HAL open science

L'instabilité modulationnelle en présence de vent et d'un courant cisaillé uniforme

Roland Thomas

▶ To cite this version:

Roland Thomas. L'instabilité modulationnelle en présence de vent et d'un courant cisaillé uniforme. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Aix-Marseille Université, 2012. Français. NNT : . tel-00716089

HAL Id: tel-00716089

https://theses.hal.science/tel-00716089v1

Submitted on 9 Jul 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale : Sciences pour l'ingénieur : Mécanique, Physique, Micro et Nanoélectronique

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'AIX MARSEILLE

Spécialité : Mécanique des Fluides

Préparée à l'**I**nstitut de **R**echerche sur les **P**hénomènes **H**ors **É**quilibre

Présentée et soutenue par

Roland THOMAS

le 21 mars 2012

L'instabilité modulationnelle en présence de vent et d'un courant cisaillé uniforme

Dirigée par Christian KHARIF
co-dirigée par Hubert Branger

Le jury est composé de :

BRANGER	Hubert	co-Directeur	Chargé de Recherches C.N.R.S.
CHIKHAOUI	Abdelaziz	Examinateur	Professeur des Universités Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels
FRANCIUS	Marc	Examinateur	Maître de Conférences Université du Sud - Toulon - Var
KHARIF	Christian	Directeur	Professeur des Universités École Centrale Marseille
MANNA	Miguel	Examinateur	Professeur des Universités Université Montpellier 2
PELINOVSKY	Efim	Examinateur	Professeur des Universités State Technical University, Nizhny Novgorod, Russia
REY	Vincent	Rapporteur	Professeur des Universités Université du Sud - Toulon - Var
TALIPOVA	Tatiana	Rapporteur	Professeur des Universités Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod, Russia

Remerciements

- Je suis très honoré d'avoir rendu compte de mes travaux devant un jury présidé par Monsieur Aziz Chikhaoui qui est d'une infinie amabilité et qui a tout fait pour me mettre à l'aise le jour de ma soutenance.
- J'exprime toute ma gratitude à Christian Kharif qui a eu la patience et la compréhension nécessaires pour encadrer un étudiant aussi atypique que moi ; je salue en particulier sa grande disponibilité. Il n'a pas ménagé son temps et ses efforts pour m'encadrer et m'aider dans mon projet. Je devrais dire dans *notre* projet.
- Je remercie aussi Hubert Branger qui n'a pas été seulement mon collaborateur pour ce qui concerne le volet expérimental de cette thèse, mais aussi un important soutien moral et je salue sa perpétuelle bonne humeur.
- Je remercie aussi Miguel Manna pour les conversations très enrichissantes que nous avons pu avoir pendant ces années, et pour sa gentillesse.
- Je remercie tous les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer mon travail.
- Je remercie mon épouse Marie-Anne d'avoir accepté de bon cœur de lourds sacrifices pendant plusieurs années. Bien que privée de beaucoup de sorties et ayant dû souvent voyager comme une célibataire, elle ne s'est jamais plainte.
- Je remercie Olivier Fiat qui est probablement à l'origine de mon idée de me lancer dans cette entreprise, et qui m'a encouragé.
- Merci aussi à Lionel Paumond qui a dû subir un certain déplacement d'équilibre dans notre travail en commun, je savais sans aucun doute que je pouvais compter sur lui.
- Je souhaite aussi remercier René Faure Gignoux sur qui j'ai pu compter aussi pour que mes élèves ne soient pas abandonnés lors de ma soutenance.
- Merci à Laurent Pierre, la bonne adresse quand on a besoin d'une vraie transformation de Fourier ou d'un algorithme vraiment efficace de programmation.
- Merci à mon entourage, famille, amis et collègues, qui m'ont soutenu et se sont intéressés à mon travail, parfois de façon aussi discrète qu'affectueuse.
- La Diva : ce restaurant de Plan de Cuques vous propose un cadre très sympathique. L'intérieur est climatisé mais la tonnelle à l'extérieur est aussi très agréable. La cuisine est très variée et excellente. Les prix sont très modérés, la gentillesse, la disponibilité et le sourire du personnel sont offerts sans supplément. Ce restaurant est donc recommandé pour contrebalancer les désagréments et autres déceptions toujours possibles dans la confection d'une thèse. Accès par le bus 142 ou en voiture (parking possible).

Table des matières

I Introduction **5**
- I.1 L'instabilité modulationnelle . . . 5
- I.2 L'équation non linéaire de Schrödinger (NLS) . . . 6
- I.3 Modifications de l'équation NLS . . . 6
- I.4 L'action du vent sur les vagues . . . 7
- I.5 La vorticité . . . 8

II Équations de base **11**
- II.1 Les hypothèses . . . 11
- II.2 L'équation de Laplace . . . 12
- II.3 La condition dynamique . . . 13
- II.4 La condition cinématique . . . 14
- II.5 La condition au fond . . . 15
- II.6 Les équations de l'écoulement . . . 15
- II.7 L'équation NLS classique . . . 15

III NLS avec vent et dissipation **19**
- III.1 Le forçage : le modèle de Miles . . . 20
- III.2 La dissipation . . . 21
- III.3 L'équation NLS forcée . . . 21
- III.4 Onde de Stokes solution de l'équation NLS forcée . . . 23
- III.5 Étude de la stabilité linéaire... . . . 23
- III.6 Étude numérique de l'évolution non linéaire . . . 28
- III.7 L'équation de Dysthe . . . 30
- III.8 Volet expérimental . . . 36
- III.9 Conclusions . . . 53

IV L'équation NLS avec vorticité constante **55**
- IV.1 Établissement de l'équation . . . 56
- IV.2 Étude de stabilité . . . 70
- IV.3 Quelques résultats . . . 72
- IV.4 Vorticité et breathers . . . 76

V Conclusions et perspectives **79**

A Annexes **81**
- A.1 Publication dans le « Journal of Fluid Mechanics » . . . 81
- A.2 Le modèle de Miles . . . 94
- A.3 Onde de Stokes dans un courant cisaillé uniforme . . . 103
- A.4 Calculs menant à vNLS . . . 117

A.5 Publication dans le journal « Physics of Fluids » 144

Bibliographie **166**

Chapitre I

Introduction

Liste des symboles

- k est le nombre d'onde d'un train de vagues
- λ est sa longueur d'onde ; $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$
- ω est sa pulsation
- T est sa période temporelle : $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$
- x et y sont les coordonnées spatiales horizontales
- z est la coordonnée spatiale verticale
- $z = \zeta(x, y, t)$ est l'équation de la surface libre
- P_a est la pression atmosphérique
- ρ_a est la masse volumique de l'air
- s est le coefficient d'abri de Jeffreys
- U_∞ désigne la vitesse d'écoulement à 10 m au dessus de l'eau

I.1 L'instabilité modulationnelle

L'instabilité modulationnelle est un phénomène fondamental découvert indépendamment par Lighthill [32] en 1965, par Benjamin & Feir en 1967, par Zakharov (1968) et par Whitham en 1974.

Zakharov & Ostrovsky [51] ont assemblé et synthétisé les débuts de cette instabilité qui apparaît dans des domaines variés de la physique comme l'hydrodynamique (c'est dans ce contexte que nous l'étudions) mais aussi l'optique non linéaire, la théorie des plasmas, les rayons laser et les lignes de transmission électromagnétiques par exemple.

Benjamin & Feir [2] ont étudié l'interaction entre un train de vagues de fréquence donnée et des perturbations de fréquences proches. L'analyse de la superposition de ces ondes de fréquences différentes mais voisines mène à une démonstration de l'instabilité du train de vagues. Des expériences des mêmes auteurs ont validé cette étude. Nekrasov [40] en 1921 et Levi-Civita [31] en 1925 ont prouvé indépendamment la convergence de séries définissant des ondes de Stokes. Les expériences tentant de développer des ondes de Stokes régulières dans un canal à houle ont abouti à la constatation que ces trains de vagues se désintègrent à partir d'une certaine distance et que la régularité du batteur n'en est pas responsable. Ces solutions sont en fait instables à des perturbations de nombres d'onde voisins de celui de l'onde perturbée. Si l'onde initiale a la pulsation ω et si la perturbation possède deux composantes de pulsations voisines, il apparaît un phénomène de résonance dû à la non-linéarité des équations. Benjamin & Feir [2] considèrent une onde d'amplitude a dont la phase est $\zeta = kx - \omega t$ où k est le nombre d'onde et ω la pulsation. Une perturbation est ajoutée avec deux composantes de pulsations et de nombres

d'ondes proches, de phases

$$\begin{cases} \zeta_1 = k(1+\kappa)x - \omega(1+\delta)t - \gamma_1 \\ \zeta_2 = k(1-\kappa)x - \omega(1-\delta)t - \gamma_2 \end{cases} \tag{I.1}$$

On suppose que les amplitudes ε_1 et ε_2 de ces composantes de la perturbation vérifient $\varepsilon_i \ll a$ et naturellement que $\kappa \ll 1$ et $\delta \ll 1$; γ_1 et γ_2 sont *a priori* deux déphasages quelconques. L'interaction non linéaire entre ces perturbations et l'onde de Stokes fait apparaître (entre autres) des composantes dont les phases sont

$$\begin{cases} 2\zeta - \zeta_1 = \zeta_2 + (\gamma_1 + \gamma_2) \\ 2\zeta - \zeta_2 = \zeta_1 + (\gamma_1 + \gamma_2) \end{cases} \tag{I.2}$$

et dont les amplitudes sont de l'ordre de $a^2\varepsilon_i$. S'il se trouve que $\gamma_1 + \gamma_2$ tend vers zéro (ou vers un multiple de π) alors une résonance va s'installer entre ces deux composantes qui vont s'amplifier mutuellement à un rythme exponentiel. C'est le principe de l'instabilité modulationnelle.

Benjamin [4] a repris ce travail en profondeur finie et a déterminé par le calcul un seuil critique $kh = 1.363$ où k est le nombre d'onde d'un train de vagues et h la profondeur. Si kh est supérieur à ce seuil l'instabilité modulationnelle peut se développer. Si kh est inférieure, elle ne peut apparaître.

I.2 L'équation non linéaire de Schrödinger (NLS)

L'équation non linéaire de Schrödinger (NLS) gouverne l'évolution spatiale et temporelle de l'enveloppe d'un train d'ondes faiblement non-linéaire et faiblement dispersif. Elle a été établie en profondeur infinie par Zakharov en 1968, puis en profondeur finie par Hasimoto & Ono [15] en 1971. Davey & Stewartson[10] ont prolongé ce travail dans un modèle tri-dimensionnel en 1973. Ils obtiennent un système de deux équations couplées, qui se ramène à l'unique équation NLS quand on supprime une dimension. Nous avons refait entièrement le calcul de Davey & Stewartson, avec les termes correspondant au vent et à la viscosité, afin de justifier l'adjonction des termes linéaires de dissipation et de forçage. Nous avons encore repris totalement ce calcul dans le contexte d'une vorticité constante, en deux dimensions, dans le chapitre IV. Notons que Benney & Roskes [3] ont aussi établi l'équation NLS.

I.3 Modifications de l'équation NLS

Segur, Henderson, Carter, Hammack, Li, Pheiff & Socha [44] ont étudié l'influence de la dissipation sur l'instabilité modulationnelle. Ils sont arrivés à démontrer par une étude de stabilité linéaire, puis par une étude de stabilité non linéaire, que la prise en compte de la viscosité, aussi faible soit-elle, venait à bout de l'instabilité de Benjamin-Feir. Évidemment, cette action n'est pas instantanée ; c'est-à-dire que la viscosité apporte une stabilité qui ne peut s'apprécier que sur la durée. La base de cette étude est une équation NLS modifiée par l'adjonction d'un terme linéaire dissipatif.

Leblanc [30] s'est intéressé à l'effet du vent sur des vagues de faibles cambrures. Il a adopté le modèle de Miles [37] qui est bien adapté dans ce cas de figure. Il arrive aussi à une équation NLS avec un terme additionnel. Comme dans l'équation utilisée par Segur et al., ce terme est linéaire. C'est cependant un terme de forçage, ce qui laisse prévoir que l'effet du vent sur le train de vagues est une amplification de l'instabilité.

Nous avons établi aussi une équation NLS forcée, prenant en compte à la fois la viscosité, comme Segur et al. [44] et le vent selon le modèle de Miles [37] comme Leblanc [30]. Nous sommes

arrivés à la conclusion que les deux termes linéaires s'additionnent et peuvent se neutraliser, mais que cette addition n'est pas si simple qu'elle pourrait le paraître puisque le terme représentant l'influence du vent dépend, par l'intermédiaire du modèle de Miles, de l'âge des vagues, alors que le terme visqueux en est indépendant. Nous le verrons dans le chapitre III.

L'équation NLS est très commode en pratique car elle permet d'effectuer des simulations à partir d'une équation aux dérivées partielles unique et relativement simple. L'utilisation des équations de base demande beaucoup plus de travail informatique. Le revers de la médaille est que l'équation NLS a un domaine de validité limité au domaine faiblement non linéaire et d'une bande de fréquences étroite. La nonlinéarité est prise en compte par le terme cubique, mais l'équation NLS est obtenue par exemple par la méthode des échelles multiples, c'est-à-dire par des développements limités par rapport à la cambrure. La validité de ces développements est soumise à de faibles valeurs de la cambrure, disons au plus 10%.

Si on veut disposer de l'avantage que représente une équation monolithique (ou de deux équations couplées comme celles de Davey & Stewartson) mais avec un domaine de validité plus étendu en cambrure, une solution consiste à reprendre le travail de l'établissement de l'équation NLS avec un ordre de plus dans les développements. C'est ce qu'a fait Dysthe [13]. Il a refait les calculs à l'ordre 4 pour obtenir une équation plus précise et que nous utiliserons dans des simulations (section III.7).

Johnson [24] a établi une équation NLS dans le contexte d'un écoulement bidimensionnel en présence d'un courant cisaillé arbitraire. Cela représente de très lourds calculs, qu'il vérifie à l'arrivée en retrouvant dans le cas d'une vorticité nulle une équation NLS standard. Il fournit la condition de stabilité classique $\hat{\alpha}\hat{\beta} < 0$ où $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont respectivement les coefficients du terme dispersif et du terme non linéaire de l'équation NLS établie en présence de vorticité. Signalons que $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont des coefficients extrêmement compliqués qui dépendent du nombre d'onde de la porteuse et de la loi qui donne le courant cisaillé $U(z)$ en fonction de z. Il effectue aussi une vérification dans l'approximation des vagues longues. Ses résultats sont très compliqués et ne sont, selon lui-même, exploitables que numériquement. Notre travail, avec une vorticité constante, sera évidemment beaucoup plus simple en comparaison. Il permettra l'étude complète de la stabilité linéaire d'une onde de Stokes sur un courant cisaillé uniforme.

I.4 L'action du vent sur les vagues

Chacun se rend bien compte en observant la mer un jour de tempête que l'énergie du vent peut se transmettre aux vagues. Il reste à préciser de quelle façon ce transfert se produit, et à mesurer ce transfert d'énergie en fonction de l'intensité du vent et de la rugosité de la surface.

Helmholtz [16] en 1868 et Kelvin [28] en 1871 ont travaillé sur la stabilité de l'interface entre deux courants cisaillés, mais leurs résultats n'ont pas été en conformité avec l'expérience, en particulier concernant le seuil d'apparition des vagues.

Les études plus précises sur cette question ont commencé en 1924 avec Jeffreys [22],[23] puis continué dans les années 50 avec Phillips [43], et Miles [37].

Le modèle de Jeffreys [22] part du principe que les vagues constituent un obstacle à l'écoulement du vent. Le côté de la vague au vent reçoit le vent de façon frontale, alors que le côté sous le vent est abrité, ce qui crée une différence de pression, donc une force exercée sur la vague. Les couches d'air sont *a priori* laminaires, mais sont déformées par la présence des vagues et à partir d'une certaine cambrure, on peut constater l'existence de décollements de la couche limite sur la face sous le vent des vagues. Ce décollement provoque une surpression alors que le rattachement de la même couche sur le côté au vent de la vague suivante produit au contraire une surpression. La différence de pression ainsi créée s'exerçant sur la surface des vagues entraîne alors une force qui transmet l'energie du vent à l'écoulement de l'eau. Des arguments physiques et une analyse

dimensionnelle ont abouti à une expression de la pression atmosphérique donnée par

$$P_a = \rho_a s (U_\infty - c)^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \tag{I.3}$$

où ρ_a est la masse volumique de l'air, s le coefficient d'abri, U_∞ la vitesse du vent, c la vitesse de phase de la vague et ζ l'élévation de la surface. Ce modèle n'a pas semblé bien correspondre aux expérimentations à ses débuts. En effet, les mesures de différences de pressions faites sur des profils rigides imitant le profil des vagues ont débouché sur des calculs de transfert d'énergie dont l'ordre de grandeur ne correspondait pas aux expériences. De plus, ce modèle n'explique pas la formation des vagues quand le vent souffle sur une mer initialement au repos. Ce mécanisme est cependant le premier à expliquer le déphasage nécessaire entre la pression atmosphérique et l'élévation de la surface océanique pour que le transfert d'énergie soit possible entre le vent et les vagues. Touboul (2006) [48] et Kharif (2008) [25] ont modifié la théorie de Jeffreys en introduisant un seuil critique de pente des vagues au delà duquel la relation (I.3) s'applique.

Phillips [43] a développé un modèle où l'écoulement de l'air est turbulent et celui du fluide est potentiel. La turbulence crée des variations de pression aléatoires qui créent des vagues. Naturellement, les variations de pression ont alors la même fréquence spatiale que les vagues naissantes, d'où un phénomène de résonance qui apparaît et une augmentation d'amplitude. L'expérience a confirmé que ce modèle était assez performant pour justifier quantitativement la formation des vagues, mais qu'une fois les vagues formées, il ne rend plus compte fidèlement de l'énergie transférée entre le vent et les vagues.

Le modèle de Miles s'appuie sur une analyse de stabilité d'écoulements parallèles, aussi bien dans l'air que dans l'eau. Il considère l'air comme incompressible et non visqueux et dont la vitesse suit un profil logarithmique (approche quasi-laminaire). La turbulence est négligée. Un mécanisme de formation et de croissance des vagues est l'interaction résonante entre celles-ci et les fluctuations de pression induites. L'amplification des vagues suit alors une loi exponentielle. Janssen [21] a exposé le calcul menant au modèle de Miles. Nous le détaillons en annexe.

Le modèle de Jeffreys et celui de Miles se partagent les préférences des chercheurs actuellement, le premier étant mieux adapté aux vagues d'amplitude plus conséquentes et le deuxième aux vagues de faible amplitude.

Comme Leblanc [30], nous avons adopté le modèle de Miles [37]. Il fournit une expression de la pression qu'on introduit dans les équations de base avant d'établir l'équation NLS. Lundgren [35] a justifié la façon dont la viscosité modifie la condition cinématique et la condition dynamique ; nous avons adopté ses conclusions.

I.5 La vorticité

Un deuxième effet du vent sur les vagues est l'entraînement d'une couche d'eau en surface. La viscosité, même faible, transmet ce mouvement en créant un courant cisaillé. On peut simplement modéliser cette configuration par une décroissance de la vitesse linéaire en fonction de la profondeur, et donc d'un vecteur vorticité constant. Nous étudierons la stabilité de ce genre de configuration. Un courant cisaillé de ce type peut aussi être créé par des courants de marée où la friction de l'eau sur le fond peut induire ce phénomène.

Des études ont déjà été faites avec une vorticité non constante. Elles mènent souvent à des résultats très complexes et pas très concrets et débouchent en général sur des traitements numériques à cause de cette complexité. Par exemple Choi [6] utilise une transformation conforme qui projette la surface du fluide sur une droite (dans un modèle 2-D) et arrive à la conclusion que l'enveloppe d'un train de vagues sujet à l'instabilité modulationnelle croît en amplitude ou décroît selon que la vorticité est positive ou négative (en comparaison avec le sens de propagation des vagues).

Le cas d'une vorticité constante apporte plus de possibilités de travail théorique. Teles da Silva & Peregrine [47] ont utilisé une transformation conforme qui applique une période de la porteuse sur un disque pour étudier la forme des vagues sur un courant cisaillé de vorticité constante. Cette étude numérique montre que l'énergie ne se répartit pas également entre énergie potentielle et énergie cinétique pour les vagues infinitésimales. Dalrymple [9] a étudié numériquement un train de vagues sur un écoulement cisaillé de vorticité constante en profondeur finie et a détecté une modification de la forme des vagues et de leur longueur d'onde. Constantin [7] a montré par le calcul qu'une onde de Stokes ne peut se propager sur un courant cisaillé de vorticité constante que si la direction de propagation est perpendiculaire au vecteur vorticité. Ainsi, des vagues progressives ne peuvent exister sur un courant cisaillé uniforme que dans un modèle bi-dimensionnel. Brantenberg & Brevik [5] ont calculé au troisième ordre une onde de Stokes sur un courant cisaillé uniforme (en prenant en compte la tension superficielle). Ils partent d'un écoulement cisaillé de vorticité constante entre la surface et une profondeur h et de vitesse nulle au dessous avec une profondeur infinie. Simmen & Saffman [45] se sont placés dans le cas de la profondeur infinie, et d'un courant cisaillé constant, et ont calculé une onde de Stokes pour en déduire une relation de dispersion non linéaire. Ils ont ensuite étudié numériquement les profils des ondes de Stokes sur un tel écoulement. Nous avons trouvé dans le présent travail des conclusions compatibles avec cette relation de dispersion non linéaire. Ceci nous a permis par ailleurs de remarquer que la méthode heuristique décrite entre autres par Janssen [21] dans une configuration irrotationnelle pour obtenir une équation NLS à partir d'une relation de dispersion non linéaire ne peut pas être appliquée, même en profondeur infinie, dans le cas d'une vorticité constante non nulle. Li, Hui & Donelan[33] calculent aussi une onde de Stokes en profondeur infinie. Malheureusement, il semble qu'ils aient fait une erreur de calcul dans leur relation de dispersion non linéaire. Ils proposent ensuite une équation NLS avec laquelle nous sommes en désaccord. Nous pensons que cette équation n'a pas été obtenue par la méthode des échelles multiples que nous avons utilisée, mais peut-être par la méthode heuristique qui a été évoquée plus haut et qui n'est pas applicable dans le cas de la présence de vorticité. Oikawa, Chow & Benney [41] ont étudié des perturbations tridimensionnelles de trains de vagues sur un courant de vorticité arbitraire et ont appliqué leurs résultats au cas particulier d'une vorticité constante. Ils ont montré que l'existence de cette troisième dimension apportait de l'instabilité. Nous avons comparé favorablement nos résultats aux leurs dans le cas particulier bi-dimensionnel.

Nous avons déjà évoqué plus haut (à propos de l'équation NLS) le travail de Johnson [24] qui prend en compte une vorticité arbitraire et dont la complexité ne laisse entrevoir que des applications numériques.

Ce mémoire de thèse s'articule essentiellement en deux parties.

La première concerne le travail fait en équipe pour unifier et approfondir le travail de Segur et al. [44] et Leblanc [30]. Cette étude a été validée par une publication au « Journal of Fluid Mechanics ». La partie théorique est complétée d'une partie numérique confirmant les résultats théoriques acquis et d'une partie expériementale qui n'est qu'un début, qui demande à être largement complétée (et qui le sera) après ce travail de thèse.

La deuxième concerne un travail plus autonome et extrêmement calculatoire pour établir une équation NLS valable avec l'hypothèse d'un écoulement cisaillé uniforme en profondeur finie. Après la phase de calcul, on est revenu à un travail plus collectif pour tirer des conclusions physiques de ce calcul. Ce travail est en attente d'une validation sous forme d'une publication soumise au journal « Physics of Fluids ».

Chapitre II

Équations de base

Liste des symboles

- Les indices non numériques indiquent des dérivations partielles
- g est l'accélération de la pesanteur
- ν est la viscosité de l'eau
- h est la profondeur de l'eau
- x et y sont les coordonnées spatiales horizontales
- z est la coordonnée spatiale verticale
- $z = \zeta(x, y, t)$ est l'équation de la surface libre
- ρ est la masse volumique de l'eau
- $\mathbf{u} = (u, v, w)$ désigne le champ des vitesses de l'écoulement
- ϕ est le potentiel des vitesses de l'écoulement
- P est la pression
- P_a est la pression atmosphérique
- ϖ est le vecteur vorticité : $\varpi = \nabla \wedge \mathbf{u}$
- $S(x, y, z, t) = 0$ est l'équation de la surface de l'eau
- k_0 est le nombre d'onde d'un train de vagues
- λ est sa longueur d'onde ; $k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda}$
- Ω_0 est la pulsation du train de vagues
- T est sa période temporelle : $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$
- ε est la cambrure
- ξ, η et τ sont les variables spatiales lentes : $\xi = \varepsilon(x - Vt)$, $\eta = \varepsilon y$, $\tau = \varepsilon^2 t$
- σ est $\tanh(k_0 h)$
- A est la valeur du potentiel des vitesses de l'écoulement à $z = 0$
- c_p est la vitesse de phase
- V est la vitesse de groupe

II.1 Les hypothèses

On étudie l'écoulement d'un fluide soumis à la gravitation. On choisit de travailler par rapport à un repère fixe et orthonormal $(O\ ;\ \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ dont l'axe des x est horizontal et dirigé dans la direction de propagation des vagues, l'axe des y est horizontal et perpendiculaire au précédent, l'axe des z est vertical et orienté vers le haut. L'accélération de la pesanteur est donc

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{k} \qquad \text{avec} \quad g > 0. \tag{II.1}$$

On suppose naturellement qu'à l'échelle où on travaille, l'intensité de la pesanteur est constante.

On note $\mathbf{u} = (u, v, w)$ les composantes, par rapport à ce repère, de la vitesse d'une particule de fluide.

La viscosité est négligée pour l'instant ; elle sera introduite dans la section III.2. Près de la surface libre et du fond, la viscosité engendre une couche de vorticité dont l'épaisseur est proportionnelle à $\sqrt{\nu t}$ où ν est la viscosité et t le temps. Comme $\nu \ll 1$, il faut un délai très important avant que la viscosité n'ait un effet considérable.

L'écoulement est pour le moment supposé irrotationnel à l'instant initial. Ainsi, grâce au théorème de Kelvin, il restera irrotationnel au cours du temps. La vorticité sera introduite dans la partie IV où elle deviendra le principal objet d'étude. On verra à cette occasion en quoi l'hypothèse présente d'un écoulement irrotationnel simplifie beaucoup les calculs.

L'incompressibilité du fluide est aussi une hypothèse naturelle puisque nous nous intéressons à l'étude de vagues océaniques.

Les effets de la tension superficielle sont négligés dans tout ce document.

La partie de l'espace occupée par le fluide est limitée au fond par le plan $z = -h$ et la surface libre, qui est une inconnue du problème, a pour équation $z = \zeta(x, y, t)$.

II.2 L'équation de Laplace

On va traduire en équation la conservation de la masse. La masse contenue dans un volume $\mathscr{V}$ limité par la surface fermée $\mathscr{S}$ est $\displaystyle\iiint_{\mathscr{V}} \rho \, d\tau$ où ρ est la masse volumique du fluide.

La masse qui sort (algébriquement) de ce volume pendant une unité de temps est

$$\iint_{\mathscr{S}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à la surface $\mathscr{S}$, unitaire et orienté vers l'extérieur. On en déduit l'équation de conservation de la masse : l'augmentation de masse égale la quantité de masse algébriquement entrante :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathscr{V}} \rho \, d\tau = - \iint_{\mathscr{S}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

On utilise le théorème flux-divergence dans le membre de droite et la dérivation sous le signe somme dans celui de gauche :

$$\iiint_{\mathscr{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau = - \iiint_{\mathscr{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \, d\tau.$$

On met tout dans une seule intégrale et cette intégrale étant nulle quel que soit le volume $\mathscr{V}$ utilisé, il reste

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

On développe la divergence :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

On voit apparaître une dérivée matérielle $\dfrac{D}{DT} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$:

$$\frac{D\rho}{DT} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Comme on vient de le dire, on s'intéresse aux fluides incompressibles : $\dfrac{D\rho}{DT} = 0$; il reste $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

Résumé : l'équation de continuité s'écrit, pour un fluide incompressible :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{II.2}$$

L'irrotationnalité de l'écoulement permet d'affirmer l'existence d'un potentiel des vitesses, usuellement noté ϕ, vérifiant par définition

$$\mathbf{u} = \nabla \phi. \tag{II.3}$$

En reportant (II.3) dans (II.2) on obtient l'équation de Laplace, vérifiée par le potentiel des vitesses, dans toute la zone occupée par le fluide :

$$\nabla^2 \phi = 0, \qquad -h < z < \zeta(x, y, t). \tag{II.4}$$

II.3 La condition dynamique

Les équations d'Euler sont l'expression des équations de Navier-Stokes dans le cas d'un fluide non visqueux. Dans celle qui traduit le principe fondamental de la dynamique, on considère les efforts extérieurs qui s'exercent sans contact : ici uniquement le poids, et ceux qui s'exercent avec contact : ici uniquement la pression puisqu'on a justifié plus haut l'hypothèse du fluide non visqueux.

On part donc de l'équation d'Euler :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho}\nabla P. \tag{II.5}$$

La pesanteur est un champ de forces qui dérive d'un potentiel : $-\mathbf{g} = -\nabla\Omega$ avec par exemple $\Omega = gz$. L'équation d'Euler se réécrit alors

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla\Omega - \frac{1}{\rho}\nabla P = -\nabla\left(\frac{P}{\rho} + \Omega\right). \tag{II.6}$$

En explicitant la dérivée matérielle :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla\Omega - \frac{1}{\rho}\nabla P = -\nabla\left(\frac{P}{\rho} + \Omega\right). \tag{II.7}$$

On utilise la formule $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla \mathbf{u}^2 - \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u})$. Elle donne

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla \mathbf{u}^2 + \nabla\left(\frac{P}{\rho} + \Omega\right) = \mathbf{u} \wedge \varpi \tag{II.8}$$

avec $\varpi = \nabla \wedge \mathbf{u}$ qui est la vorticité.

On a rappelé en préambule que si l'écoulement est au départ irrotationnel, car au repos, il le reste d'après le théorème de Kelvin. Par définition d'un écoulement irrotationnel, $\varpi = \nabla \wedge \mathbf{u} = 0$ et on fait intervenir le potentiel défini par : $\mathbf{u} = \nabla\phi$. On reprend l'équation d'Euler en tenant compte de $\varpi = 0$:

$$\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{P}{\rho} + \Omega\right) = 0. \tag{II.9}$$

Cette quantité ne dépend donc que du temps :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \frac{P}{\rho} + \Omega = f(t). \tag{II.10}$$

La condition dynamique consiste à écrire que la pression est la même de part et d'autre de la surface libre (on rappelle que la tension superficielle n'est pas prise en compte dans ce travail). La pression qui s'exerce sur la surface libre est, au dessus, celle de l'atmosphère, et au dessous la pression du fluide. On note P_a la pression atmosphérique. On l'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \frac{P_a}{\rho} + g\zeta = f(t) \quad \text{à la surface.} \tag{II.11}$$

- En l'absence de vent, la pression atmosphérique est supposée constante sur toute la surface du fluide. On peut même la supposer nulle en transférant le terme $\frac{P_a}{\rho}$ au deuxième membre, dans le terme $f(t)$.
- Par contre, quand au chapitre III on introduira dans cette équation l'effet du vent, ce sera fait par l'intermédiaire de ce terme $\frac{P_a}{\rho}$ où P_a sera évalué par exemple par la théorie de Miles.

On pose $\phi_1(x,y,z,t) = \phi(x,y,z,t) - \int_0^t f(\tau)\, d\tau$, et comme l'intégrale ne dépend pas de (x,y,z) on a $\nabla\phi_1 = \nabla\phi$, c'est-à-dire que ϕ_1 est encore un potentiel des vitesses et cette manipulation simplifie l'équation :

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{1}}}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi_1\right)^2 + g\zeta + \frac{P_a}{\rho} = 0. \tag{II.12}$$

On reprend la notation ϕ au lieu de ϕ_1 ; on a obtenu l'équation de Bernoulli :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + g\zeta + \frac{P_a}{\rho} = 0. \tag{II.13}$$

II.4 La condition cinématique

La condition cinématique exprime qu'une particule de fluide située à un instant sur la surface ne peut traverser cette dernière ; sa vitesse est donc tangentielle.

La surface est représentée pour plus de commodité par $S(x,y,z,t) = 0$, il suffit par exemple de poser

$$S(x,y,z,t) = \zeta(x,y,t) - z \tag{II.14}$$

La vitesse normale d'une particule de fluide est :

$$\mathbf{V}_n = -\frac{1}{|\nabla S|}\frac{\partial S}{\partial t} \tag{II.15}$$

C'est la vitesse numérique, mesurée sur la normale dirigée vers l'extérieur, c'est-à-dire en général vers le haut.

La vitesse de l'eau est $\mathbf{u}$ et en un point de la surface sa composante normale est

$$\mathbf{U}_n = \frac{\mathbf{u}.\nabla S}{|\nabla S|}.$$

On écrit la condition aux limites sous la forme $\mathbf{U}_n = \mathbf{V}_n$:

$$\frac{1}{|\nabla S|}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}.\nabla S}{|\nabla S|} = 0 \iff \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla S = 0$$

et cette équation s'écrit simplement $\frac{DS}{Dt} = 0$ où on note de cette façon habituelle la dérivée particulaire.

On se rappelle qu'on écrit l'équation de la surface sous la forme (II.14). La condition aux limites en surface s'écrit alors

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u.\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v.\frac{\partial \zeta}{\partial y} - w = 0 \tag{II.16}$$

et si on veut la traduire pour le potentiel des vitesses, elle s'écrit

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}.\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}.\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \tag{II.17}$$

Cette équation est appelée condition cinématique.

II.5 La condition au fond

Quand un écoulement se produit en profondeur finie, on considèrera que cette profondeur h est constante en première approximation. Il y a beaucoup de travaux qui traitent du problème d'une profondeur variable, mais ce n'est pas l'objet de ce document. Le fluide ne pouvant traverser le fond, supposé imperméable, on écrira comme condition aux limites

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \qquad z = -h. \tag{II.18}$$

Dans le cas de la profondeur finie, on remplacera cette égalité par une limite :

$$\lim_{z \to -\infty} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \tag{II.19}$$

II.6 Les équations de l'écoulement

On résume le système qui régit l'écoulement étudié. Les fonctions inconnues sont l'équation ζ de la surface et la fonction potentiel des vitesses ϕ. On a obtenu le système d'équations :

$$(L)\ \Delta\phi = 0 \qquad (-h < z < \zeta(x,y,t)) \tag{II.20}$$

$$(F)\ \phi_z = 0 \qquad (z = -h) \tag{II.21}$$

$$(C)\ \phi_z = \zeta_t + \phi_x\zeta_x + \phi_y\zeta_y \qquad (z = \zeta(x,y,t)) \tag{II.22}$$

$$(D)\ 2\phi_t + (\nabla\phi)^2 + 2g\zeta + \frac{P_a}{\rho} = 0 \qquad (z = \zeta(x,y,t)) \tag{II.23}$$

II.7 L'équation NLS classique

On part du système d'équations (II.20)–(II.23) qui ne prend pas en compte la dissipation. Pour l'instant, on ne prend pas non plus en compte l'effet du vent. Comme cela a déjà été dit, cela signifie que le terme $\frac{P_a}{\rho}$ peut être considéré comme constant, et quitte à ajouter une fonction de t seulement au potentiel des vitesses, il peut être considéré comme nul. En effet, l'addition d'une fonction de t au potentiel des vitesses ne change pas ses dérivées partielles spatiales et ne change donc pas le champ des vitesses qui lui est associé. Pour établir l'équation non linéaire de Schrödinger on peut rester dans un modèle tridimensionnel comme Davey & Stewartson [10]. Pour conserver les notations de ce papier, on notera ici $z = \zeta(x,y,t)$ l'équation de la surface

libre. Le système d'équations qui va nous servir à établir l'équation non linéaire de Schrödinger est donc le suivant :

$$(L)\ \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \qquad (-h < z < \zeta) \qquad \text{(II.24)}$$
$$(F)\ \phi_z = 0 \qquad (z = -h) \qquad \text{(II.25)}$$
$$(C)\ \phi_z = \zeta_t + \phi_x\zeta_x + \phi_y\zeta_y \qquad (z = \zeta) \qquad \text{(II.26)}$$
$$(D)\ 2\phi_t + \phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2 + 2g\zeta = 0 \qquad (z = \zeta) \qquad \text{(II.27)}$$

II.7.a La méthode des échelles multiples

On utilise la méthode des échelles multiples et on reconstitue le travail de Davey & Stewartson [10]. L'intégralité du calcul a été refait, mais il ne sera pas reproduit ici. Les détails peuvent être reconstitués d'après leur papier. De plus, ce calcul sera refait avec des termes additionnels, qui représentent la viscosité et l'effet du vent, dans le chapitre III et une troisième fois, avec prise en compte d'une vorticité constante, dans la section IV.1.h. Nous détaillerons les calculs dans ce dernier cas, qui est plus général que les deux autres. Le lecteur qui souhaite une version détaillée de l'établissement des équations détaillées de Davey & Stewartson [10] peut contacter l'auteur de ce mémoire qui tient l'intégralité du calcul à sa disposition.

Le train de vagues étant en première approximation, et sur une durée limitée, quasiment périodique, on cherche des solutions sous la forme de séries de Fourier à coefficients complexes :

$$\phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_n E^n, \qquad \zeta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n E^n$$

où $E = \exp\left[i(k_0 x - \Omega_0 t)\right]$ k_0 étant le nombre d'onde, Ω_0 la pulsation. On a bien sûr $\phi_{-n} = \phi_n^*$ puisque ϕ est réelle et de même $\zeta_{-n} = \zeta_n^*$. L'astérisque représente la conjugaison.

On développe ensuite les fonctions ϕ_n et ζ_n, pour $n \geqslant 0$, sous la forme

$$\phi_n = \sum_{j=n}^{+\infty} \varepsilon^j \phi_{nj}, \qquad \zeta_n = \sum_{j=n}^{+\infty} \varepsilon^j \zeta_{nj}$$

où ε est un petit paramètre qui sera défini plus loin.

On a $\phi_{00} = 0$ et $\zeta_{00} = 0$ puisque les grandeurs ϕ et ζ sont de moyenne nulle à l'ordre zéro.

Le principe de la méthode des échelles multiples consiste à considérer que les vagues sont en première approximation sinusoïdales et que leur amplitude varie lentement au cours du temps. « Lentement » signifie que l'échelle de temps caractéristique de cette variation de l'amplitude est un ordre de grandeur plus grand que la période de la sinusoïde. De même, du point de vue spatial, on considère que les variations de l'amplitude sont sur une échelle plus grande que la période spatiale des vagues. Ainsi, on définit des variables « lentes »

$$\xi = \varepsilon(x - Vt), \qquad \eta = \varepsilon y, \qquad \tau = \varepsilon^2 t.$$

Notre problème est de déterminer un système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par l'amplitude du train de vagues considérée non plus comme une fonction de x, y, t mais des variables lentes ξ, η, τ.

Le nouveau système s'écrit :

$$(L')\ \varepsilon^2(\phi_{\xi\xi} + \phi_{\eta\eta}) + \phi_{zz} = 0 \qquad (-h < z < \zeta) \qquad \text{(II.28)}$$
$$(F')\ \phi_z = 0 \qquad (z = -h) \qquad \text{(II.29)}$$
$$(C')\ \phi_z = \varepsilon^2\zeta_\tau - \varepsilon V\zeta_\xi + \varepsilon^2(\phi_\xi\zeta_\xi + \phi_\eta\zeta_\eta) \qquad (z = \zeta) \qquad \text{(II.30)}$$
$$(D')\ 2\varepsilon^2\phi_\tau - 2\varepsilon V\phi_\xi + \varepsilon^2(\phi_\xi^2 + \phi_\eta^2) + \phi_z^2 + 2g\zeta = 0 \qquad (z = \zeta) \qquad \text{(II.31)}$$

Exploitation des développements

On procède en plusieurs étapes, toutes très calculatoires. Les développements seront faits à l'ordre 3 par rapport à un petit paramètre caractérisant la faible amplitude des vagues, mais sans dimension. On choisira donc $\varepsilon = ka$, la cambrure, où k est le nombre d'onde et a l'amplitude des vagues.

- La condition cinématique et la condition dynamique font intervenir les valeurs prises par la fonction potentiel des vitesses et certaines de ses dérivées partielles à la surface. Ces valeurs sont développées en série de Taylor en faisant intevenir les valeurs que prennent ces fonctions en $z = 0$.
- L'équation de Laplace est résolue par la méthode de séparation des variables qui mène à la résolution successive de plusieurs équations différentielles ordinaires. La condition au fond permet de déterminer certaines des constantes d'intégration, les autres restent pour l'instant des inconnues.
- On reporte les expressions obtenues dans cette résolution de l'équation de Laplace, avec les coefficients indéterminés qui restent, dans les développements en $z = 0$ de la condition cinématique et de la condition dynamique. C'est là que les calculs seront très lourds.

II.7.b Les équations de Davey et Stewartson

Après quelques dizaines de pages de calculs, on obtient un système de deux équations couplées, dites équations de Davey et Stewartson :

$$(gh - V^2)\frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\xi^2} + gh\frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\eta^2} = -k_0^2\left(2c_p + V\left(1-\sigma^2\right)\right)\frac{\partial\left|A\right|^2}{\partial\xi} \tag{II.32}$$

$$\begin{aligned} &2i\Omega_0 A_\tau - \left[V^2 - gh(1-k_0h\sigma)(1-\sigma^2)\right]A_{\xi\xi} + c_pVA_{\eta\eta} \\ &\qquad = \frac{k_0^4}{2}(9\sigma^{-2} - 12 + 13\sigma^2 - 2\sigma^4)\left|A\right|^2 A + k_0^2\left[2c_p + (1-\sigma^2)V\right]\phi_{01\xi}A \end{aligned} \tag{II.33}$$

- $A(\xi,\eta,\tau)$ est la valeur de ϕ_{11} en $z = 0$ et ϕ_{01} représente l'écoulement moyen. A et ϕ_{01} sont les deux inconnues de ce système d'équations couplées. A est proportionnelle à ζ_{11} :

$$g\zeta_{11} = i\Omega_0 A \tag{II.34}$$

  ce qui permet de voir que l'enveloppe du train de vagues vérifie un système d'équations quasiment identique.
- σ désigne $\tanh(k_0h)$.
- Ω_0 est la pulsation du train de vagues, donnée par la relation de dispersion linéaire

$$\Omega_0^2 = gk_0\sigma \tag{II.35}$$

- V est la vitesse de groupe. On la trouve dans le calcul :

$$V = \frac{g}{2\Omega_0}\left[\sigma + k_0h(1-\sigma^2)\right] \tag{II.36}$$

  (on pouvait aussi l'obtenir par $V = \dfrac{d\Omega_0}{dk_0}$).
- c_p est la vitesse de phase, $c_p = \dfrac{\Omega_0}{k_0}$.

Pour déterminer A dans ce système d'équations couplées, il faut éliminer $\phi_{01\xi}$. Ce sera possible explicitement dans le cas de la profondeur infinie.

II.7.c Cas de la profondeur infinie

On passe à la limite quand la profondeur h tend vers l'infini. Dans ces conditions, $\sigma = \tanh(k_0 h)$ tend vers 1,

$$k_0 h(1-\sigma^2) = \frac{k_0 h}{\cosh^2(k_0 h)} \Rightarrow \lim_{h\to+\infty} k_0 h(1-\sigma^2) = 0 \tag{II.37}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to+\infty} \frac{g}{2\Omega_0}\left[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2)\right] = \frac{g}{2\Omega_0} \tag{II.38}$$

c'est-à-dire que V tend vers $\dfrac{g}{2\Omega_0}$.

$$V^2 \sim \frac{g^2}{4\Omega_0^2} = \frac{g^2}{4gk_0\sigma} = \frac{g}{4k_0\sigma} \to \frac{g}{4k_0}.$$

Il va de soi que gh tend vers $+\infty$, donc l'équation (II.32) donne à la limite

$$\frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\eta^2} = 0 \tag{II.39}$$

On peut admettre qu'à l'infini les vitesses sont nulles, le potentiel est une fonction du temps seul, et d'après le principe du maximum, une fonction harmonique qui a une limite finie à l'infini est constante.

Cela signifie que l'écoulement moyen ϕ_{01}, habituellement nommé en anglais « mean flow », est nul en profondeur infinie.

Son gradient est nul : grad $\phi_{01} = 0$. On ajoute à cela l'argument que

$$\lim_{h\to+\infty} c_p V = \frac{\Omega_0}{k_0}\frac{g}{2\Omega_0} = \frac{g}{2k_0}$$

et l'équation (II.33) donne

$$2i\Omega_0 A_\tau - \frac{g}{4k_0}A_{\xi\xi} + \frac{g}{2k_0}A_{\eta\eta} = 4k_0^4\left|A\right|^2 A \tag{II.40}$$

C'est la forme standard de l'équation non linéaire de Schrödinger en profondeur infinie.

II.7.d Les limites de l'équation NLS

L'équation NLS est obtenue par un calcul approché (la méthode des échelles multiples consiste à travailler sur des développements limités). Pour des petites valeurs de la cambrure, elle donne de bons résultats et elle a l'avantage d'être beaucoup plus facile à utiliser que le système d'équations complètes (II.20–II.23). Mais dès que cette cambrure n'est plus suffisamment petite, les résultats obtenus par NLS et ceux obtenus expérimentalement ou par résolution numérique des équations complètes divergent. On peut considérer, en fonction de la précision voulue, que l'équation NLS donne des résultats assez satisfaisants pour des cambrures inférieures à 0.10 environ.

Au delà, on peut utiliser l'équation de Dysthe, qui est l'analogue de cette équation NLS, mais obtenue avec des développements poussés à l'ordre 4, donc plus précise. Nous utiliserons cette équation plus loin.

Chapitre III

L'équation non linéaire de Schrödinger en présence de vent et de dissipation

Liste des symboles

- x et y sont les coordonnées spatiales horizontales
- z est la coordonnée spatiale verticale
- g est l'accélération de la pesanteur
- κ est la constante de von Kármán, $\kappa \approx 0.4$
- $U = U(z)$ désigne la vitesse d'écoulement (cisaillé) de l'air en fonction de l'altitude
- U_1 est la vitesse caractéristique du vent
- u_* est la vitesse de rugosité reliée à U_1 par $U_1 = \dfrac{u_*}{\kappa}$
- α_{ch} est le paramètre de Charnock
- z_0 est la longueur de rugosité, $z_0 = \alpha_{\text{ch}} \dfrac{u_*^2}{g}$
- P_a est la pression atmosphérique
- α et β sont les coefficients du modèle de Miles
- ρ (resp. ρ_a) est la masse volumique de l'eau (resp. de l'air)
- $z = \zeta(x, y, t)$ est l'équation de la surface libre
- ϕ est le potentiel des vitesses de l'écoulement
- c est la vitesse de phase pour l'écoulement de l'air
- c_p et V sont respectivement les vitesses de phase et de groupe
- k_0 est le nombre d'onde du train de vagues
- Ω_0 est la pulsation du train de vagues
- σ est $\tanh(kh)$
- ν est la viscosité de l'eau, $\nu = \varepsilon^2 \nu_0$
- ξ, η et τ sont les variables spatiales lentes : $\xi = \varepsilon(x - Vt)$, $\eta = \varepsilon y$, $\tau = \varepsilon^2 t$
- h est la profondeur de l'eau
- $\mathscr{W}$ est une constante calculée par le modèle de Miles et intervenant dans l'équation NLS forcée
- ψ (resp. Ψ) représente l'élevation dimensionnelle (resp. adimensionnelle) de la surface
- K représente l'effet cumulé du vent et de la dissipation dans l'équation NLS forcée
- A représente l'enveloppe d'une onde de Stokes
- s est le rapport de la masse volumique de l'air à celle de l'eau

III.1 Le forçage : le modèle de Miles

Plusieurs tentatives ont été faites pour représenter l'action du vent sur un train de vagues.

Le modèle de Jeffreys [22] [23] repose sur la dissymétrie entre le côté de la vague au vent et le côté sous le vent qui est abrité. Pour des vagues dont la cambrure est relativement importante, les couches d'air qui épousent la forme de la vague peuvent se décoller du côté sous le vent et se recoller du côté au vent de la vague suivante, c'est le mécanisme d'abri qui engendre des différences de pressions. Il en résulte donc une force qui s'ajoute à l'équation de Bernoulli. Le problème de l'évaluation de cette différence de pression motrice a été traité expérimentalement en exposant un profil sinusoïdal solide, rigide, au vent, et en mesurant les pressions en différents points du dispositif. Le résultat a été partiellement décevant puisque les mesures faites entraînent, si on admet le modèle de Jeffreys, un taux d'amplification qui n'est pas du même ordre de grandeur que celui mesuré expérimentalement sur des trains de vagues soumis au vent. Le modèle n'est cependant pas abandonné puisqu'il reste compétitif dans le cas où la cambrure n'est pas trop petite.

Le modèle de Miles [37] est détaillé en annexe. Il considère un train de vagues uniforme, monochromatique (une seule composante dans le spectre) et linéaire. La linéarité explique qu'il est mieux adapté que le modèle de Jeffreys [22] [23] dans le cas des vagues de faible cambrure, et qu'il est moins performant quand la cambrure augmente. Nous le préférons puisque l'utilisation de NLS limite de toute façon la cambrure des vagues étudiées.

Miles a ramené le calcul du transfert de l'énergie du vent vers les vagues a la résolution d'une équation de Rayleigh ; Janssen [21] a exposé ce travail dans son livre et nous avons détaillé plus complètement ce calcul en annexe. Il y est calculé le taux d'amplification des vagues en fonction du profil des vitesses du vent. On suppose que l'écoulement de l'air est un courant cisaillé défini par la vitesse du vent en fonction de l'altitude $U = U(z)$. Le modèle le plus répandu pour représenter fidèlement la réalité tout en restant assez simple et manipulable est le profil logarithmique $U(z) = U_1 \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$. U_1 est la vitesse caractéristique définie par $U_1 = \frac{u_*}{\kappa}$, u_* étant la vitesse de rugosité, κ étant la vitesse de von Kármán (qui vaut environ 0.4) et z_0 est la « longueur de rugosité » donnée par $z_0 = \alpha_{ch} u_*^2/g$ où α_{ch} est le paramètre de Charnock et g l'accélération de la pesanteur.

Le modèle de Miles propose la forme suivante pour la pression atmosphérique :

$$P_a = (\alpha + i\beta)\rho_a U_1^2 k\zeta \tag{III.1}$$

Le coefficient α n'interviendra pas dans notre travail car il est en phase avec l'élévation ζ de la surface de l'eau et ne participe pas à un transfert d'énergie. Par contre, le coefficient β fournit un terme en phase avec $i\zeta$, donc avec ζ_x, ou autrement dit en quadrature de phase avec ζ et sera pris en compte dans le transfert d'énergie. ρ_a désigne la masse volumique de l'air. Ce modèle est exposé dans l'annexe A.2, on a :

$$\beta = -\frac{\pi}{k}.\frac{U_c''}{|U_c'|}.\frac{\overline{w_c^2}}{U_1^2\overline{\zeta_x^2}} \tag{III.2}$$

où les surlignages signifient une moyenne sur une période spatiale et les indices c signifient que les quantités correspondantes sont évaluées à l'altitude $z = z_c$ où on a l'égalité $U = c$, célérité des vagues. Cette altitude, appelée hauteur critique, intervient dans l'équation de Rayleigh parce qu'elle y provoque une singularité, d'où l'importance de son rôle dans ces formules : c'est à cette altitude que se produit le transfert d'énergie.

On remarque au passage que pour que le transfert d'énergie du vent vers les vagues soit possible, il est nécessaire que $U_c'' < 0$ (dérivée seconde évaluée à $z = z_c$).

Conte & Miles [8] ont tabulé des valeurs de β en résolvant numériquement l'équation de Rayleigh dans le contexte d'un profil logarithmique ; nous utiliserons ces valeurs pour nos simulations numériques.

À partir de l'expression (III.1), on peut calculer le taux d'amplification :

$$\gamma_a = \frac{\rho_a}{\rho} kc\beta \left(\frac{U_1}{c}\right)^2 \tag{III.3}$$

Pour une onde $\zeta = A \exp\left[ik\left(x - ct\right)\right]$, on a $\zeta_x = ik\zeta$ et donc (en abandonnant α)

$$P_a = \beta \rho_a U_1^2 \zeta_x \tag{III.4}$$

On écrit alors

$$P_a(x,t) = \mathscr{W} \zeta_x(x,t) \qquad \text{avec} \qquad \mathscr{W} = \frac{\beta \rho_a}{\kappa^2} u_*^2 \tag{III.5}$$

III.2 La dissipation

En général, l'introduction d'un terme dans l'équation NLS pour représenter la dissipation due à la viscosité est faite de façon heuristique. Lundgren [35] a établi rigoureusement un jeu d'équations régissant un écoulement avec prise en compte de cette dissipation, d'abord dans le cadre des équations linéarisées, puis il a étendu ces corrections au cas non linéaire. Dias, Dyachenko & Zakharov [11] ont repris ce travail. En profondeur finie, la condition au fond sera maintenant la nullité de la composante verticale de la vitesse, et en profondeur infinie ce sera la nullité de sa limite. Les principales modifications affectent la condition dynamique et la condition cinématique. L'équation de continuité n'est pas modifiée. Le système d'équations est, dans ce contexte :

$$\Delta\phi = 0 \qquad (-h < z < \zeta(x,t)) \tag{III.6}$$

$$\nabla\phi = 0 \qquad (z = -h) \tag{III.7}$$

$$\phi_z = \zeta_t + \phi_x \zeta_x - 2\nu \zeta_{xx} \qquad (z = \zeta(x,y,t)) \tag{III.8}$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}\left(\phi_x^2 + \phi_z^2\right) + g\zeta = -\frac{P_a}{\rho} - 2\nu\phi_{zz} \qquad (z = \zeta(x,y,t)) \tag{III.9}$$

III.3 L'équation NLS forcée

On reprend les équations (III.6–III.9) en remplaçant la pression atmosphérique par son expression qu'on a trouvée dans l'équation (III.1) et qui tient compte du vent selon le modèle de Miles. Pour plus de généralité, et par analogie avec le travail de Davey & Stewartson [10], on peut considérer un modèle tridimensionnel. On peut de plus mettre en évidence l'ordre de grandeur des forces de viscosité et du vent en posant $\nu = \varepsilon^2 \nu_0$ et $\mathscr{W} = \varepsilon^2 \mathscr{W}_0$ de sorte que $\nu_0 = O(1)$ et $\mathscr{W}_0 = O(1)$. En reprenant, par souci de cohérence, les notations de [10] que nous avons déjà définies et utilisées dans la section II.7, sauf l'élevation η qui s'appelle désormais ζ, ces équations s'écrivent alors :

$$(L)\ \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \qquad (-h < z < \zeta) \tag{III.10}$$

$$(F)\ \phi_z = 0 \qquad (z = -h) \tag{III.11}$$

$$(C)\ \phi_z = \zeta_t + \phi_x \zeta_x + \phi_y \zeta_y - 2\varepsilon^2 \nu_0 \zeta_{xx} - 2\varepsilon^2 \nu_0 \zeta_{yy} \qquad (z = \zeta) \tag{III.12}$$

$$(D)\ 2\phi_t + \phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2 + 2g\zeta = -2\varepsilon^2 \mathscr{W}_0 \zeta_x - 4\varepsilon^2 \nu_0 \phi_{zz} \qquad (z = \zeta) \tag{III.13}$$

La résolution par la méthode des échelles multiples de ce système se fait de façon extrêmement analogue à ce qui a été fait dans la section II.7. Les termes ajoutés, représentant la viscosité

et le forçage, interviennent de façon linéaire dans les équations. Ils donneront donc des termes additifs par rapport au calcul précédent, mais qui ne se compliqueront pas au cours du calcul.

On arrive donc, *mutatis mutandis*, à une amélioration des équations de [10] qui prennent en compte le forçage et la dissipation :

$$(gh - V^2)\frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\xi^2} + gh\frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\eta^2} = -k_0^2\left(2c_p + V\left(1-\sigma^2\right)\right)\frac{\partial\left|A\right|^2}{\partial\xi} \tag{III.14}$$

$$\begin{aligned} 2i\Omega_0 A_\tau - \left[V^2 - gh(1-k_0h\sigma)(1-\sigma^2)\right]A_{\xi\xi} + c_pVA_{\eta\eta} \\ = \frac{k_0^4}{2}(9\sigma^{-2} - 12 + 13\sigma^2 - 2\sigma^4)\left|A\right|^2 A \\ + k_0^2\left[2c_p + (1-\sigma^2)V\right]\phi_{01\xi}A + ik_0^2\left(\mathscr{W}_0\sigma - 4\nu_0\Omega_0\right)A \end{aligned} \tag{III.15}$$

Si on revient à un modèle bidimensionnel, le terme $gh\dfrac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\eta^2}$ disparaît et permet d'intégrer l'équation (III.14), puis d'éliminer l'écoulement moyen $\phi_{01\xi}$. Si de plus on passe au cas limite de la profondeur infinie, cet écoulement moyen tend vers zéro et on obtient alors une équation NLS forcée fNLS monolithique beaucoup plus simple :

$$2i\Omega_0 A_\tau - \frac{g}{4k_0}A_{\xi\xi} = 4k_0^4\left|A\right|^2 A + ik_0^2\left(\mathscr{W}_0 - 4\nu_0\Omega_0\right)A \tag{III.16}$$

C'est elle qui nous servira dans nos simulations.

On peut effectuer le changement de variable inverse de celui qu'on a fait pour passer des variables naturelles (x,t) aux variables lentes (ξ,τ) définies par $\xi = \varepsilon(x - Vt)$ et $\tau = \varepsilon^2 t$:

$$\begin{cases} \partial_t = \dfrac{\partial\tau}{\partial t}\partial_\tau + \dfrac{\partial\xi}{\partial t}\partial_\xi \\ \partial_x = \dfrac{\partial\tau}{\partial x}\partial_\tau + \dfrac{\partial\xi}{\partial x}\partial_\xi \end{cases} \iff \begin{cases} \partial_t = \varepsilon^2\partial_\tau - \varepsilon V\partial_\xi \\ \partial_x = \varepsilon\partial_\xi \end{cases} \iff \begin{cases} \varepsilon^2\partial_\tau = \partial_t + V\partial_x \\ \varepsilon\partial_\xi = \partial_x \end{cases} \tag{III.17}$$

On multiplie l'équation par ε^2, on utilise $\varepsilon^2\mathscr{W}_0 = \dfrac{\mathscr{W}}{\rho}$ et $\nu = \varepsilon^2\nu_0$ ainsi que les calculs de dérivées qu'on vient d'expliciter :

$$i(A_t + VA_x) - \frac{g}{8k_0\Omega_0}A_{xx} - 2\varepsilon^2\frac{k_0^4}{\Omega_0}\left|A\right|^2 A - i\frac{\mathscr{W}k_0^2}{2\rho\Omega_0}A = -2ik_0^2\nu A$$

On utilise la relation $gk_0 = \Omega_0^2$:

$$i(A_t + VA_x) - \frac{\Omega_0}{8k_0^2}A_{xx} - 2\varepsilon^2\frac{k_0^4}{\Omega_0}\left|A\right|^2 A - i\frac{\mathscr{W}\Omega_0 k_0}{2g\rho}A = -2i\nu k_0^2 A$$

Cette équation a pour fonction inconnue $A(x,t)$ la valeur du potentiel des vitesses en $z = 0$. Il est plus intéressant d'avoir une équation régissant l'élévation, qui lui est proportonnelle d'après l'égalité (II.34). On pose donc $A = \dfrac{\Omega_0\psi}{\varepsilon k_0}$ et on multiplie toute l'équation par $\dfrac{\varepsilon k_0}{\Omega_0}$. Cela ne change que le coefficient du terme non linéaire :

$$i(\psi_t + V\psi_x) - \frac{\Omega_0}{8k_0^2}\psi_{xx} - 2k_0^2\Omega_0\left|\psi\right|^2\psi - i\frac{\mathscr{W}\Omega_0 k_0}{2g\rho}\psi = -2i\nu k_0^2\psi$$

Maintenant, l'équation régit l'enveloppe de l'élévation de la surface du fluide.

On arrange cette équation par des changements d'unité pour la rendre plus canonique. On pose $\xi = 2k_0(x - Vt)$, $\tau = \Omega_0 t$ et $\Psi = \sqrt{2}k_0\psi$. Le fait de prendre ξ proportionnel à $x - Vt$ revient

à prendre un repère en translation uniforme par rapport au repère du laboratoire, et se déplaçant à la vitesse de groupe. Les autres changements ne font intervenir que des facteurs multiplicatifs sur les coordonnées afin de rendre les grandeurs sans dimensions et le maximum de coefficients de l'équation égaux à l'unité, justement pour qu'elle soit canonique. On obtient ainsi :

$$i\Psi_\tau - \frac{1}{2}\Psi_{\xi\xi} - |\Psi|^2 \Psi = iK\Psi \tag{III.18}$$

avec $K = \dfrac{\mathscr{W} k_0}{2g\rho} - \dfrac{2\nu k_0^2}{\Omega_0}$.

III.4 Onde de Stokes solution de l'équation NLS forcée

On cherche une solution dite « onde de type Stokes », c'est-à-dire indépendante de ξ. L'équation s'écrit alors

$$i\Psi_\tau - |\Psi|^2 \Psi = iK\Psi \tag{III.19}$$

et on cherche $\Psi = a(\tau)\exp[ib(\tau)] = \tilde{a}\exp[K\tau + ib(\tau)]$ où $\tilde{a}$ est une constante.
On reporte dans l'équation :

$$i\Psi_\tau - |\Psi|^2 \Psi = iK\Psi \tag{III.20}$$

$$\begin{aligned} \iff & i\tilde{a}\exp[K\tau + ib(\tau)](K + ib'(\tau)) - \tilde{a}^2\exp(2K\tau)\tilde{a}\exp[K\tau + ib(\tau)] \\ & = iK\tilde{a}\exp[K\tau + ib(\tau)] \end{aligned} \tag{III.21}$$

$$\iff K + ib'(\tau) + i\tilde{a}^2\exp(2K\tau) = K \tag{III.22}$$

$$\iff b'(\tau) = -\tilde{a}^2\exp(2K\tau) \tag{III.23}$$

$$\iff b(\tau) = -\frac{\tilde{a}^2}{2K}\exp(2K\tau) + \Delta \tag{III.24}$$

$$\iff b(\tau) = \frac{\tilde{a}^2}{2K}(1 - \exp(2K\tau)) \tag{III.25}$$

de sorte que $b(0) = 0$.

III.5 Étude de la stabilité linéaire de l'onde de Stokes en présence de forçage et dissipation

III.5.a Perturbation d'une onde de Stokes

On perturbe cette onde de type Stokes afin de tester sa stabilité. Pour cela on pose

$$\Psi = A(1 + \delta\zeta(\xi, \tau)) \tag{III.26}$$

où A est l'onde de type Stokes qu'on vient de déterminer. On suppose que δ est petit afin que l'ajout ne soit qu'une perturbation infinitésimale ($\delta\zeta << 1$). On calcule les termes à l'ordre 1 pour les reporter dans l'équation :

$$i\Psi_\tau = iA_\tau(1 + \delta\zeta) + iA\delta\zeta_\tau \tag{III.27}$$

$$-\frac{1}{2}\Psi_{\xi\xi} = -\frac{A}{2}\delta\zeta_{\xi\xi} \quad (A \text{ ne dépend pas de } \xi) \tag{III.28}$$

$$-|\Psi|^2\Psi = -|A|^2 A(1 + \delta\zeta)^2(1 + \delta\zeta^*) = -|A|^2 A(1 + 2\delta\zeta + \delta\zeta^*) + O(\delta^2) \tag{III.29}$$

$$iK\Psi = iKA + i\delta K\zeta A \tag{III.30}$$

On reporte dans l'équation (III.18) en conservant les termes d'ordre zéro et un ; on obtient

$$iA_\tau(1+\delta\zeta) + iA\delta\zeta_\tau - \frac{\delta}{2}\zeta_{\xi\xi}A - |A|^2 A(1+2\delta\zeta+\delta\zeta^*) = iKA + i\delta K\zeta A \tag{III.31}$$

On se rappelle que A est une solution ; en d'autres termes, l'équation est vérifiée pour $\delta = 0$ ou encore les termes d'ordre zéro s'éliminent. Il reste les termes d'ordre un qu'on simplifie par $i\delta$:

$$A_\tau\zeta + A\zeta_\tau + \frac{i}{2}\zeta_{\xi\xi}A + i\,|A|^2\,(2\zeta+\zeta^*)A = K\zeta A \tag{III.32}$$

On utilise $A_\tau = A\left[K - i\tilde{a}^2 e^{2K\tau}\right]$ et on simplifie par A :

$$\zeta\left[K - i\tilde{a}^2 e^{2K\tau}\right] + \zeta_\tau + \frac{i}{2}\zeta_{\xi\xi} + i\tilde{a}^2 e^{2K\tau}(2\zeta+\zeta^*) = K\zeta \tag{III.33}$$

$$\Longleftrightarrow \zeta K - i\tilde{a}^2 e^{2K\tau}\zeta + \zeta_\tau + \frac{i}{2}\zeta_{\xi\xi} + 2i\tilde{a}^2 e^{2K\tau}\zeta + i\tilde{a}^2 e^{2K\tau}\zeta^* = K\zeta \tag{III.34}$$

$$\Longleftrightarrow i\tilde{a}^2 e^{2K\tau}(\zeta+\zeta^*) + \zeta_\tau + \frac{i}{2}\zeta_{\xi\xi} = 0 \tag{III.35}$$

On sépare parties réelle et imaginaire $\zeta = m + in$:

$$\begin{cases} m_\tau - \dfrac{1}{2}n_{\xi\xi} = 0 \\ 2\tilde{a}^2 e^{2K\tau} m + n_\tau + \dfrac{1}{2}m_{\xi\xi} = 0 \end{cases} \tag{III.36}$$

On a $a = \tilde{a}e^{K\tau}$, et on réécrit le système sous la forme

$$\begin{cases} m_\tau - \dfrac{1}{2}n_{\xi\xi} = 0 \\ 2a^2 m + n_\tau + \dfrac{1}{2}m_{\xi\xi} = 0 \end{cases} \tag{III.37}$$

Il s'agit d'un système linéaire à coefficients non constants car a dépend de τ. En principe, m et n sont réels, mais grâce à la linéarité du système, on peut chercher des solutions sous la forme $m = M(\tau)e^{i\ell\xi}$ et $n = N(\tau)e^{i\ell\xi}$. Les parties réelle et imaginaire de ces solutions seront encore, par linéarité, des solutions. En reportant dans le système on obtient

$$\begin{aligned} &M'(\tau) + \frac{\ell^2}{2}N(\tau) = 0 \\ &2a^2 M(\tau) + N'(\tau) - \frac{\ell^2}{2}M(\tau) = 0 \end{aligned}$$

On élimine N :

$$\begin{aligned} &N(\tau) = -\frac{2}{\ell^2}M'(\tau) \\ &\ell^2 N'(\tau) = -2M''(\tau) \\ &M''(\tau) + \frac{\ell^2}{4}\left(\ell^2 - 4a^2\right)M(\tau) = 0 \end{aligned}$$

On se rappelle que $a = \tilde{a}\exp(K\tau)$ avec $\tilde{a}$ constante. L'équation s'écrit alors

$$\frac{d^2M}{d\tau^2} + \frac{\ell^2}{4}\left(\ell^2 - 4\tilde{a}^2\exp(2K\tau)\right)M = 0. \tag{III.38}$$

Ce type d'équation est connu ; c'est un problème de Sturm Liouville. On peut énoncer les deux principaux résultats suivants (Ince [17]). Concernant l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(t)x(t) = 0 \tag{III.39}$$

– s'il existe une constante α tel que $f(t) \geqslant \alpha > 0$ alors les solutions x vont osciller et la distance entre deux annulations successives est inférieure ou égale à $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}$
– s'il existe une constante β tel que $f(t) \leqslant -\beta < 0$ alors les solutions x vont diverger et asymptotiquement x dominera en valeur absolue $\exp\left(\sqrt{\beta}t\right)$.

Ici, le coefficient $\ell^2 - 4\tilde{a}^2 \exp(2K\tau)$ restera inférieur à une constante strictement négative à partir d'un certain temps si $K > 0$, et supérieur à une constante strictement positive à partir d'un certain temps si $K < 0$.

La stabilité linéaire dépend donc directement du signe de K.

À première vue, on ne fait que retrouver le résultat de Segur et al [44] si $K < 0$ et celui de Leblanc [30] si $K > 0$. En réalité, ce résultat est plus fin. En effet, le coefficient K est bien issu d'une compétition entre le forçage et la dissipation, mais le forçage dépend du coefficient β du modèle de Miles, qui dépend lui-même de l'âge des vagues. La balance entre forçage et dissipation ne dépend donc pas uniquement de la viscosité et de la vitesse du vent.

III.5.b Discussion du signe de K

Étudions donc le signe de K. On pose $s = \dfrac{\rho_a}{\rho}$.

$$\begin{aligned} K > 0 &\iff \frac{\mathscr{W} k_0}{2g\rho} - \frac{2\nu k_0^2}{\Omega_0} > 0 \iff \mathscr{W}\Omega_0 > 4g\rho\nu k_0 \iff \mathscr{W} > 4\Omega_0\rho\nu \\ &\iff \frac{\beta\rho_a}{\kappa^2}u_*^2 > 4\Omega_0\rho\nu \iff s\beta u_*^2 > 4\kappa^2\Omega_0\nu \iff \frac{4\kappa^2\Omega_0\nu}{s\beta u_*^2} < 1. \end{aligned} \tag{III.40}$$

On peut exprimer cette condition en faisant intervenir le paramètre sans dimension $\kappa c_p/u_*$ proportionnel à l'âge des vagues :

$$\begin{aligned} \frac{4\kappa^2\Omega_0\nu}{s\beta u_*^2} < 1 &\iff \frac{4\kappa^2 g\nu}{s\beta u_*^2 c_p} < 1 \iff \frac{4g\nu}{s\beta}\left(\frac{\kappa c_p}{u_*}\right)^2 < c_p^3 \\ &\iff \frac{4g\nu}{s\beta}\left(\frac{\kappa c_p}{u_*}\right)^2 < \frac{g^3}{\Omega_0^3} \iff \Omega_0^3 < g^3\frac{s\beta}{4g\nu}\left(\frac{\kappa c_p}{u_*}\right)^{-2} \\ &\iff \Omega_0^3 < \frac{sg^2\beta}{4\nu}\left(\frac{\kappa c_p}{u_*}\right)^{-2} \end{aligned} \tag{III.41}$$

et si on pose

$$\Omega^c = \left(\frac{sg^2}{4\nu}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{\beta}{\left(\frac{\kappa c_p}{u_*}\right)^2}\right)^{1/3} \tag{III.42}$$

le condition d'instabilité s'écrit

$$\Omega_0 < \Omega^c \tag{III.43}$$

On a représenté sur la figure III.1 la valeur de la fréquence critique Ω^c normalisée par $\left(\dfrac{sg^2}{4\nu}\right)^{1/3}$ en fonction de $\dfrac{\kappa c_p}{u_*}$ qui est proportionnel à l'âge des vagues. Les calculs sont faits en prenant pour β les valeurs tabulées par Conte & Miles [8]. La « longueur de rugosité » z_0 est définie par $z_0 = \alpha_{\text{ch}} u_*^2/g$ où α_{ch} est la constante de Charnock qui vaut 0.011–0.018. C'est cette valeur de z_0 qui intervient dans l'expression du profil logarithmique des vitesses $U(z) = \dfrac{u_*}{\kappa}\ln\dfrac{z}{z_0}$. Cette valeur

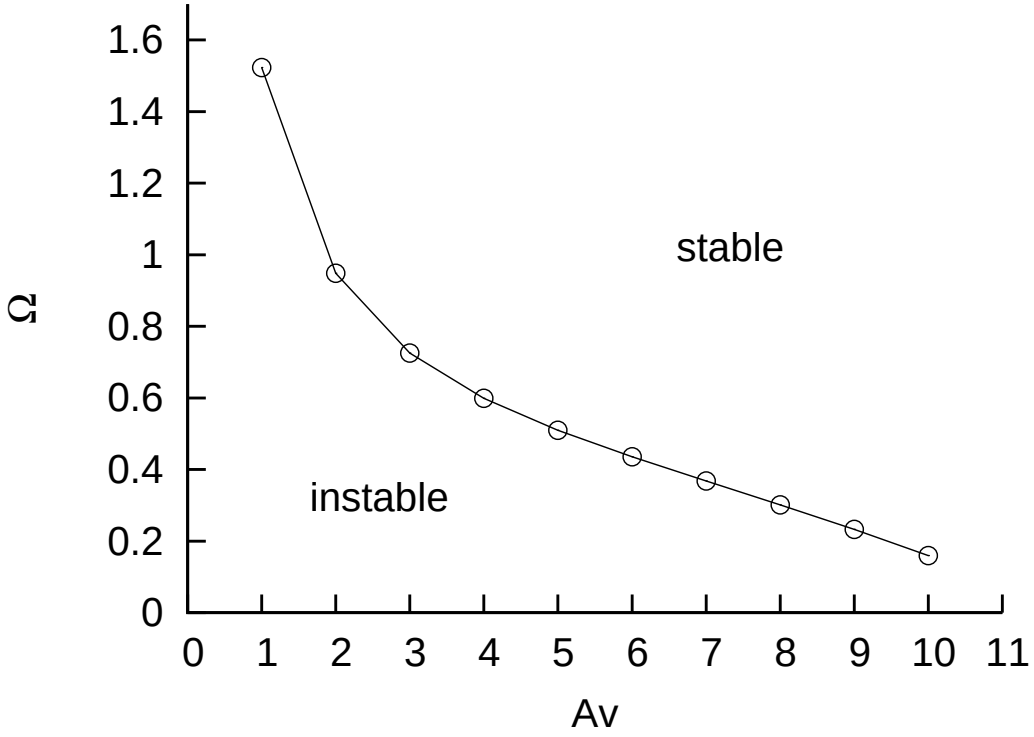

FIG. III.1 – Fréquence critique normalisée $\Omega = \Omega^c/(\frac{sg^2}{4\nu})^{1/3}$ en fonction de $\mathsf{Av} = \kappa c_p/u_*$ (proportionnel à l'âge des vagues) pour $\kappa^2 g z_0/u_*^2 = 3 \times 10^{-3}$

de $\kappa^2 g z_0/u_*^2$ correspond à un écoulement aérodynamiquement calme. La ligne tracée partage le plan en deux régions. La région inférieure est une zone où l'instabilité modulationnelle est présente alors que la région supérieure est un domaine de stabilité. Pour une pulsation Ω_0 fixée, la courbe définit une valeur critique u_*^c telle que l'écoulement soit instable si, et seulement si, $u_* > u_*^c$. La valeur de u_*^c est celle qui vérifie l'égalité

$$\left[\frac{\beta^c}{(\kappa g/\Omega_0 u_*^c)^2}\right]^{1/3} = \frac{\Omega_0}{(sg^2/4\nu)^{1/3}} \tag{III.44}$$

On constate que la courbe de la figure III.1 décroît. Cela signifie que des vagues jeunes seront stables uniquement si elles ont de hautes fréquences, et que quand l'âge des vagues augmente, des vagues de fréquences de plus en plus basses deviennent stables.

Cette courbe a été confirmée par Kharif & Touboul [27] numériquement, à partir des équations complètes, à l'aide de la technique HOSM (High Order Spectral Method).

On peut aussi s'intéresser au seuil critique d'instabilité en fonction de u_* quand la pulsation Ω_0 est donnée. Cela revient à dire que pour une longueur d'onde, ou une fréquence, donnée des vagues, on cherche quelle vitesse de vent pourra gagner la compétition contre la dissipation due à la viscosité. On réécrit donc la condition d'instabilité (III.41) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{4\nu\kappa^2\Omega_0}{\beta s u_*^2} < 1 \iff \frac{\beta u_*^2}{g^2} > \frac{\kappa^2\Omega_0}{\frac{sg^2}{4\nu}} \iff \frac{\beta}{\left(\frac{\kappa g}{\Omega_0 u_*}\right)^2} > \frac{\Omega_0^3}{\left(\frac{sg^2}{4\nu}\right)} \\ \iff \left[\frac{\beta}{\left(\frac{\kappa g}{\Omega_0 u_*}\right)^2}\right]^{1/3} > \frac{\Omega_0}{\left(\frac{sg^2}{4\nu}\right)^{1/3}} \end{aligned} \tag{III.45}$$

L'instabilité modulationnelle se manifeste alors à la condition que

$$u_* > u_*^c \tag{III.46}$$

où u_*^c est défini par l'égalité

$$\left[\frac{\beta^c}{\left(\frac{\kappa g}{\Omega_0 u_*^c}\right)^2}\right]^{1/3} = \frac{\Omega_0}{\left(\frac{sg^2}{4\nu}\right)^{1/3}}. \tag{III.47}$$

Attention : le coefficient de Miles β dépend de $\kappa c_p/u_*$. La valeur de β^c au numérateur du membre de gauche doit donc être celle qui correspond à la solution u_*^c. La valeur de u_*^c est le minimum de vitesse de friction nécessaire pour amplifier un train de vagues de pulsation donnée Ω_0. On voit sur la figure III.2 que dans le domaine des basses fréquences, c'est-à-dire du côté gauche de la courbe, il faut des vitesses de frottement nettement supérieures, pour entretenir l'instabilité modulationnelle, que dans le domaine des hautes fréquences (partie droite de la figure). Le diagramme de la figure III.2 a été dessiné à l'aide des valeurs de β tabulées par Conte & Miles [8]. On y voit que pour des vagues de basse fréquence, un vent fort est nécessaire pour maintenir

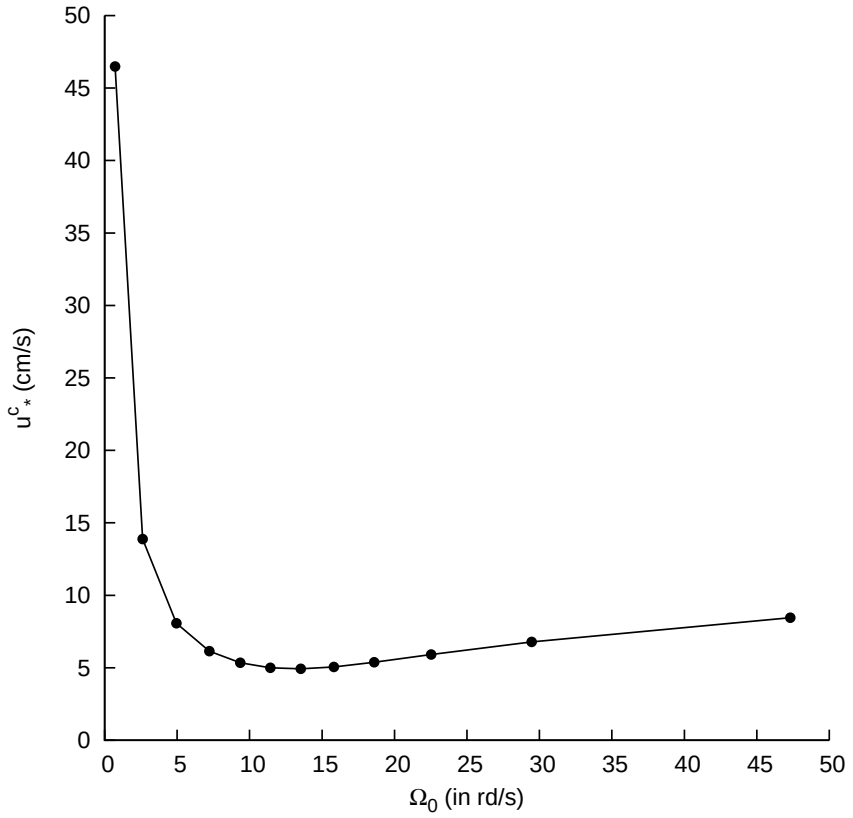

FIG. III.2 – Vitesse de friction critique u_*^c (en cm.s^{-1}) fonction de la pulsation Ω_0 (en rd.s^{-1}) pour $\kappa^2 g z_0/u_*^2 = 3 \times 10^{-3}$

l'instabilité modulationnelle. Le vent a besoin de moins de force pour maintenir cette instabilité pour des vagues de fréquence plus élevée.

III.6 Étude numérique de l'évolution non linéaire d'un train de vagues en présence de forçage et dissipation

On a programmé l'équation NLS avec le terme linéaire repésentant la résultante du forçage et de la dissipation. On perturbe une onde de Stokes solution de NLS par une perturbation d'amplitude plus petite et dont le nombre d'onde est au maximum d'instabilité.

III.6.a Cas neutre

Si le coefficient $K = \dfrac{\mathscr{W} k_0}{2g\rho} - \dfrac{2\nu k_0^2}{\Omega_0}$ est nul, pour une valeur donnée de la fréquence du train de vagues et de la vitesse de frottement u_*, on retrouve l'équation NLS classique sans ce terme additif. Il est à noter que cette configuration dépend bien de ces paramètres (en particulier de l'âge des vagues). On peut voir apparaître la récurrence de Fermi-Pasta-Ulam (FPU) si le nombre d'onde de la perturbation est dans la bande d'instabilité. On peut aussi obtenir une récurrence double si le premier harmonique se trouve aussi dans cette bande, etc. La récurrence FPU consiste en un transfert d'énergie du mode fondamental vers le sous-harmonique et le super-harmonique, impliquant une modulation de l'onde de Stokes puis un transfert dans l'autre sens, des harmoniques vers le fondamental, qui rend à l'onde de Stokes et à la perturbation leurs valeurs initiales. Après un cycle de modulation et de démodulation, le phénomène se reproduit périodiquement. On obtient les courbes de la figure III.3 où on a porté l'amplitude de la porteuse ainsi que les amplitudes du super-harmonique et du sous-harmonique qui ne se distinguent pas. Ce dernier phénomène est dû à l'approximation que représente NLS. Quand on travaillera avec l'équation de Dysthe, qui prend en compte les termes à l'ordre 4 (au lieu de 3 pour NLS) on pourra observer la différence de comportement de ces deux modes de perturbation. La courbe bleue représente l'enveloppe de la surface pour l'onde de Stokes non perturbée ; c'est ici une droite puisque cette enveloppe est constante. La courbe rouge représente l'amplitude a_0 du fondamental et la courbe verte représente les amplitudes a_1 du mode super-harmonique et a_{-1} du mode sous-harmonique qui sont indistinguables dans la simulation à l'aide de l'équation NLS.

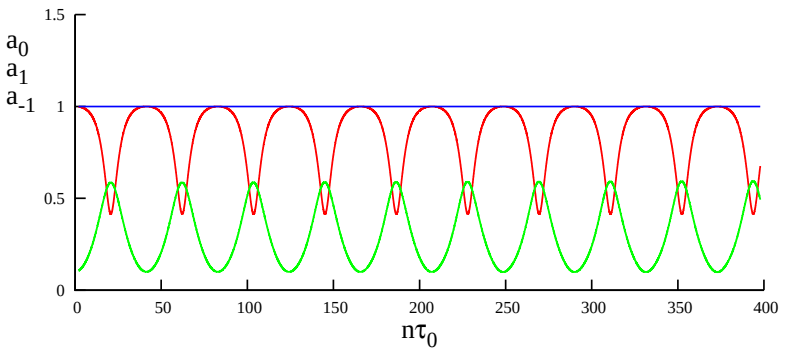

FIG. III.3 – Évolution des amplitudes du mode fondamental et des modes satellites d'un train de vagues perturbé dans le cas où le vent et la dissipation se neutralisent (K=0).

III.6.b Cas de l'atténuation

Si $K < 0$ on est dans la configuration où la dissipation l'emporte sur l'effet du vent. Cette configuration fait l'objet du travail de Segur et al. [44] où on voit que l'amplitude décroît exponentiellement comme $e^{K\tau}$. Le résultat de la simulation numérique est représenté sur la figure III.4.

La courbe rouge représente l'amplitude de la porteuse qui cède de l'énergie au super-harmonique et au sous-harmonique qui sont encore indissociables par l'équation NLS et dessinées en vert, et reprend cette énergie pour terminer un cycle où la dissipation a diminué l'énergie totale, donc les amplitudes de tous les modes. La courbe bleue représente l'amplitude de la porteuse en l'absence de perturbation. Segur et al. [44] ont montré qu'une quantité, aussi petite soit-elle,

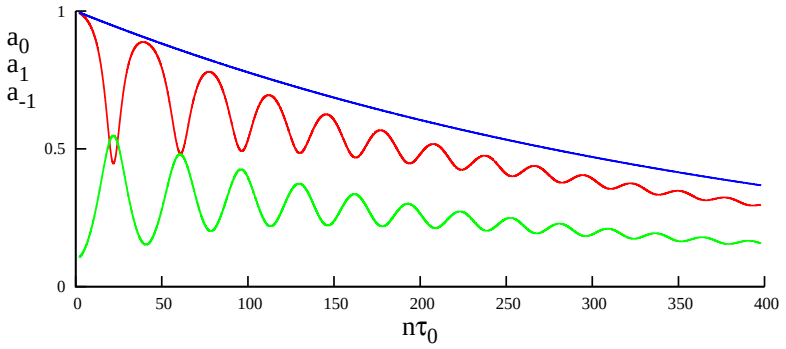

FIG. III.4 – Évolution de l'amplitude du mode fondamental et de ses deux plus proches satellites dans le cas où la dissipation l'emporte sur le vent ($K < 0$).

de dissipation supprime l'instabilité modulationnelle. Cette formule un peu rapide signifie que pour des temps longs, l'amortissement exponentiel vient à bout d'une perturbation initiale, et que l'amplitude initialement petite du train de vagues ne pourra pas croître suffisamment pour que la non-linéarité influe sur le comportement du train de vagues ; on restera donc toujours dans le domaine de validité de l'étude de stabilité linéaire. Notons cependant que Segur et al. ont traité le problème nettement plus difficile de la stabilité non linéaire.

III.6.c Cas de l'amplification

Enfin, dans le cas où le vent l'emporte sur la dissipation, on observe une amplification de l'énergie, puisque l'énergie transmise du vent aux vagues est plus importante que celle qui se perd dans le frottement visqueux. Cet accroissement de l'énergie se traduit par une augmentation de l'amplitude qui est encore exponentielle, de l'ordre de $e^{K\tau}$. Nous sommes dans la configuration étudiée par Leblanc [30]. Le résultat des simulations de ce cas est présenté sur la figure III.5. La

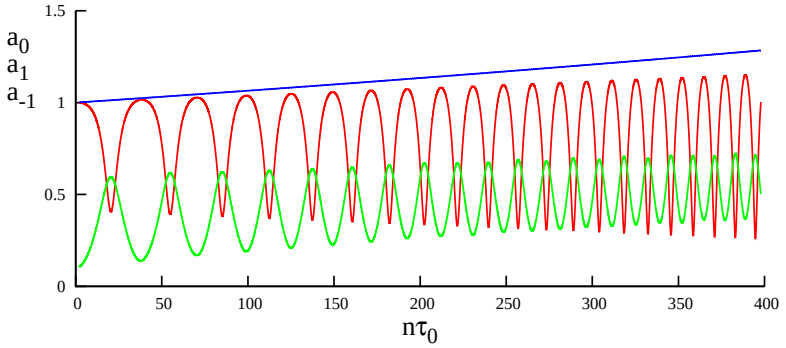

FIG. III.5 – Évolution de l'amplitude du mode fondamental et de ses deux plus proches satellites dans le cas où le vent l'emporte sur la dissipation ($K > 0$).

courbe bleue représente l'évolution de l'amplitude de la porteuse en l'absence de perturbation ; elle est en croissance exponentielle. La courbe rouge représente l'amplitude de la porteuse quand

la perturbation est présente et la courbe verte représente encore l'évolution de l'amplitude des modes sous-harmonique et super-harmonique qui ne sont toujours pas distinguables.

III.6.d Remarque

Reprenons l'équation (III.38) :

$$\frac{d^2M}{d\tau^2} + \frac{\ell^2}{4}\left(\ell^2 - 4\tilde{a}^2\exp(2K\tau)\right)M = 0 \tag{III.48}$$

On observe si $K > 0$ que le coefficient $\ell^2 - 4\tilde{a}^2\exp(2K\tau)$ est positif pour de petites valeurs de τ, mais dès qu'on dépasse la valeur d'annulation de ce coefficient,

$$\tau_c = \frac{1}{K}\ln\left(\frac{\ell}{2\tilde{a}}\right) \tag{III.49}$$

le coefficient devient négatif et le comportement change. Tant que

$$\ell^2 - 4\tilde{a}^2\exp(2K\tau) > 0 \tag{III.50}$$

même si ce coefficient n'est pas constant, les solutions de (III.38) restent oscillantes et bornées. Mais quand τ dépasse le temps caractéristique τ_c, $\ell^2 - 4\tilde{a}^2\exp(2K\tau) < 0$ et l'instabilité prévaut. Là encore, même si l'équation différentielle n'est pas à coefficients constants, on sait que les solutions vont diverger. La figure III.6 montre une simulation numérique dans cette configuration. Au début, $\ell^2 - 4\tilde{a}^2\exp(2K\tau) > 0$. On observe que l'amplitude de la porteuse (en rouge) ne varie

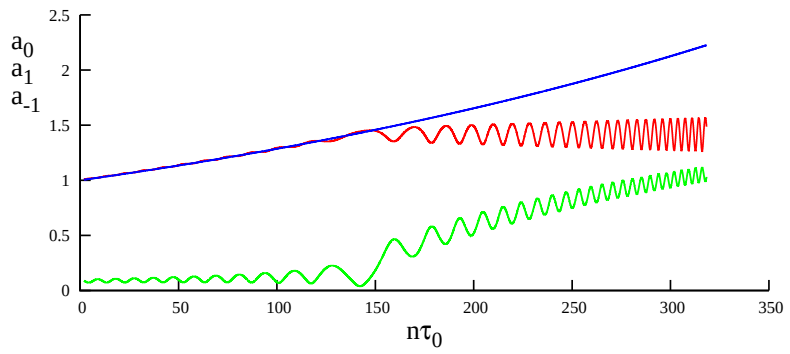

FIG. III.6 – Évolution de l'amplitude du mode fondamental et de ses deux plus proches satellites quand la configuration, initialement stable, devient instable à partir d'un certain temps.

que très lentement, et que ses modes satellites restent à des amplitudes faibles. Après 150 périodes de la porteuse environ, les courbes mettent en évidence un changement de comportement lié au changement de signe du coefficient dans l'équation (III.48).

Les résultats obtenus précédemment ont donné lieu à la publication qui figure dans l'annexe A.1.

III.7 L'équation de Dysthe

III.7.a L'équation originale

Cette équation a été établie par Kristian Dysthe en 1979 [13].

Elle a été mise au point pour pallier des carences qu'on vient de voir de l'équation NLS. Il s'agit d'obtenir une équation donnant encore des résultats satisfaisants pour des cambrures

assez élévées, supérieures à 0.10. L'équation de Dysthe permet aussi d'améliorer la fidélité des simulations sur des durées plus longues que l'équation NLS. L'ordre de grandeur de la durée de validité de l'équation de Dysthe est $O\left(\frac{1}{\varepsilon^3\Omega_0}\right)$ alors que pour l'équation NLS il n'est que $O\left(\frac{1}{\varepsilon^2\Omega_0}\right)$.

Le principe consiste à prendre plus de termes pour mieux approcher la solution exacte, c'est-à-dire de pousser les développements à un ordre plus élevé. L'équation NLS étant issue de développements à l'ordre 3, celle de Dysthe utilisera des développements à l'ordre 4.

Les calculs amenant à l'équation de Dysthe sont évidemment beaucoup plus compliqués que ceux qui donnent NLS. La complexité du calcul augmente exponentiellement avec l'ordre des développements. L'auteur de ce mémoire n'a pas refait ces calculs, même s'il n'exclut pas de les faire un jour, en y introduisant peut-être la vorticité comme il l'a fait avec NLS.

En 1985, Lo & Mei [34] ont programmé l'équation de Dysthe avec une méthode pseudo-spectrale. Les termes qui apparaissent dans l'équation de Dysthe et qui n'apparaissaient pas dans NLS, c'est-à-dire les termes du quatrième ordre, expliquent l'asymétrie dans certaines solutions. En particulier, nous avons observé que les modes sous-harmonique et super-harmonique avaient exactement la même amplitude sur les figures III.3, III.4, III.5 et III.6. Cette propriété est démontrable pour les solutions de NLS, c'est-à-dire qu'un groupe de vagues qui possède une symétrie spatiale au départ la conservera. Avec l'équation de Dysthe, il n'en ira plus de même. Nous vérifierons la différence entre les évolutions des modes super-harmonique et sous-harmonique dans les figures suivantes où les mêmes expériences sont simulées avec l'équation de Dysthe cette fois-ci.

Comme les équations de Davey Stewartson, l'équation de Dysthe est un système d'équations couplées qui s'écrit, en faisant intervenir des grandeurs sans dimensions :

$$\begin{aligned} 2i\left(A_t+\frac{1}{2}A_x\right)+\frac{1}{2}A_{yy}-\frac{1}{4}A_{xx}-A\left|A\right|^2 \\ =-\frac{i}{8}\left(6A_{xyy}-A_{xxx}\right)+\frac{3i}{2}A\left(AA_x^*-A^*A_x\right) \\ -\frac{i}{2}\left|A\right|^2A_x+A\left(\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x}-i\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial z}\right) \end{aligned} \tag{III.51}$$

$$\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial t}+2\overline{\zeta}=0 \tag{III.52}$$

$$\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial z}-2\frac{\partial\overline{\zeta}}{\partial t}=\frac{\partial\left|A\right|^2}{\partial x} \tag{III.53}$$

Ces deux dernières équations sont valables pour $z=0$.

Dans le papier de Dysthe [13], il y une erreur de frappe sur le signe du troisième terme du membre de droite de III.51. C'est confirmé par Janssen [19], et c'est visible par comparaison aux autres équations qui figurent dans cette publication.

Les fonctions $\overline{\phi}$, écoulement moyen, et $\overline{\zeta}$, l'élevation moyenne, sont harmoniques, c'est-à-dire qu'elles vérifient l'équation de Laplace.

On observe que l'équation NLS se retrouve à partir de l'équation de Dysthe en abandonnant les termes d'ordre 4, c'est-à-dire ceux du membre de droite. A est du premier ordre, $\overline{\phi}$ du deuxième et $\overline{\zeta}$ du troisième par rapport au petit paramètre ε. Rappelons que toute dérivation par rapport à x ou y augmente l'ordre du terme correspondant d'une unité.

III.7.b Autre écriture de cette équation

De même que pour l'équation NLS, il serait plus commode de disposer d'une équation unique plutôt que d'un système d'équations couplées. C'est possible si on travaille dans un contexte bidimensionnel. On peut déjà abandonner le terme iA_x simplement en adoptant un repère (toujours galiléen) qui se déplace à la vitesse de groupe par rapport au repère du laboratoire. Ensuite, si on travaille en deux dimensions, les dérivées partielles faisant intervenir une dérivation par rapport à y sont nulles. Le système se trouve notablement simplifié :

$$\begin{aligned} 2iA_t - \frac{1}{4}A_{xx} - A\left|A\right|^2 = \frac{i}{8}A_{xxx} + \frac{3i}{2}A\left(AA_x^* - A^*A_x\right) \\ - \frac{i}{2}\left|A\right|^2 A_x + A\left(\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x} - i\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial z}\right) \end{aligned} \tag{III.54}$$

$$\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial t} + 2\overline{\zeta} = 0 \tag{III.55}$$

$$\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial z} - 2\frac{\partial\overline{\zeta}}{\partial t} = \frac{\partial\left|A\right|^2}{\partial x} \tag{III.56}$$

Comme $\overline{\zeta} = O(\varepsilon^3)$ alors que $\overline{\phi} = O(\varepsilon^2)$, on peut négliger $-2\dfrac{\partial\overline{\zeta}}{\partial t}$ dans la dernière équation. Il reste donc :

$$\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial z} = \frac{\partial\left|A\right|^2}{\partial x} = A^*A_x + AA_x^* \Rightarrow \frac{\partial\overline{\phi}}{\partial z}A = \left|A\right|^2 A_x + A^2A_x^* \tag{III.57}$$

On reporte cette égalité dans (III.54) et on arrange les derniers termes :

$$2iA_t - \frac{1}{4}A_{xx} - \left|A\right|^2 A = \frac{i}{8}A_{xxx} + \frac{i}{2}A^2A_x^* - 3i\left|A\right|^2 A_x + \frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x}A \tag{III.58}$$

On sait d'après l'équation (2.11) de Dysthe 1979 [13], que $\overline{\phi}$ est harmonique. Notons h sa transformée de Hilbert, $h = \mathscr{H}(\overline{\phi})$ et $f = \overline{\phi} + ih$. Alors f est holomorphe et vérifie les relations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\overline{\phi}}{\partial x} = \dfrac{\partial h}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\overline{\phi}}{\partial z} = -\dfrac{\partial h}{\partial x} \end{cases} \tag{III.59}$$

On en déduit que

$$\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathscr{H}(\overline{\phi})\right) = \mathscr{H}\left(\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial z}\right) = \mathscr{H}\left(\frac{\partial\left|A\right|^2}{\partial x}\right) \tag{III.60}$$

d'où la réécriture de l'équation de Dysthe sous la forme

$$2iA_t - \frac{1}{4}A_{xx} - \left|A\right|^2 A = \frac{i}{8}A_{xxx} + \frac{i}{2}A^2A_x^* - 3i\left|A\right|^2 A_x + \mathscr{H}\left(\frac{\partial\left|A\right|^2}{\partial x}\right)A \tag{III.61}$$

Cette version de l'équation de Dysthe est plus commode que le système d'équations couplées quand il s'agit de procéder à des simulations informatiques.

Notons qu'Islas & Shober [18] ajoutent dans cette équation deux termes de dissipation ou forçage, l'un linéaire et l'autre non. Leur équation peut alors s'écrire (avec d'autres conventions pour rendre les grandeurs sans dimensions)

$$2iA_t - \frac{1}{4}A_{xx} - \left|A\right|^2 A + i\Gamma A = \frac{i}{8}A_{xxx} + \frac{i}{2}A^2A_x^* - 3i\left|A\right|^2 A_x + (1+i\beta)\mathscr{H}\left(\frac{\partial\left|A\right|^2}{\partial x}\right)A \tag{III.62}$$

Nous introduirons pour nos simulations le terme de dissipation linéaire comme nous l'avons introduit, en le justifiant, dans l'équation NLS.

III.7.c Version dimensionnelle

On peut reconstituer l'équation de Dysthe dans sa version dimensionnelle si on la préfère ainsi. On utilise naturellement les changements de variables de Dysthe 1979 puisqu'on travaille sur son équation.

$$x = kX, \qquad t = \omega T \qquad \text{donc} \qquad \partial_x = \frac{1}{k}\partial_X, \qquad \partial_t = \frac{1}{\omega}\partial_T \tag{III.63}$$

On effectue ensuite le même changement que Lo & Mei [34] pour obtenir comme inconnue l'élevation de la surface et non le potentiel des vitesses en surface :

$$A = \frac{2k^2}{\omega} a \tag{III.64}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} a_T + \frac{i\omega}{8k^2} a_{XX} + \frac{2ik^4}{\omega} |a|^2 a \\ = \frac{\omega}{16k^3} a_{XXX} + \frac{k^3}{\omega} a^2 a_X^* - \frac{6k^3}{\omega} |a|^2 a_X - \frac{2ik^3}{\omega} \mathscr{H}\left(\frac{\partial |a|^2}{\partial X}\right) a \end{aligned} \tag{III.65}$$

On pose enfin $a = \dfrac{\omega}{2k} b$ et on reprend les notations initiales a, t, x :

$$\begin{aligned} a_t + \frac{i\omega}{8k^2} a_{xx} + \frac{i\omega k^2}{2} |a|^2 a \\ = \frac{\omega}{16k^3} a_{xxx} + \frac{\omega k}{4} a^2 a_x^* - \frac{3}{2}\omega k |a|^2 a_x - \frac{i\omega k}{2} \mathscr{H}\left(\frac{\partial |a|^2}{\partial x}\right) a \end{aligned} \tag{III.66}$$

III.7.d Utilisation de cette équation

On reprend le travail qui a été fait avec l'équation NLS forcée dans la section III.6 mais en utilisant cette fois-ci l'équation de Dysthe, afin d'obtenir des simulations plus précises. On utilise la version sans dimension (III.61). Comme cette version de l'équation de Dysthe n'a pas subi les mêmes conventions que l'équation (III.18), on change x en $2x$ et A en $A/2$. On ajoute aussi un terme de dissipation ou de forçage linéaire. Ainsi, l'équation (III.61) devient :

$$A_t = -\frac{i}{2} A_{xx} - i |A|^2 A + KA + \frac{1}{2} A_{xxx} + A^2 A_x^* - 6 |A|^2 A_x - 2i\mathscr{H}(|A|^2)_x A \tag{III.67}$$

On observe que si on abandonne les quatre derniers termes, on retrouve l'équation (III.18). Comme chaque dérivation par rapport à la variable lente x diminue l'ordre de grandeur d'une unité, ces termes sont d'ordre 4, alors que ceux qui restent sont d'ordre au plus 3.

On reprend les simulations qui ont donné avec NLS les figures (III.3–III.6) avec exactement les mêmes paramètres et les mêmes valeurs initiales. Sur les figures de III.7 à III.12 sont représentées : en rouge l'amplitude de la porteuse, en bleu : celle du sous-harmonique, en vert celle du super-harmonique. En abscisse, le temps est rapporté à la période τ_0 de la porteuse.

- Dans le cas où la dissipation et le forçage se neutralisent, c'est-à-dire où $K = 0$, on avait sur la figure III.3, avec NLS, une récurrence simple de Fermi-Pasta-Ulam. Avec l'équation de Dysthe et exactement les mêmes conditions initiales et les mêmes paramètres, on obtient la courbe de la figure III.7. On y observe la même allure avec cependant un phénomène nouveau : les amplitudes du super-harmonique et du sous-harmonique ne sont plus indiscernables. Ce sont les termes du quatrième ordre de l'équation de Dysthe qui apportent cette différentiation. Dans l'équation NLS nous n'avions jamais pu distinguer les amplitudes des deux harmoniques les plus proches de la porteuse.

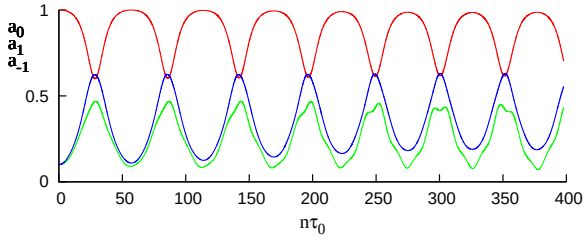

FIG. III.7 – Évolution simulée par l'équation de Dysthe d'un train de vagues perturbé dans le cas où le vent et la dissipation se neutralisent (K=0). La courbe rouge représente l'amplitude a_0 de la porteuse. Les courbes verte et bleue représentent respectivement les amplitudes du super-harmonique et du sous-harmonique qui sont à présent bien distinctes.

– Dans le cas où la dissipation l'emporte sur le forçage, les amplitudes de la porteuse et de ses principaux harmoniques diminuent naturellement encore au cours du temps. On observe toutefois que le sous-harmonique décroît moins vite que le super-harmonique. On le voit sur la figure III.8.

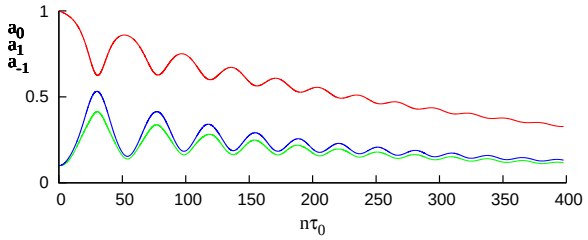

FIG. III.8 – Évolution simulée par l'équation de Dysthe d'un train de vagues perturbé dans le cas où la dissipation l'emporte sur le vent ($K < 0$). La courbe rouge représente l'amplitude a_0 de la porteuse. L'amplitude du sous-harmonique (courbe bleue) diminue un peu moins vite que celle du super-harmonique (courbe verte).

– Quand le forçage du vent est plus important que la dissipation ($K > 0$), on obtient le schéma de la figure III.9. On voit toujours l'énergie totale qui augmente, mais celle du sous-harmonique augmente plus vite que celle de la porteuse et celle du super-harmonique n'augmente pas autant.

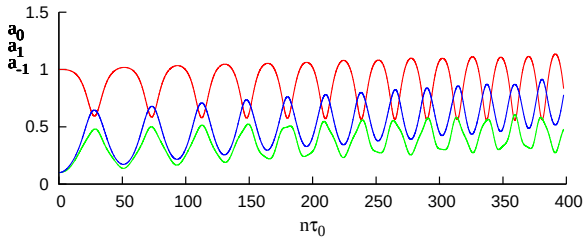

FIG. III.9 – Évolution simulée par l'équation de Dysthe d'un train de vagues perturbé dans le cas où le vent l'emporte sur la dissipation ($K > 0$). La courbe rouge représente l'amplitude a_0 de la porteuse. Le sous-harmonique (courbe bleue) augmente plus que la porteuse (courbe rouge).

Si on laisse la simulation se poursuivre plus longtemps, on obtient la courbe de la figure III.10. Comme l'amplitude du sous-harmonique dépasse celle de la porteuse, on est

en présence d'un phénomène de transition sous-harmonique (en anglais frequency downshifting), et même un phénomène de transition sous-harmonique permanent, contrairement à ce qu'il se passait sur la figure III.7, c'est-à-dire que l'amplitude du sous-harmonique dépasse définitivement, et non occasionnellement, celle de la porteuse. La fréquence dominante dans le spectre du train de vagues a baissé ; il y a moins de vagues dans un groupe. Kharif & Touboul [27] ont travaillé sur cette transition sous-harmonique permanente.

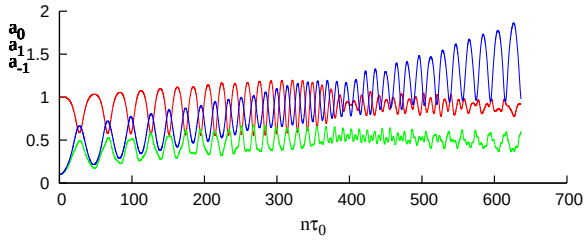

Fig. III.10 – Prolongation dans le temps de la simulation précédente et mise en évidence du phénomène de transition sous-harmonique : la courbe bleue (amplitude du sous-harmonique) dépasse nettement, à partir d'un certain temps, la courbe rouge (amplitude de la porteuse).

On peut se reporter à l'article de revue de Dias & Kharif [12] pour une description plus détaillée de ce phénomène.

– Enfin, on peut reprendre, à l'aide de l'équation de Dysthe, la simulation faite en utilisant l'équation NLS et dont le résultat apparaît sur la figure III.6. Il s'agit du cas où le coefficient $\ell^2 - 4\tilde{a}^2 \exp(2K\tau)$ est positif pour de petites valeurs de τ, donnant une configuration stable, puis change de signe quand τ dépasse la valeur critique donnée dans (III.49). On obtient alors la figure III.11.

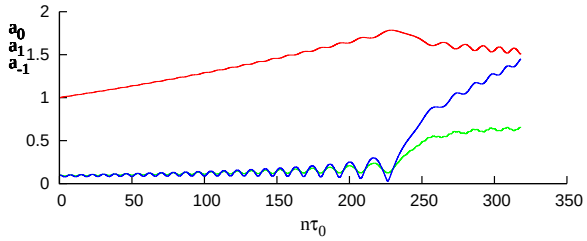

Fig. III.11 – Déstabilisation d'un train de vagues initialement stable. En bleu : le sous-harmonique, en rouge : la porteuse, en vert le super-harmonique).

On voit sur cette figure que les variations d'amplitude du sous-harmonique sont à peine plus importantes que celles du super-harmonique jusqu'à la déstabilisation, et que dans le même temps, l'amplitude de la porteuse domine nettement celles de ses deux satellites. Par contre, dès que les conditions de l'instabilité reviennent, la porteuse cède de l'énergie au super-harmonique, mais surtout au sous-harmonique dont la croissance est très rapide et va dépasser encore la porteuse pour provoquer à nouveau le phénomène de transition sous-harmonique.

On peut laisser la simulation s'exécuter plus longtemps, on obtient ainsi confirmation (sur la figure III.12 que l'amplitude du sous-harmonique va nettement dominer celle de la porteuse une fois que le coefficient $\ell^2 - 4\tilde{a}^2 \exp(2K\tau)$ est devenu négatif.

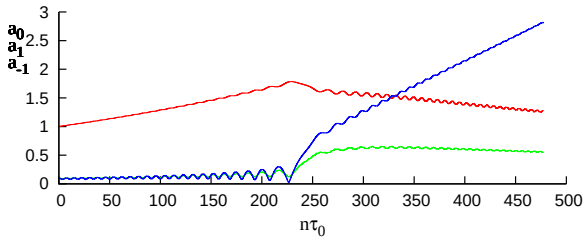

Fig. III.12 – Déstabilisation d'un train de vagues initialement stable (plus longue durée de simulation). En bleu : le sous-harmonique, en rouge : la porteuse, en vert le super-harmonique).

III.7.e Conclusion

L'équation de Dysthe confirme qualitativement les observations faites à l'aide de l'équation NLS. Il y a cependant quelques différences. D'abord, il a été nécessaire de filtrer les hautes fréquences créées par l'interaction des termes non linéaires (d'ordre quatre) de l'équation de Dysthe, car ils produisaient des instabilités numériques. Ensuite, l'équation de Dysthe a permis de mettre en évidence le phénomène de la transition sous-harmonique qui n'apparaissait pas avec l'équation NLS. Signalons que le diagramme de stabilité (figure III.1) a été confirmé à partir des équations complètes par Kharif & Touboul [27] et par Touboul & Kharif [49].

III.8 Volet expérimental

Le but des expériences est de visualiser l'effet possible du vent sur la modulation d'amplitude de vagues monochromatiques. Sans vent, dans certaines conditions, il apparaît des instabilités modulationnelles. En présence de vent, que deviennent ces modulations ?

III.8.a Description du dispositif

Les expériences ont été réalisées dans la grande soufflerie de Luminy (IRPHE - Marseille). Elle est constituée d'une veine fermée de 60 m de long, 3.2 m de large et 1.6 m de hauteur, située au dessus d'un bassin de 40 m de long, pour 2.6 m de large et 1 m de profondeur. Le ventilateur permet de créer un écoulement d'air qui peut atteindre 14 m/s. Le batteur immergé sous la plage amont, piloté par ordinateur, permet de créer des trains de vagues pour lesquels la fréquence de l'onde dominante peut varier entre 0.9Hz et 2.2Hz.

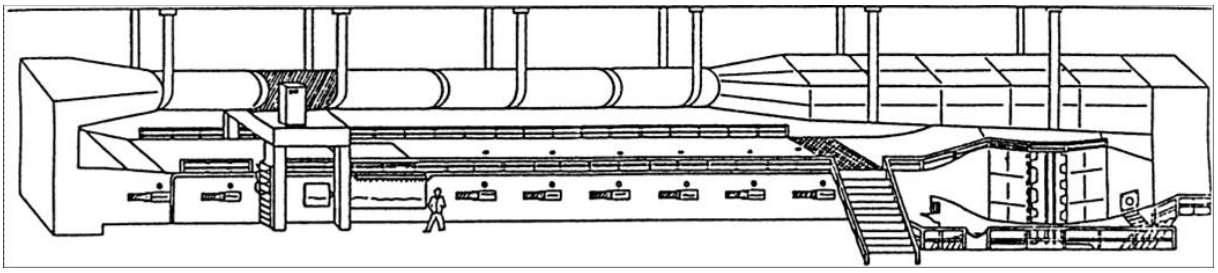

Fig. III.13 – Représentation de la grande soufflerie de Luminy

Le batteur est un batteur « volet » relié à un vérin hydraulique. Un chariot mobile et/ou des supports mobiles permettent de mesurer les différentes caractéristiques de l'état de mer ou de l'écoulement aérien dans chaque section de la soufflerie, permettant ainsi d'étudier les interactions vent-vagues à différents fetches, c'est-à-dire à différentes longueurs d'action du vent

sur la surface de l'eau. Le fetch dans la soufflerie est la distance du bec amont (liaison air/eau) au point de mesure.

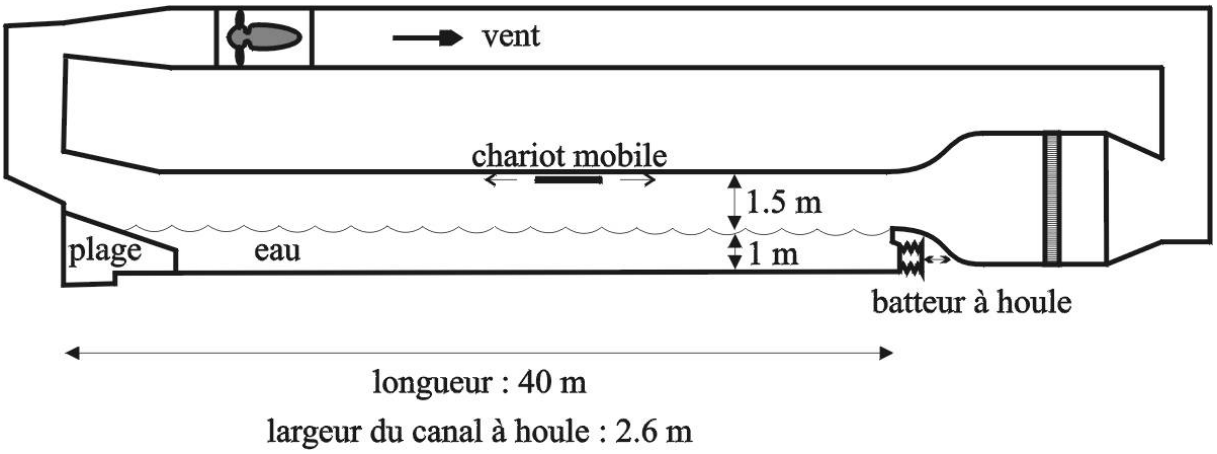

Fig. III.14 – Schéma fonctionnel de la grande soufflerie de Luminy

Le principe expérimental est le suivant : nous envoyons un signal au batteur, signal comprenant des oscillations monochromatiques, avec plus ou moins de modulations d'amplitude. Les signaux sont issus de calculs numériques effectués dans ce travail de thèse. Nous effectuons des mesures d'élévation par des sondes à vagues à différents fetches. Comme nous n'avons que deux sondes disponibles, nous recommençons l'expérience de nombreuses fois en déplaçant les sondes le long du canal. Puis nous recommençons l'expérience en y ajoutant du vent. Nous effectuons les mêmes types de mesures, aux mêmes endroits. Nous renouvelons l'expérience pour différentes vitesses de vent.

Nous avons utilisé trois sondes à vagues pour mesurer l'évolution temporelle et spatiale de la surface libre, et un tube de Pitot associé à un manomètre Van Essen pour mesurer la vitesse du vent.

Fig. III.15 – Sonde à vagues

Les sondes à vagues sont constituées d'un fil capacitif isolé semi-immergé maintenu tendu en position verticale à l'aide d'un support rigide. Le fil est composé d'une âme conductrice en cuivre gainé de téflon ayant un diamètre extérieur de 0.3 mm. L'utilisation d'une gaine en téflon

(matériau non mouillant) permet de limiter les effets capillaires qui se créent entre le fil et l'interface ; ainsi la présence du ménisque joue un rôle négligeable sur la précision des mesures.

Plongée dans l'eau, chaque sonde constitue un condensateur dont la capacité varie avec son niveau d'immersion. Ces variations de capacité sont mesurées au moyen d'un montage électronique, comprenant un oscillateur et un démodulateur fréquence/tension. Le fil capacitif est inséré dans un circuit oscillant. Une variation de la capacité produit une variation de la fréquence d'oscillation du circuit. Ensuite, à l'aide d'un démodulateur de fréquence, ce signal est converti en une tension de sortie proportionnelle à la variation du niveau de l'interface.

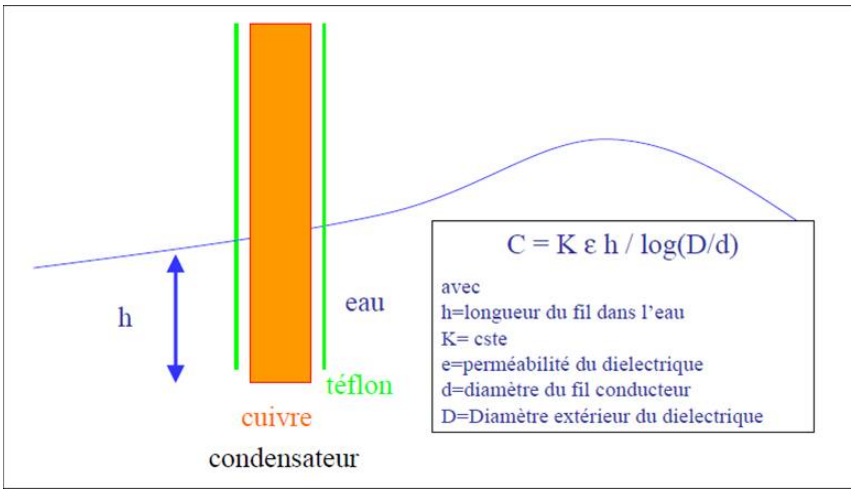

Fig. III.16 – Principe de la sonde à vagues

La relation de proportionnalité entre la variation du niveau de l'eau et la tension de sortie est vérifiée au moyen de tarages statiques. Avec une eau au repos, on fait varier la position de la sonde par rapport à l'interface, ce qui permet de faire évoluer l'immersion du fil dans l'eau.

La tension de sortie V de la sonde est alors liée à son déplacement h par une fonction très simple, linéaire du type $h = \alpha V + \beta$. On détermine la sensibilité de la sonde par interpolation linéaire de la courbe de tarage. Par ailleurs, ces tarages sont effectués avant et après chaque campagne de mesure, permettant ainsi de s'affranchir d'éventuels problèmes de dérive liés :

- aux variations de la constante diélectrique du fil dues à une usure prématurée ou à un dépôt d'impuretés sur le fil,
- aux modifications des caractéristiques du circuit électrique dues aux variations de température.

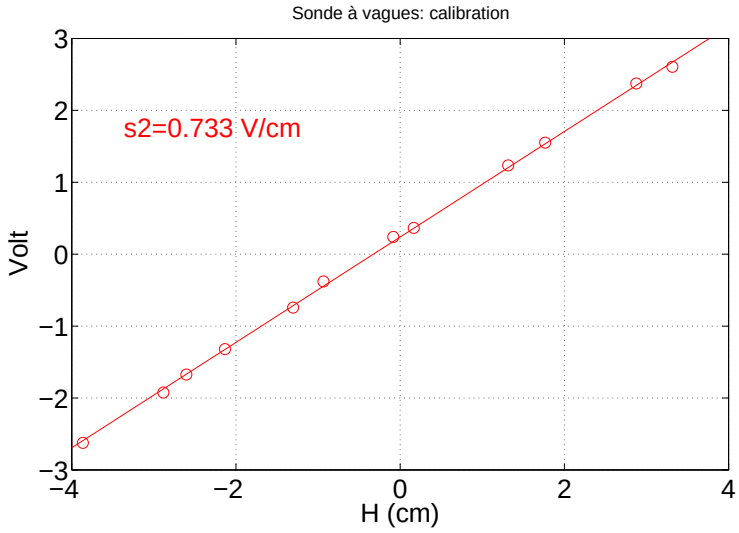

FIG. III.17 – Exemple de tarage, illustrant les relations linéaires entre la tension de sortie et la hauteur d'eau.

Le tube de Pitot et le manomètre Van Essen constituent un capteur de pression différentielle, la différence entre la pression totale et la pression statique étant lue en dixièmes de millimètres d'eau directement sur le manomètre différentiel Van Essen.

FIG. III.18 – Dispositif du tube de Pitot

La différence entre la pression totale et la pression statique est la pression dynamique qui permet de connaître la vitesse du vent.

FIG. III.19 – Manomètre à eau de Van Essen

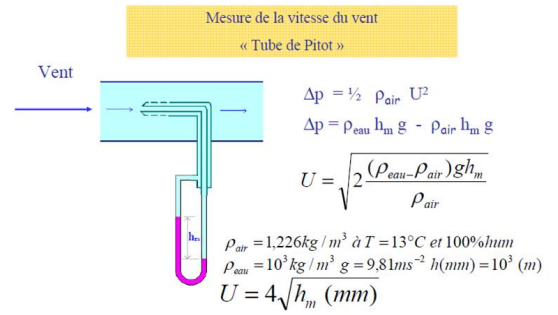

FIG. III.20 – Schéma de fonctionnement du tube de Pitot

III.8.b Résultats expérimentaux

Nous présentons dans ce paragraphe, des résultats pour lesquels le mouvement du batteur a été piloté par un signal temporel, solution de l'équation NLS. Nous disposons de trois sondes placées respectivement à $X_1 = 1.2$ m, $X_2 = 18.7$ m et $X_3 = 27.7$ m du batteur. Les caractéristiques du train de vagues créé sont les suivantes :

Fréquence monochromatique des vagues (porteuse) :	f	=	1.8 Hz
Période des vagues :	T	=	0.56 s
Nombre d'onde des vagues monochromatiques (porteuse) :	k	=	13.0 rad/m
Longueur d'onde des vagues monochromatiques (porteuse) :	L	=	0.48 m
Nombre d'onde de l'enveloppe :	k_0	=	1 rad/m
Longueur d'onde de l'enveloppe :	L_0	=	6.28 m

Nous présentons des résultats pour des cambrures initiales de plus en plus fortes, sans vent ($U = 0$ m/s) et avec vent ($U = 4$ m/s).

Cambrure 0.066 sans vent

La cambrure mesurée au début du canal est $ka = 0.066$. En l'absence de vent, les séries temporelles enregistrées sont les suivantes :

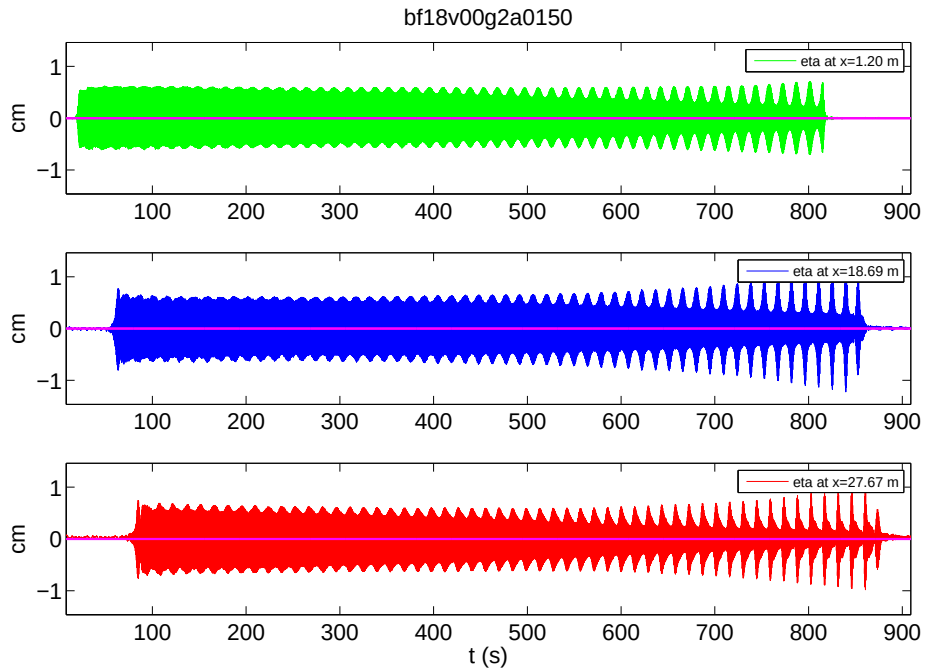

FIG. III.21 – Cambrure initiale 0.066, pas de vent

La figure ci-dessus représente la série temporelle des élévations, pour le cas où le nombre d'onde de la porteuse est 13 rad/m, alors que le nombre d'onde de l'enveloppe est de 1 rad/m. La cambrure initiale est $ka = 0.066$. L'expérience est réalisée sans vent. On voit nettement sur cette figure que les modulations sont plus développées au fetch 27 m qu'au fetch 18.7 m et qu'au fetch 1.2 m.

Nous représentons maintenant une vue d'une partie de cette série temporelle afin d'observer le détail de l'évolution de la surface ζ sur un petit laps de temps (quelques périodes de l'enveloppe).

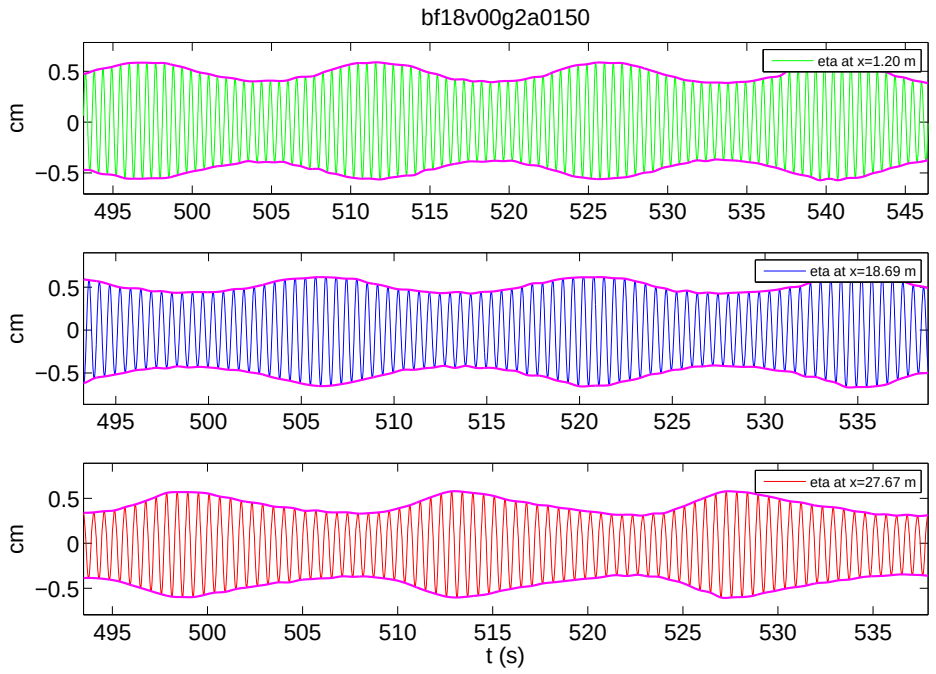

FIG. III.22 – Détail de la série temporelle précédente

Sur cet agrandissement de la figure, on s'aperçoit que les modulations sont plus importantes quand la distance au batteur est grande. L'instabilité de Benjamin-Feir se développe sur la distance. D'autre part, une asymétrie apparaît progressivement dans la modulation. Les groupes ne sont plus symétriques de part et d'autre du maximum du groupe.

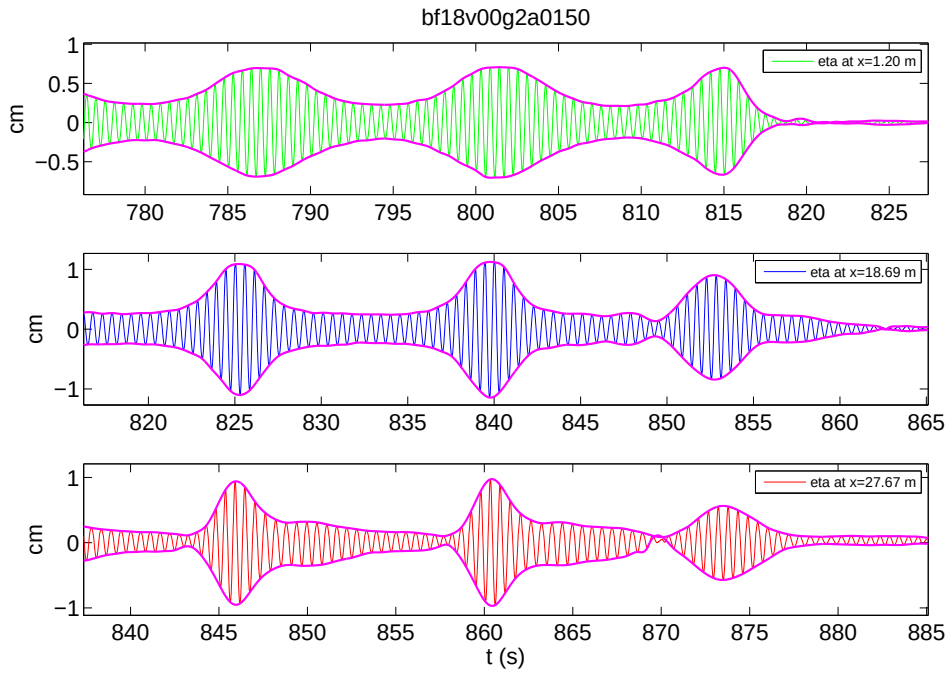

FIG. III.23 – Autre détail de la série temporelle précédente

La figure III.23 représente le même détail mais à la fin de l'expérience. La modulation est

très forte et on constate aussi l'augmentation de l'asymétrie.

La densité spectrale d'énergie des élévations est représentée sur la figure III.24 :

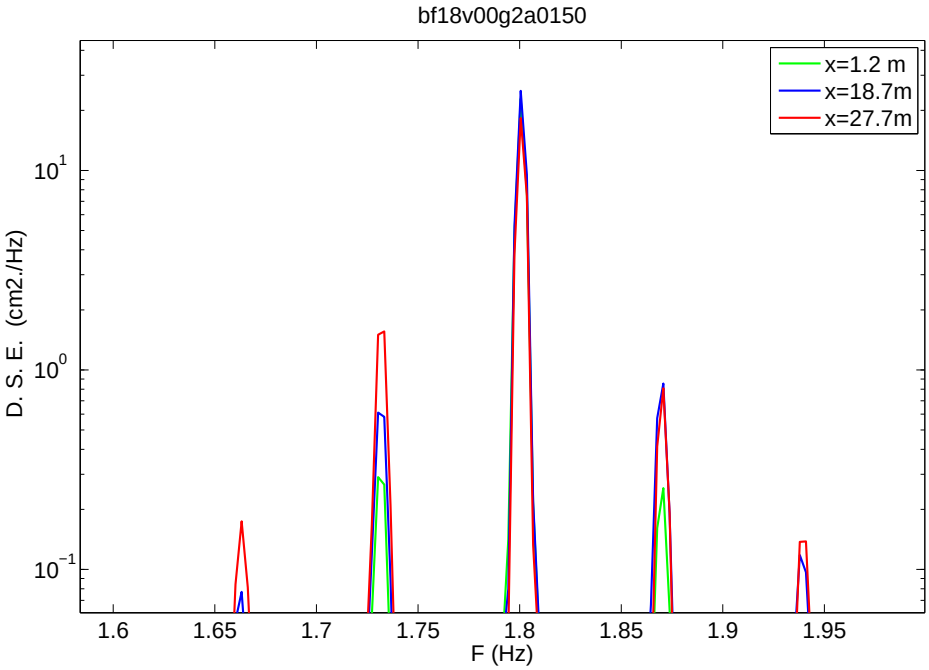

FIG. III.24 – Spectre correspondant à l'expérience $ka = 0.066$ sans vent

Il s'agit d'un spectre avec des axes logarithmique en amplitude et linéaire en fréquence. Le pic est bien à 1.8 Hz et les premiers satellites sont situés de part et d'autre du pic, l'écart en fréquence correspondant à la fréquence de modulation de l'enveloppe (0.07 Hz). Les pics de modulation sont plus importants au fetch $X = 27.7$ m. On observe une asymétrie dans les pics de modulation de part et d'autre du pic principal : les pics « à gauche » (basse fréquence) sont plus importants que les pics « à droite » (haute fréquence).

Cambrure 0.066 avec vent (4 m/s)

On reprend l'expérience dans les mêmes conditions, à l'exception du vent qu'on fait souffler à 4 m/s. La série temporelle obtenue dans ces conditions apparaît sur la figure III.25.

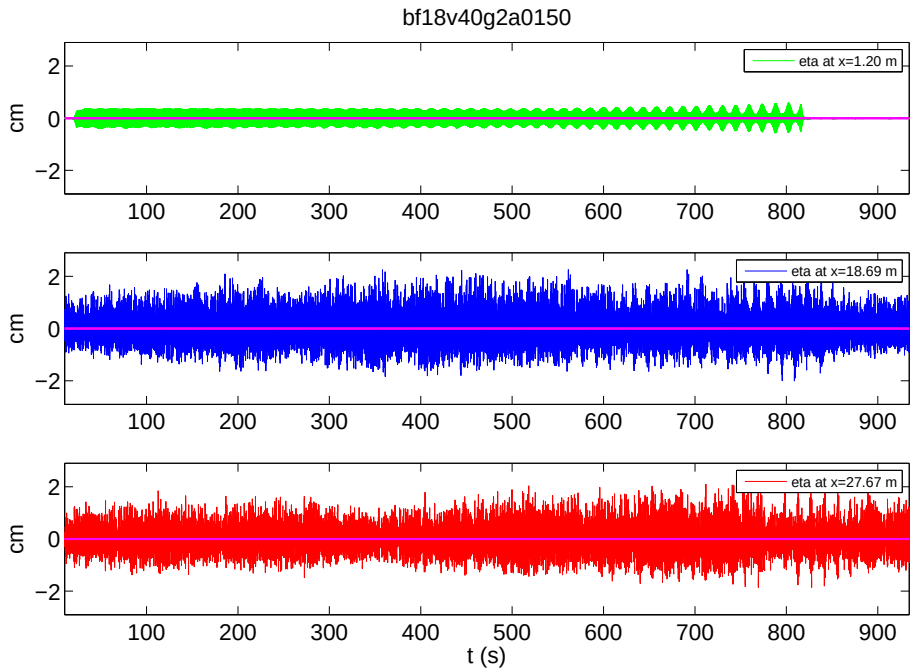

FIG. III.25 – Cambrure initiale 0.066, avec vent

Le vent, d'une part crée des vagues, et d'autre part amplifie nettement les vagues de batteur. Les modulations sous harmoniques imposées par le batteur sont à peine visibles à 18 m et à 27 m.

Nous représentons un détail de cette série temporelle limités à quelques périodes de l'enveloppe :

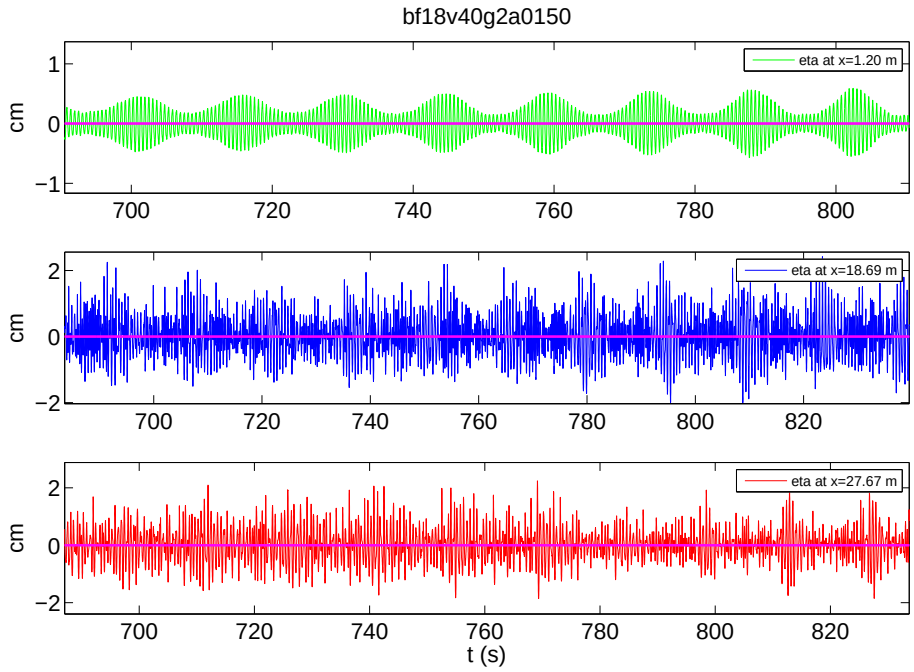

FIG. III.26 – Détail de la série temporelle avec vent

On voit que les vagues sont très régulières à proximité du batteur ; la modulation de l'enveloppe est imposée par le programme qui pilote le batteur. Par contre, dès qu'on s'éloigne, des vagues de vent ont le temps de se former. Pendant l'expérience, visuellement, nous avons observé des déferlements de vagues, ce qui peut expliquer que les vagues à 27 m soient en moyenne plus petites qu'à 18 m.

Le vent semble détruire la périodicité de la modulation périodique visible au fetch $X = 1$ m, mais il semble cependant induire des modulations assez importantes (grandes vagues/petites vagues). La périodicité de l'enveloppe ne semble pas évidente sur le tracé rouge, à $X = 27$ m.

On observe le spectre dans cette expérience avec vent sur la figure III.27 :

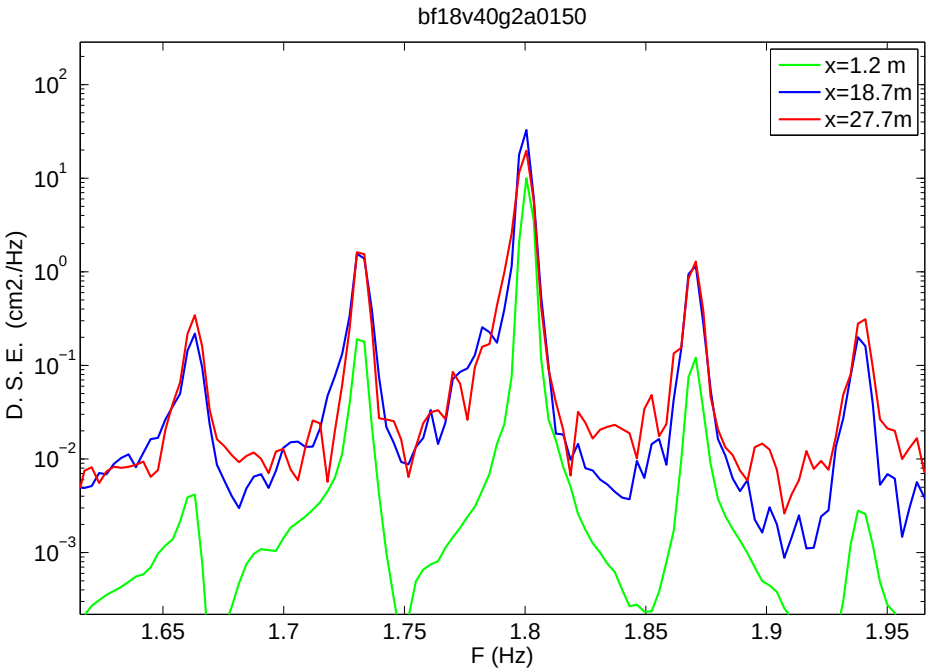

Fig. III.27 – Spectre du train de vagues avec vent

La densité spectrale d'énergie montre de façon évidente que les pics satellites de modulation (les pics a droite et à gauche du pic principal) sont relativement élevés, comparés à l'exemple précédent où il n'y avait pas de vent.

La répartition d'énergie des vagues de 0 à 5 Hz pour les cas sans vent et avec vent sont illustrés sur la figure ci-dessous.

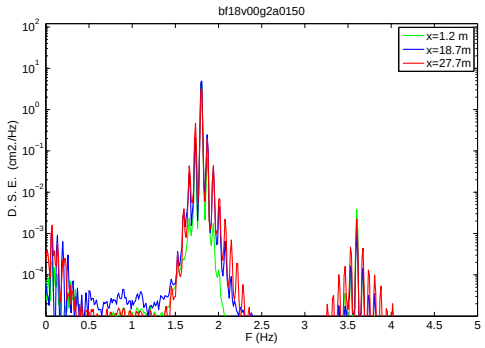

FIG. III.28 – Énergie des vagues de 0 à 5 Hz sans vent

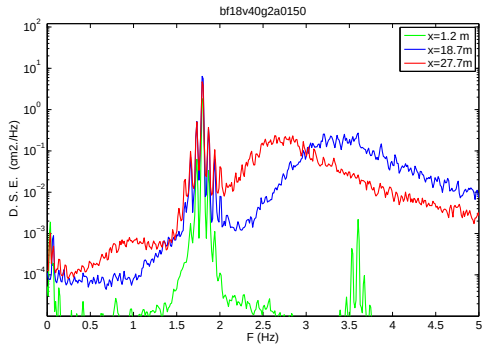

FIG. III.29 – Énergie des vagues de 0 à 5 Hz avec vent

Les vagues de vent, qui ont des fréquences plus élevées que les vagues de batteur, masquent complètement le deuxième harmonique des vagues de batteur.

Cambrure 0.089 sans vent

Il s'agit du même exemple que précédemment (mêmes fréquences) mais avec une amplitude du batteur plus forte au départ : la cambrure initiale est ici de $ak = 0.089$, au lieu de $ak = 0.066$ pour le cas précédent.

Nous obtenons la série temporelle suivante :

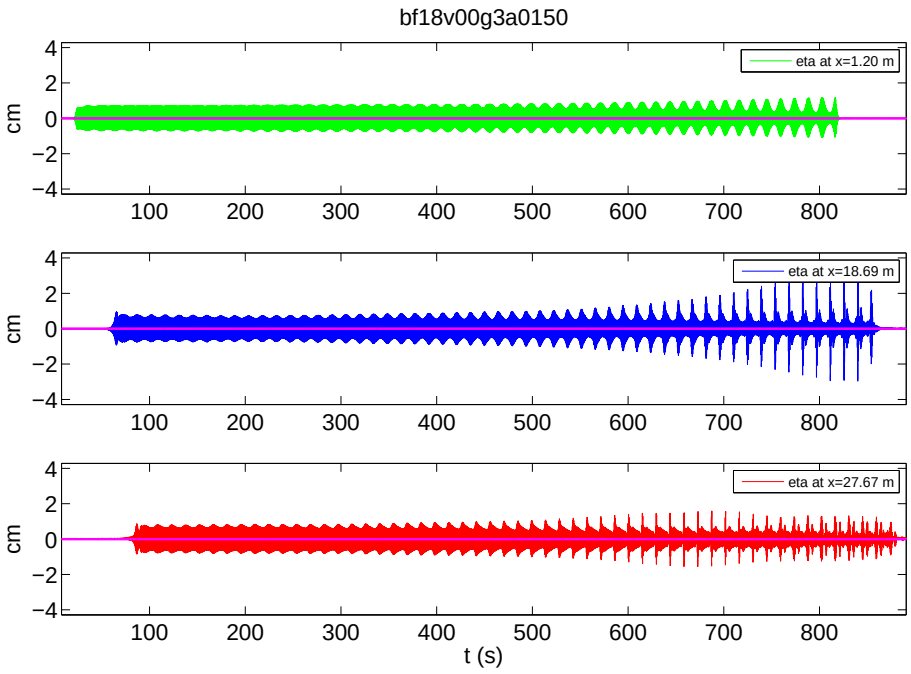

FIG. III.30 – Cambrure initiale 0.089, pas de vent

Visiblement, il y a du déferlement après $X = 18$ m car l'amplitude à $X = 27$ m a nettement diminué par rapport à l'amplitude à $X = 18$ m. L'amplification des instabilités modulationnelles est évidente entre $X = 1$ m et $X = 18$ m.

Cambrure 0.11

Nous continuons à augmenter la cambrure à la sortie du batteur, toujours sans vent. Avec une cambrure à 0.11 (et la même fréquence) nous obtenons la série suivante :

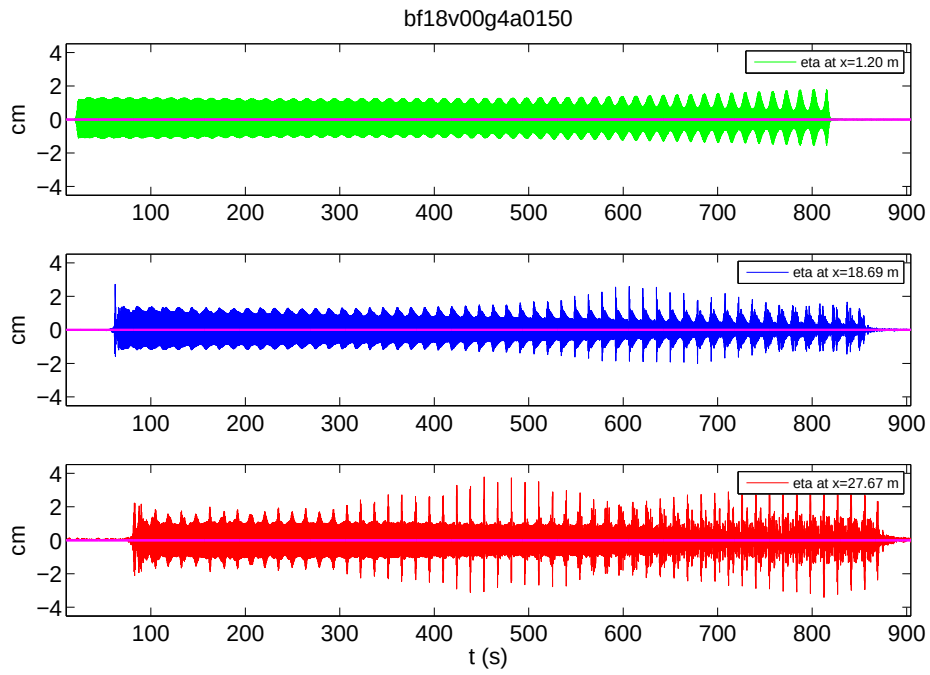

Fig. III.31 – Cambrure initiale 0.11, pas de vent

A $X = 27$ m, les modulations deviennent extrêmement fortes et il y a apparition récurrente de vagues « exceptionnelles » avec des amplifications de l'ordre de 3 fois l'amplitude de l'onde de base (signal rouge entre 400 et 500 secondes). La figure suivante est un zoom temporel de cette série.

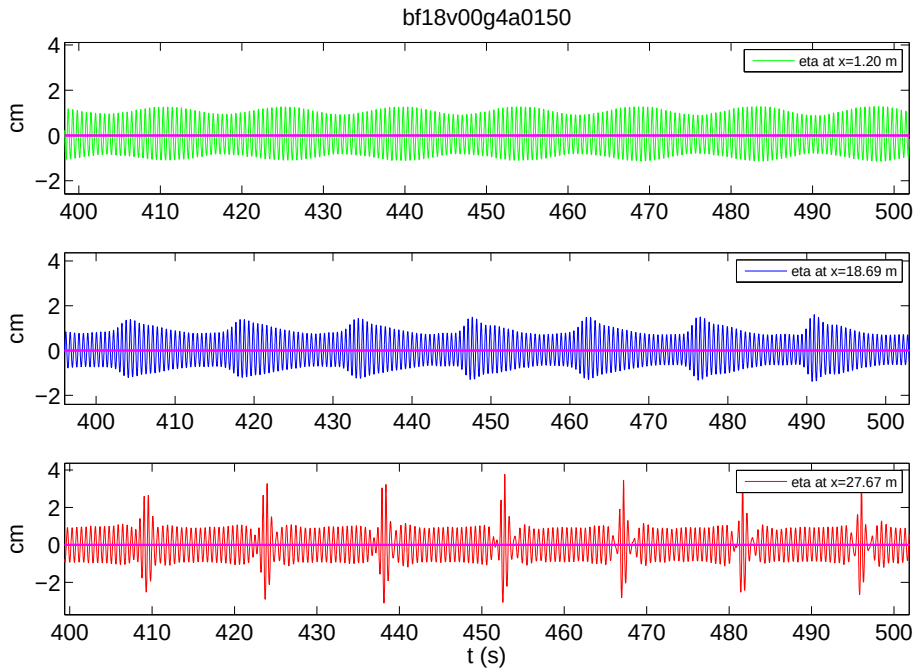

FIG. III.32 – Détail de la série précédente

Cette figure est très intéressante, car on voit bien sur le tracé rouge l'apparition de groupes de vagues type « breather de Ma-Kuznetsov », apparaissant régulièrement.

Le breather de Ma-Kuznetsov est une solution analytique connue de l'équation NLS. Il en existe d'autres : l'onde de Stokes, le soliton enveloppe, et des familles de solutions qu'on appelle « breathers » parce qu'ils sont périodiques, comme la respiration. Certains sont périodiques dans le temps mais limités dans l'espace, comme le breather de Ma-Kuznetsov. D'autres sont au contraire limités dans le temps mais périodiques dans l'espace comme le breather d'Akhmediev. Ces solutions particulières de l'équation NLS sont exposées dans une publication de Trulsen et Dysthe [14]. Le breather de Peregrine apparaît aussi bien comme cas limite d'un breather de Ma-Kuznetsov quand la période temporelle tend vers l'infini et comme cas limite d'un breather d'Akhmediev quand la période spatiale tend vers l'infini. Son expression est :

$$q(x,t) = e^{2it}\left[1 - \frac{4(1+4it)}{1+4x^2+16t^2}\right]. \tag{III.68}$$

q désigne $\dfrac{ka^*}{\sqrt{2}}$ et vérifie l'équation NLS focalisante

$$iq_t + q_{xx} + 2q\,|q|^2 = 0 \tag{III.69}$$

qui est une version canonique de l'équation NLS (voir l'équation IV.156).

Le breather de Ma-Kuznetsov est considéré comme un modèle possible de vagues scélérates. Pour une étude détaillée sur le mécanisme de formation des vagues scélérates, on se reportera au livre « Rogue waves in the ocean » de Kharif, Pelinovsky et Slunyaev (Ed. Springer, 2009).

Le spectre correspondant aux vagues de la série illustrée sur la figure III.31 est le suivant :

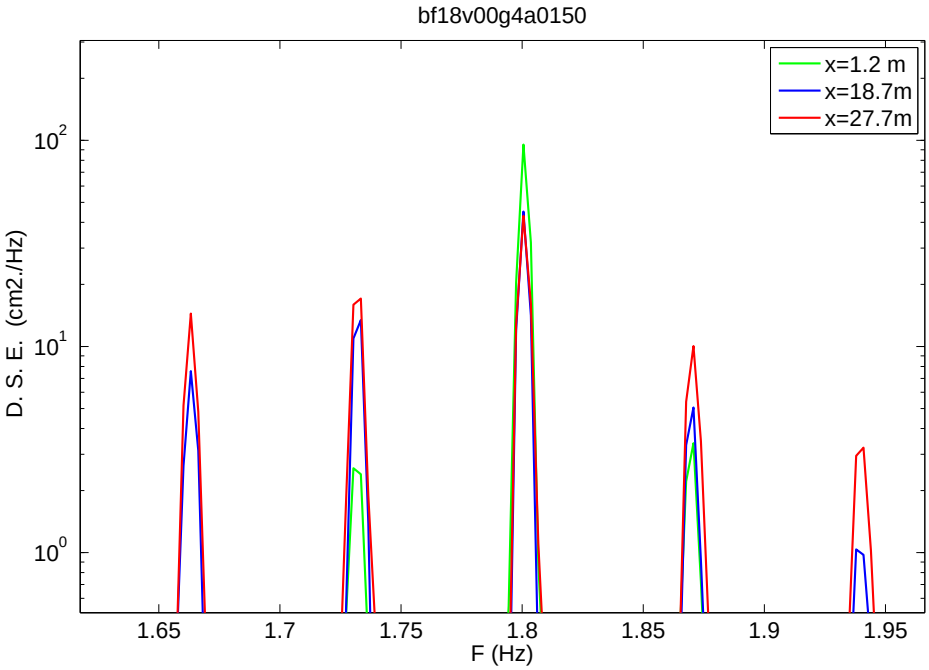

FIG. III.33 – Spectre pour $ka = 0.11$ sans vent

On observe un accroissement significatif de la hauteur des satellites basse fréquence (1.73 Hz et 1.66 Hz) Le même essai, mais avec un vent de $U = 4$ m/s donne le résultat spectral suivant :

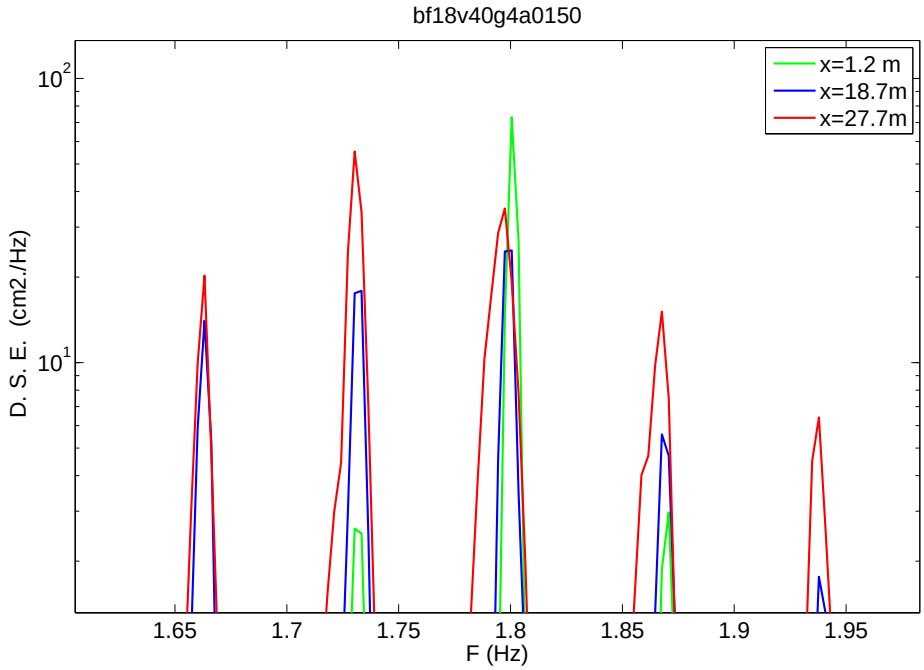

FIG. III.34 – Spectre pour $ka = 0.11$ avec vent 4 m/s

Une nouvelle fois, la figure ci-dessus illustre que le vent a pour effet d'accentuer l'amplification du satellite basse fréquence, notamment le pic à 1.73 Hz. Au fetch $X = 27$ m (courbe rouge) le

pic satellite basse fréquence rouge devient même plus important que le pic fondamental rouge ; il y a une transition sous-harmonique. Le pic dominant passe de 1.8 Hz à 1.73 Hz.

La série temporelle correspondante est la suivante :

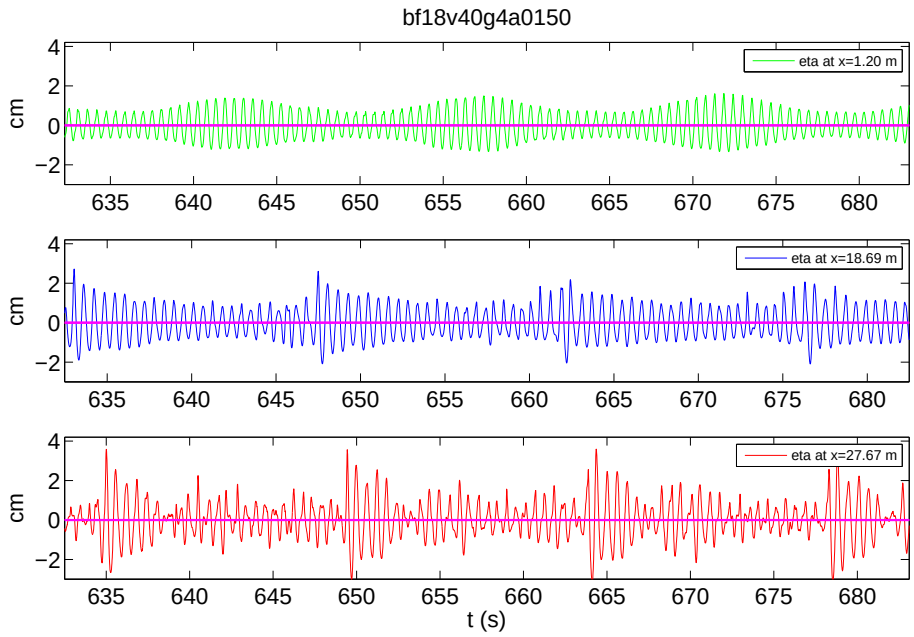

FIG. III.35 – Élévation pour $ka = 0.11$ avec vent 4 m/s

On perd ici la périodicité remarquable type « breather de Kuznetsov-Ma » observée pour le même cas sans vent, mais l'amplification reste importante, et les groupes sont plus étalés.

Cambrure 0.23 sans vent

Si on augmente encore l'amplitude du batteur, on augmente ainsi la cambrure de l'onde porteuse : le cas ci-dessous correspond à $ak = 0.23$ au début du canal (on double la cambrure). On obtient le spectre suivant :

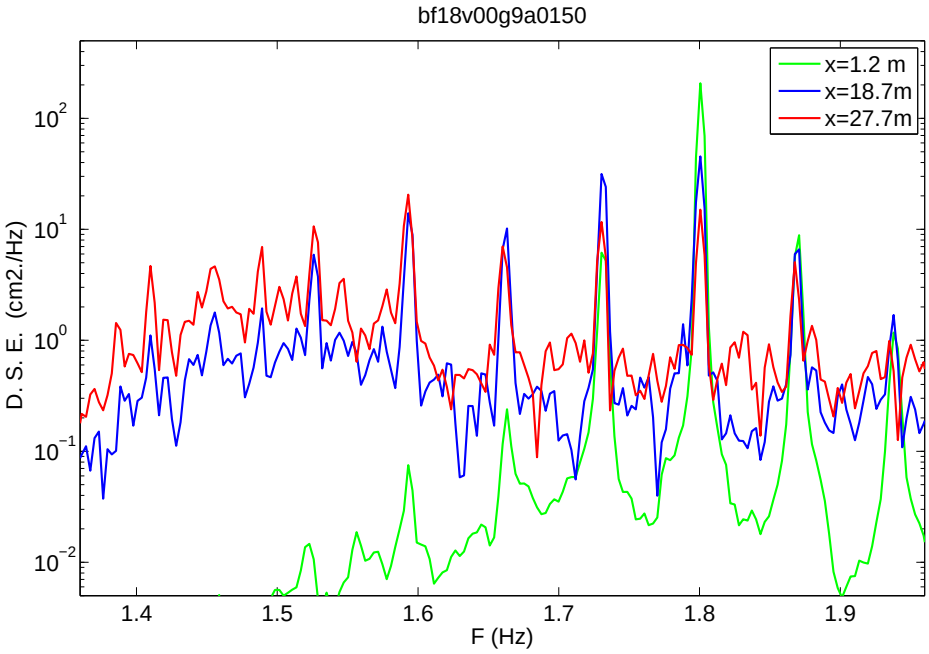

FIG. III.36 – Spectre sans vent pour $ka = 0.23$

La transition sous-harmonique a lieu cette fois, même sans vent : le pic passe de 1.8 Hz à 1.6 Hz (courbe rouge).

Avec du vent ($U = 4$ m/s) le spectre est :

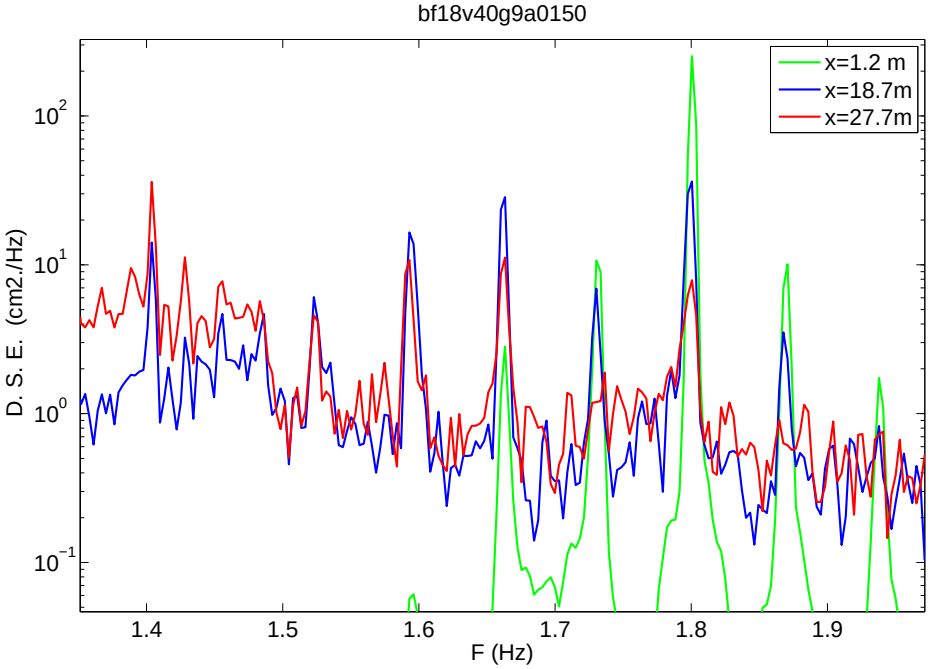

FIG. III.37 – Spectre avec vent pour $ka = 0.23$

La transition sous-harmonique est très important : le pic rouge est maintenant à 1.4 Hz.

III.8.c Autres résultats expérimentaux

Nous présentons dans ce paragraphe, des résultats pour lesquels le mouvement du batteur a été piloté par un signal temporel, solution de l'équation NLS, mais cette fois avec une fréquence de porteuse plus basse 1.4 Hz au lieu de 1.8 Hz. Nous présentons le cas sans vent ($U = 0$ m/s) puis le cas avec vent ($U = 8.0$ m/s).

Les conditions de l'expérience sont les suivantes :

Fréquence monochromatique des vagues (porteuse) :	f	=	1.4 Hz
Période des vagues :	T	=	0.71 s
Nombre d'onde des vagues monochromatiques (porteuse) :	k	=	8.0 rad/m
Longueur d'onde des vagues monochromatiques (porteuse) :	L	=	0.78 m
Nombre d'onde de l'enveloppe :	k_0	=	1 rad/m
Longueur d'onde de l'enveloppe :	L_0	=	6.28 m
Cambrure à la sortie du batteur :	ka	=	0.06

Les graphes ci-dessous illustrent l'effet du vent sur l'instabilité modulationnelle. Commençons par la série temporelle sans vent ($U = 0$ m/s) :

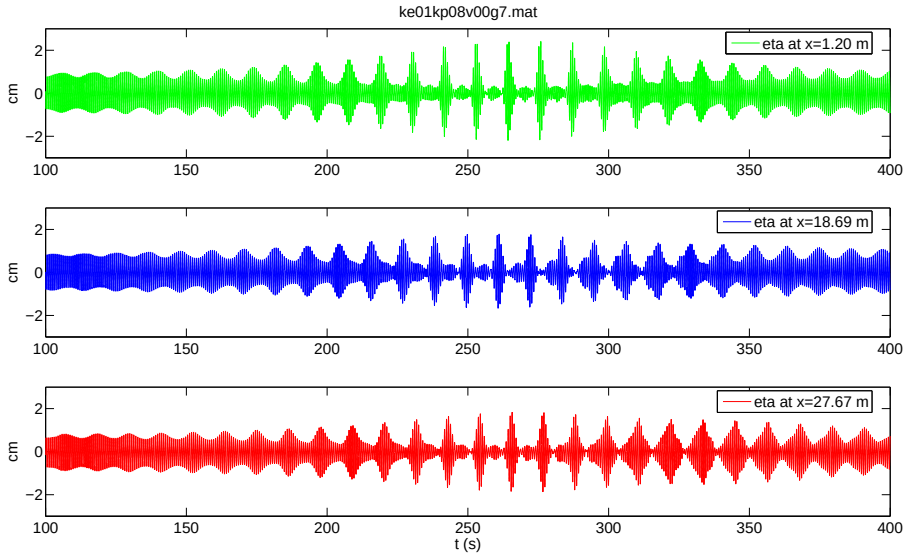

FIG. III.38 – Élévation sans vent, $ka = 0.06$

On compare à la même situation, mais avec un vent de 8 m/s :

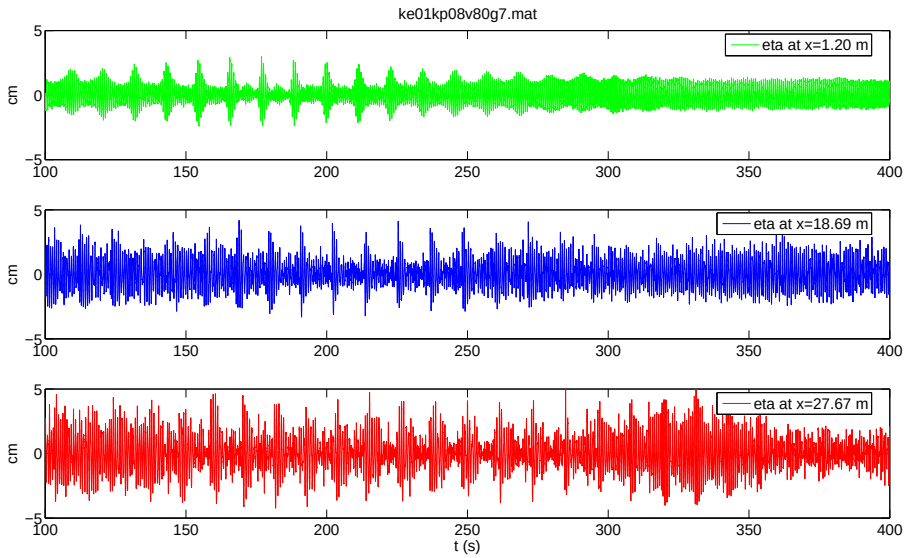

FIG. III.39 – Élévation avec vent 8.0 m/s, $ka = 0.06$

Les spectres correspondant sont :

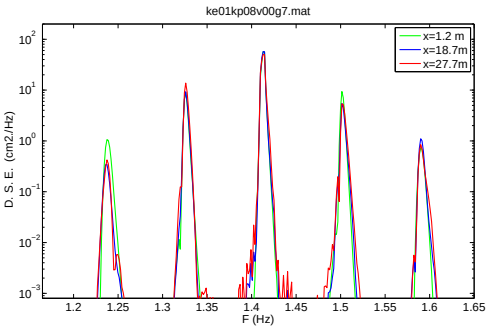

FIG. III.40 – Spectre sans vent

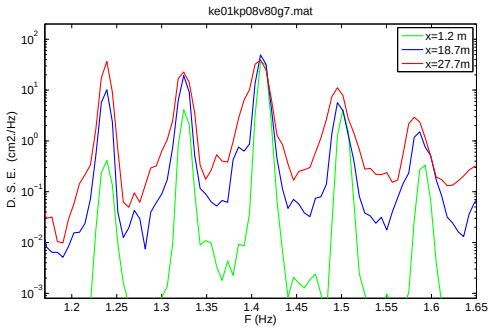

FIG. III.41 – Spectre avec vent (8 m/s)

Sur le spectre sans vent, on aperçoit clairement le pic fondamental et les différents satellites ; ils sont clairement séparés. Avec le vent, il y a eu une nette amplification des pics satellites. Pour la courbe rouge $X = 28$ m, il y a une transition sous-harmonique de 1.41 Hz à 1.24 Hz.

III.9 Conclusions

On a rassemblé le travail de Segur et al. [44] et de Leblanc [30] et établi une équation NLS où un terme linéaire représente la balance entre les effets de la dissipation visqueuse et l'effet du vent modélisé conformément à la théorie de Miles [37]. On a effectué une étude complète de la stabilité linéaire de cette équation modifiée. On a constaté que l'addition des deux termes linéaires ne se faisait pas aussi simplement qu'on aurait pu l'imaginer puisque l'un des termes dépend par exemple de l'âge des vagues par l'intermédiaire du coefficient β de Miles alors que l'autre n'en dépend pas. On a procédé à des simulations numériques en utilisant les valeurs de ce coefficient β tabulées par Conte & Miles [8]. Ce travail a fait l'objet d'une publication au « Journal of Fluid Mechanics » qui est reproduite dans l'annexe A.1.

On a ensuite refait les simulations numériques à partir de l'équation de Dysthe. On a donc introduit dans l'équation de Dysthe le même terme de dissipation visqueuse et de forçage que celui qui a été ajouté dans l'équation NLS. Cette introduction a été faite de façon heuristique, mais elle est justifiée car l'équation de Dysthe est un raffinement de l'équation NLS, incluant les termes de celles-ci et des termes d'ordre supérieurs. L'équation de Dysthe devrait supporter convenablement des cambrures plus élevées que l'équation NLS.

Une des premières conséquences visibles de la prise en compte de termes d'ordre 4 par rapport à la cambrure est l'introduction d'une disymétrie dans les évolutions du super et du sous-harmoniques.

Enfin, une étude expérimentale de l'effet du vent sur les vagues confirme la validité du travail de simulation avec cependant deux nuances. D'une part, l'expérience suppose des cambrures relativement élevées afin que les résultats soient de grandeurs significatives et l'équation NLS est assez sévèrement limitée en cambrure. D'autre part, notre modèle théorique ne prend pas en compte le déferlement, et celui-ci s'est pourtant produit dans certaines expériences, expliquant une perte d'énergie visible sur les graphes expérimentaux.

Chapitre IV

L'équation non linéaire de Schrödinger en présence d'un courant cisaillé uniforme

Liste des symboles

- Les indices non numériques indiquent des dérivations partielles
- k est le nombre d'onde d'un train de vagues
- ε est la cambrure de ce train de vagues
- x et y sont les coordonnées spatiales horizontales
- z est la coordonnée spatiale verticale
- g est l'accélération de la pesanteur
- $z = \zeta(x, y, t)$ est l'équation de la surface libre
- h est la profondeur de l'eau
- ρ est la masse volumique de l'eau
- P est la pression
- ϕ est le potentiel des vitesses de l'écoulement
- ψ est la fonction de courant reliée à ϕ par les relations de Cauchy Riemann
- $\mathbf{V}$ est le champ des vitesses de l'écoulement
- ϖ est le vecteur vorticité : $\varpi = \nabla \wedge \mathbf{u}$
- k est le nombre d'onde d'un train de vagues
- ω est la pulsation du train de vagues
- ε est la cambrure
- c_p et c_g sont respectivement vitesses de phase et de groupe du train de vagues
- ξ, η et τ sont les variables spatiales lentes : $\xi = \varepsilon(x - Vt)$, $\eta = \varepsilon y$, $\tau = \varepsilon^2 t$
- σ est $\tanh(k_0 h)$
- Ω est la vorticité constante de l'écoulement non perturbé
- $\overline{\Omega}$ désigne $\dfrac{\Omega}{\omega}$; ce n'est qu'une notation et pas une adimensionnalisation
- Ω^* est la vorticité adimensionnalisée, $\Omega^* = \dfrac{\Omega}{\sqrt{gk\sigma}}$
- Φ désigne les valeurs prises par le potentiel des vitesses ϕ à la surface $z = \zeta$; même convention pour ses dérivées partielles et Ψ (fonction de courant)
- $a(\xi, \tau)$ désigne l'enveloppe du train d'ondes
- $\mu = kh$, $X = \sigma\overline{\Omega}$, $\rho = \dfrac{c_p}{c_g}$ sont définis pour simplifier l'écriture de l'équation NLS avec vorticité. De même, les coefficients compliqués U, V, W sont définis là où ils interviennent
- L et M sont les coefficients qui interviennent dans cette équation NLS avec vorticité, L_1

et M_1 sont leurs correspondants adimensionnalisés
- γ désigne le taux d'instabilité et $\gamma_{\max}$ le taux d'instabilité maximal
- ℓ désigne le nombre d'onde d'une perturbation de l'onde de Stokes
- q désigne l'enveloppe de l'élevation dans l'équation NLS canonique, focalisante ou défocalisante

IV.1 Établissement de l'équation

IV.1.a Les équations initiales

Davey & Stewartson[10] ont établi, (après Benney & Roskes [3]) dans l'hypothèse de vagues de cambrure modérée $ak = O(\varepsilon)$ et de bande de fréquence étroite $\dfrac{\delta k}{k} = O(\varepsilon)$, un système de deux équations couplées. Si on considère un écoulement bidimentionnel, une de ces équations s'intègre et cela permet d'obtenir une équation non linéaire de Schrödinger. L'avantage d'une telle équation sur le système des équations de base est qu'elle est beaucoup plus facile à manipuler, et en particulier à simuler numériquement. Son inconvénient est d'être issue d'une méthode des échelles multiples qui suppose l'utilisation d'un petit paramètre ε. Le domaine d'utilisation de l'équation NLS est donc limité par ces deux hypothèses, (cambrure modérée et bande étroite), mais à l'intérieur de ce domaine, cette équation apporte un indéniable confort dans le travail. De plus, si on souhaite des cambrures un peu supérieures à celles que permet l'équation NLS, on peut utiliser l'équation de Dysthe, qui utilise des développements poussés à un ordre supérieur et qui n'est pas beaucoup plus difficile à programmer que l'équation NLS.

L'établissement de l'équation NLS classique a été obtenu avec l'hypothèse d'un écoulement irrotationnel. Cette hypothèse peut être physiquement acceptable dans certains cas, et elle a l'avantage énorme de simplifier très sensiblement les calculs en fournissant, avec l'hypothèse encore plus naturelle d'incompressibilité, l'existence d'un potentiel des vitesses satisfaisant à l'équation de Laplace. Cette équation de Laplace permet de trouver une expression du potentiel des vitesses en liaison avec la condition au fond. Cette expression dépend de constantes d'intégration qui sont déterminées en les reportant dans la condition dynamique et dans la condition cinématique. Les calculs sont lourds, mais moins que si on ne possédait pas de fonction potentiel des vitesses.

Dès lors qu'on prend en compte la vorticité, c'est-à-dire qu'on ne suppose plus l'écoulement irrotationnel, les choses se compliquent notablement. On ne dispose plus de l'intégrale première qui permet de passer de (II.9) à (II.10). Le calcul ne peut donc plus être mené de la même façon.

Si on prend en compte une vorticité quelconque, on obtient des résultats d'une complexité qui les rend peu exploitables. C'est par exemple le cas des travaux de Johnson [24]. Ce n'est d'ailleurs pas ce que nous cherchons ici ; nous nous plaçons dans le cas d'une vorticité constante qui peut être induite par l'effet du vent sur la surface.

Notons que ce modèle de vorticité constante est aussi adapté pour représenter un courant de marée. En effet, l'arrivée ou le départ de l'eau, selon que la mer monte ou descend, est soumise au frottement au fond de l'eau. Ainsi, on peut considérer que l'eau a une certaine vitesse en surface, une vitesse nulle au fond, et une vitesse variant linéairement entre les deux à cause de la viscosité, aussi faible soit celle-ci.

L'hypothèse d'une vorticité constante est physiquement acceptable comme on vient de l'expliquer, pour représenter ces écoulements (vent ou marée), et il a l'avantage de ne pas faire perdre tout à fait le bénéfice de l'existence d'un potentiel des vitesses. En effet, on peut alors décomposer le champ des vitesses de l'écoulement en une composante de vorticité constante, représentant l'écoulement non perturbé, et une composante irrotationnelle constituant une perturbation.

Ajoutons que la vorticité, constante au départ, le restera en vertu du théorème de Kelvin. En effet, nous ne prenons pas en compte la viscosité et la seule force s'exerçant à distance sur une particule de fluide est la gravité, qui dérive d'un potentiel scalaire.

On travaille sur deux dimensions spatiales, l'axe Ox est horizontal, dirigé vers la droite et l'axe Oz est vertical, dirigé vers le haut. La surface de l'eau au repos est $z = 0$. La profondeur est finie, constante et égale à h.

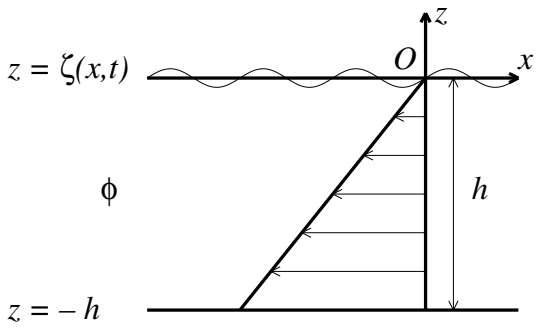

FIG. IV.1 – Écoulement cisaillé ($\Omega > 0$) (vorticité négative, marée montante ou vent dans le sens des vagues)

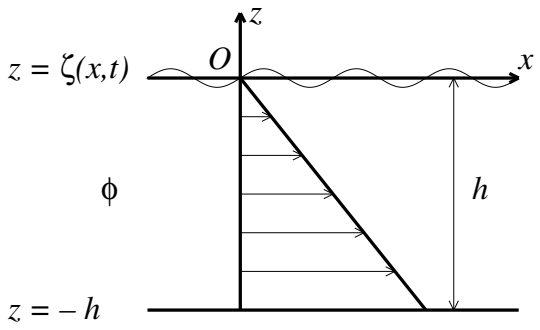

FIG. IV.2 – Écoulement cisaillé ($\Omega < 0$) (vorticité positive, marée descendante ou vent contraire)

On prend un repère (galiléen) en translation uniforme par rapport à celui de la figure de sorte que la vitesse relative du fluide en surface soit nulle. Le champ des vitesses est alors la somme de deux composantes :

$$\mathbf{V} = \Omega z \mathbf{i} + \nabla \phi(x, z, t) \tag{IV.1}$$

La première composante est rotationnelle et modélise le champ des vitesses cisaillé induit par la tension du vent, la deuxième est une composante irrotationnelle et dérivant donc d'un potentiel.

La conservation du fluide incompressible donne l'équation de continuité : elle n'est pas modifiée par la prise en compte de la vorticité.

$$\nabla . \mathbf{V} = 0. \tag{IV.2}$$

On applique la relation d'Euler :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}.\nabla)\mathbf{V} + \frac{\nabla P}{\rho} = -g\mathbf{k} \tag{IV.3}$$

On ne retient pas de viscosité dans notre modèle. La viscosité a pu être à l'origine de l'écoulement cisaillé, mais on considère que cette action a lieu à grande distance de la zone d'étude. Dans son livre de 1932, Lamb [29] a traité de l'amortissement des vagues par la dissipation visqueuse. Il a établi que l'amplitude d'une vague α vérifiait

$$\frac{d\alpha}{dt} = -2\nu k^2 \alpha \tag{IV.4}$$

où ν est la viscosité ($\nu \ll 1$ pour l'eau), et k le nombre d'onde. Dias, Dyachenko & Zakharov [11] se sont aussi intéressés à la dissipation visqueuse et rappellent que cette équation de Lamb s'intègre immédiatement en

$$\alpha \sim \exp\left(-2\nu k^2 t\right). \tag{IV.5}$$

Avec la forme du champ des vitesses (IV.1) et l'équation de continuité (IV.2) on obtient l'équation de Laplace pour la partie potentielle ϕ :

$$\nabla^2 \phi = 0. \tag{IV.6}$$

On peut alors introduire une fonction de courant ψ associée au potentiel des vitesses ϕ, qui vérifie les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\psi_z = \phi_x, \qquad \psi_x = -\phi_z \tag{IV.7}$$

On transforme l'équation (IV.3) de la façon suivante :

$$\nabla\phi_t + \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{V}^2\right) - \mathbf{V}\wedge\varpi + \nabla\left(\frac{P}{\rho}\right) + \nabla(gz) = 0 \tag{IV.8}$$

où ϖ est le vecteur tourbillon : $\varpi = \nabla\wedge\mathbf{V} = \Omega\mathbf{j}$. Cette équation se réécrit

$$\nabla\left(\phi_t + \frac{1}{2}\mathbf{V}^2 + \frac{P}{\rho} + gz\right) = \mathbf{V}\wedge\varpi. \tag{IV.9}$$

On remarque que

$$\mathbf{V}\wedge\varpi = \begin{pmatrix} -\Omega\phi_z \\ 0 \\ \Omega^2 z + \Omega\phi_x \end{pmatrix} \tag{IV.10}$$

et que

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\Omega^2 z^2 + \Omega\psi\right) = \begin{pmatrix} \Omega\psi_x \\ 0 \\ \Omega^2 z + \Omega\psi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega\phi_z \\ 0 \\ \Omega^2 z + \Omega\phi_x \end{pmatrix} = \mathbf{V}\wedge\varpi \tag{IV.11}$$

d'où la réécriture de (IV.3) sous la forme

$$\nabla\left(\phi_t + \frac{1}{2}\mathbf{V}^2 + \frac{P}{\rho} + gz - \frac{1}{2}\Omega^2 z^2 - \Omega\psi\right) = 0. \tag{IV.12}$$

c'est-à-dire :

$$\nabla\left(\phi_t + \frac{1}{2}\phi_x^2 + \frac{1}{2}\phi_z^2 + \Omega z\phi_x + \frac{P}{\rho} + gz - \Omega\psi\right) = 0. \tag{IV.13}$$

On peut obtenir une intégrale première :

$$\phi_t + \frac{1}{2}\phi_x^2 + \frac{1}{2}\phi_z^2 + \Omega z\phi_x + \frac{P}{\rho} + gz - \Omega\psi = f(t). \tag{IV.14}$$

IV.1.b Détermination d'une onde de Stokes

Pour déterminer une onde de Stokes, on peut annuler ϕ_t et profiter que la surface libre soit une ligne de courant où $\frac{1}{2}\Omega z^2 + \psi$ est constant. Cela permet d'éliminer la fonction de courant ψ. C'est en particulier ce qu'ont fait Simmen & Saffman [45] et Li, Hui & Donelan [33] pour obtenir une relation de dispersion non linéaire dans le contexte d'une vorticité constante.

On calcule alors

$$\mathbf{V}\wedge\varpi = \begin{pmatrix} -\Omega\phi_z \\ 0 \\ \Omega^2(z+h) + \Omega\phi_x \end{pmatrix}. \tag{IV.15}$$

La fonction de courant associée à la seule perturbation vérifie les relations de Cauchy-Riemann :

$$\psi_z = \phi_x, \qquad \psi_x = -\phi_z. \tag{IV.16}$$

Posons

$$\varphi(x,z) = \Omega\psi + \frac{\Omega^2}{2}(z+h)^2. \tag{IV.17}$$

On observe que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Omega \psi_x = -\Omega \phi_z \tag{IV.18}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Omega \psi_z + \Omega^2 (z+h) = \Omega \phi_x + \Omega^2 (z+h) \tag{IV.19}$$

c'est-à-dire que $\mathbf{V} \wedge \varpi = \nabla \varphi$. La relation d'Euler s'intègre donc :

$$\nabla \left(\phi_t + \frac{1}{2}\mathbf{V}^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right) = \mathbf{V} \wedge \varpi \tag{IV.20}$$

$$\Longleftrightarrow \nabla \left[\phi_t + \frac{1}{2}\mathbf{V}^2 + \frac{p}{\rho} + gz - \Omega\psi - \frac{\Omega^2}{2}(z+h)^2 \right] = 0 \tag{IV.21}$$

$$\Longleftrightarrow \phi_t + \frac{1}{2}\mathbf{V}^2 + \frac{p}{\rho} + gz - \Omega\psi - \frac{\Omega^2}{2}(z+h)^2 = C(t) \tag{IV.22}$$

On peut éliminer le terme correspondant à la pression pour obtenir la condition dynamique, valable à la surface :

$$\phi_t + \frac{1}{2}\left[\Omega(z+h) + \phi_x\right]^2 + \frac{1}{2}\phi_z^2 + gz - \Omega\psi - \frac{\Omega^2}{2}(z+h)^2 = C(t). \tag{IV.23}$$

Sachant que cette condition est valable à la surface, on a $z = \zeta$, d'où la réécriture :

$$\phi_t + \frac{1}{2}\left(\Omega\zeta + \Omega h + \phi_x\right)^2 + \frac{1}{2}\phi_z^2 + g\zeta - \Omega\psi - \frac{\Omega^2}{2}(\zeta+h)^2 = C(t). \tag{IV.24}$$

La condition cinématique s'écrit tout simplement

$$\zeta_t + \left(\Omega\zeta + \Omega h + \phi_x\right)\zeta_x - \phi_z = 0. \tag{IV.25}$$

Enfin, on a la condition aux limites :

$$z = -h \Rightarrow \phi_z = 0. \tag{IV.26}$$

Résumé des équations

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \qquad -h \leqslant z \leqslant \zeta(x,t) \tag{IV.27}$$

$$\zeta_t + \left(\Omega\zeta + \Omega h + \phi_x\right)\zeta_x - \phi_z = 0 \qquad z = \zeta(x,t) \tag{IV.28}$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}\left(\Omega\zeta + \Omega h + \phi_x\right)^2 + \frac{1}{2}\phi_z^2 + g\zeta - \Omega\psi - \frac{\Omega^2}{2}(\zeta+h)^2 = C(t) \qquad z = \zeta(x,t) \tag{IV.29}$$

$$\psi_z = \phi_x \qquad -h \leqslant z \leqslant \zeta(x,t) \tag{IV.30}$$

$$\psi_x = -\phi_z \qquad -h \leqslant z \leqslant \zeta(x,t) \tag{IV.31}$$

$$\phi_z = 0 \qquad z = -h \tag{IV.32}$$

Détermination de l'onde de Stokes

On cherche une onde de Stokes solution de ce système. Pour cela, on effectue les changements suivants :

$$X = x - Ct, \qquad Z = z, \qquad T = t. \tag{IV.33}$$

D'autre part, on pose :

$$\phi(x,z,t) = \Phi(X,Z), \tag{IV.34}$$
$$\zeta(x,t) = H(X), \tag{IV.35}$$
$$\psi(x,z,t) = \Psi(X,Z), \tag{IV.36}$$
$$C(t) = \Gamma \tag{IV.37}$$

qui ne dépendent pas de T puisqu'on cherche des solutions stationnaires.

L'équation de Laplace est invariante :

$$\Phi_{XX} + \Phi_{ZZ} = 0 \qquad -h \leqslant Z \leqslant H \tag{IV.38}$$

La condition au fond est elle aussi invariante :

$$\Phi_Z = 0 \qquad Z = -h \tag{IV.39}$$

La condition cinématique en surface devient :

$$\left(\Phi_X + \Omega(H+h) - C\right) H' - \Phi_Z = 0 \qquad Z = H \tag{IV.40}$$

La condition dynamique en surface s'écrit :

$$\frac{1}{2}\left(\Phi_X + \Omega(H+h) - C\right)^2 + \frac{1}{2}\Phi_Z^2 + (g + C\Omega)H - \Omega\Psi - \frac{\Omega^2}{2}(H+h)^2 = K \qquad Z = H \tag{IV.41}$$

avec $K = \Gamma + \dfrac{C^2}{2} + C\Omega H$. On traduit aussi les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \Phi_X = \Psi_Z & -h < Z < H \\ \Phi_Z = -\Psi_X & -h < Z < H \end{cases} \tag{IV.42}$$

Considérons l'expression suivante :

$$\Delta(X) = \Psi(X, H(X)) - CH(X) + \frac{1}{2}\Omega(H(X)+h)^2 \tag{IV.43}$$

On va vérifier qu'elle est constante en la dérivant :

$$\Delta'(X) = \Psi_X(X,H(X)) + \Psi_Z(X,H(X))H'(X) + \Omega(H(X)+h)H'(X) - CH'(X) \tag{IV.44}$$
$$\Delta'(X) = \Psi_X(X,H(X)) + \left(\Psi_Z(X,H(X)) + \Omega(H(X)+h) - C\right) H'(X) \tag{IV.45}$$
$$\Delta(X) = -\Phi_Z(X,H(X)) + \left(\Phi_X(X,H(X)) + \Omega(H(X)+h) - C\right) H'(X) \tag{IV.46}$$

et cette quantité est nulle d'après la condition cinématique à la surface (IV.40). On en déduit que

$$\Psi(X,H(X)) = CH(X) - \frac{1}{2}\Omega(H(X)+h)^2 + \text{Cte} \tag{IV.47}$$

Cette relation permet d'éliminer Ψ de la condition dynamique à la surface :

$$\frac{1}{2}\left[\Phi_X + \Omega(H+h) - C\right]^2 + \frac{1}{2}\Phi_Z^2 + gH = K \qquad Z = H \tag{IV.48}$$

Résumons le système d'équations qui régit une onde de Stokes. Comme on a éliminé la fonction de courant, on n'a plus besoin des relations de Cauchy-Riemann.

$$\Phi_{XX} + \Phi_{ZZ} = 0 \qquad -h \leqslant Z \leqslant H \tag{IV.49}$$
$$\left[\Phi_X + \Omega(H+h) - C\right] H' - \Phi_Z = 0 \qquad Z = H \tag{IV.50}$$
$$\frac{1}{2}\left[\Phi_X + \Omega(H+h) - C\right]^2 + \frac{1}{2}\Phi_Z^2 + gH = K \qquad Z = H \tag{IV.51}$$
$$\Phi_Z = 0 \qquad Z = -h \tag{IV.52}$$

La vitesse de l'écoulement non perturbé à la surface est Ωh. Si on repère la vitesse de phase d'une onde par rapport à un repère qui se déplace à cette vitesse au lieu de la rapporter au repère lié au fond, cela revient à poser $c = C - \Omega h$ et cela fait disparaître le terme Ωh de ce système d'équations qui devient :

$$\Phi_{XX} + \Phi_{ZZ} = 0 \qquad -h \leqslant Z \leqslant H \tag{IV.53}$$

$$(\Phi_X + \Omega H - c)\, H' - \Phi_Z = 0 \qquad Z = H \tag{IV.54}$$

$$(\Phi_X + \Omega H - c)^2 - c^2 + \Phi_Z^2 + 2gH = K \qquad Z = H \tag{IV.55}$$

$$\Phi_Z = 0 \qquad Z = -h \tag{IV.56}$$

Résolution

On cherche H et Φ sous la forme de séries de Fourier :

$$\Phi(X,Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon^n \Phi_n(X,Z) \qquad \Phi_n(X,Z) = \frac{A_n}{n} \frac{\cosh[nk(Z+h)]}{\cosh(nkh)} \sin(nkX) \tag{IV.57}$$

$$H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon^n H_n(X) \qquad H_n(X) = a_n \cos(nkX) \tag{IV.58}$$

$$\tag{IV.59}$$

On développe aussi la vitesse c :

$$c = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n c_n \tag{IV.60}$$

Les calculs sont reproduits dans l'annexe A.3.
Les principaux résultats sont les suivants. On pose $\sigma = \tanh(kh)$:

– À l'ordre 1 : on obtient la relation de dispersion linéaire

$$kc_0^2 + \sigma(c_0\Omega - g) = 0. \tag{IV.61}$$

qui converge, quand la profondeur tend vers l'infini ($\sigma \to 1$) vers celle proposée par Simmen & Saffman [45].

On définit la vorticité sans dimension $\Omega^* = \dfrac{\Omega}{\sqrt{gk\sigma}}$ en rapportant la vorticité à la pulsation des ondes de gravité dans un milieu de même profondeur mais sans vorticité. Si on note aussi $\omega^* = \dfrac{\omega}{\sqrt{gk\sigma}}$ on obtient l'expression très simple :

$$\omega^* = \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma\Omega^*}{2}\right)^2} - \frac{\sigma\Omega^*}{2} \tag{IV.62}$$

On obtient aussi

$$A_1 = \frac{c_0 a_1}{\sigma} \tag{IV.63}$$

– À l'ordre 2 :

$$c_1 = 0 \tag{IV.64}$$

$$A_2 = \frac{1+\sigma^2}{4\sigma^4\omega}\left(3(1-\sigma^2)\omega^2 + 3\sigma\Omega\omega + \sigma^2\Omega^2\right) a_1^2 \tag{IV.65}$$

ce résultat est conforme, quand la profondeur tend vers l'infini, à celui de Simmen & Saffman [45].

$$a_2 = \frac{k}{4\sigma^3\omega^2}\left[(3-\sigma^2)\omega^2 + \sigma(3+\sigma^2)\Omega\omega + \sigma^2\Omega^2\right] a_1^2 \tag{IV.66}$$

Ce résultat coïncide encore avec celui de Simmen & Saffman [45] dans le cas de la profondeur infinie.

– À l'ordre 3 : on obtient la relation de dispersion non linéaire

$$\begin{aligned}(2\omega+\sigma\Omega)c_2 = \frac{k}{8\sigma^4\omega^2}\big[&(9-10\sigma^2+9\sigma^4)\omega^4+\left(18\sigma-4\sigma^3+2\sigma^5\right)\Omega\omega^3\\ &+\left(15\sigma^2+3\sigma^4\right)\Omega^2\omega^2+\left(6\sigma^3+2\sigma^5\right)\Omega^3\omega+\sigma^4\Omega^4\big]a_1^2\end{aligned} \tag{IV.67}$$

On peut effectuer une vérification quand la profondeur tend vers l'infini ($\sigma \to 1$). L'équation s'écrit alors

$$(2\omega+\Omega)c_2 = \frac{k}{8\omega^2}\left(8\omega^4+16\Omega\omega^3+18\Omega^2\omega^2+8\Omega^3\omega+\Omega^4\right)a_1^2 \tag{IV.68}$$

Il apparaît une simplification :

$$c_2 = \frac{k}{8\omega^2}\left(4\omega^3+6\Omega\omega^2+6\Omega^2\omega+\Omega^3\right)a_1^2 \tag{IV.69}$$

Ensuite,

$$kc^2+\Omega c-g = \underbrace{kc_0^2+\Omega c_0-g}_{=0}+k(c^2-c_0^2)+\Omega(c-c_0) \tag{IV.70}$$

$$kc^2+\Omega c-g = (c-c_0)\left[k(c+c_0)+\Omega\right] = c_2\left(\Omega+2kc\right)+O(a_1^3) \tag{IV.71}$$

$$kc^2+\Omega c-g = \frac{k}{8\omega^2}\left(8\omega^4+16\omega^3\Omega+18\omega^2\Omega^2+8\omega\Omega^3+\Omega^4\right)+O(a_1^3) \tag{IV.72}$$

Ce résultat est donc encore compatible, en profondeur infinie, avec ceux de Simmen & Saffman [45].

IV.1.c Remarque

Ce travail généralise à la profondeur finie une partie de l'étude de Simmen & Saffman [45] qui était faite en profondeur infinie.

IV.1.d Conséquences

Avec ces calculs, on peut étudier l'influence de la vorticité sur les formes des ondes de Stokes. On se place désormais dans le cas de la profondeur infinie.

L'équation de la surface libre s'écrit $z = H(x)$ avec

$$H(x) = a_1\cos(kx)+a_2\cos(2kx)+O(a_1^3). \tag{IV.73}$$

On a déjà calculé le coefficient a_2 et on a trouvé la même valeur que Simmen & Saffman

$$a_2 = \frac{1}{2kc_0^2}\left(k^2c_0^2+2kc_0\Omega+\frac{\Omega^2}{2}\right)a_1^2 \tag{IV.74}$$

où la vitesse de phase c_0 est donnée par la relation de dispersion linéaire

$$kc_0^2+\Omega c_0-g = 0 \tag{IV.75}$$

On prend un nombre d'onde, par exemple $k = 1$ qui correspond à des vagues de longueur d'onde de 6.28 m. On choisit une amplitude modérée pour le petit paramètre a_1. Pour différentes valeurs de Ω, positives et négatives, on résout d'abord la relation de dispersion linéaire pour

déterminer c_0. On ne conserve que la valeur positive car le changement de c_0 en son opposé est équivalent au changement de Ω en son opposé. On a alors tous les éléments nécessaires pour calculer a_2. On trace alors le profil de la vague sur une période défini par son développement de Fourier à deux termes.

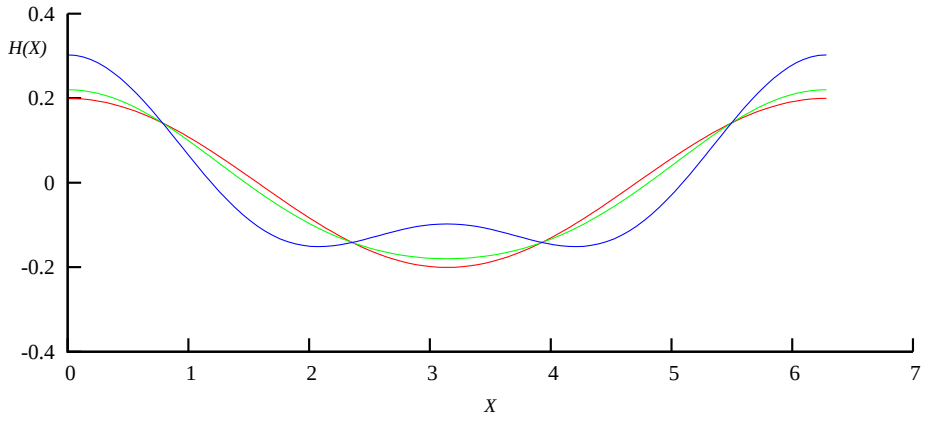

FIG. IV.3 – Influence de la vorticité sur les ondes de Stokes en eau profonde. Courbe verte $\Omega = 0$, courbe bleue $\Omega > 0$ et courbe rouge $\Omega < 0$.

La représentation graphique de l'influence de la vorticité sur la forme des vagues de Stokes se trouve sur la figure IV.3. On observe la déformation du profil pour $\Omega > 0$ sur la courbe bleue et la déformation, en sens opposé, mais avec beaucoup moins d'amplitude, dans le cas $\Omega < 0$ sur la courbe rouge. La courbe verte montre l'onde de Stokes de référence, sans vorticité. On se rappelle que $\Omega > 0$ représente le cas de figure de la marée montante ou du vent dans le sens des vagues. A contrario $\Omega < 0$ correspond à la marée descendante ou au vent contraire aux vagues.

IV.1.e Retour à l'établissement de l'équation NLS

Nous verrons plus loin que la connaissance de cette relation de dispersion non linéaire ne suffit pas à établir l'équation NLS en présence de vorticité, à cause de l'écoulement moyen qui intervient dans ce cas (même en profondeur infinie).

On écrit cette condition à la surface $z = \zeta(x,t)$. On prend la convention de noter par des lettres majuscules Φ, Ψ, etc. les valeurs prises à la surface $z = \zeta(x,t)$ par ϕ, ψ et de même pour leurs dérivées. La constante $f(t)$ du membre de droite peut être annulée en ajoutant au potentiel des vitesses une fonction de t. La pression à la surface est la pression atmosphérique P_a (ici constante). Elle peut être annulée de la même façon. On obtient :

$$\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_x^2 + \frac{1}{2}\Phi_z^2 + \Omega\zeta\Phi_x + g\zeta - \Omega\Psi = 0. \tag{IV.76}$$

On ajoute la condition cinématique qui dit qu'une particule de fluide ne peut pas traverser la surface. Cette condition ne fait pas intervenir la vorticité, c'est donc la même que (II.17) à cela près qu'on travaille à présent en deux dimensions :

$$\Phi_z = \zeta_x\left(\Phi_x + \Omega\zeta\right) + \zeta_t \tag{IV.77}$$

Le système d'équations qui régit l'écoulement est

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = 0 & (-h < z < \zeta(x,t)) \quad \text{(IV.78)} \\ \phi_z = 0 & (z = -h) \quad \text{(IV.79)} \\ \zeta_t + (\Phi_x + \Omega\zeta)\,\zeta_x - \Phi_z = 0 & (z = \zeta(x,t)) \quad \text{(IV.80)} \\ \Phi_t + \dfrac{1}{2}\Phi_x^2 + \dfrac{1}{2}\Phi_z^2 + \Omega\zeta\Phi_x + g\zeta - \Omega\Psi = 0 & (z = \zeta(x,t)) \quad \text{(IV.81)} \end{cases}$$

Remarque : ces équations sont invariantes par le changement

$$x \to -x, \qquad y \to -y, \qquad \psi \to -\psi, \qquad \Omega \to -\Omega \tag{IV.82}$$

toutes les autres quantités restant inchangées. Le changement de x en $-x$ change la vitesse de phase en son opposée. On peut donc considérer uniquement des vitesses de phases positives dès lors qu'on autorise la vorticité Ω à être positive ou négative.

Le problème qui se pose, par rapport au travail qu'on a fait dans la partie II, c'est qu'on a une inconnue de plus : la fonction de courant. Bien sûr, on a en contrepartie les équations de Cauchy-Riemann qui font que le problème est encore fermé, mais l'addition d'une fonction inconnue augmente la complexité du calcul. Pour ne pas tomber dans cette complexité, on va éliminer la fonction de courant. Comme elle n'intervient que par ses dérivées partielles dans les relations de Cauchy-Riemann, on va dériver la relation où elle intervient, c'est-à-dire la condition dynamique. On perd un peu d'information en dérivant mais cela ne portera pas à conséquence.

On dérive donc la condition dynamique par rapport à x pour éliminer la fonction de courant.

$$\begin{aligned} &\Phi_t(x,\zeta(x),t) + \frac{1}{2}\Phi_x^2(x,\zeta(x),t) + \frac{1}{2}\Phi_z^2(x,\zeta(x),t) \\ &+ \Omega\zeta(x,t)\Phi_x(x,\zeta(x),t) + g\zeta(x,t) - \Omega\Psi(x,\zeta(x),t) = 0 \end{aligned} \tag{IV.83}$$

$$\begin{aligned} &\Phi_{tx} + \Phi_{tz}\zeta_x + \Phi_x\left(\Phi_{xx} + \Phi_{xz}\zeta_x\right) + \Phi_z\left(\Phi_{xz} + \Phi_{zz}\zeta_x\right) \\ &+ \Omega\zeta_x\Phi_x + \Omega\zeta\left(\Phi_{xx} + \Phi_{xz}\zeta_x\right) + g\zeta_x - \Omega\left(\Psi_x + \Psi_z\zeta_x\right) = 0 \end{aligned} \tag{IV.84}$$

On procède à l'élimination :

$$\begin{aligned} &\Phi_{tx} + \Phi_{tz}\zeta_x + \Phi_x\left(\Phi_{xx} + \Phi_{xz}\zeta_x\right) + \Phi_z\left(\Phi_{xz} + \Phi_{zz}\zeta_x\right) \\ &+ \Omega\zeta_x\Phi_x + \Omega\zeta\left(\Phi_{xx} + \Phi_{xz}\zeta_x\right) + g\zeta_x + \Omega\left(\Phi_z - \Phi_x\zeta_x\right) = 0 \end{aligned} \tag{IV.85}$$

IV.1.f La méthode des échelles multiples

On va utiliser la méthode des échelles multiples. On cherche des solutions sous la forme

$$\phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_n E^n, \qquad \zeta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n E^n \tag{IV.86}$$

où $E = \exp\left[i(kx - \omega t)\right]$ k étant le nombre d'onde, ω la pulsation. On a bien sûr $\phi_{-n} = \phi_n^*$ de sorte que ϕ soit réelle, de même $\zeta_{-n} = \zeta_n^*$. On développe ensuite les fonctions ϕ_n et ζ_n pour $n \geqslant 0$, sous la forme

$$\phi_n = \sum_{j=n}^{+\infty} \varepsilon^j \phi_{nj}, \qquad \zeta_n = \sum_{j=n}^{+\infty} \varepsilon^j \zeta_{nj} \tag{IV.87}$$

où ε est un petit paramètre caractérisant la faible amplitude des vagues, par exemple la cambrure. On a $\phi_{00} = 0$ et $\zeta_{00} = 0$.

Conformément à la méthode des échelles multiples, on change de variables pour les variables « lentes » :

$$\xi = \varepsilon(x - c_g t), \qquad \tau = \varepsilon^2 t. \tag{IV.88}$$

Pour cela on commence par traduire le système d'équations où les variables étaient (x, z, t) vers un nouveau système où les variables sont ξ, z, τ. On a

$$\partial_x = \varepsilon \partial_\xi \quad \text{et} \quad \partial_t = \varepsilon^2 \partial_\tau - \varepsilon c_g \partial_\xi \tag{IV.89}$$

L'équation de Laplace s'écrit

$$\varepsilon^2 \phi_{\xi\xi} + \phi_{zz} = 0 \qquad (-h \leqslant z \leqslant \zeta(\xi, \tau)) \tag{IV.90}$$

La condition au fond reste

$$\phi_z = 0 \qquad z = -h \tag{IV.91}$$

La condition cinématique devient

$$\varepsilon^2 \zeta_\tau - \varepsilon c_g \zeta_\xi + \varepsilon^2 \Phi_\xi \zeta_\xi + \varepsilon \Omega \zeta \zeta_\xi - \Phi_z = 0 \tag{IV.92}$$

Et la condition dynamique

$$\begin{aligned} &\varepsilon^3 \Phi_{\xi\tau} - \varepsilon^2 c_g \Phi_{\xi\xi} + \varepsilon^3 \Phi_{z\tau} \zeta_\xi - \varepsilon^2 c_g \Phi_{\xi z} \zeta_\xi + \varepsilon^3 \Phi_\xi \Phi_{\xi\xi} + \varepsilon^3 \Phi_\xi \Phi_{\xi z} \zeta_\xi \\ &+ \varepsilon \Phi_z \Phi_{\xi z} + \varepsilon \Phi_z \Phi_{zz} \zeta_\xi + \varepsilon^2 \Omega \zeta_\xi \Phi_\xi + \varepsilon^2 \Omega \zeta \Phi_{\xi\xi} + \varepsilon^2 \Omega \zeta \Phi_{\xi z} \zeta_\xi + \varepsilon g \zeta_\xi \\ &+ \Omega \Phi_z - \varepsilon^2 \Omega \Phi_\xi \zeta_\xi = 0 \end{aligned} \tag{IV.93}$$

- L'équation de Laplace est développée en série de Fourier selon (IV.86). Le développement se fait à l'ordre 3. On développe ensuite les équations obtenues en série par rapport à ε, toujours à l'ordre 3.
- La fonction potentiel des vitesses et ses dérivées, qui interviennent par l'intermédiaire des valeurs prises à la surface, sont développées en séries de Taylor, à l'ordre 3, par rapport aux valeurs de cette fonction et de ses dérivées en $z = 0$. Cette étape ne concerne que les conditions cinématique et dynamique.
- On développe les termes qui interviennent dans les conditions cinématique et dynamique en série de Fourier puis selon les puissances de ε, comme on l'a fait pour l'équation de Laplace. Ces développements sont encore poussés à l'ordre 3.
- La résolution des équations de Laplace donne la forme des solutions avec des coefficients indéterminés. La condition au fond intervient dans cette résolution. Si on travaille en profondeur infinie, on obtient des solutions en exponentielle par rapport à z. En profondeur finie, et c'est ce qu'on va faire, on voit intervenir des fonctions hyperboliques.
- Ces expressions sont reportées dans la condition dynamique et dans la condition cinématique pour déterminer les coefficients des développements. Un gros travail d'élimination débouchera sur l'équation NLS.

Les trois premières étapes de ce calcul peuvent être réalisées assez facilement par un programme de calcul formel. On a écrit un programme spécialisé, pour venir à bout de ces calculs en évitant les erreurs humaines toujours sources de pertes de temps.

Ce programme a été écrit en langage C et comporte un peu plus de 2000 lignes. Son exécution est extrêmement rapide, de l'ordre de la seconde pour obtenir des développements à l'ordre 3. C'est beaucoup plus rapide par exemple que la compilation par LaTeX de ses résultats. Il tourne sans problème à un ordre supérieur à 3, mais la deuxième phase du calcul, après ces développements, étant difficile à automatiser et donc faite à la main, cette deuxième phase deviendrait extrêmement difficile à un ordre supérieur, 4 ou plus. Ce programme fournit en sortie environ 50 pages de code source pour LaTeX qui détaillent les calculs des développements successifs. Certaines équations intermédiaires tiennent sur 4 pages. Une fois les termes triés selon les puissances de ε et de E, les égalités ont des tailles plus raisonnables.

Pour ce programme, une équation est une liste de termes (représentant une somme). Chaque terme est un produit d'un rationnel et de facteurs. Le rationnel est rangé sous forme d'un

numérateur et d'un dénominateur. Chaque facteur est l'une des grandeurs ε, k, Ω, ϕ, ζ, g, c_g, c_p etc. affectée d'un exposant entier. L'enregistrement contient aussi, si nécessaire les indices des fonctions ϕ_n ou ϕ_{ij} et de même pour ζ. Enfin, chaque facteur possède aussi une variable booléenne pour signifier s'il a été conjugué ou non et éventuellement une mention de dérivation par rapport à ξ, z ou τ (un entier pour chaque).

L'addition de deux sommes est facile ; il suffit de concaténer deux listes. Le produit de deux termes se fait en additionnant les exposants. Le produit de deux sommes se fait en utilisant la distributivité dans deux boucles imbriquées : on multiplie chaque terme d'une somme par chaque terme de l'autre et on additionne les produits obtenus.

La simplification d'une expression est en général une des principales difficultés dans le calcul formel. Ici, par chance, elle est très facile. Il y a d'abord des simplifications du type

$$c_p - (c_g - c_p) = -c_g \tag{IV.94}$$

et pour toutes les autres simplifications, il suffit d'ordonner les termes, avec un algorithme de tri ordinaire, dans un ordre lexicographique prédéfini puis de comparer des termes consécutifs. Si deux termes consécutifs ne diffèrent que par la valeur de leur coefficient rationnel, on les remplace par un seul, affecté de la somme des deux coefficients. La simplification est particulièrement facile car il n'est nécessaire d'utiliser aucune formule de trigonométrie ou autre. Ce programme ne rencontre aucune des difficultés habituelles du calcul formel.

Des sous-programmes calculent les développements de Taylor ou de Fourier ou en série entière. Ce sont de simples boucles. Pour calculer l'ordre auquel il est nécessaire de développer un facteur dans un produit, on minore la valuation des autres facteurs et cela ne présente pas de difficulté.

Tous les sous-programmes qui interviennent dans ce logiciel sont donc relativement simples. Ce qui fait la longueur du programme global, c'est seulement le grand nombre de cas particuliers qu'on distingue au moment de coder un terme, de le dériver, de minorer sa valuation, etc.

Le programme comporte aussi, évidemment, des sous-programmes pour exprimer les résultats intermédiaires et définitifs sous forme de source LaTeX prêt à être compilé.

IV.1.g Les développements

Les résultats intermédiaires de ces développements sont fournis dans l'annexe A.4 ; les calculs ne sont pas la partie la plus intéressante de cet exposé.

On développe d'abord l'équation de Laplace et la condition au fond permet d'exprimer les solutions à l'aide de fonctions hyperboliques si on est en profondeur finie, en exponentielles sinon. Ces solutions dépendent de constantes d'intégration pour l'instant indéterminées. Cette étape est rigoureusement identique à l'étape analogue du calcul de Davey & Stewartson[10].

Les conditions cinématique et dynamique font intervenir les valeurs du potentiel des vitesses et de certaines dérivées partielles à la surface libre. Ces valeurs sont d'abord développées en série de Taylor autour de $z = 0$. Ensuite, elles sont développées en série de Fourier et en série entière par rapport au petit paramètre ε. Les calculs diffèrent maintenant de ceux de Davey & Stewartson[10], puisque les équations qui prennent en compte la vorticité ne sont pas les mêmes, et puisqu'on a procédé à une dérivation. Mais sur le principe, la démarche est complètement analogue et les calculs, un peu plus lourds, effectués par un programme spécialisé.

IV.1.h L'établissement de l'équation

Les premières phases du calcul qu'on vient de décrire sont des développements qui auraient pu être intégralement menés à la main, mais qui ont été obtenus par un programme pour minimiser les risques de pertes de temps consécutives aux erreurs hautement probables. Les étapes qui

suivent ne se prêtent pas aussi bien au traitement automatique ; les calculs suivants sont donc réalisés à la main.

Il s'agit de reporter les solutions de l'équation de Laplace, qui dépendent de constantes d'intégration inconnues, dans les développements de la condition cinématique et de la condition dynamique. On élimine alors ces nombreuses constantes d'intégration entre les nombreuses équations dont on dispose. Dans le principe, la démarche est encore très semblable à celle de Davey & Stewartson[10], même si les équations ne sont pas les mêmes. Il ne doit rester en fin de compte que deux inconnues et deux équations. Les deux inconnues sont la valeur du potentiel des vitesses en $z = 0$ et l'écoulement moyen. L'une des équations pourra être intégrée car on est dans un modèle bidimensionnel, exactement comme c'était le cas pour les équations de Davey & Stewartson[10]. L'autre équation, qui recevra le résultat de l'élimination de l'avant dernière variable, est l'équation NLS modifiée par l'introduction d'une vorticité constante ; nous l'appellerons vNLS. La valeur du potentiel des vitesses en $z = 0$ est moins intéressante que l'élevation ζ de la surface, mais les deux sont reliées par une relation simple obtenue en cours de calcul.

Cette équation vNLS est un peu compliquée à cause de l'expression de ses coefficients. On pose $\sigma = \tanh(kh)$, et on définit la vorticité sans dimension $\Omega^* = \dfrac{\Omega}{\omega_0}$ où $\omega_0 = \sqrt{gk\sigma}$ est la pulsation du train de vagues sans vorticité, toutes choses égales par ailleurs (même nombre d'onde, même profondeur, même gravité, etc.). On appelle $\mu = kh$ et $\rho = \dfrac{c_g}{c_p}$ qu'on ne confondra évidemment pas avec la masse volumique. c_g est la vitesse de groupe et c_p la vitesse de phase. On posera aussi $a = i\dfrac{c_p}{\sigma}A$ pour que l'équation régisse l'élévation a, plus intéressante que la valeur en $z = 0$ du potentiel des vitesses A.

L'équation vNLS s'écrit alors :

$$ia_\tau + La_{\xi\xi} = M\,|a|^2\,a \tag{IV.95}$$

Quand on veut exprimer les coefficients, on s'aperçoit que la quantité $\dfrac{\sigma\Omega}{\omega}$ intervient très souvent, et de façon polynomiale. On adoptera donc les notations $\overline{\Omega} = \dfrac{\Omega}{\omega}$ et $X = \sigma\overline{\Omega}$ pour simplifier l'écriture. L'attention du lecteur est attirée sur le fait qu'il ne s'agit de rien de plus qu'une simplification de l'écriture. En particulier, il ne s'agit pas d'une méthode pour rendre la vorticité Ω sans dimension ; ce serait une erreur de procéder ainsi. En effet, le dénominateur ω dépend de Ω (c'est la solution positive de l'équation fournie par la relation de dispersion linéaire) et on ne peut rendre une quantité non dimensionnée en la rapportant à une quantité qui en dépend. Une étude rapide montre que quand Ω prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, $\overline{\Omega}$ varie entre -1 et $+\infty$. La vraie vorticité sans dimension reste $\Omega^* = \dfrac{\Omega}{\omega_0}$ où $\omega_0 = \sqrt{gk\sigma}$ est la fréquence angulaire pour un milieu au repos.

Cette précaution de langage étant prise, les expressions des coefficients sont les suivantes :

$$L = \frac{\omega}{k^2\sigma(2+X)}\left\{\mu(1-\sigma^2)\left[1-\mu\sigma+(1-\rho)X\right]-\sigma\rho^2\right\} \tag{IV.96}$$

$$M = \frac{\omega k^2(U+VW)}{8(1+X)(2+X)\sigma^4} \tag{IV.97}$$

$$\begin{aligned} U = {} & 9-12\sigma^2+13\sigma^4-2\sigma^6+(27-18\sigma^2+15\sigma^4)X+(33-3\sigma^2+4\sigma^4)X^2 \\ & +(21+5\sigma^2)X^3+(7+2\sigma^2)X^4+X^5 \end{aligned} \tag{IV.98}$$

$$V = (1+X)^2\left(1+\rho+\mu\overline{\Omega}\right)+1+X-\rho\sigma^2-\mu\sigma X \tag{IV.99}$$

$$W = 2\sigma^3\frac{(1+X)(2+X)+\rho(1-\sigma^2)}{\sigma\rho\left(\rho+\mu\overline{\Omega}\right)-\mu(1+X)} \tag{IV.100}$$

IV.1.i Vérifications

On peut vérifier la validité de cette équation dans deux cas particuliers.

Sans vorticité

On observe, dans le cas $\overline{\Omega} = 0$, c'est-à-dire en absence de vorticité, qu'on retrouve bien l'expression de l'équation NLS bien connue, en profondeur finie. En effet, l'équation sous la forme (IV.95) devient

$$iA_\tau - \frac{\omega}{8k^2\sigma^2}\left\{\left[(1-\sigma^2)kh+\sigma\right]^2 + 4\sigma kh(1-\sigma^2)(kh\sigma-1)\right\}A_{\xi\xi} = P\left|A\right|^2 A \tag{IV.101}$$

avec

$$P = \frac{k^4(U+VW)}{4\omega\sigma^2} \tag{IV.102}$$

$$U = 9 - 12\sigma^2 + 13\sigma^4 - 2\sigma^6 \tag{IV.103}$$

$$V = 2 + \rho(1-\sigma^2) \tag{IV.104}$$

$$W = 2\sigma^3\frac{2+\rho(1-\sigma^2)}{\sigma\rho^2-\mu} \tag{IV.105}$$

Le coefficient de $A_{\xi\xi}$ est

$$\begin{aligned} &-\frac{\omega}{8k^2\sigma^2}\left\{\left[(1-\sigma^2)kh+\sigma\right]^2 + 4\sigma kh(1-\sigma^2)(kh\sigma-1)\right\} \\ &= -\frac{c_g^2 - gh(1-kh\sigma)(1-\sigma^2)}{2\omega} \end{aligned} \tag{IV.106}$$

D'autre part, le coefficient du terme non linéaire s'écrit en absence de vorticité :

$$P = \frac{k^4}{4\omega}\left\{\frac{9}{\sigma^2} - 12 + 13\sigma^2 - 2\sigma^4 - \frac{2\left[2c_p + c_g(1-\sigma^2)\right]^2}{gh - c_g^2}\right\} \tag{IV.107}$$

Finalement, en l'absence de vorticité, l'équation vNLS devient :

$$\begin{aligned} &iA_\tau - \frac{c_g^2 - gh(1-kh\sigma)(1-\sigma^2)}{2\omega}A_{\xi\xi} = \\ &\frac{k^4}{4\omega}\left\{\frac{9}{\sigma^2} - 12 + 13\sigma^2 - 2\sigma^4 - \frac{2\left[2c_p + c_g(1-\sigma^2)\right]^2}{gh - c_g^2}\right\}\left|A\right|^2 A \end{aligned} \tag{IV.108}$$

C'est exactement ce qu'on attendait.

En profondeur infinie

Dans le cas de la profondeur infinie ($\sigma = 1$). Il y a alors quelques formes indéterminées à lever. On remarque que

$$1 - \tanh u = \frac{\cosh u - \sinh u}{\cosh u} = \frac{e^{-u}}{\cosh u} = O(e^{-2u}) \tag{IV.109}$$

donc, pour tout m on a

$$\lim_{u\to+\infty}(1-\tanh u).u^m = 0 \tag{IV.110}$$

On aura aussi besoin de la vitesse de groupe obtenue à partir de la vitesse de phase (voir annexe A.4) pour $\sigma = 1$:

$$c_g = \frac{\omega}{k} \times \frac{\omega + \Omega}{2\omega + \Omega} = c_p \frac{1 + \overline{\Omega}}{2 + \overline{\Omega}} \tag{IV.111}$$

On reprend l'équation (IV.95). Le coefficient de $a_{\xi\xi}$ est en profondeur infinie :

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{k^2\sigma(2+X)} \left\{\mu(1-\sigma^2)\left[1 - \mu\sigma + (1-\rho)X\right] - \sigma\rho^2\right\} &= -\frac{\omega}{k^2(2+X)} \frac{c_g^2}{c_p^2} \\ &= -\frac{\omega}{k^2} \frac{(1+X)^2}{(2+X)^3} \end{aligned} \tag{IV.112}$$

On en vient au coefficient de $|a|^2 a$ dans le second membre :

$$M = \frac{\omega k^2 (U + VW)}{8(1+X)(2+X)} \tag{IV.113}$$

où

$$U = 8 + 24\overline{\Omega} + 34\overline{\Omega}^2 + 26\overline{\Omega}^3 + 9\overline{\Omega}^4 + \overline{\Omega}^5 \tag{IV.114}$$

$$V = (1+X)^2 \left(1 + \rho + \mu\overline{\Omega}\right) + 1 + X - \rho\sigma^2 - \mu\sigma X \tag{IV.115}$$

$$W = 2\sigma^3 \frac{(1+X)(2+X) + \rho(1-\sigma^2)}{\sigma\rho\left(\rho + \mu\overline{\Omega}\right) - \mu(1+X)} \tag{IV.116}$$

Pour lever la forme indéterminée, on divise V et on multiplie W par μ :

$$\frac{V}{\mu} = (1+X)^2 \left(\frac{1+\rho}{\mu} + \overline{\Omega}\right) + \frac{1 + X - \rho\sigma^2}{\mu} - \sigma X \tag{IV.117}$$

$$\mu W = 2\sigma^3 \frac{(1+X)(2+X) + \rho(1-\sigma^2)}{\sigma\rho\left(\frac{\rho}{\mu} + \overline{\Omega}\right) - (1+X)} \tag{IV.118}$$

On remarque que $\overline{\Omega} = X$. On obtient ainsi la limite

$$(VW)_\infty = -\overline{\Omega}^2 (2 + \overline{\Omega})^3 \tag{IV.119}$$

Dans ce cas limite de la profondeur infinie l'équation vNLS s'écrit donc :

$$ia_\tau + \frac{\omega}{k^2\sigma(2+X)} \left\{\mu(1-\sigma^2)\left[1 - \mu\sigma + (1-\rho)X\right] - \sigma\rho^2\right\} a_{\xi\xi} = M\,|a|^2\, a \tag{IV.120}$$

$$\Longleftrightarrow ia_\tau - \frac{\omega}{k^2} \frac{(1+X)^2}{(2+X)^3} a_{\xi\xi} = \frac{\omega k^2 (U + VW)}{8(1+X)(2+X)}\,|a|^2\, a \tag{IV.121}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} &ia_\tau - \frac{\omega}{k^2} \frac{(1+\overline{\Omega})^2}{(2+\overline{\Omega})^3} a_{\xi\xi} = \\ &\frac{\omega k^2}{8(1+\overline{\Omega})(2+\overline{\Omega})} \left[8 + 24\overline{\Omega} + 34\overline{\Omega}^2 + 26\overline{\Omega}^3 + 9\overline{\Omega}^4 + \overline{\Omega}^5 - \overline{\Omega}^2(2+\overline{\Omega})^3\right] |a|^2\, a \end{aligned} \tag{IV.122}$$

Il apparaît une simplification :

$$ia_\tau - \frac{\omega}{k^2} \frac{(1+\overline{\Omega})^2}{(2+\overline{\Omega})^3} a_{\xi\xi} = \frac{\omega k^2}{2(1+\overline{\Omega})} \left[4 + 10\overline{\Omega} + 12\overline{\Omega}^2 + 7\overline{\Omega}^3 + \overline{\Omega}^4 - \overline{\Omega}^2(2+\overline{\Omega})^2\right] |a|^2\, a \tag{IV.123}$$

On a laissé le second membre sous cette forme intentionnellement pour la remarque qui va suivre. On aurait pu l'écrire

$$ia_\tau - \frac{\omega}{k^2} \frac{(1+\overline{\Omega})^2}{(2+\overline{\Omega})^3} a_{\xi\xi} = \omega k^2 \frac{4 + 10\overline{\Omega} + 8\overline{\Omega}^2 + 3\overline{\Omega}^3}{8(1+\overline{\Omega})}\,|a|^2\, a \tag{IV.124}$$

Remarque sur la méthode heuristique d'établissement de l'équation NLS

Dans ce cas limite de la profondeur finie, le second membre est constitué de deux termes. Le deuxième, $-\overline{\Omega}^2(2+\overline{\Omega})^2$, provient de l'écoulement moyen $\phi_{01\xi}$, le « mean flow ». Si dans (IV.123) on abandonne le terme correspondant à ce mean flow, l'équation s'écrit alors

$$ia_\tau - \frac{\omega}{k^2}\frac{(1+\overline{\Omega})^2}{(2+\overline{\Omega})^3}a_{\xi\xi} = \frac{\omega k^2}{8(1+\overline{\Omega})}\left[4+10\overline{\Omega}+12\overline{\Omega}^2+7\overline{\Omega}^3+\overline{\Omega}^4\right]|a|^2\,a \tag{IV.125}$$

Il y a une simplification :

$$ia_\tau - \frac{\omega}{k^2}\frac{(1+\overline{\Omega})^2}{(2+\overline{\Omega})^3}a_{\xi\xi} = \frac{\omega k^2}{8}\left(4+6\overline{\Omega}+6\overline{\Omega}^2+\overline{\Omega}^3\right)|a|^2\,a \tag{IV.126}$$

C'est ce qu'on obtiendrait si on essayait d'obtenir l'équation NLS par la méthode heuristique à partir de la relation de dispersion non linéaire en profondeur infinie avec vorticité constante calculée par exemple par Simmen & Saffman.

La méthode heuristique n'est pas légitime ici car l'écoulement moyen, bien que tendant vers zéro en profondeur infinie, est multiplié par le coefficient

$$(1+X)^2\left(1+\rho+\mu\overline{\Omega}\right)+1+X-\rho\sigma^2-\mu\sigma X \tag{IV.127}$$

qui tend vers l'infini, et le produit des deux a une limite finie non nulle qui n'est pas prise en compte par cette méthode heuristique.

Remarque sur les singularités apparentes

Il apparaît aux dénominateurs de l'équation NLS en présence de vorticité des facteurs $1+X$ ou $2+X$ qui laissent à penser qu'il pourrait y avoir des singularités à étudier pour cette équation. Il n'en est rien. En effet, on doit se rappeler que la variable $X=\dfrac{\sigma\Omega}{\omega}$ n'est qu'une convention d'écriture et pas une vorticité rendue sans dimension en la rapportant à une grandeur de référence. En effet, ω dépend de Ω, ce qui fait que X reste strictement supérieure à -1 quand Ω varie de $-\infty$ à $+\infty$. Ainsi, X ne peut pas prendre la valeur -1, et ne peut s'en approcher que si on considère une vorticité tendant vers l'infini, ce qui serait physiquement inacceptable.

IV.2 Étude de stabilité

On reprend notre équation (IV.95) :

$$ia_\tau + La_{\xi\xi} = M\,|a|^2\,a \tag{IV.128}$$

où

$$L = \frac{\omega}{k^2\sigma(2+X)}\left\{\mu(1-\sigma^2)\left[1-\mu\sigma+(1-\rho)X\right]-\sigma\rho^2\right\} \tag{IV.129}$$

$$M = \frac{\omega k^2(U+VW)}{8(1+X)(2+X)\sigma^4} \tag{IV.130}$$

$$\begin{aligned} U = {} & 9-12\sigma^2+13\sigma^4-2\sigma^6+(27-18\sigma^2+15\sigma^4)X+(33-3\sigma^2+4\sigma^4)X^2 \\ & +(21+5\sigma^2)X^3+(7+2\sigma^2)X^4+X^5 \end{aligned} \tag{IV.131}$$

$$V = (1+X)^2\left(1+\rho+\mu\overline{\Omega}\right)+1+X-\rho\sigma^2-\mu\sigma X \tag{IV.132}$$

$$W = 2\sigma^3\frac{(1+X)(2+X)+\rho(1-\sigma^2)}{\sigma\rho\left(\rho+\mu\overline{\Omega}\right)-\mu(1+X)} \tag{IV.133}$$

Il existe une onde de Stokes solution de (IV.128) de la forme

$$a = a_0 \exp\left(-iMa_0^2\tau\right) \tag{IV.134}$$

On la perturbe :

$$a = a_0(1+\delta_a)\exp\left[i\left(\delta_\omega - Ma_0^2\tau\right)\right] \tag{IV.135}$$

On reporte cette solution perturbée dans (IV.128). L'équation s'écrit après mise en facteur de $a_0 \exp\left[i\left(\delta_\omega - Ma_0^2\tau\right)\right]$:

$$\begin{aligned} &i\frac{\partial\delta_a}{\partial\tau} - (1+\delta_a)\left(\frac{\partial\delta_\omega}{\partial\tau} - Ma_0^2\right) + L\frac{\partial^2\delta_a}{\partial\xi^2} + 2iL\frac{\partial\delta_a}{\partial\xi}\frac{\partial\delta_\omega}{\partial\xi} \\ &L(1+\delta_a)\left[i\frac{\partial^2\delta_\omega}{\partial\xi^2} - \left(\frac{\partial\delta_\omega}{\partial\xi}\right)^2\right] - Ma_0^2(1+\delta_a)^3 = 0 \end{aligned} \tag{IV.136}$$

La contribution des termes du premier ordre est :

$$i\frac{\partial\delta_a}{\partial\tau} - \frac{\partial\delta_\omega}{\partial\tau} + \delta_a Ma_0^2 + L\frac{\partial^2\delta_a}{\partial\xi^2} + iL\frac{\partial^2\delta_\omega}{\partial\xi^2} - 3Ma_0^2\delta_a = 0 \tag{IV.137}$$

On sépare partie réelle et partie imaginaire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\delta_a}{\partial\tau} + L\dfrac{\partial^2\delta_\omega}{\partial\xi^2} = 0 \\ L\dfrac{\partial^2\delta_a}{\partial\xi^2} - 2Ma_0^2\delta_a - \dfrac{\partial\delta_\omega}{\partial\tau} = 0 \end{cases} \tag{IV.138}$$

C'est un système différentiel linéaire à coefficients constants. On cherche donc des solutions sous la forme

$$\begin{cases} \delta_a = \Delta_a \exp\left[i\left(\ell\xi - \lambda\tau\right)\right] \\ \delta_\omega = \Delta_\omega \exp\left[i\left(\ell\xi - \lambda\tau\right)\right] \end{cases} \tag{IV.139}$$

En reportant dans le système, et en simplifiant par l'exponentielle, on trouve :

$$\begin{cases} i\lambda\Delta_a + \quad \ell^2 L\Delta_\omega = \quad 0 \\ (2Ma_0^2 + \ell^2 L)\Delta_a - \quad i\lambda\Delta_\omega = \quad 0 \end{cases} \tag{IV.140}$$

Il existe une solution non nulle si, et seulement si,

$$\lambda^2 = \ell^2 L(2Ma_0^2 + \ell^2 L) \tag{IV.141}$$

Si $L(2Ma_0^2 + \ell^2 L) \geqslant 0$ alors il y a deux solutions en λ réelles et opposées. Au cours du temps, $\exp\left[i\left(\ell\xi - \lambda\tau\right)\right]$ reste bornée ; c'est la stabilité.

Si par contre $L(2Ma_0^2 + \ell^2 L) < 0$ c'est l'instabilité. On remarque au passage qu'il est nécessaire pour cela que $LM < 0$ qui est la condition classique d'instabilité.

On traduit cette condition d'instabilité en posant $L = L_1\dfrac{\omega}{k^2}$ et $M = M_1\omega k^2$ de sorte que L_1 et M_1 soient des fonctions de kh et de $\overline{\Omega}$ uniquement.

$$\text{Instabilité} \quad \Longleftrightarrow \quad L_1(2M_1k^4a_0^2 + L_1\ell^2) < 0 \tag{IV.142}$$

Dans ce cas d'instabilité, le taux d'instabilité γ est donné par

$$\gamma = \frac{l\omega}{k^2}\sqrt{-2M_1L_1k^4a_0^2 - \ell^2L_1^2} \tag{IV.143}$$

Le taux d'instabilité maximal est atteint pour $\ell = \sqrt{-\frac{M_1}{L_1}} a_0 k^2$ et il vaut

$$\gamma_{\max} = M_1 \omega (k a_0)^2 \tag{IV.144}$$

Rappelons que

$$L_1 = \frac{1}{\sigma(2+X)} \left\{ \mu(1-\sigma^2)\left[1 - \mu\sigma + (1-\rho)X\right] - \sigma\rho^2 \right\} \tag{IV.145}$$

$$M_1 = \frac{U + VW}{8(1+X)(2+X)\sigma^4} \tag{IV.146}$$

$$\begin{aligned} U &= 9 - 12\sigma^2 + 13\sigma^4 - 2\sigma^6 + (27 - 18\sigma^2 + 15\sigma^4)X \\ &\quad + (33 - 3\sigma^2 + 4\sigma^4)X^2 + (21 + 5\sigma^2)X^3 + (7 + 2\sigma^2)X^4 + X^5 \end{aligned} \tag{IV.147}$$

$$V = (1+X)^2 \left(1 + \rho + \mu\overline{\Omega}\right) + 1 + X - \rho\sigma^2 - \mu\sigma X \tag{IV.148}$$

$$W = 2\sigma^3 \frac{(1+X)(2+X) + \rho(1-\sigma^2)}{\sigma\rho\left(\rho + \mu\overline{\Omega}\right) - \mu(1+X)} \tag{IV.149}$$

Un diagramme de stabilité est représenté sur la figure IV.4. On rappelle que $\overline{\Omega}$ n'est qu'une notation, définie par $\overline{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega}$ et que ce n'est pas une adimensionnalisation de la vorticité Ω. En effet, le dénominateur ω dépend de Ω par l'intermédiaire de la relation de dispersion linéaire IV.61. $\overline{\Omega}$ est une fonction croissante de Ω et on a

$$\lim_{\Omega \to -\infty} \overline{\Omega} = -\frac{1}{\sigma}, \qquad \lim_{\Omega \to +\infty} \overline{\Omega} = +\infty \tag{IV.150}$$

Ainsi, les seules valeurs de $\overline{\Omega}$ pour lesquelles on peut discuter de la stabilité sont celles qui vérifient $\overline{\Omega} > -\frac{1}{\sigma}$. Sur le diagramme, la partie du plan où $\frac{\sigma\Omega}{\omega} < -1$ est sans objet.

IV.3 Quelques résultats

Stabilité

La condition d'existence de perturbations instables est que l'inéquation (IV.142) admette des solutions de nombres d'onde ℓ réels, c'est-à-dire que $\frac{M_1}{L_1} < 0$ ce qui équivaut aussi bien à $L_1 M_1 < 0$. On peut donc représenter, en fonction de $\overline{\Omega}$ en abscisse et de kh en ordonnée les domaines de stabilité. Dans le domaine $-1.0 < X < -2/3$ les ondes de Stokes sont stables pour toute valeur du paramètre kh. Ce domaine est aussi défini par $\Omega < -2\sqrt{\frac{gk}{3\sigma}}$.

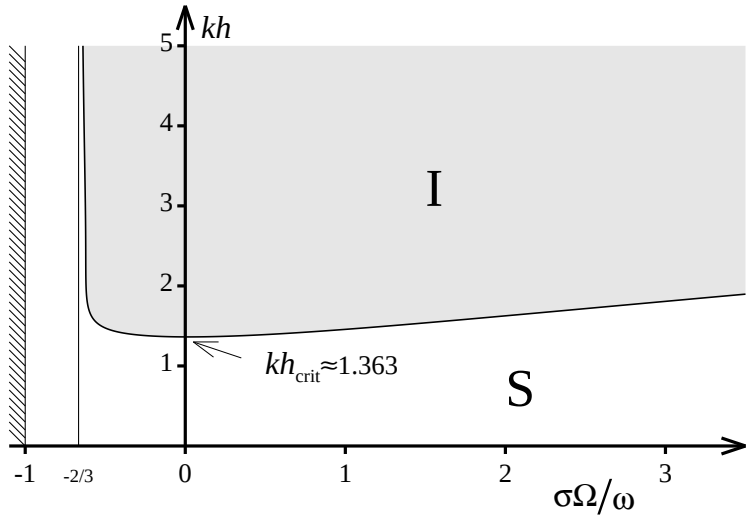

FIG. IV.4 – Diagramme de stabilité dans le plan $(X = \sigma\overline{\Omega}, kh)$: **S** : stable ; **I** : instable.

Restabilisation

Puisque sous certaines conditions, l'écoulement est plus stable en présence de vorticité que sans elle, on peut se demander si la vorticité peut restabiliser un train de vagues déjà modulé. Cela illustre le cas de figure d'un train de vagues qui se propage par exemple en profondeur infinie et subit l'instabilité modulationnelle, puis arrive dans une zone où règne une vorticité constante, par exemple $\overline{\Omega} < -2/3$ qui correspond à la zone de stabilité que nous avons découverte. On effectue deux simulations numériques. Sur la figure IV.5 on part des conditions d'une récurrence simple, c'est-à-dire que le nombre d'onde ℓ de la perturbation est dans la bande d'instabilité, mais que 2ℓ n'y est pas. La vorticité est nulle entre $t = 0$ et $t = 200$ s et l'instabilité modulationnelle se développe. Entre $t = 200$ s et $t = 600$ s la vorticité évolue progressivement de $\overline{\Omega} = 0.0$ à $\overline{\Omega} = -5/6$ qui est au milieu de la bande de stabilité $-1.0 < \overline{\Omega} < -2/3$. On voit que la modulation cesse ; la perturbation évolue de façon irrégulière mais en conservant en ordre de grandeur l'énergie qu'elle avait initialement. La courbe rouge représente l'évolution de l'enveloppe du train de vagues en absence de vorticité, on y observe la périodicité de la récurrence simple. La courbe verte représente l'évolution de cette enveloppe quand on introduit progressivement la vorticité. Au départ, les deux courbes se chevauchent puisqu'on a les mêmes conditions. Dès que la vorticité commence à être introduite, les deux courbes se séparent.

La figure IV.6 montre la même simulation à ceci près qu'elle restabilise une récurrence double obtenue avec une perturbation dont le nombre d'onde ℓ est dans la bande d'instabilité ainsi que 2ℓ (mais 3ℓ n'y est pas). Là encore la vorticité vient à bout de l'instabilité modulationnelle. Les couleurs des courbes obéissent aux mêmes conventions que pour la récurrence simple.

Taux d'instabilité maximal en fonction de la vorticité

On a calculé le taux d'instabilité maximal, à supposer qu'on est en situation d'instabilité, on a trouvé $\gamma_{\max} = M_1\omega(ka_0)^2$. On le rapporte au taux d'instabilité maximal

$$\gamma_{0,\max} = \frac{\omega k^2}{16\sigma^4}\left\{9 - 12\sigma^2 + 13\sigma^4 - 2\sigma^6 + \frac{2\sigma^3}{\sigma\rho^2 - \mu}\left[2 + \rho\left(1 - \sigma^2\right)\right]^2\right\} \tag{IV.151}$$

en absence de vorticité et on le représente graphiquement sur la figure IV.7. On choisit différentes valeurs du paramètre kh dont le cas de la profondeur infinie.

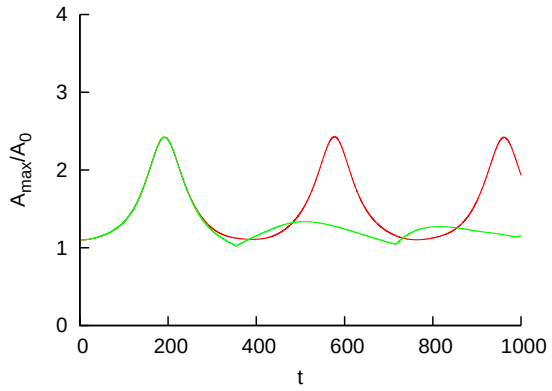

FIG. IV.5 – Restabilisation d'un train de vagues modulé (récurrence simple).

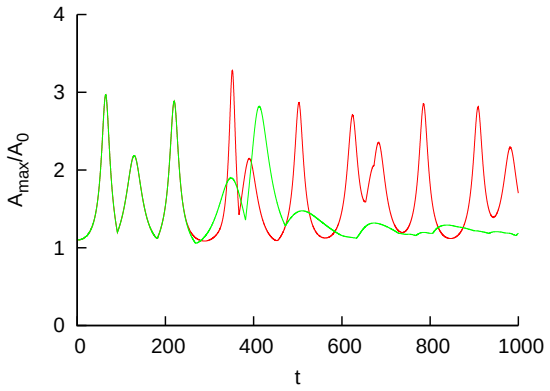

FIG. IV.6 – Restabilisation d'un train de vagues modulé (récurrence double).

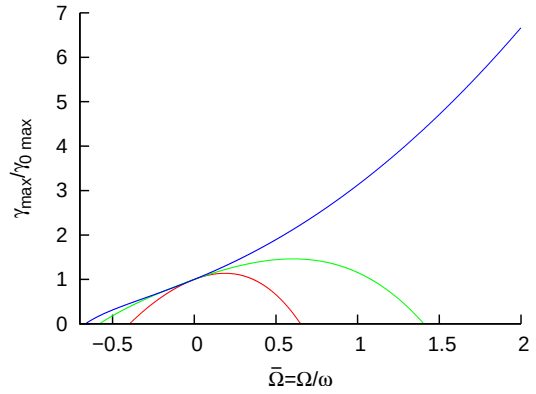

FIG. IV.7 – Taux d'instabilité maximal en fonction de $\overline{\Omega}$. Courbe rouge : $kh = 1.40$, courbe verte : $kh = 1.50$ courbe bleue $kh = \infty$. Ce taux est normalisé par sa valeur en absence de vorticité.

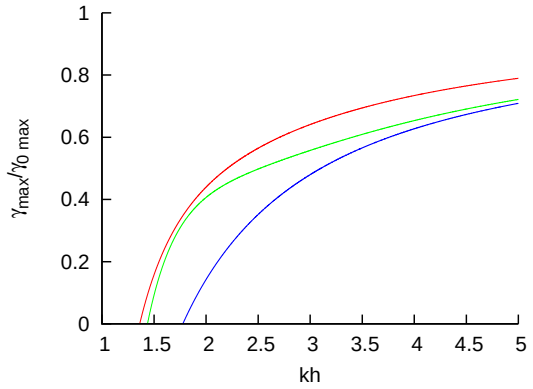

FIG. IV.8 – Taux d'instabilité maximal en fonction de kh. Courbe rouge : $\overline{\Omega} = 0.0$, courbe verte : $\overline{\Omega} = -0.5$ courbe bleue $\overline{\Omega} = 3.0$. Ce taux est normalisé par sa limite quand kh tend vers l'infini.

Taux d'instabilité maximal en fonction de kh

On peut aussi représenter graphiquement le taux d'instabilité maximal pour des valeurs fixées de $\overline{\Omega}$, mais en fonction de kh. Les valeurs sont rapportées à celles de la profondeur infinie. Pour une valeur fixée de kh, on observe sur la figure IV.8 qu'une vorticité, positive ou négative, diminue le taux d'instabilité maximal par rapport au cas où il n'y a pas de vorticité.

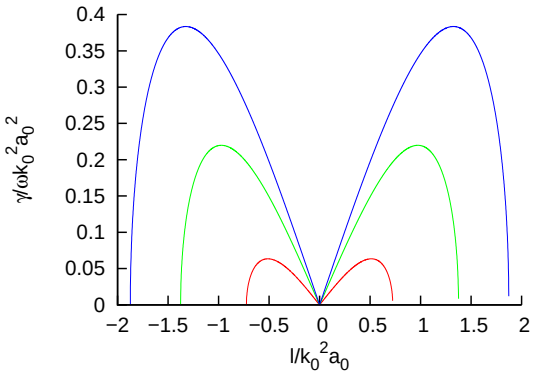

FIG. IV.9 – Taux d'instabilité en fonction du nombre d'onde ℓ de la perturbation. Courbe rouge : $\overline{\Omega} = -0.5$, courbe verte : $\overline{\Omega} = 0.0$ courbe bleue $\overline{\Omega} = 0.5$. Les tracés sont réalisés avec $kh = 2.0$.

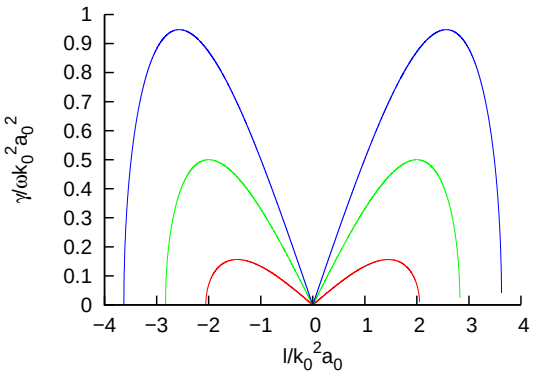

FIG. IV.10 – Taux d'instabilité en fonction du nombre d'onde ℓ de la perturbation. Courbe rouge : $\overline{\Omega} = -0.5$, courbe verte : $\overline{\Omega} = 0.0$ courbe bleue $\overline{\Omega} = 0.5$. Les tracés sont réalisés avec une profondeur infinie.

Taux d'instabilité en fonction du nombre d'onde de la perturbation

Avec la formule (IV.143) on peut dessiner pour une valeur donnée de $(\overline{\Omega}, kh)$ le taux d'instabilité en fonction du nombre d'onde de la perturbation. On porte en abscisse ce nombre d'onde normalisé par $k^2 a_0$ et en ordonnée le taux d'instabilité rapporté à $\omega k^2 a_0^2$. La représentation graphique apparaît sur la figure IV.9. On observe que l'augmentation de la vorticité élargit la bande d'instabilité si $\overline{\Omega} > -2/3$ (c'est-à-dire si $\Omega > -2\sqrt{\dfrac{gk}{3\sigma}}$). La figure est tracée dans le cas $kh = 2.0$. Dans le cas de la profondeur infinie on obtient la courbe de la figure IV.10.

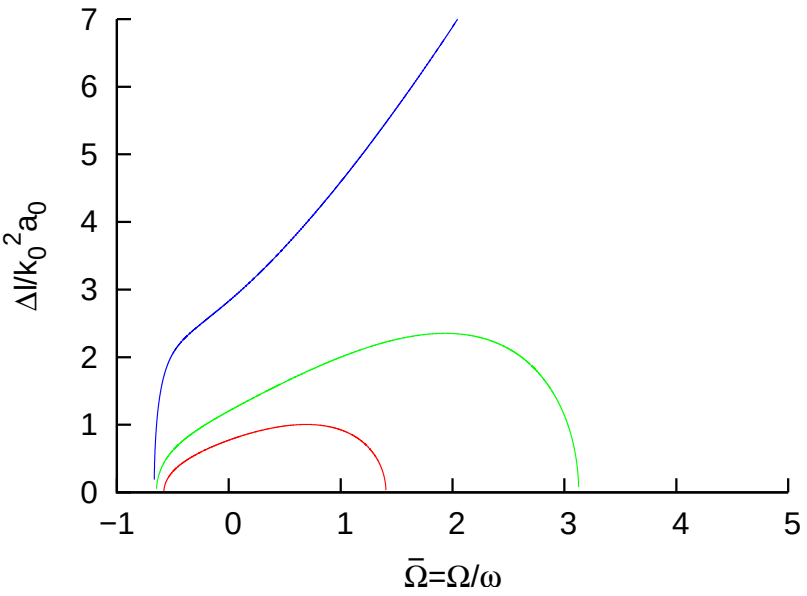

FIG. IV.11 – Largeur de la bande d'instabilité en fonction de la vorticité. Courbe rouge : $kh = 1.5$, courbe verte : $kh = 1.8$ courbe bleue kh infini.

Largeur de la bande d'instabilité en fonction de la vorticité

On dessine sur la figure IV.11 la largeur de la bande d'instabilité $\sqrt{-2\dfrac{M_1}{L_1}}k^2 a_0$ en fonction de

la vorticité pour quelques valeurs de kh.

Le Benjamin-Feir index

On définit de façon statistique la hauteur significative des vagues, et il apparaît parfois des vagues dont la hauteur dépasse au moins d'un facteur 2 cette hauteur significative. Ces vagues sont appelées vagues scélérates et ont historiquement provoqué des pertes de navires et donc des vies humaines. Autrefois, ces phénomènes se heurtaient à l'incrédulité de ceux qui ne les avaient pas rencontrés, mais depuis l'existence d'enregistrements grâce à des bouées ou sur des plateformes pétrolières, ils sont admis comme une réalité et on cherche leur origine. Pour une revue détaillée sur la formation des vagues scélérates, on pourra se référer à l'ouvrage de Kharif, Pelinovsky et Slunyaev (2009) [26].

Dans la dernière décennie, il est apparu que la probabilité d'apparition d'une vague scélérate était liée à un indice, appelé Benjamin-Feir Index (BFI) et imaginé par Janssen [20], qui mesure le rapport de la non-linéarité d'un train de vagues à sa largeur de bande spectrale.

Ainsi, si on considère l'équation

$$a_t + i\alpha \frac{\omega}{8k^2} a_{xx} + i\beta \frac{\omega k^2}{2} |a|^2 a = 0 \tag{IV.152}$$

de sorte que α et β soient les coefficients sans dimension du terme dispersif et du terme non linéaire, Onorato et al.[42] posent, si $\alpha \neq 0$:

$$\mathrm{BFI} = 2\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} \frac{\varepsilon}{\frac{\Delta k}{k}} \tag{IV.153}$$

ε représente naturellement la cambrure, $\varepsilon = ka_0$. Dans le cas présent, cet indice s'écrit :

$$\mathrm{BFI} = \frac{\varepsilon}{\frac{\Delta k}{k}} \sqrt{-\frac{M_1}{L_1}} \tag{IV.154}$$

En absence de vorticité et en profondeur infinie, on a par exemple

$$\mathrm{BFI}_0 = \frac{4\varepsilon}{\frac{\Delta k}{k}} \tag{IV.155}$$

On prend cette valeur comme référence et on représente le quotient $\dfrac{\mathrm{BFI}}{\mathrm{BFI}_0}$ en fonction de kh pour quelques valeurs du paramètre $\overline{\Omega} = \Omega/\omega$.

Le résultat qu'on obtient (fig IV.12) est en parfait accord avec celui de la figure 1 de l'article d'Onorato et al. [42] dans le cas où la vorticité est absente. On le représente également (fig IV.13) pour des valeurs négatives de $\overline{\Omega}$. On y voit que le Benjamin-Feir Index croît nettement avec la vorticité, au moins pour des valeurs de kh pas trop petites, par exemple pour $kh \geqslant 2$. Cela laisse à penser que la vorticité peut être un facteur favorisant l'apparition de vagues scélérates. Dans le cas $\Omega < 0$, c'est l'effet inverse qui se produit.

IV.4 Influence de la vorticité sur le « breather de Peregrine »

Par des transformations élémentaires, une équation NLS peut être rendue canonique. Selon que les coefficients du terme dispersif et du terme non linéaire ont des signes identiques ou opposés, on peut ramener l'équation NLS à l'une des deux équations suivantes :

$$iq_t + q_{xx} + 2q\,|q|^2 = 0 \qquad \text{équation focalisante} \tag{IV.156}$$

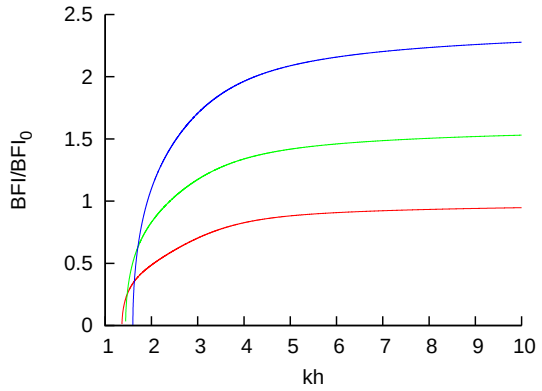

FIG. IV.12 – Benjamin-Feir index normalisé en fonction de kh. Courbe rouge : $\overline{\Omega} = 0.0$, courbe verte : $\overline{\Omega} = 1.0$ courbe bleue $\overline{\Omega} = 2.0$.

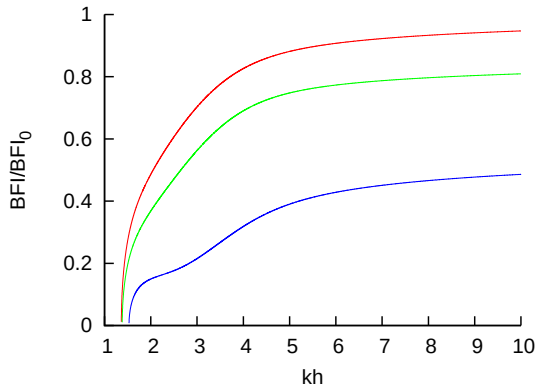

FIG. IV.13 – Benjamin-Feir index normalisé en fonction de kh. Courbe rouge : $\overline{\Omega} = 0.0$, courbe verte : $\overline{\Omega} = -0.3$ courbe bleue $\overline{\Omega} = -0.6$.

ou bien

$$iq_t + q_{xx} - 2q\,|q|^2 = 0 \qquad \text{équation défocalisante} \tag{IV.157}$$

L'avantage de ces formes canoniques de l'équation NLS est que tout le travail qui est fait sur ces équations réduites peut ensuite être appliqué à toutes les versions en effectuant simplement les transformations inverses de celles qu'on a fait pour les réduire.

En particulier, beaucoup de solutions de ces deux formes canoniques d'équation NLS sont répertoriées. Nous avons déjà rencontré le cas d'une onde de Stokes dont nous avons étudié la stabilité. Un autre exemple célèbre est constitué par le soliton enveloppe où l'enveloppe a pour équation $a(x,t) = \dfrac{e^{it}}{\cosh x}$.

Nous nous intéressons ici au « breather de Peregrine » qui fournit une représentation simple des vagues scélérates, et nous allons étudier l'effet de la vorticité sur les propriétés de cette solution. Nous continuerons naturellement à considérer une vorticité constante comme dans tout ce chapitre. Le « breather de Peregrine » est une solution de l'équation focalisante qui s'exprime par

$$q(t,x) = e^{2it}\left[1 - \frac{4(1+4it)}{1+4x^2+16t^2}\right] \tag{IV.158}$$

Parmi les nombreuses solutions connues de l'équation NLS, il y a le « breather de Ma » [36] et celui d'Akhmediev [1]. Le premier est périodique dans le temps et localisé dans l'espace et à l'inverse l'autre est périodique dans l'espace et localisé dans le temps. Le « breather de Peregrine » apparaît comme limite de l'un ou de l'autre en faisant tendre la période respectivement temporelle ou spatiale vers l'infini.

Pour simplifier, nous nous plaçons en profondeur infinie et nous considérons l'équation NLS correspondante (IV.124) :

$$ia_\tau - \frac{\omega}{k^2}\frac{(1+\overline{\Omega})^2}{(2+\overline{\Omega})^3}a_{\xi\xi} = \omega k^2 \frac{4+10\overline{\Omega}+8\overline{\Omega}^2+3\overline{\Omega}^3}{8(1+\overline{\Omega})}\,|a|^2\,a \tag{IV.159}$$

Nous notons

$$\lambda = \frac{\omega}{k^2}\frac{(1+\overline{\Omega})^2}{(2+\overline{\Omega})^3} \quad \text{et} \quad \mu = \omega k^2 \frac{4+10\overline{\Omega}+8\overline{\Omega}^2+3\overline{\Omega}^3}{8(1+\overline{\Omega})} \tag{IV.160}$$

de sorte que l'équation s'écrive

$$ia_\tau = \lambda a_{\xi\xi} + \mu\,|a|^2\,a \tag{IV.161}$$

Pour passer de l'équation NLS dimensionnelle (IV.159) à la forme canonique (IV.156) nous effectuons les changements suivants :

– changement d'échelle de temps $t = \dfrac{\omega\tau}{2}$. L'équation (IV.159) devient :

$$ia_t = \frac{2\lambda}{\omega} a_{\xi\xi} + \frac{2\mu}{\omega} |a|^2 a \tag{IV.162}$$

Ainsi, ω n'intervient plus explicitement dans l'équation puisqu'il se simplifie dans les coefficients $\dfrac{\lambda}{\omega}$ et $\dfrac{\mu}{\omega}$.

– Posons $x = \sqrt{\dfrac{\omega}{2\lambda}}\xi$. L'équation devient :

$$ia_t = a_{xx} + \frac{2\mu}{\omega} |a|^2 a \tag{IV.163}$$

– Ensuite, nous posons $a = \sqrt{\dfrac{\omega}{\mu}} q^*$ et l'équation devient :

$$iq_t^* = q_{xx}^* + 2|q|^2 q^* \tag{IV.164}$$

– On conjugue enfin l'équation :

$$iq_t = -q_{xx} - 2|q|^2 q \tag{IV.165}$$

On retrouve la forme canonique. On sait donc que $q(t,x) = e^{2it}\left[1 - \dfrac{4(1+4it)}{1+4x^2+16t^2}\right]$ est solution de cette équation (c'est le breather de Peregrine). On effectue les changements inverses pour déterminer l'expression de de breather comme solution de l'équation dimensionnelle IV.159. Ainsi, successivement :

$$q(t,x) = e^{2it}\left[1 - \frac{4(1+4it)}{1+4x^2+16t^2}\right] \tag{IV.166}$$

$$a(t,x) = \sqrt{\frac{\omega}{\mu}} e^{-2it}\left[1 - \frac{4(1-4it)}{1+4x^2+16t^2}\right] \tag{IV.167}$$

Les changements $t = \dfrac{\omega\tau}{2}$ et $x = \dfrac{k(2+\overline{\Omega})^{3/2}}{\sqrt{2}(1+\overline{\Omega})}\xi$ ne changent pas le maximum du module du terme entre crochets ; ce maximum sera toujours atteint à $\tau = 0$ et $\xi = 0$ et vaudra toujours 3. On en déduit que le maximum d'amplitude du breather de Peregrine sur un courant cisaillé uniforme est

$$a_{\max} = 3\sqrt{\frac{\omega}{\mu}} = a_{\max,0} \tag{IV.168}$$

La vorticité ne change pas le rapport de l'amplitude maximale, atteinte à l'origine, à l'amplitude de l'onde au voisinage de l'infini.

Chapitre V

Conclusions et perspectives

Cette thèse apporte modestement sa petite pierre à l'édifice de la théorie des ondes de gravité faiblement non linéaires et faiblement dispersives.

Une avancée a été faite en associant le travail de Segur [44] et celui de Leblanc [30] dans une équation NLS avec un terme linéaire qui intègre à la fois le forçage et la dissipation. Des conclusions ont été tirées sur l'effet de la dissipation et du vent sur l'instabilité modulationnelle des ondes de Stokes en profondeur finie, en fonction de l'âge des vagues et de la fréquence de la porteuse. En particulier, la compétition entre le forçage et la dissipation a été étudiée très précisément, et on a montré qu'elle ne se réduisait pas à la simple addition de deux coefficients. On a trouvé que la vitesse de friction du vent nécessaire pour maintenir l'instabilité modulationnelle est une fonction croissante de la longueur d'onde du train de vagues : les vagues « jeunes » sont plus sensibles à cette instabilité que les « vieilles ».

Une série d'expériences a été conduite dans le canal à houle de Luminy. Quand les vagues créées par le batteur étaient de trop faibles cambrure, elles disparaissaient, submergées par les vagues de vent. En augmentant leur cambrure, on modifie les coefficients, donc les solutions de l'équation non linéaire de Schrödinger qu'on impose au batteur afin de rester dans la configuration d'instabilité maximale. De plus, une cambrure importante rend discutable la validité de l'équation NLS. Il en résulte que cette série d'expériences a confirmé qualitativement les résultats théoriques établis mais qu'il conviendra de refaire ces expériences avec plus de précision et en particulier en utilisant l'équation de Dysthe. Cette amélioration est en projet.

Pour gérer un deuxième aspect de l'action du vent sur les vagues, nous avons établi une équation non linéaire de Schrödinger qui intègre une vorticité constante. Cette équation devrait être un outil assez facile à manipuler, nous avons commencé à l'utiliser en étudiant la stabilité d'une onde de Stokes sur un courant cisaillé uniforme et en dessinant des courbes illustrant l'effet de la vorticité sur le taux d'instabilité maximal, sur le Benjamin-Feir Index, sur la largeur de bande d'instabilité, sur la viabilité du « breather de Ma-Kuznetsov », etc. Il doit y avoir beaucoup d'autres paramètres et comportements influencés par la vorticité, et cette équation pourra aider à étudier ces influences.

Nous avons en particulier un domaine de stabilité inconditionnelle par rapport au paramètre kh pour une onde de Stokes sur un écoulement de vorticité négative constante. Ce résultat est original.

Au delà de l'équation NLS dont le domaine de validité est limité par la cambrure et la largeur de bande d'instabilité, on pourrait mettre au point un outil plus précis en introduisant de la même façon une vorticité constante dans l'équation de Dysthe. Les calculs, déjà très lourds pour l'équation NLS, risquent alors de devenir insupportables ou de prendre beaucoup de temps. Peut-être vaudra-t-il le coût de mettre au point un logiciel basé sur la méthode HOSM (High Order Spectral Method) et intégrant la vorticité à partir des équations complètes ; le résultat sera alors encore plus précis que celui qu'on peut attendre de la modification de l'équation de

Dysthe, même si on peut s'attendre à ce que l'exécution des programmes consomme plus de temps.

Un défi intéressant pourrait être l'établissement expérimental d'un courant cisaillé uniforme de bonne qualité, c'est-à-dire pour lequel la loi de décroissance de la vitesse en fonction de la profondeur soit bien linéaire. Il semble que des progrès soient faits en ce moment, mais il reste bien du travail à faire pour cette difficile question.

Chapitre A

Annexes

A.1 Publication dans le « Journal of Fluid Mechanics »

L'article suivant a été publié dans le « Journal of Fluid Mechanics ».

J. Fluid Mech. (2010), *vol.* 664, *pp.* 138–149. © Cambridge University Press 2010
doi:10.1017/S0022112010004349

The modulational instability in deep water under the action of wind and dissipation

C. KHARIF[1]†, R. A. KRAENKEL[2], M. A. MANNA[3] AND R. THOMAS[1]

[1]Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre, 49, rue F. Joliot-Curie, BP 146, 13384 Marseille CEDEX 13, France

[2]Instituto de Fisica Teorica, UNESP, R. Pamplona 145, 01405-900 São Paulo, Brazil

[3]Laboratoire de Physique Théorique et Astroparticules, CNRS-UMR 5207, Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier CEDEX 05, France

(Received 5 February 2010; revised 11 August 2010; accepted 11 August 2010; first published online 1 November 2010)

The modulational instability of gravity wave trains on the surface of water acted upon by wind and under influence of viscosity is considered. The wind regime is that of validity of Miles' theory and the viscosity is small. By using a perturbed nonlinear Schrödinger equation describing the evolution of a narrow-banded wavepacket under the action of wind and dissipation, the modulational instability of the wave group is shown to depend on both the frequency (or wavenumber) of the carrier wave and the strength of the friction velocity (or the wind speed). For fixed values of the water-surface roughness, the marginal curves separating stable states from unstable states are given. It is found in the low-frequency regime that stronger wind velocities are needed to sustain the modulational instability than for high-frequency water waves. In other words, the critical frequency decreases as the carrier wave age increases. Furthermore, it is shown for a given carrier frequency that a larger friction velocity is needed to sustain modulational instability when the roughness length is increased.

Key words: air/sea interactions, surface gravity waves, wind–wave interactions

1. Introduction

Since Stokes (1847), it is well known that the potential water wave problem admits as solutions uniform wave trains of two-dimensional progressive waves. The stability of the Stokes' wave solution started with the work by Lighthill (1965) who provided a geometric condition for wave instability. Later on, Benjamin & Feir (1967) showed analytically that Stokes waves of moderate amplitude are unstable to small long-wave perturbations travelling in the same direction. This instability is called the Benjamin–Feir instability (or modulational instability). Whitham (1974) derived the same result independently by using an averaged Lagrangian approach, which is explained in his book. At the same time, Zakharov (1968), using a Hamiltonian formulation of the water wave problem obtained the same instability result and derived the nonlinear Schrödinger equation (NLS equation). The evolution of a two-dimensional nonlinear wave train on deep water, in the absence of dissipative effects, exhibits the Fermi–Pasta–Ulam recurrence phenomenon. This phenomenon is characterized by a series of modulation–demodulation cycles in which initially

† Email address for correspondence: kharif@irphe.univ-mrs.fr

nearly uniform wave trains become modulated and then demodulated until they are again nearly uniform. Modulation is caused by the growth of the two dominant sidebands of the Benjamin–Feir instability at the expense of the carrier. During the demodulation, the energy returns to the components of the original wave train. Recently, within the framework of the NLS equation, Segur *et al.* (2005*a*) revisited the Benjamin–Feir instability when dissipation is taken into account. The latter authors showed that for waves with narrow bandwidth and moderate amplitude, any amount of dissipation stabilizes the modulational instability. In the wavenumber space, the region of instability shrinks as time increases. This means that any initially unstable mode of perturbation does not grow for ever. Damping can stop the growth of the sidebands before nonlinear interactions become important. Hence, when the perturbations are small initially, they cannot grow large enough for nonlinear resonant interaction between the carrier and the sidebands to become important. The amplitude of the sidebands can grow for a while and then oscillate in time. Segur *et al.* (2005*a*) have confirmed their theoretical predictions by laboratory experiments for waves of small to moderate amplitude. Later, Wu, Liu & Yue (2006) developed fully nonlinear numerical simulations which agreed with the theory and experiments of Segur *et al.* (2005*a*).

Within the framework of random waves, there exists a stochastic counterpart of the modulational instability discussed above. The stability of nearly Gaussian and narrow-banded water wave trains was investigated by Alber & Saffman (1978), Alber (1978) and Crawford, Saffman & Yuen (1980). They found that the modulational instability on deep water occurs, provided that the relative spectral width is less than twice the average steepness. Hence, the effect of increasing randomness is to restrict the instability criterion, to delay the onset of modulational instability, and to reduce the amplification rate of the modulation.

From the previous studies we could conclude that dissipation and randomness may prevent the development of the Benjamin–Feir instability (or modulational instability). These two effects question the occurrence of modulational instability of water wave trains. Segur, Henderson & Hammack (2005*b*) speculated about the effect of dissipation on the early development of rogue waves and asked the question: can the Benjamin–Feir instability spawn a rogue wave? Since damping affects the modulational instability of waves in deep water, they assumed that it might affect the early development of rogue waves. Nevertheless, the latter study did not include wind effect. What is the role of wind upon modulational instability when dissipative effects are considered? Waseda & Tulin (1999) showed experimentally that the wind does not suppress the Benjamin–Feir instability even if the naturally (unseeded experiments) developed initial sideband energy is reduced. This finding contrasts with that of Bliven, Huang & Long (1986) who conducted unseeded experiments and found that sideband growth was reduced in the presence of wind.

The present paper is aimed at reporting on the behaviour of Benjamin–Feir instability when dissipation and wind input are both taken into account. Following Miles (1957), but within the framework of modulated wave trains, we assume the atmospheric pressure at the interface due to wind and the water wave slope to be in phase. The effect is to produce an exponential growth of the wave amplitude. We remind the reader that Miles (1957) studied a linear and uniform monochromatic wave train, whereas we are considering a weakly nonlinear modulated wave train.

In the presence of dissipation it is found that carrier waves of given frequency (or wavenumber) may suffer modulational instability when the friction velocity is larger than a threshold value. Conversely, for a given friction velocity it is found that only

carrier waves whose frequency (or wavenumber) is less than a threshold value are unstable. Otherwise dissipation prevents instability developing over time.

In § 2, the governing equations and the wave amplification theory of Miles (1957) are briefly presented. In § 3, the NLS equation is introduced when dissipation and wind forcing are considered and the competition between wave amplification by the wind and stabilization due to dissipation is considered. The linear stability analysis of the Stokes-like wave is developed in § 4. The final discussion is found in § 5.

2. Surface waves under the action of wind and dissipation

We will consider waves on the surface of a fluid whose viscosity is small as given by Lamb (1993, article no. 349). If g is the acceleration due to gravity, k is the wavenumber of the surface perturbation and ν is the viscosity, we define a non-dimensional number $\mathscr{L}(k) = \nu/\sqrt{g/k^3}$, and we say that a fluid is of small viscosity if

$$\mathscr{L}(k) \ll 1. \tag{2.1}$$

For the free surface problem in water, viscous effects are generally weak producing a thin rotational layer adjacent to the potential flow. The thickness of this rotational boundary layer is $O(\sqrt{\nu/kc})$, where c is the phase velocity. In this context, it was shown by Dias, Dyachenko & Zakharov (2008) that the equations governing the fluid's motion can be formulated with the help of potential theory. The correction due to viscosity they derived within the framework of the linearized equations was heuristically generalized to the nonlinear equations. Using a similar approach, Lundgren (1989) derived linear versions of the modified boundary equations (2.4) and (2.5). Note that another variant of the introduction of viscous effects within the framework of potential theory can be found in the paper by Skandrani, Kharif & Poitevin (1996).

The fluid layer is limited above by the water surface described by $z = \eta(x, t)$. We will consider the case of infinite depth. Under these hypotheses, the Laplace equation, the bottom boundary condition and the kinematic condition are

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad \text{for} \quad -\infty \leqslant z \leqslant \eta(x, t), \tag{2.2}$$

$$\nabla\phi \to 0 \quad \text{for} \quad z \to -\infty, \tag{2.3}$$

$$\eta_t + \phi_x \eta_x - \phi_z - 2\nu\eta_{xx} = 0 \quad \text{for} \quad z = \eta(x, t). \tag{2.4}$$

The dynamic boundary condition is modified by wind effect too, and has the form

$$\phi_t + \frac{1}{2}[(\phi_x)^2 + (\phi_z)^2] + g\eta = -\frac{1}{\rho}P_a - 2\nu\phi_{zz} \quad \text{for} \quad z = \eta(x, t), \tag{2.5}$$

where ρ is the fluid's density and P_a is the excess pressure at the free surface. As proposed by Dias *et al.* (2008), (2.4) and (2.5) are simply heuristic nonlinear generalizations of their linear versions when dissipation is introduced.

In this paper we consider water wave trains in the open ocean far from any solid boundaries. Note that in the case of surface waves generated in wave tanks damping due to viscous dissipation at the lateral solid boundaries must be introduced (see Miles 1967).

The dependence of the fluctuating pressure, P_a, on η is what defines the wind–wave interactions. Within the framework of linearized equations, Miles (1957) assumed that the surface elevation and aerodynamic pressure are $\eta(x, t) = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ct)}$ and $P_a = (\alpha + \mathrm{i}\beta)\rho_a U_1^2 k\eta$, respectively, where a denotes the amplitude, k is the wavenumber, c is

the phase velocity, α and β are two coefficients depending on both k and c, ρ_a is the density of air and U_1 is a characteristic velocity related to the friction velocity, u_*, of wind over the water waves. In the expression of P_a, there is a component in phase and a component in quadrature with the water elevation. For an energy flux to occur from the wind to the water waves, there must be a phase shift between the fluctuating pressure and the interface. Hence, the transfer of energy is only due to the component in quadrature with the water surface or in other words in phase with the slope. To simplify the problem, we consider only the pressure component in phase with the slope on the interface

$$P_a(x,t) = \rho_a \beta U_1^2 \eta_x(x,t). \tag{2.6}$$

For a logarithmic velocity profile in the turbulent boundary layer over the wave, we have $U_1 = u_*/\kappa$, where κ is the von Kármán constant. Hence,

$$P_a(x,t) = \mathscr{W} \eta_x(x,t), \tag{2.7}$$

where $\mathscr{W} = \rho_a(\beta/\kappa^2)u_*^2$.

The rate of growth of the wave energy is $s\beta\omega(u_*/c)^2/\kappa^2$, where $s = \rho_a/\rho$ is the air–water density ratio and $\omega = kc$ the frequency.

Miles (1957) developed an alternative derivation of the rate of growth of the wave energy based on a linear stability analysis of the parallel shear flows. The transfer of energy from a shear flow $U(z)$ to a surface wave of wavenumber, k, and phase velocity, c, is associated with a singularity at the critical layer $z = z_c$ at which $U(z = z_c) = c$

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = -\rho_a c \pi \left(\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}z^2}(z_c)/k \left| \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}(z_c) \right| \right) \overline{w^2}(z_c), \tag{2.8}$$

where $\overline{E}$ is the mean surface wave energy and $\overline{w^2}(z_c)$ is the mean-square value of the wave-induced vertical velocity at $z = z_c$. The overbar denotes an average over x. The vertical velocity, w, is calculated from a Sturm–Liouville differential equation (or the Rayleigh equation). The Rayleigh equation can be solved numerically once $U(z)$, k and c are known. Nevertheless, the presence of a singularity at the critical height, z_c, complicates the resolution. Conte & Miles (1959) developed a numerical method to treat this singularity and solve the Rayleigh equation.

Writing $\partial E/\partial t = \gamma E$, we introduce the Miles coefficient β such as

$$\gamma = \frac{\rho_a}{\rho} kc\beta \left(\frac{U_1}{c} \right)^2 = s\omega\beta \left(\frac{U_1}{c} \right)^2, \tag{2.9}$$

where γ is the rate of growth of the wave energy. Following Miles (1996), the coefficient β is given by the following expression:

$$\beta = -\frac{\pi}{k} \frac{(\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}z^2)(z_c)}{|(\mathrm{d}U/\mathrm{d}z)(z_c)|} \frac{\overline{w^2(z_c)}}{U_1^2 \overline{(\partial\eta/\partial x)^2}}, \tag{2.10}$$

where $z = \eta(x)$ is the equation of the surface wave profile.

For a logarithmic profile of the atmospheric shear flow, the rate of growth γ is

$$\gamma = \frac{\rho_a}{\rho} kc\beta \left(\frac{u_*}{c} \right)^2 \Big/ \kappa^2 = \frac{s}{\kappa^2} \omega\beta \left(\frac{u_*}{c} \right)^2. \tag{2.11}$$

Note that in the classical theory of Miles, the interaction between the wave-induced motion in the air flow and the turbulence is ignored. The turbulence is introduced only to sustain a logarithmic wind profile.

3. The perturbed NLS equation: amplification versus depletion

In this section, we consider both effects of dissipation and wind amplification on the Benjamin–Feir instability. In the absence of viscosity and wind action, the Benjamin–Feir instability may be investigated via an asymptotic expansion leading to the well-known NLS equation. Our aim is to extend the works of Segur *et al.* (2005*a*) and Leblanc (2007) who investigated this problem by considering damping and wind effects separately. The derivation of the damped and forced NLS equation does not present any conceptual difficulty. Hence, the expression of the perturbed NLS equation can be stated as

$$\mathrm{i}(\psi_t + V\psi_x) - \frac{\Omega_0}{8k_0^2}\psi_{xx} - 2\Omega_0 k_0^2|\psi|^2\psi - \mathrm{i}\frac{\mathscr{W}\Omega_0 k_0}{2g\rho}\psi = -2\mathrm{i}\nu k_0^2\psi, \tag{3.1}$$

where k_0 and Ω_0 are the wavenumber and frequency of the carrier wave, respectively, satisfying the linear dispersion relation $\Omega_0^2 = gk_0$ and $V = \Omega_0/2k_0$ is the group velocity of the carrier wave. Equation (3.1) describes the spatial and temporal evolution of the envelope, ψ, of the surface elevation, η, of weakly nonlinear and dispersive gravity waves on deep water when damping and amplification effects are considered. The free surface elevation is written as follows:

$$\eta(x,t) = \psi(x,t)\exp[\mathrm{i}(k_0 x - \Omega_0 t)] + \text{c.c.} + O(\epsilon^2), \tag{3.2}$$

where c.c. denotes the complex conjugate. The parameter, ϵ, is a small parameter ($\epsilon \ll 1$) used to carry out the multiple scale analysis leading to (3.1). The elevation, η, and envelope, ψ, are of order $O(\epsilon)$. We have assumed that the fluid viscosity, ν, and density ratio, ρ_a/ρ, are small: $\nu/\sqrt{g/k^3} = \epsilon^2$ and $\rho_a/\rho = \epsilon^2$. These assumptions are generally used for water and air/sea interface.

We rewrite (3.1) in a standard form by using the following transformations:

$$\xi = 2k_0(x - Vt), \quad \tau = \Omega_0 t, \quad \Psi = \sqrt{2}k_0\psi, \tag{3.3}$$

leading to the following perturbed NLS:

$$\imath\Psi_\tau - \tfrac{1}{2}\Psi_{\xi\xi} - |\Psi|^2\Psi = \imath K\Psi, \tag{3.4}$$

with

$$K = \frac{\mathscr{W}k_0}{2g\rho} - 2\frac{\nu k_0^2}{\Omega_0}. \tag{3.5}$$

The sign of K determines the nature of the perturbation. If $K > 0$ we have amplification of waves and if $K < 0$ we have depletion. For $K < 0$, this perturbed NLS equation is similar to the NLS equation considered by Segur *et al.* (2005*a*). It is also similar to the NLS equation used by Bridges & Dias (2007) when their coefficients a and c vanish. In that case the latter authors demonstrated that there is no enhancement of the modulational instability, whereas when $a > 0$ the instability is enhanced.

The condition $K > 0$ implies that

$$\frac{4\nu\kappa^2\Omega_0}{\beta s u_*^2} < 1. \tag{3.6}$$

For a given friction velocity, this condition states that only carrier wave with frequency or wavenumber less than a threshold value may suffer modulational instability. Within the framework of the NLS equation, we consider weakly modulated wave train. Hence, we can assume that β depends on the frequency (or wavenumber) and phase velocity

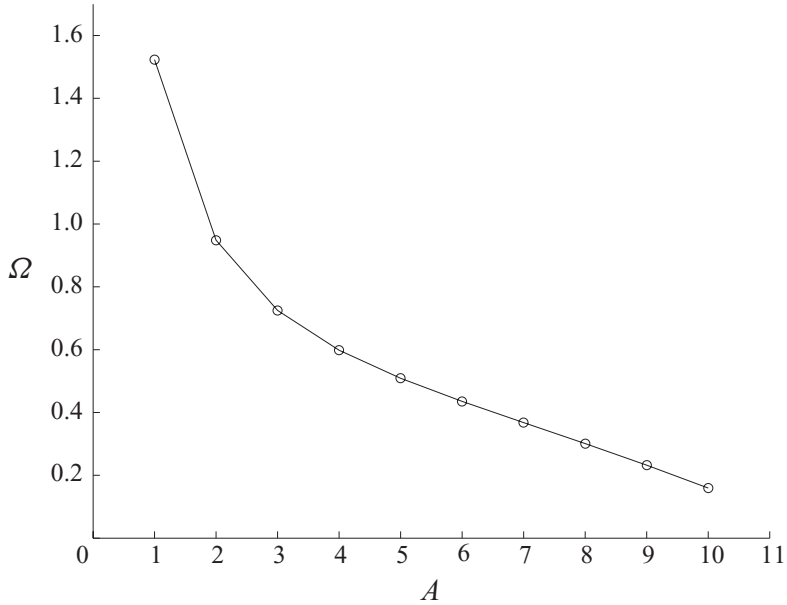

FIGURE 1. Normalized critical frequency $\Omega = \Omega^c/(sg^2/4\nu)^{1/3}$ as a function of $A = \kappa c_0/u_*$ (proportional to wave age) for $\kappa^2 g z_0/u_*^2 = 3 \times 10^{-3}$.

of the carrier wave. Note that the computation of the coefficient β is done through the numerical resolution of the Rayleigh equation. Conte & Miles (1959) computed the values of β as a function of $\kappa c_0/u_*$ for a logarithmic wind profile of the form

$$U(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln(z/z_0), \tag{3.7}$$

where z_0 is the roughness length given by $z_0 = \alpha_{ch} u_*^2/g$ (α_{ch} is the Charnock constant $\approx$0.011–0.018). Note that $c_0 = \Omega_0/k_0$.

Introducing the dimensionless term $\kappa c_0/u_*$ proportional to the wave age c_0/u_*, (3.6) may be rewritten as follows:

$$\Omega_0 < \left[\frac{sg^2\beta}{4\nu(\kappa c_0/u_*)^2}\right]^{1/3}. \tag{3.8}$$

Let Ω^c be defined as follows:

$$\Omega^c = \left(\frac{sg^2}{4\nu}\right)^{1/3} \left(\frac{\beta}{(\kappa c_0/u_*)^2}\right)^{1/3}. \tag{3.9}$$

Hence, (3.8) becomes

$$\Omega_0 < \Omega^c. \tag{3.10}$$

Using the results of Conte & Miles (1959, table 1), the values of $\Omega^c/(sg^2/4\nu)^{1/3}$ are plotted in figure 1 as a function of $\kappa c_0/u_*$ for the dimensionless roughness length $\kappa^2 g z_0/u_*^2 = 3 \times 10^{-3}$. This value of the dimensionless roughness length corresponds to an aerodynamically smooth flow. The solid line divides the plane into modulationally unstable region and modulationally stable region. Wavetrains for which the point $(\kappa c_0/u_*, \Omega_0/(sg^2/4\nu)^{1/3})$ belongs to the lower region suffer modulational instability. Otherwise dissipation prevents instability developing over in time. For fixed Ω_0, instability prevails when u_* fulfils the following relation:

$$u_* > u_*^c, \tag{3.11}$$

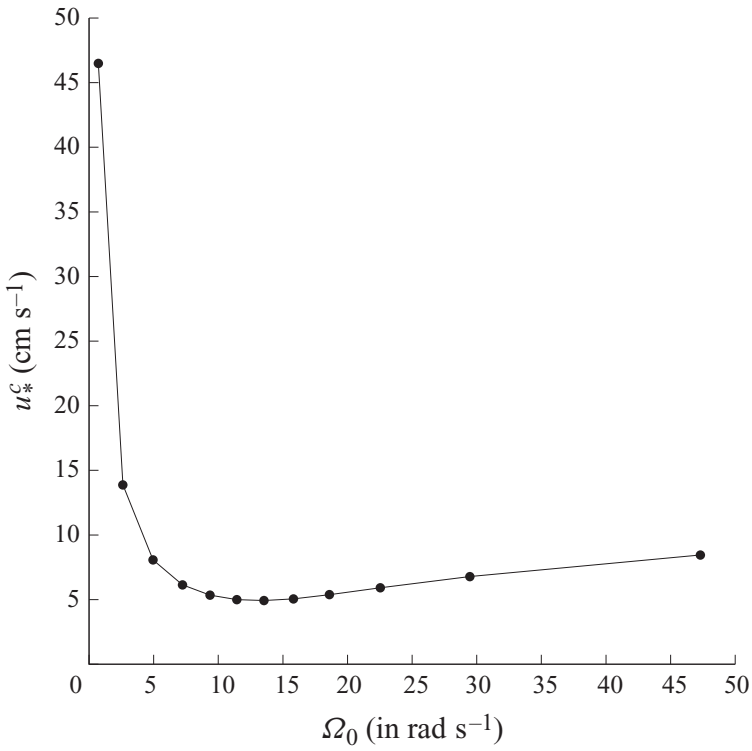

FIGURE 2. Critical friction velocity u_*^c (in cm s^{-1}) as a function of the carrier wave frequency Ω_0 (in rad s^{-1}) for $\kappa^2 g z_0/u_*^2 = 3\times10^{-3}$.

where u_*^c satisfies the equation

$$\left[\frac{\beta^c}{(\kappa g/\Omega_0 u_*^c)^2}\right]^{1/3} = \frac{\Omega_0}{(sg^2/4\nu)^{1/3}}. \tag{3.12}$$

We recall that β depends on $\kappa c_0/u_*$ or $\kappa g/\Omega_0 u_*^c$ implicitly. Hence, β^c is the value taken by β when $\kappa g/\Omega_0 u_* = \kappa g/\Omega_0 u_*^c$. The quantity u_*^c defines the minimum friction velocity induced by the wind to amplify a wave train whose carrier frequency is Ω_0. For instance, for a carrier wave frequency $\Omega_0 = 4.886\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, the minimum friction velocity is $u_*^c = 8\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$, whereas for $\Omega_0 = 0.706\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ we found $u_*^c = 46\ \mathrm{cm\,s^{-1}}$. These computations correspond to $\kappa^2 g z_0/u_*^2 = 3\times10^{-3}$, $\nu = 10^{-2}\,\mathrm{cm^2\,s^{-1}}$, $g = 980\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$ and $s = 1.2\times10^{-3}$. For $\kappa^2 g z_0/u_*^2 = 10^{-2}$ and $\Omega_0 = 1.73\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$, the threshold value of the friction velocity is $u_*^c = 22.6\ \mathrm{cm\,s^{-1}}$. The values of the critical friction velocity, u_*^c, as a function of the carrier wave frequency, Ω_0, are plotted in figure 2 for $\kappa^2 g z_0/u_*^2 = 3\times10^{-3}$. In the low-frequency regime stronger wind velocities are needed to sustain the modulational instability than for high-frequency water waves. For a given carrier frequency, a larger friction velocity is needed to sustain modulational instability when the roughness length is increased as shown in figure 3.

To justify the use of the Miles' mechanism, we followed Janssen (2004) who showed that this mechanism seems to provide an adequate model for $\kappa c_0/u_* > 4$. Furthermore, he emphasized that the inviscid Miles' model gives good agreement for slow waves too ($\kappa c_0/u_* < 4$), regarding the growth rate of waves by wind, with *in situ* data (see Janssen 2004, figure 3.3).

4. The Stokes-like wave and its stability

We call a solution of (3.4) a *Stokes-like wave* if it does not depend on ξ. In our case, the solution is

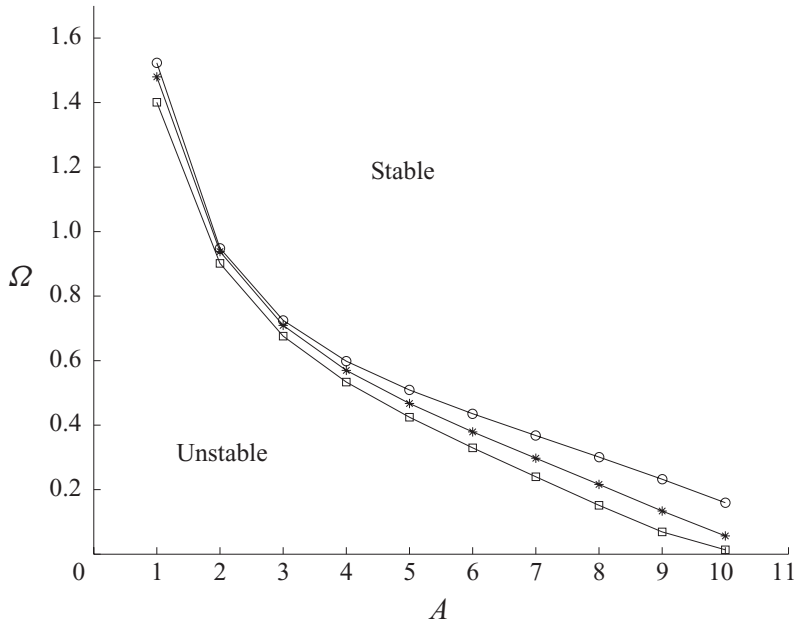

FIGURE 3. Normalized critical frequency $\Omega = \Omega^c/(sg^2/4\nu)^{1/3}$ as a function of $A = \kappa c_0/u_*$ (proportional to wave age) for several values of the roughness length: $\kappa^2 g z_0/u_*^2 = 3\times10^{-3}$ (circle), $\kappa^2 g z_0/u_*^2 = 1\times10^{-2}$ (star) and $\kappa^2 g z_0/u_*^2 = 2\times10^{-2}$ (square).

$$\Psi_s = a(\tau)\mathrm{e}^{-\imath b(\tau)}, \tag{4.1}$$

with

$$a(\tau) = \tilde{a}\mathrm{e}^{K\tau}, \tag{4.2}$$

$$b(\tau) = \frac{\tilde{a}^2}{2K}\mathrm{e}^{2K\tau} + \Delta, \tag{4.3}$$

where $\tilde{a}$ is a constant and Δ is put equal to $-(\tilde{a}^2/2K)$. To study the modulational stability of this solution we follow Segur *et al.* (2005*a*) and Leblanc (2007), and we superimpose to the solution (4.1) a small perturbation

$$\Psi = \Psi_s(1 + \delta\zeta(\xi,\tau)), \tag{4.4}$$

where $\delta \ll 1$. We then substitute (4.4) into (3.4), keeping only terms up to order δ. We separate the real and imaginary parts of $\zeta(\xi,\tau)$ as $\zeta = M(\xi,\tau) + \imath N(\xi,\tau)$. The resulting equations are

$$M_\tau - \tfrac{1}{2}N_{\xi\xi} = 0, \tag{4.5}$$

$$N_\tau + \tfrac{1}{2}M_{\xi\xi} + 2a^2 M = 0. \tag{4.6}$$

Now setting $M(\xi,\tau) = Re(M_0(\tau)\mathrm{e}^{\imath l\xi})$ and $N(\xi,\tau) = Re(N_0(\tau)\mathrm{e}^{\imath l\xi})$, l being the wavenumber of the perturbation, we arrive at the following system of equations:

$$\frac{\mathrm{d}M_0}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{2}l^2 N_0 = 0, \tag{4.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}\tau} + \left(2a^2 - \frac{1}{2}l^2\right)M_0 = 0 \quad \text{with} \quad a^2 = \tilde{a}^2\mathrm{e}^{2K\tau}. \tag{4.8}$$

Equations (4.7) and (4.7) can be combined to give

$$\frac{\mathrm{d}^2 M_0}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{1}{2}l^2\left[\frac{1}{2}l^2 - 2a^2\right]M_0 = 0. \tag{4.9}$$

Let $\tau = 2r/l^2$ and $\lambda = 2\tilde{a}/l$. Then (4.9) becomes

$$\frac{\mathrm{d}^2 M_0}{\mathrm{d}r^2} + (1 - \lambda^2 \exp(4Kr/l^2))M_0 = 0. \tag{4.10}$$

One may distinguish the following two cases according to whether K is negative or positive.

(i) Let K be negative. This case was analysed by Segur *et al.* (2005*a*), and it was demonstrated that the modulational instability is restabilized by dissipation. To summarize, it was shown in the presence of damping that the linear perturbation can grow, but its growth is limited whereas in the absence of damping the perturbation grows without bound. According to our previous linear stability analysis, instability restabilizes after a period of time of order equal to $\ln(2\tilde{a}/l)/\,|K|$ (or τ is $O(\ln(2\tilde{a}/l)\,\tau_0/2\pi\,|K|$, where τ_0 is the period of the carrier wave). This value corresponds to the change of sign of the coefficient of M_0 in (4.9). Note that Segur *et al.* (2005*a*) extended their linear stability analysis to the nonlinear case, too. This case is illustrated in figure 4 from numerical simulations of the NLS equation (3.4) which show the temporal evolution of the normalized amplitude of the carrier wave and most unstable sidebands ($l = 0.20$) with dissipation and forcing ($K = -0.0004$) and without dissipation and forcing ($K = 0$). The amplitudes are normalized by the initial amplitude of the carrier wave namely $\tilde{a}$. The solid and dashed lines correspond to the amplitude of the carrier and sidebands, respectively. At $\tau = 0$, the initial wave steepness of the Stokes wave is 0.07, and the ratio between the amplitudes of the sidebands and carrier wave is 0.10. Furthermore, the carrier of the unperturbed Stokes wave given by (4.2) has been plotted in figure 4. When K is negative the perturbed solution is close to the unperturbed solution for large times, whereas when K is positive the deviation between the two solutions increases with time. The case $K < 0$ illustrated in figure 4 corresponds to the simulation, where initially the nonlinear term of the NLS equation is much more larger than the dissipative term ($\tilde{a}^2 \gg |K|$). This situation was discussed by Segur *et al.* (2005*a*, see their comment (iii) p. 238), and it was claimed that even with substantial growth of the perturbation, the Stokes solution of (3.4) is still linearly stable: it is always possible to find a gap (denoted Δ) between unperturbed and perturbed solution that satisfies the linear stability criterion. In real oceanic situations, the dissipation due to viscosity (when ignoring breaking waves) is very weak compared to the nonlinear interactions. Hence, we can expect that small dissipation may not have time to play a role in the initial dynamics as it is demonstrated in figure 4. For large and negative values of K the exponential function will rapidly become negligible and the solutions of (4.10) will converge asymptotically to the solutions of the equation $\mathrm{d}^2 M_0/\mathrm{d}r^2 + M_0 = 0$ which are oscillatory. There is no amplification of the modulational perturbation due to damping effect which is the dominant mechanism.

(ii) Let K be positive. From our linear stability analysis, the modulational perturbations grow exponentially with time when $(l^2/2 - 2\tilde{a}^2 \mathrm{e}^{2K\tau}) < C$, where C is a strictly negative constant. This behaviour is also observed within the framework of the NLS equation as shown in figure 4 (bottom) from the numerical simulation of (3.4) for the most unstable perturbation ($l = 0.2$). In this case $K = 0.0004$ and the initial wave steepness of the Stokes wave is 0.07. When $(l^2/2 - 2\tilde{a}^2 \mathrm{e}^{2K\tau}) > 0$ the perturbations are oscillatory for $\tau < \ln(l/2\tilde{a})/K$ ($\tau < \ln(2\tilde{a}/l)\tau_0/2\pi\,|K|$) and grow exponentially for $\tau > \ln(l/2\tilde{a})/K$ ($\tau > \ln(2\tilde{a}/l)\tau_0/2\pi\,|K|$). This behaviour holds in the nonlinear case, too. Figure 5 shows the destabilization of an initially stable perturbation ($l = 0.40$) due to forcing within the framework of the numerical simulation of NLS

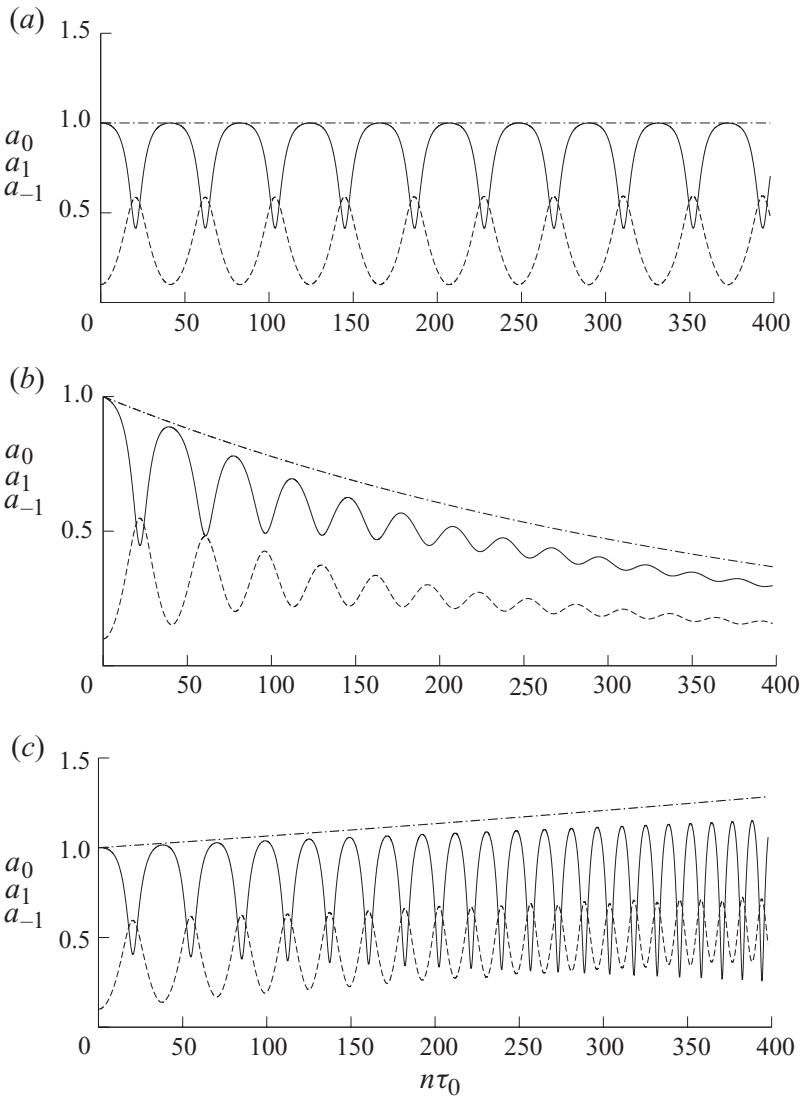

FIGURE 4. Temporal evolution of the normalized amplitude of the carrier wave, a_0, (solid line) and upper and lower sidebands, a_1 and a_{-1} (dashed line) corresponding to the most unstable perturbation ($l = 0.20$) without dissipation and wind (a), in the presence of dissipation and wind for $K = -0.0004$ (b) and for $K = 0.0004$ (c) within the framework of numerical simulations of (3.4). The dash-dotted line corresponds to the carrier of the unperturbed Stokes wave given by (4.2). The period of the carrier wave is τ_0.

equation (3.4). During the first stage, the perturbation is oscillatory and then grows exponentially. Beyond $\tau = 150\tau_0$, the gap between the unperturbed and perturbed solutions increases with time. In the wavenumber space, the region of instability increases as time increases. Therefore, stable modes become unstable after some time. In this simulation, the initial wave steepness of the wave train is 0.07 and the ratio between the amplitudes of the sidebands and carrier wave is 0.10. For large and positive values of K, the coefficient $1 - \lambda^2 \exp(4Kr/l^2)$ will become rapidly negative. Hence, $\mathrm{d}^2 M_0/\mathrm{d}r^2$ will have the sign of M_0 and the solution of (4.10) corresponds to the temporal amplification of the modulational perturbation of the basic solution given by (4.1). In this case the wind effect dominates.

For small values of $|K|$, the exponential function varies slowly and for small values of r the coefficient $1 - \lambda^2 \exp(4Kr/l^2)$ is close to $1 - \lambda^2$. Hence, when $\lambda < 1$ or $l > 2\tilde{a}$ the solutions remain bounded (modulational perturbations are not amplified) and when $\lambda > 1$ or $l < 2\tilde{a}$ the solutions diverge (modulational perturbations are amplified).

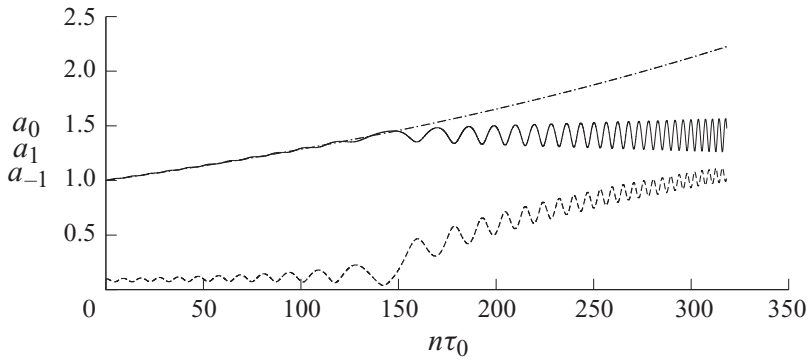

FIGURE 5. Temporal evolution of the normalized amplitude of the carrier wave, a_0, (solid line) and upper and lower sidebands, a_1 and a_{-1} (dashed line) corresponding to a stable perturbation ($l = 0.40$) in the presence of dissipation and wind ($K = 0.0001$) within the framework of numerical simulations of (3.4). The dash-dotted line corresponds to the carrier of the unperturbed Stokes wave given by (4.2). The period of the carrier wave is τ_0.

Consequently, for $K < 0$ any modulational perturbation is stable or becomes stable after some time (as shown by Segur *et al.* 2005*a*), whereas for $K > 0$ any modulational perturbation is unstable or becomes unstable after some time. For values of K close to zero, which corresponds to a quasi-equilibrium between wind and damping effects, we can conclude that modulational perturbations of wavenumber l will be linearly unstable when $l < 2\tilde{a}$ and linearly stable otherwise (classical result).

5. Discussion

We have shown that the joint action of wind and dissipation have additive effects on the modulation of a wave train. It has been argued and experimentally demonstrated that the effect of dissipation on a wave train is to stabilize the Benjamin–Feir instability (Segur *et al.* 2005*a*). In the regime we are considering, we have shown that the effect of the wind is contrary, as expected (Leblanc 2007). However, both effects, although additive, do not have the same dependence on the frequency (or wavenumber) of the carrier wave (Ω_0). Consequently, the existence or not of the Benjamin–Feir instability under the action of wind and taking dissipation into account depends on the strength of the friction velocity at the water surface. We found that the critical wind velocity, u_*^c, increases with the wavelength of the carrier wave. In the presence of wind and dissipation, the unstable domain shrinks for low-frequency regime: this means that *young* waves are more sensitive to modulational instability than *old* waves.

In this paper, we have considered a weakly nonlinear model (the NLS equation) and a linear wind–wave coupling. The next step is to consider the fully nonlinear water wave equations with linear and nonlinear wind–wave modelling.

We thank the anonymous referees for their helpful comments. R. A. K. thanks IRPHE (Marseille, France) for kind hospitality and CNPq (Brazil) for partial financial support.

REFERENCES

ALBER, I. E. 1978 *Proc. R. Soc. Lond.* A **363**, 525–546.
ALBER, I. E. & SAFFMAN, P. G. 1978 *TWR Defense and Space Systems Group Rep.* 31326-6035-RU-00.
BENJAMIN, T. B. & FEIR, J. E. 1967 *J. Fluid Mech.* **27**, 417–430.
BLIVEN, L. F., HUANG, N. E. & LONG, S. R. 1986 *J. Fluid Mech.* **162**, 237–260.

Bridges, T. J. & Dias, F. 2007 *Phys. Fluids* **19**, 101063.
Conte, S. D. & Miles, J. W. 1959 *J. Soc. Ind. Appl. Maths* **7**, 361–366.
Crawford, D. R., Saffman, P. G. & Yuen, H. C. 1980 *Wave Motion* **2**, 1–16.
Dias, F., Dyachenko, A. I. & Zakharov, V. E. 2008 *Phys. Lett.* A **371**, 12971302.
Janssen, P. A. E. M. 2004 *The Interaction of Ocean Waves and Wind*. Cambridge University Press.
Lamb, H. 1993 *Hydrodynamics*. Dover.
Leblanc, S. 2007 *Phys. Fluids* **19**, 101705.
Lighthill, M. J. 1965 *J. Inst. Maths Appl.* **1**, 269–306.
Lundgren, T. S. 1989 In *SIAM Proceedings* (ed. R. E. Caflisch), ISBN 0-89871-235-1.
Miles, J. W. 1957 *J. Fluid Mech.* **3**, 185–204.
Miles, J. W. 1967 *Proc. R. Soc. Lond.* A **297**, 459–475.
Miles, J. W. 1996 *J. Fluid Mech.* **322**, 131–145.
Segur, H., Henderson, D., Carter, J., Hammack, J., Li, C. M., Pheiff, D. & Socha, K. 2005*a* *J. Fluid Mech.* **539**, 229–271.
Segur, H., Henderson, D. M. & Hammack, J. L. 2005*b* In *Proceedings of the 14th 'Aha Huliko' a Hawaiian Winter Worshop*, pp. 43–57.
Skandrani, C., Kharif, C. & Poitevin, J. 1996 *Contemp. Maths* **200**, 157–171.
Stokes, G. G. 1847 *Camb. Phil. Soc. Trans.* **8**, 441–455.
Waseda, T. & Tulin, M. P. 1999 *J. Fluid Mech.* **401**, 55–84.
Whitham, G. B. 1974 *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley Interscience.
Wu, G., Liu, Y. & Yue, D. K. P. 2006 *J. Fluid Mech.* **556**, 45–54.
Zakharov, V. E. 1968 *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9**, 190–194.

A.2 Le modèle de Miles

Plusieurs modèles ont été proposés pour représenter l'effet du vent sur des vagues océaniques. Jeffreys [22] [23] propose un mécanisme selon lequel les vagues forment un abri du vent. La dissymétrie de la pression permet alors de transmettre de l'énergie du vent vers les vagues et d'amplifier ces dernières. Quand l'énergie accumulée est trop importante intervient alors une dissipation de cette énergie sous forme de déferlement.

Ce modèle, bien qu'il ne soit pas totalement abandonné aujourd'hui, n'a plus la préférence de la communauté scientifique car la mesure de la différence de pression en avant et en arrière de la vague n'est pas en accord avec le taux d'amplification observé des vagues. Il lui est en général préféré le modèle de Miles que nous allons exposer ici d'après une étude de Janssen [21] dont nous détaillons les calculs. Celui-ci considère que l'amplification des vagues est dû à un phénomène de résonance entre les vagues et le vent.

Les équations

On note $\mathbf{u}$ la vitesse de l'eau sous la surface ou de l'air au dessus, ρ la masse volumique supposée constante de l'air (ρ_a) ou de l'eau (ρ_w), p la pression en un point donné, $\mathbf{g}$ l'accélération de la pesanteur. On considère que les seules forces s'exerçant sur les fluides sont la pression et la pesanteur. On écrit l'équation de continuité, la relation de Bernoulli et l'incompressibilité :

$$\begin{cases} \nabla.\mathbf{u} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{u} = -\dfrac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho = 0 \end{cases} \tag{A.1}$$

Notons que les dérivées qui interviennent dans les équations sont des dérivées particulaires :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla$$

On considère le modèle formé à l'équilibre par un partage de l'espace en deux zones : l'eau pour $z < 0$ et l'air pour $z > 0$. Les vitesses de l'eau et de l'air sont horizontales et leurs profils sont représentés sur la figure A.1. La figure n'est évidemment pas à l'échelle ; pour plus de lisibilité le rapport des masses volumiques de l'air et de l'eau n'est en particulier pas respecté.

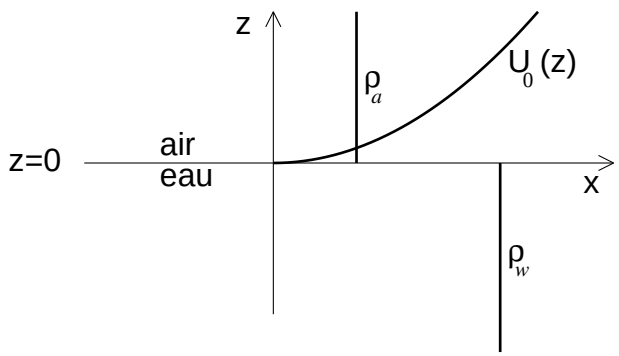

Fig. A.1 – Profil de vitesses du modèle de Miles

On va étudier la stabilité de cet équilibre, c'est-à-dire qu'on va considérer une perturbation infinitésimale de cet état d'équilibre et à l'aide des équations des écoulements, dans l'air et dans

l'eau, on va observer si cette perturbation s'accroît avec le temps (instabilité) ou si elle s'atténue ou reste de même ordre de grandeur (stabilité).

Dans cette configuration initiale, toutes les grandeurs sont invariantes par des translations horizontales, c'est-à-dire que toutes les grandeurs sont indépendantes de l'abscisse x. L'eau est au repos par rapport au repère du laboratoire et le vent a une vitesse $U_0(z)$ qui dépend de z. Cela s'appelle un profil cisaillé.

État d'équilibre ; perturbation

À l'équilibre, on a

$$\mathbf{u_0} = U_0(z)\mathbf{e_x} \qquad \mathbf{g} = -g\mathbf{e_z} \tag{A.2}$$

Les masses volumiques et les pressions sont données par

$$\rho_0 = \rho(z) \qquad p_0(z) = g\int \rho_0(z)\, dz \tag{A.3}$$

On ne prend pas en compte ici les effets de la turbulence qui sont un tout autre problème.

On perturbe cet état d'équilibre en posant

$$\rho = \rho_0 + \rho' \qquad \text{avec} \quad \rho' \ll \rho_0 \tag{A.4}$$

$$U = U_0 + u' \qquad \text{avec} \quad u' \ll U_0 \tag{A.5}$$

$$p = p_0 + p' \qquad \text{avec} \quad p' \ll p_0 \tag{A.6}$$

et on étudie le système (A.1) au premier ordre, c'est-à-dire qu'on étudie la stabilité linaire. Le système (A.1) est en effet vérifié par l'écoulement perturbé. On cherche des modes normaux solutions du système linéarisé, où les variables sont des fonctions de $\exp[i(kx - \omega t)]$. Ainsi, k est le nombre d'onde de la perturbation, homogène à l'inverse d'une distance, et ω est sa pulsation, homogène à l'inverse d'un temps.

En reportant les valeurs correspondant à l'écoulement non perturbé dans le système (A.1) on constate qu'il est bien vérifié.

On note usuellement (u, v, w) les coordonnées du vecteur vitesse $\mathbf{u}$. Comme on ne travaille ici qu'en deux dimensions, on n'utilisera que (u, w) qui sont donc les composantes horizontale et verticale de la vitesse de fluide. de même, (u', w') sont les composantes horizontale et verticale de la vitesse de la perturbation.

L'équation de continuité $\nabla.\mathbf{u} = 0$ s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U_0 + u'\right) + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \iff \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \tag{A.7}$$

car U_0 est indépendante de x.

L'équation

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \mathbf{g}$$

donne en projection horizontale et verticale :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(U_0 + u'\right)\frac{\partial}{\partial x} + w'\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(U_0 + u'\right) = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'}\frac{\partial}{\partial x}(p_0 + p') \tag{A.8}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \left(U_0 + u'\right)\frac{\partial w'}{\partial x} + w'\frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'}\frac{\partial}{\partial z}(p_0 + p') - g \tag{A.9}$$

Les termes $u'\dfrac{\partial u'}{\partial x}$, $w'\dfrac{\partial u'}{\partial z}$, $u'\dfrac{\partial w'}{\partial x}$, $w'\dfrac{\partial w'}{\partial z}$, $\dfrac{p'}{p_0}\dfrac{\partial p'}{\partial x}$ et $\dfrac{p'}{p_0}\dfrac{\partial p'}{\partial z}$ sont du deuxième ordre, on les supprime. On note qu'au premier ordre,

$$-\frac{1}{\rho_0+\rho'} = -\frac{1}{\rho_0}\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right) \tag{A.10}$$

La linéarisation de l'équation obtenue par projection horizontale donne :

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U_0\frac{\partial u'}{\partial x} + w'U_0'(z) = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} \tag{A.11}$$

Pour la projection verticale, on obtient (toujours au premier ordre) :

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + U_0\frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\rho'}{\rho_0^2}p_0'(z) \tag{A.12}$$

Pour chercher des modes propres, on pose

$$u' = u_1\exp[i(kx-\omega t)] \tag{A.13}$$
$$w' = w_1\exp[i(kx-\omega t)] \tag{A.14}$$
$$\rho' = \rho_1\exp[i(kx-\omega t)] \tag{A.15}$$
$$p' = p_1\exp[i(kx-\omega t)] \tag{A.16}$$

L'équation de continuité donne alors

$$iku_1 + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \tag{A.17}$$

Les deux équations de conservation de la quantité de mouvement (A.11) et (A.12) s'écrivent :

$$-i\omega u_1 + ikU_0u_1 + w_1U_0'(z) = -\frac{ik}{\rho_0}p_1 \tag{A.18}$$
$$-i\omega w_1 + ikU_0w_1 = -\frac{1}{\rho_0}p_1'(z) + \frac{\rho_1}{\rho_0^2}p_0'(z) \tag{A.19}$$

Cela se réécrit

$$ik\left(U_0-\frac{\omega}{k}\right)u_1 + w_1U_0'(z) = -\frac{ik}{\rho_0}p_1 \tag{A.20}$$
$$ik\left(U_0-\frac{\omega}{k}\right)w_1 = -\frac{1}{\rho_0}p_1'(z) + \frac{\rho_1}{\rho_0^2}p_0'(z) \tag{A.21}$$

On note $c=\dfrac{\omega}{k}$, c'est la vitesse de phase de l'onde, et $W=U_0-c$, ce qui revient à se placer dans un repère en translation uniforme à la vitesse de phase de cette onde. On réécrit ainsi :

$$ikWu_1 + w_1W'(z) = -\frac{ik}{\rho_0}p_1 \tag{A.22}$$
$$ikWw_1 = -\frac{1}{\rho_0}p_1'(z) + \frac{\rho_1}{\rho_0^2}p_0'(z) \tag{A.23}$$

On écrit ensuite l'incompressibilité $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho_0+\rho')=0$ où $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}$ désigne toujours la dérivée particulaire. Cela donne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho_0+\rho') = 0 \tag{A.24}$$
$$\iff \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0+\rho') + \left(U_0+u'\right)\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0+\rho') + w'\frac{\partial}{\partial z}(\rho_0+\rho') = 0 \tag{A.25}$$
$$\iff \frac{\partial\rho'}{\partial t} + U_0\frac{\partial\rho'}{\partial x} + u'\frac{\partial\rho'}{\partial x} + w'\frac{d\rho_0}{dz} + w'\frac{\partial\rho'}{\partial z} = 0 \tag{A.26}$$

En négligeant les termes d'ordre 2 il reste

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{d\rho_0}{dz} = 0. \tag{A.27}$$

Puisqu'on cherche des modes propres, on obtient :

$$-i\omega\rho_1 + ikU_0\rho_1 + w_1 \frac{d\rho_0}{dz} = 0 \tag{A.28}$$

$$\Longleftrightarrow ik\left(U_0 - c\right)\rho_1 + w_1 \frac{d\rho_0}{dz} = 0 \tag{A.29}$$

$$\Longleftrightarrow ikW\rho_1 + w_1 \frac{d\rho_0}{dz} = 0 \tag{A.30}$$

On rassemble les quatre équations obtenues, à savoir (A.17), (A.22), (A.23) et (A.30) :

$$iku_1 + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \tag{A.31}$$

$$ikWu_1 + w_1 W'(z) = -\frac{ik}{\rho_0} p_1 \tag{A.32}$$

$$ikWw_1 = -\frac{1}{\rho_0} p_1'(z) + \frac{\rho_1}{\rho_0^2} p_0'(z) \tag{A.33}$$

$$ikW\rho_1 + w_1 \frac{d\rho_0}{dz} = 0 \tag{A.34}$$

On pose $\psi = \dfrac{w_1}{W}$. On multiplie la première équation par W et on simplifie la dernière par W. Le système devient :

$$ikWu_1 + W\frac{d}{dz}(W\psi) = 0 \tag{A.35}$$

$$ikWu_1 + \psi W W'(z) = -\frac{ik}{\rho_0} p_1 \tag{A.36}$$

$$ikW^2\psi = -\frac{1}{\rho_0} p_1'(z) + \frac{\rho_1}{\rho_0^2} p_0'(z) \tag{A.37}$$

$$ik\rho_1 + \psi \frac{d\rho_0}{dz} = 0 \tag{A.38}$$

On élimine u_1 entre (A.35) et (A.36) et on multiplie (A.37) par ρ_0, il reste :

$$W^2\psi' = \frac{ik}{\rho_0} p_1 \tag{A.39}$$

$$ik\rho_0 W^2\psi = -p_1'(z) + \frac{\rho_1}{\rho_0} p_0'(z) \tag{A.40}$$

$$ik\rho_1 + \psi \frac{d\rho_0}{dz} = 0 \tag{A.41}$$

On multiplie la première équation par ρ_0 et on la dérive ; on multiplie la deuxième par $-ik$:

$$\frac{d}{dz}\left(\rho_0 W^2 \frac{d\psi}{dz}\right) = ikp_1' \tag{A.42}$$

$$k^2\rho_0 W^2\psi = ikp_1'(z) - ik\frac{\rho_1}{\rho_0} p_0'(z) \tag{A.43}$$

$$ik\rho_1 + \psi \frac{d\rho_0}{dz} = 0 \tag{A.44}$$

On élimine ikp_1' entre les deux premières équations :

$$k^2\rho_0 W^2\psi = \frac{d}{dz}\left(\rho_0 W^2 \frac{d\psi}{dz}\right) - ik\frac{\rho_1}{\rho_0}p_0'(z) \tag{A.45}$$

$$ik\rho_1 + \psi\frac{d\rho_0}{dz} = 0 \tag{A.46}$$

On élimine enfin $ik\rho_1$ entre ces deux équations :

$$k^2\rho_0 W^2\psi = \frac{d}{dz}\left(\rho_0 W^2 \frac{d\psi}{dz}\right) + \frac{p_0'(z)}{\rho_0}\psi\frac{d\rho_0}{dz} \tag{A.47}$$

On arrange l'écriture et on utilise $g = -\dfrac{p_0'}{\rho_0}$:

$$\frac{d}{dz}\left(\rho_0 W^2 \frac{d\psi}{dz}\right) - \left(k^2\rho_0 W^2 + g\frac{d\rho_0}{dz}\right)\psi = 0 \tag{A.48}$$

La fonction inconnue $\psi = \dfrac{w_1}{W}$ de ce problème de Sturm-Liouville représente le déplacement des lignes de courant. Elle doit vérifier la condition

$$\psi \to 0 \qquad \text{quand} \quad |z| \to \infty. \tag{A.49}$$

Les solutions étant en $\exp[i(kx - \omega t)]$, la stabilité dépend du signe de la partie imaginaire de ω. Plus précisément, le taux d'amplification est $\gamma = \Im(\omega)$. Les ondes instables issues de ce problème sont appelées « ondes internes de gravité ». D'après le théorème de Miles [38], une condition suffisante de stabilité est que $U_0'(z) \neq 0$ et que le nombre de Richardson $Ri = g\rho'/(\rho W'^2)$ soit inférieur à $-\dfrac{1}{4}$ partout. Cette dernière condition n'est évidemment pas remplie dans l'air à cause de sa faible masse volumique, c'est la porte ouverte à la possibilité d'instabilité. Le transfert d'énergie est alors possible du courant cisaillé $U_0(z)$ vers les ondes de gravité. La condition suffisante de stabilité n'étant pas remplie, il faut cependant s'en remettre aux solutions de (A.48) pour voir s'il y a effectivement instabilité ou non. On ne traitera ici que le cas des ondes de surface (voir figure A.1).

La masse volumique ρ_w de l'eau et celle ρ_a de l'air sont supposées constantes, offrant un petit paramètre

$$\varepsilon = \frac{\rho_a}{\rho_w} \approx 10^{-3}. \tag{A.50}$$

Cela va nous permettre de construire une solution approchée au problème aux valeurs propres (A.48–A.49).

Dans l'eau, le problème est considérablement simplifié par la masse volumique constante et l'hypothèse d'absence de courant. L'équation (A.48) se réduit à

$$\frac{d^2\psi_w}{dz^2} - k^2\psi_w = 0 \tag{A.51}$$

qui s'intègre, en tenant compte de la condition au fond, en

$$\psi_w = A.\exp(kz) \tag{A.52}$$

On intègre l'équation (A.48) entre deux points situés immédiatement de part et d'autre de la surface pour obtenir les conditions au voisinage de l'interface air-eau. On a une discontinuité de la masse volumique qui se traduit par

$$\rho_0' = (\rho_w - \rho_a)\delta(z) \tag{A.53}$$

où $\delta(z)$ est la distribution de Dirac. Si on suppose que le déplacement ψ des lignes de courant est continu à l'interface $z = 0$ on obtient à partir de (A.48)

$$\rho_0 W^2 \frac{d\psi}{dz}\bigg|_{-0}^{+0} = \int_{-0}^{+0} \left[k^2 \rho_0 W^2 + g\rho_0'\right] \psi \, dz \tag{A.54}$$

Dans l'intégrale de droite, la distribution de Dirac est la seule à donner une contribution, donc :

$$\rho_a W^2(z = 0_+)\psi_a'(0_+) - \rho_w W^2(z = 0_-)\psi_w'(0_-) = g(\rho_a - \rho_w)\psi(0) \tag{A.55}$$

où $\psi_a(0) = \psi_w(0) = \psi(0)$ par continuité de ψ.

Au dessus comme au dessous de l'interface on a :

$$W^2(z = O_+) = [U_0(z = O_+) - c]^2 = c^2 \tag{A.56}$$

$$W^2(z = O_-) = [0 - c]^2 = c^2 \tag{A.57}$$

On en déduit que

$$c^2 \left(\rho_a \psi_a'(0_+) - \rho_w \psi_w'(0_-)\right) = g(\rho_a - \rho_w)\psi(0) \tag{A.58}$$

D'après (A.52) on a $\psi(0) = \psi_w(0) = A$ et $\psi_w'(0_-) = Ak$. Le problème étant linéaire, on peut simplifier par A (ou prendre $A = 1$) d'où

$$c^2 \left(\rho_a \psi_a'(0) - \rho_w k\right) = g(\rho_a - \rho_w) \tag{A.59}$$

On a alors

$$c^2 = \frac{g(\rho_a - \rho_w)}{\rho_a \psi_a'(0) - k\rho_w} = \frac{g(1 - \varepsilon)}{k - \varepsilon \psi_a'(0)} \tag{A.60}$$

On remarque que si on néglige la masse volumique de l'air par rapport à celle de l'eau, on retrouve $c^2 = \dfrac{g}{k}$, la relation de dispersion linéaire usuelle. Cela traduit le fait que l'influence du vent sur les vagues est limité par la faible valeur de la masse volumique de l'air par rapport à celle de l'eau.

On tient un développement limité de c par rapport à ε grâce à (A.60) :

$$c = c_0 + \varepsilon c_1 + \cdots \tag{A.61}$$

avec $c_0 = \sqrt{\dfrac{g}{k}}$ et $c_1 = \dfrac{1}{2} c_0 \left(\dfrac{\psi_a'(0)}{k} - 1\right)$.

On reprend le problème (A.48) dans l'air :

$$\frac{d}{dz}\left(W_0^2 \frac{d\psi_a}{dz}\right) - k^2 W_0^2 \psi_a = 0, \quad \psi_a(0) = 1, \quad \lim_{\infty} \psi_a(z) = 0 \tag{A.62}$$

À présent, la fonction W n'est plus considérée comme une inconnue mais comme un paramètre puisque $W = U_0 - c_0$ et que c_0 a été déterminée. C'est pour cela qu'on la renomme W_0. De plus, l'expression de c_1 fait apparaître indirectement le taux d'amplification :

$$\gamma_a = \Im(\omega) = \Im(kc) = \Im(c_0 + \varepsilon k c_1) = \Im(\varepsilon k c_1) = \varepsilon \Im(k c_1) \tag{A.63}$$

$$\frac{\gamma_a}{\omega_0} = \varepsilon \Im\left(\frac{c_1}{\omega_0/k}\right) = \varepsilon \Im\left(\frac{c_1}{c_0}\right) = \varepsilon \Im\left(\frac{1}{2}\frac{\psi_a'(0)}{k}\right) = \frac{\varepsilon}{2k} \Im(\psi_a'(0)) \tag{A.64}$$

Cette valeur intervient aussi dans le wronskien de ψ_a et ψ_a^*, sa conjuguée, qui est aussi solution de l'équation différentielle.

$$\mathscr{W}(\psi_a, \psi_a^*)(0) = \begin{vmatrix} \psi_a(0) & \psi_a^*(0) \\ \psi_a'(0) & \psi_a'^*(0) \end{vmatrix} \tag{A.65}$$

On a $\psi_a(0) = 1 = \psi_a^*(0)$, donc

$$\begin{aligned} &\mathscr{W}(\psi_a, \psi_a^*)(0) = \psi_a'^*(0) - \psi_a'(0) = -2i\Im(\psi_a'(0)) \\ \Rightarrow \quad &\Im(\psi_a'(0)) = \frac{i}{2}\mathscr{W}(\psi_a, \psi_a^*)(0). \end{aligned} \tag{A.66}$$

On en déduit que

$$\frac{\gamma_a}{\omega_0} = i\frac{\varepsilon}{4k}\mathscr{W}(\psi_a, \psi_a^*)(0). \tag{A.67}$$

Vers l'équation de Rayleigh

On note $\chi = \dfrac{w}{w(0)}$ la composante verticale de la vitesse, normalisée par sa valeur en $z = 0$. On transforme l'équation (A.62) par $w = W_0\psi$

$$\frac{d}{dz}\left(W_0^2\frac{d\psi_a}{dz}\right) - k^2W_0^2\psi_a = 0 \iff \frac{d}{dz}\left(W_0^2\frac{d}{dz}\left(\frac{w}{W_0}\right)\right) = k^2W_0^2\frac{w}{W_0} \tag{A.68}$$

$$\iff \frac{d}{dz}\left[W_0^2\left(\frac{w'}{W_0} - \frac{wW_0'}{W_0^2}\right)\right] = k^2wW_0 \tag{A.69}$$

$$\iff \frac{d}{dz}\left(W_0w' - wW_0'\right) = k^2wW_0 \tag{A.70}$$

puis on la transforme par $w = \chi w(0)$

$$\frac{d}{dz}\left(W_0w' - wW_0'\right) = k^2wW_0 \tag{A.71}$$

$$\iff \frac{d}{dz}\left(w(0)\chi'W_0 - \chi w(0)W_0'\right) = k^2\chi w(0)W_0 \tag{A.72}$$

$$\iff \frac{d}{dz}\left(\chi'W_0 - \chi W_0'\right) = k^2\chi W_0 \tag{A.73}$$

$$\iff \chi''W_0 + \chi'W_0' - \chi'W_0' - \chi W_0'' = k^2\chi W_0 \tag{A.74}$$

$$\iff \chi''W_0 - \chi W_0'' = k^2\chi W_0 \tag{A.75}$$

$$\iff W_0\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)\chi = W_0''\chi \tag{A.76}$$

Cette équation s'appelle équation de Rayleigh.

Les conditions aux limites sont $\chi(0) = 1$ et $\lim\limits_{z\to+\infty}\chi(z) = 0$. La variable est z, la fonction inconnue est χ et $W_0(z) = U_0(z) - c_0$ où $U_0(z)$ est la vitesse de l'écoulement cisaillé de l'air à l'altitude z et c_0 la vitesse de phase linéarisée des vagues. k est le nombre d'onde.

La fonction $W_0(z)$ s'annule en un point $z = z_c$ où les vitesses de l'air et de l'eau sont identiques. On peut donc affirmer l'existence de solutions vérifiant des conditions initiales données séparément pour $z > z_c$ ou $z < z_c$ mais pas globalement pour $-\infty < z < +\infty$. Les solutions χ de (A.76) devront toutefois se raccorder à l'ordre 1 pour $z = z_c$.

Si χ est une solution complexe de cette équation de Rayleigh, sa conjuguée χ^* est aussi une solution et on s'intéresse au wronskien du système (χ, χ^*). De même qu'on avait obtenu en (A.67) une expression du taux d'amplification à partir du wronskien de solutions de (A.62), on obtient ici

$$\frac{\gamma_a}{\omega_0} = \frac{i}{4k}\mathscr{W}(\chi, \chi^*). \tag{A.77}$$

On va le calculer pour $z > z_c$ et pour $z < z_c$.

$$\mathscr{W}(\chi, \chi^*) = \begin{vmatrix} \chi & \chi^* \\ \chi' & \chi'^* \end{vmatrix} = \chi\chi'^* - \chi'\chi^* \tag{A.78}$$

Si on dérive ce wronskien, on trouve

$$\mathscr{W}'(\chi, \chi^*) = \chi'\chi'^* + \chi\chi''^* - \chi''\chi^* - \chi'\chi'^* = \chi\chi''^* - \chi''\chi^* \tag{A.79}$$

En utilisant le fait que χ et χ^* vérifient (A.76) on obtient (calcul valable pour $z \neq z_c$) :

$$\chi''(z) = \frac{W_0''(z)}{W_0(z)}\chi + k^2\chi \tag{A.80}$$

$$\chi''^*(z) = \frac{W_0''(z)}{W_0(z)}\chi^* + k^2\chi^* \tag{A.81}$$

$$\chi\chi''^* = \frac{W_0''(z)}{W_0(z)}\,|\chi|^2 + k^2\,|\chi|^2 \tag{A.82}$$

$$\chi''\chi^* = \frac{W_0''(z)}{W_0(z)}\,|\chi|^2 + k^2\,|\chi|^2 \tag{A.83}$$

$$\mathscr{W}'(\chi, \chi^*) = 0 \tag{A.84}$$

et le wronskien est constant pour $z > z_c$ d'une part et pour $z < z_c$ d'autre part, mais il peut avoir une discontinuité au passage de la valeur z_c. C'est ce saut

$$\mathscr{W}(z_c + \varepsilon) - \mathscr{W}(z_c - \varepsilon) \tag{A.85}$$

avec $\varepsilon > 0$ qu'on veut évaluer. Les conditions initales montrent que $\mathscr{W}(z)$ tend vers zéro quand $z \to +\infty$, donc $\mathscr{W}(z)$ qui est constant pour $z > z_c$ vaut $\mathscr{W}(z_c + \varepsilon) = 0$ dans tout cet intervalle.

Si on connaît le saut $\mathscr{W}(z_c + \varepsilon) - \mathscr{W}(z_c - \varepsilon)$, on en déduira donc $\mathscr{W}(z_c - \varepsilon)$ qui est la valeur constante du wronskien pour $z < z_c$.

La technique utilisée consiste à remplacer $W_0(z)$ qui s'annule en $z = z_c$ par $W_0(z) - i\Delta$ qui ne s'annule plus en $z = z_c$ pour Δ réel strictement positif, puis de faire tendre Δ vers zéro. En effectuant ce remplacement, les équations (A.80) à (A.84) sont modifiées comme suit :

$$\chi''(z) = \frac{W_0''(z)}{W_0(z) - i\Delta}\chi + k^2\chi \tag{A.86}$$

$$\chi''^*(z) = \frac{W_0''(z)}{W_0(z) + i\Delta}\chi^* + k^2\chi^* \tag{A.87}$$

$$\chi\chi''^* = \frac{W_0''(z)}{W_0(z) + i\Delta}\,|\chi|^2 + k^2\,|\chi|^2 \tag{A.88}$$

$$\chi''\chi^* = \frac{W_0''(z)}{W_0(z) - i\Delta}\,|\chi|^2 + k^2\,|\chi|^2 \tag{A.89}$$

$$\mathscr{W}'(\chi, \chi^*) = W_0''(z)\,|\chi|^2 \left(\frac{1}{W_0(z) + i\Delta} - \frac{1}{W_0(z) - i\Delta}\right) \tag{A.90}$$

On pose pour $\varepsilon > 0$:

$$I(\Delta, \varepsilon) = \int_{z_c - \varepsilon}^{z_c + \varepsilon} \mathscr{W}'(\chi, \chi^*)\, dz \tag{A.91}$$

de sorte que le saut qu'on cherche s'écrive

$$\mathscr{W}(z_c + \varepsilon) - \mathscr{W}(z_c - \varepsilon) = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ \Delta > 0}} I(\Delta, \varepsilon) \tag{A.92}$$

qui est d'ailleurs indépendant d'ε tant que $\varepsilon > 0$.

On a alors

$$I(\Delta,\varepsilon) = \int_{z_c-\varepsilon}^{z_c+\varepsilon} W_0''(z)\,|\chi|^2 \left(\frac{1}{W_0(z)+i\Delta} - \frac{1}{W_0(z)-i\Delta}\right) dz \tag{A.93}$$

Les termes hors de la parenthèse sont continus, et au voisinage de z_c, au premier ordre, on peut les remplacer par leur valeur en z_c. Ainsi, au premier ordre, on a :

$$I(\Delta,\varepsilon) = \int_{z_c-\varepsilon}^{z_c+\varepsilon} W_0''(z_c)\,|\chi(z_c)|^2 \left(\frac{1}{W_0(z)+i\Delta} - \frac{1}{W_0(z)-i\Delta}\right) dz \tag{A.94}$$

ce qui s'écrit, avec les notations de Janssen :

$$I(\Delta,\varepsilon) = \int_{z_c-\varepsilon}^{z_c+\varepsilon} W_{0c}''\,|\chi_c|^2 \left(\frac{1}{W_0(z)+i\Delta} - \frac{1}{W_0(z)-i\Delta}\right) dz \tag{A.95}$$

On sort alors les constantes de l'intégrale :

$$I(\Delta,\varepsilon) = W_{0c}''\,|\chi_c|^2 \int_{z_c-\varepsilon}^{z_c+\varepsilon} \left(\frac{1}{W_0(z)+i\Delta} - \frac{1}{W_0(z)-i\Delta}\right) dz \tag{A.96}$$

On utilise un développement de Taylor pour $W_0(z)$ au voisinage de z_c :

$$W_0(z) = (z-z_c)W_{0c}' \tag{A.97}$$

$$I(\Delta,\varepsilon) = W_{0c}''\,|\chi_c|^2 \int_{z_c-\varepsilon}^{z_c+\varepsilon} \left(\frac{1}{(z-z_c)W_{0c}'+i\Delta} - \frac{1}{(z-z_c)W_{0c}'-i\Delta}\right) dz \tag{A.98}$$

On réduit au même dénominateur :

$$I(\Delta,\varepsilon) = W_{0c}''\,|\chi_c|^2 \int_{z_c-\varepsilon}^{z_c+\varepsilon} \frac{-2i\Delta}{(z-z_c)^2W_{0c}'^2+\Delta^2}\, dz \tag{A.99}$$

$$I(\Delta,\varepsilon) = -2iW_{0c}''\,|\chi_c|^2 \int_{z_c-\varepsilon}^{z_c+\varepsilon} \frac{\Delta}{(z-z_c)^2W_{0c}'^2+\Delta^2}\, dz \tag{A.100}$$

$$I(\Delta,\varepsilon) = -2iW_{0c}''\,|\chi_c|^2 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\Delta}{z^2W_{0c}'^2+\Delta^2}\, dz \tag{A.101}$$

On calcule l'intégrale :

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\Delta}{z^2W_{0c}'^2+\Delta^2}\, dz = \frac{1}{\Delta}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dz}{1+\left(z\frac{W_{0c}'}{\Delta}\right)^2} = \frac{1}{W_{0c}'}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d\left(z\frac{W_{0c}'}{\Delta}\right)}{1+\left(z\frac{W_{0c}'}{\Delta}\right)^2} \tag{A.102}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\Delta}{z^2W_{0c}'^2+\Delta^2}\, dz = \frac{1}{W_{0c}'}\left[\arctan\left(z\frac{W_{0c}'}{\Delta}\right)\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{2}{W_{0c}'}\arctan\left(\varepsilon\frac{W_{0c}'}{\Delta}\right) \tag{A.103}$$

On en déduit que

$$I(\Delta,\varepsilon) = -4i\frac{W_{0c}''}{W_{0c}'}\,|\chi_c|^2 \arctan\left(\varepsilon\frac{W_{0c}'}{\Delta}\right) \tag{A.104}$$

On passe à la limite quand Δ tend vers zéro. L'argument de l'arctangente tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de W_{0c}', il faut donc être attentif. On se rappelle que ε, lui, est strictement positif.

$$\lim_{\substack{\Delta\to 0\\ \Delta>0}} I(\Delta,\varepsilon) = -2i\pi\frac{W_{0c}''}{|W_{0c}'|}\,|\chi_c|^2 \tag{A.105}$$

$$\mathscr{W}(z_c+\varepsilon) - \mathscr{W}(z_c-\varepsilon) = -2i\pi\frac{W_{0c}''}{|W_{0c}'|}\,|\chi_c|^2 \tag{A.106}$$

On a donc pour $z < z_c$)

$$\mathscr{W} = \mathscr{W}(z_c-\varepsilon) = 2i\pi\frac{W_{0c}''}{|W_{0c}'|}\,|\chi_c|^2\,. \tag{A.107}$$

Interprétation physique du wronskien

Le wronskien est en étroite relation avec la tension induite par les vagues :

$$\tau_w = - < u'w' > \tag{A.108}$$

et si on écrit

$$u' = u_1 \exp[i(kx - \omega t)] + \text{c.c.} \tag{A.109}$$
$$w' = w_1 \exp[i(kx - \omega t)] + \text{c.c.} \tag{A.110}$$

on a alors

$$\begin{aligned} \tau_w = - < u'w' > &= - < (u_1 e^{i\theta} + u_1^* e^{-i\theta})(w_1 e^{i\theta} + w_1^* e^{-i\theta}) > \\ &= -u_1 w_1^* - u_1^* w_1 \end{aligned} \tag{A.111}$$

avec $\theta = kx - \omega t$.
L'équation de continuité $\nabla \mathbf{u} = 0$ permet d'éliminer par exemple u_1 :

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \iff iku_1 e^{i\theta} + w_1' i\theta = 0 \iff u_1 = \frac{i}{k} w_1' \tag{A.112}$$

d'où l'expression

$$\tau_w = -\frac{i}{k} w_1' w_1^* + \frac{i}{k} w_1 w_1'^* = -\frac{i}{k}(w_1^* w_1' - w_1 w_1'^*) \tag{A.113}$$

On se rappelle que $\chi = \dfrac{w}{w(0)}$ d'où

$$\frac{\tau_w}{w_1^2(0)} = -\frac{i}{k}(\chi^* \chi' - \chi \chi'^*) \tag{A.114}$$

C'est une interprétation physique de ce wronskien.

Conclusion

On a une expression du taux d'amplification :

$$\gamma_a = \frac{i\varepsilon}{4k} \omega_0 \mathscr{W}(\chi, \chi^*) = -\frac{\pi\varepsilon}{2k} \omega_0 \frac{W_{0c}''}{|W_{0c}'|} |\chi_c|^2 = -\frac{\pi\varepsilon c}{2} \frac{W_{0c}''}{|W_{0c}'|} |\chi_c|^2 . \tag{A.115}$$

C'est le résultat de Miles pour la croissance des vagues de gravité due à un écoulement cisaillé de l'air : les seules vagues instables sont celles pour qui la courbure $W_0'' = U_0''$ du profil des vitesses de l'air est négative à l'altitude critique, c'est-à-dire où $U_0(z_c) = c$. C'est le cas en particulier dans l'hypothèse d'un profil logarithmique des vitesses de l'air.

A.3 Calcul d'une onde de Stokes dans un courant cisaillé uniforme

Convention : on notera avec un tilde les valeurs des fonctions prises sur la surface $Y = H(X)$ et sans tilde les valeurs prises en $Y = 0$. Les premières s'obtiennent à partir des dernières à l'aide d'un développement de Taylor.

Développement à l'ordre 3

On développe chacune des équations à l'ordre 3 par rapport à un petit paramètre ε qui pourrait être la cambrure par exemple. On n'a pas besoin de développer les équations de Laplace car elles sont automatiquement vérifiées par la forme des développements qu'on cherche.

Condition cinématique à la surface
Elle s'écrit, le tilde signifiant des valeurs prises à la surface, c'est-à-dire pour $Y = H(X)$) :

$$\left(\widetilde{\Phi}_X + \Omega H - c\right) H' - \widetilde{\Phi}_Y = 0 \tag{A.116}$$

On calcule donc les développements :

$$\widetilde{\Phi}_X = \Phi_X + H\Phi_{XY} + O(\varepsilon^3) \tag{A.117}$$

$$\widetilde{\Phi}_X = \varepsilon\Phi_{1X} + \varepsilon^2\Phi_{2X} + \varepsilon^2 H_1\Phi_{1XY} + O(\varepsilon^3) \tag{A.118}$$

$$\Omega H = \varepsilon\Omega H_1 + \varepsilon^2\Omega H_2 + O(\varepsilon^3) \tag{A.119}$$

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{\Phi}_X + \Omega H - c\right) &= -c_0 + \varepsilon\left(\Phi_{1X} + \Omega H_1 - c_1\right)\\ &+ \varepsilon^2\left(\Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY} + \Omega H_2 - c_2\right) + O(\varepsilon^3)\end{aligned} \tag{A.120}$$

$$H' = \varepsilon H_1' + \varepsilon^2 H_2' + \varepsilon^3 H_3' + O(\varepsilon^4) \tag{A.121}$$

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{\Phi}_X + \Omega H - c\right) H' &= -\varepsilon c_0 H_1' + \varepsilon^2\left(-c_0 H_2' + \Phi_{1X}H_1' + \Omega H_1 H_1' - c_1 H_1'\right)\\ &+ \varepsilon^3\left(-c_0 H_3' + \Phi_{1X}H_2' + \Omega H_1 H_2' - c_1 H_2'\right)\\ &+ \varepsilon^3\left(\Phi_{2X}H_1' + H_1 H_1'\Phi_{1XY} + \Omega H_2 H_1' - c_2 H_1'\right) + O(\varepsilon^4)\end{aligned} \tag{A.122}$$

$$\widetilde{\Phi}_Y = \Phi_Y + H\Phi_{YY} + \frac{H^2}{2}\Phi_{YYY} + O(\varepsilon^4) \tag{A.123}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_Y &= \varepsilon\Phi_{1Y} + \varepsilon^2\Phi_{2Y} + \varepsilon^3\Phi_{3Y} + \left(\varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2\right)\left(\varepsilon\Phi_{1YY} + \varepsilon^2\Phi_{2YY}\right)\\ &+ \frac{1}{2}(\varepsilon H_1)^2(\varepsilon\Phi_{1YYY}) + O(\varepsilon^4)\end{aligned} \tag{A.124}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_Y &= \varepsilon\Phi_{1Y} + \varepsilon^2\left(\Phi_{2Y} + H_1\Phi_{1YY}\right)\\ &+ \varepsilon^3\left(\Phi_{3Y} + H_1\Phi_{2YY} + H_2\Phi_{1YY} + \frac{1}{2}H_1^2\Phi_{1YYY}\right) + O(\varepsilon^4)\end{aligned} \tag{A.125}$$

On en déduit le développement de la condition cinématique à la surface :

$$-c_0 H_1' - \Phi_{1Y} = 0 \tag{A.126}$$

$$-c_0 H_2' + \Phi_{1X}H_1' + \Omega H_1 H_1' - c_1 H_1' - \Phi_{2Y} - H_1\Phi_{1YY} = 0 \tag{A.127}$$

$$\begin{aligned}&-c_0 H_3' + \Phi_{1X}H_2' + \Omega H_1 H_2' - c_1 H_2' + \Phi_{2X}H_1' + H_1 H_1'\Phi_{1XY} + \Omega H_2 H_1' - c_2 H_1'\\ &-\Phi_{3Y} - H_1\Phi_{2YY} - H_2\Phi_{1YY} - \frac{1}{2}H_1^2\Phi_{1YYY} = 0\end{aligned} \tag{A.128}$$

Condition dynamique à la surface
Cette condition s'écrit :

$$\left(\widetilde{\Phi}_X + \Omega H - c\right)^2 + \widetilde{\Phi}_Y^2 + 2gH = K + c^2 \tag{A.129}$$

On simplifie un peu :

$$\left(\widetilde{\Phi}_X + \Omega H\right)^2 - 2c\left(\widetilde{\Phi}_X + \Omega H\right) + \widetilde{\Phi}_Y^2 + 2gH = K \tag{A.130}$$

On développe à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_X &= \varepsilon\Phi_{1X} + \varepsilon^2\left(\Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY}\right)\\ &\quad + \varepsilon^3\left(\Phi_{3X} + H_1\Phi_{2XY} + H_2\Phi_{1XY} + \frac{1}{2}H_1^2\Phi_{1XYY}\right) + O(\varepsilon^4)\end{aligned} \tag{A.131}$$

$$\Omega H = \varepsilon\Omega H_1 + \varepsilon^2\Omega H_2 + \varepsilon^3\Omega H_3 + O(\varepsilon^4) \tag{A.132}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_X + \Omega H &= \varepsilon\left(\Phi_{1X} + \Omega H_1\right) + \varepsilon^2\left(\Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY} + \Omega H_2\right)\\ &\quad + \varepsilon^3\left(\Phi_{3X} + H_1\Phi_{2XY} + H_2\Phi_{1XY} + \frac{1}{2}H_1^2\Phi_{1XYY} + \Omega H_3\right) + O(\varepsilon^4)\end{aligned} \tag{A.133}$$

$$(\widetilde{\Phi}_X + \Omega H)^2 = \varepsilon^2\left(\Phi_{1X} + \Omega H_1\right)^2 + 2\varepsilon^3\left(\Phi_{1X} + \Omega H_1\right)\left(\Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY} + \Omega H_2\right) + O(\varepsilon^4) \tag{A.134}$$

$$-2c = -2c_0 - 2\varepsilon c_1 - 2\varepsilon^2 c_2 + O(\varepsilon^3) \tag{A.135}$$

$$\begin{aligned}-2c\left(\widetilde{\Phi}_X + \Omega H\right) &= -2c_0\varepsilon\left(\Phi_{1X} + \Omega H_1\right)\\ &\quad - 2\varepsilon^2\left(c_0\Phi_{2X} + c_0H_1\Phi_{1XY} + c_0\Omega H_2 + c_1\Phi_{1X} + c_1\Omega H_1\right)\\ &\quad - 2\varepsilon^3\Big(c_0\Phi_{3X} + c_0H_1\Phi_{2XY} + c_0H_2\Phi_{1XY} + \frac{c_0}{2}H_1^2\Phi_{1XYY} + c_0\Omega H_3\\ &\qquad + c_1\Phi_{2X} + c_1H_1\Phi_{1XY} + c_1\Omega H_2 + c_2\Phi_{1X} + c_2\Omega H_1\Big) + O(\varepsilon^4)\end{aligned} \tag{A.136}$$

$$\widetilde{\Phi}_Y = \varepsilon\Phi_{1Y} + \varepsilon^2\left(\Phi_{2Y} + H_1\Phi_{1YY}\right) + O(\varepsilon^3) \tag{A.137}$$

$$\widetilde{\Phi}_Y^2 = \varepsilon^2\Phi_{1Y}^2 + 2\varepsilon^3\left(\Phi_{1Y}\Phi_{2Y} + H_1\Phi_{1Y}\Phi_{1YY}\right) + O(\varepsilon^4) \tag{A.138}$$

$$2gH = 2\varepsilon gH_1 + 2\varepsilon^2 gH_2 + 2\varepsilon^3 gH_3 + O(\varepsilon^4) \tag{A.139}$$

$$K = K_0 + \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2 + \varepsilon K_3 + O(\varepsilon^4) \tag{A.140}$$

On traduit le développement de la condition dynamique :

$$K_0 = 0 \tag{A.141}$$

$$-2c_0\Phi_{1X} - 2c_0\Omega H_1 + 2gH_1 - K_1 = 0 \tag{A.142}$$

$$\begin{aligned}&\Phi_{1X}^2 + \Omega^2 H_1^2 + 2\Omega\Phi_{1X}H_1 - 2c_0\Phi_{2X} - 2c_0H_1\Phi_{1XY} - 2c_0\Omega H_2\\ &- 2c_1\Phi_{1X} - 2c_1\Omega H_1 + \Phi_{1Y}^2 + 2gH_2 - K_2 = 0\end{aligned} \tag{A.143}$$

$$\begin{aligned}&2\Phi_{1X}\Phi_{2X} + 2\Phi_{1X}H_1\Phi_{1XY} + 2\Omega\Phi_{1X}H_2 + 2\Omega H_1\Phi_{2X} + 2\Omega H_1^2\Phi_{1XY} + 2\Omega^2 H_1H_2\\ &- 2c_0\Phi_{3X} - 2c_0H_1\Phi_{2XY} - 2c_0H_2\Phi_{1XY} - c_0H_1^2\Phi_{1XYY} - 2c_0\Omega H_3 - 2c_1\Phi_{2X} - 2c_1H_1\Phi_{1XY}\\ &- 2c_1\Omega H_2 - 2c_2\Phi_{1X} - 2c_2\Omega H_1 + 2\Phi_{1Y}\Phi_{2Y} + 2H_1\Phi_{1Y}\Phi_{1YY} + 2gH_3 - K_3 = 0\end{aligned} \tag{A.144}$$

Les valeurs de K_0, K_1, K_2 et K_3 seront calculées grâce à la valeur moyenne sur une période. Il est déjà clair que $K_0 = K_1 = 0$.

Développements de Fourier

Développements à l'ordre 1

On prend les équations issues des termes d'ordre 1 de la condition cinématique et de la condition dynamique :

$$\begin{cases} -c_0H_1' - \Phi_{1Y} = 0\\ -2c_0\Phi_{1X} - 2c_0\Omega H_1 + 2gH_1 - K_1 = 0\end{cases} \tag{A.145}$$

On dérive la deuxième par rapport à X, ce qui a la vertu d'éliminer K_1 et de préparer l'élimination de H_1 :

$$\begin{cases} \Phi_{1Y} + & c_0 H_1' = 0 \\ c_0 \Phi_{1XX} + & (c_0\Omega - g) H_1' = 0 \end{cases} \tag{A.146}$$

On procède à l'élimination de H_1' :

$$c_0^2 \Phi_{1XX} - (c_0\Omega - g)\Phi_{1Y} = 0. \tag{A.147}$$

On reporte dans cette relation $\Phi_1(X,Y) = A_1 \dfrac{\cosh[k(Y+h)]}{\cosh(kh)} \sin(kX)$ en se souvenant qu'elle s'applique à $Y = 0$. On pose $\sigma = \tanh(kh)$:

$$-k^2 c_0^2 A_1 \sin(kX) - k(c_0\Omega - g) A_1 \sigma \sin(kX) = 0. \tag{A.148}$$

On en déduit la relation de dispersion linéaire :

$$k c_0^2 + \sigma(c_0\Omega - g) = 0. \tag{A.149}$$

Quand on passe à la limite quand h tend vers l'infini, c'est-à-dire quand $\sigma \to 1$, cette relation devient conforme à celle de [45] (établie justement en profondeur infinie).

On reprend à présent la condition cinématique :

$$\Phi_{1Y} + c_0 H_1' = 0 \tag{A.150}$$

Elle s'écrit

$$k A_1 \sigma \sin(kX) - k c_0 a_1 \sin(kX) = 0 \tag{A.151}$$

et fournit $A_1 = \dfrac{c_0 a_1}{\sigma}$, où on retrouve en profondeur infinie celle de [45].

Développements à l'ordre 2

On prend les termes d'ordre 2 des conditions cinématique et dynamique :

$$\begin{cases} -c_0 H_2' + \Phi_{1X} H_1' + \Omega H_1 H_1' - c_1 H_1' - \Phi_{2Y} - H_1 \Phi_{1YY} = 0 \\ \Phi_{1X}^2 + \Omega^2 H_1^2 + 2\Omega \Phi_{1X} H_1 - 2c_0 \Phi_{2X} - 2c_0 H_1 \Phi_{1XY} - 2c_0 \Omega H_2 \\ \qquad -2c_1 \Phi_{1X} - 2c_1 \Omega H_1 + \Phi_{1Y}^2 + 2gH_2 - K_2 = 0 \end{cases} \tag{A.152}$$

On fait passer dans le membre de gauche les quantités dépendant des inconnues a_2 et A_2 et dans le membre de droite tout le reste :

$$\begin{cases} \Phi_{2Y} + c_0 H_2' = \Phi_{1X} H_1' + \Omega H_1 H_1' - c_1 H_1' - H_1 \Phi_{1YY} \\ c_0 \Phi_{2X} - (g - c_0\Omega) H_2 = \dfrac{1}{2}\Phi_{1X}^2 + \dfrac{1}{2}\Omega^2 H_1^2 + \Omega \Phi_{1X} H_1 - c_0 H_1 \Phi_{1XY} \\ \qquad - c_1 \Phi_{1X} - c_1 \Omega H_1 + \dfrac{1}{2}\Phi_{1Y}^2 - \dfrac{K_2}{2} \end{cases} \tag{A.153}$$

On simplifie la deuxième équation en utilisant la relation de dispersion linéaire $g - c_0\Omega = \dfrac{k c_0^2}{\sigma}$:

$$\begin{cases} \Phi_{2Y} + c_0 H_2' = \Phi_{1X} H_1' + \Omega H_1 H_1' - c_1 H_1' - H_1 \Phi_{1YY} \\ c_0 \Phi_{2X} - \dfrac{k c_0^2}{\sigma} H_2 = \dfrac{1}{2}\Phi_{1X}^2 + \dfrac{1}{2}\Omega^2 H_1^2 + \Omega \Phi_{1X} H_1 - c_0 H_1 \Phi_{1XY} \\ \qquad - c_1 \Phi_{1X} - c_1 \Omega H_1 + \dfrac{1}{2}\Phi_{1Y}^2 - \dfrac{K_2}{2} \end{cases} \tag{A.154}$$

On dérive la deuxième équation par rapport à X :

$$\begin{cases} \Phi_{2Y} + c_0 H_2' = \Phi_{1X} H_1' + \Omega H_1 H_1' - c_1 H_1' - H_1 \Phi_{1YY} \\ c_0 \Phi_{2XX} - \dfrac{kc_0^2}{\sigma} H_2' = \Phi_{1X}\Phi_{1XX} + \Omega^2 H_1 H_1' + \Omega \Phi_{1XX} H_1 + \Omega \Phi_{1X} H_1' - c_0 H_1' \Phi_{1XY} \\ \qquad - c_0 H_1 \Phi_{1XXY} - c_1 \Phi_{1XX} - c_1 \Omega H_1' + \Phi_{1Y}\Phi_{1XY} \end{cases} \tag{A.155}$$

On élimine H_2' :

$$\begin{aligned} \frac{kc_0}{\sigma}\Phi_{2Y} + c_0\Phi_{2XX} = {} & \frac{kc_0}{\sigma}\Phi_{1X}H_1' + \frac{kc_0}{\sigma}\Omega H_1 H_1' - \frac{kc_0}{\sigma}c_1 H_1' - \frac{kc_0}{\sigma}H_1\Phi_{1YY} + \Phi_{1X}\Phi_{1XX} \\ & + \Omega^2 H_1 H_1' + \Omega\Phi_{1XX}H_1 + \Omega\Phi_{1X}H_1' - c_0 H_1'\Phi_{1XY} - c_0 H_1 \Phi_{1XXY} \\ & - c_1\Phi_{1XX} - c_1\Omega H_1' + \Phi_{1Y}\Phi_{1XY} \end{aligned} \tag{A.156}$$

On développe successivement tous les termes de cette équation. On se rappelle que

$$\Phi_1(X,Y) = A_1 \frac{\cosh[k(Y+h)]}{\cosh(kh)} \sin(kX) \qquad H_1(X) = a_1 \cos(kX) \tag{A.157}$$

$$\Phi_2(X,Y) = \frac{A_2}{2} \frac{\cosh[2k(Y+h)]}{\cosh(2kh)} \sin(2kX) \qquad H_2(X) = a_2 \cos(2kX) \tag{A.158}$$

Cela donne :

$$\frac{kc_0}{\sigma}\Phi_{2Y} = \frac{2k^2c_0}{1+\sigma^2} A_2 \sin(2kX) \tag{A.159}$$

$$c_0\Phi_{2XX} = -2k^2c_0A_2\sin(2kX) \tag{A.160}$$

$$\frac{kc_0}{\sigma}\Phi_{1X}H_1' = -\frac{k^3c_0^2}{\sigma^2}a_1^2\sin(kX)\cos(kX) \tag{A.161}$$

$$\frac{kc_0}{\sigma}\Omega H_1 H_1' = -\frac{k^2c_0\Omega}{\sigma}a_1^2\sin(kX)\cos(kX) \tag{A.162}$$

$$-\frac{kc_0}{\sigma}c_1H_1' = \frac{k^2c_0}{\sigma}c_1a_1\sin(kX) \tag{A.163}$$

$$-\frac{kc_0}{\sigma}H_1\Phi_{1YY} = -\frac{k^3c_0^2}{\sigma^2}a_1^2\sin(kX)\cos(kX) \tag{A.164}$$

$$\Phi_{1X}\Phi_{1XX} = -\frac{k^3c_0^2}{\sigma^2}a_1^2\sin(kX)\cos(kX) \tag{A.165}$$

$$\Omega^2H_1H_1' = -k\Omega^2a_1^2\sin(kX)\cos(kX) \tag{A.166}$$

$$\Omega\Phi_{1XX}H_1 = -\frac{k^2c_0\Omega}{\sigma}a_1^2\sin(kX)\cos(kX) \tag{A.167}$$

$$\Omega\Phi_{1X}H_1' = -\frac{k^2c_0\Omega}{\sigma}a_1^2\sin(kX)\cos(kX) \tag{A.168}$$

$$-c_0H_1'\Phi_{1XY} = k^3c_0^2a_1^2\sin(kX)\cos(kX) \tag{A.169}$$

$$-c_0H_1\Phi_{1XXY} = k^3c_0^2a_1^2\sin(kX)\cos(kX) \tag{A.170}$$

$$-c_1\Phi_{1XX} = \frac{k^2c_0c_1}{\sigma}a_1\sin(kX) \tag{A.171}$$

$$-c_1\Omega H_1' = k\Omega c_1a_1\sin(kX) \tag{A.172}$$

$$\Phi_{1Y}\Phi_{1XY} = k^3c_0^2a_1^2\sin(kX)\cos(kX) \tag{A.173}$$

On appelle $\overline{\Omega} = \dfrac{\Omega}{kc_0}$ la vorticité adimensionnalisée. L'identification des termes en $\sin(kX)$ donne

$$(2+\sigma\overline{\Omega})c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0. \tag{A.174}$$

On identifie ensuite les termes en $\sin(kX)\cos(kX)$:

$$\frac{-4k^2c_0\sigma^2}{1+\sigma^2}A_2 = \left(3k^3c_0^2 - \frac{3k^3c_0^2}{\sigma^2} - \frac{3k^2c_0\Omega}{\sigma} - k\Omega^2\right)a_1^2 \tag{A.175}$$

$$\iff \frac{-4k^2c_0\sigma^2}{1+\sigma^2}A_2 = k^3c_0^2\left(3 - \frac{3}{\sigma^2} - \frac{3\overline{\Omega}}{\sigma} - \overline{\Omega}^2\right)a_1^2 \tag{A.176}$$

$$\iff \frac{-4\sigma^2}{1+\sigma^2}A_2 = kc_0\left(3 - \frac{3}{\sigma^2} - \frac{3\overline{\Omega}}{\sigma} - \overline{\Omega}^2\right)a_1^2 \tag{A.177}$$

$$\iff \frac{4\sigma^2}{1+\sigma^2}A_2 = kc_0\left(\frac{3}{\sigma^2} - 3 + \frac{3\overline{\Omega}}{\sigma} + \overline{\Omega}^2\right)a_1^2 \tag{A.178}$$

$$\iff A_2 = \frac{kc_0(1+\sigma^2)}{4\sigma^2}\left(\frac{3}{\sigma^2} - 3 + \frac{3\overline{\Omega}}{\sigma} + \overline{\Omega}^2\right)a_1^2 \tag{A.179}$$

$$\tag{A.180}$$

Donc :

$$A_2 = \frac{kc_0}{4}\frac{1+\sigma^2}{\sigma^4}\left(3(1-\sigma^2) + 3\sigma\overline{\Omega} + \sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^2 \tag{A.181}$$

Ce résultat est conforme, quand $\sigma \to 1$, à celui de [45].

On détermine maintenant a_2, par exemple en reportant dans la condition cinématique :

$$c_0H_2' = -\Phi_{2Y} + \Phi_{1X}H_1' + \Omega H_1H_1' - c_1H_1' - H_1\Phi_{1YY} \tag{A.182}$$

On développe :

$$c_0H_2' = -2kc_0a_2\sin(2kX) \tag{A.183}$$

$$-\Phi_{2Y} = -kA_2\frac{2\sigma}{1+\sigma^2}\sin(2kX) \tag{A.184}$$

$$\Phi_{1X}H_1' = -\frac{k^2c_0}{\sigma}a_1^2\sin(kX)\cos(kX) \tag{A.185}$$

$$\Omega H_1H_1' = -k\Omega a_1^2\sin(kX)\cos(kX) \tag{A.186}$$

$$-c_1H_1' = 0 \tag{A.187}$$

$$-H_1\Phi_{1YY} = -\frac{k^2c_0}{\sigma}a_1^2\sin(kX)\cos(kX) \tag{A.188}$$

On obtient ainsi :

$$a_2 = \frac{k}{4\sigma^3}\left[3 - \sigma^2 + \sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega} + \sigma^2\overline{\Omega}^2\right]a_1^2 \tag{A.189}$$

Ce résultat coïncide encore avec celui de [45] dans le cas de la profondeur infinie.

Développements à l'ordre 3

On procède de la même façon à partir des équations qui font intervenir les termes du troisième

ordre :

$$\begin{cases} -c_0H_3' + \Phi_{1X}H_2' + \Omega H_1H_2' - c_1H_2' + \Phi_{2X}H_1' + H_1H_1'\Phi_{1XY} + \Omega H_2H_1' - c_2H_1' \\ -\Phi_{3Y} - H_1\Phi_{2YY} - H_2\Phi_{1YY} - \dfrac{1}{2}H_1^2\Phi_{1YYY} = 0 \\ \Phi_{1X}\Phi_{2X} + \Phi_{1X}H_1\Phi_{1XY} + \Omega\Phi_{1X}H_2 + \Omega H_1\Phi_{2X} + \Omega H_1^2\Phi_{1XY} + \Omega^2H_1H_2 \\ -c_0\Phi_{3X} - c_0H_1\Phi_{2XY} - c_0H_2\Phi_{1XY} - \dfrac{1}{2}c_0H_1^2\Phi_{1XYY} - c_0\Omega H_3 - c_1\Phi_{2X} - c_1H_1\Phi_{1XY} \\ -c_1\Omega H_2 - c_2\Phi_{1X} - c_2\Omega H_1 + \Phi_{1Y}\Phi_{2Y} + H_1\Phi_{1Y}\Phi_{1YY} + gH_3 - \dfrac{K_3}{2} = 0 \end{cases} \tag{A.190}$$

On élimine les termes nuls du fait de la relation $c_1 = 0$, on fait passer les inconnues dans le membre de gauche et le reste dans le membre de droite :

$$\begin{cases} \Phi_{3Y} + c_0H_3' = -H_1\Phi_{2YY} - H_2\Phi_{1YY} - \dfrac{1}{2}H_1^2\Phi_{1YYY} + (\Phi_{1X} + \Omega H_1)\,H_2' \\ \qquad + (\Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY} + \Omega H_2 - c_2)\,H_1' \\ c_0\Phi_{3X} + (c_0\Omega - g)H_3 = -c_0H_1\Phi_{2XY} - c_0H_2\Phi_{1XY} - \dfrac{1}{2}c_0H_1^2\Phi_{1XYY} \\ \qquad + (\Phi_{1X} + \Omega H_1)(\Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY} + \Omega H_2 - c_2) \\ \qquad + \Phi_{1Y}(\Phi_{2Y} + H_1\Phi_{1YY}) - \dfrac{K_3}{2} \end{cases} \tag{A.191}$$

On utilise la relation de dispersion linéaire :

$$\begin{cases} \Phi_{3Y} + c_0H_3' = -H_1\Phi_{2YY} - H_2\Phi_{1YY} - \dfrac{1}{2}H_1^2\Phi_{1YYY} + (\Phi_{1X} + \Omega H_1)\,H_2' \\ \qquad + (\Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY} + \Omega H_2 - c_2)\,H_1' \\ c_0\Phi_{3X} - \dfrac{kc_0^2}{\sigma}H_3 = -c_0H_1\Phi_{2XY} - c_0H_2\Phi_{1XY} - \dfrac{1}{2}c_0H_1^2\Phi_{1XYY} \\ \qquad + (\Phi_{1X} + \Omega H_1)(\Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY} + \Omega H_2 - c_2) \\ \qquad + \Phi_{1Y}(\Phi_{2Y} + H_1\Phi_{1YY}) - \dfrac{K_3}{2} \end{cases} \tag{A.192}$$

On dérive la deuxième relation par rapport à X :

$$\begin{aligned} c_0\Phi_{3XX} - \frac{kc_0^2}{\sigma}H_3' = &-c_0\frac{\partial}{\partial X}(H_1\Phi_{2XY}) - c_0\frac{\partial}{\partial X}(H_2\Phi_{1XY}) - \frac{1}{2}c_0\frac{\partial}{\partial X}\left(H_1^2\Phi_{1XYY}\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial X}\left[(\Phi_{1X} + \Omega H_1)(\Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY} + \Omega H_2 - c_2)\right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial X}\left[\Phi_{1Y}(\Phi_{2Y} + H_1\Phi_{1YY})\right] \end{aligned} \tag{A.193}$$

On élimine H_3' entre nos deux équations :

$$\begin{aligned} kc_0\Phi_{3Y} + \sigma c_0\Phi_{3XX} = &-kc_0H_1\Phi_{2YY} - kc_0H_2\Phi_{1YY} - \frac{kc_0}{2}H_1^2\Phi_{1YYY} + kc_0(\Phi_{1X} + \Omega H_1)\,H_2' \\ &+ kc_0(\Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY} + \Omega H_2)\,H_1' - kc_0c_2H_1' \\ &- \sigma c_0\frac{\partial}{\partial X}(H_1\Phi_{2XY}) - \sigma c_0\frac{\partial}{\partial X}(H_2\Phi_{1XY}) - \frac{\sigma}{2}c_0\frac{\partial}{\partial X}\left(H_1^2\Phi_{1XYY}\right) \\ &+ \sigma\frac{\partial}{\partial X}\left[(\Phi_{1X} + \Omega H_1)(\Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY} + \Omega H_2 - c_2)\right] \\ &+ \sigma\frac{\partial}{\partial X}\left[\Phi_{1Y}(\Phi_{2Y} + H_1\Phi_{1YY})\right] \end{aligned} \tag{A.194}$$

On développe tous ces termes avec

$$\Phi_3(X,Y) = \frac{A_3}{3}\frac{\cosh[3k(Y+h)]}{\cosh(3kh)}\sin(3kX), \qquad H_3 = a_3\cos(3kX) \tag{A.195}$$

On obtient ainsi

$$kc_0\Phi_{3Y} = k^2c_0A_3\frac{3\sigma+\sigma^3}{1+3\sigma^2}\sin(3kX) \tag{A.196}$$

$$\sigma c_0\Phi_{3XX} = -3k^2c_0\sigma A_3\sin(3kX) \tag{A.197}$$

$$\begin{aligned} kc_0\Phi_{3Y} + \sigma c_0\Phi_{3XX} &= k^2c_0\left(\frac{3+\sigma^2}{1+3\sigma^2} - 3\right)\sigma A_3\sin(3kX) \\ &= -\frac{8\sigma^3}{1+3\sigma^2}k^2c_0A_3\sin(3kX) \end{aligned} \tag{A.198}$$

Dans le membre de droite, on écrit chaque terme sous la forme $t_i\sin(3kX) + s_i\sin(kX)$:

$$\begin{aligned} -kc_0H_1\Phi_{2YY} &= -2k^3c_0a_1A_2\sin(2kX)\cos(kX) \\ &= -\frac{k^4c_0^2}{2\sigma^4}\left[3-3\sigma^4+3\sigma(1+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2(1+\sigma^2)\overline{\Omega}^2\right]a_1^3\sin(2kX)\cos(kX) \\ &= -\frac{k^4c_0^2}{4\sigma^4}\left[3-3\sigma^4+3\sigma(1+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2(1+\sigma^2)\overline{\Omega}^2\right]a_1^3\sin(3kX) \\ &\quad -\frac{k^4c_0^2}{4\sigma^4}\left[3-3\sigma^4+3\sigma(1+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2(1+\sigma^2)\overline{\Omega}^2\right]a_1^3\sin(kX) \end{aligned} \tag{A.199}$$

Donc $-kc_0H_1\Phi_{2YY} = t_1\sin(3kX) + s_1\sin(kX)$ avec

$$\begin{cases} t_1 = -\dfrac{k^4c_0^2}{4\sigma^4}\left[3-3\sigma^4+3\sigma(1+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2(1+\sigma^2)\overline{\Omega}^2\right]a_1^3 \\ s_1 = -\dfrac{k^4c_0^2}{4\sigma^4}\left[3-3\sigma^4+3\sigma(1+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2(1+\sigma^2)\overline{\Omega}^2\right]a_1^3 \end{cases} \tag{A.200}$$

$$\begin{aligned} -kc_0H_2\Phi_{1YY} &= -k^3c_0A_1a_2\sin(kX)\cos(2kX) \\ &= -\frac{k^4c_0^2}{4\sigma^4}\left[3-\sigma^2+\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right]a_1^3\sin(kX)\cos(2kX) \\ &= -\frac{k^4c_0^2}{8\sigma^4}\left[3-\sigma^2+\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right]a_1^3\sin(3kX) \\ &\quad +\frac{k^4c_0^2}{8\sigma^4}\left[3-\sigma^2+\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right]a_1^3\sin(kX) \end{aligned} \tag{A.201}$$

Donc $-kc_0H_2\Phi_{1YY} = t_2\sin(3kX) + s_2\sin(kX)$ avec

$$\begin{cases} t_2 = -\dfrac{k^4c_0^2}{8\sigma^4}\left[3-\sigma^2+\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right]a_1^3 \\ s_2 = \dfrac{k^4c_0^2}{8\sigma^4}\left[3-\sigma^2+\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right]a_1^3 \end{cases} \tag{A.202}$$

$$\begin{aligned} -\frac{kc_0}{2}H_1^2\Phi_{1YYY} &= -\frac{k^4c_0\sigma}{2}A_1a_1^2\sin(kX)\cos^2(kX) \\ &= -\frac{k^4c_0^2}{2}a_1^3\sin(kX)\cos^2(kX) \\ &= -\frac{k^4c_0^2}{4}a_1^3\sin(kX) - \frac{k^4c_0^2}{4}a_1^3\sin(kX)\cos(2kX) \\ &= -\frac{k^4c_0^2}{8}a_1^3\sin(3kX) - \frac{k^4c_0^2}{8}a_1^3\sin(kX) \end{aligned} \tag{A.203}$$

Donc $-\dfrac{kc_0}{2}H_1^2\Phi_{1YYY} = t_3\sin(3kX) + s_3\sin(kX)$ avec

$$\begin{cases} t_3 = -\dfrac{k^4c_0^2}{8}a_1^3 \\ s_3 = -\dfrac{k^4c_0^2}{8}a_1^3 \end{cases} \tag{A.204}$$

$$\begin{aligned} kc_0\left(\Phi_{1X} + \Omega H_1\right)H_2' = & -\frac{2k^3c_0^2}{\sigma}\left(1+\sigma\overline{\Omega}\right)a_1a_2\sin(2kX)\cos(kX) \\ = & -\frac{k^4c_0^2}{2\sigma^4}\left(1+\sigma\overline{\Omega}\right)\left[3-\sigma^2+\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right]a_1^3\sin(2kX)\cos(kX) \\ = & -\frac{k^4c_0^2}{2\sigma^4}\left[3-\sigma^2+6\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2(4+\sigma^2)\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]a_1^3\sin(2kX)\cos(kX) \\ = & -\frac{k^4c_0^2}{4\sigma^4}\left[3-\sigma^2+6\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2(4+\sigma^2)\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]a_1^3\sin(3kX) \\ & -\frac{k^4c_0^2}{4\sigma^4}\left[3-\sigma^2+6\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2(4+\sigma^2)\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]a_1^3\sin(kX) \end{aligned} \tag{A.205}$$

Donc $kc_0\left(\Phi_{1X} + \Omega H_1\right)H_2' = t_4\sin(3kX) + s_4\sin(kX)$ avec

$$\begin{cases} t_4 = -\dfrac{k^4c_0^2}{4\sigma^4}\left[3-\sigma^2+6\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2(4+\sigma^2)\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]a_1^3 \\ s_4 = -\dfrac{k^4c_0^2}{4\sigma^4}\left[3-\sigma^2+6\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2(4+\sigma^2)\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]a_1^3 \end{cases} \tag{A.206}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY} + \Omega H_2 = & \left(kA_2 + \Omega a_2\right)\cos(2kX) + k^2\sigma A_1a_1\cos^2(kX) \\ = & \frac{k^2c_0}{4\sigma^4}\left[3-\sigma^4+2\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+2\sigma^2(2+\sigma^2)\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right] \\ & \times a_1^2\cos(2kX) \\ & + \frac{k^2c_0}{2}a_1^2 \end{aligned} \tag{A.207}$$

$$\begin{aligned} kc_0\left(\Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY} + \Omega H_2\right)H_1' = & -\frac{k^4c_0^2}{4\sigma^4}\left[3-\sigma^4+2\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+2\sigma^2(2+\sigma^2)\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right] \\ & \times a_1^3\cos(2kX)\sin(kX) \\ & -\frac{k^4c_0^2}{2}a_1^3\sin(kX) \end{aligned} \tag{A.208}$$

On note $u = \left[3-\sigma^4+2\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+2\sigma^2(2+\sigma^2)\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]$:

$$kc_0\left(\Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY} + \Omega H_2\right)H_1' = -\frac{k^4c_0^2}{8\sigma^4}ua_1^3\sin(3kX) + \frac{k^4c_0^2}{8\sigma^4}\left(u-4\sigma^4\right)a_1^3\sin(kX) \tag{A.209}$$

Donc $kc_0\left(\Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY} + \Omega H_2\right)H_1' = t_5\sin(3kX) + s_5\sin(kX)$ avec

$$\begin{cases} t_5 = -\dfrac{k^4c_0^2}{8\sigma^4}\left[3-\sigma^4+2\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+2\sigma^2(2+\sigma^2)\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]a_1^3 \\ s_5 = \dfrac{k^4c_0^2}{8\sigma^4}\left[3-5\sigma^4+2\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+2\sigma^2(2+\sigma^2)\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]a_1^3 \end{cases} \tag{A.210}$$

On a $-kc_0c_2H_1' = s_6\sin(kX)$ avec

$$s_6 = k^2c_0c_2a_1 \tag{A.211}$$

On continue :

$$\begin{aligned}
-\sigma c_0H_1\Phi_{2XY} &= -\frac{4k^2c_0\sigma^2}{1+\sigma^2}a_1A_2\cos(2kX)\cos(kX)\\
&= -\frac{2k^2c_0\sigma^2}{1+\sigma^2}a_1A_2[\cos(3kX)+\cos(kX)]\\
&= -\frac{k^3c_0^2}{2\sigma^2}\left(3-3\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^3[\cos(3kX)+\cos(kX)]
\end{aligned} \tag{A.212}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial X}\left(\sigma c_0H_1\Phi_{2XY}\right) &= \frac{3k^4c_0^2}{2\sigma^2}\left(3-3\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^3\sin(3kX)\\
&+\frac{k^4c_0^2}{2\sigma^2}\left(3-3\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^3\sin(kX)
\end{aligned} \tag{A.213}$$

Donc $-\frac{\partial}{\partial X}\left(\sigma c_0H_1\Phi_{2XY}\right) = t_7\sin(3kX)+s_7\sin(kX)$ avec

$$\begin{cases}
t_7 = \frac{3k^4c_0^2}{2\sigma^2}\left(3-3\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^3\\
s_7 = \frac{k^4c_0^2}{2\sigma^2}\left(3-3\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^3
\end{cases} \tag{A.214}$$

$$\begin{aligned}
-\sigma c_0H_2\Phi_{1XY} &= -k^2c_0\sigma^2A_1a_2\cos(kX)\cos(2kX)\\
&= -\frac{k^3c_0^2}{4\sigma^2}\left[3-\sigma^2+\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right]a_1^3\cos(kX)\cos(2kX)\\
&= -\frac{k^3c_0^2}{8\sigma^2}\left[3-\sigma^2+\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right]a_1^3[\cos(3kX)+\cos(kX)]
\end{aligned} \tag{A.215}$$

$$\begin{aligned}
-\sigma c_0\frac{\partial}{\partial X}\left(H_2\Phi_{1XY}\right) &= \frac{3k^4c_0^2}{8\sigma^2}\left[3-\sigma^2+\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right]a_1^3\sin(3kX)\\
&+\frac{k^4c_0^2}{8\sigma^2}\left[3-\sigma^2+\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right]a_1^3\sin(kX)
\end{aligned} \tag{A.216}$$

Donc $-\sigma c_0\frac{\partial}{\partial X}\left(H_2\Phi_{1XY}\right) = t_8\sin(3kX)+s_8\sin(kX)$ avec

$$\begin{cases}
t_8 = \frac{3k^4c_0^2}{8\sigma^2}\left[3-\sigma^2+\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right]a_1^3\\
s_8 = \frac{k^4c_0^2}{8\sigma^2}\left[3-\sigma^2+\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right]a_1^3
\end{cases} \tag{A.217}$$

$$-\frac{\sigma}{2}c_0H_1^2\Phi_{1XYY} = -\frac{k^3c_0^2}{2}a_1^3\cos^3(kX) = -\frac{k^3c_0^2}{8}a_1^3[\cos(3kX)+3\cos(kX)] \tag{A.218}$$

$$-\frac{\sigma}{2}c_0\frac{\partial}{\partial X}\left(H_1^2\Phi_{1XYY}\right) = \frac{3k^4c_0^2}{8}a_1^3\sin(3kX)+\frac{3k^4c_0^2}{8}a_1^3\sin(kX) \tag{A.219}$$

Donc $-\frac{\sigma}{2}c_0\frac{\partial}{\partial X}\left(H_1^2\Phi_{1XYY}\right) = t_9\sin(3kX)+s_9\sin(kX)$ avec

$$\begin{cases}
t_9 = \frac{3k^4c_0^2}{8}a_1^3\\
s_9 = \frac{3k^4c_0^2}{8}a_1^3
\end{cases} \tag{A.220}$$

$$\Phi_{1X} + \Omega H_1 = (kA_1 + \Omega a_1)\cos(kX) = \left(\frac{kc_0}{\sigma} + \Omega\right) a_1 \cos(kX) \tag{A.221}$$

$$= \frac{kc_0}{\sigma}(1+\sigma\overline{\Omega})a_1\cos(kX) \tag{A.222}$$

$$\Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY} + \Omega H_2 = (kA_2 + \Omega a_2)\cos(2kX) + k^2c_0a_1^2\cos^2(kX) \tag{A.223}$$

$$= \left(kA_2 + \Omega a_2 + \frac{k^2c_0}{2}a_1^2\right)\cos(2kX) + \frac{k^2c_0}{2}a_1^2 \tag{A.224}$$

On effectue le produit :

$$P = (\Phi_{1X} + \Omega H_1)(\Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY} + \Omega H_2) \tag{A.225}$$

$$P = \frac{kc_0}{\sigma}(1+\sigma\overline{\Omega})\left(kA_2 + \Omega a_2 + \frac{k^2c_0}{2}a_1^2\right)a_1\cos(kX)\cos(2kX) + \frac{k^3c_0^2}{2\sigma}(1+\sigma\overline{\Omega})a_1^3\cos(kX) \tag{A.226}$$

$$\begin{aligned} P = {} & \frac{kc_0}{2\sigma}(1+\sigma\overline{\Omega})\left(kA_2 + \Omega a_2 + \frac{k^2c_0}{2}a_1^2\right)a_1\cos(3kX) \\ & + \frac{kc_0}{2\sigma}(1+\sigma\overline{\Omega})\left(kA_2 + \Omega a_2 + \frac{3k^2c_0}{2}a_1^2\right)a_1\cos(kX) \end{aligned} \tag{A.227}$$

On a besoin de calculer $Q = kA_2 + \Omega a_2 + \frac{k^2c_0}{2}a_1^2$:

$$Q = \frac{k^2c_0}{4\sigma^4}\left[\left(1+\sigma^2\right)\left(3 - 3\sigma^2 + 3\sigma\overline{\Omega} + \sigma^2\overline{\Omega}^2\right) + \sigma\overline{\Omega}\left[3 - \sigma^2 + \sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega} + \sigma^2\overline{\Omega}^2\right] + 2\sigma^4\right]a_1^2 \tag{A.228}$$

$$Q = \frac{k^2c_0}{4\sigma^4}\left[3 - \sigma^4 + 2\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega} + 2\sigma^2(2+\sigma^2)\overline{\Omega}^2 + \sigma^3\overline{\Omega}^3\right]a_1^2 \tag{A.229}$$

On revient au calcul de P :

$$\begin{aligned} P = {} & \frac{k^3c_0^2}{8\sigma^5}(1+\sigma\overline{\Omega})\left[3 - \sigma^4 + 2\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega} + 2\sigma^2(2+\sigma^2)\overline{\Omega}^2 + \sigma^3\overline{\Omega}^3\right]a_1^3\cos(3kX) \\ & + \frac{k^3c_0^2}{8\sigma^5}(1+\sigma\overline{\Omega})\left[3 + 3\sigma^4 + 2\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega} + 2\sigma^2(2+\sigma^2)\overline{\Omega}^2 + \sigma^3\overline{\Omega}^3\right]a_1^3\cos(kX) \end{aligned} \tag{A.230}$$

$$\begin{aligned} P = {} & \frac{k^3c_0^2}{8\sigma^5}\left[3 - \sigma^4 + \sigma(9 + 2\sigma^2 - \sigma^4)\overline{\Omega} + 2(5\sigma^2 + 2\sigma^4)\overline{\Omega}^2 + (5+2\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3 + \sigma^4\overline{\Omega}^4\right]a_1^3\cos(3kX) \\ & + \frac{k^3c_0^2}{8\sigma^5}\left[3 + 3\sigma^4 + \sigma(9 + 2\sigma^2 + 3\sigma^4)\overline{\Omega} + 2(5\sigma^2 + 2\sigma^4)\overline{\Omega}^2 + (5+2\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3 + \sigma^4\overline{\Omega}^4\right]a_1^3\cos(kX) \end{aligned} \tag{A.231}$$

On le dérive :

$$\begin{aligned} P' = {} & -\frac{3k^4c_0^2}{8\sigma^5}\left[3 - \sigma^4 + \sigma(9 + 2\sigma^2 - \sigma^4)\overline{\Omega} + 2(5\sigma^2 + 2\sigma^4)\overline{\Omega}^2 + (5+2\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3 + \sigma^4\overline{\Omega}^4\right]a_1^3\sin(3kX) \\ & - \frac{k^4c_0^2}{8\sigma^5}\left[3 + 3\sigma^4 + \sigma(9 + 2\sigma^2 + 3\sigma^4)\overline{\Omega} + 2(5\sigma^2 + 2\sigma^4)\overline{\Omega}^2 + (5+2\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3 + \sigma^4\overline{\Omega}^4\right]a_1^3\sin(kX) \end{aligned} \tag{A.232}$$

Donc $\sigma\frac{\partial}{\partial X}\left[(\Phi_{1X} + \Omega H_1)(\Phi_{2X} + H_1\Phi_{1XY} + \Omega H_2)\right] = t_{10}\sin(3kX) + s_{10}\sin(kX)$ avec

$$\begin{cases} t_{10} = -\frac{3k^4c_0^2}{8\sigma^4}\left[3 - \sigma^4 + \sigma(9 + 2\sigma^2 - \sigma^4)\overline{\Omega} + 2(5\sigma^2 + 2\sigma^4)\overline{\Omega}^2 + (5+2\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3 + \sigma^4\overline{\Omega}^4\right]a_1^3 \\ s_{10} = -\frac{k^4c_0^2}{8\sigma^4}\left[3 + 3\sigma^4 + \sigma(9 + 2\sigma^2 + 3\sigma^4)\overline{\Omega} + 2(5\sigma^2 + 2\sigma^4)\overline{\Omega}^2 + (5+2\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3 + \sigma^4\overline{\Omega}^4\right]a_1^3 \end{cases} \tag{A.233}$$

Enfin :

$$-c_2\sigma\frac{\partial}{\partial X}\left(\Phi_{1X}+\Omega H_1\right)=k^2c_0c_2(1+\sigma\overline{\Omega})a_1\sin(kX) \tag{A.234}$$

c'est-à-dire que $-c_2\sigma\dfrac{\partial}{\partial X}\left(\Phi_{1X}+\Omega H_1\right)=s_{11}\sin(kX)$ avec

$$s_{11}=k^2c_0c_2(1+\sigma\overline{\Omega})a_1 \tag{A.235}$$

et

$$\Phi_{2Y}+H_1\Phi_{1YY}=\left(\frac{4k\sigma}{1+\sigma^2}A_2+\frac{k^2c_0}{\sigma}a_1^2\right)\sin(kX)\cos(kX) \tag{A.236}$$

$$\Phi_{2Y}+H_1\Phi_{1YY}=\frac{k^2c_0}{\sigma^3}\left(3-2\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^2\sin(kX)\cos(kX) \tag{A.237}$$

$$\Phi_{1Y}\left(\Phi_{2Y}+H_1\Phi_{1YY}\right)=\frac{k^3c_0^2}{\sigma^3}\left(3-2\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^3\sin^2(kX)\cos(kX) \tag{A.238}$$

$$\Phi_{1Y}\left(\Phi_{2Y}+H_1\Phi_{1YY}\right)=\frac{k^3c_0^2}{2\sigma^3}\left(3-2\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^3(\cos(kX)-\cos(2kX)\cos(kX)) \tag{A.239}$$

$$\Phi_{1Y}\left(\Phi_{2Y}+H_1\Phi_{1YY}\right)=\frac{k^3c_0^2}{4\sigma^3}\left(3-2\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^3(2\cos(kX)-\cos(3kX)-\cos(kX)) \tag{A.240}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{1Y}\left(\Phi_{2Y}+H_1\Phi_{1YY}\right)=&\frac{k^3c_0^2}{4\sigma^3}\left(3-2\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^3\cos(kX)\\&-\frac{k^3c_0^2}{4\sigma^3}\left(3-2\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^3\cos(3kX)\end{aligned} \tag{A.241}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X}\left[\Phi_{1Y}\left(\Phi_{2Y}+H_1\Phi_{1YY}\right)\right]=&-\frac{k^4c_0^2}{4\sigma^3}\left(3-2\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^3\sin(kX)\\&+\frac{3k^4c_0^2}{4\sigma^3}\left(3-2\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^3\sin(3kX)\end{aligned} \tag{A.242}$$

Donc $\sigma\dfrac{\partial}{\partial X}\left[\Phi_{1Y}\left(\Phi_{2Y}+H_1\Phi_{1YY}\right)\right]=t_{12}\sin(3kX)+s_{12}\sin(kX)$ avec

$$\begin{cases}t_{12}=\dfrac{3k^4c_0^2}{4\sigma^2}\left(3-2\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^3\\ s_{12}=-\dfrac{k^4c_0^2}{4\sigma^2}\left(3-2\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^3\end{cases} \tag{A.243}$$

On récupère tous les termes en $\sin(kX)$:

$$\begin{aligned}
0 =& -\frac{k^4c_0^2}{4\sigma^4}\left[3-3\sigma^4+3\sigma(1+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2(1+\sigma^2)\overline{\Omega}^2\right]a_1^3\\
&+\frac{k^4c_0^2}{8\sigma^4}\left[3-\sigma^2+\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right]a_1^3\\
&-\frac{k^4c_0^2}{8}a_1^3\\
&-\frac{k^4c_0^2}{4\sigma^4}\left[3-\sigma^2+6\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2(4+\sigma^2)\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]a_1^3\\
&+\frac{k^4c_0^2}{8\sigma^4}\left[3-5\sigma^4+2\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+2\sigma^2(2+\sigma^2)\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]a_1^3\\
&+k^2c_0c_2a_1\\
&+\frac{k^4c_0^2}{2\sigma^2}\left(3-3\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^3\\
&+\frac{k^4c_0^2}{8\sigma^2}\left[3-\sigma^2+\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right]a_1^3\\
&+\frac{3k^4c_0^2}{8}a_1^3\\
&-\frac{k^4c_0^2}{8\sigma^4}\left[3+3\sigma^4+\sigma(9+2\sigma^2+3\sigma^4)\overline{\Omega}+2(5\sigma^2+2\sigma^4)\overline{\Omega}^2+(5+2\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3+\sigma^4\overline{\Omega}^4\right]a_1^3\\
&+k^2c_0c_2(1+\sigma\overline{\Omega})a_1\\
&-\frac{k^4c_0^2}{4\sigma^2}\left(3-2\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)a_1^3
\end{aligned} \tag{A.244}$$

On réduit au même dénominateur :

$$(2+\sigma\overline{\Omega})c_2=\frac{k^2c_0}{8\sigma^4}.U.a_1^2 \tag{A.245}$$

avec

$$\begin{aligned}
U =& 2\left[3-3\sigma^4+3\sigma(1+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2(1+\sigma^2)\overline{\Omega}^2\right]\\
&-\left[3-\sigma^2+\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right]\\
&+\sigma^4\\
&+2\left[3-\sigma^2+6\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2(4+\sigma^2)\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\\
&-\left[3-5\sigma^4+2\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+2\sigma^2(2+\sigma^2)\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\\
&-4\sigma^2\left(3-3\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)\\
&-\sigma^2\left[3-\sigma^2+\sigma(3+\sigma^2)\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right]\\
&-3\sigma^4\\
&+\left[3+3\sigma^4+\sigma(9+2\sigma^2+3\sigma^4)\overline{\Omega}+2(5\sigma^2+2\sigma^4)\overline{\Omega}^2+(5+2\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3+\sigma^4\overline{\Omega}^4\right]\\
&+2\sigma^2\left(3-2\sigma^2+3\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2\right)
\end{aligned} \tag{A.246}$$

On développe :

$$
\begin{aligned}
U = &\left[6 - 6\sigma^4 + (6\sigma + 6\sigma^3)\overline{\Omega} + (2\sigma^2 + 2\sigma^4)\overline{\Omega}^2\right] \\
&+ \left[-3 + \sigma^2 + (-3\sigma - \sigma^3)\overline{\Omega} - \sigma^2\overline{\Omega}^2\right] \\
&+ \sigma^4 \\
&+ \left[6 - 2\sigma^2 + 12\sigma\overline{\Omega} + (8\sigma^2 + 2\sigma^4)\overline{\Omega}^2 + 2\sigma^3\overline{\Omega}^3\right] \\
&+ \left[-3 + 5\sigma^4 + (-6\sigma - 2\sigma^3)\overline{\Omega} + (-4\sigma^2 - 2\sigma^4)\overline{\Omega}^2 - \sigma^3\overline{\Omega}^3\right] \\
&+ \left[-12\sigma^2 + 12\sigma^4 - 12\sigma^3\overline{\Omega} - 4\sigma^4\overline{\Omega}^2\right] \\
&+ \left[-3\sigma^2 + \sigma^4 + (-3\sigma^3 - \sigma^5)\overline{\Omega} - \sigma^4\overline{\Omega}^2\right] \\
&- 3\sigma^4 \\
&+ \left[3 + 3\sigma^4 + (9\sigma + 2\sigma^3 + 3\sigma^5)\overline{\Omega} + (10\sigma^2 + 4\sigma^4)\overline{\Omega}^2 + (5\sigma^3 + 2\sigma^5)\overline{\Omega}^3 + \sigma^4\overline{\Omega}^4\right] \\
&+ \left[6\sigma^2 - 4\sigma^4 + 6\sigma^3\overline{\Omega} + 2\sigma^4\overline{\Omega}^2\right]
\end{aligned}
\tag{A.247}
$$

On effectue l'addition.

$$U = U_0 + U_1\overline{\Omega} + U_2\overline{\Omega}^2 + U_3\overline{\Omega}^3 + U_4\overline{\Omega}^4 \tag{A.248}$$

$$U_0 = 9 - 10\sigma^2 + 9\sigma^4 \tag{A.249}$$

$$U_1 = 18\sigma - 4\sigma^3 + 2\sigma^5 \tag{A.250}$$

$$U_2 = 15\sigma^2 + 3\sigma^4 \tag{A.251}$$

$$U_3 = 6\sigma^3 + 2\sigma^5 \tag{A.252}$$

$$U_4 = \sigma^4 \tag{A.253}$$

On obtient ainsi

$$
\begin{aligned}
(2 + \sigma\overline{\Omega})c_2 = \frac{k^2 c_0}{8\sigma^4}\big\{&9 - 10\sigma^2 + 9\sigma^4 + \left(18\sigma - 4\sigma^3 + 2\sigma^5\right)\overline{\Omega} \\
&+ \left(15\sigma^2 + 3\sigma^4\right)\overline{\Omega}^2 + \left(6\sigma^3 + 2\sigma^5\right)\overline{\Omega}^3 + \sigma^4\overline{\Omega}^4\big\}a_1^2
\end{aligned}
\tag{A.254}
$$

On effectue deux vérifications. D'abord, en absence de vorticité on obtient

$$c_2 = \frac{k^2 c_0}{16\sigma^4}\left(9 - 10\sigma^2 + 9\sigma^4\right)a_1^2 \tag{A.255}$$

et ce résultat est conforme à celui de Skjelbreia, reporté par Wehausen et Laitone. Ensuite, en profondeur infinie, c'est-à-dire pour $\sigma \to 1$ on obtient :

$$(2 + \overline{\Omega})c_2 = \frac{k^2 c_0}{8}\left(8 + 16\overline{\Omega} + 18\overline{\Omega}^2 + 8\overline{\Omega}^3 + \overline{\Omega}^4\right)a_1^2 \tag{A.256}$$

c'est-à-dire

$$c_2 = \frac{k^2 c_0}{8}\left(4 + 6\overline{\Omega} + 6\overline{\Omega}^2 + \overline{\Omega}^3\right). \tag{A.257}$$

et ce résultat est conforme à celui de Simmen & Saffman.

A.4 Calculs menant à vNLS

Les équations de départ

Le système d'équations qui régit l'écoulement est

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = 0 & (-h < y < \eta(x,t)) \quad (A.258) \\ \phi_y = 0 & (y = -h) \quad (A.259) \\ \eta_t + (\Phi_x + \Omega\eta)\,\eta_x - \Phi_y = 0 & (y = \eta(x,t)) \quad (A.260) \\ \Phi_t + \dfrac{1}{2}\Phi_x^2 + \dfrac{1}{2}\Phi_y^2 + \Omega\eta\Phi_x + g\eta - \Omega\Psi = 0 & (y = \eta(x,t)) \quad (A.261) \end{cases}$$

On dérive la condition dynamique par rapport à x pour éliminer la fonction de courant.

$$\begin{aligned} &\Phi_t(x,\eta(x),t) + \frac{1}{2}\Phi_x^2(x,\eta(x),t) + \frac{1}{2}\Phi_y^2(x,\eta(x),t) \\ &+ \Omega\eta(x,t)\Phi_x(x,\eta(x),t) + g\eta(x,t) - \Omega\Psi(x,\eta(x),t) = 0 \end{aligned} \tag{A.262}$$

$$\begin{aligned} &\Phi_{tx} + \Phi_{ty}\eta_x + \Phi_x\left(\Phi_{xx} + \Phi_{xy}\eta_x\right) + \Phi_y\left(\Phi_{xy} + \Phi_{yy}\eta_x\right) \\ &+ \Omega\eta_x\Phi_x + \Omega\eta\left(\Phi_{xx} + \Phi_{xy}\eta_x\right) + g\eta_x - \Omega\left(\Psi_x + \Psi_y\eta_x\right) = 0 \end{aligned} \tag{A.263}$$

Il faut éliminer :

$$\begin{aligned} &\Phi_{tx} + \Phi_{ty}\eta_x + \Phi_x\left(\Phi_{xx} + \Phi_{xy}\eta_x\right) + \Phi_y\left(\Phi_{xy} + \Phi_{yy}\eta_x\right) \\ &+ \Omega\eta_x\Phi_x + \Omega\eta\left(\Phi_{xx} + \Phi_{xy}\eta_x\right) + g\eta_x + \Omega\left(\Phi_y - \Phi_x\eta_x\right) = 0 \end{aligned} \tag{A.264}$$

Méthode

On cherche des solutions sous la forme

$$\phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_n E^n, \qquad \eta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \eta_n E^n \tag{A.265}$$

où $E = \exp\left[i(k_0x - \omega_0 t)\right]$ k_0 étant le nombre d'onde, ω_0 la pulsation. On a bien sûr $\phi_{-n} = \phi_n^*$ de sorte que ϕ soit réelle, de même $\eta_{-n} = \eta_n^*$. On développe ensuite les fonctions ϕ_n et η_n pour $n \geqslant 0$, sous la forme

$$\phi_n = \sum_{j=n}^{+\infty} \varepsilon^j \phi_{nj}, \qquad \eta_n = \sum_{j=n}^{+\infty} \varepsilon^j \eta_{nj} \tag{A.266}$$

où ε est un petit facteur caractérisant la faible amplitude des vagues, par exemple la cambrure. On a $\phi_{00} = 0$ et $\eta_{00} = 0$. Le suffixe $+c.c.$ désigne l'addition des conjugués des termes où intervient un E^n avec $n > 0$.

On utilisera la méthode des échelles multiples avec

$$\xi = \varepsilon(x - c_g t), \qquad \tau = \varepsilon^2 t. \tag{A.267}$$

Pour cela on commence par traduire le système d'équations où les variables étaient (x, y, t) vers un nouveau système où les variables sont ξ, y, τ. On a

$$\partial_x = \varepsilon\partial_\xi \quad \text{et} \quad \partial_t = \varepsilon^2\partial_\tau - \varepsilon c_g\partial_\xi \tag{A.268}$$

L'équation de Laplace s'écrit

$$\varepsilon^2\phi_{\xi\xi} + \phi_{yy} = 0 \qquad (-h \leqslant y \leqslant \eta(\xi,\tau) \tag{A.269}$$

La condition au fond reste

$$\phi_y = 0 \qquad y = -h \tag{A.270}$$

La condition cinématique devient

$$\varepsilon^2\eta_\tau - \varepsilon c_g\eta_\xi + \varepsilon^2\Phi_\xi\eta_\xi + \varepsilon\Omega\eta\eta_\xi - \Phi_y = 0 \tag{A.271}$$

Et la condition dynamique

$$\begin{aligned}&\varepsilon^3\Phi_{\xi\tau} - \varepsilon^2 c_g\Phi_{\xi\xi} + \varepsilon^3\Phi_{y\tau}\eta_\xi - \varepsilon^2 c_g\Phi_{\xi y}\eta_\xi + \varepsilon^3\Phi_\xi\Phi_{\xi\xi} + \varepsilon^3\Phi_\xi\Phi_{\xi y}\eta_\xi\\ &+ \varepsilon\Phi_y\Phi_{\xi y} + \varepsilon\Phi_y\Phi_{yy}\eta_\xi + \varepsilon^2\Omega\eta_\xi\Phi_\xi + \varepsilon^2\Omega\eta\Phi_{\xi\xi} + \varepsilon^2\Omega\eta\Phi_{\xi y}\eta_\xi\\ &+ \varepsilon g\eta_\xi + \Omega\Phi_y - \varepsilon^2\Omega\Phi_\xi\eta_\xi = 0\end{aligned} \tag{A.272}$$

Équation de Laplace

$$\varepsilon^2\phi_{\xi\xi} + \phi_{yy} = 0 \tag{A.273}$$

On développe chaque terme en série de Fourier à l'ordre 3.
Termes en $\varepsilon^1 E^0$:

$$\phi_{01yy} = 0 \tag{A.274}$$

Termes en $\varepsilon^1 E^1$:

$$-k_0^2\phi_{11} + \phi_{11yy} = 0 \tag{A.275}$$

Termes en $\varepsilon^2 E^0$:

$$\phi_{02yy} = 0 \tag{A.276}$$

Termes en $\varepsilon^2 E^1$:

$$-k_0^2\phi_{12} + 2ik_0\phi_{11\xi} + \phi_{12yy} = 0 \tag{A.277}$$

Termes en $\varepsilon^2 E^2$:

$$-4k_0^2\phi_{22} + \phi_{22yy} = 0 \tag{A.278}$$

Termes en $\varepsilon^3 E^0$:

$$\phi_{01\xi\xi} + \phi_{03yy} = 0 \tag{A.279}$$

Termes en $\varepsilon^3 E^1$:

$$-k_0^2\phi_{13} + 2ik_0\phi_{12\xi} + \phi_{11\xi\xi} + \phi_{13yy} = 0 \tag{A.280}$$

Termes en $\varepsilon^3 E^2$:

$$-4k_0^2\phi_{23} + 4ik_0\phi_{22\xi} + \phi_{23yy} = 0 \tag{A.281}$$

Termes en $\varepsilon^3 E^3$:

$$-9k_0^2\phi_{33} + \phi_{33yy} = 0 \tag{A.282}$$

Condition cinématique

$$\varepsilon^2\eta_\tau - \varepsilon c_g\eta_\xi + \varepsilon^2\Phi_\xi\eta_\xi + \varepsilon\Omega\eta\eta_\xi - \Phi_y = 0 \tag{A.283}$$

On développe chaque valeur de Φ ou Ψ en série de Taylor.

$$\Phi_\xi = \phi_\xi + \eta\phi_{y\xi} + O(\varepsilon^2) \tag{A.284}$$

$$\Phi_y = \phi_y + \eta\phi_{yy} + \frac{\eta^2}{2}\phi_{yyy} + O(\varepsilon^4) \tag{A.285}$$

$$\tag{A.286}$$

Après cette première étape, l'équation devient

$$\varepsilon^2\eta_\tau - \varepsilon c_g\eta_\xi + \varepsilon^2(\phi_\xi + \eta\phi_{y\xi})\eta_\xi + \varepsilon\Omega\eta\eta_\xi - (\phi_y + \eta\phi_{yy} + \frac{\eta^2}{2}\phi_{yyy}) = O(\varepsilon^4) \tag{A.287}$$

On développe chaque terme en série de Fourier à l'ordre 3 puis on développe chaque terme selon les puissances de ε :

Termes en $\varepsilon^1 E^0$:

$$-\phi_{01y} = 0 \tag{A.288}$$

Termes en $\varepsilon^1 E^1$:

$$-ik_0c_p\eta_{11} - \phi_{11y} = 0 \tag{A.289}$$

Termes en $\varepsilon^2 E^0$:

$$\begin{aligned} &-c_g\eta_{01\xi} - \phi_{02y} - \eta_{01}\phi_{01yy} + k_0^2\eta_{11}\phi_{11}^* \\ &-\eta_{11}\phi_{11yy}^* + k_0^2\eta_{11}^*\phi_{11} - \eta_{11}^*\phi_{11yy} = 0 \end{aligned} \tag{A.290}$$

Termes en $\varepsilon^2 E^1$:

$$-ik_0c_p\eta_{12} - c_g\eta_{11\xi} - \phi_{12y} + ik_0\Omega\eta_{01}\eta_{11} - \eta_{01}\phi_{11yy} - \eta_{11}\phi_{01yy} = 0 \tag{A.291}$$

Termes en $\varepsilon^2 E^2$:

$$-2ik_0c_p\eta_{22} - \phi_{22y} + ik_0\Omega\eta_{11}\eta_{11} - k_0^2\eta_{11}\phi_{11} - \eta_{11}\phi_{11yy} = 0 \tag{A.292}$$

Termes en $\varepsilon^3 E^0$:

$$\begin{aligned} &\eta_{01\tau} - c_g\eta_{02\xi} - \phi_{03y} + \Omega\eta_{01}\eta_{01\xi} \\ &-\eta_{01}\phi_{02yy} - \eta_{02}\phi_{01yy} + \Omega\eta_{11}\eta_{11\xi}^* + k_0^2\eta_{11}\phi_{12}^* \\ &+k_0^2\eta_{12}\phi_{11}^* + ik_0\eta_{11}\phi_{11\xi}^* - \eta_{11}\phi_{12yy}^* - \eta_{12}\phi_{11yy}^* \\ &+\Omega\eta_{11}^*\eta_{11\xi} + k_0^2\eta_{11}^*\phi_{12} + k_0^2\eta_{12}^*\phi_{11} - ik_0\eta_{11}^*\phi_{11\xi} \\ &-\eta_{11}^*\phi_{12yy} - \eta_{12}^*\phi_{11yy} - ik_0\eta_{11\xi}\phi_{11}^* + ik_0\eta_{11\xi}^*\phi_{11} \\ &-\frac{1}{2}\eta_{01}\eta_{01}\phi_{01yyy} + k_0^2\eta_{01}\eta_{11}\phi_{11y}^* - \eta_{01}\eta_{11}\phi_{11yyy}^* + k_0^2\eta_{01}\eta_{11}^*\phi_{11y} \\ &-\eta_{01}\eta_{11}^*\phi_{11yyy} - \eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{01yyy} = 0 \end{aligned} \tag{A.293}$$

Termes en $\varepsilon^3 E^1$:

$$\begin{aligned}
&- ik_0 c_p \eta_{13} + \eta_{11\tau} - c_g \eta_{12\xi} - \phi_{13y} \\
&+ ik_0 \Omega \eta_{01}\eta_{12} + ik_0\Omega\eta_{02}\eta_{11} + \Omega\eta_{01}\eta_{11\xi} - \eta_{01}\phi_{12yy} \\
&- \eta_{02}\phi_{11yy} + \Omega\eta_{01\xi}\eta_{11} + ik_0\eta_{01\xi}\phi_{11} + ik_0\eta_{11}\phi_{01\xi} \\
&- \eta_{11}\phi_{02yy} - \eta_{12}\phi_{01yy} + ik_0\Omega\eta_{11}^*\eta_{22} + 2k_0^2\eta_{11}^*\phi_{22} \\
&- \eta_{11}^*\phi_{22yy} + 2k_0^2\eta_{22}\phi_{11}^* - \eta_{22}\phi_{11yy}^* - \frac{1}{2}\eta_{01}\eta_{01}\phi_{11yyy} \\
&- \eta_{01}\eta_{11}\phi_{01yyy} + k_0^2\eta_{11}\eta_{11}\phi_{11y}^* - \frac{1}{2}\eta_{11}\eta_{11}\phi_{11yyy}^* - \eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{11yyy} = 0
\end{aligned} \tag{A.294}$$

Termes en $\varepsilon^3 E^2$:

$$\begin{aligned}
&- 2ik_0 c_p \eta_{23} - c_g\eta_{22\xi} - \phi_{23y} + 2ik_0\Omega\eta_{01}\eta_{22} \\
&- \eta_{01}\phi_{22yy} + ik_0\Omega\eta_{11}\eta_{12} + ik_0\Omega\eta_{12}\eta_{11} + \Omega\eta_{11}\eta_{11\xi} \\
&- k_0^2\eta_{11}\phi_{12} - k_0^2\eta_{12}\phi_{11} + ik_0\eta_{11}\phi_{11\xi} - \eta_{11}\phi_{12yy} \\
&- \eta_{12}\phi_{11yy} + ik_0\eta_{11\xi}\phi_{11} - \eta_{22}\phi_{01yy} - k_0^2\eta_{01}\eta_{11}\phi_{11y} \\
&- \eta_{01}\eta_{11}\phi_{11yyy} - \frac{1}{2}\eta_{11}\eta_{11}\phi_{01yyy} = 0
\end{aligned} \tag{A.295}$$

Termes en $\varepsilon^3 E^3$:

$$\begin{aligned}
&- 3ik_0 c_p \eta_{33} - \phi_{33y} + 3ik_0\Omega\eta_{11}\eta_{22} - 2k_0^2\eta_{11}\phi_{22} \\
&- \eta_{11}\phi_{22yy} - 2k_0^2\eta_{22}\phi_{11} - \eta_{22}\phi_{11yy} - k_0^2\eta_{11}\eta_{11}\phi_{11y} \\
&- \frac{1}{2}\eta_{11}\eta_{11}\phi_{11yyy} = 0
\end{aligned} \tag{A.296}$$

Condition dynamique

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^3\Phi_{\xi\tau} - \varepsilon^2 c_g\Phi_{\xi\xi} + \varepsilon^3\Phi_{y\tau}\eta_\xi - \varepsilon^2 c_g\Phi_{y\xi}\eta_\xi + \varepsilon^3\Phi_\xi\Phi_{\xi\xi} + \varepsilon^3\Phi_\xi\Phi_{y\xi}\eta_\xi \\
&+ \varepsilon\Phi_y\Phi_{y\xi} + \varepsilon\Phi_y\Phi_{yy}\eta_\xi + \varepsilon^2\Omega\eta_\xi\Phi_\xi + \varepsilon^2\Omega\eta\Phi_{\xi\xi} + \varepsilon^2\Omega\eta\Phi_{y\xi}\eta_\xi + \varepsilon g\eta_\xi \\
&+ \Omega\Phi_y - \varepsilon^2\Omega\Phi_\xi\eta_\xi = 0
\end{aligned} \tag{A.297}$$

On développe chaque valeur de Φ ou Ψ en série de Taylor. Après cette première étape, l'équation devient

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^3(\phi_{\xi\tau} + \eta\phi_{y\xi\tau} + \frac{\eta^2}{2}\phi_{yy\xi\tau}) - \varepsilon^2 c_g(\phi_{\xi\xi} + \eta\phi_{y\xi\xi} + \frac{\eta^2}{2}\phi_{yy\xi\xi}) \\
&+ \varepsilon^3(\phi_{y\tau} + \eta\phi_{yy\tau})\eta_\xi - \varepsilon^2 c_g(\phi_{y\xi} + \eta\phi_{yy\xi})\eta_\xi + \varepsilon^3(\phi_\xi + \eta\phi_{y\xi})(\phi_{\xi\xi} + \eta\phi_{y\xi\xi}) \\
&+ \varepsilon^3\phi_\xi\phi_{y\xi}\eta_\xi + \varepsilon(\phi_y + \eta\phi_{yy})(\phi_{y\xi} + \eta\phi_{yy\xi}) + \varepsilon\phi_y\phi_{yy}\eta_\xi + \varepsilon^2\Omega\eta_\xi(\phi_\xi + \eta\phi_{y\xi}) \\
&+ \varepsilon^2\Omega\eta(\phi_{\xi\xi} + \eta\phi_{y\xi\xi}) + \varepsilon^2\Omega\eta\phi_{y\xi}\eta_\xi + \varepsilon g\eta_\xi \\
&+ \Omega(\phi_y + \eta\phi_{yy} + \frac{\eta^2}{2}\phi_{yyy}) - \varepsilon^2\Omega(\phi_\xi + \eta\phi_{y\xi})\eta_\xi = O(\varepsilon^4)
\end{aligned} \tag{A.298}$$

On développe chaque terme en série de Fourier à l'ordre 3 puis on développe chaque terme selon les puissances de ε :

Termes en $\varepsilon^1 E^0$:

$$\Omega\phi_{01y} = 0 \tag{A.299}$$

Termes en $\varepsilon^1 E^1$:

$$ik_0 g\eta_{11} + k_0^2 c_p \phi_{11} + \Omega\phi_{11y} = 0 \tag{A.300}$$

Termes en $\varepsilon^2 E^0$:

$$\begin{aligned} &g\eta_{01\xi} + \Omega\phi_{02y} + \Omega\eta_{01}\phi_{01yy} - k_0^2\Omega\eta_{11}\phi_{11}^* \\ &+ \Omega\eta_{11}\phi_{11yy}^* - k_0^2\Omega\eta_{11}^*\phi_{11} + \Omega\eta_{11}^*\phi_{11yy} = 0 \end{aligned} \tag{A.301}$$

Termes en $\varepsilon^2 E^1$:

$$\begin{aligned} &ik_0 g\eta_{12} + g\eta_{11\xi} + k_0^2 c_p\phi_{12} - ik_0 c_p\phi_{11\xi} \\ &- ik_0 c_g\phi_{11\xi} + \Omega\phi_{12y} - k_0^2\Omega\eta_{01}\phi_{11} + k_0^2 c_p\eta_{01}\phi_{11y} \\ &+ \Omega\eta_{01}\phi_{11yy} + \Omega\eta_{11}\phi_{01yy} + ik_0\phi_{01y}\phi_{11y} = 0 \end{aligned} \tag{A.302}$$

Termes en $\varepsilon^2 E^2$:

$$\begin{aligned} &2ik_0 g\eta_{22} + 4k_0^2 c_p\phi_{22} + \Omega\phi_{22y} - k_0^2\Omega\eta_{11}\phi_{11} \\ &+ 2k_0^2 c_p\eta_{11}\phi_{11y} + \Omega\eta_{11}\phi_{11yy} - ik_0^3\phi_{11}\phi_{11} + ik_0\phi_{11y}\phi_{11y} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.303}$$

Termes en $\varepsilon^3 E^0$:

$$\begin{aligned} &g\eta_{02\xi} - c_g\phi_{01\xi\xi} + \Omega\phi_{03y} + \Omega\eta_{01}\phi_{02yy} \\ &+ \Omega\eta_{02}\phi_{01yy} - k_0^2\Omega\eta_{11}\phi_{12}^* - k_0^2\Omega\eta_{12}\phi_{11}^* - 2ik_0\Omega\eta_{11}\phi_{11\xi}^* \\ &+ ik_0 c_p\eta_{11}\phi_{11y\xi}^* + \Omega\eta_{11}\phi_{12yy}^* + \Omega\eta_{12}\phi_{11yy}^* - k_0^2\Omega\eta_{11}^*\phi_{12} \\ &- k_0^2\Omega\eta_{12}^*\phi_{11} + 2ik_0\Omega\eta_{11}^*\phi_{11\xi} - ik_0 c_p\eta_{11}^*\phi_{11y\xi} + \Omega\eta_{11}^*\phi_{12yy} \\ &+ \Omega\eta_{12}^*\phi_{11yy} + ik_0 c_p\eta_{11\xi}\phi_{11y}^* - ik_0 c_p\eta_{11\xi}^*\phi_{11y} + \phi_{01y}\phi_{01y\xi} \\ &+ k_0^2\phi_{11}\phi_{11\xi}^* + k_0^2\phi_{11}^*\phi_{11\xi} + \phi_{11y}\phi_{11y\xi}^* + \phi_{11y}^*\phi_{11y\xi} \\ &+ \frac{1}{2}\Omega\eta_{01}\eta_{01}\phi_{01yyy} - k_0^2\Omega\eta_{01}\eta_{11}\phi_{11y}^* + \Omega\eta_{01}\eta_{11}\phi_{11yyy}^* - k_0^2\Omega\eta_{01}\eta_{11}^*\phi_{11y} \\ &+ \Omega\eta_{01}\eta_{11}^*\phi_{11yyy} + \Omega\eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{01yyy} = 0 \end{aligned} \tag{A.304}$$

Termes en $\varepsilon^3 E^1$:

$$\begin{aligned} &ik_0 g\eta_{13} + g\eta_{12\xi} + k_0^2 c_p\phi_{13} + ik_0\phi_{11\tau} - ik_0 c_p\phi_{12\xi} - ik_0 c_g\phi_{12\xi} - c_g\phi_{11\xi\xi} \\ &+ \Omega\phi_{13y} - k_0^2\Omega\eta_{01}\phi_{12} - k_0^2\Omega\eta_{02}\phi_{11} + 2ik_0\Omega\eta_{01}\phi_{11\xi} + k_0^2 c_p\eta_{01}\phi_{12y} \\ &+ k_0^2 c_p\eta_{02}\phi_{11y} - ik_0 c_p\eta_{01}\phi_{11y\xi} - ik_0 c_g\eta_{01}\phi_{11y\xi} + \Omega\eta_{01}\phi_{12yy} \\ &+ \Omega\eta_{02}\phi_{11yy} - ik_0 c_p\eta_{01\xi}\phi_{11y} - ik_0 c_g\eta_{11}\phi_{01y\xi} + \Omega\eta_{11}\phi_{02yy} \\ &+ \Omega\eta_{12}\phi_{01yy} - 4k_0^2\Omega\eta_{11}^*\phi_{22} + 2k_0^2 c_p\eta_{11}^*\phi_{22y} + \Omega\eta_{11}^*\phi_{22yy} - k_0^2\Omega\eta_{22}\phi_{11}^* \\ &- k_0^2 c_p\eta_{22}\phi_{11y}^* + \Omega\eta_{22}\phi_{11yy}^* - k_0^2\phi_{01\xi}\phi_{11} + ik_0\phi_{01y}\phi_{12y} + ik_0\phi_{02y}\phi_{11y} \\ &+ \phi_{01y}\phi_{11y\xi} + \phi_{01y\xi}\phi_{11y} + 2ik_0^3\phi_{11}^*\phi_{22} + ik_0\phi_{11y}^*\phi_{22y} - k_0^2\Omega\eta_{01}\eta_{01}\phi_{11y} \\ &+ \frac{1}{2}k_0^2 c_p\eta_{01}\eta_{01}\phi_{11yy} + \frac{1}{2}\Omega\eta_{01}\eta_{01}\phi_{11yyy} + \Omega\eta_{01}\eta_{11}\phi_{01yyy} \\ &+ ik_0\eta_{01}\phi_{01y}\phi_{11yy} + ik_0\eta_{01}\phi_{01yy}\phi_{11y} - \frac{1}{2}k_0^2 c_p\eta_{11}\eta_{11}\phi_{11yy}^* \\ &+ \frac{1}{2}\Omega\eta_{11}\eta_{11}\phi_{11yyy}^* - 2k_0^2\Omega\eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{11y} + k_0^2 c_p\eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{11yy} \\ &+ \Omega\eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{11yyy} + ik_0\eta_{11}\phi_{01y}\phi_{01yy} + ik_0^3\eta_{11}\phi_{11}\phi_{11y}^* + ik_0^3\eta_{11}\phi_{11}^*\phi_{11y} \\ &+ ik_0\eta_{11}\phi_{11y}\phi_{11yy}^* + ik_0\eta_{11}\phi_{11y}^*\phi_{11yy} \\ &- ik_0^3\eta_{11}^*\phi_{11}\phi_{11y} + ik_0\eta_{11}^*\phi_{11y}\phi_{11yy} = 0 \end{aligned} \tag{A.305}$$

Termes en $\varepsilon^3 E^2$:

$$\begin{aligned}
&2ik_0 g\eta_{23} + g\eta_{22\xi} + 4k_0^2 c_p\phi_{23} - 2ik_0 c_p\phi_{22\xi} \\
&- 2ik_0 c_g\phi_{22\xi} + \Omega\phi_{23y} - 4k_0^2\Omega\eta_{01}\phi_{22} + 4k_0^2 c_p\eta_{01}\phi_{22y} \\
&+ \Omega\eta_{01}\phi_{22yy} - k_0^2\Omega\eta_{11}\phi_{12} - k_0^2\Omega\eta_{12}\phi_{11} + 2ik_0\Omega\eta_{11}\phi_{11\xi} \\
&+ 2k_0^2 c_p\eta_{11}\phi_{12y} + 2k_0^2 c_p\eta_{12}\phi_{11y} - ik_0 c_p\eta_{11}\phi_{11y\xi} - 2ik_0 c_g\eta_{11}\phi_{11y\xi} \\
&+ \Omega\eta_{11}\phi_{12yy} + \Omega\eta_{12}\phi_{11yy} - ik_0 c_p\eta_{11\xi}\phi_{11y} + \Omega\eta_{22}\phi_{01yy} \\
&+ 2ik_0\phi_{01y}\phi_{22y} - ik_0^3\phi_{11}\phi_{12} - ik_0^3\phi_{12}\phi_{11} - 3k_0^2\phi_{11}\phi_{11\xi} \\
&+ ik_0\phi_{11y}\phi_{12y} + ik_0\phi_{12y}\phi_{11y} + \phi_{11y}\phi_{11y\xi} - 3k_0^2\Omega\eta_{01}\eta_{11}\phi_{11y} \\
&+ 2k_0^2 c_p\eta_{01}\eta_{11}\phi_{11yy} + \Omega\eta_{01}\eta_{11}\phi_{11yyy} - 2ik_0^3\eta_{01}\phi_{11}\phi_{11y} + 2ik_0\eta_{01}\phi_{11y}\phi_{11yy} \\
&+ \frac{1}{2}\Omega\eta_{11}\eta_{11}\phi_{01yyy} + 2ik_0\eta_{11}\phi_{01y}\phi_{11yy} + 2ik_0\eta_{11}\phi_{01yy}\phi_{11y} = 0
\end{aligned} \tag{A.306}$$

Termes en $\varepsilon^3 E^3$:

$$\begin{aligned}
&3ik_0 g\eta_{33} + 9k_0^2 c_p\phi_{33} + \Omega\phi_{33y} - 4k_0^2\Omega\eta_{11}\phi_{22} \\
&+ 6k_0^2 c_p\eta_{11}\phi_{22y} + \Omega\eta_{11}\phi_{22yy} - k_0^2\Omega\eta_{22}\phi_{11} + 3k_0^2 c_p\eta_{22}\phi_{11y} \\
&+ \Omega\eta_{22}\phi_{11yy} - 6ik_0^3\phi_{11}\phi_{22} + 3ik_0\phi_{11y}\phi_{22y} - 2k_0^2\Omega\eta_{11}\eta_{11}\phi_{11y} \\
&+ \frac{3}{2}k_0^2 c_p\eta_{11}\eta_{11}\phi_{11yy} + \frac{1}{2}\Omega\eta_{11}\eta_{11}\phi_{11yyy} \\
&- 3ik_0^3\eta_{11}\phi_{11}\phi_{11y} + 3ik_0\eta_{11}\phi_{11y}\phi_{11yy} = 0
\end{aligned} \tag{A.307}$$

Exploitation de l'équation de Laplace

On a obtenu les équations :

$$\phi_{01yy} = 0 \tag{A.308}$$
$$\phi_{02yy} = 0 \tag{A.309}$$
$$\phi_{03yy} = -\phi_{01\xi\xi} \tag{A.310}$$
$$\phi_{11yy} - k_0^2\phi_{11} = 0 \tag{A.311}$$
$$\phi_{12yy} - k_0^2\phi_{12} = -2ik_0\phi_{11\xi} \tag{A.312}$$
$$\phi_{13yy} - k_0^2\phi_{13} = -\phi_{11\xi\xi} - 2ik_0\phi_{12\xi} \tag{A.313}$$
$$\phi_{22yy} - 4k_0^2\phi_{22} = 0 \tag{A.314}$$
$$\phi_{23yy} - 4k_0^2\phi_{23} = -4ik_0\phi_{22\xi} \tag{A.315}$$
$$\phi_{33yy} - 9k_0^2\phi_{33} = 0 \tag{A.316}$$

La condition au fond donne $\phi_{njy} = 0$ pour tous les couples (n, j) où $0 \leqslant n \leqslant j$.

$$\phi_{01y} = 0 \tag{A.317}$$
$$\phi_{11y} = 0 \tag{A.318}$$
$$\phi_{02y} = 0 \tag{A.319}$$
$$\phi_{12y} = 0 \tag{A.320}$$
$$\phi_{22y} = 0 \tag{A.321}$$
$$\phi_{03y} = 0 \tag{A.322}$$
$$\phi_{13y} = 0 \tag{A.323}$$
$$\phi_{23y} = 0 \tag{A.324}$$
$$\phi_{33y} = 0 \tag{A.325}$$

L'équation $\phi_{01yy} = 0$ avec la condition $\phi_{01y} = 0$ au fond donne $\phi_{01y} = 0$ et ϕ_{01} est indépendante de y. De même ϕ_{02} est indépendante de y.

L'équation $\phi_{11yy} - k_0^2\phi_{11}$ s'intègre en

$$\phi_{11} = \alpha \cosh[k_0(y+h)] + \beta \sinh[k_0(y+h)] \tag{A.326}$$

Compte tenu de la condition $\phi_{11y} = 0$ au fond il reste $\phi_{11} = \alpha \cosh[k_0(y+h)]$. En appelant A la valeur de ϕ_{11} pour $y = 0$ on écrit

$$\phi_{11} = A\frac{\cosh[k_0(y+h)]}{\cosh(k_0h)} \tag{A.327}$$

On s'occupe à présent de l'équation

$$\phi_{12yy} - k_0^2\phi_{12} = -2ik_0\phi_{11\xi} \tag{A.328}$$

Il s'agit d' une équation différentielle linéaire qui se résout sans problème. La solution générale sans second membre est de la forme

$$\phi_{12} = \alpha \cosh[k_0(y+h)] + \beta \sinh[k_0(y+h)] \tag{A.329}$$

Avec second membre, on peut chercher *a priori* une solution particulière sous la forme

$$\phi_{12} = \gamma(y+h)\cosh[k_0(y+h)] + \delta(y+h)\sinh[k_0(y+h)] \tag{A.330}$$

Le second membre étant une fonction paire de $y + h$ on peut se restreindre à

$$\phi_{12} = \delta(y+h)\sinh[k_0(y+h)] \tag{A.331}$$

On dérive et on reporte dans l'équation :

$$\phi_{12} = \delta(y+h)\sinh[k_0(y+h)] \tag{A.332}$$

$$\phi_{12yy} = 2\delta k_0 \cosh[k_0(y+h)] + \delta k_0^2(y+h)\sinh[k_0(y+h)] \tag{A.333}$$

$$-2ik_0\phi_{11\xi} = 2\delta k_0 \cosh[k_0(y+h)] \tag{A.334}$$

$$-2ik_0A_\xi\frac{\cosh[k_0(y+h)]}{\cosh(k_0h)} = 2\delta k_0 \cosh[k_0(y+h)] \tag{A.335}$$

$$\delta = -i\frac{A_\xi}{\cosh(k_0h)} \tag{A.336}$$

$$\phi_{12} = -iA_\xi\frac{(y+h)\sinh[k_0(y+h)]}{\cosh(k_0h)} \tag{A.337}$$

La solution générale de l'équation avec second membre est donc de la forme

$$\phi_{12} = -iA_\xi\frac{(y+h)\sinh[k_0(y+h)]}{\cosh(k_0h)} + \alpha \cosh[k_0(y+h)] + \beta \sinh[k_0(y+h)] \tag{A.338}$$

On ne retient que les solutions dont la dérivée s'annule au fond :

$$\phi_{12} = -iA_\xi\frac{(y+h)\sinh[k_0(y+h)]}{\cosh(k_0h)} + \alpha \cosh[k_0(y+h)] \tag{A.339}$$

On appelle D sa valeur en $y = 0$ (avec $\sigma = \tanh(k_0h)$) :

$$D = -iA_\xi h\sigma + \alpha \cosh(k_0h) \tag{A.340}$$

On élimine α entre les deux :

$$\phi_{12} = -iA_\xi \frac{(y+h)\sinh[k_0(y+h)]}{\cosh(k_0 h)} + \frac{D + iA_\xi h\sigma}{\cosh(k_0 h)} \cosh[k_0(y+h)] \tag{A.341}$$

On arrange :

$$\phi_{12} = D\frac{\cosh[k_0(y+h)]}{\cosh(k_0 h)} - iA_\xi \frac{(y+h)\sinh[k_0(y+h)] - h\sigma\cosh[k_0(y+h)]}{\cosh(k_0 h)} \tag{A.342}$$

On résout aussi facilement $\phi_{22yy} - 4k_0^2\phi_{22} = 0$ en tenant compte de la condition au fond :

$$\phi_{22} = F\frac{\cosh[2k_0(y+h)]}{\cosh(2k_0 h)} \tag{A.343}$$

où F est la valeur en $y = 0$.

Comme ϕ_{01} ne dépend pas de y, on peut intégrer une fois l'équation

$$\phi_{03yy} = -\phi_{01\xi\xi} \tag{A.344}$$

ce qui donne, en tenant compte de la condition au fond :

$$\phi_{03y} = -(y+h)\phi_{01\xi\xi} \tag{A.345}$$

On doit aussi résoudre l'équation vérifiée par ϕ_{13}. Elle s'écrit

$$\phi_{13yy} - k_0^2\phi_{13} = \lambda\cosh[k_0(y+h)] + \mu(y+h)\sinh[k_0(y+h)] \tag{A.346}$$

$$\text{avec} \quad \lambda = \frac{(2k_0 h\sigma - 1)A_{\xi\xi} - 2ik_0 D_\xi}{\cosh(k_0 h)} \tag{A.347}$$

$$\text{et} \quad \mu = \frac{-2k_0 A_{\xi\xi}}{\cosh(k_0 h)} \tag{A.348}$$

Compte tenu de la parité de la fonction de $y + h$, on peut chercher une solution particulière sous la forme

$$\phi_{13} = \beta(y+h)\sinh[k_0(y+h)] + \gamma(y+h)^2\cosh[k_0(y+h)] \tag{A.349}$$

On dérive et on reporte dans l'équation

$$\phi_{13} = \beta(y+h)\sinh[k_0(y+h)] + \gamma(y+h)^2\cosh[k_0(y+h)] \tag{A.350}$$

$$\begin{aligned}\phi_{13yy} &= 2k_0\beta\cosh[k_0(y+h)] + k_0^2\beta(y+h)\sinh[k_0(y+h)] \\ &+ 2\gamma\cosh[k_0(y+h)] + 4k_0\gamma(y+h)\sinh[k_0(y+h)] \\ &+ k_0^2\gamma(y+h)^2\cosh[k_0(y+h)]\end{aligned} \tag{A.351}$$

$$\phi_{13yy} - k_0^2\phi_{13} = 2(k_0\beta + \gamma)\cosh[k_0(y+h)] + 4k_0\gamma(y+h)\sinh[k_0(y+h)] \tag{A.352}$$

L'identification donne

$$\begin{cases}\lambda = 2(k_0\beta + \gamma) \\ \mu = 4k_0\gamma\end{cases} \iff \begin{cases}\beta = \dfrac{\lambda}{2k_0} - \dfrac{\mu}{4k_0^2} \\ \gamma = \dfrac{\mu}{4k_0}\end{cases} \tag{A.353}$$

On en déduit l'expression de la solution générale de l'équation :

$$\begin{aligned}\phi_{13} = &\left[\frac{(2k_0 h\sigma - 1)A_{\xi\xi} - 2ik_0 D_\xi}{2k_0\cosh(k_0 h)} + \frac{A_{\xi\xi}}{2k_0\cosh(k_0 h)}\right](y+h)\sinh[k_0(y+h)] \\ &+ \frac{-k_0 A_{\xi\xi}}{2k_0\cosh(k_0 h)}(y+h)^2\cosh[k_0(y+h)] \\ &+ c_1\cosh[k_0(y+h)] + s\sinh[k_0(y+h)]\end{aligned} \tag{A.354}$$

On simplifie et on tient compte de la dérivée nulle au fond :

$$\begin{aligned}\phi_{13} = &\frac{2k_0 h\sigma A_{\xi\xi} - 2ik_0 D_\xi}{2k_0\cosh(k_0 h)}(y+h)\sinh[k_0(y+h)] \\ &+ \frac{c_2 - k_0 A_{\xi\xi}(y+h)^2}{2k_0\cosh(k_0 h)}\cosh[k_0(y+h)]\end{aligned} \tag{A.355}$$

On appelle B la valeur prise par ϕ_{13} en $y = 0$:

$$B = \frac{2k_0 h\sigma A_{\xi\xi} - 2ik_0 D_\xi}{2k_0\cosh(k_0 h)} h\sinh(k_0 h) + \frac{c_2 - k_0 A_{\xi\xi} h^2}{2k_0} \tag{A.356}$$

$$B = h^2\sigma^2 A_{\xi\xi} - ih\sigma D_\xi + \frac{c_2}{2k_0} - \frac{h^2}{2}A_{\xi\xi} \tag{A.357}$$

$$\frac{c_2}{2k_0} = B + \frac{h^2}{2}\left(1 - 2\sigma^2\right)A_{\xi\xi} + ih\sigma D_\xi \tag{A.358}$$

On reporte dans l'expression de ϕ_{13} :

$$\begin{aligned}\phi_{13} = &\left(h\sigma A_{\xi\xi} - iD_\xi\right)\frac{(y+h)\sinh[k_0(y+h)]}{\cosh(k_0 h)} \\ &+ \left[B + \frac{h^2}{2}\left(1 - 2\sigma^2\right)A_{\xi\xi} + ih\sigma D_\xi - A_{\xi\xi}\frac{(y+h)^2}{2}\right]\frac{\cosh[k_0(y+h)]}{\cosh(k_0 h)}\end{aligned} \tag{A.359}$$

Utilisation des développements

On note $\omega_0 = k_0 c_p$ et $\sigma = \tanh(k_0 h)$. On notera aussi $\overline{\Omega}$ la vorticité sans dimesnion définie par $\overline{\Omega} = \dfrac{\Omega}{\omega_0}$.

Termes en εE^0

On obtient dans la condition cinématique comme dans la condition dynamique une identité déjà connue d'après l'équation de Laplace :

$$\phi_{01y} = 0 \tag{A.360}$$

Termes en εE^1

$$-ik_0 c_p \eta_{11} - \phi_{11y} = 0 \tag{A.361}$$

$$ik_0 g\eta_{11} + k_0^2 c_p \phi_{11} + \Omega\phi_{11y} = 0 \tag{A.362}$$

On élimine η_{11}.

$$k_0^2 c_p^2 \phi_{11} + \left(\Omega c_p - g\right)\phi_{11y} = 0 \tag{A.363}$$

Comme ϕ_{11} et ϕ_{11y} sont déjà connus, on en déduit la relation de dispersion linéaire :

$$k_0^2 c_p^2 A + k_0\sigma\left(\Omega c_p - g\right)A = 0 \tag{A.364}$$

donc finalement :

$$k_0 c_p^2 + \sigma\left(c_p\Omega - g\right) = 0 \tag{A.365}$$

On peut aussi l'écrire

$$\omega_0^2 + \omega_0\sigma\Omega - gk_0\sigma = 0 \iff gk_0\sigma = \omega_0(\omega_0 + \sigma\Omega) \iff g\sigma = k_0c_p^2(1 + \sigma\overline{\Omega}) \tag{A.366}$$

On retiendra de plus que

$$\eta_{11} = i\frac{\sigma}{c_p}A = \frac{i\omega_0}{g}(1 + \sigma\overline{\Omega})A \tag{A.367}$$

On retrouve la remarque faire avant le début du calcul sur la possibilité de choisir une vitesse de phase positive. En effet, cette relation de dispersion est du deuxième degré par rapport à la vitesse de phase. Il y a donc deux solutions dont le produit est $-\dfrac{g\sigma}{k_0} < 0$. Le changement de c_p en $-c_p$ et de $\overline{\Omega}$ en $-\overline{\Omega}$ laisse invariante cette relation de dispersion. Le fait d'accepter une vorticité de signe quelconque permet bien de supposer $c_p > 0$, c'est-à-dire de considérer uniquement des vagues se propageant de gauche à droite pour l'observateur.

Remarque : connaissant la relation de dispersion linéaire, on peut en déduire la vitesse de groupe :

$$c_g = \frac{\omega_0}{k_0\sigma} \times \frac{\omega_0\left[\sigma + (1-\sigma^2)k_0h\right] + \sigma^2\Omega}{2\omega_0 + \sigma\Omega} = \frac{c_p}{\sigma} \times \frac{(1-\sigma^2)k_0h + \sigma\left(1 + \sigma\overline{\Omega}\right)}{2 + \sigma\overline{\Omega}} \tag{A.368}$$

Termes en ε^2E^0

$$\begin{aligned} &- c_g\eta_{01\xi} - \phi_{02y} - \eta_{01}\phi_{01yy} + k_0^2\eta_{11}\phi_{11}^* \\ &- \eta_{11}\phi_{11yy}^* + k_0^2\eta_{11}^*\phi_{11} - \eta_{11}^*\phi_{11yy} = 0 \end{aligned} \tag{A.369}$$

$$\begin{aligned} &g\eta_{01\xi} + \Omega\phi_{02y} + \Omega\eta_{01}\phi_{01yy} - k_0^2\Omega\eta_{11}\phi_{11}^* \\ &+ \Omega\eta_{11}\phi_{11yy}^* - k_0^2\Omega\eta_{11}^*\phi_{11} + \Omega\eta_{11}^*\phi_{11yy} = 0 \end{aligned} \tag{A.370}$$

On simplifie en tenant compte des identités obtenues à partir de l'équation de Laplace :

$$\eta_{01\xi} = 0 \tag{A.371}$$

Termes en ε^2E^1

$$- ik_0c_p\eta_{12} - c_g\eta_{11\xi} - \phi_{12y} + ik_0\Omega\eta_{01}\eta_{11} - \eta_{01}\phi_{11yy} - \eta_{11}\phi_{01yy} = 0 \tag{A.372}$$

$$\begin{aligned} &ik_0g\eta_{12} + g\eta_{11\xi} + k_0^2c_p\phi_{12} - ik_0c_p\phi_{11\xi} - ik_0c_g\phi_{11\xi} + \Omega\phi_{12y} - k_0^2\Omega\eta_{01}\phi_{11} \\ &+ k_0^2c_p\eta_{01}\phi_{11y} + \Omega\eta_{01}\phi_{11yy} + \Omega\eta_{11}\phi_{01yy} + ik_0\phi_{01y}\phi_{11y} = 0 \end{aligned} \tag{A.373}$$

On simplifie :

$$- ik_0c_p\eta_{12} - c_g\eta_{11\xi} - \phi_{12y} + ik_0\Omega\eta_{01}\eta_{11} - k_0^2\eta_{01}\phi_{11} = 0 \tag{A.374}$$

$$\begin{aligned} &ik_0g\eta_{12} + g\eta_{11\xi} + k_0^2c_p\phi_{12} - ik_0c_p\phi_{11\xi} \\ &- ik_0c_g\phi_{11\xi} + \Omega\phi_{12y} + k_0^2c_p\eta_{01}\phi_{11y} = 0 \end{aligned} \tag{A.375}$$

Dans ces équations, η_{01} et η_{12} sont les inconnues. On réécrit donc le système :

$$k_0\left(i\Omega\eta_{11} - k_0\phi_{11}\right)\eta_{01} - ik_0c_p\eta_{12} = c_g\eta_{11\xi} + \phi_{12y} \tag{A.376}$$

$$\begin{aligned} k_0^2c_p\phi_{11y}\eta_{01} + ik_0g\eta_{12} = &-g\eta_{11\xi} - k_0^2c_p\phi_{12}i \\ &+ ik_0c_p\phi_{11\xi} + ik_0c_g\phi_{11\xi} - \Omega\phi_{12y} \end{aligned} \tag{A.377}$$

On connaît les valeurs suivantes, en $y = 0$:

$$\eta_{11} = i\frac{\sigma}{c_p}A \tag{A.378}$$
$$\phi_{11} = A \tag{A.379}$$
$$\eta_{11\xi} = i\frac{\sigma}{c_p}A_\xi \tag{A.380}$$
$$\phi_{12y} = k_0\sigma D - i\left[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2)\right]A_\xi \tag{A.381}$$
$$\phi_{11y} = k_0\sigma A \tag{A.382}$$
$$\phi_{12} = D \tag{A.383}$$
$$\phi_{11\xi} = A_\xi \tag{A.384}$$

Le coefficient de η_{01} dans la première équation vaut :

$$k_0\left(i\Omega\eta_{11} - k_0\phi_{11}\right) = ik_0\Omega\eta_{11} - k_0^2\phi_{11} = ik_0\Omega i\frac{\phi_{11y}}{\omega_0} - k_0^2\phi_{11} \tag{A.385}$$
$$= -\left(\Omega\frac{k_0\sigma}{c_p} + k_0^2\right)A = -\frac{k_0}{c_p}\left(\omega_0 + \sigma\Omega\right)A \tag{A.386}$$

Le membre de droite de la première équation ne se simplifie pas beaucoup :

$$c_g\eta_{11\xi} + \phi_{12y} = i\frac{c_g}{c_p}\sigma A_\xi + k_0\sigma D - i[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2)]A_\xi \tag{A.387}$$
$$c_g\eta_{11\xi} + \phi_{12y} = i\left\{\frac{c_g}{c_p}\sigma - [\sigma + k_0 h(1-\sigma^2)]\right\}A_\xi + k_0\sigma D \tag{A.388}$$

Celui de la deuxième équation s'écrit

$$i\left\{k_0 c_g + k_0 h(1-\sigma^2)\Omega\right\}A_\xi - k_0\left(\omega_0 + \sigma\Omega\right)D \tag{A.389}$$

Cela donne :

$$\frac{k_0}{c_p}\left(\omega_0 + \sigma\Omega\right)A\eta_{01} + i\omega_0\eta_{12} = i\left[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2) - \frac{c_g}{c_p}\sigma\right]A_\xi - k_0\sigma D \tag{A.390}$$
$$k_0^2\sigma c_p A\eta_{01} + ig\eta_{12} = i\left[c_g + h(1-\sigma^2)\Omega\right]A_\xi - \left(\omega_0 + \sigma\Omega\right)D \tag{A.391}$$

On multiplie la première équation par g, la deuxième par $-\omega_0$ et on ajoute. Le coefficient de η_{12} s'annule. Le coefficient de D est facile à calculer :

$$-gk_0\sigma + \omega_0\left(\omega_0 + \sigma\Omega\right) = 0 \tag{A.392}$$

d'après (A.366) On calcule maintenant le coefficient K de iA_ξ :

$$K = g\left[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2)\right] - g\sigma\frac{c_g}{c_p} - \omega_0 c_g - \omega_0 h(1-\sigma^2)\Omega \tag{A.393}$$

$$K = g\left[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2)\right] - \omega_0 h(1-\sigma^2)\Omega - \frac{c_g}{c_p}\left(g\sigma + \omega_0 c_p\right) \tag{A.394}$$

$$K = g\left[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2)\right] - \omega_0 h(1-\sigma^2)\Omega - \frac{\sigma c_g}{c_p}\left(g + \frac{\omega_0 c_p}{\sigma}\right) \tag{A.395}$$

$$\sigma\frac{c_g}{c_p} = \frac{(1-\sigma^2)k_0 h\omega_0 + \sigma(\omega_0 + \sigma\Omega)}{2\omega_0 + \sigma\Omega} \tag{A.396}$$

$$\begin{aligned} K &= g\left[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2)\right] - \omega_0 h(1-\sigma^2)\Omega \\ &\quad - \left(g + \frac{\omega_0 c_p}{\sigma}\right)\frac{(1-\sigma^2)k_0 h\omega_0 + \sigma(\omega_0 + \sigma\Omega)}{2\omega_0 + \sigma\Omega} \end{aligned} \tag{A.397}$$

$$g + \frac{\omega_0 c_p}{\sigma} = \frac{g k_0\sigma + \omega_0^2}{k_0\sigma} = \frac{\omega_0(2\omega_0 + \sigma\Omega)}{k_0\sigma} \tag{A.398}$$

$$\begin{aligned} K &= g\left[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2)\right] - \omega_0 h(1-\sigma^2)\Omega \\ &\quad - \frac{\omega_0}{k_0\sigma}\left[(1-\sigma^2)k_0 h\omega_0 + \sigma(\omega_0 + \sigma\Omega)\right] \end{aligned} \tag{A.399}$$

$$\begin{aligned} K &= g\left[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2)\right] - \omega_0 h(1-\sigma^2)\Omega - h\omega_0^2\frac{1-\sigma^2}{\sigma} \\ &\quad - \frac{\omega_0}{k_0}\left(\omega_0 + \sigma\Omega\right) \end{aligned} \tag{A.400}$$

$$\begin{aligned} K\sigma &= g\sigma\left[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2)\right] - \omega_0 h(1-\sigma^2)\sigma\Omega - h\omega_0^2(1-\sigma^2) \\ &\quad - \sigma c_p\left(\omega_0 + \sigma\Omega\right) \end{aligned} \tag{A.401}$$

$$g\sigma = \left(\omega_0 + \sigma\Omega\right)c_p \tag{A.402}$$

$$\begin{aligned} K\sigma &= \left(\omega_0 + \sigma\Omega\right)c_p\left[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2)\right] - \omega_0 h(1-\sigma^2)\sigma\Omega \\ &\quad - h\omega_0^2(1-\sigma^2) - \sigma c_p\left(\omega_0 + \sigma\Omega\right) \end{aligned} \tag{A.403}$$

$$K\sigma = \left(\omega_0 + \sigma\Omega\right)c_p k_0 h(1-\sigma^2) - \omega_0 h(1-\sigma^2)\sigma\Omega - h\omega_0^2(1-\sigma^2) \tag{A.404}$$

$$K\sigma = h(1-\sigma^2)\left[\left(\omega_0 + \sigma\Omega\right)c_p k_0 - \omega_0\sigma\Omega - \omega_0^2\right] \tag{A.405}$$

$$K\sigma = h(1-\sigma^2)\left[\left(\omega_0 + \sigma\Omega\right)\omega_0 - \omega_0\sigma\Omega - \omega_0^2\right] = 0 \tag{A.406}$$

On trouve

$$\eta_{01} = 0 \tag{A.407}$$

On obtient la valeur de η_{12} :

$$\eta_{12} = \frac{1}{\omega_0}\left[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2) - \frac{c_g}{c_p}\sigma\right]A_\xi + \frac{i}{c_p}\sigma D \tag{A.408}$$

ou aussi bien :

$$\eta_{12} = \frac{1}{g}\left[c_g + h(1-\sigma^2)\Omega\right]A_\xi + \frac{i}{g}\left(\omega_0 + \sigma\Omega\right)D \tag{A.409}$$

Termes en $\varepsilon^2 E^2$

$$-2ik_0 c_p\eta_{22} - \phi_{22y} + ik_0\Omega\eta_{11}\eta_{11} - k_0^2\eta_{11}\phi_{11} - \eta_{11}\phi_{11yy} = 0 \tag{A.410}$$

$$\begin{aligned} &2ik_0 g\eta_{22} + 4k_0^2 c_p\phi_{22} + \Omega\phi_{22y} - k_0^2\Omega\eta_{11}\phi_{11} \\ &+ 2k_0^2 c_p\eta_{11}\phi_{11y} + \Omega\eta_{11}\phi_{11yy} - ik_0^3\phi_{11}\phi_{11} + ik_0\phi_{11y}\phi_{11y} = 0 \end{aligned} \tag{A.411}$$

Il y a un peu de simplifications :

$$2ik_0c_p\eta_{22} + \phi_{22y} = ik_0\Omega\eta_{11}^2 - 2k_0^2\eta_{11}\phi_{11} \tag{A.412}$$

$$2ik_0g\eta_{22} + 4k_0^2c_p\phi_{22} + \Omega\phi_{22y} = -2k_0^2c_p\eta_{11}\phi_{11y} + ik_0^3\phi_{11}^2 - ik_0\phi_{11y}^2 \tag{A.413}$$

On utilise les valeurs connues :

$$\phi_{22y} = \frac{4k_0\sigma}{1+\sigma^2}F \tag{A.414}$$

$$\eta_{11}^2 = -\frac{\sigma^2}{c_p^2}A^2 \tag{A.415}$$

$$\eta_{11}\phi_{11} = i\frac{\sigma}{c_p}A^2 \tag{A.416}$$

$$\phi_{22} = F \tag{A.417}$$

$$\eta_{11}\phi_{11y} = i\frac{k_0\sigma^2}{c_p}A^2 \tag{A.418}$$

$$\phi_{11}^2 = A^2 \tag{A.419}$$

$$\phi_{11y}^2 = k_0^2\sigma^2A^2 \tag{A.420}$$

Cela donne :

$$2ik_0c_p\eta_{22} + \frac{4k_0\sigma}{1+\sigma^2}F = -ik_0\Omega\frac{\sigma^2}{c_p^2}A^2 - 2k_0^2i\frac{\sigma}{c_p}A^2 \tag{A.421}$$

$$2ik_0g\eta_{22} + 4k_0^2c_pF + \Omega\frac{4k_0\sigma}{1+\sigma^2}F = -2k_0^2c_pi\frac{k_0\sigma^2}{c_p}A^2 + ik_0^3A^2 - ik_0k_0^2\sigma^2A^2 \tag{A.422}$$

On simplifie :

$$-2c_p\eta_{22} + \frac{4i\sigma}{1+\sigma^2}F = \frac{\sigma}{c_p^2}\left(2\omega_0 + \sigma\Omega\right)A^2 \tag{A.423}$$

$$2g\eta_{22} - 4i\frac{\omega_0(1+\sigma^2)+\sigma\Omega}{1+\sigma^2}F = k_0^2\left(1-3\sigma^2\right)A^2 \tag{A.424}$$

Pour déterminer F, on doit éliminer η_{22}. On multiplie donc la première équation par g et la deuxième par c_p puis on ajoute. On trouve

$$\begin{aligned}\frac{4i}{1+\sigma^2}&\left[g\sigma - \sigma\Omega c_p - \omega_0c_p(1+\sigma^2)\right]F\\ &= \left[\frac{g\sigma}{c_p^2}(2\omega_0+\sigma\Omega) + k_0^2c_p\left(1-3\sigma^2\right)\right]A^2\end{aligned} \tag{A.425}$$

On utilise la relation de dispersion linéaire pour simplifier le coefficient de F et on arrange le tout :

$$\begin{aligned}\frac{4i}{1+\sigma^2}&\left[k_0c_p^2 - k_0c_p^2(1+\sigma^2)\right]F\\ &= \left[\frac{\omega_0+\sigma\Omega}{c_p}(2\omega_0+\sigma\Omega) + k_0^2c_p\left(1-3\sigma^2\right)\right]A^2\end{aligned} \tag{A.426}$$

$$-\frac{4i\sigma^2k_0c_p^2}{1+\sigma^2}F = \frac{1}{c_p}\left[(\omega_0+\sigma\Omega)(2\omega_0+\sigma\Omega) + \omega_0^2\left(1-3\sigma^2\right)\right]A^2 \tag{A.427}$$

$$-\frac{4i\sigma^2\omega_0c_p^2}{1+\sigma^2}F = \left[(\omega_0+\sigma\Omega)(2\omega_0+\sigma\Omega) + \omega_0^2\left(1-3\sigma^2\right)\right]A^2 \tag{A.428}$$

On trouve ainsi

$$F = -\frac{1+\sigma^2}{4i\sigma^2\omega_0 c_p^2}\left(2\omega_0^2 + 3\sigma\Omega\omega_0 + \sigma^2\Omega^2 + \omega_0^2 - 3\sigma^2\omega_0^2\right)A^2 \tag{A.429}$$

$$F = i\frac{1+\sigma^2}{4\sigma^2\omega_0 c_p^2}\left(3\omega_0^2(1-\sigma^2) + 3\sigma\Omega\omega_0 + \sigma^2\Omega^2\right)A^2 \tag{A.430}$$

$$F = i\frac{3\omega_0^2(1-\sigma^4) + 3\omega_0\sigma(1+\sigma^2)\Omega + \sigma^2(1+\sigma^2)\Omega^2}{4\sigma^2\omega_0 c_p^2}A^2 \tag{A.431}$$

On détermine ensuite η_{22}.

Pour cela, on multiplie la première équation par $\omega_0(1+\sigma^2)+\sigma\Omega$ et la deuxième par σ puis on ajoute.

On trouve ainsi

$$\eta_{22} = \frac{-1}{2k_0 c_p^4\sigma}\left[\omega_0^2(3-\sigma^2) + \omega_0\sigma\left(3+\sigma^2\right)\Omega + \sigma^2\Omega^2\right]A^2 \tag{A.432}$$

ou si on préfère

$$\eta_{22} = -\frac{k_0}{2c_p^2\sigma}\left[3-\sigma^2 + (3+\sigma^2)\sigma\overline{\Omega} + \sigma^2\overline{\Omega}^2\right]A^2 \tag{A.433}$$

Termes en $\varepsilon^3 E^0$

$$\begin{aligned}
&\eta_{01\tau} - c_g\eta_{02\xi} - \phi_{03y} + \Omega\eta_{01}\eta_{01\xi}\\
&- \eta_{01}\phi_{02yy} - \eta_{02}\phi_{01yy} + \Omega\eta_{11}\eta^*_{11\xi} + k_0^2\eta_{11}\phi^*_{12}\\
&+ k_0^2\eta_{12}\phi^*_{11} + ik_0\eta_{11}\phi^*_{11\xi} - \eta_{11}\phi^*_{12yy} - \eta_{12}\phi^*_{11yy}\\
&+ \Omega\eta^*_{11}\eta_{11\xi} + k_0^2\eta^*_{11}\phi_{12} + k_0^2\eta^*_{12}\phi_{11} - ik_0\eta^*_{11}\phi_{11\xi}\\
&- \eta^*_{11}\phi_{12yy} - \eta^*_{12}\phi_{11yy} - ik_0\eta_{11\xi}\phi^*_{11} + ik_0\eta^*_{11\xi}\phi_{11}\\
&- \frac{1}{2}\eta_{01}\eta_{01}\phi_{01yyy} + k_0^2\eta_{01}\eta_{11}\phi^*_{11y} - \eta_{01}\eta_{11}\phi^*_{11yyy} + k_0^2\eta_{01}\eta^*_{11}\phi_{11y}\\
&- \eta_{01}\eta^*_{11}\phi_{11yyy} - \eta_{11}\eta^*_{11}\phi_{01yyy} = 0
\end{aligned} \tag{A.434}$$

$$\begin{aligned}
&g\eta_{02\xi} - c_g\phi_{01\xi\xi} + \Omega\phi_{03y} + \Omega\eta_{01}\phi_{02yy}\\
&+ \Omega\eta_{02}\phi_{01yy} - k_0^2\Omega\eta_{11}\phi^*_{12} - k_0^2\Omega\eta_{12}\phi^*_{11} - 2ik_0\Omega\eta_{11}\phi^*_{11\xi}\\
&+ ik_0c_p\eta_{11}\phi^*_{11y\xi} + \Omega\eta_{11}\phi^*_{12yy} + \Omega\eta_{12}\phi^*_{11yy} - k_0^2\Omega\eta^*_{11}\phi_{12}\\
&- k_0^2\Omega\eta^*_{12}\phi_{11} + 2ik_0\Omega\eta^*_{11}\phi_{11\xi} - ik_0c_p\eta^*_{11}\phi_{11y\xi} + \Omega\eta^*_{11}\phi_{12yy}\\
&+ \Omega\eta^*_{12}\phi_{11yy} + ik_0c_p\eta_{11\xi}\phi^*_{11y} - ik_0c_p\eta^*_{11\xi}\phi_{11y} + \phi_{01y}\phi_{01y\xi}\\
&+ k_0^2\phi_{11}\phi^*_{11\xi} + k_0^2\phi^*_{11}\phi_{11\xi} + \phi_{11y}\phi^*_{11y\xi} + \phi^*_{11y}\phi_{11y\xi}\\
&+ \frac{1}{2}\Omega\eta_{01}\eta_{01}\phi_{01yyy} - k_0^2\Omega\eta_{01}\eta_{11}\phi^*_{11y} + \Omega\eta_{01}\eta_{11}\phi^*_{11yyy} - k_0^2\Omega\eta_{01}\eta^*_{11}\phi_{11y}\\
&+ \Omega\eta_{01}\eta^*_{11}\phi_{11yyy} + \Omega\eta_{11}\eta^*_{11}\phi_{01yyy} = 0
\end{aligned} \tag{A.435}$$

On simplifie en tenant compte de $\eta_{01} = 0$, $\phi_{01y} = 0$ et $\phi_{02y} = 0$:

$$\begin{aligned}
&- c_g\eta_{02\xi} - \phi_{03y} + \Omega\eta_{11}\eta^*_{11\xi} + k_0^2\eta_{11}\phi^*_{12} + ik_0\eta_{11}\phi^*_{11\xi} \\
&- \eta_{11}\phi^*_{12yy} + \Omega\eta^*_{11}\eta_{11\xi} + k_0^2\eta^*_{11}\phi_{12} - ik_0\eta^*_{11}\phi_{11\xi} \\
&- \eta^*_{11}\phi_{12yy} - ik_0\eta_{11\xi}\phi^*_{11} + ik_0\eta^*_{11\xi}\phi_{11} = 0
\end{aligned} \tag{A.436}$$

$$\begin{aligned}
&g\eta_{02\xi} - c_g\phi_{01\xi\xi} + \Omega\phi_{03y} - k_0^2\Omega\eta_{11}\phi^*_{12} - k_0^2\Omega\eta_{12}\phi^*_{11} - 2ik_0\Omega\eta_{11}\phi^*_{11\xi} \\
&+ ik_0c_p\eta_{11}\phi^*_{11y\xi} + \Omega\eta_{11}\phi^*_{12yy} + k_0^2\Omega\eta_{12}\phi^*_{11} - k_0^2\Omega\eta^*_{11}\phi_{12} - k_0^2\Omega\eta^*_{12}\phi_{11} \\
&+ 2ik_0\Omega\eta^*_{11}\phi_{11\xi} - i\omega_0\eta^*_{11}\phi_{11y\xi} + \Omega\eta^*_{11}\phi_{12yy} + k_0^2\Omega\eta^*_{12}\phi_{11} + i\omega_0\eta_{11\xi}\phi^*_{11y} \\
&- i\omega_0\eta^*_{11\xi}\phi_{11y} + k_0^2\phi_{11}\phi^*_{11\xi} + k_0^2\phi^*_{11}\phi_{11\xi} + \phi_{11y}\phi^*_{11y\xi} + \phi^*_{11y}\phi_{11y\xi} = 0
\end{aligned} \tag{A.437}$$

On utilise aussi $k_0^2\phi_{12} - \phi_{12yy} = 2ik_0\phi_{11\xi}$:

$$\begin{aligned}
c_g\eta_{02\xi} + \phi_{03y} &= \Omega\left(\eta_{11}\eta^*_{11\xi} + \eta^*_{11}\eta_{11\xi}\right) + ik_0\left(\eta^*_{11}\phi_{11\xi} - \eta_{11}\phi^*_{11\xi}\right) \\
&\quad + ik_0\left(\eta^*_{11\xi}\phi_{11} - \eta_{11\xi}\phi^*_{11}\right)
\end{aligned} \tag{A.438}$$

$$\begin{aligned}
g\eta_{02\xi} - c_g\phi_{01\xi\xi} + \Omega\phi_{03y} &= i\omega_0\left(\eta^*_{11}\phi_{11y\xi} - \eta_{11}\phi^*_{11y\xi}\right) \\
&\quad + i\omega_0\left(\eta^*_{11\xi}\phi_{11y} - \eta_{11\xi}\phi^*_{11y}\right) \\
&\quad - k_0^2\left(\phi^*_{11}\phi_{11\xi} + \phi_{11}\phi^*_{11\xi}\right) \\
&\quad - \left(\phi_{11y}\phi^*_{11y\xi} + \phi^*_{11y}\phi_{11y\xi}\right)
\end{aligned} \tag{A.439}$$

On utilise les valeurs connues en $y = 0$:

$$c_g\eta_{02\xi} + \phi_{03y} = \frac{\sigma}{c_p^2}\left(2\omega_0 + \sigma\Omega\right)\left(AA^*_\xi + A^*A_\xi\right) \tag{A.440}$$

$$g\eta_{02\xi} - c_g\phi_{01\xi\xi} + \Omega\phi_{03y} = -k_0^2(1-\sigma^2)\left(AA^*_\xi + A^*A_\xi\right) \tag{A.441}$$

On reprend l'équation (A.345) pour $y = 0$:

$$\phi_{03y} = -h\phi_{01\xi\xi} \tag{A.442}$$

D'où la récriture des deux équations :

$$c_g\eta_{02\xi} - h\phi_{01\xi\xi} = \frac{\sigma}{c_p^2}\left(2\omega_0 + \sigma\Omega\right)\left(AA^*_\xi + A^*A_\xi\right) \tag{A.443}$$

$$g\eta_{02\xi} - \left(c_g + \Omega h\right)\phi_{01\xi\xi} = -k_0^2(1-\sigma^2)\left(AA^*_\xi + A^*A_\xi\right) \tag{A.444}$$

On élimine $\eta_{02\xi}$ entre ces deux équations :

$$gc_g\eta_{02\xi} - gh\phi_{01\xi\xi} = \frac{g\sigma}{c_p^2}\left(2\omega_0 + \sigma\Omega\right)\left(AA^*_\xi + A^*A_\xi\right) \tag{A.445}$$

$$-c_g g\eta_{02\xi} + c_g\left(c_g + \Omega h\right)\phi_{01\xi\xi} = k_0^2c_g(1-\sigma^2)\left(AA^*_\xi + A^*A_\xi\right) \tag{A.446}$$

On obtient

$$\left[c_g\left(c_g + \Omega h\right) - gh\right]\phi_{01\xi\xi} = \left[\frac{g\sigma}{c_p^2}\left(2\omega_0 + \sigma\Omega\right) + k_0^2c_g(1-\sigma^2)\right]\left(AA^*_\xi + A^*A_\xi\right) \tag{A.447}$$

Cette relation peut s'intégrer une fois :

$$\left[c_g\left(c_g + \Omega h\right) - gh\right]\phi_{01\xi} = \left[\frac{g\sigma}{c_p^2}\left(2\omega_0 + \sigma\Omega\right) + k_0^2c_g(1-\sigma^2)\right]|A|^2 \tag{A.448}$$

On peut aussi écrire :

$$g\eta_{02} = (c_g + \Omega h)\phi_{01\xi} - k_0^2(1-\sigma^2)\,|A|^2 \tag{A.449}$$

Termes en $\varepsilon^3 E^1$

$$\begin{aligned}
&- ik_0 c_p \eta_{13} + \eta_{11\tau} - c_g \eta_{12\xi} - \phi_{13y} \\
&+ ik_0 \Omega \eta_{01}\eta_{12} + ik_0 \Omega \eta_{02}\eta_{11} + \Omega \eta_{01}\eta_{11\xi} - \eta_{01}\phi_{12yy} \\
&- \eta_{02}\phi_{11yy} + \Omega \eta_{01\xi}\eta_{11} + ik_0 \eta_{01\xi}\phi_{11} + ik_0 \eta_{11}\phi_{01\xi} \\
&- \eta_{11}\phi_{02yy} - \eta_{12}\phi_{01yy} + ik_0 \Omega \eta_{11}^* \eta_{22} + 2k_0^2 \eta_{11}^* \phi_{22} \\
&- \eta_{11}^* \phi_{22yy} + 2k_0^2 \eta_{22}\phi_{11}^* - \eta_{22}\phi_{11yy}^* - \frac{1}{2}\eta_{01}\eta_{01}\phi_{11yyy} \\
&- \eta_{01}\eta_{11}\phi_{01yyy} + k_0^2 \eta_{11}\eta_{11}\phi_{11y}^* - \frac{1}{2}\eta_{11}\eta_{11}\phi_{11yyy}^* - \eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{11yyy} = 0
\end{aligned} \tag{A.450}$$

$$\begin{aligned}
&ik_0 g\eta_{13} + g\eta_{12\xi} + k_0^2 c_p \phi_{13} + ik_0 \phi_{11\tau} \\
&- ik_0 c_p \phi_{12\xi} - ik_0 c_g \phi_{12\xi} - c_g \phi_{11\xi\xi} + \Omega \phi_{13y} \\
&- k_0^2 \Omega \eta_{01}\phi_{12} - k_0^2 \Omega \eta_{02}\phi_{11} + 2ik_0 \Omega \eta_{01}\phi_{11\xi} + k_0^2 c_p \eta_{01}\phi_{12y} \\
&+ k_0^2 c_p \eta_{02}\phi_{11y} - ik_0 c_p \eta_{01}\phi_{11y\xi} - ik_0 c_g \eta_{01}\phi_{11y\xi} + \Omega \eta_{01}\phi_{12yy} \\
&+ \Omega \eta_{02}\phi_{11yy} - ik_0 c_p \eta_{01\xi}\phi_{11y} - ik_0 c_g \eta_{11}\phi_{01y\xi} + \Omega \eta_{11}\phi_{02yy} \\
&+ \Omega \eta_{12}\phi_{01yy} - 4k_0^2 \Omega \eta_{11}^*\phi_{22} + 2k_0^2 c_p \eta_{11}^*\phi_{22y} + \Omega \eta_{11}^*\phi_{22yy} \\
&- k_0^2 \Omega \eta_{22}\phi_{11}^* - k_0^2 c_p \eta_{22}\phi_{11y}^* + \Omega \eta_{22}\phi_{11yy}^* - k_0^2 \phi_{01\xi}\phi_{11} \\
&+ ik_0 \phi_{01y}\phi_{12y} + ik_0 \phi_{02y}\phi_{11y} + \phi_{01y}\phi_{11y\xi} + \phi_{01y\xi}\phi_{11y} \\
&+ 2ik_0^3 \phi_{11}^*\phi_{22} + ik_0 \phi_{11y}^*\phi_{22y} - k_0^2 \Omega \eta_{01}\eta_{01}\phi_{11y} + \frac{1}{2}k_0^2 c_p \eta_{01}\eta_{01}\phi_{11yy} \\
&+ \frac{1}{2}\Omega \eta_{01}\eta_{01}\phi_{11yyy} + \Omega \eta_{01}\eta_{11}\phi_{01yyy} + ik_0 \eta_{01}\phi_{01y}\phi_{11yy} + ik_0 \eta_{01}\phi_{01yy}\phi_{11y} \\
&- \frac{1}{2}k_0^2 c_p \eta_{11}\eta_{11}\phi_{11yy}^* + \frac{1}{2}\Omega \eta_{11}\eta_{11}\phi_{11yyy}^* - 2k_0^2 \Omega \eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{11y} \\
&+ k_0^2 c_p \eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{11yy} + \Omega \eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{11yyy} + ik_0 \eta_{11}\phi_{01y}\phi_{01yy} + ik_0^3 \eta_{11}\phi_{11}\phi_{11y}^* \\
&+ ik_0^3 \eta_{11}\phi_{11}^*\phi_{11y} + ik_0 \eta_{11}\phi_{11y}\phi_{11yy}^* + ik_0 \eta_{11}\phi_{11y}^*\phi_{11yy} \\
&- ik_0^3 \eta_{11}^*\phi_{11}\phi_{11y} + ik_0 \eta_{11}^*\phi_{11y}\phi_{11yy} = 0
\end{aligned} \tag{A.451}$$

On simplifie :

$$\begin{aligned}
&- i\omega_0 \eta_{13} + \eta_{11\tau} - c_g \eta_{12\xi} - \phi_{13y} + ik_0 \Omega \eta_{02}\eta_{11} - k_0^2 \eta_{02}\phi_{11} + ik_0 \eta_{11}\phi_{01\xi} \\
&+ ik_0 \Omega \eta_{11}^*\eta_{22} - 2k_0^2 \eta_{11}^*\phi_{22} + k_0^2 \eta_{22}\phi_{11}^* + \frac{k_0^2}{2}\eta_{11}^2\phi_{11y}^* - k_0^2 \eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{11y} = 0
\end{aligned} \tag{A.452}$$

$$\begin{aligned}
&ik_0 g\eta_{13} + g\eta_{12\xi} + k_0^2 c_p \phi_{13} + ik_0 \phi_{11\tau} - i\omega_0 \phi_{12\xi} - ik_0 c_g \phi_{12\xi} - c_g \phi_{11\xi\xi} \\
&+ \Omega \phi_{13y} + k_0^2 c_p \eta_{02}\phi_{11y} + 2k_0^2 c_p \eta_{11}^*\phi_{22y} - k_0^2 c_p \eta_{22}\phi_{11y}^* - k_0^2 \phi_{01\xi}\phi_{11} \\
&+ 2ik_0^3 \phi_{11}^*\phi_{22} + ik_0 \phi_{11y}^*\phi_{22y} - \frac{1}{2}k_0^4 c_p \eta_{11}^2\phi_{11}^* + \frac{1}{2}k_0^2 \Omega \eta_{11}^2\phi_{11y}^* \\
&- k_0^2 \Omega \eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{11y} + k_0^4 c_p \eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{11} + 2ik_0^3 \eta_{11}\phi_{11}\phi_{11y}^* + 2ik_0^3 \eta_{11}\phi_{11}^*\phi_{11y} = 0
\end{aligned} \tag{A.453}$$

On reprend les équations (A.362) et (A.375) ; on sait maintenant que $\eta_{01} = 0$, d'où :

$$ik_0 g\eta_{11} + k_0^2 c_p \phi_{11} + \Omega \phi_{11y} = 0 \tag{A.454}$$

$$ik_0 g\eta_{12} + g\eta_{11\xi} + k_0^2 c_p \phi_{12} - ik_0 c_p \phi_{11\xi} - ik_0 c_g \phi_{11\xi} + \Omega \phi_{12y} = 0 \tag{A.455}$$

On dérive la première par rapport à ξ et on multiplie la deuxième par $-ik_0$:

$$ik_0 g\eta_{11\xi} + k_0^2 c_p \phi_{11\xi} + \Omega \phi_{11y\xi} = 0 \tag{A.456}$$

$$k_0^2 g\eta_{12} - ik_0 g\eta_{11\xi} - ik_0^3 c_p \phi_{12} - k_0^2 c_p \phi_{11\xi} - k_0^2 c_g \phi_{11\xi} - ik_0 \Omega \phi_{12y} = 0 \tag{A.457}$$

On additionne puis on dérive par rapport à ξ :

$$k_0^2\left(g\eta_{12\xi} - ik_0c_p\phi_{12\xi} - c_g\phi_{11\xi\xi}\right) = ik_0\Omega\phi_{12y\xi} - \Omega\phi_{11y\xi\xi} \tag{A.458}$$

Le membre de gauche sert à simplifier (A.453)

$$\begin{aligned}
&-i\omega_0\eta_{13} + \eta_{11\tau} - c_g\eta_{12\xi} - \phi_{13y} + ik_0\Omega\eta_{02}\eta_{11} - k_0^2\eta_{02}\phi_{11} + ik_0\eta_{11}\phi_{01\xi} \\
&+ ik_0\Omega\eta_{11}^*\eta_{22} - 2k_0^2\eta_{11}^*\phi_{22} + k_0^2\eta_{22}\phi_{11}^* + \frac{k_0^2}{2}\eta_{11}^2\phi_{11y}^* - k_0^2\eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{11y} = 0
\end{aligned} \tag{A.459}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{k_0}\Omega\phi_{12y\xi} - \frac{\Omega}{k_0^2}\phi_{11y\xi\xi} + ik_0g\eta_{13} + k_0^2c_p\phi_{13} + ik_0\phi_{11\tau} - ik_0c_g\phi_{12\xi} + \Omega\phi_{13y} \\
&+ k_0^2c_p\eta_{02}\phi_{11y} + 2k_0^2c_p\eta_{11}^*\phi_{22y} - k_0^2c_p\eta_{22}\phi_{11y}^* - k_0^2\phi_{01\xi}\phi_{11} + 2ik_0^3\phi_{11}^*\phi_{22} \\
&+ ik_0\phi_{11y}^*\phi_{22y} - \frac{1}{2}k_0^4c_p\eta_{11}^2\phi_{11}^* + \frac{1}{2}k_0^2\Omega\eta_{11}^2\phi_{11y}^* - k_0^2\Omega\eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{11y} \\
&+ k_0^4c_p\eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{11} + 2ik_0^3\eta_{11}\phi_{11}\phi_{11y}^* + 2ik_0^3\eta_{11}\phi_{11}^*\phi_{11y} = 0
\end{aligned} \tag{A.460}$$

On calcule chaque terme qui est connu :

$$-i\omega_0\eta_{13} = -i\omega_0\eta_{13} \tag{A.461}$$

$$\eta_{11\tau} = i\frac{\omega_0}{g}(1+\sigma\overline{\Omega})A_\tau \tag{A.462}$$

$$-c_g\eta_{12\xi} = -\frac{c_g}{g}\left[c_g + c_pk_0h(1-\sigma^2)\overline{\Omega}\right]A_{\xi\xi} - i\frac{\omega_0c_g}{g}\left(1+\sigma\overline{\Omega}\right)D_\xi \tag{A.463}$$

$$\begin{aligned}
-\phi_{13y} &= -h(1-\sigma^2)(k_0h\sigma-1)A_{\xi\xi} + i\left[\sigma + k_0h(1-\sigma^2)\right]D_\xi \\
&\quad - k_0\sigma B
\end{aligned} \tag{A.464}$$

$$ik_0\Omega\eta_{02}\eta_{11} = -k_0^2\sigma\overline{\Omega}\frac{c_g + k_0hc_p\overline{\Omega}}{g}\phi_{01\xi}A + \frac{k_0^4}{g}\sigma\overline{\Omega}(1-\sigma^2)\left|A\right|^2A \tag{A.465}$$

$$-k_0^2\eta_{02}\phi_{11} = -k_0^2\frac{c_g + k_0hc_p\overline{\Omega}}{g}\phi_{01\xi}A + \frac{k_0^4}{g}(1-\sigma^2)\left|A\right|^2A \tag{A.466}$$

$$ik_0\eta_{11}\phi_{01\xi} = -k_0^2c_p\frac{1+\sigma\overline{\Omega}}{g}\phi_{01\xi}A \tag{A.467}$$

$$ik_0\Omega\eta_{11}^*\eta_{22} = -\frac{k_0^4\overline{\Omega}}{2g\sigma}\left[3-\sigma^2+6\sigma\overline{\Omega}+\left(4+\sigma^2\right)\sigma^2\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2A \tag{A.468}$$

$$\begin{aligned}
-2k_0^2\eta_{11}^*\phi_{22} = -\frac{k_0^4}{2g\sigma^2}\Big[&3(1-\sigma^4) + 3(2+\sigma^2-\sigma^4)\sigma\overline{\Omega} \\
&+ 4(1+\sigma^2)\sigma^2\overline{\Omega}^2 + (1+\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3\Big]\left|A\right|^2A
\end{aligned} \tag{A.469}$$

$$k_0^2\eta_{22}\phi_{11}^* = -\frac{k_0^4}{2g\sigma^2}\left[3-\sigma^2+6\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2(4+\sigma^2)\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2A \tag{A.470}$$

$$\frac{k_0^2}{2}\eta_{11}^2\phi_{11y}^* = -\frac{k_0^4\sigma^2}{2g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2A \tag{A.471}$$

$$-k_0^2\eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{11y} = -\frac{k_0^4\sigma^2}{g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2A \tag{A.472}$$

On reporte les quantités calculées dans l'équation :

$$
\begin{aligned}
&- i\omega_0\eta_{13} + i\frac{\omega_0}{g}(1+\sigma\overline{\Omega})A_\tau - \frac{c_g}{g}\left[c_g + c_p k_0 h(1-\sigma^2)\overline{\Omega}\right] A_{\xi\xi} \\
&- i\frac{\omega_0 c_g}{g}\left(1+\sigma\overline{\Omega}\right) D_\xi - h(1-\sigma^2)(k_0 h\sigma - 1)A_{\xi\xi} + i\left[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2)\right] D_\xi \\
&- k_0\sigma B - k_0^2\sigma\overline{\Omega}\frac{c_g + k_0 h c_p\overline{\Omega}}{g}\phi_{01\xi}A + \frac{k_0^4}{g}(1-\sigma^2)\sigma\overline{\Omega}\left|A\right|^2 A \\
&- k_0^2\frac{c_g + k_0 h c_p\overline{\Omega}}{g}\phi_{01\xi}A + \frac{k_0^4}{g}(1-\sigma^2)\left|A\right|^2 A - k_0^2 c_p\frac{1+\sigma\overline{\Omega}}{g}\phi_{01\xi}A \\
&- \frac{k_0^4\overline{\Omega}}{2g\sigma}\left[3-\sigma^2+6\sigma\overline{\Omega}+\left(4+\sigma^2\right)\sigma^2\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2 A \\
&- \frac{k_0^4}{2g\sigma^2}\left[3(1-\sigma^4)+3(2+\sigma^2-\sigma^4)\sigma\overline{\Omega}+4(1+\sigma^2)\sigma^2\overline{\Omega}^2+(1+\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2 A \\
&- \frac{k_0^4}{2g\sigma^2}\left[3-\sigma^2+6\sigma\overline{\Omega}+(4+\sigma^2)\sigma^2\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2 A - \frac{k_0^4\sigma^2}{2g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2 A \\
&- \frac{k_0^4\sigma^2}{g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2 A = 0
\end{aligned}
\tag{A.473}
$$

On multiplie par $-g$:

$$
\begin{aligned}
&ig\omega_0\eta_{13} - i\omega_0(1+\sigma\overline{\Omega})A_\tau + c_g\left[c_g + c_p k_0 h(1-\sigma^2)\overline{\Omega}\right] A_{\xi\xi} \\
&+ i\omega_0 c_g\left(1+\sigma\overline{\Omega}\right) D_\xi + gh(1-\sigma^2)(k_0 h\sigma - 1)A_{\xi\xi} - ig\left[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2)\right] D_\xi \\
&+ gk_0\sigma B + k_0^2\sigma\overline{\Omega}\left(c_g + k_0 h c_p\overline{\Omega}\right)\phi_{01\xi}A - k_0^4(1-\sigma^2)\sigma\overline{\Omega}\left|A\right|^2 A \\
&+ k_0^2\left(c_g + k_0 h c_p\overline{\Omega}\right)\phi_{01\xi}A - k_0^4(1-\sigma^2)\left|A\right|^2 A + k_0^2 c_p\left(1+\sigma\overline{\Omega}\right)\phi_{01\xi}A \\
&+ \frac{k_0^4\overline{\Omega}}{2\sigma}\left[3-\sigma^2+6\sigma\overline{\Omega}+(4+\sigma^2)\sigma^2\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2 A \\
&+ \frac{k_0^4}{2\sigma^2}\left[3(1-\sigma^4)+3(2+\sigma^2-\sigma^4)\sigma\overline{\Omega}+4(1+\sigma^2)\sigma^2\overline{\Omega}^2+(1+\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2 A \\
&+ \frac{k_0^4}{2\sigma^2}\left[3-\sigma^2+6\sigma\overline{\Omega}+(4+\sigma^2)\sigma^2\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2 A + \frac{k_0^4\sigma^2}{2}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2 A \\
&+ k_0^4\sigma^2(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2 A = 0
\end{aligned}
\tag{A.474}
$$

On change l'ordre des termes :

$$
\begin{aligned}
&k_0^2\sigma\overline{\Omega}\left(c_g + k_0 h c_p\overline{\Omega}\right)\phi_{01\xi}A + k_0^2\left(c_g + k_0 h c_p\overline{\Omega}\right)\phi_{01\xi}A + k_0^2 c_p\left(1+\sigma\overline{\Omega}\right)\phi_{01\xi}A \\
&+ gk_0\sigma B + ig\omega_0\eta_{13} - i\omega_0(1+\sigma\overline{\Omega})A_\tau \\
&+ c_g\left[c_g + c_p k_0 h(1-\sigma^2)\overline{\Omega}\right] A_{\xi\xi} + gh(1-\sigma^2)(k_0 h\sigma - 1)A_{\xi\xi} + i\omega_0 c_g\left(1+\sigma\overline{\Omega}\right) D_\xi \\
&- ig\left[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2)\right] D_\xi - k_0^4\overline{\Omega}(1-\sigma^2)\sigma\left|A\right|^2 A - k_0^4(1-\sigma^2)\left|A\right|^2 A \\
&+ \frac{k_0^4\overline{\Omega}}{2\sigma}\left[3-\sigma^2+6\sigma\overline{\Omega}+\left(4+\sigma^2\right)\sigma^2\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2 A \\
&+ \frac{k_0^4}{2\sigma^2}\left[3(1-\sigma^4)+3(2+\sigma^2-\sigma^4)\sigma\overline{\Omega}+4(1+\sigma^2)\sigma^2\overline{\Omega}^2+(1+\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2 A \\
&+ \frac{k_0^4}{2\sigma^2}\left[3-\sigma^2+6\sigma\overline{\Omega}+(4+\sigma^2)\sigma^2\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2 A + \frac{k_0^4\sigma^2}{2}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2 A \\
&+ k_0^4\sigma^2(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2 A = 0
\end{aligned}
\tag{A.475}
$$

On regroupe :

$$\begin{aligned}
&ig\omega_0\eta_{13} + k_0^2 c_p(1+\sigma\overline{\Omega})\left(\frac{c_g}{c_p}+1+k_0h\overline{\Omega}\right)\phi_{01\xi}A + gk_0\sigma B - i\omega_0(1+\sigma\overline{\Omega})A_\tau \\
&+\left\{c_g\left[c_g + c_pk_0h(1-\sigma^2)\overline{\Omega}\right] + gh(1-\sigma^2)(k_0h\sigma-1)\right\}A_{\xi\xi} \\
&+ i\left\{\omega_0c_g\left(1+\sigma\overline{\Omega}\right) - g\left[\sigma + k_0h(1-\sigma^2)\right]\right\}D_\xi \\
&+\frac{k_0^4}{2\sigma^2}\Big[6-3\sigma^2+2\sigma^4+(15+2\sigma^4)\sigma\overline{\Omega} \\
&+(14+5\sigma^2)\sigma^2\overline{\Omega}^2+(6+2\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3+\sigma^4\overline{\Omega}^4\Big]\left|A\right|^2A = 0
\end{aligned} \tag{A.476}$$

On fait de même avec les termes en ε^3E^1 issus de la condition dynamique :

$$\frac{i}{k_0}\Omega\phi_{12y\xi} = ik_0c_p\sigma\overline{\Omega}D_\xi + c_p\overline{\Omega}\left[\sigma+k_0h(1-\sigma^2)\right]A_{\xi\xi} \tag{A.477}$$

$$-\frac{\Omega}{k_0^2}\phi_{11y\xi\xi} = -c_p\sigma\overline{\Omega}A_{\xi\xi} \tag{A.478}$$

$$ik_0g\eta_{13} = ik_0g\eta_{13} \tag{A.479}$$

$$k_0^2c_p\phi_{13} = k_0^2c_pB \tag{A.480}$$

$$ik_0\phi_{11\tau} = ik_0A_\tau \tag{A.481}$$

$$-ik_0c_g\phi_{12\xi} = -ik_0c_gD_\xi \tag{A.482}$$

$$\begin{aligned}
\Omega\phi_{13y} &= k_0hc_p\overline{\Omega}(1-\sigma^2)(k_0h\sigma-1)A_{\xi\xi} \\
&\quad - ik_0c_p\overline{\Omega}\left[\sigma+k_0h(1-\sigma^2)\right]D_\xi + k_0^2c_p\overline{\Omega}\sigma B
\end{aligned} \tag{A.483}$$

$$k_0^2c_p\eta_{02}\phi_{11y} = \frac{k_0^3c_p}{g}(c_g+c_pk_0h\overline{\Omega})\sigma A\phi_{01\xi} - \frac{k_0^5c_p}{g}\sigma(1-\sigma^2)\left|A\right|^2A \tag{A.484}$$

$$2k_0^2c_p\eta_{11}^*\phi_{22y} = \frac{2k_0^5c_p}{g\sigma}\left[3(1-\sigma^2)+(6-3\sigma^2)\sigma\overline{\Omega}+4\sigma^2\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2A \tag{A.485}$$

$$-k_0^2c_p\eta_{22}\phi_{11y}^* = \frac{k_0^5c_p}{2g\sigma}\left[3-\sigma^2+6\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2(4+\sigma^2)\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2A \tag{A.486}$$

$$-k_0^2\phi_{01\xi}\phi_{11} = -k_0^2\phi_{01\xi}A \tag{A.487}$$

$$\begin{aligned}
2ik_0^3\phi_{11}^*\phi_{22} &= -\frac{k_0^5c_p}{2g\sigma^3}\Big[3(1-\sigma^4)+3\left(2+\sigma^2-\sigma^4\right)\sigma\overline{\Omega} \\
&\qquad + 4\left(1+\sigma^2\right)\sigma^2\overline{\Omega}^2+(1+\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3\Big]\left|A\right|^2A
\end{aligned} \tag{A.488}$$

$$ik_0\phi_{11y}^*\phi_{22y} = -\frac{k_0^5c_p}{g\sigma}\left[3(1-\sigma^2)+3\sigma\left(2-\sigma^2\right)\overline{\Omega}+4\sigma^2\overline{\Omega}^2+\sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2A \tag{A.489}$$

$$-\frac{1}{2}k_0^4c_p\eta_{11}^2\phi_{11}^* = \frac{k_0^5c_p\sigma}{2g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2A \tag{A.490}$$

$$\frac{1}{2}k_0^2\Omega\eta_{11}^2\phi_{11y}^* = -\frac{k_0^5c_p\sigma^2\overline{\Omega}}{2g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2A \tag{A.491}$$

$$-k_0^2\Omega\eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{11y} = -\frac{k_0^5 c_p\sigma^2\overline{\Omega}}{g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2 A \tag{A.492}$$

$$k_0^4 c_p\eta_{11}\eta_{11}^*\phi_{11} = \frac{k_0^5 c_p\sigma}{g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2 A \tag{A.493}$$

$$2ik_0^3\eta_{11}\phi_{11}\phi_{11y}^* = -\frac{2k_0^5 c_p\sigma}{g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2 A \tag{A.494}$$

$$2ik_0^3\eta_{11}\phi_{11}^*\phi_{11y} = -\frac{2k_0^5 c_p\sigma}{g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2 A \tag{A.495}$$

On traduit maintenant cette deuxième équation :

$$\begin{aligned}
&ik_0c_p\sigma\overline{\Omega}D_\xi + c_p\overline{\Omega}\left[\sigma + k_0h(1-\sigma^2)\right]A_{\xi\xi} - c_p\sigma\overline{\Omega}A_{\xi\xi} + ik_0g\eta_{13}\\
&+ k_0^2c_pB + ik_0A_\tau - ik_0c_gD_\xi + k_0hc_p\overline{\Omega}(1-\sigma^2)(k_0h\sigma-1)A_{\xi\xi}\\
&- ik_0c_p\overline{\Omega}\left[\sigma + k_0h(1-\sigma^2)\right]D_\xi + k_0^2c_p\overline{\Omega}\sigma B\\
&+ \frac{k_0^3c_p}{g}(c_g + c_pk_0h\overline{\Omega})\sigma A\phi_{01\xi} - \frac{k_0^5c_p}{g}\sigma(1-\sigma^2)\left|A\right|^2A\\
&+ \frac{2k_0^5c_p}{g\sigma}\left[3(1-\sigma^2) + (6-3\sigma^2)\sigma\overline{\Omega} + 4\sigma^2\overline{\Omega}^2 + \sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2A\\
&+ \frac{k_0^5c_p}{2g\sigma}\left[3 - \sigma^2 + 6\sigma\overline{\Omega} + \sigma^2(4+\sigma^2)\overline{\Omega}^2 + \sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2A - k_0^2\phi_{01\xi}A\\
&- \frac{k_0^5c_p}{2g\sigma^3}\Big[3(1-\sigma^4) + 3\left(2+\sigma^2-\sigma^4\right)\sigma\overline{\Omega}\\
&\qquad + 4\left(1+\sigma^2\right)\sigma^2\overline{\Omega}^2 + (1+\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3\Big]\left|A\right|^2A\\
&- \frac{k_0^5c_p}{g\sigma}\left[3(1-\sigma^2) + 3\sigma\left(2-\sigma^2\right)\overline{\Omega} + 4\sigma^2\overline{\Omega}^2 + \sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2A\\
&+ \frac{k_0^5c_p\sigma}{2g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2A\\
&- \frac{k_0^5c_p\sigma^2\overline{\Omega}}{2g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2A - \frac{k_0^5c_p\sigma^2\overline{\Omega}}{g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2A\\
&+ \frac{k_0^5c_p\sigma}{g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2A\\
&- \frac{2k_0^5c_p\sigma}{g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2A - \frac{2k_0^5c_p\sigma}{g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2A
\end{aligned} \tag{A.496}$$

On change l'ordre des termes :

$$
\begin{aligned}
& ik_0 g\eta_{13} + \frac{k_0^3 c_p}{g}(c_g + c_p k_0 h\overline{\Omega})\sigma\phi_{01\xi}A - k_0^2\phi_{01\xi}A + k_0^2 c_p B + k_0^2 c_p\overline{\Omega}\sigma B \\
& + ik_0 A_\tau + c_p\overline{\Omega}\left[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2)\right]A_{\xi\xi} - c_p\sigma\overline{\Omega}A_{\xi\xi} \\
& + k_0 h c_p\overline{\Omega}(1-\sigma^2)(k_0 h\sigma - 1)A_{\xi\xi} - ik_0 c_g D_\xi - ik_0 c_p\overline{\Omega}\left[\sigma + k_0 h(1-\sigma^2)\right]D_\xi \\
& + ik_0 c_p\sigma\overline{\Omega}D_\xi - \frac{k_0^5 c_p}{g}\sigma(1-\sigma^2)\left|A\right|^2 A \\
& + \frac{2k_0^5 c_p}{g\sigma}\left[3(1-\sigma^2) + (6-3\sigma^2)\sigma\overline{\Omega} + 4\sigma^2\overline{\Omega}^2 + \sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2 A \\
& + \frac{k_0^5 c_p}{2g\sigma}\left[3 - \sigma^2 + 6\sigma\overline{\Omega} + \sigma^2(4+\sigma^2)\overline{\Omega}^2 + \sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2 A \\
& - \frac{k_0^5 c_p}{2g\sigma^3}\Big[3(1-\sigma^4) + 3\left(2+\sigma^2-\sigma^4\right)\sigma\overline{\Omega} \\
& \qquad + 4\left(1+\sigma^2\right)\sigma^2\overline{\Omega}^2 + (1+\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3\Big]\left|A\right|^2 A \\
& - \frac{k_0^5 c_p}{g\sigma}\left[3(1-\sigma^2) + 3\sigma\left(2-\sigma^2\right)\overline{\Omega} + 4\sigma^2\overline{\Omega}^2 + \sigma^3\overline{\Omega}^3\right]\left|A\right|^2 A \\
& + \frac{k_0^5 c_p\sigma}{2g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2 A \\
& - \frac{k_0^5 c_p\sigma^2\overline{\Omega}}{2g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2 A - \frac{k_0^5 c_p\sigma^2\overline{\Omega}}{g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2 A \\
& + \frac{k_0^5 c_p\sigma}{g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2 A \\
& - \frac{2k_0^5 c_p\sigma}{g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2 A - \frac{2k_0^5 c_p\sigma}{g}(1+\sigma\overline{\Omega})\left|A\right|^2 A
\end{aligned}
\tag{A.497}
$$

On arrange un peu :

$$
\begin{aligned}
& ik_0 g\eta_{13} + k_0^2\left[\frac{k_0 c_p}{g}(c_g + c_p k_0 h\overline{\Omega})\sigma - 1\right]\phi_{01\xi}A + k_0^2 c_p\left(1+\overline{\Omega}\sigma\right)B + ik_0 A_\tau \\
& + c_p k_0^2 h^2(1-\sigma^2)\sigma\overline{\Omega}A_{\xi\xi} - ik_0\left\{c_g + c_p k_0 h(1-\sigma^2)\overline{\Omega}\right\}D_\xi \\
& + \frac{k_0^5}{g}\Big\{-c_p\sigma(1-\sigma^2) + \frac{2c_p}{\sigma}\left[3(1-\sigma^2) + (6-3\sigma^2)\sigma\overline{\Omega} + 4\sigma^2\overline{\Omega}^2 + \sigma^3\overline{\Omega}^3\right] \\
& + \frac{c_p}{2\sigma}\left[3 - \sigma^2 + 6\sigma\overline{\Omega} + \sigma^2(4+\sigma^2)\overline{\Omega}^2 + \sigma^3\overline{\Omega}^3\right] \\
& - \frac{c_p}{2\sigma^3}\left[3(1-\sigma^4) + 3\left(2+\sigma^2-\sigma^4\right)\sigma\overline{\Omega} + 4\left(1+\sigma^2\right)\sigma^2\overline{\Omega}^2 + (1+\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3\right] \\
& - \frac{c_p}{\sigma}\left[3(1-\sigma^2) + 3\sigma\left(2-\sigma^2\right)\overline{\Omega} + 4\sigma^2\overline{\Omega}^2 + \sigma^3\overline{\Omega}^3\right] + \frac{c_p\sigma}{2}(1+\sigma\overline{\Omega}) \\
& - \frac{c_p\sigma^2\overline{\Omega}}{2}(1+\sigma\overline{\Omega}) - c_p\sigma^2\overline{\Omega}(1+\sigma\overline{\Omega}) + c_p\sigma(1+\sigma\overline{\Omega}) \\
& - 2c_p\sigma(1+\sigma\overline{\Omega}) - 2c_p\sigma(1+\sigma\overline{\Omega})\Big\}\left|A\right|^2 A
\end{aligned}
\tag{A.498}
$$

$$
\begin{aligned}
&ik_0 g\eta_{13} + k_0^2\left[\frac{k_0c_p}{g}(c_g + c_pk_0h\overline{\Omega})\sigma - 1\right]\phi_{01\xi}A + k_0^2c_p\left(1+\overline{\Omega}\sigma\right)B + ik_0A_\tau \\
&+ c_pk_0^2h^2(1-\sigma^2)\sigma\overline{\Omega}A_{\xi\xi} - ik_0\left\{c_g + c_pk_0h(1-\sigma^2)\overline{\Omega}\right\}D_\xi \\
&+ \frac{k_0^5c_p}{2g\sigma^3}\Big\{-2\sigma^4(1-\sigma^2) + 4\sigma^2\left[3(1-\sigma^2) + (6-3\sigma^2)\sigma\overline{\Omega} + 4\sigma^2\overline{\Omega}^2 + \sigma^3\overline{\Omega}^3\right] \\
&+ \sigma^2\left[3 - \sigma^2 + 6\sigma\overline{\Omega} + \sigma^2(4+\sigma^2)\overline{\Omega}^2 + \sigma^3\overline{\Omega}^3\right] \\
&- \left[3(1-\sigma^4) + 3\left(2+\sigma^2-\sigma^4\right)\sigma\overline{\Omega} + 4\left(1+\sigma^2\right)\sigma^2\overline{\Omega}^2 + (1+\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3\right] \\
&- 2\sigma^2\left[3(1-\sigma^2) + 3\sigma\left(2-\sigma^2\right)\overline{\Omega} + 4\sigma^2\overline{\Omega}^2 + \sigma^3\overline{\Omega}^3\right] + \sigma^4(1+\sigma\overline{\Omega}) \\
&- 3\sigma^5\overline{\Omega}(1+\sigma\overline{\Omega}) - 6\sigma^4(1+\sigma\overline{\Omega})\Big\}\left|A\right|^2A
\end{aligned}
\tag{A.499}
$$

$$
\begin{aligned}
&ik_0 g\eta_{13} + k_0^2\left[\frac{k_0c_p}{g}(c_g + c_pk_0h\overline{\Omega})\sigma - 1\right]\phi_{01\xi}A + k_0^2c_p\left(1+\overline{\Omega}\sigma\right)B + ik_0A_\tau \\
&+ c_pk_0^2h^2(1-\sigma^2)\sigma\overline{\Omega}A_{\xi\xi} - ik_0\left\{c_g + c_pk_0h(1-\sigma^2)\overline{\Omega}\right\}D_\xi \\
&+ \frac{k_0^5c_p}{2g\sigma^3}\Big\{-3 + 9\sigma^2 - 11\sigma^4 + 2\sigma^6 + (-6+15\sigma^2-11\sigma^4)\sigma\overline{\Omega} \\
&\qquad + (-4+8\sigma^2-2\sigma^4)\sigma^2\overline{\Omega}^2 + (-1+2\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3\Big\}\left|A\right|^2A = 0
\end{aligned}
\tag{A.500}
$$

On va éliminer η_{13} entre les équations (A.476) et (A.500), on multiplie donc la deuxième par c_p :

$$
\begin{aligned}
&ig\omega_0\eta_{13} + k_0^2c_p(1+\sigma\overline{\Omega})\left(\frac{c_g}{c_p} + 1 + k_0h\overline{\Omega}\right)\phi_{01\xi}A + gk_0\sigma B - i\omega_0(1+\sigma\overline{\Omega})A_\tau \\
&+ \left\{c_g\left[c_g + c_pk_0h(1-\sigma^2)\overline{\Omega}\right] + gh(1-\sigma^2)(k_0h\sigma - 1)\right\}A_{\xi\xi} \\
&+ i\left\{\omega_0c_g\left(1+\sigma\overline{\Omega}\right) - g\left[\sigma + k_0h(1-\sigma^2)\right]\right\}D_\xi \\
&+ \frac{k_0^4}{2\sigma^2}\Big[6 - 3\sigma^2 + 2\sigma^4 + (15+2\sigma^4)\sigma\overline{\Omega} + (14+5\sigma^2)\sigma^2\overline{\Omega}^2 \\
&\qquad + (6+2\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3 + \sigma^4\overline{\Omega}^4\Big]\left|A\right|^2A = 0
\end{aligned}
\tag{A.501}
$$

$$
\begin{aligned}
&i\omega_0 g\eta_{13} + k_0^2c_p\left[\frac{\omega_0}{g}(c_g + c_pk_0h\overline{\Omega})\sigma - 1\right]\phi_{01\xi}A + \omega_0^2\left(1+\overline{\Omega}\sigma\right)B + i\omega_0A_\tau \\
&+ \omega_0^2h^2(1-\sigma^2)\sigma\overline{\Omega}A_{\xi\xi} - i\omega_0\left\{c_g + c_pk_0h(1-\sigma^2)\overline{\Omega}\right\}D_\xi \\
&+ \frac{k_0^5c_p^2}{2g\sigma^3}\Big\{-3 + 9\sigma^2 - 11\sigma^4 + 2\sigma^6 + (-6+15\sigma^2-11\sigma^4)\sigma\overline{\Omega} \\
&\qquad + (-4+8\sigma^2-2\sigma^4)\sigma^2\overline{\Omega}^2 + (-1+2\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3\Big\}\left|A\right|^2A = 0
\end{aligned}
\tag{A.502}
$$

puis on égale les expressions de $i\omega_0 g\eta_{13}$:

$$\begin{aligned}
&\left\{k_0^2 c_p(1+\sigma\overline{\Omega})\left(\frac{c_g}{c_p}+1+k_0h\overline{\Omega}\right)-k_0^2c_p\left[\frac{\omega_0}{g}(c_g+c_pk_0h\overline{\Omega})\sigma-1\right]\right\}\phi_{01\xi}A\\
&+gk_0\sigma B-\omega_0^2\left(1+\overline{\Omega}\sigma\right)B-i\omega_0(1+\sigma\overline{\Omega})A_\tau-i\omega_0A_\tau\\
&+\left\{c_g\left[c_g+c_pk_0h(1-\sigma^2)\overline{\Omega}\right]+gh(1-\sigma^2)(k_0h\sigma-1)\right\}A_{\xi\xi}\\
&-\omega_0^2h^2(1-\sigma^2)\sigma\overline{\Omega}A_{\xi\xi}+i\left\{\omega_0c_g\left(1+\sigma\overline{\Omega}\right)-g\left[\sigma+k_0h(1-\sigma^2)\right]\right\}D_\xi\\
&+i\omega_0\left\{c_g+c_pk_0h(1-\sigma^2)\overline{\Omega}\right\}D_\xi\\
&+\frac{k_0^4}{2\sigma^2}\Big[6-3\sigma^2+2\sigma^4+(15+2\sigma^4)\sigma\overline{\Omega}\\
&\qquad+(14+5\sigma^2)\sigma^2\overline{\Omega}^2+(6+2\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3+\sigma^4\overline{\Omega}^4\Big]\left|A\right|^2A\\
&-\frac{k_0^5c_p^2}{2g\sigma^3}\Big\{-3+9\sigma^2-11\sigma^4+2\sigma^6+(-6+15\sigma^2-11\sigma^4)\sigma\overline{\Omega}\\
&\qquad+(-4+8\sigma^2-2\sigma^4)\sigma^2\overline{\Omega}^2+(-1+2\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3\Big\}\left|A\right|^2A=0
\end{aligned}\tag{A.503}$$

– Simplification du coefficient de $k_0^2c_p\phi_{01\xi}A$:

$$K_1=(1+\sigma\overline{\Omega})\left(1+\frac{c_g}{c_p}+k_0h\overline{\Omega}\right)+1-\frac{\omega_0}{g}(c_g+c_pk_0h\overline{\Omega})\sigma \tag{A.504}$$

$$\begin{aligned}
K_1=\frac{1}{g\sigma}\Big[&k_0c_p^2(1+\sigma\overline{\Omega})^2\left(1+\frac{c_g}{c_p}+k_0h\overline{\Omega}\right)\\
&+k_0c_p^2(1+\sigma\overline{\Omega})-k_0c_p(c_g+c_pk_0h\overline{\Omega})\sigma^2\Big]
\end{aligned}\tag{A.505}$$

$$\begin{aligned}
K_1=\frac{k_0c_p}{g\sigma}\big[&(1+\sigma\overline{\Omega})^2\left(c_p+c_g+k_0hc_p\overline{\Omega}\right)+c_p(1+\sigma\overline{\Omega})\\
&-(c_g+c_pk_0h\overline{\Omega})\sigma^2\big]
\end{aligned}\tag{A.506}$$

On simplifie la quantité entre crochets :

$$K_2=(1+\sigma\overline{\Omega})^2\left(c_p+c_g+k_0hc_p\overline{\Omega}\right)+c_p(1+\sigma\overline{\Omega})-(c_g+c_pk_0h\overline{\Omega})\sigma^2 \tag{A.507}$$

$$\begin{aligned}
K_2=&(1+2\sigma\overline{\Omega}+\sigma^2\overline{\Omega}^2)\left(c_p+c_g+k_0hc_p\overline{\Omega}\right)+c_p+\sigma c_p\overline{\Omega}-\\
&c_g\sigma^2-c_pk_0h\overline{\Omega}\sigma^2
\end{aligned}\tag{A.508}$$

$$\begin{aligned}
K_2=&2c_p+(1-\sigma^2)c_g+\left\{\left[k_0h(1-\sigma^2)+3\sigma\right]c_p+2\sigma c_g\right\}\overline{\Omega}\\
&+\sigma\left[(2k_0h+\sigma)c_p+\sigma c_g\right]\overline{\Omega}^2+\sigma^2k_0hc_p\overline{\Omega}^3
\end{aligned}\tag{A.509}$$

– Le coefficient de B est nul d'après la relation de dispersion linéaire.
– Le coefficient de A_τ est

$$-i\omega_0(1+\sigma\overline{\Omega})-i\omega_0=-i\omega_0(2+\sigma\overline{\Omega}) \tag{A.510}$$

– Simplification du coefficient de $A_{\xi\xi}$:

$$\begin{aligned}
K_3=&c_g\left[c_g+c_pk_0h(1-\sigma^2)\overline{\Omega}\right]+gh(1-\sigma^2)(k_0h\sigma-1)\\
&-\omega_0^2h^2(1-\sigma^2)\sigma\overline{\Omega}
\end{aligned}\tag{A.511}$$

$$\begin{aligned}
K_3=&c_g^2-gh+gh\sigma\left[\sigma+k_0h(1-\sigma^2)\right]\\
&+c_pk_0h(1-\sigma^2)\left(c_g-c_pk_0h\sigma\right)\overline{\Omega}
\end{aligned}\tag{A.512}$$

– Simplification du coefficient de $i\omega_0 D_\xi$:

$$K_4 = c_g\left(1+\sigma\overline{\Omega}\right) - \frac{g\sigma}{\omega_0\sigma}\left[\sigma + k_0h(1-\sigma^2)\right] + c_g + c_pk_0h(1-\sigma^2)\overline{\Omega} \tag{A.513}$$

$$K_4 = c_g(2+\sigma\overline{\Omega}) - \frac{c_p(1+\sigma\overline{\Omega})}{\sigma}\left[\sigma + k_0h(1-\sigma^2)\right] + c_pk_0h(1-\sigma^2)\overline{\Omega} \tag{A.514}$$

On reprend l'équation (A.368) :

$$\begin{aligned} c_g &= \frac{c_p}{\sigma} \times \frac{\left[\sigma + (1-\sigma^2)k_0h\right] + \sigma^2\overline{\Omega}}{2+\sigma\overline{\Omega}} \\ \Longleftrightarrow c_g(2+\sigma\overline{\Omega}) &= \frac{c_p}{\sigma}\left[\sigma + (1-\sigma^2)k_0h\right] + c_p\sigma\overline{\Omega} \end{aligned} \tag{A.515}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} K_4 = &\frac{c_p}{\sigma}\left[\sigma + (1-\sigma^2)k_0h\right] + c_p\sigma\overline{\Omega} - \frac{c_p(1+\sigma\overline{\Omega})}{\sigma}\left[\sigma + k_0h(1-\sigma^2)\right] \\ &+ c_pk_0h(1-\sigma^2)\overline{\Omega} \end{aligned} \tag{A.516}$$

Dans cette expression, le coefficient de k_0h est

$$(1-\sigma^2)\left[\frac{c_p}{\sigma} - \frac{c_p(1+\sigma\overline{\Omega})}{\sigma} + c_p\overline{\Omega}\right] = 0 \tag{A.517}$$

et les termes indépendants de k_0h donnent

$$c_p + c_p\sigma\overline{\Omega} - c_p(1+\sigma\overline{\Omega}) = 0 \tag{A.518}$$

Les termes en D_ξ s'annulent donc :

$$K_4 = 0 \tag{A.519}$$

– On s'occupe maintenant du coefficient du terme non linéaire :

$$\begin{aligned} P = &\frac{k_0^5c_p^2}{2g\sigma^3}(1+\sigma\overline{\Omega})\Big[6 - 3\sigma^2 + 2\sigma^4 + (15+2\sigma^4)\sigma\overline{\Omega} \\ &\qquad + (14+5\sigma^2)\sigma^2\overline{\Omega}^2 + (6+2\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3 + \sigma^4\overline{\Omega}^4\Big] \\ &- \frac{k_0^5c_p^2}{2g\sigma^3}\Big[-3 + 9\sigma^2 - 11\sigma^4 + 2\sigma^6 + (-6+15\sigma^2-11\sigma^4)\sigma\overline{\Omega} \\ &\qquad + (-4+8\sigma^2-2\sigma^4)\sigma^2\overline{\Omega}^2 + (-1+2\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3\Big] \end{aligned} \tag{A.520}$$

$$\begin{aligned} P = &\frac{k_0^5c_p^2}{2g\sigma^3}\Big[9 - 12\sigma^2 + 13\sigma^4 - 2\sigma^6 + (27-18\sigma^2+15\sigma^4)\sigma\overline{\Omega} \\ &\qquad + (33-3\sigma^2+4\sigma^4)\sigma^2\overline{\Omega}^2 + (21+5\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3 \\ &\qquad + (7+2\sigma^2)\sigma^4\overline{\Omega}^4 + \sigma^5\overline{\Omega}^5\Big] \end{aligned} \tag{A.521}$$

On peut donc écrire une première équation :

$$\begin{aligned}
&\frac{k_0^3 c_p^2}{g\sigma}\Big[(1+\sigma\overline{\Omega})^2\left(c_p+c_g+k_0hc_p\overline{\Omega}\right)+c_p(1+\sigma\overline{\Omega})\\
&\qquad-(c_g+c_pk_0h\overline{\Omega})\sigma^2\Big]\phi_{01\xi}A-i\omega_0(2+\sigma\overline{\Omega})A_\tau\\
&+\left\{c_g^2-gh+gh\sigma\left[\sigma+k_0h(1-\sigma^2)\right]+c_pk_0h(1-\sigma^2)\left(c_g-c_pk_0h\sigma\right)\overline{\Omega}\right\}A_{\xi\xi}\\
&=-\frac{k_0^5c_p^2}{2g\sigma^3}\Big[9-12\sigma^2+13\sigma^4-2\sigma^6+(27-18\sigma^2+15\sigma^4)\sigma\overline{\Omega}\\
&\qquad+(33-3\sigma^2+4\sigma^4)\sigma^2\overline{\Omega}^2+(21+5\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3\\
&\qquad+(7+2\sigma^2)\sigma^4\overline{\Omega}^4+\sigma^5\overline{\Omega}^5\Big]\left|A\right|^2A
\end{aligned}\tag{A.522}$$

On reprend l'équation (A.448) qui permet d'éliminer $\phi_{01\xi}$:

$$\phi_{01\xi}=\frac{gk_0\sigma\left(2+\sigma\overline{\Omega}\right)+k_0^2c_pc_g(1-\sigma^2)}{c_p\left[c_g\left(c_g+\Omega h\right)-gh\right]}\left|A\right|^2\tag{A.523}$$

On en déduit l'équation que nous appellerons vNLS :

$$\begin{aligned}
&-i\omega_0(2+\sigma\overline{\Omega})A_\tau\\
&+\left\{c_g^2-gh+gh\sigma\left[\sigma+k_0h(1-\sigma^2)\right]+c_pk_0h(1-\sigma^2)\left(c_g-c_pk_0h\sigma\right)\overline{\Omega}\right\}A_{\xi\xi}\\
&=-\frac{k_0^5c_p^2}{2g\sigma^3}\Big[9-12\sigma^2+13\sigma^4-2\sigma^6\\
&\qquad+(27-18\sigma^2+15\sigma^4)\sigma\overline{\Omega}+(33-3\sigma^2+4\sigma^4)\sigma^2\overline{\Omega}^2\\
&\qquad+(21+5\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3+(7+2\sigma^2)\sigma^4\overline{\Omega}^4+\sigma^5\overline{\Omega}^5\Big]\left|A\right|^2A\\
&-\frac{k_0^3c_p^2}{g\sigma}\Big[(1+\sigma\overline{\Omega})^2\left(c_p+c_g+k_0hc_p\overline{\Omega}\right)+c_p(1+\sigma\overline{\Omega})\\
&\qquad-(c_g+c_pk_0h\overline{\Omega})\sigma^2\Big]\frac{gk_0\sigma\left(2+\sigma\overline{\Omega}\right)+k_0^2c_pc_g(1-\sigma^2)}{c_p\left[c_g\left(c_g+k_0hc_p\overline{\Omega}\right)-gh\right]}\left|A\right|^2A
\end{aligned}\tag{A.524}$$

Cette écriture peut être simplifiée. Posons $\mu=k_0h$. On rappelle que $\sigma=\tanh(\mu)$. On note aussi $X=\sigma\overline{\Omega}$ et

$$\rho=\frac{c_g}{c_p}=\frac{(1-\sigma^2)\mu+\sigma\left(1+X\right)}{\sigma(2+X)}\tag{A.525}$$

On ne confondra évidemment pas ρ avec la masse volumique. Avec ces notations, l'équation

s'écrit :

$$
\begin{aligned}
& i\omega_0(2+X)A_\tau \\
& -\left\{c_g^2 - gh + gh\sigma\left[\sigma+\mu(1-\sigma^2)\right] + c_p\mu(1-\sigma^2)\left(c_g - c_p\mu\sigma\right)\overline{\Omega}\right\}A_{\xi\xi} \\
& = \frac{k_0^5 c_p^2}{2g\sigma^3}\Big[9 - 12\sigma^2 + 13\sigma^4 - 2\sigma^6 \\
& \qquad + (27 - 18\sigma^2 + 15\sigma^4)\sigma\overline{\Omega} + (33 - 3\sigma^2 + 4\sigma^4)\sigma^2\overline{\Omega}^2 \\
& \qquad + (21 + 5\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3 + (7 + 2\sigma^2)\sigma^4\overline{\Omega}^4 + \sigma^5\overline{\Omega}^5\Big]\left|A\right|^2 A \\
& + \frac{k_0^5 c_p^2}{2g\sigma^3} \times 2\sigma^2\Big[(1+X)^2\left(c_p + c_g + \mu c_p\overline{\Omega}\right) + c_p(1+X) \\
& \qquad - (c_g + c_p\mu\overline{\Omega})\sigma^2\Big]\frac{g\sigma\left(2+\sigma\overline{\Omega}\right) + k_0 c_p c_g(1-\sigma^2)}{k_0 c_p\left[c_g\left(c_g + k_0 h c_p\overline{\Omega}\right) - gh\right]}\left|A\right|^2 A
\end{aligned}
\tag{A.526}
$$

Le coefficient de A_τ ne peut pas beaucoup être simplifié.

Celui de $A_{\xi\xi}$ s'écrit

$$
- c_g^2 + gh - gh\sigma\left[\sigma+\mu(1-\sigma^2)\right] - c_p\mu(1-\sigma^2)\left(c_g - c_p\mu\sigma\right)\overline{\Omega} \tag{A.527}
$$

$$
= \frac{\omega_0^2}{k_0^2\sigma}\left\{\mu(1-\sigma^2)\left[1-\mu\sigma+(1-\rho)X\right] - \sigma\rho^2\right\} \tag{A.528}
$$

L'équation vNLS s'écrit donc

$$
iA_\tau + \frac{\omega_0}{k_0^2\sigma(2+X)}\left\{\mu(1-\sigma^2)\left[1-\mu\sigma+(1-\rho)X\right] - \sigma\rho^2\right\}A_{\xi\xi} = P\left|A\right|^2 A \tag{A.529}
$$

avec

$$
P = \frac{k_0^4 c_p}{2(2+X)g\sigma^3}(U+VW) = \frac{k_0^4(U+VW)}{2(1+X)(2+X)\omega_0\sigma^2} \tag{A.530}
$$

$$
\begin{aligned}
U = {} & 9 - 12\sigma^2 + 13\sigma^4 - 2\sigma^6 + (27 - 18\sigma^2 + 15\sigma^4)X + (33 - 3\sigma^2 + 4\sigma^4)X^2 \\
& + (21 + 5\sigma^2)X^3 + (7 + 2\sigma^2)X^4 + X^5
\end{aligned}
\tag{A.531}
$$

$$
V = \frac{1}{c_p}\left[(1+X)^2\left(c_p + c_g + \mu c_p\overline{\Omega}\right) + c_p(1+X) - (c_g + c_p\mu\overline{\Omega})\sigma^2\right] \tag{A.532}
$$

$$
W = \frac{2\sigma^2}{k_0}\frac{g\sigma\left(2+\sigma\overline{\Omega}\right) + k_0 c_p c_g(1-\sigma^2)}{c_g\left(c_g + k_0 h c_p\overline{\Omega}\right) - gh} \tag{A.533}
$$

On peut encore un peu simplifier :

$$
V = (1+X)^2\left(1+\rho+\mu\overline{\Omega}\right) + 1 + X - \rho\sigma^2 - \mu\sigma X \tag{A.534}
$$

$$
W = 2\sigma^3\frac{(1+X)(2+X) + \rho(1-\sigma^2)}{\sigma\rho\left(\rho+\mu\overline{\Omega}\right) - \mu(1+X)} \tag{A.535}
$$

On rassemble les morceaux :

$$
iA_\tau + \frac{\omega_0}{k_0^2\sigma(2+X)}\left\{\mu(1-\sigma^2)\left[1-\mu\sigma+(1-\rho)X\right] - \sigma\rho^2\right\}A_{\xi\xi} = P\left|A\right|^2 A \tag{A.536}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{k_0^4(U+VW)}{2\omega_0(1+X)(2+X)\sigma^2} \\
U &= 9 - 12\sigma^2 + 13\sigma^4 - 2\sigma^6 + (27 - 18\sigma^2 + 15\sigma^4)X + (33 - 3\sigma^2 + 4\sigma^4)X^2 \\
&\quad + (21 + 5\sigma^2)X^3 + (7 + 2\sigma^2)X^4 + X^5
\end{aligned} \tag{A.537}
$$

$$
V = (1+X)^2\left(1+\rho+\mu\overline{\Omega}\right) + 1 + X - \rho\sigma^2 - \mu\sigma X \tag{A.538}
$$

$$
W = 2\sigma^3 \frac{(1+X)(2+X) + \rho(1-\sigma^2)}{\sigma\rho\left(\rho+\mu\overline{\Omega}\right) - \mu(1+X)} \tag{A.539}
$$

On peut préférer une équation régissant la surface plutôt que le potentiel à la surface. Dans ce cas, on pose $a = i\frac{c_p}{\sigma}A$, L'équation s'écrit alors :

$$
ia_\tau + \frac{\omega_0}{k_0^2\sigma(2+X)}\left\{\mu(1-\sigma^2)\left[1-\mu\sigma+(1-\rho)X\right] - \sigma\rho^2\right\} a_{\xi\xi} = M\left|a\right|^2 a \tag{A.540}
$$

avec

$$
M = \frac{\omega_0 k_0^2(U+VW)}{8(1+X)(2+X)\sigma^4} \tag{A.541}
$$

A.5 Publication dans le journal « Physics of Fluids »

L'article suivant a été soumis au journal « Physics of Fluids ».

A nonlinear Schrödinger equation for water waves on finite depth with constant vorticity

R. Thomas,[1, a)] C. Kharif,[2] and M. Manna[3]

[1)] *Institut de Recherche sur les Phénomènes hors Équilibre,*

49, rue F. Joliot Curie B.P. 146 13384 Marseille Cedex 13 France

[2)] *École Centrale Marseille,*

38, rue Frédéric Joliot-Curie 13451 MARSEILLE Cedex 20

[3)] *Université de Montpellier II,*

Place Eugène Bataillon 34095 MONTPELLIER

(Dated: July 4, 2012)

A nonlinear Schrödinger equation for the envelope of two dimensional surface water waves on finite depth with non zero constant vorticity is derived, and the influence of this constant vorticity on the well known stability properties of weakly nonlinear wave packets is studied. It is demonstrated that vorticity modifies significantly the modulational instability properties of weakly nonlinear plane waves, namely the growth rate and bandwidth.

At third order we have shown the importance of the coupling between the mean flow induced by the modulation and the vorticity.

Furthermore, it is shown that these plane wave solutions may be linearly stable to modulational instability for an opposite shear current independently of the dimensionless parameter kh, where k and h are the carrier wavenumber and depth respectively.

Keywords: Gravity waves, vorticity, finite depth, nonlinear Schrödinger equation

[a)] Electronic mail: thomas@irphe.univ-mrs.fr

I. INTRODUCTION

Generally, in coastal and ocean waters, the velocity profiles are typically established by bottom friction and by surface wind stress and so are varying with depth. Currents generate shear at the bed of the sea or of a river. For example ebb and flood currents due to the tide may have an important effect on waves and wave packets. In any region where the wind is blowing there is a surface drift of the water and water waves are particularly sensitive to the velocity in the surface layer.

Surface water waves propagating steadily on a rotational current have been studied by many authors. Among them, one can cite Tsao[1], Dalrymple[2], Brevik[3], Simmen & Safmann[4], Teles da Silva & Peregrine[5], Kishida & Sobey[6], Pak & Chow[7], Constantin[8], etc. For a general description of the problem of waves on current, the reader is referred to reviews by Peregrine[9], Jonsson[10] and Thomas & Klopman[11]. On the contrary, the modulational instability or the Benjamin-Feir instability of progressive waves in the presence of vorticity has been poorly investigated. Using the method of multiple scales Johnson[12] examined the slow modulation of a harmonic wave moving over the surface of a two dimensional flow of arbitary vorticity. He derived a nonlinear Schrödinger equation (NLS equation) with coefficients that depend, in a complicated way, on the shear and gave the condition of linear stability of the nonlinear plane wave solution by writing that the product of the dispersive and nonlinear coefficients of the NLS equation is negative. He did not develop a detailed stability analysis as a function of the vorticity and depth. Oikawa, Chow & Benney[13] considered the instability properties of weakly nonlinear wave packets to three dimensional disturbances in the presence of shear. Their system of equations reduces to the familiar NLS equation when confining the evolution to be purely two dimensional. They illustrated their stability analysis for the case of a linear shear. Within the framework of deep water Li, Hui & Donelan[14] studied the side-band instability of a Stokes wave train in uniform velocity shear. The coefficient of the nonlinear term of the NLS equation they derived was erroneous as noted by Baumstein[15]. The latter author investigated the effect of piecewise-linear velocity profiles in water of infinite depth on side-band instability of a finite-amplitude gravity wave. The coefficients of the NLS equation he derived were computed numerically because he did not give their expression as a function of the vorticity and depth of the shear layer, explicitly. Instead, he calculated these coefficients for specific values of the vorticity

and depth of shear layer. Choi[16] considered the Benjamin-Feir instability of a modulated wave train in both positive and negative shear currents within the framework of the fully nonlinear water wave equations. For a fixed wave steepness, he compared his results with the irrotational case and found that the envelope of the modulated wave train grows faster in a positive shear current and slower in a negative shear current. Using the fully nonlinear equations, Okamura & Oikawa[17] investigated numerically some instability characteristics of two-dimensional finite amplitude surface waves on a linear shearing flow to three-dimensional infinitesimal rotational disturbances.

The present study deals with the modulational instability of one dimensional, periodic water waves propagating on a vertically uniform shear current. We assume that the shear current has been produced by external effects and that the fluid is inviscid. In section II a NLS equation (vor-NLS equation) for surface waves propagating on finite depth in the presence of non zero constant vorticity is derived by using the method of multiple scales. In subsection II C it is shown that the heuristic method to derive a NLS equation from a nonlinear dispersion relation is not valid when vorticity is present. This is a consequence of the coupling between the mean flow due to the modulation and the vorticity. Section III is devoted to a detailed stability analysis of a weakly nonlinear wave train as a function of the parameter kh where k is the carrier wavenumber and h the depth and of vorticity magnitude. Consequences on the Benjamin-Feir index are considered, too and a conclusion is given in section IV.

II. DERIVATION OF THE VOR-NLS EQUATION

The undisturbed flow is a weakly nonlinear Stokes wave train propagating steadily on a shear current that varies linearly in the vertical direction y. The wave train moves along the x-axis. The y-axis is oriented upward, and gravity downward. Naturally, $\mathbf{i}$ and $\mathbf{j}$ are unit vectors along Ox and Oy. When computing vector products, we shall also use $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$. The depth h is constant and the bed is located at $y = -h$. Let Ω be the magnitude of the shear. There is a potential $\varphi(x, y, t)$ such that the velocity writes

$$\mathbf{V} = \Omega y \mathbf{i} + \nabla \varphi(x, y, t) \tag{1}$$

since for a two dimensional flow of an inviscid and incompressible fluid with external forces deriving from a potential the Kelvin theorem states that the vorticity is conserved. The

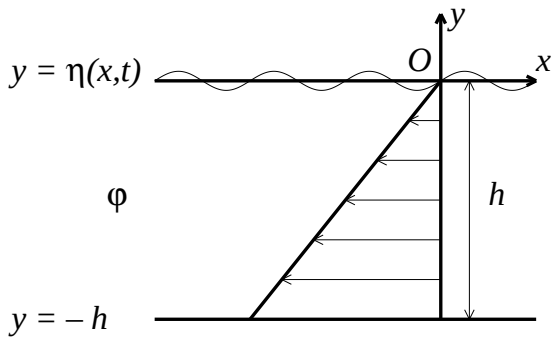

Figure 1. Shear flow with $\Omega > 0$
(waves propagating downstream)

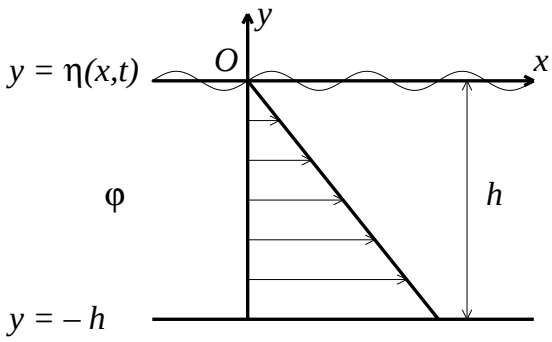

Figure 2. Shear flow with $\Omega < 0$
(waves propagating upstream)

variable t is the time and $-\Omega$ is the vorticity in all the fluid that can be negative or positive as illustrated in figures 1 and 2, respectively. Note that the reference frame is in uniform translation with regard to that of the laboratory. Hence, the velocity of the undisturbed flow vanishes at the surface.

A. Governing equations

As the perturbation is assumed potential, the incompressibility condition $\nabla.\vec{V} = 0$ implies that the velocity potential satisfies the Laplace's equation

$$\Delta\varphi = 0 \qquad -h < y < \eta(x,t) \tag{2}$$

The fluid is inviscid and so the Euler's equation writes :

$$\nabla(\varphi_t + \frac{1}{2}\mathbf{V}^2 + \frac{P}{\rho} + gy) = \mathbf{V} \wedge \omega \tag{3}$$

where ω is the vorticity vector : $\omega = -\Omega\mathbf{k}$.
We introduce the stream function ψ associated to the velocity potential through the Cauchy-Riemann relations :

$$\psi_y = \varphi_x, \qquad \psi_x = -\varphi_y \tag{4}$$

We notice that

$$\mathbf{V} \wedge \omega = \nabla(\frac{1}{2}\Omega^2 y^2 + \Omega\psi) \tag{5}$$

so, we can rewrite equation (3) as follows

$$\nabla(\varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_x^2 + \frac{1}{2}\varphi_y^2 + \Omega y\phi_x + \frac{P}{\rho} + gy - \Omega\psi) = 0. \tag{6}$$

This equation may be integrated once :

$$\varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_x^2 + \frac{1}{2}\varphi_y^2 + \Omega y \phi_x + \frac{P}{\rho} + gy - \Omega\psi = f(t) \tag{7}$$

We write this equation at the free surface of the fluid. The notation Φ means that φ is calculated on the free surface. The same convention is used for the derivatives of φ or ψ. This convention will be used in the whole paper.

The pressure on the free surface is the atmospheric pressure that can be considered as a constant, and incorporated in the RHS of equation (7).

It is possible to add to the velocity potential function a primitive of the right hand side $f(t)$ of this equation, so that this term vanishes. The equation becomes

$$\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_x^2 + \frac{1}{2}\Phi_y^2 + \Omega\eta\Phi_x + g\eta - \Omega\Psi = 0. \tag{8}$$

The kinematic condition is written as follows

$$\Phi_y = \eta_x(\Phi_x + \Omega\eta) + \eta_t \tag{9}$$

The governing equations are then

$$\nabla^2\varphi = 0, \qquad -h < y < \eta(x,t) \tag{10}$$

$$\varphi_y = 0, \qquad y = -h \tag{11}$$

$$\eta_t + (\Phi_x + \Omega\eta)\eta_x - \Phi_y = 0 \tag{12}$$

$$\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_x^2 + \frac{1}{2}\Phi_y^2 + \Omega\eta\Phi_x + g\eta - \Omega\Psi = 0 \tag{13}$$

To reduce the number of dependent variables, we derive the dynamic condition with respect to x and we use the Cauchy-Riemann conditions to eliminate the stream function. The result is

$$\begin{gathered}\Phi_{tx} + \Phi_{ty}\eta_x + \Phi_x(\Phi_{xx} + \Phi_{xy}\eta_x) + \Phi_y(\Phi_{xy} + \Phi_{yy}\eta_x) \\ +\Omega\eta_x\Phi_x + \Omega\eta(\Phi_{xx} + \Phi_{xy}\eta_x) + g\eta_x + \Omega(\Phi_y - \Phi_x\eta_x) = 0\end{gathered} \tag{14}$$

Equations (10)-(13) are invariant under the following transformations : $\varphi \to -\varphi$, $t \to -t$, $\Omega \to -\Omega$ and $\Psi \to -\Psi$. Hence, there is no loss of generality if the study is restricted to waves with positive phase speeds so long as both positive and negative values of Ω are considered.

B. The multiple scale analysis

We seek an asymptotic solution in the following form

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n \exp[in(kx - \omega t)], \qquad \eta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \eta_n \exp[in(kx - \omega t)] \tag{15}$$

where k is the wavenumber of the carrier and ω its frequency.
We assume $\varphi_{-n} = \varphi_n^*$ and $\eta_{-n} = \eta_n^*$ so that φ and η are real functions.
Then φ_n and η_n are written in perturbation series

$$\varphi_n = \sum_{j=n}^{+\infty} \epsilon^j \varphi_{nj}, \qquad \eta_n = \sum_{j=n}^{+\infty} \epsilon^j \eta_{nj} \tag{16}$$

where the small parameter ϵ is the wave steepness.
We assume $\varphi_{00} = 0$ and $\eta_{00} = 0$.

Following Davey & Stewartson[18], we consider a solution that is modulated on the slow time scale $\tau = \epsilon^2 t$ and slow space scale $\xi = \epsilon(x - c_g t)$, where c_g is the group velocity of the carrier wave.

The new system of governing equations is

$$\epsilon^2 \varphi_{\xi\xi} + \varphi_{yy} = 0, \qquad -h \le y \le \eta(\xi, \tau) \tag{17}$$

$$\varphi_y = 0, \qquad y = -h \tag{18}$$

$$\epsilon^2 \eta_\tau - \epsilon c_g \eta_\xi + \epsilon^2 \Phi_\xi \eta_\xi + \epsilon \Omega \eta \eta_\xi - \Phi_y = 0 \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &\epsilon^3 \Phi_{\xi\tau} - \epsilon^2 c_g \Phi_{\xi\xi} + \epsilon^3 \Phi_{y\tau} \eta_\xi - \epsilon^2 c_g \Phi_{\xi y} \eta_\xi + \epsilon^3 \Phi_\xi \Phi_{\xi\xi} \\ &\quad + \epsilon^3 \Phi_\xi \Phi_{\xi y} \eta_\xi + \epsilon \Phi_y \Phi_{\xi y} + \epsilon \Phi_y \Phi_{yy} \eta_\xi + \epsilon^2 \Omega \eta_\xi \Phi_\xi + \epsilon^2 \Omega \eta \Phi_{\xi\xi} \\ &\quad + \epsilon^2 \Omega \eta \Phi_{\xi y} \eta_\xi + \epsilon g \eta_\xi + \Omega \Phi_y - \epsilon^2 \Omega \Phi_\xi \eta_\xi = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Substituting the expansions for the potential φ into the Laplace equation and using the method of multiple scales we obtain

$$\varphi_{01yy} = 0 \tag{21}$$

$$-k^2\varphi_{11} + \varphi_{11yy} = 0 \tag{22}$$

$$\varphi_{02yy} = 0 \tag{23}$$

$$-k^2\varphi_{12} + 2ik\varphi_{11\xi} + \varphi_{12yy} = 0 \tag{24}$$

$$-4k^2\varphi_{22} + \varphi_{22yy} = 0 \tag{25}$$

$$\varphi_{01\xi\xi} + \varphi_{03yy} = 0 \tag{26}$$

$$-k^2\varphi_{13} + 2ik\varphi_{12\xi} + \varphi_{11\xi\xi} + \varphi_{13yy} = 0 \tag{27}$$

$$-4k^2\varphi_{23} + 4ik\varphi_{22\xi} + \varphi_{23yy} = 0 \tag{28}$$

$$-9k^2\varphi_{33} + \varphi_{33yy} = 0 \tag{29}$$

Solving these equations and considering the bottom conditions we obtain :

$$\varphi_{01y} = 0 \tag{30}$$

$$\varphi_{02y} = 0 \tag{31}$$

$$\varphi_{11} = A\frac{\cosh[k(y+h)]}{\cosh(kh)} \tag{32}$$

$$\varphi_{12} = D\frac{\cosh[k(y+h)]}{\cosh(kh)} - iA_\xi\frac{(y+h)\sinh[k(y+h)] - h\sigma\cosh[k(y+h)]}{\cosh(kh)} \tag{33}$$

$$\varphi_{22} = F\frac{\cosh[2k(y+h)]}{\cosh(2kh)} \tag{34}$$

$$\varphi_{03y} = -(y+h)\phi_{01\xi\xi} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{13} &= (h\sigma A_{\xi\xi} - iD_\xi)\frac{(y+h)\sinh[k(y+h)]}{\cosh(kh)} \\ &+ (B + \frac{h^2}{2}(1 - 2\tanh^2(kh))A_{\xi\xi} + ih\sigma D_\xi - A_{\xi\xi}\frac{(y+h)^2}{2})\frac{\cosh[k(y+h)]}{\cosh(kh)}\end{aligned} \tag{36}$$

The next tedious step is to use the relations obtained from the kinematic and dynamic conditions. Let us set $\overline{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega}$. Herein, it is important to emphasize that this parameter does not correspond to a dimensionless vorticity because the frequency ω depends on Ω. Furthermore, we set $X = \sigma\overline{\Omega}$, where $\sigma = \tanh(kh)$, because this term will occur many times in the following polynomial expressions.

- Terms in ϵE^0 : They give no supplementary information

- Terms in ϵE^1 : They give a linear dispersion relation

$$kc_p^2 + \sigma(c_p\Omega - g) = 0 \tag{37}$$

From this linear dispersion relation it is easy to demonstrate that we have always $X > -1$ or $\overline{\Omega} > -1/\sigma$.

We also get a relation between the fundamental modes of the velocity potential at the surface and free surface elevation :

$$\eta_{11} = i\frac{\sigma}{c_p}A = \frac{i\omega}{g}(1+X)A \tag{38}$$

where $c_p = \omega/k$.

From the linear dispersion relation the group velocity is :

$$c_g = \frac{c_p}{\sigma} \times \frac{(1-\sigma^2)kh + \sigma(1+X)}{2+X} \tag{39}$$

We recall that $X > -1$, so there is no singularity in this expression.

- Terms in $\epsilon^2 E^0$: They only give, after simplifications :

$$\eta_{01\xi} = 0 \tag{40}$$

- Terms in $\epsilon^2 E^1$: They give a system of two equations with two indeterminate coefficients η_{01} and η_{12} that can be found after some calculations :

$$\eta_{01} = 0 \tag{41}$$

and

$$\eta_{12} = \frac{1}{g}[c_g + h(1-\sigma^2)\Omega]A_\xi + \frac{i\omega}{g}(1+X)D \tag{42}$$

- Terms in $\epsilon^2 E^2$: They give a system of two linear equations with F and η_{22} as unknowns :

$$F = i\omega(1+\sigma^2)\frac{3(1-\sigma^2)+3X+X^2}{4\sigma^2 c_p^2}A^2 \tag{43}$$

and

$$\eta_{22} = -\frac{k}{2c_p^2\sigma}[3-\sigma^2+(3+\sigma^2)X+X^2]A^2 \tag{44}$$

- Terms in $\epsilon^3 E^0$: The first-order mean flow can be obtained from the following expression

$$[c_g(c_g + \Omega h) - gh]\varphi_{01\xi} = \left[\frac{g\sigma\omega}{c_p^2}(2+X) + k^2 c_g(1-\sigma^2)\right]|A|^2 \tag{45}$$

and

$$g\eta_{02} = (c_g + \Omega h)\phi_{01\xi} - k^2(1-\sigma^2)|A|^2 \tag{46}$$

- Terms in $\epsilon^3 E^1$: We derive two equations from which it is possible, after tedious computations, to eliminate η_{13}. The coefficients B and D_ξ vanish owing to the linear dispersion relation. The remaining terms are : A time derivative, a dispersive term, a nonlinear term and a term involving the mean flow that we can substitute by its expression taken from the other equation. Finally a nonlinear Schrödinger equation with vorticity is derived (the vor-NLS equation)

$$iA_\tau + LA_{\xi\xi} = P \mid A \mid^2 A \tag{47}$$

where

$$L = \frac{\omega}{k^2\sigma(2+X)}\mu(1-\sigma^2)[1-\mu\sigma+(1-\rho)X] - \sigma\rho^2 \tag{48}$$

$$P = \frac{k^4 c_p}{2(2+X)g\sigma^3}(U+VW) = \frac{k^4(U+VW)}{2(1+X)(2+X)\omega\sigma^2} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} U &= 9 - 12\sigma^2 + 13\sigma^4 - 2\sigma^6 + (27 - 18\sigma^2 + 15\sigma^4)X \\ &\quad + (33 - 3\sigma^2 + 4\sigma^4)X^2 + (21 + 5\sigma^2)X^3 + (7 + 2\sigma^2)X^4 + X^5 \end{aligned} \tag{50}$$

$$V = (1+X)^2(1+\rho+\mu\overline{\Omega}) + 1 + X - \rho\sigma^2 - \mu\sigma X \tag{51}$$

$$W = 2\sigma^3\frac{(1+X)(2+X)+\rho(1-\sigma^2)}{\sigma\rho(\rho+\mu\overline{\Omega}) - \mu(1+X)} \tag{52}$$

with

$$\mu = kh \tag{53}$$

$$\sigma = \tanh(\mu) \tag{54}$$

$$\rho = \frac{c_g}{c_p} \quad \text{(not to be confused with the density)} \tag{55}$$

The relation (38) permits to replace the velocity potential A by the elevation a.

$$ia_\tau + La_{\xi\xi} = M \mid a \mid^2 a \tag{56}$$

where a is the envelope of the surface elevation and

$$M = \frac{\omega k^2 (U + VW)}{8(1+X)(2+X)\sigma^4} \tag{57}$$

C. The case of infinite depth

Let us discuss what happens when depth goes to infinity in order to compare our results to those of Li *et al.*[14] or Baumstein[15]. Moreover, we shall show the importance of the coupling between the mean flow and vorticity at third order. At this order before deriving equation (47) the following coupled equations empasize the coupling between the mean flow $\phi_{01\xi}$ and vorticity $\overline{\Omega}$.

$$\begin{aligned}
&\frac{k^3 c_p^2}{g\sigma}\Big[(1+\sigma\overline{\Omega})^2\left(c_p + c_g + khc_p\overline{\Omega}\right) + c_p(1+\sigma\overline{\Omega}) \\
&\qquad - (c_g + c_p kh\overline{\Omega})\sigma^2\Big]\phi_{01\xi}A - i\omega(2+\sigma\overline{\Omega})A_\tau \\
&+ \left\{c_g^2 - gh + gh\sigma\left[\sigma + kh(1-\sigma^2)\right] + c_p kh(1-\sigma^2)\left(c_g - c_p kh\sigma\right)\overline{\Omega}\right\}A_{\xi\xi} \\
&= -\frac{k^5 c_p^2}{2g\sigma^3}\Big[9 - 12\sigma^2 + 13\sigma^4 - 2\sigma^6 + (27 - 18\sigma^2 + 15\sigma^4)\sigma\overline{\Omega} \\
&\qquad + (33 - 3\sigma^2 + 4\sigma^4)\sigma^2\overline{\Omega}^2 + (21 + 5\sigma^2)\sigma^3\overline{\Omega}^3 \\
&\qquad + (7 + 2\sigma^2)\sigma^4\overline{\Omega}^4 + \sigma^5\overline{\Omega}^5\Big]|A|^2 A
\end{aligned} \tag{58}$$

with

$$\phi_{01\xi} = \frac{gk\sigma\left(2+\sigma\overline{\Omega}\right) + k^2 c_p c_g(1-\sigma^2)}{c_p\left[c_g\left(c_g + \Omega h\right) - gh\right]}|A|^2 \tag{59}$$

The mean flow $\phi_{01\xi}$ verifies

$$\lim_{h\to+\infty} h\phi_{01\xi} = \frac{gk\left(2+\overline{\Omega}\right)}{c_p\left(\Omega c_g - g\right)}|A|^2 \tag{60}$$

The coefficient of the mean flow, induced by the modulation of the envelope, in equation (58) is of order $O(h)$ so that the product has a finite limit when $h \to \infty$. More precisely, the coefficient of $h\phi_{01\xi}A$ in equation (58) goes to

$$\frac{k^4 c_p^3 \overline{\Omega}^2}{g}\left(2+\overline{\Omega}\right) \tag{61}$$

when $h \to \infty$.

The remaining terms in equation (58) have also finite limits when $h \to \infty$. Finally, we get the following NLS equation valid for infinite depth and constant vorticity :

$$iA_\tau - \frac{\omega(1+\overline{\Omega})^2}{k^2(2+\overline{\Omega})^3}A_{\xi\xi} = -\frac{\omega k^2}{2c_p^2}\frac{\overline{\Omega}^2\left(2+\overline{\Omega}\right)^2}{1+\overline{\Omega}}|A|^2A + \frac{\omega k^2}{2c_p^2}\left(4+6\overline{\Omega}+6\overline{\Omega}^2+\overline{\Omega}^3\right)|A|^2A \quad (62)$$

This equation deals with A which is the value of the velocity potential for $y = 0$. Using equation (38), the NLS equation for the enveloppe of the wavetrain is :

$$ia_\tau - \frac{\omega(1+\overline{\Omega})^2}{k^2(2+\overline{\Omega})^3}a_{\xi\xi} = -\frac{\omega k^2}{8}\frac{\overline{\Omega}^2\left(2+\overline{\Omega}\right)^2}{1+\overline{\Omega}}|a|^2a + \frac{\omega k^2}{8}\left(4+6\overline{\Omega}+6\overline{\Omega}^2+\overline{\Omega}^3\right)|a|^2a \quad (63)$$

We have left deliberately two nonlinear terms. The first term of the RHS comes from the coupling between the mean flow and the vorticity while the second can be obtained heuristically from the nonlinear dispersion relation. When $\overline{\Omega}$ vanishes, this coupling disappears and the heuristic method can be applied. Note that Baumstein[15] and Li *et al.*[14] missed this coupling.

If we use the heuristic method to obtain the NLS equation from the nonlinear dispersion relation that was found by Simmen & Saffman[4], we should obtain only the second term of the RHS of (63). So, we have shown that the heuristic method is not valid in presence of vorticity, even in infinite depth.

Equation (63) is rewritten as follows :

$$ia_\tau - \frac{\omega(1+\overline{\Omega})^2}{k^2(2+\overline{\Omega})^3}a_{\xi\xi} = \frac{\omega k^2}{8(1+\overline{\Omega})}\left(4+10\overline{\Omega}+8\overline{\Omega}^2+3\overline{\Omega}^3\right)|a|^2a \quad (64)$$

The dispersive and nonlinear coefficients of equation (64) present two poles $\overline{\Omega} = -2$ and $\overline{\Omega} = -1$ and two zeros $\overline{\Omega} = -1$ and $\overline{\Omega} = -2/3$ respectively. Nevertheless, we recall that $\overline{\Omega} > -1$ and consequently in infinite depth $\overline{\Omega}$ will never be equal to -1 or -2.
For $\overline{\Omega} = -2/3$, the nonlinear coefficient vanishes and the vor-NLS equation is reduced to a linear dispersive equation (the Schrödinger equation)

$$ia_\tau - \frac{3}{64}a_{\xi\xi} = 0 \quad (65)$$

III. STABILITY ANALYSIS AND RESULTS

The equation (56) admits the following Stokes's wave solution

$$a = a_0 \exp(-iMa_0^2\tau) \quad (66)$$

We consider the following infinitesimal perturbation of this solution

$$a = a_0(1+\delta_a)\exp[i(\delta_\omega - Ma_0^2\tau)] \tag{67}$$

Substituting this expression in equation (56) and linearizing about the Stokes' wave solution, we obtain

$$i\frac{\partial\delta_a}{\partial\tau} - \frac{\partial\delta_\omega}{\partial\tau} + \delta_a M a_0^2 + L\frac{\partial^2\delta_a}{\partial\xi^2} + iL\frac{\partial^2\delta_\omega}{\partial\xi^2} - 3Ma_0^2\delta_a = 0 \tag{68}$$

Separating the real and imaginary parts, the previous equation transforms into the following system

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\delta_a}{\partial\tau} + L\dfrac{\partial^2\delta_\omega}{\partial\xi^2} = 0 \\ L\dfrac{\partial^2\delta_a}{\partial\xi^2} - 2Ma_0^2\delta_a - \dfrac{\partial\delta_\omega}{\partial\tau} = 0 \end{cases} \tag{69}$$

This is a system of linear differential equations with constant coefficients that admits the following solution

$$\begin{cases} \delta_a = \Delta_a \exp[i(l\xi - \lambda\tau)] \\ \delta_\omega = \Delta_\omega \exp[i(l\xi - \lambda\tau)] \end{cases} \tag{70}$$

Substituting this solution in the system of equations (69) gives

$$\begin{cases} i\lambda\Delta_a + \quad l^2 L\Delta_\omega = \quad 0 \\ (2Ma_0^2 + l^2L)\Delta_a - \quad i\lambda\Delta_\omega = \quad 0 \end{cases} \tag{71}$$

The necessary and sufficient condition of non trivial solutions is :

$$\lambda^2 = \ell^2 L(2Ma_0^2 + \ell^2 L) \tag{72}$$

Discussion : When $L(2Ma_0^2 + \ell^2 L) \geq 0$ there are two real solutions, the perturbation is bounded and the Stokes' wave solution is stable while when $L(2Ma_0^2 + l^2 L) < 0$ the perturbation is unbounded and the solution is unstable. Note that the latter condition implies that $LM < 0$.

We set $L = L_1\frac{\omega}{k^2}$ and $M = M_1\omega k^2$ so that L_1 and M_1 are dimensionless functions of kh and $\overline{\Omega}$ only. The growth rate of instability is then

$$\gamma = \frac{l\omega}{k^2}\sqrt{-2M_1L_1k^4a_0^2 - l^2L_1^2} \tag{73}$$

Its maximal value is obtained for $l = \sqrt{-\frac{M_1}{L_1}}a_0k^2$ and is :

$$\gamma_{\max} = M_1\omega(ka_0)^2 \tag{74}$$

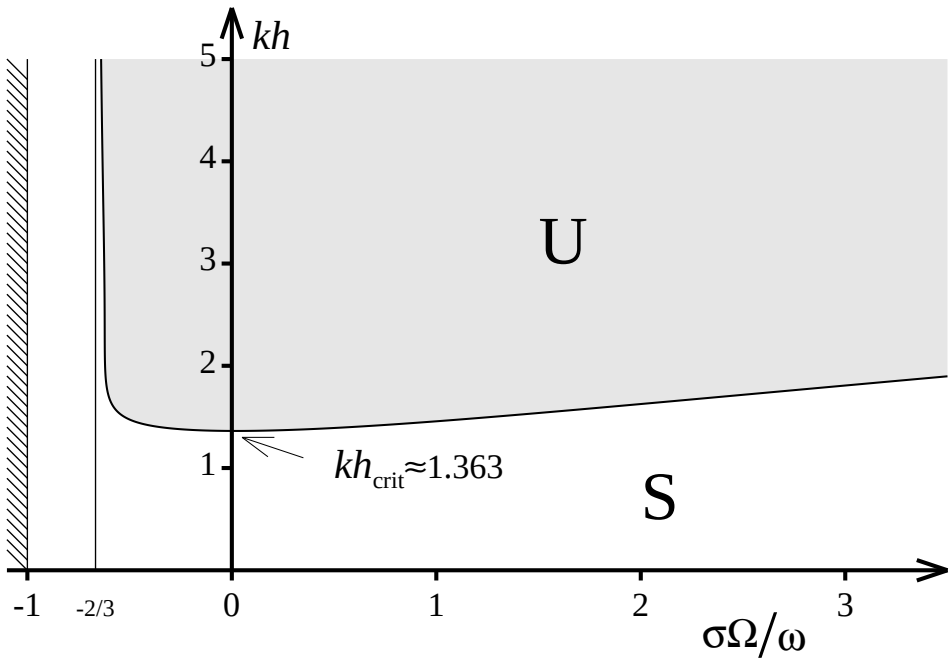

Figure 3. Stability diagram in the $(\overline{\Omega}, kh)$-plane. **S** : stable, **U** : unstable.

The instability domain is plotted in figure 3 as a function of the parameters $\overline{\Omega}$ and kh. As soon as $-1/\sigma < \overline{\Omega} \leq -2/3$ the waves become stable to modulational perturbations. Noting that $\overline{\Omega}$ is an increasing function of Ω, it is easy to show that $-1/\sigma < \overline{\Omega} \leq -2/3$ corresponds to $-\infty < \Omega \leq -2\sqrt{\frac{kg}{3}}$. Hence, there is a value $\Omega_c = -2\sqrt{\frac{kg}{3}}$ of Ω (depending on k) for which $\overline{\Omega} = -2/3$. For a constant vorticity corresponding to $\Omega \leq \Omega_c$ waves are linearly stable. In particular, Stokes' waves of wavenumber k propagating on a linear shear current satisfying $\Omega \leq -2\sqrt{\frac{kg}{3}}$ are stable to modulational instability whatever the value of the depth may be. There is a critical value kh_{crit} of the parameter kh, as shown in figure 3, above which instability prevails. For $\Omega = 0$ (no vorticity) this threshold has the well known value 1.363. The critical value of this threshold is reached very near $\Omega = 0$.

The linear stability of the Stokes wave solution is known to be controlled by the sign of the product LM of the coefficients of the vor-NLS equation (56). Let us consider this product when $kh \to \infty$

$$LM = -\frac{\omega^2}{8}\frac{(1+\overline{\Omega})(2+3\overline{\Omega})(2+2\overline{\Omega}+\overline{\Omega}^2)}{(2+\overline{\Omega})^3} \tag{75}$$

The condition $LM < 0$ corresponds to instability whereas $LM > 0$ corresponds to stability. In the domain $\overline{\Omega} > -1$, this product admits one simple root $\overline{\Omega} = -2/3$. For this value of $\overline{\Omega}$, LM changes sign and as a result there is an exchange of stability. Hence, in infinite depth

we can claim that there is no modulational instability when $-1 < \overline{\Omega} \leq -2/3$.

In order to illustrate the restabilisation of the modulational instability we consider a modulated wave packet that propagates initially without current in infinite depth and meets progressively a current with $\overline{\Omega} = -0.83$ which corresponds to a stable regime. The results of the numerical simulations of the vor-NLS equation are shown in figures 4 and 5. Temporal evolutions of the ratio $A_{\max}(t)/A_0$ are plotted without ($\overline{\Omega} = 0$) and with ($\overline{\Omega} = -0.83$) shear current where $A_{\max}(t)$ and A_0 are the maximum amplitudes of the modulated wave train at time t and time $t = 0$, respectively. In figure 4 the vorticity is initially set equal to zero. At $t = 200$ the value of $\overline{\Omega}$ is increased progressively up to -0.83 (that belongs to $]-1, -2/3]$) at $t = 600$ and remains equal to this value till the end of the numerical simulation. The carrier amplitude and carrier wavenumber are $kA_0 = 1/16$ and $k = 8$ respectively. The perturbation amplitude is one tenth of the carrier amplitude and its wavenumber is $\Delta k = l = 1$. Hence, the criterion for the occurrence of a simple recurrence is satisfied. For $\overline{\Omega} = 0$, one can observe the Fermi-Pasta-Ulam recurrence phenomenon (FPU) which corresponds to a series of modulation-demodulation cycles. When the shear current is introduced the Benjamin-Feir instability is strongly reduced. In figure 5, the same numerical simulation is conducted, but the wave steepness of the carrier wave is now $kA_0 = \frac{\sqrt{3}}{16} = 0.1083$ and so the wavenumber $2l$ corresponds to an unstable perturbation. In figure 5 is shown a double recurrence in the absence of shear current. The introduction of the vorticity modifies drastically this recurrence. When $\overline{\Omega}$ reaches the value -0.83, the modulational instability is removed. Note in the presence of vorticity the increase of the amplitude of the envelope of the wave packet near $t = 400$. At this time $\overline{\Omega}$ does not yet belong to the stable interval $]-1, -2/3]$.

A. Growth rate of instability

The ratio of the maximum growth rate of instability given by equation (74) to its value in the absence of shear is plotted in figure 6 as a function of $\overline{\Omega}$ for $\overline{\Omega} > -2/3$ and several values of kh. In infinite depth, the presence of vorticity increases or decreases the maximum growth rate of modulational instability, $\gamma_{\max}$, when $\overline{\Omega} > 0$ or $-2/3 < \overline{\Omega} < 0$, respectively. In finite depth and $-2/3 < \overline{\Omega} < 0$, the effect of vorticity is to reduce the maximum rate of growth whereas for $\overline{\Omega} > 0$ we observe an increase and then a decrease.

In figure 7 is shown the behavior of the normalized maximum growth rate as a function of

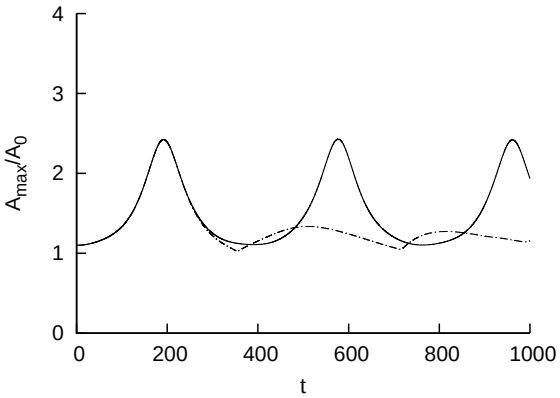

Figure 4. Temporal evolution of the normalized maximum amplitude of the envelope in the case of a simple recurrence for $kh = \infty$: $\overline{\Omega} = 0$ (solid line), $\overline{\Omega} = -0.83$ (dash-dotted line)

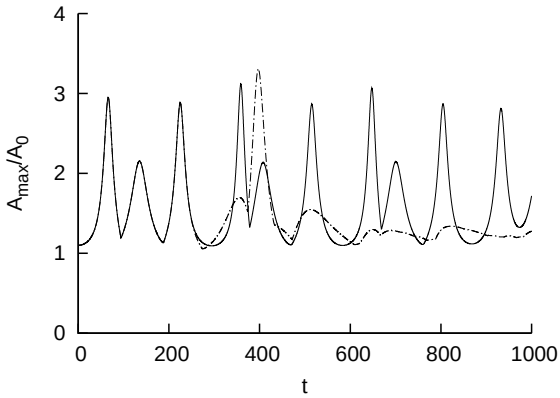

Figure 5. Temporal evolution of the normalized maximum amplitude of the envelope in the case of a double recurrence for $kh = \infty$: $\overline{\Omega} = 0$ (solid line), $\overline{\Omega} = -0.83$ (dash-dotted line)

kh for several values of $\overline{\Omega}$. Herein, the normalization is different from that used in figure 6. Figure 7 correspond to values of $\overline{\Omega}$ larger than $-2/3$. For $\overline{\Omega} \geq -2/3$, the critical value kh_{crit} associated to restabilisation is very close to 1.363 and corresponds to $\overline{\Omega} \approx 0$. In figure 7 for $\overline{\Omega} > -2/3$ the maximum growth rate of instability increases with kh greater than 1.363.

In figure 8 is plotted the normalized rate of growth of modulational instability as a function of the perturbation wavenumber ℓ for several values of $\overline{\Omega}$, within the framework of finite depth. Figure 9 corresponds to the case of infinite depth.

B. Bandwidth instability

In figure 10 is shown the ratio of the instability bandwidth $\Delta\ell$ to its value in the absence of shear current $\Delta\ell_0 = \Delta\ell(\overline{\Omega} = 0)$ as a function of $\overline{\Omega}$ for several values of kh. From equation (73), the instability bandwidth is $\sqrt{2\left|\frac{M_1}{L_1}\right|}k^2 a_0$. One can observe an increase of the band of instability followed by a decrease when $\overline{\Omega}$ increases, except when depth becomes infinite.

In table 1 is presented a comparison of our results with those of Oikawa *et al.* (1987) in the case of two dimensional flows for two values of kh and several values of the Froude number. Note that the Froude number, F, they used is exactly Ω. This comparison shows a quite good agreement between Oikawa *et al.* and present results.

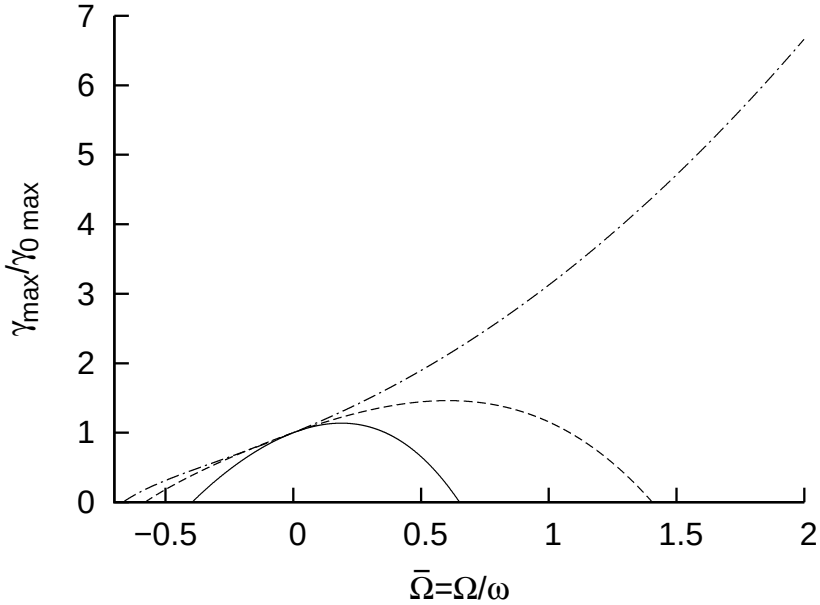

Figure 6. Normalized maximum growth rate as a function of $\overline{\Omega}$ for $kh = 1.40$ (solid line), $kh = 1.70$ (dashed line) and $kh = \infty$ (dash-dotted line). $\gamma_{0\max}$ is the maximum growth rate in the absence of shear current

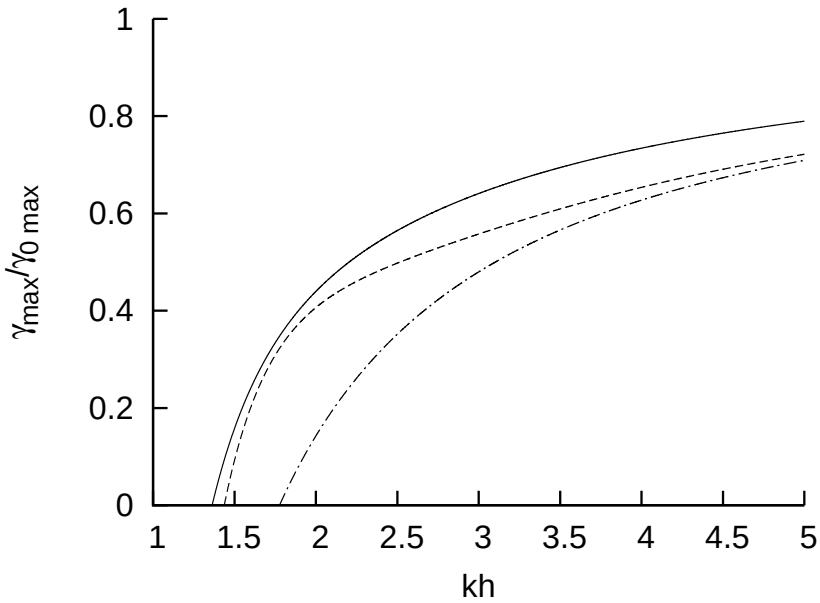

Figure 7. Normalized maximum growth rate as a function of kh for $\overline{\Omega} = 0$ (solid line), $\overline{\Omega} = -0.50$ (dashed line) and $\overline{\Omega} = 3.0$ (dash-dotted line). $\gamma_{0\max}$ is the maximum growth rate when $kh = \infty$

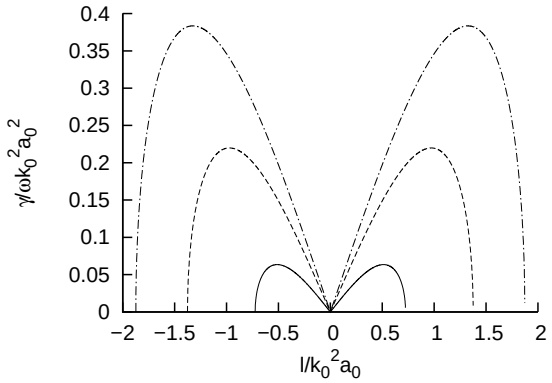

Figure 8. Normalized growth rate as a function of the perturbation wavenumber ℓ for $kh = 2.0$ and $\overline{\Omega} = -0.5$ (solid line), $\overline{\Omega} = 0.0$ (dashed line), $\overline{\Omega} = 0.5$ (dot-dashed line)

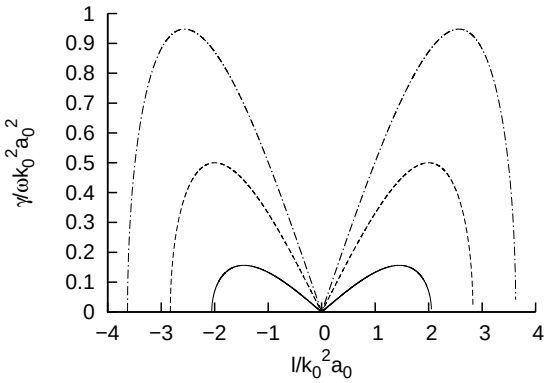

Figure 9. Normalized growth rate as a function of the perturbation wavenumber ℓ for $kh = \infty$ and $\overline{\Omega} = -0.5$ (solid line), $\overline{\Omega} = 0.0$ (dashed line), $\overline{\Omega} = 0.5$ (dot-dashed line)

	$F = 0.0$	$F = 0.25$	$F = 0.5$	$F = 1.0$	$F = 1.5$	$F = 2.0$
$kh = 1.5$	1.6/1.54	1.3/1.28	1.0/1.00	1.2/1.31	6.0/5.96	6.6/6.69
$kh = 2.0$	2.8/2.75	2.4/2.40	2.0/1.97	4.8/4.72	−/−	−/−

Table I. Comparison with results of Oikawa *et al.* (1987) : F is the Froude number. The first value is estimated from their figures whereas the second one corresponds to our computations with the vor-NLS equation

C. Benjamin-Feir index in the presence of vorticity : Application to rogue waves

Within the framework of random waves Janssen[19] introduced the concept of the Benjamin-Feir Index (BFI) which is the ratio of the mean square slope to the normalized width of the spectrum. When this parameter is larger than one, the random wave field is modulationally unstable, otherwise it is modulationally stable. From the NLS equation Onorato *et al.*[20] define the BFI as follows

$$BFI = \frac{a_0 k}{\Delta k/k}\sqrt{\left|\frac{M_1}{L_1}\right|} \tag{76}$$

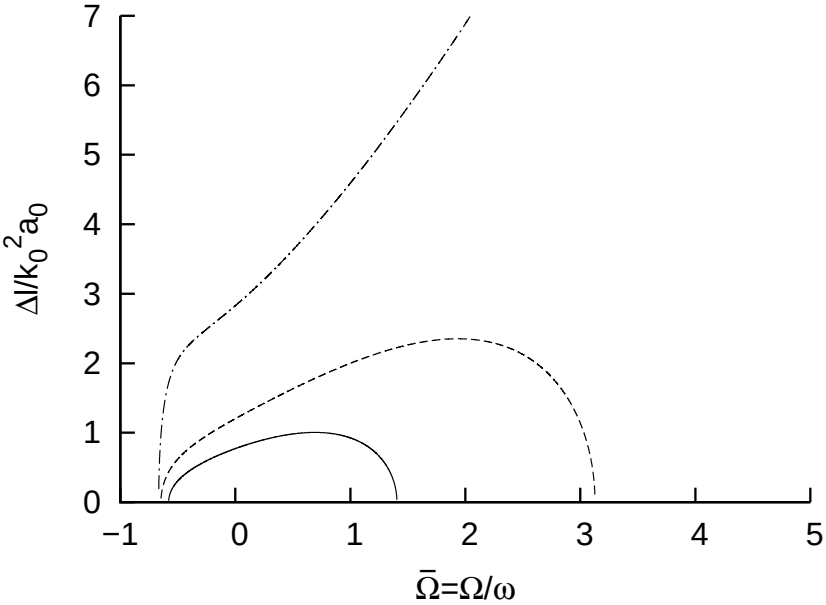

Figure 10. Normalized instability bandwidth as a function of $\overline{\Omega}$ for $kh = 1.5$ (solid line), $kh = 1.8$ (dashed line), $kh = \infty$ (dot-dashed line)

where Δk represents a typical spectral bandwidth.

In infinite depth the BFI without shear current is

$$BFI_0 = \frac{4a_0 k}{\Delta k/k} \tag{77}$$

Hence, the normalized BFI writes

$$\frac{BFI}{BFI_0} = \frac{1}{4}\sqrt{\left|\frac{M_1}{L_1}\right|} \tag{78}$$

The coefficients M_1 and L_1 depend on the depth and vorticity. Onorato *et al.*[20] considered the effect of the depth on the BFI. Herein, besides depth effect a particular attention is paid on the influence of the vorticity on the BFI. In order to measure the vorticity effect on the BFI, the ratio of the BFI in the presence of vorticity to its value in the absence of vorticity in infinite depth is plotted in figures 11 and 12. For fixed value of $\overline{\Omega}$ the BFI increases with depth. Our results for $\overline{\Omega} = 0$ are in full agreement with those of Onorato *et al.*[20] (the solid line in figure 11). Furthermore, it is shown for $\overline{\Omega} > 0$ and sufficiently deep water that the BFI increases with the magnitude of the vorticity. Therefore, we may expect that the number of rogue waves increases in the presence of shear currents co-flowing with the waves. For $\overline{\Omega} < 0$ the presence of vorticity decreases the BFI. For a more complete information

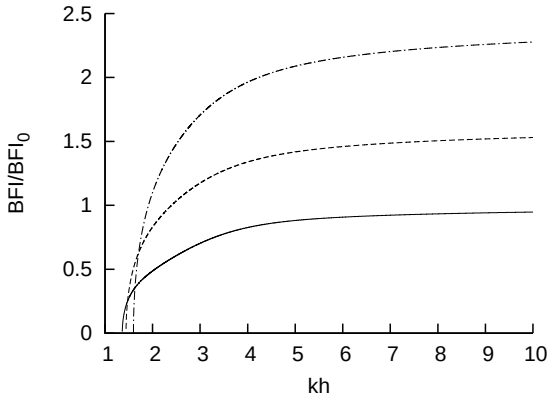

Figure 11. Normalized Benjamin Feir Index as a function of kh for several values of $\overline{\Omega}$: $\overline{\Omega} = 0.0$ (solid line), $\overline{\Omega} = 1.0$ (dashed line), $\overline{\Omega} = 2.0$ (dot-dashed line)

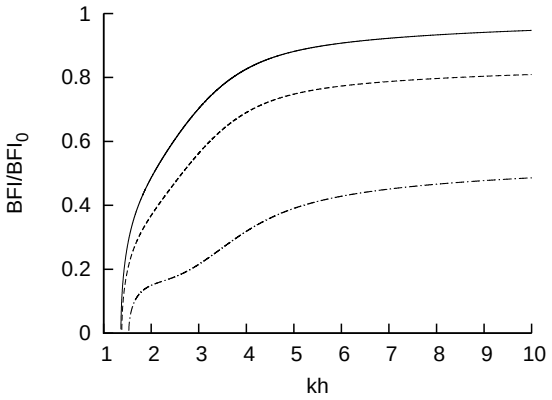

Figure 12. Normalized Benjamin Feir Index as a function of kh for several values of $\overline{\Omega}$: $\overline{\Omega} = 0.0$ (solid line), $\overline{\Omega} = -0.3$ (dashed line, $\overline{\Omega} = -0.6$ (dot-dashed line)

about rogue waves, one may consult Kharif, Pelinovsky and Slunyaev (2009)[21].

IV. CONCLUSION

Using the method of multiple scales, a $1D$ nonlinear Schrödinger equation has been derived in the presence of a shear current of non zero constant vorticity in arbitrary depth. When the vorticity vanishes, the classical NLS equation is found. A stability analysis has been developed and the results agree with those of Oikawa *et al.* (1987) in the case of $1D$ NLS equation. We found that linear shear current may modify significantly the linear stability properties of weakly nonlinear Stokes waves.

We have shown the importance of the coupling between the mean flow induced by the modulation and the vorticity. This coupling has been missed (or not emphasized) by previous authors.

Furthermore we have shown that the Benjamin-Feir instability can vanish in the presence of positive vorticity ($\overline{\Omega} < 0$) for any depth.

REFERENCES

[1]S. Tsao Behaviour of surface waves on a linearly varying current. *Tr. Mosk. Fiz. Tekh. Inst. Issled. Mekh. Prikl. Mat.*, **3**, 1959, 66–84

[2]R.A. Dalrymple A finite amplitude wave on a linear shear current. *J. Geophys. Res.*, **79**, 1974, 4498–4504

[3]I. Brevik Higher-order waves propagating on constant vorticity currents in deep water. *Coastal Engng*, **2**, 1979, 237–259

[4]J. A. Simmen & P. G. Saffman Steady deep-water waves on a linear shear current. *Stud. Appl. Math.*, **73**, 1985, 35–57

[5]A.F. Teles Da Silva & D.H. Peregrine Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity. *J. Fluid Mech.*, **195**, 1988, 281–302

[6]N. Kishida & R.J. Sobey Stokes theory for waves on linear shear current. *J. Engng. Mech.*, **114**, 1988, 1317–1334

[7]O.S. Pak & K.W. Chow Free surface waves on shear currents with non-uniform vorticity : third order solutions. *Fluid Dyn. Res.*, **41**, 2009, 1–13

[8]A. Constantin Two-dimensionality of gravity water flows of constant non zero vorticity beneath a surface wave train. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **30**, 2011, 12-16

[9]D.H. Peregrine Interaction of water waves and currents. *Adv. Appl. Mech.*, **16**, 1976, 9-117

[10]I.G. Jonsson Wave-current interactions. In *The Sea*, 1990, 65–120, J. Wiley and Sons

[11]G.P. Thomas & G. Klopman Wave-current interactions in the near shore region. In *Gravity waves in water of finite depth* (Ed. J.N. Hunt), 1997, 215–319, Computational Mechanics Publications

[12]R.S. Johnson On the modulation of water waves on shear flows. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, **347**, 1976, 537–546

[13]M. Oikawa, K. Chow & D. J. Benney The propagation of nonlinear wave packets in a shear flow with a free surface. *Stud. Appl. Math.*, **76**, 1987, 69–92

[14]Li, J. C., Hui, W. H. and Donelan, M. A.
Effects of velocity shear on the stability of surface deep water wave trains
Nonlinear Water Waves K. Horikawa and H. Maruo, Eds. Springer, 1987, 213–220

[15]Baumstein A. I.

Modulation of gravity waves with shear in water
Stud. Appl. Math., **100**, 1998, 365–390

[16]W. Choi Nonlinear surface waves interacting with a linear shear current. *Math. Comput. Simulation*, **80**, 2009, 101–110

[17]M. Okamura & M. Oikawa The linear stability of finite amplitude surface waves on a linear shearing flow. *J. Phys. Soc. Japan*, **58**, 1989, 2386–2396

[18]A. Davey & K. Stewartson On three-dimensional packets of surface waves. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, **338**, 1974, 101–110

[19]P.A.E.M. Janssen Nonlinear four-wave interactions and freak waves. *J. Phys. Oceanogr.*, **33**, 2003, 863–884

[20]M. Onorato, A. R. Osborne, M. Serio, L. Cavaleri, C. Brandini & C. T. Stansberg Extreme waves, modulational instability and second order theory : wave flume experiments on irregular waves. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **25**, 2006, 586–601

[21]C. Kharif, E. Pelinovsky and A. Slunyaev
Rogue waves in the ocean
Springer, 2009, ISBN 3540884181.

Bibliographie

[1] N. Akhmediev, V. M. Eleonskii and N. E. Kulagin
Generation of of a periodic sequence of picosecond pulses in an optical fiber. Exact solutions
Sov. Phys. JETP, **89**, 1985, 1542-1551.

[2] T. B. Benjamin and J. E. Feir
The disintegration of wavetrains in deep water Part 1. Theory
J. Fluid. Mech., **27**, 1967, 417-430.

[3] D. J. Benney and G. J. Roskes
Wave instabilities
Stud. Appl. Math., **48**, 1969, 377–385.

[4] T. B. Benjamin
Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems
Proc. R. Soc. Lond. A., **299**, 1967, 59–76.

[5] C. Brantenberg and I. Brevik
Higher order water waves in currents of uniform vorticity, in the presence of surface tension
Physica Scripta, **47**, 1993, 383–393.

[6] W. Choi
Nonlinear surface waves interacting with a linear shear current
Mathematics and Computers in Simulation, **Vol. 80 , Issue 1**, 2009, 29–36.

[7] A. Constantin
Two-dimensionality of gravity water flows of constant nonzero vorticity beneath a surface wave train
European Journal of mechanics B/Fluids, **30**, 2011, 12–16.

[8] S. D. Conte and J. W. Miles
On the Numerical Integration of the Orr-Sommerfeld Equation
Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, **Vol. 7, No. 4**, 1959, 361–366.

[9] R. A. Dalrymple
A Finite Amplitude Wave on a Linear Shear Current
Journal of Geophysical Research, **79**, 1974, 4498–4504.

[10] A. Davey and K. Stewartson
On three-dimensional packets of surface waves
Proc. R. Soc. Lond. A., **338**, 1974, 101–110.

[11] F. Dias, A.I. Dyachenko and V.E. Zakharov
Theory of weakly damped free-surface flows : a new formulation based on potential flow solutions
Physics Letters A **372**, 2008, 1297–1302.

[12] F. Dias and C. Kharif
Nonlinear gravity and capillary-gravity waves
Annu. Rev. Fluid Mech., **31**, 1999, 301-346.

[13] K. B. Dysthe
Note on a Modification to the Nonlinear Schrodinger Equation for Application to Deep Water Waves
Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences **369**, n°1736, 1979, 105–114.

[14] K. B. Dysthe and K. trulsen
Note on Breather Type Solutions of the NLS as Models for Freak Waves
Physica Scripta, **82**, 1999, 48–52.

[15] H. Hasimoto, H. Ono
Nonlinear Modulation of Gravity Waves
Journal of the Physical Society of Japan **33**, 1972, 805–811.

[16] H.L.F. Helmholtz
Über discontinuerliche Flüssigkeits-bewegungen
Monthly reports of the Royal Prussian Academy of Philosophy in Berlin **23**, 1868, 215–228.

[17] E. L. Ince
Ordinary Differential Equations
Dover, 558 pp. ISBN 978-0-486-60349-0

[18] A. Islas, C. M. Schober
Rogue waves, dissipation, and downshifting
Physica D : Nonlinear Phenomena, **240.12**, 2011, 1041–1054.

[19] Peter A. E. M. Janssen
On a fourth-order envelope equation for deep-water waves.
Journal of Fluid Mechanics, **126**, 1983, 1–11.

[20] Peter A. E. M. Janssen
Nonlinear Four-Wave Interactions and Freak Waves.
Journal of Physical Oceanography, **33**, 2003, 863–884.

[21] P. Janssen
The interaction of ocean waves and wind
Cambridge University Press, 2004, Ch. 3.

[22] H. Jeffreys
On the formation of waves by wind
Proc. Roy. Soc., **107**, 1924, 189–206.

[23] H. Jeffreys
On the formation of waves by wind II
Proc. Roy. Soc., **110**, 1925, 241–247.

[24] R. S. Johnson
On the modulation of water waves on shear flows
Proc. R. Soc. Lond., **347**, 1976, 537–546.

[25] C. Kharif, J.-P. Giovanangeli, J. Touboul, L. Grare and E. Pelinovsky
Influence of wind on extreme wave events : experimental and numerical approaches
J. Fluid. Mech., **594**, 2008, 209–247.

[26] C. Kharif, E. Pelinovsky and A. Slunyaev
Rogue waves in the ocean
Springer, 2009, ISBN 3540884181.

[27] C. Kharif, J. Touboul
Under which conditions the Benjamin-Feir instability may spawn an extreme wave event : A fully nonlinear approach
Eur. Phys. J. Special Topics, **185**, 2010, 159–168.

[28] W. T. Kelvin
Hydrokinetic solutions and observations
Philosophical Magazine, **42**, 1871, 362–377.

[29] H. Lamb
Hydrodynamics
Cambridge University Press, 1932.

[30] S. Leblanc
Amplification of nonlinear surface waves by wind
Phys. Fluids. **19**, 2007, art. n. 101705.

[31] T. Levi-Civita
Détermination rigoureuse des ondes permanentes périodiques d'ampleur finie. *Math. Ann.* **93**, (1925), 264–314.

[32] M. J. Lighthill
Contributions to the theory of waves in nonlinear dispersive systems. *J. Inst. Math. Appl.*, **1**, (1965), 269–306.

[33] Li, J. C., Hui, W. H. and Donelan, M. A.
Effects of velocity shear on the stability of surface deep water wave trains
Nonlinear Water Waves K. Horikawa and H. Maruo, Eds. Springer, 1987, 213–220

[34] E. Lo and C. C. Mei
A numerical study of water-wave modulation based on a higher-order nonlinear Schrödinger equation
Journal of Fluid Mechanics, **150**, 1985, 395–416.

[35] T. S. Lundgren
A free Surface Vortex Method with weak viscous effects
Mathematical Aspects of Vortex Dynamics, Caflisch, R. E., SIAM Proceedings Ch. 6 1989, 68–79

[36] Y. C. Ma
The perturbed plane-wave solutions of the cubic Schrödinger equation
Stud. Appl. Math., **60**, 1979, 43-58.

[37] J. W. Miles
On the generation of surface waves by shear flows
Journal of Fluid Mechanics, **3**, 1957, 185–204.

[38] J. W. Miles
On the stability of heterogeneous shear flows
Journal of Fluid Mechanics, **10**, 1961, 496–508.

[39] J. W. Miles
On the generation of surface waves by shear flows
Journal of Fluid Mechanics, **13**, 1962, 433–448.

[40] A. I. Nekrasov
On steady waves
Izv. Ivanovo-Voznesensk. Politekhn., 1921, 52–65.

[41] M. Oikawa, K. Chow and D. J. Benney
The propagation of nonlinear wave packets in a shear flow with a free surface
Stud. Appl. Math., **76**, 1987, 69–92.

[42] M. Onorato, A. R. Osborne, M. Serio, L. Cavaleri, C. Brandini and C. T. Stansberg
Extreme waves, modulational instability and second order theory : wave flume experiments on irregular waves
European Journal of Mechanics B/Fluids, **25**, 2006, 586–601.

[43] O. M. Phillips
On the generation of waves by turbulent wind
Journal of Fluid Mechanics, **2**, 1957, 417–445.

[44] Segur, Henderson, Carter, Hammack, Li, Pheiff, Socha
Stabilizing the Benjamin-Feir instability
Journal of Fluid Mechanics, **539**, 2005, 229–271.

[45] J. A. Simmen and P. G. Saffman
Steady deep-water waves on a linear shear current
Stud. Appl. Math., **73**, 1985, 35–57.

[46] J. R. Stocker and D. H. Peregrine
The current-modified nonlinear Schrödinger equation
Journal of Fluid Mechanics, **399**, 1999, 335–353.

[47] A. F. Teles da Silva and D. H. Peregrine
Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity
Journal of Fluid Mechanics, **195**, 1988, 281–302.

[48] J. Touboul, J. P. Giovanangeli, C. Kharif and E. Pelinovsky
Freak waves under the action of wind : experiments and simulations
European Journal of Mechanics - B/Fluids, **25**, 2006, 662–676.

[49] J. Touboul and C. Kharif
Nonlinear evolution of the modulational instability under weak forcing and damping
Nat. Hazards Earth Syst. Sci., **10**, 2010, 2589–2597

[50] V. E. Zakharov
Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid
Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, **9**, 1968, 190–194.

[51] V. E. Zakharov and L. A. Ostrovsky
Modulation instability : the beginning *Physica D*, **238**, 2009, 540–548.

Cette thèse étudie l'influence du vent sur l'instabilité modulationnelle.

Une première partie unifie les travaux de Segur et al. qui intègrent la dissipation et ceux de Leblanc qui prennent en compte le vent. Une équation non linéaire de Schrödinger est établie avec un terme additionnel linéaire résultant de la compétition entre le vent et la dissipation. La dissipation est traduite par le modèle de Lundgren et l'effet du vent se manifeste par l'intermédiaire de la pression atmosphérique selon le modèle de Miles. La profondeur est finie. Une étude de stabilité de l'onde de Stokes est détaillée, et des simulations numériques sont menées pour illustrer les résultats. Des expérimentations sont menées pour apporter une validation qualitative à ces travaux. Cette première partie a été validée par une publication au Journal of Fluid Mechanics (2010).

La deuxième partie étudie l'influence du vent sur l'instabilité modulationnelle par l'intermédiaire de la vorticité qu'il crée en surface. Le modèle est simplifié par l'hypothèse d'un écoulement unidirectionnel et d'une vorticité constante. La profondeur est encore supposée finie. Une équation non linéaire de Schrödinger est établie, qui prend en compte cette vorticité constante. La stabilité de l'onde de Stokes est alors étudiée en détail (diagramme d'instabilité en fonction de la vorticité et de la profondeur, bande d'instabilité, taux d'instabilité, etc.). Il est démontré qu'une vorticité négative, au delà d'un certain seuil, supprime l'instabilité modulationnelle indépendamment de la profondeur. Cette deuxième partie a été soumise pour publication au journal Physics of Fluids.

This thesis manuscript treats about the influence of wind on modulational instability.

A first part merges the works of Segur at al. which take into account viscous dissipation and Leblanc's work which deals with wind. A nonlinear Schrödinger equation is derived, with a forcing linear term which represents the result of the balance between wind forcing and dissipation. Visous dissipation is represented by Lundgren's model and the effect of wind is integrated into atmospheric pressure following Miles' model. Depth is finite. The stability of Stokes's waves is investigated, and numerical simulations are presented to illustrate the results. Some experimentations are done to confirm qualitatively these works. This first part was validated by a publication in the Journal of Fluid Mechanics (2010).

The second part studies the influence of the wind on the modulational instability by the intermediary of the vorticity whom it creates on the water at the surface. The model is simplified by the hypothesis of an unidirectional flow and a constant vorticity. The depth is still supposed finite. A non linear Schrödinger equation is derived, which takes into account this constant vorticity. The stability of the Stokes' wave is studied then in detail (instability diagram function of vorticity and depth, instability bandwidth, instability rate, etc.). It is demonstrated that a negative vorticity, beyond a certain threshold, eliminates the modulational instability independently of the depth. This second part has been submitted for publication in the journal Physics of Fluids.