



Modélisation analytique et caractérisation expérimentale de microphones capacitifs en hautes fréquences : étude des couches limites thermiques, effets des perforations de l'électrode arrière sur la déformée de membrane

Thomas Lavergne

► To cite this version:

Thomas Lavergne. Modélisation analytique et caractérisation expérimentale de microphones capacitifs en hautes fréquences : étude des couches limites thermiques, effets des perforations de l'électrode arrière sur la déformée de membrane. Autre [cond-mat.other]. Université du Maine, 2011. Français. NNT : 2011LEMA1020 . tel-00718450

HAL Id: tel-00718450

<https://theses.hal.science/tel-00718450>

Submitted on 17 Jul 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR, GÉOSCIENCES, ARCHITECTURE
ACADÉMIE DE NANTES

SPÉCIALITÉ : ACOUSTIQUE

présentée par

THOMAS LAVERGNE

pour obtenir le titre de Docteur de l'Université du Maine

MODÉLISATION ANALYTIQUE ET CARACTÉRISATION EXPÉRIMENTALE
DE MICROPHONES CAPACITIFS EN HAUTES FRÉQUENCES :
ÉTUDE DES COUCHES LIMITES THERMIQUES,
EFFETS DES PERFORATIONS DE L'ÉLECTRODE ARRIÈRE
SUR LA DÉFORMÉE DE MEMBRANE

Soutenue le 30 septembre 2011 devant le jury composé de

BERTRAND DUBUS	Directeur de Recherches CNRS, IEMN, LILLE	Rapporteur
PHILIPPE HERZOG	Directeur de Recherches CNRS, LMA, MARSEILLE	Rapporteur
SALVADOR BARRERA-FIGUEROA	Ingénieur R&D, Dr., DFM, KONGENS LYNGBY (DK)	Examineur
DOMINIQUE RODRIGUES	Ingénieur R&D, Dr., LNE, TRAPPES	Examineur
PIERRICK LOTTON	Directeur de Recherches CNRS, LAUM, LE MANS	Président du jury
NICOLAS JOLY	Maître de conférences, HDR, LAUM, LE MANS	Directeur de thèse
STÉPHANE DURAND	Maître de conférences, HDR, LAUM, LE MANS	Co-Directeur
MICHEL BRUNEAU	Professeur Émérite, LAUM, LE MANS	Co-encadrant

Anybody who has been seriously engaged in scientific work of any kind realizes that over the entrance to the gates of the temple of science are written the words : 'Ye must have faith.'

Max Planck

*L'optimiste vous dira que le verre est à moitié plein, le pessimiste, qu'il est à moitié vide,
moi je crois surtout que le verre est deux fois trop grand !*

Jean Yanne

À Roger Ollivier, mon grand-père
[25/03/1929 - 25/04/2012]

Remerciements

À mes directeurs de thèse, MM. Nicolas JOLY et Stéphane DURAND, Maîtres de Conférences HDR, et à M. Michel BRUNEAU, Professeur Émérite, qui m’ont fait l’honneur et le plaisir de m’encadrer et de me diriger pendant toute la durée de ma thèse, j’adresse des remerciements sans aucune mesure. Leur disponibilité, leurs conseils et par-dessus tout leur « aura » de connaissances m’ont permis d’assouvir ma soif d’apprendre (qui je l’espère n’est pas prête d’être étanchée), tant en ce qui concerne la recherche et la compréhension de phénomènes physiques, qu’en ce qui a trait à l’enseignement (dont l’apport vient largement compléter les formations proposées par le CIES). C’est pour toutes ces raisons que je suis extrêmement reconnaissant à Stéphane, qui, outre qu’il est promoteur de cette thèse, s’est largement impliqué dans la programmation et l’expérimentation, à Nicolas, pour la modélisation des phénomènes dans les couches limites thermiques adaptée au propos, et à Michel, pour ses compétences d’expert en matière de modélisation analytique (appliquée ici aux microphones), et que je tiens à leur adresser toute mes amitiés.

Je tiens à remercier tout particulièrement MM. Bertrand DUBUS et Philippe HERZOG, Directeurs de Recherches au CNRS respectivement à l’INSTITUT D’ÉLECTRONIQUE, DE MICROÉLECTRONIQUE ET DE NANOTECHNOLOGIE (IEMN) de LILLE et au LABORATOIRE DE MÉCANIQUE ET D’ACOUSTIQUE (LMA) de MARSEILLE, d’avoir accepté d’être les rapporteurs de ce manuscrit de thèse et MM. Salvador BARRERA-FIGUEROA, Ingénieur de Recherche Dr. à l’institut « DANISH FUNDAMENTAL METROLOGY » (DFM) à KONGENS LYNGBY, Dominique RODRIGUES, Ingénieur de Recherche Dr. au LABORATOIRE NATIONAL DE MÉTROLOGIE ET D’ESSAIS (LNE), et M. Pierrick LOTTON, Directeur de Recherches au CNRS du LABORATOIRE D’ACOUSTIQUE DE L’UNIVERSITÉ DU MAINE (LAUM), d’avoir accepté de faire parti du jury et d’examiner le travail réalisé au cours de cette thèse.

Je remercie également M. Yves AUREGAN, directeur du LAUM, de m’avoir accueilli pendant trois années au sein du laboratoire et M. Pascal LEROUX, directeur de l’ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D’INGÉNIEURS DU MANS (ENSIM), de m’avoir accueilli dans les locaux de l’ENSIM durant toute la période de ma thèse.

Merci également à M. Phillipe BÉQUIN, Maître de Conférences, d’avoir accepté d’être mon tuteur de monitorat, avec qui j’ai pu discuter du fond et de la forme des enseignements que j’ai effectués au département Mesures Physiques de l’INSTITUT UNIVERSITAIRE TECHNOLOGIQUE (IUT) du MANS. Je n’oublie évidemment pas de remercier Mme Sylvie HOULBERT, Maître de Conférences et chef de ce département Mesures Physiques, pour les fréquentes discussions qui

se sont avérées aussi intéressantes que plaisantes, que ce soit à propos des Travaux Dirigés et Travaux Pratiques de Mécanique que nous avons en commun ou plus largement des étudiants et du système scolaire.

Merci aussi à Mlle Dyane MELLING et à Mme Valérie JEANBLANC d'avoir lu, relu et corrigé avec attention les différents documents (voire parfois des élucubrations) en langue anglaise que j'ai pu leur transmettre.

Pour tous les bons moments que j'ai passés avec eux, je tiens à remercier l'ensemble des doctorants ainsi que tous les permanents et non-permanents du LAUM que j'ai eu l'occasion de rencontrer durant mon parcours à l'UNIVERSITÉ DE MAINE. Merci également à l'ensemble du personnel du LAUM et de l'ENSIM pour leur accueil et leur contribution au bon déroulement de ma thèse.

Je tiens à remercier plus particulièrement Alan et Carole, Petr et Barča, Jean-Baptiste, Micka et Dyane ainsi que Titi d'avoir rendu encore plus agréables ces trois années passées au MANS.

Je remercie également ma famille et mes amis bretons de m'avoir soutenu tout au long de ma thèse et de s'être intéressés de près à mon travail.

Je tiens également à remercier la SOCIÉTÉ FRANÇAISE D'ACOUSTIQUE (S.F.A.) de m'avoir accordé une bourse, me donnant ainsi l'opportunité d'aller au FORUM ACUSTICUM à AALBORG (au DANEMARK) et de présenter les travaux réalisés au cours de ma thèse dans le cadre d'un congrès international, ce qui m'a notamment permis de rencontrer et de discuter avec des représentants de COMSOL et de Brüel & Kjaer intéressés par ces travaux.

Cette thèse ayant été financée par une allocation de recherche du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, je remercie l'ensemble des responsables de la répartition des allocations pour la confiance qu'ils nous ont accordée.

Sommaire

Remerciements	iii
Liste des symboles	vii
Introduction	1
1 Étude de la diffusion thermique en parois minces : cas d'une membrane et d'une fibre	5
1.1 Équations fondamentales	6
1.2 Champs thermiques aux interfaces fluide-solide	11
1.2.1 Description du problème	11
1.2.2 Cas d'une paroi à géométrie plane : une membrane	13
1.2.3 Cas d'une paroi à géométrie cylindrique : une fibre	16
1.3 Effets thermiques aux interfaces fluide-solide : résultats pour une membrane et une fibre	18
1.3.1 Coefficient polytropique	19
1.3.2 Admittance spécifique équivalente de paroi	22
2 Modélisation analytique d'un microphone capacitif : problème fondamental	25
2.1 Description du problème	25
2.2 Mouvement de la membrane	28
2.3 Pression dans l'espace inter-électrodes	29
2.4 Pression dans la cavité arrière	34
2.5 Comportement des orifices de l'électrode arrière et de sa fente périphérique	35
3 Équations couplées du problème fondamental : solution	39
3.1 Champ de déplacement de la membrane	39
3.2 Champ de pression dans la couche de fluide inter-électrodes	41
3.3 Couplage entre la couche de fluide inter-électrodes et la cavité arrière	44
3.4 Champ de déplacement de la membrane en fonction du champ de pression incident	47

4	Champ de déplacement de la membrane, sensibilité et bruit thermique du microphone : résultats théoriques et expérimentaux	55
4.1	Champ de déplacement de la membrane en hautes fréquences : résultats théoriques et expérimentaux	55
4.2	Approximations basses fréquences : circuit électrique équivalent	60
4.3	Sensibilité du microphone	62
4.4	Bruit thermo-mécanique du microphone	64
	Conclusion	67
A	Généralités sur le microphone capacitif	71
A.1	Architecture, performances et analogies électro-mécaniques	72
A.2	Principe de la transduction électro-mécanique	74
B	Champ de pression dans la cavité arrière : approximations basses fréquences	77
C	Circuit électrique équivalent : approximations basses fréquences	79
D	Champs de pression dans la couche de fluide inter-électrodes et dans la cavité arrière en fonction du champ de pression incident	85
D.1	Écarts instantanés de pression dans l'espace inter-électrodes au droit des ouvertures de l'électrode arrière	85
D.2	Expression du champs de pression dans la couche de fluide inter-électrodes	88
D.3	Expression du champs de pression dans la cavité arrière	88
	Bibliographie	90
	Liste des figures	99
	Liste des tableaux	101

Liste des symboles

- δ_{ij} Symbole de Kronecker (égal 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$)
- $(\vec{r})$ Système de coordonnées (soit cartésiennes ou cylindriques)
- (r, θ, z) Système de coordonnées cylindriques (coordonnées respectivement radiale, azimutale et axiale)
- (x, y, z) Système de coordonnées cartésiennes
- $\langle f(r, \theta) \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^a f(r, \theta) r dr d\theta$
- $\langle f(r) \rangle = \int_0^a f(r) r dr$
- $\langle f_1(r) | f_2(r) \rangle = \int_0^a f_1(r) f_2(r) r dr$
- $\langle f_1(r, \theta) | f_2(r, \theta) \rangle = \iint_{S_m} f_1(r, \theta) f_2(r, \theta) dS_m = \int_0^{2\pi} \int_0^a f_1(r, \theta) f_2(r, \theta) r dr d\theta$, produit scalaire (sur la surface $S_m = \pi a^2$)

Lettres grecques

- β Admittance spécifique de paroi
- $\hat{\beta} = (\partial_T p)_V$ Taux d'augmentation de pression isochore
- $\gamma = C_p / C_v$ Rapport des capacités calorifiques massiques à pression constante (C_p) et à volume constant (C_v)
- γ_{mn} Zéros de la dérivée première de la fonction de Bessel J_m
- δ_ν Épaisseur de couche limite visqueuse
- δ_h Épaisseur de couche limite thermique
- ε Hauteur de la couche de fluide inter-électrodes
- ε_C Hauteur moyenne de la cavité arrière
- η Viscosité de volume du fluide
- θ_{ν_0} Coordonnée azimutale du $\nu_0^{\text{ème}}$ orifice ($\nu_0 = 0, 1, \dots, n_0$)
- κ_{mn} Valeurs propres associées aux fonctions propres $\varphi_{mn}(r, \theta)$

Λ	Rapport de la conductivité thermique du solide sur celle du fluide
λ_h	Conductivité thermique du fluide
λ_w	Conductivité thermique du solide
μ	Viscosité de cisaillement du fluide
ν	Coefficient de Poisson
ν_0	Indice désignant l'un des n_0 orifices
$\underline{\underline{\nu}}$	Tenseur de taux de déformations dans le fluide
$\xi(r, \theta)$	Déplacement de la membrane
ξ_f	Diffusivité thermique du fluide
ξ_w	Diffusivité thermique du solide
ρ'	Écart instantané de masse volumique
ρ_0	Masse volume du fluide
ρ_w	Masse volumique du solide
σ	Sensibilité du microphone
$\underline{\underline{\sigma_w}}$	Tenseur des contraintes dans le solide
$\underline{\underline{\varepsilon_w}}$	Tenseur des déformations dans le solide
τ	Écart instantané de température dans le fluide
τ_w	Écart instantané de température dans le solide
$\phi_r = S_1/S_{bp}$	Porosité de l'électrode arrière
$\psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta)$	Fonctions propres de la membrane satisfaisant la condition de Dirichlet en $r = a$
$\varphi_{mn}(r, \theta)$	Fonctions propres de la couche de fluide satisfaisant la condition de Neumann en $r = a$
$\vec{\phi}_w$	Densité de flux de chaleur dans le solide
χ	Nombre d'onde complexe associé au mouvement acoustique dans la lame de fluide inter-électrodes
χ_C	Nombre d'onde complexe associé au mouvement acoustique dans la cavité arrière
$\chi_l(\vec{r})$	Coefficient de compressibilité local du fluide suivant la normale à la paroi
χ_S	Compressibilité adiabatique du fluide
χ_T	Compressibilité isotherme du fluide
$\omega = 2\pi f$	Pulsation des ondes en régime harmonique

Lettres latines

a	Rayon de la membrane
a_{bp}	Rayon de l'électrode arrière
c_0	Célérité adiabatique du son
C_p	Capacité calorifique massique à pression constante
C_v	Capacité calorifique massique à volume constant
C_w	Capacité thermique massique du solide
E	Module d'Young
e	Largeur de la fente périphérique
f	Fréquence des oscillations
$H_0^{(1)}, H_0^{(2)}$	Fonctions de Hankel d'ordre zéro, respectivement du premier et du second type
h_1	Profondeur des orifices de l'électrode arrière
h_2	Profondeur de la fente périphérique
J_m	Fonction de Bessel d'ordre m et de première espèce
j_{mn}	Zéros de la fonction de Bessel J_m
$K = \omega \sqrt{M_S/T}$	Nombre d'onde associé aux mouvements de la membrane
k_a	Nombre d'onde associé au mouvement acoustique
k_h	Nombre d'onde de diffusion associé aux effets thermiques
k_v	Nombre d'onde de diffusion associé aux effets visqueux
k_w	Nombre d'onde de diffusion thermique dans le solide
K_{mn}	Valeurs propres associées aux fonctions propres $\psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta)$
ℓ_h	Longueur caractéristique thermique
ℓ_v, ℓ'_v	Longueurs caractéristiques visqueuses
M_s	Masse surfacique de la membrane
$n(\vec{r})$	Coefficient polytropique local suivant la normale à la paroi
n_0	Nombre total d'orifices de l'électrode arrière
p	Écart instantané de pression
$p(r, \theta)$	Écart instantané de pression dans la couche de fluide inter-électrodes

P_0	Pression (quasi) statique du fluide
$p_C(r, \theta)$	Écart instantané de pression dans la cavité arrière
p_{av}	Écart instantané de pression à l'avant de la membrane
R	Rayon des orifices de l'électrode arrière
r_1	Distance qui sépare le centre de la membrane du centre de chaque orifice de l'électrode arrière
r_2	Distance qui sépare le centre de la membrane du centre de la fente périphérique
R_a	Coefficient de réflexion en amplitude des ondes acoustiques
R_{th}	Résistance mécanique représentant le bruit thermo-mécanique du microphone
s	Écart instantané d'entropie massique
S_1	Surface totale des orifices de l'électrode arrière
S_2	Surface de la fente périphérique
S_m	Surface de la membrane du microphone
S_{1,ν_0}	Surface d'un orifice de l'électrode arrière
S_{bp}	Surface de l'électrode arrière
T	Tension mécanique de la membrane
T_0	Température (quasi) statique du fluide
$\vec{u}_w$	Déplacement particulaire dans le solide
$U(\theta)$	Débit par unité d'angle de la fente périphérique
$U_1 = \sum_{\nu_0=1}^{n_0} U_{1,\nu_0}$	Débit total des orifices de l'électrode arrière
U_2	Débit de la fente périphérique
U_{1,ν_0}	Débit d'un orifice de l'électrode arrière
$\vec{v}$	Vitesse particulaire
$\vec{v}_w$	Vitesse particulaire dans le solide
v_r	Composante radiale de la vitesse particulaire
v_z	Composante axiale de la vitesse particulaire
V_C	Volume de la cavité arrière
Y_1	Admittance de transfert totale des orifices de l'électrode arrière
y_2	Admittance de transfert de la fente périphérique

y_{1,ν_0}	Admittance de transfert d'un orifice de l'électrode arrière
Y_C	Admittance d'entrée de la cavité arrière
Z_1	Impédance acoustique totale des orifices de l'électrode arrière
Z_2	Impédance de transfert de la fente périphérique
Z_C	Impédance d'entrée de la cavité arrière
Z_{av}	Impédance d'entrée du microphone

Introduction

Les microphones capacitifs sont des transducteurs réciproques dont les qualités en termes de sensibilité, de bande passante et de tenue dans le temps en font des instruments de mesure performants et par conséquent largement utilisés, tant pour leur propriété de récepteur que d'émetteur acoustique. Initialement prévus pour effectuer des mesures dans l'air à pression atmosphérique, à température ambiante et dans la gamme des fréquences audibles, conditions usuelles d'utilisation dans lesquelles ils sont correctement caractérisés depuis 30 ans, il sont aujourd'hui utilisés dans des conditions particulières. En raison de leur miniaturisation (par procédé MEMS) et de leur usage nouveau en métrologie fine (en récepteurs comme en émetteurs), qui exigent une connaissance précise de leur comportement dans des domaines de fréquences élevées (jusqu'à 100 kHz), dans des mélanges gazeux aux propriétés différentes de celles de l'air et dans des conditions de pression et de température beaucoup plus élevées ou beaucoup plus basses que les conditions standards, une caractérisation bien plus approfondie de ce type de transducteur reste actuellement nécessaire, aussi bien en terme de modélisation qu'en terme de résultats expérimentaux.

Les effets liés à la conduction thermique à l'intérieur des couches limites, rarement pris en compte dans les modèles de microphones car généralement peu importants dans la gamme de fréquences audibles, sont introduits dans le modèle ; ils font ici l'objet d'une étude analytique à part entière (qui sort du cadre strict du transducteur) à laquelle le premier chapitre est consacré. La raison de cette étude résulte des dimensions extrêmement réduites des microsystèmes électromécaniques (MEMS) acoustiques. En effet, en conséquence de cette miniaturisation, la réduction des volumes de fluide et des épaisseurs de parois mis en jeu dans ce type de système impliquent que les effets thermiques prennent une telle importance que la condition aux limites thermique « isotherme » peut être remise en cause, notamment dans les cas d'une membrane de faible épaisseur et plus encore dans le cas d'une fibre de faible rayon (étudiée ici au passage pour d'autres applications). Afin d'analyser les effets liés à la diffusion thermique en parois minces, une formulation analytique adaptée, qui associe les équations de conduction de la chaleur (dans le fluide et dans le solide) aux conditions aux frontières réalistes (continuité de l'écart instantané de température, continuité du flux de chaleur), est mise en œuvre et appliquée à la fois à une géométrie plane (une membrane) et à une géométrie cylindrique (une fibre). Les solutions permettent d'exprimer le coefficient polytropique local, paramètre représentatif de l'état thermodynamique local du fluide, et l'admittance spécifique de la paroi, représentative ici des seuls effets des couches limites thermiques. À noter que les équations fondamentales de la propagation en fluide thermovisqueux, dans

des espaces clos, sont données au début de ce chapitre, bien que les seuls effets thermiques y soient traités, car elles sont nécessaires à l'exposé des chapitres suivants, qui ont trait à la modélisation et à la caractérisation de microphones capacitifs en hautes fréquences.

L'objet du second chapitre est de poser le problème fondamental de la modélisation de microphones, en établissant successivement les équations (en fluide thermovisqueux) pour les différents domaines qu'il comporte (membrane, couche de fluide inter-électrodes, cavité arrière, orifices dans l'électrode arrière et sa fente périphérique), et, parallèlement, de mettre en évidence son apport en regard des modèles existants. La complexité (bien connue) d'une telle modélisation résulte, du fait de l'architecture même du microphone, de divers couplages (forts) entre les domaines qui le composent, et des conditions aux frontières inhomogènes en raison de la présence de perforations dans l'électrode arrière. L'intérêt de ce modèle repose donc sur les choix retenus pour la description du double effet des orifices dans l'électrode arrière et de la fente périphérique sur la déformée de la membrane, effets liés aux débits normaux et tangentiels aux entrées des perforations dont dépendent les déplacements particuliers dans la lame de fluide inter-électrodes et dans la cavité arrière de la capsule microphonique.

Le troisième chapitre présente dans un premier temps la résolution successive (faisant usage de théories modales appropriées) des systèmes d'équations couplées établis au chapitre précédent pour chacun des domaines considérés. Par ailleurs l'écriture des conditions aux interfaces mène à des solutions analytiques nouvelles, dépendant à la fois des coordonnées radiale et azimutale, qui permettent de prendre en compte l'effet local des perforations de l'électrode arrière sur le champ de déplacement de la membrane.

Dans le quatrième et dernier chapitre, des résultats expérimentaux du champ de déplacement de la membrane obtenus par vélocimétrie laser à balayage sur un microphone demi pouce (de caractéristiques géométriques et mécaniques connues) jusqu'à des fréquences élevées (70 kHz) sont présentés. Ces résultats mettent pour la première fois en évidence l'influence importante qu'exerce la présence des orifices dans l'électrode arrière sur la déformée de la membrane, ce que les résultats théoriques présentés au chapitre précédent permettent d'expliquer. Un circuit électrique équivalent du microphone est déterminé à partir de l'expression de son impédance d'entrée (qui dépend du champ de déplacement moyen de la membrane), expression calculée en ne conservant qu'un seul mode ; les approximations basses fréquences des différents paramètres dont dépendent cette impédance sont présentées en annexe. Le bruit thermo-mécanique et la sensibilité du microphone sont finalement calculés, à partir des expressions issues du circuit électrique équivalent (à différents degrés d'approximation), voire à partir des expressions « exactes » des résultats analytiques en tenant compte d'un nombre plus important de modes, résultats confirmés par ceux disponibles dans la littérature.

Les résultats analytiques obtenus, qui tiennent compte des phénomènes de dissipation non seulement visqueuse mais aussi thermique, et qui dépendent à la fois des coordonnées radiale et azimutale, doivent permettre de caractériser le comportement du microphone en fluides divers

à des pressions et des températures statiques variées, et pour une large gamme de fréquences (de quelques Hertz jusqu'à 100 kHz). La modélisation présentée permet en outre de considérer un champ de pression non uniforme sur la surface de la membrane; elle peut de surcroît être améliorée en retenant un nombre de modes plus élevé et surtout en modélisant les orifices et la fente périphérique de manière plus réaliste (en ne les considérant plus comme ponctuels et linéique respectivement) ce qui élargirait corrélativement l'éventail des modes à retenir.

Chapitre 1

Étude de la diffusion thermique en parois minces : cas d'une membrane et d'une fibre

Les progrès réalisés ces dernières décennies dans le domaine des microtechnologies permettent aujourd'hui de fabriquer des microsystèmes électro-mécaniques (MEMS) de dimensions extrêmement réduites. En conséquence, le volume de fluide mis en œuvre dans les MEMS acoustiques se trouve si réduit que les phénomènes dissipatifs et réactifs développés à l'intérieur des couches limites thermiques prennent autant d'importance que ceux développés dans les couches limites visqueuses, à des fréquences d'autant plus basses que ce volume est réduit. La réduction des dimensions des MEMS implique également la réduction de l'épaisseur des membranes, de sorte que les flux thermiques à l'interface membrane-fluide nécessitent d'être modélisés sans retenir certaines approximations d'usage : la condition à la limite thermique « isotherme » habituellement retenue à l'interface solide-fluide peut ainsi se trouver remise en cause dans le cas de telles parois très minces.

C'est l'objet de ce chapitre que d'étudier les effets thermiques qui se développent dans les couches limites entourant des parois minces, d'une part planes (comme par exemple une membrane de microphone MEMS) et d'autre part cylindrique (comme par exemple une fibre, utilisée notamment dans le haut-parleur photo-thermo-acoustique), afin de déterminer le domaine de validité de la condition limite thermique « isotherme » voire d'étudier les phénomènes en dehors de ce domaine.

Du fait que les phénomènes thermiques étudiés dans ce chapitre, associés aux autres effets (dont ceux liés à la viscosité), doivent être modélisés en toute généralité dans les chapitres suivants (appliqués à l'étude de microphones), l'ensemble des équations fondamentales (sur lesquelles reposent les modèles présentés dans ce mémoire) est donné au début de ce chapitre, certaines étant données à titre de présentation générale de problème considéré.

1.1 Équations fondamentales

Dans ce paragraphe sont présentées successivement et sous leurs formes générales (i) les équations fondamentales de l'acoustique linéaire en fluide thermovisqueux, (ii) les équations de la dynamique des structures et de diffusion thermique dans le solide, et (iii) les conditions aux interfaces fluide-solide.

i Équations fondamentales de l'acoustique linéaire en fluide thermovisqueux au repos

Le mouvement acoustique des particules de fluide est décrit par les variables de vitesse particulaire $\vec{V}$, de pression P , de masse volumique ρ , de température T et d'entropie massique S exprimées par

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}_0 + \vec{v}(\vec{r}, t), \quad (1.1a)$$

$$P(\vec{r}, t) = P_0 + p(\vec{r}, t), \quad (1.1b)$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho'(\vec{r}, t), \quad (1.1c)$$

$$T(\vec{r}, t) = T_0 + \tau(\vec{r}, t), \quad (1.1d)$$

$$S(\vec{r}, t) = S_0 + s(\vec{r}, t), \quad (1.1e)$$

où les premiers termes de chaque somme (les grandeurs indicées « 0 »), représentent leurs valeurs quasi statiques (« valeurs moyennes » associées à des phénomènes lents), et les seconds termes, représentant les écarts instantanés (phénomènes rapides) autour des grandeurs quasi statiques, sont exprimés à un instant t et pour des coordonnées spatiales $\vec{r}$ [$\vec{r}$ représente indifféremment les coordonnées (x, y, z) en système de coordonnées cartésiennes ou les coordonnées (r, θ, z) en système de coordonnées cylindriques]. Le fluide étant ici considéré au repos, la vitesse d'entraînement $\vec{V}_0$ qui apparaît dans l'équation (1.1a) est nulle.

Compte tenu des expressions (1.1a-1.1e), le mouvement des particules de fluide est régi par l'ensemble d'équations linéaires composé de :

– l'équation de Navier-Stokes

$$\rho_0 \partial_t \vec{v} + \vec{\text{grad}} p - \rho_0 c_0 \ell_v \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{v} + \rho_0 c_0 \ell'_v \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{v} = \rho_0 \vec{F}, \quad (1.2)$$

– l'équation de conservation de la masse

$$\partial_t \rho' + \rho_0 \text{div} \vec{v} = \rho_0 q, \quad (1.3)$$

– l'équation de conservation de l'énergie

$$T_0 \partial_t s - c_0 C_p \ell_h \text{div} \vec{\text{grad}} \tau = h, \quad (1.4)$$

où $\ell_v = (\eta + \frac{4}{3}\mu)/\rho_0 c_0$ et $\ell'_v = \mu/\rho_0 c_0$ sont les longueurs caractéristiques visqueuses, $\ell_h = \lambda_h/(\rho_0 c_0 C_p) = \xi_f/\rho_0$ la longueur caractéristique thermique, η et μ sont respectivement la viscosité de volume et de cisaillement du fluide, ρ_0 sa masse volumique, $c_0 = \sqrt{\gamma/\rho_0 \chi_T}$ la célérité

adiabatique du son, $\gamma = C_p/C_v$ le rapport des capacités calorifiques à pression constante (C_p) et à volume constant (C_v), χ_T le coefficient compressibilité isotherme du fluide, $\xi_f = \lambda_h/(\rho_0 C_p)$ étant sa diffusivité thermique et λ_h sa conductivité thermique. Dans chacun des seconds membres de ces trois équations apparaît un terme lié à un type de source extérieure : dans l'équation (1.2) le terme $\rho_0 \vec{\mathbf{F}}$ correspond aux sources de forces, représentées par les forces par unité de volume imposées par des sources extérieures (caractérisées par une force par unité de masse $\vec{\mathbf{F}}$) ; dans l'équation (1.3) le terme $\rho_0 q$ correspond aux sources de débit, représentées par la masse de fluide introduite (dans le domaine de fluide considéré) exprimée par unité de volume et par unité de temps, caractérisée par le débit q d'une source locale (exprimé en unité de volume par unité de temps) ; et dans l'équation (1.4) le terme h correspond aux sources de chaleur représentées par la quantité de chaleur h introduite par unité de masse de fluide et par unité de temps.

À ces trois équations fondamentales viennent s'ajouter deux équations d'état qui caractérisent la bivariance du milieu thermodynamique. Choissant de conserver les écarts instantanés de pression et de température, l'écart instantané de masse volumique est donné par

$$\rho' = \frac{\gamma}{c_0^2} (p - \hat{\beta} \tau), \quad (1.5)$$

et l'écart instantané d'entropie massique est donné par

$$s = \frac{C_p}{T_0} \left(\tau - \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta} \gamma} p \right), \quad (1.6)$$

où $\hat{\beta}$ représente le taux d'augmentation de pression isochore.

En procédant de façon très similaire à ce qui est usuel en mécanique des fluides, il est naturel de rechercher (en particulier au moyen de codes numériques) la solution du système d'équations couplées (1.2-1.4), où les écarts instantanés de masse volumique ρ' et d'entropie massique s sont remplacés respectivement par leurs expressions (1.5) et (1.6), pour les variables $(p, \tau, \vec{\mathbf{v}})$ [1] (cette formulation permet d'avoir cinq degrés de liberté par nœud en trois dimensions). Une autre formulation possible consiste à utiliser l'équation de conservation de la masse (1.3) exprimée en fonction des variables $(p, \tau, \vec{\mathbf{v}})$ pour éliminer la variable de pression, ce qui permet de ne conserver que les variables $(\tau, \vec{\mathbf{v}})$ nécessaires à l'écriture des conditions aux limites (cette formulation permet d'éliminer la variable de pression et présente l'avantage d'avoir au maximum quatre degrés de liberté par nœud en trois dimensions). Ainsi, compte tenu des équations (1.2-1.6) hors sources, le système d'équations couplées régissant le mouvement des particules de fluide utilisé dans la suite de ce chapitre prend la forme [2-4]

$$-\partial_{tt}^2 \vec{\mathbf{v}} + \left(\frac{c_0^2}{\gamma} + c_0 \ell_v \partial_t \right) \vec{\mathbf{grad}} \operatorname{div} \vec{\mathbf{v}} - c_0 \ell_v' \partial_t \vec{\mathbf{rot}} \vec{\mathbf{rot}} \vec{\mathbf{v}} - \frac{\hat{\beta}}{\rho_0} \partial_t \vec{\mathbf{grad}} \tau = \mathbf{0}, \quad (1.7a)$$

$$\partial_t \tau - \gamma \ell_h c_0 \operatorname{div} \vec{\mathbf{grad}} \tau + \frac{\gamma - 1}{\gamma \hat{\beta}} \rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \vec{\mathbf{v}} = 0. \quad (1.7b)$$

Les solutions de ces équations fondamentales (1.2-1.4) (ou 1.7a-1.7b) [5,6] font apparaître trois formes de champ :

- le champ acoustique (irrotationnel), traduisant les phénomènes de propagation acoustique, est principalement déterminé par les propriétés de masse volumique et de compressibilité du fluide, mais aussi par sa conduction thermique et sa viscosité (de cisaillement et de volume); il est caractérisé par un nombre d'onde k_a dont la partie imaginaire traduit la dissipation d'origine thermique et visqueuse,
- le champ entropique, traduisant les phénomènes de diffusion thermique liés à la diffusivité du fluide, est caractérisé par un nombre d'onde k_h ,
- le champ tourbillonnaire, traduisant les phénomènes de diffusion liés à la viscosité de cisaillement du fluide, est caractérisé par un nombre d'onde k_v .

Au premier ordre des écarts instantanés (1.1), il est donc possible, compte tenu du découplage des mouvements divergents et rotationnels, de présenter chaque écart instantané $(\vec{v}, p, \rho, \tau, s)$ du champ à partir de cette décomposition de la manière suivante :

$$\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_h + \vec{v}_v,$$

$$p = p_a + p_h,$$

$$\rho' = \rho'_a + \rho'_h,$$

$$\tau = \tau_a + \tau_h,$$

$$s = s_a + s_h.$$

Les champs entropiques (termes indicés « h ») et tourbillonnaires (terme indicé « v ») sont d'amplitudes négligeables par rapport à celle du champ acoustique dans le volume fluide « loin » des parois mais atteignent cependant le même ordre de grandeur que les champs acoustiques (termes indicés « a ») au voisinage des frontières fluide-solide en raison de l'interaction avec la paroi [5]. Cette décomposition s'avère donc très pertinente pour décrire les champs acoustiques en fluide thermovisqueux, car elle permet de ne conserver que la composante de la propagation acoustique loin des parois et de décrire avec attention, en conservant les trois composantes, le champ au voisinage des parois. Les couches limites thermique et visqueuse qui s'y développent sont caractérisées respectivement par leurs épaisseurs δ_h et δ_ν , qui sont définies par

$$\delta_h = \frac{\sqrt{2}}{|k_h|} \cong \sqrt{\frac{2\lambda_h}{\omega\rho_0 C_p}}, \quad (1.9a)$$

$$\delta_\nu = \frac{\sqrt{2}}{|k_v|} \cong \sqrt{\frac{2\mu}{\omega\rho_0}}, \quad (1.9b)$$

dont les dimensions sont très inférieures à la longueur d'onde $Re(2\pi/k_a)$.

Il convient ainsi de tenir compte de l'échelle du domaine étudié pour caractériser les phénomènes de dissipation liés à la conduction thermique et à la viscosité du fluide. Schématiquement, en espace infini, les effets thermique et visqueux du fluide s'expriment avec une bonne approximation et conjointement avec les phénomènes de relaxation moléculaire, par une expression complexe

du nombre des ondes propagatives [6]. Ce seul effet de volume n'est plus suffisant dans des espaces de dimensions finies (typiquement lorsqu'au moins une longueur caractéristique se rapproche de l'épaisseur des couches limites acoustiques), et peut même être négligeable devant les effets de couches limites dans des espaces de très petites dimensions (le modèle analytique construit dans les chapitres suivants pour l'étude de microphones fait partie de cette dernière catégorie). Pour caractériser précisément les phénomènes de dissipation liés aux effets thermovisqueux, des solutions analytiques aux équations (1.2-1.4) associées aux conditions aux limites (présentées par la suite au paragraphe iii) dans le cas de problèmes à géométrie simple (comme un tube de section circulaire, rectangulaire ou encore triangulaire) ont été proposées (dont par exemple [5,7-9]). Pour ces mêmes géométries simples et/ou lorsque le problème implique une géométrie plus compliquée, l'obtention de solutions analytiques n'est parfois plus possible et l'utilisation de modèles numériques se révèle alors être particulièrement adaptée. Ainsi, la résolution directe (sur le volume fluide) par la méthode des Éléments Finis [2-4,10-16] du système d'équations (1.2-1.4) associé aux conditions aux limites adaptées est une approche qui fournit de bons résultats. Cependant elle nécessite une attention particulière en raison des échelles spatiales très différentes que présente le champ acoustique (c'est-à-dire en raison des forts gradients à l'intérieur des couches limites). Pour limiter le nombre de degrés de liberté dans un tel modèle numérique, un maillage anisotrope à l'intérieur des couches limites est rendu nécessaire. Une procédure de maillage adaptatif anisotrope peut être avantageusement mise à profit pour obtenir un maillage adéquat [4], mais le coût de calcul reste important, limitant l'utilisation de cette technique à l'étude de sous-systèmes relativement simples, le plus souvent au moyen de calculs réalisés sur des maillages bi-dimensionnels [17].

Lorsque la géométrie de la frontière est suffisamment régulière et que le champ de pression reste suffisamment proche de la configuration d'une onde plane au voisinage de la paroi, une autre approche consiste à traduire les phénomènes dissipatifs thermiques et visqueux par une admittance spécifique équivalente aux effets de couches limites [18]. Une expression analytique de cette admittance spécifique est présentée dans la référence [6, chapitre 3] en fonction d'une information traduisant l'angle d'incidence locale de l'onde plane, pour exprimer les effets de viscosité de cisaillement. Cette approche peut être mise en œuvre pour la modélisation analytique, éventuellement associée à des développements modaux pour le champ, et peut également être utilisée pour traduire les effets de couches limites dans des calculs numériques par la méthode des Éléments de Frontière [19-22] et/ou par Éléments Finis, éventuellement par une procédure itérative pour rendre compte précisément de l'incidence locale [2]. Dans le cas d'une géométrie plus compliquée, ou d'une forme plus complexe du champ, cette approche peut être adaptée éventuellement au moyen d'un calcul numérique spécifique au voisinage des parois [1].

ii Équations du mouvement et de la conduction thermique pour un solide déformable

Dans le cadre de l'élasticité linéaire et considérant un solide isotrope et homogène (les grandeurs

liées au solide sont indicées « w », le champ de déplacement $\vec{u}_w(\vec{r}, t)$ est régi par l'équation de Navier :

$$\rho_0 \partial_{tt}^2 \vec{u}_w(\vec{r}, t) - \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{u}_w(\vec{r}, t) - \frac{E}{2(1+\nu)} \text{div} \vec{\text{grad}} \vec{u}_w(\vec{r}, t) = f_e, \quad (1.10)$$

où E représente le module d'Young, ν le coefficient de poisson et f_e une force extérieure par unité de volume appliquée sur le solide.

L'écart instantané de température τ_w à l'intérieur du solide est régi par l'équation de conduction de la chaleur (équation de Fourier)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \xi_w \Delta \right) \tau_w = 0, \quad (1.11)$$

où $\xi_w = \lambda_w / (\rho_w C_w)$ représente la diffusivité thermique, λ_w , ρ_w et C_w étant respectivement le coefficient de conductivité thermique, la masse volumique et la capacité thermique massique du solide considéré.

La densité de flux de chaleur $\vec{\phi}_w$ associée à l'écart instantané de température est donnée par

$$\vec{\phi}_w = -\lambda_w \vec{\text{grad}} \tau_w. \quad (1.12)$$

À noter que le propos de ce chapitre se limite à l'étude des phénomènes thermiques. Par suite, le champ de déplacement dans le solide n'est pas pris en considération (il est supposé nul) ; l'équation 1.10 n'est pas (directement) exploitée par la suite.

iii Conditions aux limites aux interfaces fluide-solide

Les conditions aux limites sont au nombre de quatre et correspondent chacune à une condition de raccordement aux interfaces fluide-solide. Les deux premières conditions présentées ici raccordent à l'interface les grandeurs mécaniques et correspondent respectivement à la continuité des vitesses et à la continuité du vecteur contrainte à l'interface.

Lorsqu'une paroi est animée d'une vitesse $\vec{v}_w = \partial_t \vec{u}_w$ et que les particules de fluide ont une vitesse $\vec{v}$, leurs composantes normales et tangentielles respectives doivent s'égaliser à l'interface fluide-solide. Ainsi, la continuité des vitesses est appliquée à l'interface, soit

$$\vec{v} = \vec{v}_w. \quad (1.13)$$

La seconde condition aux limites mécanique, la continuité de la contrainte normale (de direction $\vec{n}$) à l'interface, est exprimée par

$$(-p + (\eta - 2\mu/3) \text{div} \vec{v}) \vec{n} + 2\mu \underline{\underline{\nu}} \vec{n} = \underline{\underline{\sigma}}_w \vec{n}, \quad (1.14)$$

où $[(\eta - 2\mu/3) \text{div} \vec{v}] + 2\mu \underline{\underline{\nu}}$ représente le tenseur des contraintes visqueuses dans le fluide, $\underline{\underline{\nu}}$ le tenseur de taux de déformations dans le fluide exprimé par $\nu_{ij} = 1/2[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}]$, p l'écart instantané de pression, $\underline{\underline{\sigma}}_w$ le tenseur des contraintes dans le solide exprimé par $\sigma_{w_{ij}} =$

$\frac{E}{(1+\nu)} \left(\varepsilon_{w_{ij}} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \varepsilon_{w_{kk}} \delta_{ij} \right)$, et $\underline{\underline{\varepsilon}}_w$ le tenseur des déformations dans le solide exprimé par $\varepsilon_{w_{ij}} = 1/2 \left[\frac{\partial \nu_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \nu_j}{\partial x_i} \right]$.

Les deux dernières conditions aux limites concernent les aspects thermiques à l'interface. Celles-ci expriment d'une part la continuité des écarts instantanés de températures dans le fluide (τ) et dans le solide (τ_w)

$$\tau = \tau_w, \quad (1.15)$$

et d'autre part la continuité des flux de chaleur ϕ dans le fluide et ϕ_w dans le solide suivant la normale à la paroi

$$\vec{\phi} \cdot \vec{n} = \vec{\phi}_w \cdot \vec{n}. \quad (1.16)$$

1.2 Champs thermiques aux interfaces fluide-solide

1.2.1 Description du problème

La description des phénomènes de l'acoustique en fluide thermovisqueux, sur la base des équations fondamentales (1.2-1.4), est ici reprise en se focalisant sur l'interaction thermique du fluide avec une paroi. Lorsqu'une onde plane acoustique d'angle d'incidence θ interagit avec un milieu solide semi-infini (figure 1.1), en raison des processus de diffusion qui prennent naissance à l'interface fluide-solide et qui participent à l'irréversibilité des phénomènes thermomécaniques, l'onde réfléchie présente une amplitude inférieure à celle de l'onde incidente, du fait de la création d'ondes de diffusion dans le fluide (dans les couches limites thermique et visqueuse, d'épaisseurs respectives δ_h et δ_ν) et dans le solide (onde de diffusion thermique).

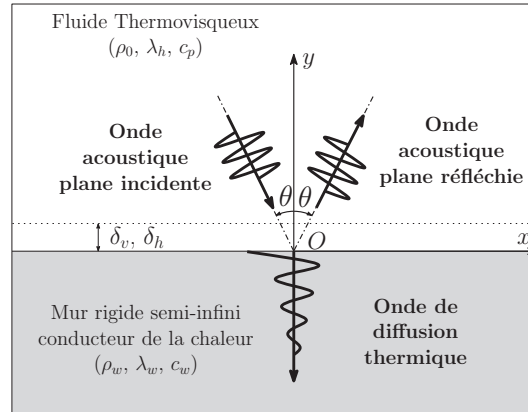


FIGURE 1.1 – Ondes planes incidente et réfléchie sur un mur semi-infini conducteur de la chaleur

Tout écart instantané de température d'une particule fluide, de faible capacité thermique (C_p) et de faible conductivité thermique (λ_h), provoque par interaction avec une paroi solide de grande diffusivité thermique ξ_w un flux thermique, tel que l'interface reste dans une condition « quasi isotherme ».

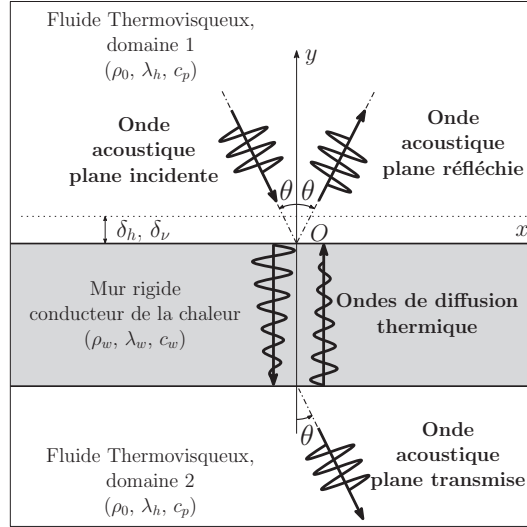


FIGURE 1.2 – Ondes acoustique plane incidente, réfléchie et transmise sur un mur d'épaisseur finie (une membrane)

Par contre, cette condition « quasi isotherme » à la frontière fluide-solide se trouve remise en question dans le cas d'une paroi très mince, que ce soit une membrane ou encore une fibre, en raison de sa capacité calorifique limitée. En outre, dans le cas de la configuration présentée sur la figure 1.2 (cas d'une membrane), les transferts thermiques (ondes de diffusion aller et retour) à l'intérieur de la paroi impliquent l'existence d'une composante acoustique transmise dans le domaine fluide 2. Il convient de préciser que cette notion d'onde transmise concerne uniquement la transparence de la paroi du fait de sa diffusivité thermique, c'est-à-dire que le comportement mécanique de la paroi est écarté du problème, ignorant ainsi l'onde transmise du fait de son mouvement de flexion (dont l'amplitude est considérablement plus importante que celle de l'onde transmise par diffusion thermique).

L'objectif de ce chapitre étant d'étudier l'effet des transferts thermiques en fines parois (rigides et au repos) et de mettre à l'épreuve la condition « quasi isotherme » d'une paroi solide au contact d'un gaz comme l'air, deux configurations particulièrement simples sont considérées, permettant ainsi d'obtenir des solutions analytiques au système d'équations composé des équations couplées (1.7a-1.7b), de la conduction de la chaleur dans le solide (1.11), du flux de chaleur associé (1.12) et des conditions aux limites (1.13) et (1.15-1.16). Afin de se focaliser sur les effets purement thermiques, le mouvement particulier est ici choisi normal à l'interface solide-fluide, c'est-à-dire que le champ n'a qu'une composante divergente, le mouvement de cisaillement associé à la viscosité (indépendant des effets thermiques), généralement du même ordre de grandeur que les effets thermiques, n'est pas pris en compte ci-dessous dans les paragraphes 1.2.2 et 1.2.3. La première configuration considérée implique une surface plane, une membrane, et la seconde implique une surface cylindrique, une fibre (paragraphe 1.2.3).

1.2.2 Cas d'une paroi à géométrie plane : une membrane

La première configuration considérée est une membrane d'épaisseur e (représentée sur la figure 1.3 par un mur conducteur de la chaleur) supposée parfaitement rigide et au repos. Le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) utilisé prend son origine sur l'interface supérieure de la membrane et l'axe Oy est dirigé entrant dans le domaine fluide 1 comme indiqué sur la figure 1.3. L'interaction de cette onde incidente avec la paroi rigide se traduit d'une part dans le domaine fluide 1 ($y > 0$) par la création d'une onde plane de diffusion entropique (qui est confinée au voisinage de la paroi) et d'une onde plane acoustique réfléchie, et d'autre part dans le solide ($0 > y > -e$) par la création d'une onde de diffusion qui se propage vers l'interface de la membrane située en $y = -e$, où les processus entropiques donnent naissance à une onde plane transmise qui se propage dans le domaine fluide 2 ($y < -e$) le long de l'axe Oy dans le sens négatif.

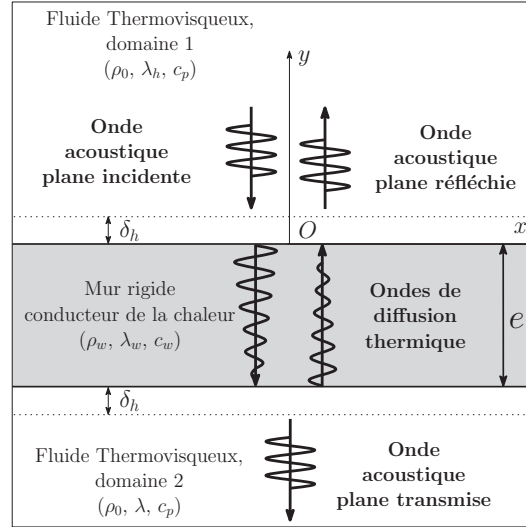


FIGURE 1.3 – Ondes acoustique plane incidente, réfléchie et transmise sur un mur d'épaisseur finie (une membrane)

Le mouvement particulaire des ondes planes dans les deux domaines fluide étant normal à la paroi et considéré indépendant des coordonnées x et z (l'axe z étant perpendiculaire au plan xOy), les champs sont fonction de la seule coordonnée y ; ainsi, compte tenu de la convention $e^{i\omega t}$, les variables de vitesse particulaire (1.1a) et de température (1.1d) prennent respectivement la forme suivante

$$V(y, t) = V_y(y) e^{i\omega t}, \quad (1.17a)$$

$$T(y, t) = T_0 + \tau_y(y) e^{i\omega t}, \quad (1.17b)$$

et le système d'équations (1.7a-1.7b) peut s'écrire

$$\omega^2 V_y(y) + \left(\frac{c_0^2}{\gamma} + i\omega c_0 \ell_v \right) \partial_{yy}^2 V_y(y) - i\omega \frac{\hat{\beta}}{\rho_0} \partial_y \tau_y(y) = 0, \quad (1.18a)$$

$$i\omega \tau_y(y) - \gamma \ell_h c_0 \partial_{yy}^2 \tau_y(y) + \frac{\gamma - 1}{\gamma \hat{\beta}} \rho_0 c_0^2 \partial_y V_y(y) = 0. \quad (1.18b)$$

Les formes de solutions de ce système d'équations couplées (1.18a-1.18b) sont, quel que soit le domaine fluide considéré (les exposants « 1 » et « 2 » font respectivement référence aux domaines fluide 1 et 2), données par

$$V_y^{1,2}(y) = ik_a \left(C_{a+}^{1,2} e^{ik_a y} - C_{a-}^{1,2} e^{-ik_a y} \right) + ik_h \left(C_{h+}^{1,2} e^{ik_h y} - C_{h-}^{1,2} e^{-ik_h y} \right), \quad (1.19a)$$

$$\tau_y^{1,2}(y) = C_1 \left(C_{h+}^{1,2} e^{ik_h y} + C_{h-}^{1,2} e^{-ik_h y} \right) + C_2 \left(C_{a+}^{1,2} e^{ik_a y} + C_{a-}^{1,2} e^{-ik_a y} \right), \quad (1.19b)$$

où $C_{a+}^{1,2}$, $C_{a-}^{1,2}$, $C_{h+}^{1,2}$ et $C_{h-}^{1,2}$ sont des constantes d'intégration représentant l'amplitude des ondes acoustique (termes indicés « a ») et entropique (termes indicés « h ») qui se propagent suivant l'axe Oy dans le sens croissant (termes indicés « - ») et décroissant (termes indicés « + »), les termes C_1 et C_2 étant donnés par

$$C_1 = \frac{\frac{H+G}{2Q} + \omega^2}{D}, \quad C_2 = \frac{\frac{H-G}{2Q} + \omega^2}{D}, \quad (1.20a)$$

avec

$$B = \frac{c_0^2}{\gamma} + i\omega c_0 \ell_v, \quad D = i\omega \frac{\hat{\beta}}{\rho_0}, \quad (1.21a)$$

$$Q = -\gamma \ell_h c_0, \quad R = -\frac{\gamma - 1}{\gamma \hat{\beta}} \rho_0 c_0^2, \quad (1.21b)$$

$$H = DR - \omega^2 Q - i\omega B, \quad G = \sqrt{H^2 - 4i\omega^3 BQ}, \quad (1.21c)$$

et où les nombres d'onde associés aux mouvements acoustique (k_a) et entropique (k_h) sont donnés par

$$ik_a = \sqrt{\frac{H - G}{2BQ}}, \quad (1.22a)$$

$$ik_h = \sqrt{\frac{H + G}{2BQ}}. \quad (1.22b)$$

Dans le domaine fluide 1, l'amplitude C_{a+}^1 de l'onde acoustique plane incidente est choisie égale à l'unité et l'amplitude C_{h+}^1 de l'onde entropique incidente est supposée nulle (car négligeable en regard de celle de l'onde acoustique). L'onde plane réfléchie est composée d'une onde acoustique et d'une onde entropique, respectivement d'amplitudes C_{a-}^1 (correspondant au coefficient de réflexion en amplitude de l'onde acoustique) et C_{h-}^1 . Dans le domaine fluide 2, dans la mesure où aucune

onde incidente n'est considérée, les amplitudes C_{a-}^2 et C_{h-}^2 des ondes respectivement acoustique et entropique sont nulles. L'onde transmise est composée d'une onde acoustique d'amplitude C_{a+}^2 (correspondant au coefficient de transmission en amplitude de l'onde acoustique) et d'une onde entropique d'amplitude C_{h+}^2 .

Dans le solide, l'écart instantané de température, solution de l'équation de la chaleur (1.11), est donné par

$$\tau_w(y) = \tau_{w1} \cos(k_w y) + \tau_{w2} \sin(k_w y), \quad (1.23)$$

où τ_{w1} et τ_{w2} sont des constantes d'intégration, $k_w = \sqrt{-i\omega/\xi_w}$ le nombre d'onde de diffusion thermique et $\xi_w = \lambda_w/(\rho_w C_w)$ la diffusivité thermique du solide.

Les conditions aux limites (1.13) et (1.15-1.16) appliquées aux interfaces fluide-solide situées en ($y = 0$) et en ($y = -e$), impliquant (i) que la vitesse particulaire s'annule aux interfaces [$V_y^1(0) = 0$ et $V_y^2(-e) = 0$], (ii) la continuité de température interfaces [$\tau_y^1(0) = \tau_w(0)$ et $\tau_w(-e) = \tau_y^2(-e)$] et (iii) la continuité du flux de chaleur [$\lambda_h \partial_y \Phi^1(0) = \lambda_w \partial_y \Phi_w(0)$ et $\lambda_w \partial_y \Phi_w(-e) = \lambda_h \partial_y \Phi^2(0)$], mènent aux expressions :

$$C_{a-}^1 = \frac{C_1 N_a L \cos(k_w e) + \left[L^2 - M^2 \left(1 + \frac{N_h C_2}{M} \right) \right] \sin(k_w e)}{2LM \cos(k_w e) + (L^2 - M^2) \sin(k_w e)}, \quad (1.24a)$$

$$C_{h-}^1 = \frac{-C_2 N_a (L \cos(k_w e) - M \sin(k_w e))}{2LM \cos(k_w e) + (L^2 - M^2) \sin(k_w e)}, \quad (1.24b)$$

respectivement pour les amplitudes des ondes acoustique et entropique réfléchies dans le domaine fluide 1, et aux expressions suivantes pour les amplitudes des ondes acoustique et entropique transmises dans le domaine fluide 2

$$C_{a+}^2 = \frac{-C_2 N_h L e^{ik_a e}}{2LM \cos(k_w e) + (L^2 - M^2) \sin(k_w e)}, \quad (1.25a)$$

$$C_{h+}^2 = \frac{C_2 N_a L e^{ik_h e}}{2LM \cos(k_w e) + (L^2 - M^2) \sin(k_w e)}, \quad (1.25b)$$

avec

$$N_a = 2\Lambda k_w i k_a, \quad (1.26a)$$

$$N_h = 2\Lambda k_w i k_h, \quad (1.26b)$$

$$L = -k_h k_a (C_1 - C_2), \quad (1.26c)$$

$$M = 1/2 (N_a C_1 - N_h C_2), \quad (1.26d)$$

où $\Lambda = \lambda_w/\lambda_h$.

La figure 1.4, qui représente le module du coefficient de transmission en amplitude de l'onde acoustique transmise dans le domaine fluide 2 (de l'air) en fonction de l'épaisseur de la membrane (en verre) et en fonction de la fréquence, illustre la transparence de la paroi du fait de sa diffusivité thermique. Il apparaît que l'amplitude de l'onde transmise est tout à fait négligeable : le maximum d'amplitude de l'onde transmise, de l'ordre de 10^{-5} , est obtenu pour les épaisseurs les plus minces et pour les plus hautes fréquences.

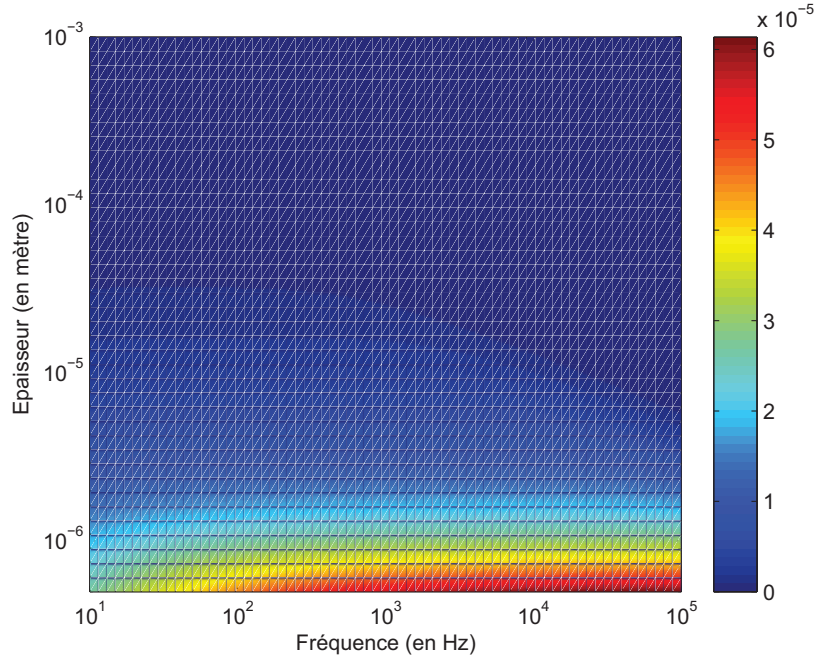


FIGURE 1.4 – Module du coefficient de transmission acoustique en fonction de la fréquence et de l'épaisseur de la membrane (le fluide étant de l'air et la membrane étant en verre)

1.2.3 Cas d'une paroi à géométrie cylindrique : une fibre

La seconde configuration considérée est une fibre de rayon R_1 conductrice de la chaleur, supposée parfaitement rigide et au repos, entourée d'un fluide thermovisqueux. Le système de coordonnées cylindrique (r, θ, z) prend son origine au centre de la fibre (noté O) comme indiqué sur la figure 1.5.

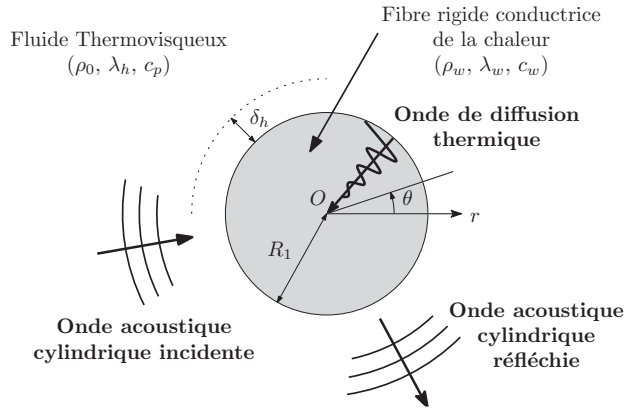


FIGURE 1.5 – Ondes cylindriques incidente et réfléchie sur une fibre de rayon R_1

Le modèle développé ci-dessous est construit dans l'hypothèse d'un champ parfaitement cylindrique. Dans cette configuration, qui est en pratique assez atypique, les conclusions tirées sur les effets thermiques liés à l'acoustique peuvent être étendues aux configurations pour lesquelles la longueur d'onde acoustique est grande devant le diamètre de la fibre, autour de laquelle les champs

de pression, de masse volumique et de température sont sensiblement uniformes.[†] Ainsi, le champ cylindrique est ici supposé uniforme suivant la variable θ , et peut être traduit par la somme d'une onde incidente et réfléchie dans la direction radiale. L'interaction des ondes cylindriques incidentes et la paroi (située en $r = R_1$) se traduit à la fois par la création d'une onde cylindrique réfléchie, composée d'une onde acoustique et d'une onde entropique, et par une onde de diffusion thermique à l'intérieur de la fibre.

Dans le fluide, compte tenu de la symétrie du problème, le champ étant considéré indépendant des variables z et θ , les variables de vitesse particulaire (1.1a) et de température (1.1d) s'écrivent,

$$V(r, t) = V_r(r) e^{i\omega t}, \quad (1.27a)$$

$$T(r, t) = T_0 + \tau_r(r) e^{i\omega t}, \quad (1.27b)$$

et le système d'équations (1.7a-1.7b) devient

$$\omega^2 V_r(r) + \left(\frac{c_0^2}{\gamma} + i\omega c_0 \ell_v \right) \left(\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \right) V_r(r) - i\omega \frac{\hat{\beta}}{\rho_0} \partial_r \tau_r(r) = 0, \quad (1.28a)$$

$$i\omega \tau_r(r) - \gamma \ell_h c_0 \left(\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) \tau_r(r) + \frac{\gamma - 1}{\gamma \hat{\beta}} \rho_0 c_0^2 \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) V_r(r) = 0. \quad (1.28b)$$

Les solutions de ce système d'équations couplées prennent la forme

$$\begin{aligned} V_r(r) = & K_1 \left(C_{a+} H_1^{(1)}(k_a r) + C_{a-} H_1^{(2)}(k_a r) \right) \\ & + K_2 \left(C_{h+} H_1^{(1)}(k_h r) + C_{h-} H_1^{(2)}(k_h r) \right), \end{aligned} \quad (1.29)$$

et

$$\begin{aligned} \tau_r(r) = & C_{a+} H_0^{(1)}(k_a r) + C_{a-} H_0^{(2)}(k_a r) \\ & + C_{h+} H_0^{(1)}(k_h r) + C_{h-} H_0^{(2)}(k_h r), \end{aligned} \quad (1.30)$$

où $H_0^{(1)}$ et $H_0^{(2)}$ sont les fonctions de Hankel d'ordre zéro, respectivement du premier et du second type, et où C_{a+} , C_{a-} , C_{h+} et C_{h-} sont des constantes d'intégration représentant les amplitudes des ondes acoustique (termes indicés « a ») et entropique (termes indicés « h ») qui se propagent dans la direction radiale r dans le sens croissant (termes indicés « $-$ ») et décroissant (termes indicés « $+$ »). Les termes K_1 et K_2 sont donnés par

$$K_1 = \frac{\frac{H-G}{2B} + i\omega}{k_a R}, \quad (1.31a)$$

$$K_2 = \frac{\frac{H+G}{2B} + i\omega}{k_h R}, \quad (1.31b)$$

en utilisant les notations (1.21a-1.21c) pour les termes B , G , H , et R , les nombres d'onde associés aux mouvements acoustique (k_a) et entropique (k_h) étant donnés respectivement par les équations (1.22a) et (1.22b).

[†]. Il est clair que pour une excitation du fluide différente de celle considérée ici, les effets de diffraction affecteraient la propagation acoustique dès lors que le diamètre de la fibre cesse d'être très inférieur à la longueur d'onde $\lambda = c_0/f$.

Dans le fluide ($R_1 < r$), l'amplitude C_{a+} de l'onde acoustique cylindrique incidente est choisie égale à l'unité et l'amplitude C_{h+} de l'onde entropique incidente est supposée nulle. L'onde cylindrique réfléchie est composée d'une acoustique d'amplitude C_{a-} (correspondant au coefficient de réflexion en amplitude de l'onde acoustique) et d'une onde entropique d'amplitude C_{h-} .

Dans le solide ($0 < r < R_1$), considérant la géométrie du système et le fait que la température au centre de la fibre est d'amplitude finie (condition de Neumann $\partial_r \tau_r(0) = 0$), l'amplitude $\tau_w(r)$ de l'écart instantané de température, solution de (1.11) est donnée par

$$\tau_w(r) = A_w J_0(k_w r), \quad (1.32)$$

où A_w est une constante d'intégration et $k_w = \sqrt{i\omega/\xi_w}$ le nombre d'onde de diffusion dans le solide.

L'écriture des conditions aux frontières (1.13) et (1.15-1.16) à l'interface fluide-solide située en ($r = R_1$), conditions qui impliquent (i) que la vitesse particulaire est nulle sur la paroi [$V_r(R_1) = 0$], (ii) la continuité de l'écart instantané de température [$\tau_r(R_1) = \tau_w(R_1)$] et (iii) la continuité du flux de chaleur [$\lambda_h \partial_r \tau_r(R_1) = \lambda_w \partial_r \tau_w(R_1)$], mène aux expressions suivantes des amplitudes des ondes acoustique et entropique réfléchies :

$$C_{a-} = \frac{P_{a1}^{(1)} H_0^{(2)}(k_h R_1) - P_{h1}^{(2)} H_0^{(1)}(k_a R_1) + P_{ha} H_1^{(1)}(k_a R_1)}{P_{h1}^{(2)} H_0^{(2)}(k_a R_1) - P_{a1}^{(2)} H_0^{(2)}(k_h R_1) + P_{ha} H_1^{(2)}(k_a R_1)}, \quad (1.33)$$

$$C_{h-} = \frac{P_{a1}^{(2)} H_0^{(1)}(k_a R_1) - P_{a0}^{(2)} H_1^{(1)}(k_a R_1)}{P_{h1}^{(2)} H_0^{(2)}(k_a R_1) - P_{a1}^{(2)} H_0^{(2)}(k_h R_1) + P_{ha} H_1^{(2)}(k_a R_1)}, \quad (1.34)$$

avec

$$P_{av}^{(\alpha)} = \Lambda k_w J_1(k_w R_1) H_\nu^{(\alpha)}(k_a R_1) K_2, \quad (1.35)$$

$$P_{hv}^{(\alpha)} = \Lambda k_w J_1(k_w R_1) H_\nu^{(\alpha)}(k_h R_1) K_1, \quad (1.36)$$

$$P_{ha} = J_0(k_w R_1) H_1^{(2)}(k_h R_1) (K_2 k_h - K_1 k_a), \quad (1.37)$$

où α désigne le type de la fonction de Hankel ($\alpha = 1$ ou 2) et ν son ordre ($\nu = 0$ à 2).

Dans le paragraphe suivant, le champ représenté par cette solution analytique et les phénomènes physiques qui y sont associés sont analysés et comparés aux résultats obtenus pour la géométrie plane.

1.3 Effets thermiques aux interfaces fluide-solide : résultats pour une membrane et une fibre

Les effets thermiques au voisinage de l'interface sont analysés pour les deux configurations considérées aux paragraphes précédents au moyen de deux paramètres sans dimension : le premier, le coefficient polytropique, permet de décrire l'état thermodynamique local du fluide en fonction de la distance à la paroi, rendant ainsi compte à la fois de l'effet local des couches limites thermiques et

de la condition thermique sur la frontière ; le second paramètre, l'admittance spécifique équivalente de la paroi (dont il a été fait mention au paragraphe 1.1), permet de traduire d'une manière « globale » l'effet des couches limites thermiques sur le champ acoustique en dehors des couches limites.

Propriétés	Verre	Air (à 21 °C)	Unités
ρ_0	2500	1.2	kg.m ⁻³
λ_h	1	0.024	W.m ⁻¹ .K ⁻¹
C_w	720	/	J.kg ⁻¹ .K ⁻¹
C_p	/	1.01 10 ³	J.kg ⁻¹ .K ⁻¹
$\gamma = C_p/C_v$	/	1.405	/
$\hat{\beta}$	/	347	Pa.K ⁻¹
μ	/	1.69 10 ⁻⁵	Pa.s
c_0	/	344	m.s ⁻¹

Tableau 1.1 – Propriétés physiques utilisées pour le solide et le fluide

Les résultats présentés ici sont obtenus, pour chaque configuration, en considérant de l'air et des parois en verre (choix arbitraire) de différentes longueurs caractéristiques (épaisseurs ou rayons suivant le type de géométrie considérée) dont les propriétés sont données dans le [tableau 1.1](#).

1.3.1 Coefficient polytropique

La transformation thermodynamique réelle d'un fluide est intermédiaire entre une transformation quasi adiabatique (en dehors des couches limites thermiques) et quasi isotherme (sur les parois). Entre ces deux cas limites la transformation thermodynamique est polytropique. Le coefficient de compressibilité du fluide, ici fonction de la coordonnée spatiale ($\vec{r}$), rend compte de la nature de l'état thermodynamique du fluide. Dans le cadre de l'approximation linéaire, ce coefficient de compressibilité prend la forme suivante

$$\chi_l(\vec{r}) = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho'(\vec{r})}{p(\vec{r})}. \quad (1.38)$$

Le comportement du fluide est dans la suite exprimé à partir de la fonction

$$n(\vec{r}) = \frac{\chi_T}{\chi_l(\vec{r})} = \rho_0 \chi_T \frac{p(\vec{r})}{\rho'(\vec{r})}, \quad (1.39)$$

appelée coefficient polytropique local, par référence à la transformation polytropique en thermodynamique

$$P = C\rho^n,$$

qui prend la forme, dans le cadre de l'approximation acoustique linéaire,

$$\begin{aligned} P_0 + p &= \frac{1}{\rho_0 \chi_T} (\rho_0 + n\rho'), \text{ soit } p = \frac{n}{\rho_0 \chi_T} \rho', \\ P_0 + p &= C (\rho_0 + n\rho'), \text{ soit } p = nC\rho' \text{ avec } C = 1/\rho_0 \chi_T. \end{aligned}$$

La figure 1.6 représente les parties réelle (en haut) et imaginaire (en bas) du coefficient polytropique en fonction de la distance à la paroi (exprimée en épaisseur de couche limite thermique δ_h). Le coefficient est ici calculé dans l'air à une fréquence de 10 kHz pour les deux types de paroi considérés (membrane et fibre) en considérant des épaisseurs (membrane) et des rayons (fibre) de mêmes longueurs caractéristiques.

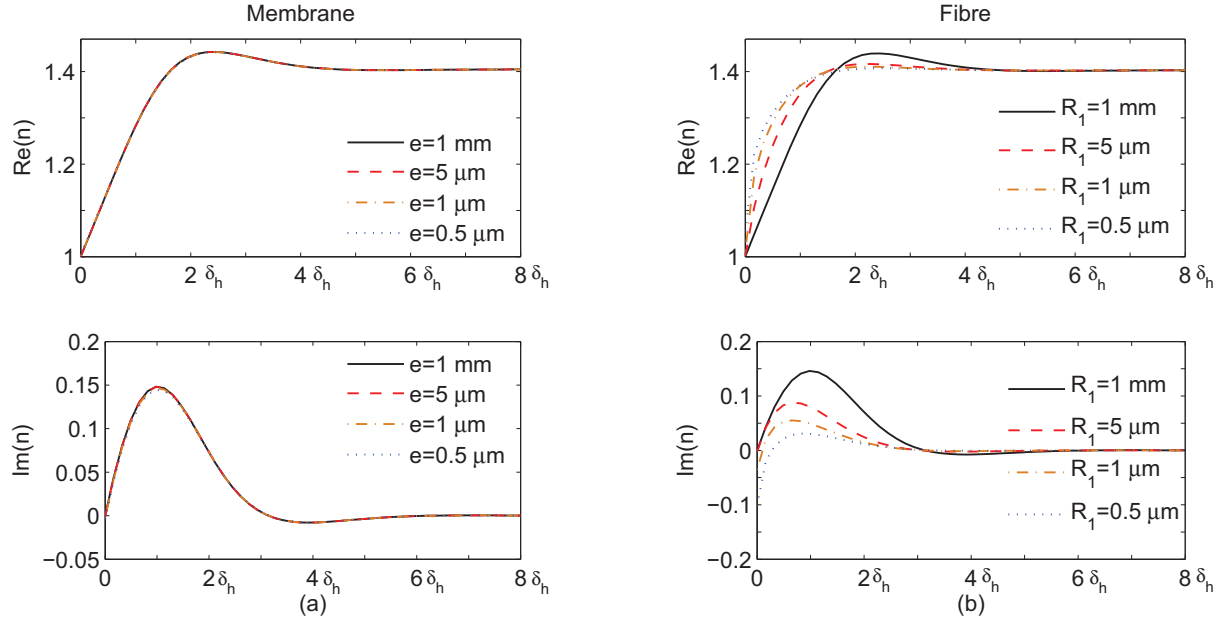


FIGURE 1.6 – Partie réelle (en haut) et partie imaginaire (en bas) du coefficient polytropique n dans l'air en fonction de la distance à la paroi (exprimée en épaisseur de couche limite δ_h) pour (a) une membrane et (b) une fibre de différentes longueurs caractéristiques à la fréquence de 10 000 Hz

Dans le cas d'une membrane en verre (à gauche), il apparaît que l'épaisseur n'a (pratiquement) aucune incidence sur la valeur du coefficient polytropique et que la condition thermique à l'interface reste isotherme, indiquant que la membrane est suffisamment épaisse et qu'elle présente une capacité thermique suffisante pour emmagasiner le flux thermique près de l'interface. L'allure des courbes représentant la partie réelle du coefficient n traduit la transition entre les conditions isotherme et adiabatique avec un dépassement de la valeur ($\gamma = 1.4$) situé à environ deux épaisseurs de couches limites thermiques. Un tel comportement est fréquent pour les effets diffusifs, comme par exemple le maximum de vitesse de cisaillement observé en couche limite visqueuse. La valeur de la partie imaginaire du coefficient polytropique traduit le déphasage entre les écarts instantanés de pression et de masse volumique : ce déphasage entre une excitation (ici l'écart instantané de pression) et la réponse d'un système (ici l'écart instantané de masse volumique) localise les phénomènes dissipatifs à une distance d'environ une épaisseur de couche limite thermique. Dans le cas d'une fibre de verre (à droite), le comportement est globalement similaire à celui observé dans le cas de la membrane, à ceci près que l'extrémum de la partie réelle du coefficient n est

atténué avec une diminution des rayons de la fibre et que l'importance des phénomènes dissipatifs s'en trouve réduite.

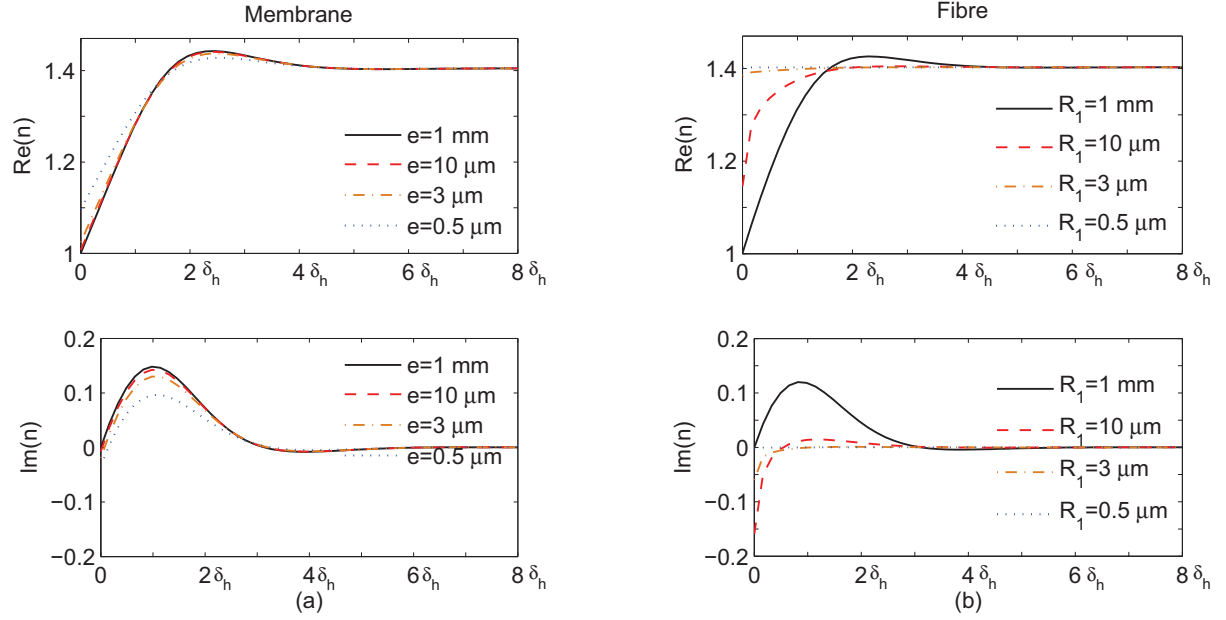


FIGURE 1.7 – Partie réelle (en haut) et partie imaginaire (en bas) du coefficient polytropique n dans l'air en fonction de la distance à la paroi (exprimée en épaisseur de couche limite thermique δ_h) pour (a) une membrane et (b) une fibre de différentes longueurs caractéristiques à une fréquence de 10 Hz

Sur la figure 1.7 sont représentées les parties réelle (en haut) et imaginaire (en bas) du coefficient polytropique en fonction de la distance à la paroi (exprimée en épaisseur de couche limite thermique δ_h). Le coefficient est ici calculé dans l'air pour plusieurs épaisseurs de membranes et plusieurs rayons de fibres à la fréquence de 10 Hz.

Dans le cas de la membrane (à gauche), la valeur du coefficient polytropique ne varie que très faiblement en fonction de l'épaisseur. Ainsi, en pratique, et quelle que soit l'épaisseur de la membrane considérée, la condition isotherme à l'interface fluide-solide peut être appliquée. En revanche, dans le cas de la fibre, la valeur du coefficient n varie de manière très significative en fonction de son rayon : la condition isotherme est valide sur la paroi pour de larges rayons de fibre, tandis que dans le cas de faibles rayons (de l'ordre de quelques micromètres) la fibre suit la température du fluide et la propagation acoustique s'effectue dans des conditions quasi adiabatiques. Il apparaît également que la condition thermique sur la fibre s'écarte de la condition « isotherme » lorsque son rayon atteint approximativement l'épaisseur de couche limite thermique dans l'air.

1.3.2 Admittance spécifique équivalente de paroi

L'admittance spécifique équivalente β de la paroi, lorsque celle-ci est immobile, est définie par la relation (à l'interface fluide-solide)

$$\beta = \rho_0 c_0 \left. \frac{\vec{v}_a \cdot \vec{n}}{p} \right|_{\text{Interface}}, \quad (1.40)$$

où $\vec{v}_a$ est la vitesse particulaire acoustique, $\vec{n}$ la normale à l'interface (orientée sortant du domaine fluide 1), et où le produit $\rho_0 c_0$ représente l'impédance caractéristique du milieu de propagation. Cette admittance permet de traduire les phénomènes de dissipation et de retard à la réflexion liés à la viscosité et à la conduction thermique qui ont lieu au voisinage de la paroi par une condition aux frontières mixte pour le champ de pression

$$\partial_n p + i k_0 \beta p = 0, \quad (1.41)$$

où $k_0 = \omega/c_0$ et $\partial_n p$ étant la dérivé de l'écart instantané de pression par rapport à la normale à la paroi.

Dans les deux configurations présentées aux paragraphes 1.2.2 et 1.2.3, l'onde incidente étant localement normale à l'interface et la paroi étant au repos et parfaitement rigide ($\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_h = 0$ à l'interface fluide-solide), l'expression (1.40) peut s'écrire, compte tenu des formes de solutions 1.8,

$$\beta = \rho_0 c_0 \left. \frac{(-v_h)}{p} \right|_{\text{Interface}}, \quad (1.42)$$

où v_h représente le champ entropique de la vitesse particulaire. L'admittance spécifique de la paroi s'exprime également en fonction du coefficient de réflexion en amplitude des ondes acoustiques R_a , soit ici :

$$\beta = \frac{1 - R_a}{1 + R_a}. \quad (1.43)$$

La figure 1.8 représente le module (en haut) et la phase (en bas) de l'admittance spécifique équivalente β en fonction de la fréquence.

Pour chaque configuration, le module de l'admittance spécifique montre que l'importance des phénomènes dissipatifs à l'intérieur des couches limites thermiques augmente avec la fréquence. Dans le cas de la membrane (à gauche), quelle que soit l'épaisseur considérée, le module de β est très faible, ne varie que très peu en fonction de l'épaisseur e , et la phase reste très proche de $\pi/4$ (déphasage entre l'écart instantané de pression et la vitesse particulaire) ce qui est typique des processus de diffusion. Dans le cas de la fibre (à droite), le module comme la phase de l'admittance spécifique présentent de fortes variations, montrant (par contraste avec la membrane) que l'importance des phénomènes dissipatifs à l'intérieur des couches limites thermiques est fortement liée à la dimension caractéristique de la fibre : aux basses fréquences, le faible module de β montre que les couches limites thermiques ont un effet négligeable quel que soit le rayon R_1 ; pour un rayon de l'ordre du micromètre, la phase est proche de $\pi/2$, déphasage pour lequel l'écart instantané de pression et la vitesse particulaire sont en quadrature de phase, ce qui correspond à la propagation

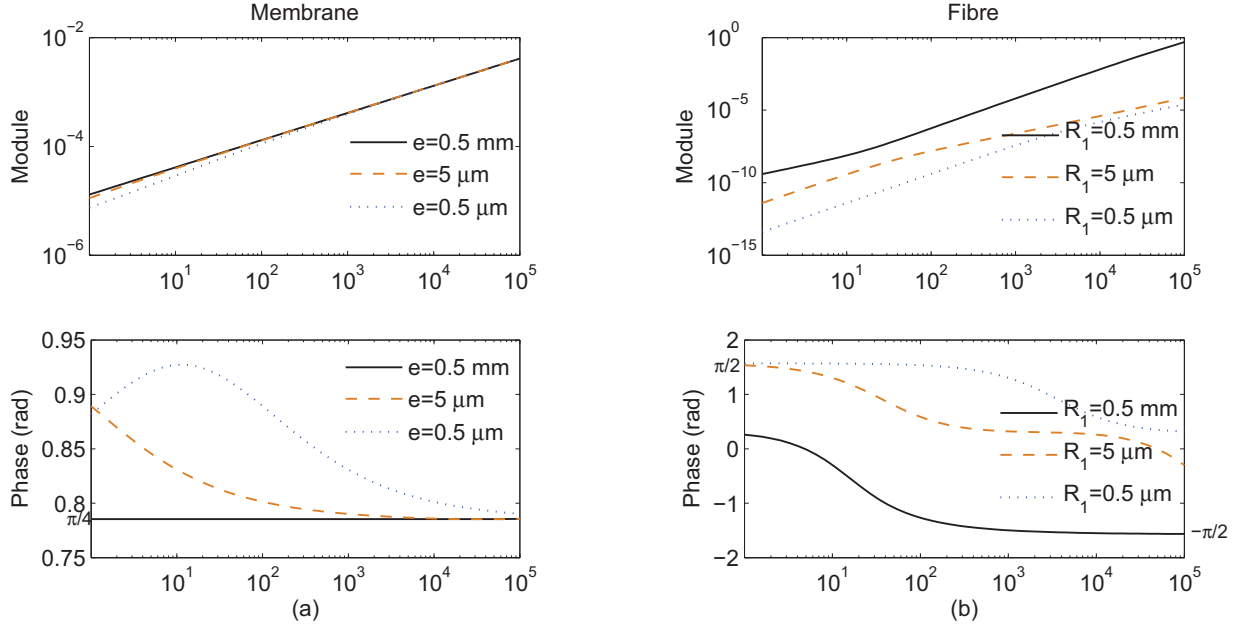


FIGURE 1.8 – Module (en haut) et phase (en bas) de l'admittance spécifique équivalente β en fonction de la fréquence pour (a) une membrane et (b) une fibre pour le couple fluide-solide 'air-verre'

d'ondes acoustiques dans des conditions quasi adiabatiques (voir [figure 1.7](#) pour les petits rayons de fibres). La fibre est alors « thermiquement » transparente au passage d'une onde acoustique ; en revanche, en hautes fréquences et pour un large rayon, le module de l'admittance devient important. Ce phénomène peut être interprété par le fait que le volume occupé par les couches limites thermiques augmente en proportion du carré du rayon de la fibre, ce qui par conséquent donne de l'importance aux phénomènes dissipatifs à l'intérieur des couches limites thermiques.

Conclusion

Après le rappel des équations fondamentales de l'acoustique en fluide thermovisqueux, dont les solutions font apparaître les champs acoustique, entropique et tourbillonnaire usuels, les interactions thermiques entre le fluide en contact avec une paroi solide plane (une membrane) ou cylindrique (une fibre) sont analysées en détails. De manière à se focaliser sur les seuls effets thermiques, un champ acoustique normal à l'interface est considéré pour éviter tout effet lié à la viscosité de cisaillement (indépendant des effets thermiques) et la paroi est considérée au repos. Ainsi, le modèle analytique [composé du système d'équations couplées (1.7a-1.7b) régissant l'écart instantané de température et la vitesse particulière dans le fluide, de l'équation de conduction de la chaleur dans le solide (1.11) ainsi que des conditions aux frontières (1.13) et (1.15-1.16) à l'interface fluide-solide], est appliqué successivement aux deux types de paroi (paragraphes 1.2.2 et 1.2.3). La condition thermodynamique locale du fluide et l'effet « global » des couches limites

thermiques sont analysés au moyen du coefficient polytropique local (exprimé en fonction de la distance à la paroi) et de l'admittance spécifique équivalente de la paroi (exprimée en fonction de la fréquence).

Il vient au terme de cette étude que (i) la transition entre la condition quasi isotherme en surface et quasi adiabatique au sein du volume fluide s'opère suivant la normale à la paroi sur une distance de l'ordre de deux épaisseurs de couche limite thermique, (ii) la condition usuelle « isotherme » à l'interface entre un fluide (comme l'air) et une paroi solide (comme du verre) constitue une excellente approximation pour la condition à la limite thermique d'une membrane (y compris pour des épaisseurs de l'ordre du micromètre et quelle que soit la fréquence considérée), (iii) dans le cas de fibres la condition isotherme n'est plus valide pour des rayons inférieurs aux épaisseurs de couches limites thermiques et, pour des rayons de l'ordre de quelques micromètres, la condition thermique en surface peut s'écarter sensiblement de cette condition (en particulier aux fréquences les plus basses) en raison de sa faible inertie thermique.

La traduction des effets de couche limite thermique en termes d'admittance spécifique équivalente manifeste également une différence sensible de comportement entre une membrane (structure bidimensionnelle) et une fibre (structure monodimensionnelle). Les résultats obtenus pour différentes longueurs caractéristiques (épaisseurs ou rayons) montrent que l'admittance équivalente de couches limites thermiques reste très faible dans le cas d'une membrane, alors que les variations du module et de phase de l'admittance dans le cas d'une fibre sont nettement plus importantes.

Ainsi, dans le chapitre suivant, dont l'objet consiste à poser le problème fondamental de la modélisation analytique d'un microphone capacitif, la condition « isotherme » peut être appliquée sur la membrane à l'interface fluide-solide.

Chapitre 2

Modélisation analytique d'un microphone capacitif : problème fondamental

Le microphone électrostatique[†] est un transducteur réciproque (utilisé aussi bien en émetteur qu'en récepteur) qui, de par sa bonne sensibilité, sa fiabilité, sa large bande passante et sa tenue dans le temps, est un microphone de mesure (voire un émetteur) performant, et par conséquent très usité dans les laboratoires. Initialement prévu par les constructeurs pour effectuer des mesures dans l'air à pression atmosphérique, à température ambiante et dans la gamme de fréquences audibles, il est aujourd'hui utilisé dans d'autres conditions, et doit répondre à des exigences nouvelles, notamment dans le domaine de la métrologie [23–31]. C'est ainsi que la miniaturisation de ces transducteurs, la demande toujours accrue de précision, ainsi que les exigences en terme de fréquences d'utilisation (du continu jusqu'à 100 kHz), en termes de pressions et de températures statiques variées, comme en terme de comportement en fluides divers [32–34], nécessitent de caractériser finement ces microphones, et en conséquence de mettre en œuvre une modélisation adaptée à ces (nouveaux) besoins. La modélisation analytique présentée dans la suite de ce manuscrit a fait l'objet d'une publication dans le *Journal of the Acoustical Society of America* [35]).

2.1 Description du problème

La figure 2.1 représente une vue en trois dimensions (à gauche) et un schéma (à droite) de l'intérieur d'une capsule microphonique sur lesquels sont indiqués les différents « domaines » que composent un transducteur électrostatique : la membrane, la lame de fluide inter-électrodes (ou l'entrefer), l'électrode arrière, les orifices et la fente périphérique de l'électrode arrière, et la cavité arrière. La complexité du problème analytique à poser et à résoudre réside dans l'architecture même du microphone et dans les divers couplages régnant entre ces domaines : le déplacement ξ de la membrane (cf. figure 2.2) est couplé à la fois au champ de pression p_{av} à l'avant du diaphragme

[†]. L'annexe A donne quelques généralités sur ce type de transducteur.

et au champ de pression p dans l'entrefer, qui est lui-même couplé au champ de pression p_c dans la cavité arrière par l'intermédiaire des débits U_{1,ν_0} de chaque orifice de l'électrode arrière (l'indice ν_0 désigne l'un des n_0 orifices) et du débit $U(\theta)$ de la fente périphérique.

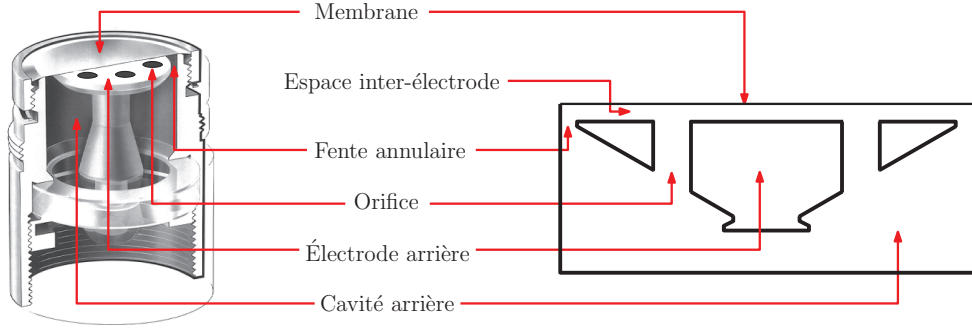


FIGURE 2.1 – Représentation 3D (à gauche) (d'après [36]) et schématique (à droite) de l'intérieur d'un microphone électrostatique

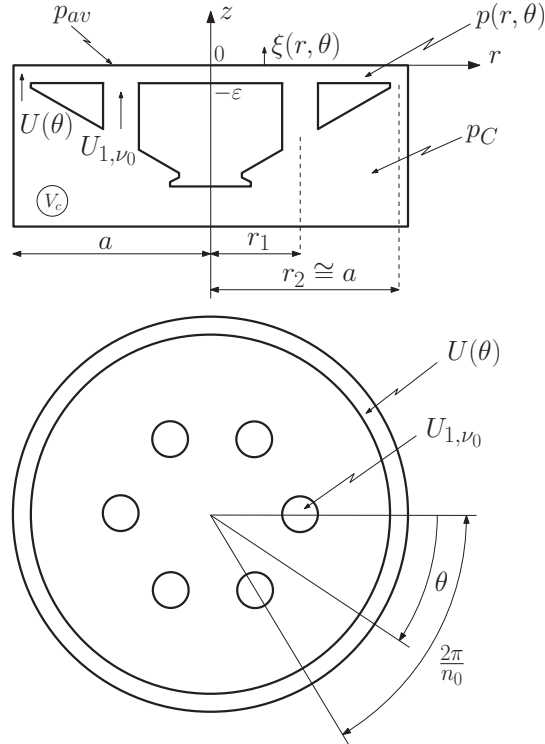


FIGURE 2.2 – Schéma d'un microphone électrostatique : notations utilisées

Le premier transducteur électrostatique a été réalisé en 1917 par Edward C. Wentz [37–39]. Des modèles analytiques de microphones capacitifs ont dès lors été publiés. Dans les références [40–47] les auteurs décrivent le couplage du mouvement de la membrane avec le fluide situé dans l'entrefer sous diverses hypothèses sur le comportement thermodynamique. Dans la référence [48] Allan J. Zuckerwar propose une modélisation analytique, qui tient compte à la fois du couplage « membrane-couche de fluide », des effets visqueux dans la couche de fluide et dans les ouver-

tures de l'électrode arrière, et également du couplage avec la cavité arrière par les orifices et la fente périphérique. Cette modélisation, qui a fait référence à l'époque, mène à l'expression de la valeur moyenne du champ de déplacement de la membrane, permettant d'une part de calculer la sensibilité en fonction de la fréquence dans le domaine de l'audible, et d'autre part d'exprimer l'impédance d'entrée du microphone et de la représenter sous la forme d'un schéma électrique équivalent, schéma qui a pour intérêt de faciliter la modélisation et l'optimisation du comportement de ce type de microphone. Des travaux analytiques plus récents ont essentiellement trait à (i) la modélisation des phénomènes thermovisqueux en fluide réel [5, 49, 50], (ii) la caractérisation de l'impédance d'entrée du microphone obtenue par des modèles à constantes localisées [51–56], (iii) l'usage d'une théorie modale dans la modélisation analytique d'un microphone capacitif mais où la viscosité du fluide n'est pas prise en compte [57, 58], (iv) l'analyse de l'amortissement visqueux et/ou de la forme, du nombre et de l'emplacement des orifices de l'électrode arrière sur les performances du microphone [59–64], (v) la forme de l'électrode arrière [65–67], ou encore (vi) l'analyse du bruit mécano-thermique du microphone [68–76].

Des résultats de mesure de champ de déplacement de la membrane de plusieurs microphones par vibrométrie laser à balayage [77, 78] font apparaître à des fréquences particulières (situées au-delà de la bande passante fournie par le constructeur, c'est-à-dire au-delà de 20 kHz) des déformées de la membrane portant la marque très nette de la présence des orifices de l'électrode arrière (figure 2.3). Malgré l'intérêt porté de longue date à la modélisation de ces transducteurs, un tel comportement n'a jamais fait l'objet d'une interprétation analytique, du fait vraisemblablement de sa complexité en regard des besoins du moment.

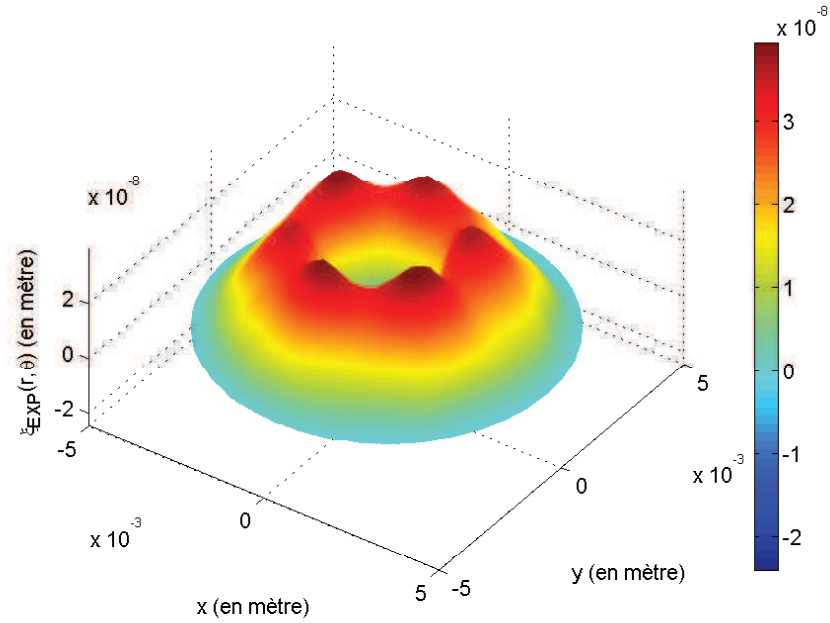


FIGURE 2.3 – Champ de déplacement de la membrane d'un microphone électrostatique ½ pouce mesuré à 57 kHz par vibrométrie laser à balayage

La modélisation analytique présentée ici s'attache en particulier à l'interprétation de ces déformées. Elle repose sur les choix retenus pour la description de l'effet des orifices de l'électrode arrière et de sa fente périphérique sur le champ de déplacement de la membrane, tant en terme d'amortissement thermovisqueux qu'en terme de couplage du champ de déplacement de la membrane et du champ de pression dans l'entrefer avec le champ de pression dans la cavité arrière. L'objet de ce chapitre 2 est de poser le problème fondamental, en établissant les équations pour les différents domaines qu'il comporte, et, parallèlement, de mettre en évidence son apport en regard des modèles existants [48, 54].

2.2 Mouvement de la membrane

Le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) utilisé prend son origine au centre O de la membrane comme indiqué sur la figure 2.4. La membrane de rayon a , de tension mécanique T et de masse surfacique M_s , est appuyée sur sa périphérie en $r = a$, et son champ de déplacement $\xi(r, \theta)$, porté par l'axe Oz , dépend des coordonnées radiale r et azimutale θ .

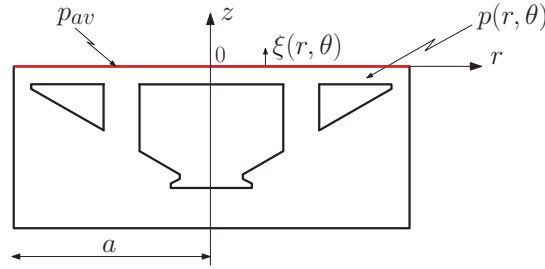


FIGURE 2.4 – Schéma d'un microphone capacitif : la membrane

La membrane est chargée à l'avant ($z > 0$) par une pression harmonique[†] incidente p_{av} qui est ici supposée uniforme sur toute la surface (πa^2). Toutefois, le champ de pression incident peut être considéré non uniforme, ce qui permet au besoin de prendre en compte l'influence de la forme du champ incident sur la déformée de la membrane du microphone. Prendre en compte la non-uniformité de champ de pression peut s'avérer pertinent (voire nécessaire) dans le cas de mesures précises réalisées à des fréquences pouvant atteindre 100 kHz lorsqu'une cavité (parallélépipédique, cylindrique ou sphérique) est couplée à la membrane du microphone : cela permet de tenir compte des modes propres de la cavité qui peuvent favoriser (ou défavoriser) certains modes propres de la membrane du microphone (et réciproquement), comme par exemple dans le cas de l'étalonnage de microphone en coupleur par la méthode de réciprocité [23–26], ou de mesures de précision réalisées en cavités quasi sphériques [27–31].

Dans la lame d'air située à l'arrière du diaphragme, le champ de pression $p(r, \theta)$, qui dépend des coordonnées radiale et azimutale, vient charger l'arrière de la membrane. À noter que nombre

[†]. *Nota bene* : la convention $e^{i\omega t}$ est utilisée et n'est plus indiquée par la suite.

d'auteurs, et en particulier A. J. Zuckerwar [48], tiennent compte, dans la formulation de départ de leurs modèles, de la dépendance azimutale de cette pression, mais ils recherchent des solutions indépendantes de l'angle azimutal (par moyenne angulaire dans l'intervalle $[0, 2\pi]$).

Le système d'équations régissant le champ de déplacement $\xi(r, \theta)$ de la membrane est finalement écrit comme suit :

$$T \left(\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 + K^2 \right) \xi(r, \theta) = p_{av} - p(r, \theta), \quad \forall (r, \theta), \quad (2.1a)$$

$$\xi(r = a, \theta) = 0, \quad \forall \theta, \quad (2.1b)$$

où $K = \omega \sqrt{M_S/T}$ est le nombre d'onde associé au mouvement de la membrane, et $\omega = 2\pi f$ la pulsation.

2.3 Pression dans l'espace inter-électrodes

La couche de fluide inter-électrodes est délimitée sur sa périphérie (en $r = a$) par les parois de la capsule microphonique (figure 2.5), puis d'un côté par la membrane (en $z = 0$) et de l'autre par l'électrode arrière (en $z = -\varepsilon$). Ce domaine est non seulement couplé avec la membrane, mais également avec la cavité arrière par l'intermédiaire des orifices de l'électrode arrière et de sa fente périphérique.

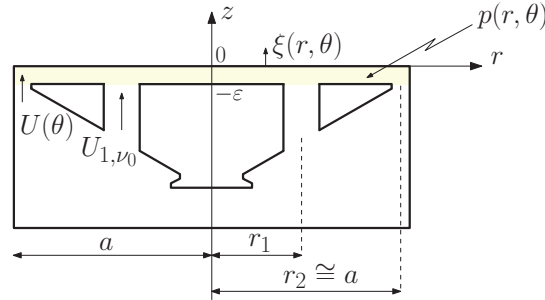


FIGURE 2.5 – Schéma d'un microphone capacitif : la lame de fluide

La difficulté rencontrée pour poser le problème de telle sorte que ses solutions, exprimées de façon analytique, puissent traduire de manière appropriée non seulement la présence mais aussi la localisation des ouvertures, tient à ce que la frontière $z = -\varepsilon$ du domaine n'est pas uniforme. De telles conditions aux frontières empêchent l'obtention de solutions analytiques, c'est pourquoi des auteurs ont été amenés dans la littérature à effectuer des moyennes sur les coordonnées (r, θ) des conditions à imposer sur cette frontière et/ou des moyennes des champs de pression et de vitesse dans le domaine. De la sorte, l'effet de couplage localisé du champ de déplacement de la membrane avec le champ acoustique fonction de (r, θ) disparaît dans le formalisme, qui dès lors ne permet plus de traduire les déformées de membrane observées (cf. figure 2.3 § 2.1). Pour contourner cette difficulté, le formalisme proposé ici (i) retient une moyenne sur la surface de l'électrode arrière,

pondérée par un facteur dépendant de sa porosité, et qui porte non seulement sur la composante radiale v_r de la vitesse particulaire mais aussi sur l'écart instantané de température τ (cette dernière condition prend de l'importance dans le domaine [20 kHz, 100 kHz] considéré ici), l'effet de ces conditions aux frontières étant finalement traduit dans le nombre d'onde complexe de l'équation du mouvement du fluide dans l'espace inter-électrodes par un facteur faisant intervenir la porosité de l'électrode arrière, (ii) introduit l'effet de la composante axiale v_z de la vitesse particulaire [figure 2.6b](#), non négligeable au droit des ouvertures de l'électrode arrière, sous forme de sources de débit extérieures agissant dans le domaine considéré (la couche de fluide inter-électrodes), sources dont l'action est traduite dans le second membre de l'équation de propagation. Ces deux points sont repris en détail ci-dessous.

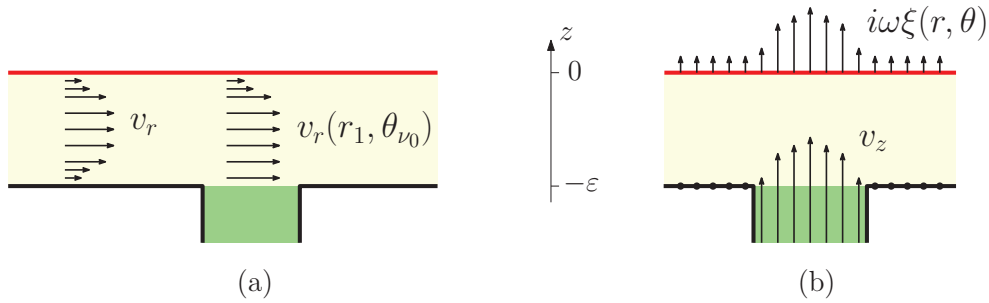


FIGURE 2.6 – Allure de la vitesse particulaire dans la lame de fluide : effets inhérents des orifices sur (a) la composante radiale v_r et (b) la composante axiale v_z

i Champ de vitesse radial et champ de température dans la couche de fluide inter-électrodes

Les effets visqueux dans la lame de fluide sont à l'origine d'un gradient élevé suivant l'axe Oz de la composante radiale de la vitesse particulaire du fait de la condition de non glissement sur les parois du domaine (membrane et électrode arrière). La condition de non glissement sur la membrane est exprimée par

$$v_r(r, \theta, 0) = 0, \forall r \in [0, a], \forall \theta. \quad (2.2)$$

Sur l'électrode arrière (en $z = -\varepsilon$), la condition de non-glissement est imposée sur les parties rigides mais n'est pas vérifiée aux emplacements des orifices (comme représenté sur la [figure 2.6a](#)), où la composante radiale de la vitesse particulaire (non nulle) peut être approchée par l'équation d'Euler

$$v_r(r_1, \theta_{\nu_0}, -\varepsilon) \cong \frac{-1}{i\omega\rho_0} \partial_r p,$$

ρ_0 désignant la masse volumique du fluide. De manière à rendre homogène la condition sur la frontière $z = -\varepsilon$, la vitesse radiale v_r est supposée uniforme et est exprimée sous la forme d'une équation d'Euler dans laquelle le gradient de pression est pondéré par la porosité ϕ_r de l'électrode

arrière [61] :

$$v_r(r, \theta, -\varepsilon) \cong \frac{-\phi_r}{i\omega\rho_0} \partial_r p, \quad \forall r \in [0, a], \quad \forall \theta, \quad (2.3)$$

la porosité $\phi_r = S_1/S_{bp}$ étant le rapport de la surface totale des orifices S_1 sur la surface de l'électrode arrière S_{bp} . Cette approximation admet en particulier que l'influence locale de la vitesse radiale reste faible sur la déformée de la membrane.

Du fait que l'épaisseur (ε) de la couche de fluide est très inférieure à son rayon (a) ($\varepsilon \ll a$) et aux longueurs d'ondes (λ) considérées ($\varepsilon \ll \lambda$), plusieurs hypothèses simplificatrices peuvent être retenues dans les équations du mouvement du fluide dans l'espace inter-électrodes [6, chap. 3] : (i) l'écart instantané de pression étant (quasi) uniforme sur l'épaisseur ε de la lame de fluide, la composante axiale du gradient de pression $\partial_z p$ est négligeable à la fois devant sa composante radiale $\partial_r p$ et sa composante azimutale $\frac{1}{r} \partial_\theta p$, (ii) le mouvement du fluide étant essentiellement tangent aux électrodes, la composante azimutale v_θ et la composante axiale v_z de la vitesse particulière sont négligeables devant la composante radiale v_r (la composante axiale v_z doit néanmoins être prise en compte dans l'équation de conservation de la masse), (iii) en raison des effets liés à la viscosité de cisaillement, la variation spatiale dans la direction z de la composante radiale de la vitesse particulière est très supérieure à ses variations spatiales dans les directions r et θ .

Compte tenu de ces hypothèses, la composante radiale de l'équation de Navier-Stokes peut se ramener à l'équation de Poiseuille, à savoir, en régime harmonique [6, chap. 3]

$$\left(\partial_{zz}^2 + k_v^2\right) v_r(r, \theta, z) = -\frac{k_v^2}{i\omega\rho_0} \partial_r p(r, \theta), \quad \forall (r, \theta, z), \quad (2.4)$$

k_v étant le nombre d'onde de diffusion associé aux effets visqueux donné par

$$k_v = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\rho_0 \omega / \mu}, \quad (2.5)$$

où μ est le coefficient de viscosité de cisaillement du fluide.

La composante radiale de la vitesse particulière, solution de (2.4), est la somme de la solution particulière (indépendante de la variable z)

$$\frac{-\partial_r p(r, \theta)}{i\omega\rho_0}, \quad (2.6)$$

et de la solution générale de l'équation sans second membre

$$A_v \cos k_v \left(z + \frac{\varepsilon}{2}\right) + B_v \sin k_v \left(z + \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad (2.7)$$

où A_v et B_v sont des constantes arbitraires. La somme de ces deux solutions [(2.6) et (2.7)] associée aux conditions aux frontières (2.2) et (2.3), mène à l'expression de la vitesse radiale v_r suivante :

$$v_r(r, \theta, z) = -\frac{\partial_r p(r, \theta)}{i\omega\rho_0} \left[1 - \frac{2 - \phi_r \cos k_v(z + \varepsilon/2)}{2 \cos k_v \varepsilon/2} - \frac{\phi_r \sin k_v(z + \varepsilon/2)}{2 \sin k_v \varepsilon/2} \right], \quad \forall r \in [0, a], \quad \forall \theta, \quad \forall z \in [-\varepsilon, 0], \quad (2.8)$$

dont la valeur moyenne sur l'épaisseur ε de la lame de fluide prend alors la forme [24, 61][†]

$$\bar{v}_r(r, \theta) = -\frac{F_v}{i\omega\rho_0}\partial_r p(r, \theta), \quad \forall r \in [0, a], \quad \forall \theta, \quad (2.9)$$

avec

$$F_v = 1 - \frac{2 - \phi_r \tan(k_v \varepsilon/2)}{2} \frac{k_v \varepsilon/2}{k_v \varepsilon/2}. \quad (2.10)$$

Les effets thermiques[‡] se prêtent à une modélisation équivalente à celle des effets visqueux, car l'écart instantané de température obéit à la même loi de diffusion et aux mêmes types de conditions aux frontières. L'équation de diffusion de la chaleur peut être exprimée en fonction de l'écart instantané de température τ de la façon suivante :

$$\left(\partial_{zz}^2 + k_h^2\right) \tau(r, \theta, z) = k_h^2 \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p(r, \theta), \quad \forall r \in [0, a], \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \forall z \in [-\varepsilon, 0], \quad (2.11)$$

où l'écart instantané d'entropie est exprimé en fonction des écarts instantanés de pression et de température. Sur la membrane la condition isotherme

$$\tau(r, \theta, 0) = 0, \quad \forall r \in [0, a], \quad \forall \theta, \quad (2.12)$$

est imposée ; par contre au niveau de l'électrode arrière elle n'est imposée que sur la partie solide de la frontière, l'écart instantané de température τ étant soumis à des phénomènes (quasi) adiabatiques au droit des orifices :

$$\tau(r_1, \theta_{\nu_0}, -\varepsilon) = \frac{(\gamma - 1)}{\hat{\beta}\gamma} p(r_1, \theta_{\nu_0}), \quad (2.13)$$

où $\gamma = C_p/C_v$ est le rapport des capacités calorifiques à pression constante (C_p) et à volume constant (C_v), et $\hat{\beta} = (\partial_T p)_V$ le taux d'accroissement de pression par unité d'accroissement de température à volume constant. De manière à rendre homogène la condition sur la frontière $z = -\varepsilon$ tout en prenant en compte la présence des orifices, l'écart instantané de température sur l'électrode arrière est exprimé en introduisant à nouveau le facteur de porosité ϕ_r ici dans l'équation (2.13) :

$$\tau(r, \theta, -\varepsilon) \cong \phi_r \frac{(\gamma - 1)}{\hat{\beta}\gamma} p(r, \theta), \quad \forall r \in [0, a], \quad \forall \theta. \quad (2.14)$$

Ainsi, la valeur moyenne de l'écart instantané de température sur l'épaisseur ε de la lame de fluide prend alors la forme (les calculs sont les mêmes que ceux présentés ci-dessus pour la variable $\bar{v}_r$)

$$\bar{\tau}(r, \theta) = F_h \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma} p(r, \theta), \quad \forall r \in [0, a], \quad \forall \theta, \quad (2.15)$$

avec

$$F_h = 1 - \frac{2 - \phi_r \tan(k_h \varepsilon/2)}{2} \frac{k_h \varepsilon/2}{k_h \varepsilon/2}, \quad (2.16)$$

†. Le même résultat est obtenu pour la composante azimutale v_θ de la vitesse particulière en remplaçant (v_r) par (v_θ) et (∂_r) par ($\frac{1}{r}\partial_\theta$) dans les équations 2.2, 2.3, 2.4, 2.6, 2.8 et 2.9

‡. Dans la référence [61] ils ne sont pas pris en compte, et dans la référence [24] la condition isotherme est imposée sur toute la surface de l'électrode arrière.

et où k_h est le nombre d'onde de diffusion associé aux effets thermiques, exprimé par

$$k_h = \left[(1 - i) / \sqrt{2} \right] \sqrt{\rho_0 \omega C_P / \lambda_h}, \quad (2.17)$$

λ_h désignant le coefficient de conduction thermique du fluide.

ii Débit-source des ouvertures de l'électrode arrière

Reste à exprimer le champ de vitesse v_z normal aux électrodes, plus exactement reste à introduire les facteurs qui traduisent le débit des ouvertures de l'électrode arrière dans le domaine considéré. La figure 2.6b illustre d'une part qu'en $z = 0$ il y a continuité de la composante axiale v_z de la vitesse particulière avec la vitesse $i\omega\xi(r, \theta)$ de la membrane, et d'autre part qu'en $z = -\varepsilon$ la composante axiale v_z de la vitesse particulière est nulle, excepté aux emplacements des orifices. Dans la suite les ouvertures sont décrites par la composante axiale de leurs débits, U_{1,ν_0} pour chacun des n_0 orifices (où $\nu_0 = 1, 2, \dots, n_0$), et U_2 pour la fente périphérique, qui sont considérées comme des sources volumiques extérieures et qui, de ce fait, interviennent dans l'équation de conservation de la masse. Compte tenu des hypothèses énoncées précédemment, et en supposant que les sources de débit sont quasi ponctuelles (orifices) et quasi linéique (fente périphérique), cette équation prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{i\omega\gamma}{c_0^2} \left(p(r, \theta) - \hat{\beta}\bar{\tau}(r, \theta) \right) + \rho_0 \left[\left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \bar{v}_r(r, \theta) + \frac{1}{r} \partial_\theta \bar{v}_\theta(r, \theta) \right] \\ = -i\omega\rho_0 \frac{\xi(r, \theta)}{\varepsilon} + \rho_0 \sum_{\nu_0=1}^{n_0} \left[\frac{U_{1,\nu_0}(r, \theta)}{\varepsilon} \frac{\delta(r - r_1)}{r} \delta(\theta - \theta_{\nu_0}) \right] + \rho_0 \frac{U(\theta)}{\varepsilon} \frac{\delta(r - r_2)}{r}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

où l'écart instantané de masse volumique est exprimé en fonction des écarts instantanés de pression et de température, et où $\delta(r - r_i)$ et $\delta(\theta - \theta_{\nu_0})$ sont des fonctions de Dirac, et r_1 et r_2 les distances qui séparent le centre de la membrane, respectivement, du centre des orifices et du centre de la fente périphérique.

Dans le membre de droite de cette équation de conservation de la masse, le premier terme représente le débit volumique du champ de déplacement de la membrane $\xi(r, \theta)$, et les second et troisième termes les débits volumiques des ouvertures de l'électrode arrière. À noter que le second terme est lié au débit total U_1 , somme des débits des n_0 orifices de l'électrode arrière, par

$$U_1 = \sum_{\nu_0=1}^{n_0} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\varepsilon}^0 dz \frac{U_{1,\nu_0}(r, \theta)}{\varepsilon} \frac{\delta(r - r_1)}{r} \delta(\theta - \theta_{\nu_0}), \quad (2.19)$$

ce qui justifie leur expression, et que le troisième terme fait intervenir le débit U_2 de la fente annulaire entourant l'électrode arrière avec

$$U_2 = \int_0^{2\pi} U(\theta) d\theta = \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\varepsilon}^0 dz \frac{U(\theta)}{\varepsilon} \frac{\delta(r - r_2)}{r}, \quad (2.20)$$

où $U(\theta)$ est le débit par unité d'angle.

iii Champ de pression dans la lame de fluide inter-électrodes

Le système d'équations composé de l'équation d'Euler (2.9), de l'équation de la chaleur (2.15), et de l'équation de conservation de la masse (2.18), mène finalement à l'équation de propagation du champ de pression $p(r, \theta)$ dans la lame de fluide :

$$\left(\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 + \chi^2 \right) p(r, \theta) = -\frac{\rho_0 \omega^2}{F_v} \frac{\xi(r, \theta)}{\varepsilon} - \frac{i\omega\rho_0}{F_v} \left[\sum_{\nu_0=1}^{n_0} \frac{U_{1,\nu_0}(r, \theta)}{\varepsilon} \frac{\delta(r - r_1)}{r} \delta(\theta - \theta_{\nu_0}) + \frac{U(\theta)}{\varepsilon} \frac{\delta(r - r_2)}{r} \right], \quad \forall (r, \theta), \quad (2.21a)$$

équation à laquelle est associée la condition de Neumann sur la périphérie en $r = a$

$$\partial_r p(r = a, \theta) = 0, \quad \forall \theta, \quad (2.21b)$$

où χ est le nombre d'onde complexe défini par

$$\chi^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{1 + (\gamma - 1)(1 - F_h)}{F_v}, \quad (2.22)$$

où $c_0 = \sqrt{\gamma/(\rho_0 \chi_T)}$ est la célérité adiabatique du son, et χ_T la compressibilité isotherme du fluide (reliée à la compressibilité adiabatique χ_S par la formule de Reech $\chi_T/\chi_S = \gamma$).

Il convient de noter que le fait de considérer ici les débits U_{1,ν_0} et U_2 comme étant respectivement ponctuels et linéique, permet de simplifier les expressions de la solution, mais ne permet pas de prendre en compte la réelle géométrie des ouvertures.

2.4 Pression dans la cavité arrière

La cavité arrière, de volume V_c , est délimitée par l'électrode arrière, et par les parois de la capsule microphonique (figure 2.7). Ce domaine est couplé avec la couche de fluide inter-électrodes par l'intermédiaire des orifices de l'électrode arrière et de sa fente périphérique.

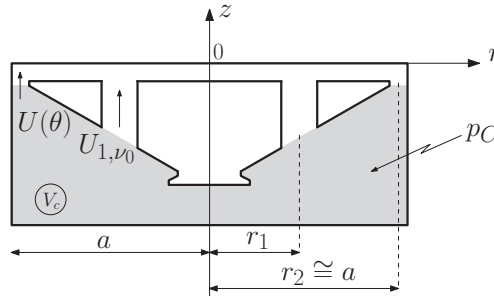


FIGURE 2.7 – Schéma d'un microphone capacitif : la cavité arrière

Pour décrire le champ de pression dans la cavité arrière jusqu'à des fréquences élevées (100 kHz), l'approximation « petite cavité » ne peut pas être retenue. Ce champ de pression p_C dans la cavité,

représenté dans la suite par une théorie modale, est ici traité de manière analogue au champ de pression dans la couche de fluide inter-électrodes. Le champ de pression p_C , qui dépend des coordonnées radiale et azimutale, soumis à la condition de Neumann sur la périphérie en $r = a$, est donc régi par le système d'équations suivant :

$$\left(\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 + \chi_C^2 \right) p_C(r, \theta) = \frac{i \omega \rho_0}{F_{v_C}} \left[\sum_{\nu_0=1}^{n_0} \frac{U_{1,\nu_0}(r, \theta)}{\varepsilon_C} \frac{\delta(r - r_1)}{r} \delta(\theta - \theta_{\nu_0}) + \frac{U(\theta)}{\varepsilon_C} \frac{\delta(r - r_2)}{r} \right], \quad \forall (r, \theta), \quad (2.23a)$$

$$\partial_r p(r = a, \theta) = 0, \quad \forall \theta, \quad (2.23b)$$

où $\varepsilon_C = V_C / (\pi a^2)$ est la hauteur moyenne de la cavité, et χ_C le nombre d'onde complexe donné par l'expression (2.22) où les termes F_{v_C} et F_{h_C} , qui remplacent les termes F_v et F_h , sont calculés à partir des expressions (2.10-2.5) et (2.16-2.17) en remplaçant ε par la hauteur moyenne de la cavité ε_C .

2.5 Comportement des orifices de l'électrode arrière et de sa fente périphérique

Ces ouvertures, par lesquelles s'opère le couplage entre le champ de pression dans la cavité arrière et le champ de pression dans la couche de fluide inter-électrodes, ont aussi un rôle d'amortissement qui permet d'ajuster l'amplitude de la première résonance de la membrane (cf. annexe A) ; cet amortissement provenant principalement des effets visqueux, les effets de couches limites thermiques sont de ce fait ici négligés. Par ailleurs, étant donnée la gamme de fréquence considérée ici (jusqu'à 100 kHz), le rayon des orifices de l'électrode arrière et la largeur de sa fente périphérique ne peuvent pas être considérés petits en regard des épaisseurs de couches limites visqueuses et par conséquent les ouvertures de l'électrode arrière ne peuvent pas être considérées comme étant des tubes et fente capillaires.

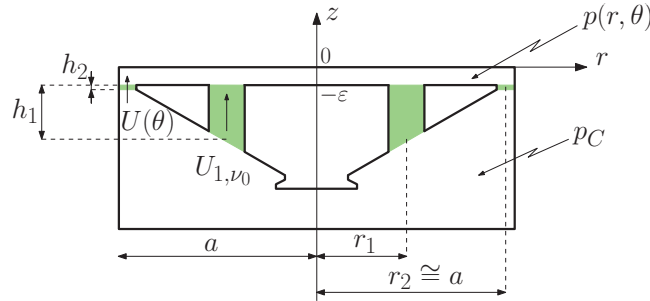


FIGURE 2.8 – Schéma d'un microphone capacitif : les orifices de l'électrode arrière et sa fente périphérique

i Comportement des orifices de l'électrode arrière

Dans un orifice cylindrique de profondeur h_1 (figure 2.8) et de rayon R supérieur à l'épaisseur de la couche limite visqueuse δ_v , en supposant que le champ de pression p_{ν_0} est indépendant de la variable r , et intégrant la composante axiale v_z de la vitesse particulaire sur la section S_{1,ν_0} d'un orifice, le débit U_{1,ν_0} de chaque orifice est donné par [6, 24] (à noter que cette équation est en tous points analogue à l'équation (2.9) pour $\phi_r = 0$ et en permutant le rôle des coordonnées radiale r et axiale z)

$$U_{1,\nu_0} = -S_{1,\nu_0} \frac{(1 - K_v)}{i\omega\rho_0} \partial_z p_{\nu_0}, \quad (2.24)$$

avec

$$K_v = \frac{2}{k_v R} \frac{J_1(k_v R)}{J_0(k_v R)} \quad (2.25)$$

où J_0 et J_1 sont les fonction de Bessel de première espèce respectivement d'ordre zéro et d'ordre un. Considérant que la profondeur h_1 des orifices est très inférieure à la longueur d'onde, la dérivée de la pression par rapport à la variable z peut être approchée par

$$\partial_z p_{\nu_0} = \frac{p(r_1, \theta_{\nu_0}) - p_C(r_1, \theta_{\nu_0})}{h_1},$$

et considérant que tous les orifices jouent le même rôle dans la modélisation (c'est-à-dire que $p(r_1, \theta_{\nu_0}) = p(r_1, 0)$ et $p_C(r_1, \theta_{\nu_0}) = p_C(r_1, 0)$), le débit U_{1,ν_0} s'écrit

$$U_{1,\nu_0} = y_{1,\nu_0} (p_C(r_1, 0) - p(r_1, 0)), \quad (2.26)$$

où y_{1,ν_0} , admittance de transfert d'un orifice, est définie par

$$y_{1,\nu_0} = S_{1,\nu_0} \frac{(1 - K_v)}{i\omega\rho_0 h_1}. \quad (2.27)$$

En admettant que les orifices se comportent tous de la même manière, le débit total U_1 du fluide traversant les n_0 orifices est donné par

$$U_1 = \sum_{\nu_0=1}^{n_0} U_{1,\nu_0} = n_0 U_{1,\nu_0},$$

ou encore

$$U_1 = Y_1 (p_C(r_1, 0) - p_1), \quad (2.28)$$

Y_1 représentant l'admittance totale des n_0 orifices

$$Y_1 = 1/Z_1 = n_0 y_{1,\nu_0}, \quad (2.29)$$

Z_1 étant l'impédance totale des orifices.

ii Comportement de la fente périphérique entourant l'électrode arrière

L'admittance de transfert y_2 de la fente périphérique est obtenue en l'assimilant à une fente plate de longueur $2\pi a$, de largeur e et de profondeur h_2 (figure 2.8). Le débit par unité d'angle $U(\theta)$ du fluide traversant la fente est donné par la relation

$$U(\theta) = y_2 (p_c(r_2, \theta) - p(r_2, \theta)), \forall \theta, \quad (2.30)$$

où l'admittance y_2 prend la forme

$$y_2 = s_2 \frac{(1 - \Gamma_v)}{i\omega\rho_0 h_2}, \quad (2.31)$$

où

$$\Gamma_v = \frac{1}{k_v e/2} \tan(k_v e/2), \quad (2.32)$$

avec

$$s_2 = S_2/(2\pi) = a e. \quad (2.33)$$

Dans la mesure où la profondeur h_2 est très petite devant l'épaisseur e de la fente ($y_2 \rightarrow \infty$), l'équation (2.30) traduit alors la continuité entre le champ de pression dans la cavité arrière et le champ de pression dans la lame de fluide

$$p(r_2, \theta) = p_c(r_2, \theta), \forall \theta. \quad (2.34)$$

Conclusion

Finalement, le système d'équations couplées à résoudre porte sur le champ de déplacement de la membrane (2.1a-2.1b), le champ de pression dans la couche de fluide inter-électrodes (2.21a-2.21b), le champ de pression dans la cavité arrière (2.23a-2.23b) et sur le comportement des ouvertures de l'électrode arrière (2.26 et 2.30).

Au-delà des paramètres considérés et des approximations habituellement retenues dans la littérature dans ce type de problème, ces équations prennent aussi en compte : (i) les effets de couches limites thermiques, (ii) les conditions aux frontières rendues uniformes pour l'écart instantané de température sur l'électrode arrière et pour la composante radiale de la vitesse particulière, la présence des orifices étant traduite dans le nombre d'onde complexe de l'équation de propagation par un facteur dépendant de la porosité, (iii) les débits des orifices de l'électrode arrière et de sa fente annulaire sous la forme de termes sources extérieures exprimés dans le second membre de l'équation de propagation des champs de pression à l'intérieur de la couche de fluide inter-électrodes et dans la cavité arrière, (iv) la nature non uniforme du champ de pression dans la cavité arrière en hautes fréquences (jusqu'à 100 kHz), (v) les expressions « exactes » (et non les limites basses fréquences) pour les admittances de transfert des ouvertures. La solution proposée ici pour ce problème à couplage multiple est présentée dans le chapitre 3 qui suit.

Chapitre 3

Équations couplées du problème fondamental : solution

La résolution du système d'équations couplées établi au chapitre précédent fait usage de théories modales appropriées. Elle passe successivement par la résolution des équations qui régissent le mouvement de la membrane, puis par celle des couples d'équations qui régissent respectivement les écarts instantanés de pression dans la couche de fluide inter-électrodes et dans la cavité arrière, et enfin par leurs couplages dû à la présence des ouvertures dans et autour de l'électrode arrière. Par ailleurs, l'écriture des conditions d'interfaces entre les différents domaines considérés mène à exprimer l'ensemble des paramètres de la modélisation en fonction du champ de pression incident, des propriétés physiques du fluide considéré et des caractéristiques mécaniques et géométriques du microphone.

3.1 Champ de déplacement de la membrane

Le champ de déplacement $\xi(r, \theta)$ de la membrane, solution de l'équation du mouvement de la membrane (2.1a) satisfaisant la condition de Dirichlet (2.1b), est exprimé de la forme suivante :

$$\xi(r, \theta) = \xi_h(r, \theta) + \xi_{p_{av}}(r, \theta) + \xi_p(r, \theta), \quad \forall (r, \theta), \quad (3.1)$$

où ξ_h est la solution générale de l'équation du mouvement sans second membre, $\xi_{p_{av}}$ la solution particulière de l'équation (2.1a) avec pour unique second membre la pression p_{av} qui charge l'avant de la membrane, et ξ_p la solution particulière de l'équation du mouvement avec pour unique second membre le champ de pression $-p(r, \theta)$ qui charge l'arrière du diaphragme dans la couche de fluide inter-électrodes.

Étant donné que le champ de déplacement de la membrane est d'amplitude finie en son centre (c'est-à-dire en $r = 0$) la solution générale de l'équation sans second membre est exprimée par

$$\xi_h(r, \theta) = \sum_m \left[C_m^{(1)} \cos(m\theta) + C_m^{(2)} \sin(m\theta) \right] J_m(Kr), \quad \forall r, \quad (3.2)$$

avec $m \in \mathbb{N}$, et où $C_m^{(\sigma)}$ sont des constantes d'intégration ($\sigma = 1$ ou 2) et J_m la fonction de Bessel de première espèce d'ordre m .

Étant donné que la pression p_{av} est ici considérée uniforme sur toute la surface de la membrane, la solution particulière $\xi_{p_{av}}$ est une fonction indépendante des coordonnées radiale et azimutale :

$$\xi_{p_{av}} = \frac{p_{av}}{TK^2}. \quad (3.3)$$

La seconde solution particulière, $\xi_p(r, \theta)$, est recherchée sous la forme d'un développement sur la base des fonctions propres orthonormées $\psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta)$ (avec $\sigma = 1$ ou 2) de la membrane simplement appuyée sur sa périphérie en $r = a$ (condition de Dirichlet) :

$$\xi_p(r, \theta) = \sum_{mn\sigma} \Xi_{mn}^{(\sigma)} \psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta), \quad \forall (r, \theta), \quad (3.4a)$$

où m et $n \in \mathbb{N}$ et où les coefficients du développement sont donnés par

$$\Xi_{mn}^{(\sigma)} = \frac{\langle p(r, \theta) | \psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta) \rangle}{T(K_{mn}^2 - K^2)}, \quad (3.4b)$$

le produit $\langle f_1 | f_2 \rangle = \iint_{S_m} f_1 f_2 dS_m$ représentant le couplage entre le mouvement de la membrane et le champ de pression dans la couche de fluide inter-électrodes.

Les fonctions propres $\psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta)$, associées aux valeurs propres K_{mn} , sont données par

$$\psi_{mn}^{(1)}(r, \theta) = N_{mn} J_m(K_{mn}r) \cos(m\theta), \quad \forall (r, \theta), \quad (3.4c)$$

$$\psi_{mn}^{(2)}(r, \theta) = N_{mn} J_m(K_{mn}r) \sin(m\theta), \quad \forall (r, \theta), \quad (3.4d)$$

dont les coefficients de normalisation sont exprimés par

$$N_{0n}^{-1} = \sqrt{\pi} a J_1(K_{0n}a), \quad \text{pour } m = 0, \quad (3.4e)$$

$$N_{mn}^{-1} = \sqrt{\pi/2} a J_{m-1}(K_{mn}a), \quad \text{pour } m \neq 0, \quad (3.4f)$$

où $K_{mn}a = j_{mn}$ sont les zéros de la fonction de Bessel J_m .

Contrairement à la solution $\xi_p(r, \theta)$, aucune des solutions (3.2) ou (3.3) ne satisfait seule la condition (2.1b). En revanche la somme de ces deux solutions $[\xi_h(r, \theta) + \xi_{p_{av}}]$ peut satisfaire à la condition de Dirichlet à la périphérie en $r = a$, $\forall \theta$, dans la mesure où $m = 0$ et où la constante restante $C_0^{(1)}$ soit choisie égale à $-p_{av}/[TK^2 J_0(Ka)]$. Ce faisant, cette somme peut être développée sur la base de fonctions propres $\psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta)$ de la membrane, telle que

$$\sum_{mn\sigma} \zeta_{mn}^{(\sigma)} \psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta), \quad \forall (r, \theta), \quad (3.5a)$$

où les coefficients du développement sont donnés par

$$\zeta_{mn}^{(\sigma)} = \frac{p_{av}}{TK^2} \left\langle \left(1 - \frac{J_0(Kr)}{J_0(Ka)} \right) \middle| \psi_{mn}^{(\sigma)} \right\rangle. \quad (3.5b)$$

Finalement, le champ de déplacement $\xi(r, \theta)$ de la membrane prend la forme suivante

$$\xi(r, \theta) = \sum_{mn\sigma} \xi_{mn}^{(\sigma)} \psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta), \quad \forall (r, \theta), \quad (3.6a)$$

avec

$$\begin{aligned} \xi_{mn}^{(\sigma)} &= \zeta_{mn}^{(\sigma)} + \Xi_{mn}^{(\sigma)} \\ &= \frac{p_{av}}{TK^2} \left\langle \left(1 - \frac{J_0(Kr)}{J_0(Ka)} \right) \middle| \psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta) \right\rangle + \frac{\langle p(r, \theta) | \psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta) \rangle}{T(K_{mn}^2 - K^2)}, \end{aligned} \quad (3.6b)$$

qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \xi_{mn}^{(\sigma)} &= 2\pi \frac{p_{av}}{TK^2} N_{0n} \left(\frac{a}{K_{0n}} J_1(K_{0n}a) - \frac{aK_{0n}J'_0(K_{0n}a)}{K^2 - K_{0n}^2} \right) \delta_{\mu 0} \delta_{\sigma 1} \\ &\quad + \frac{\langle p(r, \theta) | \psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta) \rangle}{T(K_{mn}^2 - K^2)}, \quad \forall (r, \theta), \end{aligned} \quad (3.6c)$$

étant donné que

$$\langle 1 | N_{\mu\nu} J_\mu(K_{\mu\nu}r) \cos(\mu\theta) \rangle = 2\pi \langle 1 | N_{\mu\nu} J_\mu(K_{\mu\nu}r) \rangle \delta_{\mu 0}, \quad (3.7a)$$

$$\langle 1 | N_{\mu\nu} J_\mu(K_{\mu\nu}r) \sin(\mu\theta) \rangle = 0. \quad (3.7b)$$

Nota bene : les coefficients du développement peuvent directement être donnés par

$$\xi_{mn}^{(\sigma)} = \frac{\langle p(r, \theta) - p_{av} | \psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta) \rangle}{T(K_{mn}^2 - K^2)}. \quad (3.8)$$

3.2 Champ de pression dans la couche de fluide inter-électrodes

Le champ de pression $p(r, \theta)$ dans l'entrefer, solution du système d'équations (2.21a-2.21b), s'exprime sous la forme de trois termes

$$p(r, \theta) = p_h(r, \theta) + p_\xi(r, \theta) + p_u(r, \theta), \quad \forall (r, \theta), \quad (3.9)$$

où

$$\left(\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 + \chi^2 \right) p_h(r, \theta) = 0, \quad \forall (r, \theta), \quad (3.10a)$$

$$\left(\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 + \chi^2 \right) p_\xi(r, \theta) = -\rho_0 \omega^2 \frac{\xi(r, \theta)}{\varepsilon F_v}, \quad \forall (r, \theta), \quad (3.10b)$$

$$\begin{aligned} \left(\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 + \chi^2 \right) p_u(r, \theta) = \\ - \frac{i\omega\rho_0}{F_v} \left[\sum_{\nu_0=1}^{n_0} \frac{U_{1,\nu_0}(r, \theta)}{\varepsilon} \frac{\delta(r - r_1)}{r} \delta(\theta - \theta_{\nu_0}) + \frac{U(\theta)}{\varepsilon} \frac{\delta(r - r_2)}{r} \right], \quad \forall (r, \theta). \end{aligned} \quad (3.10c)$$

Le premier terme de l'expression (3.9), solution générale de l'équation de propagation sans second membre (3.10a), est donné par :

$$p_h(r, \theta) = \sum_m \left[A_m^{(1)} \cos(m\theta) + A_m^{(2)} \sin(m\theta) \right] J_m(\chi r), \quad \forall (r, \theta), \quad (3.11)$$

où les coefficients $A_m^{(\sigma)}$ sont des constantes arbitraires et $m \in \mathbb{N}$.

Le second terme de (3.9) représente le champ de pression créé par le débit de la membrane ; étant donné que le champ de déplacement de la membrane $\xi(r, \theta)$ est déjà exprimé sur la base modale des fonctions propres de Dirichlet $\psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta)$, le champ de pression $p_\xi(r, \theta)$ solution de l'équation (3.10b) doit également être exprimé sur cette même base modale tel que

$$p_\xi(r, \theta) = \sum_{mn\sigma} p_{\xi mn}^{(\sigma)} \psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta), \quad \forall (r, \theta), \quad (3.12a)$$

où les coefficients du développement sont donnés par

$$p_{\xi mn}^{(\sigma)} = \frac{\rho_0 \omega^2}{\varepsilon F_v} \frac{\xi_{mn}^{(\sigma)}}{K_{mn}^2 - \chi^2}. \quad (3.12b)$$

Il convient de souligner qu'aucune des solutions $p_h(r, \theta)$ ou $p_\xi(r, \theta)$ ne satisfait à elle seule la condition de Neumann en $r = a$. Néanmoins leur somme respecte la condition de Neumann (2.21b) pourvu que les constantes $A_m^{(\sigma)}$ soient données par

$$\begin{aligned} A_m^{(\sigma)} &= - \sum_n \frac{p_{\xi mn}^{(\sigma)} N_{mn} \partial_r J_m(K_{mn} a)}{\partial_r J_m(\chi a)}, \\ &= - \frac{1}{\chi J'_m(\chi a)} \sum_n \frac{\rho_0 \omega^2}{\varepsilon F_v} \frac{\xi_{mn}^{(\sigma)} N_{mn}}{K_{mn}^2 - \chi^2} K_{mn} J'_m(K_{mn} a). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Le troisième et dernier terme de l'équation (3.9) traduit le débit des ouvertures de l'électrode arrière, lié au couplage avec la cavité arrière qui s'opère par le biais du débit total des orifices et du débit de la fente annulaire, lesquels sont exprimés au paragraphe 3.3 à partir du système d'équations (2.28) et (2.30). Le champ de pression solution de l'équation (3.10c) est obtenu en faisant usage de la formulation intégrale qui mène directement à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} p_u(r, \theta) &= \frac{i\omega\rho_0}{F_v} \iint_{S_0} G(r, \theta; r_0, \theta_0) \\ &\times \left[\sum_{\nu_0=1}^{n_0} \frac{U_{1,\nu_0}(r_0, \theta_0)}{\varepsilon} \frac{\delta(r_0 - r_1)}{r_0} \delta(\theta_0 - \theta_{\nu_0}) + \frac{U(\theta_0)}{\varepsilon} \frac{\delta(r_0 - r_2)}{r_0} \right] r_0 dr_0 d\theta_0, \quad \forall (r, \theta), \end{aligned} \quad (3.14a)$$

où les fonctions de Green $G(r, \theta; r_0, \theta_0)$, satisfaisant la condition de Neumann (2.21b), sont exprimées sous la forme d'un développement sur la base des fonctions propres orthonormées $\varphi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta)$ telles que

$$G(r, \theta; r_0, \theta_0) = \sum_{mn\sigma} \frac{\varphi_{mn}^{(\sigma)}(r_0, \theta_0)}{\kappa_{mn}^2 - \chi^2} \varphi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta), \quad \forall (r, \theta), \quad (3.14b)$$

et où les fonctions propres associées aux valeurs propres κ_{mn} sont données par

$$\varphi_{mn}^{(1)}(r, \theta) = \nu_{mn} J_m(\kappa_{mn} r) \cos(m\theta), \quad \forall (r, \theta), \quad (3.14c)$$

$$\varphi_{mn}^{(2)}(r, \theta) = \nu_{mn} J_m(\kappa_{mn} r) \sin(m\theta), \quad \forall (r, \theta), \quad (3.14d)$$

$\gamma_{mn} = \kappa_{mn} a$ étant les zéros de la dérivée première de la fonction de Bessel J_m imposés par la condition de Neumann à la frontière $r = a$, les coefficients de normalisation étant donnés par

$$\nu_{mn}^{-1} = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{(1 + \delta_{m0}) \pi}, \quad \text{si } \gamma_{mn} = 0, \quad (3.14e)$$

$$\nu_{mn}^{-1} = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{(1 + \delta_{m0}) \pi} \sqrt{1 - (m/\gamma_{mn})^2} J_m(\gamma_{mn}), \quad \text{si } \gamma_{mn} \neq 0, \quad (3.14f)$$

où δ_{m0} est le symbole de Kronecker ($\delta_{m0} = 1$ si $m = 0$, $\delta_{m0} = 0$ sinon).

Après intégration sur la variable r_0 l'équation (3.14) devient

$$\begin{aligned} p_u(r, \theta) = & \frac{i \omega \rho_0}{F_v} \sum_{mn} \frac{\nu_{mn}^2 J_m(\kappa_{mn} r)}{\kappa_{mn}^2 - \chi^2} \\ & \times \left\{ \left[\sum_{\nu_0=1}^{n_0} \frac{U_{1,\nu_0}(r_1, \theta_{\nu_0})}{\varepsilon} J_m(\kappa_{mn} r_1) \cos(m\theta_{\nu_0}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\varepsilon} J_m(\kappa_{mn} r_2) \langle U(\theta_0) | \cos(m\theta_0) \rangle \right] \cos(m\theta) \right. \\ & \left. + \left[\sum_{\nu_0=1}^{n_0} \frac{U_{1,\nu_0}(r_1, \theta_{\nu_0})}{\varepsilon} J_m(\kappa_{mn} r_1) \sin(m\theta_{\nu_0}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\varepsilon} J_m(\kappa_{mn} r_2) \langle U(\theta_0) | \sin(m\theta_0) \rangle \right] \sin(m\theta) \right\}, \quad \forall (r, \theta), \quad (3.15) \end{aligned}$$

où $\langle f_1(\theta_0) | f_2(\theta_0) \rangle = \int_0^{2\pi} f_1(\theta_0) f_2(\theta_0) d\theta_0$.

Par la suite, les quantités inconnues se référant au débit des orifices et de la fente annulaire sont respectivement notées

$$V_m^{(1)} = \sum_{\nu_0=1}^{n_0} U_{1,\nu_0}(r_1, \theta_{\nu_0}) \cos(m\theta_{\nu_0}), \quad (3.16a)$$

$$V_m^{(2)} = \sum_{\nu_0=1}^{n_0} U_{1,\nu_0}(r_1, \theta_{\nu_0}) \sin(m\theta_{\nu_0}), \quad (3.16b)$$

et

$$U_m^{(1)} = \langle U(\theta_0) | \cos(m\theta_0) \rangle, \quad (3.17a)$$

$$U_m^{(2)} = \langle U(\theta_0) | \sin(m\theta_0) \rangle. \quad (3.17b)$$

L'équation (3.15) s'écrit ainsi

$$\begin{aligned}
 p_u(r, \theta) = \frac{i\omega\rho_0}{\varepsilon F_v} \sum_{mn} \frac{\nu_{mn}^2 J_m(\kappa_{mn}r)}{\kappa_{mn}^2 - \chi^2} \\
 \times \left\{ \left[V_m^{(1)} J_m(\kappa_{mn}r_1) + U_m^{(1)} J_m(\kappa_{mn}r_2) \right] \cos(m\theta) \right. \\
 \left. + \left[V_m^{(2)} J_m(\kappa_{mn}r_1) + U_m^{(2)} J_m(\kappa_{mn}r_2) \right] \sin(m\theta) \right\}, \forall (r, \theta). \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

La symétrie du problème et le fait que l'origine de l'angle θ passe par le centre d'un orifice, font émettre l'hypothèse selon laquelle, pour chaque coordonnée azimutale θ_{ν_0} d'un orifice, les fonctions trigonométriques prennent les valeurs suivantes : $\cos(m\theta_{\nu_0}) = 1$ et $\sin(m\theta_{\nu_0}) = 0$, ce qui signifie en d'autres termes, que l'indice m prend les valeurs $(0, n_0, 2n_0, 3n_0, \dots)$, où n_0 est le nombre total d'orifices de l'électrode arrière. Par conséquent, et compte tenu de l'expression (2.28) du débit total du fluide traversant les orifices, les équations (3.16a) et (3.16b) deviennent

$$V_m^{(1)} = U_1, \quad (3.19a)$$

$$V_m^{(2)} = 0, \quad (3.19b)$$

et l'équation (3.18) devient finalement

$$\begin{aligned}
 p_u(r, \theta) = \frac{i\omega\rho_0}{\varepsilon F_v} \sum_{mn} \frac{\nu_{mn}^2 J_m(\kappa_{mn}r)}{\kappa_{mn}^2 - \chi^2} \left\{ \left[U_1 J_m(\kappa_{mn}r_1) + U_m^{(1)} J_m(\kappa_{mn}r_2) \right] \cos(m\theta) \right. \\
 \left. + U_m^{(2)} J_m(\kappa_{mn}r_2) \sin(m\theta) \right\}, \forall (r, \theta). \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Nota bene : L'hypothèse selon laquelle l'indice m est un multiple entier du nombre d'orifices n_0 est par la suite restreinte aux deux seules valeurs $m = 0$ et $m = n_0$ dans les expressions finales des paramètres données au paragraphe 3.4 et des matrices de couplage traitées au paragraphe suivant.

3.3 Couplage entre la couche de fluide inter-électrodes et la cavité arrière

Le champ de pression dans la cavité arrière est obtenu de la même manière que le champ de pression $p_u(r, \theta)$ (c'est-à-dire par formulation intégrale). Ainsi, la solution $p_C(r, \theta)$ du système d'équation (2.23a-2.23b), compte tenu des expressions (3.19a) et (3.19b), est directement donné par

$$\begin{aligned}
 p_C(r, \theta) = -\frac{i\omega\rho_0}{\varepsilon_C F_{vC}} \sum_{mn} \frac{\nu_{mn}^2 J_m(\kappa_{mn}r)}{\kappa_{mn}^2 - \chi_C^2} \left\{ \left[U_1 J_m(\kappa_{mn}r_1) + U_m^{(1)} J_m(\kappa_{mn}r_2) \right] \cos(m\theta) \right. \\
 \left. + U_m^{(2)} J_m(\kappa_{mn}r_2) \sin(m\theta) \right\}, \forall (r, \theta). \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

D'après les équations (2.28) et (2.30), l'écart instantané de pression au droit des orifices et le champ de pression à la périphérie de l'électrode arrière face à la fente annulaire sont donnés respectivement par

$$p(r_1, 0) = p_C(r_1, 0) - \frac{U_1}{Y_1}, \quad (3.22a)$$

et

$$p(r_2, \theta) = p_C(r_2, \theta) - \frac{U(\theta)}{y_2}, \quad \forall \theta, \quad (3.22b)$$

qui, d'après l'expression (3.21), peuvent encore prendre les formes suivantes

$$p(r_1, 0) = - \left[\left(\frac{i\omega\rho_0}{\varepsilon_C F_{vC}} \sum_{mn} \frac{\nu_{mn}^2 J_m(\kappa_{mn} r_1)}{\kappa_{mn}^2 - \chi_C^2} J_m(\kappa_{mn} r_1) + \frac{1}{Y_1} \right) U_1 + \frac{i\omega\rho_0}{\varepsilon_C F_{vC}} \sum_{mn} \frac{\nu_{mn}^2 J_m(\kappa_{mn} r_1)}{\kappa_{mn}^2 - \chi_C^2} J_m(\kappa_{mn} r_2) U_m^{(1)} \right], \quad (3.23a)$$

$$p(r_2, \theta) = - \frac{i\omega\rho_0}{\varepsilon_C F_{vC}} \sum_{mn} \frac{\nu_{mn}^2 J_m(\kappa_{mn} r_2)}{\kappa_{mn}^2 - \chi_C^2} \times \left\{ \left[J_m(\kappa_{mn} r_1) U_1 + J_m(\kappa_{mn} r_2) U_m^{(1)} \right] \cos(m\theta) + J_m(\kappa_{mn} r_2) U_m^{(2)} \sin(m\theta) \right\} - \frac{U(\theta)}{y_2}, \quad \forall \theta, \quad (3.23b)$$

cette dernière expression (3.23b) prenant la forme

$$p(r_2, \theta) = - \frac{i\omega\rho_0}{\varepsilon_C F_{vC}} \sum_{mn} \frac{\nu_{mn}^2 J_m(\kappa_{mn} r_2)}{\kappa_{mn}^2 - \chi_C^2} J_m(\kappa_{mn} r_1) U_1 \cos(m\theta) - \left[\frac{i\omega\rho_0}{\varepsilon_C F_{vC}} \sum_{mn} \frac{\nu_{mn}^2 J_m(\kappa_{mn} r_2)}{\kappa_{mn}^2 - \chi_C^2} J_m(\kappa_{mn} r_2) + \frac{1}{\pi(1 + \delta_{m0}) y_2} \right] \times \left[U_m^{(1)} \cos(m\theta) + U_m^{(2)} \sin(m\theta) \right], \quad \forall \theta, \quad (3.24)$$

car d'après les équations (3.17a) et (3.17b)

$$U(\theta) = \sum_m \frac{U_m^{(1)} \cos(m\theta) + U_m^{(2)} \sin(m\theta)}{\pi(1 + \delta_{m0})}. \quad (3.25)$$

En écrivant le champ de pression dans la couche de fluide inter-électrodes, au droit de la fente périphérique,

$$p(r_2, \theta) = \sum_m p_m^{(1)}(r_2) \cos(m\theta) + p_m^{(2)}(r_2) \sin(m\theta), \quad \forall \theta, \quad (3.26a)$$

où

$$p_m^{(1)}(r_2) = \frac{\langle p(r_2, \theta) | \cos(m\theta) \rangle}{\pi(1 + \delta_{m0})}, \quad (3.26b)$$

$$p_m^{(2)}(r_2) = \frac{\langle p(r_2, \theta) | \sin(m\theta) \rangle}{\pi(1 + \delta_{m0})}, \quad (3.26c)$$

et en posant

$$z_m(r_i, r_j) = -\frac{i\omega\rho_0}{\varepsilon_C F_{vC}} \sum_n \frac{\nu_{mn}^2 J_m(\kappa_{mn} r_i) J_m(\kappa_{mn} r_j)}{\kappa_{mn}^2 - \chi_C^2}, \quad (3.27a)$$

$$z_{hm} = z_m(r_1, r_2), \quad (3.27b)$$

$$z_{hh} = -\frac{1}{Y_1} + \sum_m z_m(r_1, r_1) \quad (3.27c)$$

et

$$z_{sm} = -\frac{1}{\pi(1 + \delta_{m0}) y_2} + z_m(r_2, r_2), \quad (3.27d)$$

le système d'équations (3.23a) et (3.24) peut être écrit sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} p(r_1, 0) \\ p_0^{(1)}(r_2) \\ \vdots \\ p_m^{(1)}(r_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{hh} & z_{h0} & \cdots & z_{hm} \\ z_{h0} & z_{s0} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ z_{hm} & 0 & 0 & z_{sm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_0^{(1)} \\ \vdots \\ U_m^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (3.28a)$$

$$\begin{bmatrix} p_0^{(2)}(r_2) = 0 \\ \vdots \\ p_m^{(2)}(r_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{s0} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & z_{sm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0^{(2)} = 0 \\ \vdots \\ U_m^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (3.28b)$$

ce qui mène aux expressions suivantes des débits volumiques U_1 et $U_m^{(\sigma)}$, solutions du système linéaire d'équations algébriques

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_0^{(1)} \\ \vdots \\ U_m^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{hh} & y_{h0} & \cdots & y_{hm} \\ y_{h0} & y_{00} & \cdots & y_{0m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{hm} & y_{0m} & \cdots & y_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(r_1, 0) \\ p_0^{(1)}(r_2) \\ \vdots \\ p_m^{(1)}(r_2) \end{bmatrix}, \quad (3.29a)$$

$$\begin{bmatrix} U_0^{(2)} = 0 \\ \vdots \\ U_m^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{s0} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & y_{sm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0^{(2)}(r_2) = 0 \\ \vdots \\ p_m^{(2)}(r_2) \end{bmatrix}, \quad (3.29b)$$

où les admittances y_{ij} de la matrice symétrique sont connues et exprimées en fonction des impédances (3.27a-3.27d), et où les éléments de la matrice diagonale sont donnés par $y_{sm} = 1/z_{sm}$.

Lorsque les seuls modes azimutaux $m = 0$ et $m = 6$ sont pris en compte, l'équation (3.29a)

prend la forme suivante

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_0^{(1)} \\ U_6^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{z_{s0}z_{s6}z_{hh} - z_{h0}^2z_{s6} + z_{h6}^2z_{s0}} \times \begin{bmatrix} z_{s0}z_{s6} & -z_{h0}z_{s6} & -z_{s0}z_{h6} \\ -z_{h0}z_{s6} & z_{s6}z_{hh} - z_{h6}^2 & z_{h0}z_{h6} \\ -z_{s0}z_{h6} & z_{h0}z_{h6} & z_{s0}z_{hh} - z_{h0}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(r_1, 0) \\ p_0^{(1)}(r_2) \\ p_6^{(1)}(r_2) \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Il convient de noter que dans la gamme de fréquences audibles, le champ de pression à l'intérieur de la cavité arrière peut être considéré indépendant de l'angle azimutal θ , et qu'en basses fréquences ($f < 1$ kHz) ce champ de pression peut être considéré uniforme dans tout le volume V_C de la cavité. Ces approximations font l'objet de l'annexe B.

3.4 Champ de déplacement de la membrane en fonction du champ de pression incident

Les solutions exprimées au paragraphe 3.1 pour le champ de déplacement de la membrane (équations 3.6a et 3.6c), au paragraphe 3.2 pour le champ de pression dans la couche de fluide inter-électrodes (équations 3.9, 3.11-3.13 et 3.20), et au paragraphe 3.3 pour les matrices de couplage entre les champs de pression dans l'entrefer et dans la cavité arrière (équations 3.29a-3.29b), permettent d'exprimer l'ensemble des paramètres du mouvement en fonction du champ de pression incident, des propriétés du fluide considéré et des paramètres mécaniques et géométriques du microphone. Afin d'y aboutir, il convient (i) de déterminer les expressions des constantes $A_\mu^{(\sigma)}$ (équation 3.13) et des coefficients $\xi_{mn}^{(\sigma)}$ (équation 3.6c) en fonction de la pression incidente p_{av} et des écarts instantanés de pression dans la couche de fluide inter-électrodes au droit des orifices $p(r_1, 0)^\dagger$ (équation 3.23a) et au droit de la fente périphérique $p(r_2, \theta)$ (équations 3.24 et 3.26a-3.26c), et (ii) d'exprimer ces écarts instantanés de pression en fonction de la pression incidente p_{av} en écrivant successivement le champ de pression dans la couche de fluide inter-électrodes $p(r, \theta)$ aux coordonnées des orifices et de la fente annulaire de l'électrode arrière. Pour ce faire, les notations suivantes sont utilisées dans la suite de ce paragraphe[‡] :

$$R_{\mu\nu} = T \left(K_{\mu\nu}^2 - K^2 \right) - \frac{\rho_0 \omega^2 / (\varepsilon F_v)}{K_{\mu\nu}^2 - \chi^2}, \quad (3.31a)$$

$$\alpha_{\mu n} = \frac{-[\rho_0 \omega^2 / (\varepsilon F_v)] N_{\mu n}}{(K_{\mu n}^2 - \chi^2)} \frac{K_{\mu n} J'_\mu(K_{\mu n} a)}{\chi J'_\mu(\chi a)}, \quad (3.31b)$$

[†]. Rappel : tous les orifices jouent le même rôle dans la modélisation, ce qui implique que $p(r_1, \theta_{v_0}) = p(r_1, 0)$ (cf. § 2.5).

[‡]. *Nota bene* : tous ces paramètres dépendent uniquement des propriétés du fluide considéré ainsi que des paramètres mécaniques et géométriques du microphone.

$$\begin{aligned}
 D_{\mu n}^{(\sigma)} &= \frac{i\omega\rho_0}{\varepsilon F_v} \frac{\pi [1 - (-)^\sigma \delta_{\mu 0}]}{R_{\mu n}} \frac{\nu_{\mu q}^2}{\kappa_{\mu q}^2 - \chi^2} \langle J_\mu(\kappa_{\mu q} r) N_{\mu n} J_\mu(K_{\mu n} r) \rangle, \\
 &= \frac{i\omega\rho_0}{\varepsilon F_v} \frac{\pi [1 - (-)^\sigma \delta_{\mu 0}]}{R_{\mu n}} \frac{\nu_{\mu q}^2 N_{\mu n}}{\kappa_{\mu q}^2 - \chi^2} \frac{a K_{\mu n} J'_\mu(K_{\mu n} a) J_\mu(\kappa_{\mu q} a)}{\kappa_{\mu q}^2 - K_{\mu n}^2}, \quad (3.31c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{0n} &= \frac{2\pi}{R_{0n}} \frac{K_{0n}^2 - K^2}{K^2} \left\langle 1 - \frac{J_0(Kr)}{J_0(Ka)} N_{0n} J_0(K_{0n} r) \right\rangle \delta_{\mu 0} \\
 &= \frac{2\pi}{R_{0n}} \frac{K_{0n}^2 - K^2}{K^2} N_{0n} \left[\frac{a}{K_{0n}} J_1(K_{0n} a) - \frac{a K_{0n} J'_0(K_{0n} a)}{K^2 - K_{0n}^2} \right] \delta_{\mu 0}, \quad (3.31d)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{\mu n}^{(\sigma)} &= \frac{\pi [1 - (-)^\sigma \delta_{\mu 0}]}{R_{\mu n}} \langle J_\mu(\chi r) N_{\mu n} J_\mu(K_{\mu n} r) \rangle \\
 &= \frac{\pi [1 - (-)^\sigma \delta_{\mu 0}]}{R_{\mu n}} N_{\mu n} \frac{a K_{\mu n} J'_\mu(K_{\mu n} a) J_\mu(\chi a)}{\chi^2 - K_{\mu n}^2}, \quad (3.31e)
 \end{aligned}$$

$$H_{\mu n}^{(I)} = y_{hh} J_\mu(\kappa_{\mu n} r_1) + y_{h\mu} J_\mu(\kappa_{\mu n} r_2), \quad (3.31f)$$

$$H_{\mu n \ell}^{(II)} = y_{h\ell} J_\mu(\kappa_{\mu n} r_1) + y_{\ell\mu} J_\mu(\kappa_{\mu n} r_2), \quad (3.31g)$$

$$H_{\mu n}^{(S)} = y_{s\mu} J_\mu(\kappa_{\mu n} r_2). \quad (3.31h)$$

i Expressions des constantes $A_\mu^{(\sigma)}$ et des coefficients $\xi_{mn}^{(\sigma)}$

Les constantes $A_\mu^{(\sigma)}$ (équation 3.13) sont exprimées en fonction des coefficients $\xi_{mn}^{(\sigma)}$, dont l'expression (3.6c) fait apparaître les produits scalaires du champ de pression $p(r, \theta)$ (équations 3.9, 3.11-3.13, 3.20, et 3.29a-3.29b) avec les fonctions propres $\psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta)$ (équations 3.4c-3.4f). Compte tenu des notations énoncées précédemment, le produit scalaire du champ de pression dans l'entrefer avec les fonctions propres $\psi_{mn}^{(1)}(r, \theta)$ est directement donné par

$$\begin{aligned}
 \langle p(r, \theta) | N_{\mu\nu} J_\mu(K_{\mu\nu} r) \cos(\mu\theta) \rangle &= R_{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{(\sigma)} A_\mu^{(1)} + \frac{\rho_0 \omega^2 (\varepsilon F_v)}{K_{\mu\nu}^2 - \chi^2} \xi_{\mu\nu}^{(1)} \\
 &+ R_{\mu\nu} \sum_n D_{\mu\nu n}^{(\sigma)} \left[H_{\mu n}^{(I)} p(r_1, 0) + \sum_{\ell=0, n_0, \dots} H_{\mu n \ell}^{(II)} p_\ell^{(1)}(r_2) \right], \quad (3.32a)
 \end{aligned}$$

et le produit scalaire du champ de pression dans l'entrefer avec les fonctions propres $\psi_{mn}^{(2)}(r, \theta)$ directement par

$$\begin{aligned}
 \langle p(r, \theta) | N_{\mu\nu} J_\mu(K_{\mu\nu} r) \sin(\mu\theta) \rangle &= R_{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{(\sigma)} A_\mu^{(2)} + \frac{\rho_0 \omega^2 (\varepsilon F_v)}{K_{\mu\nu}^2 - \chi^2} \xi_{\mu\nu}^{(2)} \\
 &+ R_{\mu\nu} \sum_n D_{\mu\nu n}^{(\sigma)} H_{\mu n}^{(S)} p_\mu^{(2)}(r_2). \quad (3.32b)
 \end{aligned}$$

Tenant compte de l'équation (3.26a) exprimant le champ de pression $p(r, \theta)$ en fonction des paramètres $p_\mu^{(\sigma)}$ (équations 3.26b et 3.26c), les membres de gauche des équations (3.32a) et (3.32b) peuvent respectivement s'écrire

$$\langle p(r, \theta) | N_{\mu\nu} J_\mu (K_{\mu\nu} r) \cos(\mu\theta) \rangle = \pi (1 + \delta_{\mu 0}) \langle p_\mu^{(1)}(r) | N_{\mu\nu} J_\mu (K_{\mu\nu} r) \rangle, \quad (3.33a)$$

et

$$\langle p(r, \theta) | N_{\mu\nu} J_\mu (K_{\mu\nu} r) \sin(\mu\theta) \rangle = \pi (1 - \delta_{\mu 0}) \langle p_\mu^{(2)}(r) | N_{\mu\nu} J_\mu (K_{\mu\nu} r) \rangle; \quad (3.33b)$$

ainsi, d'après l'expression des constantes $A_\mu^{(\sigma)}$ (3.13), les coefficients $\xi_{mn}^{(\sigma)}$ (3.6c) sont donnés par

$$\xi_{\mu\nu}^{(1)} = E_{0\nu} p_{av} + L_{\mu\nu}^{(1)} A_\mu^{(1)} + \sum_n D_{\mu\nu n}^{(1)} \left[H_{\mu n}^{(I)} p(r_1, 0) + \sum_{\ell=0, n_0, \dots} H_{\mu n \ell}^{(II)} p_\ell^{(1)}(r_2) \right], \quad (3.34a)$$

pour $\sigma = 1$, et

$$\xi_{\mu\nu}^{(2)} = L_{\mu\nu}^{(2)} A_\mu^{(2)} + \sum_n D_{\mu\nu n}^{(2)} H_{\mu n}^{(S)} p_\mu^{(2)}(r_2), \quad (3.34b)$$

pour $\sigma = 2$.

Finalement, les constantes $A_\mu^{(\sigma)}$ prennent la forme suivante (respectivement pour $\sigma = 1$ et $\sigma = 2$),

$$A_\mu^{(1)} = \frac{1}{1 - \sum_q \alpha_{\mu q} L_{\mu q}^{(1)}} \times \sum_\nu \alpha_{\mu\nu} \left[p_{av} E_{0\nu} + \sum_n D_{\mu\nu n}^{(1)} \left(H_{\mu n}^{(I)} p(r_1, 0) + \sum_{\ell=0, n_0, \dots} H_{\mu n \ell}^{(II)} p_\ell^{(1)}(r_2) \right) \right], \quad (3.35a)$$

et

$$A_\mu^{(2)} = \frac{1}{1 - \sum_q \alpha_{\mu q} L_{\mu q}^{(2)}} \sum_\nu \alpha_{\mu\nu} \sum_n D_{\mu\nu n}^{(2)} H_{\mu n}^{(S)} p_\mu^{(2)}(r_2), \quad (3.35b)$$

et les coefficients $\xi_{mn}^{(\sigma)}$ (équations 3.34a-3.34b), compte tenu des équations (3.35a) et (3.35b), sont directement donnés par

$$\xi_{\mu\nu}^{(1)} = \Omega_{\mu\nu}^{(av)} p_{av} + \Omega_{\mu\nu}^{(h)} p(r_1, 0) + \sum_{\ell=0, n_0, \dots} \Omega_{\mu\nu\ell}^{(s1)} p_\ell^{(1)}(r_2), \quad (3.36a)$$

et

$$\xi_{\mu\nu}^{(2)} = \Omega_{\mu\nu}^{(s2)} p_\mu^{(2)}(r_2), \quad (3.36b)$$

avec

$$\Omega_{\mu\nu}^{(av)} = E_{0\nu} + L_{\mu\nu}^{(1)} \frac{1}{1 - \sum_q \alpha_{\mu q} L_{\mu q}^{(1)}} \sum_r \alpha_{\mu r} E_{0r}, \quad (3.37a)$$

$$\Omega_{\mu\nu}^{(h)} = L_{\mu\nu}^{(1)} \frac{1}{1 - \sum_q \alpha_{\mu q} L_{\mu q}^{(1)}} \sum_r \alpha_{\mu r} \sum_n D_{\mu r n}^{(1)} H_{\mu n}^{(I)} + \sum_n D_{\mu \nu n}^{(1)} H_{\mu n}^{(I)}, \quad (3.37b)$$

$$\Omega_{\mu\nu\ell}^{(s1)} = L_{\mu\nu}^{(1)} \frac{1}{1 - \sum_q \alpha_{\mu q} L_{\mu q}^{(1)}} \sum_r \alpha_{\mu r} \sum_n D_{\mu r n}^{(1)} H_{\mu n\ell}^{(II)} + \sum_n D_{\mu \nu n}^{(1)} H_{\mu n\ell}^{(II)}, \quad (3.37c)$$

$$\Omega_{\mu\nu}^{(s2)} = L_{\mu\nu}^{(2)} \frac{1}{1 - \sum_q \alpha_{\mu q} L_{\mu q}^{(2)}} \sum_r \alpha_{\mu r} \sum_n D_{\mu r n}^{(2)} H_{\mu n}^{(S)} + \sum_n D_{\mu \nu n}^{(2)} H_{\mu n}^{(S)}. \quad (3.37d)$$

ii Expression des écarts instantanés de pression dans la couche de fluide inter-électrodes au droit des ouvertures de l'électrode arrière

Compte tenu des expressions des constantes $A_\mu^{(\sigma)}$ (équations 3.35a et 3.35b), des expressions des coefficients $\xi_{mn}^{(\sigma)}$ (3.34a et 3.34b), et des matrices (3.29a) et (3.29b) exprimant les débits volumiques U_1 et $U_m^{(\sigma)}$, le champ de pression dans la couche de fluide inter-électrodes (équations 3.9, 3.11, 3.12a et 3.20) est exprimé en fonction de la pression incidente p_{av} et des écarts instantanés de pression dans la couche de fluide inter-électrodes au droit des orifices $p(r_1, 0)$ (équation 3.23a) et au droit de la fente périphérique $p_\ell^{(\sigma)}(r_2)$ (équations 3.24 et 3.26a-3.26c) par

$$p(r, \theta) = O_{av}(r, \theta) p_{av} + O_1(r, \theta) p(r_1, 0) + \sum_{\sigma=1,2} \sum_{\ell=0,n_0,\dots} O_{2\ell}^{(\sigma)}(r, \theta) p_\ell^{(\sigma)}(r_2) \quad (3.38)$$

où

$$O_{av}(r, \theta) = \sum_m o_{avm}(r) \cos(m\theta), \quad (3.39a)$$

$$O_1(r, \theta) = \sum_m o_{1m}(r) \cos(m\theta), \quad (3.39b)$$

$$O_{2\ell}^{(1)}(r, \theta) = \sum_m o_{2m\ell}(r) \cos(m\theta), \quad (3.39c)$$

et

$$O_{2m}^{(2)}(r, \theta) = o_{2m}(r) \sin(m\theta), \quad (3.39d)$$

et où les expressions des paramètres $o_{avm}(r)$, $o_{1m}(r)$, $o_{2m\ell}(r)$ et $O_{2m}(r)$ (paramètres fonctions de la variable r) sont données dans l'annexe D.1.

Ce champ de pression $p(r, \theta)$ écrit en $(r = r_1)$ et en $(r = r_2)$, et compte tenu des expressions de p_μ^σ (équations 3.26b et 3.26c), mène au système linéaire d'équations algébriques suivant

$$\begin{aligned} p(r_1, 0) = & O_{av}(r_1, 0) p_{av} + O_1(r_1, 0) p(r_1, 0) + \sum_{\ell=0,n_0,\dots} O_{2\ell}^{(1)}(r_1, 0) p_\ell^{(1)}(r_2) \\ & + \sum_{m=0,n_0,\dots} O_{2m}^{(2)}(r_1, 0) p_m^{(2)}(r_2), \end{aligned} \quad (3.40a)$$

$$\begin{aligned}
 p_{\mu}^{(1)}(r_2) = \frac{1}{\pi(1+\delta_{\mu 0})} & \left[\langle O_{av}(r_2, \theta) p_{av} \mid \cos(\mu\theta) \rangle + \langle O_1(r_2, \theta) p(r_1, 0) \mid \cos(\mu\theta) \rangle \right. \\
 & + \sum_{\ell=0, n_0, \dots} \langle O_{2\ell}^{(1)}(r_2, \theta) p_{\ell}^{(1)}(r_2) \mid \cos(\mu\theta) \rangle \\
 & \left. + \sum_{m=0, n_0, \dots} \langle O_{2m}^{(2)}(r_2, \theta) p_m^{(2)}(r_2) \mid \cos(\mu\theta) \rangle \right], \quad (3.40b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{\mu}^{(2)}(r_2) = \frac{1}{\pi(1+\delta_{\mu 0})} & \left[\langle O_{av}(r_2, \theta) p_{av} \mid \sin(\mu\theta) \rangle + \langle O_1(r_2, \theta) p(r_1, 0) \mid \sin(\mu\theta) \rangle \right. \\
 & + \sum_{\ell=0, n_0, \dots} \langle O_{2\ell}^{(1)}(r_2, \theta) p_{\ell}^{(1)}(r_2) \mid \sin(\mu\theta) \rangle \\
 & \left. + \sum_{m=0, n_0, \dots} \langle O_{2m}^{(2)}(r_2, \theta) p_m^{(2)}(r_2) \mid \sin(\mu\theta) \rangle \right]. \quad (3.40c)
 \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse émise au paragraphe 3.2 (stipulant que les fonctions trigonométriques $\cos(m\theta_{\nu_0})$ et $\sin(m\theta_{\nu_0})$ prennent respectivement les valeurs 1 et 0 au droit des orifices), et du fait que la pression incidente est ici choisie uniforme, il apparaît que les paramètres $p_{\mu}^{(2)}$ sont nuls, ceci impliquant que le champ de pression dans l'entrefer ne dépend pas des modes faisant intervenir la fonction $\sin(\theta)$. Ainsi, tenant compte des expressions (3.39a-3.39d), le système d'équations (3.40a-3.40c), écrit sous forme matricielle et après intégration sur la variable θ , devient

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} O_{av}(r_1, 0) p_{av} \\ o_{av0}(r_2) p_{av} \\ o_{av6}(r_2) p_{av} \\ \vdots \\ o_{avm}(r_2) p_{av} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} 1 - O_1(r_1, 0) & -O_{20}^{(1)}(r_1, 0) & -O_{26}^{(1)}(r_1, 0) & \cdots & -O_{2m}^{(1)}(r_1, 0) \\ -o_{10}(r_2) & 1 - o_{200}(r_2) & -o_{206}(r_2) & \cdots & -o_{20m}(r_2) \\ -o_{16}(r_2) & -o_{260}(r_2) & 1 - o_{266}(r_2) & \cdots & -o_{26m}(r_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -o_{1m}(r_2) & -o_{2m0}(r_2) & -o_{2m6}(r_2) & \cdots & 1 - o_{2mm}(r_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(r_1, 0) \\ p_0^{(1)}(r_2) \\ p_6^{(1)}(r_2) \\ \vdots \\ p_m^{(1)}(r_2) \end{bmatrix}. \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

Finalement, en ne considérant que les modes $m = 0$ et $m = 6$, les écarts instantanés de pression $p(r_1, 0)$, $p_0^{(1)}(r_2)$ et $p_6^{(1)}(r_2)$, exprimés en fonction de la pression incidente p_{av} , sont donnés par

$$p(r_1, 0) = \varphi^{(h)} p_{av}, \quad (3.42a)$$

$$p_0^{(1)}(r_2) = \varphi_0^{(s_1)} p_{av}, \quad (3.42b)$$

$$p_6^{(1)}(r_2) = \varphi_6^{(s_1)} p_{av}, \quad (3.42c)$$

où les expressions de $\varphi^{(h)}$, $\varphi_0^{(s_1)}$ et $\varphi_6^{(s_1)}$ sont données dans l'annexe D.1.

iii Expression du champ de déplacement de la membrane en fonction du champ de pression incident

En définitive, d'après les expressions des coefficients $\xi_{mn}^{(1)}$ (équations 3.36a-3.37d) et des écarts instantanés de pression dans l'entrefer au droit des orifices (3.42a) et au droit de la fente périphérique (3.42b) et (3.42c), le champ de déplacement de la membrane $\xi(r, \theta)$ (équations 3.4c-3.6a), exprimé pour les seuls modes $m = 0$ et $m = 6$, est donné par

$$\xi(r, \theta) = p_{av} \sum_{m=0,6} \sum_n \left[\Omega_{mn}^{(av)} + \varphi^{(h)} \Omega_{mn}^{(h)} + \sum_{\ell=0,6} \varphi_{\ell}^{(s1)} \Omega_{mn\ell}^{(s1)} + \varphi_{\ell}^{(s1)} \Omega_{mn\ell}^{(s1)} \right] \psi_{mn}^{(1)}(r, \theta). \quad (3.43)$$

Il convient de noter que tous les paramètres de la modélisation étant déterminés, il est également possible d'exprimer les champs de pression dans la couche de fluide inter-électrodes et dans la cavité arrière en fonction du champ de pression incident. Ces résultats sont donnés (pour les seuls modes $m = 0$ et $m = 6$) dans l'annexe D au paragraphe D.2 pour le champ de pression dans la couche de fluide inter-électrodes et au paragraphe D.3 pour le champ de pression dans la cavité arrière.

Conclusion

La solution du problème fondamental repose sur les solutions successives des systèmes d'équations régissant le champ de déplacement de la membrane puis les écarts instantanés de pression dans la couche de fluide inter-électrodes et dans la cavité arrière, pressions couplées entre elles par les ouvertures dans et autour de l'électrode arrière. Ainsi, le champ de déplacement de la membrane (3.6a-3.6c), solution de (2.1a-2.1b), est exprimé sous la forme d'un développement modal sur la base des fonctions propres de Dirichlet (3.4c-3.4f), développement dont les coefficients (3.6b) sont exprimés en fonction des solutions de l'équation du mouvement de la membrane [*i.e.* la solution sans second membre, la solution avec pour unique second membre le champ de pression incident (la somme de ces deux solutions satisfaisant à la condition de Dirichlet), et la solution avec pour unique second membre le champ de pression dans la couche de fluide inter-électrodes]. Par ailleurs, l'écart instantané de pression dans l'entrefer est donné par la somme de la solution générale (3.11) de l'équation de propagation (2.21a) sans second membre, de la solution particulière (3.12a-3.12b) de l'équation de propagation avec pour unique second membre le débit du diaphragme (solution exprimée sous la forme d'un développement modal sur les fonctions propres de la membrane), et de la solution particulière (3.20) de l'équation de propagation avec pour unique second membre les débits volumiques des ouvertures de l'électrode arrière [solution obtenue par usage de la formulation intégrale, où les fonctions de Green (3.14b) sont exprimées sous la forme d'un développement modal sur la base des fonctions propres de Neumann (3.14c-3.14f)]. Les deux premières solutions [(3.11) et (3.12a-3.12b)] ne satisfaisant pas séparément à la condition de Neumann (2.21b), les constantes d'intégration (3.13) de la solution générale (3.11) sont choisies

de telle sorte que leur somme satisfasse cette condition (2.21b). Enfin, le champ de pression dans la cavité arrière (3.21), solution du système d'équations (2.23a-2.23b), est obtenu par usage de la formulation intégrale [de la même manière que la solution particulière (3.20)].

Par ailleurs, la solution analytique du problème est obtenue en écrivant les conditions d'interfaces entre les différents domaines considérés, par couplage des solutions obtenues précédemment avec les équations (2.26) et (2.30), qui portent respectivement sur le comportement des orifices de l'électrode arrière et de sa fente périphérique. Ainsi, compte tenu de l'expression du champ de pression dans la cavité arrière (3.21) et des équations du comportement des ouvertures de l'électrode arrière, les débits des orifices et de la fente annulaire (3.29a-3.29b) sont exprimés en fonction des écarts instantanés de pression dans l'entrefer au droit des ouvertures de l'électrode arrière. Ces écarts instantanés de pression sont déterminés en écrivant le champ de pression dans l'entrefer (3.38) successivement aux coordonnées des orifices et de la fente annulaire et finalement exprimés (3.42a-3.42b) en fonction des propriétés physiques du fluide considéré, des caractéristiques mécaniques et géométriques du microphone et du champ de pression incident.

À noter que l'approche proposée mène à des résultats analytiques, dépendant à la fois des coordonnées radiale et azimutale, qui permettent de caractériser le comportement du microphone en fluides divers à des pressions et des températures statiques variées, et pour une large gamme de fréquences (de quelques Hertz jusqu'à 100 kHz). La modélisation présentée permet en outre de considérer un champ de pression non uniforme sur la surface de la membrane ; elle peut être de surcroît améliorée sans difficulté en modélisant les ouvertures de l'électrode arrière de manière plus réaliste (et non comme étant des sources de débit ponctuelles et linéique, respectivement pour les orifices et pour la fente périphérique), élargissant de la sorte l'éventail des modes à retenir.

Chapitre 4

Champ de déplacement de la membrane, sensibilité et bruit thermique du microphone : résultats théoriques et expérimentaux

Les résultats théoriques pour le champ de déplacement de la membrane, obtenus à partir des expressions des solutions présentées au chapitre précédent, sont ici comparés aux résultats expérimentaux obtenus par vibrométrie laser à balayage sur un microphone demi-pouce B&K type 4134 à des fréquences pour lesquelles les orifices de l'électrode arrière exercent une forte influence sur la déformée de membrane. Un circuit électrique équivalent du microphone, qui ne prend en compte que le mode fondamental de vibration de la membrane, est ensuite proposé, faisant apparaître tous les domaines qui constituent le transducteur (la membrane, la lame de fluide, les ouvertures de l'électrode arrière et la cavité arrière). Les valeurs « exactes », puis approchées (pour différents degrés d'approximations) de chacun des paramètres de circuit équivalent sont reportées en annexe C. Enfin, la sensibilité et le bruit thermo-mécanique du microphone, représentés en fonction de la fréquence, sont calculés en considérant les valeurs approchées, voire « exactes », de chacun des composants du circuit électrique équivalent et comparés.

4.1 Champ de déplacement de la membrane en hautes fréquences : résultats théoriques et expérimentaux

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont obtenus à des fréquences pour lesquelles le champ de déplacement de la membrane est non uniforme, voire très fortement non uniforme, en raison de la présence des orifices de l'électrode arrière qui exercent une influence importante sur la déformée. L'expérience réalisée pour quantifier le mouvement de la membrane à ces fréquences

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Taille du microphone	-	1/2	pouce
N° de série	-	390329	-
Capacité électrique sans tension de polarisation	C	17.4	pF
Rayon de la membrane	a	4.445	mm
Masse surfacique de la membrane	M_s	0.04445	kg.m ⁻²
Masse volumique de l'air	ρ_0	1.2	kg.m ⁻³
Viscosité de cisaillement du fluide	μ	1.9×10^{-5}	kg.m ⁻¹ .s ⁻³
Rapport des capacités calorifiques	γ	1.4	-
Hauteur de la couche de fluide inter-électrodes	ϵ	20.77	μm
Rayon de l'électrode arrière	a_{bp}	3.607	mm
Nombre d'orifices dans l'électrode arrière	n_0	6	-
Coordonnée radiale du centre de chaque orifice de l'électrode arrière	r_1	2.032	mm
Rayon des orifices de l'électrode arrière	R	0.508	mm
Profondeur des orifices de l'électrode arrière	h_1	0.843	mm
Coordonnée radiale du centre de la fente périphérique	r_2	4.026	mm
Largeur de la fente périphérique	e	0.838	mm
Profondeur de la fente périphérique	h_2	0.3048	mm
Volume de la cavité arrière	V_C	1.264×10^{-7}	m ³

Tableau 4.1 – Paramètres mécaniques, géométriques et électrique du microphone B&K type 4134

est décrite sur la [figure 4.1](#), où sont représentés les six éléments de la chaîne de mesure.

Le microphone 1/2 pouce B&K type 4134, microphone réciproque dont l'électrode arrière est perforée de six orifices ([figure 4.2](#)) et dont la grille de protection a été ôtée, est ici utilisé en émetteur. Le pré-amplificateur utilisé permet de superposer la tension de polarisation, tension continue U_0 de 200 Volts, et le signal d'excitation électrique $u(t)$ (tension alternative harmonique) délivré par le générateur intégré au système d'acquisition PSV-300. Le signal d'excitation est visualisé sur un oscilloscope après amplification, afin d'appliquer une tension d'amplitude crête de 50 Volts. Le déplacement de la membrane du microphone, obtenu par mesure optique au moyen d'un vibromètre laser à balayage, est la moyenne de quinze mesures effectuées pour chacun des 30×30 points du maillage. Les mesures ont été réalisées dans les conditions standard d'utilisation, c'est-à-dire dans l'air, à température ambiante et à pression atmosphérique.

Les [figures 4.3](#), [4.4](#) et [4.5](#) représentent respectivement le champ de déplacement de la membrane

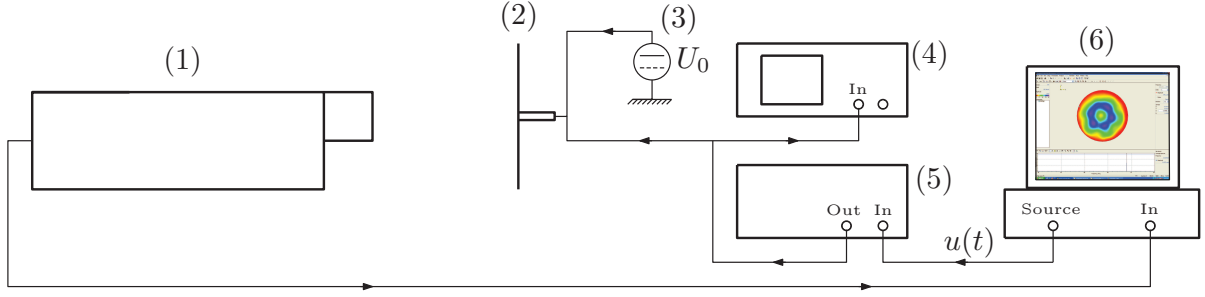


FIGURE 4.1 – Schéma du dispositif expérimental représentant les éléments de la chaîne de mesure : (1) Vibromètre laser à balayage (OFV 056) avec son optique de précision, (2) microphone 1/2 pouce B&K type 4134 monté sur un support, (3) Tension de polarisation du microphone (amplificateur de mesure B&K type 2609), (4) Oscilloscope (HP 54603B), (5) Amplificateur de puissance (B&K type 2713), (6) Système de pilotage du vibromètre laser et de traitement des données (PSV 300-H)

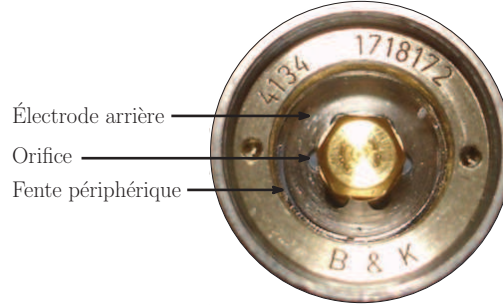


FIGURE 4.2 – Vue de dessous de la capsule microphonique B&K type 4134 utilisée pour les mesures

à 40 kHz , 57 kHz et 72 kHz, fréquences auxquelles le déplacement est maximal au droit des orifices. Les résultats théoriques sont ici obtenus en tenant compte d'un seul mode azimutal (c'est-à-dire $m = 0$ et 6) et de onze modes radiaux (c'est-à-dire $n = 0$ à 10) et en simulant la pression acoustique incidente p_{av} (3.43) par la pression électrostatique p_e calculée avec l'expression suivante :

$$p_e = \frac{CU_0}{\pi a^2 \varepsilon} u(t), \quad (4.1)$$

où C représente la capacité électrique du microphone sous une tension de polarisation U_0 (leurs valeurs sont données dans le tableau 4.1).

Le résultat expérimental obtenu à 40 kHz (figure 4.3 à gauche) montre que les orifices de l'électrode arrière agissent sur le champ de déplacement de la membrane en faisant apparaître une couronne sur le rayon qui correspond à leur emplacement. Le résultat théorique (à droite) montre un champ de déplacement de forme similaire avec des amplitudes en accord avec celles obtenues expérimentalement au centre de la membrane et au droit des orifices (ces amplitudes sont données dans le tableau 4.2). Il convient toutefois de noter que le champ de déplacement calculé diffère de celui mesuré sur la périphérie de la membrane, cette différence étant vraisemblablement due au

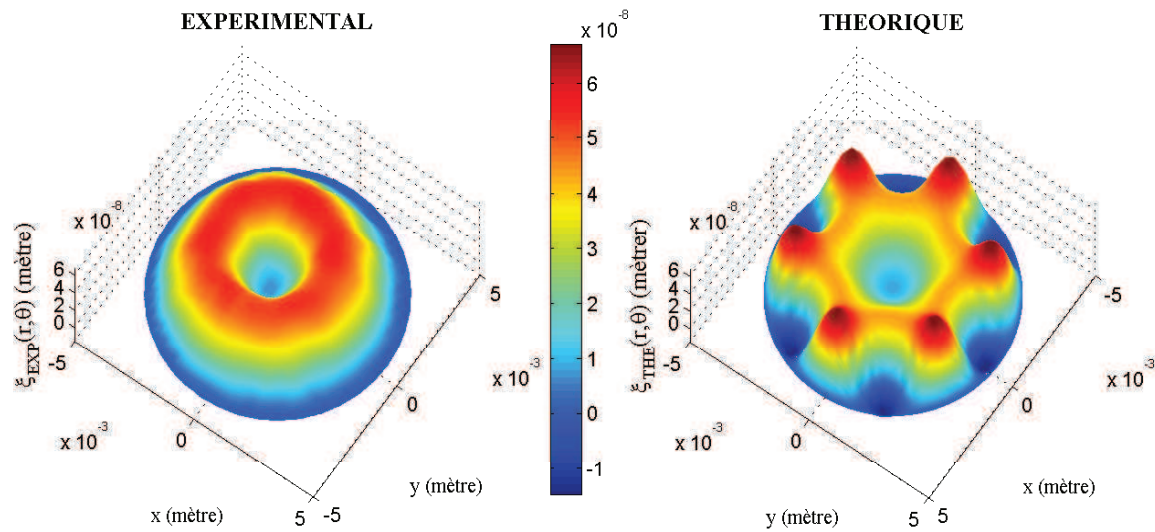


FIGURE 4.3 – Champ de déplacement de la membrane à 40 kHz : résultat expérimental (à gauche) et théorique (à droite)

fait que les orifices et la fente périphérique sont modélisés par des sources de débits respectivement ponctuelles et linéique.

Fréquence	Emplacement	Déplacement mesuré	Déplacement calculé ($m = 0$ et 6)
40 kHz	Au droit d'un orifice	55,2 nm	41,2 nm
	Au centre de la membrane	7,1 nm	8,7 nm
57 kHz	Au droit d'un orifice	37,9 nm	29,1 nm
	Au centre de la membrane	-24,2 nm	10,8 nm
72 kHz	Au droit d'un orifice	35 nm	30 nm
	Au centre de la membrane	-11	-8,3

Tableau 4.2 – Amplitudes calculées et mesurées du déplacement au centre de la membrane et au droit des orifices pour les fréquences de 40 kHz, 57 kHz et 72 kHz

À 57 kHz le champ de déplacement de la membrane est fortement non uniforme comme le montre le résultat expérimental présenté sur la figure 4.4 (à gauche) : les orifices de l'électrode arrière ont ici un effet (très) localisé et agissent sur la déformée de telle manière que six « bosses » apparaissent, dont l'emplacement correspond à celui des six orifices de l'électrode arrière. Le résultat théorique (à droite) montre également l'influence qu'ont les orifices sur la déformée de membrane avec une bonne estimation de l'amplitude du déplacement à leurs emplacements. Toutefois, l'amplitude du déplacement calculée au centre de la membrane ne correspond pas exactement à celle mesurée,

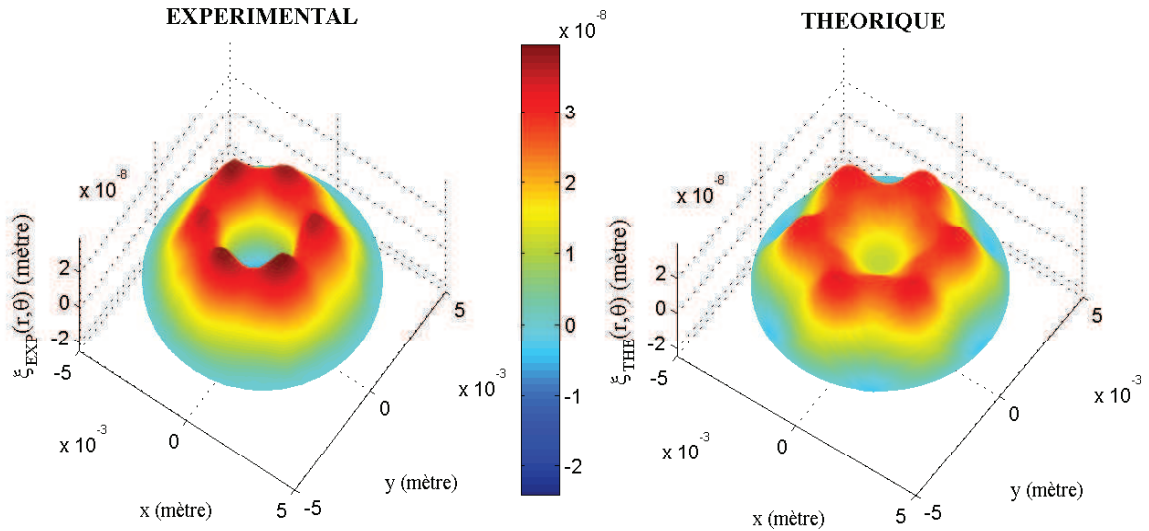


FIGURE 4.4 – Champ de déplacement de la membrane à 57 kHz : résultat expérimental (à gauche) et théorique (à droite)

laquelle est du même ordre de grandeur et de signe opposé à l'amplitude du déplacement au droit des orifices (ces amplitudes sont données dans le [tableau 4.2](#)).

La [figure 4.5](#) représente le champ de déplacement mesuré (à gauche) et calculé (à droite) à 72 kHz. Ces deux résultats montrent une fois encore que les orifices de l'électrode arrière ont une influence importante sur le comportement dynamique de la membrane, influence caractérisée par six bosses sur la déformée. Les amplitudes du déplacement au centre de la membrane et au droit des orifices (données dans le [tableau 4.2](#)) montrent ici un très bon accord entre les valeurs calculée

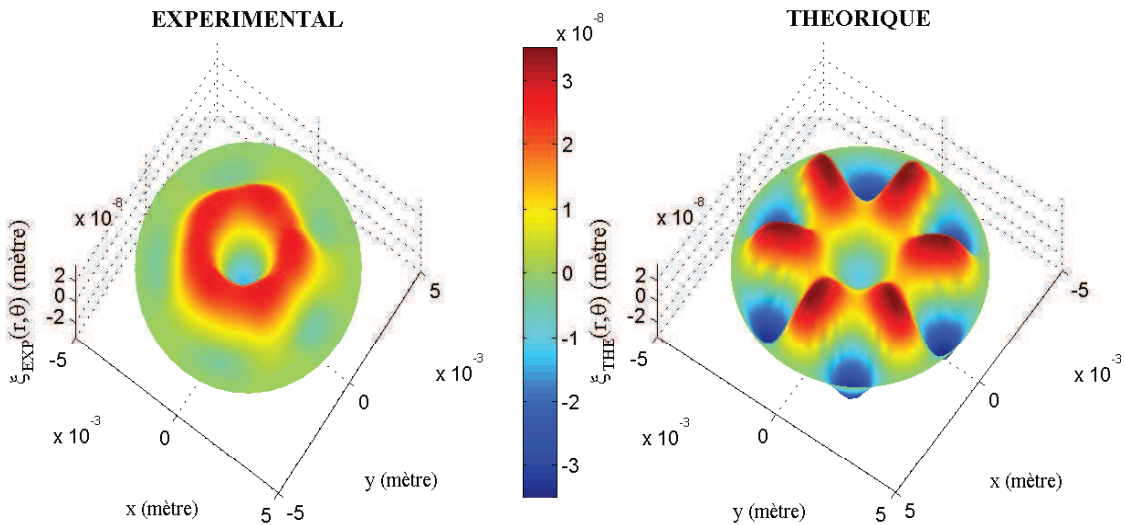


FIGURE 4.5 – Champ de déplacement de la membrane à 72 kHz : résultat expérimental (à gauche) et théorique (à droite)

et mesurée.

Il convient de noter que la différence observée entre le champ de déplacement calculé et celui mesuré (figure 4.5) montre une fois de plus que le modèle surestime le déplacement sur la périphérie de la membrane.

4.2 Approximations basses fréquences : circuit électrique équivalent

Compte tenu de l'expression 3.6a, l'impédance d'entrée Z_{av} du microphone, définie (au signe près) par le rapport du champ de pression incident p_{av} sur la vitesse moyenne de la membrane $i\omega \langle \xi(r, \theta) \rangle$ (orientée sortante du microphone), prend la forme suivante :

$$Z_{av} = \frac{-p_{av}}{i\omega \sum_{mn} \xi_{mn}^{(\sigma)} \langle \psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta) \rangle}. \quad (4.2)$$

Lorsqu'un seul mode est conservé (c'est-à-dire pour $m = 0$ et $n = 0$), le développement analytique de (4.2) permet de modéliser l'impédance d'entrée sous la forme du circuit électrique équivalent représenté sur la figure 4.6 où les quatre domaines couplés qui constituent le microphone apparaissent (les expressions des différents composants électriques équivalents énoncés ici sont présentées en annexe C de façon « exacte », puis pour différents degrés d'approximations) : (i) la membrane, représentée par l'inductance L_m (liée à son inertie) et par la capacitance C_m (liée à sa tension mécanique), est couplée à (ii) la couche de fluide inter-électrodes, représentée par l'inductance L_μ (liée à son inertie), par les capacitances C_h et C_H (liées à sa compressibilité), par la résistance R_μ (liée à l'amortissement visqueux) et par les résistances R_h et R_H (liées à l'amortissement thermique), cette couche de fluide inter-électrodes étant par ailleurs couplée avec (iii) la cavité arrière, représentée par la capacitance C_c (liée à la compressibilité du fluide), par le biais (iv) des orifices et de la fente périphérique, représentés respectivement par les impédances acoustiques de transfert Z_1 et Z_2 (composées d'une inertance et d'une résistance liée à l'amortissement visqueux). Il convient de noter que le facteur Z_H (C.9c) traduit la compressibilité et l'amortissement thermique de la lame de fluide; le facteur Z_h (C.8), voisin de Z_H (facteur multiplicatif d'environ 0,7; voir équations C.8, C.9c et C.18), traduit l'effet de compressibilité et d'amortissement thermique sur le champ acoustique dans la cavité arrière de façon inattendue *a priori*.

Les impédances de transfert acoustique des orifices (Z_1) et de la fente périphérique (Z_2), représentées sur la figure 4.7, font apparaître les résistances liées à l'amortissement visqueux et les inductances liées à l'inertie du fluide à l'intérieur des ouvertures de l'électrode arrière. L'expression de l'impédance de transfert Z_1 est donnée ci-dessous à titre d'exemple, afin de montrer les

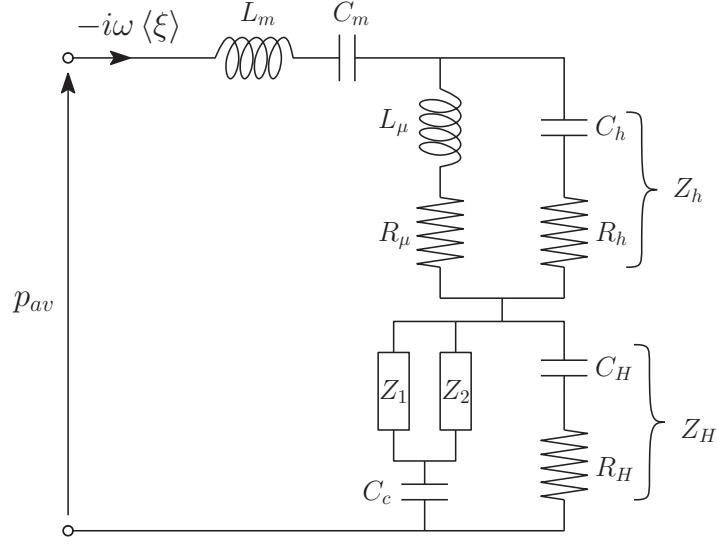


FIGURE 4.6 – Circuit électrique équivalent de l'impédance acoustique d'entrée du microphone

différents degrés d'approximations décrits dans l'annexe C :

$$Z_1 = \frac{1}{n_0 y_{1,v_0}} = \frac{1}{n_0} \frac{i\omega \rho_0 h_1}{S_{1,v_0}} \left(1 - \frac{2}{k_v R} \frac{J_1(k_v R)}{J_0(k_v R)} \right)^{-1}, \quad (4.3a)$$

$$\cong \frac{1}{n_0} \left(\frac{8\mu h_1}{\pi R^4} + i\omega \frac{(4\rho_0/3) h_1}{\pi R^2} \right), \quad (4.3b)$$

$$\cong \frac{1}{n_0} \frac{8\mu h_1}{\pi R^4}, \quad (4.3c)$$

où l'expression (4.3a) correspond à la valeur « exacte » (donnée par les équations 2.25 et 2.27), l'expression (4.3b) correspond au degré d'approximation à l'ordre 1 (mettant respectivement en

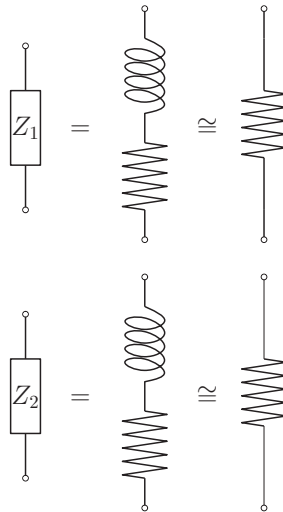


FIGURE 4.7 – Composants électriques équivalents de l'impédance (acoustique) de transfert des orifices de l'électrode arrière (Z_1) et de la fente périphérique (Z_2)

évidence l'effet de la viscosité et de l'inertie) et l'expression (4.3c) correspond au degré d'approximation à l'ordre 0 (valide aux basses fréquences uniquement).

4.3 Sensibilité du microphone

La sensibilité σ du microphone, définie par le rapport de la tension de sortie du circuit ouvert sur la pression incidente telle que

$$\sigma = -\frac{U_0}{\pi a^2 \varepsilon p_{av}} \sum_{mn\sigma} \xi_{mn}^{(\sigma)} \langle \psi_{mn}^{(\sigma)}(r, \theta) \rangle, \quad (4.4)$$

est ici calculée en considérant le champ de déplacement de la membrane et les champs de pression à l'intérieur de la capsule microphone indépendants de l'angle θ , c'est-à-dire pour $m = 0$, négligeant de la sorte les modes plus élevés. Sur la figure 4.8, la sensibilité calculée en tenant compte de onze modes radiaux pour deux valeurs de capacité électrique C de 17,4 pF et 16 pF (l'écart

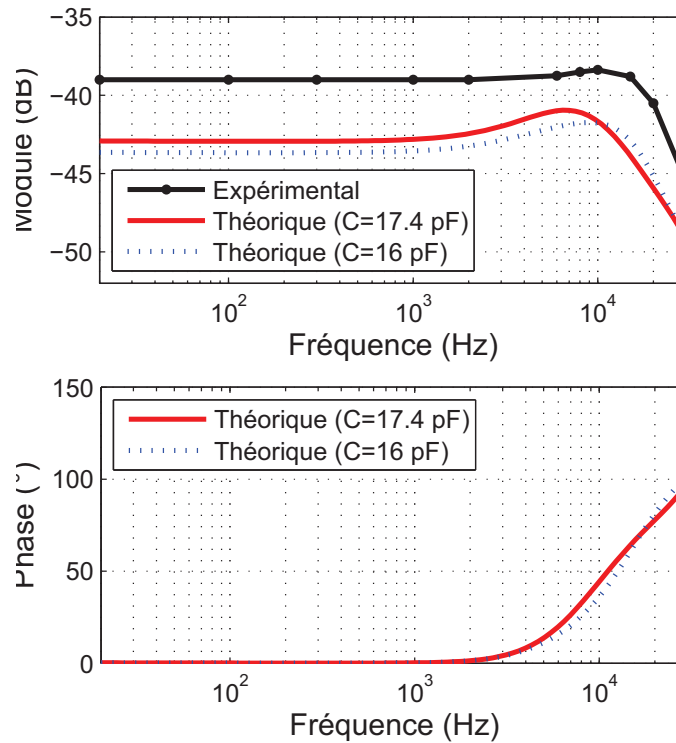


FIGURE 4.8 – Module (en haut) de la sensibilité exprimée en dB (référéncé à 1 V/Pa) en fonction de la fréquence donnée dans la charte de calibration du microphone type 4134 (ligne continue noire avec des points) ; Module (en haut) exprimée en dB (référéncé à 1 V/Pa) et phase (en bas) de la sensibilité en fonction de la fréquence calculée avec onze modes radiaux pour différentes valeurs de la capacité électrique (au repos) du microphone : $C = 17,4$ pF (ligne continue rouge) et $C = 16$ pF (ligne pointillée bleue)

relatif entre ces valeurs étant choisi égal à 8%) est comparée à la sensibilité mesurée par le constructeur donnée sur la charte de calibration du microphone ; ceci permet de montrer l'influence de l'incertitude de l'épaisseur de la lame d'air ($\varepsilon = \epsilon_0 S_{bp}/C$, où la permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 1/(36\pi 10^9) \cong 8,8410^{-12} \text{ A.s.V}^{-1}.\text{m}^{-1}$) à la fois sur la position de la première du maximum de l'amplitude de la sensibilité, mais aussi sur la valeur de la sensibilité basses fréquences. Le résultat théorique obtenu avec une capacité de 16 pF localise bien du maximum de l'amplitude de la sensibilité à 10 kHz comme indiqué sur la charte de calibration. Toutefois, la sensibilité aux basses fréquences de $-43,6 \text{ dB}$ (correspondant à $6,6 \text{ mV/Pa}$) s'écarte de $4,6 \text{ dB}$ de la valeur donnée par constructeur qui est de -39 dB (correspondant à $11,2 \text{ mV/Pa}$). Le résultat théorique

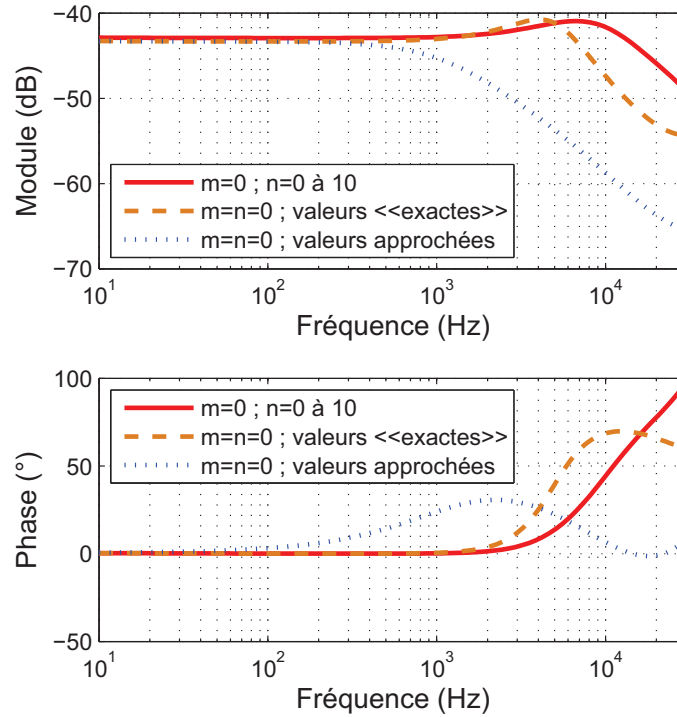


FIGURE 4.9 – Module (en haut) et phase (en bas) de la sensibilité en fonction de la fréquence calculée en tenant compte de onze modes radiaux (ligne continue rouge), d'un seul mode ($m = n = 0$) avec les valeurs « exactes » des paramètres du circuit équivalent (ligne discontinue orange) et d'un seul mode avec les valeurs à l'ordre 0 des paramètres du circuit équivalent (ligne pointillée bleue)

obtenu avec la capacité électrique de $C = 17,4 \text{ pF}$ localise du maximum de l'amplitude de la sensibilité à 7 kHz et donne une sensibilité aux basses fréquences de $-42,9 \text{ dB}$, ce qui correspond à une sensibilité d'environ 7.2 mV/Pa . Ainsi, il apparaît que ces différences observées entre les valeurs expérimentale et analytiques ne peuvent être interprétées par l'incertitude de la capacité électrique. Néanmoins, en considérant la surface réelle de l'électrode arrière ($S_{bp} - S_1$) (c'est-à-dire la surface de l'électrode arrière dont est soustraite la surface totale des orifices), inférieure à la

surface de la membrane ($S = \pi a^2$), la sensibilité calculée aux basses fréquences est de 9 mV/Pa, ce qui est proche de la valeur de la sensibilité de 11,2 mV/Pa donnée par le constructeur.

La sensibilité calculée, tenant compte de onze modes radiaux ($m = 0$ et $n = 0$ à 10) pour une capacité électrique $C = 17,4$ pF représentée sur la [figure 4.8](#) (courbe discontinue rouge), est comparée sur la [figure 4.9](#) (courbe discontinue rouge) aux sensibilités calculées en tenant compte d'un seul mode ($m = n = 0$) avec les valeurs « exactes » (ligne discontinue orange) et à l'ordre 0 (ligne pointillée bleue) des paramètres du circuit équivalent. Ces résultats, qui donnent tous des valeurs similaires de la sensibilité aux basses fréquences, traduisent le domaine de validité en fréquence du modèle qui couvre respectivement l'intervalle de fréquences (0–30 kHz), (0–10 kHz) ou (0–1 kHz) selon que cette sensibilité est calculée en tenant compte (i) de onze modes radiaux et ainsi d'une déformée relativement précise de la membrane (modes $m = 0$ et $n = 0$ à 10), (ii) d'un seul mode avec les expressions « exactes » des paramètres du circuit équivalent, ou (iii) d'un seul mode avec les expressions approchées à l'ordre 0 des paramètres du circuit équivalent.

4.4 Bruit thermo-mécanique du microphone

Le bruit thermique, qui est la première cause de bruit propre du microphone, est dû au mouvement irrégulier des électrons (similaire au mouvement brownien) et se traduit par l'apparition d'une tension de bruit aux bornes de toute résistance [79, chap. 4]. Cette résistance peut être celle d'un composant électronique, où celle qui modélise un effet dissipatif d'origine acoustique, mécanique ou électrique.

Le bruit thermique analysé dans ce paragraphe est un bruit d'origine mécanique, qui est dû à la dissipation d'énergie liée aux phénomènes thermiques et visqueux à l'intérieur de la couche de fluide inter-électrodes, dans les orifices de l'électrode arrière et dans la fente périphérique. Ainsi, le bruit thermo-mécanique peut être calculé à partir du circuit équivalent, la résistance mécanique R_{th} étant définie par la partie réelle de l'impédance équivalente totale du fluide, soit compte tenu des expressions des impédances Z_g (C.41) et Z_R (C.38) (annexe C)

$$R_{th} = \Re_e(Z_g + Z_R). \quad (4.5a)$$

Cette résistance équivalente R_{th} , calculée en ne conservant qu'un seul mode ($m = n = 0$), est représentée sur la [figure 4.10](#) en fonction de la fréquence pour deux degrés d'approximations différents : les approximations à l'ordre 0 (ligne pointillée bleue) et à l'ordre 1 (ligne discontinue rouge) des paramètres du circuit équivalent. Aux basses fréquences, la résistance R_{th} vaut $2,06 \times 10^8$ Ns/m⁵ (correspondant à un bruit thermo-mécanique de 20,2 dB[A]) en utilisant les approximations à l'ordre le plus bas et vaut $1,69 \times 10^8$ Ns/m⁵ en utilisant les approximations à l'ordre 1. Ces résultats sont en bon accord avec ceux disponibles dans la littérature (par exemple ceux donnés dans les références [71] ou [68]) et notamment avec la valeur $R_{th} = 1,89 \times 10^8$ Ns/m⁵ (qui correspond à un bruit thermo-mécanique de 19,7 dB[A]) obtenue en utilisant la modélisation analytique [48]. Il convient de noter que, comme attendu, le résultat obtenu en utilisant les

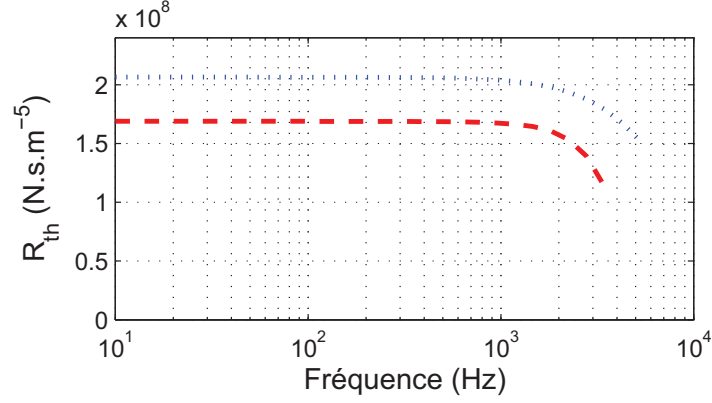


FIGURE 4.10 – Résistance thermique R_{th} en fonction de la fréquence calculée en tenant compte d'un seul mode ($m = n = 0$) avec les valeurs à l'ordre 0 (ligne pointillée bleue) et à l'ordre 1 (ligne discontinue rouge) des paramètres du circuit équivalent

approximations à l'ordre 1 sont plus précis ; la valeur de la résistance obtenue avec l'approche Škvor/Starr [71] reste la plus proche de la spécification ($1.25 \times 10^8 \text{ Ns/m}^5$, correspondant à un bruit thermo-mécanique de 18 dB[A]) avec une estimation du bruit thermique de 18,3 dB[A].

Conclusion

Les mesures réalisées au vibromètre laser à balayage présentées dans le paragraphe 4.1 permettent pour la première fois (à notre connaissance) de mettre en évidence la nature non uniforme (voire fortement non uniforme) du champ de déplacement de la membrane d'un microphone capacitif en haute fréquence et de quantifier ce déplacement sur la surface totale de la membrane. À 40 kHz, l'amplitude maximale du champ de déplacement de la membrane se trouve distribuée sur un rayon qui correspond à la coordonnée radiale du centre des orifices. À 57 kHz et 72 kHz, les orifices de l'électrode arrière exercent une influence importante sur la déformée du diaphragme, influence qui est localisée au droit des emplacements des orifices dans l'électrode arrière, de telle manière que six « bosses » apparaissent sur le champ de déplacement. Les résultats théoriques, obtenus pour un nombre limité de modes, sont en bon accord avec les résultats expérimentaux, tant en terme d'allure de déformée qu'en terme d'amplitude du déplacement au centre de la membrane et au droit des orifices. Toutefois, des différences entre les champs de déplacement calculé et mesuré apparaissent sur la périphérie de la membrane, ce qui montre que le modèle tend à surestimer ce déplacement sur cette partie du diaphragme. Ce problème pourrait éventuellement être résolu en tenant compte d'un plus grand nombre de modes et plus encore en modélisant les sources de débit des orifices et de la fente périphérique de manière plus réaliste (et non par des sources ponctuelles et linéïque).

Le circuit équivalent figurant au paragraphe 4.2, dont les expressions des différents composants sont données en annexe C permet d'une part de mettre en évidence les différents couplages entre

les différents domaines qui constituent le microphone, et d'autre part de calculer aisément la sensibilité et le bruit thermo-mécanique du transducteur.

Lorsque le champ de déplacement de la membrane et les champs de pression à l'intérieur de la capsule microphonique sont considérés indépendants de l'angle θ , quel que soit le degré d'approximation retenu dans l'expression des paramètres, les résultats obtenus aux basses fréquences pour le module de la sensibilité (exprimé en dB référencé à 1 V/Pa et non en valeur adimensionnée comme c'est le cas dans la littérature pour les résultats analytiques) sont proches de la sensibilité donnée par le constructeur sur la charte de calibration. Il est à noter que les tracés de la sensibilité en fonction de la fréquence calculée pour différentes valeurs de la capacité électrique (hors tension de polarisation du microphone) montrent l'influence de ce paramètre à la fois sur la position du maximum de l'amplitude de la sensibilité et aussi sur la valeur de la sensibilité aux basses fréquences. Le domaine de validité du modèle couvre respectivement les intervalles de fréquences (0 – 30 kHz), (0 – 10 kHz) ou (0 – 1 kHz) selon que cette sensibilité est calculée en tenant compte (i) de la déformée relativement précise de la membrane (modes $m = 0$ et $n = 0$ à 10), (ii) d'un seul mode avec les expressions « exactes » des paramètres du circuit équivalent, ou (iii) d'un seul mode avec les expressions approchées à l'ordre 0 des paramètres du circuit équivalent.

Les valeurs obtenues pour le bruit thermique (exprimé en fonction de la fréquence) sont finalement obtenues en utilisant les expressions approchées à l'ordre 1 et à l'ordre 0 des paramètres du circuit équivalent, montrant un bon accord avec les résultats disponibles dans la littérature.

En définitive, les résultats présentés dans ce chapitre montrent une bonne cohérence des résultats théoriques (obtenus avec la modélisation analytique présentée aux chapitres 2 et 3) à la fois avec les résultats expérimentaux du champ de déplacement de la membrane et avec l'ensemble des résultats disponibles dans la littérature.

Conclusion

La miniaturisation (par procédé MEMS) des microphones capacitifs, leur usage nouveau en métrologie fine (comme émetteurs et récepteurs) et aux fréquences élevées (20-100 kHz), fréquences auxquelles la déformée du diaphragme peut être fortement non uniforme, rendent aujourd'hui nécessaire une caractérisation plus approfondie de leur comportement, tant en terme de modélisation qu'en terme de résultats expérimentaux. C'est ainsi qu'une modélisation adaptée est proposée dans ce mémoire et comparée à des résultats expérimentaux nouveaux ; elle tient compte en particulier de l'influence locale exercée par les orifices de l'électrode arrière sur le champ de déplacement de la membrane et des effets de couches limites thermiques (plus largement étudiés au préalable) qui ne sont plus négligeables aux fréquences et dimensions considérées ici.

Dans le premier chapitre, l'étude analytique présentée (qui sort du cadre strict de l'étude d'un transducteur) permet d'analyser en détails les transferts thermiques entre un fluide et une paroi mince dans le cas d'une membrane de faible épaisseur et d'une fibre de faible rayon. La modélisation, qui est appliquée successivement aux deux types de paroi, repose sur le système d'équations couplées régissant les variables de vitesse particulaire et de température dans le fluide, sur l'équation de conduction de la chaleur dans le solide et sur les conditions aux limites aux interfaces fluide-solide. Les résultats analytiques obtenus permettent, pour différentes épaisseurs de membrane et différents rayons de fibre, d'une part d'analyser la condition thermodynamique locale du fluide au moyen du coefficient polytropique (exprimé en fonction de la distance à la paroi) et d'autre part d'examiner l'effet « global » des couches limites thermiques, traduit en termes d'admittance spécifique équivalente. Cette étude montre que (i) la transition entre la condition quasi isotherme à l'interface solide-fluide et quasi adiabatique dans le domaine fluide apparaît, comme attendu, à une distance de la paroi de l'ordre de deux épaisseurs de couche limite thermique, (ii) la condition usuelle « isotherme » à l'interface entre un fluide léger et une membrane reste valide, y compris pour des épaisseurs de la membrane de l'ordre du micromètre et quelle que soit la fréquence considérée (dans le domaine retenu), (iii) la condition thermique « isotherme » à la surface d'une fibre n'est plus valide pour des rayons inférieurs à une épaisseur de couche limite thermique et peut devenir « adiabatique » pour des rayons de quelques micromètres aux fréquences les plus basses, (iv) l'admittance spécifique équivalente, associée aux phénomènes de couches limites thermiques, présente, en fonction de l'épaisseur, des variations très faibles (voire négligeables) dans le cas d'une membrane, et (v) par contre les variations du module et de phase de l'admittance dans le cas d'une fibre sont très importantes.

Le second chapitre, dont le propos est de poser le problème de la modélisation analytique de microphones capacitifs, présente successivement les équations pour chaque domaine qui le constitue, menant ainsi au système d'équations couplées régissant le champ de déplacement de la membrane, le champ de pression dans la couche de fluide inter-électrodes, le champ de pression dans la cavité arrière et le comportement des ouvertures de l'électrode arrière (les orifices et la fente périphérique). Par-delà les éléments contenus dans les modèles en usage jusqu'à présent, ces équations prennent en outre en compte : (i) les effets de couches limites thermiques, (ii) les conditions aux frontières sur l'électrode arrière rendues uniformes (par un facteur dépendant de sa porosité qui permet de traduire la présence des orifices) pour l'écart instantané de température et pour la composante radiale de la vitesse particulière, (iii) les débits des orifices de l'électrode arrière et de sa fente périphérique, considérés respectivement ponctuels et linéique, sous la forme de termes sources extérieures pris en compte dans le second membre de l'équation de propagation des champs de pression à l'intérieur la couche de fluide inter-électrodes et dans la cavité arrière, (iv) la nature non uniforme du champ de pression dans la cavité arrière en hautes fréquences (jusqu'à 100 kHz), (v) les expressions " exactes " (et non les limites basses fréquences) pour les admittances de transfert des ouvertures de l'électrode arrière.

Dans le troisième chapitre, la solution du problème fondamental, problème à couplage multiple, est obtenue dans un premier temps en faisant usage de théories modales appropriées pour les résolutions successives des systèmes d'équations régissant le champ de déplacement de la membrane et les écarts instantanés de pression dans la couche de fluide inter-électrodes et dans la cavité arrière, pressions couplées entre elles par les orifices de l'électrode arrière et la fente périphérique. Dans un second temps, la solution analytique du problème est obtenue en écrivant les conditions d'interfaces entre les différents domaines considérés, par couplage des solutions obtenues précédemment avec les équations qui portent sur le comportement des ouvertures de l'électrode arrière. Finalement, l'approche proposée ici mène à l'expression du champ de déplacement de la membrane qui dépend à la fois des coordonnées radiale et azimutale, résultat analytique nouveau, et qui est exprimé en fonction des propriétés physiques du fluide considéré, des caractéristiques mécaniques et géométriques du microphone, et du champ de pression incident. À noter que les résultats peuvent toutefois être améliorés en tenant compte de la géométrie réelle des ouvertures de l'électrode arrière (sources de débits) en ne les considérant plus comme des sources de débit ponctuelles et linéique, respectivement pour les orifices et pour la fente périphérique, élargissant de la sorte l'éventail des modes à retenir.

La caractérisation expérimentale du champ de déplacement de la membrane d'un microphone capacitif permet pour la première fois de mettre en évidence sa nature non uniforme (voire fortement non uniforme) en hautes fréquences et de quantifier son amplitude sur toute la surface de sa membrane. Les mesures réalisées avec un vibromètre laser à balayage montrent bien l'influence qu'exercent les orifices de l'électrode arrière sur la déformée, notamment à 57 kHz et à 72 kHz où six « bosses » apparaissent sur le champ de déplacement, localisées aux emplacements des

six orifices de l'électrode arrière du microphone utilisé. Les résultats théoriques, obtenus avec la modélisation présentée dans ce mémoire et pour un nombre limité de modes, sont en bon accord avec les résultats expérimentaux, tant en terme d'allure de déformée qu'en terme d'amplitude du déplacement au centre de la membrane et au droit des orifices. Toutefois, des différences entre les champs de déplacement calculé et mesuré apparaissent sur la périphérie de la membrane, ce qui montre que le modèle tend à surestimer le déplacement sur cette partie du diaphragme (ceci provenant vraisemblablement de la troncature des modes et de la nature supposée ponctuelle ou linéique des ouvertures de l'électrode arrière). Par ailleurs, le circuit équivalent, obtenu à partir du modèle en ne conservant qu'un seul mode et dont les expressions des différents composants sont données en annexe C, permet d'une part de mettre en évidence les différents couplages qui existent entre les domaines qui constituent le microphone et d'autre part de calculer aisément la sensibilité et le bruit thermo-mécanique du transducteur. Les résultats théoriques obtenus pour le module de la sensibilité, qui sont ici exprimés en valeurs absolues (dB référencé à 1 V/Pa) et non en valeurs relatives adimensionnées comme c'est le cas dans la littérature pour les modèles analytiques, sont, aux basses fréquences, proches de la sensibilité donnée par le constructeur sur la charte de calibration, quels que soient les degrés d'approximations retenus. À noter que les tracés de la sensibilité en fonction de la fréquence issus de calculs effectués pour différentes valeurs de la capacité électrique (hors tension de polarisation du microphone), montrent l'influence de ce paramètre à la fois sur la position du maximum de l'amplitude de la sensibilité et également sur la valeur de la sensibilité aux basses fréquences. Les résultats mettent également en évidence le domaine de validité du modèle qui couvre respectivement les intervalles de fréquences (0 – 30 kHz), (0 – 10 kHz) et (0 – 1 kHz) selon que cette sensibilité est calculée en tenant compte (i) de la déformée relativement précise de la membrane (modes $m = 0$ et $n = 0$ à 10), (ii) d'un seul mode avec les expressions « exactes » des paramètres du circuit équivalent, ou des expressions approchées à l'ordre 0 des paramètres du circuit équivalent. Finalement, les valeurs obtenues pour le bruit thermique (exprimées en fonction de la fréquence) sont calculées en utilisant les expressions approchées à l'ordre 1 et à l'ordre 0 des paramètres du circuit équivalent, montrant un bon accord avec les résultats disponibles dans la littérature.

En définitive, la modélisation analytique de microphones capacitifs proposée ici tient compte à la fois des effets de couches limites thermiques, dont l'étude préliminaire a notamment permis de justifier la condition « isotherme » sur une membrane mince, mais également de l'influence locale des orifices de l'électrode arrière. Les solutions analytiques obtenues, qui dépendent à la fois des coordonnées radiale et azimutale, doivent permettre de caractériser le comportement du microphone en fluides divers, à des pressions et des températures statiques variées, et pour une large gamme de fréquences (de quelques Hertz jusqu'à 100 kHz). Les résultats théoriques présentés montrent une bonne cohérence avec les résultats expérimentaux du champ de déplacement de la membrane d'une part et avec les résultats disponibles dans la littérature d'autre part. Il convient toutefois de noter de légers écarts d'une part entre les résultats théoriques et les résultats

expérimentaux du champ de déplacement sur la périphérie de la membrane, et d'autre part entre les valeurs calculées et celles données par le constructeur pour la sensibilité aux basses fréquences. Ces résultats théoriques peuvent être améliorés en tenant compte d'un nombre plus important de modes et en modélisant les ouvertures de l'électrode arrière de manière plus réaliste (c'est-à-dire en ne les modélisant pas par des sources de débits ponctuelles et linéiques).

Ce modèle de microphone peut être utilisé dans des systèmes plus complexes, par exemple ceux impliquant le couplage avec une cavité, comme celle cylindrique utilisée pour l'étalonnage de microphones par la méthode de réciprocité en coupleur ou celle sphérique utilisée pour la mesure précise de la célérité du son, méthodes qui requièrent toutes deux de connaître avec précision le champ de déplacement de la membrane du microphone, aussi bien lorsque celui-ci est utilisé en émetteur qu'en récepteur. Comme mentionné précédemment, ce modèle doit également permettre d'obtenir des résultats précis dans des conditions de pressions basses ou élevées, de températures basses ou élevées et dans des gaz de différentes natures, ce qui reste à vérifier et à préciser.

Annexe A

Généralités sur le microphone capacitif

Le terme « microphone » est pour la première fois apparu, en 1827, dans la description d'un appareil acoustique faite par Sir Charles Wheatstone [80]. Ce terme est la combinaison de deux mots d'origine grecque, *mikros* (petit) et *phônê* (son, voix), qui initialement décrivait un « instrument qui augmente l'intensité des sons de manière à les rendre perceptibles » [81] (cette définition est à prendre dans le sens où le microphone permet d'augmenter la sensation auditive au même titre que le microscope permet d'augmenter la perception visuelle). À la fin du XIX^{ème} siècle, la définition de ce mot évolue et détermine dès lors un appareil transformant les vibrations sonores en oscillations électriques (ou optiques).

La transduction acousto-électrique s'opère en deux temps : (i) l'énergie acoustique est convertie en énergie mécanique par la mise en vibration d'un élément mécanique mince, puis (ii) l'énergie mécanique est convertie en énergie électrique. Lorsque, dans un milieu fluide (comme par exemple de l'air), des ondes acoustiques (écart instantané de pression autour de la pression statique du milieu de propagation) arrivent sur un élément mécanique de fine épaisseur (comme une membrane), elles ont pour effet de faire vibrer l'élément mécanique assurant ainsi la conversion acousto-mécanique. La conversion mécano-électrique peut être assurée par divers types de transduction, qui ont donné lieu à différents types de microphones : le microphone électrodynamique (à bobine mobile ou à ruban), le microphone électrostatique (à polarisation externe ou à électret), ou encore les microphones piézorésistif, piézoélectrique et à polymère piézoélectrique (Polyfluorure de vinylidène ou plus simplement le PVDF).

Dans le domaine de la métrologie, le microphone électrostatique à polarisation externe est préféré aux autres types de microphones et s'impose notamment de par sa sensibilité (rapport de la tension électrique délivrée aux bornes du transducteur pour une pression acoustique de 1 Pascal ; elle est exprimée en V/Pa ou encore en dB référencé à 1 V/Pa), sa large bande passante (intervalle continu de fréquences, dont les valeurs limites sont calculées et correspondent à un niveau de -3 dB par rapport à l'amplitude de la sensibilité à 1 kHz) et présente l'avantage d'être un transducteur réciproque (c'est-à-dire qu'il peut être utilisé comme émetteur ou récepteur).

A.1 Architecture, performances et analogies électro-mécaniques

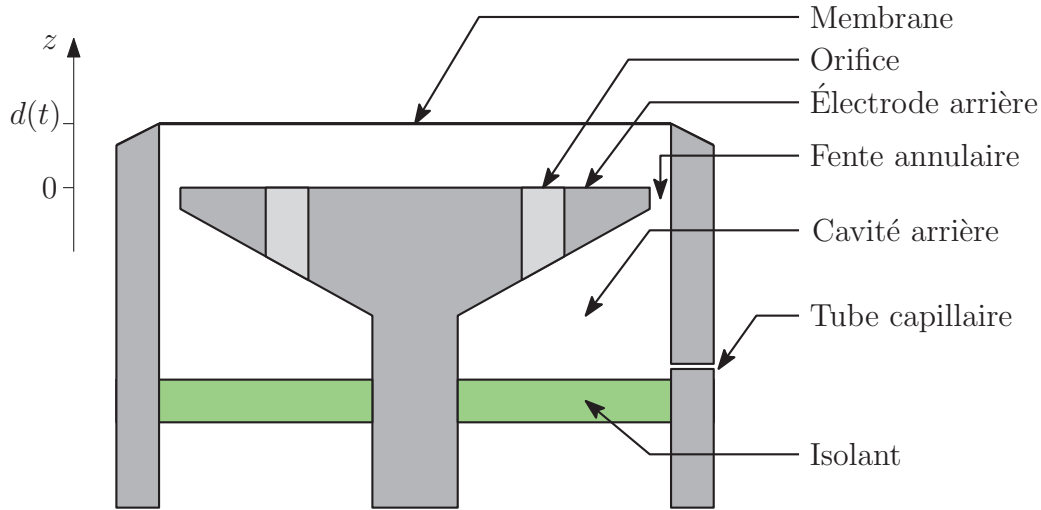


FIGURE A.1 – Schéma d'un microphone électrostatique

Le diaphragme du microphone (l'électrode avant) est une fine membrane (cf. figure A.1) qui est tendue et simplement appuyée sur sa périphérie. En analogie électro-mécanique, cet élément mécanique est caractérisé par la capacitance C_m (inversement proportionnelle à la tension mécanique T de la membrane) qui traduit la souplesse du diaphragme, et l'inductance L_m (liée à la masse surfacique M_s de la membrane) qui traduit l'inertie du diaphragme ; l'impédance mécanique Z_m de la membrane et les expressions de C_m et L_m sont données en annexe C (C.39-C.40). La première fréquence de résonance de la membrane *in vacuo* est donnée par $f_1 = 1/\sqrt{L_m C_m}$; à des pressions statiques $P_0 > 0$, l'amplitude du déplacement de la membrane à cette résonance dépend de l'amortissement visqueux dans la couche de fluide située entre les électrodes comme illustré sur la figure A.2.

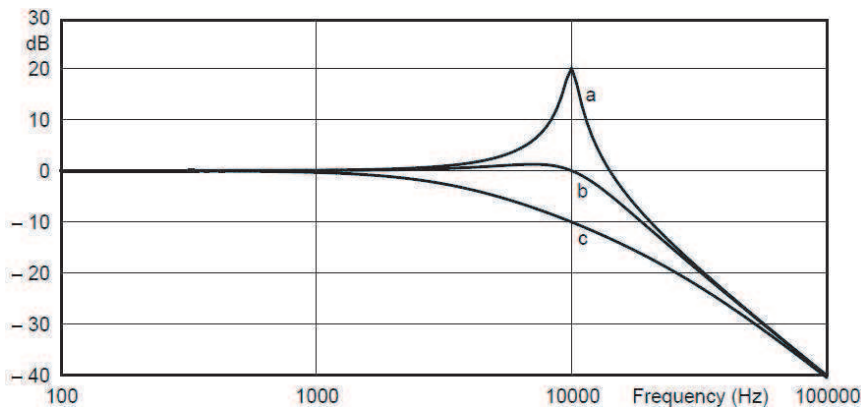


FIGURE A.2 – Influence de l'amortissement par effet visqueux sur l'amplitude de la sensibilité en haute fréquence d'un microphone capacitif [36] : (a) faible amortissement, (b) amortissement optimal, (c) fort amortissement

Pour réduire l'amplitude du pic à la fréquence de résonance de la membrane sur la sensibilité du microphone, et ainsi obtenir une sensibilité la plus uniforme possible sur une bande passante élargie, il est possible d'agir sur l'amortissement visqueux du fluide dans l'entrefer. L'électrode arrière étant confinée dans la capsule microphonique, la vibration de la membrane entraîne le mouvement du fluide situé dans l'entrefer vers la cavité arrière par le biais de la fente périphérique et des orifices de l'électrode arrière, qui, de par leurs géométries, amortissent le mouvement du fluide par effet visqueux. Cet amortissement peut être contrôlé en changeant le nombre et la taille des orifices de l'électrode arrière et la distance inter-électrodes. La figure A.2 illustre l'influence de l'amortissement sur la sensibilité du microphone pour trois cas distincts, la courbe (b) étant l'amortissement optimal recherché lors de la conception du microphone.

La cavité arrière joue un rôle important dans le fonctionnement du microphone dont l'objet est de rendre constante la sensibilité du microphone aux basses fréquences. Le mouvement de la membrane entraîne le mouvement fluide dans cette cavité (via les orifices de l'électrode arrière et sa fente périphérique) où il subit un cycle de compression/détente. Par analogie électro-mécanique, une « petite cavité » est aux basses fréquences représentée par une capacitance C_C (traduisant la compressibilité du fluide dans la cavité), qui, dans l'hypothèse de transformation adiabatique, est exprimée par

$$C_C = V_C \chi_T / \gamma, \quad (\text{A.1})$$

où V_C est le volume de la cavité et $\chi_s = \chi_T / \gamma$ la compressibilité adiabatique du fluide ; l'impédance mécanique $Z_C = 1/(i\omega C_C)$ de la cavité (C.34), en raison du facteur $1/(i\omega)$, fait passer la pente de la sensibilité aux basses fréquences de 6 dB/octave à 0 dB/octave (figure A.3).

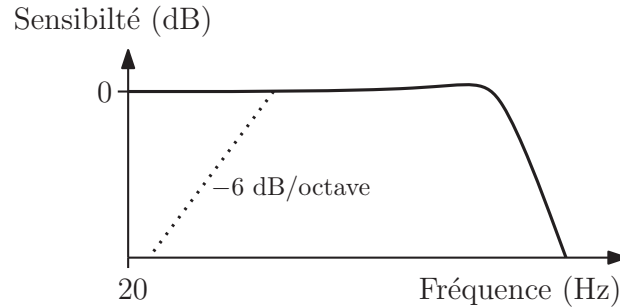


FIGURE A.3 – Représentation schématique de l'influence de la présence de la cavité arrière sur la sensibilité d'un microphone capacitif en fonction de la fréquence : (..) sans et (—) avec cavité arrière

La cavité arrière n'est pas un volume parfaitement hermétique car elle est reliée au milieu extérieur par un tube « capillaire ». Ce tube a pour rôle d'équilibrer la pression statique (typiquement la pression atmosphérique) entre le fluide à l'intérieur et à l'extérieur du microphone, sans quoi la déflexion statique de la membrane serait soumise au variation de pression statique du milieu extérieur. D'un point de vue acoustique, ce tube « capillaire », également appelé tube d'égalisation de pression, n'a pas d'influence sur le fonctionnement du microphone au-delà de quelques hertz.

A.2 Principe de la transduction électro-mécanique

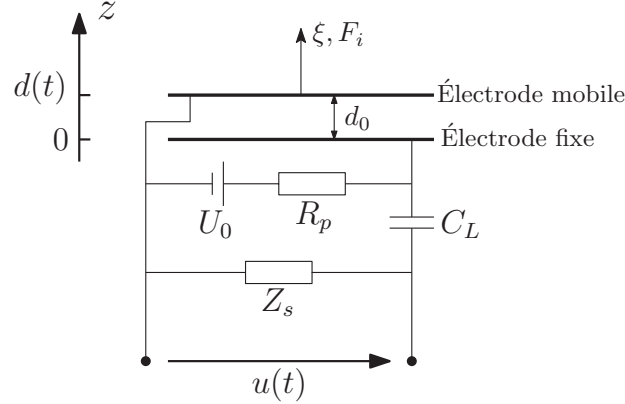


FIGURE A.4 – Représentation schématique d'un microphone électrostatique avec sa résistance de polarisation R_p et sa capacité de liaison C_L

Un transducteur capacitif est un condensateur électrique, de surface S et de permittivité diélectrique ϵ , constitué de deux électrodes, l'une fixe (l'électrode arrière) et l'autre mobile (la membrane qui est l'électrode avant). Sa capacité électrique au repos C_0 , qui dépend de la distance inter-électrodes d_0 (cf. figure A.4), est définie par

$$C_0 = \frac{\epsilon S}{d_0}.$$

Lorsque la membrane vibre, la distance inter-électrodes $d(t)$ oscille autour de la distance au repos d_0 d'une distance notée $\xi(t)$. La capacité électrique instantanée du condensateur

$$C(t) = \frac{\epsilon S}{d(t)} = \frac{\epsilon S}{d_0 + \xi(t)} = \frac{C_0}{1 + \frac{\xi(t)}{d_0}}, \quad (\text{A.2})$$

est reliée à la charge électrique $Q(t)$ du condensateur et à la différence de potentiel $U(t)$ entre les deux électrodes

$$U(t) = \frac{Q(t)}{C(t)} = \frac{Q(t)}{C_0} \left(1 + \frac{\xi(t)}{d_0} \right), \quad (\text{A.3})$$

où le second terme indique un couplage électro-mécanique.

Le fait d'appliquer une tension (électrique) de polarisation U_0 aux bornes du condensateur permet de linéariser cette dernière équation et implique $U(t) = U_0 + u(t)$ et $Q(t) = Q_0 + q(t)$, où $Q_0 = C_0 U_0$ est la charge au repos du condensateur et $q(t)$ la variation de charge. Compte tenu de ces expressions, l'équation (A.3) s'écrit

$$U(t) = U_0 + u(t) = U_0 + \frac{1}{C_0} q(t) + \frac{U_0}{d_0} \xi(t) + \frac{q(t) \xi(t)}{d_0 C_0}, \quad (\text{A.4})$$

ou encore en première approximation

$$u(t) = \frac{1}{C_0} q(t) + \frac{U_0}{d_0} \xi(t), \quad (\text{A.5})$$

où $u(t)$ est la variation de tension aux bornes des électrodes, qui représente soit une des deux quantités de sortie ou d'entrée suivant que le microphone est utilisé en récepteur ou en émetteur. Dans le cas de signaux harmoniques de pulsation ω , et compte tenu du fait que l'intensité électrique s'exprime $i(t) = \partial_t q(t)$, et que la vitesse du diaphragme s'exprime $v(t) = \partial_t \xi(t)$, l'équation (A.5) donne directement la première des deux équations de couplage

$$u(t) = \frac{1}{i\omega C_0} i(t) + \frac{U_0}{i\omega d_0} v(t). \quad (\text{A.6})$$

La seconde équation de couplage traduit l'équilibre des forces appliquées sur la membrane. La force $F_i(t)$ appliquée sur la membrane (représentant la seconde quantité d'entrée ou de sortie suivant que le microphone est utilisé en récepteur ou en émetteur) équilibre la force électrostatique, soit, compte tenu de l'orientation choisie (figure A.4) :

$$F_i(t) = \frac{1}{2C_0 d_0} [Q_0 + q(t)]^2, \quad (\text{A.7a})$$

$$= \frac{Q_0^2}{2C_0 d_0} + \frac{Q_0}{C_0 d_0} q(t) + \frac{1}{2C_0 d_0} q^2(t), \quad (\text{A.7b})$$

soit au premier ordre des perturbations,

$$F_{i_0} + f_i(t) \cong \frac{Q_0^2}{2C_0 d_0} + \frac{U_0}{d_0} q(t), \quad (\text{A.8a})$$

d'où la seconde équation de couplage, en régime sinusoïdal,

$$f_i(t) \cong \frac{U_0}{i\omega d_0} i(t). \quad (\text{A.9a})$$

Le système d'équations couplées (A.6) et (A.9) peut être représenté par le circuit équivalent (figure A.5) où le terme $U_0 C_0 / (-d_0)$ est le facteur de conversion électro-mécanique.

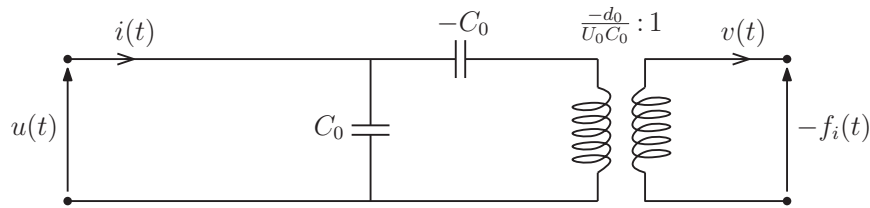


FIGURE A.5 – Circuit électrique équivalent de la transduction électro-mécanique

Annexe B

Champ de pression dans la cavité arrière : approximations basses fréquences

Dans le domaine de fréquences considéré ici, lorsque le microphone est utilisé pour des applications classiques (typiquement jusqu'à 20 kHz), le champ de pression p_C dans la cavité et le débit U_2 de la fente périphérique peuvent être considérés indépendants de la coordonnée azimutale θ (c'est-à-dire pour $m = 0$). Le champ de pression p_C peut ainsi prendre la forme suivante :

$$p_C(r) = -\frac{i\omega\rho_0}{F_v\varepsilon_C} [U_1 G_C(r, r_1) + U_2 G_C(r, r_2)], \quad (\text{B.1})$$

où la fonction de Green $G_C(r, r_0)$, satisfaisant la condition de Neumann (en $r = a$), est donnée par

$$G_C(r, r_0) = \sum_n \frac{\varphi_{0n}(r_0)}{\kappa_{0n}^2 - \chi_C^2} \varphi_{0n}(r), \quad (\text{B.2})$$

et les fonctions propres $\varphi_{0n}(r)$ par

$$\varphi_{0n}(r) = \nu_{0n} J_0(\kappa_{0n}r). \quad (\text{B.3})$$

Le champ de pression (B.1), exprimé successivement aux coordonnées d'un orifice de l'électrode arrière ($r = r_1$) et de la fente périphérique ($r = r_2$), mène au système d'équations qui relient les écarts instantanés de pression $p_C(r_1)$ et $p_C(r_2)$ aux débits U_1 des orifices et U_2 de la fente périphérique. Ce système d'équations, écrit sous forme matricielle, est donné par

$$\begin{bmatrix} p_C(r_1) \\ p_C(r_2) \end{bmatrix} = -\frac{i\omega\rho_0}{F_v\varepsilon_C} \begin{bmatrix} G_C(r_1, r_1) & G_C(r_1, r_2) \\ G_C(r_2, r_1) & G_C(r_2, r_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Ainsi, le système d'équations composé des expressions (B.4), (2.28) et (2.30) mène à la relation suivante

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

où

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \varepsilon_C Y_1 Y_2 G_C(r_2, r_2) + \frac{\varepsilon_C^2 F_v Y_1}{i\omega\rho_0} & -\varepsilon_C Y_1 Y_2 G_C(r_1, r_2) \\ -\varepsilon_C Y_1 Y_2 G_C(r_1, r_2) & \varepsilon_C Y_1 Y_2 G_C(r_1, r_1) + \frac{\varepsilon_C^2 F_v Y_2}{i\omega\rho_0} \end{bmatrix}}{\frac{i\omega\rho_0}{F_v} \left[Y_1 Y_2 G_C(r_1, r_1) G_C(r_2, r_2) - Y_1 Y_2 G_C^2(r_1, r_2) \right] + \varepsilon_C \left[Y_1 G_C(r_1, r_1) + Y_2 G_C(r_2, r_2) + \frac{\varepsilon_C F_v}{i\omega\rho_0} \right]}. \quad (\text{B.6})$$

Il convient de noter que ces résultats à l'ordre le plus bas ($n = 0$), donnés par

$$\kappa_{00} = 0, \quad \varphi_{00} = 1/(\sqrt{\pi} a), \quad G_C = -c_0^2 / (\pi a^2 \omega^2), \quad (\text{B.7})$$

mènent à l'expression suivante du champ de pression dans la cavité arrière (champ uniforme)

$$p_C = -\frac{\rho_0 c_0^2}{i\omega V_C} (U_1 + U_2) = -\frac{\gamma P_0}{i\omega V_C} (U_1 + U_2), \quad (\text{B.8})$$

où $V_C \cong \pi a^2 \varepsilon_C$ est le volume de la cavité arrière et P_0 la pression statique. Ainsi, l'admittance d'entrée d'une « petite cavité » de volume V_C est obtenue par le rapport du débit total ($-U_1 - U_2$) sur le champ de pression p_C

$$Y_C = 1/Z_C = (i\omega V_C)/(\gamma P_0) = i\omega V_C \chi_T/\gamma, \quad (\text{B.9})$$

ce qui s'avère être une bonne approximation aux basses fréquences.

L'équation (B.6) peut donc s'écrire aux basses fréquences

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{Y_1 + Y_2 + Y_C} \begin{bmatrix} -Y_1(Y_2 + Y_C) & Y_1 Y_2 \\ Y_1 Y_2 & -Y_2(Y_1 + Y_C) \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

avec $Y_2 = 2\pi y_2$.

Dans la mesure où la hauteur h_2 de la fente périphérique est inférieure à la hauteur h_1 des orifices et à la largeur e de la fente, l'équation (B.10) peut prendre la forme suivante

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y_1 & Y_1 \\ Y_1 & -(Y_1 + Y_C) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Annexe C

Circuit électrique équivalent : approximations basses fréquences

L'impédance d'entrée du microphone est ici calculée en ne conservant que le mode ($m = n = 0$). Les expressions de chaque paramètre sont données sous leur forme « exacte » et sous leurs formes approchées pour plusieurs degrés d'approximations. Dans un premier paragraphe sont introduites des notations utiles employées par la suite pour le calcul de l'impédance d'entrée du microphone présenté dans le second paragraphe.

i Notations utilisées pour le calcul de l'impédance d'entrée du microphone

L'impédance Z_g est définie ici comme étant l'impédance équivalente de deux impédances en parallèle (Z_v et Z_h) telle que

$$\frac{1}{Z_g} = \frac{1}{Z_v} + \frac{1}{Z_h}, \quad (\text{C.1})$$

où

$$Z_v = \frac{i \omega \rho_0}{4 \pi \varepsilon F_v}, \quad (\text{C.2})$$

$$Z_h = \frac{-i \omega \rho_0 K_{00}^2}{4 \pi \varepsilon F_v \chi^2}. \quad (\text{C.3})$$

Le facteur F_v (dans C.2), donné par l'équation (2.10) faisant intervenir la porosité ϕ_r de l'électrode arrière, et le produit $F_v \chi^2$ (dans C.3) peuvent respectivement s'écrire, considérant que $(2 - \phi_r)/2 = 0.94 \cong 1$ et d'après les équations (2.22) et (2.16) donnant les expressions de χ^2 et de

F_h ,

$$F_v = 1 - \frac{2 - \phi_r}{2} \frac{tg(k_v \varepsilon / 2)}{k_v \varepsilon / 2} \cong \frac{-1}{3} \left(k_v \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \left[1 + \frac{2}{5} \left(k_v \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \right] = \left[\frac{12 \mu}{i \omega \rho_0 \varepsilon^2} + \frac{6}{5} \right]^{-1} \quad (\text{C.4})$$

et

$$F_v \chi^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} [1 + (\gamma - 1) (1 - F_h)] = \frac{\omega^2}{c_0^2} \left[1 + (\gamma - 1) \frac{2 - \phi_r}{2} \frac{tg(k_h \varepsilon / 2)}{k_h \varepsilon / 2} \right] \quad (\text{C.5})$$

$$\cong \frac{\rho_0 \chi_T \omega^2}{1 + i \omega \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_0 C_P \varepsilon^2}{12 \lambda_h}} = -i \omega \frac{\rho_0 K_{00}^2}{4 \pi \varepsilon Z_h} \cong \gamma \frac{\omega^2}{c_0^2} = \rho_0 \chi_T \omega^2, \quad (\text{C.6})$$

ce qui mène aux expressions suivantes :

$$Z_v \cong R_\mu + i \omega L_\mu = \frac{12 \mu}{4 \pi \varepsilon^3} + i \omega \frac{1}{4 \pi \varepsilon} \frac{6 \rho_0}{5} \cong \frac{12 \mu}{4 \pi \varepsilon^3}, \quad (\text{C.7})$$

$$Z_h \cong R_h + \frac{1}{i \omega C_h} = \frac{K_{00}^2 [(\gamma - 1) / \gamma] \rho_0 C_P \varepsilon}{4 \pi \chi_T 12 \lambda_h} + \frac{1}{i \omega 4 \pi \varepsilon \chi_T / K_{00}^2} \cong \frac{1}{i \omega 4 \pi \varepsilon \chi_T / K_{00}^2} \quad (\text{C.8})$$

et (sachant que $j_{00} = K_{00} a$),

$$Z_G = (2 / j_{00})^2 Z_g, \quad (\text{C.9a})$$

$$Z_V = (2 / j_{00})^2 Z_v, \quad (\text{C.9b})$$

$$Z_H = (2 / j_{00})^2 Z_h \cong 1 / (i \omega \pi a^2 \varepsilon \chi_T), \quad (\text{C.9c})$$

cette dernière expression représentant la compressibilité isotherme de la couche de fluide inter-électrode. Dans les équations (C.4), (C.6-C.8) et (C.9c), le dernier terme dans le membre de droite correspond aux approximations basses fréquences à l'ordre le plus bas.

ii Calcul de l'impédance d'entré du microphone

Compte tenu des expressions (3.8), (3.11) et (3.12a-3.12b), le produit scalaire de l'équation (2.1a) avec la fonction propre ψ_{00} mène directement à

$$\left[T \left(K_{00}^2 - K^2 \right) + Q_{00} 2 \pi \langle \psi_{00}(r) | J_0(\chi r) \rangle - \frac{\rho_0 \omega^2 / \varepsilon F_v}{K_{00}^2 - \chi^2} - 2 \pi \langle \psi_{00}(r) | \Pi_{00} \rangle \right] \xi_{00} = -p_{av} 2 \pi \langle \psi_{00}(r) \rangle, \quad (\text{C.10})$$

où, dans le membre de gauche, le second terme, le troisième terme et le quatrième terme sont respectivement associés aux solutions du champ de pression dans la couche de fluide inter-électrodes p_h (3.11), p_ξ (3.12a) et p_u (3.18) et où, d'après les équations (3.13) et (3.18), et sachant que

$$J_0(\kappa_{00}r) = 1 \quad (\kappa_{00} = 0),$$

$$Q_{00} = \frac{\rho_0 \omega^2}{\varepsilon F_v} \frac{N_{00}}{K_{00}^2 - \chi^2} \frac{K_{00} J'_0(K_{00}a)}{\chi J'_0(\chi a)} = \frac{\rho_0 \omega^2}{K_{00}^2} \frac{K_{00}^2/(\varepsilon F_v)}{K_{00}^2 - \chi^2} \frac{1/(\sqrt{\pi} a)}{J_1(K_{00}a)} \frac{K_{00} J'_0(K_{00}a)}{\chi J'_0(\chi a)} \quad (\text{C.11})$$

$$\cong i \omega \frac{2\sqrt{\pi}}{K_{00}} \frac{Z_h}{Z_v} Z_G \frac{1}{1 - (1/2) (\chi a/2)^2} = i \omega \frac{2\sqrt{\pi}}{K_{00}} \frac{Z_h}{Z_v} Z_G \frac{1}{1 + (1/2) Z_v/Z_H}, \quad (\text{C.12})$$

$$\psi_{00}(r) = \frac{J_0(K_{00}r)}{\sqrt{\pi} a J_1(K_{00}a)} \cong \frac{1 - (K_{00}r/2)^2}{\pi a^2 K_{00}/(2\sqrt{\pi}) [1 - (1/2) (K_{00}a/2)^2]}, \quad (\text{C.13})$$

$$2\pi \langle \psi_{00}(r) \rangle = 2\sqrt{\pi}/K_{00}, \quad (\text{C.14})$$

$$2\pi \langle \psi_{00} | J_0(\chi r) \rangle = \frac{2\sqrt{\pi}}{a J_1(K_{00}a)} \frac{K_{00}a J_1(K_{00}a) J_0(\chi a)}{2 (K_{00}^2 - \chi^2)} = \frac{2\sqrt{\pi} K_{00}}{(K_{00}^2 - \chi^2)} J_0(\chi a) \quad (\text{C.15})$$

$$\cong \frac{2\sqrt{\pi}}{K_{00}} \frac{K_{00}^2}{(K_{00}^2 - \chi^2)} \left[1 - \left(\frac{\chi a}{2} \right)^2 \right] = \frac{2\sqrt{\pi}}{K_{00}} \frac{Z_g}{Z_v} \left[1 + \frac{Z_v}{Z_H} \right] \quad (\text{C.16})$$

et

$$\Pi_{00} = \Pi_{00} J_0(\kappa_{00}r) = p_u(r)/\xi_{00}. \quad (\text{C.17})$$

Il convient de noter que la surface « effective » de la membrane est donnée par

$$(2\sqrt{\pi}/K_{00})^2 = \pi a^2/(K_{00}a/2)^2 \cong \pi a^2/(j_{00}/2)^2 \cong 0.7 \pi a^2. \quad (\text{C.18})$$

D'après les notations (3.31f) et (3.31g), considérant que $r_2 \cong a$, le paramètre $\Pi_{00} = p_u(r)/\xi_{00}$ peut prendre la forme suivante :

$$\Pi_{00} = (\sigma_{00}/\xi_{00}) \left\{ H_{00}^{(I)} p(r_1) + H_{00}^{(II)} p_0^{(1)}(a) \right\}, \quad (\text{C.19})$$

avec, compte tenu de (B.10),

$$\sigma_{00} = \frac{i \omega \rho_0}{\varepsilon F_v} \frac{\nu_{00}^2}{\kappa_{00}^2 - \chi^2} = \frac{i \omega \rho_0/(\varepsilon F_v)}{\pi a^2 (\kappa_{00}^2 - \chi^2)} = \frac{-i \omega \rho_0}{\pi a^2 \varepsilon F_v \chi^2} = \left(\frac{2}{K_{00}a} \right)^2 Z_h = Z_H, \quad (\text{C.20})$$

$$H_{00}^{(I)} = y_{hh} J_0(\kappa_{00}r_1) + y_{h0} J_0(\kappa_{00}a) = y_{hh} + y_{h0} = -Y_C Y_1/(Y_C + Y_1 + Y_2) \quad (\text{C.21})$$

et

$$H_{00}^{(II)} = H_{000}^{(II)} = y_{h0} J_0(\kappa_{00}r_1) + y_{00} J_0(\kappa_{00}a) = y_{h0} + y_{00} = -Y_C Y_2/(Y_C + Y_1 + Y_2). \quad (\text{C.22})$$

Compte tenu de l'expression de $p(r)$ [paragraphe 3.2, équations 3.9, 3.11, (3.12a-3.13) et 3.18],

$$\frac{p(r)}{\xi_{00}} = -Q_{00} J_0(\chi r) + \frac{\rho_0 \omega^2/\varepsilon F_v}{K_{00}^2 - \chi^2} \psi_{00}(r) + \Pi_{00}, \quad (\text{C.23})$$

l'équation C.19 prend la forme

$$\Pi_{00} = \sigma_{00} \left\{ H_{00}^{(I)} \left[F_{00}^{(1)}(r_1) + \Pi_{00} \right] + H_{00}^{(II)} \left[F_{00}^{(2)}(r_2) + \Pi_{00} \right] \right\} \quad (\text{C.24})$$

où

$$F_{00}^{(i)}(r_i) = -Q_{00} J_0(\chi r_i) + \frac{\rho_0 \omega^2 / (\varepsilon F_v)}{K_{00}^2 - \chi^2} \psi_{00}(r_i) \quad (\text{C.25})$$

$$\cong -i\omega \frac{2\sqrt{\pi}}{K_{00}} \left[\frac{Z_h}{Z_v} Z_G \frac{J_0(\chi r_i)}{1 + (1/2) Z_v/Z_H} + \frac{2\sqrt{\pi}}{K_{00}} Z_g \frac{J_0(K_{00} r_i)}{\sqrt{\pi} a J_1(K_{00} a)} \right] \quad (\text{C.26})$$

$$\cong -i\omega \frac{2\sqrt{\pi}}{K_{00}} Z_G \left[\frac{Z_h}{Z_v} \frac{1 + (K_{00} r_i/2)^2 (Z_v/Z_h)}{1 + (1/2) Z_v/Z_H} + \frac{1 - (K_{00} r_i/2)^2}{1 - (1/2) (K_{00} a/2)^2} \right] \quad (\text{C.27})$$

$$\cong -i\omega \frac{2\sqrt{\pi}}{K_{00}} Z_G \left[\frac{Z_h}{Z_v} + 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{K_{00} r_i}{2} \right)^2 \frac{Z_v}{Z_H} \right] \quad (\text{C.28})$$

$$\cong -i\omega \frac{2\sqrt{\pi}}{K_{00}} Z_G \frac{Z_H}{Z_G} = -i\omega \frac{2\sqrt{\pi}}{K_{00}} Z_H, \quad (\text{C.29})$$

ce qui mène à l'expression suivante

$$\Pi_{00} = \frac{H_{00}^{(I)} F_{00}^{(1)} + H_{00}^{(II)} F_{00}^{(2)}}{(1/\sigma_{00}) - (H_{00}^{(1)} + H_{00}^{(2)})} = \frac{H_{00}^{(I)} F_{00}^{(1)} + H_{00}^{(II)} F_{00}^{(2)}}{1/Z_H + 1/Z_B}, \quad (\text{C.30})$$

avec

$$Z_B = Z_C + Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2), \quad (\text{C.31})$$

Z_1 , $Z_2 = 1/y_2$ et Z_C étant respectivement les impédances de transfert des perforations de l'électrode arrière (2.29), de la fente périphérique (2.31) et de la cavité arrière (B.9), leurs expressions approchées étant données par

$$Z_1 = \frac{1}{n_0 y_1} \cong \frac{1}{n_0} \left(\frac{8\mu h_1}{\pi R^4} + i\omega \frac{(4\rho_0/3) h_1}{\pi R^2} \right) \cong \frac{1}{n_0} \frac{8\mu h_1}{\pi R^4}, \quad (\text{C.32})$$

$$Z_2 \cong \frac{12\mu h_2}{2\pi a e^3} + i\omega \frac{(6\rho_0/5) h_2}{2\pi a e} \cong \frac{12\mu h_2}{2\pi a e^3} \quad (\text{C.33})$$

et

$$Z_C \cong 1/(i\omega C_C) \cong \gamma/(i\omega V_C \chi_T). \quad (\text{C.34})$$

L'impédance d'entrée du microphone

$$Z_{av} = \frac{-p_{av}}{i\omega \xi_{00} \langle \psi_{00}(r) \rangle} = \frac{1}{i\omega} \left(\frac{K_{00}}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 \left(\frac{-p_{av} 2\pi \langle \psi_{00}(r) \rangle}{\xi_{00}} \right) \quad (\text{C.35})$$

$$= \frac{1}{i\omega} \left(\frac{K_{00}}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 \left[T \left(K_{00}^2 - K^2 \right) - \frac{\rho_0 \omega^2 / \varepsilon F_v}{K_{00}^2 - \chi^2} + Q_{00} 2\pi \langle \psi_{00}(r) | J_0(\chi r) \rangle - 2\pi \langle \psi_{00}(r) | \Pi_{00} \rangle \right], \quad (\text{C.36})$$

peut prendre la forme suivante :

$$Z_{av} = Z_m + Z_g + Z_R, \quad (\text{C.37})$$

avec

$$Z_R = Z_Q + Z_P, \quad (\text{C.38})$$

où

$$Z_m = \frac{1}{i\omega} \left(\frac{K_{00}}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 T (K_{00}^2 - K^2) \cong i\omega L_m + \frac{1}{i\omega C_m}, \quad (\text{C.39})$$

avec

$$L_m = \frac{K_{00}^2}{4\pi} M_S, \quad C_m = \frac{4\pi}{K_{00}^4} \frac{1}{T}, \quad (\text{C.40})$$

$$Z_g = \frac{1}{i\omega} \left(\frac{K_{00}}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 \left[-\frac{\rho_0 \omega^2 / (\varepsilon F_v)}{K_{00}^2 - \chi^2} \right] \cong \frac{1}{\frac{1}{R_\mu + i\omega L_\mu} + \frac{1}{R_h + 1/(i\omega C_h)}}, \quad (\text{C.41})$$

avec

$$R_\mu = \frac{12\mu}{4\pi\varepsilon^3}, \quad L_\mu = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{6\rho_0}{5}, \quad R_h = \frac{K_{00}^2 [(\gamma - 1)/\gamma] \rho_0 C_P \varepsilon}{4\pi\chi_T 12\lambda_h}, \quad C_h = \frac{4\pi\varepsilon}{K_{00}^2} \chi_T, \quad (\text{C.42})$$

$$Z_Q = \frac{1}{i\omega} \left(\frac{K_{00}}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 Q_{00} 2\pi \langle \psi_{00}(r) | J_0(\chi r) \rangle = \left(\frac{Z_g}{Z_v} \right)^2 Z_H \left[1 + \frac{1}{2} \frac{Z_v}{Z_H} \right] \cong Z_H, \quad (\text{C.43})$$

$$Z_P = \frac{-1}{i\omega} \left(\frac{K_{00}}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 2\pi \langle \psi_{00}(r) | \Pi_{00} \rangle = \frac{1}{i\omega} \frac{K_{00}}{2\sqrt{\pi}} (-\Pi_{00}) \cong \frac{-Z_H}{1 + Z_B/Z_H}, \quad (\text{C.44})$$

Z_R prenant la forme suivant à l'ordre le plus bas des approximations :

$$Z_R \cong Z_H - \frac{Z_H}{1 + Z_B/Z_H} = \frac{Z_B}{1 + Z_B/Z_H} = \frac{Z_B Z_H}{Z_B + Z_H} \quad (\text{C.45})$$

Il convient de noter que :

- quand $Z_B \rightarrow 0$, $Z_R \rightarrow 0$, représentant la couche de fluide par un espace infini,
- quand $Z_B \rightarrow \infty$, $Z_R \rightarrow Z_H$, représentant la couche de fluide par un espace clos.

La relative complexité de l'impédance d'entrée Z_{av} met en évidence le comportement complexe du champ acoustique à l'intérieur de la capsule microphonique. Le circuit électrique équivalent, représenté sur la [figure 4.6](#) [équations [C.31](#) à [C.38](#)], permet de discerner la structure du transducteur en faisant apparaître les quatre domaines couplés qui constituent le microphone, mettant ainsi en évidence le rôle joué par chacun d'entre eux.

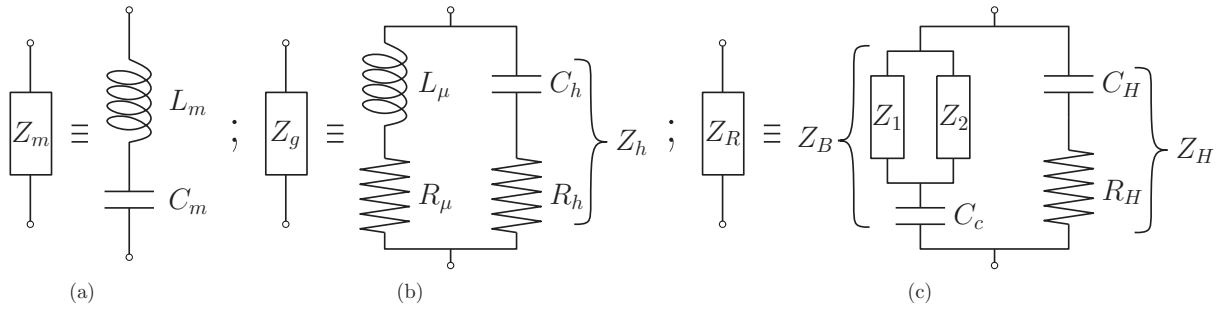


FIGURE C.1 – Représentation sous la forme de circuit électrique équivalent des impédances : (a) Z_m [équations (C.39-C.40)], (b) Z_g [équations (C.41-C.42)] et (c) Z_R [équations (C.31-C.34), (C.38) et (C.43-C.45)]

Annexe D

Champs de pression dans la couche de fluide inter-électrodes et dans la cavité arrière en fonction du champ de pression incident

Dans cette annexe sont donnés les détails des calculs des écarts instantanés de pression $p(r_1, \theta)$ et $p_\ell^{(\sigma)}(r_2)$ et les expressions des champs de pression dans la couche de fluide inter-électrodes et dans la cavité arrière en ne tenant compte que des modes azimutaux $m = 0$ et $m = 6$.

D.1 Écarts instantanés de pression dans l'espace inter-électrodes au droit des ouvertures de l'électrode arrière

Le champ de pression dans l'espace inter-électrodes, exprimé en fonction du champ de pression incident p_{av} et des écarts instantanés de pression au droit des orifices $p(r_1, \theta)$ et de la fente périphérique $p_\ell^{(\sigma)}(r_2)$, est donné par l'équation (3.38) rappelée ci-dessous :

$$p(r, \theta) = O_{av}(r, \theta) p_{av} + O_1(r, \theta) p(r_1, 0) + \sum_{\sigma=1,2} \sum_{\ell=0,n_0,\dots} O_{2\ell}^{(\sigma)}(r, \theta) p_\ell^{(\sigma)}(r_2), \quad (\text{D.1})$$

où

$$O_{av}(r, \theta) = \sum_m o_{avm}(r) \cos(m\theta), \quad (\text{D.2a})$$

avec

$$o_{avm}(r) = \sum_n \left[\frac{\alpha_{mn} E_{0n}}{1 - \sum_q \alpha_{mq} L_{mq}^{(1)}} J_m(\chi r) + \frac{\rho_0 \omega^2}{\varepsilon F_v} \frac{\Omega_{mn}^{(av)} N_{mn}}{K_{mn}^2 - \chi^2} J_m(K_{mn} r) \right], \quad (\text{D.2b})$$

$$O_1(r, \theta) = \sum_m o_{1m}(r) \cos(m\theta), \quad (\text{D.3a})$$

avec

$$o_{1m}(r) = \sum_n \left[\frac{\alpha_{mn} \sum_t D_{mnt}^{(1)} H_{mt}^{(I)}}{1 - \sum_q \alpha_{mq} L_{mq}^{(1)}} J_m(\chi r) + \frac{\rho_0 \omega^2}{\varepsilon F_v} \frac{\Omega_{mn}^{(h)} N_{mn}}{K_{mn}^2 - \chi^2} J_m(K_{mn} r) + \frac{i\omega \rho_0}{\varepsilon F_v} \frac{H_{mn}^{(I)} \nu_{mn}^2}{\kappa_{mn}^2 - \chi^2} J_m(\kappa_{mn} r) \right], \quad (\text{D.3b})$$

$$O_{2\ell}^{(1)}(r, \theta) = \sum_m o_{2m\ell}(r) \cos(m\theta), \quad (\text{D.4a})$$

avec

$$o_{2m\ell}(r) = \sum_n \left[\frac{\alpha_{mn} \sum_t D_{mnt}^{(1)} H_{mt\ell}^{(II)}}{1 - \sum_q \alpha_{mq} L_{mq}^{(1)}} J_m(\chi r) + \frac{\rho_0 \omega^2}{\varepsilon F_v} \frac{\Omega_{mn\ell}^{(S1)} N_{mn}}{K_{mn}^2 - \chi^2} J_m(K_{mn} r) + \frac{i\omega \rho_0}{\varepsilon F_v} \frac{H_{mn\ell}^{(II)} \nu_{mn}^2}{\kappa_{mn}^2 - \chi^2} J_m(\kappa_{mn} r) \right], \quad (\text{D.4b})$$

et

$$O_{2m}^{(2)}(r, \theta) = o_{2m}(r) \sin(m\theta) \quad (\text{D.5a})$$

avec

$$o_{2m}(r) = \sum_n \left[\frac{\alpha_{mn} \sum_t D_{mnt}^{(2)} H_{mt}^{(S)}}{1 - \sum_q \alpha_{mq} L_{mq}^{(2)}} J_m(\chi r) + \frac{\rho_0 \omega^2}{\varepsilon F_v} \frac{\Omega_{mn}^{(S2)} N_{mn}}{K_{mn}^2 - \chi^2} J_m(K_{mn} r) + \frac{i\omega \rho_0}{\varepsilon F_v} \frac{H_{mn}^{(S)} \nu_{mn}^2}{\kappa_{mn}^2 - \chi^2} J_m(\kappa_{mn} r) \right]. \quad (\text{D.5b})$$

Le champ de pression $p(r, \theta)$ (équation 3.38 ou D.1), écrit en $(r = r_1, \theta = 0)$ et en $(r = r_2)$, mène au système linéaire d'équations algébriques (3.40a, 3.40b et 3.40c). Après intégration sur la variable θ , il vient que les paramètres $p_\mu^{(2)}$ sont nuls et de ce fait que le champ de pression dans l'entrefer ne dépend pas des modes faisant intervenir la fonction $\sin(\theta)$. Ainsi, le système

d'équations (3.40a, 3.40b et 3.40c) s'écrit

$$p(r_1, 0) = O_{av}(r_1, 0)p_{av} + O_1(r_1, 0)p(r_1, 0) + \sum_{\ell=0, n_0, \dots, \mu} O_{2\ell}^{(1)}(r_1, 0)p_{\ell}^{(1)}(r_2) \quad (\text{D.6a})$$

$$p_0^{(1)}(r_2) = o_{av0}(r_2)p_{av} + o_{10}(r_2)p(r_1, 0) + \sum_{\ell=0, n_0, \dots, \mu} o_{20\ell}(r_2)p_{\ell}^{(1)}(r_2), \quad (\text{D.6b})$$

$$p_6^{(1)}(r_2) = o_{av6}(r_2)p_{av} + o_{16}(r_2)p(r_1, 0) + \sum_{\ell=0, n_0, \dots, \mu} o_{26\ell}(r_2)p_{\ell}^{(1)}(r_2), \quad (\text{D.6c})$$

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{\mu}^{(1)}(r_2) & = & o_{av\mu}(r_2)p_{av} & + & o_{1\mu}(r_2)p(r_1, 0) & + & \sum_{\ell=0, n_0, \dots, \mu} o_{2\mu\ell}(r_2)p_{\ell}^{(1)}(r_2). \end{array} \quad (\text{D.6d})$$

Ce système d'équations (D.6a-D.6d) écrit sous forme matricielle 3.41, permet de déterminer les écarts instantanés de pression au droit des orifices $p(r_1, 0)$ et au droit de la fente périphérique $p_{\mu}^{(1)}(r_2)$ exprimés en fonction du champ de pression incident p_{av} . Lorsque les seuls modes $m = 0$ et $m = 6$ sont pris en compte, les écarts instantanés $p(r_1, 0)$, $p_6^{(1)}(r_2)$ et $p_6^{(1)}(r_2)$ sont donnés par

$$p(r_1, 0) = \varphi^{(h)} p_{av}, \quad (\text{D.7a})$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi^{(h)} = \frac{1}{\Upsilon} & \left\{ \left[\left(1 - o_{200}(r_2) \right) \left(1 - o_{266}(r_2) \right) - o_{260}(r_2) o_{206}(r_2) \right] \sum_m o_{avm}(r_1) \right. \\ & + \left[o_{206}(r_2) o_{av6}(r_2) + o_{av0}(r_2) \left(1 - o_{266}(r_2) \right) \right] \sum_m o_{2m0}(r_1) \\ & \left. + \left[o_{av6}(r_2) \left(1 - o_{200}(r_2) \right) + o_{260}(r_2) o_{av0}(r_2) \right] \sum_m o_{2m6}(r_1) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.7b})$$

$$p_0^{(1)}(r_2) = \varphi_0^{(s_1)} p_{av}, \quad (\text{D.8a})$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(s_1)} = \frac{1}{\Upsilon} & \left\{ o_{av0}(r_2) \left(1 - o_{266}(r_2) \right) + o_{av6}(r_2) o_{206}(r_2) \right. \\ & + \left[o_{206}(r_2) o_{16}(r_2) + o_{10}(r_2) \left(1 - o_{266}(r_2) \right) \right] \sum_m o_{avm}(r_1) \\ & - \left[o_{av6}(r_2) o_{206}(r_2) + o_{av0}(r_2) \left(1 - o_{266}(r_2) \right) \right] \sum_m o_{1m}(r_1) \\ & \left. + \left[o_{av6}(r_2) o_{10}(r_2) - o_{av0}(r_2) o_{16}(r_2) \right] \sum_m o_{2m6}(r_1) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.8b})$$

et

$$p_6^{(1)}(r_2) = \varphi_6^{(s_1)} p_{av}, \quad (\text{D.9a})$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi_6^{(s_1)} = \frac{1}{\Upsilon} & \left\{ o_{av0}(r_2) o_{260}(r_2) + o_{av6}(r_2) \left(1 - o_{200}(r_2)\right) \right. \\ & + \left[o_{10}(r_2) o_{260}(r_2) + o_{16}(r_2) \left(1 - o_{200}(r_2)\right) \right] \sum_m o_{avm}(r_1) \\ & - \left[o_{av0}(r_2) o_{260}(r_2) + o_{av6}(r_2) \left(1 - o_{200}(r_2)\right) \right] \sum_m o_{1m}(r_1) \\ & \left. + \left[o_{av0}(r_2) o_{16}(r_2) - o_{av6}(r_2) o_{10}(r_2) \right] \sum_m o_{2m6}(r_1) \right\}, \quad (\text{D.9b}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Upsilon = & \left[\left(1 - o_{200}(r_2)\right) \left(1 - o_{266}(r_2)\right) - o_{260}(r_2) o_{206}(r_2) \right] \\ & + \left[o_{260}(r_2) o_{206}(r_2) - \left(1 - o_{200}(r_2)\right) \left(1 - o_{266}(r_2)\right) \right] \sum_m o_{1m}(r_1) \\ & - \left[o_{16}(r_2) o_{206}(r_2) + o_{10}(r_2) \left(1 - o_{266}(r_2)\right) \right] \sum_m o_{2m0}(r_1) \\ & - \left[o_{10}(r_2) o_{260}(r_2) + o_{16}(r_2) \left(1 - o_{200}(r_2)\right) \right] \sum_m o_{2m6}(r_1). \quad (\text{D.10}) \end{aligned}$$

D.2 Expression du champs de pression dans la couche de fluide inter-électrodes

Le champ de pression dans la couche de fluide inter-électrode, compte tenu de l'expression (3.38) et des expressions (3.42a-3.42c) des écarts instantanés de pression au droit des orifices et de la fente périphérique, est donné par

$$p(r, \theta) = p_{av} \left[O_{av}(r, \theta) + O_1(r, \theta) \varphi^{(h)} + \sum_{\ell=0,6} O_{2\ell}^{(1)}(r, \theta) \varphi_\ell^{(s_1)} \right], \quad (\text{D.11})$$

pour les modes $m = 0$ et $m = 6$.

D.3 Expression du champs de pression dans la cavité arrière

Compte tenu l'expression (3.21), des expression des débits (3.29a) et des expressions des paramètres $H_{\mu n}^{(I)}$ (3.31f) et $H_{\mu n \ell}^{(II)}$ (3.31g), le champ de pression dans la cavité arrière prend la forme

suivante

$$\begin{aligned}
 p_C(r, \theta) = & -\frac{i\omega\rho_0}{\varepsilon_C F_{vC}} \sum_{mn} \frac{\nu_{mn}^2}{\kappa_{mn}^2 - \chi_C^2} J_m(\kappa_{mn}r) \\
 & \times \left\{ \left[H_{\mu n}^{(I)} p(r_1, 0) + \sum_{\ell=0, n_0, \dots} H_{\mu n \ell}^{(II)} p_\ell^{(1)}(r_2, 0) \right] \cos(m\theta) \right. \\
 & \left. + \sum_{\ell=0, n_0, \dots} H_{\mu \ell}^{(S)} p_\ell^{(2)}(r_2, 0) \sin(m\theta) \right\}, \tag{D.12}
 \end{aligned}$$

et en ne conservant que les modes $m = 0$ et $m = 6$,

$$p_C(r, \theta) = O_C^h p(r_1, 0) + \sum_{\ell=0, 6} O_{C\ell}^{s_1} p_\ell^{(1)}(r_2), \tag{D.13}$$

avec

$$O_C^{(h)} = \sum_{m=0, n_0, \dots} \sum_n -\frac{i\omega\rho_0}{\varepsilon_C F_{vC}} \sum_{mn} \frac{\nu_{mn}^2}{\kappa_{mn}^2 - \chi_C^2} H_{\mu n}^{(I)} J_m(\kappa_{mn}r) \cos(m\theta), \tag{D.14}$$

et

$$O_{C\ell}^{(s_1)} = \sum_{m=0, n_0, \dots} \sum_n -\frac{i\omega\rho_0}{\varepsilon_C F_{vC}} \sum_{mn} \frac{\nu_{mn}^2}{\kappa_{mn}^2 - \chi_C^2} H_{\mu n}^{(I)} J_m(\kappa_{mn}r) \sin(m\theta). \tag{D.15}$$

Finalement, compte tenu des expressions (3.42a-3.42c) des écarts instantanés de pression au droit des orifices et de la fente périphérique, le champ de pression dans la cavité arrière est exprimé en fonction du champ de pression incident p_{av} par

$$p_C(r, \theta) = p_{av} \left[O_C^{(h)} \varphi^{(h)} + \sum_{\ell=0, 6} O_{C\ell}^{(s_1)} \varphi_\ell^{(s_1)} \right]. \tag{D.16}$$

Bibliographie

- [1] W.R. KAMPINGA, Y.H. WIJNANT et A. de BOER, An efficient finite element model for viscothermal acoustics. *Acta Acustica united with Acustica*, 97(4), pages 618–631(14), 2011.
- [2] R. BOSSART, N. JOLY et M. BRUNEAU, Hybrid numerical and analytical solutions for acoustic boundary problems in thermo-viscous fluids. *Journal of Sound and Vibration*, 263(1), pages 69–84, 2003.
- [3] N. JOLY, Michel BRUNEAU et R. BOSSART, Coupled equations for particle velocity and temperature variation as the fundamental formulation of linear acoustics in thermo-viscous fluids at rest. *Acta Acustica united with Acustica*, 92(2), pages 202–209, 2006.
- [4] N. JOLY, Finite element modeling of thermoviscous acoustics on adapted anisotropic meshes : Implementation of the particle velocity and temperature variation formulation. *Acta Acustica united with Acustica*, 96(1), pages 102–114(13), 2010.
- [5] M. BRUNEAU, Ph. HERZOG, J. KERGOMARD et J.D. POLACK, General formulation of the dispersion equation in bounded visco-thermal fluid, and application to some simple geometries. *Wave Motion*, 11(5), pages 441–451, 1989.
- [6] M. BRUNEAU, *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermès, Paris, 1998.
- [7] C. ZWIKKER et C.W. KOSTEN, *Sound absorbing materials*. New York, Elsevier Pub. Co., 1949.
- [8] M.R. STINSON et Y. CHAMPOUX, Assignment of shape factors for porous materials having simple pore geometries. *Journal of the Acoustical Society of America*, 88(S1), pages S121–S121, 1990.
- [9] H.-S. ROH, W.P. ARNOTT, J.M. SABATIER et R. RASPET, Measurement and calculation of acoustic propagation constants in arrays of small air-filled rectangular tubes. *Journal of the Acoustical Society of America*, 89(6), pages 2617–2624, 1991.
- [10] H. TIJDEMANA, On the propagation of sound waves in cylindrical tubes. *Journal of Sound and Vibration*, 39(1), pages 1–33, 1975.
- [11] A. CRAGGS et J.G. HILDEBRANDT, Effective densities and resistivities for acoustic propagation in narrow tubes. *Journal of Sound and Vibration*, 92(3), pages 321–331, 1984.
- [12] W.M. BELTMAN, P.J.M. van der HOOGT, R.M.E.J. SPIERING et H. TIJDEMAN, Implementation and experimental validation of a new viscothermal acoustic finite element for acousto-elastic problems. *Journal of Sound and Vibration*, 216(1), pages 159–185, 1998.

-
- [13] W.M. BELTMAN, T.G.H. BASTEN et H. TIJDEMAN, Viscothermal damping in thin gas or fluid layers, 1999.
 - [14] W.M. BELTMAN, Viscothermal wave propagation including acousto-elastic interaction, part i : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 227(3), pages 555–586, 1999.
 - [15] W.M. BELTMAN, Viscothermal wave propagation including acousto-elastic interaction, part ii : Applications. *Journal of the Acoustical Society of America*, 227(3), pages 587–609, 1999.
 - [16] W.R. KAMPINGA, Y.H. WIJNANT et A. de BOER, Performance of several viscothermal acoustic finite elements. *Acta Acustica united with Acustica*, 96(1), pages 115–124(10), 2010.
 - [17] N. JOLY, P. HONZÍK, D. RODRIGUES, J.-N. DUROCHER, S. DURAND et M. BRUNEAU, Modélisation numérique de l’acoustique en fluide thermovisqueux. 2010. 10ème Congrès Français d’Acoustique, Lyon.
 - [18] L. CREMER, On the acoustic boundary layer outside a rigid wall. *Arch. Elektr. Uebertr.*, 2, pages 136–139, 1948.
 - [19] E. DOKUMACI, An integral equation formulation for boundary element analysis of acoustic radiation problems in viscous fluids. *Journal of Sound and Vibration*, 147(2), pages 335–348, 1991.
 - [20] E. DOKUMACI, Prediction of the effects of entropy fluctuations on sound radiation from vibrating bodies using an integral equation approach. *Journal of Sound and Vibration*, 186(5), pages 805–819, 1995.
 - [21] C. KARRA et M. Ben TAHAR, An integral equation formulation for boundary element analysis of propagation in viscothermal fluids. *Journal of the Acoustical Society of America*, 102(3), pages 1311–1318, 1997.
 - [22] C. KARRA et M. Ben TAHAR, Modélisation par éléments finis de frontières du comportement vibratoire d’une membrane couplée à une couche de fluide thermoconducteur. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb, mécanique, physique, astronomie*, 326(11), pages 733–739, 1998.
 - [23] C. GUIANVAC’H, *La cavité de couplage acoustique dans la méthode de réciprocité : modèles analytiques pour l’étalonnage des microphones et la mesure d’impédances de petits composants*. Thèse de doctorat, Université du Maine, Septembre 2005.
 - [24] D. RODRIGUES, *Méthode de réciprocité : caractérisation de petits composants acoustiques, étalonnage de microphones en pression et en champ libre*. Thèse de doctorat, Université du Maine, Octobre 2008.
 - [25] IEC61094-6 INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION, Measurement microphones, part 6 : Electrostatic actuators for determination of frequency response, 2004.
 - [26] C. GUIANVARC’H, J.-N. DUROCHER, M. BRUNEAU et A.-M. BRUNEAU, Improved formulation of the acoustic transfer admittance of cylindrical cavities. *Acta Acustica united with Acustica*, 92, pages 345–354, 2006.

-
- [27] J.B. MEHL, M.R. MOLDOVER et L. PITRE, Designing quasi-spherical resonator for acoustic thermometry. *Metrologia*, 41(4), pages 295–304, 2004.
- [28] P. GÉLAT, N. JOLY, M. de PODESTA, G. SUTTON et R. UNDERWOOD, Acoustic modelling in view of a determination of the Boltzmann constant within 1 ppm for the redefinition of the kelvin. *Journal of Physics : Conference Series*, volume 195(1), pages 1–14, 2009. Anglo-French Physical Acoustics Conference 2009.
- [29] C. GUIANVARC'H, L. PITRE, M. BRUNEAU et A.-M. BRUNEAU, Acoustic field in a quasi-spherical resonator : Unified perturbation model. *Journal of the Acoustical Society of America*, 125(3), pages 1416–1425, 2009.
- [30] G. BENEDETTO, R.M. GAVIOSO, R. SPAGNOLO, P. MARCARINO et A. MERLONE, Acoustic measurements of the thermodynamic temperature between the triple point of mercury and 380 K. *Metrologia*, 41(1), pages 74–98, 2004.
- [31] R.M. GAVIOSO, G. BENEDETTO, P.A. GIULIANO ALBO, D. MADONNA RIPA, A. MERLONE, C. GUIANVARC'H, F. MORO et R. CUCCARO, A determination of the Boltzmann constant from speed of sound measurements in helium at a single thermodynamic state. *Metrologia*, 47(4), pages 387–409, 2010.
- [32] C. GUIANVARC'H, R. GAVIOSO, G. BENEDETTO, L. PITRE et M. BRUNEAU, Characterization of condenser microphones under different environmental conditions for accurate speed of sound measurements with acoustic resonators. *Review of Scientific Instrument*, 80(7), pages 1–10, 2009.
- [33] W.G. THOMAS, M.J. PRESLAR et J.C. FARMER, Calibration of condenser microphones under increased atmospheric pressures. *Journal of the Acoustical Society of America*, 51(1), pages 6–14, 1972.
- [34] K. RASMUSSEN, The static pressure and temperature coefficients of laboratory standard microphones. *Metrologia*, 36(4), pages 265–273, 1999.
- [35] T. LAVERGNE, S. DURAND, D. RODRIGUES, M. BRUNEAU et N. JOLY, Dynamic behavior of the circular membrane of an electrostatic microphone : Effect of holes in the backing electrode. *Journal of the Acoustical Society of America*, 128(6), pages 3459–3477, 2010.
- [36] Documentation Brüel & Kjær, *Microphone Handbook vol. 1 : Theory*, 1996.
- [37] E.C. WENTE, A condenser microphone as a uniformly sensitive instrument for the absolute measurement of sound intensity. *Physical Review*, 10(1), pages 39–63, 1917.
- [38] E.C. WENTE, Telephone-transmitter, US Patent 1333744, Mars 1920.
- [39] E.C. WENTE, The sensitivity and precision of the electrostatic transmitter for measuring sound intensities. *Physical Review*, 19(5), pages 498–503, 1922.
- [40] I.B. CRANDALL, The air-damped vibrating system : theoretical calibration of the condenser transmitter. *Physical Review*, 11(6), pages 449–460, 1918.

-
- [41] D.H. ROBEY, Theory of the effect of a thin air film on the vibrations of a stretched circular membrane. *Journal of the Acoustical Society of America*, 26(5), pages 740–745, 1954.
 - [42] I.G. PETRITSKAYA, Impedance of a thin layer of air in the harmonic vibration of membrane. *Soviet Physics Acoustics*, 12, pages 193–198, 1966.
 - [43] I.G. PETRITSKAYA, Vibrations of membrane loaded with thin layer of air. *Soviet Physics Acoustics*, 14, pages 105–106, 1968.
 - [44] J. MERHAUT, A contribution to the theory of electroacoustic transducers based on electrostatic. *Acustica*, 19(5), pages 295–299, 1968.
 - [45] Z. ŠKVOR, On acoustical resistance due to viscous losses in the air gap of electrostatic transducers. *Acustica*, 19(5), pages 295–299, 1968.
 - [46] J.E. WARREN, A.M. BRZEZINSKI et J.F. HAMILTON, Capacitance microphone dynamic membrane deflections. *Journal of the Acoustical Society of America*, 54(5), pages 1201–1213, 1973.
 - [47] J.E. WARREN, Capacitance microphone static membrane deflections : comments and further results. *Journal of the Acoustical Society of America*, 58(3), pages 733–740, 1975.
 - [48] A.J. ZUCKERWAR, Theoretical response of condenser microphones. *Journal of the Acoustical Society of America*, 64(5), pages 1278–1285, 1978.
 - [49] G. PLANTIER et M. BRUNEAU, Modélisation de microphones sub-miniatures. *Journal de Physique Colloques 51*, pages C2.555–C2.558, Février 1990. 1er Congrès Français d'Acoustique, Lyon, FRANCE.
 - [50] M. BRUNEAU, A.-M. BRUNEAU et P. HAMERY, Modélisation des microphones miniatures : effets des couches limites viscothermiques. *Journal de Physique IV*, pages C1.361–C1.364, Avril 1992. 2ème Congrès Français d'Acoustique, Arcachon, FRANCE.
 - [51] Z. ŠKVOR, *Vibrating Systems and Their Equivalent Circuits*. Elsevier, Amsterdam, PAYS-BAS, 1991.
 - [52] Z. ŠKVOR, Transducteurs électroacoustiques et électromécaniques et leurs circuits équivalents. *Journal de Physique IV*, pages C1.349–C1.356, Avril 1992. 2ème Congrès Français d'Acoustique, Arcachon, FRANCE.
 - [53] P. HAMERY, M. BRUNEAU et A.-M. BRUNEAU, Mouvement d'une couche de fluide dissipatif en espace clos sous l'action d'une source étendue. *Journal de Physique IV*, pages C5.213–C5.216, Mai 1994. 3ème Congrès Français d'Acoustique, Toulouse, FRANCE.
 - [54] P. LOTTON, L. HUSNÍK, A.-M. BRUNEAU, M. BRUNEAU et Z. ŠKVOR, Modèle à constantes localisées de transducteurs : dissipation dans les couches limites. *Journal de Physique IV*, pages C5.217–C5.220, Mai 1994. 3ème Congrès Français d'Acoustique, Toulouse, FRANCE.
 - [55] Z. ŠKVOR, Système membrane - couche d'air mince chez transducteurs électrostatiques et piézoplastiques. *Journal de Physique IV*, pages C5.213–C5.216, Mai 1994. 3ème Congrès Français d'Acoustique, Toulouse, FRANCE.

- [56] M. BRUNEAU, A.-M. BRUNEAU, Z. ŠKVOR et P. LOTTON, An equivalent network modelling the strong coupling between a vibrating membrane and a fluid film. *Acta Acustica*, 2, pages 223–232, 1994.
- [57] W. KAINZ, Analytical solution of a condenser microphone model as an example of the mathematical treatment of coupled acoustic systems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 100(4), pages 2156–2165, 1996.
- [58] W. KAINZ, Application of Hilbert space techniques and Green’s function methods to a realistic condenser microphone model. *Journal of the Acoustical Society of America*, 100(4), pages 2166–2169, 1996.
- [59] C.W. TAN et J.M. MIAO, Analytical modeling for bulk-micromachined condenser microphones. *Journal of the Acoustical Society of America*, 120(2), pages 750–761, 2006.
- [60] D. HOMENTCOVSHI et R.N. MILES, Modelling of viscous damping of perforated planar microstructures. applications in acoustics. *Journal of the Acoustical Society of America*, 116(5), pages 2939–2947, 2004.
- [61] R.S. Grinnip III, Advanced simulation of a condenser microphone capsule. *AES E-Library*, Octobre 2004. Audio Engineering Society Convention 117.
- [62] D. HOMENTCOVSHI et R.N. MILES, Viscous microstructural dampers with aligned holes : Design procedure including the edge correction. *Journal of the Acoustical Society of America*, 122(3), pages 1556–1567, 2007.
- [63] J. MIAO, C.W. TAN et Z. WANG, Design considerations of silicon microphone backplates. Septembre 2007. 19th International Congress on Acoustics, Madrid.
- [64] D. HOMENTCOVSHI et R.N. MILES, Analytical model for viscous damping and the spring force for perforated planar microstructures acting at both audible and ultrasonic frequencies. *Journal of the Acoustical Society of America*, 124(1), pages 175–181, 2008.
- [65] N.H. FLETCHER et S. THWAITES, Electrode surface profile and the performance of condenser microphones. *Journal of the Acoustical Society of America*, 112(6), pages 2779–2785, 2002.
- [66] T. Le Van SUU, S. DURAND et M. BRUNEAU, Fluid layer trapped between a plane, circular membrane and an axisymmetrically curved, smooth backing wall : analytical model of the dynamic behaviour. *Acta Acustica united with Acustica*, 94(3), pages 474–482, 2008.
- [67] P. HONZÍK, Z. ŠKVOR, S. DURAND et M. BRUNEAU, Electrostatic transducer with square membrane and non-planar back plate : Simplified model. *Acta Acustica united with Acustica*, 95(5), pages 866–873, 2009.
- [68] T.B. GABRIELSON, Mechanical-thermal noise in micromachined acoustic and vibration sensors. *I.E.E.E. Transactions on Electron Devices*, 40(5), pages 903–909, 1993.
- [69] N.A. HALL, M. OKANDAN, R. LITRELL, B. BICEN et F.L. DEGERTEKIN, Micromachined optical microphone structures with low thermal-mechanical noise levels. *Journal of the Acoustical Society of America*, 122(4), pages 2031–2037, 2007.

-
- [70] N.A. HALL, M. OKANDAN, R. LITRELL, B. BICEN et F.L. DEGERTEKIN, Simulation of thin-film damping and thermal mechanical noise spectra for advanced micromachined microphone structures. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 17(3), pages 688–697, 2008.
- [71] C.W. TAN et J. MIAO, Modified Škvor-starr approach in the mechanical-thermal noise analysis of condenser microphone. *Journal of the Acoustical Society of America*, 126(5), pages 2301–2305, 2009.
- [72] K.C.T. NGO et A.J. ZUCKERWAR, Acoustic isolation vessel for measurement of the background noise in microphones. *Journal of the Acoustical Society of America*, 93(5), pages 2974–2980, 1993.
- [73] A.J. ZUCKERWAR et K.C.T. NGO, Measured 1/f noise in the membrane motion of condenser microphones. *Journal of the Acoustical Society of America*, 95(3), pages 1419–1425, 1994.
- [74] A.J. ZUCKERWAR, T.R. KUHN et R.M. SERBYN, Background noise in piezoresistive, electret condenser, and ceramic microphones. *Journal of the Acoustical Society of America*, 113(6), pages 3179–3187, 2003.
- [75] S.C. THOMPSON, J.L. LOPRESTI, E.M. RING et H.G. NEPOMUCENO, Noise in miniature microphones. *Journal of the Acoustical Society of America*, 111(2), pages 861–866, 2002.
- [76] S.C. THOMPSON et J.L. LOPRESTI, Thermal boundary layer effects on the acoustical impedance of enclosures and consequences for acoustical sensing devices. *Journal of the Acoustical Society of America*, 123(3), pages 1364–1370, 2008.
- [77] M. Le FUR, A. Le NEST, D. LUQUET et A. MORIN, Caractérisation des déformées de membranes de microphones par vibrométrie laser à balayage, Rapport de stage de DEUST VAS, Université du Maine.
- [78] F. DESMOULINS, étude fine de vibrations de membrane de microphones capacitifs en tant que sources, Rapport de stage de Master, Université du Maine. Mémoire de D.E.A.
- [79] M. ROSSI, *Audio*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2007.
- [80] J. BORWICK, *Microphones - Technologie and technique*. Focal Press, 1990.
- [81] Dictionnaire de TRÉVOUX, définition disponible sur le site du Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales (CNTRL) à l'adresse suivante <http://www.cnrtl.fr/1721>.

Liste des figures

1.1	Ondes planes incidente et réfléchi sur un mur semi-infini conducteur de la chaleur	11
1.2	Ondes acoustique plane incidente, réfléchi et transmise sur un mur d'épaisseur finie (une membrane)	12
1.3	Ondes acoustique plane incidente, réfléchi et transmise sur un mur d'épaisseur finie (une membrane)	13
1.4	Module du coefficient de transmission acoustique en fonction de la fréquence et de l'épaisseur de la membrane (le fluide étant de l'air et la membrane étant en verre)	16
1.5	Ondes cylindriques incidente et réfléchi sur une fibre de rayon R_1	16
1.6	Partie réelle (en haut) et partie imaginaire (en bas) du coefficient polytropique n dans l'air en fonction de la distance à la paroi (exprimée en épaisseur de couche limite δ_h) pour (a) une membrane et (b) une fibre de différentes longueurs caractéristiques à la fréquence de 10 000 Hz	20
1.7	Partie réelle (en haut) et partie imaginaire (en bas) du coefficient polytropique n dans l'air en fonction de la distance à la paroi (exprimée en épaisseur de couche limite thermique δ_h) pour (a) une membrane et (b) une fibre de différentes longueurs caractéristiques à une fréquence de 10 Hz	21
1.8	Module (en haut) et phase (en bas) de l'admittance spécifique équivalente β en fonction de la fréquence pour (a) une membrane et (b) une fibre pour le couple fluide-solide 'air-verre'	23
2.1	Représentation 3D (à gauche) (d'après [36]) et schématique (à droite) de l'intérieur d'un microphone électrostatique	26
2.2	Schéma d'un microphone électrostatique : notations utilisées	26
2.3	Champ de déplacement de la membrane d'un microphone électrostatique ½ pouce mesuré à 57 kHz par vibrométrie laser à balayage	27
2.4	Schéma d'un microphone capacitif : la membrane	28
2.5	Schéma d'un microphone capacitif : la lame de fluide	29
2.6	Allure de la vitesse particulaire dans la lame de fluide : effets inhérents des orifices sur (a) la composante radiale v_r et (b) la composante axiale v_z	30
2.7	Schéma d'un microphone capacitif : la cavité arrière	34

2.8	Schéma d'un microphone capacitif : les orifices de l'électrode arrière et sa fente périphérique	35
4.1	Schéma du dispositif expérimental représentant les éléments de la chaîne de mesure : (1) Vibromètre laser à balayage (OFV 056) avec son optique de précision, (2) microphone 1/2 pouce B&K type 4134 monté sur un support, (3) Tension de polarisation du microphone (amplificateur de mesure B&K type 2609), (4) Oscilloscope (HP 54603B), (5) Amplificateur de puissance (B&K type 2713), (6) Système de pilotage du vibromètre laser et de traitement des données (PSV 300-H)	57
4.2	Vue de dessous de la capsule microphonique B&K type 4134 utilisée pour les mesures	57
4.3	Champ de déplacement de la membrane à 40 kHz : résultat expérimental (à gauche) et théorique (à droite)	58
4.4	Champ de déplacement de la membrane à 57 kHz : résultat expérimental (à gauche) et théorique (à droite)	59
4.5	Champ de déplacement de la membrane à 72 kHz : résultat expérimental (à gauche) et théorique (à droite)	59
4.6	Circuit électrique équivalent de l'impédance acoustique d'entrée du microphone . .	61
4.7	Composants électriques équivalents de l'impédance (acoustique) de transfert des orifices de l'électrode arrière (Z_1) et de la fente périphérique (Z_2)	61
4.8	Module (en haut) de la sensibilité exprimée en dB (référéncé à 1 V/Pa) en fonction de la fréquence donnée dans la charte de calibration du microphone type 4134 (ligne continue noire avec des points) ; Module (en haut) exprimée en dB (référéncé à 1 V/Pa) et phase (en bas) de la sensibilité en fonction de la fréquence calculée avec onze modes radiaux pour différentes valeurs de la capacité électrique (au repos) du microphone : $C = 17,4$ pF (ligne continue rouge) et $C = 16$ pF (ligne pointillée bleue)	62
4.9	Module (en haut) et phase (en bas) de la sensibilité en fonction de la fréquence calculée en tenant compte de onze modes radiaux (ligne continue rouge), d'un seul mode ($m = n = 0$) avec les valeurs « exactes » des paramètres du circuit équivalent (ligne discontinue orange) et d'un seul mode avec les valeurs à l'ordre 0 des paramètres du circuit équivalent (ligne pointillée bleue)	63
4.10	Résistance thermique R_{th} en fonction de la fréquence calculée en tenant compte d'un seul mode ($m = n = 0$) avec les valeurs à l'ordre 0 (ligne pointillée bleue) et à l'ordre 1 (ligne discontinue rouge) des paramètres du circuit équivalent	65
A.1	Schéma d'un microphone électrostatique	72
A.2	Influence de l'amortissement par effet visqueux sur l'amplitude de la sensibilité en haute fréquence d'un microphone capacitif [36] : (a) faible amortissement, (b) amortissement optimal, (c) fort amortissement	72

A.3	Représentation schématique de l'influence de la présence de la cavité arrière sur la sensibilité d'un microphone capacitif en fonction de la fréquence : (..) sans et (l) avec cavité arrière	73
A.4	Représentation schématique d'un microphone électrostatique avec sa résistance de polarisation R_p et sa capacité de liaison C_L	74
A.5	Circuit électrique équivalent de la transduction électro-mécanique	75
C.1	Représentation sous la forme de circuit électrique équivalent des impédances : (a) Z_m [équations (C.39-C.40)], (b) Z_g [équations (C.41-C.42)] et (c) Z_R [équations (C.31-C.34), (C.38) et (C.43-C.45)]	84

Liste des tableaux

1.1	Propriétés physiques utilisées pour le solide et le fluide	19
4.1	Paramètres mécaniques, géométriques et électrique du microphone B&K type 4134	56
4.2	Amplitudes calculées et mesurées du déplacement au centre de la membrane et au droit des orifices pour les fréquences de 40 kHz, 57 kHz et 72 kHz	58

MODÉLISATION ANALYTIQUE ET CARACTÉRISATION EXPÉRIMENTALE DE MICROPHONES CAPACITIFS
EN HAUTES FRÉQUENCES : ÉTUDE DES COUCHES LIMITES THERMIQUES,
EFFETS DES PERFORATIONS DE L'ÉLECTRODE ARRIÈRE SUR LA DÉFORMÉE DE MEMBRANE

Les microphones capacitifs sont des transducteurs réciproques dont les qualités (sensibilité, bande passante et tenue dans le temps) en font des instruments de mesure performants. Couramment utilisés jusqu'à présent en récepteurs dans l'air à pression atmosphérique et à température ambiante, dans la gamme de fréquences audibles, ils sont correctement caractérisés dans ce cadre depuis près de trente ans.

Mais aujourd'hui, leur miniaturisation (par procédé MEMS) et leur usage nouveau en métrologie fine (en récepteurs comme en émetteurs) - qui exigent une connaissance précise de leur comportement dans des domaines de fréquences élevées (jusqu'à 100 kHz), dans des mélanges gazeux aux propriétés différentes de celles de l'air et dans des conditions de pression et de température beaucoup plus élevées ou beaucoup plus basses que les conditions standards - nécessitent une caractérisation beaucoup plus approfondie, aussi bien en terme de modélisation qu'en terme de résultats expérimentaux.

C'est ainsi que ici -i/ les effets des couches limites thermiques (seules les couches limites visqueuses sont habituellement retenues) sont introduits dans le modèle, ce qui amène dans le chapitre premier à une étude analytique de la diffusion thermique en parois minces (dont la portée dépasse le cadre strict du transducteur), -ii/ l'influence des orifices de l'électrode arrière sur la déformée de la membrane est traitée au départ par une méthode analytique originale, qui permet de traduire les conditions en frontière non uniformes sur la surface de l'électrode sous forme de sources locales virtuelles, associées à des conditions de frontière rendues uniformes (chapitre second), -iii/ des solutions analytiques nouvelles, dépendant à la fois des coordonnées radiales et azimutales, sont obtenues pour le champ de déplacement de la membrane et pour les champs de pression dans les cavités du microphone par usage de théories modales compatibles avec les couplages multiples qui y prennent place (troisième chapitre), -iv/ un modèle de « circuit à constantes localisées » (reporté pour l'essentiel en annexe) est proposé, à des degrés divers de précision, qui permet en particulier d'accéder de façon simple à la sensibilité et au bruit thermique du microphone (fin du quatrième chapitre), -v/ une étude au vibromètre laser à balayage a été réalisée (début du quatrième chapitre), qui permet non seulement de mettre en évidence pour la première fois les déformées de membrane complexes qui apparaissent en hautes fréquences, mais encore de les quantifier et par-delà de valider les résultats théoriques obtenus et donc les modèles proposés (même s'ils restent perfectibles comme indiqué dans la conclusion).

Mots clefs : modélisation analytique, microphone capacitif réciproque, transducteur électrostatique, fluide thermovisqueux, couches limites thermique et visqueuse, admittance spécifique équivalente, conditions aux frontières inhomogènes, développement modal, sensibilité, bruit thermo-mécanique, circuit électrique équivalent, vibromètre laser à balayage

ANALYTICAL MODELING AND EXPERIMENTAL CHARACTERISATION OF CONDENSER MICROPHONES
AT HIGH FREQUENCIES : ANALYSIS OF THE THERMAL BOUNDARY LAYERS,
EFFECTS OF HOLES IN THE BACKING ELECTRODE ON THE DISPLACEMENT FIELD OF THE MEMBRANE

Condenser microphones are reciprocal transducers whose properties (sensitivity, bandwidth and reliability) make them powerful measurement tools. So far, they have been commonly used as receivers in the audible frequency range, in air at atmospheric pressure and ambient temperature, they have been appropriately characterised in this context for nearly thirty years.

But nowadays, their miniaturisation (using MEMS processes) and their new use for metrological purposes (as receivers as well as transmitters) require much deeper theoretical and experimental characterisations because they require an accurate knowledge of their behaviour in high frequency ranges (up to 100 kHz), in gas mixtures, whose properties differ from those of air, and under pressure and temperature conditions much higher or much lower than standard conditions.

Thus, here, -i/ the effects of the thermal boundary layers are introduced in the model (only viscous boundary layers are usually accounted for), leading, in the first chapter, to an analysis of the thermal diffusion of thin bodies (whose scope is beyond the strict frame of capacitive transducers), ii/ the influence of the holes in the backing electrode on the dynamic behaviour of the membrane is initially handled with an original analytical method which allows expressing the non-uniform boundary conditions at the surface of the backing electrode as fictitious localised sources associated to uniform boundary conditions (second chapter), -iii/ new analytical solutions, depending both on the radial and azimuthal coordinates, for the pressure field and for the displacement field inside the cavities behind the membrane are expressed using modal theories in agreement with the strong couplings which occur between the different parts of the transducer (chapter three), -iv/ "lumped element circuits", which are more or less approximated (presented in the Appendix), more particularly result in expressing and assessing the sensitivity and the thermal noise (end of chapter three), -v/ experimental results, obtained from measurements of the displacement field of the membrane using a laser scanning vibrometer, both highlight and quantify for the first time the complex behaviour of the membrane in the highest frequency range, and finally lead to the validation of the theoretical results and therefore, the models presented here (even if the latter may still be improved as outlined in the conclusion).

Keywords : Analytical modeling, reciprocal condenser microphone, electrostatic transducer, thermoviscous fluid, thermal and viscous boundary layers, specific acoustic admittance, inhomogeneous boundary conditions, modal expansion, sensitivity, mechanical-thermal noise, mechanical equivalent circuit, laser scanning vibrometer