



**HAL**  
open science

# Identification expérimentale de sources vibratoires par résolution du problème inverse modélisé par un opérateur éléments finis local

Cédric Renzi

► **To cite this version:**

Cédric Renzi. Identification expérimentale de sources vibratoires par résolution du problème inverse modélisé par un opérateur éléments finis local. Autre. INSA de Lyon, 2011. Français. NNT : 2011ISAL0146 . tel-00715820v1

**HAL Id: tel-00715820**

**<https://theses.hal.science/tel-00715820v1>**

Submitted on 9 Jul 2012 (v1), last revised 2 Apr 2013 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THESE

# IDENTIFICATION EXPÉRIMENTALE DE SOURCES VIBRATOIRES PAR RÉOLUTION DU PROBLÈME INVERSE MODÉLISÉ PAR UN OPÉRATEUR ÉLÉMENTS FINIS LOCAL

Présentée devant  
l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon



pour obtenir  
**le GRADE DE DOCTEUR**

Ecole doctorale :  
**Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique**

Spécialité :  
**Mécanique (Acoustique et Vibrations)**

par

**Cédric RENZI**

Ingénieur diplômé de l'ECAM Lyon

Thèse soutenue le jour mois année devant la Commission d'examen

*Thèse préparée au Laboratoire Vibrations Acoustique de l'INSA de Lyon*

**INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015**

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a>  Insa : R. GOURDON	<b>M. Jean Marc LANCELIN</b> Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a>  Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN eea@ec-lyon.fr	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a>  Insa : H. CHARLES	<b>Mme Gudrun BORNETTE</b> CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43.12.94 <a href="mailto:e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr">e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</b> <a href="http://ww2.ibcp.fr/ediss">http://ww2.ibcp.fr/ediss</a>  Sec : Safia AIT CHALAL Insa : M. LAGARDE	<b>M. Didier REVEL</b> Hôpital Louis Pradel Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69677 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16 <a href="mailto:Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr">Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</b> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Johannes KELLENDONK</b> Université Claude Bernard Lyon 1 INFOMATHS Bâtiment Braconnier 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44.82.94 Fax 04 72 43 16 87 <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b>MATERIAUX DE LYON</b>  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b> INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 <a href="mailto:Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr">Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b>  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Philippe BOISSE</b> INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b>ScSo*</b>  <b>M. OBADIA Lionel</b>  Sec : Viviane POLSINELLI Insa : J.Y. TOUSSAINT	<b>M. OBADIA Lionel</b> Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie





# Résumé

L'objet de cette thèse est l'extension aux structures complexes de la méthode de Résolution Inverse Fenêtrée Filtrée (RIFF). L'idée principale se base sur le modèle Eléments Finis local et libre d'une partie de la structure étudiée.

Tout d'abord, la méthode a été développée dans le cas des poutres. Les mesures de vibrations sont alors injectées dans le modèle Eléments Finis de la partie de poutre analysée. Les rotations sont estimées à l'aide de mesures de déplacements supplémentaires et des fonctions de forme sur le support élémentaire. La méthode étant sensible vis-à-vis des incertitudes de mesures, une régularisation a dû être développée. Celle-ci repose sur une double inversion de l'opérateur où une régularisation de type Tikhonov est appliquée dans la seconde inversion. L'optimisation de cette régularisation est réalisée par le principe de la courbe en L. A cause des effets de lissage induits par la régularisation, les moments ne peuvent être reconstruits mais ils apparaissent comme des "doublets" de forces. Ceci nous a conduit à résoudre le problème en supposant que seules des forces agissent sur la poutre. Enfin, une étude des effets de la troncature du domaine a été menée dans le but de s'affranchir des efforts de couplage apparaissant aux limites de la zone étudiée.

Le cas des plaques a été considéré ensuite afin d'augmenter progressivement la complexité des modèles utilisés. L'approche Eléments Finis a permis d'intégrer à la méthode des techniques de condensation dynamique et de réduction par la méthode de Craig-Bampton. Le nombre de degrés de liberté est trop élevé pour permettre une estimation des rotations par mesures de déplacements supplémentaires, la condensation dynamique est employée afin de les supprimer dans le modèle théorique.

Par ailleurs, la régularisation induisant une perte de résolution spatiale à cause de son effet de lissage, une procédure de déconvolution spatiale basée sur l'algorithme de Richardson-Lucy a été ajoutée en post traitement.

Enfin, une application de la méthode à la détection de défauts a été envisagée de même que l'application de la méthode à l'identification des efforts appliqués par une pompe à huile sur un banc d'essais industriel.

Le travail s'est donc appuyé sur des développements numériques et la méthode a été validée expérimentalement en laboratoire et en contexte industriel. Les résultats de la thèse fournissent un outil prédictif des efforts injectés par des sources de vibrations raccordées à une structure en s'appuyant sur un modèle Eléments Finis local et des mesures de déplacements vibratoires, le tout en régime harmonique.

Mots clés : Problèmes inverses, modèle Eléments Finis, sources vibro-acoustique, régularisation Tikhonov, déconvolution Richardson-Lucy, condensations et réductions de modèle.



# Abstract

The object of this thesis is the extension to complex structures of the RIFF method (Résolution Inverse Fenêtrée Filtrée). Considering a subpart of a structure, the main idea is to build a local Finite Element model using free boundary conditions.

First, the general method was developed on beams. Vibration measurements are injected in the Finite Element model of the analysed part of the beam. Rotations are estimated using extra-displacement measurements and elementary shape functions. The method is highly sensitive towards errors present in measurements, so a regularisation had to be used. This one consists in a double inversion of the operator where a Tikhonov regularisation is applied when performing the second inversion. The regularisation parameter is tuned by the L-curve principle. Because of the smoothing effect of the Tikhonov procedure, moments cannot be reconstructed anymore at this stage, but they do still appear as sets of opposite forces. This setback led us to solve the problem by restricting it to forces only equations. At last, the study of the truncature of the domain was conducted in the aim to suppress coupling forces appearing at the limits of the studied area.

Then, the case of plates was considered in order to increase progressively the models' complexities. The Finite Element approach permitted us to implement dynamical condensation as well as Craig-Bampton reduction techniques. This allowed us to reduce the total number of degrees of freedom to be taken into account both from a numerical and an experimental standpoint. For example, dynamical condensation allows to eliminate rotations in the model.

Besides, regularisation induces a lack of spatial resolution because of its smoothing effect. A spatial deconvolution technique was therefore developed ; it is based on the Richardson-Lucy algorithm which is applied at a post-processing stage.

At last, it was successfully proposed to extend the method to the application of detecting defaults present in the structure. The method was also validated on an industrial test bench in order to identify the forces applied by an oil pump taken from a truck's engine.

This PhD thesis relied on numerical developments and the method was validated experimentally both in laboratory and industrial context. Main results provide a predictive tool to evaluate injected forces by vibration sources linked to a structure. It necessitates to inject vibratory displacements measurements into a Finite Element model.

Keywords : Inverse problems, Finite Element model, vibroacoustics sources, Tikhonov regularisation, Richardson-Lucy deconvolution algorithm, condensations and model reduction.



# Table des matières

<b>Pont d'embarquement</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>x</b>
<b>Table des principales notations</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction - Contexte Général</b>	<b>1</b>
<b>1 Synthèse Bibliographique générale</b>	<b>3</b>
1.1 Méthodes basées sur le comportement global de la structure. . . . .	4
1.2 RIFF : une méthode basée sur le comportement local de la structure. . . . .	8
1.3 Contexte de l'étude . . . . .	10
<b>2 Méthode d'identification des efforts dans le cadre des structures 1D en flexion</b>	<b>11</b>
2.1 Fondements de la méthode (Article soumis au JSV en Juillet 2011) . . . . .	12
2.1.1 Introduction . . . . .	12
2.1.2 Développement de la méthode . . . . .	14
2.1.2.1 Principe . . . . .	14
2.1.2.2 Simulation numérique . . . . .	18
2.1.2.3 Régularisation . . . . .	20
2.1.3 Validation expérimentale . . . . .	28
2.1.3.1 Montage expérimental . . . . .	28
2.1.3.2 Résultats non régularisés sur structure complète . . . . .	29
2.1.3.3 Résultats régularisés sur structure complète . . . . .	29
2.1.3.4 Résultats régularisés sur un sous-domaine de la structure . . . . .	34
2.1.4 Conclusion . . . . .	37
2.2 Synthèse . . . . .	39

<b>3</b>	<b>Extension de la méthode aux structures 2D en flexion - Application des techniques de condensation dynamique et de réduction de Craig-Bampton</b>	<b>41</b>
3.1	Réduction du nombre de degrés de liberté (Proposition de publication)	42
3.1.1	Introduction	42
3.1.2	Développement de la méthodologie	44
3.1.2.1	Principe	44
3.1.2.2	Condensation dynamique des ddls non mesurables	47
3.1.2.3	Réduction Craig-Bampton optionnelle	47
3.1.2.4	Régularisation	49
3.1.3	Un exemple numérique	50
3.1.3.1	Cas d'étude	50
3.1.3.2	Résultats inverses sans condensation dynamique	51
3.1.3.3	Résultats inverses avec condensation dynamique	53
3.1.3.4	Résultats inverses avec condensation dynamique des rotations et réduction Craig-Bampton d'une partie du modèle	53
3.1.3.5	Effets du bruit de mesures et régularisation	60
3.1.4	Validation expérimentale	62
3.1.4.1	Montage expérimental	62
3.1.4.2	Identification de forces sans réduction Craig-Bampton	63
3.1.4.3	Identification de forces avec réduction Craig-Bampton	64
3.1.5	Conclusion	68
3.2	Identification en des zones non mesurables (acte du Congrès Français d'Acoustique 2010)	69
3.3	Synthèse	76
<b>4</b>	<b>Amélioration de la résolution par déconvolution spatiale</b>	<b>79</b>
4.1	Déconvolution appliquée aux résultats sur structures 1D (Proposition de publication)	80
4.1.1	Introduction	80
4.1.2	Vue d'ensemble de la technique d'identification de forces	81
4.1.3	Post traitement	83
4.1.3.1	La déconvolution en imagerie	83
4.1.3.2	Application au problème de l'identification de sources	84
4.1.4	Validation expérimentale	87
4.1.4.1	Montage expérimental	87
4.1.4.2	Le modèle Eléments finis utilisé	87
4.1.4.3	Résultats régularisés obtenus sur la structure complète	88
4.1.4.4	Résultats déconvolués obtenus sur la structure complète	89
4.1.4.5	Résultats régularisés obtenus sur un sous-domaine de la structure	90
4.1.4.6	Résultats déconvolués obtenus sur un sous domaine de la structure	93

4.1.5	Conclusion . . . . .	95
4.2	Déconvolution appliquée aux résultats sur structures 2D . . . . .	96
4.2.1	Application sur une plaque simple . . . . .	96
4.2.2	Application sur une plaque en L avec réduction de modèle Craig-Bampton . . . . .	99
4.3	Synthèse . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Applications</b>	<b>105</b>
5.1	Caractérisation des excitations engendrées par une pompe à huile . . . . .	106
5.2	Application à la détection de défauts . . . . .	109
5.2.1	Description de l'expérience . . . . .	109
5.2.2	Résultats . . . . .	111
5.3	Synthèse . . . . .	114
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>115</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>118</b>

# Table des principales notations

## Opérateurs, vecteurs et matrices des modèles de base

---

---

$\mathbf{M}$	Matrice de masse de la structure
$\mathbf{K}$	Matrice de raideur de la structure
$\mathbf{L}$	Opérateur Eléments Finis décrivant le mouvement de la structure libre
$\mathbf{V}$	Vecteur des données vibratoires aux noeuds (translations et rotations)
$\mathcal{A}$	Vecteur des actions mécaniques externes (forces et moments)
$\mathcal{F}$	Vecteur des forces externes
$\mathcal{M}$	Vecteur des moments externes
$\mathbf{L}^{\mathbf{P}}$	Opérateur Eléments Finis avec estimation des rotations à partir de mesures de déplacements supplémentaires
$\mathbf{V}'$	Vecteur des déplacements vibratoires incluant les noeuds de mesures de déplacements supplémentaires
$\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{inv}}$	Inverse de $\mathbf{L}^{\mathbf{P}}$
$\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{trc}}$	Opérateur Eléments Finis avec estimation des rotations à partir de mesures de déplacements supplémentaires et troncature des forces aux limites
$\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{\mathbf{R}}}$	Opérateur Eléments Finis avec estimation des rotations à partir de mesures de déplacements supplémentaires et pondération des moments
$\mathcal{A}^{\mathbf{R}}$	Vecteur des actions mécaniques externes avec pondération des moments

## Opérateurs, vecteurs et matrices après réduction par la méthode de Craig-Bampton

---

---

$\mathbf{L}^{\mathbf{r}}$	Opérateur Eléments Finis après réduction Craig-Bampton
$\mathbf{V}^{\mathbf{r}}$	Vecteur des données vibratoires après réduction Craig-Bampton
$\mathcal{A}^{\mathbf{r}}$	Vecteur des actions mécaniques externes après réduction Craig-Bampton

## Opérateurs, vecteurs et matrices après condensation dynamique

---

$\mathbf{L}^c$	Opérateur Eléments Finis après condensation dynamique des ddls non mesurés
$\mathbf{V}^c$	Vecteur des données vibratoires après condensation dynamique des ddls non mesurés
$\mathbf{F}^c$	Vecteur des forces après condensation dynamique des ddls non mesurés
$\mathbf{L}^{cinv}$	Inverse de $\mathbf{L}^c$

## Opérateurs, vecteurs et matrices après réduction et condensation dynamique

---

$\mathbf{L}^{rc}$	Opérateur Eléments Finis après réduction Craig-Bampton puis condensation dynamique des ddls non mesurés
$\mathbf{V}^{rc}$	Vecteur des données vibratoires après réduction Craig-Bampton puis condensation dynamique des ddls non mesurés
$\mathbf{F}^{rc}$	Vecteur des forces après réduction Craig-Bampton puis condensation dynamique des DDLs non mesurés
$\mathbf{L}^{rcinv}$	Inverse de $\mathbf{L}^{rc}$

## Opérateurs et vecteurs après régularisation

---

$\mathbf{L}^{P^{Ftikh}}$	Opérateur Eléments Finis après régularisation obtenue à partir des données extraites de $\mathbf{L}^{P^{inv}}$ relativement seulement aux forces
$\mathbf{L}^{P^{Mtikh}}$	Opérateur Eléments Finis après régularisation obtenue à partir des données extraites de $\mathbf{L}^{P^{inv}}$ relativement seulement aux moments
$\mathbf{L}^{PR^{tikh}}$	Opérateur Eléments Finis après régularisation avec estimation des rotations à partir de mesures de déplacements supplémentaires et pondération des moments
$\mathbf{L}^{ctikh}$	Pseudo-inverse régularisée de $\mathbf{L}^{cinv}$
$\mathbf{F}^{ctikh}$	Vecteur des forces identifiées avec condensation dynamique des ddls non mesurés et après régularisation
$\mathbf{L}^{rctikh}$	Pseudo-inverse régularisée de $\mathbf{L}^{rcinv}$
$\mathbf{F}^{rctikh}$	Vecteur des forces identifiées avec réduction Craig-Bampton et condensation dynamique des ddls non mesurés et après régularisation

## Notations relatives à l'étape de déconvolution

---

$\mathbf{H}$	Matrice de transformation entre $\mathbf{F}^d$ et $\mathbf{F}^{tikh}$ , $\mathbf{F}^{ctikh}$ ou $\mathbf{F}^{rc^{tikh}}$ . Elle modélise l'impact de la régularisation sur toutes les positions possibles de forces ponctuelles
$\mathbf{F}^d$	Vecteur des forces identifiées déconvoluées

# Introduction - Contexte Général

L'identification des sources est un domaine d'études très présent en vibroacoustique. En effet, les techniques de modélisation sont aujourd'hui suffisamment avancées pour obtenir des données fiables au niveau des modèles de comportement de structures. Cependant, les sources de vibrations, comme de bruit, sont encore plutôt mal connues. La précision des calculs de réponses forcées trouve donc certaines de ses limites par ce biais.

Cette thèse découle de cette problématique. Elle fait suite à celle de Charles Pezerat [1] dans laquelle il avait développé la méthode RIFF (Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée) qui consiste à identifier les excitations vibratoires par résolution du problème inverse. Ainsi, à partir de la mesure du champ vibratoire, les efforts sont identifiés en utilisant l'équation du mouvement de la structure. La méthode RIFF est particulièrement intéressante en ce sens qu'elle utilise très peu d'informations et qu'elle possède un aspect local qui la rend attractive d'un point de vue pratique. Par contre, son développement est resté limité aux structures simples que l'on peut modéliser analytiquement. Il s'agit donc de développer une démarche expérimentale d'identification de sources applicable à des structures complexes.

Cette thèse étend donc la méthode RIFF aux structures modélisables par Eléments Finis. On conserve ainsi les avantages de la méthode RIFF :

- l'approche locale qui permet de ne modéliser qu'une partie de la structure à étudier et donc de s'affranchir de la connaissance de toutes excitations en dehors de la zone d'étude,
- le minimum d'informations nécessaires *a priori* sur les sources vibratoires à identifier, ce qui permet à la fois de localiser les efforts sur la zone d'étude et dans un deuxième temps de quantifier les niveaux d'amplitudes d'efforts.

L'extension aux Eléments Finis a nécessité l'étude de trois problématiques principales :

1. la modélisation Eléments Finis et le lien aux mesures, y compris la substitution de degrés de libertés non mesurables,
2. la régularisation du problème inverse,
3. l'amélioration de la résolution spatiale.

Ce mémoire de thèse s'articule autour de propositions de publication, dont un a été soumis au Journal of Sound and Vibration. Ceux-ci ont été précédés par deux communications en congrès (NOise and Vibration : Emerging Methods NOVEM 2009 [2] et International

Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA 2010 [3]). Une communication parue dans l'acte du congrès Congrès Français d'Acoustique CFA 2010 [4] ainsi que diverses études additionnelles complètent le texte de ce mémoire.

Le premier chapitre consiste en une synthèse bibliographique très générale sur les méthodes de mesures indirectes d'efforts en lien à notre problématique.

Le second chapitre s'intéresse aux poutres. Il contient un article décrivant les fondements de la méthode. La modélisation Eléments Finis d'un sous domaine de poutre en flexion y est abordée. La substitution des rotations, la régularisation du problème inverse et les problèmes liés à la troncature du domaine y sont exposés.

Le troisième chapitre concerne l'extension de la méthode aux plaques. Le passage à ce type de structures nécessite d'étudier la possibilité de réduire le nombre de degrés de liberté à mesurer et à prendre en compte dans le problème inverse. Ainsi, il est proposé de substituer les degrés de libertés non-mesurables, comme les rotations notamment, par une condensation dynamique [5]. On y présente également la possibilité d'utiliser la méthode de Craig-Bampton [6] afin d'obtenir la réduction de zones vierges d'excitations externes.

Le quatrième chapitre présente l'application d'une méthode de déconvolution issue du domaine du traitement d'images au problème d'identification de forces après régularisation.

Le cinquième chapitre est applicatif. Dans une première partie, une étude a été menée sur un banc d'essais associé au projet MACOVAM (Maîtrise du COmportement Vibratoire des Auxiliaires Moteurs). Le but a été d'identifier l'excitation appliquée par une pompe à huile. Dans une seconde partie, nous proposons une utilisation de la méthode dans le cadre de la détection de défauts.

# 1

## Synthèse Bibliographique générale

Grâce à l'augmentation des moyens de calcul, les techniques de modélisation numériques s'avèrent être de plus en plus performantes et utilisées. Elles sont ainsi largement déployées au sein des industries automobiles, aéronautiques ou ferroviaires pour ne citer qu'elles. On prendra comme exemple le cas évident de la modélisation par Eléments Finis [7, 8, 9, 10]. Cependant, pour être pertinent, un modèle doit être renseigné avec de bonnes valeurs de références. La connaissance des matériaux est un point important et de nombreuses techniques expérimentales existent pour déterminer les caractéristiques intrinsèques aux matériaux. Au contraire, la connaissance des sources d'excitation n'est pas si évidente et leur identification s'avère parfois nécessaire. C'est aujourd'hui un sujet important de recherches grâce auxquels l'amélioration de la qualité des données doit permettre de gagner en précision sur les résultats des simulations numériques.

Ainsi, prenons l'exemple du développement d'une automobile. Si aujourd'hui la conception d'une caisse ne peut se faire sans analyses modales [11], le projet global du véhicule ne peut, lui, avancer sans optimisation des paramètres en maîtrisant les coûts et délais, pour fournir la juste qualité que le client est prêt à accepter [12]. Pour le cas de l'acoustique ou des vibrations, la simulation des bruits intérieurs devient alors une aide de premier ordre à la conception et la décision dans le but d'optimiser le compromis au niveau des différentes fonctionnalités qu'offrent le véhicule [11]. Afin d'obtenir des résultats pertinents, il est évident qu'un modèle recalé de véhicule est une condition *sine qua non*. Cependant, la définition précise des excitations dans un modèle est tout aussi importante : le niveau de bruit est évidemment directement relié au niveau de l'excitation.

L'identification des excitations dynamiques nécessite parfois la résolution d'un problème inverse. Elle appartient à la catégorie des problèmes dits *mal-posés*, tel que le décrit Hadamard [13]. La notion de problème bien posé est liée à l'existence de la solution, à son unicité



et à sa stabilité, vis-à-vis des incertitudes dans les données d'entrée. Lorsque la solution existe et est unique, il reste la question de sa stabilité. Les problèmes inverses auxquels nous sommes confrontés dans le domaine de l'identification de forces présentent une hypersensibilité au bruit de mesures. Leur résolution nécessite donc généralement une étape de régularisation afin de stabiliser la solution. La technique de régularisation utilisée dans cette thèse est la méthode de Tikhonov qui est une approche déterministe du problème inverse comme on peut le voir dans l'ouvrage de Tikhonov et Arsenine [14]. Enfin, parmi l'ensemble des quasi-solutions proposées par la méthode de Tikhonov, il reste nécessaire de choisir celle qui semble la plus optimale. Dans le cadre des méthodes déterministes, l'optimisation du paramètre de régularisation peut alors être réalisée par des méthodes telles que la General Cross Validation ou le principe de la coube en L [15].

Ce premier chapitre présente dans la suite un résumé sur les méthodes de mesures indirectes d'efforts, en vibrations. Deux tendances principales et complémentaires apparaissent :

- les méthodes *globales* qui nécessitent une connaissance de la structure complète : les méthodes basées sur des modèles de fonctions de transferts font partie de ce type d'approches [16, 17, 18, 19], nécessitant souvent des hypothèses restrictives de connaissances *a priori* des positions et du type des excitations pour être efficaces expérimentalement,
- les méthodes *locales* qui ne nécessitent pas une connaissance de la structure complète et dont la méthode RIFF [1] est à l'origine. Dans celle-ci, aucune hypothèse *a priori* sur les positions et types de sources vibratoires n'est nécessaire.

Par ailleurs, toutes les méthodes s'appuient sur des données mesurées et un modèle. Ce dernier peut être, quant à lui, issu de l'expérience ou du numérique.

## 1.1 Méthodes basées sur le comportement global de la structure.

---

De nombreuses méthodes utilisent un modèle qui intègre le comportement global de la structure. Elles s'appuient sur trois grandes classes de modèles qui peuvent être issus de l'expérimentation ou du calcul [16] :

- les modèles à base de fonctions de transferts, dans l'espace fréquences,
- les modèles modaux,
- les modèles dans l'espace physique, généralement obtenus par Eléments Finis ou par des équations analytiques constituées d'équations différentielles spatiales et temporelles.

Les techniques basées sur des modèles de transferts traduisant le comportement global de la structure sont sans contexte les méthodes les plus diffusées au sein de l'industrie car elles sont facilement combinables aux analyses de voies de passage tel que l'Analyse des Voies

de Transfert (TPA pour Transfer Path Analysis). Elles présentent l'avantage d'être simples à mettre en oeuvre et de ne nécessiter que peu de mesures lorsque l'on se donne l'information *a priori* de la localisation et du nombre de sources à identifier. Ce sont des méthodes globales dans le sens où il n'est pas possible de ne s'intéresser qu'à une partie interne de structure. On notera néanmoins la possibilité d'avoir une approche de sous-structuration en considérant les transferts de composants mesurés librement. Nécessitant des inversions de matrices singulières, les approches les plus courantes consistent à optimiser le nombre de conditionnement de ces matrices afin de faciliter leur inversion [17, 20].

Généralement, il est nécessaire d'utiliser un système surdéterminé afin de donner plus d'informations à la régularisation. Il est ainsi préférable d'avoir un nombre de réponses supérieur au nombre d'excitations afin d'améliorer le conditionnement de la matrice à inverser. Cette condition a été raffinée par l'étude de Desanghere [20] et de Okubo [21] où ils montrent qu'en réalité, pour obtenir une surdétermination efficace, le nombre de réponses mesurées doit être supérieur au nombre de modes pris en compte qui lui même doit être supérieur au nombre d'excitations à identifier.

Il existe également des méthodes de régularisation mathématiques. Les plus courantes sont les méthodes de Troncature de la Décomposition en Valeurs Singulières (TSVD) ou encore la méthode de Tikhonov.

Parmi les méthodes basées sur les fonctions de transfert, on peut citer les travaux de Thite et Thompson [22, 23] qui ont combiné mesures d'accélération aux points supposés d'applications des efforts et fonctions de transferts tout en étudiant l'impact de la régularisation par Troncature de la Décomposition en Valeurs Singulières.

Dans ce domaine également, Leclère [24, 25, 26] utilise une amélioration de la méthode avec une matrice de transferts pondérée permettant de traiter des quantités d'ordres de grandeurs voir d'unités différentes.

Toujours dans le domaine des méthodes de transferts, on trouve les travaux de Parloo et Guillaume, sur poutre, que l'on trouvera en [27, 28, 29]. Dans [28, 29], ils ont développé une méthode itérative de calcul de pseudo-inverse avec pondération afin d'obtenir une meilleure localisation sur un ensemble de points supposés d'application de forces. Dans [27], les fonctions de transfert ne sont pas mesurées mais synthétisées à partir de mesures d'accélération opérationnelles et de techniques de normalisation de modes à partir des sensibilités des paramètres modaux. Leurs travaux utilisent donc des méthodes proches de celles de synthèses modales opérationnelles.

Enfin, dans [30], Starkey compare une méthode basée sur les transferts avec une méthode reposant sur un modèle modal de la structure étudiée. L'avantage de ce dernier est de pouvoir accéder à des efforts en des zones non mesurées.

Comme on le voit, les méthodes de transferts reposent sur une expression matricielle reliant données à identifier et quantités mesurées. La matrice de transferts peut-être obtenue expérimentalement ou calculée par diverses méthodes numériques. Sa taille peut devenir importante dans le cas où l'on veut localiser un effort sur un grand nombre de points *a priori*. Il existe également des méthodes basées sur un modèle modal dans lequel on introduit des données vibratoires mesurées. Néanmoins, l'ensemble de ces méthodes utilise une vision globale de la structure.

La recherche en identification inverse de sources vibratoires ne se restreint pas forcément à l'utilisation de modèles de transferts. On trouve également dans la littérature des approches basées sur des modèles physiques.

Ainsi, la méthode des Eléments Finis peut être utilisée pour créer les modèles reliant des données mesurées aux données à identifier. Le modèle peut être ou non modifié par les mesures.

Dans le domaine de l'analyse statique, Hauser dans [31] utilise la méthode IFEM, basée sur un modèle Eléments Finis en statique, afin d'accéder à la pression hydrostatique qu'exerce le sol terrestre sur un ouvrage de génie-civil. Les charges connues et inconnues sont prélocalisées. La méthode s'appuie sur des mesures de déformations prises sur l'ouvrage à étudier et modélisé par Eléments Finis. Les mesures sont alors injectées dans le modèle qui permet de relier charges connues ou inconnues et déplacements. La régularisation est effectuée par la méthode de Tikhonov.

Dans le domaine de l'analyse dynamique des structures, citons le travail de Busby dans [32] qui s'est intéressé à la reconstruction du profil temporel d'un chargement appliqué en un point connu, sur une poutre, à l'aide d'un modèle Eléments Finis et de mesures d'accélération. La méthode de Tikhonov est également utilisée ici, l'auteur comparant différentes méthodes d'optimisation du paramètre de régularisation tels que la méthode General Cross Validation (GCV) et le principe de la courbe en L.

La méthode des Eléments Finis fournit par ailleurs un outil flexible permettant de déterminer l'opérateur reliant efforts et données mesurées. La mise en forme du problème par cette méthode permet également d'envisager de bénéficier des techniques développées dans le cadre des problèmes directs, comme c'est le cas des techniques de réductions de modèles et de condensation.

Ibrahim et Sestieri dans [33] ont ainsi utilisé un modèle Eléments Finis physique condensé-dynamiquement, aux points de mesures, sur un treillis de poutre. La stabilité de la solution est obtenue par régularisation physique grâce à l'amélioration du conditionnement du système par la recherche du positionnement optimal des noeuds maîtres (où des données de mesures existent). L'identification devient possible grâce à la possibilité d'expansion du modèle pour obtenir les efforts en des noeuds esclaves (où aucune donnée de mesures n'existe). La technique est appliquée en recherchant les efforts appliqués aux noeuds esclaves, non mesurés, sachant que les localisations *a priori* des efforts doivent être connues afin de s'assurer d'un conditionnement optimal du système : le nombre d'efforts recherchés doit être inférieur ou égal aux nombres de mesures.

Enfin, il est possible d'utiliser une approche modale à partir du modèle physique. Dans le cas où les localisations des efforts à identifier ne sont pas nécessaires, on notera l'approche choisie par Möller dans [34] et par D' Cruz dans [35]. Möller utilise un modèle Eléments Finis et, supposant connue sur un maillage de calcul la forme de la répartition spatiale des efforts, il écrit, à l'aide du théorème de réciprocité, la relation entre les amplitudes des efforts et les données mesurées en quelques points de ce maillage. Il formule alors la solution du problème inverse comme celle d'un problème de minimisation entre N essais

avec modifications structurelles ( $N$  expériences perturbatrices par ajout de masses) ce qui permet de régulariser le problème. Quant à D' Cruz, il utilise le schéma modal d'une plaque simplement supportée pour obtenir un modèle modal permettant de relier l'amplitude et la phase d'un effort au champ de déplacements estimés. Il démontre qu'il suffit de 3 capteurs délivrant un signal en amplitude et phase pour obtenir la localisation et l'amplitude d'un effort sur un maillage d'étude. Sa méthode est donc adaptée directement à l'identification d'une seule force, même s'il envisage la possibilité de sa généralisation à  $N$  efforts grâce au principe de superposition. Néanmoins, elle nécessite de connaître précisément le schéma modal de la structure complète étudiée.

Corus et Balmès, dans [36, 37, 38], utilisent quant à eux des techniques d'expansion et de projection sur des bases modales réduites afin d'identifier les efforts de couplage entre une structure réceptrice et un composant actif. Un modèle local est construit au niveau de la structure active. Celui-ci est grossier et il sert uniquement à l'expansion de données mesurées. Généralement, les méthodes développées partent du constat que les comportements des structures réceptrices peuvent être connus à l'aide de modèles et/ou par l'expérience de même que le comportement des composants actifs peut être connu dans le cas le plus favorable par le biais d'une analyse modale expérimentale. Néanmoins, le comportement des interfaces n'est pas directement accessible, de la même manière que les efforts internes au composant actif. Dans [36], il est montré que le modèle local peut servir dans un premier temps à interpoler les mesures sur des points non mesurés : la collocation mesures/forces n'est pas nécessaire. Dans [38], une sous-structuration est réalisée autour des ddls d'interface entre structure réceptrice et composant actif. Le modèle local est construit pour le composant actif et un modèle Eléments Finis recalé est disponible pour décrire le comportement de la structure réceptrice. La méthode nécessite en plus de cela une analyse modale expérimentale du composant actif seul et de la structure réceptrice reliée au composant actif. Enfin, les techniques d'expansion sont également utilisées pour relier données mesurées et base modale réduite de la structure réceptrice. [37] ajoute à [36] la possibilité de transposition d'une structure test à une structure cible. Le comportement de cette dernière doit être connu à nouveau par le biais d'un modèle Eléments Finis recalé car elle est supposée non disponible pour les essais du composant actif (cas typique de banc d'essais chez un fournisseur).

En synthèse, les méthodes proposées dans ces trois travaux font une part belle à l'utilisation des techniques de sous-structuration et aux techniques d'expansion issues de la synthèse par modes de composants (ou CMS en Anglais pour Component Mode Synthesis [39]).

Le point commun à toutes ces approches, qu'elles soient menées en statique, en temporel ou en régime harmonique, est la nécessité d'avoir des modèles représentatifs de la structure complète étudiée. Selon l'une ou l'autre méthode, il est nécessaire ou non de mesurer les données vibratoires aux points d'identification des efforts. Lorsqu'il n'est pas nécessaire de mesurer les vibrations aux points d'entrée d'efforts, ce sont généralement des techniques d'expansion modale qui sont utilisées ou encore des techniques de condensation ou de

projection dans un espace réduit.

## 1.2 RIFF : une méthode basée sur le comportement local de la structure.

---

Nous présentons dans cette partie les fondements de la méthode RIFF (Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée) pour l'identification de forces.

La méthode RIFF développée par Charles Pézerat au cours de sa thèse [1] est une approche différente des méthodes présentées dans la partie 1.1. La technique s'appuie sur un modèle local correspondant à une zone d'étude. Ainsi, il n'est pas nécessaire de connaître les conditions aux limites ainsi que les excitations en dehors de la zone considérée.

La méthode repose sur une discrétisation par différences finies de l'équation analytique du mouvement. Aujourd'hui, la méthode RIFF n'est applicable qu'aux structures simples telles que poutres, plaques ou coques où l'équation du mouvement est connue analytiquement sous la forme d'une simple équation différentielle.

La partie Résolution Inverse (RI) de RIFF de la méthode fait référence à l'utilisation d'un schéma aux différences finies où les déplacements mesurés sont alors injectés dans l'équation discrétisée. De part sa formulation forte, la Résolution Inverse permet d'identifier la distribution de forces excitatrices. Ainsi, tous les types d'efforts peuvent être identifiés (forces, moments, ponctuels ou non) puisque la notion de distribution est générale.

Il est intéressant de souligner que cette méthode ne contient pas mathématiquement d'opération d'inversion. Pourtant, elle possède toutes les caractéristiques d'un problème inverse, car elle recherche physiquement à identifier les causes à partir de la mesure des effets. Parmi ces caractéristiques, l'hypersensibilité face aux incertitudes de mesures est présente. On retrouve là le constat réalisé par Stevens dans son état de l'art [17] : le problème inverse est un processus de dérivation, amplifiant le bruit, alors que le problème direct est un processus intégrateur, qui a une tendance à lisser les résultats.

Ainsi, il est nécessaire d'utiliser une régularisation afin de stabiliser le comportement de la procédure.

Dans la méthode RIFF, la régularisation est apportée par un filtrage passe-bas en nombres d'ondes. Le nombre d'ondes de coupure est directement proportionnel au nombre d'onde naturel de flexion de la structure. Le facteur de proportionnalité est choisi empiriquement, il est d'autant plus haut que les mesures sont peu bruitées. En pratique, des mesures en laboratoire permettent un coefficient de 3 ou 4 alors que des mesures dans un milieu industriel, fortement bruitées, nécessitent un paramètre de 2 voir de 1.5. On notera que l'utilisation d'un filtre à réponse finie est requis pour que la méthode garde son aspect local.

Etant donné que le domaine de mesures est limité spatialement, la distribution de forces identifiée par la Résolution Inverse présente une discontinuité aux limites du domaine. Le lissage de ces discontinuités implique un étalement de la distribution de forces sous forme d'un phénomène de Gibbs. Pour diminuer ce phénomène, un fenêtrage spatial est requis avant filtrage. Dans la méthode RIFF, la fenêtre utilisée est une fenêtre de Tukey constituée de demi-fenêtres de Hanning aux limites du domaine étudié.

La méthode RIFF a donné naissance à plusieurs publications :

- le développement de la méthode sur poutres [40, 41, 42], sur plaques [43, 44, 45], et sur coques [46, 47, 48],
- le développement d'un banc de caractérisation de sources solidiennes permettant de quantifier la puissance vibratoire injectée, les efforts appliqués par les sources et également le développement de la technique multi-impédances de plaque pour approcher l'impédance d'accueil en conditions réelles [49, 50, 51, 52, 53],
- le développement de la méthode à l'identification d'équation analytique [54].

Récemment la méthode a été étendue à l'acoustique grâce au couplage avec l'holographie acoustique par Chevillote, Leclère et Pézerat [55, 56] et on notera également les travaux de Leclère et Pézerat [57] visant à améliorer la technique en se passant de régularisation grâce à une adaptation du maillage et du schéma aux différences finies.

Ainsi, la méthode RIFF a été employée et validée dans de nombreux cas expérimentaux industriels, sur bancs d'essais. Néanmoins, les structures de bancs d'essais doivent rester des plaques ou des poutres. L'impédance d'accueil est donc éventuellement non représentative de la structure réceptrice en conditions réelles. Une idée pour corriger ce problème a été d'utiliser un ensemble de plaque de différents impédances afin d'encadrer l'impédance de la structure d'accueil réelle et d'obtenir une estimation des résultats en conditions opérationnelles réelles.

Par ailleurs, il existe dans la littérature d'autres études proches de la technique RIFF mais elles perdent l'avantage du caractère local.

Fregolent et Sestieri ont développé dans [58] une démarche similaire sur poutres et plaques, mais dans l'espace des nombres d'ondes. Celle-ci nécessite cependant une transformée de Fourier spatiale et elle perd donc le caractère local de RIFF puisqu'il est nécessaire de traiter l'ensemble du domaine. Cependant, les conditions aux limites seront identifiées et il n'est pas nécessaire de les connaître *a priori*.

Zhang et Mann III dans [59, 60] ont développé une technique similaire à la méthode RIFF, sur plaque, mais s'appuyant sur une transformée de Fourier spatiale.

Enfin, Liu et Steve Shepard Jr, quant à eux, se sont intéressés dans [61] à la régularisation des résultats obtenus après l'étape RI à l'aide de la TSVD et de la régularisation de Tikhonov. Ils montrent que le principe de la courbe en L fonctionne pour optimiser le paramètre de régularisation. L'étude est extrêmement proche de celle de Pézerat, hormis le fait que la régularisation soit optimisée par la courbe en L. L'inconvénient est que le problème di-

rect doit être ici complètement connu (modèle de la structure complète et conditions aux limites) puisqu'il faut calculer le résidu de la solution.

---

## 1.3 Contexte de l'étude

---

A la lumière des méthodes existantes et appliquées couramment dans les problèmes inverses d'identification de forces, il est possible de tirer un certain nombre de conclusions pour notre travail.

La méthode RIFF, appréciée pour ses avantages inhérents à son approche locale du problème inverse, présente le défaut de ne pouvoir être applicable qu'aux structures simples pour lesquelles un modèle analytique doit être connu. Ceci limite son application dans l'industrie.

Les méthodes qui gardent une vision globale sont elles pénalisées par la nécessité de prendre en compte simultanément la structure complète ainsi que l'ensemble des forces. Elles reposent souvent sur des hypothèses de connaissance *a priori* des sources (types/localisations). Elles sont cependant généralement applicables, et appliquées, en contexte industriel et sur structures complexes.

Le fossé entre ces approches, fort différentes, motive clairement l'étude rapportée dans ce mémoire de thèse. Il s'agit de pouvoir étendre la méthode RIFF aux structures complexes. Pour celà, le choix d'un modèle Eléments Finis s'avère incontournable. Nous nous inspirerons également des techniques de régularisation que l'on trouve couramment dans la littérature et ne reposant pas sur la vision en nombres d'ondes qui perd tout son sens dans le cas de structures à géométries complexes.

Cependant, il s'avère souhaitable de conserver une approche aussi locale que possible.





# 2

## Méthode d'identification des efforts dans le cadre des structures 1D en flexion

Ce premier chapitre a pour objectif de définir le principe de base de la méthode sur une poutre en flexion. L'intérêt d'effectuer le développement sur une structure simple est de pouvoir se raccrocher au cadre défini par la méthode RIFF analytique.

Ce chapitre consiste en un article soumis au Journal of Sound and Vibration. Il présente en détails les fondements de la méthode appliquée au cas des poutres en flexion. Ce travail avait fait l'objet d'une étude préliminaire présentée au congrès NOise and Vibration : Emerging Methods NOVEM 2009 [2].

Comme on le verra dans ce chapitre, nous considérons dans ce travail de recherche un comportement linéaire des structures et des matériaux et les développements ont été réalisés en régime harmonique. Ceci suppose donc un comportement stationnaire des sources.

Par ailleurs, nous parlerons dans la suite de mesures de déplacements par simplicité. Cependant, lorsque les mesures sont réalisées à l'aide d'un vibromètre laser, c'est la vitesse vibratoire qui est mesurée, et lorsque nous utilisons des accéléromètres, c'est l'accélération qui est mesurée. Les déplacements sont alors obtenus par intégration.

## 2.1 Fondements de la méthode (Article soumis au JSV en Juillet 2011)

---

### Vibratory source identification by using the Finite Element Model of a subdomain of a flexural beam

#### Abstract

This paper proposes the identification of vibration excitations by an inverse method. The use of the local operator of a structure for which the vibration field is obtained by measurements is investigated. This method has already been developed on analytically known structures, but there are as yet few applications. The goal of this paper is to adapt the same technique by using an operator obtained with the Finite Element method rather than a discretised differential motion equation. The first difficulty is the measurement of rotational degrees of freedom. A concept analogous to an observation matrix enabling only the measurement of displacements is then proposed. The method of extracting the operator on a part of the structure is also discussed. Two variants are proposed : an operator with free boundary conditions and a truncated operator without boundary conditions. The first permits identifying internal forces at the boundaries of the subdomain, whereas the second ignores them. In order to regularise the inverse method, a Tikhonov approach is used. An important point of this paper is the discussion of the effect of this regularisation which implies ambiguities between reconstructed forces and moments in the results. The possibility of an a priori "force only" assumption is then demonstrated and recommended. After illustrations obtained from numerical simulations on beams, an experimental validation is provided for a beam excited by a shaker where several signals are used, giving several signal to noise ratios. The results are discussed and compared to the force measured directly by a piezoelectric sensor.

#### 2.1.1 Introduction

The identification of noise sources is a very important topic in both academic and industrial projects. Noise can emerge from structural or airborne paths, with the possibility of coupling between them.

In the context of structural sources, classical models are established on the definition of quantities of forces and/or moments.

The identification consists in measuring the latter values directly or by using an inverse method when the direct approach is impossible.

For vibrating structures, inverse methods usually aim at estimating forces by measuring related quantities. Besides, inverse problems are often highly influenced by the noise present in the measured data. In order to study them thoroughly, it is necessary to define :

- the number of sensors required to carry out the measurements (e.g., accelerometers),

- the set of data to be identified (eg. forces),
- the approach chosen to relate these quantities (e.g., the use of a model),
- the regularisation method used to reduce sensitivity to noise (e.g., Truncated Singular Values Decomposition (TSVD), modal truncations, etc.).

Taking into account the diversity in each previous point, the whole set of methods can be divided into global methods and local methods.

Global methods are quite widespread. They require a global model, entailing a possible lack of precision that is obviously a major drawback, especially when using a numerical model. Indeed, the efficiency of the method is influenced by the position of the sensors chosen in order to estimate the behaviour of the whole structure. Furthermore, all the forces present on a structure have an influence on the final results : for instance, if incorrect assumptions are made on their localisations, the results are disturbed. Lastly, the accuracy of the results is strongly linked to the representativeness of the model, a feature required over the whole structure, including the boundary conditions. These approaches include transfer-function-based methods [62, 26, 22, 27] and numerical model-based methods [62, 36]. Regularisation steps can include TSVD, the Tikhonov method and global modal truncatures.

Local methods are less known but they at least have one major advantage : the identification procedure can be focused on a small part of the structure and is not influenced by other possible sources (on the rest of the structure). The RIFF method (Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée, which means Windowed Filtered Inverse Resolution) [63], also named FAT (Force Analysis Technique) in several papers [43, 55], falls within this category of inverse method. By using this technique, the force distributions exciting a structure can be identified from the vibration field. This approach is particularly interesting since all kinds of excitation can be identified. Indeed, force distribution is a general quantity and its identification may lead to the post-identification of distributive forces, point forces [40], point moments [63] and injected power [49] due to different types of mechanical link. Currently, one of RIFF's flagship applications is the characterisation of structure-borne noise sources [49]. The RIFF method is based on a finite difference scheme discretising the local dynamic motion equation so that a force distribution may be identified. The regularisation procedure is based on global windowing associated with local low-pass filtering of the force results.

RIFF's most appreciated advantage is that it uses little information : only the local motion equation and displacement values are needed. However, it was developed only for structures with known analytical models, like beams [40], plates [43] and shells [47, 46]. This is very restrictive when characterising structure borne noise because applied forces generally depend on the receiver, thus the use of test benches with beams [?] and/or plates [51] cannot give immediate results.

The purpose of this paper is to present the first step to overcome these limitations by using a Finite Element Model (FEM) instead of the analytical equation of motion.

The Finite Element Model has already been used in previous force identification works from other authors. Corus and Balmes in [36] used an FEM model in order to identify the forces applied by a compressor to a receiving structure, but the approach remained global.

In the case of static problems, Hauser et al. measured earth pressure on a building, using an inverse FEM method regularised by the Tikhonov process and strain measurements [31]. Busby also developed an identification procedure in the time domain for an impact force on a beam, but it was necessary to know the *a priori* localisation of the force and no experimental validation was achieved [32]. Ibrahim et al. proposed an FEM-based method on a set of beams. Again, a hypothesis on forces locations had to be made but one difference was that the method permitted carrying out physical regularisation by optimising sensor locations [33].

The method proposed in the present work uses a local Finite Element Model of the structure in which measured displacements are used to identify nodal loads.

In this paper, the complete process is presented (including the FEM formulation and the Tikhonov regularisation). Particular attention is paid to the effects of regularisation on identified loads. The originality of this work resides in both the study of such effects (particularly on moments) and the use of the FE model of a subdomain with no prelocalisation of loads. Experimental results are then given to validate the proposed method.

## 2.1.2 Methodology development

### 2.1.2.1 Principle

Let us consider the dynamic problem of a flexural beam of length  $L_g$ , thickness  $h$  and width  $b$ . Its material properties are  $\rho$ , mass density, and  $E^* = (1 + j\eta)E$ , complex Young modulus (modeling both the local stiffness (Young modulus  $E$ ) and the structural damping of the material (damping factor  $\eta$ )).

Harmonic motion at angular frequency  $\omega$  is considered. The beam is modeled by a Finite Element Method with  $N$  discretizing nodes,  $N_d = 2N$  Degrees of Freedom (DOFs) and  $N_e = N - 1$  elements and the model is restricted to flexural motion. The dynamic matrix system [10] can be written as in Equation 2.1 :

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{V} = \mathbf{L} \mathbf{V} = \mathcal{A}, \quad (2.1)$$

where  $\mathbf{M}$  is the mass matrix,  $\mathbf{K}$  is the dynamic stiffness matrix including damping effects,  $\mathbf{L}$  is the finite element operator of the structure,  $\mathbf{V}$  is the response vector consisting of nodal displacements and rotations and  $\mathcal{A}$  is the vector of mechanical actions containing nodal forces  $\mathcal{F}$  and moments  $\mathcal{M}$ . Figure 2.1 shows the classic  $i$ th 1D-beam element of length  $L_{ei}$ , where  $w_i$  and  $\theta_i$  denote displacement and rotation respectively at the node  $i$ . The mass and stiffness matrices of the structure are computed via the assembly of elementary matrices  $\mathbf{M}^e$  and  $\mathbf{K}^e$  :

$$\mathbf{M}^e = \rho S \begin{bmatrix} \frac{13L_{ei}}{35} & \frac{11L_{ei}^2}{210} & \frac{9L_{ei}}{70} & -\frac{13L_{ei}^2}{420} \\ \frac{11L_{ei}^2}{210} & \frac{L_{ei}^3}{105} & \frac{13L_{ei}^2}{420} & -\frac{L_{ei}^3}{140} \\ \frac{9L_{ei}}{70} & \frac{13L_{ei}^2}{420} & \frac{13L_{ei}}{35} & -\frac{11L_{ei}^2}{210} \\ -\frac{13L_{ei}^2}{420} & -\frac{L_{ei}^3}{140} & -\frac{11L_{ei}^2}{210} & \frac{L_{ei}^3}{105} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^e = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L_{ei}^3} & \frac{6}{L_{ei}^2} & -\frac{12}{L_{ei}^3} & \frac{6}{L_{ei}^2} \\ \frac{6}{L_{ei}^2} & \frac{4}{L_{ei}} & -\frac{6}{L_{ei}^2} & \frac{L_{ei}}{2} \\ -\frac{12}{L_{ei}^3} & -\frac{6}{L_{ei}^2} & \frac{12}{L_{ei}^3} & -\frac{6}{L_{ei}^2} \\ \frac{6}{L_{ei}^2} & \frac{2}{L_{ei}} & -\frac{6}{L_{ei}^2} & \frac{4}{L_{ei}} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$



FIGURE 2.1 – Example of a classic FEM 1D-beam element of length  $L_{ei}$ . This element index is  $i$ .

which depend on material properties and on geometry with  $I$  the flexural inertia,  $S$  the beam's section and  $L_{ei}$  the length of the  $i$ th element (see [10]). Matrices in (2.2) are obtained from the computation of integrals representing kinetics and deformation energies of the element. The computation of such quantities is approximated by the use of the third order Hermite polynomial shape functions  $\eta_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, 4$  leading to the interpolation of displacements and rotations along the element as shown in Equation (2.3) :

$$\begin{cases} \eta_1(x) = 1 - \frac{3}{L_{ei}^2}x^2 + \frac{2}{L_{ei}^3}x^3 \\ \eta_2(x) = x - \frac{5}{L_{ei}}x^2 + \frac{1}{L_{ei}^2}x^3 \\ \eta_3(x) = \frac{3}{L_{ei}^2}x^2 - \frac{2}{L_{ei}^3}x^3 \\ \eta_4(x) = -\frac{1}{L_{ei}}x^2 + \frac{1}{L_{ei}^2}x^3 \end{cases} . \quad (2.3)$$

Considering the inverse problem where unknowns are the forces and moments contained in  $\mathcal{A}$  and the input data are the displacements and the rotations contained in  $\mathbf{V}$ , it can be seen that the problem in (2.1) remains local as soon as a subdomain is considered in Equation (2.1) because matrix  $\mathbf{L}$  is band-wise [10]. The computation of the force  $\mathcal{F}_i$  or moment  $\mathcal{M}_i$  at a node number  $i$ , not located on the boundary, requires only the values at the DOFs of the two elements sharing this node, as shown in equations (2.4) and (2.5) :

$$\mathcal{F}_i = L_{2i-1,2i-3}w_{i-1} + L_{2i-1,2i-2}\theta_{i-1}L_{2i-1,2i-1}w_i + L_{2i-1,2i}\theta_i + L_{2i-1,2i+1}w_{i+1} + L_{2i-1,2i+2}\theta_{i+1}, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{M}_i = L_{2i,2i-3}w_{i-1} + L_{2i,2i-2}\theta_{i-1}L_{2i,2i-1}w_i + L_{2i,2i}\theta_i + L_{2i,2i+1}w_{i+1} + L_{2i,2i+2}\theta_{i+1}. \quad (2.5)$$

Therefore, the method can be applied locally : the force or moment identification at node  $i$  is obtained from equations 2.4 and 2.5 by measuring only 3 displacements and 3 rotations.

The components of  $\mathbf{V}$  are made up of translations and rotations, which must be measured. From a practical standpoint, measuring the rotations proves to be difficult. Busby,

in [32], used static condensation methods to reduce the problem only to translations. Balmès preferred in [64] to use an observer system making it possible to link the measurement data of  $\mathbf{V}'$  to the DOFs of  $\mathbf{V}$  :

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}\mathbf{V}', \quad (2.6)$$

where  $\mathbf{V}'$  indicates a vector containing only measured displacements and  $\mathbf{P}$  is a matrix representing the evaluation equations from measurements to DOFs.

In [64], the authors proposed constructing the matrix  $\mathbf{P}$  by using first order local finite difference to approximate the local slope of displacement function. In the present work, we preferred to approximate the rotations by using interpolation provided by the elementary shape functions used in the model, as suggested in [64, 39] (see reference [2]).

A non-standard element type related to test measurements is therefore defined. It contains four translation DOFs for odd-numbered elements and two translation DOFs for even-numbered elements, as shown in Figure 2.2, where  $w'$  corresponds to the experimental DOFs. The rotations at all nodes are calculated from all the displacements of the odd-numbered elements.

The shape functions of the odd-numbered elements (Subfigure 2.2(a)), related to the interpolation, become :

$$\begin{cases} \eta'_1(x) = 1 - \frac{11}{2L_{ei}}x + \frac{9}{L_{ei}^2}x^2 - \frac{9}{2L_{ei}^3}x^3 \\ \eta'_2(x) = \frac{9}{L_{ei}}x - \frac{45}{2L_{ei}^2}x^2 + \frac{27}{2L_{ei}^3}x^3 \\ \eta'_3(x) = -\frac{9}{2L_{ei}}x + \frac{18}{L_{ei}^2}x^2 - \frac{27}{2L_{ei}^3}x^3 \\ \eta'_4(x) = \frac{1}{L_{ei}}x - \frac{9}{2L_{ei}^2}x^2 + \frac{9}{2L_{ei}^3}x^3 \end{cases} \quad (2.7)$$

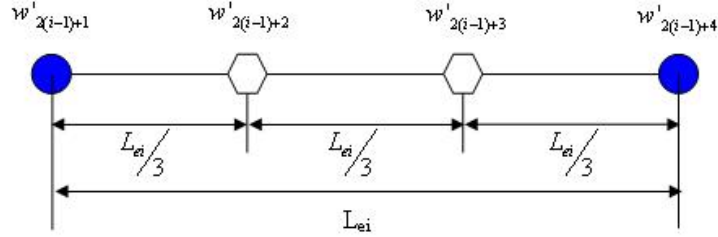
Then, for these elements, (2.6) gives the following relationship :

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_{i+1} \\ \theta_{i+1} \end{Bmatrix} = \mathbf{P}^e \begin{Bmatrix} w'_{2(i-1)+1} \\ w'_{2(i-1)+2} \\ w'_{2(i-1)+3} \\ w'_{2(i-1)+4} \end{Bmatrix}, \quad (2.8)$$

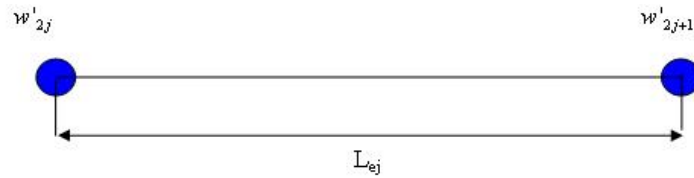
where  $\mathbf{P}^e$  is the elementary matrix :

$$\mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -11/2L_{ei} & 9/L_{ei} & -9/2L_{ei} & 1/L_{ei} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/L_{ei} & 9/2L_{ei} & -9/L_{ei} & 11/2L_{ei} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

The global matrix  $\mathbf{P}$  results from the assembly when taking into account only each second



(a)



(b)

FIGURE 2.2 – Example of new test mesh elements. (a) odd-numbered  $i$  element ; (b) even-numbered  $j$  element.

element (odd numbered ones in the chosen mesh) for the computation of rotations :

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \dots \\ w_{N-1} \\ \theta_{N-1} \\ w_N \\ \theta_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -11/2L_{ei} & 9/L_{ei} & -9/2L_{ei} & 1/L_{ei} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/L_{ei} & 9/2L_{ei} & -9/L_{ei} & 11/2L_{ei} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -11/2L_{ei} & 9/L_{ei} & -9/2L_{ei} & 1/L_{ei} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1/L_{ei} & 9/2L_{ei} & -9/L_{ei} & 11/2L_{ei} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \\ w'_4 \\ \dots \\ w'_{2N-3} \\ w'_{2N-2} \\ w'_{2N-1} \\ w'_{2N} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

where  $w'_i$  stands for global measurable displacements. Note that the test mesh is irregular and that  $N$  must be even in the current application.



Substituting Equation (2.6) in (2.1) leads to :

$$\mathbf{L}^{\mathbf{P}}\mathbf{V}' = \mathcal{A}. \quad (2.11)$$

The computation of forces and moments in  $\mathcal{A}$  is obtained by the newly constructed operator  $\mathbf{L}^{\mathbf{P}}$ , by using the FEM method without it being necessary to measure nodal rotations.

Finally, including the estimation of rotations, the method remains a local approach on a subdomain where two kinds of extractions can be achieved for the matrix operator  $\mathbf{L}^{\mathbf{P}}$  :

1.  $\mathbf{L}^{\mathbf{P}}$  can be constructed with free boundary conditions on the subdomain,
2. a truncated version of this operator can be constructed on the same subdomain by eliminating lines corresponding to forces and moments at the boundaries. The objective of this truncation is to avoid the appearance of forces and moments at the boundaries. The truncated version of the operator is noted  $\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{\text{trc}}}$ .

### 2.1.2.2 Numerical simulation

The objective of this section is to demonstrate the use of the Equation (2.11) by a numerical simulation.

The latter simulation was performed at a frequency of 326 Hz on a simply supported beam whose characteristics are given in Table 2.1.

Length $L_g$ (m)	Thickness $h$ (cm)	Width $b$ (cm)	Mass density $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Young Modulus $E$ (N/m <sup>2</sup> )	Structural damping $\eta$
1.02	2	2	7800	2E11	1E-4

TABLE 2.1 – Material and geometry characteristics of the simulated beam.

The simulated displacements are obtained by using an analytical forced wave decomposition approach [65], using the flexural wavenumber  $k = \sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI}}\sqrt{\omega}$ .

Two cases were studied :

- first case : a single point force of amplitude  $\mathcal{F}_0 = 1$  N is applied to the beam at  $x_0 = 0.6$  m, simulated displacements are noted  $w_F$  and computed by using Equation (2.12) :

$$\begin{cases} x \in [0; x_0], w_F(x) = \frac{F_0}{2k^3 EI} \left( \sin(kx) \frac{\sin(k(L-x_0))}{\sin(kL)} - \sinh(kx) \frac{\sinh(k(L-x_0))}{\sinh(kL)} \right) \\ x \in ]x_0; L], w_F(x) = \frac{F_0}{2k^3 EI} \left( \sin(k(L-x)) \frac{\sin(kx_0)}{\sin(kL)} - \sinh(k(L-x)) \frac{\sinh(kx_0)}{\sinh(kL)} \right) \end{cases}, \quad (2.12)$$

- second case : a single point moment of amplitude  $\mathcal{M}_0 = -1$  N.m is applied to the beam at  $x_0 = 0.6$  m, simulated displacements are noted  $w_M$  and computed by using

Equation (2.13) :

$$\begin{cases} x \in [0; x_0], w_M(x) = \frac{M_0}{2k^2 EI} \left( \sin(kx) \frac{\cos(k(L-x_0))}{\sin(kL)} - \sinh(kx) \frac{\cosh(k(L-x_0))}{\sinh(kL)} \right) \\ x \in ]x_0; L], w_M(x) = -\frac{M_0}{2k^2 EI} \left( \sin(k(L-x)) \frac{\cos(kx_0)}{\sin(kL)} - \sinh(k(L-x)) \frac{\cosh(kx_0)}{\sinh(kL)} \right) \end{cases} \quad (2.13)$$

Then, Equation (2.11) is directly applied to these values in order to obtain the forces and moments applied to the beam. The FE model used is such that the sizes of the elements on the identification mesh are chosen to be identical and equal to  $L_e = 0.02$  m.

Figure 2.3 presents the results of the excitation identification processed on the simply supported beam driven by the single point force and using  $\mathbf{L}^P$  :

- Subfigure 2.3(a) plots the forces extracted from vector  $\mathcal{A}$ . The method correctly identifies the exciting force at  $x_0$  as well as the reacting forces at the boundaries,
- Subfigure 2.3(b) plots the moments extracted from vector  $\mathcal{A}$ . Spatial oscillations of moments of very low magnitudes are found and correspond to numerical errors.

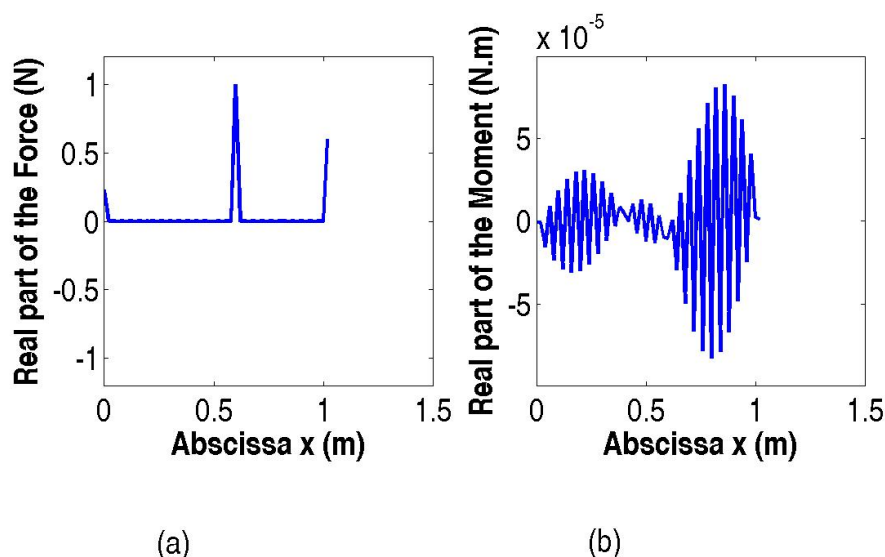


FIGURE 2.3 – Identified excitations from simulated displacements of a simply supported beam excited by a point force at frequency  $f = 326$  Hz. (a) computed forces; (b) computed moments. The operator with free boundary conditions  $\mathbf{L}^P$  is used.

Figure 2.4 presents results of the excitations identification processed on the simply supported beam driven by the single point moment and using  $\mathbf{L}^P$  :

- Subfigure 2.4(a) plots the forces extracted from vector  $\mathcal{A}$ . Reacting forces are correctly identified at the boundaries,
- Subfigure 2.4(b) plots the moments extracted from vector  $\mathcal{A}$ . The exciting moment is found correctly.

In conclusion, this section demonstrated that the method proposed does not suffer from any bias when applied to exact data, except for the small numerical errors due to the use of discrete operators.

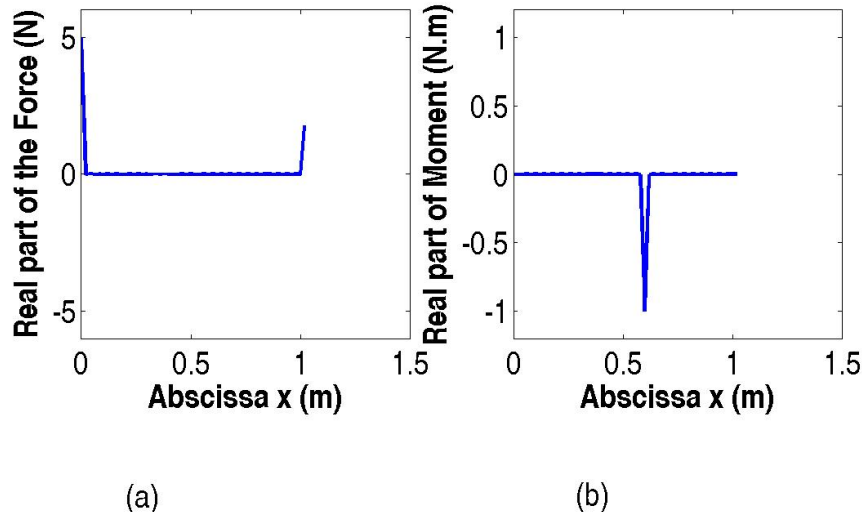


FIGURE 2.4 – Identified excitations from simulated displacements of a simply supported beam excited by a point moment at the frequency  $f = 326$  Hz. (a) computed forces; (b) computed moments. The operator with free boundary conditions  $\mathbf{L}^P$  is used.

### 2.1.2.3 Regularisation

#### 2.1.2.3.1 Principle

As in several inverse problems concerning the identification of excitations on the basis of their effects, the noise in the data is amplified and leads to the reconstruction of aberrant results, particularly in the high-wavenumber domain [63, 40, 66].

In the present case, the noise is amplified by the matrix operators constructed in the previous section.

In order to overcome this difficulty, two regularisation approaches were considered :

- the use of a low-pass wavenumber filtering procedure, as described in [63, 40, 66]. The results of this process applied to the FEM method were presented in [2]. This approach will not be investigated in the present paper,
- the use of the Tikhonov procedure. It has the advantage of being applicable for complex structures for which the definition of a structural wavenumber would be meaningless.

The Tikhonov regularisation (see reference [14]) is an enhanced least square method. It treats the inversion of the linear system whose general form is given by the Equation (2.14) :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{b}, \quad (2.14)$$

where  $\mathbf{b}$  is the vector of unknowns and  $\mathbf{y}$  is the vector of measured data. It must be noted that to express the inverse problem given by Equation (2.11) in this form, an initial inversion of the matrix operator must be performed. The regularisation process consists in computing the pseudo-inverse  $\mathbf{A}^{\text{tikh}}$  of  $\mathbf{A}$  by the introduction of the regularising parameter

$\beta$  in its Singular Value Decomposition (see reference [15]) :

$$\mathbf{A}^{\text{tikh}} = \mathbf{W}\mathbf{S}_{\text{alt}}^{-1}\mathbf{U}^H \text{ where } \mathbf{S}_{\text{alt}} = \mathbf{S} + \beta^2\mathbf{S}^{-1}, \quad (2.15)$$

where  $\mathbf{S}$  is the diagonal matrix of the singular values of  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{W}$  are unitary matrices that stem from the Singular Value Decomposition :  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{W}^H$ . The suffix alt stands for altered, meaning that regularisation is applied and  $^H$  denotes the Hermitian transpose.

The regularisation method requires a means of optimising the regularising parameter in order to make it more automatic. The optimisation of the parameter  $\beta$  will be done in the final method and for validation, by using the L-curve method [32, 26, 67]. However, in the following subsections, parameter  $\beta$  will be chosen *a-priori*.

Since the direct problem is physically a well-conditioned problem, the first inversion of the matrix operator is not particularly difficult. The SVD process is still used because the matrix operator may not be square (in the case where  $\mathbf{L}^{\text{Ptrc}}$  is used). On the contrary, difficulties arise in the second inversion because regularisation based on the modification of singular values is processed in a matrix in which the columns relating to forces contain very different quantities from those corresponding to the moments. To normalise both units and scales, left-weighting can therefore be pre-processed before performing the first inversion by left-multiplying the linear system with a weighting matrix  $\mathbf{R}$  according to the approach given in references [26, 68]. Equation (2.11) becomes :

$$\mathbf{L}^{\text{PR}}\mathbf{V}' = \mathcal{A}^{\mathbf{R}}, \quad (2.16)$$

with  $\mathbf{L}^{\text{PR}} = \mathbf{R}\mathbf{L}^{\text{P}}$  the weighted operator and  $\mathcal{A}^{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathcal{A}$  the weighted vector of excitations. The weighting matrix  $\mathbf{R}$  is chosen as a diagonal matrix with values 1 on the force DOFs and values  $\frac{1}{L_{ei}}$  on the moment DOFs allowing the description of moments as equivalent forces. Of course, the final results are obtained by multiplying the weighted vector excitation by the following matrix  $\mathbf{R}^{-1}$ . The regularised operator will be noted  $\mathbf{L}^{\text{PRtikh}}$ .

### 2.1.2.3.2 Ambiguity between forces and moments after the regularisation

The simulations presented in section 2.1.2.2 are used again for this study.

Figure 2.5 presents the results obtained on the simply supported beam driven by a single point force at the frequency  $f = 326$  Hz.

Each subfigure shows several curves corresponding to different parameters  $\beta$  :

- Subfigure 2.5(a) plots the forces extracted from the reconstructed unweighted vector  $\mathcal{A}$ ,
- Subfigure 2.5(b) plots the moments extracted from the reconstructed unweighted vector  $\mathcal{A}$ .

Analysing Figure 2.5, it can be noted that the regularisation causes a bias. Indeed, with no regularisation, the force excitation can be identified, but the duality between forces and moments is observed as soon as regularisation is applied. Also, it is important to note that spatial oscillations are observed in the moments computed in the inverse solution. These oscillations become increasingly damped as the level of regularisation is rises.

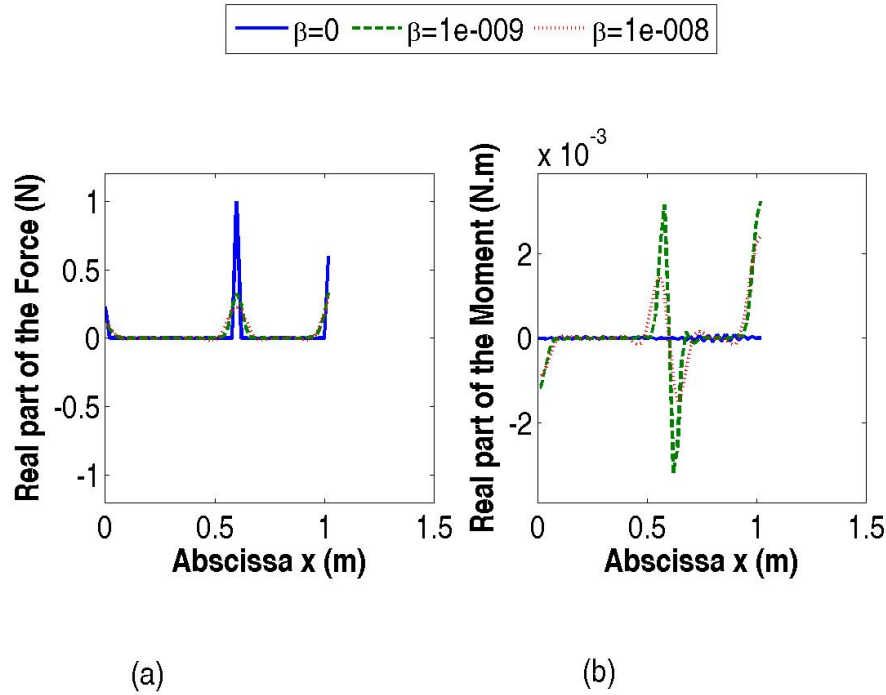


FIGURE 2.5 – Identified excitations from simulated displacements of a simply supported beam excited by a point force at the frequency  $f = 326$  Hz. The inversion of matrix  $\mathbf{L}_{\text{PR}}^{-1}$  is regularised by a Tikhonov procedure. (a) computed forces ; (b) computed moments. The operator with free boundary conditions  $\mathbf{L}^{\text{PRtikh}}$  was used.

Figure 2.6 presents the same kind of results but with a single point moment excitation at the frequency  $f = 326$  Hz.

In Figure 2.6, the moment excitation can be identified, but once again the duality between forces and moments is observed as soon as regularisation is applied. Furthermore, in the case of moment excitation, the identified moment magnitude decreases and part of it is converted into two opposing equivalent forces every time the value of  $\beta$  is increased.

### 2.1.2.3.3 Use of a "force only" solution

The latter observation of the previous section demonstrates that it would be difficult to differentiate between forces and moments. It also becomes impossible to reconstruct the amplitude of the excitation. Therefore we propose seeking a solution containing forces only. Note that it is no longer necessary to use the weighting process with the matrix  $\mathbf{R}$ .

The approach is then to keep the forces-related columns of the inverse  $\mathbf{L}^{\text{Pinv}}$  of matrix  $\mathbf{L}^{\text{P}}$ . The resulting matrix is noted  $\mathbf{L}^{\text{PinvF}}$  in the following.

The next step consists in applying the Tikhonov regularisation during the inversion of  $\mathbf{L}^{\text{PinvF}}$  ; the regularised operator will be noted  $\mathbf{L}^{\text{PFtikh}}$ .

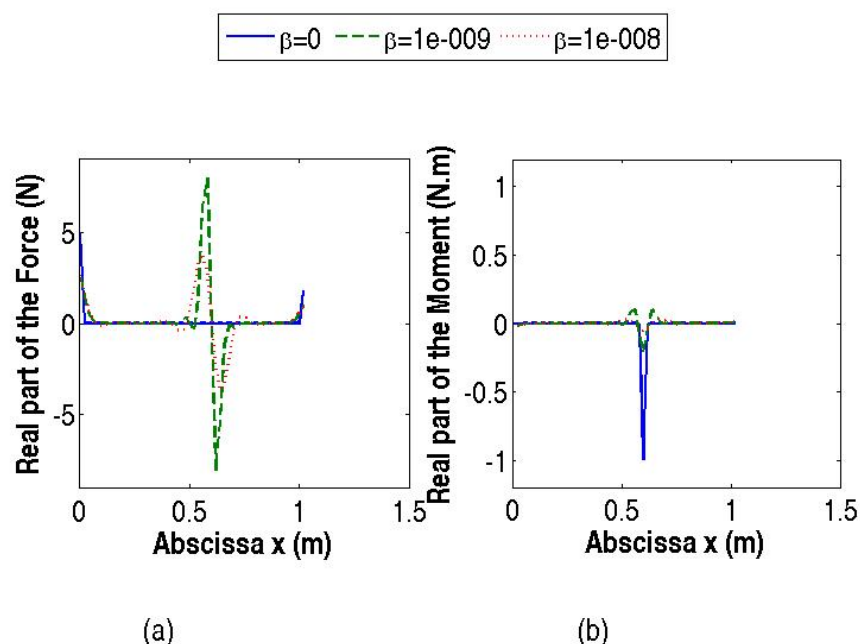


FIGURE 2.6 – Identified excitations from simulated displacements of a simply supported beam excited by a point moment at frequency  $f = 326$  Hz. The inversion of matrix  $\mathbf{L}_{\text{PR}}^{-1}$  is regularised by a Tikhonov procedure. (a) computed forces ; (b) computed moments. The operator with free boundary conditions  $\mathbf{L}^{\text{P}}\mathbf{R}$  was used

The forces  $\mathbf{F}^{\text{tikh}}$  are computed with Equation 2.17 :

$$\mathbf{F}^{\text{tikh}} = \mathbf{L}^{\text{P}}\mathbf{F}^{\text{tikh}}\mathbf{V}'. \quad (2.17)$$

The full procedure is summed up in Figure 2.7.

Figure 2.8 presents the results of the excitation identification processed on the simply supported beam driven by a single point force at frequency  $f = 326$  Hz for different levels of regularisation. The results of Figure 2.8 are clearly the same as those of Subfigure 2.5(a). Figure 2.9 presents the results of the excitation identification processed on the simply supported beam driven by a single point moment at frequency  $f = 326$  Hz. Here again, it is clear that the results of Figure 2.9 are the same as those of Subfigure 2.6(a). Because we assumed that only forces are identified, the results in Figure 2.9 correspond to two opposite forces around the location of the theoretical moment excitation. The effect of the smoothing depending on the regularisation level can also be observed : oscillations become increasingly damped as the level of regularisation is increased, but they are present even when no regularisation is applied. The effect of keeping forces only in the inverse solution leads to a slight smoothing effect.

The signification of the observations made in Figures 2.8 and 2.9 is that only conside-

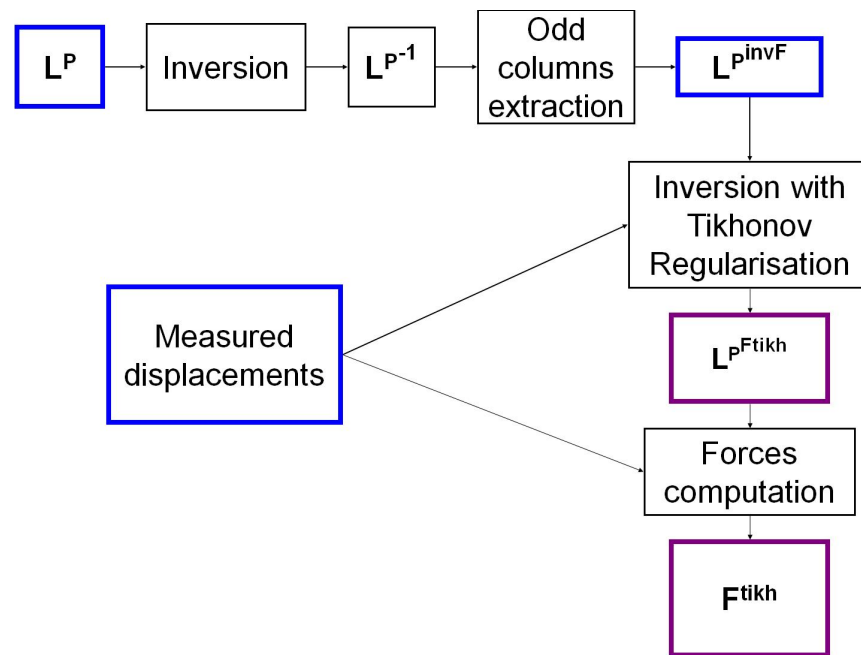


FIGURE 2.7 – General FEM + Tikhonov regularisation procedure.

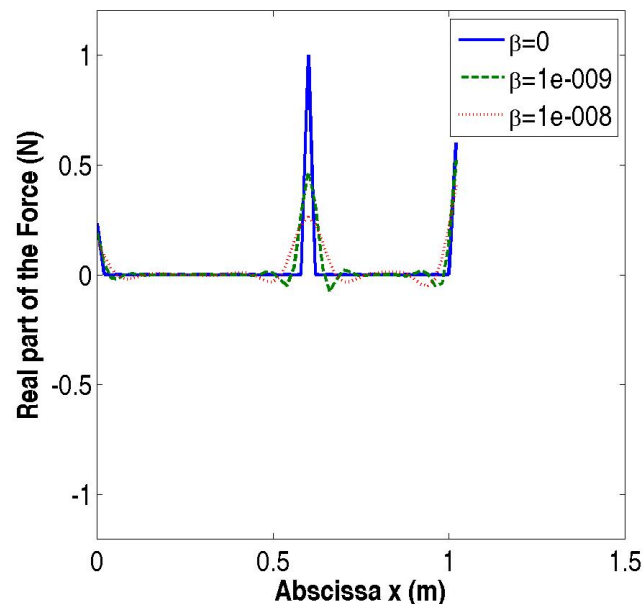


FIGURE 2.8 – Identified excitations from simulated displacements of a simply supported beam excited by a point force at frequency  $f = 326$  Hz. The inversion of matrix  $\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{\mathbf{inv}}\mathbf{F}}$  is regularised with a Tikhonov procedure. The results obtained with three values of  $\beta$  are compared. Forces are calculated by using  $\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{\mathbf{Ftikh}}}$ .

ring force data in the matrix to be inverted does not add more assumptions on the results than those caused by regularisation.

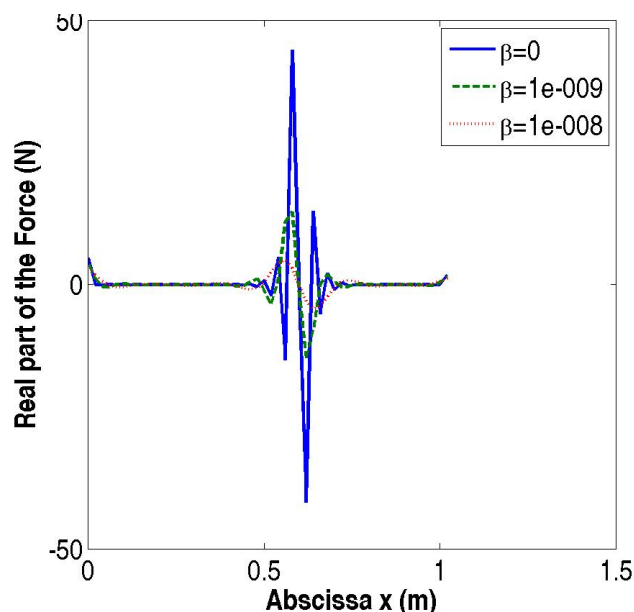


FIGURE 2.9 – Excitations identified from simulated displacements of a simply supported beam excited by a point moment at frequency  $f = 326$  Hz. The inversion of matrix  $\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{\text{invF}}}$  is regularised with a Tikhonov procedure. Results obtained with three values of  $\beta$  are compared. Forces are calculated by using  $\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{\text{Ftikh}}}$ .

#### 2.1.2.3.4 Use of a "moment only" solution

Figure 2.10 presents results of the excitations identification processed on the simply supported beam driven by a single point force at the frequency  $f = 326$  Hz for different levels of regularisation.

When analysing Figure 2.10, it appears that the representation of forces using moments necessitates a full set of opposite moments that pollutes the whole domain. Locating forces with an equivalent moment reconstruction by using this method proved to be fruitless.

In comparison to Subfigure 2.5(b), it is noteworthy that the spatial oscillations are highly amplified and are not damped by further regularisation.

On the contrary, it was shown in the previous subsection that it was possible to locate moments with an equivalent force reconstruction. Therefore, the "forces only" solution is the method chosen.

#### 2.1.2.3.5 Effects of operator truncation before regularisation

In the previous sections, a complete free-free operator was used. The local operator could also be extracted by truncating the matrix operator  $\mathbf{L}^{\mathbf{P}}$  to obtain  $\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{\text{trc}}}$  as suggested previously at the end of section 2.1.2.1. This makes the matrix studied rectangular, thus the SVD technique was required for the first inversion, but no regularisation was needed. The matrix obtained is  $[\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{\text{trc}}}]^+$  where  $^+$  denotes the Moore-Penrose pseudo-inverse. As described in section 2.1.2.1, the force-related columns are kept so that the second inversion will occur in matrix  $[\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{\text{trc}}}]_{\mathbf{F}}^+$  to obtain the regularised matrix  $\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{\text{trcFtikh}}}$ .



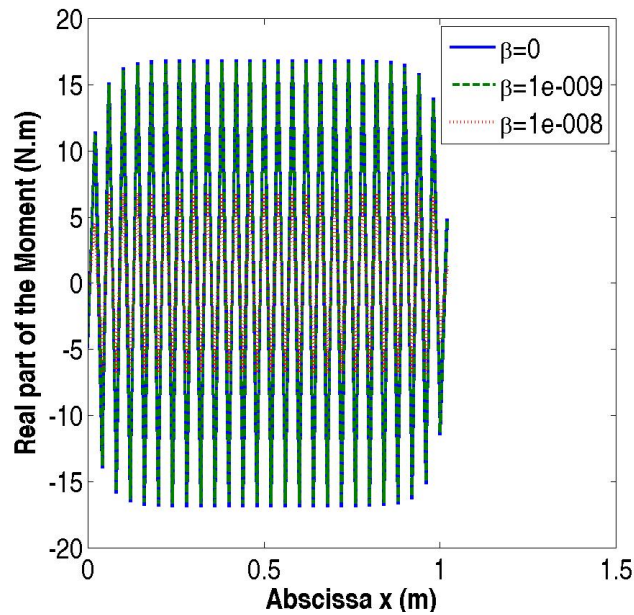


FIGURE 2.10 – Identified excitations from simulated displacements of a simply supported beam excited by a point force at the frequency  $f = 326$  Hz. The inversion of matrix  $\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{\text{invM}}}$  is regularised with a Tikhonov procedure. Results obtained with three values of  $\beta$  are compared. Calculated forces using  $\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{\text{Mtikh}}}$ .

Figure 2.11 presents the results of the excitation identification processed for the simply supported beam driven by a single point force at the frequency  $f = 326$  Hz.

It is clear that the results of Figure 2.11 are the same as those of Subfigure 2.5(a) and Figure 2.8, except that the coupling excitations at the boundaries disappear.

Figure 2.12 presents results of the excitations identification processed for the simply supported beam driven by a single point moment at frequency  $f = 326$  Hz.

It is clear that the results of Figure 2.12 are the same as those of Subfigure 2.6(a) and of Figure 2.9.

One setback when using  $\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{\text{trc}}}$  is that the L-curve approach for tuning the regularisation parameter [67, 15] cannot be applied because the computation of the direct problem is needed to compute the residual quantity.  $\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{\text{trc}}}$  does not give enough information for the definition of the direct problem.

Therefore, in order to use the principle of limit deletion by truncating the operator, analogous to the global windowing used in the RIFF method, we propose using the same  $\beta$  found by using the operator including free boundary conditions. Of course, it will not be fully optimised for the truncated version of the operator, but the outcome of the following experimental validation shows that the results obtained are accurate enough.

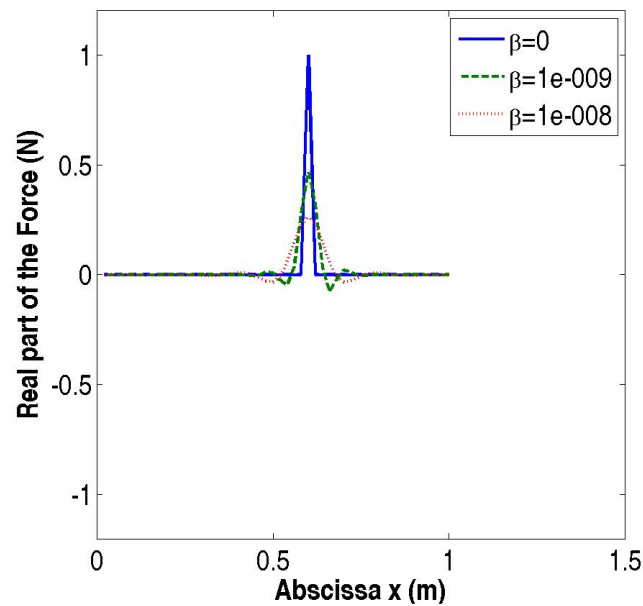


FIGURE 2.11 – Identified excitations from simulated displacements of a simply supported beam excited by a point force at the frequency  $f = 326$  Hz. The inversion of matrix  $\mathbf{L}^{\text{Ptrc}^+}_{\mathbf{F}}$  is regularised with a Tikhonov procedure. Results obtained with two values of  $\beta$  are compared. The operator  $\mathbf{L}^{\text{Ptrc}}$  was used.

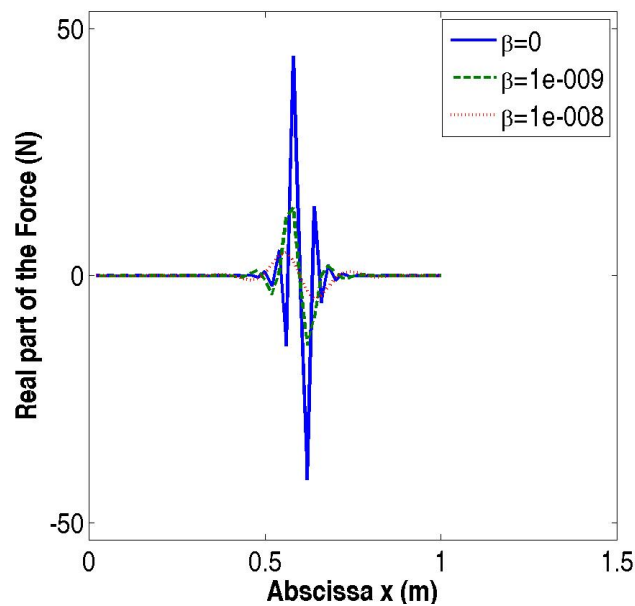


FIGURE 2.12 – Excitations identified from simulated displacements of a simply supported beam excited by a point force at frequency  $f = 326$  Hz. The inversion of matrix  $\mathbf{L}^{\text{Ptrc}^+}_{\mathbf{F}}$  is regularised with a Tikhonov procedure. The results obtained with two values of  $\beta$  are compared. The operator  $\mathbf{L}^{\text{Ptrc}}$  was used.

## 2.1.3 Experimental validation

### 2.1.3.1 Experimental setup

In order to validate the method proposed, the vibrations of a suspended steel beam excited by a shaker were measured by using a scanning laser vibrometer. Figure 2.13 shows a photograph of this experiment and Table 2.2 gives the characteristics of the beam studied.

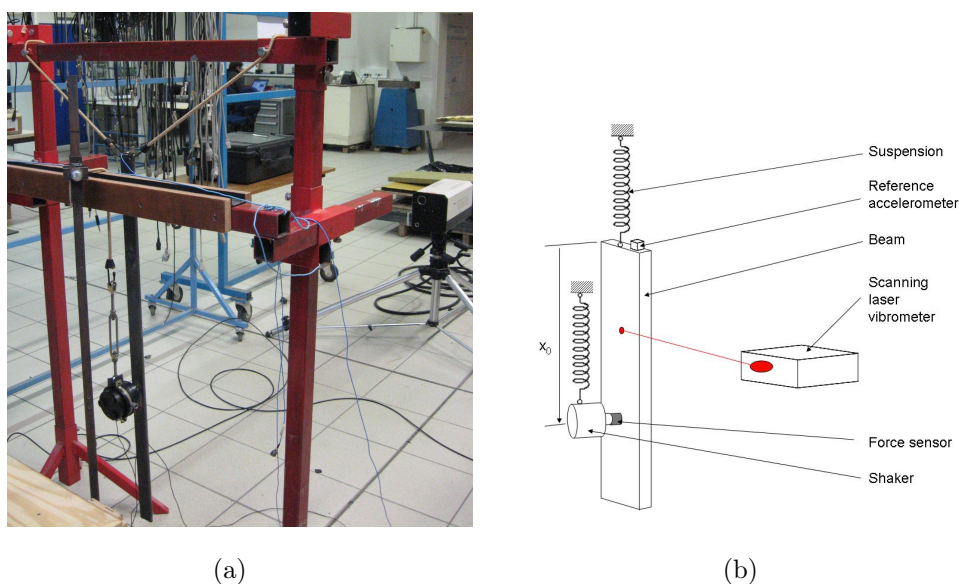


FIGURE 2.13 – Experimental validation setup. (a) Picture ; (b) Sketch.

Length $L_g$ (m)	Thickness $h$ (cm)	Width $b$ (cm)	Mass density $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Young Modulus $E$ (N/m <sup>2</sup> )	Structural damping $\eta$
1	1.02	4	7800	2E11	1E-4

TABLE 2.2 – Material and geometry characteristics of the experimental beam.

The excitation is located at abscissa  $x_0 = 0.60$  m. Three excitation signals were used :

1. A pure sine tuned to the frequency of 400 Hz,
2. A periodic chirp signal in the range [20 Hz - 3200 Hz] with a period equal to two seconds,
3. A white noise signal in the range [20 Hz - 3200 Hz].

For the comparisons hereafter, the force applied by the shaker was directly measured with a piezoelectric force sensor. The signal given by an accelerometer, fixed near the boundary

of the suspension point, was considered as the phase reference for all the measurements. The sizes of the elements on the identification mesh were chosen to be identical and equal to  $L_e = 0.02$  m and the measurement mesh was defined with a fixed size of  $L_e/3$ . An Operational Deflection Shape measurement was carried out along the beam and the results are plotted in Figure 2.14, for frequency  $f = 400$  Hz. The increasing presence of noise related to the signals used is clear.

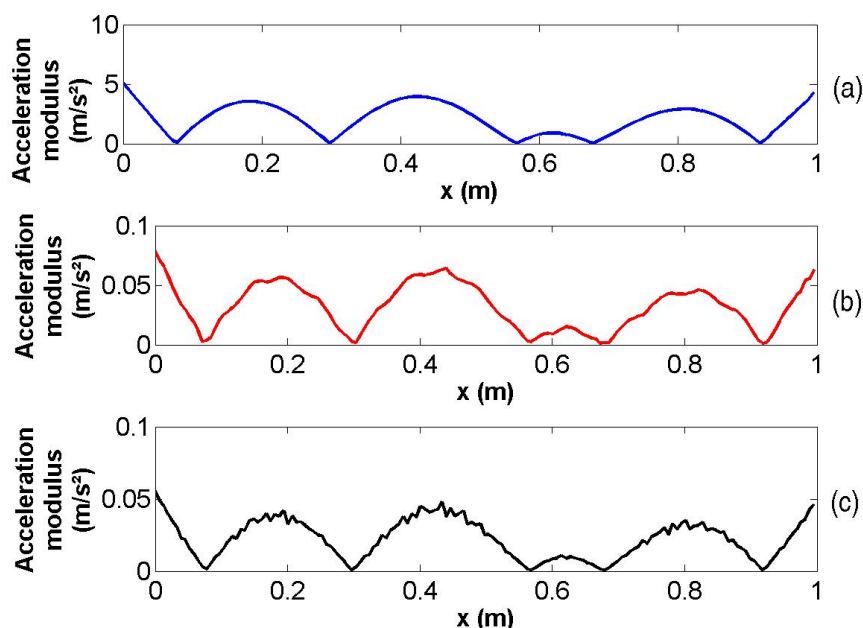


FIGURE 2.14 – Accelerations measured at frequency  $f = 400$  Hz along the beam. Comparison between : (a) pure sine excitation signal ; (b) periodic chirp excitation signal ; (c) white noise excitation signal.

### 2.1.3.2 Results obtained without regularisation on the whole structure

The force distribution obtained using Equation (2.11) with the free boundaries operator and at frequency  $f = 400$  Hz (between experimental eigen modes 4 and 5) are given in Figure 2.15. For all the measurements, it is clear that the force distributions exhibit aberrant forces due to the amplification of measurement noise. Thus the real force can neither be located nor quantified.

### 2.1.3.3 Regularised results obtained for the whole structure

The results  $\mathbf{F}^{\text{tikh}}$  obtained after regularisation and according to the method described in section 2.1.2.3.3 are shown in Figure 2.16 for frequency  $f = 400$  Hz.

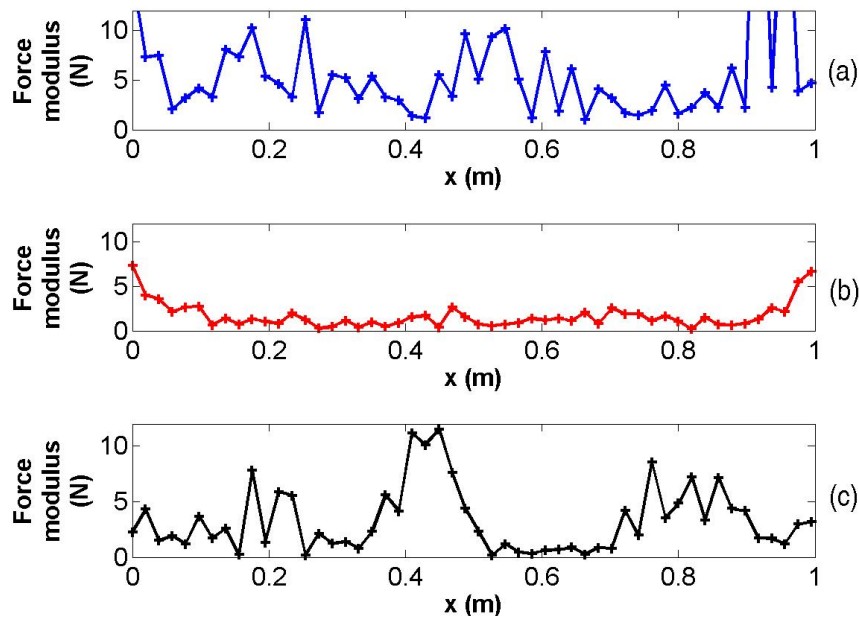


FIGURE 2.15 – Computed forces at frequency  $f = 400$  Hz obtained from measured data in FEM only (without regularisation). (a) pure sine excitation signal; (b) periodic chirp excitation signal; (c) white noise excitation signal.

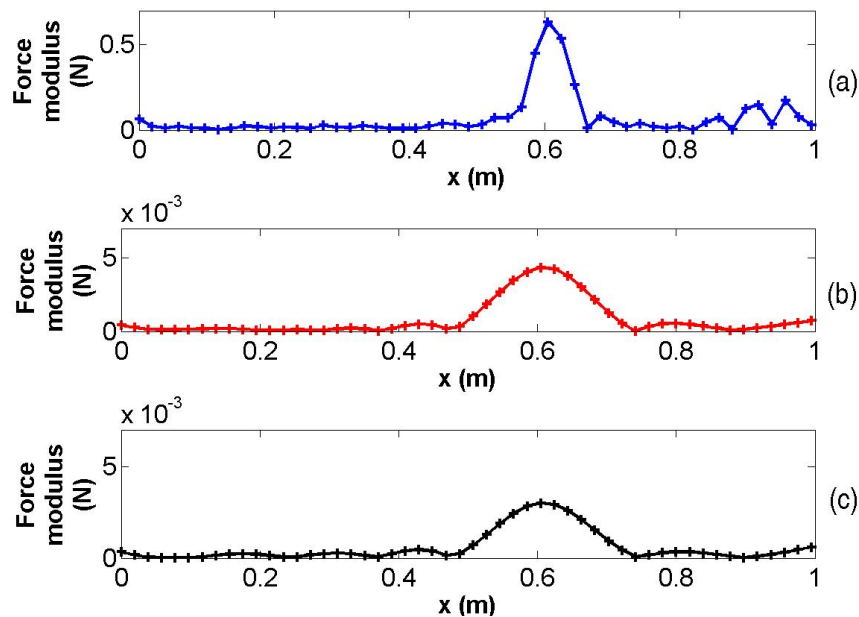


FIGURE 2.16 – Computed forces at frequency  $f = 400$  Hz. Input data are measured and injected in the Finite Element model of the whole structure by using the observation matrix from Equation 2.6. The Tikhonov regularisation is used. (a) pure sine excitation signal; (b) periodic chirp signal; (c) white noise excitations signal.

In all cases, a peak appears and its maximum is located at the coordinate of the excitation. Moreover, the respective bandwidths of the peaks observed are different and the best localisation is obtained with the sine excitation. Indeed, when the signal to noise ratio is improved, the regularisation level is automatically reduced by the process coupling the Tikhonov procedure to the L-curve criterion. For the pure sine excitation, the signal to noise ratio is clearly better because it leads to lighter regularisation and, thus, a sharper force peak.

As an example, Figure 2.17 shows the L-curve obtained at frequency 400 Hz when using a periodic chirp signal. It presents the typical aspect that was obtained at all frequencies. The corner of the L-curve is clearly defined which makes it easy to obtain the optimum regularisation parameter.

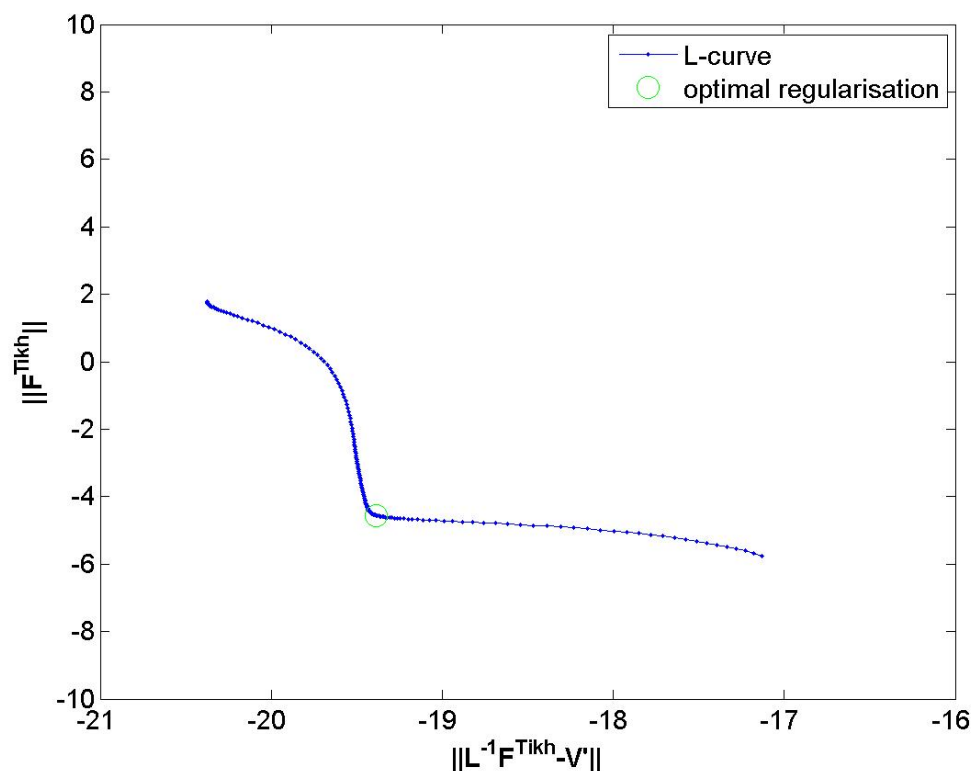


FIGURE 2.17 – L-curve obtained at  $f = 400$  Hz.  $\|\mathbf{F}^{\text{tikh}}\|$  is the 2-norm of the solution vector while  $\|\mathbf{L}^{\text{inv}}\mathbf{F}^{\text{tikh}} - \mathbf{V}'\|$  is the 2-norm of the residue. Input data are measured and injected into the Finite Element model of the whole structure by using the observation matrix from Equation (2.6). The Tikhonov regularisation is used.

Table 2.3 gives a comparison of the parameters  $\beta$  found at 400 Hz from the three types of excitation signal. As expected, the level of regularisation is much lower in the case of pure tone excitation. It was also found that the required regularisation level was the same for

the periodic chirp and the white noise signal.

Pure sine signal $f = 400$ Hz	Periodic chirp signal	White noise signal
8.70E-9	2.89E-7	2.89E-7

TABLE 2.3 – Parameters  $\beta$  chosen thanks to the L-curve criterion in the Tikhonov regularisation process, presented for the three excitation cases.

Figures 2.18 and 2.19 give the results obtained with a 5 Hz resolution in the frequency range [50 Hz-3200 Hz] for both broadband excitations : periodic chirp and white noise signals. The top graphs on each figure indicate where the maximum of the reconstructed force distribution is located versus frequency. The bottom graphs indicate the magnitude of the reconstructed force versus frequency.

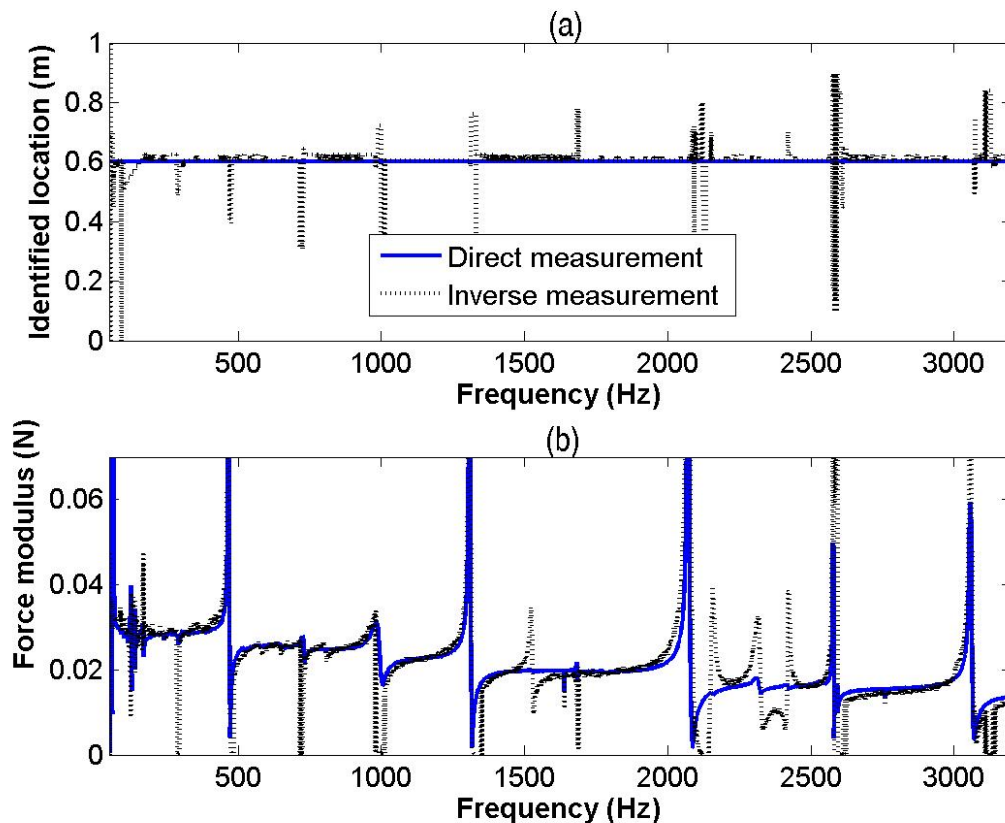


FIGURE 2.18 – Locations and magnitudes of the force versus frequency. Input data are measured and injected into the Finite Element model of the whole structure by using the observation matrix from Equation 2.6. The Tikhonov regularisation is used. The excitation signal is a periodic chirp. (a) Location of identified force; (b) Magnitude of identified force.

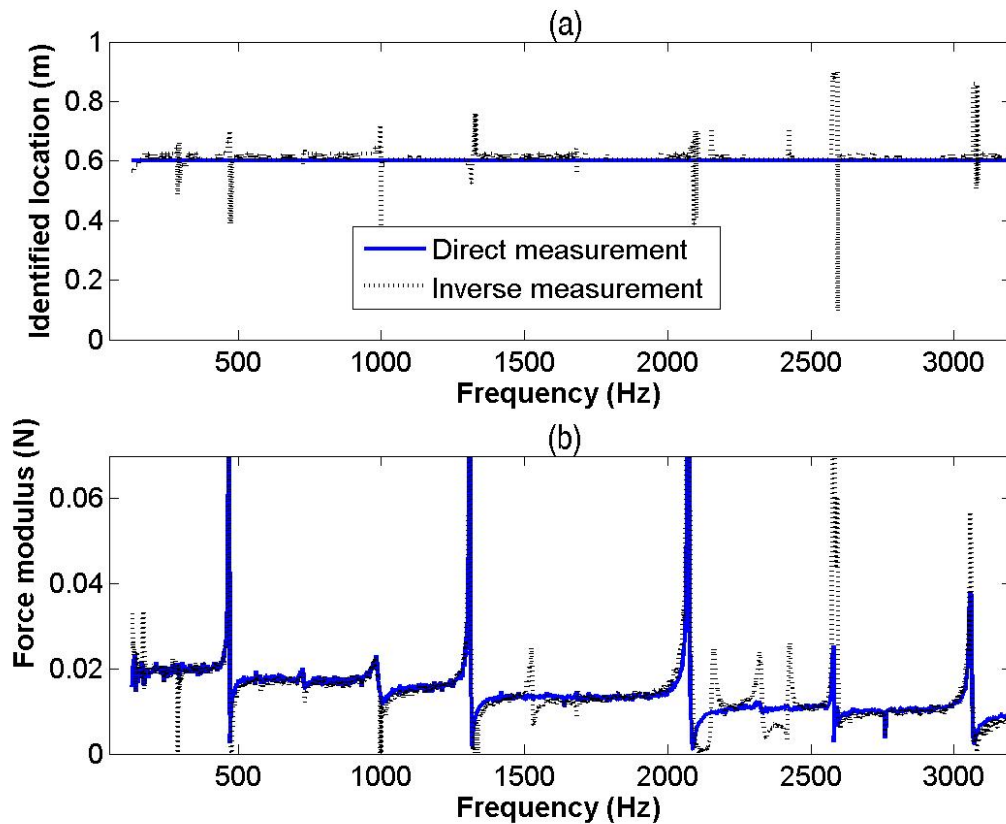


FIGURE 2.19 – Locations and magnitudes of the force versus frequency. Input data are measured and injected into the Finite Element model of the whole structure by using the observation matrix from Equation 2.6. The Tikhonov regularisation is used. The excitation signal is a white noise. (a) Location of identified force ; (b) Magnitude of identified force.

Except at the resonances of the structure, the location of the maximum is well identified at  $x = 0.6$  m. The bottom graphs indicate the values of the force modulus, when summing the nodal forces in the identified peak area and over a spatial range corresponding to the main lobe and the first secondary lobes of the smoothed force. The force spectra obtained by the inverse technique proposed in this paper are in agreement with the direct measurements for each type of excitation tested.

The method is validated even if it remains unstable on structural resonances, which is also the case for RIFF [66]. The results also exhibit particular resonances at frequencies  $f = 1526$  Hz,  $f = 2158$  Hz,  $f = 2316$  Hz and  $f = 2422$  Hz which hardly appear on the direct force measurement. These resonances can be due to the existence of torsional modes and coupling with the shaker. Nevertheless, the aim of this paper is not to identify the modal scheme of the beam precisely. Therefore no further investigation was carried out on these peaks ; the only conclusion is that the method remains less precise on resonances.



### 2.1.3.4 Regularised results on a subdomain of the structure

In order to demonstrate the feasibility of applying the method on a subdomain of the structure, the free-free FE model of the part of the beam from  $x = 0.4$  m to its end is now considered.

The complete method is applied and regularised results are presented for the same periodic chirp signal used in the previous sections.

Let us remark that when choosing a subdomain with free boundary conditions, the coupling forces with the other part of the structure appear as boundary shear forces and bending moments. The Tikhonov regularisation [14] smooths the reconstructed forces with an equivalent low-pass cutoff wavelength [67]. Therefore the results can be completely corrupted if the limits of the subdomain are too close to the shaker's attachment point, in comparison to the natural flexural wavelength  $\lambda$  at this frequency.

Figure 2.20 shows results obtained at several frequencies, using a colormap where the x axis corresponds to the position of identified forces while y axis gives the frequency and z axis corresponds to the level of the force modulus.

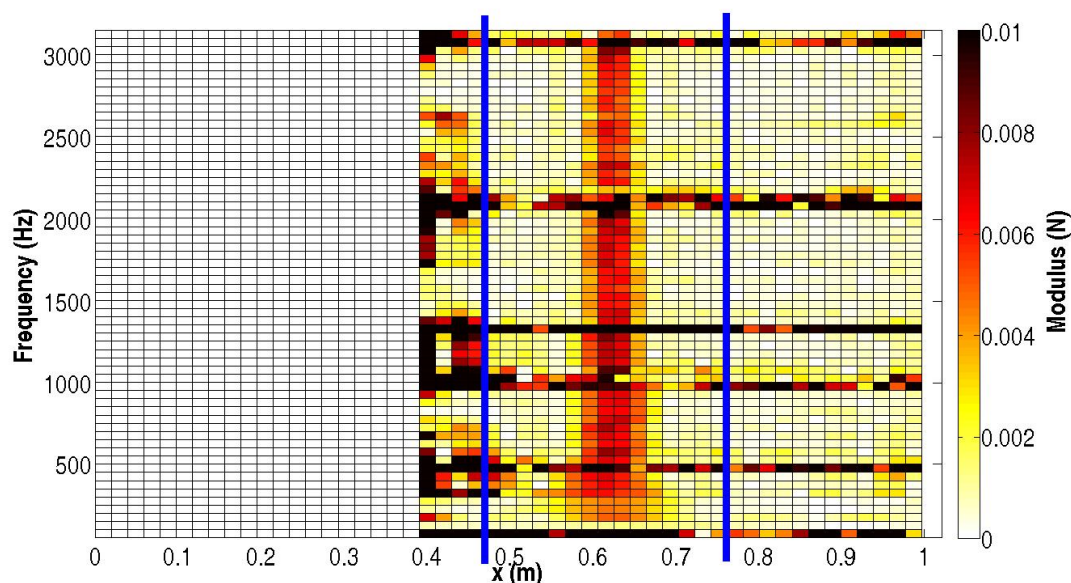


FIGURE 2.20 – Colormap of the computed force magnitude applied by the shaker. Input data are measured and injected into the Finite Element model of a subdomain of the beam, by using the observation matrix from Equation 2.6. The Tikhonov regularisation is used. The excitation is a periodic chirp signal. The x axis gives the position of the identified forces while the y axis gives the frequency. The z axis corresponds to the level of the force modulus. The vertical blue lines define the summation range for computing the force magnitude. The forces are calculated by using  $\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{\text{Ftikh}}}$ .

The horizontal dark lines that appear correspond to resonances (horizontal lines around the frequency  $f = 1000$  Hz for example). It should be noted that not all the resonances

appear since the resolution of the colormap is lower than that used on the spectrum of next Figure. The identified force appear clearly as a smoothed thick spot around position  $x = 0.6$  m for all frequencies. Also, the forces present at the left limit of the subdomain indicate that it is coupled by forces to the rest of the structure. This colormap shows that the summation range on which the extraction of the identified force magnitude should be carried out cannot be processed over the whole subdomain. At the lowest frequencies, the limits of the subdomain are too close to the force to be identified as it is confirmed by results plotted on Figure 2.21. The first frequency giving reliable results is around  $f = 540$  Hz. This is the situation when the ratio between the flexural wavelength  $\lambda$  and the distance  $d$ , from the excitation point to the nearest ending point, falls below the value 2.1. In Figure 2.21, the excitation force spectrum identified between both vertical blue lines indicated in Figure 2.20 is compared to the force measured directly.

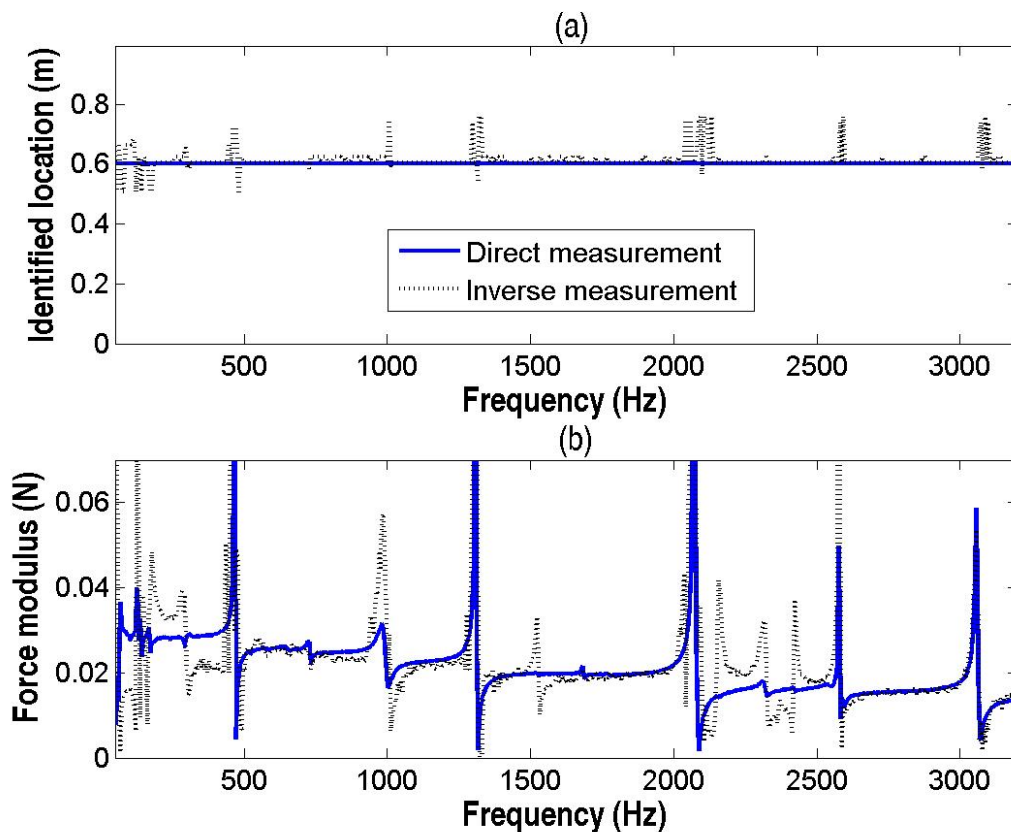


FIGURE 2.21 – Locations and magnitudes of the force versus frequency. The input data are measured and injected into the Finite Element model of a subdomain of the beam, by using the observation matrix from Equation 2.6. The Tikhonov regularisation is used. The excitation is a periodic chirp signal. (a) Location of identified force; (b) Magnitude of identified force. The forces were calculated by using  $\mathbf{L}^{\mathbf{P}^{\mathbf{F}^{\text{tikh}}}}$ .

The results appear to be more disturbed near the structural resonances and the trend of

the spectrum confirms that the first reliable frequency for the subdomain identification is above  $f = 540$  Hz.

In order to improve the results at lower frequencies, the truncated operator  $\mathbf{L}^{\text{Ptrc}}$  is used as suggested in subsection 2.1.2.3.5. The results are presented in Figure 2.22, which is a colormap presenting results in the same way as in Figure 2.20. As shown by the two vertical blue lines of Figure 2.22, the summation range can clearly cover the whole subdomain considered. The results are improved at all frequencies because a larger part of the smoothed force can be used to compute the magnitude and also because the forces at the limits no longer disturb the results. Nonetheless, it should be said that below 120 Hz, the results remained too disturbed by the lack of points between the force location and the end of the scanned area to correctly represent the smoothed force.

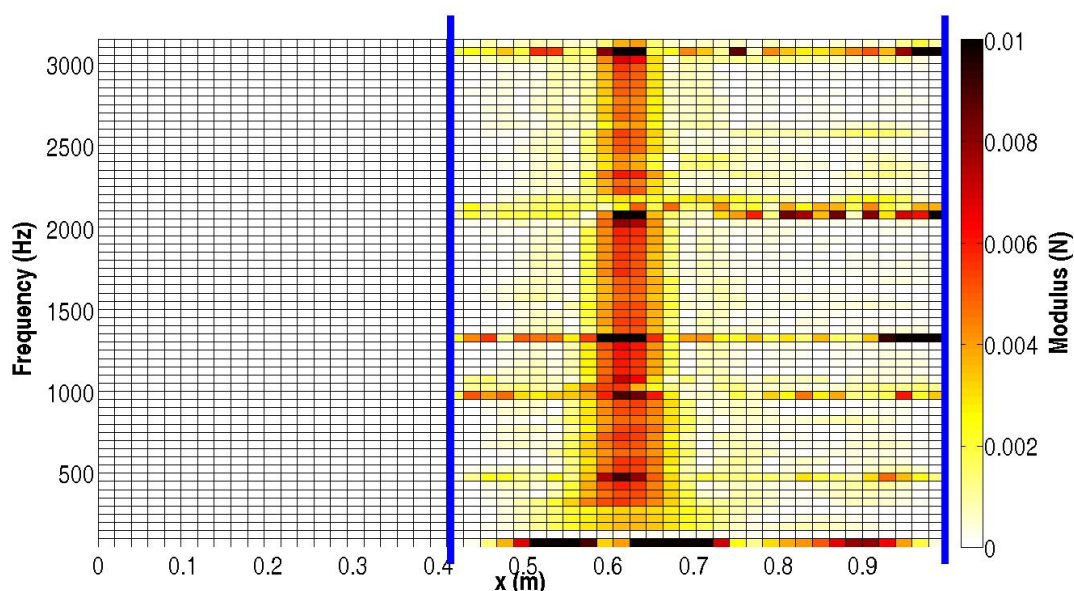


FIGURE 2.22 – Colormap of the computed force magnitude applied by the shaker. The input data are measured and injected in the Finite Element model of a subdomain of the beam, by using the observation matrix from Equation 2.6. The Tikhonov regularisation is used. The excitation is a periodic chirp signal. The x axis gives the position of identified forces while the y axis gives the frequency. The z axis corresponds to the level of the force modulus. Vertical blue lines define the summation range to compute the force magnitude.

The forces are calculated by using  $\mathbf{L}^{\text{PtrcFtikh}}$ .

The excitation force spectrum is then presented on Figure 2.23. The results are clearly improved at the lowest frequencies.

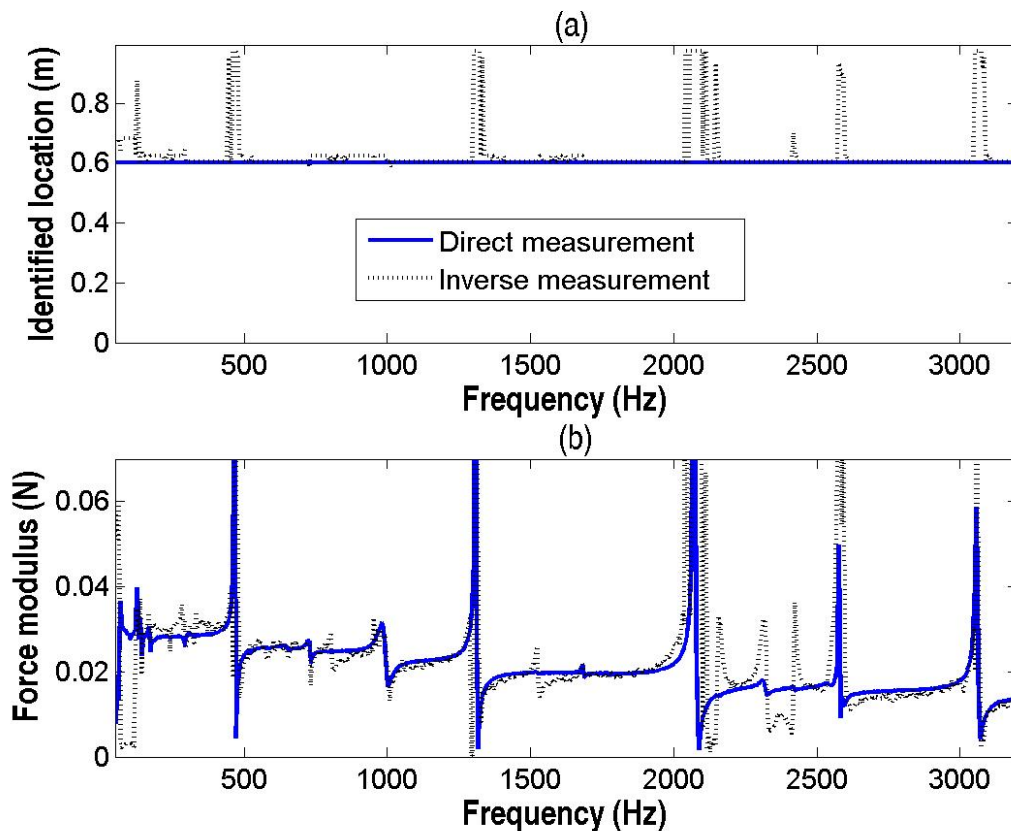


FIGURE 2.23 – Locations and magnitudes of the force versus frequency. The input data are measured and injected in the Finite Element model of a subdomain of the beam, by using the observation matrix from Equation 2.6. The Tikhonov regularisation is used. The excitation is a periodic chirp signal. (a) Location of identified force ; (b) Magnitude of identified force. The forces are calculated by using  $\mathbf{L}^{\text{PtrcFtikh}}$ .

#### 2.1.4 Conclusion

Based on the same idea as the RIFF (also called FAT) method [40, 63, 43, 49, 55], this study was aimed at identifying vibration excitations by measuring displacements and from knowledge of dynamic behaviour in a local part of a structure. In view to using this approach for complex structures, a Finite Element model was chosen for which an observer matrix was used to replace rotational degrees of freedom by measurable translations. Two kinds of extraction of the local operator were proposed. The first consisted in considering the free boundary conditions of the truncated subdomain. In this case, internal forces linking the subdomain to the rest of the structure appeared in the results. The second extraction consisted in truncating the operator in order to ignore internal forces at boundaries. Regularisation required carrying out a double inversion of the operator, whereas Tikhonov regularisation was applied in the second inversion. Due to the tendency

of regularisation to delete information, particularly in the high wavenumber domain [43], ambiguities appeared between forces and moments in the results. It was then shown that an a priori assumption considering only forces could be performed. Next, moments were interpreted by opposite forces around the excitation point. Finally, an experimental validation on a beam excited by a shaker demonstrating the possibility of locating the force and quantifying it.

Curiously, when we considered an inverse dynamic problem, certain usual visualisations were altered : local knowledge of the dynamic behaviour was sufficient and the real boundary conditions could be ignored. The use of a double inversion with a regularisation on a truncated Finite Element operator appeared realizable. However, carrying out the entire method required a second SVD, leading to a time consuming process. The first SVD was necessary for the free boundaries operator, in order to optimise the regularisation parameter. Naturally, all the development and experimental validation steps were performed on beams in order to simplify the presentation of this approach. Extensions to more complex structures involve other practical difficulties, like the need for condensations in order to reduce the number of degrees of freedom to be measured. The effects of these condensations in the inverse problem must then be studied with great care. In addition to the reconstruction of forces and moments, it would also be interesting to study the accuracy of acoustic excitations, turbulent boundary layers and continuous force distributions. This general approach could then be used for a large number of diagnostic applications.

## Acknowledgements

This work was funded by grants from the LUTB cluster (Lyon Urban Truck and Bus). It was carried out in the framework of the French research project MACOVAM, in partnership with Renault Trucks VPT, Pierburg Pump Technology, Vibratec and LVA (Vibrations and Acoustics Laboratory) of INSA-Lyon.

---

## 2.2 Synthèse

---

Ce premier chapitre a permis de présenter le développement d'une méthode indirecte d'identification de forces, appliquée aux poutres en flexion.

De manière analogue à la méthode RIFF [40, 41, 42], elle permet dans un premier temps de localiser un ensemble discret d'efforts appliqués à une structure vibrante et, dans un deuxième temps, d'estimer l'amplitude des efforts ainsi localisés. A la différence de la méthode RIFF [40, 41, 42] basée sur un schéma aux différences finies pour discrétiser l'équation analytique du mouvement, la méthode proposée repose sur un modèle Eléments Finis libre relatif à un maillage de mesures. L'approche proposée reste indépendante des conditions aux limites, celles-ci pouvant être identifiées du fait que le modèle utilisé est libre. En effet, des efforts apparaissent aux limites, quand celle-ci ne sont pas libres dans la réalité, afin de corriger le modèle et le rendre cohérent avec les mesures. L'information relative aux limites est en effet contenue dans les mesures vibratoires, tout comme celle des efforts excitateurs extérieurs. Dans le cas d'un sous domaine extrait de la structure complète, on peut ainsi faire apparaître les efforts de couplage.

Physiquement, la méthode constitue un problème inverse. Elle est donc naturellement sensible au bruit de mesures, ceci d'autant plus que le pas de discrétisation du maillage est faible en regard de la longueur d'ondes de flexion relative à la fréquence considérée. Pour des raisons pratiques, un seul maillage de mesures est réalisé afin d'étudier différentes fréquences sans dupliquer le nombre d'expérimentations et de modèles. Le pas du maillage est donc conditionné par la fréquence la plus haute étudiée. Dans le domaine des fréquences étudiées, le problème inverse est donc particulièrement sensible, car il est surdimensionné. L'étape de régularisation consiste alors à stabiliser la solution lorsque c'est nécessaire. Nous avons opté pour une méthode de régularisation de Tikhonov [14], à l'aide d'une double inversion par décompositions en valeurs singulières [15] de l'opérateur Eléments Finis. Cette méthode présente l'avantage de ne pas reposer sur la définition de nombres d'ondes ce qui permet d'envisager son application à des structures complexes. Elle est également plus performante que la méthode de troncature de la décomposition en valeurs singulières car elle applique des modifications sur les valeurs singulières de manière moins brutales, plus continue. Le principe de la courbe en L [67] a donné de bons résultats pour optimiser le paramètre de régularisation, il est donc employé dans notre méthode. Néanmoins, on fera remarquer que cette approche implique des temps de calculs importants. Par ailleurs, la régularisation conduit à un floutage du résultat. Ceci est particulièrement vrai dans les basses fréquences car le niveau de lissage est lié à la longueur d'onde vibratoire. Au chapitre 4, ce problème sera résolu grâce à l'adjonction d'une étape optionnelle de déconvolution spatiale en post-process des cartographies d'efforts obtenues.

Enfin, il est possible de tronquer l'opérateur avant la régularisation en supprimant les lignes d'efforts aux limites si l'on souhaite supprimer les efforts apparaissant aux limites du domaine étudié. Mais dans ce cas, le principe de la courbe en L ne peut plus être appliqué, car le problème direct ne peut être résolu. On doit alors se contenter de l'approximation visant à conserver le paramètre optimal défini pour le problème non tronqué.

Un résultat essentiel de ce chapitre est le constat que les moments ne peuvent pas être reconstruits spatialement lorsque la régularisation est employée. En effet, la suppression d'informations dans les hauts nombres d'onde (inhérente à la régularisation proposée) revient à dire que les excitations par moments deviennent des excitations par doublets de forces opposées. Ceci se comprend aisément dans le sens où un moment correspond à une discontinuité beaucoup plus forte (dérivée de Dirac [69]) qu'une force ponctuelle de force (Dirac [69]). Une conséquence de cette constatation est que l'on peut considérer uniquement les données relatives aux forces dans l'opérateur matriciel Eléments Finis, juste avant la deuxième inversion régularisée.

Un point important est que la méthode reste locale puisqu'il n'est pas nécessaire de l'appliquer sur la structure complète. Il est possible de ne considérer qu'un sous domaine, à condition que la taille de celui-ci soit suffisante pour permettre une régularisation efficace des données. Il faut également prendre garde à ce que les efforts ne se recouvrent pas après lissage des résultats.

Ce premier chapitre a permis d'appliquer l'analogie de la méthode RIFF mais en utilisant un opérateur Eléments Finis. L'utilisation d'un modèle Eléments Finis a induit une difficulté : le traitement des ddls non mesurables tels que les rotations. L'approche la plus naturelle et la plus compatible avec la méthode des Eléments Finis a été de les estimer à l'aide de mesures de déplacements supplémentaires et des fonctions d'interpolation définies sur le support spatial élémentaire.

Dans le chapitre suivant traitant des plaques, nous continuerons le développement de la méthode. Ceci permettra de la confronter au cas de structures où le nombre de ddls devient important et l'on s'intéressera donc à réduire le nombre de ddls afin d'alléger mesures et calculs.

# 3

## Extension de la méthode aux structures 2D en flexion - Application des techniques de condensation dynamique et de réduction de Craig-Bampton

Les fondements de la méthode indirecte de mesures d'efforts ont été posés au chapitre 2 pour le cas des poutres. Cependant, le nombre de ddls traités restait relativement faible, garantissant un temps d'expérimentation, et de calcul, raisonnable.

Ce chapitre pose le problème de la réduction du nombre de ddls à mesurer et à prendre en compte dans le problème inverse. Ainsi, la condensation dynamique [5] sera employée pour estimer les ddls non mesurables sous l'hypothèse que les efforts associés à ces ddls soient nuls.

La méthode de réduction de modèle de Craig-Bampton [6] sera également utilisée avec deux approches complémentaires pour :

- d'une part, réduire le nombre de ddls à mesurer et à considérer dans le problème inverse en réduisant des zones dans lesquelles on suppose qu'aucune excitation n'est présente. C'est l'objet de la partie 3.1 rédigée sous forme d'un article faisant suite à un papier préliminaire présenté à l'International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA 2010 [3],
- d'autre part, identifier des efforts en des zones non mesurées et à partir de mesures à l'interface de super-éléments, en profitant des techniques de projection introduites par la définition même des bases réduites de Craig-Bampton. C'est l'objet de la partie 3.2 qui correspond à un article présenté au Congrès Français d'Acoustique 2010 [4].



Ainsi, ce troisième chapitre propose une formulation Eléments Finis complète applicable aux structures complexes mais restreinte ici au cadre des plaques en flexion.

## 3.1 Réduction du nombre de degrés de liberté (Proposition de publication)

---

### Force identification on flexural plates using reduced Finite Element models

#### Abstract

The identification of excitations on plates by an inverse method using local Finite Element modelling is studied. For each frequency, the principle is to apply the Finite Element operator of the structure to measured DOFs in order to obtain excitations. These last ones constitute the vector of external loads. From a practical point of view, several required steps must be approached. A dynamic condensation is proposed in order to eliminate DOFs, which are non accessible by measurement. For example, in this study, rotations are systematically eliminated by this process. Unfortunately, this approach induces the inversion of matrices which can be of a great size involving a high computational effort for each frequency. So, in order to decrease computational costs as well as the measurements times, a reduction of the model by the Craig-Bampton method is proposed as an option. This reduction is carried out before the condensation so that modal DOFs of superelements can be removed by the dynamic condensation, the counterpart being that the reduced area must not be excited. A regularisation based on a double inversion of the reduced operator is also made, where the second inversion is regularised by the well-known Tikhonov approach. After the description of the technique, numerical simulations on a squared plate excited by forces and/or moments are shown, where adjustments and accuracy of each step are studied. Finally, an experimental validation on a L-shaped plate is presented and the excitation applied by a shaker is very well localised. With the Craig-Bampton option, the quantification of the force spectrum is possible on a large frequency range and the results given are in a very good agreement with the direct measurement delivered by a piezoelectric sensor.

#### 3.1.1 Introduction

Many vibroacoustic studies use Finite Element modelling in order to predict the dynamic behaviour of structures. Today, software and computing resources allow engineers to create numerical models that can be applied for more complex structures and for higher frequencies. In practice, the end-user must define the geometry of the structure, material characteristics as well as the boundary conditions and excitations. The first two types of data are usually provided by the designers and are refined by experimental updating, whereas boundary conditions and excitations are less well defined. The accuracy of the prediction is

then affected by the poor knowledge of these last two types of data. As experimental updating, the purpose of this paper is to define an experimental approach identifying excitations from a model and from accessible measurements. The idea is then to inverse the usual application of the model by the calculation of sources from the measurements of their effects. This is exactly the same philosophy as the Force Analysis Technique (FAT) [66, 43], also known as the RIFF method (coming from the French definition "Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée"), developed several years ago for simple structures, like beams [66, 40, 49, 50], plates [43, 50, 66, 44] and shells [47, 46]. In the Force Analysis Technique, the calculation of the exciting force distribution is obtained by the use of the analytic equation of motion, where spatial derivatives are approximated by finite differences. The highest interest of this method is the fact that the equation of motion is verified locally only and does not need to be solved. In other words, the knowledge of the equation of motion, where measurements are carried out, is sufficient. Boundary conditions and effects due to excitations outside the measurement area can be ignored. The FAT presents also a very high sensitivity to errors in measurement data, so that a regularisation process was developed through a low-pass wavenumber filtering. In [43], authors have shown another equivalent regularisation, made by a double inversion of the operator of the structure, where the second inversion is regularised by the classic Singular Value Decomposition. The principal restraint of the FAT is the use of an analytic equation of motion. Applications are restricted to test benches [49, 51] or to cowls [50] which can be modeled with the Love-Kirchhoff Theory [65].

The aim of this study is the adaptation of the FAT, in order to be applicable in more industrial cases where the use of Finite Element Modelling is inescapable. In this way, other authors used Finite Element (FE) models to perform the force identification, but with different views. Busby developed an approach using a Tikhonov regularisation and a static condensation of rotations, on beams, in the time domain and with assumptions on the forces locations [32]. Ibrahim and Sestieri used a Finite Element model of a set of beams with the use of dynamic condensation keeping the a priori forces locations as master Degrees Of Freedom (DOFs) [33]. Corus and Balmès used a Finite Element approach to tune their model with a force prelocalisation and a projection of the model in the truncated modal basis of the complete structure [36, 38].

The approach presented in the present paper aims to quantify and also to localise the forces from a FE model with the least possible assumptions. A first approach was developed on beams [2] showing the possibility to use a Finite Element approach locally (just on a part of the structure) with free boundary conditions. Exciting forces inside the studied area are well identified as well as coupling forces with the rest of the structure at boundaries. The identification of coupling forces at the limits through the use of free boundary conditions in the inverse problem is one of the difference with the FAT. In order to use such a method for 2D or more complex structures, the reduction of the model must be required. Indeed, when the number of DOFs begins to be very high, experimentations become too long. The effects of reductions must then be studied.

In this paper, after the presentation of the general principle of this inverse problem, a dyna-

mic condensation is first proposed, in particular for the elimination of rotations which are considered as non accessible DOFs. To further reduce the number of DOFs and accelerate computing time, it is proposed to precede the dynamic condensation by a Craig-Bampton reduction. This add-on is presented in this paper as an option. As in [43], the chosen regularisation technique is made by a double inversion where the Tikhonov regularisation is applied on the second inversion. After the description of all these steps in a first section, numerical simulations are shown in a second section. The advantage of simulations is the possibility to test the principle of the inverse method from exact data and to test the regularisation from noisy data. Finally, a third section is intended for experimental validation of the method. The setup corresponds to a L-Shaped Plate with arbitrary boundary conditions and excited by a shaker. The location is well obtained with and without the Craig-Bampton option and the force spectrum identified with the Craig-Bampton option appears to be comparable with a direct measurement of the exciting force.

### 3.1.2 Methodology development

#### 3.1.2.1 Principle

A flexural plate of thickness  $h$  is considered to be in harmonic motion at angular frequency  $\omega$ . Its material properties are  $\rho$ , the mass density,  $\eta$ , the damping factor and  $E$ , the young modulus modeling the local stiffness. In the following, the plate is in the  $(\vec{x}, \vec{y})$  plane. In order to model the local behaviour, 3D-shell elements with a Kirchoff formulation [10, 70] are used. Normals to the shell elements are defined along the  $+\vec{z}$  axis. DOFs of the  $i$ th node are restrained to :

- the transverse translation  $w_i$  along  $+\vec{z}$  (associated to the force  $\mathcal{F}_i$ ),
- the rotation  $\theta_i^x$  around  $+\vec{x}$  (associated to a moment  $\mathcal{M}_i^x$ ),
- the rotation  $\theta_i^y$  around  $+\vec{y}$  (associated to a moment  $\mathcal{M}_i^y$ ).

The matrix system describing the FE model of a given structure can be written as [10] :

$$(-\omega^2\mathbf{M} + (1 + j\eta)\mathbf{K}) \mathbf{V} = \mathbf{L}\mathbf{V} = \mathcal{A}, \quad (3.1)$$

where  $\mathbf{M}$  symbolises the mass matrix of the structure,  $\mathbf{K}$  is the dynamic stiffness matrix of the structure,  $\mathbf{L}$  is the Finite Element operator of the structure,  $\mathbf{V}$  is the vector of responses containing  $N$  nodal displacements and  $2N$  nodal rotations and  $\mathcal{A}$  is the vector of mechanical actions containing  $N$  nodal forces  $\mathcal{F}$  and  $2N$  nodal moments  $\mathcal{M}$ .

The mass and stiffness matrices of the structure are computed thanks to the assembly of elementary matrices which are evaluated using the interpolation of the displacement field over the elementary domain thanks to quadratic shape functions [10].

For plates or shells, standard elementary topologies are based on quadrangles (quad4 elements) or triangles (tria3 elements). In the following, it is assumed that the numbering of DOFs is such that the vector of DOFs has the form described by :

$$\{ w_1 \ \theta_1^x \ \theta_1^y \ w_2 \ \theta_2^x \ \theta_2^y \ \dots \ w_i \ \theta_i^x \ \theta_i^y \ \dots \ w_N \ \theta_N^x \ \theta_N^y \}^T. \quad (3.2)$$

Because Equation (3.1) describes the local dynamic equilibrium of the plate, DOFs can be numbered in order to obtain band-wise matrices  $\mathbf{M}$  and  $\mathbf{K}$  [10].

In the case of a mesh made of quadrangles as shown in Figure 3.1, the identification at the node  $i_0$  of the three quantities  $\{\mathcal{F}_{i_0}, \mathcal{M}_{i_0}^x, \mathcal{M}_{i_0}^y\}^T$  can be theoretically obtained by the measurements of  $\{w_{i_j}, \theta_{i_j}^x, \theta_{i_j}^y\}^T$  at all the nodes  $i_j$  that are part of all four elements sharing node  $i_0$ . Therefore, the identification of one force and two moments at one node, using Equations (3.3, 3.4 and 3.5), requires the measurements of 27 DOFs (9 translations and 18 rotations) :

$$\mathcal{F}_{i_0} = \sum_{j=-4}^4 \left( L_{3i_0-2,3i_j-2} w_{i_j} + L_{3i_0-2,3i_j-1} \theta_{i_j}^x + L_{3i_0-2,3i_j} \theta_{i_j}^y \right), \quad (3.3)$$

$$\mathcal{M}_{i_0}^x = \sum_{j=-4}^4 \left( L_{3i_0-1,3i_j-2} w_{i_j} + L_{3i_0-1,3i_j-1} \theta_{i_j}^x + L_{3i_0-1,3i_j} \theta_{i_j}^y \right), \quad (3.4)$$

$$\mathcal{M}_{i_0}^y = \sum_{j=-4}^4 \left( L_{3i_0,3i_j-2} w_{i_j} + L_{3i_0,3i_j-1} \theta_{i_j}^x + L_{3i_0,3i_j} \theta_{i_j}^y \right). \quad (3.5)$$

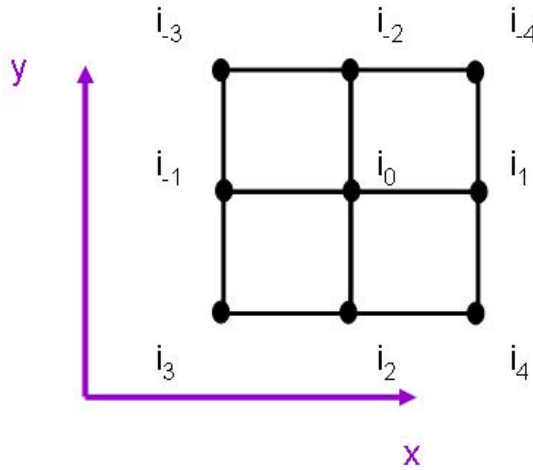


FIGURE 3.1 – Local identification of loads on a mesh using quadrangles.

In the case of an appropriate mesh composed of triangles as shown in Figure 3.2, the identification at the node  $i_0$  of the 3 quantities  $\{\mathcal{F}_{i_0}, \mathcal{M}_{i_0}^x, \mathcal{M}_{i_0}^y\}^T$  can be theoretically obtained by the measurements of  $\{w_{i_j}, \theta_{i_j}^x, \theta_{i_j}^y\}^T$  at all the nodes  $i_j$  that are part of all elements sharing node  $i_0$ . Therefore, the identification of one force and two moments at one node, using Equations (3.6, 3.7 and 3.8), requires the measurements of 10 DOFs (5

translations and 10 rotations) :

$$\mathcal{F}_{i_0} = \sum_{j=-2}^2 \left( L_{3i_0-2,3i_j-2} w_{i_j} + L_{3i_0-2,3i_j-1} \theta_{i_j}^x + L_{3i_0-2,3i_j} \theta_{i_j}^y \right), \quad (3.6)$$

$$\mathcal{M}_{i_0}^x = \sum_{j=-2}^2 \left( L_{3i_0-1,3i_j-2} w_{i_j} + L_{3i_0-1,3i_j-1} \theta_{i_j}^x + L_{3i_0-1,3i_j} \theta_{i_j}^y \right), \quad (3.7)$$

$$\mathcal{M}_{i_0}^y = \sum_{j=-2}^2 \left( L_{3i_0,3i_j-2} w_{i_j} + L_{3i_0,3i_j-1} \theta_{i_j}^x + L_{3i_0,3i_j} \theta_{i_j}^y \right). \quad (3.8)$$

If quantities contained in  $\mathbf{V}$  are known, it becomes possible by respect of Equation (3.1) to identify data in  $\mathcal{A}$ . It is truly an inverse problem with a local approach where an analogy to the FAT method [43] can be made because :

- exterior forces applied at nodes located in the studied area can be obtained,
- the whole structure does not need to be neither modeled nor measured.

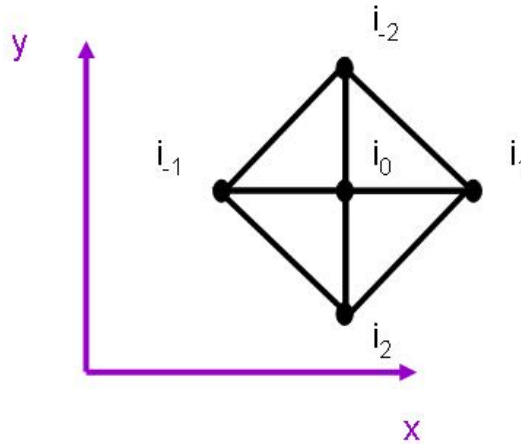


FIGURE 3.2 – Local identification of loads on a mesh using triangles.

In the following, Equation (3.1) will always be applied on a domain covering more than one node and free boundary conditions will be considered in order to obtain forces at the limits of the studied area. Forces and moments would then appear by a compensation process on these limits if real boundary conditions are not free.

On the contrary to the FAT approach [43], forces and moments due to the coupling to the rest of the structure can be identified.

Note that the implementation of the inverse procedure (computation of actions from displacements and rotation) is very simple. In this study, the modeling was performed thanks to the Strucural Dynamics Toolbox under Matlab using properties of Kirchoff shells for quad4 and tria3 elements [70].

### 3.1.2.2 Dynamic condensation of the non-measurable DOFs

The application of the method described above implies that all data in vector  $\mathbf{V}$  must be measurable. This is obviously a major inconvenient, the number of DOFs can be particularly high and a lot of DOFs can be non measurable directly, such as the rotations or the DOFs which are not accessible. To overcome this difficulty, a measurement mesh is defined by the modeling mesh excluding the nodes corresponding non accessible DOFs [64]. In the present work a dynamic condensation is proposed [5]. One consequence of using condensation is that the hypothesis of null excitations on non measurable DOFs must be verified [9].

Note that if all rotations are considered as non measurable DOFs, the method should not be usefull for moment identifications. As shown on beams [71], the fact of using a regularisation process (subject of the next section) implies that excitations by moment are reconstructed by opposite forces around the driven point. So, moment excitations can be set to zero by hypothesis and moments are reconstructed as smoothed opposite forces.

The set of measurable DOFs is noted  $\underline{m}$  (as master DOFs) whereas the set of unmeasurable DOFs is noted  $\underline{s}$  (as slave DOFs).

The operation of dynamic condensation is then applied to the matrix system of Equation (3.1) so that it is rewritten :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^c &= (\mathbf{L}_{\text{mm}} - \mathbf{L}_{\text{ms}}\mathbf{L}_{\text{ss}}^{-1}\mathbf{L}_{\text{sm}}) \mathbf{V}^c, \\ &\Leftrightarrow \\ \mathcal{F}^c &= \mathbf{L}^c \mathbf{V}^c. \end{aligned} \tag{3.9}$$

where  $\mathbf{L}^c$ ,  $\mathcal{F}^c$  (resp.  $\mathbf{V}^c$ ) are the dynamically condensed operator and the condensed forces (resp. the measurable DOFs) vector.  $\mathbf{L}_{ij}$  indicates block matrices extracted from  $\mathbf{L}$  with  $\mathbf{i}$  the indices related to the response DOFs and  $\mathbf{j}$  the indices related to the excitation DOFs (in 3.9, these indices can be either  $\mathbf{m}$  or  $\mathbf{s}$ ).

So, in the case of a condensation of rotations only, the measurement of  $N$  displacements is sufficient, whereas the initial procedure needed  $3N$  measurements.

As a counterpart, the method necessitates, for each frequency, the inversion of the matrix  $\mathbf{L}_{\text{ss}}$  which can have a large size in case of a high number of slave DOFs.

### 3.1.2.3 Craig-Bampton reduction option

As mentioned at the end of the previous subsection, the dynamic condensation presents the principal inconvenient to require a lot of computing resources for each studied frequencies. When it is possible to identify in advance some non excited areas of the structure, the model can also be reduced in a first step. In this section, it is proposed to use the well-known Craig-Bampton reduction [10, 39, 6, 70] before the dynamic condensation. The Craig-Bampton technique consists in doing a substructuring into superelements.

In the following, three sets of DOFs are considered :

1. set  $\underline{b}$ , corresponding to the DOFs located at the boundaries (or interface) of all superelements,

2. set  $\underline{i}$ , corresponding to interior DOFs of all superelements,
3. set  $\underline{o}$ , corresponding to other DOFs, outside all superelements.

The Craig-Bampton reduction consists in calculating a basis representing the DOFs  $\underline{b} \cup \underline{i}$  [10, 39, 6, 70] :

- the first part of this basis is composed of the DOFs of  $\underline{b}$ . It relates them to the ones of  $\underline{i}$  by the definition of constraints modes,
- it is completed by modal DOFs representing the internal modes of the superelement with clamped interfaces nodes. They are called fixed interface modes and they form a new set of DOFs  $\underline{\Phi}$  [6].

If the total number of superelements modes is less than the number of DOFs in  $\underline{i}$ , it is said that a reduction of the initial system of equations occurred. If  $\underline{\Phi} = \{\emptyset\}$ , then the process corresponds to the Guyan reduction also called "static condensation" [72].

The transition from the DOFs of  $(\underline{o} \cup \underline{b} \cup \underline{\Phi})$  to the DOFs of  $(\underline{o} \cup \underline{b} \cup \underline{i})$  can be realised by :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{V}_o \\ \mathbf{V}_b \\ \mathbf{V}_i \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_o \\ \mathbf{V}_b \\ \mathbf{V}_\Phi \end{Bmatrix}, \quad (3.10)$$

where  $\mathbf{V}_o$ ,  $\mathbf{V}_b$ ,  $\mathbf{V}_i$  and  $\mathbf{V}_\Phi$  are the vectors of DOFs, respectively in  $\underline{o}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{i}$  and  $\underline{\Phi}$  and  $\mathbf{T}$  is the projection matrix, defined by :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{Id}_{oo} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id}_{bb} & 0 \\ 0 & -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ib} & \phi_\Phi \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

where  $\mathbf{Id}_{oo}$  and  $\mathbf{Id}_{bb}$  are identity matrices corresponding to DOFs of  $\underline{o}$  and  $\underline{b}$ ,  $\mathbf{K}_{ii}$  and  $\mathbf{K}_{ib}$  are the block matrices extracted from the stiffness matrix of the structure and where the first index corresponds to the set of responses DOFs and the second one corresponds to the set of excitation DOFs. At last,  $\phi_\Phi$  is a matrix whose columns corresponds to the eigenvectors defining the superelements modes.

The reduction can then be applied on the whole model by projecting Equation (3.1) on the reduced basis defined by (3.10). The reduced system is :

$$\mathbf{L}^r \mathbf{V}^r = \mathcal{A}^r, \quad (3.12)$$

where  $\mathbf{L}^r = \mathbf{T}^T (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{T}$  is the reduced operator,  $\mathbf{V}^r = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_o \\ \mathbf{V}_b \\ \mathbf{V}_\Phi \end{Bmatrix}$  is the reduced

vector of DOFs and  $\mathcal{A}^r = \begin{Bmatrix} \mathcal{A}_o \\ \mathcal{A}_b \\ \mathcal{A}_\Phi \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{Bmatrix} \mathcal{A}_o \\ \mathcal{A}_b \\ \mathcal{A}_i \end{Bmatrix}$  is the reduced vector of exterior me-

chanical actions.  $T$  denotes the matrix transpose.

Note that modal DOFs contained in  $\underline{\Phi}$  cannot be directly measured. Therefore, it is proposed to consider them as non-measurable DOFs in the dynamic condensation (see subsection

3.1.2.2).

Finally, the use of the Craig-Bampton reduction and then the use of the dynamic condensation leads to the substitution of Equation (3.9) by :

$$\mathcal{F}^{\text{rc}} = \mathbf{L}^{\text{rc}} \mathbf{V}^{\text{rc}}, \quad (3.13)$$

where  $\mathbf{L}^{\text{rc}}$ ,  $\mathcal{F}^{\text{rc}}$  and  $\mathbf{V}^{\text{rc}}$  are respectively the dynamically reduced operator, the vector of unknown forces and the vector of measured DOFs.

Note that the generalised forces corresponding to modal DOFs must be null. This hypothesis indicates that no excitation must be applied on the interior nodes of the superelement otherwise the identification process would fail to locate the excitation correctly.

As in all truncated modal methods, special care must be paid to the kept number of fixed-interface modes of each superelement in order to retain enough modes so that the behaviour of the superelements remains correctly depicted. Therefore, it is necessary to optimise the balance between the improvement of computing times in the next steps and the necessity to correctly model the behaviour of the superelements.

### 3.1.2.4 Regularisation

As in several similar inverse problems [63, 66, 40], the noise in the data is particularly amplified and leads to the reconstruction of aberrant forces of high amplitudes. On beams, it was shown that the Finite Elements model amplified the noise naturally present in measurements. In the present approach, the noise is amplified by the dynamically condensed matrix operator  $\mathbf{L}^{\text{c}}$  used in Equation 3.9 or  $\mathbf{L}^{\text{rc}}$  used in Equation (3.13). In order to overcome this difficulty, a regularisation technique is applied. It consists in doing two successive inversions. In order to facilitate the notation, the description hereafter is made with  $\mathbf{L}^{\text{c}}$ , i.e. without the Craig-Bampton option. The demarch would be exactly the same if using  $\mathbf{L}^{\text{rc}}$ .

Firstly, the inverse  $\mathbf{L}^{\text{c}-1}$  of  $\mathbf{L}^{\text{c}}$  is computed. It results in a matrix noted  $\mathbf{L}^{\text{cinv}}$  which is not difficult to obtain since  $\mathbf{L}^{\text{c}}$  is a square matrix generally well conditioned.

Secondly, a pseudo-inversion of  $\mathbf{L}^{\text{cinv}}$  is realised. The chosen regularisation technique corresponds to the Tikhonov approach [14]. The resulting matrix is noted  $\mathbf{L}^{\text{ctikh}}$  and comes from the following operation [14, 15, 67, 62] :

$$\mathbf{L}^{\text{ctikh}} = \mathbf{W} \mathbf{S}_{\text{alt}}^{-1} \mathbf{U}^H \quad \text{where } \mathbf{S}_{\text{alt}} = \mathbf{S} + \beta^2 \mathbf{S}^{-1}, \quad (3.14)$$

$\mathbf{S}$  is the diagonal matrix of the singular values of  $\mathbf{L}^{\text{cinv}}$ ,  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{W}$  are unitary matrices that stem from the Singular Value Decomposition :  $\mathbf{L}^{\text{cinv}} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{W}^H$ . The suffix **alt** stands for *altered*, meaning that regularisation is applied while,  $^H$  denotes the Hermitian transpose. The optimisation of the regularisation parameter  $\beta$  is done thanks to the use of the L-curve principle [32, 26, 67].

After regularisation, Equation (3.15) is the considered one in the inverse problem where the forces  $\mathbf{F}^{\text{ctikh}}$  are computed :

$$\mathbf{F}^{\text{ctikh}} = \mathbf{L}^{\text{ctikh}} \mathbf{V}^{\text{c}}. \quad (3.15)$$



### 3.1.3 A numerical example

#### 3.1.3.1 Studied cases

In order to check the effects of the successive steps of the method, numerical simulations were performed. These simulations were done using a FE model of a square plate in flexural motion.

The dimensions and the material properties of the plate are given in Table 3.1. Clamped edges are considered at abscissas  $x = 0$  and  $x = 1m$  while the other boundaries at  $y = 0m$  and  $y = 1m$  remain free in the simulations.

Edge length $a$ (m)	Thickness $h$ (mm)	Mass density $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Young Modulus $E$ (N/m <sup>2</sup> )	Structural damping $\eta$	Nu $\nu$
1	4	7800	2.1E11	1E-4	0.3

TABLE 3.1 – Material and geometry characteristics of the simulated plate.

For convenience, the mesh is regular and made of quadrangles : the number of elements is  $N_e = 2500$  and their average size is  $0.2m$  so that the model meets the  $\frac{\lambda}{6}$  criterion until  $f = 2750Hz$  (with  $\lambda = \frac{2\Pi}{\sqrt{\omega}} \sqrt[4]{\frac{Eh^2}{\rho(12(1-\nu^2))}}$  the natural flexural wavelength). After constraints eliminations, the matrix system describing the flexural motion of the plate for each angular frequency is made of 7496 DOFs.

One moment and three forces were considered at distinct nodes :

- a single point moment at node 468 located at  $x = 0.36m, y = 0.24m$  with an amplitude  $\mathcal{M}_{468}^x$ ,
- a single point force at node 468 located at  $x = 0.36m, y = 0.24m$  with an amplitude  $\mathcal{F}_{468}$ ,
- a single point force at node 557 located at  $x = 0.48m, y = 0.12m$  with an amplitude  $\mathcal{F}_{557}$ ,
- a single point force at node 2500 located at  $x = 0.52m, y = 0.74m$  with an amplitude  $\mathcal{F}_{2500}$ .

The computations of displacements and rotations were then obtained by direct solving, at the frequencies  $50Hz, 400Hz, 600Hz$  and  $1400Hz$ , for the five load cases depicted in Table 3.2.

<i>Case</i>	$\mathcal{M}_{468}^x$	$\mathcal{F}_{468}$	$\mathcal{F}_{557}$	$\mathcal{F}_{2500}$
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1
5	0	1	-0.5	1.5

TABLE 3.2 – Studied load cases.

In subsections 3.1.3.2 to 3.1.3.4, force identification was made using different models without regularisation :

- in section 3.1.3.2 : the inverse probleme uses the same model as the one in the direct problem, except that boundaries are considered free,
- in section 3.1.3.3 : the inverse probleme uses the same model as the one in the direct problem, except that boundaries are considered free and that rotations are eliminated by the dynamic condensation,
- in section 3.1.3.4 : the inverse problem uses a model reduced by the Craig-Bampton approach in an area where no force identification is applied.

Finally, section 3.1.3.5 presents the benefit given by the regularisation when noisy data are considered.

### 3.1.3.2 Inverse results without dynamic condensation

Equation (3.1) is directly applied using simulated displacements and rotations calculated at the frequency of  $f = 400Hz$  from load cases 1 and 2 (see table 3.2).

Figure 3.3 presents results of the nodal forces  $\mathcal{F}$  extracted from vector  $\mathcal{A}$  :

- Subfigure 3.3(a) corresponds to results obtained when displacements and rotations are computed from load case 1. Reacting forces are identified at the boundaries,
- Subfigure 3.3(b) corresponds to results obtained when displacements and rotations are computed from load case 2. The exciting force is correctly identified and reacting forces are also identified at the boundaries.

Figure 3.4 presents results of the moments  $\mathcal{M}^x$  extracted from vector  $\mathcal{A}$  :

- Subfigure 3.4(a) corresponds to results obtained when displacements and rotations are computed from load case 1. Exciting moment is correctly identified and very small reacting moments appear at the boundaries,
- Subfigure 3.4(b) corresponds to results obtained when displacements and rotations are computed from load case 2. The only excitation identified is reacting moments present at the boundaries.

Results for moments  $\mathcal{M}^y$  are presented on Figure 3.5. No excitation is detected in the subdomain but reacting moments appear on clamped edges.

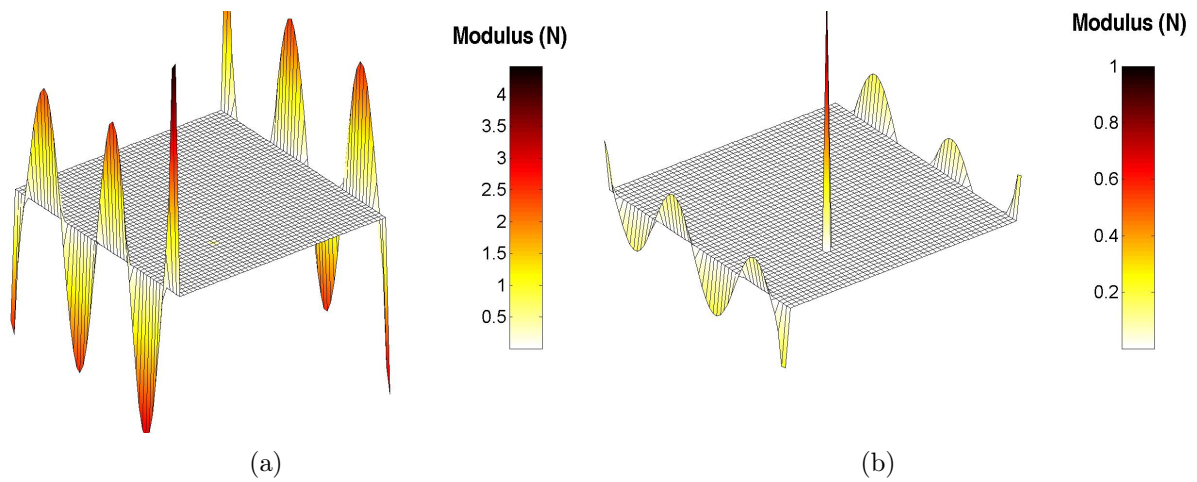


FIGURE 3.3 – Amplitudes of the forces  $\mathcal{F}$  identified on the plate at the frequency  $f = 400Hz$ . Exact displacements computed from : (a) load case 1 ; (b) load case 2.

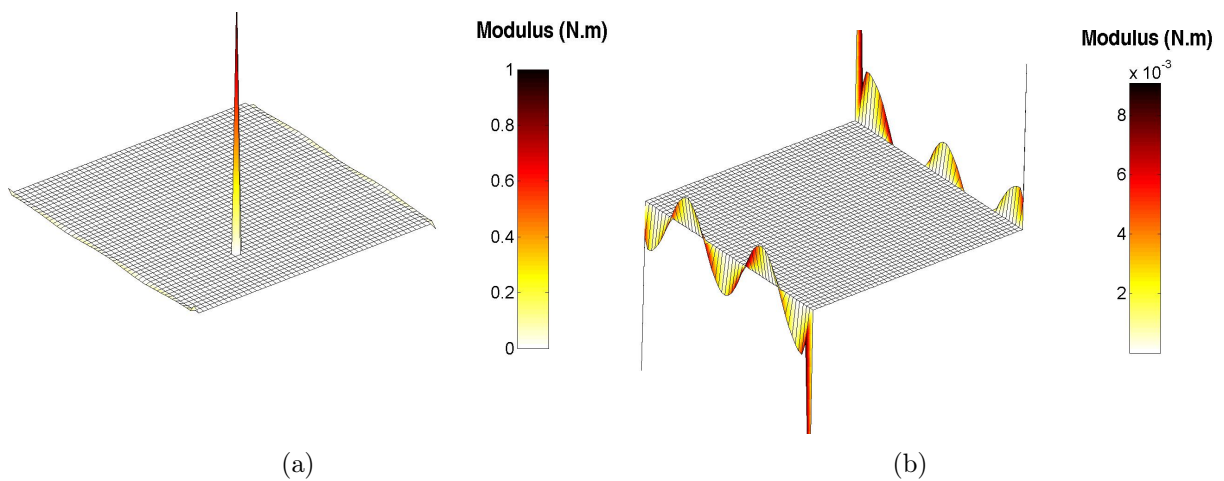


FIGURE 3.4 – Amplitudes of the Moments  $\mathcal{M}^x$  identified on the plate at the frequency  $f = 400Hz$ . (a) load case 1 ; (b) load case 2.

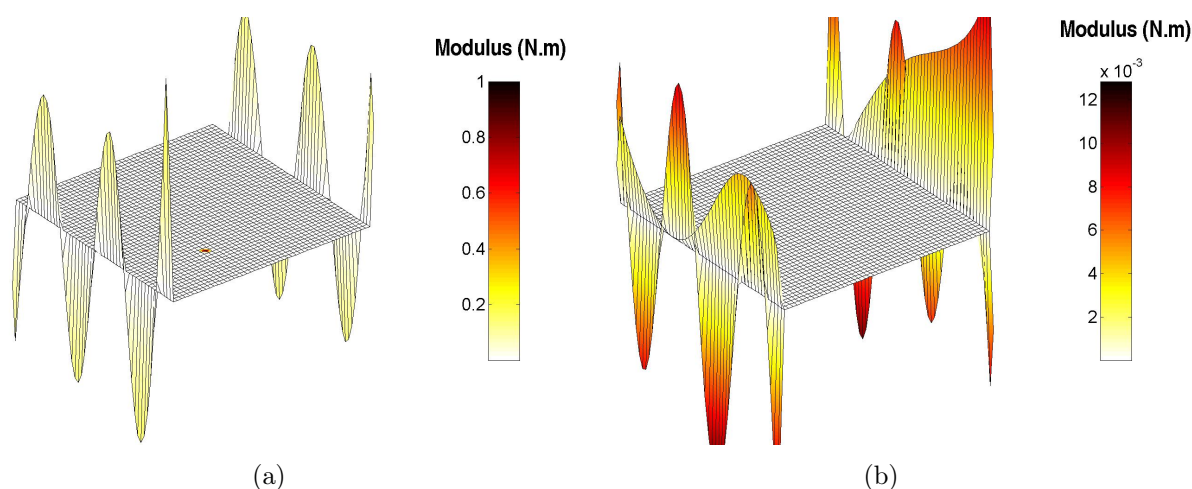


FIGURE 3.5 – Amplitudes of the Moments  $\mathcal{M}^y$  identified on the plate at the frequency  $f = 400Hz$ . (a) load case 1; (b) load case 2.

### 3.1.3.3 Inverse results with dynamic condensation of rotations

Equation (3.9) is directly applied using the computed displacements at the frequency of  $f = 400Hz$  and obtained from the load cases 1 and 2.

Figure 3.6 presents results of the forces identification :

- Subfigure 3.6(a) corresponds to results obtained when displacements are computed from load case 1. Exciting moment is identified as a set of opposite forces,
- Subfigure 3.6(b) corresponds to results obtained when displacements are computed from load case 2. Exciting force is identified.

The elimination of rotations by the dynamic condensation allows moments to be identified by two opposite forces.

### 3.1.3.4 Inverse results with dynamic condensation of rotations and Craig-Bampton reduction of a subpart of the model

This subsection presents the consequences of using a Craig-Bampton reduction of a part of the domain, before condensing rotations and modal DOFs.

Only one superelement is considered here. The region outside this superelement is defined by the four bands of width  $0.04m$  near the limits and by a rectangle from  $x = 0.2m, y = 0.12m$  to  $x = 0.54m, y = 0.36m$  as shown on Figure 3.7.

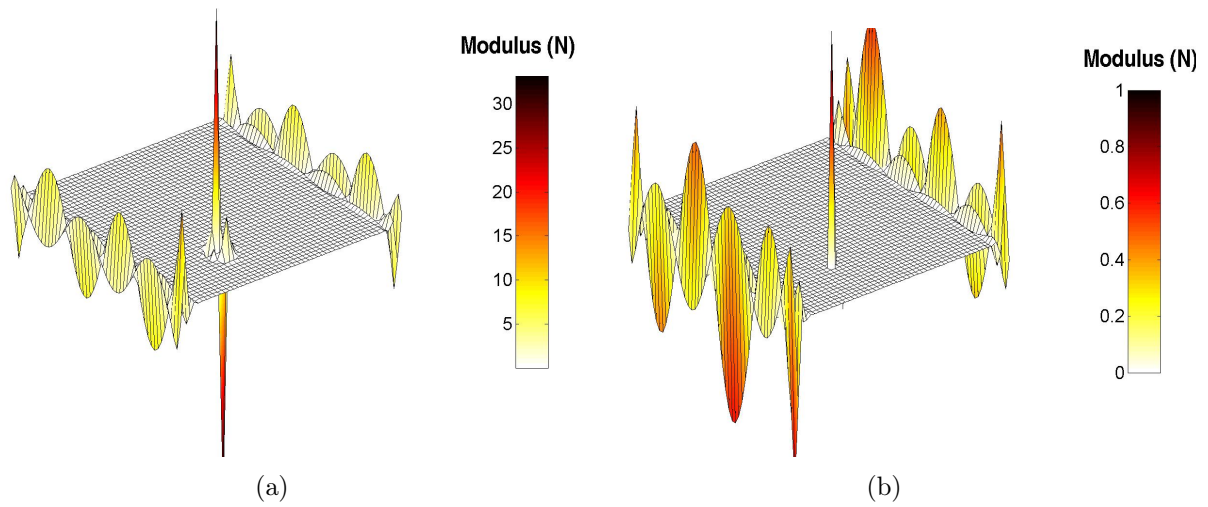


FIGURE 3.6 – Amplitudes of the forces  $\mathcal{F}$  identified on the plate at the frequency  $f = 400Hz$ . Rotations are dynamically condensed. (a) load case 1; (b) load case 2.

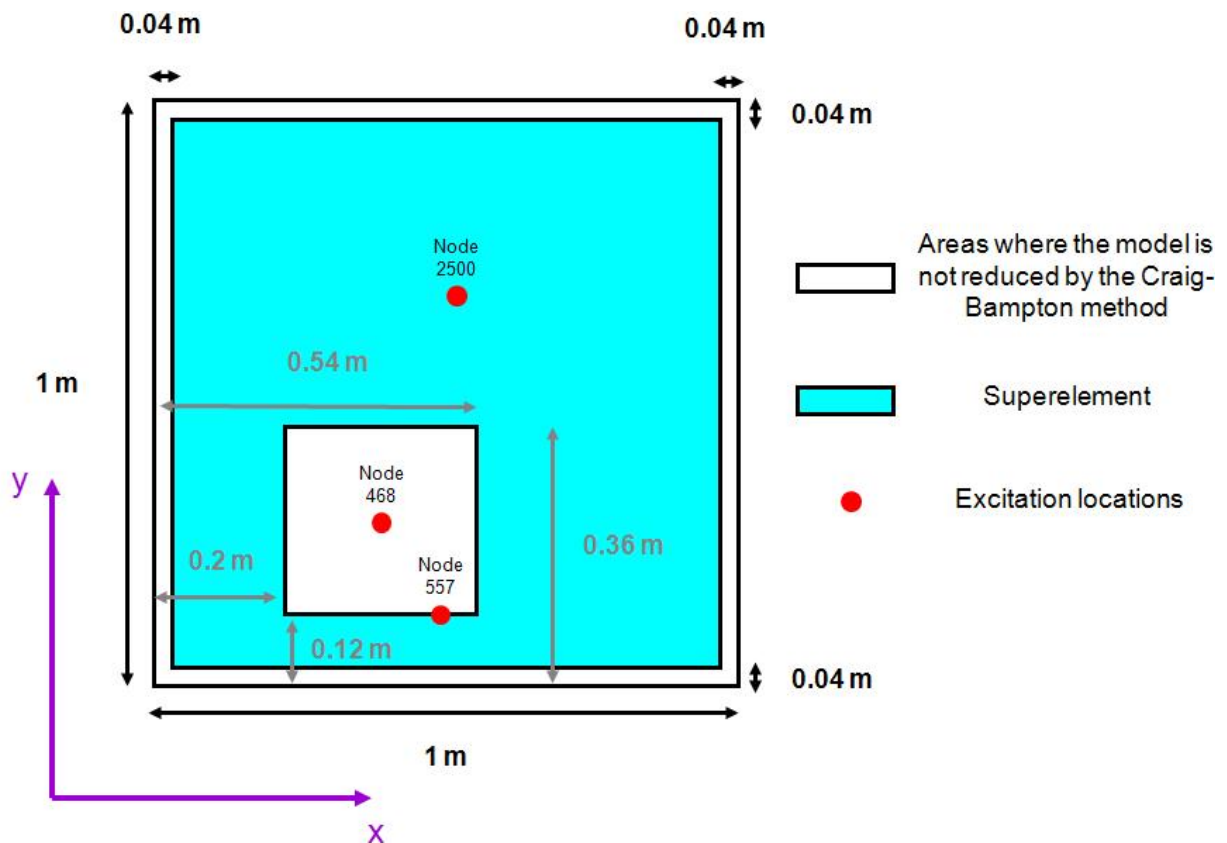


FIGURE 3.7 – Geometrical location of the superelement and excitation points for the numerical example.

#### 3.1.3.4.1 Study of the modal convergence of the reduced superelement

This subsection corresponds to a study of the modal convergence by comparing results when keeping 36 and 144 clamped-interface modes at the three frequencies 400Hz, 600Hz and 1400Hz. Note that the eigen frequencies of the last modes are :

- $f = 888,48Hz$  for the 36th mode,
- $f = 2970,44Hz$  for the 144th mode.

Results are shown on Figures 3.8 and 3.9.

On Figure 3.8, the results for three frequencies of excitation are plotted on three different Subfigures. 36 superelement's modes were kept. It is observed that while results are good for the frequency of excitation of 400Hz (Subfigure 3.8(a)), the method becomes to exhibit aberrant forces when exciting at 600Hz (Subfigure 3.8(b)). The results' corruption level drastically increases with the frequency as it is shown on the example of Subfigure 3.8(c) corresponding to the frequency of 1400Hz.

Then, Figure 3.9 presents the results for the same frequencies of excitation when keeping much more superelement's modes. The good point is that results are this time correct for all the studied frequencies even if it appears that the model is not *perfect*. Indeed, when not keeping enough superelement's modes, the model does not describe correctly its behaviour at the considered frequency of excitation. The consequence is the appearance of forces at the interface of the superelement in order to counteract the unbalance between the model and the measurements data at the interface.

So, by comparing these two Figures, it can be observed that using an increasing number of superelement's modes helps to lower the levels of uncorrect forces that appear on the interface of the superelement and on the free boundaries of the plate. It is found that the number of modes to be kept when using Craig-Bampton reduction must be such that it spans a frequency range up to two (or preferably three times) the maximum studied frequency.

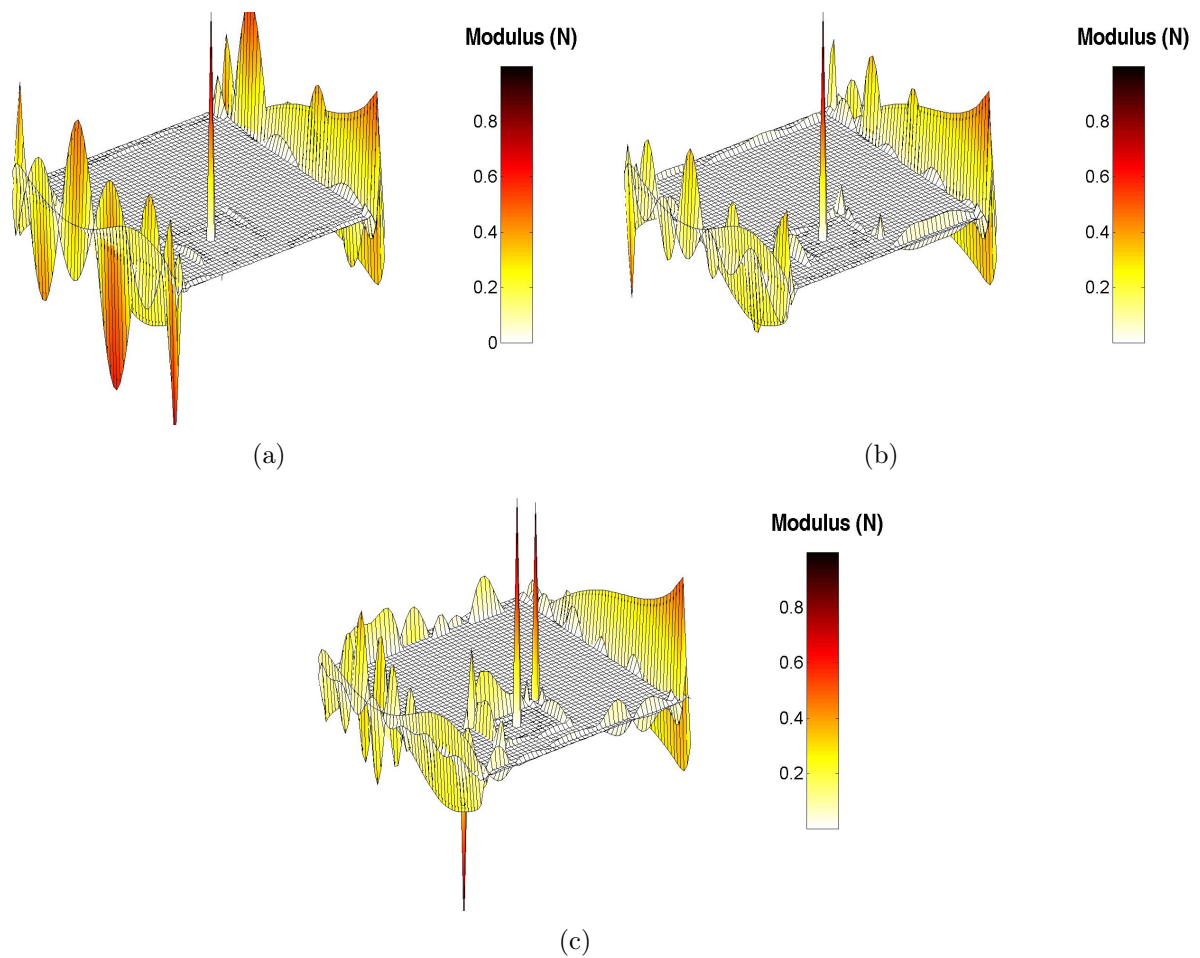


FIGURE 3.8 – Amplitudes of the forces  $\mathcal{F}$  identified on the plate using load case 2. 36 fixed interface modes are kept on the superelement. (a)  $f = 400Hz$ ; (b)  $f = 600Hz$ ; (c)  $f = 1400Hz$ .

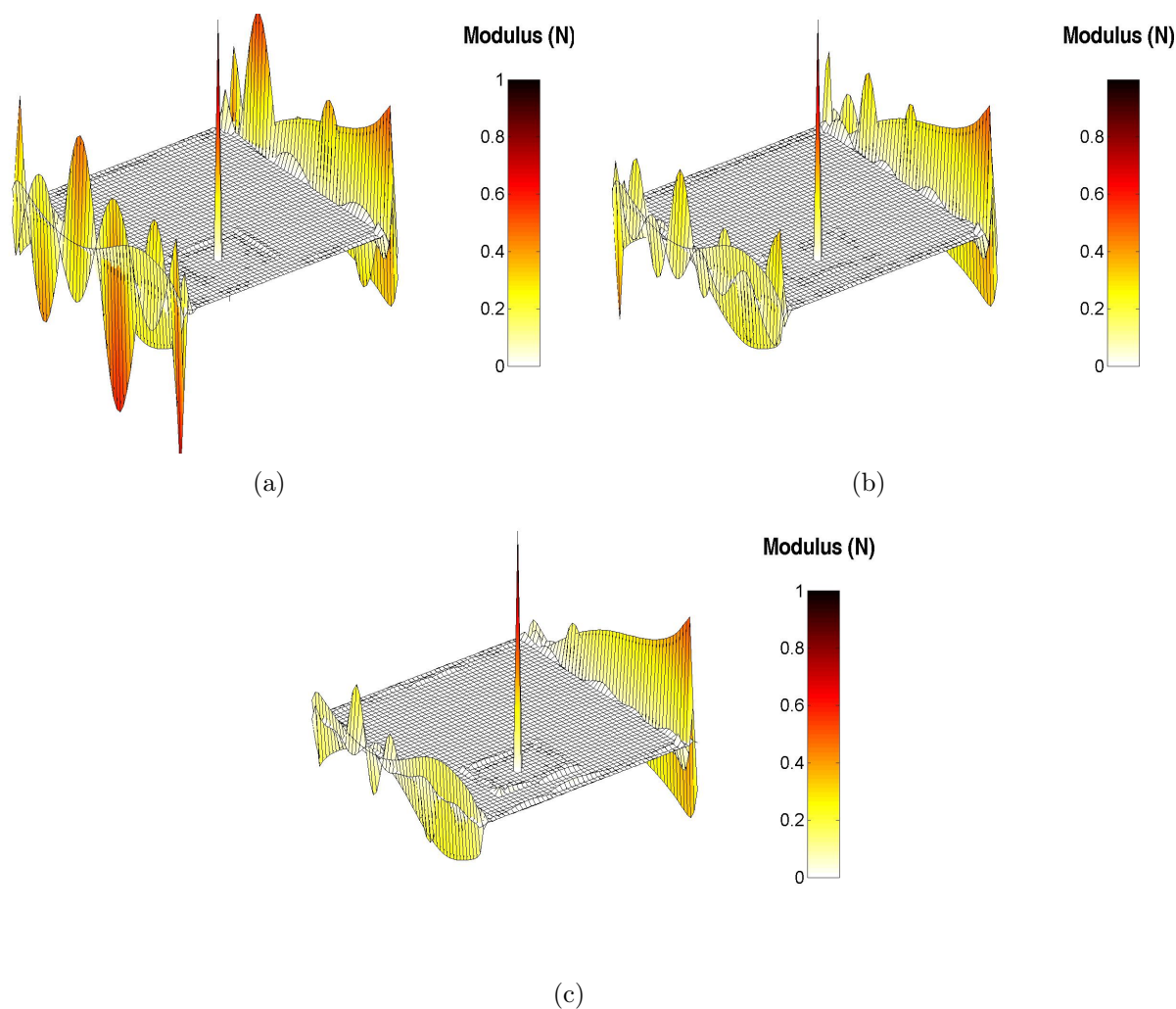


FIGURE 3.9 – Amplitudes of the forces  $\mathcal{F}$  identified on the plate using load case 2. 144 fixed interface modes are kept on the superelement. (a)  $f = 400Hz$ ; (b)  $f = 600Hz$ ; (c)  $f = 1400Hz$ .



### 3.1.3.4.2 Study of the influence of the location of the excitation, for a given reduced model

On Figure 3.10, the forces contained in vector  $\mathcal{F}^{rc}$  (see Equation 3.13) are plotted for the four cases 2, 3, 4 and 5 at the frequency  $f = 400Hz$ . At this frequency, 72 modes are kept. The frequency of the 72nd mode is  $f = 1586.69Hz$  meaning that the modal scheme of the superelement has converged at the studied frequency.

- Subfigure 3.10(a) corresponds to results obtained when displacements are computed from load case 2 (force applied outside the superelement). Exciting force is correctly identified and the reacting loads at the boundaries also appear on the correct edges,
- Subfigure 3.10(b) corresponds to results obtained when displacements are computed from load case 3 (force applied at the boundary of the superelement). Exciting force is correctly identified at the interface of the superelement and the reacting forces at the boundaries also appear on the clamped edges,
- Subfigure 3.10(c) corresponds to results obtained when displacements are computed from load case 4 (force applied inside the superelement). The presence of the excitation inside the superelement makes the method fail. Unexact forces are identified on the interface of the superelement,
- Subfigure 3.10(d) corresponds to results obtained when displacements are computed from load case 5 (superposition of the 3 preceding load cases). The presence of an exciting force inside the superelement makes the identification at the interface of the superelement to fail. Nevertheless, the force applied outside the superelement can still be located and identified.

When Craig-Bampton reduction is applied on parts on which it is known that no exciting forces are present, results at the interface of the superelement and inside the measured areas are valid. In other cases, the results inside measured areas remain accurate even if the results at the interface appear to be corrupted.

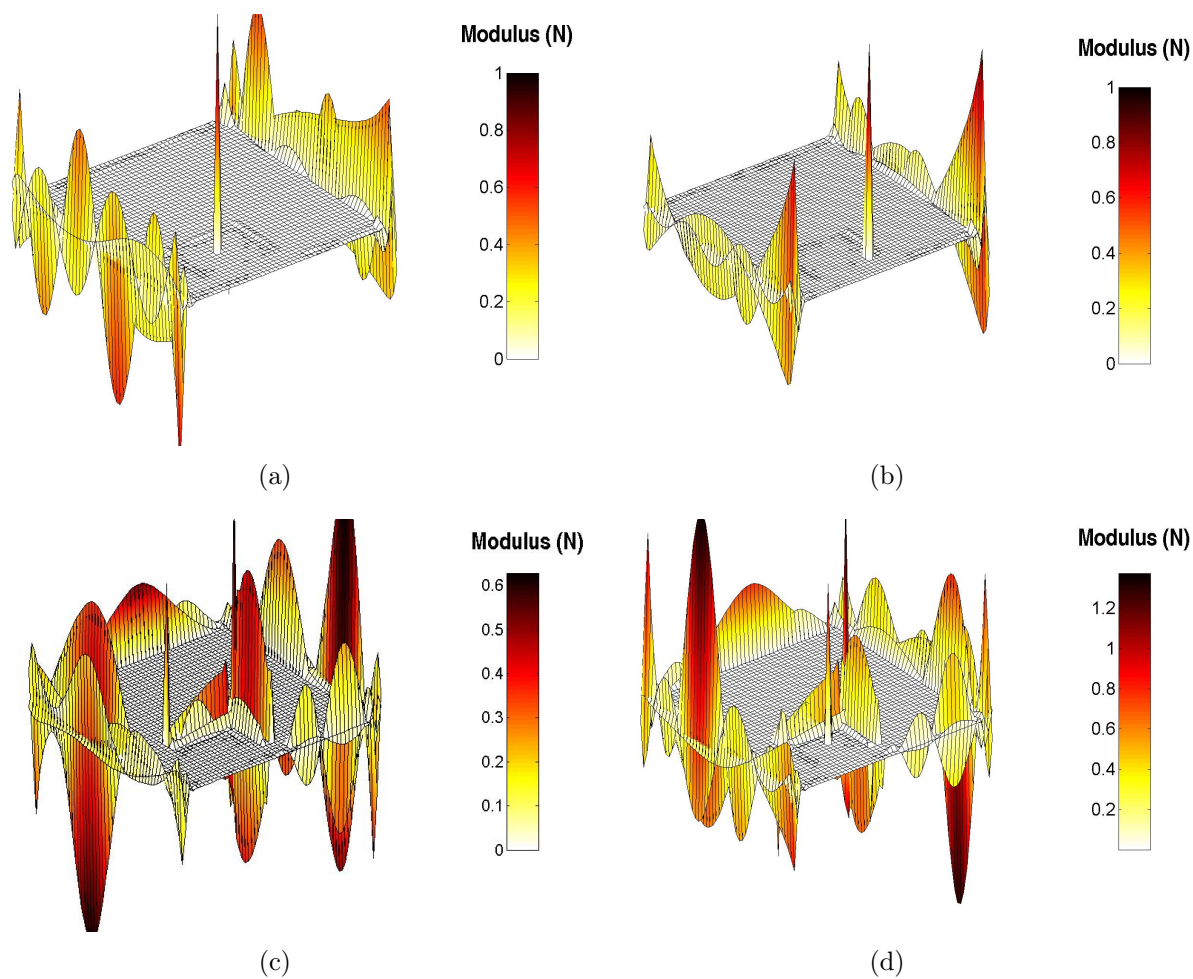


FIGURE 3.10 – Amplitudes of the forces  $\mathcal{F}$  identified on the plate at the frequency  $f = 400Hz$ . 72 fixed interface modes are kept on the superelement. (a) case 2; (b) case 3; (c) case 4; (d) case 5.

### 3.1.3.5 Effects of noise present in measurements data, regularisation

To validate the use of the regularisation technique, a gaussian noise randomly generated is added to simulated displacements. In this section, displacements data are simulated from the load case 2 and in the frequency range of [100Hz-1600Hz] with a step of 2.5Hz. The inverse problem is solved using the Craig-Bampton reduction on the subdomain described in subsection 3.1.2.3. 144 fixed-interface modes are kept. Then, rotational DOFs and modal DOFs are eliminated using the dynamic condensation.

As shown on Figure 3.11, without regularisation the method fails.

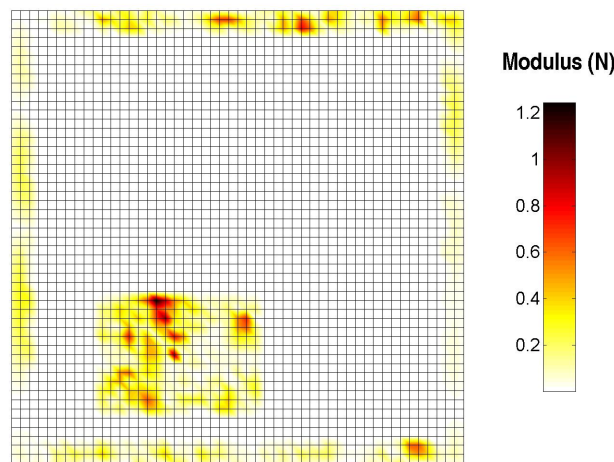


FIGURE 3.11 – Amplitudes of the not regularised forces  $\mathcal{F}^{\text{rectikh}}$  identified on the plate from displacements computed using load case 2. A Gaussian noise randomly generated was used to simulate measurements noise. 144 fixed interface modes are kept to estimate the reduced subdomain. The frequency is  $f = 385\text{Hz}$ .

Spatial results are given on Figure 3.12 for the frequencies 385 Hz, for which the force excitation is clearly localised.

The localisation is not so accurate for all frequencies. For example, bad results were obtained at 427 Hz, as shown in Figure 3.13. These frequencies correspond to big resonances of the structure.

In order to quantify the magnitude of the detected force, a spatial summation of the force repartition is computed on the area around the excitation point. On Figure 3.12, this area is indicated by a blue rectangle : it is defined so that it contains the entire observed main peak.

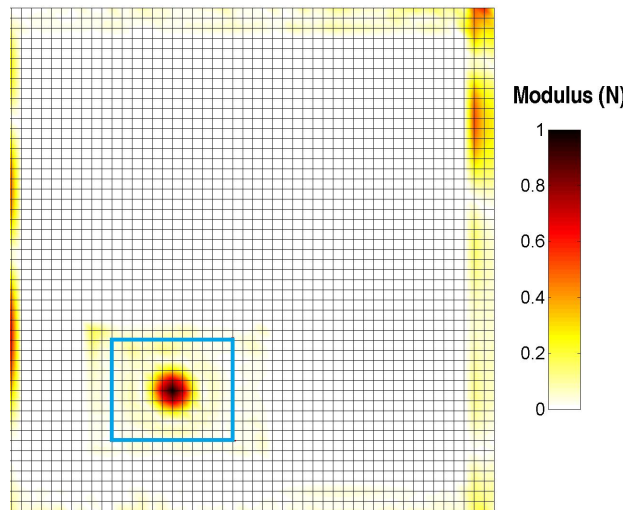


FIGURE 3.12 – Amplitudes of the regularised forces  $\mathcal{F}$  identified on the plate from displacements computed using load case 2. A Gaussian noise randomly generated was used to simulate measurements noise. 144 fixed interface modes kept to estimate the reduced subdomain. The frequency is  $f = 385Hz$ .

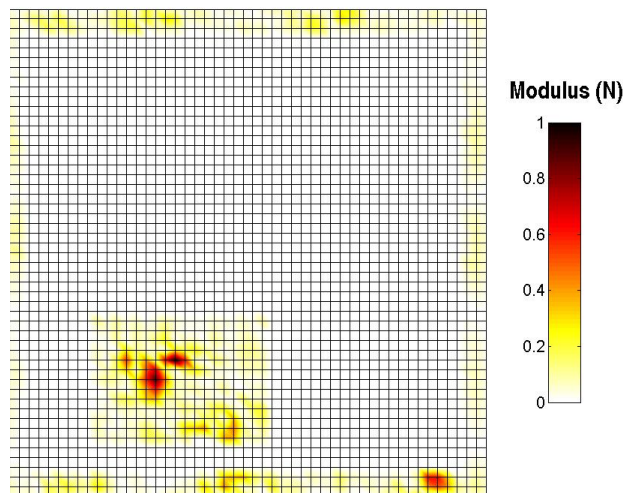


FIGURE 3.13 – Effect of resonances : Amplitudes of the forces  $\mathcal{F}$  identified on the plate from displacements simulated using load case 2. A Gaussian noise randomly generated was used to simulate measurements noise. 144 fixed interface modes kept to estimate the reduced subdomain. The frequency is  $f = 427Hz$ .

For all frequencies, the identified force magnitude is thereby computed and is plotted using a log scale on Figure 3.14, where the reference of 1N is also drawn. Frequencies on which the method fails are found on resonances. Except at these eigen frequencies, the identified magnitude is in good agreement with theoretical value of 1N.

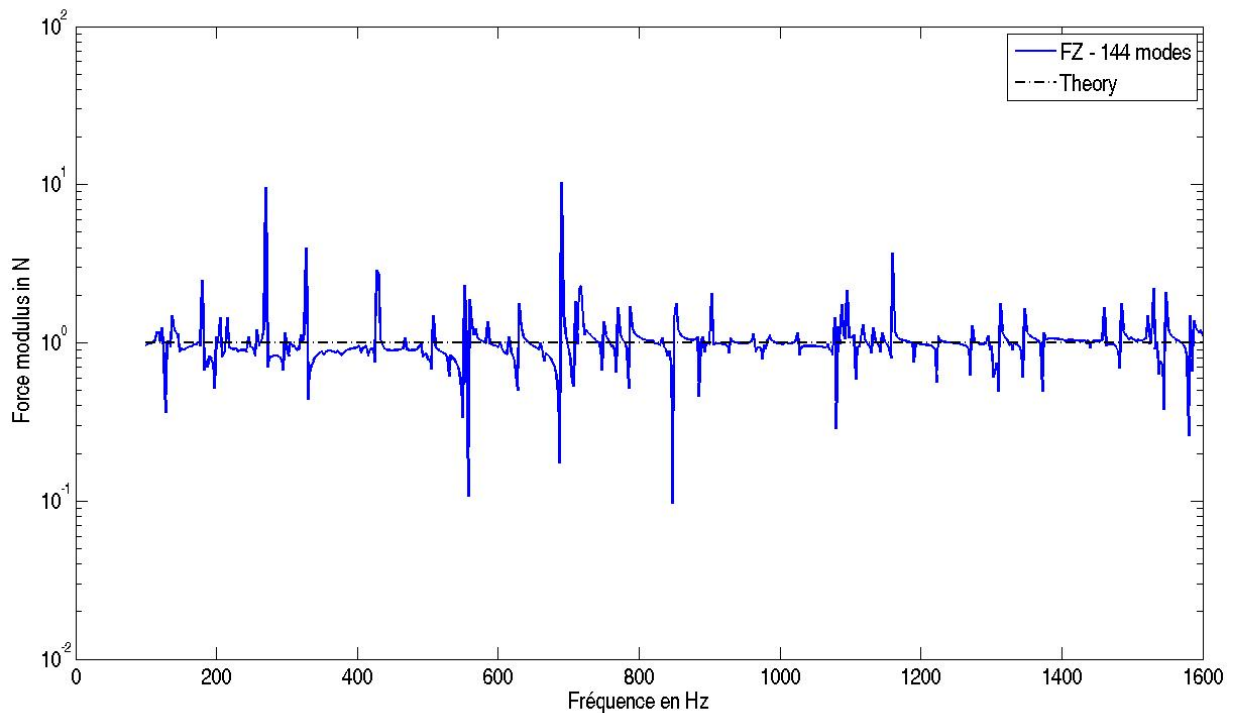


FIGURE 3.14 – Autospectrum of the regularised force computed on the plate from load case 2. A Gaussian noise randomly generated was used to simulate measurements noise. 144 fixed interface modes kept to estimate the reduced subdomain.

### 3.1.4 Experimental validation

#### 3.1.4.1 Experimental setup

The studied structure is a 1.5mm thick L-shaped aluminium plate, as shown on Figure 3.15(a). Its lowest edge is clamped in the middle. The material and geometrical characteristics are summed up in Table 3.3.

Measurements were performed using a scanning laser vibrometer. A reference signal is given by an accelerometer and the load case consists in exciting the plate at the location shown on Figure 3.15(b). The shaker is fed by a periodic chirp signal and the force applied to the structure is directly measured thanks to a force sensor, in order to allow comparisons with the identified forces. The measurement analysis is made between 100 Hz and 3200 Hz with

Thickness $h$ (mm)	Mass density $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Young Modulus $E$ (N/m <sup>2</sup> )	Structural damping $\eta$
5.1	2700	72E9	1E-4

TABLE 3.3 – Material and geometry characteristics of the experimental plate.

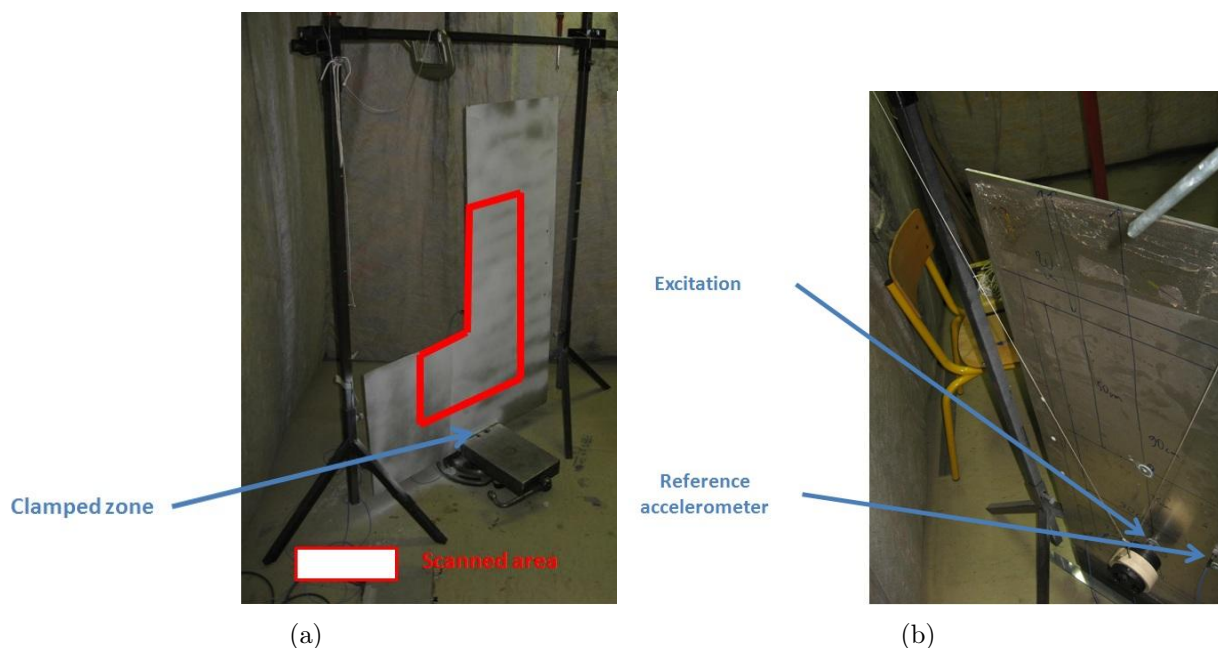


FIGURE 3.15 – Picture of the experimental setup. The clamped area can be seen and the scanned subdomain is highlighted by the red L-shape. The locations of the shaker and of the reference accelerometer are pointed on these pictures. (a) Overall view ; (b) Zoom on the locations of the shaker and of the reference accelerometer.

a 0.5Hz resolution. Studied area corresponds to the red L-shape of Figure 3.15(a). Therefore, except on the two interior sides, edges are not free. The mesh is made of triangles which edges have a mean length of 23mm.

#### 3.1.4.2 Force identification without the Craig-Bampton reduction

Figure 3.16 shows the force repartitions reconstructed at four different frequencies from Equation (3.15), where the rotations of the Finite Element model are eliminated by the dynamic condensation procedure (subsection 3.1.2.2). The location of the force is found accurately as well as the presence of coupling forces at the boundaries, when these last ones are not free (upper, lower, left and right edges of the studied area highlighted by the red L-shape on Figure 3.15(a)).

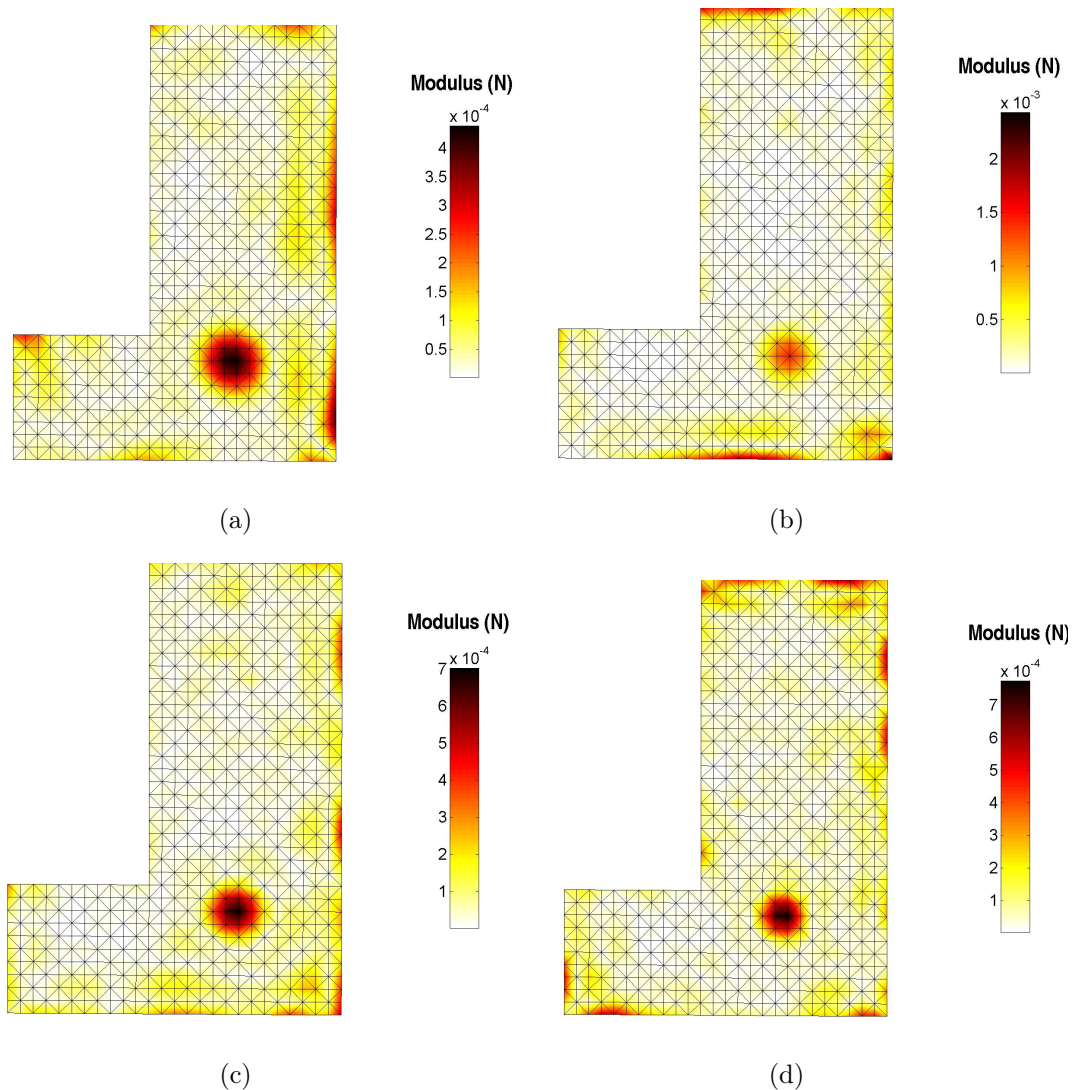


FIGURE 3.16 – Colormap of the amplitudes of the forces  $\mathcal{F}$  identified on the plate from experimental measurements. (a)  $f = 560Hz$ ; (b)  $f = 750Hz$ ; (c)  $f = 1040Hz$ ; (d)  $f = 1475Hz$ .

The method is really computing intensive with such a fine mesh and it is not realist to apply it for all frequencies, both for computational and experimental reasons.

### 3.1.4.3 Force identification with a Craig-Bampton reduction

In order to improve both the measurements and computing times, some non excited parts of the structure were modeled with superelements. Note that this reduction implies a priori knowledge on non excited parts of the structure.

As shown in Figure 3.17, the studied area is split into 3 parts :

- the exterior area (corresponding to the limits of the studied area, including the free edges),
- the interior area (where the exciting force "might be" applied),
- the superelement (where no forces are supposed to be applied).

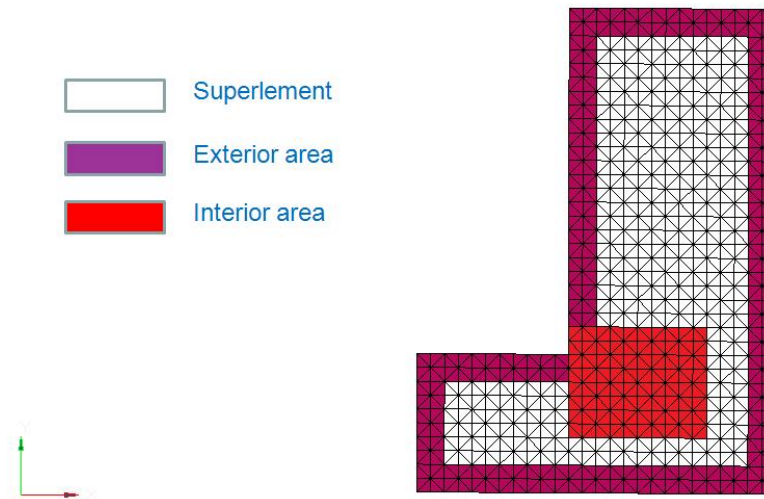


FIGURE 3.17 – Definition of the mesh with indication of the areas reduced using the Craig-Bampton method.

16 modes are kept, the frequency of the last mode being 3350Hz. These modes and rotations are then eliminated by the condensation technique (subsection 3.1.2.2).

On Figure 3.18, regularised results, obtained from Equation (3.15) with the reduced operator  $\mathbf{L}^{rc}$ , are presented for the same four frequencies as in previous subsections. The exciting force is correctly localised and the blue rectangle defines the area of summation chosen to quantify the force magnitude.

Thanks to the Craig-Bampton option, the computing time as well as the measurements times were considerably decreased and the identification at all measured frequencies became possible. Thus, it was observed from a 5 to a 6 times improvement in computing times when using the Craig-Bampton reductio, keeping 16 modes at the frequency of 560Hz, on a computer powered by a Intel Xeon X5650 2.67Ghz (8core) processor with 24go of ram and operated under windows 7 64bits with a 64bits version of Matlab. The results are summed up in Table 3.4.



Model type	Number of master DOFs	Number of slave DOFs	Overall computing times
Full model	426	868	534.8 seconds
Reduced model (16 modes kept)	697	1394	91.8 seconds

TABLE 3.4 – Improvements in computing times when using the Craig-Bampton reduction (16 modes kept) at the frequency  $f = 560Hz$ . The computer is powered by a Intel Xeon X5650 2.67Ghz (8 cores) processor with 24go of ram and operated under windows 7 64bits with a 64bits version of Matlab

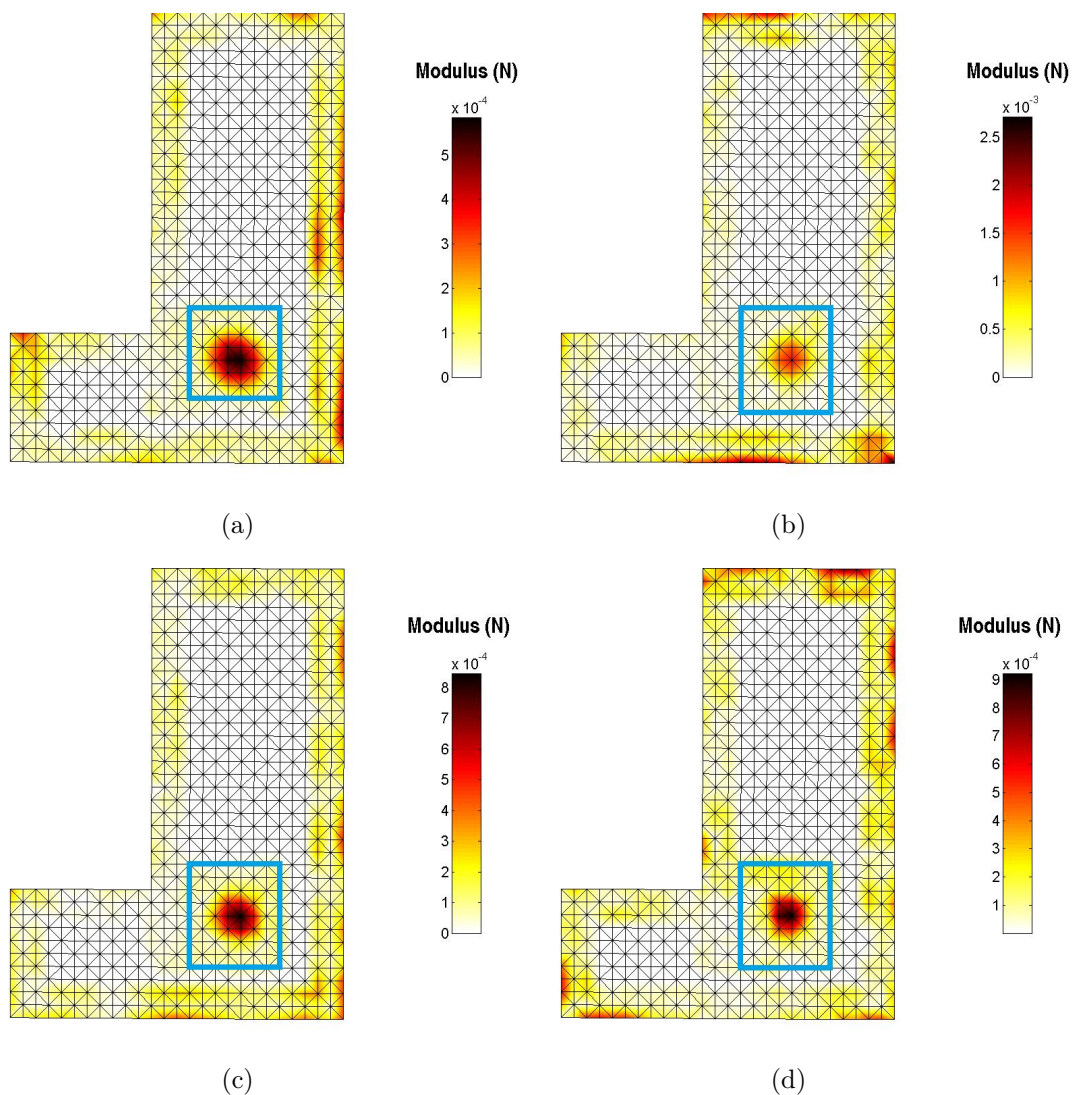


FIGURE 3.18 – Colormap of the amplitudes of the forces  $\mathcal{F}$  identified on the plate from experimental measurements. 16 fixed interface modes kept to estimate the reduced subdomain. (a)  $f = 560Hz$ ; (b)  $f = 750Hz$ ; (c)  $f = 1040Hz$ ; (d)  $f = 1475Hz$ .

At last, on Figure 3.19, the spectrum of the identified force is in good agreement with the one obtained by the direct measurement.

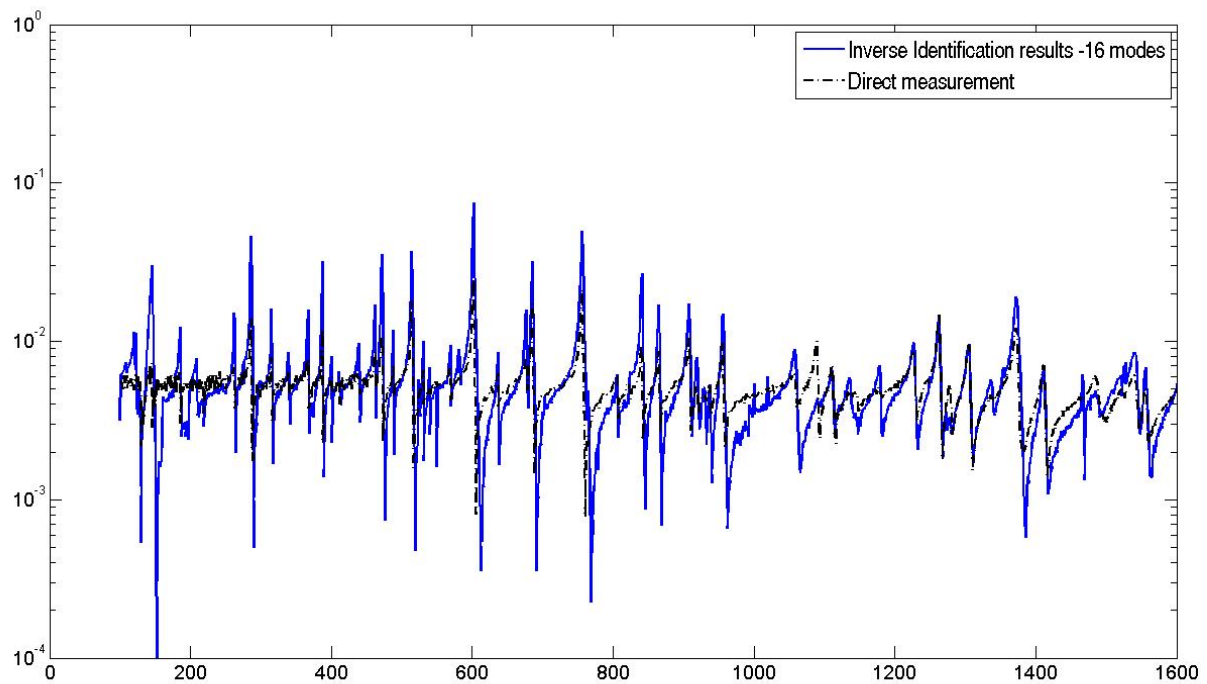


FIGURE 3.19 – Forces  $\mathcal{F}$  results computed on the plate from experimental measurements. 16 fixed interface modes kept to estimate the reduced subdomain. The figure plots the identified force magnitude versus frequency of excitation.

### 3.1.5 Conclusion

The presented method is an extension of the Force Analysis Technique. Indeed, it consists in using a local operator corresponding to a spatial discretisation of the local behaviour of the structure and using a regularisation step in order to reduce the high sensitivity to uncertainties in input data. Here, the operator is obtained from a Finite Element formulation instead of a discretisation of the analytic equation of motion and the regularisation is made by a double inversion procedure instead of a wavenumber filtering, which has sense only on simple structures.

By definition, the inverse problem requires that response DOFs are input data and must be measured. This is almost impossible to implement because the usual criteria for models accuracy involve too many DOFs and some of them can be difficult to measure, such as rotations. It is thus important to use model reduction techniques and to study their effects on inverse problems. It is the aim of this paper, where the reference structure is a plate for convenience. The dynamic condensation is the retained method, because inaccessible DOFs can be easily eliminated anywhere in the studied area. In order to improve both measurements and computational costs, it is also shown the possibility to use the Craig-Bampton reduction as an option, where modal DOFs, substituting DOFs corresponding to interior nodes of superelements can then also be eliminated by the condensation technique. In any cases, the eliminated DOFs should not be excited. Of course, this constitutes a new restriction to the FAT, but one can easily imagine that this assumption can be made for lot of DOFs in most industrial cases.

Results obtained from numerical simulations have clearly shown the possibility to locate and to quantify forces. It is interesting in noting also that moments can be reconstructed as opposite forces, even if the null moment assumption is made when condensing rotations. Simulations were also used to study the modal convergence of superelements when the Graig-Bampton approach is used. Thus, It was established the criterion that the eigen frequency of the last mode must be upper that twice the excitation frequency.

The experimental validations, made on a L-shaped plate excited by a shaker, have shown very good location of a point force and have revealed the interest of the Craig-Bampton option, when the excitations must be identified on a large frequency band. In this case, the obtained force spectrum appeared similar to that of a direct measurement, except for resonances, which constitute inevitably singularities in the inverse method.

The method developed in this study may interest many applications, since it locates and quantifies all types of excitations in the form of equivalent forces on nodes of a finite element model adaptable to industrial structures. Of course, next steps will consider more complex cases, like 3D meshes, distributive excitations, etc. Finally, because the use of reduction requires a priori information, future studies can also be investigated when they cannot be established. For example, global strategies could be elaborated, where pre-locations of forces could be done by the use of several iterations of the method.

Also, it was found than the localisation of forces on the interface of the superelement could not help to decide wether they were real forces or false ones, if it is not sure that no interior

forces exist inside the superelement. In this case, further exploration should be done inside the superelement, for example, by moving around the uncondensed part to make appear inside it the exciting force. If forces are still present at the interface, it can be said that the tracked force was not still found and that the uncondensed area must be moved again. Also, the edges where forces appear on the interface give a rough idea of the locations of the force inside the superelement. So this setback can be turn as an advantage allowing for example to detect the apparition of failures or excitation in the reduced domain.

### **Acknowledgements**

This work is supported by grants from the competitiveness pole LUTB (Lyon Urban Truck and Bus). It is carried out in the frame of the French research project MACOVAM, with the partnership of RenaultTrucks VPT, Pierburg Pump Technology, Vibrattec and LVA (Vibrations and Acoustics Laboratory) of INSA de Lyon.

## **3.2 Identification en des zones non mesurables (acte du Congrès Français d'Acoustique 2010)**

---

Cette partie est composée directement par l'article parue dans l'acte du congrès CFA 2010.

Les notations ont été modifiées afin de correspondre au plus juste aux notations du reste du mémoire.

# 10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

## Identification des sources vibratoires en utilisant un opérateur Eléments Finis localement

Cédric Renzi<sup>1</sup>, Charles Pézerat<sup>2</sup>, Jean-Louis Guyader<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LVA INSA-LYON, 25bis avenue Jean Capelle bat. St Exupéry, F-69621 Villeurbanne Cedex, cedric.renzi@insa-lyon.fr

<sup>2</sup>LAUM, Université du Maine, CNRS, avenue Olivier Messiaen, F-72085 LE MANS Cedex 09, charles.pezerat@univ-lemans.fr

L'identification des sources excitatrices de structures vibrantes est une thématique importante de la vibroacoustique. Dans le cas où la mesure directe n'est pas possible, on estime les causes (forces) à travers l'observation des effets (mesures de niveaux vibratoires). Il faut alors résoudre un problème inverse qui présente une très forte sensibilité aux incertitudes de mesure. Parmi les méthodes inverses, la méthode RIFF (Résolution Inverse Fenêtrée Filtrée) consiste à calculer une distribution de forces excitatrices à partir de mesures des déplacements vibratoires que l'on injecte localement dans l'équation du mouvement de la structure. Son extension est proposée en utilisant un opérateur éléments finis plutôt qu'une équation du mouvement analytique. Le développement est réalisé sur des plaques ce qui permet une comparaison directe avec les résultats obtenus à partir de la méthode RIFF classique. Dans un premier temps, l'étude a visé à éliminer des degrés de liberté non mesurables ou difficilement mesurables comme les rotations. Ensuite, une régularisation a permis de rendre l'approche stable devant les erreurs de mesure. Enfin, des techniques de condensation de modèles permettent de réduire le nombre de mesures nécessaires ainsi que l'identification d'efforts en des lieux non accessibles à la mesure de vibrations.

## 1 Introduction

Dans la thématique de l'identification de sources acoustiques par voie solide, la méthode RIFF (Résolution Inverse Fenêtrée Filtrée) permet de remonter aux excitations vibratoires à partir de données de champ vibratoire. C'est une approche appréciée par son aspect local, sa régularisation efficace à base de filtrage passe-bas en nombres d'ondes et l'absence d'hypothèses restrictives sur la distribution d'efforts à identifier [1]. Par ailleurs, couplée à l'holographie acoustique, elle fournit un outil complémentaire assurant le passage à l'identification de sources vibratoires à partir du champ vibratoire reconstitué depuis des mesures acoustiques [2]. Cependant, elle n'est développée que pour des structures simples car elle s'appuie sur l'équation du mouvement analytique [3]. Dans l'optique de son extension aux structures complexes, il est naturel de se pencher sur l'utilisation d'un modèle éléments finis pour décrire le comportement de la structure étudiée.

Au sein des techniques de problème inverse s'appuyant sur un modèle éléments finis, Busby a développé une approche avec régularisation de Tikhonov et condensation statique des rotations, sur poutre, mais dans le domaine temporel avec prélocalisation de l'effort [4]. Ibrahim et Sestieri ont pour leur part utilisé un modèle éléments finis condensé dynamiquement aux points d'application à priori d'efforts sur un treillis de poutres [5]. Corus et Balmes ont utilisé une approche éléments finis dans un but de recalage de modèle avec prélocalisation des efforts et une projection sur la base modale de la structure complète [6]. L'approche proposée dans le présent papier s'applique à localiser l'effort à partir d'un modèle éléments finis avec un minimum d'hypothèses. Déjà développée sur des poutres en flexion pour le cas unidimensionnel sans condensation [7], elle est étendue ici aux structures 2D planes de type plaques minces en flexion. La difficulté majeure étant l'augmentation du

nombre de Degrés De Libertés, on s'intéressera particulièrement à réduire le nombre de mesures à réaliser pour les estimer.

Dans un premier temps, la démarche générale à base d'un modèle libre-libre est présentée. Le traitement des rotations est abordé par une estimation à l'aide des fonctions de forme élémentaires ainsi que par une condensation dynamique permettant de réduire le nombre de mesures. Une régularisation de Tikhonov est proposée ce qui permet de s'assurer de la robustesse vis-à-vis du bruit de mesures. Enfin, une méthode s'appuyant sur la réduction de Craig-Bampton est développée dans le but de réduire au maximum le nombre de mesures à réaliser et d'identifier soit aux points de mesures, soit dans des zones inaccessibles à la mesure.

Malgré le couplage aux techniques holographiques envisagé au début de cette introduction, cet article s'intéresse uniquement à la partie vibratoire.

## 2 Description de la méthode

### 2.1 Calcul des efforts externes par un opérateur éléments finis

Soit une structure excitée par un certain nombre d'efforts extérieurs, en régime harmonique à la pulsation  $\omega$ .

Un modèle éléments-finis peut être utilisé afin de décrire le comportement d'une partie de cette structure dénommée sous-structure qui peut être, si nécessaire, étendue au domaine total. La modélisation nécessite une partition en un nombre fini  $N_e$  d'éléments s'appuyant sur un maillage de  $N$  nœuds préalablement défini. Le maillage sera appelé maillage de calculs : c'est sur celui-ci que seront identifiés les efforts.

Cette approche est directement utilisable dans le cas où l'ensemble des nœuds est accessible à la mesure.

Soient  $[M]$  et  $[K]$  les matrices de masse et de raideur de la sous-structure. Elles sont obtenues à partir des règles classiques d'assemblage des matrices élémentaires, résultant de la discrétisation d'un principe variationnel appliqué aux énergies cinétiques et potentielles totales de la structure [8].

La suite de cette étude se restreint au cadre des plaques minces en flexion. L'utilisation d'éléments de coques 3D restreints au mouvement de flexion transverse dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$  (théorie de Kirchhoff) conduit à un nombre de degrés de libertés (DDLs ou DOFs) égal à  $N_{DOFs} = 3N$ . Ainsi, en définissant la normale selon la direction  $+\vec{z}$  en chaque nœud d'indice  $i$ , les DDLs sont restreints à :

- la translation transverse  $w_i$  selon  $+\vec{z}$  (associée à un effort  $F_i$ ),
- la rotation  $\theta_i^x$  autour de l'axe  $+\vec{x}$  (associée à un moment  $M_i^x$ ),
- la rotation  $\theta_i^y$  autour de l'axe  $+\vec{y}$  (associée à un moment  $M_i^y$ ).

Sans prendre en compte d'éventuelles conditions aux limites, le modèle éléments finis s'écrit de manière matricielle à la pulsation  $\omega$  :

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{V} = \mathbf{L} \mathbf{V} = \mathbf{A}, \quad (1)$$

Avec  $\mathbf{L}$  l'opérateur éléments finis correspondant à la sous-structure,  $\mathbf{V}$  le vecteur des  $N$  translations et  $2N$  rotations et  $\mathbf{A}$  le vecteur des actions extérieures correspondant aux  $N$  forces et  $2N$  moments pour l'ensemble des nœuds.

Connaissant les quantités contenues dans  $\mathbf{V}$ , il est possible par l'application directe de (1) d'accéder aux quantités contenues dans  $\mathbf{A}$ . Ceci constitue un problème inverse avec une approche locale tout à fait analogue à la méthode RIFF.

En effet, l'équation (1) conserve l'approche locale puisque les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont bandes par construction et renumérotation adéquate des DDLs [5].

Ainsi, en prenant le cas le plus général d'un nœud situé à l'intérieur de la sous-structure maillée par des éléments quadrangulaires, l'identification de 3 efforts  $[F_i, M_i^x, M_i^y]^t$  au nœud  $i$  ne nécessite que les quantités  $[w_j, \theta_j^x, \theta_j^y]^t$  des nœuds  $j$  appartenant aux 4 éléments partageant le nœud  $i$ . Dans le cas présent, l'identification en un point de 3 efforts (1 force et 2 moments) à l'aide de l'équation (1) nécessite donc la mesure de 27 DDLs (9 translations et 18 rotations).

## 2.2 Substitution des rotations

Pour avoir un intérêt pratique, les données de  $\mathbf{V}$  doivent pouvoir être accessibles par la mesure. Or, l'obtention des rotations n'est pas aisée. Une deuxième étape consiste à définir un maillage de mesures associé à une méthode permettant d'estimer ces données [10]. Deux approches sont alors possibles.

a) Estimation des rotations par condensation [4, 8, 9], une condensation dynamique des rotations sous l'hypothèse de moments nuls aux nœuds dans l'opérateur complet [11] :

La sensibilité du problème inverse au bruit va conduire à régulariser la méthode (cf. dernier paragraphe). Cependant, cette constatation possède une conséquence

immédiate pour l'estimation des rotations : les données relatives aux moments seront supprimées par effet de lissage ou de filtrage passe-bas des résultats (suppression des petites longueurs d'ondes). L'estimation des rotations par condensation dynamique s'appuie sur cette observation : puisque les moments ne seront pas reconstruits en tant que tel mais apparaîtront comme un ensemble de forces équivalentes après la régularisation utilisée dans cette étude, l'hypothèse a priori de leur nullité peut-être faite dans la formulation initiale en forces/moments (1) ce qui permet de réduire le modèle aux seuls DDLs de déplacements et de forces. En notant  $D$  l'ensemble des DDLs de déplacements transverses et  $\Theta$  l'ensemble des DDLs de rotations, le système (1) peut être écrit ainsi :

$$\{F_D\} = (\mathbf{L}_{DD} - [\mathbf{L}_{D\Theta}][\mathbf{L}_{\Theta\Theta}]^{-1}[\mathbf{L}_{\Theta D}])\{V_D\}, \quad (2)$$

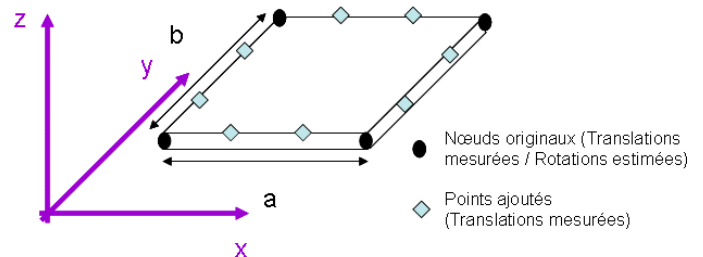
$$\Leftrightarrow \mathbf{F}^c = \mathbf{L}^c \mathbf{V}^c,$$

où  $\mathbf{L}^c = (\mathbf{L}_{DD} - [\mathbf{L}_{D\Theta}][\mathbf{L}_{\Theta\Theta}]^{-1}[\mathbf{L}_{\Theta D}])$  est l'opérateur réduit,  $\mathbf{V}^c = \{V_D\}$  est le vecteur des DDLs réduit aux déplacements et  $\mathbf{F}^c = \{F_D\}$  est le vecteur des actions extérieures condensées aux efforts. Ceci revient à exprimer les rotations en fonction des déplacements.

L'avantage principal de ce procédé est de réduire le nombre de DDLs à mesurer. Ainsi, pour identifier  $N$  forces, la mesure de  $N$  déplacements est suffisante. Cependant, la méthode nécessite, pour chaque fréquence de calcul, l'inversion d'une matrice qui peut avoir une taille importante si le nombre de nœuds est élevé.

b) Estimation des rotations à l'aide d'une matrice d'observation et des fonctions de forme élémentaires [9, 10] :

Dans le cas où cette condensation est impossible, l'autre méthode de substitution est l'analogue de celle utilisée dans une étude précédente sur les poutres [7], mais appliquée aux éléments de plaques en utilisant des fonctions de forme élémentaires bicubiques [9]. Le maillage de mesures s'appuie sur le maillage de calcul : les éléments de mesures sont définis en ajoutant 2 points de mesures sur chaque arête comme sur la Figure 1.



**Figure 1 - Schéma de l'élément de mesures type basé sur l'ajout de points de mesures de translation à partir d'un élément de plaque mince en flexion.**

La méthode permet d'assembler au niveau du maillage complet une matrice  $\mathbf{P}$ , inverse de la matrice d'observation [10], telle que :

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \mathbf{V}', \quad (3)$$

où  $\mathbf{V}$  est le vecteur des DDLs de calcul contenant translations ainsi que rotations et  $\mathbf{V}'$  est le vecteur des translations mesurées.

Ainsi, avec (3), il devient possible d'estimer les rotations comprises dans  $\mathbf{V}$  à l'aide de simples mesures de translations introduites dans  $\mathbf{V}'$  et du modèle éléments finis. En notant  $\mathbf{L}^P = \mathbf{L}\mathbf{P}$  le nouvel opérateur éléments finis, l'équation (1) devient :

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}^P \mathbf{V}' = \mathbf{L}\mathbf{P}\mathbf{V}'. \quad (4)$$

Cette dernière méthode présente l'avantage de ne pas introduire de niveau d'approximation supplémentaire et de ne pas nécessiter d'inversion de matrices de taille importante. Cependant le nombre de points à mesurer reste élevé puisque chaque rotation est remplacée par un point de mesure de translation.

### 2.3 Réduction du nombre de DDLs par réduction de Craig-Bampton

Comme dans la première partie, une partie de la structure complète est d'abord extraite. Mais la sous-structure est désormais considérée comme un super-élément dont une partition des DDLs est réalisée comme suit :

- les  $N_b$  DDLs d'interface (translations et rotations) sont regroupés dans l'ensemble  $\underline{b}$  et indicés  $b$ ,
- les  $N_i$  DDLs intérieurs ou complémentaires (translations et rotations) sont regroupés dans l'ensemble  $\underline{i}$  et indicés  $i$ .

La condensation de type Craig-Bampton consiste à trouver une base de représentation des DDLs de  $\underline{b} \cup \underline{i}$  [8] :

- la première partie de cette base est formée des DDLs de  $\underline{b}$ . Elle utilise donc les modes contraints pour relier les DDLs de  $\underline{i}$  à ceux de  $\underline{b}$  et est analogue à la condensation statique (de Guyan) par construction [8],
- cette base peut être complétée par les DDLs modaux correspondants aux  $N_\Phi$  modes internes du super-élément à interface encastrée (vecteurs propres notés  $\phi_i^{se}$ ). Ils sont regroupés dans un ensemble noté  $\underline{\Phi}$  [8].

La réduction est appliquée au super-élément et en écrivant  $\mathbf{T}^{se}$  la matrice de projection dans cette nouvelle base, on peut exprimer les DDLs de  $\underline{b} \cup \underline{i}$  en fonction de  $\underline{b} \cup \underline{\Phi}$  comme suit [8] :

$$\begin{cases} \mathbf{T}^{se} = \begin{bmatrix} \mathbf{Id}_{bb} & 0 \\ -\mathbf{K}_{ii}^{se-1} \mathbf{K}_{bi}^{se} & [\phi_{N_\Phi}^{se}] \end{bmatrix} \\ \begin{cases} \mathbf{V}_b = \mathbf{V}_b^{se} \\ \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_i^{se} \end{cases} = \mathbf{T}^{se} \begin{cases} \mathbf{V}_b^{se} \\ \mathbf{V}_\Phi^{se} \end{cases}, \end{cases} \quad (5)$$

où la notation *se* signifie que les quantités sont relatives au super-élément et  $\mathbf{Id}$  est la matrice identité.

Dans (5),  $\underline{\Phi}$  peut être tronqué à  $N_\Phi < N_i$  vecteurs, on parle alors de réduction de modèle ce qui conduit à une approximation.

Pour la suite, la matrice de passage  $\mathbf{T}^{se}$  peut être formellement divisée en différents blocs de manière à faire apparaître les différents groupes de DDLs :

$$\mathbf{T}^{se} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{bb}^{se} & \mathbf{T}_{b\Phi}^{se} = 0 \\ \mathbf{T}_{ib}^{se} & \mathbf{T}_{i\Phi}^{se} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Par ailleurs, à partir de l'opérateur éléments finis  $\mathbf{L}$  obtenu en appliquant (1) à la structure complète libre-libre, il est possible d'exprimer les efforts extérieurs à l'interface et dans le super-élément comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{bb_0} & \mathbf{L}_{bb} & \mathbf{L}_{bi} \\ 0 & \mathbf{L}_{ib} & \mathbf{L}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{b_0} \\ \mathbf{V}_b \\ \mathbf{V}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_b \\ \mathbf{F}_i \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

avec  $\underline{b_0}$  l'ensemble des DDLs (translation et rotations) à la fois hors du super-élément et appartenant aux éléments possédant également des DDLs dans  $\underline{b}$ . L'ajout des DDLs de  $\underline{b_0}$  permet de ne pas faire apparaître les efforts de couplage avec le reste de la plaque à l'interface.

En injectant l'approximation (5) dans (7) et en se posant comme hypothèse l'absence d'efforts extérieurs en certains lieux, ce système se développe en deux approches :

- **Variante 1** : La mesure est réalisable aux points d'identification d'efforts correspondants aux DDLs de  $\underline{b}$  et il n'y a pas d'efforts sur les DDLs complémentaires de  $\underline{i}$  ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_{bb_0} \mathbf{V}_{b_0} + \mathbf{L}\mathbf{T}_{bb} \mathbf{V}_b + \mathbf{L}\mathbf{T}_{b\Phi} \mathbf{V}_\Phi = \mathbf{F}_b \\ 0 + \mathbf{L}\mathbf{T}_{ib} \mathbf{V}_b + \mathbf{L}\mathbf{T}_{i\Phi} \mathbf{V}_\Phi = \mathbf{F}_i = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{bb_0} & \mathbf{L}\mathbf{T}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{T}_{b\Phi} \mathbf{L}\mathbf{T}_{i\Phi}^{-1} \mathbf{L}\mathbf{T}_{ib} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{b_0} \\ \mathbf{V}_b \end{Bmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{T}_{bb} = \mathbf{L}_{bb} \mathbf{T}_{bb}^{se} + \mathbf{L}_{bi} \mathbf{T}_{ib}^{se} \\ \mathbf{L}\mathbf{T}_{ib} = \mathbf{L}_{ib} \mathbf{T}_{bb}^{se} + \mathbf{L}_{ii} \mathbf{T}_{ib}^{se} \\ \mathbf{L}\mathbf{T}_{b\Phi} = \mathbf{L}_{bi} \mathbf{T}_{i\Phi}^{se} \\ \mathbf{L}\mathbf{T}_{i\Phi} = \mathbf{L}_{ii} \mathbf{T}_{i\Phi}^{se} \end{cases} \quad (9)$$

- **Variante 2** : Il n'est pas possible de mesurer aux points d'identification d'efforts cependant il est possible de mesurer en des lieux où il n'y a pas d'efforts extérieurs correspondants aux DDLs de  $\underline{b}$ . La recherche d'efforts sera alors menée sur les DDLs de  $\underline{i}$  comme suit :

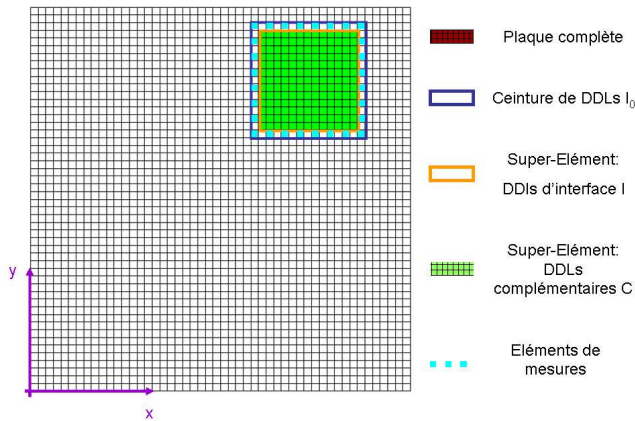
$$\begin{cases} \mathbf{L}_{bb_0} \mathbf{V}_{b_0} + \mathbf{L}\mathbf{T}_{bb} \mathbf{V}_b + \mathbf{L}\mathbf{T}_{b\Phi} \mathbf{V}_\Phi = \mathbf{F}_b = 0 \\ 0 + \mathbf{L}\mathbf{T}_{ib} \mathbf{V}_b + \mathbf{L}\mathbf{T}_{i\Phi} \mathbf{V}_\Phi = \mathbf{F}_i \end{cases} \Rightarrow \mathbf{F}_i = \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{L}\mathbf{T}_{i\Phi} \mathbf{L}\mathbf{T}_{b\Phi}^{-1} \mathbf{L}\mathbf{T}_{bb_0} & \mathbf{L}\mathbf{T}_{ib} - \mathbf{L}\mathbf{T}_{i\Phi} \mathbf{L}\mathbf{T}_{b\Phi}^{-1} \mathbf{L}\mathbf{T}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{b_0} \\ \mathbf{V}_b \end{Bmatrix}.$$

Dans les deux cas, les efforts à identifier sont exprimés en fonctions des DDLs de  $\underline{b_0} \cup \underline{b}$ . Ces derniers comportant des rotations, afin de ne pas trop pénaliser la qualité des données d'entrées et de ne pas alourdir les calculs, celles-ci seront estimées avec la méthode de la matrice d'observation présentée précédemment :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{b_0} \\ \mathbf{V}_b \end{Bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{V}'. \quad (11)$$

Au final, un maillage conforme à la Figure 2 est utilisé.



**Figure 2 - Schéma du maillage utilisé pour la méthode avec réduction Craig-Bampton.**

Enfin, les expressions (8) et (10) contiennent des inversions de matrices : lorsque celles-ci sont mal conditionnées et/ou rectangulaires, la pseudo-inverse est utilisée. Le choix du nombre de modes dans  $\underline{\Phi}$  sera fait de manière à optimiser le conditionnement de ces matrices.

En injectant l'équation (11) dans (8) et (10), les deux formulations finales des deux variantes sont :

Mesures à l'interface et sur la ceinture – Identification Efforts à l'interface – Efforts intérieurs supposés nuls
$\mathbf{F}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{bb_0} & \mathbf{L}\mathbf{T}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{T}_{b\Phi}\mathbf{L}\mathbf{T}_{i\Phi}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{T}_{ib} \end{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{V}', \quad (12)$ $\Rightarrow \mathbf{F}_b = \mathbf{L}_b^T \mathbf{P}\mathbf{V}'.$
Mesures à l'interface et sur la ceinture – Identification Efforts intérieurs – Efforts à l'interface supposés nuls
$\mathbf{F}_i =$ $\begin{bmatrix} -\mathbf{L}\mathbf{T}_{i\Phi}\mathbf{L}\mathbf{T}_{b\Phi}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{T}_{bb_0} & \mathbf{L}\mathbf{T}_{ib} - \mathbf{L}\mathbf{T}_{i\Phi}\mathbf{L}\mathbf{T}_{b\Phi}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{T}_{bb} \end{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{V}', \quad (13)$ $\Rightarrow \mathbf{F}_i = \mathbf{L}_i^T \mathbf{P}\mathbf{V}'.$

## 2.4 Régularisation

Comme déjà énoncé précédemment, la technique est instable devant le bruit présent dans les mesures de déplacements. Il est donc nécessaire de développer une méthode de régularisation pour assurer sa robustesse.

Comme dans le cas des poutres, une méthode de Tikhonov est proposée [4, 7, 12]. Sans être développée plus en avant, elle consiste à minimiser la quantité  $\|\mathbf{L}^c \mathbf{F}^{c\text{tikh}} - \mathbf{V}^c\| + \beta^2 \|\mathbf{F}^{c\text{tikh}}\|$  en définissant le paramètre  $\beta$  pour obtenir la solution régularisée  $\mathbf{F}^{c\text{tikh}}$  à partir des mesures  $\mathbf{V}^c$  et de l'opérateur condensé  $\mathbf{L}^c$ .

La méthode nécessite deux inversions :

- une première inversion de l'opérateur qui peut être effectuée par une simple inversion dans le cas où la matrice est carrée et bien conditionnée ou par une pseudo-inverse à l'aide d'une SVD sans troncature dans le cas général,
- une seconde inversion, de  $\mathbf{L}^{c-1}$ , avec régularisation cette fois.

La détermination du paramètre  $\beta$  repose dans cette étude sur le principe de la courbe en L consistant à tracer la norme de la solution  $\|\mathbf{F}^{c\text{tikh}}\|$  en fonction du résidu  $\|\mathbf{L}^{c-1} \mathbf{F}^{c\text{tikh}} - \mathbf{V}^c\|$  pour différentes valeurs de  $\beta$ , avec  $\|\cdot\|$  la

norme 2 vectorielle [4, 7, 12, 13]. On choisit alors la meilleure valeur de  $\beta$  correspondant au point d'inflexion de cette courbe en L.

## 3 Validation numérique

### 3.1 Descriptif de l'expérience numérique

Afin de valider les méthodes décrites à la section précédente, une étude de cas a été réalisée sur une plaque carrée, en acier et de dimensions  $(a = 1m) \times (b = 1m)$ . Ses autres caractéristiques sont données dans la Table 1.

$E$ (GPa)	$\rho$ ( $kg/m^3$ )	$\eta$ (%)	$h$ (mm)
210	7800	0.1%	1

**Table 1 : Caractéristiques du matériau de la plaque simulée.  $E$  est le module d'Young,  $\rho$  la densité,  $\eta$  le facteur de pertes et  $h$  l'épaisseur de la plaque.**

L'excitation est modélisée par un effort ponctuel unitaire harmonique aux coordonnées  $x = 0.72m$  et  $y = 0.86m$  et de fréquence 190 Hz (le premier mode de la plaque se situe à environ 2.5 Hz). Les conditions aux limites sont choisies comme suit :

- Appuyée-Appuyée à ses extrémités  $x = 0$  et  $x = a$ ,
- Libre-Libre à ses extrémités  $y = 0$  et  $y = b$ .

La validation de la méthode d'identification d'efforts nécessite de simuler un champ de déplacements  $\forall (x,y) \in [0;a] \times [0;b], w(x,y)$ . Pour cela, on utilise un modèle analytique de décomposition semi-modale en s'appuyant sur une méthode d'ondes forcées dans la direction  $\vec{y}$  et sur la décomposition modale du schéma appuyé-appuyé dans la direction  $\vec{x}$  [14, 15].

Ces données sont directement utilisées avec la méthode incluant une réduction Craig-Bampton non régularisée.

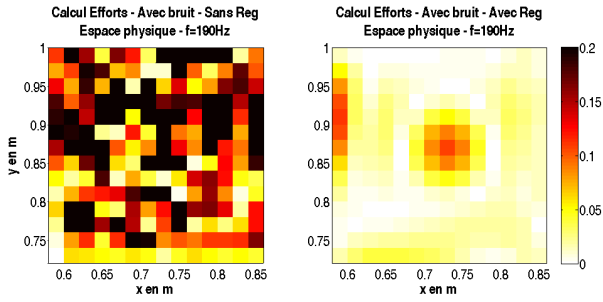
Cependant, pour montrer l'efficacité de la régularisation couplée à la méthode générale sans réduction de Craig-Bampton, ces valeurs sont bruitées à l'aide de deux variables aléatoires Gaussiennes  $\Delta w$  et  $\Delta \phi$  permettant d'introduire un bruit multiplicatif en amplitude et additif en phase [1]. Les moyennes de chacune des deux variables aléatoires sont choisies égales à  $m_{\Delta w} = 1$  et  $m_{\Delta \phi} = 0$ , leurs écarts-types sont définis en fonction d'un pourcentage  $p = 1\%$  de sorte que le bruitage représente 1% du module de la valeur complexe à bruite.

### 3.2 Résultats sans réduction Craig-Bampton

Les résultats sont présentés avec une sous-structure rectangulaire s'étendant du point  $[0.58;0.72]$  au point  $[0.86;1]$ . Le maillage est régulier avec une taille d'éléments constante de  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_e = 0.02$ .

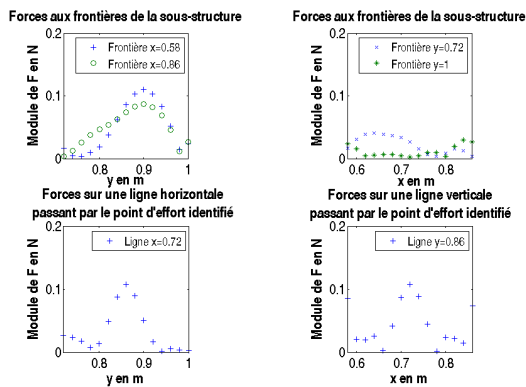
Dans un premier temps, l'efficacité de la régularisation de Tikhonov, et sa nécessité, sont montrées sur la Figure 3.





**Figure 3 - Forces reconstruites sans réduction Craig-Bampton à partir de déplacements simulés bruités. Résultats régularisés par Tikhonov (colonne de droite) comparés aux résultats non régularisés (colonne de gauche).**

Après régularisation, l'effort extérieur est clairement identifiable. Il est clair aussi que la répartition d'effort est lissée après régularisation. Les forces identifiant le couplage avec le reste de la plaque apparaissent en bordure du domaine de la sous-structure libre-libre de même que les forces aux limites de la plaque. Plus en détail, les résultats aux 4 frontières ainsi que l'évolution de la force extérieure identifiée à l'intérieur du domaine sont présentés sur les coupes correspondantes dans la Figure 4. Enfin l'effort reconstitué quasiment nul correspond bien au bord libre en  $y = 1$ , comme attendu.



**Figure 4 Forces reconstruites sans réduction Craig-Bampton à partir de données de déplacements simulés bruités.**

### 3.3 Résultats avec condensation Craig-Bampton

a) Identification des efforts extérieurs à la plaque, à la frontière du super-élément :

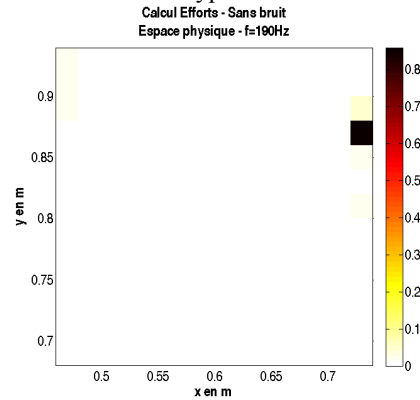
Il s'agit d'identifier les efforts aux points de mesures à l'interface. On utilise un super-élément s'étendant du point  $[0.46;0.68]$  au point  $[0.72;0.94]$  de manière à ce que l'effort coïncide avec un nœud d'interface. Le maillage est régulier avec  $\Delta_e = 0.02$ .

Les nombres de DDLs utilisés sont indiqués dans la Table 2.

Nombres de DDLs par sous ensemble			
$I_0$	$I$	$C$	$\Phi$
180	156	432	216

**Table 2 : Nombre de DDLs utilisés pour l'identification des efforts extérieurs à la plaque à l'interface du super-élément.**

Les résultats de l'effort reconstitué sans bruit sont donnés Figure 5. L'effort situé à l'interface est clairement identifié avec un faible effet de troncature modal, les efforts nuls intérieurs résultent de l'hypothèse de calcul.



**Figure 5 - Forces reconstruites à l'interface du super-élément avec réduction Craig-Bampton à partir de données de déplacements simulés non bruités.**

b) Identification des efforts extérieurs à la plaque, au sein du super-élément :

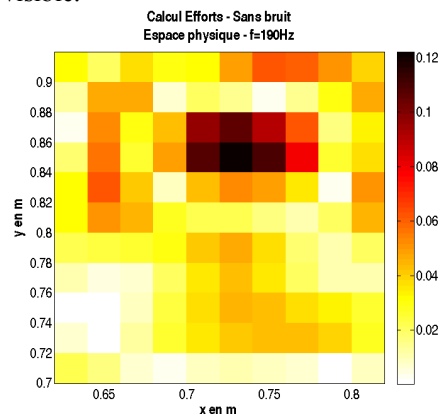
Il s'agit, à partir des mesures à l'interface, de reconstituer les efforts à l'intérieur du super-élément. Celui-ci est choisi comme s'étendant du point  $[0.60;0.68]$  au point  $[0.86;0.94]$ .

Les nombres de DDLs sont résumés dans la Table 3.

Nombres de DDLs par sous ensemble			
$I_0$	$I$	$C$	$\Phi$
180	156	432	19

**Table 3 : Nombre de DDLs utilisés pour l'identification des efforts extérieurs à la plaque au sein du super-élément.**

Les résultats spatiaux de l'effort reconstitué sans bruit sont donnés en Figure 6. L'effort est identifié et l'effet de la troncature de la base modale du super-élément est également visible.



**Figure 6 - Forces reconstruites à l'intérieur du super-élément avec réduction Craig-Bampton à partir de données de déplacements simulés non bruités.**

## 4 Conclusion

L'objectif de la méthode développée dans cet article est de remonter aux sources vibratoires à partir de données de déplacements obtenues sur une structure. C'est l'idée même de la méthode RIFF mais on cherche ici à l'adapter aux

structures complexes par l'utilisation d'un modèle éléments finis.

La démarche présentée est basée en synthèse sur :

- l'utilisation d'un opérateur éléments finis standard,
- la substitution des DDLs de rotations par des DDLs de translations (par condensation dynamique ou estimation à l'aide des fonctions de forme élémentaires),
- la possibilité d'une réduction selon la méthode de Craig-Bampton dans un double objectif de limiter le nombre de DDLs à identifier expérimentalement et/ou de pouvoir accéder à des points non accessibles,
- une régularisation développée pour la méthode sans réduction Craig-Bampton.

Parmi les perspectives actuelles, la première sera la validation expérimentale de la méthode. Sur poutre, celle-ci a été réalisée et présentée sans réduction Craig-Bampton [7]. Il reste donc à valider sur structures 2D planes et courbes dans un premier temps puis sur géométrie complexe dans un contexte industriel dans un deuxième temps. Ceci nécessitera d'étendre la régularisation aux cas où la réduction Craig-Bampton est employée. L'effet de troncature modale de cette réduction, qui peut amener un effet régularisant par projection sur la base modale tronquée, sera tout particulièrement étudié.

Enfin, le couplage à l'holographie pourra être envisagé. Tout comme dans l'article [2], cette association peut en effet être un outil particulièrement intéressant pour une analyse plus approfondie des champs vibratoires identifiés par rétropropagation acoustique tels que ceux obtenus en holographie acoustique, par BEM inverse, etc.

## Remerciements

Cette étude est financée par le Fond Unique Interministériel MACOVAM (MAîtrise du Comportement Vibratoire des Auxiliaires Moteur) dans le cadre du pôle de compétitivité LUTB.

## Références

- [1] Pézerat, C., Méthode d'identification des efforts appliqués sur une structure vibrante, par résolution et régularisation du problème inverse, thèse INSA de Lyon, n° d'ordre 96 ISAL 0109, 1996, 138 p.
- [2] Pézerat C., Leclère Q., Totaro N., Pachebat M., Identification of vibration excitations from acoustic measurements using near field acoustic holography and the force analysis technique, JSV 2009, 326, pp. 540-556
- [3] Pézerat, C. & Guyader, J.-L., Force Analysis Technique: Reconstruction of Force Distribution on Plates, Acta Acustica 2000, Vol. 86, pp. 322-332
- [4] Busby, H.-R. & Trujillo, D.-M., Optimal regularization of an inverse dynamics problem, Computers & structures, 1997, Vol. 63(2), pp. 243-248
- [5] Ibrahim, S., Fregolent, A. & Sestieri, A., Structural force identification at unmeasured locations, IMAC 14 1996, Dearborn (Michigan)
- [6] Corus, M. & Balmès, E., A priori verification of local FE model based on force identification, ISMA 2004, Leuven, Belgium
- [7] Renzi, C. & Pézerat, C., Identification of dynamic excitations on a structure using displacement measurements injected in a finite element model, NOVEM 2009, Oxford, UK
- [8] Imbert, J.-F., Analyse des structures par éléments finis, CEPADUES ed., 1979, 480 p.
- [9] Zienkiewicz, O.-C. & Taylor, R.-L., The Finite Element Method, vol2, 2000 5<sup>th</sup> ed. Elsevier, 495 p.
- [10] Balmès, E., Sensors, degrees of freedom, and generalized modeshape expansion methods, IMAC 1999, S.E.M. - Society for Experimental Mechanics, Inc, Bethel, Connecticut, U.S.A.
- [11] Gallagher R., Introduction aux éléments finis, éd. Pluralis., 1976, 433 p.
- [12] Leclère, Q., Etude et développement de la mesure indirecte d'efforts. Application à l'identification de sources internes d'un moteur Diesel, thèse INSA de Lyon, n° d'ordre 83 ISAL 0085, 2003, 204 p.
- [13] Hansen, P. & O'Leary, D., The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems, SIAM Journal of Scientific Computing 1993, v.14, pp. 1487-1503
- [14] Guyader, J.-L., Vibrations des milieux continus, Lavoisier, 2002, 445 p.
- [15] Rébillard Eric, Vibro-acoustique des réseaux de plaques : modélisation, hypersensibilité et populations de structures, thèse INSA de Lyon, n° d'ordre 95 ISAL 0085, 1995, 184 p.

### 3.3 Synthèse

---

Le chapitre 3 a permis de mettre en oeuvre la méthode dans le cas des plaques en flexion, et ainsi de la confronter à des modèles Eléments Finis possédant un nombre élevé de ddls. La question des ddls non mesurables directement, telles que les rotations, s'est reposée. Le choix de leur estimation par le biais des fonctions d'interpolation sur le support élémentaire a été soulevé, cependant, le nombre de mesures à réaliser devient trop pénalisant pour que la méthode conserve un intérêt pratique, même pour de simples plaques et pour des sous-domaines d'études de petite taille. Par ailleurs, on peut se poser la question de l'intérêt d'estimer des ddls reliés au premier ordre à des efforts que l'on ne peut pas identifier dans tous les cas d'intérêts pratiques (tels les moments). C'est ainsi qu'il a été proposé d'utiliser la technique de condensation dynamique pour substituer les ddls non mesurables.

Les deux techniques d'évaluation de ddls non mesurables ont été confrontées dans la communication faisant l'objet de la sous-section 3.2. L'avantage de la condensation dynamique est clairement de diminuer le nombre de ddls à mesurer pour appliquer la méthode et identifier les forces. Cependant, la condensation dynamique repose sur une technique d'élimination de ddls nécessitant l'inversion de matrices qui peuvent être de grandes dimensions.

Afin de limiter le nombre de ddls intervenant dans la méthode, on a proposé d'appliquer, optionnellement, la technique de réduction de Craig-Bampton. Elle a été implémentée à l'échelle de super-éléments nécessitant une sous-structuration du sous-domaine considéré, lui même relatif à une certaine structure vibrante étudiée. On obtient ainsi un modèle réduit sur lequel il est possible d'appliquer la condensation dynamique pour s'affranchir des ddls non mesurables directement. Puis le problème réduit et condensé, peut être régularisé.

Par ailleurs, la piste de l'identification d'efforts en des noeuds non mesurés a été ouverte, toujours à l'aide de la projection du modèle d'un super-élément. Il est alors possible d'accéder aux efforts externes, appliqués en des noeuds intérieurs au super-élément, à partir de mesures à l'interface du super-élément. L'approche complémentaire est d'identifier les efforts à l'interface en supposant les efforts nuls à l'intérieur du super-élément. Remarquons que cette démarche est indépendante des efforts en dehors de la zone considérée par le super-élément car elle bénéficie naturellement de la troncature des limites définies en 2.1.

Des validations numériques et expérimentales ont été menées sur l'ensemble des méthodes envisagées. Cependant, seule la méthode condensée et/ou réduite avec identification dans les zones mesurées est validée expérimentalement en présence de bruit. En effet, nous n'avons pour l'instant pas trouvé de manière efficace de régulariser le problème d'identification de forces en des points non mesurés :

- une piste à creuser serait d'utiliser un modèle grossier pour ne pas avoir de problèmes d'amplification de forces et donc de nécessité de régulariser, dans la même idée que Leclère et Pézerat dans [57], article à paraître. Cependant, ceci reste à explorer étant

donné qu'il faudrait s'appuyer sur un modèle qui représenterait mal la réalité. D'après notre expérience, il souffrirait alors du défaut de faire apparaître des efforts correcteurs assurant la cohérence du modèle vis-à-vis des mesures réalisées. On imagine que la piste la plus probable serait de :

1. partir d'un modèle suffisamment fin pour respecter un critère de 6 points par longueur d'ondes,
2. effectuer la réduction Craig-Bampton en conservant suffisamment de modes pour bien décrire le comportement du super-élément,
3. effectuer la condensation dynamique de l'interface du super-élément afin de s'affranchir des ddl de rotation non accessibles directement et de prendre en compte un maillage de mesures en  $\frac{\lambda}{2}$ ,
4. utiliser à partir de ce modèle la projection définie par la base de Craig-Bampton pour accéder aux efforts à l'intérieur du super-élément.

Ceci nécessiterait la définition d'un maillage de mesures adaptatif.

- on peut également se rapprocher des techniques de Component Mode Synthesis [73, 39] exploitées par Corus et Balmès [36, 38], mais en considérant un modèle modal à partir du modèle physique libre et local.

La méthode réduite avec identification des forces aux zones mesurées nécessite de pouvoir faire l'hypothèse d'efforts nuls dans les zones réduites. Ceci peut apparaître comme contraignant, mais ce n'est pas forcément le cas car les zones de structure potentiellement excitées sont souvent connues en pratique. En effet, elle permet une approche similaire à la méthode RIFF [1] si l'on considère la zone non réduite comme une mire que l'on déplace jusqu'à trouver les efforts excitateurs à l'intérieur de celle-ci. En effet, la présence d'efforts à l'interface suggère que des excitations soient présentes dans la zone réduite, elle donne donc l'information qu'il faut continuer à déplacer la mire pour traquer les sources.

Dans le chapitre suivant traitant d'une technique de déconvolution appliquée à notre méthode, nous chercherons à corriger le lissage introduit par la régularisation sur modèles condensés, réduits par la méthode de Craig-Bampton ou non.



# 4

## Amélioration de la résolution par déconvolution spatiale

La technique d'identification d'efforts utilisant un modèle Eléments Finis a été présentée tout au long des chapitres précédents. Bénéficiant d'une régularisation efficace sur la base de la méthode de Tikhonov, elle a été validée expérimentalement dans différents cas unidimensionnels et bidimensionnels, avec un nombre de ddls à mesurer ou/et à modéliser de plus en plus conséquent. Ainsi, on a vu aux chapitres 2 et 3 que la procédure régularisée était applicable sur un modèle réduit à l'aide de la méthode de Craig-Bampton [6] ainsi qu'en présence de ddls non mesurables estimés soit à l'aide d'interpolations et de mesures supplémentaires, soit à l'aide de la condensation dynamique [5].

Elle permet de localiser les excitations externes appliquées sur les sous-domaines étudiés. Cependant, la régularisation lisse les résultats. L'approche perd donc en résolution spatiale notamment en basses-fréquences. La conséquence est qu'il est difficile de définir les zones de sommation d'efforts pour le calcul de l'amplitude de l'excitation localisée. La présence de plusieurs excitations proches pose également problème. Ceci est d'autant plus vrai que les sous-domaines étudiés sont petits (excitation à identifier proche d'une limite où des efforts de couplage apparaissent).

Afin de corriger l'effet de lissage de la régularisation, une étape de déconvolution spatiale est proposée en post traitement des cartographies d'efforts régularisés.

## 4.1 Déconvolution appliquée aux résultats sur structures 1D (Proposition de publication)

---

Use of a deconvolution algorithm to improve the spatial resolution of the vibration source identification

### Abstract

This paper deals with the improvement of the excitation identification which can be reconstructed by the experimental inverse method known as the Force Analysis Technique. The Force Analysis Technique is based on the injection of measured displacements into the local operator of the structure. In this paper, the choice of a Finite Element modeling was done in order to show the improvement in the most general approach of the technique. A short overview of the Force Analysis Technique is firstly presented, recalling the requirement of the use of a regularisation technique, due to the unstability of the inverse method. Then, the key point of the paper is presented. It relies on a deconvolution post-process, realised by the Richardson-Lucy algorithm. The goal of it is to reduce the spatial smoothing effect induced by the regularisation. An experimental validation is then presented on a suspended beam excited by a shaker. In a first step, the entire beam is considered and the improvement on the ability to locate the excitation is clearly shown. In a second step, the possibility to reduce the spatial domain is shown by the application of the method on a subpart of the beam. A better accuracy is obtained again, particularly in the low frequency domain where the spreading of coupling forces appearing at the boundaries is corrected.

### 4.1.1 Introduction

In the field of acoustics and vibration, the goal of several inverse problems is to identify excitations by indirect means each time the quantity of interest cannot be measured directly. The identification can concern the localisation of sources and/or their characterisation. Lots of research works has be done, among them should be cited structural intensity methods [74, 75], Force Analysis Technique method (or FAT method) [40, 66, 49, 43, 51, 63, 46, 47] and Finitie Element model based methods [32, 33, 36, 38]. In the case of the last two classes of methods, the task is to deal with an inverse problem naturally unstable in the presence of noisy data. The use of regularisation in these inverse approaches leads to a smoothed solution [67, 15], with a lack of spatial resolution. This major setback in the interpretation of spatial cartographies can be corrected by the use of deconvolution algorithm to regain some contrast in the obtained image. Therefore, the main objective of this paper is to couple the FAT method, recently extended to complex structures by the use of a Finite Element Model (FE model) [2, 4, 71], to a deconvolution algorithm in order to correct the smoothing effect induced by regularisation.

In acoustics, this problem of improving spatial resolution has already been studied. The problem was not directly the use of regularisation but the use of arrays which modify the

solution obtained in the convolution process. Brooks developed the DAMAS algorithm to improve interpretations on reconstructed source maps [76]. Pascal [77, 78] tested also several deconvolution algorithms, including the Richardson-Lucy algorithm [79, 80], in order to improve the spatial resolution of beamforming results [81, 82, 83].

In the present case of vibratory sources identification, an analogy with these previous works will be done. But this time, like an experimental instrument (such as telescopes, microscopes, cameras), there is the regularised inverse method which modifies by itself the observation through a convolution process. If someone knows how the instrument impacts the observation, it is then possible to use a deconvolution technique in order to obtain the maximum likelihood deconvolved image [84]. The deconvolution principle is again an inverse problem [85], and the solution must be stabilised by using an iterative constrained algorithm. The common approach is then to add constraints like positiveness. Typically, this is a well-known procedure in astronomy image restoration [86].

The Richardson-Lucy algorithm [79, 80] is a popular method that uses a Bayesian formulation. It conserves energy of the image through iterations and a positiveness constraint is naturally applied to ensure its convergence [87].

The goal of this paper is to test the possibility to use a deconvolution algorithm as a post-process to the Force Analysis Technique. The classical Richardson-Lucy algorithm was particularly chosen, because of its well-known robustness and also because it is a classical and well spread method among image processing scientific community.

#### 4.1.2 Overview of the Force Analysis Technique

The following proposed deconvolution post-processing concerns an extension of the FAT [43]. This method has different developments, but it can be generally described in a two steps procedure :

- step 1 : calculation of the force repartition by the injection of the measured displacements in the operator of the structure,
- step 2 : regularisation.

In the step 1, the displacement field is measured on a given meshgrid. The operator can be obtained by the discretisation of the analytical motion equation (beams [40], plates [43], shells [46, 47]) or by a Finite Element modeling [2, 71]. In this last case, the measurement of rotations can be avoided by the use of a condensed operator [32, 10, 9]. In [3, 4], it was shown how to use a dynamic condensation of rotations in place of the static condensation performed by Busby [32] while in [2, 71] rotations were evaluated using extra displacements measurements and the interpolation provided by the elementary shape functions. Anyway, this first step consists finally in doing a matrix product between the operator of the structure (adapted to the inverse problem) and a vector of complex displacements measured on nodes of the experimental meshgrid :

$$\mathcal{F}^c = \mathbf{L}^c \mathbf{V}^c, \quad (4.1)$$

where  $\mathbf{L}^c$ ,  $\mathcal{F}^c$  and  $\mathbf{V}^c$  are respectively the operator of the structure, the vector of forces and the vector of DOFs condensed at the measured displacements.



Physically, the fact that excitations are seek from their effect defines an inverse problem. This is the case here, even if Equation (4.1) is not inversed and it is interesting to note that this problem is unstable, i.e. is mathematically sensitive to errors in data of vector  $\mathbf{V}^c$ . In practice, the calculation of  $\mathcal{F}^c$  from measured vector  $\mathbf{V}^c$ , including uncertainties in data, gives non usable results.

The goal of the second step consists therefore in reducing this high sensitivity to errors in measurements. As explained in [43], the regularisation can be done by two different but equivalent ways.

The first approach consists in applying a low pass-wavenumber filtering to eliminate errors mainly located in the high wavenumber domain. This filter is generally preceded by a spatial windowing in order to avoid discontinuities at the edges of the measurement area. The second technique is made of two inversions of  $\mathbf{L}^c$  with a classical regularisation, using for example the Singular Value Decomposition or the Tikhonov method [15] applied during the second inversion.

For structures with complex geometries, this second way is the only one possibility, since the wavenumber notion has no sense. Anyway, the consequence of the regularisation is that it has a smoothing spatial effect on results and the location of forces becomes fuzzy. This is particularly true in the low frequency domain, because the optimum parameters of the regularisation (cutoff wavenumber or number of singular values to keep) are linked to the frequency and the smoothing effect is directly related to the natural wavelength of the structure.

The goal of the deconvolution post-processing is to restore as much as possible the spatial accuracy. In the following, the test example is treated on a simple case (a beam), but the most general approach, i.e. the use of a Finite Element modeling and the double inversion regularisation, were used. The Finite Element operator is thereby obtained from the matrix equation of the dynamic behaviour of the structure :

$$(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{V} = \mathbf{L}\mathbf{V} = \mathcal{A}, \quad (4.2)$$

where  $\mathbf{M}$  is the mass matrix,  $\mathbf{K}$  is the dynamic stiffness matrix including damping effects,  $\mathbf{L}$  is the finite element operator of the structure,  $\mathbf{V}$  is the responses vector consisting in nodal displacements and rotations and  $\mathcal{A}$  is the vector of mechanical actions containing nodal forces  $\mathcal{F}$  and moments  $\mathcal{M}$ . The model uses free boundary conditions and is built either on the whole structure or on a local part of it.

$\mathbf{L}$  is then transformed using a dynamic condensation technique in order to avoid rotations and the obtained matrix is noted  $\mathbf{L}^c$ . The regularised operator, noted  $\mathbf{L}^{ctikh}$ , is obtained by a double inversion of  $\mathbf{L}^c$ , the second inversion being regularised by the Tikhonov procedure based on a Singular Value Decomposition [15] :

$$\mathbf{L}^{ctikh} = \mathbf{W}\mathbf{S}_{alt}^{-1}\mathbf{U}^H \text{ where } \mathbf{S}_{alt} = \mathbf{S} + \beta^2\mathbf{S}^{-1}, \quad (4.3)$$

with  $\mathbf{S}$  is the diagonal matrix of the singular values of  $\mathbf{L}^{cinv}$ ,  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{W}$  are unitary matrices that stem from the Singular Value Decomposition :  $\mathbf{L}^{cinv} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{W}^H$ . The suffix *alt* stands for *altered*, meaning that regularisation is applied while  $^H$  denotes the Hermitian transpose.

The optimisation of the regularisation parameter  $\beta$  is done thanks to the L-curve principle [32, 26, 67].

After having correctly tuned this parameter, the resulting forces  $\mathbf{F}^{\text{ctikh}}$  are finally obtained thanks to the following equation :

$$\mathbf{F}^{\text{ctikh}} = \mathbf{L}^{\text{ctikh}} \mathbf{V}^c. \quad (4.4)$$

### 4.1.3 Deconvolution post-processing

In this section, the application of an existing resolution's improvement technique is suggested in the case of the structural force identification. It consists in performing a deconvolution procedure based on the Richardson-Lucy algorithm used in the astronomy field in order to enhance the spatial image resolution [80, 79]. After a brief summary of the usual approach adopted in image processing, the extension to sources identification is proposed.

#### 4.1.3.1 Deconvolution in image processing

An image is a bidimensional signal. When the image is obtained from a measurement apparatus, an operation of convolution, of the real image, by the response of the instrument, is performed. The term of Point Spread Function is used as it characterises the spreading on the image of each original point ("original" meaning "before the convolution").

Let's consider  $x_{ori}(r, s)$  the original image and  $y_{obs}(r, s)$  the observed image. As described in [88], a model of  $y(r, s)$  is given by the following equation :

$$y_{obs}(r, s) = \left( \iint x_{ori}(u, v) h_{PSF}(r - u, s - v) dudv \right) + b_{obs}(r, s), \quad (4.5)$$

where  $h_{PSF}(u, v)$  is linked to the impulse response of the instrument and  $b_{obs}(r, s)$  characterise the noise that affects the process of observation.

The operation of deconvolution will consist in the restoration of the image  $x_{ori}$  from the knowledge of the observed image  $y_{obs}$  and a model of  $h_{PSF}$ , in the presence of noise  $b_{obs}$ . Several approaches exist to solve the deconvolution problem, which is an inverse problem, and the bayesian approach is one of them. The deconvolution problem is an ill-posed problem. In order to reduce the instability of the method, constraints are applied on the solution, the positiveness of data being the standard constraint used. A popular algorithm to solve this problem is the Richardson-Lucy algorithm, which applies the positiveness constraint smoothly at each iteration. This algorithm was already succesfully applied for deconvolving array response from the cartography of acoustical sources in the case of beamforming techniques [77, 78]. It proved to be robust and reliable.

In the following, the identification inverse problem will be rewritten to make appear the convolution of the original sources by the regularised operator. In the following, we will check wether the algorithm behaves well, even if the positvness constraint is a strong hypothesis.

#### 4.1.3.2 Application to the problem of sources identification

In the vibroacoustic domain, this idea was already explored by J.-C. Pascal [77] for the improvement of acoustic beamforming techniques, where the most robust algorithm appears to be the Richardson-Lucy algorithm. This is the reason why it was chosen in the following development. As several algorithms, the Richardson-Lucy algorithm adds a positiveness constraint which proved to be efficient in such ill-posed inverse problem [86]. So, this algorithm is adapted to the inversion of a linear system linking squared quantities. Equation (4.6) gives the relationship between  $\mathbf{F}^{\text{ctikh}}$ , the forces obtained in the presence of regularisation, and  $\mathbf{V}^c$ , the actual displacements field measured, independant of the regularisation process :

$$\mathbf{V}^c = \mathbf{L}^{\text{ctikh}^{-1}} \mathbf{F}^{\text{ctikh}}. \quad (4.6)$$

Equation (4.7) gives the relationship between  $\mathbf{F}^d$ , the forces that would be obtained if it were possible to identify them without regularisation, and  $\mathbf{V}^c$  :

$$\mathbf{V}^c = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{F}^d. \quad (4.7)$$

Equalling Equation (4.6) multiplied by its hermitian transpose and Equation (4.7) multiplied by its hermitian transpose, it is possible to form a linear system linking  $\mathbf{F}^d$  and  $\mathbf{F}^{\text{ctikh}}$  :

$$|F_m^{\text{ctikh}}|^2 = \sum_{n=1}^{Nd} H_{mn} |F_n^d|^2, \quad (4.8)$$

where  $H_{mn}$  are the components of a transformation matrix  $\mathbf{H}$ , corresponding to the regularisation procedure and modeling the transformation between the deconvolved force sources  $|\mathbf{F}^d|^2$  and the identified ones  $|\mathbf{F}^{\text{ctikh}}|^2$ . In an analogy to image processing, the relationship between smoothed forces and theoretical ones (or deconvolved) is sought. The regularised inverse problem is analogous to a filtering procedure, therefore, it can be seen as a convolution in the spatial domain. Matrix  $\mathbf{H}$  will be computed using impulse responses to show that there is an analogy with the PSF concept, used in image processing.

Using  $\mathbf{L}^{\text{ctikh}}$  defined in Equation (4.3), the relationship between the  $m^{\text{th}}$  component  $|F_m^{\text{ctikh}}|^2$  and the vibratory measurements  $\mathbf{V}^c$  can be written as :

$$|F_m^{\text{ctikh}}|^2 = \left\{ L^{\text{ctikh}(m)} \right\}^t \mathbf{V}^c \mathbf{V}^{cH} \left( \left\{ L^{\text{ctikh}(m)} \right\}^t \right)^H, \quad (4.9)$$

where  $\left\{ L^{\text{ctikh}(m)} \right\}^t$  is the  $m^{\text{th}}$  row of matrix  $\mathbf{L}^{\text{ctikh}}$ .

Noting  $\{h_n\}$  the vector of transfer functions between one force  $F_n^d$  and the displacements  $\mathbf{V}^c$ , the superposition principle implies that :

$$\mathbf{V}^c \mathbf{V}^{cH} = \sum_{n=1}^N |F_n^d|^2 \{h_n\} \{h_n\}^H. \quad (4.10)$$

Substituting Equation (4.10) in Equation (4.9), the regularised forces can be related to deconvolved forces :

$$|F_m^{tijk}|^2 = \sum_{n=1}^N \left\{ L^{ctikh^{(m)}} \right\}^t \{h_n\} \{h_n\}^H \left( \left\{ L^{ctikh^{(m)}} \right\}^t \right)^H |F_n^d|^2. \quad (4.11)$$

Finally, the matrix terms  $H_{mn}$  used in (4.8) can be extracted from (4.11) :

$$H_{mn} = \left\{ L^{ctikh^m} \right\}^t \{h_n\} \{h_n\}^H \left( \left\{ L^{ctikh^m} \right\}^t \right)^H. \quad (4.12)$$

Equation (4.8) can also be written as  $|\mathbf{F}^d|^2 = \mathbf{H}^{-1} |\mathbf{F}^{ctikh}|^2$ , the solution being obtained by iterative inversion algorithms [79, 80, 77].

The Richardson-Lucy iterative algorithm taken from [77] is shown in figure 4.1. The convergence is considered as achieved when the relative difference between two consecutive deconvolved vectors is lower than a given threshold  $\alpha_r$  which is manually tuned. When defining the force repartitions at the two consecutive steps  $i$  and  $i - 1$ , the relative difference is

evaluated with  $test = \frac{\left( \left\| \{\mathbf{F}^d\}^{(i)} \right\|_2 \right)^2 - \left( \left\| \{\mathbf{F}^d\}^{(i-1)} \right\|_2 \right)^2}{\left( \left\| \{\mathbf{F}^d\}^{(i)} \right\|_2 \right)^2}$  where  $\|\cdot\|_2$  denotes the euclidian norm

of a vector. When the iterations end, the  $i$ th step is saved in vector  $|\mathbf{F}^d|^2$ .

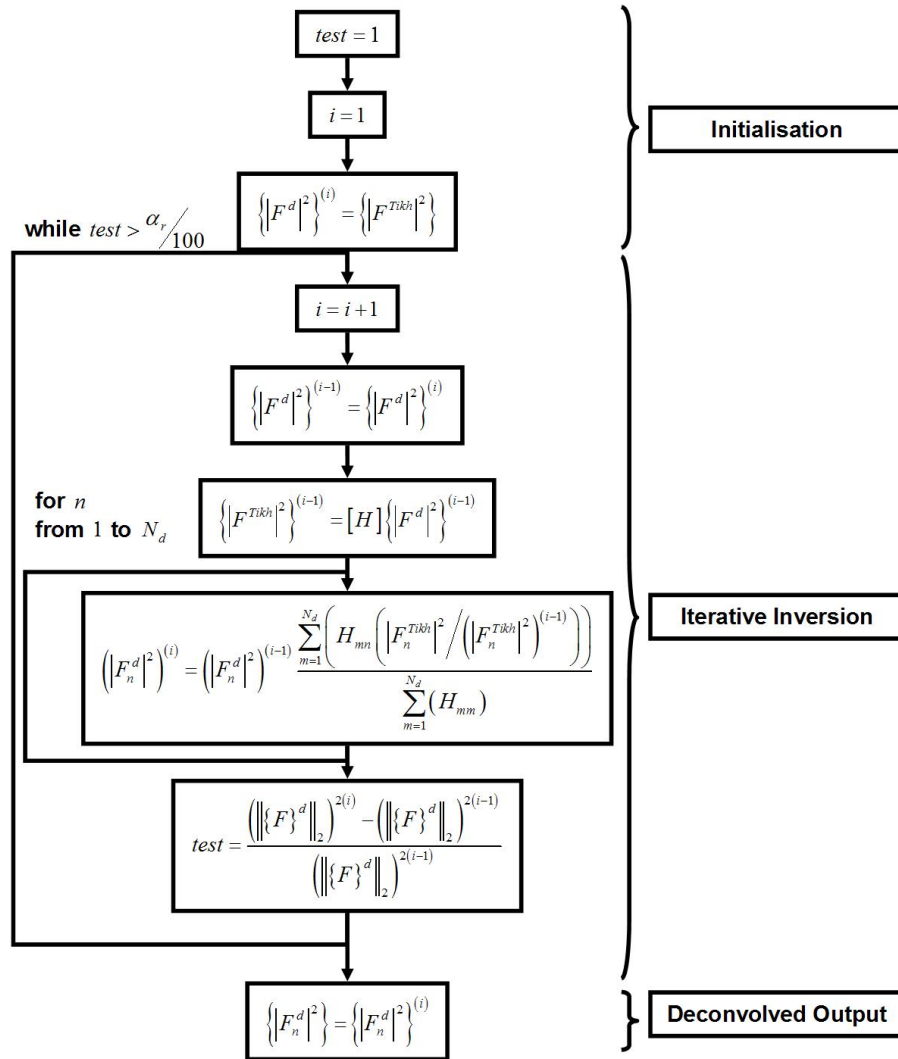


FIGURE 4.1 – Richardson-Lucy deconvolution algorithm,  $N_d$  is the number of forces present the regularised forces results  $|\mathbf{F}^{tikh}|^2$  on which the algorithm is applied.

## 4.1.4 Experimental validation

### 4.1.4.1 Experimental setup

In order to validate the proposed method, the vibration levels of a suspended steel beam were measured by using a scanning laser vibrometer. The excitation was applied by a shaker, driven by a white noise covering the studied frequency range of  $[0 ; 3200\text{Hz}]$ .

Figure 4.2 shows a photograph and a scheme of this experiment and Table 4.1 gives the characteristics of the studied structure.

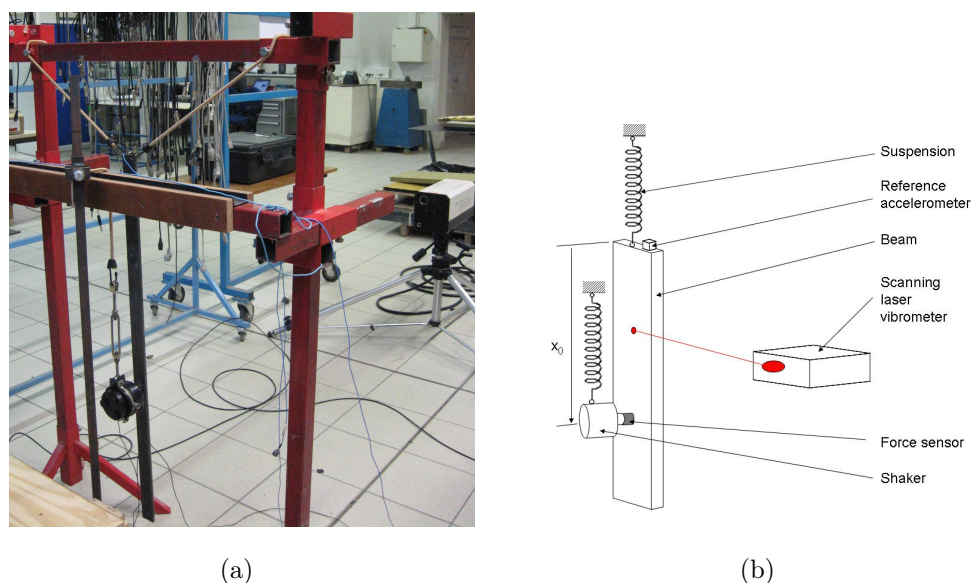


FIGURE 4.2 – Photography and scheme of the experimental validation setup.

Length $L$ (m)	Thickness $h$ (cm)	Width $b$ (cm)	Mass density $\rho$ ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	Young Modulus $E$ ( $\text{N}/\text{m}^2$ )	Structural damping $\eta$
1	1.02	4	7800	$2e11$	$1e^{-4}$

TABLE 4.1 – Material and geometry characteristics of the experimental beam.

### 4.1.4.2 FE model used

The experimental mesh is defined by fixed size elements of length  $0.02\text{m}$ . The FE model restricted to the flexural motion of the complete beam is constructed in order to obtain the operator  $[K] - \omega^2[M]$ , composed of 104 DOFs (52 translations and 52 rotations). This operator is a band matrix, its shape is plotted in Figure 4.3(a) for the frequency

400 Hz. Then, a condensation is done in order to eliminate rotations DOFs. The resulting matrix contains only 52 translations and is shown in Figure 4.3(b). This is also a band matrix, slightly coarser than the first one. Finally, the regularisation is applied by the double inversion. The obtained matrix is plotted in Figure 4.3(c). It appears to be less sparse, due to the smoothing effect of the regularisation.

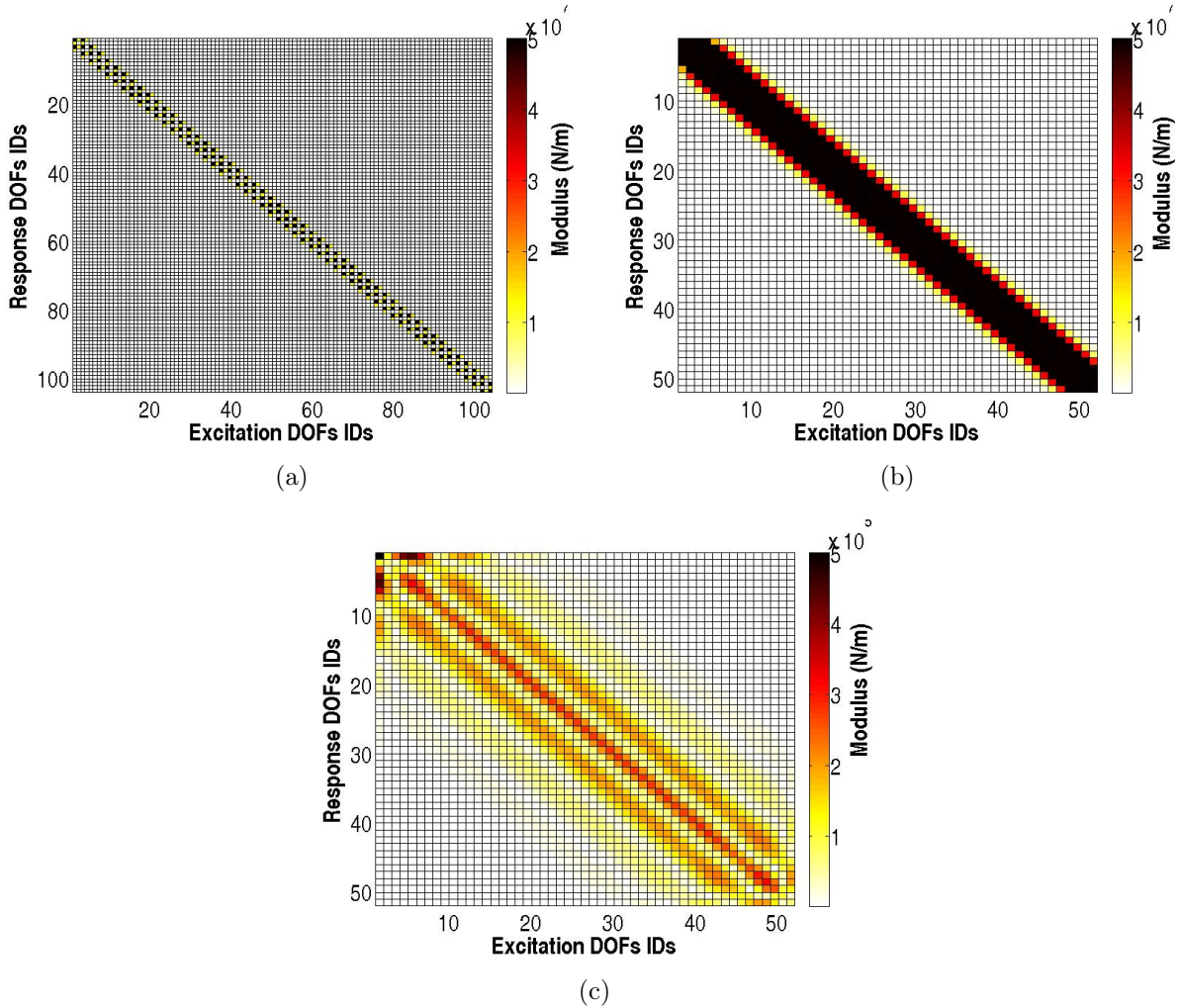


FIGURE 4.3 – Comparison of the shape of the operator, at the three steps of the inverse method and for the frequency of 400 Hz : (a)  $\mathbf{L} = -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}$  - original ; (b)  $\mathbf{L}^c$  - after the condensation of the rotations ; (c)  $\mathbf{L}^{ctikh}$  - after reduction of the rotations and regularisation.

#### 4.1.4.3 Regularised results obtained on the whole structure

The results  $\{F\}^{Tikh}$  obtained after regularisation are shown in Figure 4.4. It is a co-

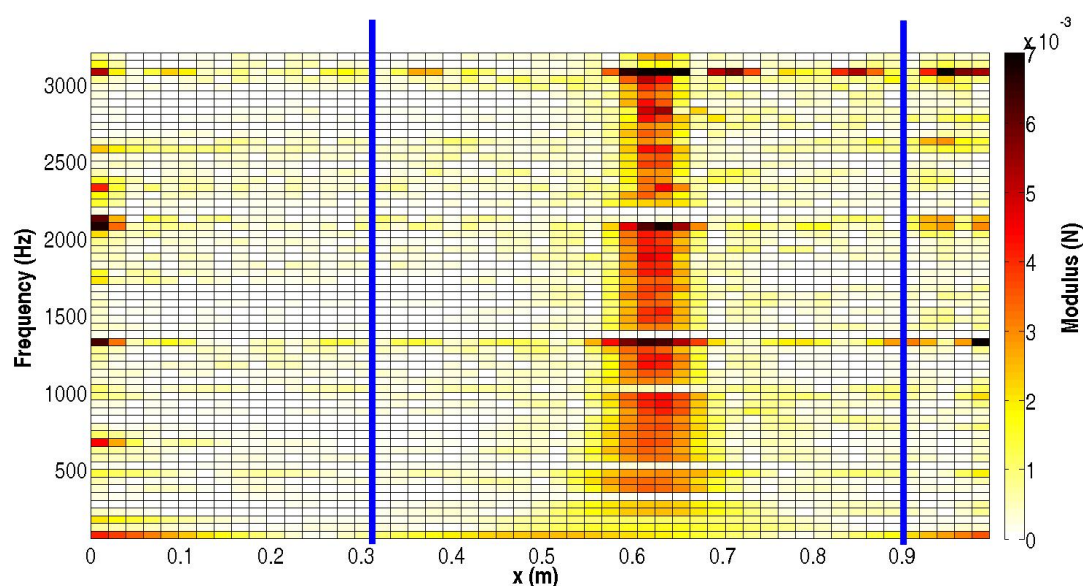


FIGURE 4.4 – Colormap of the computed forces magnitude applied by the shaker. Input data are measured and are injected in the Finite Element model of the whole beam.  $x$  axis gives the position of identified forces while  $y$  axis gives the frequency. Colors correspond to the level of the forces modulus. Vertical blue lines define the summation range to compute force magnitude.

lormap where  $x$  axis corresponds to the position of identified forces while  $y$  axis gives the frequency and colors correspond to the level of the forces modulus. Horizontal lines that appear correspond to resonances (horizontal lines around the frequency  $f = 1000\text{Hz}$  for example). Indeed, on high resonances, it is well known that the Force Analysis Technique can present some difficulties due to the fact that the excitation becomes very small with respect to the vibrations it creates. The operator is ill-conditioned on resonances and the Tikhonov procedure fails to regularise the inverse problem. Otherwise, the identified force appears clearly as a smoothed thick spot around the position  $x = 0.6\text{m}$  for all frequencies. Figure 4.5 gives the results obtained in the frequency range  $[20\text{ Hz}-3200\text{ Hz}]$ . It indicates the directly measured force and the values of the identified force modulus, when summing the nodal forces around the peak area between the vertical lines shown in Figure 4.4. The force spectra appear to be very close, the values obtained are in agreement to direct measurements.

#### 4.1.4.4 Deconvolved results on the whole structure

In this section, the deconvolution technique described in section 4.1.3 is applied to the regularised results and the obtained forces are shown in the colormap presented in Figure 4.6. By comparing it to Figure 4.4, it is obvious that the deconvolution post-process improves the spatial location of the force, even in the low frequency domain. Furthermore,



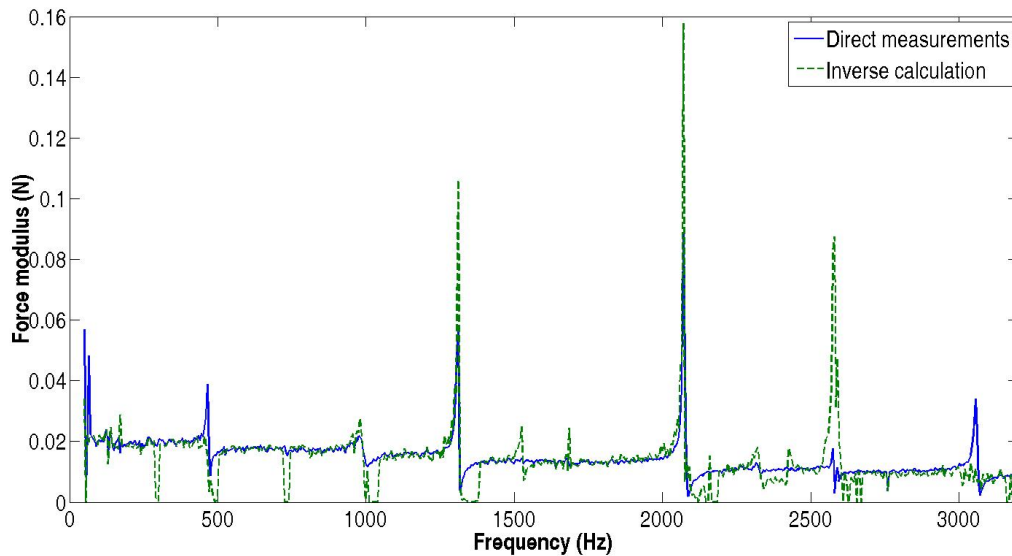


FIGURE 4.5 – Magnitude of the force versus frequency. Input data are measured and are injected in the Finite Element model of the whole beam.

the summation range to compute the force magnitude is easier to define as the width of the resulting deconvolved force appears to be nearly constant from lowest frequencies to highest frequencies. The level of the detected peak is also increased. The spatial spreading of the force is now only restricted to two points before and after a maximum value. Figure 4.7 gives the results obtained in the frequency range [20 Hz-3200 Hz]. It shows the directly measured force and the values of the identified force modulus, when summing the nodal forces between the vertical lines shown in Figure 4.6. The force spectra appear to be very close, the values obtained are in agreement to direct measurements.

Deconvolution makes it easier to detect the location of the force and it helps to define the summation width range around the excitation point in order to obtain the final force magnitude.

#### 4.1.4.5 Regularised results on a subdomain of the structure

In order to demonstrate the feasibility to apply the method on a local part of the structure, a subdomain is now considered. Therefore, the new free-free model starts at abscissa  $x = 0.4$  and ends at the opposite limit of the beam.

The results  $\mathbf{F}^{\text{tikh}}$  obtained after regularisation are shown in Figure 4.8. The identified forces appear clearly as a smoothed thick spot around the position  $x = 0.6m$  for all frequencies. Also, forces appear on the left side of the subdomain indicating the presence of coupling forces to the unprocessed part of the beam. It is clear that for the low frequency domain, the boundary is too close to the excitation point : the results present an overlap between coupling forces at the boundaries and the excitation force.

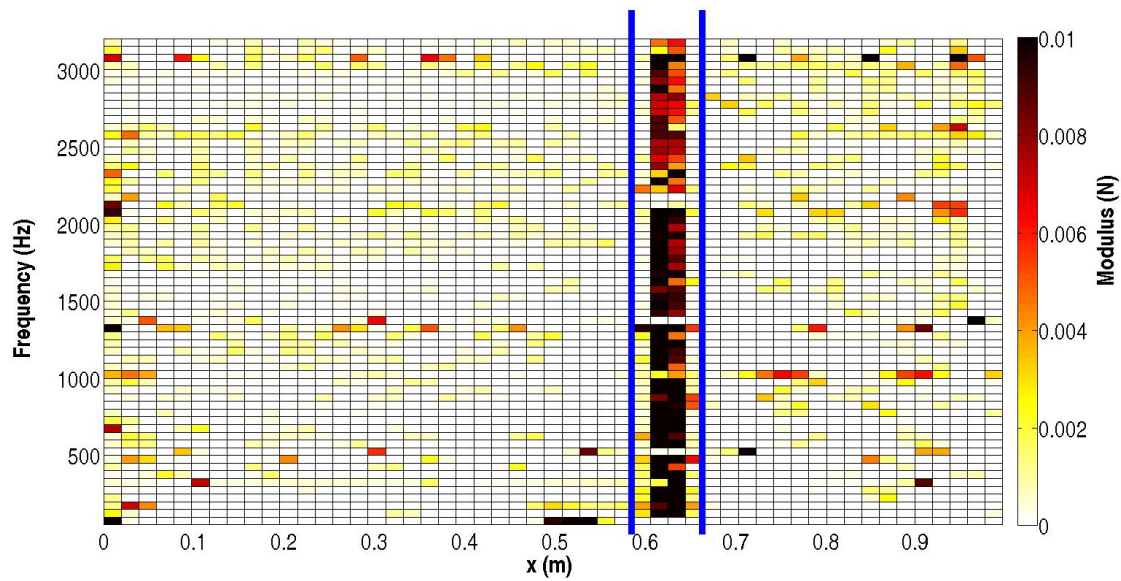


FIGURE 4.6 – Colormap of the computed forces magnitude applied by the shaker. Input data are measured and are injected in the Finite Element model of the whole beam. The deconvolution algorithm is applied.  $x$  axis gives the position of identified forces while  $y$  axis gives the frequency. Colors correspond to the level of the forces modulus. Vertical blue lines define the summation range to compute force magnitude.

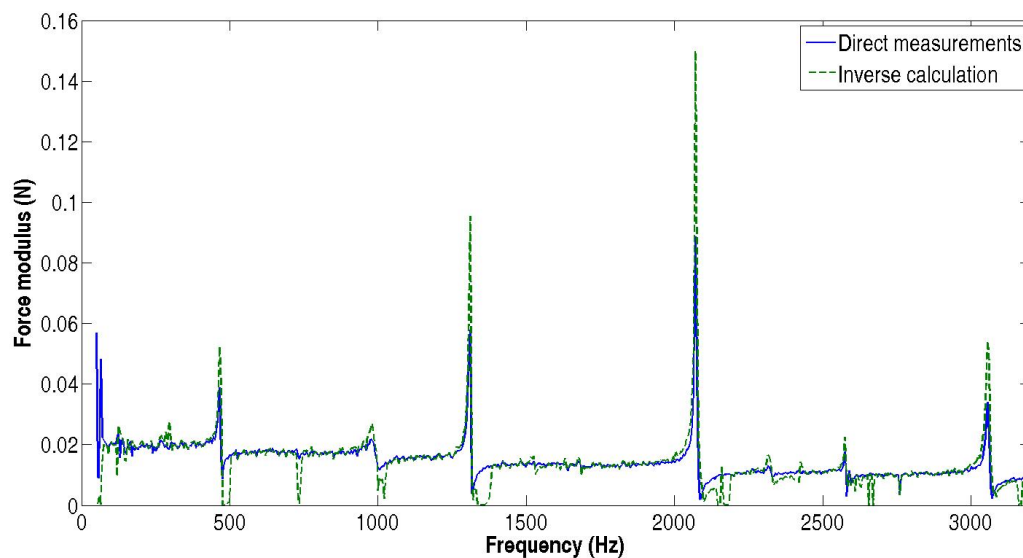


FIGURE 4.7 – Magnitude of the force versus frequency. Input data are measured and are injected in the Finite Element model of the whole beam. The deconvolution algorithm is then applied.

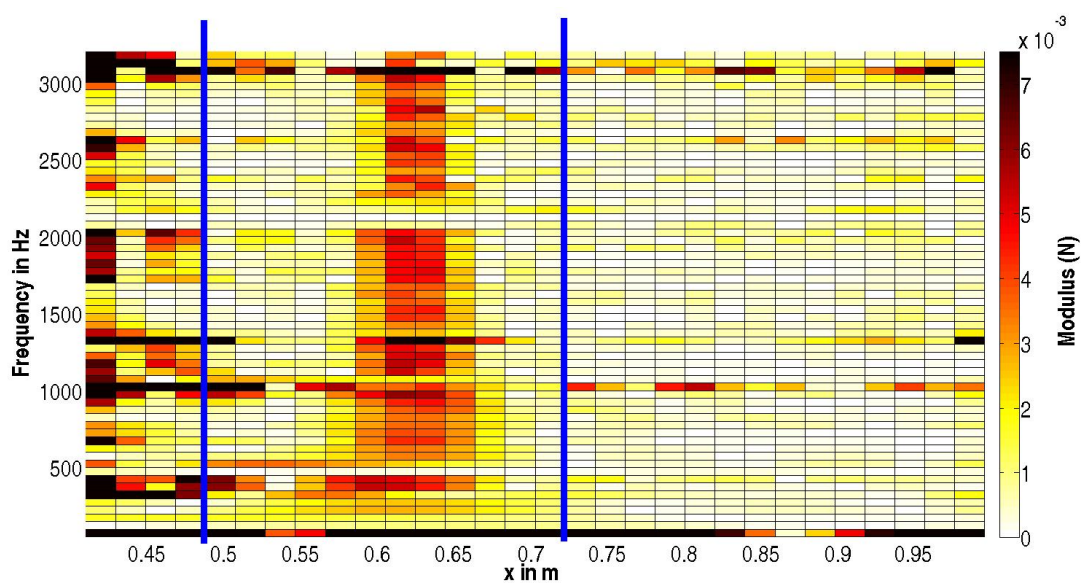


FIGURE 4.8 – Colormap of the computed forces magnitude applied by the shaker. Input data are measured and are injected in the Finite Element model of the local subdomain.  $x$  axis gives the position of identified forces while  $y$  axis gives the frequency. Colors correspond to the level of the forces modulus. Vertical blue lines define the summation range to compute force magnitude.

Figure 4.9 gives the results obtained in the frequency range [20 Hz-3200 Hz]. It shows the directly measured force spectrum and the values of the identified force modulus, when summing the nodal forces in the identified peak area. The force spectra appear to be very close, the values obtained are in agreement to direct measurements, except for frequencies lower than 550 Hz because the summation contains the coupling forces at the boundaries in this low frequency range.

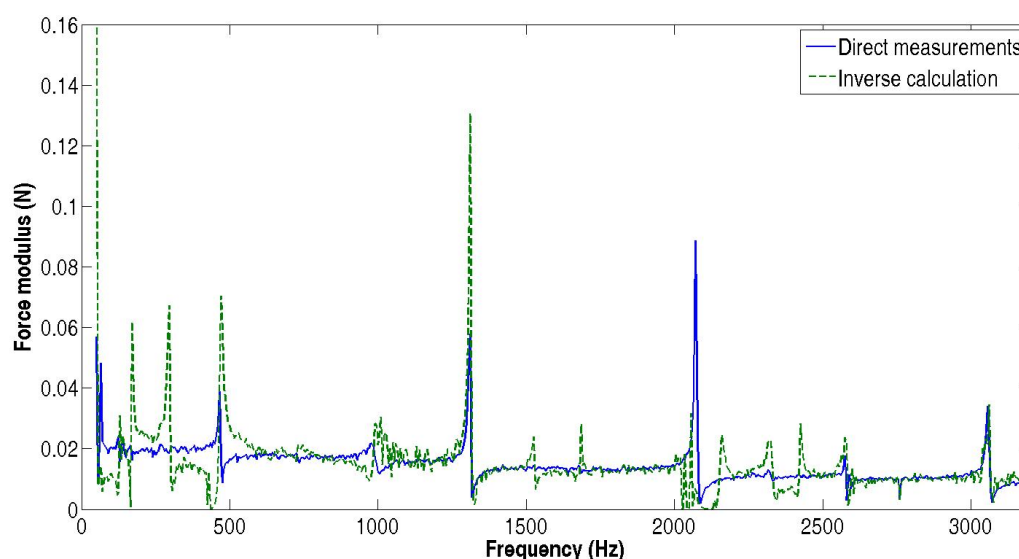


FIGURE 4.9 – Magnitude of the force versus frequency. Input data are measured and are injected in the Finite Element model of the local subdomain.

#### 4.1.4.6 Deconvolved results on a subdomain of the structure

In this section, the deconvolution technique described in section 4.1.3 is applied to the regularised results. It results in the colormap presented in Figure 4.10.

By comparing it to Figure 4.8, it is obvious that the deconvolution post-process improves the spatial resolution. The excitation force is now clearly identified, even for lowest frequencies. Furthermore, the summation range to compute the force magnitude is easier to define as the width of the resulting deconvolved smoothed force appears to be nearly constant from lowest frequencies to highest frequencies. Also, it seems that overlap between coupling forces present at the left hand boundary of the subdomain and the excitation force is well reduced.

Figure 4.11 gives the results obtained in the frequency range [20 Hz-3200 Hz]. It shows the directly measured force to the values of the identified force modulus, when summing the nodal forces in the identified deconvolved peak area. The force spectra appear to be very close, the values obtained around  $x = 0.6$  m by the inverse technique proposed in this paper are in agreement to direct measurements. Also, comparing these results to those

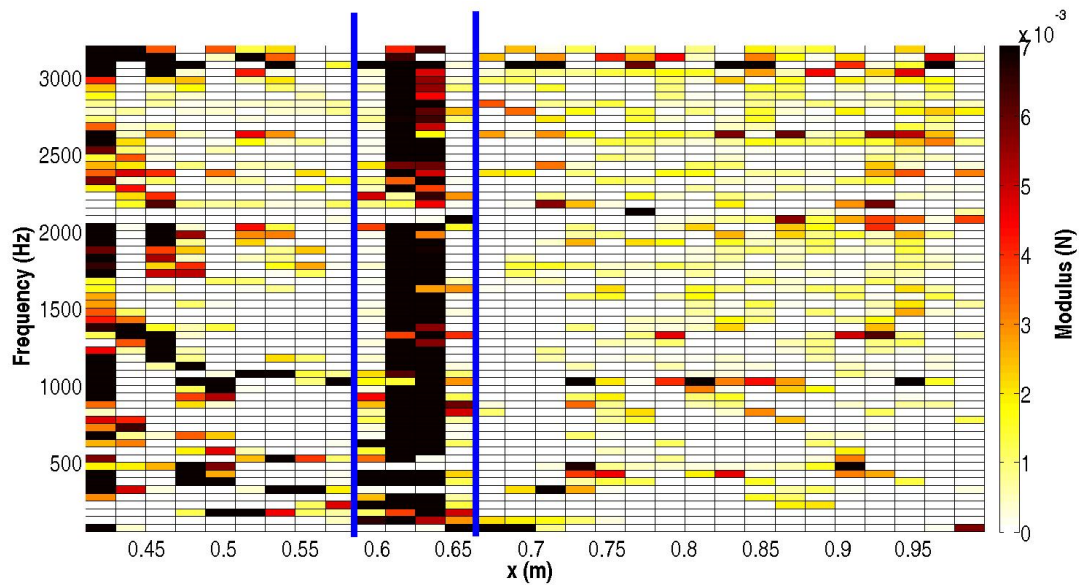


FIGURE 4.10 – Colormap of the computed forces magnitude applied by the shaker. Input data are measured and are injected in the Finite Element model of the local subdomain. The deconvolution algorithm is applied.  $x$  axis gives the position of identified forces while  $y$  axis gives the frequency. Colors correspond to the level of the forces modulus. Vertical blue lines define the summation range to compute force magnitude.

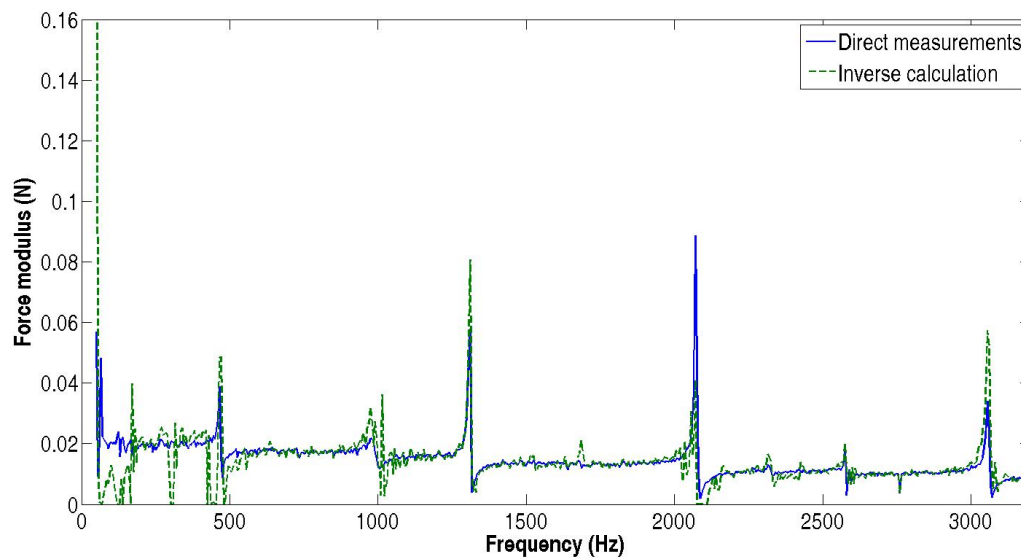


FIGURE 4.11 – Magnitude of the force versus frequency. Input data are measured and are injected in the Finite Element model of the whole beam.

of Figure 4.9, it is clear that results are improved for all frequencies when deconvolution is used, and especially for the low frequency domain. The distinction between two forces that were previously merged by the regularisation appears to be possible by the use of the deconvolution algorithm.

#### 4.1.5 Conclusion

The main interest of the Force Analysis Technique is its ability to locate and to identify forces exciting a vibrating structure, but the needed regularisation constitutes a limitation since the location becomes fuzzy in the low frequency domain. In order to quantify the exciting forces, a spatial summation (or integration) must be made, which requires that forces must be spaced. The Force Analysis Technique presents also the interest that it can be applied on a subdomain of the structure. This local aspect is an advantage, but when using the free boundary, coupling forces are reconstructed at the edges of the subdomain. Generally, excitations and boundary forces must be spaced in order to correct overlaps after the smoothing of the solution. The smoothing effect of the regularisation can be seen as a low-pass filtering defined by a convolution product. This is the reason why a deconvolution approach is proposed in order to improve the localisation of sources. In this paper, the Richardson-Lucy Algorithm was chosen to be applied on regularised results even if it supposes a positiveness constraint. The first results obtained on an academic experimentation show a real improvement of the localisation and as well as the feasibility to consider a smaller part of the structure or to expand the limit in the low frequency range. For these last cases, coupling forces and excitation force are not uncorrelated, but the deconvolution algorithm still converges to a reliable solution. Even if the test structure was a beam, the method was completely applied from a Finite Element modeling; its application can then be directly envisaged on more complex structures. Also, the deconvolution algorithm can be applied to the classical FAT method which uses the finite difference discretisation of the analytical motion equation and the local low-pass wavenumber filtering procedure instead of the FE model and the Tikhonov method.

#### Acknowledgements

This work is supported by grants from the competitiveness pole LUTB (Lyon Urban Truck and Bus). It is carried out in the frame of the French research project MACOVAM, with the partnership of Renault Trucks VPT, Pierburg Pump Technology, Vibratex and LVA (Vibrations and Acoustics Laboratory) of INSA de Lyon.

## 4.2 Déconvolution appliquée aux résultats sur structures 2D

Dans la partie précédente, la méthode de déconvolution a été appliquée et validée sur poutre. Il s'agit désormais de la valider sur structures bi-dimensionnelles, mais également en présence de zones réduites par la méthode de Craig-Bampton. C'est l'objet du complément d'étude qui suit.

### 4.2.1 Application sur une plaque simple

Une expérimentation a été réalisée sur une plaque rectangulaire, d'épaisseur 1.6mm et en aluminium. Ses dimensions sont de 1.209 m x 0.902 m comme le montre la Figure 4.12. La zone mesurée est un rectangle de 0.175 m x 0.181 m. L'excitation est harmonique avec une fréquence de 1404 Hz.

Seule la partie symbolisée par le rectangle bleu sur la Figure 4.12 est mesurée. Le modèle Eléments Finis associé à cette zone est construit en utilisant des bords libres, les rotations sont substituées à l'aide de la condensation dynamique. La régularisation basée sur la méthode de Tikhonov [14] est appliquée et le paramètre de régularisation est optimisé en appliquant le principe de la courbe en L [15].

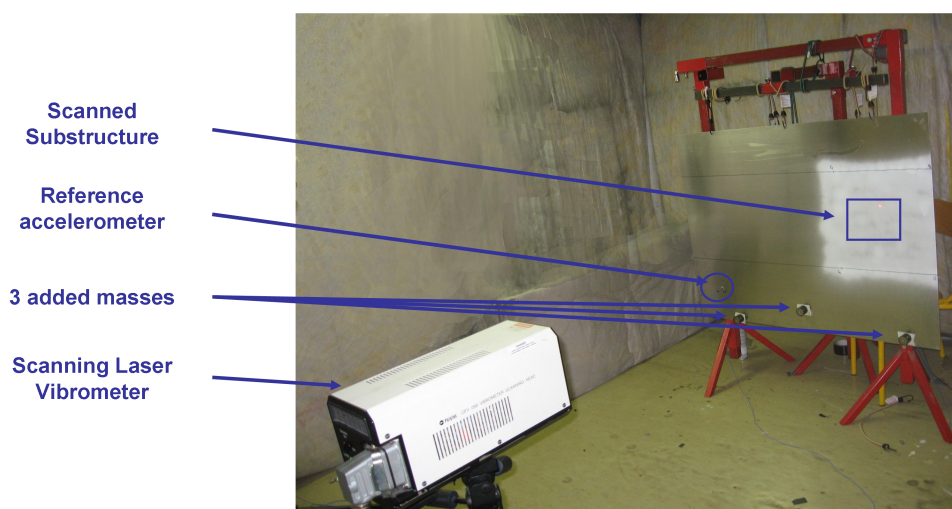


FIGURE 4.12 – Photographie de l'expérience réalisée pour la validation de l'étape de déconvolution, sur plaque mince en aluminium.

Les résultats obtenus après régularisation sont donnés en Figure 4.13. L'effort excitateur est bien détecté de même que les efforts de couplage aux bords du sous-domaine étudié. La Figure 4.14 montre le résultat que l'on obtient après le post-traitement basé sur l'algorithme de Richardson-Lucy.

On constate qu'après déconvolution, l'effort excitateur ne se résume pas à un simple point ou à une zone resserrée autour du maximum d'effort localisé. L'algorithme a semble t'il

convergé vers une solution déconvoluée correspondant aux arêtes de la pastille circulaire reliant pot vibrant et structure.

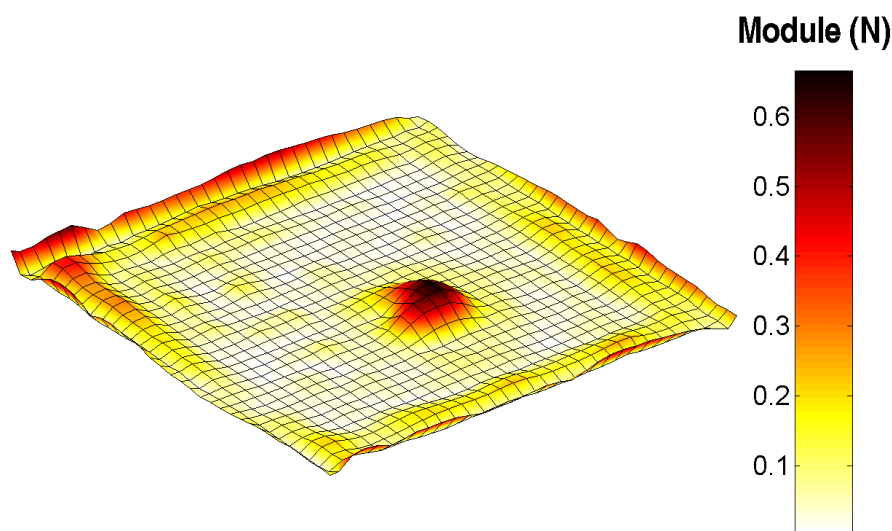


FIGURE 4.13 – Cartographie 3D des amplitudes des forces  $F^{ctikh}$  identifiées sur la plaque mince en aluminium, avant déconvolution. La fréquence d'étude est  $f = 1404Hz$ .

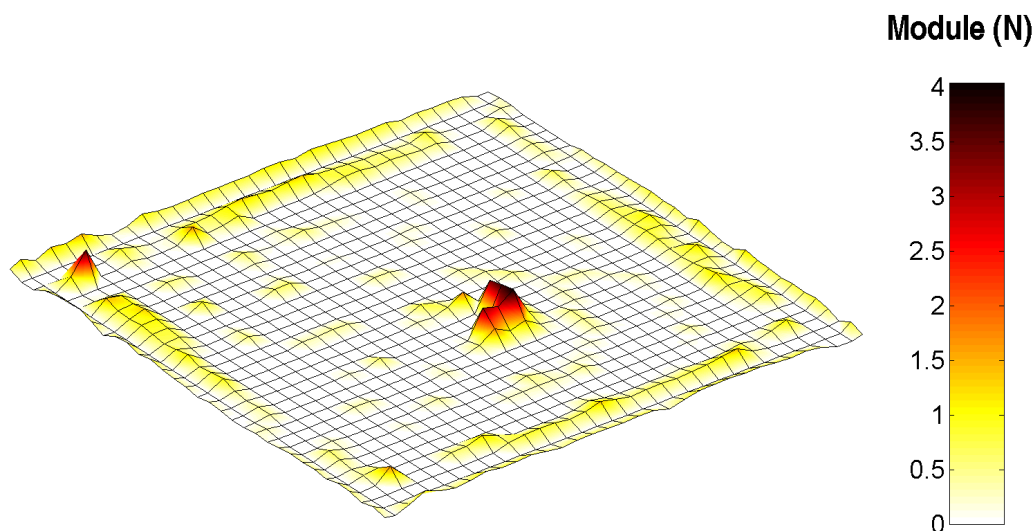


FIGURE 4.14 – Cartographie 3D des amplitudes des forces  $F^d$  identifiées sur la plaque mince en aluminium, après déconvolution. La fréquence d'étude est  $f = 1404Hz$ .

En reprenant les cartographies de la Figure 4.13, on constate que cet état de fait était déjà présent sur les résultats obtenus après régularisation. Mais ce problème n'était pas



## 1004.2. DÉCONVOLUTION APPLIQUÉE AUX RÉSULTATS SUR STRUCTURES 2D

---

aisément détectable.

Une analyse visuelle du collage de la pastille a montré un mauvais collage de celle-ci avec seulement 3/4 de disque bien collé comme le montre la Figure 4.15. Le post traitement de déconvolution a donc permis de mieux mettre en évidence en accentuant ce problème détecté par la méthode inverse sachant que la pastille mesure 12 mm de diamètre et que les éléments font en moyenne 5 mm de côté.

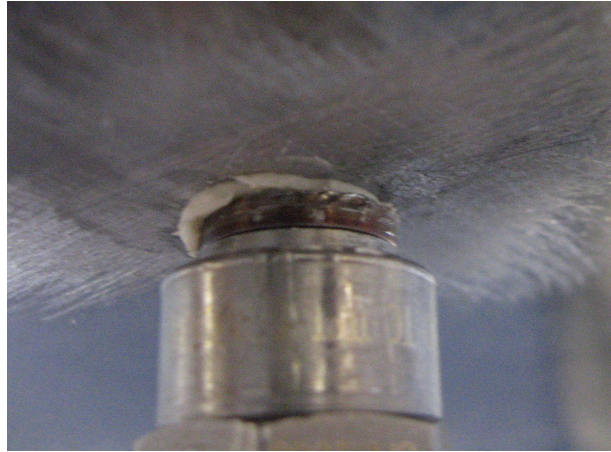


FIGURE 4.15 – Zoom sur la pastille.

### 4.2.2 Application sur une plaque en L avec réduction de modèle Craig-Bampton

Nous avons repris l'expérimentation menée sur la plaque en L, traitée dans l'article de la section 3.1. Pour mémoire, la structure étudiée est une plaque en L fabriquée en aluminium. On reprend ici les résultats de la dernière partie de la publication, c'est à dire :

- une partie est réduite à l'aide de la méthode de Craig-Bampton en conservant uniquement 16 modes à interfaces encastées,
- tous les bords libres sont mesurés et donc non réduits.

Après régularisation, on applique la déconvolution définie en 4.2. On commence par analyser les cartographies d'efforts obtenues aux mêmes fréquences que précédemment.

Les Figures 4.16(a) à 4.16(d) présentent les résultats obtenus pour 4 fréquences croissantes. En comparant ces résultats à ceux qui ont été obtenus dans l'article de la section 3.1, il est évident que la localisation de l'effort excitateur est plus claire et plus aisée.

Néanmoins, on a pu constater que l'étape de déconvolution pouvait amplifier certains efforts aberrant résiduels lorsque la régularisation n'avait pas réussi à les éliminer totalement. Ceci peut être le cas lorsque le rapport signal sur bruit est trop mauvais ou évidemment en présence de résonances structurelles trop fortes. Ce phénomène est mis en évidence sur la cartographie obtenue en Figure 4.17 à la fréquence de 581Hz. On constate que les bords libres de la partie intérieure du L, mais également la zone d'interface supérieure droite vers l'effort excitateur présente une amplification des forces aberrantes résiduelles.

L'étape de déconvolution est donc efficace pour corriger un résultat bien régularisé et lissé, mais elle ne corrige pas les artefacts en présence d'efforts aberrants résiduels.

Par ailleurs, les Figures 4.18(a) et 4.18(b) permettent de visualiser les positions extrêmes de l'effort excitateur. On constate ainsi que la déconvolution met en évidence une légère dispersion spatiale de la position d'excitation. Malgré tout, il est possible de définir une zone de sommation de manière plus fine. Le rectangle indiquant cette zone de sommation est défini de manière à encadrer le point de localisation de l'effort correspondant à chaque fréquence et ses quatre coins sont les noeuds 416, 420, 528 et 524 comme indiqué sur les Figures 4.18(a) et 4.18(b).

La sommation est réalisée en énergie puisque l'algorithme de déconvolution s'applique sur des quantités réelles élevées au carré et que l'information de phase est perdue après l'étape de déconvolution.

La Figure 4.19 donne le spectre obtenu après déconvolution ainsi que celui directement mesuré à l'aide du capteur de force. Si l'on se réfère aux résultats de la Figure 3.19, il est clair que l'étape de déconvolution permet d'obtenir sur la majorité des fréquences des résultats en module plus proches de ceux directement mesurés. En effet, il devient plus simple de définir la zone d'intégration et l'essentiel de l'énergie se retrouve concentrée dans une zone spatiale plus restreinte autour du maximum de l'effort localisé après régularisation. L'avantage principal de la déconvolution est que la définition de la zone de sommation ne porte plus à discussion après post traitement.

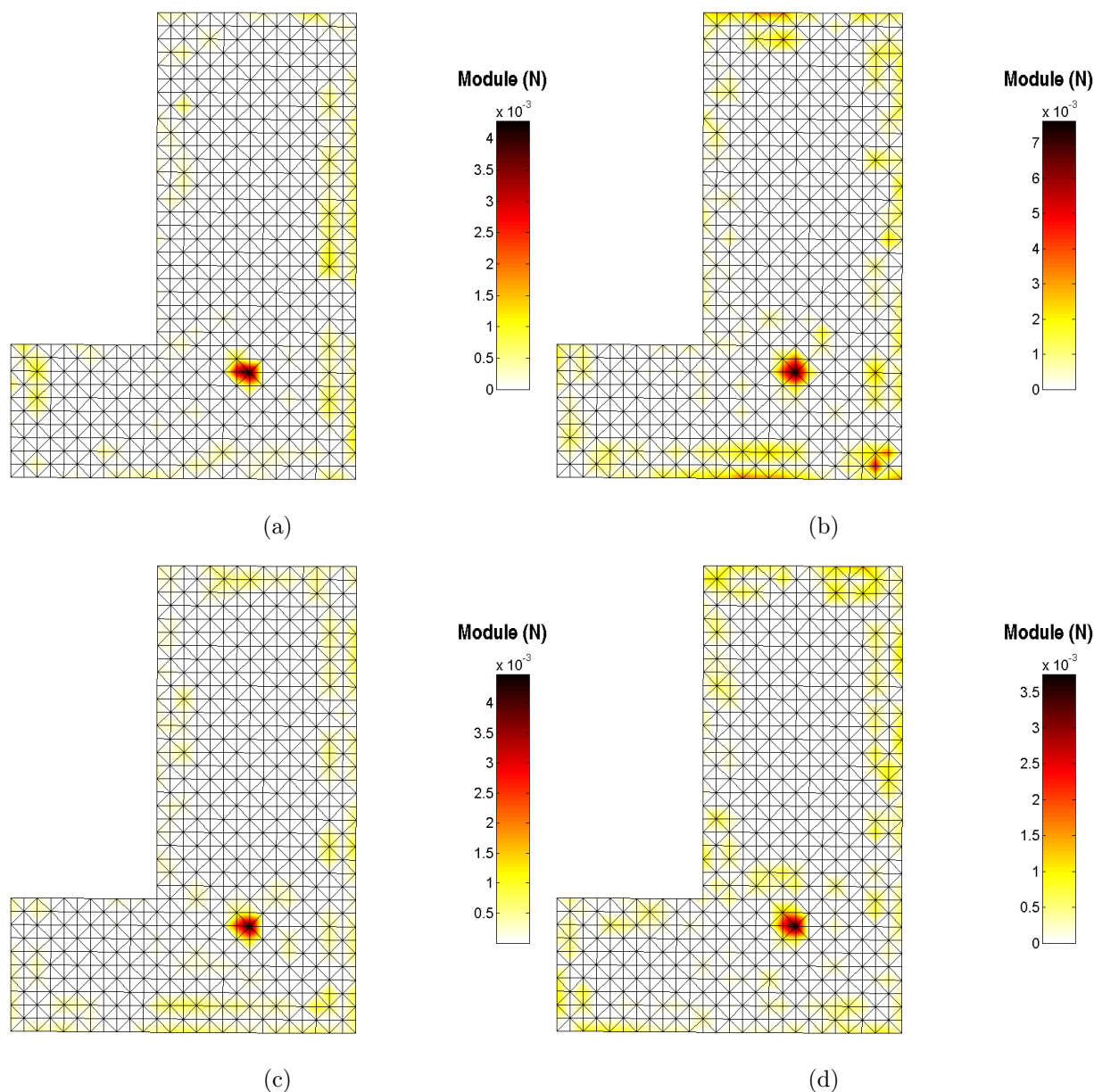


FIGURE 4.16 – Cartographie des amplitudes des forces  $\mathbf{F}^d$  identifiées sur la structure en L, sur un maillage dont une partie est condensée par la méthode de Craig-Bampton conservant 16 modes à interface encastree et après déconvolution par l’algorithme de Richardson-Lucy. (a)  $f = 560\text{Hz}$ ; (b)  $f = 750\text{Hz}$ ; (c)  $f = 1040\text{Hz}$ ; (d)  $f = 1475\text{Hz}$ .

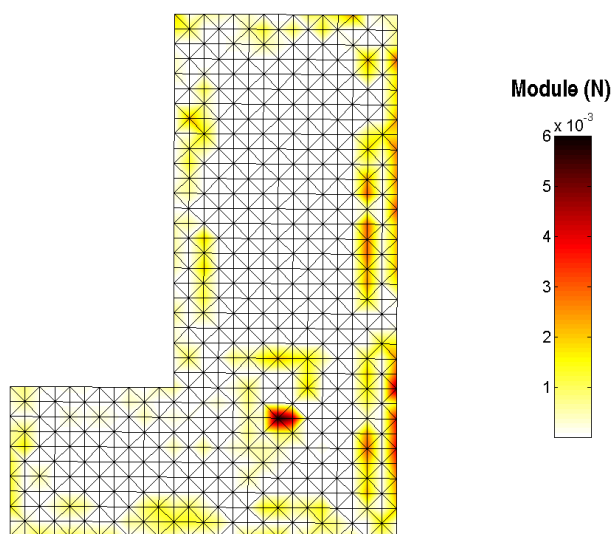


FIGURE 4.17 – Cartographie des amplitudes des forces  $\mathbf{F}^d$  identifiées sur la structure en L avec une partie de maillage condensée par Craig-Bampton et permettant de visualiser les amplifications de forces aberrantes résiduelles par l'étape de déconvolution de Richardson-Lucy. La fréquence d'étude est  $f = 581Hz$ .

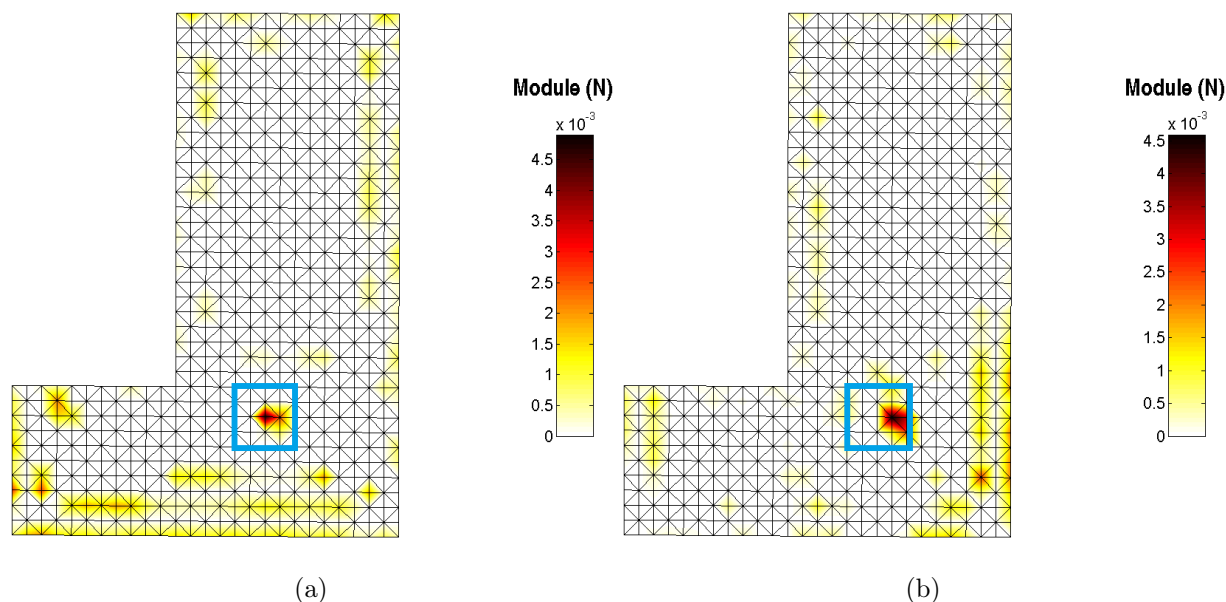


FIGURE 4.18 – Cartographie des amplitudes des forces  $\mathbf{F}^d$  identifiées sur la structure en L avec une partie de maillage condensée par Craig-Bampton et permettant de visualiser les positions extrêmes de la force excitatrice identifiée après l'étape de déconvolution. (a)  $f = 160Hz$ ; (b)  $f = 432Hz$ .

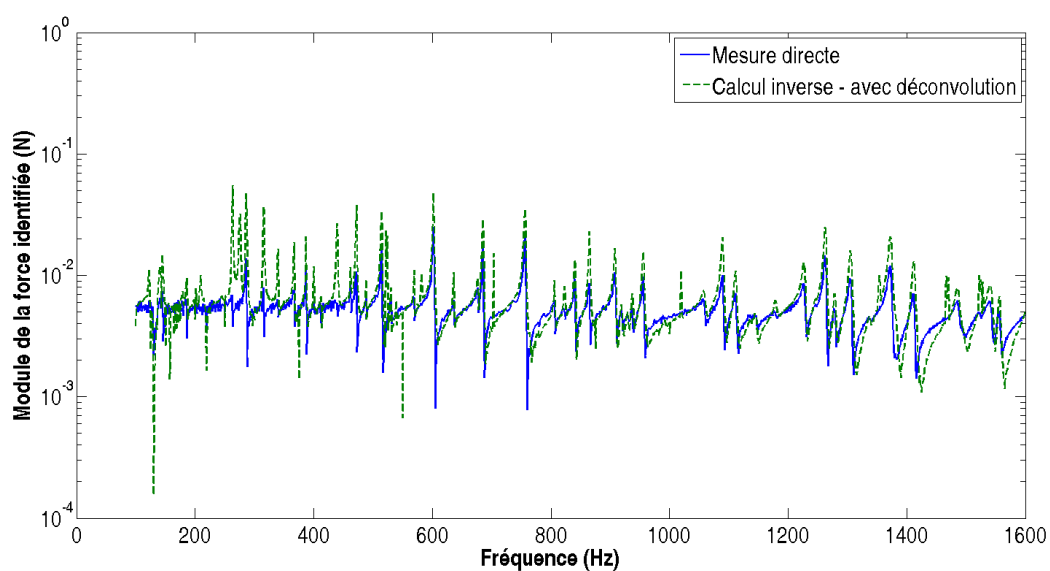


FIGURE 4.19 – Comparaison du module de l'effort excitateur obtenu, après déconvolution, par sommation des résultats dans le rectangle contenu entre les noeuds 416, 420, 528 et 524.

## 4.3 Synthèse

---

Afin d'améliorer la reconstruction des excitations par forces ponctuelles, une méthode de déconvolution a été proposée de manière analogue à ce qui est réalisé en traitement d'images [84, 85, 86]. La cartographie d'efforts régularisés est alors considérée comme une image observée à travers un certain instrument. La manière dont l'instrument modifie l'image originelle est parfaitement connue puisque l'on possède numériquement les modèles condensés-réduits/régularisés et non régularisés/non condensés-réduits.

Dans ce travail, l'algorithme de Richardson Lucy a été retenu et a donné d'excellents résultats. L'algorithme utilisé par la méthode de DAMAS [76], qui est un algorithme de Gauss-Siedel avec contrainte de positivité, a également été testé, mais il ne donna pas de meilleurs résultats, il semble même moins robuste devant le bruit d'après les applications en [77, 78].

Le modèle physique d'altération de l'image a été défini en suivant une démarche analogue à celle proposée par J.-C. Pascal [77, 78] afin d'améliorer la résolution spatiale des techniques de beamforming en acoustique. Les données sont rendues positives en considérant les amplitudes au carré des forces régularisées et déconvoluées. Les forces sont supposées spatialement partiellement corrélées, l'influence de l'une sur les autres étant conservée par le biais des termes interspectraux de réponses impulsionnelles. Autrement dit, le modèle conserve intrinsèquement les informations relatives aux interspectres mais les entrées/sorties du modèle sont des autospectres.

Malgré l'hypothèse forte de positivité, qui fait perdre l'information de phase, les résultats se sont avérés probants, même en présence de forces fortement corrélés (exemple de l'excitation identifiée sur un sous-domaine de poutre, proche des forces de couplage par définition corrélées à l'excitation).

La déconvolution a été validée également en présence de zones réduites par la méthode de Craig-Bampton [6]. Elle permet *in fine* de reconcentrer l'énergie de l'excitation autour de sa position localisée. Le support de sommation apparaît alors plus clairement et il devient possible d'obtenir l'amplitude de l'excitation localisée en ne sommant que les données déconvoluées sur quelques points fixes autour de la position localisée. L'amélioration de la résolution spatiale permet d'affiner les résultats puisque les détails apparaissent plus nettement comme nous l'avons mis en évidence avec les exemples de :

- la répartition spatiale des zones de contact structure/pot vibrant,
- la dispersion spatiale des résultats, non détectable visuellement avant déconvolution.

Cependant, on pourra faire remarquer que le post traitement de déconvolution est utilisé comme un outil correcteur d'un résultat altéré par la régularisation. La technique fait l'hypothèse de sources ponctuelles quand la régularisation faisait l'hypothèse de distributions de sources lissées. Une démarche qui semble prometteuse serait de développer un algo-

ritme régularisateur adapté aux types de sources à identifier, dans le cas où il est possible de prendre en compte la nature de l'excitation. Le cas des excitations réparties nécessiterait alors un algorithme différent de celui des excitations ponctuelles.

Dans le chapitre suivant, nous appliquerons la méthode à des cas d'excitations non contrôlées.

# 5

## Applications

Les chapitres précédents étaient consacrés au développement de la méthode ainsi qu'aux validations expérimentales et numériques en laboratoire. La méthode a ainsi été validée sur structures de type poutres et plaques excitées de manières artificielles et contrôlées.

Elle comporte les étapes suivantes :

- formation du maillage et du modèle Eléments Finis correspondant,
- réduction Craig-Bampton si possible et/ou nécessaire,
- condensation dynamique du modèle si nécessaire, pour chaque fréquence d'étude,
- mesures dans les zones non réduites et injection de celles-ci dans le modèle,
- régularisation,
- éventuellement, déconvolution spatiale.

Ce dernier chapitre est consacré à des applications avec excitations non contrôlées.

Dans le cadre du projet MACOVAM, la première application a été menée sur un banc comprenant une pompe à huile montée sur une poutre réceptrice où l'on cherche à identifier les efforts appliqués par la pompe en fonctionnement.

La seconde application concerne l'identification de défauts, où la méthode d'identification est testée sur une plaque fissurée. En effet, si aucun effort externe n'est appliqué à l'endroit du défaut, une distribution de forces non nulles à cet endroit peut toutefois être obtenue et indiquer la présence d'un défaut.



## 5.1 Caractérisation des excitations engendrées par une pompe à huile

La méthode a été appliquée sur des mesures réalisées au sein de la société Pierburg par Fabien Chevillotte pour le projet MACOVAM. La Figure 5.1 présente le banc d'essais, avec la pompe et les capteurs installés sur une poutre réceptrice. La pompe étudiée est une pompe à palettes, de rapport d'entraînement 2.25 avec 9 palettes.

Le banc que l'on appellera 'Banc Pierburg' est constitué d'une poutre réceptrice où le dispositif de mesures ne permet pas une estimation fine des rotations (accéléromètres régulièrement espacés aux points d'identification). Il a été ainsi choisi de les éliminer grâce à la condensation dynamique. Enfin, la régularisation de Tikhonov et le post traitement en déconvolution sont appliqués. On notera que le maillage respecte le critère  $\frac{\lambda}{6}$  jusqu'à 1270Hz.

La poutre est en acier (de module d'Young égal à 210 GPa et de masse volumique variant  $7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ), son épaisseur est de 8 mm, sa largeur est de 58 mm et sa longueur est de 1.2 m. Celle-ci est accrochée au reste du banc d'essais à ses deux extrémités, la liaison devant être proche d'un encastrement. Le maillage comporte 25 points régulièrement espacés de 40mm. La pompe est fixée en 4 points sur la poutre, aux abscisses  $x=0.275$  m et  $x=0.543$  m et aux ordonnées  $y=-0.2$  m et  $y=+0.2$  m. Elle sera mise en rotation par un moteur à courant continu par le biais d'un accouplement élastique.

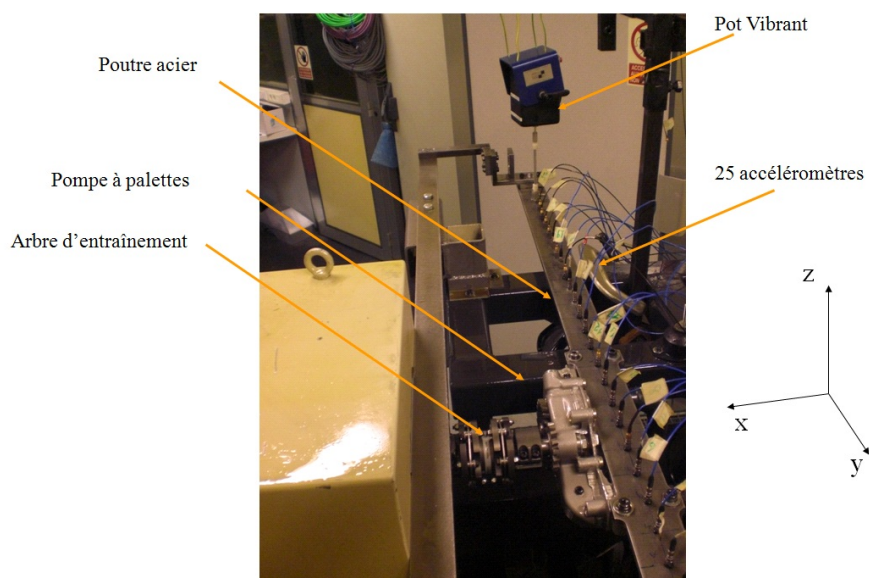


FIGURE 5.1 – Photo du banc d'essai poutre, avec pompe à palettes.

L'acquisition a été réalisée avec un système d'acquisition Oros OR38 ce qui permet de faire les mesures en une seule passe grâce à ses 32 voies d'entrées. La fréquence maximale d'étude est de 5000Hz, la résolution fréquentielle de 1.5625Hz avec 3201 lignes spectrales.

Les signaux temporels sont fenêtrés par la fenêtre de Hanning. Les autospectres sont obtenus après 100 moyennages avec un overlap de 50%.

Les mesures ont été obtenues sous excitation opérationnelle en faisant fonctionner la pompe au régime de 1500t/min et sous une pression de refoulement de 8bars. La Figure 5.2 donne les résultats obtenus après régularisation puis après déconvolution. On constate bien que les résultats déconvolués sont de meilleure facture pour les basses fréquences avec une meilleure séparation des deux attaches.

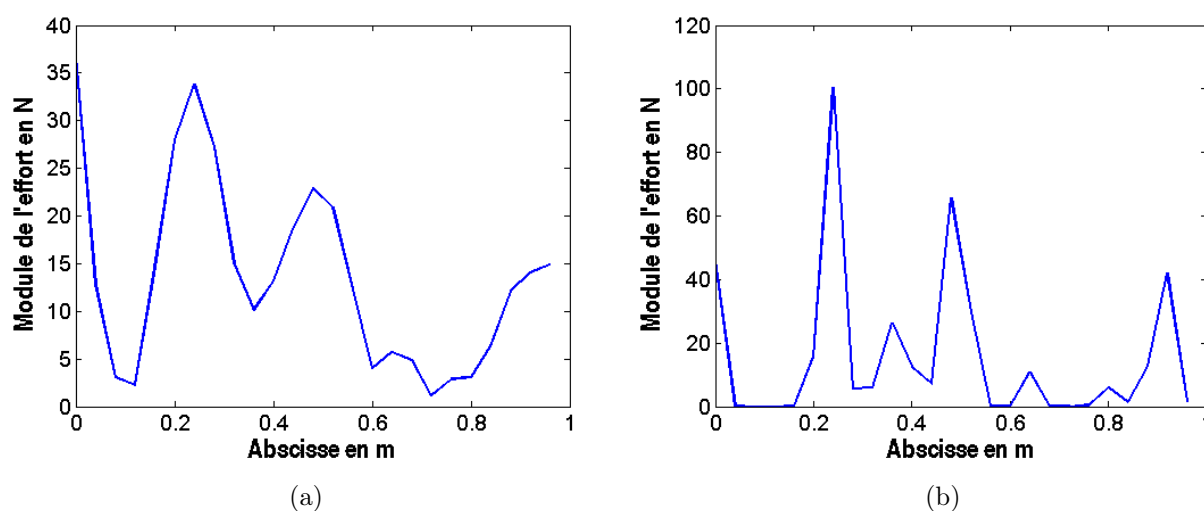
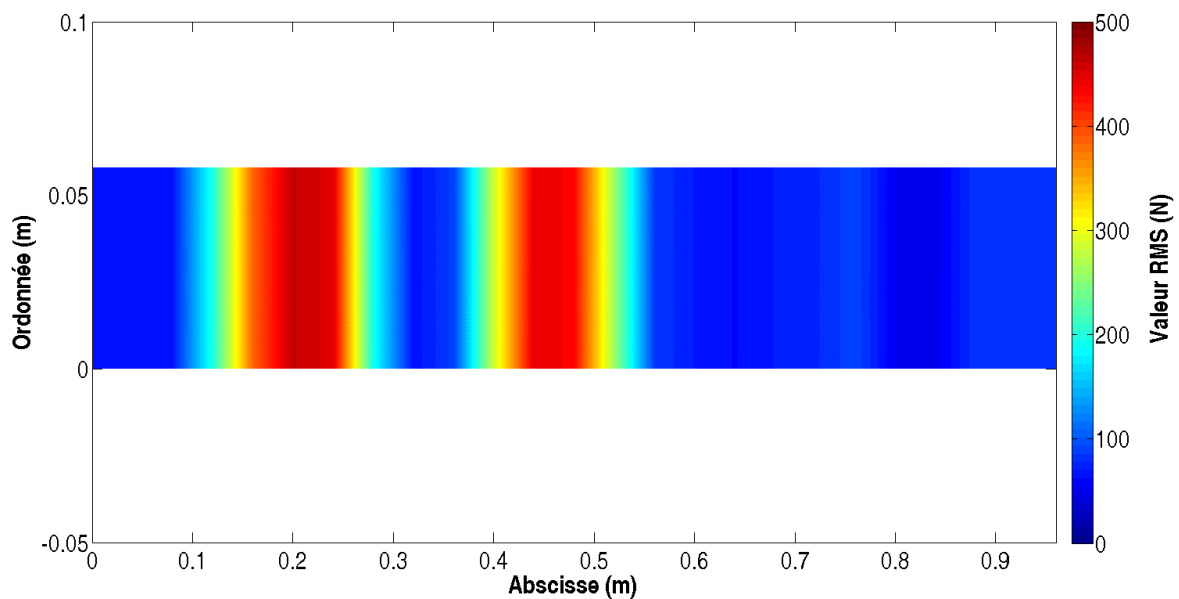
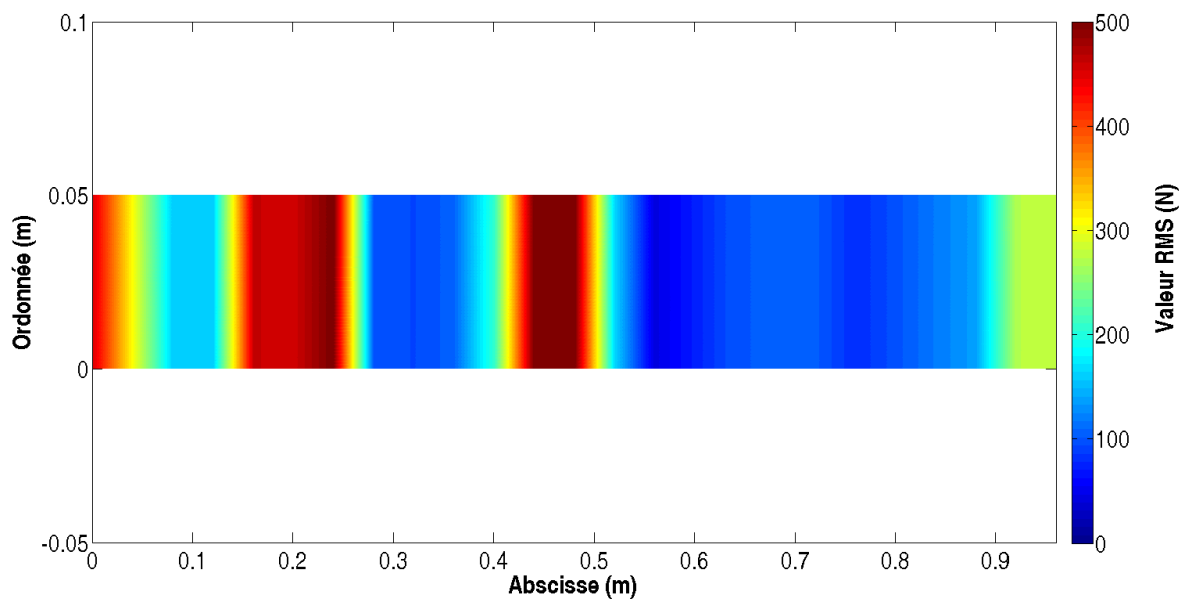


FIGURE 5.2 – Effet de la déconvolution sur les cartographies spatiales, cas de l'harmonique pompe 1, banc Pierburg avec la pompe à palettes fonctionnant au régime de 1500t/min. (a) Méthode Eléments Finis, après régularisation ; (b) Méthode Eléments Finis, après régularisation et déconvolution.

Enfin, les résultats RIFF sont présentés côte à côte aux résultats obtenus après déconvolution sur la Figure 5.3. Celle-ci présente en effet les cartographies spatiales obtenues en sommant pour chaque point de mesures les énergies des efforts obtenus pour les fréquences de 118 Hz à 2941 Hz. Les résultats sont quasiment identiques, avec localisation des deux attaches. A nouveau, les limites du domaine apparaissent clairement quand on utilise la méthode basée sur le modèle Eléments Finis. La déconvolution permet de mieux séparer les deux attaches.



(a)



(b)

FIGURE 5.3 – Comparaison des cartographies de forces obtenues sur le banc Pierburg avec la pompe à palettes fonctionnant au régime de 1500t/min. (a) RIFF ; (b) Méthode Eléments Finis, après régularisation et déconvolution.

## 5.2 Application à la détection de défauts

La méthode d'identification proposée dans cette thèse repose sur le calcul du second membre de l'équation qui modélise la structure. Elle suppose une connaissance fine du comportement local de la zone étudiée. Ici, l'équation est obtenue par la méthode des Eléments Finis. Une des conséquences de ce principe est que toute erreur de modélisation se traduit par l'apparition d'efforts au second membre afin d'équilibrer l'incohérence entre données mesurées et modèle erroné. Ce problème a été mis en évidence au chapitre 3, section 3.1 où l'on constatait que la réduction Craig-Bampton d'une zone comportant des bords libres induisait une erreur de modèle se traduisant par l'apparition d'efforts à l'interface des super-éléments.

Ce qui pourrait être vu comme un simple désagrément peut en fait être exploité avec avantage dans le cadre d'un domaine connexe à notre étude et qui concerne la localisation de défauts au sein d'une structure. En effet, si l'on possède un modèle Eléments Finis correspondant à un état sain d'une zone de la structure, il devient possible, en utilisant des mesures vibratoires opérationnelles, de faire apparaître un possible défaut par le biais d'efforts qui contrebalancent l'écart entre un modèle numérique correspondant à l'état sain et une structure défectueuse.

De manière pratique, les mesures vibratoires sont obtenues ici avec une excitation artificielle de manière à avoir un bon contrôle et une bonne connaissance de l'excitation de la structure.

Pour illustrer et tester cette possibilité d'identifier un défaut, une expérimentation a été testée sur une plaque scarifiée où l'identification et la localisation du défaut est recherchée par la méthode proposée. Les deux sections suivantes sont consacrées à la description de cette expérience et aux résultats obtenus. Cette partie est donc une ouverture du champ d'application de la méthode à la localisation de défauts.

### 5.2.1 Description de l'expérience

L'expérience a été menée sur une plaque suspendue en aluminium d'épaisseur 1.6mm. La Figure 5.4(a) montre une photographie de l'ensemble du montage de cette plaque suspendue. La plaque a pour dimensions 1.209m par 0.902m et la zone étudiée est restreinte au rectangle bleu de coin supérieur gauche en  $x = 0.866m$ ,  $y = 0.561m$  et de dimensions 0.175m par 0.181m. Les mesures ont été réalisées à l'aide d'un vibromètre laser à balayage, la plaque étant excitée par un pot vibrant.

Comme l'indique la Figure 5.4(b), l'excitation est localisée en dehors de la zone d'études aux coordonnées  $x=0.954$  m et  $y=0.455$  m par rapport au coin inférieur gauche. Trois masses additionnelles sont également fixées en dehors de la zone d'étude. Leurs positions sont montrées sur le schéma de la Figure 5.4(b). La présence de ces masses, non prise en compte dans le modèle, permet de montrer qu'il n'est pas nécessaire d'avoir un modèle

représentatif en dehors de la zone étudiée.

Un défaut, de largeur 1mm, a été réalisé à l'aide d'une disceuse sur environ 4 cm, elle est traversante sur 2 cm et est comprise dans la zone d'étude. La fissure étant trop petite pour être clairement visible sur la photographie de la Figure 5.4(a), les Figures 5.4(c) et 5.4(d) proposent deux zooms focalisés sur le défaut.

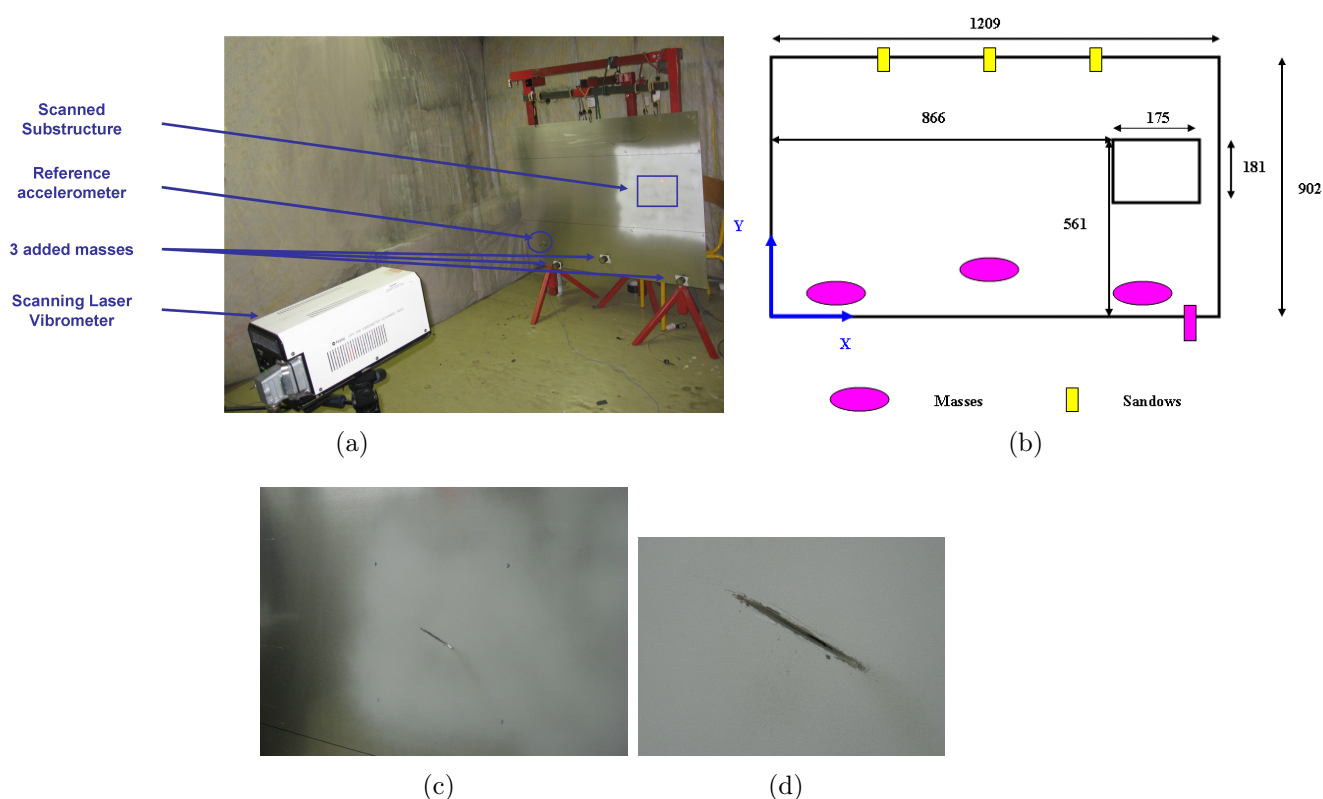


FIGURE 5.4 – Description de l'expérience réalisée pour l'application détection de défauts.

(a) Photographie de l'expérience; (b) Schéma associé; (c) Visualisation de l'entaille; (d) Zoom rapproché sur l'entaille.

L'excitation est de type harmonique ce qui permet d'avoir des mesures avec un très bon rapport signal sur bruit. La fréquence d'excitation a été choisie à 1603Hz, c'est à dire suffisamment haute pour que la longueur des ondes de flexion (10cm) soit de l'ordre de grandeur de la longueur du défaut. Par ailleurs, cette fréquence précise a été choisie en observant le spectre de l'accéléromètre de référence obtenu par une mesure préalable en excitation bruit blanc. L'idée directrice est de mener l'étude dans des conditions favorables, c'est à dire à une fréquence où le recouvrement modal apparaît élevé en présence des 3 masses accrochées à la plaque. Le champ de vibrations est mesuré dans la zone délimitée par le rectangle bleu de la Figure 5.4(a). Il est associé à un maillage de calculs d'éléments quadrangulaires, de côté moyen 5.5 mm (maximum 6 mm). Le maillage respecte donc le critère  $\frac{\lambda}{6}$  pour la fréquence d'étude. Le modèle Eléments Finis est construit pour le sous

domaine considéré, en ne conservant que le mouvement de flexion, et les rotations seront condensées dynamiquement.

### 5.2.2 Résultats

La Figure 5.5 montre les modules des déplacements obtenus après intégration des vitesses directement mesurées par le vibromètre laser à balayage, le tout en présence de l'entaille. Celle-ci n'est pas aisément détectable, la déformée opérationnelle de cette zone de la plaque étant plutôt complexe à la fréquence d'études avec de nombreux ventres.

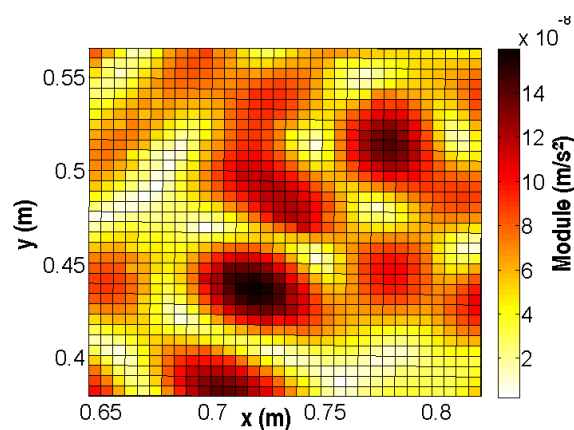


FIGURE 5.5 – Cartographie du champ de déplacements obtenu dans la zone d'étude en présence de l'entaille et à 1603Hz.

La Figure 5.6 donne les résultats obtenus sans régularisation. La présence de bruit dans les mesures entraîne un résultat totalement aberrant.

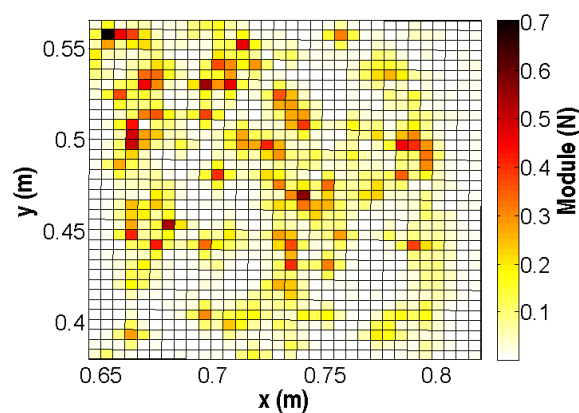


FIGURE 5.6 – Cartographie des efforts, obtenue sans régularisation en présence de l'entaille et à 1603Hz.

La Figure 5.7 donne les résultats obtenus avec une régularisation optimale. La cartographie des forces est donnée sur la partie de gauche 5.7(a). La courbe en L, avec le niveau de régularisation choisi indiquée par le cercle vert, est sur la partie droite 5.7(b). L'entaille est très peu apparente sur ce résultat. Pour confirmer sa présence, un affinement manuel du niveau de régularisation a été entrepris.

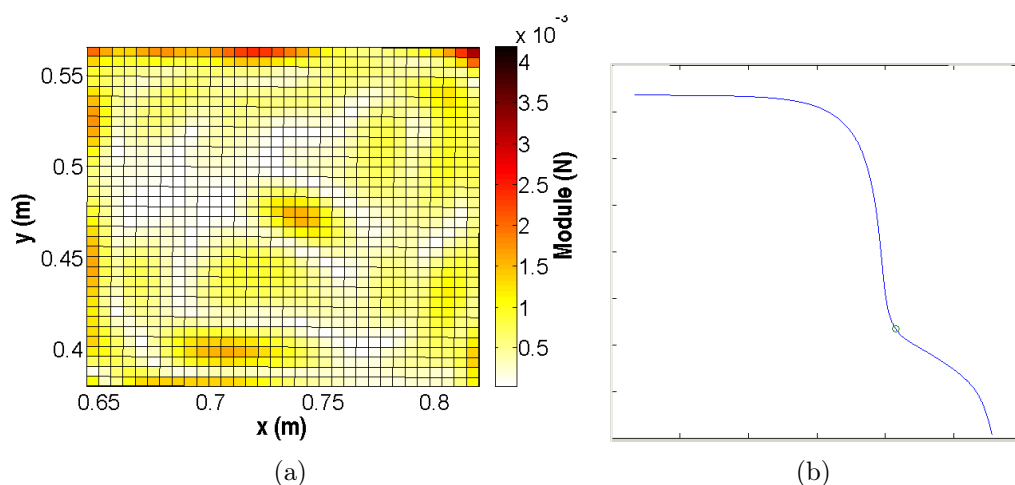


FIGURE 5.7 – Cartographie des efforts, obtenue en présence de l'entaille, à 1603Hz, avec régularisation optimale au sens de la courbe en L. (a) Cartographie des efforts ; (b) Courbe en L correspondante avec indication du niveau de régularisation (cercle vert).

La Figure 5.8 donne les résultats obtenus avec une régularisation plus sévère. L'entaille disparaît, le lissage est trop important.

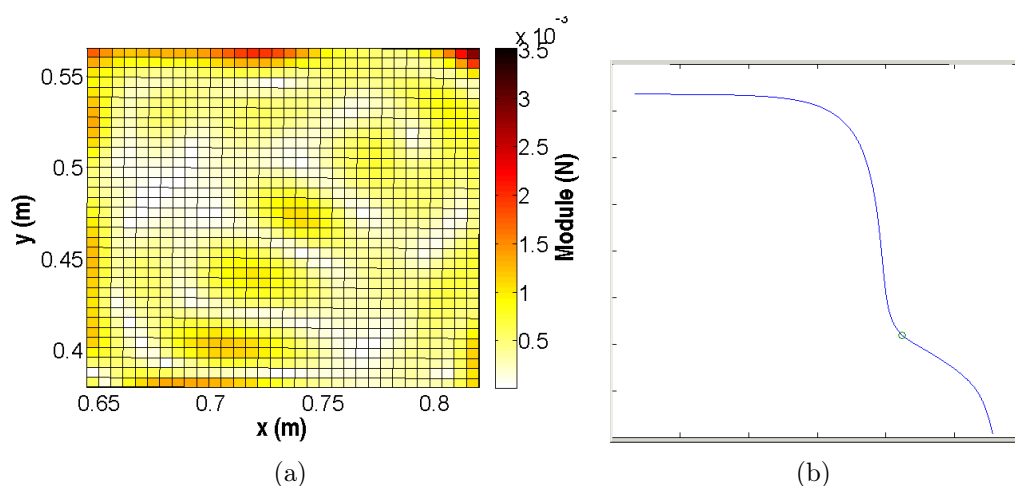


FIGURE 5.8 – Cartographie des efforts, obtenue en présence de l'entaille, à 1603Hz, avec sur-régularisation au sens de la courbe en L. (a) Cartographie des efforts ; (b) Courbe en L correspondante avec indication du niveau de régularisation (cercle vert).

La Figure 5.9 donne les résultats obtenus avec une régularisation moins sévère. La cartographie 5.9(a) est suffisamment nette pour déterminer les dimensions de l'entaille puisque l'entaille ressort de manière indiscutable et est bien localisée. On détermine visuellement une longueur d'entaille de environ 3.6 cm allant du point  $x = 0.72m, y = 0.48m$  au point  $x = 0.75m, y = 0.46m$ . Toujours d'après cette cartographie, la zone noire centrale, où la détection est la plus marquée, mesure environ 2.2cm : il s'agit de la partie traversante du défaut.

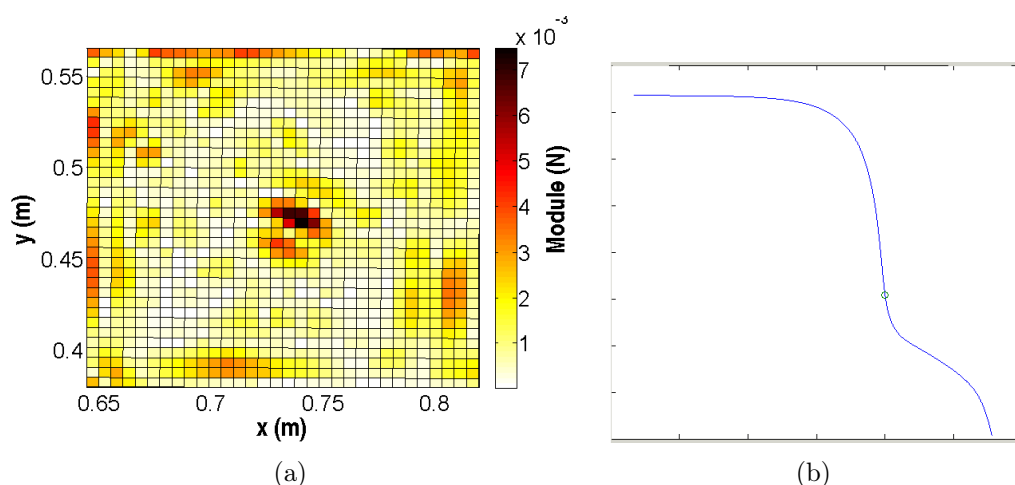


FIGURE 5.9 – Cartographie des efforts, obtenue en présence de l'entaille, à 1603Hz, avec deux niveaux de sous-régularisation au sens de la courbe en L. (a) Cartographie des efforts avec niveau de régularisation correspondant au début de la zone d'incurvation de la courbe en L ; (b) Courbe en L correspondante à (a) avec indication du niveau de régularisation (cercle vert).

La possibilité d'identifier un défaut a été mise en évidence dans cette expérimentation. Bien sûr, il s'agit ici d'un seul type de défaut et la faisabilité a été prouvée pour une fréquence où la longueur d'onde naturelle est proche de la taille du défaut à détecter. Etant donné que le défaut étudié est particulièrement bien localisé, il est clair que la régularisation employé n'est pas très bien adaptée puisqu'elle repose sur le lissage du résultat, donc sur une hypothèse de défaut "étalé". On a pu toutefois améliorer le résultat en régularisant moins fortement de manière à donner plus de contraste à l'image obtenue. La déconvolution étudiée au chapitre 4 est une autre voie d'amélioration et on peut aussi imaginer le développement d'autres algorithmes de déconvolution en prenant en compte le type de défaut à détecter (fissures, corrosion, etc.), mais elle n'a pas été encore tentée.



---

## 5.3 Synthèse

---

Ce dernier chapitre a permis d'envisager deux applications de la méthode développée au cours de cette thèse.

Dans le cadre du projet MACOVAM, l'application évidente était bien entendu l'identification de la source vibratoire "pompe à huile". Il s'agit donc d'une application "source industrielle sur banc poutre" afin de pouvoir nous comparer à la méthode RIFF. Les résultats présentés sur une pompe à palettes s'avèrent satisfaisants avec une très bonne localisation de la pompe à huile sur le banc. Malgré tout, on a pu observer un écart sur les niveaux de forces obtenus en comparaison à RIFF. Ceci est dû au fait que le maillage de mesures était orienté "RIFF" et non "Eléments Finis" induisant un modèle Eléments Finis peu représentatif du comportement de la poutre encastree. Les perspectives sont maintenant d'appliquer la méthode sur le montage classique industriel, plus complexe que le banc poutre. Cependant, ceci nécessitant plusieurs passes de mesures, il faudra trouver un moyen de stabiliser la source pompe à huile.

En ce qui concerne la deuxième application, il est intéressant de s'apercevoir que la méthode RIFF et son adaptation aux Eléments Finis peut être détournée pour l'identification de défauts. Elle offre ainsi une alternative en basses fréquences des méthodes usuelles de Contrôle Non destructifs. De plus, même si l'excitation vibratoire a été maîtrisée ici, on peut envisager d'appliquer cette même méthode à partir de mesures des vibrations d'une machine en fonctionnement en analysant les données aux fréquences d'excitation de ses sources internes. En complément des méthodes d'Emissions Acoustiques qui ne nécessitent pas la génération d'ondes acoustiques (écoute de l'apparition de défauts), cette approche pourrait alors être utilisée comme un outil de surveillance in situ dans le cadre de la maintenance prévisionnelle.

# Conclusion Générale et Perspectives

## Conclusion

---

La méthode développée et validée expérimentalement en présence de bruit s'appuie sur les étapes suivantes :

1. la définition d'un modèle Eléments Finis libre et local. La troncature des limites est possible en deuxième approche si il y a la volonté de s'affranchir des efforts apparaissant sur ces dernières,
2. optionnellement : la réduction du modèle par la méthode de Craig-Bampton [6] (zones non accessibles et non excitées),
3. la substitution des ddls non mesurables par l'utilisation de la condensation dynamique [5] (une alternative réside en l'estimation de ceux-ci par l'ajout de mesures et l'utilisation des interpolations sur le support élémentaire),
4. la réalisation des mesures,
5. la régularisation par la méthode de Tikhonov [14] couplée au principe de la courbe en L [67],
6. optionnellement : amélioration de la résolution spatiale de la cartographie de forces obtenues par déconvolution.

Un point notable est que l'étape de déconvolution peut aussi être appliquée en post-traitement de la méthode RIFF standard puisque la forme du filtre est parfaitement connue. Elle permet d'identifier plus finement le support de sommation pour obtenir l'amplitude de l'effort localisé.

Ainsi, la méthode peut :

- être appliquée dans le cas d'une structure complexe,
- être appliquée localement,
- utiliser des modèles réduits par condensation dynamique et réduction Craig-Bampton,
- s'affranchir de la vision en nombres d'ondes,
- identifier les forces dans une zone d'analyse définie,
- être très précise pour l'identification des forces ponctuelles lorsqu'on l'utilise avec un algorithme de déconvolution.

Un point important mis en évidence par ce travail est l'impossibilité de reconstruire spatialement des moments excitateurs en présence de régularisation. *A posteriori*, ce fait a fourni une hypothèse de travail pour traiter le problème inverse en ne considérant que les données relatives aux forces, que les rotations soient estimées à l'aide de mesures de déplacements supplémentaires ou condensées dynamiquement.

Nous noterons cependant que si les moments n'apparaissent plus en tant que tels, ils restent identifiables sous forme de doublets de forces de signes opposés, exactement comme pour la méthode RIFF classique.

D'un point de vue pratique, cette thèse aura été l'occasion de développer un logiciel développé sous MATLAB et s'appuyant sur la boîte à outils SDTools (Structural Dynamics Toolbox). Il permet de dérouler l'ensemble des étapes citées ci-avant à partir d'un modèle au format Nastran .dat.

Une interface associée à un modèle Eléments Finis de poutre en flexion fut également développée dans le cadre du chapitre 2.

Une application "détection de défauts" a aussi été développée. Elle permet d'afficher les résultats régularisés avec parcours de la courbe en L.

## Perspectives

---

Les poursuites de ce travail peuvent se scinder en méthodes et applications.

Pour les aspects méthodologiques, il semble intéressant de travailler sur la formulation en essayant d'accélérer la méthode par l'utilisation d'une approche modale, toujours sur la base d'un modèle local tronqué et libre. Nous nous rapprocherions alors des travaux réalisés par Corus et Balmès [36], tout en conservant l'intérêt de la vision locale de l'approche RIFF.

La méthode devrait également être testée avec des excitations hors de la flexion ainsi qu'avec des modèles volumiques, pour sortir du cadre stricte de la flexion.

Du côté de la régularisation, il serait intéressant de développer une méthode moins gourmande en temps de calcul. Nous pourrions nous appuyer sur une loi *a priori* du paramètre de régularisation en fonction de la fréquence. Egalement, nous pourrions développer une inversion adaptée au type d'excitation recherchée, à travers une formulation mixant les approches de régularisation et les algorithmes de déconvolution.

Pour les aspects applicatifs, une première suggestion serait de continuer à travailler sur l'identification en des points non mesurés, toujours à l'aide des méthodes de réduction mais en trouvant une manière de régulariser le problème (cf. CFA 2010).

Pousser l'investigation sur l'application "détection de défauts" semble également une bonne ouverture. Deux voies exploratoires semblent évidentes. La première est la caractérisation du défaut : il s'agirait de pouvoir caractériser le type de défaut, en plus de sa localisation. La seconde serait d'étendre la méthode au contexte de maintenance préventive. En effet,

d'une manière générale, la méthode inverse développée dans cette thèse est capable d'identifier la présence de défauts ou sources à des endroits non mesurés. Des efforts reconstitués aux limites des macroéléments apparaissent alors et pourraient servir de marqueurs. On peut ainsi imaginer de l'utiliser *in situ* en exploitant les résultats d'efforts reconstitués dans les zones réduites et non réduites, ainsi qu'aux frontières des zones réduites qui peuvent servir de détection d'apparitions de phénomènes sans localisation.

La faculté d'identification des forces de couplage aux limites du sous-domaine étudié pourrait être utilisée comme technique d'analyse non intrusive. À terme, nous pourrions étudier la possibilité de mesurer par ce biais les facteurs de couplage de la méthode SEA. Après les multiples moyennages de la SEA, la représentation des moments sous forme de forces ne devrait pas poser de problèmes.

La méthode pourrait être utilisée comme un outil permettant de remonter le chemin vibratoire dans les analyses de contributions au bruit des voies de passage. Comme la méthode est capable d'identifier les efforts aux limites, elle est également capable d'identifier les flux d'énergie aux limites. Ainsi, en partant d'un lieu d'écoute, on peut localiser les voies de transfert aux limites du lieu d'écoute et remonter zone par zone les voies de transfert d'énergie, depuis l'acoustique jusqu'à la source de vibrations.

Enfin, la méthode d'identification pourrait être testée sur différentes sources telles que :

- dans le contexte du pneu/chaussée : l'identification des efforts de contacts ou recalage des modèles,
- dans le contexte du déploiement des cahiers des charges au niveau des sources : l'application de la méthode afin de mettre sous contrôle *in situ* des organes fortement couplés, comme c'est par exemple le cas des lignes d'échappement couplées aux moteurs automobiles, ou encore des valises de refroidissement mal découplées des zones avant de caisses automobiles,

Enfin, comme le suggère le projet MACOVAM, la méthode d'identification pourrait être testée sur les différents auxiliaires moteurs, montés sur bancs, mais aussi montés sur moteur lorsque l'accessibilité aux points de raccordement des organes étudiés est possible. La méthode est par ailleurs assez générale pour imaginer son utilisation dans d'autres contextes où les efforts d'excitations sont difficiles d'accès. Par exemple, on peut envisager l'identification des efforts de couplage entre structures *in situ* ou les efforts liés aux contacts, tels que les frottements, grésillements, contacts pneu-chaussée, le couplage entre lignes d'échappement et moteur, etc.

# Bibliographie

- [1] C. PÉZERAT : *Méthode d'identification des efforts appliqués sur une structure vibrante, par résolution et régularisation du problème inverse*. Thèse de doctorat, INSA-LYON, n<sup>o</sup> d'ordre 96 ISAL 0109, 1996.
- [2] C. RENZI et C. PÉZERAT : Identification of dynamic excitations on a structure using displacement measurements injected in a finite element model. *In Proceedings of NOVEM 2009*, 2009.
- [3] C. RENZI, C. PÉZERAT et J.-L. GUYADER : Vibration sources identification using vibratory measurements injected in a local finite element model. *In Proceedings of ISMA*, 2010.
- [4] C. RENZI, C. PÉZERAT et J.-L. GUYADER : Identification des sources vibratoires en utilisant un opérateur éléments finis localement (identification of vibration sources using a local finite elements operator). *In Proceedings of CFA*, 2010.
- [5] A. Y. T. LEUNG : An accurate method of dynamic condensation in structural analysis. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 12:1705–1715, 1978.
- [6] R. R. J. CRAIG et M. C. C. BAMPTON : Coupling of structures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6 (7):1313–1319, 1968.
- [7] P.-M. GUERITEY : *La méthodes des Eléments Finis en Mécanique*. ECAM, 2003.
- [8] J.-F. IMBERT : *Analyse des structures par éléments finis*. CEPADUES ed, 1979.
- [9] R. H. GALLAGHER : *Finite Element Analysis : Fundamentals*. Prentice Hall College Div, 1975.
- [10] O.-C. ZIENKIEWICZ et R.-L. TAYLOR : *The Finite Element Method, Volume 2*. Elsevier, 2000.
- [11] Bulletin technique acoustique vibrations seconde partie, Mars 1991.
- [12] Bulletin technique acoustique vibrations première partie, Mars 1991.
- [13] J. HADAMARD : Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, -:49–52, 1902.
- [14] A. TIKHONOV et V. ARSENINE : *Méthodes de résolution de problèmes mal posés (Solution of ill-posed problems)*. Moscou : Mir, 1976.
- [15] P. HANSEN : *Rank-Deficient and Discrete ill-posed problems*. SIAM, 2004.

- [16] B.-J. DOBSON et E. RIDER : A review of the indirect calculation of excitation forces from measured structural response data. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 204:69–75, 1990.
- [17] Karl K. STEVENS : Force identification problems - an overview. *In SEM Spring Conference on Experimental Mechanics, Houston, TX, USA*, 1987.
- [18] dr. IR. G. DESANGHERE : Quantification of noise and vibrations sources : state of the art. *In Proceeding of ISMA*, 1988.
- [19] M. BLAU : Inverse force synthesis : State of the art and future research. *In Proceeding of Internoise*, 2000.
- [20] G. DESANGHERE et R. SNOEYS : Indirect identification of excitation forces. *In Proceedings of the 10th International Seminar on Modal Analysis, Katholieke University, Leuven, Belgium*, 1985.
- [21] N. OKUBO, S. TANABE et T. TATSUNO : Identification of forces generated by a machine under operating conditions. *In Proceedings of IMAC 3, Orlando, Florida*, 1985.
- [22] A.N. THITE et D.J. THOMPSON : The quantification of structure-borne transmission paths by inverse methods. part 1 : Improved singular value rejection methods. *Journal of Sound and Vibration*, 264:411–431, 2003.
- [23] A.N. THITE et D.J. THOMPSON : The quantification of structure-borne transmission paths by inverse methods. part 2 : Use of regularization techniques. *Journal of Sound and Vibration*, 264:433–451, 2003.
- [24] Q. LECLÈRE, C. PÉZERAT, B. LAULAGNET et L. POLAC : Application of indirect measurement techniques to an operating diesel engine. *In Proceedings of ISMA*, 2004.
- [25] Q. LECLÈRE : *Etude et développement de la mesure indirecte d'efforts. Application à l'identification de sources internes d'un moteur Diesel*. Thèse de doctorat, INSA-LYON, n° d'ordre 83 ISAL 0085, 2003.
- [26] Q. LECLÈRE, C. PÉZERAT, B. LAULAGNET et L. POLAC : Indirect measurement of main bearing loads in an operating diesel engine. *Journal of Sound and Vibration*, 286(1-2):p341–361, 2005.
- [27] E. PARLOO, P. VERBOVEN, P. GUILLAUME et M. Van OVERMEIRE : Force identification by means of in-operation modal models. *Journal of Sound and Vibration*, 262:161–173, 2003.
- [28] P. GUILLAUME, E. PARLOO et G. De SITTE : Source identification from noisy response measurements using an iterative weighted pseudo-inverse approach. *In Proceeding of ISMA*, volume IV, 2002.
- [29] P. GUILLAUME, E. PARLOO, P. VERBOVEN et G. De SITTE : An inverse method for the identification of localized excitation sources. *In Proceeding of IMAC*, 2002.
- [30] J.-M. STARKEY et G.-L. MERRIL : On the ill-conditioned nature of indirect force-measurement techniques. *Journal of Modal Analysis*, -:103–108, 1989.

- [31] C. HAUSER, B. WALZ, P. MAINÇON et C. BARNARDO : Application of inverse fem to earth pressure estimation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44:705–714, 2008.
- [32] H.-R. BUSBY et D.-M. TRUJILLO : Optimal regularization of an inverse dynamics problem. *Computers & structures*, 63(2):243–248, 1997.
- [33] S.R. IBRAHIM, A. FREGOLENT et A. SESTIERI : Structural force identification at unmeasured locations. *In Proceedings of IMAC 14*, 1996.
- [34] P.-W. MÖLLER : Load identification through structural modification. *Journal of Applied Mechanics*, 66:236–241, 1999.
- [35] J. D’CRUZ, J. D. C. CRISP et T. G. RYALL : On the identification of a harmonic force on a viscoelastic plate from response data. *Journal of Applied Mechanics*, 59:722–729, 1992.
- [36] M. CORUS et E. BALMÈS : A priori verification of local fe model based on force identification. *In Proceedings of ISMA 2004*, 2004.
- [37] M. CORUS, O. SAUVAGE et E. BALMÈS : Estimation of transmitted loads using experimental substructuring. *In Proceedings of IMAC*, 2008.
- [38] M. CORUS : Force identification using a statically completed reduced model deriving from tests. *Journal of Sound and Vibration*, 329:4149–4165, 2010.
- [39] E. BALMÈS : Theoretical course notes : Methods for vibration design and validation. *In Ecole Centrale Paris*, 1997-2008.
- [40] C. PÉZERAT et J.-L. GUYADER : Two inverse methods for localization of external sources exciting a beam. *Acta Acustica*, 3:p1–10, 1995.
- [41] C. PÉZERAT et J.-L. GUYADER : Localization of mechanical sources exciting a beam using a inverse method. *In Vibration and Noise’95, Venice, Italy*, 1995.
- [42] C. PÉZERAT et J.-L. GUYADER : Vibroacoustic source identification from measured structure response and resolution of the inverse problem. *In ASME Design Engineering Technical Conferences, ASME, Sacramento, California, Etats-Unis d’Amérique*, 1997.
- [43] C. PÉZERAT et J.-L. GUYADER : Force analysis technique : Reconstruction of force distribution on plates. *Acustica united with Acta Acustica*, 86:p322–332, 2000.
- [44] C. PÉZERAT et J.-L. GUYADER : Localisation d’efforts appliqués sur des structures minces ; régularisation du problème inverse. *Revue Française de Mécanique*, 1996:p49–55, 1996.
- [45] C. PÉZERAT et J.-L. GUYADER : Identification de sources vibratoires par résolution inverse filtrée fenêtrée. *In 4ième Congrès Français d’Acoustique, Marseille, France*, 1997.
- [46] M.-C. DJAMAA, N. OUELAA, C. PÉZERAT et J.-L. GUYADER : Mechanical radial force identification of a finite cylindrical shell by an inverse method. *Acta Acustica united with Acustica*, 92(3):p398–405, 2006.
- [47] M.-C. DJAMAA, N. OUELAA, C. PÉZERAT et J.-L. GUYADER : Reconstruction of a distributed force applied on a thin cylindrical shell by an inverse method and spatial filtering. *Journal of Sound and Vibration*, 301(3-5):p560–575, 2007.

- [48] M.-C. DJAMAA, N. OUELAA, C. PÉZERAT et J.-L. GUYADER : Identification of external forces exciting finite thin cylindrical baffled shell. *In ISMA, Leuven, Belgique*, 2002.
- [49] C. PÉZERAT : Power source characterisation using the riff test bench. *In Proceedings of Euronoise*, 2001.
- [50] C. PÉZERAT et J.-L. GUYADER : Identification of vibration sources. *Applied Acoustics*, 61:309–324, 2000.
- [51] C. PÉZERAT, T. LOYAU et J.-L. GUYADER : Characterisation of vibration sources on a set of plates using the riff technique. *Noise control Engineering Journal*, 50(2):398–405, 2002.
- [52] A.-T. MOORHOUSE, C. PÉZERAT, G. PAVIC et T. ALLEVARO : Independant characterisation of a structure-borne sound source using riff technique. *In Proceedings of Internoise*, 2001.
- [53] C. PÉZERAT, J.-L. GUYADER, P. GONZALES et F. BESSACE : Détermination des efforts injectés par un composant sur un ensemble de plaques standardisées. *In Colloque "Concevoir plus silencieux : comment choisir ses composants"*, Nancy, France, 1999.
- [54] C. PÉZERAT et J.-L. GUYADER : Equation of motion analysis. *In Euronoise, Munich, Allemagne*, 1998.
- [55] C. PÉZERAT, Q. LECLÈRE, N. TOTARO et M. PACHEBAT : Identification of vibration excitations from acoustic measurements using near field acoustic holography and the force analysis technique. *Journal of Sound and Vibration*, 326(3-5):540–556, 2009.
- [56] F. CHEVILLOTTE, Q. LECLERE, N. TOTARO, C. PÉZERAT, P. SOUCHOTTE et G. ROBERT : Identification d'un champ de pression pariétale induit par un écoulement turbulent à partir de mesures vibratoires. *In 10ème Congrès Français d'Acoustique, Lyon*, 2010.
- [57] Q. LECLERE et C. PÉZERAT : Vibration source identification using corrected finite difference schemes. *Journal of Sound and Vibration*, à paraître, 2012.
- [58] A. FREGOLENT et A. SESTIERI : Force identification from vibration measurements in the wavenumber domain. *In Proceeding of ISMA*, 1996.
- [59] Y. ZHANG et J.-A. MANN III : Examples using structural intensity and the force distribution to study vibrating plates. *Journal of the Acoust*, 99:354–361, 1996.
- [60] Y. ZHANG et J.-A. MANN III : Measuring the structural intensity and force distribution in plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 99:345–353, 1996.
- [61] Y. LIU et W. STEVE SHEPARD JR. : Reducing the impact of measurement errors when reconstructing spatial dynamic forces. *Journal of Vibration and Acoustics*, 128:586–593, 2006.
- [62] Q. LECLÈRE : *Etude et développement de la mesure indirecte d'efforts. Application à l'identification des sources internes d'une moteur Diesel (Force indirect measurements method : studies and developments. Application to diesel engine internal sources identification.)*. Thèse de doctorat, INSA-LYON, 83 ISAL 0085, 2003.



- [63] C. PÉZERAT et J.-L. GUYADER : Localisation d'efforts appliqués sur des structures minces ; régularisation du problème inverse. (identification of forces applied to thin structures ; regularisation of the inverse problem.). *Revue Française de Mécanique*, 1996:p49–55, 1996.
- [64] E. BALMÈS : Sensors, degrees of freedom, and generalizes modeshape expansion methods. *In Proceedings of IMAC*, 1999.
- [65] J.-L. GUYADER : *Vibration in Continuous Media*. iSTE, 2006.
- [66] C. PÉZERAT : *Méthode d'identification des efforts appliqués sur une structure vibrante, par résolution et régularisation du problème inverse (Identification of forces applied to a vibrating structure by the resolution and regularisation of the inverse problem)*. Thèse de doctorat, INSA-LYON, 96 ISAL 0109, 1996.
- [67] P.C. HANSEN et D.P. O'LEARY : The use of the l-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 14:1487–1503, 1993.
- [68] M.H.A. JANSSENS et J.W. VERHEIJ : A pseudo-forces methodology to be used in characterization of structure-borne sound sources. *Applied Acoustics*, 61(3):285–308, 2000.
- [69] J.-L. GUYADER : *Vibrations des milieux continus*. Lavoisier, 2002.
- [70] E. BALMÈS : Sdt, 2011.
- [71] C. RENZI, C. PÉZERAT et J.-L. GUYADER : Vibratory source identification by using the finite element model of a subdomain of a flexural beam. Under review by JSV.
- [72] R. J. GUYAN : Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 3 (2):380, 1965.
- [73] E. BALMÈS : *Modèles expérimentaux complets et modèles analytiques réduits en dynamique des structures (Complete experimental models and reduced analytical models in structural dynamics)*. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1997.
- [74] D.-U. NOISEUX : Measurement of power flow in uniform beams and plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 47:238–247, 1970.
- [75] G. PAVIC : Measurement of structure borne wave intensity, part i : Formulation of the methods. *Journal of Sound and Vibration*, 49:221–230, 1976.
- [76] Thomas F. BROOKS et William M. HUMPHREYS : A deconvolution approach for the mapping of acoustic sources (damas) determined from phased microphone arrays. *Journal of Sound and Vibration*, 294:856–879, 2006.
- [77] J.-C. PASCAL et J.-F. LI : Resolution improvement of data-independant beamformers. *In Proceedings of Internoise*, 2007.
- [78] J.-C. PASCAL : Traitement d'optimisation statistique et méthodes de déconvolution pour la formation de voies. *In GdR Acoustique des transports*, May 2008.
- [79] W.H. RICHARDSON : Bayesian-based iterative method of image restoration. *Journal of Optical Society of America*, 62:55–59, 1972.

- [80] L.B. LUCY : An iterative technique for the rectification of observed distributions. *Astronomical Journal*, 79:745–754, 1974.
- [81] J.-J. CHRISTANSEN et J. HALD : Beamforming. *Bruel & Kjaer Technical Review*, 1:1–48, 2004.
- [82] S. OERLEMANS, P. SIJTSMA et B. MENDEZ LOPEZ : Localisation and quantification of noise sources on a wind turbine. *Journal of sound and vibrations*, 299:869–883, 2007.
- [83] M.-M. BOONE, N. KINNEGING et T. VAN DER DOOL : Two-dimensional noise source imaging with a t-shaped microphone cross array. *Journal of the Acoustical Society of America*, 108:2884–2890, 2000.
- [84] André JALOBEANU : *Modèles, estimation bayésienne et algorithmes pour la déconvolution d’images satellitaires et aériennes (Models, Bayesian estimation and algorithms for the deconvolution of satellites and aerial images)*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2001.
- [85] A. KIRSCH : An introduction to the mathematical theory of inverse problems. *Applied Mathematical Sciences.*, 120:–, 1996.
- [86] R. MOLINA, J. NUÑEZ et F.J. CORTIJO : Image restoration in astronomy : a bayesian perspective. *IEEE Signal Processing Magazine*, March:11–29, 2001.
- [87] R. ALBRECHT, R. N. HOOK et H. A. BUSHOUSE : Positive iterative deconvolution in comparison to richardson-lucy like algorithms. In Astronomical Society of the PACIFIC., éditeur : *Astronomical Data Analysis Software and Systems*, volume 145, pages 496–499, 1998.
- [88] E. THIÉBAUT : Introduction to image reconstruction and inverse problems. In SPRINGER, éditeur : *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Optics and Astrophysics*, volume 198, pages 397–421, 2002.