



**HAL**  
open science

# Anisotropie naturelle et induite des matériaux poreux : étude expérimentale et modélisation

Alan Geslain

► **To cite this version:**

Alan Geslain. Anisotropie naturelle et induite des matériaux poreux : étude expérimentale et modélisation. Autre [cond-mat.other]. Université du Maine, 2011. Français. NNT : 2011LEMA1019 . tel-00718301

**HAL Id: tel-00718301**

**<https://theses.hal.science/tel-00718301v1>**

Submitted on 16 Jul 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Académie de Nantes

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE  
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR, GÉOSCIENCES, ARCHITECTURE  
SPÉCIALITÉ : ACOUSTIQUE

Présentée par

ALAN GESLAIN

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université du Maine

---

ANISOTROPIE NATURELLE ET INDUITE DES MATÉRIAUX POREUX :  
ÉTUDE EXPÉRIMENTALE ET MODÉLISATION.

---

Jury composé de

NICOLAS DAUCHEZ	Professeur des Universités, SUPMECA, SAINT-OUEN	Examineur
OLIVIER DAZEL	Maîtres de conférences, HDR, LAUM., LE MANS	Directeur de Thèse
SERGE DERIBLE	Maîtres de conférences, HDR, IUT, HAVRE	Rapporteur
MARIE-ANNICK GALLAND	Professeur des Universités, ECL LYON	Examineur
JEAN-PHILIPPE GROBY	Chargé de Recherches CNRS, LAUM, LE MANS	Co-Encadrant
PHILIPPE LECLAIRE	Professeur des Universités, ISAT, NEVERS	Rapporteur
ERICK OGAM	Ingénieur de Recherches CNRS, LMA, MARSEILLE	Examineur
SOHBI SAHRAOUI	Professeur des Universités, LAUM, LE MANS	Directeur de Thèse



## Remerciements

Je remercie le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine et l'Opération de Recherche Acoustique et Mécanique des Matériaux Poreux pour m'avoir permis de réaliser ce travail.

Je remercie le Professeur Philippe Leclaire de l'ISAT, et le Maître de Conférences Serge Derible de l'IUT du Havre d'avoir accepté de juger ce travail en me faisant l'honneur de le rapporter. J'adresse aussi mes remerciements au Professeur Marie-Annick Galland de L'Ecole Centrale de Lyon, au Professeur Nicolas Dauchez de SUPMECA et au Docteur Erick Ogam pour avoir accepté de faire partie du Jury.

Je remercie Sohbi Sahraoui et Jean-Philippe Groby pour leurs conseils éclairés et éclairants, ainsi que leur propension à la curiosité scientifique. Je remercie Olivier Dazel de m'avoir fait profiter de son savoir-faire scientifique et de ses qualités humaines qui me permettent d'évoluer et de progresser. Merci à tous pour ces partages.

Je remercie mes collègues et néanmoins amis doctorants pour leur accompagnement quotidien.

Merci à Carole, ma femme, pour son soutien de tous les instants.

*La mousse est d'autant plaisante à boire que l'étudier nous embellit.*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Contexte . . . . .	2
1.2	État de l'art . . . . .	4
1.3	Propriétés mécaniques des mousses acoustiques . . . . .	8
1.3.1	Discussion sur la validité du modèle de solide équivalent . . . . .	8
1.3.2	Propriétés mécaniques du solide élastique équivalent . . . . .	12
1.3.3	Symétries du tenseurs des souplesses . . . . .	15
1.4	Caractérisation des paramètres mécaniques . . . . .	17
1.4.1	Méthodes quasi-statiques . . . . .	17
1.4.2	Méthodes résonantes . . . . .	19
1.4.3	Méthodes propagatives (ondes guidées) . . . . .	20
1.5	Objectifs spécifiques du travail . . . . .	22
1.6	Organisation du document . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Anisotropie naturelle : mesures et modélisation quasi-statiques</b>	<b>25</b>
2.1	Introduction . . . . .	25
2.2	Protocole expérimental . . . . .	27
2.2.1	Présentation . . . . .	27
2.2.2	Discussion sur le modèle rhéologique . . . . .	30
2.2.3	Configurations considérées . . . . .	32
2.3	Matériaux considérés . . . . .	34
2.4	Modèle Éléments-Finis . . . . .	34
2.4.1	Formulation variationnelle . . . . .	34
2.4.2	Validation du modèle . . . . .	36
2.5	Analyse des champs de déplacements des surfaces latérales . . . . .	38
2.5.1	Matériau isotrope . . . . .	38
2.5.1.1	Résultats expérimentaux . . . . .	38
2.5.1.2	Résultats numériques . . . . .	41
2.5.2	Matériau isotrope transverse . . . . .	43
2.5.2.1	Plan isotropie droit (parallèle à l'interface) . . . . .	43
2.5.2.2	Cas d'un décalage angulaire . . . . .	44
2.5.2.3	Résultats numériques . . . . .	47

2.5.3	Conclusion partielle . . . . .	49
2.6	Méthode de détermination des coefficients de Poisson . . . . .	51
2.6.1	Problème d'optimisation : définition de la fonction coût . . . . .	51
2.6.2	Mousse isotrope . . . . .	52
2.7	Conclusion . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Anisotropie induite : influence sur le module d'Young des mousses.</b>	<b>57</b>
<b>4</b>	<b>Anisotropie induite : études complémentaires</b>	<b>67</b>
4.1	Effet de la compression sur le module de cisaillement . . . . .	67
4.1.1	Méthode de détermination du module de cisaillement . . . . .	68
4.1.2	Résultat de l'effet de la compression statique sur le module de cisaillement	73
4.2	Modèle microstructural pour modéliser l'influence de la compression statique . . .	74
4.2.1	Introduction . . . . .	75
4.2.2	Principe de base du modèle développé . . . . .	76
4.2.3	Génération de l'élément . . . . .	78
4.2.4	Changement de coordonnées . . . . .	79
4.2.5	Prise en compte de la périodicité . . . . .	82
4.2.6	Résultats . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>87</b>
<b>A</b>	<b>Essais préliminaires anisotropie induite : module de cisaillement</b>	<b>91</b>
<b>B</b>	<b>Complément sur la détermination des coefficients de Poisson</b>	<b>93</b>
B.1	Mousse isotrope transverse . . . . .	93
B.2	Conclusion . . . . .	94
<b>C</b>	<b>Propagation of acoustic wave in one-dimensional macroscopically inhomogeneous porous material under the rigid frame approximation.</b>	<b>95</b>
<b>D</b>	<b>Normalised stiffness ratios for mechanical characterization of isotropic acoustic foams.</b>	<b>119</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>135</b>

# Table des figures

1.1	Approche microstructurale de la matrice solide. . . . .	3
1.2	Mise en évidence des échelles caractéristiques. . . . .	5
1.3	Procédure de validation de l'hypothèse en basses fréquences. . . . .	9
1.4	Champs de déplacements de la phase solide et du solide équivalent $\sigma = 12000(\text{Ns m}^{-4})$ . . . . .	11
1.5	Champs de déplacements de la phase solide et du solide équivalent $\sigma = 120000(\text{Ns m}^{-4})$ . . . . .	12
1.6	Énergies de déformation d'un cube élastique. . . . .	13
1.7	Exemple d'un matériau isotrope transverse. . . . .	16
1.8	Principe de détermination des paramètres mécaniques. . . . .	17
1.9	Frise chronologique des méthodes a) quasi-statiques, b) résonantes et c) propagatives. . . . .	21
2.1	Dispositif expérimental . . . . .	27
2.2	Treillis correspondant aux points de mesure du déplacement normal de la face latérale . . . . .	29
2.3	Schéma de principe du dispositif expérimental . . . . .	29
2.4	Colonne de points dessinés au centre de la face de l'échantillon . . . . .	31
2.5	Déplacement normalisé des points de la colonne centrale . . . . .	31
2.6	Dynamique des points de la colonne centrale . . . . .	31
2.7	Orientation des faces. . . . .	33
2.8	Repère fixe et repère matériau dans les différentes configurations. . . . .	33
2.9	Profil des déplacements normaux sur les 4 faces ; formulation $\{\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^t\}$ . . . . .	37
2.10	Profil des déplacements normaux sur les 4 faces ; formulation $\{\mathbf{u}^s, p\}$ . . . . .	37
2.11	Champs de déplacements expérimentaux pour les quatre faces du matériau A : configuration n°1. . . . .	39
2.12	Champs de déplacements expérimentaux pour les quatre faces du matériau A : configuration n°3. . . . .	40
2.13	Champs de déplacements normaux des quatre faces du cube : modèle isotrope coefficient de Poisson = 0.28. . . . .	42
2.14	Champs de déplacements normaux des quatre faces du cube : modèle isotrope coefficient de Poisson = 0.4. . . . .	42
2.15	Champs de déplacements expérimentaux pour les quatre faces du matériau B (isotrope transverse) : configuration n°1. . . . .	43
2.16	Champs de déplacements expérimentaux pour les quatre faces du matériau B (isotrope transverse) : configuration n°2. . . . .	44



2.17	Illustration des configurations du matériau B (isotrope transverse). . . . .	45
2.18	Champs de déplacements expérimentaux pour les quatre faces du matériau B (isotrope transverse avec rotation) : configuration n°1. . . . .	46
2.19	Champs de déplacements expérimentaux pour les quatre faces du matériau B (isotrope transverse avec rotation) : configuration n°2. . . . .	46
2.20	Champs de déplacements simulés : modèle isotrope transverse avec rotation configuration n°1. . . . .	48
2.21	Champs de déplacements simulés : modèle isotrope transverse avec rotation configuration n°2. . . . .	48
2.22	Visualisation du plan d'isotropie dans les configurations 1 et 2 . . . . .	49
2.23	Croix de 9 points. . . . .	51
2.24	Interface utilisateur du logiciel de minimisation . . . . .	52
2.25	Détermination des coefficients de Poisson à partir de la croix d'inversion 9 points. . . . .	53
4.1	Méthode ondes guidées. . . . .	68
4.2	Dispositif expérimental utilisé pour déterminer le module de cisaillement. . . . .	70
4.3	Dispositif expérimental . . . . .	71
4.4	Détermination expérimentale de la vitesse de phase. . . . .	73
4.5	Influence de la compression sur les courbes de dispersion du premier mode. . . . .	74
4.6	Variation du module de cisaillement en fonction du taux de compression statique. . . . .	75
4.7	Principe de résolution du problème Éléments Finis. . . . .	76
4.8	Procédure éléments finis incrémentale. . . . .	77
4.9	Élément de poutre tri-dimensionnel en axes propres. . . . .	78
4.10	Élément de poutre tri-dimensionnel en axes quelconques. . . . .	80
4.11	Périodisation de la cellule de Kelvin. . . . .	82
4.12	Comparaison : zone A (en jaune) compression ; zone B (en rouge) flambement ; zone C (en verte) densification. . . . .	83
4.13	Comparaison : zone A (en jaune) compression ; zone B (en rouge) flambement. . . . .	84
A.1	Dispositif expérimental préliminaire. . . . .	91
B.1	Interface graphique matériau isotrope transverse avec rotation. . . . .	94

# Liste des tableaux

1.1	Matériau considéré pour la validation de l'hypothèse en basses fréquences. . . . .	8
2.1	Propriétés des matériaux considérés. . . . .	34
2.2	Maxima des déplacements des quatre faces pour les deux formulations $\{\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^t\}$ et $\{\mathbf{u}^s, p\}$ . . . . .	38
2.3	Module élastique apparent suivant les quatre faces. . . . .	38
2.4	Décalage des centres des ellipses par rapport aux centres géométriques : configuration n°1. . . . .	40
2.5	Décalage des centres des ellipses par rapport aux centres géométriques : configuration n°3. . . . .	41
2.6	Module élastique apparent suivant les quatre faces. . . . .	43
2.7	Décalage des ellipses par rapport aux centres géométriques : configuration n°1. . . . .	44
2.8	Module élastique apparent suivant les quatre faces. . . . .	45
2.9	Récapitulatif des résultats obtenus. . . . .	50
2.10	Coefficient de Poisson configuration n°1 : inversion dimension 0. . . . .	53
2.11	Coefficient de poisson pour le matériau isotrope en configuration n°1 : inversion dimension 2. . . . .	54
2.12	Coefficient de poisson pour le matériau isotrope en configuration n°3 : inversion dimension 2. . . . .	54
2.13	Résultats principaux pour le coefficient de Poisson du matériau isotrope. . . . .	54
4.1	Propriétés de la plaque poreuse. . . . .	71
4.2	Dimensions caractéristiques d'une poutre. . . . .	79
B.1	Coefficient de Poisson pour le matériau B . . . . .	94



# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte</b> . . . . .	<b>2</b>
<b>1.2</b>	<b>État de l’art</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>1.3</b>	<b>Propriétés mécaniques des mousses acoustiques</b> . . . . .	<b>8</b>
1.3.1	Discussion sur la validité du modèle de solide équivalent . . . . .	8
1.3.2	Propriétés mécaniques du solide élastique équivalent . . . . .	12
1.3.3	Symétries du tenseurs des souplesses . . . . .	15
<b>1.4</b>	<b>Caractérisation des paramètres mécaniques</b> . . . . .	<b>17</b>
1.4.1	Méthodes quasi-statiques . . . . .	17
1.4.2	Méthodes résonantes . . . . .	19
1.4.3	Méthodes propagatives (ondes guidées) . . . . .	20
<b>1.5</b>	<b>Objectifs spécifiques du travail</b> . . . . .	<b>22</b>
<b>1.6</b>	<b>Organisation du document</b> . . . . .	<b>22</b>

---

Ce travail de thèse est consacré à l’analyse des paramètres mécaniques des mousses acoustiques. Celles-ci sont couramment employées pour lutter contre les nuisances sonores, en raison de leur capacité à dissiper l’énergie acoustique. Pour prédire le comportement acoustique de ces mousses, des modèles basés sur la mécanique des milieux continus sont généralement utilisés. La dissipation est prise en compte à travers des coefficients complexes et dépendants de la fréquence. Ces paramètres, dits acoustiques, sont complétés par les paramètres mécaniques du solide. Dans le cas général, ces paramètres mécaniques sont également complexes et dépendants de la fréquence. Nous nous concentrerons sur les mousses acoustiques anisotropes et plus particulièrement sur leurs propriétés mécaniques. Cette anisotropie peut avoir deux causes principales. La première, appelée par la suite **anisotropie naturelle**, est associée à l’anisotropie de la structure du matériau à proprement parler. La seconde, dénommée **anisotropie induite** est associée à une modification artificielle du matériau sous l’effet d’une action extérieure, ici la compression de la structure. À titre d’exemple, lorsque l’on comprime un matériau dans une direction, les caractéristiques apparentes de celui-ci sont modifiées. Un matériau, initialement isotrope, devient ainsi isotrope transverse. Un écart de propriétés apparaît alors entre celles suivant la direction de compression et celles du plan perpendiculaire à la compression. Ce chapitre a pour objectif de définir le cadre général de ce

travail. Le contexte est d'abord exposé. Une étude bibliographique des méthodes de caractérisation des paramètres mécaniques complète le chapitre. Enfin, les objectifs de la thèse sont définis.

## 1.1 Contexte

La lutte contre les nuisances sonores est une priorité pour la société moderne. Celle-ci s'est notamment traduite par l'élaboration d'un ensemble de réglementations regroupées dans une loi dite : « loi bruit » (loi n°92-1444 du 31 décembre 1992 relative à la lutte contre le bruit [12, 1]). Par conséquent, les niveaux sonores de différents secteurs industriels (bâtiment, transports terrestres, transports aériens, etc) sont réglementés de façon à améliorer, voire satisfaire, le confort acoustique de l'ensemble de la population<sup>1</sup>. Pour atteindre cet objectif, les industriels doivent intégrer à tous les niveaux des dispositifs permettant la réduction du bruit, tout en satisfaisant leurs propres contraintes (performance, coût, etc). L'absorption passive, notamment réalisée à l'aide de matériaux poreux, constitue une solution possible, simple et peu onéreuse. Elle est donc largement répandue. Pour autant, l'optimisation des propriétés absorbantes de ces matériaux nécessite la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu et leur modélisation fine.

Les matériaux poreux considérés sont constitués de pores ouverts interconnectés et saturés par un fluide léger, ici de l'air. Ces pores sont soit débouchants, soit non débouchants (cul de sac), soit fermés (cavités). Les mousses acoustiques combinent souvent ces trois types. La formation des pores est induite par des processus de diverses natures. Ils peuvent être chimiques (polymérisation des mousses), biologiques (attaque d'un tronçon de bois par les insectes xylophages), géologiques (infiltration d'eau dans les roches) ou bien d'autres natures encore.

L'énergie d'une onde acoustique se propageant dans un matériau poreux, se dissipe au travers de mécanismes à l'échelle du pore. Ces mécanismes sont thermiques et visqueux.

Comprendre la propagation d'une onde acoustique dans un matériau poreux est complexe et d'un grand intérêt pour la lutte contre les nuisances sonores. Le modèle de Biot Allard [2] est couramment employé pour décrire le comportement d'un matériau poreux sollicité par une onde acoustique. Basé sur la mécanique des milieux continus, il nécessite notamment la connaissance des paramètres mécaniques qui décrivent le comportement de la structure. Ces paramètres macroscopiques résultent d'une opération de moyenne des comportements micro-mécaniques (qui ont lieu à l'échelle de la microstructure) sur un volume élémentaire.

Ainsi, les paramètres mécaniques d'un échantillon cubique (de l'ordre d'un centimètre de côté) d'une mousse polymère, décrivent le comportement statistique de l'échantillon à l'échelle de la microstructure (de l'ordre du  $\mu m$ ). Une cellule microstructurale élémentaire de mousses polymères est souvent idéalisée par un tétrakaidécaèdre [50]. La figure 1.1 présente les échelles microscopique et macroscopique.

Le comportement mécanique d'un matériau poreux est caractérisé par une matrice élastique qui résulte de la moyenne de tous les états mécaniques de la microstructure. Ainsi, une mousse est isotrope, si dans la moyenne de tous les comportements mécaniques de la microstructure, les propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions. Un matériau est anisotrope

---

1. mais aussi à réduire le nombre de maladie, psychologiques ou physiques, liées au bruit

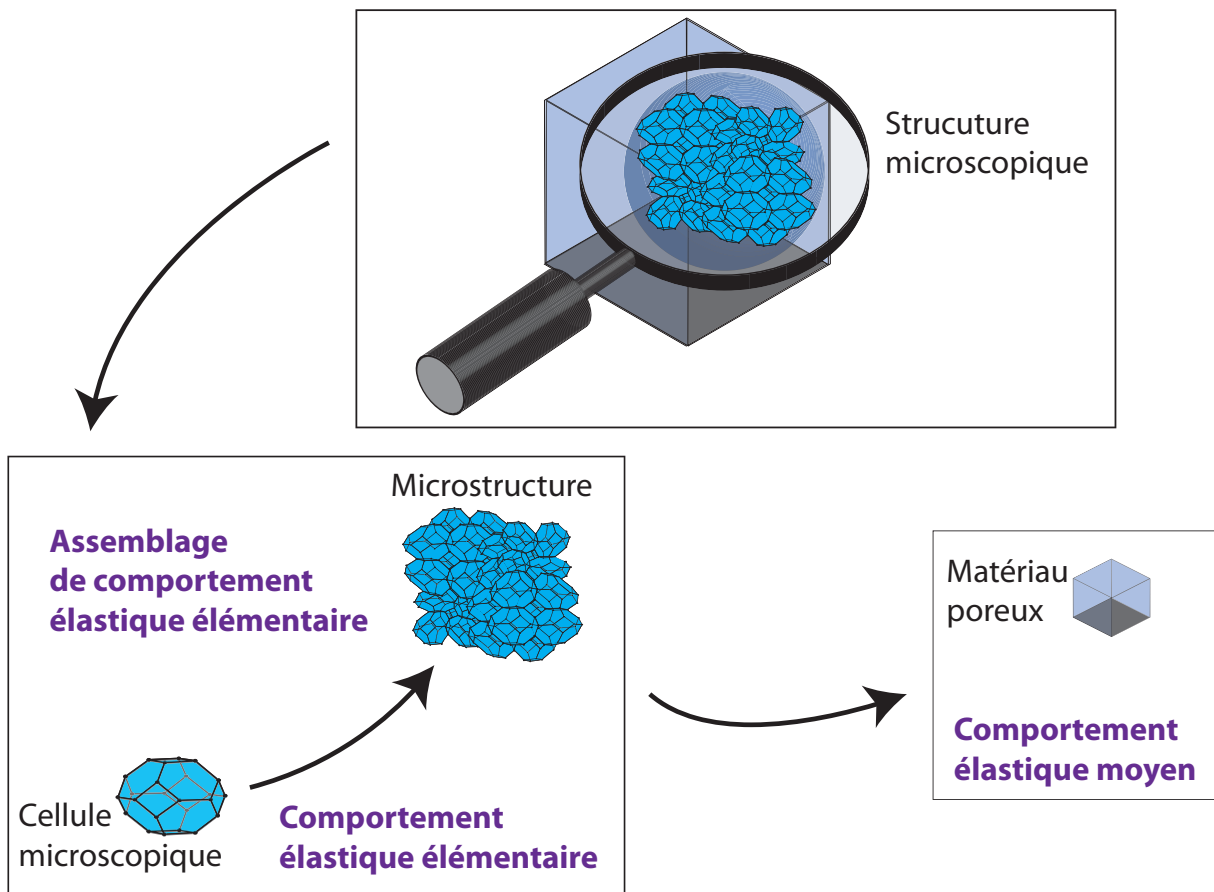


FIGURE 1.1 – Approche microstructurale de la matrice solide.

[38], si cette moyenne fait ressortir des directions privilégiées. Dans le cas d'un matériau dont la microstructure est anisotrope, l'anisotropie de la matrice d'élasticité est qualifiée d'**anisotropie naturelle**. Si une action extérieure modifie la matrice d'élasticité, l'anisotropie résultante est appelée **anisotropie induite**.

La caractérisation des matériaux poreux isotropes est à présent bien appréhendée, notamment grâce aux nombreuses thèses [26, 15, 40, 23] réalisées au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (*L.A.U.M.*) sur ce sujet. Une étude des différentes techniques de caractérisation des paramètres mécaniques des matériaux poreux a été présentée par Jaouen [42]. Ces techniques regroupent les méthodes quasi-statiques [58], dynamiques [54, 65, 61] et de propagation d'ondes [4, 8].

Une méthode de détermination de la matrice de rigidité anisotrope d'une mousse acoustique à partir de l'analyse des champs de déplacements surfaciques d'un échantillon cubique est décrite dans [37]. Pour autant, l'interprétation de la mécanique microstructurale en termes de paramètres macroscopiques reste un problème ouvert. L'objectif de ce travail est la caractérisation

- du type d'anisotropie naturelle simple (isotrope transverse et isotrope transverse avec rotation),
- du type d'anisotropie induite (créée par compression statique).

## 1.2 État de l'art

Une synthèse bibliographique sur le modèle de Biot Allard est présentée ci-dessous. Celle-ci s'appuie et complète différents manuscrits de thèse [26, 15, 40, 23, 8, 17, 50].

La propagation d'une onde acoustique dans un matériau poreux est modélisée avec la théorie de Biot-Johnson-Champoux-Allard. Elle est communément appelée théorie de Biot-Allard [2]. Pour des besoins de prospection géologique, M.A. Biot [6] modélisa un milieu poreux comme deux milieux continus, un solide et un fluide, couplés. Dans un milieu poreux homogène de dimensions infinies, trois types d'ondes peuvent se propager : deux ondes de compression et une onde de cisaillement. Les matériaux poreux acoustiques (saturés par de l'air) sont considérés dans ce travail. L'interaction d'une onde avec ce milieu complexe dissipe l'énergie acoustique au travers de trois mécanismes microscopiques. Au sein du pore (dans l'air), des échanges thermiques et visqueux se produisent et occasionnent des pertes d'énergie. À la frontière du pore (dans le matériau), l'onde acoustique met en mouvement le matériau si celui-ci est suffisamment souple pour se déformer. Pour les matériaux viscoélastiques, les pertes visqueuses du matériau sont ajoutées à ce mécanisme inertiel.

Ainsi, la dissipation des ondes acoustiques (mécanismes microscopiques) est moyennée et prise en compte dans le modèle de Biot-Allard par des coefficients constitutifs complexes et dépendant de la fréquence. La notion d'échelle est un concept clef dans ce modèle. Les différentes échelles sont explicitées figure 1.2 sur une même mousse polyuréthane à partir d'images pris par un appareil photo pour illustrer l'échelle macroscopique et par un microscope pour illustrer l'échelle microscopique.<sup>2</sup>

Le problème de l'interaction d'une onde acoustique monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , de dimension quelconque, avec un échantillon de mousse acoustique (mousse de polyuréthane) de

---

<sup>2</sup>. photos réalisés dans le cadre de ce travail

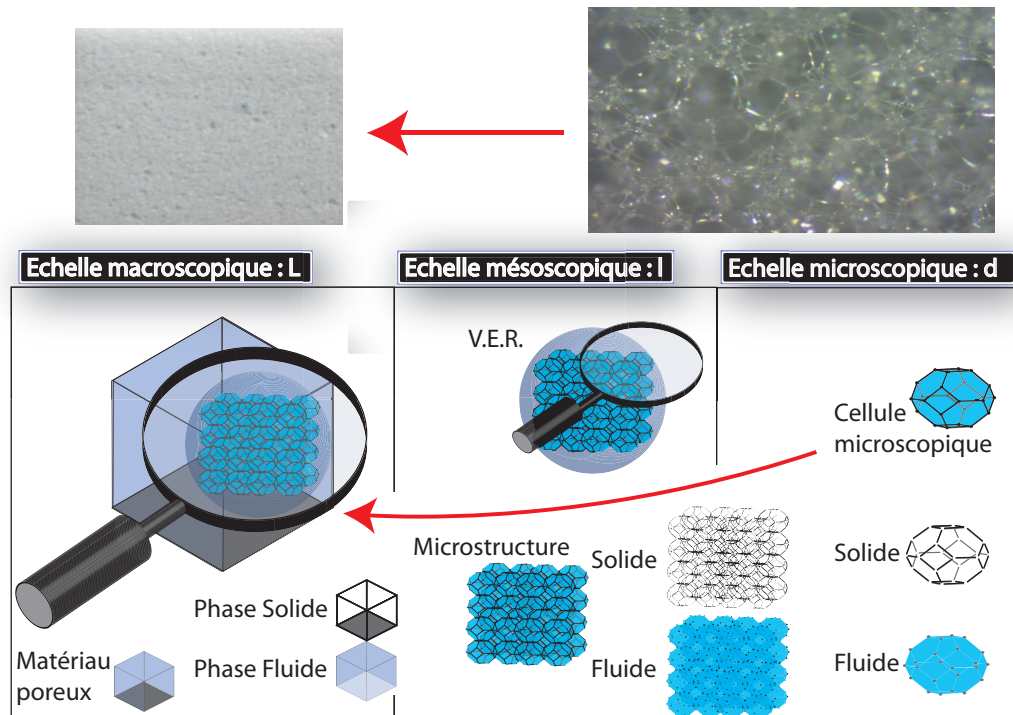


FIGURE 1.2 – Mise en évidence des échelles caractéristiques.

dimension  $L$ , de l'ordre du cm, est considéré. La présence de trois échelles est illustrée. L'échelle des pores de dimension caractéristique  $d$  (de l'ordre du  $\mu m$ ) est appelée échelle microscopique. Pour les mousses acoustiques, la forme de la structure est idéalisée par un tétrakaidécaèdre [50]. À l'échelle **microscopique**, le solide est appelé **squelette**. À cette échelle, le fluide et le squelette peuvent être modélisés par deux milieux continus disjoints.

Une échelle intermédiaire est utilisée pour étudier un assemblage de cellules formant la microstructure. Cette échelle est de dimension caractéristique  $l$  et est appelée échelle mésoscopique.

Le principe de la théorie de Biot-Allard est de modéliser la réponse de ce milieu hétérogène (par nature) par celui d'un milieu homogène moyen ou effectif. Une moyenne (homogénéisation) est effectuée à l'intérieur d'un volume élémentaire représentatif (V.E.R.). Les résultats de ce processus sont des coefficients effectifs. Pour qu'un comportement particulier soit associé à un V.E.R., ce dernier doit être statistiquement représentatif. Ainsi, les coefficients statistiques moyens (homogènes) représentent la moyenne des comportements hétérogènes sur un V.E.R. de dimensions caractéristiques  $d \ll l \ll L$ . Ce processus est appelé homogénéisation.

Les couplages complexes entre le solide et le fluide sont ensuite introduits à l'échelle macroscopique. Ils sont à nouveau pris en compte par des grandeurs représentant des comportements moyens. Le matériau poreux est considéré comme un milieu à deux champs continus couplés. Les concepts de **phase solide** et de **phase fluide** sont alors introduits.

La propagation acoustique dans ce milieu multi-échelle ne peut être modélisée par une seule



théorie sur toute la plage de fréquence. Ainsi, si la longueur d'onde acoustique monochromatique  $\lambda$  est inférieure à la dimension caractéristique  $d$  de l'échelle microscopique, un modèle de diffusion [25] devra être employé. Pour des longueurs d'ondes plus grandes,  $\lambda \gg d$ , le modèle de Biot-Allard sera utilisé. Dans ce manuscrit, seul ce régime sera considéré. Dans l'article original [6], M.A. Biot considère les vecteurs de déplacements solide  $\mathbf{u}^s$  et fluide  $\mathbf{u}^f$  dans un problème des petites déformations. Chacun des milieux continus possède ses propres paramètres caractéristiques. Les mécanismes de couplage microscopiques sont pris en compte à l'échelle macroscopique par des paramètres caractéristiques de la microgéométrie que nous présentons maintenant :

- la **porosité**  $\phi$  et la **tortuosité**  $\alpha_\infty$ . La porosité exprime la répartition de volume entre les deux phases. Elle est définie comme le rapport entre le volume occupé par l'air dans les pores  $V_{pores}$  sur le volume total  $V_{total}$  de l'échantillon poreux,  $\phi = V_{pores}/V_{total}$ . La tortuosité  $\alpha_\infty$  est un indicateur de la complexité géométrique du réseau de pore. Sa valeur est supérieure ou égale à 1 ( $\alpha_\infty = 1$  pour un tube droit). Cette complexité se traduit par une masse ajoutée. La masse volumique du fluide  $\rho_f$  saturant le matériau est modifiée par la tortuosité,

$$\rho_{fm} = \alpha_\infty \rho_f, \quad (1.1)$$

avec  $\rho_{fm}$  la masse volumique du fluide modifiée.

- la **résistivité** au passage de l'air  $\sigma$  permet de prendre en compte les effets visqueux à basses fréquences. L'énergie acoustique se dissipe dans les pores par des frottements entre le fluide et les parois. Aux basses fréquences, l'épaisseur de couche limite visqueuse est très grande par rapport à la taille caractéristique des pores. Les forces de frottements visqueux sont présentes dans tout le volume des pores. L'amplitude de ces forces peut être caractérisée par la résistivité au passage de l'air  $\sigma$  selon la loi de Darcy

$$\sigma = \frac{\Delta p S}{Q_v l}, \quad (1.2)$$

avec  $\Delta p$  la différence de pression de part et d'autre d'un échantillon de section  $S$  et d'épaisseur  $l$  traversé par un débit  $Q_v$ . À hautes fréquences, les frottements visqueux se concentrent à proximité des parois des pores. Leur prise en compte dépend du ratio  $\delta/\Lambda$ , où  $\Lambda$  est une longueur caractéristique visqueuse. Cette longueur caractéristique ne dépend que de la géométrie du squelette,

$$\Lambda = \frac{1}{2} \frac{\int_{V_f} |\dot{\mathbf{u}}_m^f|^2 dV}{\int_{S_i} |\dot{\mathbf{u}}_m^f|^2 dS}, \quad (1.3)$$

avec  $\dot{\mathbf{u}}_m^f$  la vitesse microscopique du fluide circulant dans les pores,  $V_f$  le volume de fluide et  $S_i$  la surface de la paroi des pores. La tortuosité dynamique  $\alpha_\infty$  permet de prendre en compte ces effets dans l'expression de la densité équivalente du fluide  $\tilde{\rho}_f$ . Lorsque la fréquence tend vers l'infini, l'épaisseur de la couche limite tend vers 0. Le fluide peut alors être considéré parfait et la valeur asymptotique de la tortuosité dynamique est  $\alpha_\infty$ . Afin de relier les régimes basses et hautes fréquences, Johnson *et al.* [43] proposent une tortuosité dynamique  $\tilde{\alpha}$  de la forme,

$$\tilde{\alpha} = \alpha_\infty \left[ 1 + \frac{1}{j\tilde{\omega}} \tilde{G} \right], \quad (1.4)$$

avec  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  la pulsation et  $\tilde{G}$ , un facteur de correction. Ce facteur est défini par,

$$\tilde{G} = \sqrt{1 + j \frac{M}{2} \tilde{\omega}}, \quad (1.5)$$

où  $\widehat{\omega} = \omega \frac{\alpha_\infty \rho_f}{\phi \sigma}$  (fréquence de Biot) et  $M$  est une quantité adimensionnelle appelée facteur de forme. Il est défini par,

$$M = \frac{8\alpha_\infty k_0}{\phi \Lambda^2}, \quad (1.6)$$

avec  $k_0$  la perméabilité de Darcy reliée à la résistance au passage de l'air du matériau par  $k_0 = \mu/\sigma$  où  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide.

- la **perméabilité thermique**  $k'_0$  [44] est utilisée pour prendre en compte les interactions thermiques à basses fréquences. Les pertes thermiques sont dues aux échanges de chaleur entre le fluide et la structure. La capacité calorifique de cette dernière est supposée très grande devant celle du fluide. Au passage d'une onde acoustique, une partie de l'énergie mécanique, créée par les phénomènes de compression-détente du fluide, est transformée en chaleur et transmise au squelette par conduction.

Aux basses fréquences, les échanges thermiques sont gouvernés par la perméabilité thermique  $k'_0$  qui, par analogie avec les effets visqueux, peut être définie par une loi formellement proche de celle de Darcy. À haute fréquence, les couplages thermiques sont caractérisés par la longueur caractéristique thermique  $\Lambda'$ . Cette longueur caractéristique thermique s'exprime de la manière suivante,

$$\Lambda' = \frac{1}{2} \frac{\int_{V_f} dV}{\int_{S_i} dS}. \quad (1.7)$$

À partir d'un raisonnement analogue à celui de Johnson *et al.* pour les effets visqueux, Champoux et Allard [11] proposent de modifier le coefficient d'incompressibilité du fluide saturant  $K_f$  pour prendre en compte les échanges thermiques entre les deux phases dépendant de la fréquence. Le module d'incompressibilité du fluide  $\widetilde{K}_f$  devient,

$$\widetilde{K}_f = K_a \left[ \gamma - \frac{\gamma - 1}{1 + \frac{1}{j\widehat{\omega}' \widetilde{G}'}} \right]^{-1}, \quad (1.8)$$

avec  $\widehat{\omega}' = \omega \frac{k'_0 \rho_0 Pr}{\phi \mu}$ . La fonction reliant les régimes thermiques basses et hautes fréquences  $\widetilde{G}'$  est donnée par,

$$\widetilde{G}' = \sqrt{1 + j \frac{M'}{2} \widehat{\omega}'}, \quad (1.9)$$

avec  $M'$  le facteur de forme des pores

$$M' = \frac{8k'_0}{\phi \Lambda'^2}. \quad (1.10)$$

Les effets visqueux et thermiques sont donc introduits en modifiant respectivement la densité et le module d'incompressibilité de la phase fluide. Les paramètres du fluide équivalent sont  $\widetilde{K}_{eq} = \frac{\widetilde{K}_f}{\phi}$  et  $\widetilde{\rho}_{eq} = \frac{\widetilde{\rho}_f}{\phi}$ . Les paramètres inertiels et constitutifs deviennent alors complexes et dépendent de la fréquence.

M.A. Biot proposa une première formulation [6] du problème à deux champs continus couplés avec les vecteurs déplacement solide  $\mathbf{u}^s$  et déplacement fluide  $\mathbf{u}^f$ . Une deuxième formulation fut

proposée dans [7] avec les vecteurs déplacement solide  $\mathbf{u}^s$  et déplacement relatif  $\mathbf{w} = \phi(\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s)$ . Attala *et al.* proposèrent une formulation [5] avec les champs de déplacement solide  $\mathbf{u}^s$  et la pression interstitielle du fluide  $p$ . Dazel *et al.* proposèrent enfin une formulation [19] avec les vecteurs déplacements solide  $\mathbf{u}^s$  et total  $\mathbf{u}^t = (1 - \phi)\mathbf{u}^s + \phi\mathbf{u}^f$ .

La phase solide et ses paramètres, objet principal de ce travail, sont maintenant détaillés.

### 1.3 Propriétés mécaniques des mousses acoustiques

L'objectif est d'étudier les propriétés de la phase solide du milieu poreux. De façon à considérer uniquement cette phase et donc à négliger la phase fluide, il faut découpler ces deux phases. L'hypothèse quasi-statique repose sur des sollicitations mécaniques de basse fréquence. Cela permet d'une part, de négliger l'influence de l'inertie dans la réponse du matériau (fréquence d'excitation en dessous de la première fréquence de résonance structurale) et d'autre part de négliger l'influence de la phase fluide. L'influence de l'air sur le comportement d'un matériau poreux a été précédemment étudiée par Danilov *et al.* [14], en comparant l'impédance d'un matériau poreux saturé par de l'air à celle de ce même matériau *in vacuo*. De façon à valider l'hypothèse quasi-statique, une étude monodimensionnelle comparative originale sur l'influence de la phase fluide sur la phase solide en fonction de la fréquence est maintenant menée.

#### 1.3.1 Discussion sur la validité du modèle de solide équivalent

De nombreuses études ont été menées sous sollicitations quasi-statiques, permettant de s'affranchir de l'influence de l'air saturant et ainsi modéliser le matériau poreux comme un solide élastique équivalent. En effet, sous ces hypothèses, les sollicitations étant suffisamment lentes, l'air peut s'échapper du matériau.

Une comparaison des déplacements de surface calculés pour deux problèmes monodimensionnels, l'un considérant une mousse acoustique et l'autre un solide élastique, est effectuée dans la même configuration. L'hypothèse quasi-statique est validée lorsque ces deux déplacements sont identiques.

Le problème de la mousse acoustique (saturée d'air) est modélisé par la formulation en champs de déplacements "solide-total" de Dazel *et al.* [19]. Le champ de déplacement monodimensionnel de la phase solide est  $u^s$ . Le champ de déplacement 1D total est défini avec une loi de mélange  $u^t = (1 - \phi)u^s + \phi u^f$  avec  $u^f$  le champ de déplacement 1D de la phase fluide. Les propriétés de la mousse sont listées tableau 1.1. Dans ce tableau,  $\rho$  désigne la masse volumique du solide poreux,  $E$

$\phi$	$\rho(kgm^{-3})$	$\alpha_\infty$	$\sigma(Nsm^{-4})$	$\Lambda(\mu m)$	$\Lambda'(\mu m)$	$E(KPa)$	$\eta$	$\nu$	$d(cm)$
0.95	19	1.01	12000  120000	100	150	600	0	0	5

TABLE 1.1 – Matériau considéré pour la validation de l'hypothèse en basses fréquences.

le module de Young,  $\eta$  le coefficient d'amortissement et  $\nu$  le coefficient de Poisson de la phase solide.

Le problème du solide élastique équivalent est modélisé classiquement, avec  $u$  le déplacement solide 1D. Les propriétés du solide élastique sont les mêmes que celles de la phase solide de la mousse

*in vacuo*. Il est appelé **solide élastique équivalent** pour cette raison. La figure 1.3 présente le principe de validation.

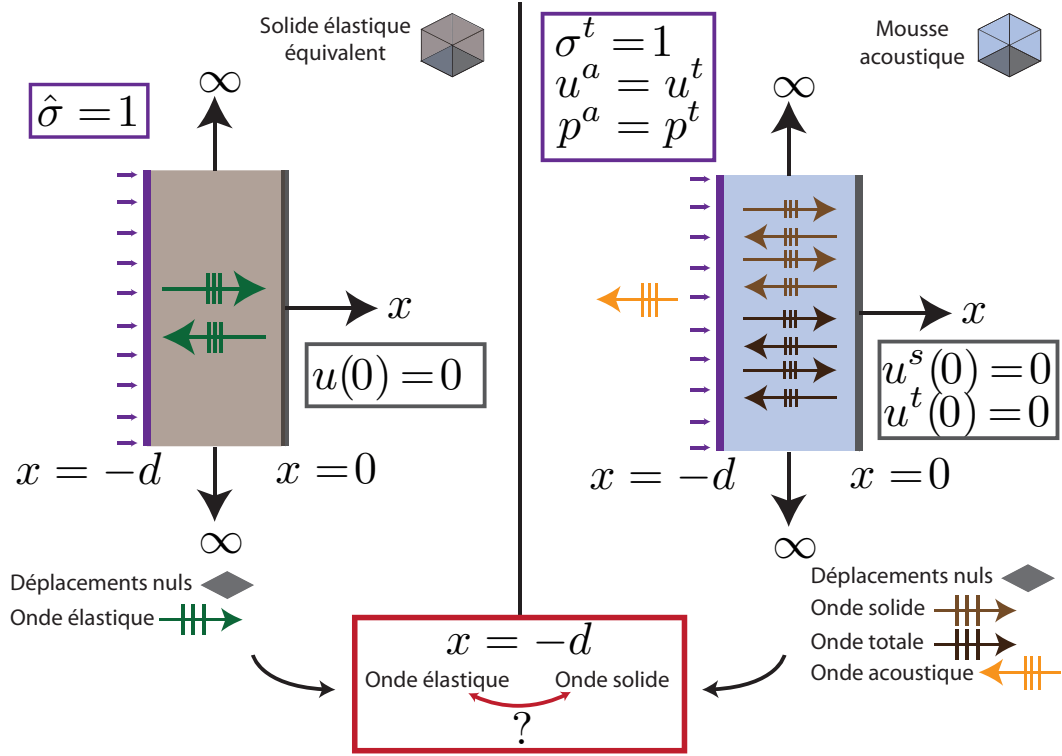


FIGURE 1.3 – Procédure de validation de l’hypothèse en basses fréquences.

Les matériaux monodimensionnels sont collés sur une paroi rigide en  $x = 0$  et sont sollicités mécaniquement en  $x = -d$ . Le principe de la validation est de comparer les champs de déplacements  $u$  et  $u^s$  en fonction de la fréquence en  $x = -d$ . Si les champs de déplacements sont identiques ou proches, l’hypothèse est validée, sinon elle est invalidée. Pour le problème de la mousse acoustique, les champs de déplacements solide  $u^s$ , total  $u^t$  et acoustique  $u^a$ , prennent la forme,

$$u^s = A \sin(k_1 x) + B \sin(k_2 x), \quad (1.11a)$$

$$u^t = A \mu_1 \sin(k_1 x) + B \mu_2 \sin(k_2 x), \quad (1.11b)$$

$$u^a = C e^{jk_0 x}. \quad (1.11c)$$

Ces expressions satisfont les conditions de déplacements  $u^s$  et  $u^t$  nuls au niveau de la paroi en  $x = 0$ . Les nombres d’ondes du problème à deux champs couplés sont  $k_1$  et  $k_2$ . Les coefficients  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont les rapports d’amplitudes entre les deux phases pour les deux ondes de Biot. Leur expressions sont données dans [19]. Le nombre d’onde acoustique est  $k_0 = \omega/c_0$  où  $c_0$  est la célérité des ondes acoustique dans l’air. Les amplitudes des champs de déplacements solide, total et acoustique sont respectivement  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Les pressions dans la mousse acoustique  $P^p$  et dans l’air  $P^a$ , s’écrivent,

$$P^p = -\tilde{K}_{eq} \partial_x u^t, \quad (1.12a)$$

$$P^a = -K_0 \partial_x u^a, \quad (1.12b)$$

avec  $\partial_x$  la dérivée partielle selon l'axe  $x$ ,  $\tilde{K}_{eq}$  le module de compressibilité du fluide équivalent et  $K_0$  le module de compressibilité de l'air.

La sollicitation mécanique est imposée par la contrainte  $\sigma^t = \hat{\sigma} - P^p$  sur la surface en  $x = -d$ . Cette contrainte est imposée à la fois sur le squelette et sur l'air. À l'interface, les conditions de continuités des champs de déplacement total et de pression avec l'air induisent la transmission d'une onde acoustique de l'intérieur de la mousse vers le demi espace supérieur. L'utilisation de ces conditions aux limites permet d'écrire les relations de continuités suivantes en  $x = -d$ ,

$$P^p = P^a, \quad (1.13a)$$

$$u^t = u^a, \quad (1.13b)$$

$$\sigma^t = P^p \partial_x u^s + K_{eq} \partial_x u^t. \quad (1.13c)$$

Les amplitudes  $A$  et  $B$  du champ de déplacement de la phase solide  $u^s$  sont donc solutions du système,

$$\begin{bmatrix} \left[ P^p + \tilde{K}_{eq} \mu_1 \right] k_1 \cos(-k_1 d) & \left[ P^p + \tilde{K}_{eq} \mu_2 \right] k_2 \cos(-k_2 d) & 0 \\ \tilde{K}_{eq} k_1 \mu_1 \cos(-k_1 d) & \tilde{K}_{eq} k_2 \mu_2 \cos(-k_2 d) & -K_0 j k_0 e^{-j k_0 d} \\ \mu_1 \sin(-k_1 d) & \mu_2 \sin(-k_2 d) & -e^{-j k_0 d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

pour une contrainte imposée unitaire. Pour le problème du solide élastique équivalent, l'expression du champ de déplacement 1D  $u$  est,

$$u = E \sin(kx) + F \cos(kx), \quad (1.15)$$

avec  $E$  et  $F$  les amplitudes des ondes aller et retour. La condition de déplacement nul en  $x = 0$  et l'application de la contrainte mécanique  $\hat{\sigma}$ , contrainte appliquée sur la mousse acoustique *in vacuo*, en  $x = -d$ ,

$$\hat{\sigma} = \hat{P} \partial_x u, \quad (1.16)$$

induisent un champ de déplacement à cette dernière interface de la forme,

$$u = \frac{\tan(-kd)}{\hat{P}k}, \quad (1.17)$$

toujours pour une contrainte imposée unitaire.

Dans le cas de la mousse acoustique, le champ de déplacement de la phase solide est perturbé par le couplage avec l'air, puisque la contrainte est imposée sur les deux phases du matériau en  $x = -d$ . Lors d'une sollicitation harmonique d'une période, le squelette se déforme. Durant une demi-période, le squelette occupe un espace inférieur à celui qu'il occupe dans sa configuration au repos. Ainsi, l'air est chassé vers l'extérieur de la mousse. Durant la demi-période complémentaire, le squelette occupe un espace supérieur à celui qu'il occupe dans sa configuration au repos. Ainsi, l'air est aspiré vers l'intérieur de la mousse.

La figure 1.4 présente les champs de déplacements en  $x = -d$  dans les deux cas considérés en fonction de la fréquence. En dessous de la première fréquence de résonance du solide élastique équivalent, la différence entre les champs de déplacements est proche de zéro pour les deux configurations. À basse fréquence, le phénomène de "pompage" de l'air minimise l'influence de ce dernier sur la raideur apparente de la mousse. Par conséquent, cette raideur est proche de celle du solide

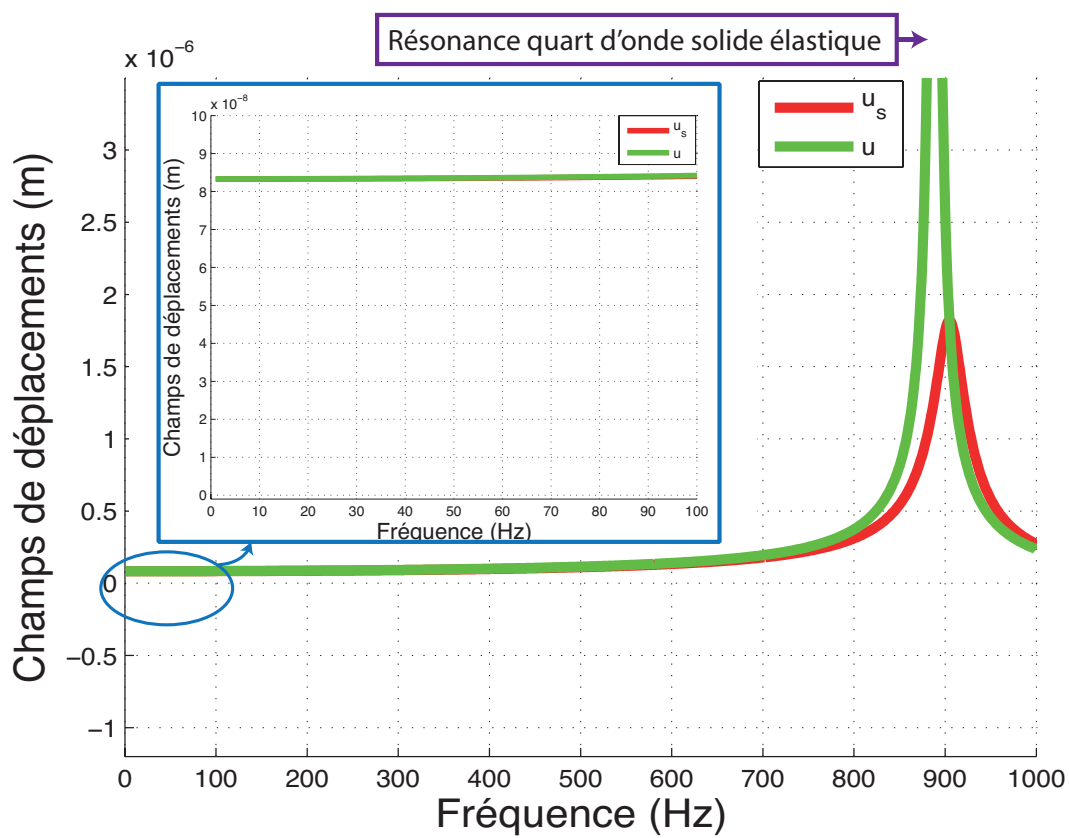


FIGURE 1.4 – Champs de déplacements de la phase solide et du solide équivalent  $\sigma = 12000(\text{Ns m}^{-4})$ .

élastique équivalent. Les paramètres prépondérants, quantifiant les échanges d'air entre l'intérieur et l'extérieur de la mousse acoustique, sont la résistivité au passage de l'air  $\sigma$  et la porosité  $\phi$ .

La figure 1.5 présente la comparaison des champs de déplacements, pour les mêmes paramètres de matériau, mais avec  $\sigma = 120000(\text{Ns m}^{-4})$ . Une comparaison avec la figure 1.4 montre que la

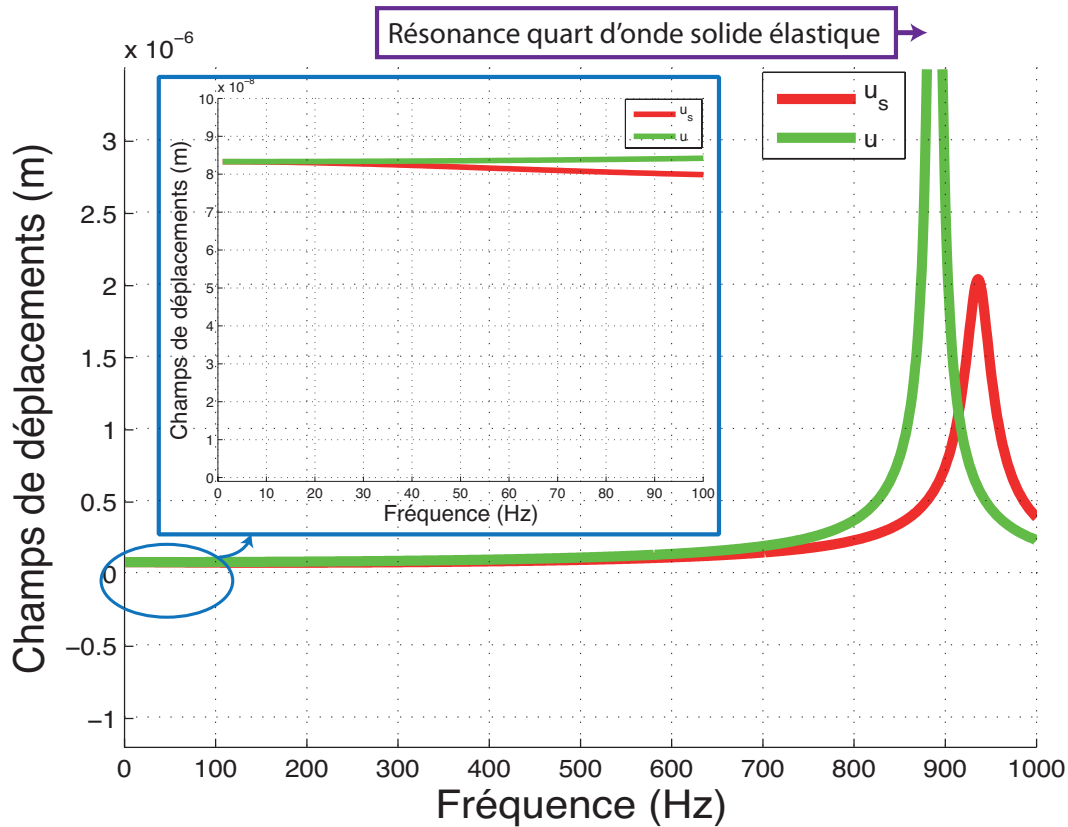


FIGURE 1.5 – Champs de déplacements de la phase solide et du solide équivalent  $\sigma = 120000(\text{Ns m}^{-4})$ .

raideur effective de la mousse augmente lorsque la résistivité au passage de l'air plus importante. Effectivement lorsque la valeur de  $\sigma$  augmente, l'air contenu dans la mousse acoustique a plus de difficulté à s'échapper.

Une mousse acoustique peut donc être modélisée par un solide élastique équivalent lorsqu'elle est sollicitée mécaniquement à basse fréquence. La plage de fréquence, pour laquelle cette approximation est valide, dépend principalement de la résistivité au passage du fluide  $\sigma$  et de la porosité  $\phi$ . La validation 1D montre en effet, que pour les mousses étudiées,  $\sigma = 12000(\text{Ns m}^{-4})$ , les effets inertiels et le couplage entre les deux phases peuvent être négligés.

### 1.3.2 Propriétés mécaniques du solide élastique équivalent

Dans cette section, nous allons présenter le cadre de l'élasticité linéaire dans un solide. Un solide élastique, en équilibre stable dans une position de référence, se déforme si une énergie lui est

transmise. Cette déformation est caractérisée par la transformation d'un vecteur matériel traduisant une modification de sa longueur et de son orientation. L'hypothèse de petites déformations signifie que les vecteurs matériels des configurations, déformée et initiale, sont proches. Sous cette hypothèse, le principe de superposition [28] s'applique : la contrainte totale appliquée au matériau est la somme des contraintes élémentaires engendrées par les déformations élémentaires. La loi de comportement, reliant contraintes et déformations, est linéaire. Pour illustrer cette loi, un cube de mousse acoustique sous l'approximation du solide élastique équivalent, est considéré figure 1.6.

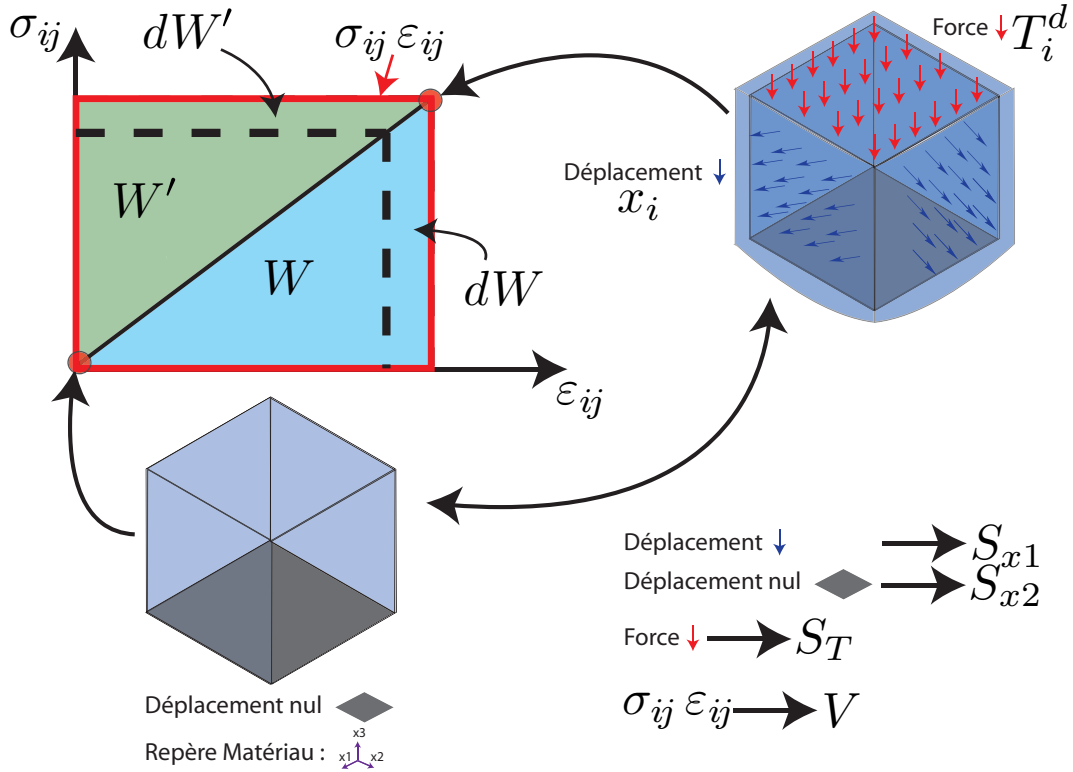


FIGURE 1.6 – Énergies de déformation d'un cube élastique.

Un accroissement d'énergie interne par unité de volume  $dW$  correspond à un accroissement de déformation  $d\varepsilon_{ij}$  dans l'état de contrainte  $\sigma_{ij}$  et est défini par :

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (1.18)$$

La densité d'énergie interne de déformation

$$W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (1.19)$$

est alors introduite comme étant l'aire comprise entre la courbe de charge du matériau et l'axe des déformations, figure 1.6. La convention d'Einstein y est implicite et  $(i, j = 1, 2, 3)$ . Cette densité d'énergie ne dépend que de l'état de déformation et les contraintes correspondantes peuvent être déduites par opération de dérivation,

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (1.20)$$



La densité d'énergie complémentaire  $W'$  du matériau est définie comme étant l'aire comprise entre la courbe du matériau et l'axe des contraintes. Elle est telle que,

$$W' = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - W, \quad (1.21)$$

et est obtenue par permutation des variables  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$ . Cette densité d'énergie est fonction de l'état de contrainte seule,

$$W'(\sigma_{ij}) = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}. \quad (1.22)$$

Les déformations sont alternativement définies par l'opération de dérivation,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W'}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1.23)$$

Les relations de proportionalité entre les contraintes et les déformations d'une part, et entre les énergies de déformation et complémentaire d'autre part, définissent le cadre de l'élasticité linéaire. Ainsi, les tenseurs  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{kl}$  sont liés par un tenseur d'ordre 4 avec, dans le cas général, 81 coefficients distincts  $C_{ijkl}$  tels que,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (1.24)$$

Il correspond à l'énergie de déformation,

$$2W = C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}. \quad (1.25)$$

Les tenseurs  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{kl}$  étant symétriques, les composantes élastiques  $C_{ijkl}$  sont identiques par permutation des deux premiers ou des deux derniers indices :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \text{ et } C_{ijkl} = C_{ijlk}. \quad (1.26)$$

Le nombre de composantes indépendantes se réduit alors à 36, puis, il est ramené à 21 à l'aide de considérations thermodynamiques au lieu des 81 initiaux. De façon à compacter l'écriture du tenseur des rigidités de façon formelle, la notation de Voigt [63] peut être utilisée,

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta}\varepsilon_\beta, \quad (1.27)$$

avec  $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha=1,2,3,4,5,6} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{32}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}^t$  et  $\{\varepsilon_\beta\}_{\beta=1,2,3,4,5,6} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{32}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}\}^t$  où  $t$  est la transposée. Le tenseur des souplesses  $[S_{\alpha\beta}] = [C_{\alpha\beta}]^{-1}$  est défini comme l'inverse du tenseur des rigidités.

Les mousse élastiques, considérées dans cette thèse, retournent à leur état de déformation initiale dès lors qu'elles ne sont plus sollicitées. Dans le cas des mousses viscoélastiques, il existe un temps de latence (temps de relaxation  $\tau$ ) entre l'instant où la sollicitation est appliquée et l'instant où la mousse répond. Dans ce cas, la loi de comportement intègre des paramètres complexes et dépendants de la fréquence (1.24) et devient dans le domaine fréquentiel,

$$\varepsilon_\alpha^* = S_{\alpha\beta}^* \sigma_\beta^*, \quad (1.28)$$

où le symbole  $\star$  dénote une grandeur complexe et  $S_{\alpha\beta}^* = \mathbb{C}_{\alpha\beta}^{*-1}$  est le tenseur des souplesses complexes, inverse du tenseur des rigidités complexes, lui-même transformée de Fourier de la fonction

de relaxation [55]. La partie imaginaire du tenseur des souplesses relève de la dissipation structurale liée à des transformations irréversibles à l'échelle moléculaire. En particulier, le module de Young devient complexe. La partie réelle exprime donc le comportement élastique et la partie imaginaire exprime le comportement viscoélastique. De façon à négliger ces effets, la période de la contrainte monochromatique appliquée au matériau doit être choisie en adéquation avec la période de déformation du matériau (temps de relaxation inclus) et donc être supérieure au temps de relaxation de façon à laisser le temps à la mousse de répondre à cette sollicitation. Un cycle lent de contrainte-déformation, de l'ordre de quelques Hz, permet de minimiser le comportement viscoélastique des mousses.

### 1.3.3 Symétries du tenseurs des souplesses

Ici, seules des mousses isotropes et isotropes transverses dont l'orientation de l'axe principal ne correspond pas nécessairement avec un axe du cube sont considérées. Le problème d'élasticité linéaire implique que le tenseur des souplesses  $\mathbb{S}$  soit symétrique et défini positif. Dans sa forme la plus générale, le tenseur des souplesses possède 21 constantes élastiques comme expliqué plus haut. Cependant, les symétries par rapport aux axes principaux de la mousse permettent de réduire le nombre de ces constantes. Le nombre de coefficients se réduit à 9 pour un matériau orthotrope, à 5 pour un matériau isotrope transverse et à 2 pour un matériau isotrope. Ainsi, pour une mousse orthotrope, les propriétés mécaniques sont symétriques par rapport aux trois plans principaux de la mousse et la matrice des souplesses s'écrit,

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Elle comporte neuf paramètres, trois modules de Young ( $E_1, E_2, E_3$ ), trois coefficients de Poisson ( $\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$ ) et trois modules de cisaillements ( $G_{12}, G_{13}, G_{23}$ ).

Le cas isotrope transverse est illustré figure 1.7 sur l'exemple d'un matériau renforcé par des fibres longues orientées unidirectionnellement.

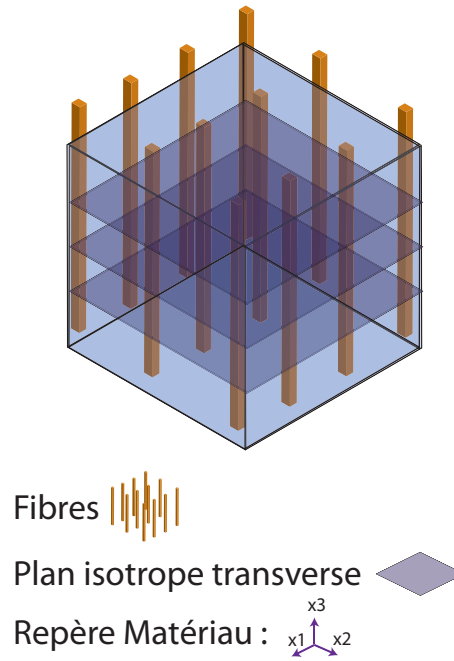


FIGURE 1.7 – Exemple d'un matériau isotrope transverse.

Les plans perpendiculaires à l'axe principal (axe  $x_3$ ) représentent les plans isotropes transverses. Les propriétés du matériau, dans ces plans, sont isotropes et sont différentes de celles hors des plans. Dans ce cas, la matrice des souplesses s'écrit,

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{12})}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

Elle comporte cinq paramètres, deux modules de Young ( $E = E_1 = E_2$  et  $E_3$ ), deux coefficients de Poisson ( $\nu = \nu_{12}$  et  $\nu_3 = \nu_{13}$ ) et un module de cisaillement  $G_3 = G_{13}$  dans les plans et hors des plans isotropes.

Enfin, un matériau est isotrope si ses propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions. Par conséquent, le tenseur des souplesses est invariant par rotation et il s'écrit,

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

où  $E$  est le module de Young,  $\nu$  est le coefficient de Poisson et  $G = E/2(1 + \nu)$  est le module de cisaillement.

Le type de symétrie de la matrice des souplesses conditionne les champs de déformations à l'intérieur et à la surface du matériau. Pour déterminer les coefficients de la matrice de rigidité d'une mousse, c'est à dire ses paramètres mécaniques, différentes techniques expérimentales ont été développées. La section suivante présentent certaines.

## 1.4 Caractérisation des paramètres mécaniques

Une revue exhaustive des méthodes expérimentales permettant de déterminer les paramètres mécaniques (coefficients élastiques et coefficients d'amortissements) d'une mousse acoustique a été effectuée par Jaouen *et al.* [42]. Les conditions d'application et les limites de ces méthodes sont notamment établies. Le schéma de principe des méthodes de caractérisation des paramètres mécaniques est présenté figure 1.8. Ces méthodes permettent de déterminer les paramètres mécaniques à

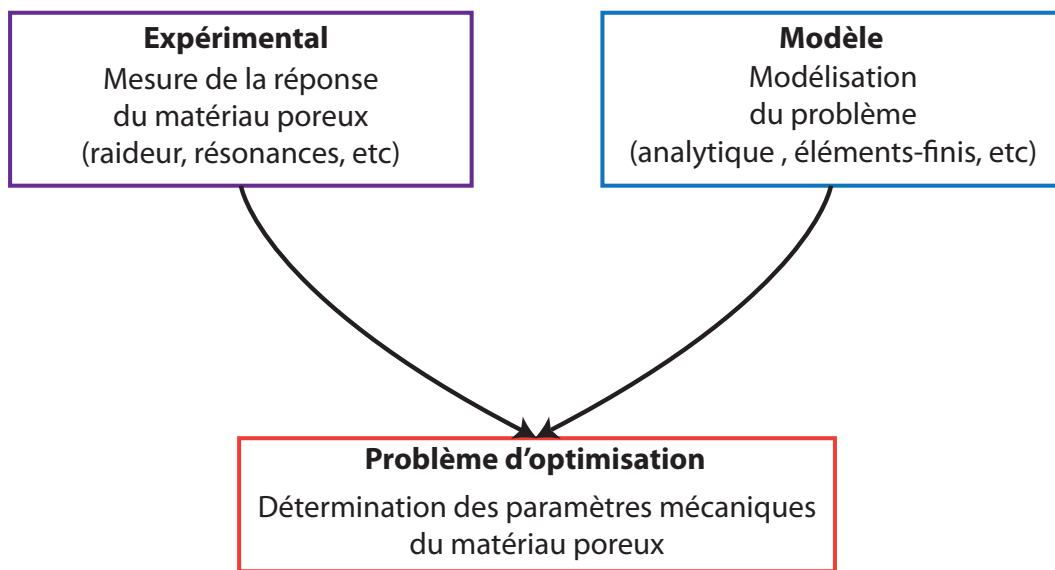


FIGURE 1.8 – Principe de détermination des paramètres mécaniques.

partir d'un problème de minimisation entre la mesure de la réponse d'une mousse à une sollicitation perturbatrice et la réponse calculée pour une configuration au plus proche de la configuration expérimentale. Ces méthodes de caractérisation peuvent être classées en trois catégories, en fonction de la fréquence de la sollicitation appliquée :

- les méthodes quasi-statiques,
- les méthodes résonantes,
- les méthodes basées sur les ondes de surface.

### 1.4.1 Méthodes quasi-statiques

Trois types de configuration sont dédiés, chacun, à la détermination d'un paramètre particulier : compression, torsion et cisaillement. Les échantillons sont sollicités à des fréquences inférieures à la première fréquence de résonance du système considéré de façon à ce que l'hypothèse quasi-statique soit valide : les effets inertiels sont négligés. De même, pour ce régime de fréquence, le couplage entre les deux phases de la mousse acoustique est négligé (section 1.3.1) : la mousse est modélisée

comme un solide élastique équivalent.

La première configuration est celle en compression présentée par Mariez *et al.* [46, 47, 58, 16] pour les mousses isotropes. Un échantillon de mousse acoustique cubique est placé entre deux plaques rigides. La plaque supérieure est immobile. La plaque inférieure est sollicitée par un pot vibrant. La contrainte imposée est harmonique. Ce dispositif expérimental permet de déterminer la raideur mécanique de la mousse. Le module d'Young et le coefficient d'amortissement de cette dernière sont obtenus par minimisation entre la raideur mesurée et celle utilisée dans le modèle. Complétée par une mesure du déplacement des faces latérales du cube (par vibromètre laser), le coefficient de Poisson peut également être déterminé. Par simple rotation de l'échantillon, quatre coefficients élastiques sur cinq (le coefficient de cisaillement restant à déterminer) de la matrice de rigidité de mousses isotropes transverses peuvent être retrouvés. Cette méthode présente ses limites, nous y reviendrons chapitre 2. Guastavino [37] propose une caractérisation complète des mousses acoustiques anisotropes par mesure des champs de déplacements surfaciques à l'aide d'une caméra et d'une technique de photogrammétrie. Cette technique nécessite un grand nombre de données expérimentales pour estimer les paramètres avec une précision satisfaisante. Une adaptation de la configuration en "compression" a été proposée par Langlois *et al.* [45] pour des échantillons cylindriques. La méthode est basée sur le développement de relations polynomiales entre la raideur mécanique, le module de Young, le coefficient de Poisson et le facteur de forme dérivé de simulations éléments finis. Le facteur de forme est défini comme le produit entre la moitié du rayon et l'inverse de l'épaisseur de l'échantillon. Les raideurs mécaniques de deux échantillons de facteurs de formes différents sont mesurées et les relations polynomiales associées sont obtenues. La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues permet de déterminer le module de Young et le coefficient de Poisson. Tarnov [61] s'est attaché, quant à lui, à déterminer les paramètres mécaniques d'un matériau fibreux, supposé isotrope transverse. Le dispositif expérimental [46, 47, 58] est utilisé pour mesurer les modules de Young et une adaptation de ce dispositif est utilisée pour déterminer le module de cisaillement. La détermination des coefficients de Poisson n'est pas probante. Par ailleurs, Sim *et al.* [60] ont proposé une méthode pour déterminer le module de Young complexe et le coefficient de Poisson d'un matériau viscoélastique. Son principe réside dans la mesure du champ de déplacement transmis lorsqu'un échantillon est soumis à une masse connue et sollicité par un pot vibrant. Les paramètres sont obtenus à partir de l'équation du mouvement 1D. Ce module apparent est fonction du module de Young et d'un facteur de forme. Les paramètres mécaniques sont obtenus avec un modèle éléments-finis.

La deuxième configuration est celle en torsion. Une torsion d'un l'échantillon cylindrique est opérée. Le module de cisaillement et le coefficient d'amortissement associé (partie imaginaire) sont déterminés par Etchessahar *et al.* [27] à partir d'un dispositif expérimental spécifique (doté de capteur angulaire) et d'un modèle solide élastique 1D.

La troisième configuration est celle du cisaillement. Le module de cisaillement (parties réelle et imaginaire) est estimé à l'aide d'un dispositif expérimental permettant une sollicitation en cisaillement pure. Une description du dispositif et une application à une mousse acoustique ont été présentées par Etchessahar *et al.* [27]. Un bâti rigide en "U" est sollicité harmoniquement par un pot vibrant. La plaque formant la base du "U" est fixée au pot vibrant et le déplacement de cette plaque est mesuré. Deux échantillons de mousses sont collés aux plaques parallèles du "U". À l'intérieur du "U", les deux échantillons sont collés sur une plaque rigide commune. Elle est instrumentée de façon à pouvoir mesurer la force transmise à travers ces échantillons. Le module de cisaillement est retrouvé à partir de la mesure du rapport (force-déplacement) et d'un modèle solide élastique

1D. Un autre dispositif expérimental, basé sur le même principe, est proposé par Tarnov [61] et a été utilisé pour retrouver le module de cisaillement d'une laine de verre.

Doutres *et al.* [24] ont proposé d'améliorer le principe des mesures quasi-statiques avec un modèle électroacoustique où les paramètres mécaniques du matériau sont modélisés par une impédance mécanique de charge. Un dispositif spécifique comprenant un moteur avec joints ferrofluides permet une caractérisation sur une plus large bande de fréquence qu'avec un moteur électrodynamique. L'inconvénient de cette méthode est l'imprécision du module de Young reconstruit en fonction de la fréquence.

### 1.4.2 Méthodes résonantes

Le principe des méthodes résonantes (dynamiques) est d'estimer les paramètres mécaniques à partir de la mesure des résonances, se traduisant par des pics de la fonction d'impédance mécanique et d'une modélisation solide élastique équivalente. Ces méthodes sont limitées aux fréquences de résonances du système considéré.

Pritz [54, 53] a présenté une méthode de reconstruction du module de Young d'une mousse à partir de mesures de résonances et du modèle solide équivalent 1D (hypothèse décrite section 1.3.1 et c.f. [51]). Deux configurations sont considérées, un échantillon cubique et un échantillon poutre, tous deux chargés d'une masse connue. Danilov *et al.* [14] ont modélisé ces configurations et comparent deux cas : celui d'une mousse acoustique et celui d'une mousse *in vacuo*. Ils concluent que l'utilisation de la configuration cubique nécessite un facteur de forme prenant en compte les effets de "gonflement" des surfaces.

Une méthode dérivée des poutres d'Oberst a été proposée par Wojtowicki *et al.* [66]. Une poutre de mousse est collée sur une plaque rigide. La plaque est fixée perpendiculairement à un pot vibrant et un capteur mesure la force imposée. Un vibromètre laser mesure la vitesse transversale à l'une des extrémités de la poutre. Les paramètres mécaniques sont estimés en comparant la fonction de transfert expérimentale et celle calculée à l'aide du modèle diphasique associé.

Etchessahar *et al.* [26] et Jaouen *et al.* [41] ont proposé d'étudier les vibrations d'une plaque poreuse pour déterminer à la fois les paramètres élastiques et l'amortissement matériel. Le dispositif expérimental, précédemment présenté dans le cas de la poutre, est adapté au cas de la plaque. À partir d'un modèle simple basé sur une formulation mixte pression-déplacement prenant en compte le couplage entre les deux phases, les paramètres d'un matériau poreux isotrope sont déterminés (le coefficient de Poisson n'est pas déterminé avec cette méthode).

Des méthodes "acoustiques" sont également proposées pour la détermination des paramètres mécaniques toujours en exploitant la résonance de la phase solide du matériau. La source étant acoustique, l'excitation de la phase solide est réalisée par couplage avec la phase fluide (de l'air). Allard *et al.* [3] ont proposé une méthode basée sur la mesure de l'impédance normale mesurée à la surface d'un échantillon de grandes dimensions et de faible épaisseur (de 5 mm à 10 mm). Cet échantillon est collé sur un substrat rigide. Un microphone mesure la réponse du matériau lorsque qu'il est sollicité par une source monopolaire acoustique. À partir d'une mesure ramenée en incidence oblique rasante, le module de cisaillement est retrouvé. L'inconvénient de ces méthodes est que la sollicitation de la phase solide est réalisée indirectement par couplage, d'où une mauvaise précision sur l'estimation des paramètres mécaniques.

### 1.4.3 Méthodes propagatives (ondes guidées)

Le principe de ces méthodes est d'estimer les paramètres mécaniques à partir d'un problème de minimisation entre la mesure de caractéristiques de la propagation des ondes de la phase solide (onde de surface, ondes guidées) et un modèle de propagation. Allard *et al.* [4] ont proposé une méthode pour estimer le module de cisaillement (de 2 kHz à 4 kHz) d'une mousse acoustique de grandes dimensions collée sur un substrat rigide. Le principe est de corrélérer la mesure de la vitesse de phase de l'onde étudiée à celle issue d'un modèle de la configuration expérimentale. Pour ce faire, un dispositif mécanique sollicite la phase solide de la mousse acoustique. Le déplacement de surface de l'échantillon est mesuré en plusieurs points à l'aide d'un vibromètre laser. Cela permet de déterminer la vitesse de phase. En comparant celle-ci avec la vitesse calculée pour différentes valeurs du module de cisaillement, ce dernier peut être déterminé. Cette méthode a été adaptée à des échantillons de faibles épaisseurs par Boeckx *et al.* [9] pour la détermination du module de cisaillement à des fréquences plus basses. Boeckx *et al.* [10] ont enfin proposé, à partir d'un principe similaire, une méthode pour la détermination du module de cisaillement et du coefficient de Poisson dans la gamme de fréquence [200Hz; 1300Hz].

Les figures 1.9 présentent un rappel historique succinct respectivement des méthodes quasi-statiques, résonantes et propagatives.

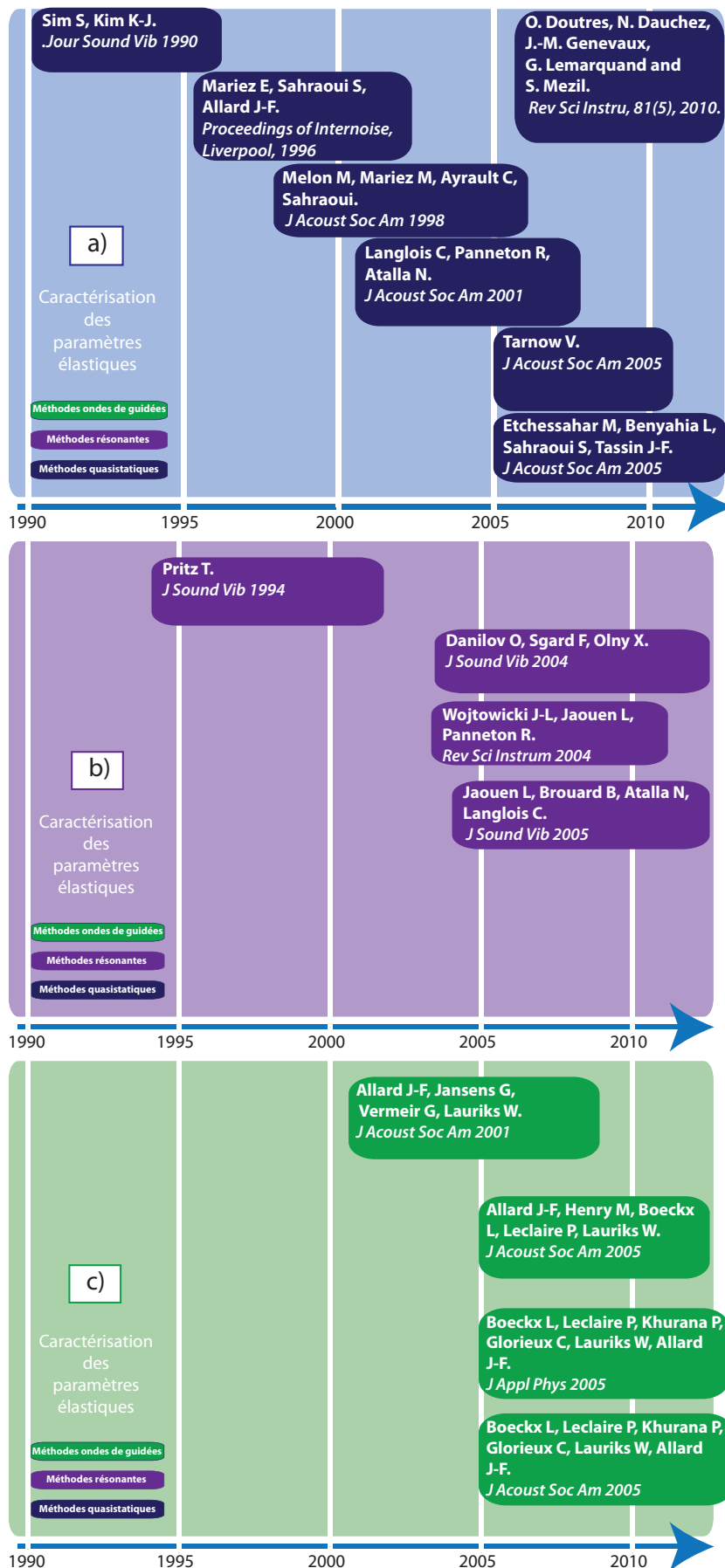


FIGURE 1.9 – Frise chronologique des méthodes a) quasi-statiques, b) résonantes et c) propagatives.



Cette revue bibliographique illustre le fait que la caractérisation des paramètres mécaniques des matériaux poreux isotropes est à présent bien appréhendée même si leurs caractérisations sur une plus large bande de fréquence restent un sujet toujours ouvert. L'estimation des paramètres mécaniques des matériaux anisotropes est un enjeu qui nécessite donc une évolution des techniques de caractérisation.

## 1.5 Objectifs spécifiques du travail

L'objectif général de cette thèse est la caractérisation de l'anisotropie naturelle et induite de la matrice solide des matériaux poreux. Pour atteindre cet objectif, il va s'agir d'appréhender les couplages élastiques intervenant habituellement dans les mousses acoustiques (anisotropie naturelle), dans un premier temps, et de provoquer une variation de modules élastiques (anisotropie induite), dans un deuxième temps. Les objectifs sont les suivants.

1. Établir une procédure d'analyse de l'anisotropie naturelle. Dans le but de définir des indicateurs sur le type d'anisotropie rencontré, un modèle et un dispositif expérimental sont développés. Ainsi, les effets liés à la loi de comportement de la matrice solide sur la déformée surfacique d'échantillon seront étudiés.
2. Induire une anisotropie par compression statique des matériaux poreux. La compression statique des mousses acoustiques est courante dans leurs utilisations (siège automobile, cloison bâtiment, etc). Ainsi, les effets de cette compression statique seront étudiés sur une large variété de mousses.
3. Approfondir la compréhension de la loi de comportement des mousses. Ainsi, une analyse microstructurale des mousses sera menée pour appréhender leurs comportements macroscopiques.

## 1.6 Organisation du document

Le document suit le travail réalisé durant cette thèse. L'objectif général étant de caractériser l'anisotropie de la matrice solide des matériaux poreux, le document est subdivisé suivant les deux sous-objectifs qui sont l'anisotropie naturelle et l'anisotropie induite. Son découpage est spécifique au travail réalisé et est maintenant présenté en quatre chapitres.

Le second chapitre porte sur la caractérisation de l'anisotropie naturelle du solide élastique équivalent. Le dispositif expérimental et le modèle éléments finis sont tout d'abord présentés. Dans un premier temps, les champs de déplacements surfaciques des matériaux sont analysés et dans un deuxième temps les coefficients de Poisson des matériaux sont déterminés. Cette méthodologie est appliquée au cas d'une mousse acoustique isotrope. Un complément d'information est fourni dans l'annexe B sur la détermination des coefficients de Poisson d'une mousse isotrope transverse.

Le troisième chapitre reprend un article portant sur l'influence de la compression statique sur le module d'Young de mousses (anisotropie induite). La variation du module d'Young est caractérisée expérimentalement. Une interprétation de cette variation par des effets de la microstructure des mousses est ensuite proposée. Enfin, les effets de ce comportement sont illustrés avec la mesure du coefficient d'absorption.

Le quatrième chapitre est dédié aux travaux complémentaires que nous avons effectués sur l'anisotropie induite. Dans le cadre d'un déplacement dans le laboratoire Acoustics and Thermal Physics

de la K.U.Leuven, une étude préliminaire sur la caractérisation expérimentale de la variation du module de cisaillement en fonction de la compression statique a été menée. Enfin, une modélisation éléments finis d'une cellule représentative de la microstructure est réalisée. Une approche numérique incrémentale est développée sur le principe de la caractérisation expérimentale de l'effet de la compression statique sur le module d'Young. Les résultats numériques et expérimentaux sont comparés.

Le cinquième chapitre vient conclure ce travail, en rappelant les résultats obtenus, ses originalités et les perspectives.



# Chapitre 2

## Anisotropie naturelle : mesures et modélisation quasi-statiques

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>25</b>
<b>2.2</b>	<b>Protocole expérimental</b>	<b>27</b>
2.2.1	Présentation	27
2.2.2	Discussion sur le modèle rhéologique	30
2.2.3	Configurations considérées	32
<b>2.3</b>	<b>Matériaux considérés</b>	<b>34</b>
<b>2.4</b>	<b>Modèle Éléments-Finis</b>	<b>34</b>
2.4.1	Formulation variationnelle	34
2.4.2	Validation du modèle	36
<b>2.5</b>	<b>Analyse des champs de déplacements des surfaces latérales</b>	<b>38</b>
2.5.1	Matériau isotrope	38
2.5.2	Matériau isotrope transverse	43
2.5.3	Conclusion partielle	49
<b>2.6</b>	<b>Méthode de détermination des coefficients de Poisson</b>	<b>51</b>
2.6.1	Problème d'optimisation : définition de la fonction coût	51
2.6.2	Mousse isotrope	52
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>54</b>

---

### 2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude et à la caractérisation de l'anisotropie naturelle de la phase solide de mousses acoustiques. Les mesures seront effectuées dans des conditions où les mousses pourront être considérées comme soumises à des sollicitations quasi-statiques (section 1.3.1). Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, cette hypothèse permet de considérer la mousse acoustique comme un solide élastique équivalent et ainsi de négliger tout couplage avec l'air (mousse

acoustique *in vacuo*). Chacun des matériaux est supposé purement élastique (le comportement visqueux de la matrice solide est négligé). Ainsi, les coefficients du tenseur des rigidités seront supposés réels et indépendants de la fréquence.

Trois types d'anisotropies (isotropie, isotropie transverse et isotropie transverse dans le cas où le plan d'isotropie présente un décalage angulaire avec la direction d'excitation) sont étudiés. Ces trois types d'anisotropies sont les plus simples pouvant être considérés. Ils sont également, pour les mousses acoustiques, les plus couramment rencontrés. En effet, lors de la fabrication des "pains" de mousse, le processus d'expansion engendre une direction privilégiée suivant laquelle les propriétés mécaniques diffèrent de celles dans les deux autres directions. Le matériau est ensuite découpé en plaques d'épaisseur fixée. Pour les matériaux fibreux de type laine de verre (empilement de couches), la direction du plan d'isotropie correspond, dans la plupart des cas, à celle de l'interface géométrique. Concernant les mousses acoustiques, la découpe du matériau n'est pas toujours faite dans la direction du plan d'isotropie. Un décalage angulaire apparaît alors.

Dans ce chapitre, nous allons étudier la réponse mécanique d'un cube de mousse acoustique. Sur la face inférieure, un champ de déplacement est imposé dans la direction verticale ; sur la face supérieure, le champ de déplacement est nul ; les quatre faces latérales ne sont soumises à aucune sollicitation.

Les échantillons considérés dans ce travail sont de forme cubique. En effet, cette géométrie présente plusieurs avantages. D'une part, la découpe de l'échantillon est facile à réaliser. Les faces planes d'un cube facilitent également la mesure de champs de déplacements normaux. D'autre part, pour les types d'anisotropies considérés, cette géométrie permet de minimiser les couplages entre les différents effets élastiques. En outre, il est possible d'effectuer manuellement des rotations de l'échantillon. Celles-ci préservent la géométrie (le même banc expérimental peut donc être utilisé). Enfin, des données expérimentales complémentaires, pour lesquelles les différentes directions sont tour à tour préférentiellement sollicitées, peuvent être obtenues dans le cas d'un matériau non isotrope.

Le travail présenté dans ce chapitre est à la fois expérimental et numérique. Un dispositif original a été développé afin de mesurer simultanément tous les déplacements normaux des faces latérales du cube. Celui-ci étend la méthode du rigidimètre [46, 47, 58, 16] en permettant la mesure de champs de déplacements normaux surfaciques. Une modélisation à l'aide de la Méthode des Eléments-Finis a été également développée et validée pour un cube de mousse anisotrope.

Les objectifs du travail présentés dans ce chapitre sont au nombre de deux. Le premier est d'identifier le type d'anisotropie de l'échantillon à partir d'une analyse des profils de déplacements expérimentaux. Le second est de mettre en place un algorithme de caractérisation des différents coefficients de Poisson du matériau en fonction du type d'anisotropie de celui-ci.

Le protocole expérimental est tout d'abord décrit. Puis, les matériaux utilisés et leurs caractéristiques sont listés. Le modèle éléments finis est ensuite présenté et validé. Par la suite, les champs de déplacements surfaciques mesurés et modélisés pour les différentes symétries sont analysés. Enfin, le coefficient de Poisson de la mousse isotrope est déterminé.

## 2.2 Protocole expérimental

Dans cette section, le protocole expérimental est tout d'abord présenté. Ensuite, les précautions d'utilisation de ce dispositif sont détaillées. Enfin, les configurations considérées sont présentées.

### 2.2.1 Présentation

Le montage expérimental que nous avons mis en place est présenté figure 2.1.

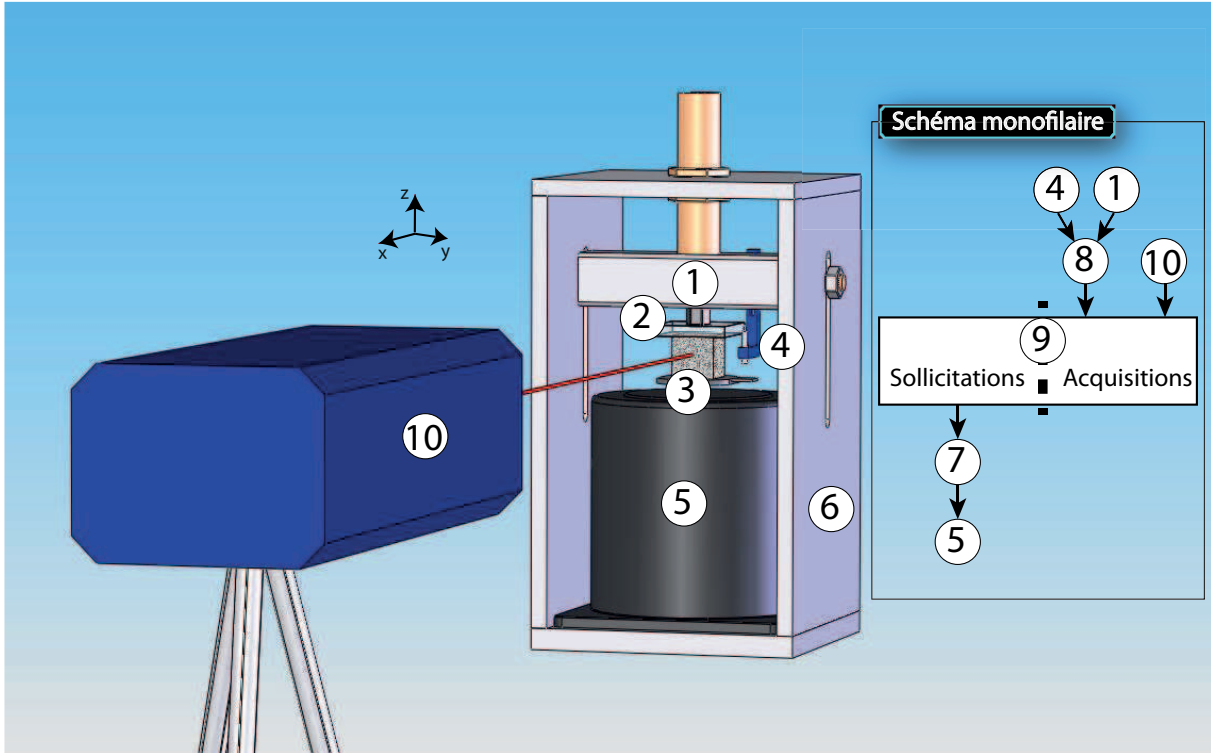


FIGURE 2.1 – Dispositif expérimental : (1) capteur force PCB 209B01 (2) plaque rigide (3) matériau poreux (4) capteur déplacement Keyence EX-201/305 (5) pot vibrant Bruel & Kjaer type 4808 (6) structure rigide (7) générateur de signaux Agilent 33120A (8) oscilloscope Waverunner (9) ordinateur (10) vibromètre laser à balayage Polytec PSV 300.

Il est composé de deux dispositifs. Le premier dispositif est le rigidimètre [46, 47, 58, 16]. Ce banc, préexistant à ce travail, est dimensionné pour recevoir un échantillon cubique dont la dimension des arêtes est  $L_0 = 4$  cm. L'échantillon est placé entre deux plaques rigides (2 et 3). La surface de contact entre l'échantillon et chacune des plaques est  $S_0 = L_0^2$ . Ces deux plaques sont reliées à un bâti (6) conçu pour assurer leur alignement. Celui-ci est constitué de plaques de dural. La plaque inférieure est reliée au pot vibrant (Bruel & Kjaer type 4808) et sollicite l'échantillon avec un signal produit par le générateur (Agilent 33120A). Un capteur capacitif (Keyence EX-201/305) mesure le déplacement vertical  $w$  de cette plaque. La plaque supérieure, située au dessus de l'échantillon, est fixée rigidement. Elle est reliée au bâti par un système vis-écrou, qui permet de monter et démonter l'échantillon en réglant la hauteur de la plaque supérieure. Un capteur (PCB 209B01), localisé sur l'axe perpendiculaire aux plaques, mesure la force  $f$  transmise au travers de l'échantillon.

Dans les précédents travaux [46, 47, 58, 16], un vibromètre laser mono-point mesurait le déplacement normal du point situé au centre géométrique d'une face latérale du cube. Pour obtenir le déplacement des 4 faces, l'échantillon était tourné. Notons qu'ainsi une seule valeur de déplacement était disponible pour chacune des faces. Quatre données étaient alors extraites ; afin de remonter aux 5 coefficients élastiques, une expérience spécifique était nécessaire pour mesurer le module de cisaillement. Une procédure d'inversion était alors utilisée pour remonter aux 4 paramètres mécaniques restants. Cette procédure avait néanmoins montré ses limites ; en particulier pour des échantillons qui n'étaient pas exactement isotropes transverses.

L'origine de cette limitation était un manque de valeurs expérimentales : une mesure au centre de l'échantillon n'est pas suffisante, comme cela le sera illustré dans la suite. Ainsi, dans le cadre de ce travail, le banc de mesure mécanique est complété par un deuxième dispositif : un vibromètre laser à balayage POLYTEC [52] ayant été acquis par le laboratoire. Dès lors, généraliser la méthode précédente en utilisant des données expérimentales sur toute une face de cube plutôt qu'en un seul point était possible. En effet, ce dispositif permet de mesurer automatiquement et simultanément les déplacements normaux de plusieurs points de la surface latérale du cube. Ce nouveau matériel permet de tester la validité des hypothèses utilisées dans les précédents travaux et d'en définir plus précisément les limites. De plus, ce matériel permet de visualiser les profils de déplacements expérimentaux. Ils sont ensuite comparés à ceux obtenus avec une méthode éléments finis, ce qui constitue l'une des originalités de ce travail.

Le vibromètre à balayage mesure le champ de déplacement normal d'une face latérale du cube considéré, suivant un maillage de points basé sur une grille dont la finesse (nombre de lignes par nombre de colonnes) peut être contrôlée. Ainsi, le maillage est matérialisé par un treillis, dont les intersections correspondent aux points de mesure. Il est représenté sur la figure 2.2 avec une image de la caméra intégrée au vibromètre. En conséquence et pour ce qui concerne l'aspect expérimental, ce dispositif permet une vision plus complète du champ de déplacement. Nous passons de données en dimension 0 (un point) à des données en dimension 2 (une surface). Le nombre de points du treillis est déterminé à partir du compromis entre finesse et temps de la mesure. Le maillage optimal correspond à une discrétisation de 13 points dans chacune des dimensions et il est déterminée empiriquement. Ce maillage correspond à 169 points de mesure et à un pas (entre ces mesures) de 0.31 cm. L'ensemble de ce dispositif expérimental est piloté par un programme développé sous OCTAVE [49], dont l'architecture est présentée figure 2.3 pour la mesure des déplacements sur une face. Notons que le cube est ensuite tourné manuellement afin d'obtenir le profil de déplacement sur les quatre faces latérales du cube. Un signal sinusoïdal est produit par le générateur et transmis à l'échantillon par le pot vibrant. Un déplacement avec une amplitude et une fréquence assurant la validité des hypothèses de quasi-staticité et de linéarité (étape 1) est imposé. Le champ de déplacement normal de la face est acquis par le vibromètre (étape 2). Les signaux force et déplacement sont simultanément acquis (étape 3). Notons que l'étalonnage des capteurs est absolu (table micrométrique pour le capteur déplacement et courbes constructeur pour le capteur force) et non relatif (fonction de correction de réponse en fréquence).

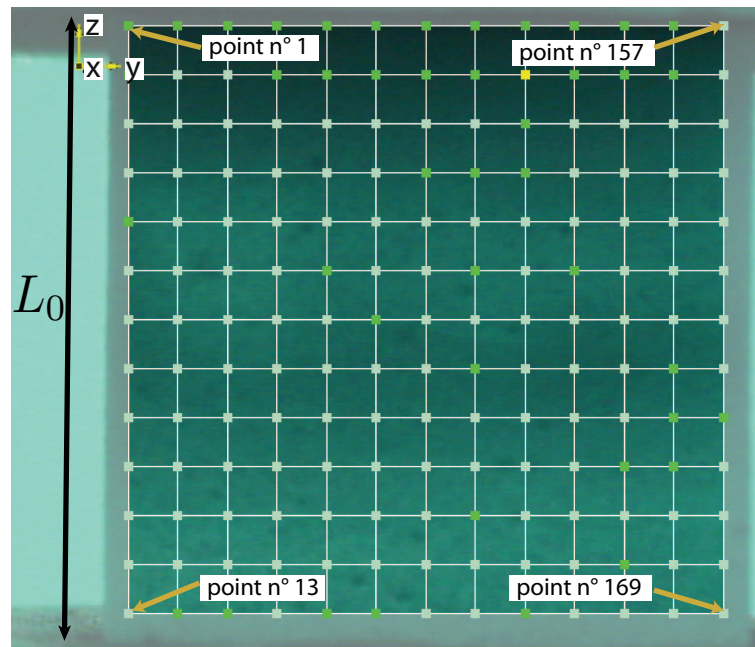


FIGURE 2.2 – Treillis correspondant aux points de mesure du déplacement normal de la face latérale

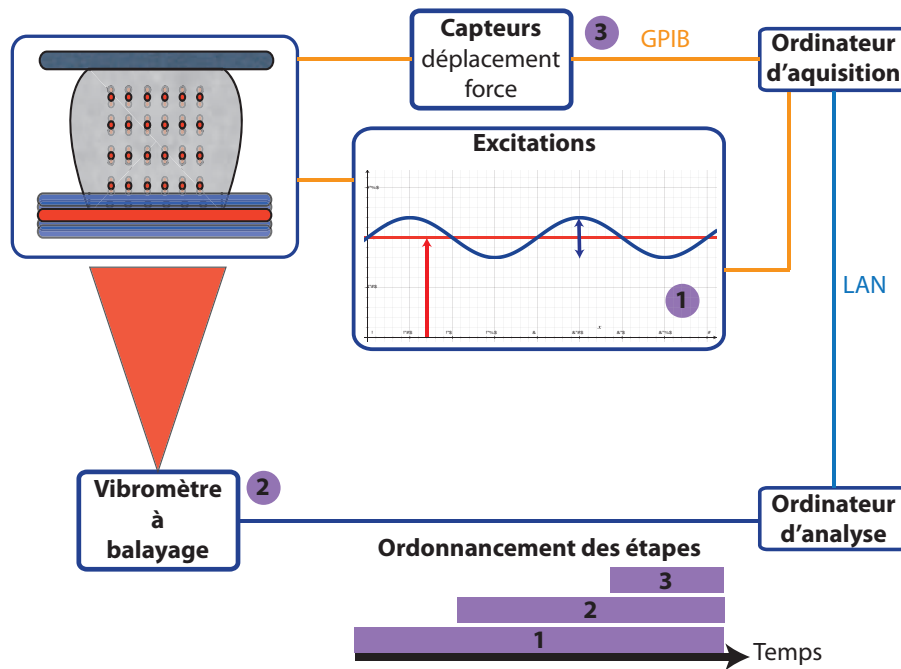


FIGURE 2.3 – Schéma de principe du dispositif expérimental



Le calcul de la raideur mécanique verticale  $K$  est ensuite effectué à partir du rapport entre la force et le déplacement,  $K = \frac{f}{w}$ . Le module élastique apparent  $E_A$  est obtenu en divisant cette raideur mécanique par la longueur de l'échantillon,  $E_A = \frac{K}{L_0}$ . Ce module est homogène au module de Young et ne coïncide avec celui-ci que lorsque les dimensions latérales du matériau sont infinies. Les échantillons utilisés dans ce travail sont cubiques ; compte tenu de cette géométrie, le rapport entre ces deux grandeurs est une fonction du coefficient de Poisson,  $K(\nu)$ . Cette dépendance du coefficient de Poisson est due au "bombement" de l'échantillon. Le module d'Young  $E$  de l'échantillon correspond au module élastique apparent  $E_A$  corrigé par un coefficient lié à la géométrie de l'échantillon. Dans ce travail de thèse, une seule géométrie d'échantillon sera utilisée et nous étudierons principalement des variations de modules élastiques par rapport à une configuration de référence. Par conséquent, La détermination de la valeur absolue du module d'Young du matériau n'est pas toujours nécessaire. Pour les cas où cela l'est, une méthode pour déterminer le module d'Young est proposée dans l'annexe D.

### 2.2.2 Discussion sur le modèle rhéologique

Le comportement rhéologique des mousses acoustiques est viscoélastique. Cela signifie que la réponse de ces mousses à une sollicitation mécanique n'est pas immédiate. À chaque constante élastique est associée une seconde constante liée au retard de la réponse. Comme nous l'avons dit précédemment, nous allons considérer un modèle purement élastique, pour lequel la transmission de l'information est supposée instantanée. Cette simplification nous permet de réduire le nombre de paramètres considérés.

Pour valider cette hypothèse expérimentalement, une étude originale basée sur une technique d'analyse d'image est menée. Un algorithme de détection de points et de leur suivi en fonction du temps a été réalisé. Un maillage de 10 points sur l'épaisseur de l'échantillon est effectuée sur une ligne verticale au centre de l'échantillon. L'espacement entre ces points est d'environ 0.4 cm. Sept points sont suivis durant l'excitation. L'échantillon est excité par l'intermédiaire du pot vibrant (déplacement pseudo-impulsionnel) avec une amplitude suffisante pour que les déplacements des points soient détectés. Le processus est filmé avec une caméra, dont la fréquence est de 25 images par seconde (40 *ms* de période). Pour chacune de ces images, une corrélation 2D entre un masque (i.e. image de référence) et l'image est effectuée. La figure 2.4 présente cette colonne de points. Le maillage de points (en noir) dessinés à la main sur la surface peut être distingué. Les points détectés par l'algorithme sont représentés par des marques bleues. Le processus de dessin manuel n'assure pas un parfait alignement des points, ce phénomène est amplifié par l'agrandissement de la figure. Les déplacements expérimentaux des différents points de la ligne verticale sont mesurés et présentés figure 2.4.

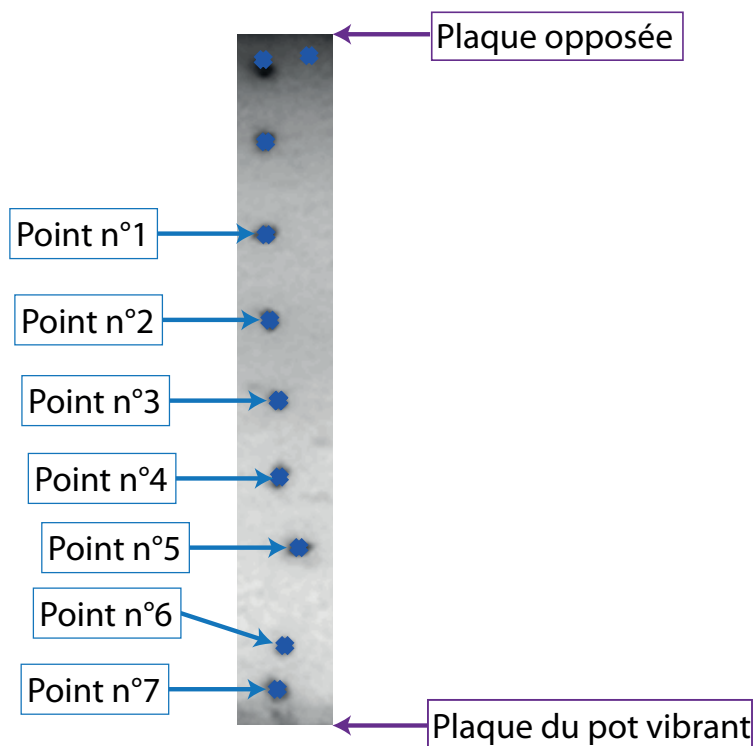


FIGURE 2.4 – Colonne de points dessinés au centre de la face de l'échantillon

L'évolution de la position de ces points (déplacement vertical), en fonction du temps, est mesurée et représentée figure 2.5 et figure 2.6.

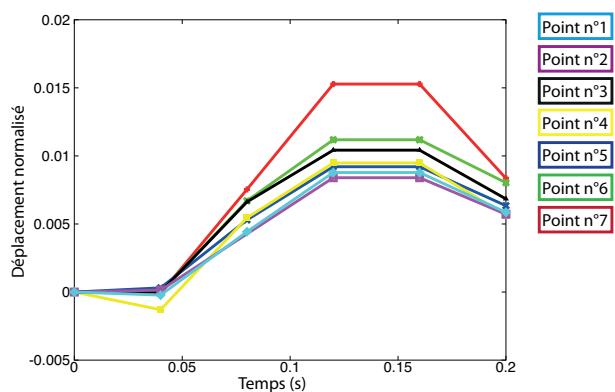


FIGURE 2.5 – Déplacement normalisé des points de la colonne centrale

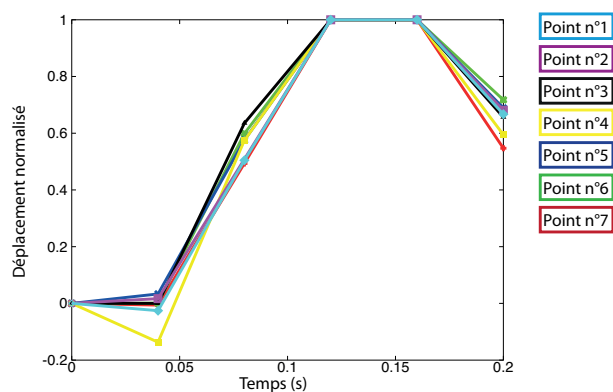


FIGURE 2.6 – Dynamique des points de la colonne centrale

Sur la figure 2.5, les déplacements des sept points sont normalisés par leur position sur la première image et sont représentés en fonction du temps. La variation des amplitudes des points sur le palier de l'impulsion varie en fonction de la position du point dans la colonne. Le point n°7, le plus proche du pot vibrant, est celui qui se déplace le plus. L'amplitude du déplacement des autres points décroît en fonction de leur distance avec le pot vibrant (le point n°3 déroge à cette règle). Sur la figure 2.6, les déplacements des sept points sont en plus divisés par leur maxima respectif, ce qui permet de se rendre compte de leur dynamique propre. Les sept points ont le même comportement dynamique et atteignent leurs maxima sur la même image et le quittent également sur la même image. Pour de faibles fréquences d'excitation (0.2 s de période), les effets de retard peuvent donc être négligés et le modèle purement élastique peut être considéré.

La méthode est également basée sur une approximation monodimensionnelle. Toute sollicitation dans le plan horizontal doit être évitée. Ainsi, des feuilles de papier de verre recouvrent les plaques et évitent tout glissement de l'échantillon lors de la sollicitation mécanique. Pour se prémunir de la perte de contact entre l'échantillon et les plateaux du montage lors de la sollicitation, un déplacement statique est appliqué. Cette compression statique est imposée par deux dispositifs : le montage de l'échantillon avec le système de vis-écrou et une compression statique imposée par le pot vibrant.

### 2.2.3 Configurations considérées

La définition d'un vocabulaire spécifique est nécessaire pour faciliter la présentation des mesures des champs de déplacements de la totalité des faces du cube. Il est en particulier nécessaire de bien repérer les différentes rotations qui vont être effectuées par l'échantillon et de définir des numéros de configuration qui permettront de bien repérer ces rotations. Celles-ci sont présentées figure 2.8. La configuration n°1 est celle de référence, les configurations n°2 et n°3 sont des rotations de la configuration n°1. Les quatre faces latérales du cube sont en outre repérées par des adjectifs géographiques (Nord, Sud, Est et Ouest) comme présenté figure 2.7 et figure 2.8.

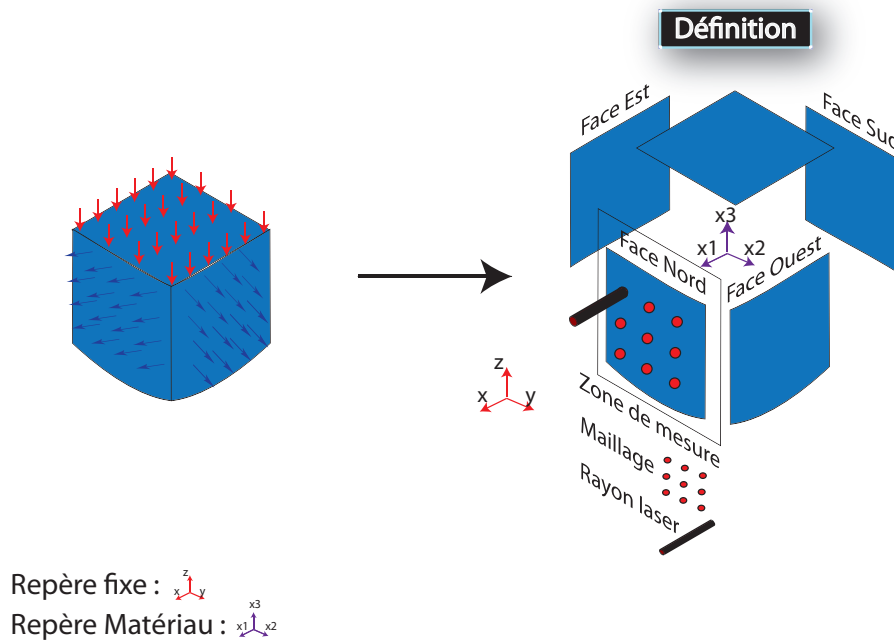


FIGURE 2.7 – Orientation des faces.

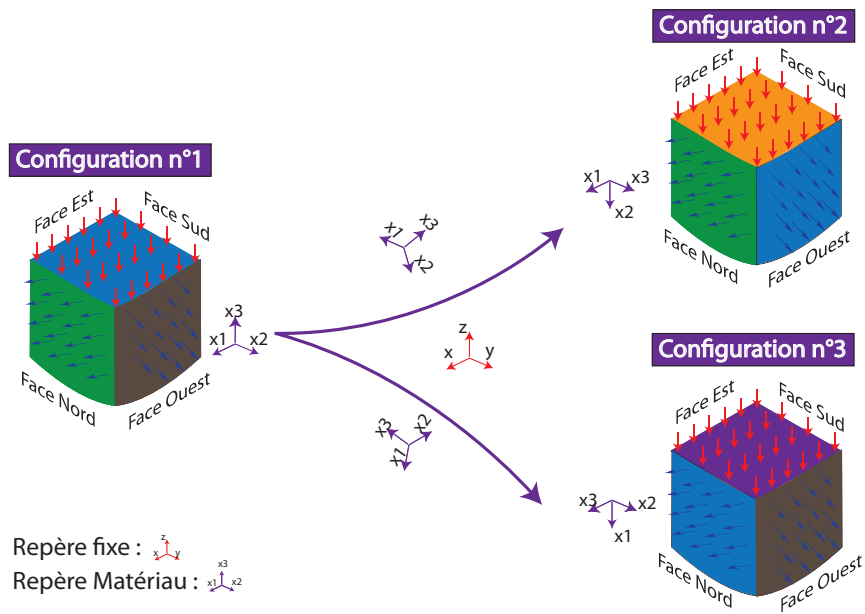


FIGURE 2.8 – Repère fixe et repère matériau dans les différentes configurations.

## 2.3 Matériaux considérés

Dans ce chapitre, nous considérons trois échantillons de mousses polyuréthane : un échantillon isotrope (noté  $A$ ) et un second matériau isotrope transverse (noté  $B$ ). Notons que pour ce matériau, deux échantillons sont disponibles. Un premier pour lequel les faces du cube sont alignées sur le plan d'isotropie et un second où il existe un décalage angulaire de 45 degrés. Ces matériaux ont été fournis par le laboratoire Acoustics and Thermal Physics de la Katholieke Universiteit Leuven. Les caractéristiques des matériaux sont données tableau 2.1.

Matériau	$\phi$	$t(m)$	$\rho(kgm^{-3})$	$\alpha_\infty$	$\sigma(Nsm^{-4})$	$\Lambda(\mu m)$	$\Lambda'(\mu m)$
A	0.99	–	9.4	1.01	9500	166	246
B	> 0.95	0.03	10	1.01	12000	100	150

TABLE 2.1 – Propriétés des matériaux considérés.

## 2.4 Modèle Éléments-Finis

Nous allons maintenant présenter la modélisation numérique du cube de mousse acoustique à l'aide de la Méthode des Éléments Finis (MEF) [68]. Celle-ci repose sur la formulation variationnelle [18, 21] de la représentation en déplacement total  $\{\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^t\}$  de la théorie de Biot [19]. Dans le cadre de ce travail de thèse, cette formulation a été implémentée en trois dimensions dans le logiciel commercial COMSOL [13]. En effet, celle-ci n'avait préalablement été implémentée que dans des cas mono et bi dimensionnels [19, 18]. L'objectif de cette implémentation est de prédire les déplacements normaux des faces latérales du cube. Nous allons maintenant présenter rapidement la formulation variationnelle ainsi que la validation des résultats numériques en les comparant à ceux obtenues à l'aide de la formulation  $\{\mathbf{u}^s, p\}$ .

### 2.4.1 Formulation variationnelle

Les équations du mouvement d'un milieu poroélastique modélisé en représentation  $\{\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^t\}$  s'écrivent :

$$\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}(u^s) = -\omega^2 \tilde{\rho}_s u^s - \omega^2 \tilde{\rho}_{eq} \tilde{\gamma} u^t, \quad (2.1a)$$

$$\tilde{K}_{eq} \nabla \nabla \cdot u^t = -\omega^2 \tilde{\rho}_{eq} \tilde{\gamma} u^s - \omega^2 \tilde{\rho}_{eq} u^t, \quad (2.1b)$$

où  $u^s$  et  $u^t$  représentent respectivement les déplacements solide et total.  $\tilde{K}_{eq}$  est la compressibilité du milieu fluide équivalent,  $\tilde{\rho}_{eq}$  en est la densité équivalente,  $\tilde{\rho}_s$  est la densité de la phase solide,  $\tilde{\gamma}$  est un coefficient de couplage et  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes de la phase solide *in-vacuo*. Celui-ci prend en compte l'anisotropie du squelette par l'intermédiaire de la relation contrainte-déformation :

$$\hat{\sigma}_{ij}(u^s) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2.2)$$

$C_{ijkl}$  correspond au tenseur des rigidités élastiques. Il est également écrit sous forme condensée  $\mathbb{C}$  et il est lié au tenseur des souplesses  $\mathbb{S}$  présenté dans le premier chapitre 1.

Pour un matériau isotrope transverse, il est usuel d'exprimer en premier lieu cette matrice dans un référentiel associé aux plans d'isotropie du matériau. Dans ce travail et lorsque des rotations de ce plan d'isotropie seront considérées, ce tenseur sera remplacé par  $\mathbb{C}^* = \mathbf{R} \mathbb{C} \mathbf{R}^t$ , avec  $\mathbf{R}$  la matrice unitaire de rotation qui dépend de l'angle de rotation du plan d'isotropie.

Soit  $\Omega$  le domaine physique occupé par le matériau poreux (i.e. le cube) et  $\partial\Omega$  sa frontière. Celle-ci peut se décomposer en 3 surfaces :  $\partial\Omega_e$  sur laquelle est imposée l'excitation,  $\partial\Omega_t$  correspondant à la surface fixe et  $\partial\Omega_l$  correspondant à la surface latérale. Les conditions sur chacune des frontières sont :

- $\partial\Omega_e : u_z^s = u_z^t = u_i$ , où  $u_i$  correspond au déplacement imposé. Notons qu'une amplitude unité sera considérée du fait que le système est considéré comme linéaire.
- $\partial\Omega_t : u_x^s = u_y^s = u_z^s = u_x^t = u_y^t = u_z^t = 0$ . Cette condition est associée à l'annulation des déplacements sur cette frontière.
- $\partial\Omega_l : \sigma^s \cdot \mathbf{n} = p = 0$ . Cette condition revient à annuler les contraintes sur la surface latérale de l'échantillon. Il s'agit bien sûr d'une approximation mais elle peut être considérée acceptable lorsque l'hypothèse quasi-statique est valide.

La méthodologie pour obtenir la formulation variationnelle est classique et constituée de trois étapes. La première étape est la multiplication des équations (2.1a) et (2.1b) par des champs de déplacement  $\delta u^s$  et  $\delta u^t$ . Ces champs sont choisis pour être cinématiquement admissibles, c'est-à-dire qu'ils doivent satisfaire les conditions de champ nul sur  $\partial\Omega_t$ . La deuxième étape est l'intégration sur le volume du cube  $\Omega$ . La troisième étape est l'application de la formule de Green aux termes de contraintes. La formulation variationnelle s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} \hat{\sigma}(u^s) : \varepsilon(\delta u^s) - \omega^2(\tilde{\rho}_s u^s + \tilde{\gamma} \tilde{\rho}_{eq} u^t) \delta u^s \, d\Omega = \oint_{\partial\Omega_e} \hat{\sigma}(u^s) \cdot \mathbf{n} \delta u^s \, dS, \quad (2.3a)$$

$$\int_{\Omega} K_{eq} \nabla \cdot u^t \nabla \cdot \delta u^t - \omega^2 \tilde{\rho}_{eq} (\tilde{\gamma} u^s + u^t) \delta u^t \, d\Omega = \oint_{\partial\Omega_e} \tilde{K}_{eq} \nabla \cdot u^t \delta u^t \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (2.3b)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal sortant de la frontière. L'intégrale de frontière sur  $\partial\Omega_t$  est nulle puisque les conditions de déplacement y sont imposées. Celle sur  $\partial\Omega_l$  est nulle en raison de l'annulation des contraintes. Notons que les intégrales de surfaces correspondent à des termes de force alors que physiquement, il s'agit de déplacement imposé. Pour des problèmes linéaires, il peut être montré qu'il est aisé de passer de l'un à l'autre par des techniques de multiplicateur de Lagrange. Nous pouvons donc garder le formalisme force pour cette étape de validation.

Ces formulations sont alors discrétisées. Le domaine poreux  $\Omega$  est partitionné en  $n_e$  sous-domaines élémentaires  $\Omega_e$  associés aux éléments. Sur chacun de ses éléments, une interpolation quadratique est choisie. Les champs de déplacements solide et total peuvent alors être approchés sur l'élément  $e$  à l'aide des déplacements aux noeuds du maillage  $\mathbf{u}_e^s$ ,  $\mathbf{u}_e^t$  à l'aide de fonctions d'interpolation  $N_{u^s}^e$  et  $N_{u^t}^e$  d'ordre 2 et qui sont choisies identiques par souci de simplicité (et notées  $N_u^e$ ),

$$\left\{ \begin{array}{c} u_e^s \\ u_e^t \end{array} \right\} \approx [N_{u^s}^e | N_{u^t}^e] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_e^s \\ \mathbf{u}_e^t \end{array} \right\}. \quad (2.4)$$

Les matrices élémentaires et le vecteur force élémentaire peuvent ainsi être obtenus sur chaque élément. Notons que si un élément n'est pas lié à  $\partial\Omega_t$ , les forces élémentaires sont nulles. Les matrices globales de masse et de rigidité et le vecteur force sont obtenus par sommation de matrices

élémentaires.

Le système linéaire final s'écrit alors :

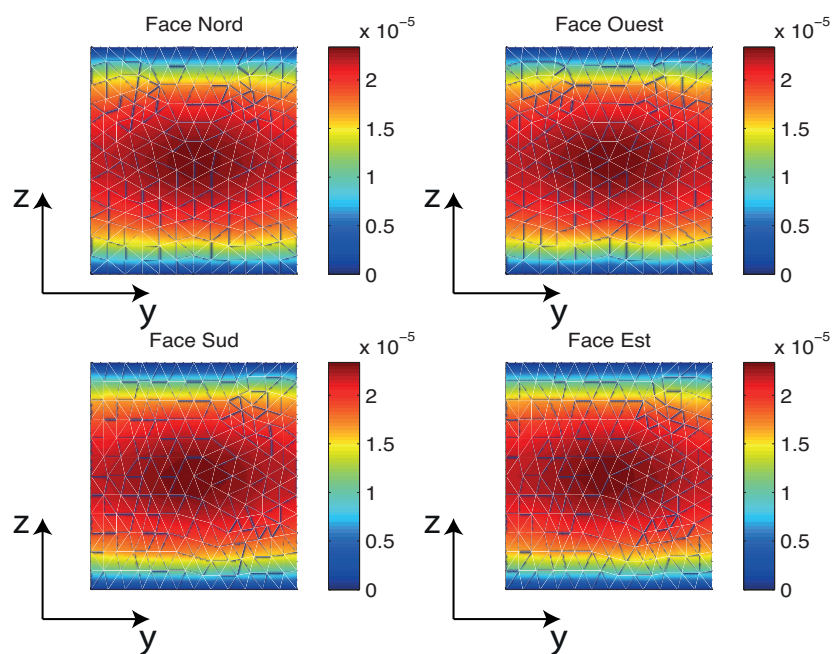
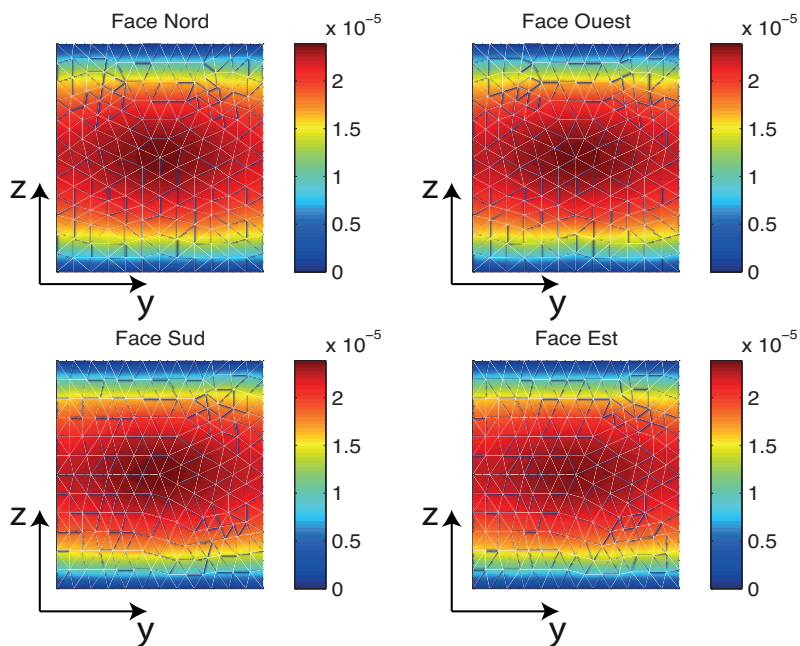
$$\left( \begin{bmatrix} \hat{P}[\mathbf{K}^s] & [0] \\ [0] & \tilde{K}_{eq}[\mathbf{K}^f] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_s[\mathbf{M}] & \tilde{\gamma}\tilde{\rho}_{eq}[\mathbf{M}] \\ \tilde{\gamma}\tilde{\rho}_{eq}[\mathbf{M}] & \tilde{\rho}_{eq}[\mathbf{M}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^s \\ \mathbf{F}^t \end{Bmatrix}. \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{u}^s$  et  $\mathbf{u}^t$  sont tous les deux de taille  $n$ . Ce système est de taille  $2n$  et mathématiquement équivalent à celui obtenu par une discrétisation soit  $\{\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^f\}$  soit  $\{\mathbf{u}^s, \mathbf{w}\}$  des formulations de la théorie de Biot.

### 2.4.2 Validation du modèle

Avant de comparer les simulations aux déplacements expérimentaux, il a été nécessaire de valider cette implémentation. Pour ce faire, nous avons comparé nos résultats à ceux obtenus par une implémentation de la formulation  $\{\mathbf{u}^s, p\}$ . Celle-ci a été réalisée dans un laboratoire partenaire (Markus Wallenberg Laboratory -KTH, Suède). Le cas de validation est celui d'un cube de mousse acoustique de matériau  $B$  (les caractéristiques sont présentées section 2.3) de dimensions  $L_0 = 4$  cm. Par soucis de concision, un seul résultat sera présenté dans ce manuscrit.

La figure 2.9 (resp. 2.10) présente les champs de déplacements des faces latérales dans le cas de la formulation  $\{\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^t\}$  (resp.  $\{\mathbf{u}^s, p\}$ ).

FIGURE 2.9 – Profil des déplacements normaux sur les 4 faces ; formulation  $\{\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^t\}$ .FIGURE 2.10 – Profil des déplacements normaux sur les 4 faces ; formulation  $\{\mathbf{u}^s, p\}$ .

L'analyse des figures nous montre une bonne concordance visuelle. Celle-ci a été complétée par une analyse plus quantitative. Pour cette configuration et ce matériau, les déplacements des centres



des quatre faces doivent être identiques. Le tableau 2.2 présente les valeurs des déplacements aux centres des faces pour les deux formulations  $\{\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^t\}$  et  $\{\mathbf{u}^s, p\}$ .

Face	Nord	Ouest	Sud	Est
Déplacements $\mathbf{u}^s$ (m) de $\{\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^t\}$	$0.2339.10^{-4}$	$0.2338.10^{-4}$	$0.2337.10^{-4}$	$0.2333.10^{-4}$
Déplacements $\mathbf{u}^s$ (m) de $\{\mathbf{u}^s, p\}$	$0.2390.10^{-4}$	$0.2383.10^{-4}$	$0.2387.10^{-4}$	$0.2362.10^{-4}$

TABLE 2.2 – Maxima des déplacements des quatre faces pour les deux formulations  $\{\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^t\}$  et  $\{\mathbf{u}^s, p\}$ .

On observe donc que les valeurs des déplacements pour chacune des deux implémentations présentent une erreur d'environ  $-0.09$  dB due à la discrétisation. Cette erreur peut être considérée comme négligeable. Celle-ci est exprimée en dB et la formulation  $\{\mathbf{u}^s, p\}$  est pris comme référence. D'autre part, l'erreur entre les moyennes de déplacements des 4 faces pour ces deux simulations est de  $-0.08$  dB.

La présente implémentation de la formulation  $\{\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^t\}$  est donc validée.

## 2.5 Analyse des champs de déplacements des surfaces latérales

Nous allons maintenant présenter l'analyse des profils de déplacement normal des faces latérales du cube. Celle-ci est à la fois expérimentale et numérique. L'objectif principal de cette section est d'obtenir des profils types de déformations qui permettent d'identifier le type d'anisotropie du matériau considéré.

### 2.5.1 Matériau isotrope

#### 2.5.1.1 Résultats expérimentaux

Le tableau (2.3) présente tout d'abord les modules élastiques apparents mesurés pour les quatre faces dans les configurations n°1 et n°3.

Configuration	Indicateur	Nord	Ouest	Sud	Est	Valeur moyenne	Ecart type
1	$E_{A_3}(kPa)$	334	332	350	336	338	8.1650
3	$E_{A_1}(kPa)$	561	585	592	605	585.7500	18.4639

TABLE 2.3 – Module élastique apparent suivant les quatre faces.

On peut tout d'abord remarquer que les mesures associées à chaque configuration sont cohérentes entre elles. En effet, une moyenne de 338 (resp. 586)  $kPa$  et un écart type de 8.1650 (resp. 18.4639) pour la configuration n°1 (resp. 3) sont obtenus. L'écart entre les deux valeurs moyennes est cependant relativement important (42 %). Ce résultat peut apparaître aberrant de prime abord. Il s'explique par la compression initiale de l'échantillon. Celle-ci est due à la difficulté de contrôler exactement la compression initiale de l'échantillon. Ceci est dû au système de compression vis-écrou

qui règle la plaque supérieure, fixée au début de la configuration et ne peut malheureusement pas être précis. Ainsi, entre deux mesures séparées par un vissage-dévisage de l'échantillon, l'état de compression ne sera pas exactement le même et se traduit quasiment systématiquement par des écarts notables entre les valeurs mesurées. Entre deux rotations de l'échantillon pour obtenir les 4 mesures NSE0, le dispositif n'est pas démonté ceci explique les écarts types relativement bons. Nous reviendrons plus en détail sur ce phénomène au Chapitre 3.

La figure 2.11 présente les champs de déplacements de la mousse isotrope de la configuration n°1. Ceux-ci sont représentés par une échelle de couleur en fonction de la position géométrique sur la face considérée. Pour la visualisation, les mesures sont interpolées suivant un maillage ( $150 \times 150$ ). Les amplitudes des champs de déplacements normaux des quatre faces sont présentées avec une échelle identique. Nous pouvons remarquer un certain nombre de points aberrants (en blanc sur les figures). Pour ces points, la mesure n'est pas fiable et n'est pas considérée.

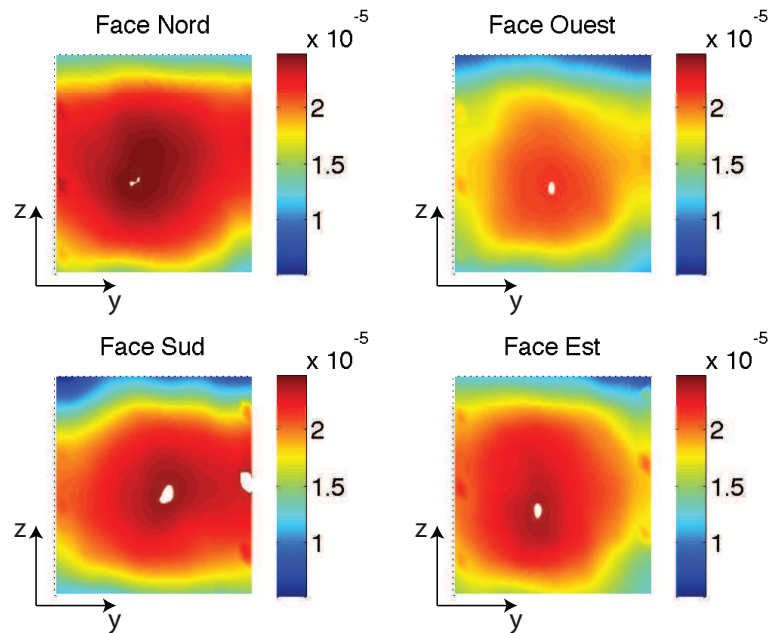


FIGURE 2.11 – Champs de déplacements expérimentaux pour les quatre faces du matériau A : configuration n°1.

L'analyse des champs de déplacements normaux mesurés est effectuée par l'analyse des lignes des niveaux. Les déplacements mesurés pour les quatre faces présentent les mêmes tendances. Le profil général des lignes de niveau est celui d'ellipses imbriquées centrées autour du maximum du champ mesuré. Au voisinage des bords de l'échantillon, en haut et en bas, les lignes de niveaux s'aplatissent. Notons que les centres de ces ellipses ne correspondent pas exactement aux centres géométriques des surfaces de l'échantillon. Afin de quantifier ce phénomène, les décalages entre les positions des maxima et celle des centres des faces sont présentés dans le tableau (2.4).

Indicateur	Nord	Ouest	Sud	Est
décalage horizontal en cm	0.31	0	-0.31	0.31
décalage vertical en cm	0.31	0.31	0	0.31

TABLE 2.4 – Décalage des centres des ellipses par rapport aux centres géométriques : configuration n°1.

Pour ce matériau, notons que ces décalages sont relativement faibles et de l'ordre du pas minimum. Afin de compléter l'analyse, considérons la configuration n°3. Les champs de déplacements sont présentés figure 2.12. Tout d'abord, les niveaux des champs de déplacements sont moins importants que ceux observés dans la configuration n°1. Ceci peut s'expliquer par la différence de module élastique apparent précédemment observée. Notons une seconde différence : les foyers des ellipses sont plus éloignés des centres géométriques des faces que dans le cas de la configuration n°1. Ces écarts sont présentés dans le tableau (2.5) et se font principalement vers le bas. Le fait que la compression de l'échantillon n'est pas uniforme sur toute la hauteur est donc mis en évidence. Ce décalage ne pouvait être observé avec le laser monopoint qui pointait au centre de l'échantillon. Cela montre l'intérêt du dispositif développé dans ce travail et met en évidence la nécessité de développer des algorithmes spécifiques pour la caractérisation des paramètres afin de prendre en compte ces décalages.

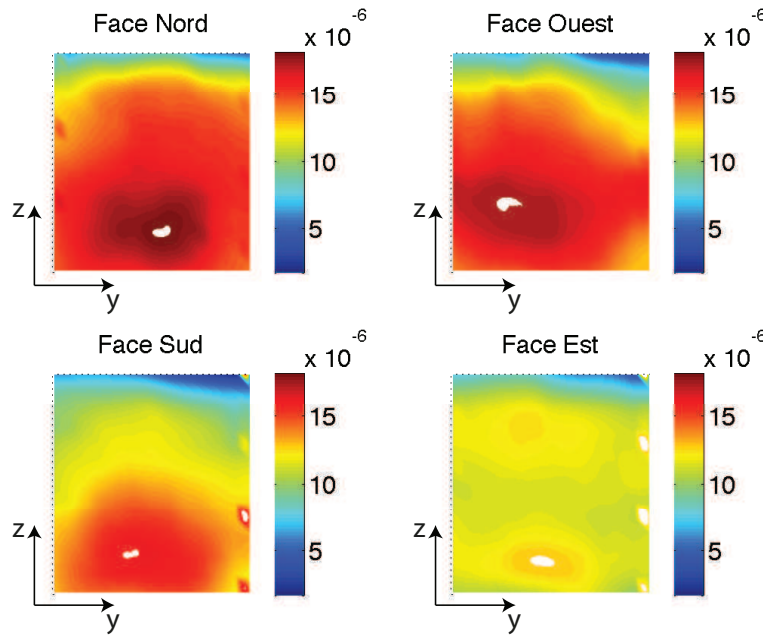


FIGURE 2.12 – Champs de déplacements expérimentaux pour les quatre faces du matériau A : configuration n°3.

Indicateur	Nord	Ouest	Sud	Est
décalage en y cm	-0.31	0.93	0.31	0.31
décalage en z cm	1.24	0.62	1.24	1.24

TABLE 2.5 – Décalage des centres des ellipses par rapport aux centres géométriques : configuration n°3.

Afin de proposer une conclusion partielle, voici les premières remarques que nous pouvons formuler en rapport avec ces mesures sur ce matériau.

- une variation de module élastique notable (42%) est observée dans les différentes directions,
- les formes géométriques au voisinage du maximum de déplacement sont des ellipses concentriques,
- le centre de ces ellipses peut être décalé par rapport au centre des faces.

### 2.5.1.2 Résultats numériques

Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus à l'aide de la Méthode des Éléments Finis. Notons que les propriétés des matériaux n'étant pas exactement connues à ce stade, nous avons dû faire des hypothèses. Ainsi, les valeurs des paramètres élastiques du modèle éléments-finis sont les valeurs moyennes des modules élastiques apparents mesurés pour les quatre faces. La matrice des rigidités  $\mathbf{C}$  est construite sous l'hypothèse que le module de Young  $E$  est identique à la moyenne des modules élastiques apparents. Le module d'Young est égal au module élastique apparent à une constante près. Deux valeurs arbitraires du coefficient de Poisson sont choisies (car relativement courantes pour les matériaux considérés) pour compléter les données d'entrée. Les champs de déplacements normaux des quatre faces sont représentés figure 2.13 pour un coefficient de Poisson  $\nu = 0.28$  et figure 2.14 pour un coefficient de Poisson  $\nu = 0.4$ .

La même interprétation des champs de déplacements à partir des lignes de niveaux, que le cas expérimental, est effectuée. Les champs de déplacements des quatre faces sont, cette fois-ci, identiques. Des groupes d'ellipses imbriquées centrées autour des maxima des champs sont identifiées. La distance entre les deux foyers de chaque ellipse augmente en fonction de la diminution de l'amplitude des champs de déplacements. De plus, cette distance est plus importante dans le cas de la figure 2.14 que dans le cas de la figure 2.13. C'est un résultat classique de l'influence du coefficient de Poisson. Ainsi, pour une mousse isotrope cubique et pour des faibles valeurs de coefficients de Poisson, les formes géométriques des lignes de niveaux se rapprochent de celles du problème équivalent 1D, à savoir les foyers des ellipses repoussés à l'infini. Pour d'importantes valeurs de coefficients de Poisson, les formes géométriques des lignes de niveaux se rapprochent de celles du problème limite  $\nu = 0.5$ . Par conséquent, pour des valeurs du coefficient de Poisson qui tendent vers 0, le problème est unidirectionnel, cela revient à des dimensions latérales infinies. Avec l'accroissement du coefficient de Poisson, le problème devient tridimensionnel.

Nous remarquons que le modèle éléments-finis n'est pas en mesure de traduire le décalage vers le bas des maxima de déplacement. Pour cela, il serait nécessaire de connaître exactement les inhomogénéités ainsi que les phénomènes (complexes) de déplacement aux interfaces. Néanmoins, il apparaît nécessaire de mener une étude locale autour des maxima afin de mettre en évidence l'effet Poisson.

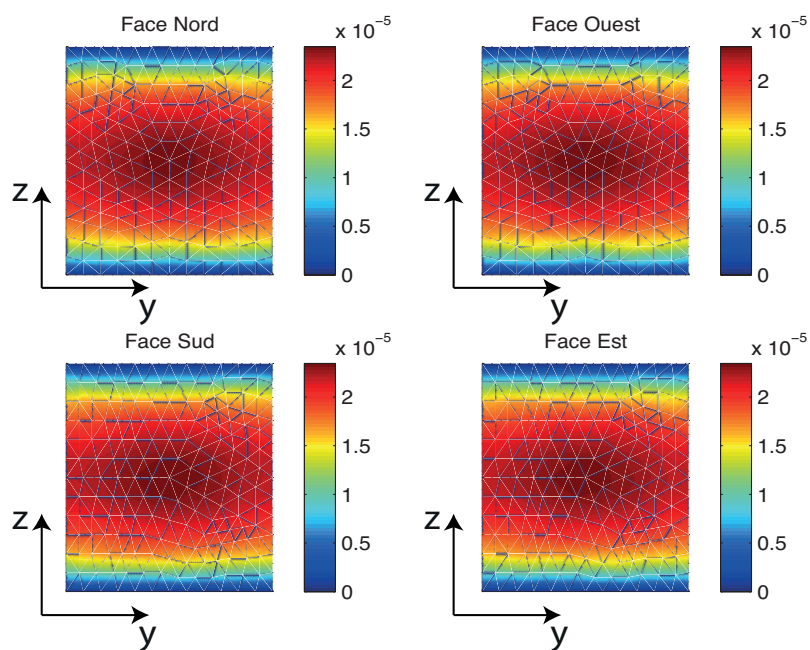


FIGURE 2.13 – Champs de déplacements normaux des quatre faces du cube : modèle isotrope coefficient de Poisson = 0.28.

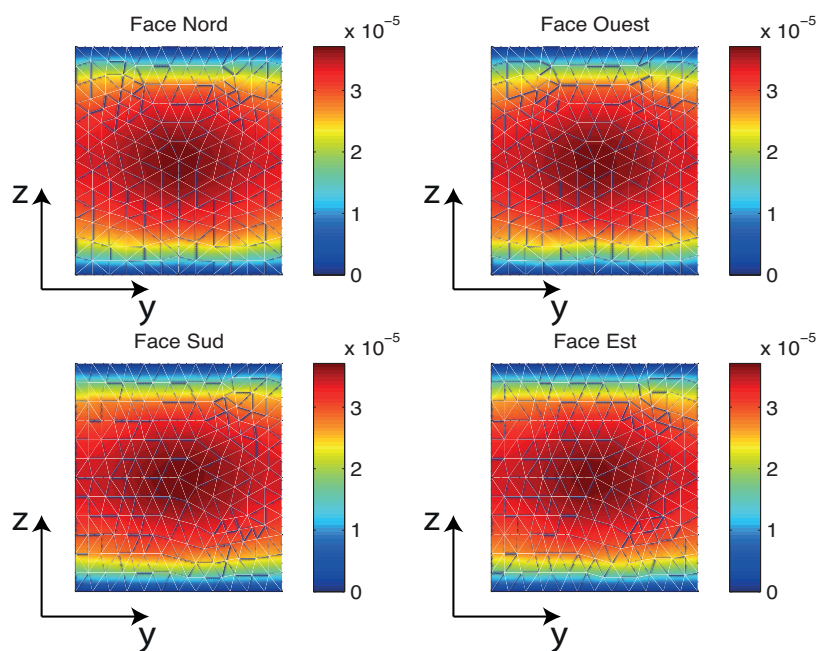


FIGURE 2.14 – Champs de déplacements normaux des quatre faces du cube : modèle isotrope coefficient de Poisson = 0.4.

### 2.5.2 Matériau isotrope transverse

Le matériau isotrope transverse (B) est maintenant considéré. Nous présentons les résultats expérimentaux dans les deux cas (avec et sans rotation du plan d'isotropie) ainsi que ceux obtenus à l'aide de la MEF.

#### 2.5.2.1 Plan isotropie droit (parallèle à l'interface)

Nous présentons les mesures dans les configurations 1 et 2. Tout d'abord, les modules élastiques apparents mesurés pour les quatre faces sont présentés dans le tableau 2.6.

Configuration	Indicateur	Nord	Ouest	Sud	Est	Valeur moyenne	Ecart type
1	$E_{A_3}(kPa)$	641.04	676.54	665.72	667.65	662.7375	15.2131
2	$E_{A_2}(kPa)$	400.78	462.23	412.05	424.78	424.96	26.711

TABLE 2.6 – Module élastique apparent suivant les quatre faces.

L'écart relatif entre les valeurs moyennes des modules élastiques apparents dans les deux configurations est de 35 %. De la même manière que le cas de la mousse isotrope, cet écart est imputé à la compression de l'échantillon. La figure 2.15 présente les champs de déplacements de la mousse isotrope dans la configuration 1.

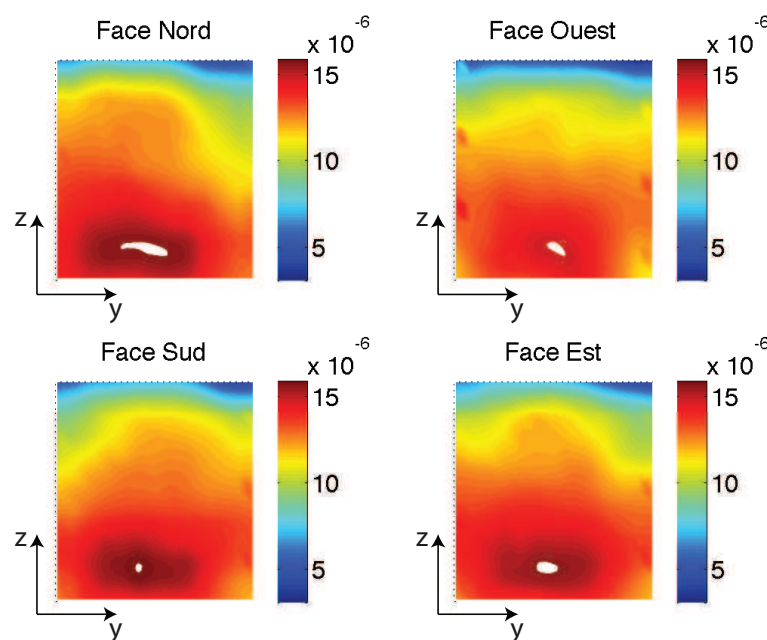


FIGURE 2.15 – Champs de déplacements expérimentaux pour les quatre faces du matériau B (isotrope transverse) : configuration n°1.

Les ellipses imbriquées sont également décalées vers le bas et les foyers des ellipses sont éloignés des maxima de déplacements. Le tableau 2.7 montre les décalages entre les maxima des champs

mesurés et le centre géométrique des faces.

Indicateur	Nord	Ouest	Sud	Est
décalage en y cm	0.31	0	0.31	0.31
décalage en z cm	1.24	1.24	1.24	1.24

TABLE 2.7 – Décalage des ellipses par rapport aux centres géométriques : configuration n°1.

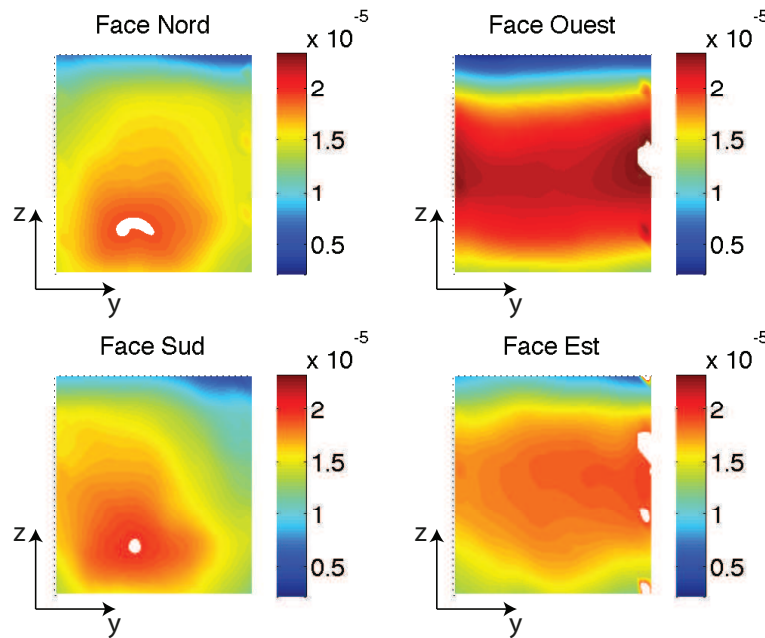


FIGURE 2.16 – Champs de déplacements expérimentaux pour les quatre faces du matériau B (isotrope transverse) : configuration n°2.

La figure 2.16 présente les champs de déplacements de la mousse isotrope transverse dans la configuration n°2. Nous voyons alors une différence avec la mesure pour le matériau isotrope. Pour la paire de face Nord-Sud, l'allure des déformées fait apparaître une tache associée au maximum. Pour la paire Est-Ouest, nous voyons, au contraire, que la zone maximale de déplacement n'est plus un point mais une bande presque rectiligne. Afin de faciliter la compréhension, la figure 2.17 représente les plans d'isotropie transverse dans les deux configurations. Une différence entre les deux matériaux est observée et il est nécessaire d'effectuer les différentes rotations de l'échantillon afin d'avoir des mesures complémentaires.

### 2.5.2.2 Cas d'un décalage angulaire

Nous considérons maintenant le matériau présentant un décalage angulaire. Le tableau 2.8 liste les modules élastiques apparents pour les quatre faces des configurations n°1 et n°2. Les mêmes conclusions que pour les autres matériaux peuvent être formulées vis à vis de la cohérence des mesures pour chacune des configurations et de l'écart entre les mesures.

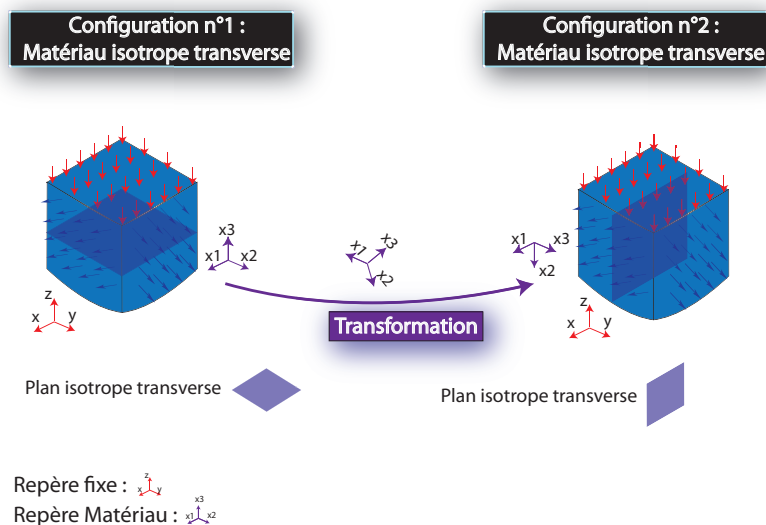


FIGURE 2.17 – Illustration des configurations du matériau B (isotrope transverse).

Configuration	Indicateur	Nord	Ouest	Sud	Est	Valeur moyenne	Ecart type
1	$E_{A_3}(KPa)$	620.04	590.10	574.14	639.95	606.0575	29.5386
2	$E_{A_2}(KPa)$	244.96	253.97	317.42	296.88	278.3075	34.5403

TABLE 2.8 – Module élastique apparent suivant les quatre faces.

Les figures 2.18 et 2.19 présentent respectivement les champs de déplacements de cette mousse dans les configurations n°1 et n°3. Nous pouvons cette-fois ci, remarquer que les profils de déplacements n'ont plus du tout la même allure que ceux des deux premiers cas. Ainsi, nous pouvons noter la rotation des axes des différentes ellipses imbriquées. Ceci constitue un indicateur de ce type d'anisotropie.



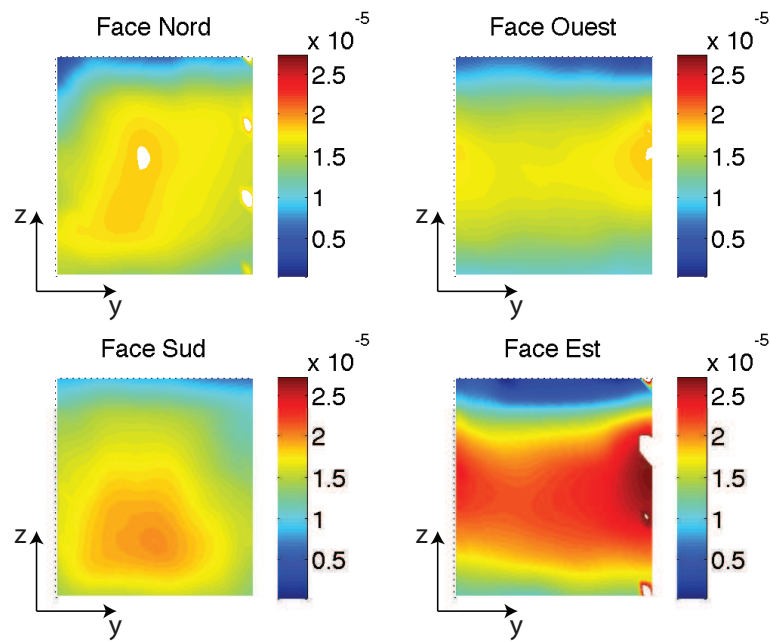


FIGURE 2.18 – Champs de déplacements expérimentaux pour les quatre faces du matériau B (isotrope transverse avec rotation) : configuration n°1.

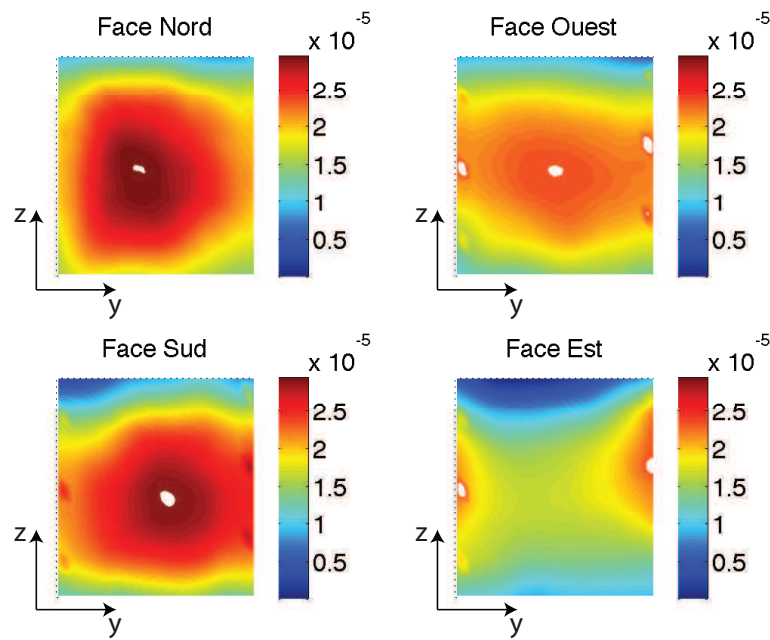


FIGURE 2.19 – Champs de déplacements expérimentaux pour les quatre faces du matériau B (isotrope transverse avec rotation) : configuration n°2.

### 2.5.2.3 Résultats numériques

De manière complémentaire et afin de faciliter l'interprétation des résultats expérimentaux, nous présentons maintenant les résultats numériques pour le matériau isotrope transverse. Comme pour le matériau isotrope, les paramètres mécaniques retenus sont les valeurs moyennes des modules élastiques apparents mesurés pour les quatre faces afin de construire la matrice de rigidité. Elle est également construite à partir de deux coefficients de Poisson  $\nu = 0.25$  et  $\nu_3 = 0.33$ . Ces valeurs sont choisies arbitrairement. Ainsi, ce problème direct est résolu par éléments-finis avec la matrice des rigidités  $\mathbf{C}^* = \mathbf{R}\mathbf{C}\mathbf{R}^t$  où  $\mathbf{C}$  est identique à la matrice des rigidités du matériau isotrope transverse. La matrice  $\mathbf{R}$  est associée à une rotation de  $45^\circ$ .

Les champs de déplacements normaux des quatre faces de la configuration n°1 sont représentés figure 2.20. Les champs de déplacements normaux des quatre faces de la configuration n°2 sont représentés figure 2.21 et la figure 2.22 permet de visualiser la position du plan d'isotropie.

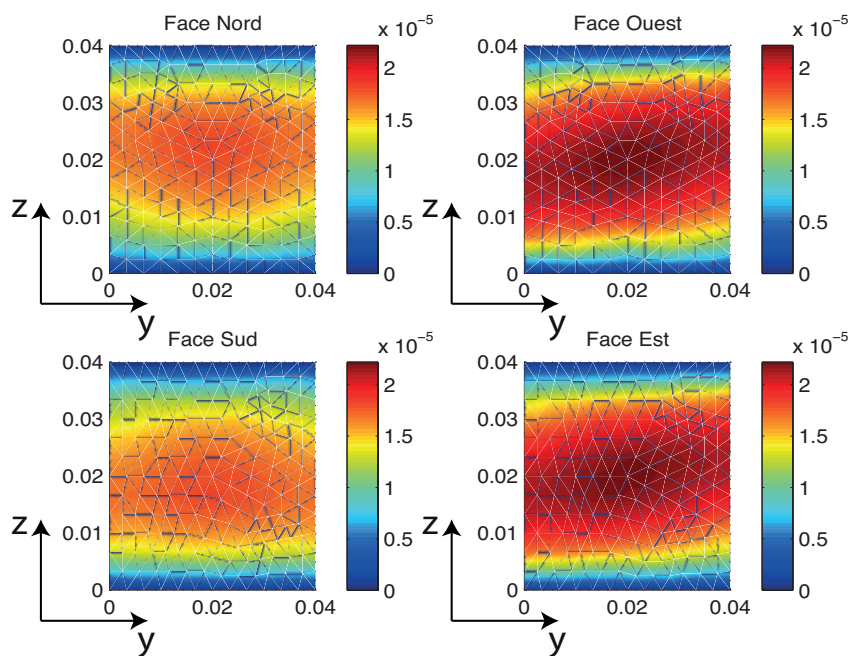


FIGURE 2.20 – Champs de déplacements simulés : modèle isotrope transverse avec rotation configuration n°1.

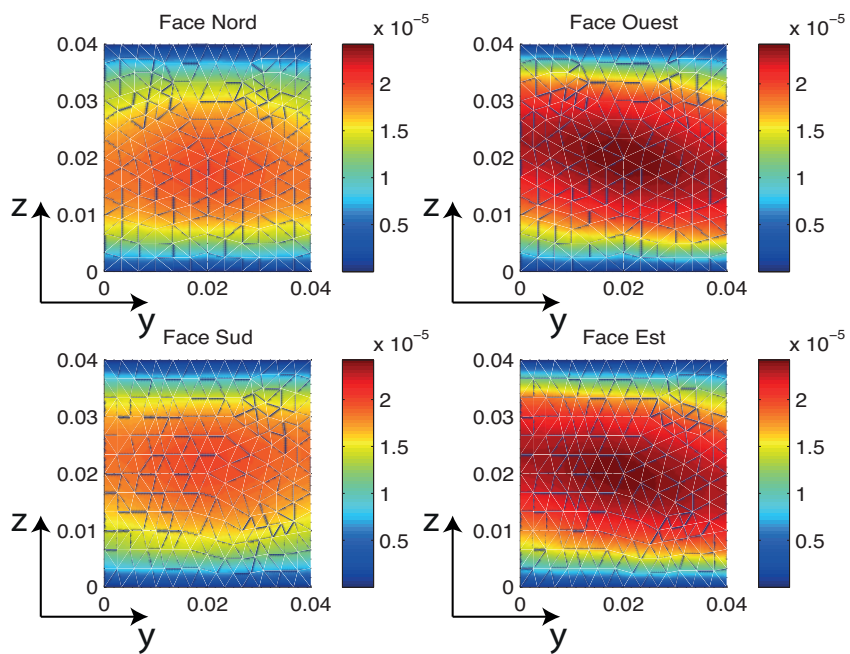


FIGURE 2.21 – Champs de déplacements simulés : modèle isotrope transverse avec rotation configuration n°2.

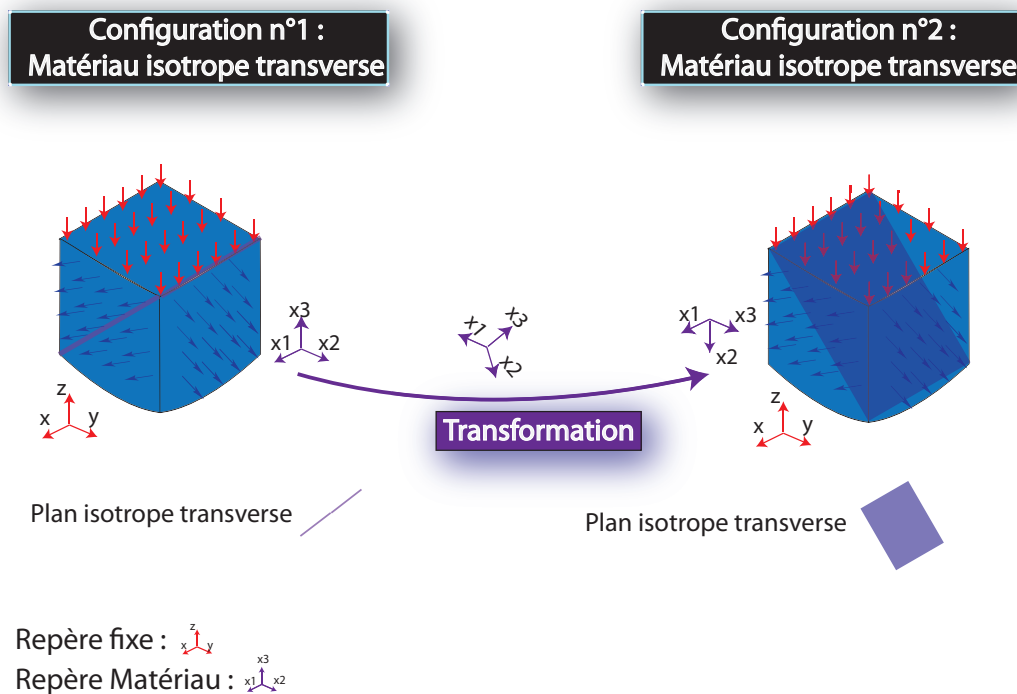


FIGURE 2.22 – Visualisation du plan d’isotropie dans les configurations 1 et 2

Nous retrouvons le fonctionnement par paires de faces de la configuration n°2 du cas isotrope transverse. Pour la paire (Nord-Sud) on observe des ellipses imbriquées autour des maxima des déplacements et des barres rectilignes pour les faces Ouest et Est. On visualise les différences de niveau du déplacement et on peut également remarquer la rotation des axes des différentes formes géométriques.

### 2.5.3 Conclusion partielle

L’analyse expérimentale et numérique des champs de déplacements nous a permis de dégager des caractéristiques typiques de trois catégories d’anisotropie. Le tableau 2.9 les récapitule. Nous avons donc été en mesure de répertorier les différents types de symétrie. Nous avons également remarqué que les mesures expérimentales présentaient des décalages notables entre les centres des maxima et les centres géométriques des faces.

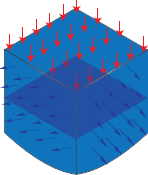
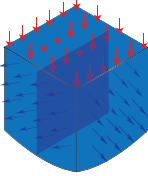
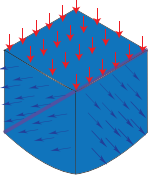
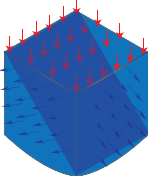
Types d'anisotropie	Caractéristiques	
Isotrope	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Déplacements identiques sur les 4 faces</li> <li>• Ellipses imbriquées centrées sur les maxima</li> <li>• Distances entre les foyers : indicateur du coefficient de Poisson</li> </ul>	
Isotrope Transverse	Conf 1  	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Déplacements identiques sur les 4 faces</li> <li>• Ellipses imbriquées centrées sur les maxima</li> <li>• Distances inter foyers plus important que le cas isotrope</li> </ul>
	Conf 2  	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Faces qui s'apparient par paire (Nord-Sud) &gt; (Ouest-Est)</li> <li>• Paire d'ellipses imbriquées centrées sur les maxima</li> <li>• Paire faisant apparaître des bandes rectilignes</li> </ul>
Isotrope Transverse avec rotation	Conf 1  	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Paire (Nord-Sud) ellipses imbriquées centrées sur les maxima</li> <li>• Paire (Ouest-Est) rotation dans le sens anti-horaire</li> </ul>
	Conf 2  	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Paire (Ouest-Est) rotation dans le sens horaire</li> <li>• Paire (Nord-Sud) ellipses imbriquées centrées sur les maxima fonctionnement inversé par rapport à la Conf1</li> </ul>

TABLE 2.9 – Récapitulatif des résultats obtenus.

## 2.6 Méthode de détermination des coefficients de Poisson

### 2.6.1 Problème d'optimisation : définition de la fonction coût

L'objectif de cette section est de déterminer les coefficients de Poisson pour chacun des types de symétrie rencontrés précédemment. Nous rappelons que les modules élastiques sont mesurés directement. Pour ce faire, un problème d'optimisation en comparant données expérimentales et issues de problème éléments-finis est résolu. Celui-ci consiste en la minimisation d'une fonctionnelle quadratique associée à la distance entre deux indicateurs, l'un construit à partir des données expérimentales  $g_{exp}(\nu)$  et l'autre à partir des simulations éléments-finis  $g_{EF}$  :

$$J(\nu) = |g_{EF}(\nu) - g_{exp}|^2, \quad (2.6)$$

où  $\nu$  correspond aux inconnues recherchées. Pour le cas de la mousse isotrope nous recherchons un paramètre unique. Afin de bien chercher un minimum local ayant un sens physique, nous le rechercherons dans une gamme de variation allant de 0.1 à 0.5. Nous effectuerons une méthode de balayage pour rechercher ce minimum et nous considèrerons un pas de balayage égal à 0.05. La valeur recherchée sera associée à la plus petite valeur de la fonctionnelle  $J$ . Pour les mousses isotrope transverse et isotrope transverse avec rotation, l'inconnue  $\nu$  correspond à deux valeurs, celles des coefficients de Poisson  $\nu$  et  $\nu_3$ . Une fois de plus, nous les ferons également varier entre 0.1 et 0.5 par pas de 0.05.

Nous présentons maintenant les fonctions  $g_{EF}$  et  $g_{exp}$  sur lesquelles nous effectuerons la minimisation. Nous avons fait un premier choix : celui-ci était de ne pas minimiser des différences entre profils expérimentaux et numériques sur toute la surface. Cela ne nous semblait pas optimal tant d'un point de vue temps de calcul que d'un point de vue pertinence des résultats obtenus. En effet, nous avons également remarqué dans la partie précédente que les maxima de déplacement ne sont pas situés au centre géométrique des faces. Le modèle éléments-finis n'était pas en mesure de prendre en compte le déplacement des maxima. Nous avons donc décidé d'effectuer la minimisation à partir d'un petit nombre de points situés au voisinage du maximum de déplacement. Deux cas sont considérés : un cas en dimension 0 (un point) et un cas en dimension 2 (une croix de 9 points). Celle-ci est représentée figure 2.23. Le point 1 est celui qui est considéré dans le cas de l'inversion en dimension 0. Les indicateurs servant de base à la modélisation sont définis de manière similaire

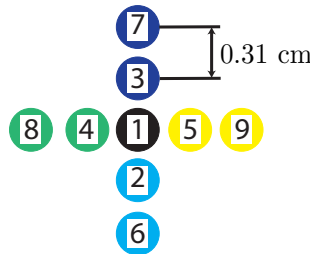


FIGURE 2.23 – Croix de 9 points.

pour les résultats expérimentaux (indice  $exp$ ) et éléments-finis (indice  $EF$ ) comme

$$\{g\}_{k=1,\dots,N} = \frac{u_k}{w}. \quad (2.7)$$

L'indice  $k$  est associé aux différents points ( $N$  valant 1 ou 9 en fonction de l'inversion considérée),  $u_k$  le déplacement du point considéré et  $w$  le déplacement vertical de la plaque.

Pour chaque face, deux positions de croix sont utilisées. Les croix sont soit centrées sur les maxima de déplacements, soit centrées au centre géométrique des faces. Pour le reste du document la **situation n°1** est définie comme l'inversion centrée sur la valeur du maximum des déplacements normaux, la **situation n°2** correspond à l'inversion centrée sur le centre géométrique de la face considérée.

### 2.6.2 Mousse isotrope

Dans cette section, les coefficients de Poisson sont déterminés et analysés. Le premier cas est la détermination pour une mousse isotrope. Pour faciliter le problème de minimisation, une interface graphique a été développée sous MATLAB. La figure 2.24 montre l'interface graphique pour le cas où l'inversion est faite sur un seul point et dans la situation 1. Cette interface permet de visualiser les champs de déplacements expérimentaux sur les quatre faces ainsi que la valeur de la fonctionnelle pour le profil expérimental associé à la face considérée. Le point de base de l'indicateur expérimental est repéré en noir sur les champs de déplacements surfaciques des faces latérales du cube. La fonctionnelle  $J(\nu)$  est présentée pour chacune des faces. Nous pouvons voir que cette fonctionnelle correspond bien à un minimum.

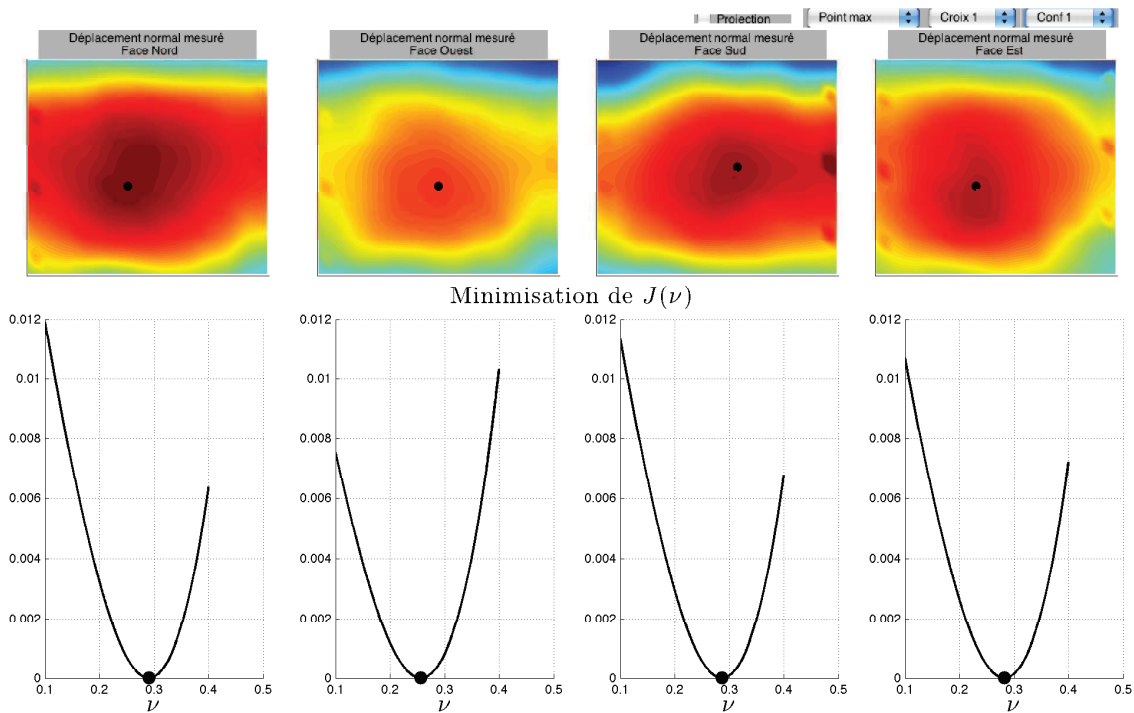


FIGURE 2.24 – Interface utilisateur du logiciel de minimisation

Il semble ainsi facile de déterminer les coefficients de Poisson déterminés par la procédure de minimisation pour les quatre faces et pour les deux situations (centre et maxima). Les résultats sont présentés dans la table 2.10. Ils sont cohérents et présentent un bon accord entre eux. La valeur moyenne des coefficients de Poisson des quatre faces de l'inversion ponctuelle en situation

n°1 est 0.2792. La valeur moyenne des coefficients de Poisson des quatre faces obtenues par l'inversion ponctuelle en situation n°2 est 0.2762. L'erreur relative de détermination du coefficient de Poisson est de l'ordre de 1%. Ce faible écart s'explique du fait que les centres des ellipses et les centres géométriques des faces sont proches. De plus, puisque les champs de déplacements sont relativement identiques sur les quatre faces et symétriques suivant leurs maxima, une inversion ponctuelle positionnée aux centres des faces suffit à déterminer le coefficient de Poisson.

Situation	Indicateur	Nord	Ouest	Sud	Est	Valeur moyenne	Ecart type
1	$\nu$	0.291	0.257	0.287	0.282	0.2792	0.0153
2	$\nu$	0.29	0.255	0.284	0.276	0.2762	0.0153

TABLE 2.10 – Coefficient de Poisson configuration n°1 : inversion dimension 0.

Pour améliorer les résultats de cette étude la minimisation est également effectuée sur les points d'une croix. La figure 2.25 présente l'interface graphique associée à ce problème. La croix de 9 points

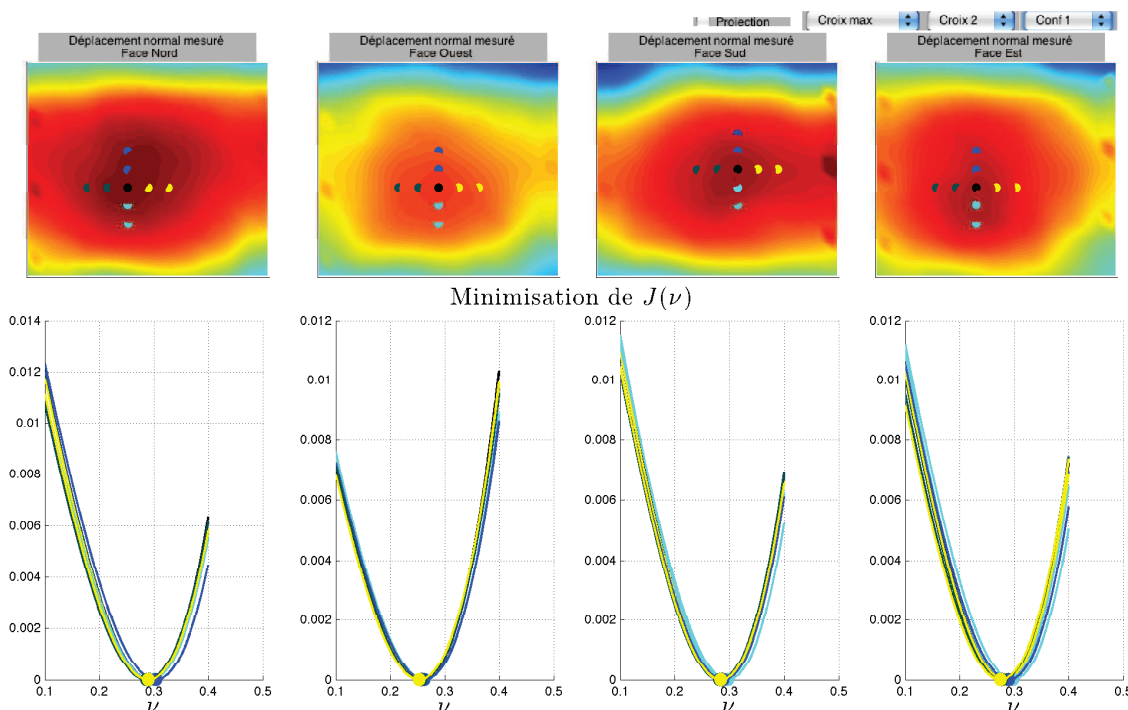


FIGURE 2.25 – Détermination des coefficients de Poisson à partir de la croix d'inversion 9 points.

est matérialisée pour les quatre faces du cube. Les fonctionnelles  $J(\nu)$  sont représentées pour chacun des points afin de montrer l'influence du coefficient de Poisson. Nous pouvons remarquer le bon accord entre les différents résultats. Les résultats de l'étude pour les deux situations et pour les quatre faces sont présentés dans le tableau 2.11. La valeur moyenne est de 0.28 et est réaliste pour ce genre de mousse. Ces résultats sont confirmés par des mesures dans la configuration n°3 (figure 2.9). Les résultats sont regroupés dans le tableau 2.12.



Situation	Indicateur	Nord	Ouest	Sud	Est
1	Valeur moyenne $\nu$	0.2930	0.2580	0.2872	0.2833
1	Ecart type $\nu$	0.0047	0.0030	0.0043	0.0070
2	Valeur moyenne $\nu$	0.2928	0.2556	0.2867	0.2786
2	Ecart type $\nu$	0.0042	0.0055	0.0062	0.0091

TABLE 2.11 – Coefficient de poisson pour le matériau isotrope en configuration n°1 : inversion dimension 2.

Situation	Indicateur	Nord	Ouest	Sud	Est
1	Valeur moyenne $\nu$	0.2609	0.2571	0.2428	0.1980
1	Ecart type $\nu$	0.0045	0.0021	0.0036	0.0043
2	Valeur moyenne $\nu$	0.2419	0.2410	0.2090	0.1881
2	Ecart type $\nu$	0.0089	0.0104	0.0158	0.0074

TABLE 2.12 – Coefficient de poisson pour le matériau isotrope en configuration n°3 : inversion dimension 2.

Le coefficient de Poisson moyen de l'inversion 2D en situation n°1 est 0.2397 et un écart type de 0.0289 est relevé. Pour l'inversion 2D en situation n°2 le coefficient de Poisson moyen est 0.2200 et l'écart type est 0.0262. L'erreur relative de détermination du coefficient de Poisson est de l'ordre de 8%. Il semble qu'un coefficient de Poisson autour de 0.23 dans ce cas soit réaliste pour cette configuration. Les principaux résultats obtenus sont rappelés tableau 2.13. L'erreur relative entre les deux procédures est de l'ordre de 1%.

Dimension de l'inversion	Configuration n°1		Configuration n°3	
0	Situation n°1 $\nu = 0.2792$	Situation n°2 $\nu = 0.2762$	Situation n°1 $\nu = 0.241$	Situation n°2 $\nu = 0.215$
2	Situation n°1 $\nu = 0.2804$	Situation n°2 $\nu = 0.2784$	Situation n°1 $\nu = 0.2397$	Situation n°2 $\nu = 0.22$

TABLE 2.13 – Résultats principaux pour le coefficient de Poisson du matériau isotrope.

## 2.7 Conclusion

La caractérisation de l'anisotropie naturelle des matériaux poreux était l'objectif de ce chapitre. Pour le réaliser, trois types d'anisotropies ont été étudiés. Ces types présentent un niveau de complexité croissant avec les matériaux isotrope, isotrope transverse et isotrope transverse avec rotation de 45° (les plans isotropes sont en décalage angulaire avec la direction d'excitation). Des échantillons cubiques, pour des raisons de simplicité, ont été utilisés.

Pour caractériser l'anisotropie naturelle, un dispositif expérimental spécifique (amélioration du rigidimètre pour la mesure de champs de déplacements des surfaces latérales du cube) et un modèle

éléments finis 3D (formulation  $\{\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^t\}$ ) ont été développés. Ces moyens ont permis d'effectuer une analyse des champs de déplacements par lignes de niveaux et une détermination des coefficients de Poisson.

L'apport d'une analyse des champs de déplacements surfaciques permet, par de simples considérations géométriques, d'obtenir des indicateurs sur le type d'anisotropie rencontré. Il a été montré que les lignes de niveaux d'un matériau isotrope présentent des ellipses imbriquées centrées autour du maximum du champ. Pour un matériau isotrope transverse il a été intéressant de noter qu'une rotation de l'échantillon permet d'identifier les effets dus à l'orientation des plans isotropes. Lorsque les plans sont perpendiculaires à la surface du cube, il a été identifié que les lignes de niveaux forment des ellipses imbriquées centrées autour du maximum du champ. De plus, lorsque les plans sont parallèles à la surface du cube, il a été montré que les lignes de niveaux sont des barres rectilignes. Il a également été identifié que la rotation de  $45^\circ$  des plans apporte un complément à l'analyse du matériau isotrope transverse avec une rotation des axes des différentes formes géométriques.

Pour déterminer les coefficients de Poisson, une technique d'optimisation a été utilisée à partir des déplacements surfaciques mesurés et modélisés. Pour ce faire, une inversion de dimension 2 en utilisant une croix de neuf points a été réalisée. Les indicateurs expérimentaux et éléments finis, ainsi obtenus, ont permis d'obtenir des coefficients de Poisson provenant de données statistiques. Ainsi, pour le matériau isotrope un coefficient de Poisson autour de 0.3 a été obtenu. Dans ce cas, l'inversion de dimension 0 (mono point) a été suffisante et de ce fait a validé la procédure d'inversion de dimension 2.

Durant ce travail, différents effets ont été imputés à la compression statique des mousses. Ainsi, le décalage des maxima des déplacements surfaciques vers le bas et la variation du module élastique apparent ont été identifiés. Il nous est apparu important de comprendre ces phénomènes liés à la compression statique. Ainsi, les chapitres suivants sont dédiés à notre travail sur la compression statique.



# Chapitre 3

## Anisotropie induite : influence sur le module d'Young des mousses.

Dans le chapitre précédent, nous avons montré l'influence de la compression statique lors de la caractérisation de l'anisotropie de matériaux poreux. En effet, la détermination expérimentale sur des cubes de mousses acoustiques a mis en évidence des variations dans la mesure des raideurs mécaniques et des décalages vers le bas des lignes de niveaux des champs de déplacements normaux des faces. Nous nous sommes intéressés à ce problème plus en détail. Les résultats de ces travaux ont été publiés [33]. Cet article constitue le troisième chapitre de cette thèse.

Le résumé de cette publication est traduit et rappelé. La modification des propriétés élastiques des mousses acoustiques comprimées est étudiée. L'échantillon de matériau poreux est tout d'abord soumis à une compression statique, puis à une excitation dynamique de faible amplitude correspondante à des applications acoustiques. La compression statique induit une modification des paramètres élastiques dynamiques du matériau. Ce travail se concentre sur le module de Young. La variation est mesurée avec deux méthodes expérimentales différentes : le classique rigidimètre et la mesure d'absorption acoustique. Avec le premier dispositif, le module de Young effectif est mesuré directement et il est déterminé indirectement par la résonance quart d'onde du squelette avec le second dispositif. Les résultats des deux types de mesures sont comparés et ils présentent les mêmes tendances. La variation du module d'Young dynamique en fonction du taux de compression de l'échantillon est déterminée et interprétée avec plusieurs zones. Dans les zones associées à de faibles compressions (cas fréquemment rencontrés dans la pratique), la variation du module de Young effectif peut être approchée par une simple fonction affine. Les résultats sont comparés pour des mousses différentes. Un modèle simple de la dépendance du module de Young en fonction du taux de compression statique est finalement proposé pour des faibles compressions.

# Influence of static compression on mechanical parameters of acoustic foams

A. Geslain, O. Dazel, J.-P. Groby, and S. Sahraoui  
*Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, UMR CNRS 6613, Université du Maine,  
Avenue O. Messiaen, 72085 Le Mans Cedex, France*

W. Lauriks  
*Laboratorium voor Akoestiek en Thermische Fysica, KULeuven, Celestijnenlaan 200D,  
Heverlee, B-3001 Belgium*

(Received 18 October 2010; revised 24 February 2011; accepted 24 May 2011)

The modification of elastic properties of compressed acoustic foams is investigated. The porous sample is first submitted to a static compression and then to a dynamic excitation of smaller amplitude, corresponding to acoustical applications. The static compression induces the modification of the dynamic elastic parameters of the material. This work focuses on Young's modulus. The variation is measured with two different experimental methods: The classical rigidimeter and an absorption measurement. The effective Young's modulus is directly measured with the first method and is indirectly determined through the quarter-wave length resonance of the frame with the second one. The results of the two measurements are compared and give similar tendencies. The variation of the dynamic Young's modulus as a function of the degree of compression of the sample is shown to be separated in several zones. In the zones associated with weak compression (those usually zones encountered in practice), the variation of the effective Young's modulus can be approximated by a simple affine function. The results are compared for different foams. A simple model of the dependency of the Young's modulus with respect to the static degree of compression is finally proposed for weak compressions. © 2011 Acoustical Society of America. [DOI: 10.1121/1.3605535]

PACS number(s): 43.55.Ev, 43.20.Gp, 43.20.Hq [FCS]

Pages: 818–825

## I. INTRODUCTION

Acoustical porous materials (or sound absorbing materials) are heterogeneous media made up of an elastic skeleton saturated by a fluid (air in the present case). Structures involving porous materials are commonly used in engineering applications to dissipate acoustical or mechanical energy (sound and vibration absorption or insulation, damping). The modeling of porous materials is generally made at the macroscopic scale, so that the heterogeneities can be averaged over a representative elementary volume. Hence, the formalism of continuum mechanics is employed. Two classes of homogenized models are used to describe the dynamic behavior of poroelastic materials: The equivalent fluid model,<sup>1</sup> when the solid is assumed to be rigid and motionless, and the Biot theory,<sup>2</sup> when the frame is deformable. The Biot formalism needs two categories of characteristic parameters: Acoustical and mechanical. The determination of the acoustic parameters is now well handled, while the mechanical characterization of poroelastic materials has been a subject of research in the last decades.

The experimental methods used to determine mechanical (or effective elastic moduli) parameters of porous materials can be classified into three categories: Resonant methods, techniques based on surface waves, and quasi-static methods. An exhaustive list of the current available techniques for the recovery of elastic and damping parameters of porous materials can be found in Ref. 3. The limits of each method and the conditions of their application are clearly stated.

A resonant method was proposed in Ref. 4 to determine the effective Young's modulus of a sample at its resonance frequencies using a displacement transfer function measurement and a one-dimensional solid wave equation estimation. Methods derived from the Oberst beam method can also be used for bending vibrations.<sup>5</sup>

At higher frequencies, methods based on surface waves include the Rayleigh wave based method<sup>6</sup> and guided waves based methods.<sup>7,8</sup> Both of them enable the determination of the porous sample shear modulus, either from the Rayleigh velocity or from the minimization of the difference between the calculated dispersion curves and the measured ones obtained from Fourier transformation of the surface displacement standing waves. Quasi-static methods<sup>9</sup> are used at low frequencies to determine the effective elastic modulus.

One major difficulty for the characterization of mechanical parameters of poroelastic materials yields is in the large sensitivity of these parameters to various experimental or *in situ* conditions. Among them, Pritz<sup>4,10–12</sup> points out the influence of a weak static compression on the elastic parameters and also for higher degrees of compression. Nevertheless, only preliminary and qualitative results were carried out for very weak compressions. The influence of the compression on the acoustic parameters of fibrous materials, modeled by use of the equivalent fluid model, has been studied by Castagnède *et al.*<sup>13,14</sup> It was then extended to the Biot theory in Ref. 15 without accounting for the influence of compression on the mechanical parameters. Hence there is a need to go further and to focus on this aspect. This phenomenon is mainly

sensitive for foams that are soft materials and composed of an open microstructure. The static compression induces a modification of the beams that compose the microstructure (deformation and bending). Moreover, sound absorbing materials are usually compressed in practical application. This compression can be due to their layout (aircraft fuselage, building ceiling, trims) or their use (automobile seats).

The influence of the compression of open-cell porous materials has also been observed in the context of mechanics.<sup>16–18</sup> These works are devoted to geomaterials, and their results can not straightforwardly be applied to acoustics foams (dimensions, type of sample, excitation, experimental conditions). It is one objective of the present work. Hence, there is a need of investigating the influence of static compression on mechanical parameters of porous foams. It can explain the discrepancies and differences that can be observed during the mechanical characterization of porous foams.

The present work focuses on the experimental study of the influence of static compression on the dynamic Young's modulus of acoustic foams. For this type of medium, the volume of closed cell is negligible compared to the one of open cell, so that the contribution of closed cell in the mechanical behavior of the frame can be neglected. Two types of experiments are considered. Quasi-static measurements are first performed with a rigidimeter.<sup>9,19–22</sup> This setup has been modified and automated in the framework of this work. The corresponding measurements are referred to in this paper by the term "mechanical" and directly provide the Young's modulus of the frame sample. Absorption measurements ("acoustical" bench) of a compressed porous sample are second performed with an impedance tube. The deformation of the porous frame is mainly sensitive at the so called quarter-wavelength resonance of the solid wave.<sup>1,23</sup> From this frequency, it is possible to indirectly determine the Young's modulus. The results are compared and analyzed, and a simple model for the dependency of the dynamic Young's modulus in terms of weak degree of compression is proposed.

## II. TOPICS ON COMPRESSION OF POROUS MATERIAL

Dynamics and deformation of porous material is generally modeled through the Biot theory.<sup>2</sup> The porous medium is considered as the superposition of two homogeneous phases, a solid and a fluid one, that mutually interact. Several formulations<sup>2,24–26</sup> of the Biot theory, which differ by the unknowns employed to describe the medium response, have been proposed. All of them employ the displacement of the solid phase. Stresses and strains are tensors and are linked to each other by coupled constitutive relations. The mechanical parameters are associated with the stress tensor of the solid phase.

For our purpose, it is more convenient to use an equivalent solid model. This means that experimental conditions should minimize the influence of the saturating fluid. For the mechanical bench, precautions on the amplitude and frequency of the perturbation process need to be taken to satisfy these conditions. They mainly depend on the flow resistivity of the material, which quantifies the solid-fluid coupling. Hence, the perturbation process is designed to let the air

escape from the material.<sup>9,27</sup> For the acoustical bench, it is impossible to totally satisfy these conditions. Nevertheless it can be reasonably assessed that the fluid properties of foams are not slightly modified by the compression because only relative variation will be considered in this work.

The solid displacement  $\mathbf{u}$  is the sum of the static displacement  $\mathbf{u}^\tau$  and the dynamic displacement  $\mathbf{u}^d$ . Small perturbations of  $\mathbf{u}^d$  around the static equilibrium induced by  $\mathbf{u}^\tau$  are assumed. The deformation tensors are denoted by  $\varepsilon_{ij}$  and the stress tensors by  $\sigma_{ij}$ . The Einstein convention is implicitly used in this manuscript.

Large deformations, associated with  $\mathbf{u}^\tau$ , are considered. The stress-strain relation is of the following form:  $\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}^\tau, \varepsilon_{ij}^d)$ , with  $f$  being a non-linear function. For small amplitude of the dynamic perturbations  $\mathbf{u}^d$ , this equation can be rewritten as:<sup>28</sup>

$$\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}^\tau, \varepsilon_{ij}^d) = \sigma_{ij}^\tau(\varepsilon_{ij}^\tau) + \sigma_{ij}^d(\varepsilon_{ij}^\tau, \varepsilon_{ij}^d), \quad (1)$$

where the static stress  $\sigma_{ij}^\tau$  only depends on  $\varepsilon_{ij}^\tau$  (Ref. 29), and the additional stress due to the dynamic perturbation is denoted by  $\sigma_{ij}^d(\varepsilon_{ij}^\tau, \varepsilon_{ij}^d)$ . Under the hypothesis of small perturbations, the dynamical stress-strain relation is modeled as:

$$\sigma_{ij}^d(\varepsilon_{ij}^\tau, \varepsilon_{ij}^d) = C_{ijkl}^d(\varepsilon_{ij}^\tau) \varepsilon_{kl}^d, \quad (2)$$

where  $C_{ijkl}^d(\varepsilon_{ij}^\tau)$  is the Christoffel matrix, whose elements depend on the static compression.

In the present work, static and dynamic perturbations are mainly mono-dimensional and are applied along the  $x$ -direction, which corresponds to the thickness of the sample. In the other directions, the dimensions are supposed infinite because of the monodimensional hypothesis. The initial thickness of the sample is  $L_0$ . After compression, the sample thickness is  $L$  and the degree of compression  $\tau$  is defined by:

$$\tau = \frac{L_0 - L}{L_0}. \quad (3)$$

For mono-dimensional deformation, only  $\sigma_{xx}^d$  is relevant and Eq. (2) reduces to

$$\sigma_{xx}^d(\tau, \varepsilon_{xx}^d) = E(\tau) \varepsilon_{xx}^d, \quad (4)$$

where in  $E(\tau)$  is the dynamic Young's modulus.

The aim of this paper is to measure and model the dependence of  $E(\tau)$  for several foams.

## III. EXPERIMENTAL SETUP

### A. Mechanical experimental setup

Due to the large number of measurements to be performed, the mechanical bench presented in Ref. 9 has been modified for the purpose of this work. Each element of the bench is now controlled from a computer with a GPIB protocol and an OCTAVE (Ref. 30) script. It is depicted in Fig. 1. A 4 cm edge cube of porous material is inserted between two plates. The upper plate is connected to a rigid structure and assumed to be fixed. The

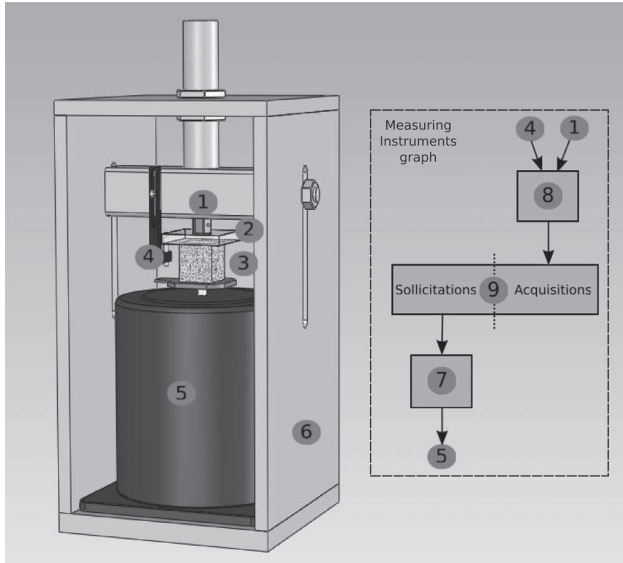


FIG. 1. Mechanical setup: (1) strength sensor PCB 209B01, (2) rigid plate, (3) acoustic foam, (4) displacement sensor Keyence EX-201/305, (5) shaker Bruel and Kjaer type 4808, (6) rigid structure, (7) signal generator Agilent 33120A, (8) scope meter Waverunner, and (9) computer.

lower plate imposes the static and dynamic excitations. It is controlled by a shaker (Bruel and Kjaer type 4808) powered by a signal generator (Agilent 33120A). The experimental setup is an extension of an existing bench that was designed to provide an uni-axial deformation on the cube (the plates are mutually parallel and centered at the same axis); this explains the choice of the dimensions of the cube.  $E(\tau)$  needs to be measured for various degrees of compression  $\tau$ . The different measurements only differ by the static excitation amplitude applied to the sample. For the sake of clarity, the experimental process is only presented for one degree of compression.

A static excitation (Heaviside function signal, assumed to be constant during this step) associated to the compression of the sample is first applied. The foam thickness  $L$  is measured to evaluate the degree of compression  $\tau$ . A dynamic excitation is then applied to the sample in the form of a sinusoidal signal added to the static one. The dynamic strength  $F^d$  is measured with a strength sensor (PCB 209B01) located on the top of the upper plate, and the displacement of the lower plate  $u^d$  is measured with a displacement sensor (Keyence EX-201/305). The signals are acquired during the dynamic excitation with an scope meter (Waverunner), and the effective elastic modulus  $E$  of the homogeneous sample is obtained by:<sup>9,22</sup>

$$E = \frac{F^d L}{u^d S}. \quad (5)$$

The section  $S$  of the foam between the two plates is assumed to remain constant for each static compression step at its initial value  $S = S_0 = 16 \text{ cm}^2$ . Note that in Eq. (5) the thickness of the sample is  $L$  as it corresponds to the thickness of the sample in the actual compressed condition.  $F^d$  and  $u^d$  are averaged over five periods. From our experience, doing an

averaged of five periods is sufficient to have a correct estimation of the parameters.

The ratio of dynamic to static excitations has been chosen to respect the recommendation of the literature.<sup>3,4,9</sup> Each set of measurements has been performed in a relatively short period to ensure that the temperature can be assumed constant. The latter does not influence the relative results presented in the following. To avoid any problem related to the sample-plates conditions, the plates are covered with an abrasive paper,<sup>9,19</sup> which deletes relative plate-sample displacements. This solution is preferred to the use of glue because the contact location along the  $x$ -direction is better controlled.

It is necessary to ensure that the experimental process is not influenced by the foam relaxation. The objective is to guarantee that the mechanical excitation is transmitted through the foam with a response time short enough to neglect the imaginary part of effective elastic modulus. This means that the foam reaction time to an impulsive perturbation is sufficiently small when compared to the period of the dynamic excitation. For materials with a longer time of relaxation, the preceding definition is irrelevant. Each compression step is recorded by a camera (25 frame/s), and a homemade multi-frame tracker algorithm similar to the one in Ref. 31 is used. A regular squared mesh of points is drawn on the surface of the sample. The relaxation average time is defined as the time after which the points return to their initial positions. After averaging, the relaxation time is estimated for the melamine foam to be around  $20 \mu\text{s}$ .

The origin for the static compression should be precisely defined. Indeed, if the contact is not ensured between the sample and the plates, the signal is not properly transmitted through the foam. A criterion to quantify this is to check the quality of the strength sensor signal, which should be sinusoidal. Both  $u^d$  and  $F^d$  signals are visualized on the scope.  $u^d$  is always sinusoidal, and distortion is observed for  $F^d$  in the case of unsuitable contact. Note that this value does not correspond to the theoretical situation of the uncompressed sample ( $F^d$  is zero per half period) because such condition can not be reach experimentally. Fortunately, these values are very close (less than 1 mm).

## B. Acoustical experimental setup

The acoustical setup is based on the impedance measurement setup proposed by Dalmont *et al.*<sup>32,33</sup> and commercialized by CTTM.<sup>34</sup> It is depicted in Fig. 2. The principle is to determine the absorption coefficient of the foam sample from the measurement of the transfer function between the two microphones.<sup>32,33</sup> A piezo-electric buzzer, used for the excitation, is placed between a closed cavity and a measurement pipe. The pressure in the cavity is measured with a microphone and is proportional to the velocity. The pressure at the input of the pipe is measured with a second microphone. The surface impedance is then obtained from the transfer function measurement between these two microphones. The absorption coefficient is deduced from the surface impedance measurements by classical formula.

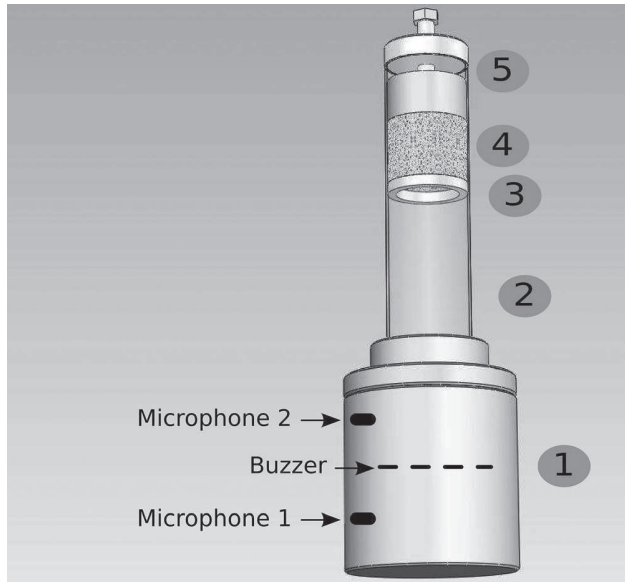


FIG. 2. Acoustic absorption measurement setup: (1) acoustic impedance bench, (2) pipe, (3) fixed ring, (4) foam sample, and (5) adjustable piston.

One of the main advantages of this setup is that the frequency range of the measurement is wider than the one of a classical impedance tube, which is limited in low frequencies by the distance between the two microphones. In particular, this setup enables low frequency measurements down to 100 Hz. To perform experiments for different degrees of compression of the porous sample and to control them, a 2-mm-thick ring is rigidly fixed inside the tube inner portion at 5.5 cm from the end of the tube. The material is placed between this ring and a rigid flat condition piston of thickness 2.5 cm, thereby compressing the sample against the ring. The piston is placed at the end of the tube, and its depth is controlled by a screw (thread: 1 mm). The initial thickness of the foam sample is  $L_0 = 3$  cm, and the inner diameter of the tube is 3.5 cm.

The air-porous surface of the sample needs to be flat to perform the impedance measurements and to ensure the plane waves condition. Due to the ring, the surface of the sample in contact with the ring could be modified when the sample is compressed by the piston against the ring. It is difficult to experimentally determine this modification. A numerical study, based on axisymmetric poroelastic finite elements, not detailed in this manuscript for conciseness, has been performed for compression associated to compression rates lower than 0.1. It indicates that it slightly modifies the absorption coefficient, but the differences are lower than 0.05 and can then be neglected.

The variation of Young's modulus  $E(\tau)$  is determined by an indirect method. This method is based on the so called quarter wavelength resonance of the frame. At this frequency

and for this type of material, the absorption decreases due to a loss of viscous effects. This resonance can then be easily seen on absorption curves, and it is possible to estimate the associated frequency. This frequency can also be estimated by an analytical expression given in Ref. 23, which provides a link between this frequency and the mechanical parameters:

$$f(\tau) = \frac{1}{4L2\pi} \sqrt{\frac{E(\tau)}{\rho(\tau)}}, \quad (6)$$

wherein  $L$  is the thickness of the compressed foam sample. The density of the solid is  $\rho(\tau)$ . The mass of the sample is independent from compression so that the density is proportional to  $1/L$ . It is then possible to estimate the ratio of the Young's modulus of the compressed material and the one at the origin of static compression:

$$\frac{E(\tau)}{E(0)} = (1 - \tau) \frac{f(\tau)^2}{f(0)^2}. \quad (7)$$

Relative variations of the mechanical parameter can then be indirectly measured from the variation of quarter wavelength resonance frequency.

## IV. RESULTS AND DISCUSSION

### A. Evolution of $E(\tau)$ for a large range of degree of compression

A sample of melamine foam (named in the following as the reference foam), which is widely used in anechoic rooms, is first considered. This melamine foam is industrially produced, and its properties are given by Boeckx<sup>35</sup> and reported in Table I. The manufacturing process is not known.

That sample is used with the mechanical setup for a degree of compression from the origin to 0.7. This final value corresponds to the limit of use of the bench. Figure 3 presents the evolution of a normalized Young's modulus as a function of the degree of compression. This non-dimensional mechanical parameter corresponds to the ratio  $E\tau/E_{\max}$  where  $E_{\max} = E(0.03)$  is the maximum value of  $E(\tau)$  on the compression range of interest. The dependency of  $E$  with  $\tau$  can be split into four zones (respectively named A, B, C, and D) and can be interpreted with the micro-structural approach presented in Refs. 18 and 36.

Zone A (compression from the origin to 0.03 corresponding to the maximum value of Young's modulus) is associated with the compression of the cells that compose the microstructure of the foam. No bending of the beams is involved in this zone. The elastic modulus varies between 0.45 and 1. This means that the value  $E(0.03)$  is

TABLE I. Measured material properties.

Parameters	$\phi$	t (m)	p (kgm <sup>-3</sup> )	$\alpha_\infty$	$\sigma$ (Nsm <sup>-4</sup> )	$\Lambda$ (ym)	$\Lambda'$ (ym)	E (KPa)	N (KPa)
	> 0.95	0.03	10	1.01	12000	100	150	600 + 6i	250 + 20i



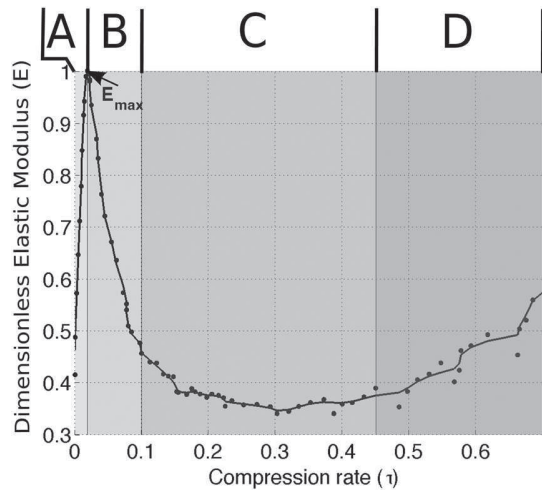


FIG. 3. Variation of Young's modulus of reference foam for a large range of compression: zones determination.

approximately twice as the one at the origin. This phenomenon is linked to the material that constitutes the beams. It corresponds to a slight compression (corresponding for the considered sample to a thickness modification of 1.2 mm). This zone has been observed by several authors.<sup>3,19,20,37</sup> In Refs. 20 and 37 (resp. Refs. 3 and 19), the ratio is around 3 (resp. 1.9) for a degree of deformation between  $2.10^{-3}$  and  $0.02$  (resp.  $4.10^{-3}$  and  $0.02$ ). This zone is deeply investigated in Subsection IV B.

Zone B is associated with degrees of compression from 0.03 to 0.1. It is associated with the bending of the beams that constitute the micro-structural cells, which are collapsing. This phenomenon is linked at the geometry of the beam. This zone has not been studied by the previous works to our knowledge. This zone is of great interest for two reasons. The first one is that it corresponds to the case of usual applications. For a sample of 4 cm, it is reasonable to assume that *in situ* compression would be greater than 1.2 mm. The second one is that it is associated with a loss of elastic properties around 0.6, which is far from being negligible. In addition, it is observed that the variation can be easily fitted by a linear interpolation. This zone is deeply investigated in Subsection IV C.

Zone C (degrees of compression between 0.1 and 0.45) corresponds to the plateau regime over which  $E(\tau)$  is relatively constant. The elastic buckling of the beams are counterbalanced with the effect of the cells network, and then the brittle crushing occurs in the direction of static stress compression. Zone D corresponds to densification regime. The elastic modulus increases.

The elastic modulus increases. The microstructure is completely collapsed, and opposed microstructure edges come in contact with each other. Note that the experimental curve only presents the beginning of the densification regime because of the limit of the bench.

Some remarks need to be made to avoid some generally accepted ideas. The first one is that the compression of the foam is not uniform along the thickness of the sample. This has been visually observed in the framework of this work and has been also observed by Guastavino and Göransson.<sup>38</sup>

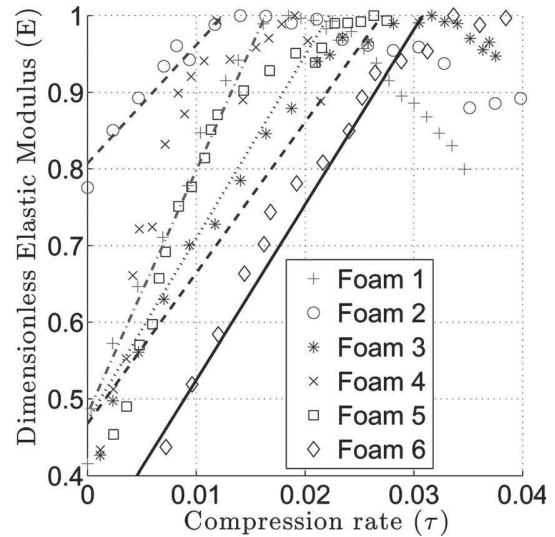


FIG. 4. Young's modulus of the six foams in Zone A compression band: linear behavior.

Hence, the splitting of the four zones presented in the previous paragraph should be done with particular care. Indeed, it is not straightforward that the geometry of all the micro-structural cells of the sample are similarly modified. It is more believable that some of them change regime before the others. A second remark is that the curve presented in Fig. 3 is not the derivative of the stress-strain relation, so that the acoustical dynamic Young's modulus is not the local slope of the stress-strain curve. One reason is the non-uniformity of the deformation presented before, and a second one is that the strain-stress relation is not in the small strain regime as is the case for acoustical perturbation.

In the following, only zones A and B will be detailed as they correspond to classical sound absorbing applications. Contrary to the higher degree of compression zones, which can be associated with a degradation of the microstructure (crack or rupture of micro-structural edges), these two zones should preserve the integrity of the skeleton. It has been checked by iterative measurements after several compression-decompression cycles and exhibits the repeatability of our experiments. The experiments have been performed on six foams, representative those currently available in the laboratory. These foams correspond to a wide range of industrial polymeric foam. The manufacturing process and the properties of these foams are unknown. The samples preparation has consisted of the cutting of the foam with a bandsaw.

## B. "Compression of beam" regime (Zone A) for different foams

The "compression of beam" regime is presented in Fig. 4. For each foam, the Young's modulus increases. Each

TABLE II. Material classification in function of the compression slope on Zone A.

Foam	1	2	3	4	5	6
Slope	31.74	15.43	19.66	31.49	23.81	22.86

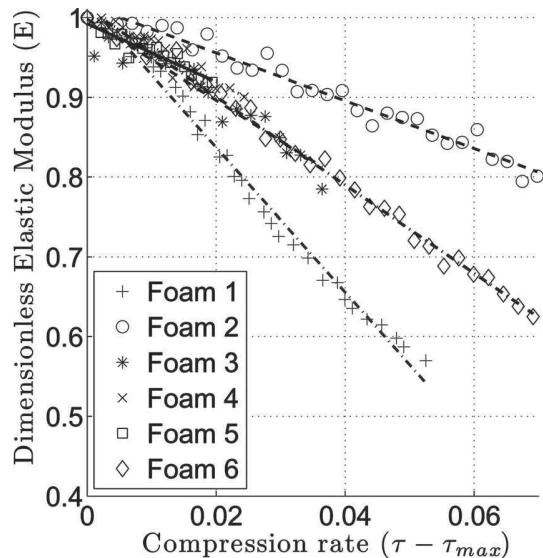


FIG. 5. Young's modulus of the six foams in Zone B compression band: new origin.

variation can be approximated by a linear regression. The slopes are presented in Table II. There is relatively small variability in these slopes (between 15 and 31); this indicates a similarity between all the materials. This can be explained by the fact that all the materials are polymeric foams and thus have similar constitutive material and micro-geometry.

Contrary to the slopes, the transition between zones A and B occur for degrees of compression between 0.015 and 0.03 for the different samples. This indicates the variability of this parameter. It can be explained by the difference of the representative cell dimension of the foams. The bending transition is very sensitive to the height of the beams. Consequently, the transition for large cell materials occurs for a degree of compression lower than the one of small cell materials. The prediction of the transition from zone A to zone B is a complicated problem. It is surely an extension of the present work. In any case and for all of these materials, the experimental results indicate that zone A corresponds to very small degrees of compression (lower than 0.03).

### C. Bending regime (Zone B) for different foams

Zone B is now investigated for the same foams as in the previous section. For each foam, and to simplify the comparison between the curves, the reference of degree of compression has been chosen equal to the degree of compression  $\tau_{max}$  associated with the maximum  $E_{max}$  of the normalized Young's modulus. Consequently, all the curves have a unit value at this new origin. Results are presented in Fig. 5 and detailed on the [0;0.03] new degree of compression range in Fig. 6. The bending is associated with a reduction of the elastic property. For each material, the variation can be approximated by a linear regression. Contrary to zone A, the slopes of the approximations vary noticeably from one foam to the other. They vary between 3 and 9 and are presented in Table III. The important variation of the value of the Young's modulus, even for small compression, highlights the influence of a pre-strain of the sample. Initially, for no

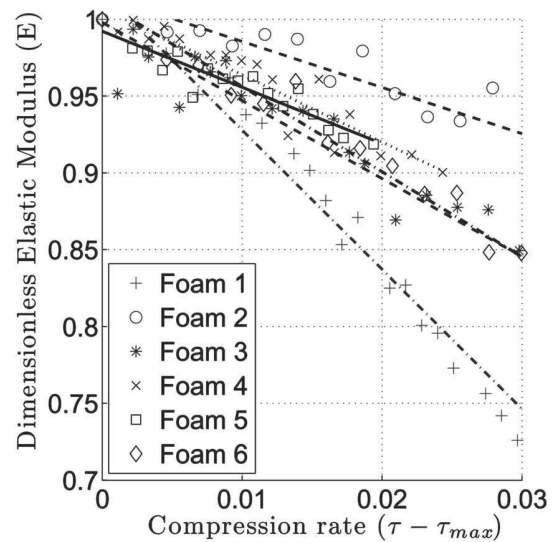


FIG. 6. Zoom of Zone B compression band: linear behavior.

compression, the solid matrix of the foam is isotropic at the macroscopic scale and consequently statistically isotropic at the microscopic scale. During the "bending regime," the cells collapse nonuniformly along the thickness of the sample. This behavior of the microstructure corresponds statistically to a decrease of the macroscopical Young's modulus. Consequently the variation of the Young's modulus is induced by the pre-strain, and the mechanical behavior of the foam must be modeled by an anisotropic tensor. Nevertheless, in the proposed approach, both static compression and acoustic excitation are along the thickness of the sample, and the approximation of a monodimensional model is still valid.

### D. Bending regime (Zone B) for the acoustical bench

The acoustical bench is now considered in this subsection. Results for the melamine reference foam and for the bending regime are presented. Figure 7 presents the absorption coefficient for several degrees of compression (0, 0.033, 0.067, 0.1, and 0.133). The mechanical so called resonance, associated with the quarter wavelength of the fast Biot wave, is characterized by a loss of the absorption due to the reduction of viscous effect in the fluid. This resonance frequency shifts in the low frequencies with the increase of compression. This is in accordance with the results presented in Fig. 16 of Ref. 15. The resonance frequency is determined for each degree of compression. The Young's modulus associated with the different cases can then be calculated through relation (7).

Figure 8 presents the normalized elastic modulus for the acoustical bench. Two samples of the melamine foam, to ensure the validity of results, are tested with the acoustical

TABLE III. Material classification in function of the compression slope on Zone B.

Foam	1	2	3	4	5	6
Slope	-9.08	-3	-5.08	-4.36	-3.65	-5.54

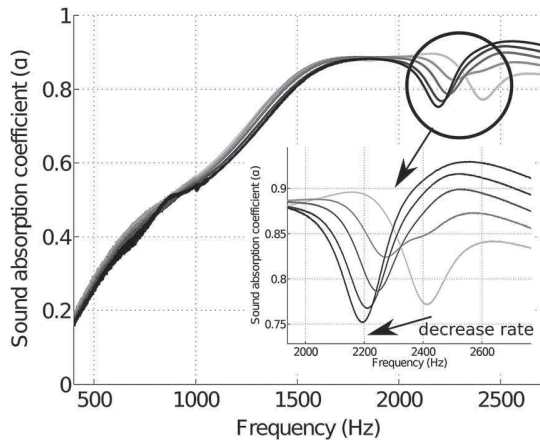


FIG. 7. Acoustic absorption measurement: variation of quarter wavelength resonance.

bench; the results are close. Similar to the comments on the mechanical bench, the variation of mechanical property can be approximated by a linear regression. For sake of comparison, the results obtained with the mechanical bench are also presented. A difference occurs in the slopes of both measurements. This is due to the Poisson effect, which is more important in the acoustical setup. When compressed in the longitudinal dimension, the material tends to expand in the radial direction. As it is limited by the tube, the Poisson effect is confined and induces a rigidification of the structure. Hence, two opposite effects occur during the compression in the tube: The bending of beams and the confinement of the structure, which tends to increase the Young's modulus. The consequence is that the reduction of the Young's modulus observed for the acoustical bench is lower than the one of the mechanical bench. Indeed, in the rigidimeter procedure, the structure is free at its lateral surface. Thereby, the sample is not confined, and the Poisson effect is negligible.

Nevertheless, it is a well-accepted idea that the compression of the sample can increase the rigidity of the material due to the Poisson effect and the confinement. Our results indicate that the bending effect can counterbalance the stiffening due to confinement. In our results, a global

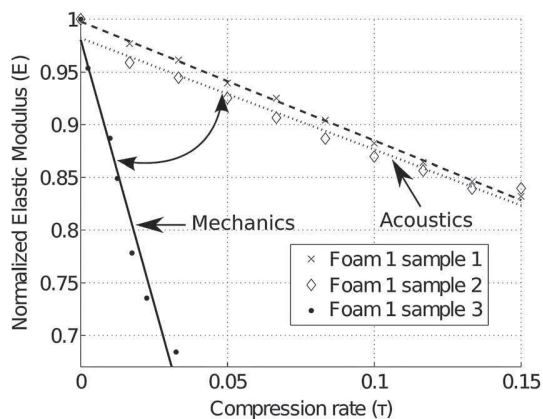


FIG. 8. Normalized elastic modulus for the acoustical bench: comparison between the two experimental setups.

reduction of the Young's modulus is observed. It means that the bending effect is more important than the Poisson's.

## V. CONCLUSION

The variation of the Young's modulus of compressed acoustic foams has been investigated for several foams with two types of experiments: A quasi-static rigidimeter and an absorption measurement bench. Four zones were identified. They can be interpreted by micro-structural considerations. It has been observed that weak compressions are associated with two different regimes: Compression and bending. As the compression regime corresponds to very small degree of compressions, it is associated with a reduction of thickness lower than 2 mm for our 4 cm thick sample. In practical application, it is obvious that the material is compressed in the bending regime when it is inserted, for example, between two panels.

A comparison between the quasi-static and the acoustic measurements has been made and presents the same tendencies. Both results indicate that the variation of the Young's modulus can satisfactorily be approached by an affine function in the bending regime. This also indicates, even for samples of the same family of material, that the slope of the affine function takes very different values. In addition, the lateral conditions can greatly modify these values for the same material.

It is interesting for practical applications to measure several (3 or 4) degrees of compressions to determine the influence of the bending regime in mechanical characterization of acoustic foams.

## ACKNOWLEDGEMENT

The authors would like to thank A. Podkowskiy and A. Zhdanov for their useful contribution during the experiments

- <sup>1</sup>J. F. Allard and N. Atalla, *Propagation of Sound in Porous Media: Modeling Sound Absorbing Materials 2e*, (Wiley, Chichester, 2009), Chap. 5.
- <sup>2</sup>M. A. Biot, "Theory of propagation of elastic waves in a fluid-filled-saturated porous solid," *J. Acoust. Soc. Am.* **28**, 168–191 (1956).
- <sup>3</sup>L. Jaouen, A. Renault, and M. Deverge, "Elastic and damping characterizations of acoustical porous materials: Available experimental methods and applications to a melamine foam," *Appl. Acoust.* **69**, 1129–1140 (2008).
- <sup>4</sup>T. Pritz, "Dynamic young's modulus and loss factor of plastic foams for impact sound isolation," *J. Sound Vib.* **178**, 315–322 (1994).
- <sup>5</sup>J. L. Wojtowicki, L. Jaouen, and R. Panneton, "A new approach for the measurement of damping properties of materials using the oberst beam," *Rev. Sci. Instrum.* **75**, 2569–2574 (2004).
- <sup>6</sup>J. F. Allard, G. Jansens, G. Vermeir, and W. Lauriks, "Frame-borne surface waves in air-saturated porous media," *J. Acoust. Soc. Am.* **111**, 690–696 (2002).
- <sup>7</sup>L. Boeckx, P. Leclaire, P. Khurana, C. Glorieux, W. Lauriks, and J. F. Allard, "Investigation of the phase velocities of guided acoustics waves in soft porous layers," *J. Acoust. Soc. Am.* **117**, 545–554 (2005).
- <sup>8</sup>L. Boeckx, P. Leclaire, P. Khurana, C. Glorieux, W. Lauriks, and J. F. Allard, "Guided elastic waves in porous materials saturated by air under lamb conditions," *J. Appl. Phys.* **97**, 094911.1 (2005).
- <sup>9</sup>S. Sahraoui, E. Mariez, and M. Etchessahar, "Mechanical testing of polymeric foams at low frequency," *Polym. Test.* **20**, 93–96 (2001).
- <sup>10</sup>T. Pritz, "Transfer function method for investigating the complex modulus of acoustic materials: spring-like specimen," *J. Sound Vib.* **72**, 317–341 (1980).

- <sup>11</sup>T. Pritz, "Transfer function method for investigating the complex modulus of acoustic materials: rod-like specimen," *J. Sound Vib.* **81**, 359–376 (1982).
- <sup>12</sup>T. Pritz, "Frequency dependence of frame dynamic characteristics of mineral and glass wool materials," *J. Sound Vib.* **106**, 161–169 (1986).
- <sup>13</sup>B. Castagnède, J. Tizianel, A. Moussatov, A. Aknine, and B. Brouard, "Parametric study of the influence of compression on the acoustical absorption coefficient of automotive felts," *C. R. Acad. Sci. Paris* **329**, 125–130 (2001).
- <sup>14</sup>B. Castagnède, A. Aknine, B. Brouard, and V. Tarnow, "Effects of compression on the sound absorption of fibrous materials," *Appl. Acoust.* **61**, 173–182 (2000).
- <sup>15</sup>C. N. Wang, Y. M. Kuo, and S. K. Chen, "Effects of compression on the sound absorption of porous materials with an elastic frame," *Appl. Acoust.* **69**, 31–39 (2008).
- <sup>16</sup>L. Gong, S. Kyriakides, and W. Y. Jang, "Compressive response of open-cell foams. I. Morphology and elastic properties," *Int. J. Solids Struct.* **42**, 1355–1379 (2005).
- <sup>17</sup>L. Gong and S. Kyriakides, "Compressive response of open cell foams. part II: Initiation and evolution of crushing," *Int. J. Solids Struct.* **42**, 1381–1399 (2005).
- <sup>18</sup>N. J. Mills and H. X. Zhu, "The high strain compression of closed-cell polymer foams," *J. Mechan. Physics Solids* **47**, 669–695 (1999).
- <sup>19</sup>L. Jaouen, "Contribution to the mechanical characterization of poro-viscoelastic materials", Ph.D. thesis, Université du Maine, Le Mans, France, 2003.
- <sup>20</sup>M. Etchessahar, "Low frequency mechanical characterisation of acoustic materials", Ph.D. thesis, Université du Maine (2002).
- <sup>21</sup>V. Tarnow, "Dynamic measurements of the elastic constants of glass wool," *J. Acoust. Soc. Am.* **118**, 3672–3678 (2005).
- <sup>22</sup>M. Mariez, S. Sahraoui, and J. F. Allard, "Elastic constants of polyurethane foam's skeleton for biot model," *Internoise* **96**, 951–954 (1996).
- <sup>23</sup>J. F. Allard, C. Depollier, and W. Lauriks, "Measurement and prediction of surface impedance at oblique incidence of a plastic foam of high flow resistivity," *J. Sound Vib.* **132**, 51–60 (1989).
- <sup>24</sup>M. A. Biot, "Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media," *J. Appl. Phys.* **33**, 1482–1498 (1962).
- <sup>25</sup>N. Atalla, R. Panneton, and P. Debergue, "A mixed displacement pressure formulation for poroelastic materials," *J. Acoust. Soc. Am.* **104**, 1444–1452 (1998).
- <sup>26</sup>O. Dazel, B. Brouard, C. Depollier, and S. Griffiths, "An alternative biot's displacement formulation for porous materials," *J. Acoust. Soc. Am.* **121**, 3509–3516 (2007).
- <sup>27</sup>P. Vidmar, "The effect of sediment rigidity on bottom reflection loss in a typical deep sea sediment," *J. Acoust. Soc. Am.* **68**, 634–648 (1980).
- <sup>28</sup>E. K. W. M. Lai and D. H. Rubin, *Introduction to Continuum Mechanics* (Elsevier, Oxford, 2009), Chap. 5.
- <sup>29</sup>J. D. Ferry, *Viscoelastic Properties of Polymers* (Wiley, New York, 1961), Chap. 2.
- <sup>30</sup>"Octave", <http://www.gnu.org/software/octave/> (Last viewed 10/18/2010).
- <sup>31</sup>K. Shafique and M. Shah, "A noniterative greedy algorithm for multiframe point correspondence," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* **27**, 51–65 (2005).
- <sup>32</sup>C. A. Macaluso and J. P. Dalmont, "Trumpet with near-perfect harmonicity: Design and acoustic results," *J. Acoust. Soc. Am.* **129**, 404–414 (2011).
- <sup>33</sup>J. C. Leroux and J. P. Dalmont, "A new impedance tube for large frequency band characterization of absorbing materials," in *SAPEM 2008* (Bradford, 2008).
- <sup>34</sup>"Cttm", <http://www.cttm-lemans.com/> (Last viewed 10/18/2010).
- <sup>35</sup>L. Boeckx, "Study of the sound field in and above porous materials application to characterization of sound absorbing materials," Ph.D. thesis, KULeuven, Leuven, 2005.
- <sup>36</sup>L. Gibson and M. Ashby, *Cellular Solids: Structure and Properties, Solid State Science Series* (Cambridge University Press, New York, 1997), Chaps. 5 and 6.
- <sup>37</sup>N. Dauchez, S. Sahraoui, and M. Etchessahar, "One measurement of mechanical properties of sound absorbing material," in *Second Biot conference on Poromechanics* (2002).
- <sup>38</sup>R. Guastavino and P. Goransson, "A 3d displacement measurement methodology for anisotropic porous cellular foam materials," *Poly. Test.* **26**, 711–719 (2007).



# Chapitre 4

## Anisotropie induite : études complémentaires

### Sommaire

---

<b>4.1 Effet de la compression sur le module de cisaillement . . . . .</b>	<b>67</b>
4.1.1 Méthode de détermination du module de cisaillement . . . . .	68
4.1.2 Résultat de l'effet de la compression statique sur le module de cisaillement . . .	73
<b>4.2 Modèle microstructural pour modéliser l'influence de la compression statique . . . . .</b>	<b>74</b>
4.2.1 Introduction . . . . .	75
4.2.2 Principe de base du modèle développé . . . . .	76
4.2.3 Génération de l'élément . . . . .	78
4.2.4 Changement de coordonnées . . . . .	79
4.2.5 Prise en compte de la périodicité . . . . .	82
4.2.6 Résultats . . . . .	83

---

Dans ce chapitre, des études complémentaires sur les modifications de paramètres apparents engendrés par une compression statique de l'échantillon sont présentées. Dans le cadre d'une collaboration avec le laboratoire *ATF* de la KULeuven, une étude préliminaire sur la caractérisation expérimentale de la variation du module de cisaillement en fonction de la compression statique a été effectuée. Celle-ci sera d'abord présentée. Ensuite, un modèle numérique basé sur une modélisation éléments-finis microstructure sera proposé.

### 4.1 Effet de la compression sur le module de cisaillement

Dans cette section, l'influence de la compression statique d'une mousse sur son module de cisaillement est étudiée. Pour déterminer le module de cisaillement de la mousse, les récentes techniques d'ondes de surfaces [4] et d'ondes guidées [10, 9] ont déjà été utilisées avec succès. Celles-ci sont basées sur une méthode inverse visant à minimiser un écart entre des courbes expérimentales théoriques et des données mesurées. Elles permettent d'obtenir le module de cisaillement  $G$ .

Afin de ne pas surcharger la rédaction, nous avons décidé de présenter uniquement la méthode sans expliciter directement les équations sous-jacentes. Le lecteur pourra trouver plus de détail dans [10]

#### 4.1.1 Méthode de détermination du module de cisaillement

La configuration utilisée pour la propagation d'ondes guidées est présentée figure 4.1. Une

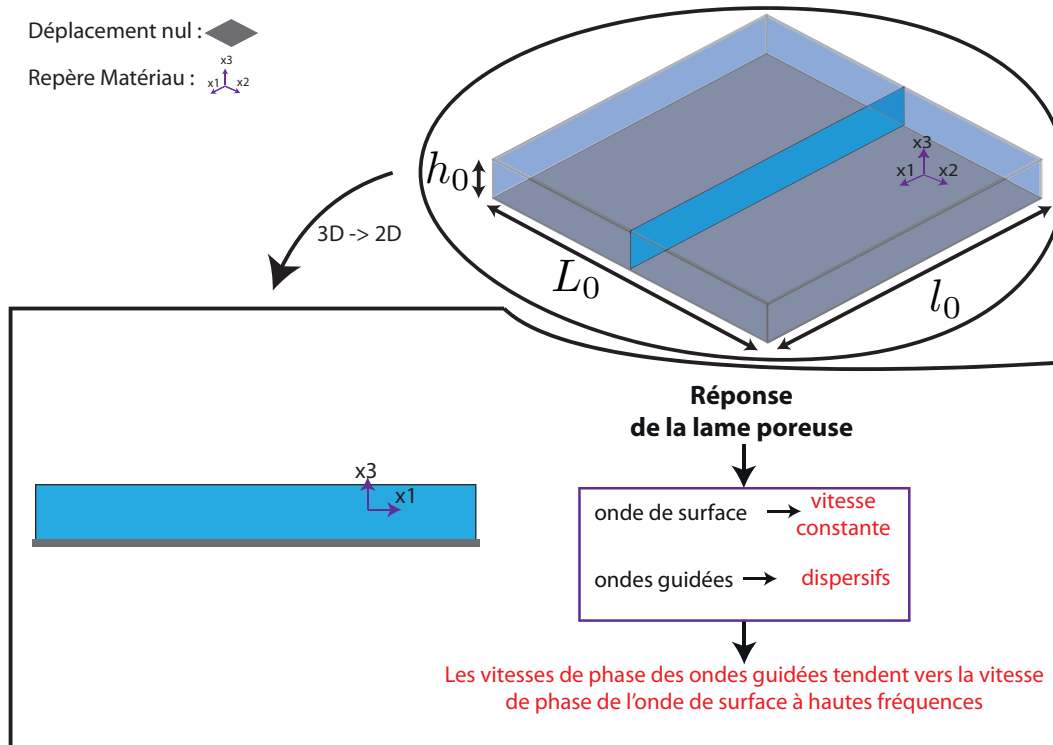


FIGURE 4.1 – Méthode ondes guidées.

plaque poreuse est considérée. Elle est d'épaisseur  $h_0$ , de largeur initiale  $L_0$  et de longueur initiale  $l_0$ . Nous choisirons ces dimensions de manière à considérer que cette plaque peut être considérée comme infinie suivant les axes  $x_1$  et  $x_2$ . D'autre part le matériau est excité par une ligne source le long de la directions  $x_2$ . La configuration, initialement tridimensionnelle devient donc bidimensionnelle. La face inférieure est collée sur un substrat rigide et la face supérieure est en contact avec l'air.

Nous allons maintenant présenter la méthode pour obtenir les courbes de dispersion. On considère des ondes se propageant selon  $x_1$  avec une dépendance  $k$ . Les déplacements du poreux peuvent être représentés à partir de 2 potentiels scalaires (associés aux deux ondes de compression) et un potentiel vecteur (associé à l'onde de cisaillement). Ainsi et en prenant compte les ondes aller et retour, les déplacement dans le poreux peuvent être écrits à l'aide de 6 inconnues. Le rayonnement du poreux dans l'air en contact avec la face supérieur génère une onde de compression, ce qui implique que ce modèle bidimensionnel peut être décrit à l'aide de 7 inconnues.

Les modes dérivent du problème de propagation sans source. Ces amplitudes doivent alors se

combiner de manière à satisfaire un certains nombres de conditions aux limites ou de continuité. Sur la face inférieure, nous avons la nullité des différents déplacements  $u_1^s = u_3^s = u_3^f = 0$ . Sur la face supérieure, nous avons la continuité du déplacement normal et de la pression à l'interface poreux-air :  $p^a = p$ ,  $u_3^a = u_3^t$ . À ces deux conditions viennent s'ajouter la nullité des contraintes *in-vacuo*  $\hat{\sigma}_{13} = \hat{\sigma}_{33} = 0$ . Ces 7 relations sont alors exprimées à l'aide des 7 amplitudes. Un système homogène est obtenu et il ne peut admettre de solutions que si la matrice associée à celui-ci est singulière. Ainsi, les nombres d'ondes associées aux modes sont les racines du déterminant de la matrice. Ces racines dépendent des propriétés du matériau et de la fréquence  $f$ . La plaque poreuse est supposée isotrope et tous les paramètres autres que le module de cisaillement sont supposés connus. Les ondes guidées se propagent principalement dans la partie solide de la plaque poreuse. Ainsi, les paramètres élastiques du squelette  $G$  et  $\nu$  sont particulièrement influents. Or,  $\nu$  est en général égal à 0.3 pour les mousses acoustiques et son influence est moindre que celle de  $G$  [10, 9] (de même pour les paramètres acoustiques). Les couples de variables  $\{k, f\}$  solutions sont déterminés par une recherche numérique de zéro de la relation de dispersion des modes. Pour chaque fréquence, cette recherche est effectuée dans le plan complexe  $k$  (la partie imaginaire du nombre d'onde étant liée à l'atténuation des modes). À partir de la partie réelle du nombre d'onde  $\text{Re}(k)$ , les vitesses de phase  $V_\phi = 2\pi f / \text{Re}(k)$  des modes sont obtenues. Dans cette configuration, ces modes possèdent des fréquences de coupure et sont dispersifs. À hautes fréquences lorsque la longueur d'onde est suffisamment petite, les ondes sont suffisamment amorties dans l'épaisseur de la lame et leur comportement se rapproche de celui de l'onde de Rayleigh (terminologie empruntée au cas du solide élastique).

Nous considérons, en première approche, que le module de cisaillement est le seul paramètre variable en fonction de la compression statique dans le modèle. Les autres paramètres sont supposés constants et sont donnés dans le tableau 4.1. Par conséquent, en mesurant les vitesses de phase d'un mode d'une couche de mousse soumise à des sollicitations impulsionnelles et en les comparant avec le diagramme de dispersion modélisé, il est possible de déterminer  $G$ . Pour se faire, la figure 4.2 présente le dispositif expérimental.



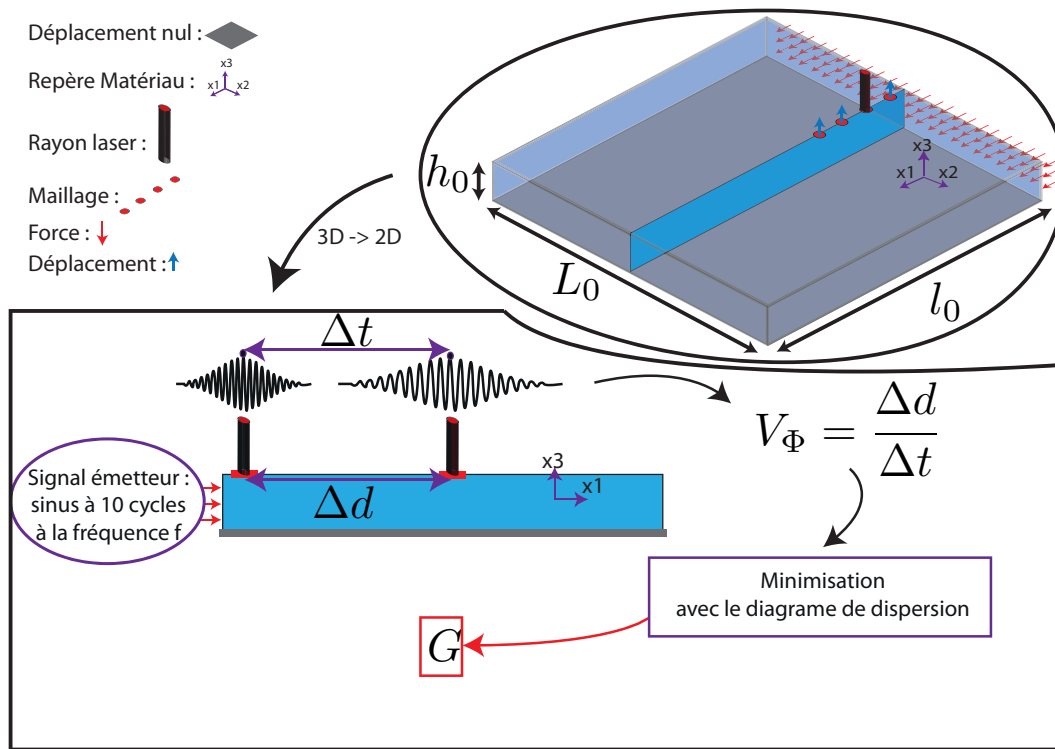


FIGURE 4.2 – Dispositif expérimental utilisé pour déterminer le module de cisaillement.

La configuration du modèle étant bidimensionnelle, il convient d'adopter une configuration similaire pour la caractérisation expérimentale. Ainsi, plusieurs largeurs et longueurs de plaques ont été utilisées et une plaque de dimensions ( $h_0 = 2$  cm,  $L_0 = 15$  cm et  $l_0 = 30$  cm) a été retenue. En effet, les amplitudes des ondes qui se propagent dans la plaque diminuent fortement avec la distance de propagation. Ainsi, la configuration bidimensionnelle est respectée.

Le dispositif expérimental permettant de réaliser des mesures dans une configuration non comprimée est disponible au laboratoire Acoustics and Thermal Physics (*A.T.F.*) de la K.U.Leuven. Lors de notre déplacement dans ce laboratoire, ce dispositif a été complété par un système permettant de comprimer statiquement la mousse acoustique. Ce système résulte d'un ensemble de tests rapportés en annexe A. L'ensemble est présenté figure 4.3. La mousse acoustique est collée sur une plaque rigide (plaque de dural (1)) et entourée d'un cadre constitué des plaques fixes (les dimensions internes du cadre (4) sont les mêmes que les dimensions de la mousse initiale  $l_0$ ,  $L_0$  et  $h_0$ ). Par mousse de dimension initiale, nous entendons une mousse avec une compression statique nulle. La compression statique est assurée en découpant plusieurs échantillons d'une même mousse de différentes largeurs  $L$  (selon l'axe  $x_2$ ) et en les insérant dans le cadre. Ainsi, une fois la mousse mise en place, la stabilité de la compression statique est assurée par le collage sur la plaque (1). Par exemple, pour obtenir une compression de 10 %, une mousse de valeur  $L = 16,5$  cm est découpée. Les propriétés de la mousse acoustique non comprimée utilisée, sont listées tableau 4.1. La mesure des paramètres acoustiques a été réalisée au LAUM. Les mesures de la masse volumique, du coefficient de Poisson et du coefficient d'amortissement ont été réalisées préalablement à l'*ATF*.

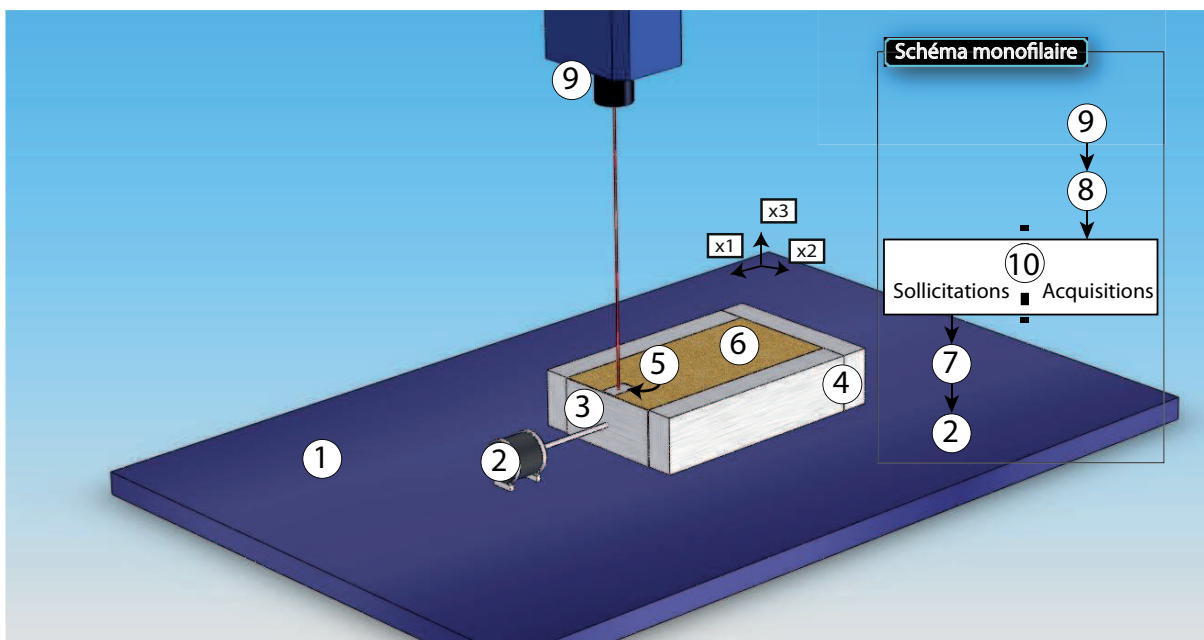


FIGURE 4.3 – Dispositif expérimental : (1) plaque rigide (2) pot vibrant Bruel & Kjaer type 4810 (3) plaque de sollicitation (4) plaques fixes (5) zone de mesure (6) matériau poreux (7) générateur de signaux Tektronix (8) oscilloscope Lecroy 9310 M (9) vibromètre laser Polytec (10) ordinateur d’acquisition.

Matériau	$\phi$	$t(m)$	$\rho(kgm^{-3})$	$\alpha_{\infty}$	$\sigma(Nsm^{-4})$	$\Lambda(\mu m)$	$\Lambda'(\mu m)$	$\nu$	$\eta$
C	0.99	—	9.4	1.2	4700	230	290	0.24	$1.839e - 5$

TABLE 4.1 – Propriétés de la plaque poreuse.

La procédure est expliquée pour une compression statique. La vitesse de phase  $V_\phi$  est déterminée pour chaque fréquence d'étude (1000 Hz, 2000 Hz, 3000 Hz, 4000 Hz et 5000 Hz). Une lame de sollicitation (3) est collée sur la mousse et permet une excitation mécanique linéique. La mousse est sollicitée mécaniquement par un signal sinusoïdal cyclique (10 cycles) qui est produit par le générateur (7) et est relayé par l'ensemble pot vibrant (2) - plaque (3). Le déplacement normal de la face supérieure est mesuré par le vibromètre laser (9) et le balayage sur le maillage est effectué à l'aide d'un système de miroir monté sur un robot (déplacement un axe). Pour chaque point, le signal est visualisé sur l'oscilloscope (8). L'ordinateur (10) permet de contrôler l'ensemble du dispositif. La validation de la mesure avec l'utilisation du cadre est effectuée pour le taux de compression 0% en comparant avec des mesures sans cadre et pour une mousse de dimensions plus importantes. Cette opération valide également l'hypothèse du modèle bidimensionnel. Les mesures pour la mousse comprimée (4%, 6%, 8%, 10%, 12%, 15%) sont réalisées en considérant la masse volumique  $\rho$  et les paramètres acoustiques constants. Ces valeurs sont mesurées pour la mousse sans compression.

Le champ de déplacement normal de la face horizontale supérieure est donc mesuré selon un maillage réalisé sur un scotch réfléchissant collé sur la plaque poreuse. Les vitesses expérimentales sont déterminées à partir des temps de parcours (temps de vol) à une fréquence donnée. La figure 4.4 présente un exemple de signaux expérimentaux obtenus.

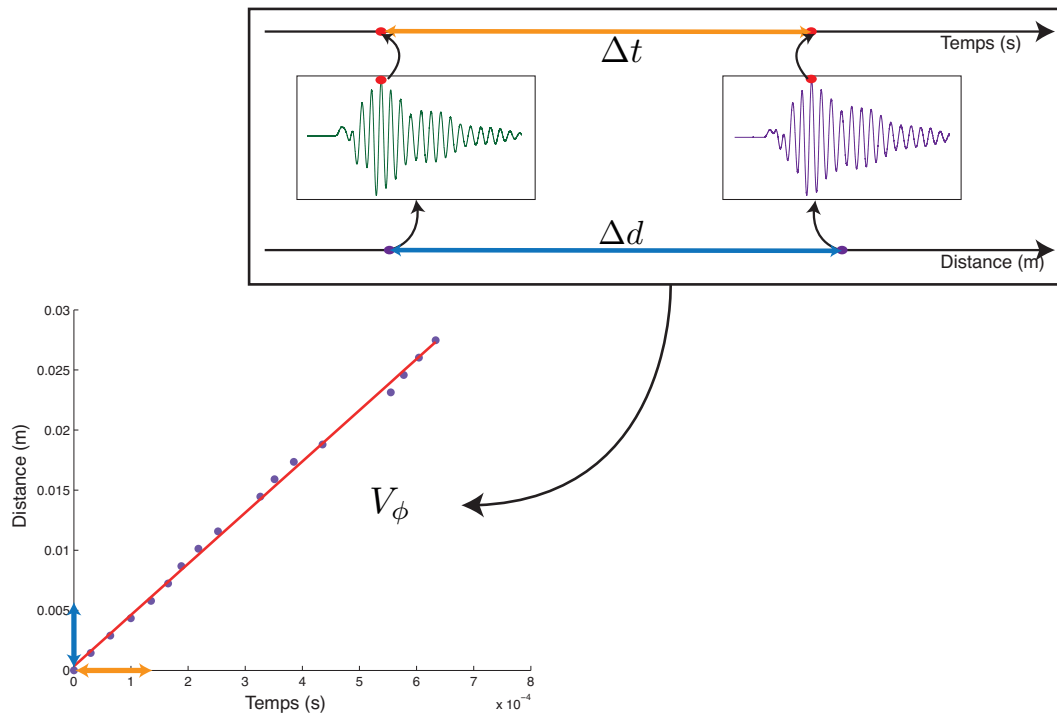


FIGURE 4.4 – Détermination expérimentale de la vitesse de phase.

À différentes distances de la source, on estime les temps de vols. Ceci nous permet alors de tracer une figure où l'on représente la distance parcourue en fonction du temps. Dans cet exemple, pour la fréquence de 1 KHz, le nombre de points est suffisant pour effectuer une régression linéaire. La vitesse,

$$V_{\phi} = \frac{\Delta d}{\Delta t}, \quad (4.1)$$

est calculée à partir des écarts de distances  $\Delta d$  et des écarts temporels  $\Delta t$  de l'évènement. La mesure de  $V_{\phi}$  est effectuée pour plusieurs fréquences afin de construire le diagramme de dispersion. Ce processus est répété pour plusieurs compressions statiques de la mousse.

#### 4.1.2 Résultat de l'effet de la compression statique sur le module de cisaillement

La figure 4.5 présente le diagramme de dispersion reconstruit. Les cercles représentent les vitesses déterminées expérimentalement. Pour chaque taux de compression, un seul mode est en fait détecté expérimentalement, les modes supérieurs étant particulièrement atténués. Notons que les données expérimentales présentent une certaine cohérence par la présence d'une fréquence de coupure d'une vitesse constante limitée à haute fréquence (5000 Hz). On peut remarquer que pour une fréquence donnée, les vitesses peuvent varier de manière relativement importante. On voit ainsi l'influence de la compression statique de manière qualitative.

Nous précédon maintenant à une première étude quantitative afin de compléter ces résultats. Notons, d'abord que ces résultats sont préliminaires et que ce travail mérite d'être poursuivi par la suite. Pour chaque taux de compression, on recherche la valeur du module de cisaillement qui

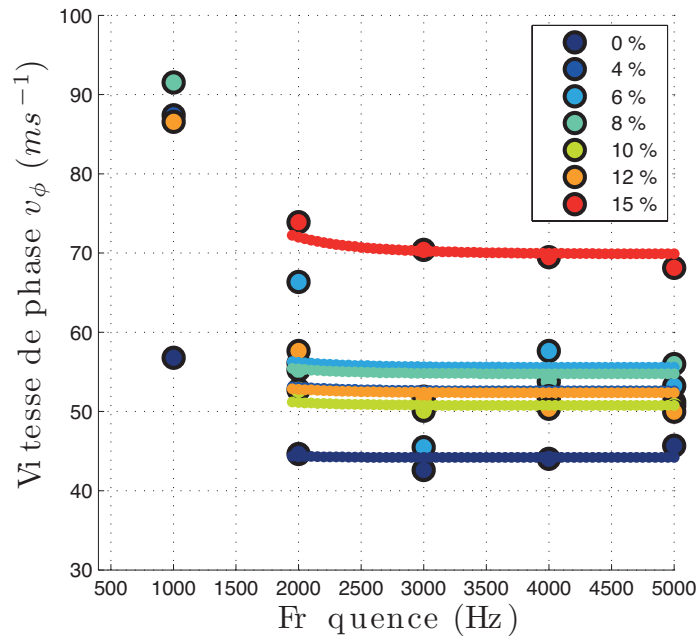


FIGURE 4.5 – Influence de la compression sur les courbes de dispersion du premier mode.

minimise l'écart entre le diagramme de dispersion obtenu avec cette valeur et les valeurs mesurées. Les courbes de dispersion obtenues sont également tracées sur la figure figure 4.5 . La figure 4.6 présente le module de cisaillement  $G$  est reconstruit et normalisé par sa valeur maximale. Compte tenu du faible nombre de taux de compression, l'interprétation de l'effet de la compression statique sur le module de cisaillement est plus difficile que dans le cas du module de Young. Cependant, une variation maximum de 37% du module de cisaillement est à noter. Cette variation correspond probablement à une augmentation du nombre de cellules et à une déformation des cellules selon l'axe  $x_2$ . Des mesures complémentaires seraient intéressantes pour les comparer à celles de l'étude de l'influence de la compression statique sur le module de Young et notamment pour mettre en évidence la présence de zones liées à un comportement de la microstructure dans le cas du module de cisaillement.

## 4.2 Modèle microstructural pour modéliser l'influence de la compression statique

Dans cette section, nous allons nous appuyer sur un certain nombre de travaux menés sur les matériaux cellulaires en mécanique. En effet, il ne fait pas de doute, au regard de la bibliographie et de quelques considérations de bon sens, que les modifications de propriétés des matériaux compressés sont dues à des effets de modification de la microstructure. Nous avons donc décidé de proposer un modèle éléments-finis microstructural simple afin de pouvoir estimer ces variations de propriétés. Celui-ci est basé sur une géométrie correspondant à la cellule de Kelvin.

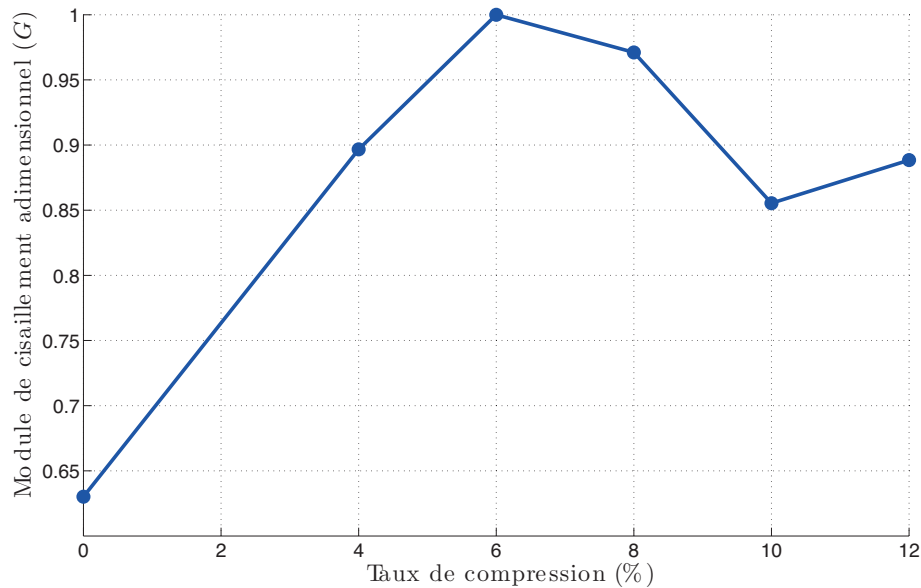


FIGURE 4.6 – Variation du module de cisaillement en fonction du taux de compression statique.

### 4.2.1 Introduction

La modélisation du comportement mécanique macroscopique de mousses polyuréthanes par une approche microstructurale est courante dans la communauté des mécaniciens (Gent et Thomas (1959), Dement'ev et Tarakanov (1970), Huber et Gibson (1988), Gong *et al.* (2005) [30, 22, 38, 36, 35]). Cette modélisation est effectuée à partir d'un arrangement de cellules unitaires de Kelvin (Thomson (1887) [62]). La cellule de Kelvin est un tétrakaidécaèdre (un polyèdre de quatorze faces composé de six quadrilatères et huit faces hexagonales). Cette cellule idéalise la forme moyenne du squelette solide de la mousse. Elles s'imbriquent parfaitement entre elles et permettent de paver entièrement l'espace. De plus, Gibson and Ashby (1997) [34] ont montrés que le tétrakaidécaèdre permet de minimiser la surface par unité de volume.

La cellule de Kelvin (représentée figure 4.9) fut utilisée par Zhu *et al.* (1997) [67] et Warren et Kraynik (1997) [64] pour déterminer le module d'Young, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson des mousses polyuréthanes isotropes à cellules ouvertes à partir d'un "mur" composé de cellules élémentaires. Le comportement mécanique de la mousse est lié au comportement des poutres, flambement et rigidité de torsion, qui composent le mur. Plus récemment, Gong *et al.* (2005) [36] ont considéré la déformation due au cisaillement et utilisé des poutres à sections variables. La géométrie des poutres est plus réaliste lorsqu'elles ont une forme de ligament.

Le processus de fabrication des mousses est à l'origine d'une direction privilégiée d'élongation des cellules élémentaires. Par conséquent, les mousses sont anisotropes, Dement'ev et Tarakanov (1970) [22], Gong *et al.* (2005) [36, 35], Ridha *et al.* (2006) [56] ont adopté une version "allongée" du tétrakaidécaèdre pour construire un "mur" de cellules élémentaires et en déduire les constantes élastiques. Les mousses sont utilisées pour des applications dans lesquelles elles sont comprimées (siège

automobile, cloison de bâtiment etc). L'influence de la compression a été étudiée par les mécaniciens [36, 35, 48] à partir de la microstructure, en construisant un matériau constitué d'un arrangement périodique de cellule de Kelvin. Dans le cadre de ces travaux, la variation des constantes élastiques en fonction de la compression est identifiée à quatre zones liées au comportement de la microstructure (compression, flambement, densification et réarrangement).

Dans la communauté des matériaux poreux et pour les applications acoustiques, C. Perrot (2006) [50] a utilisé la cellule de Kelvin pour déterminer les paramètres acoustiques du modèle de Biot-Allard. Dans le cadre de ce travail, cette cellule sera utilisée pour modéliser l'influence de la compression sur le module d'Young, telle qu'étudiée d'un point de vue expérimental dans le chapitre précédent. Les poutres constituant la cellule de Kelvin sont considérées sous l'hypothèse de Navier-Bernoulli<sup>1</sup> et sont utilisées pour modéliser les zones observées dans la variation du module d'Young en fonction de la compression statique. Dans le cadre des applications acoustiques, la réponse mécanique des mousses est étudiée avec des petites perturbations mécaniques ajoutées à une compression statique.

#### 4.2.2 Principe de base du modèle développé

Avant de rentrer dans les détails, nous allons présenter le principe général du modèle. Celui-ci reprend les étapes utilisées lors de la caractérisation expérimentale des effets de la compression statique sur le module d'Young. L'objet central est une cellule de Kelvin, présentée figure 4.7.

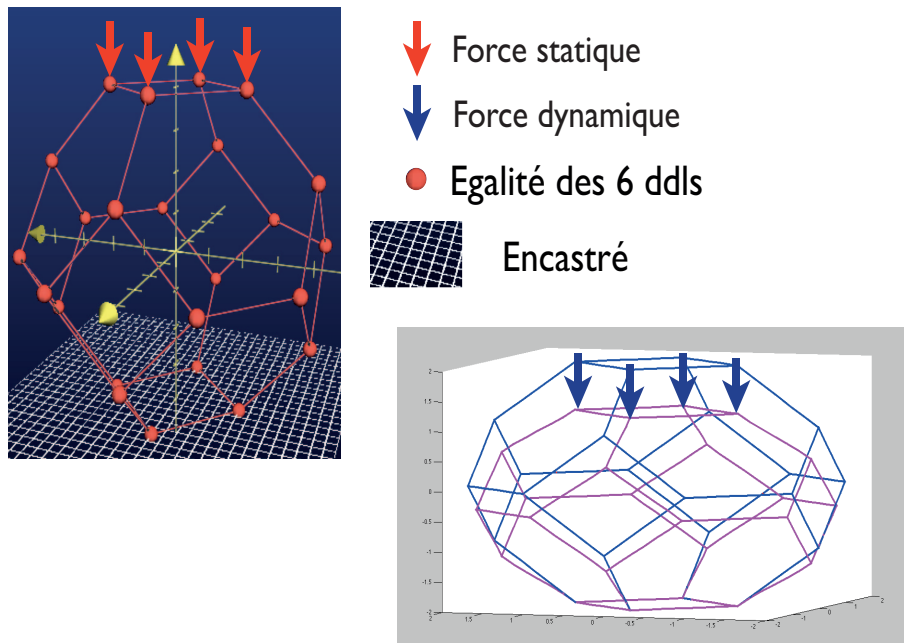


FIGURE 4.7 – Principe de résolution du problème Éléments Finis.

La cellule élémentaire de Kelvin est composée de 24 noeuds et 36 arêtes. Chaque noeud possède six degrés de libertés (trois translations et trois rotations). Nous exprimerons ces derniers dans le

1. les sections droites restent normales à la déformée de la fibre moyenne

## 4.2. Modèle microstructural pour modéliser l'influence de la compression statique<sup>77</sup>

repère global. Dans ce modèle, les poutres sont mutuellement encastrées. Cette hypothèse est basée sur l'observation expérimentale que les jonctions entre les différentes poutres de la microstructure sont généralement renforcées de matière agglomérée. Par voie de conséquence, les degrés de liberté associés aux noeuds de jonction des différentes poutres seront considérés comme conservés.

Pour prendre en compte le flambement des poutres, une subdivision de chacune des 24 arêtes est effectuée. Ainsi, chacune des arêtes est divisée en  $n$  poutres. Comme présenté figure 4.7, les noeuds situés en bas de la cellule sont encastrés, nullité de leur déplacements et rotations nuls. Une force est appliquée sur les degrés de liberté correspondant au déplacement vertical des noeuds situés en haut de la cellule.

Ce modèle ne considère qu'une seule cellule élémentaire. Elle fait donc abstraction de l'influence des cellules voisines. On peut facilement l'adapter pour construire un mur horizontal de cellules en considérant celui-ci comme infini par l'intermédiaire de conditions de périodicité. Ceci est explicité dans la section 4.2.5 et permet de ne faire un calcul que sur une seule cellule au moyen de quelques manipulations algébriques. Nous construirons ainsi deux modèles, l'un périodisé et l'autre pas.

Dans ces deux cas, le processus de résolution est le même et est décomposé en deux étapes. La première étape est la compression statique de la cellule. La deuxième étape est la détermination du module d'Young dans la configuration comprimée. Pour prendre en compte ces deux étapes dans la résolution du problème éléments finis, une procédure incrémentale a été développée et est présentée figure 4.8.

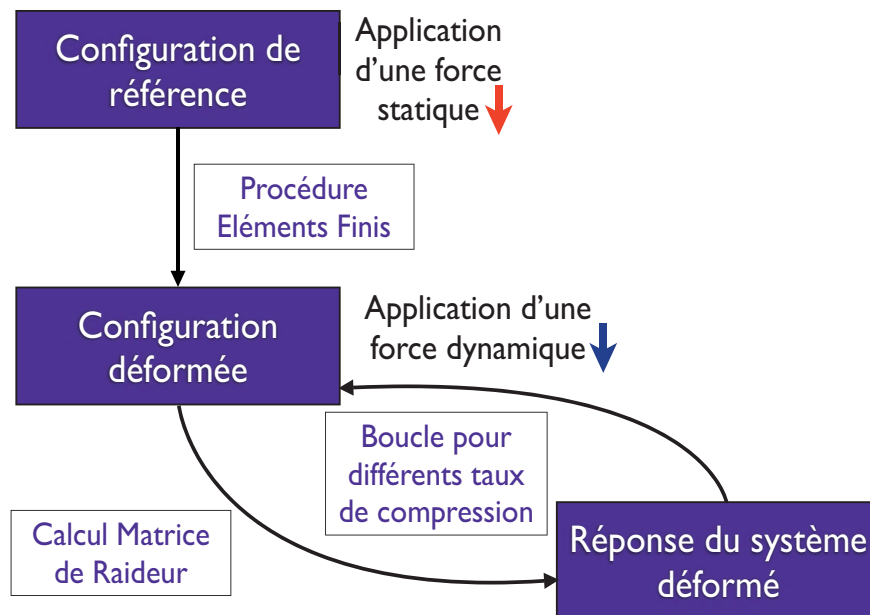


FIGURE 4.8 – Procédure éléments finis incrémentale.

La configuration de référence, sans compression statique, est tout d'abord considérée. Pour calculer le module d'Young du premier taux de compression (0%), une procédure appelée **réponse de la cellule** est employée. La réponse du tétrakaidécaèdre est calculée lorsqu'une force unitaire



est imposée sur les degrés de libertés correspondant aux déplacements verticaux des noeuds situés en haut de la cellule. La réponse de la cellule correspond au rapport de cette force unitaire sur le déplacement vertical du premier noeud situé en haut de la cellule. Ceci nous donne une rigidité de référence pour la cellule non déformée. Pour calculer la configuration déformée, une procédure appelée **compression statique** est ensuite utilisée. Cette compression statique est calculée à partir de la réponse de la cellule aux déplacements verticaux unitaires imposés sur les noeuds situés en haut de la cellule. Les degrés de libertés de tous les autres noeuds ainsi calculés, permettent d'établir la configuration déformée avec un facteur d'échelle correspondant au taux de compression considéré. Pour obtenir le module d'Young, la réponse de la cellule est calculée comme décrit précédemment à l'aide de la procédure **réponse de la cellule**. Cette procédure est ensuite répétée pour mettre en oeuvre la boucle de la procédure incrémentale.

### 4.2.3 Génération de l'élément

Comme dit précédemment, chaque arête du tétrakaidécaèdre de longueur  $L$  est subdivisée en plusieurs poutres afin de permettre de prendre en compte le flambement. Une poutre soumise à des sollicitations composées (flexion dans deux directions, extension et torsion) dans l'espace est considérée. Pour écrire l'énergie de déformation, il est nécessaire de définir des repères locaux et fixe. La figure 4.9 présente les deux repères.

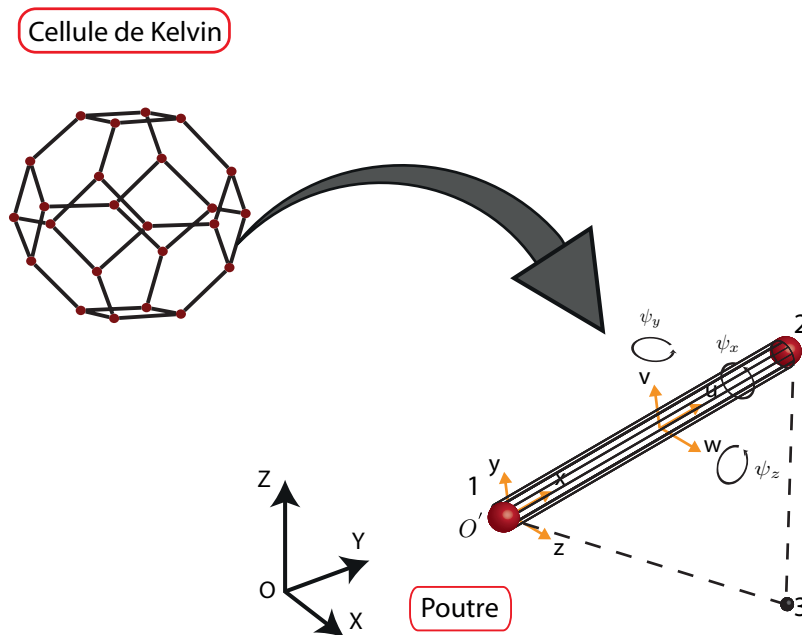


FIGURE 4.9 – Élément de poutre tri-dimensionnel en axes propres.

Une poutre de longueur  $l = L/n$  possède deux noeuds qui ont chacun 6 degrés de liberté (3



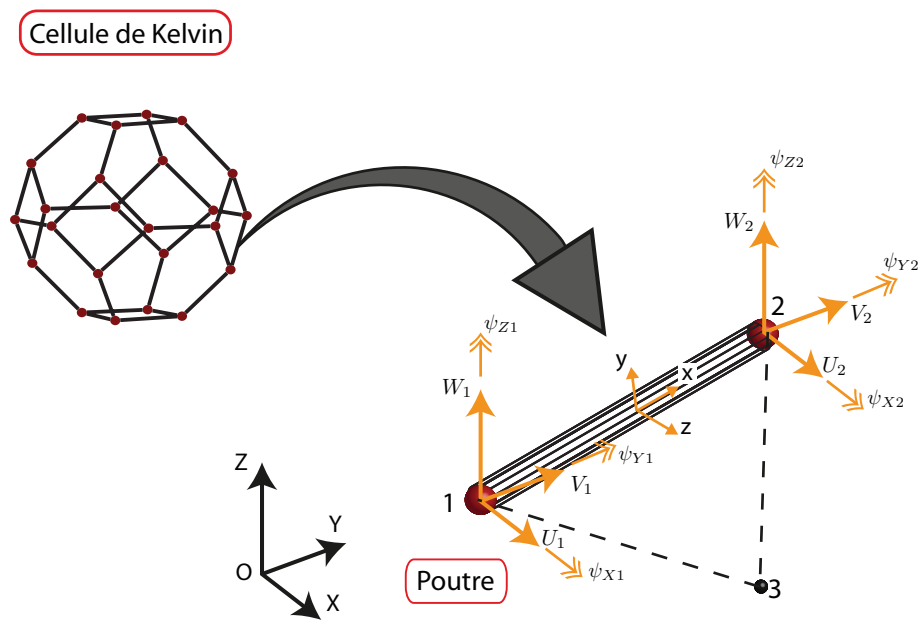


FIGURE 4.10 – Élément de poutre tri-dimensionnel en axes quelconques.

## 4.2. Modèle microstructural pour modéliser l'influence de la compression statique 81

opérateur. Les deux noeuds situés à chaque extrémité de la poutre sont  $P_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ ,  $i = 1, 2$ . La fibre neutre de l'élément est orientée suivant l'axe  $\vec{e}_x$  ses composantes dans le repère global sont,

$$\vec{e}_x = \left[ \frac{X_2 - X_1}{l} \quad \frac{Y_2 - Y_1}{l} \quad \frac{Z_2 - Z_1}{l} \right]. \quad (4.6)$$

Les axes  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  sont construits à partir d'un point  $P_3 = (X_3, Y_3, Z_3)$  contenu dans le Plan  $0xz$  et avec les distances

$$\vec{d}_i = \left[ X_i - X_1 \quad Y_i - Y_1 \quad Z_i - Z_1 \right]. \quad (4.7)$$

L'axe  $\vec{e}_y$  est obtenu,

$$\vec{e}_y = \frac{\vec{d}_3 \times \vec{d}_2}{\|\vec{d}_3 \times \vec{d}_2\|}. \quad (4.8)$$

L'axe  $\vec{e}_z$  est obtenu en utilisant la règle du trièdre,

$$\vec{e}_z = \vec{e}_x \times \vec{e}_y. \quad (4.9)$$

Ainsi, l'opérateur de rotation  $\mathbf{R}$  tel que,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

est calculé à l'aide des produits scalaires des vecteurs unitaires,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \vec{e}_X \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_Y \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_Z \cdot \vec{e}_x \\ \vec{e}_X \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_Y \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_Z \cdot \vec{e}_y \\ \vec{e}_X \cdot \vec{e}_z & \vec{e}_Y \cdot \vec{e}_z & \vec{e}_Z \cdot \vec{e}_z \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Les déplacements et rotations dans les repères propre et global sont liés respectivement par

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \psi_z \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \psi_X \\ \psi_Y \\ \psi_Z \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

d'où la relation de passage aux degrés de libertés globaux de l'élément :

$$\mathbf{q}_{eS}^T = \left[ U_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad \psi_{X1} \quad \psi_{Y1} \quad \psi_{Z1} \quad U_2 \quad V_2 \quad W_2 \quad \psi_{X2} \quad \psi_{Y2} \quad \psi_{Z2} \right], \quad (4.13)$$

$$\mathbf{q}_{eL} = \mathbf{T} \mathbf{q}_{eS}, \quad (4.14)$$

avec

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Finalement, la matrice élémentaire  $\mathbf{K}_{eS}$  est exprimée dans le repère global,

$$\mathbf{K}_{eS} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{eL} \mathbf{T}. \quad (4.16)$$

Les matrices élémentaires sont ensuite assemblées de manière classique et on obtient le système linéaire suivant est obtenu :

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (4.17)$$

avec  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur assemblée de la cellule,  $\mathbf{q}$  les degrés de libertés des noeuds et  $\mathbf{f}$  le vecteur force appliquée.

### 4.2.5 Prise en compte de la périodicité

À partir d'un calcul sur une seule cellule, la modélisation du comportement d'un mur infini de cellules peut être menée en utilisant les conditions de périodicité. Celles-ci peuvent être introduites dans le système (4.17). Elles sont présentées en figure 4.11. Autour d'une cellule élémentaire cen-

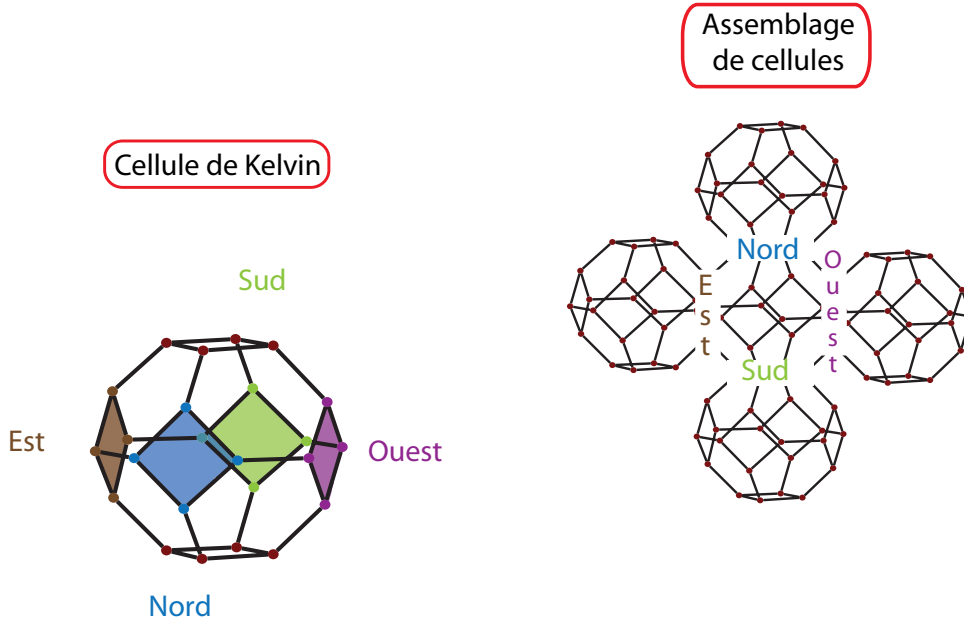


FIGURE 4.11 – Périodisation de la cellule de Kelvin.

trale, les cellules sont assemblées dans le plan. Ainsi, quatre cellules entourent la cellule centrale assemblées sur les faces Nord, Sud, Est et Ouest. La matrice de raideur peut se décomposer suivant les correspondances des noeuds,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IN} & \mathbf{K}_{IS} & \mathbf{K}_{IE} & \mathbf{K}_{IO} \\ \mathbf{K}_{NI} & \mathbf{K}_{NN} & \mathbf{K}_{NS} & \mathbf{K}_{NE} & \mathbf{K}_{NO} \\ \mathbf{K}_{SI} & \mathbf{K}_{SN} & \mathbf{K}_{SS} & \mathbf{K}_{SE} & \mathbf{K}_{SO} \\ \mathbf{K}_{EI} & \mathbf{K}_{EN} & \mathbf{K}_{ES} & \mathbf{K}_{EE} & \mathbf{K}_{EO} \\ \mathbf{K}_{OI} & \mathbf{K}_{ON} & \mathbf{K}_{OS} & \mathbf{K}_{OE} & \mathbf{K}_{OO} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_N \\ \mathbf{q}_S \\ \mathbf{q}_E \\ \mathbf{q}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_I \\ \mathbf{f}_N \\ \mathbf{f}_S \\ \mathbf{f}_E \\ \mathbf{f}_O \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

avec l'indice  $I$  pour les noeuds internes (c'est-à-dire sur aucune des faces),  $N$  pour les noeuds Nord,  $S$  pour les noeuds Sud,  $E$  pour les noeuds Est et  $O$  pour les noeuds Ouest. La condition de périodicité impose l'égalité des déplacements et l'égalité des forces, au signe près, suivant les paires de noeuds (Nord-Sud) et (Est-Ouest),

$$\mathbf{q}_S = \mathbf{q}_N, \quad \mathbf{f}_S = -\mathbf{f}_N, \quad \mathbf{q}_O = \mathbf{q}_E, \quad \mathbf{f}_O = -\mathbf{f}_E. \quad (4.19)$$

## 4.2. Modèle microstructural pour modéliser l'influence de la compression statique 83

Le nouveau système considéré est,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IN} + \mathbf{K}_{IS} & \mathbf{K}_{IE} + \mathbf{K}_{IO} \\ \mathbf{K}_{NI} + \mathbf{K}_{SI} & \mathbf{K}_{NN} + \mathbf{K}_{NS} + \mathbf{K}_{SN} + \mathbf{K}_{SS} & \mathbf{K}_{NE} + \mathbf{K}_{NO} + \mathbf{K}_{SE} + \mathbf{K}_{SO} \\ \mathbf{K}_{EI} + \mathbf{K}_{OI} & \mathbf{K}_{EN} + \mathbf{K}_{ES} + \mathbf{K}_{ON} + \mathbf{K}_{OS} & \mathbf{K}_{EE} + \mathbf{K}_{EO} + \mathbf{K}_{OE} + \mathbf{K}_{OO} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_N \\ \mathbf{q}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_I \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

### 4.2.6 Résultats

Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus par ce modèle microstructural. Chaque poutre est subdivisée en 25 éléments. Une comparaison entre le modèle éléments finis et les données expérimentales de l'article, qui compose le chapitre 3, est réalisée et présentée figures 4.12 et 4.13.

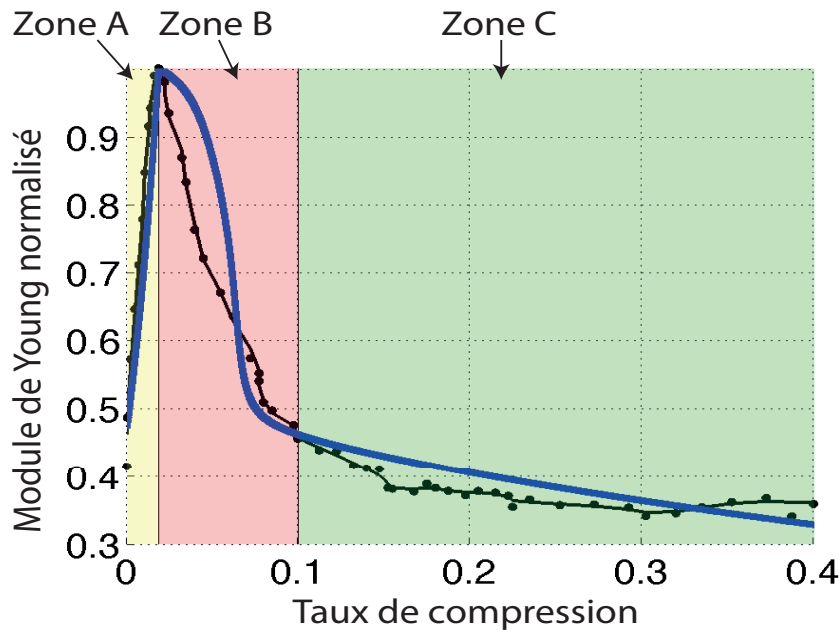


FIGURE 4.12 – Comparaison : zone A (en jaune) compression ; zone B (en rouge) flambement ; zone C (en verte) densification.

La réponse du modèle est effectuée en moyennant la réponse de la cellule périodisée et de celle non-périodisée. Les trois zones de comportement (compression, flambement et densification) sont matérialisées par les zones A, B et C. La variation du module d'Young observée expérimentalement en fonction du taux de compression est représentée par la courbe noire. La variation du module d'Young calculée avec le modèle microstructural en fonction du taux de compression est représentée par la courbe bleue. Les modules d'Young sont normalisés car nous nous intéressons principalement aux variations et que nous ne pouvons déterminer de manière exacte le module d'Young du matériau constituant la microstructure.

Le comportement de la microstructure dans la zone A est régi par la compression des poutres. Ce phénomène est lié à la nature de la cohésion de la structure atomique du matériau constituant les poutres et donc à son énergie de cohésion. Pour prendre en compte cet effet dans le modèle,

Sankar [59] propose de modéliser le module d'Young avec une variation exponentielle en fonction du taux de compression. Ainsi, le module d'Young de la cellule est fonction du module d'Young maximum  $E_0$ ,

$$E(\tau) = e^{\lambda(\tau-\tau_0)}, \quad (4.21)$$

avec  $\tau$  le taux de compression,  $\tau_0$  le taux de compression à la transition entre la zone A et la zone B, et  $\lambda = \frac{-\log(E_0)}{\tau_0}$ . En comparant avec la mesure, le comportement de la zone A est bien modélisée par la compression des poutres de la microstructure.

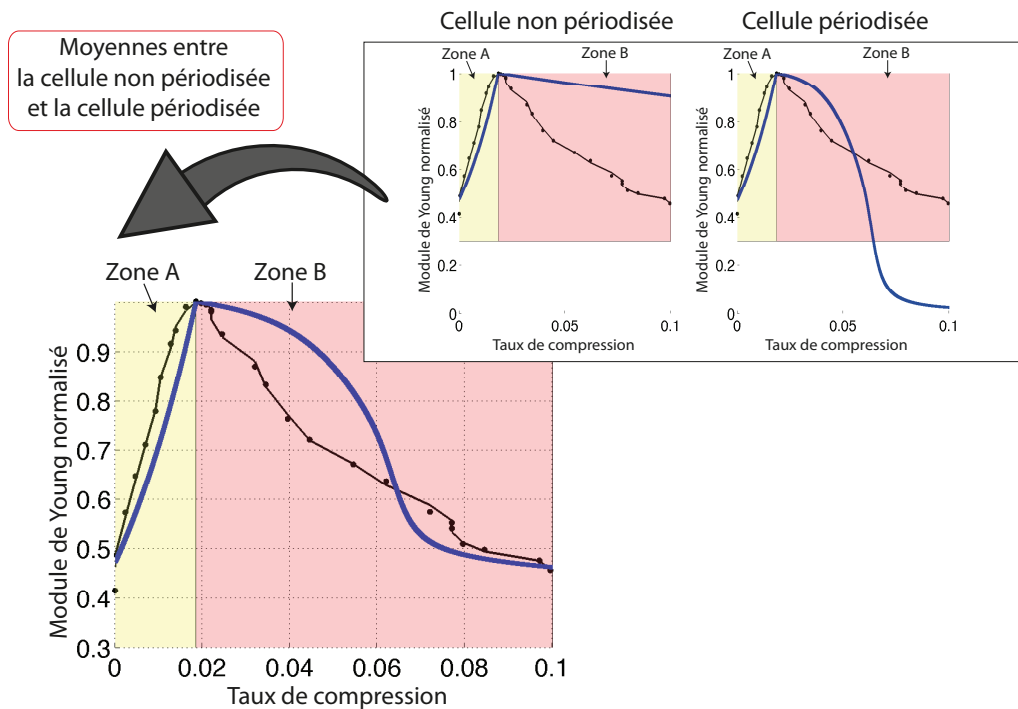


FIGURE 4.13 – Comparaison : zone A (en jaune) compression ; zone B (en rouge) flambement.

Le comportement de la microstructure dans la zone B est gouverné par l'effet de flambement des arêtes de la cellule. Dans le modèle proposé, le flambement est pris en compte par des subdivisions d'arêtes.

Au premier ordre, le résultat du modèle et le résultat expérimental sont cohérents : perte d'environ 50% du module d'Young normalisé. Le comportement expérimental de la mousse est le résultat d'un comportement moyen. Ainsi, le flambement des poutres est un comportement microstructural statistiquement représentatif. Le passage d'un modèle incrémental à un modèle qui prend en compte la déformée géométrique des poutres<sup>2</sup> présenterait un raffinement qui nous apparaît nécessaire.

2. formulation corotationnelle par exemple.

## **4.2. Modèle microstructural pour modéliser l'influence de la compression statique****85**

---

La contribution d'un mur de cellules est prise en compte dans le modèle avec une moyenne entre la cellule non périodisée et la cellule périodisée. Dans le cas de la cellule non périodisée, les quatre quadrilatères (Nord, Sud, Est et Ouest) de la cellule présentée figure 4.11 ne sont pas contraints. Dans le cas de la cellule périodisée, les contributions des cellules (Nord, Sud, Est et Ouest) de la figure 4.11 sont considérées. Les forces imposées par la périodisation provoquent un flambement précoce (en terme de taux de compression) des poutres. Ainsi, une moyenne entre les deux phénomènes présente une bonne solution pour tempérer l'effet de la périodisation au regard de la mesure.

Ce modèle microstructural fournit des résultats encourageants, qui donnent en première approximation, de bonnes tendances. Ce travail mérite d'être poursuivi.





# Chapitre 5

## Conclusion

L'objectif général de ce travail était l'étude de l'anisotropie des matériaux poreux et plus particulièrement des mousses acoustiques. Cette problématique se déclinait en deux sous-objectifs. Le premier était la caractérisation de l'anisotropie naturelle associée aux matériaux anisotropes de par leur microstructure. Le deuxième était l'étude de l'anisotropie induite par une action extérieure modifiant la microstructure et la rendant anisotrope.

### Travail effectué

La caractérisation de l'anisotropie naturelle a d'abord été menée dans des conditions quasi-statiques qui permettent notamment de négliger l'influence de l'air et ainsi de modéliser le matériau poreux comme un solide élastique équivalent. Un outil d'analyse de champs de déplacements surfaciques a été développé pour mesurer des profils de déformations bi-dimensionnelles des échantillons de matériaux considérés. Pour ce faire, une adaptation du rigidimètre (dispositif expérimental) à la mesure des champs de déplacements surfaciques à l'aide d'un vibromètre laser à balayage a été élaborée. Ce système, permet de mesurer les impédances mécaniques et les champs de déplacement surfaciques d'échantillons cubiques de mousses acoustiques. Il a en particulier été mis en évidence que les déformées expérimentales des échantillons faisaient apparaître des décalages entre les maxima de déplacements et les centres géométriques des faces. Des indicateurs ont permis de relier les champs de déplacements mesurés aux types d'anisotropie (isotrope, isotrope transverse et isotrope transverse avec rotation), ceci à l'aide d'une analyse géométrique des lignes de niveaux des champs de déplacements. Cette observation expérimentale a été complétée par une modélisation originale basée sur la méthode des éléments-finis. Ces deux outils ont permis d'appréhender simplement les paramètres de couplage directionnel des différents effets élastiques. Ensuite, une procédure de détermination des coefficients de Poisson a été proposée. Celle-ci est basée sur un problème d'optimisation entre la modélisation éléments-finis et la détermination expérimentale des champs de déplacements surfaciques.

Au cours de la phase précédente de caractérisation, des variations de propriétés mécaniques ont été observées. Ces phénomènes ont été imputés à la compression statique des échantillons. L'étude de l'influence de la compression statique sur la détermination du module d'Young d'un

échantillon de mousse a ainsi été entreprise. Ainsi, le rigidimètre a été utilisé pour caractériser ce cas d'anisotropie induite et mesurer le module de Young apparent dynamique en fonction du taux de compression statique de l'échantillon. De l'observation des résultats obtenus, une interprétation a été proposée à partir de quatre zones de comportement de la microstructure des mousses. Les effets liés aux comportements mécaniques des poutres constituant la microstructure (compression, flambement, densification et réarrangement) ont permis d'expliquer ces zones de variation. Enfin, une illustration de la variation du module d'Young en fonction de la compression statique a été réalisée avec la mesure d'un coefficient d'absorption. Ces résultats ont été en bon accord avec ceux obtenus avec le rigidimètre.

Des études complémentaires sur l'anisotropie induite ont ensuite été entreprises pour approfondir l'étude de ce phénomène. Dans ce but, un modèle éléments finis microstructural reproduisant la procédure expérimentale a été proposé. Une cellule élémentaire de la microstructure idéalisée par une cellule de Kelvin a été utilisée comme élément de base pour la modélisation du phénomène de compression statique. Une procédure par incrément de compression statique a été mise en place. Afin de prendre en compte l'effet des cellules voisines sur la cellule considérée, la périodisation de la cellule a été nécessaire. La comparaison entre le modèle éléments finis et la mesure précédemment décrite a montré que celui-ci était en mesure de modéliser les grandes tendances. Ainsi, le comportement mécanique de la microstructure a permis la mise en évidence de zones de variation du module d'Young. Enfin, un séjour de trois semaines dans le laboratoire *ATF* de la KULeuven a permis d'étudier l'influence de la compression statique sur le module de cisaillement en développant une méthode de caractérisation expérimentale basée sur les ondes guidées. Une variation du module de cisaillement en fonction du taux de compression statique a également été constatée expérimentalement.

D'autres travaux ont été réalisés dans cette thèse, mais non directement liés à l'anisotropie de la phase solide. En particulier, une méthode de calculs simples de la réponse d'une mousse macroscopiquement inhomogène a été développée dans le cadre d'une collaboration avec l'Université de Bradford. L'article, récemment soumis, est rapporté en annexe C.

### Perspectives

Ce travail a permis de soulever de nombreuses questions. Cela se traduit en terme de perspectives. D'autre part, certains résultats de ce travail méritent d'être prolongés.

Seule l'isotropie transverse a été considérée dans ce travail. La détermination de l'anisotropie naturelle d'un matériau complètement anisotrope reste ouverte. Cela nécessite une meilleure compréhension du comportement micromécanique des mousses. Un modèle numérique microstructural anisotrope étendant celui développé dans ce travail pourrait être d'un grand intérêt. Cela permettrait de relier les propriétés microscopiques et macroscopiques. Une étude entre les rapports des différents coefficients de la matrice d'élasticité déterminerait, dans un problème de l'analyse des champs de déplacements, les paramètres mécaniques influents dans la loi de comportement du matériau considéré. Un dispositif permettant des mesures de déformations de la microstructure permettrait d'appréhender plus favorablement la prise en compte des comportements microscopiques dans la modélisation macroscopique.

L'anisotropie induite par la compression statique a été observée expérimentalement dans deux configurations. Ces travaux doivent être complétés et basés sur des mesures dans d'autres configurations. D'autre part, le modèle éléments finis d'une cellule de Kelvin a montré qu'il était en mesure de capter les grandes tendances du modèle néanmoins il peut également être amélioré en particulier en prenant en compte la déformée non linéaire des poutres (en utilisant par exemple la formulation corotationnelle). Enfin, de récents résultats non encore publiés ont montré l'influence des effets non linéaires. A titre d'exemple, la variation en fréquence du pic de résonance "quart-d'onde" lors de la mesure de l'absorption, rend les mousses ajustables artificiellement. De ce fait, un développement de loi de comportement non-linéaire semble nécessaire pour pouvoir affiner la modélisation des matériaux poreux.

Cette thèse a fait l'objet de 4 publications dans des revues avec comité de lecture [18, 21, 33, 57], et de 3 communications dans des congrès nationaux et internationaux [32, 31, 20]. Une publication est soumise (annexe C) et une communication est à venir.



# Annexe A

## Essais préliminaires anisotropie induite : module de cisaillement

Le système de cadre permettant la compression statique est le résultat de plusieurs essais avec d'autres systèmes. Le premier système consistait à opérer la compression selon l'épaisseur de la mousse, c'est à dire suivant l'axe  $x_3$ . Cette idée vient d'une configuration récemment développée par Gautier [29] qui consiste à coller une lame mince de matériau élastique sur la mousse. Le système est présenté figure A.1.

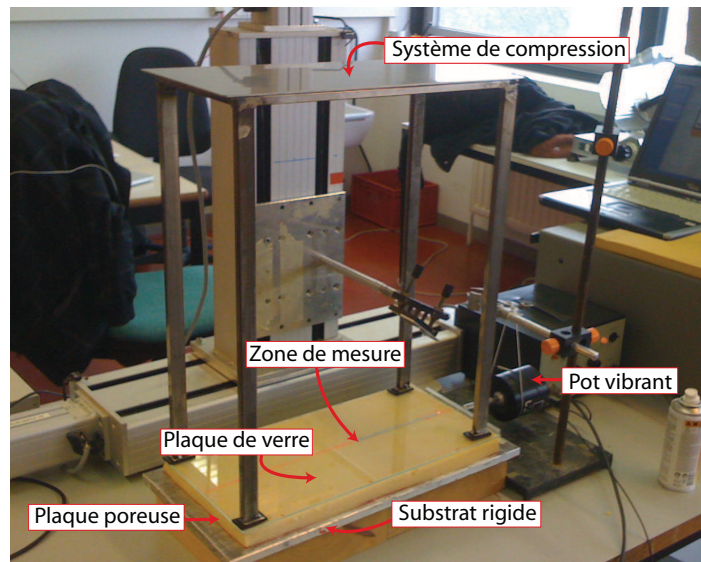


FIGURE A.1 – Dispositif expérimental préliminaire.

Le but de cette configuration est de favoriser l'influence des paramètres élastiques de la mousse en imposant la continuité des déplacements à l'interface (mousse-matériau élastique). La mesure du déplacement se fait sur le matériau élastique. Pour réaliser la compression, une plaque de verre

est collée sur la face supérieure de la mousse. Ainsi, la zone de mesure de laser est directement sur la face de la mousse à l'interface entre la mousse et la plaque de verre. En effet, l'indice de réfraction du verre est proche de 1 en incidence normale. La compression statique est réalisée avec l'adjonction de poids. Les problèmes associés à ce dispositif sont la réalisation de la condition de collage (mousse-plaque de verre) et la localisation de la réflexion du faisceau laser. En effet, la question de l'origine du déplacement mesuré par le laser (mousse, plaque de verre, une combinaison des deux) se pose. Les mesures réalisées avec ce système ne sont pas concluantes et l'utilisation du cadre a été préféré, même si la direction de la compression est différente de celle de la sollicitation mécanique (comme la mesure de l'influence de la compression statique sur le module de Young).

# Annexe **B**

## Complément sur la détermination des coefficients de Poisson

### B.1 Mousse isotrope transverse

Dans le Chapitre 2 un algorithme de détermination des coefficients de Poisson a été développé. Il est maintenant testé sur un matériau isotrope transverse. Il s'agit ici de déterminer les paramètres  $\nu$  et  $\nu_3$ . Une attention particulière est suggérée au lecteur sur deux hypothèses fortes :

- les coefficients de Poisson apparents déterminés sont les coefficients de Poisson de la mousse,
- les coefficients de Poisson apparents sont indépendants.

Dans le cadre de cette étude préliminaire, nous allons déterminer ces coefficients de Poisson séparément. Pour ce faire, nous allons utiliser les rotations de l'échantillon et déterminer chacun des paramètres dans la configuration pour laquelle celui-ci a vraiment de l'influence. Nous utiliserons la dénomination de paramètre **direct** (resp. **indirect**) quand celui-ci est le paramètre influent (resp. non-influent) dans la configuration considérée. Nous n'utiliserons dans la suite de ce chapitre que des inversions sur des données en croix et centrées sur les maxima de déplacement. Nous considérons la configuration n°2 (voir figure 2.14), présentée figure B.1 pour laquelle les deux coefficients de Poisson sont sensibles.

De part l'orientation des plans isotropes dans cette configuration, le coefficient de Poisson  $\nu$  est retrouvé à l'aide des mesures réalisées sur la paire de faces Nord-Sud et le coefficient de Poisson  $\nu_3$  est retrouvé à l'aide des mesures réalisées sur la paire de faces Ouest-Est. Par conséquent, les valeurs surlignées en bleu correspondent aux paramètres directs de l'inversion et les valeurs surlignées en rouge correspondent aux paramètres indirects de l'inversion. Le résultat des inversions est présenté dans le tableau B.1. En considérant les paramètres directs de l'inversion, en bleu, les coefficients de Poisson moyennés sont  $\nu = 0.3285$  et  $\nu_3 = 0.2501$ .



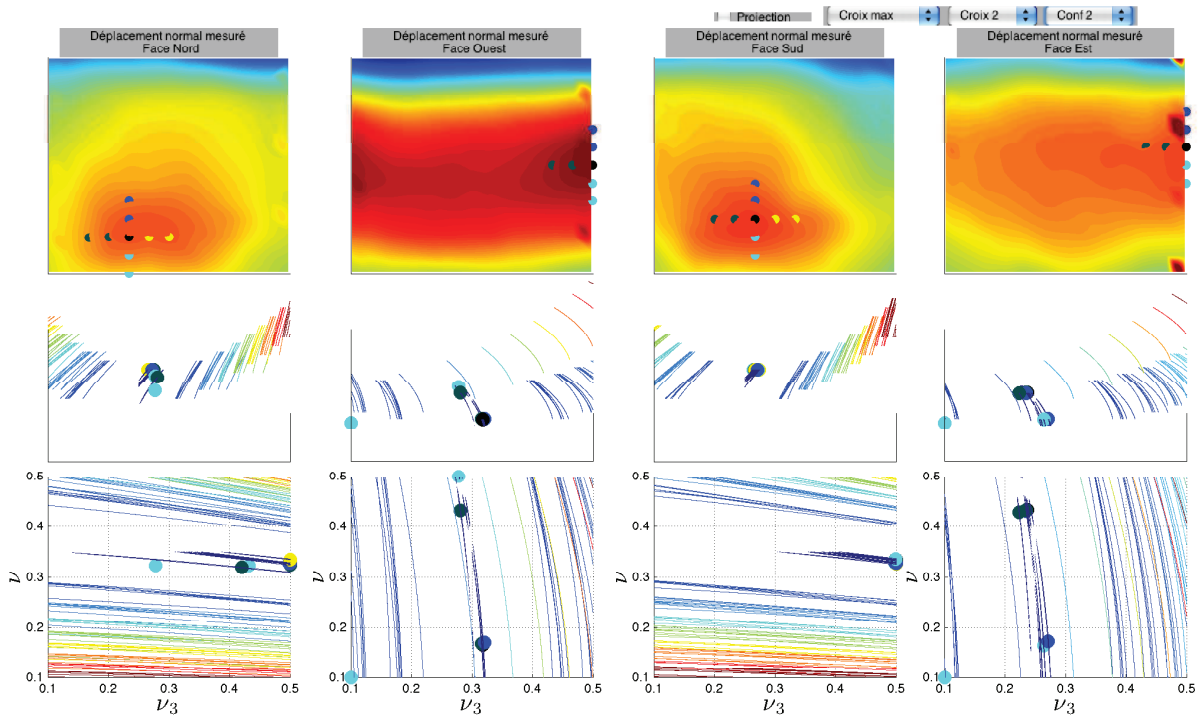


FIGURE B.1 – Interface graphique matériau isotrope transverse avec rotation.

Situation	Indicateur	Nord	Ouest	Sud	Est
1	Valeur moyenne $\nu$	0.3258	0.2440	0.3312	0.3086
1	Ecart type $\nu$	0.0045	0.1550	0.0035	0.1539
1	Valeur moyenne $\nu_3$	0.4587	0.2764	0.4994	0.2238
1	Ecart type $\nu_3$	0.0747	0.0799	0.0007	0.0572

TABLE B.1 – Coefficient de Poisson pour le matériau B

## B.2 Conclusion

Pour le matériau isotrope transverse, des coefficients de Poisson moyens de 0.33 dans les plans isotropes et de 0.25 hors des plans isotropes ont été déterminés. Le cas du matériau isotrope transverse avec rotation de  $45^\circ$  des plans isotropes n'a pas été présenté car il nécessite une amélioration de la procédure d'inversion. En effet, la rotation des plans isotropes ne permet pas d'isoler les deux coefficients de Poisson.

Cette Annexe met en évidence que même pour la détermination de deux paramètres élastiques (coefficients de Poisson) le passage à un matériau complètement anisotrope n'est pas aisé. Les couplages entre les différentes constantes élastiques intervenant dans cette situation rendent difficile leur détermination.

Annexe

C

Propagation of acoustic wave in  
one-dimensional macroscopically  
inhomogeneous porous material under  
the rigid frame approximation.

**Propagation of acoustic wave in one-dimensional macroscopically  
inhomogeneous porous material under the rigid frame approximation.**

A. Geslain, J.P. Groby, and O. Dazel

*Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine,  
UMR6613 CNRS/Univ. du Maine,  
F-72085 Le Mans Cedex 9,  
France.*

S. Mahasaranon, K. V. Horoshenkov, and A. Khan

*School of Engineering,  
University of Bradford,  
Bradford,  
West Yorkshire,  
BD7 1DP,  
UK.*

(Dated: October 18, 2011)

## Abstract

This work reports on an application of the state vector (Stroh) formalism and Peano series expansion to solve the problem of sound propagation in a material with continuous pore stratification. An alternative Biot formulation is used to link the equivalent velocity in the oscillatory flow in the material pores with the acoustic pressure gradient. In this formulation, the complex dynamic density and bulk modulus are predicted using the model proposed in [J. Acoust. Soc. Am., 110(5), 2371-2378 (2001)]. This model is validated against experimental data obtained for a 140 mm thick material specimen with continuous pore size stratification and relatively constant porosity. This material has been produced from polyurethane binder solution placed in a container with a vented top and sealed bottom to achieve a gradient in the reaction time which caused a pore size stratification to develop as a function of depth. This work suggests that it is possible to design and manufacture porous media with continuous pore size stratification which can provide an improvement to conventional porous media with uniform pore size distribution in terms of the attained acoustic absorption coefficient. It is shown that the acoustical properties of this class of materials can be accurately predicted with the adopted theoretical model.

PACS numbers: 43.55.Ev, 43.20.Gp, 43.20.Fn, 43.20.Bi

## I. INTRODUCTION

Porous materials are commonly used to absorb acoustic noise. These materials are typically efficient in a broad frequency range only when the acoustic wavelength ( $\lambda$ ) is smaller or comparable to the layer thickness ( $L$ ) and when there is a good match between the impedance of the surrounding fluid ( $\rho_0 c$ ) and the surface impedance of the porous layer ( $z_s$ ). As a result, the maximum absorption of a highly porous layer is typically achieved when the input resistance ( $\text{Re}(z_s)$ ) of the acoustic is approximately equal to the input reactance ( $\text{Im}(z_s)$ ). In this case, the optimal flow resistivity of the porous material  $R_b$  is determined by the following conflicting criteria: (i)  $R_b \approx 0.34\rho_0 c/(\Omega L/\lambda)$ ; and (ii)  $R_b k L \ll 1$ , where  $k$  is the wavenumber in air and  $\Omega$  is the material porosity<sup>1</sup>. An obvious problem here is that the required thickness of the porous layer needs to increase proportionally with the increased wavelength to ensure that the latter condition remains satisfied. Since it is impractical to install acoustic absorbers which thickness is comparable with the acoustic wavelength, a majority of conventional porous absorbers are typically designed to perform well in the medium and high frequency regimes, i.e. at frequencies of 500 Hz and above.

In order to improve the low-frequency absorption performance of porous layers, it is common to stack a discrete number of homogeneous porous layers to reduce gradually the mismatch between the acoustic impedance of air and the input impedance of the resultant material structure<sup>2</sup>. Although this technology is well established, there has been little or no experimental studies which can demonstrate that an improvement in the absorption coefficient can be obtained by producing a material with continuous pore stratification, and that the acoustical properties of this structure can be accurately modeled on the basis of a limited number of measured microstructural parameters. Therefore, purpose of this work is to fill this gap by presenting new experimental data on the acoustical and non-acoustical properties a porous material in which a continuous pore stratification has been achieved. This material is produced using a relatively simple chemical reaction process which is described in detail. The obtained experimental data are then used to validate the model

for the acoustical properties of porous media with pore stratification proposed recently by De Ryck *et al*<sup>3</sup>. The model is based on the alternative Biot's formulation<sup>4</sup> in which the dynamic complex density and compressibility are given by the expression proposed in the work by Horoshenkov and Swift<sup>5</sup>. In this way the variation in the pore size distribution data obtained for several piecewise quasi-homogeneous sub-layers can be accounted for and used to predict the acoustic behavior of the entire material specimen. The full equations of macroscopically inhomogeneous poroelastic material were solved by use of the state vector (Stroh) formalism together with Peano series expansion in the work by Gautier *et al*<sup>6</sup>. This can classify as a standard method to model wave propagation in material with anisotropy, e.g. elastic materials with stratification<sup>7,8</sup>, and in functionally graded materials<sup>9</sup>. The approach can also account for continuously varying properties in poroelastic media or in porous media with rigid frame and help to avoid problems related to a coarse parameter discretization. Here, the method is derived and applied to macroscopically inhomogeneous porous materials under the rigid frame approximation.

## II. EQUATIONS OF MACROSCOPICALLY INHOMOGENEOUS POROUS MATERIALS UNDER THE RIGID FRAME APPROXIMATION

Rather than to deal directly with the temporal representation of the acoustic field in a porous inhomogeneous layer,  $\bar{s}(\mathbf{x}, t)$  (with  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ), we will prefer to deal with its Fourier transform,  $s(\mathbf{x}, \omega)$ . These representations are related by  $\bar{s}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega$ , wherein  $\omega = 2\pi\nu$  is the angular frequency, with  $\nu$  the frequency. Henceforce, we drop the  $\omega$  in  $s(\mathbf{x}, \omega)$  and will refer further in this paper to the Fourier transform of  $\bar{s}(\mathbf{x}, t)$  as  $s(\mathbf{x})$ .

From the alternative Biot's formulation<sup>4</sup>, the equations of motion in a macroscopically inhomogeneous porous material under the rigid frame approximation were derived in<sup>3</sup>. These equations take the following form

$$\begin{cases} i\omega p = \tilde{K}_{eq}(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{V} , \\ i\omega \tilde{\rho}_{eq}(\mathbf{x}) \mathbf{V} = \nabla p , \end{cases} \quad (1)$$

where  $p$  is the fluid pressure in the material pores and  $\mathbf{V}$  is the equivalent velocity vector for the oscillatory fluid flow in the interconnected pores. This equivalent velocity vector is related to the velocity vector of the fluid  $\mathbf{V}^f$  through  $\mathbf{V} = \Omega \mathbf{V}^f$ , with  $\Omega$  the open porosity. Here, the porous medium can be assumed to behave as an equivalent fluid with the equivalent, frequency and space dependent fluid density,  $\tilde{\rho}_{eq}$ , and bulk modulus,  $\tilde{K}_{eq}$ . These quantities account for the viscous and thermal losses. Rather than to use the common Johnson-Champoux-Allard model<sup>10,11</sup>, the close to log-normal distribution of pore size is considered<sup>5</sup>. The latter model can account well for a relatively broad pore size distribution which is typically found in polyurethane foams which comprise a relatively large proportion of recycled fibres and grains<sup>12</sup>. According to this model, the equivalent density and compressibility are defined by

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{eq}(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{q(\mathbf{x})^2}{\Omega(\mathbf{x})} \left( \rho_f - \frac{\Omega(\mathbf{x})R_b(\mathbf{x})}{i\omega q(\mathbf{x})^2} \tilde{F}(\mathbf{x}, \omega) \right), \\ 1/\tilde{K}_{eq}(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{\Omega(\mathbf{x})}{\gamma P_0} \left( \gamma - \frac{\rho_f q(\mathbf{x})^2 (\gamma - 1)}{\Omega(\mathbf{x})\tilde{\rho}_{eq}(\mathbf{x}, \omega)} \right),\end{aligned}\tag{2}$$

where  $\gamma$  is the specific heat ratio,  $P_0$  is the atmospheric pressure,  $\rho_f$  is the density of the saturating fluid,  $\text{Pr}$  is the Prandtl number,  $q^2$  is the tortuosity, and  $R_b$  is the static flow resistivity. In the case of a material with a log-normal pore size distribution, the viscosity correction function  $F(\omega)$  can be approximated as

$$\tilde{F}(\mathbf{x}) \approx \frac{1 + a_1(\mathbf{x})\tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}) + a_2(\mathbf{x})\tilde{\varepsilon}(\mathbf{x})^2}{1 + b_1(\mathbf{x})\tilde{\varepsilon}(\mathbf{x})},\tag{3}$$

wherein  $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}) = (-i\omega\rho_f q(\mathbf{x})^2/R_b(\mathbf{x})\Omega(\mathbf{x}))^2$ ,  $a_1(\mathbf{x}) = \theta_1(\mathbf{x})/\theta_2(\mathbf{x})$ ,  $a_2(\mathbf{x}) = \theta_1(\mathbf{x})$ , and  $b_1(\mathbf{x}) = a_1(\mathbf{x})$ . The pores are assumed of circular, cylindrical shape and so that the coefficients  $\theta_1(\mathbf{x}) = 4e^{4\zeta(\mathbf{x})}/3 - 1$ ,  $\theta_2(\mathbf{x}) = e^{3\zeta(\mathbf{x})/2}/\sqrt{2}$  in approximation (3), are controlled by the depth-dependent value of the standard deviation in the log-normally distributed pore size,  $\sigma(\mathbf{x})$ , i.e.  $\zeta(\mathbf{x}) = (\sigma(\mathbf{x}) \log 2)^2$ .

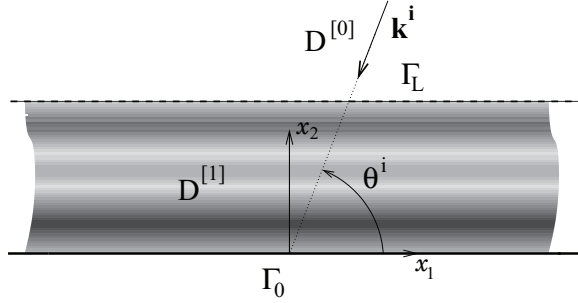


FIG. 1. Cross-sectional plane view of the configuration.

### III. NUMERICAL EVALUATION OF THE PRESSURE FIELD

#### A. Description of the configuration

Both the incident plane acoustic wave and the plate are assumed to be invariant with respect to the Cartesian coordinate  $x_3$ . A cross-sectional  $x_1 - x_2$  plane view of the 2D scattering problem is shown in Figure 1.

The upper and lower boundaries of the layer are flat and parallel. They are designated by  $\Gamma_L$  and  $\Gamma_0$  and their  $x_2$  coordinates are  $L$  and  $0$ . The porous material  $M^{[1]}$  occupies the domain  $D^{[1]}$ . The inhomogeneity (stratification) of the material layer occurs along the  $x_2$  direction, i.e.  $\Omega$ ,  $q^2$ ,  $R_b$ , and  $\sigma$  are  $x_2$  depth-dependent as suggested in exp. (2). The material can be viewed either as a functionally graded material or as a multilayer when the properties are piecewise constant. The surrounding and saturating fluid is the air medium (density  $\rho_f = 1.213 \text{ kg.m}^{-3}$ , Prandtl number  $\text{Pr} = 0.71$ , and atmospheric pressure  $P_0 = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$ ). The inhomogeneous porous layer is backed by a rigid plate at  $\Gamma_0$ .

We denote the total pressure, wavenumber, and wave speed by the generic symbols  $p$ ,  $k$ , and  $c$ , respectively, with  $p = p^{[j]}$ ,  $k = k^{[j]} = \omega/c^{[j]}$  in  $D^{[j]}$ ,  $j = 0, 1$ . The wavevector  $\mathbf{k}^i$  of the incident plane wave lies in the sagittal plane and the angle of incidence is  $\theta^i$  measured counterclockwise from the positive  $x_1$  axis. The incident wave initially propagating in  $D^{[0]}$  is expressed by  $p^i(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{i}(k_1 x_1 - k_2^{[0]}(x_2 - L))}$ , wherein  $k_1 = -k^{[0]} \cos \theta^i$  and  $k_2^{[0]} = k^{[0]} \sin \theta^i$ . The uniqueness of the solution to the forward-scattering problem is ensured by the radiation



condition

$$p^{[0]}(\mathbf{x}) - p^i(\mathbf{x}) \sim \text{outgoing waves; } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, x_2 > L . \quad (4)$$

## B. The state vector formalism and Peano series expansion

The spatial Fourier transform  $\widehat{s}(x_2, k_1)$  of  $s(\mathbf{x})$  is first introduced. This transform can be written in the form  $s(\mathbf{x}, \omega) = \widehat{s}(x_2, k_1, \omega)e^{ik_1x_1}$  because of the plane wave nature of the excitation. Henceforth, we drop the  $k_1$  in  $\widehat{s}(x_2, k_1)$  so that it is written  $\widehat{s}(x_2)$ .

Contrary to problems requiring the solution of the full macroscopic inhomogeneous poroelastic equations<sup>6</sup>, for which the choice of the state vector is conditioned by the boundary problem, those only requiring the solution of the equations under the rigid frame approximation can be naturally written in terms of the spatial Fourier transform of both the pressure and the normal component of the equivalent velocity. Effectively, the normal component of the equivalent velocity vector,  $V_2^{[1]}$ , and the pressure,  $p^{[1]}$ , are continuous along the  $x_2$ -axis inside the domain  $D^{[1]}$ , the normal component of the equivalent velocity vector and the pressure are continuous across  $\Gamma_L$ , and the normal component of the equivalent velocity vector vanishes on  $\Gamma_0$ . It seems natural to choose the spatial Fourier transform of these 2 parameters as components of the state vector. The procedure is briefly described below.

The spatial Fourier transform of (1) is

$$\begin{cases} i\omega\widehat{p}^{[1]} = \widetilde{K}_{eq}(x_2) \left( ik_1\widehat{V}_1^{[1]} + \frac{\partial\widehat{V}_2^{[1]}}{\partial x_2} \right) , \\ i\omega\widetilde{\rho}_{eq}(x_2)\widehat{V}_1^{[1]} = ik_1\widehat{p}^{[1]} , \\ i\omega\widetilde{\rho}_{eq}(x_2)\widehat{V}_2^{[1]} = \frac{\partial\widehat{p}^{[1]}}{\partial x_2} . \end{cases} \quad (5)$$

From the second equation of system (5),  $\widehat{V}_1^{[1]}$  can be expressed in terms of  $\widehat{p}^{[1]}$  through  $\widehat{V}_1^{[1]} = k_1\widehat{p}^{[1]}/\omega\widetilde{\rho}_{eq}(x_2)$ . This expression can be substituted in the first equation of this system. The problem also reduces to the solution of the first order differential matrix system for the

column state vector  $\widehat{\mathbf{W}} = \langle \widehat{p}^{[1]}, \widehat{V}_2^{[1]} \rangle$ , which takes the form:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \widehat{\mathbf{W}} - \begin{bmatrix} 0 & i\omega \widetilde{\rho}_{eq}(x_2) \\ \frac{i\omega}{\widetilde{K}_{eq}(x_2)} \left( 1 - \left( \frac{k_1}{\widetilde{k}_{eq}(x_2)} \right)^2 \right) & 0 \end{bmatrix} \cdot \widehat{\mathbf{W}} = \frac{\partial}{\partial x_2} \widehat{\mathbf{W}} - \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{W}} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

where  $\widetilde{k}_{eq}(x_2) = k^{[1]} = \omega \sqrt{\widetilde{\rho}_{eq}(x_2) / \widetilde{K}_{eq}(x_2)}$ . The matrix  $\mathbf{A}$  is  $x_2$ -dependent, because  $\Omega(x_2)$ ,  $q^2(x_2)$ ,  $R_b(x_2)$ , and  $\sigma(x_2)$ , are  $x_2$ -dependent. Once the system (6) is solved,  $V_1^{[1]}$  can then be evaluated.

The solution of system (6) takes the following form

$$\widehat{\mathbf{W}}(L) = \mathbf{M} \cdot \widehat{\mathbf{W}}(0), \quad (7)$$

where  $\mathbf{M}$  is the so-called matricant<sup>13</sup>, which relates the value of the state vector  $\widehat{\mathbf{W}}(0)$ , at  $x_2 = 0$ , to the value of the state vector  $\widehat{\mathbf{W}}(L)$ , at  $x_2 = L$ . Since  $\mathbf{A}$  is  $x_2$  dependent (i.e. the plate is not homogeneous or piecewise constant) and  $\mathbf{A}$  does not commute for different values of  $x_2$ , i.e.  $[\mathbf{A}(x_2), \mathbf{A}(x'_2)] = \mathbf{A}(x_2)\mathbf{A}(x'_2) - \mathbf{A}(x'_2)\mathbf{A}(x_2) \neq 0, \forall (x_2, x'_2) \in [0, L]^2, x_2 \neq x'_2$ , the matricant  $\mathbf{M}$  does not contain matrix exponentials or multiplications of matrix exponentials. The matricant is rather defined by the so-called multiplicative integral satisfying the Peano expansion<sup>9,13-15</sup>. This avoids any problem related to lack of discretization when the continuously varying material is approximated by a piecewise constant material. The Peano series reads as

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + \int_0^L \mathbf{A}(x_2) dx_2 + \int_0^L \mathbf{A}(x_2) \left( \int_0^{x_2} \mathbf{A}(\zeta) d\zeta \right) dx_2 + \dots \quad (8)$$

and its evaluation is performed via the following iterative scheme

$$\begin{cases} \mathbf{M}^{\{0\}} = \mathbf{I}, \\ \mathbf{M}^{\{n\}} = \mathbf{I} + \int_0^L \mathbf{A}(x_2) \mathbf{M}^{\{n-1\}}(x_2) dx_2, \end{cases} \quad (9)$$

such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}^{\{n\}} = \mathbf{M}$ .

### C. The boundary value problem

The application of the boundary conditions at both interfaces  $\Gamma_L$  (continuity of pressure  $\widehat{p}^{[1]}(L) = \widehat{p}^{[0]}(L)$  and normal component of the velocity  $\widehat{V}_2^{[1]}(L) = \frac{1}{\rho^{[0]}} \left. \frac{\partial \widehat{p}^{[0]}(x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_2=L}$ ) and  $\Gamma_0$  ( $\widehat{V}_2^{[1]}(0) = 0$ ) yields the state vectors  $\widehat{\mathbf{W}}(L)$  and  $\widehat{\mathbf{W}}(0)$ , which are required to solve the problem. From the separation of variables, the radiation conditions, and the spatial Fourier transform, the spatial Fourier transform of the pressure field in  $D^{[0]}$  can be written as

$$\widehat{p}^{[0]} = A^i e^{-ik_2^{[0]}(x_2-L)} + A^i R e^{ik_2^{[0]}(x_2-L)} , \quad (10)$$

where  $R$  is the acoustic reflection coefficient. The state vectors become

$$\widehat{\mathbf{W}}(L) = \mathbf{S} + \mathbf{L}^L A^i R \quad \text{and} \quad \widehat{\mathbf{W}}(0) = \mathbf{L}^0 \cdot \widehat{p}^{[1]}(0) , \quad (11)$$

wherein  $\mathbf{S}$  accounts for the excitation of the system by the plane incident wave,  $\mathbf{L}^L$  relates the unknown  $R$  to the state vector  $\widehat{\mathbf{W}}(L)$ , and  $\mathbf{L}^0$  relates the unknown  $\widehat{p}^{[1]}(0)$  to the state vector  $\widehat{\mathbf{W}}(0)$ . Their expressions are

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A^i \\ -A^i k_2^{[0]} / \omega \rho^{[0]} \end{bmatrix} , \quad \mathbf{L}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad \text{and} \quad \mathbf{L}^L = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{k_2^{[0]}}{\omega \rho^{[0]}} \end{bmatrix} . \quad (12)$$

Finally, the introduction of (11) in (7) gives rise to the final system of equations, whose solution contain the reflection coefficient  $R$

$$[[\mathbf{L}^L] [-\mathbf{M} \cdot \mathbf{L}^0]] \cdot \begin{bmatrix} A^i R \\ \widehat{p}^{[1]}(0) \end{bmatrix} = -\mathbf{S} , \quad (13)$$

This system is solved for each frequency and directly provide the reflection coefficient associated with the plane incident wave. The pressure field in  $D^{[0]}$  can then be calculated through  $p^{[0]} = \widehat{p}^{[0]} e^{ik_1 x_1}$ . A similar system can be cast when the inhomogeneous porous plate is not backed and radiate in the air medium. In this case, a transmitted field is required and the transmission coefficient is also calculated.

This numerical procedure was validated by comparing the results obtained by the present method to those calculated by the classical transfer matrix method<sup>16</sup> at both normal and

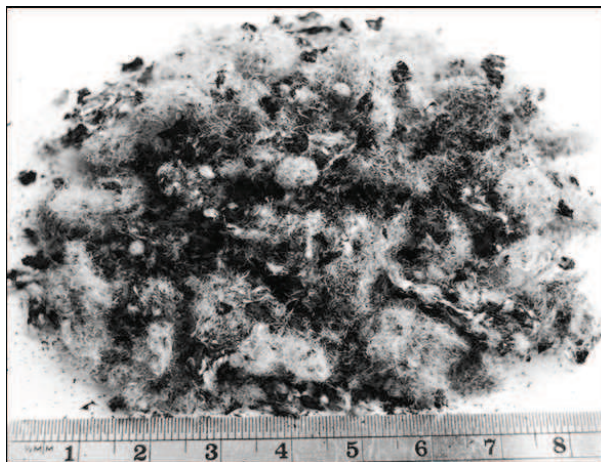


FIG. 2. Tyre shred residue used in the material production process.

oblique incidence for a known two-layers porous material, modeled with the usual Johnson-Champoux-Allard model<sup>10,11</sup>, considered as a single inhomogeneous layer.

#### IV. SAMPLE PREPARATION PROCEDURE

The material sample investigated in this work was manufactured in the Acoustics Laboratory at the University of Bradford. A composition of a polyurethane binder supplied by Chemique Adhesive (XP 2261), low molecular weight polyol supplied by Rosehill Polymers Ltd (Flexilon 1117) and tyre shred residue supplied by Credential Tyre Recycling Ltd was used in the material manufacturing process. Tyre shred residue was a mix of granulated nylon fibres and rubber particles that are bonded to the fibres as illustrated in Figure 2. A majority of the fibres and grains in tyre shred residue fell into the 0.25 – 5.0 mm size range. This range controlled to some extent the minimum and maximum pore dimensions that were achieved in the sample production experiment. The polyurethane polymerisation reaction was activated when water was added and the ingredients were mixed for approximately 60 seconds. This time was found to be sufficient to ensure good mixing of the ingredients in the mix and adequate level of aeration that was needed to help to initiate the polymerization reaction.

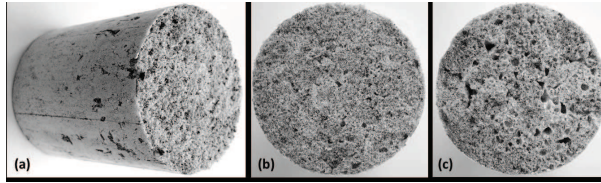


FIG. 3. Photographs of the 140 mm thick material sample with pore stratification.

The resultant mixture was poured in a cylindrical mould with a terminated bottom and an open top. The diameter of this mould was 100 mm and its height 150 mm. In this way, the polymerization reaction occurred in a container with the top surface vented to the atmosphere and the bottom sealed. Oxygen in the atmosphere helped to decrease the reaction time at the surface of the material created in this mould. The reaction time here relates directly to expanding time in the foaming process. A shorter expanding time from a fast reaction of the foaming processes results in smaller pores in the top layer of the material. Carbon dioxide ( $\text{CO}_2$ ) products of the slower reaction at the bottom of the mould can be trapped by the top material layers which solidify more rapidly. Therefore, a slower polymerisation reaction at the bottom of this mould has a longer expanding time resulting in larger pore sizes. It was estimated that the reaction took on average 60 min to complete resulting in a fully consolidated sample of expanded polyurethane foam with the stratified pores. After that time the porous sample was removed from the mould and its top and bottom surfaces were trimmed with to form a 140 mm long porous cylinder with smooth top and bottom surfaces. Photographs of the resultant material sample (porous cylinder) and its top and bottom surfaces are shown in Figure 3.

## V. MATERIAL CHARACTERISATION PROCEDURE

The acoustical and related non-acoustical properties of the material sample were measured using the following procedure. Firstly, the acoustical impedance and absorption coefficient of the original 140 mm porous cylinder was measured in the direct and reverse orientations. This experiment was carried out in a 100 mm diameter, two-microphone Bruel

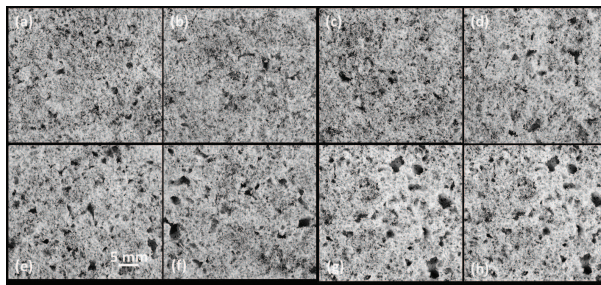


FIG. 4. Microscopic photographs of the porous surfaces of the four sub-layers in which the 140mm sample was divided. The order of these images is from the top layer with smaller pores to the bottom layer with larger pores.

& Kjael (BK4206) impedance tube at a normal angle of incidence and in the frequency range of 50 – 1600 Hz using the standard procedure detailed in<sup>17</sup>. The direct orientation corresponded to the case when the acoustic excitation in the impedance tube was applied to the top surface of the sample which contained smaller pores. The reverse orientation was the opposite, i.e. when the acoustic excitation was applied to the bottom surface of the material sample, i.e. to the surface that consisted of larger pores. Secondly, the porous cylinder was sliced into four sub-layers each having the thickness of 35 mm. The acoustical properties of each of these four sub-layers were measured in the impedance tube in the direct and reverse orientations to study the effect of pore stratification. Figure 4 shows microscopic photographs of the top and bottom surfaces of the four sub-layers which were obtained by slicing the original 140mm material specimen into four individual parts. These images clearly illustrate the pore stratification which was achieved with this material manufacturing process. Here, the larger pores occur in the bottom layer whereas the pores in the top layer are evidently smaller.

The measured acoustic absorption coefficient data for each individual sub-layer were input in a standard optimization algorithm to deduce the flow resistivity,  $R_b$ , porosity,  $\Omega$ , tortuosity,  $q^2$ , and standard deviation in the pore size,  $\sigma$ . An objective function was

adopted to minimize the following difference

$$F(\mathbf{z}) = \sum_{n=1}^N |\alpha_{exp}(f_n) - \alpha_{th}(f_n, \mathbf{z})| \rightarrow \min, \quad (14)$$

where  $f_n$  are the frequencies in the experimentally determined acoustic absorption coefficient spectrum,  $\alpha_{exp}(f_n)$ ,  $\mathbf{z} = \{R_b, \Omega, q, \sigma\}$  is the design variable vector. The optimization algorithm was based on the Nelder-Mead direct search optimization method detailed in<sup>18</sup>. This parameter inversion was carried out for  $N = 750$  in the frequency range of 100–1600 Hz that is a standard operational range for an impedance tube with a 100 mm diameter. The non-acoustical parameters deduced from the optimisation analysis for the four porous sub-layers are presented in Table I. Figure 5 presents a comparison between the measured absorption coefficient spectra for the four sub-layers and absorption coefficient spectra predicted using the values of non-acoustical parameters listed in Table I. Here, the depth measurement corresponds to the direction  $x_2$  which increases towards the top of the material specimen. The index shown in brackets in column 1 in Table I stands for the sub-layer number.

The following conclusions can be drawn from these results (Table I and Figure 5). Firstly, there is a good agreement between the measured and predicted absorption coefficient for each of the four individual sub-layers. There is a relatively small stratification within a single sub-layer so that the model captures well its acoustical behaviour observed in the direct and in reverse orientations. Secondly, the material porosity is relatively independent of the depth. Thirdly, the flow resistivity increases considerably with the increased layer depth and the flow resistivity of the top sub-layer is approximately 5-fold higher than that at the top. Fourthly, there is a rather complex dependence of the tortuosity and standard deviation in the pore size on the layer depth. The developed material structure appears less tortuous near the middle and more tortuous near the ends. This can be explained by a larger proportion of partly closed pores near the open ends and by a more complex interconnectivity between pores of different pore sizes found in this part of the material specimen. An opposite type of the behavior is observed in the standard deviation in the pore size distribution data, which peak appears at the medium depth where the minimum tortuosity value is also observed (see

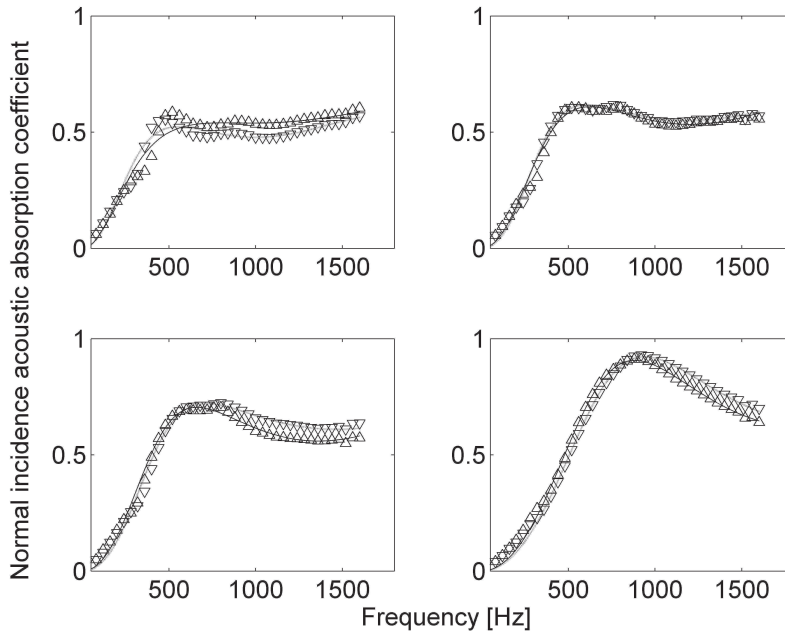


FIG. 5. The measured and predicted acoustic absorption coefficient spectra of direct and reverse orientations of the four porous sub-layers ( $\Delta$  - measured data (direct orientation);  $\nabla$  - measured data (reverse orientation); — predicted (direct orientation); ... predicted (reverse orientation)).

Table I). This phenomenon is difficult to interpret without accurate pore size distribution data and it deserves a more detailed investigation.

## VI. NUMERICAL RESULTS

The configuration is discretized in with 1000 points and the number of iteration for the evaluation of the Peano series is fixed at 250. These values were not optimized, but it was found that the spatial discretization along the inhomogeneity should be small compared to the wavelength inside the porous material for the method to correctly model the response. This method is computationally efficient in case of rigid frame approximation problems.

Each parameters  $P$  is approximated by a fourth order polynomial function of  $P(x_2) = a_P x_2^4 + b_P x_2^3 + c_P x_2^2 + d_P x_2 + e$  (Lagrangian), whose coefficients,  $a_P$ ,  $b_P$ ,  $c_P$ , and  $d_P$ , have



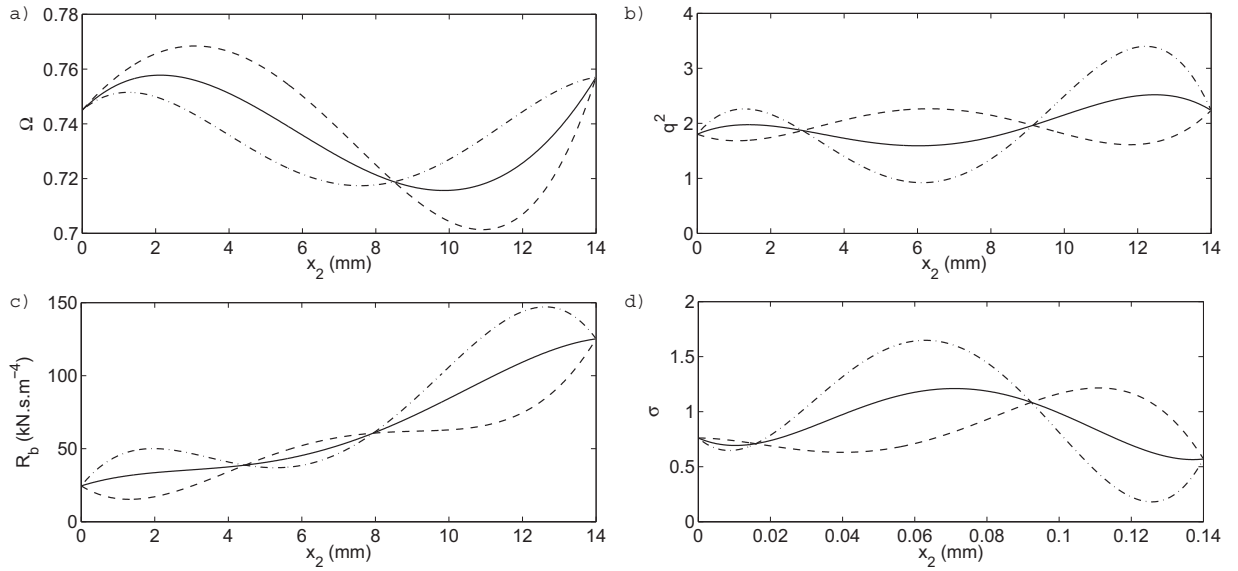


FIG. 6. Profile of the parameters, a) the porosity  $\Omega$ , b) the tortuosity  $q^2$ , c) the flow resistivity  $R_b$  and d) the standard deviation in the pore size  $\sigma$ , when the value at each cutting depth is (—) the mean values of the upper sub-layer in the reversed orientation and of the lower sub-layer in the direct orientation, (---) the value of the lower sub-layer in the direct orientation and (-·-) the value of the upper sub-layer in the reversed orientation.

been obtained by matching the polynomial function with a parameter value measured at a specific depth. The parameters at the both edges of the sample are fixed at their values at the depths of 140 mm and 0 mm. At each of the three cutting depths (105 mm, 70 mm and 35 mm), two parameters values are available: one corresponds to the upper sub-layer in the reversed orientation and the other to the lower sub-layer in the direct orientation (see Table I). The generated profile with the fourth order polynomial function is sensitive to the choice of these values. Figure 6 depicts the profiles generated when the value at cutting depth is: (i) the mean values of the upper sub-layer in the reversed orientation and of the lower sub-layer in the direct orientation; (ii) the value of the lower sub-layer in the direct orientation; and (iii) the value of the upper sub-layer in the reversed orientation.

Figure 7 depicts the absorption coefficient ( $A$ ) calculated with the proposed theoretical model ( $A = 1 - R^2$ ,  $R$  is the solution of system (13)) for the parameter profiles shown in

Figure 6 and the measured absorption coefficients for the whole material sample. Several observations can be made on the basis of these results. Firstly, the model captures well the behavior of the measured acoustic absorption coefficient spectra throughout the considered frequency range. Secondly, the agreement between the model and the measured data is better in the case of direct sample orientation, i.e. when the sound wave is incident on the higher flow resistivity end of the sample. Thirdly, a better agreement between the modeled and measured data is obtained when the parameter values for the upper sliced sample in the reverse orientation are used (see dash-dotted lines in Figure 6). Fourthly, the largest discrepancy between the modeled and measured data is observed when the parameter values for the lower sliced sample in the direct orientation are used in the model. Fifthly, the mean parameter values enable the model to provide a sufficiently close fit (within 5%). The observed discrepancies are generally small and can be explained by the choice of the method to generate the parameter profiles shown in Figure 6. A modification of one value in the parameter profile leads to the modification of the profile as a whole and different coefficients in the Lagrangian which need to be adopted in the polynomial approximation. The values of these parameters depend to some extent on the sub-layer orientation. Clearly, there is small inhomogeneity within each of the four sub-layers and it may be necessary to refine further the material characterization procedure which was used to determine the stratification parameters shown in Table I.

The absorption coefficient data measured for the direct and reverse sample orientations (see Figure 6) are markedly different. This points out to the fact that the sample is macroscopically inhomogeneous. The absorption coefficient spectrum measured in the reverse sample orientation ( $A_r$ ) is consistently higher than that measured in the direct orientation ( $A_d$ ). It is possible to illustrate with these data that the ratio of these two absorption coefficient spectra has a clear peak  $\max\{A_r/A_d\} \approx 1.8$  which occurs around 220 Hz. Beyond this peak the ratio of the two spectra asymptotically approaches  $A_r/A_d \rightarrow 1.2$  at 1600 Hz. This phenomenon can be mainly explained by the attained profile of the air flow resistivity, which increases gradually from  $x_2 = 0$  mm to  $x_2 = 140$  mm and this increase

is approximately 5-fold. When the incident wave strikes at the sample which is presented in the direct orientation, the value of  $R_b$  is relatively large resulting in a poor impedance mismatch ( $R_b L / \rho_0 c \approx 41$ ). In this case a considerable amount of the acoustic energy in the incident wave is reflected at the interface  $x_2 = L$  and the spectrum of the absorption coefficient is limited. In the case, when the wave strikes at the sample presented in the reverse orientation (at  $x_2 = 0$ ), the values of  $R_b$  is relatively small and it gradually increases with depth. There is a smaller impedance mismatch ( $R_b L / \rho_0 c \approx 8$ ). Therefore, the strength of the reflection is smaller and the absorption coefficient is relatively large. While  $R_b$  changes considerably with depth, the stratification in the other three non-acoustical parameters, as a first approximation, is relatively small. Numerical simulations suggest that there is a little difference between the absorption coefficient spectra predicted with the actual profiles for  $\Omega(x_2)$ ,  $q(x_2)$  and  $\sigma(x_2)$  as shown in Figure 6, and those predicted with their depth-averaged values. Clearly, the effect of  $R_b(x_2)$  on the observed acoustic absorption coefficient spectra is dominant here. This parameter is controlled directly by the pore size distribution which changes as a function of depth. This effect seems to be well predicted by the pore size distribution model and alternative Biot's formulation approach adopted in section II.

## VII. CONCLUSIONS

This work presents new experimental data on the acoustic absorption coefficient of a material with continuous pore stratification. This material has been manufactured using a relative simple chemical reaction process in which a mixture of recycled grains and fibers has been bonded with an polyurethane binder. It has been shown that the reaction time is a main parameter that needs to be controlled in the foaming process in order to produce continuous pore stratification. The acoustical properties and related non-acoustical parameters of the resultant porous structure have been measured. It has been shown that the acoustical properties of this sample presented in the direct and reverse orientations are markedly different so that the developed porous structure is macroscopically inhomogeneous. The

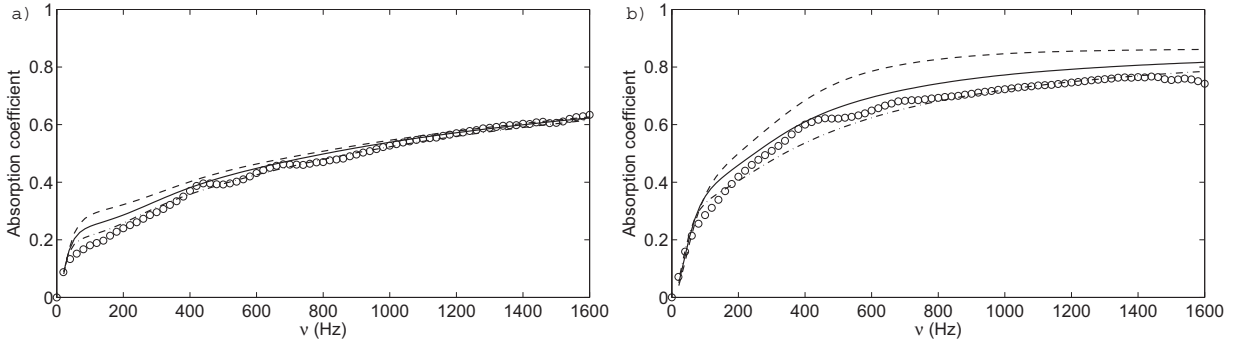


FIG. 7. Absorption coefficient at normal incidence of the 140 mm thick sample in the direct and reverse orientation (o) measured and calculated when the value at each cutting depth is (—) the mean values of the upper sliced sample in the reversed orientation and of the lower sliced sample in the direct orientation, (---) the value of the lower sliced sample in the direct orientation and (- · -) the value of the upper sliced sample in the reversed orientation.

absorption coefficient spectrum measured in the reverse sample orientation is up to 80% higher than that measured in the direct orientation. This variation in the absorption coefficient spectrum is associated with the variation in the impedance mismatch when the sample orientation is reversed.

The variation in the values of the measured non-acoustical parameters have been used to explain the observed acoustic absorption coefficient spectra and their dependence on the sample orientation. It has been shown that the effect of the flow resistivity on the observed acoustic absorption coefficient spectra is dominant. This parameter undergoes an approximately 5-fold change through the 140mm sample depth. A suitable theoretical model has been adopted to explain this effect. The adopted model is based on the alternative Biot's formulation<sup>4</sup> and pore size distribution model proposed by Horoshenkov and Swift<sup>5</sup>. This model makes use of the four non-acoustical parameters: flow resistivity, porosity, tortuosity and standard deviation in the pore size which can vary as a function of sample depth. The model captures well the behavior of the measured acoustic absorption coefficient spectra throughout the considered frequency range with the accuracy of 5% or better. It has been

shown that it is possible to use the parameter values which are averaged within a depth interval in which their variation is relatively small.

## References

- <sup>1</sup> I. U., *Sound Absorption Technology* (Noise Control Foundation, New York) (1994).
- <sup>2</sup> B. Brouard, D. Lafarge, and J.-F. Allard, “A general method of modelling sound propagation in layered media”, *J. Sound Vib.* **183**, 129–142 (1995).
- <sup>3</sup> L. De Ryck, W. Lauriks, Z. Fella, A. Wirgin, J. Groby, P. Leclaire, and C. Depollier, “Acoustic wave propagation and internal fields in rigid frame macroscopically inhomogeneous porous media”, *J. Appl. Phys.* **102**, 024910 (2007).
- <sup>4</sup> M. Biot, “Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media”, *J. Appl. Phys.* **33**, 1482–1498 (1962).
- <sup>5</sup> K. Horoshenkov and M. Swift, “The acoustic properties of granular materials with pore size distribution close to log-normal”, *J. Acoust. Soc. Am.* **110**, 2371–2378 (2001).
- <sup>6</sup> G. Gautier, J. Groby, O. Dazel, L. Kelders, L. Deryck, and P. Leclaire, “Propagation of acoustic waves in a one-dimensional macroscopically inhomogeneous poroelastic material”, *J. Acoust. Soc. Am.* **130**, 1390–1398 (2011).
- <sup>7</sup> A. Shuvalov, O. Poncelet, and M. Deschamps, “General formalism for plane guided waves in transversely inhomogeneous anisotropic plates”, *Wave Motion* **40**, 413–426 (2004).
- <sup>8</sup> A. Shuvalov, O. Poncelet, M. Deschamps, and C. Baron, “Long-wavelength dispersion of acoustic waves in transversely inhomogeneous anisotropic plates”, *Wave Motion* **42**, 367–382 (2005).
- <sup>9</sup> A. Shuvalov, E. Le Clezio, and G. Feuillard, “The state-vector formalism and the peano-series solution for modelling guided waves in functionally graded anisotropic piezoelectric plates”, *Int. J. Engrg. Sci.* **46**, 929–947 (2008).
- <sup>10</sup> J.-F. Allard and Y. Champoux, “New empirical equations for sound propagation in rigid frame porous materials”, *J. Acoust. Soc. Am.* **91**, 3346–3353 (1992).

- <sup>11</sup> D. Johnson, J. Koplik, and R. Dashen, “Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media”, *J. Fluid Mech.* **176**, 379–402 (1987).
- <sup>12</sup> P. G., H. K. V., and A. K., “Comparison of two modeling approaches for highly heterogeneous porous media”, *J. Acoust. Soc. Am.* **121**, 961–966 (2007).
- <sup>13</sup> M. Pease, *Methods of Matrix Algebra*, chapter 6 and 7 (Academic Press, New-York) (1965).
- <sup>14</sup> C. Baron, “Le développement en srie de peano du matricant pour l’étude de la propagation des ondes élastiques en milieux à proprités continument variables”, Ph.D. thesis, Universit de Bordeaux I (2005).
- <sup>15</sup> G. Peano, “Intégration par série des équations différentielles linéaires”, *Mathematische Annallen* **32**, 450–456 (1888).
- <sup>16</sup> B. Brouard, D. Lafarge, and J. Allard, “A general method of modeling sound propagation in layered media”, *J. Sound & Vib.* **83**, 129–142 (1995).
- <sup>17</sup> I. O. for Standardization. ISO 10534, “Acoustics: Determination of sound absorption coefficient and impedance in impedance tubes - part 2: Transfer function method”, (2001).
- <sup>18</sup> N. J. A. and M. R., “A simplex method for function minimization”, *Computer Journal* **7**, 308–313 (1965).

TABLE I. The values of the four non-acoustical parameters as a function of the layer depth.

Layer depth (mm)	$\Omega$	$q^2$	$R_b$ (N.s.m <sup>-4</sup> )	$\sigma$
140 (1)	0.757	2.236	125200	0.570
105 (1)	0.731	2.800	117600	0.633
105 (2)	0.702	1.725	64000	1.199
70 (2)	0.718	1.017	46730	1.613
70 (3)	0.738	2.245	57730	0.807
35 (3)	0.740	1.606	43780	1.183
35 (4)	0.768	1.976	29110	0.635
0 (4)	0.745	1.803	24520	0.761

## List of Figures

FIG. 1	Cross-sectional plane view of the configuration. . . . .	6
FIG. 2	Tyre shred residue used in the material production process. . . . .	10
FIG. 3	Photographs of the 140 mm thick material sample with pore stratification. .	11
FIG. 4	Microscopic photographs of the porous surfaces of the four sub-layers in which the 140mm sample was divided. The order of these images is from the top layer with smaller pores to the bottom layer with larger pores. . . . .	12
FIG. 5	The measured and predicted acoustic absorption coefficient spectra or direct and reverse orientations of the four porous sub-layers ( $\Delta$ - measured data (direct orientation); $\nabla$ - measured data (reverse orientation); — predicted (direct orientation); ... predicted (reverse orientation)). . . . .	14
FIG. 6	Profile of the parameters, a) the porosity $\Omega$ , b) the tortuosity $q^2$ , c) the flow resistivity $R_b$ and d) the standard deviation in the pore size $\sigma$ , when the value at each cutting depth is (—) the mean values of the upper sub-layer in the reversed orientation and of the lower sub-layer in the direct orientation, (— — —) the value of the lower sub-layer in the direct orientation and (— · —) the value of the upper sub-layer in the reversed orientation. . . . .	15
FIG. 7	Absorption coefficient at normal incidence of the 140 mm thick sample in the direct and reverse orientation (o) measured and calculated when the value at each cutting depth is (—) the mean values of the upper sliced sample in the reversed orientation and of the lower sliced sample in the direct orientation, (— — —) the value of the lower sliced sample in the direct orientation and (— · —) the value of the upper sliced sample in the reversed orientation. . . .	18





Annexe **D**

Normalised stiffness ratios for  
mechanical characterization of  
isotropic acoustic foams.

# Normalised stiffness ratios for mechanical characterization of isotropic acoustic foams

**Sohbi Sahraoui**

*LAUM, CNRS UMR 6613, Université du Maine, Av. O. Messiaen, 72085 Le Mans, France*

*sohbi.sahraoui@univ-lemans.fr*

**Alan Geslain**

*LAUM, CNRS UMR 6613, Université du Maine, Av. O. Messiaen, 72085 Le Mans, France*

*alan.geslain.etu@univ-lemans.fr*

**Bruno Brouard**

*LAUM, CNRS UMR 6613, Université du Maine, Av. O. Messiaen, 72085 Le Mans, France*

*bruno.brouard@univ-lemans.fr*

**Damien Parmentier**

*CTTM, Centre de Transfert de Technologie du Mans, 20 rue Thalès de Milet, 72000, Le Mans.*

*dparmentier@cttm-lemans.com*

Abbreviated title: mechanical characterization of acoustic foams

**Abstract:** A quasi-static method for the mechanical characterization of foams is presented.

A compression test setup is used to measure the compression stiffness of cubic sample for checking the isotropy or for evaluating the degree of anisotropy. For isotropic materials the Young's modulus and the Poisson's ratio are determined through normalised stiffness ratios built by the finite element method for brick-shaped at various shape factors. The measured stiffness of samples cut in a foam plate and the juxtaposition of two samples give an easy extraction of the elastic constants at low frequency. This approach is extended to disk-shaped samples.

**PACS numbers:** 43.35. Mr, 43.50. Gf, 43.20. Ye, 43.40Yq

## 1. Introduction

Acoustic propagation in the open cell foams can be predicted with a phenomenological model of the Biot theory<sup>1,2</sup> where the elastic properties of the solid phase are needed. To characterize the viscoelastic properties of acoustic foams, only a few experimental techniques are available in the literature and they consist on non resonant techniques,<sup>3-5</sup> standing wave resonance of a longitudinally excited rod with end mass<sup>6,7</sup> or mass-spring resonance.<sup>8</sup> They all perform measurements on a narrow frequency range. An extension of those measurements on a wide frequency range has been made by theoretical modelization of the viscoelastic behavior of foams,<sup>9</sup> through the frequency-temperature superposition principle<sup>10</sup> or by means of acoustical excitations.<sup>11,12</sup>

Due to the manufacturing process, porous materials, such as foamed polymers, exhibit elastic properties that are highly anisotropic. In the rising direction, non-regular cell geometry is induced which, in general, leads to highly directive cell orientations, with strength and stiffness found to be higher in the direction of the elongated cells.<sup>13-</sup><sup>15</sup> In these studies, cubic sample were considered to investigate the mechanical response of each direction; Mariez et al.<sup>15</sup> and Melon et al.<sup>14</sup> check the axisymmetrical behavior of the sample and more recently, Guastavino et al.<sup>13,16</sup> give a mapping of the 3D full-field displacement and show complex strain on the four free faces due to foam anisotropy and the boundary conditions; a methodology for identification of general orthotropic elastic models of porous foams is proposed. The collapse of the cells is proceeding following a process of static compression and the influence of the no-slip boundary conditions pointed out in his thesis are described in a forthcoming paper.<sup>17</sup>

In the first work by Mariez et al., a cubic foam sample is compressed between two rigid plates - see Fig. 1a. The Young modulus  $E$  and the Poisson's ratio  $\nu$  are adjusted in a static finite element model of the test setup to match the measured mechanical impedance ( $F/\nu$ ) and the displacement ratio  $u/\nu$ . This method requires the measure of the lateral displacement  $\nu$  of the face centre by a laser vibrometer. In the second work by Langlois et al. two cylindrical samples of different shape factors are compressed with the same setup and then the two elastic constants on the material are determined from the impedance measurements and the polynomial relations derived from finite element simulations.

This paper is focalised on the two-samples method proposed by Langlois et al.<sup>5</sup> with cylindrical samples and extended here to parallelepipedic geometry and where a better alternative is found without using the polynomial relations. The stiffness measurement of two juxtaposed identical samples is the basic idea of this study. The investigation on cubic sample let us to check the isotropy on the foam or at less the degree of anisotropy. The introduction of normalised stiffness ratio calculated by finite element simulation give a straightforward access to  $E$  and  $\nu$ . The calculations were performed for various shape factors and Poisson's ratio (0 to 0.48 by 0.005 step). Here the shape factor is defined as the side of the square section (or diameter of circular section)-to-the thickness ratio.

The elastic and static compression is simulated by finite element method in section 2: calculation of normalised stiffness and of normalised stiffness ratio of parallelepipedic sample. The approach for extracting the elastic constants is also applied for cylindrical samples. Finally, the characterization of polymeric foams is detailed in section 3.

## 2. Finite element simulation of static compression

### 2.1 Parallelepipedic samples

A foam sample with the Young's modulus  $E$  and the Poisson's ratio  $\nu$  has the stiffness:

$$K = F / v \quad (1)$$

where  $F$  and  $v$  are respectively the compressive load measured by the load sensor and the vertical displacement measured by the inductive sensor as indicated in Fig. 1a.

For parallelepipedic samples having a square section ( $A=L^2$ ) the thickness value is given by  $L/s$  where  $s$  is the corresponding shape factor. The stiffness  $K$  [Eq.( 1)], depending on the elastic constant and the sample dimensions, can be written as:

$$K_s = \frac{EA}{L/s} k_s(\nu) \quad (2)$$

where  $K_s$  and  $k_s$  are respectively the measured stiffness and the normalised stiffness functions.

For a half parallelepipedic sample (the thickness and the shape factor are respectively  $h/2$  and  $2s$ ), the stiffness is:

$$K_{2s} = \frac{EA}{L/2s} k_{2s}(\nu) \quad (3)$$

where  $K_{2s}$  and  $k_{2s}$  are respectively the measured and normalised stiffness.

By using Eqs (2) and (3) the normalised stiffness ratio  $\alpha_s$  (defined as  $k_s/k_{2s}$ ) takes the form:

$$\alpha_s(\nu) = \frac{k_s}{k_{2s}} = \frac{2K_s}{K_{2s}} \quad (4)$$

where the ratio  $K_s/K_{2s}$  is only depending on Poisson's ratio. The normalised stiffness  $k_s$  and the ratio  $\alpha_s(\nu)$  are plotted in Fig. 1b and 1c. We can observe on these simulated curves that  $k_s$  are equal to 1 for low Poisson's ratio; in this case the simulation confirms that the sample doesn't bulge sideways when lateral deformation is not allowed in the loaded faces.

The bijective function  $\alpha_s(\nu)$  plotted in Fig. 1c gives a straightforward access to  $E$  and  $\nu$ . In this method, the two elastic constants are easily calculated in two steps:

- the normalized stiffness ratio  $\alpha_s$  let us to obtain  $\nu$  by using the abacus given in Fig.1c
- the  $\nu$  value calculated above yields  $k_s$  through Fig. 1b and then the Young's modulus is determined from the measured stiffness and Eq. 2 as:

$$E = \frac{K_s}{sLk_s(\nu)} \quad (5)$$

This procedure is summarised in Fig. 2a. By using the curve  $\alpha_s(\nu)$ , the measured value  $a = K_s/K_{2s}$  is related to the corresponding value  $b$  of  $\nu$  (Eq. 4) and then we obtain the value  $c$  of the normalised stiffness  $k$ . Finally the Eq. 5 allow us to determine  $E$  by means of the measured stiffness  $K_s$ .

## 2.2. Case of cubic samples

For a cubic sample ( $s=1$ ) and a half cube ( $s=2$ ), the stiffness is:

$$K_1 = \frac{EA}{L} k_1(\nu) \quad (6)$$

and:

$$K_2 = \frac{EA}{L/2} k_2(\nu) \quad (7)$$

where the ratio  $K_1 / K_2$  is only depending on Poisson's ratio. The normalised stiffness ratio  $\alpha_1$  takes the form:

$$\frac{k_1(\nu)}{k_2(\nu)} = \frac{2K_1}{K_2} = \alpha_1(\nu) \quad (8)$$

The equations (6-8) can be obtained from the general equations (2-4).

### 2.3. Cylindrical samples

For cylindrical samples having a circular section ( $A = \pi D^2/4$ ) the thickness value is given by  $D/s$ . Then Eq. 2 takes the same form:

$$K_s = \frac{EA}{D/s} k'_s(\nu) \quad (9)$$

Similarly we can build numerically new normalized stiffness  $k'_s$  and stiffness ratio  $\alpha'_s$  as explained above for parallelepipedic samples. Therefore the experimental values of  $K_s$  and  $K_{2s}$  let us to calculate firstly  $\nu$  and secondly  $E$  by using Eq. 6:

$$E = \frac{4K_s}{\pi s D k'_s(\nu)} \quad (10)$$

The normalized stiffness and the normalized stiffness ratio are calculated for the shape factor of samples used in the characterization section.

### 3. Measurements of Poisson's ratio and Young's modulus

We limit the stiffness measurements at one frequency (40 Hz) and the initial applied strain and the amplitude are fixed at  $\varepsilon_0 = 3\%$  and  $\varepsilon_1 = 0.1\%$  respectively by using the experimental setup schematised by figure 1a. Then, in complex notation, the applied strain is :

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 e^{j\omega t} \quad (11)$$



and the complex Young's modulus takes the form :

$$\hat{E} = E(1 + j\eta) \quad (12)$$

where  $E$  and  $\eta$  represent the Young's modulus and the loss factor. The device equipped with a displacement sensor and completely piloted by computer allows to fix exactly the strains  $\varepsilon_0$  and  $\varepsilon_1$ .

### 3.1. Isotropy checking

The open-cell foams exhibit a quasi-axisymmetrical behavior<sup>14,16</sup> and the rising direction during the foaming process, named longitudinal direction, corresponds to one of the principal axis.

As mentioned above the cubic geometry allows us to check the isotropy or the degree of anisotropy by comparing the stiffness in the three directions. The experiments were performed with three foams plate having the same thickness (40 mm). Cubic samples (40x40x40) of the three different foams are investigated and we note  $K_T$ ,  $K_T$  and  $K_L$  the value of the stiffness in each direction (transverse and longitudinal); the table I gives relative values where  $K_T$  is fixed to 100.

The polyurethane (PU) foams "A" and "B" and the melamine "C" (table I) show the extreme cases of low and high anisotropy; the foam A is the closest material to isotropy but we have to keep in memory that there is a substantial estimate (12% difference).

### 3.2. Sample juxtaposition

Shear stress arises from the no-slip conditions at the loading surfaces as mentioned before. The absence of shear stress in the horizontal plane of symmetry of the cubic (or cylindrical) samples is the basic property suggesting to test together two juxtaposed samples. All tests on entire cubic samples and on two half-cube samples give similar results. Therefore the two-sample method quoted above<sup>5</sup> can be applied to identical sample cut in the same foam plate; the stiffness measurements are performed on two juxtaposed samples and on one sample.

### 3.3. Characterization example

Brick-shaped and disk-shaped sample are cut a PU foam plate being 20 mm in thickness; for square (40x40) and circular ( $D = 44$  mm) section the shape factors are respectively 2 and 2.2. The measurements of identical

samples stiffness show some fluctuation (5-10%) due to the foam heterogeneity and then the results in table II gives the mean value. We can also mention that the error of measure of the elastic constants depends of the shape factor. The deviation on Poisson's ratio is depending on the measure precision and the slope of normalized stiffness ratio; this error is great or small at respectively low or high values of  $s$  as illustrated in Fig. 1c.

The Young's modulus measured at 3% initial strain corresponds at his maximal value; the influence of initial strain on  $E$  is widely discussed in a further paper<sup>17</sup>.

#### 4. Conclusion

A quasi-static mechanical characterization of acoustic foam is investigated with the two-sample method. The method uses two identical brick-shaped or disk-shaped samples cut in commercial available plate foam. The originality lies with the development of a normalized stiffness ratio for extracting the Young's modulus and the Poisson's ratio. Contrary to previous method, this approach doesn't require a polynomial calculation and the cut of two different shape factor samples. The main result of this work is linked to the use of cubic and half-cubic samples for evaluating the degree of anisotropy and to estimate the isotropy approximation.

#### References

- <sup>1</sup> M.A. Biot, *Acoustic, Elasticity and Thermodynamics of Porous Media- Twenty One Papers by M.A. Biot*, edited by I. Tolstoy (American Institute of Physics, Woodbury, NY, 1992).
- <sup>2</sup> J.F. Allard, *Propagation of Sound in Porous Media: Modelling Sound Absorbing Materials*, (Elsevier Applied Science, London, 1993).
- <sup>3</sup> E. Mariez, S. Sahraoui, and J.F. Allard, "Elastic constants of polyurethane foam's skeleton for Biot model," Proceedings of Internoise 96, pp.951-954 (1996).
- <sup>4</sup> S. Sahraoui, E. Mariez, and M. Etchessahar, *Mechanical testing of polymeric foams at low frequency*. Polym. Test. **20**, 93-96, (2001).
- <sup>5</sup> C. Langlois, R. Panneton and N. Atalla, "Polynomial relations for quasi-static mechanical characterization of isotropic poroelastic materials," J. Acoust. Soc. Am. **110**, 3032-3040, (2001)
- <sup>6</sup> T. Pritz, "Dynamics Young's modulus and loss factor of plastic foams for impact sound isolation," J. Sound Vib. **178**, 315-322, (1994).
- <sup>7</sup> A. Sfaoui, "On the viscoelasticity of polyurethane foams," J. Acoust. Soc. Am. **97**, 1046-1052, (1995)

- <sup>8</sup> T. Pritz, “*Non-linearity of frame dynamic characteristics of mineral and glass wool materials,*” J. Sound Vib. **136**, 263-274, (1990).
- <sup>9</sup> T. Pritz, “*Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials,*” J. Sound Vib. **195**, 103-115, (1996).
- <sup>10</sup> M. Etchessahar, S. Sahraoui, L. Benyahia and J.F. Tassin, “*Frequency dependence of elastic properties of acoustic foams,*” J. Acoust. Soc. Am. **117**, 1114-1121, (2005).
- <sup>11</sup> J.F. Allard, M. Henry, L. Boeckx, P. Leclaire and W. Lauriks, “*Acoustical measurement of the shear modulus for thin porous layers,*” J. Acoust. Soc. Am. **117**, 1737-1743, (2005).
- <sup>12</sup> V. Gareton, D. Lafarge and S. Sahraoui, “*The measurement of the shear modulus of a porous polymer layer with two microphones,*” Polym. Test. **28**, 508-510, (2009).
- <sup>13</sup> R. Guastavino and P. Göransson, “*A 3D displacement measurement methodology for anisotropic porous cellular foam materials,*” Polym. Test. **26**, 711-719, (2007).
- <sup>14</sup> M. Melon, E. Mariez, C. Ayrault and S. Sahraoui, “*Acoustical and mechanical characterization of anisotropic open-cell foams,*” J. Acoust. Soc. Am. **104**, 2622-2627, (1998).
- <sup>15</sup> E. Mariez and S. Sahraoui, “*Measurement of mechanical anisotropic properties of acoustic foams for the Biot model,*” Proceedings of Internoise 97, pp.1683-1686 (1997).
- <sup>16</sup> R. Guastavino, “Elastic and acoustic characterization of anisotropic porous materials”, Ph.D. dissertation, KTH Engineering Science, Stockholm, (2008).
- <sup>17</sup> A. Geslain, O. Dazel, J-P. Groby, S. Sahraoui, and W. Lauriks, “*Influence of static compression on mechanical parameters of acoustic foams*”, accepted for publication in J. Acoust. Soc. Am.

Table 1: Relative value stiffness in principal directions

$K_T$	$K_{T'}$	$K_L$	foam
100	105	112	"A"
100	104	125	"B"
100	105	144	"C"

Table 2: Mechanical parameters of foam "A" at 40 Hz

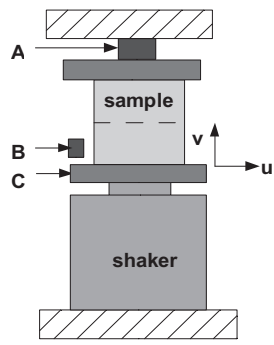
	Square section	circular section
E(kPa)	$292 \pm 13$	$311 \pm 14$
$\nu$	$0.42 \pm 0.04$	$0.44 \pm 0.04$
$\eta$	$0.12 \pm 0.01$	$0.11 \pm 0.01$

**Captions of figures****Figure 1:**

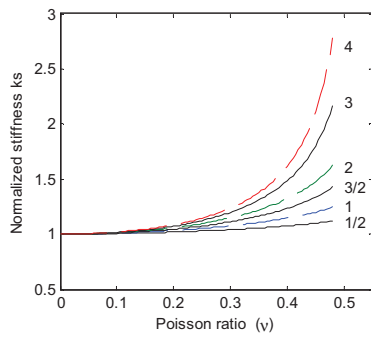
- a) Experimental setup (A: load F sensor, B: displacement v sensor of the moving plate C)
- b) Numerical stiffness vs Poisson's ratio for various shape ratios
- c) Normalized stiffness ratio

**Figure 2:**

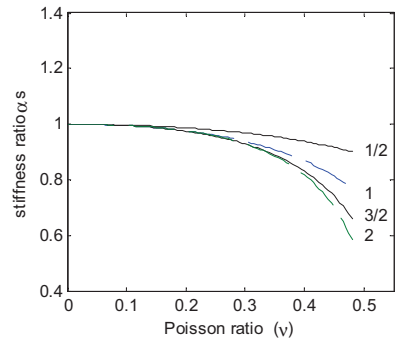
- a) Schematization of E and  $\nu$  calculations by using  $\alpha$  and k curves (a  $\rightarrow$  b  $\rightarrow$  c)
- b) Normalized stiffness  $k'_s$ ,  $k'_{2s}$  and stiffness ratio  $\alpha'_s$  (dotted line) for cylindrical samples (s = 1.1)



a)

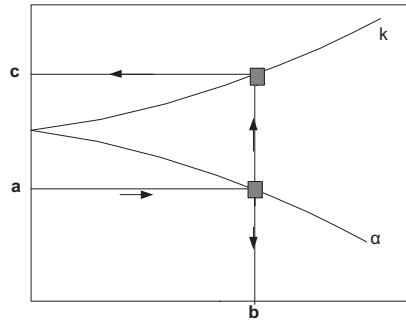


b)

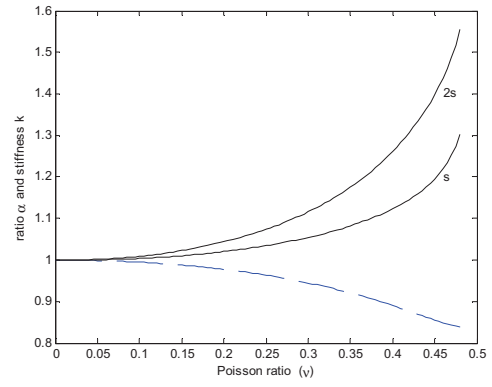


c)

Figure 1



a)



b)

Figure 2





# Bibliographie

- [1] ADEME, <http://www.ademe.fr/particuliers/Fiches/bruit/index.htm>, 2011.
- [2] J. F. Allard and N. Atalla, *Propagation of sound in porous media : Modelling sound absorbing materials 2e*, ch. 5, Wiley & Sons, Chichester, 2009.
- [3] J-F. Allard, M. Henry, L. Boeckx, P. Leclaire, and W. Lauriks, *Acoustical measurement of the shear modulus for thin porous layers.*, J. Acoust. Soc. Am. **117** (2005), 1737–1743.
- [4] J F. Allard, G. Jansens, G. Vermeir, and W. Lauriks, *Frame-borne surface waves in air-saturated porous media*, J. Acoust. Soc. Am. **111** (2002), 690–696.
- [5] N. Atalla, R. Panneton, and P. Debergue, *A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials*, Journal of the Acoustical Society of America **104** (1998), no. 3, 1444–1452.
- [6] MA Biot, *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-filled-saturated porous solid; i low-frequency range*, J. Acoust. Soc. Am. **28** (1956), 168–191.
- [7] M.A. Biot, *Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media*, J. Appl. Phys. **33** (1962), 1482–1498.
- [8] L. Boeckx, *Study of the sound field in and above porous materials application to characterization of sound absorbing materials*, Ph.D. thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2005.
- [9] L. Boeckx, P. Leclaire, P. Khurana, C. Glorieux, W. Lauriks, and J. F. Allard, *Guided elastic waves in porous materials saturated by air under lamb conditions*, J. Appl. Phys **97** (2005), 1886885–1886893.
- [10] ———, *Investigation of the phase velocities of guided acoustics waves in soft porous layers*, J. Acoust. Soc. Am. **117** (2005), 545–554.
- [11] Y Champoux and J-F Allard, *Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media*, Journal of Applied Physics **70** (1991), 1975–1979.
- [12] CIDB, <http://www.bruit.fr/FR/info/Les/textes/relatifs/aux/bruits/de/voisinage/208/0300>, 2011.
- [13] COMSOL, <http://www.comsol.fr/>, 2011.
- [14] O Danilov, F Sgard, and X Olny, *On the limits of an “in vacuum” model to determine the mechanical parameters of isotropic poroelastic materials*, Journal of Sound and Vibration **276** (2004), no. 3-5, 729–754.

- [15] N. Dauchez, *Etude vibroacoustique des matériaux poroélastiques par éléments finis.*, Ph.D. thesis, Université du Maine, 1999.
- [16] N. Dauchez, S. Sahraoui, and M. Etchessahar, *One measurement of mechanical properties of sound absorbing material*, second Biot conference on Poromechanics, 2002.
- [17] O. Dazel, *Synthèse modale pour les matériaux poreux*, Ph.D. thesis, INSA Lyon, 2003.
- [18] O. Dazel, B. Brouard, N. Dauchez, and A. Geslain, *Enhanced biot's finite element displacement formulation for porous materials and original resolution methods based on normal modes*, Acta Acustica United with Acustica **95** (2009), no. 3, 527–538.
- [19] O. Dazel, B. Brouard, C. Depollier, and S. Griffiths, *An alternative biot's displacement formulation for porous materials*, J. Acoust. Soc. Am. **121** (2007), 3509–3516.
- [20] O. Dazel, A. Geslain, B. Brouard, and N. Dauchez, *Enhanced biot's finite element displacement formulation for porous materials and original resolution methods*, Symposium on the Acoustics of Poro-Elastic Materials Bradford - United Kingdom, 2008.
- [21] Olivier Dazel, B. Brouard, Nicolas Dauchez, Alan Geslain, and Claude-Henri Lamarque, *A free interface cms technique to the resolution of coupled problem involving porous materials, application to a monodimensional problem*, Acta Acust United Ac **96** (2010), no. 2, 247–257 (English).
- [22] A. G. Dement'ev and O. G. Tarakanov, *Model analysis of the cellular structure of plastic foams of the polyurethane*, Polymer Mechanics **6** (1970), 744–749.
- [23] O. Doutres, *Caractérisation mécanique de matériaux fibreux en vibro-acoustique*, Ph.D. thesis, Université du Maine, 2007.
- [24] O. Doutres, N. Dauchez, J.-M. Genevaux, G. Lemarquand, and S. Mezil, *Ironless transducer for measuring the mechanical properties of porous materials*, Rev Sci Instru **81** (2010), no. 5, 055101–055109.
- [25] A. Duclos, *Diffusion multiple en fluide visco-thermique, cas du cristal phononique à deux dimensions*, Ph.D. thesis, Université du Maine, 2007.
- [26] M. Etchessahar, *Low frequency mechanical characterisation of acoustic materials*, Ph.D. thesis, Université du Maine, 2002.
- [27] M. Etchessahar, S. Sahraoui, L. Benyahia, and JF Tassin, *Frequency dependence of elastic properties of acoustic foams*, J. Acoust. Soc. Am. **117** (2005), 1114.
- [28] J. D. Ferry, *Viscoelastic properties of polymers*, ch. 2, Willey, New York, 1961.
- [29] G. Gautier, *Ondes de surface dans les matériaux poreux. application à la caractérisation des paramètres mécaniques des matériaux poreux.*, 2010.
- [30] A. N. Gent and A. G. Thomas, *The deformation of foamed elastic materials*, Journal of Applied Polymer Science I **1** (1959), 107–113.
- [31] A. Geslain, O. Dazel, J.-P. Groby, S. Sahraoui, and W. Lauriks, *Influence de la compression sur les propriétés élastiques des matériaux poreux*, Congès Français de l'Acoustique Lyon France, 2010.
- [32] ———, *Influence of static compression on the mechanical property of acoustic foams*, 1st mediterranean congress on Acoustics Salé Morocco, 2010.
- [33] A. Geslain, O. Dazel, S. Sahraoui, J.-P. Groby, and W. Lauriks, *Influence of static compression on mechanical parameters of acoustic foams*, J. Acoust. Soc. Am. **130** (2011), 818–825.

- [34] L.J Gibson and M.F. Ashby, *Cellular solids : Structure and properties*, Cambridge Solid State Science Series, 1997.
- [35] L. Gong and S. Kyriakides, *Compressive response of open cell foams. part ii : Initiation and evolution of crushing*, International Journal of Solids and Structures **42** (2005), no. 1381–1399.
- [36] L. Gong, S. Kyriakides, and W.-Y. Jang, *Compressive response of open-cell foams. part i : Morphology and elastic properties*, International Journal of Solids and Structures **42** (2005), 1355–1379.
- [37] R. Guastavino, *Elastic and acoustic characterisation of anisotropic porous materials*, Ph.D. thesis, Kungliga Tekniska Högskolan, 2008.
- [38] A. T. Huber and L. J. Gibson, *Anisotropy of foams*, Journal of Materials Science **23** (1988), no. 8, 3031–3040.
- [39] W. Y. Jang, A. M. Kraynik, and S. Kyriakides, *On the microstructure of open-cell foams and its effect on elastic properties*, International Journal of Solids and Structures **45** (2008), 1845—1875.
- [40] L. Jaouen, *Contribution to the mechanical characterization of poro-visco-elastic materials*, Ph.D. thesis, Université du Maine, 2003.
- [41] L. Jaouen, B. Brouard, N. Atalla, and C. Langlois, *A simplified numerical model for a plate backed by a thin foam layer in the low frequency range.*, J. Sound Vib. **280** (2005), 681–698.
- [42] L. Jaouen, A. Renault, and M. Deverge, *Elastic and damping characterizations of acoustical porous materials : Available experimental methods and applications to a melamine foam*, Applied Acoustics **69** (2008), 1129–1140.
- [43] DL Johnson, J Koplik, and R Dashen, *Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media*, Journal of Fluid Mechanics **176** (1987), 379–402.
- [44] D Lafarge, P Lemarinier, JF Allard, and V Tarnow, *Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies*, J. Acoust. Soc. Am. **102** (1997), 1995.
- [45] C Langlois, R Panneton, and N Atalla, *Polynomial relations for quasi-static mechanical characterization of isotropic poroelastic materials*, J. Acoust. Soc. Am. **110** (2001), 3032.
- [46] M. Mariez, S. Sahraoui, and J. F. Allard, *Elastic constants of polyurethane foam’s skeleton for biot model*, Internoise 96, 1996.
- [47] M. Melon, E. Mariez, C. Ayrault, and S. Sahraoui, *Acoustical and mechanical characterization of anisotropic open-cell foam*, J. Acoust. Soc. Am. **104** (1998), 2622–2627.
- [48] N. J. Mills and H. X. Zhu, *The high strain compression of closed-cell polymer foams*, Journal of the Mechanics and Physics of solids **47** (1999), 669–695.
- [49] OCTAVE, <http://www.gnu.org/software/octave/>, 2011.
- [50] C. Perrot, *Microstructure et macro-comportement acoustique : Approche par reconstruction d’une cellule élémentaire représentative*, Ph.D. thesis, INSA Lyon, 2006.
- [51] D Pilon and R Panneton, *An equivalent solid (u) formulation for poroelastic materials.*, 144th ASA meeting, 2002.
- [52] POLYTEC, <http://www.polytec.com/int/products/vibration-sensors/scanning-vibrometers/psv-400-scanning-vibrometer/>, 2011.
- [53] T Pritz, *Transfer function method for investigating the complex modulus of acoustic materials : spring-like specimen*, Journal of Sound and Vibration **72** (1980), no. 3, 317–341.

- [54] T. Pritz, *Dynamic young's modulus and loss factor of plastic foams for impact sound isolation*, Journal of Sound and Vibration **22** (1994), 178–315.
- [55] ———, *Frequency dependences of complex moduli and complex poisson's ratio of real solid materials*, Journal of Sound and Vibration **214** (1998), no. 1, 83–104.
- [56] M. Ridha, V. P. W. Shim, and L. M. Yang, *An elongated tetrakaidecahedral cell model for fracture in rigid polyurethane foam*, Key Engineering Materials **306—308** (2006), 43–48.
- [57] S. Sahraoui, A. Geslain, B. Brouard, and D. Parmentier, *Normalised stiffness ratios for mechanical characterization of isotropic acoustic foams*, J. Acoust. Soc. Am. Expr. Lett. (2011).
- [58] S. Sahraoui, E. Mariez, and M. Etchessahar, *Mechanical testing of polymeric foams at low frequency*, Polymer Testing **20** (2001), 93–96.
- [59] B. V. Sankar, *An elasticity solution for functionally graded beams*, Composites Science and Technology **61** (2001), 689–696.
- [60] S. Sim and K.-J. Kim, *A method to determine the complex modulus and poisson's ratio of viscoelastic materials for fem applications.*, J. Sound Vib. **141** (1990), 71–82.
- [61] V. Tarnow, *Dynamic measurements of the elastic constants of glass wool*, J. Acoust. Soc. Am. **118** (2005), 3672–8.
- [62] W. Thomson, *On the division of space with minimum partitional area*, Phil. Mag. **24** (1887), 503–514.
- [63] W. Voigt, *Über innere reibung fester körper, insbesondere der metalle*, Ann. Physik u. Chemie **47** (1892), 671–693.
- [64] W. E. Warren and A. M. Kraynik, *Linear elastic behavior of a low-density kelvin foam with open cells.*, Journal of Applied Mechanics **64** (1997), 787–794.
- [65] J. L. Wojtowicki, L. Jaouen, and R. Panneton, *A new approach for the measurement of damping properties of materials using the oberst beam*, Rev Sci Instru **75** (2004), 2569–74.
- [66] J-L. Wojtowicki, L. Jaouen, and R. Panneton, *A new approach for the measurement of damping properties of materials using the oberst beam*, Rev Sci Instrum **75** (2004), 2569–2577.
- [67] H. X. Zhu, J. F. Knott, and N. J. Mills, *Analysis of the elastic properties of open-cell foams with tetrakaidecahedral cells*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids **45** (1997), 319–343.
- [68] O-C Zienkiewicz and R-L Taylor, *The finite element method : basic formulation and linear problems*, vol. 1, 1989.

# Anisotropie naturelle et induite des matériaux poreux : étude expérimentale et modélisation.

---

## Résumé :

Ce travail de thèse a pour objectif de caractériser le comportement anisotrope des mousses acoustiques. Ces matériaux, couramment employés pour lutter contre les nuisances sonores et vibratoires et sont modélisés à l'aide du modèle de Biot. Celui-ci est basé sur le formalisme de la mécanique des milieux continus à deux champs couplés, l'un associé au solide et l'autre au fluide saturant. Nous nous intéresserons plus particulièrement dans ce travail aux paramètres du solide et aux matériaux présentant une anisotropie (c'est-à-dire des propriétés qui varient suivant les directions) du squelette solide. Ici, deux types d'anisotropie sont distingués, l'anisotropie naturelle du matériau et celle induite par une action extérieure, cette dernière ayant pour principale cause la compression statique des échantillons. Par ailleurs, trois types de symétries naturelles sont considérés : isotropie, isotropie transverse avec et sans rotation de direction principale. Celles-ci sont le plus couramment rencontrées.

L'analyse expérimentale du type de symétrie des mousses se fait au moyen d'un dispositif, appelé rigidimètre, qui permet de déterminer la raideur mécanique d'échantillons cubiques de mousse sous hypothèse quasi-statique. Celui-ci est couplé à une mesure au vibromètre laser à balayage, permettant de mesurer le déplacement normal des faces des cubes. Des lignes de niveaux des champs de déplacements normaux surfaciques sont ainsi obtenues. Il est alors possible de classer les différents types d'anisotropie en analysant ces courbes de niveaux. Ainsi, avec ces a-priori, une méthode a été élaborée pour déterminer les coefficients de Poisson à l'aide de techniques de minimisation à partir des autres constantes élastiques préalablement déterminées. Ce problème est construit à partir d'indicateurs expérimentaux et d'indicateurs provenant d'un modèle éléments finis.

L'influence de la compression statique sur les modules élastiques est ensuite étudiée. Tout d'abord, la variation du module d'Young en fonction du taux de compression est caractérisée à partir de mesures au rigidimètre. Ensuite, la variation du module de cisaillement en fonction de la compression statique est caractérisée par une méthode d'ondes guidées (en collaboration avec la KULeuven). Il a été montré que les variations de modules élastiques pouvaient être importantes puisqu'elles peuvent atteindre 50 %. À partir de ces déterminations expérimentales, quatre zones de comportement de la mousse ont été mises en évidence. Ces quatre zones correspondent respectivement à des effets de compression, de flambement, de densification et de réarrangement des cellules. Un modèle éléments-finis microstructural, dans lequel la cellule élémentaire est modélisée par un tétrakaidécaèdre de Kelvin, est enfin proposé. Celui-ci permet de modéliser les trois premières zones, qui correspondent aux compressions statiques usuelles dans les applications acoustiques.

**Mots clés :** matériaux Poreux, anisotropie naturelle, anisotropie induite, module élastique

---

---

## Natural and induced anisotropy of porous materials : experimental study and modelisation

### Abstract :

This thesis deals with the characterization of the anisotropic behavior of acoustic foams. These materials, which are commonly used to reduce noise and vibration, are modeled by the Biot model. This model is based on the formalism of continuum mechanics of two coupled fields, one associated to the solid, and the other one associated to the saturating fluid. This work is more particularly focused on the solid parameters and on the materials having an anisotropy (i.e. properties which vary according to directions) of the solid skeleton. Here, two types of anisotropy are distinguished, the natural anisotropy of the material, and the induced anisotropy, which is due to an external action and principally caused by a static compression samples. Furthermore, three types of natural symmetries (which are the most commonly encountered) are considered : isotropy, transverse isotropy with and without rotation of principal direction.

The experimental analysis of the type of the foam symmetry is performed with the device called rigidimeter, which allows to determine the mechanical stiffness of cubic samples of foam under quasi-static assumption. This device is coupled with a laser scanning vibrometer, which measures the normal displacement of the faces of cubes. Isovalues of the displacement fields of the normal surface are obtained. According to these results, it is possible to classify the different types of anisotropy by the analysis of the isovalues of the displacement fields. Thus, with these a-priori, a method was developed to determine the Poisson's ratios with minimization techniques from the other elastic constants already determined. This problem is constructed from experimental indicators and indicators taken from a finite element model.

The influence of static compression on the elastic moduli is then studied. First, the variation of Young's modulus as a function of compression ratio is characterized from the rigidimeter measurement. Then, the variation of shear modulus as a function of static compression has been characterized by a method of guided waves (in collaboration with KULeuven). It was shown that variations of elastic moduli could be important because they can reach 50 %. From these experimental determinations, four areas of behavior of the foam have been identified. These four areas correspond, respectively, to effects of compression, buckling, densification and rearrangement of cells. A microstructural finite element model, in which the unit cell is modeled by a Kelvin tetrakaidecahedron, is finally proposed. This one models successfully the first three areas, which correspond to the common static compression in the acoustic applications.

**Keywords :** porous materials, natural anisotropy, induced anisotropy, elastic modulus

---