



HAL
open science

Modélisation numérique de la propagation d'ondes sismiques en géométrie sphérique : application à la sismologie globale

Emmanuel Chaljub

► **To cite this version:**

Emmanuel Chaljub. Modélisation numérique de la propagation d'ondes sismiques en géométrie sphérique : application à la sismologie globale. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2000. Français. NNT : . tel-00716486

HAL Id: tel-00716486

<https://theses.hal.science/tel-00716486>

Submitted on 10 Jul 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse présentée par

Emmanuel CHALJUB

Pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Paris 7 – Denis Diderot

**Modélisation numérique de la propagation d'ondes sismiques
en géométrie sphérique : application à la sismologie globale**

Soutenue le 29 mai 2000 devant le jury composé de Messieurs :

J.-P. MONTAGNER (IPGP) Président
J.-P. VILOTTE (IPGP) Directeur de thèse
R. MADARIAGA (ENS Paris) Rapporteur
Y. MADAY (Paris 6) Rapporteur
H.-P. BUNGE (Université de Princeton, USA) Examineur
A. TARANTOLA (IPGP) Examineur
B. VALETTE (IRD, Université de Savoie) Examineur

Table des matières

Remerciements	5
Introduction générale	9
1 Équations du mouvement	13
1.1 Introduction	13
1.2 Équations de l'élastodynamique	13
1.2.1 Descriptions Lagrangienne et Eulérienne	13
1.2.2 Mesure de déformation	14
1.2.3 Tenseurs de contrainte	15
1.2.4 Dérivée particulaire	15
1.2.5 Lois de conservation	16
1.2.6 Forces de volume	17
1.2.7 Équations eulériennes du mouvement	18
1.2.8 Loi de comportement	19
1.3 Équations de la gravito-élastodynamique	20
1.3.1 Équilibre hydrostatique dans la configuration de référence	21
1.3.2 Perturbations lagrangienne et eulérienne	22
1.3.3 Équations du mouvement	23
1.3.4 Propriétés spectrales de l'opérateur gravito-élastique	24
1.4 Formulation variationnelle	26
1.4.1 Préliminaires	26
1.4.2 Formulation faible du problème de la gravito-élastodynamique	28
1.A Forme de l'opérateur gravito-élastique dans le fluide	30
1.B Rappels d'analyse fonctionnelle	31
1.C Symétrisation des termes de gravité	32
2 Méthode des différences finies	37
2.1 Introduction	37
2.2 Modélisation physique et numérique	39
2.2.1 Modèle physique	39
2.2.2 Approximation par différences finies	39
2.3 Sensibilité des précurseurs SS	44
2.3.1 Introduction	44
2.3.2 Topographie sur la discontinuité à 660 km	47
2.3.3 Observations au double du point de rebond	49
2.3.4 Perturbation de vitesse induite par la présence d'un <i>slab</i>	49
2.4 Conclusions	52
2.A Diagramme de radiation de la source	54
2.B Condition limite à l'axe de symétrie	55

3	Méthode des éléments spectraux	59
3.1	Introduction	59
3.2	Principe de la méthode	60
3.3	Maillage hexaédrique de la Terre	61
3.3.1	Maillage de la surface d'une sphère	62
3.3.2	Construction du maillage 3D	62
3.3.3	Adaptation conforme à un modèle de Terre moyen	65
3.3.4	Construction d'un maillage non-conforme	66
3.4	Discretisation des équations du mouvement dans un milieu solide	69
3.4.1	Construction des espaces discrets	69
3.4.2	Règle d'intégration numérique	70
3.4.3	Bases polynômiales	71
3.4.4	Interpolateur de Lagrange	72
3.4.5	Approximation du produit scalaire	72
3.4.6	Approximation des formes bilinéaires a et b	73
3.4.7	Système algébrique	74
3.4.8	Évolution temporelle	76
3.4.9	Implémentation parallèle de l'algorithme	79
3.A	Construction du maillage	84
3.B	Construction du système algébrique	86
3.C	Algorithmes de résolution du système d'interface	91
4	Modèles de boule solide homogène par couches	95
4.1	Solution modale de référence	95
4.2	Boule homogène élastique solide	97
4.2.1	Grille conforme	97
4.2.2	Grilles non conformes	109
4.3	Boule homogène autogravitante solide	110
4.4	Boule solide homogène par morceaux	111
4.A	Résultats	124
4.A.1	Présentation des expériences numériques	124
4.A.2	Calcul de l'énergie au niveau discret	124
5	Extension à des modèles de Terre	127
5.1	Introduction	127
5.2	Méthode couplée : éléments spectraux - modes propres	128
5.3	Modèles à symétrie sphériques avec inclusion fluide	130
5.3.1	Boule homogène élastique solide-fluide	130
5.3.2	Modèle PREM220	132
5.3.3	Modèle PREM	133
5.4	Discretisation par éléments spectraux des régions fluides	138
5.A	Résultats	140
5.A.1	Présentation des expériences numériques	140
	Conclusions et Perspectives	143
	Références	150

Remerciements

Voici venu le moment d'écrire cette page de remerciements à laquelle je pense depuis le début de ma thèse !

Je voudrais tout d'abord remercier sincèrement Albert Tarantola de m'avoir accueilli un jour de printemps 1993 pour faire un stage de maîtrise au département de sismologie de l'IPG puis de m'avoir permis de commencer un travail de thèse sous sa direction. Je dois dire maintenant que sa proposition de stage était la seule réponse positive à toutes les lettres de candidature que j'avais envoyées ! Je souhaite souligner ici la grande qualité d'Albert de donner une chance à chaque étudiant sans utiliser d'information *a priori* sur son interlocuteur. De plus, j'ai beaucoup apprécié qu'Albert me parle dès le début comme à un vrai chercheur, même s'il m'est arrivé de le regretter quelquefois. Le sujet de mon stage de maîtrise était de construire un outil de modélisation de la propagation d'ondes dans la Terre pour permettre à plus long terme d'aborder le problème inverse à l'échelle du globe. Après plus de cinq années de thèse, je crois que je dois être très ferme, Albert, je n'aborderai pas le problème inverse !

J'adresse mes remerciements profonds à Jean-Pierre Vilotte pour avoir accepté de diriger ma thèse après plus de deux années passées avec Albert. Pour ma part, l'arrivée de Jean-Pierre à l'IPG a signifié enfin la possibilité de développer une méthode numérique adaptée à la propagation 3D des ondes dans la Terre. J'ai énormément appris à son contact et j'ai pu apprécier et bénéficier de sa grande culture physique et numérique et de sa rigueur scientifique. Le travail que nous avons pu effectuer ensemble a été extrêmement enthousiasmant pour moi et je garderai un souvenir ému des quelques nuits blanches passées à contempler la constellation des machines de la salle GTG ! Jean-Pierre m'a également soutenu pour obtenir un poste d'A.T.E.R ; ce qui m'a permis de partager son goût pour l'enseignement.

C'est un grand honneur pour moi que Messieurs Raúl Madariaga et Yvon Maday aient accepté de rapporter mon travail de thèse. Je les en remercie vivement d'autant plus le délai imparti était relativement court.

Au cours de cette dernière année, j'ai eu l'occasion de travailler avec Bernard Valette sur l'incorporation de la gravité dans l'équation des ondes. Je le remercie profondément d'avoir passé du temps à m'enseigner ces notions. En outre, j'ai beaucoup apprécié ses qualités humaines dans les moments difficiles que l'on rencontre parfois en fin de thèse. Bernard a accepté de faire partie de mon jury et je lui en suis très reconnaissant.

J'ai eu l'occasion de côtoyer Hans-Peter Bunge lors de son séjour postdoctoral à l'IPG au tout début de mon travail sur la méthode des éléments spectraux. J'ai énormément apprécié ses encouragements et son enthousiasme dans ce stade préliminaire de mon travail. Cette confiance précoce et constante que m'a témoignée Hans-Peter a été un facteur de motivation très important pour moi. Je suis très heureux qu'il ait accepté de faire partie de mon jury et j'attends avec impatience notre future collaboration.

Je remercie également Jean-Paul Montagner d'avoir accepté la présidence de mon jury de thèse.

Je tiens à souligner que la deuxième partie de mon travail de thèse n'aurait pas été envisageable sans le remarquable travail de Dimitri Komatitsch. Au cours de son travail de thèse, il a en effet démontré tout le potentiel de la méthode des éléments spectraux appliquées aux équations de l'élastodynamique à 3D ce qui a permis l'application à la Terre.

Je veux également rendre hommage au travail impressionnant de Yann Capdeville qui a permis de coupler la méthode des éléments spectraux aux méthodes de sommation de modes propres. J'ai utilisé la primeur de ses résultats pour illustrer la dernière partie de mon travail, mais nul doute que la thèse de Yann sera un grand cru de l'année 2000 ! De plus, au contact de Yann j'ai pu enfin apprécier les méthodes de modes propres et je l'en remercie beaucoup.

Je remercie toutes les personnes qui ont manifesté de l'intérêt à mon travail et avec qui j'ai pu partager quelques discussions intéressantes. Merci donc à Véronique Farra, Geneviève Roullet, Eléonore Stutzmann, Christophe Barnes, Sébastien Chevrot, Alesandro Forte, Satish Sing de l'IPG. Merci également à Christine Bernardi du laboratoire d'analyse numérique de Paris VI pour sa gentillesse et sa disponibilité ainsi qu'à Faker Ben Belgacem de l'université de Toulouse.

Il est temps ici d'ouvrir une grande parenthèse de remerciements à tous les membres du Tarantoland des dernières années ! Chers membres de ce club fermé (pour cause d'inventaire), permettez au dernier des tarantolos d'évoquer une dernière fois cette légende oubliée. Il était une fois une salle où, sous la lumière des néons, vivait une cohorte d'étudiants aux origines variées. La vie était plutôt douce au labo, même s'il fallait parfois convaincre Albert que la confiance qu'il nous accordait était justifiée. Comme beaucoup de membres du GTG, je suis arrivé au labo un jour de séminaire-pizza et j'ai décidé d'y rester. Je remercie les "anciens" de leur accueil chaleureux : Stefan Nielsen, Bertrand Maillot ou encore Gunter Roth (qui m'a fait une grosse peur quand il m'a demandé ce que je faisais assis à SON bureau). Je remercie tous les amis avec qui j'ai passé des moments inoubliables pendant ces cinq années de thèse. Bedankt à mes potes collocataires Bruno Riollet et Hugues Djikpéssé. Merci et sköll à Tom Houlder même s'il n'a pas fini son code pour gagner au loto sportif en utilisant la CM5. Merci aux inséparables Marwan Charara et Christophe Barnes (dits Chriswan et Martophe). Merci encore aux avant-derniers des mohicans Roland Martin et Dimitri Komatitsch, y compris au niveau de l'ambiance. Merci aussi à la gente féminine du tarantoland, Emmanuelle Juvé (ma proprio) et Albane Saintenoy. Enfin je remercie et je souhaite bonne chance à la relève : Alex Fournier, Jean-Paul Ampuero et Lydie Staron. Grand merci à Ghislaine Pernat pour la bonne humeur, les stylos et les transparents, les avances et les billets d'avion. Je remercie aussi tous les autres membres du labo que j'aurais oubliés.

Je tiens à remercier particulièrement Geneviève Moguilny, dite sainte Geneviève, pour sa disponibilité à répondre à sept ans de questions sur LateX, Unix, Pstricks ou encore Medieval Madness et Monster Bash. Merci également pour tous les posters sortis à 4 heures du mat' et pour vérifier les resas de la machine parallèle à l'heure de l'apéro. Je remercie également Patrick Stoclet pour ses conseils de programmation en CM-fortran et en MPI.

Je remercie et je salue les manHouches, croisés lors d'une école doctorale en face du Mont Blanc (il paraît, on l'a jamais vu) : Dany de Brito, Frère Labrosse, Sebos, Muriel, Gael, etc ...

Merci à Michel, le patron des "Sciences" pour expliquer à la police qu'on finit nos verres et on y va. Merci aussi pour les fois où il m'a payé le taxi pour me renvoyer chez moi.

Je remercie profondément mes amis Dundar et Nathalie qui ont partagé mes joies et mes prises de tête du labo.

Je remercie les membres de ma famille qui m'ont soutenu tout au long de ces années, y compris dans les moments difficiles.

Merci à Ariane, mon amoureuse, pour ta patience et pour accepter de m'amener à la gare sans jamais me faire le coup de la panne.

Enfin, je dédie ce travail à Orlando et Alice, mes parents, qui m'ont donné le goût de la recherche et de la vie.

Introduction générale

Au cours des dernières décennies, le déploiement massif de réseaux de sismomètres et l'acquisition de données de qualité croissante a permis l'essor de la tomographie sismique à l'échelle du globe. La volonté de synthétiser les nombreuses observations (*e. g.* temps d'arrivée des ondes de volume, vitesses de phase des ondes de surface) a conduit à l'élaboration de modèles de Terre «moyens» dans lesquels les propriétés sismiques ont une dépendance radiale. Parmi ces modèles représentatifs de la structure au premier ordre de la Terre, on peut citer PREM (Dziewonski and Anderson 1981) et IASPEI91 (Kenneth and Engdahl 1991). On trouvera également dans Nolet et al. (1994) une compilation de modèles régionaux 1D pour les vitesses des ondes P et S . L'étude extensive des ondes de surface a alors permis de caractériser les variations à grande longueur d'onde autour de cette configuration sphérique et de les corrélérer de façon satisfaisante avec la tectonique de surface (Romanowicz 1991, Ritzwoller and Lavelly 1995, Dziewonski 1995). Parallèlement, de nombreux travaux, basés sur l'utilisation des ondes de volume, ont tenté d'imaginer des structures tridimensionnelles qui jouent un rôle important dans la dynamique du manteau. On peut citer l'exemple du recyclage des plaques à l'aplomb des zones de subduction (Grand 1994, van der Hilst et al. 1997); la détection des panaches ascendants (Nataf and VanDecar 1993, Vinnick et al. 1997a); la caractérisation du couplage thermique et chimique entre noyau et manteau (Jeanloz 1990, Weber et al. 1996); la cartographie de la topographie des discontinuités du manteau supérieur (Shearer and Masters 1992, Chevrot et al. 1999). Toutes ces études illustrent la complexité de la structure tridimensionnelle de la Terre et suggèrent une distribution spatiale d'hétérogénéités à toutes les échelles. Par ailleurs, les études numériques de la convection dans le manteau présentent de larges spectres de variations de température qui confortent cette prédiction (*e. g.* Bunge et al. 1997).

Afin d'augmenter la résolution des modèles tomographiques globaux, il faut désormais tenir compte de l'influence des structures à petite échelle sur les données sismiques observées en surface. Pour cela, il est nécessaire de dépasser les approximations utilisées classiquement dans la résolution du problème direct (Clévédy et al. 2000). En effet, pour des raisons de faisabilité, les méthodes inverses en tomographie globale sont basées sur une formulation simplifiée de l'équation des ondes. Le calcul des temps de trajet des ondes de volume est par exemple effectué dans l'approximation haute fréquence de la théorie des rais; quant à la modélisation des ondes de surface, elle est classiquement basée sur une théorie de Born au premier ordre et sur une approximation asymptotique d'ordre zéro.

À l'heure actuelle, les outils théoriques et numériques développés pour la résolution du problème direct permettent difficilement de calculer la solution complète de l'équation des ondes dans des modèles réalistes d'hétérogénéités. Dans l'approche la plus utilisée en sismologie globale, le calcul de sismogrammes s'effectue par sommation des modes propres de la Terre. Dans le cadre d'une description physique générale, une série de modes propres de référence est calculée dans un modèle sphérique, élastique, auto-gravitant, sans rotation et éventuellement anisotrope. La prise en compte de l'atténuation¹, de l'ellipticité due à la rotation ou de variations latérales des paramètres élastiques est traitée comme une perturbation autour de la solution du problème de référence. Le calcul des modes propres du modèle

1. Dans le cas anélastique et elliptique, la solution de référence doit être anélastique (Lognonné 1991).

perturbé nécessite de coupler deux à deux tous les modes de la solution de référence². En général, les modes propres ainsi que les perturbations asphériques sont exprimés sur une base d'harmoniques sphériques généralisés. Cela permet d'adapter la taille du problème à résoudre à la fois au spectre du signal et à la taille des perturbations. Cependant, pour traiter le cas d'une hétérogénéité localisée, le couplage entre les modes dans une perturbation au premier ordre doit être suffisamment général (Capdeville et al. 1997) et il semble que des perturbations d'ordre supérieur doivent être considérées (Lognonné and Clévédy 1997). Dans tous les cas, la taille du problème à résoudre varie de façon fortement non-linéaire avec la fréquence du signal propagé. Pour cette raison, les calculs de formes d'onde dans des modèles hétérogènes asphériques sont à ce jour limités aux seules ondes de surface.

Dans ce travail, on a cherché à appliquer à l'échelle globale des méthodes numériques calculant le champ d'onde complet en espace-temps afin de surmonter les limitations exposées plus haut et d'avoir en plus accès à la propagation du champ d'ondes dans le milieu. La prise en compte de l'aspect propagatif est importante pour une compréhension plus fine de la sensibilité du champ d'ondes à une distribution donnée d'hétérogénéités. De plus le calcul du champ complet, peut permettre de quantifier les approximations effectuées dans les méthodes d'inversion. Avant de choisir parmi toutes les méthodes disponibles, on peut dégager un certain nombre de contraintes à respecter. En premier lieu, on privilégie l'utilisation de bases de fonctions localisées en espace afin de pouvoir rendre compte d'hétérogénéités de petite taille. Ensuite, il est crucial de reproduire précisément les conditions limites aux interfaces du modèle, en particulier à la surface de la Terre et aux frontières entre milieux solide et liquide. Enfin il est important de disposer d'un schéma numérique qui soit, d'une part explicite en temps et qui d'autre part, couplé à l'approximation en espace, offre une dispersion minimale.

Parmi la variété de méthodes numériques, les différences finies ont depuis longtemps été appliquées aux problèmes de l'élastodynamique à deux ou trois dimensions (Alterman and Karal 1968, Alterman et al. 1970, Boore 1972, Alford et al. 1974, Kelly et al. 1976). Elles ont largement été utilisées à des échelles régionales dans le cadre de l'exploration pétrolière ainsi que dans certaines études d'effets de site (Olsen and Archuleta 1996, Frankel 1993). Dans la première partie de ce travail, on a développé un schéma aux différences finies appliqué à la propagation des ondes *SH* dans le manteau terrestre. Les équations du mouvement sont écrites en coordonnées sphériques dans une approximation axisymétrique, isotrope et parfaitement élastique. La restriction au cisaillement transverse ainsi que la condition irréaliste de symétrie permettent de s'affranchir des singularités des coordonnées sphériques. La discrétisation spatiale est basée sur un schéma centré d'ordre deux en espace implémenté sur des grilles en quinconce (Virieux 1984). Bien qu'exigeant en terme de nombre de points de grille par longueur d'onde propagée, le schéma numérique permet dans le cas *SH* une implémentation naturelle des conditions limites à la surface du modèle et à l'interface noyau-manteau. Cependant, il s'est vite avéré que ces méthodes ne pourraient pas être adaptées à trois dimensions en géométrie sphérique sans poser de sérieux problèmes de maillage. De plus, les limitations intrinsèques des différences finies concernant l'implémentation des conditions limites sur des grilles en quinconce en ont pratiquement exclus l'usage en sismologie globale.

Au vu de l'importance des conditions de surface dans la physique de la propagation des ondes dans la Terre, il est apparu naturel d'envisager des méthodes numériques basées sur une formulation variationnelle des équations du mouvement. Pour les mêmes raisons, dans le cadre de l'étude des effets de site, un travail important de modélisation a été effectué pour permettre de prendre en compte des milieux fortement hétérogènes présentant des interfaces déformées. Ces efforts ont notamment conduit à l'application de la méthode des éléments spectraux (Patera 1984, Maday and Patera 1989) à l'élastodynamique à deux, puis à trois dimensions (Priolo et al. 1994, Seriani and Priolo 1994, Faccioli et al. 1996, Komatitsch 1997, Komatitsch and Vilotte 1998, Komatitsch et al. 1999, Vai et al. 1999). La méthode des éléments spectraux est une méthode d'éléments finis qui utilise des bases polynômiales orthogonales d'ordre élevé, issues des méthodes pseudo-spectrales. Le choix de cette approximation spatiale et d'une

2. Théoriquement, on peut définir une distance dans l'espace des modes au-delà de laquelle deux modes ne sont pas couplés.

quadrature numérique adaptée conduit à des résultats remarquables de convergence notamment dans l'approximation des systèmes elliptiques d'équations aux dérivées partielles (Azaiez et al. 1994). L'application de la méthode aux équations de l'élastodynamique s'est révélée également très performante puisqu'une dispersion numérique très faible est observée (Tordjman 1995, Komatitsch 1997). De plus, le choix particulier des points d'intégration et d'une base polynômiale tensorisée permet via un schéma explicite en temps d'obtenir un algorithme naturellement parallèle associé à un coût de calcul raisonnable. La deuxième partie de ce travail est consacrée à l'implémentation de la méthode des éléments spectraux aux équations de la gravito-élastodynamique dans la Terre. Dans la description physique du problème, on a négligé la rotation de la Terre et on s'est placé dans le cadre de l'hypothèse de Cowling pour traiter les effets de la gravité. La première étape a consisté à construire un pavage de la boule à base d'hexaèdres à partir d'un maillage 2D de la sphère défini par la transformation de la «sphère cubique» (Ronchi et al. 1996). En raison de l'augmentation des vitesses sismiques avec la profondeur, on a au cours d'une deuxième étape, introduit la possibilité de déraffiner successivement le maillage de part et d'autre d'interfaces non-conformes. On a choisi d'introduire des multiplicateurs de Lagrange pour traduire les contraintes de continuité du déplacement à travers ces interfaces particulières et on a adopté le même formalisme pour les interfaces solide-liquide. On obtient ainsi une formulation hybride générale du problème dans laquelle le déplacement est utilisé comme variable primale dans toutes les parties du modèle. La discrétisation de l'espace des multiplicateurs de Lagrange est basée sur une méthode de joints (Bernardi et al. 1994, Maday et al. 1988, Anagnostou et al. 1989, Ben Belgacem 1993, Ben Belgacem and Maday 1994) qui, dans le cas de la géométrie sphérique, permet d'utiliser le même degré d'approximation que pour l'espace des déplacements.

Pour permettre la prise en compte d'un fluide, on a utilisé un couplage de la méthode des éléments spectraux avec une solution modale. Ce travail a été réalisé grâce à la collaboration de Yann Capdeville dans le cadre de son travail de thèse (Capdeville 2000). Le couplage solide-liquide repose sur la construction d'un opérateur de type DtN (*Dirichlet to Neumann*) pour calculer la réponse en traction d'une boule présentant une inclusion fluide. En plus d'éviter les problèmes liés à la discrétisation du fluide en déplacement (Hamdi et al. 1978, Bermúdez and Rodríguez 1994), la méthode couplée permet de réduire de façon significative le temps de calcul et la mémoire dans les régions du modèle où une structure radiale est suffisante.

Le plan de la thèse est le suivant :

- ▷ Dans le premier chapitre on rappelle les équations de l'élastodynamique pour un milieu élastique et isotrope. On inclut ensuite les effets de la gravité dans l'approximation de Cowling en partant d'un état initial où le milieu est au repos et en équilibre hydrostatique. On présente ensuite la formulation variationnelle des équations où les contraintes de continuité entre sous-domaines sont assurées par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange.
- ▷ Le deuxième chapitre est consacré à l'implémentation d'une méthode de différences finies pour simuler la propagation *SH* dans le manteau. Une étude numérique est menée pour contraindre la sensibilité des ondes réfléchies sous les discontinuités du manteau.
- ▷ Dans le troisième chapitre, on présente en détail l'adaptation à la géométrie sphérique de la méthode des éléments spectraux. On présente tout d'abord la construction d'un maillage non-conforme en hexaèdres permettant de paver une boule, puis on rappelle les étapes de la discrétisation pour aboutir à la formulation algébrique du problème, et on illustre la parallélisation de l'algorithme obtenu.
- ▷ Le quatrième chapitre est consacré à des expériences numériques menées dans des boules solides homogènes par couches.
- ▷ Enfin, on introduit brièvement la méthode couplée dans le cinquième chapitre et on présente quelques expériences pour des modèles moyens de Terre.

Chapitre 1

Équations du mouvement

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on commence par rappeler les équations de l'élastodynamique pour un milieu parfaitement élastique (on néglige l'atténuation) et isotrope. Pour tenir compte de l'influence de la gravité, on linéarise ensuite les équations obtenues autour d'un état de référence dans lequel le milieu est en équilibre hydrostatique et au repos. Dans la perturbation des forces de gravité, on se place dans le cadre de l'approximation de Cowling où l'on ne tient pas compte du terme de redistribution des masses. On présente enfin une formulation variationnelle des équations dans laquelle on introduit des multiplicateurs de Lagrange pour traduire les conditions cinématiques de continuité sur les interfaces.

On se réfère à Dahlen and Tromp (1998) pour l'expression des équations du mouvement dans le cas général et à Valette (1986) pour les formulations variationnelles associées.

1.2 Équations de l'élastodynamique

Pour établir les équations du mouvement en sismologie, on se place dans le cadre de la théorie des milieux continus¹. Dans ce formalisme, on travaille avec la notion de «point matériel» que l'on conçoit comme un petit *continuum* à l'échelle duquel on définit des quantités physiques moyennes. Il est alors possible à partir d'une vision particulière d'établir des lois physiques à l'échelle macroscopique.

Dans tout ce qui suit, on admettra que les différents champs physiques sont suffisamment réguliers pour justifier les écritures utilisées. On supposera notamment que ces champs sont continuellement différentiables autant de fois que nécessaire.

1.2.1 Descriptions Lagrangienne et Eulérienne

On considère un domaine ouvert et connexe de l'espace à trois dimensions et on le note Ω_0 dans sa position de référence exprimée relativement à un repère cartésien. Sous l'action de forces extérieures, ce milieu va se déformer et on note $\Omega(t)$ sa nouvelle configuration à l'instant t . On décrit la transformation

1. Voir par exemple Germain (1980).

de ce milieu au cours du temps sous la forme d'une application mouvement qui, à tout point matériel initialement à la position \mathbf{x} , associe une nouvelle position :

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) . \quad (1.1)$$

Le champ de vecteurs \mathbf{u} est le champ de déplacement qui satisfait à l'hypothèse des petites perturbations : $\|\mathbf{u}\| \ll 1$ et $\|\nabla\mathbf{u}\| \ll 1$. Soit maintenant q , une quantité physique définie en tout point matériel de Ω_0 . Pour étudier les variations de q au cours du mouvement, deux approches sont possibles :

1. la description lagrangienne où l'on suit chaque point matériel dans son mouvement en se repérant dans un référentiel fixe (attaché à Ω_0),
2. la description eulérienne où l'on se repère dans un référentiel lui même en mouvement (attaché à $\Omega(t)$).

On désigne par des indices L et E les variations de la quantité q dans ces deux approches, de façon consistante avec les notations utilisées par Dahlen and Tromp (1998). Le lien cinématique entre ces deux descriptions s'écrit :

$$q^L(\mathbf{x}, t) = q^E(\mathbf{r}(\mathbf{x}, t), t) , \quad (1.2)$$

et les deux descriptions coïncident à l'instant initial :

$$q^L(\mathbf{x}, 0) = q^E(\mathbf{r}(\mathbf{x}, 0), 0) = q^0(\mathbf{x}) . \quad (1.3)$$

1.2.2 Mesure de déformation

On considère deux points matériels voisins situés en \mathbf{x} et $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{dx}$ dans la configuration de référence et dont les positions sont \mathbf{r} et $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{dr}$ à l'instant t . On note \mathbf{F} le gradient de la transformation, c'est-à-dire le tenseur d'ordre 2 qui relie les quantités infinitésimales \mathbf{dx} et \mathbf{dr} : $\mathbf{dr} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$.

On a donc d'après (1.1) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} . \quad (1.4)$$

Pour caractériser la déformation au sein du milieu on s'intéresse à la variation de longueur d'un vecteur infinitésimal au cours du mouvement. D'après ce qui précède on a :

$$\|\mathbf{dr}\|^2 - \|\mathbf{dx}\|^2 = \mathbf{dx}^T [\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}] \mathbf{dx} . \quad (1.5)$$

Le tenseur intervenant dans cette expression est appelé tenseur des déformations de Green-Lagrange, on le note \mathbf{E} et on a :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T + (\nabla\mathbf{u})^T \cdot \nabla\mathbf{u} . \quad (1.6)$$

Sous l'hypothèse des petites perturbations on néglige le terme quadratique dans l'expression du tenseur de Green-Lagrange, ce qui conduit à introduire le tenseur des déformations finies associé au champ de déplacement \mathbf{u} :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T . \quad (1.7)$$

1.2.3 Tenseurs de contrainte

On considère dans le milieu à l'instant t un élément de volume $\omega(t)$ de surface $\partial\omega(t)$. On décrit l'action du milieu $\Omega(t)$ sur l'élément de volume par une densité de forces sur la surface $\partial\omega(t)$. On note $\mathbf{df}^E(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}^t)$ la densité de force s'exerçant à l'instant t au point \mathbf{x} d'un élément de surface dont le vecteur normal est \mathbf{n}^t . L'hypothèse de travail de Cauchy est que cette force dépend linéairement du vecteur normal, ce qui conduit à introduire le tenseur des contraintes de Cauchy \mathbf{T}^E :

$$\mathbf{df}^E(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}^t) = \mathbf{T}^E(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}^t(\mathbf{x}, t) d\Sigma^t, \quad (1.8)$$

où $\mathbf{n}^t d\Sigma^t$ est l'élément de surface orientée. La description eulérienne utilisée dans (1.8) rappelle que les composantes de \mathbf{T}^E sont exprimées dans le repère cartésien attaché à $\Omega(t)$. La description lagrangienne du tenseur de Cauchy est :

$$\mathbf{T}^L(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}^E(\mathbf{r}(\mathbf{x}, t), t). \quad (1.9)$$

On définit aussi les tenseurs de contraintes de Piola-Kirchhoff de première et seconde espèce \mathbf{T}^{PK} et \mathbf{T}^{SK} qui relie la densité de force à l'élément de surface de la configuration de référence, $\mathbf{n}^0 d\Sigma^0$:

$$\mathbf{df}^E(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}^{PK}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}^0 d\Sigma^0, \quad (1.10)$$

$$\mathbf{df}^L(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}^{SK}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}^0 d\Sigma^0, \quad (1.11)$$

et on montre que :

$$\mathbf{T}^{PK} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^L \quad (1.12)$$

$$\mathbf{T}^{SK} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^L \cdot \mathbf{F}^{-T}, \quad (1.13)$$

où J est le jacobien de la transformation associée au mouvement.

1.2.4 Dérivée particulaire

On rappelle ici les propriétés des dérivées particulières qui seront utilisées pour déduire les lois de conservation.

Dérivée particulaire d'une fonction de points. Soit \mathbf{q}^E la description eulérienne d'une quantité physique tensorielle. La dérivée particulaire de \mathbf{q}^E est définie comme

$$\frac{d}{dt} \mathbf{q}^E(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}^E(\mathbf{x}, t) + \nabla \mathbf{q}^E(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}^E(\mathbf{x}, t), \quad (1.14)$$

où \mathbf{v}^E est la vitesse eulérienne au point \mathbf{x} et à l'instant t . Dans le cas d'une fonction de points, la dérivée particulaire n'est donc autre que la dérivée totale et une simple dérivation composée permet d'obtenir (1.14).

Dérivée particulaire d'une intégrale de volume. On considère maintenant une quantité physique \mathbf{Q}^E attachée à un élément de volume $\omega(t)$ et dont la densité est \mathbf{q}^E :

$$\mathbf{Q}^E(t) = \int_{\omega(t)} \mathbf{q}^E(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.15)$$

La dérivée particulière est définie comme la dérivée totale de la quantité \mathbf{Q}^E par rapport au temps. La difficulté du calcul réside dans le fait que le volume d'intégration dépend lui-même du temps. On donne ici sans démonstration l'expression de cette dérivée :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Q}^E(t) = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{q}^E(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\mathbf{q}^E \otimes \mathbf{v}^E)(\mathbf{x}, t) \right] d\mathbf{x}. \quad (1.16)$$

Cette dernière équation porte également le nom de «théorème de transport de Reynolds». Si l'on applique la formule de la divergence (1.132) au dernier terme de (1.16) on obtient :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Q}^E(t) = \int_{\omega(t)} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{q}^E(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega(t)} [\mathbf{q}^E \otimes \mathbf{v}^E \cdot \mathbf{n}] (\mathbf{s}, t) ds. \quad (1.17)$$

La premier terme traduit la variation de la quantité \mathbf{Q}^E en supposant le domaine $\omega(t)$ fixe ; auquel il faut ajouter un terme correcteur de flux de la quantité à travers la surface $\partial\omega(t)$.

1.2.5 Lois de conservation

Conservation de la masse. Soit ρ la densité de masse dans le milieu. La loi de conservation de la masse stipule qu'aucune création ou destruction de masse ne peut avoir lieu au sein d'un élément de volume que l'on suit dans son mouvement. Cela se traduit exactement par le fait que la dérivée particulière de la masse s'annule :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho^E(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0, \quad (1.18)$$

ce qui équivaut d'après (1.16) à :

$$\int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t}\rho^E(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho^E \mathbf{v}^E)(\mathbf{x}, t) \right] d\mathbf{x} = 0. \quad (1.19)$$

Cela doit être vérifié pour tout élément de volume $\omega(t)$. En supposant suffisamment de régularité sur ρ^E et \mathbf{v}^E cela conduit à une égalité presque partout :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^E(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho^E \mathbf{v}^E)(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.20)$$

Conservation de la quantité de mouvement. La loi de conservation de la quantité de mouvement est une généralisation aux milieux continus de la loi fondamentale de la dynamique. Elle exprime que «la variation du torseur quantité de mouvement est égale au torseur des forces appliquées au système». Un torseur est pour sa part défini en tout point matériel par sa résultante et son moment par rapport à l'origine. Le torseur quantité de mouvement est ainsi caractérisé sur l'élément de volume $\omega(t)$ par :

- sa résultante : $\int_{\omega(t)} \rho^E \mathbf{v}^E(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$,
- son moment : $\int_{\omega(t)} \mathbf{x} \wedge \rho^E \mathbf{v}^E(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$.

Parmi les forces appliquées au «système» $\omega(t)$, on distingue les forces internes \mathcal{F}_{int} , exercées par le milieu $\Omega(t)$ sur la surface $\partial\omega(t)$, des forces extérieures \mathcal{F}_{ext} encore appelées «forces de volume». On rappelle que les forces internes sont caractérisées par le tenseur des contraintes de Cauchy (1.8) dans la description que l'on a utilisé.

Résultante. On peut alors écrire pour les résultantes des torseurs mis en jeu :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho^E \mathbf{v}^E(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\partial\omega(t)} \mathbf{T}^E(\mathbf{s}, t) \cdot \mathbf{n}^t(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s} + \int_{\omega(t)} \mathcal{F}_{ext}^E(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.21)$$

Moment. Pour ce qui est de l'équilibre des moments, on peut montrer que dans le cadre de la description que l'on a choisi, elle équivaut au fait que le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique :

$$\mathbf{T}_{ji}^E = \mathbf{T}_{ij}^E, \quad (1.22)$$

ainsi que les tenseurs \mathbf{T}^{SK} et \mathbf{T}^L . On note que ce résultat ne subsisterait plus si, en plus des forces de contact, on avait ajouté une densité de couples de forces pour décrire l'action du milieu $\Omega(t)$ sur un élément de volume $\omega(t)$.

1.2.6 Forces de volume

On détaille ici les forces de volume que l'on inclue dans la description : les forces de gravité ainsi que la source sismique.

Gravité. On note \mathbf{g}^E la description eulérienne du champ d'accélération de la gravité. En tout point de l'espace, la force exercée par la gravité est définie par :

$$\mathbf{f}_G^E(\mathbf{x}, t) = \rho^E(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}^E(\mathbf{x}, t). \quad (1.23)$$

Cette force étant conservative, on introduit le potentiel de gravité Φ^E relié à l'accélération de la gravité par :

$$\mathbf{g}^E(\mathbf{x}, t) = -\nabla \Phi^E(\mathbf{x}, t), \quad (1.24)$$

et qui satisfait à chaque instant à l'équation de Poisson dans \mathcal{R}^3 :

$$\Delta \Phi^E(\mathbf{x}, t) = 4\pi G \rho^E(\mathbf{x}, t), \quad (1.25)$$

où G est la constante universelle de la gravité. Connaissant la distribution de densité ρ^E , le potentiel est obtenu après résolution de l'équation (1.25) avec les conditions suivantes :

- Φ^E ainsi que sa dérivée normale $\nabla \Phi^E \cdot \mathbf{n}^t$ sont continus en tout point de l'espace,
- Φ^E admet un prolongement harmonique en dehors du domaine de l'étude $\Omega(t)$:

$$\Delta \Phi^E(\mathbf{x}, t) = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}^3 \setminus \Omega(t). \quad (1.26)$$

Source sismique. Les sources sismiques que l'on considère sont soit des explosions, soit des glissements sur des failles planes. Dans tout ce qui suit, on s'intéressera à la propagation d'ondes élastiques en se plaçant en champ suffisamment lointain pour considérer que la source qui les a générées peut être assimilée à une source ponctuelle. On peut montrer que la distribution de forces équivalente à une telle dislocation est un double-couple, c'est-à-dire une superposition de deux couples de forces (voir par exemple Aki and Richards 1980). On signale que ce terme source n'intervient pas dans la loi de conservation de la quantité de mouvement car pour un double-couple, la force totale ainsi que le moment total sont nuls.

Si l'on note \mathbf{f}_S^E la description eulérienne de la distribution de forces associée au double-couple, on a :

$$\mathbf{f}_S^E(\mathbf{x}, t) = [\nabla \cdot \mathbf{m}^E] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) f(t), \quad (1.27)$$

où \mathbf{x}_s désigne la position spatiale de la source, \mathbf{m}^E est la description eulérienne du tenseur densité de moment sismique et f est une fonction temporelle qui s'annule avant l'instant $\{t = 0\}$. \mathbf{m}^E est un tenseur symétrique d'ordre 2 qui caractérise entièrement une explosion ou un glissement sur une faille. Ainsi la composante \mathbf{m}_{ij}^E désigne l'amplitude du glissement dans la direction de la $i^{\text{ème}}$ composante sur le plan de faille dont le vecteur normal est orienté dans la direction de la $j^{\text{ème}}$ composante. On note que si l'on assimile la source d'un tremblement de terre à un glissement sur une faille simple, la variation de volume associée à la dislocation est nulle ; ce qui se traduit par le fait que la trace du tenseur \mathbf{m}^E s'annule. Au contraire, à une source explosive correspondra un tenseur \mathbf{m}^E purement diagonal et de trace non nulle.

1.2.7 Équations eulériennes du mouvement

Pour établir les équations du mouvement, on reprend la loi de conservation de la quantité de mouvement (1.21). En utilisant la définition de la dérivée partielle (1.16) ainsi que la conservation de la masse (1.20) pour le premier terme et la formule de la divergence pour le second, on obtient :

$$\int_{\omega(t)} \rho^E \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}^E + (\nabla \mathbf{v}^E \cdot \mathbf{v}^E) \right] (\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_{\omega(t)} \nabla \cdot \mathbf{T}^E(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\omega(t)} \mathcal{F}_{ext}^E(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.28)$$

L'élément de volume $\omega(t)$ étant arbitraire, on en déduit presque partout :

$$\rho^E \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}^E + (\nabla \mathbf{v}^E \cdot \mathbf{v}^E) \right] (\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{T}^E(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_{ext}^E(\mathbf{x}, t), \quad (1.29)$$

que l'on peut réécrire en introduisant la dérivée totale du champ de vitesse :

$$\rho^E \frac{d}{dt} \mathbf{v}^E(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{T}^E(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_{ext}^E(\mathbf{x}, t). \quad (1.30)$$

Pour la propagation d'ondes, on néglige dans (1.29) le terme quadratique en vitesse ; ce qui revient à confondre les dérivées partielle et totale du champ de vitesse. On obtient alors l'équation suivante en explicitant les forces de volume² :

$$\rho^E \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}^E(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{T}^E(\mathbf{x}, t) - \rho^E \mathbf{g}^E(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}^E(\mathbf{x}, t). \quad (1.31)$$

L'équation (1.31) doit être complétée par des conditions initiales et des conditions aux limites.

Conditions initiales. On suppose qu'avant le temps $\{t = 0\}$ les champs de déplacement et de vitesse sont nuls, c'est-à-dire :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (1.33)$$

où \mathbf{u}^0 et \mathbf{v}^0 sont respectivement les champs de déplacement et de vitesse au temps initial.

2. Ici et dans la suite, on note le terme source \mathbf{f}^E au lieu de \mathbf{f}_S^E .

Conditions aux limites. Si Σ_{SS} est une interface qui sépare deux milieux solides, il faut assurer que ces deux milieux restent en contact à chaque instant. Cela se traduit sur Σ_{SS} par la condition cinématique d'absence de glissement, de décollement ou d'interpénétration :

$$[[\mathbf{v}^E(\mathbf{x}, t)]]_{\Sigma_{SS}} = \mathbf{0}, \quad (1.34)$$

où $[[\]]_{\Sigma}$ désigne l'opérateur saut au travers de l'interface Σ . Si maintenant Σ_{SF} sépare un milieu solide d'un milieu fluide et si l'on néglige la viscosité du fluide, alors le glissement d'un milieu sur l'autre est possible sans qu'il n'y ait interpénétration ou décollement. Ceci se traduit par la continuité de la vitesse normale à l'interface :

$$[[\mathbf{v}^E(\mathbf{x}, t)]]_{\Sigma_{SF}} \cdot \mathbf{n}^t(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.35)$$

En plus des conditions limites de type cinématique, il faut assurer des conditions dynamiques sur les interfaces du milieu. Si Σ désigne une interface entre deux milieux, qu'ils soient solides ou fluides, le principe d'action-réaction se traduit par la continuité du vecteur traction à travers Σ :

$$[[\mathbf{T}^E \cdot \mathbf{n}^t(\mathbf{x}, t)]]_{\Sigma} = \mathbf{0}. \quad (1.36)$$

Dans le cas d'une interface solide-fluide, la condition (1.36) impose en particulier que la traction du côté solide doit être normale à l'interface. On négligera par ailleurs l'action de l'atmosphère à la surface du modèle et la condition (1.36) sera donc une condition de surface libre :

$$\mathbf{T}^E \cdot \mathbf{n}^t(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (1.37)$$

1.2.8 Loi de comportement

Dans un milieu continu, l'énergie totale est constituée de l'énergie interne et de l'énergie cinétique. L'énergie interne \mathbf{U} est une quantité thermodynamique qui peut être stockée et transportée au sein du milieu sous forme thermique ou mécanique. En sismologie on peut négliger les effets thermiques dans les bilans d'énergie au vu des échelles de temps impliquées. Un milieu élastique est alors caractérisé par le fait que l'énergie interne ne dépend que de la déformation. Ainsi, en adoptant une description lagrangienne on a $\mathbf{U}^L = \mathbf{U}^L(\mathbf{E}^L)$ où \mathbf{E}^L est le tenseur de déformation de Green-Lagrange. En élasticité linéaire on développe plus précisément cette dépendance pour obtenir :

$$\rho^0 \mathbf{U}^L = \rho^0 \mathbf{U}^0 + \mathbf{T}^0 : \mathbf{E}^L + \frac{1}{2} \mathbf{E}^L : c : \mathbf{E}^L, \quad (1.38)$$

où \mathbf{T}^0 représente l'état initial de contraintes et où c est un tenseur d'ordre 4 appelé «tenseur élastique» dont les composantes sont obtenues en dérivant deux fois la relation (1.38) :

$$c_{ijkl} = \rho^0 \left(\frac{\partial \mathbf{U}^L}{\partial \mathbf{E}_{ij}^L \partial \mathbf{E}_{kl}^L} \right), \quad (1.39)$$

ce qui fait apparaître les symétries suivantes :

$$c_{ijkl} = c_{ijlk} = c_{jikl} = c_{klij}. \quad (1.40)$$

Par ailleurs, le bilan d'énergie se traduit par la description lagrangienne :

$$\rho^0 \frac{\partial \mathbf{U}^L}{\partial t} = \mathbf{T}^{SK} : \frac{\partial \mathbf{E}^L}{\partial t}, \quad (1.41)$$

ce qui permet d'identifier le tenseur de Piola-Kirchhoff de seconde espèce :

$$\mathbf{T}^{SK} = \rho^0 \frac{\partial \mathbf{U}^L}{\partial \mathbf{E}^L}. \quad (1.42)$$

En confrontant (1.38) et (1.42) on obtient une relation entre contraintes et déformations, aussi appelée loi de Hooke :

$$\mathbf{T}^{SK} = \mathbf{T}^0 + c : \mathbf{E}^L, \quad (1.43)$$

qui se simplifie dans le cas de petites perturbations à :

$$\mathbf{T}^{SK} = \mathbf{T}^0 + c : \varepsilon(\mathbf{u}). \quad (1.44)$$

On obtient des relations similaires pour les tenseurs \mathbf{T}^L et \mathbf{T}^{PK} :

$$\mathbf{T}^L = \mathbf{T}^0 + d : \varepsilon(\mathbf{u}), \quad (1.45)$$

$$\mathbf{T}^{PK} = \mathbf{T}^0 + a : \varepsilon(\mathbf{u}), \quad (1.46)$$

où les tenseurs d et a sont définis en fonction du tenseur élastique c par :

$$\begin{aligned} d_{ijkl} &= c_{ijkl} - \mathbf{T}_{ij}^0 \delta_{kl} + \mathbf{T}_{ik}^0 \delta_{jl} + \mathbf{T}_{jk}^0 \delta_{il}, \\ a_{ijkl} &= c_{ijkl} + \mathbf{T}_{ik}^0 \delta_{jl}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Paramètres de Lamé pour un milieu isotrope. Dans le cas d'un milieu isotrope, un tenseur élastique c_{ijkl} présentant les symétries (1.40) est complètement défini par deux paramètres :

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (1.48)$$

où δ_{ij} est le tenseur de Kronecker.

Les deux paramètres λ et μ sont les paramètres de Lamé et on se référera à (1.48) comme à la décomposition de Lamé du tenseur c_{ijkl} .

1.3 Équations de la gravito-élastodynamique

Après avoir effectué ces rappels de mécanique des milieux continus, on est en mesure de dériver les équations de la gravito-élastodynamique dans une Terre sphérique sans tenir compte de sa rotation. Dans cette partie, on considère un état de référence où la Terre se trouve dans un état d'équilibre hydrostatique. Autour de cette position d'équilibre, on linéarise les équations eulériennes du mouvement (1.31) obtenues précédemment. Dans cette approche, on néglige le potentiel de redistribution des masses ce qui permet de conserver un système d'équations différentielles sans terme intégral sur tout l'espace.

On précise tout d'abord les définitions et notations que l'on utilisera par la suite. Dans la configuration de référence, la Terre occupe le domaine sphérique Ω^0 et sa frontière est notée $\partial\Omega^0$. Ce domaine est composé de sous-domaines solides et fluides. On les note Ω_S^0 et Ω_F^0 respectivement et on a :

$$\Omega^0 = \Omega_S^0 \cup \Omega_F^0. \quad (1.49)$$

Dans le cas de la Terre, Ω_S^0 est formé du manteau, de la croûte ainsi que de la graine tandis que Ω_F^0 se compose du noyau externe et des océans.

On note Σ_{SS}^0 l'ensemble des frontières séparant deux solides et Σ_{SF}^0 l'ensemble des frontières séparant un milieu solide d'un milieu fluide. Toutes ces notations font référence à l'état initial comme le rappelle l'indice «0», et on remplacera cet indice par un « t » si l'on fait référence à la configuration courante à l'instant t .

1.3.1 Équilibre hydrostatique dans la configuration de référence

On considère un état de référence soumis à une contrainte de type hydrostatique. L'équilibre statique entre les forces internes et les forces de gravité s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^0(\mathbf{x}) + \rho^0(\mathbf{x}) \mathbf{g}^0(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.50)$$

où \mathbf{g}^0 est l'accélération de la gravité et où \mathbf{T}^0 est le tenseur des contraintes dans la configuration de référence. L'hypothèse hydrostatique stipule que le tenseur \mathbf{T}^0 est isotrope, c'est-à-dire que :

$$\mathbf{T}^0(\mathbf{x}) = -p^0(\mathbf{x}) \mathbf{I} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^0, \quad (1.51)$$

où p^0 est la pression hydrostatique et \mathbf{I} le tenseur identité.

L'équilibre hydrostatique se traduit donc également par la relation entre champ de gravité, densité et gradient de pression :

$$\nabla p^0(\mathbf{x}) = \rho^0(\mathbf{x}) \mathbf{g}^0(\mathbf{x}). \quad (1.52)$$

De plus, le vecteur traction doit être continu à travers tous les interfaces du milieu. Ainsi, si Σ^0 désigne une interface du modèle et si $\mathbf{n}^0(\mathbf{x})$ est le vecteur normal au point $\mathbf{x} \in \Sigma^0$, alors :

$$[[\mathbf{T}^0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^0(\mathbf{x})]]_{\Sigma^0} = \mathbf{0}. \quad (1.53)$$

Modèle admissible. Si l'on applique l'opérateur rotationnel à l'équation d'équilibre (1.52) on obtient (puisque \mathbf{g}^0 dérive du potentiel de gravité Φ^0):

$$\nabla \rho^0 \wedge \mathbf{g}^0 = 0. \quad (1.54)$$

De même, en formant le produit vectoriel des deux membres de (1.52) par ∇p^0 on obtient :

$$\nabla p^0 \wedge \mathbf{g}^0 = 0. \quad (1.55)$$

On constate donc que dans la configuration de référence, les isosurfaces du potentiel de gravité, de la densité et de la pression hydrostatique coïncident. La distribution de densité est donc nécessairement radiale en l'absence de rotation et il en va de même pour le potentiel de gravité et du champ de pression. Autrement dit, si Σ^0 est une interface sphérique de la configuration de référence alors :

$$\nabla_{\Sigma^0} \rho^0 = \nabla_{\Sigma^0} \Phi^0 = \nabla_{\Sigma^0} p^0 = 0, \quad (1.56)$$

où l'opérateur ∇_{Σ} désigne le gradient de surface, défini pour une quantité scalaire q et pour $\mathbf{x} \in \Sigma$ par :

$$\nabla_{\Sigma} q(\mathbf{x}) = \nabla q(\mathbf{x}) - [\nabla q(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})] \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad (1.57)$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est le vecteur unitaire normal à la surface Σ au point \mathbf{x} . On note que si la distribution de densité présente des hétérogénéités latérales, alors la précontrainte à l'équilibre possède forcément une composante déviatorique et l'hypothèse hydrostatique n'est plus adaptée.

1.3.2 Perturbations lagrangienne et eulérienne

Les perturbations eulérienne et lagrangienne au premier ordre d'une quantité tensorielle \mathbf{T} sont définies par :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{E1}(\mathbf{r}, t) &= t \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) \right]_{t=0}, \\ \mathbf{T}^{L1}(\mathbf{x}, t) &= t \left[\frac{d}{dt} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \right]_{t=0}.\end{aligned}\tag{1.58}$$

On a donc, au premier ordre en t :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^E(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{T}^0(\mathbf{r}) + \mathbf{T}^{E1}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{T}^L(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{T}^0(\mathbf{x}) + \mathbf{T}^{L1}(\mathbf{x}, t).\end{aligned}\tag{1.59}$$

Et on rappelle que la relation entre ces deux perturbations s'écrit :

$$\mathbf{T}^{L1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}^{E1}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{T}^0(\mathbf{x}),\tag{1.60}$$

où $\nabla \mathbf{T}^0$ est un tenseur d'ordre $\{n+1\}$ si \mathbf{T} est d'ordre n . Pour un tenseur d'ordre deux, les composantes de $\nabla \mathbf{T}^0$ sont ainsi :

$$[\nabla \mathbf{T}^0]_{ijk} = \partial_i \mathbf{T}_{jk}^0.\tag{1.61}$$

Masse. D'après l'équation de conservation de la masse on a :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \rho^E(\mathbf{r}(\mathbf{x}, t), t) \right]_{t=0} = - [\nabla \cdot (\rho^E \mathbf{v}^E)(\mathbf{r}(\mathbf{x}, t), t)]_{t=0}.\tag{1.62}$$

En multipliant par t et en ne retenant que les termes de premier ordre en t on obtient :

$$\rho^{E1}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot [\rho^0 \mathbf{u}](\mathbf{x}, t).\tag{1.63}$$

Tenseurs des contrainte et loi de comportement. On déduit de (1.44) la définition de la perturbation au premier ordre du tenseur de Piola-Kirchhoff de seconde espèce :

$$\mathbf{T}_{ij}^{SK1} = c_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{u}).\tag{1.64}$$

De même, d'après (1.45) et (1.46), on identifie les perturbations au premier ordre des tenseurs de contrainte de Lagrange et de Piola-Kirchhoff de première espèce :

$$\mathbf{T}_{ij}^{L1} = d_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{u}),\tag{1.65}$$

$$\mathbf{T}_{ij}^{PK1} = a_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{u}),\tag{1.66}$$

où les tenseurs élastiques d_{ijkl} et a_{ijkl} sont donnés en fonction de c_{ijkl} par (1.47). Dans ce qui suit, on travaille uniquement avec le tenseur \mathbf{T}^{L1} . En effet, dans le cas d'une précontrainte hydrostatique, le tenseur élastique d_{ijkl} possède toutes les symétries (1.40), et il admet donc une décomposition de Lamé (1.48). Si l'on note λ_c et μ_c (resp. λ_d et μ_d) les paramètres de Lamé associés au tenseur c_{ijkl} (resp. d_{ijkl}) on a :

$$\begin{aligned}\lambda_d &= \lambda_c + p^0 \\ \mu_d &= \mu_c - p^0,\end{aligned}\tag{1.67}$$

où p^0 est la pression hydrostatique.

Gravité - hypothèse de Cowling. La perturbation eulérienne au premier ordre des forces de gravité est donnée par :

$$[\rho \mathbf{g}]^{E1} = \rho^0 \mathbf{g}^{E1} + \rho^{E1} \mathbf{g}^0. \quad (1.68)$$

Le terme \mathbf{g}^{E1} dérive du potentiel Φ^{E1} lui-même obtenu à partir de ρ^{E1} en résolvant une équation de Poisson du type (1.25). Dans la suite, on négligera ce terme et on utilisera l'approximation de Cowling :

$$[\rho \mathbf{g}]^{E1}(\mathbf{x}, t) = \rho^{E1}(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}^0(\mathbf{x}) = - \{ \nabla \cdot [\rho^0 \mathbf{u}] (\mathbf{x}, t) \} \mathbf{g}^0(\mathbf{x}). \quad (1.69)$$

Physiquement, l'approximation (1.69) traduit le fait que les perturbations de la densité de masse du milieu par les ondes de volume restent locales. En effet, au passage d'une onde de compression, la densité du milieu va changer localement. On tiendra compte de cette modification dans les équations mais on ne recalculera pas le champ de gravité lié à la nouvelle distribution des masses.

Conditions aux limites. Sur les interfaces du milieu, on doit à chaque instant respecter les conditions de type cinématique (1.34) et (1.35) ainsi que la condition dynamique (1.36). Il faut également tenir compte de la continuité de la traction dans la configuration de référence (1.53).

La condition de continuité de la vitesse à travers les interfaces solide-solide (1.34) est équivalente à la continuité du déplacement sur les interfaces de la configuration de référence :

$$[[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]]_{\Sigma_{SS}^0} = \mathbf{0}. \quad (1.70)$$

Dans le cas d'une précontrainte hydrostatique, on peut montrer que la condition (1.35) sur les interfaces solide-fluide équivaut au premier ordre à la continuité du déplacement normal sur les interfaces de la configuration de référence :

$$[[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]]_{\Sigma_{SF}^0} \cdot \mathbf{n}^0(\mathbf{x}) = 0. \quad (1.71)$$

De même, les conditions dynamiques (1.36) et (1.53) s'expriment dans la configuration de référence en fonction du tenseur \mathbf{T}^{L1} :

$$[[\mathbf{T}^{L1}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}^0(\mathbf{x})]]_{\Sigma^0} = \mathbf{0}. \quad (1.72)$$

Dans le cas d'une interface solide-fluide, la condition (1.72) impose que le vecteur traction $\mathbf{T}^{L1} \cdot \mathbf{n}^0$ du côté solide doit être normal à l'interface. De plus, en négligeant les interactions de la surface terrestre et de l'atmosphère, (1.72) traduit la condition de surface libre :

$$\mathbf{T}^{L1}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega^0. \quad (1.73)$$

1.3.3 Équations du mouvement

En combinant l'équation du mouvement sous forme eulérienne (1.31) et l'équation d'équilibre dans la configuration de référence (1.50), on a au premier ordre en \mathbf{u} :

$$\rho^0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}^E(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{T}^{E1}(\mathbf{x}, t) - [\rho \mathbf{g}]^{E1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}^E(\mathbf{x}, t). \quad (1.74)$$

En utilisant l'hypothèse de Cowling (1.69) et en faisant apparaître le tenseur \mathbf{T}^{L1} défini par (1.65), on obtient :

$$\rho^0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}^E(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot (\mathbf{T}^{L1} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{T}^0)(\mathbf{x}, t) + \{ \nabla \cdot (\rho^0 \mathbf{u}) \} \mathbf{g}^0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}^E(\mathbf{x}, t). \quad (1.75)$$

En explicitant les calculs, on est donc conduits à chercher \mathbf{u} solution de :

$$\rho^0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{T}^{L1}(\mathbf{x}, t) + \{ \nabla \cdot (\rho^0 \mathbf{u}) \} \mathbf{g}^0(\mathbf{x}, t) - \nabla (\rho^0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^0)(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}^E(\mathbf{x}, t), \quad (1.76)$$

avec les conditions initiales (1.32) et (1.33) et les conditions limites (1.70), (1.71) et (1.72).

Changement de notations

L'équation du mouvement (1.76) ainsi que les conditions aux limites (1.70), (1.71) et (1.72) ne font intervenir que des quantités de la configuration de référence. On supprimera désormais les indices «0» qui rappellent cette dépendance dans le but d'alléger les notations. Ainsi, on cherchera pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ et tout $t \in [0, T]$ le champ de vecteurs $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ solution de :

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x}, t) + \{\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})\} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \nabla (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g})(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (1.77)$$

avec :

$$\mathbf{T}_{ij}(\mathbf{u})(\mathbf{x}, t) = \lambda(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta_{ij} + \mu(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_i} \right)(\mathbf{x}, t), \quad (1.78)$$

vérifiant sur les interfaces solide-solide Σ_{SS} :

$$[[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]]_{\Sigma_{SS}} = \mathbf{0}, \quad (1.79)$$

sur les interfaces solide-fluide Σ_{SF} :

$$[[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]]_{\Sigma_{SF}} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.80)$$

et sur l'ensemble des interfaces Σ :

$$[[\mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})]]_{\Sigma} = \mathbf{0}, \quad (1.81)$$

et satisfaisant aux conditions initiales :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}. \quad (1.82)$$

1.3.4 Propriétés spectrales de l'opérateur gravito-élastique

On rappelle ici brièvement quelques propriétés du spectre de l'opérateur de l'élasto-gravité qui apparaît dans l'équation du mouvement (1.77).

Cas d'une planète totalement solide. On peut encore écrire (1.77) sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{A} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (1.83)$$

où \mathbf{A} est l'opérateur de l'élasto-gravité que l'on définit par son action sur tout champ de vecteur $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ par :

$$\mathbf{A} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) - \{\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})\} \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \nabla (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g})(\mathbf{x})]. \quad (1.84)$$

Dans le cas d'un milieu élastique isotrope le tenseur des contraintes $\mathbf{T}(\mathbf{u})$ dans (1.84) est défini par :

$$\mathbf{T}_{ij}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \delta_{ij} + \mu(\mathbf{x}) (\partial_j \mathbf{u}_i + \partial_i \mathbf{u}_j)(\mathbf{x}). \quad (1.85)$$

L'opérateur ainsi défini a la propriété d'être auto-adjoint à résolvante compacte. Comme corollaire de ce résultat, son spectre est constitué d'une infinité dénombrable de valeurs propres de multiplicité finie. De l'ensemble de ses vecteurs (ou déplacements) propres, on peut extraire une base orthogonale de l'espace des déplacements admissibles³. Cette propriété est à la base des méthodes de modes propres dans lesquelles la solution des équations du mouvement est développée sur la base des vecteurs propres (les modes) de l'opérateur.

3. Voir Valette (1987) pour l'expression rigoureuse de ces résultats.

Cas d'une planète partiellement fluide. On considère le cas d'un fluide parfait, compressible et non visqueux.

Si le fluide est initialement au repos, alors le tenseur des contraintes peut s'exprimer en fonction du déplacement en posant simplement $\mu = 0$ dans l'expression (1.85) :

$$\mathbf{T}_{ij}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \kappa \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (1.86)$$

où $\kappa = \lambda$ est le module d'incompressibilité du milieu.

Dans l'annexe 1.A, on montre que l'action de l'opérateur \mathbf{A} sur le champ de vecteur \mathbf{u} s'écrit :

$$\mathbf{A}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla \left[\frac{\kappa}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \right] (\mathbf{x}) + \left\{ \nabla \cdot \mathbf{u} \frac{\kappa}{\rho^2} \right\} \mathbf{s}(\mathbf{x}), \quad (1.87)$$

où le champ de vecteurs \mathbf{s} est défini par :

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \nabla \rho(\mathbf{x}) - \frac{\rho^2}{\kappa} \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (1.88)$$

et satisfait à :

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{s} \cdot \mathbf{g} = N^2, \quad (1.89)$$

où N est la fréquence locale de Brunt-Väisälä. Ce nombre caractérise le comportement du fluide en présence des forces de gravité. En effet, on peut montrer que l'équation du mouvement d'une particule fluide s'écrit dans la limite adiabatique⁴ :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + N^2 \xi = 0, \quad (1.90)$$

où ξ est le déplacement de la particule. Ainsi, si $N^2 > 0$ alors, en réponse à une perturbation de densité, une particule de fluide oscillera de façon stable autour de sa position initiale avec la fréquence N . Si $N^2 < 0$ le fluide est qualifié d'instable puisqu'une particule de fluide pourra diverger, entraînant la possibilité de mouvements convectifs à grande échelle. Un fluide pour lequel $N = 0$ (ou de façon équivalente $\mathbf{s} = \mathbf{0}$) est quant à lui qualifié de neutrement stratifié ou encore d'isentropique. On peut remarquer dans ce cas que le champ d'accélération est à rotationnel nul dans le fluide (à cause de la présence de l'opérateur gradient dans (1.87)). Il en va de même des champs de vitesse et de déplacement d'après les conditions initiales (1.82). En revanche, dès que $N \neq 0$, la possibilité de mouvements convectifs au passage d'une onde compressive dans le fluide autorise le champ de déplacement à avoir une composante rotationnelle.

Le spectre de l'opérateur se trouve également modifié suivant que N est nul ou pas. Dans le cas d'un fluide neutrement stratifié ($N = 0$), l'opérateur gravito-élastique a encore un spectre ponctuel et des sous-espaces propres de dimension finie, à l'exception du sous-espace associé à la valeur propre 0 (le noyau de l'opérateur) qui est de dimension infinie. Si maintenant $N \neq 0$, alors au spectre ponctuel sismique il convient d'ajouter un spectre dit «essentiel» (par opposition au spectre ponctuel). Dans le cas où l'on néglige la rotation et que l'on utilise l'approximation de Cowling (1.69), le spectre convectif est formé d'une infinité dénombrable de valeurs propres mais chaque sous-espace propre associé est de dimension infinie⁵. Dans le cas de la Terre, la construction de solutions de l'équation d'onde se fait classiquement en négligeant les modes convectifs associés au spectre essentiel.

4. Voir (Dahlen and Tromp 1998) p.262 et les références associées.

5. Voir (Valette 1989) pour une caractérisation du spectre essentiel dans le cas d'une précontrainte quelconque.

1.4 Formulation variationnelle

La méthode des éléments spectraux que l'on présentera ultérieurement est basée sur l'utilisation d'une formulation variationnelle (encore appelée formulation faible) des équations du mouvement. Dans cette partie on explicite une formulation mixte dans laquelle les conditions cinématiques de continuité du déplacement sur les interfaces du milieu sont considérées comme des contraintes du problème à résoudre. Cette approche, connue sous le nom de «formulation hybride primale» (*e. g.* Raviart and Thomas 1977, Agouzal and Thomas 1995), conduit à l'introduction d'inconnues supplémentaires sur les interfaces sous forme de multiplicateurs de Lagrange.

On commence par expliciter la géométrie du problème pour ensuite préciser le cadre fonctionnel de l'étude. Les définitions des différents espaces utilisés sont rappelées dans l'annexe 1.B. Une formulation variationnelle «classique» est proposée dans un premier temps (*e. g.* Raviart and Thomas 1983) avant la présentation de la formulation mixte. Les intermédiaires de calcul ont été relégués dans la partie annexe 1.C autant que possible.

1.4.1 Préliminaires

Décomposition en sous-domaines

On rappelle que la Terre occupe le domaine sphérique Ω et que sa frontière est notée $\partial\Omega$. Ce domaine est composé de parties solides et fluides notées respectivement Ω^S et Ω^F :

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^S \cup \bar{\Omega}^F . \quad (1.91)$$

Chacune des régions solides et fluides est à son tour décomposée en sous-domaines comme cela est représenté schématiquement sur la figure (1.1) :

$$\bar{\Omega}^S = \bigcup_{k=1}^K \bar{\Omega}_k^S , \quad \bar{\Omega}^F = \bigcup_{l=1}^L \bar{\Omega}_l^F . \quad (1.92)$$

On fait de plus les hypothèses suivantes sur la décomposition de la configuration terrestre :

- ▷ Chacun des sous-domaines est soit une boule, soit une coquille sphérique. Autrement dit, tous les interfaces du milieu sont parfaitement sphériques.
- ▷ Il n'existe pas d'interface séparant deux sous-domaines fluides :

$$\forall l, l' \in \{1 \dots L\} \quad \bar{\Omega}_l^F \cap \bar{\Omega}_{l'}^F = \emptyset . \quad (1.93)$$

On note alors Σ_{SS} (resp. Σ_{SF}) l'ensemble des interfaces solide-solide (resp. solide-fluide) du modèle et Σ l'ensemble de tous les interfaces :

$$\Sigma = \Sigma_{SS} \cup \Sigma_{SF} \cup \partial\Omega . \quad (1.94)$$

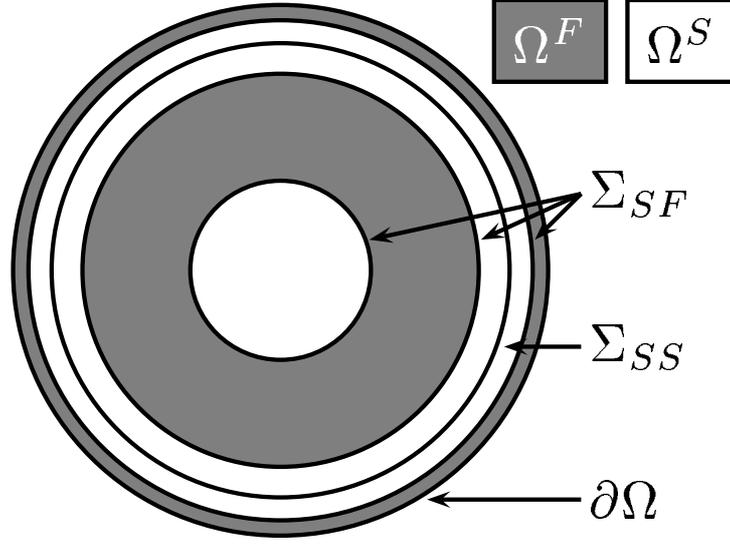


FIG. 1.1 – Vue schématique des différents sous-domaines et de leurs interfaces utilisés dans la description de la géométrie terrestre.

Cadre fonctionnel

À un instant t donné dans $[0, T]$, on considère le champ de déplacement que l'on note $\mathbf{u}_t(\cdot) = \mathbf{u}(\cdot, t)$. Ce champ est composé des déplacements dans les zones solides (noté \mathbf{u}^S) et fluides (noté \mathbf{u}^F). Le cadre fonctionnel adapté à notre étude consiste à travailler dans le solide avec des espaces \mathbf{H}^1 locaux et dans le fluide avec des espaces $H(\text{div})$ locaux⁶. Plus précisément, on se place dans le cadre suivant :

$$\mathbf{u}_t = (\mathbf{u}^S, \mathbf{u}^F) \in \mathcal{V}^* \doteq \prod_{k=1}^K \mathbf{H}^1(\Omega_k^S) \times \prod_{l=1}^L H(\text{div}, \Omega_l^F). \quad (1.95)$$

Les conditions cinématiques à satisfaire sur les interfaces entre sous-domaines solides se traduisent par :

$$\mathbf{u}_k^S = \mathbf{u}_{k'}^S \quad \text{sur} \quad \Gamma_{kk'}^{SS} \doteq \partial\Omega_k^S \cap \partial\Omega_{k'}^S, \quad (1.96)$$

et sur les interfaces solide-fluide par :

$$(\mathbf{u}_k^S - \mathbf{u}_l^F) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{kl}^{SF} \doteq \partial\Omega_k^S \cap \partial\Omega_l^F, \quad (1.97)$$

où \mathbf{u}_k^S (resp. \mathbf{u}_l^F) désigne la restriction de \mathbf{u}^S (resp. \mathbf{u}^F) à Ω_k^S (resp. Ω_l^F).

On introduit par ailleurs l'espace des déplacements qui satisfont aux conditions limites :

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{V}^*, \mathbf{u} \text{ satisfait à (1.96) et (1.97)} \}. \quad (1.98)$$

Compte tenu de la définition des applications «trace» et «trace normale», les conditions de continuité (1.96) et (1.97) sont à satisfaire dans les espaces $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_{kk'}^{SS})$ et $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_{kl}^{SF})$ respectivement. Dans la suite, on utilisera la dualité entre les espaces $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ et $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ pour exprimer les contraintes de continuité de façon quelque peu différente. On commence par définir sur les interfaces solide-solide la forme bilinéaire :

$$b^{SS}(\mathbf{u}^S, \boldsymbol{\mu}^{SS}) \doteq \sum_{k, k'} \int_{\Gamma_{kk'}^{SS}} (\mathbf{u}_k^S - \mathbf{u}_{k'}^S) \cdot \boldsymbol{\mu}_{kk'}^{SS} d\Gamma. \quad (1.99)$$

6. Dans l'annexe 2.B, on rappelle la définition de ces espaces.

Dans cette écriture, les champs de vecteurs \mathbf{u}^S et $\boldsymbol{\mu}^{SS}$ appartiennent à des espaces duaux. Plus précisément, on a :

$$\boldsymbol{\mu}^{SS} \in \mathcal{M}^{SS} \subset \prod_{k k'} \mathbf{H}^{-1/2} (\Gamma_{k k'}^{SS}) . \quad (1.100)$$

De la même façon, on définit une forme bilinéaire sur les interfaces solide-fluide par :

$$b^{SF} (\mathbf{u}^S, \mathbf{u}^F ; \mu^{SF}) \doteq \sum_{kl} \int_{\Gamma_{kl}^{SF}} (\mathbf{u}_k^S - \mathbf{u}_l^F) \cdot \mathbf{n} \mu_{kl}^{SF} d\Gamma , \quad (1.101)$$

où les champs scalaires μ^{SF} , $(\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n})$ et $(\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n})$ appartiennent à des espaces duaux :

$$\mu^{SF} \in \mathcal{M}^{SF} \subset \prod_{kl} H^{1/2} (\Gamma_{kl}^{SF}) . \quad (1.102)$$

On admettra alors que les conditions cinématiques (1.96) et (1.97) sont respectivement équivalentes aux égalités variationnelles suivantes :

$$b^{SS} (\mathbf{u}^S, \boldsymbol{\mu}^{SS}) = 0 , \quad \forall \boldsymbol{\mu}^{SS} \in \mathcal{M}^{SS} , \quad (1.103)$$

$$b^{SF} (\mathbf{u}^S, \mathbf{u}^F ; \mu^{SF}) = 0 , \quad \forall \mu^{SF} \in \mathcal{M}^{SF} . \quad (1.104)$$

Pour résumer, on a donc remplacé les contraintes ponctuelles de continuité (1.96) et (1.97) par une formulation plus souple qui s'apparente aux moindres carrés⁷. Cela conduit à la définition d'un espace supplémentaire (\mathcal{M}) dont les éléments sont des «multiplicateurs de Lagrange», en référence aux problèmes d'optimisation sous contraintes. Ces multiplicateurs, qui apparaissent comme des variables duales du déplacement, sont physiquement homogènes à des tractions sur les interfaces non-conformes. Pour s'en convaincre, on remarque que la formule de Green associé à l'opérateur de l'élasticité (1.134) contient un terme de surface qui couple les déplacements et les tractions.

1.4.2 Formulation faible du problème de la gravito-élastodynamique

Formulation classique

Afin d'établir la formulation variationnelle des équations du mouvement, on commence par se placer dans l'espace \mathcal{V} des déplacements qui satisfont aux contraintes de continuité (1.96) et (1.97). Pour un instant t donné, on forme le produit scalaire dans l'espace $L^2(\Omega)$ des différents termes de l'équation du mouvement (1.77) avec un champ arbitraire $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = & \int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \{\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}_t)\} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} [\nabla (\rho \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{g})] \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} . \end{aligned} \quad (1.105)$$

Dans cette écriture, chaque intégrale comprend une somme sur les parties solides et fluides. Pour le membre gauche de (1.105), on a par exemple :

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega^S} \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}^S}{\partial t^2} \cdot \mathbf{v}^S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^F} \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}^F}{\partial t^2} \cdot \mathbf{v}^F(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} . \quad (1.106)$$

7. On obtiendrait une formulation au sens des moindres carrés en considérant la dualité dans $L^2(\Sigma_{SS})$.

En appliquant la formule de Green (1.134) au premier terme du membre droit et en symétrisant les termes de gravité, on obtient :

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + a^S(\mathbf{u}^S, \mathbf{v}^S) + a^F(\mathbf{u}^F, \mathbf{v}^F) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (1.107)$$

où les formes bilinéaires symétriques a^S et a^F sont définies respectivement comme⁸ :

$$a^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^S} \mathbf{T}(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^S} \rho \operatorname{Sym} \{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})\}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (1.108)$$

$$\begin{aligned} a^F(\mathbf{u}^F, \mathbf{v}^F) = & \int_{\Omega^F} \left(\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\rho}{\kappa} \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \right) \kappa \left(\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\rho}{\kappa} \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \right) (\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega^F} \rho N^2 \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{g}}{|g|} \right) \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{g}}{|g|} \right) (\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & - [|\rho|]_{\Sigma} \int_{\Sigma} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Pour obtenir la formulation (1.107), on a volontairement éliminé les termes d'interface contenant le vecteur traction. Par exemple, après avoir appliqué la formule de Green à la divergence du tenseur des contraintes, il devrait rester en surface le terme :

$$\int_{\partial\Omega} [\mathbf{T}(\mathbf{u}_t) \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma. \quad (1.110)$$

En supprimant ce terme, on impose implicitement la condition de surface libre. De la même façon, en utilisant la continuité des différents champs de déplacements, la continuité de la traction au travers des interfaces du milieu est assurée de façon naturelle.

On rappelle finalement que la formulation variationnelle du problème de la gravito-élastodynamique consiste à chercher à chaque instant $t \in [0, T]$ le champ $\mathbf{u}_t \in \mathcal{V}$ solution de (1.107) pour tous les déplacements admissibles $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ et satisfaisant de plus aux conditions initiales (1.82). C'est cette formulation qui a été utilisée dans le cas solide et en négligeant les termes de gravité par la plupart des auteurs ayant utilisé les méthodes d'éléments spectraux pour les problèmes d'élastodynamique⁹.

Formulation mixte

Dans cette formulation, on travaille avec des champs de déplacements qui appartiennent à l'espace \mathcal{V}^* et on impose les contraintes de continuité entre sous-domaines par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange.

On introduit tout d'abord l'espace produit $\mathcal{M} \doteq \mathcal{M}^{SS} \times \mathcal{M}^{SF}$. Ainsi, chaque élément $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}$ s'écrit $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}^{SS}, \boldsymbol{\mu}^{SF})$. On définit également les formes bilinéaires sur les espaces produits :

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a^S(\mathbf{v}^S, \mathbf{w}^S) + a^F(\mathbf{v}^F, \mathbf{w}^F), \quad (1.111)$$

$$b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = b^S(\mathbf{v}^S, \boldsymbol{\mu}^{SS}) + b^F(\mathbf{v}^S, \mathbf{v}^F; \boldsymbol{\mu}^{SF}). \quad (1.112)$$

8. Voir (1.160) et (1.170) dans l'annexe 1.C.

9. Voir par exemple (Komatitsch and Vilotte 1998) et les références qui y sont citées.

La formulation mixte du problème consiste alors à trouver à chaque instant $t \in [0, T]$, le déplacement $\mathbf{u}_t \in \mathcal{V}^*$ et le multiplicateur de Lagrange $\lambda_t \in \mathcal{M}$ tels que $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^*, \forall \mu \in \mathcal{M}$:

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + a(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \lambda_t) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (1.113)$$

$$b(\mathbf{u}_t, \mu) = 0, \quad (1.114)$$

avec les conditions initiales :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad (1.115)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Sigma_{SS} \cap \Sigma_{SF}, \quad \lambda(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}.$$

On vérifie que si l'on injecte dans (1.113) les fonctions tests continues de l'espace \mathcal{V} , on trouve que \mathbf{u}_t est solution de la formulation classique (1.107).

1.A Annexe : Forme de l'opérateur gravito-élastique dans le fluide

Dans le cas d'un milieu fluide, on a $\mu = 0$, et le tenseur $\mathbf{T}(\mathbf{u})$ s'écrit :

$$\mathbf{T}_{ij}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \kappa \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (1.116)$$

où $\kappa = \lambda$ est le module d'incompressibilité du milieu. L'action de l'opérateur \mathbf{A} sur le champ de vecteur \mathbf{u} s'écrit donc :

$$\mathbf{A}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho} [\nabla[\kappa \nabla \cdot \mathbf{u}](\mathbf{x}) - \{ \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \} \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \nabla(\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g})(\mathbf{x})]. \quad (1.117)$$

On utilise alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \nabla[\kappa \nabla \cdot \mathbf{u}] &= \nabla[\frac{\kappa}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u}] + \left\{ \frac{\kappa}{\rho^2} \nabla \cdot \mathbf{u} \right\} \nabla \rho, \\ \frac{1}{\rho} \nabla[\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}] &= \frac{1}{\rho} \{ \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \} \nabla \rho + \nabla[\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}], \\ \frac{1}{\rho} \{ \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \} \mathbf{g} &= \frac{1}{\rho} \{ \nabla \rho \cdot \mathbf{u} \} \mathbf{g} + \{ \nabla \cdot \mathbf{u} \} \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (1.118)$$

et, puisque la précontrainte est hydrostatique dans le fluide, on a de plus :

$$\frac{1}{\rho} \{ \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \} \nabla \rho = \frac{1}{\rho} \{ \nabla \rho \cdot \mathbf{u} \} \mathbf{g}. \quad (1.119)$$

En injectant (1.118) et (1.119) dans (1.117), on déduit l'expression de l'opérateur dans le fluide :

$$\mathbf{A}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla \left[\frac{\kappa}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \right] (\mathbf{x}) + \{ \nabla \cdot \mathbf{u} \} \left[\frac{\kappa}{\rho^2} \nabla \rho - \mathbf{g} \right] (\mathbf{x}). \quad (1.120)$$

Si l'on introduit maintenant le champ de vecteur \mathbf{s} :

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \nabla \rho(\mathbf{x}) - \frac{\rho^2}{\kappa} \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (1.121)$$

on peut alors reformuler (1.120) :

$$\mathbf{A}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla \left[\frac{\kappa}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \right] (\mathbf{x}) + \{ \nabla \cdot \mathbf{u} \} \frac{\kappa}{\rho^2} \mathbf{s}(\mathbf{x}). \quad (1.122)$$

1.B Annexe : Rappels d'analyse fonctionnelle

On considère un domaine ouvert Ω de l'espace à trois dimensions et on note $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière. On introduit tout d'abord l'espace des fonctions réelles de carré intégrable :

$$L^2(\Omega) = \left\{ \phi : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}; \int_{\Omega} \phi^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \infty \right\}, \quad (1.123)$$

l'intégration dans (1.123) étant à prendre au sens de Lebesgue. L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$(\phi, \psi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.124)$$

est un espace de Hilbert. On notera $\mathbf{L}^2(\Omega)$ l'espace des champs de vecteurs dont toutes les composantes sont dans $L^2(\Omega)$.

En tant que distribution, chaque élément de $L^2(\Omega)$ admet des dérivées par rapport aux variables de l'espace. On définit, pour m entier, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre m sont elles-mêmes dans $L^2(\Omega)$:

$$H^m(\Omega) = \left\{ \phi \in L^2(\Omega); \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha} \in L^2(\Omega), \forall \alpha = 1, \dots, m \right\}. \quad (1.125)$$

L'espace $H^m(\Omega)$ étant un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(\phi, \psi)_{H^m(\Omega)} = \sum_{\alpha=0}^m (\partial_\alpha \phi, \partial_\alpha \psi)_{L^2(\Omega)}. \quad (1.126)$$

Enfin, on rappelle la définition des espaces de Sobolev de dimension fractionnaire :

$$H^s(\mathfrak{R}^3) = \left\{ \phi \in L^2(\mathfrak{R}^3); (1 + |\cdot|^2)^{s/2} \mathcal{F}(\phi)(\cdot) \in L^2(\mathfrak{R}^3) \right\}, \quad (1.127)$$

où $s \in \mathfrak{R}$ et où \mathcal{F} désigne la transformée de Fourier. $H^s(\mathfrak{R}^3)$ est aussi un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(\phi, \psi)_{H^s(\mathfrak{R}^3)} = \int_{\mathfrak{R}^3} (1 + |\xi|^2)^s \mathcal{F}(\phi)(\xi) \mathcal{F}(\psi)(\xi) d\xi. \quad (1.128)$$

L'espace $H^s(\Omega)$ est défini comme l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $H^s(\mathfrak{R}^3)$. Signalons également que l'on peut identifier l'espace dual de $H^s(\Omega)$ avec $H^{-s}(\Omega)$.

Dans notre travail, nous utilisons essentiellement l'espace $H^1(\Omega)$ et on note $\mathbf{H}^1(\Omega)$ l'espace des champs de vecteurs dont toutes les composantes sont dans $H^1(\Omega)$. Dans un espace à trois dimensions, les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas en général continues. On supposera cependant que la frontière Γ est suffisamment régulière pour pouvoir définir une application «trace» linéaire et continue :

$$\mathbf{tr} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma). \quad (1.129)$$

Si une distribution $\phi \in H^1(\Omega)$ admet un représentant continu, alors la trace de ϕ n'est autre que sa restriction à Γ .

On rappelle également la définition de l'espace $H(\text{div}, \Omega)$ qui contient $\mathbf{H}^1(\Omega)$:

$$H(\text{div}, \Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \right\}. \quad (1.130)$$

Et on supposera à nouveau suffisamment de régularité sur Γ pour pouvoir définir une application «trace normale» linéaire et continue :

$$\mathbf{trn} : H(\text{div}, \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma) . \quad (1.131)$$

Rappelons maintenant quelques formules que nous avons utilisé dans ce travail. Tout d'abord la formule de la divergence, valable pour tout champ de vecteur $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} , \quad (1.132)$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{s})$ est le vecteur normal à Γ au point \mathbf{s} .

Enfin, signalons une formule de Green pour l'opérateur de l'élasticité valable pour $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \partial_j \sigma_{ij}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) \, v_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) \, \partial_j v_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_j(\mathbf{s}) \, v_i(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} . \quad (1.133)$$

Dans cette écriture, $\sigma(\mathbf{u})$ est un tenseur de contraintes relié au tenseur des déformations $\varepsilon(\mathbf{u})$ par une loi de Hooke de type (1.64).

On peut réécrire (1.133) sous forme vectorielle en faisant apparaître le tenseur des déformations associé au champ \mathbf{v} :

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} [\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{v}(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} . \quad (1.134)$$

1.C Annexe : Symétrisation des termes de gravité

Cas solide

On considère ici le cas d'un sous-domaine Ω purement solide. On note Γ sa frontière et on suppose qu'elle est parfaitement sphérique. On détaille comment écrire sous forme symétrique le produit scalaire $(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}$ où $\mathbf{A}\mathbf{u}$ est donné par :

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \nabla[\rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}] - \nabla \cdot \{\rho\mathbf{u}\} \mathbf{g} . \quad (1.135)$$

On utilisera successivement les 4 formules suivantes (les deux dernières étant les symétriques des premières) :

$$\nabla \cdot \{\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{g})\mathbf{v}\} = \nabla[\rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}] \cdot \mathbf{v} + \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{g})\nabla \cdot \mathbf{v} , \quad (1.136)$$

$$\nabla \cdot \{\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{g})\mathbf{v}\} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g})\nabla \cdot \{\rho\mathbf{v}\} + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla[\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}] , \quad (1.137)$$

$$\nabla \cdot \{\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})\mathbf{u}\} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})\nabla \cdot \{\rho\mathbf{u}\} + \rho\mathbf{u} \cdot \nabla[\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}] , \quad (1.138)$$

$$\nabla \cdot \{\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})\mathbf{u}\} = \nabla[\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}] \cdot \mathbf{u} + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})\nabla \cdot \mathbf{u} . \quad (1.139)$$

On commence par écrire :

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} (\mathbf{a}) + (\mathbf{b}) + (\mathbf{c}) + (\mathbf{d}) \, d\Omega , \quad (1.140)$$

avec :

$$(a) = \frac{1}{2} \{ \nabla [\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}] \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \} , \quad (1.141)$$

$$(b) = \frac{1}{2} \{ \nabla [\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}] \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \} , \quad (1.142)$$

$$(c) = -\frac{1}{2} \{ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \nabla [\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}] \cdot \mathbf{u} \} , \quad (1.143)$$

$$(d) = -\frac{1}{2} \{ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) - \nabla [\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}] \cdot \mathbf{u} \} . \quad (1.144)$$

On transforme d'abord les termes (b) et (d) en utilisant (1.136) et (1.137) :

$$(b) = \frac{1}{2} \{ \rho \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}] - \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) \nabla \cdot \mathbf{v} \} , \quad (1.145)$$

$$(d) = \frac{1}{2} \{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}] - \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \nabla \cdot \mathbf{u} \} , \quad (1.146)$$

c'est-à-dire :

$$(b) + (d) = \rho \text{Sym} \{ \mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \nabla \cdot \mathbf{u} \} , \quad (1.147)$$

où Sym désigne la partie symétrique :

$$\text{Sym} \{ f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \} = \frac{1}{2} \{ f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \} . \quad (1.148)$$

Ensuite, on utilise (1.138) et (1.139) pour transformer les termes (a) et (c) :

$$(a) = \nabla \cdot \{ \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) \mathbf{v} \} - \frac{\rho}{2} \{ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}] \} , \quad (1.149)$$

$$(c) = -\nabla \cdot \{ \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \mathbf{u} \} + \frac{\rho}{2} \{ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}] \} , \quad (1.150)$$

c'est-à-dire :

$$(a) = \nabla \cdot \{ \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) \mathbf{v} \} - \frac{\rho}{2} \nabla \cdot \{ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) \mathbf{v} \} , \quad (1.151)$$

$$(c) = -\nabla \cdot \{ \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \mathbf{u} \} + \frac{\rho}{2} \nabla \cdot \{ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \mathbf{u} \} , \quad (1.152)$$

ou bien encore :

$$(a) = \frac{1}{2} [\nabla \cdot \{ \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) \mathbf{v} \} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) \nabla \rho \cdot \mathbf{v}] , \quad (1.153)$$

$$(c) = -\frac{1}{2} [\nabla \cdot \{ \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \mathbf{u} \} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \nabla \rho \cdot \mathbf{u}] . \quad (1.154)$$

Rappelons que dans un modèle hydrostatique, le gradient de densité est purement radial et que donc :

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) \nabla \rho \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \nabla \rho \cdot \mathbf{u} . \quad (1.155)$$

En utilisant (1.155) on obtient alors :

$$\int_{\Omega} (a) + (c) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\nabla \cdot \{ \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) \mathbf{v} \} - \nabla \cdot \{ \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \mathbf{u} \}] d\Omega , \quad (1.156)$$

puis en appliquant la formule de la divergence (1.132) :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{a}) + (\mathbf{c}) \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \rho \{ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \} \, d\Gamma . \quad (1.157)$$

On peut également faire apparaître le gradient de pression hydrostatique dans cette dernière équation et le décomposer en partie normale (qui s'élimine) et partie tangente pour obtenir une expression similaire à celle donnée dans (Valette 1986) :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{a}) + (\mathbf{c}) \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \{ (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\Sigma} p)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\Sigma} p)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \} \, d\Gamma . \quad (1.158)$$

Quoi qu'il en soit, on voit sur les expressions (1.157) ou (1.158) que dans le cas d'une interface Γ sphérique et d'un modèle hydrostatique, on a :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{a}) + (\mathbf{c}) \, d\Omega = 0 . \quad (1.159)$$

En combinant (1.147) et (1.159) on obtient finalement :

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \rho \operatorname{Sym} \{ \mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \nabla \cdot \mathbf{u} \} \, d\Omega . \quad (1.160)$$

Cas fluide

On considère ici le cas d'un sous-domaine Ω purement fluide. On note Γ sa frontière et on suppose qu'elle est parfaitement sphérique. On détaille comment écrire sous forme symétrique le produit scalaire $(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}$ où $\mathbf{A}\mathbf{u}$ est donné par :

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = -\nabla [\kappa \nabla \cdot \mathbf{u}] + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \mathbf{g} - \nabla [\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}] . \quad (1.161)$$

On pose :

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} = (\mathbf{a}) + (\mathbf{b}) + (\mathbf{c}) , \quad (1.162)$$

où (\mathbf{a}) , (\mathbf{b}) et (\mathbf{c}) proviennent des trois termes qui apparaissent dans (1.161). On commence par intégrer (\mathbf{a}) par parties en oubliant le terme de bord en vertu de la continuité de la traction :

$$(\mathbf{a}) = \int_{\Omega} \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega . \quad (1.163)$$

Ensuite, on transforme (\mathbf{b}) :

$$(\mathbf{b}) = \int_{\Omega} \{ \rho \nabla \cdot \mathbf{u} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) + (\nabla \rho \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \} \, d\Omega . \quad (1.164)$$

Puis on intègre (\mathbf{c}) par parties :

$$(\mathbf{c}) = \int_{\Omega} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma . \quad (1.165)$$

Toutes ces étapes permettent de faire apparaître la forme symétrique suivante :

$$\begin{aligned} \left(\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\rho}{\kappa} \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \right) \kappa \left(\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\rho}{\kappa} \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \right) = & \quad \nabla \cdot \mathbf{u} \kappa \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) \nabla \cdot \mathbf{v} \\ & + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\rho^2}{\kappa} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) . \end{aligned} \quad (1.166)$$

En effet, en comparant les différents termes de (1.166) avec (1.163), (1.164) et (1.165) on obtient :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} = & \int_{\Omega} \left(\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\rho}{\kappa} \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \right) \kappa \left(\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\rho}{\kappa} \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left(\nabla \rho - \frac{\rho^2}{\kappa} \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{u} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) d\Omega \\
& - \int_{\Gamma} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma .
\end{aligned} \tag{1.167}$$

On voit apparaître dans le deuxième terme le champ de vecteurs \mathbf{s} défini par (1.88). Rappelons que dans un modèle hydrostatique \mathbf{s} est colinéaire à \mathbf{g} et que l'on peut donc écrire :

$$\mathbf{s} = \left(\frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{g}}{g^2} \right) \mathbf{g} = \rho \left(\frac{N^2}{g^2} \right) \mathbf{g} . \tag{1.168}$$

Finalement, dans le terme de surface on peut utiliser :

$$\mathbf{g} = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} , \tag{1.169}$$

et on obtient l'expression donnée par Valette (1986) :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} = & \int_{\Omega} \left(\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\rho}{\kappa} \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \right) \kappa \left(\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\rho}{\kappa} \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \rho N^2 \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} \right) \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} \right) d\Omega \\
& - \int_{\Gamma} \rho (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma .
\end{aligned} \tag{1.170}$$

Chapitre 2

Modélisation par différences finies de la propagation des ondes SH dans le manteau terrestre en géométrie axisymétrique

Les résultats de ce chapitre ont été publiés sous la référence : E. Chaljub et A. Tarantola (1997), Sensitivity of SS precursors to topography on the upper-mantle 660-km discontinuity, Geophysical Research Letters, vol. 24, no 21, pp 2613-2616.

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, qui constitue la première partie de cette thèse, on a développé une méthode numérique permettant la modélisation de la propagation des ondes de cisaillement transverse (SH) dans la Terre.

L'approximation numérique que l'on a utilisée est une adaptation aux coordonnées sphériques de la méthode aux différences finies sur des grilles en quinconce introduite par Virieux (1984). Il s'agit d'un schéma centré du second ordre en espace et en temps qui repose sur une formulation en déplacement-contraainte.

La méthode des différences finies a l'avantage d'être assez simple à mettre en oeuvre, puisqu'elle dérive presque directement de la formulation forte des équations du mouvement. De plus, en choisissant de travailler avec les coordonnées sphériques, on évite les difficultés des méthodes de différences finies à prendre en compte des interfaces physiques qui ne sont pas des lignes de coordonnées du maillage.

La difficulté principale que l'on rencontre en géométrie sphérique est liée aux singularités des coordonnées de travail, c'est-à-dire au voisinage du centre de la Terre et de l'axe des pôles. Le premier problème est réglé dans notre cas en utilisant la particularité physique des ondes de cisaillement transverse qui, d'une part ne se propagent pas dans le noyau liquide et d'autre part sont découplées des ondes P et SV . Ainsi, si l'on arrive à n'exciter que des ondes SH , celles-ci seront totalement réfléchies à l'interface noyau-manteau¹ et ne se propageront donc que dans le manteau terrestre. Cette propriété est valable uniquement dans un modèle à symétrie sphérique, c'est-à-dire un modèle où les paramètres

1. Dans la suite, cette interface sera parfois noté CMB pour *Core Mantle Boundary*.

élastiques ainsi que les frontières géométriques sont invariants par rotation autour de l'axe des pôles. Dès que cette symétrie est brisée, il faut tenir compte du champ d'ondes complet et des possibles conversions d'une onde SH incidente en onde SV ou P . Quant au deuxième problème, classiquement répertorié comme *le problème du pôle*, il est évacué par la condition d'axisymétrie que l'on vient d'évoquer.

Un autre aspect délicat dans les méthodes de différences finies concerne le traitement des conditions de surface libre. Dans le cas SH et en l'absence de topographie à la surface de la Terre et à l'interface noyau-manteau, les conditions de surface libre ne concernent qu'une seule des composantes du tenseur des contraintes. Cela permet de définir les conditions aux limites de façon immédiate malgré l'utilisation de grilles en quinconce.

La méthode présentée dans ce chapitre a été ensuite étendue à l'ordre 8 en espace et 4 en temps par Igel and Weber (1995). L'utilisation d'un ordre plus élevé apporte une plus grande précision à la méthode pour un coût calcul égal. Cependant, la condition de surface libre est généralement satisfaite en utilisant des règles de symétrie qui ne sont que d'ordre 2 en espace. Cette différence n'est pas gênante dans des problèmes où l'on s'intéresse essentiellement aux ondes réfléchies, comme c'est le cas en exploration pétrolière. Dans le cadre de la sismologie globale, il est au contraire crucial de bien calculer les ondes de surface puisqu'elles constituent une source importante d'information sur la structure de la Terre. Une extension au cas $P - SV$ a été également proposée par Igel and Weber (1996) toujours avec un schéma d'ordre élevé en espace (et en temps). Dans cette étude, un réflecteur artificiel est implémenté dans le noyau externe pour s'affranchir du problème du centre. Les données synthétiques obtenues ne sont alors utilisables que dans une certaine fenêtre de temps, *i. e.* avant que l'onde réfléchie artificiellement arrive en surface.

Dans la première partie de ce chapitre, on revient sur les hypothèses de travail et on rappelle les équations SH pour un milieu élastique et isotrope. On présente la méthode numérique et on illustre les résultats obtenus sous forme de sismogrammes et d'instantanés de propagation. Dans les annexes 2.A et 2.B, on détaille le diagramme de radiation de la source et la condition limite imposée sur l'axe des pôles.

Dans un deuxième temps, on s'est consacré à l'étude des ondes $S660S$ réfléchies sous l'interface entre manteau supérieur et manteau inférieur. Cette discontinuité, que l'on trouve vers 660 km est attribuée à un changement de phase chimique de l'olivine du manteau (*e. g.* Liu 1976 et 1979, Jackson 1983, Ito et al. 1984) et joue un rôle important dans la dynamique du manteau terrestre.

Parmi les phases sismiques utilisées pour retrouver la topographie à 660 km de profondeur, certains auteurs ont choisi les ondes $S660S$ en raison de leur couverture globale (*e. g.* Shearer and Masters 1992, Shearer 1993 et Gu, Dziewonski, and Agee 1998). Il s'avère cependant que la méthode d'inversion utilisée ne tient pas compte de la particularité des ondes $S660S$, notamment de la structure en point-selle de leur zone de Fresnel (Neele, de Regt, and VanDecar 1997).

En utilisant la méthode des différences finies, on s'est donc intéressé à la sensibilité des ondes $S660S$ à des perturbations de topographie et de vitesse près de l'interface. On a mené une série d'expériences numériques dans le but de contraindre le domaine de longueurs d'onde et d'amplitudes qui peuvent être résolues par les phases $S660S$. Les résultats obtenus confirment la présence probable de larges erreurs sur les modèles précités et suggèrent que l'effet des anomalies de vitesse du manteau inférieur domine celui de la topographie de l'interface.

Les résultats de cette étude font l'objet de la deuxième partie du chapitre. On commence par résumer les propriétés des ondes réfléchies sous les interfaces du manteau et on présente ensuite les diverses expériences menées avant de conclure sur leur signification.

2.2 Modélisation physique et numérique

2.2.1 Modèle physique

On assimile la terre à un milieu isotrope parfaitement élastique et axisymétrique, et on utilise une source toroïdale : $f^r = 0$, $f^\theta = 0$ et $f^\varphi = f^\varphi(r, \theta, t)$.

Dans la base naturelle des coordonnées sphériques, les équations de l'élastodynamique pour le mode SH s'écrivent alors :

$$\rho \frac{\partial^2 u^\varphi}{\partial t^2} = f^\varphi + \frac{1}{r^4} \frac{\partial(r^4 \sigma_r^\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin^3 \theta} \frac{\partial(\sin^3 \theta \sigma_\theta^\varphi)}{\partial \theta}. \quad (2.1)$$

Dans cette écriture, u^φ est la composante longitudinale du champ de déplacement, ρ est la densité de masse et les composantes du tenseur des contraintes sont données par :

$$\sigma_r^\varphi = \mu \frac{\partial u^\varphi}{\partial r}, \quad \sigma_\theta^\varphi = \frac{\mu}{r} \frac{\partial u^\varphi}{\partial \theta}, \quad (2.2)$$

où μ est le module de cisaillement.

La surface de la terre ainsi que l'interface noyau-manteau ont un comportement de surface libre et satisfont la condition limite :

$$\sigma_r^\varphi = 0. \quad (2.3)$$

L'axe des pôles est décrit par les demi-droites $\{\theta = 0\}$ et $\{\theta = \pi\}$, où la coordonnée φ n'est pas définie. Cependant, pour des raisons de symétrie, le vecteur déplacement doit s'annuler à l'axe :

$$(\|\mathbf{u}\| = |r \sin \theta u^\varphi| = 0)_{\sin \theta = 0}. \quad (2.4)$$

2.2.2 Approximation par différences finies

La solution de l'équation d'onde est calculée aux points de la grille sphérique représentée sur la figure 2.1. Ses dérivées partielles en espace sont estimées aux noeuds intermédiaires des grilles en quin-

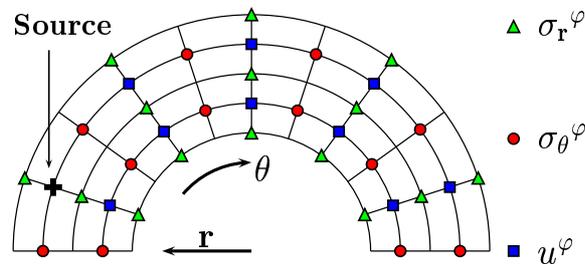


FIG. 2.1 – Vue Schématique des grilles sphériques en quinconce utilisées dans le calcul par DF, avec la position des points correspondant au déplacement et aux contraintes. La taille de chaque grille est 640×4320 dans l'espace (r, θ) .

conce par une approximation aux différences finies centrée du second ordre. On choisit les grilles de façon à calculer σ_r^φ sur les surfaces libres et σ_θ^φ sur l'axe des pôles. La condition de surface libre

est donc directement implémentée tandis que la condition à l'axe (2.4) est satisfaite indirectement en imposant $(\sin^3 \theta \sigma_\theta^\varphi)_{\sin \theta=0} = 0$ (voir l'annexe 2.B).

Puisque le déplacement n'est pas défini sur l'axe des pôles, on place une force ponctuelle de volume f^φ au point de grille le plus proche de l'axe. Comme conséquence de la condition d'axisymétrie, cela conduit à considérer une source toroidale tridimensionnelle située sur un petit cercle centré sur l'axe des pôles. Le diagramme de radiation de la source est isotrope dans la direction transverse φ , ce qui découle naturellement de la condition de symétrie. Pour toute valeur de φ cependant, l'amplitude du déplacement propagé dépend de l'angle d'incidence i comme $\sin i$, ainsi qu'on le montre dans l'annexe 2.A.

Cela est cohérent avec la dépendance obtenue pour le champ lointain SH en présence d'une source double couple de type décrochement pur, ou faille inverse, ou faille normale (voir la figure 2.2 et Aki and Richards 1980, p.115).

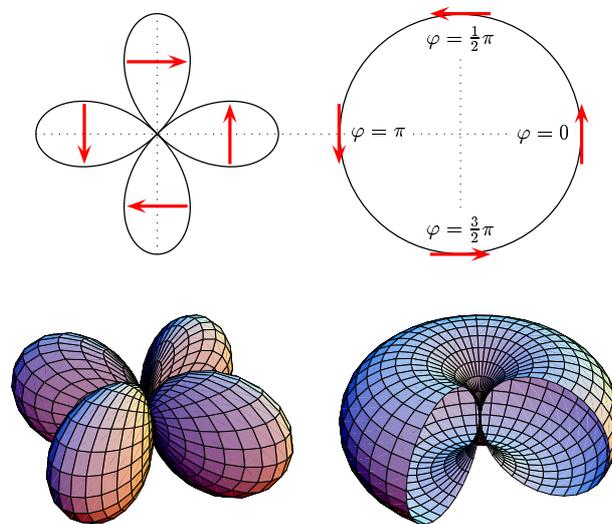


FIG. 2.2 – Diagrammes de radiation de la composante SH pour un mécanisme de strike-slip (à gauche) et pour la source toroïdale (à droite). En haut, la polarisation du déplacement est représentée en vue de dessus et en bas, les diagrammes sont dessinés en trois dimensions. On constate que les coupes verticales des deux diagrammes coïncident.

La dépendance temporelle associée à la densité de forces f est la dérivée seconde d'une gaussienne². Pour une fonction source ayant une période dominante $T \simeq 30$ s, le manteau terrestre est discrétisé par 640 points de grille dans la direction radiale et 4320 points latéralement. Le pas de grille vertical est de 4.5 km et le pas latéral décroît de 4.6 km à la surface jusqu'à 2.5 km à la CMB. Le nombre minimal de points de grille par longueur d'onde dominante croît ainsi pour le modèle de terre IASP91 de 21 à la surface jusqu'à 48 à la CMB. On rappelle que les longueurs d'onde doivent être échantillonnées par un minimum de 15 points de grille environ pour un schéma d'ordre 2 en espace. En raison du spectre étendu de la source (voir la figure 4.4), ce n'est pas le cas ici des longueurs d'onde minimales à la surface du modèle. L'effet d'un sous-échantillonnage spatial est l'apparition de dispersion numérique qui se caractérise par des vitesses de phase numériques inférieures aux vitesses réelles. En conséquence, on observera une *coda* artificielle sur les formes d'onde qui sont mal discrétisées. Pour les expériences menées dans la suite de ce chapitre, cet effet est négligeable car on s'intéresse à des ondes qui voyagent essentiellement dans des parties du modèle où le nombre de points de grille est suffisant. De plus, les mesures de temps d'arrivée utiliseront une méthode de corrélation qui est sensible essentiellement au contenu basse fréquence des formes d'onde.

2. Voir les figures 4.3 page 99 et 4.4 page 99.

Dans toutes les simulations, on a utilisé un pas de temps de 0.2 s, ce qui assure la stabilité du schéma d'évolution. Le schéma aux différences finies a été implémenté sur une Connection Machine CM5 et a nécessité moins de cinq minutes de temps CPU sur une partition de 128 noeuds pour calculer 15000 pas d'évolution en temps. Sur la figure 2.3, on a représenté des instantanés de la propagation des ondes *SH* correspondant au modèle moyen PREM dans lequel on a enlevé la couche d'eau superficielle. Le détail de la propagation est le suivant :

- ▷ Après 100 s, l'onde directe pénètre dans le manteau inférieur.
- ▷ Après 500 s, l'onde directe est réfléchi sur l'interface noyau-manteau (CMB) à la verticale de la source. Elle est suivie par des phases mineures qui se sont réfléchies sur les interfaces du manteau supérieur (à 220 km, 400 km et 660 km de profondeur).
- ▷ Au temps $t = 900$ s, l'onde réfléchi à la CMB (phase *ScS*) rejoint la surface et l'onde directe atteint la distance épacentrale de 45° environ.
- ▷ À $t = 1200$ s, la phase *ScS* est de nouveau réfléchi à la surface et repart sous la forme d'une onde quasi plane. Au niveau des récepteurs on distingue les phases *S*, *ScS* ainsi que la réfléchi sous la surface *SS*.
- ▷ À $t = 1800$ s, la phase deux fois réfléchi à la CMB atteint la surface. On distingue vers 115° l'onde *SH_{diff}* diffractée à la surface du noyau. La phase *SSS* (double réflexion sous la surface) émerge des ondes de surface.
- ▷ À $t = 2400$ s, les différentes ondes rejoignent l'antipode où elles vont interférer, donnant lieu à des refocalisations d'énergie. On remarque la complexité du champ d'ondes obtenu à cet instant de la simulation.

La figure 2.4 représente sous forme de sismogrammes les déplacements enregistrés à la surface du modèle. On a ajouté pour comparaison une sommation de données réelles longue période (communication personnelle de P. M. Shearer).

Ces données ont été enregistrées par les stations du réseau mondial *Global Digital Seismograph Network* (GDSN) entre 1976 et 1987. La procédure de sommation est similaire à celle utilisée par Shearer and Masters (1990) et Shearer (1991a, 1991b). Elle consiste à ajouter les traces correspondant à la même distance épacentrale (à 1° près) sans tenir compte des particularités de la source ou de la station. Seuls les séismes de faible profondeur (<75 km) sont utilisés pour éviter les complications des phases réfléchies dans la croûte. Dans la procédure, les formes d'onde trop différentes de la moyenne sont simplement rejetées. On note que les amplitudes ne sont pas préservées dans la sommation puisque les traces sont normalisées. Le sismogramme obtenu est constitué de plus de 11000 traces individuelles avec une moyenne de 100 traces par distance épacentrale. Au delà de 106° , l'onde *SH* est fortement atténuée lors de la diffraction par le noyau et les traces ne sont pas utilisées.

La similitude des deux sismogrammes de la figure 2.4 illustre la capacité du modèle moyen utilisé à expliquer les temps d'arrivée des principales phases sismiques. Pour la comparaison, on a utilisé le modèle IASP91 (au lieu de PREM) car les données ne suggèrent pas la présence d'une discontinuité à 220 km contrairement au modèle PREM.

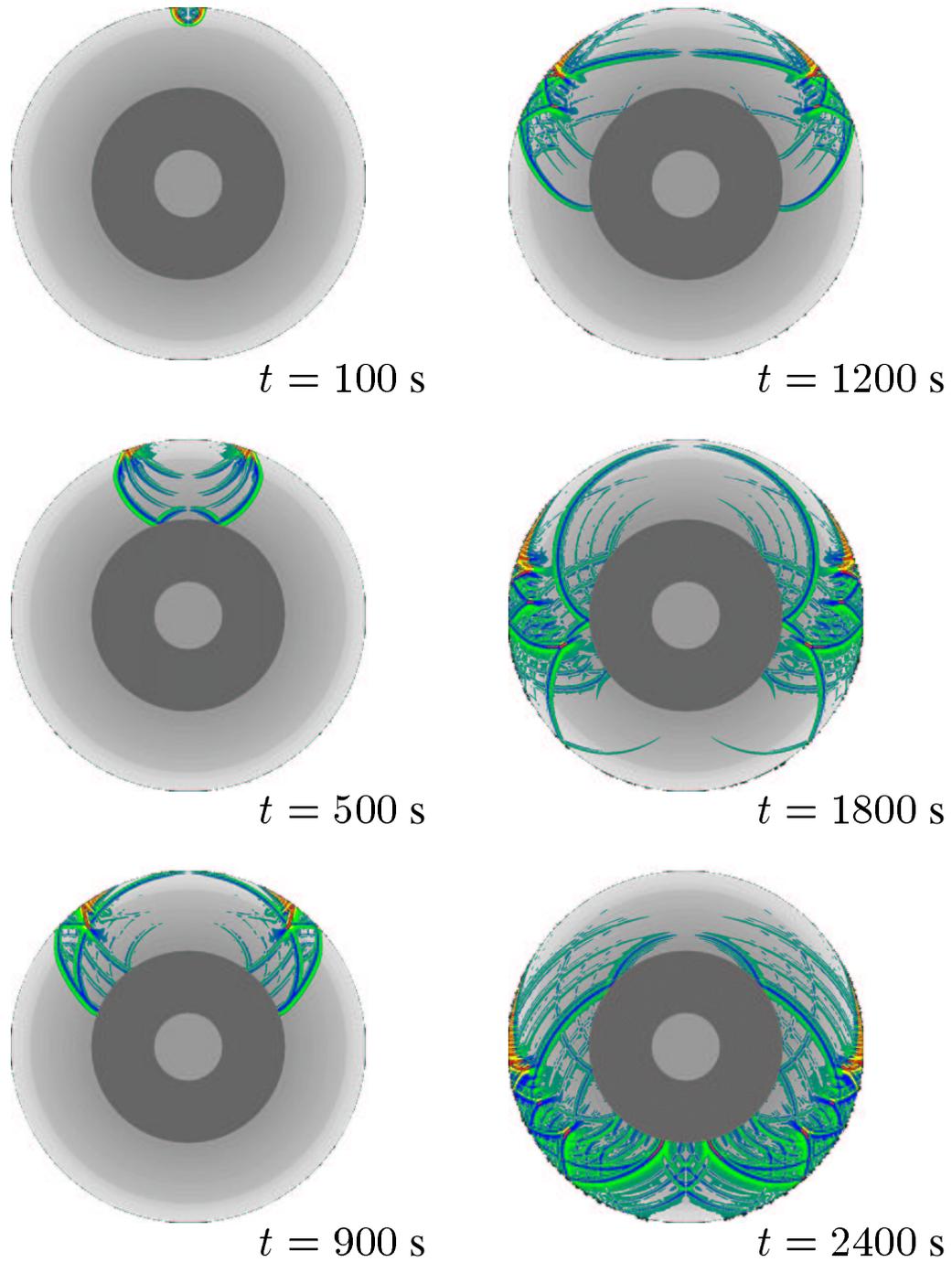


FIG. 2.3 – Instantanés de la propagation des ondes SH obtenus par la méthode des différences finies. On a séparé les ondes de surface (représentées en rouge/jaune) des ondes de volume (bleu/vert). L'origine des phases observées est détaillée dans le texte.

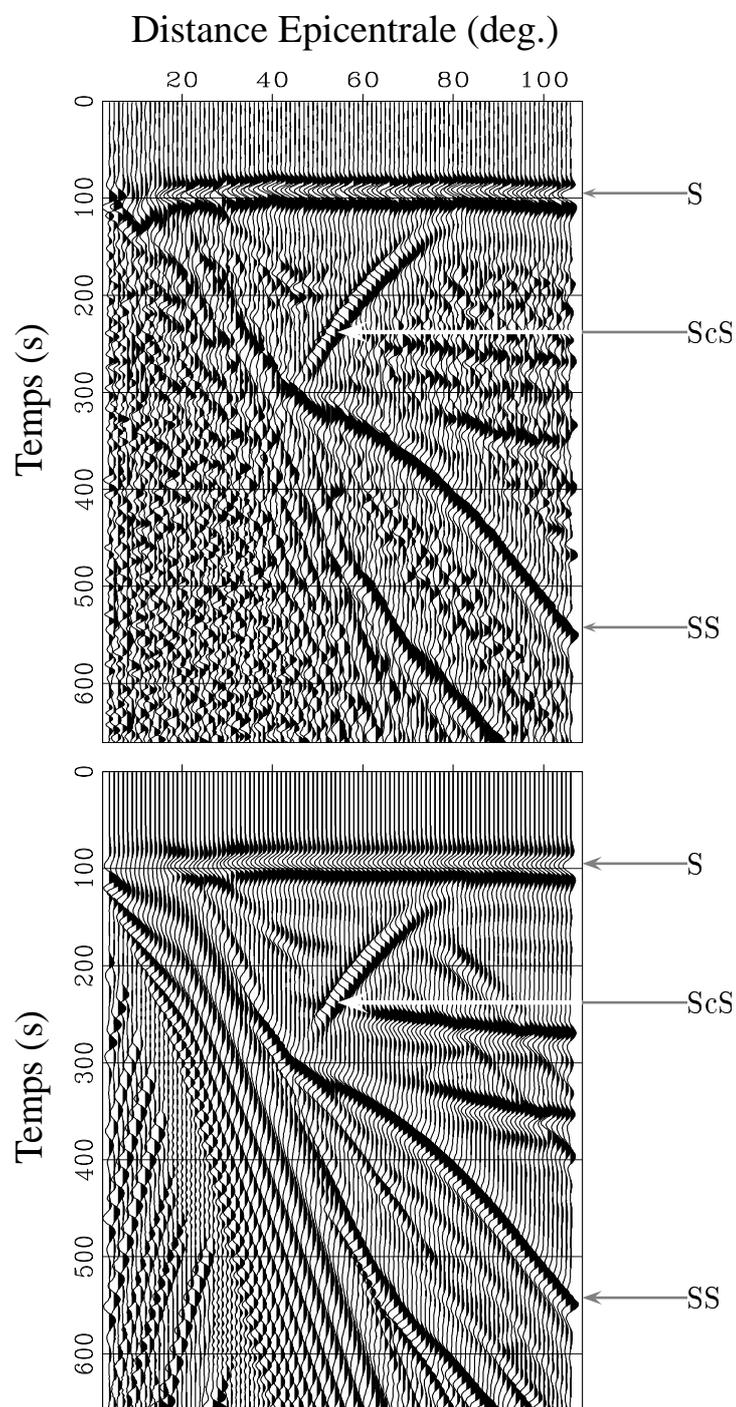


FIG. 2.4 – Sismogrammes correspondant à une sommation de données réelles (haut) et obtenus par la méthode des différences finies dans le modèle IASP91 (bas). Les traces sont alignées sur l'arrivée de l'onde directe (S) et un gain automatique a été appliqué pour distinguer les phases de faible amplitude. On a indiqué l'onde réfléchie sur l'interface noyau-manteau (ScS) ainsi que la réfléchie sous la surface (SS). La cohérence des phases observées dans les données réelles traduit la structure radiale de la Terre au premier ordre.

2.3 Étude de la sensibilité des précurseurs SS à des perturbations de topographie et de vitesse à 660 km

2.3.1 Introduction

Comme on l'a signalé au début de ce chapitre, la discontinuité sismique à 660 km de profondeur joue un rôle important dans la dynamique du manteau terrestre. Ce réflecteur sismique est associé au changement de phase endothermique de l'olivine en perovskite + magnésio-wüstite. La pente de Clapeyron associée étant négative, une élévation (resp. déflexion) de la discontinuité correspond à une région chaude (resp. froide) comme cela est illustré par la figure 2.5. La cartographie de la topographie de ce réflecteur sismique peut donc contraindre le régime thermique de la zone de transition (la zone délimitée par les discontinuités à 400 et 660 km) et permettre d'y détecter la présence de plaques plongeantes ou de panaches ascendants.

Parmi les ondes de volume utilisées à cet effet, les réfléchies sous les discontinuités offrent l'avantage d'une meilleure couverture spatiale. En effet, le point de rebond de ces phases se situe entre la source et le récepteur, dans des régions qui ne sont pas forcément instrumentées (comme les océans par exemple). Sur la figure 2.6, on rappelle la géométrie des rais associés aux ondes S réfléchies qui apparaissent comme des précurseurs de la phase SS . Une des particularités de ces phases est liée à la structure en point-selle de leur zone de Fresnel (voir la figure 2.7). La zone de Fresnel, qui caractérise la sensibilité d'une onde à la structure du milieu, a ici une taille inhabituelle (environ 2000 km sur la figure 2.7, soit un ordre de grandeur de plus que la longueur d'onde). La figure 2.8 représente une carte globale de la topographie à 660 km obtenue par Gu et al. (1998) en inversant les temps d'arrivées des ondes $S660S$. La procédure utilise une méthode de tracé de rais pour relier les variations des temps d'arrivée à la profondeur de la discontinuité au point de rebond. On constate que l'image obtenue est dominée par les très grandes longueurs d'onde, en rapport avec la taille de la zone de Fresnel.

Les images globales de topographie sur les discontinuités du manteau ont été depuis sérieusement remises en cause par le travail de Neele, de Regt, and VanDecar (1997). En calculant des réflexions P à 400 et 660 km par une méthode de type Kirchhoff-Helmholtz, ces auteurs ont montré que des perturbations topographiques de faible longueur d'onde étaient transformées dans l'inversion en structures à grande échelle semblables à celles qui dominent la carte de la figure 2.8. Ce qui est en cause c'est le domaine de validité de la méthode employée. En effet, l'utilisation d'une méthode géométrique (rais) n'est justifiée que si la taille des hétérogénéités du modèle est du même ordre que celle de la zone de Fresnel des ondes utilisées. Mais cela n'implique pas que les ondes réfléchies sous les discontinuités ne voient pas les petites longueurs d'onde de la topographie.

Dans la suite de ce chapitre, on complète l'étude de Neele et al. (1997) par deux contributions principales. Tout d'abord, on étudie de façon systématique la sensibilité des ondes $S660S$ longue période ($T \simeq 30$ s) à la présence à 660 km d'une perturbation sinusoïdale de profondeur, de largeur et d'amplitude variables. Cela vise à mieux contraindre le domaine de longueurs d'onde et d'amplitudes qui peuvent être résolues par les précurseurs SS . Ensuite, on inclut des perturbations de vitesse S consistantes avec la signature thermique d'une plaque subductée traversant la zone de transition. On effectue quelques expériences visant à comparer les ordres de grandeur des perturbations de vitesse et de profondeur.

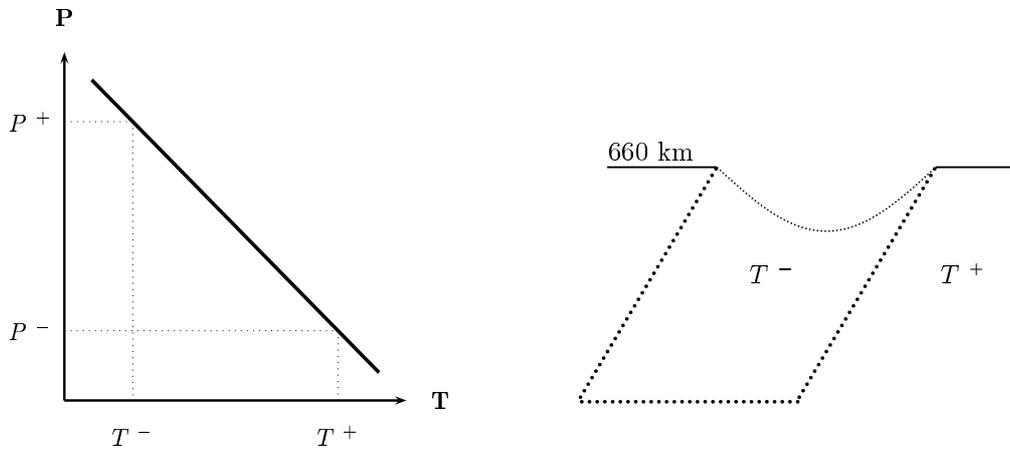


FIG. 2.5 – Nature du changement de phase associé à la discontinuité sismique à 660 km de profondeur. À gauche, on représente la courbe du changement de phase dans un diagramme pression-température. Plus la température est faible, plus le changement de phase a lieu à pression (et donc à profondeur) élevée. À droite, on illustre l'effet d'une plaque froide (slab) qui traverse l'interface des 660 km. La présence du slab provoque une déflexion de la discontinuité sismique.

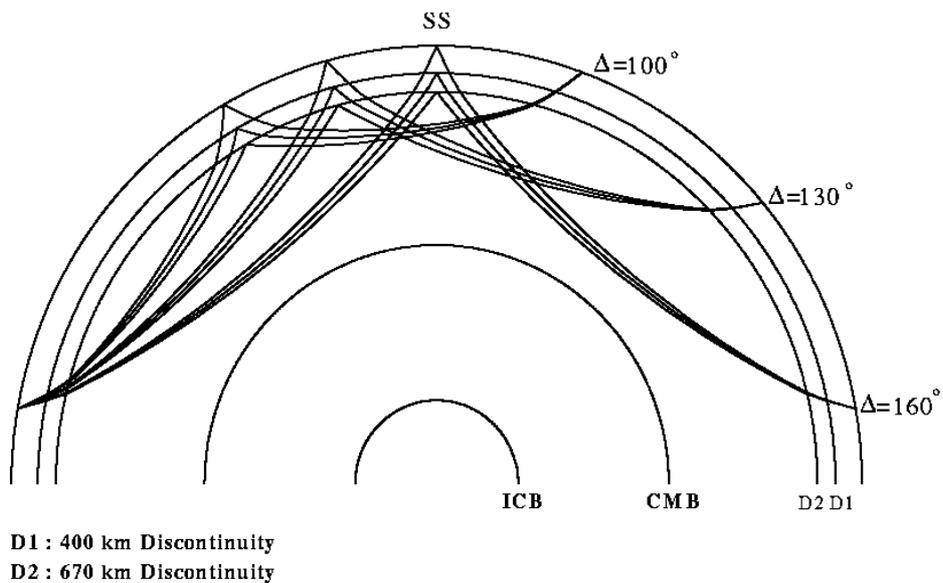


FIG. 2.6 – Géométrie des rais correspondant aux ondes S réfléchies sous les discontinuités du manteau terrestre. Pour chaque distance épicentrale, sont représentés la phase SS (réfléchié sous la surface) ainsi que ses précurseurs S660S et S400S.

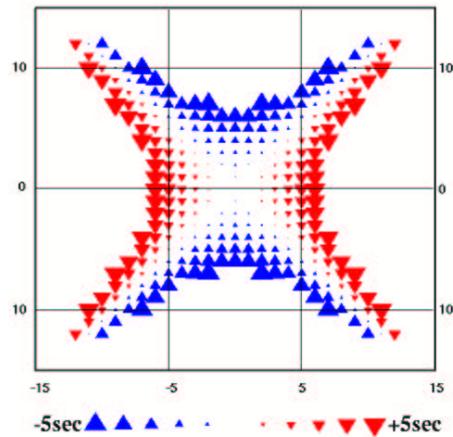


FIG. 2.7 – Représentation de la zone de Fresnel de l'onde $S660S$ correspondant à une distance épacentrale de 120° et une période de 20 s. Le point de rebond du rai géométrique est situé au centre de la figure et l'écart à cette position est mesuré en degrés. Chaque triangle est le point de rebond d'un système de rai qui relie la source au récepteur après réflexion sous la discontinuité. La couleur et la taille d'un triangle représentent la différence de temps de trajet de ce système de rai par rapport au rai géométrique. Les temps de trajet différentiels inférieurs à ± 5 s ($1/4$ de la période) définissent la première zone de Fresnel.

Topographie à 660 km

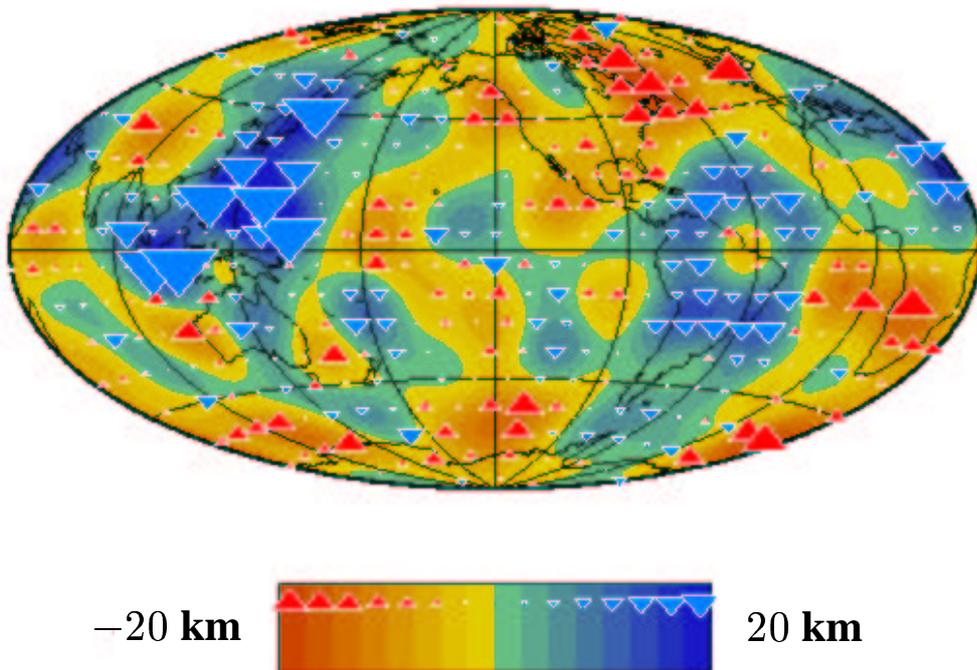


FIG. 2.8 – Variation à l'échelle du globe de la topographie de la discontinuité des 660 km. Les amplitudes maximales sont obtenues dans la zone ouest du pacifique et sont associées à la présence de nombreuses zones de subduction. On remarque que les structures imagées ont des tailles de l'ordre de plusieurs milliers de kilomètres.

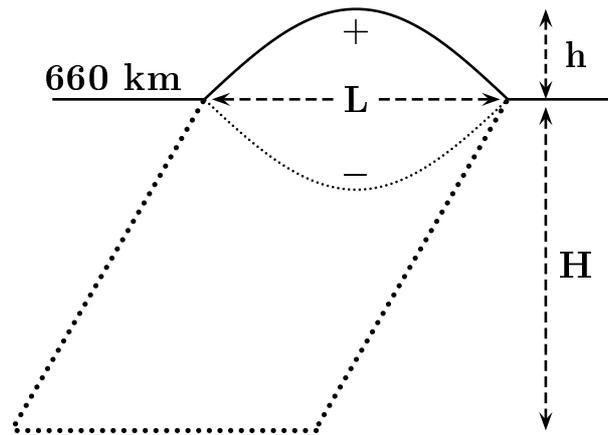


FIG. 2.9 – Une topographie sinusoïdale est implémentée à 660 km ayant une amplitude h et une longueur d'onde L . $h > 0$ désigne une élévation et $h < 0$ une déflexion. On inclut dans la suite une anomalie positive de vitesse pour mimer la pénétration d'un slab dans le manteau inférieur jusqu'à une profondeur de $(660 + H)$ km.

2.3.2 Topographie sur la discontinuité à 660 km

Une variation simple de la profondeur de la discontinuité des 660 km est implémentée à la distance θ_b de la source sous la forme d'une perturbation sinusoïdale d'amplitude h et de largeur L (voir fig. 2.9).

La figure 2.10 illustre l'influence sur le champ d'onde SH de la présence à $\theta_b = 70^\circ$ d'une dépression de la «660» ayant une amplitude de 50 km et une largeur de 400 km.

En raison de la présence de topographie, la symétrie des rais réfléchis sous la discontinuité peut être brisée³. Une nouvelle phase (C) apparaît comme un précurseur de l'onde $S660ScS660S$ et émerge de la $S660S$ à une distance d'environ 150° . On remarque que les phases C et $S400S$ interfèrent à des distances inférieures à 145° et par conséquent affectent la cohérence de la réfléchie sous la discontinuité des 400 km.

La phase C, réfléchie à la CMB, est une partie du champ d'ondes diffracté par les coins de la topographie. L'énergie diffractée qui voyage dans le manteau sans rencontrer la frontière noyau-manteau perturbe la pulsation de l'onde $S660S$ sur une grande gamme de distances épacentrales. Dans ce qui suit, la position θ_b est fixée à 70° et on étudie la distorsion de la forme d'onde $S660S$ entre 120° et 160° , dans une région du sismogramme où le précurseur SS n'interfère pas avec la réflexion *topside*⁴ $Ss660s$. Les temps d'arrivée ainsi que les amplitudes des ondes $S660S$ sont estimées par corrélation avec la phase SS du modèle de référence IASP91.

Sur la figure 2.11, un échantillon de phases $S660S$ est représenté ainsi que les écarts de temps d'arrivée associés, pour une amplitude topographique $h = \pm 50$ km et des longueurs d'onde variant de $L = 400$ km à 2000 km. Les courbes de temps d'arrivée illustrent tout d'abord que la gamme de distances affectées en surface ne dépend pas de la largeur de la topographie. En particulier, les perturbations de profondeur de faible extension latérale produisent une signature de surface à grande longueur d'onde. Ensuite, les temps d'arrivée enregistrés à 140° ne sont clairement pas déductibles de la profondeur de la «660» à 70° (qui est la même dans tous les cas), mais dépendent plutôt de la largeur de la topographie (L).

3. Voir (Davis, Kind, and Sacks 1989) pour une description géométrique de la propagation d'ondes réfléchies sous une discontinuité non plane.

4. On trouvera dans (Shearer 1991a) une classification complète des ondes réfléchies sur les discontinuités du manteau.

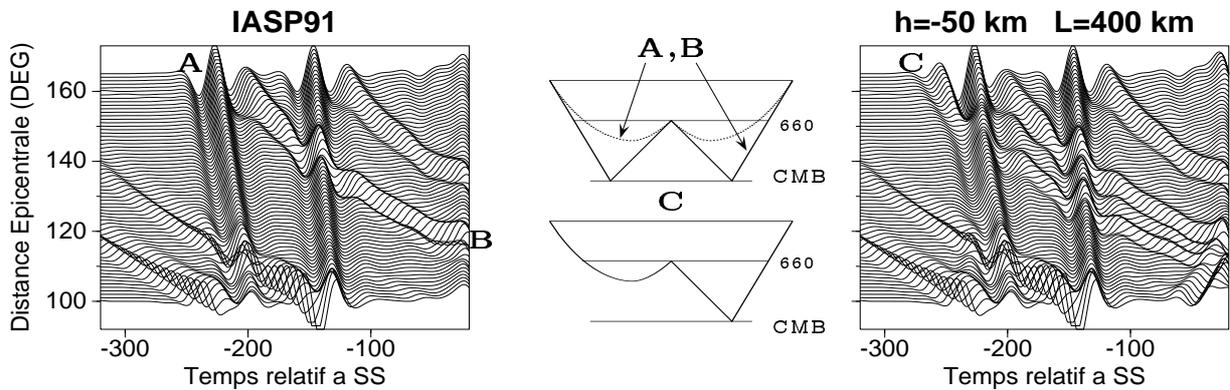


FIG. 2.10 – Formes d'onde calculées dans le modèle IASP91 (gauche) et dans le cas d'une déflexion supplémentaire à 660 km (droite). Le précurseur $S660S$ (phase A) et la réfléchie sur le noyau $S660ScS660S$ (phase B) sont indiqués. Les phases observées aux environs de $t = -300s$ sont les réflexions topside $Ss400s$ et $Ss660s$. La perturbation de profondeur fait apparaître la phase C qui est réfléchie une fois à la CMB. Les phases de type C interfèrent avec le précurseur $S400S$ à des distances inférieures à 145° et perturbent la cohérence de ce dernier.

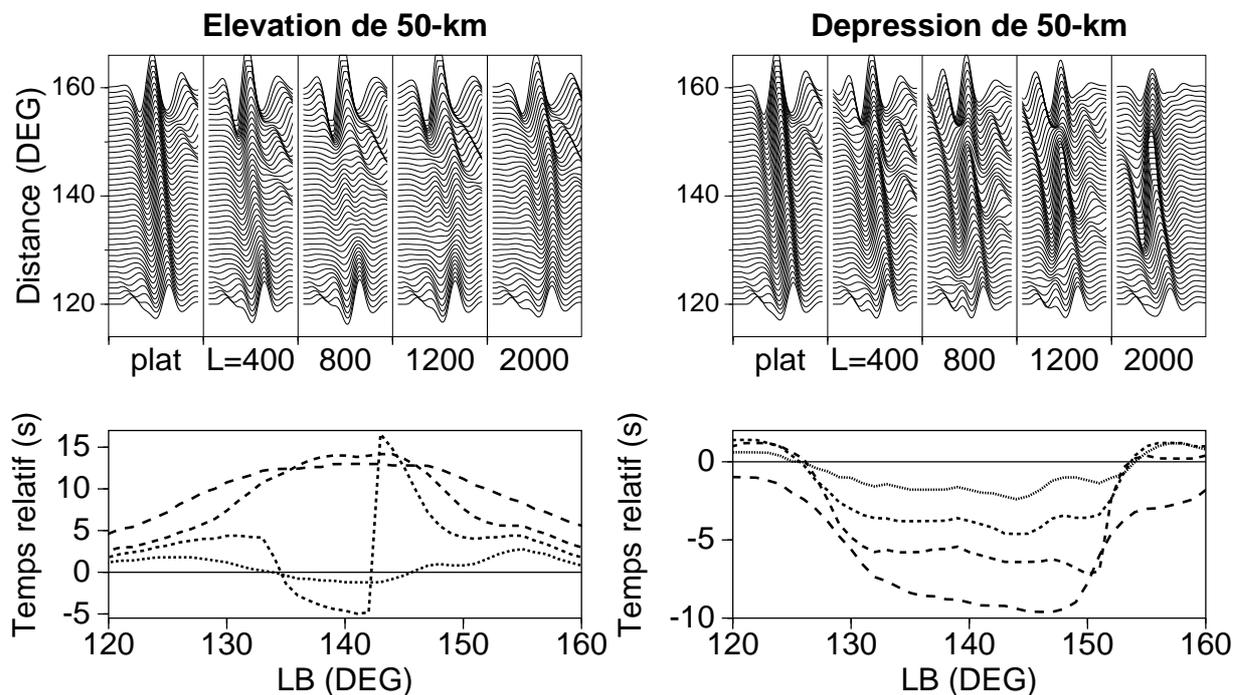


FIG. 2.11 – Phases $S660S$ perturbées (haut) et différences de temps d'arrivée (bas) calculées pour une élévation (gauche) et une déflexion (droite) d'amplitude 50 km et de largeur $L = 400, 800, 1200$ et 2000 km (courbes pleines à tiretées). Les phases $S660S$ ont été alignées sur SS et sont représentées dans une fenêtre de 100 s. L'énergie diffractée par une déflexion à 660 km est visible en avance de la phase $S660S$ vers 150° (en haut à droite). Dans le cas de l'élévation (en bas à gauche), la discontinuité observée pour $L = 800$ km est due à un effet de splitting qui perturbe l'analyse par corrélation.

On s'attache dans la suite à quantifier l'erreur commise lorsque les ondulations de la «660» sont déduites directement des temps d'arrivée $S660S$.

2.3.3 Observations au double du point de rebond

La figure 2.12 représente les profondeurs apparentes de la «660» ainsi que les rapport d'amplitude des phases $S660S$ mesurés à 140° pour des hauteurs de topographie variant entre $h = -50$ km et $h = +50$ km et des largeurs L variables. Les profondeurs apparentes sont estimées par tracé de rai dans le modèle IASP91 et les amplitudes des phases perturbées $S660$ sont caractérisées par le rapport de leur coefficient de corrélation avec la phase $S660S$ de référence. On observe à nouveau que l'information apportée par les temps d'arrivée $S660S$ ne permet ni de retrouver la topographie à 660 km, ni de distinguer des ondulations de caractéristiques différentes : par exemple, les deux topographies ($h = -50$ km, $L = 1200$ km) et ($h = -30$ km, $L = 2000$ km) présentent une même profondeur apparente de 24 km.

La profondeur apparente tend vers la profondeur vraie quand L augmente : le domaine de validité de la théorie des rais est atteint. Les effets d'amplification disparaissent alors, puisque la courbure de la topographie diminue. On remarque cependant que les rapports d'amplitude ne convergent pas vers la même valeur pour L élevé car le contraste d'impédance à 660 km des modèles perturbés n'est pas constant.

Une observation remarquable concerne la différence de convergence des profondeurs apparentes suivant le signe de la topographie. Dans le cas d'une élévation ($h > 0$), la convergence est atteinte pour des longueurs d'ondes d'environ 1500 km, alors qu'elle a lieu pour des largeurs deux fois plus grande dans le cas d'une dépression ($h < 0$).

Une explication de ce comportement peut être fournie dans l'approximation du grand cercle. On rappelle que le rai géométrique associé à la phase $S660S$ correspond à un maximum de temps d'arrivée parmi tous les rais réfléchis sous la «660» et voyageant dans le plan du grand cercle. En présence d'une discontinuité moins profonde au point de rebond, tous les rais proches du trajet géométrique sont retardés par rapport à ceux qui ont été réfléchis à 660 km et loin du point de rebond. Si ce retard est suffisamment important (*i. e.* si l'amplitude de l'élévation est suffisante), la phase $S660S$ observée est scindée en deux arrivées d'énergie distinctes qui interfèrent, comme on peut le voir sur la figure 2.11 pour $h = +50$ km et $L = 800-1200$ km. On remarque qu'alors, la forme d'onde $S660S$ est très éloignée de la pulsation SS et la défocalisation est maximale (ces données ne seraient pas utilisées en pratique). Quand L augmente, le rapport d'amplitude des deux arrivées d'énergie change, ce qui provoque la convergence brutale observée sur les courbes.

Si la discontinuité est plus profonde près du point de rebond, le rai géométrique est en avance et interfère avec des rais qui voyagent dans le grand cercle, en particulier avec l'énergie diffractée par les coins de la topographie. Le domaine d'application de la théorie des rais est atteint quand la courbure de la topographie est suffisamment lisse. Dans le cas d'une topographie sinusoïdale, cette condition est remplie pour des longueurs d'onde $L \geq 3000$ km.

2.3.4 Perturbation de vitesse induite par la présence d'un *slab*

L'utilisation des différences finies permet d'inclure des variations latérales de vitesse en plus des perturbations de profondeur envisagées jusque là. En raison de l'hypothèse d'axisymétrie, on se place dans la limite de perturbations ayant une extension infinie hors du plan du grand cercle reliant source et stations. Dans ces conditions, on peut inclure une anomalie positive de vitesse correspondant à la signature thermique d'une plaque subductée plongeant dans le manteau inférieur.

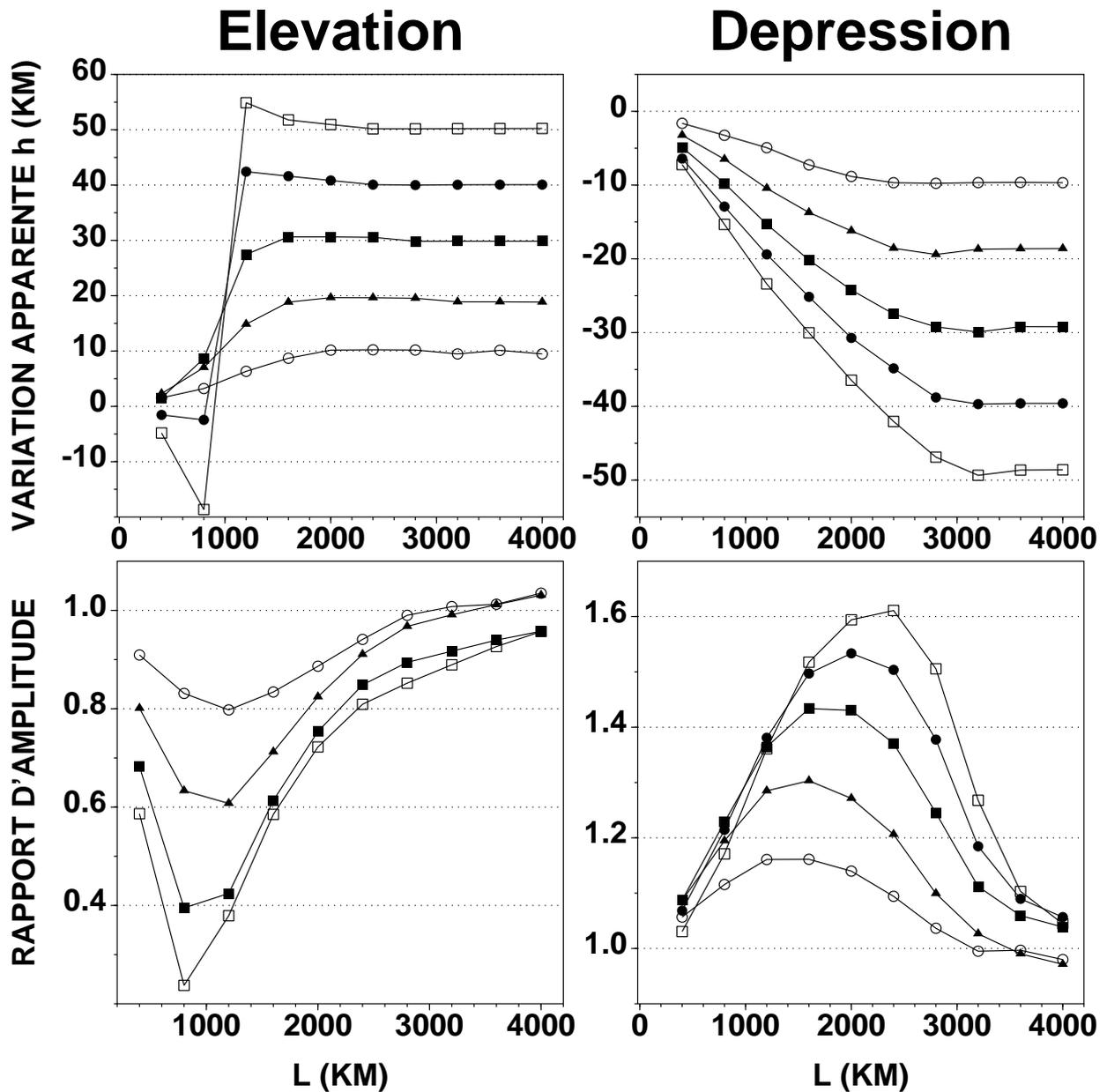


FIG. 2.12 – Topographie apparente sur la «660» (haut) et rapport d'amplitude (bas) mesurés à 140° pour $h = \pm 10$ km (cercles ouverts) à $h = \pm 50$ km (carrés ouverts) et pour une largeur L croissante. La courbe d'amplitude pour $h = 40$ km est très proche de la courbe $h = +50$ km et n'est pas représentée par souci de clarté. La convergence de la profondeur apparente vers la profondeur vraie, qui délimite le domaine de validité pour la théorie des rais, est différente suivant le signe de la topographie. On remarque la défocalisation importante de l'amplitude pour une élévation de la «660» lorsque L est proche de 1000 km (en bas à gauche).

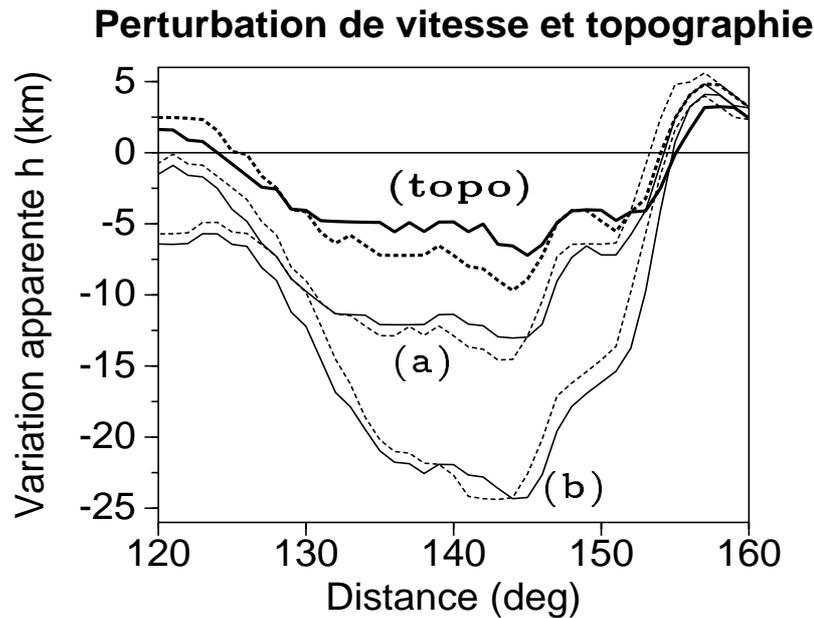


FIG. 2.13 – Profondeur apparente calculée pour une dépression sur la «660» ayant 400 km de large et une amplitude de 30 km (trait plein) et 50 km (pointillé). Trois modèles sont présentés : (topo) une perturbation de profondeur seulement est considérée, (a) une augmentation de 3% de la vitesse S est ajoutée jusqu'à 1160 km, (b) une augmentation de 5% jusqu'à 1660 km. L'information concernant la profondeur vraie de la discontinuité est atténuée par l'effet de la perturbation de vitesse.

La géométrie simple des *slabs* qu'on a considérés est représentée sur la figure 2.9. Une augmentation de la vitesse S est imposée à partir de 400 km de profondeur et jusqu'à une profondeur maximale de $(660 + H)$ km. Les anomalies de vitesse et de profondeur ont la même largeur L et on a ajouté une élévation supplémentaire de la discontinuité à 400 km de même amplitude que la dépression de la «660». Le *slab* traverse l'interface des 660 km à 70° de la source et pénètre dans le manteau inférieur avec un angle de pendage de 30° . Les temps d'arrivée sont obtenus à nouveau par corrélation avec la phase SS de référence. Cela justifie le fait que la structure du *slab* n'est pas considérée pour les profondeurs inférieures à 400 km puisque les précurseurs SS ne sont pas sensibles à la région à l'aplomb du point de rebond SS . La figure 2.13 montre les profondeurs apparentes obtenues pour deux anomalies positives de vitesse : (a) une augmentation de 3% jusqu'à 1160 km ($H = 500$ km) et (b) une augmentation de 5% jusqu'à 1660 km ($H = 1000$ km). Les profondeurs apparentes obtenues dans le cas de la topographie seule sont également représentées et la largeur L vaut 400 km dans tous les cas.

Comme on l'attend, l'effet de la zone rapide dans le manteau inférieur est de déplacer la profondeur apparente de la «660» vers des plus grandes valeurs et d'augmenter ainsi la valeur de 8 km (resp. 6 km) trouvée quand une dépression seule de 50 km (resp. 30 km) était présente. La profondeur maximale déduite du modèle (a) est d'environ 15 km et le modèle (b) présente une profondeur apparente maximale de 25 km. On remarque immédiatement que les profondeurs apparentes dépendent exclusivement de la perturbation de vitesse et non pas de la vraie amplitude de la topographie. La différence des signatures des topographies n'est plus visible car (1) elle est complètement filtrée par la zone de Fresnel et (2) la différence de temps de trajet attendue pour des topographies distinctes est diminuée par la zone de vitesse plus élevée.

Des expériences menées avec des *slabs* moins larges ($L = 100$ km et $L = 200$ km) montrent le même comportement, *i. e.* une prédominance de l'effet de l'anomalie de vitesse sur celui de la topographie. Les profondeurs apparentes maximales trouvées dans ces cas sont de l'ordre de 4 km pour le modèle (a) et

6 km pour (b) si $L = 100$ km ; 6 km pour (a) et 12 km pour (b) si $L = 200$ km.

2.4 Conclusions

Dans ce chapitre, on a utilisé une théorie simplifiée de la propagation des ondes sismiques dans la Terre et on a développé une méthode numérique simple à mettre en oeuvre et peu coûteuse en termes de temps calcul et de mémoire. On a ainsi pu s'intéresser à la sensibilité aux caractéristiques du modèle de certaines phases sismiques pour lesquelles une prise en compte tridimensionnelle est nécessaire.

Les expériences numériques que l'on a présentées permettent de conclure que toute perturbation de profondeur à 660 km de largeur L comprise entre 100 et 2000 km affecte les temps d'arrivée de la phase $S660S$ sur une gamme de distances d'environ 2000 km. En utilisant une méthode d'optique géométrique pour relier les temps d'arrivée à la profondeur au point de rebond, on observe que :

1. Les élévations de la discontinuité sont correctement retrouvées pour $L \geq 1500$ km mais totalement biaisées pour $L < 1000$ km où la phase $S660S$ peut être fortement défocalisée.
2. Les dépressions de la «660» sont sous-estimées pour toute les longueurs d'onde inférieures à la taille de la zone de Fresnel, c'est-à-dire pour $L < 3000$ km.

On montre de plus qu'en présence d'un *slab* pénétrant dans le manteau inférieur, les temps d'arrivée des ondes longue-période $S660S$ apportent une information négligeable sur les déflexions à 660 km.

Pour pouvoir néanmoins utiliser de façon fiable l'information des ondes réfléchies sous les discontinuités du manteau, Neele and de Regt (1999) proposent une méthode d'inversion qui tient compte de la structure de leur zone de Fresnel. Leurs expériences, menées sur des données synthétiques, montrent qu'il est possible de retrouver les longueurs d'onde des perturbations de topographie mais pas leurs amplitudes. Aussi, en pratique ce sont d'autres types d'ondes qui sont privilégiées pour imager les discontinuités du manteau. On peut citer par exemple l'utilisation des réverbérations des ondes de volume dans le manteau (Revenaugh and Jordan 1991) et des ondes converties $P - SV$ sous les discontinuités (*e. g.* Vinnick 1977, Vinnick et al. 1997b).

Pour ce qui est de la méthode numérique présentée ici, il est clair que son extension à 3D en coordonnées sphériques est délicate. La première raison, que l'on a déjà évoquée, est liée à l'utilisation des coordonnées sphériques. À trois dimensions, il faut tout d'abord trouver une façon de s'affranchir du problème du centre de la sphère en plus du problème du pôle que l'on a évoqué plus haut. De plus, un réseau de points obtenus en parcourant les coordonnées sphériques à incrément constant devient fortement anisotrope. Si par exemple, on dupliquait la grille de la figure 2.1 en intervalles réguliers le long de la composante longitudinale, on obtiendrait des rapports de longueur de l'ordre de 10^4 entre l'équateur et le pôle. Il est clair que l'utilisation d'un schéma explicite en temps serait alors fortement déconseillée. Il faudrait alors examiner la possibilité d'introduire un schéma implicite en temps au risque d'augmenter de façon rédhibitoire le coût calcul de la méthode. Pour pouvoir néanmoins utiliser un schéma d'évolution explicite, une piste consiste à introduire des grilles non-conformes dans l'approximation spatiale tout en travaillant en coordonnées sphériques. Une autre solution est de définir un système de coordonnées curvilignes régulier capable de paver la boule. Si cette approche existe pour la sphère (Ronchi et al. 1996), un travail supplémentaire est nécessaire pour permettre l'extrapolation d'un tel maillage au centre de la boule.

On peut cependant s'interroger sur la pertinence d'engager un tel travail pour appliquer les méthodes de différences finies à la géométrie sphérique. En effet, ces méthodes présentent (1) des limitations intrinsèques pour le traitement des conditions de surface libre en géométrie déformée, et (2) des propriétés

de dispersion numérique qui imposent un nombre de points par longueur d'ondes qui devient pénalisant à 3D.

À la suite de ces remarques, on a choisi de s'orienter pour la suite de cette thèse vers la méthode des éléments spectraux dont l'application prometteuse aux équations de l'élastodynamique à 3D a été récemment démontrée (*e. g.* Komatitsch 1997).

2.A Annexe : Diagramme de radiation de la source

La source toroïdale f que l'on a implémentée est caractérisée par ses composantes $f^r = 0$, $f^\theta = 0$ et $f^\varphi = f^\varphi(r, \theta, t)$. Le choix des grilles en quinconce ayant été effectué (dicté par l'implémentation de la condition limite à l'axe), on impose une force ponctuelle localisée sur la ligne-coordonnée $\{\theta = \Delta\theta\}$ où le déplacement u^φ est calculé (voir fig. 2.1).

Compte tenu de la symétrie autour de l'axe des pôles, on obtient une source 3-D constituée d'un petit anneau de sources ponctuelles.

Pour les calculs de radiation, on assimile la source toroïdale à une superposition de dipôles (*i. e.* simples couples) distribués sur l'anneau, comme cela est illustré par la figure 2.14.

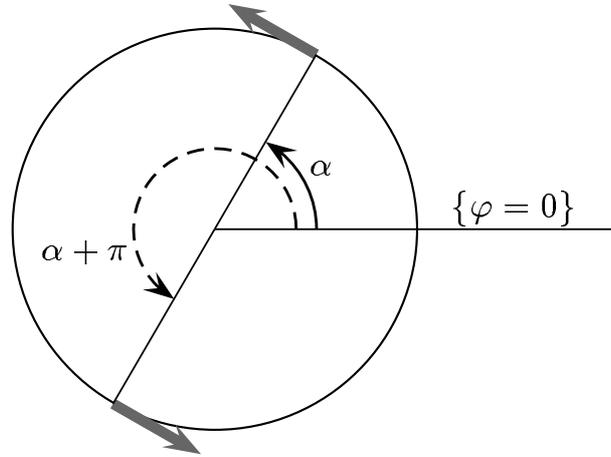


FIG. 2.14 – Vue de dessus de la source toroïdale utilisée dans la méthode de différences finies. Le plan $\{\varphi = 0\}$ correspond au plan où sont effectués les calculs. La source est constituée d'une superposition de couples de forces dont on a dessiné un représentant (ce dipôle est noté d_α dans le texte).

Chaque dipôle d_α crée un champ de déplacement u_α^φ et le champ total propagé dans le domaine de calcul $\{\varphi = 0\}$ s'écrit dans la base normée :

$$\hat{u}^\varphi(r, \theta, t) = \int_0^\pi d\alpha u_\alpha^\varphi(r, \theta, t). \quad (2.5)$$

En milieu homogène, on peut écrire une approximation en champ lointain pour le champ de vecteur \mathbf{u}_α (voir Aki and Richards 1980, p. 81) :

$$\mathbf{u}_\alpha(\Delta, t) \approx \frac{1}{4\pi\rho v_s^3} \mathbf{A}_\alpha \frac{1}{\Delta} \dot{f} \left(t - \frac{\Delta}{v_s} \right), \quad (2.6)$$

où Δ est la distance à la source et où \mathbf{A}_α est le diagramme de radiation SH dû au dipôle d_α .

En utilisant les notations de (Aki and Richards 1980, p.80), on a :

$$\mathbf{A}_\alpha = \cos^2 \gamma_\alpha \cos \phi_\alpha \hat{\gamma}_\alpha - \cos \gamma_\alpha \sin \phi_\alpha \hat{\phi}_\alpha, \quad (2.7)$$

où $(\gamma_\alpha, \phi_\alpha)$ sont les coordonnées sphériques centrées sur le point source.

Pour obtenir la contribution du déplacement SH créé par d_α dans le domaine de calcul, on projette l'expression (2.7) le long du vecteur de base \vec{e}_φ . On obtient :

$$A_\alpha^{SH} = \cos^2 \alpha \cos \gamma, \quad (2.8)$$

où γ est l'angle d'incidence défini dans le domaine de calcul.

Une approximation en champ lointain du déplacement transverse s'obtient en sommant les contributions précédentes :

$$\hat{u}^\varphi(\Delta, t) \approx \frac{1}{4\pi\rho v_s^3} \left(\int_0^\pi d\alpha A_\alpha^{SH} \right) \frac{1}{\Delta} \dot{f} \left(t - \frac{\Delta}{v_s} \right), \quad (2.9)$$

c'est-à-dire, en utilisant (2.8) :

$$\hat{u}^\varphi(\Delta, t) \approx \frac{1}{8\rho v_s^3} \cos \gamma \frac{1}{\Delta} \dot{f} \left(t - \frac{\Delta}{v_s} \right). \quad (2.10)$$

De cette expression, on peut déduire plusieurs remarques intéressantes.

- ▷ La dépendance en temps de la source toroïdale est la dérivée $\dot{f}(t)$ de la fonction source $f(t)$ que l'on avait implémentée à chaque point de l'anneau de sources.
- ▷ Le diagramme de radiation obtenu en (2.10) contient une dépendance en $\cos \gamma$ c'est-à-dire en $\sin i$ où i est l'angle d'incidence mesuré par rapport à la verticale (une incidence nulle correspondant à un rai quittant la source à la verticale). On obtient donc le même diagramme de radiation qu'avec une source sismique de type décrochement pur, ou faille normale ou encore faille inverse (voir Aki and Richards 1980, p. 115). La figure 2.2 représente les diagrammes tridimensionnels de la source toroïdale et d'une source en décrochement pur. Conformément à l'hypothèse d'axisymétrie, la dépendance longitudinale des deux diagrammes est différente, cependant dans toute section verticale ne correspondant pas à un plan nodal les diagrammes coïncident.
- ▷ Les coordonnées sphériques introduites dans ce calcul sont reliées aux coordonnées classiques (r, θ, φ) par l'identité :

$$r \sin \theta = \Delta \cos \gamma, \quad (2.11)$$

qui vient du fait que la source toroïdale est située à l'axe. En combinant cette propriété avec la définition de la composante normée :

$$\hat{u}^\varphi = r \sin \theta u^\varphi, \quad (2.12)$$

on en déduit une approximation en champ lointain pour la composante naturelle u^φ :

$$u^\varphi(\Delta, t) \approx \frac{1}{4\pi\rho v_s^3} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\Delta^2} \dot{f} \left(t - \frac{\Delta}{v_s} \right). \quad (2.13)$$

On voit donc que dans les coordonnées sphériques naturelles (les coordonnées de travail), la source est isotrope. Ce résultat est tout d'abord consistant avec la remarque que l'on avait faite au moment de calculer une condition limite à l'axe des pôles : on ne peut pas imposer de condition limite sur la composante naturelle du type $u^\varphi = \text{cste}$. Dans un deuxième temps, ce résultat permet de vérifier de façon indirecte la validité de l'approximation (2.10). Il suffit en effet de s'assurer que si l'on place une série de récepteurs à une distance Δ de la source et que l'on enregistre la composante u^φ , on trouve le même signal. La vérification de la dépendance suivant la distance se fait suivant le même protocole, en enregistrant l'amplitude propagée à deux distances Δ_1 et Δ_2 .

2.B Annexe : Condition limite à l'axe de symétrie

On crée un déplacement SH en géométrie sphérique en n'excitant que la composante longitudinale, c'est-à-dire que l'on impose un mouvement de rotation autour de l'axe des pôles. À partir de cette

définition on comprend que sur l'axe (qui est une frontière du domaine de calcul), on doit imposer la condition :

$$\left(\vec{u}^\varphi \rightarrow \vec{0} \right)_{\sin \theta \rightarrow 0}. \quad (2.14)$$

Cependant, cette condition n'est pas consistante avec le choix du système de coordonnées. Dans la base sphérique naturelle par exemple, le vecteur déplacement s'écrit :

$$\vec{u}^\varphi = u^\varphi \vec{e}_\varphi, \quad (2.15)$$

où le vecteur de base \vec{e}_φ vérifie :

$$\|\vec{e}_\varphi\| = r \sin \theta. \quad (2.16)$$

La norme de \vec{e}_φ tend donc vers zéro quand on se rapproche de l'axe ($\sin \theta = 0$). Ainsi, toute condition limite à l'axe du type $u^\varphi = \text{cste}$ suffit à satisfaire (2.14), ce qui revient à dire qu'aucune condition limite de ce type n'est justifiée.

Cette singularité n'est pas levée par une simple normalisation de la base de travail ; dans la base normée, on a par exemple :

$$\|\vec{e}_\varphi\| = 1, \quad \vec{u}^\varphi = \hat{u}^\varphi \vec{e}_\varphi, \quad \text{donc } \hat{u}^\varphi = r \sin \theta u^\varphi. \quad (2.17)$$

La condition limite (2.14) est ici équivalente à $\hat{u}^\varphi = 0$, mais on remarque que l'équation du mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 \hat{u}^\varphi}{\partial t^2} = \hat{f}^\varphi + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu r^4 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \hat{u}^\varphi \right) \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mu \sin^3 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \hat{u}^\varphi \right) \right]. \quad (2.18)$$

Le terme que l'on doit évaluer à l'axe est donc :

$$\frac{1}{\sin \theta} \hat{u}^\varphi = r u^\varphi, \quad (2.19)$$

ce qui n'est toujours pas possible puisque u^φ n'est pas défini.

Le problème est résolu dans le cas *SH* en choisissant les grilles en quinconce de façon à calculer la composante σ_θ^φ du tenseur des contraintes sur l'axe des pôles (voir la figure 2.1). En effet, les équations du mouvement (2.1) indiquent que la quantité qui apparaît naturellement et que l'on doit évaluer au pôle est $(\sin^3 \theta \sigma_\theta^\varphi)$. Un moyen d'imposer (2.14) de façon consistante est alors d'imposer :

$$(\sin^3 \theta \sigma_\theta^\varphi)_{\sin \theta = 0} = 0, \quad (2.20)$$

comme cela est démontré dans la preuve.

Preuve

On se ramène à évaluer des quantités exprimées dans la base normée. D'après la définition des composantes du tenseur des contraintes, on a :

$$\sigma_\theta^\varphi = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\hat{u}^\varphi}{\sin \theta} \right), \quad (2.21)$$

soit en développant :

$$\sin^3 \theta \sigma_\theta^\varphi = \frac{\mu}{r} \left(\sin^2 \theta \frac{\partial \hat{u}^\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \hat{u}^\varphi \right). \quad (2.22)$$

D'après la condition (2.14), on sait que $\hat{u}^\varphi \rightarrow 0$, quand $\sin \theta \rightarrow 0$, donc le deuxième terme tend vers zéro au voisinage du pôle.

Pour le premier terme, on utilise $\sin \theta \sim \theta$ et on suppose suffisamment de régularité sur \hat{u}^φ :

$$\hat{u}^\varphi(0) = \hat{u}^\varphi(\theta) - \theta \frac{\partial \hat{u}^\varphi}{\partial \theta}(\theta) + \theta \varepsilon(\theta) \quad \text{avec } \varepsilon(\theta) \rightarrow 0. \quad (2.23)$$

La condition (2.14) permet de conclure que :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\theta \frac{\partial \hat{u}^\varphi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (2.24)$$

Le même raisonnement est valable quand $\theta \rightarrow \pi$, donc on a la condition limite sur l'axe des pôles :

$$(\sin^3 \theta \sigma_\theta^\varphi)_{\sin \theta=0} = 0. \quad (2.25)$$

Chapitre 3

Méthode des éléments spectraux appliquée aux équations de l'élasto-gravité dans un domaine sphérique solide

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente en détail la construction d'une méthode d'éléments spectraux permettant la discrétisation des équations de l'élasto-gravité dans le cas d'un milieu solide et pour une géométrie sphérique. Les hypothèses physiques sont celles que l'on a retenues dans le chapitre 1, à savoir un milieu élastique isotrope dans un état initial d'équilibre hydrostatique sans rotation et pour lequel on considère les effets de la gravité dans l'approximation de Cowling. La méthode proposée ici utilise un maillage sphérique formé d'hexaèdres dans lequel la propriété de conformité géométrique est relaxée. Cela signifie que certaines régions de la sphère possèdent leur propre maillage en éléments et que ces maillages ne coïncident pas sur les interfaces qui leur sont communes. Dans la suite on désignera ces interfaces particulières sous le nom d'interfaces «non-conformes» (au sens géométrique).

Cette approche peut être située dans le cadre plus général des méthodes d'éléments finis adaptées à une décomposition du domaine de calcul en sous-domaines. Il est en effet naturel d'essayer d'adapter localement la discrétisation numérique à la particularité de la solution recherchée. En mécanique des fluides par exemple, certains écoulements présentent localement une complexité à petite échelle que l'on cherchera à modéliser sans avoir à payer le prix d'une résolution très fine sur tout le domaine. Pour pouvoir prendre en compte la particularité du maillage dans l'étape de discrétisation numérique, il faut définir un raccord au niveau des interfaces non-conformes qui soit consistant avec les conditions aux limites imposées par la physique du problème, *i. e.* dans notre cas la continuité des déplacements et des tractions. De plus, il est souhaitable que la mise en oeuvre du raccord ne détériore pas l'ordre d'approximation globale de la méthode.

Pour définir une condition de raccord entre les grilles non-conformes, on a choisi d'adapter la méthode des éléments avec joints (*mortar element method* en anglais) introduite par Bernardi, Maday, and Patera. La méthode des joints est une approche très générale qui permet, pour un problème donné, de raccorder les solutions obtenues sur chaque sous-domaine par des approximations numériques différentes. Cela permet par exemple de coupler entre elles des méthodes d'éléments finis basées sur des bases polynômiales et des maillages différents ou encore de construire une méthode d'éléments finis où le degré polynômial est propre à chaque sous-domaine.

Dans le cadre du travail présenté ici, on s'est limité à utiliser la méthode des joints dans le cas d'une non-conformité géométrique. Pour les équations de l'élastodynamique, la méthode des joints repose sur une formulation variationnelle sur l'ensemble des sous-domaines dans laquelle les conditions de continuité du déplacement sont relaxées sur les interfaces non-conformes. L'espace discret des déplacements est construit sur chacun des sous-domaines, et il n'appartient pas *a priori* à l'espace continu de la formulation de départ. La discrétisation est qualifiée de *non-conforme* (au sens fonctionnel) car elle n'est pas consistante avec la formulation variationnelle du problème continu. Malgré cela, il s'avère que l'erreur de consistance introduite par la méthode des joints est du même ordre que l'erreur d'une méthode conforme et on conserve globalement une convergence spectrale.

Plutôt que d'inclure les conditions de continuité dans la définition des déplacements, on a choisi de les transformer en contraintes du problème et de leur associer des multiplicateurs de Lagrange, qui sont physiquement homogènes à des tractions sur les interfaces non-conformes. Dans cette formulation, le choix de la méthode des joints impose une discrétisation de l'espace des multiplicateurs de Lagrange qui conduit à un problème discret qui est bien posé (Ben Belgacem 1999). En pratique, le degré polynômial utilisé pour la discrétisation des tractions doit être relaxé sur les bords des interfaces non-conformes. Dans le cas que l'on considère ici, ces interfaces sont des sphères, donc la notion de «bords» disparaît et cela conduit à une discrétisation des déplacements et des tractions qui utilise le même degré polynômial. On peut donc imposer exactement la continuité des déplacements à travers les interfaces non-conformes ¹.

Dans la suite, on commence par rappeler le principe de la méthode des éléments spectraux puis on présente la construction d'un pavage d'une boule en éléments hexaédriques basé sur l'extrapolation du maillage de la «sphère cubique» (Ronchi et al. 1996). On détaille ensuite les différentes étapes de l'approximation spatiale par éléments spectraux qui permettent d'aboutir au système algébrique à satisfaire au cours du temps. Dans la formulation obtenue, la résolution correspondant aux interfaces non-conformes est localisée en espace et ne change pas la propriété diagonale de la matrice de masse. On présente alors un schéma aux différences finies permettant l'évolution en temps et on illustre le caractère parallèle de l'algorithme obtenu en présentant son implémentation sur un réseau de processeurs.

3.2 Principe de la méthode

Le principe des méthodes classiques d'éléments finis est de construire une approximation de Galerkin du problème variationnel associé aux équations du mouvement. On cherche ainsi à approcher la solution de la formulation variationnelle de départ en construisant un problème variationnel discret posé en dimension finie. Dans ce chapitre, on détaille la construction du problème approché par la méthode des éléments spectraux correspondant à la formulation variationnelle mixte des équations de la gravito-élastodynamique (1.113) et (1.114).

La première étape, appelée «triangulation» dans le langage des éléments finis, consiste à décomposer le domaine physique auquel on s'intéresse en éléments de géométrie simple ². On définit ensuite des espaces de polynômes sur chacun des éléments qui permettront de construire des espaces de dimension finie \mathcal{V}_h^* et \mathcal{M}_h pour approcher respectivement les espaces \mathcal{V}^* et \mathcal{M} . La solution numérique des équations du mouvement sera donc entièrement définie par ses valeurs sur une grille de points, que l'on appelle les points de collocation.

1. Pour préciser la terminologie, on utilise une méthode fonctionnellement conforme adaptée à un maillage géométriquement non-conforme.

2. Le terme de triangulation désigne naturellement un maillage en triangles à 2D, mais on l'utilisera au sens large pour des décompositions en quadrangles à 2D ou en hexaèdres à 3D.

De façon formelle, on caractérise la discrétisation du problème (décomposition spatiale et approximation fonctionnelle) par un paramètre h . Ce paramètre tient compte par exemple du nombre d'éléments utilisés dans la phase de maillage, de leur taille, du degré polynômial utilisé sur les éléments, etc.

L'approximation de Galerkin du problème variationnel de départ consiste alors à chercher $\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h^*$ et $\boldsymbol{\lambda}_h \in \mathcal{M}_h$ comme les solutions du problème variationnel discret :

$$\left(\rho_h \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial t^2}, \mathbf{v}_h \right)_h + a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) = (\mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h)_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h^*, \quad (3.1)$$

$$b_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\mu}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\mu}_h \in \mathcal{M}_h. \quad (3.2)$$

Dans cette écriture $(\cdot, \cdot)_h$ désigne un produit scalaire approché qui nécessitera une règle d'intégration numérique (aussi appelée quadrature numérique), a_h et b_h sont des formes bilinéaires qui approchent a et b , enfin ρ_h et \mathbf{f}_h sont des approximations des données ρ et \mathbf{f} .

Comme on le précisera dans la suite, la méthode des éléments spectraux se distingue des méthodes d'éléments finis d'une part par le choix de la règle d'intégration et d'autre part par la construction des bases des espaces \mathcal{V}_h^* et \mathcal{M}_h . Une fois que ces choix seront explicités, on donnera l'expression des formes a_h et b_h ainsi que des approximations ρ_h et \mathbf{f}_h .

Après avoir établi ces règles de calcul, on pourra développer le problème discret (3.1) et (3.2) sur les bases des espaces \mathcal{V}_h^* et \mathcal{M}_h . On obtiendra alors un système algébrique mettant en jeu des vecteurs contenant les valeurs du déplacement, de ses dérivées spatiales, et de l'accélération aux différents points de la grille. Ce système d'équations différentielles ordinaires sera alors traité par un schéma aux différences finies permettant l'extrapolation en temps.

3.3 Maillage hexaédrique de la Terre

La première étape de la discrétisation consiste donc à partager le domaine de calcul en éléments de géométrie simple. Dans la méthode des éléments spectraux, ces éléments doivent être quadrangulaires à 2D et hexaédriques à 3D. Le problème auquel on est confronté est donc de définir un pavage de la boule à l'aide d'hexaèdres déformés.

Le point de départ de notre construction est de définir un maillage de la sphère en quadrangles en utilisant la méthode dite de la « sphère cubique » (Ronchi et al. 1996). Cette méthode a été introduite pour permettre la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles sur la sphère, notamment dans des domaines tels que la météorologie ou la dynamique des océans. Le principe de la sphère cubique est de décomposer la sphère en un système de cartes locales et de construire un système de coordonnées libre de toute singularité qui permet l'utilisation des différences finies. Dans la suite, on ne retiendra dans la méthode de la sphère cubique que la phase de maillage et on l'extrapolera pour construire un maillage tridimensionnel.

Le maillage final de la Terre devra respecter un certain nombre de contraintes. Tout d'abord, les interfaces principales du modèle physique doivent être des surfaces du maillage. Cette propriété est importante pour :

- ▷ implémenter de façon réaliste certaines discontinuités des paramètres élastiques qui sont connues pour être abruptes dans la Terre (par exemple la limite entre manteau supérieur et inférieur),
- ▷ permettre une modélisation précise de certaines ondes sensibles aux propriétés des interfaces (ondes de surface, ondes de Stoneley ou ondes diffractées à la frontière entre noyau et manteau).

Enfin, le maillage doit être le plus régulier possible. Par régularité on entend ici que chacun des éléments du maillage ne soit pas trop déformé et que l'échantillonnage des longueurs d'ondes propagées soit relativement uniforme sur l'ensemble du domaine de calcul.

3.3.1 Maillage de la surface d'une sphère

Le principe du maillage de la sphère cubique est de partager la surface d'une boule en six domaines et de mettre en relation chacun de ces domaines avec la face d'un cube. Cette correspondance est en fait une projection sur la sphère d'un cube inscrit dans la boule. Après avoir construit cette transformation (voir l'annexe 3.A), on peut définir un maillage sur la surface du cube et le transporter pour obtenir un maillage sur la sphère.

Sur la figure 3.1, on a représenté une face de la sphère cubique, c'est-à-dire le maillage d'une face du cube transporté sur la sphère. On constate que toutes les lignes du maillage sont des géodésiques (*i. e.* des grands cercles), contrairement à ce qu'on aurait obtenu avec un système de coordonnées sphériques classique. De plus, le maillage est faiblement déformé puisque les rapports de forme entre les différents quadrangles qui s'appuient sur la sphère varient au plus de 30%.

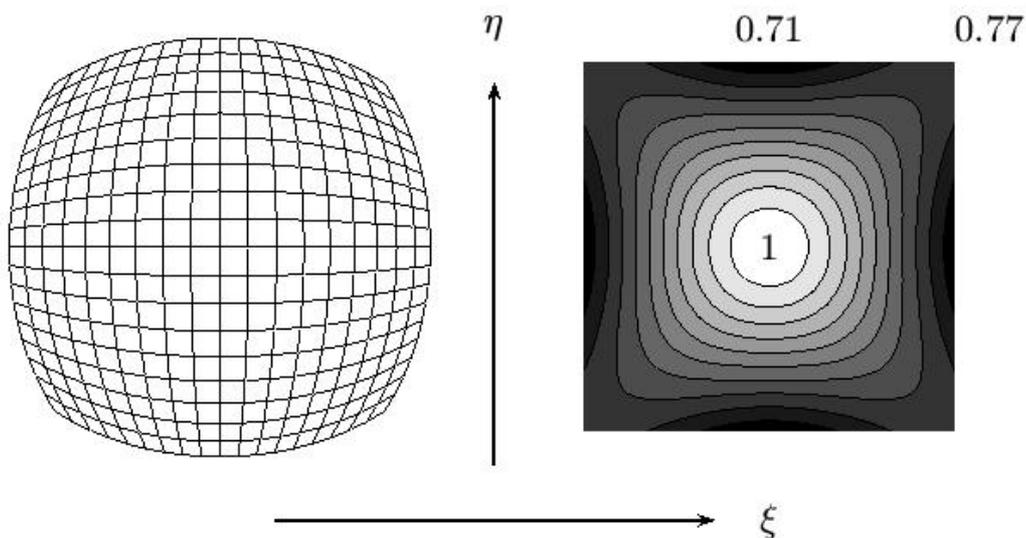


FIG. 3.1 – Une face de la sphère cubique et les rapports de surface des quadrangles du maillage. On a pris comme référence l'élément de surface qui se trouve au centre de la figure. Les coordonnées curvilignes ξ et η sont définies sur le carré unité $[-1, 1]^2$.

3.3.2 Construction du maillage 3D

À partir du maillage de la sphère, il est immédiat de construire un maillage 3D pour remplir une coquille sphérique. Par exemple, le maillage 3D du manteau terrestre est obtenu en reliant radialement les points des 2 sphères cubiques qui s'appuient respectivement sur la surface terrestre et sur l'interface noyau-manteau, comme cela est illustré par la figure 3.2. La transformation analytique permettant le pavage d'une coquille sphérique est détaillée dans l'annexe 3.A. La métrique associée à la transformation n'a qu'un seul terme non-diagonal qui rappelle que les lignes du maillage sur la sphère ne sont pas partout

perpendiculaires. Un maillage réaliste devra également tenir compte des interfaces internes du manteau, par exemple de la discontinuité de Mohorovicic (Moho), qui sépare la croûte du manteau, et des discontinuités qui délimitent la zone de transition. Il faudra donc intercaler autant de sphères cubiques que nécessaire de façon à ce que les interfaces physiques du modèle soient des surfaces du maillage.

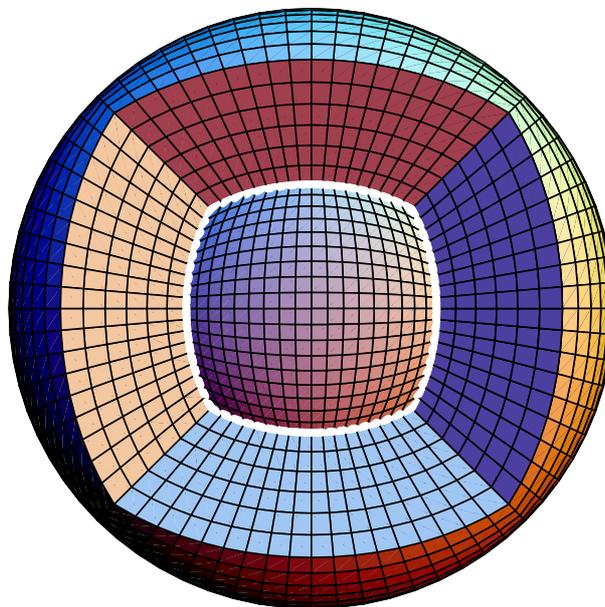


FIG. 3.2 – *Vue du maillage 3D contenu entre 2 sphères cubiques concentriques. Une des 6 régions du maillage a été enlevée pour permettre de voir à l'intérieur. La grande sphère correspond à la surface de la Terre et la petite à l'interface noyau-manteau.*

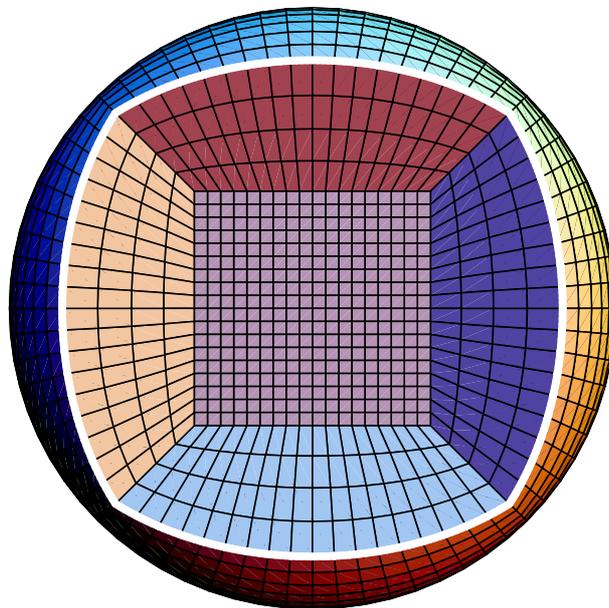


FIG. 3.3 – Vue du maillage 3D contenu entre une sphère cubique et un cube inscrit. Une des 6 régions du maillage a été enlevée pour permettre de voir à l'intérieur. Pour le pavage de la Terre, la grande sphère correspondra à la surface de la graine.

Le pavage complet de la Terre est construit par couronnes, à partir de la surface jusqu'à la graine et il faut alors convenir d'une manière d'«achever» le maillage en profondeur.

On pourrait penser qu'il suffit pour cela de transporter le maillage 3D du cube unité sur la graine, mais cela engendrerait des éléments extrêmement déformés aux coins du cube. Cette stratégie produit en effet des hexaèdres ayant sept sommets (sur huit) sur la surface de la graine, ce qui ne manquerait pas de poser des problèmes numériques. Une façon de contourner le problème est d'achever le maillage en profondeur par un cube non déformé, comme cela est illustré par la figure 3.3. La définition analytique de cette transformation est détaillée dans l'annexe 3.A. La métrique définie par ce changement de variables a tous ses termes *a priori* non nuls et le maillage obtenu sur la surface du cube central est uniforme dans l'espace cartésien.

3.3.3 Adaptation conforme à un modèle de Terre moyen

Une fois explicité le principe de construction du maillage, on cherche à l'adapter à un modèle de Terre moyen. On a choisi ici le modèle continental IASPEI91 dont on avait utilisé la structure mantellique au chapitre 2. La figure 3.5 rappelle la variation avec la profondeur des vitesses P et S du modèle.

En anticipant sur la méthode des éléments spectraux, on se propose d'estimer le nombre d'éléments nécessaires pour propager des ondes jusqu'à une période minimale de 20 secondes. Pour réaliser cette estimation, on impose que chacun des éléments du maillage contienne au plus 2 longueurs d'onde minimale. Ce critère *ad hoc* retenu par Komatitsch (1997) pour un ordre polynômial égal à 8 correspond à un échantillonnage d'au moins 5 points de grille par longueur d'onde propagée.

La plus petite longueur d'onde du modèle IASPEI91 correspond aux ondes de cisaillement dans la croûte ($V_S \simeq 3.5 \text{ km. s}^{-1}$). Il faut remarquer ici que l'on ne dispose que de l'information sur les ondes de volume. Dans certains problèmes d'élastodynamique, les vitesses de groupe des ondes de surface (Rayleigh et Love) sont inférieures aux vitesses des ondes de volume et imposent donc les longueurs d'onde les plus faibles (*e. g.* Landau and Lifchitz 1953, Pilant 1979). Dans le cas de la Terre et pour le domaine de fréquence utilisé en sismologie globale, les vitesses de groupe des ondes de Rayleigh et de Love sont supérieures à la vitesse S dans la croûte³. On n'en tiendra donc pas compte dans cette analyse mais on reviendra à ce problème au moment de tester la méthode des éléments spectraux dans une boule homogène.

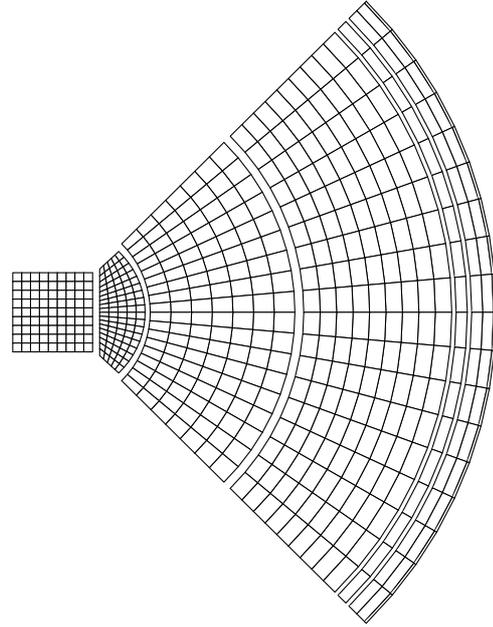
Après avoir fixé la discrétisation en surface, chacune des interfaces sphériques du modèle est maillée avec le même nombre de quadrangles et il en va de même pour les faces du cube central. La figure 3.4 représente une coupe en profondeur du maillage 3D obtenu pour propager des ondes jusqu'à une période de 20 secondes. Le maillage en profondeur est construit avec des incréments non constants, en respectant un rapport d'aspect inférieur à 1/5 entre les pas de grille angulaire et radial. Les différentes régions du globe apparaissent sur la figure : la croûte, le manteau supérieur où l'on a isolé la zone de transition, le manteau inférieur, le noyau liquide et l'interface noyau-graine à partir de laquelle on maille vers le cube. Le nombre total d'éléments utilisés est d'environ 1200000, ce qui correspond à un nombre de points de l'ordre du milliard !

Au delà de ces chiffres bruts, il est intéressant d'estimer la variation de l'échantillonnage des différentes longueurs d'ondes présentes dans le modèle. Pour cela, on raisonne sur la longueur latérale moyenne des éléments du maillage. À la surface, la taille moyenne des éléments, dl , est égale à deux longueurs d'onde S , c'est-à-dire :

$$dl(R_1) = R_1 d\xi = 2\lambda^S(R_1) \simeq 7T_{\min}, \quad (3.3)$$

3. Voir le cas du modèle PREM dans (Dahlen and Tromp 1998), p. 424 et p. 427.

FIG. 3.4 – Coupe schématique d'un maillage 3D permettant de propager des ondes de période supérieure à 20 secondes. Le pas de grille en profondeur est à l'échelle 1:1 et le pas angulaire est à l'échelle 1:4.



où R_1 est le rayon de la Terre, et T_{\min} est la période minimale à propager. $dl(R_1)$ est donc la longueur de l'arc associé à l'angle moyen :

$$d\xi \simeq \frac{7T_{\min}}{R_1}. \quad (3.4)$$

De la surface à la graine, la taille du pas de grille latéral moyen $dl(r)$ varie linéairement avec le rayon :

$$dl(r) = \frac{r}{R_1} dl(R_1). \quad (3.5)$$

De plus, la longueur d'un élément dans la graine est :

$$dl_0 = \frac{4}{\pi} R_0 d\xi \simeq \frac{28}{\pi} \frac{R_0}{R_1} T_{\min},$$

où R_0 est la demi-longueur de l'arête du cube.

À l'aide de ces estimations, on peut représenter la variation en profondeur du nombre d'éléments spectraux par longueur d'onde (voir figure 3.5) dans le modèle IASPEI91. On constate que les longueurs d'ondes sont nettement sur-échantillonnées dans le volume. Ce phénomène est dû à la fois à un effet géométrique et à la particularité du modèle. L'effet géométrique intervient lorsque l'on relie radialement les différentes sphères cubiques du modèle et provoque une diminution des tailles des éléments proportionnellement au rayon. De plus, les vitesses sismiques dans la Terre augmentent avec la profondeur et il en va de même des longueurs d'ondes.

3.3.4 Construction d'un maillage non-conforme

L'échantillonnage irrégulier des longueurs d'onde du modèle ne satisfait pas aux contraintes que l'on avait fixées pour la construction d'un maillage adapté à la Terre. En effet, un tel maillage provoquerait un surcoût numérique qui serait pénalisant pour deux raisons. En premier lieu, il impliquerait un encombrement en mémoire et un effort de calcul inutiles dans les parties sur-échantillonnées. Ensuite, dans une méthode numérique discrétisant les équations du mouvement à l'aide d'un schéma explicite en temps, ce raffinement du maillage imposera le choix d'un pas de temps ridiculement faible pour assurer la stabilité du

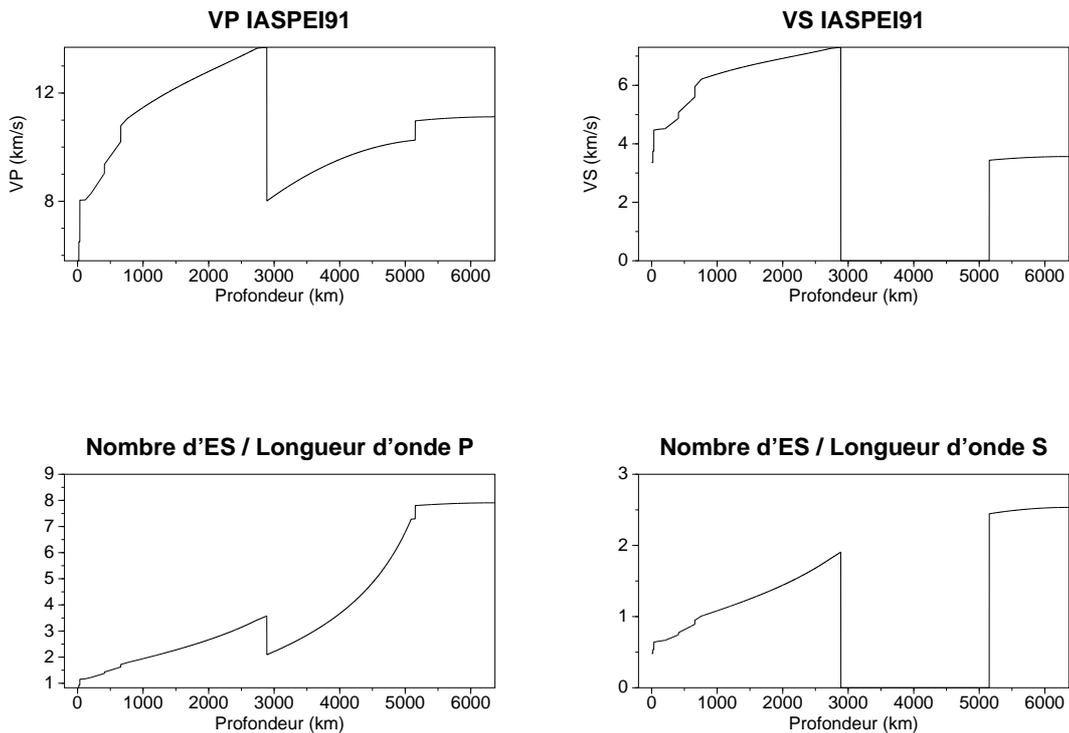


FIG. 3.5 – Vitesses sismiques dans le modèle IASPEI91 et aperçu de l'échantillonnage en profondeur lorsque l'on impose 2 longueurs d'onde S par élément en surface. On remarque que le nombre d'éléments par longueur d'onde est doublé à 660 km et quadruplé à l'interface noyau-manteau.

schéma. La possibilité de déraffiner le maillage 3D en profondeur devient donc une condition nécessaire de faisabilité de la méthode.

On pourrait envisager un déraffinement du maillage qui préserve la conformité géométrique. Ainsi sur la figure 3.6, on a représenté le déraffinement d'un bloc d'un facteur quatre en Z qui s'effectue séquentiellement suivant les directions X et Y de l'espace (d'après Komatitsch and Tromp 1999). Cette stratégie ne s'applique pas directement à la topologie de la sphère cubique, et il faut opérer trois étapes pour pouvoir effectuer un déraffinement d'un facteur deux. Bien que cette approche ait l'avantage de sa simplicité, on a préféré introduire la non-conformité pour pouvoir définir un déraffinement localisé (plutôt qu'une zone de transition) entre deux maillages quelconques. Avant de procéder, on remarque (ce qui est complètement fortuit) que, d'après la figure 3.5, un maillage conforme apparaît **deux** fois trop fin dans le manteau inférieur et **quatre** fois trop fin dans le noyau. Ainsi, il s'avère qu'une succession de déraffinements d'un facteur deux sera suffisante pour assurer un échantillonnage régulier des longueurs d'ondes du modèle.

La figure 3.7 représente la coupe verticale d'un maillage offrant deux déraffinements successifs, l'un à 660 km et l'autre à la CMB. La taille de maille obtenue dans la graine est à peu près égale au pas latéral en surface. Pour fixer les idées, un maillage déraffiné deux fois et suffisamment fin pour propager des ondes jusqu'à une période de 20 secondes contiendra environ 225000 éléments (soit 5 fois moins que pour un maillage conforme). De plus, un facteur quatre en temps sera obtenu en augmentant la taille du pas de temps. En effet, le choix du pas de temps sera conditionné par le rapport entre la taille de maille et la vitesse des ondes P , et ce rapport sera minimal dans le noyau externe.

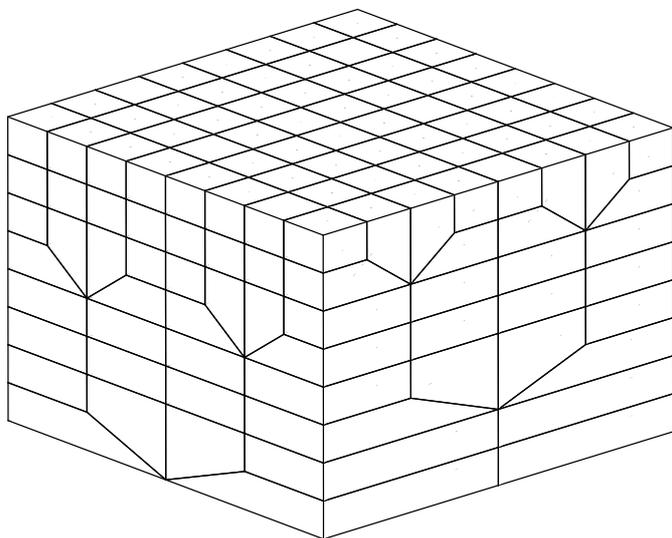
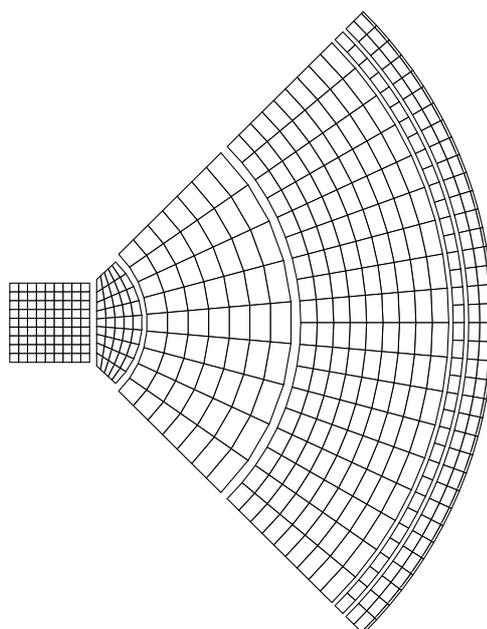


FIG. 3.6 – Déraffinement conforme progressif d'un bloc d'éléments hexaédriques. Deux déraffinements sont utilisés successivement dans les directions horizontales.

FIG. 3.7 – Coupe schématique du maillage obtenu en divisant par deux le nombre d'éléments à partir de la discontinuité des 660 km puis à nouveau à partir de la CMB. L'échelle radiale est 1:1 et l'échelle latérale est 1:2.



3.4 Discrétisation des équations du mouvement dans un milieu solide

On considère ici un milieu solide, on a donc en reprenant les notations du premier chapitre :

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a^S(\mathbf{v}^S, \mathbf{w}^S) \quad \text{pour } (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathcal{V}^* \times \mathcal{V}^*, \quad (3.6)$$

$$b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = b^S(\mathbf{v}^S, \boldsymbol{\mu}^{SS}) \quad \text{pour } (\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{V}^* \times \mathcal{M}. \quad (3.7)$$

On souhaite construire à chaque instant $t \in [0, T]$ un couple $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ qui soit une approximation de la solution $(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}_t)$ du problème variationnel (1.113, 1.114) dans lequel les formes bilinéaires a et b sont définies par (3.6) et (3.7). Ainsi qu'on l'a rappelé précédemment, le couple $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ est obtenu en résolvant un problème approché en dimension finie sous la forme (3.1) et (3.2).

3.4.1 Construction des espaces discrets

À l'issue de la phase de maillage, on a défini une triangulation τ_κ de chaque sous-domaine solide Ω_κ^S en n_κ éléments hexaédriques :

$$\tau_\kappa = (\tau_\kappa^e)_{e=1, n_\kappa}, \quad \bar{\Omega}_\kappa^S = \bigcup_{e=1}^{n_\kappa} \bar{\tau}_\kappa^e, \quad (3.8)$$

où chacun des éléments τ_κ^e est obtenu par une transformation régulière du cube de référence⁴ :

$$\tau_\kappa^e = \mathcal{F}_\kappa^e(\Lambda^3). \quad (3.9)$$

Cette transformation peut être connue analytiquement, comme on l'a vu dans le cas de la sphère, ou définie de façon paramétrique. Par exemple, on pourra utiliser une transformation paramétrique pour tenir compte de la topographie de la surface terrestre. Dans ce cas, on construira une transformation polynômiale entre le cube unité et les éléments qui touchent la surface. Il suffira pour cela de connaître la topographie en un certain nombre de points de contrôle sur les éléments⁵.

De la même façon, l'ensemble des interfaces solide-solide non-conformes Σ_{SS} hérite d'une triangulation en quadrangles. Si par exemple deux sous-domaines Ω_κ^S et $\Omega_{\kappa'}^S$ sont situés de part et d'autre d'une telle interface, on notera $\underline{\kappa}$ le couple d'indice (κ, κ') et $\Gamma_{\underline{\kappa}}$ la frontière commune des deux sous-domaines :

$$\Gamma_{\underline{\kappa}} = \partial\Omega_\kappa^S \cap \partial\Omega_{\kappa'}^S. \quad (3.10)$$

$\Gamma_{\underline{\kappa}}$ est une interface sphérique et l'ensemble des interfaces non-conformes est constitué d'un certain nombre (noté \underline{K}) de ces sphères :

$$\Sigma_{SS} = \bigcup_{\underline{\kappa}=1}^{\underline{K}} \Gamma_{\underline{\kappa}}. \quad (3.11)$$

Chaque interface non-conforme $\Gamma_{\underline{\kappa}}$ hérite naturellement de deux maillages bidimensionnels distincts, provenant de Ω_κ^S et $\Omega_{\kappa'}^S$ respectivement. Si l'on note $\tau_{\underline{\kappa}}$ la triangulation 3D la plus fine parmi τ_κ et $\tau_{\kappa'}$, alors $\tau_{\underline{\kappa}}$ induit une triangulation 2D sur $\Gamma_{\underline{\kappa}}$ que l'on notera $\mathbf{v}_{\underline{\kappa}}$:

$$\mathbf{v}_{\underline{\kappa}} = (\mathbf{v}_{\underline{\kappa}}^e)_{e=1, n_{\underline{\kappa}}}, \quad \bar{\Gamma}_{\underline{\kappa}} = \bigcup_{e=1}^{n_{\underline{\kappa}}} \bar{\mathbf{v}}_{\underline{\kappa}}^e, \quad (3.12)$$

4. Ici et dans la suite, on notera $\Lambda = [-1, 1]$.

5. On trouvera dans (Dhatt and Touzot 1984), (Gordon and Hall 1972) et (Komatitsch 1997) des maillages définis par transformation paramétrique.

et chacun des éléments 2D est l'image du carré de référence par une transformation régulière :

$$v_{\underline{\kappa}}^e = \mathcal{G}_{\underline{\kappa}}^e(\Lambda^2). \quad (3.13)$$

À l'aide de ces notations, on est en mesure de définir les espaces de dimension finie \mathcal{V}_h^* et \mathcal{M}_h . Ces deux espaces sont construits comme des ensembles de polynômes par morceaux, les morceaux étant les éléments des triangulations 2D et 3D définies précédemment. Plus précisément, on utilise des familles de polynômes sur les domaines de référence Λ^2 et Λ^3 où seront effectués les calculs :

$$\mathcal{V}_h^* = \left\{ \mathbf{v}_h \in \prod_{\kappa=1}^K (\mathcal{C}^0(\Omega_{\kappa}^S))^3 ; \mathbf{v}_h^{\kappa,e} \in (\mathbb{P}_N(\Lambda^3))^3, \forall e = 1 \dots n_{\kappa} \right\} \quad (3.14)$$

où :

$$\mathbf{v}_h^{\kappa,e} \doteq \mathbf{v}_{h,\kappa}|_{\tau_{\kappa}^e} \circ \mathcal{F}_{\kappa}^e, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{v}_{h,\kappa} \doteq \mathbf{v}_h|_{\Omega_{\kappa}^S}, \quad (3.16)$$

et

$$\mathcal{M}_h = \left\{ \boldsymbol{\mu}_h \in (\mathcal{C}^0(\Sigma_{SS}))^3 ; \boldsymbol{\mu}_h^{\kappa,e} \in (\mathbb{P}_N(\Lambda^2))^3, \forall \underline{\kappa} = 1 \dots \underline{K}, \forall e = 1 \dots n_{\underline{\kappa}} \right\} \quad (3.17)$$

où :

$$\boldsymbol{\mu}_h^{\kappa,e} \doteq \boldsymbol{\mu}_{h,\underline{\kappa}}|_{v_{\underline{\kappa}}^e} \circ \mathcal{G}_{\underline{\kappa}}^e, \quad (3.18)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{h,\underline{\kappa}} \doteq \boldsymbol{\mu}_h|_{\Gamma_{\underline{\kappa}}}. \quad (3.19)$$

On peut remarquer que l'espace discret \mathcal{V}_h^* est formé de déplacements qui sont continus sur chacun des sous-domaines. En particulier, les conditions cinématiques de continuité à travers les éléments d'un même sous-domaine sont assurées explicitement. D'autre part, on a choisi de façon classique un espace \mathcal{M}_h de tractions globalement continues sur les interfaces sphériques non-conformes. De plus, les tractions sont définies comme des polynômes par morceaux et pas globalement comme ce serait le cas d'une méthode comme FETI (Farhat and Roux 1991).

Comme on l'a suggéré en introduction, le choix du degré polynomial utilisé pour approcher les tractions paraît un peu brutal. En effet, il faut qu'il existe une condition de compatibilité entre les espaces \mathcal{V}_h^* et \mathcal{M}_h pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution au problème de point-selle discret (3.1) et (3.2). Généralement, la compatibilité dépend de l'existence d'une condition «inf-sup» entre les espaces discrets (e. g. Brezzi and Fortin 1991). Pour les méthodes de joints formulées en multiplicateurs de Lagrange, cette condition est remplie (Ben Belgacem 1999), ce qui n'est pas le toujours le cas pour la méthode FETI (Lacour and Maday 1997). Pour justifier le choix du degré d'approximation des tractions, on raisonne par analogie avec la méthode des joints. En effet cette dernière impose que le degré polynomial des multiplicateurs de Lagrange doit être relaxé sur les éléments qui se trouvent aux bords des sous-domaines (Ben Belgacem 1999). Dans notre cas, la notion de «bords» disparaît puisque l'on travaille avec des sous-domaines sphériques. Tout se passe comme si l'on avait à traiter un problème avec des conditions aux limites périodiques et cela suggère qu'une discrétisation «identique» des espaces \mathcal{V}_h^* et \mathcal{M}_h est bien posée.

3.4.2 Règle d'intégration numérique

Pour évaluer numériquement les intégrales qui apparaissent dans la formulation variationnelle des équations, il faut choisir une règle de quadrature. Cette règle s'appliquera en fait sur les domaines de référence à

2D (Λ^2) ou à 3D (Λ^3). Dans la méthode des éléments spectraux, ce sont les points de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) qui sont utilisés pour définir cette quadrature.

On définit, sur l'intervalle $\Lambda = [-1, 1]$, les $(N + 1)$ points de GLL comme étant les zéros du polynôme $P(\xi) = (1 - \xi^2)L'_N(\xi)$ où L_N est le polynôme de Legendre de degré N sur Λ . On les note $(\xi_i^N)_{i=0,N}$ et ils vérifient :

$$\xi_0^N = -1; \quad \xi_N^N = 1; \quad L'_N(\xi_i^N) = 0, \quad \forall i \in \{1 \dots N - 1\}. \quad (3.20)$$

On introduit également les polynômes de Lagrange de degré N associés aux points de GLL. On les note $(h_j^N)_{j=0,N}$ et on a :

$$h_j^N(\xi_i^N) = \delta_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \{0 \dots N\}^2. \quad (3.21)$$

Les points de GLL offrent une formule performante d'intégration numérique puisque l'on peut montrer qu'il intègre exactement tout polynôme de degré inférieur ou égal à $(2N - 1)$ défini sur Λ :

$$\int_{\Lambda} q(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^N \omega_i^N q(\xi_i^N), \quad \forall q \in \mathcal{P}_{2N-1}(\Lambda). \quad (3.22)$$

Dans cette écriture, les quantités ω_i^N sont les poids d'intégration que l'on obtient en intégrant les polynômes de Lagrange :

$$\omega_i^N = \int_{\Lambda} h_i^N(\xi) d\xi. \quad (3.23)$$

Signalons que l'ordre polynômial élevé atteint dans la règle de quadrature (3.22) est dû aux propriétés d'orthogonalité de la famille des polynômes de Legendre (*e. g.* Canuto et al. 1987).

3.4.3 Bases polynômiales

Pour définir des bases des espaces \mathcal{V}_h^* et \mathcal{M}_h , on voit qu'il suffit de les construire sur les éléments de référence à 2D (Λ^2) et à 3D (Λ^3). Les bases de fonctions utilisées pour approcher les déplacements et les tractions sont donc obtenues en transportant les bases de référence sur les éléments spectraux. Un des choix fondamentaux de la méthode des éléments spectraux consiste à construire des bases tensorisées pour les espaces de polynômes $\mathcal{P}_N(\Lambda^2)$ et $\mathcal{P}_N(\Lambda^3)$. La conséquence immédiate de cette stratégie est la limitation des éléments spectraux à des géométries elles-mêmes tensorisées, c'est-à-dire des quadrangles à 2D et des hexaèdres à 3D. Enfin, le dernier choix propre à la méthode des éléments spectraux est d'utiliser comme base de $\mathcal{P}_N(\Lambda)$ les polynômes de Lagrange associés aux points d'intégration de GLL. On verra par la suite que la conséquence de ces choix est une simplification considérable de certains calculs qui permettront une formulation explicite du schéma d'évolution en temps.

On commence donc par définir une base de l'espace des polynômes de degré N sur Λ :

$$(h_i^N)_{i=0,N} \implies \mathcal{P}_N(\Lambda), \quad (3.24)$$

où on a utilisé le symbole « \implies » pour indiquer que la famille de gauche est une base de l'espace de droite.

En tensorisant cette base, on construit des bases de polynômes pour les dimensions supérieures :

$$(h_i^N \otimes h_j^N)_{i,j=0,N} \implies \mathcal{P}_N(\Lambda^2), \quad (3.25)$$

$$(h_i^N \otimes h_j^N \otimes h_k^N)_{i,j,k=0,N} \implies \mathcal{P}_N(\Lambda^3). \quad (3.26)$$

Cette construction permet de caractériser entièrement les espaces de déplacements (3.14) et de tractions (3.17). Si par exemple \mathbf{w} est un champ de déplacement admissible et si w_α est une de ses trois composantes alors sur l'élément τ_κ^e du sous-domaine Ω_κ^S on a :

$$w_\alpha^{\kappa,e}(\xi, \eta, \gamma) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N w_\alpha^{\kappa,e}(\xi_i^N, \xi_j^N, \xi_k^N) h_i^N(\xi) h_j^N(\eta) h_k^N(\gamma), \quad \forall (\xi, \eta, \gamma) \in \Lambda^3, \quad (3.27)$$

c'est-à-dire :

$$w_\alpha^{\kappa,e}(\xi, \eta, \gamma) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N w_\alpha(x_i^{\kappa,e}, y_j^{\kappa,e}, z_k^{\kappa,e}) h_i^N(\xi) h_j^N(\eta) h_k^N(\gamma), \quad \forall (\xi, \eta, \gamma) \in \Lambda^3, \quad (3.28)$$

où $w_\alpha^{\kappa,e}$ est défini sur le cube unité par (3.15) et où $(x_i^{\kappa,e}, y_j^{\kappa,e}, z_k^{\kappa,e})$ sont les points de collocation sur τ_κ^e , c'est-à-dire les images par \mathcal{F}_κ^e des points de GLL sur Λ^3 . Le champ de déplacement \mathbf{w} est donc complètement défini par ses valeurs aux points de collocation de la grille d'éléments spectraux.

3.4.4 Interpolateur de Lagrange

Une fois définies les bases polynômiales tensorisées des espaces discrets \mathbf{V}_h^* et \mathcal{M}_h , on peut construire les approximations des données ρ_h et \mathbf{f}_h .

Si q est une fonction scalaire définie sur le cube unité, on définit son interpolation sur la grille de points de GLL par :

$$\Pi_h q(\xi, \eta, \gamma) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N q(\xi_i^N, \xi_j^N, \xi_k^N) h_i^N(\xi) h_j^N(\eta) h_k^N(\gamma). \quad (3.29)$$

$\Pi_h q$ est donc le polynôme de $\mathcal{P}_N(\Lambda^3)$ qui coïncide avec q aux points de GLL et on se référera à Π_h comme à l'interpolateur de Lagrange sur Λ^3 .

Pour définir les approximations des données ρ et \mathbf{f} , on se ramène donc au cube unité et on applique, composante par composante, l'interpolateur de Lagrange. Ainsi, pour la composante α de la densité de forces on a sur l'élément τ_κ^e :

$$\mathbf{f}_h^\alpha(x, y, z) \doteq \Pi_h \{\mathbf{f}_\alpha \circ \mathcal{F}_\kappa^e\}(\xi, \eta, \gamma) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \mathbf{f}_\alpha(x_i^{\kappa,e}, y_j^{\kappa,e}, z_k^{\kappa,e}) h_i^N(\xi) h_j^N(\eta) h_k^N(\gamma). \quad (3.30)$$

3.4.5 Approximation du produit scalaire

Si \mathbf{v} et \mathbf{w} sont deux champs de déplacements discrets, leur produit scalaire dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ s'écrit :

$$\int_\Omega \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{\kappa=1}^K \sum_{e=1}^{n_\kappa} \int_{\tau_\kappa^e} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (3.31)$$

Sur chacun des éléments spectraux τ_κ^e , on applique le changement de variables $\mathbf{x} = \mathcal{F}_\kappa^e(\boldsymbol{\xi})$ pour se ramener au cube unité :

$$\int_{\tau_\kappa^e} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Lambda^3} \mathbf{v}^{\kappa,e}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{w}^{\kappa,e}(\boldsymbol{\xi}) |\mathcal{J}_\kappa^e|(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi}, \quad (3.32)$$

ce qui fait apparaître le déterminant (noté $|\cdot|$) de la matrice jacobienne \mathcal{J}_κ^e .

On approche alors les intégrales sur l'élément de référence en appliquant directement la règle de quadrature (3.22) généralisée à trois dimensions :

$$\int_{\tau_\kappa^e} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \simeq \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N [\mathbf{v}^{\kappa,e} \cdot \mathbf{w}^{\kappa,e} | \mathcal{J}_\kappa^e |] (\xi_i^N, \xi_j^N, \xi_k^N) \omega_i^N \omega_j^N \omega_k^N. \quad (3.33)$$

On peut remarquer que cette intégration n'est forcément pas exacte puisque le produit de polynômes $\mathbf{v}^{\kappa,e} \cdot \mathbf{w}^{\kappa,e}$ est déjà lui-même dans $\mathcal{P}_{2N}(\Lambda^3)$. Dans la suite, on utilisera la notation $\oint_{\Lambda^\alpha}^N$ pour signaler qu'on a utilisé une intégration numérique sur l'élément de référence Λ^α basée sur les $\alpha(N+1)$ points de GLL. Ainsi, le produit scalaire approché est finalement défini comme :

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_h = \sum_{\kappa=1}^K \sum_{e=1}^{n_\kappa} \oint_{\Lambda^3}^N |\mathcal{J}_\kappa^e| [\mathbf{v}^{\kappa,e} \cdot \mathbf{w}^{\kappa,e}], \quad \forall (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathcal{V}_h^* \times \mathcal{V}_h^*. \quad (3.34)$$

3.4.6 Approximation des formes bilinéaires a et b

Pour approcher la forme bilinéaire a associée à l'opérateur de l'élasto-gravité, on procède de la même manière que pour le produit scalaire. On commence donc par décomposer les intégrales présentes dans (1.108) sur les éléments spectraux, puis on se ramène au cube unité par le changement de variables $\mathbf{x} = \mathcal{F}_\kappa^e(\boldsymbol{\xi})$. La différence avec le calcul précédent est due à la présence d'opérateurs différentiels dans la définition de a . Ces opérateurs (gradient, divergence) sont exprimés dans les coordonnées de l'espace physique (\mathbf{x}) et il faut les modifier lorsqu'on se ramène à l'espace de travail ($\boldsymbol{\xi}$). De façon formelle, on introduit la notation « $\tilde{\cdot}$ » pour désigner ces opérateurs modifiés dans les éléments de référence. Ainsi, si ϕ est un champ scalaire et \mathbf{v} est un champ de vecteurs tous deux définis sur l'élément τ_κ^e , alors on définit les opérateurs modifiés gradient et divergence par :

$$\tilde{\nabla} \phi^{\kappa,e}(\boldsymbol{\xi}) = \nabla \phi(\mathbf{x}), \quad (3.35)$$

$$\tilde{\nabla} \mathbf{v}^{\kappa,e}(\boldsymbol{\xi}) = \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad (3.36)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{v}^{\kappa,e}(\boldsymbol{\xi}) = \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}). \quad (3.37)$$

La forme bilinéaire approchée a_h résulte de l'intégration numérique des expressions obtenues sur le cube de référence :

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = & \sum_{\kappa=1}^K \sum_{e=1}^{n_\kappa} \oint_{\Lambda^3}^N |\mathcal{J}_\kappa^e| \left[\tilde{\nabla} \mathbf{v}^{\kappa,e} : d^{\kappa,e} : \tilde{\nabla} \mathbf{w}^{\kappa,e} \right] \\ & + \sum_{\kappa=1}^K \sum_{e=1}^{n_\kappa} \oint_{\Lambda^3}^N |\mathcal{J}_\kappa^e| \left[\rho^{\kappa,e} \text{Sym} \left\{ \bar{w}^{\kappa,e} \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{v}^{\kappa,e} - \mathbf{v}^{\kappa,e} \cdot \tilde{\nabla} \bar{w}^{\kappa,e} \right\} \right], \end{aligned} \quad (3.38)$$

où on a noté \bar{w} le produit scalaire $\mathbf{w} \cdot \mathbf{g}$.

Pour définir la forme bilinéaire approchée b_h , on procède de manière analogue. Si \mathbf{w} est un champ de déplacement et $\boldsymbol{\mu}$ est un champ de traction sur les interfaces non-conformes, on rappelle que la relation de dualité entre les deux quantités s'exprime par :

$$b(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}) = b^{SS}(\mathbf{w}^S, \boldsymbol{\mu}^{SS}) = \sum_{\kappa=1}^K \sum_{e=1}^{n_\kappa} \int_{v_{\bar{\kappa}}^e} (\mathbf{w}_\kappa - \mathbf{w}_{\kappa'}) \cdot \boldsymbol{\mu}_{\kappa\kappa'} \, d\Gamma, \quad (3.39)$$

où l'on a supposé que la triangulation associée à l'indice κ (\mathbf{v}_κ) était plus fine que $\mathbf{v}_{\kappa'}$ (c'est-à-dire que $\underline{\kappa} = \kappa$). De cette façon, les tractions sont définies sur le maillage le plus fin et l'intégration numérique se fait donc sur les éléments ($v_{\underline{\kappa}}^e$).

Le champ $\mathbf{w}_{\kappa'}$ est quant à lui défini par morceaux sur les éléments de $\mathbf{v}_{\kappa'}$ et il faut donc le projeter sur la triangulation la plus fine. On notera $\Pi_{\underline{\kappa}}^e(\mathbf{w}_{\kappa'})$ cette projection et on la construira sur chacun des éléments de \mathbf{v}_κ en se ramenant au carré unité⁶ :

$$\Pi \mathbf{w}^{\kappa,e} \doteq \Pi_{\underline{\kappa}}^e(\mathbf{w}_{\kappa'}) \circ \mathcal{G}_{\underline{\kappa}}^e \in (\mathbb{P}_N(\Lambda^2))^3. \quad (3.40)$$

La forme bilinéaire b_h est alors obtenue en procédant au changement de variables $\mathbf{x} = \mathcal{G}_{\underline{\kappa}}^e(\boldsymbol{\xi})$ sur chaque élément et en intégrant numériquement sur le carré unité :

$$b_h(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{\underline{\kappa}=1}^K \sum_{e=1}^{n_{\underline{\kappa}}} \oint_{\Lambda^2} |\mathcal{J}_{\underline{\kappa}}^e| [(\mathbf{w}^{\kappa,e} - \Pi \mathbf{w}^{\kappa,e}) \cdot \boldsymbol{\mu}^{\kappa,e}], \quad (3.41)$$

où $|\mathcal{J}_{\underline{\kappa}}^e|$ est le jacobien de la transformation $\mathcal{G}_{\underline{\kappa}}^e$.

3.4.7 Système algébrique

Après avoir explicité les règles de calcul des différents termes du problème discret (3.1) et (3.2), il reste à exprimer la variation des fonctions tests \mathbf{v}_h et $\boldsymbol{\mu}_h$ dans les espaces \mathcal{V}_h^* et \mathcal{M}_h . En d'autres termes, il s'agit de développer le problème approché sur les bases des espaces discrets.

On va supposer pour cela qu'il existe une numérotation globale (de 1 à \mathcal{N}) des points de collocation sur l'ensemble des éléments spectraux du maillage. Ainsi, au point $(x_i^{\kappa,e}, y_j^{\kappa,e}, z_k^{\kappa,e})$ de l'élément τ_κ^e , correspondra un numéro dans $\{1 \dots \mathcal{N}\}$. De la même façon, on supposera qu'il existe une numérotation (de 1 à $\underline{\mathcal{N}}$) des points de grille qui appartiennent aux interfaces non-conformes.

Comme champs de déplacement et de traction, on choisit les fonctions de forme associées aux points du maillage, c'est-à-dire les fonctions qui s'annulent partout sauf en un point de grille. Considérons par exemple le point $(x_i^{\kappa,e}, y_j^{\kappa,e}, z_k^{\kappa,e})$ de l'élément τ_κ^e et supposons qu'il ait le numéro global α . On définit le champ de déplacement \mathbf{w}_α^x sur l'élément τ_κ^e par :

$$\mathbf{w}_\alpha^x(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_\alpha^x \circ \mathcal{F}_\kappa^e(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} h_i^N \otimes h_j^N \otimes h_k^N(\boldsymbol{\xi}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Ce champ n'a qu'une composante non nulle (d'où l'indice x) et il est associé à un seul point du maillage (d'où l'indice α).

Si on injecte \mathbf{w}_α^x dans le premier terme de la formulation discrète (3.1) on va trouver :

$$\left(\rho_h \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial t^2}, \mathbf{w}_\alpha^x \right)_h \mapsto \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} [\mathbf{M}_{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta]^x. \quad (3.43)$$

Dans cette écriture on a utilisé « \mapsto » pour dire que le terme de gauche contribue au terme de droite. Le terme de droite représente la composante x du vecteur obtenu en effectuant le produit matriciel $\mathbf{M}\mathbf{a}$, où \mathbf{a} est un vecteur qui contient les valeurs de l'accélération aux différents points de la grille. Dans le langage

6. Voir l'annexe 3.B pour la définition explicite de cette projection.

des éléments finis, \mathbf{M} est la matrice de «masse» et elle est *a priori* de taille \mathcal{N}^2 . Dans la méthode des éléments spectraux, la matrice de masse a la propriété remarquable d'être diagonale⁷, ce qui sera très utile dans le schéma d'évolution en temps.

Pour les autres termes de (3.1), on obtient de manière analogue :

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_\alpha^x) \mapsto \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} [\mathbf{K}_{\alpha\beta} \mathbf{d}_\beta]^x, \quad (3.44)$$

$$b_h(\mathbf{w}_\alpha^x, \boldsymbol{\lambda}_h) \mapsto \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} [\mathbf{B}_{\alpha\beta}^t \boldsymbol{\lambda}_\beta]^x, \quad (3.45)$$

$$(\mathbf{f}_h, \mathbf{w}_\alpha^x)_h \mapsto \mathbf{F}_\alpha^x, \quad (3.46)$$

où \mathbf{d} contient les valeurs du déplacement aux points de la grille 3D et $\boldsymbol{\lambda}$ contient les valeurs de la traction aux points des interfaces non-conformes. La matrice carrée \mathbf{K} est la matrice de «rigidité» et \mathbf{B}^t est une matrice rectangulaire qui projette les tractions de part et d'autre des interfaces non-conformes⁸. Signalons que le vecteur $\mathbf{K}\mathbf{d}$ est encore appelé «vecteur des forces internes» en référence avec le terme dont il provient. Par analogie, le vecteur \mathbf{F} associé à la source sismique sera parfois appelé le «vecteur des forces extérieures».

Pour développer la formulation associée aux contraintes de continuité (3.2), on définit comme précédemment une traction particulière $\boldsymbol{\mu}_\alpha^x$ qui s'annule partout sauf au point $\alpha \in \{1 \dots \mathcal{N}\}$, et on obtient la contribution :

$$b_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\mu}_\alpha^x) \mapsto \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} [\mathbf{B}_{\alpha\beta} \mathbf{d}_\beta]^x. \quad (3.47)$$

La matrice \mathbf{B} opère sur les déplacements de part et d'autre d'une interface non-conforme pour fabriquer le vecteur «saut de déplacement» à travers l'interface.

Comme on vient de le voir, les matrices \mathbf{M} , \mathbf{K} et \mathbf{B} sont construites localement sur chaque élément spectral et il reste, pour les définir complètement, à les «assembler» pour obtenir leur expressions globales. La phase d'assemblage traduit en fait les conditions de continuité qui sont présentes dans la définition des espaces \mathcal{V}_h^* et \mathcal{M}_h et que l'on a pour l'instant pas pris en compte. Considérons à nouveau le point $(x_i^{\kappa,e}, y_j^{\kappa,e}, z_k^{\kappa,e})$ de l'élément τ_κ^e et supposons que ce point appartienne également à l'élément $\tau_{\kappa'}^{e'}$ dans lequel ses coordonnées sont $(x_{i'}^{\kappa,e'}, y_{j'}^{\kappa,e'}, z_{k'}^{\kappa,e'})$. La fonction test \mathbf{w}_α^x étant définie sur τ_κ^e par (3.42), on la prolonge sur $\tau_{\kappa'}^{e'}$ de façon à ce qu'elle soit globalement continue :

$$\mathbf{w}_\alpha^x(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_\alpha^x \circ \mathcal{F}_{\kappa'}^{e'}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} h_{i'}^N \otimes h_{j'}^N \otimes h_{k'}^N(\boldsymbol{\xi}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Ainsi, pour obtenir la valeur au point α des vecteurs et matrices qui interviennent dans (3.43, 3.44, 3.45, 3.46), il faudra ajouter les contributions des termes locaux provenant des éléments τ_κ^e et $\tau_{\kappa'}^{e'}$. De la même manière, on réalisera l'assemblage de la matrice de projection \mathbf{B} dans (3.47) en traduisant la continuité des tractions sur les interfaces non-conformes. On voit donc que la phase d'assemblage est profondément liée à la topologie du maillage, en particulier à la valence de ses points.

7. Voir l'annexe 3.B.

8. On trouvera les expressions détaillées des matrices dans l'annexe 3.B.

En conclusion, le problème variationnel discret (3.1) et (3.2) équivaut à la résolution du système algébrique vectoriel :

$$\mathbf{M} \mathbf{a} + \mathbf{K} \mathbf{d} + \mathbf{B}^t \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F} , \quad (3.49)$$

$$\mathbf{B} \mathbf{d} = \mathbf{0} , \quad (3.50)$$

dont les inconnues sont les vecteurs déplacement \mathbf{d} , accélération \mathbf{a} et traction $\boldsymbol{\lambda}$.

3.4.8 Évolution temporelle

Pour assurer l'évolution en temps, on propose d'inclure le système algébrique issu de la discrétisation spatiale dans un schéma aux différences finies. On suppose pour cela qu'on a défini une discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T]$ en un certain nombre de pas de temps Δt . Pour tout entier n , on définit le temps $t_n = n\Delta t$ et on note \mathbf{d}_n (resp. $\mathbf{v}_n, \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\lambda}_n$) le champ de déplacement (resp. vitesse, accélération, traction) à l'instant t_n . On notera également \mathbf{F}_n le vecteur des forces extérieures au temps t_n .

À chaque instant, les différents champs cinématiques doivent satisfaire aux équations du mouvement posées sous forme discrète (3.49, 3.50). On verra dans la suite qu'il est plus pratique de faire porter la contrainte de continuité (3.50) sur l'accélération plutôt que le déplacement. On remplace donc le système précédent par :

$$\mathbf{M} \mathbf{a} + \mathbf{K} \mathbf{d} + \mathbf{B}^t \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F} , \quad (3.51)$$

$$\mathbf{B} \mathbf{a} = \mathbf{0} , \quad (3.52)$$

ce qui est encore équivalent à :

$$\mathbf{M} \mathbf{a} + \mathbf{K} \mathbf{d} + \mathbf{B}^t \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F} , \quad (3.53)$$

$$\mathbf{B} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}^t \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B} \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{F} - \mathbf{K} \mathbf{d}] . \quad (3.54)$$

Pour obtenir (3.54), on a simplement tiré de l'équation (3.51) la valeur de l'accélération et on l'a injecté dans (3.52). Signalons que le fait d'exprimer la contrainte de continuité sur l'accélération va modifier la signification physique des multiplicateurs de Lagrange. Comme on le verra dans le chapitre suivant, $\boldsymbol{\lambda}$ sera homogène à la dérivée en temps du vecteur traction sur les interfaces non-conformes⁹.

Supposons maintenant que tous les champs cinématiques satisfassent aux conditions initiales :

$$\mathbf{d}_{\{n=0\}} = \mathbf{0} , \quad (3.55)$$

$$\mathbf{v}_{\{n=0\}} = \mathbf{0} , \quad (3.56)$$

$$\mathbf{a}_{\{n=0\}} = \mathbf{0} , \quad (3.57)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{\{n=0\}} = \mathbf{0} , \quad (3.58)$$

et que $\mathbf{d}_n, \mathbf{v}_n, \mathbf{a}_n$ et $\boldsymbol{\lambda}_n$ satisfassent aux équations du mouvement au temps t_n .

Pour extrapoler les différents champs au temps t_{n+1} , on utilise un schéma de Newmark posé en accélération qui repose sur un développement limité du déplacement et de la vitesse du type :

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \mathbf{a}_n + \beta \mathbf{a}_{n+1} \right] , \quad (3.59)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t [(1 - \gamma) \mathbf{a}_n + \gamma \mathbf{a}_{n+1}] . \quad (3.60)$$

9. Dans ce qui suit, on continuera à parler de «traction» en désignant $\boldsymbol{\lambda}$ même si le terme plus approprié serait un «taux de traction».

Le paramètre β (resp. γ) contrôle l'erreur de troncature du développement limité de d_{n+1} par rapport à d_n (resp. v_{n+1} par rapport à v_n). On trouvera dans (Hugues 1987) une analyse détaillée de ces schémas dont on rappelle quelques propriétés dans le cas linéaire :

- ▷ Ces schémas sont inconditionnellement stables pour $\beta \geq \gamma \geq 1/2$ et conditionnellement stables pour $\gamma \geq 1/2$ et $\beta < 1/2$.
- ▷ On obtient un schéma du second ordre uniquement pour $\gamma = 1/2$.
- ▷ Le seul schéma qui permet la conservation du moment angulaire total est la méthode des différences finies explicite centrée ($\beta = 0$ et $\gamma = 1/2$).

En pratique, on implémentera ces schémas en adoptant une stratégie de type prédicteur-multicorrecteur, qui se décompose selon les étapes suivantes :

Phase de prédiction

$$\mathbf{d}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \mathbf{a}_n \quad (3.61)$$

$$\mathbf{v}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{v}_n + \Delta t (1 - \gamma) \mathbf{a}_n \quad (3.62)$$

$$\mathbf{a}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{0} \quad (3.63)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{0} \quad (3.64)$$

Phase de résolution I

$$\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}^t \Delta \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}\mathbf{M}^{-1} \left[\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{B}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(i)} \right] \quad (3.65)$$

Phase de correction I

$$\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(i+1)} = \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(i)} + \Delta \boldsymbol{\lambda} \quad (3.66)$$

Phase de résolution II

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1} \left[\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{B}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(i+1)} - \mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1}^{(i)} \right] \quad (3.67)$$

Phase de correction II

$$\mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} + \Delta \mathbf{a} \quad (3.68)$$

$$\mathbf{v}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{v}_{n+1}^{(0)} + \Delta t \gamma \mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)} \quad (3.69)$$

$$\mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{d}_{n+1}^{(0)} + \Delta t^2 \beta \mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)} \quad (3.70)$$

Le principe de la « multicorrection » consiste à répéter les différentes phases de résolution et de correction jusqu'à convergence du schéma, c'est-à-dire jusqu'à ce que les équations du mouvement soient satisfaites au temps t_{n+1} . Dans les formules précédentes, c'est l'indice i qui traduit ces corrections successives. En pratique, on définira un critère d'arrêt qui pourra être par exemple un nombre d'itérations maximal ou bien qui dépendra de la norme de l'incrément d'accélération obtenu après résolution de (3.67).

Il est intéressant d'observer la façon dont les conditions cinématiques sont assurées à travers les interfaces non-conformes Σ_{SS} . En effet, à l'issue de la phase de prédiction, les forces internes ($\mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}$) sont

calculées indépendamment dans chacun des sous-domaines du maillage, sans tenir compte de Σ_{SS} . Il convient alors de corriger la traction sur ces interfaces pour connecter les sous-domaines : c'est l'objet de la première phase de résolution. On calcule ensuite un incrément d'accélération qui tient compte des forces rajoutées ($\mathbf{B}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(i+1)}$) de part et d'autre des interfaces non-conformes. La phase de correction (3.68) assure alors que le champ d'accélération est continu à travers Σ_{SS} , c'est-à-dire que $\mathbf{B}\mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{0}$. Enfin, puisque les champs de déplacement et de vitesse sont corrigés par le vecteur accélération, ils sont eux-mêmes continus au travers des interfaces non-conformes.

Le coût des différents calculs à chaque itération est celui d'une méthode d'éléments spectraux conforme auquel il faut ajouter le prix de la résolution sur les interfaces non-conformes (3.65). Pour établir le coût global de la méthode, on peut donc reprendre les observations de Komatitsch (1997) qui sont valables dans toutes les parties conformes du maillage. Tout d'abord, la phase de résolution (3.67) est complètement explicite puisque la matrice de masse \mathbf{M} est diagonale. On rappelle que cette propriété fondamentale est liée au choix particulier des polynômes de base qui sont les fonctions de forme des points d'intégration. D'autre part, le calcul des forces extérieures à chaque pas de temps est d'un coût négligeable. Par conséquent, le coût d'une méthode conforme est dominé par le calcul des forces internes. Comme cela est rappelé dans l'annexe 3.B, ce calcul est effectué sur chacun des éléments du maillage par une suite de produits par des matrices 1D dont les coefficients sont indépendants du temps. Au niveau élémentaire, ce calcul a donc un coût en $O(N^4)$ pour un ordre polynômial de $N - 1$, ce qui est tout à fait raisonnable pour un degré qui est inférieur à 10 en pratique. On souligne ici que la dépendance en $O(N^4)$ est directement liée à la tensorisation des bases polynômiales dans la méthode des éléments spectraux. Sans cette propriété importante, le coût de calcul des forces internes serait de l'ordre de $O(N^6)$. À ces observations, il faut ajouter le coût des phases d'assemblage qui dépend de la topologie du maillage et de l'architecture du calculateur utilisé. Comme on l'a signalé précédemment, cette phase ne concerne que les points du maillage qui appartiennent à plusieurs éléments spectraux. Cela exclut donc tous les points intérieurs à un élément, c'est-à-dire environ la moitié des points pour un ordre polynômial $N = 8$. De plus, comme l'assemblage ne suppose que des opérations de sommation, cette phase représentera en général une fraction du temps de calcul total qui excédera rarement 10 %¹⁰.

Le coût supplémentaire induit par la prise en compte des interfaces non-conformes est lié à la phase de résolution (3.65). Le calcul de l'incrément de traction $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ nécessite l'inversion de la matrice $\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}^t$ qui, contrairement à la matrice de masse, n'est pas diagonale. Cependant, il faut noter que cette résolution reste localisée sur les interfaces de Σ_{SS} et qu'elle concerne donc une fraction négligeable du nombre total de points de grille. Pour la même raison, il faut préciser que le stockage en mémoire de l'inconnue supplémentaire $\boldsymbol{\lambda}$ représente un encombrement marginal. D'autre part, on peut remarquer que la matrice $\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}^t$ contient une partie qui est purement diagonale. En effet, dans l'annexe 3.B on rappelle que la matrice \mathbf{B} est constituée de deux sous-matrices de projection (\mathbf{B}_1 et \mathbf{B}_2), dont l'une est diagonale (\mathbf{B}_1). On peut donc réécrire :

$$\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}^t = \mathbf{B}_1\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{B}_1^t + \mathbf{B}_2\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{B}_2^t, \quad (3.71)$$

où \mathbf{M}_1 (resp. \mathbf{M}_2) est la matrice de masse du côté des interfaces où le maillage est le plus fin (resp. le plus grossier). Par conséquent la sous-matrice $\mathbf{B}_1\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{B}_1^t$ est diagonale et la difficulté de la résolution sera donc associée à l'inversion de la sous-matrice $\mathbf{B}_2\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{B}_2^t$.

En pratique, on ne calculera jamais explicitement de matrice inverse, et on utilisera plutôt des schémas itératifs pour approcher la solution du système (3.65). Du point de vue algorithmique, on aura donc seulement à effectuer des produits de vecteurs par la matrice de résolution $\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}^t$. Dans l'annexe 3.B, on a détaillé l'implémentation d'une méthode de gradient conjugué pour résoudre (3.65). De façon classique, l'efficacité de ce genre de méthodes est liée au choix d'un bon préconditionnement du système

¹⁰. Bien que peu coûteuse, la phase d'assemblage peut être assez complexe puisqu'elle est liée à la topologie du maillage (voir le paragraphe suivant).

matriciel. En pratique, il s'avère qu'un préconditionneur très simple (*i. e.* diagonal) a paru suffisant au vu de la structure relativement creuse de la matrice $\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}^t$.

On peut également résoudre le système d'interface en exploitant la nature de point-selle du problème discret (3.53, 3.54). En suivant cette stratégie, on présente dans l'annexe 3.B l'implémentation d'une méthode de type Uzawa dans laquelle on n'utilise pas de préconditionnement. Dans les tests numériques que l'on a réalisés (et qui seront présentés dans le chapitre 4), les deux méthodes (gradient conjugué et Uzawa) se sont avérées équivalentes en terme de taux de convergence et de nombre d'opérations effectuées.

3.4.9 Implémentation parallèle de l'algorithme

Après avoir détaillé les différentes opérations et estimé leurs coûts respectifs, on s'intéresse ici à la façon de les implémenter sur un ordinateur parallèle. On rappelle que la parallélisation de l'algorithme consiste à distribuer les différentes tâches de calcul sur un ensemble de processeurs qui travaillent de façon indépendante. Pour une application donnée, cette distribution des rôles et des charges de travail doit être la plus uniforme possible puisque la machine parallèle travaille au rythme du plus lent de ses composants. Dans les méthodes d'éléments finis, il est naturel d'imposer à chacun des processeurs de traiter une partie du domaine de calcul. Ainsi, chaque processeur effectue le même type d'opérations sur des données différentes et les charges de travail sont parfaitement équilibrées si le découpage spatial est uniforme. C'est cette stratégie de décomposition qu'on a utilisé pour la méthode des éléments spectraux appliquée aux équations de la gravito-élastodynamique dans la Terre.

Comme on l'a constaté dans le paragraphe 3.3, le maillage 3D de la Terre est formé de sept régions : le cube central à l'intérieur de la graine et les six régions périphériques qui s'appuient sur la surface terrestre. Chacune de ces régions est topologiquement équivalente à un cube dans l'espace de travail comme cela est représenté sur la figure 3.8. Rappelons que chacune des 7 régions contient son propre

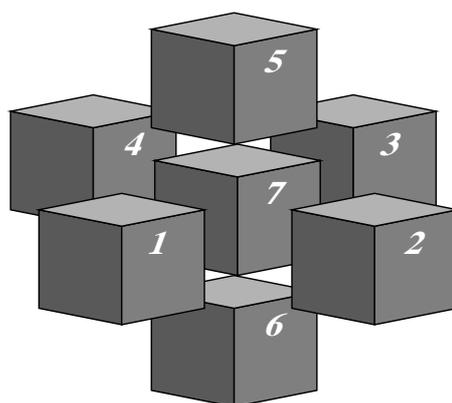


FIG. 3.8 – Topologie du maillage tridimensionnel qui pave la Terre. Le cube central (région 7) partage une de ses faces avec chacune des six régions périphériques (régions 1 à 6). Chacune des 7 régions est topologiquement équivalente à un cube et contient son propre maillage en éléments spectraux.

maillage en éléments spectraux, et que ce maillage est identique sur les 6 premières régions¹¹. Les régions périphériques (1 à 6) ont par ailleurs des «relations de voisinage» particulières qui sont héritées de la transformation de la sphère cubique et qui reproduisent la topologie de la surface d'un cube. Sur la figure 3.9, on a représenté les régions 1 à 6 en vue déployée, de la même façon que l'on aurait représenté la surface d'un cube. On a centré la figure sur la première région qui est donc représentée avec ses 4

11. En effet, les régions 1 à 6 sont identiques à une rotation près.

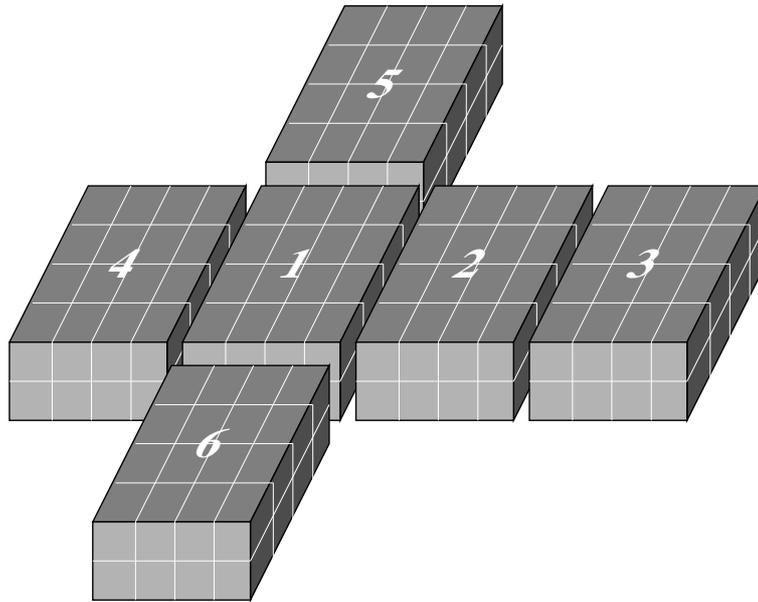


FIG. 3.9 – Les 6 régions périphériques contenues dans le maillage de la Terre. La topologie de cette zone périphérique est identique à celle de la surface d'un cube (ou d'un dé à jouer). On a adopté une vue déployée qui est centrée sur la première région.

régions voisines (2, 4, 5 et 6). Ce choix est bien sûr arbitraire et, contrairement à ce qui est dessiné, chacune des 6 régions est en fait connectée à 4 régions voisines.

Pour décomposer le maillage global sur un ensemble de p processeurs, on découpe chacune des 7 régions en p domaines de même taille. De cette façon, l'équilibre de la charge de travail sur chacun des processeurs est naturellement satisfaite. On peut noter que le découpage des 7 régions en p morceaux est lui-même trivial puisque chaque région est un cube dans l'espace de travail. Pour fixer les idées, on a représenté sur la figure 3.10 la répartition des 6 régions périphériques sur un ensemble de $p = 16$ processeurs. Chaque processeur s'occupe donc de 6 domaines qui représentent chacun $1/16$ d'une région périphérique. Il faudra ajouter à ce nombre les domaines du cube central dont on a pas représenté la décomposition. Dans le cas de $p = 16$, le cube central sera découpé en 64 morceaux et chaque processeur s'occupera de 4 de ces domaines. On peut signaler une différence morphologique entre les domaines du cube central et les domaines des régions périphériques. Dans le cube central les domaines sont des cubes non déformés, alors que dans les régions périphériques ce sont des tranches verticales qui vont de la surface terrestre jusqu'à l'intérieur de la graine. Enfin, on rappelle que les interfaces non-conformes se trouvent toutes dans les domaines des régions périphériques. Par conséquent, la phase de résolution sur Σ_{SS} sera partagée de façon équitable entre les processeurs.

Une fois que les différents processeurs se sont partagé le domaine de calcul, ils ne communiquent plus que dans les phases d'assemblage. Pour procéder à cette phase, on commence par assembler les domaines de chaque processeur indépendamment. Cette étape, qui ne nécessite pas de communications, est réalisée en trois phases de sommation suivant les trois directions de l'espace (voir (Komatitsch 1997) ou (?)). Une fois les domaines assemblés, on procède à l'assemblage des régions périphériques (phase I) puis du cube central (phase II). La mise en oeuvre de la phase I repose sur la topologie particulière des régions périphériques et nécessite 3 étapes que l'on a représentées sur la figure 3.11. On peut remarquer que la décomposition des régions périphériques (figure 3.10) assure que chaque processeur ne communique pas avec lui-même lors de la phase I. La phase II, qui concerne le maillage structuré du cube central, ne pose pas de difficultés et elle est à nouveau réalisée séquentiellement suivant les 3 directions de l'espace. Enfin, il faut connecter face par face le cube central aux régions périphériques (phase III), ce qui nécessite

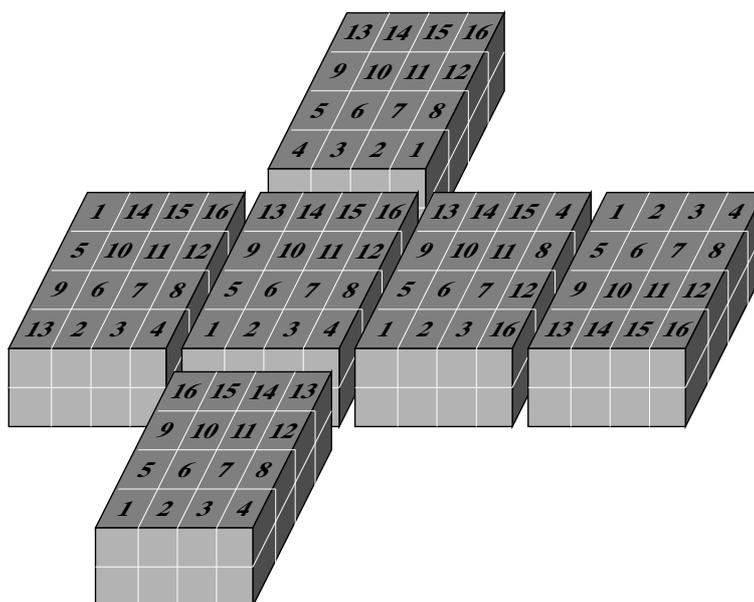


FIG. 3.10 – Exemple de décomposition des régions périphériques sur 16 processeurs. On a adopté une vue déployée qui est centrée sur la première région.

6 étapes de communications.

Ainsi, l'assemblage global d'un champ de vecteurs nécessite plusieurs étapes qui permettent de réaliser les phases I à III. Chacune de ces étapes met en jeu une série de communications entre les processeurs que l'on pourrait représenter par un graphe. En pratique, on s'assure que les communications sont non-bloquantes en décomposant chaque graphe en sous-graphes indépendants. Pour illustrer la mise en oeuvre de ces opérations, on a représenté sur la figure 3.12 le résultat de l'assemblage d'un champ scalaire qui valait 1 à chaque point de la grille d'éléments spectraux. Le champ assemblé contient donc la valence des points du maillage, c'est-à-dire pour chaque point, le nombre d'éléments auxquels il appartient.

Les communications entre processeurs durant la phase d'assemblage sont assurées par les routines de la bibliothèque MPI (MESSAGE PASSING INTERFACE), ce qui assure la portabilité du programme sur une grande variété d'architecture. En pratique, la phase de décomposition du domaine de calcul a été prévue pour un nombre de processeurs supérieur à quatre et égal à une puissance de deux (4, 8, 16, 32, 64, ...). Ces nombres particuliers sont souvent utilisés sur les machines parallèles pour simplifier le réseau de communications. L'algorithme présenté dans ce chapitre a été implémenté sur un *cluster* de 8 ALPHASERVER de 4 processeurs EV6 chacun, au département de modélisation et de physique numérique (DMPN) de l'IPG.

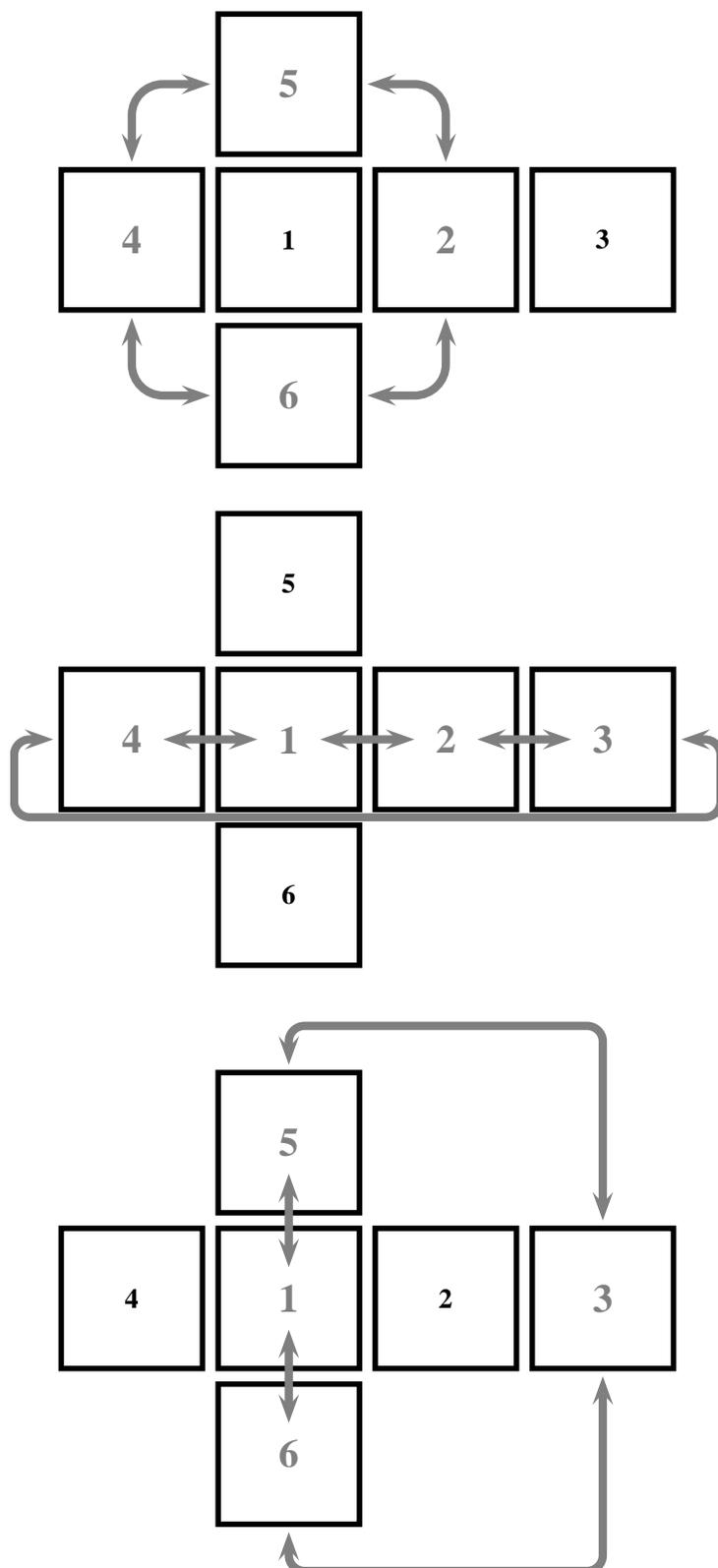


FIG. 3.11 – Représentation des trois étapes de la phase d'assemblage des régions périphériques (phases I.1, I.2 et I.3). Chaque étape est un parcours de la surface du cube qui concerne les 4 régions dont les numéros sont mis en relief.

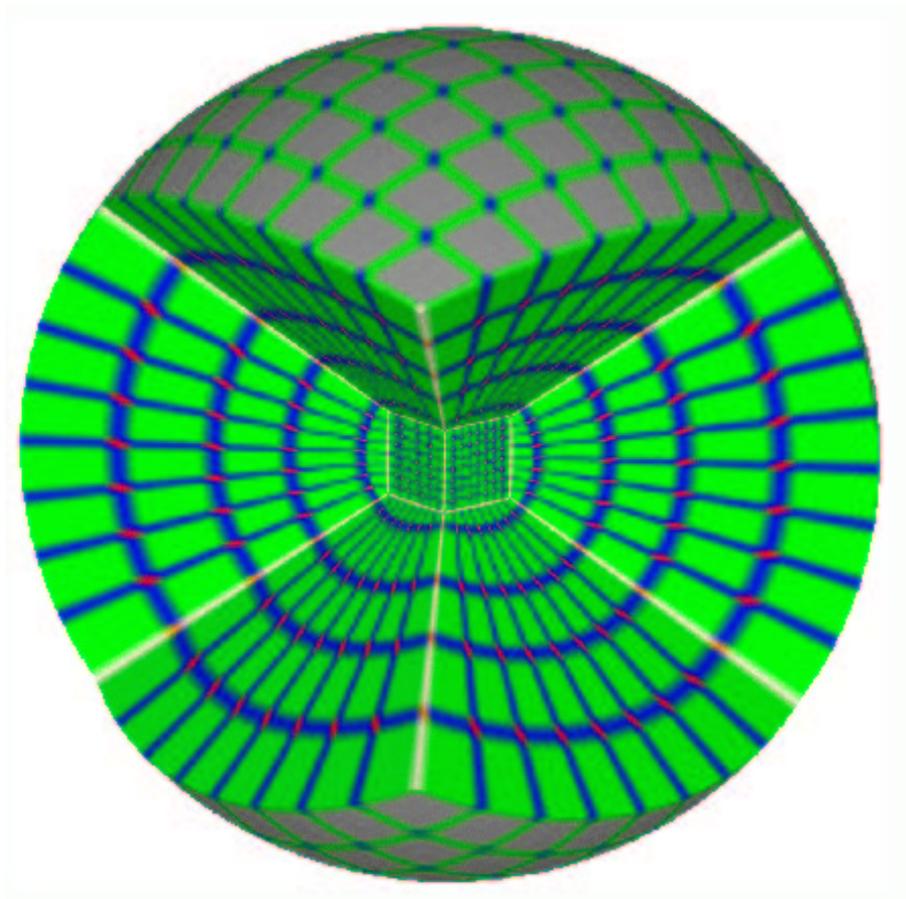


FIG. 3.12 – Valence des points du maillage après l'assemblage d'un champ scalaire unité. Le code de couleurs est : gris = 1, vert = 2, blanc = 3, bleu = 4, jaune = 6, rouge = 8. Deux régions périphériques du maillage 3D ont été supprimées pour voir l'intérieur de la grille.

3.A Annexe : Construction du maillage

Maillage entre deux sphères concentriques

Le principe du maillage de la sphère cubique (Ronchi, Ianoco, and Paolucci 1996) est de partager la sphère en 6 domaines et de mettre en relation chacun de ces domaines avec la face d'un cube. Ayant construit deux sphères cubiques concentriques de rayons respectifs R_1 et R_2 , une correspondance radiale permet alors de définir le volume compris entre les deux sphères. Le changement de variables associé à cette couronne sphérique s'écrit sur chacune des régions :

Région 1 ($x > 0$)	Région 2 ($y > 0$)	Région 3 ($x < 0$)
$x = r \delta^{-\frac{1}{2}}$	$x = -rX \delta^{-\frac{1}{2}}$	$x = -r \delta^{-\frac{1}{2}}$
$y = rX \delta^{-\frac{1}{2}}$	$y = r \delta^{-\frac{1}{2}}$	$y = -rX \delta^{-\frac{1}{2}}$
$z = rY \delta^{-\frac{1}{2}}$	$z = rY \delta^{-\frac{1}{2}}$	$z = rY \delta^{-\frac{1}{2}}$

Région 4 ($y < 0$)	Région 5 ($z > 0$)	Région 6 ($z < 0$)
$x = rX \delta^{-\frac{1}{2}}$	$x = -rY \delta^{-\frac{1}{2}}$	$x = rY \delta^{-\frac{1}{2}}$
$y = -r \delta^{-\frac{1}{2}}$	$y = rX \delta^{-\frac{1}{2}}$	$y = rX \delta^{-\frac{1}{2}}$
$z = rY \delta^{-\frac{1}{2}}$	$z = r \delta^{-\frac{1}{2}}$	$z = -r \delta^{-\frac{1}{2}}$

Dans cette écriture, les coordonnées ξ , η et r varient dans :

$$\xi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \quad \eta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \quad r \in [R_1, R_2]. \quad (3.72)$$

D'autre part, on a défini :

$$\begin{aligned} X &= \tan(\xi), \\ Y &= \tan(\eta), \\ \delta &= 1 + X^2 + Y^2. \end{aligned}$$

On note que l'on retrouve le changement de variables de la sphère cubique en prenant un rayon constant dans les expressions précédentes. Si l'on souhaite par ailleurs se ramener au cube unité, on utilisera les coordonnées :

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= \frac{4}{\pi} \xi, \\ \tilde{\eta} &= \frac{4}{\pi} \eta, \\ \tilde{r} &= \frac{1}{R_2 - R_1} (2r - R_1 - R_2). \end{aligned}$$

La métrique associée à ce changement de variables est identique sur toutes les faces d'une sphère cubique de rayon a et elle définit les éléments de longueur et de surface :

$$\begin{aligned} dl_\xi &= aC^2 D \delta^{-1} d\xi, \\ dl_\eta &= aCD^2 \delta^{-1} d\eta, \\ dS &= a^2 C^2 D^2 \delta^{-\frac{3}{2}} d\eta d\xi, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} C &= (1 + X^2)^{\frac{1}{2}}, \\ D &= (1 + Y^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

L'élément de volume, *i. e.* le déterminant de la matrice Jacobienne, est défini par :

$$dV = r^2 C^2 D^2 \delta^{-\frac{3}{2}} dr d\eta d\xi. \quad (3.73)$$

Maillage entre une sphère et la surface d'un cube

On maille le volume entre une face de la sphère cubique et la face correspondante d'un cube inscrit en adaptant la transformation précédente :

Région 1 ($x > 0$)	Région 2 ($y > 0$)	Région 3 ($x < 0$)
$x = R_1 \delta^{-\frac{1}{2}} \Psi + R_0(1 - \Psi)$	$x = -y [X\Psi + \tilde{\xi}(1 - \Psi)]$	$x = -R_1 \delta^{-\frac{1}{2}} \Psi - R_0(1 - \Psi)$
$y = x [X\Psi + \tilde{\xi}(1 - \Psi)]$	$y = R_1 \delta^{-\frac{1}{2}} \Psi + R_0(1 - \Psi)$	$y = x [X\Psi + \tilde{\xi}(1 - \Psi)]$
$z = x [Y\Psi + \tilde{\eta}(1 - \Psi)]$	$z = y [Y\Psi + \tilde{\eta}(1 - \Psi)]$	$z = -x [Y\Psi + \tilde{\eta}(1 - \Psi)]$

Région 4 ($y < 0$)	Région 5 ($z > 0$)	Région 6 ($z < 0$)
$x = -y [X\Psi + \tilde{\xi}(1 - \Psi)]$	$x = -z [Y\Psi + \tilde{\eta}(1 - \Psi)]$	$x = -z [Y\Psi + \tilde{\eta}(1 - \Psi)]$
$y = -R_1 \delta^{-\frac{1}{2}} \Psi - R_0(1 - \Psi)$	$y = z [X\Psi + \tilde{\xi}(1 - \Psi)]$	$y = -z [X\Psi + \tilde{\xi}(1 - \Psi)]$
$z = -y [Y\Psi + \tilde{\eta}(1 - \Psi)]$	$z = R_1 \delta^{-\frac{1}{2}} \Psi + R_0(1 - \Psi)$	$z = -R_1 \delta^{-\frac{1}{2}} \Psi - R_0(1 - \Psi)$

Dans cette écriture, R_1 est le rayon de la sphère, R_0 est la demi-longueur du cube et

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{r - R_0 \delta^{1/2}}{R_1 - R_0 \delta^{1/2}}, \\ \tilde{\xi} &= \frac{4}{\pi} \xi, \\ \tilde{\eta} &= \frac{4}{\pi} \eta. \end{aligned}$$

La surface du cube est obtenue en prenant $\{\Psi = 0\}$ et la surface de la sphère correspond au choix $\{\Psi = 1\}$. Si l'on souhaite se ramener au cube unité on utilisera :

$$\tilde{\Psi} = 2\Psi - 1. \quad (3.74)$$

La métrique définie par ce changement de variables a tous ses termes non diagonaux *a priori* non nuls mais, pour $\Psi = 0$ (ou $\tilde{\Psi} = -1$), le maillage obtenu sur la surface du cube est uniforme dans l'espace cartésien.

3.B Annexe : Construction du système algébrique

Calcul de la matrice de masse M

La matrice de masse intervient dans le calcul de la quantité $(\rho \mathbf{v}, \mathbf{w})_h$, où ρ est la densité de masse du milieu, \mathbf{v} est un champ de déplacement admissible, et \mathbf{w} est un élément de la base de \mathcal{V}_h^* .

En conservant la notation formelle du produit scalaire approché (3.34), on a :

$$(\rho \mathbf{v}, \mathbf{w})_h = \sum_{\kappa=1}^K \sum_{e=1}^{n_\kappa} \oint_{\Lambda^3} \rho_h^{\kappa,e} |\mathcal{J}_\kappa^e| [\mathbf{v}^{\kappa,e} \cdot \mathbf{w}^{\kappa,e}] . \quad (3.75)$$

Comme fonction de base \mathbf{w} , on considère le champ \mathbf{w}_α^x défini par :

$$\mathbf{w}_\alpha^x(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_\alpha^x \circ \mathcal{F}_\kappa^e(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} h_I^N \otimes h_J^N \otimes h_K^N(\boldsymbol{\xi}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (3.76)$$

Ce champ est associé au point numéro α du maillage global, qui correspond au point $(x_I^{\kappa,e}, y_J^{\kappa,e}, z_K^{\kappa,e})$ dans l'élément τ_κ^e . La contribution de l'élément τ_κ^e au produit scalaire s'écrit donc :

$$(\rho \mathbf{v}, \mathbf{w})_h = \oint_{\Lambda^3} \rho_h^{\kappa,e} |\mathcal{J}_\kappa^e| [\mathbf{v}^{\kappa,e} \cdot \mathbf{w}_\alpha^x] , \quad (3.77)$$

c'est-à-dire en appliquant la règle d'intégration numérique :

$$(\rho \mathbf{v}, \mathbf{w})_h = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \omega_i^N \omega_j^N \omega_k^N \rho_{ijk}^{\kappa,e} |\mathcal{J}_\kappa^e|_{ijk} [\mathbf{v}^{\kappa,e} \cdot \mathbf{w}_\alpha^x]_{ijk} . \quad (3.78)$$

Dans cette écriture, on a utilisé l'indice $\{ijk\}$ pour indiquer que l'on prend la valeur des quantités discrètes au point (ξ_i, ξ_j, ξ_k) du cube unité. Par exemple :

$$\rho_{ijk}^{\kappa,e} = \Pi_h \{ \rho \circ \mathcal{F}_\kappa^e \}(\xi_i, \xi_j, \xi_k) = \rho_h(x_i^{\kappa,e}, y_j^{\kappa,e}, z_k^{\kappa,e}) . \quad (3.79)$$

En développant le champ \mathbf{v} sur la base de \mathcal{V}_h^* (3.28) et en utilisant la définition de \mathbf{w}_α^x on a :

$$[\mathbf{v}^{\kappa,e} \cdot \mathbf{w}_\alpha^x]_{ijk} = \mathbf{v}^x(x_i^{\kappa,e}, y_j^{\kappa,e}, z_k^{\kappa,e}) \delta_{Ii} \delta_{Jj} \delta_{Kk} . \quad (3.80)$$

On obtient donc finalement :

$$(\rho \mathbf{v}, \mathbf{w})_h = \omega_I^N \omega_J^N \omega_K^N |\mathcal{J}_\kappa^e|_{IJK} \rho_{IJK}^{\kappa,e} \mathbf{v}_{IJK}^x , \quad (3.81)$$

que l'on peut réécrire formellement avec la numérotation globale :

$$(\rho \mathbf{v}, \mathbf{w})_h = \omega_\alpha^N |\mathcal{J}|_\alpha \rho_\alpha^{\kappa,e} \mathbf{v}_\alpha^x . \quad (3.82)$$

On constate que le produit scalaire associé à la fonction de base \mathbf{w}_α^x fait intervenir uniquement la valeur du champ \mathbf{v}^x au point α . Cette opération correspond donc à une multiplication par une matrice, la matrice de masse, qui est diagonale. De façon formelle, les composantes de cette matrice au niveau élémentaire s'écrivent donc :

$$\mathbf{M}_{\alpha\beta}^{\kappa,e} = \omega_\alpha^N |\mathcal{J}|_\alpha \rho_\alpha^{\kappa,e} \delta_{\alpha\beta} . \quad (3.83)$$

Calcul de la matrice de rigidité élastique \mathbf{K}

On détaille ici le calcul de la matrice de rigidité \mathbf{K} dans le cas purement élastique. Les calculs supplémentaires provenant de la prise en compte des termes de gravité utilisent le même principe et ne sont pas exposés ici par simplicité.

On considère donc l'expression de la forme bilinéaire élastique approchée :

$$a_h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{\kappa=1}^K \sum_{e=1}^{n_\kappa} \int_{\Lambda^3} |\mathcal{J}_\kappa^e| \left[\tilde{\nabla} \mathbf{v}^{\kappa,e} : d^{\kappa,e} : \tilde{\nabla} \mathbf{w}^{\kappa,e} \right], \quad (3.84)$$

où \mathbf{v} est un champ de déplacement admissible et \mathbf{w} est un élément de la base de \mathcal{V}_h^* .

On commence par développer la contraction tensorielle sur Λ^3 :

$$\left[\tilde{\nabla} \mathbf{v}^{\kappa,e} : d^{\kappa,e} : \tilde{\nabla} \mathbf{w}^{\kappa,e} \right] (\xi, \eta, \gamma) = \left[d_{ijkl}^{\kappa,e} \tilde{\partial}_j \mathbf{w}_i^{\kappa,e} \tilde{\partial}_l \mathbf{v}_k^{\kappa,e} \right] (\xi, \eta, \gamma). \quad (3.85)$$

Dans cette écriture, on a utilisé la convention de sommation des indices répétés (i, j, k, l) et on a noté :

$$\tilde{\partial}_j \mathbf{w}_i^{\kappa,e} \doteq \partial_j \xi^n \partial_n \mathbf{w}_i^{\kappa,e}, \quad (3.86)$$

$$\tilde{\partial}_l \mathbf{v}_k^{\kappa,e} \doteq \partial_j \xi^m \partial_m \mathbf{v}_k^{\kappa,e}, \quad (3.87)$$

où :

$$\partial_j \xi^n \doteq \frac{\partial \xi^n}{\partial x_j} \quad (3.88)$$

et où ξ^n désigne tour à tour ξ, η et γ .

En appliquant la formule d'intégration numérique, on obtient :

$$a_h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{\kappa=1}^K \sum_{e=1}^{n_\kappa} \sum_{p,q,r=0}^N \left[d_{ijkl}^{\kappa,e} \tilde{\partial}_j \mathbf{w}_i^{\kappa,e} \tilde{\partial}_l \mathbf{v}_k^{\kappa,e} \right]_{pqr} \omega_p^N \omega_q^N \omega_r^N |\mathcal{J}_\kappa^e|_{pqr}. \quad (3.89)$$

On exprime alors le champ \mathbf{v} dans la base de \mathcal{V}_h^* :

$$\mathbf{v}_k^{\kappa,e}(\xi, \eta, \gamma) = \sum_{i,j,k=0}^N [\mathbf{v}_k^{\kappa,e}]_{ijk} h_i^N(\xi) h_j^N(\eta) h_k^N(\gamma), \quad (3.90)$$

où on a noté :

$$[\mathbf{v}_k^{\kappa,e}]_{ijk} = \mathbf{v}_k^{\kappa,e}(\xi_i^N, \xi_j^N, \xi_k^N) = \mathbf{v}_k(x_i^{\kappa,e}, y_j^{\kappa,e}, z_k^{\kappa,e}). \quad (3.91)$$

On définit à ce stade la matrice de dérivation à une dimension, D , par :

$$D_{ij} = [h_i^N]'(\xi_j^N). \quad (3.92)$$

On peut alors calculer les dérivées partielles de $\mathbf{v}^{\kappa,e}$ aux points de GLL :

$$\partial_m \mathbf{v}_k^{\kappa,e}(\xi_p^N, \xi_q^N, \xi_r^N) = \delta_{m1} \sum_s D_{sp} [\mathbf{v}_k^{\kappa,e}]_{sqr} + \delta_{m2} \sum_s D_{sq} [\mathbf{v}_k^{\kappa,e}]_{psr} + \delta_{m3} \sum_s D_{sr} [\mathbf{v}_k^{\kappa,e}]_{pqs}. \quad (3.93)$$

Comme fonction de base \mathbf{w} , on considère le champ \mathbf{w}_α^i dont seule la $i^{\text{ème}}$ composante est non nulle et qui correspond au point $(x_I^{\kappa,e}, y_J^{\kappa,e}, z_K^{\kappa,e})$ dans l'élément τ_κ^e . On a donc :

$$\partial_n \mathbf{w}_\alpha^i(\xi_p^N, \xi_q^N, \xi_r^N) = \delta_{n1} D_{Ip} \delta_{qJ} \delta_{rK} + \delta_{n2} D_{Jq} \delta_{Ip} \delta_{rK} + \delta_{n3} D_{Kr} \delta_{Ip} \delta_{qJ}. \quad (3.94)$$

En multipliant les expressions (3.93) et (3.94) on obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{\partial}_j \mathbf{w}_\alpha^i \tilde{\partial}_l \mathbf{v}_k^{\kappa,e} (\xi_p^N, \xi_q^N, \xi_r^N) &= \sum_{m,n=1}^3 \partial_l \xi^m \partial_j \xi^n \partial_m \mathbf{v}_k^{\kappa,e} \partial_n \mathbf{w}_\alpha^i (\xi_p^N, \xi_q^N, \xi_r^N) \\
&= \{ \partial_j \xi D_{Ip} \delta_{qJ} \delta_{rK} + \partial_j \eta D_{Jq} \delta_{Ip} \delta_{rK} + \partial_j \gamma D_{Kr} \delta_{Ip} \delta_{qJ} \} \\
&\quad \times \left\{ \partial_l \xi \sum_s D_{sp} [\mathbf{v}_k^{\kappa,e}]_{sqr} + \partial_l \eta \sum_s D_{sq} [\mathbf{v}_k^{\kappa,e}]_{psr} + \partial_l \gamma \sum_s D_{sr} [\mathbf{v}_k^{\kappa,e}]_{pqs} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

On peut désormais évaluer l'expression de la forme bilinéaire a_h pour le choix de la fonction test \mathbf{w}_α^i . On choisit pour mener les calculs de mettre en relief les dérivées du champ de déplacement par rapport aux coordonnées (x, y, z) de l'espace physique. On obtient :

$$\begin{aligned}
a_h(\mathbf{v}, \mathbf{w}_\alpha^i) &= \omega_J^N \omega_K^N \sum_p \omega_p^N D_{Ip} (J_\kappa^e)_{pJK} \sum_{jkl} [d_{ijkl} \partial_j \xi \tilde{\partial}_l \mathbf{v}_k^{\kappa,e}]_{pJK} \\
&\quad + \omega_I^N \omega_K^N \sum_p \omega_p^N D_{Jp} (J_\kappa^e)_{IPK} \sum_{jkl} [d_{ijkl} \partial_j \eta \tilde{\partial}_l \mathbf{v}_k^{\kappa,e}]_{IPK} \\
&\quad + \omega_I^N \omega_J^N \sum_p \omega_p^N D_{Kp} (J_\kappa^e)_{IJP} \sum_{jkl} [d_{ijkl} \partial_j \gamma \tilde{\partial}_l \mathbf{v}_k^{\kappa,e}]_{IJP},
\end{aligned} \tag{3.96}$$

et on se ramène aux coordonnées de travail (ξ, η, γ) par

$$(\tilde{\partial}_l \mathbf{v}_k^{\kappa,e})_{IJK} = (\partial_l \xi)_{IJK} \sum_s D_{sI} [\mathbf{v}_k^{\kappa,e}]_{sJK} + (\partial_l \eta)_{IJK} \sum_s D_{sJ} [\mathbf{v}_k^{\kappa,e}]_{IsK} + (\partial_l \gamma)_{IJK} \sum_s D_{sK} [\mathbf{v}_k^{\kappa,e}]_{IJs}. \tag{3.97}$$

Pour compléter le calcul, on explicite les sommes internes dans le cas d'un milieu isotrope :

$$\sum_{jkl} [d_{ijkl} \partial_j \xi^m \tilde{\partial}_l \mathbf{v}_k^{\kappa,e}] = \sum_l \left[\lambda \partial_i \xi^m \tilde{\partial}_l \mathbf{v}_l^{\kappa,e} + \mu \partial_l \xi^m (\tilde{\partial}_i \mathbf{v}_i^{\kappa,e} + \tilde{\partial}_i \mathbf{v}_l^{\kappa,e}) \right], \tag{3.98}$$

où λ et μ sont les paramètres de Lamé.

On constate que l'expression de a_h associée à la fonction de base \mathbf{w}_α^i fait intervenir toutes les composantes et toutes les valeurs du champ \mathbf{v} dans l'élément τ_κ^e . La matrice de rigidité qui traduit cette opération est donc *a priori* pleine au sein de chaque élément, contrairement à la matrice de masse qui était diagonale.

Calcul de la matrice de passage B

On détaille ici le calcul de la matrice de passage \mathbf{B} qui traduit au niveau discret les contraintes de continuité à travers les interfaces non-conformes.

On reprend donc le calcul de la quantité $b_h(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu})$ où \mathbf{w} est un champ de déplacement admissible et $\boldsymbol{\mu}$ est un élément de la base de \mathcal{M}_h :

$$b_h(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{\kappa=1}^K \sum_{e=1}^{n_\kappa} \oint_{\Lambda^2} |\mathcal{J}_\kappa^e| [(\mathbf{w}^{\kappa,e} - \Pi \mathbf{w}^{\kappa,e}) \cdot \boldsymbol{\mu}^{\kappa,e}]. \tag{3.99}$$

Dans cette écriture, on a supposé que la triangulation la plus fine était \mathbf{v}_κ (i. e. $\underline{\kappa} = \kappa$), et on a noté $|\mathcal{J}_{\underline{\kappa}}^e|$ le jacobien de la transformation $\mathcal{G}_{\underline{\kappa}}^e$.

On commence par préciser le terme $\Pi \mathbf{w}^{\kappa,e}$ qui traduit la projection de $\mathbf{w}_{\kappa'}$ sur la triangulation la plus fine \mathbf{v}_κ . Rappelons que $\mathbf{w}_{\kappa'}$ est défini sur les éléments de la triangulation $\mathbf{v}_{\kappa'}$ qui contient quatre fois moins d'éléments que \mathbf{v}_κ (deux fois moins dans chaque direction d'espace).

Pour un élément v_κ^e de la triangulation fine on définit l'indice $a = a(e)$ pour repérer l'élément de $\mathbf{v}_{\kappa'}$ qui l'intersecte :

$$v_{\kappa'}^a \cap v_\kappa^e = v_\kappa^e . \quad (3.100)$$

Notons que pour un e donné, l'indice $a(e)$ est unique mais l'application $e \mapsto a(e)$ est simplement surjective. À l'aide de cette définition, on peut écrire :

$$\mathbf{w}_{\kappa'}|_{v_\kappa^e} = \mathbf{w}_{\kappa'}|_{v_{\kappa'}^a} , \quad (3.101)$$

et par conséquent :

$$\mathbf{w}_{\kappa'}|_{v_\kappa^e} = \mathbf{w}^{\kappa',a} \circ (\mathcal{G}_{\kappa'}^a)^{-1} . \quad (3.102)$$

On a ainsi fait apparaître $\mathbf{w}^{\kappa',a}$ qui, rappelons-le, est un polynôme sur le carré unité. De plus, on peut maintenant définir précisément la projection :

$$\Pi \mathbf{w}^{\kappa,e} \doteq \mathbf{w}^{\kappa',a} \circ (\mathcal{G}_{\kappa'}^a)^{-1} \circ \mathcal{G}_\kappa^e . \quad (3.103)$$

Comme fonction de base de l'espace des tractions, on définit $\boldsymbol{\mu}_\alpha^x$ sur v_κ^e par :

$$\boldsymbol{\mu}_\alpha^x(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}_\alpha^x \circ \mathcal{G}_\kappa^e(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} h_I^N \otimes h_J^N(\xi, \eta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (3.104)$$

Ce champ est associé au point numéro $\alpha \in \{1 \dots \underline{N}\}$ du maillage global, qui correspond au point $\mathcal{G}_\kappa^e(\xi_I^N, \xi_J^N)$ dans l'élément v_κ^e .

En appliquant la formule d'intégration numérique on trouve donc :

$$b_h(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}_\alpha^x) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N |\mathcal{J}_\kappa^e|_{pq} [(\mathbf{w}_x^{\kappa,e} - \Pi \mathbf{w}_x^{\kappa,e}) \boldsymbol{\mu}_\alpha^x]_{pq} \omega_p^N \omega_q^N , \quad (3.105)$$

c'est-à-dire, par définition de $\boldsymbol{\mu}_\alpha^x$:

$$b_h(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}_\alpha^x) = |\mathcal{J}_\kappa^e|_{IJ} [(\mathbf{w}_x^{\kappa,e} - \Pi \mathbf{w}_x^{\kappa,e})]_{IJ} \omega_I^N \omega_J^N . \quad (3.106)$$

Il nous reste finalement à expliciter le terme :

$$[\Pi \mathbf{w}_x^{\kappa,e}]_{IJ} = \mathbf{w}_x^{\kappa',a} \circ (\mathcal{G}_{\kappa'}^a)^{-1} \circ \mathcal{G}_\kappa^e(\xi_I^N, \xi_J^N) . \quad (3.107)$$

On commence par définir sur le carré unité les points :

$$\left(\xi_i^{a,e}, \xi_j^{a,e} \right) \doteq (\mathcal{G}_{\kappa'}^a)^{-1} \circ \mathcal{G}_\kappa^e(\xi_i^N, \xi_j^N) . \quad (3.108)$$

Cela nous permet de réécrire (3.107) comme :

$$[\Pi \mathbf{w}_x^{\kappa',e}]_{IJ} = \mathbf{w}_x^{\kappa',a}(\xi_I^{a,e}, \xi_J^{a,e}) . \quad (3.109)$$

Pour calculer ce terme, il suffira d'interpoller le champ scalaire $\mathbf{w}_x^{\kappa',a}$:

$$\mathbf{w}_x^{\kappa',a}(\xi_I^{a,e}, \xi_J^{a,e}) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [\mathbf{w}_x^{\kappa',a}]_{ij} h_i^N(\xi_I^{a,e}) h_j^N(\xi_J^{a,e}) . \quad (3.110)$$

Pour résumer, on voit que le calcul de $b_h(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}_\alpha^x)$ s'effectue en deux étapes :

$$b_h(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}_\alpha^x) = \oint_{\Lambda^2} |\mathcal{J}_\kappa^e| [\mathbf{w}^{\kappa,e} \cdot \boldsymbol{\mu}_\alpha^x] - \oint_{\Lambda^2} |\mathcal{J}_\kappa^e| [(\Pi \mathbf{w}^{\kappa,e}) \cdot \boldsymbol{\mu}_\alpha^x] . \quad (3.111)$$

La première partie de ce calcul fait apparaître une sous-matrice \mathbf{B}_1 qui est diagonale puisque les champs $\mathbf{w}^{\kappa,e}$ et $\boldsymbol{\mu}_\alpha^x$ sont définis sur les mêmes quadrangles. On retrouve ici à deux dimensions, le fait que la matrice de masse est diagonale. La deuxième partie du calcul fait apparaître une sous-matrice \mathbf{B}_2 qui couple les valeurs des différentes composantes du champ $\mathbf{w}^{\kappa',e}$ au sein de chaque élément $v_{\kappa'}^e$. Comme on l'a vu en détaillant les calculs, \mathbf{B}_2 est une matrice de projection qui est relativement simple à construire dans le cas d'un déraffinement du maillage d'un facteur deux.

Implémentation d'un double couple

On détaille ici l'implémentation d'une source en double couple dont le support est un point de collocation du maillage global.

La densité de forces associée s'écrit :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) f(t) , \quad (3.112)$$

où :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) . \quad (3.113)$$

Dans cette écriture $\mathbf{x}_s = (x_s, y_s, z_s)$ est la position du point source. On suppose par exemple que ce point se trouve dans l'élément τ_κ^e du sous-domaine Ω_κ :

$$x_s = \mathcal{F}_\kappa^e(\xi_p^N) , \quad (3.114)$$

$$y_s = \mathcal{F}_\kappa^e(\xi_q^N) , \quad (3.115)$$

$$z_s = \mathcal{F}_\kappa^e(\xi_r^N) . \quad (3.116)$$

Pour construire le vecteur des forces extérieures, on considère la fonction de base \mathbf{w}_α^x définie par (3.42) et on forme le produit scalaire de \mathbf{f} avec \mathbf{w}_α^x . On obtiendra le terme \mathbf{F}_α^x :

$$\mathbf{F}_\alpha^x = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_\alpha^x \, d\mathbf{x} = \int_{\tau_\kappa^e} (\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w}_\alpha^x)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial \tau_\kappa^e} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{w}_\alpha^x(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} . \quad (3.117)$$

On suppose également que le point source est à l'intérieur de l'élément, ce qui élimine le terme de surface :

$$\mathbf{F}_\alpha^x = \int_{\tau_\kappa^e} (\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w}_\alpha^x)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} . \quad (3.118)$$

On intègre alors directement puisque l'intégrande a un support ponctuel :

$$\mathbf{F}_\alpha^x = \sum_{j=1}^3 \sigma_{xj}^0(\mathbf{x}_s) \frac{\partial}{\partial x_j} (w_\alpha^x)(\mathbf{x}_s), \quad (3.119)$$

où w_α^x est la première composante de \mathbf{w}_α^x , c'est-à-dire la seule non-nulle. Par définition de \mathbf{w}_α^x on a donc :

$$\mathbf{F}_\alpha^x = \sum_{j=1}^3 \sigma_{xj}^0(\mathbf{x}_s) \frac{\partial}{\partial x_j} (h_I^N \otimes h_J^N \otimes h_K^N)(\xi_p^N, \xi_q^N, \xi_r^N), \quad (3.120)$$

et donc finalement :

$$\mathbf{F}_\alpha^x = \sum_j \sigma_{xj}^0(\mathbf{x}_s) \left\{ D_{Ip} \delta_{Jq} \delta_{Kr} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + D_{Jq} \delta_{Ip} \delta_{Kr} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + D_{Kr} \delta_{Ip} \delta_{Jq} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right\} (\xi_p^N, \xi_q^N, \xi_r^N), \quad (3.121)$$

où D est la matrice de dérivation 1D définie par (3.92). Sur l'expression (3.121), on voit que \mathbf{F}_α^x est non nul uniquement pour les points de collocation qui partagent deux composantes avec le point source. La distribution de forces obtenue après discrétisation d'un double couple ponctuel a donc une forme de croix centrée sur le point source.

On signale que le support ponctuel de la source défini par la relation (3.113) est en fait approché dans la discrétisation par éléments spectraux. La distribution de Dirac est en effet représentée ici comme un polynôme de Lagrange associé à un des points de collocation. Par conséquent, le support spatial de la source utilisée dépend naturellement de la discrétisation, en particulier de l'ordre polynômial utilisé dans l'élément qui contient la source et de la position du point de collocation dans l'élément. Pour être totalement consistant, il faudrait introduire la version discrète de la source dans la solution analytique du problème au moment de la comparaison des résultats.

3.C Annexe : Algorithmes de résolution du système d'interface

On présente ici l'implémentation de deux algorithmes permettant la résolution du système d'interface qui intervient dans le schéma d'évolution en temps. On trouvera dans (Ciarlet 1982) une présentation complète de ces méthodes.

Algorithme du gradient conjugué

On peut utiliser l'algorithme du gradient conjugué pour résoudre directement le système matriciel (3.65). Le système à résoudre est du type :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3.122)$$

où la matrice \mathbf{A} est la matrice carrée $\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}^t$, où \mathbf{b} est le second membre de (3.65) et où \mathbf{x} est l'incrément de traction que l'on cherche. On rappelle que les méthodes de type gradient sont basées sur le fait que la solution de (3.122) est également solution du problème de minimisation de la fonctionnelle $\mathcal{J}(\mathbf{x}) = 1/2(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) - (\mathbf{b}, \mathbf{x})$.

La méthode du gradient conjugué est une méthode de descente particulière associée à ce problème de minimisation. Le détail de sa mise en oeuvre est le suivant :

▷ On se donne un vecteur initial \mathbf{x}_0 et une direction initiale \mathbf{w}_0 qui pointe dans la direction du gradient \mathbf{g}_0 de la fonctionnelle \mathcal{J} :

$$\mathbf{x}_0 \text{ donné ,} \quad (3.123)$$

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b} , \quad (3.123)$$

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{g}_0 . \quad (3.124)$$

▷ On construit ensuite une suite de vecteurs (\mathbf{x}_j) en se donnant à chaque fois une direction \mathbf{w}_j et un pas de descente ρ_j :

$$\rho_j = \frac{(\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_j)}{(\mathbf{w}_j, \mathbf{A}\mathbf{w}_j)} , \quad (3.125)$$

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \rho_j \mathbf{w}_j . \quad (3.126)$$

▷ On calcule alors les directions conjuguées successives par :

$$\mathbf{g}_{j+1} = \mathbf{g}_j + \rho_j \mathbf{A}\mathbf{w}_j , \quad (3.127)$$

$$\mathbf{w}_{j+1} = -\mathbf{g}_{j+1} + \frac{\rho_{j+1}}{\rho_j} \mathbf{w}_j . \quad (3.128)$$

En pratique, on utilise la version discrète du produit scalaire dans $L^2(\Sigma_{SS})$ plutôt que le produit scalaire euclidien et on arrêtera les itérations lorsque la norme du vecteur gradient sera suffisamment faible.

Algorithme d'Uzawa

On peut également utiliser la nature de point-selle du problème discret que l'on a à résoudre dans le schéma en temps. Dans ce cas, on remplace les étapes (3.65), (3.66) et (3.67) par une seule phase de résolution :

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)} + \mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \mathbf{B}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{F}_{n+1} , \quad (3.129)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{0} , \quad (3.130)$$

dont les inconnues sont les vecteurs accélération $\mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)}$ et traction $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(i+1)}$ qui forment l'unique point-selle d'une fonctionnelle \mathcal{L} . L'algorithme d'Uzawa est en fait une méthode de gradient conjugué appliquée à la maximisation de la fonctionnelle \mathcal{L} dans la direction du multiplicateur de Lagrange. Dans la suite on notera :

$$\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)} , \quad (3.131)$$

$$\mathbf{d} \doteq \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} , \quad (3.132)$$

$$\boldsymbol{\lambda} \doteq \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{(i+1)} , \quad (3.133)$$

$$\mathbf{F} \doteq \mathbf{F}_{n+1} . \quad (3.134)$$

L'algorithme consiste alors à construire deux suites de vecteurs (\mathbf{a}_j) et $(\boldsymbol{\lambda}_j)$ pour approcher \mathbf{a} et $\boldsymbol{\lambda}$, avec les conditions initiales :

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_0 = \mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{d} , \quad (3.135)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{0} . \quad (3.136)$$

On se donne alors une règle de descente pour λ_j :

$$\lambda_{j+1} = \lambda_j + \rho_j \mathbf{w}_j , \quad (3.137)$$

avec :

$$\mathbf{w}_j = -\mathbf{B}\mathbf{a}_j + \alpha_j \mathbf{w}_{j-1} , \quad (3.138)$$

$$\alpha_j = \frac{|\mathbf{B}\mathbf{a}_j|^2}{|\mathbf{B}\mathbf{a}_{j-1}|^2} , \quad (3.139)$$

$$\mathbf{z}_j = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}^t \mathbf{w}_j , \quad (3.140)$$

$$\rho_j = \frac{-|\mathbf{B}\mathbf{a}_j|^2}{(\mathbf{B}\mathbf{a}_j, \mathbf{B}\mathbf{z}_j)} . \quad (3.141)$$

On en déduit directement l'accélération :

$$\mathbf{a}_{j+1} = \mathbf{a}_j + \rho_j \mathbf{z}_j . \quad (3.142)$$

En pratique, on arrêtera les itérations lorsque la norme du vecteur gradient associé à la maximisation de \mathcal{L} sera suffisamment faible. Il se trouve que ce vecteur gradient à l'itération j est exactement égal à la contrainte $\mathbf{B}\mathbf{a}_j$. Le critère d'arrêt est donc directement lié à la continuité de l'accélération au travers des interfaces non-conformes.

Chapitre 4

Modèles de boule solide homogène par couches

Dans ce chapitre, on présente les résultats de la méthode des éléments spectraux qui a été détaillée dans le chapitre 3.

On commence dans le paragraphe 4.2 par tester la méthode dans une boule homogène élastique et solide en utilisant tout d'abord un maillage conforme. Plusieurs positions de source sont illustrées pour valider la modélisation des différents types d'ondes de surface et de volume. On teste ensuite l'implémentation d'une interface non-conforme dans la boule homogène. Dans le paragraphe 4.3, on ajoute les termes de gravité dans le cas d'une boule solide homogène et d'un maillage non-conforme. La possibilité d'inclure une interface non-conforme qui coïncide avec une interface physique est étudiée dans le paragraphe 4.4 pour un bicouche élastique. Les conditions d'expérience correspondant aux paragraphes 4.2, 4.3 et 4.4 sont résumées dans la figure 4.25 de l'annexe 4.A, page 125.

4.1 Solution modale de référence

Toutes les expériences numériques présentées dans ce chapitre prennent en compte des milieux sphériques latéralement homogènes. On utilisera systématiquement comme référence une solution basée sur la sommation des modes propres du modèle que l'on considérera comme la solution analytique.

Le principe de la méthode est tout d'abord de chercher un champ de déplacement sous la forme d'onde harmonique :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(x) \exp(i\omega t) . \quad (4.1)$$

Les équations du mouvement sont ensuite écrites dans le domaine fréquentiel :

$$\mathbf{A}\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = -\omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) , \quad (4.2)$$

où \mathbf{A} est l'opérateur de l'élasto-gravité (1.84), et où le déplacement est obtenu dans le domaine fréquentiel par la transformée de Fourier :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \exp(-i\omega t) dt . \quad (4.3)$$

La solution est recherchée comme une superposition d'harmoniques sphériques généralisés (Phinney and Burridge 1973) :

$$u^\alpha(r, \theta, \varphi, \omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l U_{l,m}^\alpha(r, \omega) Y_l^{\alpha,m}(\theta, \varphi). \quad (4.4)$$

Dans cette écriture, α désigne une composante de la base canonique ($\mathbf{e}_-, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_+$) définie en fonction des coordonnées sphériques par :

$$\mathbf{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\theta + i\mathbf{e}_\varphi), \quad (4.5)$$

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_r, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_\theta + i\mathbf{e}_\varphi). \quad (4.7)$$

Les harmoniques sphériques $Y_l^{\alpha,m}$ sont construits comme des fonctions harmoniques de la variable φ et des polynômes de Legendre de la variable $\cos(\theta)$. Sur la figure 4.1, on a représenté les fonctions $Y_{10}^{0,0}$ et $Y_{10}^{0,5}$. De façon générale, un harmonique $Y_l^{\alpha,m}$ passe $(l - |m|)$ fois par zéro dans la direction θ et $2|m|$ fois dans la direction φ .

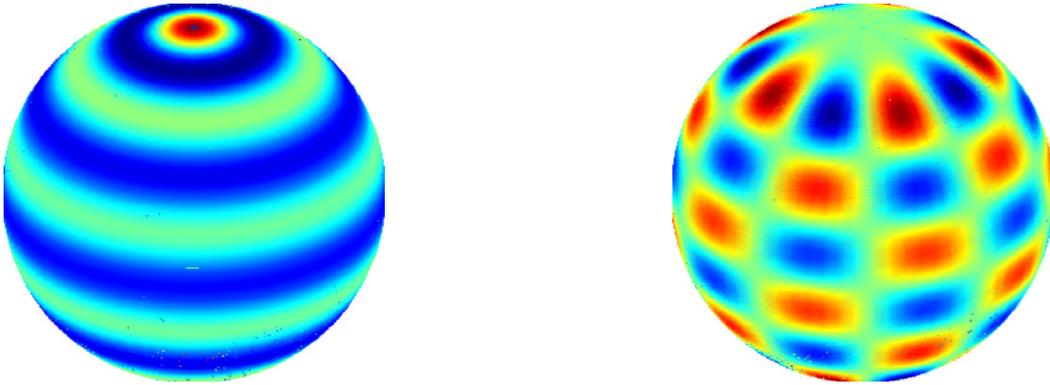


FIG. 4.1 – Représentation de quelques harmoniques sphériques généralisés. $Y_{10}^{0,0}$ (à gauche) est constant le long de la composante φ pendant que $Y_{10}^{0,5}$ (à droite) passe 10 fois par zéro. Le nombre de noeuds selon la colatitude est respectivement de 10 et 5.

En injectant la forme des solutions (4.4) dans l'équation (4.2), on obtient un système de trois équations différentielles ordinaires radiales qui sont indépendantes de l'indice m ¹. En imposant ensuite les conditions limites et la régularité à l'origine, on trouve deux familles de solutions. D'une part les déplacements scalaires toroïdaux, associés aux ondes de cisaillement transverse SH , et d'autre part les déplacements vectoriels sphéroïdaux, associés aux ondes P et SV .

Pour chaque indice l et pour chaque type de solution q , on obtient donc une infinité de fréquences propres (notées ${}_n\omega_l^q$), chacune étant de multiplicité $(2l + 1)$. Les modes propres associés sont notés $\mathbf{u}_{q,n,l,m}$, et ils forment une base orthogonale de l'espace des déplacements. La solution de l'équation d'onde excitée par une source est obtenue en effectuant la sommation des modes propres du problème :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_k a_k(\omega) \mathbf{u}_k(\mathbf{x}), \quad (4.8)$$

où k désigne le multi-indice (q, n, l, m) et où les a_k sont les coefficients d'excitation des modes :

$$a_k(\omega) = \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{f} \rangle}{\omega^2 - \omega_k^2}. \quad (4.9)$$

1. Voir, par exemple (Dahlen and Tromp 1998) p.268.

Pour le détail du calcul des fréquences et des modes propres, on se réfère à (Takeuchi and Saito 1972) et (Woodhouse 1988).

4.2 Boule homogène élastique solide

4.2.1 Grille conforme

Dans cette expérience, les hypothèses de travail (absence de gravité et maillage conforme) sont identiques à celles déjà utilisées dans les différentes études consacrées à la méthode des éléments spectraux pour l'élastodynamique². On cherche donc ici à tester l'adaptation de la méthode à la géométrie sphérique, c'est-à-dire à valider la transformation géométrique ainsi que les règles d'assemblage définies au chapitre précédent.

Le maillage utilisé est représenté sur la figure 4.2. Chaque région périphérique contient $8 \times 8 \times 4$ éléments et le cube central est décomposé en $8 \times 8 \times 8$ éléments. Le maillage complet est donc composé d'un total de 2048 éléments, c'est-à-dire d'environ $1.5 \cdot 10^6$ points pour un ordre polynômial fixé à $N = 8$. La plus petite distance dx_{\min} entre deux points de grille se trouve dans le cube central et vaut environ 34 km.

La densité de masse du milieu est $\rho = 3000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, la vitesse des ondes P est $\alpha = 8000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et la vitesse des ondes S est $\beta = 6000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Dans toutes les expériences présentées dans ce chapitre, on utilise une source explosive colloquée en un point de la grille, dont la dépendance temporelle est un *Ricker* qui est représenté sur la figure 4.3. Le spectre de la source, représenté sur la figure 4.4, est caractérisé par une période dominante T_{dom} et une période minimale T_{min} qui vérifie :

$$T_{\text{dom}} \simeq 2.5 T_{\text{min}} .$$

La dépendance temporelle de la source peut paraître éloignée de celle que l'on obtiendrait pour un tremblement de Terre provoqué par un glissement simple sur un plan de faille. Dans ce cas en effet, il faudrait considérer une fonction de type Heaviside pour caractériser le déplacement relatif des blocs de la faille. De plus, d'un point de vue théorique on aimerait bien calculer la fonction de Green obtenue par la méthode numérique et on souhaiterait donc implémenter une force ponctuelle en espace et en temps. Pour justifier l'utilisation de la source de la figure 4.3, on observe qu'elle ressemble beaucoup à la réponse instrumentale de certaines stations longue période (*e. g.* Shearer 1991a, p.18,149). Dans tout ce chapitre, on a utilisé un schéma de Newmark explicite pour assurer l'évolution en temps³. Le pas de temps utilisé dans les expériences A et B est $dt = 0.5 \text{ s}$, ce qui correspond à un nombre de Courant $\eta \simeq 0.23$. Rappelons que le nombre de Courant, qui est utilisé pour déterminer la stabilité du schéma, est défini par :

$$\eta = dt \left(\frac{\alpha}{dx} \right)_{\max} ,$$

où α désigne la vitesse des ondes P et dx est la distance entre deux points de grille.

Pour fixer les idées, on rappelle que la stabilité du schéma explicite est assurée pour $\eta \leq 0.6$ dans le cas d'une modélisation à deux dimensions dans des éléments non-déformés (d'après Komatitsch 1997). Dans le cas des maillages sphériques présentés ici, on a constaté que le nombre de Courant maximal assurant la stabilité⁴ était de l'ordre de $\eta_{\max} \simeq 0.3$.

2. Voir (Komatitsch and Vilotte 1998) et les références qui y sont données.

3. Cela correspond au choix $\beta = 0$, $\gamma = 1/2$ dans le schéma présenté au paragraphe 3.4.8.

4. On a testé la stabilité pendant un maximum de 20000 pas de temps.

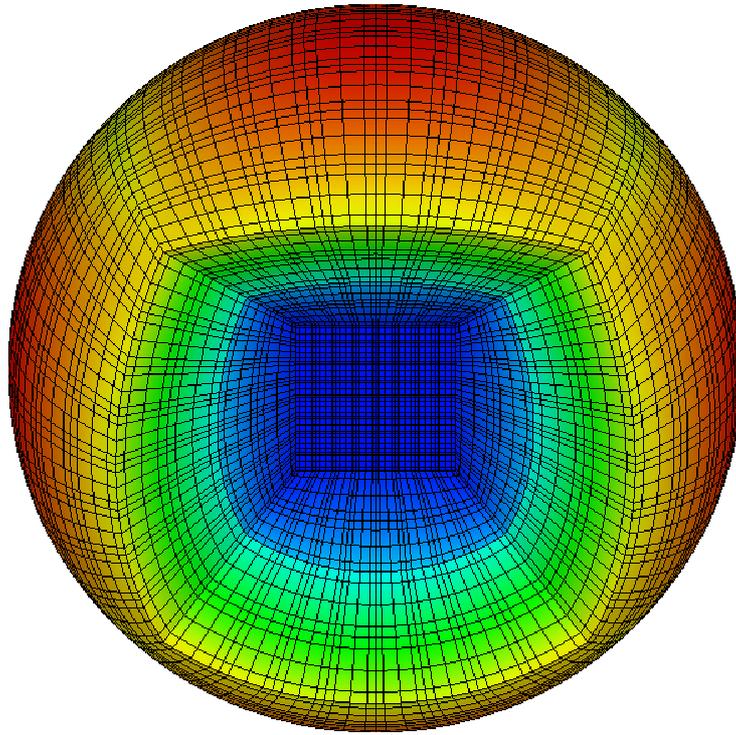


FIG. 4.2 – Maillage conforme utilisé dans les expériences A et B. Le rayon de la boule est égal au rayon moyen de la Terre, $R_t = 6371$ km. Une des régions périphériques a été supprimée pour permettre de voir l'intérieur de la grille. Pour la clarté de la figure, un ordre polynômial $N = 4$ (5 points par direction) a été utilisé. La carte de couleurs représente les variations de l'élément de volume (i. e. le jacobien) à travers la boule.

Source en surface

Dans cette première expérience (A), la source se trouve à la profondeur $p_s \simeq 63$ km. La période dominante de la source est $T_{\text{dom}} \simeq 372$ s, ce qui définit une longueur d'onde P dominante de 2976 km, c'est-à-dire environ un quart du diamètre de la sphère. La durée totale de la simulation est de 8640 s, ce qui permet de voir un tour complet des ondes de Rayleigh à la surface du modèle.

Dans cette simulation, ainsi que dans toutes celles présentées dans la suite de ce chapitre, on a placé les récepteurs aux points de la grille qui se trouvent sur l'équateur. Comme il est d'usage en sismologie, on représentera systématiquement les composantes radiale, longitudinale et transverse dont les directions sont représentées sur la figure 4.5. La direction radiale correspond à la verticale pour un observateur se trouvant à la surface de la Terre, la direction longitudinale est définie dans le plan du grand cercle qui relie la source au récepteur tandis que la direction transverse lui est perpendiculaire. Les directions transverse et longitudinale appartiennent donc au plan tangent à la sphère et coïncident, à une rotation près, avec les vecteurs de base \vec{e}_θ et \vec{e}_φ des coordonnées sphériques. Rappelons ici que dans le cas d'un modèle à symétrie sphérique, une source explosive n'excite pas le mode de cisaillement transverse et que seules les composantes radiale et longitudinale enregistrent du signal en surface. Dans toutes les expériences présentées dans la suite, on ne représentera donc pas la composante transverse.

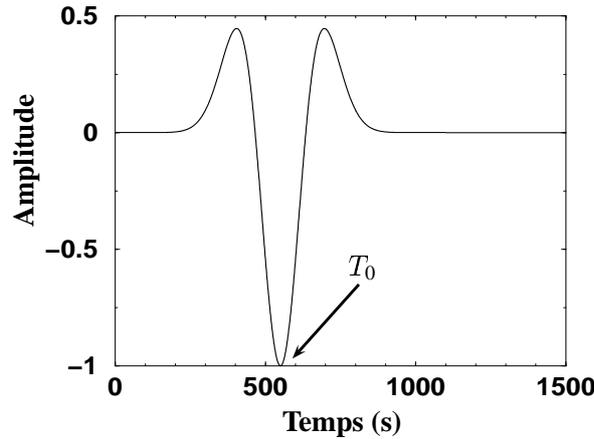


FIG. 4.3 – Amplitude normalisée de la source utilisée dans les expériences A à F. Cette fonction (appelée Ricker) est une dérivée seconde de gaussienne, décalée d'un facteur T_0 par rapport à l'origine.

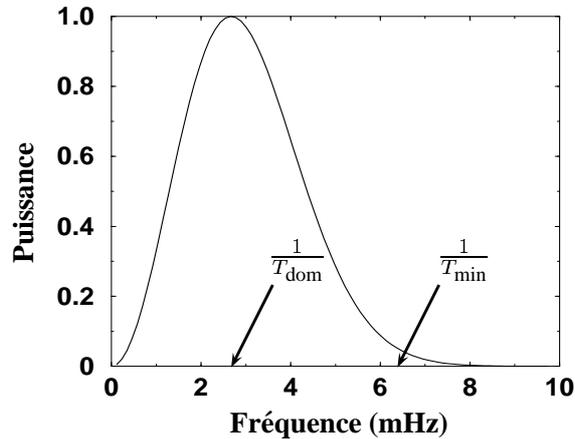


FIG. 4.4 – Spectre de la source utilisée dans les expériences A à F. La période dominante T_{dom} est associée au maximum du spectre. La période minimale T_{min} est définie par la fréquence qui correspond à 5% de ce maximum.

Sur la figure 4.6, on a représenté sous forme de sismogrammes les composantes radiale et longitudinale du champ de déplacement enregistré à la surface de la boule. L'espace irrégulier des traces reproduit la répartition des points de collocation le long de l'équateur. On remarque ainsi sur la figure la présence de «bandes verticales» qui est due à la densification des points de GLL sur les bords des éléments spectraux. En comptant le nombre de bandes, on retrouve le nombre d'éléments qui ceinturent la sphère (ici 32). La source superficielle a excité de fortes ondes de surface que l'on reconnaît au fait que les hodochrones (les courbes de temps d'arrivée) qui leur correspondent sont des droites⁵. Sur les sismogrammes, on a identifié l'onde de Rayleigh qui a une polarisation elliptique rétrograde dans le plan du grand cercle, et que l'on retrouve donc sur les composantes radiale et longitudinale. En termes de modes propres, l'onde de Rayleigh est associée au premier des modes de vibrations sphéroïdales qui est appelé «mode fondamental». La vitesse apparente de l'onde de Rayleigh est de $5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui correspond à un temps de trajet d'environ 4000 s pour rejoindre l'antipode et d'environ 8000 s pour faire un tour de sphère complet. Comme on l'a suggéré au paragraphe 3.3.3, les plus petites longueurs d'onde du modèle sont associées aux ondes de Rayleigh. Ce sont donc ces longueurs d'onde qu'il faut correctement échantillonner pour

5. Le trajet d'une onde de surface suit l'arc de cercle entre l'épicentre et le récepteur, il est donc proportionnel à la distance épacentrale.

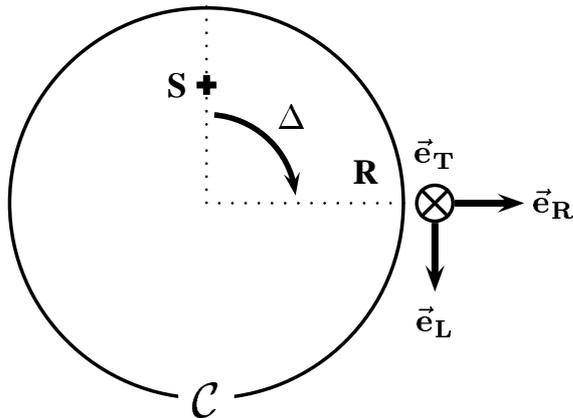


FIG. 4.5 – Définition des composantes radiale, longitudinale et transverse. \mathcal{C} est le grand cercle qui relie l'épicentre au récepteur. La distance épacentrale Δ est l'angle mesuré entre la source (S) et le récepteur (R) dans le plan du grand cercle.

obtenir une solution numérique précise. Dans cette expérience, on a imposé un minimum de 5 points de grille par longueur d'onde (d'après (Komatitsch and Vilotte 1998)) en prenant une vitesse minimale de référence de $4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Ainsi, toutes les longueurs d'onde présentes dans la simulation sont correctement (voire trop) échantillonnées.

On remarque sur les sismogrammes que l'onde de Rayleigh n'est pas dispersive, ce qui n'est pas *a priori* évident. En effet, si l'onde de Rayleigh n'est jamais dispersive dans le cas d'un demi-espace élastique homogène, on peut s'attendre à une modification de cette propriété en présence de topographie à la surface libre, *e. g.* (Rulf 1969). Dans ce cas, la vitesse de phase d'une onde monochromatique de type Rayleigh dépend du rapport entre sa longueur d'onde et le rayon de courbure de la topographie. On pourra par exemple négliger la courbure à très haute fréquence et on retrouvera comme vitesse de phase asymptotique la vitesse des ondes de Rayleigh pour le demi-espace élastique. Dans le cas de la boule homogène de l'expérience A, on a représenté sur la figure 4.7 les vitesses de groupe des premiers harmoniques sphéroïdaux en fonction de la fréquence. On vérifie que l'onde de Rayleigh (associée au mode fondamental $n = 0$) est très faiblement dispersive, même si la fréquence centrale de la simulation est relativement basse ($\simeq 2.7 \text{ mHz}$). En pratique, il faudrait donc attendre que l'onde de Rayleigh parcourt un certain nombre de tours de la boule avant de voir à l'œil nu la différence entre vitesses de phase et vitesse de groupe.

La deuxième « onde de surface » que l'on a indiqué sur la composante longitudinale est la phase « X ». Cette phase a été identifiée et baptisée par Jobert, Gaulon, Dieulin, and Roullet (1977) dans le cas de la Terre. En termes de modes propres, elle correspond à une superposition d'harmoniques sphéroïdaux. L'équivalent en termes d'ondes de volume est une succession de réflexions sous la surface et de conversions entre les ondes P et SV . Sur les sismogrammes on distingue clairement sur la composante longitudinale une arrivée d'énergie impulsive qui correspond au premier train de la phase X entre la source et le récepteur. La vitesse apparente de cette phase coïncide avec la vitesse des ondes P ($8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$), et on peut donc l'interpréter comme une série de réflexions multiples de l'onde P à la surface de la boule. La polarisation de cette phase est donc systématiquement tangente à la sphère, ce qui explique son absence sur la composante radiale. Lorsque ce train d'onde atteint l'antipode, on observe clairement une conversion de modes et la polarisation du train X_2 est répartie sur les composantes radiale et longitudinale. D'autre part, on observe de la dispersion sur les trains successifs de la phase X, ce qui est cohérent avec la dépendance en fréquence des vitesses de groupe des harmoniques sphéroïdaux (voir la figure 4.7). La conjonction de ces deux effets (conversions de modes et dispersion) procure aux trains successifs de la phase X une forme d'onde de complexité croissante.

On peut remarquer par ailleurs une distorsion au tout début du signal dans l'élément spectral qui contient le point source. Ce phénomène, qui est dû au rayonnement artificiel de la source en croix lors de

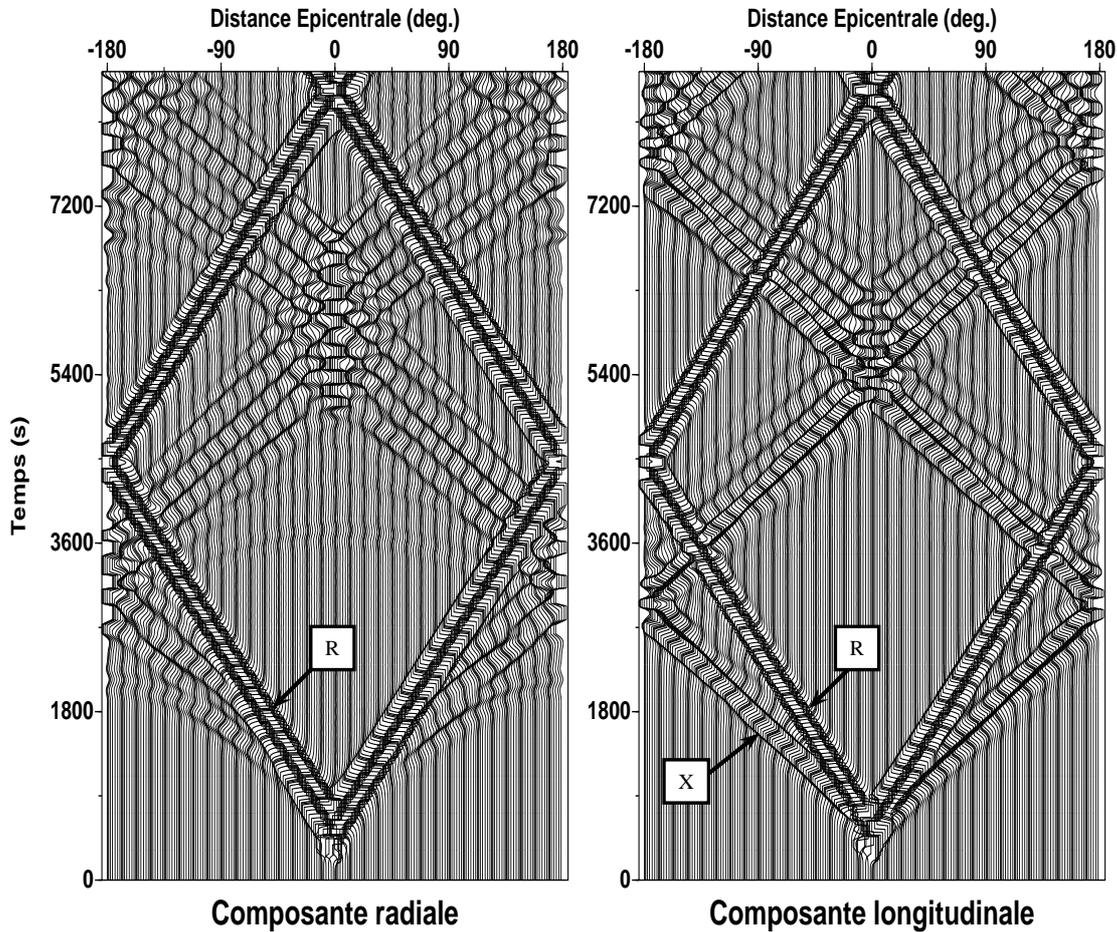


FIG. 4.6 – Sismogrammes en déplacement enregistrés à l'équateur dans une boule élastique homogène avec une grille conforme (expérience A). Les amplitudes supérieures à 85% du maximum ont été tronquées. On a indiqué l'onde de Rayleigh (R) ainsi que la phase X.

l'implémentation d'un double couple⁶, n'est pas propagatif et s'estompe dès que la source a fini d'émettre.

Sur la figure 4.8, on a représenté quelques traces en surface et leur comparaison avec la solution analytique du paragraphe 4.1. On constate que les traces sont dominées par les ondes de Rayleigh et par la phase X, comme on pouvait le voir sur la figure 4.6. On peut également observer la focalisation de l'énergie sismique à l'antipode ($\Delta = 180^\circ$) et notamment l'interférence des deux trains d'ondes de Rayleigh qui «écrasent» les autres phases du signal. Au passage de l'antipode on constate également un déphasage de $\pi/2$ qui «retourne» le signal de l'onde de Rayleigh. En terme d'optique géométrique, ce déphasage est caractéristique de la présence d'une caustique. La caustique est ici localisée à l'antipode de la source, car ce point particulier appartient à tous les grands cercles (une infinité) qui passent par l'épicentre.

On remarque un signal parasite dans la solution modale centré sur le temps T_0 et qui se retrouve dans le

6. Voir le paragraphe 3.B.

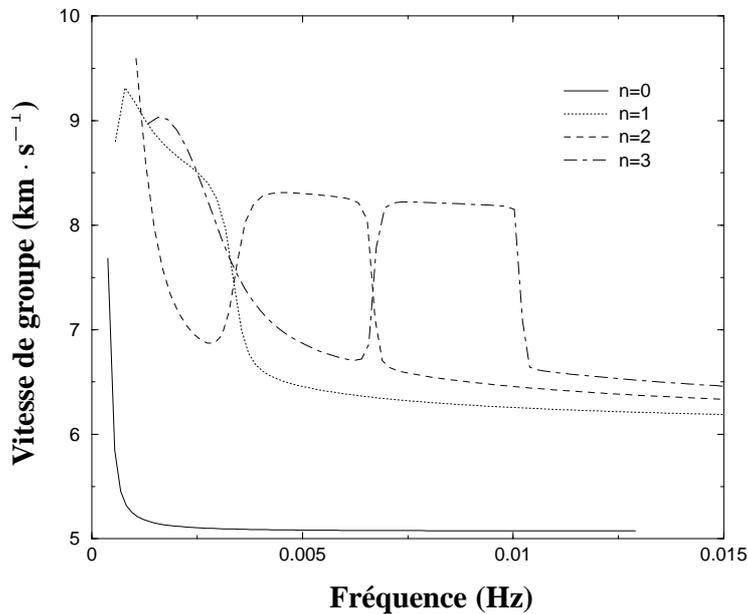


FIG. 4.7 – Vitesses de groupes en fonction de la fréquence du mode fondamental et des 3 premiers harmoniques sphéroïdaux pour la boule homogène élastique de l'expérience A. Le mode fondamental ($n = 0$) est très faiblement dispersif dans la gamme de fréquence utilisé dans l'expérience, à l'inverse des harmoniques ($n > 0$). Contrairement au mode fondamental, chacun des harmoniques n'est pas directement associé à un type d'onde, ce qui explique les créneaux observés sur les courbes. On constate que la superposition des différents harmoniques fait apparaître des hyperboles correspondant à des vraies phases sismiques dont les vitesses de groupe à haute fréquence varient entre les vitesses S et P du milieu.

résidu. Il est dû à une troncature un peu sévère de la sommation en l dans l'expression (4.8) qui provoque une approximation du support ponctuel de la source. Comme conséquence, on voit apparaître un signal anticausal qui ne se manifeste qu'autour du temps T_0 .

La différence entre les deux solutions est principalement due à un déphasage qui est imperceptible à l'oeil et l'erreur maximale est d'environ 0.5% pour les ondes de Rayleigh. Ce résidu est essentiellement contrôlé par l'ordre du schéma en temps qui vaut seulement 2 alors que l'ordre du schéma en espace est de 8. La comparaison avec la solution analytique est donc tout à fait satisfaisante et valide l'adaptation de la méthode à la géométrie sphérique.

Sur la figure 4.9, on a représenté la variation des énergies cinétique et potentielle du système discret dans les derniers instants de la simulation⁷. On constate que le schéma en temps est d'une part stable sur le temps de simulation considéré, et qu'il assure d'autre part la conservation de l'énergie du système discret.

Sur 8 processeurs EV6, chaque pas en temps a nécessité environ 1.5 s de temps calcul pour une mémoire totale d'environ 1 Go⁸. Environ 10 % du temps a été consacré aux communications entre processeurs durant les phases d'assemblage.

7. Le calcul de ces énergies au niveau discret est rappelé dans l'annexe 4.A.

8. Tous les calculs sont effectués en double précision.

Source profonde

Dans cette expérience (B), les paramètres de la simulation sont identiques à ceux de l'expérience A, à l'exception de la profondeur de la source qui vaut $p_s \simeq 1187$ km. La figure 4.10 représente les sismogrammes obtenus à la surface de la boule homogène élastique. Bien que la source soit relativement profonde, on voit encore clairement l'onde de Rayleigh et la phase X. Cela est dû au fait que la simulation est très basse fréquence, puisque la source se trouve à une demi-longueur d'onde fondamentale P de la surface. On distingue cependant plus clairement les ondes de volume notamment la première arrivée d'énergie sur chaque trace qui correspond à l'onde P (on peut vérifier que la polarisation de l'onde P est purement radiale à l'antipode).

La comparaison des traces obtenues en surface avec la solution analytique est représentée sur la figure 4.11. L'amplitude du résidu est inférieure à celle que l'on avait obtenue pour l'expérience A, et atteint un maximum d'environ 0.1%.

Les enregistrements ne sont plus dominés par les ondes de surface, et on constate la bonne modélisation de phases sismiques moins énergétiques qui se propagent dans le volume de la boule. On constate de nouveau le phénomène de refocalisation à l'antipode qui permet de voir clairement émerger l'onde de Rayleigh et la phase X du reste du signal.

La conservation de l'énergie dans les derniers instants de la simulation est illustrée par la figure 4.12. Les conversions d'énergies cinétique et potentielle traduisent les réflexions multiples des ondes de volume à la surface de la boule ainsi que les interférences entre ondes de surface.

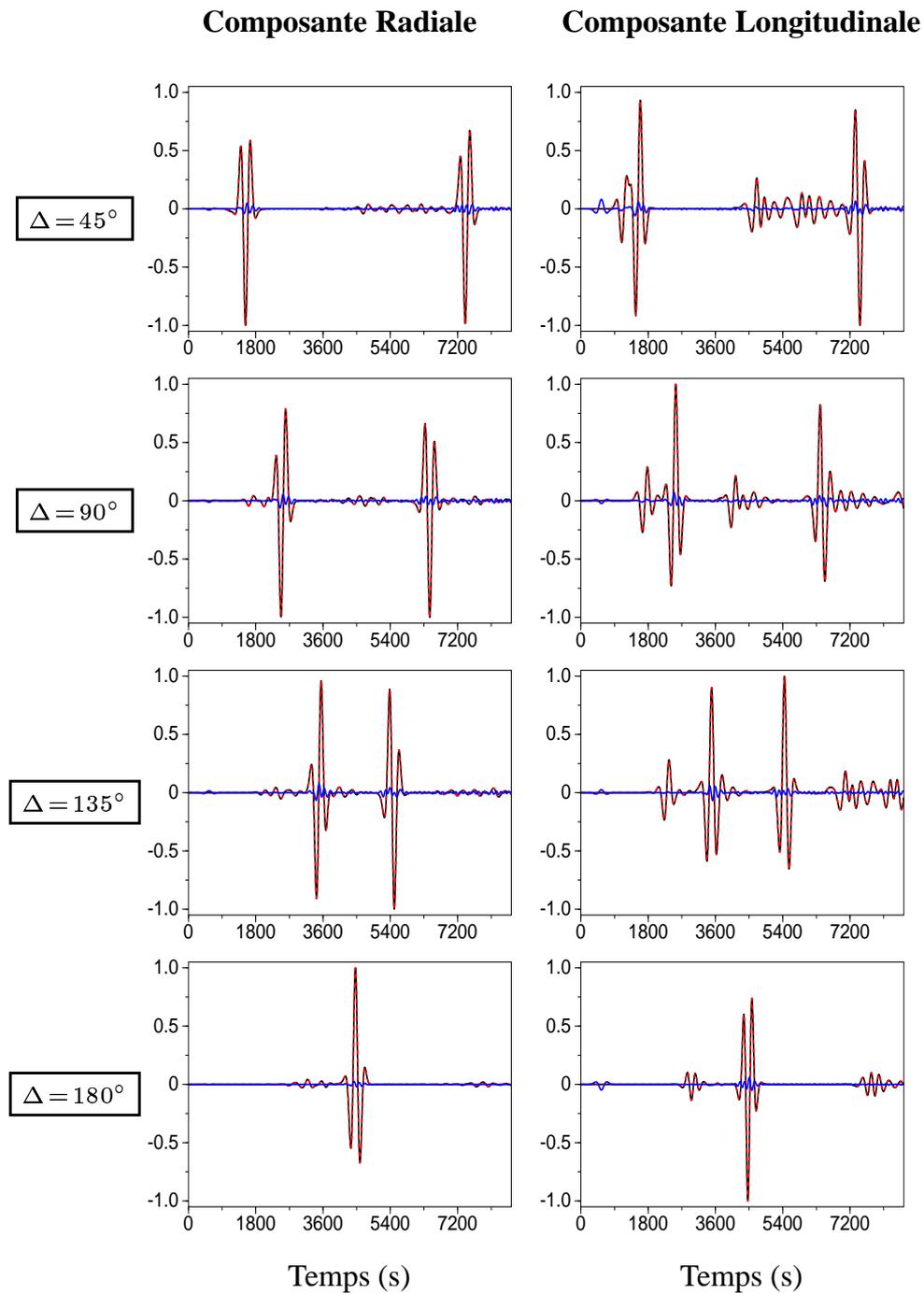


FIG. 4.8 – Traces en surface pour un échantillon de distances épacentrales. Les courbes en trait rouge tireté sont calculées par une méthode de sommation des vibrations propres de la boule. La solution obtenue par la méthode des éléments spectraux (expérience A) est dessinée en trait noir et le résidu entre les deux solutions multiplié par 10 est tracé en bleu. Toutes les traces sont normalisées.

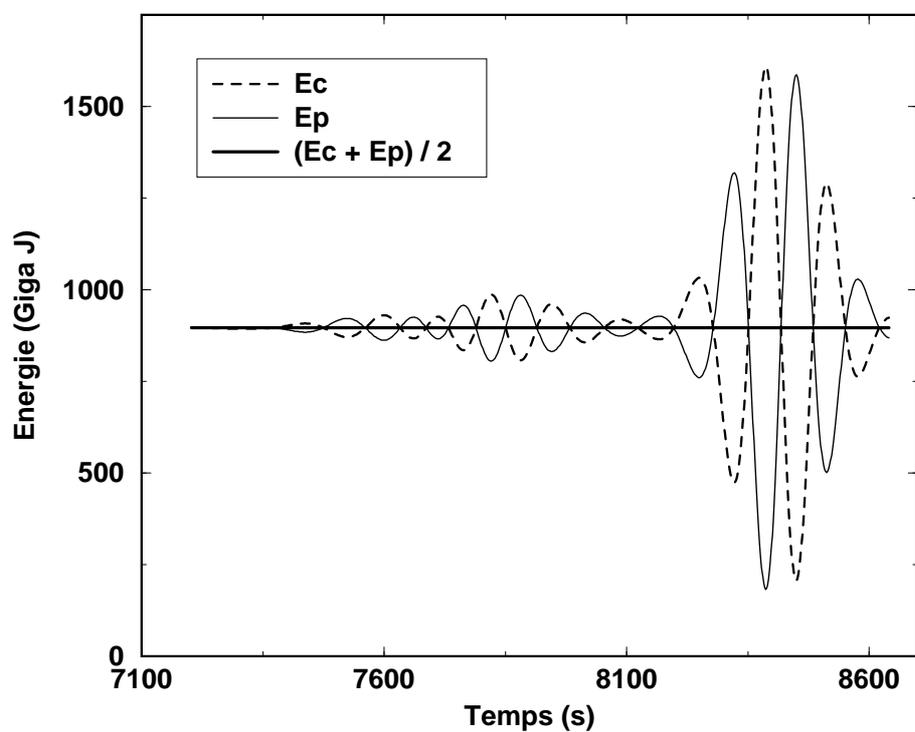


FIG. 4.9 – Variation de l'énergie cinétique (E_c) et potentielle (E_p) au cours des 20 dernières minutes de la simulation (expérience A). Les conversions d'énergie vers 8400 s correspondent à l'interférence des trains d'ondes de Rayleigh à l'antipode. L'énergie totale du système reste constante en l'absence d'atténuation.

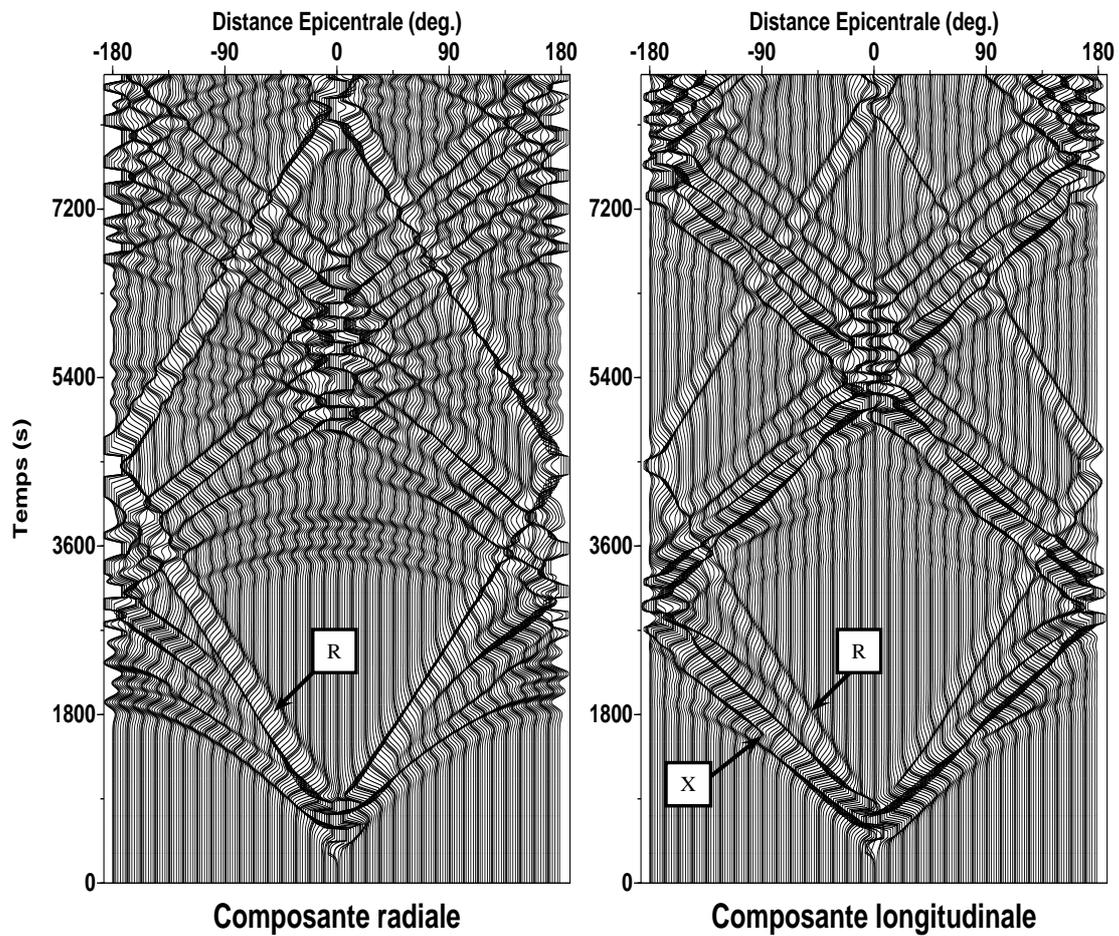


FIG. 4.10 – Sismogrammes en déplacement enregistrés à l'équateur dans une boule élastique homogène avec une grille conforme (expérience B). Les amplitudes supérieures à 85% du maximum ont été tronquées. On a indiqué l'onde de Rayleigh (R) ainsi que la phase X.

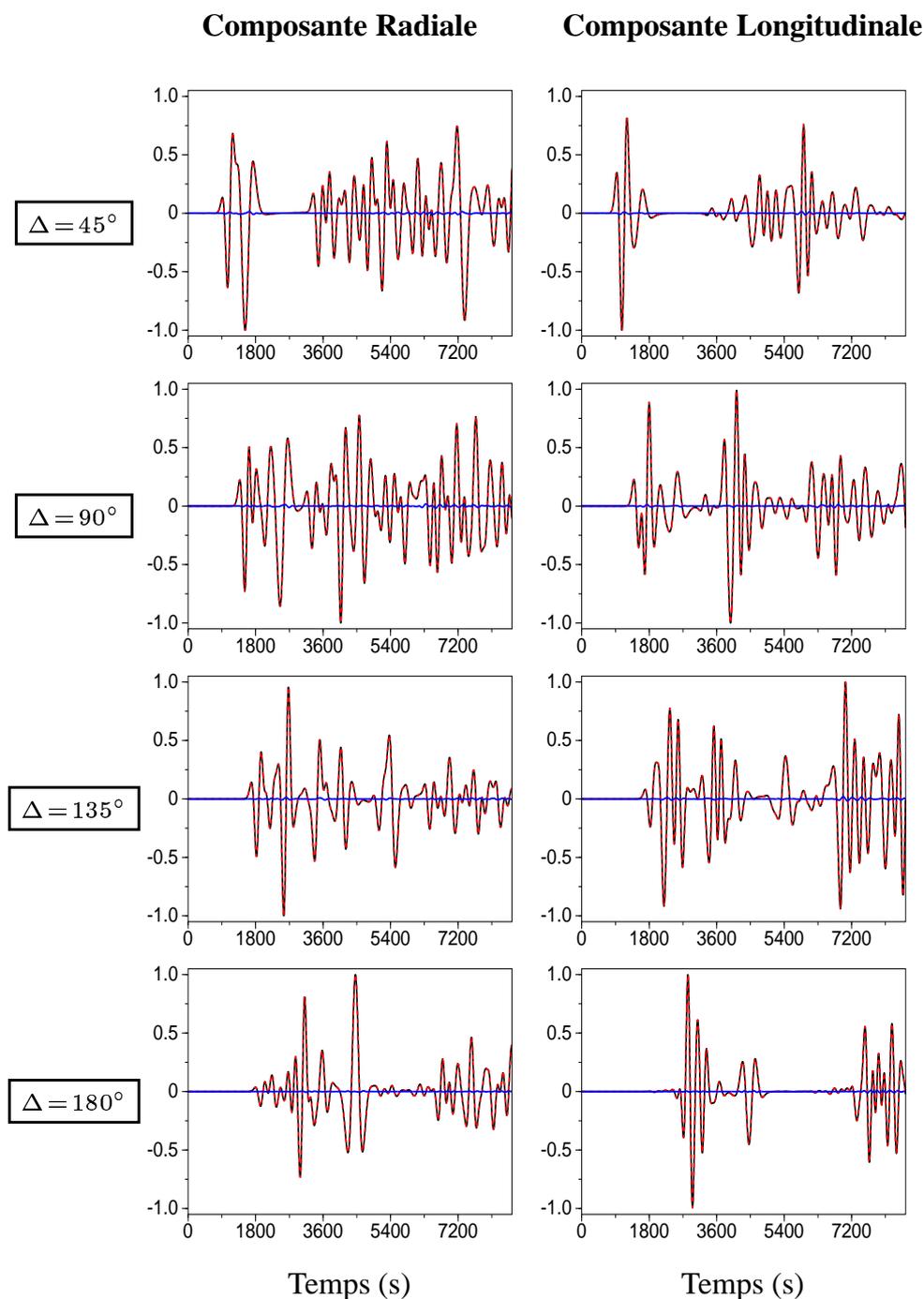


FIG. 4.11 – Traces en surface pour un échantillon de distances épacentrales. Les courbes en trait rouge tireté sont calculées par une méthode de sommation des vibrations propres de la boule. La solution obtenue par la méthode des éléments spectraux (expérience B) est dessinée en trait noir et le résidu entre les deux solutions multiplié par 10 est tracé en bleu. Toutes les traces sont normalisées.

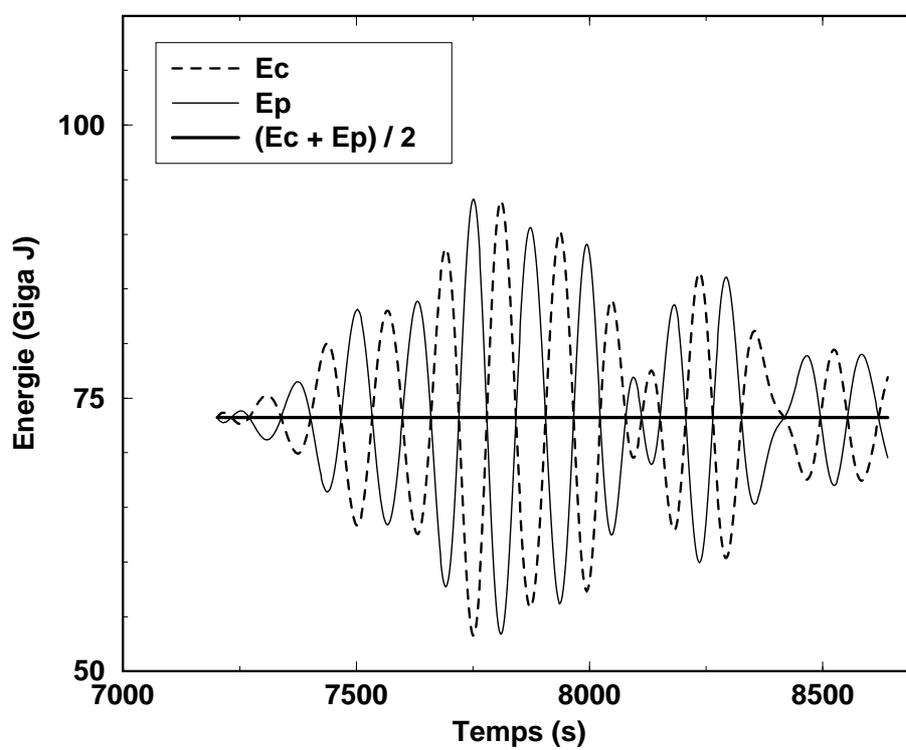


FIG. 4.12 – Variation de l'énergie cinétique (E_c) et potentielle (E_p) au cours des 20 dernières minutes de la simulation (expérience B). L'énergie totale du système reste constante en l'absence d'atténuation.

4.2.2 Grilles non conformes

L'objet de cette expérience (C) est de valider l'implémentation d'une interface solide-solide non-conforme dans le cas simple d'une boule homogène élastique.

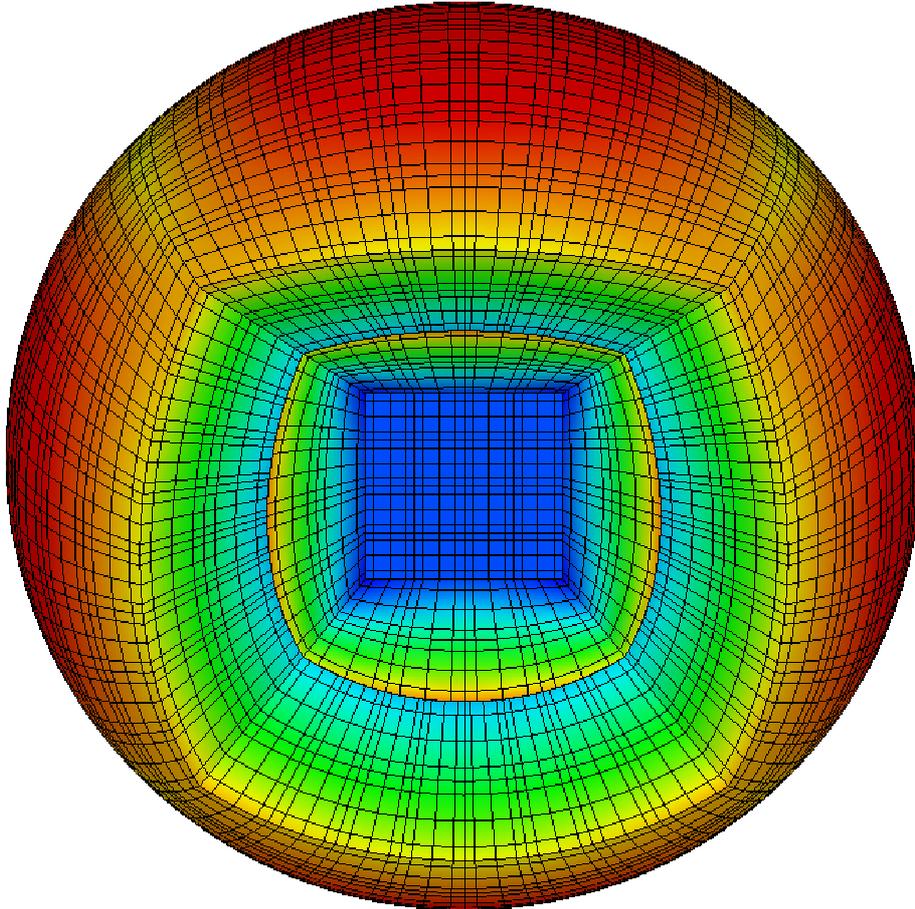


FIG. 4.13 – Maillage utilisé dans l'expérience C. Le rayon de la boule est égal au rayon moyen de la Terre, $R_t = 6371$ km et une interface non-conforme est implémentée à 2500 km de profondeur. Une des régions périphériques a été supprimée pour permettre de voir l'intérieur de la grille. Pour la clarté de la figure, un ordre polynômial $N = 4$ (5 points par direction) a été utilisé. La carte de couleurs représente les variations de l'élément de volume (i. e. le jacobien) à travers la boule.

Le maillage utilisé est représenté sur la figure 4.13. Il est composé de 1024 éléments spectraux et d'environ 750 000 points pour un ordre polynômial $N = 8$, c'est-à-dire moitié moins que pour le maillage conforme utilisé dans les expériences A et B. Rappelons que pour imposer un déraffinement d'un facteur deux dans une boule homogène, le rayon de l'interface non-conforme doit être inférieur ou égal à la moitié du rayon de la boule. Ce n'est pas le cas dans cette expérience puisque l'interface non-conforme se trouve à 2500 km de profondeur. Cependant, les longueurs d'onde étant largement sur-échantillonnées dans la partie superficielle du modèle, la discrétisation reste convenable en profondeur.

On a choisi de placer la source en profondeur, comme pour l'expérience B, de façon à ce que le signal ne

soit pas dominé par les ondes de surface, puisque celles-ci ne «voient» pas l'interface non-conforme sauf à très basse fréquence. La résolution du système d'interface (3.65) est assurée par la méthode du gradient conjugué présentée à l'annexe 3.B. On observe un taux de convergence de 0.6^9 et le nombre moyen d'itérations est égal à 8. À l'issue des itérations de la méthode du gradient conjugué, la satisfaction de la contrainte est vérifiée en calculant la norme (dans $\mathbf{L}^2(\Sigma_{SS})$) du saut d'accélération, \mathbf{Ba}_{n+1} . Dans l'expérience présentée ici, la contrainte de continuité de l'accélération est satisfaite à 10^{-2} près. Enfin, le pas de temps est ici $dt = 1$ s c'est-à-dire deux fois plus grand que pour un maillage conforme pour un même nombre de Courant $\eta \simeq 0.23$.

La figure 4.14 représente les déplacements enregistrés en surface pour une gamme de distances épacentrales, et leur comparaison avec la solution analytique. On constate que l'accord entre les solutions est tout à fait acceptable, puisque le résidu obtenu, tout en étant légèrement supérieur à celui de la méthode conforme, reste inférieur au pourcent.

Afin d'illustrer la résolution du système d'interface, on a comparé les multiplicateurs de Lagrange sur l'interface non-conforme avec les vecteurs tractions calculés dans une grille conforme. Le résultat de cette comparaison est représenté sur la figure 4.15 et confirme l'interprétation physique des multiplicateurs de Lagrange qui apparaissent comme des taux de traction sur l'interface non-conforme. Le résidu entre les deux courbes atteint une valeur maximale de l'ordre de 5 %. Cette valeur quelque peu élevée est due en partie au fait que, dans l'expérience A, on calcule le taux de traction après la phase de correction sur la vitesse (3.69) alors que les multiplicateurs de Lagrange sont calculés à l'issue de la phase de prédiction. Cela introduit un léger décalage en temps qui explique la différence observée.

La conservation de l'énergie dans les derniers instants de la simulation est illustrée par la figure 4.16. On constate à nouveau la stabilité du schéma en temps et on n'observe pas de perte ni de conversion d'énergie qui serait due à la prise en compte de l'interface non-conforme (comparer avec la figure 4.12).

L'algorithme correspondant à cette simulation a été implémenté sur 8 processeurs EV6 et a nécessité en moyenne 1.7 s pour chaque pas de temps pour une mémoire totale d'environ 1.2 Go. L'occupation mémoire est ici relativement importante car d'une part la proportion d'éléments sur l'interface non-conforme est assez élevée et d'autre part la résolution sur l'interface n'est pas optimisée en terme d'allocation mémoire. Environ 5 % du temps a été consacré aux communications entre processeurs durant les phases d'assemblage et 45 % à la résolution du système d'interface.

4.3 Boule homogène autogravitante solide

Dans ce paragraphe, on considère une boule homogène autogravitante (expérience D) et on utilise la source superficielle de l'expérience A avec le maillage non-conforme de l'expérience C. Rappelons que la prise en compte de la gravité ne modifie pas les vitesses des ondes de volume. Aux fréquences auxquelles on travaille, on s'attend en revanche à un effet non négligeable sur les temps d'arrivée et sur les amplitudes des ondes de surface.

La figure 4.17 montre les sismogrammes en déplacement obtenus à la surface de la boule. Comme dans le cas élastique, la composante transverse n'est pas excitée par la source explosive et seules les composantes radiale et longitudinale sont représentées. On a indiqué comme précédemment l'onde de Rayleigh et la phase X.

La comparaison des traces en surface avec la solution analytique du problème est représentée sur la figure 4.18. Comme dans l'expérience de la boule élastique homogène, les résidus les plus importants sont

9. C'est-à-dire que l'on gagne 6 ordres de grandeur sur la norme du résidu toutes les 10 itérations.

obtenus pour les ondes de Rayleigh qui sont associées aux longueurs d'ondes minimales du milieu. La valeur maximale du résidu est supérieure à celle obtenue dans le cas élastique en raison de la diminution de la vitesse apparente de l'onde de Rayleigh en présence de gravité. Malgré ce phénomène, l'amplitude du résidu n'excède pas le pourcent.

Pour illustrer l'effet de la gravité, on a superposé sur les figures 4.19 et 4.20 les composantes radiale et longitudinale obtenues en surface avec les traces correspondant au cas purement élastique. Pour chaque distance épacentrale, on a indiqué les deux premiers trains de l'onde de Rayleigh (R_1 et R_2) et ceux de la phase X sont indiqués sur la composante longitudinale (figure 4.20). On rappelle que les trains R_1 et X_1 suivent le trajet direct entre épacentre et récepteur et correspondent à une distance parcourue égale à Δ , tandis que les trains R_2 et X_2 décrivent le grand cercle à l'envers et parcourent donc une distance égale à $2\pi - \Delta$.

On constate clairement une diminution de la vitesse des ondes de Rayleigh en présence de gravité. Le plus grand décalage en temps est observé sur les figures 4.19 et 4.20 pour le train R_2 à 100° , ce qui correspond à la plus grande distance parcourue (presque trois quarts de la circonférence de la boule). On remarque également un déphasage des ondes de Rayleigh qui affecte la forme d'onde au cours du temps et qui augmente pour les trains successifs (R_1 , R_2 , etc).

Curieusement, on remarque une légère augmentation de la vitesse de la phase X en présence des effets de la gravité, c'est-à-dire l'inverse de ce que l'on obtient pour les ondes de Rayleigh. L'examen des vitesses de groupe du mode fondamental et des premiers harmoniques pour une boule homogène autogravitante confirment cette observation (voir la figure 4.21). Comme on s'y attend, ces effets sont essentiellement basse fréquence et disparaissent asymptotiquement à mesure que la fréquence du signal augmente.

Pour cette simulation on a choisi un pas de temps $dt = 1$ s comme dans le cas élastique. L'implémentation de l'algorithme sur 8 processeurs EV6 a nécessité environ 2.6 s pour chaque pas de temps, l'augmentation par rapport au cas élastique étant due au calcul des termes de gravité.

4.4 Boule solide homogène par morceaux

Après avoir testé l'implémentation de la méthode dans une boule homogène, on se propose ici de traiter le cas d'une boule élastique à deux couches entre lesquelles on place une interface non-conforme (expérience F).

On a imposé un saut de 10% sur les vitesses P et S à travers l'interface et une augmentation d'un facteur 3 de la densité de masse. Dans cette expérience, les vitesses les plus faibles sont situées à l'intérieur de la boule, ce qui permet de conserver le même pas en temps dans le schéma de Newmark tout en diminuant le nombre de Courant¹⁰.

Les sismogrammes obtenus sont représentés sur la figure 4.22 et sont dominés par les réverbérations des ondes de volume dans le milieu. Les ondes de surface sont moins excitées que dans le cas homogène (expérience B), principalement à cause du contraste de vitesses à l'interface entre les couches du modèle. On distingue tout de même les ondes de Rayleigh sur la composante radiale et les passages successifs de la phase X sur la composante longitudinale.

La comparaison des traces obtenues en surface avec la solution analytique est illustrée par la figure 4.23. L'accord observé est satisfaisant, le résidu étant toujours inférieur à 0.5%. On remarque cependant une oscillation à très basse fréquence dans les résidus des composantes radiales. Ce signal quasiment

10. Dans les expériences E et F, le nombre de Courant est $\eta \simeq 0.21$.

monochromatique est probablement dû à certains modes radiaux qui ont été mal pris en compte dans le calcul de la solution modale. Toutefois, la correspondance avec la solution analytique est très satisfaisante et valide la prise en compte du contraste des paramètres élastiques dans le raccord non-conforme.

On a également représenté sur la figure 4.24 la comparaison entre les multiplicateurs de Lagrange sur l'interface non-conforme avec la dérivée en temps du vecteur traction obtenu dans un maillage conforme (expérience E). Le bon accord observé illustre à nouveau l'implémentation correcte du raccord non-conforme dans le schéma d'évolution en temps.

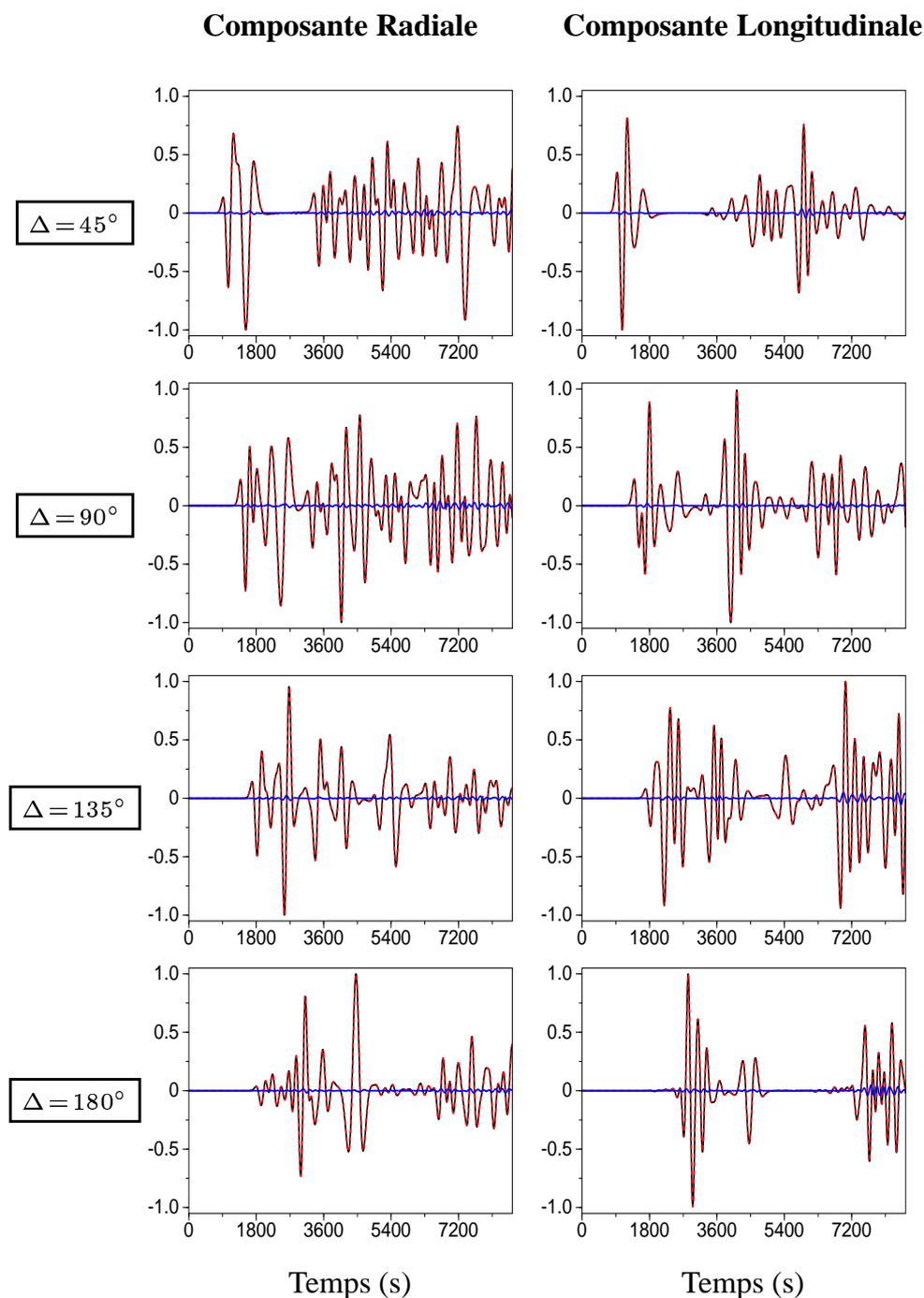


FIG. 4.14 – Traces en surface pour un échantillon de distances épacentrales. Les courbes en trait rouge tireté sont calculées par une méthode de sommation des vibrations propres de la boule. La solution obtenue par la méthode des éléments spectraux (expérience C) est dessinée en trait noir et le résidu entre les deux solutions multiplié par 10 est tracé en bleu. Toutes les traces sont normalisées.

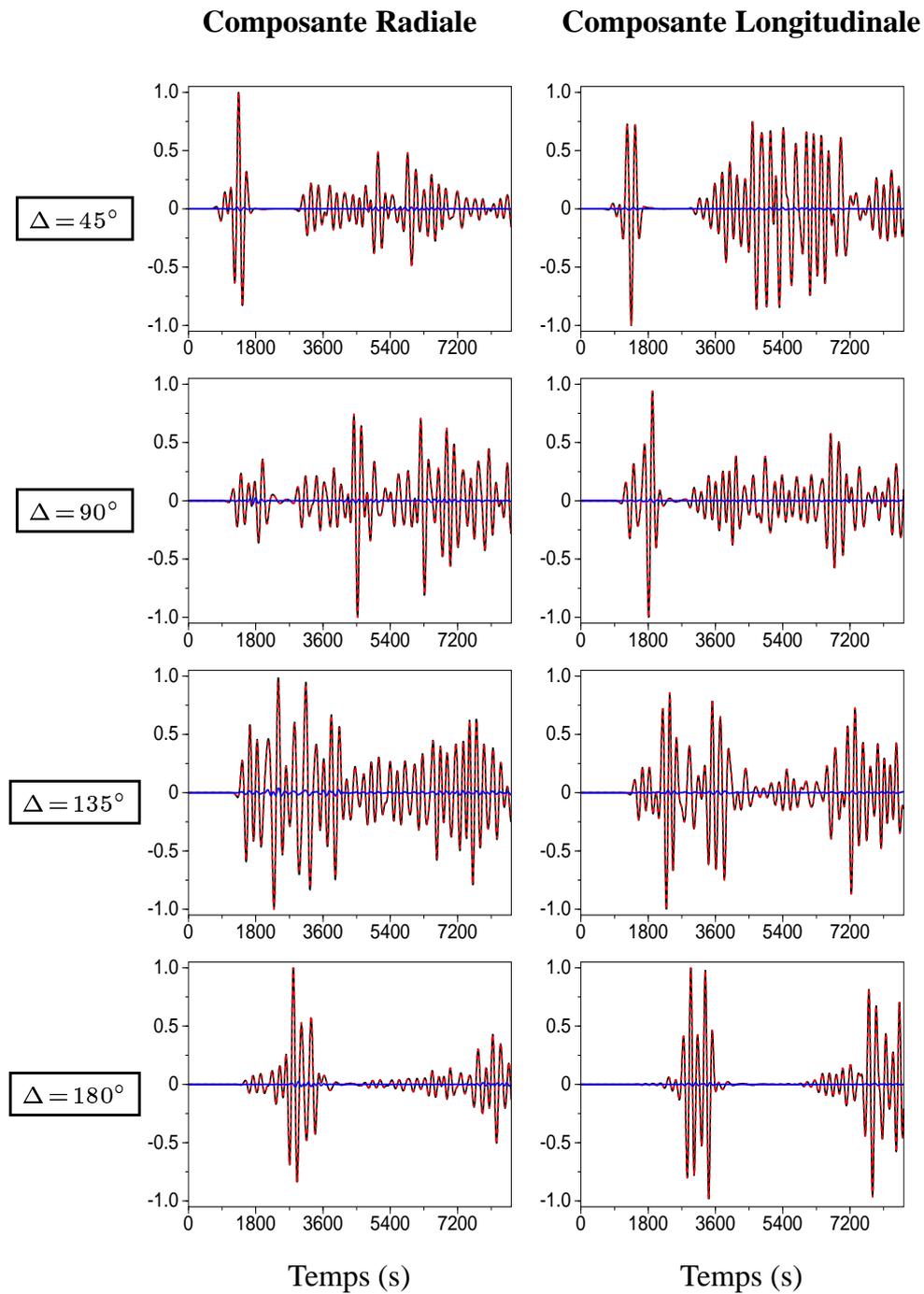


FIG. 4.15 – Traces à l'interface non-conforme pour un échantillon de distances épacentrales. Les courbes en noir sont les dérivées temporelles du vecteur traction calculé dans l'expérience B. Les courbes en rouge tiré représentent les multiplicateurs de Lagrange enregistrés sur l'interface dans l'expérience C. Le résidu entre les deux courbes est tracé en bleu et toutes les traces sont normalisées.

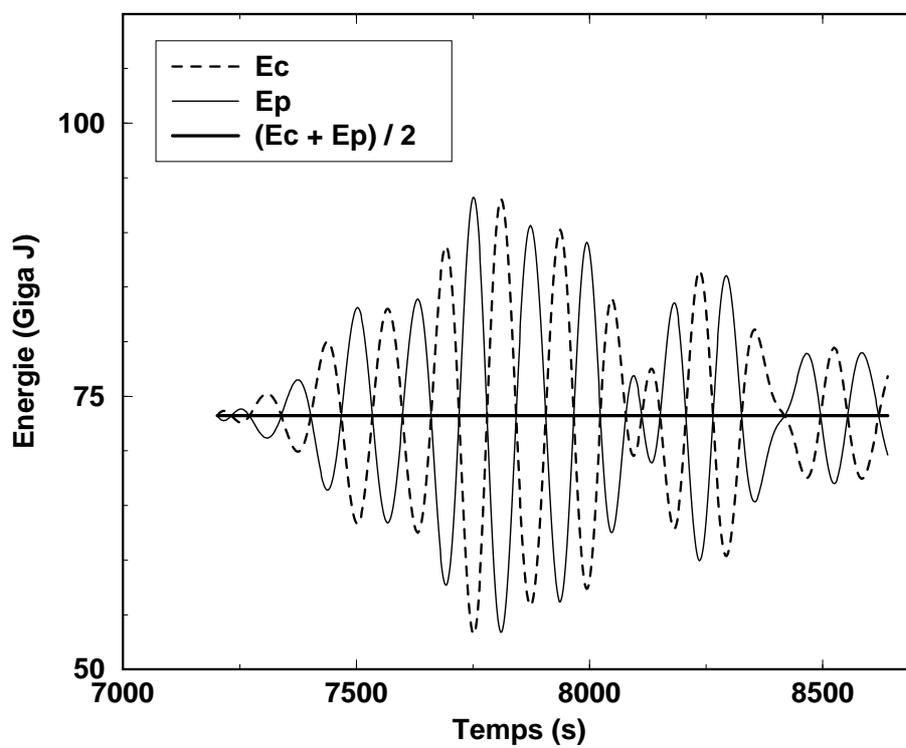


FIG. 4.16 – Variation de l'énergie cinétique (E_c) et potentielle (E_p) au cours des 20 dernières minutes de la simulation (expérience C). L'énergie totale du système reste constante en l'absence d'atténuation. L'interface non-conforme ne produit pas de conversion ou de perte d'énergie.

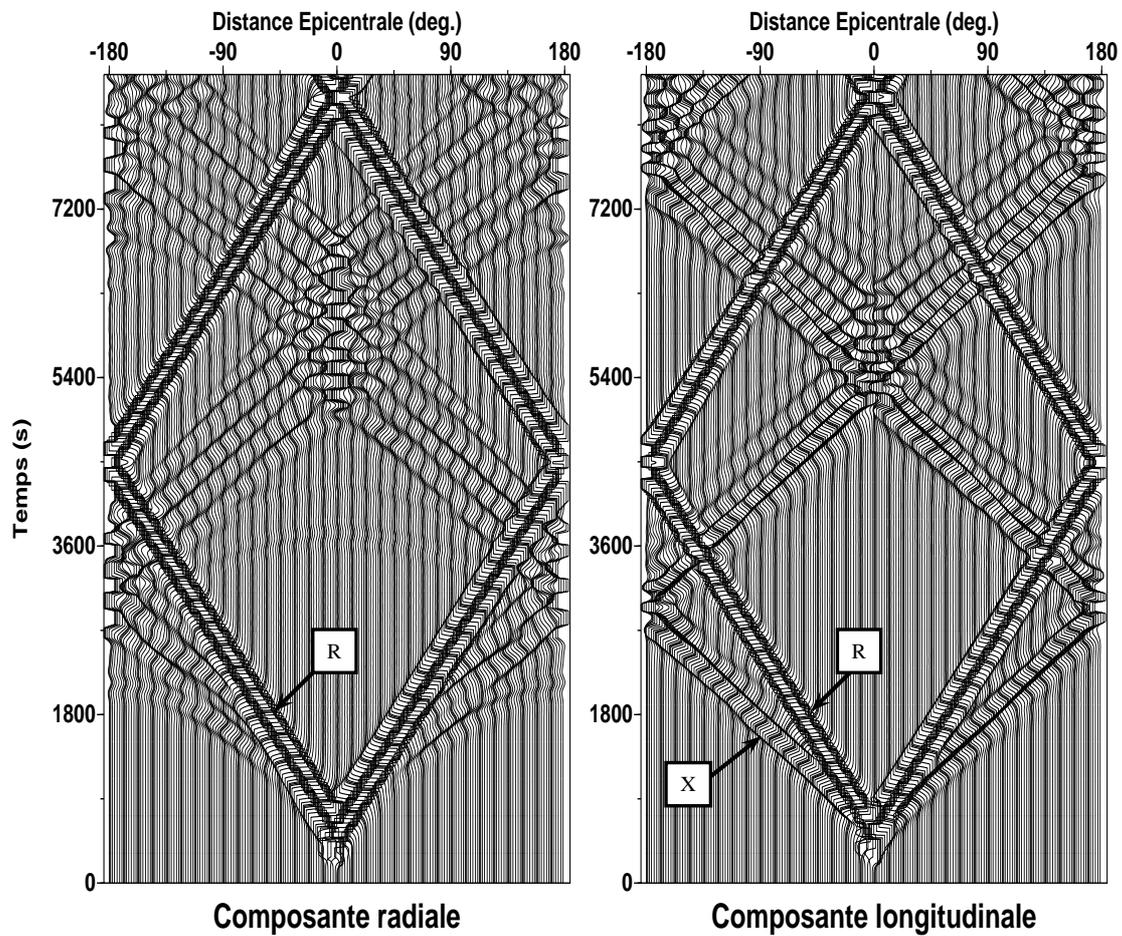


FIG. 4.17 – Sismogrammes en déplacement enregistrés à l'équateur dans une boule autogravitante homogène avec une grille non-conforme (expérience D). Les amplitudes supérieures à 85% du maximum ont été tronquées. On a indiqué l'onde de Rayleigh (R) ainsi que la phase X.

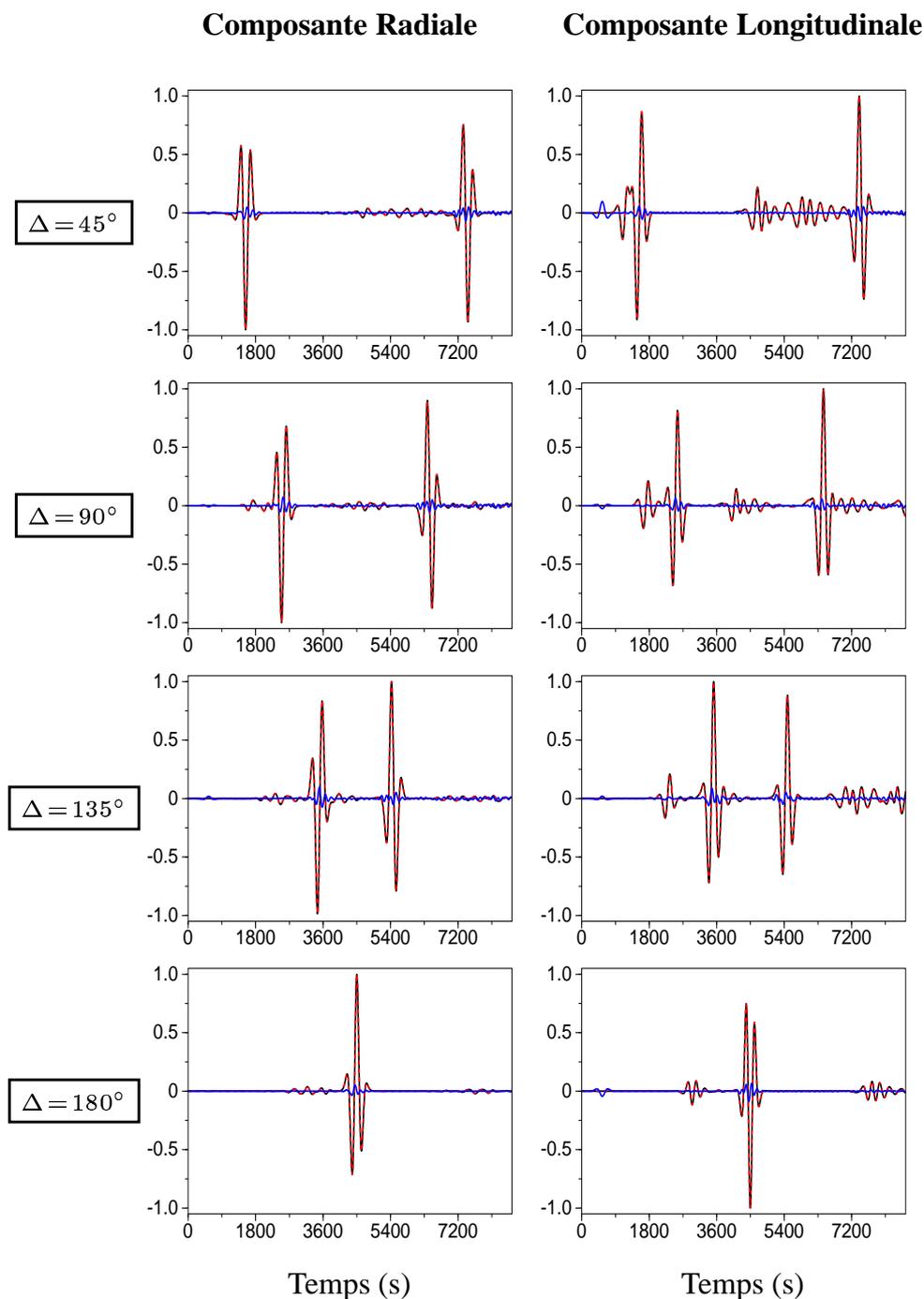


FIG. 4.18 – Traces en surface pour un échantillon de distances épacentrales. Les courbes en trait rouge tireté sont calculées par une méthode de sommation des vibrations propres de la boule soumise à la gravité. La solution obtenue par la méthode des éléments spectraux (expérience D) est dessinée en trait noir et le résidu entre les deux solutions multiplié par 10 est tracé en bleu. Toutes les traces sont normalisées.

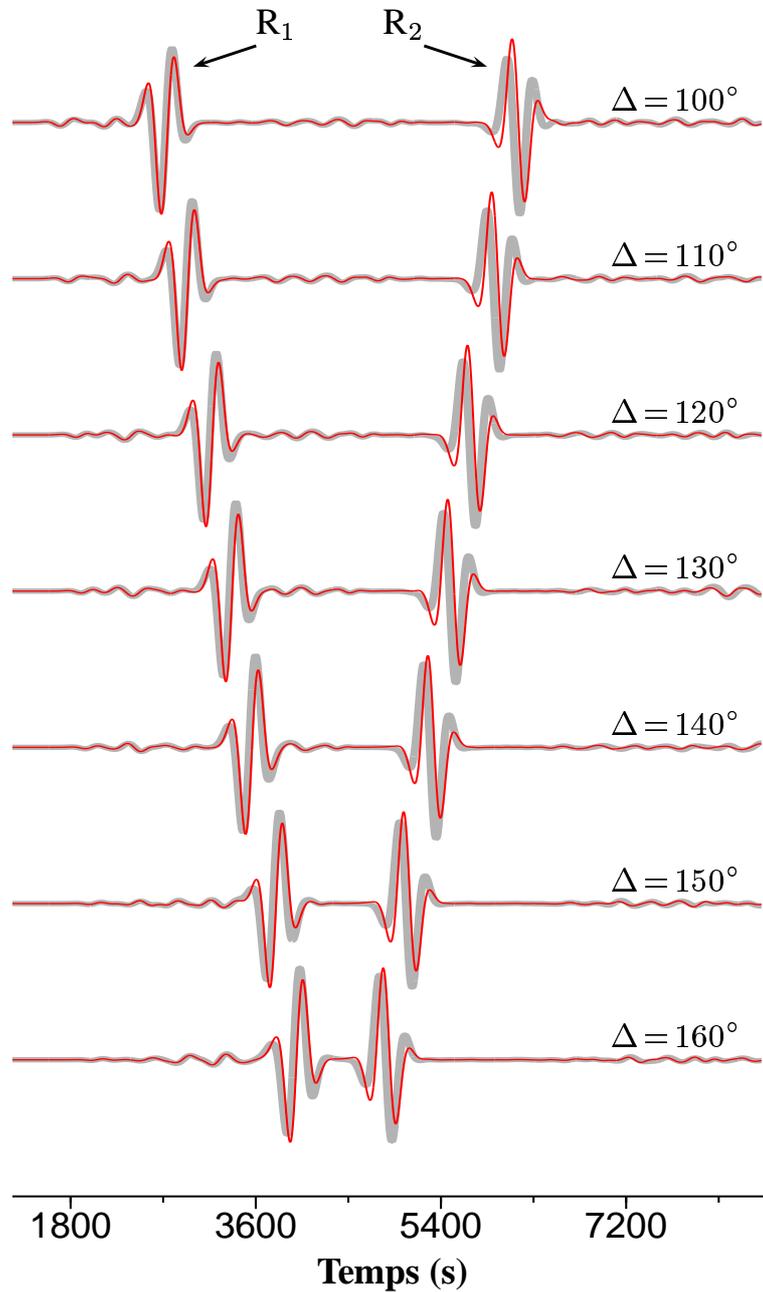


FIG. 4.19 – Composante radiale du déplacement en surface pour des distances épacentrales variant entre 100° et 160° . Les courbes épaisses en gris sont issues de l'expérience A. Les courbes fines en rouge tiennent compte de la gravité (expérience D). R_1 (resp. R_2) est le premier (resp. deuxième) train de l'onde de Rayleigh. On observe une diminution de la vitesse apparente des ondes de surface en présence des forces de gravité, contrairement aux ondes de volume qui ne sont pas perturbées.

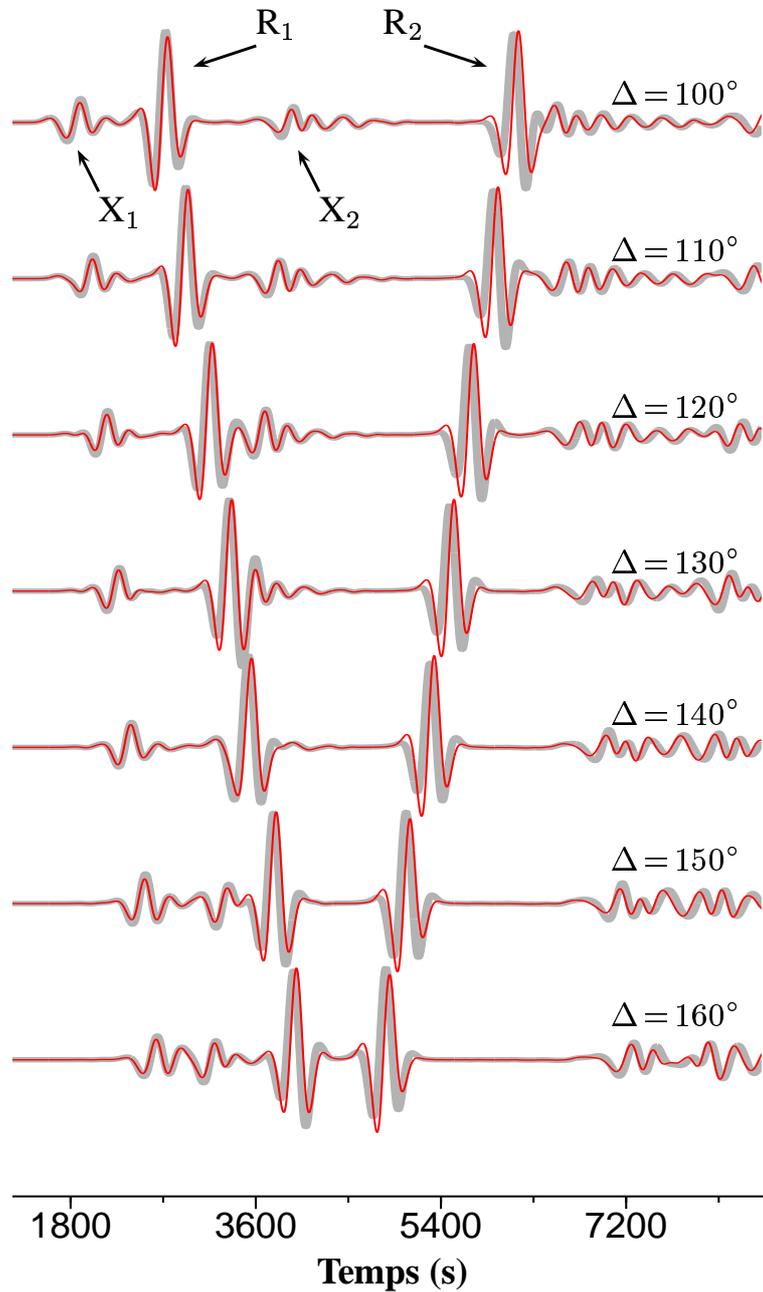


FIG. 4.20 – Composante longitudinale du déplacement en surface pour des distances épacentrales variant entre 100° et 160° . Les courbes épaisses en gris sont issues de l'expérience A. Les courbes fines en rouge tiennent compte de la gravité (expérience D). R_1 (resp. R_2) est le premier (resp. deuxième) train de l'onde de Rayleigh et X_1 (resp. X_2) est le premier (resp. deuxième) train de la phase X. La vitesse de la phase X augmente légèrement en présence de gravité, mais les formes d'ondes ne sont pas beaucoup affectées.

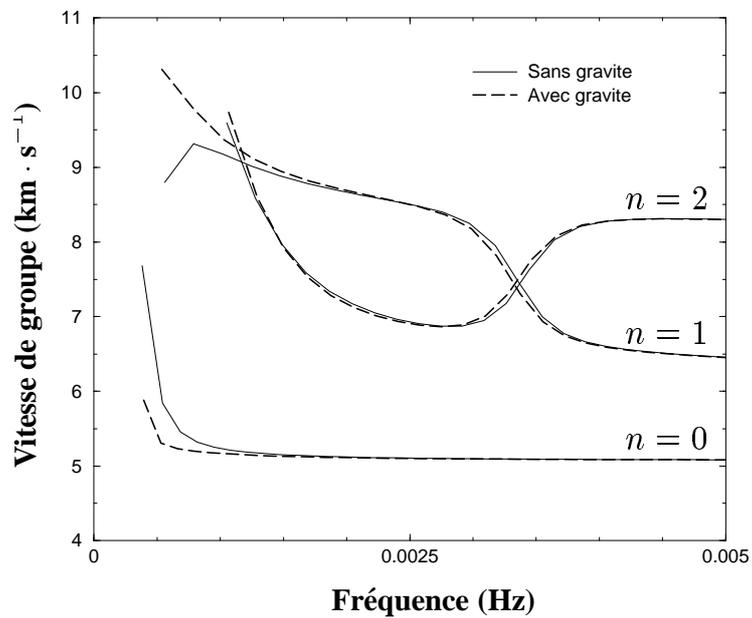


FIG. 4.21 – Vitesses de groupes du mode fondamental et des 2 premiers harmoniques sphéroïdaux en fonction de la fréquence, pour l'expérience D (trait pointillé). En trait plein, on a représenté les vitesses de groupe obtenus pour la boule élastique de l'expérience A. L'effet à basse fréquence des termes locaux de gravité est de diminuer la vitesse de groupe des ondes de Rayleigh et d'augmenter celle de la phase X (cet effet est visible essentiellement pour le premier harmonique et pour des fréquences inférieures à 2 mHz).

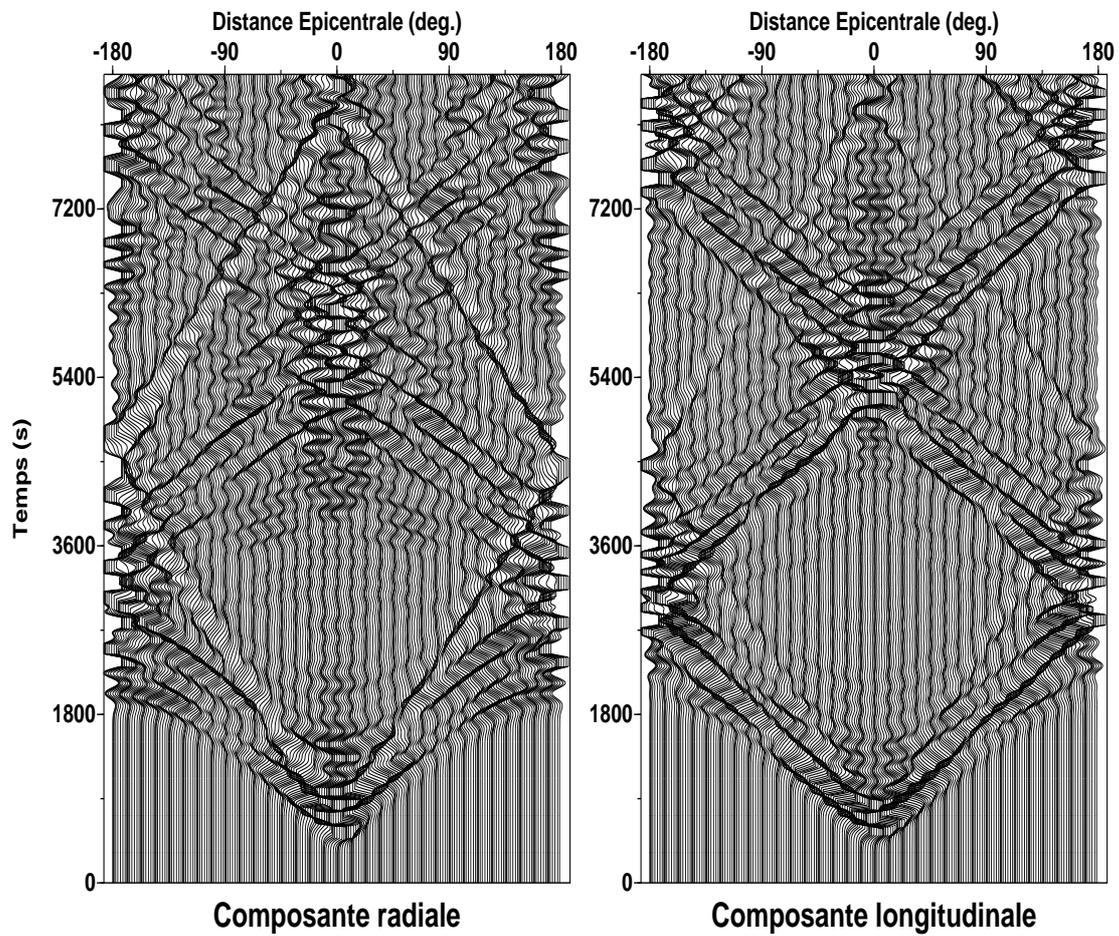


FIG. 4.22 – Sismogrammes en déplacement enregistrés à l'équateur dans un bicouche élastique avec une grille non-conforme (expérience F). Les amplitudes supérieures à 85% du maximum ont été tronquées.

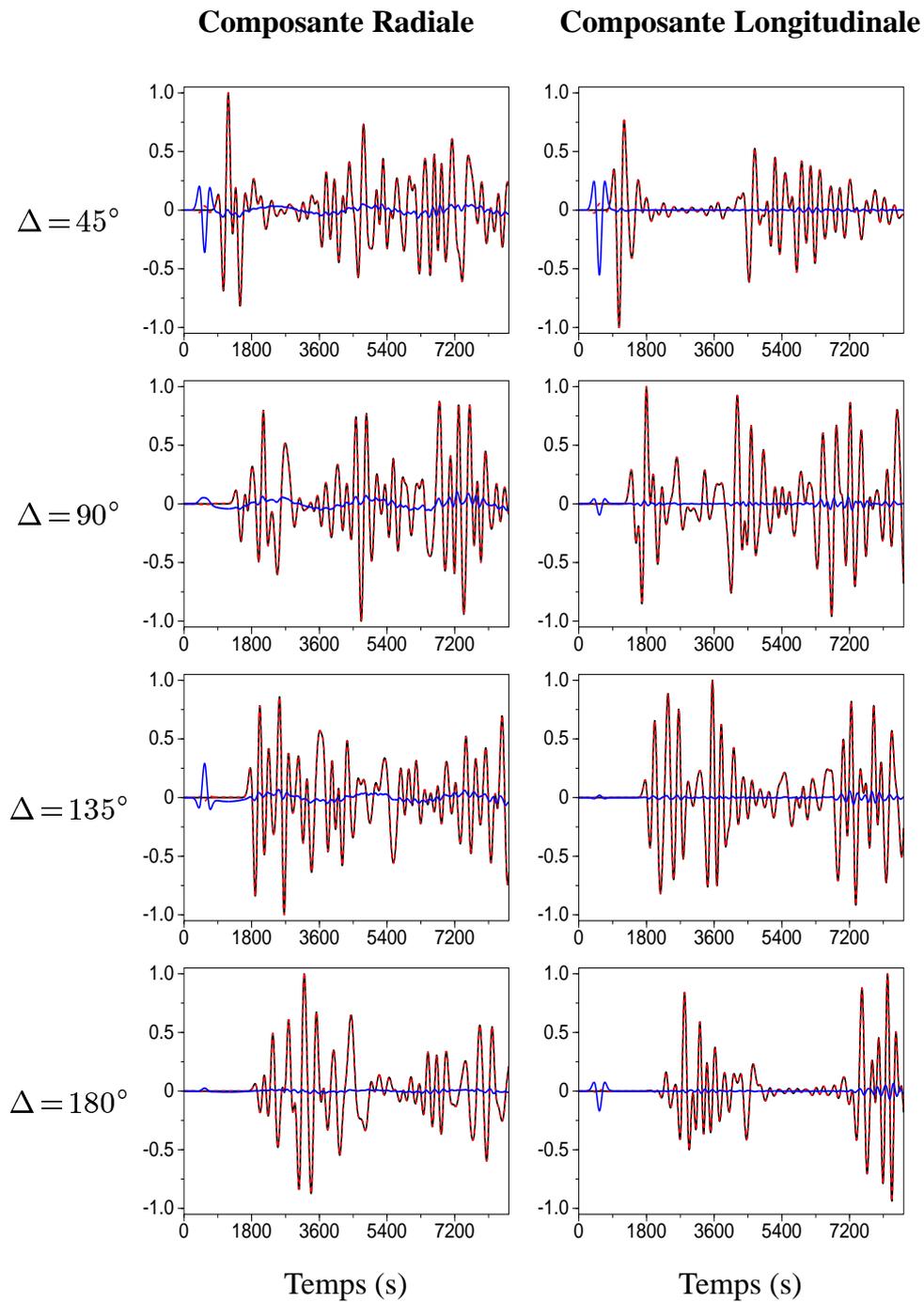


FIG. 4.23 – Traces en surface pour un échantillon de distances épacentrales. Les courbes en trait rouge tireté sont calculées par une méthode de sommation des vibrations propres de la boule. La solution obtenue par la méthode des éléments spectraux (expérience F) est dessinée en trait noir et le résidu entre les deux solutions multiplié par 10 est tracé en bleu. Toutes les traces sont normalisées.

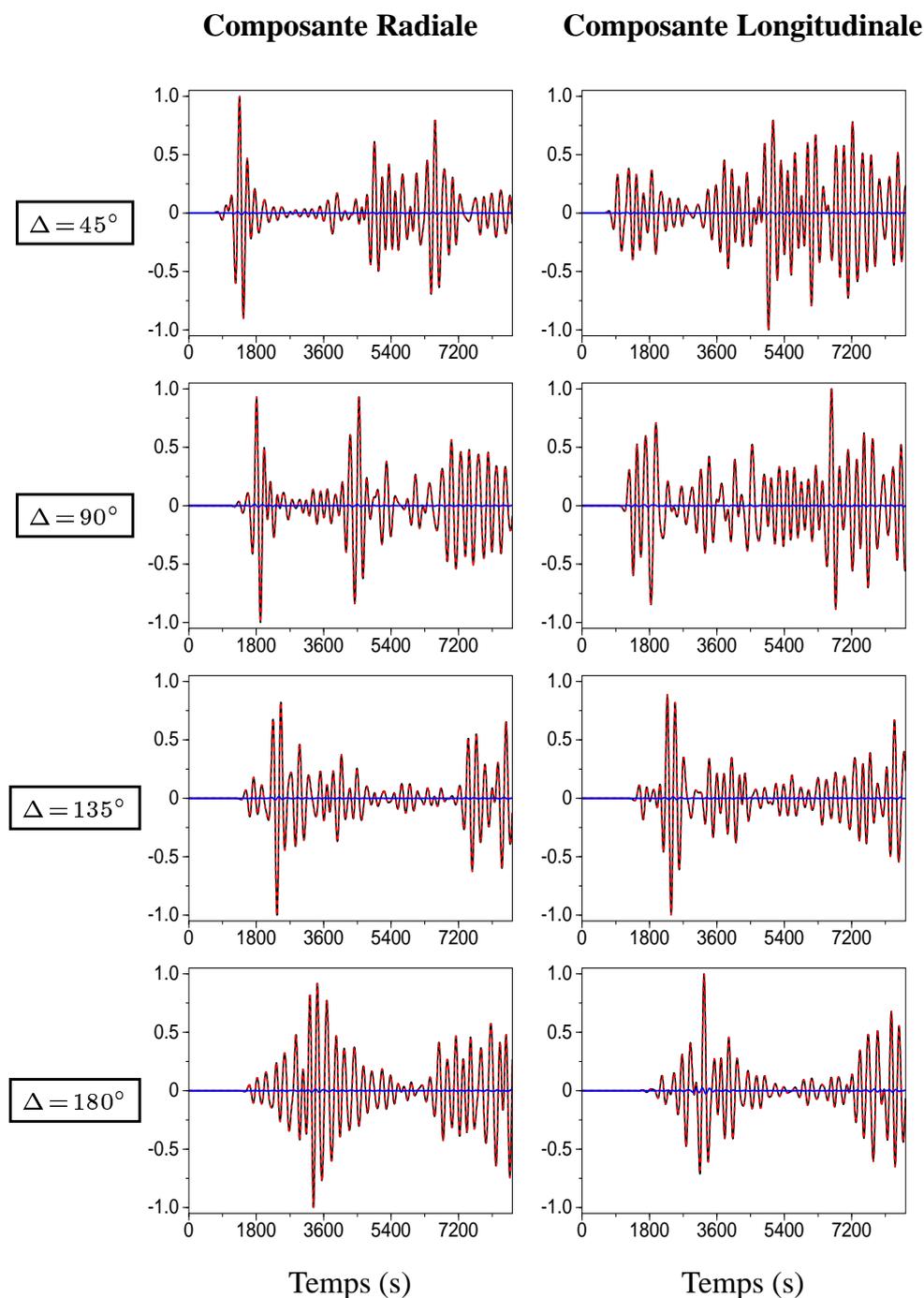


FIG. 4.24 – Traces à l'interface non-conforme pour un échantillon de distances épacentrales. Les courbes en noir sont les dérivées temporelles du vecteur traction calculé dans l'expérience E. Les courbes en rouge tiré représentent les multiplicateurs de Lagrange enregistrés sur l'interface dans l'expérience F. Le résidu entre les deux courbes est tracé en bleu et toutes les traces sont normalisées.

4.A Annexe : Résultats

4.A.1 Présentation des expériences numériques

La figure 4.25 résume les caractéristiques des expériences numériques (A à F) menées dans le chapitre 4.

4.A.2 Calcul de l'énergie au niveau discret

L'énergie cinétique dans le domaine de calcul à l'instant t est définie par :

$$Ec(t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t}(\mathbf{x}) \, \mathbf{d}\mathbf{x} . \quad (4.10)$$

Au temps discret t_n , on calculera l'énergie cinétique en utilisant le vecteur vitesse \mathbf{v}_n et en appliquant la formule d'intégration numérique basée sur les points de GLL du cube unité :

$$Ec(t_n) \doteq \sum_{\kappa=1}^K \sum_{e=1}^{n_{\kappa}} \oint_{\Lambda^3}^N \rho_h^{\kappa,e} |\mathcal{J}_{\kappa}^e| (\mathbf{v}_n^{\kappa,e})^2 . \quad (4.11)$$

L'énergie potentielle élastique est définie dans le domaine de calcul à l'instant t par :

$$Ep(t) = \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{u}_t)(\mathbf{x}) : c(\mathbf{x}) : \nabla(\mathbf{u}_t)(\mathbf{x}) \, \mathbf{d}\mathbf{x} , \quad (4.12)$$

où c est le tenseur élastique. On calculera donc l'énergie potentielle au temps t_n en utilisant le vecteur déplacement \mathbf{d}_n et en appliquant la règle d'intégration numérique :

$$Ep(t_n) \doteq \sum_{\kappa=1}^K \sum_{e=1}^{n_{\kappa}} \oint_{\Lambda^3}^N |\mathcal{J}_{\kappa}^e| \tilde{\nabla} \mathbf{d}_n^{\kappa,e} : c^{\kappa,e} : \tilde{\nabla} \mathbf{d}_n^{\kappa,e} . \quad (4.13)$$

Expérience	A	B	C	D	E	F
Grille L (km)	Conforme	Conforme	Non conf. 2500	Non conf. 2500	Conforme 2500	Non conf. 2500
Gravité	Non	Non	Non	Oui	Non	Non
Paramètres élastiques						
$\rho_{(1)}$ ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	3	3	3	3	3	3
ρ_2					9	9
$\alpha_{(1)}$ ($\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$)	8	8	8	8	8	8
α_2					7.2	7.2
$\beta_{(1)}$ ($\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$)	6	6	6	6	6	6
β_2					5.4	5.4
Position source						
p_s (km)	63	1187	1187	63	1312	1312
θ_s (degrés)	-0.56	-0.56	-0.56	-0.56	-5.6	-5.6
ϕ_s (degrés)	0.56	0.56	0.56	0.56	-5.6	-5.6
Caractéristiques source						
T_{\min} (s)	154	154	154	154	154	154
T_{dom} (s)	372	372	372	372	372	372
T_0 (s)	550	550	550	550	550	550

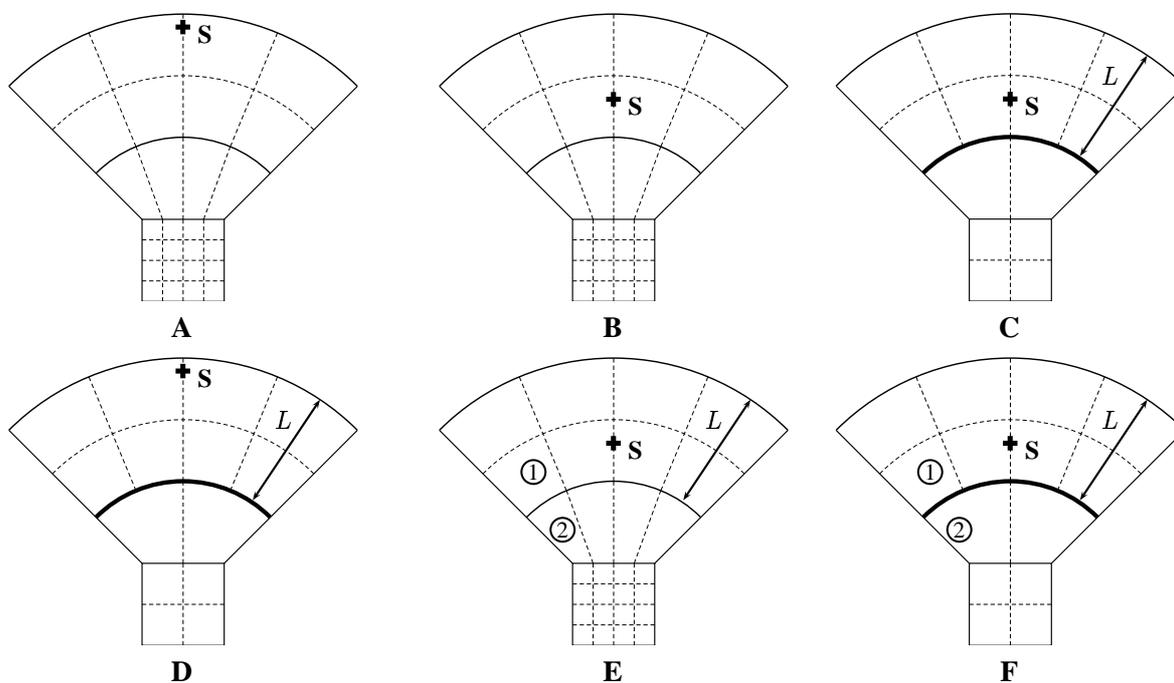


FIG. 4.25 – Caractéristiques des expériences numériques présentées dans les paragraphes 4.2 à 4.4. Les figures du bas schématisent les différents maillages en éléments spectraux utilisés pour paver la boule. L'échelle verticale est 1:1 et l'échelle latérale est 1:2. La vitesse des ondes P est α et β est la vitesse des ondes S . La profondeur de la source est p_s , sa latitude est θ_s et ϕ_s est sa longitude.

Chapitre 5

Extension à des modèles de Terre

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, on a montré une façon d'adapter la méthode des éléments spectraux à la géométrie sphérique et de prendre en compte un maillage non-conforme qui pouvait s'appuyer sur les interfaces physiques du milieu.

On cherche maintenant à étendre la méthode à des modèles plus réalistes et se rapprocher ainsi du cadre de la sismologie globale. La principale difficulté que l'on a rencontrée pour considérer des modèles de Terre réside dans la prise en compte de la partie fluide du noyau. En effet, on a choisi dans le chapitre 3, une approximation par éléments spectraux basée sur l'utilisation du déplacement dans les régions liquides. Ce choix était motivé par la possible présence de mouvements convectifs dans le noyau externe. Cependant, il faut rappeler que la convection dans le fluide n'apparaît que pour des sollicitations à très basse fréquence et qui concernent en général des séismes très profonds. C'est d'ailleurs pour cette raison que les modes convectifs du noyau externe sont très mal connus, faute d'observations. Parallèlement, dès lors que l'on s'intéresse à la structure tridimensionnelle de la croûte et du manteau terrestre, on se placera dans une gamme de fréquences où l'on peut raisonnablement négliger le spectre convectif de l'opérateur de l'élasto-gravité. Dans ces conditions, la discrétisation du noyau externe en déplacement nécessite d'imposer une contrainte supplémentaire pour évacuer les modes rotationnels qui n'auraient aucun sens physique dans le fluide.

Dans ce chapitre, on présente une alternative à la discrétisation du fluide par éléments spectraux basée sur le couplage avec une solution quasi-analytique et menée dans le cadre du travail de thèse de Yann Capdeville. Elle repose sur la construction d'un opérateur de type DtN (*Dirichlet to Neumann*) sur l'interface solide-fluide qui utilise la solution modale de l'équation d'onde dans le noyau. La méthode couplée permet de prendre en compte une structure radiale dans le noyau pour un coût de calcul très intéressant. Des perturbations à une structure 1D peuvent également être envisagées, par exemple pour implémenter une topographie à la frontière noyau-manteau ou pour inclure des variations latérales des paramètres élastiques. Cependant, ces variations devront être suffisamment lisses pour que la méthode de perturbations reste compétitive en terme de coût de calcul par rapport à une résolution complète par éléments spectraux. On dispose donc, avec l'alternative du couplage, de la possibilité de choisir une méthode numérique adaptée à la physique du problème rencontré.

Dans ce qui suit, on rappelle succinctement le principe de la méthode couplée éléments spectraux-modes propres que l'on trouvera en détail dans (Capdeville 2000). On présente alors le cas d'une boule homogène élastique contenant une inclusion fluide, puis les résultats obtenus dans un modèle radialement

hétérogène avec une lithosphère moyenne (modèle PREM220), et ensuite les résultats de la modélisation dans le modèle PREM. Enfin, on présente les particularités liées à la prise en compte d'une partie fluide dans la discrétisation des équations de l'élasto-gravité par éléments spectraux.

5.2 Méthode couplée : éléments spectraux - modes propres

Principe

On considère que le domaine Ω est formé d'une boule interne, notée Ω^- , et d'une coquille sphérique superficielle, notée Ω^+ (voir figure 5.1). On suppose ici que le domaine Ω est entièrement solide, on présente le cas du couplage solide-solide.

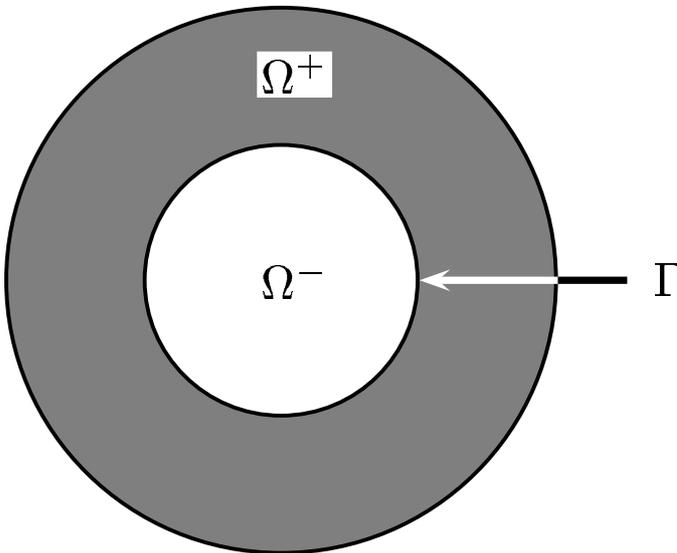


FIG. 5.1 – Géométrie du couplage entre les méthodes des éléments spectraux (dans Ω^+) et des modes propres (dans Ω^-).

Le principe de la méthode couplée est d'utiliser la méthode des éléments spectraux dans le domaine Ω^+ et de prolonger la solution obtenue en utilisant la solution modale associée à la boule interne Ω^- . Contrairement au cas de grilles non-conformes, le couplage entre les deux solutions est basé sur un raccord explicite entre les vecteurs tractions. Supposons en effet que l'on soit capable de calculer la réponse en traction de Ω^- à une sollicitation en déplacement \mathbf{u}^- sur Γ :

$$\mathbf{T}^-(\mathbf{x}) = \mathcal{A}\mathbf{u}^-(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (5.1)$$

D'après les conditions de continuité du déplacement (1.79) et de la traction (1.81), on peut exprimer (5.1) sous la forme :

$$\mathbf{T}^+(\mathbf{x}) = \mathcal{A}\mathbf{u}^+(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (5.2)$$

L'opérateur \mathcal{A} qui relie un déplacement à une traction est un opérateur de type DtN (*Dirichlet to Neumann*) qui opère de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème couplé dans le domaine Ω^+ , il faut donc tenir compte d'une condition de Neumann dynamique supplémentaire sur l'interface Γ . En reprenant les notations du chapitre 1.4, on cherchera donc à chaque instant $t \in [0, T]$, le déplacement $\mathbf{u}_t^+ \in \mathcal{V}^*$ et le

multiplicateur de Lagrange $\lambda_t \in \mathcal{M}$ tels que $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^*, \forall \mu \in \mathcal{M}$:

$$\left(\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t^+}{\partial t^2}, \mathbf{v} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega^+)} + a(\mathbf{u}_t^+, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \lambda_t) + \langle \mathbf{v}, \mathcal{A} \mathbf{u}_t^+ \rangle = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega^+)}, \quad (5.3)$$

$$b(\mathbf{u}_t^+, \mu) = 0. \quad (5.4)$$

Dans cette écriture, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre les espaces $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$.

On remarque que la formulation (5.3) est similaire à celle que l'on obtient pour l'implémentation de certaines conditions absorbantes. Dans ce cas, on cherche également à construire un opérateur DtN, mais cette fois pour calculer la traction correspondant à un milieu infini (Givoli and Keller 1990, Grote and Keller 1995).

Expression de l'opérateur DtN

On commence par développer le déplacement et le vecteur traction à l'interface sur la base des harmoniques sphériques :

$$\bar{\mathbf{u}}^-(R, \theta, \varphi, \omega) = \sum_{l,m} \bar{\mathbf{U}}_{l,m}^-(R, \omega) : \bar{\mathcal{Y}}_{\downarrow, \uparrow}^-(\theta, \varphi), \quad (5.5)$$

$$\bar{\mathbf{T}}^-(R, \theta, \varphi, \omega) = \sum_{l,m} \bar{\mathbf{T}}_{l,m}^-(R, \omega) : \bar{\mathcal{Y}}_{\downarrow, \uparrow}^-(\theta, \varphi), \quad (5.6)$$

où R est le rayon de l'interface de couplage et où l'on a utilisé le symbole « $\bar{\quad}$ » pour indiquer une décomposition sur la base canonique.

Les champs obtenus s'expriment sur les bases de déplacements (\mathcal{D}) et de tractions propres (\mathcal{T}) de l'interface :

$$\bar{\mathbf{U}}_{l,m}^-(R, \omega) = \bar{\mathbf{a}}_{l,m}(\omega) : \bar{\bar{D}}_{l,m}(\omega), \quad (5.7)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{l,m}^-(R, \omega) = \bar{\mathbf{a}}_{l,m}(\omega) : \bar{\bar{T}}_{l,m}(\omega), \quad (5.8)$$

où le symbole « $\bar{\quad}$ » désigne une décomposition suivant les 3 types de solution¹.

L'opérateur DtN est défini sur Γ par :

$$\bar{\mathbf{T}}^-(R, \theta, \varphi, \omega) = \bar{\bar{\mathcal{A}}} : \bar{\mathbf{u}}^-(R, \theta, \varphi, \omega) = \sum_{l,m} \bar{\bar{\mathcal{A}}}_{l,m}(\omega) : \bar{\mathbf{U}}_{l,m}^-(R, \omega) : \bar{\mathcal{Y}}_{\downarrow, \uparrow}^-(\theta, \varphi), \quad (5.9)$$

ce qui est équivalent à l'égalité des composantes dans la base d'harmoniques sphériques :

$$\bar{\mathbf{T}}_{l,m}^-(R, \omega) = \bar{\bar{\mathcal{A}}}_{l,m}(\omega) : \bar{\mathbf{U}}_{l,m}^-(R, \omega). \quad (5.10)$$

En utilisant (5.7) et (5.8), on obtient l'expression des composantes de l'opérateur dans le domaine fréquentiel :

$$\bar{\bar{\mathcal{A}}}_{l,m}(\omega) = \bar{\bar{D}}_{l,m}^{-1}(\omega) : \bar{\bar{T}}_{l,m}(\omega). \quad (5.11)$$

Pour que l'égalité ait un sens, il faut exclure les fréquences qui annulent les composantes de $\bar{\bar{D}}$, c'est-à-dire les fréquences propres (ω_l^q) associés aux équations du mouvement dans Ω^- avec une condition de Dirichlet sur Γ .

1. L'espace des solutions de l'équation d'onde est *a priori* de dimension 3. En imposant ensuite les conditions aux limites, on gagne une dimension et il reste les modes sphéroïdaux et toroïdaux.

Afin d'obtenir l'expression de l'opérateur dans le domaine temporel, on réécrit :

$$\bar{\mathcal{A}}_k(\omega) = \sum_n \frac{n \bar{\mathcal{A}}_k'}{\omega - n \omega_k} + \left(\bar{\mathcal{A}}_k(\omega) - \sum_n \frac{n \bar{\mathcal{A}}_k'}{\omega - n \omega_k} \right), \quad (5.12)$$

où k désigne le multi-indice (l, m) et où :

$$n \bar{\mathcal{A}}_k' \doteq \lim_{\omega \rightarrow n \omega_k} (\omega - n \omega_k) \bar{\mathcal{A}}_k(\omega). \quad (5.13)$$

On applique ensuite une transformée de Fourier inverse en utilisant le théorème de Cauchy pour le premier terme. On obtient :

$$\bar{\mathcal{A}}_k(t) = \sum_n n \bar{\mathcal{A}}_k' i \exp(i n \omega_k t) H(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\bar{\mathcal{A}}_k(\omega) - \sum_n \frac{n \bar{\mathcal{A}}_k'}{\omega - n \omega_k} \right) \exp(i \omega t) d\omega, \quad (5.14)$$

où H est la fonction de Heaviside.

En principe, il faut construire l'opérateur DtN sur une gamme de fréquence infinie pour pouvoir réaliser le passage en temps, et ce, même si le champ de déplacement issu de la méthode d'éléments spectraux a un spectre borné. En effet, une troncature en fréquence de l'opérateur conduirait à une réponse en traction qui ne serait pas causale. Le problème est réglé en construisant un prolongement de l'opérateur pour les hautes fréquences basé sur la connaissance de solutions asymptotiques de l'équation d'ondes dans Ω^- (Barry et al. 1988). De plus, pour une fréquence donnée, l'opérateur est prolongé pour les ordres angulaires élevés par une condition de radiation. De cette façon, la réponse en traction calculée par l'opérateur DtN ne contient pas de petites longueurs d'onde qui ne seraient pas résolues par la méthode d'éléments spectraux. Tout se passe, pour ces longueurs d'onde, comme si l'interface de couplage était un bord absorbant.

Pour la présentation détaillée de la construction de l'opérateur DtN, ainsi que son implémentation, on se réfère à (Capdeville 2000). On y trouvera notamment (1) la construction du prolongement asymptotique de l'opérateur ; (2) la mise en oeuvre des matrices de passage entre les bases polynômiales des éléments spectraux et les bases globales des harmoniques sphériques ; et (3) l'incorporation de la condition dynamique de Neumann dans le schéma d'évolution en temps.

5.3 Modèles à symétrie sphériques avec inclusion fluide

On présente ici quelques expériences menées à l'aide de la méthode couplée pour des modèles qui peuvent être radialement hétérogènes et qui possèdent une partie fluide. Les conditions d'expérience sont résumées dans la figure 5.9 de l'annexe 5.A. Dans toutes les expériences, on utilise une source explosive et un schéma de Newmark explicite avec un de Courant $\eta < 0.25$.

5.3.1 Boule homogène élastique solide-fluide

Pour illustrer la prise en compte d'une zone fluide par la méthode couplée, on considère le cas d'une boule élastique homogène par morceaux (expérience G). Une boule liquide est ceinturée par une coquille sphérique solide d'épaisseur $R = 2500$ km. La source est une explosion située à environ 1000 km de profondeur et le maillage en éléments spectraux dans la coquille est conforme. L'ordre polynômial utilisé est $N = 8$ dans toutes les directions de l'espace.

Sur la figure 5.2, on a représenté la composante radiale du déplacement obtenu en surface pour quelques récepteurs situés sur l'équateur. La comparaison avec la solution analytique (calculée par sommation des modes propres de la boule) montre un résidu relativement faible, mais qui est dominé par un signal à grande longueur d'onde (notamment à 90°). On peut avancer deux possibilités pour expliquer l'origine de cette anomalie : soit il s'agit de quelques modes mal calculés dans la solution analytique (comme dans l'expérience F du chapitre 4), soit c'est au niveau du couplage que des modes ont été oubliés et on peut suspecter une «mauvaise» prise en compte de la branche de dispersion associée aux ondes de Stoneley.

En conclusion, si quelques tests sont nécessaires pour préciser la convergence de la méthode couplée dans cette expérience, les résidus calculés sont d'amplitude très faible et permettent de valider la construction de l'opérateur DtN.

Composante radiale

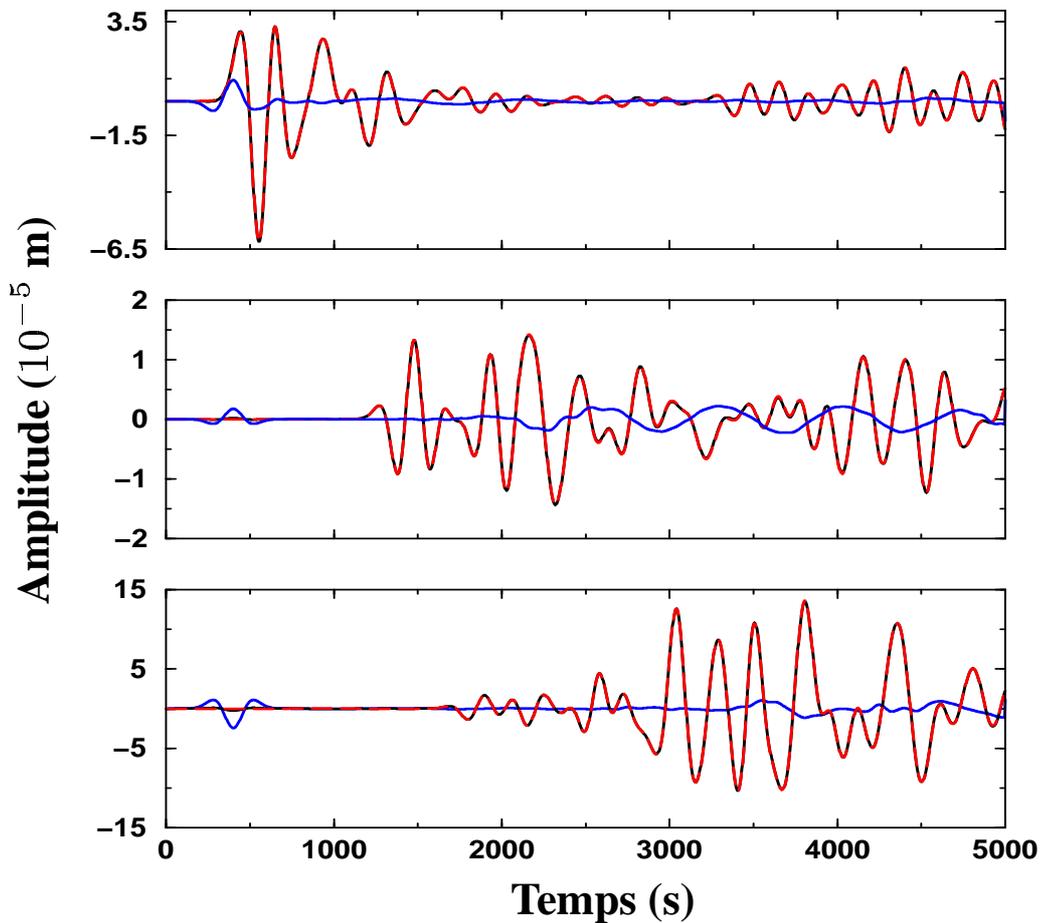


FIG. 5.2 – Composante radiale du déplacement enregistré en surface pour l'expérience G. La trace du haut correspond à une distance épicentrale $\Delta = 10^\circ$, la trace du milieu à $\Delta = 90^\circ$ et la trace du bas à $\Delta = 180^\circ$. Les courbes en noir sont calculées par une méthode de sommation des vibrations propres de la boule. La solution obtenue par la méthode couplée est dessinée en traits rouges tiretés et le résidu entre les deux solutions multiplié par 10 est tracé en bleu.

5.3.2 Modèle PREM220

Dans cette expérience, on considère un modèle simplifié du modèle PREM dans lequel on ne tient pas compte de la structure de la croûte ni de la couche à la base du manteau. Le modèle contient les deux discontinuités qui délimitent la zone de transition (situées ici à 410 km et 670 km) ainsi qu'une discontinuité supplémentaire à 220 km (voir la figure 5.3).

La partie correspondant au manteau est traitée par éléments spectraux et la réponse du noyau est calculée par la solution modale. L'intérêt de la méthode couplée pour un modèle de Terre moyen est ici double. D'une part, comme on l'a souligné, cela permet la prise en compte du noyau fluide, et d'autre part, cela évite la discrétisation de la graine. En effet, la graine est un solide assez particulier dans lequel les vitesses des ondes S sont du même ordre de grandeur que dans la croûte (dans le cas du modèle PREM220, ce sont les vitesses les plus faibles). Parallèlement, les vitesses P de la graine sont relativement élevées et le rapport V_s/V_p est inhabituellement faible. Pour une méthode d'éléments spectraux, ces caractéristiques imposeraient d'une part une discrétisation assez fine de la graine et d'autre part le choix d'un pas de temps suffisamment petit pour assurer la stabilité du schéma de Newmark. Le maillage en éléments

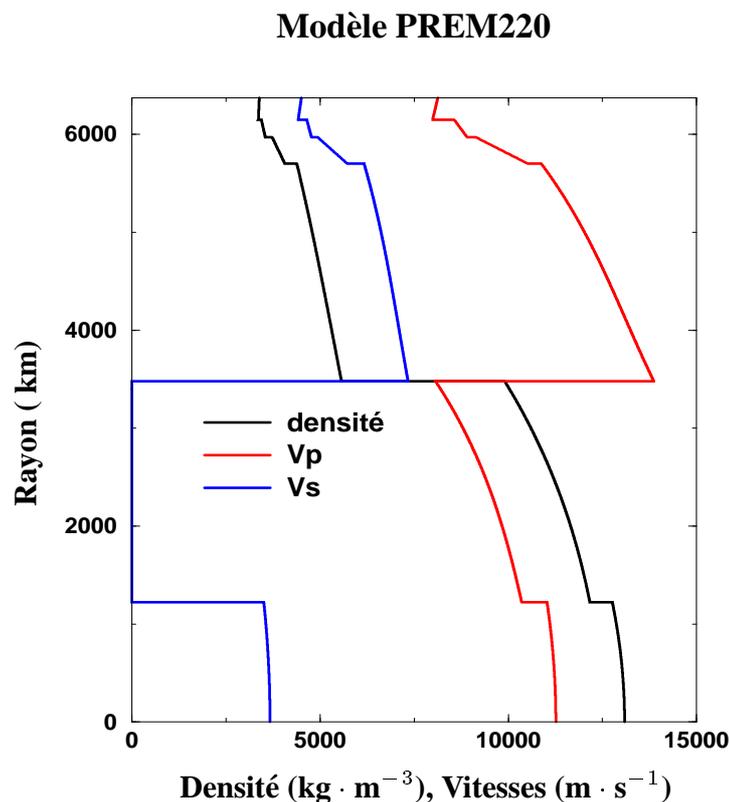


FIG. 5.3 – Variation en profondeur de la densité de masse et des vitesses sismiques dans le modèle PREM220. Les premiers 220 km de profondeur forment une couche où les paramètres élastiques varient linéairement.

spectraux contient une interface non-conforme qui sépare le manteau supérieur du manteau inférieur. Les différentes couches du modèle étant suffisamment épaisses, un degré polynômial $N = 8$ est utilisé dans les directions horizontales et verticales.

Sur la figure 5.4, on a représenté la composante radiale du déplacement obtenu en surface pour quelques récepteurs situés sur l'équateur. La comparaison avec la solution analytique (calculée par sommation

des modes propres du modèle PREM220) montre un résidu relativement faible, inférieur au pourcent. Contrairement au cas de la boule homogène, il n'y a pas d'oscillations à longue période dans le résidu car la méthode de calcul des modes propres de PREM220 est différente de la précédente.

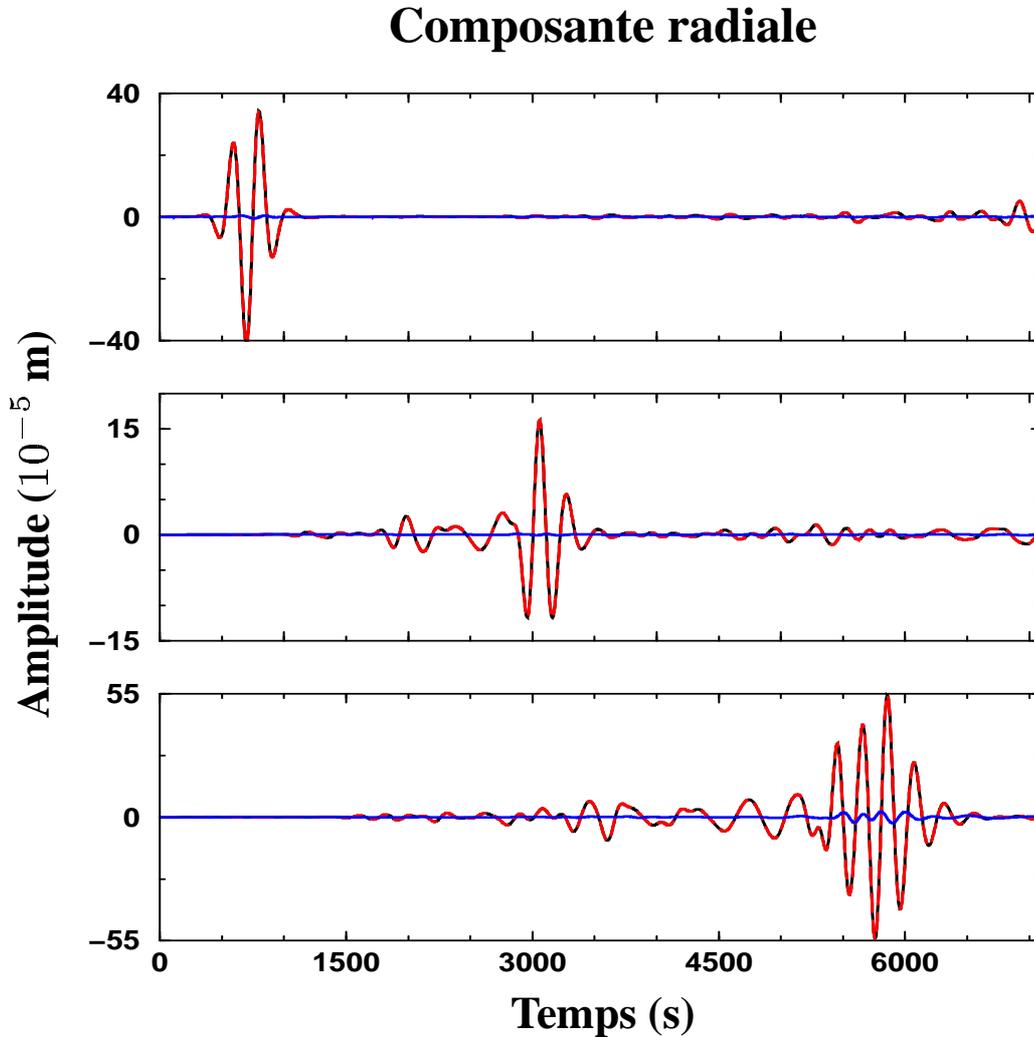


FIG. 5.4 – Composante radiale du déplacement enregistré en surface pour l'expérience H. La trace du haut correspond à une distance épacentrale $\Delta = 10^\circ$, la trace du milieu à $\Delta = 90^\circ$ et la trace du bas à $\Delta = 180^\circ$. Les courbes en noir sont calculées par une méthode de sommation des vibrations propres du modèle PREM220. La solution obtenue par la méthode couplée est dessinée en traits rouges tiretés et le résidu entre les deux solutions multiplié par 10 est tracé en bleu.

5.3.3 Modèle PREM

Après avoir illustré de façon probante la robustesse de la méthode couplée, on se propose ici de traiter le cas du modèle PREM en élargissant le domaine de fréquences de la simulation (expérience I). Sur la figure 5.5 on a représenté les variations des paramètres du modèle et la figure 5.6 illustre le maillage en éléments spectraux utilisé pour discrétiser le manteau terrestre.

La prise en compte de la croûte nécessite un ordre polynômial très faible dans la direction verticale pour

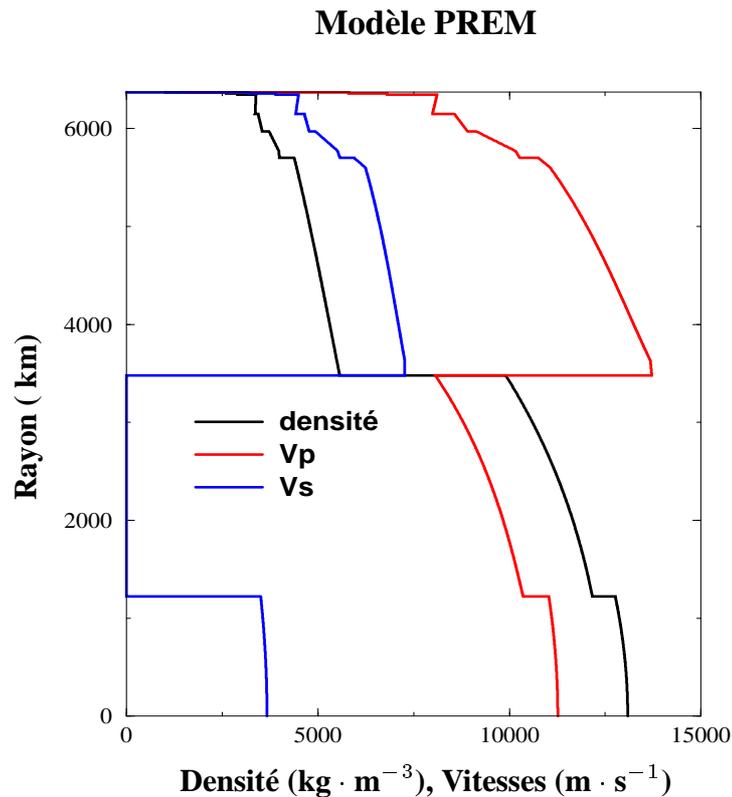


FIG. 5.5 – Variation en profondeur de la densité de masse et des vitesses sismiques dans le modèle PREM.

ne pas pénaliser le choix du pas de temps (l'épaisseur de la croûte est de 25 km et elle est constituée de deux couches distinctes). L'ordre polynômial dans le modèle entre $N = 2$ et $N = 7$ pour assurer un compromis entre la taille mémoire utilisée et le choix du pas en temps. Le nombre total de points de grille utilisés est d'environ 6 millions, ce qui correspond dans l'état actuel du code, au maximum de mémoire disponible sur les 32 processeurs de la machine du DMPN.

Le résultat de la simulation est présenté sous forme de sismogrammes sur la figure 5.7 et on a indiqué les temps d'arrivée des phases principales, d'après (Shearer 1991b)). La période dominante des synthétiques est d'environ 125 s ce qui laisse entrevoir la complexité du signal enregistré en surface. Les hodochrones présentés sur la figure du bas permettent de situer les phases réfléchies à la surface de la Terre et sur l'interface noyau-manteau. Dans les synthétiques, il faut rajouter les ondes de volume générées aux interfaces du manteau.

Les traces individuelles correspondant à la composante radiale sont représentées sur la figure 5.8 pour des récepteurs situés à l'équateur. La comparaison avec la solution analytique calculée par sommation des modes propres de PREM montre un résidu maximal de l'ordre de quelques pour-cents. Cependant, il faut signaler que dans ces résultats, le prolongement à haute fréquence de l'opérateur DtN a été construit numériquement et pas analytiquement comme cela était suggéré dans la partie 5.2. On s'attend donc à un accord encore meilleur, une fois que le prolongement analytique sera opérationnel.

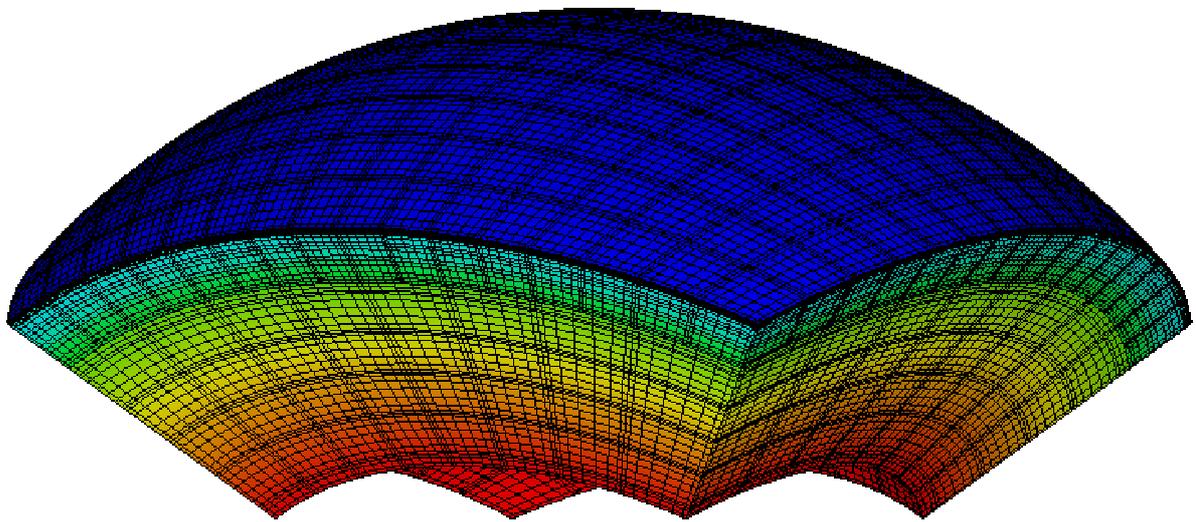


FIG. 5.6 – Maillage d'une région périphérique utilisé pour le modèle PREM. La carte de couleurs représente les variations de la densité. Un élément sur deux est représenté dans les directions horizontales pour ne pas surcharger la représentation. Un degré polynômial $N = 2$ est utilisé dans la direction verticale pour discrétiser la croûte.

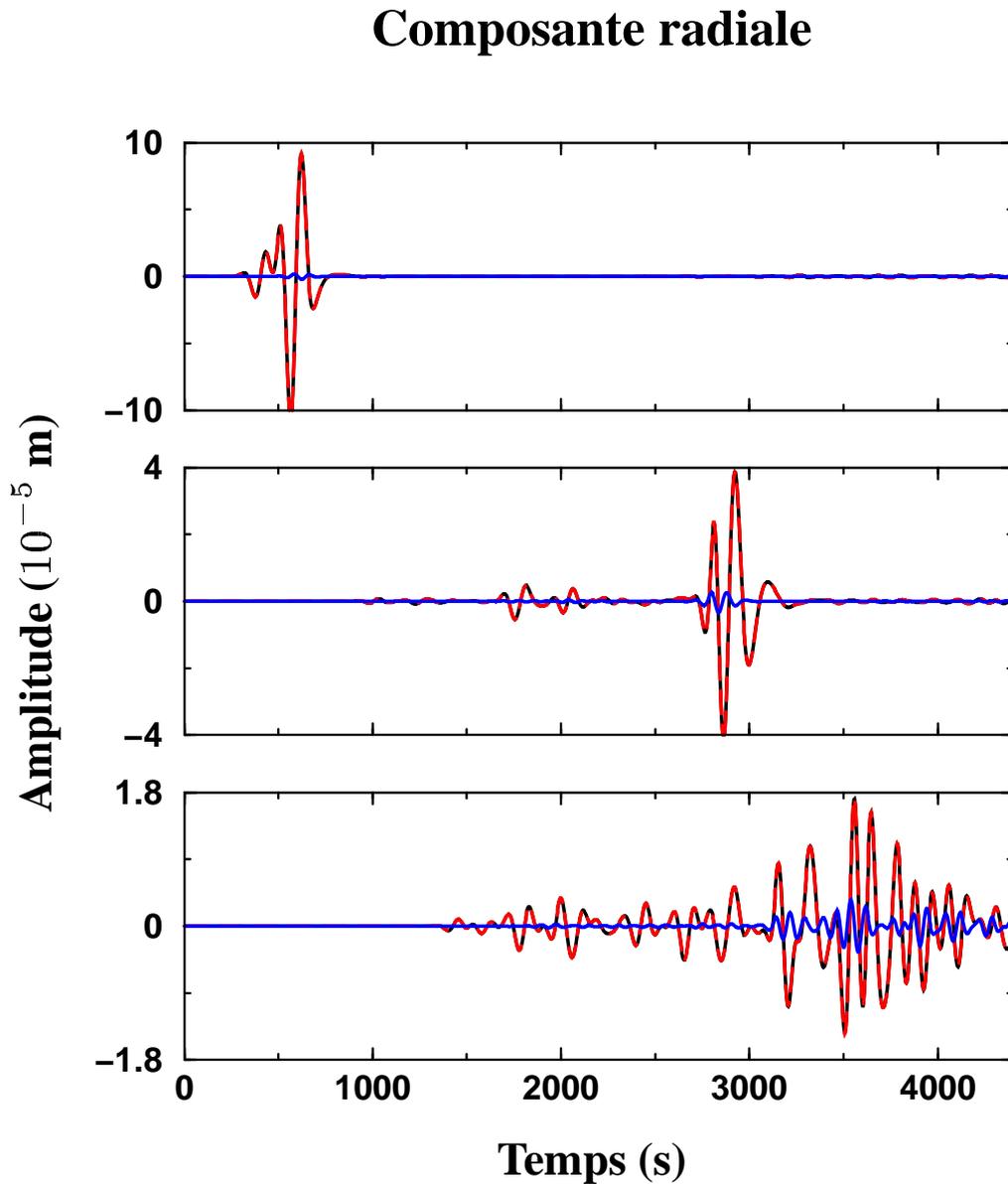


FIG. 5.8 – Composante radiale du déplacement enregistré en surface pour l'expérience I. La trace du haut correspond à une distance épicentrale $\Delta = 10^\circ$, la trace du milieu à $\Delta = 90^\circ$ et la trace du bas à $\Delta = 180^\circ$. Les courbes en noir sont calculées par une méthode de sommation des vibrations propres du modèle PREM. La solution obtenue par la méthode couplée est dessinée en traits rouges tiretés et le résidu entre les deux solutions multiplié par 10 est tracé en bleu.

5.4 Discrétisation par éléments spectraux des régions fluides

La méthode couplée permet de tenir compte d'un noyau dans lequel la structure des paramètres élastiques est radiale et dont la partie fluide est isentropique. Comme on l'a évoqué dans l'introduction de ce chapitre, il est envisageable de développer le couplage au cas d'une géométrie faiblement déformée et de variations latérales lisses des paramètres élastiques. Si l'on souhaite considérer un noyau fluide fortement hétérogène, la méthode de perturbations utilisée dans la solution modale deviendra pénalisante et une solution globale par éléments spectraux devra être envisagée. Dans tous les autres cas, le fluide pourra être traité par la méthode modale. En particulier, on signale que la présence de fortes hétérogénéités dans la partie solide du noyau (la graine) pourra être prise en compte par une méthode couplée où seule la partie fluide sera traitée en fréquence. Dans ce qui suit, on présente les problèmes liés à la discrétisation du fluide dans les méthodes d'éléments finis et les différentes pistes pour les résoudre suivant la physique du problème rencontré.

Comme on l'a vu dans la partie 1.3.4, la prise en compte des forces de gravité implique que le champ de déplacement dans le fluide peut avoir une partie rotationnelle. Plus précisément, le déplacement peut se décomposer comme suit :

$$\mathbf{u}_F = \nabla\Phi + \chi\mathbf{s}, \quad (5.15)$$

où Φ et χ sont deux potentiels scalaires et où \mathbf{s} , qui contrôle le régime convectif, est défini par la relation (1.88).

En l'absence du terme convectif (*i. e.* pour un fluide isentropique) ou dans le cas élastique, le champ de déplacement dérive d'un seul potentiel et doit donc satisfaire à la contrainte :

$$\nabla \wedge \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega_F \times [0, T]. \quad (5.16)$$

Cette condition n'est pas assurée si l'on se contente de poser $\mu = 0$ dans la discrétisation des équations du mouvement par éléments spectraux. Dans ce cas on peut s'attendre à générer des modes rotationnels qui ne seront absolument pas contrôlés dans le schéma numérique. Ces modes peuvent par exemple être excités aux interfaces solide-fluide si les conditions cinématiques et dynamiques sont mal imposées. Ils peuvent également apparaître spontanément, puisque l'erreur de la solution numérique n'a aucune raison d'être à rotationnel nul, et être amplifiés au cours de l'évolution en temps. En conclusion, la discrétisation numérique des équations du mouvement dans le fluide doit tenir compte des conditions de continuité normale aux interfaces solide-fluide (1.80 et 1.81) et éventuellement respecter la contrainte (5.16).

Différentes stratégies ont été proposées en ingénierie pour permettre la prise en compte d'un fluide, notamment dans l'étude des vibrations propres d'une cavité fluide dans une structure élastique en l'absence de gravité². Une première possibilité est de considérer un raccord C^1 pour coupler les domaines solide et liquide. Dans cette approche les équations du mouvement sont écrites séparément dans les parties solides puis dans les régions fluides. Il faut ensuite assurer explicitement le raccord des tractions en plus de la continuité de la vitesse normale à l'interface solide-liquide. Dans le fluide, on peut utiliser l'équation acoustique formulée en pression (*e. g.* Zienkiewicz and Bettles 1978) ou encore, dans le cas d'une densité homogène, on peut réécrire une équation du second ordre formulée en potentiel des vitesses (*e. g.* Thompson and Pinsky 1996). Après discrétisation par éléments finis, la formulation en pression conduit à un système algébrique dont les matrices ne sont pas symétriques et un traitement supplémentaire est nécessaire. La formulation en potentiel permet de retrouver un système symétrique et on obtient même une matrice de masse diagonale dans le cas des éléments spectraux (Komatitsch et al. 2000b). Dans le cas où l'on inclut les effets de la gravité, et que l'on se restreint à un fluide isentropique,

2. Ce problème appelé «problème élastoacoustique intérieur» est largement documenté dans (Morand and Ohayon 1992).

on peut obtenir une formulation du second ordre en potentiel même dans le cas d'une densité hétérogène. En effet, d'après la forme de l'opérateur dans le fluide (1.87), les équations du mouvement s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2}(\mathbf{x}) - \nabla \left[\frac{\kappa}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{g} \right](\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (5.17)$$

Ainsi, si l'on cherche un déplacement sous la forme $\mathbf{u}_t = \nabla \Phi_t$ on obtient :

$$\nabla \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial t^2} \right\}(\mathbf{x}) - \nabla \left[\frac{\kappa}{\rho} \Delta \Phi_t + \nabla \Phi_t \cdot \mathbf{g} \right](\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (5.18)$$

et on peut supprimer les opérateurs gradient en tenant compte des conditions initiales.

La deuxième possibilité, qui correspond au choix que nous avons effectué au paragraphe 1.4.2, est d'utiliser une formulation variationnelle unique posée en déplacement dans les domaines solides et fluides. Dans ce cas, la continuité des déplacements normaux aux interfaces solide-fluide est considérée comme une contrainte à laquelle est associé un multiplicateur de Lagrange. La continuité des tractions est donc assurée implicitement et on garde la possibilité d'introduire une interface solide-fluide non-conforme. L'inconvénient de cette formulation pour un fluide isentropique est que l'on doit alors imposer la contrainte irrotationnelle (5.16).

Une façon de faire consiste à injecter la forme du déplacement (5.15) dans les équations du mouvement (avec $\mathbf{s} = \mathbf{0}$). On se retrouve alors avec une équation du quatrième ordre en potentiel, et une formulation faible avec des termes du second ordre. Au delà de la complexité des calculs, on récupère une matrice de masse qui n'est plus diagonale et il faudra résoudre un système linéaire coûteux à chaque pas en temps. Dans le même ordre d'idée, on peut essayer de projeter le champ de déplacement sur l'espace des champs à rotationnel nul en résolvant à chaque pas en temps une équation de Poisson :

$$\Delta \Phi_t(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{x}), \quad (5.19)$$

de façon à obtenir la forme souhaitée du déplacement :

$$\mathbf{u}_t(\mathbf{x}) = \nabla \Phi_t(\mathbf{x}). \quad (5.20)$$

La résolution de (5.19) est équivalente à l'inversion de la matrice de masse dans la stratégie précédente, mais on s'affranchit du calcul des termes du second ordre liés à la matrice de rigidité. Il faudra cependant s'assurer que la formulation discrète de cette étape de projection élimine bien les modes rotationnels parasites.

Une autre solution consiste à pénaliser la condition (5.16) comme cela est envisagé par Hamdi et al. (1978). Les auteurs montrent que sans pénalisation, on observe un phénomène de *splitting* de la fréquence propre $\lambda = 0$ qui traduit une mauvaise discrétisation du sous-espace propre associé (c'est-à-dire du noyau de l'opérateur dans le fluide). Le principe de la pénalisation est de rajouter le terme :

$$\alpha \int_{\Omega_F} (\nabla \wedge \mathbf{u}_t(\mathbf{x}))^2 \, d\mathbf{x}, \quad (5.21)$$

à la fonctionnelle énergie du problème, ce qui revient à ajouter :

$$\alpha \int_{\Omega_F} (\nabla \wedge \mathbf{u}_t(\mathbf{x})) \cdot (\nabla \wedge \mathbf{w}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}, \quad (5.22)$$

à la formulation variationnelle. Le facteur de pénalisation α doit être positif et le plus grand possible pour que le champ de déplacement qui minimise l'énergie pénalisée ait une composante rotationnelle négligeable. De plus, on peut montrer que la partie rotationnelle de la solution pénalisée est décalée vers

les hautes fréquences à mesure que α augmente (Bermúdez and Rodríguez 1994). Cette propriété est intéressante lorsque l'on travaille en fréquence, puisqu'il suffit de choisir α suffisamment grand pour repousser les fréquences propres associées aux modes rotationnels en dehors de la gamme de fréquence auquel on s'intéresse. Si l'on souhaite adapter cette méthode en espace-temps, il faut remarquer que la valeur du facteur de pénalisation imposera la condition de stabilité du schéma en temps. Une étude est donc nécessaire pour savoir s'il est possible de choisir un pas en temps suffisamment grand et qui assure des modes rotationnels d'énergie faible.

Une autre stratégie consiste à construire un espace d'éléments finis spécifique à la discrétisation de $H(\text{div}, \Omega_F)$ (Bermúdez and Rodríguez 1994). La clé de cette résolution est en fait de bien discrétiser le noyau de l'opérateur dans le fluide (*i. e.* l'espace des déplacements rotationnels). De cette manière, le phénomène de *splitting* de la fréquence nulle est atténué, voire supprimé, et ne pollue pas le spectre de l'opérateur discret. Dans cette formulation, les auteurs utilisent des éléments de type Raviart-Thomas et la condition de continuité du déplacement normal est assurée au sens faible sur l'interface solide-fluide. Malheureusement, l'extension de la méthode à des éléments finis d'ordre élevé est loin d'être immédiate et un travail spécifique devra être mené si l'on souhaite adapter la stratégie au cas des éléments spectraux.

On signale enfin que la résolution en temps des équations du mouvement dans le cas général d'un fluide animé de mouvements convectifs reste un problème ouvert en raison de la complexité du spectre de l'opérateur de l'élasto-gravité.

5.A Annexe : Résultats

5.A.1 Présentation des expériences numériques

La figure 5.9 résume les caractéristiques des expériences numériques (G, H et I) menées dans le chapitre 5.

Expérience	G	H	I
Grille L (km)	Conforme	Non conf. 670	Non conf. 670
R (km)	2500	2891	2891
Gravité	Non	Non	Non
Modèle	Homogène	PREM220	PREM
Position source			
p_s (km)	1048	70	51
Caractéristiques source			
T_{\min} (s)	125	125	65
T_{dom} (s)	312	312	155

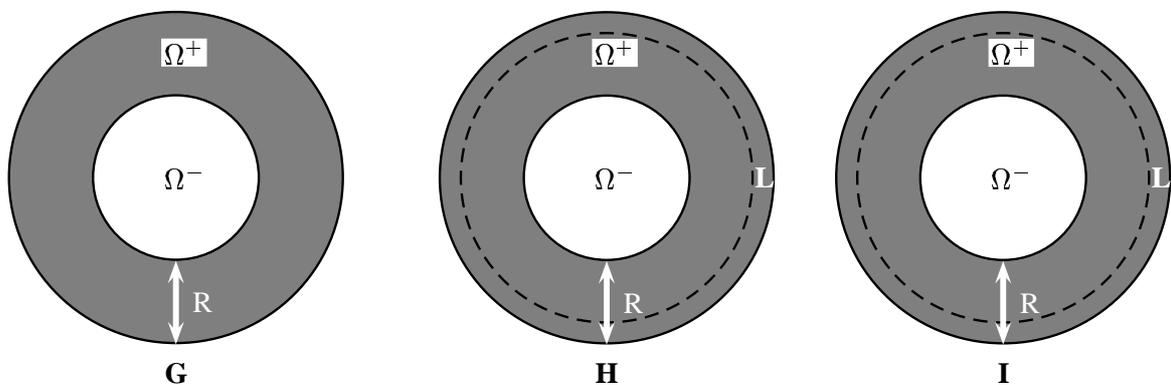


FIG. 5.9 – Caractéristiques des expériences numériques du chapitre 5. Les figures du bas représentent la décomposition de domaines associée à la méthode couplée. R est la profondeur de l'interface de couplage et L est la profondeur de l'interface non-conforme dans la partie éléments spectraux (quand elle existe).

Conclusions et Perspectives

Au cours de ce travail de thèse, on a cherché à développer une méthode numérique permettant de simuler la propagation d'ondes sismiques à l'échelle du globe.

Dans un premier temps, on a construit une méthode aux différences finies pour traiter le cas de la propagation des ondes SH dans le manteau à l'aide d'une approximation axisymétrique. La discrétisation des équations du mouvement écrites en coordonnées sphériques repose sur un schéma d'ordre deux en espace implémenté sur des grilles en quinconce. Dans le cadre de cette description physique simplifiée, on a tenté de caractériser la sensibilité des ondes réfléchies sous les discontinuités du manteau à des variations latérales des paramètres du milieu. On a ainsi pu tester les hypothèses utilisées dans certaines méthodes d'inversion qui négligent le caractère tridimensionnel de la propagation d'ondes. On a ensuite évoqué les limitations intrinsèques des méthodes de différences finies et on a suggéré une approche plus adaptée à l'extension à trois dimensions.

On a alors présenté une méthode d'éléments spectraux permettant la discrétisation des équations de l'élasto-gravité dans le cas d'un milieu solide et pour une géométrie sphérique. La description physique est restreinte au cas d'un milieu élastique isotrope dans un état de référence hydrostatique et les effets de la gravité sont pris en compte dans la limite de l'hypothèse de Cowling. L'approximation spatiale utilise la construction d'un maillage hexaédrique non-conforme de la sphère qui permet de s'adapter aux variations des paramètres élastiques au sein du milieu. Les contraintes de continuité aux interfaces non-conformes sont traduites par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange et conduisent à une formulation hybride primale des équations du mouvement. La discrétisation de l'espace des multiplicateurs de Lagrange est basée sur une approche d'éléments joints qui dégénère en une méthode conforme dans le cas sphérique et pour une non-conformité purement géométrique. La formulation algébrique obtenue nécessite une phase de résolution localisée sur les interfaces non-conformes, mais elle préserve une matrice de masse diagonale. Ainsi l'évolution en temps peut être assurée par un schéma aux différences finies totalement explicite. Les résultats présentés dans des milieux homogènes par couches ont permis de valider l'approche utilisée et d'illustrer la parallélisation naturelle de l'algorithme obtenu. Pour permettre la prise en compte d'un fluide, on a alors utilisé une méthode qui couple la méthode des éléments spectraux avec une solution modale. En plus d'éviter les problèmes liés à la discrétisation du fluide en déplacement, la méthode couplée offre une solution élégante et très compétitive pour traiter le cas d'une structure radiale du noyau de la Terre. On a ainsi pu présenter les résultats obtenus pour un modèle moyen de Terre à des fréquences qui se rapprochent de la gamme des observations terrestres.

Ainsi qu'on l'a souligné, la méthode couplée permet de disposer d'une méthode numérique beaucoup plus souple et qui peut être adaptée à la physique du problème considéré. Les perspectives de ce travail sont désormais nombreuses et dépendent largement de la gamme de fréquences dans laquelle on se situe. Pour une étude réaliste des hétérogénéités de la croûte et du manteau, les effets de la gravité pourront être négligés dès lors que l'on s'intéresse à des périodes inférieures à 60 s. La prise en compte de l'atténuation et de l'anisotropie du modèle seront en revanche souhaitables et pour les inclure dans la méthode des éléments spectraux, on pourra consulter les travaux de Komatitsch, Barnes, and Tromp

(2000a) et Komatitsch and Tromp (1999). En supposant une structure radiale pour le noyau et en utilisant un raccord DtN à l'interface noyau-manteau, on pourra aborder des problèmes d'intérêt majeur en sismologie globale. Parmi les études envisageables on pourra essayer de :

1. quantifier la réponse sismique des distributions de température produites par les modèles de convection du manteau (Méglin et al. 1997),
2. calculer des ondes de surface dans des modèles réalistes de croûte³ et estimer les approximations utilisées dans les méthodes d'inversion,
3. prendre en compte des modèles tridimensionnels dans les méthodes de localisation des sources sismiques,
4. étudier la réponse de régions hétérogènes localisées (zones de subduction, couche D'').

Pour des études à plus basse fréquence, il faudra compléter la description physique du problème en incluant les termes de redistribution des masses dans la prise en compte des effets de gravité. De plus, la discrétisation par éléments spectraux du noyau fluide sera nécessaire si l'on souhaite (1) inclure des hétérogénéités de petite taille dans le fluide et/ou (2) inclure une topographie de faible longueur d'onde sur la CMB. On rappelle également que parmi les problèmes ouverts, figure la caractérisation du spectre convectif de l'élasto-gravité.

3. Il faudra à plus long terme tenir compte de la présence des océans dans la méthode des éléments spectraux.

Références

- Agouzal, A. and J. M. Thomas (1995). Une méthode d'éléments finis hybrides en décomposition de domaines. *Modélisation mathématique et analyse numérique* 29, 749–764.
- Aki, K. and P. G. Richards (1980). *Quantitative seismology*. San Francisco: Freeman.
- Alford, R. M., K. R. Kelly, and D. M. Boore (1974). Accuracy of finite-difference modelling of the acoustic wave equation. *Geophysics* 39, 834–842.
- Alterman, Z. S., J. Aboudi, and F. C. Karal (1970). Pulse propagation in a laterally heterogeneous solid elastic sphere. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* 21, 243–260.
- Alterman, Z. S. and F. C. Karal (1968). Propagation of elastic waves in layered media by finite-difference methods. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 58, 367–398.
- Anagnostou, G., Y. Maday, and A. T. Patera (1989). On the mortar element method; generalizations and implementation. In R. Glowinski (Ed.), *Third Int. Conference on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. SIAM.
- Azaiez, M., M. Dauge, and Y. Maday (1994, Septembre). Méthodes spectrales et des éléments spectraux. Technical Report 17, Institut de Recherche Mathématique de Rennes, Université de Rennes I.
- Barry, A., J. Bielak, and R. C. Mac Camy (1988). On absorbing boundary conditions for wave propagation. *J. Comp. Phys.* 79, 449–468.
- Baumgardner, J. and P. Frederikson (1985). Icosahedral discretisation of the two-sphere. *S.I.A.M. Journal of Numerical Analysis* 22, 1107–1115.
- Ben Belgacem, F. (1993). *Discrétisations 3D non conformes par la méthode de décomposition de domaine des éléments avec joints : analyse mathématique et mise en oeuvre pour le problème de Poisson*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.
- Ben Belgacem, F. (1999). The mortar finite element method with Lagrange multipliers. *Numerische Mathematik* 84, 173–197.
- Ben Belgacem, F. and Y. Maday (1994). A spectral element methodology tuned to parallel implementations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 116, 59–67.
- Ben Belgacem, F. and Y. Maday (1997). The mortar element method for three dimensional finite elements. *Math. Model. and Num. Anal.* 31, 289–302.
- Bermúdez, A. and R. Rodríguez (1994). Finite element computation of the vibration modes of a fluid-solid system. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 119, 355–370.
- Bernardi, C., Y. Maday, and A. T. Patera (1994). A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method. In H. Brezis and J. Lions (Eds.), *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications*, pp. 13–51. Pitman.
- Boore, D. M. (1972). *Finite-difference method for seismic wave propagation in heterogeneous materials*, Chapter 11. Academic Press, Inc.
- Brezzi, F. and M. Fortin (1991). *Mixed and hybrid finite element methods*. New York: Springer Verlag.
- Brune, J. N., J. E. Nafe, and L. E. Alsop (1961). The polar phase shift of surface waves on a sphere. *Bull. Seism. Soc. Am.* 51, 247–257.

- Bunge, H. P., M. A. Richards, and J. R. Baumgardner (1997). A sensitivity study of 3-D spherical mantle convection at 10^8 Rayleigh number: Effects of depth-dependent viscosity. *J. Geophys. Res.* 102, 11991–12007.
- Canuto, C., M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang (1987). *Spectral methods in fluid dynamics*. Berlin: Springer Verlag.
- Capdeville, Y. (2000). *Méthode couplée éléments spectraux-solution modale pour la propagation d'ondes dans la Terre à l'échelle globale*. Thèse de doctorat, Institut de Physique du Globe de Paris.
- Capdeville, Y., E. Stutzmann, and J. P. Montagner (1997). Effect of a plume on long period surface waves computed with normal mode coupling. *Phys. Earth Planet. Int.*
- Chaljub, E. and A. Tarantola (1997). Sensitivity of *SS* precursors to topography on the upper-mantle 660-km discontinuity. *Geophysical Research Letters* 24, 2613–2616.
- Chaljub, E., A. Tarantola, and P. M. Shearer (1994, May). Modeling of *SH* wave propagation in the Earth. Technical Report 24, IGP/GTG.
- Chevrot, S., L. Vinnick, and J. P. Montagner (1999). Global scale analysis of the mantle *Pds* phases. *J. Geophys. Res.* 104:B9, 20203–20219.
- Ciarlet, P. G. (1982). *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise. Paris: Masson.
- Clévéde, E., C. Mégnin, B. Romanowicz, and P. Lognonné (2000). Seismic waveform modeling and surface wave tomography in a three-dimensional earth: asymptotic and non-asymptotic approaches. *Phys. Earth Planet. Int.*. In press.
- Dahlen, F. A. (1987). Multiplet coupling and the calculations of synthetic long-period seismograms. *Geophys. J. R.* 91, 241–254.
- Dahlen, F. A. and J. Tromp (1998). *Theoretical Global Seismology*. Princeton University Press.
- Davis, J. P., R. Kind, and I. S. Sacks (1989). Precursors to *P'P'* re-examined using broad-band data. *Geophys. J. Int.* 99, 595–604.
- Dhatt, G. and G. Touzot (1984). *The finite element method displayed*. John Wiley and sons.
- Dziewonski, A. M. (1995). Global seismic tomography of the mantle. *Reviews of Geophysics Suppl. to Vol. 33*, 419–423.
- Dziewonski, A. M. and D. L. Anderson (1981). Preliminary Reference Earth Model. *Phys. Earth Planet. Int.* 25, 297–356.
- Faccioli, E., F. Maggio, R. Paolucci, and A. Quarteroni (1997). 2D and 3D elastic wave propagation by a pseudo-spectral domain decomposition method. *Journal of Seimology* 1, 237–251.
- Faccioli, E., F. Maggio, A. Quarteroni, and A. Tagliani (1996). Spectral-domain decomposition methods for the solution of acoustic and elastic wave equations. *Geophysics* 61:4, 1160–1174.
- Farhat, C. and F. X. Roux (1991). A method of Finite Element Tearing and Interconnecting and its parallel solution. *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 32, 1205–1227.
- Fisher, P. (1990). Analysis and application of a parallel spectral element method for the solution of the Navier-Stockes equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 80, 483–491.
- Frankel, A. (1993). Three-dimensionnal simulations of ground motions in the San Bernardino valley, California, for hypothetical earthquakes on the San Andreas fault. *Bull. Seism. Soc. Am.* 83, 1020–1041.
- Furumura, T., B. L. N. Kenneth, and M. Furumura (1998). Seismic wavefield calculation for laterally heterogeneous whole Earth models using the pseudospectral method. *Geophys. J. Int.* 135, 845–860.
- Geller, R. J. and T. Ohminato (1994). Computation of synthetic seismograms and their partial derivatives for heterogeneous media with arbitrary natural boundary conditions using the direct solution method. *Geophys. J. Int.* 116, 421–446.

- Germain, P. (1980). *Mécanique des milieux continus*. Masson.
- Givoli, D. and J. Keller (1990). Non-reflecting boundary conditions for elastic waves. *Wave Motion* 12, 261–279.
- Gordon, W. J. and C. A. Hall (1972). In A. K. Aziz (Ed.), *Geometric aspects of the finite element method, with applications to partial differential equations*, pp. 769–784. Academic Press.
- Grand, S. P. (1994). Mantle shear structure beneath the Americas and surrounding oceans. *Journal Geophys. Res.* 99, 11591–11621.
- Grote, M. J. and J. Keller (1995). On Nonreflecting boundary conditions. *J. Comput. Phys.* 122, 231–243.
- Gu, Y., A. M. Dziewonski, and C. B. Agee (1998). Global de-correlation of the topography of transition zone discontinuities. *Earth Planet. Sci. Lett.* 157, 57–67.
- Hamdi, M., Y. Ousset, and G. Verchery (1978). A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems. *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 13, 139–150.
- Hugues, T. J. R. (1987). *The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall International.
- Igel, H. and M. Weber (1995). *SH*-wave propagation in the whole mantle using high-order finite differences. *Geophys. Res. Lett.* 22, 731–734.
- Igel, H. and M. Weber (1996). *P – SV* wave propagation in the Earth’s mantle using finite differences: application to heterogeneous lowermost mantle structure. *Geophys. Res. Lett.* 23, 415–418.
- Ito, E., E. Takahashi, and Y. Matsui (1984). The mineralogy and chemistry of the lower mantle: an implication of the ultrahigh-pressure phase relations in the system MgO-FeO-SiO₂. *Phys. Earth Planet. Inter.* 67, 238–248.
- Jackson, I. (1983). Some geophysical constraints on the chemical composition of the Earth’s lower mantle. *Earth Planet. Sci. Lett.* 62, 91–103.
- Jeanloz, R. (1990). The nature of the Earth’s core. *Annual Rev. Earth Planet. Sci.* 18, 357–386.
- Jobert, N., R. Gaulon, A. Dieulin, and G. Roullet (1977). Sur les ondes de très longue période, caractéristiques du manteau supérieur. *Comptes rendus Acad. Sci. Paris Série B*, 285, 49–51.
- Kelly, K. R., R. W. Ward, S. Treitel, and R. M. Alford (1976). Synthetic seismograms, a finite difference approach. *Geophysics* 41, 2–27.
- Kenneth, B. L. N. and E. R. Engdahl (1991). Traveltimes for Global Earthquake Location and Phase Identification. *Geophys. J. Int.* 105, 429–465.
- Komatitsch, D. (1997). *Méthodes spectrales et éléments spectraux pour l’équation de l’élastodynamique 2D et 3D en milieu hétérogène*. Thèse de doctorat, Institut de Physique du Globe de Paris.
- Komatitsch, D., C. Barnes, and J. Tromp (2000a). Simulation of anisotropic wave propagation based upon a spectral element method. *Geophysics*. In press.
- Komatitsch, D., C. Barnes, and J. Tromp (2000b). Wave propagation near a fluid-solid interface: a spectral element approach. *Geophysics* 65:2, 623–631.
- Komatitsch, D. and J. Tromp (1999). Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. *Geophys. J. Int.* 139, 806–822.
- Komatitsch, D. and J. P. Vilotte (1998). The spectral element method: an effective tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. *Bull. Seism. Soc. Am.* 88, 368–392.
- Komatitsch, D., J.-P. Vilotte, R. Vai, J. Castillo-Covarrubias, and F. Sánchez-Sesma (1999). Spectral element approximation of elastic waves equations: application to 2-D and 3-D seismic problems. *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 45, 1139–1164.
- Lacour, C. and Y. Maday (1997). Two different approaches for matching nonconforming grids: the Mortar Element method and the FETI method. *BIT Numerical Mathematics* 37:3, 720–738.

- Landau, L. and E. Lifchitz (1953). *Théorie de l'élasticité*. Moscou: Éditions Mir. 2nd ed.
- Liu, L. G. (1976). The post-spinel phase of forsterite. *Nature* 262, 770–772.
- Liu, L. G. (1979). Phase transformations and the constitution of the deep mantle. In M. W. McHellinny (Ed.), *The Earth: its origin, structure and evolution*, pp. 177–202. San Diego, Calif.: Academic.
- Lognonné, P. (1991). Normal modes and seismograms in an anelastic rotating Earth. *J. Geophys. Res.* 96, 20,309–20,319.
- Lognonné, P. and E. Clévéde (1997). Diffraction of long-period Rayleigh waves by a slab: effects of mode coupling. *Geophys. Res. Lett.* 24, 1035–1038.
- Maday, Y., C. Mavriplis, and A. T. Patera (1988). Nonconforming mortar element methods: application to spectral discretizations. In T. Chan and R. Glowinski (Eds.), *Second Int. Conference on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. SIAM.
- Maday, Y. and A. T. Patera (1989). Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations. In A. K. Noor and J. T. Oden (Eds.), *State of the art survey in computational mechanics*, pp. 71–143.
- Mégnin, C., H. P. Bunge, B. Romanowicz, M. A. Richards, and S. P. Grand (1997). Imaging 3-D spherical convection models: what can seismic tomography tell us about mantle dynamics. *Geophys. Res. Lett.* 24, 1299–1302.
- Morand, H. and R. Ohayon (1992). *Intéactions fluides-structures*, Volume 23 of *Recherche en mathématiques appliquées*. Paris: Masson.
- Nataf, H. C. and J. VanDecar (1993). Seismological detection of a mantle plume? *Nature* 364, 115–120.
- Neele, F. and H. de Regt (1999). Imaging upper-mantle discontinuity topography using underside-reflection data. *Geophys. J. Int.* 137, 91–106.
- Neele, F., H. de Regt, and J. VanDecar (1997). Gross errors in upper-mantle discontinuity topography from underside reflection data. *Geophys. J. Int.* 129, 194–204.
- Nolet, G., S. P. Grand, and B. L. N. Kennen (1994). Seismic heterogeneity in the upper mantle. *Journal Geophys. Res.* 99, 23753–23766.
- Olsen, K. B. and R. J. Archuleta (1996). 3-D simulation of earthquakes on the Los Angeles fault system. *Bull. Seism. Soc. Am.* 86:3, 575–596.
- Patera, A. T. (1984). A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys.* 54, 468–488.
- Phinney, R. A. and R. Burridge (1973). Representation of the elastic-gravitational excitation of a spherical Earth model by generalized spherical harmonics. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 34, 451–487.
- Pilant, W. L. (1979). *Elastic waves in the Earth*. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company.
- Priolo, E., J. M. Carcione, and G. Seriani (1994). Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modeling techniques. *J. Acoust. Soc. Am.* 95:2, 681–693.
- Raviart, P. A. and J. M. Thomas (1977). Primal hybrid finite element methods for 2nd order elliptic equations. *Mathematics of Computation* 31, 391–413.
- Raviart, P. A. and J. M. Thomas (1983). *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise. Paris: Masson.
- Revenaugh, J. and T. H. Jordan (1991). Mantle layering from *ScS* reverberations: 2. the transition zone. *Journal Geophys. Res.* 96, 19763–19780.
- Ritzwoller, M. H. and E. M. Lavelly (1995). Three-dimensional seismic models of the Earth's mantle. *Reviews of Geophysics* 33, 1–66.
- Romanowicz, B. (1991). Seismic tomography of the Earth's mantle. *Annual Rev. Earth Planet. Sci.* 19, 77–99.

- Ronchi, C., R. Iacono, and P. S. Paolucci (1996). The ‘Cubed Sphere’: a new method for the solution of partial differential equations in spherical geometry. *J. Comput. Phys.* 124, 93–114.
- Rulf, B. (1969). Rayleigh waves on curved surfaces. *J. Acoust. Soc. Am.* 45, 493–499.
- Sadourny, R. (1972). Conservative finite-difference approximations of the primitive equations on quasi-uniform spherical grids. *Monthly Weather Review* 100, 136–144.
- Seriani, G. and E. Priolo (1994). Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media. *Finite Elements in Analysis and Design* 16, 337–348.
- Shearer, P. M. (1991a). Constraints on upper mantle discontinuities from observations of long-period reflected and converted phases. *Journal Geophys. Res.* 96, 18147–18182.
- Shearer, P. M. (1991b). Imaging global body-wave phases by stacking long-period seismograms. *Journal Geophys. Res.* 96, 20353–20364.
- Shearer, P. M. (1993). Global mapping of upper-mantle reflectors from long-period *SS* precursors. *Geophys. J. Int.* 115, 878–904.
- Shearer, P. M. and T. G. Masters (1990). Global seismic record sections—Data and synthetics. In *EOS Transactions*, Volume 71, pp. 1465. AGU.
- Shearer, P. M. and T. G. Masters (1992). Global mapping of topography on the 660-km discontinuity. *Nature* 355, 791–796.
- Takeuchi, H. and M. Saito (1972). Seismic surface waves. *Meth. Comp. Phys.* 11, 217–295.
- Taylor, M., J. Tribbia, and M. Iskandarani (1997). The spectral element method for the shallow water equations on the sphere. *J. Comp. Phys.* 130, 92–108.
- Thompson, L. L. and P. Pinsky (1996). A space-time finite element method for structural acoustics in infinite domains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 132, 195–227.
- Tordjman, N. (1995). *Éléments finis d’ordre élevés avec condensation de masse pour l’équation des ondes*. Thèse de doctorat, Université Paris IX Dauphine.
- Vai, R., J. Castillo-Covarrubias, F. Sánchez-Sesma, D. Komatitsch, and J.-P. Vilotte (1999). Elastic wave propagation in an irregularly layered medium. *Soil Dyn. Earthquake Engrg.* 18, 11–18.
- Valette, B. (1986). About the influence of pre-stress upon the adiabatic perturbations of the earth. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 85, 179–208.
- Valette, B. (1987). *Spectre des oscillations libres de la Terre; aspects mathématiques et g’eoophysiques*. Thèse d’état, Université Pierre et Marie Curie.
- Valette, B. (1989). Spectre des vibrations propres d’un corps élastique, auto-gravitant, en rotation uniforme et contenant une partie fluide. *C. R. Acad. Sci. Paris t. 309, Série I*, 419–422.
- van der Hilst, R. D., S. Widiyantoro, and E. R. Engdahl (1997). Evidence for deep mantle circulation from global tomography. *Nature* 386, 578–584.
- Vinnick, L., S. Chevrot, and J. P. Montagner (1997a). Evidence for a stagnant plume in the transition zone? *Geophys. Res. Lett.* 24:9, 1007–1010.
- Vinnick, L. P. (1977). Detection of waves converted from *P* to *SV* in the mantle. *Phys. Earth Planet. Inter.* 15, 39–45.
- Vinnick, L. P., S. Chevrot, and J. P. Montagner (1997b). Evidence for a stagnant plume in the transition zone? *Geophys. Res. Lett.* 24, 1007–1010.
- Virieux, J. (1984). *SH*-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics* 49, 1933–1942.
- Wang, Z., F. A. Dahlen, and J. Tromp (1993). Surface-wave caustics. *Geophys. J. Int.* 114, 311–324.
- Weber, M., J. P. Davis, C. Thomas, F. Kruger, F. Sherbaum, J. Schlittenhardt, and M. Kornig (1996). The structure of the lowmost mantle as determined from using seismic arrays. In A. M. E. Boschi, G. Ekstrom (Ed.), *Seismic modeling of Earth structure*, pp. 399–442. Bologna: Editrice Compositori.

- Woodhouse, J. H. (1988). The calculation of eigenfrequencies and eigenfunctions of the free oscillations of the Earth and the Sun. In D. J. Doornbos (Ed.), *Seismological algorithms*, New York, pp. 321–370. Academic Press.
- Zienkiewicz, O. C. and P. Bettes (1978). Fluid-structure dynamic interaction and wave forces, an introduction to numerical treatment. *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 13, 1–16.

Résumé :

Ce travail est consacré au développement d'un outil numérique capable de modéliser la propagation 3D d'ondes sismiques à l'échelle du globe pour des distributions réalistes de vitesse et de densité. On considère les équations de l'élastodynamique en milieu élastique isotrope et on inclut les effets de la gravité dans l'approximation de Cowling pour un état initial d'équilibre hydrostatique.

On présente d'abord une approximation aux différences finies pour modéliser la propagation des ondes *SH* longue période (≈ 30 s) dans un manteau terrestre axisymétrique en négligeant la gravité. Dans cette description, on étudie l'effet de variations de topographie et de vitesse sur les ondes réfléchies sous les discontinuités du manteau.

On développe ensuite une méthode d'éléments spectraux permettant la modélisation 3D du champ d'ondes complet en géométrie sphérique. On utilise un maillage hexaédrique non-conforme de la sphère qui s'adapte à la variation des paramètres élastiques du milieu. L'espace des multiplieurs de Lagrange associés aux contraintes de continuité sur les interfaces non-conformes est discrétisé par une méthode de joints qui devient conforme en géométrie sphérique. La prise en compte de régions fluides est basée sur la construction d'un opérateur *Dirichlet to Neumann* qui couple la méthode des éléments spectraux à une méthode de sommation de modes.

La méthode est validée dans des milieux homogènes par couches puis pour des modèles de Terre moyens, en comparant les sismogrammes obtenus avec ceux calculés par une méthode de modes propres.

L'implémentation parallèle et le coût de calcul de la méthode sont présentés et les perspectives sont discutées. La potentialité de la méthode permet d'envisager pour la première fois de modéliser la propagation du champ d'ondes complet dans des modèles de Terre 3D pour des périodes inférieures à 50 secondes.

Abstract :

This work aims at developing a numerical tool to model 3D seismic waves propagation at a global scale for realistic velocity and density distributions. We consider the elastodynamics equations for an elastic and isotropic medium and we further take into account the gravity effects in the Cowling approximation for an initial state of hydrostatic equilibrium.

We first present a finite difference modeling of long-period (≈ 30 s) *SH* waves propagation in an axisymmetric Earth's mantle without gravity. In this framework, we study the influence of topography and velocity variations on the seismic waves reflected under the upper mantle's discontinuities.

We then develop a spectral element method to model the full wavefield propagation in spherical geometry. We use a non-conforming hexaedrical mesh for the sphere in order to adapt the discretization to the variation of elastic parameters in the medium. The space of Lagrange multipliers related to the continuity constraints across the non-conforming interfaces is discretized by a mortar method that becomes conforming due to the spherical geometry. Fluid regions are taken into account by constructing a *Dirichlet to Neumann* operator that couples the spectral element method to a modes summation technique. The final method is validated for radially heterogeneous models by comparing the synthetic seismograms to those produced by a normal modes method. Both parallel implementation and global cost of the method are discussed and perspectives to this work are proposed.

The method's potentiality allows for the first time to compute the full seismic response of 3D Earth's models for period smaller than 50 seconds.