



HAL
open science

Vorticité dans le modèle de Ginzburg-Landau et quelques contributions en théorie de point fixe

Hassen Aydi

► **To cite this version:**

Hassen Aydi. Vorticité dans le modèle de Ginzburg-Landau et quelques contributions en théorie de point fixe. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université du Centre, 2012. tel-00718039

HAL Id: tel-00718039

<https://theses.hal.science/tel-00718039>

Submitted on 16 Jul 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT SUPERIEUR D'INFORMATIQUE ET DES
TECHNIQUES DE COMMUNICATION
DE HAMMAM SOUSSE

HABILITATION UNIVERSITAIRE

Spécialité: Mathématiques

Présentée par

Hassen AYDI

Titre

**Vorticité dans le modèle de Ginzburg-Landau et
quelques contributions en théorie de point fixe**

Soutenue le 02 Juin 2012 devant le jury

Mr. Kais Ammari
Mr. Fabrice Bethuel
Mr. Lotfi Lassoued
Mr. Sami Baraket
Mr. Hassine Maatoug

Président
Rapporteur
Rapporteur
Membre
Membre

À la mémoire de mon père.

À ma mère et à toute ma famille.

À Awatef et à ma petite que je l'attends très prochainement.

Remerciements

Le travail de recherche que je présente dans ce mémoire est le fruit de nombreuses rencontres. Ce ne fut parfois qu'un échange de quelques minutes lors d'une pause café, ou à l'inverse des années de collaboration, d'où souvent est née une amitié. Dans ces pages que j'écris en dernier alors qu'elles apparaîtront en premier dans le mémoire, en essayant de dépasser toute la maladresse dont je me sais capable, je voudrais tenter de remercier tous ceux sans qui ce travail n'existerait pas. Je vais probablement oublier des personnes qui devraient être mentionnées, j'espère qu'elles seront indulgentes !

Il est tout à fait naturel de commencer ces remerciements en exprimant ma reconnaissance envers Mr Etienne Sandier mon directeur de thèse à l'université de Paris 12. Sa gentillesse et son enthousiasme ont instauré dès le début une ambiance de travail très agréable. Je tiens à le remercier de sa confiance et pour sa disponibilité. Les trois années de thèse sous sa direction ont été passionnantes.

Un grand merci à Mr Fabrice Bethuel et Mr Lotfi Lassoued pour avoir accepté le principe de faire un rapport dans un temps un peu court. Merci à tous les deux de participer à mon jury. Votre éclairage sur les aspects mathématiques m'est précieux. Encore un grand merci Mr Kais Ammari de présider le jury et aussi à Mr Sami Baraket et Mr Hassine Maatoug qui ont si gentilement accepté de participer à mon jury.

Je remercie vivement Ayman Kachmar avec qui j'ai commencé ma première collaboration. Elle était déterminante et enrichissante, surtout elle vient à la suite d'une période de silence après la thèse.

Je voudrais remercier aussi Bessem Samet et Habib Yazidi de l'ESSTT pour leurs remarques sur la version précédente de cette HDR, et pour avoir si aimablement accueilli dans leur bureau à l'ESSTT. Un grand merci à Bessem qui m'a aidé à l'initiation du domaine de la théorie de point fixe.

Mes plus chaleureux remerciements s'adressent à tous mes collaborateurs Ayman Kachmar, Bessem Samet, Habib Yazidi, Wasfi Shatanawi, Calogero Vetro, Erdal Karapinar, Mihai Postolache, Hemant Kumar Nashine, Mujahid Abbas, Zead Mustafa, etc. Avec eux j'ai appris beaucoup de choses en préparant nos publications. En un mot, un grand merci à eux tous.

Je voudrais remercier tous mes collègues, ainsi que le personnel administratif à l'Institut Supérieur d'Informatique de Mahdia. Je ne cite aucun pour ne pas oublier un d'eux. Mes vifs remerciements vont aussi à Mr Hamadi Ben Naceur et à l'âme de Mr Khaled Ben Yahya les directeurs de l'ISIMa avec eux je garde que de bons souvenirs. Aussi, je remercie tous mes collègues au sein de l'Institut Supérieur d'Informatique et des techniques de Communication de Hamam Sousse.

Je voudrais remercier aussi tous mes collègues du groupe de travail "Analyse Non Linéaire et Géométrie" à la Faculté des Sciences de Tunis. Un grand merci va également au directeur de l'unité de recherche Mr Sami Baraket et à Mme Makkia Dammak.

Mes remerciements vont encore à mes amis qui m'ont accompagnés durant mon séjour

à Paris lors de la préparation du DEA et du Doctorat : Abdellatif, Fethi, M. Jleli, Slah, H. Yazidi, M. Bouali, Teycir, Sana, H. Zribi, Walid, Hamadi, Taoufik, Hamdi,...

J'exprime toute ma gratitude du fond du coeur à ma mère, mon oncle Béchir et toute ma famille pour leur soutien constant et leur soin le plus attentif. Enfin, je voudrais adresser à ma femme, Awatef, mes sincères remerciements pour son encouragement, sa compréhension, sa patience et son aide.

Table des matières

1	Curriculum Vitae	6
1.1	Cursus universitaire	6
1.2	Activité en matière d'enseignement	7
1.2.1	Enseignement	7
1.2.2	Activités pédagogiques	7
1.3	Activité en matière de recherche	8
1.3.1	Thèmes de recherche	8
1.3.2	Equipe de recherche	8
1.3.3	Publications scientifiques	8
1.3.4	Communications	9
1.4	Compétences Informatiques	11
1.5	Langues	11
2	Synthèse des travaux de recherche	12
2.1	Etude de la vorticité dans le modèle de Ginzburg-Landau, [Articles 1-6]	13
2.1.1	Sur un domaine borné	13
2.1.2	Modèle périodique [Article 1]	15
2.1.3	Vorticité pour certains points critiques, [Article 2]	21
2.1.4	Vorticité dans le modèle de Ginzburg-Landau avec des contraintes discontinues, [Articles 3-4]	24
2.1.5	Vorticité dans le modèle de Ginzburg-Landau avec poids, [Articles 5,6]	33
2.2	Quelques contributions en théorie de point fixe et applications, [Articles 7-12]	40
2.2.1	Introduction	40
2.2.2	Point fixe commun et point de coïncidence pour trois applications dans un espace métrique ordonné, [Article 7]	46
2.2.3	Quelques résultats de point fixe dans un espace métrique partiel (partial metric space), [Articles 8-12]	49
2.2.4	Quelques résultats de point fixe dans un espace métrique cône (Cone metric space), [Articles 10,11]	56

2.2.5 Quelques résultats de point fixe dans un espace métrique généralisé
(generalized metric space), [Article 12] 68

Chapitre 1

Curriculum Vitae

Nom et Prénom : AYDI Hassen

Date et lieu de naissance : Né le 20 Mai 1977 à Regueb.

Situation familiale : Marié.

Nationalité : Tunisienne.

Adresse Personnelle : Dar El AYDI, Rue El Mandra Zaouiet Sousse, 4081 Sousse.

Adresse Professionnelle : Université de Sousse, Institut Supérieur d'Informatique et des techniques de Communication de Hammam Sousse, Rue G.P.1, Hammam Sousse-4011, Tunisie.

Tél : 98982011

E-mail : hassen.aydi@isima.rnu.tn

Situation actuelle : Maître Assistant en Mathématiques à l'Institut Supérieur d'Informatique et des techniques de Communication de Hammam Sousse (ISITcom).

1.1 Cursus universitaire

• 17 Décembre 2004 : **Thèse de Doctorat en Mathématiques de l'Université Paris 12 Val-de-Marne (France).**

-Titre : Vorticité dans le modèle de Ginzburg-Landau de la supraconductivité.

-Directeur de thèse : Etienne SANDIER.

-Jury : Sylvia Serfaty (Courant Institute, New York), Lia Bronsard (Université Mac-Master, Canada), Fabrice Bethuel (Université de Paris 6, Jussieu), Rejeb Hadiji (Université de Paris 12, Créteil), Etienne Sandier (Université de Paris 12, Créteil).

-Mention : Très honorable.

• 2000-2001 : **DEA de Mathématiques à l'Université de Paris 6, Jussieu.**

-Mention : Assez Bien.

• 1999-2000 : **Maîtrise de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Tunis.**

-Mention : Bien.

• Juin 1996 : **Baccalauréat, section Mathématiques.**

-Mention : Assez Bien.

1.2 Activité en matière d'enseignement

1.2.1 Enseignement

- 2001-2004 : **Vacataire à l'Université de Paris 12.**

Matières enseignées :

- TD Logique et Nombres en première année DEUG (MIAS).
- TD Algèbre Générale en première année DEUG (MIAS).
- TD Algèbre Linéaire en deuxième année DEUG (MIAS).
- TD Analyse en deuxième année DEUG (MIAS).
- TD Analyse en première année DEUG (SV).

- 2004-2005 : **Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche à l'Université de Paris 12.**

Matières enseignées :

- TD Analyse en première année DEUG (MIAS).
- TP Analyse Numérique sur Matlab et Maple en maîtrise de physique.
- TD Analyse Numérique en maîtrise de physique.

- 2005-2011 : **Maître Assistant à l'Institut Supérieur d'Informatique de Mahdia.**

Matières enseignées :

- Cours et TD Analyse en première année Tronc Commun.
- Cours et TD Analyse en deuxième année Tronc Commun.
- Cours et TD Algèbre en première année Tronc Commun.
- Cours Probabilités et Statistiques en première année Tronc Commun.
- Cours Mathématiques Discrètes en première année Tronc Commun.
- Cours Analyse Numérique en deuxième année Tronc Commun.
- Cours Mathématiques 3 en deuxième année Tronc Commun.

- Depuis septembre 2011 : **Maître Assistant à l'Institut Supérieur d'Informatique et des techniques de Communication de Hammam Sousse (ISITcom).**

Matières enseignées :

- Cours Analyse en première année licence appliquée.
- Cours Analyse Numérique en deuxième année licence appliquée.
- Cours et TD Analyse Numérique en deuxième année cycle ingénieur.
- Cours Probabilités et Statistiques en licence appliquée.

1.2.2 Activités pédagogiques

- Livre (en collaboration avec Ajmi Chouigui) Accepté au Centre de Publication Universitaire en 2012 (Soumis en 2011), en impression.

Titre : Analyse I- Cours et Exercices Corrigés.

- Coordinateur en Mathématiques pendant la période 2005/2011 à l'Institut Supérieur

d'Informatique de Mahdia (ISIMa).

- Président de jury des délibérations des résultats de première année (section réseaux) pendant les années universitaires 2009/2010 et 2010/2011 à l'ISIMa.

1.3 Activité en matière de recherche

1.3.1 Thèmes de recherche

- Vorticité dans le modèle de Ginzburg-Landau.
- Analyse mathématique de la supraconductivité.
- Théorie de point fixe.

1.3.2 Equipe de recherche

- Depuis 2006, je suis membre de l'unité de recherche : Analyse Non Linéaire et Géométrie (Code 03/UR/15-01), dirigée par le Professeur Sami Baraket, à la Faculté des Sciences de Tunis.

- **Rapporteur** : J'ai rapporté plusieurs articles dans des divers journaux. Voici certains d'entre eux :

1. Journal of Advanced Mathematical Studies (2 fois).
2. Mathematical and Computer Modelling (2 fois).
3. Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Mathematica.
4. Fixed Point Theory and Applications (3 fois).
5. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences (2 fois).
6. Abstract and Applied Analysis.
7. Applied Mathematical Letters.
8. Computers and Mathematics with Applications.
9. Boundary Value Problems.
10. Advances in Difference Equations.

1.3.3 Publications scientifiques

Les publications sont présentées suivant cet ordre lors de la synthèse de l'introduction donnée dans le prochain chapitre.

1. H. Aydi, E. Sandier, *Vortex analysis for the periodic Ginzburg-Landau model*, Annales IHP, Analyse Non Linéaire, 25 (4) (2009) 1223-1236.
2. H. Aydi, *Lines of vortices for solutions of the Ginzburg-Landau equations*, Journal Math. Pures. Appliqués, 89 (1) (2008) 49-69.

3. H. Aydi, A. Kachmar, *Magnetic vortices for a Ginzburg-Landau type energy of discontinuous constraint II*, Communications on Pure and Applied Analysis, 8 (3) (2009) 977-998.
4. H. Aydi, *On a Ginzburg-Landau type energy of discontinuous constraint for high value of applied field*, Chinese Annals of Mathematics, Series B, 32 (1) (2011) 15-26.
5. H. Aydi, H. Yazidi, *On a magnetic Ginzburg-Landau type energy with weight*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 3 (2) (2011) 140-150.
6. H. Aydi, *Limiting vorticities for superconducting thin films*, Journal of Analysis and Applications, 31 (2012) 1-15.
7. H. Aydi, *Coincidence and common fixed point results for contraction type maps in partially ordered metric spaces*, Int. Journal of Math. Analysis, 5 (13) (2011) 631-642.
8. L.j. Ćirić, B. Samet, H. Aydi, C. Vetro, *Common fixed points of generalized contractions on partial metric spaces and an application*, Applied Mathematics and Computation, 218 (2011) 2398-2406.
9. H. Aydi, *Common fixed point results for mappings satisfying (ψ, ϕ) -weak contractions in ordered partial metric space*, International Journal of Mathematics and Statistics, 11 (1) (2012) 53-64.
10. H. Aydi, B. Samet, C. Vetro, *Coupled fixed point results in cone metric spaces for \tilde{w} -compatible mappings*, Fixed Point Theory and Applications 2011, 2011 :27.
11. H. Aydi, H.K. Nashine, B. Samet, H. Yazidi, *Coincidence and common fixed point results in partially ordered cone metric spaces and applications to integral equations*, Nonlinear Analysis, 74 (17) (2011) 6814-6825.
12. H. Aydi, B. Damjanović, B. Samet, W. Shatanawi, *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered G-metric spaces*, Mathematical and Computer Modelling, 54 (2011) 2443-2450.

1.3.4 Communications

1. Juillet 2002 : Participation au congrès international de Brest 2002 “Harmonic maps, minimal surfaces and geometric flows” à Brest. France.
2. Octobre 2003 : Participation au “Oberwolfach seminar : Ginzburg-Landau” à Wolfach. Allemagne.
3. Janvier 2003 : Exposé “Etude d’un modèle périodique dans les équations de Ginzburg-Landau” Groupe de travail à l’Université de Paris 6, Jussieu.
4. Février-Juin 2003 : Participation au groupe de travail dirigé par Haim BREZIS “Analyse non linéaire” à l’Université de Paris 6, Jussieu.
5. Juillet 2003 : Participation aux septièmes rencontres mathématiques Tunisiennes d’été “EDP, Analyse non linéaire et géométrie” Dar Elhout, Tunis.

6. Novembre 2003 : Exposé “Lignes de vorticité dans le modèle de Ginzburg-Landau”
Groupe de travail à l’Université de Paris 12, Créteil.
7. Mai 2004 : Participation à l’ cole d’été de CIMPA “Aspects théoriques et appliqués
de quelques EDP de la géométrie ou de la physique” Damas, Syrie.
Exposé “A uniform-vortex distribution for the periodic Ginzburg-Landau model”.
8. Juin 2004 : Exposé “La vorticité dans les équations de Ginzburg-Landau” dans un
mini colloque sur les équations de Ginzburg-Landau organisé par Bernard HELF-
FER. Groupe de travail à l’Université de Paris 11, Orsay.
9. Juin 2004 : Participation aux conférences en honneur de Haim BREZIS pour l’oc-
casion de son 60 me anniversaire. Collège de France (Paris 5).
10. Juillet 2004 : Exposé aux neuvièmes rencontres mathématiques Tunisiennes d’été
“EDP, Analyse non linéaire et géométrie” Dar Elhout, Tunis.
Titre : Lignes de vorticité dans le modèle de Ginzburg-Landau.
11. Mars 2005 : Participation au Colloquim organisé à l’Université de Paris 12, Créteil,
“Vorticité dans le modèle de Ginzburg-Landau”, organisé par Etienne Sandier.
12. Décembre 2007 : Participation aux premières journées de Mathématiques de Kai-
rouan, “EDP : théorie spectrale et applications”.
13. Mars 2008 : Participation au congrès de la Société Mathématique de la Tunisie
(CSMT 2008)   Sousse.
14. Avril 2008 : Exposé au groupe de travail “Analyse non linéaire et géométrie” à la
Faculté des Sciences de Tunis.
Titre : Vorticité dans le modèle périodique de Ginzburg-Landau pour des champs
appliqués de l’ordre du premier champ critique.
15. Juin 2008 : Stage scientifique (invité pour 15 jours par Etienne SANDIER) au sein
du laboratoire d’Analyse et de Mathématiques Appliqués (LAMA)   l’Université
de Paris 12, Créteil.
16. Février 2009 : Exposé au groupe de travail “Analyse non linéaire et géométrie” à
la Faculté des Sciences de Tunis.
Titre : Vorticité dans un modèle de Ginzburg-Landau avec contraintes discontinues
pour des champs appliqués de l’ordre du premier champ critique.
17. Mars 2010 : Exposé au groupe de travail “Analyse Non Linéaire et Géométrie” à
la Faculté des Sciences de Tunis.
Titre : Vorticité dans un modèle de Ginzburg-Landau avec contraintes discontinues
dans la phase mixte.
18. Mars 2012 : Participation au congrès de la Société Mathématique de la Tunisie
(CSMT 2012)   Mahdia.
19. Mai 2012 : Exposé au groupe de travail “Analyse et Contrôle des Equations aux
Dérivées Partielles (ACEDP)” à la Faculté des Sciences de Monastir.

Titre : Quelques résultats sur la vorticité dans le modèle magnétique de Ginzburg-Landau.

20. 2006- : Groupe de travail (chaque semaine) à la Faculté des Sciences de Tunis dirigé par Sami Baraket “Analyse Non Linéaire et Géométrie”.
21. Co-organisateur d’un Colloque international “Anatolian Communications in Non-linear Analysis”, Turkey, July 2013.

1.4 Compétences Informatiques

1. Langages mathématiques : Matlab, Fortran, Maple.
2. Logiciels : Word, Excel, PowerPoint, Latex.
3. Systèmes d’exploitation : Linux (Gnome et KDE), Windows.

1.5 Langues

Anglais et Français.

Chapitre 2

Synthèse des travaux de recherche

Ce mémoire regroupe les résultats obtenus durant la préparation de mon doctorat en Mathématiques à l'Université de Paris 12 et après le doctorat. Deux thèmes principaux ont été abordés :

1. Etude de la vorticité dans le modèle de Ginzburg-Landau :
 - pour le cas périodique (  des minimiseurs globaux et locaux),
 - pour des points critiques (sur un disque),
 - pour un cas avec contraintes discontinues,
 - pour un cas à poids.
2. Quelques contributions en théorie de point fixe et applications :
 - dans des espaces métriques,
 - dans des espaces métriques partiels (partial metric spaces),
 - dans des espaces métriques cônes (cone metric spaces),
 - dans des espaces métriques généralisés (generalized metric spaces).

2.1 Etude de la vorticité dans le modèle de Ginzburg-Landau, [Articles 1-6]

2.1.1 Sur un domaine borné

Modèle physique

En physique, la théorie de Ginzburg-Landau (G-L) est une théorie phénoménologique des supraconducteurs, proposée en 1950 par les physiciens soviétiques Vitali Lazarevitch Ginzburg et Lev Davidovitch Landau. Un supraconducteur $S \subset \mathbb{R}^3$ (par exemple une bille ou une barre) est un matériau qui, au dessous d'une température critique T^c (T^c est généralement de l'ordre de quelques Kelvin ou dizaines de Kelvin), est susceptible de présenter des propriétés supraconductrices : absence de résistance et diamagnétisme parfait. Le diamagnétisme parfait (ou effet Meissner) est la propriété de repousser un champ magnétique appliqué en créant un contre champ opposé de même intensité.

La théorie de Ginzburg-Landau se base sur des travaux plus anciens de L.D. Landau (1938) sur les transitions de phase du second ordre. Cette théorie utilise un paramètre d'ordre u appelé "fonction d'onde" des électrons condensés par Landau et Ginzburg. Ce paramètre d'ordre mesure la brisure de symétrie $U(1)$ dans l'état supraconducteur.

L'équation de Ginzburg-Landau permet aussi de prédire qu'il existe deux types de supraconducteurs : les supraconducteurs de type I dans lesquels la longueur de cicatrization du paramètre d'ordre est plus grande que la longueur de pénétration du champ magnétique ($\kappa < 1/\sqrt{2}$), et qui reviennent à l'état normal (la supraconductivité est détruite dans tout l'échantillon) au delà d'un champ magnétique critique H_{c1} , et les supraconducteurs de type II où la longueur de cicatrization est faible devant la longueur de pénétration du champ magnétique ($\kappa > 1/\sqrt{2}$).

Dans un supraconducteur de type II, le champ critique est de quelques centaines de Gauss ce qui prohibe toute application  lectrotechnique. Nous nous intéressons par la suite essentiellement à des supraconducteurs de type II. Dans des supraconducteurs de ce type, sous l'application d'un champ magnétique élevé, la supraconductivité est détruite dans certaines zones : on parle alors de défauts de vorticité. Les équations de Ginzburg-Landau sont des équations aux dérivées partielles non linéaires proposées dans les années 50 pour la modélisation de la supraconductivité. Depuis, elles sont devenues un outil très courant dans de nombreux domaines de la physique où des tourbillons et/ou des défauts topologiques interviennent, comme par exemple les super-fluides. De nouveaux problèmes de cette nature apparaissent constamment en physique (par exemple le ferromagnétisme, les condensats de Bose-Einstein, ...). Depuis les années 90, des avancées importantes ont eu lieu dans la compréhension mathématique des équations de Ginzburg-Landau. Elles font intervenir des techniques issues de nombreux domaines des mathématiques : EDP non linéaire, théorie géométrique de la mesure, effets de concentration, tourbillons, etc.

Quelques résultats connus sur la vorticité

Dans le modèle bi-dimensionnel de Ginzburg-Landau, l'énergie libre d'un supraconducteur soumis à un champ magnétique extérieur $H \geq 0$ appliqué à sa surface est donnée après renormalisations par

$$J_{\Omega}(u, A) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u - i A u|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |h - H|^2 + \frac{\kappa^2}{4} \int_{\Omega} (1 - |u|^2)^2. \quad (2.1)$$

Ici le supraconducteur est assimilé à un cylindre vertical de section $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, régulière et simplement connexe. A est le potential-vecteur du champ magnétique induit $h = \text{rot}A$ et $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est le "paramètre d'ordre" qui indique l'état local du matériau. Là où $|u| \simeq 0$ c'est la phase normale, là où $|u| \simeq 1$ la phase supraconductrice. κ est le "paramètre de Ginzburg-Landau".

Des versions simplifiées (sans champ magnétique) apparaissent au début des années 90, notamment dans le fameux travail de Bethuel, Brezis et Hélein [8]. Ils usent d'un artefact mathématique (le degré topologique) mimant l'effet d'un champ magnétique élevé en forçant la présence de vortex. Bethuel, Brezis et Hélein ont considéré (pour κ grand)

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{\kappa^2}{4} \int_{\Omega} (1 - |u|^2)^2, \quad u \in H^1(\Omega, \mathbb{C}). \quad (2.2)$$

Afin de modéliser l'effet d'un champ magnétique suffisant dans le but de créer des défauts de vorticité, ils ont minimisé F sous la contrainte $u = g$ sur $\partial\Omega$ avec $g \in \mathcal{C}^{+\infty}(\partial\Omega, S^1)$ et le degré topologique $\text{deg}_{\partial\Omega}(g) \neq 0$.

L'un de leurs résultats le plus important tient dans l'analogie entre ce modèle simplifié et la réalité, leur approche met en évidence une réelle quantification de la vorticité (créée par la donnée au bord) à l'instar d'un potentiomètre magnétique utilisé par l'expérimentateur. Chacun des vortex contient la même énergie et est entouré d'une circulation (quantifiée elle aussi) analogue aux courants d'écrantage. On observe aussi un phénomène de concentration de l'énergie dans les vortex. De plus il apparaît clairement un phénomène de répulsion lors d'une interaction vortex/vortex ou vortex/bord.

Bien que la condition imposée au bord (condition de type Dirichlet) n'est pas physique (non invariante par changement de jauge), il est aujourd'hui communément admis que la description des vortex est cohérente avec les problèmes étudiés en physique. Juste après, Bethuel et Rivière [9] ont étudié les vortices d'un problème variationnel lié à la supraconductivité.

Durant les vingt dernières années, l'étude de l'énergie J_{Ω} de Ginzburg-Landau avec champ magnétique (2.1) a été la source d'un nombre considérable de travaux. Le but était de comprendre mathématiquement les mécanismes d'apparition des vortex, les valeurs des champs critiques et d'avoir des descriptions des solutions, de leurs vortex et des estimations de leur énergie à cette limite. En particulier, dans une série d'articles [36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44], Sandier et Serfaty ont démontré rigoureusement l'existence des phénomènes observés par les physiciens tels que l'existence et le calcul de différents

champs critiques, la quantification des vortex, les phénomènes de répulsion bord/vortex (apparition de vortex dans un sous domaine) et vortex/vortex (repartition uniforme dans le sous domaine), existence et quantification de la circulation autour des vortex. En effet, si le champ appliqué H est assez faible, on observe que le champ magnétique ne pénètre pas dans le matériau (c'est l'effet Meissner). Puis au delà d'un champ critique H_{c_1} de la forme $C(\Omega) \log \kappa$ (voir [42, 43]), il se produit une transition de phase et on observe des filaments de vorticité (ou des vortex) par lesquels le champ pénètre. Plus le champ est grand et plus les vortex sont nombreux, et comme ils se repoussent, ils tendent à s'organiser en réseau triangulaire dit "réseau d'Abrikosov". Pour plus de détails concernant l'aspect physique, on renvoie à [1, 22, 45, 47, 48]. Il a été prouvé que les minimiseurs de l'énergie J_Ω sur $H^1(\Omega, \mathbb{C}) \times H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ n'ont pas de vortex en-dessous de H_{c_1} , puis en ont au-dessus, et qu'ils se répartissent d'abord près du centre de domaine en configurations régulières (polyg nes, etc), puis de manière uniforme dans une sous partie du domaine (ensembles bi-dimensionnels) que l'on peut caractériser par un problème à frontière libre, pour cela voir [18, 37, 38, 44]. Des résultats de Sandier et Serfaty ont également été prouvés sur la répartition de vortex de solutions non-minimisantes (voir [40]).

2.1.2 Modèle périodique [Article 1]

Dans [Article 1], on est intéressé à un modèle périodique de Ginzburg-Landau avec champ magnétique. Tel modèle périodique permet d'éviter les effets du bord et de mettre l'accent sur ce qui se passe au coeur du supraconducteur, le "bulk". Ici on prend $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\Omega = \mathbb{R}^2$, ceci correspond à un large supraconducteur infini de type II.

Motivation

Soit (u, A) dans l'espace de Sobolev $H_{loc}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \times H_{loc}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, alors la densité de l'énergie de Ginzburg-Landau

$$\frac{1}{2} |\nabla u - i A u|^2 + \frac{1}{2} |h - H|^2 + \frac{\kappa^2}{4} (1 - |u|^2)^2$$

est dans $L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$. De plus, cette densité est invariante sous une transformation de jauge sous la forme $(v, B) = (u e^{i g}, B + \nabla g)$ avec $g \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$. Soit ∇^\perp et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignent respectivement $(-\partial_y, \partial_x)$ et le produit scalaire dans \mathbb{C} identifié avec \mathbb{R}^2 , où $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$.

Toutes les quantités physiques à savoir $|u|$, $h = \text{rot} A$ et $\langle i u, \nabla_A u \rangle$ sont invariantes de jauge. Les équations de Ginzburg-Landau associées sont

$$-\nabla_A^2 u = \kappa^2 u (1 - |u|^2) \quad \text{et} \quad -\nabla^\perp h = \langle i u, \nabla_A u \rangle \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2. \quad (2.3)$$

En considérant le cas où le champ appliqué H est légèrement inférieur à $H_{c_2} = \kappa^2$ avec $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$, Abrikosov a introduit dans [1] une modélisation spéciale et a prédit une structure périodique des zéros de u avec (u, A) est une solution de la première équation de Ginzburg-Landau linéarisée en u (en ignorant à droite le terme $u |u|^2$). Un tel (u, A) dit

solution d'Abrikosov existe si $H = H_{c_2}$ et $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dans le cas où $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$, Dutour [21] a montré qu'il existe une fonction continue $\kappa \rightarrow H_{c_1}(\kappa)$ telle que des solutions de l'équation originale (non linéarisée) existent et correspondent aux solutions d'Abrikosov si H est tel que $H_{c_1} < H < H_{c_2}$. Notons que H_{c_1} et H_{c_2} sont deux champs critiques et que H_{c_1} se comporte comme $\frac{\ln \kappa}{2}$ lorsque $\kappa \rightarrow +\infty$. Les solutions d'Abrikosov sont périodiques et leurs zéros forment un réseau et autour de chaque zéro, u a une charge topologique non nulle. Ecrivant $u = |u| e^{i\varphi}$, et dans les coordonnées polaires (r, θ) centrées en un zéro de u , si $r > 0$ est petit, l'entier

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) d\theta,$$

est non nul. Les points où u s'annule sont appelés vortex et l'entier est le degré du vortex.

Pour définir le modèle périodique, on utilise les conditions au bord de t' Hooft [46] sous lesquelles le vecteur potentiel A et le paramètre d'ordre u sont périodiques à une transformation de jauge près. On fixe le réseau dès le début et on se restreint à un réseau dont le domaine fondamental est un parallélogramme K d'aire 1. Par commodité, on prend un réseau carré. Notons que nos résultats décrivent des mesures de vorticit e limites et ne semblent pas assez pr ecis pour  etre influencées par la g eom etrie du r eseau. Ceci explique pourquoi nous nous restreignons  a un r eseau carrée de cotée 1 g en er e par deux vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) . On note \mathcal{L} le groupe de translations g en er es par (\vec{u}, \vec{v}) . Dans ce sens, on d efinit \mathcal{A} l'ensemble de $(u, A) \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2) \times H_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ tel que pour tous $k, l \in \mathbb{Z}$ la configuration $(u(\cdot + k\vec{u} + l\vec{v}), A(\cdot + k\vec{u} + l\vec{v}))$ est  equivalente de jauge  a (u, A) . Il est donc clair que les quantit es physiques invariantes de jauge $|u|$, $h = \text{rot}A$ et $(iu, \nabla_A u)$ sont K -p eriodiques.

Vorticit e pour les minimiseurs globaux

Dans toute la suite, on pose $\varepsilon = \frac{1}{\kappa}$. Le champ appliquée H est une fonction strictement positive en $\varepsilon > 0$ et on d efinit

$$\Delta_{ex} = H - \frac{1}{2} |\ln \varepsilon|.$$

Dans [Article 1], on s'est int eress e  a l' etude de

$$\inf_{\mathcal{A}} J_K(u, A).$$

On d emontre en particulier les propri et es bien connues de quantification du flux et d'existence de minimiseurs $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ de l' energie de Ginzburg-Landau J_K sur \mathcal{A} . En reprenant les id ees de Sandier et Serfaty et pour des champs appliquées H en particulier de l'ordre de $|\ln \varepsilon|$ avec $\varepsilon \rightarrow 0$, le but principal de l'[Article 1] est la recherche de la vorticit e des minimiseurs de l' energie de Ginzburg-Landau parmi les configurations $(u, A) \in \mathcal{A}$. Connaissant que toutes les quantit es physiques sont K -p eriodiques, il suffit de mesurer l' energie de Ginzburg-Landau J_K d'une configuration (u, A) \mathcal{L} -p eriodique sur la p eriodes K (carrée de cotée 1). Le th eor eme essentiel pr esent e dans [Article 1] est

Théorème 1 Soit $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ un minimiseur de J_K et $h_\varepsilon = \text{rot}A_\varepsilon$. On définit

$$n_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_K h_\varepsilon.$$

Alors le comportement de h_ε et n_ε varie par rapport au régime considéré vis à vis du paramètre Δ_{ex} comme suit :

1. Si $1 \ll \Delta_{ex} \ll 1/\varepsilon^2$, alors, si $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\frac{h_\varepsilon}{2\pi n_\varepsilon} \rightarrow 1 \text{ dans } W^{1,p} \text{ pour tout } p < 2, \text{ et } n_\varepsilon \approx \frac{\Delta_{ex}}{2\pi}. \quad (2.4)$$

2. Si Δ_{ex} est borné indépendamment de ε , alors aussi pour h_ε dans $W^{1,p}$ pour tout $p < 2$. En particulier, n_ε est borné indépendamment de ε . Si $\{\varepsilon\}$ est une sous-suite telle que $\{h_\varepsilon\}_\varepsilon$ converge vers h_* et Δ_{ex} converge à une valeur Δ_{ex}^* , alors $n_\varepsilon \rightarrow n_* \in \mathbb{N}$, le long de la même sous-suite, alors en particulier $n_\varepsilon = n_*$ pour ε assez petit, et il existe n_* points distincts $\{a_i\}_i$ dans K tels que de plus, si h_* est la limite d'une sous-suite convergente de $\{h_\varepsilon\}_\varepsilon$, alors $n_\varepsilon \rightarrow n_* \in \mathbb{N}$ le long de la même sous-suite, et il existe n_* points distincts $\{a_i\}_i$ dans K tels que

$$-\Delta h_* + h_* = 2\pi \sum_{i=1}^{n_*} \delta_{a_i}. \quad (2.5)$$

En plus, dénotant \mathcal{P} la famille finie de points dans K et pour $p = (p_1, p_2, \dots, p_k) \in \mathcal{P}$, on considère

$$W(p) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\pi n \ln \rho + \left(\int_{K \setminus \cup_i B(p_i, \rho)} |\nabla h|^2 + h^2 \right) + n(\gamma - 2\pi \Delta_{ex}) \right), \quad (2.6)$$

avec h_p est l'unique K -périodique solution de $-\Delta h_p + h_p = 2\pi \sum_{i=1}^k \delta_{p_i}$. Alors, $(a_1, a_2, \dots, a_{n_*})$ minimise la fonctionnelle W sur \mathcal{P} .

Le nombre γ dans (2.6) est introduit dans [8], on le définit comme dans [41, Proposition 3.11], par

$$\gamma = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(-\pi \ln R + \int_{B(O, R)} |\nabla u_0|^2 + \frac{1 - |u_0|^2}{2} \right),$$

avec u_0 est la solution unique de $-\Delta u_0 = u_0(1 - |u_0|^2)$ dans \mathbb{R}^2 de la forme $u_0(r, \theta) = f(r)e^{i\theta}$, avec $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$.

3. Il existe $\Delta_1 \in \mathbb{R}$ tel que si $\Delta_{ex} < \Delta_1$ et ε est suffisamment petit, alors $n_* = 0$. Dans ce cas, $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ est équivalente de jauge à la solution de Meissner $(1, 0)$.

Remarque 1 Vis à vis le cas 1, la principale différence entre le cas périodique et le cas d'un domaine borné, c'est que dans le cas périodique la distribution des tourbillons est toujours uniforme, et donc peut être décrite par un nombre unique, à savoir le nombre des vortex. Ceci est une simplification importante par rapport au cas d'un domaine borné (c-à-d, des travaux de Sandier et Serfaty), avec le fait qu'ici le nombre de vortex est donné par l'intégrale de $h = \text{rot}A$.

Remarque 2 Notons que pour $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ minimiseur de J_K et pour des valeurs arbitraires strictement positives des paramètres ε and H , on a

$$\frac{1}{2} \int_K (h_\varepsilon - H)^2 \leq J_K(u_\varepsilon, A_\varepsilon) \leq J_K(1, 0) = \frac{1}{2} H^2,$$

où $h_\varepsilon = \text{rot} A_\varepsilon$. De plus on a

$$0 \leq n_\varepsilon, \quad J_K(u_\varepsilon, A_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} H^2. \quad (2.7)$$

Si $n_\varepsilon = 0$, alors $h_\varepsilon = 0$, et donc $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ est équivalente de jauge à la solution de Meissner $(1, 0)$.

i) **Borne supérieure.**

Théorème 1 est démontré par la comparaison de l'énergie J_K d'une configuration d'essai appropriée $(v_\varepsilon, B_\varepsilon) \in \mathcal{A}$. Dans le cas où $\Delta_{ex} \leq C$, qui correspond aux cas 2 et 3, la borne (2.7) suffit, alors dès maintenant on suppose que

$$1 \ll \Delta_{ex} \ll \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

On définit m_ε comme entier tel que $\sqrt{m_\varepsilon}$ est la partie entière de

$$\sqrt{\frac{\Delta_{ex}}{2\pi}}.$$

Comme Δ_{ex} tend vers $+\infty$ si $\varepsilon \rightarrow 0$, on a

$$m_\varepsilon \approx \frac{\Delta_{ex}}{2\pi}.$$

On divise K en m_ε carrés identiques générés par les vecteurs $\vec{v}_\varepsilon = \frac{\vec{v}}{\sqrt{m_\varepsilon}}$ et $\vec{u}_\varepsilon = \frac{\vec{u}}{\sqrt{m_\varepsilon}}$. On note K_ε un de ces carrés, a_ε son centre, et f_ε la solution dans K_ε , avec des conditions aux bords périodiques, de l'équation

$$-\Delta f_\varepsilon = 2\pi \delta_{a_\varepsilon} - \frac{2\pi}{|K_\varepsilon|}.$$

Il est donc naturel qu'elle peut être étendue par périodicité à une fonction f_ε définie sur tout \mathbb{R}^2 et satisfaisant

$$-\Delta f_\varepsilon = 2\pi \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \delta_{a_\varepsilon + k\vec{v}_\varepsilon + l\vec{u}_\varepsilon} - \frac{2\pi}{|K_\varepsilon|}.$$

De plus, on prend $B_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\text{rot} B_\varepsilon = \frac{2\pi}{|K_\varepsilon|}$. On écrit $v_\varepsilon = \rho_\varepsilon e^{i\varphi_\varepsilon}$, où ρ_ε est périodique par rapport aux vecteurs $(\vec{v}_\varepsilon, \vec{u}_\varepsilon)$, et est défini dans K_ε par $\rho_\varepsilon(x) = \min(\frac{|x-a_\varepsilon|}{\varepsilon}, 1)$ et où φ_ε est telle que $-\nabla^\perp f_\varepsilon = \nabla \varphi_\varepsilon - B_\varepsilon$. En commençant à estimer l'énergie de Ginzburg-Landau sur K_ε , on arrive à prouver que

$$J_K(v_\varepsilon, B_\varepsilon) = \frac{1}{2} (H^2 - \Delta_{ex}^2) + o(\Delta_{ex}^2). \quad (2.8)$$

ii) **Borne inférieure.**

Pour des champs grands. Le cas où $\Delta_{ex} \approx H$, c-à-d, $1 \ll H \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$ est simple car dans ce cas, grâce à (2.8), pour $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ minimiseur de J_K on a

$$J_K(u_\varepsilon, A_\varepsilon) = o(H^2).$$

De ceci avec (2.1) et (2.3), on peut montrer que

$$n_\varepsilon \approx \frac{H}{2\pi} \approx \frac{\Delta_{ex}}{2\pi} \quad \text{et} \quad \frac{h_\varepsilon}{H} \rightarrow 1 \quad \text{fortement dans } H^1.$$

Pour des champs petits. Ici on traite les cas restants du Théorème 1, c-à-d, le cas 1 avec $H = O(|\ln \varepsilon|)$ et les cas 2 et 3. On suppose donc que $H \leq C|\ln \varepsilon|$.

Premièrement, nous nous rappelons la construction suivante qui peut être soit adaptée de [23, 35] ou [41, Théorème 4.1] au modèle périodique. On définit, pour tout $r \in (0, 1)$, l'énergie libre pour $(u, A) \in \mathcal{A}$,

$$F_{r,\varepsilon}(u, A, K) = \frac{1}{2} \int_K |\nabla u - iAu|^2 + r^2 h^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} (1 - |u|^2)^2, \quad (2.9)$$

avec la notation $h = \text{rot}A$. En particulier, on a la relation suivante entre $F_{r,\varepsilon}$ et J_K

$$J_K(u, A) = F_{r,\varepsilon}(u, A, K) + \frac{1}{2}H^2 + \frac{1-r^2}{2} \int_K h^2 - H \int_K h. \quad (2.10)$$

Proposition 1 *Supposons $J_K(u_\varepsilon, A_\varepsilon) \leq C|\ln \varepsilon|^2$ pour tout $\varepsilon > 0$, où $(u_\varepsilon, A_\varepsilon) \in \mathcal{A}$. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $r_0 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ et tout $1 > r \geq \varepsilon^{1/3}$, où C est une constante universelle, ce qui suit est vérifié.*

Il existe une collection de boules fermées disjointes $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ qui est périodique par rapport à K et est finie dans toute partie compacte de \mathbb{R}^2 . En outre, en notant \mathcal{B}_0 une partie minimale de \mathcal{B} telle que $\mathcal{B} = \cup_{\tau \in \mathcal{L}} \tau \mathcal{B}_0$,

1. $r(\mathcal{B}_0) = r$.
2. $\{x \in \mathbb{R}^2, ||u_\varepsilon(x)| - 1| \geq 1/2\} \subset \mathcal{B}$.
3. Ecrivant $d_B = \text{deg}(u_\varepsilon, \partial B)$,

$$F_{r,\varepsilon}(u_\varepsilon, A_\varepsilon, K \cap \mathcal{B}) \geq \pi D \left(\ln \frac{r}{D\varepsilon} - C \right), \quad (2.11)$$

où $D = \sum_{B \in \mathcal{B}_0} |d_B|$ est supposé différent de 0.

4. Finalement,

$$D \leq C \frac{F_\varepsilon(u_\varepsilon, A_\varepsilon, K)}{|\ln \varepsilon|}, \quad (2.12)$$

où C est une constante universelle.

En plus, si $r_1 > r_2$ et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sont les familles correspondantes des boules, alors toute boule dans \mathcal{B}_2 est incluse dans une des boules de \mathcal{B}_1 .

Comme conséquence de la Proposition 1, on a

Lemme 1 *Pour tout $(u, A) \in \mathcal{A}$, si $\{B_i\}_{i \in I}$ est une famille finie de boules fermées disjointes dans \mathbb{R}^2 tel que $|u| > 0$ dans $K \setminus \cup_i B_i$ et tel que $\cup_i B_i$ n'intersecte pas ∂K , alors*

$$\sum_i \deg\left(\frac{u}{|u|}, \partial B_i\right) = \int_K \text{rot} A.$$

On choisit $r < \frac{1}{4}$. En utilisant Proposition 1, et avec des choix convenables des paramètres qui interviennent, on arrive à montrer que pour $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ minimiseur de J_K et $h_\varepsilon = \text{rot} A_\varepsilon$,

$$J_K(u_\varepsilon, A_\varepsilon) \geq -2\pi \Delta_{\text{ex}} n_\varepsilon + \frac{1}{2} H^2 + \frac{1-r^2}{2} \int_K h_\varepsilon^2 + R_\varepsilon, \quad (2.13)$$

où

$$R_\varepsilon = \pi |\ln \varepsilon| (d_\varepsilon - n_\varepsilon) + \pi d_\varepsilon \left(\ln \frac{r}{d_\varepsilon} - C \right), \quad (2.14)$$

avec $d_\varepsilon = \sum_{B \in \mathcal{B}_r} |d_B|$ et $n_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_K h_\varepsilon$.

On distingue deux cas :

- $\Delta_{\text{ex}} \leq C$. Ceci correspond aux cas 2 et 3 du Théorème 1. En combinant (2.13) avec la borne supérieure (2.7), on a

$$\frac{1-r^2}{2} \int_K h^2 - C n_\varepsilon (\ln n_\varepsilon - C_r) \leq 2\pi \Delta_{\text{ex}} n_\varepsilon \leq C n_\varepsilon.$$

mais l'intégrale de h_ε^2 sur K est bornée inférieurement par $4\pi^2 n_\varepsilon^2$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et donc ceci donne que n_ε est borné indépendamment de ε , et alors h_ε est borné dans $L^2(K)$ indépendamment de ε .

En outre, l'inégalité précédente implique que si Δ_{ex} est inférieure à une certaine valeur $\Delta_1 \in \mathbb{R}$ alors $n_\varepsilon = 0$ si ε est suffisamment petit. Alors

$$\frac{1}{2} \int_K (h_\varepsilon - H)^2 \leq G_\varepsilon(u_\varepsilon, A_\varepsilon) \leq G_\varepsilon(1, 0) = \frac{1}{2} H^2$$

implique que $h_\varepsilon = 0$ et $|u_\varepsilon| = 1$, d'où $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ est une solution de Meissner, prouvant cas 3 du Théorème.

- $1 \ll \Delta_{\text{ex}} \leq C |\ln \varepsilon|$. Grâce à (2.13), on trouve que $n_\varepsilon / \Delta_{\text{ex}}$ reste borné si $\varepsilon \rightarrow 0$, et alors $h_\varepsilon / \Delta_{\text{ex}}$ est borné dans $L^2(K)$ indépendamment de ε . Il reste à identifier la limite de $n_\varepsilon / \Delta_{\text{ex}}$ and $h_\varepsilon / \Delta_{\text{ex}}$, qu'on les note n_* et h_* . Aussi, on peut prouver que $n_* = h_* = 1$.

Pour améliorer la convergence L^2 à la convergence $W_{p < 2}^{1,p}$ de $h_\varepsilon / \Delta_{\text{ex}}$ (resp. h_ε) dans le cas 1 (resp. cas 2) du Théorème 1, on a recours à l'estimation Jacobienne classique de Jerrard et Soner [24], avec un argument de type petite-grande boule "small-large ball type argument". Notons que dans le cas où $H \gg |\ln \varepsilon|$, on a déjà prouvé la convergence H^1 , donc on suppose après que $H < C |\ln \varepsilon|$.

Pour clôturer la preuve du cas 2 du Théorème, c-à-d, identifier h_* comme minimiseur d'une certaine énergie renormalisée, dans la terminologie de [8], on a recours à une combinaison d'une nouvelle borne supérieure faite par construction d'une configuration

test avec des vortex bien prescrits et d'une borne inférieure étudiée d'une façon très fine. Plus de détails sont donnés lors de la synthèse de l'[Article 1].

Comme conclusion, on déduit du cas 1 que la répartition de la vorticité des minimiseurs périodiques de l'énergie de Ginzburg-Landau J_K est uniforme et que le nombre des vortex sur K est de l'ordre de Δ_{ex} ($\gg 1$). Ce dernier résultat est légèrement différent à ceux de Sandier et Serfaty [38]. En effet, ceci est dû à l'absence d'effets de bord dans le modèle périodique. En particulier, si on considère le cas où $1 \ll \Delta_{ex} \ll |\ln \varepsilon|$, ce qu'on a trouvé contraste avec le travail de Sandier et Serfaty [36], là dans le cas d'un domaine borné, ils ont trouvé qu'il faut un incrément de $\ln |\ln \varepsilon|$ pour ajouter un vortex. Du cas 2, c-à-d, des champs appliqués H légèrement proches de $H_{c_1} = \frac{|\ln \varepsilon|}{2}$, on obtient un nombre fini de vortex. Ces vortex minimisent l'énergie renormalisée W donnée par (2.6), dans le même esprit que Bethuel, Brezis et Hélein [8]. Le cas 3 indique que les minimiseurs ne présentent pas de vorticité.

2.1.3 Vorticité pour certains points critiques, [Article 2]

Dans [Article 2], on prend un champ appliqué H tel que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|\ln \varepsilon|}{H} = \lambda,$$

avec la condition additionnelle : si $\lambda = 0$, on impose que $H \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Modèle périodique

Toujours dans le cadre périodique comme dans [Article 1], la première partie de l'[Article 2] est consacrée à construire une suite de solutions $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ des équations de Ginzburg-Landau (2.3) telle que dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ et pour des champs appliqués H bien précis, les vortex de $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ sur K (carré de coté 1) se concentrent sur un nombre fini de lignes horizontales. La méthode consiste à minimiser l'énergie de Ginzburg-Landau J_K sur \mathcal{Q}_ε , où \mathcal{Q}_ε est l'ensemble des configurations $(u, A) \in \mathcal{A}$ ayant de plus une symétrie par des translations bien choisies données comme suit

$$u\left(x + \frac{1}{p_\varepsilon}, y\right) = u(x, y) e^{i \xi(x, y)} \quad \text{et} \quad A\left(x + \frac{1}{p_\varepsilon}, y\right) = A(x, y) + \nabla \xi(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2,$$

avec $\xi \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $p_\varepsilon \in \mathbb{N}$ est une fonction dépendant de ε telle que la limite suivante existe et ne s'annule pas

$$\alpha = 2 \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{p_\varepsilon}{H}.$$

On note $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ une suite de minimiseurs de J_K sur l'espace \mathcal{Q}_ε , alors c'est un point critique, c-à-d, une solution des équations de Ginzburg-Landau (2.3). On commence par donner la construction suivante des boules, adaptée de [23, 35]

Proposition 2 *Pour $H \leq C |\ln \varepsilon|$, il existe ε_0 tel que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ un minimiseur de J_K sur \mathcal{Q}_ε , alors il existe un rectangle R^1 de la forme $]x, x + \frac{1}{p_\varepsilon}[\times]y, y + 1[$ $x, y \in \mathbb{R}$ (sans*

perte de généralité, R^1 est le rectangle $]0, \frac{1}{p_\varepsilon}[\times]0, 1[$ et une famille de boules disjointes $(B_i^1 = B_i^1(a_i, r_i))_{i \in N_\varepsilon}$ de centre a_i^1 et de rayon r_i satisfaisant

$$\{x \in R^1, |u_\varepsilon(x)| < \frac{3}{4}\} \subset \cup_{i \in N_\varepsilon} B_i^1, \quad \overline{\cup_{i \in N_\varepsilon} B_i^1(a_i^1, r_i)} \subset R^1, \quad (2.15)$$

$$\sum_{i \in N_\varepsilon} r_i \leq C |\ln \varepsilon| e^{-\sqrt{|\ln \varepsilon|}}, \quad \text{card}(N_\varepsilon) \leq C |\ln \varepsilon| H, \quad (2.16)$$

$$J_{B_i^1}(u_\varepsilon, A_\varepsilon) \geq \pi |d_i| |\ln \varepsilon| (1 - o(1)), \quad (2.17)$$

avec d_i est le degré de $\frac{u_\varepsilon}{|u_\varepsilon|}$ restreinte à ∂B_i^1 .

On dit qu'une fonction T est R -périodique si $T(x + \frac{1}{p_\varepsilon}, y) = T(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$. Pour $1 \leq j \leq p_\varepsilon$, on note $B_i^j(a_i^j, r_i)$ la boule extension de $B_i^1(a_i^1, r_i) \subset R^1$ par R -périodicité dans le rectangle $R^j =]j-1, j[\times]0, 1[$. De plus, on peut associer à un minimiseur $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ de l'énergie de Ginzburg-Landau J_K sur \mathcal{Q}_ε une mesure de vortacité

notée ν_ε qui est la mesure extension par K -périodicité à \mathbb{R}^2 de $\frac{2\pi \sum_{i \in N_\varepsilon} d_i \left(\sum_{j=1}^{p_\varepsilon} \delta_{a_i^j} \right)}{H}$. Dans ce sens, le premier théorème essentiel dans [Article 2] est le suivant.

Théorème 2 *On suppose que $\lambda > 0$. Soit $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ un minimiseur de l'énergie J_K sur l'espace \mathcal{Q}_ε et $h_\varepsilon = \text{rot} A_\varepsilon$. Alors, il existe $f_\infty \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ K -périodique et une mesure de Radon ν_∞ sur \mathbb{R}^2 telles que quitte à extraire ε_n de ε*

$$\frac{h_{\varepsilon_n}}{H} \rightharpoonup f_\infty \quad \text{localement faible dans } H^1 \quad (2.18)$$

$$\nu_{\varepsilon_n} \rightarrow \nu_\infty = -\Delta f_\infty + f_\infty \quad \text{au sens des mesures.} \quad (2.19)$$

En plus, $x \rightarrow f_\infty(x, y)$ est constante et la restriction de la mesure ν_∞ sur K est supportée sur un nombre fini de lignes horizontales telles que la masse de ν_∞ sur chacune est dans $\alpha \mathbb{Z}$. Supposons en plus que $\lambda < 2$ alors si $1 - \frac{\lambda}{2} > \alpha \frac{e+1}{4(e-1)}$, on a $\nu_\infty \neq 0$.

Le Théorème 2 dit que sur K et dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, la mesure limite des vortex est supportée par un nombre fini de lignes horizontales. En outre, elle attribue à chaque ligne une masse appartenant à $\alpha \mathbb{Z}$. Ensuite, sous une relation bien précise liant λ à α , on prouve que la mesure limite de vortacité n'est pas nulle. Ceci implique plutôt qu'il y a au moins une ligne horizontale de vortacité. Malheureusement, on ne connaît pas explicitement la mesure de vortacité lorsqu'elle est non nulle. Mais, dans le cas où la restriction de la mesure limite sur K est portée par une seule ligne horizontale, on peut préciser la valeur exacte de sa masse.

Le cas où le domaine est un disque

Dans la deuxième partie de l'[Article 2], on répond à une question posée par Sandier et Serfaty dans [40]. En fait, ils ont donné des conditions nécessaires de la densité limite des

vortex des points critiques de l'énergie J_Ω , c-à-d, solutions des équations de Ginzburg-Landau suivantes

$$\begin{cases} \nabla_A^2 u = \frac{1}{\varepsilon^2} u(1 - |u|^2) & \text{dans } \Omega \\ -\nabla^\perp h = \langle i u, \nabla u - i A u \rangle & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.20)$$

avec les conditions au bord sur $\partial\Omega$

$$\begin{cases} h = H \\ (\nabla u - i A u) \cdot \nu = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Ces conditions incluent la possibilité de densités qui prennent en charge des ensembles uni-dimensionnels, à savoir des lignes. Toutefois, l'existence de telles solutions reste une question ouverte. Dans [Article 2], on assure telle existence et on présente une construction de solutions de (2.20) et (2.21) dont les vortex se concentrent, à la limite de $\varepsilon \rightarrow 0$, le long des lignes. Cette construction est donnée par la minimisation de l'énergie de Ginzburg-Landau dans un espace bien choisi. C'est la première fois que de telles solutions sont décrites parce que la densité limite des vortex des solutions connues et qui sont obtenues par minimisation locale ou globale ont été soutenues sur des ensembles bi-dimensionnels [36].

Le domaine considéré ici est un disque ouvert 2D, $\Omega = B_R$ où $R > 0$. L'idée consiste en la construction d'une suite de points critiques $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ de J_Ω (c-à-d, solution de (2.20) et (2.21)) telle que dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, la vorticité de $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ se concentre sur un nombre fini de cercles concentriques de rayons strictement positifs et de centres, le centre de disque. Pour cela, on minimise l'énergie J_Ω parmi les configurations $(u, A) \in H^1(\Omega, \mathbb{C}) \times H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ présentant certaines symétries données par

$$u\left(x e^{i \frac{2\pi}{q_\varepsilon}}\right) = u(x) e^{i \psi(x)} \quad \text{et} \quad A\left(x e^{i \frac{2\pi}{q_\varepsilon}}\right) = e^{i \frac{2\pi}{q_\varepsilon}} A(x) + e^{i \frac{2\pi}{q_\varepsilon}} \nabla \psi(x),$$

avec $\psi \in H^2(\Omega, \mathbb{C})$ et $q_\varepsilon \in \mathbb{N}$ est une fonction de ε telle que la limite suivante existe et ne s'annule pas

$$\beta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{q_\varepsilon}{H}.$$

Pour $H \leq C |\ln \varepsilon|$ (c-à-d, pour $\lambda > 0$), on peut construire, à partir d'un minimiseur $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ de J_Ω , une mesure de vorticité notée $\tilde{\mu}_\varepsilon$ (plus de détails sont présentés lors de la synthèse de l'[Article 2]). Soit $h_\varepsilon = \text{rot} A_\varepsilon$, puis, quite à extraire une sous-suite ε_n , on montre que la limite faible de $\frac{h_{\varepsilon_n}}{H}$ dans $H^1(\Omega)$ notée h_∞ est radiale et que la limite de $\tilde{\mu}_{\varepsilon_n}$ au sens des mesures de Radon est égale à $-\Delta h_\infty + h_\infty$. Cette mesure limite est portée par un nombre fini de cercles concentriques de rayon strictement positif et de centre, le centre du disque. De plus, elle attribue à chaque cercle une masse appartenant à $2\pi\beta\mathbb{Z}$. Notons que le cas où $-\Delta h_\infty + h_\infty = 0$ n'est pas exclu. Cependant, sous certaines hypothèses bien étudiées, la mesure $-\Delta h_\infty + h_\infty$ n'est pas nulle. En effet, on prouve que pour tout $R > 0$ et pour tout $\beta > 0$ petit, il existe une relation bien choisie liant λ à β de façon à ce que

$$-\Delta h_\infty + h_\infty \neq 0.$$

Ceci montre qu'il y a au moins un cercle de vorticité de centre, le centre du disque. L'inconvénient est qu' on ne connaît pas explicitement la mesure de vorticité lorsqu'elle est non nulle. Mais, dans un cas très particulier, si la mesure de vorticité est portée par un seul cercle avec une masse bien donnée égale à $2\pi\beta$, on peut caractériser ce cercle par la donnée de son rayon qui sera l'unique solution d'un problème de minimisation. Signalons que la preuve de ce qui précède nécessite quelques connaissances des propriétés des fonctions de Bessel [49] modifiées du premier ordre notée I_0 et du deuxième ordre notée K_0 , données comme suit :

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}, \quad x \geq 0 \quad (2.22)$$

et

$$K_0(x) = -\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right) I_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}} \Phi(n), \quad (2.23)$$

où $\Phi(n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ pour $n \neq 0$, $\Phi(0) = 0$ et

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\Phi(n) - \ln n).$$

Notons que $\{I_0, K_0\}$ forme une base de solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \frac{1}{x}y - y = 0.$$

Remarque 3 Dans toute la suite (c- -d, dans [Articles 3-6]), on prend le champ magnétique appliqué H variant sous la forme suivante

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H}{|\ln \varepsilon|} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

2.1.4 Vorticité dans le modèle de Ginzburg-Landau avec des contraintes discontinues, [Articles 3-4]

Une motivation dans l'utilisation d'un site d'ancrage avec des inclusions supraconductrices ou des zones de températures différentes consiste en la détection de conditions détruisant la supraconductivité. Supposons que lors de l'utilisation d'un matériel supraconducteur, on désire essentiellement préserver la supraconductivité dans une zone bien déterminée et que la destruction du caractère supraconducteur dans cette zone peut entraîner des défaillances ou des dégâts du système.

Afin de stopper le processus avant que la supraconductivité ne soit détruite dans la zone "utile", on peut placer dans des emplacements "sans grande importance pour le processus" des inclusions (de différente température ou d'un autre type de matériel supraconducteur) attirant les défauts de vorticité. L'idée est que tant que la supraconductivité n'est pas détruite dans les inclusions, le processus peut se dérouler sans problème. Par contre, dès que la supraconductivité commence à être détruite dans les sites d'ancrage, afin de sécuriser le processus, il est préférable d'arrêter l'utilisation du supraconducteur

ou de régler les conditions (magnétiques ou du courant appliqué) créant la présence de défauts de vorticité.

le phénomène d'ancrage modélisé par un terme de chevillage est dû à Likharev [31]. Il correspond à remplacer la non linéarité $(1 - |\psi|^2)^2$ par une non linéarité plus générale de la forme $(p(x) - |\psi|^2)^2$. Dans ce cas, l'énergie 2D considérée est

$$\mathcal{G}_{\varepsilon, H}(\psi, A) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \psi - i A \psi|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |h - H|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{\Omega} (p(x) - |\psi|^2)^2, \quad (2.24)$$

avec $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h = \text{rot} A$ et une fonction étagée $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$, cette modification permet de modéliser les impuretés dans un supraconducteur. Plusieurs interprétations peuvent être faites d'un terme de chevillage étagé :

- un supraconducteur avec des zones de températures différentes.
- un supraconducteur hétérogène, une matrice supraconductrice avec des inclusions constituées d'un matériel supraconducteur distinct.

L'étude d'un terme de chevillage étagé a été menée dans un premier temps par Rubinstein [34] et ensuite poursuivie par André et Shafrir [5] et Lassoued et Mironescu [30]. Dans [Articles 3-4], la fonction p considérée est une fonction étagée. On prend S_1 une partie ouverte régulière telle que $\bar{S}_1 \subset \Omega$, $S_2 = \Omega \setminus \bar{S}_1$, et

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S_1, \\ a & \text{si } x \in S_2, \end{cases} \quad (2.25)$$

avec $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ une constante donnée.

Le choix précédent de p a des interprétations physiques (voir [26, 34]).

- S_1 and S_2 correspondent à deux domaines supraconducteurs avec des températures critiques différentes.
- Le domaine supraconducteur Ω est le sujet de deux températures différentes dans les régions S_1 et S_2 , qui peuvent se manifester par un refroidissement ou une chaleur dû(e) au froid ou à la chaleur provenant de S_2 .

La minimization de la fonctionnelle $\mathcal{G}_{\varepsilon, H}$ donnée par (2.24) aura lieu sur l'espace

$$\mathcal{H} = H^1(\Omega, \mathbb{C}) \times H^1(\Omega, \mathbb{R}^2).$$

Ceci veut dire qu'on ne suppose pas à priori des conditions au bord pour des configurations admissibles, mais les minimiseurs satisfaisent des conditions naturelles au bord. On étudie la nucléation des vortex de ψ lorsque le champ magnétique appliqué H est tel que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H}{|\ln \varepsilon|} = \lambda \in \mathbb{R}_+$. On obtient qu'elle dépend fortement du paramètre réel a , à voir ceci dans Théorème 4 et Théorème 5.

La singularité du potentiel p cause une singularité dans l'énergie si $\varepsilon \rightarrow 0$ de l'ordre de ε^{-1} , alors que l'énergie due à la présence de n vortex diverge comme $n \ln \varepsilon$. Dans l'ordre de séparer les différentes singularités de l'énergie, on prend v_ε (l'unique) minimiseur positif de (2.24) si $H = 0$, l'énergie de v_ε étant de l'ordre ε^{-1} . Alors, si (ψ, A) est une

configuration minimisante de $\mathcal{G}_{\varepsilon,H}$, on trouve

$$\mathcal{G}_{\varepsilon,H}(\psi, H) = \mathcal{G}_{\varepsilon,0}(v_\varepsilon, 0) + \mathcal{F}_{\varepsilon,H} \left(\frac{\psi}{v_\varepsilon}, A \right),$$

et la configuration $\left(\frac{\psi}{v_\varepsilon}, A \right)$ minimise la fonctionnelle $\mathcal{F}_{\varepsilon,H}$ introduite au-dessous,

$$\mathcal{F}_{\varepsilon,H}(\varphi, A) = \int_{\Omega} \left(v_\varepsilon^2 |(\nabla - iA)\varphi|^2 + \frac{v_\varepsilon^4}{2\varepsilon^2} (1 - |\varphi|^2)^2 + |\operatorname{rot} A - H|^2 \right) \mathbf{d}x. \quad (2.26)$$

Le premier terme "The leading order term" de l'énergie minimisante de $\mathcal{F}_{\varepsilon,H}$ sera décrit par moyenne d'une énergie auxiliaire introduite après par (2.31). Soit $H > 0$. On considère (ψ, A) un minimiseur de (2.24), alors en s'inspirant d'une méthode de Lassoued et Mironescu [30], on introduit une densité normalisée¹

$$\varphi = \frac{\psi}{v_\varepsilon}.$$

Alors, $|\varphi| \leq 1$ et on est amené à l'analyse de la fonctionnelle $\mathcal{F}_{\varepsilon,H}(\varphi, A)$. Vu que ψ et φ ont les mêmes vortex, donc étudier la vorticité de $(\psi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ minimiseur de $\mathcal{G}_{\varepsilon,H}$ revient à étudier la vorticité de $(\varphi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ minimiseur de la fonctionnelle énergie $F_{\varepsilon,H}$. Cette étude dépend, si $\varepsilon \rightarrow 0$, du champ magnétique appliqué H .

Un premier travail concernant l'étude de l'apparition des vortex des minimiseurs de l'énergie $\mathcal{G}_{\varepsilon,H}$ donnée par (2.24) est effectué par Kachmar [25, 26], et il a précisé mathématiquement la valeur du premier champ critique H_{c_1} qui correspond à

$$H_{c_1} \simeq k_\varepsilon |\ln \varepsilon|,$$

où

$$k_\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\max_{x \in \Omega} \frac{1 - h_\varepsilon(x)}{v_\varepsilon^2(x)} \right)^{-1}, \quad (2.27)$$

avec $h_\varepsilon : \Omega \rightarrow]0, 1[$ est la solution de l'équation

$$-\operatorname{div} \left(\frac{1}{u_\varepsilon^2} \nabla h_\varepsilon \right) + h_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad h_\varepsilon = 1 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (2.28)$$

Kachmar [25, 26] a étudié la nucléation des vortex par rapport à la variation du champ appliqué H . Il a obtenu que leur comportement dépend fortement du paramètre a , donnant dans certains cas à un phénomène d'ancrage. Dans un cas particulier, en considérant $\Omega = D(O, 1)$ le disque unité dans \mathbb{R}^2 , et

$$S_1 = D(O, R), \quad S_2 = D(O, 1) \setminus \overline{D(O, R)}, \quad (2.29)$$

avec $0 < R < 1$, son résultat est le suivant.

Théorème 3 *Soit $(\psi_{\varepsilon,H}, A_{\varepsilon,H})$ un minimiseur de (2.24). Il existe une constante $a_0 \in]0, 1[$, et pour tout $a \in]0, a_0[$, il existe des constantes positives λ_* , $\lambda_\#$, ε_0 et une fonction $]0, \varepsilon_0[\ni \varepsilon \mapsto k_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $0 < \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} k_\varepsilon \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} k_\varepsilon < \infty$, tel que*

1. A noter que φ et ψ ont les mêmes vortex.

1. Si $H < k_\varepsilon |\ln \varepsilon| - \lambda_* \ln |\ln \varepsilon|$, alors $|\psi_{\varepsilon,H}| \geq \frac{\sqrt{a}}{2}$ in $\bar{\Omega}$.
2. Si $H = k_\varepsilon |\ln \varepsilon| + \lambda \ln |\ln \varepsilon|$ and $\lambda \geq -\lambda_*$, alors il existe une famille finie de boules $(B(a_i(\varepsilon), r_i(\varepsilon)))_{i \in I}$ avec les propriétés suivantes
 - (a) $\sum_{i \in I} r_i(\varepsilon) < |\ln \varepsilon|^{-10}$;
 - (b) $|\psi_{\varepsilon,H}| \geq \frac{\sqrt{a}}{2}$ dans $\Omega \setminus \bigcup_{i \in I} B(a_i(\varepsilon), r_i(\varepsilon))$;
 - (c) En posant d_i le degré de $\psi_{\varepsilon,H}/|\psi_{\varepsilon,H}|$ sur $\partial B(a_i(\varepsilon), r_i(\varepsilon))$ si $B(a_i, r_i) \subset \Omega$ et 0 ailleurs, alors on a

$$\sup_{i \in I, |d_i| > 0} |R - |a_i(\varepsilon)|| \rightarrow 0 \quad \text{so } \varepsilon \rightarrow 0;$$

- (d) Si $\lambda > \lambda_\#$, il existe des constantes positives c et C indépendentes de ε telles que

$$c \ln |\ln \varepsilon| \leq \sum_i |d_i| \leq C \ln |\ln \varepsilon| \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[.$$

Pour des champs appliqués proches du premier champ critique, [Article 3]

Dans [Article 3], on se concentre au cas où H est de l'ordre de $|\ln \varepsilon|$, c-à-d, de l'ordre du premier champ critique H_{c_1} . Pour cela soit $\mathcal{M}(\Omega)$ l'espace des mesures bornées de Radon sur Ω , c-à-d, le dual topologique de $\mathcal{C}^0(\Omega)$. Une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ peut être représentée canoniquement comme une différence de deux mesures positives, $\mu = \mu_+ - \mu_-$. La variation totale et la norme de μ , notées respectivement par $|\mu|$ and $\|\mu\|$, sont par définition $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$ et $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$. Etant donné $\lambda > 0$, on introduit l'énergie E_λ définie sur $\mathcal{M}(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$ comme suit. Pour $\mu \in \mathcal{M}(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$, soit $h_\mu \in H^1(\Omega)$ la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{1}{p(x)} \nabla h_\mu \right) + h_\mu = \mu & \text{dans } \Omega, \\ h_\mu = 1 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.30)$$

avec p est introduite dans (2.25). Soit $E_\lambda(\mu)$ définie par

$$E_\lambda(\mu) = \frac{1}{\lambda} \int_\Omega p(x) |\mu| \, \mathbf{d}x + \int_\Omega \left(\frac{1}{p(x)} |\nabla h_\mu|^2 + |h_\mu - 1|^2 \right) \, \mathbf{d}x. \quad (2.31)$$

Théorème 4 *Etant donné $\lambda > 0$, on suppose que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H}{|\ln \varepsilon|} = \lambda,$$

alors

$$\frac{\mathcal{F}_{\varepsilon,H}}{H^2} \rightarrow E_\lambda$$

au sens de Γ -convergence [18].

Notons qu'en utilisant $(1, 0)$ comme configuration test pour l'énergie $\mathcal{F}_{\varepsilon, H}$, on déduit une borne supérieure de la forme

$$\mathcal{F}_{\varepsilon, H}(\varphi_\varepsilon, A_\varepsilon) \leq CH^2, \quad (2.32)$$

où $\varphi_\varepsilon = \frac{\psi_\varepsilon}{v_\varepsilon}$ et $(\psi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ un minimiseur de (2.24). Donc $\frac{\mathcal{F}_{\varepsilon, H}(\varphi_\varepsilon, A_\varepsilon)}{H^2}$ est bien bornée. Ainsi, la convergence dans Théorème 4 est précisément décrite par une combinaison des bornes inférieure et supérieure de l'énergie minimale $\frac{\mathcal{F}_{\varepsilon, H}(\varphi_\varepsilon, A_\varepsilon)}{H^2}$.

La minimisation de la fonctionnelle (2.31) peut être caractérisée par la minimisation du problème suivant

$$\min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ -\operatorname{div}\left(\frac{1}{p(x)}\nabla u\right) + u \in \mathcal{M}(\Omega)}} \int_{\Omega} \left(\frac{p(x)}{\lambda} \left| -\operatorname{div}\left(\frac{1}{p(x)}\nabla u\right) + u + 1 \right| + \frac{|\nabla u|^2}{p(x)} + |u|^2 \right) \mathbf{d}x. \quad (2.33)$$

La fonctionnelle ci-dessus étant strictement convexe et est continue, elle admet un minimiseur unique, noté u_* , et donc de même pour la fonctionnelle E_λ .

Par conséquent, comme corollaire du Théorème 4, on peut décrire la mesure limite des vortex en termes du minimiseur de l'énergie limite E_λ .

Théorème 5 *Sous les hypothèses du Théorème 4, si $(\varphi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ est un minimiseur de $\mathcal{F}_{\varepsilon, H}$, alors dénotant*

$$\mu_\varepsilon = \operatorname{rot}A_\varepsilon + \operatorname{rot}(i\varphi_\varepsilon, (\nabla - iA_\varepsilon)\varphi_\varepsilon),$$

la mesure de vorticité, les convergences suivantes sont vérifiées,

$$\frac{\mu_\varepsilon}{H} \rightarrow \mu_* \quad \text{dans } (C^{0,\gamma}(\Omega))^* \quad \text{pour tout } \gamma \in (0, 1), \quad (2.34)$$

$$\frac{\operatorname{rot}A_\varepsilon}{H} \rightarrow h_* \quad \text{faiblement dans } H_1^1(\Omega) \text{ et fortement dans } W^{1,p}(\Omega), \quad \forall p < 2. \quad (2.35)$$

Ici, μ_* est l'unique minimiseur de E_λ .

Notons que μ_* l'unique minimiseur de l'énergie limite E_λ est la mesure limite des vortex. Laissez-nous décrire brièvement les principaux points de la preuve des Théorèmes 4 et 5, et donc expliquer ce qui est derrière leur énoncé.

Le premier point est l'analyse des minimiseurs de (2.24) quand $H = 0$. Dans ce cas, quite à une transformation de gauge près, l'énergie (2.24) a un unique minimiseur $(v_\varepsilon, 0)$ où v_ε est une fonction réelle positive. La décroissance asymptotique de v_ε si $\varepsilon \rightarrow 0$ est donnée par le lemme suivant.

Lemme 2 ([27]) *Soit $k \in \mathbb{N}$. Ils existent des constantes strictement positives ε_0, δ et C telles que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$,*

$$\left\| (1 - v_\varepsilon) \exp\left(\frac{\delta \operatorname{dist}(x, \partial S_1)}{\varepsilon}\right) \right\|_{H^k(S_1)} + \left\| (\sqrt{a} - v_\varepsilon) \exp\left(\frac{\delta \operatorname{dist}(x, \partial S_1)}{\varepsilon}\right) \right\|_{H^k(S_2)} \leq \frac{C}{\varepsilon^k}. \quad (2.36)$$

La principale difficulté du passage de $\mathcal{G}_{\varepsilon,H}(\psi, A)$ à $\mathcal{F}_{\varepsilon,H}(\varphi, A)$ (avec $\varphi = \frac{\psi}{v_\varepsilon}$) provient du comportement du poids v_ε , qui a des oscillations rapides et qui sont comparables à ε^{-1} proches de la frontière de S_1 . Le défi est alors de construire une configuration test avec des vortex localisés à proximité de ∂S_1 et avoir la bonne quantité de l'énergie. Techniquement, on fait ceci au moyen d'un potentiel de Green noté G_ε ayant la bonne quantité dont nous n'étions pas en mesure de donner un bon contrôle de celle-ci. Pour dépasser cette difficulté, on construit des vortex situés à distance $\frac{\ln|\ln\varepsilon|}{|\ln\varepsilon|}$ par rapport à ∂S_1 . Tels vortex étant prévus, se reposent sur une union de courbes fermées, une borne L^1 adéquate peut être montrée afin de tenir $G_\varepsilon(x, x)$ sur telle union. Alors, en utilisant un résultat de [26], cette borne L^1 nous donne une famille de points séparés comme centres des vortex des configurations tests. Pour plus de détails, voir en premier [26], puis [Article 3]. Nous utilisons des méthodes appropriées, puis on estime l'énergie de la configuration construite à partir du dessus. Cette grossière analyse effectuée aboutit à la borne supérieure de l'énergie. Après, on cherche une borne inférieure de l'énergie. La combinaison des deux bornes fournit la deuxième partie du Théorème 4. Alors que, la preuve du Théorème 5 est une combinaison des deux bornes trouvées sur l'énergie minimale.

La dernière partie consiste en une discussion concernant la minimisation de la fonctionnelle (2.31). Le but de cette minimisation est de caractériser μ_* l'unique minimiseur de E_λ , qui donne la répartition limite des vortex dans le domaine Ω .

Procédons comme dans [6, 38, 41], on peut trouver une caractérisation équivalente de $h_* = u_* + 1$. On écrit $H_1^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de Sobolev u telles que $u-1 \in H_0^1(\Omega)$.

Proposition 3 u_* le minimiseur de

$$\min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ -\operatorname{div}\left(\frac{1}{p(x)}\nabla u\right) + u \in \mathcal{M}(\Omega)}} \int_{\Omega} \left(\frac{p(x)}{\lambda} \left| -\operatorname{div}\left(\frac{1}{p(x)}\nabla u\right) + u + 1 \right| + \frac{|\nabla u|^2}{p(x)} + |u|^2 \right) \mathbf{d}x,$$

est encore l'unique minimiseur du problème dual

$$\min_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ |v| \leq \frac{p}{2\lambda}}} \int_{\Omega} \left(\frac{|\nabla v|^2}{p(x)} + |v|^2 + 2v \right) \mathbf{d}x.$$

Par exemple, $h_* = u_* + 1$ minimise l'énergie,

$$\min_{\substack{f \in H_1^1(\Omega) \\ (f-1) \geq -\frac{p}{2\lambda}}} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla f|^2}{p(x)} + |f|^2 \right),$$

et satisfait $-\operatorname{div}\left(\frac{1}{p(x)}\nabla h_*\right) + h_* \geq 0$.

Donc, la mesure limite de vorticit e

$$\mu_* = -\operatorname{div}\left(\frac{1}{p(x)}\nabla h_*\right) + h_*$$

est positive, et en accordance avec [38]. Elle peut être exprimée au moyen de l'ensemble coïncidence $w_\lambda = w_\lambda^1 \cup w_\lambda^2$,

$$w_\lambda^1 = \{x \in \overline{S}_1 : 1 - h_*(x) = \frac{1}{2\lambda}\}, \quad w_\lambda^2 = \{x \in \overline{S}_2 : \frac{1 - h_*(x)}{a} = \frac{1}{2\lambda}\}, \quad (2.37)$$

comme suit

$$\mu_* = \left(1 - \frac{p(x)}{2\lambda}\right) \mathbf{1}_{w_\lambda} \mathbf{d}x, \quad (2.38)$$

où $\mathbf{1}_{w_\lambda}$ dénote la mesure de Lebesgue restreinte à w_λ . De plus, h_* résoud le système suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{1}{p(x)}\nabla h_*\right) + h_* = 0 & \text{dans } \Omega \setminus w_\lambda \\ h_* = 1 - \frac{p}{2\lambda} & \text{dans } w_\lambda \\ h_* = 1 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.39)$$

La régularité de h_* est compliquée. En fait, si w_λ peut s'intersecter la frontière intérieure ∂S_1 , ∇h_* a des singularités (il est prévu que pour répondre à une condition de transmission, voir le cas radial ci-dessous). Mais, nous savons que dans l'intérieur de S_1 et de S_2 , h_* est $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ pour un certain exposant $\alpha \in (0, 1)$. On remarque par exemple que la mesure μ_* n'est pas de plus uniforme et c'est qu'elle est discontinue vis à vis le fait que $\mu_* = \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) \mathbf{d}x$ dans w_λ^1 et $\mu_* = \left(1 - \frac{a}{2\lambda}\right) \mathbf{d}x$ dans w_λ^2 .

Pour une meilleure compréhension de w_λ , w_λ^1 et w_λ^2 , on introduit les constantes critiques suivantes (nous soulignons leur dépendance du paramètre matériel a),

$$\lambda_i(a) = \frac{1}{2 \max_{x \in \overline{S}_i} \left(\frac{1 - h_0(x)}{p(x)}\right)}, \quad \forall i \in \{1, 2\}, \quad \lambda_0(a) = \min(\lambda_1(a), \lambda_2(a)). \quad (2.40)$$

Ici, nous rappelons que h_0 est la solution de $-\operatorname{div}\left(\frac{1}{p(x)}\nabla h_0\right) + h_0 = 0$ dans Ω et $h_0 = 1$ sur $\partial\Omega$. Le principe de maximum donne que $0 < h_0 < 1$ dans Ω . On note encore $w_0 = w_0^1 \cup w_0^2$ l'ensemble $w_{\lambda_0(a)} = w_{\lambda_0(a)}^1 \cup w_{\lambda_0(a)}^2$ introduit dans (2.63).

La proposition suivante vient d'un principe de maximum faible [28, p. 131], voir [38] pour plus de détails sur la preuve (modulo quelques ajustements nécessaires).

Proposition 4 1. w_λ est croissante par rapport à λ et $\cup_{\lambda>0} w_\lambda = \Omega$;

2. w_λ^1 et w_λ^2 sont disjoints ;

3. Si $\lambda < \lambda_0(a)$ alors $h_* = h_0$, $\mu_* = 0$ et $w_\lambda = \emptyset$;

4. Si $\lambda = \lambda_0(a)$ alors $h_* = h_0$, $\mu_* = 0$ et $w_\lambda = w_0$;

5. Si $\lambda > \lambda_0(a)$ alors $\mu_* \neq 0$;

6. Si $\lambda < \lambda_i(a)$ pour certain $i \in \{1, 2\}$, alors $w_{\lambda_i(a)}^i = \emptyset$.

Suivant l'intérêt d'illustrer les résultats ci-dessus, nous donnons une analyse détaillée de h_0 dans le cas radial. Pour cela, prenons $\Omega = D(O, 1)$ le disque unité dans \mathbb{R}^2 , $S_1 =$

$D(O, R)$ et $S_2 = D(O, 1) \setminus \overline{D(O, R)}$ où $0 < R < 1$. Alors, il existe $a_0 \in (0, 1)$ suffisamment petit (dépendant de $R \in (\frac{1}{2}, 1)$) tel que, pour tout $a \in (0, a_0)$ on a,

$$\lambda_2(a) < \lambda_1(a),$$

où $\lambda_1(a)$ et $\lambda_2(a)$ sont les constantes introduites par (2.40). Remontant au problème de nucléation des vortex de l'énergie (2.1.4), on trouve vis à vis du Théorème 5 que pour certaines valeurs de

$$H = \lambda |\ln \varepsilon| (1 + o(1)) \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad \lambda \in (\lambda_2(a), \lambda_1(a)),$$

les vortex existent et sont ancrés dans S_2 . Ce résultat est en accordance avec celui obtenu par Kachmar dans [25, 26], où la nucléation des vortex en proche du champ magnétique critique (dans le cas du disque) est étudiée en détails.

Pour des champs H tels que $|\ln \varepsilon| \ll H \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$, [Article 4]

Dans [Article 4], on considère la même énergie étudiée dans [Article 3], c-à-d, la fonctionnelle $\mathcal{G}_{\varepsilon, H}(\psi, A)$ donnée par (2.24). Si (ψ, A) minimise (2.24), alors de même

$$\mathcal{G}_{\varepsilon, H}(\psi, H) = \mathcal{G}_{\varepsilon, 0}(v_\varepsilon, 0) + \mathcal{F}_{\varepsilon, H} \left(\frac{\psi}{v_\varepsilon}, A \right),$$

et la configuration $\left(\frac{\psi}{v_\varepsilon}, A \right)$ minimise la fonctionnelle $\mathcal{F}_{\varepsilon, H}$ introduite par

$$\mathcal{F}_{\varepsilon, H}(\varphi, A) = \int_{\Omega} \left(v_\varepsilon^2 |\nabla - iA\varphi|^2 + \frac{v_\varepsilon^4}{2\varepsilon^2} (1 - |\varphi|^2)^2 + |\operatorname{rot} A - H|^2 \right) \mathbf{d}x.$$

Ici, on se concentre au cas de la phase mixte, c-à-d, le cas où $\lambda = +\infty$, c-à-d, $|\ln \varepsilon| \ll H$, avec aussi la supposition de plus que H vérifie $H \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$. Ceci veut dire que H vérifie

$$|\ln \varepsilon| \ll H \ll \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Notre motivation est alors d'évaluer l'énergie minimale $\mathcal{F}_{\varepsilon, H}(\varphi_\varepsilon, A_\varepsilon)$. Notre résultat est le suivant (dans le même esprit que [37])

Théorème 6 *Supposons que, si $\varepsilon \rightarrow 0$, $|\ln \varepsilon| \ll H \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$. Alors, prenons $(\varphi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ minimiseur de $\mathcal{F}_{\varepsilon, H}$, on a*

$$\mathcal{F}_{\varepsilon, H}(\varphi_\varepsilon, A_\varepsilon) \sim H \ln \frac{1}{\varepsilon \sqrt{H}} (1 + o(1)) \int_{\Omega} p(x) \mathbf{d}x. \quad (2.41)$$

Une conséquence de ce résultat est

Corollaire 1 *Avec $|\ln \varepsilon| \ll H \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$, on a*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_{\varepsilon, H}(\varphi_\varepsilon, A_\varepsilon)}{H^2} = 0, \quad (2.42)$$

avec $(\varphi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ minimiseur de $\mathcal{F}_{\varepsilon, H}$.

On remarque que (2.41) est analogue à ce qui est fait par Sandier et Serfaty dans [37]. D'autre part, il est facile de trouver

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla(\text{rot}A_{\varepsilon})|^2}{v_{\varepsilon}^2} + |\text{rot}A_{\varepsilon} - H|^2 \leq \mathcal{F}_{\varepsilon,H}(\varphi_{\varepsilon}, A_{\varepsilon}).$$

Dans le cas où $\lambda = +\infty$, c-à-d, pour un champ appliqué H suffisamment grand, Corollaire 1 dit que $F_{\varepsilon,H}(\varphi_{\varepsilon}, A_{\varepsilon}) = o(H^2)$. Dans [26], on savait que dans Ω et pour ε petit

$$\min(1, \sqrt{a}) < v_{\varepsilon} < \max(1, \sqrt{a}),$$

d'où, $\frac{\text{rot}A_{\varepsilon}}{H}$ tend fortement vers $h_* = 1$ dans H^1 . Ainsi, $\mu_* = \mathbf{d}x$ (notons que h_* et μ_* sont définis dans Théorème 5). Ceci induit une densité uniforme de vortex dans tout le domaine Ω indépendamment du paramètre a , qui est en contradiction avec Aydi et Kachmar [Article 3] où pour des champs appliqués larges ($H = \lambda |\ln \varepsilon| (1 + o(1))$) tels que si λ est choisi convenablement (fini) et quand le paramètre a est suffisamment petit, les vortex existent et sont ancrés que dans S_2 .

La preuve du Théorème 6 est obtenue par la donnée en premier lieu d'une borne supérieure de l'énergie de $\mathcal{F}_{\varepsilon,H}$, qui est présentée par la Proposition 5 et en deuxième lieu d'une borne inférieure donnée par le Corollaire 2.

Telle borne supérieure est donnée par construction d'une configuration test qui va avec la même idée que [37]. Cette borne est donnée par la proposition suivante.

Proposition 5 *Supposons que $|\ln \varepsilon| \ll H \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$. Alors, soit $(\varphi_{\varepsilon}, A_{\varepsilon})$ minimiseur de $\mathcal{F}_{\varepsilon,H}$, donc pour tout ε petit*

$$\mathcal{F}_{\varepsilon,H}(\varphi_{\varepsilon}, A_{\varepsilon}, \Omega) \leq H \left(\ln \frac{1}{\varepsilon \sqrt{H}} + C \right) \int_{\Omega} p(y) \mathbf{d}y.$$

On se concentre maintenant à la borne inférieure de $\mathcal{F}_{\varepsilon,H}(\varphi, A, \Omega)$ qui doit correspondre à la même borne supérieure faite précédemment. Pour des champs appliqués suffisamment grands, le problème de minimisation de $\mathcal{F}_{\varepsilon,H}$ est réduit à celui de minimiser cette énergie sur tout sous-domaine, en d'autres termes le problème de minimisation devient local. Alors, nous pouvons effectuer des éclatements "blow-ups" qui aboutissent à la borne inférieure convenable (ceci est donné par Proposition 6). Dans ce qui suit, on note $B_{\alpha}^x = B(x, \frac{1}{\alpha})$ et souvent nous omettons l'indice ε , où x est le centre de cet éclatement "blow-up".

Proposition 6 *Supposons que $|\ln \varepsilon| \ll H \ll \frac{1}{\varepsilon^2}$ et $(\varphi_{\varepsilon}, A_{\varepsilon})$ minimise $\mathcal{F}_{\varepsilon,H}$. Alors, pour tout $k > 0$, il existe $1 \ll \alpha \ll \frac{1}{\varepsilon}$ tel que pour tout $x \in \Omega$ avec $B_{\alpha}^x \subset \Omega$, on a*

$$\mathcal{F}_{\varepsilon,H}(\varphi_{\varepsilon}, A_{\varepsilon}, B_{\alpha}^x) \geq H \ln \frac{1}{\varepsilon \sqrt{H}} (1 - o(1)) \int_{B_{\alpha}^x} \gamma_k(y) p(y) \mathbf{d}y, \quad (2.43)$$

avec $\gamma_k(x)$ est égale à une constante γ_k^1 si $x \in S_1$ et γ_k^2 si $x \in S_2$ où pour tout $i = 1, 2$, $\gamma_k^i \rightarrow 1$ si $k \rightarrow +\infty$.

Comme conséquence de cette proposition, la borne inférieure convenable est donnée par le corollaire suivant.

Corollaire 2 *Sous les hypothèses de la Proposition 6, on a*

$$\mathcal{F}_{\varepsilon, H}(\varphi_\varepsilon, A_\varepsilon, \Omega) \geq H \ln \frac{1}{\varepsilon \sqrt{H}} (1 - o(1)) \int_{\Omega} p(y) \mathbf{d}y. \quad (2.44)$$

2.1.5 Vorticité dans le modèle de Ginzburg-Landau avec poids, [Articles 5,6]

Modèle à deux poids, [Article 5]

Dans [Article 5], on considère l'énergie de Ginzburg-Landau à poids suivante.

$$J_{p,q}(u, A) = \int_{\Omega} \left(|(\nabla - iA)u|^2 + q(x) |\operatorname{rot} A - H|^2 + \frac{p(x)}{2\varepsilon^2} (1 - |u|^2)^2 \right) \mathbf{d}x, \quad (2.45)$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ régulier et simplement connexe, et p et q sont des fonctions régulières de Ω à valeurs réelles telles que

$$q(x) \geq \alpha \quad \text{et} \quad \beta \leq p(x) \leq \gamma,$$

pour tout $x \in \Omega$ où α , β et γ sont des réels strictement positifs. A noter qu'on a pris des poids particuliers dans (2.45), en effet, on a un poids devant le terme magnétique $|\operatorname{rot} A - H|^2$ et un autre devant le potentiel $(1 - |u|^2)^2$. Le but dans [Article 5] est d'étudier la vorticité des minimiseurs de l'énergie (2.45) en présence d'un champ magnétique appliqué H de l'ordre du premier champ critique H_{c_1} , c-à-d, de l'ordre de $|\ln \varepsilon|$.

A noter que le cas où $p(x) = q(x) = 1$ correspond à l'énergie de Ginzburg-Landau classique étudiée par Sandier et Serfaty [38], c-à-d, celle qui est donnée par l'équation (2.1). Notre résultat se fait ainsi de la même façon que celui de Sandier et Serfaty. L'intérêt est de chercher mathématiquement dans la limite de $\varepsilon \rightarrow 0$, la structure des vortex des minimiseurs de l'énergie $J_{p,q}$ et voir alors l'influence des poids $q(x)$ et $p(x)$.

Pour $\mu \in \mathcal{M}(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$, soit $h_\mu \in H^1(\Omega)$ la solution de

$$\begin{cases} -\Delta[q(x)(h_\mu - 1)] + h_\mu = \mu & \text{dans } \Omega, \\ h_\mu = 1 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.46)$$

Etant donné $\lambda > 0$, on introduit l'énergie E_λ définie sur $\mathcal{M}(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$ par

$$E_\lambda(\mu) = \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} |\mu| dx + \int_{\Omega} (|\nabla[q(x)(h_\mu - 1)]|^2 + |h_\mu - 1|^2) \mathbf{d}x. \quad (2.47)$$

Notre résultat essentiel est que si $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\frac{J_{p,q}}{H^2} \rightarrow E_\lambda$$

au sens de Γ -convergence. Cette convergence provient d'une combinaison d'une borne inférieure et une autre supérieure de l'énergie minimale renormalisée $\frac{J_{p,q}(u_\varepsilon, A_\varepsilon)}{H^2}$. En dénotant

$$h_\varepsilon = \operatorname{rot} A_\varepsilon, \quad \mu(u_\varepsilon, A_\varepsilon) = h_\varepsilon + \operatorname{rot}(iu_\varepsilon, (\nabla - iA_\varepsilon)u_\varepsilon), \quad (2.48)$$

le champ magnétique induit et la mesure de vorticit e respectivement, on a les convergences suivantes

$$\mu_\varepsilon =: \frac{\mu(u_\varepsilon, A_\varepsilon)}{H} \rightarrow \mu_* \quad \text{dans } \mathcal{M}(\Omega), \quad (2.49)$$

$$\frac{h_\varepsilon}{H} \rightarrow h_* \quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega) \text{ et fortement dans } W^{1,p}(\Omega), \quad \forall p < 2. \quad (2.50)$$

Ici, $\mu_* = -\Delta[q(h_* - 1)] + h_*$ est l'unique minimiseur de E_λ .

La distribution optimale des vortex des minimiseurs à la limite de $\varepsilon \rightarrow 0$ est g er e par une mesure limite correspondant à

$$\mu_* = \Delta[q(h_* - 1)] + h_*.$$

Minimisant la fonctionnelle E_λ , on peut caract eriser μ_* et h_* (pour plus de d etails voir [Article 5]). On en d eduit qu'elle d epend que du poids $q(x)$, plus pr ecis ement la fonction p n'apparaît pas dans la vorticit e limite et n'a pas d'influence sur la r epartition des vortex.

Mod ele pr esentant un film mince, [Article 6]

Dans [Article 6], on consid ere un mod ele de Ginzburg-Landau pr esentant un film mince. Consid erons un film fin supraconducteur 3D (tri-dimensionnel) qui occupe le domaine $\Omega_\delta = \Omega \times (-\delta a, \delta a)$ o u Ω est un domaine bornée r egulier 2D, et a est une fonction r eguli ere dans $\bar{\Omega}$ mesurant la variation de l' epaisseur du film telle qu'ils existent des r eels a_0 et a_1 avec $0 < a_0 < a_1$ tels que $0 < a_0 \leq a(x) \leq a_1$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$. En prenant les moyennes int egrales le long de la direction verticale et la mise de δ allant vers z ero, il est prouvée dans [10] que le mod ele supraconducteur 3D de Ginzburg-Landau de [19, 47] d efini sur Ω_δ peut être r eduit au mod ele 2D (bi-dimensionnel). Dans ce cas, l'énergie consid er e est la suivante

$$J_\varepsilon(u) = \int_\Omega a(x) \left(|\nabla u - iA_\varepsilon u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} (1 - |u|^2)^2 \right) \mathbf{d}x, \quad (2.51)$$

avec $A_\varepsilon(x)$ la composante dans \mathbb{R}^2 du potentiel magn etique, v erifiant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)A_\varepsilon) = 0, & \operatorname{rot}A_\varepsilon = H_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega \\ A_\varepsilon \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.52)$$

o u H_ε est le champ magn etique appliquée à la surface du film mince (supraconducteur). Soit u un point critique de la fonctionnelle J_ε dans $H^1(\Omega)$, qui satisfait les équations d'Euler-Lagrange

$$\begin{cases} -(\nabla - iA_\varepsilon)a(x) \cdot (\nabla - iA_\varepsilon)u = \frac{a(x)}{\varepsilon^2} (1 - |u|^2)u & \text{dans } \Omega \\ (\nabla u - iA_\varepsilon u) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.53)$$

avec ν la normale ext erieure à Ω . Dans [14], Ding and Du ont obtenu une estimation du premier champ magn etique critique H_{c_1} , dans le sens il est la premi ere valeur critique du champ appliquée H_ε , pour laquelle l'énergie minimale (2.51) parmi les configurations sans

vortex est égale à l'énergie minimale parmi les configurations ayant un seul vortex. En plus H_{c_1} correspond à la première phase de transition pour laquelle les vortex commencent à apparaître dans le supraconducteur. Ils ont montré que H_{c_1} a la forme

$$H_{c_1} = k_a |\ln \varepsilon| + O(1), \quad (2.54)$$

où $k_a = \frac{1}{2 \max_{x \in \Omega} \left| \frac{\xi_0(x)}{a(x)} \right|}$ avec ξ_0 est la solution du problème suivant

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla \xi_0}{a}\right) = -1 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \xi_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \quad (2.55)$$

Des discussions sur l'état des vortex dans la géométrie du film mince étaient données dans [1, 15, 19, 29, 33, 47]. Pour les travaux liés à l'analyse mathématique des différents mécanismes d'ancrage, nous nous référons à [2, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 32]. Notre motivation dans [Article 6] est alors d'étudier la nucléation des vortex pour les minimiseurs de l'énergie J_ε pour des champs appliqués H_ε comparables à H_{c_1} le premier champ critique.

Soit u_ε un minimiseur de J_ε sur $H^1(\Omega)$, qui existe sous les hypothèses (2.52). Pour étudier la vorticité de u_ε , le point clé est de prendre en premier h_ε l'unique solution de

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla h_\varepsilon}{a}\right) = \operatorname{rot}(iu_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - \operatorname{rot}(A_\varepsilon |u_\varepsilon|^2) \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad h_\varepsilon = H_\varepsilon \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \quad (2.56)$$

Ainsi, telle h_ε vérifie

$$-\frac{\nabla^\perp h_\varepsilon}{a(x)} = (iu_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon - iA_\varepsilon u_\varepsilon) \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.57)$$

Pour $\mu \in \mathcal{M}(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$, soit $h_\mu \in H^1(\Omega)$ la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla h_\mu}{a}\right) + 1 = \mu & \text{dans } \Omega, \\ h_\mu = 1 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.58)$$

On introduit l'énergie E_λ définie sur $\mathcal{M}(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$

$$E_\lambda(\mu) = \frac{1}{\lambda} \int_\Omega a(x) |\mu| \, dx + \int_\Omega \frac{|\nabla h_\mu|^2}{a(x)} \, dx. \quad (2.59)$$

u_ε étant un minimiseur de l'énergie J_ε sur $H^1(\Omega)$, donc il est facile de trouver que

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq CH_\varepsilon^2.$$

Le premier résultat concerne la Γ -limite de l'énergie minimale renormalisée $\frac{J_\varepsilon(u_\varepsilon)}{H_\varepsilon^2}$. Pour cela, si $\varepsilon \rightarrow 0$, on prouve que

$$\frac{J_\varepsilon}{H_\varepsilon^2} \rightarrow E_\lambda$$

au sens de Γ -convergence [18]. Cette convergence provient d'une combinaison de bornes inférieure et supérieure de $\frac{J_\varepsilon(u_\varepsilon)}{H_\varepsilon^2}$. En plus, en dénotant h_ε la solution de (2.56) et

$$\mu(u_\varepsilon, A_\varepsilon) = h_\varepsilon + \operatorname{rot}(iu_\varepsilon, (\nabla - iA_\varepsilon)u_\varepsilon), \quad (2.60)$$

la mesure de vorticité, on a les convergences suivantes

$$\mu_\varepsilon =: \frac{\mu(u_\varepsilon, A_\varepsilon)}{H_\varepsilon} \rightarrow \mu_* \quad \text{dans } \mathcal{M}(\Omega), \quad (2.61)$$

$$\frac{h_\varepsilon}{H_\varepsilon} \rightarrow h_* \quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega) \text{ et fortement dans } W^{1,p}(\Omega), \quad \forall p < 2. \quad (2.62)$$

Ici, $\mu_* = -\operatorname{div}(\frac{\nabla h_*}{a}) + 1$ est l'unique minimiseur de E_λ .

Telle μ_* correspond à la mesure limite des vortex, pour la caractériser on a recours à la minimisation de l'énergie limite E_λ , et celle-ci peut être exprimée suivant [38], au moyen de l'ensemble coïncidence w_λ ,

$$w_\lambda = \{x \in \Omega : 1 - h_*(x) = \frac{a(x)}{2\lambda}\}, \quad (2.63)$$

comme suit

$$\mu_* = \left(1 - \frac{a(x)}{2\lambda}\right) \mathbf{1}_{w_\lambda} \mathbf{d}x, \quad (2.64)$$

où $\mathbf{1}_{w_\lambda}$ dénote la mesure de Lebesgue restreinte à w_λ . De plus, h_* résoud

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\frac{\nabla h_*}{a}) + 1 = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{w}_\lambda \\ h_* = 1 - \frac{a(x)}{2\lambda} & \text{dans } w_\lambda \\ h_* = 1 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.65)$$

Ainsi, dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, les vortex sont localisés dans la région intérieure w_λ avec la densité μ_* , où $h_* = 1 - \frac{a(x)}{2\lambda}$. Dans la région extérieure $\Omega \setminus \bar{w}_\lambda$, il n'y a pas de vortex. On procède aussi comme [38, Proposition 1.2] (voir aussi [41]) pour assurer que

i) $\Omega \setminus w_\lambda$ est connexe.

ii)

$$w_\lambda = \emptyset \iff \lambda < k_a = \frac{1}{2 \max_{x \in \Omega} \frac{|\xi_0(x)|}{a(x)}},$$

où ξ_0 est donnée par (2.55).

iii)

$$\mu_* \neq 0 \iff \lambda > k_a = \frac{1}{2 \max_{x \in \Omega} \frac{|\xi_0(x)|}{a(x)}}.$$

Comme conclusion, la répartition des vortex dans Ω par rapport au champ appliqué H_ε est comme suit : si $\lambda < k_a$, essentiellement les vortex n'apparaissent pas. Alors que pour $\lambda > k_a$, on a une densité (non-constante) de vortex sur w_λ et 0 ailleurs, c- -d, les vortex existent et sont ancrés dans w_λ .

Bibliographie

- [1] A. Abrikosov, *Magnetic properties of group II superconductor*, J. Exptl. Theoret. Phys. (USSR). 32 (5) (1957) 1174-1182.
- [2] A. Aftalion, S. Alama and L. Bronsard, *Giant vortex and breakdown of strong pinning in a rotating Bose-Einstein condensate*, Arch. Rational. Mech. Anal. 178 (2005) 247-286.
- [3] A. Aftalion, E. Sandier and S. Serfaty, *Pinning phenomena in the Ginzburg-Landau model of superconductivity*, J. Math. Pures. Appl. 80 (3) (2001) 339-372.
- [4] S. Alama and L. Bronsard, *Pinning effects and their breakdown for a Ginzburg-Landau model with normal inclusions*, J. Math. Phys. 46 (2005).
- [5] N. André and I. Shafrir, *Asymptotic behavior of minimizers for the Ginzburg-Landau functional with weight*, Arch. Ration. Mech. Anal. 142 (1998) 45-73.
- [6] H. Aydi, *Doctoral Dissertation*. Université de Paris 12, (2004).
- [7] A. Beaulieu and R. Hadji, *On a class of Ginzburg-Landau equations with weight*, Panamer. Math. Jour. 5 (1995) 1-33.
- [8] F. Bethuel, H. Brezis and F. Hélein, *Ginzburg-Landau vortices, Progress in non linear differential equations and their Applications*, 13 Birkhäuser (1994).
- [9] F. Bethuel and T. Rivière, *Vortices for a variational problem related to superconductivity*, Annales IHP, Anal. Non Linéaire. 12 (3) (1995) 243-303.
- [10] S. Chapman, Q. Du and M. Gunzburger, *A model for variable thickness superconducting thin films*, Z. Angew. Math. Phys. 47 (1996) 410-31.
- [11] S.J. Chapman, Q. Du and M.D. Gunzburger, *A Ginzburg Landau type model of superconducting/normal junctions including Josephson junctions*, European. Jour. Appl. Math. 6 (1996) 97-114.
- [12] S. Chapman and G. Richardson, *Vortex pinning by inhomogeneities in type-II superconductors*, Phys. D. 108 (1997) 397-407.
- [13] S. Ding, *Renormalized energy with vortices pinning effects*, J. Part. Diff. Equat. 13 (2000) 341-360.
- [14] S.J. Ding and Q. Du, *Critical magnetic field and asymptotic behavior of superconducting thin films*, SIAM J. Math. Anal. 34 (1) (2002) 239-256.

- [15] S.J. Ding and Q. Du, *On Ginzburg-Landau vortices of superconducting thin films*, Acta Math. Sinica, English series. 12 (2) (2006) 468-476.
- [16] S. Ding and Z. Liu, *Pinning of vortices for a variational problem related to the superconducting thin films having variable thickness*, J. Part. Diff. Equat. 10 (1997) 174-192.
- [17] S. Ding, Z. Liu and W. Yu, *Pinning of vortices for the Ginzburg-Landau functional with variable coefficient*, Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B. 12 (1997) 77-88.
- [18] P. Donato and D. Cioranescu, *Introduction to homegenization*. Astérisque, (1995)
- [19] Q. Du, M. Gunzburger and J. Peterson, *Analysis and approximation of the Ginzburg-Landau model of superconductivity*, SIAM Rev. 34 (1992) 54-81.
- [20] P. Donato and D. Cioranescu, *Introduction to homegenization*, Astérisque (1996).
- [21] M. Dutour, (PhD thesis), *Bifurcation vers l'état d'Abrikosov et diagramme de phase*, University of Orsay, (France) (1999).
- [22] V.L. Ginzburg and L.D. Landau, *On the theory of superconductivity*, Zh. Eksp. i teor. Fiz. 20 (1950) 1064-1082.
- [23] R.L. Jerrard, *Lower bounds for generalized Ginzburg-Landau functionals*, SIAM. J. Math. Anal. 30 (3)(1997) 721-746.
- [24] R.L. Jerrard and H.M. Soner, *The Jacobian and the Ginzburg-Landau energy*, Calc. Var. Part. Diff. Equat. 14 (2) (2002) 151-191.
- [25] A. Kachmar, *Magnetic Ginzburg-Landau functional with discontinuous constraint*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 346 (5-6) (2008) 297-300.
- [26] A. Kachmar, *Magnetic vortices for a Ginzburg-Landau type energy with discontinuous constraint*, ESAIM. COCV. 16 (3) (2010) 545-580.
- [27] A. Kachmar, *On the perfect superconducting solution for a generalized Ginzburg-Landau equation*, Asymptot. Anal. 54 (3-4) 125-164 (2007).
- [28] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes critiques*, Springer. Verlag. (1993).
- [29] G. Lasher, *Mixed states of type-I superconducting films in a perpendicular magnetic field*, Phys. Rev. 154 (2) (1967) 345-348.
- [30] L. Lassoued and P. Mironescu, *Ginzburg-Landau type energy with discontinuous constraint*, Jour. Anal. Math. 77 (1999) 1-26.
- [31] K.K. Likharev, *Superconducting weak links*, Rev. Mod. Phys. 51 (1) (1979) 101-159.
- [32] F.H. Lin and Q. Du, *Ginzburg-Landau vortices : Dynamics, pinning and hysteresis*, SIAM. J. Math. Anal. 28 (1997) 1265-1293.
- [33] K. Maki, *Fluxoid structure in superconducting films*, Ann. Phys. 34 (1965) 363-376.
- [34] J. Rubinstein, *Six lectures in superconductivity*, Boundaries, Interfaces and Transitions. Banff, AB, (1995) 163-184, CRM Proc. Lecture Notes, 13. Amer. Math. Soc. Providence, RI (1998).

- [35] E. Sandier, *Lower bounds for the energy of unit vector fields and applications*, J. Func. Ana. 152 (2) (1998) 379-403.
- [36] E. Sandier and S. Serfaty, *Global minimizers for the Ginzburg-Landau functional below the first critical magnetic field*, Annales IHP, Anal. Non Linéaire, 17 (1) (2000) 119-145.
- [37] E. Sandier and S. Serfaty, *On the energy of type-II superconductors in the mixed phase*, Reviews in Math. Phys. 12 (9) (2000) 1219-1257.
- [38] E. Sandier and S. Serfaty, *A rigorous derivation of a free-boundary problem arising in superconductivity*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 4e série. 33 (2000), 561-592.
- [39] E. Sandier and S. Serfaty, *Ginzburg-Landau minimisers near first critical field have bounded vorticity*, Calc. Var. PDE. 17 (1) (2003).
- [40] E. Sandier and S. Serfaty, *Limiting vorticities for the Ginzburg-Landau equation*, Duke. Math. Jour. 117 (3) (2003) 403-446.
- [41] E. Sandier and S. Serfaty, *Vortices in the magnetic Ginzburg-Landau model*, Birkhäuser (2006).
- [42] S. Serfaty, *Local minimizers for the Ginzburg-Landau energy near critical magnetic field. Part I*, Comm. Contemp. Math. 1 (2) (1999) 213-254.
- [43] S. Serfaty, *Local minimizers for the Ginzburg-Landau energy near critical magnetic field. Part II*, Comm. Contemp. Math. 1 (3) (1999) 298-333.
- [44] S. Serfaty, *Stable configurations in superconductivity : uniqueness, multiplicity and vortex-nucleation*, Arch. Rat. Mech. Anal. 149 (1999) 329-365.
- [45] D. Siant-James, G. Sarma and E.J. Thomas, *Type-II supercondivity*, Pergamon Press, (1969).
- [46] G. T'Hooft, *A property of electric and magnetic flux in non-Abelian gauge theories*, Nucl. Phy. V. B153 (1979) 141-160.
- [47] M. Tinkham, *Introduction to superconductivity*, 2nd edition. Mc Graw-Hill, (1996).
- [48] D. Tilly and J. Tiley, *Superfluidity and superconductivity*, 2nd edition, Adam Hilger Ltd, Bristol, (1986).
- [49] Watson, *Treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge, England, The Macmillan Company, NY, (1994).

2.2 Quelques contributions en théorie de point fixe et applications, [Articles 7-12]

2.2.1 Introduction

◆ Principe de Contraction de Banach

Soit X un ensemble non vide et $T : X \rightarrow X$ une application donnée. Si un point $x \in X$ vérifie $Tx = x$, on dit que x est un point fixe de T . Le principe de contraction de Banach [20], qui garantit l'existence d'un point fixe d'une contraction dans un espace métrique complet à valeurs dans lui-même, est certainement le plus connu des théorèmes de point fixe.

Théorème 7 ([20]) *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application telle qu'il existe $k \in (0, 1)$ tel que*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in X. \quad (2.66)$$

Alors, T admet un unique point fixe $x \in X$. De plus, pour tout $x \in X$, la suite $\{T^n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

Le principe de contraction de Banach joue un rôle très important en analyse non linéaire. Ce principe est un outil très utile dans beaucoup d'applications pour prouver l'existence et l'unicité de solutions de certains modèles mathématiques, à savoir des équations intégrales et différentielles, inégalités variationnelles, systèmes linéaires, équations matricielles, aussi pour le théorème des fonctions implicites.

Notons que l'application T vérifiant (2.79) est Lipschitzienne, donc continue en tout point de l'espace X . Ceci constitue alors un des défauts de l'utilisation du théorème de Banach. En fait, beaucoup de généralisations de ce théorème existent en littérature ne nécessitant pas la continuité de l'opérateur T à chaque point.

◆ Quelques généralisations du principe de contraction de Banach

Dans un espace métrique

Parmi les généralisations du Théorème 7 (généraliser la contraction (2.79)), Kannan [52, 53] a montré un théorème de point fixe pour une application satisfaisant une condition de contraction qui ne nécessite pas de continuité à chaque point. Le théorème de Kannan est le suivant.

Théorème 8 ([52, 53]) *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application telle qu'il existe $k \in (0, \frac{1}{2})$ tel que*

$$d(Tx, Ty) \leq k[d(x, Tx) + d(y, Ty)], \quad \forall x, y \in X. \quad (2.67)$$

Alors, T admet un unique point fixe $x \in X$. De plus, pour tout $x \in X$, la suite $\{T^n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

Ainsi, suite à ce fameux travail de Kannan, beaucoup de mathématiciens ont créé de nouvelles conditions de contraction ne nécessitant pas la continuité de l'application T , aboutissant toutes à un théorème de point fixe, qui est obtenu en commençant par tout point $x_0 \in X$ et en utilisant l'itération de Picard définie par $x_{n+1} = Tx_n$. Pour certains travaux sur ce sujet, voir Reich [85, 86, 87], Chatterjea [30], Zamfirescu [113], Hardy et Rogers [58], Ćirić [33, 34],...

Une comparaison des contractions présentées dans ces papiers se trouve dans le travail de Rhoades [91]. Dans cette direction, on peut citer aussi les travaux de Meir et Keeler [65], Dass et Gupta [36], Matkowski [62], Brianciani [27], ...

En 1997, Alber et Guerre-Delabrere [14] ont introduit le concept des contractions faibles dans des espaces de Hilbert et ont prouvé le théorème de point fixe de Banach [20]. En 2001, Rhoades [92] a trouvé que le résultat de Alber et al. [14] est aussi valable dans des espaces métriques complets. Le voilà.

Théorème 9 ([92]) *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application telle que*

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \varphi(d(x, y)) \quad \forall x, y \in X. \quad (2.68)$$

où $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction continue et croissante telle que $\varphi(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$. Alors, T admet un unique point fixe.

En effet, Alber and Guerre-Delabriere [14] ont supposé une condition supplémentaire sur φ qui est $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$. Mais, Rhoades [92] a obtenu le résultat donné par Théorème 9 sans utiliser telle supposition particulière.

Définition 1 *L'application T vérifiant (2.68) est dite faiblement contractante. Aussi, (2.68) est dite encore une contraction faible.*

Notons que les contractions faibles sont étroitement liées aux contractions de type Boyd et Wong [26], et Reich [88], à savoir si φ est une fonction semi-continue inférieurement (par la droite), alors $\psi(t) = 1 - \varphi(t)$ est une fonction semi-continue supérieurement (par la droite), et alors (2.68) devient

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y)).$$

D'où, la contraction faible devient de type Boyd et Wong [26], et si $\beta(t) = \frac{1-\varphi(t)}{t}$ quand $t > 0$ et $\beta(0) = 0$, alors (2.68) est remplacée par

$$d(Tx, Ty) \leq \beta(d(x, y))d(x, y).$$

Ainsi, la contraction faible devient de type Reich [88].

Remarque 4 Si on prend $\varphi(t) = (1 - k)t$ où $k \in (0, 1)$, (2.68) devient $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ qui correspond à l'inégalité de Banach (2.79). Ainsi, le concept des contractions faibles généralise (2.79) et aboutit à des résultats de point fixe.

Ulérieurement, beaucoup de résultats de point fixe ont été élaborés pour des contractions faibles et leurs généralisations. En 2008, Dutta and Choudhury [44] ont prouvé la généralisation suivante du Théorème 9.

Théorème 10 ([44]) Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application telle que

$$\psi(d(Tx, Ty)) \leq \psi(d(x, y)) - \varphi(d(x, y)) \quad \forall x, y \in X. \quad (2.69)$$

où $\psi, \varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sont des fonctions continues et croissantes telles que $\psi(t) = \varphi(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$. Alors, T admet un unique point fixe.

Notons que si $\psi(t) = t$, l'inégalité (2.71) devient (2.68). Alors que si $\psi(t) = t$ et $\varphi(t) = (1 - k)t$ avec $k \in (0, 1)$, (2.71) devient (2.79).

L'étude d'existence de point fixe commun d'applications vérifiant de différentes contractions dans des espaces métriques, a suscité l'intérêt de beaucoup de mathématiciens. Avant tout, on donne maintenant la définition de point fixe commun et de point de coïncidence d'applications définies sur un ensemble X non vide.

Définition 2 Soit X un ensemble non vide, N un entier tel que $N \geq 2$ et $T_1, T_2, \dots, T_N : X \rightarrow X$ sont des applications données. Si $w = T_1x = T_2x = \dots = T_Nx$ pour $x \in X$, alors x est appelé un point de coïncidence "a coincidencede point" de T_1, T_2, \dots, T_{N-1} et T_N . Si $w = x$, alors x est appelé un point fixe commun "common fixed point" de T_1, T_2, \dots, T_{N-1} et T_N .

Zhang and Song [115], utilisant une contraction faible généralisée définie pour deux applications, ont prouvé un résultat de point fixe commun donné par ce qui suit.

Théorème 11 ([115]) Soit (X, d) un espace métrique complet et $T, S : X \rightarrow X$ deux applications telles que

$$d(Tx, Sy) \leq M(x, y) - \varphi(M(x, y)) \quad \forall x, y \in X, \quad (2.70)$$

où

$$M(x, y) = \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Sy), \frac{d(x, Sy) + d(Tx, y)}{2}\},$$

et $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction semi-continue inférieurement et telle que $\varphi(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$.

Alors, T et S ont un unique point fixe commun $u \in X$, c'est-à-dire, $u = Tu = Su$.

Prenons $\varphi(t) = (1 - k)t$ et $S = T$ dans (2.70), alors on trouve

$$d(Tx, Ty) \leq k \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2}\}.$$

Cette inégalité correspond à la fameuse contraction de Ćirić [34], qui généralise (2.79). Juste après, Dorić [45] a généralisé Théorème 11.

Théorème 12 ([45]) Soit (X, d) un espace métrique complet et $T, S : X \rightarrow X$ deux applications telles que

$$\psi(d(Tx, Sy)) \leq \psi(M(x, y)) - \varphi(M(x, y)) \quad \forall x, y \in X, \quad (2.71)$$

où

a) $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction continue et croissante telle que $\psi(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$.

a) $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction semi-continue inférieurement et telle que $\varphi(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$.

Alors, T et S ont un unique point fixe commun.

Pour certains résultats de point fixe commun, on peut citer, Song [105, 106], Al-Thagafi et Shahzad [13], Shahzad [99], Hussain et Junck [49] et Beg et Abbas [21]. Aussi, Abbas and Dorić [3], Abbas et Ali Khan [4] et Abbas, Babu et Alemayehu [5] ont obtenu des résultats de point fixe commun pour certaines contractions faibles généralisées. Aussi, Zhang [114] a donné une nouvelle contraction pour deux opérateurs dans des espaces métriques et a prouvé des résultats de point fixe commun. Ensuite, Di Bari et Vetro [41] ont étendu ces résultats.

En introduisant le concept des applications qui commutent faiblement "weakly commuting", Sessa [98] a généralisé le concept des applications qui commutent.

Définition 3 ([98]) Soit X un ensemble non vide et $T_1, T_2 : X \rightarrow X$ sont des applications données.

(1) T_1 et T_2 se commutent si $T_1x = T_2x$ pour tout $x \in X$.

(2) T_1 et T_2 sont faiblement commutatives si $T_2T_1x = T_1T_2x$ pour $x \in X$ vérifiant $T_1x = T_2x$.

Juste après, Junck [56] a généralisé cette idée, premièrement aux opérateurs compatibles [56] et puis aux opérateurs faiblement compatibles [57]. La définition suivante de la notion de compatibilité pour une paire de fonctions sur un espace métrique est introduite par Jungck dans [56].

Définition 4 ([56]) Soit (X, d) un espace métrique et $f, g : X \rightarrow X$ sont des applications données. La paire $\{f, g\}$ est dite compatible si $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(fgx_n, gfx_n) = 0$, pour toute suite $\{x_n\}$ dans X telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} fx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} gx_n = t$ pour t dans X .

Exemple 1 ([56]) Soit $X = \mathbb{R}$ équipé par la métrique usuelle $d(x, y) = |x - y|$ pour tous $x, y \in X$. On définit $fx = x^3$ et $gx = 2 - x$. Soit $\{x_n\}$ dans X telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} fx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} gx_n = t$ pour t dans X . Alors, nécessairement, $t = 1$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(fgx_n, gfx_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 6|x_n - 1|^2 \rightarrow 0,$$

ainsi la paire $\{f, g\}$ est compatible.

On donne aussi la définition de faible compatibilité.

Définition 5 ([51]) *Soit X un ensemble non vide et $T_1, T_2 : X \rightarrow X$ des applications données. La paire $\{T_1, T_2\}$ est dite faiblement compatible si $T_1T_2t = T_2T_1t$, chaque fois que $T_1t = T_2t$ pour t in X .*

Exemple 2 *Soit $X = [0, 1]$. On définit*

$$T_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1, \end{cases} \quad T_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3} \\ 1 & \text{si } \frac{2}{3} < x \leq 1, \end{cases}$$

Il est évident que la paire $\{T_1, T_2\}$ est bien faiblement compatible.

A noter les implications suivantes

Commutativité \implies Commutativité faible \implies Compatibilité \implies Compatibilité faible.

La réciproque des implications précédentes n'est pas vraie en général. La notion de la compatibilité faible (qui est la notion la plus générale) joue un rôle essentiel dans la théorie de l'existence et unicité de point fixe commun.

Dans un espace métrique ordonné

Dans le conteste d'espaces métriques ordonnés, la contraction usuelle (de Banach) est affaiblie dans l'ordre que l'opérateur $T : X \rightarrow X$ devient monotone [28].

Définition 6 *Soit (X, \leq) un ensemble partiellement ordonné et $T : X \rightarrow X$. On dit que T est croissante (resp. décroissante) si, pour tout $x, y \in X$,*

$$x \leq y \implies Tx \leq Ty \quad (\text{resp. } Ty \leq Tx).$$

L'existence de point fixe dans les espaces métriques partiellement ordonnés a été premièrement étudiée par Turinici [107] où il a étendu le principe de contraction de Banach dans un espace métrique partiellement ordonné. Depuis 2004, beaucoup de résultats sont apparus en relation au théorème de point fixe dans des espaces métriques ordonnés. Ran et Reurings [84] ont généralisé le principe de contraction de Banach sur des ensembles partiellement ordonnés avec quelques applications aux équations matricielles linéaires et non linéaires. Alors que Nieto et Rodriguez-López [76, 77] ont étendu le résultat de Ran et Reurings et ont appliqué leur résultat pour obtenir une solution unique d'une équation différentielle ordinaire de premier ordre avec des conditions au bord périodiques. Les deux versions suivantes du théorème de point fixe étaient prouvées dans ces papiers.

Théorème 13 ([76, 77, 84]) *Soit (X, \leq_X) un ensemble partiellement ordonné et soit d une métrique sur X tel que (X, d) est un espace métrique complet. Soit $f : X \rightarrow X$ une application croissante par rapport \leq_X . Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) $\exists 0 \leq c < 1, \quad d(fx, fy) \leq cd(x, y)$ pour tout $y \leq_X x$,
 - (ii) $\exists x_0 \in X$ tel que $x_0 \leq_X fx_0$,
 - (iii) f est continue dans (X, d) , ou ;
 - (iii') si une suite $\{x_n\}$ croissante converge à $x \in X$, alors $x_n \leq_X x$ pour tout n .
- Alors, f a (au moins) un point fixe $u \in X$.

Harjani et Sadarangani [59] ont prouvé la version ordonnée (c-à-d, dans des espaces métriques munis d'une relation d'ordre partiel) du Théorème 9, Amini-Harandi and Emami [12] ont montré la version ordonnée du théorème de point fixe de type Reich [88]. Aussi, Harjani et Sadarangani [60] ont démontré la version ordonnée du Théorème 10. Dans la même direction, O'Regan et Petrusel [82] ont donné quelques résultats d'existence de solution des équations intégrales de type Fredholm et Volterra. Puis, Nashine et Altun [72] ont donné une version ordonnée généralisée du résultat de Zhang et Song présenté par Théorème 11. D'autres résultats de point fixe dans cette direction ont été prouvés, par exemple dans [9, 29, 83].

On donne quelques définitions qu'on utilise dans la suite. Soit (X, \leq) un ensemble partiellement ordonné. Altun et Simsek [19] ont introduit la définition d'une paire $\{f, g\}$ d'applications définies sur X faiblement croissantes comme suit.

Définition 7 *Soit $T, S : X \rightarrow X$ des applications données. On dit que S et T sont faiblement croissantes si et seulement si, pour tout $x \in X$, on a $Tx \leq STx$ et $Sx \leq TStx$.*

Exemple 3 ([19]) *Soit $X = [1, +\infty) \times [1, +\infty)$ équipé par la relation d'ordre \preceq donnée par*

$$(x, y) \preceq (z, w) \iff x \leq z \quad \text{et} \quad y \leq w.$$

avec \leq la relation d'ordre usuel. Soit $f, g : X \rightarrow X$ définies par $f(x, y) = (2x, 3y)$ et $g(x, y) = (x^2, y^2)$. Il est facile de vérifier que f et g sont faiblement croissantes.

Juste après, Nashine et Samet [73] ont généralisé Définition 7. Pour cela, étant donnée $R : X \rightarrow X$, pour tout $x \in X$, on note $R^{-1}(x)$ la partie de X définie par

$$R^{-1}(x) := \{u \in X \mid Ru = x\}.$$

Définition 8 ([73]) *Soit (X, \leq) un ensemble partiellement ordonné et $T, S, R : X \rightarrow X$ des applications données telles que $TX \subseteq RX$ et $SX \subseteq RX$. On dit que S et T sont faiblement croissantes par rapport à R si et seulement si, pour tout $x \in X$, on a*

$$Tx \leq y, \quad \forall y \in R^{-1}(Tx)$$

et

$$Sx \leq Ty, \quad \forall y \in R^{-1}(Sx).$$

Remarque 5 Si $R : X \rightarrow X$ est la fonction identité ($Rx = x$ pour tout $x \in X$), alors dire que S et T sont faiblement croissantes par rapport à R implique que S et T sont des fonctions faiblement croissantes.

Exemple 4 ([73]) Soit $X = [0, +\infty)$ équipé par la relation d'ordre partiel usuel \leq . On définit les applications $T, S, R : X \rightarrow X$ par

$$Tx = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} ; Sx = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} ; Rx = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

S and T sont faiblement croissantes par rapport à R .

En se servant de ces notions, beaucoup de résultats de point fixe commun et de point de coïncidence ont été trouvés. Pour plus de détails, voir [55, 35, 54, 46, 73, 74, 75, 103].

2.2.2 Point fixe commun et point de coïncidence pour trois applications dans un espace métrique ordonné, [Article 7]

Dans [Article 7], on a présenté des résultats de points fixe et de coïncidence de trois applications satisfaisant une certaine contraction (inspirée du travail de Amini-Harandi et Emami [12]) dans des espaces métriques partiellement ordonnés. Comme application, on donne un théorème d'existence d'une solution commune des équations intégrales.

Amini-Harandi et Emami [12] ont défini \mathcal{S} comme la classe des fonctions $\beta : [0, \infty[\rightarrow [0, 1[$ qui vérifient la condition

$$\beta(t_n) \rightarrow 1 \quad \text{implique} \quad t_n \rightarrow 0. \quad (2.72)$$

Notre résultat essentiel s'énonce comme suit.

Théorème 14 Soit (X, \preceq) un ensemble partiellement ordonné. Supposons qu'il existe une métrique d sur X tel que (X, d) est complet. On considère $f, g, H : X \rightarrow X$ des applications données satisfaisant

- (a) $fX \subseteq HX, gX \subseteq HX,$
- (b) f, g et H sont continues,
- (c) les paires $\{f, H\}$ et $\{g, H\}$ sont compatibles,
- (g) f et g sont faiblement croissantes par rapport à H .

On suppose qu'il existe $\beta \in \mathcal{S}$ tel que

$$d(fx, gy) \leq \beta(d(Hx, Hy)) d(Hx, Hy), \quad (2.73)$$

pour tout $(x, y) \in X \times X$ tel que Hx et Hy sont comparables. Alors, f, g et H ont un point de coïncidence $u \in X$, c-à-d, $fu = gu = Hu$.

On omet dans les hypothèses du Théorème 28, la continuité de f, g et H , et la compatibilité des paires $\{f, H\}$ et $\{g, H\}$, et on les remplace par une condition sur l'espace X dans le but de trouver le même résultat. Ceci fera l'objet du théorème suivant.

Théorème 15 Soit (X, \leq) un ensemble partiellement ordonné. Supposons qu'il existe une métrique d sur X tel que (X, d) est complet. On considère $f, g, H : X \rightarrow X$ des applications données satisfaisant

- (a) $fX \subseteq HX, gX \subseteq HX,$
- (b) HX est une partie fermée dans $(X, d),$
- (c) f et g sont faiblement croissantes par rapport à $H.$

On suppose qu'il existe $\beta \in \mathcal{S}$ tel que

$$d(fx, gy) \leq \beta(d(Hx, Hy)) d(Hx, Hy), \quad (2.74)$$

pour tout $(x, y) \in X \times X$ tel que Hx et Hy sont comparables,

- (d) si $\{z_n\}$ est une suite croissante dans X par rapport à \leq telle que $z_n \rightarrow z$ si $n \rightarrow +\infty,$ alors $z_n \leq z$ pour tout $n \in \mathbb{N}.$

Alors, f, g et H ont un point de coïncidence $u \in X,$ c-à-d, $fu = gu = Hu.$

Maintenant, on prouve un théorème d'existence et d'unicité d'un point fixe commun.

Théorème 16 En plus des hypothèses du Théorème 28, on suppose que pour tout $(x, y) \in X \times X,$ il existe $u \in X$ tel que $fx \leq fu$ et $fy \leq fu.$

Alors, f, g et H ont un unique point fixe commun, c-à-d, il existe un unique $z \in X$ tel que $z = Hz = fz = gz.$

Un corollaire simple du Théorème 14 est de prendre $H = I_X$ l'identité sur $X.$

Corollaire 3 Soit (X, \leq) un ensemble partiellement ordonné. Supposons qu'il existe une métrique d sur X tel que (X, d) est un espace métrique complet. On considère $f, g : X \rightarrow X$ des applications données satisfaisant :

- (a) f et g sont continues,
- (b) f et g sont faiblement croissantes.

On suppose qu'il existe $\beta \in \mathcal{S}$ tel que

$$d(fx, gy) \leq \beta(d(x, y)) d(x, y), \quad (2.75)$$

pour tout $(x, y) \in X \times X$ tel que x et y sont comparables. Alors, f, g et H ont un point fixe commun $u \in X,$ c-à-d, $fu = gu = u.$

Remarque 6 Si on prend, $g = I_X$ dans Corollaire 3, on trouve le résultat de Amini-Harandi et Emami [12].

Application

Comme application du Corollaire 3, on résoud le problème des équations intégrales suivantes

$$\begin{cases} u(t) = \int_0^T K_1(t, s, u(s))ds + h(t), & t \in [0, T] \\ u(t) = \int_0^T K_2(t, s, u(s))ds + h(t), & t \in [0, T], \end{cases} \quad (2.76)$$

avec $T > 0$. Pour cela, on donne un théorème d'existence pour une solution commune de (2.76) en utilisant Corollaire 3. Cette application est inspirée des papiers [19, 73]. Soit $X = \mathcal{C}(I)$ l'espace des fonctions continues définies sur l'intervalle $I = [0, T]$. On considère la métrique donnée par

$$d(x, y) = \sup_{t \in I} |x(t) - y(t)|, \quad \forall x, y \in X.$$

Notons que (X, d) est un espace métrique complet. En outre $X = \mathcal{C}(I)$ peut être équipé par la relation d'ordre partiel

$$\forall x, y \in X, \quad x \preceq y \iff x(t) \leq y(t), \quad \forall t \in I.$$

En plus, dans [76], il est prouvé que $(\mathcal{C}(I), \preceq)$ est régulier. On trouve le théorème suivant dans [73]

Théorème 17 *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

- i) $K_1, K_2 : I \times I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues,
- ii) pour tous $t, s \in I$, on a

$$K_1(t, s, u(t)) \leq K_2 \left(t, s, \int_0^T K_1(s, \tau, u(\tau)) d\tau + h(s) \right),$$

$$K_2(t, s, u(t)) \leq K_1 \left(t, s, \int_0^T K_2(s, \tau, u(\tau)) d\tau + h(s) \right),$$

- iii) il existe une fonction continue $G : I \times I \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$|K_1(t, s, x) - K_2(t, s, y)| \leq G(t, s) \sqrt{\ln[(x - y)^2 + 1]},$$

pour tous $t, s \in I$ et $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $y \preceq x$,

$$iv) \sup_{t \in I} \int_0^T G^2(t, s) ds \leq \frac{1}{T}.$$

Alors les équations intégrales (2.76) ont une solution $u^* \in \mathcal{C}(I)$.

On prend les quantités

$$fx(t) = \int_0^T K_1(t, s, u(s)) ds + h(t), \quad t \in I,$$

$$gx(t) = \int_0^T K_2(t, s, u(s)) ds + h(t), \quad t \in I.$$

Les fonctions f et g sont faiblement croissantes. On trouve que

$$d(fx, gy) \leq \sqrt{\ln[d^2(x, y) + 1]}.$$

Avec un choix de la fonction β telle que

$$\beta(t) = \frac{\sqrt{\ln[t^2 + 1]}}{t},$$

on a $\beta \in \mathcal{S}$, et on peut écrire

$$d(fx, gy) \leq \beta(d(x, y))d(x, y).$$

Ainsi, toutes les hypothèses du Corollaire 3 sont satisfaites. Alors, il existe $u^* \in \mathcal{C}(I)$, un point fixe commun de f et g , c-à-d, u^* est une solution du problème (2.76).

Souvent, pour généraliser le principe de Banach classique [20], on a recours à modifier la topologie de l'espace X dans lequel on étudie l'existence de point fixe. Dans ce qui suit, on donne des résultats de point fixe pour des différentes contractions dans des espaces X ayant une topologie un peu particulière. Les espaces présentés sont les suivants :

- Espace métrique partiel.
- Espace métrique cône.
- Espace métrique généralisé.

2.2.3 Quelques résultats de point fixe dans un espace métrique partiel (partial metric space), [Articles 8-12]

◆ Introduction

Le concept d'espace métrique partiel était introduit par Matthews [63] en 1994, comme une étude de la sémantique dénotationnelle des flux des données de réseaux. En fait, il est largement reconnu que les espaces métriques partiels jouent un rôle important dans la construction de modèles dans la théorie de calcul, de la science de l'information, de la science de la biologie, etc. Pour plus de détails, voir [47, 80, 93, 94, 95, 104]. Matthews a trouvé une belle relation entre les espaces métriques partiels et les espaces quasi-métriques à poids. Ces structures ont été appliquées pour obtenir un traitement extensionnel des flux des données décrites dans [64].

La topologie de tels espaces métriques partiels est un peu particulière. Précisément, la distance d'un point à lui même peut ne pas être égale à zéro. De plus, la limite d'une suite convergente n'est pas unique. On commence par donner quelques définitions et propriétés connues d'espaces métriques partiels.

Définition 9 ([63]) Soit X un ensemble non vide. Une métrique partielle sur X est une application $p: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ telle que pour tous $x, y, z \in X$:

- (p1) $x = y \iff p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$,
- (p2) $p(x, x) \leq p(x, y)$,
- (p3) $p(x, y) = p(y, x)$,
- (p4) $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y) - p(z, z)$.

Un espace métrique partiel est une paire (X, p) tel que X est un ensemble non vide et p est une métrique partielle sur X .

Remarque 7 Il est clair que, si $p(x, y) = 0$, alors de (p1) and (p2), $x = y$. Mais si $x = y$, $p(x, y)$ peut être différente de 0.

Un exemple de base d'un espace métrique partiel est la paire (\mathbb{R}_+, p) , où $p(x, y) = \max\{x, y\}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$. On cite encore les exemples suivants.

Exemple 5 ([63]) Soit $X = \{[a, b], a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ et on définit $p([a, b], [c, d]) = \max\{b, d\} - \min\{a, c\}$. Alors (X, p) est un espace métrique partiel.

Exemple 6 ([50, 63]) Soit $X = [0, 1] \cup [2, 3]$. On pose $p : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ tel que

$$p(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & \text{si } \{x, y\} \cap [2, 3] \neq \emptyset, \\ |x - y| & \text{si } \{x, y\} \subset [0, 1]. \end{cases}$$

Alors (X, p) est un espace métrique partiel.

Chaque métrique partielle p sur X génère une T_0 topologie τ_p sur X qui a une base, la famille des p -boules ouvertes $\{B_p(x, \varepsilon), x \in X, \varepsilon > 0\}$, où $B_p(x, \varepsilon) = \{y \in X : p(x, y) < p(x, x) + \varepsilon\}$ pour tous $x \in X$ et $\varepsilon > 0$.

Si p est une métrique partielle sur X , alors la fonction $p^s : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ donnée par

$$p^s(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y), \quad (2.77)$$

est une métrique sur X .

Soit $\{x_n\}$ une suite dans X . Alors

- (i) $\{x_n\}$ converge vers un point $x \in X$ si et seulement si $p(x, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(x, x_n)$,
- (ii) $\{x_n\}$ est dite une suite de Cauchy s'il existe $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} p(x_n, x_m)$ (et est finie),
- (iii) (X, p) est dit complet si pour toute suite de Cauchy $\{x_n\}$ dans X converge, par rapport à τ_p , vers un point $x \in X$, tel que $p(x, x) = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} p(x_n, x_m)$.

Lemme 3 ([63]) Soit (X, p) un espace métrique partiel. Alors,

- (a) $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans (X, p) si et seulement si elle est de Cauchy dans l'espace métrique (X, p^s) ,
- (b) (X, p) est complet si et seulement si, l'espace métrique (X, p^s) est complet. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p^s(x_n, x) = 0$ si et seulement si

$$p(x, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, x) = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} p(x_n, x_m). \quad (2.78)$$

Définition 10 ([16]) Supposons que (X, p) est un espace métrique partiel. Une application $F : X \rightarrow X$ est dite continue en $x \in X$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $F(B_p(x, \delta)) \subseteq B_p(Fx, \varepsilon)$.

Le lemme suivant est facile à montrer.

Lemme 4 Soit (X, p) un espace métrique partiel. $F : X \rightarrow X$ est continue si et seulement si, étant donnée une suite $\{x_n\} \in \mathbb{N}$ et $x \in X$ tel que $p(x, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(x, x_n)$, alors $p(Fx, Fx) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(Fx, Fx_n)$.

Matthews [63] a étendu le principe de Banach aux espaces métriques partiels complets, comme suit.

Théorème 18 ([63]) *Soit (X, p) un espace métrique partiel complet et $T : X \rightarrow X$ une application telle qu'il existe $k \in (0, 1)$ tel que :*

$$p(Tx, Ty) \leq kp(x, y), \quad \forall x, y \in X. \quad (2.79)$$

Alors, T admet un unique point fixe $x \in X$.

Exemple 7 *Le voilà un exemple affirmant que le principe de Banach n'est pas appliqué, c-à-d, le théorème de Matthews [63] dans les espaces métriques partiels est bien une extension du théorème de Banach (dans des espaces métriques usuels). On considère $X = \{0, 1, 2\}$ muni de sa métrique partielle usuelle $p : X \times X \rightarrow X$ donnée par*

$$p(x, y) = \max\{x, y\} \quad \text{pour tous } x, y \in X.$$

Prenons $f : X \rightarrow X$ définie par $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ et $f(2) = 1$. Il est clair que les hypothèses du théorème de Matthews sont satisfaites avec $c = \frac{2}{3}$ (le point $u = 0$ est un point fixe de f).

D'autre part, supposons que le principe de Banach dans les espaces métriques usuels est vérifié, c-à-d,

$$d(fx, fy) \leq kd(x, y),$$

avec d la métrique usuelle pour tous $x, y \in X$ et tout $k \in [0, 1)$. En prenant $x = 1$ et $y = 2$, on aura $1 \leq k$, ce qui est absurde.

Après le résultat de Matthews [63], beaucoup de résultats intéressants de point fixe ont été établis dans des espaces métriques partiels. Pour plus de détails, voir [16, 17, 18, 63, 79, 81, 96, 104, 110].

◆ Point fixe commun pour des applications faiblement compatibles satisfaisant des contractions non linéaires et un résultat d'homotopie, [Article 8]

Dans [Article 8], on prouve des résultats de point fixe commun pour des paires d'applications faiblement compatibles satisfaisant des contractions généralisées dans des espaces métriques partiels complets. Les théorèmes présentés étendent des résultats récents de Altun, Sola et Simsek [18]. De plus, des résultats d'homotopie d'opérateurs sur un ensemble équipé par une métrique partielle sont donnés.

Soit Φ l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues croissantes satisfaisant :

- (a) $0 < \varphi(t) < t$ pour tout $t > 0$,
- (b) La série $\sum_{n \geq 1} \varphi^n(t)$ converge pour tout $t > 0$.

Le théorème fondamental est

Théorème 19 *Supposons que A, B, S et T sont des applications définies sur X à valeurs dans X avec (X, p) un espace métrique partiel complet tels que $AX \subseteq TX, BX \subseteq SX$ et*

$$p(Ax, By) \leq \varphi(M(x, y)) \quad (2.80)$$

pour tous $x, y \in X$, où $\varphi \in \Phi$ et

$$M(x, y) = \max \left\{ p(Sx, Ty), p(Ax, Sx), p(By, Ty), \frac{1}{2}[p(Sx, By) + p(Ax, Ty)] \right\}.$$

Si une des parties AX, BX, TX et SX est fermée dans (X, p) , alors

- (i) *A et S ont un point de coïncidence,*
- (ii) *B et T ont un point de coïncidence.*

Si de plus les paires $\{A, S\}$ et $\{B, T\}$ sont faiblement compatibles, alors A, B, T et S ont un unique point fixe commun.

Notons Λ l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues croissantes satisfaisant :

- (I) $0 < \varphi(t) < t$ pour tout $t > 0$,
- (II) $g(t) = \frac{t}{t - \varphi(t)}$ est décroissante dans $(0, +\infty)$,
- (III) $\int_0^r g(t) dt < \infty$ pour tout $r > 0$.

Lemme 5 ([15]) *On a $\Lambda \subset \Phi$.*

Une conséquence immédiate du Théorème 28 et du Lemme 5 est le résultat suivant.

Corollaire 4 *Supposons que A, B, S et T sont des applications de X dans X avec (X, p) un espace métrique partiel complet tels que $AX \subseteq TX, BX \subseteq SX$ et*

$$p(Ax, By) \leq \varphi(M(x, y)) \quad (2.81)$$

pour tous $x, y \in X$, où $\varphi \in \Lambda$ et

$$M(x, y) = \max \left\{ p(Sx, Ty), p(Ax, Sx), p(By, Ty), \frac{1}{2}[p(Sx, By) + p(Ax, Ty)] \right\}.$$

Si une des parties AX, BX, TX et SX est fermée dans (X, p) , alors

- (i) *A et S ont un point de coïncidence,*
- (ii) *B et T ont un point de coïncidence.*

Si de plus les paires $\{A, S\}$ et $\{B, T\}$ sont faiblement compatibles, alors A, B, T et S ont un unique point fixe commun.

Comme conséquence du résultat précédent, on obtient une généralisation du théorème de point fixe de Ćirić [33] dans un espace métrique partiel.

Corollaire 5 (La contraction généralisée de Ćirić) *Soit (X, p) un espace métrique partiel complet et T une application sur X satisfaisant*

$$p(Tx, Ty) \leq k \max \left\{ p(x, y), p(x, Tx), p(y, Ty), \frac{1}{2}[p(x, Ty) + p(y, Tx)] \right\}$$

pour tous $x, y \in X$, où $k \in (0, 1)$ est une constante. Alors T a unique point fixe.

Remarque 8

- Prenons $A = B$ et $S = T = I_X$ (l'identité sur X) dans Théorème 28, on obtient Théorème 1 de Altun, Sola et Simsek [18].
- Prenons $A = B$ et $S = T = I_X$ dans Corollaire 5, on obtient aussi Corollaire 2 de Altun, Sola et Simsek [18].

Application : un résultat d'homotopie

Comme application, on a le résultat d'homotopie suivant.

Théorème 20 Soit (X, p) un espace métrique partiel complet, U un ouvert dans X et V un fermé dans X , avec $U \subset V$. Soit $H : V \times [0, 1] \rightarrow X$ un opérateur tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (a) $x \neq H(x, t)$ pour tout $x \in V \setminus U$ pour tout $t \in [0, 1]$,
- (b) il existe $\varphi \in \Phi$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$ et tous $x, y \in V$ on a

$$p(H(x, t), H(y, t)) \leq \varphi(p(x, y)),$$

- (c) il existe une fonction continue $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$p(H(x, t), H(x, s)) \leq |\eta(t) - \eta(s)| \text{ for all } t, s \in [0, 1] \text{ and each } x \in V,$$

- (d) $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est strictement croissante (ici $\psi(x) = x - \varphi(x)$).
Alors $H(\cdot, 0)$ a un point fixe si et seulement si $H(\cdot, 1)$ a un point fixe.

En prenant $V = \bar{U}$, la fermeture de U dans (X, p) , on obtient immédiatement du Théorème 20 le résultat suivant.

Théorème 21 Soit (X, p) un espace métrique partiel complet, U un ouvert de X et $H : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow X$ un opérateur tels que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (a) $x \neq H(x, t)$ pour tout $x \in \partial U$ et tout $t \in [0, 1]$ (ici ∂U dénote la frontière de U dans X),
- (b) il existe $\varphi \in \Phi$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$ et tous $x, y \in \bar{U}$ on a

$$p(H(x, t), H(y, t)) \leq \varphi(p(x, y)),$$

- (c) il existe une fonction continue $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$p(H(x, t), H(x, s)) \leq |\eta(t) - \eta(s)| \text{ for all } t, s \in [0, 1] \text{ pour tout } x \in \bar{U},$$

- (d) $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ is strictement croissante (ici $\psi(x) = x - \varphi(x)$).
Alors $H(\cdot, 0)$ a un point fixe si et seulement si $H(\cdot, 1)$ a un point fixe.

Remarque 9 En prenant $\varphi(t) = kt$ avec $k \in [0, 1)$ et $\eta(t) = t$ dans le résultat précédent, on obtient Théorème 3 de Altun, Sola et Simsek [18].

◆ **Point fixe commun pour des contractions faibles généralisées dans des espaces partiels ordonnés, [Article 9]**

Dans [Article 9], on généralise un résultat de Radenović et Kadelburg [90] aux espaces métriques partiels, partiellement ordonnés. De plus, on présente un exemple illustrant notre résultat et on déduit un théorème de point fixe commun intervenant une contraction de type intégral.

Notre théorème est le suivant.

Théorème 22 *Soit (X, \leq) un ensemble partiellement ordonné et (X, p) un espace métrique partiel complet. Soit $\{f, g\}$ une paire d'applications faiblement croissantes définies sur X . Supposons qu'il existe des fonctions ψ et φ telles que que pour tous éléments comparables $x, y \in X$*

$$\psi(p(fx, gy)) \leq \psi(M(x, y)) - \varphi(M(x, y)) \quad (2.82)$$

où

$$M(x, y) = \max \left\{ p(x, y), p(x, fx), p(y, gy), \frac{1}{2}[p(x, gy) + p(y, fx)] \right\}, \quad (2.83)$$

et

(a) $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est une fonction continue croissante avec $\psi(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$,

(b) $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est une fonction semi-continue inférieurement avec $\varphi(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$.

Supposons que, soit,

(i) f ou g est continue, soit,

(ii) si une suite croissante $\{x_n\}$ converge vers x dans (X, p) , alors $x_n \leq x$ pour tout n .

Alors, f et g ont au moins un point fixe commun, dire z . En plus, $p(z, z) = 0$.

Prenons $g = f$ dans Théorème 22, on obtient

Corollaire 6 *Soit (X, \leq) un ensemble partiellement ordonné et (X, p) un espace métrique partiel complet. Soit f une application croissante définie sur X telle que $x_0 \leq fx_0$ pour un certain $x_0 \in X$. Supposons qu'il existe des fonctions ψ et φ telles que que pour tous éléments comparables $x, y \in X$*

$$\psi(p(fx, fy)) \leq \psi(M(x, y)) - \varphi(M(x, y)) \quad (2.84)$$

où

$$M(x, y) = \max \left\{ p(x, y), p(x, fx), p(y, fy), \frac{1}{2}[p(x, fy) + p(y, fx)] \right\} \quad (2.85)$$

et

(a) $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est une fonction continue croissante avec $\psi(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$,

(b) $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est une fonction semi-continue inférieurement avec $\varphi(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$.

Supposons que, soit

(i) f est continue, soit

(ii) si une suite croissante $\{x_n\}$ converge vers x dans (X, p) , alors $x_n \leq x$ pour tout n .

Alors, f a au moins un point fixe, dire z . En plus, $p(z, z) = 0$.

Théorème 23 *Supposons que toutes les hypothèses du Corollaire 6 sont satisfaites et supposons que ce qui suit est vrai : pour des points arbitraires $x, y \in X$, il existe $z \in X$ qui est comparable à la fois à x et y . Alors, le point fixe de f est unique.*

Exemple 8 *Soit $X = [0, +\infty[$ équipé par la relation d'ordre partiel usuel \leq . On considère la métrique partielle usuelle complète p définie par $p : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ avec $p(x, y) = \max\{x, y\}$. On définit*

$$\begin{cases} f(t) = \frac{3}{4}t^2, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ f(t) = \frac{3}{4}\sqrt{t} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

On a $f(t) \leq \frac{3}{4}t \leq t$ pour tout $t \in [0, +\infty[$. En particulier, on a $p(t, f(t)) = t$ pour tout $t \geq 0$. Tous les points $x, y \in X$ sont comparables, donc par exemple on prend $y \leq x$. Il est clair que

$$M(x, y) = x.$$

Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$\begin{cases} \psi(t) = t \\ \varphi(t) = \frac{1}{4}t. \end{cases}$$

Les fonctions ψ et φ vérifient les conditions (a) et (b) du Théorème 22. On peut trouver que

$$\psi(M(x, y)) - \varphi(M(x, y)) = \psi(x) - \varphi(x) = x - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x.$$

Comme $f(x) \leq \frac{3}{4}x$, donc pour $y \leq x$, on a

$$\psi(p(fx, fy)) \leq \psi(M(x, y)) - \varphi(M(x, y)).$$

De plus, f est croissante par rapport à \leq et pour $x_0 = 0$, on a $x_0 \leq fx_0$. Toutes les hypothèses du Corollaire 6 sont satisfaites, donc f a un unique point fixe dans X , qui est $u = 0$.

Soit d la métrique standard donnée par $d(x, y) = |x - y|$ pour tous $x, y \in X$. Notons que si $x = 1$ et $y = \frac{3}{4}$, on a

$$\psi(d(f1, f\frac{3}{4})) = \frac{21}{64} > \frac{3}{4} \frac{21}{64} = \frac{3}{4} M(1, \frac{3}{4}) = \psi(M(1, \frac{3}{4})) - \varphi(M(1, \frac{3}{4})).$$

Ceci prouve que la condition contractive du Théorème 2.1 de Radenović et Kadelburg [90] n'est pas satisfaite. Ceci assure que notre Théorème 22 est bien une généralisation du Théorème 2.1 de [90].

Application : contraction de type intégral

Comme application, on finit par un autre corollaire du Théorème 22 qui est le suivant.

Corollaire 7 *Soit f et g satisfaisant les conditions du Théorème 22 sauf que la condition (2.84) est remplacée par le suivant : il existe une fonction Φ positive Lebesgue intégrable sur \mathbb{R}_+ telle que $\int_0^\varepsilon \Phi(t)dt > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ et que*

$$\int_0^{\psi(p(fx,gy))} \Phi(t)dt \leq \int_0^{\psi(M(x,y))} \Phi(t)dt - \int_0^{\varphi(M(x,y))} \Phi(t)dt. \quad (2.86)$$

Alors, f et g ont au moins un point fixe commun.

2.2.4 Quelques résultats de point fixe dans un espace métrique cône (Cone metric space), [Articles 10,11]

En 2007, Huang et Zhang [48] ont re-introduit la notion d'espace métrique cône (cone metric space), où l'ensemble des nombres réels est remplacé par un espace de Banach partiellement ordonné. Ils ont établi des théorèmes de point fixe dans un tel espace.

Soit E un espace de Banach et $P \subseteq E$. Le sous-ensemble P est dit un cône si

- (i) P est fermé, $P \neq \emptyset$ et $P \neq \{0_E\}$. 0_E est l'élément neutre de E .
- (ii) $ax + by \in P$ pour tous $x, y \in P$, pour tous $a, b > 0$.
- (iii) $P \cap (-P) = \{0_E\}$.

Pour un cône donné $P \subseteq E$, nous pouvons définir une relation d'ordre partiel \leq dans E par rapport à P comme suit

$$x \leq y \iff y - x \in P, \quad x, y \in E.$$

Nous notons $x < y$ pour dire que $x \leq y$ et $x \neq y$. Aussi nous notons $x \ll y$ pour dire que $y - x \in \text{int}P$, où $\text{int}P$ désigne l'intérieur de P . Le cône P est dit normal, s'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$0 \leq x \leq y \iff \|x\|_E \leq k\|y\|_E \quad x, y \in E.$$

Dans ce cas, le réel k est appelé constante normale de P .

Le cône P est dit régulier si pour toute suite croissante qui est majorée est convergente, c-à-d, si $\{x_n\}$ est une suite telle que

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq y$$

pour un certain $y \in E$, alors il existe $x \in E$ tel que $\|x_n - x\|_E \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$. Par équivalence, le cône P est régulier si et seulement si toute suite décroissante minorée est convergente. Il est bien connu que tout cône régulier est un cône normal.

Dans la suite, nous supposons que E est un espace de Banach, P est un cône de E avec $\text{int}P \neq \{0_E\}$; et \leq est une relation d'ordre partiel par rapport à P .

Définition 11 ([48]) Soit X un ensemble non vide. Supposons qu'une application $d : X \times X \rightarrow E$ satisfait

- (i) $0_E \leq d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$ et $d(x, y) = 0_E \iff x = y$.
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in X$.
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pour tous $x, y, z \in X$.

L'application d est appelée une métrique cône sur X et le couple (X, d) est appelé espace métrique cône (cone metric space).

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}^2$, $P = \{(x, y) \in E, x \geq 0_E, y \geq 0_E\}$, $X = \mathbb{R}$ et l'application $d : X \times X \rightarrow E$ définie par

$$d(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|),$$

où α est une constante positive. Alors, (X, d) est un espace métrique cône [48].

Définition 12 ([48]) Soit (X, d) un espace métrique cône, $x \in X$ et $\{x_n\}$ une suite de X . Alors

- La suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x si

$$\forall c \gg 0_E, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad d(x_n, x) \ll c, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- La suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall c \gg 0_E, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad d(x_n, x_m) \ll c, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

- (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente.

Définition 13 ([48]) Soit (X, d) un espace métrique cône et $T : X \rightarrow X$ une application donnée. On dit que T est continue en $x_0 \in X$ si pour toute suite $\{x_n\}$ dans X , on a

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ si } n \rightarrow +\infty \implies Tx_n \rightarrow Tx_0 \text{ si } n \rightarrow +\infty.$$

Si T est continue en tout point $x_0 \in X$, alors on dit que T est continue sur X .

Divers théorèmes de point fixe ont été obtenus dans [48] dans un espace métrique cône. Dans tous ces résultats, le cône P est supposé normal. Le plus connu est le suivant.

Théorème 24 ([48]) Soit (X, d) un espace métrique cône, P un cône normal avec une constante k . Supposons que l'application $T : X \rightarrow X$ satisfait la contraction

$$d(Tx, Ty) \leq cd(x, y), \quad \text{pour tous } x, y \in X,$$

où $c \in [0, 1)$ est une constante. Alors, T a un unique point fixe dans X . Aussi, pour tout $x \in X$, la suite itérative $\{T^n x\}$ converge au point fixe.

Juste après, Rezapour et Hamlbarani [89] ont obtenu des résultats plus forts. D'une part, ils ont remarqué qu'il n'existe aucun cône normal avec une constante $k < 1$. D'autre part, Rezapour et Hamlbarani ont obtenu les mêmes résultats de Huang et Zhang, mais en éliminant l'hypothèse de normalité. Pour d'autres résultats sur des espaces métriques cônes, voir [10, 11, 22, 24, 42, 43, 100, 108, 109, 111, 112].

On présente maintenant un exemple assurant que Théorème 24 généralise bien le théorème de Banach usuel donné par Théorème 7.

Exemple 9 ([48]) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x, y \geq 0\}$ un cône normal. Soit $X = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, x) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1\}$. On définit $d : X \times X \rightarrow E$ par

$$d((x, 0), (y, 0)) = \left(\frac{4}{3}|x - y|, |x - y|\right),$$

$$d((0, x), (0, y)) = (|x - y|, \frac{2}{3}|x - y|),$$

$$d((x, 0), (0, y)) = d((0, y), (x, 0)) = \left(\frac{4}{3}x + y, x + \frac{2}{3}y\right).$$

Alors, (X, d) est un espace métrique cône complet. Soit l'application $T : X \rightarrow X$ définie par

$$T((x, 0)) = (0, x) \quad \text{et} \quad T((0, x)) = \left(\frac{1}{2}x, 0\right).$$

Alors, T satisfait la contraction

$$d(T((x_1, x_2)), T((y_1, y_2))) \leq cd((x_1, x_2), (y_1, y_2)),$$

pour tous $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X$ avec $c = \frac{3}{4}$. Il est clair que T admet un unique point fixe dans X , qui est le point $(0, 0)$. D'autre part, T n'est pas contractante dans l'espace métrique usuel, c-à-d, (2.79) n'est pas vérifiée.

La notion de point fixe couplé est introduite en premier par Bhashker et Lakshmikantham [23].

Définition 14 ([23]) Un élément $(x, y) \in X \times X$ est dit un point fixe couplé d'une application $F : X \times X \rightarrow X$ si $F(x, y) = x$ et $F(y, x) = y$.

Après le fameux travail de Bhashker et Lakshmikantham [23], Lakshmikantham et Ćirić [61] ont défini les notions de point fixe couplé commun et de commutativité de $F : X \times X \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow X$.

Définition 15 ([61]) Un élément $(x, y) \in X \times X$ est dit un point de coïncidence couplé de $F : X \times X \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow X$ si $F(x, y) = gx$ et $F(y, x) = gy$.

Définition 16 ([61]) Un élément $(x, y) \in X \times X$ est dit un point fixe couplé commun de $F : X \times X \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow X$ si $x = F(x, y) = gx$ et $y = F(y, x) = gy$.

Définition 17 ([61]) *Soit X un ensemble non vide. Alors, on dit que les applications $F : X \times X \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow X$ sont commutatives si $gF(x, y) = F(gx, gy)$ pour tous $x, y \in X$.*

Récemment, Abbas, Ali Khan et Radenović [2] ont introduit le concept de w -compatibilité comme suit.

Définition 18 ([2]) *Les applications $F : X \times X \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow X$ sont dites w -compatibles si $g(F(x, x)) = F(gx, gx)$ chaque fois que $g(x) = F(x, x)$.*

En se servant de la définition de w -compatibilité, Abbas, Khan et Radenović [2] ont établi des théorèmes de point de coïncidence couplé pour des applications $F : X \times X \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow X$ satisfaisant une condition de contraction dans des espaces métriques cônes. [Article 13], qui fera l'objet du paragraphe suivant, généralise le papier [2].

◆ **Applications \tilde{w} -compatibles, point de b -coïncidence couplé et point fixe b -commun couplé, [Article 10]**

Dans [Article 10], on généralise les notions définies dans [2] en introduisant les concepts d'applications $F, G : X \times X \rightarrow X$ \tilde{w} -compatibles, de point de b -coïncidence couplé et de point fixe b -commun couplé de $F, G : X \times X \rightarrow X$.

Etant donné X un ensemble non vide. Ces notions sont données par les définitions suivantes :

Définition 19 *Les applications $F, G : X \times X \rightarrow X$ sont dites \tilde{w} -compatibles si*

$$F(G(x, y), G(y, x)) = G(F(x, y), F(y, x)),$$

chaque fois que $F(x, y) = G(x, y)$ et $F(y, x) = G(y, x)$.

Exemple 10 *Soit $X = \mathbb{R}$ et $F, G : X \times X \rightarrow X$ deux applications définies par*

$$F(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad G(x, y) = 2xy$$

pour tous $x, y \in X$. On peut vérifier que (x, y) est un point de b -coïncidence couplé de F et G si et seulement si $x = y$. En plus, on a $F(G(x, x), G(x, x)) = G(F(x, x), F(x, x))$ pour tout $x \in X$. Alors F et G sont \tilde{w} -compatibles.

Définition 20 *Un élément $(x, y) \in X \times X$ est dit*

- (i) *un point de b -coïncidence couplé des applications $F, G : X \times X \rightarrow X$ si $G(x, y) = F(x, y)$ et $G(y, x) = F(y, x)$,*
- (ii) *un point fixe b -commun couplé des applications $F, G : X \times X \rightarrow X$ si $x = G(x, y) = F(x, y)$ et $y = G(y, x) = F(y, x)$.*

Exemple 11 Soit $X = \mathbb{R}$ et $F, G : X \times X \rightarrow X$ les applications définies par

$$F(x, y) = \sin x (1 + y) \quad \text{et} \quad G(x, y) = x^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\right)y + 1 - \frac{\pi^2}{4}$$

pour tous $x, y \in X$. Alors $(\frac{\pi}{2}, 0)$ est un point de b -coïncidence couplé de F et G .

Exemple 12 Soit $X = \mathbb{R}$ et $F, G : X \times X \rightarrow X$ définies comme suit

$$F(x, y) = 3x + 2y - 6 \quad \text{et} \quad G(x, y) = 4x + 3y - 9,$$

pour tous $x, y \in X$. Alors $(1, 2)$ un point fixe b -commun couplé de F et G .

Dans [Article 13], on a établi des résultats de point de b -coïncidence couplé et de point fixe b -commun couplé dans des espaces métriques cônes. Ces résultats généralisent et étendent des théorèmes connus dans la littérature, en particulier les résultats récents de Abbas, Ali Khan et Radenović [2] et le résultat de Olaleru [78].

Si (X, d) est un espace métrique cône, nous dotons l'espace produit $X \times X$ par la métrique cône ν définie par

$$\nu((x, y), (u, v)) = d(x, u) + d(y, v), \quad \forall (x, y), (u, v) \in X \times X.$$

Le théorème essentiel présenté dans [Article 10] est

Théorème 25 Soit (X, d) un espace métrique cône avec P un cône ayant un intérieur non vide. Soit $F, G : X \times X \rightarrow X$ des applications satisfaisant

(h1) pour tout $(x, y) \in X \times X$, il existe $(u, v) \in X \times X$ tel que $F(x, y) = G(u, v)$ et $F(y, x) = G(v, u)$;

(h2) $\{(G(x, y), G(y, x)) : x, y \in X\}$ est une partie complète dans $(X \times X, \nu)$;

(h3) pour tous $x, y, u, v \in X$,

$$\begin{aligned} d(F(x, y), F(u, v)) &\leq a_1 d(F(x, y), G(x, y)) + a_2 d(F(y, x), G(y, x)) + a_3 d(F(u, v), G(u, v)) \\ &+ a_4 d(F(v, u), G(v, u)) + a_5 d(F(u, v), G(x, y)) + a_6 d(F(v, u), G(y, x)) + a_7 d(F(x, y), G(u, v)) \\ &+ a_8 d(F(y, x), G(v, u)) + a_9 d(G(u, v), G(x, y)) + a_{10} d(G(v, u), G(y, x)), \end{aligned}$$

où $a_i, i = 1, \dots, 10$ sont des nombres réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{10} a_i < 1$. Alors F et G ont un point de b -coïncidence couplé $(x, y) \in X \times X$, c-à-d, $F(x, y) = G(x, y)$ et $F(y, x) = G(y, x)$.

On cite quelques corollaires du Théorème 25.

Corollaire 8 Soit (X, d) un espace métrique cône avec P un cône ayant un intérieur non vide. Soit $F, G : X \times X \rightarrow X$ des applications satisfaisant

(h1) pour tout $(x, y) \in X \times X$, il existe $(u, v) \in X \times X$ tel que $F(x, y) = G(u, v)$ et $F(y, x) = G(v, u)$;

(h2) $\{(G(x, y), G(y, x)) : x, y \in X\}$ est une partie complète de $(X \times X, \nu)$;

(h3) pour tous $x, y, u, v \in X$,

$$\begin{aligned} d(F(x, y), F(u, v)) &\preceq \alpha_1[d(F(x, y), G(x, y)) + d(F(y, x), G(y, x))] \\ &+ \alpha_2[d(F(u, v), G(u, v)) + d(F(v, u), G(v, u))] + \alpha_3[d(F(u, v), G(x, y)) \\ &+ d(F(v, u), G(y, x))] + \alpha_4[d(F(x, y), G(u, v)) + d(F(y, x), G(v, u))] \\ &+ \alpha_5[d(G(u, v), G(x, y)) + d(G(v, u), G(y, x))], \end{aligned}$$

où $\alpha_i, i = 1, \dots, 5$ sont des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^5 \alpha_i < 1/2$. Alors F et G ont un point de b -coïncidence couplé $(x, y) \in X \times X$, c-à-d, $F(x, y) = G(x, y)$ et $F(y, x) = G(y, x)$.

Remarque 10 Corollaire 8 généralise Théorème 2.11 de Abbas, Khan et Radenović [2].

Corollaire 9 Soit (X, d) un espace métrique cône avec P un cône ayant un intérieur non vide. Soit $F, G : X \times X \rightarrow X$ des applications satisfaisant

$$\begin{aligned} d(F(x, y), F(u, v)) &\leq a_1 d(F(x, y), gx) + a_2 d(F(y, x), gy) + a_3 d(F(u, v), gu) \\ &+ a_4 d(F(v, u), gv) + a_5 d(F(u, v), gx) + a_6 d(F(v, u), gy) + a_7 d(F(x, y), gu) \\ &+ a_8 d(F(y, x), gv) + a_9 d(gu, gx) + a_{10} d(gv, gy), \end{aligned}$$

pour tous $x, y, u, v \in X$, où $a_i, i = 1, \dots, 10$ sont des nombres réels positifs tels que $\sum_{i=1}^5 \alpha_i < 1/2$. Si $F(X \times X) \subseteq g(X)$ et $g(X)$ est partie complète de X , alors F et g ont un point de b -coïncidence couplé dans X , c-à-d, il existe $(x, y) \in X \times X$ tel que $gx = F(x, y)$ et $gy = F(y, x)$.

Corollaire 10 Soit (X, d) un espace métrique cône avec P le cône ayant un intérieur non vide. Soit $F, G : X \times X \rightarrow X$ des applications satisfaisant

$$\begin{aligned} d(F(x, y), F(u, v)) &\leq \alpha_1[d(F(x, y), gx) + d(gu, gx)] + \alpha_2[d(F(y, x), gy) \\ &+ d(F(v, u), gv)] + \alpha_3[d(F(u, v), gx) + d(F(x, y), gu)] + \alpha_4[d(F(v, u), gy) \\ &+ d(F(y, x), gv)] + \alpha_5[d(F(u, v), gu) + d(gv, gy)], \end{aligned}$$

pour tous $x, y, u, v \in X$, où $\alpha_i, i = 1, \dots, 5$ sont des nombres réels positifs tels que $\sum_{i=1}^5 \alpha_i < 1/2$. Si $F(X \times X) \subseteq g(X)$ et $g(X)$ est partie complète de X , alors F et g ont un point de b -coïncidence couplé dans X , c-à-d, il existe $(x, y) \in X \times X$ tel que $gx = F(x, y)$ et $gy = F(y, x)$.

Remarque 11 • Prenons $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0$ dans Corollaire 9, on obtient le résultat de Abbas, Khan et Radenović (Théorème 2.4 dans [2]).

• Prenons $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ dans Corollaire 10, on obtient le résultat de Abbas, Khan et Radenović (Corollaire 2.5 dans [2]).

Théorème 26 Soit $F, G : X \times X \rightarrow X$ deux applications satisfaisant toutes les conditions du Théorème 25. Si F et G sont \tilde{w} -compatibles, alors F et G ont un unique point fixe b -commun couplé. De plus, les points fixes b -communs couplés de F et G sont de la forme (u, u) pour un certain $u \in X$.

Corollaire 11 Soit $F : X \times X \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow X$ deux applications satisfaisant toutes les conditions du Corollaire 8. Si F et g sont w -compatibles, alors F et g ont un point fixe commun couplé. De plus, les points fixes communs couplés de F et g sont de la forme (u, u) pour certain $u \in X$.

Considérons maintenant les applications $F, G : X \times X \rightarrow X$ définies par

$$F(x, y) = fx \quad \text{et} \quad G(x, y) = gx, \quad \forall x, y \in X,$$

on trouve le résultat de Olaleru [78].

Corollaire 12 ([78]) Soit (X, d) un espace métrique cône et $f, g : X \rightarrow X$ des applications telles que

$$\begin{aligned} d(fx, fu) \preceq & a_1d(fx, gx) + a_2d(fu, gu) + a_3d(fu, gx) \\ & + a_4d(fx, gu) + a_5d(gu, gx) \end{aligned} \quad (2.87)$$

pour tous $x, u \in X$, où $\alpha_i \in [0, 1], i = 1, \dots, 5$ et $\sum_{i=1}^5 \alpha_i < 1$. Supposons que f et g sont faiblement compatibles, $fX \subseteq gX$ et gX est une partie complète de X . Alors, les fonctions f et g ont un unique point fixe commun.

Maintenant on donne un exemple illustrant nos résultats.

Exemple 13 Soit $X = [0, 1]$ équipé par la métrique standard $d(x, y) = |x - y|$ pour tous $x, y \in X$. On définit les applications $G, F : X \times X \rightarrow X$ par

$$G(x, y) = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si } x < y \end{cases} \quad \text{et} \quad F(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{3} & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si } x < y \end{cases}.$$

On va prouver que les hypothèses du Théorème 25 sont satisfaites.

• Hypothèse (h1) :

Il est facile que pour tous $x, y \in X$, il existe $u, v \in X$ tels que

$$\begin{cases} F(x, y) = G(u, v) \\ F(y, x) = G(v, u). \end{cases}.$$

• Hypothèse (h2) :

On va montrer que $\Lambda := \{(G(x, y), G(y, x)) : x, y \in [0, 1]\}$ est une partie complète de $([0, 1] \times [0, 1], \nu)$. Pour cela, on prend $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x, y) = (G(x, y), G(y, x)) \quad \text{pour tous } x, y \in [0, 1].$$

Comme φ est continue et $[0, 1]$ est compact, donc $\Lambda = \varphi([0, 1] \times [0, 1])$ est compact. D'autre part, $([0, 1] \times [0, 1], \nu)$ est complet. On en déduit que Λ est complet.

• Hypothèse (h3) :

Pour tous $x, y, u, v \in X$, on a

$$\begin{aligned} d(F(x, y), F(u, v)) &= |F(x, y) - F(u, v)| \\ &\leq \frac{1}{3}|G(x, y) - G(u, v)| \\ &= \frac{1}{3}d(G(x, y), G(u, v)). \end{aligned}$$

Donc, (h3) est satisfaite avec $a_1 = a_2 = \dots = a_8 = a_{10} = 0$ et $a_9 = 1/3$.

Toutes les hypothèses du Théorème 25 sont satisfaites. Par conséquent, F et G ont un point de b -coïncidence couplé.

Dans ce cas, pour tous $x, y \in [0, 1]$, (x, y) est un point de b -coïncidence couplé si et seulement si $x = y$. De plus, on a

$$F(G(x, x), G(x, x)) = F(0, 0) = 0 = G(0, 0) = G(F(x, x), F(x, x)).$$

Ceci implique que F et G sont \tilde{w} -compatibles. Appliquant Théorème 26, on obtient l'existence et l'unicité de point fixe b -commun couplé de F et G . Dans cet exemple, $(0, 0)$ est l'unique point fixe b -commun couplé.

On donne aussi une application illustrant nos résultats.

Application.

Ici on étudie l'existence de solutions d'un système d'équations intégrales non linéaires en utilisant les résultats antérieurs. Pour cela, On considère le système suivant

$$G(x, y)(t) = \int_0^T k(t, s)f(s, x(s), y(s)) ds + a(t), \quad (2.88)$$

$$G(y, x)(t) = \int_0^T k(t, s)f(s, y(s), x(s)) ds + a(t), \quad (2.89)$$

où $t \in I = [0, T]$, $T > 0$.

Soit $X = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I équipé avec la métrique donnée par

$$d(u, v) = \sup_{t \in [0, T]} |u(t) - v(t)| \quad \text{pour tous } u, v \in X.$$

On considère les assumptions suivantes :

- (a) $k : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) est une fonction continue;
- (b) $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$;
- (c) $f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue;

(d) $G : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est une fonction satisfaisant : pour tous $x, y \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, il existe $u, v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ tel que

$$\begin{aligned} G(u, v)(t) &= \int_0^T k(t, s) f(s, x(s), y(s)) ds + a(t), \\ G(v, u)(t) &= \int_0^T k(t, s) f(s, y(s), x(s)) ds + a(t), \end{aligned}$$

pour tout $t \in I$;

(e) l'ensemble $\{(G(x, y), G(y, x)) : x, y \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})\}$ est fermé;

(f) pour tout $t \in I$, pour tous $x, y, u, v \in X$, on a

$$|f(t, x(t), y(t)) - f(t, u(t), v(t))| \leq |G(x, y)(t) - G(u, v)(t)|;$$

(g) $\sup_{s, t \in I} |k(t, s)| = M < 1/T$.

On considère l'opérateur $F : X \times X \rightarrow X$ défini par

$$F(x, y)(t) = \int_0^T k(t, s) f(s, x(s), y(s)) ds + a(t), \quad t \in [0, T].$$

Il est facile de prouver que (x, y) est une solution de (2.88)-(2.89) si et seulement si (x, y) est un point de b -coïncidence couplé de F et G . Maintenant on formule notre résultat.

Théorème 27 *Sous les hypothèses (a)-(f), le système (2.88)-(2.89) a au moins une solution dans $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$.*

◆ **Point fixe et point de coïncidence dans des espaces métriques cônes ordonnés, [Article 11]**

Le but de l'[Article 11] est d'établir des résultats de point fixe et de point de coïncidence pour trois opérateurs dans des espaces métriques cônes partiellement ordonnés. Les théorèmes présentés étendent certains résultats récents de Choudhury-Metiya [25]. Aussi, comme application on donne l'existence d'une solution commune de certaines équations intégrales.

Avant de présenter nos résultats, on donne un lemme essentiel de Choudhury-Metiya [25].

Lemme 6 ([25]) *Soit (X, d) un espace métrique cône avec un cône régulier P tel que $d(x, y) \in \text{int}P$, pour $x, y \in X$ avec $x \neq y$. Soit $\varphi : \text{int}P \cup \{0_E\} \rightarrow \text{int}P \cup \{0_E\}$ une fonction avec les propriétés suivantes :*

(P1) $\varphi(t) = 0_E$ si et seulement si $t = 0_E$;

(P2) $\varphi(t) \ll_E t$, pour $t \in \text{int}P$;

(P3) soit $\varphi(t) \leq_E d(x, y)$ soit $d(x, y) \leq_E \varphi(t)$, pour $t \in \text{int}P \cup \{0_E\}$ et $x, y \in X$.

Soit $\{x_n\}$ une suite dans X pour laquelle $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ est décroissante. Alors $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ est convergente vers soit $r = 0_E$, soit $r \in \text{int}P$.

Aussi, on cite ce qui suit.

Définition 21 ([25]) Soit $\psi : P \rightarrow P$ une fonction donnée.

(i) On dit que ψ est fortement croissante si pour $x, y \in P$, on a

$$x \leq_E y \iff \psi(x) \leq_E \psi(y).$$

(ii) ψ est dite continue en $x_0 \in P$ si pour toute suite $\{x_n\}$ dans P , on a

$$\|x_n - x_0\|_E \rightarrow 0 \implies \|\psi(x_n) - \psi(x_0)\|_E \rightarrow 0.$$

La définition suivante est une extension de la notion de compatibilité pour une paire de fonctions dans un espace métrique, introduite par Jungck dans [56] (elle est donnée dans Définition 4) à un espace métrique cône.

Définition 22 Soit (X, d) un espace métrique cône et $f, g : X \rightarrow X$ sont des applications données. La paire $\{f, g\}$ est dite compatible si $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(fgx_n, gfx_n) = 0_E$, pour toute $\{x_n\}$ suite dans X telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} fx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} gx_n = t$ pour t dans X .

Le résultat présenté dans [Article 11] est donné comme suit.

Théorème 28 Soit (X, \preceq) un ensemble partiellement ordonné. Supposons qu'il existe une métrique cône d sur X avec un cône P tel que

- (a) l'espace métrique cône (X, d) est complet ;
- (b) P est un cône régulier ;
- (c) $d(x, y) \in \text{int}P$ pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$.

Soit $T, S, G : X \rightarrow X$ des applications données satisfaisant

- (d) $TX \subseteq GX$ et $SX \subseteq GX$;
- (e) T, S et G sont continues ;
- (f) les paires $\{T, G\}$ et $\{S, G\}$ sont compatibles ;
- (g) T et S sont faiblement croissantes par rapport à G .

Supposons que pour tout $(x, y) \in X \times X$ tel que Gx et Gy sont comparables, on a

$$\psi(d(Tx, Sy)) \leq_E \psi\left(\frac{1}{2}[d(Tx, Gx) + d(Sy, Gy)]\right) - \varphi(d(Gx, Gy)), \quad (2.90)$$

où $\psi : P \rightarrow P$ et $\varphi : \text{int}P \cup \{0_E\} \rightarrow \text{int}P \cup \{0_E\}$ sont des fonctions continues avec les propriétés suivantes :

- (h) ψ est fortement croissante ;
- (i) $\varphi(t) = 0_E$ si et seulement si $\psi(t) = 0_E$ si et seulement si $t = 0_E$;
- (j) $\varphi(t) \ll_E t$ pour tout $t \in \text{int}P$;
- (k) soit $\varphi(t) \leq_E d(x, y)$, soit $d(x, y) \leq_E \varphi(t)$ pour $t \in \text{int}P \cup \{0_E\}$ et $x, y \in X$.

Alors, T, S et G ont un point de coïncidence $u \in X$, c-à-d, $Tu = Su = Gu$.

Remarque 12 Notons que la notion de faiblement croissante par rapport à G était introduite par Définition 8.

Remarque 13 Certains corollaires peuvent être obtenus du Théorème 28 en considérant des choix particuliers de T, S et G .

Maintenant, nous omettons dans les hypothèses du Théorème 28 les deux conditions (e) et (f), qui correspondent à la continuité de T, S et G , et la compatibilité des paires $\{T, G\}$ et $\{S, G\}$, et on les remplace par d'autres conditions dans le but de trouver le même résultat. Ceci est l'idée du théorème suivant.

Théorème 29 Soit (X, \preceq) un ensemble partiellement ordonné. Supposons qu'il existe une métrique cône d sur X avec un cône P tel que

- (a) l'espace métrique cône (X, d) est complet ;
- (b) P est un cône régulier ;
- (c) $d(x, y) \in \text{int}P$ pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$.
- (d) si $\{z_n\}$ est une suite croissante X par rapport à \preceq telle que $z_n \rightarrow z$ quand $n \rightarrow +\infty$, alors $z_n \preceq z$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $T, S, G : X \rightarrow X$ des applications données satisfaisant :

- (e) $TX \subseteq GX$ et $SX \subseteq GX$;
- (f) GX est une partie fermée de (X, d) ;
- (g) T et S sont faiblement croissantes par rapport à G .

Supposons que pour tout $(x, y) \in X \times X$ tel que Gx et Gy sont comparables, on a

$$\psi(d(Tx, Sy)) \leq_E \psi\left(\frac{1}{2}[d(Tx, Gx) + d(Sy, Gy)]\right) - \varphi(d(Gx, Gy)), \quad (2.91)$$

où $\psi : P \rightarrow P$ et $\varphi : \text{int}P \cup \{0_E\} \rightarrow \text{int}P \cup \{0_E\}$ sont des fonctions continues avec les propriétés suivantes :

- (h) ψ est fortement croissante ;
- (i) $\varphi(t) = 0_E$ si et seulement si $\psi(t) = 0_E$ si et seulement si $t = 0_E$;
- (j) $\varphi(t) \ll_E t$ pour tout $t \in \text{int}P$;
- (k) soit $\varphi(t) \leq_E d(x, y)$, soit $d(x, y) \leq_E \varphi(t)$ pour $t \in \text{int}P \cup \{0_E\}$ et $x, y \in X$.

Alors, T, S et G ont un point de coïncidence $u \in X$, c-à-d, $Tu = Su = Gu$.

Prenons $G = Id_X$ dans Théorème 29, on obtient

Corollaire 13 Soit (X, \preceq) un ensemble partiellement ordonné. Supposons qu'il existe une métrique cône d sur X avec un cône P tel que

- (a) l'espace métrique cône (X, d) est complet ;
- (b) P est un cône régulier ;
- (c) $d(x, y) \in \text{int}P$ pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$;
- (d) si $\{z_n\}$ est une suite croissante X par rapport à \preceq telle que $z_n \rightarrow z$ quand $n \rightarrow +\infty$, alors $z_n \preceq z$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $T, S : X \rightarrow X$ des applications faiblement croissantes. Supposons que pour tout $(x, y) \in X \times X$ tel que x et y sont comparables, on a

$$\psi(d(Tx, Sy)) \leq_E \psi\left(\frac{1}{2}[d(Tx, x) + d(Sy, y)]\right) - \varphi(d(x, y)), \quad (2.92)$$

où $\psi : P \rightarrow P$ et $\varphi : \text{int}P \cup \{0_E\} \rightarrow \text{int}P \cup \{0_E\}$ sont des fonctions continues avec les propriétés suivantes :

(h) ψ est fortement croissante ;

(i) $\varphi(t) = 0_E$ si et seulement si $\psi(t) = 0_E$ si et seulement si $t = 0_E$;

(j) $\varphi(t) \ll_E t$ pour tout $t \in \text{int}P$;

(k) soit $\varphi(t) \leq_E d(x, y)$, soit $d(x, y) \leq_E \varphi(t)$ pour $t \in \text{int}P \cup \{0_E\}$ et $x, y \in X$.

Alors, T et S ont un point de coïncidence $u \in X$, c-à-d, $Tu = Su$.

Maintenant, nous allons prouver un théorème d'existence et d'unicité de point fixe commun.

Théorème 30 *En plus des hypothèses du Théorème 28, supposons que pour tout $(x, y) \in X \times X$, il existe $u \in X$ tel que $Tx \preceq Tu$ et $Ty \preceq Tu$. Alors, T , S et G ont un unique point fixe commun.*

Remarque 14 *Les mêmes résultats restent vrais si on remplace la condition de contraction (2.90) par*

$$\psi(d(Tx, Sy)) \leq_E \psi\left(\frac{1}{2}[d(Tx, Gy) + d(Sy, Gx)]\right) - \varphi(d(Gx, Gy))$$

pour tous $x, y \in X$ tels que Gx et Gy sont comparables.

Application.

Considérons les équations intégrales

$$u(x) = \int_0^T M(x, s, u(s)) ds, \quad x \in [0, T]; \tag{2.93}$$

$$u(x) = \int_0^T L(x, s, u(s)) ds, \quad x \in [0, T],$$

où $T > 0$. L'idée de cette partie est de donner un théorème d'existence d'une solution de (2.93) qui appartient à $X = \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions continues de $I = [0, T]$ à valeurs dans \mathbb{R}) en utilisant le résultat obtenu donné par Corollaire 13. Ici, $M, L : I \times I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Le problème considéré peut être reformulé dans la manière suivante : Soit $T, S : X \rightarrow X$ les applications définies par, pour tout $u \in X$,

$$Tu(x) = \int_0^T M(x, s, u(s)) ds, \quad \forall x \in I$$

and

$$Su(x) = \int_0^T L(x, s, u(s)) ds, \quad \forall x \in I.$$

Alors, l'existence d'une solution de (2.93) est équivalente à l'existence d'un point fixe commun de T et S .

2.2.5 Quelques résultats de point fixe dans un espace métrique généralisé (generalized metric space), [Article 12]

◆ Introduction

En 1992, Dhage [37] a introduit une nouvelle classe d'espace métrique dite espace D -métrique donnée comme suit.

Définition 23 ([37]) *Soit X un ensemble non vide et soit $D : X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction satisfaisant les propriétés suivantes :*

$$(D_1) \quad D(x, y, z) = 0 \text{ si } x = y = z,$$

$$(D_2) \quad D(x, y, y) \leq D(x, z, z) + D(z, y, y) \text{ pour tous } x, y, z \in X,$$

$$(D_3) \quad D(x, y, z) = D(x, z, y) = D(y, z, x) = \dots, \text{ symétrie dans toutes les trois variables,}$$

$$(D_4) \quad D(x, y, z) \leq G(x, y, a) + D(x, a, z) + D(a, y, z) \text{ pour tous } x, y, z, a \in X.$$

La fonction D est dite D -métrique sur X , et la paire (X, D) est dite un espace D -métrique.

Dans [37], le périmètre d'un triangle de sommets x, y et z dans \mathbb{R}^2 fournit un exemple de D -métrique. Dans une série de travaux, par exemple dans [39, 38, 40], Dhage a tenté de développer des aspects topologiques dans ces nouveaux espaces. Il a prétendu que les espaces D -métriques généralisent les espaces métriques usuels et est allé à présenter des résultats de point fixe. Mais en 2005, Mustafa et Sims [67] ont trouvé que la plupart des structures topologiques des espaces D -métriques ne sont pas vraies. C'est pourquoi, pour surmonter telle manque, ils ont introduit des espaces métriques plus généralisés. Tels nouveaux espaces sont appelés espaces G -métriques. Dans ce qui suit, on donne quelques notations et définitions qui seront utilisées plus tard.

Définition 24 ([68]) *Soit X un ensemble non vide et soit $G : X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction satisfaisant les propriétés suivantes :*

$$(G_1) \quad G(x, y, z) = 0 \text{ si } x = y = z,$$

$$(G_2) \quad 0 < G(x, x, y), \text{ pour tous } x, y \in X \text{ with } x \neq y,$$

$$(G_3) \quad G(x, x, y) \leq G(x, y, z) \text{ pour tous } x, y, z \in X \text{ with } z \neq y,$$

$$(G_4) \quad G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = \dots, \text{ symétrie dans toutes les trois variables,}$$

$$(G_5) \quad G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z) \text{ pour tous } x, y, z, a \in X.$$

Alors la fonction G est dite une métrique généralisée, ou, plus spécifiquement, une G -métrique sur X , et la paire (X, G) est dite un espace G -métrique.

Définition 25 *Soit (X, G) un espace G -métrique, et soit (x_n) une suite de points dans X , un point $x \in X$ est la limite des suites (x_n) , si $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} G(x, x_n, x_m) = 0$, et on dit que la suite (x_n) est G -convergente vers x ou (x_n) G -converge vers x .*

Alors, $x_n \rightarrow x$ dans l'espace G -métrique (X, G) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $G(x, x_n, x_m) < \varepsilon$ pour tous $m, n \geq k$.

Proposition 7 ([68]) *Soit (X, G) un espace G -métrique. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. (x_n) est G -convergente vers x ;
2. $G(x_n, x_n, x) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$;
3. $G(x_n, x, x) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$;
4. $G(x_n, x_m, x) \rightarrow 0$ si $n, m \rightarrow +\infty$.

Lemme 7 ([68]) *Soit (X, G) un espace G -métrique. La limite d'une suite G -convergente dans (X, G) est unique.*

Définition 26 ([68]) *Soit (X, G) un espace G -métrique. Une suite (x_n) est dite G -Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$, pour tous $n, m, l \geq k$, c-à-d, $G(x_n, x_m, x_l) \rightarrow 0$ si $n, m, l \rightarrow +\infty$.*

Proposition 8 ([68]) *Soit (X, G) un espace G -métrique. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. La suite (x_n) est G -Cauchy.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $G(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon$, pour tous $n, m \geq k$.

Définition 27 ([68]) *Soit (X, G) un espaces G -métrique et $f : (X, G) \rightarrow (X, G)$ une fonction donnée. Alors f est dite G -continue en un point $a \in X$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $x, y \in X$ et $G(a, x, y) < \delta$ implique que $G(f(a), f(x), f(y)) < \varepsilon$. Une fonction f est G -continue sur X si et seulement si elle est G -continuous en tout $a \in X$.*

Proposition 9 ([68]) *Soit (X, G) un espace G -métrique. Alors, la fonction $G(x, y, z)$ est supéremment continue par rapport à chacune de ces variables.*

Dans ce qui suit, on présente des exemples d'espace G -métrique.

Exemple 14 ([68]) *Soit (X, d) un espace métrique usuel. Si on définit G par*

$$G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(x, z)$$

ou

$$G(x, y, z) = \max\{d(x, y), d(y, z), d(x, z)\}$$

pour tous $x, y, z \in X$, il est bien clair que (X, G) est un espace G -métrique.

Exemple 15 ([68]) Soit $X = \{a, b\}$. On considère G sur $X \times X \times X$ par

$$G(a, a, a) = G(b, b, b) = 0,$$

$$G(a, a, b) = 1, \quad G(a, b, b) = 2$$

et on étend G à $X \times X \times X$ en utilisant la symétrie dans toutes les variables. Il est facile de trouver que (X, G) est un espace G -métrique.

Définition 28 ([68]) Un espace G -métrique (X, G) est dit G -complet si pour toute suite G -Cauchy dans (X, G) est G -convergente dans (X, G) .

Mustafa [66] a prouvé un théorème de point fixe dans un espace G -métrique.

Théorème 31 Soit (X, G) un espace G -métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe $k \in [0, 1)$ tel que

$$G(Tx, Ty, Tz) \leq kG(x, y, z),$$

pour tous $x, y, z \in X$. Alors T admet un unique point fixe.

On présente un exemple montrant que le principe de Banach (sur des métriques usuelles) n'est pas applicable, c-à-d, Théorème 31 est bien une généralisation du Théorème 7.

Exemple 16 Soit $X = \{0, 1, 2\}$ équipé par la G -métrique donnée par

$$G(x, y, z) = \max\{d(x, y), d(y, z), d(x, z)\}.$$

On considère l'application $T : X \rightarrow X$ telle que $T(0) = 0$, $T(1) = 0$ et $T(2) = 1$. Il est facile que toutes les hypothèses du Théorème 31 sont vérifiées, et 0 est un point fixe de T .

Mais, pour la métrique usuelle $d(x, y) = |x - y|$, (2.79) n'est pas satisfaite pour $x = 1$ et $y = 2$. Donc, on ne peut pas appliquer le principe de Banach pour cet exemple.

En se basant sur la notion des espaces G -métriques, Mustafa et Sims [67, 68, 70] ont obtenu les premiers résultats de point fixe pour des applications satisfaisant de différentes conditions de contraction. Beaucoup de résultats de point fixe et de point fixe commun ont été aussi trouvés dans des espaces G -métriques ordonnés ou pas. Abbas et Rhoades [6] et Abbas et al. [7] ont donné de résultats de point fixe commun. Aussi, Abbas et al. [8] ont obtenu des résultats de points périodiques. Également, Shatanawi [101] a obtenu un résultat de point fixe pour des Φ -maps dans des espaces G -métriques. Saadati et al. [97] ont prouvé quelques résultats de point fixe pour certaines contractions dans des espaces G -métriques partiellement ordonnés. Pour d'autres résultats dans tels espaces, à voir aussi [1, 31, 69, 71, 102].

◆ propriété mixte de monotonie

Le concept de la propriété mixte de monotonie "mixed monotone property" d'une application a été introduit par Bhaskar et Lakshmikantham dans [23].

Définition 29 ([23]) Soit (X, \preceq) un ensemble partiellement ordonné. Une application $F : X \times X \rightarrow X$ a la propriété mixte de monotonie si $F(x, y)$ est monotone croissante en x et est monotone décroissante en y ; c-à-d, pour tous $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in X, \quad x_1 \preceq x_2 & \text{ implique } F(x_1, y) \preceq F(x_2, y), \\ y_1, y_2 \in X, \quad y_1 \preceq y_2 & \text{ implique } F(x, y_2) \preceq F(x, y_1). \end{aligned}$$

Lakshmikantham et Ćirić in [61] ont introduit le concept de la propriété mixte de g -monotonie "mixed g -monotone property". Tel concept généralise celui introduit par Bhaskar et Lakshmikantham dans [23].

Définition 30 ([61]) Soit (X, \preceq) un ensemble partiellement ordonné. On considère les applications $F : X \times X \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow X$. F a la propriété mixte de g -monotonie si $F(x, y)$ est monotone g -croissante par rapport à x et est monotone g -décroissante par rapport à y ; c-à-d, pour tous $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in X, \quad gx_1 \preceq gx_2 & \text{ implique } F(x_1, y) \preceq F(x_2, y), \\ y_1, y_2 \in X, \quad gy_1 \preceq gy_2 & \text{ implique } F(x, y_2) \preceq F(x, y_1). \end{aligned}$$

◆ **Point de coïncidence couplé d'une application $F : X \times X \rightarrow X$ ayant la propriété mixte de g -monotonie dans des espaces G -métriques ordonnés, [Article 12]**

Dans [l'article 12], on a montré des résultats de point de coïncidence couplé et de point fixe commun couplé pour deux applications $F : X \times X \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow X$ dans des espaces G -métriques partiellement ordonnés, où F a la propriété mixte de g -monotonie satisfaisant des contractions non linéaires. Nos théorèmes étendent des résultats récents obtenus par Choudhury et Maity [32].

Pour cela on note Φ l'ensemble des fonctions $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ satisfaisant

- (a) $\phi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$,
- (b) $\phi(t) < t$ pour tout $t > 0$,
- (c) $\lim_{r \rightarrow t^+} \phi(r) < t$ pour tout $t > 0$.

Il est bien clair que pour tout $t > 0$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^n(t) = 0.$$

Notre premier résultat est

Théorème 32 Soit (X, \preceq) un ensemble partiellement ordonné et G une G -métrique sur X telle que (X, G) est un espace G -métrique complet. Supposons qu'il existe $\phi \in \Phi$, des applications $F : X \times X \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow X$ telles que

$$G(F(x, y), F(u, v), F(w, z)) \leq \phi \left(\frac{G(gx, gu, gw) + G(gy, gv, gz)}{2} \right) \quad (2.94)$$

pour tous $x, y, u, v, w, z \in X$ avec $gw \preceq gu \preceq gx$ et $gy \preceq gv \preceq gz$. Supposons encore que F est continue, a la propriété mixte de g -monotonie, $F(X \times X) \subseteq g(X)$ et g est continue et commute avec F . S'il existent $x_0, y_0 \in X$ tels que $gx_0 \preceq F(x_0, y_0)$ et $F(y_0, x_0) \preceq gy_0$, alors F et g ont un point de coïncidence couplé, c-à-d, il existe $(x, y) \in X \times X$ tel que $gx = F(x, y)$ et $gy = F(y, x)$.

Dans le prochain théorème, on omet l'hypothèse de la continuité de F . Pour cela, on a besoin de la définition suivante.

Définition 31 Soit (X, \preceq) un ensemble partiellement ordonné et G une G -métrique sur X . On dit que (X, G, \preceq) est régulier si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) si une suite croissante (x_n) est telle que $x_n \rightarrow x$, alors $x_n \preceq x$ pour tout n ,
- (ii) si une suite décroissante (y_n) est telle que $y_n \rightarrow y$, alors $y \preceq y_n$ pour tout n .

Théorème 33 Soit (X, \preceq) un ensemble partiellement ordonné et G une G -métrique sur X tels que (X, G, \preceq) est régulier. Supposons qu'il existe $\phi \in \Phi$ et des applications $F : X \times X \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow X$ telles que

$$G(F(x, y), F(u, v), F(w, z)) \leq \phi \left(\frac{G(gx, gu, gw) + G(gy, gv, gz)}{2} \right)$$

pour tous $x, y, u, v, w, z \in X$ avec $gw \preceq gu \preceq gx$ et $gy \preceq gv \preceq gz$. Supposons encore que $(g(X), G)$ est complet, F a la propriété mixte de g -monotonie et $F(X \times X) \subseteq g(X)$. S'il existent $x_0, y_0 \in X$ tels que $gx_0 \preceq F(x_0, y_0)$ et $F(y_0, x_0) \preceq gy_0$, alors F et g ont un point de coïncidence couplé.

Remarque 15 Il est prouvé dans [67] que la G -métrique induit naturellement une métrique d_G donnée par $d_G(x, y) = G(x, y, y) + G(x, x, y)$. Dans nos résultats (Théorème 32 et Théorème 33), la contraction considérée est de type non linéaire. Alors, l'inégalité (2.94) ne peut pas être réduite à toute inégalité de métrique, par exemple avec la métrique d_G . Alors, nos théorèmes ne sont pas réduits aux problèmes de point fixe dans (X, d_G) l'espace métrique correspondant .

Bibliographie

- [1] M. Abbas, A.R. Khan and T. Nazir, *Coupled common fixed point results in two generalized metric spaces*, Appl. Math. Comput. (2011), doi :10.1016/j.amc.2011.01.006.
- [2] M. Abbas, M. Ali Khan and S. Radenović, *Common coupled fixed point theorems in cone metric spaces for w -compatible mappings*, Appl. Math. Comput. 217 (2010) 195–202.
- [3] M. Abbas and D. Dorić, *Common fixed point theorem for four mappings satisfying generalized weak contractive condition*, Filomat. 24 (2) (2010) 1-10.
- [4] M. Abbas and M.A. Khan, *Common fixed point theorem of two mappings satisfying a generalized weak contractive condition*, Int. Jour. Math. Math. Sci. (2009) Article ID 131068.
- [5] M. Abbas, G.V.R. Babu and G.N. Alemayehu, *On common fixed points of weakly compatible mappings satisfying generalized condition (B)*, Filomat. 25 (2) (2011) 9-19.
- [6] M. Abbas and B.E. Rhoades, *Common fixed point results for non-commuting mappings without continuity in generalized metric spaces*, Appl. Math. Comput. 215 (2009), 262–269.
- [7] M. Abbas, T. Nazir and S. Radenović, *Some periodic point results in generalized metric spaces*, Appl. Math. Comput. 217 (2010) 4094-4099.
- [8] M. Abbas, T. Nazir and P. Vetro, *Common fixed point results for three maps in G -metric spaces*, Filomat. 25 (4) (2011), 1-17.
- [9] R.P. Agarwal, M. A. El-Gebeily and D. O'Regan, *Generalized contractions in partially ordered metric spaces*, Appl. Anal. 87 (2008) 109-116.
- [10] C.D. Aliprantis and R. Tourky, *Cones and Duality*, in Graduate Studies in Mathematics, vol. 84, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (2007).
- [11] I. Altun, B. Damjanović and D. Djorić, *Fixed point and common fixed point theorems on ordered cone metric spaces*, Appl. Math. Lett. 23 (2010) 310-316.
- [12] A. Amini-Harandi and H. Emami, *A fixed point theorem for contraction type maps in partially ordered metric spaces and application to ordinary differential equations*, Nonlinear Anal. 72 (2010) 2238-2242.

- [13] M.A. Al-Thagafi and N. Shahzad, *Noncommuting selfmaps and invariant approximations*, Nonlinear Anal. 64 (2006) 2777-2786.
- [14] Ya.I. Alber and S. Guerre-Delabrere, *Principle of weakly contractive maps in Hilbert spaces*, in : I. Gohberg, Yu. Lyubich (Eds.), *New Results in Operator Theory*, in : Advances and Appl., 98 Birkhäuser Verlag, Basel, (1997) 7-22.
- [15] M. Altman, *An integral test for series and generalized contractions*, Am. Math. Monthly. 82 (1975) 827-829.
- [16] I. Altun and A. Erduran, *Fixed point theorems for monotone mappings on partial metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2011), Article ID 508730.
- [17] I. Altun and H. Simsek, *Some fixed point theorems on dualistic partial metric spaces*, Jour. Adv. Math. Studies, 1 (1-2) (2008) 1-8.
- [18] I. Altun, F. Sola and H. Simsek, *Generalized contractions on partial metric spaces*, Topology Appl. 157 (18) (2010) 2778-2785.
- [19] I. Altun and H. Simsek, *Some fixed point theorems on ordered metric spaces and applications*. Fixed Point theory Appl. (2010), article ID 621492.
- [20] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. 3 (1922) 133-181.
- [21] I. Beg and M. Abbas, *Coincidence point and invariant approximation for mappings satisfying generalized weak contractive condition*, Fixed Point Theory Appl. (2006), Article ID 74503.
- [22] I. Beg, A. Azam and M. Arshad, *Common fixed points for maps on topological vector space valued cone metric spaces*, Int. Jour. Math. Math. Sci. (2009), Article ID560264.
- [23] T.G. Bhashkar and V. Lakshmikantham, *Fixed point theorems in partially ordered cone metric spaces and applications*, Nonlinear Anal. 65 (2006) 825–832.
- [24] Binayak S. Choudhury and N. Metiya, *Fixed points of weak contractions in cone metric spaces*, Nonlinear Anal. 72 (2010) 1589-1593.
- [25] Binayak S. Choudhury and N. Metiya, *The point of coincidence and common fixed point for a pair of mappings in cone metric spaces*, Comput. Math. Appl. 60 (2010) 1686-1695.
- [26] D.W. Boyd and J.S.W. Wong, *On nonlinear contractions*, Proceedings of the Amer. Math. Soc. 20 (1969) 458-464.
- [27] A. Branciari, *A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type*, Int. Jour. Math. Math. Ssc. 29 (9) (2002) 531-536.
- [28] A. Cabada and J.J. Nieto, *Fixed points and approximate solutions for nonlinear operator equations*, Jour. Comput. Appl. Math. 113 (2000) 17-25.
- [29] J. Caballero, J. Harjani and K. Sadarangani, *Contractive-like mappings principles in ordered metric spaces and application to ordinary differential equations*, Fixed Point Theory Appl. (2010), Article ID 916064.

- [30] S.K. Chatterjea, *Fixed point theorems*, C. R. Acad. Bulgare. Sci. 25 (1972) 727-730.
- [31] R. Chugh, T. Kadian, A. Rani and B.E. Rhoades, *Property P in G-metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. (in press) (2011).
- [32] B.S. Choudhury and P. Maity, *Coupled fixed point results in generalized metric spaces*, Math. Comput. Modelling. (2011) doi :10.1016/j.mcm.2011.01.036.
- [33] Lj.B. Ćirić, *Generalized contractions and fixed point theorems*, Publ. Inst. Math. 12 (1971) 19-26.
- [34] Lj.B. Ćirić, *A generalization of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc. 45 (1974) 267-273.
- [35] Lj.B. Ćirić, N. Cakić, M. Rajović and J.S. Ume, *Monotone generalized nonlinear contractions in partially ordered metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2008), Article ID 131294.
- [36] B.K. Dass and S. Gupta, *An extension of Banach contraction principle through rational expression*, Indian Jour. pure appl. Math. 6 (1975) 1455-1458.
- [37] B.C. Dhage, *Generalized metric spaces and mapping with fixed point*, Bull. Cal. Math. Soc. 84 (92) 329-336.
- [38] B.C. Dhage, *A fixed point theorem for multivalued mappings on ordered Banach spaces with applications I*, Nonlinear Anal. Forum, 10 (2005) 105-126.
- [39] B.C. Dhage, *Hybrid fixed point theory for strictly monotone increasing multivalued mappings with applications*, Comput. Math. Appl. 53 (2007) 803-824.
- [40] B.C. Dhage, *A general multivalued hybrid fixed point theorem and perturbed differential inclusions*, Nonlinear Anal. 64 (2006) 2747-2772.
- [41] C. Di Bari and C. Vetro, *Common fixed point theorems for weakly compatible maps satisfying a general contractive condition*, Int. Jour. Math. Math. Sci. (2008), Article ID 891375.
- [42] C. Di Bari and P. Vetro, *φ -pairs and common fixed points in cone metric spaces*, Rend. del Circ. Matem. di Palermo. 57 (2008) 279-285.
- [43] Wei-Shih Du, *A note on cone metric fixed point theory and its equivalence*, Nonlinear Anal. 72 (2010) 2259-2261.
- [44] P.N. Dutta and B.S. Choudhury, *A generalization of contraction principle in metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2008), Article ID 406368.
- [45] D. Dorić, *Common fixed point for generalized (ψ, φ) -weak contractions*, Appl. Math. Lett. 22 (2009) 1896-1900.
- [46] J. Harjani, J. López and K. Sadarangani, *Fixed point theorems for weakly C -contractive mappings in ordered metric spaces*, Comput. Math. Appl. 61 (2011) 790-796.
- [47] R. Heckmann, *Approximation of metric spaces by partial metric spaces*, Appl. Categ. Struct. 7 (1999) 71-83.

- [48] L.G. Huang and X. Zhang, *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, Jour. Math. Anal. Appl. 332 (2007) 1467-1475.
- [49] N. Hussain and G. Jungck, *Common fixed point and invariant approximation for noncommuting generalized (f, g) -nonexpansive maps*, Jour. Math. Anal. Appl. 321 (2006) 851-861.
- [50] D. Ilić, V. Pavlović and V. Rakočević, *Some new extensions of Banach's contraction principle to partial metric spaces*, Appl. Math. Lett. doi :10.1016/j.aml.2011.02.025.
- [51] G. Jungck and B.E. Rhoades, *Fixed points for set valued functions without continuity*, Indian Jour. Pur. Appl. Math. 29 (1998) 227-238.
- [52] R. Kannan, *Some results on fixed points*, Bull. Calc. Math. Soc. 60 (1968) 71-76.
- [53] R. Kannan, *Some results on fixed points -II*, Amer. Math. Monthly, 76 (1969) 405-408.
- [54] B.C. Dhage, D. O'Regan and R.P. Agrawal, *Common fixed point theorems for a pair of countably condensing mappings in ordered Banach spaces*, Jour. Appl. Math. Stoch. Anal. 62 (2) (1977) 344-348.
- [55] J. Jachymski, *Equivalent conditions for generalized contractions on (ordered) metric spaces*, Nonlinear Anal. 74 (2011) 768-774.
- [56] G. Jungck, *Compatible mappings and common fixed points*, Int. Jour. Math. Math. Sci. 9 (1986) 771-779.
- [57] G. Jungck, *Common fixed points for noncontinuous nonself maps on non-metric spaces*, Far East. J. Math. Sci. 4 (1996) 199-215.
- [58] G.E. Hardy and T.D. Rogers, *A generalization of a fixed point theorem of Reich*, Canad. Math. Bull. 16 (1973) 201-206
- [59] J. Harjani and K. Sadarangani, *Generalized contractions in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations*, Nonlinear Anal. 72 (2010) (3-4) 1188-1197.
- [60] J. Harjani and K. Sadarangani, *Fixed point theorems for weakly contractive mappings in partially ordered sets*, Nonlinear Anal. 71 (2009) 3403-3410.
- [61] V. Lakshmikantham and L. Ćirić, *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal. 70 (2009) 4341-4349.
- [62] J. Matkowski, *Fixed point theorems for contractive mappings in metric spaces*, Casopis. Pro. Pest. Mat. 105 (4) (1980) 341-344.
- [63] S.G. Matthews, *Partial metric topology*, in : Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications, in : Ann. New York Acad. Sci. 728 (1994) 183-197.
- [64] S.G. Matthews, *An extensional treatment of lazy data flow deadlock*, Theoret. Comput. Sci. 151 (1995) 195-205.
- [65] A. Meir and E. Keeler, *A theorem on contraction mappings*, Jour. Math. Anal. Appl. 28 (1969) 326-329. 1969.

- [66] Z. Mustafa, *A New structure for generalized metric spaces with applications to fixed point theory*, PhD Thesis, the University of Newcastle, Australia, (2005).
- [67] Z. Mustafa and B. Sims, *Some remarks concerning D - metric spaces*, Proc. Int. Conf. on Fixed Point Theory Appl. (2003) 189-198.
- [68] Z. Mustafa and B. Sims, *A new approach to generalized metric spaces*, Jour. of Nonlinear and Convexe Anal. 7 (2) (2006) 289-297.
- [69] Z. Mustafa, H. Obiedat and F. Awawdehand, *Some fixed point theorem for mapping on complete G - metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2008), Article ID 189870.
- [70] Z. Mustafa and B. Sims, *Fixed point theorems for contractive mapping in complete G - metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2009), Article ID 917175.
- [71] Z. Mustafa, W. Shatanawi and M. Bataineh, *Existence of fixed point results in G - metric spaces*, Int. Jour. Math. Math. Sci. (2009), Article ID 283028.
- [72] N.K. Nashine and I. Altun, *Fixed point theorems for generalized weakly contractive condition in ordered metric spaces*, (2011), Article ID 132367.
- [73] N.K. Nashine and B. Samet, *Fixed point results for mapping satisfying (ψ, φ) -weakly contraction in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal. 74 (2011) 2201-2209.
- [74] N.K. Nashine, B. Samet and J.K. Kim, *Fixed point results for contractions involving generalized altering distances in ordered metric spaces*, Accepted in Fixed Point Theory Appl. (1011).
- [75] H.K. Nashine, B. Samet and C. Vetro, *Monotone generalized nonlinear contractions and fixed point theorems in ordered metric spaces*, Math. Comput. Modelling. 54 (2011) 712-720.
- [76] J.J. Nieto and R. Rodriguez-López, *Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations*, Order. 22 (3) (2005) 223-239.
- [77] J.J. Nieto and R. Rodriguez-López, *Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ordinary differenatial equations*, Acta Math. Sin. 23 (12) (2007) 2205-2212.
- [78] J.O. Omleru, *Some generalizations of fixed point theorems in cone metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2009) Article ID 657914.
- [79] S. Oltra and O. Valero, *Banach's fixed point theorem for partial metric spaces*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. 36 (2004) 17-26.
- [80] S.J. O' Neill, *Two topologies are better than one*, Tech. report, University of Warwick, Coventry, UK, <http://www.dcs.warwick.ac.uk/reports/283.html>, (1995).
- [81] S.J. O' Neill, *Partial metrics, valuations and domain theory*, in : Proc. 11th Summer Conference on General Topology and Applications, in : Ann. New York Acad. Sci. 806 (1996) 304-315.

- [82] D. O'Regan and A. Petrusel, *Fixed point theorems for generalized contractions in ordered metric spaces*, Jour. Math. Anal. Appl. 341 (2008) 1241-1252.
- [83] S. Radenović and Z. Kadelburg, *Generalized weak contractions in partially ordered metric spaces*, Comput. Math. Appl. 60 (2010) 1776-1783.
- [84] A.C.M. Ran and M.C.B. Reurings, *A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004) 1435-1443.
- [85] S. Reich, *Some remarks concerning contraction mappings*, Canad. Math. Bull. 14 (1971), 121-124.
- [86] S. Reich, *Kannan's fixed point theorem*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) 4 (1971), 1-11.
- [87] S. Reich, *Fixed points of contractive functions*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) 5 (1972), 26-42.
- [88] S. Reich, *Some fixed point problems*, Atti della Accademia Nazionale dei Linc. 57 (3-4) (1974) 194-198.
- [89] Sh. Rezapour and R. Hambarani, *Some notes on the paper "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings"*, Jour. Math. Anal. Appl. 345 (2008) 719-724.
- [90] S. Radenović and Z. Kadelburg, *Generalized weak contractions in partially ordered metric spaces*, Comput. Math. Appl. 60 (2010) 1776-1783.
- [91] B.E. Rhoades, *A comparison of various definitions of contractive mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. 226 (1977) 257-290.
- [92] B.E. Rhoades, *Some theorems on weakly contractive maps*, Nonlinear Anal. 47 (2001) 2683-2693.
- [93] S. Romaguera, *A Kirk type characterization of completeness for partial metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2010), Article ID 493298.
- [94] S. Romaguera and M. Schellekens, *Partial metric monoids and semivaluation spaces*, Topology Appl. 153 (5-6) (2005) 948-962.
- [95] S. Romaguera and O. Valero, *A quantitative computational model for complete partial metric spaces via formal balls*, Math. Struct. Comput. Sci. 19 (3) (2009) 541-563.
- [96] A. Rus, *Fixed point theory in partial metric spaces*, Analele Univ. de Vest Timsoara, Seria Matematica Informatica XLVI. 2 (2008) 149-160.
- [97] R. Saadati, S. M. Vaezpour, P. Vetro and B.E. Rhoades, *Fixed point theorems in generalized partially ordered G -metric spaces*, Math. Comput. Modelling. 52 (2010) 797-801.
- [98] S. Sessa, *On a weak commutativity condition of mappings in fixed point consideration*, Publ. Inst. Math. Soc. 32 (1982) 149-153.
- [99] N. Shahzad, *Invariant approximations, generalized I -contractions, and R -subweakly commuting maps*, Fixed Point Theory Appl. 1 (2005) 79-86.

- [100] W. Shatanawi, *Partially ordered cone metric spaces and coupled fixed point results*, Comput. Math. Appl. 60 (2010) 2508-2515.
- [101] W. Shatanawi, *Fixed point theory for contractive mappings satisfying Φ -maps in G -metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2010), Article ID 181650.
- [102] W. Shatanawi, *Coupled fixed point theorems in generalized metric spaces*, Accepted in Hacet. jour. Math. Stat, (2011).
- [103] W. Shatanawi and B. Samet, *On (ψ, ϕ) -weakly contractive condition in partially ordered metric spaces*, Comput. Math. Appl. doi :10.1016/j.camwa.2011.08.033.
- [104] M.P. Schellekens, *The correspondence between partial metrics and semivaluations*, Theoret. Comput. Sci. 315 (2004) 135-149.
- [105] Y. Song, *Coincidence points for noncommuting f -weakly contractive mappings*, Int. Jour. Comput. Appl. Math. 2 (2007) 51-57.
- [106] Y. Song, *Common fixed points and invariant approximations for generalized (f, g) -nonexpansive mappings*, Commun. Math. Anal. 2 (2007) 17-26.
- [107] M. Turinici, *Abstract comparison principles and multivariable Gronwall-Bellman inequalities*, J. Math. Anal. Appl. 117 (1986) 100-127.
- [108] D. Turkoglu and M. Abuloha, *Cone metric spaces and fixed point theorems in diametrically contractive mappings*, Acta. Math. Sin. (Engl. Ser.) 26 (3) (2010) 489-496.
- [109] D. Turkoglu, M. Abuloha and T. Abdeljawad, *KKM mappings in cone metric spaces and some fixed point theorems*, Nonlinear Anal. 72 (1) (2010) 348-353.
- [110] O. Valero, *On Banach fixed point theorems for partial metric spaces*, Appl. Gen. Topol. 6 (2) (2005) 229-240.
- [111] P. Vetro, *Common fixed points in cone metric spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo. 56 (2007) 464-468.
- [112] P.P. Zabrejko, *K -metric and K -normed spaces : survey*, Collect. Math. 48 (1997) 825-859.
- [113] T. Zamfirescu, *A theorem on fixed points*, Atti. Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 52 (8) (1972) 832-834.
- [114] X. Zhang, *Common fixed point theorems for some new generalized contractive type mappings*, Jour. Math. Anal. Appl. 333 (2007) 780-786.
- [115] Q. Zhang and Y. Song, *Fixed point theory for generalized φ -weak contractions*, Appl. Math. Lett. 22 (2009) 75-78.