



**HAL**  
open science

**Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques. Instruments de musique, micro/nano systèmes électromécaniques, contrôle de vibration**

Olivier Thomas

► **To cite this version:**

Olivier Thomas. Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques. Instruments de musique, micro/nano systèmes électromécaniques, contrôle de vibration. Vibrations [physics.class-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2011. tel-00718727

**HAL Id: tel-00718727**

**<https://theses.hal.science/tel-00718727v1>**

Submitted on 18 Jul 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : sciences pour l'ingénieur

présentée par

Olivier THOMAS

**Dynamique linéaire et non linéaire  
de structures élastiques et piézoélectriques**

**Instruments de musique  
Micro/nano systèmes électromécaniques  
Contrôle de vibration**

Soutenue le 14 novembre 2011,

devant le jury composé de :

Géry DE SAXCÉ	Université Lille 1	<i>Président</i>
Alberto CORIGLIANO	Politecnico di Milano, Italie	<i>Rapporteur</i>
Michel POTIER-FERRY	Université de Metz	<i>Rapporteur</i>
Fabrice THOUVEREZ	École Centrale de Lyon	<i>Rapporteur</i>
Lionel BUCHAILLOT	IEMN Lille	<i>Examineur</i>
Pierre LADEVÈZE	ENS de cachan	<i>Examineur</i>



*à mes parents,  
Marie-Thérèse et Régis Thomas.*



---

---

## Remerciements

*Les recherches présentées dans ce document sont le résultat de près de treize années de travail, et de manière indissociable le fruit de nombreuses rencontres, collaborations et discussions. J'ai eu notamment la chance de côtoyer plusieurs communautés scientifiques, dont le mélange des influences a été d'une grande richesse ; par ordre chronologique : la mécanique et la technologie à Cachan, l'acoustique et le traitement du signal à l'IRCAM, à Télécom et à l'ENSTA, puis la dynamique des structures et des systèmes « intelligents » et le calcul numérique au LMSSC.*

*Mes premiers remerciements s'adressent à Regor Noyaho, qui a été le créateur, l'animateur et le bienfaiteur d'un environnement de travail exceptionnel : le Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés du Cnam, EA 3196, qui m'a accueilli ces huit années de maître de conférence. J'y est eu sa confiance et les moyens de faire revivre un laboratoire expérimental, riche expérience, en plus de la grande liberté qui m'a été laissée pour continuer les recherches de ma thèse tout en développant de nouvelles thématiques en liaison avec les activités du laboratoire : mes connaissances de la mécanique des vibrations et de l'acoustique analytique se sont avantageusement enrichies de la culture de l'analyse numérique des structures et des systèmes « intelligents ». Je lui dois cela, ainsi que d'innombrables discussions et situations qui m'ont fait partager la vie quotidienne du laboratoire. J'ai profité et beaucoup appris de sa grande culture scientifique et de son professionnalisme, que ce soit comme chercheur, directeur de laboratoire ou fin navigateur triomphant dans les mers administratives et agitées du Cnam.*

*La suite de ma gratitude s'adresse naturellement et vivement à mon compère de la première heure, Cyril Touzé, avec qui j'ai partagé mes cinq premières années de recherche et avec qui j'ai eu la chance de pouvoir continuer nos investigations de la dynamique non linéaire des plaques et des coques les huit années qui ont suivi, lui à l'ENSTA et moi au Cnam. J'ai aussi beaucoup appris à son contact, par sa rigueur scientifique, sa grande humilité, son recul vis-à-vis de nos recherches et de la vie en général. Comme il le disait dans sa thèse [310, p. 174] « la complémentarité de nos compétences a été le gage d'une meilleure compréhension des phénomènes observés ». C'est toujours le cas. Depuis la fin de nos thèses et de mon post-doc, qui laissaient encore beaucoup de questions en suspend sur la mécanique des cymbales et des gongs, même si tout n'est pas élucidé, nous n'avons pas rendu les armes, et malgré les détours sinueux que nous avons emprunté parfois pour ne pas sacrifier l'élégance des théories à la résolution aveugle des problèmes, des sons inouïs commencent à être produits, et cela dans la plus grande rigueur scientifique !*

---

*Je souhaite aussi remercier ici un second compagnon de recherche, Jean-François Deii, rencontré et côtoyé au LMSSC, avec qui le travail a toujours été un grand plaisir. Ses qualités humaines sont remarquables et, là encore, la complémentarité de nos compétences a été le gage d'un foisonnement d'idées quotidien, qui nécessitent toujours plus de temps pour être menées à bien. Que ce soit sur les systèmes couplés piézoélectriques, sur la mécanique numérique appliquée aux vibrations non linéaires ou sur quelques confrontation essais / calculs pour des structures industrielles, j'ai beaucoup appris de ses connaissances, sa maîtrise de la mécanique numérique et de son humilité.*

*J'adresse aussi un très grand merci au jury de cet habilitation à diriger des recherches, d'abord aux trois rapporteurs, pour leur lecture approfondie et les trois rapports qu'ils ont écrits, très différents et tous les trois très élogieux : une lecture internationale d'Alberto Corigliano, l'expression de la grande expertise des vibrations non linéaires de Fabrice Thouverez et celle du très grand recul de Michel Potier-Ferry. Je remercie aussi les autres membres du jury, Pierre Ladevèze, Lionel Buchaillot et Géry de Saxcé, pour l'intérêt qu'ils ont porté sur mon travail et l'éclairage qu'ils lui ont apporté.*

*Je continue en remerciant, un peu pêle-mêle, et par ordre plus ou moins chronologique, les personnes avec qui j'ai aussi eu l'occasion de travailler : René Caussé, Antoine Chaigne, Liviu Nicu, Claude Lamarque, Bruno Cochelin, Sami Karkar, Joël Frelat, Sébastien Neukirch. Je souhaite aussi mentionner les personnes avec qui j'ai eu de nombreuses discussions, au détour d'un couloir de laboratoire ou de congrès, devant une expérience ou un verre : Christophe Pierre, Étienne Balmès, Dominique Chapelle, Gérard Iooss, Pierre Couillet, Lionel Buchaillot, Denis Matignon, Mathias Legend, Daniel Guyomar, Gaëtan Kerschen, Aziz Hamdouni, Joël Bensoam, Sergio Bellizzi, Christophe Vergez, Michel Ferré, Olivier Doaré, Olivier Cadot, Benoît Fabre, Fabrice Mathieu, Sorin Perisanu, Pascal Vincent, Marco Amabili, Stefan Bilbao, Caroline Soyer, Denis Remiens, Patrice Legal ; mes collègues du LMSSC, Antoine Legay (très cher voisin !), Olivier De Smet (bienvenue !), Frédéric Guillermin, Georges Vénizélos, Ana-Cristina Galucio, Claude Blanzé, Manuel Melon, Christophe Langrenne, Alexandre Garcia, Éric Bavu, Mathieu Aucéjo ; mes plus proches collaborateurs, post-docs, doctorants et stagiaires : Éric Luminais, Bryann Fortucci, Julien Ducarne, Cédric Camier, Aurélien Sénéchal, Mélodie Monteil, Simon Benaccio, Arnaud Lazarus, Saeid Nezamabadi. Je mentionne aussi quelques un des multiples enseignants qui m'ont marqué, pour des raisons diverses, et dont l'influence, même ancienne, est sans nul doute en filigrane dans mon travail : MM. Paul Viallon, Toureille, Michel Boulaton, Jacky Réa, Hervé Halter, Croisot, Pierre Ladevèze, Michel Poss, Arnaud Poitou, Guy Mollet, Emmanuel Saint-James, Michèle Castellengo, Jean-Claude Risset.*

*Enfin, merci à mes parents Marie-Thérèse et Régis Thomas, pour tout. Merci aussi à Gérard et Joëlle Minvielle, à Elsa Debieuvre et à la famille Couétard, pour la mise à disposition de l'Hermitage du Cap-Ferret, dont la tranquillité a sans nul doute contribué à l'achèvement de ce manuscrit. Merci à Fanny, pour son soutien fidèle et continu, sa relecture éclairée et sans faille, et enfin à Monsieur Émile, que je cite : "Papa, eh que tu va encore travailler ce soir ?"*

---

---

# Sommaire

<b>Sommaire</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>11</b>
1.1 Historique et démarche de recherche . . . . .	11
1.2 Contenu de ce mémoire . . . . .	13
1.3 Une digression . . . . .	13
1.4 Avant propos . . . . .	14
<b>I MODÈLES ET OUTILS</b>	
<b>2 Modélisation</b>	<b>17</b>
2.1 Les non-linéarités géométriques . . . . .	17
2.1.1 Généralités : les non-linéarités en mécanique des solides . . . . .	17
2.1.2 Non-linéarités géométriques en mécanique des structures . . . . .	20
2.1.3 Modèles de von Kármán ou grandes rotations ? . . . . .	26
2.2 Les matériaux piézoélectriques . . . . .	28
2.2.1 Généralités . . . . .	29
2.2.2 Modèles adaptés au couplage avec un circuit électrique . . . . .	33
2.2.3 Facteurs de couplage . . . . .	34
2.3 Quelques modèles . . . . .	35
2.3.1 Structures élastiques en grands déplacements . . . . .	35
2.3.2 Structures composites élastiques / piézoélectriques . . . . .	41
2.3.3 Poutres élastiques en grande rotation . . . . .	46
2.3.4 Synthèse sur les modèles . . . . .	50
<b>3 Réduction de modèle, simulations et expériences</b>	<b>53</b>
3.1 Discrétisation des modèles analytiques . . . . .	53
3.1.1 Formulation . . . . .	53
3.1.2 Synthèse . . . . .	58
3.1.3 Troncature modale . . . . .	60
3.2 Réduction des modèles éléments-finis . . . . .	61
3.2.1 Formulation . . . . .	61
3.2.2 Techniques de réduction . . . . .	63
3.3 Modes non linéaires . . . . .	65
3.3.1 Préliminaire . . . . .	66
3.3.2 Définition . . . . .	66



3.3.3	Une illustration . . . . .	68
3.3.4	Calcul asymptotique et forme normale . . . . .	70
3.3.5	Applications . . . . .	75
3.4	Résolution et simulations . . . . .	78
3.4.1	Méthodes de continuation . . . . .	79
3.4.2	Stabilité de solutions périodiques . . . . .	83
3.5	Mesures de vibrations . . . . .	85
3.5.1	Un excitateur électromagnétique original . . . . .	86
3.5.2	Mesures de vibrations non linéaires . . . . .	89
 <b>II APPLICATIONS</b> 		
<b>4</b>	<b>Dynamique non linéaire de plaques et de coques</b>	<b>95</b>
4.1	Les objets étudiés . . . . .	96
4.2	Expériences initiales : phénomènes observés . . . . .	97
4.2.1	Analyse en régime libre . . . . .	97
4.2.2	Analyse en régime forcé . . . . .	98
4.3	Analyse modale . . . . .	99
4.4	Le régime périodique . . . . .	101
4.5	Quelques résonances internes . . . . .	103
4.5.1	Mise en évidence : un régime quasi-périodique . . . . .	103
4.5.2	Résonance 1 :1 . . . . .	104
4.5.3	Résonance 1 :1 :2 . . . . .	107
4.6	La route vers le chaos . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Réduction de vibration par shunts piézoélectriques</b>	<b>111</b>
5.1	Introduction . . . . .	111
5.1.1	Généralités . . . . .	111
5.1.2	Objectifs et résultats . . . . .	114
5.2	Modèle réduit électromécanique . . . . .	115
5.2.1	Projection modale . . . . .	115
5.2.2	Facteurs de couplage modal . . . . .	115
5.2.3	Synthèse . . . . .	116
5.3	Performance des shunts . . . . .	117
5.4	Optimisation du placement des patchs piézoélectriques . . . . .	119
<b>6</b>	<b>Vibrations non linéaires de micro/nano systèmes électromécaniques</b>	<b>123</b>
6.1	Enjeux et objectifs . . . . .	123
6.1.1	Les objets étudiés . . . . .	123
6.1.2	Quelques points clé . . . . .	125
6.1.3	Excitation paramétrique . . . . .	125
6.1.4	Caractéristiques mécaniques à modéliser . . . . .	127
6.1.5	Stratégie de modélisation et simulation . . . . .	128
6.1.6	Objectif de notre travail . . . . .	129
6.2	Micro-plaques circulaires . . . . .	130
6.2.1	Flambage . . . . .	130
6.2.2	Réponse en fréquence . . . . .	131
6.3	Nano-poutres piézoélectriques . . . . .	133
<b>7</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>135</b>

BIBLIOGRAPHIE

<b>Articles de revues à comité de lecture</b>	<b>145</b>
<b>Articles de conférences</b>	<b>146</b>
<b>Rapports de recherche</b>	<b>149</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>151</b>



---

---

# Introduction

Le présent texte propose une synthèse des travaux de recherche que j’effectue depuis mon arrivée au Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés du Conservatoire National des Arts et Métiers<sup>1</sup> (Cnam/LMSSC, EA 3196), comme maître de conférences, en septembre 2003. Ces activités sont dans la continuité de ma thèse de doctorat (soutenue en octobre 2001) et de mon post-doc, effectués respectivement au département TSI de l’ENST<sup>2</sup> et à l’unité de mécanique de l’ENSTA<sup>3</sup>.

## 1.1 Historique et démarche de recherche

Le sujet de ma thèse de doctorat (1998-2001) et du travail post-doctoral qui a suivi (2001-2003) était l’analyse, la modélisation et la simulation de vibrations de milieux minces élastiques, avec comme application principale la compréhension du comportement vibratoire d’instruments de musique à percussion dits « non linéaires », comme les cymbales et les gongs. Ces objets, de fonctionnement très simple puisqu’ils sont constitués le plus souvent d’un seul élément métallique monobloc, de la forme d’une plaque ou d’une coque qui est mise en vibration de manière impulsionnelle, cachent en fait une dynamique extrêmement riche et complexe, directement liée à des non-linéarités géométriques. Ce sont ces non-linéarités qui sont la caractéristique principale des mécanismes de production du son de ces instruments. Mon activité dans ce thème a été guidée par deux fils conducteurs : d’une part la compréhension physique des phénomènes vibratoires observés, et d’autre part la mise en place de modèles adaptés et de stratégies de résolution efficaces permettant de les simuler de manière réaliste. Ces cinq premières années de recherche m’ont amenées à identifier les modèles de plaque et de coque appropriés, à proposer et tester des méthodes de résolution, notamment par projection modale, et à vérifier ces résultats par la mise en place d’expériences adaptées, tout cela dans quelques régimes vibratoires particuliers. Depuis, j’ai poursuivi ces recherches en explorant de nouveaux modèles de structures minces en vibrations non linéaires, et ce n’est que récemment que les régimes chaotiques ont été abordés par les simulations numériques. Ce travail a été effectué en étroite collaboration avec Cyril Touzé, depuis la préparation conjointe de nos thèses de 1998 à 2001, jusqu’à aujourd’hui.

À mon arrivée au Cnam en 2003 et en liaison avec les activités du LMSSC, je me suis intéressé aux couplages piézoélectriques, via l’application particulière de la réduction de vibration par shunts piézoélectriques. J’ai participé, avec Jean-François Deü et Roger Ohayon à l’encadrement de

---

<sup>1</sup>Cnam / LMSSC, Case 2D6R10, 2 rue Conté, 75003 Paris, <http://www.lmssc.cnam.fr>

<sup>2</sup>Département Traitement du Signal et des Images, École Nationale Supérieure des Télécommunications, désormais appelée Télécom ParisTech, Paris, <http://www.tsi.telecom-paristech.fr>

<sup>3</sup>Unité de Mécanique, École Nationale Supérieure des Techniques Avancées, désormais appelée ENSTA-ParisTech, Palaiseau, <http://ume.ensta-paristech.fr>

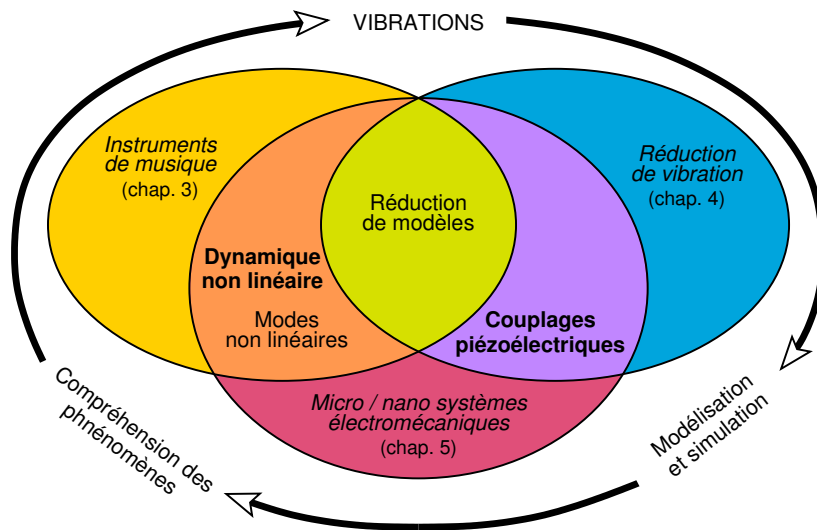


FIG. 1.1 – Diagramme de synthèse des travaux de recherche présentés dans ce manuscrit.

deux thèses sur ce sujet (Celle de Julien Ducarne, soutenue en mars 2009 et celle d'Aurélien Sénéchal, soutenue en septembre 2011). Dans ce thème de recherche, nous avons proposé des techniques de simulation et d'optimisation du comportement vibratoire linéaire de structures élastiques munies d'éléments piézoélectriques couplés à un circuit électrique. Là encore, les mêmes fils conducteurs ont été gardés : la compréhension physique des phénomènes de couplages piézoélectriques nous a permis de proposer une stratégie d'optimisation des dispositifs de réduction de vibration, stratégie mise en œuvre grâce à des modélisations et simulations numériques originales. Ces méthodes ont été appliquées à la réduction de vibration d'aubes de turbine de moteur d'avion.

Enfin, à la suite d'une rencontre en 2005 avec Liviu Nicu, chercheur au LAAS<sup>4</sup>, j'ai ouvert mon champ de travail à la modélisation et la simulation de vibrations non linéaires de micro/nano systèmes électromécaniques. Ces systèmes sont typiquement constitués de structures de géométrie simple (des poutres ou des plaques), stratifiées dans leur épaisseur et couplées à un circuit électrique par des couches piézoélectriques. Les non-linéarités géométriques se manifestent ici d'une part par l'influence de précontraintes, dues aux procédés de fabrication, qui conduisent parfois à du flambage, et d'autre part par des vibrations de grande amplitude en condition normale de fonctionnement. Ainsi, ce thème de recherche est apparu naturellement au carrefour des deux activités précédemment décrites : il se nourrit à la fois de mes travaux en dynamique non linéaire et de ceux sur les couplages piézoélectriques, et cela des deux points de vue modélisation et simulation. Ce thème a fait l'objet d'un projet de l'Agence Nationale pour la Recherche (ANR PNANO NEMSPIEZO), qui a permis de financer au laboratoire deux ans de contrat post-doctoral, pour Arnaud Lazarus (2009-2010) et Saeid Nezamabadi (2010-2011).

La figure 1.1 synthétise mes activités de recherche, les mots-clé associés et le contenu de ce mémoire. De manière générale, mes activités s'inscrivent dans l'étude des VIBRATIONS des systèmes de l'ingénieur, mot-clé placé en haut du diagramme. Mes recherches ont été guidées par trois applications principales : la *dynamique non linéaire d'instruments de musique*, la *réduction de vibration par shunt piézoélectriques* et les *micro / nano systèmes électromécaniques*, représentées chacune par une ellipse sur le diagramme. Aux intersections de ces applications, prises par couple, apparaissent les deux grandes disciplines au centre de mes activités : la **dynamique non linéaire** et les **couplages**

<sup>4</sup>Laboratoire d'Analyse et Architecture des Systèmes, UPR 8001 CNRS, Toulouse <http://www.laas.fr>

**piézoélectriques.** Enfin, ce contenu scientifique a été mis en place à travers deux fils conducteurs méthodologiques qui ont guidé mes travaux : la *compréhension des phénomènes physiques* et la mise en place de *modèles et de stratégies de simulations adaptées*, indiqués par les flèches qui entourent le diagramme. Ces deux fils conducteurs m'ont conduit naturellement à travailler sur des techniques de réduction de la taille des modèles (un autre thème cher au LMSSC), à la fois dans un souci d'efficacité des simulations numériques, mais aussi pour l'élégance et la concision de ces modèles réduits, qui conduisent à une meilleure compréhension des phénomènes. Pour ces raisons, l'utilisation des modes de vibration est au cœur de mes travaux, car ils constituent l'outil de base de l'ingénieur en vibration, mais aussi un composant élémentaire au fort contenu physique. C'est dans cet esprit que j'ai travaillé avec Cyril Touzé à leur extension au domaine non linéaire, avec le concept de *modes non linéaires*.

## 1.2 Contenu de ce mémoire

Ce manuscrit propose une synthèse de ces recherches et est divisé en deux grandes parties. La partie I propose en deux chapitres (Chap. 2 et 3) une vue d'ensemble des techniques d'étude que j'ai eu l'occasion de développer dans le cadre des trois applications, dont la description spécifique est regroupée dans la partie II. Cette partie II est constituée de trois chapitres (Chap. 4, 5 et 6) et fait largement référence à la partie I, puisqu'un certain nombre de modèles et outils d'études sont communs aux trois applications.

Le fil conducteur de la partie I est celui de la résolution d'un problème de mécanique. La première étape est le choix d'un modèle adapté. Ainsi, le chapitre 2 est consacré spécifiquement aux modèles sur lesquels j'ai travaillé. Son objectif principal est de regrouper au même endroit et sous une vision unifiée un certain nombre de modèles qui sont généralement décrits séparément les uns des autres. C'est notamment le cas des modèles non linéaires de milieux minces, que j'ai tenté de classer et comparer, à la fois en terme de formulation et d'hypothèses. Des revues bibliographiques sont aussi proposées. Ensuite, le chapitre 3 décrit comment résoudre les modèles, notamment dans un cadre non linéaire où il existe des techniques spécifiques. Les méthodes que j'ai eu l'occasion d'utiliser et développer y sont décrites. On y évoque notamment des méthodes de discrétisation et réduction par projection modale, le concept de mode non linéaire et les techniques numériques de continuation. La fin de ce chapitre est consacrée à certaines techniques expérimentales adaptées aux phénomènes non linéaires.

La partie II est constituée de trois chapitres (chap. 4, 5 et 6) correspondant aux trois thèmes d'application de mes recherches. Dans chaque cas, les principaux résultats y sont repris, en faisant référence aux méthodes générales décrites dans la partie I.

À la suite de ces deux parties, un chapitre de conclusion est proposé, suivi d'une liste des publications de l'auteur, d'une bibliographie générale et de quelques publications choisies de l'auteur.

## 1.3 Une digression

Les recherches présentées dans ce texte se situent dans le domaine de la mécanique dite « de l'ingénieur », c'est-à-dire la mécanique appliquée aux objets, machines et structures étudiés et créés par l'ingénieur, chaque fois que la mécanique de ces objets est en jeu. Les secteurs d'application vont du domaine des transports (aéronautique et spatiale, automobile, construction navale), du génie civil et du bâtiment, jusqu'à l'électronique et ses couplages avec la mécanique pour les dispositifs de réduction de vibration et les micro / nano systèmes électromécaniques. En cela, tout le présent travail s'inscrit dans la mécanique classique (newtonienne) et s'appuie ainsi sur cinq principes : (i) la conservation de la masse, (ii) la conservation de la quantité de mouvement (iii) la conservation de l'énergie (le premier principe de la thermodynamique), (iv) le second principe de la thermodynamique

et (v) les équations de Maxwell (pour la piézoélectricité). Par suite, on peut se demander en quoi le mot « recherche » s'applique à un domaine dont les principes ont été écrits et validés il y a plusieurs dizaines voire centaines d'années.

La réponse est double et se déduit des deux fils conducteurs de mon travail, c'est-à-dire la compréhension des phénomènes et la mise en place de stratégies de modélisation et simulation. Primo, même si la physique sous-jacente est simple, les phénomènes observés sont complexes, ce qui s'explique par l'association de trois caractéristiques. La première est le caractère *dynamique* des phénomènes, qui donne naissance aux vibrations et à leur phénoménologie particulière dont la manifestation principale est la résonance. La seconde est la *géométrie* des systèmes étudiés, qui est complexe car la plus réaliste possible. Elle est la raison d'être d'une grande quantité de modèles simplifiés développés par les ingénieurs, l'exemple le plus notable étant la très large famille des théories de milieux minces (poutres, plaques, coques). Cette géométrie complexe explique aussi l'existence de méthodes numériques spécifiques, la plus connue étant la méthode des éléments-finis. La troisième est le caractère *non linéaire* des phénomènes observés, qui donne naissance là aussi à une phénoménologie variée et inhabituelle : couplages modaux, phénomènes de saut, distorsion harmoniques, chaos etc.

Secundo, le second fil conducteur de mon travail est de créer des méthodes de *simulation* des phénomènes vibratoires observés, le plus *prédictives* possible. Cela signifie qu'on souhaite obtenir des résultats de simulation réalistes en ayant recourt à un nombre le plus réduit d'expériences. On souhaite aussi que ces études numériques soient le plus *rapide* possible, pour être utilisées de manière pratique pour concevoir les systèmes, par exemple. Ces deux ingrédients conduisent à développer des modèles et des stratégies numériques de simulations adaptés.

## 1.4 Avant propos

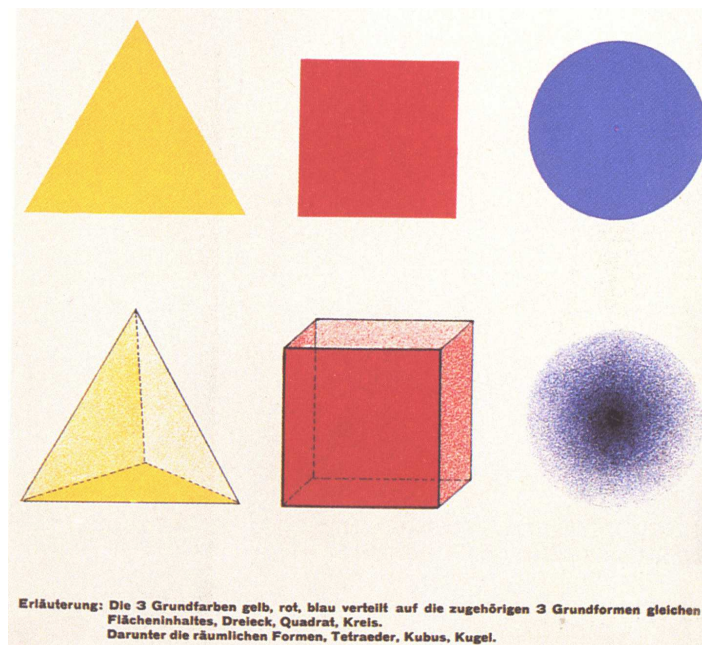
Ce texte s'adresse en tout premier lieu au jury, pour l'obtention du diplôme d'habilitation à diriger des recherches. Néanmoins, j'ai aussi souhaité proposer une synthèse plus exhaustive et pédagogique de mes travaux, rédigée en langue française (ce qui est hélas rare dans la production écrite des chercheurs à l'heure actuelle), dont la portée sera, je l'espère, un peu plus large. Le principal inconvénient de ce parti pris est la longueur du présent manuscrit : j'adresse sur ce point mes excuses au lecteur.

Les chapitres 2 et 3 (la première partie) sont généraux. Ils proposent une synthèse originale, vouée pédagogique, des modèles et techniques que j'ai eu l'occasion de développer et utiliser ses dix dernières années. La seconde partie, composée des chapitres 4, 5 et 6, est plus concise et propose un résumé des trois thèmes d'application de mon travail. Seuls les principaux résultats sont repris.

*Lille, Cap-Ferret, Grazac, Lille,  
janvier - juillet - septembre 2011.*

# PARTIE I

## Modèles et outils



« *Commentaire : les trois couleurs de base : jaune, rouge, bleu, réparties sur les trois formes de base correspondantes auxquelles elles se superposent, triangle, carré, cercle. Au-dessous, les formes dans l'espace, tétraèdre, cube et sphère* »

W. Kandinsky, Staatliches Bauhaus in Weimar, 1919-1923 [159]





---

---

## Modélisation

Mes activités de recherche ont été guidées essentiellement par des applications, c'est à dire par la résolution de problèmes mécaniques particuliers, évoquées aux chapitres 4, 5 et 6. Dans ce cadre, j'ai été amené à utiliser et développer un certain nombre de modèles, dont le présent chapitre propose une synthèse. Deux fils conducteurs, ou « ingrédients », sont au cœur des mes recherches : les non-linéarités géométriques et la piézoélectricité. Les deux premières sections leurs sont consacrées. Ensuite, la section 2.3 propose un catalogue d'un certain nombre de modèles de milieux minces sur lesquels j'ai eu l'occasion de travailler. L'objectif de cette section est d'une part de mettre en parallèle ces modèles pour en dégager les similitudes et des différences, et d'autre part de mettre en évidence, à travers les équations, les mécanismes physiques qui donnent naissance aux non-linéarités géométriques et aux effets piézoélectriques. Des modèles analytiques et éléments-finis sont décrits sur le même plan, car ils sont basés, en général, sur des hypothèses identiques. Même si le champ d'application des seconds est très vaste, puisqu'ils ne limitent ni la géométrie des structures, ni l'amplitude des non-linéarités, les modèles analytiques permettent très facilement de mettre en évidence tel ou tel mécanisme ou phénomène physique, ce qui explique la large place qui leur est consacrée dans mon travail.

### 2.1 Les non-linéarités géométriques

#### 2.1.1 Généralités : les non-linéarités en mécanique des solides

Cette section donne quelques idées très générales sur les non-linéarités rencontrées en mécanique des solides, d'abord à partir d'une définition, et ensuite à travers une classification succincte.

Il est plus simple de définir précisément un système linéaire, si bien qu'on définit souvent un système non linéaire comme un système qui n'est pas linéaire. Je rappelle ici deux définitions / propriétés d'un phénomène / système linéaire, intéressantes pour les études non linéaires proposées tout au long de ce rapport :

**Une définition :** *Un phénomène est linéaire lorsque un changement de l'intensité de la cause produit un changement de l'effet dans les mêmes proportions.* Les systèmes non linéaires ont donc en général un comportement qui dépend de l'intensité du signal d'entrée. Par exemple, les fréquences particulières d'un système non linéaire (fréquences de résonance, fréquence d'oscillations libres) dépendent de l'amplitude de l'excitation.

**Un point de vue dynamique :** *Si un système est linéaire, alors, pour un signal d'entrée sinusoïdal pur, le signal de sortie est sinusoïdal pur, de même fréquence.* Ainsi, une propriété forte des

systèmes linéaires est de conserver le contenu fréquentiel du signal d'entrée en modifiant simplement son intensité. Cette propriété est perdue dans le cas des systèmes non linéaires. On obtient alors de la distorsion harmonique, des mouvements quasi-périodiques, voire du chaos.

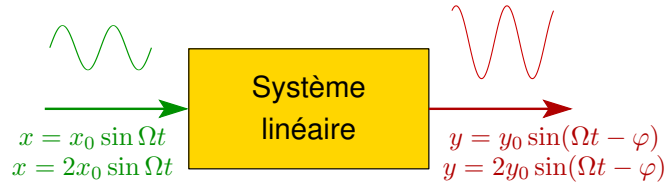


FIG. 2.1 – Comportement dynamique d'un système linéaire

Après avoir évoqué ce qui caractérise la linéarité d'un système, la suite donne un aperçu des différentes causes, ou mécanismes, qui donnent lieu à la perte de linéarité et donc qui sont à la source des phénomènes non linéaires. On se restreint ici à la mécanique des solides, pour laquelle on peut classer ces mécanismes en trois grandes familles.

**Les non-linéarités matérielles :** dans ce cas, c'est la *loi de comportement du matériau* qui est non linéaire. On peut citer comme exemples :

- Les matériaux élasto-plastiques : le passage des déformations élastiques aux déformations plastiques correspond à une relation contrainte / déformations *non régulière*, les déformations plastiques obtenues sont *irréversibles* et se manifestent par un comportement *hystérétique*, trois caractéristiques non linéaires. La plupart des métaux présentent ce comportement, lorsque les contraintes dépassent leur limite élastique.
- Les matériaux élastiques non linéaires : dans ce cas, les déformations sont parfaitement réversibles (c'est le caractère élastique) et régulières, mais c'est la relation contraintes / déformations qui est non linéaire. Ces matériaux sont aussi en général fortement dissipatifs. C'est le cas des élastomères, par exemple.
- Les alliages à mémoire de forme. Ce sont des matériaux qui changent de phase métallurgique en fonction des contraintes et des déformations qui leurs sont appliquées. La principale caractéristique non linéaire est que la relation contrainte / déformations présente une hystérésis et est non régulière.

**Les non-linéarités géométriques :** on dit communément qu'elles proviennent de grands déplacements du système. Lorsqu'elles sont la seule source de non-linéarités, on les rencontre en pratique dans deux familles de systèmes :

- Les mécanismes en grands déplacements : on regroupe dans cette famille tous les systèmes composés de solides rigides liés entre eux par des liaisons. Les non-linéarités proviennent de *grandes rotations* des composants du système les uns par rapport aux autres, qui créent des relations non linéaires entre les efforts de liaison et les déplacements des solides. L'exemple le plus simple est le pendule pesant. Dans ce cas, c'est la force de rappel (le poids) qui est non linéaire en fonction de l'angle d'inclinaison du pendule ( $F = mg \sin \theta$ ), terme responsable des non-linéarités de l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad (2.1)$$

où on a noté  $F$  la force de rappel,  $m$  la masse du pendule,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $\theta$  l'inclinaison du pendule par rapport à la verticale. À titre anecdotique, pour plus de détails sur le pendule vue sous l'angle de ses non-linéarités, on peut consulter [R1] ; de plus, l'ouvrage [32] lui est entièrement consacré.

- Les structures minces en grands déplacements : dans ce cas, il s'agit de la même cause de non-linéarité que pour les mécanismes : ce sont des rotations d'amplitude non négligeable des fibres déformables composant la structure qui créent des *relations non linéaires entre les déplacements et les déformations* des points de la structure. C'est ce type de structure qui est au cœur de mes activités de recherche et de nombreux exemples seront donnés tout au long de ce rapport. Enfin, ajoutons qu'on associe le plus généralement les non-linéarités géométriques aux structures minces à cause de leur faible rigidité transversale, qui autorise des grands déplacements pour des efforts usuels modérés. À l'opposé, des structures « massives » sont trop rigides dans toutes les directions, ce qui empêche en pratique l'apparition de grands déplacements et donc la manifestation des non-linéarités géométriques.

D'autres cas pratiques, importants par leur volume d'applications industrielles, font intervenir les non-linéarités géométriques. Lorsque des non-linéarités matérielles de type élasto-plastique ou élastique non linéaire sont en jeu, elles sont souvent liées à des grands déplacements, si bien qu'il est nécessaire de considérer les non-linéarités matérielles *avec* les non-linéarités géométriques dans les calculs. Parmi les applications industrielles faisant intervenir de l'élasto-plasticité, citons (i) les calculs de mise en forme des matériaux par forgeage, emboutissage etc., (ii) les calculs de crash de véhicules (iii) les calculs de flambage de structures hors du domaine élastique. De plus, les lois de comportement élastiques non linéaires sont caractéristiques des composants en élastomère, très utilisés comme éléments de suspension (« silent bloc ») dans beaucoup de systèmes et mécanismes (dans l'automobile notamment).

**Les non-linéarités de contact :** ce sont des non-linéarités qui apparaissent à l'interface entre plusieurs constituants d'un système. On peut citer :

- les contacts dit localisés, lorsque la surface de contact entre deux éléments est de dimension réduite (On dit aussi que le contact est non conforme). Dans ce cas, le déplacement d'un élément par rapport à l'autre et la force qui crée ce rapprochement sont en relation non linéaire. Ils sont prédits en particulier par la théorie de Hertz (Par exemple, pour une bille sur une surface plane, on a  $P = K\delta^{3/2}$ , où  $P$  est la force,  $\delta$  le déplacement et  $K$  une constante). Les exemples technologiques les plus répandus sont les liaisons par éléments roulants (roulements à billes, roulements à rouleaux etc.) et les engrenages [155, 125, 25].
- le frottement sec, lorsque deux éléments d'un système sont en contact non lubrifié. Dans ce cas, on observe des alternances entre de l'adhérence et du glissement, qui crée une relation non régulière (et donc non linéaire) entre la force de frottement et la vitesse de glissement. Le modèle de Coulomb est largement utilisé pour décrire ces phénomènes [333].
- les contacts intermittents entre deux éléments d'un système en mouvement l'un par rapport à l'autre. Ces non-linéarités s'apparentent à des non-linéarités de choc.

Un bon exemple de machine industrielle qui met en jeu toutes les non-linéarités de contact est le moteur d'avion : le guidage en rotation des arbres est réalisé par des paliers à roulements [338, 119], le contact entre les pieds des aubes et les disques se fait avec frottement sec [174] et du contact intermittent est observé entre les têtes des aubes et le carter environnant [180]. Ces sujets font l'objet à l'heure actuelle de recherches intensives, notamment avec le constructeur de moteur d'avion Snecma et les laboratoires universitaires associés (Le LTDS de l'école centrale de Lyon et le LDSV de l'université McGill au Canada<sup>1</sup>). Enfin, on peut citer l'ouvrage général [2] sur les non-linéarités non régulières.

<sup>1</sup> Seules quelques publications récentes de ces équipes sont citées ici. Pour plus de détails, le lecteur peut se reporter aux sites Internets : Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, <http://ltds.ec-lyon.fr> et Laboratoire de Dynamique des Structures et Vibrations, <http://structdynviblab.mcgill.ca>

Dans mes activités de recherches, je me suis concentré sur les *non-linéarités géométriques* en vibrations des structures. C'est ce point qui est développé dans les deux sections suivantes.

### 2.1.2 Non-linéarités géométriques en mécanique des structures

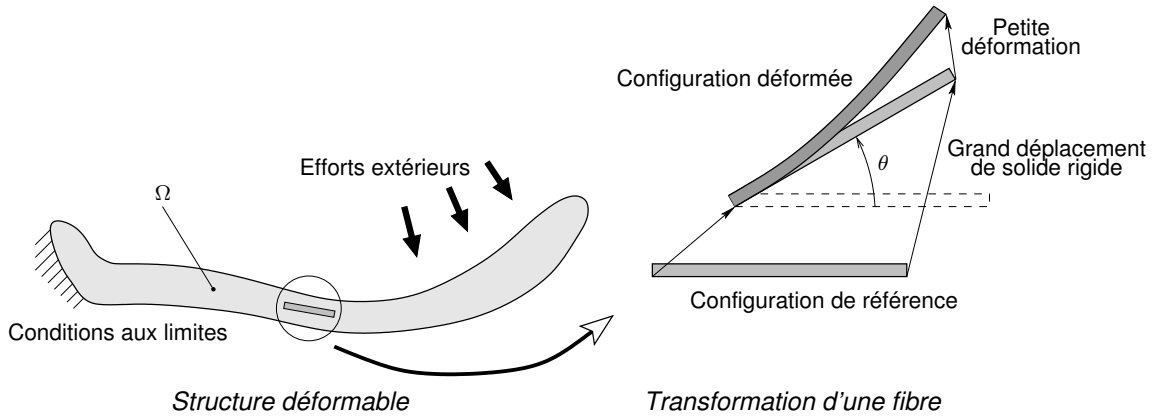


FIG. 2.2 – Transformation d'une fibre d'un milieu continu en grand déplacement

Comme on l'a vu plus haut, le mécanisme élémentaire à la source des non-linéarités géométriques est la rotation de grande amplitude des éléments du système. D'un point de vue mathématique, les grandes rotations apparaissent sous la forme de fonctions sinus et cosinus qu'on ne peut pas linéariser comme dans un système linéaire. Dans le cadre des mécanismes composés de solides rigides et de liaisons, les équations du mouvement s'obtiennent sans difficulté, après un paramétrage et l'utilisation, par exemple, des équations de Lagrange [25, 54]. En revanche, lorsqu'on s'intéresse à une structure déformable, on est confronté à la modélisation non linéaire d'un milieu continu en grands déplacements. Cela nécessite techniquement de choisir : (i) une mesure de déformation (ii) une mesure de contrainte (iii) une loi de comportement, toutes les trois adaptées au problème. Cette section donne quelques pistes générales pour répondre à ces questions.

On ne s'intéresse ici qu'aux cas où le matériau reste élastique et où les déformations restent petites, ce qui se formule par les trois hypothèses suivantes, qui caractérisent mes travaux de recherche et qui justifient les choix de modélisation qui vont apparaître par la suite.

#### HYPOTHÈSE 2.1

|| Les fibres du milieu continu est soumis à des rotations d'amplitude quelconque.

#### HYPOTHÈSE 2.2

|| Les déformations du milieu continu restent petites.

#### HYPOTHÈSE 2.3

|| La loi de comportement du matériau est élastique, linéaire et isotrope (et éventuellement piézo-électrique, cf. §2.2).

#### (a) Le problème physique

On s'intéresse à un milieu continu élastique soumis à des grandes rotations et des petites déformations. D'un point de vue physique, cela signifie que la transformation du milieu continu peut être décrite de manière générale comme suit : chaque fibre du milieu continu est animé d'une transformation qui est la composée de (i) un mouvement de solide rigide d'amplitude quelconque (l'angle  $\theta$  sur

la figure 2.2 est quelconque) (ii) une petite déformation par rapport à cette première transformation (Fig. 2.2).

### (b) Mesure de déformations

L'outil adapté pour décrire la cinématique d'un milieu continu soumis à des grands déplacements (et décrite sur la figure 2.2) est le tenseur des déformations de Green-Lagrange, défini par :

$$\gamma = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) \quad (2.2)$$

avec  $\mathbf{F}$  le gradient de la transformation et  $\nabla \mathbf{u}$  le gradient du vecteur déplacement  $\mathbf{u}(M)$  d'un point  $M$  de la structure<sup>2</sup> [277].

L'utilisation de  $\gamma$  est naturelle, car c'est un *tenseur Lagrangien*, ce qui permet de représenter la transformation du milieu continu par rapport à sa configuration de référence, qui est géométriquement connue, alors que la configuration déformée est en général une inconnue du problème. Elle est de plus justifiée par une propriété de  $\gamma$ , qui est qu'il donne une mesure correcte des déformations du milieu continu *quelle que soit l'amplitude des rotations des fibres*. Cela s'observe en constatant que si un milieu continu est soumis à un déplacement de solide rigide (une translation composée à une rotation d'amplitude quelconque), alors  $\gamma$  reste nul. Cette propriété est équivalente à la propriété d'objectivité des tenseurs [140, §5.2], évoquée dans certains textes sur le sujet [245, 247]. Enfin, une réserve est à émettre : son utilisation pour des cas de grandes déformations doit être forcément associée à des lois de comportement adaptées (élastiques non linéaires, élasto-plastiques...), car associée à une loi de comportement linéaire, il donne lieu à des comportements non linéaires incorrects, notamment en compression (voir [77, Fig. 3.4, p. 64] ou [337, Rq. 3.4, p. 45]). Cela est hors du propos de ce texte, limité aux petites déformations (Hyp. 2.2).

Pour préciser encore cette question, l'utilisation du tenseur des déformations linéarisées

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad (2.3)$$

n'est justifiée que lorsque les rotations du milieu continu sont suffisamment faibles pour être linéarisée (on dit que le milieu continu est soumis à des « petites transformations », c'est-à-dire à la fois à des petites rotations et à des petites déformations, qui donnent alors un modèle parfaitement linéaire). Sinon, il conduit à des résultats faux, notamment pour des structures soumises à une rotation de solide rigide, où il renvoie une mesure de déformations non nulle alors que les déformations sont physiquement nulles.

L'équation (2.2) montre alors immédiatement la source des non-linéarités géométriques : une relation non linéaire entre déformations et déplacements, alors que celle entre les déformations et les contraintes, décrite au paragraphe suivant, est parfaitement linéaire (Eq. (2.5)).

### (c) Mesure des contraintes et loi de comportement

Le tenseur  $\gamma$  est énergétiquement conjugué au second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\boldsymbol{\pi}$  (aussi appelé tenseur de Kirchhoff-Trefftz [108, 112]). La loi de comportement fera donc intervenir ces deux tenseurs. Comme on s'intéresse à un matériau *parfaitement élastique*, et donc réversible,

<sup>2</sup>Précisément, si  $M_0$  est un point de la configuration de référence du milieu continu, qui se déplace en  $M$  dans la configuration déformée, alors  $\mathbf{F} = \partial \mathbf{O}M / \partial \mathbf{O}M_0$ ,  $\mathbf{u}(M) = \mathbf{M}_0 M$  et  $\mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}$ .

celui-ci ne produit pas d'entropie, et le second principe de la thermodynamique montre que [278, 200, 183, 140]<sup>3</sup>

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{F} = \mathcal{U} - Ts, \quad (2.4)$$

où  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\gamma}, T)$  est l'énergie libre de Helmholtz volumique<sup>4</sup> (qui s'exprime en  $\text{J/m}^3$ ),  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\boldsymbol{\gamma}, s)$  l'énergie interne volumique (aussi en  $\text{J/m}^3$ ),  $T$  la température et  $s$  l'entropie.

Comme on s'intéresse à un matériau pour lequel les déformations restent petites (Hyp. 2.2), on choisit une loi de comportement *linéaire* (Hyp. 2.3). En supposant la température constante, on choisit alors une forme pour  $\mathcal{F}$  quadratique en  $\boldsymbol{\gamma}$ , ce qui conduit à :

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1 + \nu}{Y} \boldsymbol{\pi} - \frac{\nu}{Y} \text{tr} \boldsymbol{\pi} \mathbf{1}, \quad (2.5)$$

avec  $Y$  et  $\nu$  le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau.

Dans la littérature sur l'élasticité non linéaire, adaptée notamment au traitement des matériaux en grandes déformations, cette loi de comportement est appelée Kirchhoff Saint-Venant et est le cas particulier linéaire isotrope d'une classe plus large de matériaux appelés hyperélastiques (ou matériaux élastiques de Green), définis par l'existence d'une énergie potentielle volumique élastique de déformation  $\mathcal{W}$  (qui s'exprime en  $\text{J/m}^3$ ), telle que [236] :

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\pi} : \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\mathcal{W}} \quad \text{ou} \quad d\mathcal{W} = \boldsymbol{\pi} : d\boldsymbol{\gamma} \quad (2.6)$$

Cette précédente équation signifie que les contraintes  $\boldsymbol{\pi}$  dérivent du potentiel  $\mathcal{W}$ , dont la dérivée  $\dot{\mathcal{W}}$  correspond à la puissance volumique des efforts intérieurs dans le milieu continu.  $\mathcal{W}$  correspond alors à l'énergie volumique élastique stockée dans le milieu continu lorsqu'il est déformé. Ces matériaux hyperélastiques sont eux même un sous ensemble de la classe encore plus large des matériaux élastiques de Cauchy [236]. Il faut retenir ici que la loi de comportement (2.6) est adaptée aux matériaux en *petites déformations*, et que d'autres lois plus compliquées existent pour des matériaux élastiques en *grandes déformations* [140, 236]. Enfin, en comparant (2.4) et (2.6), on peut remarquer que l'énergie de déformation  $\mathcal{W}$  coïncide avec l'énergie libre<sup>5</sup>  $\mathcal{F}$ .

On peut tout de même se poser la question de la validité physique de cette loi, qui relie des grandeurs définies sur la configuration de référence. Notamment, le sens physique de  $\boldsymbol{\pi}$  est complexe, et un expérimentateur n'a accès facilement qu'aux grandeurs mécaniques sur la configuration déformée, notamment au tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  (appelé aussi tenseur des « vraies » contraintes)<sup>6</sup>. Un calcul intéressant, proposé dans [212], montre que lorsque les déformations sont petites, la loi de comportement (2.6) est équivalente, à un développement limité près, à *la même loi linéaire* écrite entre  $\boldsymbol{\sigma}$  et le tenseur des déformations Eulérien d'Euler-Almansi, avec les mêmes paramètres mécanique  $Y$  et  $\nu$ . Cela signifie bien qu'imposer une relation linéaire entre contrainte et déformations *sur la configuration déformée* lorsque les déformations sont petites est équivalent à imposer (2.5).

Pour finir, on présente l'extension de la loi de comportement (2.5) à un cas où la configuration de référence du milieu continu est précontrainte, soit par des efforts extérieurs représentés par un tenseur

<sup>3</sup>Précisément [200, §2.10-2.11], [278, Chap. VII, §4.2], [183, pp. 74, 133], [140, p. 208]

<sup>4</sup>Il ne faut pas confondre  $\mathcal{F}$ , qui est volumique, avec l'énergie libre de Helmholtz massique (ou spécifique)  $\tilde{\mathcal{F}}$ , telle que  $\mathcal{F} = \rho_0 \tilde{\mathcal{F}}$ , qui est généralement utilisée, avec  $\rho_0$  la masse volumique du matériau dans sa configuration de référence

<sup>5</sup>Les textes de mécanique des milieux continus utilisent le second principe et  $\mathcal{F}$  [278, 200] alors que ceux d'élasticité non linéaire postule directement l'équation 2.6 [236]. L'équivalence entre les deux est précisée dans [140, p. 208] et [183, p. 133]

<sup>6</sup>La relation entre  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\pi}$  est :  $\boldsymbol{\pi} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-\text{T}}$ .

des contraintes  $\boldsymbol{\pi}_0$ , soit par une précontrainte thermique. Dans ce cas, l'équation (2.4), en ne gardant que les termes quadratiques en  $\boldsymbol{\gamma}$  et  $T$  dans  $\mathcal{F}$ , conduit à [278, 183] :

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_0 + \boldsymbol{c} : \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{k}(T - T_0), \quad (2.7)$$

où  $\boldsymbol{c}$  est le tenseur de raideur élastique à température constante,  $\boldsymbol{k}$  est le tenseur des coefficients de dilatation thermique à déformation constante et  $T_0$  la température de la configuration initiale. Dans le cas où le matériau est isotrope, l'équation (2.5) donne  $\boldsymbol{c}$  en fonction de  $Y$  et  $\nu$ .

#### (d) Équations du mouvement

Je présente ici la formulation variationnelle des équations du mouvement du milieu continu. Le principe des travaux virtuels stipule que *la somme des travaux virtuels des efforts intérieurs et des efforts extérieurs est à toute date  $t$  égale au travail des efforts d'accélération, dans tout déplacement virtuel infinitésimal  $\delta\boldsymbol{u}$* , ce qui s'écrit [112, 140, 277] :

$$\forall t, \quad \forall \delta\boldsymbol{u}, \quad \delta\mathcal{W}_i + \delta\mathcal{W}_e = \delta\mathcal{W}_a, \quad (2.8)$$

avec

$$\delta\mathcal{W}_i = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\pi} : \delta\boldsymbol{\gamma} \, d\Omega, \quad (2.9)$$

$$\delta\mathcal{W}_e = \int_{\Omega} \boldsymbol{f}_e \cdot \delta\boldsymbol{u} \, d\Omega + \int_{\partial\omega} \boldsymbol{F}_e \cdot \delta\boldsymbol{u} \, dS, \quad (2.10)$$

$$\delta\mathcal{W}_a = \int_{\Omega} \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \cdot \delta\boldsymbol{u} \, d\Omega, \quad (2.11)$$

où  $\Omega$  et  $\partial\Omega$  représentent respectivement le domaine de la configuration de référence du milieu continu et sa frontière ;  $\rho$  est la masse volumique du matériau ;  $\boldsymbol{f}_e$  et  $\boldsymbol{F}_e$  sont les efforts volumique et surfacique extérieurs,  $\delta\boldsymbol{\gamma}$  est la variation de  $\boldsymbol{\gamma}$  dans le déplacement virtuel  $\delta\boldsymbol{u}$  et  $\ddot{\boldsymbol{u}}$  est la dérivée seconde de  $\boldsymbol{u}$  par rapport au temps, accélération du point courant dans un référentiel Galiléen. Si besoin est, on peut aisément récrire cela dans un référentiel non Galiléen en recalculant  $\ddot{\boldsymbol{u}}$  en fonction des accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis.

#### (e) Des alternatives unidimensionnelles

En pratique, la plupart des textes utilisent le couple de tenseurs Green-Lagrange / Piola-Kirchhoff II, comme cela est proposé aux paragraphes précédents. Néanmoins, lorsque la configuration déformée de la structure étudiée est de géométrie simple, certains textes suivent des approches plus ou moins équivalentes à l'utilisation des tenseurs de Biot, qui correspondent au cas  $\alpha = 1$  de l'équation (2.17). Cela est le cas pour les milieux unidimensionnels (poutres ou arches) modélisés avec les cinématiques classiques d'Euler-Bernoulli ou de Timoshenko, où les études sont partagées entre deux grandes familles.

- La première regroupe des études liées à des modèles numériques et la méthode des éléments finis. Dans ce cas, on peut utiliser le tenseur de Green-Lagrange comme indiqué plus haut. Néanmoins, il est possible de simplifier la formulation en réalisant une *linéarisation consistante* de  $\boldsymbol{\gamma}$ . Pour cela on procède à une décomposition polaire de la transformation :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{U}}, \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{R} = \mathbf{1}, \quad (2.12)$$

pour la séparer en une partie rotation pure (le tenseur  $\boldsymbol{R}$ ) et une partie dilatations pures (le tenseur  $\tilde{\boldsymbol{U}}$ ). Ici, on choisit pour  $\boldsymbol{R}$  le tenseur représentant la rotation des sections droites de la



poutre. Le tenseur de Green-Lagrange s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T + \mathbf{L}^T \mathbf{L}), \quad (2.13)$$

avec

$$\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{1}. \quad (2.14)$$

L'expression (2.13) ne fait alors intervenir *que* la partie déformation de la transformation, *sans la rotation*, puisque  $\mathbf{R}$  n'apparaît pas. Du coup, en vertu de l'hypothèse 2.2 de petite déformation, elle peut être linéarisée, pour obtenir la mesure de déformation suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \simeq \boldsymbol{\gamma}, \quad (2.15)$$

Cette mesure de déformation est analogue à un tenseur des déformations de Biot. Précisément, *lorsque la rotation  $\mathbf{R}$  utilisée dans la transformation est celle à laquelle sont soumise les directions principales de la transformation*, on montre [277, 140] que  $\tilde{\mathbf{U}}$  est le tenseur des dilatations pures, noté  $\mathbf{U}$ , qui est symétrique. Dans ce cas,  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$  est bien le tenseur de Biot, défini par

$$\boldsymbol{\gamma}_B = \mathbf{U} - \mathbf{1}, \quad (2.16)$$

tenseur correspondant au cas  $\alpha = 1$  de (2.17). Cela est le cas lorsqu'une cinématique d'Euler-Bernoulli est utilisée, puisqu'alors, la rotation des sections droites de la poutre est identique à celle de la fibre neutre et donc à celle des directions principales de déformation [135]. Dans le cas d'une cinématique de Timoshenko, qui autorise du cisaillement transverse, alors  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$  n'est pas strictement *le* tenseur des déformations de Biot ( $\tilde{\mathbf{U}}$  n'est pas symétrique).

En ce qui concerne la mesure des contraintes, on peut montrer que le tenseur des déformations  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$  de l'équation (2.15) est conjugué à un tenseur des contraintes  $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$  (peut différent du tenseur des contraintes de Biot qui est conjugué à  $\boldsymbol{\gamma}_B$  [113, 192, 337]) et qu'il est correct d'utiliser là encore la loi (2.5), écrite entre  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$  et  $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$  (cela est évident puisqu'en petite déformation  $\boldsymbol{\gamma} \simeq \tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ ). Ce tenseur des contraintes est remarquable, car l'étude [270] montre que les efforts généralisés correspondant à  $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$  sont en fait les efforts intérieurs (effort normal, effort tranchant, moment fléchissant) réellement imposés à une section droite de la poutre dans sa configuration déformée, c'est-à-dire ceux qui interviennent directement dans l'écriture de l'équilibre de celle-ci. Ainsi, si en général l'interprétation physique du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff II  $\boldsymbol{\pi}$  est délicate, celle de  $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$  est immédiate.

Pour plus de détails sur cette question, le lecteur est renvoyé aux études suivantes. Le polycopié de cours [102] décrit en détail la linéarisation consistante. Les mêmes calculs sont obtenus dans [135] en utilisant directement le tenseur des déformations de Biot comme mesure de déformations, dans le cas d'une cinématique d'Euler-Bernoulli. L'interprétation en terme de tenseur de Biot est décrite dans [113, 192, 337] et l'article fondateur de cette approche est du à E. Reissner [270]. Sinon, une famille conséquente d'études, produite par l'équipe de P. F. Pai en parallèle, propose aussi d'utiliser les tenseurs de Biot, qui sont appelés dans ces textes tenseurs de Jau-mann. Les articles initiaux sont [244, 245, 246], complétés plus récemment par [242, 241]. Il est intéressant de constater que l'article fondateur de cette dernière approche [108] a été publié la même année (1972) que celui de Reissner [270]. On peut aussi citer l'ouvrage de Stoker [299], antérieur aux études sus-citées, qui introduit le tenseur de Biot comme mesure des déformation d'un milieu continu 3D soumis à des petites déformations et des grands déplacements. Enfin, une publication de l'auteur est en cours de préparation sur le sujet [J22].

- La seconde famille regroupe les études fondées sur des modèles analytiques. En général, dans ce cas, les équations du mouvement sont établies sur la configuration déformée de la structure et

des mesures locales de déformation (définies sur cette configuration déformée) sont utilisées : l'élongation de la ligne moyenne par rapport à sa longueur initiale, la courbure, l'angle de cisaillement. Elles se rapportent à des déformations dites « ingénieur » [77, 227], définies de manière heuristique sur la configuration déformée. Leur sens en terme de mesure générale de déformation tridimensionnelle, sous forme de tenseur, est a priori difficile à trouver. Le seul cas clair est celui d'une cinématique d'Euler-Bernouilli, où dans ce cas la mesure des déformations « ingénieur » coïncide avec celle associée au tenseur de Biot (Eq. (2.16)) [J22], [245]. En revanche, comme dit plus haut, les efforts généralisés utilisés pour écrire l'équilibre local d'un élément de poutre coïncident avec le tenseur des contraintes  $\tilde{\pi}$ , conjugué de  $\tilde{\gamma}$  [270]. Sur ce sujet, on peut se référer à [99, 336, 219, 227] pour l'établissement d'équations de poutres en grand déplacements à partir de l'équilibre local d'un petit élément.

#### (f) Autres mesures de déformations / contraintes

Les tenseurs de Green-Lagrange et de Biot sont en fait des cas particuliers d'une famille de mesures de déformations plus générale, définie dans [236, §2.2.7] par :

$$\gamma^{(\alpha)} = \frac{1}{\alpha} (\mathbf{U}^\alpha - \mathbf{1}), \quad \alpha \geq 1; \quad \gamma^{(0)} = \ln \mathbf{U}, \quad (2.17)$$

pour tout  $\alpha$  entier. Le tenseur  $\mathbf{U}$  est défini par la décomposition polaire :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{1}, \quad (2.18)$$

ce qui conduit à

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (2.19)$$

où  $\mathbf{R}$  est le tenseur des rotations qui permet de déplacer les directions principales de déformation de la configuration de référence vers la configuration déformée. Il est appelé tenseur des dilatations pures<sup>7</sup> et est symétrique [277]. Il est alors aisé de montrer que le tenseur de Biot correspond au cas  $\alpha = 1$  ( $\gamma_B = \gamma^{(1)}$ ) et que le tenseur de Green-Lagrange correspond au cas  $\alpha = 2$  ( $\gamma = \gamma^{(2)}$ ). La formule (2.17) montre bien, comme indiqué plus haut, que  $\gamma$  (et par suite  $\gamma_B$ ) est une mesure correcte des déformations quelle que soit la partie rotation de la transformation du milieu continu (c'est un tenseur objectif).

On peut montrer que les tenseurs  $\gamma^{(\alpha)}$  sont conjugués à des tenseurs de contraintes notés  $\mathbf{T}^{(\alpha)}$ , de manière analogue à l'équation (2.6), de telle sorte que  $\dot{\mathcal{W}} = \mathbf{T}^{(\alpha)} : \dot{\gamma}^{(\alpha)}$  est indépendante de  $\alpha$  [236, §3.5.2].

Enfin, le même texte démontre que *lorsque les déformations sont petites* (Hyp. 2.2), toutes ces mesures de déformations sont *équivalentes* au premier ordre et qu'il est correct et valide physiquement d'écrire la loi de comportement linéaire (2.5) avec tous les couples  $(\gamma^{(\alpha)}, \mathbf{T}^{(\alpha)})$  et les mêmes grandeurs matérielles  $Y$  et  $\nu$ , et cela quel que soit  $\alpha$  [236, §2.2.7, §6.1.6]. Cela paraît être mis en défaut pour des déformations de l'ordre de 4% [244].

#### (g) Conclusion

Pour conclure, la présente section a donné un aperçu des différentes mesures de déformations et de contraintes utilisées dans les textes se rapportant à la mécanique non linéaire géométrique des milieux minces élastiques. L'hypothèse 2.2, qui impose aux déformations de rester petites, est au cœur de ces études. Elle garantit, on l'a montré de plusieurs manières différentes, que :

1. toutes les mesures de déformations sont équivalentes, à condition qu'elles ne tronquent pas les rotations (cela exclut évidemment l'utilisation du tenseur des déformations linéarisées  $\varepsilon$ );

<sup>7</sup>La littérature anglo-saxonne le nomme *right stretch tensor* [236, §2.2.4]

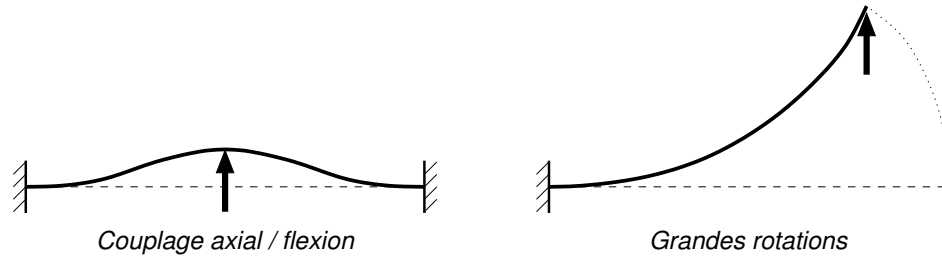


FIG. 2.3 – Illustration des deux grandes familles de vibrations non linéaires de milieux minces élastiques.

2. la loi de comportement linéaire (2.5) est valable, avec les constantes matérielles classiques  $Y$  et  $\nu$ , quel que soit le couple de tenseurs déformations / contraintes utilisé.

### 2.1.3 Modèles de von Kármán ou grandes rotations ?

Lorsqu'on s'intéresse à la mécanique non linéaire géométrique des structures minces élastiques, deux grandes familles de modèles se distinguent (Fig. 2.3). À chaque fois, comme on s'intéresse à des structures minces, leur géométrie particulière impose des directions privilégiées. Pour les milieux unidimensionnels (cordes, poutres, arches), on distingue la direction axiale (celle de la fibre neutre) des deux directions transverses orthogonales. Pour les milieux bidimensionnels (membranes, plaques, coques), ce sont les deux directions de la surface moyenne (appelées direction de membrane) qu'on distingue de la direction transverse. Bien évidemment, c'est la faible rigidité de ces structures *dans la(les) direction(s) transverse(s)* qui autorise les comportements non linéaires géométriques pour des efforts modérés et c'est donc le déplacement transverse qui est l'inconnue principale de ces études. Dans la suite, on désignera par *longitudinal* les directions axiale (1D) ou de membrane (2D).

#### (a) Modèles de type von Kármán.

Le principe de ces modèles est de tronquer la partie non linéaire du tenseur de Green-Lagrange (Eq. (2.2)) en ne retenant que les premiers termes quadratiques en fonction du déplacement transverse dans les déformations longitudinales. Cette troncature a été proposée par von Kármán [327] en 1910 dans le cadre de la statique des plaques minces. Ces modèles sont parfois désignés dans la littérature par le vocable « modèle avec rotations modérées » [235, 61, 62], directement relié à la troncature, qui signifie qu'ils permettent de prendre en compte les effets non linéaires créés par les rotations des fibres, à conditions qu'elles ne soient pas trop importantes.

Cette théorie est applicable (et a été appliquée) pour tous les milieux minces (cordes, poutres, arches, membranes, plaques, coques...), dans un nombre conséquent d'études, à la fois analytiques et numériques. Ses principales caractéristiques sont évoquées ci-dessous.

- Cette théorie permet de prendre en compte le mécanisme non linéaire géométrique principal rencontré dans les milieux minces : *le couplage membrane / flexion*. C'est le classique effet de corde : lorsqu'on impose un déplacement transverse à une corde, sa longueur augmente, ce qui se traduit aussi par une augmentation de sa tension, augmentation variant avec le carré du déplacement. De manière plus générale, pour les milieux bidimensionnels, se couplage s'explique par un changement de métrique de la ligne / surface moyenne de la structure induit par le déplacement transverse.
- Cette théorie est valide et est applicable pour la plupart des cas de figure pratiques faisant intervenir des matériaux métalliques qui restent dans le domaine élastique (c'est-à-dire que les déformations doivent rester petites, cela étant consistant avec les hypothèses fondatrices de la

page 20), que se soit pour le flambage ou les vibrations non linéaires, à condition que *le mouvement longitudinal soit contraint*. Cela peut être la conséquence des conditions aux limites, ou bien de la géométrie bidimensionnelle de la structure. Cette caractéristique est nécessaire pour que le couplage membrane / flexion soit activé, conditions sans quoi le modèle de von Kármán est linéaire. Cela partage les milieux minces en deux familles distinctes :

- dans le cas des milieux unidimensionnels (poutres ou arches), il est nécessaire que les extrémités de la structure soient immobilisées dans la direction axiale, pour que le couplage axial / flexion soit activé. Cela est en général imposé par les conditions aux limites. Dans le cas contraire, la troncature liée au modèle de von Kármán est trop dure et les équations obtenues sont linéaires. C'est le cas notamment des poutres encastées / libres, qu'il est nécessaire de traiter avec des modèles « grandes rotations » (voir ci-après). D'un point de vue physique, les non-linéarités liées au couplage axial / flexion se manifestent pour des déplacements transverses beaucoup plus faibles que celles liées aux grandes rotation : une poutre bi-encastée est « plus non linéaire » que la même poutre encastée / libre (Fig. 2.3).
- À l'opposé, dans le cas des milieux bidimensionnels (plaques, coques, membranes), la théorie de von Kármán donne lieu à un modèle correct dans presque tous les cas de figure, car une déformation de flexion induit presque toujours un changement de métrique de la surface moyenne. Cela est par exemple le cas même avec des conditions aux limites parfaitement libres, comme par exemple dans le cas d'une plaque circulaire à bord libre, qui est toujours sujette à un couplage membrane / flexion [J1, J2, J9]. Les rares cas où le couplage membrane / flexion n'est pas activé se rencontrent pour certains modes de vibration, pour des géométries de plaques et coques et des conditions aux limites particulières. Il faut que la déformée modale de la structure n'induisse pas de changement de métrique, c'est-à-dire qu'elle corresponde à une surface développable. Ce cas est observé pour certains modes de flexion d'une plaque rectangulaire encastée sur l'un de ses bords, qui ont leurs déformées analogue à celle des modes d'une poutre encastée / libre. Dans ce cas, les vibrations non linéaires découlent d'un modèle de type « grandes rotations ».
- Les modèles analytiques obtenus sont très simples : il s'agit juste d'une correction assez minime des équations linéaires, qui gardent une forme similaire.
- Cette théorie est très rigoureusement justifiée mathématiquement, par des développements asymptotiques selon un « petit paramètre » lié à l'intensité des efforts extérieurs. On montre alors que les modèles de von Kármán apparaissent comme une première correction non linéaire aux modèles linéaires [63, 65, 107, 64, 109, 211, 123, 124].

Les références citées ci-dessus sont juste indicatives et le lecteur intéressé peut consulter les introductions de [J1, J6, J9, J12] et les rapports [R1, R2] pour plus de détails bibliographiques dans le cas des plaques et des coques.

### (b) Grandes rotations

Ce vocable renvoie aux cas où la troncature liée au modèle de von Kármán n'est pas valide et où il faut considérer plus de termes dans le développement des non-linéarités du tenseur de Green-Lagrange. D'un point de vue physique, il s'agit de prendre en compte des rotations de grande amplitude des fibres élastiques du milieu continu, alors que le modèle de von Kármán n'est valable que pour les petites rotations. Dans le cas présent où on ne s'intéresse qu'à des solides élastiques en *petites déformations*, ces modèles ne sont nécessaires *que dans les cas où le couplage membrane / flexion n'est pas activé*, c'est-à-dire, comme on l'a vu, uniquement dans le cas des milieux unidimensionnels où le mouvement axial n'est pas contraint et dans quelques rares cas de milieux bidimensionnels. Il existe néanmoins des formulations en grandes rotations adaptées aux plaques et aux coques, mais leur

utilisation pratique n'a de sens que lorsque les déformations sont grandes, et donc associées à des lois de comportement non linéaires, cas exclus dans le présent texte.

D'un point de vue physique, deux mécanismes créent les non-linéarités géométriques dans ce cas : des *non-linéarité de courbure* et des *non-linéarités inertielles*. En fait, dans le cas d'une poutre, le moment de flexion est proportionnel à la courbure de celle-ci, qui elle-même est une fonction non linéaire des déplacements de la section droite. Si la poutre est simplement sujette à un mouvement de flexion dans le plan  $(x, z)$ , avec les hypothèse d'Euler-Bernouilli, on a :

$$M = YI\kappa, \quad \text{avec} \quad \kappa = \theta', \quad (2.20)$$

où  $M$  est le moment de flexion,  $\kappa$  la courbure et  $\theta$  l'angle de rotation des sections droites. Cette courbure  $\kappa$  s'écrit alors, pour les théories de von Kármán et de grande rotation [170] :

$$\text{von Kármán : } \kappa = w'', \quad \text{Grandes rotations : } \kappa = \frac{w''(1+u') - u''w'}{(1+u')^2 + w'^2}. \quad (2.21)$$

où  $u(x)$  et  $w(x)$  sont respectivement les déplacements axial et transverse de la poutre, fonction de l'abscisse  $x$  des sections non déformées et  $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial x$ . Ces équations montrent clairement que :

- pour la théorie de von Kármán, la relation moment de flexion / déplacements est linéaire ; comme dit plus haut, c'est le couplage membrane / flexion la source des non-linéarités ;
- pour les grandes rotations, la relation moment de flexion / déplacements est non linéaire : c'est la source des non-linéarités de courbure.

Le second mécanisme, les *non-linéarités inertielles*, provient du fait que dans le mouvement de la poutre en grande rotation, le déplacement axial  $u$  est non négligeable (voir Fig. 2.3(droite)) et l'inertie associée  $\rho S\ddot{u}$  est équivalente à une force fortement non linéaire en fonction de  $w$ .

Un modèle simple de poutre en grande rotation est proposé au paragraphe 2.3.3 et permet de comprendre ces deux mécanismes de non-linéarité. La littérature sur les poutres en grandes rotations est très fournie et un aperçu est proposé au paragraphe 2.3.3.

### (c) Conclusion

En considérant le problème du point de vue de la géométrie des structures (1D ou 2D), deux cas de figure se présentent :

- pour les structures unidimensionnelles (cordes, poutres, arches), les modèles de von Kármán ne s'appliquent que si le déplacement axial est contraint. Dans le cas contraire, il faut considérer des modèles incluant des grandes rotations.
- pour les structures bidimensionnelles (membranes, plaques et coques), dans presque tous les cas, le couplage membrane / flexion est activé et les modèles de von Kármán permettent de décrire correctement les vibrations non linéaires.

## 2.2 Les matériaux piézoélectriques

Un matériau piézoélectrique est un matériau qui est capable de convertir de l'énergie mécanique en énergie électrique (c'est l'effet piézoélectrique *direct*) et inversement, de l'énergie électrique en énergie mécanique (c'est l'effet piézoélectrique *inverse*). Ces propriétés sont à la source d'un large champ d'application de ces matériaux, pour coupler des déformations mécaniques à un circuit électrique. C'est Pierre et Jacques Curie qui ont découvert l'effet piézoélectrique en 1880 [78]. Depuis, ces matériaux ont été largement étudiés et modernisés, notamment par la mise au point de céramiques piézoélectriques. On peut citer deux applications, notoires pour leur implication dans la vie courante

et leur production au stade industriel : (i) les capteurs / actionneurs électro-acoustiques à ultrasons au cœur des échographes (le même principe est aussi utilisé dans les sonars) et (ii) les résonateurs à quartz pour réaliser des horloges. Dans mon travail, je me suis intéressé à l'utilisation des matériaux piézoélectriques pour la réduction des vibrations mécaniques (Chap. 5, [J13, J15, J19, J23] et [C26, C35]) et comme capteur / actionneur dans des micro / nano résonateurs (M/NEMS, chap. 6, [J14, J20, J21] et [C27]).

## 2.2.1 Généralités

### (a) Matériaux et mécanisme physique

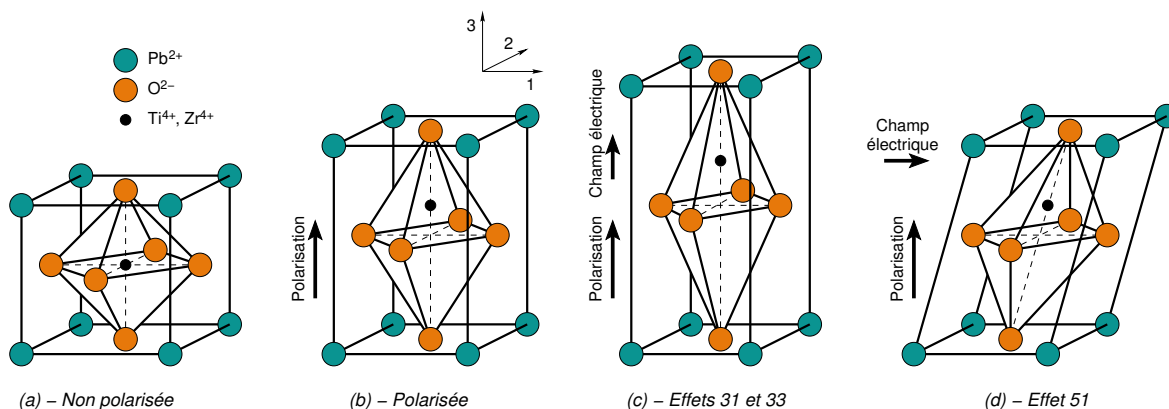


FIG. 2.4 – Cellule élémentaire d'un PZT et effets piézoélectriques classiques (D'après [215])

Les premiers matériaux piézoélectriques à avoir été découverts sont des *cristaux*, dont le comportement est piézoélectrique à l'état naturel, du fait de l'asymétrie de leur structure cristalline (on peut citer le quartz, le sel de Seignette<sup>8</sup>, le sucre...). Depuis, d'autres matériaux piézoélectriques ont été découverts et développés : les *céramiques* (comme le PZT), les *polymères* (comme les PVDF) ou des *composites piézoélectriques* [91, 258, 282, 332, 334, 261].

On s'intéresse ici plus particulièrement aux céramiques, dont la famille la plus utilisée du fait des ses excellentes propriétés piézoélectriques est le PZT. Il s'agit d'un oxyde de Plomb, de Zirconium et de Titanium, de formule générique  $A^{2+}B^{4+}O_3^{2-}$ , où A est un ion métallique divalent (du Plomb ou du Barium) et B est un ion métallique tétravalent (comme le titane ou le zirconium). Les PZT sont en général formés de cristaux de zirconate de plomb  $Pb^{2+}Zr^{4+}O_3^{2-}$  et de titanate de plomb  $Pb^{2+}Ti^{4+}O_3^{2-}$ , frittés et en proportion à peu près égales, dépendant du fabricant et de l'application [148, 57], ce qui fait qu'ils sont parfois désignés par la formule  $PbZr_xTi_{1-x}O_3$  [28]. Le titanate de Barium  $Ba^{2+}Ti^{4+}O_3^{2-}$  est une autre céramique piézoélectrique qui possède la même structure cristalline que les PZT. Une cellule élémentaire est représentée sur la figure 2.4. Ces céramiques peuvent être *dopées*, en remplaçant certains ions  $Zr^{4+}/Ti^{4+}$  par des ions de valence différente ( $Fe^{3+}$  ou  $Nb^{5+}$ , pour obtenir des céramiques *dures* ou *douces*, qui ont des propriétés piézoélectriques différentes [258, 260].

Ces matériaux céramiques sont caractérisés par deux états cristallins, en fonction de leur température. Au-dessus d'une température appelée température de Curie (entre 200°C et 350°C pour les PZT [260]), ces cristaux ont une structure cristalline cubique (fig. 2.4(a)), avec les centres de gravité des charges positives et négatives coïncidents, si bien qu'ils ne sont pas polarisés. Par contre, en dessous de la température de Curie, ces cristaux ont une structure tétragonale (fig. 2.4(b.)) pour laquelle l'ion

<sup>8</sup>aussi appelé sel de Rochelle, qui est le nom commun du tartrate double de sodium et de potassium, de formule  $C_4H_4KNaO_6$

$B^{4+}$  n'est plus au centre de la structure, si bien que le cristal se comporte comme un dipôle électrostatique. L'effet piézoélectrique provient de cette propriété de polarisation. Si le matériau est soumis à des efforts mécaniques qui le déforme, la position des ions négatifs et positifs est modifiée, ce qui modifie le champ électrostatique local. C'est l'effet direct. Inversement, si on soumet le dipôle à un champ électrique, les ions positifs et négatifs sont soumis à des forces électrostatiques opposées qui le déforme. C'est l'effet indirect (Figs. 2.4(c,d)).

En pratique, un élément piézoélectrique est toujours constitué d'une partie en matériau piézoélectrique (le PZT), entourée de deux électrodes conductrices qui servent à créer et mesurer le champ électrostatique. Après frittage du PZT et à température ambiante (en dessous de la température de Curie), les cristaux sont répartis aléatoirement<sup>9</sup> et la polarisation est globalement nulle à l'échelle macroscopique. Pour être utilisable, la céramique doit être *polarisée*. Cela est réalisé en imposant un champ électrostatique très intense, au moyen des électrodes, et en le relâchant. Cette opération permet de changer la direction de polarisation locale des cristaux, pour l'orienter le plus près possible de la direction du champ électrique, ce qui crée une *polarisation rémanente* macroscopique non nulle, dans la direction du champ électrique de polarisation. Dans cet état, le matériau est en équilibre électrostatique, et la polarisation et le champ électrique sont non-nuls à l'intérieur du matériau.

### (b) Équilibre électrostatique

On considère le matériau piézoélectrique comme un milieu continu et son état électrostatique est caractérisé par (i) le vecteur *champ électrostatique*  $\mathbf{E}$ , une grandeur intensive, et (ii) le vecteur *polarisation*  $\mathbf{P}$ , une grandeur extensive. Ce dernier est relié aux moments des dipôles électrostatiques des cristaux évoqués au paragraphe précédent, c'est-à-dire au décalage des charges électriques positives par rapport aux charges négatives, à l'intérieur du milieu continu<sup>10</sup>. Ces deux grandeurs caractérisent parfaitement l'état électrostatique du milieu continu. Néanmoins, on a pour habitude de définir le vecteur *déplacement électrique*  $\mathbf{D}$  par [154] :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.22)$$

où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide (constante égale à  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$  F/m), et de définir l'état électrostatique du milieu continu par le couple  $(\mathbf{E}, \mathbf{D})$  au lieu de  $(\mathbf{E}, \mathbf{P})$ .

En considérant un domaine  $\Omega_p$  de matériau piézoélectrique, les équations d'équilibre électrostatique s'écrivent :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \text{dans } \Omega_p, \quad (2.23a)$$

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = -q, \quad \text{sur } \partial\Omega_p. \quad (2.23b)$$

La première de ces équations est une des équations de Maxwell, simplifiée en considérant que le matériau piézoélectrique est diélectrique, c'est-à-dire qu'il est dépourvu de charges libres<sup>11</sup>. La seconde est la condition aux limites classique, avec  $q$  une densité surfacique de charges libres, amenée par exemple par les électrodes<sup>12</sup>.

Aux deux équations précédentes, il faut ajouter l'équation de Maxwell :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (2.24)$$

<sup>9</sup>En fait, le matériau est organisé en plusieurs grains, comprenant eux-mêmes plusieurs domaines ferroélectriques (ou domaines de Weiss), comprenant plusieurs cristaux contigus de même direction de polarisation. Ce sont ces domaines qui changent de direction de polarisation lorsque le matériau est soumis à un champ électrostatique intense.

<sup>10</sup>On rappelle que les matériaux piézoélectriques sont des diélectriques, c'est-à-dire qu'ils ne contiennent que des charges *liées*, par opposition aux charges *libres* des conducteurs. C'est le déplacement de ces charges liées qui crée la polarisation.

<sup>11</sup>L'équation (2.23a) s'écrit dans le cas général  $\operatorname{div} \mathbf{D} = q_v$ , avec  $q_v$  la densité de charges libres, nulle ici.

<sup>12</sup>qui sont des conducteurs et donc qui véhiculent des charges libres, qui se concentrent sur ses frontières à l'équilibre.

simplifiée en vertu de l'hypothèse électrostatique (ou quasi-électrostatique) [154, p. 181], qui stipule que les répartitions de charge et les densités de courant sont stationnaires, ce qui conduit à négliger le couplage entre les quantités électriques  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$  et les quantités magnétiques. Cette hypothèse est réaliste tant que la longueur d'onde électromagnétique est très grande devant la longueur d'onde acoustique [200, §4.6] ou, autrement dit, tant que la vitesse de phase des ondes acoustiques est négligeable devant la vitesse de la lumière dans le vide [304]. Précisément, cela s'écrit :

$$\lambda_{em} \gg \lambda_{ac} \Leftrightarrow \frac{\omega}{k_{ac}} \ll c \Leftrightarrow f \ll \frac{c}{\lambda_{ac}}, \quad (2.25)$$

où  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s est la vitesse de la lumière dans le vide,  $\lambda_{em}$  et  $\lambda_{ac}$  sont des longueurs d'ondes typiques électromagnétiques et acoustiques,  $k_{ac}$  est le nombre d'onde acoustique associé et  $\omega$  et  $f$  sont la pulsation et la fréquence des phénomènes. La dernière équation montre que pour les applications *réduction de vibration* du chapitre 5, où  $\lambda_{ac} \simeq 1$  cm, les fréquences doivent rester petites devant  $c/\lambda_{ac} = 30 \cdot 10^6$  kHz, et pour les applications *M/NEMS* du chapitre 6,  $\lambda_{ac} \simeq 1$  nm, soit  $f \ll 300 \cdot 10^6$  GHz. Les hypothèses électrostatiques sont ainsi toujours vérifiées dans nos applications.

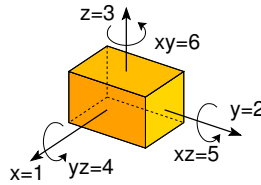
L'équation (2.24) montre alors que le champ électrique  $\mathbf{E}$  est irrotationnel, ce qui signifie qu'on peut définir un potentiel électrique  $\phi$  tel que :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (2.26)$$

On peut remarquer que le potentiel  $\phi$  est alors défini à une constante près, si bien qu'il est souvent commode d'utiliser la différence de potentiel entre deux points.

Il est intéressant de remarquer le parallèle qui existe entre les grandeurs et équations électriques ci-dessus et leur contrepartie mécanique. Le déplacement électrique  $\mathbf{D}$  est analogue aux tenseurs des contraintes mécaniques, de part son équation d'équilibre (2.23a), qui fait apparaître une divergence, et sa condition aux limites (2.23b). Le champ électrique  $\mathbf{E}$  et le potentiel  $\phi$  sont respectivement analogue au tenseur des déformations et au déplacement mécanique, de part la relation (2.26) qui fait intervenir un gradient.

### (c) Loi de comportement



	Contraintes						Déformations					
Tensorielles	$\pi_{xx}$	$\pi_{yy}$	$\pi_{zz}$	$\pi_{yz}$	$\pi_{xz}$	$\pi_{xy}$	$\gamma_{xx}$	$\gamma_{yy}$	$\gamma_{zz}$	$2\gamma_{yz}$	$2\gamma_{xz}$	$2\gamma_{xy}$
Voigt	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$

TAB. 2.1 – Correspondance entre les notations tensorielles et les notations de Voigt

On s'intéresse ici à la loi de comportement d'une céramique piézoélectrique en fonctionnement, c'est-à-dire après l'opération de polarisation. Durant cette opération, le matériau est soumis à un cycle de transformations piézoélectriques avec hystérésis hautement non linéaires (il s'agit d'un cycle nommé ferroélectrique, par analogie au comportement d'aimantation des matériaux du même nom), qui conduit, comme on l'a vu, à un état d'équilibre polarisé où  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{E}$  (et donc  $\mathbf{D}$ ), ainsi que les variables mécaniques, sont non-nuls. On suppose que durant le fonctionnement de la pastille, toutes les grandeurs varient autour de cet état d'équilibre, avec de très petites amplitudes, de sorte qu'il est



possible de considérer une loi de comportement linéaire<sup>13</sup>. Cela est consistant avec l'hypothèse des petites déformations (Hyp. 2.2, p. 20). L'article [53] montre de très belles simulations du cycle de polarisation et on peut trouver des mesures dans [215, 57, 28, 279]. Dans la suite, toutes les grandeurs mécaniques et électriques représentent leurs variations par rapport à l'état polarisé du matériau piézoélectrique.

On suppose ici, comme au paragraphe 2.1.2(c), que le matériau est hyperélastique pour la partie mécanique et, de plus, ici, qu'il est piézoélectrique. À partir du second principe de la thermodynamique, on montre que [144, 317, 304, 200] :

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \mathbf{D} = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{E}}, \quad (2.27)$$

où, rappelons le,  $\boldsymbol{\pi}$  est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et  $\boldsymbol{\gamma}$  est le tenseur des déformations de Green-Lagrange. L'enthalpie libre électrique de Gibbs<sup>14</sup>  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{E}, T)$  est définie par :

$$\mathcal{G} = \mathcal{U} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - Ts, \quad (2.28)$$

qui dépend des variables  $\boldsymbol{\gamma}$  et  $\mathbf{E}$ , avec  $\mathcal{U}$  l'énergie interne. Comme on ne s'intéresse qu'à une théorie linéaire, on écrit  $\mathcal{G}$  sous forme quadratique en  $\boldsymbol{\gamma}$  et  $\mathbf{E}$  et on obtient la relation de comportement suivante :

$$\begin{cases} \pi_{ij} = c_{ijkl}^E \gamma_{kl} - e_{kij} E_k, \\ D_i = e_{ikl} \gamma_{kl} + \epsilon_{ik}^\gamma E_k. \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \pi_i = c_{ik}^E \gamma_k - e_{ki} E_k, \\ D_i = e_{ik} \gamma_k + \epsilon_{ik}^\gamma E_k, \end{cases} \quad (2.29)$$

où les classiques notation de Voigt, rappelées dans le tableau 2.1 [268, 15] sont utilisées pour l'écriture de droite. Les constantes qui apparaissent dans ces équations sont (i) les constantes de raideur à champ électrique constant  $c_{ijkl}^E$  ( $c_{ik}^E$ ), exprimées en Pa, (ii) les constantes piézoélectriques  $e_{kij}$  ( $e_{ik}$ ), exprimées en N/m/V et (iii) les permittivités (ou constantes diélectriques) à déformation nulle  $\epsilon_{ik}^\gamma$ , exprimées en F/m. Toutes ces constantes sont associées à des conditions *isothermes*. Une formulation analogue en conditions *adiabatiques* peut être obtenue en utilisant des enthalpies  $\mathcal{H}$  au lieu des enthalpies libres [144]. En général, les céramiques piézoélectriques sont isotropes transverses, le plan d'isotropie étant celui orthogonal à la direction de polarisation. Cela particularise les tenseurs de comportement  $c$ ,  $e$  et  $\epsilon$ . Une autre écriture, très usitée, de la loi de comportement ci-dessus, en fonction des variables  $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{E})$ , est :

$$\begin{cases} \gamma_i = s_{ik}^E \pi_k + d_{ki} E_k, \\ D_i = d_{ik} \gamma_k + \epsilon_{ik}^\pi E_k. \end{cases} \quad (2.30)$$

Elle fait apparaître les coefficients piézoélectriques  $d_{ij}$  et les constantes de souplesse  $s_{ik}^E$  à champ électrique constant. Deux autres formes de cette loi existent, en fonction des couples de variables  $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D})$  (coef. piézoélectriques  $\mathbf{g}$ ) ou encore  $(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D})$  (coef. piézoélectriques  $\mathbf{h}$ ) [15, 144, 317].

La loi de comportement (2.29) est l'extension de (2.5) aux matériaux piézoélectriques, et prend en compte les éventuelles non-linéarités géométriques décrites au paragraphe 2.1. En petites perturbations,  $\boldsymbol{\gamma}$  et  $\boldsymbol{\pi}$  se confondent avec le tenseur des déformations linéarisées  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (Eq. (2.3)) et le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , et la loi de comportement (2.29) est celle la plus connue habituelle [15, 144, 198, 304, 200]. Pour sa présente contrepartie avec non-linéarités géométriques, on peut se référer à [164, 53, 29, 200, 309, 183, 339].

<sup>13</sup>Il s'agit en fait d'une linéarisation du comportement des matériaux piézoélectriques autour de leur état de repos polarisé.

<sup>14</sup>Le terme « électrique » associée à  $\mathcal{G}$  provient du fait qu'on peut définir dans notre cas *trois* enthalpie libres, en fonction des variables électriques et élastiques choisies pour écrire la loi de comportement. L'enthalpie libre de Gibbs est  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{E}, T) = \mathcal{U} - \boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - Ts$  et sert pour l'écriture de la loi (2.30), l'enthalpie libre élastique de Gibbs est  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{D}, T) = \mathcal{U} - \boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\gamma} - Ts$  et l'enthalpie libre électrique de Gibbs est  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{E}, T) = \mathcal{U} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - Ts$ , utilisée ici. L'énergie libre de Helmholtz  $\mathcal{F}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D}, T) = \mathcal{U} - Ts$ , utilisée pour la loi thermo-élastique du §2.1.2(c), est utilisée pour la quatrième écriture de la loi de comportement piézoélectrique, non précisée ici [144, 304]

## (d) Mécanismes piézoélectriques classiques

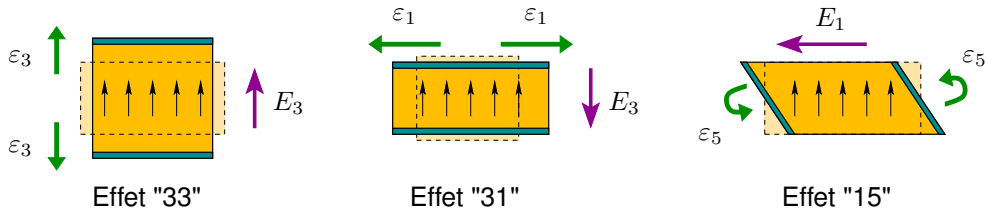


FIG. 2.5 – Effets piézoélectriques classiques

De manière classique, la direction 3 est toujours la direction de polarisation de l'élément piézoélectrique. Par suite, on distingue les trois effets piézoélectriques macroscopiques de la figure 2.5, illustrés au niveau cristallin sur la figure 2.4. L'effet « 33 » est l'effet principal : on impose un champ électrique suivant la direction de polarisation et on utilise les déformations dans cette même direction (un exemple d'utilisation est dans [256]). L'effet « 31 » est celui qui est principalement mis à profit dans mon travail : on impose un champ électrique suivant la direction de polarisation et on utilise les déformations dans les deux directions orthogonales (1 et 2). Les éléments piézoélectriques ont alors une géométrie de plaque et sont fixés sur la peau supérieure ou inférieure d'une structure élastique, pour coupler le mouvement de flexion aux grandeurs électriques [J13, J14, J19], [C35]. Enfin, l'effet « 15 » provoque un cisaillement de l'élément piézoélectrique : on impose un champ électrique dans une direction orthogonale à la polarisation de l'élément piézoélectrique, qui est soumis à du cisaillement [86, 314]. Dans ce cas, il doit être placé à cœur de la structure élastique.

## 2.2.2 Modèles adaptés au couplage avec un circuit électrique

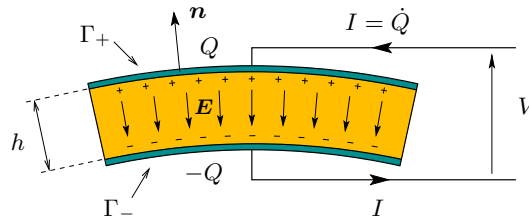


FIG. 2.6 – Élément piézoélectrique mince

Une des caractéristiques de mon travail est de proposer des modélisations de systèmes mécaniques comportant des éléments piézoélectriques, en ce concentrant sur le couplage avec un circuit électrique. D'un point de vue physique, le couplage entre le circuit électrique et un patch piézoélectrique se fait à travers des électrodes conductrices (Fig. 2.6), qui concentrent à la surface du patch piézoélectrique les charges libres véhiculées par les conducteurs du circuit électrique, créant ainsi le champ électrique à la source du phénomène piézoélectrique. Cela impose deux conditions aux limites particulières pour le matériau piézoélectrique :

- comme les électrodes sont des conducteurs, les surfaces  $\Gamma_+$  et  $\Gamma_-$  du patch piézoélectrique en contact avec les électrodes sont chacune *équipotentiell*es : le potentiel  $\phi$  électrique est uniforme sur  $\Gamma_+$  et  $\Gamma_-$  et la tension  $V$  aux bornes du patch piézoélectrique est la différence de potentiel. Cela s'écrit :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_+ \quad \phi(\mathbf{x}) = \text{cte} = \phi_+, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_- \quad \phi(\mathbf{x}) = \text{cte} = \phi_-, \quad V = \phi_+ - \phi_-. \quad (2.31)$$

- L'intensité  $I$  du courant dans les fils connectés aux électrodes est la dérivée par rapport au temps de la *quantité de charge*  $Q$  contenu dans les électrodes :

$$I = \dot{Q}, \quad Q = \int_{\Gamma_+} q \, dS, \quad = - \int_{\Gamma_-} q \, dS, \quad (2.32)$$

où le théorème de Gauss implique que les charges dans les électrodes soient opposées [J13].

Comme ces conditions aux limites sont *globales* et qu'une formulation continue – et, par suite, une formulation éléments finis – décrit l'état électromécanique de la structure par des grandeurs électriques *locales*  $\phi$  et  $\mathbf{D}$  (relié à  $q$  par l'équation (2.23b)), les vérifier n'est pas automatique, ce qui nous a conduit à proposer la formulation suivante.

En considérant que les éléments piézoélectriques sont minces dans la direction de polarisation, il est possible de supposer que le champ électrique est (i) de direction normale aux électrodes et (ii) qu'il est uniforme sur tout le domaine de la pastille. Cette hypothèse a priori restrictive a été validée dans plusieurs cas particuliers de la littérature [41, 110], par comparaison à des modèles 3D, et est fait l'objet de validations supplémentaires actuellement au laboratoire (Thèse de Luciano Pereira DaSilva). Des modèles plus raffinés ajoutent au champ électrique une partie linéaire en fonction de la coordonnée transverse, ce qui conduit à un potentiel électrique quadratique dans l'épaisseur, effet associé à des déformations de flexion des patchs [266]. Il paraît raisonnable de négliger ces effets lorsque les patchs piézoélectriques sont minces et qu'ils sont collés sur les peaux extérieures d'une structure élastique hôte soumise principalement à de la flexion, puisque dans ce cas ils sont principalement sujet à des déformations de membrane.

Ainsi, sous ces hypothèses, le modèle proposé permet de représenter l'état électrique d'un patch piézoélectrique donné simplement par un couple de grandeurs globales : la différence de potentiel  $V$  entre les électrodes et la charge électrique globale  $Q$  contenue dans l'une des électrodes [J13, J19]. Le second avantage de cette modélisation est, comme annoncé, qu'elle respecte parfaitement les conditions aux limites électriques imposées par les électrodes au matériau piézoélectrique : un potentiel  $\phi$  uniforme dans les électrodes et un couplage du circuit électrique avec la quantité globale de charge électrique  $Q$ . Ce modèle est central dans mon travail. Il a été utilisé à la fois pour des modèles analytiques et des modèles éléments finis, décrits au paragraphe 2.3.2, mis en place pour les applications *atténuation de vibration* (Chap. 5) ou *micro/nano systèmes électromécaniques* (Chap. 6).

### 2.2.3 Facteurs de couplage

L'efficacité piézoélectrique d'un matériau ou d'un système est caractérisée par des grandeurs appelées facteurs de couplages, qui sont au cœur de mon travail [J13, J14, J15, J19] et [C35]. Deux types de facteurs sont définis : les *facteurs de couplage matériau*, qui caractérisent l'efficacité du matériau piézoélectrique seul, et des *facteurs de couplage système*, qui prennent en compte aussi la position et la géométrie des éléments piézoélectriques associés à un système donné et caractérise alors l'efficacité piézoélectrique du système entier.

Les *facteurs de couplage matériau* sont associés aux mécanismes piézoélectriques « 33 » « 31 » ou « 15 » et s'écrivent :

$$k_{ij}^2 = \frac{d_{ij}^2}{\epsilon_{ii}^{\pi} s_{jj}^E} \quad (2.33)$$

avec  $i$  la direction de polarisation électrique et  $j$  la direction mécanique mise à profit ( $ij = 33$  ou  $ij = 31$  ou  $ij = 15$ ) et où les constantes matériau sont associées à la loi de comportement (2.30). Ce facteur mesure directement la quantité d'énergie mécanique qu'un matériau est capable de transformer en énergie électrique et inversement. Cela se montre en imposant un cycle de transformations statique à un barreau cylindrique en matériau piézoélectrique, chargé en traction compression suivant son axe 1

et muni d'électrodes dans la direction 3 (pour activer l'effet « 31 ») [144]. Dans mon travail, comme c'est plutôt la loi de comportement (2.29) qui est utilisée, c'est le coefficient de couplage

$$\tilde{k}_{31}^2 = \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}^{\gamma} c_{11}^E} = \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2}, \quad (2.34)$$

qui apparaît naturellement dans les calculs. De part sa relation directe avec  $k_{31}$ , il quantifie également le transfert d'énergie électromécanique. En revanche, il n'est pas lié à un cycle de déformation statique simple comme  $k_{31}$  [144].

En revanche, en dynamique, si on considère les vibrations de ce même barreau, on montre que :

$$k_{31}^2 = \frac{\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\hat{\omega}_i^2}, \quad \tilde{k}_{31}^2 = \frac{\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\omega_i^2}, \quad (2.35)$$

où  $\omega_i$  et  $\hat{\omega}_i$  sont les pulsations propres du  $i^e$  mode du barreau respectivement en court-circuit (les deux électrodes sont reliées par un fil, la tension aux bornes est nulle) et en circuit ouvert (les deux électrodes sont laissées libres, c'est la charge électrique qui est nulle). Ces écritures des facteurs de couplages matériau ne sont pas classiques<sup>15</sup>, malgré la simplicité de leur obtention à partir d'un simple calcul de poutre [91].

On peut définir deux types de *facteurs de couplage système*. Par système, on entend en général une structure élastique munie de un ou plusieurs éléments piézoélectriques. Le premier est le traditionnel *facteur de couplage effectif*, défini de la même manière que (2.35), en considérant cette fois les fréquences propres de vibration du système entier :

$$k_{\text{eff}}^2 = \frac{\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\hat{\omega}_i^2}, \quad \tilde{k}_{\text{eff}}^2 = \frac{\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\omega_i^2}. \quad (2.36)$$

Dans tous nos travaux, nous n'utilisons que  $\tilde{k}_{\text{eff}}$ , (que nous notons simplement  $k_{\text{eff}}$  – sans tilde – dans le reste de ce texte) car il apparaît naturellement dans les équations. Dans la norme [15], seul  $k_{\text{eff}}$  est défini.

Le second facteur de couplage système est un *facteur de couplage modal*, défini et étudié en détail au chapitre 5 (§5.2.2, p. 115). Pour une structure élastique munie de plusieurs éléments piézoélectriques, on montre qu'il existe autant de facteurs de couplages modaux que de couples élément piézoélectrique / mode de vibration. On les note  $k_i^{(p)}$ , chacun d'eux caractérisant les échanges d'énergie vibratoire électromécanique entre le mode de vibration de la structure (ici le  $i^e$ ) et l'élément piézoélectrique considéré (le  $p^e$ ). Lorsque les éléments piézoélectriques sont reliés à un circuit électrique, il est possible de considérer des facteurs de couplages modaux associés à l'ensemble du réseau d'éléments piézoélectriques [J13, J19].

## 2.3 Quelques modèles

Cette section propose une synthèse des principaux modèles de structures non linéaires géométriques élastiques ou piézoélectriques sur lesquels j'ai eu l'occasion de travailler. À chaque fois, les effets d'une précontrainte de type thermique sont aussi inclus. L'objectif est ici d'en dégager les caractéristiques, hypothèses et écritures principales et notamment de faire un parallèle entre les différents modèles.

### 2.3.1 Structures élastiques en grands déplacements

Ce paragraphe regroupe quelques modèles de structures minces homogènes, écrit à partir de la théorie de von Kármán décrite au paragraphe 2.1, sur lesquels j'ai été amené à travailler en particulier

<sup>15</sup>La norme [15] considère les vibrations d'un barreau, mais ne calcule pas ses fréquences propres

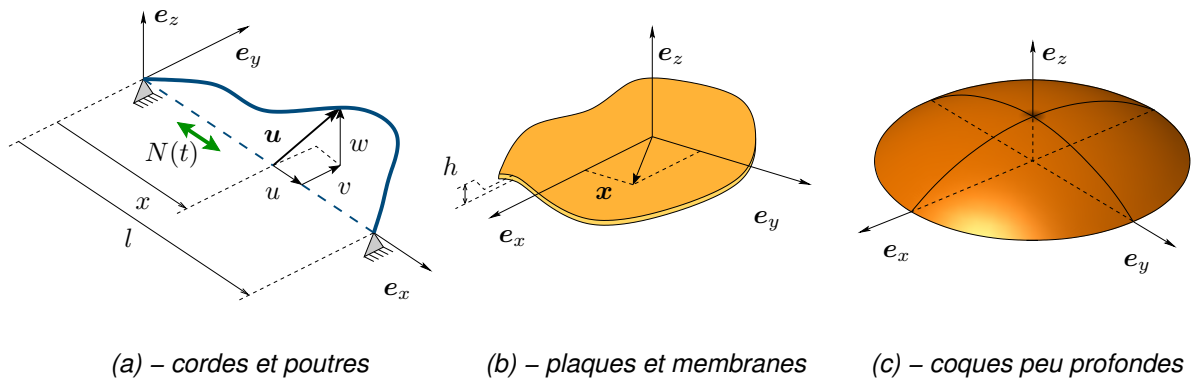


FIG. 2.7 – Structures minces étudiées dans ce mémoire

pour les applications de dynamique non linéaire (Chap. 4). Que ce soit pour des poutres, des plaques ou des coques, les hypothèses de base ainsi que les étapes de démonstration sont analogues.

### (a) Hypothèses de travail

Quelques idées générales et classiques sont reprises ici, avant de rentrer dans le détail des équations du mouvement. On s'intéresse aux milieux minces de la Fig. 2.7.

**Géométrie des milieux minces** La géométrie des milieux continus, du fait de leur caractéristique de « minceur » est définie de la manière suivante.

- Pour les milieux 1D, le domaine  $\Omega$  occupé par le milieu continu est défini par : (i) une ligne moyenne, qui est une courbe  $\mathcal{L}$  de l'espace, sur laquelle chaque point  $G$  est positionné par son abscisse curviligne  $x$  et (ii) un ensemble de sections droites notées  $\Sigma = \Sigma(x)$ , où  $\Sigma(x)$  est une surface plane orthogonale à  $\mathcal{L}$  en  $G(x)$ . Précisément,  $\Omega = \mathcal{L} \times \Sigma$ . Le milieu est dit élancé (mince) si la longueur caractéristique des sections droites est petite devant celle de la ligne moyenne.
- Pour les milieux 2D, le domaine  $\Omega$  occupé par le milieu continu est défini par : (i) une surface moyenne  $\mathcal{S}$  de l'espace, sur laquelle chaque point  $G$  est positionné par un vecteur position  $\mathbf{x}$  et (ii) un ensemble de segments droits de longueur  $h$ , l'épaisseur de la structure, orthogonaux à  $\mathcal{S}$ . Précisément,  $\Omega = \mathcal{S} \times [-h/2, h/2]$ . Le milieu est dit mince si l'épaisseur  $h$  est petite devant une longueur caractéristique de la surface moyenne.

**Hypothèses usuelles des milieux minces** La première hypothèse particularise la cinématique du milieu continu, c'est-à-dire le mouvement des sections / segments droits.

#### HYPOTHÈSE 2.4

Les sections / segments droits sont animés d'un mouvement de solide rigide. Cela s'écrit dans le cas général :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_G + (\mathbf{R} - \mathbf{1})\mathbf{GM}, \quad (2.37)$$

avec  $\mathbf{u}_G$  le vecteur déplacement de  $G$ ,  $\mathbf{R}$  un opérateur de rotation et  $M$  un point courant de la section droite / du segment droit.

#### HYPOTHÈSE 2.5

Les contraintes normales dans les directions transverses sont négligées. Cela s'écrit, avec les orientations de la figure 2.7 :

$$\text{Milieux 1D : } \pi_{yy} = \pi_{zz} = 0; \quad \text{Milieux 2D : } \pi_{zz} = 0. \quad (2.38)$$

Les deux cinématiques classiques de Timoshenko / Reissner-Mindlin (pour lesquelles le cisaillement transverse est autorisé) ou Euler-Bernoulli / Kirchhoff-Love (pour lesquelles le cisaillement transverse est imposé nul) sont compatibles avec la théorie de von Kármán, avec les domaines de validité usuels liés à l'éclatement des structures. Dans cette section (§2.3.1), les modèles proposés sont fondés sur une cinématique d'Euler-Bernoulli / Kirchhoff-Love. Dans ce cas, de manière usuelle, l'inertie de rotation est également négligée.

**Hypothèses de von Kármán** Ces hypothèses sont liées aux restrictions des non-linéarités géométriques associées aux modèles de von Kármán.

**HYPOTHÈSE 2.6**

Les rotations des sections / segments droits sont supposées suffisamment faibles pour que le vecteur déplacement du milieu continu soit linéarisé en fonction des angles. Cela s'écrit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_G + \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{GM}, \quad (2.39)$$

avec  $\mathbf{u}_G$  le vecteur déplacement de  $G$  et  $\boldsymbol{\theta}$  un vecteur rotation. Les courbures sont alors linéaires en fonction des déplacements de la ligne / surface moyenne.

**HYPOTHÈSE 2.7**

Le seul terme non linéaire retenu dans les déformations de Green-Lagrange est le premier terme quadratique en fonction des déplacements transverses dans les composantes longitudinales.

**Hypothèse des modèles analytiques**

**HYPOTHÈSE 2.8**

On néglige l'inertie longitudinale ainsi que le chargement extérieur longitudinal.

Cette dernière hypothèse permet de simplifier les équations du mouvement sans perte notable, en général, de précision des modèles. Cette hypothèse n'est nécessaire que pour simplifier les modèles analytiques, car elle permet de représenter le mouvement longitudinal des structures par des efforts et non des déplacements (l'effort axial  $N$  pour les milieux 1D, la fonction de force  $F$  pour les milieux 2D) ce qui simplifie énormément les formulations. En revanche, pour les modèles éléments-finis, elle n'apporte pas de simplification notable.

**(b) Quelques étapes de démonstration**

Les grandes étapes de démonstrations, applicables à tous les milieux minces (1D et 2D), sont énumérées ci-dessous et les principales équations sont regroupées dans le tableau 2.2, dans le cas d'une poutre droite (Milieu 1D pour lequel  $\mathcal{L}$  est une droite) et d'une plaque (Milieu 2D pour lequel  $\mathcal{S}$  est plane). De manière générale :

1. on écrit le déplacement du milieu continu avec les rotations linéarisées (Eq. (2.39)),
2. on écrit le tenseur des déformations de Green-Lagrange avec l'hypothèse de von Kármán (Hyp. 2.7). Cela fait apparaître une partie courbure, linéaire en fonction des déplacements, et une partie déformation de la ligne / surface moyenne, qui, elle, comporte des termes non linéaires quadratiques. Ces termes sont soulignés dans le tableau 2.2.
3. En annulant les termes de cisaillement transverse pour appliquer la cinématique d'Euler-Bernoulli / Kirchhoff-Love, on obtient l'expression des courbures en fonction des déplacements transverses.
4. On utilise la relation de comportement (2.5) ou (2.4), simplifiée grâce à l'hypothèse 2.5, pour calculer les contraintes de Piola-Kirchhoff II. On en déduit alors les efforts généralisés, par intégration sur la section droite / le segment droit de la structure.

	Poutre droite (milieu 1D)	Plaque (milieu 2D)
Variable spatiale	Abscisse (1D) des section : $x$	Position (2D) des segments : $\mathbf{x}$
Élément droit	Section droite $\Sigma$	Segment droit, d'épaisseur $h$
Élément moyen	Ligne moyenne $\mathcal{L}$ , de longueur $l$	Surface moyenne $\mathcal{S}$
Position d'un point	$\mathbf{OM} = x\mathbf{e}_x + \underbrace{ye_y + ze_z}_{\mathbf{GM}}$	$\mathbf{OM} = \mathbf{x} + \underbrace{ze_z}_{\mathbf{GM}}$
Champ de déplacement	$\mathbf{u} = \mathbf{u}_G + \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{GM}$	$\mathbf{u} = \mathbf{u}_G + \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{GM}$
Déplacement de $G$	$\mathbf{u}_G = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$	$\mathbf{u}_G = \bar{\mathbf{u}} + w\mathbf{e}_z \quad (\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{S})$
Rotation des sections / segments	$\boldsymbol{\theta} = \theta_y\mathbf{e}_y + \theta_z\mathbf{e}_z \quad (\boldsymbol{\theta} \perp \mathcal{L})$	$\boldsymbol{\theta} = \theta_x\mathbf{e}_x + \theta_y\mathbf{e}_y \quad (\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{S})$
Déformations	$\gamma_{xx} = \epsilon - y\kappa_z + z\kappa_y$	$\bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) - z\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})$
Déformations de $\mathcal{L} / \mathcal{S}$	$\epsilon = u' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2)$	$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u} + \nabla w \otimes \nabla w)$
Courbures	$\kappa_y = \theta'_y = -w''$ $\kappa_z = \theta'_z = v''$	$\boldsymbol{\kappa} = \nabla\nabla w$
Contraintes	$\pi_{xx} = Y\gamma_{xx} + \pi_{xx0}$	$\bar{\pi} = \frac{Y}{1-\nu^2}[(1-\nu)\bar{\boldsymbol{\gamma}} + \nu \text{tr} \bar{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{1}] + \bar{\pi}_0$
Efforts longitudinaux	$N = \int_{\Sigma} \pi_{xx} dS$ $N = YS\epsilon + N_0$	$N = \int_{h/2}^{h/2} \bar{\pi} dz$ $N = A[(1-\nu)\epsilon + \nu \text{tr} \epsilon \mathbf{1}] + N_0\mathbf{1}$
Moments de flexion	$\mathbf{M} = \int_{\Sigma} \mathbf{GM} \wedge \pi_{xx}\mathbf{e}_x dx$ $M_y = YI_z\kappa_y$ $M_z = YI_y\kappa_z$	$\mathbf{M} = \int_{-h/2}^{h/2} z\bar{\pi} dz$ $\mathbf{M} = -D[(1-\nu)\boldsymbol{\kappa} + \nu \text{tr} \boldsymbol{\kappa}\mathbf{1}]$
Équations d'équilibre	$\rho S\ddot{u} - N' = n$ $\rho S\ddot{v} + M''_z - \underline{(Nv')'} = p_y$ $\rho S\ddot{w} - M''_y - \underline{(Nw')'} = p_z$	$\rho h\ddot{\mathbf{u}} - \text{div} \mathbf{N} = \mathbf{n}$ $\rho h\ddot{w} - \text{div} \text{div} \mathbf{M} - \underline{\text{div}(\mathbf{N} \nabla w)} = p$

TAB. 2.2 – Principales grandeurs associées aux modèles de von Kármán, avec une cinématique de Euler-Bernoulli / Kirchhoff-Love, dans le cas d'une poutre droite et d'une plaque. Les axes  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  sont définis sur la figure 2.7. Pour le milieu 1D, la dérivée par rapport à l'abscisse  $x$  est notée  $\circ' = \partial \circ / \partial x$ . Les grandeurs avec une barre supérieure, pour le milieu 2D, correspondent à des vecteurs / tenseurs dans le plan  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ . Les raideurs en membrane et en flexion sont respectivement  $A = hY/(1 - \nu^2)$  and  $D = h^3Y/[12(1 - \nu^2)]$ . Les termes non linéaires géométriques apportés par le modèle de von Kármán sont soulignés.

5. On utilise le principe des travaux virtuels (2.8) pour écrire les équations d'équilibre dynamique en fonction des efforts généralisés. Avec le champ de déformation de von Kármán, *on obtient directement* les équations du mouvement avec les termes de couplage longitudinal / flexion à la source du mécanisme des non-linéarités géométriques. Ces termes sont soulignés dans le tableau 2.2.
6. On condense les déplacements longitudinaux en négligeant l'inertie longitudinale et les efforts extérieurs dans la même direction (Hyp. 2.8). Cette étape prend une tournure différente selon la géométrie 1D ou 2D du milieu. Dans le second cas, elle permet l'introduction d'une fonction d'Airy. Cela est détaillé dans les sections suivantes.

En observant le tableau 2.2, on peut souligner la remarquable analogie entre les milieux 1D et 2D. De plus, comme annoncé (§2.1 et Hyp. 2.6), les courbures sont linéaires en fonction des déplacements.

### (c) Poutres et cordes

On s'intéresse ici aux vibrations non linéaires d'une poutre, représentée sur la figure 2.7(a). On suppose que cette poutre est de section uniforme, qu'elle est précontrainte par une tension  $N_0$ , qu'elle est immobilisée dans la direction axiale  $e_x$  par les conditions aux limites et on ne prend pas en compte la torsion dans le modèle proposé ici. La démonstration est décrite au paragraphe précédent et les principales équations sont regroupées dans le tableau 2.2.

Les équations générales d'équilibre du tableau 2.2 sont simplifiées en négligeant l'inertie axiale  $\rho S \ddot{u}$  et les efforts axiaux extérieurs  $n$ . La première équation devient  $N' = 0$ , ce qui montre que la tension  $N$  est uniforme le long de la poutre. Ensuite, en intégrant l'expression de  $N$  le long de la poutre et en supposant la précontrainte  $N_0$  uniforme, on obtient :

$$\int_0^l N \, dx = lN = lN_0 + YS \left[ \int_0^l u' \, dx + \frac{1}{2} \int_0^l (v'^2 + w'^2) \, dx \right]. \quad (2.40)$$

Finalement, en se souvenant que les extrémités de la poutre sont immobiles suivant  $e_x$  ( $u(0) = u(l) = 0$ ), la première intégrale est nulle et les déplacements axiaux disparaissent des équations. En séparant l'effort axial en une partie précontrainte  $N_0$  (qui crée la raideur de tension) et une partie dynamique  $\tilde{N}$  (qui crée les non-linéarités géométriques) par :

$$N = N_0 + \tilde{N}, \quad (2.41)$$

on obtient les équations classiques de vibrations non linéaires d'une poutre :

$$\begin{cases} \rho S \ddot{v} + Y I_y v'''' - N_0 v'' = \underbrace{(\tilde{N} v')}' + p_y & (2.42a) \\ \rho S \ddot{w} + Y I_z w'''' - N_0 w'' = \underbrace{(\tilde{N} w')}' + p_z & (2.42b) \\ \tilde{N} = \frac{YS}{2l} \int_0^l \underbrace{(v'^2 + w'^2)} \, dx. & (2.42c) \end{cases}$$

Ces équations, sans précontrainte, ont été proposées dans [335, 206, 99], dans le cas d'une seule polarisation ( $w = 0$ ), et dans [130, 131] pour le cas de deux polarisations. On peut aussi citer l'article [95], qui met en parallèle les équations de poutres et de plaques rectangulaires, montrant bien la similitude des modèles de von Kármán appliqués à deux structures minces différentes. Les équations de cordes (poutre précontrainte) ont été proposées par [238, 210, 14]. Toutes ces équations ont été reprises et utilisées depuis dans un très grand nombre de textes, notamment dans l'ouvrage [224].



Comme annoncé au paragraphe 2.1, si la contrainte d'immobilité des extrémités de la poutre est levée, alors, par équilibre, l'effort axial  $N$  devient nul et les termes de couplage axial / flexion  $(Nv)'$  disparaissent des équations, qui deviennent alors linéaires. L'article [170] propose une élégante étude du passage continu du présent modèle avec extrémités immobiles vers un modèle de type grandes rotations.

Dans mon travail, j'ai étudié les couplages non linéaires entre les modes de flexion d'une corde : lorsqu'on excite la corde en dynamique dans un plan, le mouvement dans le plan peut se déstabiliser et donner lieu à des mouvements de rotation de la corde hors du plan (voir [C36] et les références incluses). Ce mécanisme non linéaire de déstabilisation est identique à celui qui donne naissance à des ondes progressives dans les plaques circulaires [J1, J2].

#### (d) Plaques et membranes

On s'intéresse ici aux vibrations non linéaires d'une plaque d'épaisseur homogène, représentée sur la figure 2.7(b). On suppose que cette plaque est précontrainte, pour obtenir les termes de raideur de membrane dans les équations. En suivant une démarche analogue au paragraphe précédent, c'est-à-dire en négligeant l'inertie axiale  $\rho S\ddot{u}$  et les efforts  $\mathbf{n}$ , l'équation d'équilibre de membrane devient  $\operatorname{div} \mathbf{N} = \mathbf{0}$ . Elle est équivalente à l'existence d'une fonction d'Airy  $F$ , définie par :

$$\Delta F \mathbf{1} - \nabla \nabla F \equiv \tilde{\mathbf{N}}, \quad \mathbf{N} = N_0 \mathbf{1} + \tilde{\mathbf{N}}, \quad (2.43)$$

où on a séparé la partie précontrainte  $N_0$ , supposée uniforme et isotrope, de la partie dynamique  $\tilde{\mathbf{N}}$ . On obtient alors les équations usuelles de plaque en non linéaire géométrique :

$$\begin{cases} \rho h \ddot{w} + D \Delta \Delta w - N_0 \Delta w = \underbrace{L(w, F)} + p, & (2.44a) \\ \Delta \Delta F = -\frac{Yh}{2} \underbrace{L(w, w)}. & (2.44b) \end{cases}$$

avec

$$L(w_1, w_2) = \Delta w_1 \Delta w_2 - \nabla \nabla w_1 : \nabla \nabla w_2, \quad (2.45)$$

un opérateur quadratique (appelé parfois la forme de Monge-Ampère [64]). La version statique de ces équations a été proposées par von Kármán [327] (et partiellement, quelques années avant, par A. Föppl [105, 109]) et sous la présente forme dynamique dans [128, 62]. Le lecteur intéressé peut consulter les ouvrages [299, 61, 190] consacrés à ce modèle.

On peut formuler un certain nombre de remarques sur les équations ci-dessus.

- Les équations (2.44) sont générales et valables pour n'importe quelle plaque d'épaisseur et de caractéristiques matérielles homogènes. La géométrie de la surface moyenne  $\mathcal{S}$  n'intervient que dans les conditions aux limites.
- L'introduction de la fonction d'Airy (en négligeant l'inertie de membrane) est très commode en pratique, car elle permet de porter le nombre des inconnues à deux champs scalaires :  $(w, F)$ . Elle permettent de plus d'obtenir des équations extrêmement simples, avec les non-linéarités représentées par le seul opérateur  $L(\circ, \circ)$ . Sans cela, on peut écrire les équations en déplacement, mais la formulation perd ses symétries et le nombre d'inconnues est plus important (trois champs scalaires  $(u, v, w)$ ) [R1], [11].
- Comme les efforts de membranes  $\mathbf{N}$  ont été remplacés par la fonction d'Airy  $F$ , il est intéressant de récrire les conditions aux limites de membranes en fonction de  $F$  uniquement, pour obtenir une formulation complète en  $(w, F)$ . Cela est possible et j'ai proposé une formulation générale de ces conditions aux limites, en coordonnées intrinsèques, pour ne pas particulariser la géométrie du bord de la plaque [J9].

Dans mon travail, j'ai utilisé ces équations pour étudier la dynamique non linéaire de plaques soumises à une effort harmonique, soit dans le cas de résonances internes particulières entre modes de vibrations de plaques circulaires [J1, J2], soit plus récemment pour caractériser la transition vers le chaos [J18].

### (e) Coques

Dans mon travail, je me suis intéressé principalement à l'étude des coques dites « faiblement courbées » (modèles connus sous le vocable *shallow shells* en anglais), c'est-à-dire telles que le plus petit rayon de courbure de la surface moyenne est grand devant ses dimensions caractéristiques. Dans le cas d'une coque sphérique (Fig. 2.7(c)), les équations du mouvement en non linéaire géométrique et avec les hypothèses de von Kármán répondent aux mêmes hypothèses que pour les plaques et s'écrivent :

$$\begin{cases} D\Delta\Delta w + \frac{1}{R}\Delta F + \rho h\ddot{w} = \underline{L(w, F)} + p, & (2.46a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\Delta F - \frac{Yh}{R}\Delta w = -\frac{Yh}{2}\underline{L(w, w)}, & (2.46b) \end{cases}$$

où  $R$  est le rayon de courbure de la coque. Ces équations ont été démontrées dans le cas de géométries particulières dans [90, 100] (pour des cylindres) et dans [195, 182, 6] (pour des panneaux courbés), et dans le cas général dans [217, 165, 190]. Ces équations ont aussi été très rigoureusement justifiées par des méthodes asymptotiques dans [123]. Elles sont parfois appelées équations de Donnell, équations de Marguerre ou équations de Koiter. Dans mon travail, je les ai utilisées dans [J6, J8, J7].

Pour plus de généralité, mais aussi pour évaluer de manière théorique l'effet de défauts de forme d'une plaque sur ses vibrations non linéaires, j'ai travaillé à l'élaboration d'un modèle de plaque imparfaite (qui est en fait une coque !), à partir des équations (2.44) [J12, J11]. Le principe est de décomposer le déplacement inconnu  $w$  en une partie statique, notée  $w_0$ , et une partie dynamique, notée  $\tilde{w}$ , et de faire de même pour  $p$  et  $F$  :

$$w(\mathbf{x}, t) = w_0(\mathbf{x}) + \tilde{w}(\mathbf{x}, t), \quad F(\mathbf{x}, t) = F_0(\mathbf{x}) + \tilde{F}(\mathbf{x}, t), \quad p(\mathbf{x}, t) = p_0(\mathbf{x}) + \tilde{p}(\mathbf{x}, t). \quad (2.47)$$

En insérant les équations précédentes dans les équations de plaque (2.44) et en écrivant que lorsque  $\tilde{w} = \tilde{F} = \tilde{p} = 0$  le système est en équilibre et en annulant les précontraintes de membrane  $F_0$  (on considère un état de référence de la plaque imparfaite non précontraint), on obtient les équations du mouvement suivantes (où les tildes ont été omis, sans perte de généralité) [J12] :

$$\begin{cases} D\Delta\Delta w + \rho h\ddot{w} = \underline{L(w, F)} + \underline{L(w_0, F)} + p, & (2.48a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\Delta F + hY\underline{L(w_0, w)} = -\frac{hY}{2}\underline{L(w, w)}. & (2.48b) \end{cases}$$

Dans ces équations, le défaut  $w_0$  peut être choisi quelconque, à conditions qu'il reste tout de même assez faible<sup>16</sup>. Ainsi, ces équations peuvent être utilisées soit pour étudier un défaut de planéité particulier d'une plaque, mais aussi pour étudier les vibrations de n'importe quelle coque faiblement courbée. Notamment, lorsqu'on impose un défaut initial sphérique dans les équations (2.48), on retrouve exactement les équations (2.46) [J12].

## 2.3.2 Structures composites élastiques / piézoélectriques

Ce paragraphe regroupe quelques modèles permettant de décrire la mécanique de structures élastiques munies de patchs piézoélectriques, que j'ai été amené à développer pour les applications *atté-*

<sup>16</sup>Comme ces équations sont déduites du modèle de plaque de von Kármán qui est « déformé » en statique pour obtenir la géométrie voulue, il faut respecter une amplitude maximale liée à ce modèle. Nous n'avons pas proposé de domaine de validité, ce qui est a priori difficile dans le cas général.

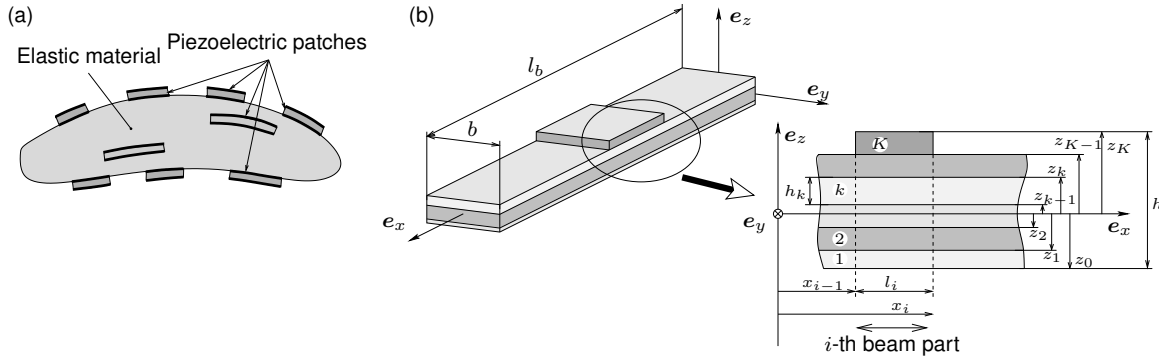


FIG. 2.8 – Structures composites piézoélectrique étudiées dans ce mémoire. (a) Schéma d'une structure élastique munie de plusieurs patches piézoélectriques. (b) Poutre stratifiée

uation de vibration (Chap. 5) ou micro/nano systèmes électromécaniques (Chap. 6).

### (a) Bibliographie

Une grande variété de modèles éléments-finis électromécaniques pour la piézoélectricité a vu le jour depuis l'article fondateur de 1970 [7]. On pourra consulter à ce sujet les bibliographies des textes [40, 258, 72]. Un certain nombre d'approches considèrent une discrétisation éléments-finis tridimensionnelle complète, où des degrés de liberté électriques locaux (en général le potentiel  $\phi$ ) sont calculés à chaque nœud du maillage. Les conditions aux limites globales en  $V$  et  $Q$  sont appliquées en imposant le même potentiel à tous les nœuds de la surface des électrodes, ce qui fait apparaître la charge électrique globale dans le second membre [72]. L'intérêt de ce genre de modèle est sa précision, car aucune hypothèse sur l'évolution des variables électriques à travers l'épaisseur des patches n'est formulée. En revanche, cette approche est plus lourde que les approches par cinématique imposée décrites ci-après, car il est nécessaire d'assembler des matrices de couplage piézoélectrique et de capacité (l'équivalent de  $\mathbf{K}_c$  et  $\mathbf{K}_e$ ) de taille importante, car elles tiennent compte de tous les degrés de libertés électriques internes. Ce travail étant effectué, il est tout de même possible de condenser de manière exacte les degrés de liberté interne, car ils sont toujours associés à une inertie nulle (procédure de condensation statique ou condensation de Guyan), ce qui permet de réduire la taille du modèle élément-finis à une taille comparable à celle du modèle (2.49) proposé dans ce texte [72].

D'autres approches proposent des modèles de poutre, de plaque ou de coque où des cinématiques particulières pour la partie électrique sont imposées. Une hypothèse réaliste est de considérer que le champ électrique  $\mathbf{E}$  est linéaire dans l'épaisseur des couches piézoélectriques, ce qui conduit à un potentiel  $\phi$  quadratique. Cette hypothèse est exacte dans le cas d'une plaque piézoélectrique en flexion, lorsqu'on fait tendre asymptotiquement son épaisseur vers zéro [266]. On peut appauvrir ces hypothèses en supposant le champ électrique constant dans l'épaisseur (et donc le potentiel électrique est linéaire), ce qu'un certain nombre d'auteurs ont considéré dans le passé. On néglige alors la partie du champ électrique qui est induite par la flexion de la couche piézoélectrique, effet couramment appelé « potentiel induit » [40]. La formulation proposée dans ce texte se place dans ce cadre pour la partie électrique, mais ne fait aucune hypothèse « milieu mince » pour la partie mécanique.

### (b) Modèle éléments finis linéaires

On considère une structure élastique munie de plusieurs patches piézoélectriques, représentée sur la figure 2.8. On n'impose aucune restriction sur la géométrie de la structure élastique, ce qui conduit à

produire une formulation par la méthode des éléments-finis. Moyennant les hypothèses sur les patches piézoélectriques évoquées au paragraphe 2.2.2, on a montré que le problème électromécanique couplé discrétisé s'écrit, en linéaire [J13] :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{V}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_m & \mathbf{K}_c \\ -\mathbf{K}_c^T & \mathbf{K}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Dans l'équation ci-dessus, pour la partie mécanique,  $\mathbf{U}$  est le vecteur regroupant les degrés de liberté des déplacements des nœuds du maillage éléments finis,  $\mathbf{M}_m$  et  $\mathbf{K}_m$  sont les matrices de masse et de raideur de la partie élastique du système et  $\mathbf{F}$  est un vecteur de forçage mécanique extérieur. Ces vecteurs / matrices carrées sont tous de taille  $N$ , le nombre de degrés de liberté élastiques du modèle. La partie électrique est décrite par les vecteurs  $\mathbf{V} = (V^{(1)}, \dots, V^{(P)})^T$  et  $\mathbf{Q} = (Q^{(1)}, \dots, Q^{(P)})^T$ , qui regroupent les différences de potentiel et les charges globales des  $P$  patches piézoélectriques du système, et par la matrice  $\mathbf{K}_e = \text{diag}(C^{(1)}, \dots, C^{(P)})$  qui regroupe les capacités électriques des patches. Le couplage électromécanique est assuré par la matrice de couplage  $\mathbf{K}_c$ , qui est de taille  $P \times N$ .

Le premier avantage de la formulation ci-dessus est qu'elle n'impose aucune restriction sur la discrétisation de la partie élastique : on peut alors utiliser tout code de calcul traditionnel (élastique) pour discrétiser et faire les calculs de modes de vibration en court-circuit (avec  $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ ) pour, par exemple, produire des modèles réduits. Dans la thèse d'A. Sénéchal, le code commercial Nastran a été utilisé (voir [302] et chapitre 5). C'est cette caractéristique qui distingue notre formulation de celles proposées dans la littérature : les hypothèses cinématiques, habituellement associées à des modèles « milieux minces », ne sont formulées *que* pour la partie électrique, la partie élastique étant quelconque. Le second avantage de notre formulation est qu'on peut directement la coupler à un modèle standard de circuit électrique extérieur, puisque les degrés de liberté électrique sont des tensions et des charges (§2.2.2). Dans mon travail, cette formulation est centrale et a été appliquée à de simples poutres ou des systèmes plus complexes comme des aubes de turbines, pour la réduction de vibrations [J13, J15], [C35], [91, 302].

### (c) Poutres stratifiées piézoélectriques : modèles analytiques

Dans ce paragraphe, on propose un modèle analytique non linéaire de la poutre droite stratifiée représentée sur la figure 2.8. Elle est composée de plusieurs zones suivant son axe  $e_z$  chacune d'elles comportant plusieurs couches suivant  $e_z$ . Dans mon travail, j'utilise le plus simple des modèles de poutre, qui suppose une cinématique d'Euler-Bernouilli à travers toutes les couches (cette théorie est connue sous le nom de *Classical Laminated Plate Theory* (CLPT) en anglais [268, 329]). Elle impose un champ de déformations linéaires à travers l'épaisseur de la poutre et un champ de contraintes linéaire par morceau. Cela est physiquement réaliste lorsque (i) la poutre est suffisamment élancée, (ii) toutes les couches adhèrent parfaitement les unes aux autres, sans glissement et (iii) les propriétés élastiques des couches sont du même ordre de grandeur. Des modèles plus raffinés peuvent être utilisés, pour inclure par exemple une cinématique de Timoshenko [203], une cinématique linéaire par morceau (modèles *layerwise* [268, 41, 86]) ou des effets piézoélectriques tridimensionnels [202, 201]. Seules les équations principales sont reprises ici, sans détails de démonstration, qui sont très similaires à ceux exposés pour les milieux homogènes dans la section précédente.

Les équations d'équilibre d'une poutre homogène, en fonction de l'effort axial  $N$  et du moment fléchissant  $M = M_y$  (on ne s'intéresse ici qu'au mouvement transverse suivant  $z$ ) du tableau 2.2 s'appliquent aussi dans le présent cadre d'une poutre stratifiée piézoélectrique. Seules les expressions de  $N$  et  $M$  changent, puisque maintenant elle tiennent compte de la structure stratifiée du système à partir de la loi de comportement piézoélectrique (2.29). On peut montrer que le problème s'écrit [R3],

[J19, J21] :

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{u} - N' = n \end{array} \right. \quad (2.50a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{w} - M'' - \underbrace{(Nw')}' = p \end{array} \right. \quad (2.50b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N = A\epsilon + B\kappa + \sum_{p=1}^P \Xi_p V^{(p)} + N_0 \end{array} \right. \quad (2.50c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M = B\epsilon + D\kappa + \sum_{p=1}^P \Theta_p V^{(p)} + M_0 \end{array} \right. \quad (2.50d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q^{(p)} = -\Xi_p [u]_{x=x_{p-}}^{x=x_{p+}} - \Xi_p / 2 \int_{x_{p-}}^{x_{p+}} \underbrace{w'^2 dx} + \Theta_p [w, x]_{x=x_{p-}}^{x=x_{p+}} + C^{(p)} V^{(p)}. \end{array} \right. \quad (2.50e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon = u' + \frac{1}{2} \underbrace{w'^2} \end{array} \right. \quad (2.50f)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa = \theta'_y = -w'' \end{array} \right. \quad (2.50g)$$

Dans les équations précédentes, une poutre avec  $P$  couches (patches) piézoélectriques munies d'électrodes a été considérée, avec, pour chaque couche,  $(V^{(p)}, Q^{(p)})$  étant respectivement la différence de potentiel entre les électrodes et la charge électrique contenue dans l'une des électrodes (Fig. 2.6). Les hypothèses décrites au §2.2.2 sont ici utilisées. Par rapport au modèle de poutre homogène, des paramètres généralisés sont apparus :  $A$  est la raideur axial de la poutre,  $D$  est sa raideur en flexion,  $B$  est sa raideur de couplage axial / flexion (qui résulte d'une éventuelle non symétrie de la stratification) et  $m$  est la masse linéique de la poutre. Des paramètres de couplages piézoélectriques sont aussi apparus : un couplage axial  $\Xi_p$  et un couplage de flexion  $\Theta_p$ , ainsi que la capacité électrique  $C^{(p)}$  du  $p^e$  élément piézoélectrique. Ces paramètres sont définis dans [J19]. Enfin,  $n$  et  $p$  sont des efforts linéiques extérieurs,  $N_0$  et  $M_0$  sont l'effort axial et le moment fléchissant de précontrainte, qui peuvent être calculés à partir de la précontrainte de chacune des couches<sup>17</sup>.  $x_{p-}$  et  $x_{p+}$  sont les positions axiales des extrémités du  $p^e$  élément piézoélectrique.

Les équations (2.50) sont extrêmement complètes et aucune hypothèse sur le nombre de couches ou de zones axiales n'a été énoncée. Elles prennent en compte notamment quatre caractéristiques physiques majeurs :

- les effets linéaires de couplage axial / flexion dus à la stratification (via le paramètre  $B$ ) ;
- les effets piézoélectriques à la fois *direct* (l'équation (2.50e), qui permet de calculer la charge électrique en fonction d'un champ de déplacement mécanique  $(u(x), w(x))$  donné) et *inverse* (les équations (2.50a,b) pour les mouvements axial et transverse).
- les effets de précontraintes, via les termes  $N_0$  et  $M_0$  ;
- les effets non linéaires géométriques, via un modèle de von Kármán. Les termes non linéaires sont soulignés et sont identiques au cas d'une poutre homogène, §2.3.1(c) ; seul un terme non linéaire supplémentaire est présent dans l'équation de l'effet piézoélectrique direct (2.50e).

En pratique, l'utilisation de ces modèles analytiques dans le cas de stratification complexe est fastidieuse, et il est plus simple de se tourner vers des modèles éléments-finis (§2.3.2(b),(d)). Néanmoins, ces modèles analytiques gardent leur intérêt dans des cas simplifiés, pour comprendre la physique des phénomènes et fournir des cas tests, utiles pour valider les codes numériques. Plus précisément, voici deux cas de simplification que j'ai eu l'occasion d'étudier :

<sup>17</sup>Il faudrait pour être exhaustif ajouter dans la relation de comportement (2.29) des contraintes résiduelles et thermiques comme dans (2.4)

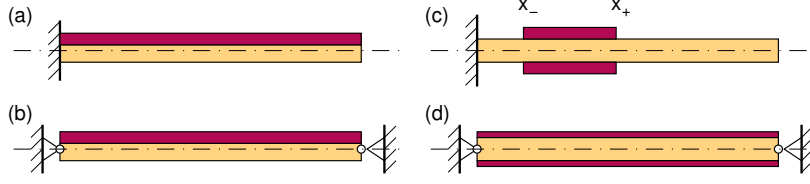


FIG. 2.9 – Quelques exemples de poutres stratifiées sans raideur de couplage axial / flexion ( $B = 0$ ). La ligne moyenne est représentée par un trait mixte ('-.-').

**Modèles linéaires** On formule ici trois hypothèses : (i) on impose  $B = 0$ , c'est-à-dire que la stratification est symétrique dans l'épaisseur, (ii) les non-linéarités géométriques sont négligées et (iii) simplement deux patchs piézoélectriques colocalisés sont considérés (Fig. 2.9(c)). On peut alors montrer que le champ de déplacement  $w(x, t)$  de la ligne neutre de la poutre est solution de :

$$m\ddot{w} + [Dw'']'' = \Theta(V_1 + V_2)\Delta' + p, \quad (2.51)$$

où

$$\Delta(x) = [\delta(x - x_-) - \delta(x - x_+)], \quad (2.52)$$

avec  $\delta(x)$  la fonction de Dirac et où  $V_1(t)$  et  $V_2(t)$  sont les tensions électriques aux bornes des couches piézoélectriques. En pratique, le terme  $\Delta'$  est traité à partir d'une projection modale, qui permet d'effectuer une intégration par partie qui élimine les dérivées de fonction de Dirac [J19].

Cette formulation est intéressante car elle fait clairement apparaître l'effet piézoélectrique inverse, via la fonction  $\Delta(x)$ , comme deux moments concentrés appliqués au niveau des deux sections terminales de la paire de patchs piézoélectriques, en  $x_-$  et  $x_+$ . Ce modèle est encore valide pour des structures à stratification non symétrique, pourvu que la position de la ligne moyenne puisse être choisie de telle sorte que  $B = 0$ . C'est le cas pour la poutre encastée/libre de la figure 2.9(a). Pour le système bi-articulé de la figure 2.9(b), il faut bien choisir la position des articulations.

**Modèles non linéaires** Lorsqu'on garde les non-linéarités géométriques, le couplage axial / flexion associé apparaît et il est possible de condenser le déplacement axial  $u$  (par la même technique d'intégration de  $N(t)$  le long de la poutre et sous les mêmes hypothèses qu'au paragraphe 2.3.1(c)) *seulement si la stratification est homogène suivant  $e_x$*  (lorsque  $A$  ne dépend pas de  $x$ , Fig. 2.9(b,d)). Dans le cas où  $B = 0$ , on obtient [J21] :

$$\begin{cases} m\ddot{w} + Dw'''' - N_0w'' = \underbrace{(\tilde{N}w')}' + \Theta(V_1 + V_2)\Delta' + p, & (2.53a) \\ \tilde{N} = \frac{A}{2l} \int_0^l \underbrace{w'^2} dx + \Xi(V_1 - V_2), & (2.53b) \end{cases}$$

où  $\Delta(x) = [\delta(x) - \delta(x - l)]$  et  $l$  est la longueur de la poutre. L'extension de ce modèle au cas où  $B$  n'est pas nul, pour pouvoir prendre en compte par exemple une position quelconque des articulations du système de la figure 2.9(b) est à l'étude. Son intérêt pratique est de fournir un cas test de poutre à stratification non homogène pour valider des codes éléments finis [J21].

#### (d) Poutres stratifiées piézoélectriques : modèles EF

L'extension au cas non linéaire géométrique du modèle éléments finis du paragraphe §2.3.2(b), a été proposé pour des applications de poutre NEMS, du type de celle de la figure 2.8. Le modèle

s'écrit [J20], [C42] :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_m \mathbf{U} + \underline{\mathbf{f}}_{nl}(\mathbf{U}) + \sum_{p=1}^P \left[ \underline{\mathbf{f}}_c^{(p)} + \underline{\mathbf{P}}_c^{(p)} \mathbf{U} \right] \mathbf{V}^{(p)} = \mathbf{F}, & (2.54a) \\ C^{(p)} \mathbf{V}^{(p)} - \left[ \underline{\mathbf{f}}_c^{(p)} + \underline{\mathbf{P}}_c^{(p)} \mathbf{U} \right]^T \mathbf{U} = Q^{(p)}, \quad \forall p \in \{1, \dots, P\}. & (2.54b) \end{cases}$$

Dans les équations précédentes, les non-linéarités géométriques sont responsables en premier lieu du terme  $\underline{\mathbf{f}}_{nl}(\mathbf{U})$ , vecteur des efforts intérieurs non linéaires, qui couple les degrés de liberté éléments-finis et qui correspond aux non-linéarités du modèle analytique de poutre (2.42). En second lieu, le couplage piézoélectrique est maintenant séparé en deux termes. Le premier est identique à la matrice de couplage linéaire du modèle (2.49) : on peut montrer que  $\mathbf{K}_c = (\underline{\mathbf{f}}_c^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{f}}_c^{(P)})$ . Le second terme de couplage piézoélectrique, où  $\underline{\mathbf{P}}_c^{(p)}$  est une matrice carré de taille  $N \times N$ , est issu des non-linéarités géométriques et s'explique physiquement comme le forçage paramétrique du  $p^e$  patch piézoélectrique.

Les principaux intérêts pratiques de ce modèle sont (i) sa grande gamme d'utilisation, puisqu'il n'impose aucune hypothèse sur la stratification : celle-ci peut faire apparaître autant de couches, élastiques ou piézoélectriques que nécessaire, à la fois suivant les directions axiale et transverse et (ii) il n'impose pas de négliger l'inertie axiale, qui s'avère avoir un impact non négligeable pour certaines structures stratifiées [J21].

### (e) Plaques stratifiées piézoélectriques : modèle analytique

Il est possible d'étendre les équations du mouvements non linéaires de plaques homogènes (2.44) au cas stratifié. On obtient alors la formulation suivante [J14], [C27] :

$$\begin{cases} D\Delta\Delta w + \underline{B\Delta\Delta F} + m\ddot{w} = \underline{L(F, w)} - \Delta M_{0P} - \Delta(B^+ N_{0P}), & (2.55a) \\ A\Delta\Delta F - B\Delta\Delta w = -\Delta(A^+ N_{0P}) - \frac{1}{2} \underline{L(w, w)}. & (2.55b) \end{cases}$$

Les équations précédentes sont valables lorsque pour toute zone où la stratification est homogène (les paramètres de raideur  $A$ ,  $B$ ,  $D$  ne doivent pas dépendre de  $\boldsymbol{x}$ ). Sinon, les bi-laplaciens  $\Delta\Delta$  sont remplacés par des opérateurs plus compliqués, mais la structure des équations est identique. Les grandeurs  $N_{0P}$  et  $M_{0P}$  sont des moments / efforts de membrane regroupant à la fois les précontraintes et les effets inverses piézoélectriques. Pour plus de précisions, le lecteur peut consulter les articles [J14], [C27].

## 2.3.3 Poutres élastiques en grande rotation

On s'intéresse dans ce paragraphe à tous les problèmes de poutres soumises à des grandes rotations, c'est-à-dire, on le rappelle, les cas où les conditions aux limites ne restreignent pas le mouvement axial et où les modèles de type von Kármán des sections précédentes conduisent à des modèles linéaires (voir §2.1.3 et §2.3.1(c)).

### (a) Modèle élément finis

Ce paragraphe présente quelques caractéristiques des modèles de poutre en grande rotation, l'objectif principal étant de les comparer à celui obtenu avec un modèle de von Kármán (§2.3.1(c)). La démarche d'écriture du présent modèle est analogue à celle adoptée pour les modèles de von Kármán

et décrite au paragraphe §2.3.1. Seules quelques équations sont reprises ici, la démarche complète étant disponible dans [J22] et dans [302]

On choisit la cinématique de poutre de l'équation (2.37), mais on ne linéarise pas l'opérateur de rotation  $\mathbf{R}$ . On calcule ensuite le tenseur des déformations de Green-Lagrange et on le simplifie par linéarisation consistante, comme expliqué au paragraphe 2.1.2(e). En ne considérant que le mouvement plan de la poutre dans le plan  $(e_x, e_z)$ , les seules composantes non nulles de  $\gamma$  sont alors :

$$\gamma_{xx} = \epsilon - z\kappa, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \gamma/2, \quad (2.56)$$

avec  $\epsilon$  une mesure de la déformation axiale de la ligne moyenne,  $\kappa$  la courbure et  $\gamma$  une mesure du cisaillement, qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \epsilon = (1 + u') \cos \theta + w' \sin \theta - 1 & (2.57a) \\ \kappa = \theta', & (2.57b) \\ \gamma = -(1 + u') \sin \theta + w' \cos \theta, & (2.57c) \end{cases}$$

À ce stade, on voit clairement l'apparition de non-linéarités fortes avec les sinus et cosinus.

Ce problème peut être résolu *sans aucune troncature des non-linéarités* en utilisant la méthode des éléments finis. Il faut alors discrétiser la structure et utiliser le principe des travaux virtuels (2.8), ce qui conduit à l'écriture suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad (2.58)$$

où  $\mathbf{U}$  regroupe tous les degrés de liberté en déplacement et rotation aux nœuds du maillage,  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse et  $\mathbf{F}$  est le vecteur des efforts extérieurs<sup>18</sup>. Les non-linéarités géométriques sont regroupées dans le vecteur des efforts intérieurs  $\mathbf{f}(\mathbf{U})$ . Dans la thèse d'Aurélien Sénéchal, on a utilisé une extension du modèle (2.58) au cas d'une poutre en rotation, pour évaluer les effets de la force centrifuge sur les vibrations non linéaires [J22]. Ce modèle ne comportant aucune approximation, il est valable quelle que soit l'amplitude des rotations, et constitue alors une référence.

### (b) Modèle analytique

Pour se rendre compte de l'effet des non-linéarités géométriques dans le modèle en grandes rotations, on peut tout de même écrire un modèle analytique, proposé dans [75, 76]. On écrit d'abord l'équilibre d'un petit élément de poutre soumis aux efforts intérieurs axial  $N$ , tranchant  $T$  et au moment fléchissant  $M$  [99, 336, 270, 227], on obtient :

$$\begin{cases} (N \cos \theta - T \sin \theta)' + n = \rho S \ddot{u}, & (2.59a) \\ (N \sin \theta + T \cos \theta)' + p = \rho S \ddot{w}, & (2.59b) \\ T(1 + \epsilon) - N\gamma + M' = \rho I \ddot{\theta}. & (2.59c) \end{cases}$$

Ces équations peuvent aussi être obtenues *directement* en utilisant le champ de déformation des équations (2.56) et (2.57) dans le principe des travaux virtuels (2.8) [J22].

Ensuite, on suppose (i) une cinématique d'Euler-Bernouilli ( $\gamma = 0$  dans (2.56) et (2.57)) et (ii) que la poutre est *inextensible*, c'est-à-dire que  $\epsilon = 0$ , ce qui permet pratiquement de condenser le déplacement axial  $u$ . On a alors, à partir de (2.57a,c)<sup>19</sup> :

$$\tan \theta = \frac{w'}{1 + u'} \quad (1 + u')^2 + w'^2 = 1. \quad (2.60)$$

<sup>18</sup>J'ai considéré ici, pour simplifier, des efforts extérieurs qui ne dépendent pas du déplacement inconnu, comme se serait le cas avec des efforts suiveurs.

<sup>19</sup>La seconde équation (2.60) peut être obtenue à partir de la première et des identités  $\cos \theta = 1/\sqrt{1 + \tan^2 \theta}$  et  $\sin \theta = \tan \theta/\sqrt{1 + \tan^2 \theta}$  insérées dans (2.57a)



Puis, en négligeant les efforts extérieurs axiaux ( $n = 0$ ) et l'inertie de rotation, en éliminant  $N$  entre les équations (2.59a) et (2.59b)<sup>20</sup>, en utilisant (2.59c) et la relation de comportement  $M = YI\kappa$ , (2.59b) devient :

$$\rho S \ddot{w} + \underbrace{YI \frac{\kappa''}{(\cos \theta)'} }_{\text{NL de courbure}} - \underbrace{\rho S \left( \tan \theta \int_l^x \ddot{u} \, dx \right)'}_{\text{NL d'inertie}} = p. \quad (2.61)$$

Enfin, en utilisant (2.60) pour éliminer  $\theta$  et  $\ddot{u}$ , et en procédant à un développement de Taylor des non-linéarités tronqué à l'ordre 3 en  $w$ , on obtient le modèle classique de poutre inextensible [75, 76] :

$$\rho S \ddot{w} + YI w'''' + \underbrace{YI (w' w''^2 + w'^2 w''')}_{\text{NL de courbure}} + \underbrace{\frac{\rho S}{2} \left[ w' \int_l^x \left( \int_0^x w'^2 \, dx \right)'' \, dx \right]'}_{\text{NL d'inertie}} = p. \quad (2.62)$$

Les termes correspondant aux deux mécanismes de non-linéarités en grandes rotations sont identifiés dans les équations précédentes.

Dans la thèse d'Aurélien Sénéchal, les équations ci-dessus ont été étendues au cas d'une poutre en rotation, pour évaluer les effets de la force centrifuge sur les vibrations non linéaires [302, J22]. On a notamment déterminé le domaine de validité des équations analytiques ci-dessus, par comparaison au modèle (2.58). Ce domaine de validité est clairement relié à la troncature des rotations, qui leur imposent de rester modérées.

### (c) Bibliographie

La littérature sur les poutres en grande rotation est vaste. Un des objectifs de cette section est de faire un parallèle entre plusieurs familles de travaux de la littérature. Par rapport au modèle de von Kármán, dont les équations du mouvement ne s'écrivent globalement que d'une seule manière (on postule la troncature du tenseur de Green-Lagrange et les équations s'écrivent naturellement, §2.3.1), dans le cas des modèles avec grandes rotations, plusieurs possibilités existent, à la fois pour *démontrer* les équations, mais aussi pour *leur écriture*. La raison principale est que les non-linéarités de courbure introduisent des termes non linéaires très complexes dans les équations, dont un aperçu a été proposé au paragraphe précédent.

Un classement est proposé ici, en fonction de la manière dont les équations sont *démontrées*. Deux grandes familles de travaux se distinguent.

- Dans la première famille, les équations sont écrites en *postulant directement la loi de comportement* : on impose aux moments de flexion et de torsion d'être proportionnels aux courbures correspondantes. Dans cette famille, on peut regrouper les travaux en trois groupes.
  - Le premier regroupe les travaux de fondant explicitement sur les théories de Cosserat. Dans ce cas, la cinématique de la poutre est décrite à partir du mouvement des sections droites en fonction de ses vecteurs directeurs, dont le mouvement permet de définir (i) la déformée de la poutre (ii) la mesure de déformation utilisée. Ensuite, les efforts généralisés sont choisis proportionnels à cette mesure de déformation. Précisément, si les sections droites de la poutre sont repérées par l'abscisse  $x$  et la base  $(e_x, e_y, e_z)$  dans la configuration de référence, base qui devient dans la configuration déformée la base  $(d_x(x), d_y(x), d_z(x))$ , appelée base des « directeurs » (avec  $e_x$  et  $d_x$  orthogonaux à la section droite), alors on définit le vecteur des déformations  $\epsilon$  et celui des courbures  $\kappa$  par [228, 48, 17] :

$$\epsilon = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial x} = \kappa \wedge \mathbf{d}_i, \quad (2.63)$$

<sup>20</sup>Les conditions aux limites libres en  $x = l$  servent dans l'intégration :  $T(l) = N(l) = 0$

avec  $\mathbf{r}(x)$  le vecteur position du centre de gravité des sections droites dans la configuration déformée et

$$\boldsymbol{\epsilon} = (1 + \epsilon)\mathbf{d}_x + \gamma_y\mathbf{d}_y + \gamma_z\mathbf{d}_z, \quad \boldsymbol{\kappa} = \tau\mathbf{d}_x + \kappa_y\mathbf{d}_y + \kappa_z\mathbf{d}_z, \quad (2.64)$$

où  $\epsilon$  est la déformation axiale,  $\gamma_y$  et  $\gamma_z$  sont les cisaillements,  $\tau$  est la torsion et  $\kappa_y, \kappa_z$  sont les courbures. Le travail d'origine des frères Cosserat est [74], repris par Antman (on peut consulter [17] pour le présent sujet ou son ouvrage [16], plus général) et dans [330]. Ces formulations sont utilisées en général en *statique*, pour simuler la déformation en grande rotations de fils élastiques. Dans ce cas, les équations se formulent sans approximation sous la forme d'un système dynamique non linéaire du premier ordre en  $x$ , qui est résolu par des méthodes de continuation [228]. On a alors accès à des simulations fines de phénomènes de flambage, d'enroulement ou de nœuds [230, 229, 68]. En parallèle, cette approche à partir de la théorie de Cosserat est aussi utilisée en dynamique non linéaire : on peut citer les études récentes [56] et [170].

- Le second groupe est à l'origine de théories de poutres dites inextensionnelles, dénommées parfois *Elastica*. Dans ce cas, les équations sont en général écrites à partir de principes variationnels, où l'expression de l'énergie de déformation est choisie proportionnelle au carré des courbures de la poutre, ce qui revient au même que de choisir la relation de comportement des théories de Cosserat. Ces théories ont été mises au point pour étudier en premier lieu la *dynamique non linéaire* de poutres encastées / libres en grandes rotations et notamment les vibrations tridimensionnelles avec couplage flexion / torsion. En supposant la poutre inextensible, le déplacement axial est condensé dans les autres équations, ce qui simplifie la formulation et rend le traitement analytique abordable. La formulation initiale est celle de Crespo da Silva et Glynn [75, 76], reprise et utilisée dans un grand nombre d'articles depuis [243, 226, 227], [J22]. On peut notamment citer la très élégante étude de Cusumano et Moon [79, 80]. Dans le cas de vibrations dans le plan ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$ ), ces équations sont celles du paragraphe §2.3.3(b) ci-dessus.
- Enfin, à part des deux groupes de travaux précédents, des études de Hodges pour la mécanique de pales d'hélicoptères utilisent dans la relation de comportement la courbure géométrique de la poutre dans sa configuration déformée, qui est légèrement différente de celle utilisée dans tous les travaux cités ci-dessus, puisqu'elle fait apparaître la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne sur la configuration déformée de la poutre, et non celle sur la configuration initiale [136, 137, 132]. La référence [133, p. 4] précise que les déformations correspondant à ces courbures géométriques se rapportent aux déformations d'Euler-Almansi. Sur ce point, on peut trouver d'autres remarques dans [113, p. 467], [16, p. 98] ou [87, p. 5].
- Dans la seconde famille de travaux, les équations sont écrites de manière naturelle à *partir de la mécanique des milieux continus tridimensionnels*, à partir des hypothèses classiques d'Euler-Bernouilli ou Timoshenko, et qui, du coup, démontre la relation de comportement des théories de Cosserat après un choix approprié de la mesure de déformations. On peut citer le travail de Dill [87], qui retrouve les équations des formulations par les directeurs de Cosserat évoquées plus haut, et notamment les relations de comportement, en considérant une mesure des déformations de Green-Lagrange. En parallèle, la majorité des études de poutres utilisent le tenseur des déformations de Biot  $\boldsymbol{\gamma}_B$ . L'étude pionnière est celle de Reissner [270], reprise par la suite dans un grand nombre d'études (parmi d'autre, on peut consulter [192, 337]). Récemment, l'article [113] compare l'utilisation de plusieurs mesures de déformations. Ces formulations fondées sur la mesure de déformation de Biot sont aussi à l'origine de formulations éléments-finis [288, 337, 102] et [J22]. Enfin, il existe une vaste littérature consacrée à la mécanique

des pales d'hélicoptère, allant de la simple statique non linéaire de poutres homogènes, jusqu'à des théories raffinées de poutres composites, vibrants dans les trois directions. On peut citer pour cela les travaux de Hodges, aussi basés sur des déformations de Biot, qui prennent en compte, notamment, les effets de gauchissement des sections dans le cas où une poutre de section non circulaire est soumise à de la torsion [135, 134, 82, 83]. Les travaux de P. F. Pai, réalisés en parallèle, utilisent aussi une mesure de Biot, appelée dans ces travaux mesure de Jaumann [246, 242, 241].

Il est possible de montrer que les deux familles d'études conduisent en fait *au même modèle* : les mesures de déformation, les relations de comportement généralisées et les équations d'équilibre sont identiques. Notamment, la déformation axiale  $\epsilon$  et le cisaillement  $\gamma_y$  des équations (2.64) sont identiques à ceux des équations (2.57). Seules diffèrent les applications et la manière de les résoudre :

- Soit on s'intéresse à la *statique* des fils. Dans ce cas, il est possible de ne faire aucune troncature des équations pour obtenir un système dynamique non linéaire en  $x$ , qu'il est possible de résoudre par méthodes de continuations [228] ;
- Soit on s'intéresse à la *dynamique* non linéaire des poutres. Dans ce cas, on obtient des systèmes d'équations aux dérivées partielles (en temps  $t$  et en abscisse  $x$ ), qui sont tronqués et condensés pour limiter le nombre d'EDP à résoudre [226], [J22].
- On peut aussi utiliser des méthodes éléments-finis, qui, dans ce cas, ne sont pas limitées en terme d'amplitude des rotations [337, 102], [J22].

### 2.3.4 Synthèse sur les modèles

Voici quelques remarques sur le catalogue de modèles analytiques présenté dans la présente section 2.3.

- La *partie linéaire* des équations (sans les termes soulignés) fait apparaître trois familles de termes :
  - des termes d'inertie, en dérivées secondes par rapport au temps :  $m\ddot{u}$ ,  $m\ddot{v}$ ,  $m\ddot{w}$ , où  $m$  est une masse linéique pour les modèles 1D (en kg/m) et une masse surfacique pour les modèles 2D (en kg/m<sup>2</sup>).
  - des termes de raideur en flexion, qui sont toujours des dérivées quatrième par rapport à la position. Pour les modèles 1D, ils s'écrivent  $Dv''''$ ,  $Dw''''$ , pour les modèles 2D, ils apparaissent sous forme de bi-laplacien  $D\Delta\Delta w$ , avec  $D$  la raideur en flexion (d'unité N·m<sup>2</sup> en 1D et N·m en 2D).
  - des termes de raideur en tension, en dérivées seconde par rapport à la position. Pour les modèles 1D, ils s'écrivent  $N_0v''$ ,  $N_0w''$ , pour les modèles 2D, ils apparaissent sous forme de laplacien  $N_0\Delta w$ , avec  $N_0$  la précontrainte longitudinal (d'unité N en 1D et N/m en 2D). C'est la source principale de raideur dans le cas d'une corde ou d'une membrane (c'est-à-dire lorsque la raideur en flexion est négligeable devant celle en tension, lorsque  $D/l^2 \ll N_0$ ). Cette raideur de tension est *linéaire*, même s'il est nécessaire de prendre en compte les non-linéarités géométriques pour la faire apparaître dans les équations. Ceci s'explique physiquement en observant que cette raideur de tension résulte d'un couplage entre les mouvements transverses et les efforts de membrane, qui n'apparaissent qu'avec un modèle de départ non linéaire.
- Deux familles de *couplages membrane / flexion* ont été mis en évidence pour les modèles de von Kármán.
  - Un couplage *linéaire*, qui provient soit d'une courbure initiale de la structure (dans le cas des coques, si  $1/R \neq 0$  dans (2.46) ou  $w_0 \neq 0$  dans (2.48)), soit d'une stratification non symétrique (si  $B \neq 0$  dans (2.55)).

- 
- un couplage *non linéaire* : c'est le mécanisme principal apporté par le modèle de von Kármán. Les termes correspondants sont soulignés dans les équations. Quelle que soit la structure mince, le mécanisme est identique :
    1. Un déplacement transverse crée une augmentation *quadratique* des efforts de membrane  $N$  ou  $F$ , via des termes  $v^2$ ,  $w^2$  en 1D et  $L(w, w)$  en 2D.
    2. Cela se répercute dans les équations de flexion sous la forme d'une augmentation de raideur de tension, via les termes  $(Nw')'$  et  $L(w, F)$ , ce qui crée finalement une non-linéarité *cubique* en  $w$ .
  - Lorsque les deux sources de coupage sont présentes, pour les milieux courbes ou les milieux stratifiés non symétriques, elles ajoutent des non-linéarités *quadratiques* en  $w$ . Inversement, pour des milieux plats et à stratification symétrique, les non-linéarités géométriques sont simplement cubiques en  $w$ . Ces mécanismes s'expliquent simplement en considérant la symétrie du mouvement dans la direction transverse [C4].
  - Dans les modèles en grandes rotations, deux mécanismes de non-linéarité ont été exhibés : des *non-linéarités de courbure* et des *non-linéarités inertielles*.
  - Sur les effets *piézoélectriques*, on peut formuler quelques remarques.
    - Lorsque des couches / patchs piézoélectriques sont inclus dans les milieux minces, l'effet inverse piézoélectrique est *équivalent* à une précontrainte, proportionnelle à la tension électrique entre les électrodes (Eqs. 2.50c,d).
    - L'effet piézoélectrique inverse est équivalent à des efforts concentrés sur les bords des couches piézoélectriques. Par exemple, dans le cas du milieu 1D il s'agit de deux moments linéiques imposés aux extrémités des patchs piézoélectriques (cela apparaît à travers  $\Delta(x)$  dans les équations (2.51) et (2.53a). Ce résultat est généralisable au cas de la plaque stratifiée (Eqs. (2.55), pour des patchs de géométrie plus complexes [295, 85].
    - L'effet piézoélectrique direct est caractérisé par l'équation (2.50e), qui montre qu'une couche piézoélectrique est équivalente, d'un point de vue électrique, à une capacité en série avec une force électromotrice, proportionnelle aux variables mécaniques.



---

---

# Réduction de modèle, simulations et expériences

Alors que le chapitre précédent a présenté mon travail de modélisation, l'étape initiale de toute étude mécanique, le présent chapitre s'attache à décrire le traitement des modèles, à savoir les techniques de résolution et simulation. D'un point de vue très général, les modèles présentés au chapitre 2 sont soit des modèles analytiques, soit des modèles éléments-finis. Les premiers apparaissent pratiquement sous la forme d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles (EDP), qu'il est nécessaire de *discrétiser* pour les simuler. Les seconds sont déjà, par nature, discrétisés, mais sont souvent de grande taille, notamment lorsque la structure est de géométrie compliquée. C'est pour cette raison, mais aussi par la nature non linéaire des modèles qui complique et ralentit énormément leur résolution, qu'on peut être conduit à bâtir des *modèles réduits*. C'est dans la seconde section de ce chapitre que ce sujet est abordé, alors que la première section est consacrée à la discrétisation des modèles analytiques du chapitre 2.

La troisième section propose une vue d'ensemble du concept de *mode non linéaire*, qui est un moyen élégant et puissant de réduire et d'analyser la dynamique d'un système non linéaire vibrant.

La quatrième section s'intéresse particulièrement aux méthodes de résolution des modèles non linéaires géométriques, principalement dans le cas où on s'intéresse aux vibrations entretenues (ou forcées) des structures. Dans ce cas, j'évoque en particulier des méthodes spécifiques, comme des techniques de *continuation de solutions périodiques* et ma contribution dans ce domaine.

Enfin, la quatrième section expose quelques techniques liées aux *essais expérimentaux* en vibrations non linéaires. Cette dernière caractéristique a été à la base du développement d'un excitateur électromagnétique sans contact ainsi que de l'utilisation de techniques de mesures particulières, adaptées aux oscillations périodiques.

## 3.1 Discrétisation des modèles analytiques

### 3.1.1 Formulation

#### (a) Cadre général

On se place ici dans le cas général d'une structure mince en vibrations non linéaires dont on cherche le champ de déplacement transverse  $w(\boldsymbol{x}, t)$  en fonction du temps  $t$ . Un échantillon de modèles 1D et 2D, homogènes, stratifiés ou piézoélectriques, est proposé au paragraphe 2.3. Pour représenter les couplages membrane / flexion, issus soit des non-linéarités géométriques, soit de la

courbure de la structure, soit de sa stratification, les modèles analytiques conduisent à introduire un second champ inconnu, noté  $\phi(\mathbf{x}, t)$  ici, qui représente les efforts de membrane. (Il s'agit précisément de l'effort axial  $N$  pour les milieux 1D et de la fonction d'Airy  $F$  pour les milieux 2D).

D'un point de vue général, on considère donc une structure 1D ou 2D, occupant un domaine  $\mathcal{D}$  (il s'agit d'une courbe ou d'une surface). Le problème à résoudre s'écrit sous la forme des équations locales,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \forall t > 0$  :

$$\begin{cases} \mathcal{M}(\ddot{w}) + \mathcal{K}_{ww}(w) + \mathcal{K}_{w\phi}(\phi) + \underbrace{\mathcal{N}_w(w, \phi)} = f_w, & (3.1a) \\ \mathcal{K}_{\phi\phi}(\phi) + \mathcal{K}_{\phi w}(w) + \underbrace{\mathcal{N}_\phi(w, w)} = f_\phi, & (3.1b) \end{cases}$$

des conditions aux limites,  $\forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}, \forall t > 0$  :

$$\mathcal{B}_i(w, \phi) + \mathcal{C}_i(\ddot{w}) = g_i, \quad \forall i = 1, \dots, 2\tilde{q}, \quad (3.2)$$

et des conditions initiales,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$  :

$$w(\mathbf{x}, t = 0) = w_0(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(\mathbf{x}, t = 0) = \dot{w}_0(\mathbf{x}), \quad (3.3)$$

avec  $w_0$  et  $\dot{w}_0$  deux champs scalaires donnés.

Dans les équations précédentes,  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = w, \phi$ ) sont les opérateurs respectivement d'inertie et de raideur *linéaires* d'ordre pair, qui sont des opérateurs différentiels en espace, *linéaires* en  $w$  ou  $\phi$ . On note  $2p$  l'ordre des dérivées de  $\mathcal{M}$  et  $2q_{\alpha\beta}$  celui de  $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ , avec  $p$  et  $q_{\alpha\beta}$  deux entiers, tels que  $p < q$ ,  $q_{w\phi} \leq q_{\phi\phi}$  et  $q_{\phi w} \leq q_{ww}$ . Les opérateurs  $\mathcal{N}_\alpha$  représentent la partie *non linéaire* de la raideur, apportée par les non-linéarités géométriques. Ils sont bilinéaires. Les  $\mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i$  représentent  $2\tilde{q}$  conditions aux limites, avec  $\tilde{q} = q_{ww} + q_{\phi\phi}$ . Ce sont aussi des opérateurs différentiels linéaires.  $\mathcal{C}_i$  représente des conditions aux limites particulières, qui font intervenir l'accélération  $\ddot{w}$  du système (c'est le cas d'un couplage avec un système masse / ressort, par exemple). Ce terme est le plus souvent nul (pour les conditions aux limites classiques : fixes, libres etc.). Les quantités  $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$  et  $g_i(\mathbf{x}, t)$  représentent le forçage extérieur et incluent les éventuels précontraintes et forçages piézoélectriques. Dans ce dernier cas, ils sont proportionnels aux différences de potentiel  $V^{(p)}$  aux bornes des patches piézoélectriques. Les  $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$  sont donc les raideurs du système en *court-circuit*.

Dans les équations (3.2), on a supposé les conditions aux limites linéaires, ce qui est le plus souvent le cas. Enfin, on pourrait en toute généralité ajouter dans les équations (3.1) et (3.2) des termes dépendant de la vitesse  $\dot{w}$ . Cela introduirait de la dissipation, que nous préférons ajouter sous forme d'amortissements modaux après projection modale.

Le formalisme (3.1)-(3.3) s'applique à tous les modèles 2D proposés au paragraphe 2.3 (Eqs. (2.44), (2.46), (2.48), (2.55)), et aux modèles 1D de type von Kármán, lorsque, dans ce dernier cas, seulement une seule direction de mouvement transverse est considérée (Eqs. (2.42) avec  $v(x, t) = 0$  et Eqs. (2.50), (2.53)). Les termes diagonaux  $\mathcal{K}_{ww}$  et  $\mathcal{K}_{\phi\phi}$  de l'opérateur de raideur correspondent aux raideurs de flexion et de membrane. Les termes non diagonaux  $\mathcal{K}_{w\phi}$  et  $\mathcal{K}_{\phi w}$  représentent les termes de couplages membrane / flexion linéaires, dus soit à une courbure non nulle de la structure, soit à une stratification non symétrique. Ci-dessous, on donne deux exemples :

- Modèle de coque sphérique, Eq. (2.46),  $\phi$  est la fonction d'Airy  $F$  :

$$\mathcal{M}(\diamond) = \rho h \diamond, \quad \mathcal{K}_{ww}(\diamond) = D \Delta \Delta \diamond, \quad \mathcal{K}_{\phi\phi}(\diamond) = \Delta \Delta \diamond, \quad \mathcal{K}_{w\phi}(\diamond) = \frac{1}{R} \Delta \diamond, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{K}_{\phi w}(\diamond) = \frac{-hY}{R} \Delta \diamond, \quad \mathcal{N}_w(\diamond, \triangleleft) = -L(\diamond, \triangleleft), \quad \mathcal{N}_\phi(\diamond, \triangleleft) = \frac{Yh}{2} L(\diamond, \triangleleft), \quad f_w = p, \quad f_\phi = 0 \quad (3.5)$$

- Modèle de poutre stratifiée piézoélectrique, Eq. (2.53),  $\phi$  est la partie dynamique de l'effort axial  $\tilde{N}$  :

$$\mathcal{M}(\diamond) = m\diamond, \quad \mathcal{K}_{ww}(\diamond) = D \diamond'''' - N_0 w'', \quad \mathcal{K}_{\phi\phi}(\diamond) = \diamond, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{K}_{w\phi}(\diamond) = \mathcal{K}_{\phi w}(\diamond) = 0, \quad \mathcal{N}_w(\diamond, \triangleleft) = -(\diamond \triangleleft)', \quad \mathcal{N}_\phi(\diamond, \triangleleft) = -\frac{A}{2l} \int_0^l \diamond' \triangleleft' dx, \quad (3.7)$$

$$f_w = \Theta(V_1 + V_2)\Delta' + p, \quad f_\phi = \Xi(V_1 + V_2). \quad (3.8)$$

Le formalisme général proposé ici ne s'applique pas directement (i) au cas d'une poutre où les deux directions de mouvement transverse sont considérées (Eqs. 2.42), (ii) au cas d'une plaque / coque où l'inertie de membrane n'est plus négligée [J10], (iii) au cas d'un modèle « grandes rotations » d'une poutre (Eqs. 2.62). Une extension du formalisme est bien entendu possible, en ajoutant des équations similaires à (3.1a), en modifiant en conséquence les conditions aux limites et les conditions initiales et en utilisant des opérateurs  $\mathcal{N}_\alpha$  trilineaires.

### (b) Adimensionnement

Avant de continuer, il est intéressant d'adimensionner le modèle. Cela consiste à proposer des changements de variables linéaires, choisis pour remplacer les variables par des nouvelles dont la valeur numérique est de l'ordre de l'unité. En général, on définit en premier lieu :

$$\bar{x} = \frac{x}{l_0}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h_0} \quad (3.9)$$

avec  $l_0$  et  $h_0$  deux dimensions caractéristiques. Pour  $h_0$ , l'épaisseur de la structure est en général un bon candidat. Pour  $l_0$ , on choisit souvent la longueur de la ligne moyenne  $\mathcal{L}$  ou le diamètre du domaine  $\mathcal{D}$  (cf. §2.3.1). La définition des autres variables sans dimension s'écrit en général de manière automatique, en essayant d'éliminer le plus de paramètre possible. Pour les quantités électriques (la charge et les différences de potentiel), on choisit en général un adimensionnement qui préserve la symétrie de l'opérateur de couplage [J15, J23].

Cette opération d'adimensionnement a trois vertus pratiques.

- L'adimensionnement permet tout d'abord de faire apparaître *le nombre minimal de paramètres* dont dépend le système. En plus de rendre les calculs plus légers et de faciliter les interprétations physiques des phénomènes, cela permet éventuellement de ne réaliser qu'un seul calcul pour plusieurs configurations d'un système donné. Cela est notamment très intéressant pour le calcul des déformées modales, qui ne dépendent alors que d'un nombre minimal de constantes.
- Il permet aussi de déterminer *l'ordre de grandeur* des différents termes des équations et éventuellement de les *simplifier*, en éliminant les plus petits. C'est le cas par exemple pour des calculs de coque, où il est possible en première approximation de négliger les termes non linéaires cubiques par rapport aux quadratiques, comme expliqué ci-dessous ;
- Enfin, il permet de travailler avec des variables (adimensionnées) qui ont toutes des valeurs numériques proches de 1, ce qui évite des problèmes de mauvais *conditionnement numérique*. Pour ce dernier cas, il est aussi possible de choisir un système d'unités cohérent qui réalise le même résultat, ce qui est fait lorsqu'on utilise la méthode des éléments-finis (dans [J21], on utilise le système [ $\mu\text{m}$ ,  $\mu\text{s}$ ,  $\mu\text{g}$ ] pour simuler des vibrations de nanopoutres).

Dans mon travail, l'adimensionnement a été réalisé presque systématiquement (voir [C36], [J19, J21] pour les cordes et les poutres, [J1, J9] dans le cas de plaque, [J6, J7, J10, J12] pour les coques). Notamment, dans [J6], l'adimensionnement permet de mettre en évidence un unique paramètre géométrique  $\chi$ , relié à la courbure de la coque, qui intervient directement dans le rapport des ordres de grandeurs  $\varepsilon_c$  et  $\varepsilon_q$  des termes non linéaires quadratiques et cubiques, sous la forme :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_q^2 / \chi. \quad (3.10)$$



Cette équation montre bien que si les termes quadratiques sont petits ( $\varepsilon_q \ll 1$ ), alors les termes cubiques le sont encore plus, résultat classique, qui justifie notamment toutes les méthodes de perturbation [224]. Si la courbure est nulle ( $\chi = 0$ ), c'est-à-dire que la structure est une plaque, on retrouve bien que les termes quadratiques sont nuls [J6].

### (c) Modes propres

Les modes propres de la partie linéaire du problème (3.1)-(3.3) sont les solutions  $(\omega_k, \Phi_k(\mathbf{x}), \Psi_k(\mathbf{x}))$  du problème aux valeurs propres :

$$\begin{cases} \mathcal{K}_{ww}(\Phi) + \mathcal{K}_{w\phi}(\Psi) - \omega^2 \mathcal{M}(\Phi) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} & (3.11a) \\ \mathcal{K}_{\phi\phi}(\Psi) = -\mathcal{K}_{\phi w}(\Phi), & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} & (3.11b) \\ \mathcal{B}_i(\Phi, \Psi) - \omega^2 \mathcal{C}_i(\Phi) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{D} \quad \forall i = 1, \dots, 2\tilde{q}, & (3.11c) \end{cases}$$

En général, les opérateurs  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$  sont auto-adjoints, ce qui garantit l'orthogonalité des modes [205] :

$$\int_{\mathcal{D}} \Phi_j \mathcal{M}(\Phi_i) \, d\mathcal{D} = \delta_{ij}, \quad (3.12a)$$

$$\int_{\mathcal{D}} [\Phi_j \mathcal{K}_{ww}(\Phi_i) + \Phi_j \mathcal{K}_{w\phi}(\Psi_i) + \Psi_j \mathcal{K}_{\phi\phi}(\Psi_i) + \Psi_j \mathcal{K}_{\phi w}(\Phi_i)] \, d\mathcal{D} = \omega_i^2 \delta_{ij}, \quad \forall i, j, \quad (3.12b)$$

avec  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker et où la normalisation des modes a été choisie de telle sorte que les masses modales soient unitaires.

Ces écritures sont classiques dans le cas des structures sans couplage linéaire membrane / flexion, comme les poutres ou les plaques, où dans ce cas seul l'opérateur  $\mathcal{K}_{ww}$  intervient, ce qui conduit à remplacer l'équation (3.12b) par [205] :

$$\int_{\mathcal{D}} \Phi_j \mathcal{K}_{ww}(\Phi_i) \, d\mathcal{D} = \omega_i^2 \delta_{ij}, \quad \forall i, j. \quad (3.13)$$

Sinon, comme on peut le deviner à travers l'équation (3.12b), l'orthogonalité s'utilise en multipliant l'équation (3.11a) par  $\Phi_j$ , l'équation (3.11b) par  $\Psi_j$ , en intégrant sur le domaine  $\mathcal{D}$  et en ajoutant les deux relations ainsi obtenues.

### (d) Discrétisation

D'après le théorème de superposition, toute fonction  $w(\mathbf{x}, t)$  qui satisfait les conditions aux limites homogènes associées à (3.2) peut être représentée par décomposition sur les modes propres solutions du problème (3.11). Ainsi, la solution du problème non linéaire (3.1), (3.2), (3.3) peut être décomposée sur cette base, le développement en série obtenu étant convergent [205, p. 143]. Cela s'écrit :

$$w(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{N_w} \Phi_k(\mathbf{x}) q_k(t), \quad (3.14)$$

où  $N_w$  est le nombre de modes transverses retenus dans la base modale. Cela ne fonctionne que si les conditions aux limites sont homogènes, c'est-à-dire si  $g_i = 0$ . Si elles ne le sont pas, alors on peut ajouter dans (3.14) une solution « quasi-statique » qui vérifie le problème (3.1)-(3.3) linéarisé *sans termes d'inertie* [112, p. 163, p. 174], [C12]. Cette technique est aussi largement utilisée pour accélérer la convergence d'un développement modal [33].

Pour traiter les termes non linéaires, on décompose les efforts de membrane en deux termes :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N_w} \Psi_k(\mathbf{x}) q_k(t)}_{\phi_1(\mathbf{x}, t)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N_\phi} \Upsilon_k(\mathbf{x}) \eta_k(t)}_{\phi_2(\mathbf{x}, t)}, \quad (3.15)$$

où  $N_\phi$  est le nombre de modes retenus et où  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont choisis solutions de :

$$\mathcal{K}_{\phi\phi}(\phi_1) + \mathcal{K}_{\phi w}(w) = 0, \quad \mathcal{K}_{\phi\phi}(\phi_2) + \mathcal{N}_{\phi}(w, w) = 0. \quad (3.16)$$

Le premier terme  $\phi_1(\mathbf{x}, t)$ , décomposé sur la partie membrane  $\Psi_k$  des déformées modales, permet de vérifier la partie linéaire du couplage membrane flexion de l'équation (3.1b). On peut remarquer que les coordonnées modales  $q_k(t)$  associées à  $\phi_1$  sont les mêmes que pour  $w$ . Le second terme  $\phi_2(\mathbf{x}, t)$  est décomposé sur d'autres fonctions propres, et permet de vérifier la partie non linéaire du couplage. Pour les équations de plaques et de coques peu profondes, j'ai utilisé des fonctions orthogonales  $\Upsilon_k$ , solutions du problème aux valeurs propres suivant :

$$\mathcal{K}_{\phi\phi}(\Upsilon_i) - \lambda_i \Upsilon_i = 0, \quad \int_{\mathcal{D}} \Upsilon_i \Upsilon_j \, d\mathcal{D} = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \quad (3.17)$$

avec les conditions aux limites en membrane extraites de (3.2) [J1, J6, J9, J12, J14].

### (e) Système dynamique

En insérant les équations (3.14) et (3.15) dans (3.1a,b), en tirant parti de (3.16), des définitions des fonctions propres et de leur propriétés d'orthogonalité, les coordonnées modales transverses  $q_k(t)$  et longitudinales  $\eta_k(t)$  sont solutions du problème quadratique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_k = - \sum_{i,j}^{N_w} G_{ij}^k q_i q_j - n_k(t), \quad \forall k = 1, \dots, N_\phi \quad (3.18a) \\ \ddot{q}_s + 2\xi_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_s^2 q_s = - \sum_{i=1}^{N_\phi} C_i^k \eta_i + \sum_{i,j=1}^{N_w} D_{ij}^k q_i q_j \\ \quad + \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_\phi} E_{ij}^k q_i \eta_j + \check{F}_k(t), \quad \forall k = 1, \dots, N_w \quad (3.18b) \end{array} \right.$$

avec

$$G_{ij}^k = \frac{1}{\lambda_k} \int_{\mathcal{D}} \Upsilon_k \mathcal{N}_\phi(\Phi_j, \Phi_j) \, d\mathcal{D}, \quad n_k(t) = \frac{1}{\lambda_k} \int_{\mathcal{D}} \Upsilon_k(\mathbf{x}) f_\phi(\mathbf{x}, t) \, d\mathcal{D}, \quad (3.19a)$$

$$C_i^k = \int_{\mathcal{D}} \Phi_k \mathcal{K}_{w\phi}(\Upsilon_i) \, d\mathcal{D}, \quad D_{ij}^k = \int_{\mathcal{D}} \Phi_k \mathcal{N}_w(\Phi_i, \Psi_j) \, d\mathcal{D}, \quad (3.19b)$$

$$E_{ij}^k = \int_{\mathcal{D}} \Phi_k \mathcal{N}_w(\Phi_i, \Upsilon_j) \, d\mathcal{D}, \quad \check{F}_k(t) = \int_{\mathcal{D}} \Phi_k(\mathbf{x}) f_w(\mathbf{x}, t) \, d\mathcal{D}. \quad (3.19c)$$

Les coordonnées de membrane  $\eta_k(t)$  peuvent être éliminées dans les deux équations précédentes, pour obtenir la formulation cubique :

$$\ddot{q}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = - \sum_{i=1}^{N_w} \alpha_i^k(t) q_i + \sum_{i,j=1}^{N_w} \beta_{ij}^k q_i q_j - \sum_{i,j,l=1}^{N_w} \Gamma_{ijl}^k q_i q_j q_l + F_k(t), \quad (3.20)$$

avec

$$\alpha_i^k(t) = \sum_{j=1}^{N_\phi} E_{ij}^k n_j(t), \quad \beta_{ij}^k = D_{ij}^k + \sum_{l=1}^{N_\phi} C_l^k G_{ij}^l, \quad (3.21a)$$

$$\Gamma_{ijl}^k = \sum_{m=1}^{N_\phi} E_{im}^k G_{jl}^m, \quad F_k(t) = \check{F}_k(t) + \sum_{j=1}^{N_\phi} C_j^k n_j(t). \quad (3.21b)$$

En pratique, le calcul des coefficients qui apparaissent dans les modèles discrétisés ci-dessus ( $G_{ij}^k$ ,  $C_i^k$ ,  $D_{ij}^k$ ,  $E_{ij}^k$ ,  $\alpha_i^k$ ,  $\beta_{ij}^k$  et  $\Gamma_{ijl}^k$ ) se fait par intégration numérique sur le domaine  $\mathcal{D}$  de la structure, avec les équations (3.19) et les expressions analytiques des fonctions de base  $\Phi_k$ ,  $\Psi_k$  et  $\Upsilon_k$ . Il est parfois possible d'obtenir des expressions analytiques, lorsque la structure et les déformées modales sont simples (dans le cas d'une poutre bi-articulée, par exemple [C36], [J21]).

### 3.1.2 Synthèse

Les équations aux dérivées partielles (3.1) associées à leur conditions aux limites (3.2) ont été *discrétisées* grâce aux développements (3.14) et (3.15) et remplacées par les systèmes d'équations différentielles (3.18) et (3.20). Avec le théorème de superposition, chacun d'eux est équivalent au problème initial, à condition de prendre l'infinité des fonctions de bases  $\Phi_k$ ,  $\Psi_k$  et  $\Upsilon_k$  dans les développements ( $N_w \rightarrow +\infty$ ,  $N_\phi \rightarrow +\infty$ ). En pratique, ces développements sont tronqués à  $N_w$  modes transverses et  $N_\phi$  modes de membranes. Cette troncature doit être réalisée avec soin, et le paragraphe 3.1.3 lui est consacré.

Le système quadratique (3.18), quoique plus lourd que sa contrepartie cubique (3.20), est bien adapté à la Méthode Asymptotique Numérique (MAN), une méthode de continuation décrite au paragraphe 3.4.1.

Le système cubique (3.20) est très général et décrit la mécanique non linéaire de nombreux milieux minces. On peut formuler quelques remarques.

- Les termes de couplage quadratiques proportionnels aux  $\beta_{ij}^k$  sont liés, comme on l'a déjà vu au paragraphe 2.3.4, aux couplages membrane / flexion linéaires, dus soit à une courbure non nulle de la structure (coques ou arches), soit à une stratification non symétrique. Inversement, ils sont nuls pour une structure sans couplage linéaire membrane / flexion, c'est-à-dire pour une plaque ou une poutre à stratification symétrique<sup>1</sup>.
- Un éventuel forçage piézoélectrique et/ou une éventuelle précontrainte sont responsables des termes de couplage linéaires, proportionnels aux  $\alpha_i^k$ , ainsi que d'une partie du terme d'excitation externe  $F_k(t)$  (le reste provient des efforts extérieurs).
  - Pour le choix des modes utilisés pour la discrétisation des présents modèles analytiques, il est plus simple de choisir ceux à (i) précontrainte nulle et (ii) associés aux patchs piézoélectriques en court-circuit (avec  $V^{(p)} = 0$  pour tout  $p$ ), car ce sont les plus aisés à calculer. Dans [J13, J19, J14], où des structures piézoélectriques précontraintes sont étudiées, on utilise les modes de la structure en court-circuit et non précontrainte ; dans [J22] et [302], où il s'agit d'une poutre en rotation précontrainte par la force centrifuge, ce sont les modes de la poutre au repos qui sont utilisés.
  - Dans le cas d'une précontrainte et/ou d'un forçage piézoélectrique constant, les  $\alpha_i^k$  sont des constantes et peuvent être responsable d'un éventuel *flambage* de la structure : lorsque

<sup>1</sup>Dans ce cas, les opérateurs croisés  $\mathcal{K}_{w\phi}$  et  $\mathcal{K}_{\phi w}$  sont nuls, les modes  $\Psi_k$  aussi, ce qui assure la nullité des coefficients  $C_i^k$  et  $D_{ij}^k$

dans (3.20)  $\omega_k^2 - \alpha_k^k$  devient négatif, la raideur du  $k^e$  mode devient négative et il y a flambage sur ce mode. La formulation (3.20) permet alors de calculer les fréquences propres et déformées modales de la structure *précontrainte*, et éventuellement en *post-flambement*, en la linéarisant autour de cet état [J14].

- Lorsque le forçage piézoélectrique dépend du temps, il crée à la fois une excitation externe via  $F_k(t)$ , mais aussi une excitation paramétrique via  $\alpha_i^k(t)$ . Dans ce cas, on peut faire apparaître des coefficients de couplage piézoélectrique modaux  $\Theta_{ki}^{(p)}$  et  $\chi_k^{(p)}$  du  $k^e$  mode et du  $p^e$  patch. Lorsque la structure est munie de  $P$  patches, on a [J13, J19, J20] :

$$\alpha_i^k(t) = \sum_{p=1}^P \Theta_{ki}^{(p)} V^{(p)}(t), \quad F_k(t) = \sum_{p=1}^P \chi_k^{(p)} V^{(p)}(t), \quad (3.22)$$

où  $V^{(p)}$  est la différence de potentiel aux bornes des électrodes du  $p^e$  patch.

- La formulation cubique (3.20) correspond à des non-linéarités géométriques associées à un modèle de von Kármán. Notamment, elle ne s'applique pas aux modèles analytiques de poutres en grandes rotations du paragraphe 2.3.3. On montre que dans ce cas, il est possible d'utiliser la même méthode de décomposition modale, qui conduit à un système similaire comportant en plus des termes non linéaires inertiels. Cela s'écrit [J22], [302] :

$$\ddot{q}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = - \sum_{i,j,l=1}^{N_w} \Gamma_{ijl}^k q_i q_j q_l - \sum_{i,j,l=1}^{N_w} \Pi_{ijl}^k (q_i q_j \dot{q}_l + q_i \dot{q}_j q_l) + F_k(t). \quad (3.23)$$

- Dans les développements proposés ici, le problème non linéaire continu a été discrétisé en utilisant les modes propres du problème linéarisé. Cette technique a plusieurs avantages.
  - Elle permet de tirer parti du fort contenu physique des modes propres, qui permet dans des cas de dynamique non linéaire compliquée d'aider la compréhension des phénomènes observés. Notamment, la comparaison avec des expériences est facilitée.
  - Elle permet d'introduire l'amortissement de manière aisée, en ajoutant par exemple un terme d'amortissement visqueux à chacun des oscillateurs. Cela a été fait dans les expressions (3.18) et (3.20). Les facteurs d'amortissement modaux  $\xi_k$  peuvent être estimés expérimentalement, par analyse modale standard.
  - Elle permet de procéder directement au calcul des modes non linéaires par mise sous forme normal (voir paragraphe 3.3).
- D'autres choix de fonctions de bases sont possible pour discrétiser les équations.
  - Une alternative est l'utilisation d'une méthode de type éléments-finis. La différence principale, dans ce cas, est que les fonctions de discrétisations utilisées sont (i) très simples (ii) ont un support localisé sur une petite partie du domaine de la structure (un élément finis). C'est donc le grand nombre de fonctions de discrétisation – relié au nombre d'éléments-finis – qui garantit la précision de la méthode. Dans le cas des modes propres, c'est l'inverse : on cherche à utiliser un nombre réduit de fonctions de discrétisation à fort contenu physique. L'utilisation de la méthode des éléments-finis est traité dans ce texte au paragraphe 3.2.
  - Un autre choix de fonctions de discrétisation consiste à choisir, comme dans le cas des modes propres, des fonctions dont le support est le domaine  $\mathcal{D}$ . Il faut qu'elles vérifient les conditions aux limites, pour que le théorème de superposition soit valable. Notamment, dans la cas où le domaine  $\mathcal{D}$  de la structure est rectangulaire (pour une plaque rectangulaire, des coques faiblement courbées à base rectangulaire ou des coques cylindriques),

Amabili et ses collaborateurs utilisent des composées de fonction sin et cos qui ne sont en général pas les modes propres de la structure linéarisée. On obtient cependant la même formulation (3.20) [8, 9, 10, 11], [J10]. Dans le même esprit, le modèle non linéaire de plaque imparfaite (2.48) peut être discrétisé en utilisant la base des modes de la plaque parfaite associée, puisque dans ce cas, les conditions aux limites transverses sont identiques. C'est ce qui a été fait dans le cas où le domaine  $\mathcal{D}$  est circulaire, dans [J11, J12].

Ce choix de base de projection est judicieux lorsque les fonctions de base ont des expressions analytiques simples, ce qui facilite le calcul des coefficients  $\alpha_i^k$ ,  $\beta_{ij}^k$  et  $\Gamma_{ijl}^k$ . En revanche, le système obtenu, de la forme (3.20), n'est pas découplé au stade linéaire – les termes de couplage linéaires  $\alpha_i^k$  sont non nuls –, puisque la base de projection est différente de la base des modes propres de la structure. Il est donc nécessaire de diagonaliser ce système pour obtenir une formulation projetée sur les modes propres de la structure, soit pour faciliter les interprétations physique des résultats, soit pour utiliser une réduction de modèle de type mode non linéaires (cf. §3.3 et [J7, J11, J10]).

- Il est aussi possible de discrétiser les modèles analytiques avec des fonction de bases issues de POD [12, 13].

### 3.1.3 Troncature modale

La discrétisation du modèle analytique (3.1), (3.2), (3.3) a été obtenue à partir de la projection modale (3.14), (3.15). Les  $N_w$  modes  $\Phi_k$  permettent de discrétiser le mouvement transverse, les  $N_w$  modes  $\Psi_k$  discrétisent le mouvement de membrane lorsqu'il y a un couplage membrane / flexion linéaire et les  $N_\phi$  modes  $\Upsilon_k$  discrétisent le couplage membrane / flexion non linéaire géométrique.

Lorsque le modèle est linéaire, le choix des  $N_w$  modes consiste à ne garder que ceux dont les fréquences propres sont contenues dans la bande fréquentielle à l'étude. En général, on choisit de garder les  $N_w$  premiers modes de la base (les  $N_w$  de plus basses fréquences propres). On peut aussi enrichir cette base par des modes statiques, pour tenir compte de la contribution des modes de hautes fréquence non retenus dans la base [33]. Avec les non-linéarités géométriques, on doit considérer deux phénomènes supplémentaires.

- Le couplage non linéaire membrane / flexion, qui impose le terme  $\phi_2$  dans les efforts de membrane, conduit à ajouter dans les calculs les modes  $\Upsilon_k$  et à tronquer cette base à un nombre  $N_\phi$  de modes.
- Ce couplage non linéaire introduit aussi des transferts d'énergie entre modes qui peuvent être soit résonant (lorsqu'il existe des relations algébriques entre les fréquences propres) ou non résonant. Cela conduit à des transferts d'énergie, à la fois vers les hautes et basses fréquences, qui augmentent la largeur de bande fréquentielle de la réponse du système et qui oblige à conserver plus de modes. On reviendra sur ce point au paragraphe 3.3 sur les modes non linéaires.

Aucun critère simple n'existe pour choisir a priori et de manière fiable les modes à conserver dans la troncature. Une manière pratique (mais non satisfaisante !) consiste à procéder à plusieurs simulations à nombre  $N_w$  croissant de modes, en partant de la troncature du modèle linéaire équivalent, jusqu'à obtention d'une convergence, c'est-à-dire lorsque la réponse du modèle n'est plus affectée par l'enrichissement de la base.

Le nombre  $N_\phi$  de modes de membrane à conserver est en général plus élevé que  $N_w$ . Si le système dynamique quadratique (3.18) est utilisé pour simuler la réponse, alors il faut agir de la même manière : procéder à plusieurs simulations à  $N_\phi$  croissant jusqu'à convergence. Si c'est la formulation cubique (3.20), alors  $N_\phi$  n'intervient que dans le calcul des coefficients  $\alpha_i^k$ ,  $\beta_{ij}^k$  et  $\Gamma_{ijl}^k$  (Eqs. (3.21)). Dans ce cas, le nombre de modes  $N_\phi$  influe directement sur la précision de leur calcul et le nombre de chiffres significatifs souhaité. Mon expérience sur ce sujet est qu'il faut entre 5 et 10 fois plus que de modes de membrane que de modes transverses. Par exemple, pour le calcul des coefficients  $\beta_{ij}^k$

et  $\Gamma_{ijl}^k$ , le nombre de modes de membrane a été fixé à  $N_\phi = 6$  pour des plaques circulaires [J1] et à  $N_\phi = 12$  pour les coques sphériques [J6] et les plaques imparfaites [J12]. Le même genre de résultat est évoqué dans le cas de simulations de pales d'hélicoptère [35]

## 3.2 Réduction des modèles éléments-finis

### 3.2.1 Formulation

#### (a) Cadre général

D'une manière générale, un modèle élément-finis d'une structure avec non-linéarités géométriques s'écrit :

$$M\ddot{U} + \underbrace{f(U)} + \underbrace{P(t)U} = F(t), \quad (3.24)$$

où  $U$  regroupe tous les degrés de liberté en déplacement et rotation aux nœuds du maillage,  $M$  est la matrice de masse et  $F$  est le vecteur des efforts extérieurs<sup>2</sup>. Les non-linéarités géométriques sont regroupées dans le vecteur des efforts intérieurs  $f(U)$  et les éventuelles précontraintes et efforts piézoélectriques sont inclus à la fois dans  $F$  et dans  $f$ , le terme  $P(t)$  ne regroupant que l'éventuel forçage paramétrique (Eq. 2.54).

Le formalisme du modèle éléments-finis ci-dessus est général et s'applique aussi bien à un modèle de type milieux minces (éléments-finis de poutre, plaque ou coque) qu'à un modèle tridimensionnel. Pour l'écriture de  $f$  en fonction des degrés de liberté  $U$  en déplacement, lorsque les non-linéarités géométriques sont en jeu, on est confronté à deux cas.

- Soit  $f(U)$  est polynomial, d'ordre au plus cubique. C'est le cas des milieux minces fondés sur un modèle de von Kármán. C'est aussi le cas pour un modèle discrétisé avec des éléments-finis tridimensionnels, écrits de manière standard avec le principe des travaux virtuels (2.8), p. 23, et la loi de comportement de Kirchhoff-Saint-Venant (dans les deux versions : élastique (2.5), p. 22 ou piézoélectrique (2.29), p. 32), puisque les déformations de Green-Lagrange sont quadratiques en fonction des déplacements<sup>3</sup>.
- Soit  $f(U)$  inclut des sinus et cosinus des degrés de liberté, dans le cas de modèles de structures en grandes rotations (Eq. (2.58)).

#### (b) Mouvement autour d'une position d'équilibre précontrainte

On décompose le champ de déplacement  $U(t)$  en une partie statique  $\hat{U}$ , résultat de la précontrainte, et une partie dynamique  $\tilde{U}(t)$ , qui représente les vibrations autour de cette configuration précontrainte, et on fait de même pour l'effort extérieur :

$$U(t) = \hat{U} + \tilde{U}(t), \quad F(t) = \hat{F} + \tilde{F}(t). \quad (3.25)$$

La position d'équilibre  $\hat{U}$  est solution du problème non linéaire statique associé à (3.24) :

$$\underbrace{f(\hat{U})} = \hat{F}, \quad (3.26)$$

<sup>2</sup>J'ai considéré ici, pour simplifier, des efforts extérieurs qui ne dépendent pas du déplacement inconnu, comme se serait le cas avec des efforts suiveurs.

<sup>3</sup>Le PTV (2.8) fait intervenir le travail volumique des efforts intérieurs  $\pi : \delta\gamma$ . La variation de déformation  $\delta\gamma$  est linéaire en  $U$  ; avec la loi de comportement,  $\pi$  est proportionnel à  $\gamma$ , qui est quadratique en  $U$ . On obtient bien un travail des efforts intérieurs polynomial en  $U$  et d'ordre au plus cubique

où on a considéré, sans perte de généralité, que le forçage paramétrique  $P(t)$  n'avait pas de partie constante. À partir d'un développement de Taylor de  $f$  autour de  $\hat{U}$ , on montre que :

$$f(\hat{U} + \tilde{U}) = f(\hat{U}) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial U}}_{\hat{K}} \bigg|_{U=\hat{U}} \tilde{U} + \hat{f}_{nl}(\tilde{U}), \quad (3.27)$$

où  $\hat{K}$  est la matrice de raideur tangente en  $U = \hat{U}$  et  $\hat{f}_{nl}$  est la partie non linéaire des efforts intérieurs, calculée autour de la position d'équilibre  $\hat{U}$ . Le vecteur  $\hat{f}_{nl}$  peut être calculé pour un  $\tilde{U}$  donné sans développement de Taylor, simplement à partir de l'équation (3.27), puisque  $\hat{K}$  et  $f(\hat{U})$  sont connus.

En insérant (3.27) dans (3.24), on obtient l'équation régissant les mouvements  $\tilde{U}$  autour de la position d'équilibre  $\hat{U}$  :

$$M\ddot{\tilde{U}} + \hat{K}\tilde{U} + \hat{f}_{nl}(\tilde{U}) + P(t)\tilde{U} = \check{F}(t), \quad (3.28)$$

avec  $\check{F}(t) = \tilde{F}(t) - P(t)\hat{U}$ , vecteur d'excitation modifié par l'excitation paramétrique du déplacement à l'équilibre précontraint.

### (c) Réduction du modèle

Il est possible d'adopter ici la technique appliquée pour discrétiser les modèles analytiques au paragraphe précédent (§3.1), c'est-à-dire de projeter le modèle élément-finis (3.24) sur un ensemble de vecteurs bien choisis. On les note  $\Psi_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , avec le nombre  $M$  de fonctions de réduction, inférieur à la taille du modèle éléments-finis  $N$ . On écrit :

$$\tilde{U}(t) = \sum_{i=1}^M \Psi_i q_i(t) = \Psi q(t), \quad (3.29)$$

avec  $\Psi = (\Psi_1 \dots \Psi_M)$  et  $q = (q_1 \dots q_M)^T$ . En insérant l'équation précédente dans la formulation (3.28), on est conduit à résoudre le problème suivant :

$$M\ddot{q} + \hat{K}q + \hat{f}_{nl}(q) + \hat{P}(t)q = \hat{F}(t), \quad (3.30)$$

où

$$\hat{M} = \Psi^T M \Psi, \quad \hat{K} = \Psi^T \hat{G} \Psi, \quad \hat{f}_{nl}(q) = \Psi^T \hat{f}_{nl}(\Psi q), \quad \hat{P} = \Psi^T P \Psi, \quad \hat{F} = \Psi^T \check{F}. \quad (3.31)$$

Cette nouvelle formulation a exactement la même structure que (3.28), et diffère simplement par sa taille, le nombre de degrés de liberté  $M$ , qu'on espère bien plus réduit que  $N$ .

### (d) Projection modale

Un premier choix des fonctions de réduction est identique aux réductions des modèles analytiques proposées dans ce texte : on utilise les modes propres du problème linéarisé. Ici, lorsque la structure est précontrainte, et contrairement aux modèles analytiques, le coût de calcul des modes propres de la structure *précontrainte* est identique à celui des modes propres de la structure non précontrainte. C'est donc les premiers qu'on utilise comme base de projection. Ce sont les solutions  $(\omega_i, \Phi_i)$  du problème aux valeurs propres :

$$(\hat{K} - \omega^2 M)\Phi = 0. \quad (3.32)$$

Comme ils sont orthogonaux aux matrices de masse et de raideur :

$$\Phi_i^T M \Phi_j = \delta_{ij}, \quad \Phi_i^T K \Phi_j = \omega_i^2 \delta_{ij}, \quad (3.33)$$

ils diagonalisent la partie linéaire du problème et les matrices  $\overset{\circ}{M} = \mathbf{1}$  et  $\overset{\circ}{K} = \text{diag}(\omega_k^2)$  sont diagonales. De plus, lorsqu'on utilise un développement de Taylor à l'ordre 3 de  $\hat{f}_{nl}(\tilde{U})$ , le modèle réduit (3.30) prend exactement la même forme que (3.20).

### 3.2.2 Techniques de réduction

L'avantage primordial des modèles éléments-finis est la grande généralité de leur domaine d'application, à la fois en terme de géométrie de la structure étudiée, mais aussi en terme de non-linéarité. Notamment, les modèles qui incluent les grandes rotations ne sont fondés sur aucune hypothèse de troncature des non-linéarités et ont donc un domaine d'application très élargie par rapport aux modèles analytiques, par exemple (Voir §2.3.3). En contrepartie, le nombre de degrés de liberté peut être très élevé, ce qui augmente énormément les temps de calculs, en particulier dans le cas de modèles non linéaires. Il est donc intéressant de trouver des techniques de réduction de la taille des modèles.

Dans un cadre linéaire, on peut bien sur utiliser une décomposition modale de la solution pour calculer la réponse de la structure. Néanmoins, lorsque le nombre de degrés de libertés du modèle éléments-finis est très grand, on peut utiliser des méthodes de décomposition en sous domaine, soit pour calculer la réponse de la structure, soit pour calculer ses modes propres. Dans la littérature anglo-saxonne, ces méthodes portent le nom de *component mode synthesis* (CMS) [33, 112].

Dans un cadre non linéaire, plusieurs techniques de réduction existent aussi, dont voici un aperçu.

#### (a) Réduction sur base modale

En premier lieu, on peut utiliser une décomposition sur la base modale du problème linéarisé, comme détaillé au paragraphe 3.2.1(d). Cette technique présente les mêmes avantages que dans le cas des modèles analytiques (décrits au paragraphe 3.1.2, p. 59), et c'est pour cette raison qu'une partie de mon travail lui est consacré. Comme on l'a dit au §3.2.1, le problème discrétisé sur la base des modes propres, de la forme (3.30), s'écrit aussi sous la forme (3.20) d'oscillateurs couplés par des termes quadratiques et cubiques, de coefficients  $\beta_{ij}^k$  et  $\Gamma_{ijl}^k$ . Bien entendu, on peut appliquer à (3.30) les techniques classiques d'intégration temporelle, et dans ce cas, le terme  $\hat{f}_{nl}(\mathbf{q})$  peut être calculé à chaque pas de temps sous cette forme. Néanmoins, le formalisme (3.20) est intéressant, car on peut lui appliquer toute la panoplie des outils qualitatifs et quantitatifs de la dynamique non linéaire et des systèmes dynamiques, et notamment les techniques analytiques de perturbation et les méthodes de continuation de solutions périodiques (cf. §3.4.1). La principale difficulté dans un cadre de modèles éléments finis est le calcul de ces termes quadratiques et cubiques. On peut signaler deux méthodes.

- La première, écrite formellement dans la thèse [302], et non encore testée faute de temps, consiste à calculer des  $\beta_{ij}^k$  et  $\Gamma_{ijl}^k$  sur chacun des éléments finis du maillage et de les *ajouter* ensuite pour obtenir les coefficients du modèle réduit. Cette méthode ne requière aucun assemblage de matrice et est donc a priori très rapide.
- La seconde est une méthode introduite dans [216] et utilisée notamment dans [207]. Elle est basée sur le fait que les non-linéarités géométriques n'influence que la raideur de la structure, et non son inertie. Ainsi, la méthode proposée n'utilise que les propriétés de  $\hat{f}_{nl}(\tilde{U})$  (Eq. (3.28)) et consiste à imposer la forme du vecteur déplacement  $\tilde{U}$  et à calculer les efforts intérieurs correspondants  $\hat{f}_{nl}(\tilde{U})$ . En choisissant  $\tilde{U}$  sous la forme d'une combinaison linéaire de déformées modales  $\Phi_i$ , on montre que les  $\beta_{ij}^k$  et  $\Gamma_{ijl}^k$  sont solutions de systèmes linéaires de très



petite taille. Cette méthode est donc très efficace, puisqu'elle ne requière aucune résolution de système non linéaire. J'ai testé avec succès cette méthode pour les applications M/NEMS du chapitre 6 [J20].

### (b) Dérivées modales, modes compagnons, modes perturbés

Un des problèmes de l'utilisation, dans le cadre général d'une formulation éléments finis, de la base des modes propres du système linéaire est sa troncature, évoquée au paragraphe 3.1.3 pour les formulations analytiques. Dans ce dernier cas, les parties flexion et membrane du modèle sont clairement séparées dès l'écriture sous forme d'équations aux dérivées partielles (Voir §3.1.1 et §2.3) et la procédure de troncature est facilitée, car deux bases modales distinctes sont utilisées : l'une pour le mouvement de flexion (éventuellement couplé au stade linéaire au mouvement de membrane. Cette base est notée  $(\Phi_i, \Psi_i)$  au §3.1.1(d)) et l'autre pour le mouvement de membrane couplé par les non-linéarités géométriques (notée  $\Upsilon_i$ ). En éléments finis, cette procédure est rendue difficile car la seule base modale du problème linéaire associé est utilisée. Il faut alors avoir un critère pour reconnaître les modes de membrane, qui se trouvent placés à des fréquences élevées dans la base modale. Cela est envisageable pour des structure minces simples, mais dès que la géométrie se complique, par exemple simplement par l'ajout d'une stratification, tous les modes sont couplés et la troncature de la base se révèle difficile [J20], [35]. Une manière de contourner ce problème est d'utiliser le concept de *dérivées modales*, introduit dans [142, 143] et utilisé dans [292, 306, 307, 305], celui de *modes de membrane compagnons* [138] ou celui de *modes perturbés* [35]. Dans les trois cas, il s'agit de tronquer la base modale à un certain nombre de modes comme on le ferait pour un modèle linéaire, et d'enrichir cette base par de nouveaux modes. Ces nouveaux modes sont calculés à partir de la modification non linéaire de raideur de la structure induite par la déformée d'un mode donné. Ils correspondent, dans le cas d'une structure mince, à une déformée de membrane créée par le couplage non linéaire avec un mode de flexion donné. Ces méthodes sont en cours d'étude au laboratoire, pour les applications M/NEMS décrites au chapitre 6.

### (c) Condensation des degrés de liberté linéaires

Dans les problèmes où les non-linéarités sont de type contact (*cf.* p. 19), elles ne jouent que sur les interfaces entre les composants du système. Ainsi, il est possible de séparer les nœuds du maillage éléments-finis et les degrés de liberté correspondant en deux groupes : ceux des interfaces, notés  $U_1$ , associés à des efforts intérieurs non linéaires et les autres, notés  $U_2$ , pour lesquels les efforts intérieurs sont linéaires. Cela s'écrit :

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{nl}(U_1) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

où les efforts non linéaires associés à  $U_2$  sont nuls. Par suite, le problème vérifié par  $U_2$  est linéaire et peut être condensé, pour n'obtenir qu'un problème non linéaire d'inconnue  $U_1$ , de taille réduite, puisqu'en général le nombre de degrés de liberté d'interface est beaucoup plus faible que le nombre total de degrés de liberté du modèle. Cette condensation est bien adaptée à la méthode de l'équilibrage harmonique, qui remplace alors le système différentiel linéaire d'inconnue  $U_2$  par un système algébrique linéaire [60, 326]. Il est aussi possible d'utiliser des méthodes de Craig-Bampton [174, 34].

Dans le cas de non-linéarités géométriques, qui sont par définition réparties sur tous les nœuds du maillage éléments-finis, ces techniques ne mène à aucune réduction de la taille du problème.

### (d) Utilisation de la POD

Un troisième idée consiste à utiliser des bases de réduction calculées par des méthodes *proper orthogonal decomposition* (POD). Cette famille de méthodes est extrêmement utilisée dans tous les

champs de la physique, et est connue parfois sous des noms différents (Méthode de Karhunen-Loève, analyse en composantes principales...). On pourra consulter [313, p. 28] pour un aperçu bibliographique général. Utilisée pour réduire le modèle, elle consiste à calculer une base de modes  $\Psi$  (appelés les POM, *proper orthogonal modes*) à partir de l'évolution temporelle de certains points du système (ces séries temporelles sont appelées *snapshots*). D'un point de vue physique, ces  $\Psi$  collectent l'information spatiale nécessaire à caractériser la dynamique du système. Ils peuvent être classés par ordre d'importance pour caractériser la dynamique du système au moyen d'indicateurs scalaires (les POV, *proper orthogonal values*), si bien que la troncature de la base de fonction est ainsi immédiate. Cette base  $\Psi$  étant calculée, la technique de réduction du paragraphe 3.2.1(c) peut être utilisée.

Cette technique est d'implémentation très aisée, ce qui explique son succès en pratique. Elle est parfaitement adaptée lorsque les séries temporelles génératrices sont disponibles, par exemple à partir de données expérimentales. Parmi d'autres exemples, cette méthode est très commode pour interpréter une évolution spatio-temporelle de fluide turbulent dans un cadre de mécanique des fluides expérimentale, ou pour actualiser en temps réel une loi de commande en contrôle actif de vibrations. Dans notre application de réduction de modèle éléments finis, l'étape initiale de cette méthode est l'intégration temporelle du système dynamique complet, à partir de laquelle la base de réduction est calculée [161]. Cela peut être vu comme un inconvénient, car on aimerait pouvoir se passer de ce calcul initial et se baser uniquement sur les propriétés intrinsèques du modèle complet pour générer le modèle réduit. De plus, cette base reste *linéaire*, et même si elle tente au mieux de capturer les changements de la dynamique du système dues aux non-linéarités, ce qui est une amélioration notable par rapport à une base de modes propres, elle reste associée à la série temporelle qui l'a générée, et peut donc devenir inadaptée à un autre cas de simulation, par exemple lorsque l'amplitude du système est différente [13].

(e) **Et...**

Enfin, même après une troncature sur base modale, un certain nombre de degrés de liberté subsiste. Il est alors possible de réduire encore la taille du système à résoudre à partir du concept de *mode non linéaire*, détaillé au paragraphe suivant.

### 3.3 Modes non linéaires

Comme on l'a vu, on peut définir les modes propres d'un système non linéaire en linéarisant celui-ci autour d'une position d'équilibre stable donnée, lorsque cette linéarisation est possible. C'est presque toujours le cas pour les non-linéarités géométriques, qui sont régulières, à l'exception des situations où la raideur linéaire du système est absente, où dans ce cas les modes propres linéaires ne sont pas définis. L'exemple le plus simple illustrant cette situation est celui d'une corde fixée à ses deux extrémités, mais non tendue. Dans ce cas, les deux sources de raideur linéaire du système, la raideur de flexion et la raideur de tension, sont absentes ; il ne subsiste que la raideur non linéaire géométrique (précisément, il faut annuler les quantités  $I$  et  $N_0$  dans les équations (2.42), p. 39, et seule subsiste la raideur cubique non linéaire  $(\tilde{N}v)'$ ). Dans ce cas, on parle souvent de système à non-linéarité essentielle [111, 204].

Dans le présent cadre non linéaire, ces modes propres, lorsqu'ils existent, perdent certaines de leur propriétés, car même s'ils restent une base orthogonale de l'espace des solutions (ce qui garantit tout de même leur utilisation comme base de projection), ils ne permettent plus de découpler les équations. Un certain nombre d'auteurs ont donc essayé d'étendre le concept de modes propres au cadre non linéaire, soit pour fournir *un outil d'analyse* des vibrations non linéaires, soit comme moyen de *réduire la taille des modèles*. Sur ce dernier point, les modes non linéaires constituent une méthode de réduction de modèle *intrinsèquement non linéaire*, au contraire des techniques de réduction sur

base modale ou sur base POD. J'ai eu l'occasion de travailler sur le sujet et de contribuer avec Cyril Touzé à proposer une méthode de calcul de modes non linéaires. Le présent paragraphe présente à la fois l'état de l'art sur les modes non linéaires et notre contribution à ce sujet, rassemblée dans les publications [J3, J4, J7, J11, J10]. On peut aussi consulter les parties de [313] et [59] consacrées aux modes non linéaires ainsi que les revue de littérature [312, 208].

### 3.3.1 Préliminaire

Les bases de ces concepts de modes non linéaires proviennent de la théorie des systèmes dynamiques [117, 331], qui est ici particularisée au cas des vibrations, et notamment à la présence systématique d'oscillateurs (avec des termes d'inertie qui apparaissent avec des dérivées secondes en temps). Pour définir une extension des modes propres d'un système linéaire au cadre non linéaire, deux points méritent d'être évoqués.

- Il convient tout d'abord de se placer dans le cadre de leur définition première : un mode propre est une solution d'un système mécanique linéaire *conservatif* en *vibrations libres*. Le caractère conservatif peut être levé pour définir des modes propres dissipatifs, ce qui est aussi classique en vibration linéaire [112]<sup>4</sup>. Les modes non linéaires vont donc être naturellement des solutions du système en vibrations libres.
- La caractéristique des modes propres qui est conservée au stade non linéaire est leur propriété *d'invariance* : si un système en vibration libre reçoit des conditions initiales sur un mode propre donné, seul ce mode reçoit de l'énergie et aucun des autres modes ne se met à osciller. En vibrations linéaires, cette propriété est liée à l'*orthogonalité* des modes, qui ne permet pas de découpler les oscillateurs dans un cadre non linéaire, à cause des termes de couplage. Dans le cas non linéaire, c'est la *mise sous forme normale* du système qui va garantir l'invariance.

### 3.3.2 Définition

Deux grandes définitions d'un mode non linéaire sont proposées dans la littérature.

- La première est issue des travaux de Rosenberg dans les années 1960 [273, 274], étendue et utilisée depuis par A. Vakakis, G. Kerschen et leur collaborateurs [318, 163]. Ils définissent un mode non linéaire comme *une famille d'orbites périodiques de l'espace des phases, solutions du système conservatif en régime libre*. Cette définition est fondée sur un résultat de Lyapunov [191, p. 361, 386], [331, p. 335], [209], qui montre que tout système dynamique non linéaire conservatif<sup>5</sup> à  $N$  degrés de liberté mécaniques (c'est le nombre de modes propres) présente au voisinage d'un point d'équilibre stable au moins  $N$  familles d'orbites périodiques. À basse énergie, les orbites de chacune des  $N$  familles se trouvent proches des sous-espaces propres. La définition initiale de Rosenberg était plus restrictive, car elle définissait le mode comme un « mouvement à l'unison » du système, ou mouvement synchrone, avec tous les points du système qui franchissent en même temps les positions d'amplitude maximale, minimale et nulle. Ce mouvement correspond bien à une orbite périodique de l'espace des phases, mais inversement, il existe des orbites périodiques qui correspondent à un mouvement plus compliqué du système, notamment lorsqu'il est sujet à des résonances internes, d'où cette nouvelle définition, proposée dans [163]
- La seconde est issue des travaux de S. Shaw et C. Pierre dans les années 1990 [284, 285, 286], qui définissent un mode non linéaire comme *une variété invariante de l'espace des phases, tangente à l'origine aux sous-espaces propres*. Cette seconde définition élargit le champ d'application de la première, car elle permet de traiter les systèmes dissipatifs et de définir ainsi

<sup>4</sup>On obtient alors des modes complexes, alors que les modes du système conservatif sont réels.

<sup>5</sup>Il possède une intégrale première, ce qui est une condition du théorème de Lyapunov.

des modes non linéaires amortis, caractérisés par des courbes d'évolution non périodiques, puisque l'amortissement les fait tendre vers l'origine de l'espace des phases. En constatant que le mouvement sur une orbite périodique donnée est invariant, on montre instantanément que la première définition est un cas particulier de la seconde, c'est-à-dire que *les familles d'orbites périodiques forment une variété invariante de l'espace des phases*.

La différence principale entre les deux définitions est liée à la technique de calcul utilisée pour calculer les modes non linéaires. Le formalisme proposé par Shaw et Pierre est analogue à la technique de la réduction à la variété centrale [117]. Il permet de condenser la dynamique à  $N$  degrés de liberté sur l'une des variété invariante courbes, ce qui fournit à la fois un modèle réduit à un seul degré de liberté mécanique – le mode non linéaire – et un calcul asymptotique de la géométrie de la variété invariante.

En revanche, dans le cas de la première définition sous forme d'orbites périodiques, c'est plutôt un outil d'analyse et de compréhension de la dynamique non linéaire qui est visé, car aucun modèle réduit n'est écrit, puisque seules les variétés invariantes sont calculées, soit par des méthodes semi-analytiques (Voir par exemple [321, 318, 178]), soit plus récemment par des méthodes numériques de continuation de solutions périodiques [253]. Elles offrent tout de même un outil puissant pour comprendre des dynamiques complexes, l'application principale des travaux liés à cette définition étant les systèmes d'absorbeur d'énergie non linéaires comportant un oscillateur à non-linéarité essentielle [111, 162, 323]. Dans ce cas, la linéarisation du système autour de son équilibre est par définition impossible, si bien que les calculs asymptotiques de Shaw et Pierre, notre méthode de forme normale et la plupart des techniques analytiques de perturbation ne s'appliquent pas, même si la définition sous forme de variété invariante est toujours valide.

Mon travail avec Cyril Touzé a consisté à proposer une nouvelle méthode de calcul des variétés invariantes basée sur la mise sous forme normale du système dynamique. Cette technique, fondée sur des travaux de Poincaré et de Dulac [259, 92], repris par Jézequel et Lamarque [156], permet de calculer analytiquement la géométrie de la variété invariante et d'y projeter la dynamique du système. On obtient alors un nouveau système dynamique qu'il est possible de tronquer pour obtenir un modèle réduit, grâce à la propriété d'invariance. Les paragraphes suivant décrivent en détail ce point.

Dans la même mouvance, d'autres travaux ont été proposés. L'approche initiale de S. Shaw et C. Pierre a été poursuivie, en proposant différentes améliorations. Le cas des résonances internes a été traité dans [44, 254], une procédure numérique pour le calcul des variétés invariantes a été proposée dans [255, 152], le calcul à partir d'un modèle éléments-finis dans [19], le cas de variétés invariantes qui dépendent du temps dans [153], pour prendre en compte un forçage harmonique du système, le cas d'un système à non-linéarités non régulières dans [151] et une extension des méthodes de sous-structuration au cas non linéaire dans [18]. Une autre approche pour calculer les variétés invariantes sous forme de solutions périodiques utilise une formulation dont une déformée modale est dépendante de la phase du mouvement, elle même inconnue du problème [36, 22, 37, 234]. Il est aussi possible de calculer les variétés invariantes directement par continuation de solutions périodiques [293, 22, 163] (voir §3.4.1). Récemment, une méthode numérique originale pour la continuation de solutions périodiques d'un système conservatif soumis à des chocs a été proposé [173]. Une méthode numérique astucieuse, consistant à intégrer en temps le système non linéaire conservatif en vibrations libres en lui ajoutant un amortissement négatif très faible, pour faire croître les oscillations et parcourir la variété invariante, est proposée dans [52]. Une méthode numérique de calcul, par continuation de solutions pseudo-périodiques, de modes non linéaires d'un système amorti par des forces de frottement sec est proposée dans [174]. Enfin, plusieurs études appliquent la méthode des échelles multiples au calcul de la réponse non linéaire d'un système et interprète leurs résultats en termes de modes non linéaires [225, 223, 169, 168, 167].

À part de ce formalisme de mode non linéaires, des techniques numériques de « projection » de la dynamique sur une variété courbe de l'espace des phases, appelées *méthodes de Galerkin non linéaires*, par référence à la méthode de Galerkin (linéaire) qui est une projection dans un sous-espace plan, sont aussi proposées depuis quelques années [197, 298, 269, 199, 280].

### 3.3.3 Une illustration

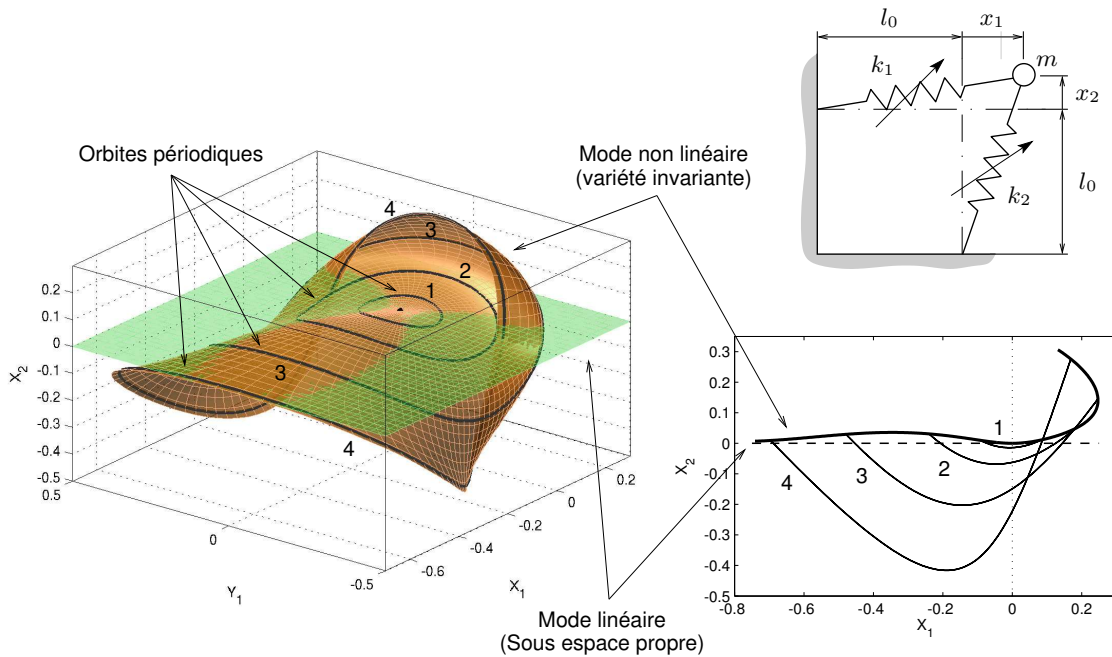


FIG. 3.1 – Premier mode non linéaire du système masse ressort à deux degrés de liberté, dans le cas où  $m = 1$ ,  $k_1 = 1.7$ ,  $k_2 = 6$ , calculé par continuation numérique d'orbites périodiques avec Manlab [23]. Quatre orbites périodiques sont tracées en trait fort. On a noté  $Y_1 = \dot{X}_1$ .

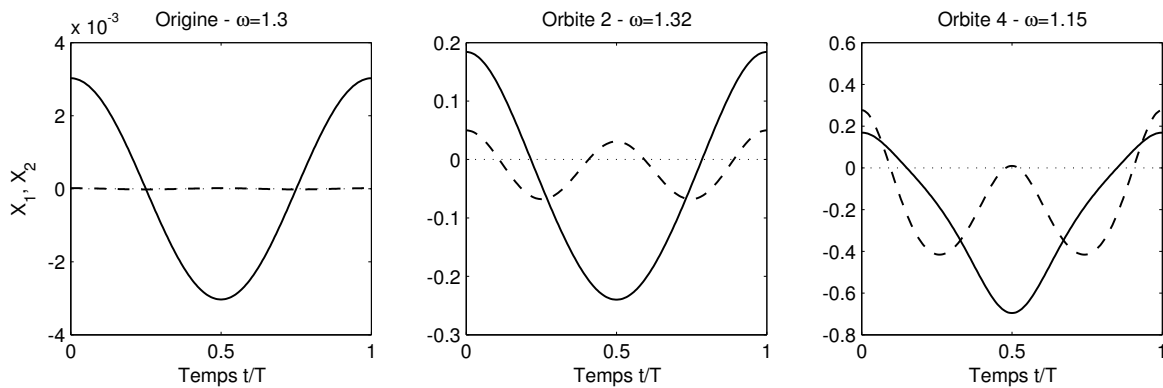


FIG. 3.2 – Évolution temporelle de  $X_1$  (—) et  $X_2$  (---) pour trois orbites périodiques (La première est proche de l'origine, les suivantes correspondent aux orbites 2 et 4 de la figure 3.1)

Pour illustrer les deux définitions d'un mode non linéaire proposées au paragraphe précédent, on considère le système à deux degrés de liberté déjà utilisé dans [J3], [59] et représenté sur la figure 3.1.

Il s'agit d'une masse connectée à deux ressorts munis de non-linéarités géométriques analogue à celle du tenseur des déformations de Green-Lagrange : la force dans le ressort est proportionnelle à  $(l_i^2 - l_0^2)/(2l_0^2)$ , où  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ) et  $l_0$  sont les longueurs des ressorts déformés et au repos, respectivement. Pour fixer les idées, la position de la masse répond aux équations :

$$\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + \frac{\omega_1^2}{2}(3X_1^2 + X_2^2) + \omega_2^2 X_1 X_2 + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} X_1(X_1^2 + X_2^2) = 0 \quad (3.35a)$$

$$\ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 + \frac{\omega_2^2}{2}(3X_2^2 + X_1^2) + \omega_1^2 X_1 X_2 + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} X_2(X_1^2 + X_2^2) = 0 \quad (3.35b)$$

avec  $X_1 = x_1/l_0$  et  $X_2 = x_2/l_0$  les déplacements sans dimension de la masse et  $\omega_1 = \sqrt{k_1/m}$  et  $\omega_2 = \sqrt{k_2/m}$  les deux pulsations propres. Le système est naturellement découplé au stade linéaire, puisque les déplacements  $x_1$  et  $x_2$  correspondent aux deux déformées modales du système, les ressorts étant orthogonaux lorsque le système est au repos. Les non-linéarités géométriques couplent les deux oscillateurs, avec des termes quadratiques et cubiques.

L'espace des phases est ici de dimension 4, ses axes étant la position et la vitesse de la masse dans ses deux directions :  $(X_1, \dot{X}_1, X_2, \dot{X}_2)$ . Le premier mode non linéaire est représenté sur la figure 3.1, en projection dans l'espace  $(X_1, \dot{X}_1, X_2)$ , avec quatre orbites périodiques, aussi représentées dans l'espace des configurations  $(X_1, X_2)$ , ce qui correspond directement au mouvement de la masse dans l'espace physique. Il a été calculé par continuation numérique de solutions périodiques (cf. §3.4.1). Le mouvement sur le mode non linéaire est aussi illustré par l'évolution temporelle de  $X_1$  et  $X_2$  sur la figure 3.2.

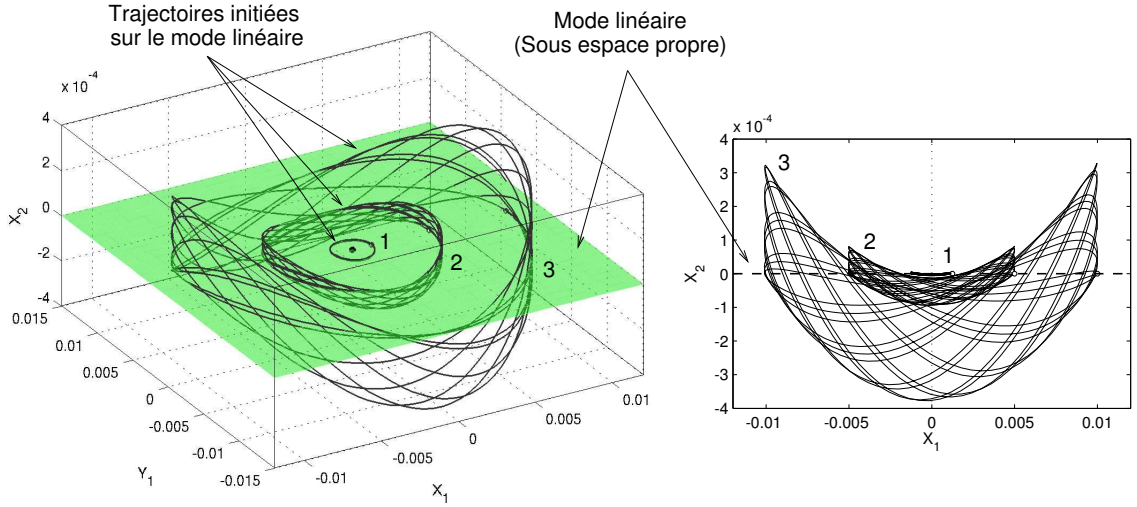


FIG. 3.3 – Non invariance du premier mode linéaire du système de la figure 3.1. Trois trajectoires du système sont représentées dans l'espace des phases, pour trois conditions initiales prises sur le premier sous-espace propre et d'amplitude croissante :  $X_1(0) \in \{0.0013; 0.005; 0.01\}$ ,  $\dot{X}_1(0) = X_2(0) = \dot{X}_2(0) = 0$ . On a noté  $Y_1 = \dot{X}_1$ .

La non-invariance des modes propres du système linéaire est illustrée sur la figure 3.3, qui représente dans l'espace des phases différentes trajectoires du système, calculées en intégrant les équations (3.35) pour différentes conditions initiales prises sur le premier sous-espace propre. Si le mode linéaire était invariant, la trajectoire du système serait une orbite périodique contenue dans le plan  $(X_1, \dot{X}_1)$  (ce serait même une ellipse). On constate que d'une part les trajectoires sortent du plan  $(X_1, \dot{X}_1)$ , et que d'autre part, elle ne sont pas périodiques. Cela est naturel, puisque c'est en choisissant une condition initiale sur la variété invariante qu'on obtient une courbe fermée (une orbite

périodique) qui appartient à cette variété.

Les figures 3.1-3.3 mettent en évidence la propriété principale des modes non linéaires, qui est que *ses caractéristiques vibratoires dépendent de l'amplitude du mouvement, ou de son énergie*. Comme le mouvement est périodique, on peut calculer sa période  $T$ , et on montre qu'elle dépend de l'amplitude du mouvement. La pulsation  $\omega_{nl} = 2\pi/T$  est indiquée pour chacune des orbites périodiques de la figure 3.2. Pour les faibles amplitudes, elle est égale à la première fréquence propre du système :  $\omega_{nl} = \omega_1 = \sqrt{1.7} \simeq 1.3$ . En augmentant l'amplitude, la pulsation augmente, puis diminue, caractéristique d'un comportement d'abord raidissant, puis assouplissant du système [R1], [C4], [224]. Ce comportement est aussi illustré sur la figure 3.4.

Un comportement analogue est observé pour les oscillations du système. Pour des faibles amplitudes de mouvement, les orbites périodiques sont très proches du premier sous-espace propre, puisque la variété invariante, comme annoncée, est tangente à ce sous-espace à l'origine. Ensuite, plus on augmente l'amplitude du mouvement, plus l'orbite périodique correspondante s'éloigne du sous-espace propre, au fur et à mesure que la variété invariante s'incurve. Le mouvement de la masse sur chacune des orbites périodiques correspond à *une déformée modale dont la géométrie dépend de l'amplitude*. À partir de la figure 3.2, on peut voir qu'on est dans une situation quasi-linéaire pour les très faibles amplitudes du mouvement, puisque la masse oscille sur son premier mode linéaire :  $X_1 \neq 0, X_2 \simeq 0$ . L'orbite correspondante sur la figure 3.1, non visible car très proche de l'origine, est quasiment située dans le plan  $(X_1, Y_1)$ . Pour des amplitudes plus importantes, on s'aperçoit que le mouvement non linéaire se répartit sur les deux directions  $X_1$  et  $X_2$ , avec des oscillations deux fois plus rapides sur  $X_2$ . Cela s'explique par une résonance interne 1:2 avec le mode 2, puisque  $\omega_{nl} \simeq \omega_2/2$  ( $\omega_2 \simeq 2.45$ ). Cela conduit à un mouvement *non synchrone*, où  $X_1$  et  $X_2$  ne passent pas au même instant par zéro et par leur valeur maximale. De plus, les oscillations ne sont plus symétriques par rapport à la position de repos de la masse, qui oscille principalement avec  $X_1$  et  $X_2$  négatifs, c'est-à-dire dans le quart de plan inférieur gauche. Ces comportements sont à l'origine de la forme particulière et complexe de la variété invariante, qui se replie sur elle-même pour les fortes amplitudes. Dans le cadre de structures continues, cette dépendance de la déformée modale en fonction de l'amplitude a été mesurée dans [39] pour une plaque rectangulaire.

Bien entendu, des remarques analogues peuvent être formulées pour le second mode non linéaire. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter l'article [163], qui propose une étude approfondie des propriétés des modes non linéaires.

### 3.3.4 Calcul asymptotique et forme normale

Le point de départ du calcul des modes non linéaires dans mes travaux avec Cyril Touzé est le système suivant :

$$\ddot{X}_k + \omega_k^2 X_k + \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq i}^N g_{ij}^k X_i X_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq i}^N \sum_{l \geq j}^N h_{ijl}^k X_i X_j X_l = 0, \quad \forall k = 1, \dots, N. \quad (3.36)$$

Il correspond à un système d'oscillateurs couplés par des termes non linéaires quadratiques et cubiques, qui a été préalablement diagonalisé, de sorte que sa partie linéaire est découplée. Il est considéré sans amortissement et est étudié en régime libre (sans forçage extérieur), ce qui est le cadre de l'analyse modale traditionnelle. Cette écriture correspond au système (3.20) sans amortissement et forçage extérieur. Elle s'applique ainsi à une large gamme de systèmes mécaniques avec non-linéarités géométriques, puisque (3.20) est l'écriture générale des modèles de type von Karman projetés sur une base modale, qu'ils soient analytiques ou discrétisés par la méthode des éléments finis (voir §3.1.1 et §3.2.1). On ne considère pas ici l'éventuelle excitation paramétrique représentée dans (3.20) par les

Termes linéaires	<u><math>R_1</math></u>	<u><math>R_2</math></u>		
	<u><math>\omega_1</math></u>	<u><math>\omega_2</math></u>		
Termes quadratiques	<u><math>R_1^2</math></u>	$R_2^2$	<u><math>R_1 R_2</math></u>	
	$2\omega_1 \simeq \underline{\omega_2}$	$2\omega_2 \simeq 4\omega_1$	$\omega_1 + \omega_2 \simeq 3\omega_1 \simeq 3\omega_2/2$	
	0	0	$\omega_1 - \omega_2 \simeq \underline{\omega_1} \simeq \omega_2/2$	
Termes cubiques	<u><math>R_1^3</math></u>	<u><math>R_2^3</math></u>	<u><math>R_1 R_2^2</math></u>	<u><math>R_1^2 R_2</math></u>
	$3\omega_1 \simeq 3\omega_2/2$	$3\omega_2 \simeq 6\omega_1$	$\omega_1 + 2\omega_2 \simeq 5\omega_1 \simeq 5\omega_2/2$	$2\omega_1 + \omega_2 \simeq 4\omega_1 \simeq 2\omega_2$
	<u><math>\omega_1 \simeq \omega_2/2</math></u>	<u><math>\omega_2 \simeq 2\omega_1</math></u>	$\omega_1 - 2\omega_2 \simeq 3\omega_1 \simeq 3\omega_2/2$	$2\omega_1 - \omega_2 \simeq 0$
			<u><math>\omega_1 \simeq \omega_2/2</math></u>	<u><math>\omega_2 \simeq 2\omega_1</math></u>

TAB. 3.1 – Fréquences des harmoniques des différents termes non linéaires quadratiques et cubiques, dans le cas de deux oscillateurs en résonance interne 1:2 ( $\omega_2 \simeq 2\omega_1$ ), permettant de déterminer ceux qui sont résonants. Les termes résonants de l'oscillateur 1 sont soulignés une fois, ceux de l'oscillateur 2, deux fois, ainsi que les harmoniques responsables.

$\alpha_i^k(t)$  qui dépendent du temps, leur éventuelle partie constante étant éliminée si nécessaire par diagonalisation de la partie linéaire et projection de la partie non linéaire sur les vecteurs propres ainsi obtenus. Pour des techniques de réduction de modèle non linéaire avec excitation paramétrique, on pourra consulter [289, 290]. De plus, le cas d'une poutre en grande rotation, qui fait intervenir des termes non linéaires inertiels (Eqs. (3.23)), a été traité dans [C12] par la présente méthode et dans [141] par la méthode de Shaw et Pierre.

Dans les théories classiques de systèmes dynamiques, la première étape consiste à mettre le système (3.36) sous une forme au premier ordre en temps, en définissant la vitesse  $Y_k = \dot{X}_k$  comme variable additionnelle. On obtient alors un système de  $2N$  équations à  $2N$  inconnues  $(X_k, Y_k)$ ,  $k = 1, \dots, N$ . La première opération à effectuer pour étudier tout système dynamique est de calculer les valeurs propres de l'opérateur linéarisé au voisinage du point d'équilibre, correspondant ici par définition à l'origine de l'espace des phases,  $X_k = Y_k = 0 \forall k = 1, \dots, N$ . Dans notre cas, cet opérateur est constitué de  $N$  blocs diagonaux de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_k^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.37)$$

Ses  $2N$  valeurs propres sont imaginaires pures et complexes conjuguées :  $\lambda_k = \pm i\omega_k$ . Comme le système est issu d'un modèle mécanique conservatif, on peut raisonnablement penser qu'il existe une intégrale première du mouvement qui fait apparaître une énergie, ce qui garantit d'après les travaux de Lyapunov la stabilité de ce point d'équilibre<sup>6</sup>, qui est qualifié d'elliptique [331, 147].

Par suite, la première technique de réduction classique en théorie des systèmes dynamiques, la réduction à la variété centrale [117, 331], est sans effet ici, puisque tout le spectre est à partie réelle nulle et la variété centrale est l'espace des phases à  $2N$  dimension tout entier. Cette technique est cependant très utile pour l'étude des systèmes mécaniques sujets à des auto-oscillations et des cycles limites, comme les systèmes avec frottement sec [291].



**(a) Termes résonants, résonances internes**

Le calcul des modes non linéaires et la réduction de modèle associée qui sont proposés dans ce texte reposent sur la théorie des formes normales [117, 331, 146], et sur deux théorèmes dus à Poincaré et à Dulac [259, 92] et [20, pp. 181, 184]. L'idée initiale est de considérer que tous les termes non linéaires d'un système dynamique donné, aussi compliqué soit-il, ne sont pas essentiels pour décrire son comportement. Pratiquement, il s'agit d'éliminer, au moyen d'un changement de variable non linéaire, un grand nombre de termes non linéaires du système (3.36). Le nouveau système dynamique ainsi obtenu, plus simple, est capable de reproduire l'essentiel de la dynamique du premier : il en est son squelette. Il est appelé *la forme normale* du système de départ ; on dit aussi qu'il a été *mis sous forme normale*.

Pratiquement, on peut séparer les termes non linéaires de (3.36) en deux familles de termes, nommés *résonants* et *non résonants* [20]. Les premiers sont essentiels à la dynamique et ne pourront pas être éliminés. D'un point de vue physique, ce sont des termes qui peuvent être vus comme des termes de forçage qui excitent les oscillateurs à leur fréquences de résonance. Par exemple, dans l'oscillateur de Duffing libre

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X + hX^3 = 0, \quad (3.38)$$

le terme  $hX^3$  est résonant, car au premier ordre, l'évolution temporelle de  $X(t)$  est harmonique à la fréquence  $\omega_0$ , si bien que  $hX^3$  est aussi harmonique, aux fréquences  $3\omega_0$  et  $\omega_0$ , cette dernière harmonique provoquant une excitation de (3.38) à sa résonance. Dans le système (3.36), les termes  $h_{ppp}^p X_p^3$  sont toujours résonants et ne peuvent pas être éliminés.

Les autres termes non linéaires peuvent être résonants si le système présente des relations de résonance internes, qui s'écrivent dans le cas général [224, 20] :

$$\omega_k = \sum_{i=1}^n m_i \omega_i, \quad m_i \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^N m_i = p \geq 2, \quad (3.39)$$

où  $p$  est l'ordre de la résonance, relié au degré polynomial des termes non linéaires considérés. Dans notre cas de non-linéarités quadratiques et cubiques, les relations de résonances internes possibles sont :

$$\text{Ordre 2} \quad \omega_2 = 2\omega_1, \quad \omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \quad (3.40)$$

$$\text{Ordre 3} \quad \omega_3 = 3\omega_1, \quad \omega_3 = 2\omega_1 + \omega_2, \quad \omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3. \quad (3.41)$$

Par exemple, si on est confronté au cas d'un système de la forme (3.36) tronqué à deux oscillateurs ( $N = 2$ ), et qu'en plus les deux pulsations propres sont en résonance interne 1:2, telles que  $\omega_2 = 2\omega_1$ , mis sous forme normale le système s'écrit :

$$\begin{cases} \ddot{R}_1 + \omega_1^2 R_1 + \beta_1 R_1 R_2 + \Gamma_1 R_1^3 + \Gamma_2 R_1 R_2^2 = 0, \\ \ddot{R}_2 + \omega_2^2 R_2 + \beta_2 R_1^2 + \Gamma_3 R_2^3 + \Gamma_4 R_1^2 R_2 = 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

$$(3.43)$$

où, par le même raisonnement que pour l'oscillateur de Duffing, nous n'avons conservé que les termes résonants (Voir Tab. 3.1). Seuls 2 termes résonants quadratiques et 4 cubiques subsistent sur les 14 termes non linéaires initialement présents dans les oscillateurs : plus de la moitié des termes a été éliminée. Les termes résonants conservés sont responsables de couplage forts entre les deux oscillateurs, raison physique pour qu'on ne puisse pas les éliminer. En revanche, les termes non résonants n'apportent en fait à la dynamique qu'une correction quantitative, qui est prise en compte dans le

<sup>6</sup>Cela garantit par la même occasion l'existence de  $N$  familles d'orbites périodiques au voisinage de ce point d'équilibre, ce qui valide du même coup la première définition des modes non linéaires [191].

changement de variable. Dans le cas où le système dynamique de départ ne contient aucun terme résonant, la mise sous forme normale conduit à un système *linéaire*, puisque tous les termes non linéaires ont été éliminés. C'est le théorème de Poincaré [259, 20] qui propose ce résultat, qui a été étendu au cas avec termes résonants par Dulac [92, 20].

### (b) Calcul des modes non linéaires

La théorie des formes normales étant classique [20, 117, 331, 146], notre contribution sur le sujet est son adaptation au cas particulier des systèmes dynamiques de la forme (3.36) [J3], son application pour des cas de vibrations non linéaires de structures et son interprétation sous la forme de modes non linéaires [J4, J7, J11, J10]. En ce sens, une caractéristique de notre approche est de rester dans un formalisme de mécanique vibratoire, en conservant la partie linéaire sous la forme des  $N$  blocs réels (3.37), sans utiliser une forme complexe purement diagonale. Le principe de la méthode est le suivant :

- On postule d'abord un changement de variable non linéaire, qu'on choisit tangent à l'origine et polynomial. On tronque ici à l'ordre 3 ce changement de variable, mais il peut être poussé à des ordres supérieurs, au prix d'un gros effort de calcul formel. Il s'écrit, pour tout  $p = 1, \dots, N$  :

$$X_p = R_p + \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq i}^N (a_{ij}^p R_i R_j + b_{ij}^p S_i S_j) + \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq i}^N \sum_{k \geq j}^N r_{ijk}^p R_i R_j R_k + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k \geq j}^N u_{ijk}^p R_i S_j S_k, \quad (3.44a)$$

$$Y_p = S_p + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}^p R_i S_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq i}^N \sum_{k \geq j}^N \mu_{ijk}^p S_i S_j S_k + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k \geq j}^N \nu_{ijk}^p S_i R_j R_k. \quad (3.44b)$$

Les nouvelles coordonnées  $(R_p, S_p)$  sont nommées les coordonnées *normales*, en référence à la mise sous forme *normale* du système.

- On introduit ce changement de variable dans le système initial (3.36) et on cherche à annuler les termes non linéaires. Le calcul permet alors de calculer tous les coefficients  $(a_{ij}^p, b_{ij}^p, r_{ijk}^p, u_{ijk}^p, \gamma_{ij}^p, \mu_{ijk}^p, \nu_{ijk}^p)$  du changement de variable, *de manière formelle*, en fonction des  $(\omega_p, g_{ij}^p, h_{ijk}^p)$  du système initial. Les détails sont dans [J3]. Les termes résonants sont identifiés automatiquement, car leur élimination est bloquée par l'apparition de petit dénominateurs, qui s'annulent lorsque les relations de résonance interne (3.40) sont vérifiées.
- Après élimination des termes résonants, la forme normale du système s'écrit, pour tout  $p = 1, \dots, N$  :

$$\dot{R}_p = S_p, \quad (3.45a)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_p = & -\omega_p^2 R_p - (A_{ppp}^p + h_{ppp}^p) R_p^3 - B_{ppp}^p R_p S_p^2 \\ & - R_p \left[ \sum_{j > p}^N [(A_{jpp}^p + A_{ppj}^p + h_{ppj}^p) R_j^2 + B_{ppj}^p S_j^2] + \sum_{i < p} [(A_{iip}^p + A_{pii}^p + h_{iip}^p) R_i^2 + B_{pii}^p S_i^2] \right] \\ & - S_p \left[ \sum_{j > p}^N B_{jpp}^p R_j S_j + \sum_{i < p} B_{iip}^p R_i S_i \right], \end{aligned} \quad (3.45b)$$

où les coefficients  $A_{ijk}^p$  et  $B_{ijk}^p$  sont [J3] :

$$A_{ijk}^p = \sum_{l \geq i}^N g_{il}^p a_{jk}^l + \sum_{l \leq i}^N g_{li}^p a_{jk}^l, \quad B_{ijk}^p = \sum_{l \geq i}^N g_{il}^p b_{jk}^l + \sum_{l \leq i}^N g_{li}^p b_{jk}^l. \quad (3.46)$$

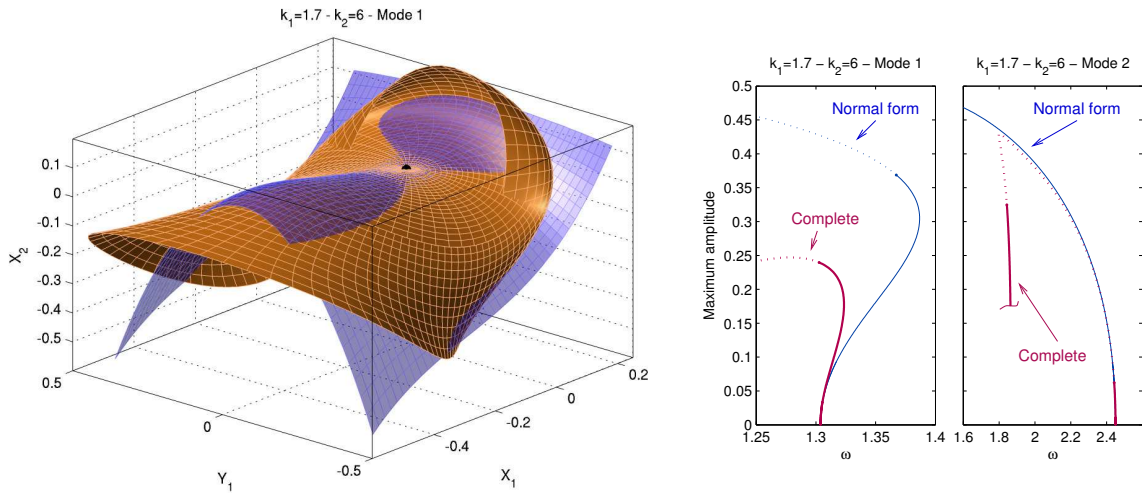


FIG. 3.4 – Premier mode non linéaire du système de la figure 3.1, dans le cas où  $m = 1$ ,  $k_1 = 1.7$ ,  $k_2 = 6$ , calculé par continuation numérique d’orbites périodiques avec Manlab [23] et par développement asymptotique à l’ordre 3. Les « backbone curves » des modes 1 et 2 du même système sont aussi représentés.

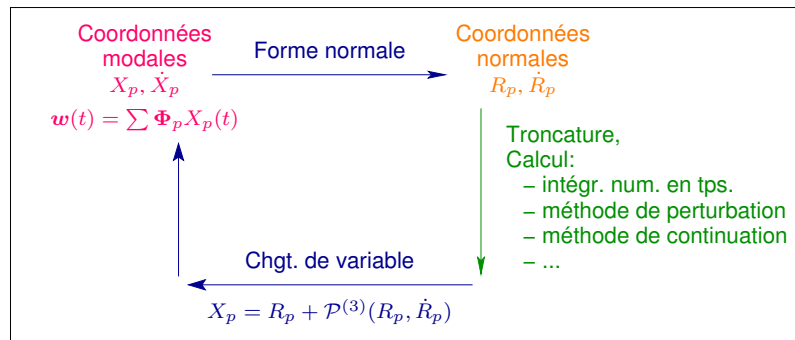


FIG. 3.5 – Diagramme de synthèse de la démarche de calcul et de réduction de modèle utilisant les modes non linéaires

### (c) Synthèse

Voici quelques remarques de synthèse sur la présente méthode de calcul des modes non linéaires.

- Notre principal apport par rapport à ses travaux qui considèrent aussi les formes normales en liaison avec les modes non linéaires, celui de Jézéquel et Lamarque [156] ou des travaux plus mathématiques [50, 98, 146], est l’écriture *formelle*, précisée dans [J3], du changement de variable (3.44) et de la forme normale (3.45). Ainsi, connaissant les  $(\omega_p, g_{ij}^p, h_{ijk}^p)$  du système initial, le calcul de (3.44) et (3.45) est automatique et très rapide.
- Une extension de ce travail au cas où le système initial est amorti a été proposé dans [311]. La méthode est rigoureusement la même et on aboutit à des expressions similaires à (3.44) et (3.45), avec plus de termes. Ce travail est intéressant, car il propose le calcul de variétés invariantes qui correspondent non plus à des familles d’orbites périodiques, mais à des familles de trajectoires amorties, qui tendent vers l’origine de l’espace des phases. Avec l’article [174], il constitue une première brique vers l’analyse modale de systèmes non linéaires dissipatifs.
- Lorsque le système ne possède pas de résonances internes (pratiquement, il y a résonance in-

terne lorsque les relations (3.40) sont approximativement vérifiées par les pulsations propres de la structure), alors aucun terme résonant ne couple les oscillateurs, si bien que (3.45) s'écrit, pour tout  $p = 1, \dots, N$  :

$$\ddot{R}_p + \omega_p^2 R_p + (A_{ppp}^p + h_{ppp}^p) R_p^3 + B_{ppp}^p R_p S_p^2 = 0. \quad (3.47)$$

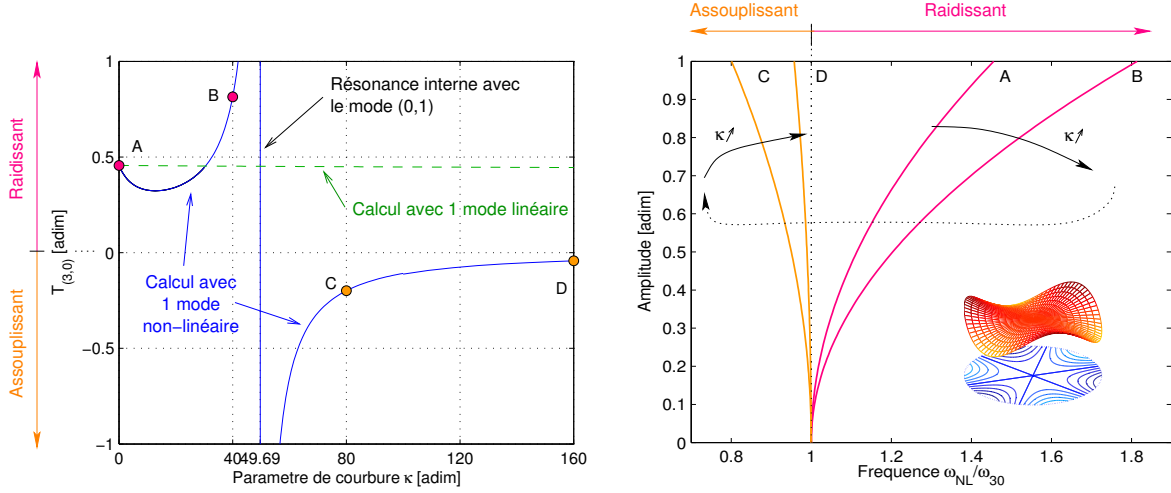
Il s'agit de  $N$  oscillateurs non linéaires *découplés*. Par suite, on retrouve la propriété d'*invariance* évoquée comme définition d'un mode non linéaire : si les conditions initiales sont choisies de telle sorte que seul  $(R_p, \dot{R}_p)$  est non nul, et cela est possible en initiant le mouvement en un point de la variété invariante, alors tous les  $(R_k, \dot{R}_k)$ , pour  $k \neq p$ , resteront nuls pour tout  $t > 0$  et le mouvement restera sur le  $p^{\text{e}}$  mode non linéaire.

- Le changement de variable (3.44) définit en fait la géométrie de la *variété invariante*. Là encore, si le système ne possède pas de résonances internes et qu'on tronque la dynamique au  $p^{\text{e}}$  mode non linéaire, soit  $(R_k, S_k) = (0, 0)$  pour tout  $k \neq p$ , les  $(X_k, Y_k)$  pour tout  $k$  sont définis en fonction d'une paire de coordonnées « maître »  $(R_k, S_k)$  avec les équations (3.44), qui définissent alors une surface dans l'espace des phases. On retrouve alors l'approche de Shaw et Pierre [284, 285, 286], à laquelle nos calculs sont équivalents. La figure 3.4 montre la variété invariante du premier mode du système de la figure (3.1) calculée directement par ce changement de variable.
- Le présent calcul de la variété invariante est asymptotique, puisqu'il est fondé sur le développement (3.44) tronqué à l'ordre 3. Son domaine de validité est donc limité à un voisinage de l'origine. La figure 3.4 illustre cela, en montrant que la variété asymptotique « décolle » de la variété calculée numériquement par continuations d'orbites périodiques à partir d'une certaine amplitude. Cela se retrouve sur les courbes d'évolution de la fréquence  $\omega_{nl}$  du mouvement sur le mode non linéaire en fonction de son amplitude.
- La présente méthode de réduction peut être résumée par le diagramme de la figure 3.5. Après écriture du problème sous la forme modale (3.36), on calcule la forme normale (3.45) du problème, qu'il est possible de tronquer grâce à la propriété d'invariance. Après résolution en  $(R_p(t), S_p(t))$  de ce système réduit, le changement de variable (3.44) permet de calculer les coordonnées modales  $X_p(t)$  et ainsi la solution du système. Cette méthode a été appliquée par exemple pour calculer les « backbone curves » de la figure 3.4, en résolvant la forme normale, réduite à un seul oscillateur (3.47), avec le code de continuation de solutions périodiques Manlab [23].
- Le cas des résonances internes ne pose pas de difficulté particulière : la troncature s'effectue en conservant tous les oscillateurs de la forme normale couplés par des termes résonants. On obtient alors une variété invariante de l'espace des phases d'ordre  $2M$ ,  $M$  étant le nombre d'oscillateurs – *i.e.* de modes non linéaires – en interaction. Cette opération peut être de plus effectuée sans connaître la valeur précise des paramètres  $h_{ijl}^k$  et  $g_{ij}^k$  du système initial, puisque la simple connaissance des résonances internes permet de prédire quels termes non linéaires résonants on doit conserver dans la forme normale. On peut alors concevoir des modèles réduits *ex nihilo*, dont la valeur des coefficients peut être identifiée expérimentalement. Cette approche, illustrée plus haut pour la résonance 1:2, a été utilisée dans [J2, J8] et plus récemment dans [213].

### 3.3.5 Applications

Le paragraphes précédents proposent une vue d'ensemble sur le concept de modes non linéaires, défini comme une variété invariante de l'espace des phases, dont les utilisations pratiques principales sont soit un outil d'analyse de la dynamique, soit un moyen de réduire la dimension du modèle.

## (a) Raidissant ou assouplissant ?


 FIG. 3.6 – Comportement non linéaire du mode (3,0) d'une coque sphérique en fonction de sa courbure, représentée par le paramètre sans dimension  $\kappa$  [J7].

Une application directe des modes non linéaires est la détermination automatique du caractère raidissant ou assouplissant d'un mode donné d'une structure, c'est-à-dire le fait que la fréquence des oscillations libres sur un mode non linéaire donné soit une fonction croissante ou décroissante de l'amplitude. La figure 3.4 montre par exemple que le premier mode du système est raidissant pour les faibles amplitudes, puis assouplissant, alors que le second est assouplissant pour toutes les amplitudes.

D'un point de vue qualitatif, il est possible de montrer qu'une structure plane au repos, comme une plaque ou une poutre, est en général caractérisée par un comportement raidissant de tous ses modes. Ainsi, le comportement assouplissant est observé pour des structures incurvées, comme les arches ou les coques. Cependant, selon le profil au repos de ces structures, certains modes peuvent être assouplissant, alors que d'autres sont raidissants. Ce caractère dépend en fait à la fois de la raideur statique de la structure autour de son point d'équilibre, mais aussi de la dynamique sur une période d'oscillation [R1], [C4].

Un grand nombre d'études par le passé ont cherché à déterminer ce caractère en tronquant la dynamique (3.36) au seul oscillateur correspondant au mode étudié (disons le  $p^e$ ), ce qui conduit à l'oscillateur de Duffing :

$$\ddot{X}_p + \omega_k^2 X_p + g_{pp}^p X_p^2 + h_{ppp}^p X_p^3 = 0, \quad (3.48)$$

dont la solution approchée, obtenue par une méthode de perturbation, est [224] :

$$X(t) = a \cos(\omega_{nl} t + \varphi), \quad \omega_{nl} = \omega_p(1 + \tilde{T}_p a^2), \quad \tilde{T}_p = \frac{1}{8\omega_p^2} \left( 3h_{ppp}^p - \frac{10(g_{pp}^p)^2}{3\omega_p^2} \right). \quad (3.49)$$

Par suite, le caractère raidissant ou assouplissant est donné par le signe positif ou négatif du paramètre  $\tilde{T}_p$ , directement relié aux valeurs de  $g_{pp}^p$  et  $h_{ppp}^p$ .

Avec le formalisme des modes non linéaires, on peut effectuer de manière exacte la troncature à un seul mode non linéaire, grâce à leur invariance. La forme normale est alors tronquée au seul oscillateur (3.47), qui définit la dynamique sur la variété. Avec la même méthode de perturbation, on peut obtenir [J3] :

$$R(t) = a \cos(\omega_{nl} t + \varphi), \quad \omega_{nl} = \omega_p(1 + T_p a^2), \quad T_p = \frac{3(A_{ppp}^p + h_{ppp}^p) + \omega_p^2 B_{ppp}^p}{8\omega_p^2}. \quad (3.50)$$

En pratique, la comparaison des formules (3.49), (3.50) et (3.46), montre que :

- Les valeurs de  $T_p$  et  $\tilde{T}_p$  diffèrent lorsque les termes quadratiques  $g_{ij}^p$  sont présents, c'est-à-dire lorsque la structure présente une courbure initiale ou une stratification non symétrique (§2.3). Cela conduit à des comportements différents, voire opposés, pour le  $p^e$  mode considéré. De plus, une troncature à un seul mode linéaire donne dans ce cas un mauvais modèle, ce qui justifie l'utilisation des modes non linéaires. D'un point de vue physique, le coefficient  $T_p$  contient l'influence des  $N$  modes linéaires à partir desquels les coefficients  $A_{ppp}^p$  et  $B_{ppp}^p$  sont calculés.
- Lorsque le système est dépourvu de termes quadratiques (c'est le cas des structures à mécanique symétrique suivant la direction transverse), alors la tendance de non-linéarité d'un mode donné est bien prédite par une troncature à un seul mode linéaire (Eq. (3.48)). Le formalisme des modes non linéaires permet alors de prédire la dépendance des déformées modales en l'amplitude du mouvement, comme décrit ci-après.

Nous avons étudié cette tendance de non-linéarité pour plusieurs systèmes, à la fois discrets et continus : poutres, plaque circulaire, coque sphérique, plaques imparfaites ([J3, J4, J7, J11], [C12, C10]). La figure 3.6 donne un exemple de comportement, tiré de [J7]. Elle montre l'évolution des paramètres  $\tilde{T}_p$  (troncature à un mode linéaire) et  $T_p$  (troncature à un mode non linéaire) du mode (3,0) d'un coque sphérique en fonction de sa courbure. Ainsi, une troncature à 1 mode linéaire ne prédit le comportement correct que pour une plaque (lorsque la courbure est nulle), et dès que la courbure est non nulle, la troncature à un mode linéaire devient fautive.

Enfin, la réduction à un mode non linéaire permet de calculer aisément l'évolution des déformées modales en fonction de l'amplitude. En effet, connaissant  $(R_p(t), S_p(t))$  pour une amplitude donnée, le changement de variable (3.44) permet de remonter aux coordonnées modales, et si seul le  $p^e$  mode non linéaire a de l'énergie, celle-ci se retrouve répartie sur tous les modes linéaires  $X_k$ , d'où le calcul d'une déformée modale qui dépend de l'amplitude et du temps (notion de mode non synchrone déjà évoquée). Ce travail a été proposé dans [J4] pour une poutre et dans [C10] pour une plaque circulaire libre.

### (b) Réduction de modèle en vibration forcée

L'idée de départ des modes non linéaires était d'étendre la notion de mode propre d'un système linéaire au cas non linéaire. En ce sens, les modes non linéaires vus comme des variétés invariantes de l'espace des phases sont, comme les modes linéaires, une solution du système en *vibrations libres*, où dans ce cas ils permettent de procéder à des troncatures exactes, comme proposé dans le paragraphe précédent. La seconde étape est donc de se servir de ces modes non linéaires pour calculer à moindre coût la *réponse forcée* d'un système. Dans ce cas, la situation est plus délicate, car la règle d'invariance ne s'applique plus (comme dans le cas linéaire d'ailleurs). Il est néanmoins possible d'utiliser le formalisme de la figure 3.5 en régime forcé, d'ajouter un forçage dans le second membre de la forme normale, et de tronquer celle-ci ensuite.

Un cas simple est celui d'une excitation harmonique dont la fréquence est proche d'un des modes de la structure. Dans ce cas, un modèle réduit composé du seul mode non linéaire excité à sa résonance donne en général de bons résultats. Si ce mode est en relation de résonance interne avec d'autres modes, il faut aussi garder les modes non linéaires correspondants. Dans [J10], ce modèle réduit est testé sur plusieurs structures : un panneau cylindrique, une coque rectangulaire à double courbure et une coque cylindrique complète. Des modèles réduits à un mode non linéaire, ou à deux modes non linéaires dans le cas d'une résonance 1:1 entre deux modes à la même fréquence, donnent de bons résultats, bien meilleurs qu'une réduction à un seul mode linéaire, notamment. Des comparaisons de cette méthode avec des modèles réduits de type POD sont considérées dans [311]. Enfin, des modèles

réduits non linéaires prenant en compte l'excitation harmonique, ce qui conduit à calculer une variété invariante qui dépend du temps, sont proposés dans [153], au prix d'un coût de calcul important.

### 3.4 Résolution et simulations

On propose ici un aperçu des différentes méthodes disponibles pour calculer la solution d'un système non linéaire du type :

$$M\ddot{U} + D\dot{U} + f(U) = F, \quad (3.51)$$

ou encore en le transformant au premier ordre en temps :

$$\dot{x} = g(x, t), \quad x = (\dot{U} \ U)^T. \quad (3.52)$$

Dans les formulations ci-dessus,  $U(t)$  est le vecteur des inconnues,  $M$  une matrice de masse,  $D$  une matrice d'amortissement,  $f$  le vecteur des efforts intérieurs et  $F$  un forçage extérieur. Le problème (3.51) est de taille  $N$  et (3.52) de taille  $2N$ . La première écriture englobe à la fois les systèmes discrétisés par la méthode des éléments finis (voir Eqs. (3.24, 3.28)), ceux obtenus après une méthode de réduction (Eq. 3.30)) ou à la suite d'une discrétisation modale d'un modèle analytique (Eqs. (3.18) ou (3.20)). Dans le cas d'un développement sur base modale,  $M$  est la matrice identité. La seconde écriture (3.52) est classique dans les théories de systèmes dynamiques [117, 331]. Dans ce cadre, trois grandes familles de méthodes de résolution de ces systèmes peuvent être remarquées.

- On distingue d'abord **les méthodes d'intégration temporelle**. Ce sont les méthodes les plus classiques et les plus répandues dans tous les champs de la physique et de la mécanique. Elle consistent à calculer  $U(t)$  en fonction du temps  $t$ , en se donnant des conditions initiales :  $U(0) = U_0$ ,  $\dot{U}(0) = V_0$ . Comme des solutions analytiques n'existent que pour des cas très particuliers des systèmes dynamiques (3.51) et (3.52), une grande variété de méthode numérique a été développée. En dynamique des structures, c'est la famille des méthodes de Newmark qui est la plus utilisée, car elle s'applique directement au système (3.51) et est très adaptée pour les grandes tailles de systèmes ( $N$  valant plusieurs milliers et plus...) [112, 77, 233]. Sinon, la famille des méthodes de Runge-Kutta est aussi très utilisée et est implantée dans presque tous les logiciels de simulation mathématique. Des algorithmes moins connus ont des propriétés intéressantes pour simuler nos systèmes non linéaires, notamment celle de conserver l'énergie [233, 42], ce qui peut s'avérer décisif lorsqu'on cherche à simuler du chaos [J18].

Néanmoins, dans le cas présent de nos problèmes de systèmes vibratoires non linéaires géométriques, qui présentent souvent des dynamiques complexes qu'on cherche à caractériser, on vise souvent à simuler le régime vibratoire permanent lorsque le système est mis en vibration par un forçage sinusoïdal. Comme les systèmes sont souvent très résonants (c'est notamment le cas des N/MEMS du chapitre 6), ils sont très peu amortis et le régime permanent est ainsi atteint au prix d'un très grand nombre de pas de calcul. Ces méthodes sont pour cette raison très coûteuses et donc le plus souvent utilisées uniquement pour vérifier ponctuellement les résultats des deux autres méthodes présentées ici. Notamment, une intégration en temps ne permet pas de simuler des solutions instables. Cet inconvénient peut alors devenir un avantage lorsqu'il s'agit de démontrer que telle condition initiale conduit à un régime de vibration instable.

- Ensuite, lorsque la dimension  $N$  du système est très faible, on peut utiliser des **méthodes analytiques de perturbation**, dont un large aperçu est proposé dans les ouvrages [220, 224, 301, 139, 321]. Il s'agit ici de supposer que les non-linéarités sont d'amplitude faible devant la partie linéaire du système et de procéder à des développements asymptotiques. On remplace alors le système non linéaire initial par une cascade de systèmes linéaires qu'il faut résoudre successivement. Dès le second ordre, les calculs deviennent en général très fastidieux. Néanmoins,

ces méthodes sont décisives en pratique lorsqu'il s'agit d'interpréter la dynamique de modèles réduits non linéaires, et qu'on veut étudier ses variations en fonction des paramètres du modèle. Dans mon travail, ces méthodes ont été utilisées pour étudier des systèmes en résonance internes, pour les plaques et les coques [J1, J6]. Leur principal inconvénient est qu'elles ne sont praticables que pour des systèmes à très faible nombre de degrés de liberté et que leur domaine de validité, en terme d'amplitude, est réduit.

- La troisième famille de méthode, **les techniques de continuation**, est traitée dans les deux paragraphes qui suivent. . .

### 3.4.1 Méthodes de continuation

Les méthodes de continuation, ou méthodes de suivi de branche, consistent à calculer la solution d'un système *dans un état particulier*, et à suivre son évolution lorsqu'on fait varier un paramètre donné, appelé le paramètre de contrôle en théorie des systèmes dynamiques. Ces méthodes de continuation sont très intéressantes en pratique car elles permettent de calculer à la fois les solutions stables et instables du système, ainsi que les bifurcations. Les deux états particuliers du système qui ont reçu le plus d'attention dans la littérature à propos du suivi de branche sont les *états d'équilibre* et les *solutions périodiques*, deux points évoqués en détail ci-après. Il est néanmoins possible de procéder à la continuation de points de bifurcation (comme les points nœud-col) [88, 89, 323], d'orbites de solutions isolées [26, 281] ou de solutions quasi-périodiques [181, 120, 237].

#### (a) Continuation de points fixes

En mécanique des structures, ces techniques ont été développées pour calculer les problèmes de flambage, c'est-à-dire des problèmes de la forme (3.51) ou (3.52) avec  $\mathbf{U}$  constant. Ce sont des systèmes *algébriques non linéaires*, qu'on écrit sous la forme :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^N \quad (3.53)$$

avec  $\mathbf{U}$  le vecteur déplacement inconnu, de taille  $N$  et  $\lambda$  un paramètre réel, qui dans ce cas représente l'amplitude du forçage statique. On cherche à trouver une branche de solution  $\mathbf{U}(\lambda)$ , pour plusieurs valeurs de  $\lambda$ , qui vérifie (3.53). Comme le système est non-linéaire, ces courbes sont parfois de forme complexes, elles sont soumises à des bifurcations et à des plages de valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles plusieurs solutions  $\mathbf{U}$  coexistent. Pour cette raison, des stratégies de pilotage en longueur d'arc ont été développées : elles consistent à re-paramétriser le système en fonction d'un paramètre  $a$ , qui est lié à l'abscisse curviligne sur la courbe solution, et de chercher à la fois  $\mathbf{U}(a)$  et  $\lambda(a)$  en fonction de  $a$ . Le paramètre  $\lambda$  est alors une inconnue du problème auquel on ajoute une équation qui est la définition du paramètre  $a$ . Plusieurs solutions pour définir  $a$  existent (longueur d'arc, pseudo-longueur d'arc etc.) [281, 77, 283].

Deux familles de méthodes pour résoudre le problème non linéaire (3.53) coexistent. Les méthodes les plus utilisées sont basées sur un algorithme de *Newton-Raphson* couplé au paramétrage en  $a$ . Dans ce cas, l'algorithme résout le système (3.53) pour une valeur donnée de  $a$  (et donc de  $\lambda$ ) et avance de proche en proche pour décrire la courbe solution [77, 283]. Une seconde famille de méthodes, appelées *méthodes asymptotiques numériques* (MAN) a été proposée par Potier-Ferry et ses co-auteurs [30, 69, 322, 344, 49]. Elle consiste à chercher la courbe  $(\mathbf{U}(a), \lambda(a))$  sous la forme d'une juxtaposition de série entière du paramètre  $a$  :

$$\mathbf{U}(a) = \mathbf{U}_0 + a\mathbf{U}_1 + a^2\mathbf{U}_2 + \dots + a^n\mathbf{U}_n, \quad \lambda(a) = \lambda_0 + a\lambda_1 + \dots + a^n\lambda_n. \quad (3.54)$$

Le problème à résoudre pour le calcul de chaque série est une suite de problèmes linéaires successifs composés de la même matrice de raideur tangente. Chaque série a son propre rayon de convergence



(l'ensemble des valeurs de  $a$  pour lesquelles une norme de  $\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda)$  reste inférieur à une tolérance) qui est automatiquement calculé, si bien qu'aucune adaptation du pas d'avancement n'est nécessaire ici. Un autre avantage est que la courbe solution est connue analytiquement par morceau, et non en un nombre fini de points. Enfin, signalons que la majorité des algorithmes développés avec cette méthode considèrent un système algébrique  $\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda)$  polynomial et quadratique, car c'est dans ce cas qu'elle est la plus efficace. Cela pourrait être a priori une restriction, mais on peut montrer que la plupart des non-linéarités peuvent s'écrire sous forme quadratique, à condition d'ajouter des variables additionnelles, ce qui augmente la taille de  $\mathbf{U}$  [69, 71]. Sinon, il est toujours possible d'utiliser une formulation déplacement / force (le système quadratique (3.18) pour les modèles analytiques de ce mémoire) ou déplacement / contrainte (voir par exemple [344] pour les modèles éléments finis) qui conduit à un système non linéaire quadratique.

### (b) Continuation de solutions périodiques

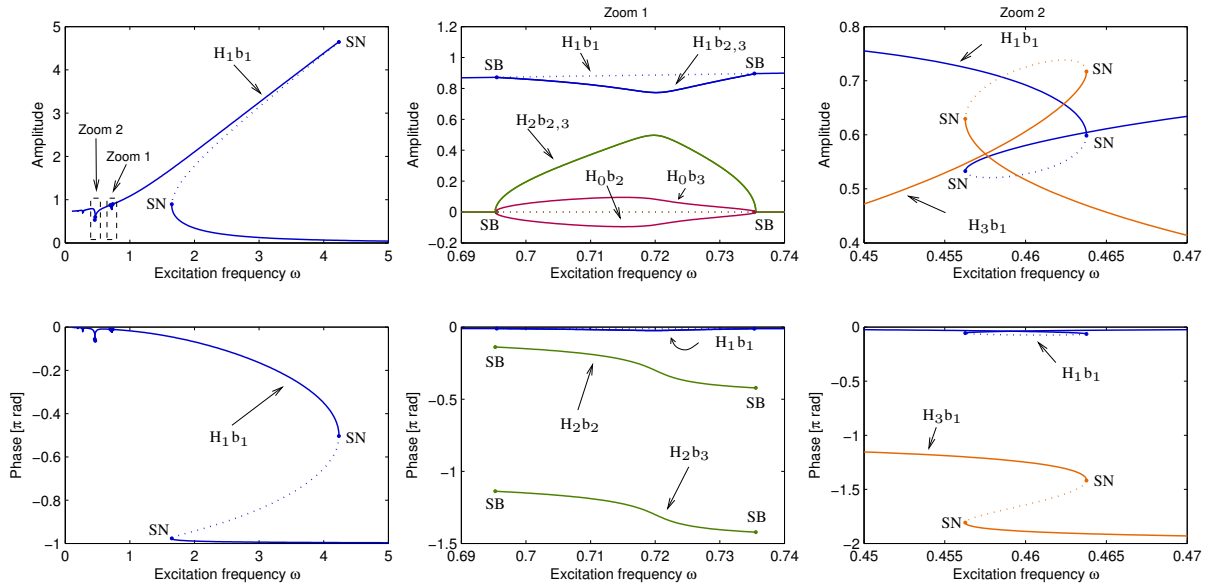


FIG. 3.7 – Courbe de réponse en fréquence d'un oscillateur de Duffing forcé avec  $\omega_0 = 1$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $F = 1$ ,  $\mu = 0.05$  : amplitude et phase des trois premières harmoniques de la solution périodique en fonction de la fréquence d'excitation. '—' : branches stables ; '...' : branches instables. 'SN' : bifurcation nœud col ; 'SB' : bifurcation fourche avec brisure de symétrie. ' $H_i b_j$ ' :  $i^e$  harmonique,  $j^e$  branche. (left) : vue générale ; (milieu) et (droite) : détails des résonances superharmoniques d'ordre 2 et 3 [J16].

Dans le cadre des vibrations non linéaires et de la théorie des systèmes dynamiques, quatre types de solutions sont couramment rencontrées (une illustration est proposée au paragraphe 4.2.2, p. 98) :

- les *points fixes* (ou solutions statiques), évoqués au paragraphe précédent, tels que  $\mathbf{U}$  est constant ;
- les *solutions périodiques*, où il existe une période  $T \in \mathbb{R}^{*+}$  telle que pour toute date  $t$ ,  $\mathbf{U}(t + T) = \mathbf{U}(t)$ . Son spectre est harmonique, c'est-à-dire composé de fréquences multiples de la fréquence fondamentale  $\omega = 2\pi/T$  ;
- les solutions *quasi-périodiques*, caractérisées dans le domaine fréquentiel par un spectre discret composé de fréquences multiples de deux ou plus fréquences fondamentales incommensurables, c'est-à-dire telles que leur rapports soit irrationnels ( $\omega_i/\omega_j \notin \mathbb{Q}$ ). Dans le cas où

deux fréquences sont génératrices du spectre, la solution correspondante décrit dans l'espace des phases la surface d'un tore dont les deux diamètres caractéristiques sont reliés aux deux fréquences [331, §10.4a], [120].

- les *solutions chaotiques*, où cette fois-ci le spectre est continu.

Ces solutions peuvent être obtenues successivement, pour un système en vibrations forcées, par une cascade de bifurcations de Hopf (par exemple en augmentant l'amplitude du forçage, voir §4.2.2). Alors que les deux dernières sont très complexes à simuler autrement que par des méthodes d'intégration temporelle (les algorithmes de continuation de solution quasi-périodiques sont encore à l'état de recherche [181, 120, 237]), des algorithmes de continuation de solutions périodiques existent et sont très matures. Le présent paragraphe vise à donner succinctement une vue d'ensemble sur ces techniques.

Comme dans le cas de la continuation de point fixe, il s'agit ici de calculer l'évolution des solutions périodiques du système en fonction d'un paramètre de contrôle  $\lambda$ . Pratiquement, si le système est autonome (il n'est pas forcé par une excitation extérieure), alors il peut être sujet à des auto-oscillations et des cycles limites, qui apparaissent en général après une bifurcation de Hopf, pour une valeur donnée de  $\lambda$ ; la continuation de solutions périodiques est directement adaptée à ce cas. Le cas des systèmes conservatifs en régime libre, par exemple pour calculer des modes non linéaires, rentre aussi dans ce cas de figure, puisque par définition on cherche une famille de solutions périodiques (§3.3). Enfin, dans un cas de vibrations forcées par une source sinusoïdale, la réponse du système pour les basses amplitudes est en général périodique, et les techniques de continuation permettent naturellement de tracer des courbes de réponse en fréquence non-linéaires, c'est-à-dire une caractéristique du régime périodique (sa fréquence, son amplitude) en fonction de la fréquence d'excitation, qui joue ici le rôle de paramètre de contrôle.

Une illustration de courbe de réponse est la figure 3.7, qui montre l'évolution des solutions périodiques de l'oscillateur de Duffing forcé :

$$\ddot{u} + \mu\dot{u} + \omega_0^2 u + \Gamma u^3 = F \cos \Omega t, \quad (3.55)$$

en fonction de la pulsation d'excitation  $\Omega$ . Par rapport aux méthodes d'intégration temporelle, on a accès ici *directement* au régime permanent, ainsi qu'aux solutions instables, qui sont intéressantes en pratique car elles connectent entre elles les branches stables et elles permettent de positionner les bifurcations, essentielles pour comprendre la dynamique d'un système. Sans les branches instables, on obtient un réseau de courbes déconnectées qu'il est parfois difficile d'interpréter. Ces méthodes constituent l'analogie numérique des méthodes de perturbation et ont l'avantage de ne pas être limitées en terme de domaine de validité.

Plusieurs techniques numériques existent pour procéder au suivi de solutions périodiques. On pourra consulter à ce sujet les introductions des thèses [264, 21, 281, 250]. La première étape consiste toujours à calculer une solution périodique du système dynamique, et ensuite de procéder à la continuation. Quatre grandes méthodes de calcul numérique de solutions périodiques d'un système dynamique existent dans la littérature, qui sont toutes équivalentes à remplacer les systèmes *dynamiques* (3.51) ou (3.52) en un système *algébrique* de la forme de (3.53). D'un point de vue général, il s'agit de résoudre le problème [281] :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{x}_0, T) \in \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{*+} \text{ tel qu'il existe } \mathbf{x}(t) \text{ solution de :} \\ &\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.56)$$

qui s'écrit aussi, en posant  $\tau = t/T$  :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{x}_0, T) \in \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{*+} \text{ tel qu'il existe } \mathbf{x}(\tau) \text{ solution de :} \\ &\quad \begin{cases} \mathbf{x}' = T\mathbf{g}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.57)$$

où on a noté  $(\bullet)' = d\bullet/d\tau$ . La seconde écriture a fait disparaître l'inconnue  $T$  des conditions aux limites du problème, qui devient un problème aux limites standard.

**Méthode de tir** Cette méthode, appelée *shooting* en anglais, consiste à trouver de manière itérative la condition initiale  $\mathbf{x}_0$  et la période  $T$  qui conduisent à une solution périodique. Pour cela, elle est basée sur une méthode de Newton-Raphson et un algorithme d'intégration temporelle. Il s'agit d'itérer sur les valeurs de  $\mathbf{x}_0$  et  $T$  pour réduire le reste :

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}_0, T) = \mathbf{x}(T, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0, \quad (3.58)$$

où on a noté  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  la solution du problème (3.56) à la date  $t$ . À chaque itération,  $\mathbf{x}(T, \mathbf{x}_0)$  est calculé par intégration temporelle, à partir de la prédiction de  $T$  et  $\mathbf{x}_0$  [253, 283, 222]. Comme le problème (3.58) n'est pas connu analytiquement, puisqu'il est le résultat, à chaque itération, d'une intégration temporelle, cette méthode n'est a priori pas adaptée à être couplée à la MAN. En revanche, elle est intéressante car toute méthode d'intégration temporelle peut être utilisée, ce qui la rend attractive lorsqu'on veut utiliser un code d'intégration temporelle existant.

**Différences finies** Dans cette méthode, on échantillonne l'intervalle  $[0, 1]$  en  $M$  intervalles et on remplace le problème (3.57) par un système non linéaire algébrique de la forme (3.53), où l'inconnue est  $\mathbf{U} = [\mathbf{x}_0^T, \dots, \mathbf{x}_k^T, \dots, \mathbf{x}_{M-1}^T, T]^T$ , avec  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(kh)$ ,  $h = 1/M$  la période d'échantillonnage. L'écriture de (3.53) dépend de l'algorithme de discrétisation temporelle (différences finies, Newmark...). Le système algébrique (3.53), connu de manière formelle, peut être résolu soit par un algorithme de Newton-Raphson, soit par la MAN [22].

**Collocation orthogonale** Cette méthode est voisine de la précédente, à la différence que la période est discrétisée par une méthode de collocation orthogonale. C'est cette méthode qui est utilisée dans le code de continuation AUTO [89]. Là encore, la résolution du système algébrique (3.53) peut être résolu soit par un algorithme de Newton-Raphson, soit par la MAN.

**Équilibrage harmonique** Alors que les trois méthodes précédentes sont basées sur des algorithmes temporels, la présente méthode est fréquentielle. On décompose ici le vecteur solution  $\mathbf{x}$  en série de Fourier :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(0)} + \sum_{k=1}^H \left( \mathbf{x}^{(kc)} \cos \omega t + \mathbf{x}^{(ks)} \sin \omega t \right). \quad (3.59)$$

Sous cette forme,  $\mathbf{x}$  étant automatiquement périodique, avec  $T = 2\pi/\omega$ , il ne lui reste plus qu'à vérifier le système dynamique (3.52), ce qui conduit là encore au système non linéaire algébrique de la forme (3.53), où l'inconnue est  $\mathbf{U} = [\mathbf{x}_0^T, \dots, \mathbf{x}_k^T, \dots, \mathbf{x}_{M-1}^T, \omega]^T$ . Par suite, (3.53) peut être résolu soit par un algorithme de Newton-Raphson [184, 185, 218, 103], soit par la MAN [264, 71, 47, 46]. Si les non-linéarités sont non régulières, les lois d'efforts non linéaires sont décrites dans le domaine temporel et des techniques spécifiques sont utilisées, comme la méthode *alternating frequency time* [176]. Dans mon travail, j'utilise couramment le logiciel Manlab [J16, C36, J20] où un code programmé au laboratoire [J21]. L'efficacité de la présente méthode de l'équilibrage harmonique peut être améliorée en adaptant le nombre d'harmoniques au fur et à mesure que les branches de solutions sont calculées, et cela pour chacun des degrés de liberté du système [116].

### 3.4.2 Stabilité de solutions périodiques

#### (a) Généralités

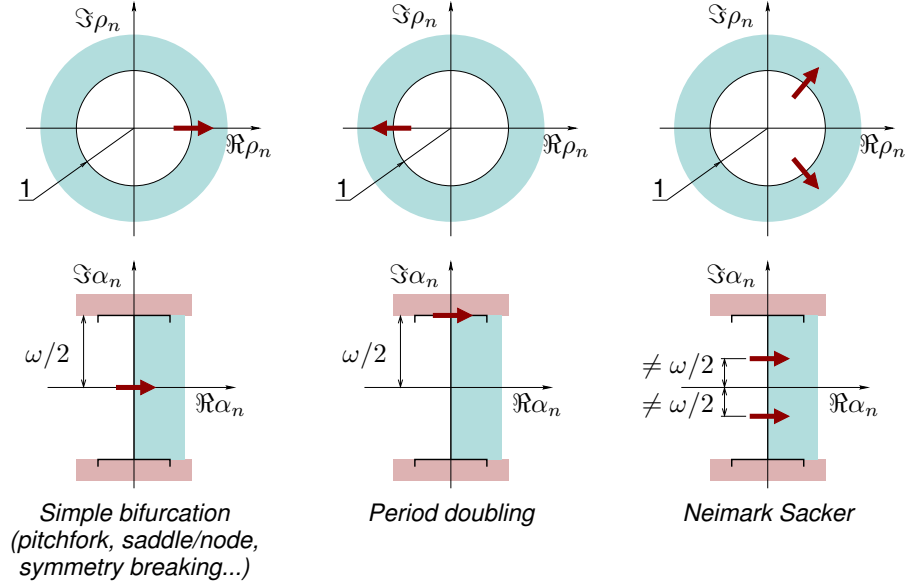


FIG. 3.8 – Mouvement dans le plan complexe des exposants  $\alpha_n$  et multiplicateurs  $\rho_n$  de Floquet lors des bifurcations de solutions périodiques

Le calcul de la stabilité des solutions calculées avec une méthode de continuation est essentiel. En statique, la stabilité permet de prédire les valeurs limites des efforts au delà desquelles un flambage de la structure apparaît. En post-flambement, plusieurs configurations de la structure coexistent, certaines étant stables et d'autres instables. En dynamique, les mêmes caractéristiques sont observées pour des solutions périodiques, qui peuvent être stables ou instables. Dans le cadre des méthodes numériques de continuation, qui calculent sans distinction les solutions stables et instables, la recherche de la stabilité des solutions est capitale, car elle permet d'identifier dans le diagramme de bifurcation les solutions stables et donc physiquement observables. Le changement de stabilité est aussi le siège de bifurcations, qui sont ainsi automatiquement détectées. On peut signaler à ce propos qu'il existe des méthodes numériques qui permettent de (i) détecter la position d'éventuelles bifurcations et (ii) de permettre le branchement des solutions multiples au point de bifurcation [283, 88, 55, 322].

Le calcul de la stabilité d'une solution périodique consiste à ajouter une perturbation  $\mathbf{y}(t)$  à la solution périodique  $\mathbf{x}_0(t)$  du problème (3.56) et à vérifier si  $\mathbf{y}(t)$  est croissante ou décroissante en fonction du temps, le premier cas déterminant que  $\mathbf{x}_0(t)$  est instable. Cela s'écrit :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{y}}(t) \simeq \mathbf{J}(t)\mathbf{y}(t), \quad \text{avec} \quad \mathbf{J} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}. \quad (3.60)$$

Ainsi,  $\mathbf{y}$  est solution d'un système linéaire à coefficients périodiques, puisque le jacobien  $\mathbf{J}(t)$  de  $\mathbf{g}$  – calculé pour la solution périodique  $\mathbf{x}_0$  – est périodique. Cela relève de la théorie de Floquet [104, 126], qui montre que  $\mathbf{y}$  est la somme de  $2N$  solutions fondamentales  $\mathbf{y}_n$  indépendantes :

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{y}_n(t), \quad \mathbf{y}_n(t) = \mathbf{p}_n(t) e^{\alpha_n t}, \quad (3.61)$$

où les  $\alpha_n$  sont nommés les *exposants de Floquet*. Il est alors aisé de montrer que si on regroupe les

$\mathbf{y}_n$  dans une matrice :  $\mathbf{Y}(t) = [\mathbf{y}_1(t) \ \dots \ \mathbf{y}_{2N}(t)]^T$ , on a la relation [222] :

$$\mathbf{Y}(t + T) = \Phi \mathbf{Y}(t), \quad \forall t \quad (3.62)$$

où  $\Phi$  est la matrice de monodromie, qui permet de calculer l'état de la perturbation à une certaine date en fonction de son état une période  $T$  plus tôt. Ses valeurs propres  $\rho_n$  sont les *multiplieurs de Floquet*, reliés aux  $\alpha_n$  par :

$$\rho_n = e^{\alpha_n T} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_n = \frac{1}{T} \ln \rho_n + \frac{2\pi k}{T} i, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.63)$$

Finalement, à partir des équations (3.61) et (3.62), on montre que la stabilité de la solution périodique  $\mathbf{x}_0$  est reliée aux exposants et multiplieurs de Floquet :

- Si  $\Re(\alpha_n) < 0$  (ou  $|\rho_n| < 1$ ) pour tout  $n$ , toutes les solutions fondamentales  $\mathbf{y}_n$  tendent vers zéro en fonction du temps et la solution périodique  $\mathbf{x}_0(t)$  est dite asymptotiquement stable.
- S'il existe un  $n$  tel que  $\Re(\alpha_n) > 0$  (ou  $|\rho_n| > 1$ ), la solution fondamentale  $\mathbf{y}_n$  augmente de manière exponentielle et la solution périodique  $\mathbf{x}_0(t)$  est dite instable.

Le chemin utilisé par les exposants de Floquet pour traverser l'axe des ordonnées du plan complexe, et de manière équivalente, le chemin emprunté par les multiplieurs de Floquet à la traversé du cercle unité, détermine le type de bifurcation (Fig. 3.8) [222].

### (b) Une méthode fréquentielle

Déterminer la stabilité d'une solution périodique consiste alors, comme on vient de le voir, à calculer les exposants ou multiplieurs de Floquet. Trois méthodes sont disponibles dans la littérature. On rappelle que  $N$  est le nombre de degrés de libertés mécaniques, c'est-à-dire la taille du système (3.51). Il y a donc  $2N$  multiplieurs / exposants de Floquet à déterminer.

- La première méthode, qui est la plus générale, consiste à calculer la matrice de monodromie  $\Phi$  en constatant que (i)  $\mathbf{Y}(t)$  est solution de l'équation (3.60) et que (ii) l'équation (3.62) montre que  $\mathbf{Y}(T) = \Phi \mathbf{Y}(0)$ . Par suite,  $\Phi$  est la solution du système (3.60) intégré numériquement sur une période  $T$  à partir d'une condition initiale  $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{1}$  identité.  $\Phi$  étant estimé, les multiplieurs de Floquet sont alors obtenus par diagonalisation. Cette méthode est applicable pour toutes les techniques de continuation, puisqu'il suffit de connaître  $\mathbf{x}_0(t)$  pour calculer le jacobien  $\mathbf{Y}(t)$ . La généralité de cette méthode est son inconvénient, car elle peut être coûteuse en temps de calcul et n'utilise aucune des propriétés de la méthode de continuation choisie pour calculer la solution périodique  $\mathbf{x}_0$ . J'ai contribué avec Arnaud Lazarus à implanter cette méthode dans le logiciel Manlab [23].
- La seconde est immédiate lorsqu'une méthode de tir est utilisée pour calculer les solutions périodiques, puisque la matrice de monodromie peut être calculée en même temps que la solution périodique [253, 283, 222].
- La troisième est liée à la méthode de collocation orthogonale pour calculer les solutions périodiques. Dans ce cas, on montre que les multiplieurs de Floquet sont solution d'un problème aux valeurs propres de grande taille, qu'il est possible de réduire à la taille  $2N$ . Cette méthode semble très efficace [101, 283].

Les trois méthodes précédentes appartiennent au *domaine temporel* et seule la première est applicable lorsque le calcul de la solution périodique est effectué avec la méthode d'équilibrage harmonique. Avec Arnaud Lazarus, nous avons proposé une quatrième méthode de calcul de la stabilité de solutions périodiques, dans le *domaine fréquentiel*, qui utilise directement les coefficients de Fourier de la solution périodique  $\mathbf{x}_0$ . Elle est basée sur la méthode de Hill [129], qui conduit à résoudre

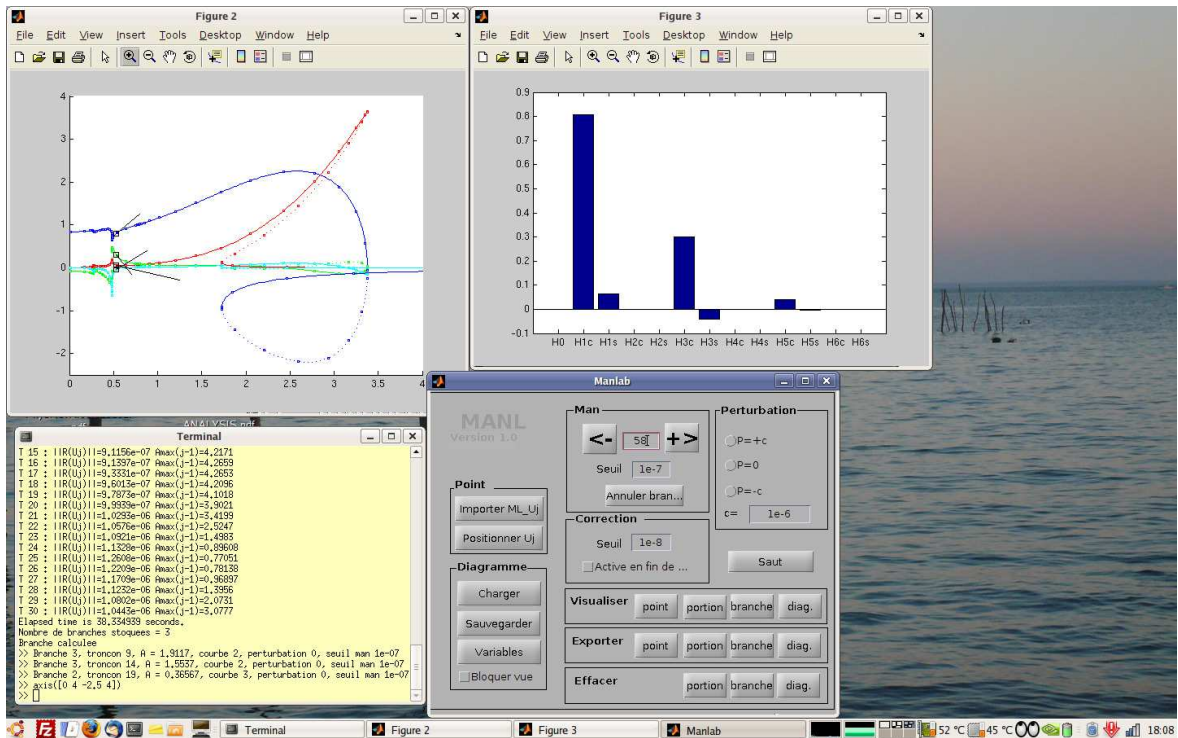


FIG. 3.9 – Copie d'écran du logiciel Manlab lors du calcul des branches de solution d'un oscillateur de Duffing

un problème aux valeurs propres étendu, de taille  $2N(2H + 1)$ ,  $H$  étant le nombre d'harmoniques retenues pour le calcul de  $x_0$ . Plusieurs études passées [325, 177] utilisent la méthode de Hill directement dans un cadre numérique, mais les auteurs s'accordent pour dire qu'elle n'est pas fiable et qu'elle peut conduire à des résultats faux. Nous avons proposé une correction de cette méthode, en ajoutant un critère de tri des  $2N(2H + 1)$  valeurs propres pour en sélectionner simplement  $2N$ , basé sur l'observation des vecteurs propres. Nous avons implanté cette méthode dans le code Manlab [23] et proposé différents tests, sur des systèmes autonomes, non autonomes avec ou sans résonances internes. Elle conduit à des gains de temps substantiels par rapport à la méthode temporelle d'intégration sur une période et pour l'instant, aucune mise en défaut de la méthode n'a été constaté [J16], [C36, C41], [300].

Le code de continuation de solutions périodiques HBM/Manlab/Hill (Fig. 3.9) ainsi obtenu est complet, puisqu'il propose une solution conviviale et interactive pour calculer les branches de solutions périodiques ainsi que leur stabilité, sans restriction sur le nombre d'harmoniques à inclure dans le calcul, ce qui est compétitif par rapport à certaines solutions de la littérature. La détection de bifurcation et le branchement dans le cas de bifurcation fourches ne sont toutefois pas encore automatisés et sont laissés au doigté de l'utilisateur.

### 3.5 Mesures de vibrations

Après avoir exposé comment résoudre les modèles non linéaires de vibration de structures (§3.1, §3.2, §3.3, §3.4) le présent paragraphe fait état de quelques méthodes expérimentales particulières permettant de caractériser et étudier les systèmes non linéaires, méthodes que j'ai eu l'occasion d'uti-

liser et développer aux laboratoires TSI de l'ENST<sup>7</sup> (1998-2001), de l'ENSTA-UME<sup>8</sup> (2001-2003) et du LMSSC du Cnam<sup>9</sup>.

### 3.5.1 Un excitateur électromagnétique original

#### (a) Généralités



FIG. 3.10 – Photographies d'un haut-parleur, d'un marteau-choc et d'un pot-vibrant.

Lorsqu'on souhaite étudier expérimentalement des systèmes en vibration, la première question est de choisir le moyen d'injecter l'énergie dans celui-ci. Si on procède aux mesures *in situ*, c'est-à-dire qu'on s'intéresse aux vibrations du système dans son environnement et qu'il est possible de les mesurer, le problème est réglé. En revanche, lorsqu'on souhaite créer une expérience de laboratoire, plusieurs techniques de mise en vibration classiques sont disponibles, globalement au nombre de trois (Fig. 3.10).

- On peut tout d'abord utiliser une **excitation acoustique**, au moyen d'un haut parleur placé à proximité du système. Le principal avantage de cette technique est qu'elle est sans contact, si bien qu'elle est facile à mettre en œuvre. En revanche, elle est non-localisée (la pression acoustique créée est, par nature, répartie sur l'ensemble de la surface du système) et s'il est possible de procéder facilement à une mesure de la pression acoustique en certains points autour du système, il est impossible de mesurer l'action mécanique force imposée à la structure, car elle dépend du rayonnement du haut parleur, des réflexions des ondes acoustiques sur les murs du local de mesure. . . De plus, même si on peut choisir le signal électrique d'excitation du haut parleur, il ne correspond que qualitativement à celui de la force imposée à la structure. Enfin, la puissance acoustique produite par un haut parleur traditionnel dans ses limites de linéarité est en général trop faible pour induire des vibrations d'amplitude suffisante pour que le régime soit non linéaire.
- Une seconde méthode consiste à utiliser un **marteau-choc**, c'est-à-dire un marteau dont l'inertie de rotation est adaptée au geste d'un opérateur moyen, et qui est muni d'un capteur de force à son extrémité. Cet outil est très utilisé pour des analyses modales linéaires expérimentales. Son inconvénient est qu'il permet de produire une excitation impulsionnelle qui n'est pas reproductible d'un coup de marteau à l'autre : l'amplitude de la force injectée et son contenu

<sup>7</sup>Département Traitement du Signal et des Images, École Nationale Supérieure des Télécommunications, désormais appelée Télécom ParisTech, Paris, <http://www.tsi.telecom-paristech.fr>

<sup>8</sup>Unité de Mécanique, École Nationale Supérieure des Techniques Avancées, désormais appelée ENSTA-ParisTech, Palaiseau, <http://ume.ensta-paristech.fr>

<sup>9</sup>Cnam / LMSSC, Case 2D6R10, 2 rue Conté, 75003 Paris, <http://www.lmssc.cnam.fr>

fréquentiel ne sont pas maîtrisés. Dans un cadre linéaire, où par définition les vibrations sont proportionnelles à la force injectée, cela n'est pas un problème car il suffit de « diviser » les mesures vibratoires par le signal de force pour caractériser la structure. Dans un cadre non linéaire, cet outil peut permettre tout de même de caractériser de manière ponctuelle le comportement non linéaire d'une structure, comportement qu'il faut alors associer au signal de force mesuré par le capteur.

- La troisième technique d'excitation est le traditionnel **pot-vibrant**, ou **excitateur électrodynamique**, commercialisé en une large gamme de tailles et de performances. Son fonctionnement est similaire à celui d'un haut-parleur électrodynamique : un aimant fixe produit un champ magnétique radial dans lequel se déplace une bobine mobile. Pour le cas particulier des vibrations de grande amplitude, le principal problème des pots-vibrants est que la force effectivement imposée à la structure, celle mesurée par un capteur de force placé entre l'ensemble mobile du pot-vibrant et la structure, dépend de la dynamique de l'ensemble mobile du pot-vibrant, et donc des oscillations de la structure au point d'attache. Ainsi, la force effectivement imposée à la structure n'est pas maîtrisée, à moins de recourir à un système de contrôle du signal de commande du pot-vibrant, pour asservir la force à une consigne donnée. Enfin, d'un point de vue strictement pratique, il faut enfin noter que le positionnement du pot-vibrant par rapport à la structure étudiée doit être effectué précisément, ce qui nécessite un système de fixation adapté et prévu à l'avance, vue la masse non négligeable de l'excitateur.

#### (b) Le système bobine-aimant

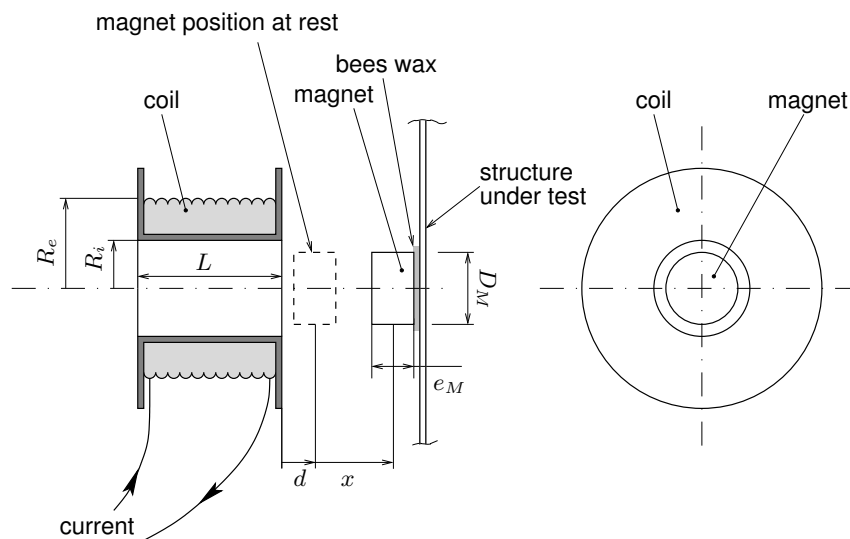


FIG. 3.11 – Système bobine aimant. La distance  $d$  est mesurée entre la face droite du bobinage et le plan médian de l'aimant, au repos. L'aimant est centré radialement dans la cavité de la bobine

Un excitateur sans contact a été conçu pour servir dans les expériences de vibrations. Vu ses avantages pratiques, il a été utilisé presque systématiquement au laboratoire, que se soit pour les mesures de vibration en régime non linéaire mais aussi pour de simples analyses modales linéaires (voir [J2, J5, J8, J13, J19, J23], le rapport [R3], les thèses [91, 302] et [213]). Il est représenté sur la figure 3.11 et photographié sur la figure 3.12 et est composé d'un petit aimant, collé sur la structure à mettre en vibration, et d'une bobine fixe, parcourue par un courant qui permet de créer une force magnétique sur l'aimant.



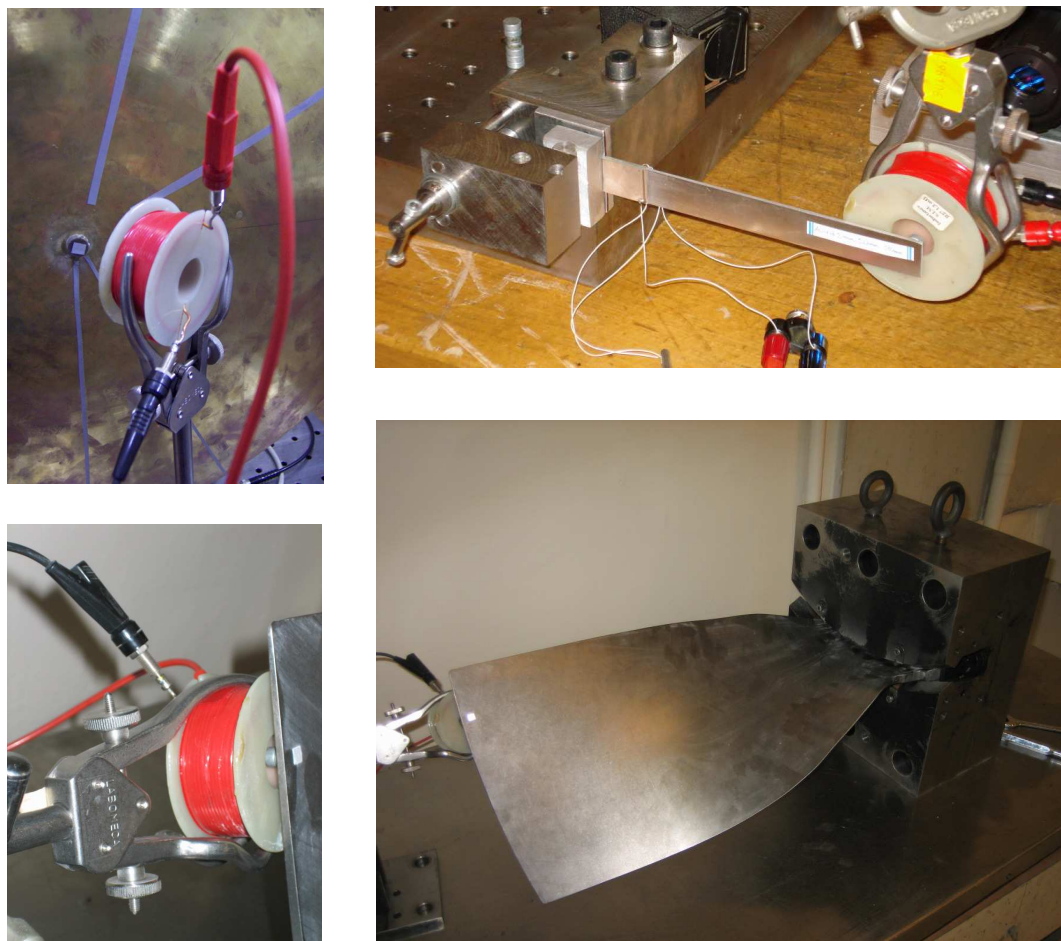


FIG. 3.12 – Photographies du dispositif bobine-aimant associé à plusieurs systèmes : une coque sphérique, une poutre et une aube de soufflante de moteur d'avion

Par rapport au pot-vibrant, ce système bobine-aimant offre des avantages indéniables, que nous énumérons ci-dessous.

- En premier lieu, c'est un dispositif sans-contact : il suffit de coller l'aimant sur la structure, par exemple avec de la cire d'abeille, et de positionner la bobine à proximité. La position d'excitation peut être ainsi modifiée extrêmement rapidement d'une expérience à l'autre, sans être par exemple obligé de percer la structure pour fixer l'ensemble mobile d'un pot-vibrant. Aucun lien rigide n'est nécessaire entre la structure et l'excitateur, si bien que le déplacement de la structure n'est pas contraint. Des amplitudes d'oscillations axiales de l'ordre de 10 mm sont possibles, ainsi que des petites rotations et des petits déplacements radiaux.
- Le dispositif de positionnement de la bobine est lui aussi très simple puisque celle-ci est très légère (de l'ordre d'une centaine de grammes). Un simple bras articulé est en général suffisant.
- La présence de l'aimant collé sur la structure résulte uniquement en un ajout de masse (pas d'amortissement ni de raideur ajouté), qui est très faible car les matériaux magnétiques modernes<sup>10</sup> permettent de choisir un aimant de très petite taille (une masse de l'ordre de 4 g est en général suffisante).

En pratique, le dispositif bobine aimant est associé à un amplificateur de puissance, qui doit être choisi avec (i) une commande en courant (c'est l'intensité du courant dans le circuit de sortie qui

<sup>10</sup>Les aimants en Neodyme/Fer/Bore ont un très bon rapport moment magnétique sur masse.

est proportionnelle au signal d'entrée, et non la tension) et (ii) une mesure du courant de sortie en temps réel. La plupart des amplificateurs de pot-vibrant pour analyse modale proposent ces fonctionnalités (notamment les amplificateurs de marque Bruël et Kjør<sup>11</sup> (modèles 2719 ou 2721) ou Tira<sup>12</sup>). Ces deux caractéristiques sont nécessaires car la force électromagnétique créée sur l'aimant est proportionnelle à l'intensité de courant qui parcourt la bobine. Ainsi, le contenu fréquentiel du signal d'entrée est respecté, et la mesure d'intensité de courant est directement une mesure du signal de force imposé sur l'aimant, ce qui évite le recours à un capteur de force. En conséquence, le principe de ce système bobine aimant est d'étudier les propriétés vibratoires du système associé à l'aimant, et non du système nu, puisque la force dont le signal est mesurée et parfaitement maîtrisée est celle imposée à l'aimant.

Le principal inconvénient de ce système est que la force qu'il produit est de l'ordre du Newton, pour des intensités de quelques ampères. Ainsi, il est très adapté à des structures légères et très résonantes. Si la force est insuffisante, il faut augmenter le nombre d'aimants et l'intensité du courant dans la bobine, deux possibilités limitées par la pratique.

### (c) Distorsion harmonique

Des mesures de distorsion harmonique, pour caractériser le caractère non linéaire du système bobine aimant, ont été proposées dans les annexes de [J2] et sont reprises sur la figure 3.13. Leur comparaison aux résultats d'un modèle analytique a été proposé dans [R2], et sont excellentes (Fig. 3.13). En fait, la force imposée par la bobine sur l'aimant dépend de la position de celui-ci dans la cavité de la bobine, comme le montre la figure 3.13(a) : elle est nulle au centre de celle-ci et passe par un maximum, situé au voisinage de la face latérale de la bobine (En  $d = 0$  sur la figure 3.11). On peut alors s'attendre à ce que le système produise une distorsion harmonique du signal de force, lorsque l'aimant est animé d'un mouvement par rapport à la bobine. C'est ce qu'on observe sur les figures 3.13(b,c), où l'amplitude de chacune des harmoniques du signal de force, par rapport à celle de la fondamentale, a été mesurée en fonction de l'amplitude des oscillations de l'aimant. On montre alors que c'est la position où la force est maximale qui est associée au contenu harmonique le plus faible, car comme la relation force / position est quasiment symétrique, l'harmonique 2 est d'intensité très faible.

En conclusion, le présent système bobine aimant offre une alternative au traditionnel pot-vibrant, qui est économique, commode, pratique à utiliser et très adaptée aux mesures de vibrations non linéaires.

## 3.5.2 Mesures de vibrations non linéaires

Les mesures de vibrations dans un cadre industriel sont souvent séparées en deux familles. En premier lieu, on peut chercher à caractériser le comportement vibratoire d'un système in situ, le plus souvent pour étudier tel ou tel phénomène mal compris. Dans ce cas, les difficultés principales consistent à choisir et à installer les capteurs de vibrations, parfois dans des conditions difficiles, et à traiter les signaux obtenus. En second lieu, on souhaite procéder à des mesures en vue de valider une série de modèles du système. Dans le cadre des vibrations, c'est en général une analyse modale expérimentale qui est effectuée. Pour cette raison, des protocoles bien calibrés et des logiciels optimisés sont en général utilisés, mais leur domaine d'application est réduit au cadre linéaire.

Dans un cadre non linéaire, très peu de méthodes standard sont disponibles, vu la grande variété de phénomènes qui peuvent être observés. Néanmoins, des méthodes d'identification modale non linéaires ont été proposées par G. Kerschen et ses collaborateurs dans [251, 252]. Pour ma part, j'ai essentiellement proposé des techniques de mesures de réponse non linéaire en régime forcé sinusoïdal, principalement dans le but de valider des modèles. Les idées de base sont :

<sup>11</sup><http://www.bksv.com>

<sup>12</sup><http://www.tira-gmbh.de>

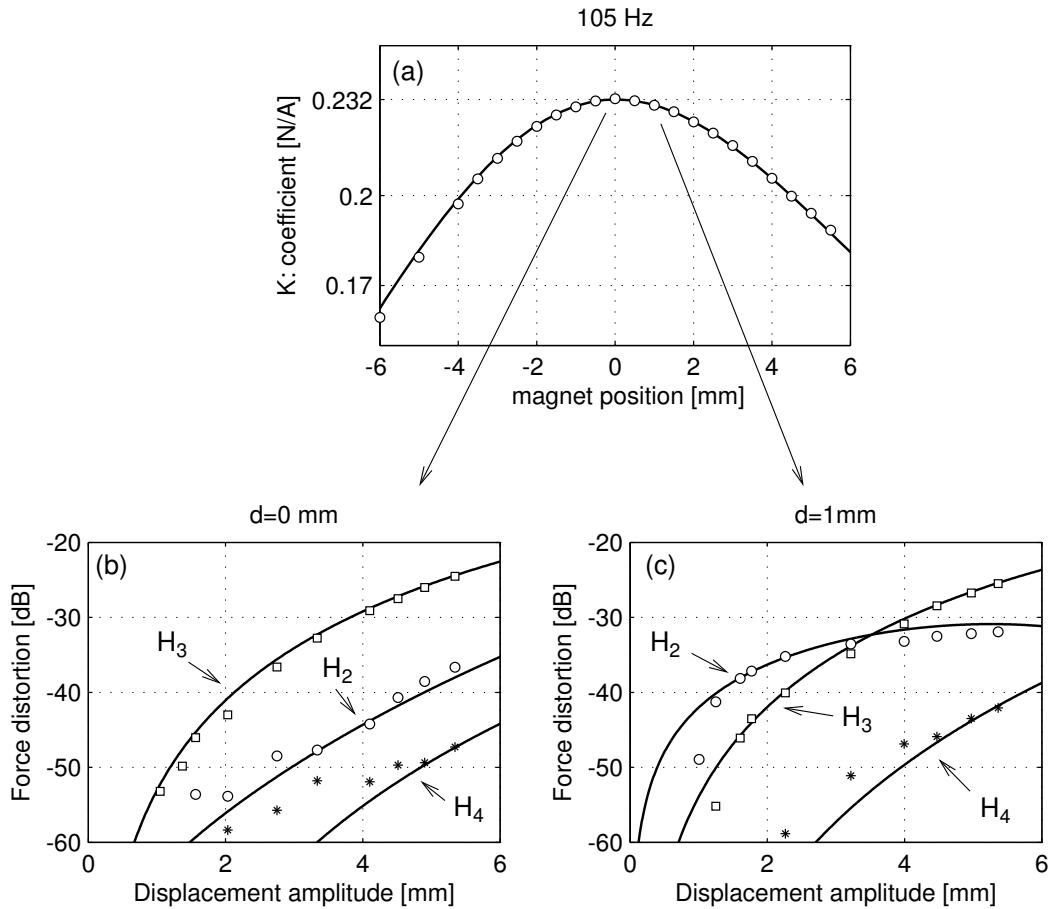


FIG. 3.13 – Mesures et calcul de distorsion du système bobine aimant. (a) Amplitude de la force en fonction de la position  $d$  de l'aimant au repos, représenté par le coefficient  $K = \text{force/intensité}$  ; (b) Distorsion harmonique du signal de force en fonction de l'amplitude du mouvement de l'aimant, pour une position optimale de l'aimant ( $d = 0$  mm) ; (c) Idem pour une position décalée ( $d = 1$  mm).

1. d'utiliser un signal de force sinusoïdal dont la fréquence et l'amplitude sont contrôlées précisément. Le système bobine aimant décrit au paragraphe 3.5.1 a été conçu justement dans ce but ;
2. de mesurer la réponse du système *en régime permanent*. Elle est en général périodique, mais elle peut être aussi quasi-périodique ou chaotique.
3. d'être capable de mettre en évidence (i) la distorsion harmonique lorsque la réponse est périodique (ii) les phénomènes de saut qui apparaissent lorsque plusieurs solutions du système coexistent pour une plage fréquentielle donnée.

Dans ce cadre, on se retrouve à mesurer l'évolution de la réponse vibratoire d'un système lorsque deux paramètres de contrôle varient : l'amplitude et la fréquence de la force sinusoïdale. Ces expériences peuvent être effectuées manuellement. Par exemple, dans [J2, J8], des courbes de résonances ont été obtenues en mesurant l'amplitude de signaux d'accéléromètres placés sur la structure, et cela pour chaque valeur de la fréquence d'excitation, variée par petit incrément en gardant l'amplitude de la force constante. Il était nécessaire de filtrer les signaux d'accélération pour ne garder – et ne mesurer au voltmètre – que l'harmonique fondamentale.

Depuis, le système de mesure a été amélioré lors de stages de Master récents [213, 38] par l'ajout

de deux éléments :

- l'utilisation systématique d'un amplificateur à verrouillage de phase. Cet appareil permet de mesurer l'amplitude et la phase de chacune des harmoniques d'un signal périodique, par rapport à une sinusoïde de référence. Nous utilisons au laboratoire un SR830 de la marque Stanford Research Systems ou un 7265 de la marque Ametek. Le principe de ces appareils est de multiplier le signal dont on veut connaître l'amplitude et la phase par une sinusoïde de référence et de filtrer le résultat pour n'en garder que la composante continue. Si la fréquence de la référence est égale à celle de l'harmonique de signal de départ, alors le résultat du filtrage donne un signal constant, proportionnel à l'amplitude et au cosinus de la phase. En répétant l'opération avec une seconde sinusoïde de référence en quadrature avec la première, on est capable d'extraire de manière extrêmement fiable l'amplitude *et* la phase du signal de départ, et cela pour chacune de ses harmoniques [296].
- l'automatisation de toute la chaîne de mesure par le pilotage de tous les appareils, depuis Matlab, via les ports RS232 des appareils. Le protocole de communication RS232, quoique ancien et relativement lent, à l'avantage d'être proposé dans la version standard de Matlab et dans la plupart des appareils dédiés. De plus, sa lenteur n'est pas un problème car elle est négligeable devant les temporisations qu'il est nécessaire d'imposer pour attendre le régime permanent du système vibrant étudié, à chaque changement de la valeur du paramètre de contrôle.

Trois types de courbes ont été mesurées :

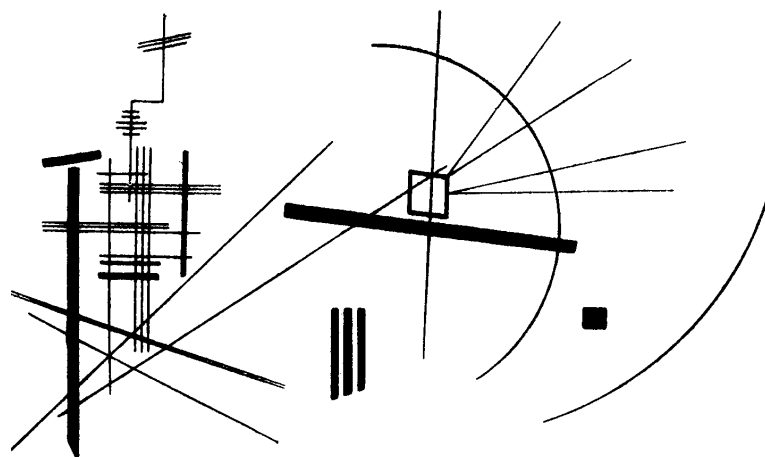
- des courbes d'amplitude de la réponse en fonction de la fréquence d'excitation, pour une amplitude de forçage donnée, montrant des phénomènes de sauts et des bifurcations vers des régimes quasi-périodiques (voir les figures 4.7, 4.11 et 4.14, pp. 101, 104 et 107) ;
- des courbes de réponse fréquentielle du système à amplitude de forçage croissant, pour une fréquence d'excitation donnée (voir la figure 4.4, p. 98) ;
- des « backbones curves », mesurées en cherchant la fréquence de résonance du système pour un ensemble d'amplitudes de forçage. Cette technique est voisine de celle décrite dans [251, 252] (voir la figure 4.8, p. 102).



PARTIE II

---

Applications



*« Vibration colorée obtenue schématiquement grâce à un minimum de couleur (noir) »*

*W. Kandinsky [159]*



---

# Dynamique non linéaire de plaques et de coques

Ce chapitre propose une synthèse des activités de l'auteur sur le thème des vibrations non linéaires de plaques et de coques. On s'intéresse ici au comportement dynamique de milieux minces bidimensionnels soumis à des sollicitations créant des grands déplacements de la structure. Par grand déplacement, on entend des déplacements dont l'ordre de grandeur est celui de l'épaisseur des structures étudiées.

Ce thème de recherche est la suite directe du travail de thèse de l'auteur [R1], soutenue en 2001, dont l'objectif principal était la mise en place de modèles de simulations de vibrations non linéaires d'instruments de musique à percussion, du type des cymbales et des gongs, typiquement liées à des non-linéarités géométriques. Depuis, même si les gongs et les cymbales sont restés une application gardée en filigrane, car elle est très riche en terme de phénomènes non linéaires, les objectifs de ce thème de recherche ont été élargis. Précisément, il s'agit de :

- comprendre et expliquer la physique des mécanismes qui donne lieu aux phénomènes vibratoires non linéaires et chaotiques observés dans les plaques et les coques.
- fournir des modèles numériques, si possible prédictifs, capable de simuler les vibrations non linéaires et chaotiques observées.

Les non-linéarités étudiées ici sont de type géométrique, c'est-à-dire qu'elles proviennent uniquement des grands déplacements de la structure. Par conséquent, le comportement du matériau du système est supposé élastique et linéaire. Les modèles associés sont décrits dans le chapitre 2 et les techniques de résolution et de mesure au chapitre 3. Les phénomènes non linéaires vibratoires observés que l'on cherche à décrire sont :

- des fréquences de résonance (en régime forcé) ou d'oscillations (en régime libre) qui dépendent de l'amplitude du mouvement,
- des régimes de vibrations complexes : régimes périodiques avec distorsion harmonique, régimes quasi-périodiques, régimes chaotiques,
- des phénomènes de sauts entre régimes vibratoires, liés à des bifurcations,
- des couplages entre modes de vibration conduisant à des transferts d'énergie (hautes fréquences vers basses fréquences et basses fréquences vers hautes fréquences).



La littérature existante sur le sujet est conséquente et le lecteur intéressé peut se reporter aux ouvrages [224, 221, 227, 11] pour plus de détails. Par rapport à cela, les originalités de nos études sont :

- l'influence de la symétrie de révolution des systèmes étudiés sur les vibrations. Cela produit en particulier des modes dégénérés qui produisent des résonances internes 1:1.
- le choix et l'utilisation d'outils adaptés à la résolution des problèmes rencontrés (méthodes analytiques de perturbations, méthodes numériques de continuation, méthodes numériques d'intégration temporelle...)
- le traitement de tous les phénomènes observés, du régime périodique faiblement non linéaire au régime chaotique.

Ce thème a fait l'objet de 13 publications dans des revues internationales à comité de lecture [J1, J2, J3, J4, J5, J6, J7, J8, J9, J10, J11, J12, J18].

#### 4.1 Les objets étudiés



FIG. 4.1 – Cymbales et gongs : photographies et vue en coupe

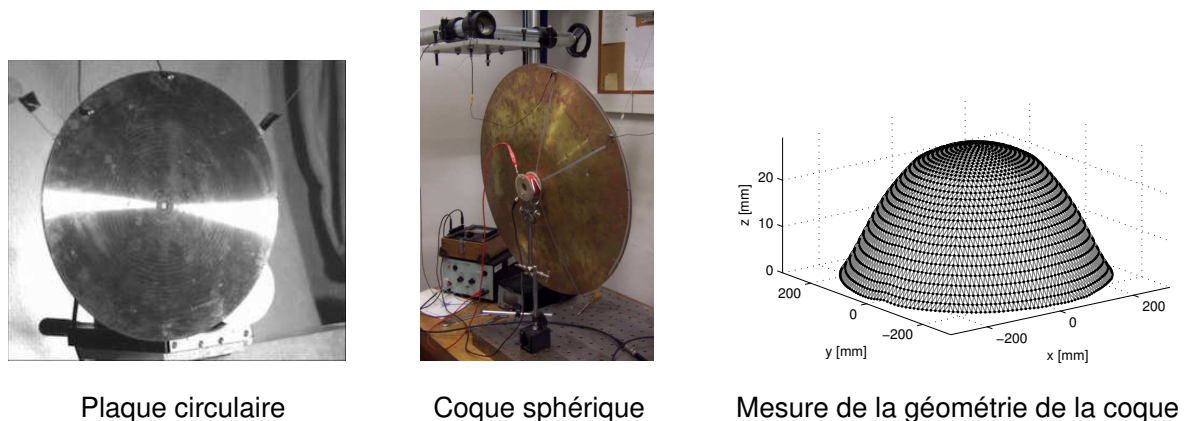


FIG. 4.2 – Photographies des plaques et des coques étudiées

Les gongs et les cymbales sont des instruments de percussions, qui ont tous la forme d'une coque mince à symétrie de révolution (Fig. 4.1). Ils sont le plus généralement fabriqués en bronze, à la

suite de plusieurs étapes de repoussage et martelage. En conditions normales d'utilisation, ils sont suspendus (soit par le centre pour les cymbales, soit par les bords pour les gongs) et frappés par divers objets plus ou moins souples (soit des mailloches, un marteau dont l'extrémité est revêtue d'un tampon de feutre, soit des baguettes de bois).

## 4.2 Expériences initiales : phénomènes observés

Cette première section est consacrée à quelques résultats expérimentaux obtenus sur le tam-tam chinois de la figure 4.1, qui permettent de mettre en évidence un certain nombre de phénomènes non linéaires qui sont au cœur des études qui suivent.

### 4.2.1 Analyse en régime libre

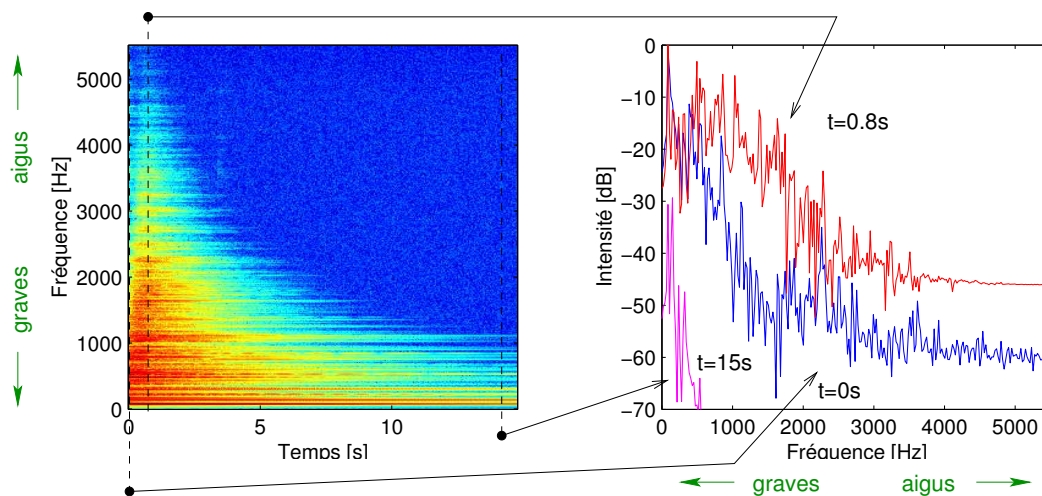


FIG. 4.3 – Évolution du contenu spectral de l'accélération du tam-tam au cours du temps. L'enrichissement spectral est bien visible : à l'instant de la frappe (à 0 s), le support spectral est confiné dans les graves (en dessous de 1500 Hz); puis il s'élargit rapidement, pour arriver à pleine brillance vers 0.8 seconde (jusqu'à 3000 Hz) [R1].

On s'intéresse ici au tam-tam chinois de la figure 4.1, de grand diamètre et de faible épaisseur, dont le timbre est sans hauteur musicale précise (on ne peut lui associer une note), ce qui conditionne son utilisation en musique occidentale le plus souvent comme bruitage. Lors d'une frappe vigoureuse, on peut remarquer que le son évolue au cours du temps : il se développe au tout début dans les graves, puis, très rapidement, s'enrichit de fréquences aiguës, pour atteindre toute sa brillance au bout de 1 seconde. Le son décroît ensuite pour s'éteindre au bout d'une vingtaine de secondes.

Cela est représenté par le spectrogramme de la figure 4.3, issu de [R1], qui représente l'évolution du contenu fréquentiel de l'accélération d'un point de la structure en fonction du temps. Le signal d'accélération est mesuré par un accéléromètre et la structure est mise en vibration par la frappe d'une mailloche. On retrouve bien l'enrichissement spectral observé à l'écoute du son : au moment de la frappe ( $t = 0$  s), le contenu spectral est cantonné dans les basses fréquences (en dessous de 1000 Hz), puis il s'enrichit jusqu'à 3000 Hz vers 0.8 s pour ensuite décroître à cause de l'amortissement. Le principal phénomène mis en évidence par cette expérience est le caractère *non linéaire* du système. Si celui-ci était linéaire, le contenu spectral des vibrations serait figé au court du temps et ne pourrait s'enrichir comme observé ici. Devant la relative complexité de la mise en place d'une expérience quantitative en régime libre (il faudrait pour cela concevoir un système d'excitation reproductible)

mais aussi à cause de la grande complexité des vibrations observées (le support spectral de l'excitation due à la mailloche en régime libre est à large bande, ce qui excite un grand nombre de modes simultanément) notre étude s'est concentrée sur des régimes vibratoires forcés, décrits ci-après.

#### 4.2.2 Analyse en régime forcé

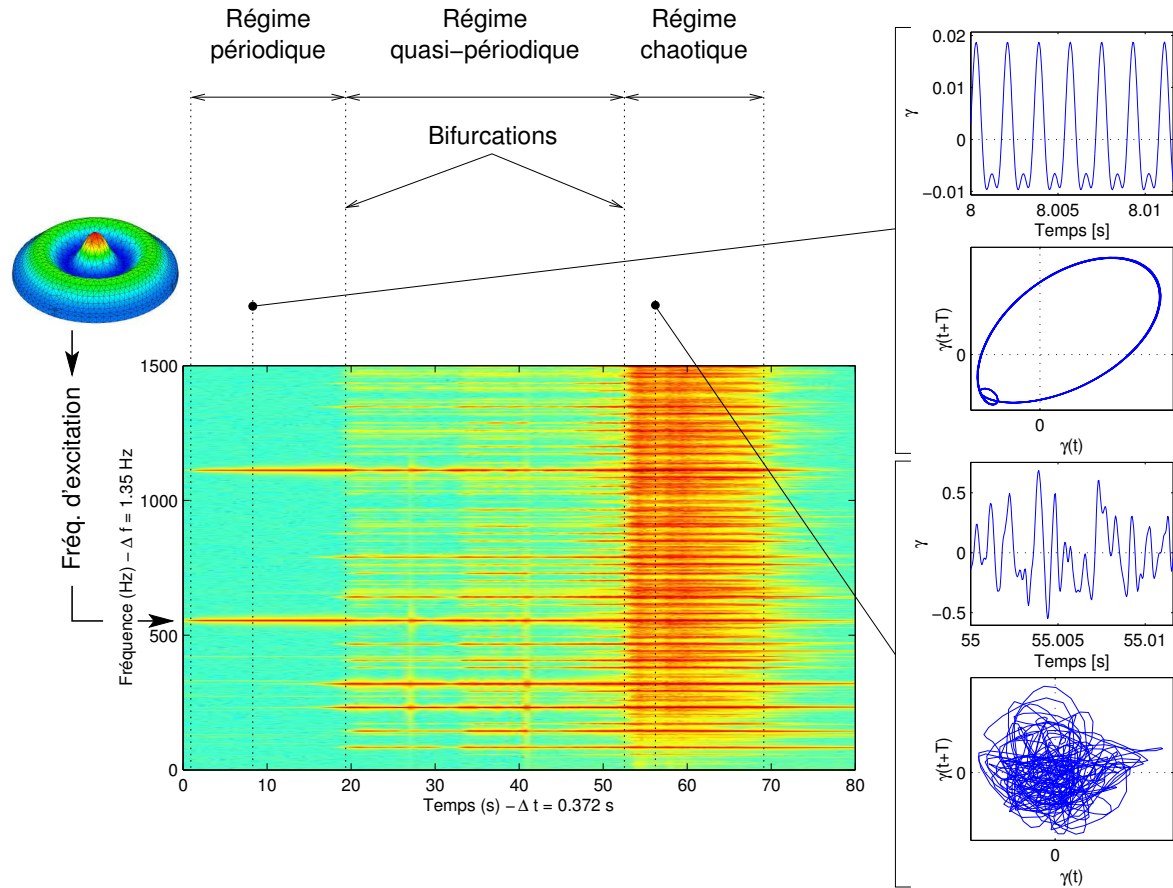


FIG. 4.4 – Spectrogramme, signaux d'oscillations et diagrammes de phase de l'accélération transverse du point central du gong, en excitation forcée sinusoïdale. L'amplitude de l'excitation est lentement variée, et la fréquence gardée constante à 556 Hz, proche de la fréquence propre du mode (0,3) [R1, J5].

On utilise le même tam-tam qu'au paragraphe 4.2.1, mis en vibration cette fois-ci par une force sinusoïdale imposée au centre [R1], [J5]. Pratiquement, on utilise le système bobine/aimant développé par l'auteur (§3.5.1 et [J2]), qui garantit le contenu mono fréquentiel de la force<sup>1</sup>. La fréquence de l'excitation est ici gardée constante (et calée à 556 Hz, à la résonance du mode (0,3) de la structure) et son amplitude est lentement augmentée. On mesure l'accélération d'un point de la périphérie de la structure avec un accéléromètre et la figure 4.4 est obtenue.

On observe globalement trois régimes vibratoires qualitativement différents, séparés par deux bifurcations, à mesure que l'amplitude du forçage augmente. Le premier régime est *périodique*, comme l'atteste l'évolution temporelle et la reconstruction dans l'espace des phases, qui est une courbe fermée. D'un point de vue spectral, le signal est constitué de la fréquence fondamentale du forçage et

<sup>1</sup>Le générateur de sinusoïdes utilisé est d'excellente qualité, avec un taux de distorsion harmonique très faible, puisque l'amplitude de l'harmonique 2 est à 100 dB au dessous de celle de la fondamentale

d'harmoniques, une première manifestation des non-linéarités (une structure linéaire répondrait avec le même contenu spectral que l'excitation, §2.1.1). Ensuite, après une première bifurcation, le spectre s'enrichit de plusieurs nouvelles fréquences en dessous de la fréquence fondamentale, ces fréquences étant incommensurables, ce qui est caractéristique d'un régime *quasi-périodique*. Enfin, après une seconde bifurcation, les vibrations deviennent *chaotiques*, caractérisées par un spectre continu et large bande et une reconstruction complexe du signal dans l'espace des phases. À l'oreille, le son obtenu dans ce dernier régime de vibration est très riche, très brillant et très proche de celui obtenu en condition de jeux usuelles (excitation impulsionnelle).

Ce comportement composé des trois régimes de vibrations successifs obtenus après deux bifurcations a été observé expérimentalement presque systématiquement, dans le cas où la fréquence d'excitation est calé sur d'autres fréquences de résonance du tam-tam [R1], mais aussi pour plusieurs autres structures comme des cymbales. Cela conduit à considérer cette route vers le chaos comme le comportement générique des milieux minces non linéaires. Des simulations plus récentes, évoquées dans le paragraphe 4.6, confirment ces résultats expérimentaux. De plus, les travaux récents de C. Touzé et ses collaborateurs interprètent le régime chaotique sous l'angle de la turbulence d'onde, avec un réel succès [93, 45, 214]. Dans mes travaux, en collaboration avec C. Touzé, je me suis principalement intéressé à caractériser et modéliser les deux premiers régimes, périodique et quasi-périodique.

### 4.3 Analyse modale

Avant toute analyse non linéaire, il est nécessaire de procéder à une analyse modale classique des structures étudiées, car les modes propres sont le point d'entrée pour comprendre la dynamique complexe de ces systèmes. Pour le régime périodique, la dynamique n'est en général engendrée que par un seul mode non linéaire, qui est le prolongement pour les fortes amplitudes d'un mode linéaire donné (§3.3). Pour le régime quasi-périodique, la dynamique est caractérisée par plusieurs modes en résonance interne (§3.3.4(a)).

Comme précisé au paragraphe 4.1, les objets étudiés ici ont tous la forme de coques à symétrie de révolution. Cette propriété a des conséquences directes sur l'analyse modale, dont un exemple est proposé sur les figures 4.5 et 4.6.

- Les lignes nodales de chaque déformée modale forment un ensemble de cercles concentriques, centrés sur l'axe de symétrie, et de lignes diamétrales, qui coupent l'axe de symétrie. On a pour habitude de caractériser un mode donné par le couple  $(k, n)$ , où  $k$  est son nombre de diamètre nodaux et  $n$  son nombre de cercles nodaux.
- On peut regrouper les modes en deux familles :
  - La première est constituée des modes *axisymétriques*, qui ne possèdent aucun diamètre nodal et ont donc une géométrie axisymétrique. Ce sont donc les modes  $(0, n)$ .
  - La seconde est constituée des modes *asymétriques*, qui possèdent au moins un diamètre nodal. Leur particularité est qu'ils apparaissent par paire dans le spectre. À tout couple donné  $(k, n)$ ,  $k \neq 0$ , deux modes orthogonaux sont associés ; ils comportent la même pulsation propre  $\omega_{kn}$  et leur déformées modales sont identiques à une rotation de  $\pi/(2k)$  près autour de l'axe de symétrie. Les deux modes correspondants sont appelés soit configurations préférentielles [308], soit modes compagnons [11].
- Ces propriétés sont exactement vérifiées si la symétrie de révolution est parfaite. En pratique, celle-ci est toujours brisée, si bien que les deux fréquences propres associées aux deux modes compagnons sont légèrement différentes (cela est visible sur la figure 4.6). Ce résultat est aussi obtenu avec une analyse modale effectuée par la méthode des éléments finis, car en général le maillage brise légèrement la symétrie.

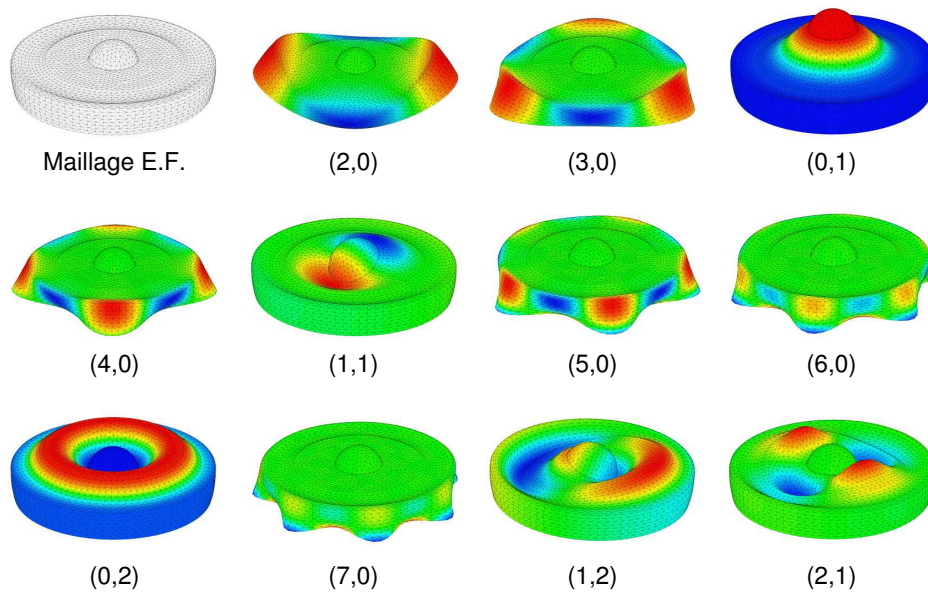


FIG. 4.5 – Déformées modales du gong viet-namien de la figure 4.1, obtenues par un calcul numérique par la méthode des éléments finis avec Cast3M [58]

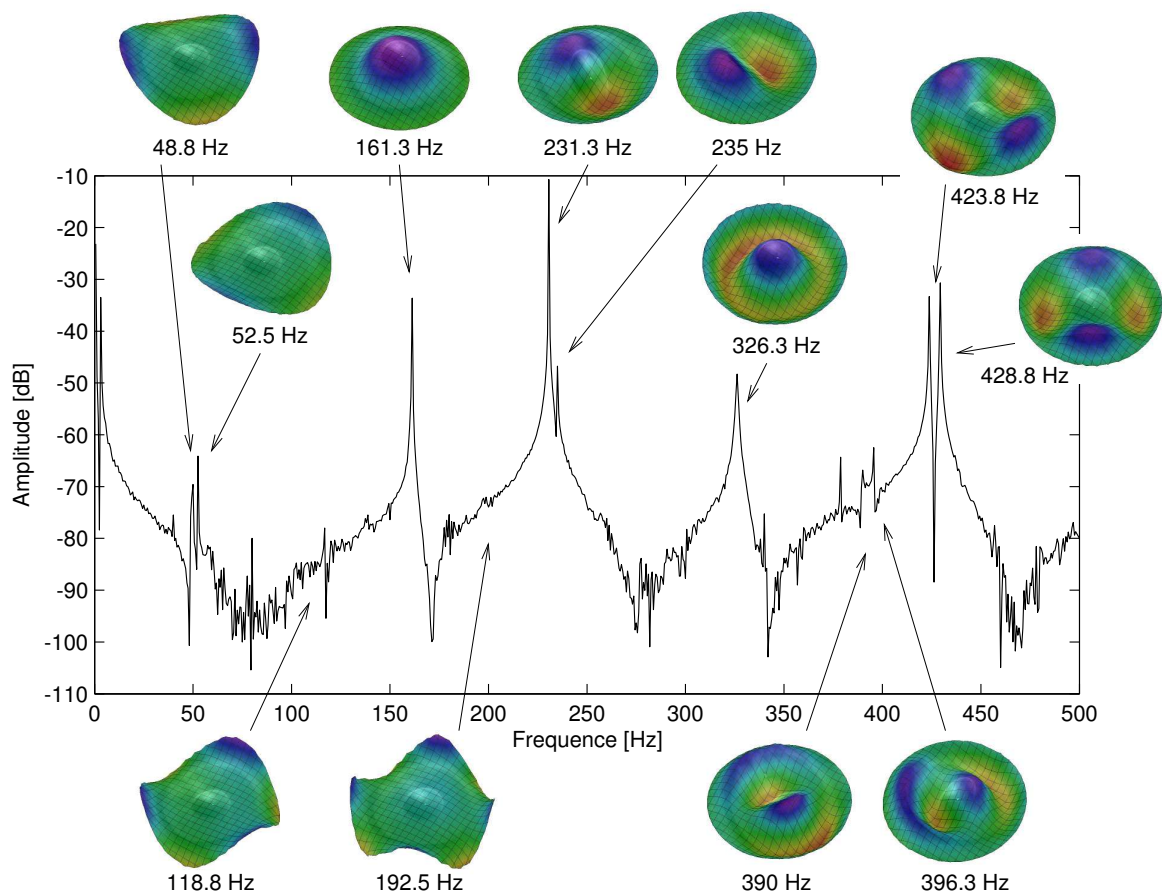


FIG. 4.6 – Fonction de réponse en fréquence expérimentale du gong viet-namien de la figure 4.1, au point d'excitation, situé au milieu de la partie plane du profil, proche du bord. Déformées modales expérimentales associées aux pics de résonances et mesurées au vibromètre laser à balayage

Ces résultats sont généraux et s'appliquent à toutes les coques à symétrie de révolution, qui incluent évidemment le cas des plaques circulaires. Notamment, la géométrie des déformées modales est souvent similaire à celles des figures 4.5 et 4.6. Une conséquence directe de ces propriétés pour les vibrations non linéaires est la présence systématique de résonances internes 1:1 entre les paires de modes compagnons, phénomène que nous avons particulièrement étudié et qui est décrit au paragraphe 4.5.

#### 4.4 Le régime périodique

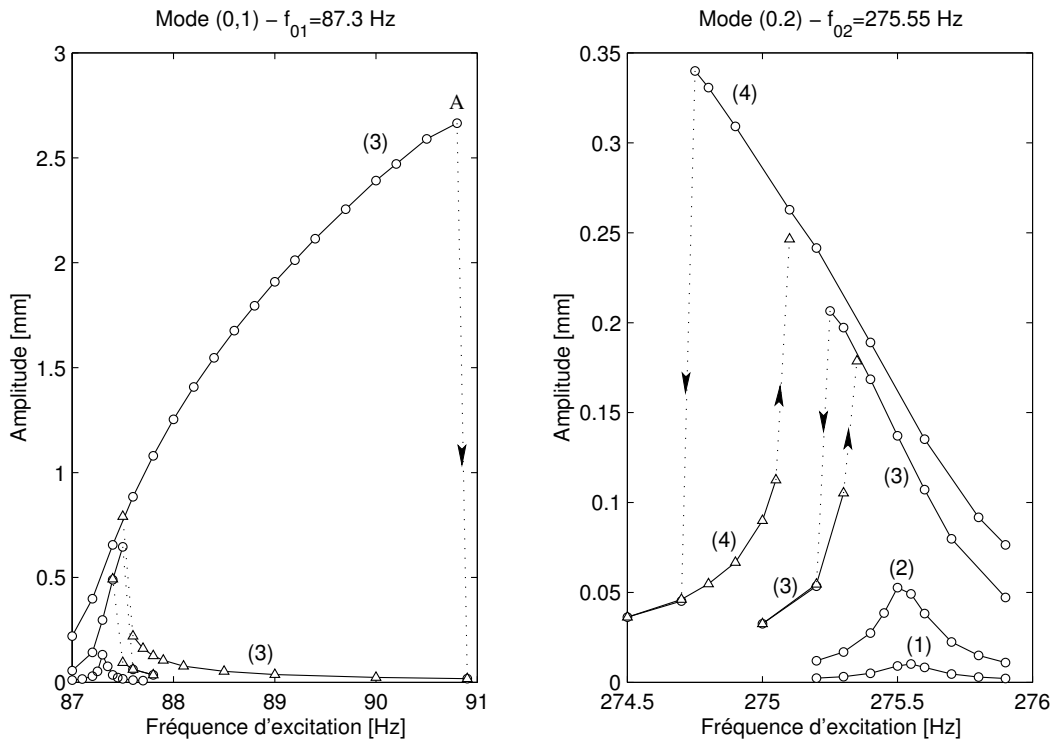


FIG. 4.7 – Courbes de résonance des deux premiers modes axisymétriques du tam-tam de la figure 4.1. Les courbes de même numéro correspondent au même forçage : courbe (1) :  $13.10^{-3} N$ , (2) :  $64.10^{-3} N$ , (3) :  $0.25 N$  et (4) :  $0.51 N$ . Les ‘ $\circ$ ’ se rapportent aux branches obtenues en balayage à fréquence croissante et les ‘ $\Delta$ ’ aux balayages à fréquences décroissantes [R1].

Les régimes périodiques de vibrations dans les structures minces sont caractéristiques de vibrations faiblement non linéaires, c'est-à-dire lorsque l'amplitude des vibrations est faible. Dans ce cas, le formalisme des modes non linéaires exposé au paragraphe 3.3 montre que la dynamique dans l'espace des phases, en régime libre, est incluse dans une variété invariante bidimensionnelle, c'est-à-dire que les vibrations ne sont gouvernées que par *un seul* mode non linéaire.

Ce régime est caractérisé par (i) une distorsion harmonique du signal de vibration (cela est visible sur la figure 4.4), (ii) une dépendance de la fréquence des oscillations libres en l'amplitude des oscillations et (iii) des phénomènes de sauts entre solutions stables en régime forcé. Les figures 4.7 et 4.8, issues de ma thèse [R1], sont reprises ici comme exemples, car elles offrent une illustration expérimentale parfaite du comportement faiblement non linéaire des coques, qui, depuis, a fait l'objet d'une plus large compréhension théorique, notamment à la lueur des modes non linéaires.

Les courbes de la figure 4.7 ont été obtenues en excitant le tam-tam chinois de la figure 4.1 avec une force sinusoïdale, au centre, en gardant son amplitude constante et en faisant varier pas à pas la

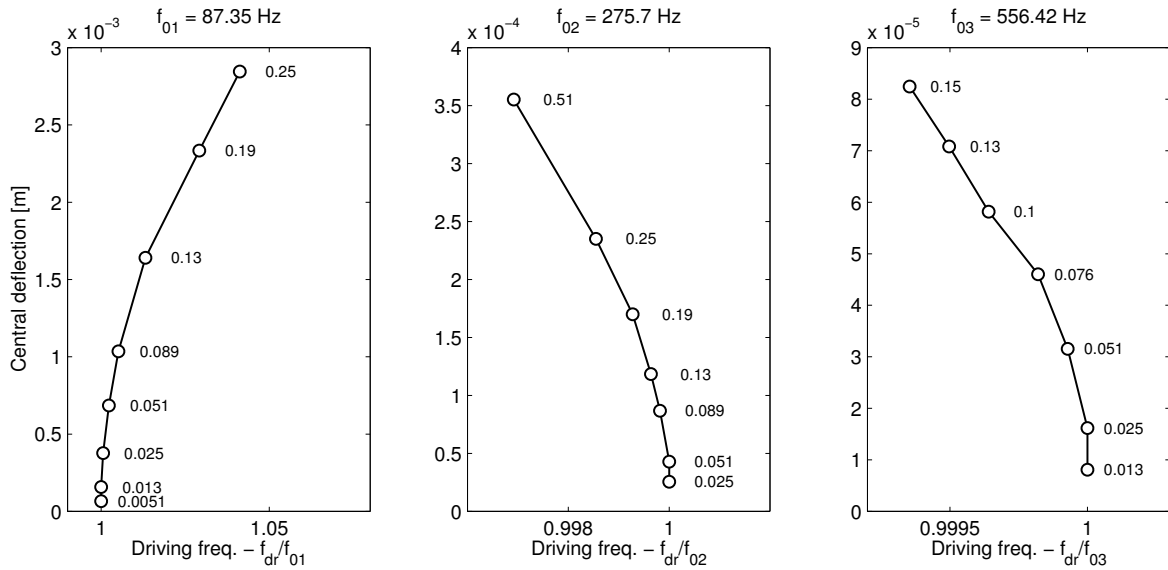


FIG. 4.8 – « backbone curves » des trois premiers modes axisymétriques du tam-tam de la figure 4.1. Les amplitudes de forçage (en N) correspondant à chaque point de mesure sont précisées [R1]

fréquence d'excitation autour des résonances des deux premiers modes axisymétriques. La figure 4.8 représente les « backbone curves » des trois premiers modes axisymétriques, c'est-à-dire les courbes d'amplitude du mouvement en fonction de la fréquence des oscillations libres. Ces courbes ont été obtenues en régime forcé, en constatant que la fréquence des oscillations libres est très proche de la fréquence de résonance. La réponse du système correspond globalement à celle obtenue à partir d'un oscillateur de Duffing. Premièrement, en régime forcé, les phénomènes de saut sont clairement visibles, ainsi que la fréquence de résonance qui dépend de l'amplitude du forçage. En régime libre, il est également clair que la fréquence des oscillations dépend aussi de l'amplitude du mouvement. Ce dernier caractère est associé au type de non-linéarité, qui dépend ici du mode considéré : le premier mode axisymétrique est « raidissant » alors que les deux suivants sont « assouplissants ». On peut noter que la méthode de mesure des « backbone curves » a été théorisée, améliorée et validée récemment par G. Kerschen et ses collaborateurs, en étendant la méthode d'appropriation modale au cas non linéaire [251, 252].

Ces observations sont en parfait accord avec le formalisme des modes non linéaires introduit au paragraphe 3.3 : la dynamique ne dépend que d'un seul mode non linéaire. Un modèle correct qui prend en compte ces phénomènes est donc celui décrit au paragraphe 3.3.5 : la dynamique est gouvernée par la forme normale réduite à un seul oscillateur du type de l'équation (3.47), dont la tendance de non-linéarité est donnée par le signe du paramètre  $T_p$  de l'équation (3.50). Si nécessaire, le tracé de la « backbone curve » est possible en utilisant le changement de variable (3.45) pour revenir aux coordonnées modales. Il est probable qu'une troncature à un seul mode linéaire donnerait des résultats faux (comme expliqué au paragraphe 3.3.5). Les courbes en régime forcé peuvent être approximées par la même méthode, en réduisant la dynamique au seul mode non linéaire considéré.

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que des coques faiblement courbées, soit sphériques [J7], soit de géométrie plus générale [J11, J10], où des modèles semi-analytiques sont disponibles. L'équivalent appliqué à des cymbales est directement possible avec les modèles de plaques circulaires imparfaites développés dans [J12] et repris au paragraphe 2.3.1 (Eqs. (2.48)), car celles-ci ont vraiment la géométrie de coques faiblement courbées. En revanche, le cas des gongs est légèrement différent à cause du bord recourbé, qui exclut l'utilisation du modèle (2.48) et impose l'utilisation de la méthode des

éléments finis, ce qui est en cours d'étude.

## 4.5 Quelques résonances internes

### 4.5.1 Mise en évidence : un régime quasi-périodique

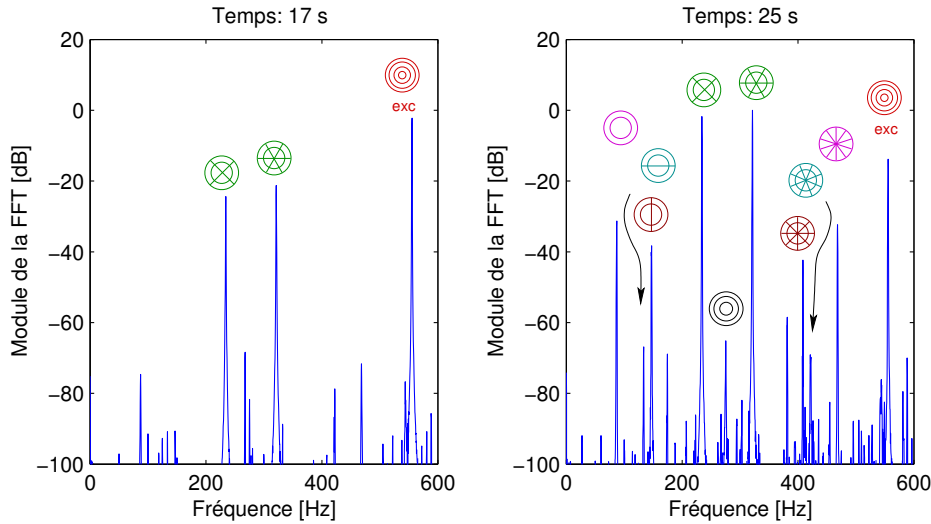


FIG. 4.9 – Spectre de l'accélération transverse du point central du gong, aux dates 17 et 25 secondes de la figure 4.4. Chaque combinaison de résonance est représentée avec une couleur [R1].

Comme introduit au paragraphe 4.2.2, le second régime de vibration du tam-tam en régime forcé, atteint après la première bifurcation de la figure 4.4, est un régime quasi-périodique caractérisé par la présence de fréquences fondamentales incommensurables. Lorsqu'on observe plus en détail le spectre du signal à certains instants de l'expérience de la figure 4.4 (qui correspondent à un forçage donné), on obtient la figure 4.9, qui montre que chacun des pics présents en dessous de la fréquence d'excitation correspond à une fréquence propre de la structure. De plus, on montre aisément que ces modes additionnels de retrouvent dans le spectre par paire, telles que :

$$\omega_i + \omega_j = \omega_{\text{exc}} \simeq \omega_{03}, \quad \text{ou} \quad 2\omega_i = \omega_{\text{exc}} \simeq \omega_{03}, \quad (4.1)$$

où  $\omega_{03}$  est la pulsation propre du troisième mode axisymétrique,  $\omega_{\text{exc}}$  la pulsation d'excitation et  $\omega_i, \omega_j$  deux autres fréquences propres des modes appariés en résonance interne. La seconde relation est un cas particulier de la première. Ces relations sont des résonances internes d'ordre 2. Comme expliqué au paragraphe 3.3.4, ces résonances internes sont responsables de couplages forts entre les modes, qui expliquent leur apparition dans le spectre avec une amplitude quasi équivalente au mode (0, 3), qui est le seul à être excité directement à sa résonance par le forçage.

Une seconde caractéristique des résonances internes clairement visible ici est que le mécanisme de couplage non linéaire est essentiellement *fréquentiel*, comme expliqué au paragraphe 3.3.4(a), et dépend très peu de la *géométrie* des déformées modales. Ainsi, les modes couplés dans une résonance interne peuvent avoir des déformées modales radicalement différentes. Par exemple, la seconde résonance interne de la figure 4.10 couple le premier mode axisymétrique, dont la déformée modale est parfaitement axisymétrique, avec le cinquième mode asymétrique, qui ne déforme que le pourtour de la structure. Dans [J6], j'ai montré que même si les relations de résonance interne (4.1), ou plus généralement celles des équations (3.40), sont vérifiées par les fréquences propres, alors la symétrie de



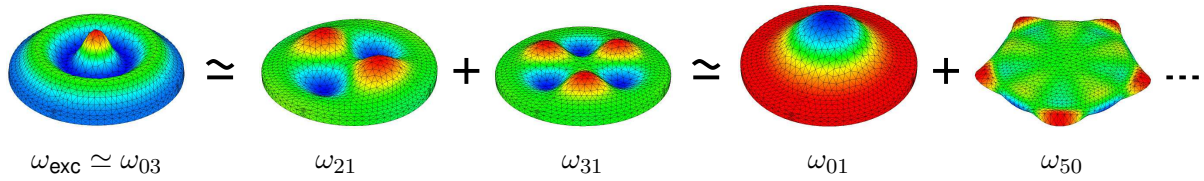


FIG. 4.10 – Quelques déformées modales impliquées dans les résonances internes des spectres de la figure 4.9

révolution du système peut tout de même s'opposer au couplage, car elle annule certains coefficients  $g_{ij}^k$  et  $h_{ijl}^k$  des termes résonants des équations (3.36).

L'exploration théorique du régime quasi-périodique illustré par la figure 4.9 est a priori très complexe, car (i) au moins *dix* modes en résonance interne sont présents, ce qui conduirait à une forme normale réduite à *dix* oscillateurs (ii) les solutions obtenues sont quasi-périodiques (et non périodiques), et peu de méthodes de résolution sont disponibles. Il est tout de même possible d'obtenir des résultats avec des méthodes de perturbation dans le cas particulier d'une seule résonance interne ( $\omega_1 + \omega_2 \simeq \omega_3$ ). De plus, des méthodes numériques récentes devraient permettre d'effectuer la continuation de ces régimes quasi-périodiques [181, 120, 237]. Pour cette raison, nous nous sommes concentré sur certaines résonances internes particulières, qui conduisent à des régimes périodiques.

#### 4.5.2 Résonance 1:1

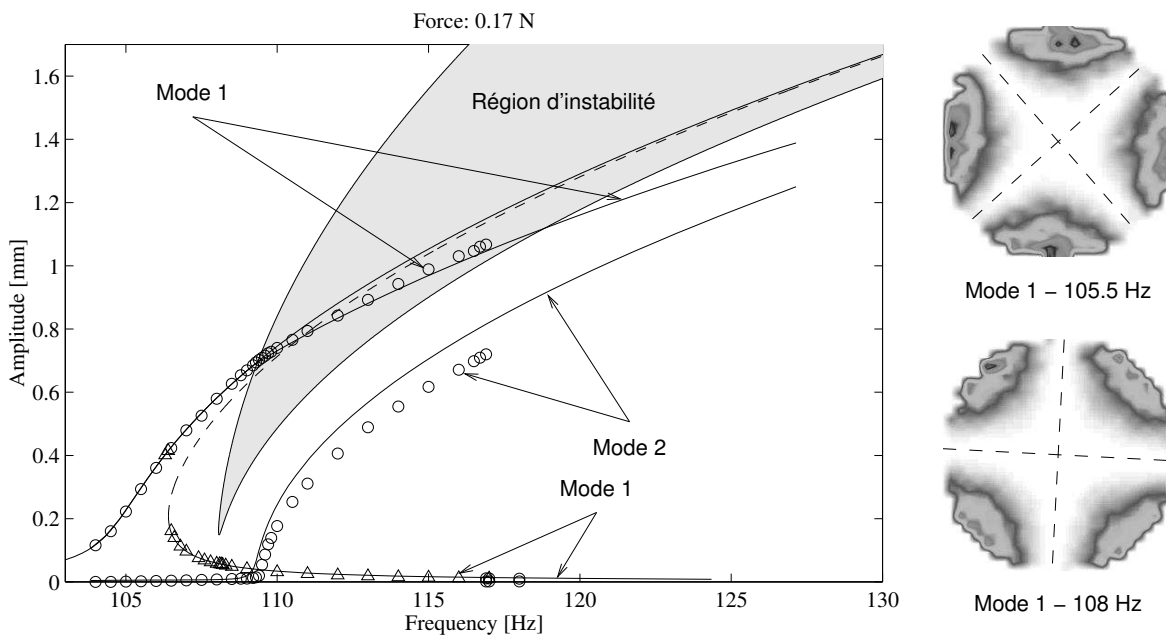


FIG. 4.11 – Résonance 1:1 dans la plaque circulaire de la figure 4.2 : amplitude des harmoniques fondamentales des deux modes en fonction de la fréquence d'excitation. '—' : résultats théorique ; 'o' : expérience à fréquence croissante ; 'Δ' : expérience à fréquence décroissante. La zone grisée correspond au lieu où la solution découplée est instable. Les deux déformées modales expérimentales, obtenues à l'aide d'un vibromètre laser à balayage, sont aussi représentées [J2].

Une résonance 1:1 est observée chaque fois que deux modes ont des fréquences propres de valeurs

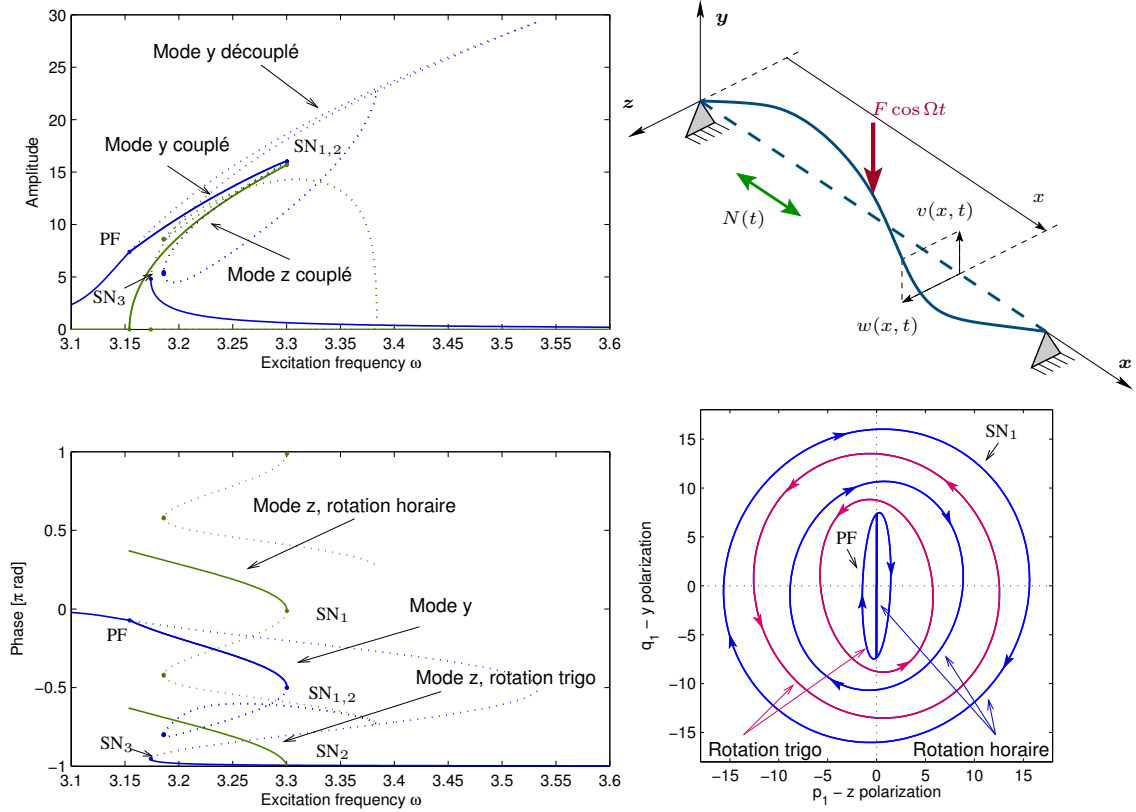


FIG. 4.12 – Courbe de résonance d'une corde excitée suivant  $y$ . Amplitude et phase de la première harmonique des deux coordonnées modales associées aux premiers modes suivant  $y$  et  $z$  en fonction de la pulsation d'excitation  $\Omega$ . Mouvement d'un point de la corde dans un plan orthogonale à son axe. Simulations avec la méthode HBM-MAN et stabilité avec la méthode de Hill, avec  $H = 5$  harmoniques. '—' : branches stables ; '...' : branches instables. 'SN' : bifurcations nœud col ; 'PF' : bifurcations fourches [C36, C41].

voisines :

$$\omega_1 \simeq \omega_2 \quad (4.2)$$

Dans les structures à symétrie de révolution, c'est le cas pour tous les couples de modes compagnons (§4.3). C'est aussi le cas pour les structures mono-dimensionnelles dont la section droite présente des symétries, comme des cordes ou des poutres à section carré ou circulaire, entre les deux mouvements dans les plans orthogonaux à l'axe de la poutre.

L'étude de la résonance 1:1 a d'abord été menée à partir d'un calcul analytique par une méthode de perturbation (la méthode des échelles multiples) de la forme normale du système réduite aux deux modes non linéaires en résonance 1:1. Comme la structure est plate, aucun terme quadratique n'est présent dans les oscillateurs (3.36) et la forme normale s'écrit simplement en gardant les termes résonants cubiques (§3.3.4(a)) :

$$\begin{cases} \ddot{R}_1 + 2\mu_1 \dot{R}_1 + \omega_1^2 R_1 + \Gamma_1 R_1^3 + \Gamma_2 R_1 R_2^2 = F \cos \Omega t, \\ \ddot{R}_2 + 2\mu_2 \dot{R}_2 + \omega_2^2 R_2 + \Gamma_3 R_2^3 + \Gamma_4 R_1^2 R_2 = 0, \end{cases} \quad (4.3a)$$

$$(4.3b)$$

où un terme de forçage et des termes d'amortissement visqueux ont été ajoutés. La résolution de ce système par la méthode des échelles multiples a l'avantage de proposer des résultats de stabilité analytiques. Notamment, on a montré dans [J1] que deux solutions possibles du système coexistent :

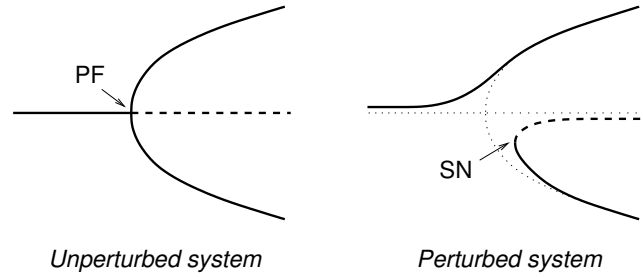


FIG. 4.13 – Déformation d'une bifurcation fourche par perturbation du système [222, §2.3.8]

- une solution *découplée* où le mode directement excité est le seul à vibrer ( $R_1 \neq 0, R_2 = 0$ ) et
- une solution *couplée* où les deux modes vibrent ( $R_1 \neq 0, R_2 \neq 0$ )

De plus, en étudiant leur stabilité, on a montré qu'il existe une zone dans le plan amplitude / fréquence d'excitation à l'intérieur de laquelle la solution découplée est instable, au profit d'une solution couplée stable. Cela est illustré sur la figure 4.11, dans le cas d'une résonance 1:1 entre les deux modes compagnons (2,0) d'une plaque circulaire en conditions aux limites libres. Cette figure montre aussi des résultats expérimentaux issus de [J2], en excellent accord avec la théorie, sans besoin de gros recalage. Le calcul analytique montre aussi que dans le régime couplé, les oscillations des deux modes se placent exactement en quadrature de phase, si bien qu'une onde progressive tournante est observée.

Plus récemment, pour valider le code de calcul de stabilité de solutions périodiques du paragraphe 3.4.2, j'ai calculé les branches de solution et leur stabilité avec la méthode de continuation HBM/Manlab/Hill [23], dans le cas de la réponse d'une corde forcée par un effort sinusoïdal vertical qui a été étudiée [C36, C41]. La figure 4.12 est obtenue. Elle montre des résultats complémentaires à l'étude analytique précédemment décrite. Notamment, la méthode numérique n'impose pas l'utilisation de la réduction par forme normale, puisque le système modal (3.20) est directement simulé avec autant de mode que nécessaire dans la troncature. De plus, la troncature au premier ordre de la méthode des échelles multiples est évitée, si bien que les branches de solution obtenues sont plus proches de la solution exacte du système. Ensuite, la détection des bifurcations, la détermination de leur type et le calcul de la stabilité sont immédiats. On montre ainsi que la solution couplée apparaît après une bifurcation fourche (PF), qui laisse instable la solution découplée au profit de *deux* solutions couplées stables, qui correspondent à des mouvements de rotation de la corde dans des sens opposés, équivalents aux ondes progressives de la plaque circulaire. La quadrature de phase entre les deux coordonnées modales est d'ailleurs visible sur la figure 4.12. L'existence de ces deux solutions avait été obtenue de manière moins systématique dans le cas de la plaque circulaire, puisque deux solutions couplées ont aussi été calculées et mesurées dans [J2], correspondant à des ondes progressives tournant en sens inverse. Ce dernier cas, vu sous l'angle des bifurcations, est en fait une bifurcation fourche qui a dégénéré par brisure de symétrie, comme représenté sur la figure 4.13. La brisure de symétrie provient du fait qu'en pratique, il est difficile de n'exciter qu'un seul des deux modes, et qu'ainsi, le second oscillateur de la forme normale (4.3) est aussi muni d'un petit terme de forçage, considéré dans [J2]. Dans un cadre expérimental, la seconde branche ne peut pas être obtenue par continuation de solutions stables et il est nécessaire de perturber le système pour l'atteindre. C'est ce qui a été fait dans [J2], en imposant un choc sur la structure.

Dans les deux cas de la plaque et de la corde, les valeurs des coefficients cubiques  $\Gamma_{ijl}^k$  (ou  $h_{ijl}^k$ ) de la formulation modale (3.36) (ou (3.20)) a été obtenue à partir des modèles analytiques exposés au paragraphe 2.3, discrétisés par projection sur base modale, comme expliqué au paragraphe 3.1. Précisément, le modèle de plaque circulaire est celui des équations (2.44) et le modèle de corde (avec

raideur en flexion) celui des équations (2.42).

### 4.5.3 Résonance 1:1:2

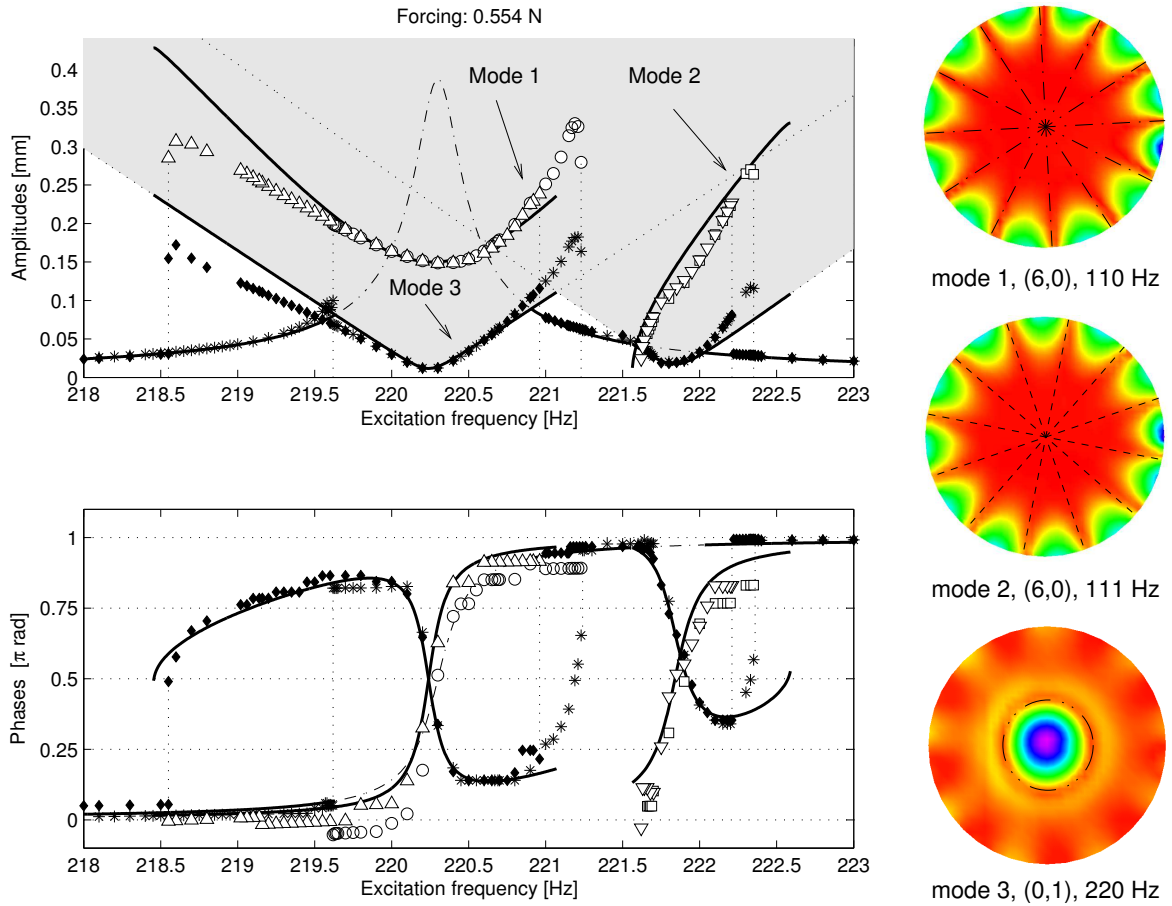


FIG. 4.14 – Résonance 1:1:2 dans la coque sphérique de la figure 4.2 : amplitude des harmoniques fondamentales des trois modes en fonction de la fréquence d'excitation. '—' : résultats théoriques ; '○', '□', '\*' modes 1, 2 et 3 mesurés en fréquence croissante ; '△', '▽', '◆' : idem en fréquence décroissante. La zone grisée correspond au lieu où la solution découplée est instable. Les trois déformées modales expérimentales, obtenues à l'aide d'un vibromètre laser à balayage, sont aussi représentées [J8].

Une résonance 1:1:2 est observée chaque fois que trois modes ont des fréquences propres telles que :

$$\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega_3/2 \quad (4.4)$$

Ce type de résonance interne est rencontré là encore dans les structures à symétrie de révolution. Dans le cas d'une coque sphérique comme celle représentée sur la figure 4.2, on a montré à partir d'une analyse modale linéaire (nous avons proposé une solution analytique dans [J6]) que lorsqu'on fait varier la courbure d'une coque sphérique, les modes asymétriques  $(k, 0)$  (sans cercles nodaux) ont leurs fréquences quasi indépendantes de la courbure. En revanche, les fréquences de tous les autres modes augmentent en fonction de la courbure, si bien qu'il est assez aisé d'observer une résonance 1:1:2 entre deux modes compagnons  $(k, 0)$  et un troisième mode. La coque sphérique de la figure 4.2

présente ce type de résonance interne entre les deux modes compagnons (6, 0) et le premier mode axisymétrique (0, 1), dont les déformées modales sont représentées sur la figure 4.14.

Une démarche analytique identique à celle de la résonance 1:1 a été adoptée. On a tout d'abord montré dans [J6] que les termes cubiques sont d'un ordre de grandeur inférieur aux termes quadratiques lorsque l'amplitude des vibrations est faible (ce résultat découle de l'équation (3.10), p. 55). Le modèle réduit étudié a ainsi été la forme normale du système (3.36), dépourvu de ses termes cubiques et tronqué aux trois modes en résonance interne :

$$\begin{cases} \ddot{R}_1 + 2\mu_1\dot{R}_1 + \omega_1^2 R_1 + \beta_1 R_1 R_3 = 0, & (4.5a) \\ \ddot{R}_2 + 2\mu_2\dot{R}_2 + \omega_2^2 R_2 + \beta_2 R_2 R_3 = 0, & (4.5b) \\ \ddot{R}_3 + 2\mu_3\dot{R}_3 + \omega_3^2 R_3 + \beta_3 R_1^2 + \beta_4 R_2^2 = F \cos \Omega t, & (4.5c) \end{cases}$$

où là encore un terme de forçage et des termes d'amortissement visqueux ont été ajoutés. Le calcul analytique de la solution a permis de mettre en évidence trois solutions possibles :

- une solution *découplée* où le mode 3, directement excité, est le seul à vibrer ( $R_1 = R_2 = 0$ ,  $R_3 \neq 0$ ),
- une première solution *couplée* ( $C_1$ ), où le premier mode est couplé au troisième ( $R_1, R_3 \neq 0$ ,  $R_2 = 0$ ),
- une seconde solution *couplée* ( $C_2$ ), où le second mode est couplé au troisième ( $R_2, R_3 \neq 0$ ,  $R_1 = 0$ ).
- Une possibilité de quatrième solution, où les trois modes sont couplés, a aussi été identifiée, mais on a montré qu'elle n'existait que pour un cas de parfaite symétrie de révolution :  $\omega_1 = \omega_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ .

De manière analogue à la résonance 1:1, des zones d'instabilités (une associée à chacune des solutions couplées  $C_1$  et  $C_2$ ) ont été trouvées.

La figure 4.14 montre un cas de validation expérimentale du modèle réduit sur une courbe de résonance. Là encore, la correspondance entre le modèle et les expériences est bonne, moyennant un recalage des coefficients du modèle réduit. Les courbes obtenues montrent que les deux couplages  $C_1$  et  $C_2$  sont obtenus successivement en balayant en fréquence et que les changements de solutions sont associés à des phénomènes de saut. D'autres courbes sont proposées dans [J8], montrant que le modèle réduit ci-dessus n'est valable que pour les faibles amplitudes de vibrations. Pour de plus fortes amplitudes, les courbes théoriques s'éloignent de la théorie, tout en gardant une excellente cohérence qualitative. Plusieurs corrections du modèle ont été proposées :

- Des simulations ont été produites, en ajoutant des termes cubiques dans la forme normale 4.5 [C18], [J12]. Ces résultats ont mis en évidence des petites différences quantitatives, le modèle plus riche étant plus proche des mesures. Notamment, les mesures ont mis en évidence une incurvation de la solution non couplée, caractéristique de termes cubiques dans les équations. De plus, des zones de réponse quasi-périodiques ont aussi été observées et obtenues dans le modèle avec les termes cubiques.
- Le modèle de plaque imparfaite des équations (2.48) a été utilisé pour prendre en compte les défauts de sphéricité de la coque, à partir d'une mesure de sa géométrie (Fig. 4.2(droite)). Ce modèle a permis de se rapprocher des valeurs de coefficients obtenues par recalage avec les mesures [J12].

Il est intéressant de noter que d'un point de vue physique, les régimes de vibrations couplés observés sont caractérisés par de l'énergie qui est injectée par le forçage à une fréquence  $\Omega$ , et une réponse périodique de la structure à une fréquence fondamentale  $\Omega/2$ . C'est finalement une première

approche du comportement observé sur le tam-tam dans la zone quasi-périodique de la figure 4.4. Enfin, plus récemment, avec la thèse de Mélodie Monteil, que je co-encadre avec Cyril Touzé et Joël Frelat<sup>2</sup>, je m'intéresse de nouveau à ces résonances 1:2, car elles sont au cœur des mécanismes de production du son des steel-pans [C39].

## 4.6 La route vers le chaos

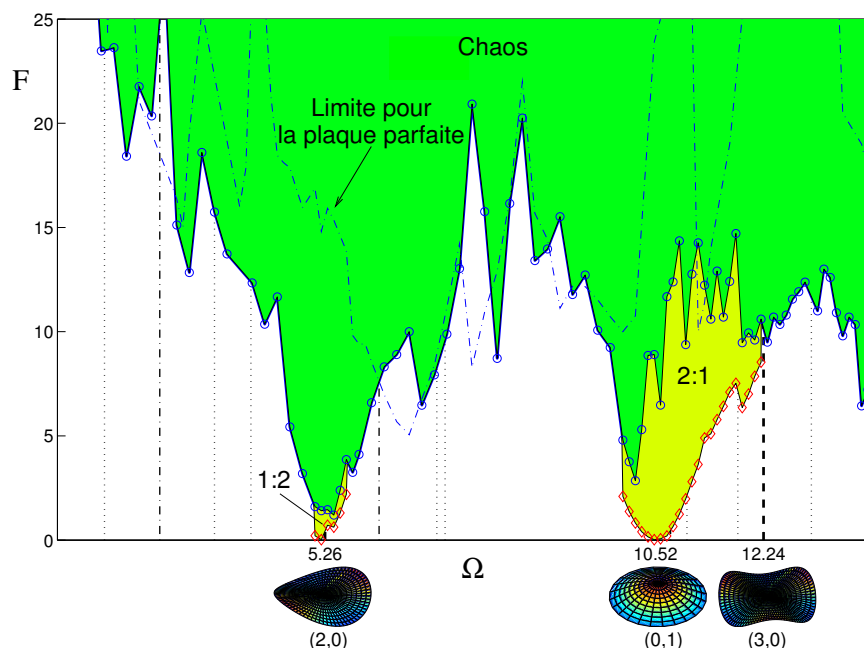


FIG. 4.15 – Diagramme de bifurcation montrant l'amplitude minimale  $F$  de la force nécessaire pour obtenir le chaos en excitant une plaque circulaire imparfaite, à bord libre. L'imperfection a la forme du mode  $(0,1)$ . Dans toute la région colorée supérieure, le chaos est obtenu : en dessous, deux zones où la résonance interne 1:2:2 est activée sont aussi colorées ; ailleurs ce sont des solutions périodiques. La limite entre les solutions périodiques et le chaos pour une plaque parfaite est indiquée par un trait mixte [J18].

Récemment, la route vers le chaos observée expérimentalement sur la figure 4.4 a été revisitée de manière théorique par intégration temporelle du modèle modale (3.20). Un grand nombre de modes a été conservé pour la simulation (jusqu'à 35 modes) et 5 millions de périodes ont été simulées, ce qui représente des semaines de calcul ! La figure 4.6 résume un grand nombre de simulations, chacune consistant à exciter la structure par un signal sinusoïdal de fréquence  $\Omega$  constante et d'amplitude croissante, jusqu'à arriver au chaos. Plusieurs fréquences ont été testées et pour chacune d'elles, les forçages permettant d'obtenir des deux bifurcations de la figure 4.4 sont indiquées. Deux structures différentes ont été choisies : une plaque circulaire à bord libre et une plaque imparfaite, à bord circulaire, dont l'imperfection a la forme du premier mode axisymétrique. L'amplitude de l'imperfection a été choisie de l'ordre d'une demie épaisseur de la plaque, de telle sorte que deux résonances internes soient activées :

$$\omega_{01} \simeq 2\omega_{20}, \quad \omega_{11} \simeq 2\omega_{01} \quad (4.6)$$

<sup>2</sup>Institut J. Le Rond d'Alembert, université P. et M. Curie, Paris

Dans le cas de la plaque parfaite, les simulations montrent que la première bifurcation (du régime périodique vers le régime quasi-périodique) n'apparaît pas et que le chaos est obtenu directement à la suite d'une seule bifurcation. Le lieu de ces bifurcations est indiqué par le trait mixte sur la figure 4.6. Dans le cas de la plaque imparfaite, la bifurcation vers le chaos est observée pour des amplitudes de forçage plus faible que dans le cas de la plaque parfaite. De plus, la présence des résonances internes favorise l'arrivée du chaos en ajoutant une plage où le régime vibratoire est couplé entre les modes en résonance interne, notamment les  $(2, 0)$  et  $(0, 1)$ . Le présent texte, très succinct sur ce sujet, est issu de l'article [J18], qui donne plus de détails.

En conclusion, ces simulations montrent que :

- la route vers le chaos de l'expérience la figure 4.4 a l'air d'être générique, à condition que la fréquence d'excitation active les résonances internes, ce qui fait apparaître un régime vibratoire faisant intervenir plusieurs modes couplés. Cela confirme les résultats expérimentaux.
- dans ce cas, le chaos arrive pour des amplitudes de forçage plus faibles qu'en dehors des zones d'activation des résonances internes : par suite, *la présence de résonances internes favorise l'arrivée du chaos* ;
- la présence de courbure, et donc de termes quadratiques qui permettent d'activer des résonances internes d'ordre 2, apparaît être aussi un facteur favorisant l'arrivée du chaos.

## Réduction de vibration par shunts piézoélectriques

Ce chapitre propose une synthèse des activités de l'auteur sur le thème de la réduction de vibrations par shunts piézoélectriques. Ce thème a fait l'objet de deux thèses, co-encadrées par l'auteur, avec Jean-François Deü et Roger Ohayon : celle de Julien Ducarne [91] et celle d'Aurélien Sénéchal [302]. Il fait l'objet de 4 publications dans des revues internationales à comité de lecture : 2 acceptées [J13, J15] et 2 en révision [J19, J23].

### 5.1 Introduction

#### 5.1.1 Généralités

##### (a) Amortissement de vibrations

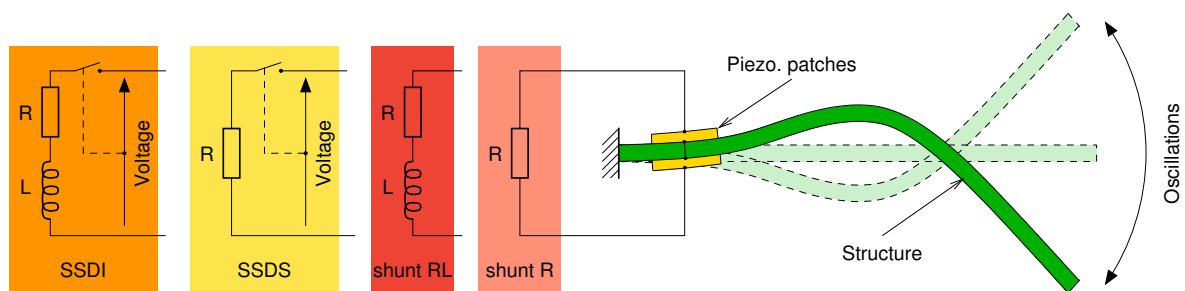


FIG. 5.1 – Amortissement de vibration par shunt piézoélectriques : principaux circuits électriques étudiés dans ce mémoire.

On s'intéresse dans ce thème de recherche à la réduction de vibrations de structures élastiques en utilisant des patches piézoélectriques connectés à un circuit électrique. Deux grandes familles de techniques existent. La première est le contrôle *actif*, qui regroupe toutes les techniques où, par définition, *de l'énergie est injectée dans la structure mécanique*. Dans ce cas, en général, on utilise une série de capteurs et d'actionneurs, qui peuvent être piézoélectriques. Le cœur du dispositif est un contrôleur, c'est-à-dire un système électronique ou informatique qui, en fonction de l'état vibratoire de la structure mesuré par les capteurs, calcule en temps réel un signal de contrôle envoyé aux actionneurs pour contrer les vibrations de la structure et les atténuer. Par rapport aux systèmes passifs et semi-passifs



décrits ci-après, cette technique est soumise à trois inconvénients. (i) La loi de contrôle est parfois délicate à mettre au point car le système peut devenir instable, notamment lorsque les capteurs et les actionneurs ne sont pas colocalisés, c'est-à-dire placés au même endroit sur la structure ; (ii) les contrôleurs sont des systèmes complexes dont l'encombrement est parfois important et (iii) ce système étant actif, le contrôleur nécessite d'être alimenté pour fonctionner, par une quantité d'énergie parfois importante. En contrepartie, les systèmes de contrôle actif sont en général très performants, ce qui explique la très large littérature qui leur est consacrée. Le lecteur intéressé peut se référer à l'ouvrage [262].

La seconde famille, à laquelle on s'intéresse dans ce travail, est celle des dispositifs dit *passifs*, pour lesquels *aucune énergie extérieure n'est injectée dans le système structure / patches piézo-électriques / circuit électrique*. On distingue alors les dispositifs *semi-passif*, pour lesquels certains composants électroniques nécessitent d'être alimentés pour fonctionner, sans pour autant changer le bilan global d'énergie. Ces techniques sont souvent appelées *shunt*, car elles consistent le plus souvent à simplement connecter les patches piézoélectriques à un circuit électrique. Une technique qui ressemble aux shunts linéaires décrits ci-après, mais qui est active, consiste à connecter les patches piézoélectriques à une capacité négative, réalisée par un circuit synthétique [249, 84].

C'est à ces techniques de réduction de vibration par systèmes passifs et semi-passifs que je me suis intéressé dans mon travail. On considère alors un système ou une structure mécanique, qualifiée de primaire dans la suite, à laquelle on adjoint un dispositif annexe capable d'atténuer ses vibrations.

### (b) Shunts linéaires

Les shunts les plus simples (Fig. 5.1) – ce sont aussi historiquement les premiers à avoir été proposés [121, 106] – sont les shunts résistif (R) et résonant (RL), qui sont les équivalents électromécaniques de l'amortisseur de Lanchester (où on ajoute au système primaire un amortisseur visqueux, le plus souvent pour les systèmes tournants) et de l'amortisseur à masse accordée (ou amortisseur de Frahm, où on ajoute un système masse ressort au système primaire, accordé sur la résonance à atténuer) [294]. Dans le premier cas, on connecte simplement une résistance électrique aux bornes des patches piézoélectriques, dissipant l'énergie sous forme de chaleur de manière analogue à un amortisseur visqueux. Dans le second cas, le circuit électrique est composé d'une inductance et d'une résistance. Sachant qu'un élément piézoélectrique est équivalent à une capacité électrique, on obtient un circuit résonant RLC qu'il s'agit d'accorder sur la résonance mécanique à atténuer. Une grande variété de systèmes fondés sur ces principes a été proposée depuis les 30 dernières années, dont une synthèse est proposée dans [J23].

Le principal avantage de ces dispositifs est qu'ils sont passifs : ils sont ainsi stables, très simples, peu encombrants et nécessitant théoriquement peu d'énergie pour fonctionner. Les shunts résonants sont les plus performants, mais nécessitent un accord parfait de la fréquence du circuit électrique sur la résonance mécanique, sans quoi la chute des performances est inévitable. Leur deuxième inconvénient est que les valeurs d'inductance électrique nécessaires à l'accord du circuit électrique sur la résonance mécanique sont en général très grande<sup>1</sup>. Au contraire, les shunts résistifs ont des performances modestes, mais sont beaucoup plus tolérants à une perte d'accord.

### (c) Shunts à commutation

Pour éliminer les problèmes d'accord et de grande inductance du shunt résonant, tout en gardant des performances comparables, les techniques de *shunts à commutation*, dites *switch* en anglais, ont été proposées. L'idée est de changer l'impédance du circuit électrique, le plus souvent entre deux

<sup>1</sup>Il faut choisir  $L$  telle que la pulsation propre mécanique est  $\omega_{\text{meca}} \simeq 1/(LC)$ , avec  $C$  la capacité des patches piézoélectriques, de l'ordre de la dizaine de nF. Avec des fréquences mécaniques de l'ordre du kHz,  $L$  est de l'ordre de 100 H. Une inductance standard réalisée avec un bobinage a une valeur de l'ordre du mH.

valeurs, de manière synchrone avec les oscillations de la structure. Deux familles de techniques ont été proposées, qui diffèrent par les stratégies de commutation et les impédances électriques : les techniques *state switching*, introduite par W. W. Clark [66, 67] et les techniques *synchronized switch damping* (SSD), introduites par l'équipe de D. Guyomar [272, 271, 257, 179] et dans [73].

Le principe de fonctionnement des techniques SSD est le suivant. Les deux circuits de bases sont représentés sur la figure 5.1. On ouvre et on ferme l'interrupteur de manière synchrone avec les oscillations de la structure. La plupart du temps, le circuit reste ouvert. À chaque extremum de déplacement de la structure, l'interrupteur se ferme un temps très court, juste nécessaire pour que les charges électriques accumulées dans les électrodes fassent un aller dans le circuit électrique, ce qui a pour effet de changer leur signe, après quoi l'interrupteur s'ouvre de nouveau. L'effet piézoélectrique des charges électriques sur la structure peut être vu comme une force, qui change de signe à chaque commutation du circuit électrique. On obtient alors un effort opposé à la vitesse de la structure, qui freine son mouvement, effet proche du frottement sec.

Selon le circuit électrique utilisé, une simple résistance pour le SSDS (*synchronized switch damping on short*) ou une résistance et une inductance pour le SSDI (*synchronized switch damping on inductor*), l'inversion de la charge lors de la fermeture du circuit est plus ou moins efficace, ce qui fait que les performances du SSDI sont supérieures à celles du SSDS. Une caractéristique de cette technique est qu'elle est *non linéaire*, car à chaque commutation, l'ouverture et la fermeture du circuit électrique sont vues par la structure mécanique comme un choc. Enfin, notons que la valeur de l'inductance du SSDI est bien plus faible que dans le cas du shunt résonant (elle a une valeur standard de composant électronique passif), car sa valeur conditionne la rapidité de l'inversion de charge, qui doit être vue comme instantanée par les oscillations de la structure.

#### (d) Autres techniques passives

L'utilisation des non-linéarités pour amortir les vibrations d'un système primaire (linéaire ou non linéaire) paraît être prometteur, notamment pour s'affranchir du problème de l'accord de la résistance du shunt résonant. Une idée consiste à garder le concept de l'amortisseur à masse accordée en utilisant un ressort à non-linéarité cubique, sans raideur linéaire. L'intérêt est que le système masse / ressort additionnel, appelé NES (*nonlinear energy sink*) par certains auteurs, n'a pas de fréquence propre de vibration et que sa fréquence d'oscillations préférentielle est proportionnelle à l'amplitude de ses oscillations. Par suite, de manière schématique, le NES peut entrer en résonance avec le système primaire pour n'importe quelle fréquence de vibration de celui-ci, à condition d'ajuster son amplitude. Ensuite, lorsque l'énergie du système primaire a été transférée au NES, il a été montré qu'elle pouvait rester localisée dans celui-ci et ainsi y rester piégée.

Dans cette voie, un important volume d'étude a été produit ces dix dernières années par plusieurs équipes dans le monde, celle d'A. Vakakis étant la plus prolifique. Le ressort non linéaire le plus étudié est celui à raideur cubique essentielle [111, 319, 320, 162, 178, 115, 114]. À cause de l'absence de raideur linéaire, on peut noter que le recours au concept de modes non linéaires pour l'étude du système est indispensable (voir §3.3). Devant la difficulté de réalisation pratique de ces systèmes – une manière de réaliser le ressort cubique est d'utiliser le déplacement transverse d'une corde sans tension et sans raideur en flexion, ou d'un couple de ressorts articulés [204, 114] – d'autres types de non-linéarité ont été proposés : des ressorts à raideur polynomiale avec partie linéaire [4, 324, 323, 70, 196] et des non-linéarités non régulières [172, 149, 297, 175]. Une tentative pour réaliser ces absorbeurs d'énergie avec des patches piézoélectriques shuntés a été esquissée dans [323], mais la majorité du travail reste à faire.

Une seconde famille de techniques non linéaires, fondées sur l'utilisation systématique de résonances internes (majoritairement de type 1:2), a été proposée et étudiée à la fois théoriquement et expérimentalement dans [240, 239, 248]. Le principe est d'utiliser le transfert d'énergie non linéaire vers le mode en résonance interne, qui se traduit par une saturation de l'amplitude des oscillations

du mode directement excité. Cela est visible sur la figure 4.14, p. 107, où la résonance du mode 3 est clairement « émoussée » dans la zone de couplage avec le mode 1. La réalisation pratique de cette technique dans les études sus-citées a été proposée à l'aide d'un contrôleur, et s'apparente par conséquent au contrôle actif.

Enfin, il est intéressant de citer ici les absorbeurs inertiels pendulaires, où une masse circulant dans une cavité de géométrie bien choisie permet d'absorber les vibration. Cette technique est utilisée principalement dans les machines tournantes [287].

### 5.1.2 Objectifs et résultats

Dans le cadre décrit aux paragraphes précédents, mon travail s'est concentré sur les shunts linéaires et à commutation. Le problème principal que nous nous sommes posé était de proposer une méthode pour *optimiser* complètement le dispositif de réduction de vibration, à la fois en terme de placement des patchs piézoélectrique, de choix de leur géométrie et de calcul des paramètres électriques optimaux, et cela pour une structure de géométrie quelconque. Nous avons essayé de répondre à plusieurs questions :

1. Quels sont les paramètres *indépendants* qui conditionnent les performances et l'accord des shunts ?
2. L'influence *mécanique* des patchs piézoélectriques peut-elle être négligée dans un modèle électromécanique de la structure ?
3. Quels sont les mécanismes qui conduisent à la réduction des vibrations dans le cadre des shunts à commutation ? Quelle sont les transferts d'énergie dans la structure dans ce cas ?

La première interrogation nous a conduit à revisiter les shunts résonant et résistif. On a montré rigoureusement que, à la fois en régime libre et en régime forcé, seuls le *facteur de couplage modal*  $k_i^p$  et l'*amortissement structural*  $\xi_i$  pour un mode donné conditionnent les performances des shunts. Les valeurs des paramètres électriques optimaux sont aussi connus par des formules, et peuvent se calculer dans un second temps. La même étude a été conduite pour les shunts SSDS et SSDI, et les mêmes conclusions ont été obtenues [J15, J23]. Ces études se basent sur un modèle réduit électromécanique général, qui est présenté au §5.2, et quelques résultats sur les performances sont proposés au §5.3.

Ensuite, à partir de ces résultats, la conception d'une méthode d'optimisation du placement et de la géométrie de patchs piézoélectriques sur une structure est évidente : il suffit de bâtir un modèle électromécanique du système et de s'en servir pour chercher la configuration optimale de celui-ci qui permet de maximiser les facteurs de couplage électromécaniques. Cela a été proposé dans le cas d'une poutre encastrée / libre dans la thèse de J. Ducarne [91], [J19] et dans le cas d'une aube de soufflante de turboréacteur dans la thèse d'A. Sénéchal [302]. Le paragraphe 5.4 en donne un aperçu.

Sur les shunts à commutation, dans sa thèse, J. Ducarne a proposé des modèles réduits de complexité croissante, à plusieurs degrés de liberté, pour simuler les vibrations non linéaires d'une structure couplée à un shunt SSDS ou SSDI. La compréhension des mécanismes de dissipation d'énergie a été abordée, les transferts non linéaires d'énergie entre modes ont été simulés, ce qui a permis d'estimer la réduction de vibration et de proposer des stratégies de commutations novatrices, notamment en jouant sur la valeur de l'inductance du circuit. Des études expérimentales de validation ont été mises en place, notamment à partir d'un système temps réel pour simuler les stratégies de commutations [C26] [91]. Ce travail était en collaboration avec le LGEF<sup>2</sup>, l'un des inventeur des techniques SSD, et l'acteur scientifique principal sur ce sujet.

<sup>2</sup>Laboratoire de Génie-Électrique et Ferroélectricité de l'INSA de Lyon ; <http://lgef.insa-lyon.fr>

## 5.2 Modèle réduit électromécanique

### 5.2.1 Projection modale

La base de nos études de réduction de vibration repose sur un modèle modal de la structure mécanique. Celui-ci s'applique à toute structure élastique munie de patchs piézoélectriques (Fig. 2.8). Il peut être obtenu à partir des modèles proposés au paragraphe 2.3.2, qu'ils soient élément-finis (Eqs. (2.49)) ou analytiques (Par exemple celui de la poutre stratifiée, Eqs. (2.51)). On écrit pour cela le déplacement inconnu de la structure sous la forme de la décomposition modale

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{x}) q_i(t). \quad (5.1)$$

On montre alors que les coordonnées modales  $q_i(t)$  sont solutions du problème [J13, J19] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_i(t) + 2\xi\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) - \sum_{p=1}^P \chi_i^{(p)} V^{(p)}(t) = F_i(t), \quad \forall i \in \{1 \dots N\}, \quad (5.2a) \\ C^{(p)} V^{(p)}(t) - \sum_{i=1}^N \chi_i^{(p)} q_i(t) = Q^{(p)}(t), \quad \forall p \in \{1 \dots P\}. \quad (5.2b) \end{array} \right.$$

Le problème électromécanique est ainsi décrit par  $N$  équations modales et  $P$  équations électriques, une associée à chaque patch piézoélectrique.  $(V^{(p)}, Q^{(p)})$  représentent la tension aux bornes du  $p^e$  patch et la charge contenue dans l'une de ses électrodes, comme au paragraphe 2.3.2. Un terme d'amortissement modal de facteur  $\xi_i$  a été ajouté. Les modes  $(\omega_i, \Phi_i)$  considérés ici sont ceux de la structure non amortie avec tous ses patchs court-circuités ( $V_p = 0, \forall p$ ),  $C^{(p)}$  étant la capacité électrique du  $p^e$  patch. Le couplage piézoélectrique apparaît dans ces équations sous la forme d'un coefficient de couplage  $\chi_i^{(p)}$ , qui caractérise le transfert d'énergie entre le  $i^e$  mode et le  $p^e$  patch piézoélectrique.

### 5.2.2 Facteurs de couplage modal

Il est commode d'introduire les variables électriques réduites :

$$\bar{V}^{(p)} = \sqrt{C^{(p)}} V^{(p)}, \quad \bar{Q}^{(p)} = \frac{Q^{(p)}}{\sqrt{C^{(p)}}}. \quad (5.3)$$

de sorte que le problème (5.4) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i - \sum_{p=1}^P \omega_i k_i^{(p)} \bar{V}^{(p)} = F_i, \quad \forall i \in \{1 \dots N\}, \quad (5.4a) \\ \bar{V}^{(p)} - \sum_{i=1}^N \omega_i k_i^{(p)} q_i = \bar{Q}^{(p)}, \quad \forall p \in \{1 \dots P\} \quad (5.4b) \end{array} \right.$$

Cette écriture est intéressante, car elle fait apparaître le *facteur de couplage modal*

$$k_i^{(p)} = \frac{\chi_i^{(p)}}{\omega_i \sqrt{C^{(p)}}}. \quad (5.5)$$

qui est sans dimension. On peut montrer en réduisant le modèle (5.4) à un seul oscillateur que le facteur de couplage modal  $k_i^{(p)}$  est très proche du facteur de couplage effectif [J13] :

$$k_i^{(p)} \simeq k_{i,\text{eff}} = \sqrt{\frac{(\hat{\omega}_i^{(p)})^2 - \omega_i^2}{\omega_i^2}}, \quad (5.6)$$

avec  $\hat{\omega}_i^{(p)}$  la  $i^{\text{e}}$  pulsation propre du système avec tous ses patchs en court circuit sauf le  $p^{\text{e}}$  qui est en circuit ouvert.

Dans un cas pratique, plusieurs patchs piézoélectriques peuvent être utilisés, soit câblés entre eux et reliés à un seul shunt, soit reliés à plusieurs shunts. Cela conduit en général à définir un coefficient de couplage  $k_i$  par shunt, qui dépend de tous les  $k_i^{(p)}$  des patchs qui lui sont reliés. Par exemple, pour un réseau de patch en parallèle, le couplage équivalent est :

$$k_i = \frac{\sum_{p=1}^P \sqrt{C^{(p)}} k_i^{(p)}}{\sqrt{\sum_{p=1}^P C^{(p)}}} \rightsquigarrow k_i = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{p=1}^P k_i^{(p)}, \quad (5.7)$$

la seconde égalité n'étant vraie que si les  $P$  patchs ont la même capacité électrique.

Les paramètres  $\chi_i^{(p)}$  et  $k_i^{(p)}$  peuvent être obtenus à partir d'un calcul éléments-finis, par le produit matriciel de la  $i^{\text{e}}$  déformée modale  $\Phi_i$  par la matrice de couplage piézoélectrique  $\mathbf{K}_c$ , qui apparaît dans le modèle (2.49) [J13] :

$$\left[ \chi_i^{(1)} \chi_i^{(2)} \dots \chi_i^{(P)} \right] = \Phi_i^T \mathbf{K}_c, \quad \forall i \in \{1 \dots N\}, \quad (5.8)$$

ou à partir de solutions analytiques, comme dans le cas de la poutre de la figure 5.3 [J19] :

$$k_i = \underbrace{\sqrt{6} \tilde{k}_{31} \sqrt{\frac{Y_p}{Y_b}}}_{\text{matériaux}} \underbrace{\sqrt{\frac{l_b}{l_p}} \left( 1 + \frac{h_p}{h_b} \right)}_{\text{dimensions}} \underbrace{\sqrt{\frac{h_p}{h_b}} \frac{1}{\omega_i} [\Phi_{i,x}]_{x=x_-}^{x=x_+}}_{i^{\text{e}} \text{ mode}}. \quad (5.9)$$

Dans l'expression ci-dessus,  $Y_p$  et  $Y_b$  sont les modules d'Young du matériau piézoélectrique,  $l_p$ ,  $h_p$ ,  $l_b$ ,  $h_b$  les longueurs et épaisseurs des patchs et de la poutre,  $x_-$  et  $x_+ = x_- + l_p$  les positions axiales des extrémités des patchs.  $k_i$  est le facteur de couplage modal équivalent aux deux patchs câblés en série, qui mesure le transfert d'énergie électromécanique entre le  $i^{\text{e}}$  mode et le circuit électrique.

### 5.2.3 Synthèse

Le modèle modal (5.4) est central dans nos études. Son gros intérêt est que le couplage électromécanique ne dépend que d'un seul paramètre, le *facteur de couplage modal*  $k_i^{(p)}$ , qui est, comme on l'a dit, au cœur de nos études car il est le seul paramètre optimisable dont dépendent les performances des shunts. Ce paramètre est intéressant car (i) il est adimensionné et donc « universel », dans le sens où sa valeur donne une idée des performances d'un système donné quel qu'il soit et (ii) il est relié au facteur de couplage effectif par la formule (5.6), qui permet de l'estimer expérimentalement extrêmement facilement.

Enfin, notons que la formulation (5.4) est particulièrement adaptée au calcul de systèmes électromécaniques shuntés, car dans ce cas, le circuit électrique ajoute une équation de comportement, qui dépend de son impédance, qui relie la charge  $Q^{(p)}$  à la tension  $V^{(p)}$ . Par exemple, dans le cas du shunt résonnant aux bornes du  $p^{\text{e}}$  patch, on a :

$$V^{(p)} = -R\dot{Q}^{(p)} - L\ddot{Q}^{(p)}. \quad (5.10)$$

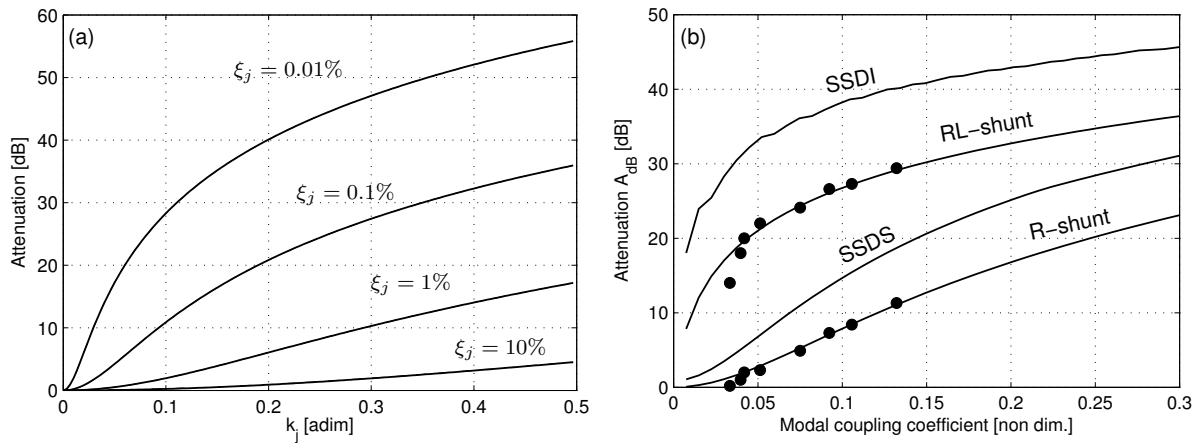


FIG. 5.2 – (a) Atténuation  $A_{dB}$  apportée par un shunt résistif accordé, en fonction du facteur de couplage modal  $k_i$  et du facteur d’amortissement structural  $\xi_j$ , pour un mode  $i$  donné. (b) Atténuation  $A_{dB}$  apportée par les quatre shunts R, RL, SSDS et SSDI, pour un amortissement structural  $\xi_i = 0.17\%$ , en fonction du facteur de couplage modal  $k_i$ . ‘—’ : solution analytique ; ‘•’ : mesures [J23].

### 5.3 Performance des shunts

Un de nos travaux a été d’estimer les performances des shunts en terme de réduction de vibration. Nos études ont été menées à partir d’une réduction à un mode mécanique du modèle (5.4). Deux indicateurs de performance ont été choisis : en régime libre, on a montré que l’effet des shunts était assimilable à un facteur d’amortissement additif  $\xi_{add}$  ; en régime forcé, c’est un paramètre d’atténuation qui a été choisi, noté  $A_{dB}$ , qui est défini comme la différence, mesurée en dB, entre l’amplitude à la résonance du système en court-circuit et celle du système connecté au shunt (Voir Fig. 5.3(b,c)). Dans chacun des cas des quatre shunts (R, RL, SSDS et SSDI), des expressions analytiques pour  $\xi_{add}$  et  $A_{dB}$  ont été obtenues, le résultat le plus marquant étant qu’elles ne dépendent que de  $\xi_i$  et  $k_i$ , pour le mode  $i$  donné [J15, J23].

La figure 5.2(a) illustre cela, dans le cas du shunt résistif, et appelle plusieurs remarques. Tout d’abord, d’un point de vue physique, les shunts sont d’autant plus performants, à facteur de couplage donné, que l’amortissement structural  $\xi_i$  est faible. Cette remarque est valable pour tous les shunts, R, RL, SSDS, SSDI. Ensuite, cette courbe montre que les performances d’un shunt résistif, qui est extrêmement simple à réaliser puisqu’il suffit de court-circuiter des pastilles piézoélectriques par un fil (bien choisi pour accorder tout de même sa résistance), sont loin d’être négligeables *lorsque l’amortissement structural* du système est faible, c’est-à-dire pour des structures très résonantes. Ce résultat est intéressant, notamment pour les applications aéronautiques, où le contrôle actif est souvent exclu à cause de sa complexité. C’est en partant de cette idée que nous avons développé cette application pour des aubes de soufflante de turboréacteur [302].

La figure 5.2(b) compare les performances des quatre shunts. On constate comme annoncé que le shunt résonant est plus performant que le shunt résistif. Les résultats expérimentaux, obtenus en dégradant artificiellement le couplage<sup>3</sup>, valident parfaitement l’estimation de  $A_{dB}$  obtenue avec un modèle tronqué à un seul mode mécanique [J23]. Les performances des shunts SSD, obtenues avec le même modèle tronqué à un mode, sont, quant à elles, prédites encore meilleures que celles des shunts linéaires [J15]. Il faut cependant tempérer ces résultats en rappelant que les non-linéarités non régulières des SSD nécessitent, pour obtenir un modèle réaliste, de garder plus de modes dans la tron-

<sup>3</sup>Nous avons pour cela ajouté une série de condensateurs de capacités croissantes, en parallèle aux patches piézoélectriques, pour obtenir plusieurs points avec la même structure [J23]

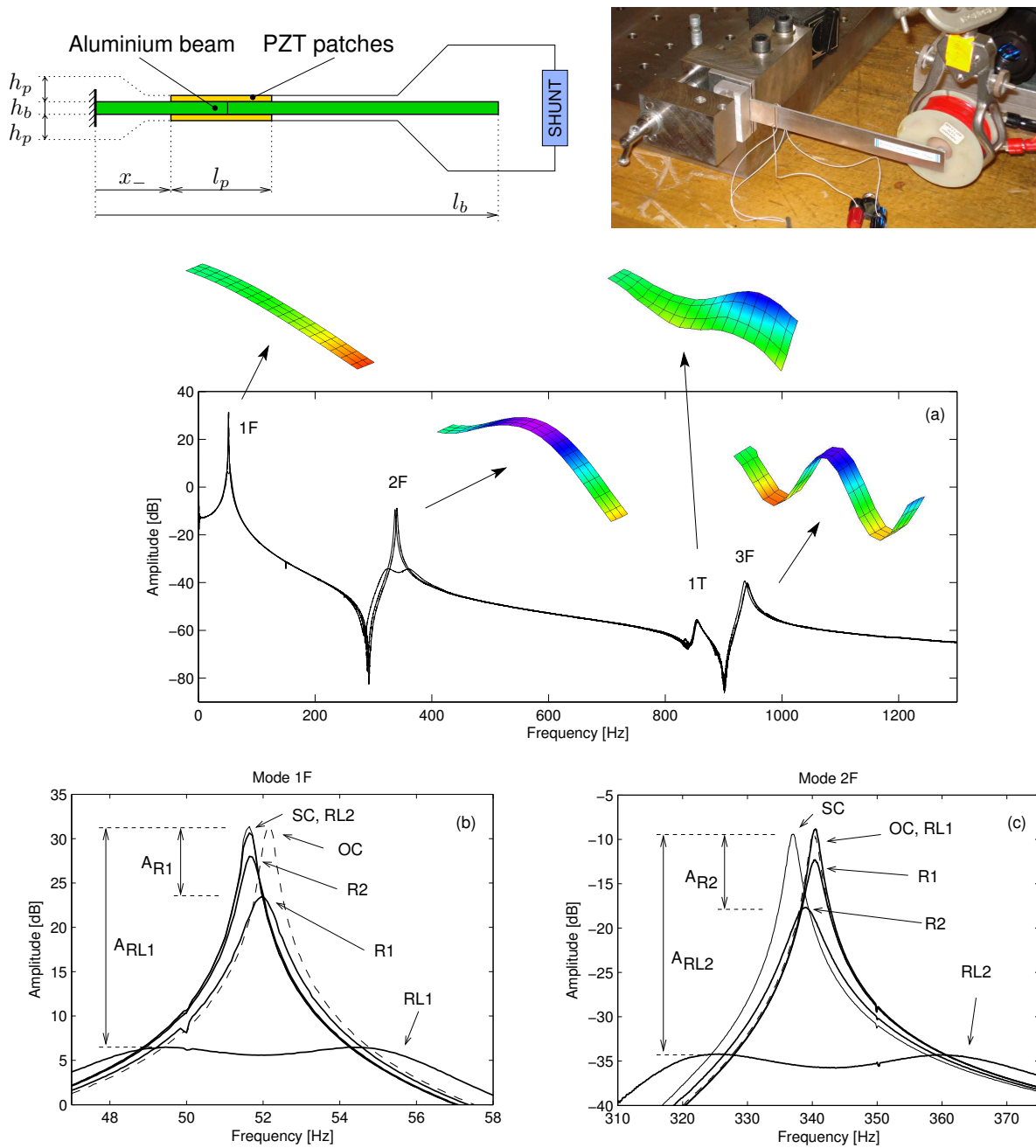


FIG. 5.3 – Poutre encastree libre munie de deux patches piézoélectriques shuntés. Fonction de réponse en fréquence (FRF) : (SC) court-circuit ; (OC) circuit-ouvert ; ( $R_1$ ), ( $RL_1$ ) shunts résistif et résonant accordés sur le mode 1F ; ( $R_2$ ), ( $RL_2$ ) shunts résistif et résonant accordés sur le mode 2F. (a) FRF montrant les 4 premières résonances de la poutre ; (b), (c) : détails au voisinage des résonances des modes 1F et 2F [J23].

cature modale. Ce faisant, on montre que le fonctionnement d'un SSD dirigé sur un mode donné est perturbé par les oscillations des autres modes, ce qui d'une part diminue fortement les performances annoncées par la figure 5.2(b) et d'autre part conduit à d'autres stratégies de commutation [91]. Pour plus de détails sur les travaux récents, on pourra consulter les articles [171, 150, 188] et les références incluses.

Enfin, la figure 5.3 montre, pour illustrer l'effet des shunts, des fonctions de réponse en fréquence expérimentales de la poutre dans plusieurs conditions : connectée à un shunt résistif accordé sur le premier mode (R1), connectée au même shunt accordé sur le second mode (R2), et les mêmes cas avec un shunt résonant (RL1) et (RL2).

## 5.4 Optimisation du placement des patchs piézoélectriques

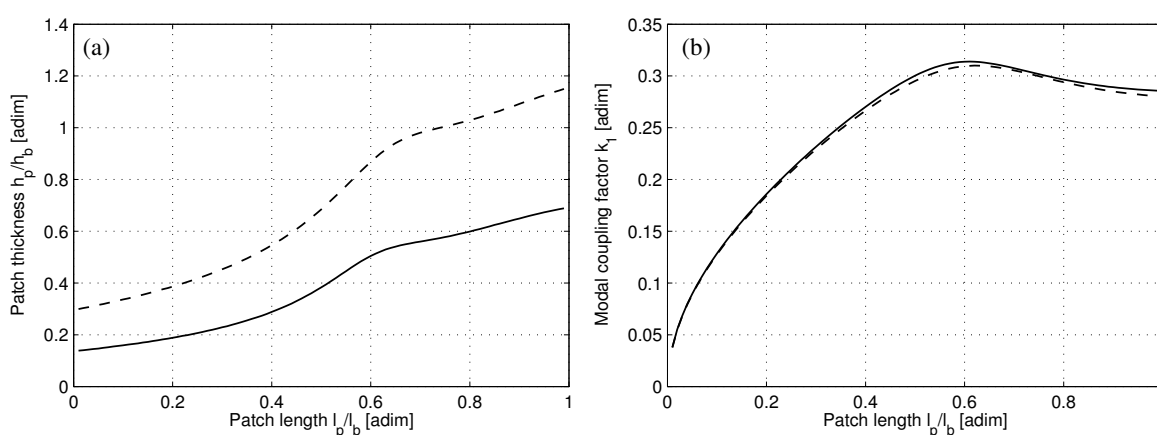


FIG. 5.4 – Géométrie optimale des patchs pour réduire les vibrations du premier mode (1F). (a) épaisseur  $h_p/h_b$  optimale des patchs en fonction de leur longueur  $l_p/l_b$ , leur position étant fixée à l'encastrement, pour deux matériaux de la poutre : '—' aluminium ; '- -' acier. (b) : coefficient de couplage  $k_1$  optimal correspondant [J19].

Comme expliqué plus haut, les performances des shunts ne dépendent que de  $\xi_i$  et  $k_i$  ;  $\xi_i$  étant une donnée du problème, il est possible d'optimiser la géométrie et le placement des patchs piézoélectriques en se basant simplement sur un seul critère : maximiser  $k_i$ . Dans le cas de la poutre de la figure 5.3, l'expression analytique (5.9) permet de choisir la position  $x_*$ , la longueur  $l_p$  et l'épaisseur  $h_p$  des patchs pour maximiser le couplage. La figure 5.4 regroupe les résultats de l'optimisation pour le premier mode de flexion (1F), obtenus avec un modèle semi-analytique des modes de la poutre, qui tient compte de l'effet mécanique des patchs. Elle montre que (i) pour chaque longueur de patch, il existe une épaisseur optimale qui maximise le couplage (ii) cette épaisseur dépend du couple de matériau utilisé (iii) le couplage optimal ne dépend pas du couple de matériaux, à condition que l'épaisseur soit correctement choisie (iv) il existe une longueur de patch optimale qui maximise le couplage, qui est plus faible que la longueur de la poutre. Des résultats analogues sont obtenus pour les autres modes de la poutre [J19].

Dans le cas de structures plus complexes comme une aube de soufflante de turboréacteur, le recours à un modèle éléments-finis est indispensable. Pour cela, il est possible de calculer les modes du système pour chaque configuration de géométrie et de position de patch piézoélectrique sur la structure, et d'en déduire le facteur de couplage modal avec la formule (5.8). Dans la thèse d'A. Sénéchal, une procédure de couplage entre Matlab et Nastran, pilotée par un algorithme d'optimisation, a été mise en place. La figure 5.5 montre le résultat d'un calcul exhaustif des valeurs optimales du place-



ment et de l'épaisseur d'un patch de dimensions fixées ( $100 \times 60$  mm), pour réduire les vibrations du premier mode de l'aube de soufflante. Des résultats analogues au cas de la poutre sont obtenus : (i) pour chaque position  $(x, y)$ , il existe une épaisseur optimale qui maximise le couplage (Fig. 5.5(b,c)) (ii) il existe une position optimale du patch qui maximise le couplage (Fig. 5.5(a)). De plus, dans le cas de l'aube, on obtient un facteur de couplage de l'ordre de 10%, avec une masse additionnelle de patch piézoélectrique de seulement 5% de la masse totale de l'aube. Ce facteur de couplage est de valeur importante, et vu les facteurs d'amortissement de l'aube de l'ordre de 0.07%, on peut s'attendre à des performances avec un shunt résistif de l'ordre de  $A_{dB} = 13$  dB !

Enfin, un dernier résultat est que si, dans le calcul, l'effet mécanique des patches piézoélectriques est négligé (ce qui conduit à un gain de temps de calcul énorme puisque dans ce cas une seule analyse modale de la structure est nécessaire), la position de patch dessinée sur la figure 5.5(d) en pointillé est obtenue après optimisation, ce qui conduit à un facteur de couplage de l'ordre de 6%, et donc une perte notable d'atténuation avec le shunt résistif, qui devient  $A_{dB} \simeq 6$  dB !

Des expériences ont aussi été menées au laboratoire, avec une mosaïque de patches connectés en parallèle, pour pouvoir effectuer le collage sur la surface incurvée de l'aube. Du fait d'une part de la séparation du patch piézoélectrique en une mosaïque, et d'autre part des épaisseurs de colle non négligeables, les résultats expérimentaux ne sont pas à la hauteur de la théorie. Néanmoins, nous avons obtenu une correspondance excellente entre ces résultats expérimentaux et un calcul théorique du facteur de couplage, en tenant compte de la colle et de la mosaïque de patch dans le modèle éléments finis, validant ainsi toute la procédure [302].

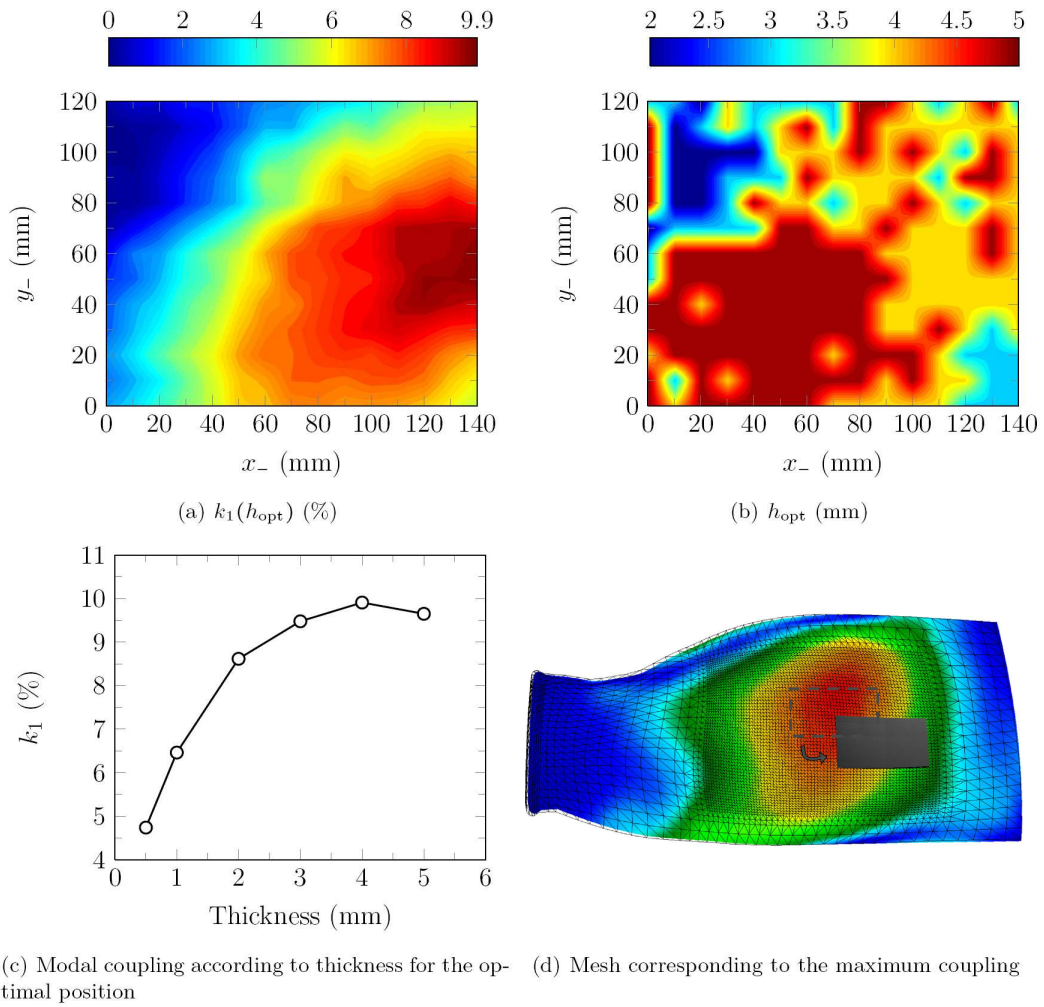


FIG. 5.5 – Résultat d'optimisation d'un patch piézoélectrique pour réduire les vibrations du premier mode de flexion d'une aube de soufflante de turboréacteur [302].

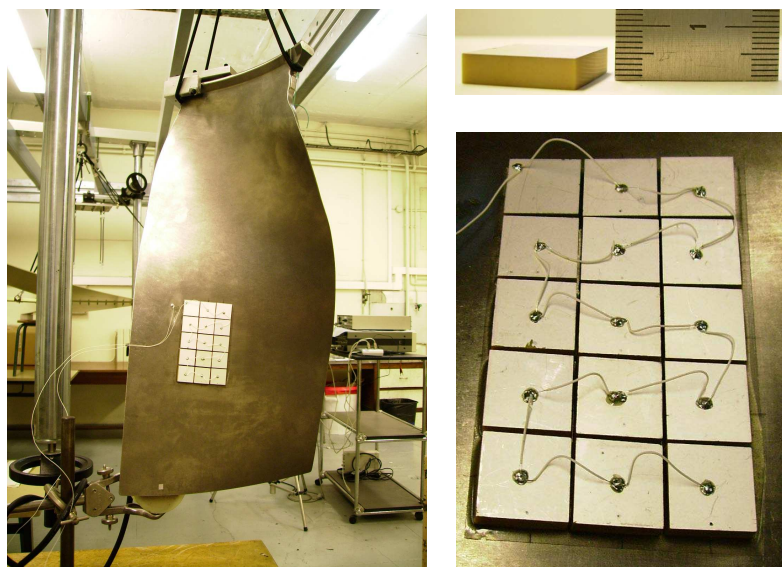


FIG. 5.6 – Aube de soufflante de turboréacteur munie d'une mosaïque de patchs piézoélectrique pour réaliser un démonstrateur de validation des calculs numériques [302].



# Vibrations non linéaires de micro/nano systèmes électromécaniques

Ce chapitre propose une synthèse des activités de l'auteur sur le thème des vibrations non linéaires de micro / nano systèmes électro-mécaniques. Ce thème a débuté en 2005 après une rencontre avec Liviu Nicu, chercheur CNRS au LAAS<sup>1</sup> de Toulouse, de manière informelle, avec des études de vibrations non linéaires de plaques circulaires piézoélectriques. Ensuite, le projet ANR NEMSPIEZO a été accepté en janvier 2009 (pour quatre années) et a permis de financer deux années de contrat post-doctoral pour Arnaud Lazarus et Saeid Nezamabadi, sur des modélisations de nano-poutres piézoélectriques. Ce chapitre rend compte de cette activité, qui a donné lieu à la publication de quatre articles de revue [J14, J16, J17, J20], un cinquième étant en préparation [J21].

L'objectif général de ce thème est de proposer des stratégies de simulation efficace du comportement linéaire et non linéaire des objets étudiés.

## 6.1 Enjeux et objectifs

### 6.1.1 Les objets étudiés

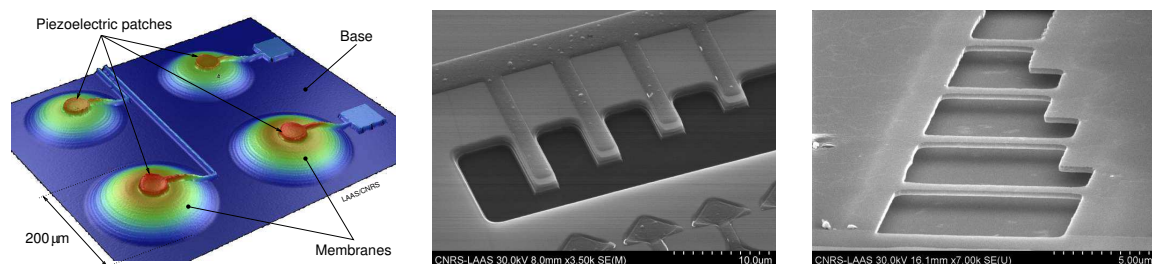


FIG. 6.1 – Micro et nano systèmes électromécaniques étudiés dans ce mémoire

Les micro/nano systèmes électromécaniques (Ou *Micro / Nano Electro Mechanical Systems, M/NEMS* en anglais) sont des objets mécaniques de petite taille (leurs dimensions caractéristiques vont de la centaine de micromètres à quelques nanomètres) qui sont directement inscrits dans des circuits microélectroniques. L'intérêt primordial est d'utiliser leurs propriétés mécaniques et de les

<sup>1</sup>Laboratoire d'Analyse et Architecture des Systèmes, CNRS

coupler à un circuit électronique pour réaliser une fonction donnée, cela dans un même dispositif intégré. Les exemples les plus matures à l'heure actuelle sont des accéléromètres d'airbags automobiles, des micro-gyromètres, des têtes d'impression d'imprimantes, des filtres résonnants de téléphones cellulaires ou les oscillateurs de référence à quartz des montres. Ils sont plutôt qualifiés de MEMS, vu leur taille de l'ordre de grandeur de la dizaine de micromètres. Depuis quelques années, un gros effort des équipes de recherche est concentré sur la mise au point de systèmes à l'échelle inférieure (les NEMS), les exemples les plus marquants étant les nanotubes de carbone et les membranes de graphène, constitués de simples couches d'atomes de carbone. La raison d'être de ces systèmes n'est pas toujours la miniaturisation, mais parfois la possibilité de les produire en très grande quantité à moindre coût, puisque les techniques de fabrication sont celles des microcircuits électroniques, extrêmement matures à l'heure actuelle au stade industriel [31, 96].

Une grande part de ces systèmes utilisent les propriétés résonantes de petites structures mécaniques comme des poutres, des plaques, ou des structures à géométrie plus complexe, qu'on appelle alors des résonateurs, et c'est dans ce cadre que s'inscrivent mes recherches. Quatre applications de ces résonateurs sont détaillées ci-dessous, les trois premières étant majeures [31, §10] alors que la dernière est plus anecdotique.

**Capteurs** Les plus courants sont des capteurs de masse ou de déformation, notamment pour des applications de dosage chimique et biologique [232, 303, 267]. Dans ce cas, on tire partie des propriétés des fréquences de résonance, qui dépendent de la masse du système et d'éventuelles précontraintes. Ainsi, si un résonateur est alourdi par la présence d'une masse additionnelle sur sa surface, ou si cet objet additionnel ajoute des précontraintes comme des tensions de surface, les fréquences de résonance du système sont modifiées. Cela conduit à détecter la présence de l'objet additionnel, voire de mesurer sa masse ou les déformations qu'il produit, par simple mesure de la variation de fréquence de résonance. La présente utilisation des propriétés dynamiques du résonateur, au lieu de ses propriétés statiques (comme la mesure des déformations sous l'action du poids de la masse additionnelle ou des tensions de surface) conduit à une réduction significative des incertitudes de mesure. Dans ce cas, la miniaturisation est capitale, car elle permet de descendre à des résolutions massiques de l'ordre de l'attogramme ( $10^{-18}$  g) [145], voire du zeptogramme ( $10^{-21}$  g) (une résolution massique de 7 zg a été obtenue dans [340]). Dans ce dernier cas, la sensibilité obtenue permet de mesurer la masse de grosses molécules.

**Processeurs de signaux** Dans ce cas, comme les fréquences de résonance des MEMS sont de l'ordre du MHz, voire du GHz pour les NEMS, il est possible de réaliser des filtres passe bande pour les applications en télécommunications, par exemple. Pour cela, le signal électronique est transformé en oscillations mécaniques du résonateur par un actionneur, puis reconverti par un capteur en un nouveau signal électronique, qui a été filtré par les résonances mécaniques du résonateur. Ici, la miniaturisation est bien entendue capitale, d'une part pour intégrer le résonateur dans le circuit électronique, mais aussi pour l'ordre de grandeur de ses fréquences de résonance. Néanmoins, ce sont surtout les propriétés d'amortissement structural extrêmement faible qui sont ici mises à profit. Elles se manifestent par des facteurs de qualité très importants, et donc des filtres très sélectifs, caractéristiques qu'il est impossible d'atteindre avec des circuits électroniques résonants, dont la résistivité électrique est bornée. C'est cela qui justifie l'utilisation très courante de ces M/NEMS, notamment dans les téléphones cellulaires.

**Oscillateurs de référence** On réalise ici un dispositif capable d'auto-osciller à une fréquence donnée, pour servir d'horloge de référence, par exemple. Typiquement, on utilise un système résonant placé en boucle fermée dans un circuit électronique, et la fréquence des auto-oscillations est sa fréquence de résonance. L'intérêt d'utiliser un résonateur mécanique à la place d'un circuit électronique est la stabilité de ses propriétés mécaniques, et donc de ses fréquences de résonance, vis-à-vis de changement dans les conditions d'opération. C'est les propriétés de stabilité vis-à-vis de changement de température du quartz qui l'a rendu si populaire comme ré-

sonateur des oscillateurs d'horloges (en plus de ses propriétés piézoélectriques, qui permettent de coupler directement ses vibrations avec l'électronique environnante) [231].

**Composants élémentaires d'électronique numérique** Ces applications sont plus récentes. Elles consistent à utiliser conjointement les propriétés d'excitation directe et paramétrique des résonateurs pour réaliser des composants logiques ou des mémoires [194, 193]. Un exemple est proposé au §6.1.3 ci-après.

### 6.1.2 Quelques points clé

Plusieurs points clé sont à évoquer, en rapport direct avec la conception et le bon fonctionnement de ces systèmes.

- Contrairement aux applications du chapitre 5, une caractéristique fondamentale de tout ces micro / nano systèmes est leur faible amortissement, qu'il convient de réduire au maximum, ce qui conditionne directement les facteurs de qualité des résonateurs et ainsi l'acuité de leurs résonances.
- Il est nécessaire d'employer un principe de transduction de l'énergie électromécanique efficace et approprié. Plusieurs solutions existent et ont été testées et utilisées. Le principe de transduction le plus populaire est électrostatique, car il est le plus aisé à mettre en œuvre au cœur d'un circuit électronique. Il suffit pour cela de positionner en regard deux conducteurs, dont l'un est sur le résonateur, pour créer des forces électrostatiques sur celui-ci (effet actionneur) ou que ses vibrations changent la capacité équivalente du condensateur ainsi créé (effet capteur, aussi utilisé dans les microphones électrostatiques). Dans nos applications, nous nous concentrons sur la mise en œuvre de la transduction piézoélectrique, qui permet également de réaliser l'actionnement *et* la détection, à partir des effets piézoélectriques inverse et direct. Comme expliqué au §2.2, il faut ajouter au résonateur des couches de matériau piézoélectrique surmontées d'électrodes conductrices. D'autres solutions existent, comme la transduction électromagnétique, la captation piézorésistive et la mesure optique [31].
- Il est possible de tirer parti de l'excitation paramétrique du résonateur, soit pour une fonction particulière (dans le cas des composants d'électronique numérique), soit pour augmenter artificiellement le facteur de qualité des résonances. Ce point est décrit en détail au paragraphe suivant (§6.1.3).
- Un des facteurs limitant des capteurs de masse est le rapport signal sur bruit, déterminé par l'amplitude maximale de vibration du capteur en régime linéaire, rapportée à celle des fluctuations thermomécaniques qui conditionnent le niveau de bruit [97, 166]. Des travaux récents proposent plusieurs manières d'améliorer les performances, en tenant compte des non linéarités. Notamment, il est parfois possible de contrôler et ajuster le seuil des non linéarités [158, 166] ; d'autres auteurs proposent de faire fonctionner les résonateurs dans des régimes de vibration non linéaires géométriques [51, 5], ou encore d'utiliser les phénomènes de saut des comportements bi-stables non linéaires [24, 341, 263, 343, 81].

### 6.1.3 Excitation paramétrique

L'excitation paramétrique est le nom générique donnée à la mise en vibration d'un système mécanique par modulation d'un de ses paramètres. L'exemple le plus connu est la mise en oscillation d'un pendule en imposant un déplacement alternatif de son point d'attache dans une direction parallèle au champ de gravité, à une fréquence proche du double de la fréquence de résonance. On obtient alors des oscillations du pendule de très grande amplitude, bornées par les non linéarités géométriques de grande rotation. Dans le cas de résonateurs de la forme d'une poutre ou d'une plaque, l'utilisation de couches piézoélectriques permet de réaliser naturellement une excitation paramétrique, puisque

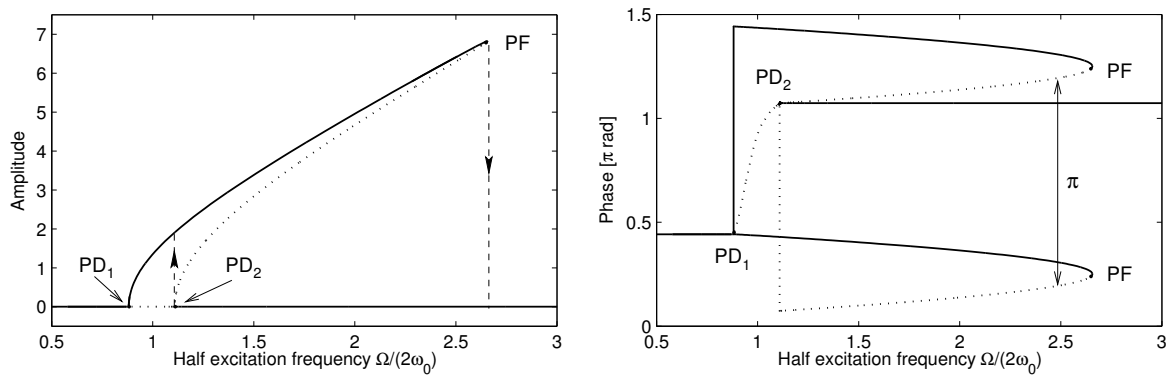


FIG. 6.2 – Amplitude et phase de la première harmonique de la solution périodique de l'oscillateur de Mathieu de l'équation (6.1), calculées avec Manlab [23]. Les bifurcations par doublement de période 'PD' et nœud-col 'SN' sont indiquées.

l'effet piézoélectrique se manifeste dans ce cas à la fois par des moments de flexion (c'est l'excitation directe du mouvement transverse qui est généralement cherchée) et par des efforts de membrane, qui permettent de moduler la raideur de tension de la structure et réaliser l'excitation paramétrique. On peut, pour s'en convaincre, se référer à l'équation (2.50c), p. 44, qui montre le terme d'excitation piézoélectrique dans l'effort axial, et à l'équation (2.50b), où le terme souligné est la raideur en tension de la poutre. Dans un modèle éléments finis, c'est les termes proportionnels aux matrices constantes  $P_c^{(p)}$  de l'équation (2.54a), p. 46, qui représentent l'excitation paramétrique de la structure par la  $p^e$  couche piézoélectrique.

L'oscillateur le plus simple permettant d'observer des résonances paramétriques est l'oscillateur de Mathieu :

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + (\omega_0^2 + \delta \cos \Omega t)u + \Gamma u^3 = 0, \quad (6.1)$$

où l'excitation d'amplitude  $\delta$  se manifeste par une modulation de la pulsation propre  $\omega_0$ . Un terme non linéaire cubique a été inclus, pour stabiliser les oscillations. Cet oscillateur est obtenu lorsqu'on tronque à un mode le modèle de structure mince (3.20), p. 57, où l'excitation paramétrique est « cachée » dans le paramètre  $\alpha(t)$  (Eqs. (3.22)). Il est aussi obtenu par développement de Taylor d'une équation de pendule.

Au premier ordre, la solution de cet oscillateur est :

$$u(t) = a \cos(\Omega/2t + \varphi), \quad (6.2)$$

où l'amplitude  $a$  et la phase  $\varphi$  sont illustrées sur la figure 6.2. Ces courbes ont été obtenues à partir du code de continuation de solutions périodiques Manlab [23]. On constate que la solution périodique non triviale de cet oscillateur oscille à *la moitié* de la fréquence d'excitation  $\Omega$  et qu'elle fait apparaître une résonance au voisinage<sup>2</sup> de  $\Omega \simeq 2\omega_0$ . Elle est ainsi obtenue par des bifurcations par doublement de période, notées PD sur la figure 6.2. À chaque fois, *deux* solutions périodiques de période double prennent naissance<sup>3</sup>. Elles sont caractérisées par la même amplitude  $a$  (les courbes sont confondues sur la figure 6.2(gauche)) et par des phases  $\varphi$  décalées de  $\pi$  (Fig. 6.2(droite)). Ce phénomène est à la base de l'utilisation d'un résonateur en résonance paramétrique pour réaliser une mémoire binaire, où chacun des deux états 0 ou 1 est associé à l'une des solutions périodiques [194].

<sup>2</sup>D'autres résonances sont possibles mais difficile à obtenir expérimentalement.

<sup>3</sup>Cela est logique, puisque les bifurcations par doublement de période peuvent aussi être vues comme des bifurcations fourches (PD<sub>1</sub> est alors surcritique, et PD<sub>2</sub> est alors souscritique), qui donnent naissance à deux solutions de période double

Un second intérêt de l'excitation paramétrique est qu'elle peut permettre d'augmenter artificiellement le facteur de qualité d'une résonance donnée. Pour cela, si  $\omega_0$  est la fréquence propre de la résonance considérée, il faut superposer au signal d'excitation direct à la fréquence  $\Omega \simeq \omega_0$  un second signal d'excitation paramétrique à la fréquence  $2\Omega$ . Cela s'écrit :

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + (\omega_0^2 + \delta \cos 2\Omega t)u + \Gamma u^3 = F \cos(\Omega t + \phi). \quad (6.3)$$

Pour certaines conditions sur  $\phi$  et  $F/\delta$ , la résonance primaire au voisinage de  $\Omega \simeq \omega_0$  a alors une forme plus fine, qui correspond à un facteur de qualité effectif augmentée par rapport à  $Q$  [160, 276].

#### 6.1.4 Caractéristiques mécaniques à modéliser

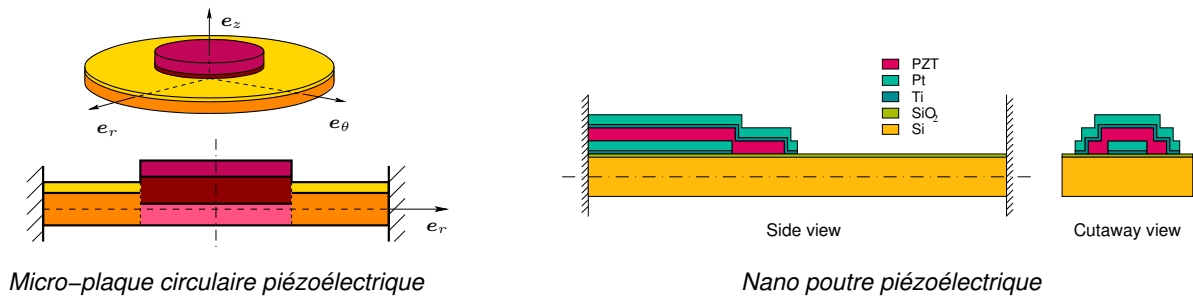


FIG. 6.3 – Deux exemples de structures stratifiées piézoélectriques étudiées dans ce texte : une plaque circulaire et une poutre.

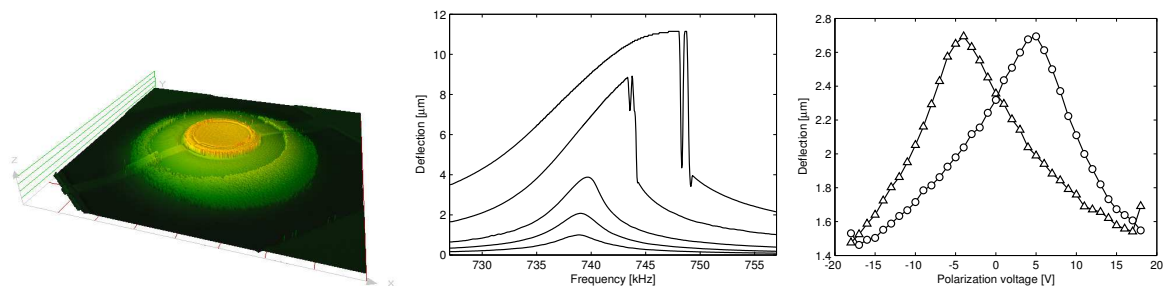


FIG. 6.4 – Quelques résultats expérimentaux montrant, de gauche à droite : la géométrie flambée d'une membrane circulaire MEMS, obtenue par interférométrie ; le comportement non linéaire géométrique de cette même membrane, en régime forcé ; le comportement piézoélectrique non linéaire, lors de la polarisation initiale de la couche piézoélectrique de la membrane (Données du LAAS [118, 28]).

Lorsqu'on s'intéresse à la modélisation fine des micro / nano systèmes électromécaniques décrits dans les paragraphes précédents, plusieurs caractéristiques physique doivent être prises en compte.

- La figure 6.3 montre des schémas de résonateurs typiques, en coupe, où lorsqu'une transduction piézoélectrique est utilisée, la structure verticale du système est nécessairement stratifiée. Notamment, les couches piézoélectriques sont usuellement bordées par des électrodes de titane / platine. Ainsi, un modèle correct doit prendre en compte cette structure *stratifiée* [28].
- Les procédés de fabrication utilisés conduisent à déposer successivement chacune des couches, qui se retrouvent à l'état de repos soumises à des *contraintes résiduelles*, qui font parfois *flam-*



ber les structures [28, 27]. Cela est illustré sur la figure 6.4(gauche) et le tableau 6.1 donne des valeurs indicatives de la précontrainte dans chacune des couches.

- Comme évoqué au paragraphe précédent, le *comportement vibratoire non linéaire* géométrique, illustré sur la figure 6.4(milieu), doit être correctement modélisé, pour trois raisons :
  1. estimer les valeurs de forçage minimales qui conduisent au comportement non linéaire et ainsi évaluer la plage dynamique de fonctionnement linéaire des capteurs ;
  2. concevoir des systèmes qui mettent à profit les phénomènes dynamiques liés aux non-linéarités géométriques, et notamment des phénomènes de saut ;
  3. simuler le forçage paramétrique.
- Enfin, à l'inverse des céramiques piézoélectriques pour les applications macroscopiques, qui sont commercialisées prêtes à l'emploi et donc déjà polarisées, les couches minces de matériau piézoélectrique doivent être polarisées en opération. Cela conduit à un comportement non linéaire issue de la loi de comportement piézoélectrique, qui se manifeste par des courbes de polarisation en papillon (Fig. 6.4(droite)). De plus, il est possible que ce comportement non linéaire se manifeste aussi en vibrations autour de l'état polarisé [328, 265]. Le premier comportement de polarisation non linéaire est difficile à prendre en compte de manière simple dans un modèle [53]. En revanche, un *modèle non linéaire piézoélectrique* autour d'une configuration de repos polarisée est plus simple [122, 328, 339]. Dans mon travail, jusqu'à présent, je me suis cantonné à des effets piézoélectriques linéaires.

### 6.1.5 Stratégie de modélisation et simulation

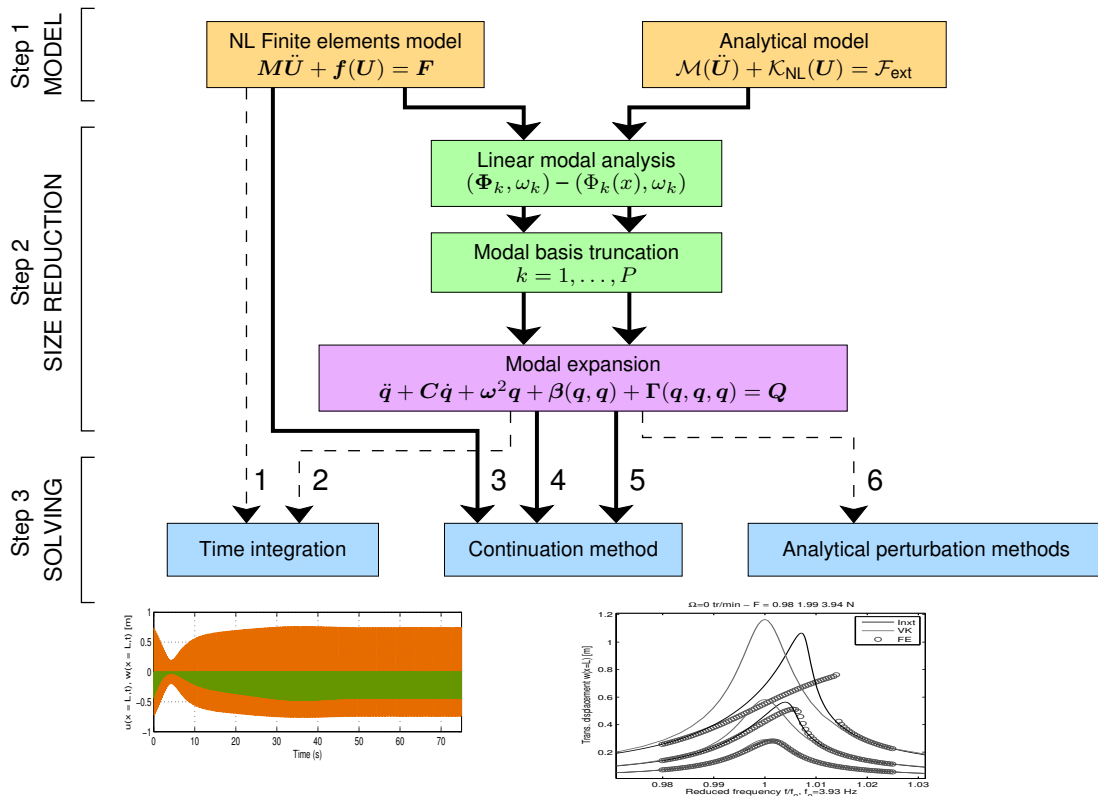


FIG. 6.5 – Organigramme de synthèse des stratégies de modélisation et simulation des N/MEMS

À l'heure actuelle, les stratégies de modélisation des micro / nano systèmes disponibles dans la littérature peuvent être regroupées en trois familles.

- La première regroupe la grande majorité des études, qui sont fondées sur des modèles heuristiques simples, dont les coefficients sont estimés à partir de résultats expérimentaux. Lorsque des non linéarités géométriques sont observées, le modèle le plus courant pour modéliser une résonance non linéaire est un simple oscillateur de Duffing [157, 166, 315].
- La seconde inclue des modélisations analytiques plus raffinées, qui sont proposées plus rarement, majoritairement par Nayfeh *et al.* [342] pour des micropoutres à transduction électrostatique et par Balachandran *et al.* [186, 187] pour une transduction piézoélectrique.
- La dernière famille correspond à une méthode envisageable mais finalement très peu utilisée du fait de sa lourdeur, qui consiste à utiliser un code de calcul commercial par la méthode des éléments finis, et d'obtenir la réponse du système par intégration temporelle.

Par rapport à cet état de l'art, nous proposons plusieurs stratégies, regroupées sur l'organigramme de la figure 6.5. La résolution du problème se déroule en trois grandes phases :

- La **phase 1** est le choix du modèle initial, soit un modèle analytique sous forme d'équations aux dérivées partielles, soit un modèle numérique, discrétisé par la méthode des éléments finis (le paragraphe 2.3 donne un aperçu des principaux modèles associés à ces deux méthodes).
- La **phase 2** correspond à une réduction de la taille du modèle, notamment par projection modale. Les paragraphes 3.1, 3.2 et 3.3 donnent un aperçu des possibilités.
- La **phase 3** consiste à résoudre le modèle, par les trois techniques classiques : méthode numérique d'intégration temporelle, méthode numérique de continuation et méthode analytique de perturbation. Ces trois méthodes sont évoquées au paragraphe 3.4.

Les stratégies majoritairement utilisées dans la littérature, et évoquées plus haut, sont soit l'intégration temporelle directe du modèle éléments finis (Méthode 1 de l'organigramme 6.5) soit la résolution par méthode de perturbation d'un modèle réduit analytique (Méthode 6 de l'organigramme 6.5).

Les techniques que nous proposons de mettre en place correspondent aux méthodes 3, 4 et 5 de l'organigramme 6.5 :

- Utiliser une méthode éléments finis (EF) et la coupler *directement* à un code de continuation de solutions périodiques, dont les inconnues sont les degrés de liberté du modèle EF (Méthode 3). Durant le stage post-doctoral de S. Nezamabadi, un code complet a été écrit, en utilisant la méthode de l'équilibrage harmonique (HBM) et la méthode asymptotique numérique (MAN), pour simuler des vibrations non linéaires de poutre du type de celle de la figure 6.3 [J21].
- Utiliser une méthode éléments finis (EF), *la réduire* par une stratégie appropriée et coupler le modèle réduit à un code de continuation de solutions périodiques (Méthode 4). Cela a été proposé durant le stage post-doctoral d'A. Lazarus, pour le même type de poutres §6.3 [J20].
- Lorsque la géométrie de la structure est suffisamment simple, utiliser un modèle initial analytique, le discrétiser par projection modale et résoudre le résultat par une méthode de continuation de solutions périodiques (Méthode 5). Cela a été proposé à la fois pour les poutres et les plaques circulaires de la figure 6.3, pour des géométries simples (des plaques circulaires axi-symétriques avec une stratification symétrique dans l'épaisseur, §6.2 [J14] et des poutres avec patchs piézoélectriques qui couvrent toute leur longueur §6.3 [J21]).

### 6.1.6 Objectif de notre travail

Le gros intérêt des modèles réduits est d'obtenir des modèles de faible taille, dont la résolution est rapide, ce qui est une caractéristique indispensable pour une utilisation en phase de conception

Matériau	Épaisseurs [nm]		$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	Y [GPa]	$\nu$	$\sigma_0$ [MPa]
	Plaque	Poutre				
Si	2000	340	2500	169	0.3	-15
SiO <sub>2</sub>	50, 200	10	2150	70	0.17	-260
Ti	–	10	4510	110	0.32	–
Pt	140	80	21450	145	0.35	500
PZT	940	110	7800	96	0.45	300

TAB. 6.1 – Caractéristiques des couches des micro-plaques et nano-poutre fabriquées par le LAAS. Les valeurs des précontraintes  $\sigma_0$  proviennent de [28]

des N/MEMS. De plus, des modèles réduits basés sur une projection modale, voire de manière plus poussée sur des modes non linéaires, ont en général un fort contenu physique, très apprécié de la communauté des physiciens qui fabrique et conçoivent les MEMS.

Notre travail consiste donc à proposer des modèles réduits *efficaces, réalistes* et surtout *prédictifs*. Notamment, un des enjeux est de tester des modèles réduits par projection modale, classiques pour des structures homogènes, mais originaux pour nos présentes structures stratifiées piézoélectriques, surtout lorsque le modèle initial est de type éléments finis. Les deux paragraphes qui suivent proposent deux exemples de calcul.

## 6.2 Micro-plaques circulaires

Le présent paragraphe propose un premier exemple de calcul, permettant d'illustrer la méthode 5 de la figure 6.5. Il s'agit de mon premier travail sur les MEMS, qui a consisté à modéliser le comportement non linéaire d'une « membrane » circulaire mise en vibration par un patch piézoélectrique, circulaire aussi, placé en son centre, pour servir à la conception des bio-capteurs de masse du LAAS [28, 27]. Le modèle utilisé est celui d'une plaque circulaire stratifiée axisymétrique, composée de deux zones annulaires et encastrée sur toute sa périphérie. La zone centrale comporte 11 couches, dont deux piézoélectriques et la zone annulaire extérieure en comporte 3 (Fig. 6.6(a)). Le diamètre total est 200  $\mu\text{m}$  et celui de la zone centrale 60  $\mu\text{m}$ . Les caractéristiques des couches sont indiquées dans le tableau 6.1. Les équations aux dérivées partielles sont celles des Eqs. (2.55). Elles sont discrétisées par projection sur les modes propres de la structure en court-circuit et non précontrainte, si bien que le problème à résoudre est de la forme (3.18), avec  $N_w$  modes de flexion et  $N_\phi$  modes de membrane. Les modes sont calculés de manière semi-analytique, prennent en compte la stratification et la discontinuité de propriétés élastiques au raccordement entre les deux zones. Enfin, ajoutons que le choix de deux ensembles de couches piézoélectrique, l'un sur le dessus et l'autre sur le dessous de la plaque est théorique, les « vraies » plaques ne comportant qu'un patch piézoélectrique sur le dessus. L'idée ici est de simuler une structure symétrique, ce qui simplifie la formulation des Eqs. (3.18) en annulant les termes  $C_i^k$  et  $D_{ij}^k$ . Le modèle obtenu, quoique quantitativement éloigné de la réalité, est tout de même très riche en terme de comportement à la fois statique et dynamique, ce qui nous a permis d'obtenir un grand nombre de résultats de validation et de convergence de la méthode.

### 6.2.1 Flambage

Le premier calcul à effectuer est la simulation de la position de repos de la membrane, sous l'action des précontraintes. Dans ce cas, il s'agit de résoudre le problème (3.18) privé de sa dépendance

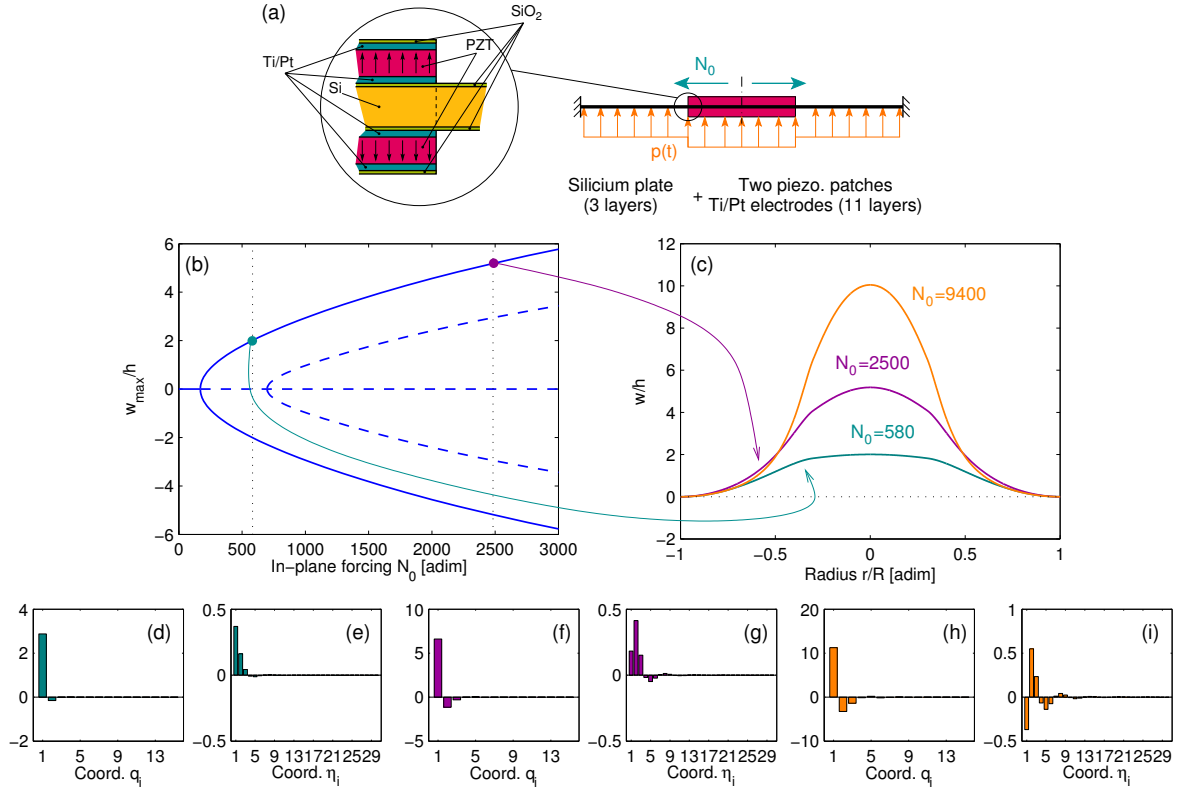


FIG. 6.6 – Flambage de la plaque circulaire MEMS (a) Schéma de la plaque circulaire MEMS. (b) Amplitude du déplacement statique au centre de la plaque, rapporté à l'épaisseur  $h$  de celle-ci, en fonction du paramètre de précontrainte  $N_0$ . (c) Déformée statique de la membrane pour trois valeurs de  $N_0$ . (bas) Convergence modale : amplitude des différentes coordonnées modales  $q_i$  (d,f,h) et  $\eta_i$  (e,g,i) pour les trois valeurs de  $N_0$  du graphique (c) [J14].

en temps ( $\ddot{q}_s = \dot{q}_s = 0, \forall s$ ), qui devient un problème algébrique quadratique, qu'on peut résoudre avec une méthode de continuation de point fixe (§3.4.1). Ici, j'ai utilisé la version 1.0 de Manlab [23].

La figure 6.6 montre le résultat d'un calcul de flambage de la membrane, sous l'action d'un forçage piézoélectrique statique. Pour cela, on impose la même tension électrique dans les deux couches piézoélectriques, si bien que vue la symétrie de la structure, seuls des efforts de membrane sont créés. Ce chargement est représenté par la quantité sans dimension  $N_0$  et le chargement extérieur  $p(t)$  est ici nul. Les deux premières charges critiques de flambage sont  $N_0 = 170.2$  et  $N_0 = 698.1$ , visibles sur la courbe 6.6(b). Le calcul permet de calculer la déformée statique de la structure, dont le profil dépend de la valeur de  $N_0$ . Cela est visible sur la figure 6.6(c) et sur les convergences modales 6.6(d-i), qui s'enrichissent au fur et à mesure que  $N_0$  augmente. Ces dernières figures montrent aussi qu'un calcul à  $N_w = 3$  modes transverses et  $N_\phi = 15$  modes de membrane est suffisant pour prédire le post-flambement jusqu'à un déplacement de 10 fois l'épaisseur de la plaque.

## 6.2.2 Réponse en fréquence

Avec le même modèle que dans le paragraphe précédent, il est aussi possible de prédire les vibrations non linéaires de la plaque circulaire autour de sa position précontrainte. Pour cela, le déplacement inconnu est décomposé sous la forme de la somme d'une partie statique ( $\hat{q}_s, \hat{\eta}_k$ ) et d'une partie dynamique ( $\tilde{q}_s(t), \tilde{\eta}_k(t)$ ), de manière analogue à ce qui est proposé au §3.2.1. Les solutions périodiques du système vérifié par les ( $\tilde{q}_s(t), \tilde{\eta}_k(t)$ ), analogue à (3.18) avec un forçage extérieur  $\tilde{F}_k(t)$

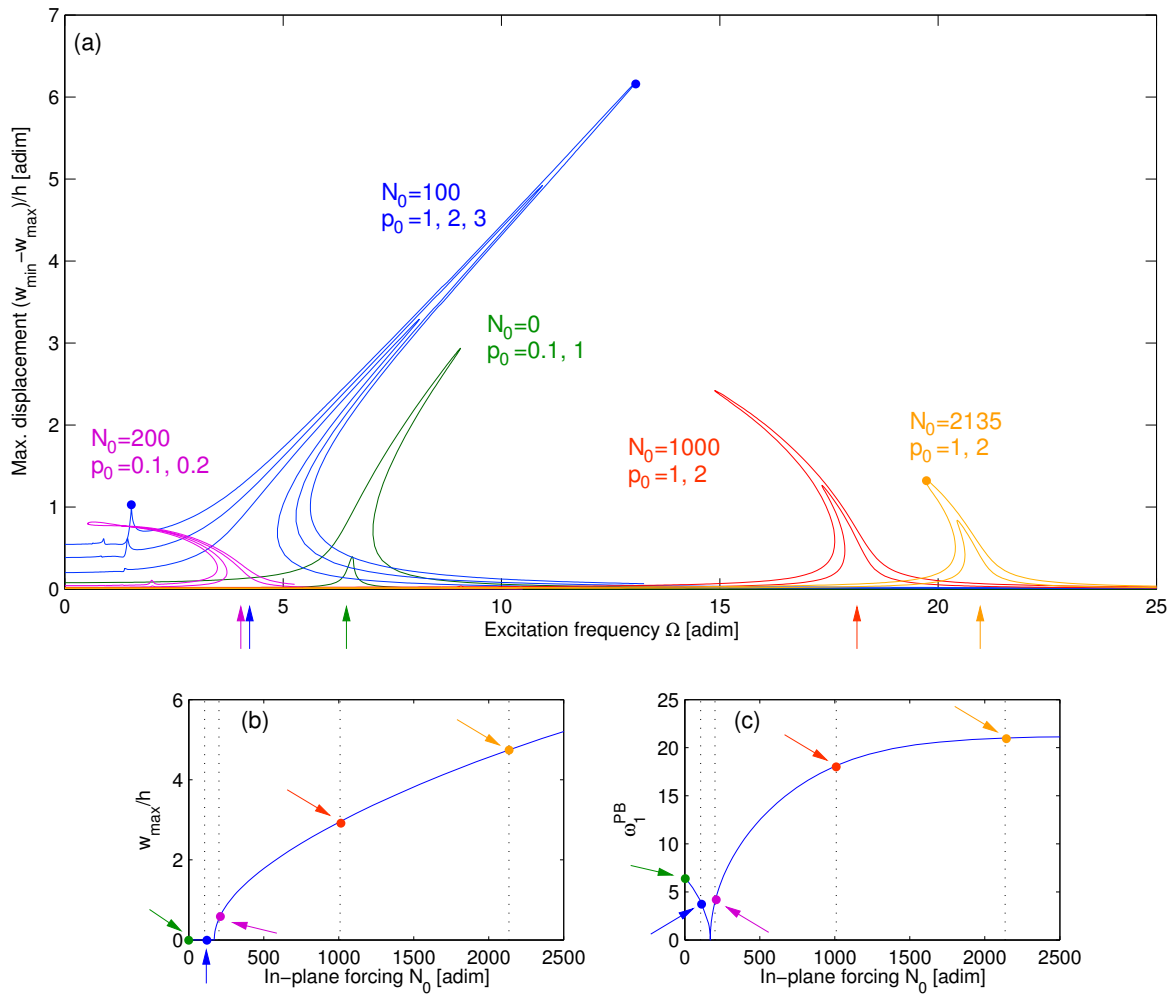


FIG. 6.7 – Vibrations non linéaires de la plaque circulaire de la figure 6.6, autour de la configuration flambée créée par la précontrainte  $N_0$ , sous l'action d'une pression uniforme oscillante  $p(t) = p_0 \cos \Omega t$ . (a) Courbes de résonance autour de la résonance fondamentale de la plaque, chacune correspondant à une valeur de  $N_0$  et de  $p_0$ . (b) Déplacement statique en post-flambement, en fonction de  $N_0$ . (c) Fréquence propre fondamentale de la plaque en fonction de  $N_0$  [J14].

sinusoïdal à la pulsation  $\Omega$ , sont obtenues par continuation numérique avec équilibrage harmonique et Manlab (HBM/MAN).

Un résultat de calcul est présenté sur la figure 6.7, sous la forme de courbes de réponse en fréquence. La réponse de la structure est non linéaire, comme en témoigne l'incurvation des courbes. La source des non-linéarités est géométrique, provenant du couplage membrane / flexion capturé par le modèle de von Kármán (Voir §2.1.3 et §2.3.1). On constate tout d'abord sur la figure 6.7(c) que lorsque la précontrainte  $N_0$  augmente, la première fréquence propre de la structure diminue, devient nulle au point critique de flambage, puis ré-augmente. Ensuite, sur la figure 6.7, deux phénomènes antagonistes sont observés. Pour des précontraintes inférieures à la charge critique de flambage, la structure est plate au repos, et le comportement non linéaire est raidissant. Inversement, pour des valeurs de  $N_0$  supérieures à la charge critique de flambage, le comportement est assouplissant, ce qui est logique puisque la structure à une géométrie incurvée au repos (Voir §3.3.5(a)). Avec la méthode de calcul HBM/MAN utilisée, on a accès à toute la richesse de la dynamique : aux oscillations périodiques, à leur contenu fréquentiel et à la participation modale de chacun des modes de la base [J14],

[C27].

### 6.3 Nano-poutres piézoélectriques

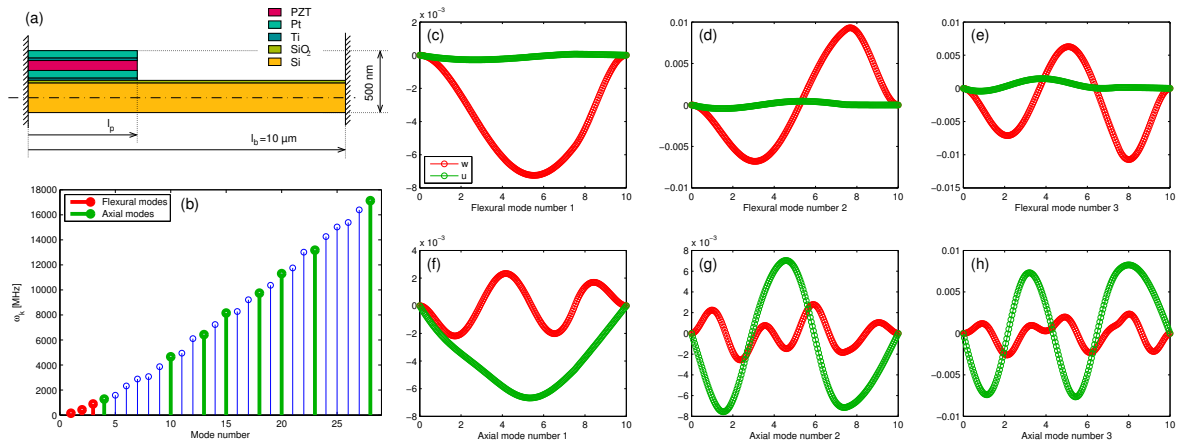


FIG. 6.8 – (a) Schéma de la nano-poutre. (b) Fréquences propres, avec  $l_p = 0.75l_b$ , en fonction du numéro du mode. Les trois premiers modes « de flexion » sont indiqués en rouge et les huit premiers modes « axiaux » sont indiqués en vert. (c-e) trois premiers modes « de flexion ». (f-h) trois premiers modes « axiaux ». Le déplacement axial est en vert et le déplacement transverse en rouge [J20].

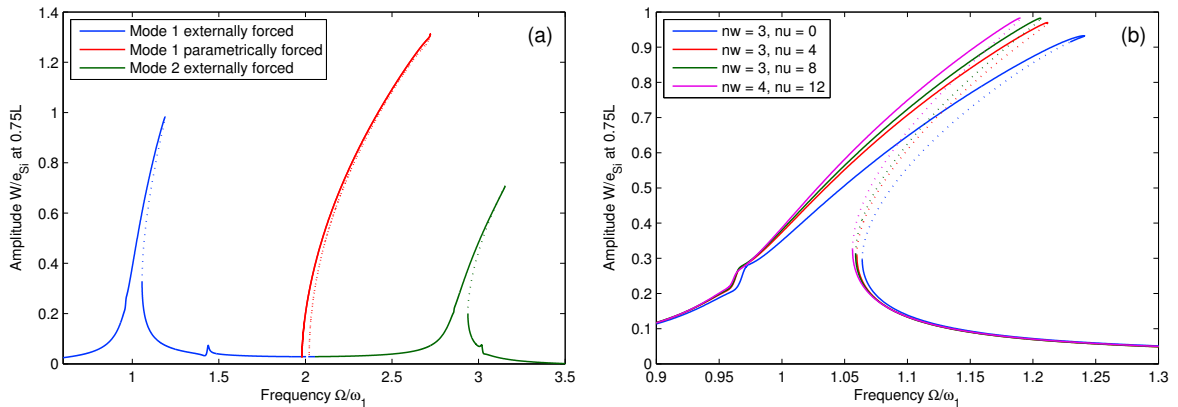


FIG. 6.9 – (a) Réponse en fréquence non linéaire de la poutre (b) Convergence du modèle réduit en terme du nombre de mode  $N_w$  transverses et  $N_u$  axiaux conservés dans la base [J20].

Le présent paragraphe propose un second exemple de calcul, permettant d'illustrer la méthode 4 de la figure 6.5. Il s'agit ici de calculer la réponse vibratoire de la nano-poutre de la figure 6.9. Elle est constituée d'une base de Silicium et surmontée d'un empilement de couches pour l'actuation piézoélectrique, de longueur  $l_p = 0.75l_b$ , avec  $l_b = 10 \mu\text{m}$  la longueur totale de la poutre. Les caractéristiques de chacune des couches sont données dans le tableau 6.1. La poutre est encastée à ses deux extrémités, si bien que les non linéarités géométriques se manifestent sous la forme d'un couplage axial / flexion, bien capturé par le modèle de von Kármán.

Les précontraintes ne sont pas considérées ici. Le calcul est mené à partir de la formulation éléments finis (2.54), discrétisée par projection sur la base des modes propres du modèle linéarisé autour

de sa position de repos, comme expliqué au paragraphe 3.2.1(d). La base modale, calculée par éléments finis, est représentée sur la figure 6.8. Comme la structure est stratifiée et non symétrique dans l'épaisseur, les déformées modales montrent un fort couplage axial / flexion, très visible sur les graphiques 6.8(c-h). Par suite, la troncature modale est moins aisée que dans le cas d'une structure symétrique, où les modes de flexion et les modes axiaux forment deux bases indépendantes et où il suffit de conserver quelques modes de flexion et de membrane pour obtenir la convergence. La stratégie adoptée ici a été de séparer la base modale en deux groupes de modes « axiaux » et « de flexion », selon si le mouvement transverse est d'amplitude supérieure à celle du mouvement axial ou non. Ensuite, les  $N_w$  premiers modes « de flexion » et les  $N_u$  premiers modes « axiaux » forment la base réduite.

En utilisant la méthode HBM/MAN/Hill dans Manlab, on a simulé le comportement vibratoire non linéaire du système, sous l'action d'une tension sinusoïdale  $V(t) = V_0 \cos \Omega t$  imposée à la couche piézoélectrique. La courbe de la figure 6.9(a) a été obtenue pour  $V_0 = 5V$ . Les deux premières résonances sont obtenues, pour  $\Omega \simeq \omega_1$  et  $\Omega \simeq \omega_2$ , avec  $\omega_1 = 23.5$  MHz et  $\omega_2 = 67.5$  MHz les deux premières fréquences propres, correspondant aux déformées modales des figures 6.8(c,d). La résonance paramétrique du premier mode est aussi obtenue, à partir d'une paire de bifurcations par doublement de période.

Enfin, la convergence du modèle est illustrée sur la figure 6.9(b), pour la première résonance. Elle n'est pas tout à fait atteinte avec  $N_w = 4$  modes « de flexion » et  $N_u = 12$  modes « axiaux ». Ces simulations sont le résultat d'une première implémentation de la méthode dans la version 1.0 de Manlab il y a 1 an, qui s'est avérée trop lente pour procéder à plus de calculs. Depuis, un code dédié a été écrit, et est en court de validation. D'un point de vue physique, ces premiers résultats montrent tout de même que la convergence semble plus lente avec ces structures stratifiées qu'elle ne l'est pour des structures homogènes équivalentes.

---

## Conclusion et perspectives

Ce rapport a présenté mes travaux de recherche, produits depuis mes années de thèse (1998-2001) jusqu'à maintenant, en 2011. J'ai eu la chance de pouvoir poursuivre mon thème de recherche initial et favori, la dynamique non linéaire, qui s'est trouvé fort avantageusement enrichi par les couplages piézoélectriques et de nouvelles applications, depuis mon arrivée au LMSSC en 2003. Mon travail, ainsi que plus généralement ma démarche de chercheur, ont été guidés par quatre éléments.

Primo, mes recherches ont toujours été menées dans la *direction d'une application*, qui a été le moteur, la justification, mais aussi le prétexte des développements scientifiques proposés. Principalement au nombre de trois, ces applications et les principaux résultats associés ont été présentés dans la partie II (au chapitre 4 pour la *dynamique non linéaire d'instruments de musique*, au chapitre 5 pour la *réduction de vibration par shunt piézoélectriques* et au chapitre 6 pour les *vibrations de micro / nano systèmes électromécaniques*). Ainsi, par exemple, nos recherches sur les vibrations non linéaires de cymbales et de gongs ont été le prétexte à explorer une grande variété de sujets de portée plus large : il s'est avéré que ces structures constituent un laboratoire formidable de mise en applications d'un grand nombre de théories du monde non linéaire : le chaos, les bifurcations, les résonances internes, les modes non linéaires, les modèles de plaque et de coque, la stabilité... Ils constituent aussi un moyen prodigieux d'apprentissage des techniques expérimentales en vibrations, puisque ces objets sont en général des structures monoblocs<sup>1</sup> très faiblement amorties<sup>2</sup>, qui permettent en plus, par définition, de bénéficier de la contribution du formidable capteur qu'est l'oreille. Je n'imaginais pas, il y a 13 ans, que ces instruments de musiques nous feraient voyager aussi longtemps ! La piézoélectricité a aussi été une seconde chance décisive, car elle m'a amené, non sans plaisir, à élargir mon champ disciplinaire vers des domaines de physiciens, celui de l'électricité et celui des N/MEMS. Ces derniers objets sont également, comme les gongs et les cymbales, un étonnant laboratoire pour la dynamique non linéaire.

Secundo, le moteur principal de mon activité de chercheur est la compréhension de *la mécanique des objets de l'ingénieur*, c'est-à-dire d'arriver à être capable d'expliquer tel ou tel comportement observé, ou tel ou tel fonctionnement. Cela est possible à travers deux outils complémentaires et indispensables : la modélisation théorique et des expérimentations. La partie I (les chapitres 2 et 3) est consacrée à ces points. Il est remarquable de noter qu'une caractéristique majeure de la présente discipline scientifique est qu'il est le plus souvent possible de produire des modèles mathématiques, certes parfois très complexes, qui représentent de manière extrêmement fidèle la réalité. Cela est

---

<sup>1</sup>Elles sont ainsi dépourvues d'assemblage entre pièces, qui sont le plus souvent à l'origine de phénomènes complexes qui ajoutent des difficultés expérimentales.

<sup>2</sup>Les résonances sont alors très marquées, ce qui facilite les analyses modales expérimentales et le recalage avec des modèles mécaniques élémentaires



une source de satisfaction quotidienne, notamment lorsque les résultats d'un calcul numérique se superposent parfaitement à ceux d'un test expérimental.

Tertio, les deux fils conducteurs méthodologiques de mes recherches, déjà évoqués dans l'introduction, sont fondamentaux selon moi. Ce sont d'une part la *compréhension des phénomènes physiques* liés aux objets étudiés et d'autre part la mise en place de *modèles et de stratégies de simulations prédictifs*. Ces deux volets se nourrissent l'un et l'autre, car la compréhension physique des phénomènes est indispensable au choix d'un modèle et d'une simulation adaptée. La justification de mes recherches, s'il faut en trouver une, découle de ces deux fils conducteurs. La production de stratégies de simulation permet de créer les outils de base utilisés par les ingénieurs, qui doivent aussi comprendre les phénomènes physiques liés au fonctionnement des objets qu'ils créent.

Quarto, toutes mes recherches sont le fruit de travaux collectifs, que ce soit directement avec mes collègues et co-auteurs – qu'ils soient « permanents », doctorants ou post-doctorants – ou plus généralement à travers les innombrables discussions à l'occasion de séminaires, colloques, congrès et groupes de recherche. Les travaux décrits dans ce manuscrit sont de manière indissociable le fruit de ce travail en commun.

## Dans le futur

Les perspectives de ce travail sont multiples. D'un point de vue méthodologique, les quatre caractéristiques évoquées ci-dessus me paraissent fondamentales. D'un point de vue scientifique, les recherches évoquées dans ce manuscrit peuvent être poursuivies selon deux directions. D'une part, dans chacun des sujets évoqués dans ce manuscrit, un certain nombre de points ont été laissés de côté, et mériteraient de s'y attarder dans le futur. D'autre part, des sujets de recherche plus globaux émergent de mon travail. J'en évoque quelques-uns ci-après.

## Dynamique non linéaire numérique

La dynamique non linéaire est à l'origine d'une phénoménologie riche et variée, qui trouve ses applications dans un grand nombre de branches de la physique : la dynamique des corps célestes, la météorologie et les études du climat, la mécanique des fluides, et, ce texte en donne un aperçu, en dynamique des solides. La grande majorité de la littérature sur le sujet propose des études extrêmement fines et poussées du point de vue phénoménologique, car elles sont fondées sur des modèles extrêmement simplifiés à faible nombre de degrés de liberté qui autorisent les calculs analytiques. L'exemple le plus connu est sûrement le système de Lorenz, qui est la réduction à trois degrés de liberté d'une tranche d'atmosphère soumise à de la convection thermique [189]. D'autre part, en mécanique des solides, les techniques de simulation numérique de systèmes non linéaires de géométrie complexe sont très matures, notamment grâce aux développements de la méthode des éléments-finis. Plusieurs codes commerciaux fournissent des moyens de simulations de la dynamique non linéaire, par intégration temporelle directe.

Entre ces deux extrêmes : la résolution analytique de systèmes dynamiques à faible nombre de degrés de liberté d'une part, et l'intégration temporelle de modèles à plusieurs millions de degrés de liberté d'autre part, il existe un champ beaucoup moins abordé qu'il me semble intéressant d'explorer. L'idée est de coupler des méthodes éléments-finis existantes avec les techniques d'études de la dynamique non linéaire. Alors que cette idée a été testée de manière active dans le cas de non-linéarités de contact,<sup>3</sup> le cas des non-linéarités géométriques est encore assez peu exploré. Des stratégies possibles ont été évoquées au chapitre 6 et sont résumées sur la figure 6.5, p. 128. Les ingrédients à assembler sont (i) la discrétisation de la géométrie de la structure par une méthode éléments-finis (ii)

<sup>3</sup>Je pense notamment aux travaux du LTDS de l'école centrale de Lyon, <http://ltds.ec-lyon.fr>, et du LDSV de l'université McGill au Canada, <http://structdynviblab.mcgill.ca>

---

la réduction de ce modèle (iii) l'utilisation de techniques numériques de continuation de solutions périodiques. Les premiers tests de ces stratégies sont présentés dans le chapitre 6 pour des poutres stratifiées piézoélectriques. Beaucoup de perspectives sont envisageables à plus ou moins long terme :

- l'extension à des géométries plus complexes : plaques, coques, solides tridimensionnels. Les applications directes de cela, en liaison avec mon travail, sont (i) les vibrations de cymbales et de gongs, pour s'affranchir des modèles analytiques et simuler des profils géométriques réalistes de ces coques ; (ii) les vibrations d'aubes / pales de turboréacteurs, pour simuler leur comportement en vibrations de grande amplitude et prévoir les seuils d'apparition des non-linéarités, en particulier dans le cas d'utilisation de matériaux composites ; (iii) les micro / nano-capteurs de masse, où l'utilisation de résonateurs bidimensionnels comme des membranes à la place des ponts ou des leviers paraît prometteuse [27].
- le test de stratégies de réduction alternatives, comme notamment l'utilisation de dérivées modales, décrites au paragraphe 3.2.2(b), p. 64, [142, 305]. Il serait aussi intéressant d'évaluer, dans le domaine non linéaire, le gain de précision associé à l'enrichissement des bases modales par des modes statiques, ce qui est courant dans un cadre linéaire [33]. Enfin, certaines techniques de réductions proches des séries entières à la base des méthodes asymptotiques numériques pourraient être testées, et notamment étendues au régime libre pour le calcul de modes non linéaires [46] ;
- l'utilisation « en boîte noire » de codes commerciaux éléments-finis, très optimisés notamment pour le temps de calcul, pour la recherche de solutions périodiques et leur continuation, notamment avec des méthodes de type « shooting » ;
- l'amélioration des codes de continuation du laboratoire. Notamment, (i) l'utilisation d'algorithmes de sélection automatique du nombre d'harmoniques retenues dans la solution périodique, pour accélérer les calculs, lorsque la méthode de l'équilibrage harmonique est utilisée est envisagée [116] ; (ii) le test d'une formulation dans le domaine réel de l'algorithme de calcul de stabilité par la méthode de Hill [300] ; (iii) l'utilisation de techniques de détections de bifurcation et de branchement automatique ; (iv) l'implémentation de techniques de continuation de solutions pseudo-périodiques [174] (pour le calcul de modes non linéaires amortis) et quasi-périodiques.

## Modes non linéaires

Le paragraphe 3.3, p. 65, donne un aperçu du concept de mode non linéaires. Avec la méthode de calcul que nous avons proposé, le calcul de la forme normale est asymptotique et du coup intrinsèquement valide dans un voisinage du point d'équilibre, domaine de validité impossible à déterminer sans simuler la dynamique complète. Une manière de contourner ces inconvénients est de faire un calcul *numérique* de la variété invariante et du changement de variable associé. Une méthode originale pour réaliser cela est proposée dans [43]. Je propose de mettre en œuvre ces idées suivant les deux points suivants :

- faire le calcul des variétés invariantes avec un code de continuation de solutions périodiques comme Manlab. Un exemple est proposé sur les figures 3.1 et 3.4, pp. 68 et 74. Même si la prise en compte de l'amortissement est impossible avec cette méthode, elle offre l'avantage de sa généralité. Ensuite, on peut procéder au calcul du changement de variable et du modèle réduit comme dans [43].
- étendre le point précédent au cas des résonances internes, qui se manifestent par une variété qui se replie sur elle-même (cela est visible sur les figures 3.1 et 3.4). Il est notamment nécessaire de caractériser de manière géométrique la dynamique dans l'espace des phases, qui est définie

théoriquement par une variété de dimension 4, puisque les deux modes non linéaires en résonance interne sont couplés.

D'autre part, la mise en évidence expérimentale de modes non linéaires, notamment en mesurant la dépendance des déformées modales avec l'amplitude, peut donner lieu à de très élégantes expériences, en plus de leur utilité pratique pour valider un modèle donné. Expérimentalement, la difficulté est de déduire les caractéristiques d'un système en vibration libre (les modes) d'une expérience en régime forcé. Une méthode par appropriation modale est proposée en non linéaire dans [252]. Il serait intéressant de proposer des mesures de modes non linéaires de structures continues soumises à des non-linéarités géométriques, pour revoir notamment les résultats de [39] et les confronter à des calculs produits par des méthodes numériques plus récentes.

Enfin, des points théoriques sur les modes non linéaires restent à mon avis ouverts. Notamment, comment appliquer les théories classiques des bifurcations (obtenues en réduisant la dynamique à des petits systèmes canoniques) à ces systèmes hamiltoniens, où le paramètre de bifurcation, qui est l'énergie du système dans ce cas, n'apparaît pas explicitement dans le système dynamique ? Par extension, lorsqu'un système est soumis à des résonances internes, celles-ci se manifestent par des intersections de branches dans les diagrammes fréquence / énergie. Ces intersections correspondent-elles à des bifurcations particulières ? Est-ce que les théories classiques de plaques et de coques, réduites sur des bases de modes propres, conduisent bien à des systèmes hamiltoniens ?

### Les non-linéarités : un avantage

Les non-linéarités ont le plus souvent été considérées comme une source de difficultés par les ingénieurs, qui essaient de les éliminer lorsque cela est possible. Les non-linéarités géométriques sont ainsi quasiment absentes des systèmes de l'ingénieur en génie mécanique, car celui-ci les a toujours dimensionné suffisamment rigides pour réduire l'amplitude des vibrations au maximum, le plus souvent en deçà du seuil d'apparition des non-linéarités. Inversement, il peut être intéressant dans certains cas de tirer parti des non-linéarités pour réaliser une fonction technologique donnée. Voici quelques pistes de recherches.

- La première idée est d'utiliser les non-linéarités pour réaliser des absorbeurs dynamiques de vibrations, pour contourner la contrainte principale du traditionnel amortisseur de Frahm, qui doit être accordé avec précision sur la fréquence du mode à amortir. Le chapitre 5 reprend les résultats principaux de mon travail dans le domaine de la réduction de vibration, cantonné aux shunts piézoélectriques et à la réalisation de simulations électromécaniques précises pour l'optimisation des dispositifs. Deux voies pourraient être explorées dans ce cadre. Le lecteur intéressé peut consulter le paragraphe 5.1, notamment pour les références bibliographiques :
  - L'utilisation de non-linéarités essentielles régulières, et plus récemment non régulières, dans la raideur du système amortissant a été testée depuis les années 2000 dans un grand nombre de publications, sous le vocable « pompage énergétique » ou NES (*nonlinear energy sink*), notamment par les équipes de A. Vakakis, C.-H. Lamarque et G. Kerschen. La réalisation pratique du système amortisseur par un dispositif mécanique est toujours délicate, et sa réalisation et son optimisation à l'aide d'un shunt piézoélectrique paraît prometteuse.
  - L'utilisation de résonances internes et notamment du phénomène de saturation du mode principal par transfert d'énergie vers le mode en résonance interne a été largement étudié par les équipes de P. F. Pai et A. H. Nayfeh dans les années 2000 et nécessiterait peut-être d'être revisitée.

- 
- Les techniques de shunt à commutation, très étudiées par l'équipe de Daniel Guyomar que j'ai abordé lors de la thèse de Julien Ducarne au laboratoire, pourraient être revisitées sous l'angle de vue de la dynamique non linéaire, et notamment à partir de la recherche numérique de solutions périodiques. Comme les non-linéarités sont non régulières, des méthodes numériques adaptées seraient à développer.
  - Une seconde idée est de concevoir des systèmes récupérateurs d'énergie. Tous les systèmes amortissants décrits dans le point précédent peuvent servir de récupérateur d'énergie, en couplant au shunt un circuit électronique approprié. Même si un très large effort planétaire est fourni à l'heure actuelle pour développer ce genre de systèmes, plusieurs idées restent à tester. Notamment, les méthodes que j'ai contribué à développer pour l'optimisation électromécanique des shunts, mais aussi pour le calcul de systèmes non linéaires en oscillations périodiques, pourraient être mises à contribution pour concevoir un système efficace de récupération de l'énergie d'une structure vibrant en grande amplitude.
  - Enfin, dans le domaine des N/MEMS, certaines études récentes montrent que les non-linéarités géométriques peuvent être mises à profit dans le fonctionnement de capteurs de masse. Quelques voies, évoquées au paragraphe 6.1.2, sont à développer. La première est l'utilisation d'une amplification paramétrique du résonateur pour améliorer artificiellement le facteur de qualité des résonances. La seconde est la mise à profit des résonances non linéaires et des phénomènes de saut. Dans ces deux cas, une modélisation fine des résonateurs et des stratégies de simulation efficace sont indispensables pour la conception des dispositifs.

### Quelques extensions supplémentaires

Deux extensions supplémentaires de mes travaux méritent d'être évoquées.

- Jusqu'à présent, j'ai supposé dans mes travaux que les effets piézoélectriques étaient parfaitement linéaire, à la fois dans la relation de comportement et dans les équations d'équilibre dynamique. Cela apparaît restrictifs dans certains cas pratiques. Dans le cadre des M/NEMS, comme évoqué au §6.1.4 (p. 127), la polarisation des couches piézoélectriques n'est pas effectuée au préalable comme dans le cas de patches piézoélectriques macroscopiques. Il en résulte des non-linéarités assez fortes, illustrées par exemple sur la figure 6.4 (p. 127). De manière plus générale, j'ai déjà observé au laboratoire la manifestation de non-linéarités piézoélectriques, notamment sur la poutre encastrée libre de la figure 5.3 (p. 118)<sup>4</sup>, ce qui est confirmé par certains auteurs [122, 328, 1, 263]. Ainsi, il serait intéressant de produire des modèles précis rendant compte de ces phénomènes.
- Les résultats de la thèse d'Aurélien Sénéchal, sur la réduction des vibrations d'aubes de soufflante de turboréacteurs sont très prometteurs et une suite va être proposée au constructeur Snecma, suivant plusieurs directions : l'étude et la simulation du placement des patches piézoélectriques à l'intérieur des aubes, l'étude du comportement des shunts en régime non linéaire de vibration, l'influence de la force centrifuge due à la rotation, l'amortissement des vibrations du rotor en symétrie cyclique . . .

---

<sup>4</sup>J'ai observé un comportement assouplissant du premier mode de vibration, alors qu'il devrait être raidissant sans la présence des patches piézoélectriques.

## Épilogue illustré

STEVE REICH

### clapping music for two performers (1972)

#### Directions for Performance

The number of repeats is fixed at 12 repeats per bar. The duration of the piece should be approximately 5 minutes. The second performer should keep his or her downbeat where it is written, on the first beat of each measure and not on the first beat of the group of three claps, so that the downbeat always falls on a new beat of the unchanging pattern. No other accents should be made. It is for this reason that a time signature of 6/4 or 12/8 is not given – to avoid metrical accents. To begin the piece one player may set the tempo by counting quietly; "one, two, three, four, five, six".

The choice of a particular clapping sound, i.e. with cupped or flat hands, is left up to the performers. Whichever timbre is chosen, both performers should try and get the same one so that their two parts will blend to produce one overall resulting pattern.

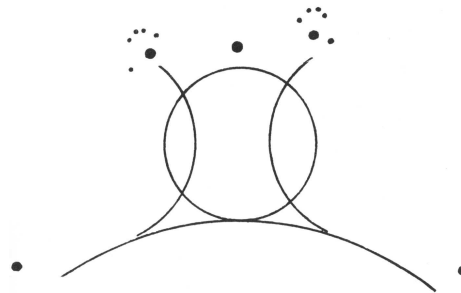
In a hall holding 200 people or more the clapping should be amplified with either a single omni-directional microphone for both performers, or two directional microphones; one for each performer. In either case the amplification should be mixed into mono and both parts fed equally to all loudspeakers. In smaller live rooms the piece may be performed without amplification. In either case the performers should perform while standing as close to one another as possible so as to hear each other well.

♩ = 160-184 Repeat each bar 12 times

162

Copyright 1980 by Universal Edition (London) Ltd., London. All Rights Reserved. Used by permission of European American Music Distributors Corporation, sole U.S. agent for Universal Edition.

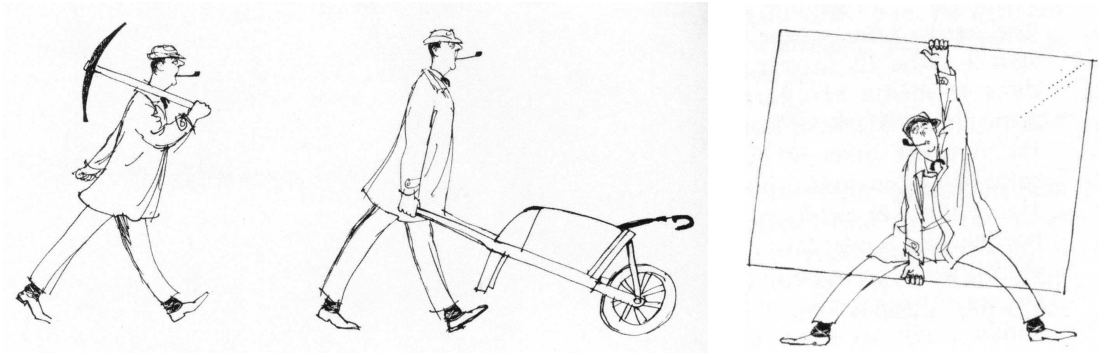
#### Partition de la pièce clapping music, de S. Reich (1972) Phénomène périodique ou quasi-périodique ?



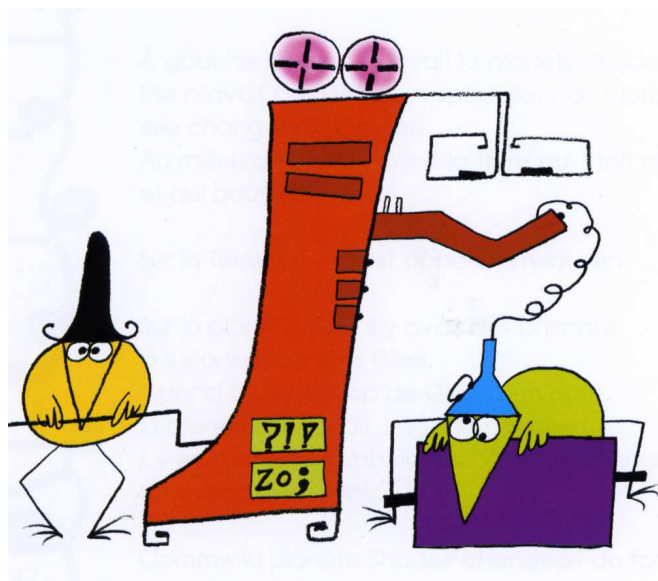
« Schéma graphique du saut de la danseuse G. Palucca. » W. Kandinsky [159]  
Modélisation et schématisation ?



*Chorégraphie Drumming, de A. T. De Keersmaeker (1998) [3]  
Équilibre dynamique ?*



*Dessin de Cabu pour le film Playtime, de J. Tati (1967) [94]  
La science du mouvement et de l'équilibre.*



*La recherche en mécanique ? [316, 275]*



*Hergé [127]*

**À SUIVRE...**

---

# Bibliographie





---

## Articles de revues à comités de lecture

- [J1] C. TOUZÉ, O. THOMAS, and A. CHAIGNE. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part 1 : theory. *Journal of Sound and Vibration*, **258**(4) :649–676, 2002.
- [J2] O. THOMAS, C. TOUZÉ, and A. CHAIGNE. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part 2 : experiments. *Journal of Sound and Vibration*, **265**(5) :1075–1101, 2003.
- [J3] C. TOUZÉ, O. THOMAS, and A. CHAIGNE. Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, **273**(1-2) :77–101, 2004.
- [J4] C. TOUZÉ, O. THOMAS, and A. HUBERDEAU. Asymptotic non-linear normal modes for large amplitude vibrations of continuous structures. *Computers and Structures*, **82**(31-32) :2671–2682, 2004.
- [J5] A. CHAIGNE, C. TOUZÉ, and O. THOMAS. Nonlinear vibrations and chaos in gongs and cymbals. *Acoustical Science and Technology*, **26**(5) :403–409, 2005.
- [J6] O. THOMAS, C. TOUZÉ, and A. CHAIGNE. Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : modal interaction rules and 1:1:2 internal resonance. *International Journal of Solids and Structures*, **42**(11-12) :3339–3373, 2005.
- [J7] C. TOUZÉ and O. THOMAS. Non-linear behaviour of free-edge shallow spherical shells : effect of the geometry. *International Journal of non-linear Mechanics*, **41**(5) :678–692, 2006.
- [J8] O. THOMAS, C. TOUZÉ, and É. LUMINAIS. Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : experiments on a 1:1:2 internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, **49**(1-2) :259–284, 2007.
- [J9] O. THOMAS and S. BILBAO. Geometrically non-linear flexural vibrations of plates : in-plane boundary conditions and some symmetry properties. *Journal of Sound and Vibration*, **315**(3) :569–590, 2008.
- [J10] C. TOUZÉ, M. AMABILI, and O. THOMAS. Reduced-order models for large-amplitude vibrations of shells including in-plane inertia. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **197**(21-24) :2030–2045, 2008.
- [J11] C. TOUZÉ, C. CAMIER, G. FAVRAUD, and O. THOMAS. Effect of imperfections and damping on the type of nonlinearity of circular plates and shallow spherical shells. *Mathematical Problems in Engineering*, **2008** :ID 678307, 2008.
- [J12] C. CAMIER, C. TOUZÉ, and O. THOMAS. Non-linear vibrations of imperfect free-edge circular plates and shells. *European Journal of Mechanics A/Solids*, **28**(3) :500–515, 2009.
- [J13] O. THOMAS, J.-F. DEÛ, and J. DUCARNE. Vibration of an elastic structure with shunted piezoelectric patches : efficient finite-element formulation and electromechanical coupling coefficients. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **80**(2) :235–268, 2009.
- [J14] O. THOMAS, L. NICU, and C. TOUZÉ. Flambage et vibrations non-linéaires d’une plaque stratifiée piézoélectrique. Application à un capteur de masse MEMS. *Mécanique & Industries*, **10** :311–316, 2009.
- [J15] J. DUCARNE, O. THOMAS, and J.-F. DEÛ. Structural vibration reduction by switch shunting of piezoelectric elements : modelling and optimization. *Journal of Intelligent Materials Systems and Structures*, **21**(8) :797–816, 2010.
- [J16] A. LAZARUS and O. THOMAS. A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus Mécanique*, **338**(9) :510–517, 2010.

- [J17] S. GUILLON, D. SAYA, L. MAZENQ, S. PERISANU, P. VINCENT, A. LAZARUS, O. THOMAS, and L. NICU. Effect of non-ideal clamping shape on the resonance frequencies of silicon nanocantilevers. *Nanotechnology*, **22**(24) :245501, 2011. Doi : 10.1088/0957-4484/22/24/245501.
- [J18] C. TOUZÉ, O. THOMAS, and M. AMABILI. Transition to chaotic vibrations for harmonically forced perfect and imperfect circular plates. *International Journal of Non-linear Mechanics*, **46**(1) :234–246, 2011.
- [J19] J. DUCARNE, O. THOMAS, and J.-F. DEÛ. Placement and dimension optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction. *Journal of Sound and Vibration*, 2012. Submitted.
- [J20] A. LAZARUS, O. THOMAS, and J.-F. DEÛ. Finite elements reduced order models for nonlinear vibrations of piezoelectric layered beams with applications to NEMS. *Finite Elements in Analysis and Design*, **49**(1) :35–51, 2012.
- [J21] S. NEZAMABADI, O. THOMAS, and J.-F. DEÛ. Efficient computation of non linear vibrations of piezoelectric nano-beams with a continuation technique. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2012. In preparation.
- [J22] A. SÉNÉCHAL, O. THOMAS, and J.-F. DEÛ. Non-linear vibrations of rotating cantilever beams : finite elements validations of various reduced order models. *Nonlinear Dynamics*, 2012. In preparation.
- [J23] O. THOMAS, J. DUCARNE, and J.-F. DEÛ. Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction. *Smart Materials and Structures*, **21**(1) :015008, 2012.

---

## Actes de conférences

- [C1] O. THOMAS, D. ROUSSEAU, R. CAUSSÉ, and E. MARANDAS. Comparison of the effect of hammer striking irregularities and mistuning on the double decay of piano tones. In *Proc. of the International Symposium on Musical Acoustics*. Seattle, USA, July 1998.
- [C2] O. THOMAS, C. TOUZÉ, and A. CHAIGNE. Non-linear resonances in large-deflection vibrations of free-edge circular plates. In *Proceedings of the 7th. International Congress on Sound and Vibration*. Garmish Partenkirchen, July 2000.
- [C3] A. CHAIGNE, C. TOUZÉ, and O. THOMAS. Non-linear axisymmetric vibrations of gongs. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*. Perugia, September 2001.
- [C4] O. THOMAS, C. TOUZÉ, and A. CHAIGNE. Non-linear behavior of gongs through the dynamic of simple rods systems. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*. Perugia, September 2001.
- [C5] O. THOMAS, C. TOUZÉ, and A. CHAIGNE. Sur la vibration à un mode asymétrique des plaques circulaires en grands déplacements. In *Actes du 15ème Congrès Français de Mécanique*. Nancy, September 2001.
- [C6] A. CHAIGNE, M. FONTAINE, O. THOMAS, M. FERRÉ, and C. TOUZÉ. Vibrations of shallow spherical shells and gongs : a comparative study. In *Proceedings of Forum Acusticum*. Seville, September 2002.
- [C7] C. TOUZÉ and O. THOMAS. Determination of non-linear normal modes for conservative systems. In *Proceedings of the 9th. International Congress on Sound and Vibration*. Orlando, July 2002.
- [C8] C. TOUZÉ, P. LANCHANTIN, A. CHAIGNE, and O. THOMAS. Transferts d'énergie par couplage modal : étude d'un cas particulier. In *Actes du sixième Congrès Français d'Acoustique*. Lille, France, April 2002.
- [C9] C. TOUZÉ, O. THOMAS, and A. CHAIGNE. Non-linear oscillations of continuous systems with quadratic and cubic non-linearities using non-linear normal modes. In *Second M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*. Cambridge, USA, June 2003.
- [C10] C. TOUZÉ, O. THOMAS, and A. CHAIGNE. Modes normaux non linéaires de systèmes continus. In *Actes du 16ème congrès français de mécanique*. Nice, France, September 2003.
- [C11] A. CHAIGNE, C. TOUZÉ, and O. THOMAS. Mechanical models of musical instruments and sound synthesis : the case of gongs and cymbals. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*. Nara, Japan, March 2004.
- [C12] C. TOUZÉ and O. THOMAS. Reduced-order modeling for a cantilever beam subjected to harmonic forcing. In *proc. of EUROMECH Colloquium 457 : nonlinear modes of vibrating systems*. Fréjus, France, June 2004.
- [C13] O. THOMAS and C. TOUZÉ. Non-linear modal interactions in thin structures : theory and experiments on shallow shells. In *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*. Munich, Germany, July 2005.
- [C14] O. THOMAS, C. TOUZÉ, and É. LUMINAIS. Non-linear modal interactions in free-edge thin spherical shells : measurements of a 1 : 1 : 2 internal resonance. In *Third M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*. Cambridge, USA, June 2005.

- [C15] O. THOMAS, C. TOUZÉ, and É. LUMINAIS. Modèles réduits de structures minces en vibrations non-linéaires. In *Actes du 7ème colloque national en calcul de structures*, pages 339–344. Giens, France, May 2005.
- [C16] C. TOUZÉ and O. THOMAS. Type of non-linearity of shallow spherical shells using non-linear normal modes. In *Fifth Euromech Non-linear Dynamics Conference (ENOC 2005)*. Eindhoven, August 2005.
- [C17] M. AMABILI, C. TOUZÉ, and O. THOMAS. Comparison of galerkin, pod and nonlinear-normal-modes models for nonlinear vibrations of circular cylindrical shells. In *Proc. of 2006 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. Chicago, USA, November 2006.
- [C18] O. THOMAS and C. TOUZÉ. Large-amplitude forced vibrations of thin shallow spherical shells : reduced-order models at resonance and mode coupling. In *Proc. of the 2nd. International Conference on Nonlinear Normal Modes and Localization in Vibrating Systems*. Karlovasi, Samos, Greece, June 2006.
- [C19] C. TOUZÉ, M. AMABILI, and O. THOMAS. Reduced-order models for damped geometrically non-linear vibrations of thin shells via real normal form. In *Proc. of the 2nd. International Conference on Nonlinear Normal Modes and Localization in Vibrating Systems*. Karlovasi, Samos, Greece, June 2006.
- [C20] C. CAMIER, C. TOUZÉ, and O. THOMAS. Effet des imperfections géométriques sur les vibrations non-linéaires de plaques circulaires minces. In *Actes du 18ème congrès français de mécanique*. August 2007.
- [C21] J. DUCARNE, O. THOMAS, and J. DEÛ. Optimisation de dispositif passif d’atténuation de vibration par shunt piézoélectrique. In *Actes du 8ème colloque national en calcul de structures*. Giens, France, May 2007.
- [C22] J. DUCARNE, O. THOMAS, and J. DEÛ. Structural vibration reduction optimization by switch shunting of piezoelectric elements. In *Proc. of 2007 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. Seattle, USA, November 2007.
- [C23] O. THOMAS, L. NICU, C. AYELA, and C. TOUZÉ. Buckling and non-linear vibrations of a piezoelectric stratified plate. application to a MEMS biosensor. In *Proc. of EUROMECH colloquium 483 : Geometrically Non-Linear Vibrations of Structures*. Porto, Portugal, July 2007.
- [C24] O. THOMAS, L. NICU, C. AYELA, and C. TOUZÉ. Flambage et vibrations non-linéaires d’une plaque stratifiée piézoélectrique. application à un bio-capteur mems. In *Actes du 8ème colloque national en calcul de structures*. Giens, France, May 2007.
- [C25] C. TOUZÉ, M. AMABILI, O. THOMAS, and C. CAMIER. Reduction of geometrically non-linear models of shell vibrations including in-plane inertia. In *Proc. of EUROMECH colloquium 483 : Geometrically Non-Linear Vibrations of Structures*. Porto, Portugal, July 2007.
- [C26] J. DUCARNE, O. THOMAS, and J. DEÛ. Vibration reduction by switch shunting of piezoelectric elements : nonlinear energy transfers between modes and optimization. In *Proc. of the 19th. International Conference on Adaptive Structures and Technologies*. Ascona, Switzerland, October 2008.
- [C27] O. THOMAS, L. NICU, C. AYELA, and C. TOUZÉ. Buckling and non-linear vibrations of a MEMS biosensor. In *Proc. of the sixth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008)*. St. Petersburg, Russia, July 2008.
- [C28] C. TOUZÉ, C. CAMIER, and O. THOMAS. Type of non-linearity of damped imperfect plates using non-linear normal modes. In *Proc. of the sixth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008)*. St. Petersburg, Russia, July 2008.
- [C29] C. BLANZÉ and O. THOMAS. Atténuation de vibration par shunt piézoélectrique en présence d’incertitude sur les paramètres électriques. In *Actes du 9ème colloque national en calcul de structures*. Giens, France, May 2009.
- [C30] J. DEÛ, O. THOMAS, and J. DUCARNE. An efficient finite-element formulation for passive vibration attenuation using shunt piezoelectric patches. In *Proc. of CompDyn 2009 ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*. Rhodes, Greece, June 2009.
- [C31] M. MELON, C. LANGRENNE, O. THOMAS, and A. GARCIA. Comparison between measurement and boundary element modelization of subwoofers. In *Proc. of the AES 127th. convention*. New-York, USA, October 2009.

- [C32] A. SÉNÉCHAL, O. THOMAS, J. DEÛ, and P. JEAN. Atténuation de vibrations de structures complexes par élément piézoélectrique. application à une aube de turbomachine. In *Actes du 9ème colloque national en calcul de structures*. Giens, France, May 2009.
- [C33] O. THOMAS, L. NICU, and C. TOUZÉ. Flambage et vibrations non-linéaires d'une plaque stratifiée piézoélectrique. Application à un capteur de masse MEMS. In *Actes du 19ème congrès français de mécanique*. August 2009.
- [C34] J. DEÛ, A. SÉNÉCHAL, and O. THOMAS. Optimization of passive vibration damping of rotor blade structures using shunted piezoelectric elements. In *Proc. of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology*. Valencia, Spain, September 2010. Paper 78.
- [C35] A. SÉNÉCHAL, O. THOMAS, and J.-F. DEÛ. Optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction of complex structures - application to a turbojet fan blade. In *Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, IDETC/CIE 2010*. Montreal, Canada, August 2010.
- [C36] O. THOMAS, A. LAZARUS, and C. TOUZÉ. A harmonic-based method for computing the stability of periodic oscillations of non-linear structural systems. In *Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, IDETC/CIE 2010*. Montreal, Canada, August 2010.
- [C37] C. TOUZÉ, M. AMABILI, and O. THOMAS. Forced vibrations of circular plates : from periodic to chaotic motions. In *Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, IDETC/CIE 2010*. Montreal, Canada, August 2010.
- [C38] C. LAMARQUE, C. TOUZÉ, and O. THOMAS. An upper bound for normal form asymptotic expansions. In *Proc. of the 11th. conference on dynamical systems theory and applications*. Łódź, Poland, December 2011.
- [C39] M. MONTEIL, C. TOUZÉ, O. THOMAS, and J. FRELAT. Vibrations non linéaires de stellpans : couplages modaux via la résonance interne 1:2:2. In *Actes du 20ème congrès français de mécanique*. August 2011.
- [C40] O. THOMAS. Keynote lecture : Reduced order models for nonlinear vibrations of piezoelectric micro / nano systems. In *Proc. of the 11th. conference on dynamical systems theory and applications*. Łódź, Poland, December 2011.
- [C41] O. THOMAS and A. LAZARUS. Une méthode fréquentielle pour le calcul de la stabilité de vibrations périodiques. In *Actes du 10ème colloque national en calcul de structures*. Giens, France, May 2011.
- [C42] O. THOMAS, S. NEZAMABADI, A. LAZARUS, and J.-F. DEÛ. Réduction de modèles éléments finis pour les vibrations non linéaires. application à des nano-structures piézoélectriques. In *Actes du 10ème colloque national en calcul de structures*. Giens, France, May 2011.



---

## Rapports de recherche

- [R1] O. THOMAS. *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques – Application aux instruments de percussion*. Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, October 2001. (230 pages).
- [R2] O. THOMAS. *Vibrations non-linéaires de coques sphériques minces : expérience et modélisation*. Technical report, Rapport de recherche, ENSTA-UME, July 2003. (113 pages).
- [R3] O. THOMAS. *Amortissement d'aubes de FAN par contrôle semi-actif (Rapport d'avancement)*. Technical Report RAP-SNECMA-12/2005-1, Cnam LMSSC, December 2005. (82 pages).
- [R4] O. THOMAS. *Amortissement d'aubes de FAN par contrôle semi-actif (Rapport final)*. Technical Report RAP-SNECMA-12/2006-1, Cnam LMSSC, December 2006. (51 pages).
- [R5] O. THOMAS. *Analyse vibratoire d'un adaptateur de charge utile : premier résultats*. Technical Report RAP-CNES-10/2009, Cnam LMSSC, November 2009. (27 pages).
- [R6] O. THOMAS. *Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques*. Mémoire d'Habilitation à diriger des recherches, École Normale Supérieure de Cachan, October 2011.





---

# Bibliographie

- [1] ABDELKEFI, A., NAYFEH, A. H., AND HAJJ, M. R. Nonlinear distributed-parameter model for piezoelectric energy harvesters under parametric excitation. In *Proc. of the seventh EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011)* (Roma, Italy, July 2011).
- [2] ACARY, V., AND BROGLIATO, B. *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems*. Springer, 2008.
- [3] ADOLPHE et al., J.-M. *Rosas / Anne Teresa De Keersmaeker*. La Renaissance du Livre, 2002.
- [4] AGNES, G. S., AND INMAN, D. J. Performance of nonlinear vibration absorbers for multi-degrees-of-freedom systems using nonlinear normal modes. *Nonlinear Dynamics* **25** (2001), 275–292.
- [5] ALDRIDGE, J. S., AND CLELAND, A. N. Noise-Enabled Precision Measurements of a Duffing Nanomechanical Resonator. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 15 (2005), 156403.
- [6] ALHAZZA, K. A. *Nonlinear vibrations of doubly curved cross-ply shallow shells*. PhD thesis, Virginia polytechnic institute and state university, 2002.
- [7] ALLIK, H., AND HUGHES, T. J. R. Finite Element Method for Piezoelectric Vibration. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **2** (1970), 151–157.
- [8] AMABILI, M. A comparison of shell theories for large amplitude vibrations of circular cylindrical shells : lagrangian approach. *Journal of Sound and Vibration* **264**, 5 (2003), 1091–1125.
- [9] AMABILI, M. Non-linear vibrations of doubly curved shallow shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **40**, 5 (2005), 683–710.
- [10] AMABILI, M. Effect of boundary conditions on nonlinear vibrations of circular cylindrical panels. *Journal of Applied Mechanics* **74**, 3 (2007), 645–657.
- [11] AMABILI, M. *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. Cambridge University Press, 2008.
- [12] AMABILI, M., SARKAR, A., AND PAÏDOUSSIS, M. P. Reduced-order models for nonlinear vibrations of cylindrical shells via the proper orthogonal decomposition method. *Journal of Fluids and Structures* **18**, 2 (2003), 227–250.
- [13] AMABILI, M., AND TOUZÉ, C. Reduced-order models for non-linear vibrations of fluid-filled circular cylindrical shells : comparison of POD and asymptotic non-linear normal modes methods. *Journal of Fluids and Structures* **23**, 6 (2007), 885–903.
- [14] ANAND, G. V. Nonlinear resonance in stretched strings with viscous damping. *Journal of the Acoustical Society of America* **40**, 6 (1966), 1517–1528.
- [15] ANSI/IEEE STD 176-1987. *IEEE Standard on Piezoelectricity*. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 1988.
- [16] ANTMAN, S. S. *Nonlinear problems of elasticity*, vol. 107 of *Applied Mathematical sciences*. Springer-Verlag, 1995.
- [17] ANTMAN, S. S., AND KENNEY, C. S. Large buckled states of nonlinearly elastic rods under torsion, thrust, and gravity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **76**, 4 (1981), 289–338.

- [18] APIWATTANALUNGGARN, P., SHAW, S. W., AND PIERRE, C. Component Mode Synthesis Using Nonlinear Normal Modes. *Nonlinear Dynamics* **41** (2005), 17–46.
- [19] APIWATTANALUNGGARN, P., SHAW, S. W., PIERRE, C., AND JIANG, D. Finite-Element-Based Nonlinear Modal Reduction of a Rotating Beam with Large-Amplitude Motion. *Journal of Vibration and Control* **9**, 3-4 (2003), 235–263.
- [20] ARNOLD, V. I. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, second ed. Springer, 1988.
- [21] ARQUIER, R. *Une méthode de calcul de modes de vibrations non linéaires de structures*. PhD thesis, Université Aix-Marseille II, 2007.
- [22] ARQUIER, R., BELLIZZI, S., BOUC, R., AND COCHELIN, B. Two methods for the computation of nonlinear modes of vibrating systems at large amplitude. *Computers & Structures* **84** (2006), 1565–1576.
- [23] ARQUIER, R., KARKAR, S., LAZARUS, A., THOMAS, O., VERGEZ, C., AND COCHELIN, B. Manlab 2.0 : an interactive path-following and bifurcation analysis software. Tech. rep., Laboratoire de Mécanique et d’Acoustique, CNRS, <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr>, 2005–2011.
- [24] ATALAYA, J., KINARET, J. M., AND ISACSSON, A. Nanomechanical mass measurement using nonlinear response of graphene membrane. *European Physics Letters* **91** (2010), 48001.
- [25] AUBLIN, M., BONCOMPAIN, R., BOULATON, M., CARON, D., JEAY, E., LACAGE, B., AND RÉA, J. *Systèmes mécaniques*. Dunod, 1992.
- [26] AVITABILE, D., DESROCHES, M., AND RODRIGUES, S. Numerical continuation of isolas of equilibria. In *Proc. of the seventh EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011)* (Roma, Italy, July 2011).
- [27] AYELA, C., AND NICU, L. Micromachined piezoelectric membranes with high nominal quality factors in newtonian liquid media : a Lamb’s model validation at the microscale. *Sensors and Actuators B : chemical* **123**, 2 (2007), 860–868.
- [28] AYELA, C., NICU, L., SOYER, C., CATTAN, É., AND BERGAUD, C. Determination of the  $d_{31}$  piezoelectric coefficient of  $\text{PbZr}_x\text{Ti}_{1-x}\text{O}_3$  thin films using multilayer buckled micromembranes. *Journal of Applied Physics* **100** (2006), 054908.
- [29] BAESU, E., FORTUNÉ, D., AND SOÓS, E. Incremental behaviour of hyperelastic dielectrics and piezoelectric crystals. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)* **54**, 1 (2003), 160–178.
- [30] BAGUET, S. *Stabilité des structures minces et sensibilité aux imperfections par la méthode asymptotique numérique*. PhD thesis, Université Aix-Marseille II, 2011.
- [31] BAHREYNI, B. *Fabrication and design of resonant microdevices*. William Andrew Inc., 2008.
- [32] BAKER, G. L., AND BLACKBURN, J. A. *The Pendulum : A Case Study in Physics*. Oxford University Press, 2009.
- [33] BALMÈS, E. Methods for vibration design and validation - Méthodes de conception et de validation en vibration. <http://www.sdtools.com>, 2010.
- [34] BATAILLY, A., LEGRAND, M., CARTRAUD, P., AND PIERRE, C. Assessment of reduced models for the detection of modal interaction through rotor stator contacts. *Journal of Sound and Vibration* **329**, 26 (2010), 5546–5562.
- [35] BAUCHAU, O., AND GUERNSEY, D. On the choice of appropriate bases for nonlinear dynamic modal analysis. *Journal of the American Helicopter Society* **38**, 4 (1993), 28–36.
- [36] BELLIZZI, S., AND BOUC, R. A new formulation for the existence and calculation of nonlinear normal modes. *Journal of Sound and Vibration* **287** (2005), 545–569.
- [37] BELLIZZI, S., AND BOUC, R. An amplitude-phase formulation for nonlinear modes and limit cycles through invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration* **300** (2007), 896–915.
- [38] BENACCHIO, S. Couplages modaux dans les vibrations non linéaires de Steelpans. Rapport de stage de master 2, École Centrale Marseille et université de Provence, 2011.
- [39] BENAMAR, R., BENNOUNA, M. M. K., AND WHITE, R. G. The effects of large vibration amplitudes on the mode shapes and natural frequencies of thin elastic structures. Part III : fully clamped rectangular isotropic plates - measurements of the mode shape amplitude dependence and the spatial distribution of harmonic distortion. *J. Sound. Vib.* **175**, 3 (1994), 377–395.

- [40] BENJEDDOU, A. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements : a survey. *Computers and structures* **76** (2000), 347–363.
- [41] BENJEDDOU, A., AND DEÛ, J.-F. A two-dimensional closed-form solution for the free-vibrations analysis of piezoelectric sandwich plates. *International Journal of Solids and Structures* **39**, 6 (2002), 1463–1486.
- [42] BILBAO, S. *Numerical sounds synthesis : finite difference schemes and simulation in musical acoustics*. Wiley, 2009.
- [43] BLANC, F., EGE, K., TOUZÉ, C., MERCIER, J.-F., AND BONNET BEN DHIA, A.-S. Sur le calcul numérique de mondes non linéaires. In *Actes du 20ème congrès français de mécanique* (Aug. 2011).
- [44] BOIVIN, N., PIERRE, C., AND SHAW, S. W. Non-linear modal analysis of structural systems featuring internal resonances. *Journal of Sound and Vibration* **182**, 2 (1995), 336–341.
- [45] BOUDAUD, A., CADOT, O., ODILE, B., AND TOUZÉ, C. Observation of wave turbulence in vibrating plates. *Physical Review Letters* **100** (2008), 234504.
- [46] BOUMEDIENE, F., DUIGOU, L., BOUTYOUR, E. H., MILOUDI, A., AND CADOU, J. M. Nonlinear forced vibration of damped plates coupling asymptotic numerical method and reduction models. *Computational Mechanics* **47**, 4 (2011), 359–377.
- [47] BOUMEDIENE, F., MILOUDI, A., CADOU, J.-M., DUIGOU, L., AND BOUTYOUR, E. H. Nonlinear forced vibration of damped plates by an asymptotic numerical method. *Computers & Structures* **87**, 23-24 (2009), 1508–1515.
- [48] BOURGAT, J.-F., LE TALLEC, P., AND MANI, S. Modélisation et calcul des grands déplacements de tuyaux élastiques en flexion torsion. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée* **7**, 4 (1988), 379–408.
- [49] BOUTYOUR, E. H., ZAHROUNI, H., POTIER-FERRY, M., AND BOUDI, M. Bifurcation points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and Padé approximants. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* **60** (2004), 1987–2012.
- [50] BRJUNO, A. D. Analytical form of differential equations. *Transactions of Moscow Mathematical Society* **25** (1971), 131–288.
- [51] BUKS, E., AND YURKE, B. Mass detection with a nonlinear nanomechanical resonator. *Physical Review E* **74** (2006), 046619.
- [52] BURTON, T. D. Numerical calculation of nonlinear normal modes in structural systems. *Nonlinear Dynamics* **49** (2007), 425–441.
- [53] BUTZ, A., KLINKEL, S., AND WAGNER, W. A geometrically and materially non-linear piezoelectric three-dimensional-beam finite element formulation including warping effects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **76**, 5 (2008), 601–635.
- [54] BÔNE, J., MOREL, J., AND BOUCHER, M. *Mécanique générale, cours et applications*. Dunod, 1994.
- [55] CADOU, J. M., POTIER-FERRY, M., AND COCHELIN, B. A numerical method for the computation of bifurcation points in fluid mechanics. *European Journal of Mechanics B/fluids* **25** (2006), 234–254.
- [56] CAO, D. Q., AND TUCKER, R. W. Nonlinear dynamics of elastic rods using the Cosserat theory : Modelling and simulation. *International Journal of Solids and Structures* **45**, 2 (2008), 460–477.
- [57] CATTAN, É., HACCART, T., VÉLU, G., RÉMIENS, D., BERGAUD, C., AND NICU, L. Piezoelectric properties of PZT films for microcantilever. *Sensors and Actuators A : physical* **74**, 1-3 (1999), 60–64.
- [58] CEA. Cast3M, 2011. <http://www-cast3m.cea.fr/>.
- [59] CHAIGNE, A., AND KERGOMARD, J. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, 2008.
- [60] CHARLEUX, D. *Étude des effets de la friction en pied d’aube sur la dynamique des roues aubagées*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2006.
- [61] CHIA, C. Y. *Nonlinear analysis of plates*. Mc Graw Hill, 1980.
- [62] CHU, H.-N., AND HERRMANN, G. Influence of large amplitudes on free flexural vibrations of rectangular elastic plates. *J. Appl. Mech* **23** (1956), 532–540.
- [63] CIARLET, P. G. A justification of the von-Kármán equations. *Arch. Rat. Mech. Analysis* **73** (1980), 349–389.

- [64] CIARLET, P. G., AND GRATIE, L. From the classical to generalized von Kármán and Marguerre-von Kármán equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **190**, 1-2 (2006), 470–486.
- [65] CIARLET, P. G., AND PAUMIER, J.-C. A justification of the Marguerre-von Kármán equations. *Computational Mechanics* **1**, 3 (1986), 177–202.
- [66] CLARK, W. W. State switched piezoelectric systems for vibration control. *Structures, Structural Dynamics and Materials AIAA Journal* **1533** (1999), 2623–2629.
- [67] CLARK, W. W. Vibration control with state-switching piezoelectric material. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **11** (2000), 263–271.
- [68] CLAUVELIN, N., AUDOLY, B., AND NEUKIRCH, S. Matched asymptotic expansions for twisted elastic knots : A self-contact problem with non-trivial contact topology. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **57**, 9 (2009), 1623–1656.
- [69] COCHELIN, B., DAMIL, N., AND POTIER-FERRY, M. *Méthode asymptotique numérique*. Hermès sciences Lavoisier, 2007.
- [70] COCHELIN, B., HERZOG, P., AND MATTEI, P.-O. Experimental evidence of energy pumping in acoustics. *Comptes Rendus Mecanique* **334** (2006), 639–644.
- [71] COCHELIN, B., AND VERGEZ, C. A high order purely frequential harmonic balance formulation. *Journal of Sound and Vibration* **324**, 1-2 (2009), 243–262.
- [72] COLLET, M., AND CUNEFARE, K. A. Modal synthesis and condensation methods for accurate piezoelectric systems impedance computation. *Journal of Intelligent Material, Systems and Structures* **19**, 11 (2008), 1251–1269.
- [73] CORR, L. R., AND CLARK, W. W. A novel semi-active multimodal vibration control law for a piezoceramic actuator. *J. Vib. Acoust.* **125** (2003), 214–222.
- [74] COSSERAT, E., AND COSSERAT, F. *Théorie des corps déformables*. Hermann, 1909 (Reprinted in 2009).
- [75] CRESPO DA SILVA, M. R. M., AND GLYNN, C. C. Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. Part 1 : Equations of motion. *J. Struct. Mech.* **6**, 4 (1978), 437–448.
- [76] CRESPO DA SILVA, M. R. M., AND GLYNN, C. C. Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. Part 2 : Forced motions. *J. Struct. Mech.* **6**, 4 (1978), 449–461.
- [77] CRISFIELD, M. *Non-linear finite element analysis of solids and structures, vol. 1 : essentials*. John Wiley & sons, 1991.
- [78] CURIE, P. *Œuvres de Pierre Curie publiées par les soins de la société française de physique*. Éditions des archives contemporaines, 1859-1906. texte complet disponible à l'adresse <http://gallica2.bnf.fr/>.
- [79] CUSUMANO, J. P., AND MOON, F. C. Chaotic non-planar vibrations of the thin elastica, part 1 : experimental observation of planar instability. *J. Sound Vib.* **179**, 2 (1995), 185–208.
- [80] CUSUMANO, J. P., AND MOON, F. C. Chaotic non-planar vibrations of the thin elastica, part 2 : derivation and analysis of a low-dimensional model. *J. Sound. Vib.* **179**, 2 (1995), 209–226.
- [81] DAI, M. D., EOM, K., AND KIM, C.-W. Nanomechanical mass detection using nonlinear oscillations. *Applied Physics Letters* **95** (2009), 203104.
- [82] DANIELSON, D. A., AND HODGES, D. H. A Beam Theory for Large Global Rotation, Moderate Local Rotation, and Small Strain. *Journal of applied mechanics* **55**, 1 (1987), 179–184.
- [83] DANIELSON, D. A., AND HODGES, D. H. Nonlinear beam kinematics by decomposition of the rotation tensor. *Journal of Applied Mechanics* **54**, 2 (1987), 258–262.
- [84] DE MARNEFFE, B., AND PREUMONT, A. Vibration damping with negative capacitance shunts : theory and experiment. *Smart Materials and Structures* **17** (2008), 035015.
- [85] DERAEMAEKER, A., TONDREAU, G., AND BOURGEOIS, F. Equivalent loads for two-dimensional distributed anisotropic piezoelectric transducers with arbitrary shapes attached to thin plate structures. *Journal of the Acoustical Society of America* **129**, 2 (2011), 681–690.
- [86] DEÛ, J.-F., AND BENJEDDOU, A. Free-vibration analysis of laminated plates with embedded shear-mode piezoceramic layers. *International Journal of Solids and Structure* **42**, 7 (2005), 2059–2088.
- [87] DILL, E. H. Kirchhoff's theory of rods. *Archive for History of Exact Sciences* **44**, 1 (1992), 1–23.

- [88] DOEDEL, E. Lecture notes on numerical analysis of nonlinear equations.
- [89] DOEDEL, E., PAFFENROTH, R., CHAMPNEYS, A., FAIRGRIEVE, T., KUZNETSOV, Y., OLDEMAN, B., SANDSTEDTE, B., AND WANG, X. AUTO 2000 : Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. Tech. rep., Concordia University, 2002.
- [90] DONNELL, L. H. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs.* **56** (1934), 795–806.
- [91] DUCARNE, J. *Modélisation et optimisation de dispositifs non linéaires d'amortissement de structures par systèmes piézoélectriques commutés*. PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers, 2009.
- [92] DULAC, H. Solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage de valeurs singulières. *Bulletin de la Société Mathématique de France* **42** (1912), 324–383. [http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1912\\_\\_40\\_\\_324\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__324_0).
- [93] DÜRING, G., JOSSERAND, C., AND RICA, S. Weak turbulence for a vibrating plate : can one hear the kolmogorov spectrum ? *Physical Review Letters* **97** (2006), 025503.
- [94] EDE, F., AND GOUDET, S. *Playtime*. Cahiers du cinema, 2002.
- [95] EISLEY, J. G. Nonlinear vibration of beams and rectangular plates. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* **15**, 2 (1964), 167–175.
- [96] EKINCI, K. L., AND ROUKES, M. L. Nanoelectromechanical systems. *Review of Scientific Instruments* **76** (2005), 061101.
- [97] EKINCI, K. L., YANG, Y. T., AND ROUKES, M. L. Ultimate limits to inertial mass sensing based upon nanoelectromechanical systems. *Journal of Applied Physics* **95**, 5 (2004), 2682–2689.
- [98] ELPHICK, C., TIRAPEGUI, E., BRACHET, M. E., COULLET, P., AND IOOSS, G. A simple global characterization for normal forms of singular vector fields. *Physica D* **29** (1987), 95–127.
- [99] ERINGEN, A. C. On the non-linear vibration of elastic bars. *Quarterly of Applied Mathematics* **9** (1952), 361–369.
- [100] EVENSEN, D. A., AND FULTON, R. E. Some studies on the nonlinear dynamic response of shell-type structures. Tech. Rep. TMX 56843, NASA Langley Research Center, oct 1965.
- [101] FAIRGRIEVE, T. F., AND JEPSON, A. D. O.K. Floquet multipliers. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **28**, 5 (1991), 1446–1462.
- [102] FELIPPA, C. *Nonlinear Finite Element Methods*. 2011, ch. 9 : The TL Timoshenko Plane Beam Element. <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/NFEM.d>.
- [103] FERREIRA, J. V., AND SERPA, A. L. Application of the arc-length method in nonlinear frequency response. *Journal of Sound and Vibration* **284**, 1-2 (2005), 133–149.
- [104] FLOQUET, G. Sur la théorie des équations différentielles. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* **8** (1879), 3–132.
- [105] FÖPPL, A. Vorlesungen über technische Mechanik. 132–139.
- [106] FORWARD, R. L. Applied Optics. *Electric damping of vibrations in optical structures* **18**, 5 (1979), 690–697.
- [107] FOX, D. D., RAOULT, A., AND SIMO, J. C. A justification of nonlinear properly invariant plate theories. *Arch. Rat. Mech. Analysis* **124** (1993), 157–199.
- [108] FRAEIJIS DE VEUBEKE, B. A new variational principle for finite elastic displacements. *International Journal of Engineering Science* **10**, 9 (1972), 745–763.
- [109] FRIESECKE, G., JAMES, R. D., AND MÜLLER, S. A hierarchy of plate models derived from nonlinear elasticity by Gamma-convergence. *Arch. Rat. Mech. Analysis* **180** (2006), 183–236.
- [110] GALUCIO, A. C., DEÜ, J.-F., AND OHAYON, R. A fractional derivative viscoelastic model for hybrid active-passive damping treatments in time domain - Application to Sandwich Beams. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **16**, 1 (2005), 33–45.
- [111] GENDELMAN, O., MANEVITCH, L. I., VAKAKIS, A. F., AND M'CLOSKEY, R. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators ; part I-Dynamics of the underlying hamiltonian system. *Journal of Applied Mechanics* **68** (2001), 34–41.

- [112] GÉRADIN, M., AND RIXEN, D. *Théorie des vibrations*, 2nd. ed. Masson, 1996.
- [113] GERSTMAYR, J., AND IRSCHIK, H. On the correct representation of bending and axial deformation in the absolute nodal coordinate formulation with an elastic line approach. *Journal of Sound and Vibration* **318**, 3 (2008), 461–487.
- [114] GOURDON, E., ALEXANDER, N. A., TAYLOR, C. A., LAMARQUE, C. H., AND PERNOT, S. Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling : theoretical and experimental results. *Journal of Sound and Vibration* **300** (2007), 522–551.
- [115] GOURDON, E., AND LAMARQUE, C. H. Energy pumping with various nonlinear structures : numerical evidences. *Nonlinear Dynamics* **40** (2005), 281–307.
- [116] GROLET, A., AND THOUVEREZ, F. An harmonic selection process for computing solutions of nonlinear dynamic equations with the harmonic balance method. In *Proc. of the seventh EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011)* (Roma, Italy, July 2011).
- [117] GUCKENHEIMER, J., AND HOLMES, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, New-York, 1983.
- [118] GUIRARDEL, M., BERGAUD, C., CATTAN, E., REMIENS, D., BELIER, B., PETITGRAND, S., AND BOSSEBOEUF, A. PZT polarization voltage effects on off-centered PZT patch actuating silicon membrane. *Sensors and Actuators A : physical* **110**, 1-3 (2004), 385–389.
- [119] GUSKOV, M. *Dynamique non linéaire des systèmes multi-rotors. Étude numérique et expérimentale*. PhD thesis, École centrale de Lyon, 2007.
- [120] GUSKOV, M., SINOUE, J.-J., AND THOUVEREZ, F. Multi-dimensional harmonic balance applied to rotor dynamics. *Mechanics Research Communications* **35**, 8 (2008), 537–545.
- [121] HAGOOD, N. W., AND VON FLOTOW, A. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration* **146**, 2 (1991), 243–268.
- [122] HALL, D. A. Review. Nonlinearity in piezoelectric ceramics. *Journal of Material Science* **36** (2001), 4575–4601.
- [123] HAMDOUNI, A., AND MILLET, O. Classification of thin shell models deduced from the nonlinear three-dimensional elasticity. Part I : the shallow shells. *Archives of Mechanics* **55**, 2 (2003), 135–175.
- [124] HAMDOUNI, A., AND MILLET, O. Classification of thin shell models deduced from the nonlinear three-dimensional elasticity. Part II : the strongly bent shells. *Archives of Mechanics* **55**, 2 (2003), 177–219.
- [125] HARRIS, T. A. *Rolling bearing analysis*. John Wiley and sons, 1991.
- [126] HARTMAN, P. *Ordinary differential equations*. J. Wiley & sons, 1964.
- [127] HERGÉ. *Objectif lune*. Casterman, 1953.
- [128] HERRMANN, G. Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates. Tech. Rep. 3578, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), 1955.
- [129] HILL, G. W. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta Mathematica* **8**, 1 (1886), 1–36.
- [130] HO, C. H., SCOTT, R. A., AND EISLEY, J. G. Non-planar, non-linear oscillations of a beam. Part I : Forced motions. *Int. J. Non-Linear Mechanics* **10** (1975), 113–127.
- [131] HO, C. H., SCOTT, R. A., AND EISLEY, J. G. Non-planar, non-linear oscillations of a beam. Part II : Free motions. *Journal of Sound and Vibration* **47**, 3 (1976), 333–339.
- [132] HODGES, D. H. Proper definition of curvature in nonlinear beam kinematics. *AIAA Journal* **22**, 12 (1984), 1825–1827.
- [133] HODGES, D. H. Nonlinear equations for dynamics of pretwisted beams undergoing small strains and large rotations. Tech. Rep. TP-2470, NASA, 1985.
- [134] HODGES, D. H. Finite rotation and nonlinear beam kinematics. *Vertica* **11**, 1/2 (1987), 297–307.
- [135] HODGES, D. H. Nonlinear beam kinematics for small strains and finite rotations. *Vertica* **11**, 3 (1987), 573–589.
- [136] HODGES, D. H., AND DOWELL, E. H. Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades. Tech. Rep. TN D-7818, NASA, 1974.

- [137] HODGES, D. H., ORMISTON, R. A., AND PETERS, D. A. On the nonlinear deformation geometry of Euler-Bernoulli beams. Tech. Rep. TP-1566, NASA, 1980.
- [138] HOLLKAMP, J. J., GORDON, R. W., AND SPOTTSWOOD, S. M. Nonlinear modal models for sonic fatigue response prediction : a comparison of methods. *Journal of Sound and Vibration* **284** (2005), 1145–1163.
- [139] HOLMES, M. H. *Introduction to perturbation methods*. Springer, 1995.
- [140] HOLZAPFEL, G. A. *Nonlinear solid mechanics*. J. Wiley & sons, Chichester, England, 2000.
- [141] HSIEH, S.-R., SHAW, S. W., AND PIERRE, C. Normal modes for large amplitude vibration of a cantilever beam. *International Journal of Solids and Structures* **31**, 14 (1994), 1981–2014.
- [142] IDELSOHN, S. R., AND CARDONA, A. A load dependent basis for reduced nonlinear structural dynamics. *Computers & Structures* **20**, 1-3 (1985), 203–210.
- [143] IDELSOHN, S. R., AND CARDONA, A. A reduction method for nonlinear structural dynamic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **49** (1985), 253–279.
- [144] IKEDA, T. *Fundamentals of piezoelectricity*. Oxford university press, 1990.
- [145] ILLIC, B., CRAIGHEAD, H. G., KRYLOV, S., SENARATNE, W., OBER, C., AND NEUZIL, P. Attogram detection using nanoelectromechanical oscillators. *Journal of Applied Physics* **95**, 7 (2004), 3694–3703.
- [146] IOOSS, G., AND ADELMAYER, M. *Topics in bifurcation theory*. World scientific, New-York, 1998.
- [147] IOOSS, G., AND LOMBARDI, É. Approximate invariant manifolds up to exponentially small terms. *Journal of Differential equations* **248** (2010), 1410–1431.
- [148] JAFFE, B., COOK, W. R., AND JAFFE, H. *Piezoelectric ceramics*. Academic press, 1971.
- [149] JAYAPRAKASH, K. R., STAROSVETSKY, Y., AND VAKAKIS, A. F. Nonlinear waves and anti-resonance phenomena in disordered granular chains under zero pre-loading. In *Proc. of the seventh EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011)* (Roma, Italy, July 2011).
- [150] JI, H., QIU, J., XIA, P., AND GUYOMAR, D. The influence of switching phase and frequency of voltage on the vibration damping effect in a piezoelectric actuator. *Smart Materials and Structures* **20** (2011), 015008.
- [151] JIANG, D., PIERRE, C., AND SHAW, S. W. Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems. *Journal of Sound and Vibration* **272** (2004), 869–891.
- [152] JIANG, D., PIERRE, C., AND SHAW, S. W. The construction of non-linear normal modes for systems with internal resonance. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **40** (2005), 729–746.
- [153] JIANG, D., PIERRE, C., AND SHAW, S. W. Nonlinear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration* **288**, 4-5 (2005), 791–812.
- [154] JOHNK, C. T. A. *Engineering electromagnetic fields and waves*, 2nd. ed. J. Wiley & sons, 1988.
- [155] JOHNSON, K. L. *Contact mechanics*. Cambridge university press, 1985.
- [156] JÉZÉQUEL, L., AND LAMARQUE, C. H. Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of Sound and Vibration* **149**, 3 (1991), 429–459.
- [157] KAAJAKARI, V., MATTILA, T., AND SEPPA, H. Nonlinear limits for single-crystal silicon microresonators. *Journal of Microelectromechanical Systems* **13**, 5 (2004), 715–724.
- [158] KACEM, N., AND HENTZ, S. Bifurcation topology tuning of a mixed behaviour in nonlinear micromechanical resonators. *Applied Physics Letters* **95** (2009), 183104.
- [159] KANDINSKY, W. *Point et ligne sur plan*. Folio essais, 1991.
- [160] KARABALIN, R. B., MASMANIDIS, S. C., AND ROUKES, M. L. Efficient parametric amplification in high and very high frequency piezoelectric nanoelectromechanical systems. *Applied Physics Letters* **97** (2010), 183101.
- [161] KERSCHEN, G., GOLINVAL, J.-C., VAKAKIS, A. F., AND BERGMAN, L. A. The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems : an overview. *Nonlinear Dynamics* **41**, 1-3 (2005), 147–169.
- [162] KERSCHEN, G., LEE, Y. S., VAKAKIS, A. F., MCFARLAND, D. M., AND BERGMAN, L. A. Irreversible passive energy transfer in coupled oscillators with essential nonlinearity. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **66**, 2 (2006), 648–679.



- [163] KERSCHEN, G., PEETERS, M., GOLINVAL, J. C., AND VAKAKIS, A. F. Nonlinear normal modes, Part I : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing* **23**, 1 (2009), 170–194.
- [164] KLINKEL, S., AND WAGNER, W. A geometrically non-linear piezoelectric solid shell element based on a mixed multi-field variational formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **65**, 3 (2006), 349–382.
- [165] KOITER, W. T. On the nonlinear theory of thin elastic shells. Part I, II and III. In *Proc. Kon. Neth. Akad. Wet.* (1965), vol. B69, pp. 1–54.
- [166] KOZINSKY, I., POSTMA, H. W. C., BARGATIN, I., AND ROUKES, M. L. Tuning nonlinearity, dynamic range, and frequency of nanomechanical resonators. *Applied Physics Letters* **88** (2006), 263101.
- [167] LACARBONARA, W., AND CAMILLACCI, R. Nonlinear normal modes of structural systems via asymptotic approach. *International Journal of Solids and Structures* **41** (2004), 5565–5594.
- [168] LACARBONARA, W., AND REGA, G. Resonant non-linear normal modes. Part II : activation/orthogonality conditions for shallow structural systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **38**, 6 (2003), 873–887.
- [169] LACARBONARA, W., REGA, G., AND NAYFEH, A. H. Resonant non-linear normal modes. Part I : analytical treatment for structural one-dimensional systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **38**, 6 (2003), 851–872.
- [170] LACARBONARA, W., AND YABUNO, H. Refined models of elastic beams undergoing large in-plane motions : theory and experiment. *International Journal of Solids and Structures* **43** (2006), 5066–5084.
- [171] LALLART, M., HARARI, S., PETIT, L., GUYOMAR, D., RICHARD, T., RICHARD, C., AND GAUDILLER, L. Blind switch damping (BSD) : A self-adaptive semi-active damping technique. *Journal of Sound and Vibration* **328**, 1-2 (2009), 29–41.
- [172] LAMARQUE, C. H., GENDELMAN, O. V., SAVADKOOHI, A. T., AND ETCHEVERRIA, É. Structural control by means of non-smooth nonlinear energy sink. In *Proc. of the seventh EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011)* (Roma, Italy, July 2011).
- [173] LAXALDE, D., AND LEGRAND, M. Nonlinear modal analysis of mechanical systems with frictionless contact interfaces. *Computational Mechanics* **47**, 4 (2011), 469–478.
- [174] LAXALDE, D., AND THOUVEREZ, F. Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : application to turbomachinery bladings with friction interfaces. *Journal of Sound and Vibration* **322**, 4-5 (2009), 1009–1025.
- [175] LAXALDE, D., THOUVEREZ, F., AND SINOUE, J.-J. Dynamics of a linear oscillator connected to a small non-linear hysteretic absorber. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **41**, 8 (2006), 969–978.
- [176] LAXALDE, D., THOUVEREZ, F., SINOUE, J.-J., AND LOMBARD, J.-P. Qualitative analysis of forced response of blisks with friction ring dampers. *European Journal of Mechanics - A/Solids* **26**, 4 (2007), 676–687.
- [177] LAZARUS, A., COMBESURE, D., AND PRABEL, B. A 3D finite element model for the vibration analysis of asymmetric rotating machines. *Journal of Sound and Vibration* **329** (2010), 3780–3797.
- [178] LEE, Y.-S., KERSCHEN, G., VAKAKIS, A. F., PANAGOPOULOS, P., BERGMAN, L., AND MCFARLAND, D. M. Complicated dynamics of a linear oscillator with a light essentially nonlinear attachment. *Physica D* **204** (2005), 41–69.
- [179] LEFEUVRE, E., BADEL, A., PETIT, L., RICHARD, C., AND GUYOMAR, D. Semi-passive Piezoelectric Structural Damping by Synchronized Switching on Voltage Sources. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **17** (2006), 653–660.
- [180] LEGRAND, M., PIERRE, C., AND PESEUX, B. Structural modal interaction of a four degree of freedom bladed disk and casing model. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* **5**, 4 (2010), 041013.
- [181] LEGRAND, M., ROQUES, S., PIERRE, C., PESEUX, B., AND CARTRAUD, P. n-dimensional Harmonic Balance Method extended to non-explicit nonlinearities. *European Journal of Computational Mechanics* **15**, 1-2-3 (2006), 269–280.
- [182] LEISSA, A. W., AND KADI, A. S. Curvature effects on shallow shell vibrations. *J. Sound Vib.* **16**, 2 (1971), 173–187.

- [183] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.-L., BENALLAL, A., AND DESMORAT, R. *Mécanique des matériaux solides*, troisième ed. Dunod, 2009.
- [184] LEWANDOWSKI, R. Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures – part 1 : theoretical background. *International Journal of Solids and Structures* **34**, 15 (1997), 1925–1947.
- [185] LEWANDOWSKI, R. Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures – part 2 : numerical strategy and examples. *International Journal of Solids and Structures* **34**, 15 (1997), 1949–1964.
- [186] LI, H., AND BALACHANDRAN, B. Buckling and free oscillations of composite microresonators. *Journal of Microelectromechanical Systems* **15**, 1 (2006), 42–51.
- [187] LI, H., PREIDIKMAN, S., BALACHANDRAN, B., AND MOTE JR., C. D. Nonlinear free and forced oscillations of piezoelectric microresonators. *Journal of Micromechanics and Microengineering* **16**, 2 (2006), 356–367.
- [188] LI, K., GAUTHIER, J.-Y., AND GUYOMAR, D. Structural vibration control by synchronized switch damping energy transfer. *Journal of Sound and Vibration* **330**, 1-3 (2011), 49–60.
- [189] LORENZ, E. N. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences* **20**, 2 (1963), 130–141.
- [190] ŁUKASIEWICZ, S. *Local loads in plates and shells*. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan der Rijn, 1979.
- [191] LYAPUNOV, A. M. Problème général de la stabilité du mouvement. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 2<sup>e</sup> série* **9** (1907), 203–474. [http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1907\\_2\\_9\\_\\_203\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1907_2_9__203_0).
- [192] MAGNUSSON, A., RISTINMAA, M., AND LJUN, C. Behaviour of the extensible elastica solution. *International Journal of Solids and Structures* **38**, 46-47 (2001), 8441–8457.
- [193] MAHBOOB, I., FLURIN, E., NISHIGUCHI, K., FUJIWARA, A., AND YAMAGUCHI, H. Interconnect-free parallel logic circuits in a single mechanical resonator. *Nature Communications* **2** (2011), 198.
- [194] MAHBOOB, I., AND YAMAGUCHI, H. Bit storage and bit flip operations in an electromechanical oscillator. *Nature Nanotechnology* **3** (2008), 275–279.
- [195] MARGUERRE, K. Zur Theorie der Gekrümmten Platte Grosser Formänderung. In *Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech.* (1938), pp. 93–101.
- [196] MARIANI, R., BELLIZZI, S., COCHELIN, B., HERZOG, P., AND MATTEI, P.-O. Toward an adjustable nonlinear low frequency absorber. *Journal of Sound and Vibration* **330**, 22 (2011), 5245–5258.
- [197] MARION, M., AND TEMAM, R. Nonlinear Galerkin methods. *SIAM Journal of Numerical Analysis* **26** (1990), 1139–1157.
- [198] MASON, W. P. *Piezoelectric Crystals and Their Application to Ultrasonics*. D. Van Nostrand Company, Inc., 1950.
- [199] MATTHIES, H. G., AND MEYER, M. Nonlinear Galerkin methods for the model reduction of nonlinear dynamical systems. *Computers & Structures* **81** (2003), 1277–1286.
- [200] MAUGIN, G. A. *Continuum mechanics of electromagnetic solids*. North-Holland, 1988.
- [201] MAURINI, C., PORFIRI, M., AND POUGET, J. Numerical methods for modal analysis of stepped piezoelectric beams. *Journal of Sound and Vibration* **298**, 4-5 (2006), 918–933.
- [202] MAURINI, C., POUGET, J., AND DELL’ISOLA, F. Extension of the Euler-Bernoulli model of piezoelectric laminates to include 3D effects via a mixed approach. *Computers and Structures* **4**, 22-23 (2006), 1438–1458.
- [203] MAXWELL, N. D., AND ASOKANTHAN, S. F. Modal characteristics of a flexible beam with multiple distributed actuators. *Journal of Sound and Vibration* **269**, 1-2 (2004), 19–31.
- [204] MCFARLAND, D. M., KERSCHEN, G., KOWTKO, J. J., LEE, Y. S., BERGMAN, L., AND VAKAKIS, A. F. Experimental investigation of targeted energy transfers in strongly and nonlinearly coupled oscillators. *Journal of the Acoustical Society of America* **118**, 2 (2005), 791–799.
- [205] MEIROVITCH, L. *Analytical methods in vibrations*. Macmillan Publishing Co., 1967.
- [206] METTLER, E. Zum Problem der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **31**, 8-9 (1951), 263–264.

- [207] MIGNOLET, M. P., AND SOIZE, C. Stochastic reduced order models for uncertain geometrically nonlinear dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **197** (2008), 3951–3963.
- [208] MIKHLIN, Y. V., AND AVRAMOV, K. V. Nonlinear Normal Modes for Vibrating Mechanical Systems. Review of Theoretical Developments. *Applied Mechanics Reviews* **63** (2010), 060802.
- [209] MIKHLIN, Y. V., AND MORGUNOV, B. I. Normal vibrations in near-conservative self-excited and viscoelastic nonlinear systems. *Nonlinear Dynamics* **25** (2001), 33–48.
- [210] MILES, J. W. Stability of forced oscillations of a vibrating string. *Journal of the Acoustical Society of America* **38**, 5 (1965), 855–861.
- [211] MILLET, O., HAMDOUNI, A., AND CIMETIÈRE, A. A classification of thin plate models by asymptotic expansion of non-linear three-dimensional equilibrium equations. *Int. J. Non-lin. Mech.* **36** (2001), 165–186.
- [212] MILLET, O., HAMDOUNI, A., AND CIMETIÈRE, A. An Eulerian approach of non-linear membrane shell theory. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **38**, 9 (2003), 1403–1420.
- [213] MONTEIL, M. Vibrations non linéaires de Steeldrums – Caractérisation expérimentale et modèle phénoménologique. Rapport de stage de master ATIAM, Université Pierre et Marie Curie, 2010.
- [214] MORDANT, N. Are there waves in elastic wave turbulence? *Physical Review Letters* **100** (2008), 234505.
- [215] MORGAN ELECTRO CERAMICS. *Piezoelectric ceramics. Properties & Applications.* <http://www.morganelectroceramics.com/pzbook.html>, 2008 (Internet).
- [216] MURAVYOV, A. A., AND RIZZI, S. A. Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures. *Computers and Structures* **81**, 15 (2003), 1513–1523.
- [217] MUSHTARI, K. M., AND GALIMOV, K. Z. *Non-linear theory of thin elastic shells.* Israel program for scientific translations, 1961 (russian ed. : 1957).
- [218] NARAYANAN, S., AND SEKAR, P. A frequency domain based numeric-analytical method for non-linear dynamical systems. *Journal of Sound and Vibration* **211**, 3 (1998), 409–424.
- [219] NAYFEH, A. H. Nonlinear transverse vibrations of beams with properties that vary along the length. *Journal of the Acoustical Society of America* **53**, 3 (1973), 766–770.
- [220] NAYFEH, A. H. *Perturbation methods.* John Wiley & sons, New-York, 1973.
- [221] NAYFEH, A. H. *Nonlinear interactions.* J. Wiley & sons, 2000.
- [222] NAYFEH, A. H., AND BALACHANDRAN, B. *Applied Nonlinear Dynamics. Analytical, computational and experimental Methods.* Wiley, 1995.
- [223] NAYFEH, A. H., CHIN, C., AND NAYFEH, S. A. On nonlinear normal modes of systems with internal resonance. *J. Vib. Acoust.* **118** (1996), 340–345.
- [224] NAYFEH, A. H., AND MOOK, D. T. *Nonlinear oscillations.* John Wiley & sons, inc., New-York, 1979.
- [225] NAYFEH, A. H., AND NAYFEH, S. A. On nonlinear modes of continuous systems. *Journal of Vibration and Acoustics* **116** (1994), 129–136.
- [226] NAYFEH, A. H., AND PAI, P. F. Non-linear non-planar parametric responses of an inextensional beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **24**, 2 (1989), 139–158.
- [227] NAYFEH, A. H., AND PAI, P. F. *Linear and nonlinear structural mechanics.* John Wiley & sons, 2004.
- [228] NEUKIRCH, S. Enroulement, contact et vibrations de tiges élastiques. Mémoire d’habilitation à diriger des recherches, Université Pierre et Marie Curie, June 2009.
- [229] NEUKIRCH, S., B. ROMAN, B. D., AND BICO, J. Piercing a liquid surface with an elastic rod : Buckling under capillary forces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **55**, 6 (2007), 1212–1235.
- [230] NEUKIRCH, S., VAN DER HEIJDEN, G. H. M., AND THOMPSON, J. M. T. Writhing instabilities of twisted rods : from infinite to finite length. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **50**, 6 (2002), 1175–1191.
- [231] NGUYEN, C. T.-C. MEMS technology for timing and frequency control. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* **54**, 2 (2007), 251–270.

- [232] NICU, L., AND LEİCHLÉ, T. Biosensors and tools for surface functionalization from the macro- to the nanoscale : the way forward. *Journal of Applied Physics* **104** (2008), 111101.
- [233] NOELS, L. *Contribution aux algorithmes d'intégration temporelle conservant l'énergie en dynamique non linéaire des structures*. PhD thesis, Université de Liège, Belgique, 2004.
- [234] NORELAND, D., BELLIZZI, S., VERGEZ, C., AND BOUC, R. Nonlinear modes of clarinet-like musical instruments. *Journal of Sound and Vibration* **324** (2009), 983–1002.
- [235] NOVOZHILOV, V. V. *Foundations of the non-linear theory of elasticity*. Graylock press, Rochester, N.Y., 1953.
- [236] OGDEN, R. W. *Non-linear elastic deformations*. Dover, 1997. (First published in 1984).
- [237] OLIKARA, Z. P., AND SCHEERES, D. J. Computing families of quasi-periodic tori in autonomous hamiltonian systems. In *Proc. of the seventh EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011)* (Roma, Italy, July 2011).
- [238] OPLINGER, D. W. Frequency response of a nonlinear stretched string. *Journal of the Acoustical Society of America* **32**, 12 (1960), 1529–1537.
- [239] OUEINI, S. S., CHIN, C.-M., AND NAYFEH, A. H. Dynamics of a Cubic Nonlinear Vibration Absorber. *Nonlinear Dynamics* **20**, 3 (1999), 283–295.
- [240] OUEINI, S. S., NAYFEH, A. H., AND PRATT, J. R. A review of development and implementation of an active nonlinear vibration absorber. *Archive of Applied Mechanics* **69**, 8 (1999), 585–620.
- [241] PAI, P. F. Geometrically exact beam theory without Euler angles. *International Journal of Solids and Structures* **48**, 21 (2011), 3075–3090.
- [242] PAI, P. F. Three kinematic representations for modeling of highly flexible beams and their applications. *International Journal of Solids and Structures* **48**, 19 (2011), 2764–2777.
- [243] PAI, P. F., AND NAYFEH, A. H. Non-linear non-planar oscillations of a cantilever beam under lateral base excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **25**, 5 (1990), 455–474.
- [244] PAI, P. F., AND NAYFEH, A. H. A new method for the modeling of geometric nonlinearities in structures. *Computers & Structures* **53**, 4 (1994), 877–895.
- [245] PAI, P. F., AND PALAZOTTO, N. Polar Decomposition Theory in Nonlinear Analyses of Solids and Structures. *Journal of Engineering Mechanics* **121**, 4 (1995), 568–581.
- [246] PAI, P. F., AND PALAZOTTO, N. Large -deformation analysis of flexible beams. *International Journal of Solids and Structures* **33**, 9 (1996), 1335–1353.
- [247] PAI, P. F., PALAZOTTO, N., AND GREER, JR, J. M. Polar decomposition and appropriate strains and stresses for nonlinear structural analyses. *Computers & Structures* **66**, 6 (1998), 823–840.
- [248] PAI, P. F., ROMMEL, B., AND SCHULZ, M. J. Non-linear vibration absorbers using higher order internal resonances. *Journal of Sound and Vibration* **234**, 5 (2000), 799–817.
- [249] PARK, C. H., AND BAZ, A. Vibration control of beams with negative capacitive shunting of interdigital electrode piezoceramics. *Journal of Vibration and Control* **11** (2005), 331–346.
- [250] PEETERS, M. *Theoretical and Experimental Modal Analysis of Nonlinear Vibrating Structures using Nonlinear Normal Modes*. PhD thesis, Université de Liège, Belgique, 2011.
- [251] PEETERS, M., KERSCHEN, G., AND GOLINVAL, J.-C. Dynamic testing of nonlinear vibrating structures using nonlinear normal modes. *Journal of Sound and Vibration* **330** (2011), 486–509.
- [252] PEETERS, M., KERSCHEN, G., AND GOLINVAL, J.-C. Modal testing of nonlinear vibrating structures based on nonlinear normal modes : experimental demonstration. *Mechanical Systems and Signal Processing* **25** (2011), 1227–1247.
- [253] PEETERS, M., VIGUIÉ, R., SÉRANDOUR, G., KERSCHEN, G., , AND GOLINVAL, J. C. Nonlinear normal modes, Part II : toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing* **23**, 1 (2009), 170–194.
- [254] PESHECK, É., BOIVIN, N., PIERRE, C., AND SHAW, S. W. Nonlinear modal analysis of structural systems using multi-mode invariant manifolds. *Nonlinear Dynamics* **25** (2001), 183–205.
- [255] PESHECK, É., PIERRE, C., AND SHAW, S. W. A new Galerkin-ased approach for accurate non-linear normal modes rthrough invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration* **249**, 5 (2002), 971–993.

- [256] PETINIOT, J.-L., DES ROCHETTES, H.-M., AND LECONTE, P. Experimental assessment and further development of amplified piezo actuators for active flap devices. In *Proc. of Actuator 2000 : 8th. International Conference on New Actuators* (Bremen, Germany, June 2002).
- [257] PETIT, L., LEFEUVRE, E., RICHARD, C., AND GUYOMAR, D. A broadband semi passive piezoelectric technique for structural damping. In *Proc. of SPIE Smart Structures and Materials Conference : Passive Damping and Isolation* (2004), vol. 5386, pp. 414–425.
- [258] PIEFORT, V. *Finite Element Modeling of Piezoelectric Active Structures*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, Belgium, 2001. <http://www.ulb.ac.be/scmero/piezo.html>.
- [259] POINCARÉ, H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthiers-Villars, Paris, 1982.
- [260] POLYTEC PI. *Piezoelectric ceramic products*. <http://www.piceramic.com>, 2006 (Internet).
- [261] PRETORIUS, J., HUGO, M., AND SPANGLER, R. A comparison of packaged piezoactuators for industrial applications. Tech. rep., Midé technology corporation. [http://www.mide.com/products/qp/qp\\_tech\\_notes.php](http://www.mide.com/products/qp/qp_tech_notes.php).
- [262] PREUMONT, A. *Vibration control of active structures*, 3rd. ed. Springer, 2011.
- [263] PROUX, T., Ed. *Linear and nonlinear mass sensing using piézoélectriquely-actuated microcantilevers* (Indianapolis, USA, June 2010), vol. 2, Springer.
- [264] PÉRIGNON, F. *Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non linéaires*. PhD thesis, Université Aix-Marseille II, 2004.
- [265] RABE, U., KOPYCINSKA, M., HIRSEKORN, S., MUÑOZ SALDAÑA, J., SCHNEIDER, G. A., AND ARNOLD, W. High resolution characterization of piezoelectric ceramics by ultrasonic scanning force microscopy techniques. *Journal of Physics D : Applied Physics* **35** (2002), 2621–2635.
- [266] RAHMOUNE, M., BENJEDDOU, A., OHAYON, R., AND OSMONT, D. New thin piezoelectric plate models. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **9**, 12 (1998), 1017–1029.
- [267] RAMAN, A. Ultrasensitive mass sensing using mode localization in coupled microcantilevers. *Applied Physics Letters* **88** (2006), 254102.
- [268] REDDY, J. N. *Mechanics of laminated composite plates*. CRC press, 1997.
- [269] REGA, G., AND TROGER, H. Dimension reduction of dynamical systems : methods, models, applications. *Nonlinear Dynamics* **41** (2005), 1–15.
- [270] REISSNER, E. On one-dimensional finite strain beam theory : the plane problem. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* **23**, 5 (1972), 795–804.
- [271] RICHARD, C., GUYOMAR, D., AUDIGIER, D., AND BASSALER, H. Enhanced semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device on an inductor. In *Proc. of SPIE Smart Structures and Materials Conference : Passive Damping and Isolation* (2000), vol. 3989, pp. 288–299.
- [272] RICHARD, C., GUYOMAR, D., AUDIGIER, D., AND CHING, G. Semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device. In *Proc. of SPIE Smart Structures and Materials Conference : Passive Damping and Isolation* (1999), vol. 3672, pp. 104–111.
- [273] ROSENBERG, R. M. The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics* **29** (1962), 7–14.
- [274] ROSENBERG, R. M. On non-linear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in Applied Mechanics* **9** (1966), 155–242.
- [275] ROUXEL, J. *Les shadoks et le désordinateur*. Circonflexe, 2000.
- [276] RUGAR, D., AND GRÜTTER, P. Mechanical Parametric Amplification and Thermomechanical Noise Squeezing. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 6 (1991), 699–702.
- [277] SALENÇON, J. *Mécanique des milieux continus, T. 1 : concepts généraux*. Ecole polytechnique, Palaiseau, Fr., 1996.
- [278] SALENÇON, J. *Mécanique des milieux continus, T. 2 : Thermoélasticité*. Ecole polytechnique, Palaiseau, Fr., 1996.
- [279] SAMA, N., HERDIER, R., JENKINS, D., SOYER, C., REMIENS, D., DETALLE, M., AND BOUREGBA, R. On the influence of the top and bottom electrodes – A comparative study between Pt and LNO electrodes for PZT thin films. *Journal of Crystal Growth* **310** (2010), 3299–3302.

- [280] SANSOUR, C., WRIGGERS, P., AND SANSOUR, J. A finite element post-processed Galerkin method for dimensional reduction in the nonlinear dynamics of solids. Application to shells. *Computational Mechanics* **32** (2003), 104–114.
- [281] SARROUY, É. *Analyse globale de systèmes mécaniques non-linéaires. Application à la dynamique des rotors*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2008.
- [282] SESSLER, G. M. Piezoelectricity in polyvinylidene fluoride. *Journal of the Acoustical Society of America* **70**, 8 (1981), 1596–1608.
- [283] SEYDEL, R. *Practical bifurcation and stability analysis*, third ed. Springer, 2010.
- [284] SHAW, S., AND PIERRE, C. Nonlinear Normal Modes and invariant manifolds. *J. Sound. Vib.* **150**, 1 (1991), 170–173.
- [285] SHAW, S., AND PIERRE, C. Normal Modes for nonlinear vibratory systems. *J. Sound. Vib.* **164**, 1 (1993), 85–124.
- [286] SHAW, S., AND PIERRE, C. Normal modes of vibration for non-linear continuous systems. *J. Sound. Vib.* **169**, 3 (1994), 319–347.
- [287] SHAW, S. W., AND GEIST, B. Tuning for Performance and Stability in Systems of Nearly Tautochronic Torsional Vibration Absorbers. *Journal of Vibration and Acoustics* **132** (2010), 041005.
- [288] SIMO, J. C., AND VU-QUOC, L. A three-dimensional finite-strain rod model. part II : Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **58**, 1 (1986), 79–116.
- [289] SINHA, S. C., REDKAR, S., AND BUTCHER, E. A. Order reduction of nonlinear systems with time periodic coefficients using invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration* **284** (2005), 985–1002.
- [290] SINHA, S. C., REDKAR, S., DESHMUKH, V., AND BUTCHER, E. A. Order reduction of parametrically excited nonlinear systems : techniques and applications. *Nonlinear Dynamics* **41** (2005), 237–273.
- [291] SINOUE, J.-J., THOUVEREZ, F., AND JÉZÉQUEL, L. Methods to reduce nonlinear mechanical systems for instability computation. *Archives for Computational Methods in Engineering* **11**, 3 (2004), 257–344.
- [292] SLAATS, P. M. A., DE JONGH, J., AND SAUREN, A. A. H. J. Model reduction tools for nonlinear structural dynamics. *Computers & Structures* **54**, 6 (1995), 1155–1171.
- [293] SLATER, J. C. A numerical method for determining nonlinear normal modes. *Nonlinear Dynamics* **10**, 1 (1996), 19–30.
- [294] SNOWDON, J. C. *Vibration and shock in damped mechanical systems*. John Wiley & Sons, 1968.
- [295] SONTI, V. R., KIM, S. J., AND JONES, J. D. Equivalent forces and wavenumber spectra of shaped piezoelectric actuators. *Journal of Sound and Vibration* **187**, 1 (1995), 111–131.
- [296] STANFORD RESEARCH SYSTEMS. *Model SR830 DSP lock-in amplifier*, second ed. Sunnyvale, California, USA, 2006.
- [297] STAROSVETSKY, Y., AND VAKAKIS, A. F. Primary wave transmission in systems of elastic rods with granular interfaces. In *Proc. of the seventh EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011)* (Roma, Italy, July 2011).
- [298] STEINDL, A., AND TROGER, H. Methods for dimension reduction and their applications in nonlinear dynamics. *International Journal of Solids and Structures* **38** (2001), 2131–2147.
- [299] STOKER, J. J. *Nonlinear elasticity*. Gordon and Breach, 1968.
- [300] STOYKOV, S., AND RIBEIRO, P. Stability of nonlinear periodic vibrations of 3D beams. *Nonlinear Dynamics* **66**, 3 (2011), 335–353.
- [301] SZEMPLINSKA-STUPNICKA, W. *The Behavior of Nonlinear Vibrating Systems : Fundamental Concepts and Methods : Applications to Single-Degree-of-Freedom Systems*, vol. 1. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [302] SÉNÉCHAL, A. *Réduction de vibrations de structure complexe par shunts piézoélectriques – Application aux turbomachines*. PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers, 2011.
- [303] TAMAYO, J., RAMOS, D., MERTENS, J., AND CALLEJA, M. Effect of the adsorbate stiffness on the resonance response of microcantilever sensors. *Applied Physics Letters* **89**, 22 (2006), 224104.
- [304] TIERSTEN, H. F. *Linear piezoelectric plate vibrations*. Plenum Press, 1969.

- [305] TISO, P. Effective modal derivatives based reduction method for geometrically nonlinear structures. In *Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, IDETC/CIE 2011* (Washington, USA, Aug. 2011).
- [306] TISO, P., JANSEN, E., AND ABDALLA, M. A Reduction Method for Finite Element Nonlinear Dynamic Analysis of Shells. In *Proc. of the 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference* (Newport, Rhode Island, USA, May 2006).
- [307] TISO, P., AND RIXEN, D. J. Reduction methods for MEMS nonlinear dynamic analysis. In *Proc. of IMAC-XXVIII : International Modal Analysis Conference* (Jacksonville, USA, Feb. 2010).
- [308] TOBIAS, S. A., AND ARNOLD, R. N. The influence of dynamical imperfection on the vibration of rotating disks. *Proc. of the Instn. of Mech. Eng.* **171** (1957), 669–690.
- [309] TOUPIN, R. A. A dynamical theory of elastic dielectric. *International Journal of Engineering Science* **1** (1963), 101–126.
- [310] TOUZÉ, C. *Analyse et modélisation de signaux vibratoires et acoustiques chaotiques. Application aux instruments de percussion non-linéaires*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, Nov. 2000.
- [311] TOUZÉ, C., AND AMABILI, M. Non-linear normal modes for damped geometrically non-linear systems : application to reduced-order modeling of harmonically forced structures. *Journal of Sound and Vibration* **298**, 4-5 (2006), 958–981.
- [312] TOUZÉ, C. Bibliographie sélective : modes non-linéaires en théorie des vibrations. In *Journée nationale modes non-linéaires : définitions et applications* (Cnam, Paris, Nov. 2005), pp. 17–22. [http://www.lmssc.cnam.fr/sites/default/files/pdf/Colloque\\_Modes\\_Non-lineaires\\_Cnam\\_2005\\_Fascicule.pdf](http://www.lmssc.cnam.fr/sites/default/files/pdf/Colloque_Modes_Non-lineaires_Cnam_2005_Fascicule.pdf).
- [313] TOUZÉ, C. Vibrations non linéaires géométriques de structures minces – Modèles d’ordre réduit et transition vers le chaos. Mémoire d’habilitation à diriger des recherches, Université Pierre et Marie Curie, <http://www.ensta.fr/touze>, 2009.
- [314] TRINDADE, M. A., AND MAIO, C. E. B. Multimodal passive vibration control of sandwich beams with shunted shear piezoelectric materials. *Smart Materials and Structures* **17**, 5 (2008), 055015.
- [315] TUNG, R., AND RAMAN, A. Structural parameter estimation of doubly clamped microbeams using multi-modal linear and nonlinear dynamic response. In *Proc. of the seventh EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011)* (Roma, Italy, July 2011).
- [316] TURK, AND DE GROOT. *Léonard*. Dargaud, Appro, Le Lombard, 1977–.
- [317] TZOU, H. *Piezoelectric shells*. Kluwer academic publishers, 1993.
- [318] VAKAKIS, A. F. Non-linear normal modes NNMs and their applications in vibration theory : an overview. *Mechanical systems and signal processing* **11**, 1 (1997), 3–22.
- [319] VAKAKIS, A. F. Inducing passive nonlinear energy sinks in vibrating systems. *Journal of Vibration and Acoustics* **123** (2001), 324–332.
- [320] VAKAKIS, A. F., AND GENDELMAN, O. Inducing passive nonlinear energy sinks in vibrating systems. *Journal of Applied Mechanics* **68** (2001), 42–48.
- [321] VAKAKIS, A. F., MANEVITCH, L. I., MIKHLIN, Y. V., PHILIPCHUCK, V. N., AND ZEVIN, A. A. *Normal modes and localization in non-linear systems*. Wiley, New-York, 1996.
- [322] VANNUCCI, P., COCHELIN, B., DAMIL, N., AND POTIER-FERRY, M. An asymptotic-numérique method to compute bifurcating branches. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* **41** (1998), 1365–1389.
- [323] VIGUIÉ, R. *Tuning methodology of nonlinear vibration absorbers coupled to nonlinear mechanical systems*. PhD thesis, Université de Liège, Belgique, 2010.
- [324] VIGUIÉ, R., PEETERS, M., KERSCHEN, G., AND GOLINVAL, J.-C. Energy transfer and dissipation in a duffing oscillator coupled to a nonlinear attachment. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* **5** (2009), 041012.
- [325] VILLA, C., SINOÛ, J.-J., AND THOUVEREZ, F. Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **13** (2008), 804–821.

- [326] VON GROLL, G., AND EWINS, D. J. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *Journal of Sound and Vibration* **241**, 2 (2001), 223–233.
- [327] VON KARMAN, T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. *Encyklopedie der Mathematischen Wissenschaften* **4**, 4 (1910), 311–385.
- [328] VON WAGNER, U., AND HAGEDORN, P. Piezo-beam systems subjected to weak electric field : experiments and modelling of non-linearities. *Journal of Sound and Vibration* **256**, 5 (2002), 861–872.
- [329] WANG, B.-T., AND ROGERS, C. A. Laminate Plate Theory for Spatially Distributed Induced Strain Actuators. *Journal of Composite Materials* **25**, 4 (1991), 433–452.
- [330] WHITMAN, A. B., AND DESILVA, C. N. A dynamical theory of Elastic directed curves. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)* **20**, 2 (1969), 200–212.
- [331] WIGGINS, S. *Introduction to applied nonlinear dynamics and chaos*. Springer, 2003.
- [332] WILKIE, W. K., BRYANT, R. G., HIGH, J. W., FOX, R. L., HELLBAUM, R. F., JR., A. J., LITTLE, B. D., AND MIRICK, P. H. Low Cost Piezocomposite Actuator for Structural Control Applications. In *SPIE's 7th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials* (2000), NASA Langley Research Center.
- [333] WILLIAMS, J. A. *Engineering tribology*. Oxford university press, 1994.
- [334] WILLIAMS, R. B., WILKIE, W. K., AND INMAN, D. J. An overview of composite actuators with piezoceramic fibers. In *Proc. of the 20th. International Modal Analysis Conference (IMAC-XX)* (2002). <http://www.smart-material.com/Publications.html>.
- [335] WOJNOSKY-KRIEGER, S. The effect of axial force on the vibration of hinged bars. *Journal of Applied Mechanics* **17** (1950), 35–36.
- [336] WOODALL, S. R. On the large amplitude oscillations of a thin elastic beam. *Int. J. Non-linear Mechanics* **1** (1966), 217–238.
- [337] WRIGGERS, P. *Nonlinear finite element methods*. Springer, 2008.
- [338] WU, J., LEGRAND, M., AND PIERRE, C. Non-synchronous vibration of a Jeffcott rotor due to internal radial clearance in roller bearings. In *proc. of the 8th. IFToMM International Conference on Rotor Dynamics* (Seoul, Korea, Sept. 2010).
- [339] YANG, J., AND HU, Y. Mechanics of electroelastic bodies under biasing fields. *Appl. Mech. Rev.* **57**, 3 (2004), 173–189.
- [340] YANG, Y. T., CALLEGARI, C., FENG, X. L., EKINCI, K. L., AND ROUKES, M. L. Zeptogram-Scale Nanomechanical Mass Sensing. *Nano Lett.* **6**, 4 (2006), 583–586.
- [341] YIE, Z., ZIELKE, M. A., BURGNER, C. B., AND TURNER, K. L. Comparison of parametric and linear mass detection in the presence of detection noise. *Journal of Micromechanics and Microengineering* **21** (2011), 025027.
- [342] YOUNIS, M. I., ABDEL-RAHMAN, E. M., AND NAYFEH, A. H. A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS. *Journal of Micromechanics and Microengineering*.
- [343] YOUNIS, M. I., AND ALSALEEM, F. Exploration of New Concepts for Mass Detection in Electrostatically-Actuated Structures Based on Nonlinear Phenomena. *Journal of Computational and Non-linear Dynamics* **4** (2009), 021010.
- [344] ZAHROUNI, H., COCHELIN, B., AND POTIER-FERRY, M. Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **175** (1999), 71–85.