



**HAL**  
open science

# Compactification d'espaces homogènes sphériques sur un corps quelconque

Mathieu Huruguen

► **To cite this version:**

Mathieu Huruguen. Compactification d'espaces homogènes sphériques sur un corps quelconque. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Grenoble, 2011. Français. NNT : 2011GRENM068 . tel-00716402

**HAL Id: tel-00716402**

**<https://theses.hal.science/tel-00716402>**

Submitted on 10 Jul 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Mathieu Huruguen**

Thèse dirigée par **Michel Brion**

préparée au sein de l'**Institut Fourier**  
et de l'**Ecole Doctorale MSTII**

# Compactification d'espaces homogènes sphériques sur un corps quelconque

Thèse soutenue publiquement le **29 novembre 2011**,  
devant le jury composé de :

**M. Michel BRION**

DR CNRS, Université Grenoble I, Directeur de thèse

**M. Antoine CHAMBERT-LOIR**

Professeur, Université de Rennes I, Rapporteur

**M. Philippe GILLE**

DR CNRS, Ecole Normale Supérieure de Paris, Rapporteur

**M. Laurent MANIVEL**

DR CNRS, Université Grenoble I, Examineur

**M. Emmanuel PEYRE**

Professeur, Université Grenoble I, Examineur

**M. Bertrand REMY**

Professeur, Université Lyon I, Examineur





*A mon Namour,*



## Table des matières

Remerciements	7
Introduction	9
Chapitre 1. Variétés toriques et plongements sphériques sur un corps quelconque	17
1. Classification des variétés toriques sur un corps quelconque	17
1.1. Rappel dans le cas déployé	17
1.2. Formes d'une variété torique déployée	20
1.3. Applications	24
2. Plongements sphériques sur un corps quelconque	27
2.1. Rappels sur les plongements sphériques	28
2.2. Quelques actions du groupe $\Gamma$	31
2.3. Formes d'un plongement	34
2.4. Applications	36
Chapitre 2. Variétés log homogènes en caractéristique positive	43
1. Rappels sur les variétés log homogènes en caractéristique nulle	43
2. Extension du théorème de structure locale	46
3. Compactifications régulières, fortement régulières et log homogènes	52
4. Compactifications log homogènes et points fixes	56
Chapitre 3. Exemples de compactifications de groupes réductifs	61
1. Rappels concernant quelques compactifications connues	61
1.1. Les plongements de l'espace homogène $G_0$ sous l'action de $G_0 \times G_0$	61
1.2. La procédure d'éclatements successifs	63
1.3. Le groupe projectif linéaire et les collinéations complètes	64
1.4. La compactification de Kausz du groupe linéaire	67
2. Le groupe linéaire et les collinéations croisées complètes	71
2.1. L'espace des collinéations croisées complètes entre $V$ et $W$	71
2.2. Les ensembles $X_i(k)$	72
2.3. Démonstration du théorème I	87
2.4. Démonstration du théorème II	97
3. Application de la méthode des points fixes	104
3.1. Extension de l'involution $\sigma$	106
3.2. Le cas « orthogonal pair »	110
3.3. Le cas « orthogonal impair »	116
3.4. Le cas « symplectique »	118
Bibliographie	121



## Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier mon directeur : Michel Brion. Merci Michel de m'avoir proposé un sujet de thèse aussi intéressant et de m'avoir enseigné les bases du métier de chercheur. Tu as su me guider et te rendre disponible même lorsque les fonctions que tu occupais prenaient une grande partie de ton temps. Ta sage expérience et ton intuition profonde m'ont plusieurs fois tiré d'affaire lorsque je me sentais perdu ou bloqué. Tu m'as aussi fait (et tu continues à me faire) profiter de tes nombreux contacts. Pour tout cela, je te suis très reconnaissant et je t'adresse un grand merci.

Je tiens ensuite à remercier Antoine Chambert-Loir et Philippe Gille d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Leurs remarques et commentaires ont été très précieux. Je remercie spécialement Philippe Gille qui est à l'origine de ma rencontre avec Michel. D'autre part, c'est un honneur pour moi de voir figurer Laurent Manivel, Emmanuel Peyre et Bertrand Rémy dans mon jury. Je les remercie pour la marque d'intérêt qu'ils portent à mon travail en acceptant d'en être membres.

Je voudrais aussi remercier les personnes qui m'ont offert l'opportunité de donner des exposés sur mes travaux pendant la thèse : Peter Fiebig, Philippe Gille, Friedrich Knop, Peter Littelmann, Ivan Pan, Alvaro Rittatore et Oksana Yakimova. Merci aussi à Stéphanie Cupit-Foutou et Johan Martens pour des discussions très enrichissantes sur des sujets connexes à celui de ma thèse.

Cette thèse a été préparée au sein de l'Institut Fourier et je tiens ici à remercier le personnel qui y fait un travail remarquable. Je pense aux secrétaires du premier étage qui ont su être indulgentes avec l'éclaté administratif que je peux être parfois, aux agents d'entretien et aux employés de la bibliothèque.

J'adresse un grand merci à l'ensemble des thésards de l'Institut. L'ambiance sympathique qui règne au labo a beaucoup compté dans le bon déroulement de ma thèse. Un clin d'oeil particulier à Alix, Jeff, Bashar, Thomas, Gunnar, Maxime, Simon, Aline et Marianne pour tous ces midis où la dose d'humour est venue compenser le niveau de la gastronomie et pour tous ces cafèves. Merci Max, Alvaro et Ximena de m'avoir accueilli lors de mon arrivée à Grenoble et de m'avoir fait découvrir quelques bons plans de la vie grenobloise. Un grand merci à Bashar et Thomas pour l'ambiance dans le bureau et pour de très nombreux conseils en Latex et en Tikz.

« Pour bien se remplir la tête, il est essentiel de savoir la vider ». Les amis, les moments de détente passés à vos côtés me sont très précieux. Du fond du coeur, merci Giuseppe, Yohan, Quentin, Anna, Amélie et Mika pour votre amitié, pour les week-ends, les voyages et pour les nombreuses soirées généralement bien alimentées en danses endiablées. Alix, vieux chameau, s'il est une chose dont je suis particulièrement content à Grenoble, c'est de t'avoir rencontré. Shorty, merci pour ces inoubliables échanges humoristiques entre voisins et les heures passées à étudier des séries américaines. Lol, ta culture mathématique m'impressionne toujours et je voudrais te remercier de me la faire partager, que ce soit lorsqu'on se retrouve en conf ou, à l'époque, autour d'une de tes excellentes omelettes à Montrouge. Un grand merci à « la famille » grenobloise grâce à laquelle ces trois années



sont passées si vite : Gab, mon pote de handball, Suzane Mainguet, Anne-Laure, Ccile, Marco mon petit boboon, Lara et Docteur Tony. Merci aussi à mes potes d'impro, à la Fonky Fourier Family, au gang du pizzasard, à mon co-grimpeur, à la mafia des orthos, à mes potes de l'ENS pour les midis au pot, à ceux habitant en Chartreuse, à Nantes, à Paris, à Montreuil, à Nevers et à Quimper.

Un grand merci à ma famille. Merci Papa et Merci Maman. Merci de m'avoir permis de faire ce qui me plaisait et ce, depuis tout petit. Vous êtes un exemple de ténacité et de persévérance que je m'efforce de suivre tous les jours. Merci Elisabeth et Gérard pour votre accueil dans une famille que je considère à présent comme la mienne. Merci Manu et Nabi, Zuzu et Simon, Ptiot, Guillaume et Zoï, Lilie et Lolo, Cécile et Anthony pour votre soutien constant et pour avoir mis au monde ces cinq petites boules d'énergie positive et ressourçante : Ilyan, Yanis, Livia, Hugo et Eas.

Ma Flo, ma fchérie, tu es toujours à mes côtés pour m'écouter, m'aider, m'encourager. Tu as vu grandir cette thèse depuis le début puisqu'on s'est installé ensemble lorsque je l'ai commencée. Avec toi, avec ton sourire, les petits soucis du quotidien s'effacent toujours pour laisser place à des moments de joie. Tu crois en moi plus que moi-même et tu me redonnes la foi lorsque je l'ai perdue. Ton optimisme à toute épreuve vient compenser mon penchant naturel au pessimisme, et ça me fait un bien fou ! Merci de partager ta vie avec moi.

## Introduction

Les travaux de plusieurs mathématiciens dont Krämer, Luna, Vust, Brion... ont amené à distinguer une classe particulière d'espaces homogènes, à savoir les espaces homogènes **sphériques**. Il s'agit des espaces homogènes  $\Omega$  sous l'action d'un groupe algébrique réductif connexe  $G$  dans lesquels un (et donc tout) sous-groupe de Borel possède une orbite dense. De manière équivalente, tout **plongement** de  $\Omega$  (c'est-à-dire toute  $G$ -variété normale contenant  $\Omega$  comme orbite ouverte) ne possède qu'un nombre fini d'orbites de  $G$ ; ou encore,  $\Omega = G/H$  et, pour tout  $G$ -module simple  $M$ , pour tout caractère  $\chi$  de  $H$ , le sous-espace de  $M$  formé des vecteurs propres pour  $H$  de poids  $\chi$  est de dimension plus petite que 1. A cause de cette dernière propriété, les espaces homogènes sphériques sont parfois appelés « sans multiplicité ».

La plupart des espaces homogènes les mieux compris (par exemple du point de vue de la classification de leurs plongements) sont sphériques : les tores, dont les plongements sont les variétés toriques, les variétés de drapeaux, les espaces symétriques, quotient de  $G$  par le sous-groupe des points fixes d'une involution, les espaces homogènes horosphériques, quotient de  $G$  par un sous-groupe contenant un groupe unipotent maximal de  $G$ , etc. Dans la littérature, les espaces homogènes sphériques et leurs plongements sont étudiés la plupart du temps sur un corps de base algébriquement clos.

*Cette thèse porte sur plusieurs aspects de l'étude des plongements d'espaces homogènes sphériques sur un corps quelconque.*

On y aborde la classification des plongements d'un espace homogène sphérique fixé, dans la lignée de Luna et Vust [LV83], l'étude des plongements log homogènes en caractéristique positive, généralisant certains résultats obtenus par Bien et Brion [BB96], et la construction effective de compactifications lisses et équivariantes de certains groupes réductifs, en s'inspirant de constructions classiques, comme celle de l'espace des collinéations complètes, due à Tyrell [Tyr56].

### Variétés toriques et plongements sphériques sur un corps quelconque

Depuis les travaux de Demazure ([Dem70]), Kempf, Knudson, Mumford et Saint-Donat ([KKMSD73]) ainsi que Miyake et Oda ([MO75]), on sait que les plongements équivariants d'un  $k$ -tore déployé  $T$ , c'est-à-dire les variétés toriques sous l'action de  $T$ , sont classifiés par des objets combinatoires, appelés **éventails**. Ces éventails sont des collections de cônes dans l'espace vectoriel  $V = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N$ , où  $N$  est le réseau des cocaractères de  $T$ , satisfaisant certaines propriétés (voir définition 1.4, chapitre 1).

Dans l'article influent [LV83], Luna et Vust développent une théorie générale des plongements des espaces homogènes définis sur un corps de base  $k$  algébriquement clos de caractéristique nulle. Leur théorie se précise notablement dans le cas sphérique, et aboutit à une classification complète des plongements d'un espace homogène sphérique en termes d'objets combinatoires baptisés **éventails coloriés** (voir définition 2.8, chapitre 1), qui

généralisent les éventails des variétés toriques. Comme l'a montré Knop dans [Kno91], la classification de Luna et Vust s'étend à la caractéristique positive, et s'énonce exactement de la même façon.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, on s'intéresse à la question suivante : que devient la classification de Demazure, Kempf... si l'on ne suppose plus  $T$  déployé, et la classification de Luna et Vust si l'on ne suppose plus le corps de base algébriquement clos ?

L'étude des plongements d'un  $k$ -tore (le corps  $k$  étant quelconque) non déployé est amorcée par Brylinski en 1979, qui cherche à construire une compactification projective lisse d'un tore non déployé (une **compactification** d'un espace homogène est un plongement complet de celui-ci). Soit  $T$  un  $k$ -tore, déployé par une extension galoisienne finie  $K$  de  $k$ . Le réseau  $N$  des cocaractères de  $T_K := T \times_k K$  est muni d'une action du groupe de Galois  $\Gamma := \text{Gal}(K|k)$ , et il n'est pas difficile de montrer que l'éventail d'un plongement  $X$  de  $T_K$  est stable par  $\Gamma$  si et seulement si l'action de  $\Gamma$  sur  $T_K$  s'étend à  $X$  (proposition 1.13, chapitre 1). En fait, un éventail dans  $V := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N$  stable par le groupe  $\Gamma$  correspond exactement à une variété torique sous l'action du tore  $T_K$  munie d'une donnée de descente étendant celle définie sur l'orbite ouverte  $T_K$ . Brylinski a montré dans [Bry79] comment construire un éventail dans  $V$  qui est projectif, lisse, et stable sous l'action du groupe  $\Gamma$ . La variété torique sous l'action de  $T_K$  correspondante est projective, lisse, et munie d'une action de  $\Gamma$  qui coïncide avec l'action naturelle sur l'orbite ouverte  $T_K$  : le quotient  $X/\Gamma$  est alors une compactification projective et lisse de  $T$ . Malheureusement, comme l'a remarqué Merkurjev en 1996, la preuve de Brylinski s'appuie sur un résultat erroné de [DPT80]. Il faudra attendre 2005 pour une preuve complète, par Colliot-Thélène, Harari et Skorobogatov [CTHS05] (d'après une suggestion de Künneman), du fait que l'on peut effectivement compactifier un tore quelconque de manière équivariante par une variété projective et lisse. Remarquons que ce résultat est une conséquence de la résolution équivariante des singularités (encore conjecturelle en caractéristique positive).

Récemment, Elizondo, Lima-Filho, Sottile et Teitler ([ELFST10]) ont également étudié les variétés toriques d'un point de vue arithmétique dans le but de donner la classification de celles-ci dans certains cas précis. Ils parviennent, en utilisant de la cohomologie galoisienne, à classifier entièrement les surfaces toriques lisses, ainsi que les  $k$ -formes toriques de l'espace projectif  $\mathbb{P}_K^n$ , si l'extension  $K$  de  $k$  est cyclique. Cependant, ils n'abordent pas le problème de descente, qui est le point central de notre travail. A notre connaissance, la classification des plongements d'un espace homogène sphérique défini sur un corps non algébriquement clos n'a encore jamais été abordée.

Notons  $\Gamma$  le groupe de Galois de  $K$  sur  $k$  dans le cas torique (où  $K$  est une extension galoisienne de  $k$  qui déploie le tore  $T$ ), et le groupe de Galois absolu de  $k$  dans le cas sphérique. Contrairement au cas torique, on ne dispose pas dans le cas sphérique d'une action évidente du groupe  $\Gamma$  sur l'ensemble des éventails coloriés. La première chose à faire est donc de définir une telle action (section 2.2, chapitre 1). Ensuite, en étendant les scalaires de  $k$  à  $K$  dans le cas torique, et de  $k$  à  $\bar{k}$  dans le cas sphérique, on peut associer à tout plongement de  $\Omega$  un éventail stable par  $\Gamma$  dans le cas torique, et un éventail colorié stable par  $\Gamma$  dans le cas sphérique. Dans le cas torique, si le tore  $T$  est de dimension 2, ou si l'on peut prendre l'extension  $K$  de degré 2 sur  $k$ , on obtient une classification des variétés toriques sous l'action de  $T$  (théorème 1.18, chapitre 1) :

**THÉORÈME 0.1.** *Supposons que  $\dim(T) = 2$  ou que  $[K : k] = 2$ . Alors les variétés toriques sous l'action de  $T$  sont classifiées par les éventails stables par  $\Gamma$  dans  $V$ .*

Ce théorème est aussi obtenu dans [ELFST10]. Dans le cas sphérique, on donne aussi plusieurs situations où les plongements de  $\Omega$  sont classifiés par les éventails coloriés stables

par  $\Gamma$ . On renvoie à la proposition 2.28, chapitre 1, pour un énoncé précis. En particulier, c'est le cas si l'espace homogène sphérique  $(\Omega, x_0)$  est déployé, au sens où il existe un sous-groupe de Borel déployé  $B$  de  $G$  tel que l'orbite  $Bx_0$  est ouverte :

**PROPOSITION 0.2.** *Supposons  $k$  parfait, et l'espace homogène sphérique  $\Omega$  déployé. Alors les plongements de  $\Omega$  correspondent aux éventails coloriés stables par le groupe  $\Gamma$ .*

Ensuite, on construit des exemples de plongements  $X$  dont l'éventail, ou l'éventail colorié, est stable par  $\Gamma$ , mais pour lesquels le quotient  $X/\Gamma$  n'existe pas comme variété. Dans le cas torique, si  $k$  possède une extension cubique, on a (théorème 1.24, chapitre 1) :

**THÉORÈME 0.3.** *Il existe un  $k$ -tore de dimension 3, déployé par une extension cubique  $K$  de  $k$ , et une variété torique sous l'action du tore déployé  $T_K$ , dont l'éventail associé est stable sous l'action de  $\Gamma$ , mais qui ne provient pas par extension des scalaires d'une variété torique sous l'action du tore  $T$ .*

Dans l'exemple du théorème 0.3, la dimension de  $T$  est minimale, et le degré de  $K$  sur  $k$  aussi, vu le théorème 0.1. Dans le cas sphérique, on construit un exemple plus « simple » que le précédent, à différents points de vue (par exemple, il est plus facile de montrer que le quotient par  $\Gamma$  n'existe pas). C'est le théorème 2.41, chapitre 1 :

**THÉORÈME 0.4.** *Il existe un espace homogène sphérique  $\Omega$  sous l'action du groupe semi-simple réel  $SU(2, 1)$ , et un plongement de  $\Omega \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  dont l'éventail colorié est stable sous l'action de  $\text{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ , mais qui ne provient pas par extension des scalaires d'un plongement de  $\Omega$ .*

Signalons pour finir que l'on obtient ainsi un exemple de variété torique sur laquelle se trouvent trois points n'appartenant pas à un même ouvert affine, et une variété sphérique sur laquelle se trouvent deux points n'appartenant pas à un même ouvert affine. Ce résultat est à mettre en relief avec le résultat suivant, dû à Włodarczyk ([Wł093]) : une variété lisse (resp. normale,  $\mathbb{Q}$ -factorielle) peut être plongée comme sous-variété fermée dans une variété torique lisse (resp. normale,  $\mathbb{Q}$ -factorielle) si et seulement si et seulement si tout couple de points est contenu dans un même ouvert affine. En particulier, on obtient ici un exemple de variété sphérique qui ne peut pas être plongée dans une variété torique.

### Variétés log homogènes en caractéristique positive

On suppose ici que le corps de base  $k$  est algébriquement clos. Etant donné un espace homogène  $\Omega$  sous l'action de  $G$ , la recherche d'une compactification de  $\Omega$  plus « belle » que toutes les autres est un ancien problème, puisant ses racines dans des problèmes de géométrie énumérative. Dans son travail fondamental [Sch79], Schubert, pour calculer le nombre (plutôt impressionnant) des 666 841 088 quadriques tangentes à neuf quadriques en position générale dans  $\mathbb{P}^3$ , utilise - de manière intuitive - une compactification équivariante  $X$  de l'espace symétrique  $\text{PSL}(4)/\text{PSO}(4)$  (c'est l'espace des quadriques lisses dans  $\mathbb{P}^3$ ) qui est projective et lisse, dont le bord est un diviseur à croisement normaux stricts et dans laquelle le groupe  $\text{PSL}(4)$  possède une seule orbite fermée : cette compactification est l'espace des quadriques complètes dans  $\mathbb{P}^3$ . Les conditions de tangence définissent des diviseurs sur  $X$ , et Schubert parvient à calculer le nombre d'intersection des neuf diviseurs définis par les neuf quadriques en position générale.

Le quinzième problème que Hilbert propose à la communauté mathématique lors de son fameux discours au congrès international des mathématiciens en 1900 est de justifier

proprement le « calcul de Schubert ». Il y a derrière cela deux problèmes : fonder sur des bases solides le calcul d'intersection sur les variétés lisses, et construire explicitement de « belles » compactifications d'espaces homogènes dont les points ont une interprétation géométrique. Dans le cas des quadriques complètes dans  $\mathbb{P}^3$ , le deuxième problème a été résolu par Semple ([Sem48],[Sem52]).

Il existe plusieurs catégories de « belles » compactifications de l'espace homogène  $\Omega$  sous l'action du groupe  $G$ . De manière générale, on s'attend à ce qu'une telle compactification concilie au mieux la combinatoire et la géométrie des adhérences d'orbites de  $G$ . Du côté combinatoire, on veut pouvoir décrire simplement les orbites figurant dans l'adhérence d'une orbite donnée. Du côté géométrique, on veut pouvoir dire facilement si l'adhérence d'une orbite est lisse, si deux adhérences d'orbites s'intersectent transversalement,...

De ce point de vue, les plus belles compactifications que l'on puisse concevoir sont les compactifications **magnifiques**, introduites par Luna ([Lun96]). Une compactification  $X$  de  $\Omega$  est dite magnifique si elle est lisse, si le bord  $D := X \setminus \Omega$  est un diviseur à croisements normaux stricts tel que les intersections partielles des composantes irréductibles de  $D$  soient les adhérences des orbites de  $G$  dans  $X$ , et si le groupe  $G$  n'a qu'une orbite fermée dans  $X$  (cette condition peut être vue comme une condition de « simplicité »). Luna a montré dans [Lun96] qu'un espace homogène possédant une compactification magnifique est nécessairement sphérique. La théorie des plongements de Luna et Vust montre de plus que, pour qu'un espace homogène sphérique  $\Omega$  admette une compactification magnifique, il faut qu'il ne possède qu'un nombre fini d'automorphismes  $G$ -équivariants. Dans ce cas, la compactification magnifique est unique et projective. Il suit aussi des travaux de Brion ([Bri90]), Knop ([Kno96]) et Losev ([Los09]) que, si le corps  $k$  est de caractéristique 0, et si l'espace homogène  $\Omega$  ne possède pas d'automorphismes  $G$ -équivariants non triviaux, alors il admet une compactification magnifique, dont on peut donner une construction explicite, en prenant l'adhérence de l'image du morphisme de Demazure (voir partie 1, chapitre 2).

Bifet, De Concini et Procesi ont défini les compactifications **régulières** de  $\Omega$ , lorsque le corps de base est  $\mathbb{C}$  (voir [BD90]). Une compactification  $X$  de  $\Omega$  est dite régulière si elle est lisse, si le bord  $D := X \setminus \Omega$  est un diviseur à croisements normaux stricts tel que les intersections partielles des composantes irréductibles de  $D$  soient les adhérences des orbites de  $G$  dans  $X$ , et si, pour tout point  $x \in X$ , le groupe d'isotropie  $G_x$  possède une orbite ouverte dans l'espace normal  $N_{Gx/X,x}$  à l'orbite  $Gx$  dans  $X$  au point  $x$ . Les deux premières conditions sont les mêmes que celles définissant une compactification magnifique. Par contre, une compactification régulière peut posséder de nombreuses orbites fermées. La dernière condition, de nature géométrique, permet toutefois de prouver que ces orbites fermées sont toutes isomorphes comme espaces homogènes sous l'action de  $G$ . Les compactifications lisses d'un tore sont toutes régulières (remarque qu'un tore ne possède pas de compactification magnifique). Dans [BD90], les auteurs calculent la cohomologie  $G$ -équivariante rationnelle des compactifications régulières d'un espace homogène  $\Omega$ . Ils montrent également que l'algèbre de cohomologie rationnelle d'une compactification régulière de  $\Omega$  est le quotient de son algèbre de cohomologie  $G$ -équivariante par une suite régulière. Dans le cas torique, ils retrouvent ainsi les résultats de Jurkiewicz-Danilov ([Dan78]). Par ailleurs, ils analysent en détail le cas symétrique, ce qui leur permet d'obtenir une présentation par générateurs et relations de l'algèbre de cohomologie rationnelle de la compactification magnifique d'un espace symétrique.

Les compactifications **log homogènes**, introduites par Brion dans [Bri07] (et présentes implicitement dans [BB96]), sont définies en termes purement géométriques. Une

compactification  $X$  de  $\Omega$  est dite log homogène si elle est lisse, si le bord  $D = X \setminus \Omega$  est un diviseur à croisements normaux stricts, et si l'action infinitésimale de  $\mathfrak{g}$  (l'algèbre de Lie de  $G$ ) dans  $X$  donne lieu à un morphisme surjectif de fibrés vectoriels

$$X \times \mathfrak{g} \rightarrow T_X(-\log D),$$

où  $T_X(-\log D)$  est le fibré tangent logarithmique (voir partie 1, chapitre 2). On dit aussi que la variété  $X$  est log homogène. Cette définition est donnée par Brion en caractéristique 0, mais fait tout autant sens en caractéristique positive. En caractéristique 0, une  $G$ -variété  $X$  est homogène si et seulement si l'action infinitésimale de  $\mathfrak{g}$  dans  $X$  donne lieu à un morphisme surjectif de fibrés vectoriels

$$X \times \mathfrak{g} \rightarrow T_X.$$

Les variétés log homogènes sont donc les analogues en géométrie logarithmique des variétés homogènes. Dans [BB96] (car  $k = 0$ ), les auteurs établissent, entre autre, qu'un espace homogène  $\Omega$  possède une compactification log homogène si et seulement si il est sphérique. Dans ce cas, ils prouvent qu'il est équivalent pour une compactification lisse de  $\Omega$  d'être sans couleur (voir section 2.1, chapitre 1), d'être régulière, ou d'être log homogène.

Dans le chapitre 2 de ce mémoire, on cherche à comprendre comment adapter les résultats de Bien et Brion en caractéristique positive. Le corps de base  $k$  étant maintenant supposé de caractéristique quelconque (et toujours algébriquement clos), on dit qu'une compactification  $X$  de  $\Omega$  est régulière si elle vérifie les propriétés de la définition de Bifet, De Concini et Procesi, et si, en plus, toutes les orbites de  $G$  dans  $X$  sont séparables. On dit que  $X$  est **fortement régulière** si elle est régulière, et si, pour tout  $x \in X$ , l'orbite ouverte de  $G_x$  dans l'espace normal  $N_{Gx/X,x}$  est séparable. On construit un exemple de compactification régulière non fortement régulière (voir partie 3, chapitre 2), montrant ainsi que ces deux notions sont bien distinctes. On montre alors le théorème suivant, qui relie entre elles les notions de compactification régulière, fortement régulière, sphérique sans couleur, et log homogène :

**THÉORÈME 0.5.** *Une compactification lisse  $X$  de  $\Omega$  est régulière si et seulement si elle est sphérique sans couleur et les orbites de  $G$  dans  $X$  sont toutes séparables. Elle est log homogène sous l'action de  $G$  si et seulement si elle est fortement régulière.*

L'ingrédient clé dans la preuve de ce résultat est le théorème de structure locale des variétés sphériques. Ce théorème fut d'abord établi en caractéristique 0 par Brion, Luna et Vust dans [BLV86], puis étendu (sous une forme légèrement plus faible) par Knop en caractéristique positive ([Kno93]). Sous l'hypothèse de séparabilité des orbites, on montre le théorème de structure locale sous sa forme forte (partie 2, chapitre 2), ce qui nous permet de prouver le théorème 0.5. On utilise aussi ce résultat de structure locale pour démontrer (proposition 3.6, chapitre 2) :

**PROPOSITION 0.6.** *Si l'espace homogène  $\Omega$  possède une compactification log homogène, alors, pour tout sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$ , l'orbite ouverte de  $B$  dans  $G$  est séparable.*

On ignore si cette condition est suffisante. Dans la dernière partie du chapitre 2, on s'intéresse au comportement des compactifications log homogènes lorsque l'on prend les points fixes par des automorphismes d'ordre fini. Plus précisément, soit  $X$  une compactification log homogène de  $\Omega$ , et  $\sigma$  un automorphisme de  $X$  d'ordre fini, premier à la caractéristique de  $k$ . On suppose que  $\sigma$  normalise  $G$  dans le groupe des automorphismes de  $X$ . Dans ce cas, on sait, d'après des résultats dûs à Richardson et Fogarty que le

groupe  $G' = (G^\sigma)^0$  est réductif, et que la variété des points fixes  $X^\sigma$  est lisse. On montre alors (proposition 4.4, chapitre 2) que :

**PROPOSITION 0.7.** *Toute composante connexe de  $X^\sigma$  intersectant  $\Omega$  est une variété log homogène sous l'action de  $G'$ .*

Cette proposition sera utilisée au chapitre suivant pour produire des compactifications log homogènes des groupes classiques  $\mathrm{SO}(n)$  et  $\mathrm{Sp}(n)$  à partir d'une compactification de  $\mathrm{GL}(n)$ .

### Exemples de compactifications de groupes réductifs

Dans le chapitre 3, on met l'accent sur la construction effective de compactifications log homogènes de groupes réductifs. L'espace homogène  $\Omega$  est donc un groupe réductif connexe  $G_0$ , et le groupe  $G$  est le groupe  $G_0 \times G_0$ , agissant sur  $\Omega$  par :

$$\forall (g, h) \in G_0 \times G_0, \quad \forall x \in G_0, \quad (g, h)x = gxh^{-1}.$$

Remarquons que l'espace homogène  $\Omega$  est sphérique, pour au moins deux raisons : d'une part à cause de la décomposition de Bruhat, et d'autre part parce que c'est un espace symétrique, le groupe d'isotropie de  $e \in \Omega(k)$  étant le sous-groupe  $\mathrm{diag}(G_0) \subseteq G_0 \times G_0$ , qui est bien le sous-groupe des points fixes d'une involution de  $G$ .

Dans le cas où  $G_0$  est semi-simple de type adjoint, l'espace homogène  $\Omega$  possède une compactification magnifique, d'après la théorie de Luna et Vust. Dans [DCP83], De Concini et Procesi ont montré comment construire celle-ci, lorsque le corps de base est algébriquement clos de caractéristique nulle. Ils ont montré que, pour tout poids dominant régulier  $\lambda$  de  $G_0$ , l'adhérence de l'image de l'immersion

$$\Omega \rightarrow \mathbb{P}(\mathrm{End}(M_\lambda)),$$

où  $M_\lambda$  est la représentation irréductible de  $G_0$  de plus haut poids  $\lambda$ , est la compactification magnifique de  $\Omega$ . Strickland ([Str87]) a montré comment généraliser cette construction en caractéristique positive, en remplaçant simplement  $M_\lambda$  par un  $G_0$ -module possédant les bonnes propriétés. De Concini et Procesi établissent aussi que l'adhérence du plongement de Demazure est la compactification magnifique de  $\Omega$ . Signalons enfin une construction due à Brion ([Bri03]), généralisant un résultat de Thaddeus ([Tha99]) : si  $P$  est un sous-groupe parabolique de  $G_0$  tel que  $G_0$  agit fidèlement dans l'espace homogène  $G_0/P$ , alors l'adhérence de l'orbite de la diagonale sous l'action de  $G_0 \times G_0$  dans le schéma de Hilbert  $\mathrm{Hilb}(G_0/P \times G_0/P)$  est la compactification magnifique de  $\Omega$  sous l'action de  $G$ .

Dans le cas où  $G_0$  est semi-simple, la théorie de Luna et Vust montre qu'il existe toujours une compactification canonique de  $\Omega$ . Celle-ci est projective, sans couleur, et ne possède qu'une seule orbite fermée. Elle est lisse si et seulement si, une fois fixé un sous-groupe de Borel de  $G_0$ , la chambre de Weyl de  $G_0$  est lisse par rapport au réseau des cocaractères de ce sous-groupe de Borel. Dans ce cas, il s'agit de la compactification magnifique de  $G_0$  (c'est le cas si  $G_0$  est de type adjoint, mais c'est le cas par exemple aussi pour le groupe  $\mathrm{Sp}(2n)$ , qui n'est pas de type adjoint). Pour la construire, on peut prendre la normalisation de la compactification magnifique du groupe adjoint associé  $G_{0,\mathrm{ad}}$  dans le corps  $k(G_0)$  (voir par exemple [Spr06]).

Dans le cas où  $G_0$  est réductif quelconque, il n'y a pas de compactification particulière qui émerge de la théorie de Luna et Vust. Motivé par la recherche d'une compactification de l'espace de module de fibrés vectoriels sur une courbe, Kausz a construit une compactification du groupe linéaire  $\mathrm{GL}(n)$ , qui s'avère être log homogène ([Kau00]). Plus

récemment, Martens et Thaddeus ([MT11]) ont introduit des objets, baptisés « framed principal  $G$ -bundles » sur des chaînes de courbes rationnelles. Ils associent à tout éventail dont le support est contenu dans la chambre de Weyl de  $G_0$  une condition de stabilité sur ces objets, et montrent que l'espace de module de ces objets stables est un champs séparé de type fini dont le champ d'inertie est fini. Ce champ possède donc un espace de module grossier, et ils montrent que cet espace est une compactification équivariante sans couleur de  $G_0$ .

Notre travail s'inscrit dans une approche classique du problème de compactification des groupes réductifs. Rappelons maintenant les constructions classiques de la compactification magnifique du groupe projectif linéaire, aussi appelée **l'espace des collinéations complètes**. Pour compactifier  $\Omega = \mathrm{PGL}(n)$ , on peut commencer par l'inclure dans l'espace projectif  $\mathbb{P}(\mathrm{M}(n))$  modelé sur l'espace vectoriel des matrices carrées de taille  $n$ . Cette compactification n'est pas magnifique, puisque le bord est le diviseur défini par le déterminant, qui n'est pas lisse dès que  $n$  est plus grand que 3. On pose alors  $X_0 = \mathbb{P}(\mathrm{M}(n))$ , puis, pour tout  $i$  entre 1 et  $n-1$ , on note  $X_i$  l'éclatement de  $X_{i-1}$  le long de l'adhérence du lieu des matrices de rang  $i$ . L'espace des collinéations complètes est la compactification  $X_{n-1}$ . Cet espace paramètre les collinéations complètes de  $k^n$  dans  $k^n$ , c'est-à-dire les suites d'applications linéaires

$$\gamma_0 : k^n \rightarrow k^n, \quad \gamma_1 : \mathrm{Ker} f_0 \rightarrow \mathrm{Coker} f_0, \quad \dots, \quad \gamma_l : \mathrm{Ker} f_{l-1} \rightarrow \mathrm{Coker} f_{l-1}$$

où chaque  $\gamma_i$  est non nulle et vue à homothétie près, et  $\gamma_l$  est de rang maximal. Tyrell [Tyr56] fut le premier à construire cet espace des collinéations complètes, mais d'une manière différente. Il travaille sur  $\mathbb{C}$ , et considère l'image de l'adhérence du morphisme suivant :

$$\Omega \rightarrow \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(\bigwedge^i \mathrm{M}(n)), \quad g \mapsto (g, \wedge^2 g, \dots, \wedge^{n-1} g).$$

Vainsencher ([Vai82]) donne la construction de l'espace des collinéations complètes par éclatements, comme on vient de le faire. De plus, il travaille au-dessus d'un schéma normal, de Cohen-Macaulay et de type fini sur un corps algébriquement clos, et donne une description de certains sous-foncteurs du foncteur des points de  $X_{n-1}$ . Les travaux de Laksov ([Lak88]) et Thorup-Kleiman ([TK88]) ont permis de décrire complètement le foncteur des points de  $X_{n-1}$ , autrement dit, de comprendre ce que l'on doit appeler une « famille de collinéations complètes ».

Le premier groupe que l'on va chercher à compactifier est le groupe linéaire. Comme dans le cas des collinéations complètes, on commence par définir une compactification naturelle de  $\mathrm{GL}(n)$ , puis on effectue des éclatements successifs bien choisis. Pour construire la compactification « naturelle » de  $\mathrm{GL}(n)$ , on saisit à nouveau une « opportunité de dimension », à savoir que le groupe  $\mathrm{GL}(n)$  et la grassmannienne  $\mathrm{Gr}(n, k^n \oplus k^n)$  ont la même dimension. Cela permet de voir cette grassmannienne comme une compactification de  $\Omega = \mathrm{GL}(n)$ , en associant à chaque élément son graphe. On peut vérifier aisément que cette compactification n'est pas log homogène. Les orbites de  $G$  dans  $\mathrm{Gr}(n, k^n \oplus k^n)$  sont décrites par

$$\Omega_{v,w} := \{F \in \mathrm{Gr}(n, k^n \oplus k^n), \quad \dim(F \cap (k^n \oplus 0)) = v \text{ et } \dim(F \cap (0 \oplus k^n)) = w\},$$

où  $v$  et  $w$  sont des entiers vérifiant  $v + w \leq n$ . On construit alors une suite de compactifications de  $\Omega$  de la manière suivante : on pose  $X_0 = \mathrm{Gr}(n, k^n \oplus k^n)$ , et, pour tout  $i$  entre 0 et  $n-1$ , on note  $X_{i+1}$  l'éclatement de  $X_i$  le long de l'adhérence de

$$\bigcup_{v+w=n-i} \Omega_{v,w}$$



dans  $X_i$ . Dans les sections 2.1 et 2.1 du chapitre 3, on montre que la compactification  $X_n$  est une compactification log homogène de  $GL(n)$ . Par ailleurs, on identifie également les points  $k$ -rationnels de  $X_n$  que l'on appelle **les collinéations croisées complètes** entre  $k^n \oplus 0$  et  $0 \oplus k^n$  (voir section 2.2, chapitre 3 pour une définition précise). On décrit aussi les orbites de  $G$  dans  $X_n$  et leurs adhérences.

L'espace des collinéations croisées complètes domine l'espace des collinéations complètes, ainsi que la compactification de Kausz du groupe linéaire mentionnée ci-dessus. Pour nous, cette compactification du groupe linéaire présente un intérêt double : tout d'abord, elle est obtenue à partir d'une compactification naturelle de  $\Omega$  par une procédure entièrement contrôlée ; ensuite, dans le cadre orthogonal ou symplectique, l'involution « dualité » s'étend, non seulement à  $X_n$ , mais aussi aux compactifications intermédiaires  $X_i$ . Cela permet, en prenant les points fixes par cette involution à chaque étape, de construire une compactification log homogène de  $SO(n)$  dans le cas orthogonal, et de  $Sp(n)$  dans le cas symplectique, qui est obtenue par une procédure d'éclatements successifs similaire à celle expliquée ci-dessus, à partir de la compactification naïve de  $SO(n)$  par une grassmannienne orthogonale dans le cas orthogonal, et de  $Sp(n)$  par une grassmannienne lagrangienne dans le cas symplectique. On obtient de cette manière les compactifications magnifiques de  $SO(2n+1)$  et de  $Sp(2n)$ , et une compactification log homogène de  $SO(2n)$  qui possède deux orbites fermées, ce qui est minimal car, comme la chambre de Weyl de  $SO(2n)$  n'est pas lisse, le groupe  $SO(2n)$  ne possède pas de compactification magnifique.

Si les techniques employées ici semblent pouvoir permettre la construction de compactifications log homogènes projectives et lisses d'autres groupes classiques, comme  $Spin(n)$ , ou de groupes exceptionnels, comme  $G_2$ , qui est le sous-groupe des points fixes d'un automorphisme d'ordre 3 de  $SO(7)$ , le cas du groupe spécial linéaire  $SL(n)$  semble nécessiter de nouvelles idées. Même d'un point de vue purement combinatoire - d'après les résultats mentionnés dans la section 1.1 du chapitre 3, les compactifications log homogènes d'un groupe réductif sont classifiées par les subdivisions lisses de sa chambre de Weyl - il est difficile d'exhiber une subdivision lisse de la chambre de Weyl de  $SL(n)$ . Une autre idée peut être de prendre l'adhérence de  $SL(n)$  dans une compactification log homogène de  $GL(n)$  : dans la compactification de Kausz ou dans l'espace des collinéations croisées complètes, l'adhérence de  $SL(n)$  n'est pas normale, et sa normalisation n'est pas lisse. On espère revenir sur ces questions ultérieurement.

Signalons pour finir que les résultats du chapitre 1 sont basés sur le preprint [Hur09], dont une version courte est à paraître dans *Journal of Algebra*.

## Variétés toriques et plongements sphériques sur un corps quelconque

Demazure a obtenu dans [Dem70] une classification des variétés toriques (lisses) sous l'action d'un tore déployé. Luna et Vust ont quant à eux décrit ([LV83]) la classification des plongements d'un espace homogène sphérique donné, sous l'hypothèse que le corps de base  $k$  est algébriquement clos de caractéristique nulle. Leur résultat a été étendu en caractéristique positive par Knop ([Kno91]). Dans les deux situations, la classification s'énonce en terme d'objets combinatoires, nommés « éventails » dans le premier cas, et « éventails colorés » dans le second. Dans ce chapitre, on étudie ce que deviennent ces classifications lorsqu'on ne suppose plus le tore déployé, dans le cas torique, ou le corps algébriquement clos dans le cas sphérique.

### 1. Classification des variétés toriques sur un corps quelconque

On se donne un corps quelconque  $k$ , et on fixe une clôture algébrique  $\bar{k}$ . On se donne aussi un tore  $T$  sur  $k$ , et on fixe une extension galoisienne finie  $K$  de  $k$  qui le déploie (voir [BT65]). Dans tout ce mémoire, une **variété** sur  $k$  est un  $k$ -schéma séparé, de type fini, géométriquement intègre. Pour nous, une variété torique sous l'action du tore  $T$  est définie de la manière suivante :

**DÉFINITION 1.1.** *Une **variété torique** sous l'action du tore  $T$  est une  $k$ -variété normale munie d'une action de  $T$  telle que le groupe  $T(\bar{k})$  a une orbite ouverte dans  $X(\bar{k})$  dans laquelle il agit avec des sous-groupes d'isotropie triviaux.*

D'après cette définition, une variété torique  $X$  sous l'action du tore  $T$  contient un espace homogène principal  $\Omega$  sous l'action de  $T$ .

**DÉFINITION 1.2.** *On dira que la variété torique  $X$  sous l'action de  $T$  est déployée si l'espace homogène principal  $\Omega$  est trivial, c'est-à-dire s'il possède un point  $k$ -rationnel.*

Un **morphisme** entre deux variétés toriques sous l'action du tore  $T$  est un morphisme  $T$ -équivariant (et défini sur  $k$ ). Le groupe des automorphismes d'une variété torique déployée est donc  $T(k)$ .

Dans cette partie, on donne la classification des variétés toriques sous l'action de  $T$  (à isomorphisme près). On commence par des rappels dans le cas où le tore  $T$  est déployé. Ensuite, on donne une condition nécessaire et suffisante portant sur l'éventail d'une variété torique sous l'action de  $T_K$  pour que celle-ci admette une  $k$ -forme. On se sert ensuite de cette condition pour donner quelques situations garantissant que les variétés toriques sous l'action de  $T$  sont classifiées par les éventails stables sous l'action du groupe de Galois, puis pour construire un exemple « minimal » de variété torique sous l'action de  $T_K$  qui n'admet aucune  $k$ -forme.

**1.1. Rappel dans le cas déployé.** On suppose dans cette section que le tore  $T$  est déployé. Les variétés toriques lisses ont été introduites par Demazure dans [Dem70]. La théorie a ensuite été développée indépendamment par Kempf, Knudson, Mumford

et Saint-Donat ([KKMSD73]) et par Miyake et Oda ([MO75]). On rappelle ici plusieurs résultats classiques concernant la classification des variétés toriques sous l'action de  $T$ , ainsi que le dictionnaire « variétés-éventails » donné par cette classification. Le lecteur pourra trouver les preuves des résultats énoncés ici dans l'article d'exposition [Dan78], où encore dans les livres [Ful93], [Oda88], [CLS].

Observons tout d'abord que, d'après le théorème 90 de Hilbert, tout espace homogène principal sous l'action du tore déployé  $T$  possède un point rationnel, si bien que toute variété torique sous l'action de  $T$  est déployée. On montre aussi :

**PROPOSITION 1.3.** *Soit  $X$  une variété torique sous l'action du tore  $T$ . Toute orbite de  $T(\bar{k})$  dans  $X(\bar{k})$  est définie sur  $k$ .*

Fixons une variété torique  $X$  sous l'action de  $T$ . D'après un théorème de Sumihiro ([Sum74]), il existe un recouvrement de la variété  $X$  par des ouverts affines stables sous l'action de  $T$ . En fait, on est capable de décrire explicitement un atlas de cartes affines  $T$ -stables. On note  $\Delta$  l'ensemble des orbites de  $T(\bar{k})$  dans  $X(\bar{k})$ . Pour tout point  $x \in X(\bar{k})$ , on note, pour simplifier,  $Tx$  l'orbite de  $x$  sous l'action de  $T(\bar{k})$ . Pour toute orbite  $\omega$  de  $T$  dans  $X$ , on note

$$X_\omega := \{x \in X(\bar{k}), \quad \omega \subseteq \overline{Tx}\}.$$

C'est un ouvert affine  $T$ -stable, défini sur  $k$ , et les  $(X_\omega)_{\omega \in \Delta}$  forment un recouvrement de  $X$ . En utilisant ce recouvrement, on associe maintenant à chaque orbite  $\omega \in \Delta$  un cône dans un certain espace vectoriel.

On note  $M$  le réseau des caractères du tore  $T$ , et  $N$  le réseau dual des sous-groupes à un paramètre (ou cocaractères). On note  $V$  le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ , et  $V^* = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  son dual. Un **cône** dans  $V$  est l'ensemble engendré par un nombre fini d'éléments de  $V$  par combinaisons linéaires à coefficients dans  $\mathbb{Q}^+$ . On dit qu'un cône est strictement convexe s'il ne contient aucune droite de  $V$ . Si  $\mathcal{C}$  est un cône dans  $V$ , on note  $\mathcal{C}^\vee \subseteq V^*$  son **dual**, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires sur  $V$  qui sont positives ou nulles sur  $\mathcal{C}$ . On note  $\text{Int}(\mathcal{C})$  son **intérieur relatif**, c'est-à-dire l'intérieur de  $\mathcal{C}$  dans le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel qu'il engendre. Une **face** du cône  $\mathcal{C}$  est l'intersection de  $\mathcal{C}$  et d'un hyperplan de  $V$  ne rencontrant pas l'intérieur relatif de  $\mathcal{C}$ .

Soit  $\omega \in \Delta$ , et  $x \in \Omega(k)$ . On montre alors que l'ensemble

$$\{\lambda \in N, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)x \text{ existe dans } X \text{ et appartient à } X_\omega\}$$

engendre un cône dans  $V$ , qui est strictement convexe, et qui ne dépend pas du choix de  $x \in \Omega(k)$ . On le note  $\mathcal{C}_\omega$ . Le dual de ce cône possède aussi une description très agréable, puisque

$$\mathcal{C}_\omega^\vee \cap M = \{\chi \in M, \text{ la fonction } \chi : \Omega \rightarrow \mathbb{A}^1, \quad tx \mapsto \chi(t) \text{ s'étend à } X_\omega\},$$

ou, autrement dit, le monoïde  $\mathcal{C}_\omega^\vee \cap M$  est le monoïde des poids de l'action du groupe  $T$  dans l'algèbre  $k[X_\omega]$ .

On obtient de cette façon une collection finie de cônes strictement convexes dans  $V$ , qui est un éventail, au sens suivant :

**DÉFINITION 1.4.** *Un **éventail** dans  $V$  est une collection finie  $\mathcal{E}$  de cônes dans  $V$ , strictement convexes, et vérifiant :*

- *Toute face d'un élément de  $\mathcal{E}$  appartient à  $\mathcal{E}$ .*
- *L'intersection de deux cônes de  $\mathcal{E}$  est une face de chacun des deux.*

Le théorème de classification des variétés toriques sous l'action du tore déployé  $T$  s'énonce alors ainsi :

THÉORÈME 1.5. *L'application  $X \mapsto \{\mathcal{C}_\omega, \omega \in \Delta\}$  est une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de variétés toriques sous l'action de  $T$  sur l'ensemble des éventails dans  $V$ .*

On note  $\mathcal{E}_X$  l'éventail associé à la variété torique  $X$ , et  $X_\mathcal{E}$  la variété torique associée à l'éventail  $\mathcal{E}$ . Pour construire la variété torique  $X_\mathcal{E}$  à partir de l'éventail  $\mathcal{E}$ , on recolle les ouverts affines  $(X_\mathcal{C} = \text{Spec}(k[\mathcal{C}^\vee \cap M]))_{\mathcal{C} \in \mathcal{E}}$  le long de leurs intersections :

$$X_\mathcal{C} \cap X_{\mathcal{C}'} = X_{\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'}$$

Le théorème de classification ci-dessus donne lieu à une correspondance « variétés toriques-éventails », qui permet de traduire des propriétés géométriques en propriétés combinatoires, et vice versa. Cette correspondance permet de faire explicitement de nombreux calculs sur les variétés toriques, et a fait de cette classe de variétés une classe « test » privilégiée en géométrie algébrique. On rappelle maintenant quelques propriétés du dictionnaire « variétés-éventails », dont on aura besoin par la suite.

Tout d'abord, la combinatoire des orbites de  $T$  dans  $X$  est entièrement codée dans l'éventail  $\mathcal{E}_X$ . En effet, l'ensemble  $\Delta$  des orbites de  $T$  dans  $X$  est muni d'un ordre (partiel) défini par :

$$\forall \omega, \omega' \in \Delta, \quad \omega \geq \omega' \iff \omega' \subseteq \bar{\omega},$$

et l'application  $\Delta \rightarrow \mathcal{E}_X, \omega \mapsto \mathcal{C}_\omega$  est une bijection décroissante d'ensembles ordonnés, l'ordre sur  $\mathcal{E}_X$  étant simplement donné par l'inclusion.

La variété torique  $X$  est affine si et seulement s'il n'y a qu'un cône maximal dans l'éventail  $\mathcal{E}_X$ , c'est-à-dire une seule orbite fermée de  $T$  dans  $X$ . Elle est lisse si et seulement si tout cône apparaissant dans l'éventail  $\mathcal{E}_X$  est **lisse**, c'est-à-dire est engendré par une partie d'une base du réseau  $N$ . La variété  $X$  est complète si et seulement si le **support** de l'éventail  $\mathcal{E}_X$ , c'est-à-dire la réunion des cônes  $\gamma$  figurant, est égal à  $V$  tout entier. On a aussi le critère de quasi-projectivité suivant :

PROPOSITION 1.6. *La variété torique  $X$  sous l'action de  $T$  est quasi-projective si et seulement si il existe une **fonction linéaire par morceaux et strictement convexe** sur  $\mathcal{E}_X$ , c'est-à-dire une famille  $(l_\mathcal{C})_{\mathcal{C} \in \mathcal{E}_X}$  de formes linéaires sur  $V$  vérifiant :*

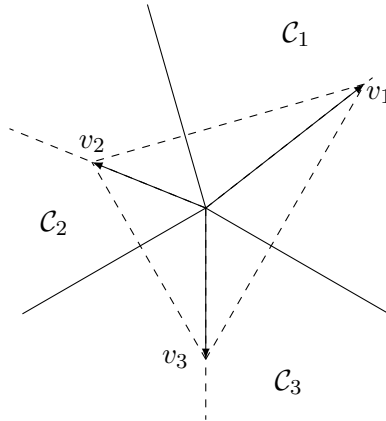
- $\forall \mathcal{C}, \mathcal{C}' \in \mathcal{E}, \quad l_\mathcal{C} = l_{\mathcal{C}'} \text{ sur } \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ .
- *pour tous cônes maximaux  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  dans  $\mathcal{E}$ , on a*

$$\forall x \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}', \quad l_\mathcal{C}(x) > l_{\mathcal{C}'}(x).$$

On dira que l'éventail  $\mathcal{E}$  est lisse, complet, quasi-projectif, projectif,... si la variété torique correspondante  $X_\mathcal{E}$  l'est.

Tout éventail dans un espace vectoriel de dimension 2 est quasi-projectif, autrement dit toute surface torique est quasi-projective. En effet, il suffit de montrer que tout éventail complet est projectif, on suppose donc l'éventail  $\mathcal{E}$  complet. Pour chaque cône  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{E}$ , on note  $v_\mathcal{C}$  le vecteur situé sur la bissectrice de  $\mathcal{C}$ , intersection de cette bissectrice et de la perpendiculaire à l'une des deux arêtes de  $\mathcal{C}$  au point de cette arête situé à une distance 1 de l'origine. On pose alors  $l_\mathcal{C}(x) = \langle v_\mathcal{C}, x \rangle$ . On vérifie facilement que les conditions

ci-dessus sont remplies.



Si l'éventail  $\mathcal{E}$  ne possède que deux cônes maximaux, alors il est quasi-projectif. En effet soit  $l \in V^*$  positive sur le premier cône maximal  $\mathcal{C}_1$ , et négative sur le deuxième  $\mathcal{C}_2$ . En posant  $l_{\mathcal{C}_1} = l$  et  $l_{\mathcal{C}_2} = 0$  on obtient le résultat. Ceci redémontre la partie « facile » du théorème de Włodarczyk ([Wł93]) mentionné dans l'introduction, à savoir que, sur une variété torique, deux points quelconques se trouvent toujours dans un même ouvert affine.

**1.2. Formes d'une variété torique déployée.** Dans cette section, on revient au cas général, le tore  $T$  n'est plus nécessairement déployé. On fixe une extension galoisienne finie  $K$  de  $k$ , de groupe de Galois  $\Gamma$ , telle que le tore  $T_K := T \times_k K$  est déployé. Les notations  $M, N, \dots$  réfèrent aux objets correspondants associés au tore déployé  $T_K$  dans la section 1.1. Ces objets sont équipés d'une action naturelle du groupe  $\Gamma$ . On se donne une variété torique  $X$  sous l'action du tore  $T_K$ . Dans cette section, on se pose la question suivante :

QUESTION 1.7. *Est-ce que  $X$  admet une  $k$ -forme ?*

Par une  $k$ -forme de  $X$ , on entend une variété torique  $Y$  sous l'action de  $T$ , telle que  $Y \times_k K \simeq X$  comme  $T_K$  variétés. On note  $F_X$  l'ensemble des classes d'isomorphismes de  $k$ -formes de  $X$ . On note  $\Omega$  l'orbite ouverte de  $T_K$  dans  $X$ , et on définit  $F_\Omega$  de la même façon. Par définition,  $F_\Omega$  est donc l'ensemble des espaces homogènes principaux sous l'action de  $T$  qui deviennent triviaux sous l'action de  $T_K$ . En envoyant une  $k$ -forme de  $X$  sur l'espace homogène principal sous  $T$  qu'elle contient, on obtient une application naturelle :

$$\delta_X : F_X \rightarrow F_\Omega$$

QUESTION 1.8. *Que peut-on dire de l'application  $\delta_X$  ?*

Le théorème 1.15 ci-dessous donne les réponses aux questions 1.7 et 1.8. On va obtenir un critère portant sur l'éventail  $\mathcal{E}_X$  pour que l'ensemble  $F_X$  soit non vide, puis montrer que, si ce critère est satisfait, l'application  $\delta_X$  est une bijection.

Récemment, Elizondo, Lima-Filho, Sottile et Teitler ([ELFST10]) ont aussi abordé l'étude des variétés toriques d'un point de vue arithmétique. En utilisant de la cohomologie galoisienne, ils parviennent à classifier les  $k$ -formes toriques de  $\mathbb{P}_K^n$  si l'extension  $K$  de  $k$  est cyclique, et les surfaces toriques lisses en toute généralité. Cependant, ils n'abordent pas le problème de descente résolu ci-dessous. Comme très souvent dans de tels problèmes, un outil très utile est donné par les actions semi-linéaires du groupe de Galois  $\Gamma$  qui respectent les structures ambiantes.

DÉFINITION 1.9. Une action de  $\Gamma$  par des morphismes de  $k$ -schémas sur  $X$  est dite **semi-linéaire torique** si, pour tout  $\sigma \in \Gamma$ , les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(K) & \xrightarrow{\sigma} & \text{Spec}(K) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T_K \times X & \xrightarrow{\sigma} & T_K \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

sont commutatifs. Le groupe  $\text{Aut}_K(X) = T(K)$  agit par conjugaison dans l'ensemble des actions semi-linéaires toriques de  $\Gamma$  sur  $X$ . On note  $E_X$  l'ensemble des classes de conjugaison d'actions semi-linéaires toriques de  $\Gamma$  sur  $X$ .

Si  $Y$  est une  $k$ -forme de  $X$ , alors, en transportant l'action naturelle de  $\Gamma$  sur  $Y \times_k K$  à l'aide d'un  $K$ -isomorphisme  $X \rightarrow Y_K$ , on obtient une action semi-linéaire torique de  $\Gamma$  sur  $X$ . En remplaçant l'isomorphisme choisi  $X \rightarrow Y_K$  par un autre, on obtient une action qui est  $T(K)$ -conjuguée à la première. Ceci montre que l'on a une application naturelle

$$\alpha_X : F_X \rightarrow E_X$$

La proposition qui suit fait partie du folklore de la descente galoisienne (appliquée ici dans le cas « torique »).

PROPOSITION 1.10. L'application  $\alpha_X$  est injective. Par ailleurs, une action semi-linéaire torique de  $\Gamma$  sur  $X$  se trouve dans l'image de  $\alpha_X$  si et seulement si le quotient  $X/\Gamma$  existe comme schéma, ou, autrement dit, si et seulement si on peut recouvrir la variété  $X$  par des ouverts quasi-projectifs (ou affines) et stables par  $\Gamma$ .

DÉMONSTRATION. On rappelle la démonstration classique du fait suivant : le quotient  $X/\Gamma$  existe comme schéma si et seulement si  $X$  est recouvert par des ouverts quasi-projectifs stables par  $\Gamma$ . Pour le reste de la preuve de cette proposition on renvoie à [ELFST10].

Supposons pour l'instant que  $X$  est quasi-projectif. Tout ensemble fini de point de  $X$  est donc contenu dans un ouvert affine. Si  $x$  est un point de  $X$ , en appliquant cette remarque à l'orbite de  $x$  sous l'action de  $\Gamma$ , on voit qu'il existe un ouvert affine  $U$  de  $X$  qui contient  $\Gamma x$ . L'ouvert affine  $\bigcap_{\sigma \in \Gamma} \sigma(U)$  contient donc  $x$ . On a montré que si  $X$  est quasi-projectif, alors il est recouvert par des ouverts affines stables par  $\Gamma$ . En général, ce qui précède prouve que  $X$  est recouvert par des ouverts quasi-projectifs stables par  $\Gamma$  si et seulement si il est recouvert par des ouverts affines stables par  $\Gamma$ .

De plus, si le quotient  $X/\Gamma$  existe comme schéma, alors un recouvrement de ce quotient par des ouverts affines fournit, après extension des scalaires à  $K$  un recouvrement de  $X$  par des ouverts affines stables par  $\Gamma$ . Réciproquement, si on peut recouvrir  $X$  par des ouverts affines stables par  $\Gamma$ , alors le quotient de chacun de ces ouverts affines par  $\Gamma$  existe comme schéma et est affine (correspondant à l'algèbres des invariants sous l'action de  $\Gamma$ ). En recollant ces quotients on obtient le quotient de  $X$  par  $\Gamma$  comme schéma.  $\square$

REMARQUE 1.11. Si la variété  $X$  est elle-même quasi-projective, l'application  $\alpha_X$  est donc une bijection.

Comme corollaire, on obtient :

PROPOSITION 1.12. *L'application  $\alpha_\Omega$  est bijective. Autrement dit, un espace principal homogène sous l'action de  $T$  qui devient trivial sur  $K$  est caractérisé par l'action semi-linéaire torique qu'il induit sur  $\Omega$ .*

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que la variété  $\Omega$  est affine, et d'utiliser la proposition 1.10.  $\square$

Par ailleurs, comme le groupe des automorphismes du  $T_K$ -espace homogène principal  $\Omega$  est exactement  $T(K)$ , l'ensemble  $F_\Omega$  est naturellement le groupe de cohomologie galoisienne  $H^1(\Gamma, T(K))$ . La proposition qui suit (aussi obtenue dans [ELFST10]) permet de voir très facilement si l'ensemble  $E_X$  est vide ou non, en regardant l'éventail  $\mathcal{E}_X$ . Avant de l'énoncer, on doit définir l'**application de restriction**  $r_{X,\Omega} : E_X \rightarrow E_\Omega$ . Pour toute action semi-linéaire torique de  $\Gamma$  sur  $X$ , on montre aisément que l'orbite ouverte  $\Omega$  de  $T$  est stable sous l'action de  $\Gamma$ . En restreignant l'action de  $\Gamma$  à  $\Omega$ , on obtient l'application  $r_{X,\Omega}$ .

PROPOSITION 1.13. *L'ensemble  $E_X$  est non vide si et seulement si l'éventail  $\mathcal{E}_X$  est stable par  $\Gamma$ , au sens où pour tout cône  $\mathcal{C} \in \mathcal{E}_X$ , et pour tout  $\sigma \in \Gamma$ , le cône  $\sigma(\mathcal{C})$  appartient à  $\mathcal{E}_X$ . Dans ce cas, l'application  $r_{X,\Omega}$  est une bijection.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que l'ensemble  $E_X$  est non vide. On fixe une action semi-linéaire torique de  $\Gamma$  sur  $X$ . Soit  $\omega$  une orbite de  $T_K$  dans  $X$ , et  $\sigma \in \Gamma$ . On se donne aussi un  $K$ -point  $x$  dans  $\Omega$  (il en existe car  $T_K$  est déployé). On a alors

$$\sigma(\mathcal{C}_\omega) \cap N = \{\sigma(\lambda), \quad \lambda \in N, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)x \text{ existe dans } X \text{ et appartient à } X_\omega\}.$$

Ainsi,

$$\sigma(\mathcal{C}_\omega) \cap N = \{\lambda \in N, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)\sigma(x) \text{ existe dans } X \text{ et appartient à } X_{\sigma(\omega)}\}.$$

Mais le  $K$ -point  $\sigma(x)$  appartient toujours à  $\Omega$ , ce qui montre que  $\sigma(\mathcal{C}_\omega) = \mathcal{C}_{\sigma(\omega)}$ . Ceci prouve que l'éventail  $\mathcal{E}_X$  est stable sous l'action du groupe  $\Gamma$ .

Supposons maintenant que  $\mathcal{E}_X$  est stable sous l'action de  $\Gamma$ . Soit  $\mathcal{C}$  un cône appartenant à  $\mathcal{E}_X$ , et  $\sigma \in \Gamma$ . L'automorphisme linéaire  $\sigma$  de  $M$  donne un morphisme de monoïdes

$$\sigma(\mathcal{C})^\vee \cap M \rightarrow \mathcal{C}^\vee \cap M,$$

puis un morphisme semi-linéaire de  $K$ -algèbres

$$K[\sigma(\mathcal{C})^\vee \cap M] \rightarrow K[\mathcal{C}^\vee \cap M],$$

qui induit lui-même un morphisme de  $K$ -variétés

$$U_{\mathcal{C}} \rightarrow U_{\sigma(\mathcal{C})}$$

respectant les structures toriques des deux côtés. Ces morphismes se recollent pour donner une action semi-linéaire torique de  $\Gamma$  sur  $X$ . Cela achève la preuve du premier point de la proposition.

Voyons maintenant que, si  $E_X$  est non vide, l'application  $r_{X,\Omega}$  est une bijection. Déjà, c'est une injection parce que  $\Omega$  est ouvert dans  $X$ . Fixons une application semi-linéaire torique de  $\Gamma$  sur  $X$ , et soit  $*$  une action semi-linéaire torique de  $\Gamma$  sur  $\Omega$ . Alors, pour tout  $\sigma \in \Gamma$ , le morphisme

$$\Omega \rightarrow \Omega, \quad x \mapsto \sigma^{-1} * (\sigma(x))$$

est un automorphisme torique de  $\Omega$ , c'est-à-dire la multiplication par un élément de  $T(K)$ . Mais cette multiplication s'étend à  $X$  tout entier, ce qui montre que l'action  $*$  aussi. On vient donc d'établir que l'application de restriction est surjective, achevant ainsi la preuve de la proposition.  $\square$

REMARQUE 1.14. Par les arguments qui précèdent, on voit que, si  $\mathcal{E}_X$  est stable par  $\Gamma$ , et si  $\omega$  est une orbite de  $T_K$  dans  $X$ , alors, pour tout  $\sigma \in \Gamma$ , la notation  $\sigma(\omega)$  fait sens, indépendamment de l'action semi-linéaire de  $\Gamma$  sur  $X$  choisie. Par ailleurs, pour tout cône  $\mathcal{C} \in \mathcal{E}_X$ , on a  $\sigma(X_{\mathcal{C}}) = X_{\sigma(\mathcal{C})}$ .

On peut maintenant apporter la réponse aux questions 1.7 et 1.8 :

THÉORÈME 1.15. *L'ensemble  $F_X$  est non vide si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :*

- (i) *L'éventail  $\mathcal{E}_X$  est stable par  $\Gamma$ .*
- (ii) *Pour tout cône  $\mathcal{C} \in \mathcal{E}_X$ , l'éventail formé des cônes  $(\sigma(\mathcal{C}))_{\sigma \in \Gamma}$  et de leurs faces est quasi-projectif.*

*Dans ce cas, l'application  $\delta_X$  est bijective. Autrement dit, pour tout espace homogène principal sous l'action de  $T$  isomorphe à  $\Omega$  sur  $K$ , il existe une unique  $k$ -forme de  $X$  le contenant.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que les conditions (i) et (ii) sont remplies. D'après la proposition 1.13, l'ensemble  $E_X$  est non vide. On fixe une action semi-linéaire torique de  $\Gamma$  sur  $X$ . D'après la condition (ii) et le critère de quasi-projectivité 1.6, pour tout cône  $\mathcal{C} \in \mathcal{E}_X$ , l'ouvert  $\bigcup_{\sigma \in \Gamma} X_{\sigma(\mathcal{C})}$  est quasi-projectif. Comme ces ouverts sont stables par  $\Gamma$  (grâce à la remarque 1.14) et recouvrent  $X$ , la proposition 1.10 garantit que le quotient  $X/\Gamma$  existe. Comme le raisonnement qui précède est valable pour n'importe quelle action semi-linéaire torique, l'application  $\delta_X$  est bijective. En particulier, l'ensemble  $F_X$  est non vide.

Supposons maintenant que l'ensemble  $F_X$  est non vide. D'après la proposition 1.10, l'ensemble  $E_X$  est non vide, donc la condition (i) est satisfaite. Soit  $\omega$  une orbite de  $T_K$  dans  $X$ . Par la remarque 1.14, l'ouvert  $U = \bigcup_{\sigma \in \Gamma} X_{\sigma(\omega)}$  est stable par  $\Gamma$ . De plus, les orbites fermées de  $T_K$  dans  $U$  forment une seule orbite sous l'action du groupe  $\Gamma$ . Par conséquent, il existe un ouvert affine  $V$  de  $U$  rencontrant toutes ces orbites fermées. Par la proposition 1.16 ci-dessous, on en déduit que l'ouvert  $U$  est quasi-projectif, ou, en utilisant le critère de quasi-projectivité 1.6, que l'éventail formé des cônes  $(\sigma(\mathcal{C}_\omega))_{\sigma \in \Gamma}$  et de leurs faces est quasi-projectif. Comme cela est vrai pour n'importe quelle orbite  $\omega$  de  $T_K$  dans  $X$ , on peut conclure.  $\square$

Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire connexe et défini sur  $k$ . Sumihiro a montré dans [Sum74] qu'une  $G$ -variété contenant une unique orbite fermée est automatiquement quasi-projective. En utilisant exactement les mêmes arguments, on obtient la proposition suivante, dont on donne la preuve pour la commodité du lecteur.

PROPOSITION 1.16. *Soit  $X$  une  $G$ -variété normale définie sur  $k$ . On suppose qu'il existe un ouvert affine de  $X$  qui rencontre toutes les orbites fermées de  $G(\bar{k})$  dans  $X(\bar{k})$ . Alors  $X$  est une variété quasi-projective.*

DÉMONSTRATION. D'après [Gro66] (corollaire 9.1.5), la quasi-projectivité est de nature géométrique, autrement dit  $X$  est quasi-projective si et seulement si  $X_{\bar{k}}$  l'est. On peut donc supposer que le corps  $k$  est algébriquement clos. On va utiliser le critère de quasi-projectivité suivant donné dans [Sum74] (lemme 7.) :

LEMME 1.17. *S'il existe un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $X$  et des sections globales  $s_1, \dots, s_n$  engendrant  $\mathcal{L}$  en tout point et telles que  $X_{s_1}, \dots, X_{s_n}$  sont affines, alors  $X$  est quasi-projective.*



Soit  $U$  un ouvert affine de  $X$  rencontrant toutes les orbites fermées de  $G(\bar{k})$  dans  $X(\bar{k})$ , et  $D := X \setminus U$ . Alors  $D$  est un diviseur de Weil. Notons  $\mathcal{L}$  le faisceau cohérent  $\mathcal{O}_X(D)$ , et  $i : X^0 \rightarrow X$  l'inclusion du lieu lisse de  $X$  dans  $X$ . Comme  $X$  est normale, le morphisme naturelle  $\varphi : \mathcal{L} \rightarrow i_*(\mathcal{L}|_{X^0})$  est un isomorphisme. De plus, le faisceau  $\mathcal{L}|_{X^0}$  est inversible sur la variété lisse  $X^0$ , si bien qu'il existe un revêtement fini  $G'$  de  $G$  tel que  $G'$  agit dans le faisceau  $\mathcal{L}|_{X^0}$ , et donc dans le faisceau  $\mathcal{L}$ , en utilisant l'isomorphisme  $\varphi$ . On voit donc que le lieu

$$A = \{x \in X, \quad \mathcal{L} \text{ n'est pas inversible dans un voisinage de } x\}$$

est un fermé de  $X$  stable par  $G$ . De plus, le faisceau  $\mathcal{L}|_U$  est trivial, si bien que  $A$  est contenu dans  $D$ . Comme  $D$  ne contient aucune orbite fermée de  $G$  dans  $X$ , on peut conclure que  $A$  est vide, ou, autrement dit, que le faisceau  $\mathcal{L}$  est inversible : le diviseur  $D$  est de Cartier. Soit  $s$  la section canonique du faisceau  $\mathcal{L}$ . Le lieu des zéros communs des translatés  $(g'.s)_{g' \in G'}$  de  $s$  par  $G'$  est aussi un fermé de  $X$ , stable par  $G$ , et contenu dans  $D$ . Ce lieu est donc vide. On peut donc trouver un nombre fini d'éléments  $g'_1, \dots, g'_n$  de  $G'$  tels que les sections  $g'_1.s, \dots, g'_n.s$  engendrent  $\mathcal{L}$  en tout point. Il reste à observer que les ouverts  $X_{g'_i.s} = g'_i.U$  sont affines pour conclure.  $\square$

Finalement, si les conditions (i) et (ii) du théorème 1.15 sont remplies, alors l'ensemble  $F_X$  des  $k$ -formes de  $X$  est en bijection avec  $H^1(\Gamma, T(K))$ .

**1.3. Applications.** Dans cette section, on donne des conditions sur  $T$  pour assurer que toute variété torique sous l'action de  $T_K$  possède une  $k$ -forme. On construit ensuite un tore  $T$  de dimension 3, déployé par une extension galoisienne  $K$  de degré 3 de  $k$ , et une variété torique  $X$  sous l'action de  $T_K$  qui ne possède pas de  $k$ -forme. Le théorème qui suit est aussi obtenu dans [ELFST10].

**THÉORÈME 1.18.** *On suppose que le tore  $T$  est de dimension 2, ou qu'il est déployé par une extension quadratique. Alors, pour toute variété torique  $X$  sous l'action du tore  $T_K$  dont l'éventail est stable par le groupe  $\Gamma$ , l'application  $\delta_X$  est bijective.*

**DÉMONSTRATION.** Si  $T$  est de dimension 2, on a déjà remarqué que toute surface torique sous l'action d'un tore déployé est quasi-projective, ce qui, par la remarque 1.11, donne le résultat.

Supposons maintenant que le tore  $T$  est déployé par une extension quadratique de  $k$ . Alors le groupe de Galois  $\Gamma$  a deux éléments, si bien que, par la remarque figurant à la fin de la section 1.1, pour tout cône  $\mathcal{C} \in \mathcal{E}_X$ , l'éventail formé des cônes  $(\sigma(\mathcal{C}))_{\sigma \in \Gamma}$  et de leurs faces (qui possède un ou deux cônes maximaux), est quasi-projectif. Le théorème 1.15 permet de conclure.  $\square$

**REMARQUE 1.19.** On connaît exactement les tores  $T$  déployés par une extension quadratique  $K$  de  $k$  fixée. Il s'agit des produits directs des trois tores suivants :  $\mathbb{G}_m$ ,  $R_{K|k}(\mathbb{G}_m)$ ,  $R_{K|k}^1(\mathbb{G}_m)$ . Ici  $R_{K|k}(\mathbb{G}_m)$  est la restriction de Weil du tore  $\mathbb{G}_m$ , et  $R_{K|k}^1(\mathbb{G}_m)$  le noyau de la norme

$$N_{K|k} : R_{K|k}(\mathbb{G}_m) \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

On construit maintenant un exemple de variété torique déployée sur  $K$  qui ne possède pas de  $k$ -forme. On fixe une extension galoisienne  $K$  de  $k$  de degré 3, et un générateur  $\sigma$  du groupe  $\Gamma$  (qui est isomorphe à  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ). On fixe aussi une base  $(u, v, w)$  du réseau  $N = \mathbb{Z}^3$ , et on fait agir  $\sigma$  sur  $N$  par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base  $(u, v, w)$ . On définit de cette façon une action du groupe  $\Gamma$  sur  $N$ . On appelle  $T$  le tore défini sur  $k$  correspondant. Il s'agit d'un tore de dimension 3 déployé par l'extension cyclique  $K$ .

LEMME 1.20. *Soit  $\mathcal{C} := \text{Cone}(5u+v-5w, -5u-5v+14w, 4u-v)$ . Alors  $\mathcal{C} \cap \sigma(\mathcal{C}) = \{0\}$ .*

DÉMONSTRATION. On a  $\sigma(\mathcal{C}) = \text{Cone}(-u+4v-5w, 5u+14w, u+5v)$ . Soit  $x \in \mathcal{C} \cap \sigma(\mathcal{C})$ . Il existe  $a, b, c, d, e, f \geq 0$  tels que

$$\begin{aligned} x &= (5a - 5b + 4c)u + (a - 5b - c)v + (-5a + 14b)w \\ &= (-d + 5e + f)u + (4d + 5f)v + (-5d + 14e)w. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} 5a - 5b + 4c &= -d + 5e + f \\ a - 5b - c &= 4d + 5f \\ -5a + 14b &= -5d + 14e, \end{cases}$$

puis,  $14(\text{deuxième ligne}) + 5(\text{troisième ligne})$ , donne

$$-11a - 14c = 31d + 70e + 70f.$$

Le membre de gauche est négatif, et celui de droite positif, si bien que  $d = e = f = 0$ , et donc  $x = 0$ . □

DÉFINITION 1.21. *On note  $\mathcal{E}$  l'éventail formé des cônes  $\mathcal{C}, \sigma(\mathcal{C}), \sigma^2(\mathcal{C})$  et de leurs faces.*

LEMME 1.22. *L'éventail  $\mathcal{E}$  est lisse.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que  $\mathcal{C}$  est un cône lisse, ce qui est vrai parce que :

$$\begin{vmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \\ -5 & 14 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

□

PROPOSITION 1.23. *L'éventail  $\mathcal{E}$  n'est pas quasi-projectif.*

DÉMONSTRATION. Observons tout d'abord que  $-w \in \mathcal{C} - \sigma(\mathcal{C})$ . En effet,

$$\begin{cases} 45u - 25w &= 5((5u + v - 5w) + (4u - v)) \in \mathcal{C} \\ 45u + 126w &= 9(5u + 14w) \in \sigma(\mathcal{C}) \end{cases}$$

si bien que  $-151w = (45u - 25w) - (45u + 126w) \in \mathcal{C} - \sigma(\mathcal{C})$ , d'où le résultat. En appliquant  $\sigma$  et  $\sigma^2$ , on obtient

$$-w \in (\mathcal{C} - \sigma(\mathcal{C})) \cap (\sigma(\mathcal{C}) - \sigma^2(\mathcal{C})) \cap (\sigma^2(\mathcal{C}) - \mathcal{C}).$$

Supposons maintenant que l'éventail  $\mathcal{E}$  est quasi-projectif. On utilise les notations introduites à l'occasion du critère de quasi-projectivité 1.6. L'application linéaire  $l_{\mathcal{C}} - l_{\sigma(\mathcal{C})}$  est strictement positive sur  $(\mathcal{C} - \sigma(\mathcal{C})) \setminus \{0\}$ , et donc :  $(l_{\mathcal{C}} - l_{\sigma(\mathcal{C})})(-w) > 0$ . De manière analogue,  $l_{\sigma(\mathcal{C})} - l_{\sigma^2(\mathcal{C})}$  est strictement positive sur  $(\sigma(\mathcal{C}) - \sigma^2(\mathcal{C})) \setminus \{0\}$  (resp.  $(\sigma^2(\mathcal{C}) - \mathcal{C}) \setminus \{0\}$ ), et ainsi,  $(l_{\sigma(\mathcal{C})} - l_{\sigma^2(\mathcal{C})})(-w) > 0$  (resp.  $(l_{\sigma^2(\mathcal{C})} - l_{\mathcal{C}})(-w) > 0$ ). Cela fournit une contradiction, montrant bien que l'éventail  $\mathcal{E}$  n'est pas quasi-projectif. □

En utilisant le théorème 1.15, on a donc montré :

**THÉORÈME 1.24.** *La variété torique  $X_{\mathcal{E}}$  sous l'action de  $T_K$  est lisse, son éventail est stable sous l'action du groupe de Galois  $\Gamma$ , et elle n'admet pas de  $k$ -forme.*

Par ailleurs, dans cet exemple, le tore  $T$  est de dimension minimale, et l'extension  $K$  de  $k$  de degré minimal, à cause du théorème 1.18. La variété  $X_{\mathcal{E}}$  donne un exemple de variété torique contenant trois points qui n'appartiennent pas à un même ouvert affine (d'après la proposition 1.16, il suffit de prendre un point sur chaque orbite fermée de  $T_K$  dans  $X_{\mathcal{E}}$ ).

En utilisant des techniques tirées de [CTHS05], on peut « compactifier » l'éventail  $\mathcal{E}$  d'une manière  $\Gamma$ -équivariante, et ainsi construire un exemple d'une variété torique lisse complète sous l'action de  $T_K$ , dont l'éventail est stable par  $\Gamma$ , mais qui n'admet pas de  $k$ -forme. On commence par produire un éventail  $\mathcal{E}_0$  complet simplicial et stable par  $\Gamma$ , contenant  $\mathcal{E}$ .

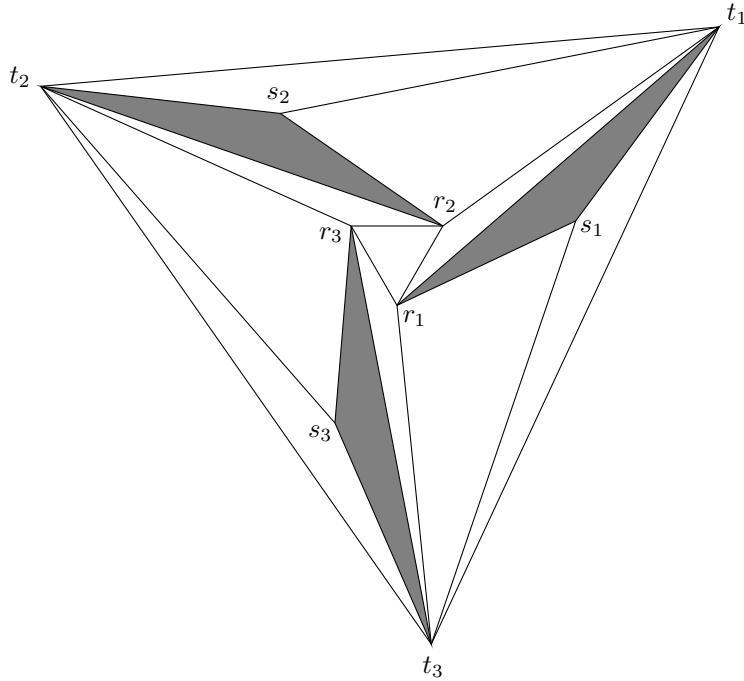


FIGURE 1. Les éventails  $\mathcal{E}$  (en gris) et  $\mathcal{E}_0$ .

Pour alléger les notations, on pose

$$r_1 = -5u - 5v + 14w, \quad s_1 = 4u - v, \quad t_1 = 5u + v - 5w,$$

$$r_2 = \sigma(r_1), \quad s_2 = \sigma(s_1), \quad t_2 = \sigma(t_1), \quad r_3 = \sigma^2(r_1), \quad s_3 = \sigma^2(s_1), \quad t_3 = \sigma^2(t_1).$$

L'éventail  $\mathcal{E}_0$  a pour cônes maximaux

$$\text{Cone}(r_1, t_3, s_1), \quad \text{Cone}(t_3, s_1, t_1), \quad \mathcal{C} = \text{Cone}(r_1, s_1, t_1)$$

$$\text{Cone}(r_1, r_2, t_1), \quad \text{Cone}(r_1, r_2, r_3), \quad \text{Cone}(t_1, t_2, t_3)$$

et leurs images par  $\Gamma$ . L'éventail  $\mathcal{E}_0$  étant complet, il fournit une triangulation de la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . En projetant cette triangulation depuis le pôle Sud sur l'espace tangent au pôle Nord, on obtient la figure 1. Le cône maximal  $\text{Cone}(t_1, t_2, t_3)$  n'est pas représenté, puisqu'il est envoyé à l'infini par la projection.

On utilise maintenant les techniques exposées dans [CTHS05] pour « lissifier » l'éventail  $\mathcal{E}_0$  en gardant la stabilité par le groupe  $\Gamma$ . On subdivise d'abord l'éventail  $\mathcal{E}_0$  en utilisant les vecteurs

$$r = -5v + 28w, \quad w, \quad t = u - 4v - 10w \text{ et } -w.$$

On obtient de cette manière un éventail  $\mathcal{E}'_0$  complet, simplicial, stable par  $\Gamma$ , contenant  $\mathcal{E}$  et satisfaisant la propriété (\*) définie dans la proposition 2. de [CTHS05]. Cet éventail a pour cônes maximaux

$$\begin{aligned} & \text{Cone}(r_1, r, t_1), \quad \text{Cone}(r, r_2, t_1), \quad \text{Cone}(r_1, r, w), \\ & \text{Cone}(r, r_2, w), \quad \mathcal{C} = \text{Cone}(r_1, s_1, t_1), \quad \text{Cone}(r_1, s_1, t_3), \\ & \text{Cone}(t_3, s_1, t) \quad \text{Cone}(t, t_1, s_1) \quad \text{Cone}(t_3, t, -w) \quad \text{Cone}(t, t_1, -w) \end{aligned}$$

et leurs images par  $\Gamma$ . On applique maintenant à  $\mathcal{E}'_0$  l'algorithme expliqué dans la preuve de la proposition 3. de [CTHS05], pour obtenir un éventail complet, lisse et stable par  $\Gamma$  contenant  $\mathcal{E}$  (remarquer que lorsqu'on applique cet algorithme, on ne touche pas aux cônes figurant dans  $\mathcal{E}$  car ceux-ci sont déjà lisses).

## 2. Plongements sphériques sur un corps quelconque

Soit  $k$  un corps, et  $\bar{k}$  une clôture algébrique fixée. On note  $\Gamma$  le groupe de Galois absolu de  $k$ . Soit  $G$  un groupe algébrique réductif, connexe et défini sur  $k$ . On note  $G_{\bar{k}} = G \times_k \bar{k}$ .

**DÉFINITION 2.1.** *Un espace homogène sphérique sous l'action de  $G$  est une variété pointée  $(\Omega, x_0)$  définie sur  $k$ , avec  $G$  agissant sur  $\Omega$ , vérifiant :*

- *Le groupe  $G(\bar{k})$  agit transitivement sur l'ensemble  $\Omega(\bar{k})$ .*
- *$x_0 \in \Omega(k)$ .*
- *Il existe un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G_{\bar{k}}$  tel que l'orbite de  $x_0$  sous l'action de  $B(\bar{k})$  est un ouvert de  $\Omega(\bar{k})$ .*

Remarquons qu'alors  $\Omega = G/G_{x_0}$  est lisse. On omet souvent de mentionner le point de base lorsqu'on parle d'un espace homogène sphérique, mais celui-ci est toujours sous-entendu.

**DÉFINITION 2.2.** *Soit  $\Omega$  un espace homogène sphérique sous  $G$ . Un plongement de  $\Omega$  est une variété normale pointée  $(X, x)$ , avec  $G$  agissant sur  $X$ , munie d'une immersion ouverte  $G$ -équivariante  $i : \Omega \rightarrow X$  qui préserve les points de base.*

A nouveau, quand on parle d'un plongement  $X$  de  $\Omega$ , on omet souvent le point de base  $x$  et l'immersion  $i$ , qui sont sous-entendus. Un **morphisme** entre deux plongements de  $\Omega$  est un morphisme  $G$ -équivariant qui préserve les points de base. On voit donc que s'il existe un morphisme entre deux plongements, alors celui-ci est unique.

**DÉFINITION 2.3.** *Soit  $\Omega$  un espace homogène sphérique. On dit que  $\Omega$  est **déployé** s'il existe un sous-groupe de Borel déployé  $B$  de  $G_{\bar{k}}$  tel que l'orbite  $Bx_0$  est ouverte dans  $\Omega$ . Dans ce cas, le groupe  $G$  est lui-même déployé.*

Supposons un instant que le corps  $k$  est parfait. Soit  $\Omega$  un espace homogène sphérique sous l'action de  $G$ . Supposons que le groupe  $G$  est déployé et notons  $B$  un sous-groupe de Borel déployé. L'orbite ouverte de  $B$  dans  $\Omega$  est définie sur  $k$  : en effet, elle est stable sous l'action de  $\Gamma$ . D'après un résultat de Rosenlicht (voir [Ros56], p.425), cette orbite ouverte de  $B$  possède donc un point  $k$ -rationnel. Toute variété homogène sphérique sur

$k$  sous l'action d'un groupe déployé peut donc être munie d'un point de base, de manière à être un espace homogène sphérique déployé.

Dans cette partie, on fournit, dans la lignée de Luna et Vust ([LV83]), la classification des plongements d'un espace homogène sphérique sous l'action de  $G$  donné  $\Omega$ . On commence par rappeler la théorie des plongements sphériques de Luna et Vust, développée sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0, puis étendue par Knop [Kno91] en caractéristique positive. La classification s'énonce en termes d'objets combinatoires baptisés « éventails coloriés ». On montre ensuite comment le groupe de Galois  $\Gamma$  agit naturellement sur ces éventails coloriés, puis on prouve que les plongements de  $\Omega$  sont classifiés par les éventails coloriés stables par  $\Gamma$ , et qui vérifient une condition supplémentaire (analogue à celle du théorème 1.15). Enfin, on fournit des situations où cette condition supplémentaire est toujours satisfaite (incluant le cas déployé, qui ne fait pas partie de la théorie de Luna et Vust), et des exemples où elle ne l'est pas.

**2.1. Rappels sur les plongements sphériques.** Dans cette section, on suppose que le corps de base  $k$  est algébriquement clos. On fixe un espace homogène sphérique  $\Omega$  sous l'action de  $G$ , et un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$  tel que l'orbite  $Bx_0$  est ouverte dans  $\Omega$ . On va lister ici un certain nombre de faits concernant les plongements de l'espace homogène sphérique  $\Omega$ , et introduire des notations qui seront utilisées de manière systématique dans la suite. Le lecteur peut consulter [LV83], [Kno91], ou encore [Bri95] pour plus de détails. La classification de Luna et Vust consiste à associer à un plongement quelconque de l'espace homogène  $\Omega$  des données vivant dans des ensembles attachés à  $\Omega$ . On commence par définir ces ensembles.

On note  $\mathcal{K} = k(\Omega)$  le corps des fractions rationnelles sur  $\Omega$ . Le groupe  $G$  agit dans le corps  $\mathcal{K}$ , en posant

$$\forall g \in G, \quad \forall f \in \mathcal{K}, \quad gf = f(g^{-1}.)$$

On note  $\mathcal{V}$  l'ensemble des  $k$ -valuations sur  $\mathcal{K}$ , à valeurs dans  $\mathbb{Q}$ . A nouveau, le groupe  $G$  agit naturellement dans l'ensemble  $\mathcal{V}$ , en posant

$$\forall g \in G, \quad \forall \nu \in \mathcal{V}, \quad g\nu = \nu(g^{-1}.)$$

Par restriction, le groupe  $B$  agit dans  $\mathcal{V}$ . On note  $\mathcal{V}^G$  (resp.  $\mathcal{V}^B$ ) l'ensemble des valuations invariantes par  $G$  (resp.  $B$ ). L'orbite  $Bx_0$  de  $x_0$  sous l'action du groupe  $B$  est ouverte dans  $\Omega$ . On la note  $\Omega_B$ . On a alors le résultat suivant (voir [Bor91]) :

PROPOSITION 2.4. *L'ouvert  $\Omega_B$  est affine.*

D'après cette proposition, le complémentaire de  $\Omega_B$  dans  $\Omega$  est pur de codimension 1. On note  $\mathcal{D}$  l'ensemble de ses composantes irréductibles. Les éléments de  $\mathcal{D}$  sont donc des diviseurs premiers et stables par  $B$ . On note  $\mathcal{X}$  l'ensemble des poids des fonctions  $B$ -propres dans  $\mathcal{K}$ . C'est un sous-réseau du réseau des caractères de  $B$ . Le rang de  $\mathcal{X}$  est appelé le **rang** de  $\Omega$ , et noté  $rg(\Omega)$ . Par ailleurs, comme le sous-groupe  $B$  possède une orbite dense dans  $\Omega$  :

PROPOSITION 2.5. *Pour tout  $\chi \in \mathcal{X}$ , il existe une unique fonction  $B$ -propre de poids  $\chi$ , à multiplication près. On la note  $f_\chi$ . Elle est définie sur  $\Omega_B$ .*

On note  $V = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{X}, \mathbb{Q})$ . C'est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension  $rg(\Omega)$ . On note  $\rho$  l'application suivante (qui est bien définie)

$$\rho : \mathcal{V} \rightarrow V, \quad \nu \mapsto (\chi \mapsto \nu(f_\chi)).$$

PROPOSITION 2.6. *La restriction de  $\rho$  à  $\mathcal{V}^G$  est injective.*

L'ensemble  $\mathcal{V}^G$  peut donc se « voir » dans l'espace vectoriel  $V$ , à travers l'application  $\rho$ . L'ensemble  $\rho(\mathcal{V}^G)$  est décrit dans [BP87] (caractéristique 0) et [Kno91] (caractéristique quelconque). Les auteurs montrent que c'est un cône dans l'espace vectoriel  $V$ , et trouvent un ensemble de générateurs de son dual. Comme  $\mathcal{X}$  est un sous-réseau du réseau  $\mathcal{X}(B)$  des caractères de  $B$ , l'espace vectoriel  $V$  est un quotient du réseau dual  $\mathcal{X}(B)^*$ . En particulier, on peut parler de l'image de la chambre de Weyl positive de  $G$  (c'est-à-dire celle correspondant au sous-groupe de Borel  $B$ ) dans  $V$ , notée  $\mathcal{W}$ . On a alors la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.7.** *L'ensemble  $\rho(\mathcal{V}^G)$  est un cône dans  $V$ , d'intérieur non vide, et contenant la chambre de Weyl négative  $-\mathcal{W}$ . La dimension du plus grand sous-espace vectoriel de  $V$  contenu dans  $\rho(\mathcal{V}^G)$  est égale à la codimension du groupe d'isotropie  $\text{Stab}(x_0)$  dans son normalisateur.*

Considérons à présent un plongement  $X$  de  $\Omega$ . L'ouvert  $\Omega_B$  étant affine, son complémentaire  $X \setminus \Omega_B$  dans  $X$  est pur de codimension 1, et donc réunion de diviseurs premiers  $B$ -stables. Soit  $\omega$  une orbite de  $G$  dans  $X$ . On note  $\mathcal{D}_\omega$  l'ensemble des diviseurs premiers  $D \subseteq X \setminus \Omega_B$  contenant  $\omega$ , et  $\mathcal{F}_\omega$  l'ensemble des  $D \in \mathcal{D}$  vérifiant  $\omega \subseteq \overline{D}$ . Les éléments de  $\mathcal{F}_\omega$  sont appelés les **couleurs** associées à l'orbite  $\omega$ . Soit  $\mathcal{C}_\omega$  le cône dans  $V$  engendré par les éléments

$$\rho(\nu_D), \quad D \in \mathcal{D}_\omega,$$

où  $\nu_D$  est la valuation normalisée de  $\mathcal{K}$  associée au diviseur  $D$ . On note  $\Delta$  l'ensemble des  $G$ -orbites dans  $X$ . C'est un ensemble fini. La collection  $\{(\mathcal{C}_\omega, \mathcal{F}_\omega), \quad \omega \in \Delta\}$  est alors un éventail colorié dans  $V$ , avec couleurs dans  $\mathcal{D}$ , au sens suivant :

**DÉFINITION 2.8.** *Un **cône colorié** dans  $V$  avec couleurs dans  $\mathcal{D}$  est un couple  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  avec  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ , et vérifiant :*

- $\mathcal{C}$  est un cône engendré par  $\rho(\mathcal{F})$  et un nombre fini d'éléments de  $\rho(\mathcal{V}^G)$ .
- L'intérieur relatif de  $\mathcal{C}$  dans  $V$  rencontre  $\rho(\mathcal{V}^G)$ .
- Le cône  $\mathcal{C}$  est strictement convexe, et  $0 \notin \rho(\mathcal{F})$ .

Une **face** de  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  est un cône colorié  $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$  tel que  $\mathcal{C}'$  est une face de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cap \rho^{-1}(\mathcal{C}')$ . Un **éventail colorié** est une collection finie  $\mathcal{E}$  de cônes coloriés vérifiant :

- $(0, \emptyset) \in \mathcal{E}$ .
- Toute face de  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathcal{E}$  appartient à  $\mathcal{E}$ .
- Pour tout  $\nu \in \rho(\mathcal{V}^G)$ , il existe au plus un cône colorié dans  $\mathcal{E}$  contenant  $\nu$  dans son intérieur relatif.

On peut maintenant énoncer le théorème de classification de Luna-Vust et Knop :

**THÉORÈME 2.9.** *L'application*

$$X \mapsto \{(\mathcal{C}_\omega, \mathcal{F}_\omega), \quad \omega \in \Delta\}$$

*est une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de plongements de  $\Omega$  sur l'ensemble des éventails coloriés dans  $V$ , avec couleurs dans  $\mathcal{D}$ . Un plongement est dit **sans couleur** si, pour tout  $\omega \in \Delta$ , l'ensemble  $\mathcal{F}_\omega$  est vide.*

On notera  $X_\mathcal{E}$  le plongement associé à l'éventail colorié  $\mathcal{E}$ , et  $\mathcal{E}_X$  l'éventail associé au plongement  $X$ . On a vu comment associer à un plongement de  $\Omega$  un éventail colorié. Pour aller dans l'autre sens, la recette est plus compliquée que pour les variétés toriques, et le

lecteur curieux est invité à consulter les références données au début de cette section. Le dictionnaire « plongements-éventails » n'est pas aussi transparent que dans le cas torique (par exemple, il est faux de dire qu'un plongement est affine si et seulement si l'éventail associé n'a qu'un cône colorié maximal), mais on peut encore lire dans  $\mathcal{E}$  beaucoup de choses concernant le plongement  $X_{\mathcal{E}}$ .

Tout d'abord, l'ensemble (partiellement) ordonné  $\Delta$  est encore en bijection décroissante avec l'éventail  $\mathcal{E}$ , muni de l'inclusion.

Un plongement dont l'éventail associé ne possède qu'un cône colorié maximal ne contient donc qu'une seule orbite fermée de  $G$ .

**DÉFINITION 2.10.** *Un plongement  $X$  de  $\Omega$  est dit **simple** s'il n'y a qu'une seule orbite fermée de  $G$  dans  $X$ .*

Comme il découle d'un résultat de Sumihiro ([Sum74]), un plongement simple nécessairement est quasi-projectif.

On peut toujours recouvrir un plongement quelconque de  $\Omega$  par des plongements simples. Pour cela, soit  $X$  un plongement fixé de  $\Omega$ . Soit  $\omega$  une orbite de  $G$  dans  $X$ .

**DÉFINITION 2.11.** *On note  $X_{\omega,G} := \{y \in X, \quad \omega \subseteq \overline{Gy}\}$ .*

Comme  $G$  n'a qu'un nombre fini d'orbites dans  $X$ , l'ensemble  $X_{\omega,G}$  est un ouvert  $G$ -stable de  $X$  contenant  $\omega$  comme unique orbite fermée. En d'autres termes, c'est un plongement simple de  $\Omega$ . L'éventail colorié qui lui correspond est formé du cône  $(\mathcal{C}_{\omega}, \mathcal{F}_{\omega})$  et de ses faces. On pose alors

$$X_{\omega,B} := X_{\omega,G} \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{F}_{\omega}} \overline{D}.$$

C'est un ouvert affine  $B$ -stable de  $X$ . Par ailleurs, les translatés de  $X_{\omega,B}$  par des éléments de  $G$  recouvrent  $X_{\omega,G}$ . Enfin, on maîtrise bien l'algèbre des fonctions régulières sur  $X_{\omega,B}$ , puisque :

**PROPOSITION 2.12.** *On a  $k[X_{\omega,B}] = \{f \in k[\Omega_B], \quad \forall D \in \mathcal{D}_{\omega} \quad \nu_D(f) \geq 0\}$ .*

Un ingrédient clé dans la preuve du théorème 1.15 est la connaissance de la structure locale des variétés toriques. Une variété torique est recouverte par des ouverts affines stables par l'action du tore. Par contre une variété sphérique ne peut pas toujours s'écrire comme la réunion d'ouverts affines stables par l'action de  $G$ . Cependant, les résultats qui précèdent montrent que l'on dispose toujours d'un atlas de cartes affines  $(gX_{\omega,B})_{g \in G, \omega \in \Delta}$  assez « sympathique ». Par ailleurs, chacune des cartes affines de cet atlas est stable par un sous-groupe parabolique de  $G$ , et on est capable d'analyser l'action du groupe parabolique dans la carte affine. Soyons plus précis. Posons

$$P := \bigcap_{D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{F}_{\omega}} \text{Stab}(D).$$

C'est un sous-groupe parabolique de  $G$  contenant  $B$ , et l'ouvert affine  $X_{\omega,B}$  est stable par  $P$ . En caractéristique 0, on a le théorème suivant ([BLV86]).

**THÉORÈME 2.13.** *On suppose que  $k$  est de caractéristique 0. Il existe un sous-groupe de Levi  $L$  de  $P$  et une sous-variété fermée  $S$  de  $X_{\omega,B}$  stable par  $L$  et contenant  $x_0$ , tels que le morphisme naturel*

$$R_u(P) \times S \rightarrow X_{\omega,B}, \quad (g, x) \mapsto gx$$

*est un isomorphisme. Par ailleurs, la  $L$ -variété  $S$  est sphérique.*

Knop a montré comment étendre ce théorème en toute généralité ([Kno93]) :

**THÉORÈME 2.14.** *Il existe un tore maximal  $T$  de  $G$  contenu dans  $P$ , une sous-variété fermée  $S$  de  $X_{\omega,B}$  stable par  $T$  et contenant  $x_0$ , tels que le morphisme naturel*

$$R_u(P) \times S \rightarrow X_{\omega,B}, \quad (g, x) \mapsto gx$$

*est fini et surjectif.*

On verra dans le chapitre 2 de ce mémoire que, dans certaines situations, on peut assurer que la conclusion du théorème 2.13 reste valable en caractéristique positive.

On aura besoin dans la suite de repérer sur l'éventail  $\mathcal{E}_X$  du plongement  $X$  si celui-ci est quasi-projectif. La propriété suivante est démontrée dans ([Bri89]) :

**PROPOSITION 2.15.** *Soit  $\mathcal{E}$  un éventail colorié. Le plongement  $X_{\mathcal{E}}$  est quasi-projectif si et seulement si il existe une fonction linéaire par morceaux strictement convexe sur  $\mathcal{E}$ , c'est-à-dire une collection  $(l_{\mathcal{C},\mathcal{F}})_{(\mathcal{C},\mathcal{F}) \in \mathcal{E}}$  de formes linéaires sur  $V$  vérifiant :*

- $\forall (\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathcal{E}, \quad \forall (\mathcal{C}', \mathcal{F}') \in \mathcal{E}, \quad l_{\mathcal{C},\mathcal{F}} = l_{\mathcal{C}',\mathcal{F}'}$  sur  $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ .
- pour tous cônes coloriés maximaux  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  et  $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$  dans  $\mathcal{E}$ , on a

$$\forall x \in (\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}') \cap \rho(\mathcal{V}^G), \quad l_{\mathcal{C},\mathcal{F}}(x) > l_{\mathcal{C}',\mathcal{F}'}(x).$$

Pour finir cette section de rappels, on donne quelques exemples d'espaces homogènes sphériques.

- (1) Les variétés de drapeaux  $G/P$  sont sphériques, comme il découle par exemple de la décomposition de Bruhat. Pour ces espaces, on a  $V = 0$ .
- (2) Si  $G$  est un tore  $T$ , alors l'espace homogène  $\Omega = T$  est sphérique, et les plongements de cet espace homogène sphérique sont les variétés toriques pour le tore  $T$ . On a ici  $\mathcal{X} = X(T)$ , et  $V = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Y(T)$ .
- (3) Les **espaces symétriques**  $\Omega = G/G^\sigma$ , où  $\sigma$  est une involution de  $G$ , sont sphériques. Un exemple d'espace symétrique est donné par

$$G = G_0 \times G_0 \text{ et } \Omega = G_0,$$

où  $G_0$  est un groupe réductif connexe. On verra dans le chapitre 3 de ce mémoire plusieurs exemples de plongements dans ce cas.

- (4) Un espace homogène sous l'action de  $G$  est dit **horosphérique** si le groupe d'isotropie de  $x_0$  contient un sous-groupe unipotent maximal de  $G$ . Un espace homogène horosphérique est sphérique. Par ailleurs, grâce à la proposition suivante, on est capable de repérer très simplement les espaces homogènes horosphériques parmi les sphériques (voir [Kno91]).

**PROPOSITION 2.16.** *Un espace homogène sphérique  $\Omega$  sous l'action de  $G$  est horosphérique si et seulement si  $\rho(\mathcal{V}^G) = V$ .*

**2.2. Quelques actions du groupe  $\Gamma$ .** Dans cette section, on revient au cas général où  $k$  est un corps quelconque. On fixe un espace homogène sphérique  $\Omega$  sous l'action de  $G$ , et un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G_{\bar{k}}$  tel que l'orbite  $Bx_0$  est ouverte dans  $\Omega$ . Dans la section précédente, on a associé à l'espace homogène  $\Omega_{\bar{k}} := \Omega \times_k \bar{k}$  certaines données. Ici, on fait agir le groupe de Galois absolu  $\Gamma$  de  $k$  sur ces données. Tout d'abord, on fait agir le groupe  $\Gamma$  sur  $\mathcal{K}$  par la formule suivante

$$\forall \sigma \in \Gamma, \quad \forall f \in \mathcal{K}, \quad \forall x \in \Omega(\bar{k}), \quad \sigma(f)(x) = \sigma(f(\sigma^{-1}(x))).$$



PROPOSITION 2.17. *On a*

$$\forall \sigma \in \Gamma, \quad \forall g \in G(\bar{k}), \quad \forall f \in \mathcal{K}, \quad \sigma(gf) = \sigma(g)\sigma(f).$$

DÉMONSTRATION. Comme l'action semi-linéaire de  $\Gamma$  sur  $\Omega$  respecte l'action de  $G$ , pour tout  $x \in \Omega(\bar{k})$  pour lequel cela a un sens, on a

$$\begin{aligned} \sigma(gf)(x) &= \sigma(gf(\sigma^{-1}(x))) \\ &= \sigma(f(g^{-1}(\sigma^{-1}(x)))) \\ &= \sigma(f(\sigma^{-1}(\sigma(g)^{-1}(x)))) \\ &= (\sigma(g)\sigma(f))(x). \end{aligned}$$

On peut donc conclure.  $\square$

On utilise maintenant l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{K}$  que l'on vient de définir pour construire une action de  $\Gamma$  sur l'ensemble  $\mathcal{V}^B$ . Soit  $\sigma \in \Gamma$ . Le groupe  $\sigma(B)$  est un sous-groupe de Borel de  $G$ , donc, d'après ([Bor91] Chap.IV, Theorem 11.1), il existe  $g_\sigma \in G(\bar{k})$  tel que

$$\sigma(B) = g_\sigma B g_\sigma^{-1}.$$

De plus,  $g_\sigma$  est unique, à multiplication à droite par un élément de  $B$  près. On fixe un tel élément  $g_\sigma$  pour tout  $\sigma \in \Gamma$ , et on pose :

$$\forall \sigma \in \Gamma, \quad \forall \nu \in \mathcal{V}, \quad \forall f \in \mathcal{K}, \quad \sigma(\nu)(f) := \nu(\sigma^{-1}(g_\sigma f)).$$

PROPOSITION 2.18. *On définit de cette manière une action de  $\Gamma$  sur l'ensemble  $\mathcal{V}^B$ , qui ne dépend pas du choix des  $(g_\sigma)_{\sigma \in \Gamma}$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $\nu \in \mathcal{V}^B$ ,  $\sigma \in \Gamma$  et  $f \in \mathcal{K}$ . Soit aussi  $b \in B$ , et  $b' \in B$  tel que :  $g_\sigma b^{-1} = \sigma(b')g_\sigma$ . Alors on a

$$\begin{aligned} (b\sigma(\nu))(f) &= \nu(\sigma^{-1}(g_\sigma b^{-1} f)) \\ &= \nu(b' \sigma^{-1}(g_\sigma f)) \\ &= \sigma(\nu)(f) \end{aligned}$$

car  $\nu \in \mathcal{V}^B$ . On a donc prouvé que, pour tout  $\sigma \in \Gamma$  et  $\nu \in \mathcal{V}^B$ , on a  $\sigma(\nu) \in \mathcal{V}^B$ . Vérifions maintenant que l'on définit bien ainsi une action de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{V}^B$ . On aura besoin du lemme suivant :

LEMME 2.19.

$$\forall (\sigma, \tau) \in \Gamma \times \Gamma, \quad \exists b_{\sigma, \tau} \in B \text{ avec } \sigma(g_\tau)g_\sigma = g_{\sigma\tau}b_{\sigma, \tau}.$$

DÉMONSTRATION. On a, d'une part

$$\sigma(\tau(B)) = \sigma(g_\tau B g_\tau^{-1}) = \sigma(g_\tau)\sigma(B)\sigma(g_\tau)^{-1} = \sigma(g_\tau)g_\sigma B g_\sigma^{-1}\sigma(g_\tau)^{-1},$$

et, d'autre part

$$\sigma(\tau(B)) = \sigma\tau(B) = g_{\sigma\tau} B g_{\sigma\tau}^{-1}$$

$\square$

Soient maintenant  $(\sigma, \tau) \in \Gamma \times \Gamma$ ,  $\nu \in \mathcal{V}^B$  et  $f \in \mathcal{K}$ . On a

$$\begin{aligned} (\sigma\tau)(\nu)(f) &= \nu(\tau^{-1}(\sigma^{-1}(g_{\sigma\tau} f))) \\ &= \nu(\tau^{-1}(\sigma^{-1}(\sigma(g_\tau)g_\sigma b_{\sigma, \tau}^{-1} f))) \\ &= \nu(\tau^{-1}(g_\tau \sigma^{-1}(g_\sigma b_{\sigma, \tau}^{-1} f))). \end{aligned}$$

Comme  $\sigma(\tau(\nu)) \in \mathcal{V}^B$ , ceci montre que

$$(\sigma\tau)(\nu) = b_{\sigma,\tau}(\sigma(\tau(\nu))) = \sigma(\tau(\nu)).$$

Le fait que l'action ainsi définie ne dépende pas du choix des  $(g_\sigma)_{\sigma \in \Gamma}$  provient directement du fait que l'on travaille avec des valuations invariantes par  $B$ .  $\square$

On fait maintenant agir le groupe  $\Gamma$  sur l'ensemble  $\mathcal{X}$ . On note  $\mathcal{X}(B)$  le réseau des caractères de  $B$ . Pour tout  $\sigma \in \Gamma$  et  $\chi \in \mathcal{X}(B)$  on définit

$$\sigma(\chi) : B \rightarrow \mathbb{G}_{m,\bar{k}}, \quad b \mapsto \sigma(\chi(g_{\sigma^{-1}}^{-1}\sigma^{-1}(b)g_{\sigma^{-1}})).$$

Comme dans la preuve de la proposition 2.18, on vérifie que l'on définit bien de cette manière une action de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{X}(B)$ , qui ne dépend pas du choix des  $(g_\sigma)_{\sigma \in \Gamma}$ . La proposition qui suit montre que cette action se restreint en une action sur  $\mathcal{X}$  :

**PROPOSITION 2.20.** *Soient  $\chi \in \mathcal{X}$  et  $f_\chi \in \mathcal{K}$  une fonction  $B$ -propre de poids  $\chi$ . Soit  $\sigma \in G$ . Alors  $\sigma(g_{\sigma^{-1}}f)$  est une fonction  $B$ -propre de poids  $\sigma(\chi)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $b \in B(\bar{k})$ , et  $b' = g_{\sigma^{-1}}^{-1}\sigma^{-1}(b^{-1})g_{\sigma^{-1}}$ . On a alors, pour tout  $x \in \Omega(\bar{k})$  où cela a un sens,

$$\begin{aligned} (b(\sigma(g_{\sigma^{-1}}f)))(x) &= \sigma(g_{\sigma^{-1}}f)(b^{-1}x) \\ &= \sigma(g_{\sigma^{-1}}f(\sigma^{-1}(b^{-1}x))) \\ &= \sigma(f(g_{\sigma^{-1}}^{-1}\sigma^{-1}(b^{-1})\sigma^{-1}(x))) \\ &= \sigma(f(b'g_{\sigma^{-1}}^{-1}\sigma^{-1}(x))) \\ &= \sigma(\chi((b')^{-1})f(g_{\sigma^{-1}}^{-1}\sigma^{-1}(x))) \\ &= \sigma(\chi)(b)\sigma(g_{\sigma^{-1}}f)(x). \end{aligned}$$

On peut conclure.  $\square$

On définit alors une action duale sur l'espace vectoriel  $V = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{X}, \mathbb{Q})$  par la formule :

$$\forall \varphi \in V, \quad \forall \sigma \in \Gamma, \quad \forall \chi \in \mathcal{X}, \quad \sigma(\varphi)(\chi) = \varphi(\sigma^{-1}(\chi)).$$

**PROPOSITION 2.21.** *L'application*

$$\rho : \mathcal{V}^B \rightarrow V$$

*est  $\Gamma$ -équivariante.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\nu \in \mathcal{V}^B$ ,  $\sigma \in \Gamma$  et  $\chi \in \mathcal{X}$ . Soit  $f_\chi \in \mathcal{K}$  une fonction  $B$ -propre de poids  $\chi$ . Par la proposition 2.20, on sait que la fonction  $\sigma^{-1}(g_\sigma f)$  est une fonction  $B$ -propre de poids  $\sigma^{-1}(\chi)$ . Il vient alors

$$\rho(\sigma(\nu))(\chi) = \sigma(\nu)(f_\chi) = \nu(\sigma^{-1}(g_\sigma f)) = \rho(\nu)(\sigma^{-1}(\chi)),$$

ce qui achève la preuve de la proposition.  $\square$

On définit enfin une action du groupe  $\Gamma$  sur l'ensemble  $\mathcal{D}$ . Soit  $\sigma \in \Gamma$ . Remarquons que  $g_\sigma^{-1}\sigma(\Omega_B)$  est une orbite ouverte de  $B$  dans  $\Omega_{\bar{k}}$ . Par conséquent,  $g_\sigma^{-1}\sigma(\Omega_B) = \Omega_B$ , et l'application

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}, \quad D \mapsto \sigma \cdot D = g_\sigma^{-1}\sigma(D)$$

est une bijection. Comme les éléments de  $\mathcal{D}$  sont des diviseurs  $B$ -stables, cette application ne dépend pas du choix des  $(g_\sigma)_{\sigma \in \Gamma}$ . Comme dans la preuve de la proposition 2.18, on vérifie que l'on définit ainsi une action de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{D}$ . Par ailleurs, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.22. *L'application naturelle*

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}^B, \quad D \mapsto \nu_D$$

est  $\Gamma$ -équivariante.

DÉMONSTRATION. On utilise pour cela le fait suivant : si une valuation de  $\mathcal{K}$  possède un centre  $Y$  sur  $\Omega_{\bar{k}}$ , et si  $\varphi$  est un automorphisme de  $\Omega_{\bar{k}}$ , alors la valuation

$$\varphi(\nu) : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad f \mapsto \nu(\varphi^{-1}(f))$$

est centrée en  $\varphi(Y)$ . En appliquant cette remarque à la valuation  $\nu_D$  et à l'automorphisme  $x \mapsto g_\sigma^{-1}\sigma(x)$  de  $\Omega_{\bar{k}}$ , on obtient le résultat.  $\square$

**2.3. Formes d'un plongement.** On suppose dans cette section que le corps  $k$  est **parfait**. On conserve les notations introduites dans la section 2.2. Soit  $X$  un plongement de l'espace homogène  $\Omega_{\bar{k}}$ . On appelle  **$k$ -forme** de  $X$  un plongement de  $\Omega$  qui devient isomorphe à  $X$  sur  $\bar{k}$ . Dans cette section, on obtient un critère analogue au théorème 1.15 pour que le plongement  $X$  admette une  $k$ -forme, en terme de l'éventail colorié  $\mathcal{E}_X$ .

PROPOSITION 2.23. *Si  $X$  possède une  $k$ -forme, alors celle-ci est unique, à unique isomorphisme près.*

DÉMONSTRATION. Soient  $Y$  et  $Z$  deux  $k$ -formes de  $X$ . On fixe un isomorphisme de plongements  $f : Y_{\bar{k}} \rightarrow Z_{\bar{k}}$ . Un morphisme entre deux plongements étant unique (car il respecte les points-base), pour tout  $\sigma \in \Gamma$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y_{\bar{k}} & \xrightarrow{f} & Z_{\bar{k}} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ Y_{\bar{k}} & \xrightarrow{f} & Z_{\bar{k}} \end{array}$$

est commutatif, ce qui prouve que  $f$  est défini sur  $k$ .  $\square$

La proposition suivante donne une première caractérisation des plongements de  $\Omega_{\bar{k}}$  qui possèdent une  $k$ -forme :

PROPOSITION 2.24. *Le plongement  $X$  possède une  $k$ -forme si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :*

- (i) *L'action semi-linéaire de  $\Gamma$  sur  $\Omega_{\bar{k}}$  s'étend à  $X$ .*
- (ii)  *$X$  est recouvert par des ouverts affines stables par  $\Gamma$ .*

La condition (ii) est automatiquement satisfaite si la variété  $X$  est quasi-projective, ce qui est le cas par exemple si le plongement  $X$  est simple.

DÉMONSTRATION. Comme on l'a expliqué lors de la preuve de la proposition 1.10, ces deux conditions sont remplies si et seulement si  $X$  admet une  $k$ -forme comme variété. Comme l'action semi-linéaire de  $\Gamma$  sur  $\Omega_{\bar{k}}$  respecte l'action du groupe  $G$ , au sens où

$$\forall \sigma \in \Gamma, \quad \forall g \in G(\bar{k}), \quad \forall x \in \Omega(\bar{k}), \quad \sigma(gx) = \sigma(g)\sigma(x),$$

une  $k$ -forme de  $X$  comme variété est naturellement un plongement de  $\Omega$ .  $\square$

On peut rendre la condition (i) de la proposition 2.24 très explicite en terme de l'éventail colorié  $\mathcal{E}_X$  associé à  $X$ . On dit qu'un éventail colorié  $\mathcal{E}$  est **stable par le groupe**  $\Gamma$  si pour tout cône colorié  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  appartenant à  $\mathcal{E}$ , et tout  $\sigma \in \Gamma$ , le cône colorié  $(\sigma(\mathcal{C}), \sigma(\mathcal{F}))$  appartient encore à  $\mathcal{E}$ .

**THÉORÈME 2.25.** *La condition (i) de la proposition 2.24 est satisfaite si et seulement si l'éventail colorié  $\mathcal{E}_X$  est stable par le groupe  $\Gamma$ . Dans ce cas, pour toute orbite  $\omega$  de  $G_{\bar{k}}$  dans  $X$ , et pour tout  $\sigma \in \Gamma$ , on a*

$$\sigma(\mathcal{C}_\omega) = \mathcal{C}_{\sigma(\omega)} \text{ et } \sigma(\mathcal{F}_\omega) = \mathcal{F}_{\sigma(\omega)}.$$

**DÉMONSTRATION.** Supposons tout d'abord que la condition (i) est satisfaite. Soient  $\omega$  une orbite de  $G_{\bar{k}}$  dans  $X$  et  $\sigma \in \Gamma$ . Remarquons que  $\sigma(\omega)$  est aussi une orbite de  $G_{\bar{k}}$  dans  $X$ . En envoyant un diviseur  $D$  sur  $\sigma \cdot D$ , on obtient des bijections

$$\mathcal{D}_\omega \rightarrow \mathcal{D}_{\sigma(\omega)} \text{ et } \mathcal{F}_\omega \rightarrow \mathcal{F}_{\sigma(\omega)}.$$

Comme l'application  $\rho$  est  $\Gamma$ -équivariante (proposition 2.21), on voit que

$$(\sigma(\mathcal{C}_\omega), \sigma(\mathcal{F}_\omega)) = (\mathcal{C}_{\sigma(\omega)}, \mathcal{F}_{\sigma(\omega)}).$$

Supposons maintenant que l'éventail colorié  $\mathcal{E}_X$  est stable par  $\Gamma$ . Soit  $\omega$  une orbite de  $G_{\bar{k}}$  dans  $X$ , et  $\sigma \in \Gamma$ . On note  $\omega'$  l'orbite de  $G_{\bar{k}}$  dans  $X$  vérifiant :

$$(\sigma(\mathcal{C}_\omega), \sigma(\mathcal{F}_\omega)) = (\mathcal{C}_{\omega'}, \mathcal{F}_{\omega'}).$$

**LEMME 2.26.** *L'automorphisme  $\sigma$  de  $\mathcal{V}^B$  envoie l'ensemble  $\{\nu_D, D \in \mathcal{D}_\omega\}$  sur l'ensemble  $\{\nu_{D'}, D' \in \mathcal{D}_{\omega'}\}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $D \in \mathcal{D}_\omega$ . Si  $D$  n'est pas stable par  $G_{\bar{k}}$ , alors  $D \in \mathcal{F}_\omega$ . Dans ce cas,  $\sigma \cdot D \in \mathcal{F}_{\omega'}$ , et la proposition 2.22 montre que

$$\sigma(\nu_D) \in \{\nu_{D'}, D' \in \mathcal{D}_{\omega'}\}.$$

Supposons maintenant que  $D$  est stable par  $G_{\bar{k}}$ . D'après le lemme 2.4 de [Kno91], on sait que  $\mathbb{Q}^+ \rho(\nu_D)$  est une arête du cône  $\mathcal{C}_\omega$  qui ne contient aucun élément de  $\rho(\mathcal{F}_\omega)$ . Comme l'application  $\rho$  est équivariante, cela montre que  $\mathbb{Q}^+ \rho(\sigma(\nu_D))$  est une arête du cône  $\mathcal{C}_{\omega'}$  qui ne contient aucun élément de  $\rho(\mathcal{F}_{\omega'})$ . A nouveau, en utilisant le lemme 2.4 de [Kno91] et l'injectivité de l'application  $\rho$  sur  $\mathcal{V}^G$ , on obtient  $\sigma(\nu_D) = \nu_{D'}$ , pour un certain diviseur  $D' \in \mathcal{D}_{\omega'}$ , stable par  $G_{\bar{k}}$ . On a montré pour l'instant que  $\sigma$  envoie l'ensemble  $\{\nu_D, D \in \mathcal{D}_\omega\}$  dans l'ensemble  $\{\nu_{D'}, D' \in \mathcal{D}_{\omega'}\}$ . En appliquant ce résultat à  $\sigma^{-1}$  et  $\omega'$  à la place de  $\omega$ , on obtient le lemme.  $\square$

En utilisant la description des algèbres  $\bar{k}[X_{\omega,B}]$  et  $\bar{k}[X_{\omega',B}]$  donnée dans la proposition 2.12, et le lemme 2.26, on voit que le morphisme

$$\Omega_B \rightarrow \Omega_B, \quad x \mapsto g_\sigma^{-1} \sigma(x)$$

s'étend en un morphisme

$$X_{\omega,B} \rightarrow X_{\omega',B}.$$

Notons  $U$  le plus grand ouvert de  $X$  sur lequel ce morphisme s'étend. Comme l'action de  $\Gamma$  sur  $\Omega_{\bar{k}}$  respecte l'action de  $G_{\bar{k}}$ , on voit que  $U$  est un ouvert stable par  $G_{\bar{k}}$ . Mais la variété  $X$  est recouverte par les  $G_{\bar{k}}$ -translatés des ouverts  $X_{\omega,B}$ , où  $\omega$  est une orbite de  $G_{\bar{k}}$  sur  $X$ . On peut conclure que  $U = X$ , ce qui achève la preuve du théorème.  $\square$

On rend maintenant la condition (ii) de la proposition 2.24 explicite, en supposant que la condition (i) est remplie.

**THÉORÈME 2.27.** *Soit  $X$  un plongement de  $\Omega_{\bar{k}}$  tel que l'éventail  $\mathcal{E}_X$  est stable par  $\Gamma$ . Alors  $X$  admet une  $k$ -forme si et seulement si, pour tout cône colorié  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathcal{E}_X$ , l'éventail colorié formé des cônes  $(\sigma(\mathcal{C}), \sigma(\mathcal{F}))_{\sigma \in \Gamma}$  et de leurs faces est quasi-projectif.*

**DÉMONSTRATION.** La condition donnée dans le théorème est équivalente à la suivante : pour toute orbite  $\omega$  de  $G_{\bar{k}}$  dans  $X$ , l'ouvert

$$\bigcup_{\sigma \in \Gamma} X_{\sigma(\omega), G_{\bar{k}}}$$

est quasi-projectif. Comme cet ouvert est stable par  $\Gamma$ , si cette condition est satisfaite, alors  $X$  possède une  $k$ -forme, d'après la proposition 2.24.

Pour montrer la réciproque, on peut clairement remplacer  $X$  par

$$\bigcup_{\sigma \in \Gamma} X_{\sigma(\omega), G_{\bar{k}}},$$

et donc supposer que les cônes maximaux dans  $\mathcal{E}_X$  forment une seule orbite de  $\Gamma$ . Mais les cônes maximaux correspondent aux orbites fermées de  $G_{\bar{k}}$ , donc, en utilisant le théorème 2.25, on en déduit que les orbites fermées de  $G_{\bar{k}}$  dans  $X$  sont permutées par  $\Gamma$ . Comme  $X$  possède une  $k$ -forme, il existe un ouvert affine  $U$  de  $X$  rencontrant toutes les orbites fermées de  $G_{\bar{k}}$  dans  $X$ . On peut conclure, par la proposition 1.16.  $\square$

**2.4. Applications.** On conserve les notations introduites dans la section 2.2. Soit  $X$  un plongement de  $\Omega_{\bar{k}}$ . Dans la proposition 2.24, on a introduit deux conditions, appelées (i) et (ii), portant sur  $X$ , et que l'on a ensuite reformulées en terme de l'éventail colorié  $\mathcal{E}_X$  dans les théorèmes 2.25 et 2.27. Dans cette section, on donne certaines conditions (portant sur  $G$ ,  $\Omega$  ou  $X$ ) permettant d'assurer que (i)  $\Rightarrow$  (ii), et un exemple « minimal » pour lequel (i) est satisfaite, et (ii) ne l'est pas.

**PROPOSITION 2.28.** *Dans chacune des situations suivantes, on a (i)  $\Rightarrow$  (ii) :*

- (1)  $\Omega$  est déployé.
- (2)  $\Omega$  est de rang 1.
- (3)  $\Omega$  est horosphérique, de rang 2.
- (4)  $\Omega$  est horosphérique, et  $G$  est déployé par une extension quadratique  $K$  de  $k$ .
- (5)  $X$  est sans couleur, et  $\Omega$  est de rang 2.
- (6)  $X$  est sans couleur, et  $G$  est déployé par une extension quadratique  $K$  de  $k$ .

**DÉMONSTRATION.** On suppose que la condition (i) est satisfaite, et on montre qu'il en est de même pour la condition (ii). Plaçons-nous d'abord dans la situation (1). On fixe un sous-groupe de Borel déployé  $B$  de  $G_{\bar{k}}$  tel que  $Bx_0$  est ouvert dans  $\Omega$ . On peut choisir  $g_\sigma = 1$ , pour tout  $\sigma \in \Gamma$ . On vérifie aisément que  $\Gamma$  agit trivialement sur l'ensemble  $\mathcal{X}$ . Soit alors  $\omega$  une orbite de  $G_{\bar{k}}$  dans  $X$ . Pour tout  $\sigma \in \Gamma$ , on a

$$(\sigma(\mathcal{C}_\omega), \sigma(\mathcal{F}_\omega)) = (\mathcal{C}_\omega, \mathcal{F}_\omega).$$

Mais l'éventail colorié formé de  $(\mathcal{C}_\omega, \mathcal{F}_\omega)$  et de ses faces est quasi-projectif (car il correspond à un plongement simple), donc la condition (ii) est satisfaite, par le théorème 2.27.

On se place maintenant dans la situation (2). On vérifie aisément, en utilisant la proposition 2.15 et le fait que l'espace vectoriel  $V$  est de dimension 1 que  $X$  est quasi-projective. La condition (ii) est donc remplie.

Dans les situations restantes, observons que, pour toute orbite fermée  $\omega$  de  $G_{\bar{k}}$  dans  $X$  le cône  $\mathcal{C}_\omega$  est contenu dans  $\rho(\mathcal{V}^G)$  (c'est évident si  $X$  est sans couleur, et si  $\Omega$  est horosphérique, il suffit d'utiliser la proposition 2.16). Cela montre que la collection de cônes

$$\{\mathcal{C}_\omega, \omega \text{ est une orbite de } G_{\bar{k}} \text{ dans } X\}$$

est un éventail. De plus, cet éventail est quasi-projectif si et seulement si l'éventail colorié  $\mathcal{E}_X$  l'est.

Un éventail dans un espace vectoriel de dimension 2 étant automatiquement quasi-projectif, la condition (ii) est satisfaite dans les situations (3) et (5).

Si  $G$  est déployé par une extension quadratique  $K$  de  $k$ , alors le groupe de Galois  $\Gamma$  agit sur  $V$  à travers un quotient d'ordre 1 ou 2. Pour toute orbite  $\omega$  de  $G_{\bar{k}}$  dans  $X$ , l'éventail constitué des cônes  $(\sigma(\mathcal{C}_\omega))_{\sigma \in \Gamma}$  et de leurs faces possède donc un ou deux cônes maximaux, et est donc quasi-projectif. On voit donc que la condition (ii) est remplie dans les situations (4) et (6), achevant ainsi la preuve de la proposition.  $\square$

Remarquons que les situations (1), (2), (3) et (4) ne dépendent pas de  $X$ . Cela signifie donc que dans chacune de ces situations les plongements de  $\Omega$  sont classifiés par les éventails coloriés stables par  $\Gamma$ . Dans le cas déployé (situation (1)), l'éventail colorié  $\mathcal{E}_X$  est stable par  $\Gamma$  si et seulement si, pour toute orbite  $\omega$  de  $G_{\bar{k}}$  dans  $X$ , l'ensemble des couleurs  $\mathcal{F}_\omega$  est stable par  $\Gamma$ .

On construit maintenant un exemple de plongement d'un espace homogène sphérique défini sur le corps des réels, dont l'éventail est stable par le groupe de Galois, mais qui n'admet pas de  $\mathbb{R}$ -forme. La variété torique construite dans la section 1.3 fournit bien sûr un exemple de tel plongement, mais l'exemple que l'on construit ici est « minimal » au vu de la proposition 2.28. Par exemple, le corps de base est  $\mathbb{R}$ , ce qui n'est pas possible dans le cas torique, par le théorème 1.18. On pose donc maintenant  $k = \mathbb{R}$ . Ainsi,  $\bar{k} = \mathbb{C}$  et  $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . On note  $\sigma$  l'élément non trivial de  $\Gamma$ .

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 3, muni d'une structure réelle  $E_{\mathbb{R}}$ . On se donne une forme hermitienne  $\varepsilon$  sur  $E$ , de signature (1, 2). On note  $\varphi$  la forme bilinéaire symétrique déduite de  $\varepsilon$  en posant

$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(x, y) = \varepsilon(\bar{x}, y).$$

DÉFINITION 2.29. *On note  $G = \mathrm{SU}(\varepsilon)$ .*

Le groupe  $G$  est donc isomorphe à  $\mathrm{SU}(2, 1)$ , et c'est une  $\mathbb{R}$ -forme de  $\mathrm{SL}(E)$ . L'action semi-linéaire de  $\Gamma$  sur  $\mathrm{SL}(E)$  qui lui correspond est décrite par

$$\forall g \in \mathrm{SL}(E), \quad \sigma(g) = \bar{g}^*,$$

où  $g^*$  est l'inverse de l'adjoint de  $g$  pour la forme bilinéaire  $\varphi$ , et la conjugaison fait ici référence à la forme  $\mathrm{SL}(E_{\mathbb{R}})$  de  $\mathrm{SL}(E)$ .

DÉFINITION 2.30. *On note  $\Omega_{\mathbb{C}}$  la variété*

$$\Omega_{\mathbb{C}} = \{(p, q) \in E \times E, \quad \varphi(p, q) = 1\}.$$

La variété  $\Omega_{\mathbb{C}}$  est une sous-variété fermée de  $E \times E$ , c'est donc une variété affine. On fixe un point  $p_0$  de  $E_{\mathbb{R}}$  vérifiant  $\varphi(p_0, p_0) = 1$ , et on note  $x_0 = (p_0, p_0)$ . On fixe aussi

$l \subseteq E$  une droite isotrope pour  $\varphi$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant  $p_0 \notin l^\perp$  (l'orthogonal étant pris par rapport à la forme bilinéaire  $\varphi$ ). On note  $B$  le stabilisateur du drapeau complet

$$l \subseteq l^\perp$$

de  $E$ . On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 2.31. *On fait agir le groupe  $\mathrm{SL}(E)$  sur  $\Omega_{\mathbb{C}}$  par*

$$\forall g \in \mathrm{SL}(E), \quad \forall (p, q) \in E, \quad g(p, q) = (g(p), g^*(q)).$$

*Pour cette action,  $\Omega_{\mathbb{C}}$  est un espace homogène sphérique sous l'action de  $\mathrm{SL}(E)$*

DÉMONSTRATION. Voir que  $\mathrm{SL}(E)$  agit transitivement dans  $\Omega_{\mathbb{C}}$  revient à voir que, étant donné deux couples  $(p, \mathcal{P})$  et  $(p', \mathcal{P}')$  où  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont des plans vectoriels de  $E$  vérifiant  $p \notin \mathcal{P}$  et  $p' \notin \mathcal{P}'$ , il existe  $g \in \mathrm{SL}(E)$  vérifiant  $g(p) = p'$  et  $g(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$ , ce qui est clair. Par ailleurs, on vérifie aisément que l'ensemble

$$\{(p, q) \in \Omega_{\mathbb{C}}, \quad p \notin l^\perp \text{ et } q \notin l^\perp\}$$

est une orbite de  $B$  dans  $\Omega_{\mathbb{C}}$ . Comme c'est aussi un ouvert de  $\Omega_{\mathbb{C}}$ , cela prouve la proposition.  $\square$

Remarquons que le stabilisateur de  $x_0$  dans  $\mathrm{SL}(E)$  est

$$\{g \in \mathrm{SL}(E), \quad g(p_0) = p_0 \text{ et } g(\langle p_0 \rangle^\perp) = \langle p_0 \rangle^\perp\},$$

et est donc isomorphe à  $SL_2$ . L'espace homogène  $\Omega_{\mathbb{C}}$  est par conséquent isomorphe à  $SL_3/SL_2$ . On définit une action semi-linéaire de  $\Gamma$  sur  $\Omega_{\mathbb{C}}$  en posant

$$\forall (p, q) \in \Omega_{\mathbb{C}}, \quad \sigma(p, q) = (\bar{q}, \bar{p}).$$

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 2.32. *L'action semi-linéaire de  $\Gamma$  sur  $\Omega_{\mathbb{C}}$  respecte l'action de  $\mathrm{SL}(E)$ , au sens où*

$$\forall g \in \mathrm{SL}(E), \quad \forall x \in \Omega_{\mathbb{C}}, \quad \sigma(g(x)) = \sigma(g)\sigma(x).$$

DÉMONSTRATION. On note  $x = (p, q)$ . On fait le calcul.

$$\begin{aligned} \sigma(g(p, q)) &= \sigma(g(p), g^*(q)) \\ &= (\overline{g^*(q)}, \overline{g(p)}) \\ &= (\overline{g^*}(\bar{q}), \overline{g}(\bar{p})) \\ &= \overline{g^*}(\bar{q}, \bar{p}) \\ &= \sigma(g)(\sigma(p, q)). \end{aligned}$$

$\square$

DÉFINITION 2.33. *On note  $\Omega$  le quotient de  $\Omega_{\mathbb{C}}$  par l'action de  $\Gamma$ . C'est un espace homogène sous l'action de  $G$ .*

Il n'y a pas de problème pour faire le quotient de  $\Omega_{\mathbb{C}}$  par l'action de  $\Gamma$ , car  $\Omega_{\mathbb{C}}$  est une variété affine. Observons que  $x_0 \in \Omega(\mathbb{R})$ . On identifie maintenant les données combinatoires attachées à l'espace homogène  $(\Omega_{\mathbb{C}}, x_0)$ , ainsi que l'action du groupe de Galois  $\Gamma$  sur ces données.

PROPOSITION 2.34. *L'ensemble  $\mathcal{D}$  est égal à  $\{D_1, D_2\}$ , où*

$$D_1 := \{(p, q) \in \Omega_{\mathbb{C}}, \quad p \in l^\perp\} \text{ et } D_2 := \{(p, q) \in \Omega_{\mathbb{C}}, \quad q \in l^\perp\},$$

*et la bijection  $\sigma$  échange  $D_1$  et  $D_2$ .*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence directe de la description de l'orbite ouverte de  $B$  dans  $\Omega$  donnée dans la preuve de la proposition 2.31, et de la définition de l'action de  $\Gamma$  sur l'ensemble  $\mathcal{D}$ .  $\square$

Avant d'aller plus loin, on a besoin de quelques notations supplémentaires. Le réseau des caractères de  $B$  est donné par

$$\mathcal{X}(B) = (\mathbb{Z}\chi_1 \oplus \mathbb{Z}\chi_2 \oplus \mathbb{Z}\chi_3) / \mathbb{Z}(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3),$$

où le groupe  $B$  agit par le caractère  $\chi_1$  sur  $l$ ,  $\chi_2$  sur  $l^\perp/l$  et  $\chi_3$  sur  $E/l^\perp$ . On note  $V$  le dual  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{X}(B), \mathbb{Q})$ . On a ainsi

$$V = \{r_1\mu_1 + r_2\mu_2 + r_3\mu_3, \quad (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{Q}^3 \text{ et } r_1 + r_2 + r_3 = 0\}$$

où  $\mathbb{Z}\mu_1 \oplus \mathbb{Z}\mu_2 \oplus \mathbb{Z}\mu_3$  est le réseau dual de  $\mathbb{Z}\chi_1 \oplus \mathbb{Z}\chi_2 \oplus \mathbb{Z}\chi_3$ . On spécifie maintenant une base particulière de l'espace vectoriel  $E_{\mathbb{R}}$ .

NOTATION 2.35. On note  $e_1$  l'unique vecteur dans  $l$  qui vérifie  $\varphi(e_1, p_0) = 1$ . On note  $e_2$  l'unique vecteur dans  $l^\perp \cap \langle p_0 \rangle^\perp$  satisfaisant  $\varphi(e_2, e_2) = 1$  et  $e_3$  le vecteur  $p_0 - e_1$ . Les vecteurs  $e_1, e_2, e_3$  forment une base de  $E$  définie sur  $\mathbb{R}$ , et on note  $e_1^*, e_2^*, e_3^*$  la base duale.

Avec ces notations, la matrice de  $\varphi$  dans le base  $(e_1, e_2, e_3)$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On définit les fonctions suivantes sur  $\Omega_{\mathbb{C}}$

$$f_1 : (p, q) \mapsto e_3^*(p) \text{ et } f_2 : (p, q) \mapsto e_3^*(q).$$

PROPOSITION 2.36. Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont respectivement des équations de  $D_1$  et  $D_2$ . Ce sont des fonctions  $B$ -propres de poids respectifs  $-\chi_3$  et  $\chi_1$ .

DÉMONSTRATION. Comme  $e_3^* = 0$  est une équation du plan  $l^\perp$ , il est clair que  $f_1$  est une équation de  $D_1$ , et  $f_2$  une équation de  $D_2$ . Par ailleurs, on a

$$\forall b \in B, \quad \forall (p, q) \in \Omega(\mathbb{C}), \quad (bf_1)(p, q) = f_1(b^{-1}(p, q)) = e_3^*(b^{-1}(p)) = \chi_3(b)^{-1}e_3^*(p).$$

Remarquons maintenant que, comme  $l^\perp = \langle e_1, e_2 \rangle$ , et  $\varphi(e_3, e_1) = 1$ , on a

$$\forall p \in E, \quad e_3^*(p) = \varphi(e_1, p).$$

On en déduit alors que, pour tout  $b \in B$ , et tout  $(p, q) \in \Omega(\mathbb{C})$ ,

$$(bf_2)(p, q) = e_3^*((b^{-1})^*(q)) = \varphi(e_1, (b^{-1})^*(q)) = \varphi(b(e_1), q) = \chi_1(b)e_3^*(q).$$

Ceci achève la preuve de la proposition.  $\square$

On montre maintenant la proposition suivante :

PROPOSITION 2.37. Le réseau  $\mathcal{X}$  est égal au réseau  $\mathcal{X}(B)$ . On a

$$\rho(\nu_{D_1}) = \mu_2 - \mu_3, \quad \rho(\nu_{D_2}) = \mu_1 - \mu_2.$$

L'automorphisme  $\sigma$  de  $V$  échange  $\mu_2 - \mu_3$  et  $\mu_1 - \mu_2$ .

DÉMONSTRATION. Le réseau  $\mathcal{X}$  est un sous-réseau de  $\mathcal{X}(B)$  contenant  $-\chi_3$  et  $\chi_1$ . C'est donc  $\mathcal{X}(B)$  tout entier. De plus,

$$\rho(\nu_{D_1})(-\chi_3) = \nu_{D_1}(f_1) = 1 \text{ et } \rho(\nu_{D_1})(\chi_1) = \nu_{D_1}(f_2) = 0,$$

ce qui montre que  $\rho(\nu_{D_1}) = \mu_2 - \mu_3$ . On calcule  $\rho(\nu_{D_2})$  de la même manière. Pour établir la dernière assertion, il suffit maintenant de se rappeler que  $\sigma$  échange  $D_1$  et  $D_2$ , et que l'application  $\rho$  est  $\Gamma$ -équivariante.  $\square$



Pour achever d'identifier les données combinatoires attachées à l'espace homogène  $\Omega_{\mathbb{C}}$ , il reste à décrire le cône  $\rho(\mathcal{V}^G)$ . C'est ce que fait la proposition suivante :

PROPOSITION 2.38. *On a*

$$\rho(\mathcal{V}^G) = \{r_1\mu_1 + r_2\mu_2 + r_3\mu_3 \in V, \quad r_3 \geq r_1\}.$$

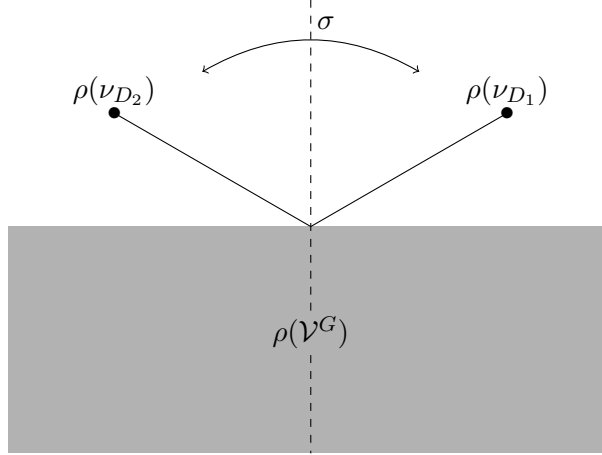


FIGURE 2. Les données combinatoires attachées à  $\Omega$

DÉMONSTRATION. Soit  $\tau$  la permutation  $(1, 2, 3)$ . On note aussi  $\tau \in \text{SL}(E)$  l'automorphisme envoyant  $e_i$  sur  $e_{\tau(i)}$ , pour  $i = 1, 2, 3$ . On montre le lemme suivant :

LEMME 2.39. *L'égalité suivante a lieu dans  $\mathcal{K}$  :*

$$\tau(f_1)f_2 + \tau^2(f_1)\tau(f_2) + f_1\tau^2(f_2) = 1$$

DÉMONSTRATION. Soit  $x = (p, q) \in \Omega(\mathbb{C})$ . On note  $p_i = e_i^*(p)$  (resp.  $q_i = e_i^*(q)$ ), pour  $i = 1, 2, 3$ . On a

$$\tau(f_1)(x) = e_3^*(\tau^2(p)) = p_1, \quad \tau^2(f_1)(x) = p_2.$$

De plus, on a

$$\tau^2(f_2)(x) = \varphi(e_1, \tau^*(q)) = \varphi(\tau^2(e_1), q) = q_1 - q_3.$$

Le même raisonnement prouve que  $\tau(f_2)(x) = q_2$ . On en déduit finalement que la quantité que l'on cherche est égale à

$$p_1q_3 + p_2q_2 + p_3(q_1 - q_3).$$

Mais cette quantité est égale à  $\varphi(p, q)$ , et vaut donc 1 puisque  $(p, q)$  appartient à  $\Omega(\mathbb{C})$ .  $\square$

D'après le lemme, pour toute valuation  $G$ -invariante  $\nu \in \mathcal{V}$ , on a

$$\langle \rho(\nu), \chi_1 - \chi_3 \rangle \leq 0.$$

On a donc montré l'inclusion  $\ll \subseteq \gg$ . Pour établir l'inclusion inverse, on utilise la proposition 2.7, qui dit que la dimension de la partie linéaire du cône  $\rho(\mathcal{V}^G)$  est égale à la codimension de  $\text{Stab}(x_0)$  dans son normalisateur. On a déjà identifié le stabilisateur de  $x_0$  comme étant le sous-groupe

$$\{g \in \text{SL}(E), \quad g(p_0) = p_0 \text{ et } g(\langle p_0 \rangle^\perp) = \langle p_0 \rangle^\perp\}$$

de  $\text{SL}(E)$ . On en déduit aisément que son normalisateur est égal à

$$\{g \in \text{SL}(E), \quad g(p_0) \in \langle p_0 \rangle \text{ et } g(\langle p_0 \rangle^\perp) = \langle p_0 \rangle^\perp\}.$$

Ainsi, la partie linéaire de  $\rho(\mathcal{V}^G)$  est de dimension 1, ce qui achève la preuve de la proposition.  $\square$

On passe à la définition du plongement  $X$ . On note  $\mathcal{C}$  le cône dans  $V$  engendré par  $\mu_2 - \mu_3$  et  $\mu_1 - 2\mu_2 + \mu_3$ .

DÉFINITION 2.40. On note  $\mathcal{E}$  l'éventail colorié formé des cônes

$$(\mathcal{C}, \{D_1\}), \quad (\sigma(\mathcal{C}), \{D_2\})$$

et de leurs faces. Cet éventail est stable par  $\Gamma$ .

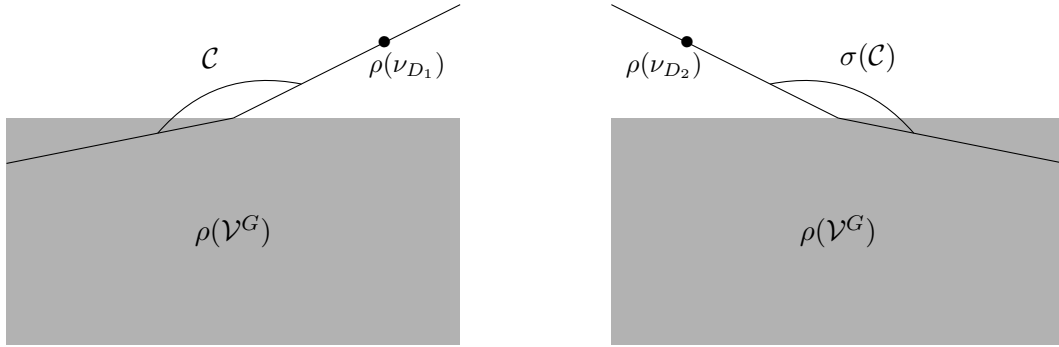


FIGURE 3. L'éventail  $\mathcal{E}$

On a alors la proposition suivante :

THÉORÈME 2.41. *Le plongement  $X = X_{\mathcal{E}}$  de  $\Omega_{\mathbb{C}}$  n'admet pas de  $\mathbb{R}$ -forme. De plus, il est lisse.*

DÉMONSTRATION. Les deux cônes maximaux de l'éventail colorié  $\mathcal{E}$  forment une seule orbite sous l'action de  $\Gamma$ . Comme ces cônes se rencontrent, l'éventail  $\mathcal{E}$  ne peut pas être quasi-projectif. D'après le théorème 2.27, on en déduit que le plongement  $X$  n'a pas de forme réelle. On note  $\omega$  l'orbite fermée de  $G(\mathbb{C})$  dans  $X$  qui correspond au cône colorié  $(\mathcal{C}, \{D_1\})$ . En translatant l'ouvert  $X_{\omega, B}$  par des éléments de  $\Gamma$  et de  $G(\mathbb{C})$ , on recouvre  $X$  tout entier, donc, pour montrer que  $X$  est lisse, il suffit de prouver que l'ouvert  $X_{\omega, B}$  l'est. Soit  $P$  le stabilisateur de  $D_2$ , c'est-à-dire le stabilisateur de la droite  $l$  dans  $E$ . Par le théorème 2.13, il existe un sous-groupe de Levi  $L$  de  $P$  et une sous-variété fermée  $S$  de  $X_{\omega, B}$ , stable par  $L$ , sphérique sous l'action de  $L$ , contenant  $x_0$ , et telle que le morphisme naturel

$$R_u(P) \times S \rightarrow X_{\omega, B}$$

est un isomorphisme. D'après le lemme ci-dessous,  $S$  est isomorphe à  $\mathbb{C}^3$ , et donc lisse. On définit une fonction  $f_3$  sur  $\Omega_{\mathbb{C}}$  par la formule

$$f_3 : (p, q) \mapsto e_2^*(p).$$

LEMME 2.42. *Les fonctions  $f_2, f_1f_2$  et  $f_3f_2$  sont algébriquement indépendantes dans  $\mathbb{C}[S]$ , et on a*

$$\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[f_2, f_1f_2, f_3f_2]$$

DÉMONSTRATION. Remarquons que

$$\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[X_{\omega, B}]^{R_u(P)},$$

donc l'algèbre  $\mathbb{C}[S]$  est égale au sous- $L$ -module de  $\mathbb{C}[Lx_0]$  engendré par les fonctions  $B \cap L$ -propres dans  $\mathbb{C}(Lx_0)$  de poids  $\chi$  satisfaisant

$$\langle \mu_2 - \mu_3, \chi \rangle \geq 0, \quad \langle \mu_1 - 2\mu_2 + \mu_3, \chi \rangle \geq 0.$$

Autrement dit,  $\chi$  appartient au monoïde engendré par  $\chi_1 - \chi_3$ . Les fonctions  $f_2$  et  $f_1 f_2$  sont  $B \cap L$ -propres de poids respectifs  $\chi_1$  et  $\chi_1 - \chi_3$ . De plus, le  $L$ -module  $\mathbb{C}[Lx_0]$  est sans multiplicité, parce que l'espace homogène  $Lx_0$  est sphérique. On en déduit que

$$\mathbb{C}[S] = \bigoplus_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \langle Lf_2^{m+n} f_1^n \rangle.$$

Observons à présent que la fonction  $f_2$  est  $L$ -propre. En effet, on a

$$\forall g \in L, \quad \forall (p, q) \in \Omega_{\mathbb{C}}, \quad (gf_2)(p, q) = \varphi(e_1, (g^{-1})^*(q)) = \varphi(g(e_1), q) = \alpha(g)f_2(p, q)$$

où  $\alpha$  est le poids de l'action de  $P$  sur la droite  $l$ . Le lemme qui suit permet alors de conclure :

LEMME 2.43. *Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Une base de l'espace vectoriel  $\langle Lf_1^n \rangle \subseteq \mathbb{C}[Lx_0]$  est donnée par*

$$f_1^n, f_1^{n-1} f_3, \dots, f_1 f_3^{n-1}, f_3^n.$$

DÉMONSTRATION. On commence par établir le cas  $n = 1$ . Remarquons que le sous-espace  $l^\perp \subseteq V^*$  est engendré par  $e_2^*$  et  $e_3^*$ . On en déduit aisément que  $e_2^*, e_3^*$  est une base de  $\langle Le_3^* \rangle$ . De plus, s'il existe  $\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{C}^2$  tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_3 f_3 = 0$$

dans  $\mathbb{C}[S]$ , alors la même chose serait vraie dans  $\mathbb{C}[X_{\omega, B}]$ . On en déduirait que les formes linéaires  $e_2^*$  et  $e_3^*$  sont linéairement dépendantes dans  $V^*$ , ce qui n'est pas possible. On en déduit que les fonctions  $f_1$  et  $f_3$  sont linéairement indépendantes dans  $\mathbb{C}[S]$ , ce qui achève le cas  $n = 1$ . Le même argument montre que les fonctions  $f_1^n, f_1^{n-1} f_3, \dots, f_1 f_3^{n-1}, f_3^n$  sont linéairement indépendantes dans  $\mathbb{C}[S]$ . Par le cas  $n = 1$ , elles engendrent  $\langle Lf_1^n \rangle$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

Le plongement  $X$  donne un exemple de plongement d'un espace homogène sphérique contenant deux points qui ne se trouvent pas sur un même ouvert affine. En effet, d'après la proposition 1.16, il suffit de prendre un point sur chaque orbite fermée de  $X$ , et il y en a deux. Par ailleurs, d'après le théorème 2.28, l'espace homogène  $\Omega$  est de rang minimal parmi les espaces homogènes sphériques possédant un plongement avec cette propriété.

## Variétés log homogènes en caractéristique positive

On étend dans ce chapitre des résultats connus en caractéristique nulle, concernant les variétés log homogènes. La lettre  $G$  désigne un groupe connexe réductif défini sur  $k$ , et  $\Omega$  est un espace homogène sous l'action de  $G$ . Etant donné un groupe algébrique  $G$ ,  $H$ ,  $P$ , etc. on note par la lettre gothique correspondante  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{p}$ , etc. son algèbre de Lie.

### 1. Rappels sur les variétés log homogènes en caractéristique nulle

Dans cette partie le corps  $k$  est algébriquement clos et de caractéristique 0. Pour résoudre des problèmes de géométrie énumérative, il est bon de disposer de « belles » compactifications équivariantes d'espaces homogènes, dont les points ont une signification géométrique. L'espace des quadriques complètes, dont la construction est due à Semple ([Sem48], [Sem52]) en est un exemple.

Ce que l'on entend par « belle » compactification peut recouvrir plusieurs notions, et le but de cette section est d'en définir quelques-unes. Généralement, on attend d'une telle compactification qu'elle soit projective, lisse, et que la combinatoire des orbites et leur géométrie se marient pour le mieux. Par « combinatoire des orbites », on entend la détermination des orbites figurant dans l'adhérence d'une orbite donnée, et, par « géométrie des orbites », on entend l'étude de la normalité, la lissité... des adhérences d'orbites, ou encore l'étude de la manière dont s'intersectent deux adhérences d'orbites.

Incontestablement, les compactifications magnifiques, introduites dans [Lun96] par Luna, sont des exemples de « belles » compactifications :

DÉFINITION 1.1. *Soit  $X$  une compactification lisse de  $\Omega$ .  $X$  est dite **magnifique** si :*

(M1) *le complémentaire  $D := X \setminus \Omega$  de  $\Omega$  dans  $X$ , appelé le **bord** de  $X$ , est un diviseur à croisements normaux stricts tel que les intersections partielles des composantes irréductibles de  $D$  sont exactement les adhérences d'orbites de  $G$  dans  $X$ .*

(M2) *il n'y a qu'une seule orbite fermée de  $G$  dans  $X$ .*

On rappelle qu'un diviseur effectif et réduit  $D$  sur  $X$  est dit à **croisements normaux stricts** si en tout point  $x \in X$ , les composantes irréductibles  $D_1, \dots, D_s$  de  $D$  contenant  $x$  sont lisses et leurs espaces tangents  $T_{D_1, x}, \dots, T_{D_s, x}$  en  $x$  s'intersectent transversalement dans l'espace vectoriel  $T_{X, x}$ .

La condition (M1) impose que les intersections partielles des composantes irréductibles de  $D$  sont encore irréductibles. La condition (M2) signifie que les composantes irréductibles de  $D$  se rencontrent. Si le diviseur  $D$  possède  $r$  composantes irréductibles, alors il y a  $2^r$  orbites de  $G$  dans  $X$ .

Remarquons qu'un tore de dimension supérieure ou égale à 1 n'admet pas de compactification magnifique. En effet, une variété torique ne possédant qu'une seule orbite fermée est affine. A vrai dire, assez peu d'espaces homogènes admettent une compactification magnifique. Dans [Lun96], Luna a démontré qu'un espace homogène qui a une compactification magnifique est nécessairement sphérique. La théorie des plongements

sphériques de Luna et Vust permet alors de montrer que, si un espace homogène  $\Omega$  possède une compactification magnifique, celle-ci est unique et projective. Par ailleurs, elle doit correspondre à l'éventail coloré formé du cône  $(\rho(\mathcal{V}^G), \emptyset)$  et de ses faces (avec les notations de la section 2.1, chapitre 1). Ce cône doit donc être saillant, ce qui impose, d'après [BP87], que l'espace homogène  $\Omega$  ne possède qu'un nombre fini d'automorphismes équivariants.

Supposons que l'espace homogène  $\Omega$  soit sphérique, et qu'il ne possède pas d'automorphisme équivariant non trivial. Les travaux combinés de Brion, Knop et Losev montrent alors que le **plongement de Demazure** de  $\Omega$  réalise la compactification magnifique de  $\Omega$ . Par définition, ce plongement est le morphisme

$$\tau : \Omega \rightarrow \mathrm{Gr}(d, \mathfrak{g}), \quad x \mapsto \mathfrak{g}_x,$$

où  $d$  est la dimension commune des sous-algèbres de Lie d'isotropie. Ce morphisme est équivariant, le groupe  $G$  agissant sur  $\mathfrak{g}$  par la représentation adjointe, et c'est une immersion car l'espace homogène  $\Omega$  ne possède pas d'automorphisme équivariant non trivial. Brion ([Bri90]) a établi que la normalisation de l'adhérence de  $\tau(\Omega)$  est le plongement de  $\Omega$  correspondant au cône  $\rho(\mathcal{V}^G)$  (qui est saillant). Knop ([Kno96]) a démontré que le cône  $\rho(\mathcal{V}^G)$  (et donc la normalisation de  $\tau(\Omega)$ ) est lisse. Enfin, Losev ([Los09]) a prouvé que l'adhérence de  $\tau(\Omega)$  est normale, ce qui achève de montrer que  $\overline{\tau(\Omega)}$  est la compactification magnifique de  $\Omega$ . Ce résultat avait auparavant été établi dans des cas particuliers : Demazure ([Dem80], non publié) l'a démontré si  $G = PGL_n$  et si  $\Omega$  est soit  $PGL_n/PSO_n$  soit  $PGL_n/PSp_n$ , et De Concini et Procesi ([DCP83]) l'ont montré si  $G$  est un groupe semi-simple de type adjoint et  $\Omega$  est un espace symétrique sous l'action de  $G$ , c'est-à-dire si  $\Omega = G/G^\sigma$ , où  $\sigma$  est une involution de  $G$ .

Comme on l'a signalé, un tore de dimension plus grande que 1 ne possède pas de compactification magnifique. Comme on le vérifie facilement, toute compactification d'un tore est régulière, au sens suivant (introduit par Bifet, De Concini et Procesi dans [BDP90]) :

**DÉFINITION 1.2.** *Soit  $X$  une compactification lisse de  $\Omega$ .  $X$  est dite **régulière** si :*

(R1) *le bord  $D$  de  $X$  est un diviseur à croisements normaux stricts tel que les intersections partielles des composantes irréductibles de  $D$  sont exactement les adhérences d'orbites de  $G$  dans  $X$ .*

(R2) *pour tout point  $x \in X$ , le groupe d'isotropie  $G_x$  possède une orbite ouverte dans l'espace normal  $N_{G_x/X, x}$ .*

Toute compactification magnifique est régulière, mais l'inverse est bien sûr faux, une compactification régulière pouvant admettre de nombreuses orbites fermées (voir par exemple le cas des tores). Cependant, on peut montrer que, sur une compactification régulière, toutes les orbites fermées sont isomorphes comme espaces homogènes.

Les compactifications **log homogènes** ont été introduites par Brion dans [Bri07], et figuraient déjà implicitement dans [BB96]. Avant de les définir précisément, on donne quelques rappels concernant le fibré tangent logarithmique.

Soit  $X$  une variété lisse, irréductible, et  $D$  un diviseur à croisements normaux stricts sur  $X$ . On note  $D_1, \dots, D_m$  les composantes irréductibles de  $D$ . Pour tout  $i$  entre 1 et  $s$ , on note  $\mathcal{O}_{D_i}(D_i)$  le faisceau

$$\mathcal{O}_X(D_i) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{D_i}$$

vu comme  $\mathcal{O}_{D_i}$ -module sur  $D_i$  ou comme  $\mathcal{O}_X$ -module sur  $X$ , selon le contexte. Ce faisceau est le faisceau normal à  $D_i$  dans  $X$ , noté  $\mathcal{N}_{D_i/X}$ . On dispose donc d'un morphisme naturel

$$\mathcal{T}_X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{D_i}(D_i),$$

où  $\mathcal{T}_X$  est le faisceau tangent à  $X$  (faisceau des sections du fibré tangent  $T_X$  de  $X$ ). On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 1.3. *Le morphisme*

$$\mathcal{T}_X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{D_i}(D_i)$$

*ainsi construit est surjectif, et son noyau est localement libre de rang  $n$ .*

DÉMONSTRATION. On se place au voisinage d'un point  $x$ , sur un ouvert  $U_x$  où  $D$  a pour équation  $u_1 \dots u_s = 0$ ,  $u_1, \dots, u_s$  vérifiant que leurs différentielles  $d_x u_1, \dots, d_x u_s$  sont linéairement indépendantes dans l'espace cotangent à  $X$  en  $x$ . Quitte à diminuer  $U_x$ , on peut supposer que ces différentielles restent linéairement indépendantes en tout point de  $U_x$ , et on peut considérer des 1-formes  $\omega_{s+1}, \dots, \omega_n$  telles que la famille de sections  $du_1, \dots, du_s, \omega_{s+1}, \dots, \omega_n$  trivialise le faisceau  $\mathcal{T}_{U_x}^*$ . On note alors  $\partial_1, \dots, \partial_n$  la famille de champs de vecteurs duale. Un petit calcul montre que le morphisme

$$\mathcal{T}_X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{D_i}(D_i)$$

s'écrit localement

$$\sum_{i=1}^n f_i \partial_i \mapsto \bigoplus_{i=1}^s (f_i \bmod u_i) \frac{1}{u_i}.$$

On en déduit le fait qu'il est surjectif, et que son noyau est localement

$$\mathcal{O}_{U_x} u_1 \partial_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{U_x} u_s \partial_s \oplus \mathcal{O}_{U_x} \partial_{s+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{U_x} \partial_n.$$

Ce noyau est donc localement libre de rang  $n$ .  $\square$

DÉFINITION 1.4. *On appelle faisceau tangent logarithmique, noté  $\mathcal{T}_X(-\log D)$  le noyau du morphisme de la proposition 1.3. C'est un faisceau localement libre de rang  $n$ , et on a une suite exacte*

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_X(-\log D) \rightarrow \mathcal{T}_X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{D_i}(D_i) \rightarrow 0.$$

*On appelle fibré tangent logarithmique, noté  $T_X(-\log D)$ , le fibré vectoriel dont le faisceau des sections est  $\mathcal{T}_X(-\log D)$ .*

On rappelle que, pour tout  $x \in X$ , la **strate** définie par  $D$  à laquelle appartient  $x$  est la composante connexe de l'intersection  $D_1 \cap \dots \cap D_s$  qui contient  $x$ , privée des autres composantes de  $D$ . Les sections de  $\mathcal{T}_X(-\log D)$  sont les champs de vecteurs qui sont tangents en tout point à la strate définie par  $D$  à laquelle appartient ce point. De manière plus « algébrique », ce sont les champs de vecteurs dont la dérivation de  $\mathcal{O}_X$  associée stabilise le faisceau d'idéaux  $\mathcal{O}_X(-D)$ . Si le corps de base est  $\mathbb{C}$ , les sections holomorphes sont les champs de vecteurs holomorphes dont les courbes intégrales respectent les strates définies par le diviseur à croisements normaux stricts  $D$ .

Supposons maintenant que  $X$  soit une compactification de  $\Omega$ , dont le bord est un diviseur à croisements normaux stricts. On vérifie alors que les dérivations de  $\mathcal{O}_X$  fournies

par l'action infinitésimale de  $\mathfrak{g}$  dans  $X$  stabilisent le faisceau  $\mathcal{O}_X(-D)$ , ce qui permet de construire un morphisme de fibrés vectoriels

$$X \times \mathfrak{g} \rightarrow T_X(-\log D).$$

Cela signifie que les champs de vecteurs sur  $X$  donnés par l'action infinitésimale de  $\mathfrak{g}$  dans  $X$  sont tangents en tout point à la strate à laquelle appartient ce point, ce qui est vrai car les strates de  $X$  associées à  $D$  sont stables par le groupe  $G$  (qui est connexe).

**DÉFINITION 1.5.** *Soit  $X$  une compactification lisse de  $\Omega$ .  $X$  est dite **log homogène** si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(L1) *le bord  $D$  de  $X$  est un diviseur à croisements normaux stricts.*

(L2) *le morphisme de fibrés vectoriels sur  $X$*

$$X \times \mathfrak{g} \rightarrow T_X(-\log D)$$

*est surjectif.*

Les compactifications log homogènes sont donc définies en termes purement géométriques. On dit qu'une  $G$ -variété  $X$  complète irréductible et lisse, est log homogène sous l'action de  $G$  si  $G$  possède une orbite ouverte dans  $X$ , dont  $X$  est une compactification log homogène. Dans [BB96], les auteurs supposent seulement  $D$  à croisements normaux. Dans ce cas, on peut toujours définir un fibré tangent logarithmique, et la définition ci-dessus fait toujours sens. Par ailleurs, Bien et Brion montrent que  $D$  est alors automatiquement à croisements normaux stricts. Ici, on a supposé dès le début que  $D$  est à croisements normaux stricts pour privilégier un point de vue plus « géométrique ».

Bien et Brion ont montré dans [BB96] qu'un espace homogène  $\Omega$  possède une compactification log homogène si et seulement si il est sphérique, et que, dans ce cas, il est équivalent pour une compactification de  $\Omega$  d'être log homogène, régulière, ou sans couleur. Ils travaillent pour cela sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Dans ce chapitre, on va voir comment adapter leurs résultats en caractéristique positive.

Signalons enfin qu'une compactification lisse  $X$  de  $\Omega$  est log homogène si et seulement si le morphisme de Demazure

$$\tau : \Omega \rightarrow \mathrm{Gr}(d, \mathfrak{g}), \quad x \mapsto \mathfrak{g}_x$$

se prolonge à  $X$ . En effet, si la compactification  $X$  est log homogène, le morphisme

$$X \rightarrow \mathrm{Gr}(d, \mathfrak{g}), \quad x \mapsto \mathrm{Ker}(\mathfrak{g} \rightarrow T_X(-\log D)_x)$$

prolonge  $\tau$  sur  $X$ . De plus, la théorie de Luna et Vust, ainsi que les résultats mentionnés ci-dessus dus à Brion, Knop et Losev montrent que, si le morphisme de Demazure se prolonge à  $X$ , alors  $X$  n'a pas de couleur. On en déduit que  $X$  est une compactification log homogène.

## 2. Extension du théorème de structure locale

Dans cette partie, le corps de base  $k$  est algébriquement clos de caractéristique quelconque. Soit  $X$  une  $G$ -variété définie sur  $k$ . On rappelle qu'une orbite  $\omega$  de  $G$  dans  $X$  est dite séparable si pour tout (ou, de manière équivalente, pour un)  $x \in \omega$ , le morphisme « orbite »

$$\mathrm{orb}_x : G \rightarrow \omega, \quad g \mapsto gx$$

est séparable (i.e. à différentielle surjective en  $e$ ). De manière équivalente, le schéma en groupes d'isotropie du point  $x$  est réduit. Rappelons aussi la proposition-définition suivante, tirée de [Kno93] (définition 2.3) :

PROPOSITION-DÉFINITION 2.1. *On fixe un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$ . Parmi les sous-groupes  $P$  de  $G$  contenant  $B$  et vérifiant*

$$\text{il existe } U \subseteq X \text{ ouvert non vide, } \forall x \in U, \quad Px = Bx$$

*il en existe un qui contient tous les autres. On note  $P_B(X)$  ce sous-groupe parabolique.*

En d'autres termes  $P_B(X)$  est le stabilisateur de l'orbite générale de  $B$  dans  $X$ . Par exemple, si  $X$  est une variété sphérique sous l'action de  $G$  dont on note  $\Omega_B$  l'orbite ouverte de  $B$ , alors :

$$P_B(X) = \{g \in G, \quad g(\Omega_B) = \Omega_B\}.$$

L'ingrédient clé dans la preuve des résultats de Bien et Brion mentionnés dans la partie précédente est le théorème de structure locale des variétés sphériques. Rappelons-en l'énoncé (vu dans la section 2.1, chapitre 1). On suppose que  $X$  contient une orbite dense  $\Omega$  qui est un espace homogène sphérique. On reprend les notations introduites dans la section 2.1. En particulier, pour toute orbite fermée  $\omega$  de  $G$  dans  $X$ , on note

$$X_{\omega,B} := X_{\omega,G} \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{F}_\omega} \overline{D} \text{ et } P := \bigcap_{D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{F}_\omega} \text{Stab}(D).$$

L'ouvert affine  $X_{\omega,B}$  de  $X$  est stable sous l'action du sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$ . Si le corps  $k$  est de caractéristique 0, on a le théorème suivant ([BLV86]) :

THÉORÈME 2.2. *On suppose  $k$  de caractéristique 0. Il existe un sous-groupe de Levi  $L$  de  $P$  et une sous-variété fermée  $Z$  de  $X_{\omega,B}$  stable par  $L$  et contenant  $x_0$ , tels que le morphisme naturel*

$$R_u(P) \times Z \rightarrow X_{\omega,B}, \quad (g, x) \mapsto gx$$

*soit un isomorphisme. Par ailleurs, la  $L$ -variété  $Z$  est sphérique.*

Comme on l'a déjà vu au chapitre 1 à l'occasion du théorème 2.14, Knop a montré comment adapter le théorème qui précède en toute caractéristique ([Kno93]) :

THÉORÈME 2.3. *Il existe un tore maximal  $T$  de  $G$  contenu dans  $P$ , une sous-variété fermée  $Z$  de  $X_{\omega,B}$  stable par  $T$  et contenant  $x_0$ , tels que le morphisme naturel*

$$R_u(P) \times Z \rightarrow X_{\omega,B}, \quad (g, x) \mapsto gx$$

*soit fini et surjectif.*

Essentiellement, on va montrer dans cette partie que, si l'on suppose les orbites de  $G$  dans  $X$  séparables, alors on peut faire en sorte que le morphisme fini et surjectif du théorème de Knop soit un isomorphisme.

On suppose dorénavant que  $G$  possède une orbite dense  $\Omega$  dans  $X$  et une unique orbite fermée  $\omega$  qui est complète et séparable. On fixe un point  $x$  sur  $\omega$ , et un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$  tel que  $BG_x$  est ouvert dans  $G$ . On fixe un tore maximal  $T$  de  $G$  contenu dans  $B$  et  $G_x$ . On note  $P := P_B(\omega)$  et  $L$  le sous-groupe de Levi de  $P$  contenant  $T$ .

THÉORÈME 2.4. *Dans la situation précédente, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *L'espace homogène  $\Omega$  est sphérique, et le plongement  $X$  est sans couleur.*
- (2) *Le tore  $T$  possède une orbite ouverte dans l'espace normal  $N_{\omega/X,x}$ . De plus, le bord  $D = X \setminus \Omega$  est un diviseur à croisements normaux stricts dont les strates associées sont les orbites de  $G$ .*



(3)  $X_0 = \{y \in X, \quad x \in \overline{By}\}$  est un ouvert affine de  $X$  stable par  $P$ . De plus, il existe une sous-variété fermée  $Z$  de  $X_0$ , lisse, stable par  $L$ , sur laquelle le sous-groupe dérivé  $[L, L]$  agit trivialement et contenant une orbite ouverte du tore  $L/[L, L]$ , telle que le morphisme

$$R_u(P) \times Z \rightarrow X_0, \quad (p, z) \mapsto pz$$

est un isomorphisme. Enfin, chaque orbite de  $G$  dans  $X$  coupe  $Z$  selon une unique orbite de  $T$ .

Sous les conditions équivalentes du théorème 2.4, le lemme 6.5 de [Kno91] montre que  $P = P_B(X)$ . En effet, il est clair que les sous-groupes  $G_x$  et  $P$  sont opposés. Par ailleurs, le lemme 6.5 de [Kno91] garantit, comme le plongement  $X$  est sans couleur, que les sous-groupes  $G_x$  et  $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \text{Stab}(D)$  sont opposés. Il reste maintenant à remarquer que

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \text{Stab}(D) = \{g \in G, \quad g(\Omega_B) = \Omega_B\} = P_B(X),$$

où  $\Omega_B$  est l'orbite ouverte de  $B$  dans  $\Omega$ , pour conclure que  $P = P_B(X)$ . Ce résultat signifie qu'une orbite fermée séparable dans un plongement simple d'un espace homogène sphérique est « prescrite » par avance, puisqu'elle est isomorphe à l'espace homogène  $G/P_B(\Omega)^-$ .

Toujours sous les conditions équivalentes du théorème 2.4, montrons que l'ouvert affine  $X_0$  du point (3) n'est autre que l'ouvert  $X_{\omega, B}$ . Soit  $D$  un diviseur premier stable par  $B$  sur  $X$ . Voyons que  $D$  rencontre  $X_0$  si et seulement si il est stable par  $G$ . Si  $D$  est stable par  $G$ , alors il intersecte  $X_0$ , puisque  $X_0$  rencontre toutes les orbites de  $G$ . De plus, si  $D$  rencontre  $X_0$ , alors il existe un point de l'orbite ouverte de  $B$  dans  $D$  qui appartient à  $X_0$ . Par définition même de  $X_0$ , on a alors  $\omega \subseteq D$ , ce qui implique, vu que  $X$  n'a pas de couleur, que  $D$  est stable par  $G$ . Comme  $X_0$  est affine, son complémentaire dans  $X$  est réunion de diviseurs premiers stables par  $B$ , et le raisonnement qui précède montre qu'il s'agit exactement des diviseurs  $\overline{D}$ , pour  $D \in \mathcal{D}$ , ce qui permet de conclure.

Avant de passer à la preuve proprement dite du théorème 2.4, on montre deux lemmes :

LEMME 2.5. *Il existe un ouvert affine  $X_\sigma$  de  $X$  stable par  $P$ , ainsi qu'une sous-variété fermée  $Z$  de  $X_\sigma$  stable par  $T$ , contenant  $x$ , et telle que :*

(i) *La variété  $Z$  est lisse en  $x$ , et l'espace vectoriel  $T_{Z, x}$  muni de l'action de  $T$  est isomorphe à l'espace  $N_{\omega/X, x}$  muni de l'action de  $T$ .*

(ii) *Le morphisme*

$$\mu : R_u(P) \times Z \rightarrow X_\sigma, \quad (p, z) \mapsto pz$$

*est fini, surjectif, étale en  $(e, x)$ , et la fibre  $\mu^{-1}(x)$  est réduite à  $\{(e, x)\}$ .*

DÉMONSTRATION. Commençons par fixer un fibré en droites très ample  $L$  sur  $X$  (d'après un théorème de Sumihiro, comme le plongement  $X$  est simple, il est quasi-projectif, voir définition 2.10, chapitre 1). D'après le théorème 2.10 de [Kno93], il existe un entier  $N$  et une section globale  $\sigma$  de  $L^N$  tels que

$$X_\sigma = \{y \in X, \quad \sigma(y) \neq 0\}$$

est un ouvert affine contenant le point  $x$ , et que le stabilisateur de la droite  $\langle \sigma \rangle$  dans  $H^0(X, L^N)$  est  $P$ . L'ouvert  $X_\sigma$  est donc affine, stable par  $P$ , et contient  $x$ . En utilisant le fibré  $L^N$ , on plonge  $X$  dans un espace projectif  $\mathbb{P}(V)$  sur lequel  $G$  agit linéairement. Dans l'espace tangent  $T_{\mathbb{P}(V), x}$ , on choisit un supplémentaire  $T$ -stable  $S$  au sous espace  $T_{\omega, x}$ , qui

est somme directe d'un supplémentaire  $T$ -stable de  $T_{\omega,x}$  dans  $T_{X,x}$  et d'un supplémentaire  $T$ -stable de  $T_{X,x}$  dans  $T_{\mathbb{P}(V),x}$ . Ceci est possible car  $T$  est linéairement réductif.

On considère ensuite le sous-espace linéaire  $S'$  de  $\mathbb{P}(V)$  qui passe par  $x$  et dont l'espace tangent en  $x$  est  $S$ . D'après le théorème 1.2 de [Kno93], il existe une composante irréductible  $Z$  de  $X_\sigma \cap S'$  contenant  $x$  et telle que les morphismes

$$\begin{aligned}\mu : R_u(P) \times Z &\rightarrow X_\sigma, & (p, z) &\mapsto pz \\ \nu : Z &\rightarrow X_\sigma/R_u(P), & z &\mapsto zR_u(P)\end{aligned}$$

sont finis et surjectifs. Par ailleurs, la fibre  $\mu^{-1}(x)$  est réduite au point  $(e, x)$ . On remarque maintenant que  $S'$  coupe  $X_\sigma$  transversalement en  $x$ , ce qui implique que la variété  $Z$  est lisse au point  $x$ . Comme  $P = P_B(\omega)$ , l'orbite  $Px = R_u(P)x$  est ouverte dans  $\omega$ . Par ailleurs, on a la somme directe  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x \oplus \mathfrak{p}_u$ , où  $\mathfrak{p}_u$  est l'algèbre de Lie de  $R_u(P)$ . De plus, le morphisme

$$d_e \text{orb}_x : \mathfrak{g} \rightarrow T_{\omega,x}$$

est surjectif et identiquement nul sur  $\mathfrak{g}_x$ , ce qui prouve que sa restriction à  $\mathfrak{p}_u$  est un isomorphisme. On remarque alors que le morphisme

$$\mu : R_u(P) \times Z \rightarrow X_\sigma, \quad (p, z) \mapsto pz$$

est étale au point  $(e, x)$ . En effet, sa différentielle en ce point est :

$$\mathfrak{p}_u \times T_{Z,x} \rightarrow T_{X,x}, \quad (h, k) \mapsto d_e \text{orb}_x(h) + k.$$

Cela permet aussi de conclure que les espaces  $T_{Z,x}$  et  $N_{\omega/X,x}$  munis de l'action du tore  $T$  sont isomorphes, et achève de prouver (i) et (ii).  $\square$

**LEMME 2.6.** *Soit  $Z$  une variété affine irréductible sur laquelle agit un tore  $T$ . On suppose qu'il existe un point lisse  $x$  de  $Z$  qui est fixé par  $T$ . Alors, si  $T$  possède une orbite ouverte dans  $Z$  (resp.  $T_{Z,x}$ ), c'est aussi le cas dans  $T_{Z,x}$  (resp.  $Z$ ), et, dans ce cas,  $Z$  et  $T_{Z,x}$  sont isomorphes comme  $T$ -variétés.*

**DÉMONSTRATION.** Il est bien connu que si de plus  $Z$  est torique et lisse sous l'action de  $T$ , alors  $Z$  est isomorphe à  $T_{Z,x}$  comme  $T$ -variété (cela résulte de ce qu'un cône lisse est engendré par une partie d'une base du réseau des caractères).

Supposons dans un premier temps que  $T$  possède une orbite dense dans  $Z$ . Déjà,  $\{x\}$  est la seule orbite fermée de  $T$  dans  $Z$ . En effet, comme le groupe  $T$  est linéairement réductif, si  $Y$  désigne une autre orbite fermée, on peut trouver une fonction invariante par  $T$ ,  $f \in k[Z]^T$ , telle que

$$f|_Y = 0 \text{ et } f(x) = 1.$$

Mais l'existence d'une orbite ouverte de  $T$  dans  $Z$  force  $k[Z]^T = k$ , d'où une contradiction. Comme le lieu de lissité de  $Z$  est un ouvert stable par  $T$  et contient  $x$ , on peut en déduire que  $Z$  est lisse. Ainsi, la variété  $Z$  est torique et lisse pour un quotient de  $T$  et on peut donc conclure.

Supposons maintenant que  $T$  possède une orbite dense dans  $T_{Z,x}$ . Comme le point  $x$  est lisse sur  $Z$ , on a

$$k[T_{Z,x}] = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{m}_{Z,x}^i / \mathfrak{m}_{Z,x}^{i+1}.$$

On a aussi la filtration suivante

$$k[Z] \supseteq \mathfrak{m}_{Z,x} \supseteq \mathfrak{m}_{Z,x}^2 \supseteq \dots$$

Comme  $T$  est linéairement réductif les monoïdes des poids de  $T$  dans les algèbres  $k[T_{Z,x}]$  et  $k[Z]$  sont égaux, et chaque poids apparaît avec la même multiplicité. On en déduit que

tout poids de  $T$  dans  $k[Z]$  a pour multiplicité 1. Voyons maintenant que  $T$  possède une orbite dense dans  $Z$ . Pour cela, on considère le morphisme

$$\varphi : T \times Z \rightarrow Z \times Z, \quad (t, z) \mapsto (z, tz).$$

Montrons que  $\varphi$  est d'image dense. Soit  $f \in k[Z \times Z]$  telle que  $f \circ \varphi = 0$ . On peut écrire

$$f = \sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i,$$

où, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $u_i \in k[Z]$  et  $v_i \in k[Z]$  est une fonction  $T$ -propre de poids  $\chi_i$ . On peut par ailleurs supposer les  $\chi_i$  deux à deux distincts. Par hypothèse, on a donc

$$\forall t \in T, \quad \forall z \in Z, \quad \sum_{i=1}^n u_i(z)v_i(tz) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\chi_i(t)} u_i(z)v_i(z) = 0.$$

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il vient alors  $u_i v_i = 0$  dans  $k[Z]$ , donc  $u_i = 0$  ou  $v_i = 0$ . Finalement, on a  $f = 0$ . On a donc bien montré que le morphisme  $\varphi$  est d'image dense. Il existe donc au moins un point  $z \in Z$  tel que  $\text{Im } \varphi \cap (\{z\} \times Z)$  est dense dans  $\{z\} \times Z$ . Cela signifie exactement que l'orbite  $Tz$  est dense dans  $Z$ . On peut conclure.  $\square$

Passons maintenant à la preuve proprement dite du théorème 2.4 :

DÉMONSTRATION.

**Montrons que (3)  $\Rightarrow$  (1).** Comme  $T$  possède une orbite dense dans  $Z$ , le sous-groupe de Borel  $B$  possède une orbite dense dans  $X$ , ce qui montre que l'espace homogène  $\Omega$  est sphérique. Par ailleurs, soit  $D$  un diviseur premier de  $X$  stable par  $B$  et contenant  $\omega$ . En utilisant l'isomorphisme dans (3), on peut écrire

$$D \cap X_0 = R_u(P) \times (D \cap Z).$$

Comme  $D \cap X_0$  est irréductible, on peut conclure que  $D \cap Z$  est l'adhérence d'une orbite de  $T$  dans  $Z$ . Puisque ces orbites et celles de  $G$  se correspondent bijectivement, on voit que  $D$  est stable par  $G$ . On a donc montré que  $X$  est sans couleur.

**Montrons que (3)  $\Rightarrow$  (2).** L'isomorphisme dans (3) montre que les espaces  $T_{Z,x}$  et  $N_{\omega/X,x}$  munis de l'action de  $T$  sont isomorphes. Comme  $T$  possède une orbite dense dans le premier, c'est aussi le cas dans le deuxième.  $Z$  est torique, lisse, donc vérifie (2). Le complémentaire de l'orbite ouverte de  $P$  dans  $X_0$  est un diviseur à croisements normaux stricts dont les strates sont les produits  $R_u(P) \times \Omega$ , où  $\Omega$  parcourt l'ensemble des orbites de  $T$  dans  $Z$ . Le reste de (2) s'en déduit en translatant l'ouvert  $X_0$  par des éléments de  $G$  et en utilisant le fait que toute orbite de  $G$  rencontre  $Z$  selon une unique orbite de  $T$ .

**Montrons que (1)  $\Rightarrow$  (3).** D'après le lemme 6.5 de [Kno91] on a  $P = P_B(X)$ . On prend les notations du lemme 2.5. Le théorème 2.8 de [Kno93] montre que le sous-groupe dérivé de  $P_B(X)$ , et donc aussi celui de  $L$ , agit trivialement sur  $X_\sigma/R_u(P)$ . On applique maintenant le lemme 2.6. Le tore  $T$  possède par ce qui précède une orbite dense dans  $Z$ . Ainsi la variété  $Z$  est affine, possède une orbite ouverte de  $T$  et est lisse en  $x$  qui est point fixe de  $T$ . D'après le lemme 2.6,  $Z$  est lisse et torique pour un quotient de  $T$ . Par ailleurs, comme  $Z$  est stable par  $T$  et que le sous-groupe dérivé  $[L, L]$  agit trivialement sur  $Z \subseteq X_0$ , on voit qu'en fait le sous-groupe de Levi  $L$  laisse stable  $Z$ .

On remarque maintenant que l'ensemble des points où  $\mu$  n'est pas étale est un fermé de  $R_u(P) \times Z$  stable par les actions de  $R_u(P)$  et  $T$ . Comme la seule orbite fermée du produit semi-direct  $R_u(P) \rtimes T$  dans  $R_u(P) \times Z$  est  $R_u(P)x$ , et que  $\mu$  est étale au point  $(e, x)$ , on peut conclure que  $\mu$  est étale partout. Le morphisme  $\mu$  est alors étale, fini, de

degré 1 car la fibre au dessus de  $x$  est réduite à un point. Il est donc birationnel, et le théorème principal de Zariski montre que c'est un isomorphisme.

Montrons maintenant que chaque orbite de  $G$  dans  $X$  coupe  $Z$  selon une unique orbite de  $T$ . Déjà, comme  $\omega$  est l'unique orbite fermée de  $G$  dans  $X$ , l'ouvert  $X_\sigma$  intersecte toutes les orbites de  $G$  dans  $X$ . On va montrer que les adhérences d'orbites de  $G$  dans  $X$  et de  $T$  dans  $Z$  se correspondent bijectivement.

Soit  $X'$  l'adhérence d'une  $G$ -orbite dans  $X$ . Comme  $X'$  est l'adhérence de  $X' \cap X_\sigma$ , c'est aussi, grâce à l'isomorphisme que l'on vient d'établir, l'adhérence de  $R_u(P)(X' \cap Z)$ . Ainsi,  $X' \cap Z$  est un fermé irréductible  $T$ -stable dans  $Z$ . C'est donc l'adhérence d'une orbite de  $T$ . Réciproquement, soit  $Z'$  l'adhérence d'une orbite de  $T$  dans  $Z$ . Comme  $Z$  est une variété lisse et torique pour un quotient de  $T$ , on peut écrire

$$Z' = D'_1 \cap D'_2 \cap \dots \cap D'_r,$$

où les  $D'_i$  sont des diviseurs premiers stables par  $T$  sur  $Z$ . On remarque alors que les diviseurs

$$\overline{R_u(P)D'_1}, \dots, \overline{R_u(P)D'_r}$$

sur  $X$  sont stables par  $P$ . En effet, les orbites de  $P$  dans  $X_\sigma$  sont les mêmes que les orbites de  $R_u(P) \rtimes T$ , comme on l'a fait remarquer plus haut. Comme  $X$  n'a pas de couleur, on voit que ces diviseurs sont tous stables par  $G$ , ce qui montre que leur intersection  $\overline{R_u(P)Z}$  l'est aussi. Comme elle est irréductible, c'est l'adhérence d'une orbite de  $G$ .

Pour conclure que (3) est vérifiée, il reste maintenant à établir que

$$X_\sigma = \{y \in X, \quad x \in \overline{By}\}.$$

Si  $y \in X$  est tel que  $x \in \overline{By}$ , alors  $X_\sigma \cap \overline{By}$  est un ouvert non vide de  $\overline{By}$  qui est stable par  $B$ , il contient donc  $y$ , ce qui montre «  $\supseteq$  ». De plus, si  $y$  appartient à  $X_\sigma$ , alors  $\overline{By}$  contient une orbite fermée de  $B$  dans  $X_\sigma$ . Comme la seule orbite fermée de  $B$  dans  $X_\sigma$  est celle de  $x$ , on voit que  $x \in \overline{By}$ , ce qui montre «  $\subseteq$  ».

**Montrons que (2)  $\Rightarrow$  (3).** On reprend les notations du lemme 2.5. On applique ensuite le lemme 2.6. On sait que les espaces vectoriels  $T_{Z,x}$  et  $N_{\omega/X,x}$  avec action de  $T$  sont isomorphes. Ainsi, le tore  $T$  possède une orbite dense dans  $T_{Z,x}$ . D'après le lemme 2.6, la variété  $Z$  est lisse et torique pour un quotient de  $T$ . A partir de là on raisonne comme ci-dessus pour montrer que le morphisme  $\mu$  est un isomorphisme.

Voyons maintenant que chaque orbite de  $G$  dans  $X$  coupe  $Z$  selon une unique orbite de  $T$ . Comme ci-dessus, le fait que  $\omega$  soit la seule orbite fermée de  $G$  dans  $X$  montre que toute orbite de  $G$  dans  $X$  rencontre  $X_\sigma$ . Soit  $D$  un diviseur premier sur  $X$ , stable sous l'action de  $G$ . Alors  $D \cap X_\sigma$  est non vide et égal à  $R_u(P)(D \cap Z)$ . La variété  $D \cap Z$  est donc un diviseur  $T$ -stable irréductible sur  $Z$ . Par conséquent elle est lisse et donc  $D$  aussi, car il est recouvert par les translatés de  $D \cap X_\sigma$  par des éléments de  $G$ . Ainsi, le complémentaire de l'orbite ouverte de  $G$  dans  $X$  est un diviseur à croisements normaux stricts, que l'on notera  $D$  dans la suite.

Notons maintenant  $D'_1, \dots, D'_r$  les diviseurs premiers stables par  $T$  sur  $Z$ . On a donc  $r = \dim(Z) = \text{codim}(\omega, X)$ . Le raisonnement qui précède permet de voir que le nombre de diviseurs premiers stables par  $G$  est inférieur ou égal à  $r$ . Par hypothèse, les orbites de  $G$  dans  $X$  sont les strates de  $D$ . Par conséquent, leur intersection est l'orbite fermée de  $G$  dans  $X$ . Comme celle-ci est de codimension  $r$  dans  $X$ , on peut conclure que pour tout  $i$ ,  $\overline{R_u(P)D'_i}$  est stable par  $G$ .

L'orbite ouverte de  $B$  dans  $X_\sigma$  est donc stable par  $P$ . Cela prouve que  $P$  est inclus dans  $P_B(X)$ . Comme l'inclusion opposée est toujours vraie ([Kno93], corollaire 2.6), on a  $P = P_B(X)$ . Le théorème 2.8 de [Kno93] montre donc que le sous-groupe dérivé de

$P$  agit trivialement dans  $X_\sigma/R_u(P)$ , puis que les orbites de  $P$  dans  $X_\sigma$  et celles de  $B$  coïncident. En procédant alors exactement comme ci-dessus on montre que les adhérences d'orbites de  $G$  dans  $X$  et celles de  $T$  dans  $Z$  se correspondent bijectivement, ce qui achève la preuve du théorème.  $\square$

### 3. Compactifications régulières, fortement régulières et log homogènes

Dans cette partie, on généralise à la caractéristique positive les notions de compactification log homogène et régulière. Le corps  $k$  est algébriquement clos de caractéristique quelconque. La définition du fibré tangent logarithmique ainsi que les propriétés de celui-ci rappelées dans la partie 1 de ce chapitre s'étendent sans problème à la caractéristique positive. On peut donc définir les compactifications **log homogènes** de l'espace homogène  $\Omega$  exactement comme en 1.5. Par ailleurs, on dira qu'une compactification  $X$  de  $\Omega$  est **régulière** si elle vérifie les conditions (R1) et (R2) de la définition 1.2 et si, de plus, elle vérifie :

(R3) les orbites de  $G$  dans  $X$  sont séparables.

On dira qu'elle est **fortement régulière** si elle vérifie les conditions (R1), (R3) et :

(R'2) pour tout point  $x \in X$ , le groupe d'isotropie  $G_x$  possède une orbite ouverte séparable dans l'espace  $N_{Gx/X,x}$ .

Il est clair qu'une compactification fortement régulière est régulière. La réciproque est fautive, comme le montre l'exemple suivant.

On considère le groupe  $G = \mathrm{SL}(2)$  agissant sur la variété  $X$  des couples de droites vectorielles dans le plan  $k^2$ . Ainsi,  $X = \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ . On note  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $k^2$ ,  $d_1$  la droite engendrée par  $e_1$  et  $d_2$  la droite engendrée par  $e_2$ . Il y a deux orbites de  $G$  dans  $X$ , celle de  $x := (d_1, d_2)$ , correspondant aux couples de droites distinctes, et celle de  $y := (d_1, d_1)$ , correspondant aux couples de droites égales. La première est ouverte, et la deuxième est lisse de codimension 1, on voit donc que la condition (R1) est satisfaite.

Comme  $d_1$  et  $d_2$  sont supplémentaires dans  $k^2$ , on peut identifier l'espace tangent  $T_{X,x}$  à  $X$  en  $x$  à  $d_2 \oplus d_1$ . On montre alors que

$$d_e orb_x : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow T_{X,x}, \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix} \mapsto (be_2, ce_1).$$

Cette différentielle étant surjective, l'orbite ouverte de  $X$  sous  $G$  est séparable. De même, on peut identifier l'espace tangent  $T_{X,y}$  à  $X$  en  $y$  à  $d_2 \oplus d_2$ . L'espace tangent à  $Gy$  en  $y$  s'identifie à la diagonale dans  $d_2 \oplus d_2$ . Il vient alors

$$d_e orb_y : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow T_{Gy,y}, \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix} \mapsto (be_2, be_2).$$

On peut donc aussi conclure que l'orbite fermée de  $G$  dans  $X$  est séparable, ce qui montre que la condition (R3) est satisfaite.

Le stabilisateur de  $y$  est donc le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures. Il agit sur l'espace  $T_{X,y}$  par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} (s, t) = (a^{-2}s, a^{-2}t),$$

si bien que la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

agit sur l'espace normal  $N_{Gy/X,y}$  dans  $X$  à l'orbite  $Gy$  au point  $y$  par multiplication par  $a^{-2}$ . Le sous-groupe  $G_y$  possède ainsi une orbite ouverte dans  $N_{Gy/X,y}$ , mais celle-ci n'est pas séparable si le corps  $k$  est de caractéristique 2. On vient donc de construire un exemple de variété régulière non fortement régulière.

Le théorème qui suit est un premier analogue des résultats de Bien et Brion :

**THÉORÈME 3.1.** *Soit  $X$  une compactification lisse de  $\Omega$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $X$  est régulière.
- (ii) L'espace homogène  $\Omega$  est sphérique, le plongement  $X$  est sans couleur, et les orbites de  $G$  dans  $X$  sont séparables.

**DÉMONSTRATION.** Supposons  $X$  régulière. On note  $D$  le bord  $X \setminus \Omega$ . C'est un diviseur à croisements normaux stricts. Soit  $x \in X$  dont l'orbite  $\omega$  sous l'action de  $G$  est fermée (donc complète). Comme il n'y a qu'un nombre fini d'orbites de  $G$  dans  $X$ , on montre facilement que l'ensemble :

$$X_{\omega,G} = \{y \in X, x \in \overline{Gy}\}$$

(voir définition 2.11) est un ouvert de  $X$  stable par  $G$  dans lequel  $\omega$  est l'unique orbite fermée de  $G$ .

Le groupe d'isotropie  $G_x$  est un sous-groupe parabolique. On choisit un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$  tel que  $BG_x$  est ouvert dans  $G$ , ainsi qu'un tore maximal  $T$  inclus dans le sous-groupe  $B$ , et dans  $G_x$ . Soit  $L$  le sous-groupe de Levi de  $G_x$  qui contient  $T$ . L'espace normal  $N_{\omega/X,x}$  étant l'espace normal à une strate du diviseur  $D$ , il se décompose naturellement en une somme de droites  $L_1 \oplus \dots \oplus L_r$ , chacune d'entre elles étant globalement stable par  $G_x^0 = G_x$ . On en déduit que la représentation de  $G_x$  dans  $N_{\omega/X,x}$  factorise à travers l'action d'un tore  $\mathbb{G}_m^r$ . Le sous-groupe dérivé de  $L$  agit donc trivialement, ce qui montre que le tore  $T$  a une orbite dense dans  $N_{\omega/X,x}$ . Finalement, comme le morphisme  $orb_x$  est séparable par hypothèse, on voit qu'on peut appliquer le théorème 2.4 (2)  $\Rightarrow$  (1).

Ce théorème montre que l'espace homogène  $\Omega$  est sphérique, et que le plongement  $X_{\omega,G}$  est sphérique sans couleur. Comme cela est vrai pour toute orbite fermée  $\omega$ , le plongement  $X$  est sans couleur.

Supposons maintenant que  $\Omega$  soit sphérique,  $X$  sans couleur, et que toutes les orbites de  $G$  dans  $X$  soient séparables. En recouvrant, comme ci-dessus,  $X$  par des ouverts  $G$ -stables auxquels le théorème 2.4 s'applique, on montre que le bord  $D$  est un diviseur à croisements normaux stricts, et que le point (R2) est satisfait. Comme le plongement  $X$  est sans couleur, pour tout point  $x \in X$ , le cône associé à l'orbite  $\omega := Gx$  est engendré par les  $\rho(\nu_{D_i})$ , pour  $D_i$  parcourant l'ensemble des composantes irréductibles de  $D$  contenant  $x$ . Comme ces cônes s'arrangent en un éventail, on voit que les intersections partielles de composantes irréductibles de  $D$  sont irréductibles. Cela montre le point (R1). Comme le point (R3) est supposé satisfait, on peut conclure.  $\square$

**THÉORÈME 3.2.** *Soit  $X$  une compactification lisse de  $\Omega$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $X$  est log homogène sous l'action de  $G$ .
- (ii)  $X$  est fortement régulière.

**DÉMONSTRATION.** Supposons que la variété  $X$  est log homogène sous l'action de  $G$ . On note  $D$  le bord de  $X$ . C'est un diviseur à croisements normaux stricts. On montre en suivant les arguments qui figurent dans [Bri07] (proposition 2.1.2) que :

- Si  $S$  désigne une strate définie par le diviseur à croisements normaux stricts  $D$ , alors  $S$  est une unique orbite de  $G$  et celle-ci est séparable.
- En tout point  $x \in S$  le groupe d'isotropie  $G_x$  possède une orbite ouverte et séparable dans l'espace normal à  $S$  en  $x$ ,  $N_{S/X,x}$ .

Pour conclure, il reste à voir que les intersections partielles de composantes irréductibles de  $D$  sont irréductibles. En procédant comme dans la preuve du théorème 3.1 on montre que  $\Omega$  est sphérique, et  $X$  sans couleur, ce qui suffit pour conclure.

Si à l'inverse, on suppose  $X$  fortement régulière, les arguments figurant dans [Bri07] (proposition 2.1.2) permettent directement de voir que  $X$  est log homogène sous l'action de  $G$ .  $\square$

Le théorème 3.1 montre qu'un espace homogène possédant une compactification log homogène est nécessairement sphérique. On va voir maintenant qu'il doit vérifier une condition légèrement plus forte :

**PROPOSITION-DÉFINITION 3.3.** *Soit  $\Omega$  un espace homogène sous l'action de  $G$ . On dit que  $\Omega$  vérifie la condition (B) si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :*

- (i) *L'espace homogène  $\Omega$  est sphérique et il existe un sous-groupe de Borel de  $G$  dont l'orbite ouverte est séparable.*
- (ii) *L'espace homogène  $\Omega$  est sphérique et l'orbite ouverte de n'importe quel sous-groupe de Borel de  $G$  est séparable.*
- (iii) *L'espace homogène  $\Omega$  est séparable sous l'action de  $G$ , et il existe  $x \in X$  et un sous-groupe de Borel  $B$  vérifiant :  $\mathfrak{b} + \mathfrak{g}_x = \mathfrak{g}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Comme tous les sous-groupes de Borel sont conjugués, on voit facilement que les conditions (i) et (ii) sont équivalentes. Supposons à présent que (i) soit satisfaite. Notons  $B$  un sous-groupe de Borel et  $x \in \Omega$  un point dans l'orbite ouverte et séparable de  $B$ . L'application linéaire  $d_e orb_x : \mathfrak{b} \rightarrow T_{Bx,x}$  est donc surjective. Comme l'orbite  $Bx$  est ouverte dans  $\Omega$ , on voit alors que l'espace homogène  $\Omega$  est séparable sous l'action de  $G$  et qu'on a bien

$$\mathfrak{b} + \mathfrak{g}_x = \mathfrak{g}.$$

A l'inverse, supposons maintenant (iii) vérifiée. L'espace homogène  $\Omega$  étant supposé séparable, la différentielle du morphisme  $orb_x$  en  $e$  est simplement la projection

$$d_e orb_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x.$$

Comme on a  $\mathfrak{b} + \mathfrak{g}_x = \mathfrak{g}$ , on voit que l'application linéaire

$$d_e orb_x : \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x$$

reste surjective. Mais cela signifie exactement que l'orbite  $Bx$  est ouverte et séparable.  $\square$

Voici quelques exemples d'espaces homogènes vérifiant la condition (B) :

**EXEMPLE 3.4.**

- *Un quotient séparable d'un tore vérifie toujours la condition (B).*
- *Une variété de drapeaux  $G/P$ , où  $P$  est un sous-groupe parabolique de  $G$ , vérifie toujours la condition (B).*

- *Vust a montré dans [Vus74] que les espaces symétriques sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro sont sphériques. En fait sa preuve s'étend à la caractéristique différente de 2 et montre que les espaces symétriques vérifient la condition (B).*

Le théorème suivant montre que les notions de variétés régulières, fortement régulières et log homogènes coïncident pour les compactifications d'espaces homogènes vérifiant la condition (B).

**THÉOREME 3.5.** *On suppose que l'espace homogène  $\Omega$  vérifie la condition (B). Soit  $X$  une compactification lisse de  $\Omega$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  *$X$  est sans couleur, et les orbites fermées de  $G$  dans  $X$  sont séparables.*
- (2)  *$X$  est sans couleur, et les orbites de  $G$  dans  $X$  sont séparables.*
- (3)  *$X$  est régulière.*
- (4)  *$X$  est fortement régulière.*
- (5)  *$X$  est log homogène sous l'action de  $G$ .*

**DÉMONSTRATION.** Il suffit bien sûr, d'après les théorèmes 3.1 et 3.2, de montrer que (1)  $\Rightarrow$  (4). Supposons la condition (1) satisfaite. Soit  $x \in X$  dont l'orbite  $\omega$  sous  $G$  est fermée (et donc séparable). On peut appliquer le théorème de structure locale 2.4 à l'ouvert  $X_{\omega,G}$ . On note  $B$  un sous-groupe de Borel tel que  $BG_x$  est ouvert dans  $G$ ,  $T$  un tore maximal de  $G$  contenu dans  $B$  et dans  $G_x$ ,  $P$  le sous-groupe parabolique  $P_B(X)$ , et  $L$  le sous-groupe de Levi de  $P$  qui contient  $T$ .

Il existe donc un ouvert affine  $X'$  de  $X$  stable par  $P$  et une sous-variété fermée  $Z$  de  $X'$ , stable par  $L$ , sur laquelle le sous-groupe dérivé de  $L$  agit trivialement, qui est torique pour un quotient de  $T$  et telle que le morphisme

$$R_u(P) \times Z \rightarrow X', \quad (p, z) \mapsto pz$$

est un isomorphisme. Comme l'orbite ouverte de  $B$  dans  $\Omega$  est séparable, on voit que le quotient  $T'$  de  $T$  qui agit dans  $Z$  est en fait un quotient séparable de  $T$ . Cela prouve que :

- les orbites de  $B$  dans  $X'$  sont toutes séparables.
- en tout point  $z \in Z$ , le stabilisateur  $T_z$  possède une orbite dense et séparable dans  $N_{Tz/Z,z}$ .

Comme toute orbite de  $G$  contenant  $\omega$  rencontre  $X'$  selon une unique orbite de  $T$ , le premier point permet de montrer que toute orbite de  $G$  dans  $X$  contenant  $\omega$  dans son adhérence est séparable. Ainsi d'après le théorème 3.1, la compactification  $X$  est régulière. Le deuxième point permet, par le même argument, de montrer qu'en tout point  $z \in X_{\omega,G}$ , le groupe d'isotropie  $G_z$  possède une orbite ouverte séparable dans  $N_{Gz/X,z}$ . Cela suffit pour montrer que la  $G$ -variété  $X$  est fortement régulière.  $\square$

Dans notre exemple de compactification régulière non fortement régulière, l'espace homogène  $\Omega$  ne satisfait donc pas la condition (B), si  $k$  est de caractéristique 2. Montrons-le directement. Avec les notations introduites dans cet exemple, le stabilisateur du point  $x$  est le tore  $T$  des matrices diagonales dans  $G$ . On a donc dans ce cas  $\Omega = G/T$ . Un sous-groupe de Borel possède une orbite dense dans  $\Omega$  si et seulement si il ne contient pas le tore  $T$ . Mais l'intersection schématique de ce tore et d'un sous-groupe de Borel qui ne



le contient pas est le centre de  $G$ , qui n'est pas réduit si le corps  $k$  est de caractéristique 2.

**PROPOSITION 3.6.** *Pour que l'espace homogène  $\Omega$  admette une compactification lisse et log homogène il faut qu'il vérifie la condition (B).*

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $\Omega$  possède une compactification lisse et log homogène  $X$ . D'après les théorèmes 3.2 et 3.1, l'espace homogène  $\Omega$  est sphérique.

Soit  $x \in X$  dont l'orbite  $\omega$  sous l'action de  $G$  est fermée. On peut appliquer le théorème 2.4 à l'ouvert  $X_{\omega,G}$ . Reprenons les notations introduites dans la preuve du théorème 3.5. Comme  $X$  est fortement régulière, le tore  $T$  possède une orbite dense et séparable dans l'espace  $T_{Z,x} = N_{\omega/X,x}$ . Comme cet espace muni de l'action de  $T$  n'est autre que  $Z$  (car celle-ci est lisse et affine), on voit que le tore qui agit dans  $Z$  est un quotient séparable de  $T$ . Ceci a pour conséquence que l'orbite ouverte de  $R_u(P) \rtimes T$  dans  $R_u(P) \times Z$  est séparable, et donc que l'orbite ouverte de  $B$  dans  $\Omega$  est séparable.  $\square$

#### 4. Compactifications log homogènes et points fixes

Dans cette partie, on s'intéresse à la situation suivante. On se donne un automorphisme  $\sigma$  de  $\Omega$ , d'ordre fini  $r$  premier à la caractéristique  $p$  de  $k$ , et un automorphisme de  $G$ , également noté  $\sigma$ , d'ordre  $r$ , et vérifiant :

$$\forall g \in G, \quad \forall x \in \Omega, \quad \sigma(gx) = \sigma(g)\sigma(x).$$

Comme il est montré dans [Ric82] (proposition 10.1.5), le groupe  $G' := (G^\sigma)^0$  est réductif. De plus, toute composante connexe de la « variété des points fixes »  $\Omega^\sigma$  est un espace homogène sous l'action de  $G'$ . Soit  $X$  une compactification log homogène de  $\Omega$ . On suppose que l'automorphisme  $\sigma$  s'étend en un automorphisme, encore noté  $\sigma$ , de  $X$ . On va voir dans cette partie que, si  $\Omega'$  est une composante connexe de  $\Omega^\sigma$ , et si  $X'$  est la composante connexe de  $X^\sigma$  contenant  $\Omega'$ , alors  $X'$  est une compactification log homogène de  $\Omega'$  sous l'action de  $G'$ .

Tout d'abord, rappelons ce qu'est la « variété des points fixes »  $X^\sigma$ . Dans [Fog73], Fogarty montre que le foncteur :

$$\{\text{Schémas}\} \rightarrow \{\text{Ensembles}\}, \quad S \mapsto X(S)^\sigma$$

est représentable par un schéma, appelé à juste titre schéma des points fixes de  $\sigma$  dans  $X$ . Il donne aussi un exemple de variété pour laquelle ce schéma ne correspond pas à la structure réduite sur l'ensemble des « points fixes géométriques »  $X(\bar{k})^\sigma$ . Heureusement pour nous, cette situation ne se produit pas lorsque la variété  $X$  est lisse, comme le montre la propriété suivante, également due à Fogarty :

**PROPOSITION 4.1.** *Soit  $X$  une variété algébrique lisse sur  $k$  et  $\sigma \in \text{Aut}(X)$  d'ordre fini  $r$ , que l'on suppose premier à  $p$ . Alors le schéma des points fixes  $X^\sigma$  est lisse. Par ailleurs, en tout point  $x \in X^\sigma$ , on a l'égalité :*

$$T_{X^\sigma, x} = (T_{X, x})^\sigma.$$

**DÉMONSTRATION.** Dans les conditions de la proposition, le groupe fini engendré par  $\sigma$  est linéairement réductif. D'après [Fog73], on sait donc que le schéma des points fixes  $X^\sigma$  existe. On fixe  $x \in X^\sigma$ . On note  $\mathfrak{m}_{X,x}$  l'idéal maximal de l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$ . En suivant les notations de [Fog73], on note  $C(X, x)$  le cône tangent à  $X$  au point  $x$ . Par définition, il s'agit de :

$$C(X, x) = \text{Spec}(\text{gr}(\mathcal{O}_{X,x})),$$

où l'anneau  $\text{gr}(\mathcal{O}_{X,x})$  est défini par :

$$\text{gr}(\mathcal{O}_{X,x}) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{m}_{X,x}^i / \mathfrak{m}_{X,x}^{i+1}.$$

D'après [Mat89] (p.120 thm 35), le schéma  $X$  est lisse au point  $x$  si et seulement si le cône tangent est (naturellement) l'espace affine associé à l'espace vectoriel (tangent en  $x$ )  $T_{X,x}$ . Par ailleurs, d'après la proposition 5.2 de [Fog73] on a l'égalité :

$$C(X^\sigma, x) = C(X, x)^\sigma.$$

Comme  $X$  est lisse au point  $x$ ,  $C(X, x)$  est l'espace tangent à  $X$  en  $x$ , et  $\sigma$  opère linéairement dessus (par la différentielle de l'automorphisme  $\sigma$ ). On en déduit que le cône tangent à  $X^\sigma$  en  $x$  n'est rien d'autre que l'espace affine associé à l'espace vectoriel  $(T_{X,x})^\sigma$  formé des points fixes de  $\sigma$  dans  $T_{X,x}$ . D'où le résultat.  $\square$

Plaçons-nous à nouveau dans la situation énoncée au début de cette partie. D'après la proposition 4.1, la variété  $X'$  est lisse. Notons  $D$  le bord de  $X$ , et  $D' = D \cap X'$ .

PROPOSITION 4.2. *Les conditions suivantes sont satisfaites :*

(C1) *Le diviseur  $D' = D \cap X'$  est à croisements normaux stricts sur  $X'$ .*

(C2) *En tout point  $x \in X'$  l'espace tangent à toute composante irréductible de  $D$  contenant  $x$  ne contient pas l'espace tangent à  $X'$  en  $x$ .*

DÉMONSTRATION. Avant de passer à la preuve proprement dite, on a besoin de quelques notations et remarques. On fixe  $x \in X'$ . On note  $D_1, \dots, D_s$  les composantes irréductibles de  $D$  qui contiennent  $x$ . Comme  $D$  est stable par l'automorphisme  $\sigma$ , on peut supposer ces composantes numérotées de sorte que

$$\sigma(D_2) = D_1, \dots, \sigma(D_{i_1}) = D_{i_1-1}, \sigma(D_1) = D_{i_1},$$

...

$$\sigma(D_{i_{t-1}+2}) = D_{i_{t-1}+1}, \dots, \sigma(D_{i_t}) = \sigma(D_s) = D_{i_t-1}, \sigma(D_{i_{t-1}+1}) = D_{i_t}.$$

On peut alors se donner un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$  dans  $X$  qui est stable par  $\sigma$  et sur lequel l'équation de  $D$  est  $u_1 \dots u_s = 0$ , où  $u_1, \dots, u_s \in \mathcal{O}_X(U_x)$  font partie d'un système de paramètres locaux réguliers en  $x$  et sont tels que

$$\sigma(u_2) = u_1, \dots, \sigma(u_{i_1}) = u_{i_1-1},$$

...

$$\sigma(u_{i_{t-1}+2}) = u_{i_{t-1}+1}, \dots, \sigma(u_{i_t}) = u_{i_t-1}.$$

Le point  $x$  étant fixé par  $\sigma$ , l'automorphisme  $\sigma$  agit (par la différentielle) sur  $T_{X,x}$  et aussi (par l'inverse de la transposée) sur son dual  $(T_{X,x})^*$ . Comme  $\sigma^r = id$  et  $r$  est premier à la caractéristique du corps  $k$ , on a une décomposition

$$(T_{X,x})^* = ((T_{X,x})^*)^\sigma \oplus \text{Ker}(id + \sigma + \dots + \sigma^{r-1}).$$

On vérifie facilement que le deuxième facteur n'est autre que  $(T_{X',x})^\perp$ , et donc le premier facteur s'identifie à  $(T_{X',x})^*$  par la surjection naturelle

$$(T_{X,x})^* \rightarrow (T_{X',x})^*.$$

Par ailleurs, dans la somme directe écrite ci-dessus la projection sur le premier facteur est donnée par

$$l \mapsto \frac{1}{r}(l + \sigma(l) + \dots + \sigma^{r-1}(l)).$$

On passe maintenant à la preuve de la proposition.

Les composantes irréductibles de  $D'$  qui contiennent  $x$  sont les composantes connexes des variétés lisses

$$(D_{i_{j-1}+1} \cap \dots \cap D_{i_j})^\sigma \quad (1 \leq j \leq t)$$

qui contiennent  $x$  : elles sont donc lisses, d'après la proposition 4.1.

Soit  $x \in X'$ . Soit  $D_1, \dots, D_s$  les composantes irréductibles de  $D$  contenant  $x$ , numérotées comme ci-dessus. Montrons que l'espace  $T_{X',x}$  n'est inclus dans aucun des espaces  $T_{D_k,x}$ , pour  $k$  allant de 1 à  $s$ . Il suffit pour cela de vérifier que, pour tout  $j$  compris entre 1 et  $t$ , (avec les notations introduites ci-dessus)

$$d_x u_{i_j}|_{T_{X',x}} \neq 0.$$

Mais, d'après la remarque ci-dessus, on a

$$d_x u_{i_j}|_{T_{X',x}} = \frac{1}{r}(d_x u_{i_j} + \sigma(d_x u_{i_j}) + \dots + \sigma^{r-1}(d_x u_{i_j})).$$

Il existe, pour tout  $j$  compris entre 1 et  $t$ , une fonction inversible  $\lambda_j$  sur  $U_x$  vérifiant

$$\sigma^{i_j}(u_{i_j}) = \lambda_j u_{i_j}.$$

Par ailleurs, sur  $U_x^\sigma$ , cette fonction est la fonction constante égale à 1. On calcule alors :

$$\sigma^{i_j}(d_x u_{i_j}) = d_x u_{i_j} + u_{i_j}(x) d_x \lambda_j = d_x u_{i_j}.$$

Comme la famille  $d_x u_{i_{j-1}+1}, \dots, d_x u_{i_j}$  est libre et que  $i_j$  divise  $r$ , on peut conclure.

La même méthode prouve directement que la famille :

$$d_x u_{i_1}|_{T_{X',x}}, \dots, d_x u_{i_t}|_{T_{X',x}}$$

est libre. Ceci achève de prouver la proposition. □

On considère à présent, plus généralement, une sous-variété fermée lisse  $X'$  de  $X$ , et on suppose que les conditions (C1) et (C2) de la proposition 4.2 sont satisfaites. Il y a une injection naturelle de fibrés :

$$T_{X'} \rightarrow T_{X|X'},$$

donnant lieu à une injection de faisceaux :

$$\mathcal{T}_{X'} \rightarrow \mathcal{T}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'}.$$

**PROPOSITION 4.3.** *Cette injection envoie le sous-faisceau  $\mathcal{T}_{X'}(-\log D')$  dans le sous-faisceau  $\mathcal{O}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}_X(-\log D)$ , et on a la suite exacte suivante de fibrés vectoriels sur  $X'$  :*

$$0 \rightarrow T_{X'}(-\log D') \rightarrow T_X(-\log D)|_{X'} \rightarrow N_{X'/X} \rightarrow 0,$$

où  $N_{X'/X}$  est le fibré normal de  $X'$  dans  $X$ .

**DÉMONSTRATION.** Remarquons que, si  $D_i$  est une composante irréductible de  $D$ , et si  $D'_1, \dots, D'_t$  désignent les composantes irréductibles de  $D_i \cap X'$ , alors les conditions (C1) et (C2) entraînent que

$$\mathcal{O}_{D_i \cap X'}(D_i \cap X') = \bigoplus_{j=1}^t \mathcal{O}_{D'_j}(D'_j).$$

D'après la définition 1.4, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_X(-\log D) \rightarrow \mathcal{T}_X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{D_i}(D_i) \rightarrow 0.$$

En tensorisant cette suite exacte par  $\mathcal{O}_{X'}$ , on obtient

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_X(-\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'} \rightarrow \mathcal{T}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{D_i \cap X'}(D_i \cap X') \rightarrow 0$$

car  $\mathcal{T}or_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_{D_i}(D_i)) = 0$ . En effet, la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(D_i) \rightarrow \mathcal{O}_{D_i}(D_i) \rightarrow 0$$

est une résolution du  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{O}_{D_i}(D_i)$  par des  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres. Elle permet de calculer

$$\mathcal{T}or_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_{D_i}(D_i)) = \mathcal{K}er(\mathcal{O}_{X'} \rightarrow \mathcal{O}_{X'}(D_i \cap X')) = \bigoplus_{j=1}^t \mathcal{O}_{X'}(D'_j)$$

où  $D'_1, \dots, D'_t$  sont les composantes irréductibles de  $D_i \cap X'$ , ce qui permet de conclure. En utilisant à nouveau la définition 1.4 (mais pour le couple  $(X', D')$ ), on peut écrire le diagramme à lignes exactes suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{T}_{X'}(-\log D') & \longrightarrow & \mathcal{T}_{X'} & \longrightarrow & \bigoplus_{j=1}^{m'} \mathcal{O}_{D'_j}(D'_j) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}_X(-\log D) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}_X & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{D_i \cap X'}(D_i \cap X') \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \mathcal{N}_{X'/X} & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

où les  $D'_j$  sont les composantes irréductibles de  $D'$ , et  $\mathcal{N}_{X'/X}$  est le faisceau des sections du fibré normal  $N_{X'/X}$ . Comme les conoyaux des suites horizontales sont égaux, le lemme du serpent montre que la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_{X'}(-\log D') \rightarrow \mathcal{T}_X(-\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'} \rightarrow \mathcal{N}_{X'/X} \rightarrow 0$$

est exacte, achevant de prouver la proposition.  $\square$

Passons maintenant à la preuve du résultat annoncé. On reprend les notations introduites au début de cette partie :

**PROPOSITION 4.4.** *La compactification  $X'$  de  $\Omega'$  est log homogène.*

**DÉMONSTRATION.** Vu les résultats précédents, il reste à établir que, pour tout  $x \in X'$ , l'application linéaire  $\mathfrak{g}^\sigma \rightarrow T_{X'}(-\log D')_x$  est surjective. On commence par montrer le lemme suivant :

**LEMME 4.5.** *Soit  $x \in X'$ . L'automorphisme  $\sigma$  agit linéairement sur l'espace vectoriel  $T_X(-\log D)_x$ , et l'injection naturelle de fibrés construite à la proposition 4.3 fournit un isomorphisme :*

$$T_{X'}(-\log D')_x \rightarrow T_X(-\log D)_x^\sigma.$$

DÉMONSTRATION. L'automorphisme  $\sigma$  agit par la différentielle sur les germes de champs de vecteurs en  $x$ . De plus, on vérifie facilement qu'il préserve les deux sous-modules  $\mathcal{T}_X(-\log D)_x$  et  $\mathfrak{m}_{X,x}\mathcal{T}_X(-\log D)_x$ . Ceci montre qu'il agit sur le quotient, qui n'est autre que  $T_X(-\log D)_x$ . La suite exacte de la proposition 4.3 montre que

$$\mathcal{T}_{X'}(-\log D')_x = (\mathcal{O}_{X',x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{T}_X(-\log D)_x) \cap \mathcal{T}_{X',x}$$

dans  $\mathcal{O}_{X',x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{T}_{X,x}$ . Comme on a

$$\mathcal{T}_{X',x} = \mathcal{T}_{X,x}^\sigma,$$

on voit que

$$\mathcal{T}_{X'}(-\log D')_x = \mathcal{O}_{X',x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{T}_X(-\log D)_x^\sigma,$$

achevant la preuve du lemme.  $\square$

Soit  $x \in X'$ . Comme  $X$  est log homogène sous l'action du groupe  $G$ , l'application linéaire

$$\mathfrak{g} \rightarrow T_X(-\log D)_x$$

est surjective. Le groupe  $\langle \sigma \rangle$  étant linéairement réductif (car  $r$  et  $p$  sont premiers entre eux), cette application linéaire reste surjective au niveau des points fixes

$$\mathfrak{g}^\sigma \rightarrow T_X(-\log D)_x^\sigma.$$

Le lemme 4.5 permet donc de conclure.  $\square$

## CHAPITRE 3

### Exemples de compactifications de groupes réductifs

Dans ce chapitre, on va construire explicitement des compactifications log homogènes des groupes  $GL(n)$ ,  $SO(2n)$ ,  $SO(2n + 1)$  et  $Sp(2n)$ , obtenues par éclatements successifs de centres lisses à partir de compactifications projectives, lisses et « naturelles ».

#### 1. Rappels concernant quelques compactifications connues

Dans cette partie, on explique la construction de quelques compactifications connues de groupes réductifs, dont on s'inspirera par la suite.

**1.1. Les plongements de l'espace homogène  $G_0$  sous l'action de  $G_0 \times G_0$ .** Dans cette section, le corps  $k$  est algébriquement clos. On note  $G_0$  un groupe réductif connexe,  $\Omega = G_0$ , et  $G = G_0 \times G_0$ . L'action de  $G$  sur  $\Omega$  est donnée par

$$\forall (g, h) \in G_0 \times G_0, \quad \forall x \in G_0, \quad (g, h)x = gxh^{-1}.$$

Le point de base de  $\Omega$  est l'élément neutre  $x_0 = e \in \Omega(k)$ . On fixe un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G_0$ , ainsi qu'un tore maximal  $T$  de  $G_0$  contenu dans  $B$ . On note  $B^-$  le sous-groupe de Borel de  $G_0$  vérifiant  $B \cap B^- = T$ .

L'espace homogène  $\Omega$  est sphérique sous l'action de  $G$ , d'après la décomposition de Bruhat. Par ailleurs, le point  $x_0$  appartient à l'orbite ouverte de  $B \times B^-$  dans  $\Omega$ , et le groupe d'isotropie de ce point est  $\text{diag}(T) \subseteq B \times B^-$ , qui est réduct. On en déduit que l'espace homogène  $\Omega$  vérifie la condition (B) (proposition-définition 3.3, chapitre 2). Le calcul des données combinatoires attachées à  $\Omega$  est effectué dans [Vus90], [Tim03]. Tout d'abord, il est classique que l'orbite ouverte de  $B \times B^-$  dans  $\Omega$  est isomorphe à  $U \times T \times U^-$ , où  $U$  (resp.  $U^-$ ) est le radical unipotent de  $B$  (resp.  $B^-$ ). On en déduit aisément que le réseau  $\mathcal{X}$  est le réseau  $X(T)$  des caractères de  $T$ , et donc  $V = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Y(T)$ . On sait (voir proposition 2.7, chapitre 1) que la chambre de Weyl négative  $-\mathcal{W}$  est contenue dans le cône  $\rho(\mathcal{V}^G)$ . Ici, il y a égalité :

PROPOSITION 1.1. *Le cône  $\rho(\mathcal{V}^G)$  est égal à  $-\mathcal{W}$ .*

D'après la théorie des plongements sphériques de Luna et Vust (rappelée à la section 2.1 du chapitre 1), les plongements sans couleur de  $\Omega$  correspondent aux subdivisions de la chambre de Weyl négative dans  $V$ , c'est-à-dire aux éventails dont le support est inclus dans  $-\mathcal{W}$ . Soit  $X$  un plongement sans couleur de  $\Omega$ . On note  $W = N_G(T)/T$  le groupe de Weyl de  $G$ . En « faisant tourner » l'éventail  $\mathcal{E}_X$  par le groupe  $W$ , on obtient un éventail dans  $V$ , noté  $\mathcal{E}$ . On a donc  $\mathcal{E} = W \cdot \mathcal{E}_X$ . La proposition suivante, tirée de [BK05] (propositions 6.2.3 et 6.2.4) donne une interprétation très simple de la variété torique associée à cet éventail.

PROPOSITION 1.2. *L'adhérence de  $T \times T \cdot x_0$  dans  $X$  est normale, c'est une variété torique sous l'action de  $T$ . Elle correspond à l'éventail  $\mathcal{E}$ .*

On utilisera souvent cette proposition de la manière suivante : l'éventail de  $X$  est formé des cônes figurant dans l'éventail de la variété torique  $\overline{T \times T \cdot x_0}$  qui sont inclus

dans  $-\mathcal{W}$ . Par ailleurs (toujours d'après [BK05], proposition 6.2.3), la variété torique  $\overline{T \times T \cdot x_0}$  est lisse (resp. complète, quasi-projective) si et seulement si la variété  $X$  est lisse (resp. complète, quasi-projective).

La chambre de Weyl de  $G_0$  est saillante si et seulement si  $G_0$  est semi-simple, on a donc la dichotomie suivante. Si  $G_0$  est semi-simple, il existe une compactification de  $\Omega$  sous l'action de  $G$ , correspondant à l'éventail colorié constitué de  $(\rho(\mathcal{V}^G), \emptyset)$  et de ses faces. On l'appelle la compactification **canonique** de  $\Omega$ . Si elle est lisse, c'est la compactification magnifique de  $\Omega$  sous l'action de  $G$ . Si maintenant  $G_0$  n'est pas semi-simple, l'espace homogène  $\Omega$  n'admet pas de compactification magnifique ou canonique, c'est-à-dire pas de compactification « combinatoirement privilégiée ».

Supposons un instant le groupe  $G_0$  semi-simple de type adjoint, et notons  $\tilde{G}_0$  son revêtement universel. La chambre de Weyl de  $G_0$  étant lisse pour le réseau des poids  $Y(T)$ , l'espace homogène  $\Omega$  possède une compactification magnifique. Comme on l'a déjà mentionné dans le chapitre précédent, De Concini et Procesi ont montré ([DCP83]) que, si  $k$  est de caractéristique 0, le plongement de Demazure permet de construire la compactification magnifique de  $\Omega$ . Dans ce même article, ils en fournissent une autre construction. Pour tout poids dominant  $\lambda$  de  $\tilde{G}_0$ , notons  $M_\lambda$  la représentation irréductible de  $\tilde{G}_0$  plus haut poids  $\lambda$ . Si le poids  $\lambda$  est régulier, alors la représentation  $M_\lambda$  permet de construire une immersion  $G$ -équivariante

$$\Omega \rightarrow \mathbb{P}(\text{End}(M_\lambda)),$$

dont l'adhérence de l'image est la compactification magnifique de  $\Omega$ . Strickland ([Str87]) a montré comment généraliser cette construction en caractéristique positive, en remplaçant simplement  $M_\lambda$  par un  $\tilde{G}_0$ -module possédant les bonnes propriétés. Une conséquence de cette construction explicite est le fait que, dans la compactification magnifique de  $G_0$ , l'unique orbite fermée est séparable, et donc isomorphe à  $G_0/B \times G_0/B^-$ . Signalons aussi l'article [DCS99] dans lequel De Concini et Springer construisent (entre autres) la compactification magnifique de n'importe quel espace symétrique défini sur un corps (non nécessairement algébriquement clos) de caractéristique différente de 2.

Revenons maintenant au cas d'un groupe  $G_0$  réductif connexe quelconque. Soit  $X$  une compactification lisse sans couleur de  $\Omega$ . Comme  $X$  domine la compactification magnifique du groupe adjoint  $G_{0,\text{ad}}$  associé à  $G_0$ , on voit que les orbites fermées de  $G$  dans  $X$  sont toutes séparables, si bien que  $X$  est une compactification log homogène de  $\Omega$ , d'après le théorème 3.5 (on rappelle que  $\Omega$  vérifie la condition (B)). Pour résumer la discussion, les compactifications log homogènes de  $\Omega$  sont classifiées par les subdivisions lisses du cône  $\rho(\mathcal{V}^G) = -\mathcal{W}$ . Ce point de vue très synthétique présente l'avantage de « voir » de manière très simple toutes les compactifications log homogènes « en même temps ». Malheureusement, il ne fournit pas une construction géométrique de ces compactifications. Dans ce chapitre, on met justement l'accent sur la construction effective de compactifications log homogènes de  $\Omega$ , pour des exemples explicites de groupes  $G_0$ .

Terminons cette section en rappelant une construction alternative de la compactification magnifique d'un groupe semi-simple de type adjoint quelconque. Dans le cas où  $G_0 = \text{PGL}_n$ , Thaddeus a montré que l'adhérence de l'orbite de la diagonale sous l'action de  $G$  dans le schéma de Hilbert  $\text{Hilb}(\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1})$  (ou la variété de Chow) est la compactification magnifique de  $\Omega$  sous l'action de  $G$  ([Tha99]). Brion ([Bri03]) a généralisé cela de la manière suivante. Soit  $P$  un sous-groupe parabolique du groupe  $G_0$  tel que  $G_0$  agit fidèlement dans l'espace homogène  $G_0/P$  (autrement dit, les composantes de  $P$  dans les composantes simples du revêtement universel de  $G_0$  sont toutes propres). Alors l'adhérence de l'orbite de la diagonale sous l'action de  $G_0 \times G_0$  dans le schéma de Hilbert  $\text{Hilb}(G_0/P \times G_0/P)$  (ou la variété de Chow) est la compactification magnifique de  $\Omega$  sous

l'action de  $G$ . L'idée derrière ces constructions est d'inclure le groupe  $G_0$  dans le groupe des automorphismes d'une variété  $X$ . On peut ensuite, en associant à chaque élément de  $G_0$  son graphe, voir  $G_0$  dans un schéma de Hilbert ou une variété de Chow, puis, en prenant l'adhérence, obtenir une compactification de  $G_0$ . Dans les compactifications construites de cette manière, les points du bord peuvent donc être interprétés comme des limites de graphes d'éléments de  $G_0$ . On applique cette méthode aux groupes  $GL(n)$ ,  $SO(n)$  et  $Sp(n)$  agissant sur l'espace affine de dimension  $n$  dans les parties 2 et 3 de ce chapitre. Signalons que l'on obtient de cette manière une construction de la compactification magnifique de  $Sp(n)$  (qui n'est pas de type adjoint) par éclatements successifs à partir d'une grassmannienne lagrangienne. Dans [Abe08], Abe fournit aussi une construction de la compactification magnifique de  $Sp(n)$ , mais la procédure qu'il suit (proche de celle de Kausz) diffère de la notre : il commence par définir le foncteur des « isomorphismes symplectiques généralisés » puis montre que ce foncteur est représenté par la compactification magnifique de  $Sp(n)$ . Cela lui permet par exemple d'obtenir un morphisme de la compactification magnifique de  $Sp(n)$  vers une grassmannienne lagrangienne, mais il n'identifie pas ce morphisme comme une composition d'éclatements.

**1.2. La procédure d'éclatements successifs.** Comme on va rencontrer dans la suite plusieurs constructions par éclatements successifs qui relèvent en fait d'une même procédure, on fixe ici les notations et définitions concernant cette procédure.

Soit  $(\Delta, \leq)$  un ensemble fini ordonné. On rappelle qu'un élément de  $\Delta$  est dit minimal s'il est plus petit que tout autre élément de  $\Delta$  qui lui est comparable. On appelle  $\Delta_0$  l'ensemble des éléments minimaux de  $\Delta$ , et  $\Delta_{\geq 0}$  l'ensemble  $\Delta$  lui-même. On définit maintenant une suite de sous-ensembles de  $\Delta$  de la manière suivante. Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on pose  $\Delta_{\geq i+1} := \Delta_{\geq i} \setminus \Delta_i$  et on définit  $\Delta_{i+1}$  comme l'ensemble des éléments minimaux de  $\Delta_{\geq i+1}$ .

**DÉFINITION 1.3.** Soit  $x \in \Delta$ . On appelle **hauteur** de  $x$ , notée  $ht(x)$ , l'unique entier  $i$  vérifiant  $x \in \Delta_i$ . On appelle hauteur de  $\Delta$  l'entier défini par :

$$ht(\Delta) := \max\{ht(x), \quad x \in \Delta\}.$$

On note  $n$  la hauteur de  $\Delta$ . Pour tout  $i > n$ , les ensembles  $\Delta_{\geq i}$  et  $\Delta_i$  sont donc vides.

**DÉFINITION 1.4.** Soit  $l \in \mathbb{N}$ . On appelle **chemin de longueur**  $l$  tracé dans  $\Delta$  une application strictement croissante  $s : \llbracket 0, l \rrbracket \rightarrow \Delta$ .

On verra souvent un chemin comme un graphe orienté, parlant ainsi de ses **sommets**, de ses **arêtes** ...

**DÉFINITION 1.5.** Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Un chemin tracé dans  $\Delta$  est dit **admissible au rang**  $i$  si un et un seul de ses sommets (et donc nécessairement le dernier) est de hauteur supérieure ou égale à  $i$ . On note  $\Pi_i$  l'ensemble des chemins tracés dans  $\Delta$  admissibles au rang  $i$ .

Il y a un ordre naturel sur l'ensemble  $\Pi_i$ , défini de la manière suivante : Soient  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $s, s' \in \Pi_i$ , de longueur respectives  $l$  et  $l'$ . On déclare que  $s \geq s'$  si les deux conditions suivantes sont remplies :

- $l \leq l'$  et  $s(l) \geq s'(l')$ .
- tout sommet de  $s$  autre que  $s(l)$  est un sommet de  $s'$ .

**PROPOSITION 1.6.** On définit bien de cette manière un ordre sur  $\Pi_i$ .



DÉMONSTRATION. Pour tout  $s \in \Pi_i$ , on a clairement  $s \leq s$ . Supposons maintenant que  $s, s' \in \Pi_i$  vérifient  $s \geq s'$  et  $s' \geq s$ . Dans ce cas, la première condition ci-dessus montre que  $l = l'$  et que  $s(l) = s'(l)$ . Ensuite, la deuxième condition assure que tout sommet de  $s$  autre que  $s(l)$  est un sommet de  $s'$ , et inversement. On en déduit facilement que  $s = s'$ . Supposons maintenant que  $s, s', s'' \in \Pi_i$  vérifient  $s \geq s' \geq s''$ . Alors, d'après la première condition, on a  $l \leq l' \leq l''$ , et  $s(l) \geq s'(l') \geq s''(l'')$ . Soit  $x$  un sommet de  $s$  autre que  $s(l)$ . D'après la deuxième condition,  $x$  est un sommet de  $s'$ . Comme  $s$  et  $s'$  appartiennent à l'ensemble  $\Pi_i$ ,  $x$  ne peut pas être le sommet  $s'(l')$  de  $s'$ . Par conséquent, c'est un sommet de  $s''$ , ce qui achève de montrer que  $s \geq s''$ .  $\square$

Considérons maintenant un groupe algébrique linéaire connexe réductif  $G$ , et une  $G$ -variété  $X$  ne possédant qu'un nombre fini d'orbites. On note  $\Delta$  l'ensemble des orbites de  $G$  dans  $X$ . Pour tout  $x \in \Delta$ , on note  $\Omega_x$  l'orbite correspondante. On définit un ordre sur  $\Delta$  de la manière suivante

$$\forall x, y \in \Delta, \quad x \leq y \iff \overline{\Omega_x} \subseteq \overline{\Omega_y}.$$

L'ensemble ordonné  $(\Delta, \leq)$  code donc toute la combinatoire des orbites de  $G$  dans  $X$ . Par exemple, avec les définitions données ci-dessus, une orbite est de hauteur 0 si et seulement si elle est fermée. On définit maintenant une suite de compactifications de l'espace homogène  $\Omega$  de la manière suivante. On pose  $X_0 := X$ , et, pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on note  $X_{i+1}$  l'éclatement de  $X_i$  le long de l'adhérence de

$$\bigcup_{x \in \Delta_i} \Omega_x$$

dans  $X_i$ . On dit qu'on applique la procédure d'éclatement à partir de  $X$  (en suivant  $\Delta$ ).

Dans les différentes situations qui suivent (espace des collinéations complètes, espace des collinéations croisées complètes, ...) on se donne un espace homogène sphérique  $\Omega$  sous l'action de  $G$ , et on recherche une compactification lisse, projective et log homogène de celui-ci. Pour cela, on commence toujours par définir une compactification « naïve » et assez naturelle de celui-ci, à laquelle on applique la procédure d'éclatements expliquée ci-dessus.

**1.3. Le groupe projectif linéaire et les collinéations complètes.** Le fait de choisir un poids dominant régulier est essentiel dans la construction de De Concini, Procesi et Strickland. Par exemple, si  $G_0 = \mathrm{PGL}(n)$  et si l'on choisit la représentation standard de  $\mathrm{SL}(n)$  sur  $k^n$  (qui se trouve sur le bord de la chambre de Weyl), alors la compactification que l'on obtient est  $\mathbb{P}(\mathrm{M}(n))$ , la projectivisation de l'espace des matrices carrées de taille  $n$ . Ce n'est pas la compactification magnifique de  $\Omega$ , puisque le complémentaire de  $\Omega$  est formé du diviseur défini par le déterminant, qui n'est pas lisse dès que  $n \geq 3$ . Cette compactification est cependant tout à fait digne d'intérêt, puisqu'elle est le point de départ de la construction de **l'espace des collinéations complètes**, qui est le nom classique de la compactification magnifique de  $\mathrm{PGL}(n)$ . On rappelle cette construction dans cette section.

La littérature est très abondante sur le sujet, et le lecteur curieux est invité à consulter [Tyr56], [Lak82], [Lak87], [Lak88], [Vai84], [TK88] ou encore [Tha99] pour plus de précisions. On considère deux  $k$ -espaces vectoriels  $V$  et  $W$  de même dimension finie  $n$ . On note

$$G = \mathrm{PGL}(V) \times \mathrm{PGL}(W) \text{ et } \Omega := \mathbb{P}(\mathrm{Iso}(V, W))$$

l'espace homogène sous l'action de  $G$  des isomorphismes de  $V$  dans  $W$ , à homothétie près. La paire  $(\Omega, G)$  est donc isomorphe à la paire  $(\mathrm{PGL}(n), \mathrm{PGL}(n) \times \mathrm{PGL}(n))$ .

On applique maintenant la procédure d'éclatement décrite dans la section 1.2, à partir de la compactification naïve  $X := \mathbb{P}(\text{Hom}(V, W))$  de  $\Omega$ . L'ensemble  $\Delta$  est ici l'ensemble  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Pour tout  $x \in \Delta$ , l'orbite  $\Omega_x$  correspondante est le lieu des applications de rang  $n-x$ . L'ordre sur  $\Delta$  est défini de la manière suivante. Si  $x$  et  $y$  sont deux éléments de  $\Delta$ , alors  $x$  est supérieur ou égal à  $y$  pour l'ordre défini sur  $\Delta$  si et seulement si  $y$  est supérieur ou égal à  $x$  pour l'ordre usuel sur les entiers naturels. Pour  $x \in \Delta$ , on calcule facilement  $\text{ht}(x) = n-1-x$ . Par conséquent, la hauteur de  $\Delta$  est  $n-1$ . On a alors le théorème suivant ( $X_0, X_1, \dots$  sont les variétés obtenues en appliquant à  $X$  la procédure d'éclatement selon  $\Delta$ ) :

**THÉORÈME 1.7.** *Pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , la variété  $X_i$  est une compactification projective et lisse de  $\Omega$ . La variété  $X_{n-1}$  est appelée l'espace des collinéations complètes  $V \rightarrow W$ . Il s'agit de la compactification magnifique de  $\Omega$ .*

La terminologie choisie suggère qu'il doit exister des « collinéations complètes » de  $V$  dans  $W$ , dont  $X_{n-1}$  est l'espace de module. C'est bien le cas. Traditionnellement, une **collinéation** de  $V$  dans  $W$  est une application linéaire  $V \rightarrow W$  vue à homothétie près (elle met donc en relation les droites de  $V$  et celles de  $W$ ).

**PROPOSITION 1.8.** *Soit  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . L'ensemble  $X_i(k)$  est l'ensemble des suites  $\mathbf{c}$  d'applications linéaires*

$$\gamma_{\mathbf{c},0} : V \rightarrow W, \quad \gamma_{\mathbf{c},1} : \text{Ker } \gamma_{\mathbf{c},0} \rightarrow \text{Coker } \gamma_{\mathbf{c},0}, \dots, \quad \gamma_{\mathbf{c},l} : \text{Ker } \gamma_{\mathbf{c},l-1} \rightarrow \text{Coker } \gamma_{\mathbf{c},l-1}$$

toutes non nulles et vues à homothéties près, avec

$$\dim(\text{Ker } \gamma_{\mathbf{c},l}) \leq n-1-i \text{ et } \dim(\text{Ker } \gamma_{\mathbf{c},l-1}) > n-1-i.$$

L'entier  $l$  est appelé la longueur de  $\mathbf{c}$ .

Les éléments de  $X_{n-1}(k)$  sont appelées les **collinéations complètes** de  $V$  dans  $W$ . La dernière condition signifie dans ce cas que  $\gamma_{\mathbf{c},l}$  est de rang maximal. La définition du foncteur des points de  $X_i$  est plus délicate ([TK88],[Kau00]), et n'est pas essentielle pour la suite. Remarquons tout de même que, comme la formation de la variété  $X_i$  par éclatements successifs commute à l'extension des scalaires, on a une description de l'ensemble  $X_i(K)$ , pour toute extension  $K$  de  $k$  (il suffit de remplacer  $V$  par  $K \otimes_k V$  et  $W$  par  $K \otimes_k W$ ).

**DÉFINITION 1.9.** *Soit  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Pour tout  $\mathbf{c} \in X_i(k)$ , de longueur  $l$ , l'application*

$$s_{\mathbf{c}} : \llbracket 0, l \rrbracket, \quad d \mapsto \dim(\text{Ker } \gamma_{\mathbf{c},d})$$

est un chemin tracé dans  $\Delta$ , qui appartient à  $\Pi_i$  et que l'on appelle le **type** de  $\mathbf{c}$ . Pour tout  $s \in \Pi_i$ , on note  $\Omega_s(k)$  l'ensemble des  $\mathbf{c} \in X_i(k)$  de type  $s$ .

La réponse à la question 1.12 est positive, au sens où, pour tout  $s \in \Pi_i$ , l'orbite  $\Omega_s(\bar{k})$  de  $G(\bar{k})$  dans  $X_i(\bar{k})$  est définie sur  $k$ , et, si l'on note  $\Omega_s$  la sous-variété sous-jacente, on a

$$\forall s, s' \in \Pi_i, \quad s \geq s' \iff \overline{\Omega_{s'}} \subseteq \overline{\Omega_s}.$$

On termine cette section en donnant une description alternative des éléments de  $X_n(k)$ , qui sera utile par la suite. Afin de donner cette description, on a besoin de notations supplémentaires. Soit  $s$  un chemin tracé dans  $\Delta$ , de longueur  $l$ . On pose, par convention,  $s(-1) = n$ . Une paire de drapeaux  $(\tau_V, \tau_W)$ , l'un dans  $V$ , l'autre dans  $W$ , est dite **indexée** par le chemin  $s$  si on peut écrire

$$\tau_V := (V_{s(l)} \subseteq \dots \subseteq V_{s(0)} \subseteq V_{s(-1)} = V) \text{ et } \tau_W := (W_{n-s(-1)} = \{0\} \subseteq \dots \subseteq W_{n-s(l)}),$$

où la dimension de chaque sous-espace est donnée par son indice. On pose alors

$$\forall d \in \llbracket 0, l \rrbracket, \quad \text{gr}(\tau_V)_d := V_{s(d-1)}/V_{s(d)} \text{ et } \text{gr}(\tau_V) = \bigoplus_{d=0}^l \text{gr}(\tau_V)_d,$$

$$\forall d \in \llbracket 0, l \rrbracket, \quad \text{gr}(\tau_W)_{-d} := W_{n-s(d)}/W_{n-s(d-1)} \text{ et } \text{gr}(\tau_W) = \bigoplus_{d=0}^l \text{gr}(\tau_W)_{-d}.$$

On fait agir le groupe  $(k^*)^{l+1}$  sur l'espace vectoriel  $\text{gr}(\mathbf{c}_W)$ , l'élément

$$t = (t_0, \dots, t_l) \in (k^*)^{l+1}$$

agissant sur  $\text{gr}(\tau_W)_d$  par multiplication par  $t_d$ . Cette action induit une action de  $(k^*)^{l+1}$  sur l'espace vectoriel  $\text{Hom}(\text{gr}(\tau_V), \text{gr}(\tau_W))$ . On a alors le résultat suivant :

**PROPOSITION 1.10.** *Un élément  $\mathbf{c} \in X_n(k)$  de longueur  $l$  est la donnée :*

- *du chemin  $s_{\mathbf{c}} \in \Pi_n$ .*
- *d'une paire de drapeaux  $(\mathbf{c}_V, \mathbf{c}_W)$  indexée par  $s_{\mathbf{c}}$ .*
- *d'une classe  $[\iota_{\mathbf{c}}] \in \text{Iso}(\text{gr}(\mathbf{c}_V), \text{gr}(\mathbf{c}_W))/(k^*)^{l+1}$  renversant la graduation.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\mathbf{c} \in X_n(k)$ , de longueur  $l$ , dont on note  $s$  le type. Remarquons que  $s(l) = 0$ . On a une suite de surjections

$$W \rightarrow \text{Coker } \gamma_{\mathbf{c},0} \rightarrow \dots \rightarrow \text{Coker } \gamma_{\mathbf{c},l}.$$

On pose, pour tout  $d \in \llbracket 0, l \rrbracket$ ,

$$V_{\mathbf{c},s(d)} = \text{Ker } \gamma_{\mathbf{c},d} \text{ et } W_{\mathbf{c},n-s(d)} = \text{Ker}(W \rightarrow \text{Coker } \gamma_{\mathbf{c},d}).$$

Ces espaces s'arrangent en deux drapeaux

$$\mathbf{c}_V := (V_{\mathbf{c},s(l)} = \{0\} \subseteq \dots \subseteq V_{\mathbf{c},s(0)} \subseteq V), \quad \mathbf{c}_W := (\{0\} \subseteq W_{\mathbf{c},n-s(0)} \subseteq \dots \subseteq W_{\mathbf{c},n-s(l)} = W).$$

Cette paire de drapeaux est indexée par  $s$ . Pour tout degré  $d$ , le noyau de

$$\gamma_{\mathbf{c},d} : V_{\mathbf{c},s(d-1)} \rightarrow W/W_{\mathbf{c},n-s(d-1)}$$

est  $V_{\mathbf{c},s(d)}$ , et son image est  $W_{\mathbf{c},n-s(d)}/W_{\mathbf{c},n-s(d-1)}$ . Cela prouve que les applications linéaires  $(\gamma_{\mathbf{c},d})_{d \in \llbracket 0, l \rrbracket}$  définissent un isomorphisme

$$\iota_{\mathbf{c}} : \text{gr}(\mathbf{c}_W) \rightarrow \text{gr}(\mathbf{c}_V)$$

qui renverse les degrés. Remarquons maintenant que chaque application linéaire  $\gamma_{\mathbf{c},d}$  est vue à homothétie près, si bien que la classe :

$$[\iota_{\mathbf{c}}] \in \text{Hom}(\text{gr}(\mathbf{c}_V), \text{gr}(\mathbf{c}_W))/(k^*)^{l+1}$$

est bien définie (ne dépend pas du choix des  $\gamma_{\mathbf{c},d}$ ).

Voyons maintenant comment, à partir du quadruplet  $(s_{\mathbf{c}}, \mathbf{c}_V, \mathbf{c}_W, [\iota_{\mathbf{c}}])$ , reconstituer la collinéation complète  $\mathbf{c}$ . On pose

$$\gamma_{\mathbf{c},0} : V \rightarrow V/V_{\mathbf{c},s(0)} \xrightarrow{\iota_{\mathbf{c}}} W_{\mathbf{c},n-s(0)}.$$

Si  $l = 0$ , on s'arrête là. Sinon, comme  $\iota_{\mathbf{c}}$  est un isomorphisme, on a

$$\text{Ker } \gamma_{\mathbf{c},0} = V_{\mathbf{c},s(0)} \text{ et } \text{Coker } \gamma_{\mathbf{c},0} = W/W_{\mathbf{c},n-s(0)}.$$

On définit alors

$$\gamma_{\mathbf{c},1} : \text{Ker } \gamma_{\mathbf{c},0} \rightarrow V_{\mathbf{c},s(0)}/V_{\mathbf{c},s(1)} \xrightarrow{\iota_{\mathbf{c}}} W_{\mathbf{c},n-s(0)}/W_{\mathbf{c},n-s(1)} \subseteq \text{Coker } \gamma_{\mathbf{c},0}.$$

Si  $l = 1$ , on s'arrête là. Sinon, on continue de la même manière... On obtient de cette façon une suite d'applications linéaires  $\gamma_{\mathbf{c},0}, \gamma_{\mathbf{c},1}, \dots, \gamma_{\mathbf{c},l}$ . Changer le représentant  $\iota_{\mathbf{c}}$  que l'on a choisi revient à multiplier chacune de ces applications linéaires par un scalaire. Par ailleurs, comme  $s(l) = 0$ , on voit facilement que  $\gamma_{\mathbf{c},l}$  est de rang maximal. Ceci prouve bien que l'on a défini une collinéation complète  $\mathbf{c} \in X_n(k)$ .  $\square$

Les résultats énoncés dans cette section motivent certaines questions relatives à la procédure d'éclatement successifs. On se donne un espace homogène sphérique  $\Omega$  sous l'action de  $G$ , une compactification naïve  $X_0$  de celui-ci, à laquelle on applique la procédure décrite dans la section 1.2. On obtient une suite de compactifications de  $\Omega$  :

$$X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 := X.$$

Le type de question que l'on se pose est alors :

QUESTION 1.11. *La compactification  $X_n$  est-elle log homogène ? Si oui, quelles sont les données combinatoires associées ?*

QUESTION 1.12. *L'ensemble ordonné  $(\Pi_i, \leq)$  est-il isomorphe à l'ensemble ordonné des orbites de  $G$  dans  $X_i$  ?*

On peut aussi se poser la question d'une interprétation modulaire de  $X_i$ , c'est-à-dire la description du foncteur des points de  $X_i$ . On répondra cependant à la question plus faible suivante :

QUESTION 1.13. *Peut-on décrire l'ensemble  $X_i(K)$  pour toute extension  $K$  du corps de base  $k$  ?*

**1.4. La compactification de Kausz du groupe linéaire.** Motivé par des problèmes de compactification d'espaces de modules de fibrés vectoriels sur une courbe, Kausz ([Kau00]) a été amené à introduire une compactification du groupe linéaire, qui s'avère être log homogène. Il décrit le foncteur des points de celle-ci, en terme d'objets qu'il baptise bf-morphismes, et isomorphismes généralisés entre fibrés vectoriels. Par ailleurs, il travaille au-dessus d'une base quelconque, donc dans un cadre plus général que le nôtre. Dans cette section, on rappelle sa construction, qui rentre en fait dans le procédé général décrit en 1.2, et on adapte ses résultats pour les traduire dans la situation qui nous intéresse. Cela nous permet d'identifier sa compactification comme celle obtenue en prenant les points fixes d'une certaine involution dans un espace de collinéations complètes.

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels sur  $k$ , de même dimension finie  $n$ . On note  $G$  le groupe  $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$  et  $\Omega$  l'espace homogène  $\mathrm{Iso}(V, W)$  sous l'action de  $G$ . On note  $X := \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V, W) \oplus k)$ . C'est une  $G$ -variété lisse (on fait agir  $G$  trivialement sur le facteur  $k$ ) projective, contenant  $\Omega$  comme orbite ouverte, autrement dit c'est une compactification lisse de  $\Omega$ . Décrivons la combinatoire des orbites de  $G$  dans  $X$ . On peut écrire  $X$  comme réunion de l'ouvert  $U := \mathbb{A}(\mathrm{Hom}(V, W))$  et de l'hyperplan à l'infini  $H := \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V, W))$ , et ces deux sous-variétés sont stables sous l'action de  $G$ . On définit les ensembles

$$\Delta_U := \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \Delta_H := \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \text{et } \Delta := \Delta_U \sqcup \Delta_H.$$

L'ensemble  $\Delta$  pour  $n = 6$  est représenté dans la figure 1. L'ensemble  $\Delta$  est l'ensemble des orbites de  $G$  dans  $X$ . En effet, pour tout  $x \in \Delta$ , on définit  $\Omega_x$  comme le lieu des applications de rang  $n - x$  dans  $U$  (resp.  $H$ ) si  $x \in \Delta_U$  (resp.  $\Delta_H$ ), et on obtient ainsi

toutes les orbites de  $G$  dans  $X$ . L'ordre sur  $\Delta$  est décrit de la manière suivante. Soit  $x, y \in \Delta$ . On a

$$x \geq y \text{ si et seulement si } x \text{ est plus petit que } y \text{ et } \begin{cases} \text{soit } x \in \Delta_U \\ \text{soit } x \in \Delta_H \text{ et } y \in \Delta_H \end{cases}$$

On en déduit que, pour tout  $x \in \Delta_U$ , on a  $\text{ht}(x) = n - x$  et, pour tout  $x \in \Delta_H$ , on a  $\text{ht}(x) = n - 1 - x$ . En particulier, la hauteur de  $\Delta$  est  $n$ .

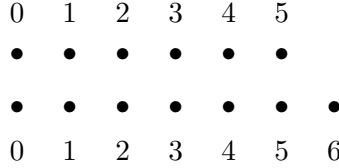


FIGURE 1. L'ensemble  $\Delta$  pour  $n = 6$

On applique maintenant la procédure d'éclatements successifs décrite dans la section 1.2. On obtient une suite de compactifications de l'espace homogène  $\Omega$ , que l'on note

$$X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 := X.$$

Kausz montre alors le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.14.** *La compactification  $X_n$  de  $\Omega$  est lisse, projective, et domine la compactification magnifique de  $\mathbb{P}(\text{Iso}(V, W))$ .*

Il en découle que la compactification  $X_n$  est sans couleur, et donc log homogène. Pour décrire les données combinatoires attachées à cette compactification, on a besoin de notations supplémentaires. On rappelle que l'espace homogène  $\Omega$  est muni d'un point base, noté  $f_0$ . On fixe une base  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $V$ , et une base  $(w_1, \dots, w_n)$  de  $W$ , telle que

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f_0(v_j) = w_{n-j+1}.$$

Pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note

$$V_j = \langle v_1, \dots, v_j \rangle \text{ et } W_j = \langle w_1, \dots, w_j \rangle.$$

Ces espaces vectoriels s'arrangent en deux drapeaux complets, que l'on note  $\delta_V$  et  $\delta_W$ . On note  $B \subseteq G$  le stabilisateur des drapeaux  $\delta_V$  dans  $V$  et  $\delta_W$  dans  $W$ . C'est un sous-groupe de Borel de  $G$ . On note  $T \subseteq B$  le stabilisateur des droites  $\langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_n \rangle, \langle w_1 \rangle, \dots, \langle w_n \rangle$ . C'est un tore maximal de  $G$ .

On note  $X(T)$  le réseau des caractères de  $T$ , et  $Y(T)$  le réseau dual (sous-groupe à un paramètre à valeurs dans  $T$ ). Pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\chi_j$  (resp.  $\nu_j$ ) le poids de l'action de  $T$  sur la droite  $\langle v_j \rangle$  (resp.  $\langle w_j \rangle$ ). On obtient ainsi une base de  $X(T)$ , dont on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$  la base duale.

Avec ces notations, on a alors

$$V(\Omega) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (Y(T) / \langle \lambda_1 + \mu_n, \dots, \lambda_n + \mu_1 \rangle),$$

et, d'après la proposition 1.1, le cône des valuations invariantes par  $G$  est décrit par

$$\rho(\mathcal{V}^G) = \{[x] \in V(\Omega), \quad (\chi_1 - \nu_n)(x) \leq \dots \leq (\chi_n - \nu_1)(x)\}.$$

Dans [Kau00] (lemme 4.4), Kausz construit un schéma torique contenu dans la compactification qu'il construit. Cela permet, grâce à la proposition 1.2 de ce chapitre, de montrer le résultat suivant :

PROPOSITION 1.15. *L'éventail correspondant à la compactification  $X_n$  est formé des cônes*

$$\mathcal{C}_v := \{\chi_1 - \nu_n \leq \dots \leq \chi_v - \nu_{n+1-v} \leq 0 \leq \chi_{v+1} - \nu_{n-v} \leq \dots \leq \chi_n - \nu_1\}$$

pour  $v \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , et de leurs faces.

En utilisant la description combinatoire obtenue dans la proposition précédente, on montre maintenant comment la compactification de Kausz se réalise comme la variété des points fixes d'une certaine involution sur l'espace des collinéations complètes de  $V \oplus k$  dans  $W \oplus k$ , et on obtient une description de l'ensemble  $X_n(k)$ , qui n'est pas celle donnée par Kausz dans [Kau00]. La situation étudiée ici (prise de points fixes, puis identification des  $k$ -points) est très analogue à celle étudiée en détails dans la partie 3 de ce chapitre, c'est pourquoi on s'autorise à ne pas donner des preuves complètes. Comme la construction que l'on propose procède par points fixes d'une involution, on suppose pour pouvoir appliquer les résultats de la partie 4 du chapitre 2 que le corps  $k$  est de caractéristique différente de 2.

On considère deux espaces vectoriels  $V'$  et  $W'$ , que l'on peut écrire  $V' = \langle v_0 \rangle \oplus V$  et  $W' = W \oplus \langle w_{n+1} \rangle$ . On note  $G', \Omega', X'_0, \dots$  les objets définis dans la section 1.3, relativement aux espaces vectoriels  $V'$  et  $W'$ . On dispose en particulier de la compactification magnifique  $X'_n$  de  $\Omega'$ . On considère l'élément  $\sigma \in G'(k)$  vérifiant

$$\sigma|_V = id, \quad \sigma|_{\langle v_0 \rangle} = -id, \quad \sigma|_W = id, \quad \sigma|_{\langle w_{n+1} \rangle} = -id.$$

On vérifie aisément que  $\Omega$  est l'espace homogène des points fixes  $(\Omega')^\sigma$ , sous l'action de  $G = ((G')^\sigma)^0$ . On montre alors :

PROPOSITION 1.16. *La compactification  $X_n$  de  $\Omega$  est la composante connexe de la variété des points fixes  $(X'_n)^\sigma$  qui contient  $\Omega$ .*

DÉMONSTRATION. Notons provisoirement  $Z$  la composante connexe de la variété  $(X'_n)^\sigma$  qui contient  $\Omega$ . On sait, d'après la proposition 4.4 du chapitre 2, que  $Z$  est une compactification log homogène de  $\Omega$  sous l'action de  $G$ . Pour conclure, il reste donc à calculer l'éventail  $\mathcal{E}_Z$ . On utilise pour cela la proposition 1.2. Remarquons que le tore  $T$  est un tore maximal de  $G$  et de  $G'$ , si bien que les espaces  $V(\Omega)$  et  $V(\Omega')$  sont égaux. On note  $V$  cet espace. Comme  $X'_n$  est la compactification magnifique de  $\Omega'$ , l'éventail qui lui correspond est formé du cône

$$\rho(\mathcal{V}^{G'}) = \{[x] \in V, \quad (\chi_1 - \nu_n)(x) \leq \dots \leq (\chi_n - \nu_1)(x) \leq 0\}$$

et de ses faces. On déduit de la proposition 1.2 que l'éventail de la variété torique  $\overline{Tf_0}$  est formée des cônes images de ceux-ci par le groupe de Weyl de  $G'$ . Pour expliciter pleinement cet éventail, on va présenter autrement le cône  $\rho(\mathcal{V}^{G'})$ . Le groupe  $G'$  contient le tore  $T'$  dont le réseau des sous-groupes à un paramètre est

$$(Y(T) \oplus \mathbb{Z}\lambda_0 \oplus \mathbb{Z}\mu_{n+1}) / \langle \lambda_0 + \dots + \lambda_n, \mu_1 + \dots + \mu_{n+1} \rangle$$

et celui-ci est isomorphe à  $T$  par le morphisme

$$Y(T') \rightarrow Y(T), \quad \left[ \sum_{i=0}^n a_i \lambda_i + \sum_{i=1}^{n+1} b_i \mu_i \right] \mapsto \left[ \sum_{i=1}^n (a_i - a_0) \lambda_i + \sum_{i=1}^n (b_i - b_{n+1}) \mu_i \right].$$

En utilisant ceci, on voit que le cône  $\rho(\mathcal{V}^{G'})$  peut s'écrire aussi :

$$\left\{ \left[ \sum_{i=0}^n a_i \lambda_i + \sum_{i=1}^{n+1} b_i \mu_i \right] \in V, \quad a_1 - b_n \leq \dots \leq a_n - b_1 \leq a_0 - b_{n+1} \right\}.$$

Maintenant, on vérifie facilement que l'action du groupe de Weyl de  $G'$  a pour effet d'envoyer le cône  $\rho(\mathcal{V}^{G'})$  sur le cône défini par une suite d'inégalité semblable, obtenue simplement en permutant les termes  $a_i - b_{n+1-i}$ . On en déduit alors que les cônes apparaissant de cette manière et figurant dans le cône

$$\rho(\mathcal{V}^G) = \{[x] \in V(\Omega), \quad (\chi_1 - \nu_n)(x) \leq \dots \leq (\chi_n - \nu_1)(x)\}$$

sont exactement les cônes  $(\mathcal{C}_v)_{v \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  et leurs faces. En utilisant à nouveau la proposition 1.2, et la proposition 1.15, on obtient alors le résultat voulu.  $\square$

A vrai dire, on peut vérifier qu'en prenant les points fixes par  $\sigma$  à chaque étape dans la suite

$$X'_n \rightarrow X'_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X'_1 \rightarrow X'_0 := \mathbb{P}(\text{Hom}(V', W'))$$

et en retenant la composante connexe contenant  $\Omega$ , on obtient la suite

$$X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 := \mathbb{P}(\text{Hom}(V, W) \oplus k).$$

En utilisant la description de l'ensemble  $X'_n(k)$  donnée dans la proposition 1.10, on va maintenant décrire les points  $k$ -rationnels de  $X_n$ . Soit  $s \in \Pi_n$ , de longueur  $l$ . On pose, par convention,  $s(-1) = n \in \Delta_H$  (on rajoute le point  $n$  à  $\Delta_H$ ). Une paire de drapeaux  $(\tau_V, \tau_W)$ , l'un dans  $V$ , l'autre dans  $W$ , est dite **indexée** par le chemin  $s$  si on peut écrire

$$\tau_V := (V_{s(l)} \subseteq \dots \subseteq V_{s(0)} \subseteq V_{s(-1)} = V) \text{ et } \tau_W := (W_{n-s(-1)} = \{0\} \subseteq \dots \subseteq W_{n-s(l)}),$$

où la dimension de chaque sous-espace est donnée par son indice. On définit comme dans la section 1.3 les espaces vectoriels  $\text{gr}(\mathbf{c}_V)$  et  $\text{gr}(\mathbf{c}_W)$ . Comme  $s$  appartient à  $\Pi_n$ , on a  $s(l) = 0 \in \Delta_U$ . Comme  $s(-1)$  appartient à  $\Delta_H$ , il existe un entier  $j \in \llbracket 0, l \rrbracket$  tel que  $s(j)$  appartient à  $\Delta_U$  et  $s(j-1)$  appartient à  $\Delta_H$ . On fait agir le groupe  $(k^*)^l$  sur l'espace vectoriel  $\text{gr}(\mathbf{c}_W)$ , l'élément

$$(t_d)_{d \in \llbracket 0, l \rrbracket \setminus \{j\}} \in (k^*)^l$$

agissant sur  $\text{gr}(\mathbf{c}_W)_d$  par multiplication par  $t_d$ . Là encore, cette action induit une action de  $(k^*)^l$  sur l'espace vectoriel  $\text{Hom}(\text{gr}(\mathbf{c}_V), \text{gr}(\mathbf{c}_W))$ . On peut alors montrer le résultat suivant :

PROPOSITION 1.17. *Un élément  $\mathbf{c} \in X_n(k)$  est la donnée :*

- d'un chemin  $s_{\mathbf{c}} \in \Pi_n$ .
- d'une paire de drapeaux  $(\mathbf{c}_V, \mathbf{c}_W)$  indexée par  $s_{\mathbf{c}}$ .
- d'une classe  $[\iota_{\mathbf{c}}] \in \text{Iso}(\text{gr}(\mathbf{c}_V), \text{gr}(\mathbf{c}_W))/(k^*)^l$  renversant la graduation.

Expliquons comment associer à un quadruplet  $(s_{\mathbf{c}}, \mathbf{c}_V, \mathbf{c}_W, [\iota_{\mathbf{c}}])$  comme dans l'énoncé un élément de  $X_n(k)$ . On note  $l$  la longueur de  $s_{\mathbf{c}}$ , et

$$d_{\mathbf{c}} := \min\{d \in \llbracket 0, l \rrbracket, \quad s_{\mathbf{c}}(d) \in \Delta_U\}.$$

On note  $s$  l'application suivante

$$s : \llbracket 0, l \rrbracket \rightarrow \Delta', \quad d \mapsto \begin{cases} s_{\mathbf{c}}(d) + 1 & \text{si } d \in \llbracket 0, d_{\mathbf{c}} - 1 \rrbracket \\ s_{\mathbf{c}}(d) & \text{si } d \in \llbracket d_{\mathbf{c}}, l \rrbracket. \end{cases}$$

On vérifie facilement que  $s$  est un chemin tracé dans  $\Delta'$ . On pose aussi

$$\forall d \in \llbracket 0, d_{\mathbf{c}} - 1 \rrbracket, \quad V'_{\mathbf{c}, s(d)} = V_{\mathbf{c}, s_{\mathbf{c}}(d)} \oplus \langle v_0 \rangle \text{ et } W'_{\mathbf{c}, n-s(d)} = W_{\mathbf{c}, n-s_{\mathbf{c}}(d)}$$

$$\forall d \in \llbracket d_{\mathbf{c}}, l \rrbracket, \quad V'_{\mathbf{c}, s(d)} = V_{\mathbf{c}, s_{\mathbf{c}}(d)} \text{ et } W'_{\mathbf{c}, n-s(d)} = W_{\mathbf{c}, n-s_{\mathbf{c}}(d)} \oplus \langle w_{n+1} \rangle.$$

Ces sous-espaces s'arrangent en deux drapeaux  $\mathbf{c}_{V'}$  et  $\mathbf{c}_{W'}$ , et la paire de drapeaux  $(\mathbf{c}_V, \mathbf{c}_W)$  est indexée par  $s$ . Par ailleurs, pour tout degré  $d \in \llbracket 0, l \rrbracket$  différent de  $d_{\mathbf{c}}$ , on a

$$\mathrm{gr}(\mathbf{c}_{V'})_d = \mathrm{gr}(\mathbf{c}_V)_d \text{ et } \mathrm{gr}(\mathbf{c}_{W'})_{-d} = \mathrm{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d},$$

et on pose alors  $\iota'_{\mathbf{c}} = \iota_{\mathbf{c}}$ . Pour  $d = d_{\mathbf{c}}$ ,

$$\mathrm{gr}(\mathbf{c}_{V'})_d = \mathrm{gr}(\mathbf{c}_V)_d \oplus \langle v_0 \rangle \text{ et } \mathrm{gr}(\mathbf{c}_{W'})_{-d} = \mathrm{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d} \oplus \langle w_{n+1} \rangle,$$

et on note alors  $\iota'_{\mathbf{c}}$  l'isomorphisme vérifiant

$$\iota'_{\mathbf{c}|_{\mathrm{gr}(\mathbf{c}_V)_d}} = \iota_{\mathbf{c}} \text{ et } \iota'_{\mathbf{c}}(v_0) = w_{n+1}.$$

Il est clair que le quadruplet  $(s, \mathbf{c}_{V'}, \mathbf{c}_{W'}, \iota'_{\mathbf{c}})$  définit une collinéation complète  $V' \rightarrow W'$  (proposition 1.16) qui est fixée par  $\sigma$ . Pour voir que cette collinéation complète est dans l'adhérence de  $\Omega$  dans  $X'_n$ , il faut faire quelque chose en plus. Par exemple, on peut faire un calcul en coordonnées locales pour l'exhiber comme une limite explicite de points de  $\Omega$  (à la manière de la proposition 3.16).

## 2. Le groupe linéaire et les collinéations croisées complètes

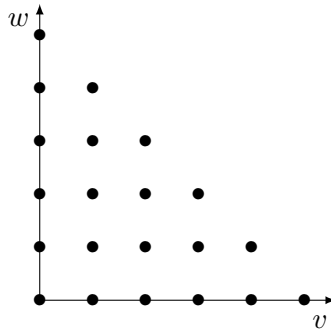
En s'inspirant de la construction de l'espace des collinéations complètes expliquée dans la section 1.3 de ce chapitre, on fournit dans cette partie une compactification projective, lisse et log homogène du groupe linéaire.

**2.1. L'espace des collinéations croisées complètes entre  $V$  et  $W$ .** Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels sur  $k$  de même dimension finie  $n$ . On note  $G$  le groupe algébrique  $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$ , et  $\Omega$  l'espace homogène  $\mathrm{Iso}(V, W)$  des isomorphismes de  $V$  dans  $W$ , sous l'action du groupe  $G$ . On note aussi  $\mathrm{Gr}(n, V \oplus W)$  la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension  $n$  de  $V \oplus W$ , que l'on voit comme une compactification de  $\Omega$ , en associant à chaque élément de  $\Omega$  son graphe. Les orbites de  $G$  dans  $\mathrm{Gr}(n, V \oplus W)$  sont paramétrées par l'ensemble

$$\Delta = \{(v, w) \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad v + w \leq n\},$$

l'orbite correspondant à  $(v, w)$  étant

$$\Omega_{v,w} = \{F \in \mathrm{Gr}(n, V \oplus W), \quad \dim(F \cap V) = v \text{ et } \dim(F \cap W) = w\}.$$



L'ordre sur  $\Delta$  est donné par

$$\forall (v, w) \in \Delta, \quad \forall (v', w') \in \Delta, \quad (v', w') \leq (v, w) \iff v \leq v' \text{ et } w \leq w',$$

ce qui permet de calculer, pour tout  $(v, w) \in \Delta$ ,  $\mathrm{ht}(v, w) = n - v - w$ . On en déduit que la hauteur de  $\Delta$  est  $n$ . On note  $X_0, X_1, \dots, X_n$  les variétés obtenues en appliquant à



$\text{Gr}(n, V \oplus W)$  la procédure d'éclatements successifs décrite en 1.2. Pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on note aussi  $Y_i$  l'adhérence de

$$\bigcup_{v+w=n-i} \Omega_{v,w}$$

dans  $X_i$ . La variété  $X_{i+1}$  est donc obtenue en éclatant  $Y_i$  dans  $X_i$ .

Le premier théorème que l'on souhaite montrer est le suivant :

**THÉORÈME I.** *Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la sous-variété fermée  $Y_i$  est lisse. Par conséquent, la variété  $X_i$  est une compactification projective et lisse de  $\Omega$ .*

Le deuxième théorème principal de cette partie concerne la compactification  $X_n$ .

**THÉORÈME II.** *La variété  $X_n$  est une compactification log homogène de  $\Omega$ . On l'appelle **l'espace des collinéations croisées complètes entre  $V$  et  $W$** .*

Par ailleurs, on calculera les données combinatoires attachées à cette compactification log homogène (proposition 2.61). Le théorème 2.1 répond entièrement à la question 1.11 de la section 1.2. On répondra dans la suite également aux questions 1.12 et 1.13. A vrai dire, on va prendre les choses un peu « à l'envers ». Dans la section 2.2, on va définir, pour toute extension  $K$  de  $k$ , un ensemble  $X_i(K)$ , qui s'avèrera être l'ensemble des points  $K$ -rationnels de la variété  $X_i$ . Dans la section 2.3, on va définir une structure de  $k$ -variété algébrique sur l'ensemble  $X_i(\bar{k})$ , et vérifier que la variété que l'on obtient ainsi est bien la variété  $X_i$ . On répondra donc à la question 1.13 avant tout le reste.

La terminologie choisie pour  $X_n$  apparaîtra claire, au vu des rappels effectués dans la section 1.3, une fois qu'on aura identifié l'ensemble  $X_n(k)$ . Disons pour le moment que l'espace des collinéations croisées complètes domine l'espace des collinéations complètes. Par ailleurs, il domine aussi la compactification de Kausz de l'espace homogène  $\Omega$ .

Pour nous, l'espace des collinéations croisées complètes présente un intérêt double. Tout d'abord, il est obtenu par une procédure « classique » à partir de la compactification (très naturelle) de  $\text{GL}(n)$  par la grassmannienne  $\text{Gr}(n, k^n \oplus k^n)$ . Ensuite, comme on le verra dans la partie 3, dans le cadre orthogonal ou symplectique, l'involution « dualité » s'étend à l'espace des collinéations croisées complètes. En prenant les points fixes par cette involution, on montrera que l'on obtient la compactification magnifique de certaines  $k$ -formes de  $\text{SO}(n)$  si  $n$  est impair, et de  $\text{Sp}(n)$  si  $n$  est pair. On obtient aussi une compactification log homogène de certaines  $k$ -formes de  $\text{SO}(n)$  si  $n$  est pair, qui possède deux orbites fermées. Dans ce dernier cas, on peut vérifier que le cône  $\rho(\mathcal{V}^G)$  n'est pas lisse, ce qui montre que la compactification construite est « minimale », au moins du point de vue du nombre d'orbites. Dans chacune de ces situations, la compactification produite est la même que celle obtenue en appliquant la procédure d'éclatements successifs expliquée dans la section 1.2 à partir de la compactification du groupe correspondant par une grassmannienne orthogonale ou lagrangienne.

**2.2. Les ensembles  $X_i(k)$ .** Dans cette section, on définit, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , un ensemble  $X_i(k)$ , dont on montre (théorème 2.42) qu'il s'agit de l'ensemble des  $k$ -points de la variété  $X_i$ . Pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on définit aussi un sous-ensemble  $Y_i(k)$  de  $X_i(k)$ , ainsi qu'une application naturelle  $\pi_{i+1} : X_{i+1}(k) \rightarrow X_i(k)$ , qui s'avèrent être respectivement l'ensemble des  $k$ -points de la variété  $Y_i$ , et l'application induite sur les points rationnels par l'éclatement  $\pi_{i+1} : X_{i+1} \rightarrow X_i$ . Enfin, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on définit un recouvrement de  $X_i(k)$  par des ensembles  $(X_\tau(k))_{\tau \in \Theta_i}$  qui est, là encore, la trace au niveau des points  $k$ -rationnels d'un recouvrement de la variété  $X_i$  par des ouverts  $(X_\tau)_{\tau \in \Theta_i}$ , chacun isomorphe à un espace affine.

On commence par un lemme d'algèbre linéaire. On note  $p_V$  (resp.  $p_W$ ) la projection sur  $V$  (resp.  $W$ ) parallèlement à  $W$  (resp.  $V$ ) dans la somme directe  $V \oplus W$ .

LEMME 2.1. *Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension  $n$  de  $V \oplus W$ . Il existe deux applications linéaires  $\alpha_F$  et  $\beta_F$  vérifiant*

$$\alpha_F : p_V(F) \rightarrow W/(F \cap W), \quad \forall x \in F \quad p_V(x) \mapsto [p_W(x)]$$

$$\beta_F : p_W(F) \rightarrow V/(F \cap V), \quad \forall x \in F \quad p_W(x) \mapsto [p_V(x)]$$

Par ailleurs, on a

$$\text{Ker } \alpha_F = F \cap V, \quad \text{Coker } \alpha_F = W/p_W(F), \quad \text{Ker } \beta_F = F \cap W, \quad \text{Coker } \beta_F = V/p_V(F).$$

DÉMONSTRATION. Vérifions les assertions concernant  $\alpha_F$ , celles concernant  $\beta_F$  se montrant de même. La bonne définition de  $\alpha_F$  provient du fait que si  $x, y \in F$  sont tels que  $p_V(x) = p_V(y)$ , alors  $x - y$  appartient à  $F \cap W$ , et donc  $p_W(x)$  et  $p_W(y)$  sont égaux modulo  $F \cap W$ . Le fait que  $\alpha_F$  est linéaire se montre directement. Par ailleurs, pour tout  $x \in F$ , le vecteur  $p_V(x)$  est dans le noyau de  $\alpha_F$  si et seulement si  $p_W(x)$  appartient à  $F \cap W$ . Mais cette condition est équivalente au fait que  $p_V(x)$  appartient à  $F \cap V$ , ce qui montre bien que  $\text{Ker } \alpha_F = F \cap V$ . Enfin, par définition même de l'application linéaire  $\alpha_F$ , on a  $\text{Im } \alpha_F = p_W(F)/(F \cap W)$ , d'où l'on déduit aisément que  $\text{Coker } \alpha_F = W/p_W(F)$ .  $\square$

On rappelle qu'on a défini, dans la section 1.2, les ensembles  $\Delta_i$  et  $\Delta_{\geq i}$ , pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

DÉFINITION 2.2. *Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On note  $X_i(k)$  l'ensemble des uplets  $\mathbf{c}$  de la forme  $(F_{\mathbf{c}}, [\alpha_{\mathbf{c},1} : \beta_{\mathbf{c},1}], \dots, [\alpha_{\mathbf{c},l} : \beta_{\mathbf{c},l}])$ , où :*

- $F_{\mathbf{c}}$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $n$  de  $V \oplus W$ . On note  $\alpha_{\mathbf{c},0} = \alpha_{F_{\mathbf{c}}}$  et  $\beta_{\mathbf{c},0} = \beta_{F_{\mathbf{c}}}$  les applications définies au lemme 2.1.

- $[\alpha_{\mathbf{c},1} : \beta_{\mathbf{c},1}] \in \mathbb{P}(\text{Hom}(\text{Ker } \alpha_{\mathbf{c},0}, \text{Coker } \alpha_{\mathbf{c},0}) \oplus \text{Hom}(\text{Ker } \beta_{\mathbf{c},0}, \text{Coker } \beta_{\mathbf{c},0}))$ .

...

- $[\alpha_{\mathbf{c},l} : \beta_{\mathbf{c},l}] \in \mathbb{P}(\text{Hom}(\text{Ker } \alpha_{\mathbf{c},l-1}, \text{Coker } \alpha_{\mathbf{c},l-1}) \oplus \text{Hom}(\text{Ker } \beta_{\mathbf{c},l-1}, \text{Coker } \beta_{\mathbf{c},l-1}))$

vérifiant

$$(\dim(\text{Ker } \alpha_l), \dim(\text{Ker } \beta_l)) \in \Delta_{\geq i},$$

et, si  $l \geq 1$

$$(\dim(\text{Ker } \alpha_{l-1}), \dim(\text{Ker } \beta_{l-1})) \notin \Delta_{\geq i}.$$

L'entier  $l$  est appelé la **longueur** de  $\mathbf{c}$ .

Au vu des rappels exposés dans la section 1.3, il est raisonnable d'appeler collinéations croisées complètes les éléments de  $X_n(k)$ . Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Pour toute extension de corps  $K$  de  $k$ , on définit l'ensemble  $X_i(K)$  comme ci-dessus, en remplaçant  $V$  par  $K \otimes_k V$  et  $W$  par  $K \otimes_k W$ . Si  $L$  est une extension de  $K$ , alors, en étendant les scalaires de  $K$  à  $L$ , on voit que  $X_i(K)$  est naturellement inclus dans  $X_i(L)$ , et qu'en fait on a défini un foncteur de la catégorie des extensions de corps de  $k$  vers la catégorie des ensembles. On verra au théorème 2.42 que ce foncteur est le foncteur qui a une extension  $\bar{K}$  du corps  $k$  associe l'ensemble des  $k$ -points de la variété  $X_i$ .

Pour se familiariser avec les ensembles  $X_i(k)$ , on va en donner maintenant une définition alternative. On rappelle qu'à la section 1.2, on a défini les notions de chemin tracé dans  $\Delta$ , chemin admissible au rang  $i$ , etc. Soit  $s = (v, w)$  un chemin de longueur  $l$  tracé

dans  $\Delta$ . Une **paire de drapeaux indexée par  $s$**  est la donnée de deux drapeaux, l'un dans  $V$  et l'autre dans  $W$ , que l'on peut écrire ainsi

$$\begin{aligned}\tau_V &= (V_{v(l)} \subseteq \dots \subseteq V_{v(0)} \subseteq V_{n-w(0)} \subseteq \dots \subseteq V_{n-w(l)}) \\ \tau_W &= (W_{w(l)} \subseteq \dots \subseteq W_{w(0)} \subseteq W_{n-v(0)} \subseteq \dots \subseteq W_{n-v(l)}),\end{aligned}$$

où l'indice de chaque sous-espace est égal à sa dimension. Il est alors commode de poser, pour tout  $d \in \llbracket -l-1, -1 \rrbracket$ ,

$$v(d) = n - w(-d - 1) \text{ et } w(d) = n - v(-d - 1).$$

Remarquons qu'une paire de drapeaux, l'un dans  $V$ , l'autre dans  $W$ , n'est pas toujours « indexable » par un chemin tracé dans  $\Delta$ . Par exemple, la paire de drapeaux formée des sous-espaces nul de  $V$  et  $W$  n'est indexable par aucun chemin si  $n \neq 0$  car ce chemin  $(v, w)$  devrait être de longueur nulle et vérifier  $v(0) = w(0) = 0$  et  $n - v(0) = n - w(0) = 0$ . De plus, si une paire de drapeaux est indexable par un chemin, alors ce chemin n'est pas forcément unique. Par exemple, supposons que  $n = 2$  et fixons une droite  $V_1$  dans  $V$  et une droite  $W_1$  dans  $W$ . La paire de drapeaux formée des drapeaux complets

$$\tau_V = (\{0\} \subseteq V_1 \subseteq V) \quad \tau_W = (\{0\} \subseteq W_1 \subseteq W)$$

est indexable par le chemin de longueur 2 ayant pour sommet  $(1, 1)$ ,  $(1, 0)$  et  $(0, 0)$ , mais aussi par celui de longueur 2 ayant pour sommets  $(1, 1)$ ,  $(1, 0)$  et  $(0, 0)$ .

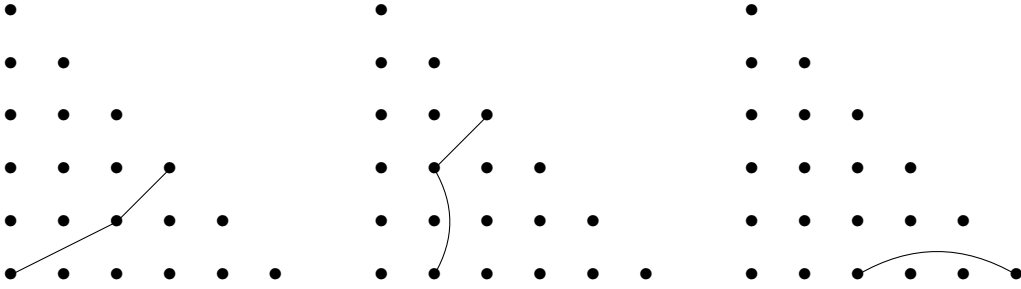


FIGURE 2. Quelques exemples de chemin

Pour toute paire de drapeaux  $(\tau_V, \tau_W)$  indexée par  $s$ , et pour tout  $d \in \llbracket -l, l \rrbracket$ , on pose

$$\mathrm{gr}(\tau_V)_d = V_{v(d-1)}/V_{v(d)} \text{ et } \mathrm{gr}(\tau_V) = \bigoplus_{d=-l}^l \mathrm{gr}(\tau_V)_d.$$

De même, on pose

$$\mathrm{gr}(\tau_W)_d = W_{w(d-1)}/W_{w(d)} \text{ et } \mathrm{gr}(\tau_W) = \bigoplus_{d=-l}^l \mathrm{gr}(\tau_W)_d.$$

Remarquons que, pour tout  $d \in \llbracket -l, l \rrbracket$ , les espaces  $\mathrm{gr}(\tau_V)_d$  et  $\mathrm{gr}(\tau_W)_{-d}$  ont même dimension. On fait agir le groupe  $(k^*)^l$  sur  $\mathrm{gr}(\tau_W)$  de la manière suivante. L'élément

$$(t_1, \dots, t_l) \in (k^*)^l$$

agit par multiplication par  $t_d$  sur  $\mathrm{gr}(\tau_W)_d$ , par l'identité sur  $\mathrm{gr}(\tau_W)_0$  et par  $t_d^{-1}$  sur  $\mathrm{gr}(\tau_W)_{-d}$ . Cette action induit une action sur l'espace vectoriel  $\mathrm{Hom}(\mathrm{gr}(\tau_V), \mathrm{gr}(\tau_W))$ . On peut maintenant énoncer la définition alternative annoncée plus haut.

PROPOSITION-DÉFINITION 2.3. Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Un élément  $\mathbf{c} \in X_i(k)$  de longueur  $l$  est la donnée :

- d'un chemin  $s_{\mathbf{c}} = (v_{\mathbf{c}}, w_{\mathbf{c}}) \in \Pi_i$  de longueur  $l$
- d'une paire de drapeaux  $(\mathbf{c}_V, \mathbf{c}_W)$  indexée par  $s_{\mathbf{c}}$
- d'une classe d'isomorphisme  $[\iota_{\mathbf{c}}] \in \text{Iso}(\text{gr}(\mathbf{c}_V), \text{gr}(\mathbf{c}_W)) / (k^*)^l$  renversant la graduation (c'est-à-dire envoyant  $\text{gr}(\mathbf{c}_V)_d$  dans  $\text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d}$ )

Le chemin  $s_{\mathbf{c}}$  est appelé le **type** de  $\mathbf{c}$ .

Il suit de la preuve ci-dessous que fixer un représentant  $\iota_{\mathbf{c}}$  de  $[\iota_{\mathbf{c}}]$  revient à fixer un représentant de  $[\alpha_{\mathbf{c},d} : \beta_{\mathbf{c},d}]$ , pour tout  $d \in \llbracket 1, l \rrbracket$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $\mathbf{c} = (F, [\alpha_1 : \beta_1], \dots, [\alpha_l : \beta_l]) \in X_i(k)$ . Décrivons comment associer à  $\mathbf{c}$  les données figurant dans la proposition. Notons  $s_{\mathbf{c}}$  l'application définie par

$$s_{\mathbf{c}} : \llbracket 0, l \rrbracket \rightarrow \Delta, \quad d \mapsto (\dim(\text{Ker } \alpha_d), \dim(\text{Ker } \beta_d)).$$

C'est un chemin tracé dans  $\Delta$  et admissible au rang  $i$ . En effet, pour tout  $d \in \llbracket 1, l \rrbracket$ , on a

$$(\dim(\text{Ker } \alpha_d), \dim(\text{Ker } \beta_d)) > (\dim(\text{Ker } \alpha_{d-1}), \dim(\text{Ker } \beta_{d-1})),$$

car l'une des applications linéaires  $\alpha_d$  ou  $\beta_d$  est de rang plus grand que 1. Le fait que le chemin  $s_{\mathbf{c}}$  que l'on vient de définir est admissible au rang  $i$  provient simplement de la dernière condition dans la définition 2.2. On note, pour tout  $d \in \llbracket 0, l \rrbracket$ ,

$$V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(d)} := \text{Ker } \alpha_d \text{ et } W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(d)} := \text{Ker } \beta_d.$$

Par définition du chemin  $s_{\mathbf{c}}$ , les indices de chacun de ces sous-espaces coïncident avec leur dimension. Remarquons que, pour tout  $d \in \llbracket 0, l \rrbracket$ , l'espace  $\text{Coker } \alpha_d$  (resp.  $\text{Coker } \beta_d$ ) est naturellement un quotient de  $W$  (resp.  $V$ ). On définit alors

$$W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-1-d)} := \text{Ker}(W \rightarrow \text{Coker } \alpha_d) \text{ et } V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-d-1)} = \text{Ker}(V \rightarrow \text{Coker } \beta_d).$$

Il est facile de montrer que la dimension de chacun de ces sous-espaces est donnée par son indice. Par ailleurs, ces sous-espaces s'arrangent en deux drapeaux,  $\mathbf{c}_V$  et  $\mathbf{c}_W$ . Pour tout  $d \in \llbracket 0, l \rrbracket$ , l'application linéaire  $\alpha_d$  a pour noyau le sous-espace  $V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(d)}$  et pour image le sous-espace  $W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-1-d)}/W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-d)}$ , et par conséquent définit un isomorphisme  $\iota_{\mathbf{c}} : \text{gr}(\mathbf{c}_V)_d \rightarrow \text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d}$ . On définit de même, un isomorphisme  $\iota_{\mathbf{c}} : \text{gr}(\mathbf{c}_V)_{-d} \rightarrow \text{gr}(\mathbf{c}_W)_d$  en utilisant  $\beta_d^{-1}$ . Pour  $d = 0$ , les deux isomorphismes  $\text{gr}(\mathbf{c}_V)_0 \rightarrow \text{gr}(\mathbf{c}_W)_0$  que l'on vient de définir coïncident avec l'isomorphisme

$$p_V(F)/(F \cap V) \rightarrow p_W(F)/(F \cap W), \quad [p_V(x)] \mapsto [p_W(x)].$$

Si l'on change les représentants des  $[\alpha_d : \beta_d]$  que l'on a choisis, alors on ne modifie pas la classe de  $[\iota_{\mathbf{c}}]$  (l'action de  $(k^*)^l$  sur  $\text{Iso}(\text{gr}(\mathbf{c}_V), \text{gr}(\mathbf{c}_W))$  que l'on a définie est faite pour ça).

Pour aller dans l'autre sens, on procède comme suit. On définit le sous-espace  $F$  de  $V \oplus W$  suivant :

$$F := \{x \oplus y \in V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-1)} \oplus W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-1)}, \quad [y] = \iota_{\mathbf{c}}([x]) \text{ dans } W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-1)}/W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(0)}\}.$$

$F$  ne dépend pas du choix d'un représentant  $\iota_{\mathbf{c}}$  de la classe  $[\iota_{\mathbf{c}}]$  car l'isomorphisme en degré 0 est bien déterminé. Par ailleurs, comme  $\iota_{\mathbf{c}}$  est un isomorphisme, la projection sur  $W$  parallèlement à  $V$  fournit une suite exacte

$$0 \rightarrow V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(0)} \rightarrow F \rightarrow W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-1)} \rightarrow 0$$

qui permet d'affirmer que  $F$  est de dimension  $v_{\mathbf{c}}(0) + w_{\mathbf{c}}(-1) = n$ . On a aussi les égalités

$$F \cap V = V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(0)}, \quad p_V(F) = V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-1)}, \quad F \cap W = W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(0)}, \quad p_W(F) = W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-1)}.$$

Si  $l \geq 1$ , on définit maintenant le couple  $[\alpha_1 : \beta_1]$  par composition

$$\alpha_1 : V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(0)} \rightarrow \text{gr}(\mathbf{c}_V)_1 \xrightarrow{\iota_{\mathbf{c}}} \text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-1} \rightarrow W/W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-1)}$$

$$\beta_1 : W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(0)} \rightarrow \text{gr}(\mathbf{c}_W)_1 \xrightarrow{\iota_{\mathbf{c}}^{-1}} \text{gr}(\mathbf{c}_V)_{-1} \rightarrow V/V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-1)}.$$

Si l'on change le représentant  $\iota_{\mathbf{c}}$ , alors on multiplie les deux applications linéaires que l'on vient de définir par un même scalaire, ce qui montre que le couple  $[\alpha_1 : \beta_1]$  est bien défini. Le fait que  $\iota_{\mathbf{c}}$  soit un isomorphisme permet de calculer les noyaux et conoyaux de  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  et ensuite de définir, toujours par composition,  $[\alpha_2 : \beta_2]$  si  $l \geq 2$ . On continue ainsi pour construire un élément de  $X_i(k)$ . Le fait que les deux procédures expliquées ci-dessus sont inverses l'une de l'autre est facile à établir.  $\square$

EXEMPLE 2.4. Si  $\mathbf{c} = F$  est de longueur 0, alors :

- $s_{\mathbf{c}}$  est le chemin constant de support  $(\dim(F \cap V), \dim(F \cap W)) \in \Delta$ .
- $\mathbf{c}_V = (F \cap V \subseteq p_V(F))$ ,  $\mathbf{c}_W = (F \cap W \subseteq p_W(F))$ .
- $\iota_{\mathbf{c}} : p_V(F)/(F \cap V) \rightarrow p_W(F)/(F \cap W)$ ,  $[p_V(x)] \mapsto [p_W(x)]$ , pour  $x \in F$ .

DÉFINITION 2.5. Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , et  $s \in \Pi_i$ . On note  $\Omega_s(k)$  l'ensemble des  $\mathbf{c} \in X_i(k)$  de type  $s$ .

On peut donc écrire, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$X_i(k) = \bigsqcup_{s \in \Pi_i} \Omega_s(k).$$

On fait agir maintenant le groupe  $G(k)$  dans l'ensemble  $X_i(k)$ , et on identifie les orbites.

DÉFINITION 2.6. Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Soit  $\mathbf{c} \in X_i(k)$ , et  $g \in G(k)$ . On note  $g(\mathbf{c})$  l'élément de  $X_i(k)$  vérifiant  $s_{g(\mathbf{c})} = s_{\mathbf{c}}$ ,  $g(\mathbf{c})_V = g(\mathbf{c}_V)$ ,  $g(\mathbf{c})_W = g(\mathbf{c}_W)$  et tel que, pour tout choix de  $\iota_{\mathbf{c}}$ , on peut choisir  $\iota_{g(\mathbf{c})}$  de telle sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{gr}(\mathbf{c}_V) & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{c}}} & \text{gr}(\mathbf{c}_W) \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ \text{gr}(g(\mathbf{c})_V) & \xrightarrow{\iota_{g(\mathbf{c})}} & \text{gr}(g(\mathbf{c})_W) \end{array}$$

commute. On définit ainsi une action du groupe  $G(k)$  dans  $X_i(k)$ .

En les termes de la définition 2.2, l'action de  $G(k)$  dans  $X_i(k)$  s'explique de la manière suivante. Soit  $\mathbf{c} \in X_i(k)$ , de longueur  $l$ , et  $g \in G(k)$ . On pose  $F_{g(\mathbf{c})} = g(F_{\mathbf{c}})$ . Si  $l = 0$  on s'arrête là. Sinon, on observe que  $g$  induit naturellement des applications linéaires

$\text{Ker } \alpha_{\mathbf{c},0} \rightarrow \text{Ker } \alpha_{g(\mathbf{c}),0}$ ,  $\text{Ker } \beta_{\mathbf{c},0} \rightarrow \text{Ker } \beta_{g(\mathbf{c}),0}$ ,  $\text{Coker } \alpha_{\mathbf{c},0} \rightarrow \text{Coker } \alpha_{g(\mathbf{c}),0}$  et  $\text{Coker } \beta_{\mathbf{c},0} \rightarrow \text{Coker } \beta_{g(\mathbf{c}),0}$ , et on définit le couple  $[\alpha_{g(\mathbf{c}),1} : \beta_{g(\mathbf{c}),1}]$  par la propriété que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } \alpha_{\mathbf{c},0} & \xrightarrow{\alpha_{\mathbf{c},1}} & \text{Coker } \alpha_{\mathbf{c},0} & & \text{Ker } \beta_{\mathbf{c},0} & \xrightarrow{\beta_{\mathbf{c},1}} & \text{Coker } \beta_{\mathbf{c},0} \\ \downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow g \\ \text{Ker } \alpha_{g(\mathbf{c}),0} & \xrightarrow{\alpha_{g(\mathbf{c}),1}} & \text{Coker } \alpha_{g(\mathbf{c}),0} & & \text{Ker } \beta_{g(\mathbf{c}),0} & \xrightarrow{\beta_{g(\mathbf{c}),1}} & \text{Coker } \beta_{g(\mathbf{c}),0} \end{array}$$

sont commutatifs. Si  $l = 1$  on s'arrête là. Sinon, on continue de la même façon...

On obtient maintenant une classification des orbites de  $G(k)$  dans  $X_i(k)$ . Essentiellement, on va montrer que le type est le seul invariant d'une orbite, autrement dit que les orbites de  $G(k)$  dans  $X_i(k)$  sont paramétrées par l'ensemble  $\Pi_i$ .

**PROPOSITION 2.7.** *Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , et  $s \in \Pi_i$ . Le groupe  $G(k)$  agit transitivement dans l'ensemble  $\Omega_s(k)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Remarquons tout d'abord que  $\Omega_s(k)$  est stable par  $G(k)$ , par définition même de l'action de  $G(k)$  dans  $X_i(k)$ . Soient  $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \Omega_s(k)$ . Comme les drapeaux  $\mathbf{c}_V$  et  $\mathbf{c}'_V$  sont du même type, il existe un élément  $g_V \in \text{GL}(V)$  envoyant  $\mathbf{c}_V$  sur  $\mathbf{c}'_V$ . Soit alors  $h : \text{gr}(\mathbf{c}_W) \rightarrow \text{gr}(\mathbf{c}'_W)$  défini par la condition que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{gr}(\mathbf{c}_V) & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{c}}} & \text{gr}(\mathbf{c}_W) \\ \downarrow g_V & & \downarrow h \\ \text{gr}(\mathbf{c}'_V) & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{c}'}} & \text{gr}(\mathbf{c}'_W) \end{array}$$

est commutatif (on fixe des représentants  $\iota_{\mathbf{c}}$  et  $\iota_{\mathbf{c}'}$ ). On sait que  $g_V$  respecte les graduations, et que  $\iota_{\mathbf{c}}$  et  $\iota_{\mathbf{c}'}$  les renversent. Par conséquent,  $h$  préserve les graduations, et donc, comme les drapeaux  $\mathbf{c}_W$  et  $\mathbf{c}'_W$  sont du même type, il existe  $g_W \in \text{GL}(W)$  induisant  $h$ . En posant  $g = (g_V, g_W)$ , on voit donc que  $\mathbf{c}' = g(\mathbf{c})$ .  $\square$

On définit maintenant l'ensemble  $Y_i(k)$  :

**DÉFINITION 2.8.** *Soit  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . On note*

$$Y_i(k) = \bigsqcup_{s \in \Pi_i \setminus \Pi_{i+1}} \Omega_s(k).$$

*C'est un sous-ensemble de  $X_i(k)$ .*

Observons qu'un chemin  $s$  admissible au rang  $i+1$  n'est pas admissible au rang  $i$  si et seulement si  $l \geq 1$  et  $s(l-1) \in \Delta_i$ , et que, dans ce cas, le chemin  $s_{\llbracket 0, l-1 \rrbracket}$  est admissible au rang  $i$ . Cela permet de définir :

**DÉFINITION 2.9.** *Soit  $\mathbf{c} \in X_{i+1}(k)$ , de longueur  $l$ . Si  $s_{\mathbf{c}} \in \Pi_i$ , on pose  $\pi_{i+1}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ . Dans le cas contraire, on pose*

$$\pi_{i+1}(\mathbf{c}) = (F_{\mathbf{c}}, [\alpha_{\mathbf{c},1} : \beta_{\mathbf{c},1}], \dots, [\alpha_{\mathbf{c},l-1} : \beta_{\mathbf{c},l-1}]).$$

On définit ainsi une application  $\pi_{i+1} : X_{i+1}(k) \rightarrow X_i(k)$ . On vérifie alors facilement que pour tout  $\mathbf{c} \in X_i(k)$  de longueur  $l$ , la fibre  $\pi_{i+1}^{-1}(\mathbf{c})$  vaut

$$\begin{cases} \{\mathbf{c}\} & \text{si } \mathbf{c} \notin Y_i(k) \\ \mathbb{P}(\text{Hom}(\text{Ker } \alpha_{\mathbf{c},l}, \text{Coker } \alpha_{\mathbf{c},l}) \oplus \text{Hom}(\text{Ker } \beta_{\mathbf{c},l}, \text{Coker } \beta_{\mathbf{c},l})) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on définit maintenant un recouvrement de  $X_i(k)$  par des ensembles  $(X_\tau(k))_{\tau \in \Theta_i}$ . On montre ensuite que chacun de ces ensembles est en bijection naturelle avec un espace vectoriel. On verra dans la section 2.3 que l'ensemble  $X_\tau(k)$  est l'ensemble des points  $k$ -rationnels d'un ouvert affine  $X_\tau$  de  $X_i$ , puis dans la section 2.4 que cet ensemble est stable par un sous-groupe parabolique  $P_\tau$  de  $G$ , et vérifie le théorème de structure locale 2.13, que l'on rendra explicite.

Avant d'aller plus loin, on rappelle qu'on a défini dans la section 1.2 un ordre sur l'ensemble  $\Pi_i$ . Soient  $s, s' \in \Pi_i$ , avec  $s \leq s'$ . Cela signifie que tous les sommets de  $s'$  sauf le dernier sont des sommets de  $s$  et que le dernier sommet de  $s'$  est au sud-ouest du dernier sommet de  $s$ . Si on représente, sur un même dessin, le chemin  $s$  et le chemin  $s'$  (en entourant ses sommets), on obtient donc la figure 3.

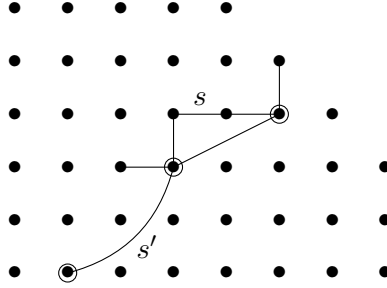


FIGURE 3. La relation d'ordre sur  $\Pi_i$

On note  $\Pi_i^{\min}$  les éléments minimaux de l'ensemble  $\Pi_i$ . Il s'agit des chemins  $s$  de longueur  $i$  vérifiant  $s(i) \in \Delta_i$ , autrement dit, des chemins de longueur  $i$  joignant  $s(0) \in \Delta_0$  à  $s(i) \in \Delta_i$  sans jamais « sauter » d'étape.

DÉFINITION 2.10. Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Une **donnée**  $\tau$  de **type**  $i$  est la donnée :

- d'un chemin  $s_\tau = (v, w) \in \Pi_i^{\min}$ .

- d'une paire de drapeaux opposés dans  $V$ ,

$$\tau_V := (\tau V_{v(i)} \subseteq \dots \subseteq \tau V_{v(0)} = \tau V_{n-w(0)} \subseteq \dots \subseteq \tau V_{n-w(i)}),$$

$$\tau_V^0 := (\tau V_{w(i)}^0 \subseteq \dots \subseteq \tau V_{w(0)}^0 = \tau V_{n-v(0)}^0 \subseteq \dots \subseteq \tau V_{n-v(i)}^0),$$

où l'indice de chaque sous-espace est égal à sa dimension.

- d'une paire de drapeaux opposés dans  $W$ ,

$$\tau_W := (\tau W_{w(i)} \subseteq \dots \subseteq \tau W_{w(0)} = \tau W_{n-v(0)} \subseteq \dots \subseteq \tau W_{n-v(i)}),$$

$$\tau_W^0 := (\tau W_{v(i)}^0 \subseteq \dots \subseteq \tau W_{v(0)}^0 = \tau W_{n-w(0)}^0 \subseteq \dots \subseteq \tau W_{n-w(i)}^0),$$

où l'indice de chaque sous-espace est égal à sa dimension.

- pour tout  $j \in \llbracket v(i) + 1, n - w(i) \rrbracket$ , d'un vecteur  $v_j^\tau$  vérifiant  $\tau V_j \cap \tau V_{n-j+1}^0 = \langle v_j^\tau \rangle$ .

- pour tout  $j \in \llbracket w(i) + 1, n - v(i) \rrbracket$ , d'un vecteur  $w_j^\tau$  vérifiant  ${}^\tau W_j \cap {}^\tau W_{n-j+1}^0 = \langle w_j^\tau \rangle$ .  
On notera  $\Theta_i$  l'ensemble des données de type  $i$ .

Lorsqu'il n'y a pas ambiguïté, on enlève le symbole  $\tau$  dans toutes ces notations. On associe maintenant, à toute donnée  $\tau$  de type  $i$ , un sous-ensemble  $X_\tau(k)$  de  $X_i(k)$ . Dans un espace vectoriel donné, on dit que deux drapeaux s'intersectent transversalement, si tout sous-espace apparaissant dans le premier drapeau intersecte transversalement tout sous-espace apparaissant dans le deuxième, dans l'espace vectoriel ambiant.

**DÉFINITION 2.11.** Soit  $\tau \in \Theta_i$ , et  $\mathbf{c} \in X_i(k)$ , de longueur  $l$ . On dira que  $\mathbf{c}$  est en **position générale** par rapport à  $\tau$  si les conditions ci-dessous sont remplies :

- (1)  $s_{\mathbf{c}} \geq s$ .
- (2) Les drapeaux  $\tau_V^0$  et  $\mathbf{c}_V$  (resp.  $\tau_W^0$  et  $\mathbf{c}_W$ ) s'intersectent transversalement dans  $V$  (resp.  $W$ ).
- (3) Pour tout degré  $d \in \llbracket -l, l \rrbracket$ , les drapeaux

$$\iota_{\mathbf{c}}(\tau_V^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_V)_d) \text{ et } \tau_W^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d}$$

s'intersectent transversalement dans  $\text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d}$ , où  $\tau_V^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_V)_d$  désigne le drapeau induit par  $\tau_V^0$  sur  $\text{gr}(\mathbf{c}_V)_d$ , et  $\tau_W^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d}$  celui induit par  $\tau_W^0$  sur  $\text{gr}(\mathbf{c}_W)_d$ .

On note  $X_\tau(k)$  l'ensemble des  $\mathbf{c} \in X_i(k)$  en position générale par rapport à  $\tau$ .

**REMARQUE 2.12.** Si  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  (resp.  $W$ ), on note  $E \cap \text{gr}(\mathbf{c}_V)_d$  l'image de  $E \cap V_{\mathbf{c}, v_{\mathbf{c}}(d-1)}$  par la projection  $V_{\mathbf{c}, v_{\mathbf{c}}(d-1)} \rightarrow \text{gr}(\mathbf{c}_V)_d$ . On définit de même l'espace vectoriel  $E \cap \text{gr}(\mathbf{c}_W)_d$ .

En guise d'exemple, voyons ce que donne cette définition lorsque  $l = 0$ . En particulier, pour  $i = 0$ , on retrouve une cellule de Schubert ouverte dans la grassmannienne  $\text{Gr}(n, V \oplus W)$ .

**PROPOSITION 2.13.** Soit  $\tau \in \Theta_i$ , et  $\mathbf{c} = F \in X_i(k)$  de longueur 0. Alors  $\mathbf{c} \in X_\tau(k)$  si et seulement si

$$\forall j \in \llbracket w(i), n - v(i) \rrbracket, \quad F \cap (V_j^0 \oplus W_{n-j}^0) = \{0\}.$$

**DÉMONSTRATION.** Pour alléger les notations, on pose

$$v = \dim(F \cap V) \text{ et } w = \dim(F \cap W).$$

Soit  $j \in \llbracket w(i), n - v(i) \rrbracket$ . Alors, par définition de l'isomorphisme

$$\iota_{\mathbf{c}} : p_V(F)/(F \cap V) \rightarrow p_W(F)/(F \cap W),$$

l'égalité  $F \cap (V_j^0 \oplus W_{n-j}^0) = \{0\}$  se produit si et seulement si les trois conditions suivantes sont remplies

$$F \cap V_j^0 = \{0\}, \quad F \cap W_{n-j}^0 = \{0\}, \quad \text{Graphe}(\iota_{\mathbf{c}}) \cap ((p_V(F) \cap V_j^0) \oplus (p_W(F) \cap W_{n-j}^0)) = \{0\}.$$

Par un calcul de dimension, on prouve facilement que

$$\dim(p_V(F) \cap V_j^0) \geq j - w \text{ et } \dim(p_W(F) \cap W_{n-j}^0) \geq n - j - v.$$

Ainsi, le sous-espace  $(p_V(F) \cap V_j^0) \oplus (p_W(F) \cap W_{n-j}^0)$  est de dimension au moins  $n - v - w$  dans  $p_V(F)/(F \cap V) \oplus p_W(F)/(F \cap W)$  qui est de dimension  $2(n - v - w)$ . Comme le sous-espace  $\text{Graphe}(\iota_{\mathbf{c}})$  est de dimension  $n - v - w$ , on voit que, dans les conditions ci-dessus, toutes les inégalités prouvées jusqu'ici sont en fait des égalités.  $\square$



**On fixe dorénavant**  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  **et**  $\tau \in \Theta_i$ . On note  $s_\tau = s = (v, w)$ , et on enlève le symbole  $\tau$  dans les notations de la définition 2.10. Notre but est de construire une bijection de l'ensemble  $X_\tau(k)$  sur un  $k$ -espace vectoriel. Dans ce but, on va associer à tout élément  $\mathbf{c} \in X_\tau(k)$  plusieurs objets, puis montrer que ces objets suffisent à le paramétrer. Pour commencer, on raffine les drapeaux  $\mathbf{c}_V$  et  $\mathbf{c}_W$ . Pour cela, on observe qu'un raffinement d'un drapeau est la même chose que la donnée de drapeaux dans ses gradués successifs.

**DÉFINITION 2.14.** Soit  $\mathbf{c} \in X_\tau(k)$ . On note  $\mathbf{c}_V^\tau$  (resp.  $\mathbf{c}_W^\tau$ ) le drapeau raffinant le drapeau  $\mathbf{c}_V$  (resp.  $\mathbf{c}_W$ ) et qui induit, pour tout  $d \in \llbracket -l, l \rrbracket$ , le drapeau

$$\iota_{\mathbf{c}}^{-1}(\tau_W^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d}) \text{ (resp. } \iota_{\mathbf{c}}(\tau_V^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_V)_{-d})$$

dans  $\text{gr}(\mathbf{c}_V)_d$  (resp.  $\text{gr}(\mathbf{c}_W)_d$ ).

On vérifie aisément que les drapeaux  $\mathbf{c}_V^\tau$  et  $\mathbf{c}_W^\tau$  ne dépendent pas du choix du représentant  $\iota_{\mathbf{c}}$  de  $[\iota_{\mathbf{c}}]$ .

**PROPOSITION 2.15.** Soit  $\mathbf{c} \in X_\tau(k)$ , de longueur  $l$ . Les drapeaux  $\mathbf{c}_V^\tau$  et  $\tau_V^0$  s'intersectent transversalement, et on peut écrire

$$\mathbf{c}_V^\tau = (V_{\mathbf{c}, v_{\mathbf{c}}(l)} \subseteq V_{\mathbf{c}, v(i)} \subseteq \dots \subseteq V_{\mathbf{c}, v(-i-1)} \subseteq V_{\mathbf{c}, v_{\mathbf{c}}(-l-1)})$$

où la dimension de chaque sous-espace est donnée par son indice. De même, les drapeaux  $\mathbf{c}_W^\tau$  et  $\tau_W^0$  s'intersectent transversalement, et on peut écrire

$$\mathbf{c}_W^\tau = (W_{\mathbf{c}, w_{\mathbf{c}}(l)} \subseteq W_{\mathbf{c}, w(i)} \subseteq \dots \subseteq W_{\mathbf{c}, w(-i-1)} \subseteq W_{\mathbf{c}, w_{\mathbf{c}}(-l-1)})$$

où la dimension de chaque sous-espace est donnée par son indice.

Lorsqu'il y a ambiguïté, on note  ${}^\tau V_{\mathbf{c}, v_{\mathbf{c}}(l)}, {}^\tau V_{\mathbf{c}, v(i)}, \dots, {}^\tau V_{\mathbf{c}, v(-i-1)}, {}^\tau V_{\mathbf{c}, v_{\mathbf{c}}(-l-1)}$  les sous-espaces apparaissant dans le drapeau  $\mathbf{c}_V^\tau$ , et de même pour le drapeau  $\mathbf{c}_W^\tau$ . Avant de passer à la preuve de cette proposition, il est commode d'introduire, associé à  $\mathbf{c} \in X_\tau(k)$ , un ensemble, noté  $\Gamma_{\mathbf{c}}$ . Pour cela, remarquons que, comme on le voit par exemple sur la figure 3, le fait que  $s_{\mathbf{c}} \geq s$  permet de définir des « blocs » de sommets de  $s$ , un bloc étant, grosso modo, compris entre deux sommets successifs de  $s_{\mathbf{c}}$ . On peut formaliser cela comme suit :

**DÉFINITION 2.16.** Soit  $\mathbf{c} \in X_\tau(k)$ , de longueur  $l$ . On note  $\Gamma_{\mathbf{c}} \subseteq \llbracket 0, i \rrbracket \times \llbracket 0, l \rrbracket$  l'ensemble formé des couples  $(j, d)$  vérifiant

$$\begin{cases} s_{\mathbf{c}}(0) \geq s(j) & \text{si } d = 0 \\ s_{\mathbf{c}}(d) \geq s(j) \geq s_{\mathbf{c}}(d-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le couple  $(j, d)$  appartient alors l'ensemble  $\Gamma_{\mathbf{c}}$  si et seulement si le sommet  $s(j)$  de  $s$  appartient au  $d$ -ième bloc défini par  $s_{\mathbf{c}}$ . Il faut prendre garde au fait que ces blocs peuvent se chevaucher.

**DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.15.** Montrons les assertions concernant le drapeau  $\mathbf{c}_V^\tau$ , celles concernant  $\mathbf{c}_W^\tau$  se prouvant de même. On commence par un lemme.

**LEMME 2.17.** Soit  $(j, d) \in \Gamma_{\mathbf{c}}$ . On a les égalités

$$\dim(W_{v(j)}^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d}) = v(j) - v_{\mathbf{c}}(d) \text{ et } \dim(W_{v(-j-1)}^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_W)_d) = w_{\mathbf{c}}(d-1) - w(j)$$

**DÉMONSTRATION.** Par définition, on a

$$v(j) + w_{\mathbf{c}}(-d-1) = n + v(j) - v_{\mathbf{c}}(d) \text{ et } v(j) - v_{\mathbf{c}}(d) \geq 0.$$

Comme les drapeaux  $\mathbf{c}_W$  et  $\tau_W^0$  s'intersectent transversalement, on voit, par l'égalité ci-dessus, que  $W_{v(j)}^0 \cap W_{\mathbf{c}, w_{\mathbf{c}}(-d-1)}$  est de dimension  $v(j) - v_{\mathbf{c}}(d)$ . De même, on montre que  $W_{v(j)}^0 \cap W_{\mathbf{c}, w_{\mathbf{c}}(-d)}$  est de dimension 0. Cela suffit à prouver que le sous-espace  $W_{v(j)}^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d}$  est de dimension  $v(j) - v_{\mathbf{c}}(d)$ . On procède de même pour la seconde égalité.  $\square$

Si  $l = 0$ , alors le lemme 2.17, et le fait que  $\iota_{\mathbf{c}}$  est un isomorphisme, montrent que la liste des dimensions des sous-espaces intervenant dans le drapeau  $\iota_{\mathbf{c}}^{-1}(\tau_W^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_W)_0)$  est

$$v(i) - v_{\mathbf{c}}(0), \dots, n - w(i) - v_{\mathbf{c}}(0)$$

d'où l'on tire que le drapeau  $\mathbf{c}_V^{\tau}$  est de type

$$v_{\mathbf{c}}(0), v(i), \dots, n - w(i), n - w_{\mathbf{c}}(0).$$

Si  $l \geq 1$ , alors, pour tout  $d$  compris entre  $-l + 1$  et  $l - 1$ , le drapeau  $\iota_{\mathbf{c}}^{-1}(\tau_W^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d})$  est un drapeau complet dans  $\text{gr}(\mathbf{c}_V)$ . De plus, le drapeau  $\iota_{\mathbf{c}}^{-1}(\tau_W^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-l})$  est de type

$$v(i) - v_{\mathbf{c}}(l), \dots, v_{\mathbf{c}}(l - 1) - v_{\mathbf{c}}(l)$$

et le drapeau  $\iota_{\mathbf{c}}^{-1}(\tau_W^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_W)_l)$  est de type

$$0, \dots, w_{\mathbf{c}}(l - 1) - w(i).$$

On en déduit que le drapeau  $\mathbf{c}_V^{\tau}$  est bien du type voulu.

Par ailleurs, on sait déjà que les drapeaux  $\mathbf{c}_V$  et  $\tau_V^0$  s'intersectent transversalement. Pour conclure, il suffit donc d'établir que, pour tout  $j$  compris entre 0 et  $i$ , on a

$$V_{\mathbf{c}, v(j)} \cap V_{n-v(j)}^0 = \{0\} \text{ et } V_{\mathbf{c}, v(-j-1)} \cap V_{w(j)}^0 = \{0\}.$$

Montrons par exemple la première égalité. Soit  $d$  tel que  $(j, d) \in \Gamma_{\mathbf{c}}$ . Par un calcul analogue à celui effectué pour montrer le lemme ci-dessus, on voit que le sous-espace  $V_{n-v(j)}^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_V)_d$  est de dimension  $v_{\mathbf{c}}(d - 1) - v(j)$ . Comme

$$\iota_{\mathbf{c}}^{-1}(W_{v(j)}^0 \cap W_{\mathbf{c}, w_{\mathbf{c}}(-d-1)}) = V_{\mathbf{c}, v(j)} / V_{\mathbf{c}, v_{\mathbf{c}}(d)}$$

est de dimension  $v(j) - v_{\mathbf{c}}(d)$ , la condition 3. de la définition 2.11 impose bien que l'espace vectoriel  $V_{\mathbf{c}, v(j)} \cap V_{n-v(j)}^0$  est de dimension 0.  $\square$

Remarquons que, lors de la preuve de la proposition précédente, on a montré :

PROPOSITION 2.18. *Soit  $\mathbf{c} \in X_{\tau}(k)$ , et  $(j, d) \in \Gamma_{\mathbf{c}}$ . On a les égalités*

$$\alpha_{\mathbf{c}, d}(V_{\mathbf{c}, v(j)}) = W_{v(j)}^0 \cap W_{\mathbf{c}, w_{\mathbf{c}}(-1-d)}, \quad \beta_{\mathbf{c}, d}(W_{\mathbf{c}, w(j)}) = V_{w(j)}^0 \cap V_{\mathbf{c}, v_{\mathbf{c}}(-1-d)}$$

$$\alpha_{\mathbf{c}, d}(V_{\mathbf{c}, v_{\mathbf{c}}(d-1)} \cap V_{\mathbf{c}, w(-j-1)}^0) = W_{\mathbf{c}, w(-j-1)} / W_{\mathbf{c}, w_{\mathbf{c}}(-d)},$$

$$\beta_{\mathbf{c}, d}(W_{\mathbf{c}, w_{\mathbf{c}}(d-1)} \cap W_{\mathbf{c}, v(-j-1)}^0) = V_{\mathbf{c}, v(-j-1)} / V_{\mathbf{c}, v_{\mathbf{c}}(-d)}.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de revenir au lien entre  $\iota_{\mathbf{c}}$  et  $[\alpha_{\mathbf{c}, d} : \beta_{\mathbf{c}, d}]$  (cf. proposition-définition 2.3), et d'utiliser la preuve de la proposition précédente.  $\square$

Ce résultat entraîne que l'on connaît l'effet de  $\iota_{\mathbf{c}}$  sur certaines droites. Pour dire cela plus précisément, il est commode d'introduire la définition suivante :

PROPOSITION-DÉFINITION 2.19. *Soit  $j \in \llbracket 0, i - 1 \rrbracket$ . Il existe un unique  $d \in \llbracket 0, l \rrbracket$  vérifiant*

$$(j, d) \in \Gamma_{\mathbf{c}} \text{ et } (j + 1, d) \in \Gamma_{\mathbf{c}}.$$

*On note  $d(j)$  cet entier.*

DÉMONSTRATION. Le fait que  $(j, d)$  et  $(j + 1, d)$  appartiennent à  $\Gamma_{\mathbf{c}}$  signifie exactement que l'arête joignant le sommet  $s(j)$  au sommet  $s(j + 1)$  est toute entière dans le  $d$ -ième bloc défini par  $s_{\mathbf{c}}$  dont on a parlé plus haut. La proposition est alors claire.  $\square$

PROPOSITION 2.20. Soit  $\mathbf{c} \in X_{\tau}(k)$ ,  $j \in \llbracket 0, i - 1 \rrbracket$  et  $d = d(j)$ . On a

$$\begin{cases} \alpha_{\mathbf{c}, d}(V_{\mathbf{c}, v(j)} \cap V_{\mathbf{c}, n-v(j)+1}^0) = W_{\mathbf{c}, n-v(j)+1} \cap W_{v(j)}^0 & \text{si } v(j) > v_{\mathbf{c}}(d) \\ \beta_{\mathbf{c}, d}(W_{\mathbf{c}, w(j)} \cap W_{\mathbf{c}, n-w(j)+1}^0) = V_{\mathbf{c}, n-w(j)+1} \cap V_{w(j)}^0 & \text{si } w(j) > w_{\mathbf{c}}(d). \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.18.  $\square$

On introduit maintenant des données, associées à  $\mathbf{c} \in X_{\tau}(k)$ , et qui vivent dans un  $k$ -espace vectoriel ne dépendant que de  $\tau$ . Tout d'abord, le fait que les drapeaux  $\mathbf{c}_V^{\tau}$  et  $\tau_V^0$  (resp.  $\mathbf{c}_W^{\tau}$  et  $\tau_W^0$ ) s'intersectent transversalement permet de paramétrer le drapeau  $\mathbf{c}_V^{\tau}$  (resp.  $\mathbf{c}_W^{\tau}$ ) par des applications linéaires :

DÉFINITION 2.21. Soit  $\mathbf{c} \in X_{\tau}(k)$ . On note, pour tout  $j \in \llbracket v(i), v(-i - 1) \rrbracket$ ,

$$c_{\mathbf{c}, j} \in \text{Hom}(V_j, V_{n-j}^0)$$

l'application linéaire dont  $V_{\mathbf{c}, j}$  est le graphe et, si  $j > v(i)$ ,  $\tilde{v}_{\mathbf{c}, j} = c_{\mathbf{c}, j}(v_j) \in V_{n-j}^0$ . De même, pour tout  $j \in \llbracket w(i), w(-i - 1) \rrbracket$ , on note

$$d_{\mathbf{c}, j} \in \text{Hom}(W_j, W_{n-j}^0)$$

l'application linéaire dont  $W_{\mathbf{c}, j}$  est le graphe et, si  $j > w(i)$ ,  $\tilde{w}_{\mathbf{c}, j} = d_{\mathbf{c}, j}(w_j) \in W_{n-j}^0$ .

On a ainsi

$$\forall j \in \llbracket v(i) + 1, v(-i - 1) \rrbracket, \quad V_{\mathbf{c}, j} \cap V_{n-j+1}^0 = \langle v_j + \tilde{v}_{\mathbf{c}, j} \rangle.$$

et aussi

$$\forall j \in \llbracket w(i) + 1, w(-i - 1) \rrbracket, \quad W_{\mathbf{c}, j} \cap W_{n-j+1}^0 = \langle w_j + \tilde{w}_{\mathbf{c}, j} \rangle.$$

On aura besoin dans la suite de certaines relations de récurrence entre les applications linéaires  $c_j$  :

PROPOSITION-DÉFINITION 2.22. Soit  $\mathbf{c} \in X_{\tau}(k)$ , et  $j \in \llbracket v(i) + 1, v(-i - 1) \rrbracket$ . On a

$$\forall x \in V_{j-1}, \quad c_{\mathbf{c}, j}(x) = c_{\mathbf{c}, j-1}(x) - v_j^*(c_{\mathbf{c}, j-1}(x))(v_j + \tilde{v}_{\mathbf{c}, j}).$$

DÉMONSTRATION. Soit  $j \in \llbracket v(i) + 1, v(-i - 1) \rrbracket$ , et  $x \in V_{j-1}$ . Notons  $p$  la projection sur  $V_j$  parallèlement à  $V_{n-j}^0$ . Alors  $x + c_{\mathbf{c}, j-1}(x) \in V_{\mathbf{c}, j-1} \subseteq V_{\mathbf{c}, j}$ , et

$$p(x + c_{\mathbf{c}, j-1}(x)) = x + v_j^*(c_{\mathbf{c}, j-1}(x))v_j.$$

On en déduit que

$$x + v_j^*(c_{\mathbf{c}, j-1}(x))v_j + c_{\mathbf{c}, j}(x + v_j^*(c_{\mathbf{c}, j-1}(x))v_j) = x + c_{\mathbf{c}, j-1}(x).$$

Comme  $c_{\mathbf{c}, j}(v_j) = \tilde{v}_{\mathbf{c}, j}$ , on a le résultat.  $\square$

On a bien sûr la proposition analogue pour les applications linéaires  $d_j$ .

PROPOSITION-DÉFINITION 2.23. Soit  $\mathbf{c} \in X_{\tau}(k)$ , et  $j \in \llbracket w(i) + 1, w(-i - 1) \rrbracket$ . On a

$$\forall x \in W_{j-1}, \quad d_{\mathbf{c}, j}(x) = d_{\mathbf{c}, j-1}(x) - w_j^*(d_{\mathbf{c}, j-1}(x))(w_j + \tilde{w}_{\mathbf{c}, j}).$$

On rappelle que, pour tout  $\mathbf{c} \in X_{\tau}(k)$  de longueur  $l$ , fixer un représentant  $\iota_{\mathbf{c}}$  de  $[\iota_{\mathbf{c}}]$ , revient à fixer, pour tout  $d \in \llbracket 1, l \rrbracket$ , un couple  $(\alpha_{\mathbf{c}, d}, \beta_{\mathbf{c}, d})$  représentant de  $[\alpha_{\mathbf{c}, d} : \beta_{\mathbf{c}, d}]$ . La proposition 2.20 motive la définition que voici :

DÉFINITION 2.24. Soit  $\mathbf{c} \in X_\tau(k)$ . On fixe un représentant  $\iota_{\mathbf{c}}$  de  $[\iota_{\mathbf{c}}]$ , et on se donne  $j \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket$ . On note  $d = d(j)$ . On définit le scalaire  $x_{\iota_{\mathbf{c}}, j} \in k^*$  par la propriété que

$$\begin{cases} \alpha_{\mathbf{c}, d}(v_{v(j)} + \tilde{v}_{\mathbf{c}, v(j)}) = x_{\iota_{\mathbf{c}}, j}(w_{n-v(j)+1} + \tilde{w}_{\mathbf{c}, n-v(j)+1}) & \text{si } v(j+1) = v(j) - 1 \\ \beta_{\mathbf{c}, d}(w_{w(j)} + \tilde{w}_{\mathbf{c}, w(j)}) = x_{\iota_{\mathbf{c}}, j}(v_{n-w(j)+1} + \tilde{v}_{\mathbf{c}, n-w(j)+1}) & \text{si } w(j+1) = w(j) - 1. \end{cases}$$

Les scalaires  $x_{\iota_{\mathbf{c}}, 0}, \dots, x_{\iota_{\mathbf{c}}, i-1}$  que l'on vient de définir dépendent d'un choix de  $\iota_{\mathbf{c}}$ . On décrit maintenant un procédé qui construit, à partir de ces scalaires, d'autres scalaires qui ne dépendent pas de ce choix.

PROPOSITION-DÉFINITION 2.25. Soit  $\mathbf{c} \in X_\tau(k)$  de longueur  $l$ . On se donne un représentant  $\iota_{\mathbf{c}}$  de  $[\iota_{\mathbf{c}}]$ . On pose :

- $x_{\mathbf{c}, 0} = 0$  si  $s(0)$  est un sommet de  $s_{\mathbf{c}}$ , et  $x_{\mathbf{c}, 0} = x_{\iota_{\mathbf{c}}, 0}$  sinon.
  - pour tout  $j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$ ,  $x_{\mathbf{c}, j} = 0$  si  $s(j)$  est un sommet de  $s_{\mathbf{c}}$  et  $x_{\mathbf{c}, j} = x_{\iota_{\mathbf{c}}, j} x_{\iota_{\mathbf{c}}, j-1}^{-1}$  sinon.
- Les scalaires  $x_{\mathbf{c}, 0}, \dots, x_{\mathbf{c}, i-1}$  ne dépendent pas du choix de  $\iota_{\mathbf{c}}$ .

DÉMONSTRATION. Il est commode de se représenter la situation de la manière suivante. On voit le chemin  $s$  comme un graphe orienté. Pour tout  $j \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket$ , on étiquette l'arête reliant  $s(j)$  à  $s(j+1)$  par  $x_{\iota_{\mathbf{c}}, j}$ . On étiquette maintenant les sommets de  $s$ .

Si  $s(0)$  appartient au support de  $s_{\mathbf{c}}$ , alors on l'étiquette par 0. Sinon, on l'étiquette par  $x_{\iota_{\mathbf{c}}, 0}$ . Soit  $j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$ . Si  $s(j)$  appartient au support de  $s_{\mathbf{c}}$ , alors on étiquette ce sommet par 0. Sinon, on l'étiquette par  $x_{\iota_{\mathbf{c}}, j} x_{\iota_{\mathbf{c}}, j-1}^{-1}$  c'est-à-dire le quotient de l'étiquette de l'arête qui part de ce sommet par l'étiquette de l'arête qui y arrive. Les étiquettes des sommets de  $s$  sont donc les quantités dont on souhaite montrer qu'elles ne dépendent pas du choix du représentant  $\iota_{\mathbf{c}}$ .

La figure 4 illustre la procédure d'étiquetage des sommets du graphe  $s$  à partir de l'étiquetage de ses arêtes. Dans cette figure le chemin  $s$  est représenté comme d'habitude, et on a simplement entouré les sommets de  $s_{\mathbf{c}}$ . Par ailleurs, pour alléger les notations, on a noté, pour tout  $j$ ,  $x_j = x_{\iota_{\mathbf{c}}, j}$ .

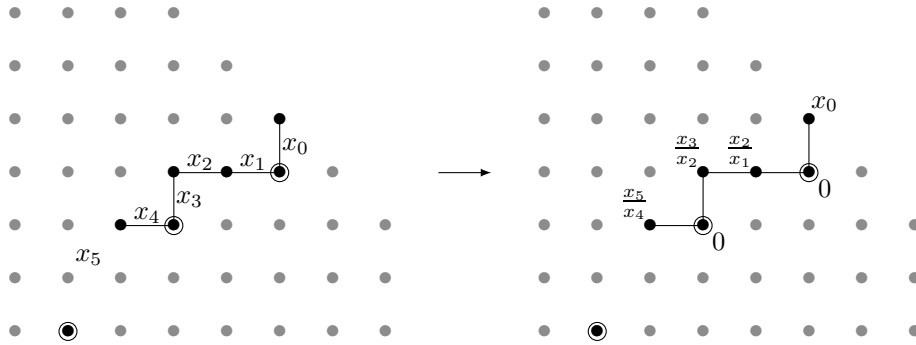


FIGURE 4. La procédure d'étiquetage des sommets de  $s$

Remarquons maintenant que le chemin  $s_{\mathbf{c}}$  définit sur l'ensemble des arêtes du chemin  $s$  un découpage en « blocs ». Par exemple, pour le chemin  $s$  représenté dans la figure 4, il y a 3 « blocs » d'arêtes. Lorsqu'on change le représentant  $\iota_{\mathbf{c}}$ , on multiplie toutes les étiquettes des arêtes d'un même bloc par un même scalaire (à l'exception des arêtes du bloc 0, qui sont inchangées). La procédure expliquée ci-dessus montre donc bien que la suite

$$x_{\mathbf{c}, 0}, \dots, x_{\mathbf{c}, i-1}, x_{\mathbf{c}, i}$$

ne dépend pas du choix de  $\iota_{\mathbf{c}}$ . □

**DÉFINITION 2.26.** Soit  $\mathbf{c} \in X_\tau(k)$ . On note  $(\bar{\alpha}_{\mathbf{c},l}, \bar{\beta}_{\mathbf{c},l})$  le représentant de  $[\alpha_{\mathbf{c},l} : \beta_{\mathbf{c},l}]$  vérifiant

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_{\mathbf{c},l}(v_{v(i)+1} + \tilde{v}_{v(i)+1}) = w_{n-v(i)} + \tilde{w}_{n-v(i)} & \text{si } v(i) = v(i-1) - 1 \\ \bar{\beta}_{\mathbf{c},l}(w_{w(i)+1} + \tilde{w}_{w(i)+1}) = v_{n-w(i)} + \tilde{v}_{n-w(i)} & \text{si } w(i) = w(i-1) - 1. \end{cases}$$

On note alors  $(a_{\mathbf{c},i}, b_{\mathbf{c},i}) \in \text{Hom}(V_{v(i)}, W_{v(i)}^0) \oplus \text{Hom}(W_{w(i)}, V_{w(i)}^0)$  le couple d'applications linéaires défini par

$$\begin{aligned} \forall x \in V_{v(i)}, \quad a_{\mathbf{c},i}(x) &= \bar{\alpha}_{\mathbf{c},l}(x + c_{\mathbf{c},v(i)}(x)) \\ \forall x \in W_{w(i)}, \quad b_{\mathbf{c},i}(x) &= \bar{\beta}_{\mathbf{c},l}(x + d_{\mathbf{c},w(i)}(x)). \end{aligned}$$

**REMARQUE 2.27.** Les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathbf{c},v(i)} & \xrightarrow{\bar{\alpha}_{\mathbf{c},d}} & W_{v(i)}^0 \\ & \searrow \text{// } V_{n-v(i)}^0 & \nearrow a_{\mathbf{c},i} \\ & V_{v(i)} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} W_{\mathbf{c},w(i)} & \xrightarrow{\bar{\beta}_{\mathbf{c},d}} & V_{w(i)}^0 \\ & \searrow \text{// } W_{n-w(i)}^0 & \nearrow b_{\mathbf{c},i} \\ & W_{w(i)} & \end{array}$$

sont donc commutatifs, où on a noté, si  $C$  est un supplémentaire commun à  $A$  et  $B$ ,  $A \xrightarrow{\text{// } C} B$  la projection sur  $B$  parallèlement à  $C$ , restreinte à  $A$ .

**REMARQUE 2.28.** En utilisant la proposition 2.18, on montre facilement que

$$\text{rg}(a_{\mathbf{c},i}) = v(i) - v_{\mathbf{c}}(l) \text{ et } \text{rg}(b_{\mathbf{c},i}) = w(i) - w_{\mathbf{c}}(d).$$

On est maintenant prêt à construire une bijection de  $X_\tau(k)$  sur un  $k$ -espace vectoriel qui ne dépend que de  $\tau$ . Commençons par définir cet espace vectoriel :

**DÉFINITION 2.29.** On note  $U_\tau(k)$  le  $k$ -espace vectoriel somme directe des espaces

$$\begin{aligned} & \text{Hom}(V_{v(i)}, V_{n-v(i)}^0), \quad \text{Hom}(W_{w(i)}, W_{n-w(i)}^0), \quad \bigoplus_{w(i) \leq j \leq w(-i-1)-1} V_j^0, \\ & \bigoplus_{v(i) \leq j \leq v(-i-1)-1} W_j^0, \quad k^i \text{ et } \text{Hom}(V_{v(i)}, W_{v(i)}^0), \quad \text{Hom}(W_{w(i)}, V_{w(i)}^0). \end{aligned}$$

Voici la bijection :

**THÉORÈME 2.30.** Pour tout  $\mathbf{c} \in X_\tau(k)$ , on note  $f_\tau(\mathbf{c}) \in U_\tau(k)$  le vecteur de coordonnées

$$c_{\mathbf{c},v(i)}, d_{\mathbf{c},w(i)}, \tilde{v}_{\mathbf{c},v(i)+1}, \dots, \tilde{v}_{\mathbf{c},v(-i-1)}, \tilde{w}_{\mathbf{c},w(i)+1}, \dots, \tilde{w}_{\mathbf{c},w(-i-1)}, x_{\mathbf{c},0}, \dots, x_{\mathbf{c},i-1}, a_{\mathbf{c},i}, b_{\mathbf{c},i}.$$

L'application  $f_\tau : X_\tau(k) \rightarrow U_\tau(k)$  est une bijection.

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.30.** On construit l'application inverse. On se donne donc  $u \in U_\tau(k)$ , dont on note, de manière suggestive, les coordonnées par

$$c_{v(i)}, d_{w(i)}, \tilde{v}_{v(i)+1}, \dots, \tilde{v}_{v(-i-1)}, \tilde{w}_{w(i)+1}, \dots, \tilde{w}_{w(-i-1)}, x_0, \dots, x_{i-1}, a_i \text{ et } b_i.$$

On va construire un élément  $\mathbf{c} \in X_\tau(k)$ , en produisant successivement le chemin  $s_{\mathbf{c}}$ , les drapeaux  $\mathbf{c}_V$  et  $\mathbf{c}_W$ , et la classe  $[\iota_{\mathbf{c}}]$ .

On note  $l$  le cardinal de l'ensemble

$$\{j \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket, \quad x_j = 0\},$$

et  $i_0 < \dots < i_{l-1}$  les éléments (ordonnés) de cet ensemble. On définit un chemin  $s_{\mathbf{c}}$  de longueur  $l$  tracé dans  $\Delta$  par

$$\begin{cases} s_{\mathbf{c}}(d) = s(i_d) \text{ pour } d \in \llbracket 0, l-1 \rrbracket \\ s_{\mathbf{c}}(l) = (\dim(\text{Ker } a_i), \dim(\text{Ker } b_i)). \end{cases}$$

Il s'agit bien d'un chemin tracé dans  $\Delta$ . En effet, comme  $s$  est une application strictement croissante, on a

$$s(i_0) = s_{\mathbf{c}}(0) < \dots < s(i_{l-1}) = s_{\mathbf{c}}(l-1) < s(i).$$

De plus, on a les inclusions

$$\text{Ker } a_i \subseteq V_{v(i)} \text{ et } \text{Ker } b_i \subseteq W_{w(i)},$$

ce qui montre que  $s_{\mathbf{c}}(l) \geq s(i)$ , et permet de conclure que  $s_{\mathbf{c}}$  est un chemin. Par ailleurs, les arguments que l'on vient de donner montrent aussi que  $s_{\mathbf{c}} \in \Pi_i$ , et que  $s_{\mathbf{c}} \geq s$ .

On construit maintenant les drapeaux  $\mathbf{c}_V$  et  $\mathbf{c}_W$ , et même leurs raffinements  $\mathbf{c}_V^{\tau}$  et  $\mathbf{c}_W^{\tau}$ . En utilisant les relations de récurrence figurant dans les propositions 2.22 et 2.23, on construit des applications linéaires

$$(c_j \in \text{Hom}(V_j, V_{n-j}^0))_{j \in \llbracket v(i), v(-i-1) \rrbracket} \text{ et } (d_j \in \text{Hom}(W_j, W_{n-j}^0))_{j \in \llbracket w(i), w(-i-1) \rrbracket}.$$

Pour tout  $j$  compris entre  $v(i)$  et  $v(-i-1)$  (resp.  $w(i)$  et  $w(-i-1)$ ), on note  $V_{\mathbf{c},j}$  (resp.  $W_{\mathbf{c},j}$ ) le graphe de l'application linéaire  $c_j$  (resp.  $d_j$ ). On appelle  $V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(l)}$  le graphe de la restriction de  $c_{v(i)}$  à  $\text{Ker } a_i$ . On note aussi

$$W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-l-1)} = W_{\mathbf{c},w(-i-1)} \oplus \text{Im}(a_i).$$

On définit les sous-espaces  $V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-l-1)}$  et  $W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(l)}$  de la même façon. Remarquons que la paire de drapeaux  $\mathbf{c}_V$ ,  $\mathbf{c}_W$  ainsi définie est indexée par le chemin  $s_{\mathbf{c}}$ . Remarquons aussi que le drapeau  $\mathbf{c}_V$  (resp.  $\mathbf{c}_W$ ) intersecte transversalement le drapeau  $\tau_V^0$  (resp.  $\tau_W^0$ ).

On passe maintenant à la définition de la classe  $[\iota_{\mathbf{c}}]$ . Tout d'abord, on inverse la procédure décrite dans la proposition-définition 2.25. On commence par étiqueter, pour

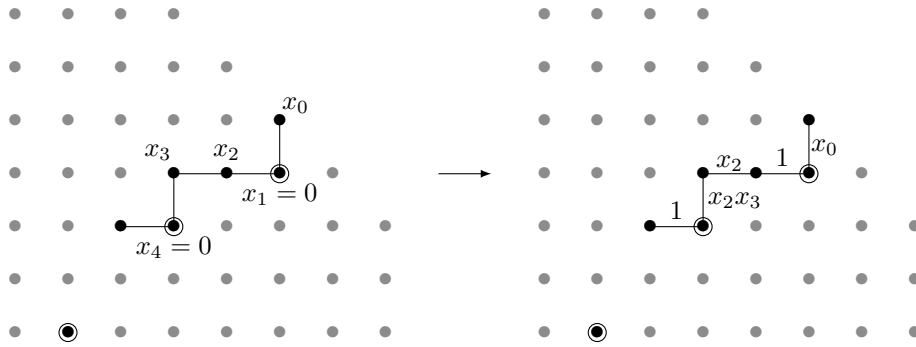


FIGURE 5. La procédure d'étiquetage des arêtes de  $s$

tout  $j$  compris entre 0 et  $i-1$ , le sommet  $s(j)$  de  $s$  par  $x_j$ . Ensuite, on étiquette les arêtes de  $s$  de la manière suivante. Si  $s(0)$  est un sommet de  $s_{\mathbf{c}}$ , alors on étiquette l'arête joignant  $s(0)$  à  $s(1)$  par  $x_{\iota_{\mathbf{c}},0} := 1$ . Si ce n'est pas le cas, on étiquette cette arête par  $x_{\iota_{\mathbf{c}},0} := x_0$ . Pour tout  $j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$ , on étiquette l'arête joignant  $s(j)$  à  $s(j+1)$  par 1 si  $s(j)$  est un sommet de  $s_{\mathbf{c}}$ , et par  $x_{\iota_{\mathbf{c}},j} := x_{\iota_{\mathbf{c}},j-1}x_{\mathbf{c},j}$  sinon, c'est-à-dire par le produit

de l'étiquette de l'arête arrivant à  $s(j)$  (qui est déjà étiquetée) par l'étiquette du sommet  $s(j)$ . La figure 5 illustre la procédure par laquelle on passe d'un étiquetage des sommets de  $s$  à un étiquetage de ses arêtes.

On définit maintenant un isomorphisme  $\iota_{\mathbf{c}} : \text{gr}(\mathbf{c}_V) \rightarrow \text{gr}(\mathbf{c}_W)$  de la manière suivante. Remarquons pour commencer que, comme le drapeau  $\mathbf{c}_V$  (resp.  $\mathbf{c}_W$ ) intersecte transversalement le drapeau  $\tau_V^0$  (resp.  $\tau_W^0$ ), alors, si  $l = 0$ , on a une décomposition du type

$$\text{gr}(\mathbf{c}_V)_0 = (V_{\mathbf{c},v(i)} \cap \text{gr}(\mathbf{c}_V)_0) \oplus \bigoplus_{j=v(i)+1}^{v(-i-1)} \langle v_j + \tilde{v}_j \rangle \oplus (V_{w(i)}^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_V)_0)$$

(et de même pour  $\text{gr}(\mathbf{c}_W)_0$ ), et si  $l \geq 1$ , on a les décompositions

$$\text{gr}(\mathbf{c}_V)_l = (V_{\mathbf{c},v(i)} \cap \text{gr}(\mathbf{c}_V)_l) \oplus \bigoplus_{j=v(i)+1}^{v_{\mathbf{c}}(l-1)} \langle v_j + \tilde{v}_j \rangle$$

$$\forall d \in \llbracket -1+l, l-1 \rrbracket, \quad \text{gr}(\mathbf{c}_V)_d = \bigoplus_{j=v_{\mathbf{c}}(d)+1}^{v_{\mathbf{c}}(d-1)} \langle v_j + \tilde{v}_j \rangle$$

$$\text{gr}(\mathbf{c}_V)_{-l} = \bigoplus_{j=v_{\mathbf{c}}(-l)+1}^{v(-i-1)} \langle v_j + \tilde{v}_j \rangle \oplus (V_{w(i)}^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_V)_{-l}),$$

(et de même pour  $\text{gr}(\mathbf{c}_W)$ ). On pose

$$a_{\iota_{\mathbf{c}},i} = x_{\iota_{\mathbf{c}},i-1} a_{\mathbf{c},i} \quad \text{et} \quad b_{\iota_{\mathbf{c}},i} = x_{\iota_{\mathbf{c}},i-1} b_{\mathbf{c},i}.$$

On note  $a$  et  $b$  les applications linéaires faisant commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathbf{c},v(i)} & \xrightarrow{a} & W_{v(i)}^0 \\ & \searrow & \nearrow \\ //V_{n-v(i)}^0 & & \\ & & V_{v(i)} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} W_{\mathbf{c},w(i)} & \xrightarrow{b} & V_{w(i)}^0 \\ & \searrow & \nearrow \\ //W_{n-w(i)}^0 & & \\ & & W_{w(i)} \end{array}$$

Par définition des espaces vectoriels  $V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(l)}$  et  $W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-l-1)}$ , l'application linéaire  $a$  induit un isomorphisme

$$\iota_{\mathbf{c}} : V_{\mathbf{c},v(i)} \cap \text{gr}(\mathbf{c}_V)_l = V_{\mathbf{c},v(i)} / V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(l)} \xrightarrow{a} W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-l-1)} \cap W_{v(i)}^0 = W_{v(i)}^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_V)_{-l}.$$

De même, l'application linéaire  $b$  induit un isomorphisme

$$\iota_{\mathbf{c}} : V_{\mathbf{c},w(i)}^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_V)_{-l} = V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-l-1)} \cap V_{w(i)}^0 \xrightarrow{b^{-1}} W_{\mathbf{c},w(i)} / W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(l)} = W_{\mathbf{c},w(i)} \cap \text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-l}.$$

On pose aussi, pour tout  $j \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket$ .

$$\begin{cases} \iota_{\mathbf{c}}(v_{v(j)} + \tilde{v}_{v(j)}) = x_{\iota_{\mathbf{c}},j}(w_{n-v(j)+1} + \tilde{w}_{n-v(j)+1}) & \text{si } v(j+1) = v(j) - 1 \\ \iota_{\mathbf{c}}(v_{n-w(j)+1} + \tilde{v}_{n-w(j)+1}) = x_{\iota_{\mathbf{c}},j}^{-1}(w_{w(j)} + \tilde{w}_{w(j)}) & \text{si } w(j+1) = w(j) - 1. \end{cases}$$

Grâce aux décompositions ci-dessus, on voit que l'on définit bien de cette manière un isomorphisme  $\iota_{\mathbf{c}} : \text{gr}(\mathbf{c}_V) \rightarrow \text{gr}(\mathbf{c}_W)$  qui renverse les degrés. Par ailleurs, il est clair que la condition (3) de la définition 2.11 est satisfaite, et que par conséquent, on a défini un élément  $\mathbf{c} = (s_{\mathbf{c}}, \mathbf{c}_V, \mathbf{c}_W, [\iota_{\mathbf{c}}])$  de  $X_{\tau}(k)$ .

Il est facile de vérifier que la procédure expliquée ci-dessus est bien l'inverse de l'application  $f_\tau$ , ce qui achève la preuve du théorème.  $\square$

**COROLLAIRE 2.31.** *Soit  $\mathbf{c} \in X_\tau(k)$ . Le type  $s_{\mathbf{c}}$  de  $\mathbf{c}$  est déterminé par la partie de  $f_\tau(\mathbf{c})$  appartenant à*

$$k^i \oplus \text{Hom}(V_{v(i)}, W_{v(i)}^0) \oplus \text{Hom}(W_{w(i)}, V_{w(i)}^0).$$

**DÉMONSTRATION.** Ceci a été établi dans la preuve du théorème 2.30.  $\square$

**2.3. Démonstration du théorème I.** Dans cette section, on fournit la preuve du théorème I. Fixons d'abord quelques notations. On rappelle que, pour toute extension de corps  $K$  de  $k$ , on note  $X_i(K)$  l'ensemble défini en 2.2, en remplaçant  $V$  par  $K \otimes_k V$  et  $W$  par  $K \otimes_k W$ . Pour tout espace vectoriel  $E$  sur  $k$ , on note  $\overline{E} = \overline{k} \otimes_k E$ . On définit ainsi  $\overline{V}$ ,  $\overline{W}$ , mais aussi  ${}^\tau \overline{V}_{v(i)}, \dots$ . L'ensemble  $\Theta_i$  désigne l'ensemble défini en 2.10, autrement dit l'ensemble des données de type  $i$  **définies sur  $k$** .

Comme on l'a déjà dit, la stratégie que l'on va suivre pour montrer le théorème I consiste à définir sur l'ensemble  $X_i(\overline{k})$  une structure de  $k$ -variété algébrique, puis à démontrer que celle-ci est isomorphe à  $X_i$ . Remarquons que, pour tout  $\tau \in \Theta_i$ , l'espace vectoriel  $U_\tau(\overline{k})$  possède une  $k$ -structure naturelle. En utilisant la bijection  $f_\tau$ , on définit sur  $X_\tau(\overline{k})$  une structure de  $k$ -variété algébrique (isomorphe à l'espace affine  $\mathbb{A}(U_\tau(k))$ ). On va utiliser ces structures algébriques sur les  $(X_\tau(\overline{k}))_{\tau \in \Theta_i}$  pour définir une structure de  $k$ -variété sur  $X_i(\overline{k})$ .

Pour que cette stratégie fonctionne, il faut commencer par voir que les ensemble  $X_\tau(\overline{k})$ , pour  $\tau \in \Theta$  recouvrent l'ensemble  $X_i(\overline{k})$ . On peut montrer ce résultat directement, mais on va suivre une voie un peu détournée, qui permet d'obtenir d'autres résultats qui s'avèreront utiles dans la démonstration du théorème I.

**PROPOSITION 2.32.** *Soit  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\tau \in \Theta_i$ , et  $\mathbf{c} \in \pi_{i+1}^{-1}(X_\tau(k))$ . On note  $l$  la longueur de  $\mathbf{c}$ . Pour tout représentant  $\iota_{\mathbf{c}}$  de  $[\iota_{\mathbf{c}}]$ , on a*

$$\begin{aligned} V_{\pi_{i+1}(\mathbf{c}), v(i)} &\subseteq V_{\mathbf{c}, v_{c(l-1)}}, & W_{\pi_{i+1}(\mathbf{c}), w(i)} &\subseteq W_{\mathbf{c}, w_{c(l-1)}} \\ W_{v(i)}^0 &\subseteq W/W_{\mathbf{c}, w_{c(l-1)}}, & V_{w(i)}^0 &\subseteq V/V_{\mathbf{c}, v_{c(l-1)}} \\ \alpha_{\mathbf{c}, l}(V_{\pi_{i+1}(\mathbf{c}), v(i)}) &\subseteq W_{v(i)}^0 & \text{et } \beta_{\mathbf{c}, l}(W_{\pi_{i+1}(\mathbf{c}), w(i)}) &\subseteq V_{w(i)}^0. \end{aligned}$$

**DÉMONSTRATION.** Si  $\pi_{i+1}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ , alors la proposition est une conséquence immédiate de la proposition 2.18. Supposons maintenant que  $\pi_{i+1}(\mathbf{c}) \neq \mathbf{c}$ , c'est-à-dire que  $l \geq 1$  et  $s_{\mathbf{c}}(l-1) = s_\tau(i)$ . Les quatre premières inclusions sont alors des égalités, et on a plus précisément

$$\begin{aligned} V_{\pi_{i+1}(\mathbf{c}), v(i)} &= \text{Ker } \alpha_{\mathbf{c}, l-1}, & W_{\pi_{i+1}(\mathbf{c}), w(i)} &\subseteq \text{Ker } \beta_{\mathbf{c}, l-1} \\ W_{v(i)}^0 &= \text{Coker } \alpha_{\mathbf{c}, l-1}, & V_{w(i)}^0 &= \text{Coker } \beta_{\mathbf{c}, l-1}. \end{aligned}$$

Les deux dernières égalités sont maintenant évidentes, puisque

$$\alpha_{\mathbf{c}, l} : \text{Ker } \alpha_{\mathbf{c}, l-1} \rightarrow \text{Coker } \alpha_{\mathbf{c}, l-1}, \quad \beta_{\mathbf{c}, l} : \text{Ker } \beta_{\mathbf{c}, l-1} \rightarrow \text{Coker } \beta_{\mathbf{c}, l-1}.$$

$\square$

La proposition précédente suggère la définition suivante :



DÉFINITION 2.33. Soit  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\tau \in \Theta_i$ , et  $\mathbf{c} \in \pi_{i+1}^{-1}(X_\tau(k))$ . On note  $l$  la longueur de  $\mathbf{c}$ . Pour tout représentant  $\iota_{\mathbf{c}}$ , on note

$$(a_{\iota_{\mathbf{c}},i,l}^\tau, b_{\iota_{\mathbf{c}},i,l}^\tau) \in \text{Hom}({}^\tau V_{v(i)}, {}^\tau W_{v(i)}^0) \oplus \text{Hom}({}^\tau W_{w(i)}, {}^\tau V_{w(i)}^0)$$

le couple d'applications linéaires tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} {}^\tau V_{\pi_{i+1}(\mathbf{c}),v(i)} & \xrightarrow{\alpha_{\mathbf{c},l}} & {}^\tau W_{v(i)}^0 \\ // {}^\tau V_{n-v(i)}^0 & \searrow a_{\iota_{\mathbf{c}},i,l}^\tau & \nearrow \\ & & {}^\tau V_{v(i)} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} {}^\tau W_{\pi_{i+1}(\mathbf{c}),w(i)} & \xrightarrow{\beta_{\mathbf{c},l}} & {}^\tau V_{w(i)}^0 \\ // {}^\tau W_{n-w(i)}^0 & \searrow b_{\iota_{\mathbf{c}},i,l}^\tau & \nearrow \\ & & {}^\tau W_{w(i)} \end{array}$$

soient commutatifs.

On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 2.34. Dans les conditions de la définition 2.33, on a

$$\text{rg}(a_{\iota_{\mathbf{c}},i,l}^\tau) = v(i) - v_{\mathbf{c}}(l) \text{ et } \text{rg}(b_{\iota_{\mathbf{c}},i,l}^\tau) = w(i) - w_{\mathbf{c}}(l).$$

Par conséquent,  $(a_{\iota_{\mathbf{c}},i,l}^\tau, b_{\iota_{\mathbf{c}},i,l}^\tau) \neq 0$ .

DÉMONSTRATION. Par définition, on a  $\text{Ker } \alpha_{\mathbf{c},l} = V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(l)}$ , si bien que le noyau de l'application linéaire  $a_{\iota_{\mathbf{c}},i,l}^\tau$  est de dimension  $v_{\mathbf{c}}(l)$ . On en déduit que cette application est bien de rang  $v(i) - v_{\mathbf{c}}(l)$ . On montre de même la deuxième égalité. Remarquons maintenant que, comme  $\mathbf{c} \in X_{i+1}(k)$ , on a

$$s_{\mathbf{c}}(l) \geq s(i+1) > s(i)$$

si bien que, soit  $v(i) - v_{\mathbf{c}}(l) \neq 0$ , soit  $w(i) - w_{\mathbf{c}}(l) \neq 0$ . □

On peut donc définir :

DÉFINITION 2.35. Le point

$$[a_{\iota_{\mathbf{c}},i,l}^\tau : b_{\iota_{\mathbf{c}},i,l}^\tau] \in \mathbb{P}(\text{Hom}({}^\tau V_{v(i)}, {}^\tau W_{v(i)}^0) \oplus \text{Hom}({}^\tau W_{w(i)}, {}^\tau V_{w(i)}^0))$$

ne dépend pas du choix de  $\iota_{\mathbf{c}}$ , et on le note  $[a_{\mathbf{c},i,l}^\tau : b_{\mathbf{c},i,l}^\tau]$ .

L'indépendance par rapport au choix de  $\iota_{\mathbf{c}}$  est évidente.

PROPOSITION 2.36. Soit  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , et  $\tau \in \Theta_i$ . L'application

$$\pi_\tau : \pi_{i+1}^{-1}(X_\tau(k)) \rightarrow X_\tau(k) \times \mathbb{P}(\text{Hom}({}^\tau V_{v(i)}, {}^\tau W_{v(i)}^0) \oplus \text{Hom}({}^\tau W_{w(i)}, {}^\tau V_{w(i)}^0))$$

$$\mathbf{c} \mapsto (\pi_{i+1}(\mathbf{c}), [a_{\mathbf{c},i,l}^\tau : b_{\mathbf{c},i,l}^\tau]),$$

où  $l$  est la longueur de  $\mathbf{c}$ , fournit une bijection entre  $\pi_{i+1}^{-1}(X_\tau(k))$  et l'ensemble

$$\{(\mathbf{c}, [a : b]), (a_{\mathbf{c},i,l}^\tau, b_{\mathbf{c},i,l}^\tau) \in \langle (a, b) \rangle\}.$$

DÉMONSTRATION. Notons provisoirement  $A$  l'ensemble donné dans l'énoncé. Montrons d'abord que  $\pi_{i+1}^{-1}(X_\tau(k)) \subseteq \pi_\tau^{-1}(A)$ . Pour cela, soit  $\mathbf{c} \in \pi_{i+1}^{-1}(X_\tau(k))$ . De deux choses l'une : soit  $\mathbf{c} \in X_i(k)$ , et alors

$$[a_{\mathbf{c},i,l}^\tau : b_{\mathbf{c},i,l}^\tau] = [a_{\mathbf{c},i,l}^\tau : b_{\mathbf{c},i,l}^\tau],$$

soit  $\mathbf{c} \notin X_i(k)$ , et alors  $(a_{\mathbf{c},i,l}^\tau, b_{\mathbf{c},i,l}^\tau) = (0, 0)$ . Dans les deux cas,  $\pi_\tau(\mathbf{c}) \in A$ .

Soit maintenant  $(\mathbf{c}, [a : b]) \in A$ . Si  $\mathbf{c} \notin Y_i(k)$ , alors  $\mathbf{c}$  est l'unique antécédent de  $(\mathbf{c}, [a : b])$  par  $\pi_\tau$ . Supposons maintenant que  $\mathbf{c} \in Y_i(k)$ . Alors l'unique antécédent de  $(\mathbf{c}, [a : b])$  par  $\pi_\tau$  est l'élément  $\mathbf{c}'$  de  $\pi_{i+1}^{-1}(\mathbf{c})$  vérifiant que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } \alpha_{\mathbf{c}, l-1} & \xrightarrow{\alpha_{\mathbf{c}', l}} & \text{Coker } \alpha_{\mathbf{c}, l-1} \\ \searrow // {}^\tau V_{n-v(i)}^0 & & \nearrow a \\ & & {}^\tau V_{v(i)} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Ker } \beta_{\mathbf{c}, l-1} & \xrightarrow{\beta_{\mathbf{c}', l}} & \text{Coker } \beta_{\mathbf{c}, l-1} \\ \searrow // {}^\tau W_{n-w(i)}^0 & & \nearrow b \\ & & {}^\tau W_{w(i)} \end{array}$$

sont commutatifs.  $\square$

**DÉFINITION 2.37.** Soit  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\tau \in \Theta_i$  et  $\tau' \in \Theta_{i+1}$ . On dit que  $\tau'$  **prolonge**  $\tau$  si

- $s_\tau$  est la restriction de  $s_{\tau'} = (v, w)$  à  $\llbracket 0, i \rrbracket$ .
- $\forall j \in \llbracket v(i), v(-i-1) \rrbracket$ ,  ${}^{\tau'} V_j = {}^\tau V_j$ , et  $v_j^{\tau'} = v_j^\tau$  si  $j > v(i)$ .
- $\forall j \in \llbracket w(i), w(-i-1) \rrbracket$ ,  ${}^{\tau'} W_j = {}^\tau W_j$ , et  $w_j^{\tau'} = w_j^\tau$  si  $j > w(i)$ .

La proposition qui suit relie, étant donné  $\tau' \in \Theta_{i+1}$  prolongeant  $\tau \in \Theta_i$ , le fait d'être en position générale par rapport à  $\tau'$  et le fait d'être en position générale par rapport à  $\tau$ .

**PROPOSITION 2.38.** Soit  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Soit  $\tau' \in \Theta_{i+1}$  prolongeant  $\tau \in \Theta_i$ . On note  $s_{\tau'} = (v, w)$ . Soit  $\mathbf{c} \in X_{i+1}(k)$ , de longueur  $l$ . Alors  $\mathbf{c} \in X_{\tau'}(k)$  si et seulement si

$$\pi_{i+1}(\mathbf{c}) \in X_\tau(k) \text{ et } \begin{cases} a_{\mathbf{c}, i, l}^\tau(v_{v(i)}^{\tau'}) \notin {}^{\tau'} W_{v(i)-1}^0 & \text{si } v(i+1) = v(i) - 1 \\ b_{\mathbf{c}, i, l}^\tau(w_{w(i)}^{\tau'}) \notin {}^{\tau'} V_{w(i)-1}^0 & \text{si } w(i+1) = w(i) - 1. \end{cases}$$

**DÉMONSTRATION.** Supposons, pour fixer les idées, que  $v(i+1) = v(i) - 1$ . Pour alléger les notations, on enlève le symbole  $\tau'$  dans les notations  ${}^{\tau'} V_{w(i)-1}^0$ ,  ${}^{\tau'} W_{v(i)-1}^0$ , etc.

Montrons d'abord «  $\Rightarrow$  ». Soit  $\mathbf{c} \in X_{\tau'}(k)$ . On distingue deux cas. Tout d'abord, supposons que  $\pi_{i+1}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ . Dans ce cas, les conditions (1), (2) et (3) de la définition 2.11 (pour  $\tau \in \Theta_i$ ) sont clairement satisfaites, si bien que  $\pi_{i+1}(\mathbf{c}) \in X_\tau(k)$ . Par ailleurs, d'après la proposition 2.20, on a

$$\alpha_{\mathbf{c}, l}(V_{\mathbf{c}, v(i)} \cap V_{n-v(i)+1}^0) = W_{\mathbf{c}, n-v(i)+1} \cap W_{v(i)}^0$$

ce qui montre, vu la définition de  $a_{\mathbf{c}, i, l}^\tau$ , qu'on a bien  $a_{\mathbf{c}, i, l}^\tau(v_{v(i)}^{\tau'}) \notin W_{v(i)-1}^0$ .

Plaçons-nous maintenant dans le deuxième cas, à savoir  $\pi_{i+1}(\mathbf{c}) \neq \mathbf{c}$ . Dans ce cas,  $l \geq 1$ , et  $s_{\mathbf{c}}(l-1) = s(i)$ . On vérifie alors aisément que le chemin  $s_{\pi_{i+1}(\mathbf{c})}$ , qui est la restriction de  $s_{\mathbf{c}}$  à  $\llbracket 0, l-1 \rrbracket$ , est supérieur à  $s_\tau$ . Par ailleurs,  $\pi_{i+1}(\mathbf{c})_V$  (resp.  $\pi_{i+1}(\mathbf{c})_W$ ) est obtenu en enlevant le sous-espace  $V_{\mathbf{c}, v_{\mathbf{c}}(l)}$  (resp.  $W_{\mathbf{c}, w_{\mathbf{c}}(-l-1)}$ ) du drapeau  $\mathbf{c}_V$  (resp.  $\mathbf{c}_W$ ), si bien que les conditions (2) et (3) de la définition 2.11 (pour  $\tau \in \Theta_i$ ) sont automatiquement vérifiées. De plus, toujours d'après la proposition 2.20, on a

$$\alpha_{\mathbf{c}, l}(V_{\mathbf{c}, v(i)} \cap V_{n-v(i)+1}^0) = W_{\mathbf{c}, n-v(i)+1} \cap W_{v(i)}^0$$

ce qui fournit le résultat.

Démontrons maintenant «  $\Leftarrow$  ». Soit  $\mathbf{c} \in X_{i+1}(k)$  vérifiant  $\pi_{i+1}(\mathbf{c}) \in X_\tau(k)$  et

$$a_{\mathbf{c},i,l}^\tau(v_{v(i)}^{\tau'}) \notin W_{v(i)-1}^0.$$

On distingue à nouveau deux cas. Supposons d'abord que  $\pi_{i+1}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ . On vérifie facilement que  $s_{\mathbf{c}} \geq s_{\tau'}$ . Montrons que le sous-espace  $V_{n-v(i)+1}^0$  intersecte transversalement le drapeau  $\mathbf{c}_V$ . Observons pour cela que le sous-espace

$$V_{n-v(i)+1}^0 \cap V_{\mathbf{c},v(i)}$$

est une droite, car la dimension de cet espace est au moins 1, et qu'il contient le sous-espace

$$V_{n-v(i)}^0 \cap V_{\mathbf{c},v(i)} = \{0\}$$

avec une codimension inférieure à 1. Cela permet déjà d'affirmer que si  $E$  est un des sous-espaces suivants

$$V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(l-1)}, \dots, V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-l)}, V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-l-1)},$$

alors l'intersection  $V_{n-v(i)+1}^0 \cap E$  est transverse. En effet, c'est le cas pour  $V_{n-v(i)}^0 \cap E$ , et dans l'intersection  $V_{n-v(i)+1}^0 \cap E$  figure la droite  $V_{n-v(i)+1}^0 \cap V_{\mathbf{c},v(i)}$ , qui n'est pas incluse dans  $V_{n-v(i)}^0 \cap E$ . Pour conclure que  $V_{n-v(i)+1}^0$  intersecte transversalement le drapeau  $\mathbf{c}_V$ , il reste à montrer que

$$V_{n-v(i)+1}^0 \cap V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(l)} = \{0\}$$

Mais si ce n'est pas le cas, alors

$$V_{n-v(i)+1}^0 \cap V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(l)} = V_{n-v(i)+1}^0 \cap V_{\mathbf{c},v(i)}$$

est une droite, qui est donc toute entière contenue dans  $\text{Ker } \alpha_{\mathbf{c},l}$ . Cela est contradictoire avec l'hypothèse que

$$a_{\mathbf{c},i,l}^\tau(v_{v(i)}^{\tau'}) \notin W_{v(i)-1}^0,$$

puisque sous cette hypothèse, en particulier,  $a_{\mathbf{c},i,l}^\tau(v_{v(i)}^{\tau'}) \neq 0$ .

Vérifions aussi que le sous-espace  $W_{v(i)-1}^0$  intersecte transversalement le drapeau  $\mathbf{c}_W$ . L'intersection de  $W_{v(i)}^0$  avec chacun des sous-espaces

$$W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(l)}, W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(l-1)}, \dots, W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-l)}$$

est nulle, donc, comme  $W_{v(i)-1}^0 \subseteq W_{v(i)}^0$ , on voit déjà que  $W_{v(i)-1}^0$  intersecte transversalement chacun de ces sous-espaces. Pour conclure, il suffit de montrer que  $W_{v(i)-1}^0 \cap W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-l)}$  est de codimension 1 dans  $W_{v(i)}^0 \cap W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-l)}$ . D'après la proposition 2.18, le vecteur  $a_{\mathbf{c},i,l}^\tau(v_{v(i)}^{\tau'})$  appartient à  $W_{v(i)}^0 \cap W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-l)}$ , donc, comme

$$a_{\mathbf{c},i,l}^\tau(v_{v(i)}^{\tau'}) \notin W_{v(i)-1}^0,$$

on voit que

$$W_{v(i)-1}^0 \cap W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-l)} \neq W_{v(i)}^0 \cap W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-l)}.$$

Le premier sous-espace étant de codimension au plus 1 dans le deuxième, on peut conclure.

On a ainsi montré que la condition (2) de la définition 2.11 (pour  $\tau' \in \Theta_{i+1}$ ) est vérifiée. Le fait que la condition (3) l'est aussi est une conséquence immédiate de cette même condition (3) (pour  $\tau \in \Theta_i$ ), et de la condition

$$a_{\mathbf{c},i,l}^\tau(v_{v(i)}^{\tau'}) \notin {}^{\tau'}W_{v(i)-1}^0.$$

Le cas où  $\pi_{i+1}(\mathbf{c}) \neq \mathbf{c}$  se traite de la même manière. □

On tire maintenant quelques corollaires de cette proposition.

**COROLLAIRE 2.39.** *Soit  $\tau' \in \Theta_{i+1}$  prolongeant  $\tau \in \Theta_i$ . On note  $s_{\tau'} = (v, w)$ . Si  $v(i+1) = v(i) - 1$ , on a*

$$\pi_{\tau}(X_{\tau'}(k)) = \{(\mathbf{c}, [a : b]) \in \pi_{\tau}(\pi_{i+1}^{-1}(X_{\tau}(k))), \quad a(v_{v(i)}^{\tau'}) \notin {}^{\tau'}W_{v(i)-1}^0\}.$$

Si  $w(i+1) = w(i) - 1$ , on a

$$\pi_{\tau}(X_{\tau'}(k)) = \{(\mathbf{c}, [a : b]) \in \pi_{\tau}(\pi_{i+1}^{-1}(X_{\tau}(k))), \quad b(w_{w(i)}^{\tau'}) \notin {}^{\tau'}V_{w(i)-1}^0\}.$$

**DÉMONSTRATION.** C'est une conséquence immédiate des propositions 2.36 et 2.38.  $\square$

**COROLLAIRE 2.40.** *Soit  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , et  $\tau \in \Theta_i$ . On a*

$$\pi_{i+1}^{-1}(X_{\tau}(\bar{k})) = \bigcup X_{\tau'}(\bar{k})$$

où la réunion porte sur les  $\tau' \in \Theta_{i+1}$  qui prolongent  $\tau$ .

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\mathbf{c} \in \pi_{i+1}^{-1}(X_{\tau}(\bar{k}))$ . Notons  $\pi_{\tau}(\mathbf{c}) = (\mathbf{c}', [a : b])$ . Supposons, pour fixer les idées, que  $\text{rg}(a) \geq 1$ . On peut choisir un vecteur  $v_{v(i)}$  dans  ${}^{\tau}V_{v(i)}$  et un hyperplan  $W_{v(i)-1}^0$  dans  ${}^{\tau}W_{v(i)}^0$  tels que  $a(v_{v(i)}) \notin {}^{\tau}\overline{W}_{v(i)-1}^0$ . En prolongeant  $\tau$  « à l'aide » de  $v_{v(i)}$  et  $W_{v(i)-1}^0$ , on construit un  $\tau' \in \Theta_{i+1}$  tel que  $\pi_{\tau}(\mathbf{c}) \in \pi_{\tau'}(X_{\tau'}(\bar{k}))$ , ou, autrement dit,  $\mathbf{c} \in X_{\tau'}(\bar{k})$ . Cela achève de prouver le corollaire.  $\square$

**COROLLAIRE 2.41.** *Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , les sous-ensembles  $X_{\tau}(\bar{k})$ , pour  $\tau \in \Theta_i$ , recouvrent l'ensemble  $X_i(\bar{k})$ .*

**DÉMONSTRATION.** On procède par récurrence sur  $i$ . Pour  $i = 0$ , il suffit de remarquer que  $\text{Gr}_n(\overline{V} \oplus \overline{W})$  est recouvert par les cellules de Schubert ouvertes

$$\{F \in \text{Gr}(n, V \oplus W), \quad F \cap (\overline{V}_w^0 \oplus \overline{W}_v^0) = \{0\}\},$$

avec  $v + w = n$ ,  $V_w^0$  (res.  $W_v^0$ ) sous-espace vectoriel de  $V$  (resp.  $W$ ) de dimension  $w$ , (resp.  $v$ ), et d'utiliser la proposition 2.13. L'étape de récurrence est une conséquence immédiate du corollaire précédent.  $\square$

On passe maintenant à la démonstration proprement dite du théorème I. Plus précisément, on va démontrer les résultats suivants :

**THÉORÈME 2.42.** *Il existe une structure de  $k$ -variété algébrique sur l'ensemble  $X_i(\bar{k})$ , faisant de chaque  $X_{\tau}(\bar{k})$ ,  $\tau \in \Theta_i$ , un ouvert affine défini sur  $k$ . La  $k$ -variété obtenue est isomorphe à  $X_i$ .*

Pour tout  $\tau \in \Theta_i$ , on note  $X_{\tau} \subseteq X_i$  l'ouvert affine correspondant.

**THÉORÈME I.** *Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la sous-variété fermée  $Y_i$  est lisse. Par conséquent, la variété  $X_i$  est une compactification projective et lisse de  $\Omega$ .*

Au passage, on va montrer la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.43.** *Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . L'ensemble des  $k$ -points de  $X_i$  (resp.  $Y_i$ ) est l'ensemble  $X_i(k)$  (resp.  $Y_i(k)$ ) défini en 2.2 (resp. 2.8), et l'action de  $G(k)$  dans l'ensemble  $X_i(k)$  est décrite par la définition 2.6. Par ailleurs, si  $i \neq n$ , l'éclatement  $X_{i+1} \rightarrow X_i$  induit entre les  $k$ -points l'application  $\pi_{i+1}$  définie en 2.9.*

DÉMONSTRATION. On montre le théorème 2.42 par récurrence sur  $i$ , et, au passage, on démontre le théorème I et la proposition 2.43. Supposons d'abord que  $i = 0$ . On pose sur  $X_0(\bar{k}) = \text{Gr}_n(\bar{V} \oplus \bar{W})$  la structure naturelle de  $k$ -variété. Soit  $\tau \in \Theta_0$ . On note  $s_\tau = (v, w)$ , et on omet le symbole  $\tau$  dans les notations  ${}^\tau V_{v(0)}, \dots$ . La cellule de Schubert ouverte

$$\{F \in \text{Gr}_n(\bar{V} \oplus \bar{W}), \quad F \cap (\bar{V}_{w(0)}^0 \oplus \bar{W}_{v(0)}^0) = \{0\}\}$$

est alors exactement  $X_\tau(\bar{k})$  (proposition 2.13), et les  $k$ -structures sur ces deux objets coïncident. Cela prouve bien le théorème 2.42 dans ce cas.

Supposons à présent le théorème 2.42 démontré pour  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , et montrons-le pour  $i+1$ . On commence par prouver que, pour la structure de  $k$ -variété sur  $X_i(\bar{k})$ , le sous-ensemble  $Y_i(\bar{k})$  est une sous-variété lisse définie sur  $k$ , qui est l'adhérence de :

$$\bigcup_{v+w=n-i} \Omega_{v,w}(\bar{k}),$$

obtenant ainsi le théorème I. Comme les  $X_\tau(\bar{k})$  recouvrent  $X_i(\bar{k})$ , il suffit de vérifier que, pour tout  $\tau \in \Theta_i$ , l'intersection  $Y_i(\bar{k}) \cap X_\tau(\bar{k})$  est une sous-variété lisse et définie sur  $k$ , qui est l'adhérence de

$$\left( \bigcup_{v+w=n-i} \Omega_{v,w}(\bar{k}) \right) \cap X_\tau(\bar{k}) = \Omega_{v(i),w(i)}(\bar{k}) \cap X_i(\bar{k}).$$

Soit  $\tau \in \Theta_i$ . On note  $s_\tau = (v, w)$ , et on omet le symbole  $\tau$  dans les notations  ${}^\tau \bar{V}_{v(i)}, \dots$ . On note  $N_\tau(\bar{k})$  l'espace vectoriel

$$\text{Hom}(\bar{V}_{v(i)}, \bar{W}_{v(i)}^0) \oplus \text{Hom}(\bar{W}_{w(i)}, \bar{V}_{w(i)}^0).$$

D'après le corollaire 2.31, l'intersection  $Y_i(\bar{k}) \cap X_\tau(\bar{k})$  correspond, via  $f_\tau$ , à la partie de  $U_\tau(\bar{k})$  formée des éléments dont la composante sur  $N_\tau(\bar{k})$  est nulle, et  $\Omega_{v(i),w(i)}(\bar{k}) \cap X_i(\bar{k})$  à la partie de  $U_\tau(\bar{k})$  formée des éléments dont la composante sur  $N_\tau(\bar{k})$  est nulle, et celle sur  $\bar{k}^i$  appartient à  $(\bar{k}^*)^i$ . On en déduit le résultat.

Remarquons que l'on vient de montrer que le fibré normal à  $Y_i(\bar{k})$  dans  $X_i(\bar{k})$  est trivial sur  $Y_i(\bar{k}) \cap X_\tau(\bar{k})$ , de fibre  $N_\tau(\bar{k})$ . La variété obtenue par éclatement de  $Y_i(\bar{k})$  dans  $X_i(\bar{k})$  est donc recouverte par des ouverts du type

$$\{\mathbf{c}, [a : b] \in X_\tau(\bar{k}) \times \mathbb{P}(N_\tau(\bar{k})), \quad (a_{\mathbf{c},i}, b_{\mathbf{c},i}) \in \langle (a, b) \rangle\},$$

et l'application de recollement entre l'ouvert correspondant à  $\tau$  et celui correspondant à  $\tau'$  est fournie, sur le deuxième facteur, par la différentielle de l'application de recollement entre  $X_\tau$  et  $X_{\tau'}$ . Comme on l'a vu à l'occasion du corollaire 2.41, l'ensemble  $X_{i+1}(\bar{k})$  est aussi recouvert par les ensembles ci-dessus. Le lemme qui suit montre que les applications de recollement entre ces ensembles sont les mêmes dans les deux cas.

LEMME 2.44. *Soient  $\tau, \tau' \in \Theta_i$ , et*

$$\varphi_{\tau, \tau'} = f_{\tau'} \circ f_\tau^{-1} : U_\tau(\bar{k}) \dashrightarrow U_{\tau'}(\bar{k})$$

*l'application rationnelle de recollement. Soit  $\mathbf{c} \in \pi_{i+1}^{-1}(X_\tau(\bar{k}) \cap X_{\tau'}(\bar{k}) \cap Y_i(\bar{k}))$ . On a alors l'égalité*

$$\langle d_{\pi_{i+1}(\mathbf{c})} \varphi_{\tau, \tau'}(a_{\mathbf{c},i,l}^\tau, b_{\mathbf{c},i,l}^\tau) \rangle = \langle (a_{\mathbf{c},i,l}^{\tau'}, b_{\mathbf{c},i,l}^{\tau'}) \rangle,$$

*où  $l$  est la longueur de  $\mathbf{c}$ .*

DÉMONSTRATION. On fixe un représentant  $(a_{\mathbf{c},i,l}^\tau, b_{\mathbf{c},i,l}^\tau)$  de  $[a_{\mathbf{c},i,l}^\tau : b_{\mathbf{c},i,l}^\tau]$ . Commençons par remarquer que, comme  $X_\tau(\bar{k}) \cap X_{\tau'}(\bar{k}) \cap Y_i(\bar{k})$  est non vide, on a

$$s_\tau(i) = s_{\tau'}(i) := (v(i), w(i)).$$

Pour tout  $t \in \bar{k}$ , on note  $\mathbf{c}(t)$  le point de  $X_\tau(\bar{k})$  dont toutes les coordonnées dans  $U_\tau(\bar{k})$  sont égales à celles de  $\pi_{i+1}(\mathbf{c})$  sauf  $a_{\mathbf{c}(t),i}^\tau = ta_{\mathbf{c},i,l}^\tau$  et  $b_{\mathbf{c}(t),i}^\tau = tb_{\mathbf{c},i,l}^\tau$ . On définit ainsi un morphisme

$$\mathbf{c} : \mathbb{A}^1 \rightarrow X_\tau.$$

On collecte maintenant quelques propriétés de  $\mathbf{c}(t)$ , que l'on démontre en utilisant la preuve du théorème 2.30, qui fournit la recette permettant de reconstituer  $\mathbf{c} \in X_\tau(\bar{k})$ , à partir de ses coordonnées. Le type de  $\mathbf{c}(t)$ , pour  $t \in \bar{k}^*$  est donné par

$$s_{\mathbf{c}(t)}(l-1) = s_{\mathbf{c}}(l) \text{ et, si } l \geq 2, \quad \forall d \in \llbracket 0, l-2 \rrbracket, \quad s_{\mathbf{c}(t)}(d) = s_{\mathbf{c}}(d).$$

Il ne dépend donc pas de  $t \in \bar{k}^*$ . Les espaces vectoriels suivants ne dépendent pas non plus de  $t \in \bar{k}^*$  :

$$\tau \overline{V}_{\mathbf{c}(t),v(i)} = \overline{V}_{\mathbf{c},v_c(l-1)}, \quad \tau \overline{W}_{\mathbf{c}(t),w(-i-1)} = \overline{W}_{\mathbf{c},w_c(-l)}$$

$$\tau \overline{W}_{\mathbf{c}(t),w(i)} = \overline{W}_{\mathbf{c},w_c(l-1)}, \quad \tau \overline{V}_{\mathbf{c}(t),v(-i-1)} = \overline{V}_{\mathbf{c},v_c(-l)}.$$

Comme  $\mathbf{c}$  est en position générale par rapport à  $\tau$  et par rapport à  $\tau'$ , le sous-espace  $\overline{W}_{\mathbf{c},w_c(-l)}$  est un supplémentaire commun aux sous-espaces  $\tau \overline{W}_{v(i)}^0$  et  $\tau' \overline{W}_{v(i)}^0$  dans  $\overline{W}$ . De même,  $\overline{V}_{\mathbf{c},v_c(-l)}$  est un supplémentaire commun à  $\tau \overline{V}_{w(i)}^0$  et  $\tau' \overline{V}_{w(i)}^0$  dans  $\overline{V}$ . Comme  $\mathbf{c}(0) = \pi_{i+1}(\mathbf{c})$  appartient à  $X_{\tau'}(\bar{k})$  qui est ouvert dans  $X_i(\bar{k})$ , il existe un ouvert  $U \subseteq \mathbb{A}^1$  tel que pour tout  $t \in U(\bar{k})$ ,  $\mathbf{c}(t)$  appartient à  $X_{\tau'}(\bar{k})$ . On note alors, pour tout  $t \in U(\bar{k})$ ,  $p_t$  et  $q_t$  les applications linéaires rendant les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \tau \overline{V}_{v(i)} & \xleftarrow{p_t} & \tau' \overline{V}_{v(i)} \\ \uparrow // \tau \overline{V}_{n-v(i)}^0 & & \downarrow // \tau' \overline{V}_{n-v(i)}^0 \\ \tau \overline{V}_{\mathbf{c}(t),v(i)} & \xleftarrow{// \tau \overline{V}_{n-v(i)}^0} & \tau' \overline{V}_{\mathbf{c}(t),v(i)} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \tau \overline{W}_{w(i)} & \xleftarrow{q_t} & \tau' \overline{W}_{w(i)} \\ \uparrow // \tau \overline{W}_{n-w(i)}^0 & & \downarrow // \tau' \overline{W}_{n-w(i)}^0 \\ \tau \overline{W}_{\mathbf{c}(t),w(i)} & \xleftarrow{// \tau \overline{W}_{n-w(i)}^0} & \tau' \overline{W}_{\mathbf{c}(t),w(i)} \end{array}$$

commutatifs. On obtient ainsi deux morphismes

$$p : U \rightarrow \text{Hom}(\tau' \overline{V}_{v(i)}, \tau \overline{V}_{v(i)}), \quad t \mapsto p_t$$

$$q : U \rightarrow \text{Hom}(\tau' \overline{W}_{w(i)}, \tau \overline{W}_{w(i)}), \quad t \mapsto q_t.$$

Revenons à la preuve proprement dite du lemme. La courbe  $(t \rightarrow \mathbf{c}(t))$  n'étant pas tangente à la sous-variété  $Y_i(\bar{k})$  au point  $\mathbf{c}(0)$ , on peut écrire, pour tout  $t \in U(\bar{k})$ ,

$$\begin{cases} a_{\mathbf{c}(t),i}^{\tau'} = ta + \text{termes d'ordre supérieur en } t \\ b_{\mathbf{c}(t),i}^{\tau'} = tb + \text{termes d'ordre supérieur en } t, \end{cases}$$

où le couple  $(a, b)$  est non nul. Par conséquent, la droite  $\langle d_{\pi_{i+1}(\mathbf{c})} \varphi_{\tau, \tau'}(a_{\mathbf{c},i,l}^\tau, b_{\mathbf{c},i,l}^\tau) \rangle$  correspond au point  $\lim_{t \rightarrow 0} [a_{\mathbf{c}(t),i}^{\tau'} : b_{\mathbf{c}(t),i}^{\tau'}]$  dans

$$\mathbb{P}(\text{Hom}(\tau' \overline{V}_{v(i)}, \tau' \overline{W}_{v(i)}^0) \oplus \text{Hom}(\tau' \overline{W}_{w(i)}, \tau' \overline{V}_{w(i)}^0)).$$

On va obtenir le lemme en calculant cette limite de manière alternative.

D'après la proposition 2.18, pour tout  $t \in U(\bar{k})$ , les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
\tau \overline{V}_{\mathbf{c}(t),v(i)} & \xleftarrow{\tau \overline{V}_{n-v(i)}^0} & \tau' \overline{V}_{\mathbf{c}(t),v(i)} \\
\downarrow \alpha_{\mathbf{c}(t),l-1} & & \downarrow \alpha_{\mathbf{c}(t),l-1} \\
\tau \overline{W}_{v(i)}^0 & \xrightarrow{\tau \overline{W}_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-l)}} & \tau' \overline{W}_{v(i)}^0 \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
\tau \overline{W}_{\mathbf{c}(t),w(i)} & \xleftarrow{\tau \overline{W}_{n-w(i)}^0} & \tau' \overline{W}_{\mathbf{c}(t),w(i)} \\
\downarrow \beta_{\mathbf{c}(t),l-1} & & \downarrow \beta_{\mathbf{c}(t),l-1} \\
\tau \overline{V}_{w(i)}^0 & \xrightarrow{\tau \overline{V}_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-l)}} & \tau' \overline{V}_{w(i)}^0 \\
\end{array}$$

sont commutatifs. On voit donc que  $[a_{\mathbf{c}(t),i}^{\tau'} : b_{\mathbf{c}(t),i}^{\tau'}] = [i \circ a_{\mathbf{c},i,l}^{\tau} \circ p_t : j \circ b_{\mathbf{c},i,l}^{\tau} \circ q_t]$ , où on a noté  $i$  et  $j$  les applications linéaires

$$i : \tau \overline{W}_{v(i)}^0 \xrightarrow{\tau \overline{W}_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-l)}} \tau' \overline{W}_{v(i)}^0, \quad j : \tau \overline{V}_{w(i)}^0 \xrightarrow{\tau \overline{V}_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-l)}} \tau' \overline{V}_{w(i)}^0.$$

Par conséquent, le point de  $\mathbb{P}(\text{Hom}(\tau' \overline{V}_{v(i)}, \tau' \overline{W}_{v(i)}^0) \oplus \text{Hom}(\tau' \overline{W}_{w(i)}, \tau' \overline{V}_{w(i)}^0))$  que l'on recherche est

$$[i \circ a_{\mathbf{c},i,l} \circ p_0 : j \circ b_{\mathbf{c},i,l} \circ q_0].$$

On peut donc conclure une fois observé que

$$\tau' \overline{V}_{\mathbf{c}(0),v(i)} = \overline{V}_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(l-1)}, \quad \tau' \overline{W}_{\mathbf{c}(0),w(i)} = \overline{W}_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(l-1)},$$

et que, par définition même, il existe des représentants  $(\bar{a}_{\mathbf{c},i,l}^{\tau}, \bar{b}_{\mathbf{c},i,l}^{\tau})$  de  $[a_{\mathbf{c},i,l}^{\tau} : b_{\mathbf{c},i,l}^{\tau}]$  et  $(\bar{a}_{\mathbf{c},i,l}^{\tau'}, \bar{b}_{\mathbf{c},i,l}^{\tau'})$  de  $[a_{\mathbf{c},i,l}^{\tau'} : b_{\mathbf{c},i,l}^{\tau'}]$  tel que les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
\tau \overline{V}_{v(i)} & \xleftarrow{p_0} & \tau' \overline{V}_{v(i)} \\
\downarrow \bar{a}_{\mathbf{c},i,l}^{\tau} & \nearrow & \downarrow \bar{a}_{\mathbf{c},i,l}^{\tau'} \\
& \overline{V}_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(l-1)} & \\
\tau \overline{W}_{v(i)}^0 & \xrightarrow{i} & \tau' \overline{W}_{v(i)}^0 \\
& \downarrow \alpha_{\mathbf{c},l} & \\
& \overline{W} / \overline{W}_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-l)} & 
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
\tau \overline{W}_{w(i)} & \xleftarrow{q_0} & \tau' \overline{W}_{w(i)} \\
\downarrow \bar{b}_{\mathbf{c},i,l}^{\tau} & \nearrow & \downarrow \bar{b}_{\mathbf{c},i,l}^{\tau'} \\
& \overline{W}_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(l-1)} & \\
\tau \overline{V}_{w(i)}^0 & \xrightarrow{j} & \tau' \overline{V}_{w(i)}^0 \\
& \downarrow \beta_{\mathbf{c},l} & \\
& \overline{V} / \overline{V}_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-l)} & 
\end{array}$$

□

Le lemme qui précède permet de munir  $X_{i+1}(\bar{k})$  d'une structure de  $k$ -variété, puisqu'il fournit une bijection entre  $X_{i+1}(\bar{k})$  et l'ensemble des  $\bar{k}$ -points de l'éclatement de  $Y_i$  dans  $X_i$ . Pour cette structure, le corollaire 2.39 montre que le sous-ensemble  $X_{\tau'}(\bar{k})$  est un ouvert affine défini sur  $k$ , pour tout  $\tau' \in \Theta_{i+1}$ . Pour achever de montrer le théorème 2.42, il reste donc à s'assurer que la  $k$ -structure que l'on définit ainsi sur  $X_{\tau'}(\bar{k})$  est la même que celle transférée depuis  $U_{\tau'}(\bar{k})$  par la bijection  $f_{\tau'}$ . C'est ce que fait le lemme suivant :

LEMME 2.45. *Soit  $\tau' \in \Theta_{i+1}$  prolongeant  $\tau \in \Theta_i$ . L'application*

$$\begin{aligned}
X_{\tau'}(\bar{k}) &\rightarrow X_{\tau}(\bar{k}) \times \mathbb{P}(\text{Hom}(\tau \overline{V}_{v(i)}, \tau \overline{W}_{v(i)}^0) \oplus \text{Hom}(\tau \overline{W}_{w(i)}, \tau \overline{V}_{w(i)}^0)) \\
\mathbf{c} &\mapsto (\pi_{i+1}(\mathbf{c}), [a_{\mathbf{c},i,l}^{\tau} : b_{\mathbf{c},i,l}^{\tau}])
\end{aligned}$$

(où  $l$  est la longueur de  $\mathbf{c}$ ) est une immersion définie sur  $k$ , l'ensemble  $X_{\tau'}(\bar{k})$  étant muni de la structure algébrique héritée de  $U_{\tau'}(\bar{k})$  par la bijection  $f_{\tau}$ .

DÉMONSTRATION. Il faut calculer les coordonnées de  $\pi_{i+1}(\mathbf{c})$  dans  $U_{\tau}(\bar{k})$  ainsi que  $[a_{\mathbf{c},i,l}^{\tau} : b_{\mathbf{c},i,l}^{\tau}]$  en fonction des coordonnées de  $\mathbf{c}$  dans  $U_{\tau'}(\bar{k})$ . On note  $s_{\tau'} = (v, w)$ , et on omet les symboles  $\tau$  et  $\tau'$  dans les notations  ${}^{\tau}\bar{V}_{v(i)}$ ,  ${}^{\tau'}\bar{V}_{v(i)}$ , ...

On suppose, pour fixer les idées, que  $v(i+1) = v(i) - 1$ . Dans ce cas, les coordonnées  $d_{\mathbf{c},w(i)}$ ,  $\tilde{v}_{\mathbf{c},v(i)+1}$ , ...,  $\tilde{v}_{\mathbf{c},v(-i-1)}$ ,  $\tilde{w}_{\mathbf{c},w(i)+1}$ , ...,  $\tilde{w}_{\mathbf{c},w(-i-1)}$ ,  $x_{\mathbf{c},0}$ , ...,  $x_{\mathbf{c},i-1}$  de  $\mathbf{c}$  et les coordonnées analogues pour  $\pi_{i+1}(\mathbf{c})$  coïncident (par définition même de ces quantités, et de  $\pi_{i+1}(\mathbf{c})$ ). De plus, d'après la proposition 2.22, et le fait que  $V_{\pi_{i+1}(\mathbf{c}),v(i)} = V_{\mathbf{c},v(i)}$ , on a

$$\forall x \in V_{v(i)-1}, \quad c_{\pi_{i+1}(\mathbf{c}),v(i)}(x) = c_{\mathbf{c},v(i)-1}(x) - v_{v(i)}^*(c_{\mathbf{c},v(i)-1}(x))(v_{v(i)} + \tilde{v}_{\mathbf{c},v(i)}).$$

Il reste donc à calculer les quantités

$$a_{\pi_{i+1}(\mathbf{c}),i}, \quad b_{\pi_{i+1}(\mathbf{c}),i}, \quad [a_{\mathbf{c},i,l}^{\tau} : b_{\mathbf{c},i,l}^{\tau}]$$

en fonction des coordonnées de  $\mathbf{c}$  dans  $U_{\tau'}(\bar{k})$ . Pour cela, on distingue deux cas.

Dans le premier cas,  $\pi_{i+1}(\mathbf{c}) \notin Y_i(\bar{k})$ . On a donc  $\pi_{i+1}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ . On fixe un représentant  $(\alpha_{\mathbf{c},l}, b_{\mathbf{c},l})$  comme dans la définition 2.26. Remarquons qu'alors  $x_{\mathbf{c},i} = x_{i,\mathbf{c}}$ . Par définition, on a

$$\forall x \in V_{v(i)}, \quad a_{\mathbf{c},i}(x) = \alpha_{\mathbf{c},l}(x + c_{\mathbf{c},v(i)}(x)).$$

Pour  $x = v_{v(i)}$ , cela donne

$$a_{\mathbf{c},i}(v_{v(i)}) = x_{\mathbf{c},i}(w_{n-v(i)+1} + \tilde{w}_{\mathbf{c},n-v(i)+1}).$$

Pour  $x \in V_{v(i)-1}$ , d'après l'égalité reliant  $c_{\mathbf{c},v(i)}$  et  $c_{\mathbf{c},v(i)-1}$  énoncée plus haut, on a

$$\forall x \in V_{v(i)-1}, \quad a_{\mathbf{c},i}(x) = \alpha_{\mathbf{c},l}(x + c_{\mathbf{c},v(i)-1}(x) - v_{v(i)}^*(c_{\mathbf{c},v(i)-1}(x))(v_{v(i)} + \tilde{v}_{\mathbf{c},v(i)}))$$

ce qui se réécrit aussi

$$\forall x \in V_{v(i)-1}, \quad a_{\mathbf{c},i}(x) = x_{\mathbf{c},i}(a_{\mathbf{c},i+1}(x) - v_{v(i)}^*(c_{\mathbf{c},v(i)-1}(x))(w_{n-v(i)+1} + \tilde{w}_{\mathbf{c},n-v(i)+1})).$$

On vérifie facilement que  $b_{\mathbf{c},i} = x_{\mathbf{c},i}b_{\mathbf{c},i+1}$ . Par ailleurs, on a

$$[a_{\mathbf{c},i,l} : b_{\mathbf{c},i,l}] = [a_{\mathbf{c},i} : b_{\mathbf{c},i}],$$

ce qui achève le calcul.

Plaçons-nous maintenant dans le second cas, où  $\pi_{i+1}(\mathbf{c})$  appartient à  $Y_i(\bar{k})$ . On sait qu'alors

$$a_{\pi_{i+1}(\mathbf{c}),i} = 0 \text{ et } b_{\pi_{i+1}(\mathbf{c}),i} = 0.$$

Par ailleurs, des calculs en tous points semblables à ceux effectués ci-dessus montrent que l'on peut choisir un représentant  $(a_{\mathbf{c},i,l}, b_{\mathbf{c},i,l})$  de  $[a_{\mathbf{c},i,l} : b_{\mathbf{c},i,l}]$  tel que

$$a_{\mathbf{c},i,l}(v_{v(i)}) = w_{n-v(i)+1} + \tilde{w}_{\mathbf{c},n-v(i)+1},$$

$$\forall x \in V_{v(i)-1}, \quad a_{\mathbf{c},i,l}(x) = a_{\mathbf{c},i+1}(x) - v_{v(i)}^*(c_{\mathbf{c},v(i)-1}(x))(w_{n-v(i)+1} + \tilde{w}_{\mathbf{c},n-v(i)+1}),$$

et  $b_{\mathbf{c},i,l} = b_{\mathbf{c},i+1}$ . Comme  $x_{\mathbf{c},i} = 0$  dans ce cas, on voit que les formules énoncées ci-dessus restent valables, achevant le calcul.  $\square$

On a donc achevé de montrer l'étape de récurrence. Cela termine la preuve des théorèmes 2.42 et I.  $\square$

La construction de la variété  $X_i$  étant invariante par extension des scalaires, on voit que la proposition 2.43 reste valable pour toute extension de corps  $K$  de  $k$ , c'est-à-dire que l'ensemble des  $K$ -points de  $X_i$  est l'ensemble  $X_i(K)$ , etc. Se pose alors la question d'une interprétation modulaire de  $X_i$  :



QUESTION 2.46. *Quel est le foncteur des points de  $X_i$  ? Autrement dit, si  $S$  est un  $k$ -schéma, que vaut l'ensemble  $X_i(S)$  ?*

La réponse à cette question n'est pas essentielle pour ce qui nous occupe (construction de compactifications log homogènes) mais néanmoins intéressante, puisqu'elle fournit la bonne définition de « familles de collinéations croisées complètes ».

On répond maintenant à la question 1.12, concernant l'ensemble ordonné des orbites de  $G$  dans la variété  $X_i$ .

PROPOSITION 2.47. *Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , et  $s \in \Pi_i$ . L'orbite  $\Omega_s(\bar{k})$  de  $G(\bar{k})$  dans  $X_i(\bar{k})$  est une sous-variété définie sur  $k$ . On note  $\Omega_s$  la variété sous-jacente. On a*

$$\forall s, s' \in \Pi_i, \quad \Omega_s \subseteq \overline{\Omega_{s'}} \iff s \leq s'.$$

Par conséquent, l'orbite  $\Omega_s$  est fermée si et seulement si  $s \in \Pi_i^{\min}$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $\tau \in \Theta_i$ , et  $s \in \Pi_i$ . On suppose que  $s \geq s_\tau$ . Il résulte du corollaire 2.31 que l'intersection  $\Omega_s(\bar{k}) \cap X_\tau(\bar{k})$  est définie en imposant les indices où les coordonnées  $x_j$  s'annulent, ainsi que le rang des applications linéaires  $a_i$  et  $b_i$ . Cela montre bien que  $\Omega_s(\bar{k})$  est définie sur  $k$ . Pour ce qui est des assertions restantes, elles suivent facilement de la description locale des orbites de  $G$  dans  $X_i$ .  $\square$

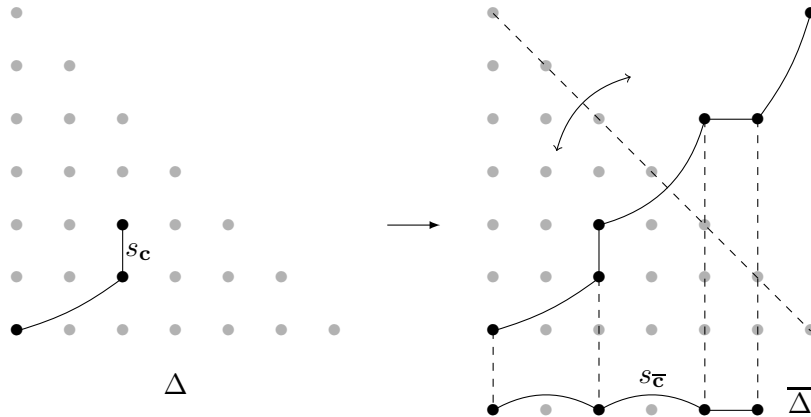
Pour terminer cette section, on discute du lien entre l'espace des collinéations croisées complètes entre  $V$  et  $W$  et l'espace des collinéations complètes  $V \rightarrow W$  (section 1.3). On note

$$\overline{\Omega} := \mathbb{P}(\text{Iso}(W, V)), \quad \overline{G} := \text{PGL}(V) \times \text{PGL}(W),$$

et, plus généralement, on note avec une barre toutes les données qui apparaissent dans la construction de l'espace des collinéations complètes, comme expliquée dans la section 1.3.

Voyons tout d'abord comment associer naturellement à  $\mathbf{c} \in X_n(k)$  un élément  $\overline{\mathbf{c}}$  de  $\overline{X}_{n-1}(k)$ . Pour cela, on utilise la description de l'ensemble  $\overline{X}_{n-1}(k)$  donnée dans la proposition 1.10. On doit définir un chemin  $s_{\overline{\mathbf{c}}}$  tracé dans  $\overline{\Delta}$  et admissible au rang  $n$ , une paire de drapeaux  $(\overline{\mathbf{c}}_V, \overline{\mathbf{c}}_W)$  indexée par  $s_{\overline{\mathbf{c}}}$ , et un isomorphisme entre les gradués de ces drapeaux, renversant les degrés, et vu à homothétie en chaque degré près.

Pour définir le chemin  $s_{\overline{\mathbf{c}}}$ , on procède de la manière suivante. On relie le chemin  $s_{\mathbf{c}}$  à



son symétrique par rapport à la droite  $v + w = n$ , puis on projette le tout sur l'axe des abscisses. Comme  $s_{\mathbf{c}}(l) = 0$ , on obtient de cette manière un chemin tracé dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , commençant au sommet  $n$ , et s'achevant au sommet 0. En écartant le sommet 0, on obtient le chemin  $s_{\overline{\mathbf{c}}}$ , tracé dans  $\overline{\Delta} = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Par ailleurs, on pose  $(\overline{\mathbf{c}}_V, \overline{\mathbf{c}}_W) = (\mathbf{c}_V, \mathbf{c}_W)$ .

Il s'agit bien d'une paire de drapeaux indexée par le chemin  $s_{\bar{c}}$ . Enfin, remarquons que la relation d'équivalence que l'on a définie sur l'ensemble  $\text{Hom}(\text{gr}(\mathbf{c}_V), \text{gr}(\mathbf{c}_W))$  dans la section 2.2 est plus fine que celle définie dans la section 1.3. Cela permet de poser  $[\iota_{\bar{c}}] = [\iota_{\mathbf{c}}]$ .

De manière analogue à ce qu'on a fait pour l'espace des collinéations croisées complètes entre  $V$  et  $W$ , on peut définir des ouverts affines sur l'espace des collinéations complètes de  $V$  dans  $W$  par des conditions de « position générale » par rapport à certaines données. En utilisant ces ouverts, on montre alors la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.48.** *L'espace  $X_n$  des collinéations croisées complètes entre  $V$  et  $W$  domine l'espace  $\overline{X}_{n-1}$  des collinéations complètes de  $V$  dans  $W$ . De plus le morphisme  $X_n \rightarrow \overline{X}_{n-1}$  induit l'application  $\mathbf{c} \mapsto \bar{\mathbf{c}}$  sur les  $k$ -points.*

**2.4. Démonstration du théorème II.** Comme on l'a dit à la fin de la section 2.3, l'espace des collinéations croisées complètes entre  $V$  et  $W$  domine l'espace des collinéations complètes de  $V$  dans  $W$ . Cela est équivalent au fait que la compactification  $X_n$  est log homogène. Montrons-le différemment :

**THÉORÈME II.** *La compactification  $X_n$  est log homogène.*

**DÉMONSTRATION.** On reprend les notations introduites dans la section 1.4. En particulier, on dispose d'un drapeau  $\delta_V$  dans  $V$ , et d'un drapeau  $\delta_W$  dans  $W$ . Les couleurs de l'espace homogène  $\Omega$  sont données par

$$D_r = \{f \in \Omega(\bar{k}), \quad f(\overline{V}_r) \cap \overline{W}_{n-r} \neq \{0\}\}$$

pour  $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note

$$V_j^0 = \langle v_{n-j+1}, \dots, v_n \rangle \text{ et } W_j^0 = \langle w_{n-j+1}, \dots, w_n \rangle.$$

Ces espaces vectoriels s'arrangent en deux drapeaux complets,  $\delta_V^0$  et  $\delta_W^0$ , qui intersectent transversalement les drapeaux  $\delta_V$  et  $\delta_W$  respectivement. Soient  $s \in \Pi_n^{\min}$  et  $\tau \in \Theta_n$  défini par

$$s_\tau = s, \quad \tau_V = \delta_V^0, \quad \tau_V^0 = \delta_V, \quad \tau_W = \delta_W^0, \quad \tau_W^0 = \delta_W$$

et les vecteurs  $v_j$  et  $w_j$ . Soient  $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et  $f \in \Omega(\bar{k})$ . D'après la proposition 2.13, on a

$$f \in X_\tau(\bar{k}) \iff \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \text{Graphe}(f) \cap (\overline{V}_j \oplus \overline{W}_{n-j}) = \{0\}.$$

Comme

$$\text{Graphe}(f) \cap (\overline{V}_r \oplus \overline{W}_{n-r}) = \{0\} \iff f(\overline{V}_r) \cap \overline{W}_{n-r} = \{0\},$$

on voit que  $D_r \cap X_\tau = \emptyset$ . Comme  $X_\tau$  est ouvert, on a aussi  $\overline{D}_r \cap X_\tau = \emptyset$ . Ceci interdit l'inclusion  $\Omega_s \subseteq \overline{D}_r$ , puisque  $\Omega_s \cap X_\tau$  est non vide. Comme ce raisonnement fonctionne avec n'importe quel  $s \in \Pi_n^{\min}$ , et que les orbites fermées de  $G(\bar{k})$  dans  $X_n(\bar{k})$  sont exactement les  $(\Omega_s)_{s \in \Pi_n^{\min}}$ , on peut conclure que le plongement  $X_n$  est sans couleur, achevant par-là de montrer que le plongement  $X_n$  est log homogène (comme on l'a fait remarquer dans la section 1.1, les compactifications log homogènes de  $\Omega$  sont exactement les compactifications sans couleur).  $\square$

Notre but maintenant est de calculer l'éventail de la compactification  $X_n$ . Pour cela, on va montrer que, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , et pour tout  $\tau \in \Theta_i$ , l'ouvert  $X_\tau$  de  $X_i$  est un « ouvert de structure locale », au sens du théorème 2.13, chapitre 1. Autrement dit, on va montrer que l'ouvert  $X_\tau$  est stable sous l'action d'un sous-groupe parabolique  $P_\tau$  de  $G$ , et expliciter l'action de ce sous-groupe dans  $X_\tau$ . Il est commode de définir :

DÉFINITION 2.49. Soient  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\tau \in \Theta_i$ , et  $g \in G(k)$ . On note  $g(\tau)$  l'élément de  $\Theta_i$  vérifiant  $s_{g(\tau)} = s_\tau$ , et, en notant  $(v, w)$  ce chemin,

$$\begin{aligned} g(\tau)_V &= g(\tau_V), & g(\tau)_V^0 &= g(\tau_V^0), & g(\tau)_W &= g(\tau_W), & g(\tau)_W^0 &= g(\tau_W^0) \\ \forall j \in \llbracket v(i) + 1, v(-i - 1) \rrbracket, & & v_j^{g(\tau)} &= g(v_j^\tau), \\ \forall j \in \llbracket w(i) + 1, w(-i - 1) \rrbracket, & & w_j^{g(\tau)} &= g(w_j^\tau). \end{aligned}$$

La proposition qui suit relie les ouverts  $X_\tau$  et  $X_{g(\tau)}$  :

PROPOSITION 2.50. Soit  $\tau \in \Theta_i$ , et  $g \in G(k)$ . Alors  $g$  envoie  $X_\tau$  dans  $X_{g(\tau)}$ . Soit  $\mathbf{c} \in X_\tau(k)$ . On note  $c_{v(i)}, d_{w(i)}, \dots$  les coordonnées de  $\mathbf{c}$  dans  $U_\tau(k)$  et  $c'_{v(i)}, d'_{w(i)}, \dots$  celles de  $g(\mathbf{c})$  dans  $U_{g(\tau)}(k)$ . On a :

$$\begin{aligned} c'_{v(i)} &= g c_{v(i)} g^{-1}, & d'_{w(i)} &= g d_{w(i)} g^{-1} \\ \forall j \in \llbracket v(i) + 1, v(-i - 1) \rrbracket, & & \tilde{v}'_j &= g(\tilde{v}_j), & \forall j \in \llbracket w(i) + 1, w(-i - 1) \rrbracket, & & \tilde{w}'_j &= g(\tilde{w}_j) \\ \forall j \in \llbracket 0, i - 1 \rrbracket, & & x'_j &= x_j, & a'_i &= g a_i g^{-1}, & b'_i &= g b_i g^{-1}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Pour établir la première assertion, il suffit de vérifier que  $g$  envoie  $X_\tau(k)$  dans  $X_{g(\tau)}(k)$ . Soit  $\mathbf{c} \in X_\tau(k)$ . Par définition, on a  $s_{g(\mathbf{c})} = s_\mathbf{c}$ , donc  $s_{g(\mathbf{c})} \geq s_\tau$ , et la condition (1) de 2.11 est vérifiée. D'après la condition (2) (pour  $\mathbf{c}$ ), les drapeaux  $\mathbf{c}_V$  (resp.  $\mathbf{c}_W$ ) et  $\tau_V^0$  (resp.  $\tau_W^0$ ) s'intersectent transversalement. En appliquant  $g$ , on voit que les drapeaux  $g(\mathbf{c}_V) = g(\mathbf{c})_V$  (resp.  $g(\mathbf{c})_W$ ) et  $g(\tau_V^0) = g(\tau)_V^0$  (resp.  $g(\tau)_W^0$ ) s'intersectent transversalement. Ainsi, la condition (2) de 2.11 est vérifiée. Vérifions maintenant la condition (3). On note  $l$  la longueur de  $\mathbf{c}$ . Soit  $d \in \llbracket -l, l \rrbracket$ . On note encore  $g$  les isomorphismes induits par  $g$  sur les gradués

$$g : \text{gr}(\mathbf{c}_V)_d \rightarrow \text{gr}(g(\mathbf{c})_V)_d, \quad g : \text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d} \rightarrow \text{gr}(g(\mathbf{c})_W)_{-d}.$$

Par définition, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{gr}(\mathbf{c}_V)_d & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{c}}} & \text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d} \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ \text{gr}(g(\mathbf{c})_V)_d & \xrightarrow{\iota_{g(\mathbf{c})}} & \text{gr}(g(\mathbf{c})_W)_{-d} \end{array}$$

est commutatif. Par ailleurs, le drapeau induit par  $g(\tau)_V^0$  (resp.  $g(\tau)_W^0$ ) sur  $\text{gr}(g(\mathbf{c})_V)_d$  (resp.  $\text{gr}(g(\mathbf{c})_W)_{-d}$ ) est exactement l'image par  $g$  du drapeau induit par  $\tau_V^0$  (resp.  $\tau_W^0$ ) sur  $\text{gr}(\mathbf{c}_V)_d$  (resp.  $\text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d}$ ). On en déduit que les drapeaux

$$\iota_{g(\mathbf{c})}(g(\tau)_V^0 \cap \text{gr}(g(\mathbf{c})_V)_d) \text{ et } g(\tau)_W^0 \cap \text{gr}(g(\mathbf{c})_W)_{-d}$$

s'intersectent transversalement, achevant la preuve de la première assertion.

Passons au calcul des coordonnées de  $g(\mathbf{c})$ . Pour alléger les notations, on omet le symbole  $\tau$  dans les notations  ${}^\tau V_j, {}^\tau V_{\mathbf{c},j} \dots$  et le symbole  $g(\tau)$  dans les notations  ${}^{g(\tau)} V_j, {}^{g(\tau)} V_{\mathbf{c},j} \dots$

Les arguments donnés ci-dessus montrent que le drapeau  $\mathbf{c}_V^{g(\tau)}$  (resp.  $\mathbf{c}_W^{g(\tau)}$ ) est l'image par  $g$  du drapeau  $\mathbf{c}_V^\tau$  (resp.  $\mathbf{c}_W^\tau$ ). Par conséquent, pour tout  $j$  compris entre  $v(i)$  et

$v(-i-1)$ , on a  $V_{g(\mathbf{c}),j} = g(V_{\mathbf{c},j})$ . Comme  $V_{\mathbf{c},j}$  est le graphe de l'application linéaire  $c_j : V_j \rightarrow V_{n-j}^0$ , on voit que

$$V_{g(\mathbf{c}),j} = \text{Graphe}(gc_j g^{-1} : g(V_j) \rightarrow g(V_{n-j}^0)).$$

Ceci montre déjà que  $c'_{v(i)} = gc_{v(i)} g^{-1}$ . De plus, pour tout  $j$  compris entre  $v(i)+1$  et  $v(-i-1)$ , on a, par définition,

$$\tilde{v}'_j = c'_j(g(v_j)) = g(c_j(v_j)) = g(\tilde{v}_j).$$

De la même façon, on montre que  $c'_{w(i)} = gc_{w(i)} g^{-1}$  et que, pour tout  $j$  compris entre  $w(i)+1$  et  $w(-i-1)$ , on a  $\tilde{w}'_j = g(\tilde{w}_j)$ .

Fixons un représentant  $\iota_{\mathbf{c}}$  de  $[\iota_{\mathbf{c}}]$ , et notons  $\iota_{g(\mathbf{c})}$  le représentant de  $[\iota_{g(\mathbf{c})}]$  faisant commuter le diagramme ci-dessus. Par définition, pour tout  $j \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket$ , on a, dans le gradué correspondant

$$\begin{cases} \iota_{\mathbf{c}}(v_{v(j)} + \tilde{v}_{v(j)}) = x_{\iota_{\mathbf{c}},j}(w_{n-v(j)+1} + \tilde{w}_{n-v(j)+1}) & \text{si } v(j+1) = v(j) - 1 \\ \iota_{\mathbf{c}}^{-1}(w_{w(j)} + \tilde{w}_{w(j)}) = x_{\iota_{\mathbf{c}},j}(v_{n-w(j)+1} + \tilde{v}_{n-w(j)+1}) & \text{si } w(j+1) = w(j) - 1. \end{cases}$$

En appliquant  $g$  des deux côtés, et en utilisant la commutativité du diagramme ci-dessus, on obtient

$$\iota_{g(\mathbf{c})}(g(v_{v(j)} + \tilde{v}_{v(j)})) = x_{\iota_{g(\mathbf{c})},j}(g(w_{n-v(j)+1}) + g(\tilde{w}_{n-v(j)+1}))$$

si  $v(j+1) = v(j) - 1$ , et

$$\iota_{g(\mathbf{c})}^{-1}(g(w_{w(j)} + \tilde{w}_{w(j)})) = x_{\iota_{g(\mathbf{c})},j}(g(v_{n-w(j)+1}) + g(\tilde{v}_{n-w(j)+1}))$$

si  $w(j+1) = w(j) - 1$ , ce qui montre que, pour tout  $j \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket$ , on a  $x_{\iota_{g(\mathbf{c})},j} = x_{\iota_{\mathbf{c}},j}$ . On en déduit facilement que  $x'_j = x_j$ .

Notons  $\iota_{\mathbf{c}}$  le représentant de  $[\iota_{\mathbf{c}}]$  vérifiant  $x_{\iota_{\mathbf{c}},i-1} = 1$ . Alors, si  $\iota_{g(\mathbf{c})}$  désigne le représentant de  $[\iota_{g(\mathbf{c})}]$  faisant commuter le diagramme ci-dessus, les calculs ci-dessus montrent que  $x_{\iota_{g(\mathbf{c})},i-1} = 1$ . Par définition, on a alors

$$\forall x \in V_{v(i)}, \quad a_i(x) = \alpha_{\mathbf{c},l}(x + c_{v(i)}(x)).$$

En appliquant  $g$  des deux côtés, et en utilisant la commutativité du diagramme ci-dessus, on obtient

$$\forall x \in g(V_{v(i)}), \quad g(a_i(g^{-1}(x))) = \alpha_{g(\mathbf{c}),l}(x + c'_{v(i)}(x)),$$

ce qui prouve que  $a'_i = ga_i g^{-1}$ . On montre de la même manière que  $b'_i = gb_i g^{-1}$ .  $\square$

En corollaire, on obtient le résultat suivant :

**COROLLAIRE 2.51.** *Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Pour tout chemin  $s \in \Pi_i^{\min}$ , on fixe une donnée  $\tau_s$  de type  $i$  vérifiant  $s_{\tau_s} = s$ . Alors les translatés des ouverts  $(X_{\tau_s})_{s \in \Pi_i^{\min}}$  par des éléments du groupe  $G(k)$  recouvrent  $X_i$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\tau \in \Theta_i$ . On note  $s = s_{\tau}$ . On montre facilement qu'il existe un élément  $g \in G(k)$  vérifiant  $\tau = g(\tau_s)$ . D'après la proposition 2.50, on a alors  $X_{\tau} = g(X_{\tau_s})$ . Le corollaire 2.41 permet maintenant de conclure.  $\square$

On fixe maintenant  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , et un élément  $\tau \in \Theta_i$ . On omet le symbole  $\tau$  dans les notations  ${}^{\tau}V_j$ ,  ${}^{\tau}V_{\mathbf{c},j}$ ,  $v_j^{\tau}$ ,  $c_{\mathbf{c},v(i)}^{\tau}$ , ... On note  $(v, w)$  le chemin  $s_{\tau}$ .

**DÉFINITION 2.52.** *On note  $P_{\tau} \subseteq G$  le stabilisateur des drapeaux  $\tau_V^0$  et  $\tau_W^0$ . C'est un sous-groupe parabolique de  $G$ . On note aussi  $L_{\tau}$  le stabilisateur des drapeaux  $\tau_V, \tau_V^0, \tau_W$  et  $\tau_W^0$ . C'est un sous-groupe de Levi de  $P_{\tau}$ .*

Avant d'énoncer le résultat de structure locale, on a encore besoin d'une définition :

DÉFINITION 2.53. *On note*

$$S_\tau = \mathbb{A}(k^i \oplus \text{Hom}(V_{v(i)}, W_{v(i)}^0) \oplus \text{Hom}(W_{w(i)}, V_{w(i)}^0)) \subseteq U_\tau,$$

et  $X'_\tau := f_\tau^{-1}(S_\tau)$ .

On voit que  $X'_\tau$  est une sous-variété fermée de  $X_\tau$ .

PROPOSITION 2.54. *L'ouvert  $X_\tau$  de  $X_i$  est stable sous l'action du groupe  $P_\tau$ . Par ailleurs, la sous-variété fermée  $X'_\tau$  de  $X_\tau$  est stable par  $L_\tau$  et le morphisme naturel*

$$R_u(P_\tau) \times X'_\tau \rightarrow X_\tau, \quad (r, x) \mapsto rx$$

*est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Le fait que l'ouvert  $X_\tau$  soit stable sous l'action de  $P_\tau$  est une conséquence de la proposition 2.50, une fois qu'on a remarqué que, si  $\tau$  et  $\sigma$  sont deux éléments de  $\Theta_i$  vérifiant

$$s_\tau = s_\sigma, \quad \tau_V^0 = \sigma_V^0, \quad \tau_W^0 = \sigma_W^0$$

alors, d'après la définition 2.11, les ouverts  $X_\tau$  et  $X_\sigma$  sont égaux. L'ensemble  $X'_\tau(k)$  est exactement l'ensemble des  $\mathbf{c}' \in X_\tau(k)$  vérifiant

$$\forall j \in \llbracket v(i), v(-i-1) \rrbracket, \quad V_{\mathbf{c}',j} = V_j \text{ et } \forall j \in \llbracket w(i), w(-i-1) \rrbracket, \quad W_{\mathbf{c}',j} = W_j.$$

Comme le sous-groupe  $L_\tau(k)$  stabilise les drapeaux  $\tau_V$  et  $\tau_W$ , on peut conclure qu'il stabilise  $X'_\tau(k)$ . Comme le corps  $k$  est quelconque, on peut en déduire que  $L_\tau$  stabilise  $X'_\tau$ . Le reste de la proposition est une conséquence des calculs effectués ci-dessous (proposition 2.57).  $\square$

On va maintenant calculer explicitement l'action du groupe  $L_\tau(k)$  dans  $X'_\tau(k)$ , et celle de  $R_u(P_\tau)(k)$  dans  $X'_\tau(k)$ . On a besoin de quelques notations supplémentaires. Pour tout  $j \in \llbracket v(i)+1, v(-i-1) \rrbracket$  (resp.  $\llbracket w(i)+1, w(-i-1) \rrbracket$ ), on note  $\chi_j$  (resp.  $\nu_j$ ) le poids de l'action de  $L_\tau$  sur la droite  $\langle v_j \rangle$  (resp.  $\langle w_j \rangle$ ). Pour tout  $j \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket$ , on note  $\psi_j$  le caractère de  $L_\tau$  défini par

$$\psi_j = \begin{cases} \nu_{n-v(j)+1} - \chi_{v(j)} & \text{si } v(j+1) = v(j) - 1 \\ \chi_{n-w(j)+1} - \nu_{w(j)} & \text{si } w(j+1) = w(j) - 1. \end{cases}$$

On note aussi  $\rho_0 = \psi_0$ , et pour tout  $j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$ ,  $\rho_j = \psi_j - \psi_{j-1}$ .

PROPOSITION 2.55. *Soit  $\mathbf{c} \in X'_\tau(k)$ , et  $g \in L_\tau(k)$ . On a :*

$$\forall j \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket, \quad x_{g(\mathbf{c}),j} = \rho_j(g)x_{\mathbf{c},j}$$

$$a_{g(\mathbf{c}),i} = \psi_{i-1}(g)^{-1}ga_{\mathbf{c},i}g^{-1} \text{ et } b_{g(\mathbf{c}),i} = \psi_{i-1}(g)^{-1}gb_{\mathbf{c},i}g^{-1}.$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.50, une fois qu'on a remarqué que les éléments  $\tau$  et  $g(\tau)$  coïncident presque entièrement, les seules différences étant

$$\forall j \in \llbracket v(i)+1, v(-i-1) \rrbracket, \quad v_j^{g(\tau)} = g(v_j) = \chi_j(g)v_j$$

et

$$\forall j \in \llbracket w(i)+1, w(-i-1) \rrbracket, \quad w_j^{g(\tau)} = g(w_j) = \nu_j(g)w_j.$$

$\square$

DÉFINITION 2.56. On note  $R_\tau(k) \subseteq U_\tau(k)$  la somme directe des espaces vectoriels

$$\text{Hom}(V_{v(i)}, V_{n-v(i)}^0), \quad \text{Hom}(W_{w(i)}, W_{n-w(i)}^0)$$

$$\bigoplus_{w(i) \leq j \leq w(-i-1)-1} V_j^0 \quad \text{et} \quad \bigoplus_{v(i) \leq j \leq v(-i-1)-1} W_j^0.$$

On a ainsi  $U_\tau(k) = R_\tau(k) \oplus S_\tau(k)$ , et pour tout  $\mathbf{c} \in X_\tau(k)$ , on note  $r_{\mathbf{c}}$  et  $u'_{\mathbf{c}}$  les coordonnées de  $\mathbf{c}$  selon cette décomposition en somme directe.

En associant à un élément de  $R_\tau(k)$ , dont on note  $c_{v(i)}$ ,  $d_{w(i)}$ ,  $\tilde{v}_{v(i)+1}, \dots, \tilde{v}_{v(-i-1)}$ ,  $\tilde{w}_{w(i)+1}, \dots, \tilde{w}_{w(-i-1)}$  les coordonnées, le drapeau dans  $V$  formé des sous-espaces

$$\text{Graphe}(c_{v(i)}) \oplus \bigoplus_{k=v(i)+1}^j \langle v_j + \tilde{v}_j \rangle$$

pour  $j$  entre  $v(i)$  et  $v(-i-1)$ , et celui dans  $W$  formé des sous-espaces

$$\text{Graphe}(d_{w(i)}) \oplus \bigoplus_{k=w(i)+1}^j \langle w_j + \tilde{w}_j \rangle$$

pour  $j$  entre  $w(i)$  et  $w(-i-1)$ , on obtient un bijection naturelle de  $R_\tau(k)$  sur l'ensemble des couples de drapeaux, l'un dans  $V$ , de type  $v(i), \dots, v(-i-1)$ , l'autre dans  $W$ , de type  $w(i), \dots, w(-i-1)$ , qui intersectent transversalement les drapeaux  $\tau_V^0$  et  $\tau_W^0$  respectivement. Par exemple, le point  $0 \in R_\tau(k)$  est envoyé sur le couple  $(\tau_V, \tau_W)$ . On identifiera dans la suite ces deux ensembles, en utilisant la bijection que l'on vient de définir. Vu de cette manière, le groupe  $R_u(P_\tau)(k)$  agit dans l'ensemble  $R_\tau(k)$ . On note momentanément  $*$  cette action, pour la différencier de celle induite par l'inclusion de  $R_\tau(k)$  dans  $U_\tau(k)$  (on va voir dans un instant que c'est la même action). Pour l'action  $*$ , le groupe  $R_u(P_\tau)(k)$  agit simplement transitivement dans l'ensemble  $R_\tau(k)$ . On a alors le résultat suivant, qui donne une preuve de la deuxième partie de la proposition 2.54.

PROPOSITION 2.57. Soit  $\mathbf{c} \in X'_\tau(k)$ , et  $g \in R_u(P_\tau)(k)$ . On a

$$r_{g(\mathbf{c})} = g * 0 \quad \text{et} \quad u'_{g(\mathbf{c})} = u'_{\mathbf{c}}.$$

DÉMONSTRATION. Comme la composante de  $\mathbf{c}$  appartient à  $X'_\tau(k)$ , on a

$$\forall j \in \llbracket v(i), v(-i-1) \rrbracket, \quad V_{\mathbf{c},j} = V_j \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket w(i), w(-i-1) \rrbracket, \quad W_{\mathbf{c},j} = W_j.$$

Ceci montre que

$$\forall j \in \llbracket v(i), v(-i-1) \rrbracket, \quad V_{g(\mathbf{c}),j} = g(V_j) \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket w(i), w(-i-1) \rrbracket, \quad W_{g(\mathbf{c}),j} = g(W_j),$$

et donc que la composante de  $g(\mathbf{c})$  selon  $R_\tau(k)$  est bien  $g * 0$ . Pour le calcul de  $u'_{g(\mathbf{c})}$ , on fait appel à la proposition 2.50. Fixons un représentant  $\iota_{\mathbf{c}}$  de  $[\iota_{\mathbf{c}}]$ , et notons  $\iota_{g(\mathbf{c})}$  le représentant de  $[\iota_{g(\mathbf{c})}]$  comme dans la preuve de cette proposition. On a alors établi que, pour tout  $j \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket$ , on a  $x_{\iota_{\mathbf{c}},j}^\tau = x_{\iota_{g(\mathbf{c})},j}^{g(\tau)}$ . Pour tout  $j \in \llbracket v(i)+1, v(-i-1) \rrbracket$ , on a  $\tilde{v}_{\mathbf{c},j}^\tau = 0$ , et donc

$$v_j^{g(\tau)} + \tilde{v}_{g(\mathbf{c}),j}^{g(\tau)} = g(v_j^\tau) + g(\tilde{v}_{\mathbf{c},j}^\tau) = g(v_j^\tau) = v_j^\tau + \tilde{v}_{g(\mathbf{c}),j}^\tau.$$

De même, pour tout  $j \in \llbracket w(i)+1, w(-i-1) \rrbracket$ , on a

$$w_j^{g(\tau)} + \tilde{w}_{g(\mathbf{c}),j}^{g(\tau)} = g(w_j^\tau) + g(\tilde{w}_{\mathbf{c},j}^\tau) = g(w_j^\tau) = w_j^\tau + \tilde{w}_{g(\mathbf{c}),j}^\tau.$$

Ces deux dernières observations montrent que, pour tout  $j$  compris entre 0 et  $i - 1$ , on a  $x_{\iota_{g(\mathbf{c})},j}^{g(\tau)} = x_{\iota_{g(\mathbf{c})},j}^\tau$ , et donc  $x_{\iota_{g(\mathbf{c})},j}^\tau = x_{\mathbf{c},j}^\tau$ . On en déduit aisément que, pour tout  $j \in \llbracket 0, i - 1 \rrbracket$ , on a

$$x_{g(\mathbf{c}),j}^\tau = x_{\mathbf{c},j}^\tau.$$

On procède de la même façon pour montrer que

$$a_{g(\mathbf{c}),i}^\tau = a_{\mathbf{c},i}^\tau \text{ et } b_{g(\mathbf{c}),i}^\tau = b_{\mathbf{c},i}^\tau.$$

Cela achève la preuve de la proposition.  $\square$

Voici un corollaire immédiat des proposition 2.55 et 2.57

**COROLLAIRE 2.58.** *Pour tout chemin  $s' \in \Pi_i$  et vérifiant  $s' \geq s$ , le groupe  $P_\tau(k)$  agit transitivement dans l'ensemble  $\Omega_s(k) \cap X_\tau(k)$ .*

Passons au calcul de l'éventail de la compactification  $X_n$  de  $\Omega$ . On a besoin de quelques définitions et notations supplémentaires.

**DÉFINITION 2.59.** *On note  $E$  l'ensemble des couples  $(v, \sigma)$ , où  $v \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , et  $\sigma$  est une permutation de l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dont la restriction à  $\sigma^{-1}(\llbracket 1, v \rrbracket)$  est décroissante, et la restriction à  $\sigma^{-1}(\llbracket v + 1, n \rrbracket)$  est croissante.*

Dans la section 1.4, on a fixé les notations  $V(\Omega)$ , etc. concernant les données combinatoires attachées à l'espace homogène  $\Omega$  sous l'action de  $G$ . A tout élément de l'ensemble  $E$ , on associe maintenant un cône dans  $V(\Omega)$  :

**DÉFINITION 2.60.** *Soit  $(v, \sigma) \in E$ . On note  $\mathcal{C}_{v,\sigma}$  le cône dans  $V(\Omega)$  défini par*

$$\{[x] \in V(\Omega), \quad 0 \leq \epsilon_1(\chi_{\sigma(1)} - \nu_{n-\sigma(1)+1})(x) \leq \dots \leq \epsilon_n(\chi_{\sigma(n)} - \nu_{n-\sigma(n)+1})(x)\}$$

où  $\epsilon_j = 1$  si  $\sigma(j) \in \llbracket 1, v \rrbracket$  et  $\epsilon_i = -1$  sinon.

On a alors :

**PROPOSITION 2.61.** *La variété  $X_n$  est la compactification log homogène de  $\Omega$  correspondant à la subdivision lisse  $(\mathcal{C}_{v,\sigma})_{(v,\sigma) \in E}$  de  $\rho(\mathcal{V}^G)$ .*

**DÉMONSTRATION.** D'après la proposition 1.2 l'éventail que l'on cherche est constitué des cônes figurant dans l'éventail de la variété torique  $\overline{Tf_0}$  et qui sont contenus dans  $\rho(\mathcal{V}^G)$ . Voyons déjà que les cônes proposés sont de ce type. Montrons dans un premier temps qu'ils sont contenus dans  $\rho(\mathcal{V}^G)$ . Soient  $(v, \sigma) \in E$  et  $[x] \in \mathcal{C}_{v,\sigma}$ . Par définition, on a

$$0 \leq \epsilon_1(\chi_{\sigma(1)} - \nu_{n-\sigma(1)+1})(x) \leq \dots \leq \epsilon_n(\chi_{\sigma(n)} - \nu_{n-\sigma(n)+1})(x)$$

où  $\epsilon_j = 1$  si  $\sigma(j) \in \llbracket 1, v \rrbracket$  et  $\epsilon_i = -1$  sinon. Comme  $\sigma$  est décroissante sur  $\sigma^{-1}(\llbracket 1, v \rrbracket)$ , et croissante sur  $\sigma^{-1}(\llbracket v + 1, n \rrbracket)$ , on a en particulier

$$0 \leq (\chi_{v+1} - \nu_{n-v})(x) \leq \dots \leq (\chi_n - \nu_1)(x)$$

et

$$0 \leq -(\chi_v - \nu_{n-v+1})(x) \leq \dots \leq -(\chi_0 - \nu_n)(x).$$

Cela montre que

$$(\chi_1 - \nu_n)(x) \leq \dots \leq (\chi_v - \nu_{n-v+1})(x) \leq 0 \leq (\chi_{v+1} - \nu_{n-v})(x) \leq \dots \leq (\chi_n - \nu_1)(x)$$

et donc que  $[x]$  appartient à  $\rho(\mathcal{V}^G)$ .

Montrons maintenant que les cônes  $(\mathcal{C}_{v,\sigma})_{(v,\sigma) \in E}$  figurent bien dans l'éventail de la variété torique  $\overline{T.f_0}$ . Soit  $s \in \Pi_n^{\min}$ . On note  $\tau \in \Theta_n$  la donnée de type  $n$  définie par

$$s_\tau = s, \quad \tau_V = \delta_V^0, \quad \tau_W = \delta_W, \quad \tau_W = \delta_W^0, \quad \tau_W^0 = \delta_W$$

et par les vecteurs  $v_j$  et  $w_j$ . Remarquons que  $\mathbf{c} = f_0$  appartient à  $X'_\tau(k)$ . En effet,  $f_0(\tau_V^0) = \tau_W$  et  $f_0^{-1}(\tau_W^0) = \tau_V$ , si bien que

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \overline{V}_{\mathbf{c},j} = V_j^0 \text{ et } \overline{W}_{\mathbf{c},j} = W_j^0,$$

ce qui caractérise les éléments de  $X'_\tau(k)$ . De plus, la variété  $X'_\tau$  est torique sous l'action de  $T$ , et  $f_0$  appartient à l'orbite ouverte de  $T$ . D'après la proposition 2.55, le cône  $\mathcal{C}_s$  auquel correspond cette variété torique est défini par

$$\mathcal{C}_s = \{0 \leq \psi_{0,s} \leq \dots \leq \psi_{n-1,s}\},$$

où, pour tout  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , le caractère  $\psi_{j,s}$  de  $T$  est donné par

$$\psi_{j,s} = \begin{cases} \nu_{n-v(j)+1} - \chi_{v(j)} & \text{si } v(j+1) = v(j) - 1 \\ \chi_{n-w(j)+1} - \nu_{w(j)} & \text{si } w(j+1) = w(j) - 1. \end{cases}$$

Observons maintenant que :

LEMME 2.62. *Il existe une bijection  $\gamma : E \rightarrow \Pi_n^{\min}$ , à travers laquelle les cônes que l'on vient de définir et ceux proposés dans l'énoncé se correspondent.*

DÉMONSTRATION. Soit  $(v, \sigma) \in E$ . On pose, pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$v(j) = \text{Card}(\llbracket j+1, n \rrbracket \cap \sigma^{-1}(\llbracket 1, v \rrbracket)), \quad w(j) = \text{Card}(\llbracket j+1, n \rrbracket \cap \sigma^{-1}(\llbracket v+1, n \rrbracket))$$

et  $s(j) = (v(j), w(j))$ . Alors  $s \in \Pi_n^{\min}$ . En effet, il est clair que, pour tout  $j$  pour lequel cela a un sens,

$$v(j+1) \leq v(j), \quad w(j+1) \leq w(j) \text{ et } v(j) + w(j) = n - j.$$

On définit une application  $\Pi_n^{\min} \rightarrow E$  de la manière suivante. Soit  $s \in \Pi_n^{\min}$ . On pose

$$I = \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad v(j) = v(j-1) - 1\} \text{ et } J = \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad w(j) = w(j-1) - 1\}.$$

On définit alors  $v = \text{Card } I$ , et

$$\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket, \quad j \mapsto \begin{cases} v(j-1) & \text{si } j \in I \\ n - w(j) & \text{si } j \in J. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que ces deux applications sont inverses l'une de l'autre, et que, si  $(v, \sigma)$  appartient à  $E$  et  $s = \gamma(v, \sigma)$ , alors

$$\mathcal{C}_s = \mathcal{C}_{v,\sigma}.$$

□

D'après le lemme 2.62, les cônes  $(\mathcal{C}_{v,\sigma})_{(v,\sigma) \in E}$  apparaissent dans l'éventail de la variété torique  $X'_\tau$ . Cette variété torique étant lisse, ces cônes sont lisses. Par ailleurs, comme les cônes  $(\mathcal{C}_{v,\sigma})_{(v,\sigma) \in E}$  sont de dimension maximale, ils sont maximaux dans l'éventail  $\mathcal{E}_{X_n}$ . Pour conclure, il reste donc à montrer que l'on a

$$\rho(\mathcal{V}^G) = \bigcup_{(v,\sigma) \in E} \mathcal{C}_{v,\sigma}.$$

Pour établir ce résultat, on raisonne comme ci-dessus. Soit  $[x] \in \rho(\mathcal{V}^G)$ . Pour savoir dans quel cône  $\mathcal{C}_{v,\sigma}$  se trouve  $[x]$ , il suffit de situer 0 dans la suite d'inégalités

$$(\chi_1 - \nu_n)(x) \leq \dots \leq (\chi_v - \nu_{n-v+1})(x) \leq 0 \leq (\chi_{v+1} - \nu_{n-v})(x) \leq \dots \leq (\chi_n - \nu_1)(x)$$

puis de comparer entre elles les deux suites

$$0 \leq -(\chi_v - \nu_{n-v+1})(x) \leq \dots \leq -(\chi_1 - \nu_n)(x)$$



et

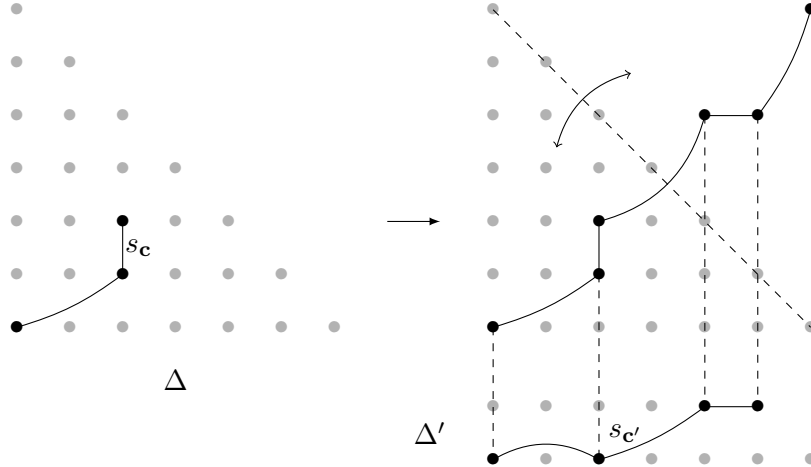
$$0 \leq (\chi_{v+1} - \nu_{n-v})(x) \leq \dots \leq (\chi_n - \nu_1)(x).$$

Cela termine la preuve de la proposition. □

Les propositions 1.15 et 2.61 montrent que l'éventail de la compactification  $X_n$  est un raffinement de l'éventail de la compactification de Kausz  $X'_n$  de  $\Omega$  (section 1.4). En particulier, l'espace des collinéations croisées complètes entre  $V$  et  $W$  domine la compactification de Kausz de l'espace homogène  $\Omega$ .

Par ailleurs, de manière analogue à la discussion faite à la fin de la section 2.3, on peut définir une application naturelle  $X_n(k) \rightarrow X'_n(k)$ ,  $\mathbf{c} \mapsto \mathbf{c}'$ , qui s'avère être celle induite par le morphisme  $X_n \rightarrow X'_n$  sur les  $k$ -points :

Soit  $\mathbf{c} \in X_n(k)$ . Pour décrire  $\mathbf{c}' \in X'_n(k)$ , on utilise la proposition 1.17. Le chemin  $s_{\mathbf{c}'}$  est obtenu de la manière suivante. On relie le chemin  $s_{\mathbf{c}}$  à son symétrique par rapport à la droite  $v + w = n$ , puis on envoie le chemin obtenu dans l'ensemble  $\Delta'$ , les sommets appartenant à  $s_{\mathbf{c}}$  étant projetés sur  $\Delta'_U$ , et les sommets appartenant à son symétrique sur  $\Delta'_H \cup \{n\}$ . En écartant le sommet  $n \in \Delta_H$ , qui est atteint car  $(0, 0)$  est un sommet de  $s_{\mathbf{c}}$ , on obtient le chemin  $s_{\mathbf{c}'}$ .



On pose aussi  $(\mathbf{c}'_V, \mathbf{c}'_W) = (\mathbf{c}_V, \mathbf{c}_W)$  (qui est bien une paire de drapeaux indexée par  $s_{\mathbf{c}'}$ ) et  $[\iota_{\mathbf{c}'}] = [\iota_{\mathbf{c}}]$  (remarque à nouveau que la relation d'équivalence définie sur l'ensemble  $\text{Hom}(\text{gr}(\mathbf{c}_V), \text{gr}(\mathbf{c}_W))$  dans la section 2.2 est plus fine que celle définie dans la section 1.4).

**PROPOSITION 2.63.** *L'espace des collinéations croisées complètes entre  $V$  et  $W$  domine la compactification de Kausz de l'espace homogène  $\Omega$ . De plus le morphisme  $X_n \rightarrow X'_n$  induit l'application  $\mathbf{c} \mapsto \mathbf{c}'$  sur les  $k$ -points.*

### 3. Application de la méthode des points fixes

Dans cette partie, on va produire des exemples de compactifications de certains groupes classiques, en prenant les points fixes de certaines involutions dans l'espace des collinéations croisées complètes. Le corps  $k$  est de caractéristique différente de 2.

On reprend les notations  $G, \Omega, X_0, X_1$ , etc. introduites dans la partie 2 de ce chapitre. On suppose que les espaces vectoriels  $V$  et  $W$  sont équipés de formes bilinéaires non dégénérées, notées  $\omega_V$  et  $\omega_W$ . On suppose de plus que ces formes sont soit toutes les deux symétriques, soit toutes les deux antisymétriques. On suppose enfin que le point de base  $f_0 \in \Omega(k)$  respecte les structures orthogonales ou symplectiques sur  $V$  et  $W$ .

DÉFINITION 3.1. On note  $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$ ,  $f \mapsto {}^t f^{-1}$ . C'est une involution de  $\Omega$ .

Autrement dit, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sigma(f)} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ V^* & \xleftarrow{{}^t f} & W^* \end{array}$$

est commutatif, où les flèches verticales sont les isomorphismes (fournis par les formes bilinéaires  $\omega_V$  et  $\omega_W$ )

$$V \rightarrow V^*, \quad x \mapsto \omega_V(\cdot, x) \text{ et } W \rightarrow W^*, \quad x \mapsto \omega_W(\cdot, x).$$

L'hypothèse faite sur le point de base  $f_0 \in \Omega(k)$  revient à dire que  $f_0$  est fixé par  $\sigma$ . On définit, de la même façon, une involution du groupe  $G$ , également notée  $\sigma$ , qui vérifie

$$\forall g \in G, \quad \forall x \in \Omega, \quad \sigma(gx) = \sigma(g)\sigma(x).$$

DÉFINITION 3.2. On note  $\Omega'$  la composante connexe de  $\Omega^\sigma$  qui contient  $f_0$ . C'est un espace homogène sous l'action du groupe  $G' := (G^\sigma)^0$ .

Si les formes  $\omega_V$  et  $\omega_W$  sont symétriques, la paire  $(\Omega', G')$  est donc une  $k$ -forme de la paire  $(\mathrm{SO}(n), \mathrm{SO}(n) \times \mathrm{SO}(n))$ . Si elles sont antisymétriques, la paire  $(\Omega', G')$  est isomorphe à la paire  $(\mathrm{Sp}(n), \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(n))$ .

Notons  $X'_0$  l'adhérence de  $\Omega'$  dans  $\mathrm{Gr}(n, V \oplus W)$ . On note  $\omega$  la forme bilinéaire sur  $V \oplus W$  définie par

$$\omega|_{V \times V} = \omega_V, \quad \omega|_{W \times W} = -\omega_W$$

et le fait que  $V$  et  $W$  sont orthogonaux. Le graphe d'un élément de  $\Omega'$  étant un sous-espace totalement isotrope maximal de  $V \oplus W$ , il n'est pas difficile de vérifier que  $X'_0$  est une grassmannienne orthogonale ou lagrangienne. Dans cette partie, on va appliquer la procédure expliquée dans la section 1.2 à partir de cette compactification naïve. On note  $X'_0, X'_1$ , etc. les compactifications construites par cette procédure. On montre alors que l'on aboutit à la compactification magnifique de  $\Omega'$  sous l'action de  $G'$  dans le cas « orthogonal impair » (c'est-à-dire  $\omega$  symétrique et  $n$  impair) et dans le cas « symplectique » (c'est-à-dire  $\omega$  antisymétrique). Noter que le groupe  $\mathrm{SO}(n)$ ,  $n$  impair, est de type adjoint, si bien que l'on dispose de plusieurs constructions de la compactification magnifique de  $\Omega'$ . Par contre, le groupe  $\mathrm{Sp}(n)$  n'est pas de type adjoint. Dans le cas « orthogonal pair », on obtient une compactification log homogène qui possède deux orbites fermées. Comme on le vérifie facilement, la compactification canonique (voir la section 1.1 de ce chapitre pour une définition) de  $\mathrm{SO}(n)$ ,  $n$  pair, n'est pas lisse (il suffit de voir que la chambre de Weyl n'est pas lisse), ce qui montre que le nombre d'orbites fermées est ici minimal.

La stratégie que l'on va suivre pour démontrer ces résultats consiste à utiliser le travail effectué dans la partie 2 de ce chapitre, et l'involution  $\sigma$ . On commence par montrer, dans la section 3.1, que l'involution  $\sigma$  s'étend de  $\Omega$  à  $X_i$ , pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Ensuite, on montre que les composantes connexes des variétés  $X_i^\sigma$  contenant l'espace homogène  $\Omega'$  donnent les compactifications  $X'_i$ . Cela nous permet d'obtenir une description des  $k$ -points de ces compactifications, ainsi que de la combinatoire des orbites de  $G'$  dans ces compactifications.

Le cas « orthogonal pair » est le plus complexe. On l'étudie en détail dans la section 3.2. Le cas « orthogonal impair » est décrit dans la section 3.3, et le cas « symplectique » dans la section 3.4. Dans ces deux derniers cas, les démonstrations étant quasiment identiques (et plus simples) au cas « orthogonal pair », on les omet, et on se contente de décrire les résultats.

**3.1. Extension de l'involution  $\sigma$ .** Dans cette section on souhaite montrer que l'involution  $\sigma$  de l'espace homogène  $\Omega$  s'étend aux variétés  $X_i$ , pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Pour cela, on commence par construire « ensemblistement » l'involution  $\sigma$  sur  $X_i(k)$ , puis on montre que l'application ainsi définie provient bien d'une involution de la variété  $X_i$ .

Pour comprendre quelle définition de  $\sigma$  va fonctionner, on examine le cas  $i = 0$ . Dans ce cas, on vérifie aisément que l'involution  $X_0 \rightarrow X_0$ ,  $F \mapsto F^\perp$  convient. On a alors :

LEMME 3.3. *Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension  $n$  de  $V \oplus W$ , de type  $(v, w)$ . Le sous-espace  $F^\perp$  est de type  $(w, v)$ . On a aussi*

$$F^\perp \cap V = p_V(F)^\perp, \quad p_V(F^\perp) = (F \cap V)^\perp,$$

$$F^\perp \cap W = p_W(F)^\perp, \quad p_W(F^\perp) = (F \cap W)^\perp,$$

et l'isomorphisme  $\iota_{F^\perp}$  est l'adjoint de  $\iota_F$ , au sens où le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p_V(F^\perp)/(F^\perp \cap V) & \xrightarrow{\iota_{F^\perp}} & p_W(F^\perp)/(F^\perp \cap W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (p_V(F)/(F \cap V))^* & \xleftarrow{\iota_F} & (p_W(F)/(F \cap W))^* \end{array}$$

est commutatif.

DÉMONSTRATION. Montrons l'égalité  $F^\perp \cap V = p_V(F)^\perp$ , les autres se prouvant de même. Soit  $x \in V \oplus W$ . Alors :

$$x \in F^\perp \cap V \iff x \in V \text{ et } \forall y \in F, \quad \omega(y, x) = 0$$

$$\iff x \in V \text{ et } \forall y \in F, \quad \omega_V(p_V(y), x) = 0$$

$$\iff x \in p_V(F)^\perp.$$

Montrons maintenant la commutativité du diagramme figurant dans l'énoncé. Comme un petit calcul le montre, cela revient à établir que pour tout  $x \in F^\perp$  et pour tout  $y \in F$ , on a

$$\omega_V(p_V(x), p_V(y)) = \omega_W(p_W(x), p_W(y))$$

ce qui est vrai, vu la définition de la forme bilinéaire  $\omega$ .  $\square$

Etant donné un chemin  $s$  tracé dans  $\Delta$ , on note  $\sigma(s)$  le chemin symétrique par rapport à la diagonale  $v = w$ . Remarquer que, si  $(\tau_V, \tau_W)$  est une paire de drapeaux indexée par  $s$ , alors la paire  $(\tau_V^\perp, \tau_W^\perp)$  est indexée par le chemin  $\sigma(s)$ . En s'inspirant du lemme précédent, on définit donc :

DÉFINITION 3.4. *Soient  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $c \in X_i(k)$ . On pose*

$$\sigma(c) := (\sigma(s_c), \mathbf{c}_V^\perp, \mathbf{c}_W^\perp, [\sigma(\iota_c)]),$$

où l'isomorphisme  $\sigma(\iota_{\mathbf{c}})$  est tel que, pour tout degré  $d$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}(\mathbf{c}_V^\perp)_d & \xrightarrow{\sigma(\iota_{\mathbf{c}})} & \mathrm{gr}(\mathbf{c}_W^\perp)_{-d} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{gr}(\mathbf{c}_V)^*_{-d} & \xleftarrow{\iota_{\mathbf{c}}} & \mathrm{gr}(\mathbf{c}_W)^*_d \end{array}$$

est commutatif. Ici, les flèches verticales sont les identifications données par les formes bilinéaires non dégénérées  $\omega_V$  et  $\omega_W$

$$\mathrm{gr}(\mathbf{c}_V^\perp)_d = V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-d)}^\perp / V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-1-d)}^\perp \rightarrow (V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-1-d)} / V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-d)})^* = \mathrm{gr}(\mathbf{c}_V)^*_{-d}$$

$$\mathrm{gr}(\mathbf{c}_W^\perp)_d = W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-d)}^\perp / W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-1-d)}^\perp \rightarrow (W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-1-d)} / W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-d)})^* = \mathrm{gr}(\mathbf{c}_W)^*_{-d}$$

Comme on le vérifie facilement, la classe  $[\sigma(\iota_{\mathbf{c}})]$  que l'on obtient ainsi ne dépend pas du choix du représentant  $\iota_{\mathbf{c}}$  de  $[\iota_{\mathbf{c}}]$  que l'on a fait. Notre but est de montrer que l'application  $\sigma$  que l'on vient de définir provient d'une involution de la variété  $X_i$ . Pour cela, on va utiliser le recouvrement de  $X_i$  par les ouverts affines  $(X_\tau)_{\tau \in \Theta_i}$ , et vérifier ce résultat « localement ». Il est commode d'introduire la définition suivante :

**DÉFINITION 3.5.** Soient  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\tau \in \Theta_i$ . On note  $\sigma(\tau) \in \Theta_i$  la donnée de type  $i$  vérifiant :

- $s_{\sigma(\tau)} = \sigma(s_\tau)$ . On note  $s_\tau = (v, w)$
- $\sigma(\tau)_V = \tau_V^\perp$ ,  $\sigma(\tau)_V^0 = (\tau_V^0)^\perp$ ,  $\sigma(\tau)_W = \tau_W^\perp$  et  $\sigma(\tau)_W^0 = (\tau_W^0)^\perp$ .

- pour tout  $j \in \llbracket w(i) + 1, n - v(i) \rrbracket$ ,  $v_j^{\sigma(\tau)}$  est l'unique vecteur dans

$$\sigma(\tau)V_j \cap \sigma(\tau)V_{n-j+1}^0 = (\tau V_{n-j} \oplus \tau V_{j-1}^0)^\perp$$

vérifiant  $\omega_V(v_j^{\sigma(\tau)}, v_{n-j+1}^\tau) = 1$ .

- pour tout  $j \in \llbracket v(i) + 1, n - w(i) \rrbracket$ ,  $w_j^{\sigma(\tau)}$  est l'unique vecteur dans

$$\sigma(\tau)W_j \cap \sigma(\tau)W_{n-j+1}^0 = (\tau W_{n-j} \oplus \tau W_{j-1}^0)^\perp$$

vérifiant  $\omega_W(w_j^{\sigma(\tau)}, w_{n-j+1}^\tau) = 1$ .

On a alors la :

**PROPOSITION 3.6.** Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , et  $\tau \in \Theta_i$ . Soit  $\mathbf{c} \in X_\tau(k)$ . Alors  $\sigma(\mathbf{c})$  appartient à  $X_{\sigma(\tau)}(k)$ .

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\mathbf{c} \in X_i(k)$ . On vérifie aisément que

$$s_{\sigma(\mathbf{c})} = \sigma(s_{\mathbf{c}}) \geq \sigma(s_\tau) = s_{\sigma(\tau)}.$$

Le fait que les drapeaux  $\sigma(\tau)_V^0$  et  $\sigma(\mathbf{c})_V$  (resp.  $\sigma(\tau)_W^0$  et  $\sigma(\mathbf{c})_W$ ) s'intersectent transversalement est une conséquence immédiate du lemme suivant :

**LEMME 3.7.** Soient  $E$  et  $F$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension  $n$  muni d'une forme bilinéaire non dégénérée. Si  $E$  et  $F$  s'intersectent transversalement, alors  $E^\perp$  et  $F^\perp$  aussi.

DÉMONSTRATION. Comme  $E^\perp \cap F^\perp = (E + F)^\perp$ , on a l'égalité :

$$\dim(E^\perp \cap F^\perp) = n - \dim E - \dim F + \dim(E \cap F).$$

Le lemme en découle aussitôt.  $\square$

Pour l'instant, on a démontré que les deux premières conditions de la définition 2.11 sont satisfaites. Vérifions maintenant que la troisième condition est aussi vérifiée. Il s'agit de démontrer que les drapeaux  $\sigma(\iota_{\mathbf{c}})((\tau_V^0)^\perp \cap \text{gr}(\mathbf{c}_V^\perp)_d)$  et  $(\tau_W^0)^\perp \cap \text{gr}(\mathbf{c}_W^\perp)_{-d}$  s'intersectent transversalement, pour tout degré  $d$ . Par définition de  $\iota_{\mathbf{c}}$ , cela revient à voir que, dans  $\text{gr}(\mathbf{c}_W)_d^*$ , les drapeaux

$${}^t\iota_{\mathbf{c}}^{-1}((\tau_V^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_V)_{-d})^\perp) \text{ et } (\tau_W^0 \cap \text{gr}(\mathbf{c}_W)_d)^\perp$$

s'intersectent transversalement dans l'espace vectoriel  $\text{gr}(\mathbf{c}_W)_d^*$ , où, ici, l'orthogonal est pris au sens de la dualité. On voit donc que le lemme suivant permet de conclure :

LEMME 3.8. *Soient  $E'$  et  $F'$  deux  $k$ -espaces vectoriels de même dimension, et  $f$  un isomorphisme de  $E'$  sur  $F'$ . Soit  $E$  un sous-espace de  $E'$ , et  $F$  un sous-espace de  $F'$ . Si  $f(E)$  et  $F$  s'intersectent transversalement, alors c'est aussi le cas de  ${}^t f^{-1}(E^\perp)$  et  $F^\perp$ .*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'observer que le sous-espace  ${}^t f^{-1}(E^\perp) \cap F^\perp$  de  $F^*$  est l'orthogonal du sous-espace  $f(E) + F$  de  $F$ .  $\square$

On a donc bien montré que  $\sigma(\mathbf{c})$  appartient à  $X_{\sigma(\tau)}(k)$ .  $\square$

PROPOSITION 3.9. *Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . L'involution  $\sigma$  s'étend de  $\Omega$  à  $X_i$ . Par ailleurs, pour tout  $\mathbf{c} \in X_i(k)$ ,  $\sigma(\mathbf{c})$  est donné par la définition 3.4.*

DÉMONSTRATION. On raisonne par récurrence sur  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Pour  $i = 0$ , on a déjà vu que l'involution

$$\sigma : \text{Gr}(n, V \oplus W) \rightarrow \text{Gr}(n, V \oplus W), \quad F \mapsto F^\perp$$

prolonge l'involution  $\sigma$  sur  $\Omega$ , et le lemme 3.3 montre que dans ce cas, pour tout  $\mathbf{c} \in X_0(k)$ , l'élément  $\sigma(\mathbf{c})$  est bien décrit par la définition 3.4.

On suppose maintenant que le résultat est démontré pour  $i$ , et on l'établit pour  $i + 1$ . Pour passer de  $X_i$  à  $X_{i+1}$ , on éclate  $Y_i$ , qui, étant l'adhérence de

$$\bigcup_{(v,w) \in \Delta_i} \Omega_{v,w},$$

est stable par  $\sigma$ . Par conséquent, l'involution  $\sigma$  s'étend à  $X_{i+1}$ . Il reste à calculer  $\sigma(\mathbf{c})$  pour tout  $\mathbf{c} \in X_i(k)$ . Si  $\pi_{i+1}(\mathbf{c}) \notin Y_i(k)$ , alors  $\pi_{i+1}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ , et le résultat au rang  $i$  assure que  $\sigma(\mathbf{c})$  est bien décrit par la définition 3.4.

Supposons donc que  $\pi_{i+1}(\mathbf{c}) \in Y_i(k)$ . Soit  $\tau \in \Theta_i$  tel que  $\pi_{i+1}(\mathbf{c})$  appartient à  $X_\tau(k)$ . On fixe un représentant  $(a_{\mathbf{c},i,l}^\tau, b_{\mathbf{c},i,l}^\tau)$  de  $[a_{\mathbf{c},i,l}^\tau : b_{\mathbf{c},i,l}^\tau]$ . On introduit la courbe

$$\mathbf{c} : \mathbb{A}^1 \rightarrow X_\tau$$

comme dans la preuve du lemme 2.44, c'est-à-dire telle que, pour tout  $t \in \bar{k}$ , les coordonnées de  $\mathbf{c}(t)$  dans  $U_\tau(\bar{k})$  sont toutes égales à celles de  $\pi_{i+1}(\mathbf{c})$  sauf  $a_{\mathbf{c}(t),i}^\tau = t a_{\mathbf{c},i,l}^\tau$  et  $b_{\mathbf{c}(t),i}^\tau = t b_{\mathbf{c},i,l}^\tau$ . Pour tout  $t \neq 0$ ,  $\mathbf{c}(t)$  appartient à  $X_{i+1}(k) \setminus \pi_{i+1}(Y_i(k))$ . De plus,  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{c}(t)$  existe dans  $X_{i+1}(k)$ , et vaut  $\mathbf{c}$ . On va calculer  $\sigma(\mathbf{c})$  en utilisant le fait que

$$\sigma(\mathbf{c}) = \lim_{t \rightarrow 0} \sigma(\mathbf{c}(t)).$$

On note  $l$  la longueur de  $\mathbf{c}$ . Remarquons que, comme  $({}^\tau V_{n-w(i)})^\perp \cap ({}^\tau V_{w(i)}^0)^\perp = \{0\}$ , on a un isomorphisme naturel, induit par  $\omega_V$  :

$$({}^\tau V_{n-w(i)})^\perp \rightarrow ({}^\tau V_{w(i)}^0)^*$$

De même, on a des isomorphismes naturels

$$({}^\tau W_{n-w(i)}^0)^\perp \rightarrow ({}^\tau W_{w(i)}^*)^*, \quad ({}^\tau W_{n-v(i)})^\perp \rightarrow ({}^\tau W_{v(i)}^0)^* \text{ et } ({}^\tau V_{n-v(i)}^0)^\perp \rightarrow ({}^\tau V_{v(i)}^*)^*.$$

On a alors :

LEMME 3.10. *Le point*

$$[a_{\sigma(\mathbf{c}(t)),i,l}^{\sigma(\tau)} : b_{\sigma(\mathbf{c}(t)),i,l}^{\sigma(\tau)}] \in \mathbb{P}(\text{Hom}({}^{\sigma(\tau)} V_{w(i)}, {}^{\sigma(\tau)} W_{w(i)}^0) \oplus \text{Hom}({}^{\sigma(\tau)} W_{v(i)}, {}^{\sigma(\tau)} V_{v(i)}^0))$$

ne dépend pas de  $t \neq 0$ , et vérifie que les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} ({}^\tau V_{n-w(i)})^\perp & \xrightarrow{a_{\sigma(\mathbf{c}(t)),i,l}^{\sigma(\tau)}} & ({}^\tau W_{n-w(i)}^0)^\perp & ({}^\tau W_{n-v(i)})^\perp & \xrightarrow{b_{\sigma(\mathbf{c}(t)),i,l}^{\sigma(\tau)}} & ({}^\tau V_{n-v(i)}^0)^\perp \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ ({}^\tau V_{w(i)}^0)^* & \xrightarrow{t b_{\mathbf{c},i,l}^\tau} & ({}^\tau W_{w(i)}^*)^* & ({}^\tau W_{v(i)}^0)^* & \xrightarrow{t a_{\mathbf{c},i,l}^\tau} & ({}^\tau V_{v(i)}^*)^* \end{array}$$

sont commutatifs, où les flèches verticales sont les isomorphismes introduits ci-dessus.

DÉMONSTRATION. Comme  $t \neq 0$ , on sait que  $\sigma(\mathbf{c}(t)) \in X_i(\bar{k})$  est donné par la définition 3.4. En particulier, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{gr}(\mathbf{c}_V^\perp)_l & \xrightarrow{\sigma(\iota_{\mathbf{c}(t)})} & \text{gr}(\mathbf{c}_W^\perp)_{-l} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{gr}(\mathbf{c}_V)_{-l}^* & \xleftarrow{t \iota_{\mathbf{c}(t)}} & \text{gr}(\mathbf{c}_W)_l^* \end{array}$$

est commutatif. On peut alors facilement conclure.  $\square$

Le lemme 3.10 permet d'identifier, en passant à la limite quand  $t$  tend vers 0, le point  $[a_{\sigma(\mathbf{c}),i,l}^{\sigma(\tau)} : b_{\sigma(\mathbf{c}),i,l}^{\sigma(\tau)}]$  comme le point tel que les diagrammes ci-dessus commutent.

Passons au calcul de  $\sigma(\mathbf{c})$ . D'après le lemme 3.10, on voit que

$$\text{rg}(a_{\sigma(\mathbf{c}),i,l}^{\sigma(\tau)}) = \text{rg}(t b_{\mathbf{c},i,l}^\tau) = \text{rg}(b_{\mathbf{c},i,l}^\tau)$$

donc, d'après la proposition 2.34, on a  $w_{\mathbf{c}}(l) = w(i) - \text{rg}(a_{\sigma(\mathbf{c}),i,l}^{\sigma(\tau)})$ . De même, on montre que  $v_{\mathbf{c}}(l) = v(i) - \text{rg}(b_{\sigma(\mathbf{c}),i,l}^{\sigma(\tau)})$ . On en déduit que  $s_{\sigma(\mathbf{c})}(l)$  est bien le symétrique de  $s_{\mathbf{c}}(l)$  par rapport à la diagonale dans  $\Delta$ . Par ailleurs, comme  $\pi_{i+1}(\sigma(\mathbf{c})) = \sigma(\pi_{i+1}(\mathbf{c}))$ , le chemin  $s_{\sigma(\mathbf{c})}$  privé de son dernier sommet est le symétrique du chemin  $s_{\mathbf{c}}$  privé de son dernier sommet, si bien que l'on a  $s_{\sigma(\mathbf{c})} = \sigma(s_{\mathbf{c}})$ .

Le sous-espace  $V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-l-1)}$  est égal à la somme directe

$${}^\tau V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-l)} \oplus \text{Im}(b_{\mathbf{c},i,l}^\tau),$$

si bien que son orthogonal est donné par l'intersection

$$({}^\tau V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-l)})^\perp \cap \text{Im}(b_{\mathbf{c},i,l}^\tau)^\perp$$

Par ailleurs, comme on le vérifie facilement, le sous-espace  $\sigma^{(\tau)}V_{\sigma(\mathbf{c}),w_{\mathbf{c}}(l)}$  est le graphe de la restriction de  $c_{\sigma(\mathbf{c}),w(i)}$  à  $\text{Ker}(a_{\sigma(\mathbf{c}),i,l}^{\sigma(\tau)})$ . Autrement dit, c'est l'intersection de

$$\sigma^{(\tau)}V_{\sigma(\mathbf{c}),w_{\mathbf{c}}(l-1)} = ({}^\tau V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-l)})^\perp \text{ et de } \text{Ker}(a_{\sigma(\mathbf{c}),i,l}^{\sigma(\tau)}) \oplus ({}^\tau V_{w(i)}^0)^\perp.$$

On observe alors que, comme le diagramme figurant dans le lemme 3.10 est commutatif, on a

$$\text{Im}(b_{\mathbf{c},i,l}^\tau)^\perp = \text{Ker}(a_{\sigma(\mathbf{c}),i,l}^{\sigma(\tau)}) \oplus ({}^\tau V_{w(i)}^0)^\perp.$$

On a donc montré que  $\sigma^{(\tau)}V_{\sigma(\mathbf{c}),w_{\mathbf{c}}(l)}$  est l'orthogonal de  ${}^\tau V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(-l-1)}$ .

On montre de la même façon que le sous-espace  $\sigma^{(\tau)}V_{\sigma(\mathbf{c}),w_{\mathbf{c}}(-l-1)}$  est l'orthogonal de  ${}^\tau V_{\mathbf{c},v_{\mathbf{c}}(l)}$ , le sous-espace  $\sigma^{(\tau)}W_{\sigma(\mathbf{c}),v_{\mathbf{c}}(l)}$  celui de  ${}^\tau W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(-l-1)}$ , et  $\sigma^{(\tau)}W_{\sigma(\mathbf{c}),w_{\mathbf{c}}(-l-1)}$  l'orthogonal de  ${}^\tau W_{\mathbf{c},w_{\mathbf{c}}(l)}$ . En remarquant à nouveau que  $\pi_{i+1}(\sigma(\mathbf{c})) = \sigma(\pi_{i+1}(\mathbf{c}))$ , on voit que les relations analogues sont aussi vérifiées pour tous les autres sous-espaces apparaissant dans les drapeaux  $\mathbf{c}_V$ ,  $\mathbf{c}_W$ ,  $\sigma(\mathbf{c})_V$  et  $\sigma(\mathbf{c})_W$ . En définitive, on a donc montré que

$$\sigma(\mathbf{c})_V = \mathbf{c}_V^\perp, \quad \sigma(\mathbf{c})_W = \mathbf{c}_W^\perp.$$

On déduit facilement du lemme 3.10 que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \text{gr}(\mathbf{c}_V^\perp)_l & \xrightarrow{\iota_{\sigma(\mathbf{c})}} & \text{gr}(\mathbf{c}_W^\perp)_{-l} & & \text{gr}(\mathbf{c}_V^\perp)_{-l} & \xrightarrow{\iota_{\sigma(\mathbf{c})}} & \text{gr}(\mathbf{c}_W^\perp)_l \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{gr}(\mathbf{c}_V)_l^* & \xleftarrow{\iota_{\mathbf{c}}} & \text{gr}(\mathbf{c}_W)_l^* & & \text{gr}(\mathbf{c}_V)_l^* & \xleftarrow{\iota_{\mathbf{c}}} & \text{gr}(\mathbf{c}_W)_l^* \end{array}$$

sont commutatifs. Pour les autres degrés  $d$ , on remarque à nouveau que

$$\pi_{i+1}(\sigma(\mathbf{c})) = \sigma(\pi_{i+1}(\mathbf{c})),$$

et on utilise le résultat au rang  $i$ . Ceci achève la preuve de la proposition.  $\square$

**3.2. Le cas « orthogonal pair ».** On suppose dans cette section que la dimension commune de  $V$  et  $W$  est paire, et on la note  $2n$ . On suppose également que les formes bilinéaires non dégénérées  $\omega_V$  et  $\omega_W$  sont symétriques. On rappelle que l'on note  $\overline{V} = \overline{k} \otimes_k V$  et  $\overline{W} = \overline{k} \otimes_k W$ . Les espaces vectoriels  $\overline{V}$ ,  $\overline{W}$  et  $\overline{V} \oplus \overline{W}$  sont donc munis de formes bilinéaires symétriques non dégénérées.

On note  $X'_0$  l'adhérence de  $\Omega'$  dans  $\text{Gr}(n, V \oplus W)$ . Il s'agit d'une grassmannienne orthogonale. Dans cette section, on va appliquer à cette compactification de  $\Omega'$  la procédure d'éclatements décrite dans la section 1.2, et répondre aux questions 1.11, 1.12 et 1.13.

Commençons par décrire la combinatoire des orbites de  $G'(\overline{k})$  dans  $X'(\overline{k})$ . On reprend les notations introduites dans la section 1.4 de ce chapitre. Un sous-espace totalement isotrope maximal de  $\overline{V}$  (resp. ) sera dit de **type** + s'il est conjugué au sous-espace

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle \quad (\text{resp. } \langle w_1, \dots, w_n \rangle)$$

sous l'action de  $\text{SO}(\overline{V})$  (resp.  $\text{SO}(\overline{W})$ ) et de **type** – sinon, c'est-à-dire s'il est conjugué au sous-espace

$$\langle v_{n+1}, \dots, v_{2n} \rangle \quad (\text{resp. } \langle w_{n+1}, \dots, w_{2n} \rangle).$$

On dit qu'un sous-espace totalement isotrope maximal de  $\overline{V} \oplus \overline{W}$  est de type  $(+, +)$  (resp.  $(-, -)$ ), si  $F \cap \overline{V}$  et  $F \cap \overline{W}$  sont de type  $+$  (resp.  $-$ ). On note  $\Delta'$  l'ensemble

$$\Delta' = \llbracket 0, n-1 \rrbracket \sqcup \{(n, +), (n, -)\},$$

et  $o : \Delta' \rightarrow \llbracket 0, n \rrbracket$  l'application « d'oubli » (elle envoie  $(n, +)$  et  $(n, -)$  sur  $n$ ). Pour tout  $v \in \Delta'$ , on note

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Omega'_v(\bar{k}) := \{F \in X'(\bar{k}), \dim(F \cap \overline{V}) = v\} & \text{si } v \notin \{(n, +), (n, -)\} \\ \Omega'_v(\bar{k}) := \{F \in X'(\bar{k}), F \text{ est de type } (+, +)\} & \text{si } v = (n, +) \\ \Omega'_v(\bar{k}) := \{F \in X'(\bar{k}), F \text{ est de type } (-, -)\} & \text{si } v = (n, -). \end{array} \right.$$

On définit un ordre sur l'ensemble  $\Delta'$  de la manière suivante : on a

$$\forall v, v' \in \Delta', \quad v \geq v' \iff o(v) \leq o(v') \leq n-1 \text{ ou } o(v) < o(v') = n.$$

L'ensemble ordonné  $\Delta'$  est l'ensemble des orbites de  $G'(\bar{k})$  dans  $X'(\bar{k})$ , comme on le verra ci-dessous. Par ailleurs, on verra aussi que toutes ces orbites sont définies sur  $k$ . On calcule facilement, pour tout  $v \in \Delta'$ ,  $\text{ht}(v) = n - o(v)$ . En particulier, l'ensemble  $\Delta'$  est de hauteur  $n$ . On note  $X'_0, X'_1, \dots$  les compactifications de  $\Omega'$  obtenues en appliquant la procédure d'éclatements successifs à  $X'$ . Le but de cette section est d'établir les résultats suivants :

**PROPOSITION 3.11.** *Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la compactification  $X'_i$  de  $\Omega'$  est projective et lisse. De plus  $X'_i$  est la composante connexe de la variété lisse  $X_{2i}^\sigma$  contenant  $\Omega'$ .*

Autrement dit,  $X'_i$  est l'adhérence de  $\Omega'$  dans  $X_{2i}$ . Pour le moment, on notera  $C_i$  cette adhérence. Le deuxième résultat que l'on veut montrer concerne la compactification  $X'_n$ .

**PROPOSITION 3.12.** *La compactification  $X'_n$  de  $\Omega'$  est log homogène et possède deux orbites fermées.*

On va aussi donner une description de l'ensemble  $X'_i(k)$  (et donc, par la même astuce que d'habitude, de l'ensemble  $X'_i(K)$ , pour toute extension de corps  $K$  de  $k$ ), ainsi que de la combinatoire des orbites de  $G'$  dans  $X'_i$ .

D'après la proposition 4.4 du chapitre 2, et le théorème 2.1, il est clair que la compactification  $C_n$  de  $\Omega'$  est log homogène. De plus, la proposition 1.2 permet facilement de calculer les données combinatoires associées à cette compactification. On reprend les notations introduites dans la section 1.4. Pour le calcul des données combinatoires, on peut supposer que le corps  $k$  est algébriquement clos. On peut donc demander à ce que les formes  $\omega_V$  et  $\omega_W$  vérifient

$$\forall i, j \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, \quad \omega_V(v_i, v_j) = \delta_{i, 2n-j+1} \quad (\text{resp. } \omega_W(w_i, w_j) = \delta_{i, 2n-j+1}).$$

On note  $B' = B \cap G'$ . C'est un sous-groupe de Borel de  $G'$ , et l'orbite  $B'f_0$  est ouverte dans  $\Omega'$ . On note aussi  $T' = T \cap G'$ . C'est un tore maximal de  $G'$ , contenu dans  $B'$ . On a alors

$$V(\Omega') = \{[x] \in V(\Omega), \quad \forall v \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (\chi_v - \nu_{2n-v+1})(x) = (\nu_v - \chi_{2n-v+1})(x)\}$$

et le cône  $\rho(\mathcal{V}^{G'}) \subseteq V(\Omega')$  est décrit par

$$\{\chi_1 - \nu_{2n} \leq \dots \leq \chi_{n-1} - \nu_{n+2} \leq -|\chi_n - \nu_{n+1}|\}.$$

Dans ces conditions, on a la proposition suivante :



PROPOSITION 3.13. *La compactification  $C_n$  de  $\Omega'$  est projective, lisse et log homogène sous l'action du groupe  $G'$ . L'éventail associé est formé des cônes*

$$\mathcal{C}_+ = \{\chi_1 - \nu_{2n} \leq \dots \leq \chi_{n-1} - \nu_{n+2} \leq \chi_n - \nu_{n+1} \leq 0\},$$

$$\mathcal{C}_- = \{\chi_1 - \nu_{2n} \leq \dots \leq \chi_{n-1} - \nu_{n+2} \leq \nu_{n+1} - \chi_n \leq 0\}.$$

et de leurs faces.

DÉMONSTRATION. Comme la compactification  $C_n$  de  $\Omega'$  est une composante connexe du lieu des points fixes d'une involution de l'espace des collinéations complètes, la proposition 4.4 du chapitre 2 entraîne que c'est une compactification log homogène. L'éventail associé est formé des cônes figurant dans l'éventail de la variété torique  $\overline{T'f_0}$  et qui sont inclus dans  $\rho(\mathcal{V}^{G'})$  (proposition 1.2). Comme on le vérifie aisément, les cônes  $\mathcal{C}_+$  et  $\mathcal{C}_-$  sont de ce type. Comme ils recouvrent entièrement le cône  $\rho(\mathcal{V}^{G'})$ , on a le résultat.  $\square$

En particulier, il y a deux orbites fermées de  $G'(\bar{k})$  dans  $C_n(\bar{k})$ . Comme le cône  $\rho(\mathcal{V}^{G'})$  n'est pas lisse, ce nombre d'orbites fermées est minimal pour une compactification log homogène de  $\Omega'$ .

On s'intéresse maintenant aux orbites de  $G'$  dans  $X'_i$ . On ne suppose plus le corps  $k$  algébriquement clos. Pour tout chemin  $v$  tracé dans  $\Delta'$ , on note  $\delta(v)$  le chemin  $(o(v), o(v))$  tracé dans la diagonale de  $\Delta$ .

DÉFINITION 3.14. *Soient  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $v \in \Pi'_i$ . On note  $\Omega'_v(k)$  l'ensemble des  $\mathbf{c} \in X_i(k)$  vérifiant :*

- $s_{\mathbf{c}} = \delta(v)$ ,  $\mathbf{c}_V = \mathbf{c}_V^\perp$  et  $\mathbf{c}_W = \mathbf{c}_W^\perp$ .
- le sous-espace vectoriel  $F_{\mathbf{c}}$  appartient à  $C_0(k)$ . De plus, si  $v(0) = (n, +)$  (resp.  $(n, -)$ ), alors  $F_{\mathbf{c}}$  est de type  $(+, +)$  (resp.  $(-, -)$ ).
- pour tout  $d \in \llbracket 1, l \rrbracket$ , le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}(\mathbf{c}_V)_d & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{c}}} & \mathrm{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{gr}(\mathbf{c}_V)_{-d}^* & \xleftarrow{\iota_{\mathbf{c}}} & \mathrm{gr}(\mathbf{c}_W)_d^* \end{array}$$

est commutatif.

Soient  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $v \in \Pi'_i$ . Il résulte de la proposition 3.9 que les éléments de  $\Omega'_v(k)$  sont fixés par l'involution  $\sigma$  de  $X_i(k)$ .

PROPOSITION 3.15. *Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , et  $v \in \Pi'_i$ . Le sous-ensemble  $\Omega'_v(k)$  de  $X_i(k)$  est stable sous l'action de  $G'(k)$ . Par ailleurs, le groupe  $G'(\bar{k})$  agit transitivement dans l'ensemble  $\Omega'_v(\bar{k})$ .*

DÉMONSTRATION. Soient  $\mathbf{c} \in \Omega'_v(k)$  et  $g \in G'(k)$ . On note  $\mathbf{c}' = g(\mathbf{c})$ . Les deux premières conditions de la définition 3.24 sont facilement vérifiées. Pour voir que la troisième

condition est satisfaite, il suffit de remarquer que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{gr}(g(\mathbf{c})_V)_d & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{c}'}} & \text{gr}(g(\mathbf{c})_W)_{-d} \\
 & \nearrow g & \downarrow & & \nearrow g \\
 \text{gr}(\mathbf{c}_V)_d & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{c}}} & & & \text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \text{gr}(g(\mathbf{c})_V)_{-d}^* & \xleftarrow{\iota_{\mathbf{c}'}} & \text{gr}(g(\mathbf{c})_W)_d^* \\
 \downarrow & \nearrow {}^t g^{-1} & \downarrow & & \nearrow {}^t g^{-1} \\
 \text{gr}(\mathbf{c}_V)_{-d}^* & \xleftarrow{\iota_{\mathbf{c}}} & & & \text{gr}(\mathbf{c}_W)_d^*
 \end{array}$$

est commutatif. On a donc prouvé que l'ensemble  $\Omega'_v(k)$  est stable par  $G'(k)$ .

Supposons maintenant que le corps  $k$  est algébriquement clos, et montrons que le groupe  $G'(k)$  agit transitivement dans  $\Omega'_v(k)$ . Soient  $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \Omega'_v(k)$ . Il existe  $g_V \in \text{SO}(V)$  envoyant le drapeau  $\mathbf{c}_V$  sur  $\mathbf{c}'_V$ . Pour tout degré  $d \in \llbracket -l, l \rrbracket$ , on note  $g_{W,d}$  l'isomorphisme faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \text{gr}(\mathbf{c}_V)_{-d} & \xrightarrow{g_V} & \text{gr}(\mathbf{c}'_V)_{-d} \\
 \downarrow \iota_{\mathbf{c}} & & \downarrow \iota_{\mathbf{c}'} \\
 \text{gr}(\mathbf{c}_W)_d & \xrightarrow{g_{W,d}} & \text{gr}(\mathbf{c}'_W)_d
 \end{array}$$

Pour tout degré  $d \in \llbracket 0, l \rrbracket$ , l'application linéaire

$$g_{W,-d} : \text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d} = \text{gr}(\mathbf{c}_W)_d^* \rightarrow \text{gr}(\mathbf{c}'_W)_{-d} = \text{gr}(\mathbf{c}'_W)_d^*$$

est égale à  ${}^t g_{W,d}^{-1}$ . On peut facilement construire une base  $e_1, \dots, e_{2n}$  adaptée au drapeau  $\mathbf{c}_W$ , et vérifiant

$$\forall i, j \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, \quad \omega_W(e_i, e_j) = \delta_{i, 2n-j+1}.$$

En « transportant » cette base à l'aide des isomorphismes  $g_{W,d}$ , on obtient une base de chaque gradué  $\text{gr}(\mathbf{c}'_W)_d$ , pour  $d \in \llbracket -l, l \rrbracket$ . Il n'est pas difficile de montrer qu'on peut remonter cette base en une base  $f_1, \dots, f_{2n}$  de  $W$  satisfaisant elle aussi

$$\forall i, j \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, \quad \omega_W(f_i, f_j) = \delta_{i, 2n-j+1}.$$

On note  $g_W$  l'automorphisme de  $W$  envoyant  $e_i$  sur  $f_i$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ . On définit aussi  $g = (g_V, g_W) \in G(k)$ . Par définition, on a donc  $\mathbf{c}' = g(\mathbf{c})$ . On remarque maintenant que  $g_W$  préserve la forme bilinéaire  $\omega_W$ . De plus, on a l'égalité  $g(F_{\mathbf{c}}) = F_{\mathbf{c}'}$ , et les sous-espaces  $F_{\mathbf{c}}$  et  $F_{\mathbf{c}'}$  sont dans  $C_0(k)$ . Il découle que  $g$  est de déterminant 1. On a donc bien montré que  $g$  appartient à  $G'(k)$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

On sait que chaque composante connexe de la variété lisse  $\Omega_{\delta(v)}(\bar{k})^\sigma$  est homogène sous l'action de  $G'$ . La proposition qui précède montre donc que  $\Omega'_v(k)$  est une composante

connexe de la variété des points fixes  $\Omega_{\delta(v)}(\bar{k})^\sigma$ . Comme elle possède un point  $k$ -rationnel, elle est définie sur  $k$ . On note  $\Omega'_v$  la  $k$ -variété sous-jacente. On a alors :

PROPOSITION 3.16.  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $C_i(k) = \bigsqcup_{v \in \Pi'_i} \Omega'_v(k)$ .

DÉMONSTRATION. Il suffit d'établir ce résultat lorsque  $k$  est algébriquement clos. Par ailleurs, il suffit de l'établir pour  $i = n$ , en utilisant la composition des éclatements successifs

$$X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_i$$

pour passer de  $C_n$  à  $C_i$ . On suppose donc que  $k$  est algébriquement clos, et que  $i = n$ .

D'après la proposition 3.13, on sait qu'il y a exactement  $2^{n+1}$  orbites de  $G'(k)$  dans  $C_n(k)$  (il s'agit du nombre de cônes dans l'éventail de  $C_n$ ). Comme le cardinal de  $\Pi'_n$  est justement  $2^{n+1}$  et que chaque  $\Omega'_v(k)$  est une orbite de  $G'(k)$ , il reste à montrer que, pour tout  $v \in \Pi'_n$ , on a  $\Omega'_v(k) \subseteq C_n(k)$ . Comme  $C_n(k)$  est stable sous l'action de  $G'(k)$ , il suffit en fait de montrer que  $\Omega'_v(k)$  et  $C_n(k)$  s'intersectent.

On note  $l$  la longueur du chemin  $v$ . On reprend les notations introduites dans la section 1.4. On dispose en particulier des drapeaux  $\delta_V$ ,  $\delta_V^0$ ,  $\delta_W$ ,  $\delta_W^0$ . On suppose que les formes  $\omega_V$  et  $\omega_W$  vérifient

$$\forall i, j \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, \quad \omega_V(v_i, v_j) = \delta_{i, 2n-j+1} \quad (\text{resp. } \omega_W(w_i, w_j) = \delta_{i, 2n-j+1}).$$

On considère, pour tout  $t \in \bar{k}^*$ , l'élément  $\mathbf{c}(t)$  de  $\Omega'(\bar{k})$  défini par

$$\forall d \in \llbracket v(0) + 1, 2n - v(0) \rrbracket, \quad \mathbf{c}(t)(v_d) = w_{2n-d+1}$$

et, si  $l \geq 1$ , pour tout  $d \in \llbracket 1, l \rrbracket$ ,

$$\forall j \in \llbracket v(d) + 1, v(d-1) \rrbracket, \quad \mathbf{c}(t)(v_j) = t^d w_{2n-j+1} \text{ et } \mathbf{c}(t)(v_{2n-j+1}) = t^{-d} w_j.$$

Considérons un chemin  $s \in \Pi_n^{\min}$  vérifiant  $\delta(v) \geq s$ , et  $\tau \in \Theta_n$  défini par

$$s_\tau = s, \quad \tau_V = \delta_V^0, \quad \tau_V^0 = \delta_V, \quad \tau_W = \delta_W^0, \quad \tau_W^0 = \delta_W.$$

Pour tout  $d \in \llbracket 0, l \rrbracket$ , on note  $i_d \in \llbracket 0, n \rrbracket$  l'entier vérifiant  $s(i_d) = \delta(v)(d)$ . Comme on le vérifie aisément, pour tout  $t \in \bar{k}^*$ ,  $\mathbf{c}(t)$  appartient à  $X_\tau(\bar{k})$ , et a pour coordonnées

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \tilde{v}_j(t) = 0, \quad \tilde{w}_j(t) = 0$$

et, pour tout  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $x_j(t) = t$  si  $j$  appartient à l'ensemble  $\{i_0, \dots, i_{l-1}\}$ , et  $x_j(t) = 1$  sinon. Ainsi, le point  $\mathbf{c} := \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{c}(t)$  dans  $C_n(k)$  appartient à  $X_\tau(k)$ , et ses coordonnées sont

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \tilde{v}_j = 0, \quad \tilde{w}_j = 0$$

et, pour tout  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $x_j = 0$  si  $j$  appartient à l'ensemble  $\{i_0, \dots, i_{l-1}\}$ , et  $x_j = 1$  sinon. On en déduit facilement que  $\mathbf{c}$  est de type  $\delta(v)$ , et que, pour tout  $d \in \llbracket 1, l \rrbracket$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{gr}(\mathbf{c}_V)_d & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{c}}} & \text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{gr}(\mathbf{c}_V)^*_{-d} & \xleftarrow{t \iota_{\mathbf{c}}} & \text{gr}(\mathbf{c}_W)^*_d \end{array}$$

est commutatif.

Supposons de plus que  $v(0) = (n, +)$ . Pour tout  $t \in \bar{k}^*$ , le graphe de  $\mathbf{c}(t)$  est engendré par les vecteurs

$$(v_j + t^d w_{2n-j+1})_{j \in \llbracket v(d)+1, v(d-1) \rrbracket}, \quad (t^d v_{2n-j+1} + w_j)_{j \in \llbracket v(d)+1, v(d-1) \rrbracket}$$

pour  $d$  allant de 1 à  $l$ . En passant à la limite quand  $t$  tend vers 0, on voit que le sous-espace  $F_{\mathbf{c}}$  est exactement  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \oplus \langle w_1, \dots, w_n \rangle$ , ce qui montre qu'il est de type  $(+, +)$ . Pour l'instant, on a donc montré que, pour tout chemin  $v \in \Pi'_n$  tracé dans  $\Delta'$  et n'ayant pas  $(n, -)$  comme sommet, les ensembles  $\Omega'_v(k)$  et  $C_n(k)$  s'intersectent. Par une construction analogue, on montre que c'est encore le cas pour les chemins dans  $\Pi'_n$  possédant  $(n, -)$  comme sommet, achevant ainsi la preuve de la proposition.  $\square$

On peut maintenant décrire la combinatoire des orbites de  $G'$  dans  $C_i$  :

PROPOSITION 3.17. *Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On a :*

$$\forall v, v' \in \Pi'_i, \quad \Omega'_v \subseteq \overline{\Omega'_{v'}} \iff v \leq v'.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'établir cette assertion pour  $i = n$ . En effet, en utilisant la composition des éclatements successifs

$$X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_i$$

(qui est propre), on passe facilement de  $C_n$  à  $C_i$ . On suppose donc que  $i = n$ . Pour montrer le résultat, on utilise le lemme suivant :

LEMME 3.18. *Soit  $E$  un ensemble fini, et  $\preceq, \leq$  deux ordres sur  $E$ . On suppose que les ensembles ordonnés  $(E, \preceq)$  et  $(E, \leq)$  sont abstraitement isomorphes, et aussi que l'identité  $(E, \preceq) \rightarrow (E, \leq)$  est croissante. Alors les ordres  $\preceq$  et  $\leq$  sont égaux.*

DÉMONSTRATION. Pour tout  $x \in E$ , on note  $E_{\succ x}$  (resp.  $E_{\geq x}$ ) l'ensemble

$$\{y \in E, \quad y \succ x\} \quad (\text{resp. } \{y \in E, \quad y \geq x\}).$$

Les ensembles  $(E, \preceq)$  et  $(E, \leq)$  étant abstraitement isomorphes, les fonctions

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad m \mapsto |\{x \in E, \quad |E_{\succ x}| \geq m\}| \quad \text{et} \quad g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad m \mapsto |\{x \in E, \quad |E_{\geq x}| \geq m\}|$$

coïncident. Par ailleurs, la seconde hypothèse faite dans l'énoncé montre que,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \{x \in E, \quad |E_{\succ x}| \geq m\} \subseteq \{x \in E, \quad |E_{\geq x}| \geq m\},$$

pour tout  $x \in E$ . Cette inclusion est donc une égalité. On conclut alors facilement que, pour tout  $x \in E$ , on a  $|E_{\succ x}| = |E_{\geq x}|$ . Comme  $E_{\succ x} \subseteq E_{\geq x}$ , on a alors  $E_{\succ x} = E_{\geq x}$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

On applique le lemme à l'ensemble  $\Pi'_n$ . D'après la proposition 3.16, il est en bijection avec l'ensemble des orbites de  $G'$  dans  $C_n$ . On définit l'ordre  $\preceq$  sur  $\Pi'_n$  en posant

$$\forall v, v' \in \Pi'_i, \quad \Omega'_v \subseteq \overline{\Omega'_{v'}} \iff v \preceq v'.$$

Par ailleurs, l'ensemble  $\Pi'_n$  est aussi muni de l'ordre  $\leq$  défini dans la section 1.2.

Montrons que les ensembles ordonnés  $(\Pi'_n, \preceq)$  et  $(\Pi'_n, \leq)$  sont isomorphes. L'ensemble ordonné  $(C_n, \preceq)$  est en bijection décroissante avec  $(\mathcal{E}_{C_n}, \subseteq)$ . Fixons des vecteurs  $e_v \in V(\Omega')$ , pour  $v \in \Delta'$ , vérifiant

$$\mathcal{C}_+ = \text{Cone}(e_1, \dots, e_{n-1}, e_{n,+}) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_- = \text{Cone}(e_1, \dots, e_{n-1}, e_{n,-}).$$

Pour tout chemin  $v \in \Pi'_n$ , de longueur  $l$ , on note

$$\mathcal{C}_v := \text{Cone}(e_{v(d)}, d \in \llbracket 0, l \rrbracket).$$

L'application  $\Pi'_n \rightarrow \mathcal{E}_{C_n}$  est une bijection décroissante. On en déduit que les ensembles ordonnés  $(\Pi'_n, \preccurlyeq)$  et  $(\Pi'_n, \leq)$  sont isomorphes.

Pour conclure, il reste à voir que l'identité  $(\Pi'_n, \preccurlyeq) \rightarrow (\Pi'_n, \leq)$  est croissante. Soient  $v$  et  $v'$  deux éléments de  $\Pi'_n$  vérifiant  $v \preccurlyeq v'$ . Par définition, cela signifie que  $\Omega'_v \subseteq \overline{\Omega'_{v'}}$ . On en déduit, d'après la proposition 2.47, que  $\delta(v) \leq \delta(v')$  dans  $\Pi_n$ . Pour conclure que  $v \leq v'$ , il reste à montrer que, si  $v'(0) = (n, +)$  (resp.  $v'(0) = (n, -)$ ), alors  $v(0) = (n, +)$  (resp.  $v(0) = (n, -)$ ). En utilisant la composition des éclatements successifs  $X_n \rightarrow X_0$ , qui est propre, on voit que cela est une conséquence immédiate du fait que, sur  $C_0$ , les orbites  $\Omega'_{n,+}$  et  $\Omega'_{n,-}$  sont fermées.  $\square$

La proposition qui suit permet, avec les résultats montrés jusqu'à maintenant dans cette section, de prouver les propositions 3.11 et 3.12.

**PROPOSITION 3.19.** *Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Les compactifications  $C_i$  et  $X'_i$  de  $\Omega'$  sont isomorphes.*

**DÉMONSTRATION.** Par définition même, le résultat est vrai pour  $i = 0$ . On pose, pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\pi'_{i+1} = \pi_{2i+2} \circ \pi_{2i+1}$ . On va montrer que  $\pi'_{i+1} : C_{i+1} \rightarrow C_i$  est l'éclatement de  $\Omega'_{n,+} \sqcup \Omega'_{n,-}$  si  $i = 0$ , et de  $\overline{\Omega'_v}$  si  $v \leq n-1$ . Remarquons que, comme les types des éléments de  $X_{2i+1}^\sigma$  sont des chemins tracés dans la diagonale de  $\Delta$ , ils ne peuvent pas avoir un élément de  $\Delta_{2i+1}$  pour sommet. Par conséquent,  $\pi_{2i+2} : C_{i+1} \rightarrow \overline{\Omega'} \subseteq X_{2i+1}$  est l'identité. Observons aussi que, d'après la proposition 4.1 du chapitre 2, l'intersection schématique de  $Y_{2i}$  et  $C_i$  est lisse. De plus, d'après la proposition 3.17, cette intersection est égale à  $\Omega'_{n,+} \sqcup \Omega'_{n,-}$  si  $i = 0$ , et à  $\overline{\Omega'_v}$  si  $v \leq n-1$ . On peut conclure.  $\square$

On a donc construit, par éclatements successifs de centres lisses à partir d'une grassmannienne orthogonale, une compactification log homogène  $X'_n$  de  $\text{SO}(2n)$  (sur  $k$ ) qui est projective, lisse et dans laquelle le groupe  $\text{SO}(2n) \times \text{SO}(2n)$  possède deux orbites fermées. Supposons maintenant que le corps  $k$  est parfait, et notons  $\Gamma$  le groupe de Galois absolu de  $k$ . Pour toute forme quadratique non dégénérée  $q$  sur  $k^{2n}$ , on a montré que l'action semi-linéaire de  $\Gamma$  sur  $\text{SO}(2n)$  donnée par la  $k$ -forme  $\text{SO}(q)$  de  $\text{SO}(2n)$  s'étend à  $X'_n$ . Comme  $X'_n$  est projective, on peut former le quotient  $X'_n/\Gamma$ , et obtenir de cette façon une compactification de  $\text{SO}(q)$ . Par ailleurs, on a aussi montré que le processus par lequel on obtient cette compactification « descend » à  $k$ .

En fait, on peut montrer que, pour toute  $k$ -forme  $G_0$  de  $\text{SO}(2n)$ , l'action semi-linéaire de  $\Gamma$  sur  $\text{SO}(2n)$  s'étend à  $X'_n$ . En effet, on a défini à la section 2.2 du chapitre 1, une action du groupe de Galois  $\Gamma$  sur les données combinatoires attachées à l'espace homogène  $\Omega' := G_0$  sous  $G' := G_0 \times G_0$ . En particulier, on dispose d'une action du groupe  $\Gamma$  sur l'espace vectoriel  $V(\Omega')$ . Cette action stabilise le cône des valuations  $G$ -invariantes, qui est l'opposé de la chambre de Weyl, et doit permuter l'image des couleurs dans  $V(\Omega')$ . En utilisant le fait que ces images sont les coracines simples (voir par exemple [Tim03]), on prouve alors facilement que tout élément du groupe  $\Gamma$  agit soit trivialement sur  $V(\Omega')$ , soit par la réflexion qui échange les deux cônes maximaux de l'éventail de  $X'_n$ . Par conséquent, l'action de  $\Gamma$  s'étend bien à  $X'_n$ . Comme ci-dessus, on peut former le quotient  $X'_n/\Gamma$ , et obtenir de cette façon une compactification de  $G_0$ .

**3.3. Le cas « orthogonal impair ».** On suppose dans cette section que la dimension commune de  $V$  et  $W$  est impaire, et on la note  $2n+1$ . On suppose aussi que les formes bilinéaires  $\omega_V$  et  $\omega_W$  sont symétriques. La compactification  $X'_0$  de  $\Omega'$  est ici encore une grassmannienne orthogonale. Pour commencer, par un calcul totalement analogue à celui mené dans la proposition 3.13, on montre la :

PROPOSITION 3.20. *La composante connexe  $X'_n$  de  $X_{2n+1}^\sigma$  qui contient  $\Omega'$  est la compactification magnifique de  $\Omega'$ .*

DÉMONSTRATION. En effet, d'après la proposition 4.4 du chapitre 2, et le théorème 2.1, il est clair que la compactification  $X'_n$  de  $\Omega'$  est log homogène. Calculons les données combinatoires associées. On reprend les notations introduites dans la section 1.4, et on suppose que le corps  $k$  est algébriquement clos. On peut donc demander à ce que les formes  $\omega_V$  et  $\omega_W$  vérifient

$$\forall i, j \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket, \quad \omega_V(v_i, v_j) = \delta_{i, 2n-j+2} \quad (\text{resp. } \omega_W(w_i, w_j) = \delta_{i, 2n-j+2}).$$

On note  $B' = B \cap G'$ . C'est un sous-groupe de Borel de  $G'$ , et l'orbite  $B'f_0$  est ouverte dans  $\Omega'$ . On note aussi  $T' = T \cap G'$ . C'est un tore maximal de  $G'$ , contenu dans  $B'$ . L'espace vectoriel  $V(\Omega')$  est le sous-espace vectoriel de  $V(\Omega)$  défini par les équations

$$\forall v \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \chi_v - \nu_{2n-v+2} = \nu_v - \chi_{2n-v+2} \text{ et } \chi_{n+1} - \nu_{n+1} = 0$$

et le cône  $\rho(\mathcal{V}^{G'}) \subseteq V(\Omega')$  est décrit par

$$\{\chi_1 - \nu_{2n+1} \leq \dots \leq \chi_n - \nu_{n+2} \leq 0\}.$$

On montre aisément que ce cône est entièrement contenu dans un cône figurant dans l'éventail de la compactification  $X_{2n+1}$ , ce qui prouve la proposition.  $\square$

Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $X'_i$  la composante connexe de  $X_{2i+1}^\sigma$  qui contient  $\Omega'$ . Il s'agit d'une compactification projective et lisse de  $\Omega'$ . Noter que  $X_{2i+1}^\sigma = X_{2i}^\sigma$ . La connaissance des données combinatoires attachées à  $X'_n$  permet alors, comme dans la section 3.2, de décrire la combinatoire des orbites de  $G'$  dans  $X'_i$ , et d'identifier les ensembles  $X'_i(k)$ , pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On note  $\Delta'$  l'ensemble  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , muni de l'ordre défini par

$$\forall v, v' \in \Delta', \quad v \geq v' \iff v \text{ est plus petit que } v'.$$

DÉFINITION 3.21. *Soient  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $v \in \Pi'_i$ . On note  $\Omega'_v(k)$  l'ensemble des  $\mathbf{c} \in X_i(k)$  vérifiant :*

- $s_{\mathbf{c}} = \delta(v)$ ,  $\mathbf{c}_V = \mathbf{c}_V^\perp$  et  $\mathbf{c}_W = \mathbf{c}_W^\perp$ .
- le sous-espace vectoriel  $F_{\mathbf{c}}$  appartient à  $X'_0(k)$ .
- pour tout  $d \in \llbracket 1, l \rrbracket$  ( $l$  étant la longueur de  $\mathbf{c}$ ), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{gr}(\mathbf{c}_V)_d & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{c}}} & \text{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{gr}(\mathbf{c}_V)_{-d}^* & \xleftarrow{\iota_{\mathbf{c}}} & \text{gr}(\mathbf{c}_W)_d^* \end{array}$$

*est commutatif.*

Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Pour tout  $v \in \Pi'_i$ , on montre que l'ensemble  $\Omega'_v(k)$  est stable sous l'action du groupe  $G'(k)$ , et qu'il ne forme qu'une seule orbite si le corps  $k$  est algébriquement clos. On en déduit que  $\Omega'_v(\bar{k})$  est une composante connexe de la variété des points fixes  $\Omega_{\delta(v)}^\sigma$  possédant un point  $k$ -rationnel. Elle est donc définie sur  $k$ , et on note  $\Omega'_v$  la  $k$ -variété sous-jacente. On prouve alors

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall v, v' \in \Pi'_i, \quad v \leq v' \iff \Omega'_v \subseteq \overline{\Omega'_{v'}}.$$

En d'autres termes, l'ensemble ordonné des orbites de  $G'$  dans  $X'_i$  est isomorphe à l'ensemble ordonné  $(\Pi'_i, \leq)$ . On a aussi

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad X'_i(k) = \bigsqcup_{v \in \Pi'_i} \Omega'_v(k).$$

Pour finir, on montre :

PROPOSITION 3.22. *La suite de compactifications*

$$X'_n \rightarrow X'_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X'_1 \rightarrow X'_0$$

de  $\Omega'$  est celle obtenue en appliquant la procédure d'éclatements successifs à  $X'_0$ .

**3.4. Le cas « symplectique ».** On suppose dans cette section que la dimension commune de  $V$  et  $W$  est paire, et on la note  $2n$ . On suppose aussi que les formes bilinéaires  $\omega_V$  et  $\omega_W$  sont antisymétriques. La compactification  $X'_0$  de  $\Omega'$  est ici une grassmannienne lagrangienne. La paire  $(\Omega', G')$  est isomorphe à  $(\mathrm{Sp}(2n), \mathrm{Sp}(2n) \times \mathrm{Sp}(2n))$ . Comme on le vérifie facilement, la chambre de Weyl de  $\mathrm{Sp}(2n)$  est lisse pour le réseau correspondant, si bien que la compactification canonique de  $\mathrm{Sp}(2n)$  (voir section 1.1) est lisse : le groupe  $\mathrm{Sp}(2n)$  possède une compactification magnifique (noter qu'il n'est pas de type adjoint). On note  $X'_n$  la composante connexe de  $X'_{2n}$  qui contient  $\Omega'$ . Par un calcul totalement analogue à celui mené dans la proposition 3.20, on montre que l'éventail colorié correspondant à la compactification  $X'_n$  de  $\Omega'$  est formé du cône  $\rho(\mathcal{V}^{G'})$ . Par conséquent, ce cône est lisse et la compactification  $X'_n$  est la compactification magnifique de  $\mathrm{Sp}(2n)$ .

PROPOSITION 3.23. *La composante connexe  $X'_n$  de  $X'_{2n}$  qui contient  $\Omega'$  est la compactification magnifique de  $\Omega'$ .*

Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $X'_i$  la composante connexe de  $X'_{2i}$  qui contient  $\Omega'$ . Il s'agit d'une compactification projective et lisse de  $\Omega'$ . Noter que  $X'_{2i} = X'_{2i-1}$ . La connaissance des données combinatoires attachées à  $X'_n$  permet alors, comme dans la section 3.2, de décrire la combinatoire des orbites de  $G'$  dans  $X'_i$ , et d'identifier les ensembles  $X'_i(k)$ , pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On note  $\Delta'$  l'ensemble  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , muni de l'ordre défini par

$$\forall v, v' \in \Delta', \quad v \geq v' \iff v \text{ est plus petit que } v'.$$

DÉFINITION 3.24. *Soient  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $v \in \Pi'_i$ . On note  $\Omega'_v(k)$  l'ensemble des  $\mathbf{c} \in X'_i(k)$  vérifiant :*

- $s_{\mathbf{c}} = \delta(v)$ ,  $\mathbf{c}_V = \mathbf{c}_V^\perp$  et  $\mathbf{c}_W = \mathbf{c}_W^\perp$ .
- le sous-espace vectoriel  $F_{\mathbf{c}}$  appartient à  $X'_0(k)$ .
- pour tout  $d \in \llbracket 1, l \rrbracket$  ( $l$  étant la longueur de  $\mathbf{c}$ ), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}(\mathbf{c}_V)_d & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{c}}} & \mathrm{gr}(\mathbf{c}_W)_{-d} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{gr}(\mathbf{c}_V)_{-d}^* & \xleftarrow{\iota_{\mathbf{c}}} & \mathrm{gr}(\mathbf{c}_W)_d^* \end{array}$$

est commutatif.

Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Pour tout  $v \in \Pi'_i$ , on montre que l'ensemble  $\Omega'_v(k)$  est stable sous l'action du groupe  $G'(k)$ , et qu'il ne forme qu'une seule orbite si le corps  $k$  est algébriquement clos. On en déduit que  $\Omega'_v(\bar{k})$  est une composante connexe de la variété des points fixes  $\Omega_{\delta(v)}^\sigma$  possédant un point  $k$ -rationnel. Elle est donc définie sur  $k$ , et on note  $\Omega'_v$  la  $k$ -variété sous-jacente. On prouve alors

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall v, v' \in \Pi'_i, \quad v \leq v' \iff \Omega'_v \subseteq \overline{\Omega'_{v'}}.$$

En d'autres termes, l'ensemble ordonné des orbites de  $G'$  dans  $X'_i$  est isomorphe à l'ensemble ordonné  $(\Pi'_i, \leq)$ . On a aussi

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad X'_i(k) = \bigsqcup_{v \in \Pi'_i} \Omega'_v(k).$$

Pour finir, on montre :

PROPOSITION 3.25. *La suite de compactifications*

$$X'_n \rightarrow X'_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X'_1 \rightarrow X'_0$$

de  $\Omega'$  est celle obtenue en appliquant la procédure d'éclatements successifs à  $X'_0$ .





## Bibliographie

- [Abe08] T. Abe. Compactification of the symplectic group via generalized symplectic isomorphisms. In *Higher dimensional algebraic varieties and vector bundles*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B9, pages 1–50. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2008.
- [BB96] F. Bien and M. Brion. Automorphisms and local rigidity of regular varieties. *Compositio Math.*, 104(1) :1–26, 1996.
- [BDCP90] E. Bifet, C. De Concini, and C. Procesi. Cohomology of regular embeddings. *Adv. Math.*, 82(1) :1–34, 1990.
- [BK05] M. Brion and S. Kumar. *Frobenius splitting methods in geometry and representation theory*, volume 231 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2005.
- [BLV86] M. Brion, D. Luna, and Th. Vust. Espaces homogènes sphériques. *Invent. Math.*, 84(3) :617–632, 1986.
- [Bor91] A. Borel. *Linear algebraic groups*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [BP87] M. Brion and F. Pauer. Valuations des espaces homogènes sphériques. *Comment. Math. Helv.*, 62(2) :265–285, 1987.
- [Bri89] M. Brion. Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques. *Duke Math. J.*, 58(2) :397–424, 1989.
- [Bri90] M. Brion. Vers une généralisation des espaces symétriques. *J. Algebra*, 134(1) :115–143, 1990.
- [Bri95] M. Brion. Spherical varieties. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 753–760, Basel, 1995. Birkhäuser.
- [Bri03] M. Brion. Group completions via Hilbert schemes. *J. Algebraic Geom.*, 12(4) :605–626, 2003.
- [Bri07] M. Brion. Log homogeneous varieties. In *Proceedings of the XVIIth Latin American Algebra Colloquium (Spanish)*, Bibl. Rev. Mat. Iberoamericana, pages 1–39. Rev. Mat. Iberoamericana, Madrid, 2007.
- [Bry79] J.-L. Brylinski. Décomposition simpliciale d’un réseau, invariante par un groupe fini d’automorphismes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 288(2) :A137–A139, 1979.

- [BT65] A. Borel and J. Tits. Groupes réductifs. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (27) :55–150, 1965.
- [CLS] D. Cox, J. Little, and H. Schenck. Toric varieties. disponible à l'adresse : <http://www.cs.amherst.edu/~dac/toric.html>.
- [CTHS05] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari, and A. N. Skorobogatov. Compactification équivariante d'un tore (d'après Brylinski et Künnemann). *Expo. Math.*, 23(2) :161–170, 2005.
- [Dan78] V. I. Danilov. The geometry of toric varieties. *Uspekhi Mat. Nauk*, 33(2(200)) :85–134, 247, 1978.
- [DCP83] C. De Concini and C. Procesi. Complete symmetric varieties. In *Invariant theory (Montecatini, 1982)*, volume 996 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–44. Springer, Berlin, 1983.
- [DCS99] C. De Concini and T. A. Springer. Compactification of symmetric varieties. *Transform. Groups*, 4(2-3) :273–300, 1999. Dedicated to the memory of Claude Chevalley.
- [Dem70] M. Demazure. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 3 :507–588, 1970.
- [Dem80] M. Demazure. Limites de groupes orthogonaux ou symplectiques. *preprint*, pages 507–588, 1980.
- [DPT80] M. Demazure, H.C. Pinkham, and B. Teissier, editors. *Séminaire sur les Singularités des Surfaces*, volume 777 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980. Held at the Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Palaiseau, 1976–1977.
- [ELFST10] E.J. Elizondo, P. Lima-Filho, F. Sottile, and Z. Teitler. Arithmetic toric varieties. *ArXiv e-prints*, March 2010.
- [Fog73] J. Fogarty. Fixed point schemes. *Amer. J. Math.*, 95 :35–51, 1973.
- [Ful93] W. Fulton. *Introduction to toric varieties*, volume 131 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. The William H. Roever Lectures in Geometry.
- [Gro66] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (28) :255, 1966.
- [Hur09] M. Huruguen. Toric varieties and spherical embeddings over an arbitrary field. *ArXiv e-prints, to appear in J. Algebra*, December 2009.
- [Kau00] I. Kausz. A modular compactification of the general linear group. *Doc. Math.*, 5 :553–594 (electronic), 2000.
- [KKMSD73] G. Kempf, F.F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat. *Toroidal embeddings. I*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 339. Springer-Verlag, Berlin,

1973.

- [Kno91] F. Knop. The Luna-Vust theory of spherical embeddings. In *Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups (Hyderabad, 1989)*, pages 225–249, Madras, 1991. Manoj Prakashan.
- [Kno93] F. Knop. Über Bewertungen, welche unter einer reduktiven Gruppe invariant sind. *Math. Ann.*, 295(2) :333–363, 1993.
- [Kno96] F. Knop. Automorphisms, root systems, and compactifications of homogeneous varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(1) :153–174, 1996.
- [Lak82] D. Laksov. Notes on the evolution of complete correlations. In *Enumerative geometry and classical algebraic geometry (Nice, 1981)*, volume 24 of *Progr. Math.*, pages 107–132. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1982.
- [Lak87] D. Laksov. Completed quadrics and linear maps. In *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, volume 46 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 371–387. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [Lak88] D. Laksov. The geometry of complete linear maps. *Ark. Mat.*, 26(2) :231–263, 1988.
- [Los09] I. Losev. Demazure embeddings are smooth. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (14) :2588–2596, 2009.
- [Lun96] D. Luna. Toute variété magnifique est sphérique. *Transform. Groups*, 1(3) :249–258, 1996.
- [LV83] D. Luna and Th. Vust. Plongements d’espaces homogènes. *Comment. Math. Helv.*, 58(2) :186–245, 1983.
- [Mat89] H. Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.
- [MO75] K. Miyake and T. Oda. Almost homogeneous algebraic varieties under algebraic torus action. In *Manifolds—Tokyo 1973 (Proc. Internat. Conf., Tokyo, 1973)*, pages 373–381. Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1975.
- [MT11] J. Martens and M. Thaddeus. Compactifications of reductive groups as moduli stacks of bundles. *ArXiv e-prints*, May 2011.
- [Oda88] T. Oda. Convex bodies and algebraic geometry—toric varieties and applications. I. In *Algebraic Geometry Seminar (Singapore, 1987)*, pages 89–94. World Sci. Publishing, Singapore, 1988.
- [Ric82] R. W. Richardson. On orbits of algebraic groups and Lie groups. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 25(1) :1–28, 1982.
- [Ros56] M. Rosenlicht. Some basic theorems on algebraic groups. *Amer. J. Math.*, 78 :401–443, 1956.

- [Sch79] H. Schubert. *Kalkül der abzählenden Geometrie*. Springer-Verlag, Berlin, 1979. Reprint of the 1879 original, With an introduction by Steven L. Kleiman.
- [Sem48] J. G. Semple. On complete quadrics. *J. London Math. Soc.*, 23 :258–267, 1948.
- [Sem52] J.G. Semple. On complete quadrics. II. *J. London Math. Soc.*, 27 :280–287, 1952.
- [Spr06] T.A. Springer. Some results on compactifications of semisimple groups. In *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, pages 1337–1348. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [Str87] E. Strickland. A vanishing theorem for group compactifications. *Math. Ann.*, 277(1) :165–171, 1987.
- [Sum74] H. Sumihiro. Equivariant completion. *J. Math. Kyoto Univ.*, 14 :1–28, 1974.
- [Tha99] M. Thaddeus. Complete collineations revisited. *Math. Ann.*, 315(3) :469–495, 1999.
- [Tim03] D. A. Timashëv. Equivariant compactifications of reductive groups. *Mat. Sb.*, 194(4) :119–146, 2003.
- [TK88] A. Thorup and S. Kleiman. Complete bilinear forms. In *Algebraic geometry (Sundance, UT, 1986)*, volume 1311 of *Lecture Notes in Math.*, pages 253–320. Springer, Berlin, 1988.
- [Tyr56] J. A. Tyrell. Complete quadrics and collineations in  $S_n$ . *Mathematika*, pages 69–79, 1956.
- [Vai82] I. Vainsencher. Schubert calculus for complete quadrics. In *Enumerative geometry and classical algebraic geometry (Nice, 1981)*, volume 24 of *Progr. Math.*, pages 199–235. Birkhäuser Boston, Mass., 1982.
- [Vai84] I. Vainsencher. Complete collineations and blowing up determinantal ideals. *Math. Ann.*, 267(3) :417–432, 1984.
- [Vus74] T. Vust. Opération de groupes réductifs dans un type de cônes presque homogènes. *Bull. Soc. Math. France*, 102 :317–333, 1974.
- [Vus90] T. Vust. Plongements d’espaces symétriques algébriques : une classification. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 17(2) :165–195, 1990.
- [Wło93] J. Włodarczyk. Embeddings in toric varieties and prevarieties. *J. Algebraic Geom.*, 2(4) :705–726, 1993.









## RÉSUMÉ

Cette thèse porte sur les plongements d'espaces homogènes sphériques sur un corps quelconque. Dans une première partie, on aborde la classification de ces plongements, dans la lignée des travaux de Demazure et bien d'autres sur les variétés toriques, et de Luna, Vust et Knop sur les variétés sphériques. Dans une seconde partie, on généralise en caractéristique positive certains résultats obtenus par Bien et Brion portant sur les plongements complets et lisses qui sont log homogènes, c'est-à-dire dont le bord est un diviseur à croisements normaux et le fibré tangent logarithmique associé est engendré par ses sections globales. Dans une dernière partie, on construit par éclatements successifs une compactification lisse et log homogène explicite du groupe linéaire (différente de celle obtenue par Kausz). En prenant dans cette compactification les points fixes de certains automorphismes, on en déduit alors la construction de compactifications lisses et log homogènes de certains groupes semi-simples classiques.

## ABSTRACT

This thesis is devoted to the study of embeddings of spherical homogeneous spaces over an arbitrary field. In the first part, we address the classification of such embeddings, in the spirit of Demazure and many others in the setting of toric varieties and of Luna, Vust and Knop in the setting of spherical varieties. In the second part, we generalize in positive characteristics some results obtained by Bien and Brion on those complete smooth embeddings that are log homogeneous, i.e., whose boundary is a normal crossing divisor and the associated logarithmic tangent bundle is generated by its global sections. In the last part, we construct an explicit smooth log homogeneous compactification of the general linear group by successive blow-ups (different from the one obtained by Kausz). By taking fixed points of certain automorphisms on this compactification, one gets smooth log homogeneous compactifications of some classical semi-simple groups.

## MOTS-CLÉS

variété torique, variété sphérique, variété log homogène, groupe semi-simple

## CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

14M12 14M15 14M17 14M25 14M27 20G15