l'erreur et de la fonctionnelle par rapport au bruit étant conforme à ce qui est attendu théoriquement, on s'intéresse maintenant aux solutions identifiées avec le critère d'arrêt (2.62) dans le cas de données bruitées. L'évolution de la fonctionnelle, des variations de la fonctionnelle, de l'erreur au cours du processus d'optimisation ainsi que le seuil associé au critère d'arrêt et l'itération d'arrêt pour les cas traités ici sont représentés en annexe B.1. Comme le montrent les figures 2.9 et 2.10 représentant les solutions du problème de complétion de données avec un taux de bruit respectivement de 3% et 5%, le critère d'arrêt défini par (2.62) permet d'identifier une solution cohérente. La figure 2.11 représente les champs de température ainsi identifiés.

2.4.2.2 Exemples du point source et du fluide stratifié

L'exemple suivant traite de la reconstruction de données singulières, ici un point source donné par

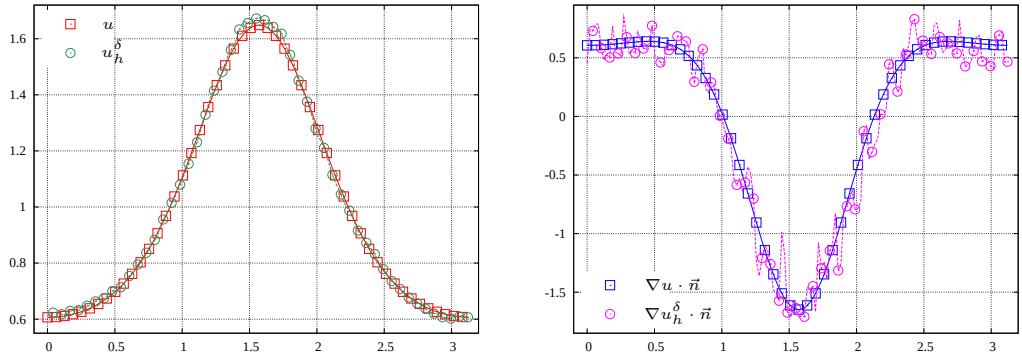
$$u(x, y) = Re\Big(\frac{1}{z - r}\Big), \quad \text{avec } z = x + iy, \tag{2.88}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés



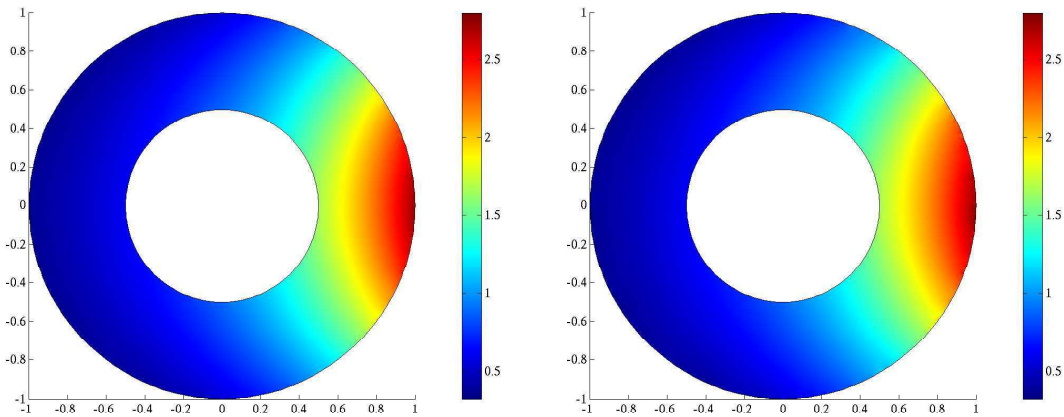
(a) Température sur Γ_u (b) Flux sur Γ_u

Fig. 2.9: Température et flux exacts (□) et identifiés (○) sur Γ_u pour l'exemple analytique, $a = 3\%$, $h = 0.03$



(a) Température sur Γ_u (b) Flux sur Γ_u

Fig. 2.10: Température et flux exacts (□) et identifiés (○) sur Γ_u pour l'exemple analytique, $a = 5\%$, $h = 0.03$

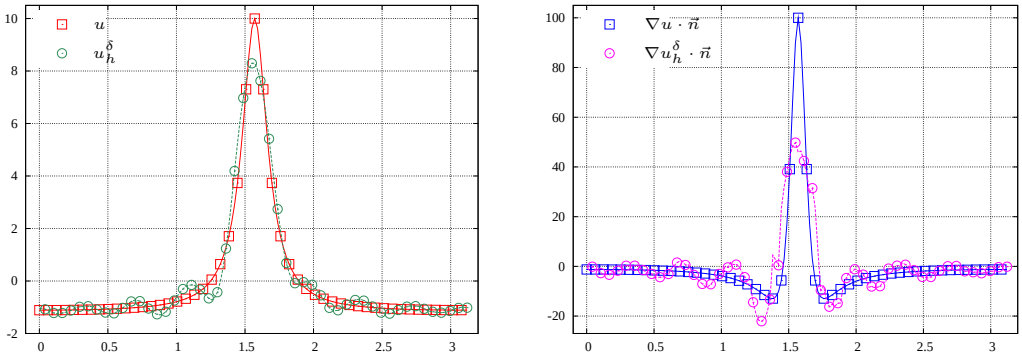


(a) $a = 3\%$ (b) $a = 5\%$

Fig. 2.11: Champs de température identifiés avec bruit pour l'exemple analytique, $h = 0.03$

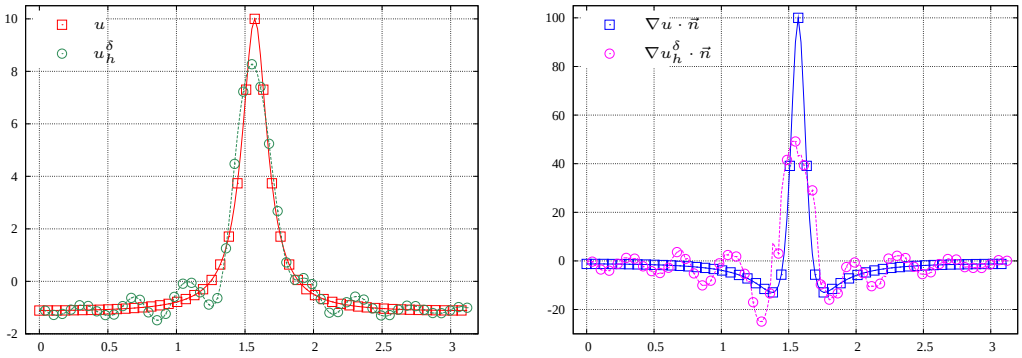
Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

où r est la position du point source sur l'axe des abscisses. Les résultats numériques sont illustrés par les figures 2.12 et 2.13 dans le cas où le point source est proche de la frontière interne Γ_u et par les figures 2.15 et 2.16 si le point source est proche de la frontière externe Γ_m et avec un taux de bruit respectivement de 3% et 5%. Les champs de température exacts et identifiés avec ces taux de bruit et pour ces deux cas sont représentés par les figures 2.14 et 2.17. On peut remarquer que la méthode énergétique avec le critère d'arrêt proposé permet d'identifier un point source situé près d'une frontière inaccessible à la mesure malgré des données bruitées.



(a) Température sur Γ_u (b) Flux sur Γ_u

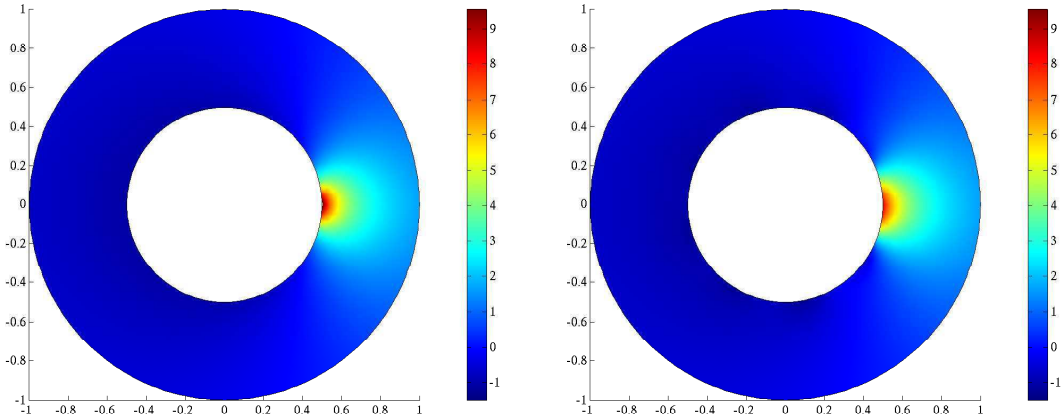
Fig. 2.12: Température et flux exacts (□) et identifiés (○) sur Γ_u pour l'exemple du point source, $r = 0.4$, $a = 3\%$, $h = 0.03$



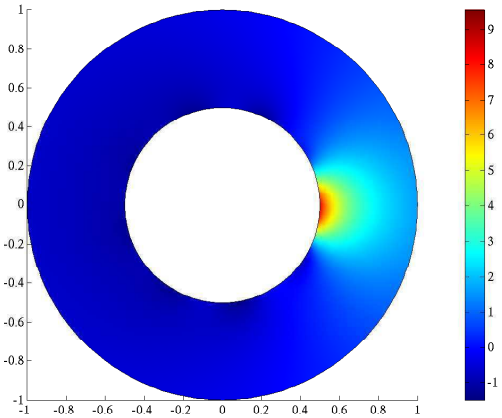
(a) Température sur Γ_u (b) Flux sur Γ_u

Fig. 2.13: Température et flux exacts (□) et identifiés (○) sur Γ_u pour l'exemple du point source, $r = 0.4$, $a = 5\%$, $h = 0.03$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

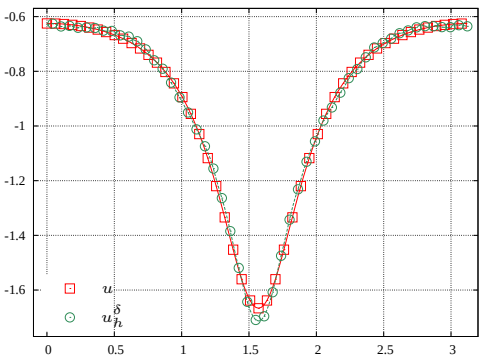


(a) Exact (b) Identifié avec bruit, $a = 3\%$

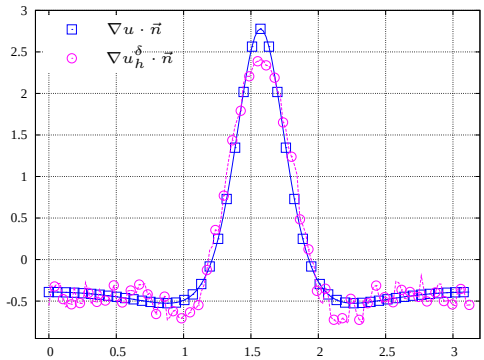


(c) Identifié avec bruit, $a = 5\%$

Fig. 2.14: Champs de température pour l'exemple du point source, $r = 0.4$, $h = 0.03$



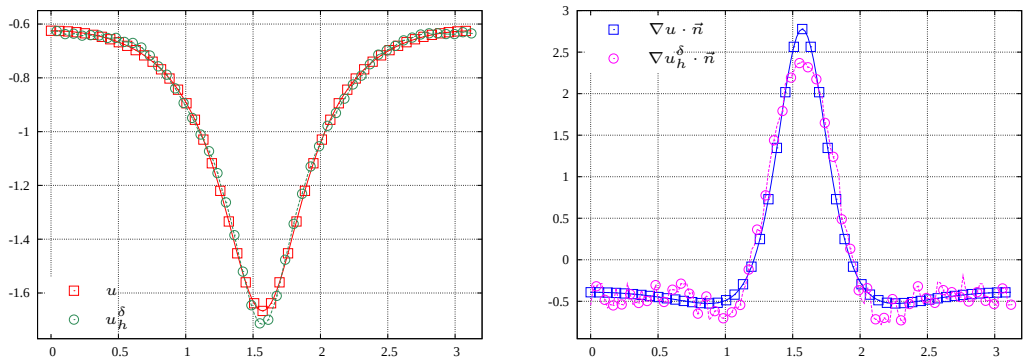
(a) Température sur Γ_u



(b) Flux sur Γ_u

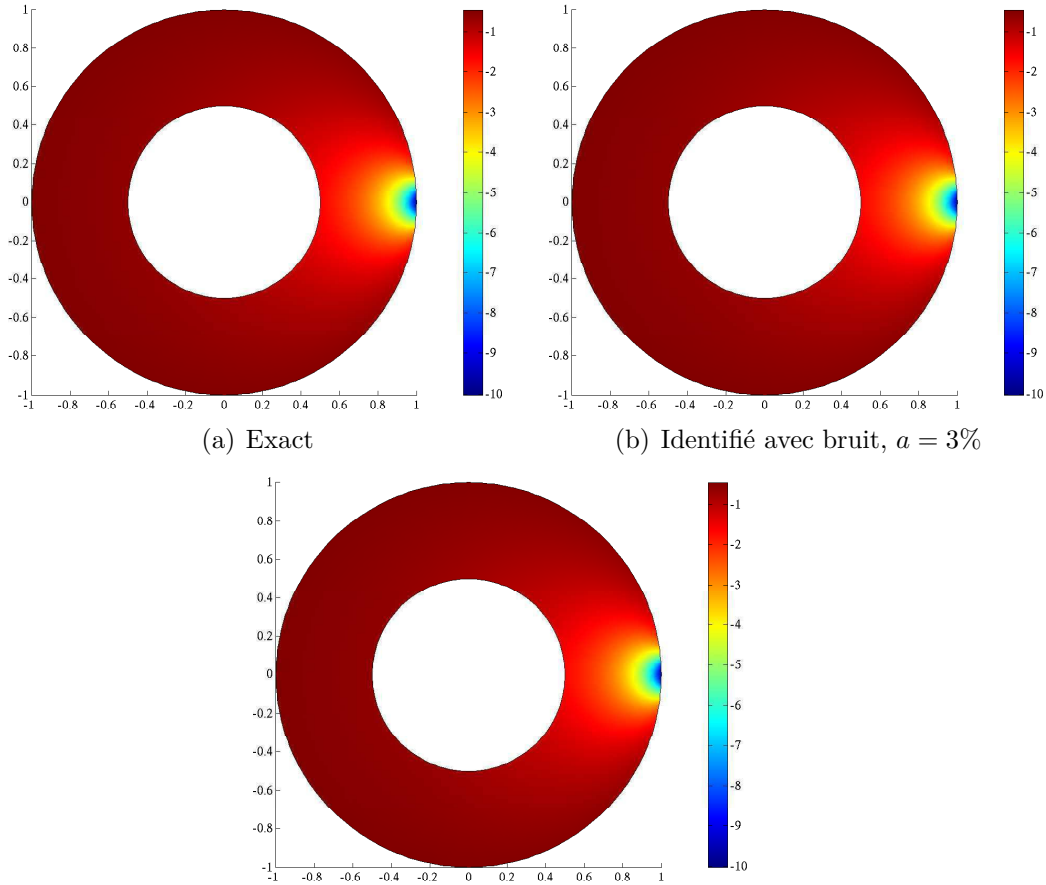
Fig. 2.15: Température et flux exacts (□) et identifiés (○) sur Γ_u pour l'exemple du point source, $r = 1.1$, $a = 3\%$, $h = 0.03$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés



(a) Température sur Γ_u (b) Flux sur Γ_u

Fig. 2.16: Température et flux exacts (□) et identifiés (○) sur Γ_u pour l'exemple du point source, $r = 1.1$, $a = 5\%$, $h = 0.03$



(a) Exact (b) Identifié avec bruit, $a = 3\%$

(c) Identifié avec bruit, $a = 5\%$

Fig. 2.17: Champs de température pour l'exemple du point source, $r = 1.1$, $h = 0.03$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

On souhaite maintenant éprouver l'efficacité et la robustesse du critère d'arrêt proposé sur l'exemple du fluide stratifié. On considère la reconstruction de la température et du flux sur la frontière interne d'un pipeline de longueur infinie. On suppose que la température ne dépend pas de la coordonnée longitudinale. On considère le problème suivant sur la géométrie définie par la figure 2.18 :

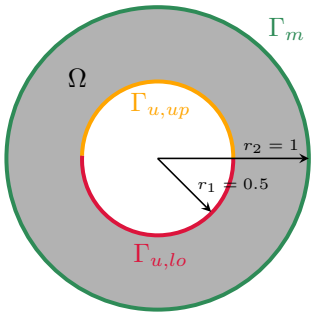


Fig. 2.18: Anneau pour l'exemple du fluide stratifié

$$\begin{cases} \nabla.(k\nabla u) = 0 \text{ in } \Omega \\ k\nabla u \cdot \vec{n} + \alpha u = T \text{ on } \Gamma, \end{cases} \tag{2.89}$$

où $k = 17\ W.m^{-1}.K^{-1}$ est la constante de conductivité thermique, T est la température, α est le coefficient de Fourier. La frontière Γ_u est divisée en deux parties, le demi-cercle inférieur $\Gamma_{u,lo} = \{(x,y) \in \Gamma_u; y < 0\}$ et le demi-cercle supérieur $\Gamma_{u,up} = \{(x,y) \in \Gamma_u; y \geq 0\}$. Les valeurs des coefficients sont données dans le tableau 2.1.

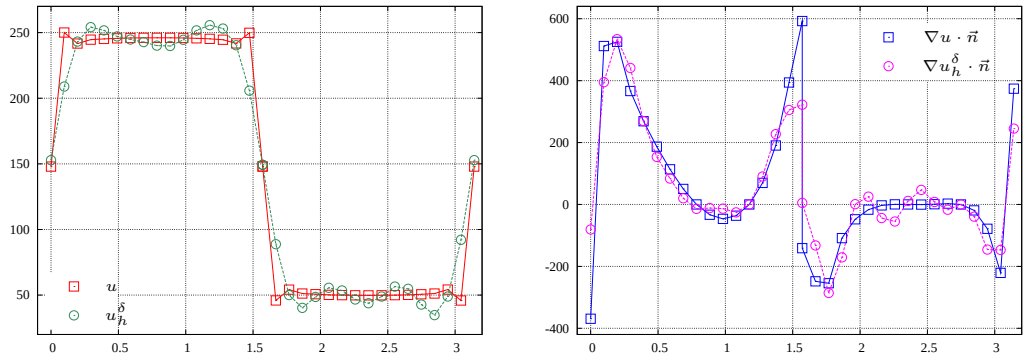
	T (°C)	α ($W.m^{-2}.°C^{-1}$)
Γ_m	20	12
$\Gamma_{u,up}$	250	1000
$\Gamma_{u,lo}$	50	1000

Tab. 2.1: Coefficients pour l'exemple du fluide stratifié

Les données de Cauchy sont générées par la résolution du problème (2.89). Un bruit aléatoire est alors appliqué sur la donnée de Dirichlet et on suppose que le flux est connu sur Γ_m. Les figures 2.19 et 2.20 représentent la solution du problème de complétion de données fournie par la résolution de (2.89) et celles identifiées par la méthode énergétique avec des taux de bruit respectivement de 3% et 5%. On note que la température et le flux reconstitués sont proches de la solution que l'on cherche à approcher. Les champs de température exact et identifiés avec ces mêmes taux de bruit sont représentés par la figure 2.21.

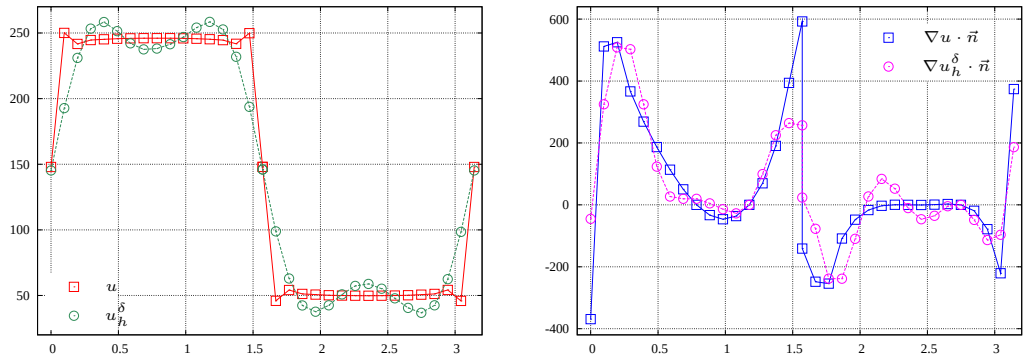
Enfin, on augmente le taux de bruit jusqu'à 10%. La figure 2.22 montre les résultats obtenus avec un algorithme d'optimisation classique, c'est à dire sans le critère d'arrêt proposé, l'explosion numérique de la solution identifiée est alors clairement visible. La figure 2.23 représente les résultats obtenus avec le critère d'arrêt défini par (2.62). On identifie alors une solution cohérente, la stratification

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés



(a) Température sur Γ_u (b) Flux sur Γ_u

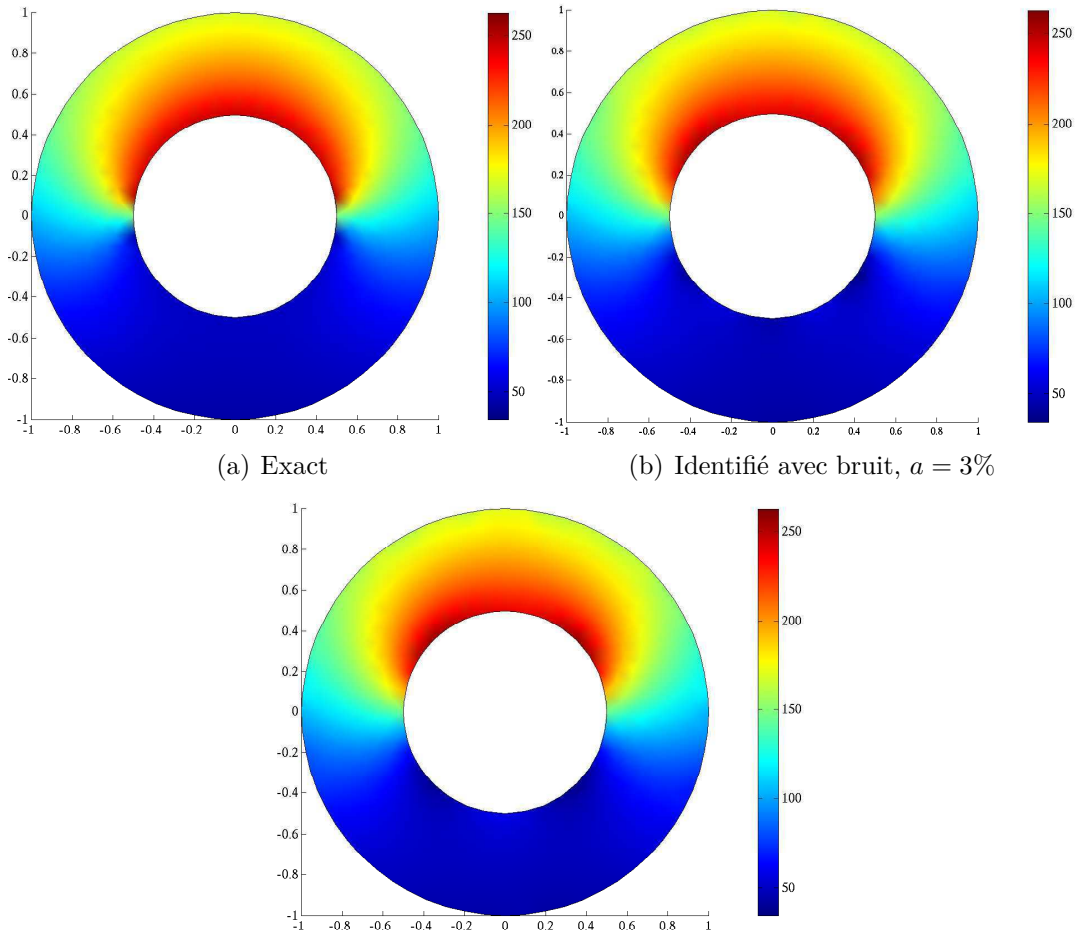
Fig. 2.19: Température et flux exacts (□) et identifiés (○) sur Γ_u avec données bruitées pour l'exemple du fluide stratifié, $h = 0.1$, $a = 3\%$.



(a) Température sur Γ_u (b) Flux sur Γ_u

Fig. 2.20: Température et flux exacts (□) et identifiés (○) sur Γ_u avec données bruitées pour l'exemple du fluide stratifié, $h = 0.1$, $a = 5\%$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés



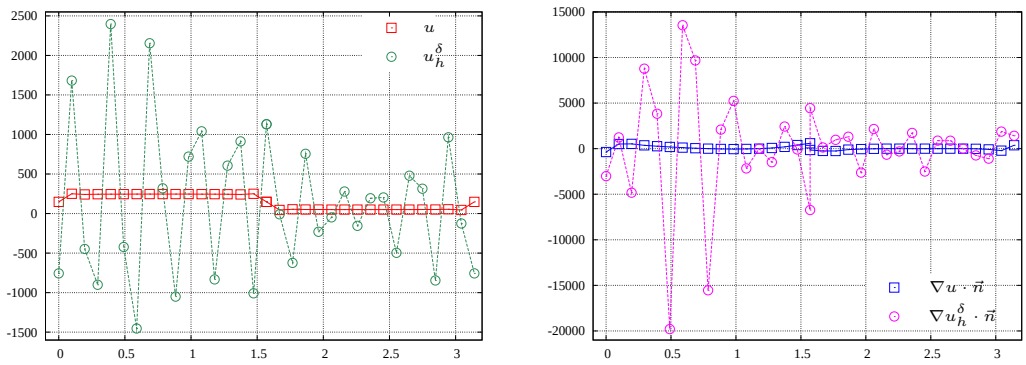
(a) Exact (b) Identifié avec bruit, $a = 3\%$

(c) Identifié avec bruit, $a = 5\%$

Fig. 2.21: Champs de température pour l'exemple du fluide stratifié, $h = 0.03$

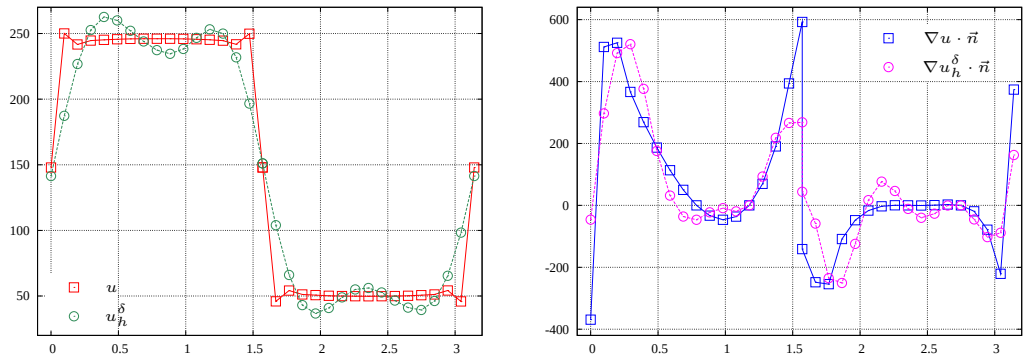
Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

est bien visible malgré un taux de bruit important. La figure 2.24 représente les champs de température avec et sans l'utilisation du critère d'arrêt.



(a) Température sur Γ_u (b) Flux sur Γ_u

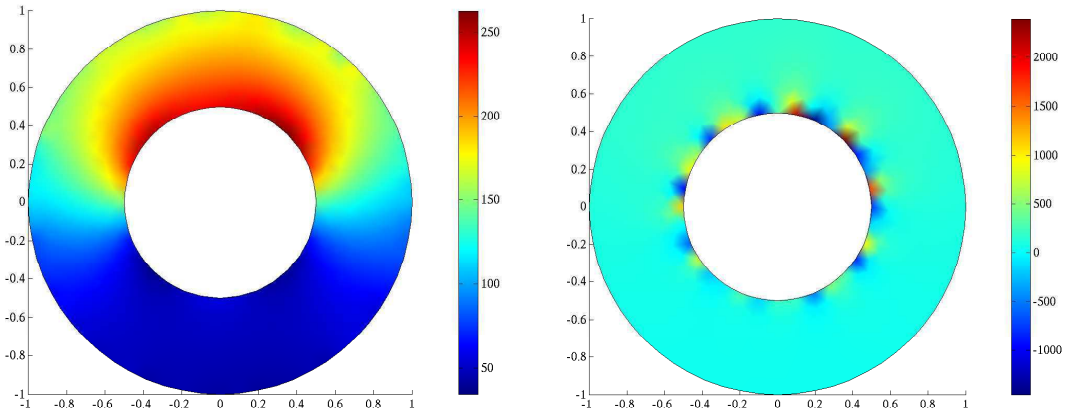
Fig. 2.22: Température et flux exacts (□) et identifiés (○) sur Γ_u avec données bruitées et sans le critère d'arrêt proposé, $a = 10\%$, $h = 0.1$.



(a) Température sur Γ_u (b) Flux sur Γ_u

Fig. 2.23: Température et flux exacts (□) et identifiés (○) sur Γ_u avec données bruitées avec le critère d'arrêt proposé, $a = 10\%$, $h = 0.1$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés



(a) Avec le critère d'arrêt (b) Sans le critère d'arrêt

Fig. 2.24: Champs de température pour l'exemple du fluide stratifié, $a = 10\%$, $h = 0.1$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Chapitre 3

Problème de Cauchy évolutif

Ce chapitre est consacré à l'application de la méthode énergétique pour la résolution du problème de Cauchy sur l'équation de la chaleur évolutive. Dans le cas d'une équation d'évolution, il est nécessaire de minimiser l'écart entre les champs introduits sur tout l'intervalle de temps mais également de contrôler cet écart au temps final, la condition initiale étant supposée connue. Comme pour le problème de Cauchy stationnaire, l'analyse numérique de la méthode aboutit à l'écriture d'estimations tenant compte des données bruitées et à la déduction d'un critère d'arrêt pour le processus d'optimisation.

Notations : En plus des notations précédemment introduites, on définit $L^2(0, D; E)$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur $[0, D]$ à valeurs dans E où E est un espace fonctionnel normé. De la même façon, $\mathscr{C}^n(0, D; E)$ désigne l'espace des fonctions n fois continûment différentiables sur $[0, D]$ à valeurs dans E. On note $\mathscr{D}'(]0, D[)$ l'espace des distributions dans $]0, D[$.

3.1 Position du problème

On rappelle que, pour $0 < D < \infty$, on pose

$$Q = \Omega \times]0, D[, \quad \Sigma_m = \Gamma_m \times]0, D[, \quad \Sigma_u = \Gamma_u \times]0, D[. \tag{3.1}$$

Étant donné une condition initiale u_0, une conductivité thermique $\tilde{k}$, une densité ρ et une capacité thermique c définies sur Ω, un terme source $\tilde{f}$ défini sur Q, une température T et un flux de température $\tilde{\phi}$ définis sur Σ_m, on souhaite reconstituer la température et le flux correspondants sur Σ_u. Ce problème peut s'écrire sous la forme du problème de Cauchy adimensionné suivant :

Trouver une fonction u vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nabla.\Big(k(x)\nabla u\Big) = f(t) \text{ dans } Q \\ k(x)\nabla u \cdot \vec{n} = \phi, \quad u = T \text{ sur } \Sigma_m \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall\, x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

où $k = \tilde{k}/\rho c$, $f = \tilde{f}/\rho c$ et $\phi = \tilde{\phi}/\rho c$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

A l'image du problème de Cauchy stationnaire, ce problème est encore très mal posé et le seul résultat acquis est l'unicité de la solution [ISA 97], si elle existe.

Le problème de complétion de données associé au problème de Cauchy (3.2) s'écrit

Trouver (η_d, τ_d) sur Σ_u tels qu'il existe u vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nabla.\Big(k(x)\nabla u\Big) = 0 \text{ dans } Q \\ u = T,\ k(x)\nabla u \cdot \vec{n} = \phi \text{ sur } \Sigma_m \\ u = \tau_d,\ k(x)\nabla u \cdot \vec{n} = \eta_d \text{ sur } \Sigma_u \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall\, x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Suivant la procédure décrite dans [AND 09], on introduit deux fonctions distinctes u_1 et u_2 solutions des deux problèmes suivants :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \nabla.\Big(k(x)\nabla u_1\Big) = f \text{ dans } Q \\ u_1 = T \text{ sur } \Sigma_m \\ k(x)\nabla u_1 \cdot \vec{n} = \eta \text{ sur } \Sigma_u \\ u_1(x,0) = u_0(x), \quad \forall\, x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \nabla.\Big(k(x)\nabla u_2\Big) = f \text{ dans } Q \\ u_2 = \tau \text{ sur } \Sigma_u \\ k(x)\nabla u_2 \cdot \vec{n} = \phi \text{ sur } \Sigma_m \\ u_2(x,0) = u_0(x), \quad \forall\, x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

On considère la fonctionnelle

$$E(\eta,\tau) = \int_0^D \int_\Omega k(x)\Big(\nabla u_1(\eta) - \nabla u_2(\tau)\Big)^2\, dx\, dt + \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(u_1(D;\eta) - u_2(D;\tau)\Big)^2\, dx \tag{3.6}$$

La méthode énergétique consiste à résoudre le problème de minimisation

$$(\eta^*, \tau^*) = \underset{(\eta,\tau)\in\mathscr{U}}{\operatorname{argmin}}\ E(\eta,\tau). \tag{3.7}$$

On a ainsi introduit explicitement les problèmes bien posés (3.4) et (3.5), la fonctionnelle (3.6) et le problème de minimisation (3.7) pour la méthode énergétique. Dans la section suivante, nous reprendrons et adapterons l'analyse effectuée dans la section 2.2 concernant la méthode énergétique pour le problème de Cauchy stationnaire.

3.2 Analyse mathématique de la méthode énergétique

3.2.1 Cadre variationnel

On suppose que $f \in L^2(0,D;L^2(\Omega))$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $k(x) \in L^\infty(\Omega)$ est strictement positive. Les solutions faibles des problèmes (3.4) et

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

(3.5) sont des fonctions $u_1, u_2 \in L^2\left(0, D; H^1(\Omega)\right) \cap \mathscr{C}^0\left(0, D; L^2(\Omega)\right)$. Pour les même raisons que dans le chapitre précédent, on suppose également que $(\phi, T) \in L^2\left(0, D; H^{-1/2}(\Gamma_m) \times H^{1/2}(\Gamma_m)\right)$ et que $(\eta, \tau) \in L^2\left(0, D; H^{-1/2}(\Gamma_u) \times H^{1/2}(\Gamma_u)\right)$, ce qui définit l'espace $\mathscr{U}$.

Le résultat suivant confirme que la solution du problème de minimisation (3.7) est bien solution du problème de complétion (3.3) de données.

Proposition 3.2.1 *Si les données (ϕ, T) sont compatibles et si la solution (η^*, τ^*) du problème de minimisation (3.7) existe, alors elle est solution du problème de complétion de données (3.3). En outre, lorsque le minimum est atteint, on a*

$$E(\eta^*, \tau^*) = 0 \quad \textit{et} \quad u_1(\eta^*) = u_2(\tau^*) \ \textit{dans} \ \bar{\Omega} \times [0, D]. \tag{3.8}$$

Démonstration : Si les données (ϕ, T) sont compatibles, il existe une unique solution u_d au problème de Cauchy. L'unique solution du problème de complétion de données est donc donnée par

$$(\eta_d, \tau_d) = (u_{d|\Gamma_u}, k(x)\nabla u_d \cdot \vec{n}_{|\Gamma_u}) \ \text{ sur } \Sigma_u. \tag{3.9}$$

On a donc

$$u_1(\eta_d) = u_2(\tau_d) = u_d \text{ dans } \bar{\Omega} \times [0, D], \tag{3.10}$$

d'où

$$0 \leq E(\eta^*, \tau^*) \leq E(\eta_d, \tau_d) = 0. \tag{3.11}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} &u_1(\eta^*) = u_2(\tau^*) + c \text{ dans } \bar{\Omega} \times [0, D] \text{ où } c \text{ est une constante} \\ &\text{et } u_1(D; \eta^*) = u_2(D; \tau^*). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Or, $u_1, u_2 \in \mathscr{C}^0\left(0, D; L^2(\Omega)\right)$, d'où

$$\lim_{t \to D} u_1(t; \eta^*) = u_1(D; \eta^*) \text{ et } \lim_{t \to D} u_2(t; \tau^*) = u_2(D; \tau^*). \tag{3.13}$$

La continuité de $u_1(\cdot, t)$ sur $[0, D]$ et (3.12) donnent

$$\lim_{t \to D} u_2(t; \tau^*) + c = u_2(D; \tau^*) \tag{3.14}$$

et donc, u_2 étant continue sur $[0, D]$, $c = 0$. On a bien $u_1(t; \eta^*) = u_2(t; \tau^*)$ pour tout $t \in [0, D]$. Par conséquent, pour tout $x \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} u_1(x; \eta^*) = u_2(x; \tau^*) = \\ = \mathbb{1}_{\{x \in \Gamma_u\}}(x)\tau^*(x) + \mathbb{1}_{\{x \in \Gamma_m\}}(x)T(x) = u_d(x) \in H^{1/2}(\Gamma) \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} &\text{et } k(x)\nabla u_1(x; \eta^*) \cdot \vec{n} = k(x)\nabla u_2(x; \tau^*) \cdot \vec{n} = \\ &\quad = \mathbb{1}_{\{x \in \Gamma_u\}}(x)\eta^*(x) + \mathbb{1}_{\{x \in \Gamma_m\}}(x)\phi(x) = k(x)\nabla u_d(x) \cdot \vec{n} \in H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

D'où, $(\eta^*, \tau^*) = (\eta_d, \tau_d)$. ■

On définit les relèvements des conditions limites de Dirichlet

$$\bar{u}_1(t) = \mathscr{R} P_m T(t) \quad \text{et} \quad \bar{u}_2(t;\tau) = \mathscr{R} P_m \tau(t), \tag{3.17}$$

où les opérateurs $\mathscr{R}$, P_m et P_u sont définis dans la section 2.2. Ainsi, on peut préciser que $\bar{u}_1,\ \bar{u}_2(\tau) \in L^2\left(0, D; H^1(\Omega)\right)$.

On effectue le changement de variables $\tilde{u}_i = u_i - \bar{u}_i,\ i = 1, 2$ et on note les conditions initiales associées au fonctions $\tilde{u}_i$ par $\tilde{u}_{i0} = u_0 - \bar{u}_i(0),\ i = 1, 2$.

On note $a_i(\cdot,\cdot)$ et $l_i(\cdot),\ i = 1, 2$ les formes bilinéaires et linéaires associées aux formulations faibles des problèmes (3.4) et (3.5). Elles sont données par

$$a_i(\tilde{u}_i(t), v_i) = \int_\Omega k(x) \nabla \tilde{u}_i(t) \nabla v_i \, dx \quad i = 1, 2, \tag{3.18}$$

$$l_1(v_1; t) = (f(t), v_1)_{0,\Omega} - \frac{d}{dt}(\bar{u}_1(t), v_1)_{0,\Omega} - a_1(\bar{u}_1(t), v_1) + \langle \eta(t), v_1 \rangle_{1/2,\Gamma_u}, \tag{3.19}$$

$$l_2(v_2; t) = (f(t), v_2)_{0,\Omega} \, dx - \frac{d}{dt}(\bar{u}_2(t;\tau), v_2)_{0,\Omega} - a_2(\bar{u}_2(t;\tau), v_2) + \langle \phi(t), v_2 \rangle_{1/2,\Gamma_m}. \tag{3.20}$$

Par sommation des formulations faibles associées aux problèmes (3.4) et (3.5), on a la formulation faible globale

$$\begin{aligned}
&\text{Trouver } u = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in L^2(0, D; V) \cap \mathscr{C}^0(0, D; H) \text{ telle que} \\
&\quad \frac{d}{dt}(u(t), v)_H + a(u(t), v) = L(v; t),\ \forall\ v = (v_1, v_2) \in V \text{ dans } \mathscr{D}'(]0, D[), \\
&\quad u(., 0) = u_{00} = (\tilde{u}_{10}, \tilde{u}_{20}), \\
&\text{avec } a(u(t), v) = a_1(\tilde{u}_1(t), v_1) + a_2(\tilde{u}_2(t), v_2) \\
&\text{et } L(v; t) = l_1(v_1; t) + l_2(v_2; t),
\end{aligned} \tag{3.21}$$

où les espaces H et V sont définis de la même façon que dans le chapitre précédent. Étant donné les propriétés des formes linéaire et bilinéaire $L(\cdot)$ et $a(\cdot,\cdot)$, on peut dire d'après un théorème dû à J.L. Lions [LIO 68b] que le problème variationnel (3.21) admet une unique solution.

3.2.2 Contrôle optimal

Comme dans la section 2.2.2, on souhaite se mettre dans le cadre théorique du contrôle optimal introduit dans le chapitre 1.

3.2.2.1 Position du problème

Pour les mêmes raisons que dans la section 2.2.2, on pose $V = H^1_{0,\Gamma_m}(\Omega) \times \left(H^1_{0,\Gamma_u}(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

On désigne par $\sigma = (\eta, \tau)$ le contrôle défini dans $\mathscr{U}$ et par $u(\sigma) = (\tilde{u}_1(\eta), \tilde{u}_2(\tau)) \in L^2(0, D; V)$ l'état du système.

La forme $v \mapsto a(u(t), v)$ est linéaire et continue. On peut donc écrire $a(u(t), v) = (Au(t), v)_{V',V}$ pour tout $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ et $v = (v_1, v_2)$ dans V, ce qui définit l'opérateur $A \in \mathscr{L}\left(L^2(0, D; V), L^2(0, D; V')\right)$.

On définit l'opérateur $B \in \mathscr{L}\left(\mathscr{U}, L^2(0, D; V')\right)$ donné par

$$(B\sigma, v)_{V',V} = \langle \eta, v_1 \rangle_{1/2,\Gamma_u} - \frac{d}{dt}(\bar{u}_2(\tau), v_2)_H - a_2(\bar{u}_2(\tau), v_2). \tag{3.22}$$

On peut alors définir $F \in V'$ de telle sorte que les problèmes (3.4) et (3.5) puissent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u(\sigma) \in W(0, D) \text{ telle que} \\ &\frac{du}{dt} + Au(\sigma) = F + B\sigma, \\ &u(0) = u_{00}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

En outre, on définit l'espace de Hilbert $\mathscr{H} = L^2(0, D; H)$ ainsi que les opérateurs $M \in \mathscr{L}\left(L^2(0, D; V), \mathscr{H}\right)$ et $N \in \mathscr{L}(H, H)$ par

$$M : u \longmapsto \sqrt{k(x)}(\nabla \tilde{u}_1 - \nabla \tilde{u}_2) \quad \text{et} \quad N : u(D) \longmapsto \sqrt{1/2}\,(\tilde{u}_1(D) - \tilde{u}_2(D)). \tag{3.24}$$

La fonction de coût s'écrit alors

$$J(\sigma) = \|Mu(\sigma)\|^2_{\mathscr{H}} + \|Nu(D; \sigma)\|^2_H. \tag{3.25}$$

Ainsi, le problème de contrôle

$$\text{Trouver } \omega \in \mathscr{U} \text{ tel que } J(\omega) = \inf_{\sigma \in \mathscr{U}} J(\sigma) \tag{3.26}$$

est équivalent au problème de minimisation (3.7). On note alors $\omega = (\eta^*, \tau^*)$ le contrôle optimal. De plus, lorsque le contrôle optimal est atteint, on a

$$\tilde{u}_1(\eta^*) = \tilde{u}_2(\tau^*) \text{ et } \bar{u}_1 = \bar{u}_2(\tau^*) \text{ p.p. sur } \Omega. \tag{3.27}$$

3.2.2.2 États adjoints et gradient de la fonctionnelle

Le problème de contrôle étant posé, on souhaite maintenant expliciter le gradient de le fonctionnelle. On introduit tout d'abord l'état adjoint $p(\sigma) = (p_1(\eta), p_2(\tau)) \in L^2(0, D; V)$. D'après (1.28), pour que ω soit contrôle optimal, l'équation suivante doit être satisfaite :

$$A^* p(\omega) = M^* \Lambda_{\mathscr{H}}(Mu(\omega)). \tag{3.28}$$

Comme précédemment, $\mathscr{H}$ s'identifie à son dual et donc $\Lambda_{\mathscr{H}} = Id$. Soit $v = (v_1, v_2) \in V$ une fonction test. On prend le produit scalaire dans la dualité V', V

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

de v avec chaque membre de l'équation (3.28) caractérisant le contrôle optimal. Il vient

$$-\frac{d}{dt}\left(p(\omega),v\right)_{V',V}+\left(A^*p(\omega),v\right)=\left(M^*Mu(\omega),v\right)_{V',V} \tag{3.29}$$

et par définition des opérateurs adjoints, on a

$$-\frac{d}{dt}\left(p(\omega),v\right)_{H}+\left(Av,p(\omega)\right)=\left(Mu(\omega),Mv\right)_{H}, \tag{3.30}$$

d'où,

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}(p_1,v_1)_{0,\Omega}-\frac{d}{dt}(p_2,v_2)_{0,\Omega}+&\\ +\int_\Omega k(x)\nabla p_1\nabla v_1\ dx+\int_\Omega k(x)\nabla p_2\nabla v_2\ dx&=\\ =\int_\Omega k(x)\nabla(\tilde{u}_1-\tilde{u}_2)\nabla(v_1-v_2)\ dx.&\end{aligned} \tag{3.31}$$

En appliquant la formule de Green et en tenant compte du fait que, pour tout v appartenant à V, $v_{1|\Gamma_m}=0$ et $v_{2|\Gamma_u}=0$, on obtient

$$\begin{aligned}\left(-\frac{dp_1}{dt}-\nabla.\left(k(x)\nabla p_1\right),v_1\right)_{0,\Omega}+\left(-\frac{dp_1}{dt}-\nabla.\left(k(x)\nabla p_1\right),v_2\right)_{0,\Omega}+&\\ +\int_{\Gamma_u}k(x)\nabla p_1\cdot\vec{n}v_1\ d\Gamma+\int_{\Gamma_u}k(x)\nabla p_2\cdot\vec{n}v_2\ d\Gamma&=\\ =\left(-\nabla.\left(k(x)\nabla(\tilde{u}_1-\tilde{u}_2)\right),v_1\right)_{0,\Omega}+\left(\nabla.\left(k(x)\nabla(\tilde{u}_2-\tilde{u}_1)\right),v_2\right)_{0,\Omega}+&\\ +\int_{\Gamma_u}\left(k(x)\nabla(\tilde{u}_1-\tilde{u}_2)\cdot\vec{n}\right)v_1\ d\Gamma+\int_{\Gamma_m}\left(-k(x)\nabla(\tilde{u}_1-\tilde{u}_2)\cdot\vec{n}\right)v_2\ d\Gamma.&\end{aligned} \tag{3.32}$$

De plus, l'équation (1.20) s'écrivant

$$p(D;\omega)=N^*\left(Nu(D;\omega)\right), \tag{3.33}$$

et caractérisant le contrôle optimal permet d'identifier les conditions finales des problèmes adjoints. En procédant de la même manière, on a

$$(p(D;\omega),v)_H=(N^*Nu(D;\omega),v)_H.$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}(p_1(D),v_1)_{0,\Omega}+(p_2(D),v_2)_{0,\Omega}=&\\ =(\tilde{u}_1(D)-\tilde{u}_2(D),v_1)_{0,\Omega}+(\tilde{u}_2(D)-\tilde{u}_1(D),v_2)_{0,\Omega}.&\end{aligned} \tag{3.34}$$

Par identification dans (3.32) et (3.34) et en tenant compte de (3.27), on obtient les deux problèmes adjoints

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p_1(\eta^*)}{\partial t}+\nabla.\left(k(x)\nabla p_1(\eta^*)\right)=\nabla.\left(k(x)\nabla(u_1(\eta^*)-u_2(\tau^*))\right)\ \text{dans } Q\\ k(x)\nabla p_1(\eta^*)\cdot\vec{n}=\eta^*-k(x)\nabla u_2(\tau^*)\cdot\vec{n}\ \text{sur } \Sigma_u\\ p_1(\eta^*)=0\ \text{sur } \Sigma_m\\ p_1(D;\eta^*)=u_1(D;\eta^*)-u_2(D;\tau^*)\ \text{dans } \Omega,\end{cases} \tag{3.35}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_2(\tau^*)}{\partial t} + \nabla.\,(k(x)\nabla p_2(\tau^*)) = \nabla.\,(k(x)\nabla(u_2(\tau^*) - u_1(\eta^*))) \text{ dans } Q \\ k(x)\nabla p_2(\tau^*)\cdot\vec{n} = \phi - k(x)\nabla u_1(\eta^*)\cdot\vec{n} \text{ sur } \Sigma_m \\ p_2(\tau^*) = 0 \text{ sur } \Sigma_u \\ p_2(D;\tau^*) = u_2(D;\tau^*) - u_1(D;\eta^*) \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.36}$$

On souhaite maintenant calculer le gradient de la fonctionnelle. D'après (1.21), lorsque le contrôle optimal ω est atteint, le gradient de la fonctionnelle doit vérifier

$$\frac{1}{2}\nabla J(\omega) = B^* p(\omega) = 0. \tag{3.37}$$

Avec les mêmes arguments que dans le cas elliptique, on obtient

$$\nabla J(\omega) = (2p_1(\eta^*), -2k(x)\nabla p_2(\tau^*)\cdot\vec{n}) \in \mathscr{U}'. \tag{3.38}$$

On a ainsi pu expliciter le gradient de la fonctionnelle en fonction des états adjoints p_1 et p_2.

Remarque 4 Ces deux problèmes adjoints présentent une discontinuité en D. En effet, tant que le contrôle optimal n'est pas atteint, $u_1(D) - u_2(D) \neq 0$ alors que l'on impose $p_1 = 0$ et $p_2 = 0$ respectivement sur Σ_u et Σ_m. Cette discontinuité provoque une importante instabilité numérique. Une solution consiste à calculer les états adjoints des problèmes totalement discrets, on choisit ici de calculer directement le gradient par rapport à chaque composante de la fonctionnelle discrète.

3.3 Discrétisation, analyse de convergence

3.3.1 Discrétisation spatiale

On considère l'espace d'approximation de dimension finie introduit dans le chapitre précédent. On définit également l'opérateur de projection elliptique $\Pi_h \in \mathscr{L}(V, V_h)$ par

$$a(u - \Pi_h u, v_h) = 0, \quad \forall\, v_h \in V_h. \tag{3.39}$$

Étant donné $u_{0h} = \Pi_h u_{00} \in V_h$, le problème semi-discret s'écrit

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u_h(t) = \Big(u_{1h}(t), u_{2h}(t)\Big) \in L^2(0, D; V_h) \cap \mathscr{C}^0(0, D; H) \text{ telle que} \\ &\frac{d}{dt}\Big(u_h(t), v_h\Big)_H + a\Big(u_h(t), v_h\Big) = L(v_h; t), \quad \forall\, v_h = (v_{1h}, v_{2h}) \in V_h \text{ dans } \mathscr{D}'(]0, D[), \\ &u_h(0) = u_{0h}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Proposition 3.3.1 *En plus des hypothèses $(i) - (v)$, on suppose qu'il existe un entier $l \geq 1$ tel que l'inclusion suivante soit satisfaite :*

$$H^{l+1}(\hat{K}) \subset \mathscr{C}^s(\hat{K}) \text{ avec injection continue,} \tag{3.41}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

où s est l'ordre maximal des dérivées partielles intervenant dans la définition de l'ensemble $\hat{\Sigma}$.

Alors, si la solution du problème variationnel (3.21) $u(t) \in V \cap \left(H^{l+1}(\Omega)\right)^2$ pour tout $t \in [0, D]$ et pour tout $(\eta, \tau) \in \mathscr{U}$ fixé, il existe une constante C indépendante de h et Δt telle que

$$\|u(t) - u_h(t)\|_V \leq Ch^l \left\{ |||u(t)|||_{l+1,\Omega} + \left(\int_0^t |||\frac{du}{dt}(s)|||_{l+1,\Omega}^2 \, ds \right)^{1/2} \right\}, \quad (3.42)$$

où $u_h(t) \in V_h$ est la solution du problème semi-discret (3.40).

Démonstration : On note $u_h - u = \underbrace{u_h - \Pi_h u}_{\theta} + \underbrace{\Pi_h u - u}_{\rho}$. Une estimation pour $\|\rho(t)\|_V$ étant donnée par le théorème A.5.1, il reste à estimer la norme $\|\theta(t)\|_V$. En prenant comme fonction test $v_h \in V_h$ dans (3.21) et (3.40), on obtient par égalité des seconds membres

$$\frac{d}{dt}(u_h, v_h)_H + a(u_h, v_h) = \frac{d}{dt}(u, v_h)_H + a(u, v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad (3.43)$$

d'où

$$\frac{d}{dt}(u_h - \Pi_h u, v_h)_H + a(u_h - \Pi_h u, v_h) = \frac{d}{dt}(u - \Pi_h u, v_h)_H + a(u - \Pi_h u, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.44)$$

Par définition, $a(u - \Pi_h u, v_h) = 0, \quad \forall\, v_h \in V_h$. On a alors

$$(\theta_t, v_h)_H + a(\theta, v_h) = -(\rho_t, v_h)_H, \quad (3.45)$$

où θ_t et ρ_t sont respectivement les dérivées de θ et ρ par rapport à t. En prenant $v_h = \theta_t$ comme fonction test on obtient

$$\begin{aligned} & \|\theta_t\|_H^2 + a(\theta, \theta_t) = -(\rho_t, \theta_t)_H \\ \Leftrightarrow \quad & \|\theta_t\|_H^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a(\theta, \theta) = -(\rho_t, \theta_t)_H. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Minkowski et la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ étant V-elliptique, on a

$$\|\theta_t\|_H^2 + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|_V^2 + \leq \frac{1}{2}\left(\|\rho_t\|_H^2 + \|\theta_t\|_H^2\right). \quad (3.46)$$

De plus, l'injection canonique de V dans H étant dense et continue, il existe une constante C telle que

$$\frac{d}{dt}\|\theta\|_V^2 \leq C\|\rho_t\|_V^2. \quad (3.47)$$

En intégrant sur $[0, t]$ et en tenant compte du fait que $\theta(0) = 0$, on a

$$\|\theta(t)\|_V \leq C \left(\int_0^t \|\rho_t(s)\|_V^2 \, ds \right)^{1/2}. \quad (3.48)$$

Le théorème (A.5.1) appliqué à $\|\rho_t(s)\|_V$ dans l'inégalité (3.48) donne l'estimation recherchée. ■

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

3.3.2 Discrétisation totale

On souhaite maintenant discrétiser également par rapport à la variable de temps t. On introduit le pas de temps Δt et le temps $t_n = n\Delta t$, $0 \leq n \leq N$. On note $u_h^n \in V_h$ l'approximation de $u(t_n)$. On utilise le schéma d'Euler implicite qui consiste à remplacer la dérivée par rapport au temps par une différence finie rétrograde, ce qui définit le problème totalement discret

$$\begin{aligned}
&\text{Trouver } \{u_h^n \in V_h;\ 0 \leq n \leq N\} \text{ telle que} \\
&\frac{1}{\Delta t}(u_h^{n+1} - u_h^n, v_h)_H + a(u_h^{n+1}, v_h) = L(v_h; t_{n+1}),\ 0 \leq n \leq N-1,\ \forall\, v_h \in V_h, \\
&u_h^0 = u_{0h}.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Proposition 3.3.2 *Sous les hypothèses de la proposition 3.3.1, si la solution du problème variationnel (3.21) $u(t) \in V \cap \left(H^{l+1}(\Omega)\right)^2$ pour tout $t \in [0, D]$, alors il existe, pour tout $(\eta, \tau) \in \mathscr{U}$ fixé, une constante C indépendante de h et Δt telle que*

$$\begin{aligned}
\|u(t_n) - u_h^n\|_V \leq C \Bigg\{ h^l \left(|||u_0|||_{l+1,\Omega} + \left(\int_0^{t_n} |||\frac{du}{dt}(s)|||_{l+1,\Omega}^2 \ ds \right)^{1/2} \right) + \\
+ \Delta t \left(\int_0^{t_n} \left\| \frac{d^2u}{dt^2}(s) \right\|_H^2 \ ds \right)^{1/2} \Bigg\},
\end{aligned} \tag{3.50}$$

où $\{u_h^n \in V_h, 0 \leq n \leq N\}$ est la solution discrète.

Démonstration : Notons $\bar{\partial}$ l'opérateur de différenciation discrète défini par

$$\bar{\partial} u_h^n = \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t}. \tag{3.51}$$

L'équation (3.49) devient

$$(\bar{\partial} u_h^{n+1}, v_h)_H + a(u_h^{n+1}, v_h) = L(v_h; t_{n+1}). \tag{3.52}$$

On pose $u_h^n - u(t_n) = \underbrace{u_h^n - \Pi_h u(t_n)}_{\theta^n} + \underbrace{\Pi_h u(t_n) - u(t_n)}_{\rho^n}$. En utilisant le théorème A.5.1, il vient

$$\|\rho^n\|_V \leq C h^l \, |||\, u(t_n)|||_{l+1,\Omega} \leq C h^l \left\{ |||u_0|||_{l+1,\Omega} + \int_0^{t_n} |||\frac{du(s)}{dt}|||_{l+1,\Omega} \ ds \right\}. \tag{3.53}$$

Il reste à écrire une estimation pour $\|\theta^n\|_V$. A partir de (3.52), on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\bar{\partial}\left(u_h^{n+1} - \Pi_h u(t_{n+1})\right), v_h\right)_H + a\left(u_h^{n+1} - \Pi_h u(t_{n+1}), v_h\right) = \\
L(v_h; t_{n+1}) - \left(\bar{\partial}\Pi_h u(t_{n+1}), v_h\right)_H - a\left(\Pi_h u(t_{n+1}), v_h\right).
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Or, par définition de Π_h et d'après (3.21)

$$a\left(\Pi_h u(t_{n+1}), v_h\right) = a(u(t_{n+1}), v_h) = L(v_h; t_{n+1}) - \left(\frac{du(t_{n+1})}{dt}, v_h\right)_H, \tag{3.55}$$

d'où

$$(\bar{\partial}\theta^{n+1}, v_h)_H + a(\theta^{n+1}, v_h) = -(\omega^{n+1}, v_h)_H, \tag{3.56}$$

où $\omega^{n+1} = \bar{\partial}\Pi_h u(t_{n+1}) - \dfrac{du(t_{n+1})}{dt}$.

On prend $v_h = \bar{\partial}\theta^{n+1}$ comme fonction test dans (3.56), il vient

$$\|\bar{\partial}\theta^{n+1}\|_H^2 + a(\theta^{n+1}, \bar{\partial}\theta^{n+1}) \leq |(\omega^{n+1}, \bar{\partial}\theta^{n+1})_H|. \tag{3.57}$$

D'après l'inégalité de Minkowski et en développant $a(\theta^{n+1}, \bar{\partial}\theta^{n+1})$, on a

$$a(\theta^{n+1}, \theta^{n+1}) \leq \frac{\Delta t}{2}\left(\|\omega^{n+1}\|_H^2 - \|\bar{\partial}\theta^{n+1}\|_H^2\right) + a(\theta^{n+1}, \theta^n). \tag{3.58}$$

En utilisant l'inégalité $2pq \leq cp^2 + \dfrac{1}{c}q^2,\ c > 0$, on obtient alors

$$a(\theta^{n+1}, \theta^{n+1}) \leq \frac{\|k\|_{\infty,\Omega}}{2}(\frac{1}{c}\|\theta^{n+1}\|_V^2 + c\|\theta^n\|_V^2). \tag{3.59}$$

La forme $a(\cdot,\cdot)$ étant V-elliptique, on a

$$\left(\frac{2c\alpha - \|k\|_{\infty,\Omega}}{2c}\right)\|\theta^{n+1}\|_V^2 \leq \frac{\Delta t}{2}\|\omega^{n+1}\|_H^2 + \frac{c\|k\|_{\infty,\Omega}}{2}\|\theta^n\|_V^2. \tag{3.60}$$

En choisissant c de telle sorte que $2c\alpha - \|k\|_{\infty,\Omega} > 0$, on obtient

$$\|\theta^{n+1}\|_V^2 \leq C\left(\Delta t\|\omega^{n+1}\|_H^2 + \|\theta^n\|_V^2\right) \text{ avec } C = \frac{\max\{c, c^2\|k\|_{\infty,\Omega}\}}{2c\alpha - \|k\|_{\infty,\Omega}}. \tag{3.61}$$

En raisonnant de manière récursive à partir de (3.61), il vient

$$\|\theta^n\|_V^2 \leq C\Delta t\sum_{j=1}^{n}\|\omega^j\|_H^2 + \|\theta^0\|_V^2. \tag{3.62}$$

Notons que, comme $u_h^0 = \Pi_h u_0$, $\|\theta^0\|_V = 0$. On s'intéresse maintenant à la majoration de $\|\omega^j\|_H^2$. On pose

$$\omega_1^j = (\Pi_h - I)\bar{\partial}u(t_j) \ \text{ et } \ \omega_2^j = \bar{\partial}u(t_j) - \frac{du(t_j)}{dt}. \tag{3.63}$$

On a immédiatement

$$\Delta t\omega_1^j = \int_{t_j-1}^{t_j}(\Pi_h - I)\frac{du(s)}{dt}\ ds. \tag{3.64}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Après des manipulations usuelles sur les intégrales, on obtient

$$\Delta t \sum_{j=1}^{n} \|\omega_1^j\|_H^2 \leq \int_0^{t_n} \left\| (\Pi_h - I) \frac{du(s)}{dt} \right\|_H^2 \, ds, \tag{3.65}$$

d'où, d'après le théorème (A.5.1),

$$\Delta t \sum_{j=1}^{n} \|\omega_1^j\|_H^2 \leq C h^{2(l+1)} \int_0^{t_n} |||\frac{du(s)}{dt}|||_{l+1,\Omega}^2 \, ds. \tag{3.66}$$

De plus,

$$\Delta t \omega_2^j = u(t_j) - u(t_{j-1}) - \Delta t \frac{du(t_j)}{dt}, \tag{3.67}$$

en effectuant un développement limité d'ordre 1 de $u(t_{j-1})$ autour de t_j avec reste intégral, il vient

$$\Delta t \omega_2^j = -\int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) \frac{d^2 u(s)}{dt^2} \, ds, \tag{3.68}$$

d'où

$$\Delta t \sum_{j=1}^{n} \|\omega_2^j\|_H^2 \leq \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} |s - t_{j-1}| \left\| \frac{d^2 u(s)}{dt^2} \right\|_H \, ds \right)^2, \tag{3.69}$$

et avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\Delta t \sum_{j=1}^{n} \|\omega_2^j\|_H^2 \leq \Delta t^2 \int_0^{t_n} \left\| \frac{d^2 u(s)}{dt^2} \right\|_H^2 \, ds. \tag{3.70}$$

Les inégalités (3.71),(3.66) et (3.70) donnent alors

$$\|\theta^n\|_V \leq C \left\{ h^l \left(\int_0^{t_n} |||\frac{du(s)}{dt}|||_{l+1,\Omega}^2 \, ds \right)^{1/2} + \Delta t \left(\int_0^{t_n} \left\| \frac{d^2 u(s)}{dt^2} \right\|_H^2 \, ds \right)^{1/2} \right\}. \tag{3.71}$$

Les équations (3.53) et (3.71) donnent l'estimation (3.50). ■

3.3.3 Introduction de données bruitées et estimations d'erreur

Dans le cas de données bruitées, notées (ϕ^δ, T^δ), le problème (3.49) s'écrit :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \{u_{h\delta}^n \in V_h;\ 0 \leq n \leq N\} \text{ telle que} \\ &\frac{1}{\Delta t}(u_{h\delta}^{n+1} - u_{h\delta}^n, v_h)_H + a(u_{h\delta}^{n+1}, v_h) = L^\delta(v_h; t_{n+1}),\ 0 \leq n \leq N-1,\ \forall\, v_h \in V_h, \\ &u_{h\delta}^0 = u_{0h}. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

où $L^\delta(\cdot)$ est la forme linéaire avec les données bruitées (ϕ^δ, T^δ) et est donnée par

$$L^\delta(v_h;t) = (f, v_{1h})_{0,\Omega} - \frac{d}{dt}(\bar{u}_1^\delta(t), v_{1h})_{0,\Omega} - a_1(\bar{u}_1^\delta(t), v_{1h}) + \langle \eta(t), v_{1h}\rangle_{1/2,\Gamma_u}$$
$$+ (f, v_{2h})_{0,\Omega} - \frac{d}{dt}(\bar{u}_2(t;\tau), v_{2h})_{0,\Omega} - a_1(\bar{u}_2(t;\tau), v_{2h}) + \langle \phi^\delta(t), v_{2h}\rangle_{1/2,\Gamma_m} \quad (3.73)$$

avec $\bar{u}_1^\delta(t)$ le relèvement de la donnée de Dirichlet bruitée $T^\delta(t)$ prolongée sur tout Γ, soit $\bar{u}_1^\delta(t) = \mathscr{R}P_m T^\delta(t)$.

Proposition 3.3.3 *Sous les hypothèses de la proposition 3.3.1, si la solution du problème variationnel (3.21) $u(t) \in V \cap \left(H^{l+1}(\Omega)\right)^2$ pour tout $t \in [0, D]$, alors il existe, pour tout $(\eta, \tau) \in \mathscr{U}$ fixé, une constante C indépendante de h, Δt et des données telle que*

$$\|u(t_n) - u_{h\delta}^n\|_V \leq C \left\{ h^l \left(|||u_{00}|||_{l+1,\Omega} + \left(\int_0^{t_n} |||\frac{du}{dt}(s)|||_{l+1,\Omega}^2 \, ds \right)^{1/2} \right) \right.$$
$$+ \Delta t \left(\int_0^{t_n} |||\frac{d^2u}{dt^2}(s)|||_{l+1,\Omega}^2 \, ds \right)^{1/2}$$
$$\left. + \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^n \left\| \frac{d(T - T^\delta)}{dt}(t_j) \right\|_{1/2,\Gamma_m} + \frac{1}{h}\|\delta(t_j)\| \right\} \quad (3.74)$$

où

$$\|\delta(t)\| = \left(\|T(t) - T^\delta(t)\|_{1/2,\Gamma_m}^2 + \|\phi(t) - \phi^\delta(t)\|_{-1/2,\Gamma_m}^2 \right)^{1/2} \quad (3.75)$$

est la norme du bruit et $\{u_{h\delta}^n \in V_h;\ 0 \leq n \leq N\}$ est la solution du problème discret bruité (3.72).

Démonstration : Le schéma (3.72) peut s'écrire

$$(\bar{\partial} u_{h\delta}^{n+1}, v_h)_H + a(u_{h\delta}^{n+1}, v_h) = L^\delta(v_h; t_{n+1}). \quad (3.76)$$

On pose $u_{h\delta}^n - u(t_n) = \underbrace{u_h^n - u(t_n)}_{\rho^n} + \underbrace{u_{h\delta}^n - u_h^n}_{\theta_\delta^n}$. Une estimation pour $\|\rho^n\|_V$ est donnée par la proposition 3.3.1. De (3.76), on déduit

$$\left(\bar{\partial}(u_{h\delta}^{n+1} - u_h^{n+1}), v_h\right)_H + a(u_{h\delta}^{n+1} - u_h^{n+1}, v_h) =$$
$$L^\delta(v_h; t_{n+1}) - (\bar{\partial} u_h^{n+1}, v_h)_H - a(u_h^{n+1}, v_h), \quad (3.77)$$

or u_h^{n+1} est solution du schéma (3.49), d'où

$$(\bar{\partial}\theta_\delta^{n+1}, v_h)_H + a(\theta_\delta^{n+1}, v_h) = L^\delta(v_h; t_{n+1}) - L(v_h; t_{n+1}). \quad (3.78)$$

On considère $\omega_\delta^n \in V_h$ défini par

$$(\omega_\delta^n, v_h)_H = L^\delta(v; t_n) - L(v; t_n), \quad (3.79)$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

il vient alors

$$(\bar{\partial}\theta_\delta^{n+1}, v_h)_H + a(\theta_\delta^{n+1}, v_h) = (\omega_\delta^{n+1}, v_h)_H. \tag{3.80}$$

En prenant $v_h = \bar{\partial}\theta_\delta^{n+1}$ comme fonction test et en procédant comme dans la preuve de la proposition 3.3.1, on obtient

$$\|\theta_\delta^n\|_V^2 \leq C\Delta t \sum_{j=1}^{n} \|\omega_\delta^j\|_H^2 + \|\theta_\delta^0\|_V^2. \tag{3.81}$$

Il reste à majorer $\|\omega_\delta^j\|_H$. D'après (3.79),

$$(\omega_\delta^j, v_h)_H = \left(\frac{d(\bar{u}_1 - \bar{u}_1^\delta)}{dt}(t_j), v_{1h}\right)_{0,\Omega} + a_1\left(\bar{u}_1(t_j) - \bar{u}_1^\delta(t_j), v_{1h}\right) - \langle \phi(t_j) - \phi^\delta(t_j), v_{2h}\rangle_{1/2,\Gamma_m}, \tag{3.82}$$

d'où,

$$|(\omega_\delta^j, v_h)_H| \leq \left|\frac{d}{dt}\left(\mathscr{R}P_m(T(t_j) - T^\delta(t_j)), v_{1h}\right)_{0,\Omega}\right| + \left|a_1\left(\mathscr{R}P_m(T(t_j) - T^\delta(t_j)), v_{1h}\right)\right| + |\langle \phi(t_j) - \phi^\delta(t_j), v_{2h}\rangle_{1/2,\Gamma_m}|. \tag{3.83}$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par continuité de la forme $a_1(\cdot,\cdot)$ et de l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, il vient

$$|(\omega_\delta^j, v_h)_H| \leq \left\|\mathscr{R}P_m\left(\frac{d(T - T^\delta)}{dt}(t_j)\right)\right\|_{1,\Omega} \|v_{1h}\|_{0,\Omega} + \left\|\mathscr{R}P_m\left(T(t_j) - T^\delta(t_j)\right)\right\|_{1,\Omega} \|v_{1h}\|_{1,\Omega} + \|\phi(t_j) - \phi^\delta(t_j)\|_{-1/2,\Gamma_m} \|v_{2h}\|_{1/2,\Gamma_m}. \tag{3.84}$$

Les opérateurs de relèvement $\mathscr{R}$, de prolongement P_m et de trace étant continus, on obtient la majoration

$$|(\omega_\delta^j, v_h)_H| \leq C\left\{\left\|\frac{d(T - T^\delta)}{dt}(t_j)\right\|_{1/2,\Gamma_m} \|v_h\|_H + \left(\left\|T(t_j) - T^\delta(t_j)\right\|_{1/2,\Gamma_m} + \|\phi(t_j) - \phi^\delta(t_j)\|_{-1/2,\Gamma_m}\right)\|v_h\|_V\right\}. \tag{3.85}$$

D'après l'inégalité inverse (A.32) et en prenant $v_h = \omega_\delta^n \in V_h$ comme fonction test, on a

$$\|\omega_\delta^j\|_H \leq C\left\{\left\|\frac{d(T - T^\delta)}{dt}(t_j)\right\|_{1/2,\Gamma_m} + \frac{1}{h}\left(\left\|T(t_j) - T^\delta(t_j)\right\|_{1/2,\Gamma_m} + \|\phi(t_j) - \phi^\delta(t_j)\|_{-1/2,\Gamma_m}\right)\right\}. \tag{3.86}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Enfin, on obtient avec (3.86) et (3.81)

$$\|\theta_\delta^n\|_V^2 \leq C\Delta t \sum_{j=1}^{n} \left(\left\| \frac{d(T-T^\delta)}{dt}(t_j) \right\|_{1/2,\Gamma_m} + \frac{1}{h}\|\delta(t_j)\| \right)^2, \tag{3.87}$$

où $\|\delta(t_j)\|$ est défini par (3.75). Les équations (3.50), (3.81) et (3.87) donnent l'estimation (3.74). ■

3.3.4 Dérivation d'un critère d'arrêt du processus de minimisation

On introduit une formule de quadrature générale sur une fonction continue f où les poids et les nœuds sont notés respectivement (α_j, t_j)

$$I_N(f) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j f(t_j) \sim \int_0^D f(t)\ dt. \tag{3.88}$$

La fonctionnelle discrète bruitée est définie par

$$E_h^\delta(\eta,\tau) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \int_\Omega k(x) \left(\nabla u_{1h\delta}^j(\eta) - \nabla u_{2h\delta}^j(\tau) \right)^2\ dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(u_{1h\delta}^N(\eta) - u_{2h\delta}^N(\tau) \right)^2\ dx. \tag{3.89}$$

Proposition 3.3.4 *Sous les hypothèses de la proposition 3.3.1, si la solution du problème variationnel (3.21) $u(t) \in V \cap \left(H^{l+1}(\Omega)\right)^2$ pour tout $t \in [0,D]$ et si (η^*,τ^*) est la solution du problème de minimisation (3.7), alors il existe une constante C indépendante de h et des données telle que*

$$\begin{aligned} E_h^\delta(\eta^*,\tau^*) \leq C \Bigg\{ & h^{2l} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \left(|||u_{00}|||_{l+1,\Omega} + \left(\int_0^{t_n} |||\frac{du}{dt}(s)|||_{l+1,\Omega}^2\ ds \right)^{1/2} \right)^2 + \\ & + \Delta t^2 \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \left(\int_0^{t_n} |||\frac{d^2u}{dt^2}(s)|||_{l+1,\Omega}^2\ ds \right) \\ & + \Delta t \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \left(\sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{d(T-T^\delta)}{dt}(t_j) \right\|_{1/2,\Gamma_m} + \frac{1}{h}\|\delta(t_j)\| \right)^2 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Démonstration : Notons (η^*,τ^*) la solution du problème de minimisation (3.7). En tenant compte du fait que $u_1(\eta^*) = u_2(\tau^*)$, on obtient

$$\begin{aligned} & E_h^\delta(\eta^*,\tau^*) = \\ & \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \int_\Omega k(x) \left[\left(\nabla u_{1h\delta}^j(\eta^*) - \nabla u_1(t_j;\eta^*) \right) - \left(\nabla u_{2h\delta}^j(\tau^*) - \nabla u_2(t_j;\tau^*) \right) \right]^2\ dx \\ & \quad + \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left(u_{1h\delta}^N(\eta^*) - u_1(t_N;\eta^*) \right) - \left(u_{2h\delta}^N(\tau^*) - u_2(t_N;\tau^*) \right) \right]^2\ dx. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Avec l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, il vient

$$E_h^\delta(\eta^*,\tau^*) \leq 2\|k\|_{\infty,\Omega} \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \left(|u_{1h\delta}^j(\eta^*) - u_1(t_j;\eta^*)|_{1,\Omega}^2 + |u_{2h\delta}^j(\tau^*) - u_2(t_j;\tau^*)|_{1,\Omega}^2 \right)$$
$$+ \left(\|(u_{1h\delta}^N(\eta^*) - u_1(t_N;\eta^*)\|_{0,\Omega}^2 + \|u_{2h\delta}^N(\tau^*) - u_2(t_N;\tau^*)\|_{0,\Omega}^2 \right), \quad (3.92)$$

d'où

$$E_h^\delta(\eta^*,\tau^*) \leq 2\|k\|_{\infty,\Omega} \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j \, |||\, u_{h\delta}^j(\omega) - u(t_j;\omega)|||_{1,\Omega}^2$$
$$+ \max\{2\|k\|_{\infty,\Omega}, 1/\alpha_N\}\alpha_N \|u_{h\delta}^N(\omega) - u(t_N;\omega)\|_V^2. \quad (3.93)$$

En majorant la semi-norme dans V par la norme associée pour $1 \leq j \leq N-1$, on a

$$E_h^\delta(\eta^*,\tau^*) \leq C \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \|u_{h\delta}^j(\omega) - u(t_j;\omega)\|_V^2, \quad (3.94)$$

où la constante C peut dépendre de Δt. En appliquant l'estimation (3.74) à (3.94), on obtient (3.90). ■

Contrairement à ce que l'on a pu constater dans le cas elliptique, cette information n'est pas suffisante pour la dérivation d'un critère d'arrêt efficace. En effet, l'estimation (3.90) du seuil atteint par la fonctionnelle est basée sur l'estimation d'erreur (3.74) tenant compte des données bruitées. Cette estimation donne une information sur le comportement en ordre de l'erreur, cependant l'erreur est surévaluée à chaque pas de temps, ce qui se répercute sur l'évaluation du seuil atteint par la fonctionnelle. Il est donc nécessaire, à défaut d'avoir une estimation de l'erreur plus fine, de tenir compte des quantités qui peuvent s'accumuler lors des majorations pour l'obtention de l'estimation (3.90).

Ainsi, on remarque que lors de l'écriture de l'estimation (3.90), on a majoré la semi-norme dans V par la norme dans V. On inclut donc dans la majoration le carré de la norme de l'erreur dans H. On va donc chercher à minorer cette quantité de façon à pouvoir la retrancher à l'estimation (3.90) et à estimer plus précisément le seuil de la fonctionnelle.

$$\|u_{h\delta}^n(\omega) - u(t_n;\omega)\|_H^2 =$$
$$\int_\Omega \left(u_{1h\delta}^n(\eta^*) - u_1(t_n;\eta^*)\right)^2 + \left(u_{2h\delta}^n(\tau^*) - u_2(t_n;\tau^*)\right)^2 \, dx. \quad (3.95)$$

En utilisant l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ et tenant compte du fait que les champs u_1 et u_2 sont égaux lorsque les paramètres optimaux sont atteints, on obtient

$$\|u_{h\delta}^n(\omega) - u(t_n;\omega)\|_H^2 \geq \frac{1}{2} \int_\Omega \left(u_{1h\delta}^n(\eta^*) - u_{2h\delta}^n(\tau^*)\right)^2 \, dx. \quad (3.96)$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Ainsi, lorsque la fonctionnelle discrète avec données bruitées (3.89) atteint son minimum, si h et Δt sont suffisamment petits, on a d'après (3.90)

$$E_h^\delta(\eta^*,\tau^*) \sim O\left(\Delta t \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{d(T-T^\delta)}{dt}(t_i) \right\|_{1/2,\Gamma_m} + \frac{1}{h}\|\delta(t_i)\|\right)^2 - \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \frac{1}{2}\|u_{1h\delta}^n(\eta^*) - u_{2h\delta}^n(\tau^*)\|_H^2\right). \quad (3.97)$$

On dispose maintenant de suffisamment d'informations pour proposer un critère d'arrêt qui va d'abord consister à vérifier que la fonctionnelle ait atteint le seuil donné par (3.97). De plus, comme dans le cas elliptique, on souhaite exploiter le comportement asymptotique de la fonctionnelle. Ainsi, le critère d'arrêt est basé sur le fait que, lorsque l'optimum est atteint, l'ordre de grandeur des variations de la fonctionnelle devient inférieur à l'ordre de grandeur de la fonctionnelle elle même donné par (3.97). On note E_j la valeur de la fonctionnelle discrète bruitée et η_j, τ_j les inconnues à l'itération j de l'algorithme d'optimisation. On peut également dire que $E_j/E_{j-1} \to 1^-$ et que E_j/E_{j-1} est proche de 1 à l'optimum. Ainsi, en multipliant par E_j/E_{j-1} l'ordre théorique du seuil atteint par la fonctionnelle, on va relaxer le critère d'arrêt. On propose donc le critère d'arrêt suivant :

$$\max\{E_j, |E_j - E_{j-1}|\} \leq \frac{E_j}{E_{j-1}} \left(\Delta t \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{d(T-T^\delta)}{dt}(t_i) \right\|_{1/2,\Gamma_m} + \frac{1}{h}\|\delta(t_i)\|\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n \|u_{1h\delta}^n(\eta_j) - u_{2h\delta}^n(\tau_j)\|_H^2\right). \quad (3.98)$$

3.4 Mise en œuvre et résultats numériques

3.4.1 Procédure numérique

Nous allons décrire dans cette section la méthode de calcul des éléments nécessaires au processus d'optimisation. Comme mentionné dans la remarque 4, on ne peut utiliser la méthode des états adjoints pour le calcul du gradient de la fonctionnelle. On choisit donc de calculer directement les dérivées de la fonctionnelle par rapport à chaque composante des vecteurs correspondants aux inconnues. Nous préciserons également la mise en oeuvre du critère d'arrêt (3.98) dans le cas réaliste où l'on ne dispose que des données bruitées.

Supposons que la triangulation $\mathscr{T}_h$ de $\bar{\Omega}$ soit caractérisée par p nœuds. Soit q et r les nombres de nœuds respectivement sur les frontières Γ_u et Γ_m et $(\omega_i)_{1\leq i\leq p} = (\omega_{1i}, \omega_{2i})_{1\leq i\leq p}$ la base canonique de l'espace d'approximation V_h. On note X_η^n et X_τ^n les inconnues de Neumann et Dirichlet, T^n et Φ^n les vecteurs correspondant aux données et U_1^n et U_2^n les vecteurs correspondant aux champs u_1 et u_2 au temps t_n, le vecteur correspondant à la condition initiale est

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

noté U_0. On introduit les notations suivantes $(K_1)_{kl} = a_1(\omega_{1k}, \omega_{1l})$, $(K_2)_{kl} = a_2(\omega_{2k}, \omega_{2l})$, $(F_1^n)_k = l_1(\omega_{1k}; t_n)$, $(F_2^n)_k = l_2(\omega_{2k}; t_n), L_u \in \mathscr{M}_{q\times p}(\mathbb{R})$ et $L_m \in \mathscr{M}_{r\times p}(\mathbb{R})$ sont des matrices contenant uniquement des 0 et des 1 et permettant de conserver les valeurs de U_1^n et U_2^n respectivement sur Γ_u et Γ_m.

Les deux systèmes linéaires associés aux problèmes (3.4) et (3.5) sont alors donnés par

$$\begin{cases} \left(\dfrac{M}{\Delta t} + K\right) U_1^{n+1} = F_1^{n+1}(X_\eta^{n+1}) + \dfrac{M}{\Delta t} U_1^n \\ L_m U_1^{n+1} = \mathrm{T}^{n+1} \\ U_1^0 = U_0, \end{cases} \tag{3.99}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{M}{\Delta t} + K\right) U_2^{n+1} = F_2^{n+1}(\Phi^{n+1}) + \dfrac{M}{\Delta t} U_2^n \\ L_u U_2^{n+1} = X_\tau^{n+1} \\ U_2^0 = U_0. \end{cases} \tag{3.100}$$

On écrit alors la fonctionnelle de la façon suivante

$$E(X_\eta, X_\tau) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n (U_1^n - U_2^n)^t K (U_1^n - U_2^n) + \frac{1}{2}(U_1^N - U_2^N)^t M (U_1^N - U_2^N) \tag{3.101}$$

On souhaite calculer la dérivée de la fonctionnelle par rapport à chaque composante i et à chaque pas de temps k des deux inconnues notées $X_\eta^{i,k}$ et$X_\tau^{i,k}$. On s'intéresse dans un premier temps à la dérivée par rapport à $X_\eta^{i,k}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial X_\eta^{i,k}}(X_\eta, X_\tau) = & \sum_{n=k}^{N} 2\alpha_n \left(\frac{\partial U_1^k}{\partial X_\eta^{i,k}}\right)^t K(U_1^n - U_2^n) \\ & + \delta_k^N \left(\frac{\partial U_1^N}{\partial X_\eta^{i,N}}\right)^t M(U_1^N - U_2^N), \quad k = 1, ..., N;\ i = 1, ..., p. \end{aligned} \tag{3.102}$$

Dans la suite, on note $U_{1,i,k}^n$ la dérivée de U_1^n par rapport à $X_\eta^{i,k}$. En dérivant le système linéaire (3.99), $U_{1,i,k}^{n+1}$ est solution du système linéaire suivant

$$\left(\frac{M}{\Delta t} + K\right) U_{1,i,k}^{n+1} = \frac{\partial F_1^{n+1}}{\partial X_\eta^{i,k}} + \frac{M}{\Delta t} U_{1,i,k}^n, \tag{3.103}$$

Or, on sait que T^n et U_0 sont indépendants de $X_\eta^{n,k}$, leurs dérivées sont donc nulles. De plus,

$$U_{1,i,k}^n = 0 \text{ si } k > n \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_1^n}{\partial X_\eta^{i,k}} = 0 \text{ si } k \neq n.$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

On note $\tilde{F}_{1,i}^n = \dfrac{\partial F_1^n}{\partial X_\eta^{i,n}} = (\delta_i^j)_{1\leq j\leq p}$. On a alors

$$\begin{cases} \left(\dfrac{M}{\Delta t} + K\right) U_{1,i,k}^{n+1} = \delta_{n+1}^k \tilde{F}_{1,i}^{n+1} + \mathbb{1}_{\{k>n+1\}} \dfrac{M}{\Delta t} U_{1,i,k}^n \\ L_m U_{1,i,k}^{n+1} = 0 \\ U_{1,i,k}^0 = 0, \quad 1 \leq i \leq p, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad 1 \leq k \leq N. \end{cases} \tag{3.104}$$

Ainsi, la résolution de ce système linéaire donne la variable $U_{1,i,k}^n,\ n = 0, ..., N$ dont dépend la dérivée de la fonctionnelle par rapport à $X_\eta^{i,k}$.

On utilise la même méthode pour calculer la dérivée de la fonctionnelle par $X_\tau^{i,k}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial X_\tau^{i,k}}(X_\eta, X_\tau) = &- \sum_{n=k}^{N} 2\alpha_n \left(\frac{\partial U_2^k}{\partial X_\tau^{i,k}}\right)^t K(U_1^n - U_2^n) \\ &- \delta_k^N \left(\frac{\partial U_2^N}{\partial X_\tau^{i,N}}\right)^t M(U_1^N - U_2^N), \quad k = 1, ..., N. \end{aligned} \tag{3.105}$$

Dans la suite, on note $U_{2,i,k}^n$ la dérivée de U_2^n par rapport à $X_\tau^{i,k}$. En dérivant le système linéaire (3.99), $U_{2,i,k}^{n+1}$ est solution du système linéaire suivant

$$\left(\frac{M}{\Delta t} + K\right) U_{2,i,k}^{n+1} = \frac{\partial F_2^{n+1}}{\partial X_\tau^{i,k}} + \frac{M}{\Delta t} U_{2,i,k}^n, \tag{3.106}$$

Or, on sait que F_2 et U_0 sont indépendants de $X_\tau^{n,k}$, leurs dérivées sont donc nulles. De plus,

$$U_{2,i,k}^n = 0 \text{ si } k > n \ \text{ et } \ \frac{\partial X_\tau^n}{\partial X_\tau^{i,k}} = 0 \text{ if } k \neq n.$$

On note $\tilde{X}_{\tau,i}^n = \dfrac{\partial X_\tau^n}{\partial X_\tau^{i,n}} = (\delta_i^j)_{1\leq j\leq p}$. On a alors

$$\begin{cases} \left(\dfrac{M}{\Delta t} + K\right) U_{2,i,k}^{n+1} = \mathbb{1}_{\{k>n+1\}} \dfrac{M}{\Delta t} U_{2,i,k}^n \\ L_u U_{2,i,k}^{n+1} = \tilde{X}_{\tau,i}^{n+1} \\ U_{2,i,k}^0 = 0, \quad 1 \leq i \leq p, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad 1 \leq k \leq N. \end{cases} \tag{3.107}$$

De la même façon, la résolution de ce système linéaire donne la variable $U_{2,i,k}^n,\ n = 0, ..., N$ dont dépend la dérivée de la fonctionnelle par rapport à $X_\tau^{i,k}$.

On considère le cas d'applications réelles pour lesquelles nous ne disposons que de données mesurées et bruitées notées (T^δ, ϕ^δ) et données avec un taux de bruit $0 < a < 1$. Nous ne pouvons alors pas calculer exactement la norme de la différence entre les données exactes et les données bruitées intervenant dans le critère d'arrêt (3.98). Par conséquent, il est nécessaire d'estimer cette norme.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Comme vu dans la section 2.4.1, l'encadrement de la différence entre les données exactes et bruitées en fonction uniquement du taux de bruit a et des données bruitées s'écrit

$$\frac{-a}{1-a}T^\delta(x,t) \leq T(x,t) - T^\delta(x,t) \leq \frac{1}{1+a}T^\delta(x,t), \quad \forall\, x \in \Gamma_m \text{ et } t \in]0, D]. \tag{3.108}$$

D'où

$$\frac{-a}{1-a}\frac{dT^\delta}{dt}(x,t) \leq \frac{d(T-T^\delta)}{dt}(x,t) \leq \frac{1}{1+a}\frac{dT^\delta}{dt}(x,t), \tag{3.109}$$

et donc

$$\left\|\frac{d(T-T^\delta)}{dt}(t)\right\|_{1/2,\Gamma_m} \leq \frac{a}{1-a}\left\|\frac{dT^\delta}{dt}(t)\right\|_{1/2,\Gamma_m}. \tag{3.110}$$

Le critère d'arrêt (3.98) peut alors s'écrire

$$|E_j - E_{j-1}| \leq \frac{E_j}{E_{j-1}}\left(\frac{a^2\Delta t}{(1-a)^2}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{dT^\delta}{dt}(t_i)\right\|_{1/2,\Gamma_m} + \frac{1}{h}\left(\left\|T^\delta(t_i)\right\|^2_{1/2,\Gamma_m} + \left\|\phi^\delta(t_i)\right\|^2_{-1/2,\Gamma_m}\right)^{1/2}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\alpha_n(U_1^n - U_2^n)M(U_1^n - U_2^n)\right). \tag{3.111}$$

3.4.2 Résultats numériques

On considère le problème de Cauchy suivant sur un domaine Ω donné par la figure (2.2) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega\times]0,1[\\ u = f_D \text{ sur } \Gamma_m\times]0,1[\\ \nabla u \cdot \vec{n} = f_N \text{ sur } \Gamma_m\times]0,1[\\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.112}$$

où f_D, f_N et u_0 sont respectivement les données de Cauchy et la condition initiale extraites de la solution que l'on souhaite approcher.

3.4.2.1 Exemple axisymétrique

On traite dans un premier temps un cas axisymétrique. On écrit le problème de Cauchy en coordonnées polaires (ρ, θ) et on suppose que sa solution ne dépend pas de la coordonnée angulaire. L'équation d'état du problème (3.112) s'écrit alors

$$\frac{\partial u(\rho,t)}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\right)u(\rho,t) = 0. \tag{3.113}$$

Une solution analytique de l'équation (3.113) est donnée par (détails en annexe A.6)

$$u(\rho,t) = e^{-t}J_0(\rho), \tag{3.114}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

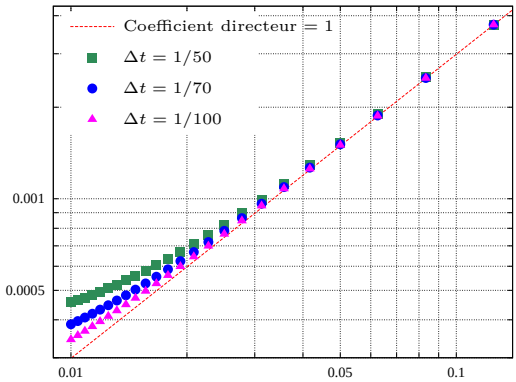


Fig. 3.1: Évolution de $\|u(t_N) - u_h^N\|_V$ par rapport à h pour différents Δt et pour l'exemple axisymétrique.

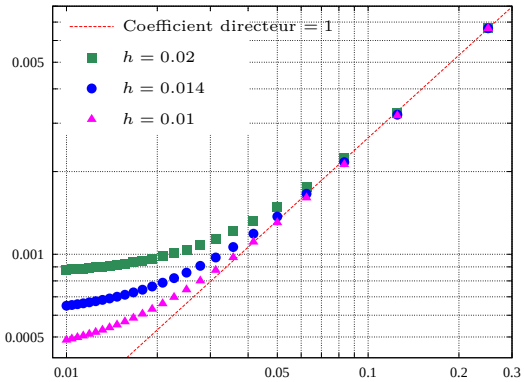


Fig. 3.2: Évolution de $\|u(t_N) - u_h^N\|_V$ par rapport à Δt pour différents h et pour l'exemple axisymétrique.

où $J_0(\cdot)$ est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0.

La figure 3.1 représente l'erreur au temps final par rapport à la taille maximale des arêtes du maillage. On choisit un Δt suffisamment petit de telle sorte que l'erreur due à la discrétisation en temps soit négligeable. De la même façon, la figure 3.2 représente l'erreur au temps final par rapport au pas de temps avec h suffisamment petit. Ces résultats sont en accord avec l'estimation d'erreur (3.50).

3.4.2.2 Exemple analytique en deux dimensions

On considère ici la résolution du problème de Cauchy (3.112) en deux dimensions. Une solution particulière de l'équation d'état de ce problème est donnée par (annexe A.6)

$$u(x, y; t) = e^{-2t} \cos(x + y). \tag{3.115}$$

Pour chacun des cas tests traités, on représentera la température et le flux exacts et identifiés sur Γ_u aux temps $t_2 = 0.2$, $t_6 = 0.6$ et $t_{10} = 1$, ainsi que l'évolution temporelle du flux et de la température exacts et identifiés. La figure 3.3 représente la solution exacte au temps final du problème de Cauchy (3.112) pour l'exemple analytique en deux dimensions et les points p_1, p_2 et p_3 auxquels on représentera l'évolution temporelle de la solution du problème de complétion de données. Les figures 3.4 et 3.5 représentent les solutions du problème de complétion de données exacte et identifiée par la méthode énergétique sans bruit pour l'exemple analytique en deux dimensions. On peut remarquer que la température et le flux reconstitués sont proches de la solution recherchée.

Comme pour le cas axisymétrique, on souhaite valider le comportement des solutions identifiées et la convergence de la méthode. Les figures 3.6 et 3.7 représentent respectivement l'évolution de l'erreur au temps final par rapport à h pour différents Δt et l'évolution de l'erreur au temps final par rapport à Δt pour différents h.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

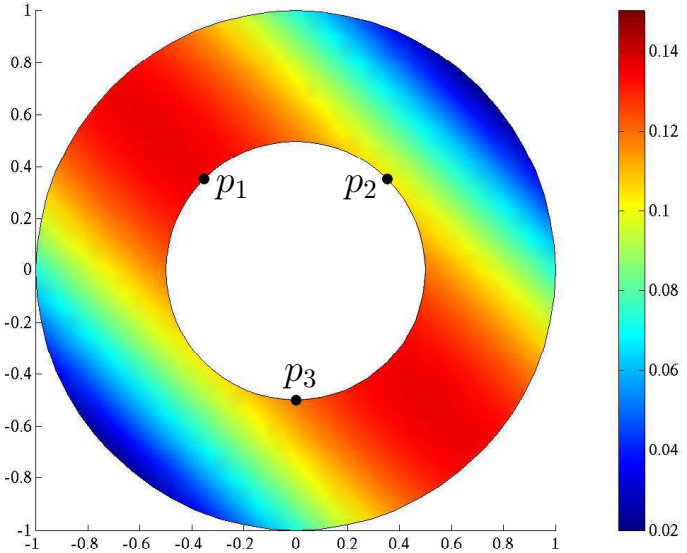
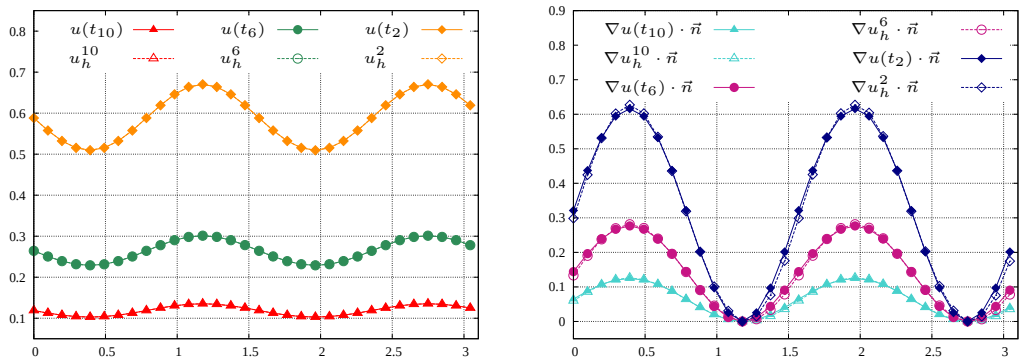


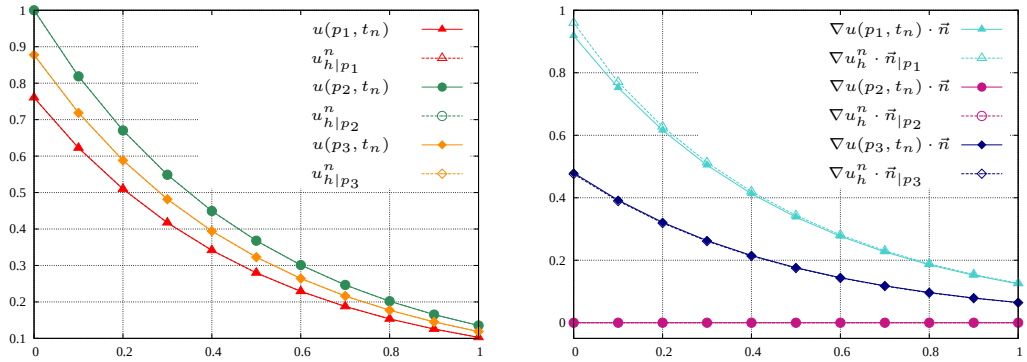
Fig. 3.3: Champ de température exact pour l'exemple analytique en deux dimensions et points sélectionnés p_1, p_2 et p_3, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$.



(a) Température (b) Flux

Fig. 3.4: Température et flux exacts (*symboles pleins*) et identifiés (*symboles vides*) sur Γ_u aux temps t_2, t_6 et t_{10} pour l'exemple analytique en deux dimensions, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés



(a) Température (b) Flux

Fig. 3.5: Évolution au cours du temps de la température et du flux exacts (*symboles pleins*) et identifiés (*symboles vides*) aux points p_1, p_2 et p_3 pour l'exemple analytique en deux dimensions, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$.

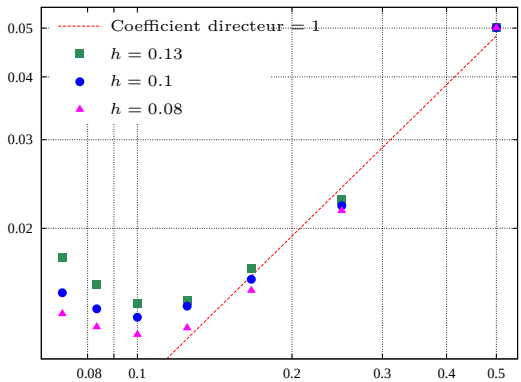


Fig. 3.6: Évolution de $\|u(t_N) - u_h^N\|_V$ par rapport à Δt pour différents h et pour l'exemple analytique en deux dimensions.

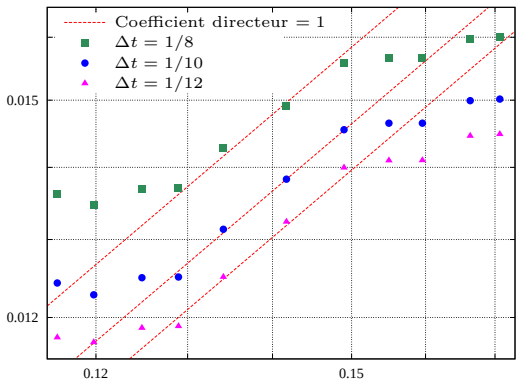


Fig. 3.7: Évolution de $\|u(t_N) - u_h^N\|_V$ par rapport à h pour différents Δt et pour l'exemple analytique en deux dimensions.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Ces résultats sont conformes à ce qui est attendu. Néanmoins, lorsque l'un des pas de discrétisation h ou Δt est d'ordre inférieur à l'autre, le processus d'optimisation est significativement perturbé. En effet, l'erreur associée au plus important pas de discrétisation se comporte alors comme un bruit numérique et ainsi, la méthode énergétique ne fournit pas de solution discrète avec la précision requise.

Comme dans le cas stationnaire, mais cette fois ci à chaque pas de temps, on introduit sur les données un bruit aléatoire Gaussien de moyenne nulle dont l'amplitude dépend d'un taux de bruit a et des données elles-mêmes. Les figures 3.8 et 3.9 représentent l'erreur au temps final et la fonctionnelle à chaque itération du processus d'optimisation et pour différents taux de bruit. Comme on l'a vu dans le cas stationnaire, ces comportements illustrent l'explosion numérique de la solution identifiée dans le cas de données bruitées et justifient la nécessité d'un critère d'arrêt adapté.

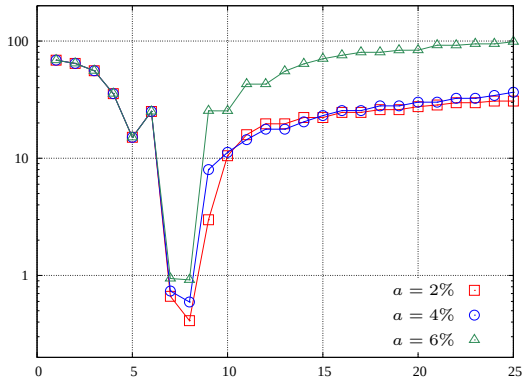


Fig. 3.8: Évolution de $\|u(t_N) - u_{h\delta}^N\|_V$ durant le processus d'optimisation pour différents taux de bruit et pour l'exemple analytique en deux dimensions.

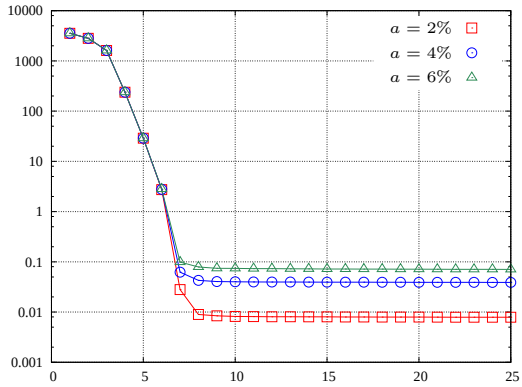


Fig. 3.9: Évolution de $E_h^\delta(\eta, \tau)$ durant le processus d'optimisation pour différents taux de bruit et pour l'exemple analytique en deux dimensions.

On choisit ensuite h et Δt tels que l'erreur de discrétisation soit négligeable en comparaison à l'erreur due au bruit. On observe alors les comportements de l'erreur au temps final et de la fonctionnelle par rapport au bruit. On introduit les notations

$$\begin{aligned} m_\delta^n &= \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{d(T - T^\delta)}{dt}(t_j) \right\|_{1/2,\Gamma_m} + \frac{1}{h} \|\delta(t_j)\| \\ \text{et} \quad M_\delta &= \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \left(m_\delta^n\right)^2 . \end{aligned} \tag{3.116}$$

où m_δ^n et M_δ sont respectivement les termes dépendant du bruit dans les estimations (3.74) et (3.90). Les figures 3.10 et 3.11 représentent respectivement l'évolution de l'erreur au temps final et de la fonctionnelle discrète bruitée par

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

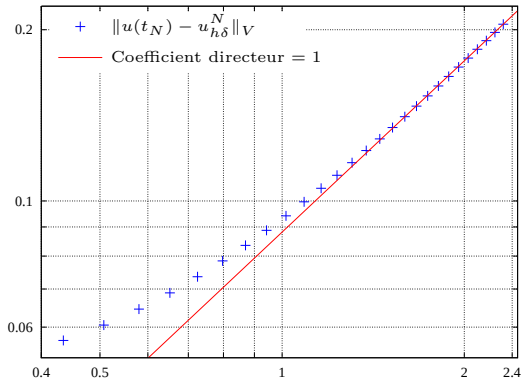


Fig. 3.10: Évolution de $\|u(t_N) - u^N_{h\delta}\|_V$ par rapport à m^N_δ pour l'exemple analytique en deux dimensions, $h = 0.09$, $\Delta t = 1/12$.

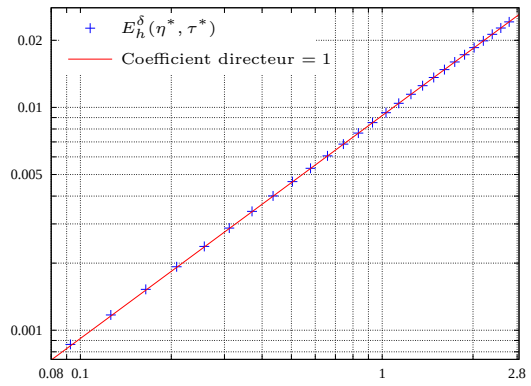
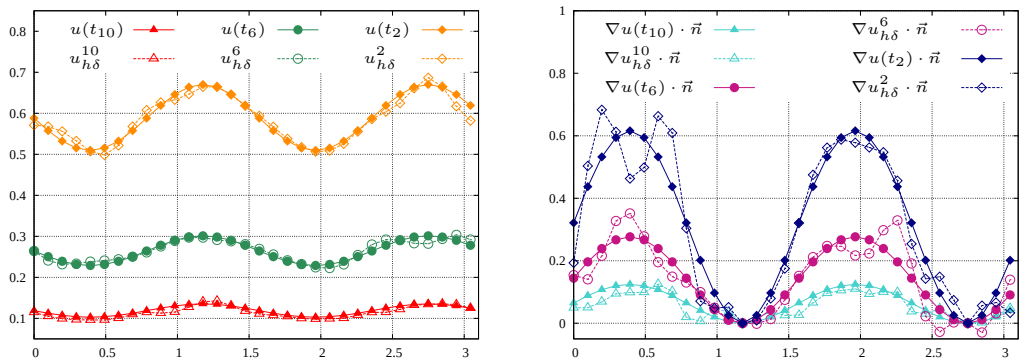


Fig. 3.11: Évolution de $E^\delta_h(\eta^*, \tau^*)$ par rapport à M_δ pour l'exemple analytique en deux dimensions, $h = 0.09$, $\Delta t = 1/12$.

rapport à m^N_δ et M_δ. Ces résultats sont en accord avec les estimations théoriques (3.74) et (3.90).

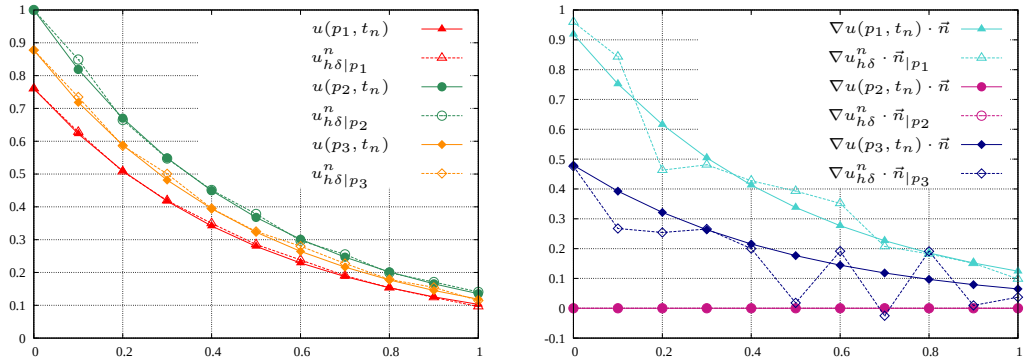
Le comportement de la méthode énergétique par rapport au bruit étant conforme aux prévisions théoriques, on s'intéresse maintenant aux solutions identifiées grâce au critère d'arrêt (3.98) dans le cas de données bruitées. L'évolution de la fonctionnelle, des variations de la fonctionnelle, de l'erreur, du seuil associé au critère d'arrêt au cours du processus d'optimisation ainsi que l'itération d'arrêt pour les cas traités dans ce chapitre sont représentées en annexe B.2. Les figure 3.12 et 3.13 représentent les solutions exacte et identifiée par la méthode énergétique du problème de complétion de données en utilisant le critère d'arrêt proposé et avec un taux de bruit de 3%.



(a) Température (b) Flux

Fig. 3.12: Température et flux exacts (*symboles pleins*) et identifiés (*symboles vides*) sur Γ_u aux temps t_2, t_6 et t_{10} pour l'exemple analytique en deux dimensions, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$.

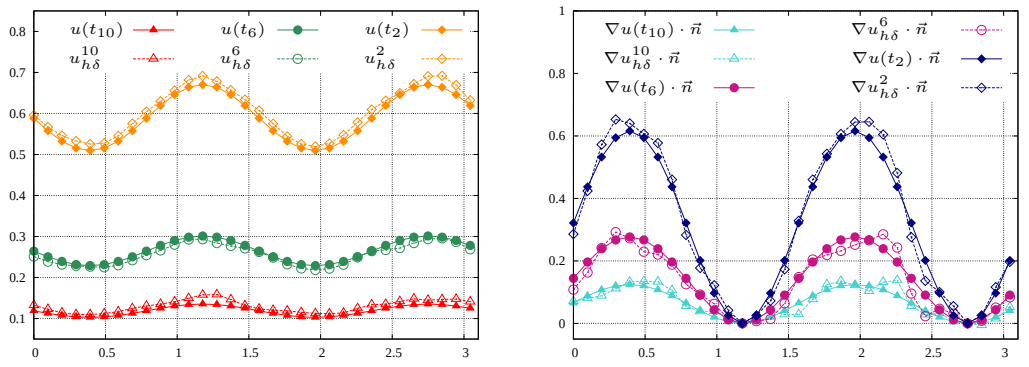
Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés



(a) Température (b) Flux

Fig. 3.13: Évolution au cours du temps de la température et du flux exacts (*symboles pleins*) et identifiés (*symboles vides*) aux points p_1, p_2 et p_3 pour l'exemple analytique en deux dimensions, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $a = 3\%$.

Le critère d'arrêt permet d'identifier l'itération fournissant l'erreur la plus faible et donc une solution cohérente. Néanmoins, le fait d'identifier la meilleure solution possible compte tenu du bruit ne permet pas d'annuler l'action du bruit et une certaine irrégularité est visible sur la solution identifiée, en particulier pour le flux. Une méthode de régularisation adaptée peut permettre d'améliorer encore ces résultats. Étant donné la tendance exponentielle décroissante évidente de la solution numérique identifiée, on se contentera ici de lisser cette dernière par le polynôme d'interpolation des moindres carrés de degré 2 des valeurs numériques obtenues sur l'intervalle de temps pour chaque point de Γ_u. Ces résultats sont représentés par les figures 3.14 et 3.15.

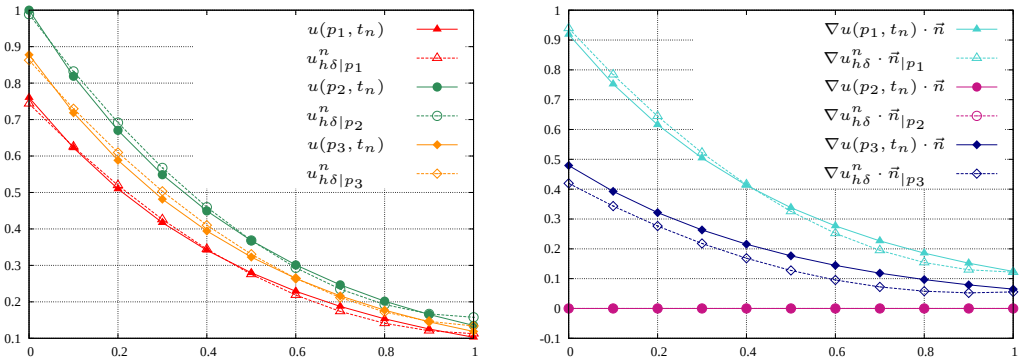


(a) Température (b) Flux

Fig. 3.14: Température et flux exacts (*symboles pleins*) et identifiés (*symboles vides*) sur Γ_u aux temps t_2, t_6 et t_{10} pour l'exemple analytique en deux dimensions avec lissage de la solution, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $a = 3\%$.

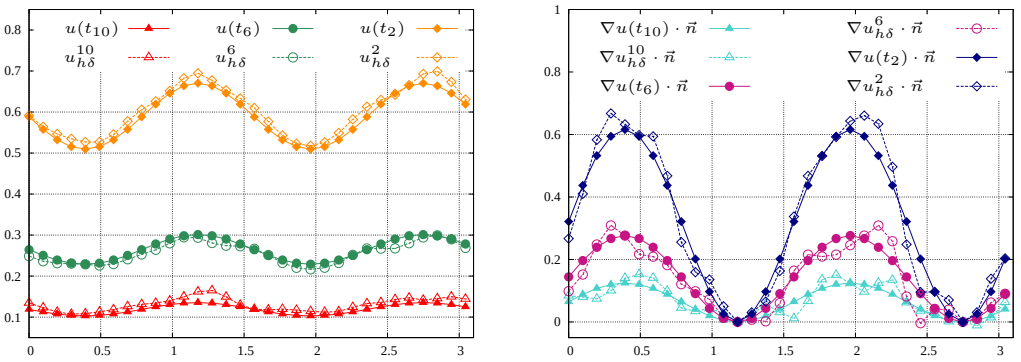
La même procédure est utilisée pour la résolution du problème de Cauchy (3.112) avec un taux de bruit de 5%. Les résultats obtenus sont illustrés par les figures 3.16 et 3.17. La figure 3.18 représente les champs de température obtenus avec des taux de bruit de 3% et 5%.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés



(a) Température (b) Flux

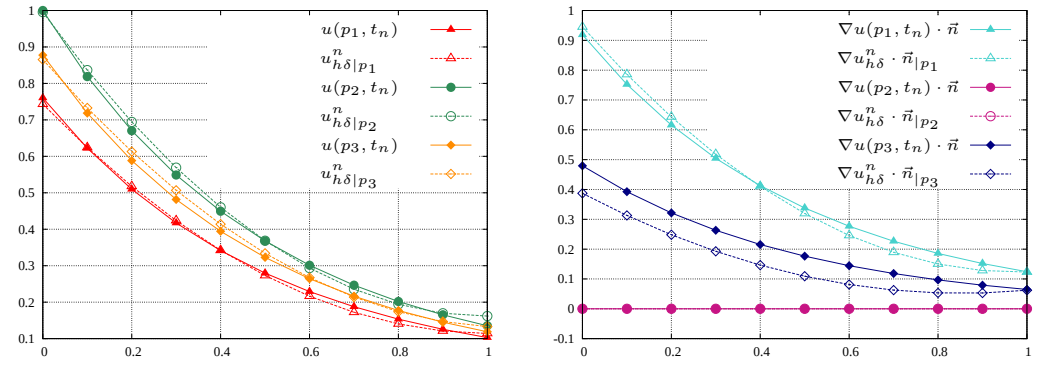
Fig. 3.15: Évolution au cours du temps de la température et du flux exacts (*symboles pleins*) et identifiés (*symboles vides*) aux points p_1, p_2 et p_3 pour l'exemple analytique en deux dimensions avec lissage de la solution, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $a = 3\%$.



(a) Température (b) Flux

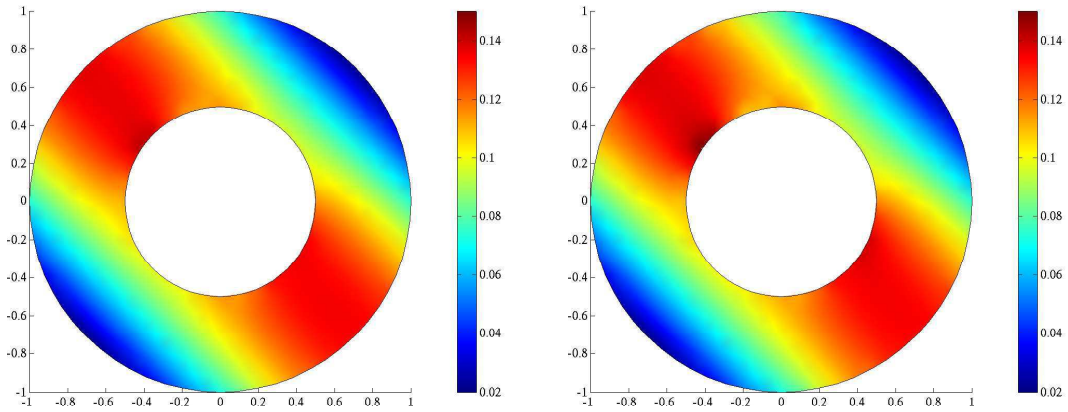
Fig. 3.16: Température et flux exacts (*symboles pleins*) et identifiés (*symboles vides*) sur Γ_u aux temps t_2, t_6 et t_{10} pour l'exemple analytique en deux dimensions avec lissage de la solution, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $a = 5\%$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés



(a) Température (b) Flux

Fig. 3.17: Évolution au cours du temps de la température et du flux exacts (*symboles pleins*) et identifiés (*symboles vides*) aux points p_1, p_2 et p_3 pour l'exemple analytique en deux dimensions avec lissage de la solution, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $a = 5\%$.



(a) $a = 3\%$ (b) $a = 5\%$

Fig. 3.18: Champs de température au temps final pour l'exemple analytique, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

3.4.2.3 Données singulières

Comme précédemment, on s'intéresse au cas du fluide stratifié. Cependant, on considère cette fois que le front de stratification se propage le long de la frontière interne du pipeline au cours du temps. On considère donc le domaine Ω défini par la figure 3.19. L'angle $\theta(t)$ évolue linéairement avec le temps de 0 à π. Les

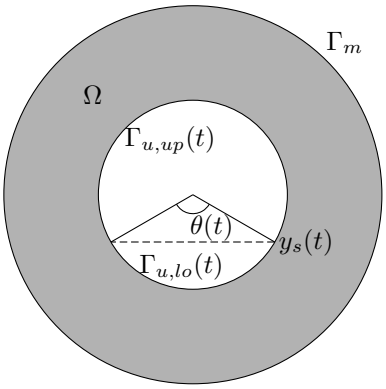


Fig. 3.19: Anneau pour l'exemple du fluide stratifié évolutif

partitions $\Gamma_{u,lo}(t)$ et $\Gamma_{u,up}(t)$ de la frontière Γ_u évoluent également avec le temps et sont définies de la façon suivante :

$$\Gamma_{u,lo}(t) = \{(x,y) \in \Gamma_u; y < y_s(t)\} \text{ et } \Gamma_{u,up}(t) = \{(x,y) \in \Gamma_u; y \geq y_s(t)\}. \quad (3.117)$$

On reste dans le cadre d'expérimentations numériques, c'est donc la résolution du problème suivant qui va nous fournir les données :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega \times]0,1[\\ k \nabla u \cdot \vec{n} + \alpha u = 20 \text{ sur } \Gamma_m \times]0,1[\\ k \nabla u(x,t) \cdot \vec{n} + \alpha u(x,t) = 250.\, \mathbb{1}_{\{\Gamma_{u,up}(t)\}}(x) + 50.\, \mathbb{1}_{\{\Gamma_{u,lo}(t)\}}(x) \text{ sur } \Gamma_u \times]0,1[\\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.118)$$

où $\alpha = 12$ sur Γ_m et 1000 sur Γ_u est le coefficient de Fourier et $k = \tilde{k}/\rho c$ avec $\tilde{k} = 17\ W.m^{-1}.K^{-1}$ la constante de conductivité thermique, ρ $(kg.m^{-3})$ la densité et c $(J.kg^{-1}.K^{-1})$ la capacité thermique telles que $\rho c = 1$. Les rayons des cercles internes et externes sont les mêmes que dans les cas traités précédemment (voir figure 2.2). La condition initiale u_0 est la solution stationnaire du problème (3.118) avec $\theta = 0$. La condition limite sur $\Gamma_u \times]0,1[$ permet d'imposer des températures différentes sur $\Gamma_{u,lo}(t)$ et $\Gamma_{u,up}(t)$ et ainsi de créer la stratification thermique.

La figure 3.20 représente la solution au temps final du problème (3.118) et les points p_1, p_2 et p_3 auxquels on représente l'évolution temporelle de la solution du problème de complétion de données.

Les figures 3.21, 3.22 et 3.23, 3.24 représentent les solutions discrètes fournies par la résolution de (3.118) et identifiées par la méthode énergétique du problème

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

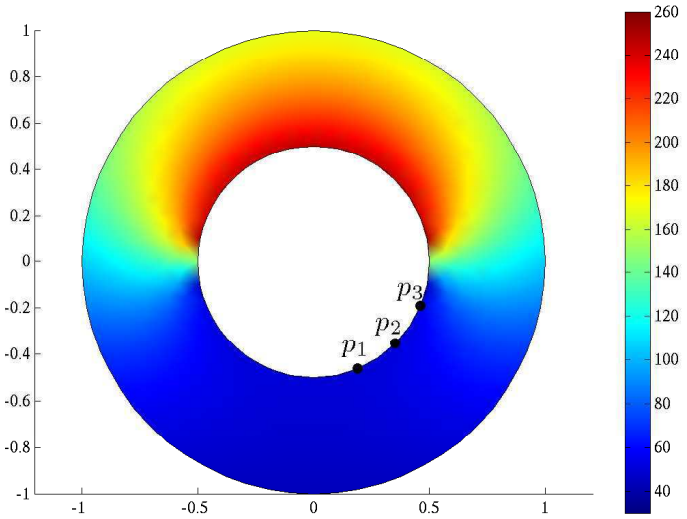
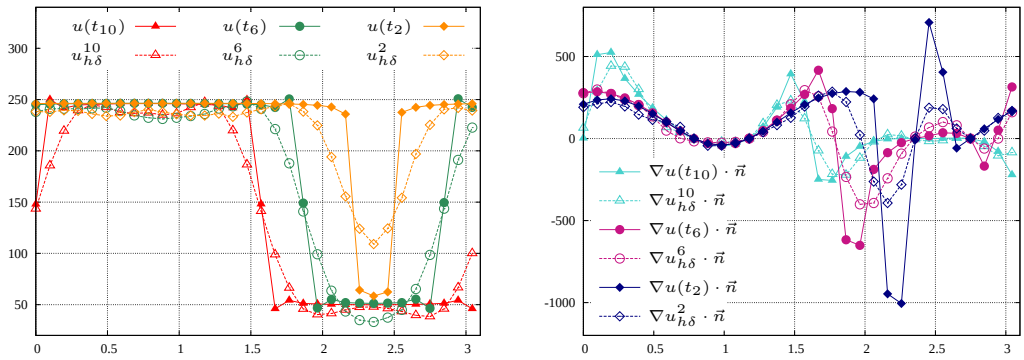


Fig. 3.20: Champ de température exact et points sélectionnés p_1, p_2 et p_3 pour l'exemple du fluide stratifié, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$.

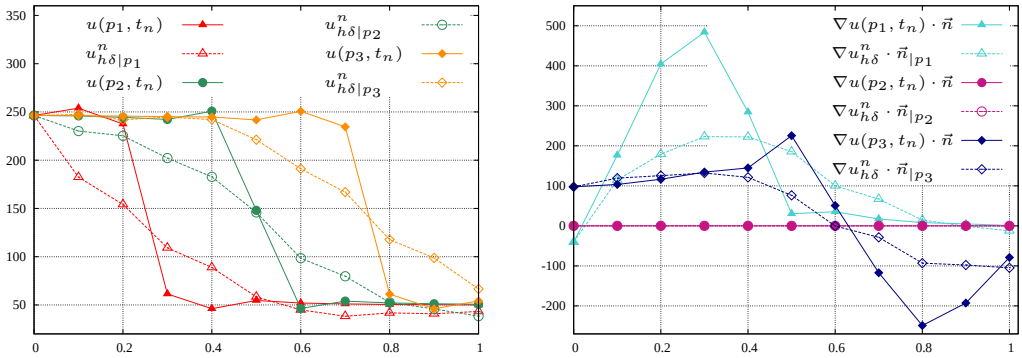
de complétion de données avec des taux de bruit respectivement de $a = 3\%$ et $a = 5\%$. La figure 3.25 représente les champs de température au temps final ainsi identifiés. Le critère d'arrêt permet alors d'identifier une solution proche de celle recherchée, la stratification thermique est efficacement reconstituée. La figure 3.26 représente le champ de température au temps final identifié sans le critère d'arrêt. L'explosion numérique est alors clairement visible et la solution identifiée n'est pas exploitable.



(a) Température (b) Flux

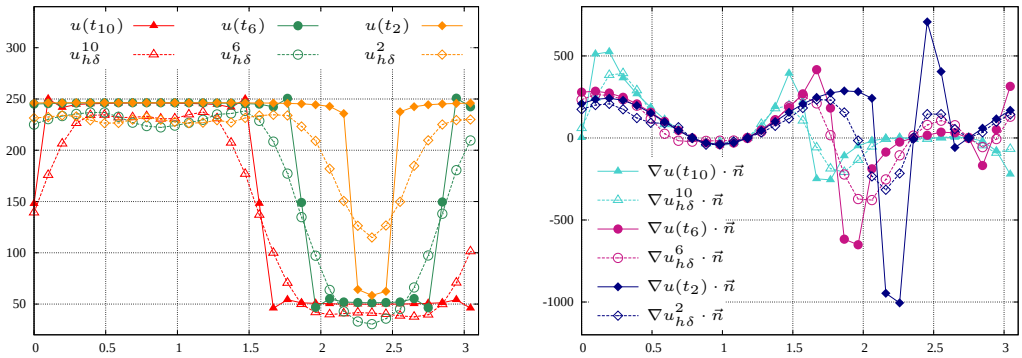
Fig. 3.21: Température et flux exacts (*symboles pleins*) et identifiés (*symboles vides*) sur Γ_u aux temps t_2, t_6 et t_{10} pour l'exemple du fluide stratifié, $a = 3\%$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés



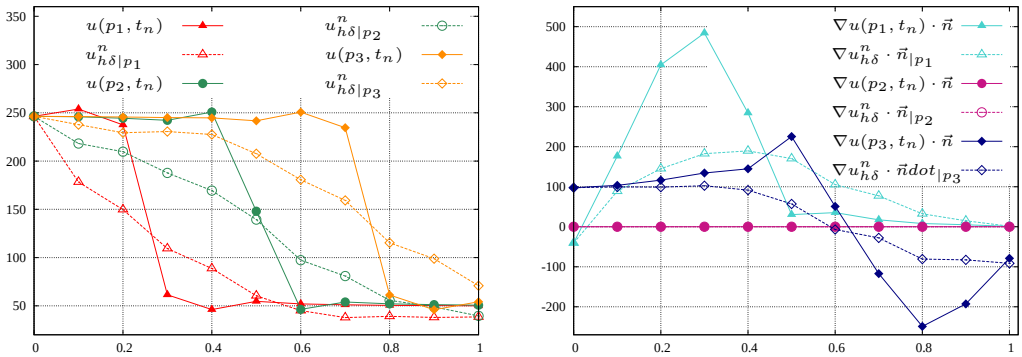
(a) Température (b) Flux

Fig. 3.22: Évolution au cours du temps de la température et du flux exacts (*symboles pleins*) et identifiés (*symboles vides*) aux points p_1, p_2 et p_3 pour l'exemple du fluide stratifié, $a = 3\%$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$.



(a) Température (b) Flux

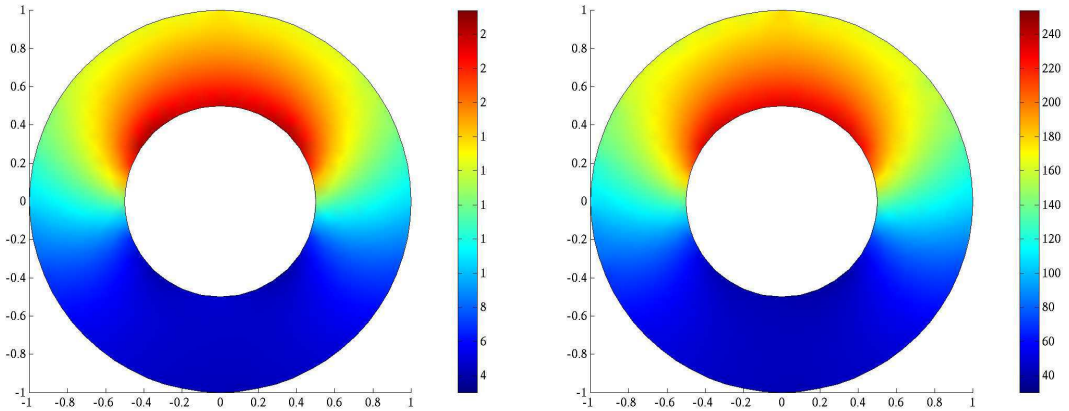
Fig. 3.23: Température et flux exacts (*symboles pleins*) et identifiés (*symboles vides*) sur Γ_u aux temps t_2, t_6 et t_{10} pour l'exemple du fluide stratifié, $a = 5\%$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$.



(a) Température (b) Flux

Fig. 3.24: Évolution au cours du temps de la température et du flux exacts (*symboles pleins*) et identifiés (*symboles vides*) aux points p_1, p_2 et p_3 pour l'exemple du fluide stratifié, $a = 5\%$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés



(a) $a = 3\%$ (b) $a = 5\%$

Fig. 3.25: Champs de température au temps final pour l'exemple du fluide stratifié, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$.

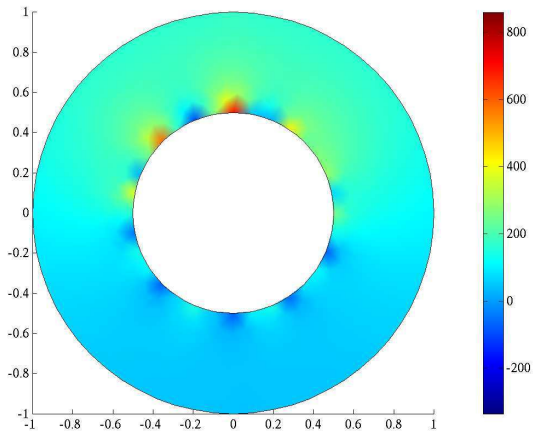


Fig. 3.26: Champ de température au temps final pour l'exemple du fluide stratifié sans le critère d'arrêt, $a = 5\%$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Conclusion

L'identification de conditions limites sur une partie de la frontière d'un domaine à partir de données surabondantes sur la partie restante de la frontière est une des thématiques du large champ des problèmes inverses. Ce problème revient à résoudre un problème de Cauchy connu pour être mal posé, notamment en raison d'une condition de compatibilité sur les données remettant en cause l'existence et la stabilité de la solution de ce problème. On sait en revanche que si cette solution existe, elle est unique. De nombreux travaux théoriques et appliqués ont été réalisés et de nombreuses méthodes numériques ont été proposées pour l'approximation de la solution du problème de Cauchy. Cependant, ces méthodes présentent la caractéristique commune d'être instables numériquement, en particulier lorsque les données de Cauchy sont bruitées.

L'objet de cette thèse est l'analyse mathématique et numérique d'une méthode d'approximation de la solution du problème de Cauchy dite énergétique qui consiste à minimiser l'écart entre deux champs distincts solutions de problèmes bien posés auxquels sont attribués une donnée de Cauchy et une inconnue du problème de complétion de données. Cette méthode fournit des résultats prometteurs mais présente également une forte instabilité numérique lorsque les données ne sont pas compatibles. La méthode énergétique peut s'écrire comme un problème de contrôle optimal, la théorie du contrôle nous permettant alors de montrer l'unicité de la solution de ce problème de minimisation dans le cas d'un problème de Cauchy parabolique. Il n'est cependant pas possible d'expliciter les conditions garantissant l'existence de cette solution. La formulation contrôle optimal permet également de caractériser le minimum et d'écrire le gradient de la fonctionnelle en fonction des états adjoints.

Le cadre variationnel associé à la méthode énergétique puis la discrétisation éléments finis, et temporelle dans le cas d'équations d'évolution, ont été introduits. Au cours du processus de minimisation et lorsque les données sont bruitées, l'erreur atteint une valeur minimale avant d'exploser numériquement et, dans le même temps, la fonctionnelle atteint assymptotiquement un seuil dépendant du bruit. Des estimations d'erreur *a priori* tenant compte du bruit sur les données et donnant une information sur le seuil atteint par la fonctionnelle ont été écrites. Ceci a permis de proposer un critère d'arrêt paramétré par le taux de bruit et ainsi le contrôle de l'instabilité numérique due au bruit.

Cette méthode avec le critère d'arrêt proposé a été appliquée à des données analytiques et singulières auxquelles a été ajouté un bruit aléatoire. Pour l'équation de la chaleur stationnaire, le critère d'arrêt a donné de très bons résultats et

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

a permis l'identification de solutions cohérentes, notamment dans le cas du point source et du fluide stratifié avec des taux de bruit allant jusqu'à 10%. Le critère d'arrêt proposé permet ainsi de contrôler l'instabilité numérique de la méthode. Pour l'équation de la chaleur évolutive, la surévaluation du seuil atteint par la fonctionnelle et son accumulation au cours du temps nous a contraint à tenir compte de façon plus approfondie du comportement de la fonctionnelle pour l'écriture du critère d'arrêt. Le critère d'arrêt proposé a permis d'identifier, dans le cas de données analytiques, la meilleure solution possible étant donné le bruit sur les données et d'identifier des solutions cohérentes pour l'exemple du fluide stratifié.

Comme nous l'avons vu succinctement pour l'exemple analytique en deux dimensions dans le cas du problème de Cauchy évolutif, les méthodes de discrétisations peuvent introduire un bruit numérique pouvant perturber la méthode énergétique. En effet, la discrétisation éléments finis introduit des erreurs de quadrature et d'interpolation qui s'accumulent et ont un impact plus ou moins important selon le nombre de pas de temps et le schéma de discrétisation temporelle qui introduit lui-même une erreur de troncature. Le cas axisymétrique confirmant sans ambiguïté l'ordre de convergence théorique de la méthode, ce bruit numérique peut également être attribué à un éventuel effet maillage. Des investigations plus poussées pourraient permettre de mettre en évidence ces différentes sources de bruit numérique, leurs impacts sur la méthode énergétique et d'éventuelles dépendances entre les paramètres de discrétisation conditionnant la stabilité de la méthode. De plus, nous avons vu que l'utilisation d'une méthode de régularisation, même rudimentaire, pour le lissage de la solution du problème de complétion de données identifiée avec données bruitées permet d'améliorer significativement les résultats obtenus. Une évolution intéressante de ce travail pourrait être l'utilisation de méthodes de régularisation sur les données bruitées avant approximation par la méthode énergétique ou sur les données bruitées et sur les conditions limites identifiées après approximation par la méthode énergétique. Le développement et l'analyse de la méthode énergétique pour des problèmes hyperboliques et non linéaires pourraient également être envisagés.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Annexe A

Précisions mathématiques

A.1 Données de Cauchy et densité

On considère le problème de Cauchy (2.1). La notion de densité de l'ensemble des données compatibles dans l'ensemble des données est précisée par le lemme suivant :

Lemme A.1.1 *Soit $k \geq -3/2$.*

1. *Pour un T fixé dans $H^{k+1}(\Gamma_m)$, l'ensemble des données ϕ pour lesquelles il existe une fonction $u \in H^{k+3/2}(\Omega)$ satisfaisant le problème de Cauchy (2.1) est dense dans $H^k(\Gamma_m)$.*
2. *Pour un ϕ fixé dans $H^k(\Gamma_m)$, l'ensemble des données T pour lesquelles il existe une fonction $u \in H^{k+3/2}(\Omega)$ satisfaisant le problème de Cauchy (2.1) est dense dans $H^{k+1}(\Gamma_m)$.*

Deux démonstrations de ce lemme sont données dans [FUR 00], l'une basée sur le théorème de Hahn-Banach, l'autre sur la méthode de pénalité.

A.2 Traces et restrictions

Théorème A.2.1 *(Théorème de traces,* [LIO 68b]*) Pour tout $u \in H^m(\Omega)$, on peut définir ses traces :*

$$u|_\Gamma, \ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma, \ldots, \ \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}}\right|_\Gamma \tag{A.1}$$

On a

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\right|_\Gamma \in H^{m-k-\frac{1}{2}}(\Gamma) \tag{A.2}$$

Et l'application

$$u \mapsto \{ \left.\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\right|_\Gamma, 0 \leq k \leq m-1\}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

est linéaire, continue et surjective de $H^m(\Omega)$ *dans* $\prod_{i=0}^{m-1} H^{m-k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. *De plus il existe un relèvement linéaire et continu*

$$\begin{aligned} \mathscr{R} : \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^m(\Omega) \\ \vec{g} = \{g_j\}_{j=0}^{m-1} &\mapsto \mathscr{R}\vec{g} \end{aligned} \tag{A.3}$$

tel que

$$\frac{\partial^j}{\partial n^j}\mathscr{R}\vec{g} = g_j, \quad 0 \leq j \leq m-1 \tag{A.4}$$

Dans le cadre général, l'application du théorème de traces est suffisante. Cependant, on souhaite ici préciser le cadre fonctionnel de fonctions définies uniquement sur une partie de la frontière et, comme mentionné dans la remarque 2, dans le cas où l'intersection des adhérences des deux parties de la frontière est non vide. La restriction sur une partie de la frontière d'une fonction de $H^{1/2}(\Gamma)$ doit alors être à support compact.

En effet, identifions $L^2(\Gamma_m)$ à son dual et notons $H^{-1/2}(\Gamma_m)$ le dual topologique de $H^{1/2}(\Gamma_m)$, on a alors

$$H^{1/2}(\Gamma_m) \subset L^2(\Gamma_m) \subset H^{-1/2}(\Gamma_m) \text{ avec injections denses et continues.} \tag{A.5}$$

Montrons qu'il n'existe pas d'opérateur continu Π tel que

$$\begin{aligned} &\Pi \in \mathscr{L}\left(H^{-1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma_m)\right) \cap \mathscr{L}\left(L^2(\Gamma), L^2(\Gamma_m)\right), \\ \text{et} \quad &\Pi g = g \text{ presque partout}, \ \forall\, g \in L^2(\Gamma). \end{aligned} \tag{A.6}$$

Soit $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Si un tel opérateur existe, on a

$$\int_\Gamma \bar{\lambda} g \, d\Gamma = \int_{\Gamma_m} \lambda \Pi g \, d\Gamma, \quad \forall\, g \in L^2(\Gamma), \tag{A.7}$$

où

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} \lambda \text{ sur } \Gamma_m \\ 0 \text{ sur } \Gamma_u. \end{cases} \tag{A.8}$$

Par suite, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'injection de $H^{1/2}(\Gamma_m)$ dans $L^2(\Gamma_m)$ étant continue, on a

$$\int_\Gamma \bar{\lambda} g \, d\Gamma \leq C\|\lambda\|_{1/2,\Gamma_m}\|\Pi g\|_{0,\Gamma_m}. \tag{A.9}$$

De plus, l'opérateur Π étant continu de $L^2(\Gamma)$ dans $L^2(\Gamma_m)$, il vient

$$\int_\Gamma \bar{\lambda} g \, d\Gamma \leq C\|\lambda\|_{1/2,\Gamma_m}\|g\|_{0,\Gamma}. \tag{A.10}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Supposons maintenant que $\lambda \in L^2(\Gamma_m)$ et prenons $g = \lambda$, on obtient

$$\|\bar{\lambda}\|_{0,\Gamma} \leq C\|\lambda\|_{1/2,\Gamma_m}. \tag{A.11}$$

Cela implique qu'il existe un opérateur $\breve{\Pi}$ défini par

$$\begin{array}{rcl} \breve{\Pi} : H^{1/2}(\Gamma_m) & \longrightarrow & L^2(\Gamma) \\ \lambda & \longmapsto & \bar{\lambda}. \end{array} \tag{A.12}$$

Ce qui est absurde (Contre exemple : si $\lambda = 1$, $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_m)$ mais $\bar{\lambda} \notin L^2(\Gamma)$).

Il n'existe donc pas d'opérateur de restriction de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma_m)$ si la continuité du prolongement par 0 des fonctions de $H^{1/2}(\Gamma_m)$ n'est pas assurée. L'espace $H^{-1/2}(\Gamma_m)$ est donc le dual topologique de $H^{1/2}_{00}(\Gamma_m)$, on a alors

$$H^{1/2}_{00}(\Gamma_m) \subset L^2(\Gamma_m) \subset H^{-1/2}(\Gamma_m), \quad \text{avec injections denses et continues,} \tag{A.13}$$

et on peut prendre

$$(\phi, T) \in H^{-1/2}(\Gamma_m) \times H^{1/2}_{00}(\Gamma_m). \tag{A.14}$$

Pour les mêmes raisons, on a

$$(\eta, \tau) \in H^{-1/2}(\Gamma_u) \times H^{1/2}_{00}(\Gamma_u). \tag{A.15}$$

A.3 Propriétés des formes linéaire et bilinéaire

Étant donné la continuité des opérateurs de traces et de relèvements et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les formes linéaires, notées $L(.)$ ou $L^\delta(.)$, intervenant dans les problèmes variationnels ou discrets des chapitres précédents sont continues (*i.e.* $\exists$ une constante C telle que $|L(v)| \leq C\|v\|_V$).

Rappelons la forme bilinéaire intervenant dans les problèmes variationnels (2.22) et (3.21) :

$$a(u,v) \;=\; \int_\Omega k(x)\nabla\tilde{u}_1\nabla v_1\, dx + \int_\Omega k(x)\nabla\tilde{u}_2\nabla v_2\, dx.$$

De manière immédiate, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut dire que la forme $a(\cdot,\cdot)$ est également continue (*i.e.* $\exists$ une constante C telle que $|a(u,v)| \leq C\|u\|_V\|v\|_V$).

De plus, la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est V-elliptique. En effet, posons $k_m = \min\limits_{x\in\Omega} k(x)$, on a

$$k_m\|\nabla u\|_H^2 \leq a(u,u).$$

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante C_p dépendant de Ω telle que $\|u\|_H \leq C_p\|\nabla u\|_H$, d'où

$$\|u\|_H^2 \leq \frac{C_p^2}{k_m}a(u,u).$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Or $\|u\|_V = \left(\|u\|_H^2 + \|\nabla u\|_H^2\right)^{1/2}$ et $\|\nabla u\|_H^2 \leq (1/k_m)a(u,u)$, il existe donc une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq a(u,u) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{k_m}{1+C_p^2}. \tag{A.16}$$

A.4 Précision sur le contrôle

On note ici $\omega = (\eta^o, \tau^o)$ le contrôle optimal. D'après (2.35), lorsque ω est atteint

$$B^* p(\omega) = 0 \text{ et donc } p(\omega) = 0, \tag{A.17}$$

d'où, d'après (2.29),

$$(Mu(\omega), Mv)_{0,\Omega} = 0 \text{ pour tout } v \in V. \tag{A.18}$$

Ce qui donne

$$\int_\Omega k(x)\left(\nabla\tilde{u}_1(\eta^o) - \nabla\tilde{u}_2(\tau^o)\right)(v_1 - v_2)\, dx = 0, \ \forall\ v = (v_1, v_2) \in V, \tag{A.19}$$

d'où,

$$\nabla\tilde{u}_1(\eta^o) = \nabla\tilde{u}_2(\tau^o) \text{ p.p. sur } \Omega. \tag{A.20}$$

Ceci nous indique que les gradients des fonctions $\tilde{u}_1$ et $\tilde{u}_2$ sont égaux, et donc que la fonction de coût $J(\cdot)$ est nulle lorsque le contrôle optimal est atteint. Cela n'est toutefois pas suffisant pour affirmer que le contrôle optimal est solution du problème de minimisation (2.6), il faut également vérifier que $\nabla\bar{u}_1 = \nabla\bar{u}_2(\tau^o)$.

Soit $v \in H^1_{0,\Gamma_m}(\Omega) \cap H^1_{0,\Gamma_u}(\Omega)$ une fonction test. Les gradients des fonctions $\tilde{u}_1$ et $\tilde{u}_2$ étant égaux, on a

$$a_1(\tilde{u}_1(\eta^o), v) = a_2(\tilde{u}_2(\tau^o), v). \tag{A.21}$$

Or, $\tilde{u}_1$ et $\tilde{u}_2$ sont respectivement solutions des problèmes faibles (2.17) et (2.18), on a donc

$$l_1(v) = l_2(v), \tag{A.22}$$

et la fonction test v étant nulle sur le bord,

$$a_1(\bar{u}_1, v) = a_2(\bar{u}_2(\tau^o), v). \tag{A.23}$$

On a bien

$$\nabla\bar{u}_1 = \nabla\bar{u}_2(\tau^o) \text{ et donc } \nabla u_1(\eta^o) = \nabla u_2(\tau^o). \tag{A.24}$$

Donc le problème de contrôle fournit bien un couple (η^o, τ^o) tel que $\nabla u_1(\eta^o) = \nabla u_2(\tau^o)$, on peut ainsi conclure que $(\eta^o, \tau^o) = (\eta^*, \tau^*)$. On obtient de la même manière le même résultat dans le cas d'un opérateur parabolique.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

A.5 Éléments finis et estimation d'erreur

On rappelle les hypothèses vérifiées par l'espace éléments finis X_h :

(i) Ω est un ouvert polyédrique de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$.
(ii) $\mathscr{T}_h$ est une triangulation régulière de $\bar{\Omega}$ *i.e.* $h = \max_{K \in \mathscr{T}_h} h_K \to 0$ et $\max_{K \in \mathscr{T}_h} \dfrac{h_K}{\rho_K} \leq c$ où c est une constante indépendante de h et h_K et ρ_K sont respectivement le diamètre et le diamètre du cercle inscrit de l'élément K.
(iii) Γ_u et Γ_m peuvent s'écrire comme l'union d'arêtes de $K \in \mathscr{T}_h$.
(iv) L'espace éléments finis X_h est tel que, pour tout h, on peut lui associer une famille (K, P_K, Σ_K), $K \in \mathscr{T}_h$ affine équivalente à un élément de référence $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ de classe $\mathscr{C}^0$.
(v) L'inclusion suivante est vérifiée $P_l \subset \hat{P} \subset H^1(\hat{K})$.

Ces hypothèses impliquent que $X_h \subset \mathscr{C}^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$. Soit $V_h \subset V$ un sous espace adéquat de X_h, on considère le problème discret

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ &a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned} \tag{A.25}$$

où les formes linéaire $L(\cdot)$ et bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ vérifient les hypothèses permettant l'application du théorème de Lax-Milgram. Ainsi, la solution discrète u_h existe et est unique.

On rappelle que $\Pi_h \in \mathscr{L}(V, V_h)$ désigne l'opérateur de projection elliptique défini par

$$a(u - \Pi_h u, v_h) = 0, \quad \forall\, v_h \in V_h. \tag{A.26}$$

Le théorème suivant donne une estimation de l'erreur de projection (voir [CIA 02]) :

Théorème A.5.1 *En plus des hypothèses (i)-(v), on suppose qu'il existe $l \geq 0$ et $r \geq 0$ avec $r \leq l$ tels que les inclusions suivantes soient vérifiées :*

$$P_l(\hat{K}) \subset \hat{P} \subset H^r(\hat{K}), \tag{A.27}$$

$$H^{l+1}(\hat{K}) \subset \mathscr{C}^s(\hat{K}) \text{ avec injection continue}, \tag{A.28}$$

où s est l'ordre maximal des dérivées partielles intervenant dans la définition de l'ensemble $\hat{\Sigma}$.

Alors il existe une constante C indépendante de h telle que, pour toute fonction $v \in H^{k+1}(\Omega) \cap V$,

$$\|v - \Pi_h v\|_{m,\Omega} \leq C h^{l+1-m} |v|_{l+1,\Omega}, \quad 0 \leq m \leq \min\{1, r\}. \tag{A.29}$$

On rappelle également ce théorème énoncé dans [CIA 02] donnant une estimation de l'erreur dans $H^1(\Omega)$:

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Théorème A.5.2 *En plus des hypothèses (i)-(v), on suppose qu'il existe un entier $l \geq 1$ tel que les inclusions suivantes soient satisfaites :*

$$H^{l+1}(\hat{K}) \subset \mathscr{C}^s(\hat{K}) \text{ avec injection continue,} \tag{A.30}$$

où s est l'ordre maximal des dérivées partielles intervenant dans la définition de l'ensemble $\hat{\Sigma}$.

Alors, si la solution $u \in V$ du problème variationnel est aussi dans l'espace $H^{l+1}(\hat{K})$, il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^l |u|_{l+1,\Omega}, \tag{A.31}$$

où $u_h \in V_h$ est la solution discrète.

Inégalités inverses Sous les hypothèses (ii) et (v), il existe une constante C telle que l'inégalité inverse suivante soit vérifiée :

$$\|v_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{C}{h}\|v_h\|_{0,\Omega}, \quad \forall v_h \in X_h. \tag{A.32}$$

A.6 Solutions analytiques des cas tests paraboliques

A.6.1 Cas axisymétrique

On décompose la solution $u(\rho, t)$ de (3.113) de la façon suivante :

$$u(\rho, t) = v(\rho)w(t). \tag{A.33}$$

On a alors, en injectant cette solution dans (3.113),

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{v''(\rho) + (1/\rho)v'(\rho)}{v(\rho)}. \tag{A.34}$$

En supposant que les deux membres de l'équation (A.34) sont égaux à $-c$ où c est une constante positive, on obtient d'une part

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = -c, \tag{A.35}$$

et donc en intégrant sur l'intervalle $[0, t]$

$$w(t) = Ke^{-ct} \text{ où } K \text{ est une constante,} \tag{A.36}$$

et d'autre part,

$$v''(\rho) + (1/\rho)v'(\rho) + cv(\rho) = 0. \tag{A.37}$$

En prenant $c = 1$ et en multipliant les deux membres de cette équation par ρ^2, on obtient

$$\rho^2 v''(\rho) + \rho v'(\rho) + \rho^2 v(\rho) = 0 \text{ (Équation de Bessel).} \tag{A.38}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Une solution de cette équation est donnée par la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0

$$J_0(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \rho^{2n}. \tag{A.39}$$

En prenant $K = 1$, une solution analytique particulière de l'équation (3.113) est donc donnée par

$$u(\rho, t) = e^{-t} J_0(\rho). \tag{A.40}$$

A.6.2 Solution analytique en deux dimensions

Soit $(x, y) \in \Omega$, on décompose la solution $u(x, y, t)$ de l'équation (3.112) de la façon suivante :

$$u(x, y, t) = v(x, y)w(t). \tag{A.41}$$

D'après l'équation d'état de (3.112), on a

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{\triangle v(x, y)}{v(x, y)}, \tag{A.42}$$

et en intégrant sur $[0, t]$

$$w(t) = K \exp\left(\frac{\triangle v(x, y)}{v(x, y)} t\right), \quad \text{où } K \text{ est une constante.} \tag{A.43}$$

Il reste à choisir $v(x, y)$ telle que $\triangle v(x, y)/v(x, y)$ ne dépende ni de x ni de y. En prenant $v(x, y) = \cos(x + y)$ et $K = 1$, une solution analytique particulière de ce problème est donnée par

$$u(x, y; t) = e^{-2t} \cos(x + y). \tag{A.44}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Annexe B

Au cours du processus d'optimisation

Les figures suivantes représentent l'évolution de la fonctionnelle, des variations de la fonctionnelle, de l'erreur dans V à chaque itération du processus d'optimisation ainsi que le seuil associé au critère d'arrêt et l'itération identifiée par ce dernier pour les cas tests présentés dans les sections 2.4.2 et 3.4.2. Les références des figures représentant les solutions du problème de complétion de données associé sont données en légende.

B.1 Problème de Cauchy elliptique

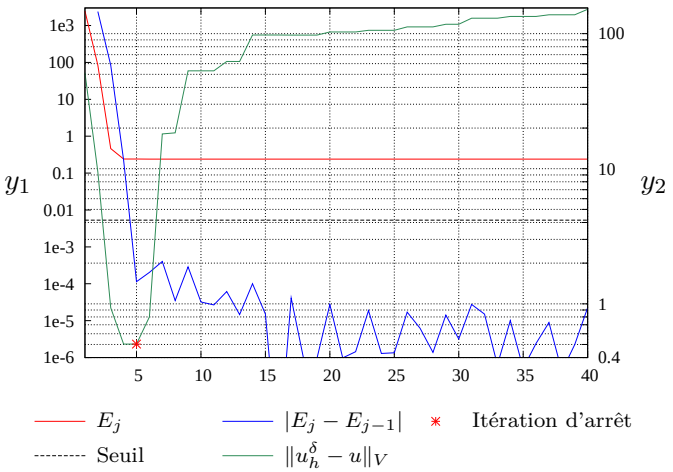


Fig. B.1: Évolution au cours du processus d'optimisation, seuil et itération d'arrêt, exemple analytique (fig. 2.9), $h = 0.03$, $a = 3\%$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

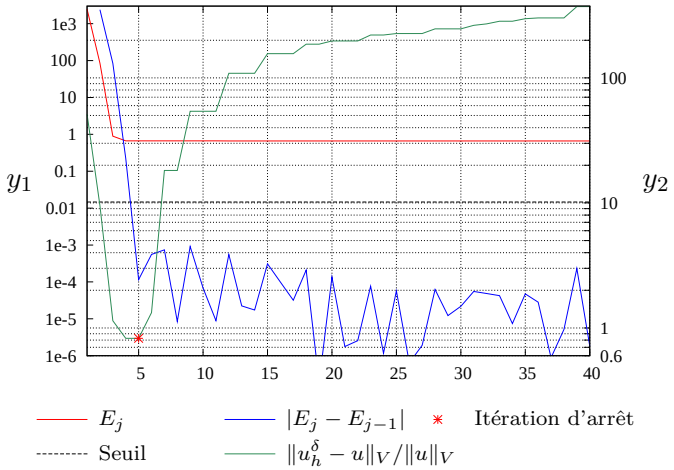


Fig. B.2: Évolution au cours du processus d'optimisation, seuil et itération d'arrêt, exemple analytique (fig. 2.10), $h = 0.03$, $a = 5\%$.

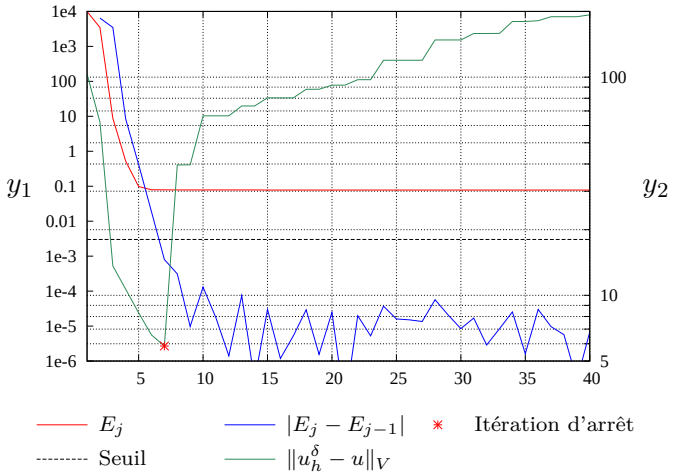


Fig. B.3: Évolution au cours du processus d'optimisation, seuil et itération d'arrêt, exemple du point source (fig. 2.12), $r = 0.4$, $h = 0.03$, $a = 3\%$.

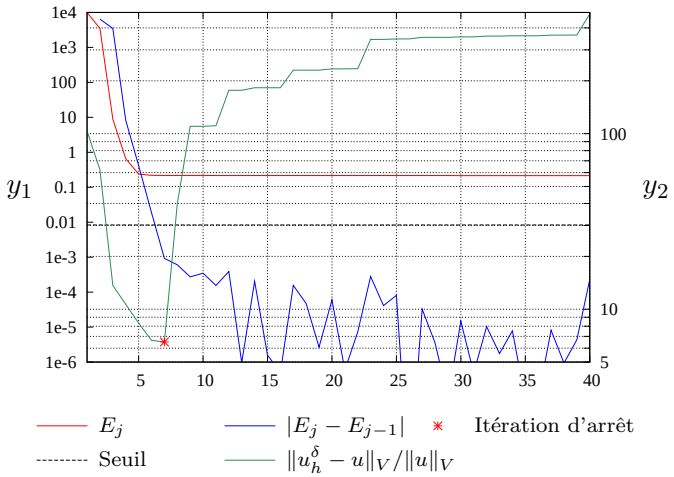


Fig. B.4: Évolution au cours du processus d'optimisation, seuil et itération d'arrêt, exemple du point source (fig. 2.13), $r = 0.4$, $h = 0.03$, $a = 5\%$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

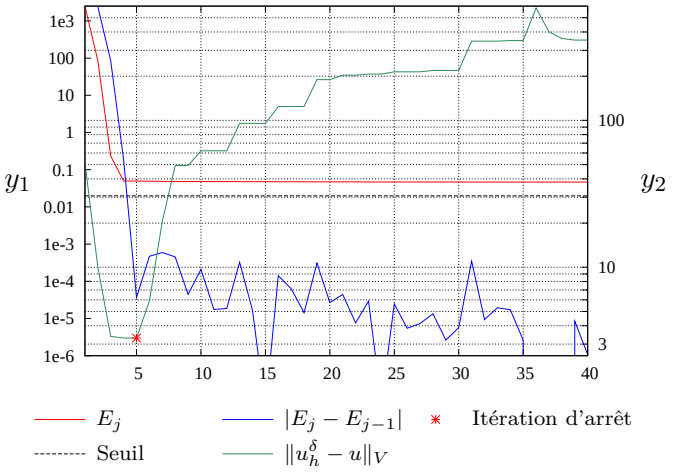


Fig. B.5: Évolution au cours du processus d'optimisation, seuil et itération d'arrêt, exemple du point source (fig. 2.15), $r = 1.1$, $h = 0.03$, $a = 3\%$.

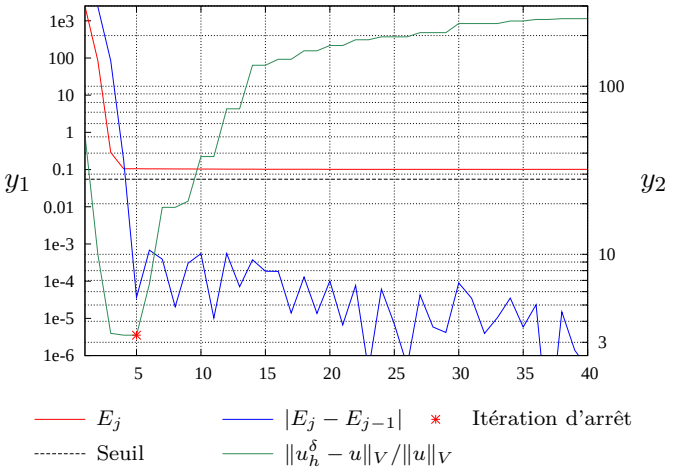


Fig. B.6: Évolution au cours du processus d'optimisation, seuil et itération d'arrêt, exemple du point source (fig. 2.16), $r = 1.1$, $h = 0.03$, $a = 5\%$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

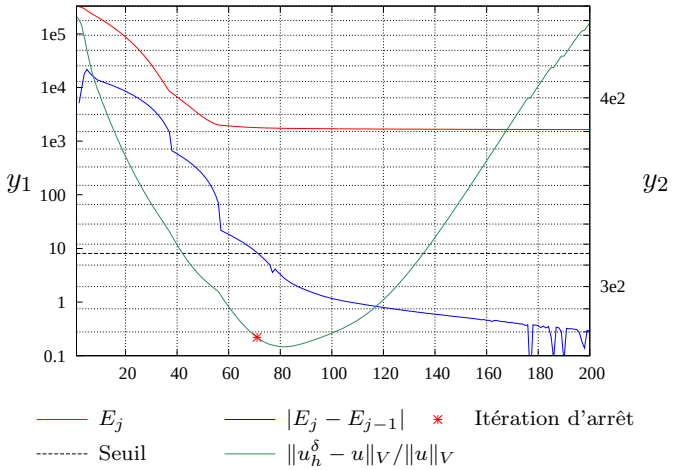


Fig. B.7: Évolution au cours du processus d'optimisation, seuil et itération d'arrêt, exemple du fluide stratifié (fig. 2.19), $h = 0.1$, $a = 3\%$.

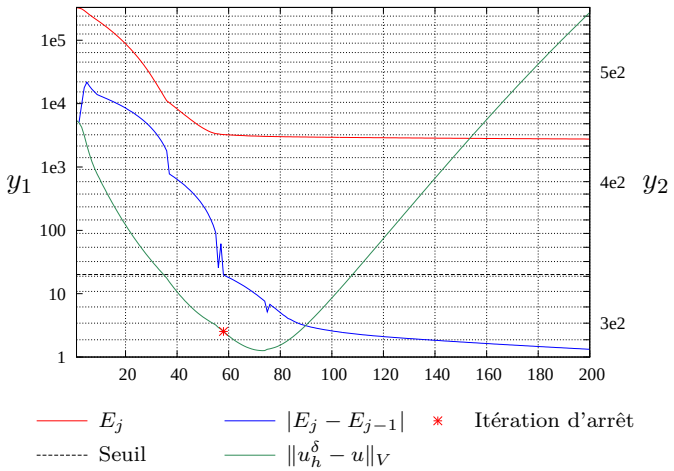


Fig. B.8: Évolution au cours du processus d'optimisation, seuil et itération d'arrêt, exemple du fluide stratifié (fig. 2.20), $h = 0.1$, $a = 5\%$.

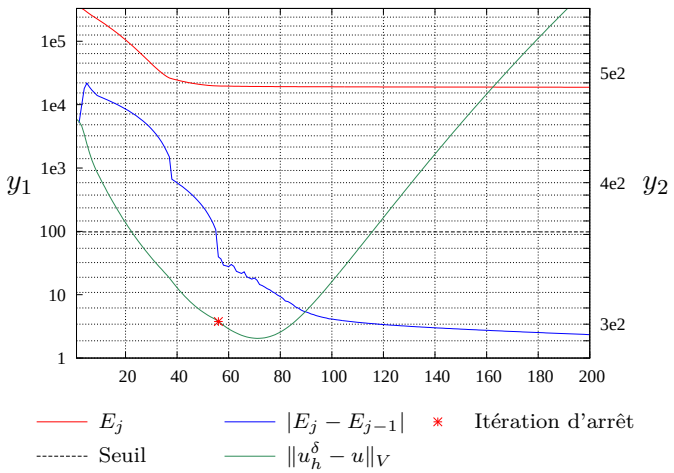


Fig. B.9: Évolution au cours du processus d'optimisation, seuil et itération d'arrêt, exemple du fluide stratifié (fig. 2.23), $h = 0.1$, $a = 10\%$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

B.2 Problème de Cauchy parabolique

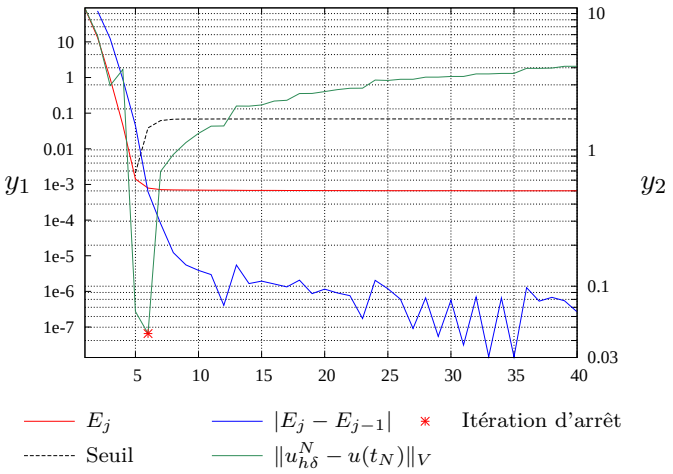


Fig. B.10: Évolution au cours du processus d'optimisation, seuil et itération d'arrêt, exemple analytique (fig. 3.12, 3.13), $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $D = 1$, $a = 3\%$.

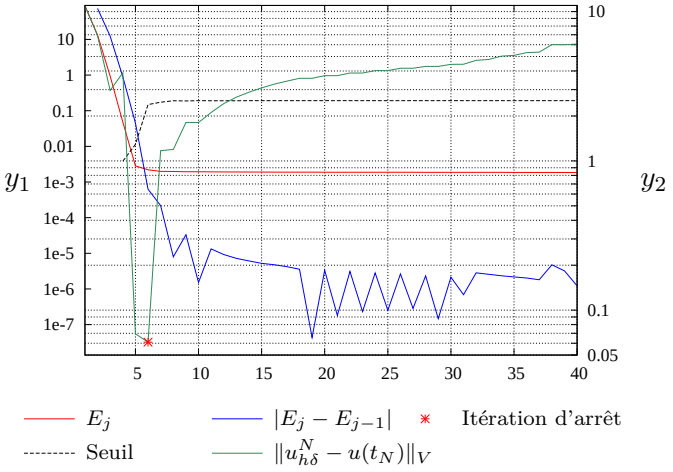


Fig. B.11: Évolution au cours du processus d'optimisation, seuil et itération d'arrêt, exemple analytique (fig. 3.16, 3.17), $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $D = 1$, $a = 5\%$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

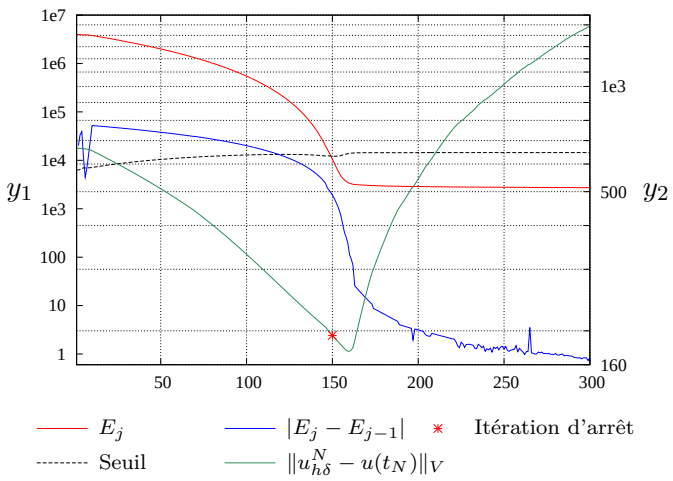


Fig. B.12: Évolution au cours du processus d'optimisation, seuil et itération d'arrêt, exemple du fluide stratifié (fig. 3.21, 3.22), $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $D = 1$, $a = 3\%$.

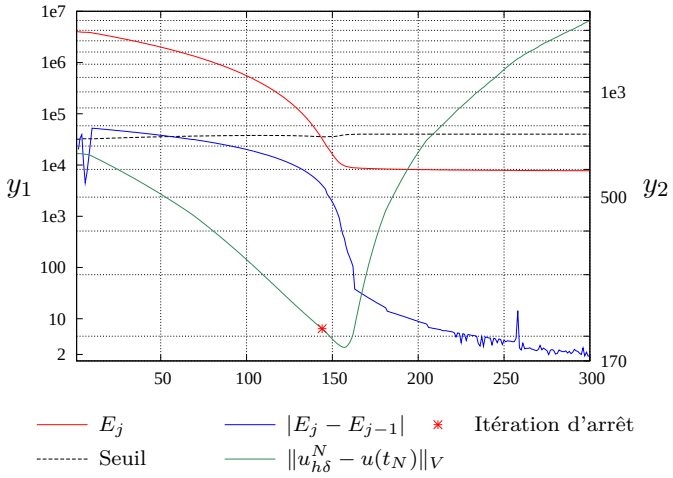


Fig. B.13: Évolution au cours du processus d'optimisation, seuil et itération d'arrêt, exemple du fluide stratifié (fig. 3.23, 3.24), $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $D = 1$, $a = 5\%$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Annexe C

Publications

Revue internationale avec comité de lecture

R.Rischette, T.N.Baranger, N.Debit, Numerical analysis of an energy-like minimization method to solve Cauchy problem with noisy data, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 235, 2011, p. 3257-3269, Elsevier.

Archives ouvertes

R.Rischette, T.N.Baranger, N.Debit, Numerical analysis of an energy-like minimization method to solve a parabolic Cauchy problem with noisy data, *http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00584553/fr/*.

Conférences avec actes et comité de lecture

R.Rischette, T.N.Baranger, N.Debit, Numerical analysis of an energy-like minimization method to solve Cauchy problem with noisy data, *V International conference on Inverse Problems, Control and Optimisation* (PICOF10), 7-9 Avril 2010, Cartagena, Espagne.

R.Rischette, T.N.Baranger, N.Debit, Boundary conditions identification for thermal cauchy problem : numerical analysis of data noise effects, *IV European Conference on Computational Mechanics* (ECCM 2010), 16-21 mai 2010, Paris, France.

R.Rischette, T.N.Baranger, N.Debit, Energy-like minimization method for evolution thermal Cauchy problem : Numerical analysis of data noise effects, *2nd International Conference on Inverse Problems in Mechanics of Structures and Materials* (IPM 2011), 27-30 Avril 2011, Rzeszów - Sieniawa, Pologne.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Communications

R.Rischette, T.N.Baranger, N.Debit, Identification de conditions limites pour un problème de Cauchy thermique : Analyse numérique et effets des données bruitées, *Séminaire interne du LaMCoS*, 18 mars 2010.

R.Rischette, T.N.Baranger, N.Debit, Méthode énergétique pour la résolution d'un problème de Cauchy non stationnaire : Analyse numérique des effets du bruit, *Journée thématique : Méthodes numériques et méthodologies avancées pour les problèmes inverses en mécaniques*, 24 mars 2011, INSA de Lyon, Villeurbanne, France.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Bibliographie

[AND 05] Andrieux S., Baranger T. N., Ben Abda A.
Data completion via the energy error functional. *Comptes Rendus Mécaniques*, vol. 333, 2005, p. 171-177.

[AND 06] Andrieux S., Baranger T. N., Ben Abda A.
Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional. *Inverse Problems*, vol. 22, n° 1, 2006, p. 115-133, Institute of Physics Publishing.

[AND 08a] Andrieux S., Baranger T. N.
An energy error-based method for the resolution of the Cauchy problem in 3D linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, 2008, p. 902-920, Elsevier.

[AND 08b] Andrieux S., Baranger T. N.
Energy methods for Cauchy problems of evolutions equations. *6th International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice, Journal of physics : Conference Series*, vol. 135, 2008, Institute of Physics Publishing.

[AND 09] Andrieux S., Baranger T. N.
Energy error based numerical algorithms for Cauchy problems for nonlinear elliptic or time dependent operators. *Inverse Problems Symposium, Michigan State University*, , 2009.

[AZA 06] Azaïez M., Ben Belgacem F., El Fekih H.
On Cauchy's problem : II. Completion, regularization and approximation. *Inverse Problems*, vol. 22, n° 4, 2006, p. 1307-1336, Institute of Physics Publishing.

[BAR 07] Baranger T. N., Andrieux S.
An optimization approach for the Cauchy problem in linear elasticity. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 35, n° 2, 2007, p. 141-152, Springer Berlin / Heidelberg.

[BAR 11] Baranger T. N., Andrieux S.
Constitutive law gap functionals for solving the Cauchy problem for linear elliptic PDE. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, 2011, p. 1970-1989, Elsevier.

[BAU 01] Baumeister J., Leitão A.
Iterative methods for ill-posed problems modeled by PDEs. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, vol. 9, n° 1, 2001, p. 13-29, De Gruyter.

[BEN 05] Ben Belgacem F., El Fekih H.
On Cauchy's problem : I. A variational Steklov-Poincaré theory. *Inverse Problems*, vol. 21, n° 6, 2005, p. 1915-1936, Institute of Physics Publishing.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

[BEN 07] Ben Belgacem F.
Why is the Cauchy problem severly ill-posed ? *Inverse Problems*, vol. 23, n° 2, 2007, p. 823-836, Institute of Physics Publishing.

[BEN 08] Ben Belgacem F.
Parameter choice in the Lavrentiev regularization of the data completion problem. *6th International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice, Journal of Physics : Conference Series*, vol. 135, n° 2, 2008, Institute of Physics Publishing.

[BON 82] Bonnans J. F.
Application de méthode lagrangiennes en contrôle. Thèse de doctorat, Université de technologie de Compiègne, 1982.

[BOU 05] Bourgeois L.
A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation. *Inverse Problems*, vol. 21, n° 3, 2005, p. 1087-1104, Institute of Physics Publishing.

[CIA 02] Ciarlet P. G.
The Finite Element Method for Elliptic Problems. SIAM, 2002.

[CIM 01] Cimetière A., Delvare F., Jaoua M., Pons F.
Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization. *Inverse Problems*, vol. 17, n° 3, 2001, p. 553-570, Institute of Physics Publishing.

[EGG 09] Egger H., Leitão A.
Nonlinear regularization methods for ill-posed problems with piecewise constant or strongly varying solutions. *Inverse Problems*, vol. 25, n° 11, 2009, page 115014, IOP.

[ENG 79] Engl H.
Necessary and sufficient conditions for convergence of regularization methods for solving linear operator equations of the first find. *Numerical Fuctional Analysis and Optimization*, vol. 3, 1979, p. 201-222, Taylor & Francis.

[ESC 08a] Escriva X., Baranger T. N.
Leaks identification on a Darcy model by solving Cauchy problem. *6th International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice, Journal of physics : Conference Series*, vol. 135, 2008, Institute of Physics Publishing.

[ESC 08b] Escriva X., Baranger T. N.
A variational Approach to solve Cauchy Problem for Steady State Stokes Flow. *8th World Congress on on Computational Mechanics and 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences (WCCM) and Enineering (ECCOMAS)*, , 2008.

[ESC 10] Escriva X., Baranger T. N., Hariga T.
Characterization of the boundary conditions in an aquifer model : a boundary data completion method. *8th International Conference on Water Ressources*, , 2010.

[FUR 00] Fursikov A. V.
Optimal control of distributed systems. American mathematical Society, 2000.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

[HAD 23] Hadamard J.
Lectures on Cauchy's problem in Linear Partial Differential Equation. New York : Dover, 1923.

[HAR 10] Hariga-Tlatli N., Baranger T. N., Ehrel J.
Misfit functional for recovering data in 2D Electrocardiography problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 34, 2010, p. 492-500.

[ISA 97] Isakov V.
Inverse problems for partial differential equations. Springer, 1997.

[JOH 06] Johansson B. T.
An iterative method for a Cauchy problem for the heat equation. *Journal of Applied Mathematics*, vol. 71, n° 2, 2006, p. 262-286, Wiley.

[JOH 07] Johansson B. T.
Determining the temperature from incomplete boundary data. *Mathematische Nachrichten*, vol. 280, n° 16, 2007, p. 1765-1779, Wiley.

[JOH 09] Johansson B. T., Kozlov V. A.
An alternating method for Cauchy problems for Helmholtz-type operators in non-homogeneous medium. *Journal of Applied Mathematics*, vol. 74, n° 1, 2009, p. 62-73, Wiley.

[KOZ 90] Kozlov V., Maz'ya V.
On iterative procedures for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations. *Leningrad Mathematical Journal*, vol. 1, n° 5, 1990, p. 1207-1228, American Mathematical Society.

[KOZ 91] Kozlov V., Maz'ya V., Fomin A.
An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 31, n° 1, 1991, p. 45-12, SpringerLink.

[LIO 67] Lions J., Lattès R.
Méthode de Quasi-reversibilité et Applications. Dunod, 1967.

[LIO 68a] Lions J. L.
Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod, 1968.

[LIO 68b] Lions J. L., Magenes E.
Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol. 1. Dunod, 1968.

[LIO 99] Lions J., Dautray R.
Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, vol. 2 - Functional and Variational Methods. Springer, 1999.

[MAR 01] Marin L., Elliot L., Heggs P., Ingham D., Lesnic D., Wen X.
Boundary element method for the Cauchy problem in linear elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 25, 2001, p. 783-793, Elsevier.

[MAR 02] Marin L., Lesnic D.
Boundary element method for the Cauchy problem in linear elasticity using singular value decomposition. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 191, 2002, p. 3257-3270, Elsevier.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

[MAR 03] Marin L., Elliot L., Heggs P., Ingham D., Lesnic D., Wen X.
An altering iterative algorithm for the Cauchy problemassociated to the Helmotz equation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 192, 2003, p. 709-722, Elsevier.

[MAR 04] Marin L., Elliot L., Heggs P., Ingham D., Lesnic D., Wen X.
BEM solution for the Cauchy problem associated with Helmotz-type equations by the the Landweber method. *Engineering Analysis with Boudary Elements*, vol. 28, 2004, p. 1025-1034, Elsevier.

[MAR 05] Marin L.
Numerical solution of the Cauchy problem for steady-state heat transfer in two-dimensional functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, , n° 42, 2005, p. 4338-4351, Elsevier.

[MAR 09] Marin L.
The minimal error method for the Cauchy next term problem in linear elasticity. Numerical implementation for two-dimensional homogeneous isotropic linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 46, 2009, p. 957-974, Elsevier.

[PLA 90] Plato R., Vainikko G.
On the regularization of projection methods for solving ill-posed problems. *Numerische Mathematik*, vol. 57, 1990, p. 63-79, Springer.

[REI 07] Reinhardt H.-J., Hào D. N., Frohne J., Suttmeier F.-T.
Numerical solution of inverse heat conduction problems in two spatial dimentions. *Journal of Inverse Ill-posed Problems*, vol. 15, 2007, p. 181-198.

[TIK 76] Tikhonov A., Arsénine V.
Méthode de résolution de problèmes mal posés. Editions Mir, 1976.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

FOLIO ADMINISTRATIF

THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : Rischette DATE de SOUTENANCE : 08/09/2011

Prénoms : Romain, Mehdi

TITRE : Analyse numérique d'une méthode énergétique pour la résolution du problème de Cauchy avec prise en compte des effets de bruit

NATURE : Doctorat Numéro d'ordre : 2011-ISAL-0075

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis CLASSE :

RÉSUMÉ : Ce travail concerne l'étude mathématique et l'analyse numérique d'une méthode de résolution du problème de Cauchy basée sur la minimisation d'une fonctionnelle énergétique. Depuis les travaux de J. Hadamard, le problème de Cauchy est connu pour être mal posé et les méthodes de résolution de ce type de problème présentent une importante instabilité numérique dans le cas de données bruitées.

Dans le premier chapitre, le problème de Cauchy est introduit et des résultats théoriques classiques sont donnés. La méthode énergétique et le problème de minimisation associé sont présentés, la théorie du contrôle optimal est utilisée pour l'étude mathématique de ce problème de minimisation.

Le deuxième chapitre est consacré à l'application de la méthode énergétique pour l'équation de la chaleur stationnaire. Une fois le cadre variationnel défini, la discrétisation éléments finis de la méthode et des estimations d'erreur *a priori* tenant compte des données bruitées sont données. Lorsque les données sont bruitées, l'erreur atteint une valeur minimale avant d'exploser numériquement tandis que la fonctionnelle atteint assymptotiquement un seuil dépendant du taux de bruit. Une estimation du seuil atteint par la fonctionnelle en fonction du bruit est donnée et aboutit à la proposition d'un critère d'arrêt pour le processus de minimisation permettant de contrôler l'explosion numérique due au bruit. Enfin, les résultats théoriques sont validés numériquement, la robustesse et l'efficacité du critère d'arrêt proposé sont illustrées par différents tests numériques.

La méthode énergétique est ensuite appliquée à l'équation de la chaleur en régime transitoire et est analysée en suivant la méthodologie introduite dans le cas stationnaire.

MOTS-CLÉS : Problème inverse, problème mal posé, problème de Cauchy, complétion de données, identification de conditions limites, contrôle optimal, éléments finis, bruit, estimation d'erreur *a priori*.

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures
UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon
18-20 rue des Sciences
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Thouraya N. Baranger

Co-directeur de thèse : Naima Debit

Président du jury : Marc Bonnet

Composition du jury :

Marc Bonnet	Stéphane Andrieux
Faker Ben Belgacem	Laurent Bourgeois
B. Tomas Johansson	Yves Renard
Thouraya N. Baranger	Naima Debit

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés

Résumé : Ce travail concerne l'étude mathématique et l'analyse numérique d'une méthode de résolution du problème de Cauchy basée sur la minimisation d'une fonctionnelle énergétique. Le problème de Cauchy est connu pour être mal posé et les méthodes de résolution de ce type de problème présentent une importante instabilité numérique dans le cas de données bruitées. Dans le premier chapitre, le problème de Cauchy est introduit, des résultats théoriques classiques sont donnés. La méthode énergétique et le problème de minimisation associé sont présentés, la théorie du contrôle optimal est utilisée pour l'étude mathématique de ce problème de minimisation. Dans le deuxième chapitre, la méthode énergétique est appliquée à l'équation de la chaleur stationnaire. Une fois le cadre variationnel défini, la discrétisation de la méthode et des estimations d'erreur *a priori* tenant compte des données bruitées sont donnés. Se basant sur ces estimations, un critère d'arrêt permettant de contrôler l'explosion numérique due au bruit est proposé. Enfin, les résultats théoriques sont validés numériquement, la robustesse et l'efficacité du critère d'arrêt proposé sont illustrées par différentes expérimentations numériques. La même méthodologie est appliquée à l'étude de la méthode énergétique pour l'équation de la chaleur en régime transitoire.

Mots clés : Problème inverse, problème mal posé, problème de Cauchy, complétion de données, identification de conditions limites, contrôle optimal, éléments finis, bruit, estimation d'erreur *a priori*.

Numerical analysis of an energy-like minimization method for solving Cauchy problem taking into account noise effetcs

Abstract : The purpose of this work is the mathematical study and the numerical convergence analysis of a method based on minimization of an energy-like functional for solving Cauchy problem. The Cauchy problem is known to be ill-posed and many resolution methods for this kind of problem present an important numerical instability in the case of noisy data. In first chapter, we give the Cauchy problem and report classical theoretical results. The energy-like method and the related minimization problem are introduced, the optimal control theory is used for the mathematical study of this minimization problem. The second chapter is devoted to application of the method for the steady state heat transfer equation. Afterwards the variational framework has been defined, the discretization of the method and *a priori* error estimates taking into account noisy data are given. Basing on these estimates, a stopping criterion is proposed wich allows to control the numerical explosion due to noise. Finally, numerical validation of theoretical results is performed, robustness and efficiency of the proposed criterion are illustrated by different numerical experiments. The same methodology is applied to study the energy-like method for the time dependent heat transfer equation.

Keywords : Inverse problem, ill-posed problem, Cauchy problem, data completion, boundary conditions identification, optimal control, finite elements, noise, *a priori* error estimates.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2011ISAL0075/these.pdf
© [R. Rischette], [2011], INSA de Lyon, tous droits réservés