



HAL
open science

Stratégie multiéchelle pour l'analyse du couplage flambage-délaminage de composites stratifiés

Karin Saavedra Redlich

► **To cite this version:**

Karin Saavedra Redlich. Stratégie multiéchelle pour l'analyse du couplage flambage-délaminage de composites stratifiés. Autre. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2012. Français. NNT : 2012DENS0008 . tel-00719119

HAL Id: tel-00719119

<https://theses.hal.science/tel-00719119>

Submitted on 23 Oct 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

Karin Saavedra Redlich

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE
CACHAN**

Domaine :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse :

**Stratégie multiéchelle pour l'analyse du couplage
flambage-délaminage de composites stratifiés**

Soutenue à Cachan le 2 février 2012 devant le jury composé de :

Jean-Louis Chaboche	ONERA	Président
Alberto Corigliano	Politecnico di Milano	Rapporteur
Julien Yvonnet	Université Paris-Est	Rapporteur
Pierre Beckers	Université de Liège	Examineur
Stéphane Guinard	EADS	Examineur
Olivier Allix	ENS de Cachan	Directeur de thèse
Pierre Gosselet	ENS de Cachan	Encadrant de thèse

LMT-Cachan

ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris
61, avenue du Président Wilson
94235 CACHAN CEDEX

Je tiens tout d'abord à remercier Olivier Allix de m'avoir accueillie au sein du Laboratoire de Mécanique et Technologies de Cachan et de m'avoir fait confiance en me proposant ce sujet. Je le remercie vivement pour son encadrement et sa disponibilité, ainsi que pour son intérêt et son soutien.

Je souhaite dire un grand merci à Pierre Gosselet pour avoir co-encadré ce travail, pour ses qualités aussi bien humaines que scientifiques et pour le temps qu'il m'a consacré, toujours avec gentillesse.

J'exprime toute ma gratitude à Jean-Louis Chaboche pour l'honneur qu'il m'a fait en étant président du jury de ma soutenance, ainsi qu'à Alberto Corigliano et à Julien Yvonnet pour avoir accepté la lourde tâche d'être rapporteurs de ce travail. Mes remerciements s'adressent également à Stéphane Guinard pour sa participation au jury en tant qu'examinateur. De même, je voudrais remercier Pierre Beckers d'avoir accepté d'être examinateur de cette thèse et je lui exprime toute ma reconnaissance pour ses conseils et ses encouragements.

Pour leur aide, leur amitié et tous les bons moments qui ont rendu très agréables mes années de doctorante à l'intérieur et à l'extérieur du laboratoire, je tiens à remercier Chloé D., Roxane M., Huyen N., Christophe H. (mon co-bureau préféré), Chiara S., Labib D., Valentina G., Adina C., Vincent R., Nicolas F., Pierre-Alain G., François H., Lydia M. et tous les membres du Centre de Calcul (M. Zebre, Frisou, Arnauld C., Pierre L., Philippe S., Raphaël P.).

Un immense merci à mes parents et mes soeurs pour leur soutien et encouragement à distance. Enfin, je remercie Jorge pour ses conseils, sa patience et son amour de tous les jours et notre petite Helena de m'avoir accompagnée dans mon ventre pendant toute la période de rédaction de ce manuscrit.

Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
I Cadre de l'étude et contexte scientifique	7
1 Cadre de l'étude	9
1 Contexte industriel	10
2 Caractéristiques du problème en étude	11
2.1 Caractéristiques des calculs envisagés	12
2.2 Hypothèses du problème de référence	13
2 Modélisation de structures élancées en grandes transformations	15
1 Stabilité et non-linéarités géométriques	16
1.1 Théorie de la stabilité	17
1.2 Équilibre et stabilité d'un système conservatif	18
1.2.1 Points réguliers et points critiques	19
1.2.2 Sensibilité aux imperfections	21
2 Formulation d'un milieu continu en grandes transformations	22
2.1 Configuration et cinématique	22
2.2 Équilibre du système	24
2.3 Loi de comportement	27
2.4 Principe de puissances virtuelles	27
3 Formulation du problème discretisé en grandes transformations	29
3.1 Formulations Lagrangiennes	30
3.1.1 Formulation Lagrangienne totale	30
3.1.2 Formulation Lagrangienne réactualisée	33
3.2 Formulation corotationnelle	34
3 Délaminage et contact dans les composites stratifiés	39
1 Modèles pour le délaminage	40
1.1 Modélisation par la mécanique de la rupture et critères en contraintes	41
1.1.1 Modélisation de l'initiation	42
1.1.2 Modélisation de la propagation	44
1.2 Modélisation par la mécanique de l'endommagement	46
1.2.1 Interfaces cohésives	46

1.3	Couplage flambage-délamination	53
2	Contact unilatéral avec et sans frottement	54
2.1	Formulation du problème de contact	55
2.1.1	Problème local sans frottement	56
2.1.2	Formulation variationnelle sans frottement	56
2.2	Lois de frottement	57
2.2.1	Loi de Coulomb en statique	57
2.2.2	Formulation variationnelle avec frottement	58
2.3	Résolution du problème de contact	58
2.3.1	Méthode de pénalisation	59
2.3.2	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	61
2.3.3	Méthode du Lagrangien augmenté	61
4	Stratégies de calcul non linéaire et de résolution multiéchelle	63
1	Méthodes de résolution de problèmes non linéaires	64
1.1	Méthode incrémentale d'Euler	64
1.2	Méthodes incrémentales-itératives	65
1.2.1	Méthodes de Newton	65
1.2.2	Méthodes de continuation	68
1.2.3	Méthodes de continuation pour le délamination	71
1.3	Méthode Asymptotique Numérique	71
1.4	Algorithme LaTIn	72
2	Stratégies de résolution multiéchelles	73
2.1	Méthodes de modélisation multiéchelle	73
2.1.1	Méthodes d'homogénéisation	73
2.1.2	Méthodes de superposition et d'enrichissement	76
2.2	Méthodes de calcul multiéchelles	81
2.2.1	Méthodes multigrilles	81
2.2.2	Méthodes de décomposition de domaine	82

II Une stratégie multiéchelle pour l'analyse du couplage flambage-délamination de composites stratifiés **91**

5	Une méthode multiéchelle pour le couplage flambage-délamination	93
1	Introduction	94
2	Problème de référence	95
2.1	Cinématique d'interface	95
2.2	Formulation sous-structurée	96
3	Stratégie de résolution numérique	99
3.1	Choix des espaces d'approximation	99
3.2	Introduction de l'échelle macroscopique	100
3.2.1	Séparation des échelles	101

3.2.2	Choix des espaces macroscopiques	102
3.3	Admissibilité macroscopique	104
3.4	Algorithme itératif de résolution	105
3.4.1	Étape locale	106
3.4.2	Étape d'admissibilité	109
3.4.3	Indicateur d'erreur LaTIn	113
3.4.4	Algorithme de la stratégie	115
3.5	Résolution du problème macroscopique	115
3.5.1	Condensation statique primale	117
3.5.2	Résolution en parallèle par un gradient conjugué pré- conditionné projeté	118
3.6	Implémentation de la stratégie	119
6	Maîtrise de la convergence de la stratégie	121
1	Choix des directions de recherche	122
2	Problématique associée aux structures élancées	124
3	Analyse des paramètres de la stratégie	126
3.1	Interfaces parfaites	126
3.1.1	Flexion	126
3.1.2	Flambage	129
3.2	Interfaces de contact	133
3.2.1	Interface de contact en séparation	134
3.2.2	Interface de contact en fermeture	135
3.3	Interfaces cohésives	138
7	Exemples de couplage flambage-délaminage	143
1	Plaque préfissurée en compression	144
2	Multiple délaminages dans un stratifié composite	147
	Conclusion	149
	A Annexe	151
	Bibliographie	153

Introduction

Durant les années 70, l'industrie aéronautique a commencé à introduire progressivement les matériaux composites dans leurs programmes de développement de manière à maîtriser graduellement les technologies de fabrication et les phénomènes de dégradation. Aujourd'hui, ils sont principalement utilisés pour la fabrication d'éléments secondaires (caisson de dérive, gouvernail de direction, ailerons, nez, radôme) et l'ensemble de pièces composites dans les avions commerciaux peut atteindre jusqu'à 26% de la masse de l'appareil (Airbus A380). Les compagnies aériennes demandant néanmoins de plus en plus de composites dans leurs avions. Les premiers fuselages en composites sont alors prévus pour le Boeing 787 et le Airbus A350 XWB, permettant ainsi d'atteindre un rapport en masse de 50%. Cependant, augmenter la proportion en composite n'est pas suffisant pour concevoir des structures plus légères et plus efficaces : il est indispensable d'optimiser les éléments composites déjà existants, en termes de coûts, performances et temps de fabrication, ainsi que de réduire le nombre de jonctions entre composants pour baisser le temps d'assemblage, augmenter le taux de production et diminuer les intervalles d'inspection. Néanmoins, les technologies et les méthodologies vers des avions « plus composites » ne sont pas toutes matures et disposent encore d'un fort potentiel de progression.

Actuellement, les capacités de calculs croissantes couplées aux modèles issus d'une meilleure connaissance de la mécanique des composites font de la simulation numérique un outil prometteur pour répondre aux nouvelles nécessités. La conception, le dimensionnement et la certification basés sur les simulations numériques sont donc le challenge pour concevoir les futures structures. Ce défi implique toutefois un fort « changement culturel » dans le développement aéronautique et, en même temps, des efforts scientifiques pour garantir la confiance nécessaire pour tel changement.

Le projet européen MAAXIMUS (*More Affordable Aircraft structure through eXtended, Integrated, & Mature nUmerical Sizing*) cherche à démontrer l'efficacité du développement virtuel dans la conception innovante de structures. Ce projet a pour but spécifique le développement et la validation le plus rapidement possible d'une structure aéronautique en composites hautement optimisés au moyen d'essais virtuels fiables, d'un processus de conception robuste basé sur des simulations numériques et d'un processus CAD-Analyse-CAM-NDI-test intégré. MAAXIMUS s'intéresse davantage à quantifier les niveaux de confiance sur les simulations numériques et sur les modèles d'endommagement, avec une emphase particulière sur les essais virtuels.

Dans le cadre du projet MAAXIMUS, ce travail de thèse a pour but de proposer une stratégie multiéchelle de décomposition de domaine pour la simulation parallèle

de structures composites stratifiées qui présentent de multiples délaminages et du flambage global et/ou local des plis. Ces interactions entre flambage et délaminage peuvent devenir rapidement catastrophiques et mener à la ruine de la structure. En effet, dans la phase de propagation du délaminage, les surfaces délaminées peuvent atteindre une taille critique et le flambage des plis est susceptible de survenir, augmentant ainsi les contraintes interlaminaires et accélérant le processus de délaminage. En conséquence, nous nous intéressons à prédire des interactions caractérisées par de fortes non-linéarités, sur des géométries très élancées (rapport d'élancement $\gg 100$) à cause de la forte différence entre l'échelle des zones délaminées et l'échelle d'un pli élémentaire (environ un dixième de millimètre).

Le flambage et le délaminage sont des phénomènes non linéaires de nature différente qui entraînent des pertes de rigidité importantes et des instabilités, ce qui explique le fait que l'étude de leur interaction n'est apparue qu'après la maîtrise indépendante de chacun. Les premières analyses théoriques de flambage sont attribuées à [Euler, 1744], mais les développements plus nombreux apparaissent vers la deuxième moitié du XX^e siècle sur les théories de plaque d'ordre supérieur [von Kármán, Sechler, et Donnell, 1932; Trefftz et Marguerre, 1937; Levy, 1945], puis sur les méthodes de perturbation [Koiter, 1945]. Les travaux numériques par la méthode des éléments finis utilisent différentes formulations pour la prise en compte de l'équilibre en grandes transformations. Les plus répandues sont les formulations Lagrangiennes [Bathe, Ramm, et Wilson, 1975] et la formulation corotationnelle [Crisfield, 1990].

L'analyse du délaminage, quant à lui, trouve ses bases dans la mécanique de la rupture [Griffith, 1921] ou dans la mécanique de l'endommagement et les modèles de zones cohésives [Dugdale, 1960; Barenblatt, 1962]. Dans les années 70-80, les premiers articles analytiques traitant du flambage et de la propagation de fissures [Kachanov, 1976; Chai, Babcock, et Knauss, 1981] utilisent la mécanique de la rupture avec des évaluations globales du critère énergétique de Griffith. Plus tard, les analyses numériques par la méthode des éléments finis emploient des méthodes locales de calcul du taux de restitution d'énergie [Storåkers et Andersson, 1988; Whitcomb, 1989] ou des modèles de zones cohésives [Bruno et Grimaldi, 1990; Allix et Corigliano, 1999]. Dernièrement, les méthodes asymptotiques numériques issues des méthodes de perturbation [Cochelin et Potier-Ferry, 1991; Bruno et Greco, 2000] et la méthode d'évolution des surfaces de discontinuités mobiles [Pradeilles Duval, 2004] sont aussi employées pour le traitement du délaminage dans un contexte non linéaire géométrique. Depuis le début, la plupart des démarches, analytiques ou numériques, s'intéressent à l'étude de flambage de plaques avec propagation de pré-fissures proches de sa surface sous différentes configurations (voir Fig. 1), ainsi ils préfèrent, pour des raisons pratiques et d'efficacité, les modèles non linéaires de poutres ou de plaques aux modèles 3D.

En ce qui concerne la prévision du comportement des matériaux composites, deux approches peuvent être distinguées : les approches dites « micro » qui se basent sur des schémas de dégradation sophistiqués dont la résolution est généralement prohi-

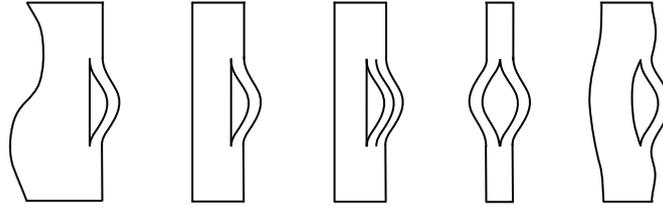


Fig. 1: Différentes configurations de couplage flambage-délaminage [Chai et al., 1981].

bitive en terme de mémoire et temps de calcul ; et les approches dites « méso » qui décrivent la dégradation des méso-constituants (les plis homogènes et les interfaces) par la mécanique de l’endommagement et qui rendent possible le calcul de structures grâce à la modélisation à une échelle plus grossière du matériau. L’approche que nous avons retenue est de ce dernier type et elle est conçue pour l’implémentation du mésomodèle développé depuis une vingtaine d’années au LMT-Cachan [Ladevèze, 1986; Allix, 1987]. Dans notre travail, le délaminage est pris en compte en utilisant le modèle d’interfaces cohésives de [Allix, Lévêque, et Perret, 1998] et il est considéré comme le principal mécanisme de dégradation, en conséquence l’endommagement dans les plis est négligé.

La modélisation ainsi choisie demande une discrétisation 3D pour les plis et des éléments surfaciques pour les interfaces, ce qui conduit à des maillages à grand nombre de degrés de liberté pour bien représenter le délaminage et le flambage. De plus, la longueur caractéristique de la *process zone* et l’épaisseur du pli sont très faibles devant les dimensions de la structure. De ce fait, même la simulation de petits cas tests conduit à traiter des problèmes non linéaires de grande taille, dont la résolution directe devient impraticable.

Pour rendre possible le calcul des modèles à grand nombre d’inconnues, ces dernières années ont vu l’émergence de deux grandes familles de méthodes multiéchelles. La première famille rassemble les approches mécaniques multiéchelles qui sont divisées en deux types. D’une part, les approches « micro vers macro » qui résolvent un problème macroscopique défini par la moyenne des caractéristiques microscopiques en utilisant des techniques d’homogénéisation [Sanchez-Palencia, 1980; Fish, Shek, Pandheeradi, et Shephard, 1997; Feyel et Chaboche, 2000; Nezamabadi, Zahrouni, Yvonnet, et Potier-Ferry, 2010]. D’autre part, les approches « macro vers micro » dont le principe revient généralement à superposer un enrichissement local au problème grossier. L’enrichissement peut être réalisé par un modèle différent (méthode Arlequin [Ben Dhia, 1998]), en résolvant des problèmes à une échelle plus fine (méthode de projection de Dirichlet hiérarchique [Zohdi, Oden, et Rodin, 1996]) ou en augmentant l’espace de recherche de la solution (méthodes PUM, XFEM, GFEM [Melenk et Babuška, 1996; Moës, Dolbow, et Belytschko, 1999; Strouboulis, Coops, et Babuška, 2001]). La deuxième famille réunit les stratégies de calculs multiéchelles, elle est composée des méthodes multigrilles [Fedorenko, 1964] et des méthodes de

décomposition de domaine. Ces dernières méthodes découpent le domaine d'étude en plusieurs sous-domaines qui sont traités séparément, puis raccordés pour trouver la solution de façon itérative. Selon le type de raccord entre sous-domaines, elles se classifient en : approches primales (BBD [Mandel, 1993]), approches duales (FETI [Farhat et Roux, 1991]) et approches mixtes (Lagrangien augmenté [Glowinski et Le Tallec, 1990], méthode LaTIn [Ladevèze, 1999]). Cette thèse cherche à répondre à son objectif en proposant une extension aux grandes transformations de la méthode de décomposition de domaine mixte LaTIn à trois échelles, adaptée au délaminage en petites perturbations par [Kerfriden, Allix, et Gosselet, 2009].

La stratégie LaTIn divise la structure en sous-structures volumiques liées par des interfaces surfaciques, toutes les deux étant des entités mécaniques. Par conséquent, les interfaces du mésomodèle sont aussi des interfaces de la décomposition du domaine. Pour la résolution du problème sous-structuré, les équations du problème sont classiquement divisées en équations linéaires (éventuellement globales) et en équations locales (éventuellement non linéaires). Ces deux groupes d'équations sont reliés par des opérateurs de direction de recherche qui paramètrent la méthode.

La séparation des échelles est faite sur les interfaces, où les efforts et les déplacements sont découplés en parties dites « macro » et « micro ». L'extensibilité numérique est assurée grâce à la définition d'un problème global (ou « problème macroscopique ») qui permet de vérifier des conditions d'admissibilité macroscopique d'interface par la construction d'un comportement macroscopique homogénéisé des sous-structure. Du fait que le nombre de sous-structures et d'interfaces est dépendant du nombre de plis, la taille du problème macroscopique augmente significativement avec les dimensions de la structure et sa résolution directe n'est plus envisageable. Les sous-structures sont donc groupées en super-sous-structures pour résoudre le problème macroscopique par une méthode de décomposition de domaine primale [Mandel, 1993]. La troisième échelle (ou « problème super-macroscopique ») est alors définie par l'incorporation d'une contrainte imposée au processus itératif à l'aide d'un projecteur [Kerfriden et al., 2009].

Un point clé pour assurer les bonnes performances de la méthode est la définition des directions de recherche et du problème homogénéisé. Leur choix est malheureusement spécifique à chaque type de problème et une mauvaise décision peut dégrader le taux de convergence ou entraîner une perte d'extensibilité. L'influence de ces paramètres a été étudiée pour des problèmes de structures hétérogènes [Ladevèze, Loiseau, et Dureisseix, 2001], de contact [Ladevèze, Nouy, et Loiseau, 2002], de fissuration [Guidault, Allix, Champaney, et Cornuault, 2008] et de délaminage [Kerfriden et al., 2009].

Dans ce travail, nous avons étudié différentes pistes pour l'intégration des grandes transformations dans la stratégie LaTIn. Finalement, nous proposons une séparation des équations du problème en deux groupes non linéaires : les non-linéarités géométriques sont confinées dans l'étape d'admissibilité et les non-linéarités d'interface dans l'étape locale, les directions de recherche restant linéaires. Le problème

macroscopique est alors défini après linéarisation des équations d'admissibilité.

La définition de la stratégie et son implémentation numérique dans un code de calcul parallèle n'étaient qu'une première partie des développements de cette thèse. Une grande partie des travaux a été consacrée à s'affranchir des difficultés associées aux structures élancées qui détériorent considérablement les performances de la méthode. Nous avons donc fait une étude des paramètres de la méthode dans les cas de la flexion, le flambage, le contact entre grandes surfaces fissurées et le délaminage, pour optimiser le taux de convergence, diminuer les temps de calcul et assurer l'extensibilité.

Ce rapport est décomposé en sept chapitres regroupés en deux grandes parties :

- La première partie présente le cadre industriel de l'étude et la bibliographie fondamentale liée au sujet.
 - Le chapitre 1 approfondit le contexte industriel et les caractéristiques requises par le problème étudié.
 - Le chapitre 2 présente la problématique liée aux non-linéarités géométriques et les formulations continues et discretisées associées.
 - Le chapitre 3 consiste en une étude bibliographique des modèles de délaminage et de contact dans les composites stratifiés.
 - Le chapitre 4 dresse un état de l'art des modèles multiéchelles et des algorithmes de résolution numérique de problèmes non linéaires.
- La deuxième partie du manuscrit est consacrée aux développements réalisés.
 - Dans le chapitre 5 une stratégie de calcul multiéchelle LaTIn pour le couplage flambage-délaminage est proposée.
 - Le chapitre 6 présente différentes améliorations aux paramètres de la méthode pour s'affranchir des difficultés rencontrées.
 - Dans le chapitre 7 on s'intéresse à l'application de la stratégie aux problèmes de couplage flambage-délaminage.

La compréhension de la problématique associée au problème cible a été essentielle pour le développement des contributions faites sur la stratégie de décomposition de domaine multiéchelle, ce qui nous a finalement permis le traitement de problèmes de couplage flambage-délaminage faisant intervenir un grand nombre de degrés de liberté.

Première partie

Cadre de l'étude et contexte scientifique

CHAPITRE

1

Cadre de l'étude

Ce chapitre présente le contexte industriel de ce travail, ainsi que les caractéristiques et les hypothèses de la problématique d'étude.

Sommaire

1	Contexte industriel	10
2	Caractéristiques du problème en étude	11
2.1	Caractéristiques des calculs envisagés	12
2.2	Hypothèses du problème de référence	13

1 Contexte industriel

Le travail présenté ici a pour origine une problématique dérivant du projet MAAXIMUS (More Affordable Aircraft structure through eXtended, Integrated, & Mature nUmerical Sizing). Ce projet est d'une très grande envergure : d'une part, il fait collaborer 57 partenaires provenant de 18 pays européens avec un budget de 67M€ pour 5 ans ; d'autre part, il cherche à réaliser une avancée majeure dans les capacités de simulation numérique et ainsi démontrer l'efficacité et la validité de ces simulations dans la conception de structures aéronautiques optimisées. Il a comme point de départ l'expertise et les développements acquis par des projets précédents (APRICOS, TANGO, ALCAS, BOJCAS, parmi d'autres).

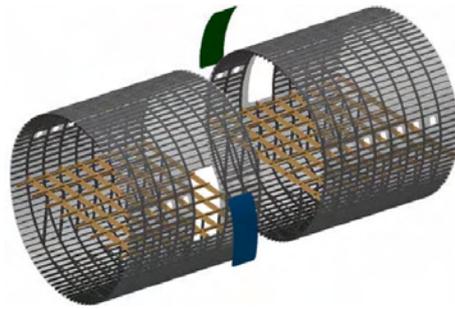


Fig. 1.1: Fuselage MAAXIMUS.

Le but spécifique de MAAXIMUS est de démontrer la faisabilité de la conception rapide et de la validation le plus tôt possible d'un fuselage en composites hautement optimisé (voir Fig. 1.1). Pour ce faire, le projet coordonne deux aires de développement : une plate-forme physique qui conçoit et valide des technologies de fabrication et une plate-forme virtuelle pour identifier et valider rapidement les meilleures solutions. Une démarche de travail simultanée a été mise en place pour développer ces deux plate-formes avec ses propres besoins spécifiques et pour valider mutuellement leurs réalisations respectives. Ce travail conjoint est la clé pour introduire le *changement culturel* vers le développement virtuel dans l'aéronautique européenne.

Le fuselage qui fait l'objet d'étude du projet doit être conçu dans sa totalité en matériaux composites et dans un minimum de parties (deux sections de fuselage uniques, sans joints longitudinaux) pour réduire le nombre d'assemblages et favoriser les taux de production élevés (voir Fig. 1.1). Par rapport aux meilleures solutions disponibles en fuselages (F7X, A320, TANGO, ALCAS), les buts spécifiques du projet sont :

- réduire le poids structural en 10% ;
- réduire les coûts de fabrication et d'assemblage en 10% ;
- réduire en 15% les coûts non récurrents (conception, développement, essais, etc.) ;
- réduire en 50% le temps d'assemblage entre les deux sections du fuselage ;

- réduire en 20% le temps de développement (de la conception aux essais à échelle réelle).

Le projet compte 59 *work-packages* organisés en 6 *sous projets* représentatifs des étapes de la conception d'un fuselage : 1. Exigences, 2. Design, 3. Analyse, 4. Fabrication, 5. Monitoring et 6. Validation. Chacun de ces *sous projets* est organisé en 5 *hubs* interdisciplinaires.

Nous nous intéressons au *work-package* d'analyse WP3.12 (*Advanced computational mechanics strategy for aircraft sub-components and structures*) qui a comme but de développer des solveurs numériques pour traiter des problèmes non linéaires à grand nombre de degrés de liberté avec de l'endommagement, du contact et du flambage. Plus précisément, l'objectif de ce travail de thèse fait partie de la tâche WP3.12.8.

2 Caractéristiques du problème en étude

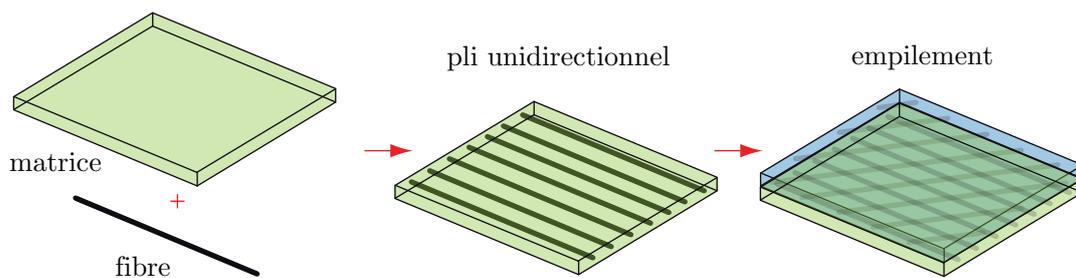


Fig. 1.2: Composition d'un stratifié composite.

Les matériaux composites qui nous intéressent sont des stratifiés constitués par un empilement de plis élémentaires unidirectionnels (voir Fig. 1.2). Chaque pli, d'une épaisseur de l'ordre de $0,1 \text{ mm}$, est composé de fibres continues, d'un diamètre compris entre 2 et $200 \mu\text{m}$, orientées dans une direction déterminée. Ces renforts sont noyés dans une matrice de rigidité moindre qui répartit les contraintes et qui diminue la fragilité de l'ensemble. L'interface interlaminaire est une zone riche en matrice qui assure la cohésion et la transmission des efforts entre les plis. Finalement, un stratifié est défini par la séquence d'empilement des plis.

Ces matériaux sont aujourd'hui très utilisés dans différents secteurs industriels, notamment grâce à leur bonne tenue mécanique par rapport aux matériaux homogènes comme l'acier, leur faible masse volumique et la possibilité d'adapter leurs propriétés mécaniques au chargement appliqué à la structure. Néanmoins, la description fine des composites reste complexe du point de vue mécanique et pose des problèmes de prédiction. Les démarches imposant à la structure de ne subir aucune dégradation en service sont encore largement employées et elles conduisent, bien entendu, à un surdimensionnement des pièces.

Les modes de dégradation des stratifiés ont donc fait l'objet de nombreuses études expérimentales et sont aujourd'hui bien compris. On peut distinguer les dégradations concernant les plis (dégradations intralaminaires) et celles concernant les interfaces entre les plis (dégradations interlaminaires). Pour les dégradations intralaminaires on observe de la décohesion fibre-matrice, la rupture de fibres et la fissuration transverse (des fissures parallèles aux fibres traversent le pli dans toute l'épaisseur). Concernant les dégradations interlaminaires, des phénomènes de décohesion, appelés délaminages, se développent dû principalement aux contraintes d'arrachement hors plan. Une distinction est faite entre les délaminages interlaminaires liés à la micromécanique du pli (délaminage diffus) ; et les macrodélaminages induits par la propagation de microdélaminages ou par la présence d'un bord libre, par exemple.

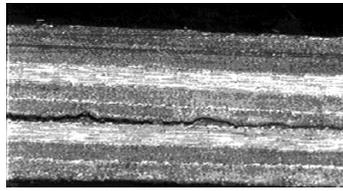


Fig. 1.3: Macrodélaminage d'un stratifié composite.

Parmi les modes de dégradation, le macrodélaminage interlaminaire (voir Fig. 1.3) est l'un des mécanismes de ruine le plus craints. Le délaminage conduit rapidement à une chute des propriétés mécaniques de la structure : les charges critiques à rupture et les charges critiques de flambage sont réduites, de même que la durée de vie en fatigue. En plus, les aires délaminées peuvent facilement dépasser l'épaisseur des plis d'un facteur 100, voir plus, ce qui peut induire, en cas de chargement de compression, le flambage local de plis et accélérer le délaminage. La capacité à prédire son apparition et sa propagation est donc indispensable pour vérifier la tenue de structures stratifiées.

Nous souhaitons modéliser les stratifiés composites par une description mésoscopique, à une échelle située entre une représentation fine (échelle des fibres) et une description macroscopique (échelle de la structure). Cette échelle intermédiaire (échelle du pli) rend possible une modélisation pertinente de structures composites, tout en gardant des coûts de calcul raisonnables. Ces approches demandent une discrétisation volumique des plis pour représenter les dégradations intralaminaires. Si bien ce type d'endommagement n'est pas pris en compte dans cette étude, nous sommes intéressés à garder une modélisation 3D pour donner la possibilité de son incorporation dans un travail futur.

2.1 Caractéristiques des calculs envisagés

La modélisation ainsi choisie conduit à des maillages à grand nombre de degrés de liberté, même pour la simulation de petits cas tests, car il est nécessaire d'avoir au

moins une dizaine d'éléments linéaires dans l'épaisseur du pli ainsi que dans la *process zone* pour ne pas surestimer la charge critique de flambage et pour bien décrire le délaminage, respectivement. De plus, la longueur caractéristique de la *process zone* et l'épaisseur du pli sont très faibles devant les dimensions d'une structure.

Considérons le cas test d'une plaque élancée de dimensions $10 \times 1 \times 0,25$ mm, composée de deux plis et discretisée sans raffinement local *a priori* (les fronts de fissures étant libres de se propager dans l'ensemble de la structure). Le maillage a environ quatre millions de degrés de liberté pour vérifier les exigences exposées ci-dessus et le calcul nécessite un processeur d'au moins 32Go en mémoire. Ceci dépasse largement la puissance d'une machine conventionnelle. Le traitement d'un problème plus complexe, un stratifié de $50 \times 1 \times 12,5$ mm à 100 plis, demanderait de l'ordre d'un milliard de degrés de liberté. Ainsi, seule l'utilisation des architectures de calcul parallèle actuelles peut rendre envisageable la résolution de ce type de problèmes.

Outre la quantité imposante de données à sauvegarder pour résoudre les problèmes de couplage flambage-délaminage, les temps de calcul nécessaires pour effectuer les résolutions posent une autre difficulté. En utilisant un schéma classique de résolution de problèmes non linéaires, un nombre de pas de temps important est nécessaire pour bien estimer la dissipation d'énergie associée au processus de délaminage ainsi que les modes de flambage.

2.2 Hypothèses du problème de référence

On considère le stratifié \mathbf{E} (voir Fig. 5.1) occupant un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ dans la configuration actuelle \mathcal{C} . Il est composé d'un empilement de N_P plis P . Un pli P est connecté au pli adjacent P' par l'interface $\Gamma_{PP'} = \partial\Omega_P \cap \partial\Omega_{P'}$. Une distribution d'efforts \underline{F}_d (respectivement une distribution de déplacements \underline{u}_d) est imposée sur la partie $\partial\Omega_{F_d}$ (respectivement $\partial\Omega_{u_d}$) de $\partial\Omega$. Les efforts de volume sont notés \underline{f}_d . La configuration avant déformation est notée \mathcal{C}_0 .

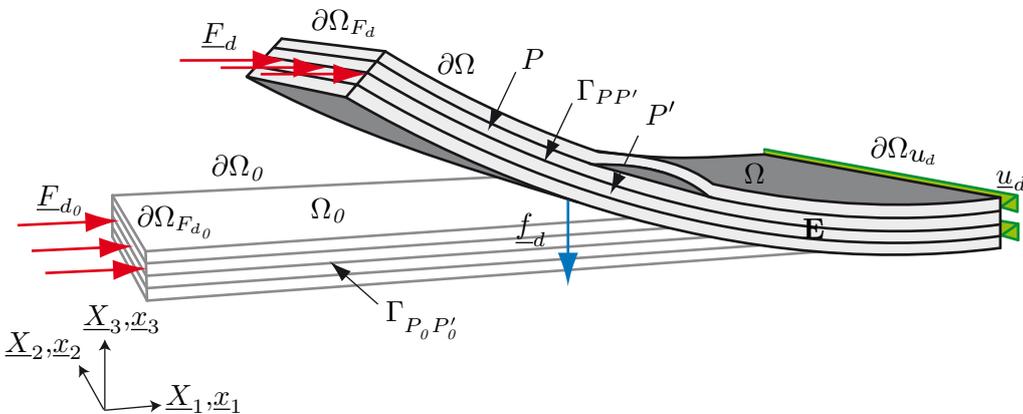


Fig. 1.4: Problème de référence : configurations avant et après déformation.

Le travail de thèse ici présenté s'intéresse à l'étude de la réponse de \mathbf{E} sous un certain chargement qui induit de grands déplacements et grandes rotations à partir de la configuration initiale, pendant que les interfaces sont susceptibles de s'endommager. Dû à la faible épaisseur d'un pli ($\approx 0,125$ mm), les aires délaminées peuvent devenir très élancées ($L_{\text{délaminée}}/h_{\text{pli}} \gg 100$). L'analyse de ce problème est basée sur les hypothèses suivantes :

1. modélisation mésoscopique du stratifié ;
2. plis à comportement hyperélastique en petites déformations avec la possibilité de grands déplacements et rotations ;
3. les interfaces entre plis peuvent subir de l'endommagement ;
4. le chargement ne dépend pas de la configuration de \mathbf{E} (les forces suiveuses ne sont pas prises en compte)
5. problème d'évolution quasistatique ;
6. conditions isothermes ;
7. il est possible d'avoir du contact et du re-contact dans les interfaces délaminées ;
8. le contact est seulement pris en compte entre les points d'interface qui étaient dans une même position dans la configuration initiale ;
9. le saut de déplacement est faible dans les interfaces qui ne sont pas encore complètement endommagées et dans les régions de contact.

Avant de détailler la résolution proposée au problème de référence sous les hypothèses ici mentionnées, nous allons présenter dans les chapitres suivants de cette première partie du document, un état de l'art non exhaustif des différentes approches pour le traitement du problème de référence. Nous distinguons les thématiques suivantes : grandes transformations, délaminage, contact, méthodes de résolution de problèmes non linéaires et méthodes multiéchelles.

2 Modélisation de structures élancées en grandes transformations

Dans ce chapitre, un rappel sur la stabilité de structures ainsi que sur les équations qui régissent le comportement des structures élancées en grandes transformations est présenté. Enfin, différentes formulations du problème discretisé sont aussi introduites.

Sommaire

1	Stabilité et non-linéarités géométriques	16
1.1	Théorie de la stabilité	17
1.2	Équilibre et stabilité d'un système conservatif	18
2	Formulation d'un milieu continu en grandes transformations	22
2.1	Configuration et cinématique	22
2.2	Équilibre du système	24
2.3	Loi de comportement	27
2.4	Principe de puissances virtuelles	27
3	Formulation du problème discretisé en grandes transformations	29
3.1	Formulations Lagrangiennes	30
3.2	Formulation corotationnelle	34

1 Stabilité et non-linéarités géométriques

Une définition simple et intéressante de la stabilité est donnée par le *Trésor de la langue française*, en la précisant comme le « caractère de ce qui reste en place, sans bouger ni tomber ». En termes plus rigoureux, la stabilité a été définie sur un critère dynamique par [Lyapunov, 1892], énoncé de la manière suivante :

Théorème 1 *Une position d'équilibre est stable si et seulement si une petite perturbation quelconque de position ou vitesse initiale donne un mouvement perturbé qui reste toujours proche de la position d'équilibre.*

Cette définition étant difficile à utiliser, de nombreux auteurs ont cherché à établir un critère de stabilité d'emploi plus simple. Pour un système conservatif (celui qui nous intéresse), le critère adopté est appelé *critère de l'énergie* :

Théorème 2 *Une condition nécessaire et suffisante de stabilité d'une position d'équilibre d'un système conservatif est que l'énergie potentielle totale du système présente un minimum local en cette position.*

Dans ce travail, le terme générique de *flambage* est utilisé pour désigner la perte de stabilité d'une structure sous chargement. Les effets du flambage sont principalement géométriques, c'est-à-dire, de grands déplacements induisant un changement de la forme initiale de la structure peuvent avoir lieu. La charge à laquelle survient cette transformation de la configuration initiale est appelée *charge de flambage* ou *charge critique*. L'analyse des branches d'équilibre après flambage est connue comme *postflambage*.

Dans le cas général, l'étude du flambage et du postflambage est un problème compliqué. Le plus souvent, même pour des systèmes mécaniques simples, les équations du mouvement qui dépendent de la configuration déformée du système sont non linéaires et il est pratiquement impossible de calculer d'une manière explicite les mouvements perturbés.

Une méthode approchée pour déterminer la charge de flambage d'une structure est basée sur le fait que les mouvements perturbés peuvent *a priori* rester petits autour de la configuration d'équilibre. Cette *hypothèse de petites perturbations* (HPP) conduit à remplacer l'équation d'équilibre réelle par son expression linéarisée autour de la position d'équilibre, au moins lorsque cette linéarisation est possible. Cette analyse est connue comme *flambage linéarisé* ou *flambage élastique*.

Bien que le flambage linéarisé permette de déterminer la charge critique d'une structure, il ne permet pas de calculer les positions d'équilibre hors de l'hypothèse de petites perturbations. Pour connaître donc les *grandes transformations* d'un phénomène de flambage il est nécessaire de résoudre le problème de mouvements perturbés en utilisant l'équation non linéaire du mouvement. **C'est ce dernier type d'analyse qui fait l'objet des travaux de cette thèse.**

La section suivante est consacrée à une revue des auteurs les plus importants qui ont contribué à la théorie de la stabilité de structures.

1.1 Théorie de la stabilité

Les premières études théoriques de la stabilité de structures sont attribuées à Leonard Euler dans le XVIII^e siècle. Dans ses travaux sur les formes de courbes élastiques [Euler, 1744], il a déterminé la charge critique de flambage d'une poutre élancée en compression. De ce fait, le flambage linéaire d'une poutre est aussi appelé *flambage d'Euler*. La première théorie générale de la stabilité élastique a été publiée un siècle plus tard par [Bryan, 1888].

Dans l'étude de la stabilité des poutres minces, on peut utiliser une analyse linéaire de flambage pour trouver la charge critique, mais la déflexion de la poutre restera indéterminée. Ce résultat est dû à l'utilisation d'une valeur de courbure approchée dans l'équation d'équilibre. Par contre, si l'on utilise l'expression exacte de la courbure, alors la déflexion après flambage n'est plus indéterminée. La configuration déformée alors retrouvée, en postflambage, d'une poutre mince encastrée soumise à l'action d'un poids placé à son extrémité libre est appelée *elastica* (voir Fig. 2.1).

L'*elastica* est à la source de divers domaines comme la théorie de l'élasticité, le calcul variationnel et la théorie des intégrales elliptiques. Le premier à poser le problème de l'*elastica* fut Jacques Bernoulli [Bernoulli, 1694]. Par contre, la solution est attribuée à Euler [Euler, 1744].

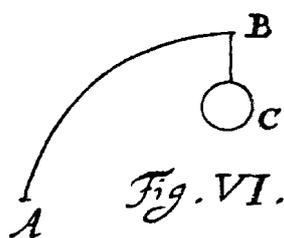


Fig. 2.1: Le problème de l'*elastica* [Bernoulli, 1694].

Jacques Bernoulli a trouvé la solution par l'équilibre de moments en supposant que la courbure de chaque point d'une poutre élastique est proportionnelle au moment de flexion en ce même point. Par proposition de Daniel Bernoulli, Euler a formulé l'*elastica* par le calcul variationnel et a démontré l'équivalence de son approche et celle de Jacques Bernoulli [Euler, 1744].

Une discussion historique de l'*elastica* peut se trouver dans l'ouvrage de [Timoshenko, 1953] et dans le rapport de [Levien, 2008]. La solution de l'*elastica* est clairement présentée dans [Timoshenko et Gere, 1936].

Un des premiers problèmes de plaque étudiés fut le cas d'une plaque rectangulaire simplement appuyée soumise à une charge de compression. Le calcul analytique de la charge critique a été fait par [Bryan, 1891]. Néanmoins, les observations montraient que les plaques atteignent des charges supérieures à la charge de flambage sans excéder leur limite élastique. Ainsi, la charge ultime fut déterminée dans une analyse

de postflambage par [von Kármán et al., 1932]. À la suite de ces travaux, la théorie de la stabilité non linéaire de plaques a été fortement développée par auteurs comme [Cox, 1934; Trefftz et Marguerre, 1937; Friedrichs et Stoker, 1941; Levy, 1945].

Le comportement de coques fut étudié dans les articles de [von Kármán et Tsien, 1939, 1941] sous l'hypothèse non linéaire de grandes déflexions pour montrer qu'il existait des valeurs de charge critique inférieures à celles que l'on obtenait avec la théorie classique.

Durant la première moitié du siècle XX^e un nombre important de problèmes sur le flambage ont été identifiés et analysés. Dans [Timoshenko et Gere, 1936], on trouve un état de l'art sur la théorie de la stabilité élastique et les problèmes traités jusqu'à ce moment. Cependant, ces études se basaient principalement sur des considérations d'équilibre et la plupart du temps ne suffisaient pas à expliquer les contradictions observées entre la théorie et l'expérimentation.

Un changement dans la façon de procéder a été introduit par W. T. Koiter pendant la Deuxième Guerre mondiale. Il introduisit une première théorie de flambage et postflambage des structures élastiques dans sa thèse doctorale [Koiter, 1945], en utilisant la théorie de bifurcation. Koiter fut le premier à utiliser une méthode de perturbation pour mener une analyse asymptotique permettant de suivre des chemins de postflambage et donc d'expliquer les différences rencontrées entre la théorie et l'observation. Une étude bibliographique des premiers travaux théoriques sur le postflambage a été fait dans [Hutchinson et Koiter, 1970].

Le problème des imperfections dans le flambage des structures a donc été formalisé en premier par [Koiter, 1945], puis par [Donnell et Wan, 1950; Budiansky et Hutchinson, 1964; Potier-Ferry, 1979], en faisant apparaître de façon explicite les défauts dans les développements asymptotiques. Plus récemment, la méthode asymptotique numérique issue des méthodes de perturbation [Damil et Potier-Ferry, 1990] (Chap. 4, Sec. 1.3), des analyses asymptotiques à double échelle [Jamal, Lahlou, Midani, Zahrouni, Limam, Damil, et Potier-Ferry, 2003] et des études paramétriques [Combescure, 1995; Legay et Combescure, 2002] ont été employées dans des études de sensibilité aux imperfections.

1.2 Équilibre et stabilité d'un système conservatif

Nous allons brièvement présenter une analyse des positions d'équilibre mené par [Nguyen, 1995] dans un cadre mathématique strict.

On considère le cas d'un système mécanique décrit par une énergie potentielle totale E , dépendant du vecteur déplacement \underline{u} et d'un paramètre de chargement scalaire λ qui caractérisent l'état du système :

$$E = E(\underline{u}, \lambda).$$

On rappelle que les équilibres possibles \underline{u} du système associés à une valeur donnée

λ sont les solutions vérifiant :

$$\delta E = E_{,u}(\underline{u}, \lambda) \delta \underline{u} = 0. \quad (2.1)$$

Lorsque λ varie, compte tenu de la continuité de E par rapport à λ , l'ensemble des solutions \underline{u} forme éventuellement une ou plusieurs courbes dans l'espace $\underline{u} \times \lambda$. Ce sont, par définition, des courbes d'équilibre du système (voir par exemple les courbes de la Fig. 2.2). *A priori*, un point d'équilibre $(\underline{u}^e, \lambda^e)$ peut être un point isolé ou faire partie d'une ou plusieurs courbes d'équilibre.

1.2.1 Points réguliers et points critiques

La Fig. 2.2 représente les différentes allures que peuvent prendre les chemins d'équilibre. Dans tous les cas, le chemin qui part de l'origine, et que l'on appelle *chemin fondamental*, est *régulier* jusqu'au *point critique* ou *point singulier*, où on est en présence de l'un des deux types de configuration : *point limite* ou *point de bifurcation*. D'un point de vue qualitatif, on distingue :

- **Point limite.** Un point limite (ou *snap-through*) se produit quand le chemin fondamental atteint un maximum en chargement (voir Fig. 2.2.a), c'est-à-dire, il n'existe pas de positions d'équilibre pour des valeurs de λ supérieures à la charge critique. La structure s'effondre donc pour cette valeur de la charge, à moins que la courbe ne remonte plus loin, auquel cas on assiste à un *saut d'équilibre* (claquage).

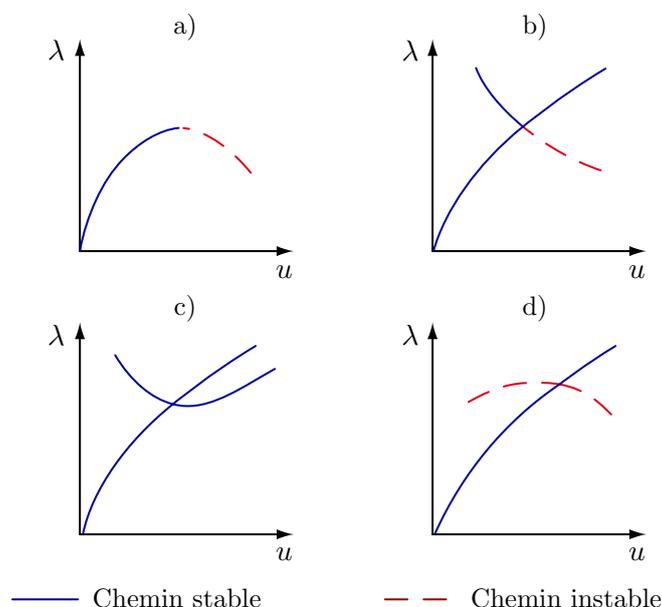


Fig. 2.2: Chemins d'équilibre (cas unidimensionnel) : a) point limite b) bifurcation asymétrique c) bifurcation symétrique stable d) bifurcation symétrique instable.

- **Point de bifurcation.** Au point critique, le chemin fondamental croise un deuxième chemin, stable ou instable, suivant le cas. On distingue les bifurcations asymétriques (voir Fig. 2.2.b) des bifurcations symétriques stables (voir Fig. 2.2.c) ou celles instables (voir Fig. 2.2.d).

D'un point de vue quantitatif, un point d'équilibre $(\underline{u}^e, \lambda^e)$ est un point régulier ou critique selon le caractère régulier ou singulier de la matrice des dérivées secondes de l'énergie potentielle $E_{,uu}^e$, obtenue par dérivation de l'Éq. (2.1) :

$$\delta^2 E = \delta \underline{u}^t E_{,uu}(\underline{u}^e, \lambda^e) \delta \underline{u} + \delta \underline{u}^t E_{,u\lambda}(\underline{u}^e, \lambda^e) \delta \lambda = 0. \quad (2.2)$$

Par la suite, on désigne la matrice $E_{,uu}(\underline{u}^e, \lambda^e) = E_{,uu}^e = \underline{\underline{K}}_t^e$ et le vecteur $E_{,u\lambda}(\underline{u}^e, \lambda^e) = E_{,u\lambda}^e$.

1.2.1.1 Points réguliers. Pour ces points, la matrice de rigidité $\underline{\underline{K}}_t^e$ est inversible et le système admet une unique solution d'équilibre, telle que :

$$\delta \underline{u} = -[\underline{\underline{K}}_t^e]^{-1} E_{,u\lambda}^e \delta \lambda.$$

Les points réguliers sont stables, d'après le critère énergétique (Théo. 2), si $\underline{\underline{K}}_t^e$ est définie positive, c'est à dire :

$$\delta \underline{u}^t \underline{\underline{K}}_t^e \delta \underline{u} > 0.$$

1.2.1.2 Points critiques. Ces points sont tels que la matrice de rigidité $\underline{\underline{K}}_t^e$ n'est pas inversible. Pour simplifier la discussion, on suppose que $\underline{\underline{K}}_t^e$ possède la valeur propre simple $\mu = 0$, de vecteur propre associé \underline{v} . L'Éq. (2.2) peut s'écrire :

$$\underbrace{\delta \underline{u}^t \underline{\underline{K}}_t^e \underline{v}}_{=0} + \underline{v}^t E_{,u\lambda}^e \delta \lambda = 0. \quad (2.3)$$

Ce qui implique que $\underline{v}^t E_{,u\lambda}^e \delta \lambda = 0$. Deux scénarios sont alors possibles : $\underline{v}^t E_{,u\lambda}^e \neq 0$ ou $\underline{v}^t E_{,u\lambda}^e = 0$.

Point limite. Si $\underline{v}^t E_{,u\lambda}^e \neq 0$, alors $(\underline{v}, 0)$ est l'unique solution de (2.3). Il s'agit d'une direction particulière, horizontale, car $\delta \lambda = 0$ (voir Fig. 2.2.a).

Point de bifurcation. Si $\underline{v}^t E_{,u\lambda}^e = 0$, alors le système (2.3) admet plusieurs solutions de la forme $(\delta \underline{u} + \xi \underline{v}, \delta \lambda)$, où $\delta \lambda$ et ξ sont arbitraires. Il reste encore à vérifier que les solutions en question donnent lieu effectivement à de véritables courbes d'équilibre. Des possibles chemins de bifurcation sont illustrés dans les Figs. 2.2.b,c,d.

1.2.2 Sensibilité aux imperfections

Le comportement d'une structure peut être considérablement influencé par des imperfections de type géométrique, matériau ou de chargement. En présence de tels défauts, les chemins d'équilibre et les charges critiques de la structure sont modifiés. La Fig. 2.3 schématise les différents chemins d'équilibre avec imperfections en fonction d'un *paramètre d'imperfection* ε . On remarque qu'en présence de défauts, la charge critique peut considérablement diminuer (voir Fig. 2.3.a,b,d). Le point de bifurcation est transformé en point limite dans le cas de bifurcation symétrique instable (voir Fig. 2.3.d) et dans le cas de bifurcation asymétrique (voir Fig. 2.3.b). Une imperfection négative favorise un comportement stable de la structure au voisinage du point critique (voir Fig. 2.3.b). **Dans ce travail, l'étude de sensibilité aux imperfections n'est pas considérée. Cependant, on remarque que suivre les chemins de postflambage permet qualitativement de savoir si une structure est ou non sensible aux imperfections.**

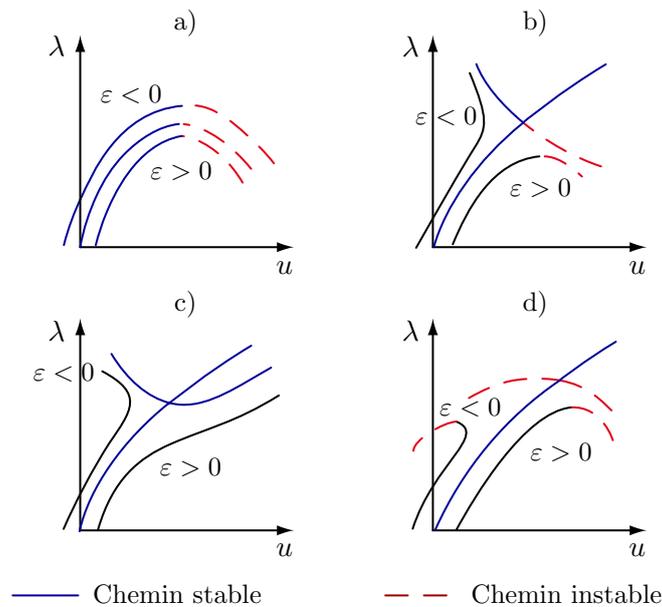


Fig. 2.3: Influence des imperfections (cas unidimensionnel) :a) point limite b) bifurcation asymétrique c) bifurcation symétrique stable d) bifurcation symétrique instable.

Bilan

Pendant le dernier siècle, une grande quantité d'auteurs ont approfondi les travaux sur le flambage. La méthode asymptotique développée par Koiter marque un avant et un après dans la théorie de la stabilité, elle constitue la base de beaucoup d'analyses théoriques d'instabilité et de sensibilité aux imperfections.

Les derniers trente ans ont vu le développement de méthodes numériques permettant le calcul de problèmes non linéaires plus complexes. De nos jours, la méthode des éléments finis en combinaison avec des techniques de résolution de problèmes non linéaires est sans doute la méthode la plus répandue. Cette méthode est utilisée dans notre travail et elle découle du *principe de puissances virtuelles* qui est introduit dans la section suivante.

2 Formulation d'un milieu continu en grandes transformations

Cette section est consacrée à une présentation de la formulation continue du problème de référence dans un contexte non linéaire géométrique. Les concepts détaillés ont été développés dans plusieurs ouvrages de mécanique des milieux continus, par exemple : [Germain, 1968; Mandel, 1974; Salençon, 2005].

Nous nous plaçons dans le cadre de problèmes non linéaires en grandes transformations, quasistatiques dans un système isotherme et conservatif (charges mortes) avec des lois de comportement indépendantes du temps. Ainsi, le temps n'est plus une variable et t indiquera uniquement un paramètre de chargement du problème.

On commencera en posant le problème de référence en distinguant les différentes configurations du système. Puis on présentera les équations d'équilibre sous sa forme forte et au moyen du principe des puissances virtuelles.

2.1 Configuration et cinématique

La structure considérée occupe le domaine Ω dont la frontière est notée $\partial\Omega$ (voir Fig. 2.4), elle est sollicitée par des densités de force de volume \underline{f} . Sur une partie $\partial\Omega_{u_d}$ du bord $\partial\Omega$, le déplacement \underline{u}_d est imposé et sur la partie complémentaire $\partial\Omega_{F_d}$ de $\partial\Omega_{u_d}$ s'applique la densité surfacique d'effort \underline{F}_d . On considère que les variables initiales sont nulles (absence de précontraintes, de déplacements initiaux, etc.).

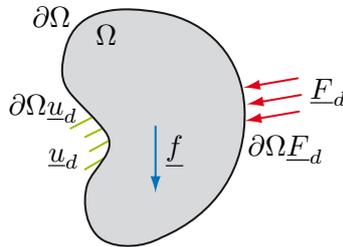


Fig. 2.4: Problème de référence.

L'état de la structure à l'instant t est appelé *configuration* du système \mathcal{S} . On désigne de façon générique par \mathcal{C} la configuration actuelle déformée à l'instant courante t . La configuration géométrique de la structure est décrite par l'ensemble de

vecteurs \underline{x} qui précisent la position de chaque particule M de \mathcal{S} à l'instant t , à partir de l'origine o d'un système cartésien orthonormé R_t qui a les vecteurs de base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$. Le volume occupé par la structure dans cette configuration est Ω de frontière $\partial\Omega$.

On admet aussi la notion de *configuration de référence* comme la configuration particulière \mathcal{C}_R du système à l'instant t_R fixé. Si l'on pose $t_R = 0$, alors la configuration de référence pourra aussi être appelée configuration initiale ou non déformée. Le système \mathcal{S} occupe ainsi dans \mathcal{C}_0 un volume Ω_0 de frontière $\partial\Omega_0$. Le vecteur position de chaque particule M_0 de \mathcal{S} dans \mathcal{C}_0 sera noté \underline{X} (voir Fig. 2.5). On désigne par R_0 le système cartésien orthonormé de la configuration initiale, d'origine O et de vecteurs de base $\{\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3\}$. Les repères R_t et R_0 sont généralement choisis coïncidents.

Contrairement à l'hypothèse de petites perturbations, il n'est plus possible en grandes transformations de confondre les configurations initiale (non déformée) et actuelle (déformée). Cette dernière est en général inconnue et l'on cherche à la déterminer. Les variables du problème peuvent alors être définies soit sur la configuration initiale (*grandeurs Lagrangiennes*) soit sur la configuration déformée (*grandeurs Euleriennes*).

Ainsi, le vecteur position \underline{x} de la particule située initialement en M_0 dans \mathcal{C}_0 est donné par la fonction vectorielle suivante, définie sur Ω_0 et $\forall t$:

$$\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{X}, t),$$

et qui vérifie évidemment $\underline{\varphi}(\underline{X}, 0) = \underline{X}$.

De même, le vecteur de position initiale \underline{X} à l'instant t s'écrit :

$$\underline{X} = \underline{\varphi}^{-1}(\underline{x}, t).$$

Il est commode d'introduire dans le référentiel \mathcal{R} , le *déplacement* \underline{u} entre les configurations \mathcal{C}_0 et \mathcal{C} de chaque particule de \mathcal{S} à l'instant t (voir Fig. 2.5). Ce

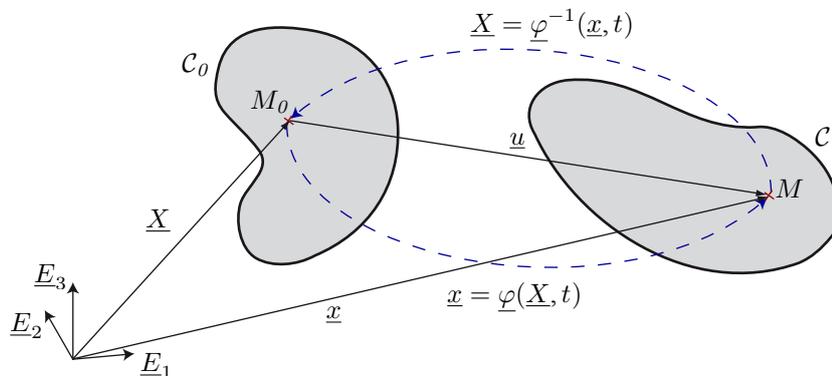


Fig. 2.5: Configurations du système et déplacement de la particule entre \mathcal{C}_0 et \mathcal{C}_t .

vecteur s'obtient par :

$$\underline{u} = \underline{x} - \underline{X} = \underline{\varphi}(\underline{X}, t) - \underline{X} = \underline{x} - \underline{\varphi}^{-1}(\underline{x}, t). \quad (2.4)$$

On remarque que le champ de déplacements peut s'exprimer comme une quantité Lagrangienne, $\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{\varphi}(\underline{X}, t) - \underline{X}$, ou comme une quantité eulérienne, $\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{x} - \underline{\varphi}^{-1}(\underline{x}, t)$.

On définit le *gradient de la transformation* comme le gradient du vecteur $\underline{\varphi}(\underline{X}, t)$ à l'instant t dans \mathcal{C}_0 :

$$\underline{F}(\underline{X}, t) = \underline{\text{grad}}_0 \underline{\varphi}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \underline{I}_d + \underline{\text{grad}}_0 \underline{u}(\underline{X}, t).$$

La vitesse \underline{v} de chaque particule de \mathcal{S} à l'instant t est obtenue par dérivation par rapport au temps de l'Éq. (2.4) :

$$\underline{v}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{\varphi}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{\varphi}(\underline{\varphi}^{-1}(\underline{x}, t), t)}{\partial t}.$$

On définit, la dérivée par rapport au temps du gradient de la transformation :

$$\underline{\dot{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{F}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \right) = \frac{\partial}{\partial \underline{X}} \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \underline{v}(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}}.$$

Le mouvement déformant entre les configurations \mathcal{C}_0 et \mathcal{C} induit une variation entre les volumes Ω_0 et Ω qui est donnée par :

$$d\Omega = J d\Omega_0,$$

où J est appelé Jacobien et il est définie par $J(\underline{X}, t) = \det(\underline{F}(\underline{X}, t))$.

2.2 Équilibre du système

L'équilibre du problème de référence dans les conditions ainsi définies à l'instant t est décrit par des champs de vitesses \underline{v} et de contrainte $\underline{\sigma}$ gouvernés par les équations locales suivantes. Par simplicité, dans la suite, les arguments de position et de temps ne seront plus précisés :

– Conservation de la masse :

$$\rho J = \rho_0, \text{ dans } \Omega \quad (2.5)$$

– Équations de compatibilité cinématique :

$$\underline{d} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} + \frac{\partial \underline{v}^t}{\partial \underline{x}} \right), \text{ dans } \Omega \quad (2.6)$$

$$\underline{v} = \underline{v}_d, \text{ dans } \partial\Omega_{v_d} \quad (2.7)$$

– Équations d'équilibre ^a :

$$\text{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = \underline{0}, \text{ dans } \Omega \quad (2.8)$$

$$\underline{\sigma}^t \cdot \underline{n} = \underline{F}_d, \text{ dans } \partial\Omega_{F_d} \quad (2.9)$$

$$\underline{\sigma}^t = \underline{\sigma}, \text{ dans } \Omega \quad (2.10)$$

a. On définit la divergente du tenseur du second ordre \underline{A} par : $\text{div} \underline{A} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} e_j$

Les équations (2.5)-(2.10) constituent ce que l'on appelle la *formulation forte* du problème d'équilibre dans la configuration actuelle, où \underline{d} est le tenseur symétrique appelé *taux de déformation Eulérien* qui correspond à une mesure de la *vitesse de déformation*. Le tenseur de contrainte de Cauchy est noté $\underline{\sigma}$.

Les équations locales (2.5)-(2.10) peuvent aussi s'exprimer en termes de la configuration initiale. D'après la formule de Nanson qui décrit la variation des éléments de surface pendant un mouvement déformant ¹, les tractions externes devient :

$$\begin{aligned} \underline{F}_d dS &= \underline{\sigma}^t \cdot \underline{n} dS \\ &= J \underline{\sigma}^t \underline{F}^{-t} \cdot \underline{n}_0 dS_0 \\ &= \underline{P}^t \cdot \underline{n}_0 dS_0 \\ &= \underline{F}_{d_0} dS_0. \end{aligned}$$

Ce qui définit le *premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff*² :

$$\underline{P} = J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma}.$$

Ainsi, la formulation forte du problème d'équilibre dans la configuration initiale

1. $\underline{n}(\underline{x}, t) dS = J(\underline{X}, t) \underline{F}^{-t}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}_0(\underline{X}, 0) dS_0$

2. La littérature est ambiguë dans la définition du premier tenseur de Piola-Kirchhoff. Dans [Belytschko, Liu, et Moran, 2000], \underline{P} est appelé *tenseur nominal de contraintes*, pendant que \underline{P}^t est réservé au premier tenseur de Piola-Kirchhoff dans [Crisfield, 1991]. \underline{P}^t est aussi appelé *tenseur de Boussinesq* [Salençon, 2005].

s'écrit :

– Conservation de la masse :

$$\rho J = \rho_0, \text{ dans } \Omega_0 \quad (2.11)$$

– Équations de compatibilité cinématique :

$$\underline{\underline{\tilde{e}}} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}}, \text{ dans } \Omega_0 \quad (2.12)$$

$$\underline{u} = \underline{u}_d, \text{ dans } \partial\Omega_{u_d} \quad (2.13)$$

– Équations d'équilibre ^a :

$$\text{div}_0 \underline{P} + \rho_0 \underline{f} = \underline{0}, \text{ dans } \Omega_0 \quad (2.14)$$

$$\underline{P}^t \cdot \underline{n}_0 = \underline{F}_{d_0} = \frac{dS}{dS_0} \underline{F}_d, \text{ dans } \Omega_{F_{d_0}} \quad (2.15)$$

$$\underline{F} \underline{P} = \underline{P}^t \underline{F}^t, \text{ dans } \Omega_0 \quad (2.16)$$

a. Soit le tenseur du second ordre \underline{A} , alors : $\text{div}_0 \underline{A} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial X_i} \underline{E}_j = J \text{div}(J^{-1} \underline{F} \underline{A})$

Au contraire de l'analyse linéaire, dans le cadre des non-linéarités géométriques, différentes mesures de déformation et du taux de déformation peuvent être utilisées. Néanmoins, une mesure de déformation ou du taux de déformation doit être objective, c'est-à-dire qu'elle s'annule dans un mouvement de corps rigide.

Le taux de déformation Eulérien $\underline{\underline{d}}$ est objectif. Par contre, les tenseurs $\underline{\underline{\tilde{e}}}$ et \underline{P} ne sont pas objectifs ni symétriques. Une possibilité souvent utilisée est d'exprimer l'équation de compatibilité cinématique (2.12) en utilisant le *tenseur de déformation Green-Lagrange droit* \underline{E} et le *second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff* $\underline{\pi}$, définis respectivement par :

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{F}^t \underline{F} - \underline{I}_d),$$

$$\underline{\pi} = J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-t}.$$

Les tenseurs \underline{E} et $\underline{\pi}$ sont Lagrangiens, symétriques et objectifs. Si l'on développe l'expression de \underline{E} , on obtient :

$$\underline{E} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}}_0 \underline{u} + \underline{\underline{grad}}_0^t \underline{u} + \underline{\underline{grad}}_0^t \underline{u} \underline{\underline{grad}}_0 \underline{u} \right),$$

d'où on met en évidence la non-linéarité de la relation entre le champ de déplacement et le champ de déformation de Green-Lagrange.

Ainsi, la formulation forte dans la configuration initiale reste la même, sauf l'Éq. (2.12) qui est remplacée par :

– Équation de compatibilité cinématique :

$$\underline{E} = \frac{1}{2} \left(\underline{F}^t \underline{F} - \underline{I}_d \right), \text{ dans } \Omega_0 \quad (2.17)$$

2.3 Loi de comportement

Pour accomplir la formulation du problème de référence, il reste à préciser la loi de comportement du matériau. D'après l'hypothèse de plis en petites déformations du problème d'intérêt (Chap. 1, Hyp. 2), **nous nous intéresserons plus particulièrement aux matériaux dits *hyperélastiques*.**

Matériaux hyperélastiques

Les matériaux pour lesquels le tenseur de contraintes est dérivé d'un potentiel sont appelés matériaux hyperélastiques ou *matériaux élastiques de Green* [Mooney, 1940; Ogden, 1984]. L'existence d'un potentiel implique un processus de déformation réversible, indépendant de l'histoire de chargement et en absence de dissipation d'énergie.

La puissance des efforts intérieurs exprimée par rapport à la configuration originale en termes du second tenseur de contraintes de Piola-Kirchoff et du tenseur de déformation Green-Lagrange droit peut alors s'écrire comme :

$$P_i = - \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{E}}} d\Omega_0 = - \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{E}}} : \underline{\underline{\dot{E}}} d\Omega_0,$$

où, $\psi(\underline{\underline{E}})$ est le potentiel de contrainte appelé *énergie libre spécifique*.

En présence de déplacements et rotations finis sous l'hypothèse de déformations faibles, on peut justifier une relation de comportement linéaire entre les tenseurs $\underline{\underline{\pi}}$ et $\underline{\underline{E}}$, provenant d'un potentiel quadratique en $\underline{\underline{E}}$: $\psi = \frac{1}{2\rho_0} \underline{\underline{C}}_0 \underline{\underline{E}}^2$. Ainsi,

$$\underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\underline{E}} \partial \underline{\underline{E}}} \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{C}}_0 \underline{\underline{E}}. \quad (2.18)$$

où, $\underline{\underline{C}}_0$ correspond au tenseur de Hooke. En effet, l'équation (2.18) est analogue à celle utilisée en petites transformations, si l'on remplace le tenseur de déformation de Green Lagrange pour le tenseur de déformation linéaire.

Ce matériau est connu comme *Saint Venant-Kirchhoff* est sera celui retenu dans la suite de ces travaux. Dans notre travail, on considère $\underline{\underline{C}}_0$ étant orthotrope.

2.4 Principe de puissances virtuelles

Cette section est consacrée à l'écriture du principe des puissances virtuelles (PPV) aussi appelé *formulation faible* du problème d'équilibre. Avant de dériver le PPV, il est utile d'introduire les ensembles de champs cinématiquement admissibles.

L'ensemble \mathcal{U}_{ad} des déplacements *cinématiquement admissibles* est alors défini par :

$$\mathcal{U}_{ad} = \{\underline{u} \mid \underline{u} \text{ soit à énergie finie dans } \Omega \text{ et } \underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial\Omega_{u_d}\},$$

et l'ensemble $\mathcal{U}_{ad,0}$ des *vitesse cinématiquement admissibles à zero* :

$$\mathcal{U}_{ad,0} = \{\underline{v}^* \mid \underline{v}^* \text{ soit à énergie finie dans } \Omega \text{ et } \underline{v}^* = 0 \text{ sur } \Omega_{u_d}\}.$$

La formulation faible de l'équation locale d'équilibre est alors une forme intégrale équivalente qui se déduit en multipliant l'équation d'équilibre par un champ de vitesses virtuelles $\underline{v}^* \in \mathcal{U}_{ad,0}$ arbitraire et en l'intégrant sur Ω (ou Ω_0). On obtient ainsi le PPV dans la configuration actuelle (voir détails dans A.1) :

$$-\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{d}[\underline{v}^*] d\Omega + \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_{F_d}} \underline{F}_d \cdot \underline{v}^* dS = 0, \quad \forall \underline{v}^* \in \mathcal{U}_{ad,0}, \quad (2.19)$$

où, $\underline{d}[\underline{v}^*]$ désigne l'opérateur consistant à évaluer le taux de déformation Eulérien associé au champ de vitesses \underline{v}^* . Le premier terme de l'Éq. (2.19) correspond à la puissance des efforts intérieurs et les autres deux termes correspondent aux puissances des efforts extérieurs du système.

De la même manière, on peut exprimer la formulation faible dans la configuration \mathcal{C}_0 , ainsi :

$$-\int_{\Omega_0} \underline{P} : \underline{\dot{E}}^t[\underline{v}^*] d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{f} \cdot \underline{v}^* d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_{0F_d}} \frac{dS}{dS_0} \underline{F}_d \cdot \underline{v}^* dS_0 = 0, \quad \forall \underline{v}^* \in \mathcal{U}_{ad,0}, \quad (2.20)$$

où, $\underline{\dot{E}}^t[\underline{v}^*] = \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial \underline{X}}$. Il est possible de montrer l'équivalence des équations (2.19) et (2.20), (voir détails dans A.2).

En utilisant les tenseurs Lagrangiens \underline{E} et $\underline{\pi}$, l'Éq. (2.20) devient (voir détails dans A.3) :

$$-\int_{\Omega_0} \underline{\pi} : \underline{\dot{E}}[\underline{v}^*] d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{F} \cdot \underline{v}^* d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_{0F_d}} \frac{dS}{dS_0} \underline{F}_d \cdot \underline{v}^* dS_0 = 0, \quad \forall \underline{v}^* \in \mathcal{U}_{ad,0}, \quad (2.21)$$

où, $\underline{\dot{E}}$ est le *taux de déformation Lagrangien*, définit par :

$$\underline{\dot{E}}[\underline{v}^*] = \frac{1}{2} \left(\underline{F}^t \underline{\dot{E}}[\underline{v}^*] + \underline{\dot{E}}^t[\underline{v}^*] \underline{F} \right). \quad (2.22)$$

Les tenseurs de contraintes $\underline{\sigma}$, \underline{P} et $\underline{\pi}$ sont respectivement duaux des tenseurs cinématiques \underline{d} , $\underline{\dot{E}}^t$ et $\underline{\dot{E}}$.

Finalement, pour poser le problème d'équilibre en déplacements, on incorpore au principe de puissances virtuelles la relation de comportement. Ainsi, le PPV dans la configuration initiale s'écrit :

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que :

$$- \int_{\Omega_0} \underline{\underline{C}}_0 \underline{\underline{E}}(\underline{u}) : \underline{\underline{E}}[v^*] d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{F} \cdot \underline{v}^* d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_{F_{d_0}}} \frac{dS}{dS_0} \underline{F}_d \cdot \underline{v}^* dS_0 = 0, \quad \forall \underline{v}^* \in \mathcal{U}_{ad,0}. \quad (2.23)$$

où, \underline{E} et $\underline{\underline{E}}[v^*]$ sont définis respectivement par l'Éq. (2.17) et l'Éq. (2.22).

Bilan

Dans cette section nous avons souligné que sous l'hypothèse des grandes transformations, la configuration actuelle déformée du système n'est plus coïncidente avec la configuration initiale non déformée et que le système d'équations non linéaires résultant du problème d'équilibre dépend cependant de la configuration choisie pour exprimer les équations. En même temps, différentes mesures de déformation et des contraintes peuvent être utilisées.

Le principe des puissances virtuelles a été introduit dans les configurations initiale et déformée. Nous présentons maintenant les possibles formulations obtenues après discrétisation du PPV par la méthode des éléments finis.

3 Formulation du problème discretisé en grandes transformations

Ce chapitre présente la construction du problème d'équilibre en grandes transformations au moyen de la méthode des éléments finis en déplacement. On s'appuie pour cela sur les formulations faibles du problème non linéaire introduit dans la Sec. 2.4.

Un des premiers articles relatifs à des non-linéarités géométriques par la méthode des éléments finis apparaît dans l'industrie aéronautique [Turner, Dill, Martin, et Melosh, 1960], en utilisant une procédure incrémentale avec une matrice de rigidité géométrique et une matrice de rigidité de déplacements initiaux. À partir de ce moment, différentes formulations ont été développées.

Les formulations appelées Lagrangiennes sont largement employées dans la mécanique des solides. À la différence des formulations Lagrangiennes, la formulation corotationnelle a comme condition que les déformations restent faibles. Néanmoins, la formulation corotationnelle est bien adaptée aux structures élancées en grandes transformations, plus précisément aux éléments finis de type poutres, plaques et coques.

3.1 Formulations Lagrangiennes

Il existe deux approches Lagrangiennes :

- **Formulation Lagrangienne totale.** Elle s'exprime en termes de mesures Lagrangiennes de déformation et de contrainte. Les dérivés et intégrales sont calculés par rapport aux coordonnées Lagrangiennes (matérielles) \underline{X} .
- **Formulation Lagrangienne réactualisée.** Elle se formule en termes de mesures Eulériennes de déformation et de contrainte. Les dérivés et intégrales sont évalués par rapport aux coordonnées Eulériennes (spatiales) \underline{x} .

La principale différence entre les deux approches est le point de vue, la formulation Lagrangienne totale référence les quantités à la configuration originale tandis que la réactualisée à la configuration déformée. La formulation Lagrangienne réactualisée a été notamment développée pour le cas de grandes distorsions géométriques. C'est rarement la situation rencontrée en flambage où la formulation Lagrangienne totale est préférée.

Parmi les premiers articles et ouvrages qui ont traité de ces formulations on peut trouver [Bathe et al., 1975; Zienkiewicz, 1977]. Des livres plus récents sont dus à [Belytschko et al., 2000; Bathe, 2007].

3.1.1 Formulation Lagrangienne totale

Dans cette section, les équations d'équilibre discretisé seront développées en utilisant le principe des puissances virtuelles écrit dans la configuration initiale \mathcal{C}_0 au moyen du second tenseur de contrainte de Piola-Kirchoff et du tenseur de déformation de Green-Lagrange droit, Éq. (2.23). On rappelle que le système est sous chargement de forces mortes (ou non suiveuses), c'est-à-dire, les efforts surfaciques élémentaires sont indépendants de la configuration.

Le domaine Ω_0 est discretisé en N_E éléments de volume Ω_0^E , tels que $\Omega_0 = \bigcup \Omega_0^E$. On choisit d'approcher le champ de déplacements de chaque élément E par une interpolation des valeurs nodales :

$$\underline{u} = \underline{\underline{N}}(\underline{X}) \underline{q} \quad , \quad \forall \underline{X} \in \Omega_0^E \quad ,$$

où, $\underline{\underline{N}}(\underline{X})$ est la matrice rassemblant les fonctions de forme élémentaires et $\underline{q}(t)$ le vecteur de déplacements nodaux de l'élément. De la même manière, le champ de vitesses virtuelles est obtenu par dérivation des déplacements :

$$\underline{v}^* = \underline{\underline{N}}(\underline{X}) \underline{w}^* \quad , \quad \forall \underline{X} \in \Omega_0^E \quad .$$

On remarque que les vitesses sont données par les mêmes fonctions de forme parce qu'elles sont indépendantes du temps.

Le tenseur de Green Lagrange droit devient, dans notation de Voigt³ :

$$\begin{aligned} [\underline{E}] &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} + \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} \right)^t + \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} \right)^t \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} \right] \\ &= \underline{B}_L \underline{q} + \frac{1}{2} \underline{B}_{NL}(\underline{q}, \underline{q}), \end{aligned} \quad (2.24)$$

où, \underline{B}_L est la partie linéaire de l'opérateur matriciel de déformation et \underline{B}_{NL} représente la partie non linéaire. De même, le taux de déformation Lagrangien peut s'exprimer comme :

$$\begin{aligned} [\underline{\dot{E}}] &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \underline{v}^*}{\partial \underline{X}} + \left(\frac{\partial \underline{v}^*}{\partial \underline{X}} \right)^t + \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} \right)^t \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial \underline{X}} + \left(\frac{\partial \underline{v}^*}{\partial \underline{X}} \right)^t \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} \right] \\ &= \underline{B}_L \underline{w}^* + \underline{B}_{NL}(\underline{q}, \underline{w}^*). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ainsi, en substituant dans l'expression du PPV (2.23) les relations (2.24) et (2.25), la formulation faible du problème d'équilibre élémentaire en grandes transformations conduit à :

$$\text{Trouver } \underline{q} \in \mathcal{U}_{ad}^E \text{ tel que : } \mathcal{R}(\underline{q}, \underline{w}^*) = 0, \quad \forall \underline{w}^* \in \mathcal{U}_{ad,0}^E.$$

où, le résidu $\mathcal{R}(\underline{q}, \underline{w}^*)$ est défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\underline{q}, \underline{w}^*) &= \underline{w}^{*t} \cdot \int_{\Omega_0^E} \left(\underline{B}_L^t + \underline{B}_{NL}^t(\cdot, \underline{q}) \right) \mathbf{C}_0 \left(\underline{B}_L \underline{q} + \frac{1}{2} \underline{B}_{NL}(\underline{q}, \underline{q}) \right) d\Omega_0^E \\ &\quad - \underline{w}^{*t} \cdot \left(\int_{\Omega_0^E} \underline{N}^t \rho_0 \underline{f} d\Omega_0^E + \int_{\partial\Omega_{F_d}^E} \underline{N}^t \frac{dS^E}{dS_0^E} \underline{F}_d dS_0^E \right). \end{aligned}$$

On est ainsi amené à résoudre une équation fonctionnelle non linéaire. En l'absence de méthode directe permettant cette résolution, on procède à une résolution itérative de Newton (voir Chap. 4, Sec. 1.2.1) pour obtenir \underline{q} , c'est-à-dire un procédé de linéarisation permettant la construction d'une suite \underline{q}^i ($i = 1, 2, 3, \dots$) dont la limite est la solution \underline{q} .

Ainsi, à chaque itération i , on résout la formulation faible linéarisée :

$$\mathcal{R}(\underline{q}^i, \underline{w}^*) + \langle \mathcal{R}'(\underline{q}^i, \underline{w}^*), \delta \underline{q}^i \rangle = 0.$$

3. Dans la notation appelée de Voigt, les tenseurs du deuxième ordre, tels que les tenseurs de contraintes et déformation, sont écrits comme des vecteurs ; pendant que les tenseurs de quatrième ordre, tels que le comportement tangent, sont écrits comme des matrices carrées. La notation vectorielle des tenseurs de deuxième ordre \underline{A} sera représentée par $[\underline{A}]$ et le tenseur du quatrième ordre $\underline{\underline{C}}$ par la matrice \mathbf{C} .

dont l'inconnue est la correction $\delta \underline{q}^i = \underline{q}^{i+1} - \underline{q}^i$. L'application linéaire tangente \mathcal{R}' est obtenue en effectuant le développement à l'ordre 1 de \mathcal{R} autour de \underline{q}^i :

$$\mathcal{R}(\underline{q}^i + \delta \underline{q}^i, \underline{w}^*) = \mathcal{R}(\underline{q}^i, \underline{w}^*) + \langle \mathcal{R}'(\underline{q}^i, \underline{w}^*), \delta \underline{q}^i \rangle. \quad (2.26)$$

L'itération $\underline{q}^{i+1} = \underline{q}^i + \delta \underline{q}^i$ est donc trouvée comme solution du problème linéaire :

$$\text{Trouver } \delta \underline{q}^i \in \mathcal{U}_{ad}^E \text{ tel que : } \langle \mathcal{R}'(\underline{q}^i, \underline{w}^*), \delta \underline{q}^i \rangle = -\mathcal{R}(\underline{q}^i, \underline{w}^*), \quad \forall \underline{w}^* \in \mathcal{U}_{ad,0}^E. \quad (2.27)$$

À partir du développement (2.26), on déduit l'opérateur tangent $\mathbf{K}_T^E = \mathcal{R}'(\underline{q}^i, \cdot)$. Ainsi⁴,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T = & \underbrace{\sum_{E \in \Omega_0} \int_{\Omega_0^E} \underline{\underline{B}}_{NL}^t(\cdot, \cdot) \mathbf{C}_0 \left(\underline{\underline{B}}_L \underline{q}^i + \frac{1}{2} \underline{\underline{B}}_{NL}(\underline{q}^i, \underline{q}^i) \right) d\Omega_0^E}_{\mathbf{K}_T^G} + \underbrace{\sum_{E \in \Omega_0} \int_{\Omega_0^E} \underline{\underline{B}}_L^t \mathbf{C}_0 \underline{\underline{B}}_L d\Omega_0^E}_{\mathbf{K}_T^E} \\ & + \underbrace{\sum_{E \in \Omega_0} \int_{\Omega_0^E} \left(\underline{\underline{B}}_L^t \mathbf{C}_0 \underline{\underline{B}}_{NL}(\underline{q}^i, \cdot) + \underline{\underline{B}}_{NL}^t(\cdot, \underline{q}^i) \mathbf{C}_0 \underline{\underline{B}}_L + \underline{\underline{B}}_{NL}^t(\cdot, \underline{q}^i) \mathbf{C}_0 \underline{\underline{B}}_{NL}(\underline{q}^i, \cdot) \right) d\Omega_0^E}_{\mathbf{K}_T^D}, \end{aligned}$$

ou encore,

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_T^G + \mathbf{K}_T^E + \mathbf{K}_T^D.$$

où, \mathbf{K}_T^G représente la matrice de raideur géométrique associée à l'état de contrainte $\underline{\underline{\pi}}^i$, \mathbf{K}_T^E la matrice de raideur élastique, et \mathbf{K}_T^D la matrice fonction du déplacement \underline{q}^i , appelée matrice de déplacements initiaux. La matrice \mathbf{K}_T^G ainsi calculée est une matrice symétrique.

Pour tirer parti des propriétés de convergence quadratique (donc rapide, en termes de nombre d'itérations) de la méthode de Newton, le prix à payer est l'assemblage à chaque itération de la matrice de rigidité tangente. Ainsi, le coût numérique de chaque itération, principalement dû à l'assemblage de la matrice de rigidité tangente et la résolution du système (2.27), est du même ordre de grandeur que celui d'un calcul complet en élasticité linéaire.

Parmi les premiers articles les plus référencés qui utilisant la méthode Lagrangienne totale pour résoudre des problèmes non linéaires géométriques, on trouve [Ramm, 1976; Wood et Zienkiewicz, 1977; Simo et Vu-Quoc, 1986]. **Cette formulation sera retenue pour les analyses non linéaires géométriques de ce travail de thèse.**

4. $\sum_{E \in \Omega_0}$ représente l'assemblage des rigidités élémentaires.

3.1.2 Formulation Lagrangienne réactualisée

Cette formulation actualise continûment le système de référence et les coordonnées spatiales \underline{x} sont utilisées comme configuration initiale. Compte tenu de l'actualisation des coordonnées, cette formulation s'exprime au moyen du tenseur de Cauchy et du taux de déformation Eulérien.

En utilisant une discrétisation similaire à celle définie dans la Sec. 3.1.1, le taux de déformation Eulérien peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} [\underline{d}] &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} + \frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)^t}{\partial \underline{x}} \right) \\ &= \underline{B}_t \underline{w}^* . \end{aligned}$$

En substituant cette expression dans le PPV exprimé sur la configuration actuelle \mathcal{C} , Éq. (2.19), la formulation faible du problème d'équilibre élémentaire en grandes transformations conduit à résoudre :

$$\text{Trouver } \underline{q} \in \mathcal{U}_{ad}^E \text{ tel que : } \mathcal{R}(\underline{q}, \underline{w}^*) = 0 \text{ , } \forall \underline{w}^* \in \mathcal{U}_{ad,0}^E . \quad (2.28)$$

où, le résidu $\mathcal{R}(\underline{q}, \underline{w}^*)$ est défini par :

$$\mathcal{R}(\underline{q}, \underline{w}^*) = \underline{w}^{*t} \cdot \int_{\Omega^E} \underline{B}_t^t [\underline{\sigma}] d\Omega_t^E - \underline{w}^{*t} \cdot \left(\int_{\Omega^E} \underline{N}^t \rho \underline{f} d\Omega^E + \int_{\partial\Omega_{F_d}^E} \underline{N}^t \underline{F}_d dS^E \right) .$$

On remarque que l'opérateur \underline{B}_t^t fait intervenir des dérivées par rapport à la variable spatiale \underline{x} . Ainsi, l'équation fonctionnelle (2.28) à laquelle on aboutit est aussi non linéaire. Cette fois-ci la non-linéarité s'introduit du fait que la configuration actuelle est inconnue.

Ce problème non linéaire peut être résolu avec la même technique présentée dans la Sec. 3.1.1, alors l'opérateur tangent $\mathbf{K}_t^E = \mathcal{R}'(\underline{q}^i, \cdot)$ ainsi obtenu est :

$$\mathbf{K}_t^E = \int_{\Omega^E} \frac{\partial \underline{B}_t^t}{\partial \underline{x}} [\underline{\sigma}] d\Omega^E + \int_{\Omega^E} \underline{B}_t^t \mathbf{C} \underline{B}_t d\Omega^E . \quad (2.29)$$

À la place de calculer $\underline{\sigma}$ directement, on peut calculer $\underline{\pi}$ et obtenir le tenseur de Cauchy au moyen de la relation $\underline{\sigma} = \frac{1}{J} \underline{F} \underline{\pi} \underline{F}^t$, de façon à exprimer l'opérateur

tangent (2.29), après assemblage, par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_t &= \sum_{E \in \Omega_0} \int_{\Omega_0^E} \underline{\underline{F}}^t \frac{\partial \underline{\underline{B}}_l^t}{\partial \underline{x}} \underline{\underline{F}}[\underline{\underline{\pi}}] d\Omega_0^E + \sum_{E \in \Omega} \int_{\Omega^E} \underline{\underline{B}}_l^t \mathbf{C} \underline{\underline{B}}_l d\Omega^E \\
&= \sum_{E \in \Omega_0} \int_{\Omega_0^E} \underline{\underline{B}}_{NL}^t(\cdot, \cdot) [\underline{\underline{\pi}}] d\Omega_0^E + \sum_{E \in \Omega} \int_{\Omega^E} \underline{\underline{B}}_l^t \mathbf{C} \underline{\underline{B}}_l d\Omega^E \\
&= \underbrace{\sum_{E \in \Omega_0} \int_{\Omega_0^E} \underline{\underline{B}}_{NL}^t(\cdot, \cdot) \mathbf{C}_0 \left(\underline{\underline{B}}_L \underline{q}^i + \frac{1}{2} \underline{\underline{B}}_{NL}(\underline{q}^i, \underline{q}^i) \right) d\Omega_0^E}_{\mathbf{K}_t^G} + \underbrace{\sum_{E \in \Omega} \int_{\Omega^E} \underline{\underline{B}}_l^t \mathbf{C} \underline{\underline{B}}_l d\Omega^E}_{\mathbf{K}_t^E} .
\end{aligned}$$

On obtient alors l'expression de l'opérateur de raideur symétrique \mathbf{K}_t suivant :

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_t^G + \mathbf{K}_t^E .$$

où, \mathbf{K}_t^G est la matrice de raideur géométrique associée à l'état de contraintes existant sur la configuration \mathcal{C} (qui transportée sur la configuration initiale \mathcal{C}_0 est identique à la matrice de raideur géométrique de la formulation Lagrangienne \mathbf{K}_T^G). Par contre, la matrice de raideur élastique \mathbf{K}_t^E est différent de sa version Lagrangienne totale, car elle est construite sur la configuration \mathcal{C} . La matrice de déplacements initiaux n'apparaît pas dans cette formulation.

Parmi les premiers articles relatifs à cette formulation on peut citer à [Yaghmai et Popov, 1971; Bathe et al., 1975; Jetteur, Cescotto, de Ville de Goyet, et Frey, 1983].

3.2 Formulation corotationnelle

La formulation corotationnelle propose de choisir comme configuration de référence une configuration obtenue par une rotation rigidifiante des éléments, la difficulté résidant précisément dans le choix de cette rotation. Elle est en général déterminée au moyen d'une décomposition polaire du mouvement. Les déformations et contraintes sont alors exprimées dans ce repère qui tourne en permanence avec l'élément, d'où l'appellation corotationnelle.

Cette approche fait l'hypothèse de petites déformations dans le repère corotationnel, ce qui simplifie notamment les développements et permet la réutilisation des opérateurs des éléments linéaires classiques existant dans les codes éléments finis. Les grands mouvements des structures élancées s'accompagnent le plus souvent de petites déformations de leurs éléments constitutifs, ce qui justifie cette stratégie comme une alternative de résolution.

Les premiers travaux qui proposaient l'utilisation d'une décomposition polaire du mouvement sont attribués à [Biot, 1938], mais ils ont été ignorés très longtemps.

Le concept corotationnel a été utilisé en premier par [Truesdell et Toupin, 1960] dans le cadre de la mécanique de milieux continus. Puis il a été introduit dans la méthode des éléments finis par [Wempner, 1969; Belytschko et Glaum, 1979].

Dans cette section on va présenter une formulation corotationnelle pour des éléments finis 2D dont une synthèse complète se trouve dans [Felippa et Haugen, 2005].

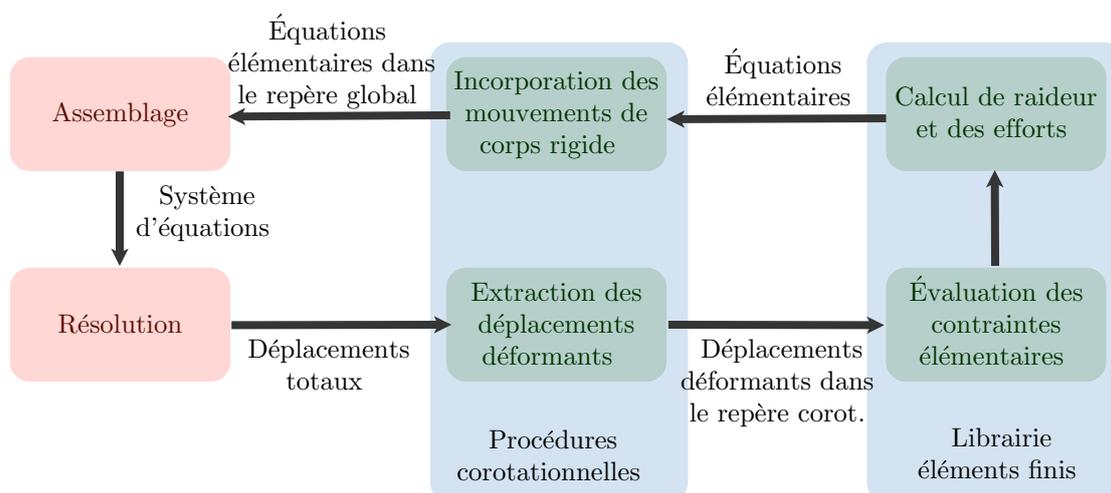


Fig. 2.6: Schéma d'implémentation d'une procédure corotationnelle [Felippa et Haugen, 2005].

L'implémentation de la procédure corotationnelle se fait entre le calcul de la matrice de raideur élémentaire (identique au cas linéaire, mais dans le repère corotationnel) et l'assemblage de l'opérateur global. La Fig. 2.6 présente sa mise en œuvre dans un code élément fini : le bloc central appelé *procédures corotationnelles* correspondent à l'extraction des déplacements et rotations déformants et à une phase de transport du problème tangent local vers le repère global. Les deux blocs à droite, appelés *librairie éléments finis*, représentent les fonctions élémentaires classiques. En fin, les deux blocs à gauche représentent les procédures d'*assemblage* et *résolution* du système d'équations.

On différencie la configuration initiale \mathcal{C}_0 , la configuration déformée \mathcal{C} et la configuration corotationnelle \mathcal{C}_R . Le repère corotationnel est lié à la géométrie des éléments et tourne avec eux (voir Fig. 2.7). L'objectif est d'éliminer dans la configuration corotationnelle la rotation moyenne de l'élément, ce qui est la seule responsable des non-linéarités géométriques due à l'hypothèse de petites déformations.

Sur la Fig. 2.7, on distingue les rotations \underline{T}_0 et \underline{T}_R qui permettent la transformation des déplacements du repère global au repère local. Pour un déplacement global donné \underline{u} , $\underline{\bar{u}} = \underline{T}_0 \underline{u}$ et $\underline{\tilde{u}} = \underline{T}_R \underline{u}$ sont respectivement les déplacements dans le repère initial et le repère corotationnel. \underline{R}_0 est la rotation entre les deux repères locaux, tel que $\underline{R}_0 = \underline{T}_R^t \underline{T}_0$.

L'idée de départ consiste à décomposer les déplacements et rotations de chaque point P comme la somme d'une partie rigidifiante et d'une partie déformante. Ainsi,

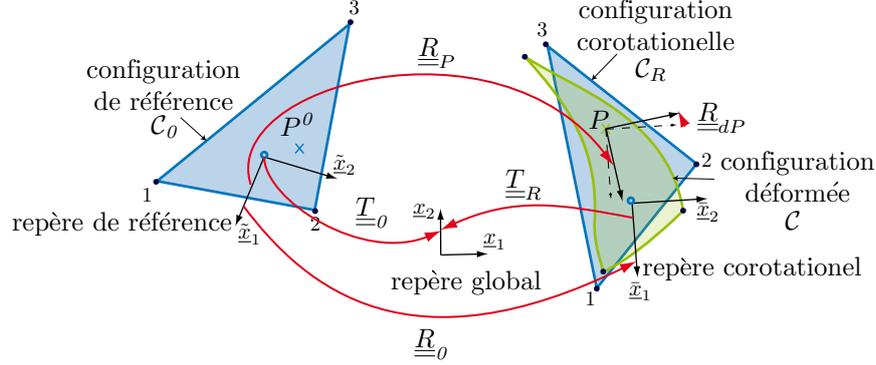


Fig. 2.7: Configurations et repères.

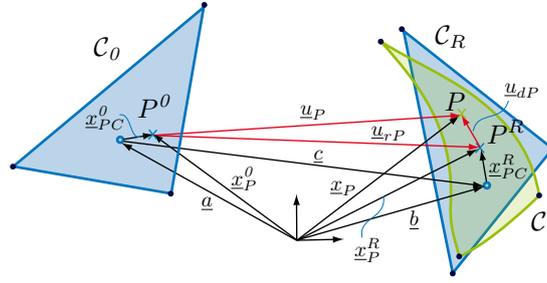


Fig. 2.8: Cinématique corotationnelle d'un élément.

$\underline{u}_P = \underline{u}_{dP} + \underline{u}_{rP}$ et $\underline{R}_P = \underline{R}_{dP}\underline{R}_0$ (voir Figs. 2.7 et 2.8).

Extraction des déplacements et rotations déformants

On considère le point P^0 de vecteur de position globale \underline{x}_P^0 . P^0 est déplacé par un mouvement de corps rigide \underline{u}_{rP} au point P^R de coordonnées globales \underline{x}_P^R , puis est déplacé au point P de coordonnées globales \underline{x}_P , par le mouvement déformant \underline{u}_{dP} (voir Fig. 2.8).

Le vecteur global dès le centre de gravité de l'élément initial à P^0 est $\underline{x}_{PC}^0 = \underline{x}_P^0 - \underline{a}$ ($\tilde{\underline{x}}_{PC}^0 = \underline{T}_0(\underline{x}_P^0 - \underline{a})$) dans le repère initial). Le vecteur global dès le centre de gravité de l'élément dans \mathcal{C}_R à P^R est $\underline{x}_{PC}^R = \underline{x}_P^R - \underline{b}$ ($\tilde{\underline{x}}_{PC}^R = \underline{T}_R(\underline{x}_P^R - \underline{b})$) dans le repère corotationnel). Mais $\tilde{\underline{x}}_{PC}^R = \tilde{\underline{x}}_{PC}^0$ parce que $\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_R$ est un mouvement rigidifiant et $\underline{x}_{PC}^R = \underline{R}_0 \underline{x}_{PC}^0$. Ainsi, le déplacement déformant dans le repère corotationnel est :

$$\begin{aligned}\bar{\underline{u}}_{dP} &= \underline{T}_R((\underline{x}_{PC}^0 + \underline{u}_P) - (\underline{c} + \underline{x}_{PC}^R)) \\ \bar{\underline{u}}_{dP} &= \underline{T}_R(\underline{u}_P - (\underline{c} - (\mathbb{I} - \underline{R}_0)\underline{x}_{PC}^0)) \\ \bar{\underline{u}}_{dP} &= \underline{T}_R(\underline{u}_P - \underline{u}_{rP}).\end{aligned}$$

L'opérateur de rotation déformante \underline{R}_{dP} , associé au mouvement du point initialement dans P^0 , est donné par $\underline{R}_{dP} = \underline{R}_P \underline{R}_0^t$ dans le repère global et par $\bar{\underline{R}}_{dP} =$

$\underline{T}_R \underline{R}_P \underline{T}_0^t$ dans \mathcal{C}_R , où \underline{R}_P est l'opérateur de rotation entre \mathcal{C}_0 et le point déformé P (voir Fig. 2.7). Finalement, on extrait les angles de rotation déformants $\bar{\underline{\theta}}_{dP}$ à partir de $\underline{\bar{R}}_{dP}$. Pour ce faire, différentes procédures sont détaillées dans [Felippa et Haugen, 2005].

Efforts internes et matrice de rigidité

Cette étape consiste à construire le problème tangent dans le repère corotationnel. On considère un élément E avec des degrés de liberté de déplacement et de rotation. Pour cela, on va calculer le vecteur de forces internes $\bar{\underline{F}}_{int}^E$ et le comportement tangent \mathbf{K}_T^E dans le repère corotationnel.

Si l'on se place dans l'hypothèse de petites déformations dans \mathcal{C}_R , on peut écrire les efforts intérieurs $\bar{\underline{F}}_{int}^E$ comme dérivants d'un potentiel élastique ψ^E :

$$\bar{\underline{F}}_{int}^E = \frac{\partial \psi^E}{\partial \bar{\underline{q}}_d^E} = \left[\frac{\partial \psi^E}{\partial \bar{\underline{u}}_d^E} \quad \frac{\partial \psi^E}{\partial \bar{\underline{\theta}}_d^E} \right]^t .$$

Pour écrire les efforts internes par rapport au repère global, on utilise la matrice jacobienne \underline{J}^E . Ainsi, $\underline{F}_{int}^E = \underline{J}^{E^t} \bar{\underline{F}}_{int}^E$. Il est pratique de décomposer la matrice jacobienne dans sa forme $\underline{J}^E = \underline{H} \underline{P} \underline{T}$, où \underline{T} est l'opérateur qui permet le passage du repère global au repère corotationnel et qui s'écrit en fonction de l'opérateur de rotation \underline{T}_R^E , \underline{H} est l'opérateur reliant les variations du vecteur des rotations $\bar{\underline{\theta}}_d^E$ aux variations du vecteur spin $\bar{\underline{\omega}}_d^E$ dans le repère corotationnel et \underline{P} est le projecteur qui extrait la partie déformante des déplacements et des spins exprimés dans le repère corotationnel. Ainsi, le vecteur des efforts internes dans le repère global devient :

$$\underline{F}_{int}^E = \underline{T}^t \underline{P}^t \underline{H}^t \bar{\underline{F}}_{int}^E . \quad (2.30)$$

Le comportement tangent est défini comme la dérivée des efforts internes par rapport aux degrés de liberté \underline{q}^E dans le repère global. En différentiant l'Éq. (2.30), on obtient :

$$\begin{aligned} \delta \underline{F}_{int}^E &= \delta \underline{T}^t \underline{P}^t \underline{H}^t \bar{\underline{F}}_{int}^E + \underline{T}^t \delta \underline{P}^t \underline{H}^t \bar{\underline{F}}_{int}^E + \underline{T}^t \underline{P}^t \delta \underline{H}^t \bar{\underline{F}}_{int}^E + \underline{T}^t \underline{P}^t \underline{H}^t \delta \bar{\underline{F}}_{int}^E \\ &= (\mathbf{K}_{GR}^E + \mathbf{K}_{GP}^E + \mathbf{K}_{GM}^E + \mathbf{K}_M^E) \delta \underline{q}^E , \end{aligned}$$

où, \mathbf{K}_{GR}^E est appelée matrice géométrique de rotation, \mathbf{K}_{GP}^E est la matrice géométrique de projection de l'équilibre, \mathbf{K}_{GM}^E est la matrice géométrique de correction du moment et \mathbf{K}_M^E est la matrice de raideur matérielle.

Dans la mesure où la configuration corotationnelle est *a priori* inconnue, on procède de manière itérative, en utilisant à chaque itération la meilleure estimation possible de cette configuration, la configuration correcte étant obtenue à la convergence du processus. On peut démontrer qu'à convergence la matrice de rigidité assemblée devient symétrique. Des versions simplifiées de l'opérateur de rigidité peuvent être obtenues, mais la symétrie de l'opérateur est alors perdue, parfois même à l'équilibre.

Bilan

Dans les formulations Lagrangiennes et la formulation corotationnelle, la démarche est similaire que pour l'analyse linéaire, la différence principale est le besoin de définir le repère sur lequel les grandeurs vont être évaluées et de choisir des mesures de déformation et de contrainte adaptées. La description appropriée dépend des caractéristiques du problème à résoudre. **Pour notre étude, nous avons choisi d'utiliser une formulation Lagrangienne totale qui est mieux adaptée au traitement de structures volumiques.**

Bilan du chapitre

Ce chapitre a donné une présentation des grandes lignes de la mécanique de structures en grandes transformations. Nous avons présenté une introduction à la stabilité, les modèles continus et les formulations discretisées associées. Dans le chapitre suivant, nous introduisons les autres problématiques mécaniques d'intérêt de ce travail de thèse, à savoir le délaminage de stratifiés composites et le contact entre surfaces délaminées.

Délamination et contact dans les composites stratifiés

Ce chapitre commence avec une revue non exhaustive des modèles existants pour la prédiction du délamination. Ensuite, une brève revue des travaux sur le couplage flambage-délamination de composites est présentée. Le contact entre fissures devant être pris en compte, des modèles associés ont aussi été inclus dans cette étude bibliographique.

Sommaire

1	Modèles pour le délamination	40
1.1	Modélisation par la mécanique de la rupture et critères en contraintes	41
1.2	Modélisation par la mécanique de l'endommagement	46
1.3	Couplage flambage-délamination	53
2	Contact unilatéral avec et sans frottement	54
2.1	Formulation du problème de contact	55
2.2	Lois de frottement	57
2.3	Résolution du problème de contact	58

1 Modèles pour le délaminage

Le délaminage, c'est-à-dire la décohésion à l'échelle macroscopique des plis adjacents due à la dégradation de la fine couche de matrice qui les lie, est probablement l'un des mécanismes de ruine le plus craints pour les matériaux composites stratifiés.

L'initiation de ce phénomène est principalement due à une concentration de contraintes interlaminaires par la présence d'efforts externes ou de zones de bord (trous, jonctions, arrêtes, etc.), à des macrodéfauts ou à des microfissures internes qui en se propageant créent des délaminages locaux, puis macroscopiques. Dans sa phase de propagation, les surfaces délaminées peuvent atteindre une taille critique et le flambage des plis est susceptible de survenir. De plus, l'apparition du flambage augmente les contraintes interlaminaires et l'interaction flambage-délaminage peut devenir rapidement catastrophique. [Bolotin, 2001] a classifié les différents types de délaminations proches de la surface d'un stratifié qui peuvent se produire sous différentes conditions de chargement.

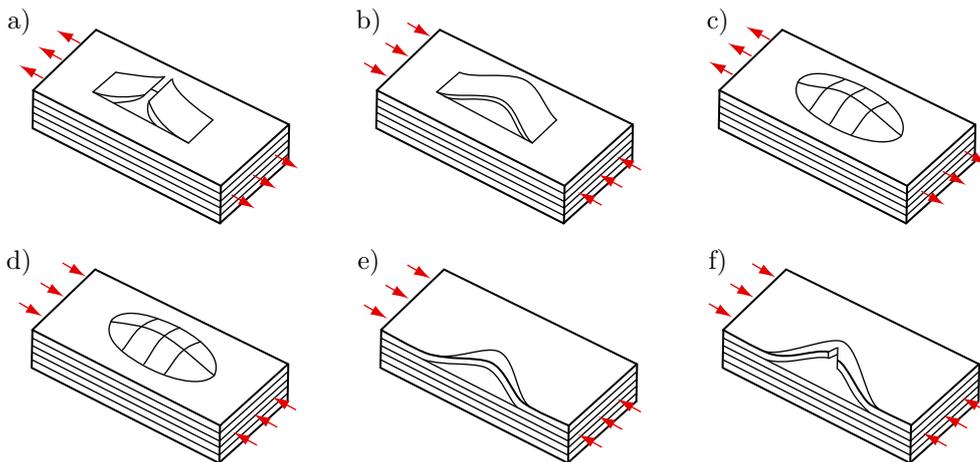


Fig. 3.1: Délamination de surfaces typiques : a) ouverture en tension b) ouverture en compression c) ouverture elliptique en tension d) ouverture elliptique en compression e) délaminage en forme de poche f) délaminage en forme de poche avec fissure transverse. D'après [Bolotin, 2001].

Classiquement, l'initiation et la propagation du délaminage sont traitées de manière distincte. La raison de cette séparation est la différence de nature des critères associés à l'activation de ces deux phénomènes : l'initiation dépend principalement de l'état tridimensionnel des contraintes, alors que la propagation est reliée aux quantités d'énergie nécessaires à une avancée élémentaire d'une fissure.

Des approches issues de la mécanique de la rupture peuvent être utilisées pour définir la propagation du délaminage. Par contre, l'initiation ne peut pas être traitée directement par cette approche et des critères en contrainte sont conventionnellement utilisés. Notons, cependant, que les approches généralisant la mécanique de la

rupture, comme la *Finite Fracture Mechanics* [Hashin, 1996; Leguillon, 2002; Cornetti, Pugno, Carpinteri, et Taylor, 2006], portent une voie de plus en plus utilisée pour traiter dans un même cadre conceptuel l'initiation et la propagation de fissures. Citons dans ce même domaine les travaux de [Francfort et Marigo, 1998; Leguillon, 1999].

À une échelle mésoscopique, le délaminage peut être considéré comme la dégradation progressive d'une mince couche de matrice entre deux plis adjacents. Dans la plupart des cas, les modèles développés s'attachent alors à décrire la dégradation des interfaces du matériau par la mécanique de l'endommagement. Ici, l'initiation et la propagation des fissures sont traitées par un même critère.

La section suivante est consacrée à l'introduction des modèles existants pour la représentation du délaminage des matériaux composites. Des modèles par la mécanique de la rupture et des critères d'initiation (Sec. 1.1), ainsi que des modèles d'interfaces cohésives par la mécanique de l'endommagement (Sec. 1.2) seront présentés. Ensuite, on résume quelques travaux sur le flambage couplé au délaminage (Sec. 1.3).

1.1 Modélisation par la mécanique de la rupture et critères en contraintes

Dans la mécanique de la rupture, le délaminage est associé à une rupture fragile de l'interface, qui ne peut avoir que deux états, sain ou rompu. L'avancement d'une macrofissure est caractérisé par le taux de restitution d'énergie G , lequel est comparé avec une valeur critique G_c qui est l'énergie nécessaire pour créer une fissure de surface unité [Griffith, 1921]. Le taux de restitution d'énergie est généralement reparti selon trois mécanismes de propagation : ouverture (mode I) et cisaillement (modes II et III), voir Fig. 3.2.

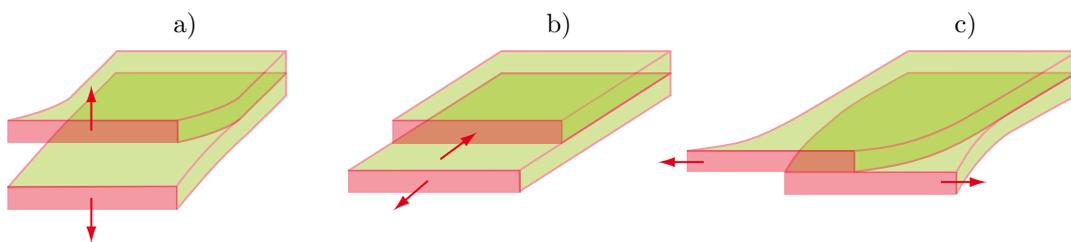


Fig. 3.2: Modes de rupture interlaminaires : a) mode I, b) mode II et c) mode III.

La mécanique de la rupture a été principalement utilisée pour la phase de propagation (quand des macrodéfauts existent, voir Sec. 1.1.2), tandis que pour la phase d'initiation, la mécanique de la rupture n'est plus opérante, comme on montrera dans la suite.

Si l'on considère un milieu élastique qui contient un défaut d'aire initiale a sous un chargement à l'infini σ_∞ perpendiculaire au plan de la pré-fissure (voir Fig. 3.3),

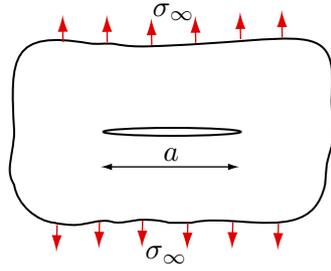


Fig. 3.3: Fissure sous un chargement à l'infini.

on peut déterminer, en utilisant la mécanique de la fracture linéaire, une relation entre le taux de restitution de l'énergie et le chargement appliqué :

$$G \propto \sigma_{\infty}^2 a .$$

La charge limite pour laquelle la propagation commence est alors donnée par :

$$\sigma_{\infty}^p \propto \frac{G_c}{\sqrt{a}} .$$

Ce chargement devient infini quand a tend vers zéro, cela signifie que l'initiation d'une fissure peut avoir lieu seulement pour un chargement infini, ce qui est en contradiction avec l'expérience. La phase d'initiation est donc traitée séparément de la propagation et des modèles supplémentaires basés traditionnellement sur des critères en contrainte sont introduits (voir Sec. 1.1.1).

Une autre famille d'approches est basée sur l'analyse de la singularité de contraintes à la jonction entre plis. Le problème étant la définition d'un critère mêlant les facteurs d'intensité de contraintes et l'exposant de la singularité, [Leguillon et Sanchez-Palencia, 1987; Leguillon, 1999] ont proposé, dans le cadre de la technique des développements asymptotiques raccordés, de déterminer le taux de restitution de l'énergie en fonction d'une longueur de fissure théorique et de le comparer à des critères en contrainte ou énergétiques pour estimer la création ou avancé d'une fissure.

1.1.1 Modélisation de l'initiation

Les principaux critères de prédiction de l'initiation du délaminage sont focalisés sur des analyses d'effets de bords. Ils cherchent à déterminer les contraintes tridimensionnelles interlaminaires $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}_3$ (\underline{n}_3 étant la normale au plan de l'interface) pour les comparer avec les contraintes à rupture du matériau. Une difficulté est la présence de singularités des contraintes interlaminaires dans les bords. [Pipes et Pagano, 1970] montrent qu'une concentration de contraintes interlaminaires de cisaillement (σ_{13} , σ_{23}) et d'arrachement σ_{33} apparaissent autour du bord libre. De plus, l'amplitude des ces contraintes dépend principalement de la séquence d'empilement et de l'épaisseur des plis (voir Fig. 3.4).

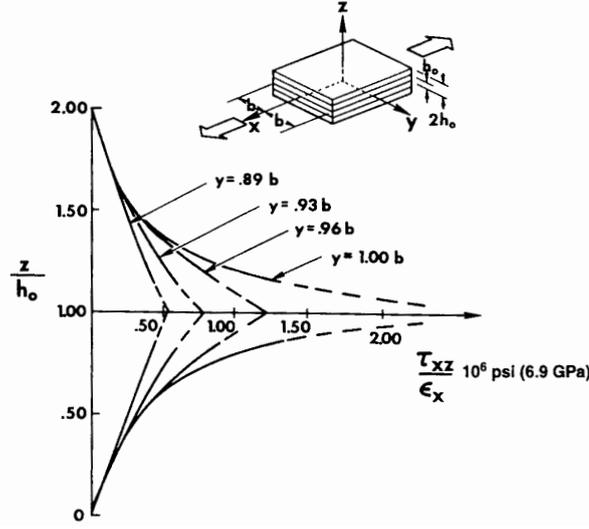


Fig. 3.4: Distribution de la contrainte interlaminaire de cisaillement σ_{13} dans la demi-épaisseur d'un stratifié $[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$, d'après [Pipes et Pagano, 1970].

Les critères d'initiation en contraintes ont été initialement proposés par [Nuismer et Whitney, 1974] et depuis de nombreuses variantes ont été développées. Par exemple, dans [Brewer et Lagace, 1988], l'ensemble des composantes du vecteur des contraintes normales sont pris en compte sous la forme :

$$\left(\frac{\bar{\sigma}_{13}}{\sigma_{13}^R}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_{23}}{\sigma_{23}^R}\right)^2 + \left(\frac{\langle \bar{\sigma}_{33} \rangle_+}{\sigma_{33}^{R,t}}\right)^2 + \left(\frac{\langle \bar{\sigma}_{33} \rangle_-}{\sigma_{33}^{R,c}}\right)^2 \leq 1,$$

où, $\langle \cdot \rangle_+$ (respectivement $\langle \cdot \rangle_-$) renvoie la partie positive (respectivement négative) de la quantité considérée. Les quantités σ_{ij}^R désignent les contraintes à rupture associées aux différents modes d'ouverture de fissure. Les quantités $\bar{\sigma}$ doivent être représentatives de l'état de contrainte dans la zone de bord considérée. Deux solutions existent pour enlever les singularités associées au calcul de la quantité $\bar{\sigma}$ dans les bords. Dans le premier cas, $\bar{\sigma}$ est défini comme la contrainte calculée à une distance l_c du bord du stratifié :

$$\bar{\sigma} = \sigma(l_c).$$

Les critères basés sur cette formule sont appelés *Point Stress*.

La seconde solution, qui correspond aux critères *Average Stress*, est basée sur le calcul d'une moyenne des contraintes dans la zone de bord définie par la grandeur l_c , soit :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{l_c} \int_0^{l_c} \sigma dl.$$

La longueur caractéristique l_c est néanmoins un paramètre expérimental qui dépend de la séquence d'empilement, de la géométrie des plis et du chargement.

Limites

Les critères en contrainte pour l'initiation de fissures exigent un très grand nombre d'essais pour l'identification. Ils sont inadaptés au traitement de la propagation des fissures initiées, car ces propagations sont principalement gouvernées par des lois physiques tenant compte de l'énergie dissipée lors de l'avancée d'une fissure. Ils peuvent cependant être utilisés de façon conservative. De plus, ils constituent un outil intéressant pour repérer les zones à risque dans une structure.

1.1.2 Modélisation de la propagation

La mécanique de la rupture décrit la propagation de fissures par l'utilisation de critères énergétiques globaux, comme le critère de Griffith [Griffith, 1921]. Ce critère détermine les conditions nécessaires à la création de nouvelles surfaces par l'évaluation du taux de restitution d'énergie. Pour des modes découplés, il s'écrit :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad G_i \geq G_{i_c} .$$

Les $(G_i)_{i \in \{1, 2, 3\}}$ (respectivement $(G_{i_c})_{i \in \{1, 2, 3\}}$) sont les taux de restitution d'énergie (respectivement les taux de restitution d'énergie critiques) selon les modes de délaminage élémentaires (voir Fig. 3.2). Les valeurs critiques représentent l'énergie pour créer une fissure de surface unité, ils sont déterminés expérimentalement.

Les critères de couplage des modes d'avancée d'une fissure peuvent être linéaires, quadratiques ou exponentiels. Le plus répandu consiste à introduire une loi puissance, tel que :

$$\left(\frac{G_1}{G_{1c}}\right)^\alpha + \left(\frac{G_2}{G_{2c}}\right)^\beta + \left(\frac{G_3}{G_{3c}}\right)^\gamma \geq 1, \quad (3.1)$$

où, α , β et γ sont des paramètres de couplage du modèle permettant de moduler le poids donné à chaque mode de propagation.

Parmi les essais classiquement utilisés en mécanique de la rupture qui donnent accès aux taux de restitution d'énergie critique $(G_{i_c})_{i \in \{1, 2, 3\}}$, on trouve l'essai DCB (*Double Cantilever Beam*) utilisé pour le mode I, les tests ENF (*End Notched Flexure*) et ELS (*End Loaded Split*) pour le mode II, et l'essai MMB (*Mixed-Mode Bending*) développé pour déterminer des propriétés de couplage des modes I et II (voir Fig. 3.5).

Pour calculer le taux de restitution d'énergie, il existe de nombreuses techniques comme la méthode *J-Integral* basée sur le calcul d'intégrales de contour dont les concepts théoriques ont été développés indépendamment par [Cherepanov, 1967] et [Rice, 1968], la *méthode theta* [Destuynder, Djaoua, Chesnay, et Nedelec, 1981] permettant de ramener ces intégrales de contour à des intégrales de domaine plus aisées à calculer numériquement et les méthodes numériques *Virtual Crack Extension* [Hellen, 1975], *Crack Closure Technique* (CCT) [Raju, 1987] et *Virtual Crack Closure Technique* (VCCT) [Rybicki et Kanninen, 1977; Storåkers et Andersson, 1988] qui s'appuient sur le calcul de quantités locales pour déterminer l'énergie de rupture

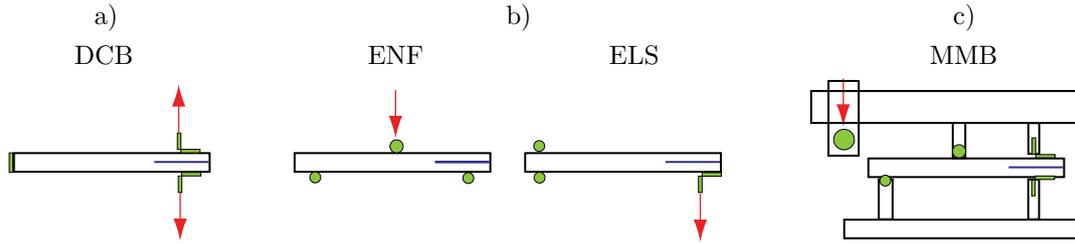


Fig. 3.5: Essais de caractérisation de la mécanique de la rupture : a) Mode I b) Mode II et c) Mode mixte I et II.

globale. Parmi ces méthodes, les approches CCT et VCCT sont les plus répandues dans les codes éléments finis en raison de leur facilité d'implantation.

1.1.2.1 La Virtual Crack Closure Technique. Cette méthode, initialement proposée par [Rybicki et Kanninen, 1977], est basée sur l'hypothèse de [Irwin, 1957] suivante : *quand une fissure se propage une petite distance Δa , le taux de restitution d'énergie est alors identique à l'énergie surfacique nécessaire pour refermer une fissure de la même longueur.* Les trois taux de restitution d'énergie sont alors calculés à partir des forces et des déplacements nodaux obtenus par la solution éléments finis :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad G_i = \frac{1}{2b\Delta a} (\underline{F}^{cd} \cdot \underline{e}_i) ([\underline{u}]^{ab} \cdot \underline{e}_i),$$

où, les efforts de réaction sont calculés en pointe de fissure courante, tandis que les déplacements sont ceux des noeuds en amont de la fissure (voir Fig. 3.6).

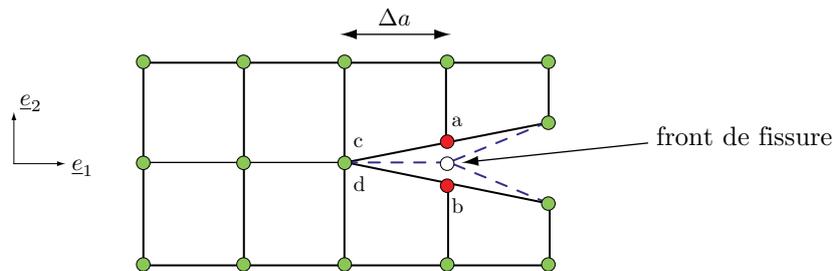


Fig. 3.6: Calcul du taux de restitution de l'énergie par la méthode VCCT.

La méthode VCCT est une simplification de la méthode CCT, laquelle évalue le taux de restitution de l'énergie comme le travail nécessaire pour fermer la fissure de longueur Δa à propager :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad G_i = \frac{1}{2b\Delta a} (\underline{F}^{ab} \cdot \underline{e}_i) ([\underline{u}]^{ab} \cdot \underline{e}_i),$$

où, les efforts de réaction et les déplacements sont évalués en pointe de fissure courante (voir Fig. 3.6). Pour cela, le calcul doit être fait en deux parties. Une première

étape pour déterminer les forces nodales \underline{F}^{ab} nécessaires pour maintenir fermés les points a et b , et une deuxième étape pour évaluer le saut de déplacement entre les points a et b . La méthode VCCT suppose une propagation du front de fissure *autosimilaire*, c'est-à-dire, que les forces \underline{F}^{cd} et \underline{F}^{ab} sont identiques.

Remarque : L'écriture du champ de contrainte en pointe de fissure interlaminaire entre deux plis de caractéristiques mécaniques différentes fait apparaître un terme oscillant et évanescent. *A priori*, le critère de Griffith étant global, il est toujours applicable. Cependant, il est difficile d'extraire les contributions modales du taux de restitution d'énergie dans une zone proche de la pointe de fissure. Pour résoudre ce problème, dans le cadre des méthodes CCT, une longueur caractéristique est introduite, en dessous de laquelle la fissure ne peut pas se propager.

1.2 Modélisation par la mécanique de l'endommagement

Une autre approche pour la simulation numérique du délaminage peut être dérivée de la mécanique de l'endommagement. Les modèles ainsi formulés s'appuient sur le concept de *zones cohésives*, où une région d'endommagement progressive (ou *process zone*) se développe autour du front de fissure. Cette région est une interface qui représente explicitement la fissure. Ces approches permettent de modéliser à la fois l'initiation et la propagation du délaminage.

1.2.1 Interfaces cohésives

Les idées de base des modèles de zones cohésives ont été introduites par [Dugdale, 1960] et [Barenblatt, 1962]. Ici, une loi constitutive relie les efforts d'interface $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}_3$ (\underline{n}_3 étant la normale au plan de l'interface) au saut de déplacement $[\underline{u}]$. Celle-ci est composée en général de deux parties : une première phase élastique pendant laquelle l'interface ne subit pas de dégradation, et une seconde phase représentant la zone de transition entre une interface saine et une interface délaminée (voir Fig. 3.7). Le caractère adoucissant du comportement est principalement obtenu par l'utilisation de la mécanique de l'endommagement, mais aussi par des modèles de plasticité à écrouissage négatif.

L'équivalence énergétique entre les modèles de zone cohésive et la mécanique de la rupture est obtenue en spécifiant que le taux de restitution d'énergie critique total est équivalent à l'énergie totale dissipée par chaque point complètement endommagé de la zone cohésive :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad G_{ic} = \int \sigma_{i3} d[u_i]. \quad (3.2)$$

Ces modèles ont été introduits dans l'analyse par éléments finis sous le concept d'*éléments d'interface* d'épaisseur nulle par [Hillerborg, Modéer, et Petersson, 1976]. Parmi d'autres références qui ont utilisé cette technique, on peut citer les travaux de [Needleman, 1987; Tvergaard, 1990] sur l'analyse ductile des matériaux fragiles

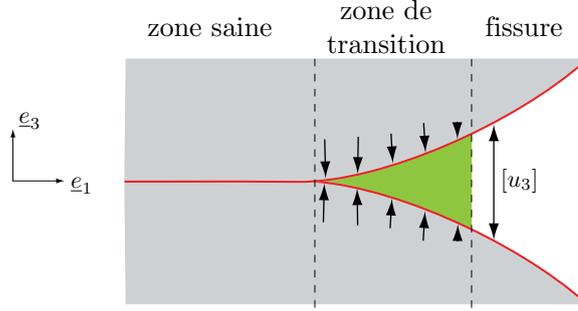


Fig. 3.7: Représentation d'une fissure par des zones cohésives.

et ceux de [Ladevèze, 1986; Allix, 1987; Schellekens et de Borst, 1991; Allix et Ladevèze, 1992; Tzaferopoulos et Panagiotopoulos, 1993; Allix et Corigliano, 1999; Alfano et Crisfield, 2001] sur le délaminage de matériaux composites. Dans la suite, nous allons présenter les modèles résumés sur la Fig. 3.8. Par souci de clarté, ces modèles sont décrits pour des modes de délaminage découplés.

1.2.1.1 Modèle de Dugdale. Le modèle de [Dugdale, 1960] considère, tout simplement, l'effort normal comme une fonction créneau du saut de déplacement normal :

$$\begin{cases} si & 0 \leq [u_3] < \delta_3^c, & \sigma_{33} = \sigma_0. \\ si & [u_3] \geq \delta_3, & \sigma_{33} = 0, \end{cases}$$

où, δ_{3c} est une valeur critique du saut de déplacement.

1.2.1.2 Modèle de Barrenblatt's. Les efforts et les déplacements de ce modèle reproduisent les forces potentielles interatomiques classiques. Si le saut de déplacement est faible, les efforts augmentent quand l'ouverture augmente. Si l'ouverture atteint une valeur critique δ_{3c} , les efforts diminuent et sont nuls quand l'ouverture est infinie [Barrenblatt, 1962].

1.2.1.3 Modèle de Needleman. Ce modèle a été développé par [Needleman, 1987], puis étendu par [Tvergaard, 1990]. Une variable d'endommagement d est utilisée pour modifier la raideur élastique initiale :

$$d = \lambda_{\max} = \max_{\tau < t} \sqrt{\langle \nu_3 \rangle_+^2 + \nu_i^2}, \quad \forall i \in \{1, 2\},$$

$$\text{avec : } \nu_3 = [u_3]/\delta_{3c} \quad \text{et} \quad \nu_i = [u_i]/\delta_{i_c}, \quad \forall i \in \{1, 2\},$$

où, $(\delta_{i_c})_{i \in \{1, 2, 3\}}$ sont des valeurs critiques d'ouverture et cisaillement. $\langle \cdot \rangle_+$ renvoie la partie positive de la quantité considérée. Les tractions s'écrivent [Tvergaard, 1990] :

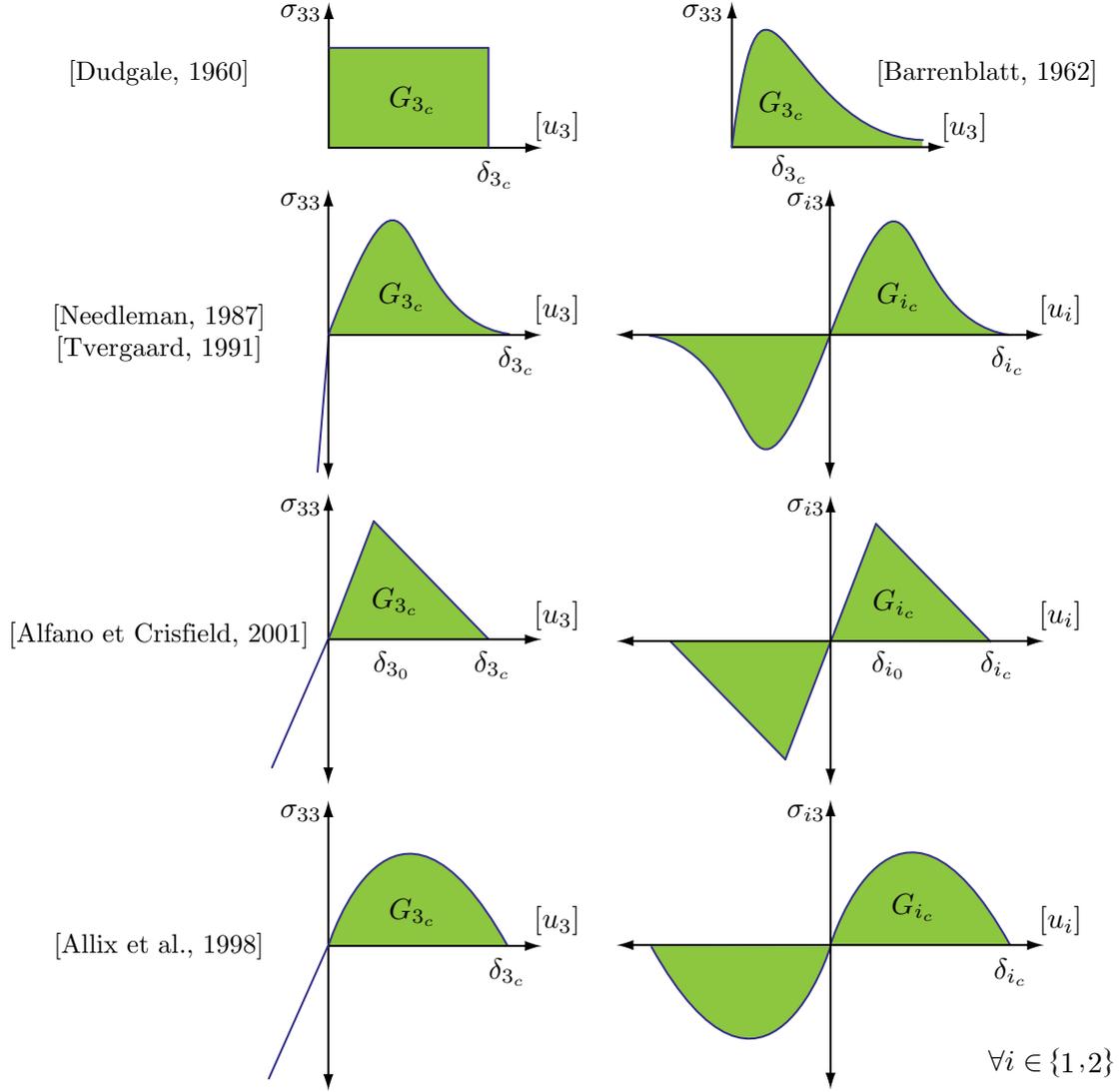


Fig. 3.8: Modèles de zones cohésives pour des modes purs.

$$\begin{cases} \sigma_{33} = (1-d)^2 E \nu_3, \\ \sigma_{i3} = (1-d)^2 G_i \nu_i, \quad \forall i \in \{1, 2\}, \end{cases}$$

où, E et $(G_i)_{i \in \{1, 2\}}$ sont les modules élastiques initiaux. Sous chargement de compression ($u_3 < 0$) la condition de non-interpénétration doit être vérifiée, ces auteurs utilisent une méthode de pénalisation qui consiste à utiliser un module élastique de compression très élevé. Le frottement n'est pas pris en compte au cours de l'endommagement ($d \leq 1$), il a lieu uniquement après complète séparation.

1.2.1.4 Loi bilinéaire. Une loi discrète bilinéaire d'interface peut prendre la forme suivante, dans le cadre de la mécanique de l'endommagement [Alfano et Cris-

field, 2001] :

$$\begin{cases} [u_3]^{\max} = \max_{\tau \leq t} \{[u_3], 0\}, \\ [u_i]^{\max} = \max_{\tau \leq t} \{|[u_i]|\}, \quad \forall i \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \begin{cases} si \quad [u_i]^{\max} \leq \delta_{i_0}, & \sigma_{i3} = k_i [u_i], \\ si \quad \delta_{i_0} < [u_i]^{\max} < \delta_{i_c}, & \sigma_{i3} = k_i (1 - d_i) [u_i], \quad d \in [0, 1], \\ si \quad \delta_{i_c} \leq [u_i]^{\max}, & \sigma_{i3} = 0. \end{cases}$$

Le paramètre d correspond à l'endommagement de l'interface. Il est ici calculé à partir du saut de déplacement $[u]$ entre les plis :

$$d_i = \frac{\delta_{i_c}}{\delta_{i_c} - \delta_{i_0}} \left(\frac{[u_i]^{\max} - \delta_{i_0}}{[u_i]^{\max}} \right).$$

La prise en compte des différents modes de propagation du délaminage est assurée par la définition d'un saut de déplacement équivalent $[\hat{u}]$, combinant les sauts de déplacement associés à chaque mode. L'utilisation d'un critère similaire à celui présenté dans l'Éq. (3.1) permet alors de fixer les grandeurs $\hat{\delta}_{i_0}$ et $\hat{\delta}_{i_c}$ pour respecter le critère de Griffith, Éq. (3.2).

1.2.1.5 Méso-modèle du LMT-Cachan. Le méso-modèle développé par [Ladevèze, 1986; Allix, 1987; Ladevèze, 1992] postule que le comportement du stratifié peut être représenté à une échelle mésoscopique par une homogénéisation des propriétés microscopiques du stratifié, permettant de ramener la description du comportement à l'échelle du pli. Ainsi, deux entités élémentaires sont distinguées : les plis, entités volumiques, et les interfaces, un milieu continu d'épaisseur nulle (voir Fig. 3.9). Chacun de ces méso-constituants a sa propre loi de comportement et peut subir des dégradations décrites par la mécanique de l'endommagement.

Nous ne présentons ici que le comportement associé à l'interface. Le modèle ici introduit a été identifié dans [Allix et al., 1998]. Cette loi a été définie dans le cadre des petites perturbations, mais elle peut être utilisée en grandes transformations à

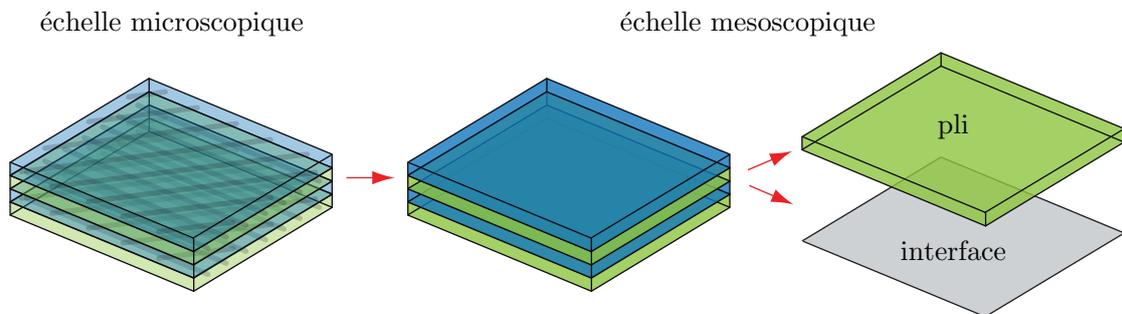


Fig. 3.9: Représentation du méso-modèle de composites stratifiés.

condition que le saut de déplacement des points qui ne sont pas encore complètement endommagés reste faible, comme démontré dans [Allix et Corigliano, 1999]. **Ce modèle sera utilisé pour les simulations présentées dans cette mémoire.**

Le comportement d'une interface est alors défini dans la base d'orthotropie locale $(\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3)$ caractérisée par la direction \underline{n}_1 , bissectrice des angles formés par les plis adjacents à l'interface (voir Fig. 3.10) et la direction \underline{n}_3 , normale au plan d'interface $(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$. Ainsi, la loi d'interface non linéaire qui relie les déplacements et les contraintes entre deux plis adjacents du stratifié s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{K}}([\underline{u}]) [\underline{u}] ,$$

avec :

$$(\underline{\underline{K}}) = \begin{pmatrix} (1-d_1)k_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-d_2)k_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-h_+(u_3)d_3)k_3^0 \end{pmatrix} ,$$

où, $h_+(\cdot)$ est un indicateur de positivité de la quantité considérée. Les variables non dimensionnelles d'endommagement d_i sont introduites pour simuler le comportement adoucissant de l'interface, leur valeur va de 0 (point sain) à 1 (point complètement endommagé). k_3^0 , k_1^0 et k_2^0 sont les rigidités initiales de l'interface de dimension de force volumique, respectivement en traction-compression selon \underline{n}_3 et en cisaillement suivant \underline{n}_1 et \underline{n}_2 . Les raideurs k_i^0 découlent directement des caractéristiques E_i^m de la matrice, et sont évaluées par :

$$k_i^0 = \frac{E_i^m}{e} ,$$

où, e représente l'épaisseur physique de l'interface (classiquement de l'ordre de 1/10 de l'épaisseur des plis).

Pour déterminer les variables d_i , on définit l'énergie de déformation surfacique e_d d'une interface endommageable par :

$$e_d = \frac{1}{2}(1-d_1)k_1^0([u_1])^2 + \frac{1}{2}(1-d_2)k_2^0[u_2]^2 + (1-d_3)k_3^0\langle[u_3]\rangle_+^2 + k_3^0\langle[u_3]\rangle_-^2 ,$$

où, $\langle \cdot \rangle_+$ et $\langle \cdot \rangle_-$ extraient respectivement la partie positive et négative de la quantité considérée. Dans le mode I, l'ouverture et la fermeture de fissure sont considérées

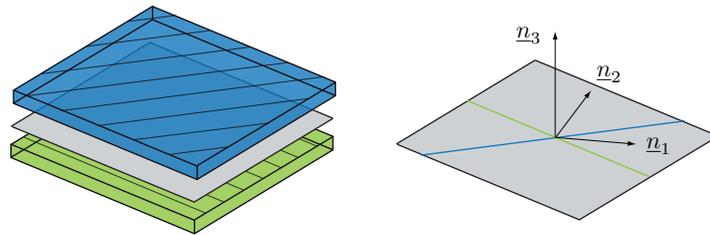


Fig. 3.10: Base d'orthotropie d'une interface.

séparément, car seule l'ouverture de fissure conduit à une croissance de l'endommagement.

L'évolution des indicateurs d'endommagement d_i est gouvernée par les forces thermodynamiques Y_i , associées à chaque mode d'endommagement par :

$$Y_i = -\frac{\partial e_d}{\partial d_i} \quad , \quad \text{avec} : \begin{cases} Y_1 = \frac{1}{2} k_1^0 ([u_1])^2 , \\ Y_2 = \frac{1}{2} k_2^0 ([u_2])^2 , \\ Y_3 = \frac{1}{2} k_3^0 \langle [u_3] \rangle_+^2 . \end{cases}$$

L'irréversibilité des processus de dissipation est prise en compte en reliant les variables d'endommagement au maximum d'une combinaison des forces thermodynamiques $(Y_{i|\tau})_{i \in \{1,2,3\}}$ sur l'histoire de chargement :

$$Y_{|t} = \max_{(\tau \leq t)} \left(Y_{3|\tau}^\alpha + (\gamma_1 Y_{1|\tau})^\alpha + (\gamma_2 Y_{2|\tau})^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} .$$

La faible épaisseur de l'interface permet de faire l'hypothèse que l'endommagement se développe dans les 3 directions simultanément. La loi d'évolution alors s'écrit :

$$d_1 = d_2 = d_3 = \min(w(Y_t), 1) ,$$

$$\text{avec} : \quad w(Y_t) = \left(\frac{n}{n+1} \frac{h_+(Y_t)}{Y_c} \right)^n .$$

Cette loi d'évolution rend la formulation de l'endommagement de l'interface isotrope. Les paramètres non dimensionnels α , γ_1 et γ_2 permettent l'identification des poids relatifs des énergies en mode I, II et III pour la propagation en modes couplés. Y_c de dimension d'énergie surfacique, définit une valeur critique. Enfin, le paramètre non dimensionnel n confère à l'interface son caractère plus ou moins fragile. La Fig. 3.11 montre les allures de la loi d'endommagement pour différentes valeurs de n et de k_3^0 en mode I.

De même que pour les modèles de zone cohésive décrits précédemment, les paramètres introduits doivent être identifiés pour l'initiation du délaminage et la propagation en modes couplés. En particulier, le critère de Griffith doit être vérifié pour chaque mode de délaminage, afin d'obtenir l'équivalence énergétique du modèle d'interface cohésive et de la mécanique de la rupture :

$$\begin{cases} G_{3c} = Y_c , \\ \forall i \in \{1, 2\}, \quad G_{ic} = \frac{Y_c}{\gamma_i} . \end{cases}$$

L'équivalence en modes couplés peut être obtenue sous la forme d'une loi de puissance similaire à celle décrite par l'équation (3.1) [Allix et Corigliano, 1996]. Plus de détails sur l'identification des paramètres du modèle peuvent être trouvés dans [Corigliano et Allix, 2000; Allix, 2008].

Remarque : Peu d'informations sont indiscutables sur les conditions de propagation du délaminage. Il y a parmi celles-ci le taux de restitution de l'énergie. Une voie très

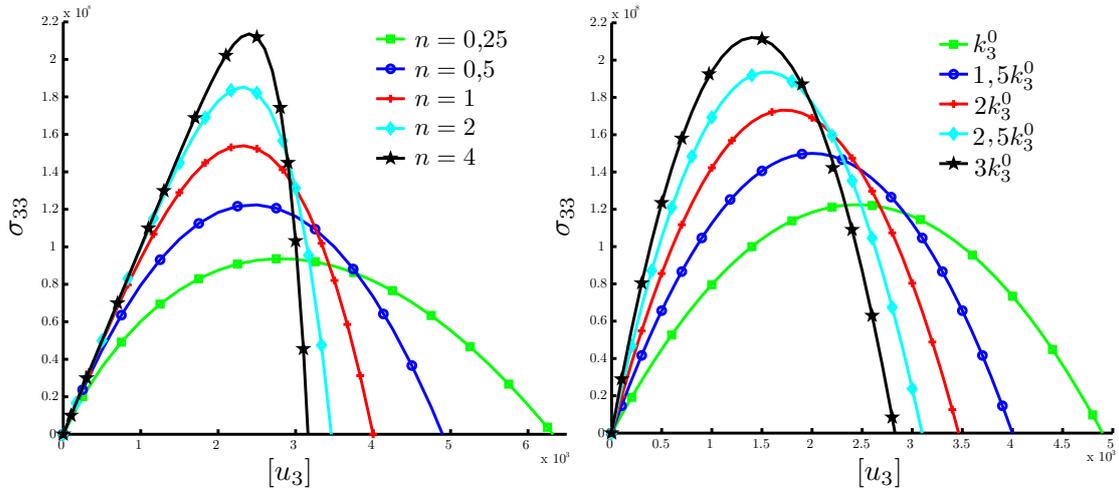


Fig. 3.11: Réponse du modèle de [Allix et al., 1998] en mode I pour : a) différentes valeurs du paramètre n b) différentes valeurs du paramètre k_3^0 .

utilisée est donc d'introduire plusieurs variables internes pour rendre compte des taux de restitution de l'énergie différents selon les modes de propagation. Un aspect discutable est alors qu'une interface peut être endommagée dans un mode et pas dans un autre, ce qui engendre également une complexité numérique. Une réponse à ces difficultés, proposée indépendamment par [Needleman, 1987] et [Allix, 1987], consiste à introduire une seule variable d'endommagement pour reproduire tous les taux de restitution de l'énergie. Ces modèles sont nécessairement non associés et le prix à payer est d'avoir des matrices tangentes non symétriques.

Limites

Les modèles issus des zones cohésives représentent une technique plus puissante que les approches par la mécanique de la rupture, car elles permettent la prédiction de l'initiation et de la propagation du délaminage. Cependant, ces modèles nécessitent la représentation explicite des interfaces, ce qui peut devenir coûteux dans le cas de stratifiés à grand nombre de plis. En plus, on peut mettre en évidence une sensibilité non pathologique, mais forte, au maillage, en raison de forts gradients de contraintes entraînant de forts gradients d'endommagement dans la *process zone*.

Dépendance de la taille du maillage. La Fig. 3.12 souligne l'influence de la discrétisation : si le maillage n'est pas suffisamment raffiné, la réponse est dépendante du maillage. En effet, un nombre minimum d'éléments est requis au front de fissure pour bien représenter la répartition de contraintes et l'énergie dissipée. Si la rigidité initiale de l'interface est très élevée, la taille de la *process zone* est réduite, un maillage plus fin est alors nécessaire. **Dans notre étude, nous avons constaté qu'au moins 10 éléments linéaires dans la *process zone* sont nécessaires.**

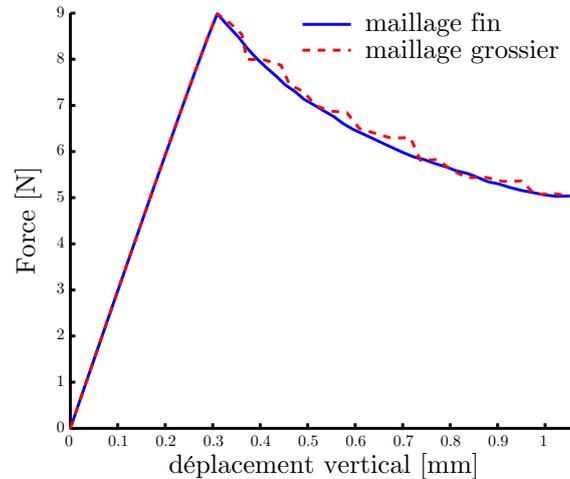


Fig. 3.12: Influence de la discrétisation dans la réponse globale d'un essai DCB.

1.3 Couplage flambage-délaminage

Les premiers travaux sur le flambage et la propagation de fissures ont utilisé des modèles non linéaires de plaques et la mécanique de la rupture avec des évaluations globales du critère de Griffith avec un front de fissure constant ou autosimilaire de forme rectiligne ou circulaire. On peut citer, par exemple, l'article de [Kachanov, 1976] qui traite analytiquement le flambage local d'une plaque d'épaisseur infinie avec une préfissure proche de sa surface (voir Fig. 3.13.a). Pendant que les développements analytiques suivants ont cherché à généraliser ce problème [Chai et al., 1981; Bottega et Maewal, 1983; Evans et Hutchinson, 1984] (voir Fig. 3.13).

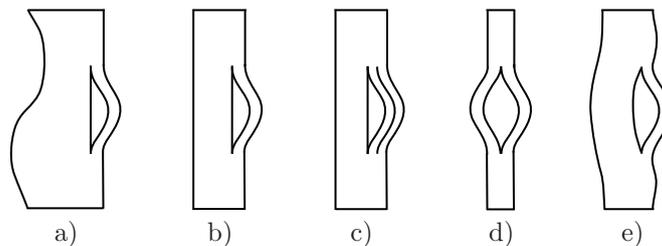


Fig. 3.13: Premiers modèles du couplage flambage-délaminage : a) film b) colonne épaisse c) délaminages multiples d) symétrique e) cas général. D'après [Chai et al., 1981].

Parmi les premières analyses numériques du couplage flambage-délaminage, [Storåkers et Andersson, 1988; Nilsson et Giannakopoulos, 1990] ont développé une expression générale du taux de restitution d'énergie pour le délaminage de plaques composites de von Kármán, pendant que [Whitcomb, 1989] a utilisé la méthode CCT. [Bruno et Grimaldi, 1990] ont donné une comparaison de la réponse du délaminage

de plaques de von Kármán en flambage local et global, par la mécanique de la rupture et par la méthode des éléments finis en utilisant des ressorts endommageables. Une méthode des éléments finis avec un modèle d'interface cohésive adoucissant a été proposé dans [Allix et Corigliano, 1999] pour des poutres de von Kármán. Une formulation corotationnelle avec des éléments d'interface bilinéaires a été présentée dans [Qiu, Crisfield, et Alfano, 2001]. Une analyse de stabilité en compression de poutres préfissurées sous l'influence de ponts de fibres au front de fissure, en utilisant des critères de propagation de la mécanique de la rupture, a été faite dans [Daridon et Zidani, 2002] .

Une autre méthode utilisée pour représenter le délaminage se base sur l'évolution de surfaces de discontinuités mobiles. Ici, l'état d'équilibre est décrit par la stationnarité d'un potentiel d'énergie. Si un chargement appliqué dans une structure fait dépasser un certain seuil de contraintes dans une zone saine, alors la zone s'endommage et une surface de discontinuité se déplace. On suppose que cette transformation est gouvernée par un critère de Griffith. Cette méthode a été appliquée au couplage flambage-délaminage de plaques stratifiées de von Kármán dans [Pradeilles Duval, 2004].

Bilan

Ce chapitre a fait le point sur deux familles de modèles pour la description du délaminage. La première concerne les approches basées sur la mécanique de la rupture et sur des critères en contraintes. La deuxième famille dont nous avons parlé s'appuie sur les modèles de zones cohésives et sur des lois issues de la mécanique de l'endommagement. Enfin, nous avons introduit le modèle de zone cohésive choisi pour les analyses numériques qui seront présentées dans ce travail de thèse.

Par la suite, nous allons présenter un état de l'art des modèles de contact pour traiter les conditions de non-interpénétration des interfaces qui ont subi un endommagement complet.

2 Contact unilatéral avec et sans frottement

Le contact est encore aujourd'hui un des problèmes de la mécanique des solides qui présente les non-linéarités les plus difficiles à prendre en compte. Celles-ci proviennent principalement de la méconnaissance de la position relative des solides dans la configuration déformée, ainsi que des changements brutaux de comportement dus au passage contact-décollement ou adhérence-glissement entre solides.

Le problème de contact mécanique a été très étudié par ses aspects fondamentaux et pratiques. Malgré ceci, les formulations mathématiques associées conduisent à des inégalités variationnelles dont le traitement reste difficile. Des algorithmes de résolution dédiés sont alors utilisés pour trouver les solutions.

Ce chapitre dresse une brève présentation de la formulation du problème de

contact unilatéral et des méthodes de résolution. Une revue détaillée de différentes méthodes numériques qui traitent le problème de contact peut se retrouver dans [Wriggers, 2006].

Hypothèses du problème. Bien que le but de ce travail est de traiter des problèmes en grandes transformations, les hypothèses faites sur la cinématique des interfaces (Hyps. 8 et 9, Chap. 1) conduisent à s'intéresser au contact unilatéral en petites perturbations. On se place dans le cadre suivant :

- contact unilatéral ;
- petites perturbations ;
- zone de contact éventuelle supposée connue et sans évolution au cours du temps ;
- matériaux élastiques linéaires des corps en contact ;
- maillages compatibles ;
- absence de jeu initial.

2.1 Formulation du problème de contact

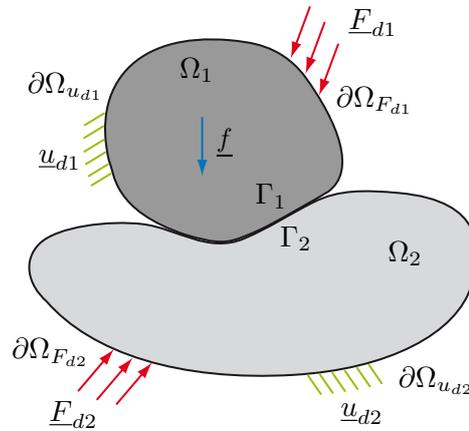


Fig. 3.14: Problème de contact unilatéral.

On considère deux solides élastiques, Ω_1 et Ω_2 (voir Fig. 3.14). On note l'ensemble des deux corps $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Ils sont soumis à des déplacements imposés \underline{u}_d sur la zone $\partial\Omega_{u_d} = \partial\Omega_{u_{d1}} \cup \partial\Omega_{u_{d2}}$, à des efforts imposés \underline{F}_d sur la zone $\partial\Omega_{F_d} = \partial\Omega_{F_{d1}} \cup \partial\Omega_{F_{d2}}$ et à des forces de volume \underline{f} agissant sur les deux domaines. Les deux solides sont en contact sur une zone $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$ supposée connue.

On note \underline{n}_1 (respectivement \underline{n}_2) la normale sortante de Ω_1 (respectivement Ω_2). Sur la zone de contact, les deux normales coïncident ($\underline{n}_1 = -\underline{n}_2$). Pour simplifier, on considère seulement la normale $\underline{n} = \underline{n}_1$.

On note les efforts normaux, relatives aux normales d'interface :

$$F_{n_1} = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} n_1 \quad , \quad F_{n_2} = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} n_2 \quad ,$$

et les efforts tangentiels :

$$\underline{F}_{t_1} = \underline{\sigma} n_1 - F_{n_1} \underline{n} \quad , \quad \underline{F}_{t_2} = \underline{\sigma} n_2 - F_{n_2} \underline{n} \quad .$$

Les relations d'interaction dans la direction normale sont associées au problème de contact unilatéral et celles dans le plan tangent au problème de frottement. D'abord, on s'intéresse au cas du contact unilatéral sans frottement.

Par la suite, le saut de déplacement normal et le saut de déplacement de glissement sont définis respectivement par :

$$[u_n] = (\underline{u}_2 - \underline{u}_1) \cdot \underline{n} \quad , \quad [u_t] = (\underline{u}_2 - \underline{u}_1) - ((\underline{u}_2 - \underline{u}_1) \cdot \underline{n}) \underline{n} \quad .$$

2.1.1 Problème local sans frottement

Les conditions de contact unilatéral sans frottement sur Γ s'écrivent sous la forme suivante :

$$[u_n] \geq 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.3)$$

$$F_n = F_{n_1} = -F_{n_2} \leq 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.4)$$

$$\underline{F}_t = \underline{F}_{t_1} = -\underline{F}_{t_2} = \underline{0} \quad , \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.5)$$

$$[u_n] F_n = 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.6)$$

L'équation (3.3) indique qu'il ne peut y avoir que décollement ou non-pénétration. L'équation (3.4) dénote que les efforts normaux sont seulement de compression. L'équation (3.5) vérifie l'absence de forces tangentielles de frottement. Pour finir, l'équation (3.6), appelée condition de complémentarité, indique que lorsqu'il y a décollement, les efforts normaux sont nuls et que lorsqu'il y a contact, les efforts normaux peuvent ne pas être nuls.

2.1.2 Formulation variationnelle sans frottement

L'espace des champs cinématiquement admissibles est défini par :

$$\mathcal{U}_{ad} = \{ \underline{v} , \text{régulier} \mid \underline{v} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial\Omega_{u_d} \} \quad .$$

On définit le convexe fermé \mathcal{K} , sous ensemble de \mathcal{U}_{ad} , des champs vérifiant les conditions de décollement sur l'interface de contact :

$$\mathcal{K} = \{ \underline{v} \in \mathcal{U}_{ad} \mid (\underline{v}_2 - \underline{v}_1) \cdot \underline{n} \geq 0 \text{ sur } \Gamma \} \quad .$$

La formulation variationnelle en déplacement du problème de contact sans frottement est alors la suivante :

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{K}$ tel que $\forall \underline{v} \in \mathcal{K}$:

$$a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) - f(\underline{v} - \underline{u}) \geq 0 \quad (3.7)$$

avec :

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Omega} \underline{\sigma}(\underline{u}) : \underline{\varepsilon}(\underline{v}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{K}} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \underline{\varepsilon}(\underline{v}) \, d\Omega$$

$$f(\underline{v}) = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_{F_d}} \underline{F}_d \cdot \underline{v} \, dS$$

L'existence et l'unicité de la solution de ce problème sont assurées. Nous sommes en présence d'une inéquation variationnelle (3.7) qui traduit l'aspect unilatéral du problème. La formulation mathématique de ce problème variationnel est discutée en détail dans [Duvaut et Lions, 1972].

2.2 Lois de frottement

La modélisation du frottement consiste à établir une relation entre la force de contact tangentielle et le déplacement relatif de glissement. Il existe de nombreuses modélisations du frottement selon les comportements et la précision recherchée [Oden et Pires, 1983; Michalowski et Mroz, 1978]. Historiquement, la loi de Coulomb est la première à avoir été proposée et elle est la plus répandue dans les codes de calcul. Cette loi est pourtant critiquée à cause de son manque de sens physique et des problèmes mathématiques qu'elle pose.

2.2.1 Loi de Coulomb en statique

Dans le cas de problèmes statiques, lorsqu'il y a contact en un point, la loi de Coulomb donne une relation entre le déplacement de glissement et l'effort tangentiel en fonction de l'intensité de celui-ci. Cette relation définit deux états possibles :

$$\begin{cases} \text{si } \|\underline{F}_t\| \leq \mu |F_n| & \text{alors } [\underline{u}_t] = \underline{0} & \text{(adhérence)} \\ \text{si } \|\underline{F}_t\| = \mu |F_n| & \text{alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } [\underline{u}_t] = \lambda \underline{F}_t & \text{(glissement)} \end{cases} \quad (3.8)$$

où, μ est le coefficient de frottement qui dépend des matériaux en contact et de l'état des surfaces. Cette loi est représentée sur la Fig. 3.15.a. On peut tracer le lieu géométrique de l'extrémité du vecteur force de contact sous forme d'un cône (Fig. 3.15.b), où l'enveloppe du cône est la surface seuil du glissement.

Dans la formulation locale du problème sans frottement, Éqs. (3.3)-(3.6), on remplace l'Éq. (3.5) par (3.8) et on obtient ainsi le problème de contact avec frottement.

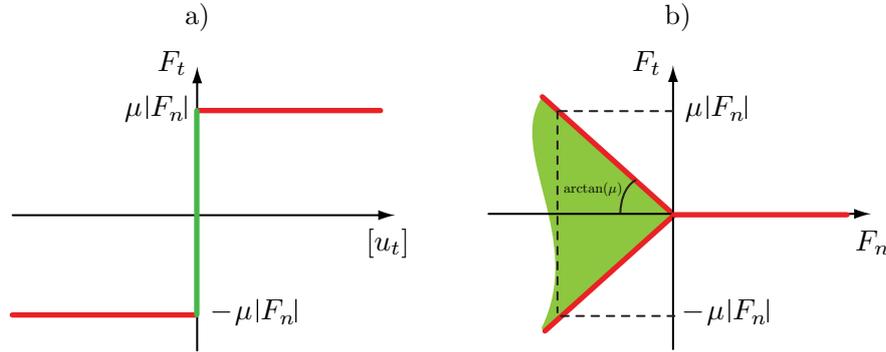


Fig. 3.15: Représentation de la loi de Coulomb en 2D. Glissement en couleur rouge et adhérence en couleur verte : a) relation entre l'effort normal et le glissement b) relation entre l'effort normal et tangentiel.

2.2.2 Formulation variationnelle avec frottement

La formulation variationnelle en déplacement du problème de contact avec frottement est la suivante :

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{K}$ tel que $\forall \underline{v} \in \mathcal{K}$:

$$a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) - f(\underline{v} - \underline{u}) + i(\underline{v}, \underline{u}) - i(\underline{u}, \underline{u}) \geq 0 \quad (3.9)$$

avec $a(\underline{u}, \underline{v})$ et $f(\underline{v})$ définis dans (3.7), et :

$$i(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Gamma} \mu |F_n(\underline{u})| \|[v_t]\| dS$$

Ce problème est complexe à cause de la présence du terme non différentiable $i(\underline{u}, \underline{v})$. De plus, l'existence et l'unicité de la solution ne peuvent être montrées que pour une forme régularisée du problème.

2.3 Résolution du problème de contact

Nous venons de voir que le traitement du contact et des conditions de frottement conduit à des problèmes formulés en terme d'inéquations variationnelles. Il existe un grand nombre d'algorithmes pour la résolution de ce type de problèmes (point fixe, point intérieur, relaxation projetée, gradient projeté, pénalisation, multiplicateurs de Lagrange, Lagrangien perturbé, Lagrangien augmenté, méthode Nitsche...), la plupart sont issues du domaine de l'optimisation. Dans leurs démarches, l'inéquation variationnelle engendrée est très souvent transformée, après suppression des conditions de contact et introduction de variables duales et/ou primales, en une équation variationnelle.

Pour la simulation numérique des problèmes de contact par la méthode des éléments finis, les algorithmes sont choisis selon leur efficacité pour traiter de nombreuses zones de contact et leur facilité d'implémentation dans les codes industriels. Les méthodes les plus répandues sont celles de pénalisation [Kikuchi, 1982] et celles des multiplicateurs de Lagrange [Carpenter, Taylor, et Katona, 1991]. Les méthodes de pénalités sont très similaires aux méthodes de régularisation des conditions de contact. Dans les méthodes des multiplicateurs de Lagrange, les multiplicateurs représentent les forces de réaction. Ces deux approches rencontrent cependant des difficultés. La première est très sensible au paramètre de pénalisation et conduit à l'utilisation de matrices de rigidité mal conditionnées. La deuxième est limitée par un coût de calcul plus important.

Pour concilier les avantages de l'une et de l'autre, un certain nombre de méthodes hybrides ont été proposées. La plus commune est celle du Lagrangien augmenté [Glowinski et Le Tallec, 1990; Arora, Chahande, et Paeng, 1991] qui part de la fonctionnelle Lagrangienne classique et y ajoute des termes de pénalisation appropriés qui ne sont pas nécessairement infinis pour assurer la vérification des contraintes. La méthode de pénalisation est alors utilisée pour générer une base de multiplicateurs de Lagrange.

La méthode LaTIn, celle que nous utilisons pour le traitement des conditions de contact, se rapproche d'une technique de Lagrangien augmenté avec projection. Il s'agit d'une méthode dans un cadre de décomposition de domaine qui cherche des efforts et des déplacements vérifiant le comportement de contact avec ou sans frottement, où la surface de contact est coïncidente avec une interface de la décomposition de domaine [Champaney, Cognard, et Ladèveze, 1999; Ladèveze et al., 2002].

Par la suite, nous présenterons succinctement les méthodes de pénalisation, de multiplicateurs de Lagrange et du Lagrangien augmenté. La méthode LaTIn ne sera détaillée que dans le Chap. 5.

2.3.1 Méthode de pénalisation

La méthode de pénalisation, voir par exemple [Kikuchi, 1982], viole les conditions d'admissibilité en imposant une relation de proportionnalité entre la force de contact et l'interpénétration (pour la composante normale de la force) ou le glissement tangentiel réversible (pour la composante tangentielle de la force). En conséquence, les déplacements des interfaces de contact sont connus avec une certaine tolérance. Elle présente l'avantage d'être d'une grande simplicité de mise en oeuvre, ce qui fait d'elle une des méthodes les plus répandues.

L'idée consiste à remplacer les lois de contact et de frottement par des relations définissant les contraintes de contact de manière continue en fonction de la distance entre les deux solides et le glissement relatif. Par simplicité, on se place dans le cas

sans frottement, ainsi les équations (3.3)-(3.6) sont remplacées par :

$$\begin{cases} \text{si } [u_n] \geq 0 & \text{alors } F_n = 0, [u_n]F_n = 0 & \text{(décohésion)} \\ \text{si } [u_n] < 0 & \text{alors } F_n = \epsilon_n(-[u_n]) < 0, [u_n]F_n \neq 0 & \text{(contact)} \end{cases} \quad (3.10)$$

où, $\epsilon_n < 0$ est le facteur de pénalisation. La condition de non-pénétration n'est alors pas assurée, mais le modèle pose une résistance à la pénétration. Logiquement, plus la contrainte normale est élevée pour de petites pénétrations, meilleure est la vérification des conditions d'admissibilité.

L'interprétation physique peut être faite par des ressorts (voir Fig. 3.16). Dans le cas du décollement, ils sont de raideur nulle. Par contre, s'il existe de l'interpénétration, les ressorts peuvent s'allonger à l'intérieur du solide .

La formulation faible du problème de contact sans frottement s'écrit :

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que $\forall \underline{v} \in \mathcal{U}_{ad,0} = \{\underline{v}, \text{régulier} \mid \underline{v} = \underline{0} \text{ sur } \partial\Omega_{u_d}\}$:

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) d\Omega + \int_{\Gamma} \epsilon_n \langle -[u_n] \rangle_+ [v_n] dS = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega_{F_d}} \underline{F}_d \cdot \underline{v} dS \quad (3.11)$$

où, $\langle \cdot \rangle_+$ renvoie la partie positive de la quantité considérée

Ce problème peut alors être résolu par des algorithmes itératifs de type Newton-Raphson. Lorsque les coefficients de pénalisation tendent vers l'infini, les conditions de contact imposées par la méthode de pénalisation tendent vers les conditions d'admissibilité. Cependant, une valeur trop élevée des coefficients de pénalisation entraîne un mauvais conditionnement du système et donc, des oscillations numériques lors de la résolution. Une valeur trop faible provoque des interpénétrations ou des glissements tangentiels inadmissibles. Le choix de ces paramètres est donc d'une grande importance.

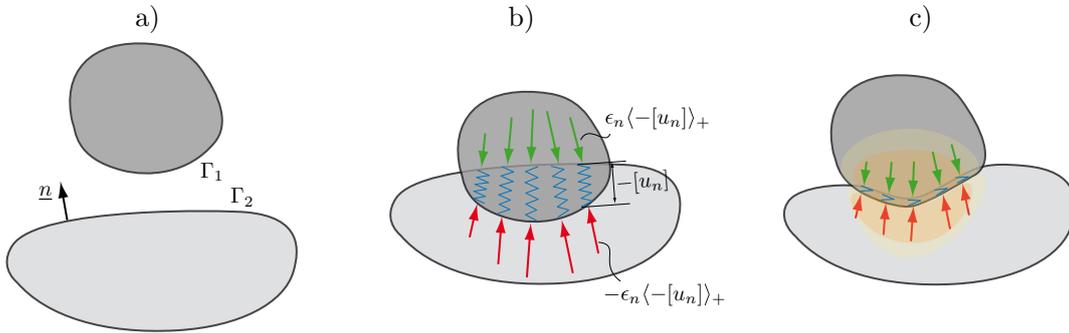


Fig. 3.16: Interprétation de la méthode de pénalisation par des ressorts : a) configuration initiale b) configuration après pénétration c) configuration déformée en équilibre.

2.3.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Cette méthode introduit de nouvelles variables : les multiplicateurs de Lagrange, notés $\underline{\lambda}$. Ils s'interprètent comme les forces empêchant toute interpénétration à l'interface de contact.

La formulation Lagrangienne est obtenue à partir de la fonctionnelle $\Pi(\underline{u})$, à laquelle est ajouté un terme faisant intervenir les multiplicateurs de Lagrange pour assurer une condition supplémentaire dans la minimisation de $\Pi(\underline{u})$. Ainsi, le problème de contact (sans frottement) est remplacé par le problème de point selle du Lagrangien :

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ et $\lambda_n \leq 0$, tels que :

$$\max_{\lambda_n \leq 0} (\min_{\underline{u} \in \mathcal{U}_{ad}} \mathcal{L}(\underline{u}, \lambda_n)) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.12)$$

où, le Lagrangien est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\underline{u}, \lambda_n) &= \Pi(\underline{u}) + \int_{\Gamma} \lambda_n [u_n] dS \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{u} d\Omega - \int_{\partial\Omega_{F_d}} \underline{F}_d \cdot \underline{u} dS + \int_{\Gamma} \lambda_n [u_n] dS \end{aligned}$$

Bien que cette méthode respecte parfaitement les conditions d'admissibilité, elle introduit de nouvelles variables et la résolution du système d'équations engendré est plus complexe. Le système d'équations non linéaires peut-être aussi résolu par une méthode de Newton-Raphson.

2.3.3 Méthode du Lagrangien augmenté

La méthode du Lagrangien augmenté a été introduit indépendamment par [Hestenes, 1969] et [Powell, 1969] dans le domaine de l'optimisation. Cette stratégie présente l'avantage de permettre le respect quasi exact des conditions d'admissibilité sans ajouter des degrés de liberté supplémentaires. En effet, les multiplicateurs de Lagrange sont considérés comme des paramètres qui sont mis à jour à partir d'une méthode de pénalisation.

La formulation variationnelle du problème de contact sans frottement s'écrit :

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que $\forall \underline{v} \in \mathcal{U}_{ad,0} = \{\underline{v}, \text{régulier} \mid \underline{v} = \underline{0} \text{ sur } \partial\Omega_{u_d}\}$:

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) d\Omega + \int_{\Gamma} (\bar{\lambda}_n + \epsilon_n \langle -[u_n] \rangle_+) [v_n] dS = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega_{F_d}} \underline{F}_d \cdot \underline{v} dS \quad (3.13)$$

où, $\langle \cdot \rangle_+$ renvoie la partie positive de la quantité considérée.

Les algorithmes utilisés pour résoudre ce problème sont souvent ceux du type Uzawa, où, à chaque itération, une correction du multiplicateur est apportée à partir du paramètre de pénalité et de la valeur de la violation de la contrainte : $\bar{\lambda}_n^{i+1} = \bar{\lambda}_n^i + \epsilon_n \langle -[u_n] \rangle_+^{i+1}$.

La méthode du Lagrangien augmentée combine les avantages de la méthode des multiplicateurs de Lagrange et ceux de la méthode de pénalisation. En effet, elle permet d'obtenir les conditions d'admissibilité lorsque les multiplicateurs de Lagrange sont égaux aux forces de contact ou lorsque les coefficients de pénalisation tendent vers l'infini. De plus, le choix des paramètres de pénalisation n'a pas vraiment d'influence sur les résultats.

Bilan

L'intégration des lois de contact dans un système d'équations n'est pas triviale. Il existe un grand nombre de techniques qui permettent de résoudre les inéquations variationnelles auxquelles ces problèmes aboutissent, parmi lesquelles, nous avons exposé les méthodes les plus classiques, telles que celle de pénalisation, celle des multiplicateurs de Lagrange ou encore celles du Lagrangien augmenté.

Bilan du Chapitre

Nous avons introduit les principaux modèles et méthodes pour résoudre les problèmes non linéaires surfaciques qui nous intéressent dans ce travail de thèse : le délaminage et le contact. La plupart de ces techniques, ainsi comme celles pour traiter les non-linéarités géométriques (Chap. 2), nécessitent un calcul itératif pour obtenir une suite de corrections sur l'ensemble du problème.

Il apparaît donc intéressant, pour limiter les coûts numériques de problèmes de très grande taille, de traiter leur résolution par des stratégies parallélisables qui engendrent la résolution indépendante de plusieurs sous-problèmes de taille réduite. Les techniques couramment utilisées sont les méthodes de décomposition de domaine qui sont principalement basées sur la construction d'un problème condensé sur les interfaces de la décomposition.

Le chapitre à venir est consacré à une revue des différents algorithmes de résolution de problèmes non linéaires et des principales stratégies de décomposition de domaine existantes.

Stratégies de calcul non linéaire et de résolution multiéchelle

Dans ce chapitre, on dresse un état de l'art des méthodes de résolution de problèmes non linéaires ainsi que des méthodes pour la modélisation et le calcul multiéchelle.

Sommaire

1	Méthodes de résolution de problèmes non linéaires	64
1.1	Méthode incrémentale d'Euler	64
1.2	Méthodes incrémentales-itératives	65
1.3	Méthode Asymptotique Numérique	71
1.4	Algorithme LaTIn	72
2	Stratégies de résolution multiéchelles	73
2.1	Méthodes de modélisation multiéchelle	73
2.2	Méthodes de calcul multiéchelles	81

1 Méthodes de résolution de problèmes non linéaires

Les méthodes les plus couramment employées pour calculer les réponses non linéaires sont les stratégies incrémentales-itératives. Un algorithme incrémental consiste à approcher le problème non linéaire par une linéarisation de la courbe d'équilibre à chaque incrément de temps. La méthode d'Euler ou *forward-Euler method* est une des premières approches incrémentales.

La plupart des méthodes itératives sont basées sur l'algorithme de Newton. Ces méthodes construisent une suite de solutions linéaires qui convergent vers la solution exacte. Cependant, la convergence des méthodes de Newton n'est pas toujours assurée. Les algorithmes incrémentaux-itératifs sont utilisés pour améliorer la convergence des méthodes de Newton, ils sont le résultat de la combinaison d'une procédure incrémentale et d'une procédure itérative. Dans le cas de fortes non-linéarités, les méthodes incrémentales-itératives classiques échouent au-delà des points critiques, des méthodes de continuation ont été alors créées pour piloter le chargement. D'autres types de résolutions itératives comme l'algorithme LaTIn et les méthodes de perturbation sont envisageables. Cette section a pour objectif de présenter ces stratégies numériques.

1.1 Méthode incrémentale d'Euler

Le traitement d'un problème mécanique non linéaire par la méthode des éléments finis conduit d'une façon générale à la résolution d'un système d'équations que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\underline{r}(\underline{u}) = \underline{f}^{int}(\underline{u}) - \underline{f}^{ext} = \underline{0}, \quad (4.1)$$

où, \underline{u} représente le vecteur de déplacements de la structure, $\underline{f}^{int}(\underline{u})$ les efforts internes associés de façon non linéaire aux déplacements \underline{u} et \underline{f}^{ext} le vecteur des efforts externes appliqués à la structure (on ne prendra pas en compte les forces suiveuses).

Un algorithme incrémental calcule l'équation d'équilibre (4.1) par incréments de temps $[t_0, \dots, t_{t-1}, t_t, t_{t-1}, \dots, T]$. Ainsi, à chaque incrément de temps $\Delta t_t = t_{t+1} - t_t$ on cherche à déterminer l'incrément de déplacement $\Delta \underline{u}_t = \underline{u}_{t+1} - \underline{u}_t$ associé à l'incrément de force $\Delta \underline{f}_t^{ext} = \underline{f}_{t+1}^{ext} - \underline{f}_t^{ext}$, sachant que la solution a été déjà approchée aux instants $[t_0, t_1, \dots, t_t]$.

La méthode incrémentale d'Euler se base dans un développement en séries de Taylor au premier ordre de l'équation (4.1) autour de \underline{u}_t , elle consiste à déterminer l'itéré \underline{u}_{t+1} par annulation de l'approximation :

$$\underline{r}(\underline{u}_{t+1}) \approx \underline{r}(\underline{u}_t) + \left[\frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{u}}(\underline{u}_t) \right] [\underline{u}_{t+1} - \underline{u}_t] = \underline{0}.$$

La solution approchée du déplacement à l'instant t_{t+1} est alors donnée par :

$$\underline{u}_{t+1} \approx \underline{u}_t - \left[\frac{\partial f^{int}}{\partial \underline{u}}(\underline{u}_t) \right]^{-1} \underline{r}(\underline{u}_t).$$

où, $\underline{r}(\underline{u}_t)$ est approché par $-\Delta f_t^{ext}$. Inévitablement, la solution approchée s'éloigne de la solution exacte si l'on ne choisit pas des incréments de temps suffisamment petits (voir Fig. 4.1).

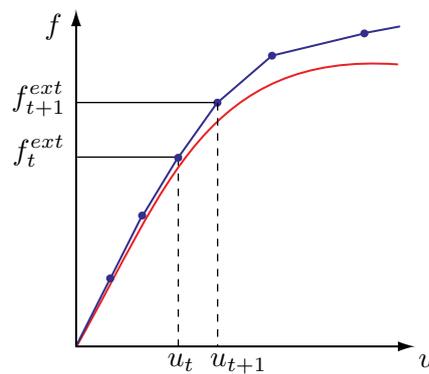


Fig. 4.1: Itérations de la méthode d'Euler (cas unidimensionnel).

1.2 Méthodes incrémentales-itératives

Ces méthodes procèdent en deux étapes ; la première consiste à linéariser le problème non linéaire et donc à prédire une solution tangente de départ pour un incrément de chargement donné (méthode d'Euler), tandis que la deuxième étape consiste à corriger le résidu d'équilibre par itérations successives (méthode de Newton). La Fig. 4.2 montre la combinaison d'un algorithme incrémental et d'une méthode de Newton de direction constante.

1.2.1 Méthodes de Newton

La méthode de Newton ou de Newton-Raphson est une méthode numérique itérative de résolution d'équations non linéaires du type $\underline{r}(\underline{u}) = 0$. Il existe plusieurs algorithmes itératifs de ce type, chacun procédant à la construction d'une suite $\underline{u}_t^i \rightarrow \underline{u}_t$ telle que $\underline{r}(\underline{u}_t) = 0$ à une tolérance près¹.

1. L'exposant i dénote les itérations de la méthode de Newton, tandis que l'indice t représente l'incrément de chargement.

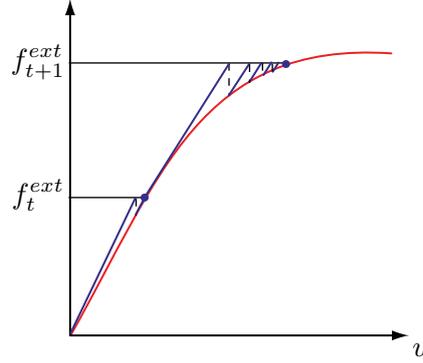


Fig. 4.2: Méthode incrémentale-itérative (cas unidimensionnel).

La méthode de Newton classique repose sur la linéarisation de $r(\underline{u}_t^{i+1})$ autour de l'itéré précédent \underline{u}_t^i . Elle consiste à déterminer l'itéré \underline{u}_t^{i+1} par annulation de l'approximation :

$$r(\underline{u}_t^{i+1}) \approx r(\underline{u}_t^i) + \left[\frac{\partial r}{\partial \underline{u}}(\underline{u}_t^i) \right] [\underline{u}_t^{i+1} - \underline{u}_t^i] = 0.$$

L'itéré \underline{u}_t^{i+1} est donc obtenue à partir de l'itéré \underline{u}_t^i :

$$\underline{u}_t^{i+1} = \underline{u}_t^i - \left[\frac{\partial f^{int}}{\partial \underline{u}}(\underline{u}_t^i) \right]^{-1} r(\underline{u}_t^i). \quad (4.2)$$

L'interprétation géométrique de l'équation (4.2) est simple : l'itéré \underline{u}_t^{i+1} est déterminée en cherchant le point d'intersection entre f_t^{ext} et la droite tangente à la courbe $(\underline{u}, f^{int}(\underline{u}))$ dans le point $(\underline{u}_t^i, f^{int}(\underline{u}_t^i))$, voir Fig. 4.3. Classiquement, $\left[\frac{\partial f^{int}}{\partial \underline{u}}(\underline{u}_t^i) \right]$ est appelé matrice de rigidité tangente \underline{K}_t^i .

La méthode de Newton ne converge pas de façon inconditionnelle par rapport au choix d'itéré initial \underline{u}_t^0 : un mauvais choix de \underline{u}_t^0 du schéma incrément peut en effet conduire à construire une suite \underline{u}_t^i divergente. Quand elle converge, cette convergence a pour propriété remarquable d'être quadratique.

Les méthodes pseudo-Newton consistent à remplacer \underline{K}_t^i par une direction constante pour toutes les itérations. Une possibilité souvent utilisée est d'utiliser \underline{K}_t^0 (actualisée à chaque début d'incrément), ce qui donne la suite :

$$\underline{u}_t^{i+1} = \underline{u}_t^i - \underline{K}_t^{0-1} r(\underline{u}_t^i).$$

Le coût d'une itération est donc fortement réduit, mais la convergence de cette version modifiée est seulement linéaire. En pratique, cette méthode n'est conseillée que pour des problèmes faiblement non linéaires ou pour de petits incréments de chargement.

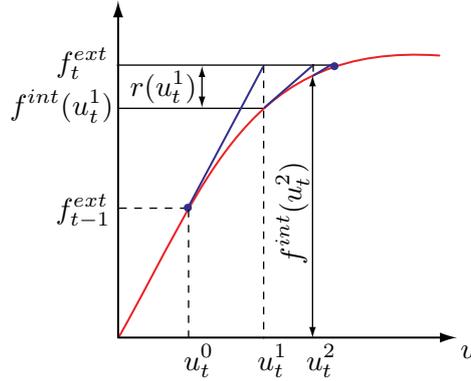


Fig. 4.3: Iterations de la méthode de Newton tangente (cas unidimensionnel).

Les méthodes quasi-Newton sont des généralisations de la méthode *sécante* du cas unidimensionnel. Cette dernière consiste à remplacer K_t^i par la pente de la droite sécante passant par les points $(u_t^{i-1}, f_t^{int}(u_t^{i-1}))$ et $(u_t^i, f_t^{int}(u_t^i))$ correspondant aux deux itérés précédents :

$$u_t^{i+1} = u_t^i - \frac{u_t^i - u_t^{i-1}}{f_t^{int}(u_t^i) - f_t^{int}(u_t^{i-1})} r(u_t^i).$$

Pour le cas multidimensionnel, ces méthodes consistent à définir une matrice $\underline{\underline{\tilde{K}}}_t^i$ telle que :

$$\underline{\underline{\tilde{K}}}_t^i (u_t^i - u_t^{i-1}) = -(r(u_t^i) - r(u_t^{i-1})).$$

Dans un espace vectoriel de dimension N , une telle matrice n'est pas unique, l'ensemble des matrices vérifiant cette propriété est de dimension $N(N-1)$. Différentes techniques permettent de construire ces matrices sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\tilde{K}}}_t^i = \underline{\underline{\tilde{K}}}_t^{i-1} + \delta \underline{\underline{\tilde{K}}}_t^i,$$

c'est-à-dire en corrigeant successivement une matrice à chaque itération, en partant d'une estimation $\underline{\underline{\tilde{K}}}_t^0$ de la matrice tangente initiale. Les termes $\delta \underline{\underline{\tilde{K}}}_t^i$ sont calculés en fonction des variations de la solution $\delta u_t^i = u_t^i - u_t^{i-1}$ et du résidu $\delta r_t^i = r(u_t^i) - r(u_t^{i-1})$. En pratique, ces matrices sont de faible rang. Parmi, les formules quasi-Newton les plus populaires, on peut citer :

- **La méthode BFGS** (*Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shannokaka*) donne un $\delta \underline{\underline{\tilde{K}}}_t^i$ symétrique de rang 2 et une matrice $\underline{\underline{\tilde{K}}}_t^i$ définie positive, si la matrice initiale l'est également. Cette technique est implémentée dans de nombreux logiciels éléments finis, le plus souvent à l'aide de la version proposée par [Matthies et Strang, 1979].
- **La méthode DFP** (*Davidon-Fletcher-Powell*) propose aussi une matrice de correction symétrique de rang 2. Cette technique est plus ancienne, mais dans

la pratique elle est en général remplacée par la méthode BFGS qui est plus efficace.

- **La méthode SR1** (*Symmetric Rank 1*) suggère des $\delta \underline{\underline{K}}_t^i$ symétriques et de rang 1. Elle est plus simple que les méthodes BFGS et DFP, mais peut conduire à la construction de matrices non définies positives.
- **La méthode de Broyden** aboutit à des matrices de correction non symétriques de rang 1.

Un aspect important de ces techniques est qu'elles ne demandent ni d'assembler ni de factoriser les matrices ainsi définies (dehors $\underline{\underline{K}}_t^0$). En pratique, des techniques d'algèbre linéaire sont employées pour atteindre directement la solution du système $\underline{\underline{K}}_t^i \delta u_t^i = -r_t^i$ à partir de la factorisation de $\underline{\underline{K}}_t^0$, moyennant une succession de produits scalaires et le stockage de quelques vecteurs.

Concernant la convergence de cette variante de la méthode de Newton, on peut montrer qu'elle est d'ordre $(1 + \sqrt{5})/2$. La convergence de cette méthode est ainsi moins bonne que celle obtenue par la méthode standard, mais meilleure que celle avec direction constante.

Pour détecter la convergence, divergence ou stagnation des méthodes de Newton, différents critères d'erreur sont possibles. Les plus courants sont basés sur la norme du résidu et celle du chargement $\frac{\|r_t^i\|}{\|f_{ext}\|}$, sur la variation relative de la solution $\frac{\|\delta u_t^i\|}{\|u_t^i\|}$ et sur le comptage d'itérations.

1.2.2 Méthodes de continuation

Bien que les méthodes de type Newton permettent la résolution de nombreux problèmes non linéaires, elles ne permettent pas de décrire certains comportements propres aux instabilités. Les phénomènes de type *snap-through* (ou claquage) et de type *snap-back*, représentés sur la Fig. 4.4, sont deux cas où le pilotage classique en effort échoue au-delà d'un point critique.

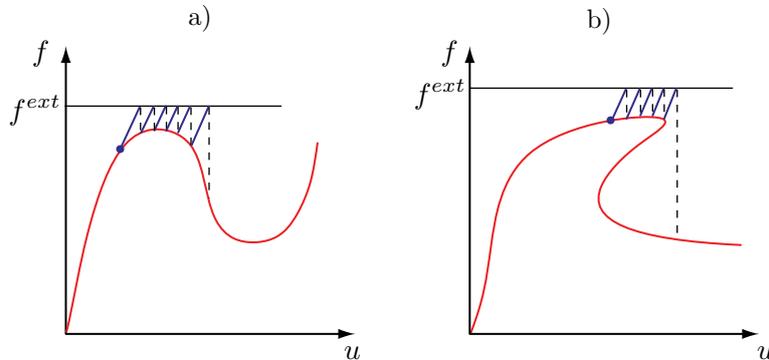


Fig. 4.4: Divergence de la méthode de Newton : a) *snap-through* b) *snap-back*.

Les algorithmes dits de continuation ont été développés pour franchir cette difficulté. Le premier de ces algorithmes est celui de [Wempner, 1971], suivi de ceux de [Riks, 1972, 1979; Ramm, 1981, 1982] et des méthodes de [Batoz et Dhatt, 1979; Crisfield, 1981, 1991].

Les algorithmes de continuation sont basés sur la méthode de Newton. Dans cette dernière, on cherche les déplacements sous un chargement imposé. Dans les méthodes de continuation, le paramètre de charge est par contre libéré et une condition supplémentaire est ajoutée. Le but est de limiter l'accroissement de la réponse.

Selon la condition supplémentaire, on peut classifier les différentes méthodes. Les méthodes introduites par [Wempner, 1971; Riks, 1972, 1979; Ramm, 1981, 1982] sont des algorithmes de continuation avec une condition linéaire sur l'incrément de déplacements. La méthode de longueur d'arc sphérique utilise une condition de second ordre sur les déplacements et les efforts [Batoz et Dhatt, 1979]. La méthode de longueur d'arc cylindrique a une condition de second ordre uniquement sur les déplacements [Crisfield, 1981]. On va détailler les algorithmes de type Riks-Ramm et Riks ainsi que celui de Crisfield.

1.2.2.1 La Méthode Riks-Ramm. Pour incorporer le pilotage sur le chargement appliqué f^{ext} , on introduit le paramètre λ . On prend la notation schématisée sur la Fig. 4.5 : $\Delta \underline{u}^i = \underline{u}^i - \underline{u}^0$, $\Delta \lambda^i = \lambda^i - \lambda^0$, $\delta \underline{u}^i = \underline{u}^{i+1} - \underline{u}^i$, $\delta \lambda^i = \lambda^{i+1} - \lambda^i$ et $\underline{r}(\underline{u}^i) = -(\underline{f}^{int}(\underline{u}^i) - \lambda^i \underline{f}^{ext})$.

Pour construire la suite \underline{u}^i , il faut vérifier en même temps :

$$\underline{K}^0 \delta \underline{u}^i = \lambda^{i+1} \underline{f}^{ext} - \underline{f}^{int}(\underline{u}^i) = \underline{r}(\underline{u}^i) + \delta \lambda^i \underline{f}^{ext}, \quad (4.3)$$

$$\langle \{\Delta \underline{u}^i, \Delta \lambda^i \underline{f}^{ext}\}, \{\delta \underline{u}^i, \delta \lambda^i \underline{f}^{ext}\} \rangle = \langle \Delta \underline{u}^i, \delta \underline{u}^i \rangle_u + \langle \Delta \lambda^i \underline{f}^{ext}, \delta \lambda^i \underline{f}^{ext} \rangle_F = 0, \quad (4.4)$$

où \langle , \rangle_u et \langle , \rangle_F sont des produits scalaires liant les déplacements et les charges, définis respectivement par :

$$\langle \Delta \underline{u}^i, \delta \underline{u}^i \rangle_u = \frac{1}{2} \Delta \underline{u}^{it} \underline{K}_0 \delta \underline{u}^i \quad ; \quad \langle \Delta \lambda^i \underline{f}^{ext}, \delta \lambda^i \underline{f}^{ext} \rangle_F = \frac{1}{2} \Delta \lambda^i \underline{f}^{extt} \underline{K}^{0-1} \delta \lambda^i \underline{f}^{ext}.$$

L'initialisation de l'algorithme se fait à partir des données $(\underline{u}^0, \lambda^0 \underline{f}^{ext})$ (*cinématiquement et statiquement admissibles*) et le paramètre λ^1 . On obtient ainsi les problèmes suivants :

Première itération : Pour la première itération, on a $\Delta \underline{u}^i = \underline{0}$ et $\Delta \lambda^i = 0$, ce qui annule l'Éq. (4.4). Du fait que $\underline{r}(\underline{u}^0) = -(\underline{f}^{int}(\underline{u}^0) - \lambda^0 \underline{f}^{ext}) = \underline{0}$, l'Éq. (4.3) devient :

$$\underline{K}^0(\underline{u}^1 - \underline{u}^0) = \lambda^1 \underline{f}^{ext} - \underline{f}^{int}(\underline{u}^0) = (\lambda_1 - \lambda^0) \underline{f}^{ext}.$$

Étape courante : À partir de \underline{u}^i , $\underline{f}^{int}(\underline{u}^i)$ et $\lambda^i \underline{f}^{ext}$ de l'étape précédente, on cherche les inconnues $\delta \underline{u}^i$ et $\delta \lambda^i$ avec le système d'équations linéaire (4.3)-(4.4).

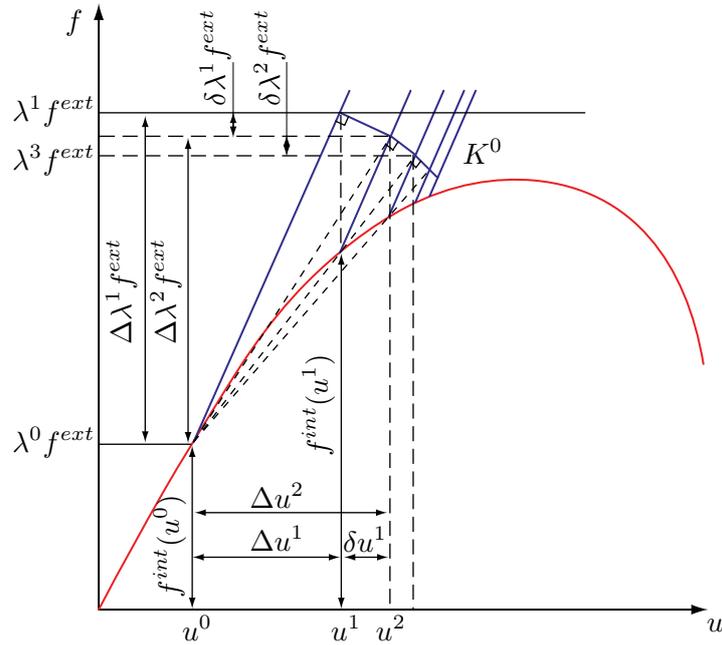


Fig. 4.5: Méthode Riks-Ramm (cas unidimensionnel).

Pour retrouver une méthode de Newton, il suffit de prendre $\lambda^i = \lambda^1$ au cours des itérations.

La différence entre la méthode de Riks-Ramm et celle de Riks réside uniquement dans le choix de l'Éq. (4.4), voir Fig. 4.6. Pour l'algorithme de Riks, on considère la condition suivante :

$$\langle \{\Delta \underline{u}^1, \Delta \lambda^1 \underline{f}^{ext}\}, \{\delta \underline{u}^i, \delta \lambda^i \underline{f}^{ext}\} \rangle = \langle \Delta \underline{u}^1, \delta \underline{u}^i \rangle_u + \langle \Delta \lambda^1 \underline{f}^{ext}, \delta \lambda^i \underline{f}^{ext} \rangle_F = 0.$$

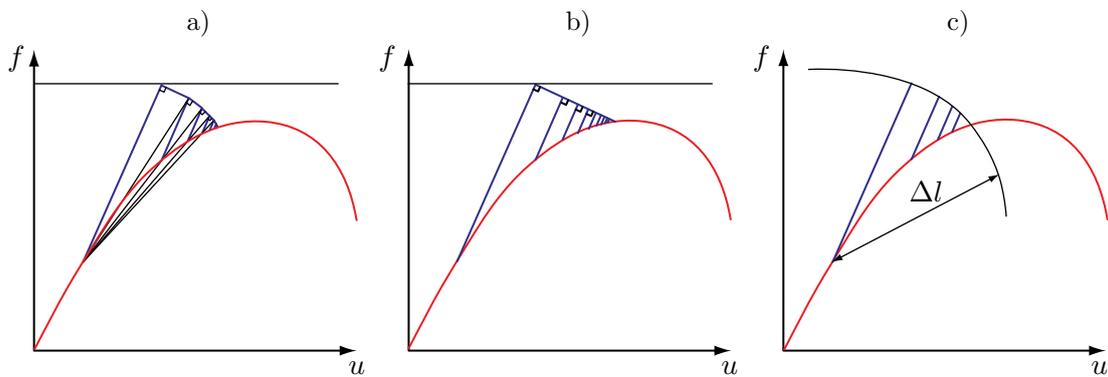


Fig. 4.6: Méthodes de continuation : a) Riks-Ramm b) Riks c) Crisfield.

1.2.2.2 La Méthode Crisfield introduit une modification de l'Éq. (4.4), en ajoutant une longueur d'arc Δl , voir Fig. 4.6.c. Cette condition entraîne un système d'équations de second degré en $\delta\lambda^i$:

$$\underline{K}^0 \delta \underline{u}^i = \lambda^{i+1} \underline{f}^{ext} - \underline{f}^{int}(\underline{u}^i) = \underline{r}(\underline{u}^i) + \delta \lambda^i \underline{f}^{ext}, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \langle \{\Delta \underline{u}^{i+1}, \Delta \lambda^{i+1} \underline{f}^{ext}\}, \{\Delta \underline{u}^{i+1}, \Delta \lambda^{i+1} \underline{f}^{ext}\} \rangle \\ = \langle \Delta \underline{u}^{i+1}, \Delta \underline{u}^{i+1} \rangle_u + \langle \Delta \lambda^{i+1} \underline{f}^{ext}, \Delta \lambda^{i+1} \underline{f}^{ext} \rangle_F = \Delta l^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dans la pratique, on ne prend pas en compte le terme $\langle \delta \lambda^{i+1} \underline{f}^{ext}, \delta \lambda^{i+1} \underline{f}^{ext} \rangle_F$ de l'Éq. (4.6) [Crisfield, 1981].

1.2.3 Méthodes de continuation pour le délaminage

Des méthodes de continuation adaptées au délaminage de composites ont été introduites dans [Corigliano, 1993], [Daudeville et Ladevèze, 1993] et [Schellekens et De Borst, 1993]. Ces méthodes ont été inspirées par les travaux de [De Borst, 1987; Chen et Schreyer, 1990] et elles n'ajoutent qu'une condition locale sur le saut de déplacements des interfaces, au contraire des méthodes de la section 1.2.2 qui imposent des conditions sur la totalité des degrés de liberté. Parmi d'autres méthodes locales, citons les travaux de [May et Duan, 1997; Geers, 1999; Alfano et Crisfield, 2003].

1.3 Méthode Asymptotique Numérique

À cause des développements analytiques, les méthodes de perturbation étaient limitées à la résolution de problèmes non linéaires de géométrie simple, jusqu'à ce qu'une première association avec les méthodes des éléments finis ait été présentée par [Thompson et Walker, 1968]. L'article de [Damil et Potier-Ferry, 1990] introduit une amélioration de cette résolution sous le nom de Méthode Asymptotique Numérique (MAN).

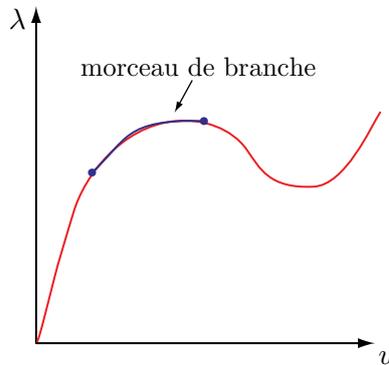


Fig. 4.7: Principe de la méthode MAN.

La MAN est une technique globale en temps qui consiste à déterminer numériquement la branche de solution en générant, non pas une séquence de points, mais une séquence de morceaux de branches (voir Fig. 4.7). Chaque morceau de branche est représenté de façon continue par le développement d'une série entière tronquée, en fonction d'un paramètre de contrôle. Après avoir injecté, dans les équations d'équilibre du problème, l'écriture des inconnues en séries entières, il reste à résoudre une succession de systèmes linéaires par la méthode des éléments finis.

L'ouvrage de [Cochelin, Damil, et Potier-Ferry, 1997] traite une description complète de la MAN avec des améliorations et des applications dans de nombreux domaines : la mécanique de milieux déformables, les équations de Navier-Stokes stationnaires, l'élasticité non linéaire géométrique [Azrar, Cochelin, Damil, et Potier-Ferry, 1993; Vannucci, Cochelin, Damil, et Potier-Ferry, 1998; Zahrouni, Cochelin, et Potier-Ferry, 1999], le couplage flambage-délaminage [Cochelin et Potier-Ferry, 1991], les milieux à comportement non linéaire [Nezamabadi et al., 2010] et le contact unilatéral [Aggoune, Zahrouni, et Potier-Ferry, 2006].

1.4 Algorithme LaTIn

L'algorithme LaTIn « Large Time INcrement method », développée par [Ladevèze, 1985, 1999], résout le problème non linéaire sur tout l'intervalle de temps et tout l'espace. Cette méthode est basée sur trois points. Le premier est la séparation des équations en deux groupes : les équations locales, éventuellement non linéaires Γ et les équations linéaires, éventuellement globales A_d . Le deuxième point est l'utilisation d'un schéma itératif qui résout successivement les deux groupes d'équations. Deux directions de recherche E^+ et E^- permettent de passer de Γ à A_d , et inversement. La solution se trouve à l'intersection des deux ensembles Γ et A_d (voir Fig. 4.8). Enfin, le troisième point est la décomposition de la solution en une somme de produits de fonctions d'espace par des fonctions du temps.

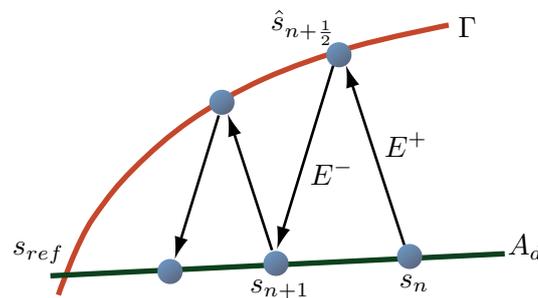


Fig. 4.8: Algorithme itératif de la méthode LaTIn.

Cette technique est spécialement adaptée pour le traitement de non-linéarités surfaciques de type délaminage [Allix, 1987] et contact [Champaney et al., 1999]. Elle a aussi été employée pour des problèmes d'élastoplasticité [Boisse, Ladevèze,

et Rougée, 1989], de viscoplasticité [Cognard, 1989] et de contact en grandes transformations [Bussy, Rougée, et Vauchez, 1990; Boucard, Ladevèze, Poss, et Rougée, 1997]. De plus, l'algorithme LaTIn peut être facilement utilisé pour le traitement de non-linéarités dans un cadre de décomposition de domaine, comme on le montre dans la Sec. 2.2.2.

2 Stratégies de résolution multiéchelles

L'objectif de ce chapitre est de faire le point sur deux familles de techniques de résolution multiéchelle. De façon générale, une démarche multiéchelle met en place un problème macroscopique, associé à une représentation grossière (homogénéisée) de l'ensemble du problème, et un problème microscopique (hétérogène) associé aux détails ou zones d'intérêt. Toute la difficulté est de proposer une définition pertinente des deux échelles, ainsi que de réaliser le couplage entre eux.

La première famille qu'on présente concerne les stratégies de modélisation multiéchelle. Ces techniques s'adressent aux problèmes où les détails locaux ont une dimension caractéristique beaucoup plus petite que celle de la structure entière, interdisant ainsi toute modélisation à l'échelle des détails. Deux réponses à cette problématique sont décrites : les techniques classiques d'homogénéisation et les techniques de superposition ou d'enrichissement local.

Dans la seconde famille d'approches, nous nous adressons aux méthodes de calcul multiéchelle, autrement dit, aux techniques pour la résolution numérique de problèmes à grand nombre de degrés de liberté. Ces problèmes sont caractérisés par une discrétisation fine, indépendamment de la modélisation choisie, qui ne peut pas être résolue par des solveurs directs. Les méthodes multigrilles et les méthodes de décomposition de domaine sont introduites.

Nous tenterons ici de décrire les caractéristiques importantes de telles stratégies, la définition des variables aux différentes échelles et l'obtention du comportement à l'échelle grossière.

2.1 Méthodes de modélisation multiéchelle

Nous nous intéressons aux méthodes basées sur la résolution d'un problème grossier construit par homogénéisation de la microstructure, ainsi qu'à des techniques permettant d'introduire un détail ou un raffinement localisé au sein d'une structure.

2.1.1 Méthodes d'homogénéisation

Les méthodes d'homogénéisation les plus utilisées sont les techniques basées sur l'analyse d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER) de l'échelle microscopique. Elles consistent à déterminer un comportement homogénéisé du VER à partir d'une équivalence énergétique entre les représentations microscopique et macroscopique. Pour ce faire, des hypothèses sur le champ de déplacement ou le champ de contraintes

du VER doivent être introduites. Le retour aux propriétés locales est effectué par un opérateur de localisation de la solution macroscopique.

Malheureusement, la définition *a priori* d'un modèle macroscopique reste pénalisante lorsqu'il s'agit de traiter des problèmes avec forts gradients où les champs macroscopiques peuvent varier considérablement (près des bords, des trous, des fissures) et lorsqu'il s'agit de traiter des problèmes non linéaires.

Dans cette section, nous rappelons les bases de la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques basée sur l'analyse asymptotique [Sanchez-Palencia, 1980].

Théorie d'homogénéisation périodique

Cette technique est utilisable dans les problèmes où la structure résulte de la répétition périodique d'un VER, comme dans le cas des composites. La solution à l'échelle de la microstructure est alors supposée périodique (au moins loin des bords de la structure), ce qui permet de découpler les effets en deux différentes échelles.

On restreint l'étude à la résolution d'un problème d'élasticité linéaire en petites perturbations. Le principe de base consiste à introduire deux variables pour décrire la solution (voir Fig. 4.9) : une variable lente \underline{X} à l'échelle de la structure (de longueur caractéristique L), et une variable rapide \underline{y} pour décrire la microstructure à l'intérieur du VER (de longueur caractéristique l). Le rapport d'échelle est noté $\epsilon = \frac{l}{L} \ll 1$. On peut définir la variable de périodicité $\underline{Y} = \frac{\underline{y}}{\epsilon}$. La solution est alors recherchée sous la forme d'un développement asymptotique en ϵ :

$$\underline{u}(\underline{X}, \underline{y}) = \epsilon^0 \underline{u}_0(\underline{X}, \underline{y}) + \epsilon^1 \underline{u}_1(\underline{X}, \underline{y}) + \epsilon^2 \underline{u}_2(\underline{X}, \underline{y}) + \dots$$

Ce développement est d'autant plus judicieux que ϵ est petit. La résolution des équations du problème nécessite la différenciation du déplacement solution, qui s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \underline{u}(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial \underline{X}} \underline{u}(\underline{X}, \underline{y}) + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \underline{y}} \underline{u}(\underline{X}, \underline{y}) .$$

On peut alors définir les tenseurs de déformation et contraintes comme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}(\underline{X}, \underline{y})) = \underline{\underline{\varepsilon}}_x(\underline{u}) + \epsilon^{-1} \underline{\underline{\varepsilon}}_y(\underline{u}) \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{X}, \underline{y})) = \underline{\underline{\sigma}}_x(\underline{\underline{\sigma}}) + \epsilon^{-1} \underline{\underline{\sigma}}_y(\underline{\underline{\sigma}}) .$$

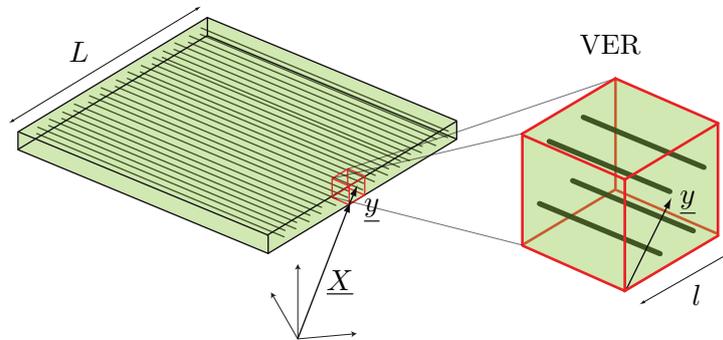


Fig. 4.9: Coordonnées macroscopiques sur la structure et coordonnées microscopiques sur le VER.

L'opérateur de Hooke est $\underline{\underline{K}}(\underline{X}, \underline{y}) = \underline{\underline{K}}(\underline{y})$, puisqu'il est périodique d'un VER à l'autre. La résolution des équations locales d'équilibre et de comportement conduit ainsi à différents problèmes en puissances de ϵ distinctes. Les méthodes d'homogénéisation du premier ordre permettent de déterminer les champs \underline{u}_0 et \underline{u}_1 , en résolvant consécutivement les problèmes suivants :

Problème en \underline{u}_0 (ϵ^{-2}) : $\text{div}_y(\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{\epsilon}}_y}(\underline{u}_0)) = \underline{0}$. Ce problème montre que le déplacement macroscopique \underline{u}_0 est indépendant de \underline{y} . On notera $\underline{\underline{\epsilon}}_0 = \underline{\underline{\epsilon}}_x(\underline{u}_0)$.

Problème en \underline{u}_1 (ϵ^{-1}) : $\text{div}_y(\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{\epsilon}}_y}(\underline{u}_1)) = -\text{div}_y(\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{\epsilon}}_0})$. Ce problème consiste à déterminer un champ déplacement microscopique $\underline{u}_1 \in \mathcal{U}_{Y-per}$ (espace des champs vérifiant les conditions de périodicité sur le bord du VER) sous le chargement $\underline{\underline{\epsilon}}_0$ uniforme suivant :

Trouver $\underline{u}_1 \in \mathcal{U}_{Y-per}$ tel que $\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{Y-per}$:

$$\int_{VER} \text{Tr} \left(\underline{\underline{\epsilon}}_y(\underline{u}_1) \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{\epsilon}}_y}(\underline{u}^*) \right) d\Omega = - \int_{VER} \text{Tr} \left(\underline{\underline{\epsilon}}_0 \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{\epsilon}}_y}(\underline{u}^*) \right) d\Omega$$

Par linéarité, on construit alors un opérateur de localisation $\underline{\underline{H}}(\underline{y})$ reliant la déformation locale à la déformation macroscopique :

$$\underline{\underline{\epsilon}}_y(\underline{u}_1) = \underline{\underline{H}}(\underline{y}) \underline{\underline{\epsilon}}_0 \quad (4.7)$$

Problème en \underline{u}_2 (ϵ^0) : $\text{div}_x(\underline{\underline{K}}(\underline{\underline{\epsilon}}_0 + \underline{\underline{\epsilon}}_y(\underline{u}_1))) + \text{div}_y(\underline{\underline{K}}(\underline{\underline{\epsilon}}_x(\underline{u}_1) + \underline{\underline{\epsilon}}_y(\underline{u}_2))) + \underline{f}_d = 0$. Seule la condition d'existence d'une solution \underline{u}_2 à ce problème est exploitée :

$$\int_{VER} \text{div}_x(\underline{\underline{K}}(\underline{\underline{\epsilon}}_0 + \underline{\underline{\epsilon}}_y(\underline{u}_1))) d\Omega + \int_{VER} \underline{f}_d d\Omega = \underline{0}.$$

Cette expression peut s'écrire, en utilisant l'Éq. (4.7) et en désignant par $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{\text{vol}(VER)} \int_{VER} \cdot d\Omega$ la moyenne sur le VER, comme :

$$\text{div}_x(\langle \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{H}} \rangle \underline{\underline{\epsilon}}_0) + \langle \underline{f}_d \rangle = \underline{0}.$$

Le comportement macroscopique est alors obtenu en moyennant sur le VER :

$$\underline{\underline{\sigma}}^M = \langle \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\epsilon}}^m \rangle = \langle \underline{\underline{K}}(\underline{\underline{\epsilon}}_0 + \underline{\underline{\epsilon}}_y(\underline{u}_1)) \rangle = \langle \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{H}} \rangle \underline{\underline{\epsilon}}_0,$$

ce qui permet de fermer le problème macroscopique global portant sur les inconnues $(\underline{\underline{\sigma}}^M, \underline{u}_0)$. Le comportement homogénéisé s'écrit : $\underline{\underline{K}}^H = \langle \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{H}} \rangle$.

Théorie de l'homogénéisation pour les problèmes non linéaires

La théorie classique de l'homogénéisation a donné lieu à diverses extensions au cadre non linéaire. Certaines approches s'appuient sur des développements asymptotiques de toutes les variables du problème : déformations anélastiques, paramètre d'endommagement [Fish et al., 1997], etc. D'autres stratégies dites d'analyse globale locale furent également proposées. Elles sont basées sur une résolution de deux problèmes imbriqués, un à l'échelle macroscopique, généralement résolu par la méthode éléments finis, et l'autre à l'échelle microscopique. Parmi celles-ci, on peut citer la méthode FE2 de [Feyel et Chaboche, 2000] et la *Voronoi Cell Finite Element Method* de [Ghosh, Lee, et Moorthy, 1995].

Ces techniques possèdent néanmoins des limitations : elles restent pertinentes lorsque les échelles sont bien séparées et les non-linéarités restent faibles. Des améliorations ont été proposées en couplant la méthode asymptotique numérique et la méthode FE2 [Nezamabadi et al., 2010] ou par une homogénéisation numérique d'ordre supérieur [Kouznetsova, Geers, et Brekelmans, 2002; Geers, Kouznetsova, et Brekelmans, 2010]. Dans la suite, la méthode FE2 est succinctement présentée.

La méthode FE2 est une approche éléments finis à deux niveaux qui propose de discretiser la structure macroscopique et d'associer à chaque point d'intégration une cellule de base du matériau périodique représentatif microscopique [Feyel et Chaboche, 2000]. L'idée est de rechercher la solution comme une décomposition en partie macro et partie micro. La contrainte macroscopique $\underline{\underline{\sigma}}^M$ et la déformation macroscopique $\underline{\underline{\varepsilon}}^M$ en un point d'intégration du maillage macroscopique sont supposées constantes sur la cellule microscopique associée à ce point.

Le principe de résolution est simple : la solution du problème macroscopique est recherchée de manière standard par un algorithme itératif non linéaire. À chaque itération, un incrément de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}^M$ est calculé aux points de Gauss pour ensuite définir les conditions aux limites de la cellule élémentaire associée. Un problème microscopique non linéaire est alors résolu de manière itérative sur chaque cellule. À convergence, ce problème microscopique permet de calculer la contrainte macroscopique $\underline{\underline{\sigma}}^M = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$ ainsi que la matrice de rigidité tangente homogénéisée $\underline{\underline{\underline{K}}}^H$. La connaissance de cet opérateur permet de résoudre le problème macroscopique et ainsi trouver un nouvel incrément de déformation macroscopique. La convergence est atteinte lorsque la contrainte moyenne $\underline{\underline{\sigma}}^M$ vérifie les équations d'équilibre macroscopique. Notons que les calculs microscopiques sont complètement indépendants et sont donc aisément parallélisables.

2.1.2 Méthodes de superposition et d'enrichissement

Ces méthodes consistent à superposer à la solution d'un problème macroscopique un enrichissement microscopique local dans des zones d'intérêt. L'enrichissement peut être réalisé par un maillage plus fin (méthodes globale-locale) ou par un modèle

différent (méthode Arlequin), en résolvant des problèmes à une échelle plus fine (méthode de projection de Dirichlet hiérarchique) ou en augmentant l'espace de recherche de la solution (méthodes PUM, XFEM, GFEM).

Méthodes d'analyse itérative globale-locale

Le principe de l'analyse globale-locale est de décrire la structure au moyen de deux modèles séparés : un modèle global de l'ensemble de la structure et un modèle local sur une zone d'intérêt. Ce second modèle peut non seulement être un maillage plus raffiné, mais comporter également des détails structurels ou des hétérogénéités du matériau qui n'apparaissent pas dans le modèle global. Différents types de méthodologies permettant le dialogue des deux analyses ont été mises en place : de type unidirectionnel (techniques descendantes) ou de type bidirectionnel (techniques de condensation statique, approches itératives). Le raccord est fait à l'interface entre les deux modèles, les plus courants sont de type déplacement, mais il existe aussi des raccords en efforts ou mixtes.

Dans [Whitcomb, 1991], une méthode d'analyse itérative globale-locale est proposée par le via de deux maillages : un maillage grossier de la structure, et un maillage local raffiné (voir Fig. 4.10). Les deux maillages doivent être compatibles pour rendre possible la vérification de la continuité de déplacements sur l'interface.

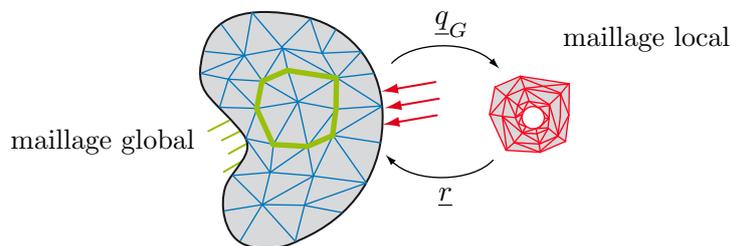


Fig. 4.10: Méthode d'analyse globale-locale.

Chaque itération est composée de deux calculs éléments finis indépendants. D'abord, un calcul sur le maillage global qui permet de trouver les déplacements \underline{q}_G est réalisé. En suite, les déplacements globaux aux bords de la zone de superposition sont extraits et appliqués au maillage local. Ainsi, un deuxième calcul sur le maillage local est fait pour retrouver les déplacements \underline{q}_L . Un résidu d'équilibre en effort \underline{r} est calculé à partir des solutions précédentes (\underline{q}_G et \underline{q}_L) et de l'assemblage de la matrice de raideur du maillage local et la matrice de raideur du maillage global dans le reste de la structure. Finalement, ce résidu est appliqué au maillage global pour calculer une correction $\underline{q}_G \leftarrow \underline{q}_G + \Delta \underline{q}_G$. Après la correction de la solution globale, le calcul de la zone d'intérêt est à nouveau réalisé. Des itérations sont menées jusqu'à convergence.

Le principal avantage de ce type de méthodes est que le modèle éléments finis global n'est jamais modifié. Cependant, l'application de cette technique dans un cadre industriel n'est pas immédiate : si l'analyse descendante est couramment disponible

dans les logiciels commerciaux, l'échange d'informations entre deux maillages indépendants est souvent impossible. Les travaux de [Gendre, Allix, Gosselet, et Comte, 2009] développent une méthode de calcul globale-locale non-intrusive pour des non-linéarités localisées avec des conditions de raccord mixtes.

Méthode Arlequin

La méthode Arlequin, introduite par [Ben Dhia, 1998], permet de coupler des modèles différents (en discrétisation ou en formulation). Par rapport aux méthodes globales-locales, son originalité est de raccorder les modèles dans le volume où ils se superposent, et non pas sur l'interface. Dans ce volume, les modèles sont mis en concurrence par l'attribution de poids relatifs dans la formulation faible et le raccord est imposé par introduction d'un multiplicateur de Lagrange. Techniquement, le couplage est obtenu en recherchant le minimum d'une somme pondérée des énergies potentielles associées à chacun des modèles.

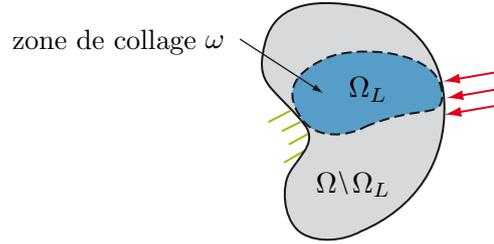


Fig. 4.11: Méthode Arlequin : définition du domaine d'intérêt. Ici, $\Omega^L \subset \Omega = \Omega^G$ et la zone de collage $\omega = \Omega^L$.

Précisons ces idées dans le cadre d'un problème d'élasticité linéaire pour lequel on dispose d'un modèle global de toute la structure Ω (voir Fig. 4.11). Pour simplifier l'écriture, le domaine associé à la zone d'intérêt, noté Ω^L , est strictement inclus dans Ω . La zone de couplage ω est la zone de recouvrement sur laquelle le raccord volumique est écrit (ici, on a considéré $\omega = \Omega^L$). La solution en déplacement est $\tilde{u} = (\underline{u}^G, \underline{u}^L)$, tandis que le multiplicateur de Lagrange recherché est noté $\underline{\lambda}$. Le problème de couplage est alors posé sur $(\tilde{u}, \underline{\lambda}) \in \tilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{M}$, où $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^G \times \mathcal{U}^L$ est l'espace d'admissibilité cinématique et $\mathcal{M} = H^1(\omega)$ est l'espace des multiplicateurs de Lagrange (appelé espace médiateur), tel que :

$$\forall (\tilde{u}^*, \underline{\lambda}^*) \in \tilde{\mathcal{U}}_0 \times \mathcal{M}, \quad \begin{cases} a_\alpha(\tilde{u}, \tilde{u}^*) + \langle \underline{\lambda}, \underline{u}^{G^*} - \underline{u}^{L^*} \rangle &= l_\alpha(\tilde{u}^*) \\ \langle \underline{\lambda}^*, \underline{u}^G - \underline{u}^L \rangle &= 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

avec,

$$\begin{aligned} a_\alpha(\underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{u}}^*) &= \int_{\Omega} (1-\alpha) \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^G) \underline{\underline{K}}^G \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{G*})) d\Omega + \int_{\Omega^L} \alpha \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^L) \underline{\underline{K}}^L \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{L*})) d\Omega \\ l_\alpha(\underline{\tilde{u}}^*) &= \int_{\Omega} (1-\alpha) \underline{f}_d \cdot \underline{u}^{G*} d\Omega + \int_{\Omega^L} \alpha \underline{f}_d \cdot \underline{u}^{L*} d\Omega \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_F} (1-\alpha) \underline{F}_d \cdot \underline{u}^{G*} d\Omega + \int_{\partial\Omega_F \cap \partial\Omega_F^L} \alpha \underline{F}_d \cdot \underline{u}^{L*} d\Omega \end{aligned}$$

où, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur $H^1(\omega)$. Le paramètre scalaire de pondération α est tel que $\alpha \in [0, 1]$ dans ω et $\alpha = 0$ dans $\Omega \setminus \Omega^L$ (avec $\Omega = \Omega^G$ et $\omega = \Omega^L$). Le multiplicateur de Lagrange $\underline{\lambda}$ permet de garantir l'égalité des champs \underline{u}^L et \underline{u}^G au sens faible sur la zone de collage $\omega = \Omega_L$.

La solution du problème est alors définie par :

$$\underline{u} = \begin{cases} \underline{u}^G & , \text{ dans } \Omega \setminus \Omega_L , \\ \alpha \underline{u}^L + (1-\alpha) \underline{u}^G & , \text{ dans } \Omega_L . \end{cases} \quad (4.9)$$

Aucune hypothèse *a priori* n'étant formulée sur les modèles, la méthode se prête à une grande variété d'applications : il est possible de coupler des modèles de natures ou dimensionnalités différentes, d'introduire des détails tels que des trous ou des fissures, ou simplement de raffiner localement. Cette méthode est particulièrement séduisante pour réaliser des analyses locales lorsque la position des zones d'intérêt varie au cours du temps, le problème de départ n'étant jamais remaillé. Elle a été appliquée au suivi de fissure dans [Ben Dhia et Jamond, 2010].

Cependant, la méthode présente quelques difficultés. La qualité du raccord entre les deux modèles dépend de la zone de recouvrement et du choix de discrétisation de l'espace médiateur \mathcal{M} .

Partition de l'unité

La méthode de partition de l'unité (PUM) [Melenk et Babuška, 1996] peut être vue comme une généralisation de la méthode des éléments finis. Elle propose un cadre mathématique rigoureux pour la construction d'espaces d'approximation conforme qui ne sont pas forcément des espaces de fonctions polynomiales. Pour cela, on définit sur le domaine d'étude un ensemble de patches $\mathcal{T} = \{\Omega^i\}_{i \in I}$ réalisant un recouvrement du domaine d'étude Ω . Sur chaque patch $i \in I$, on se donne un ensemble de fonctions $\Psi^i = (\psi_j^i)_{j \in J}$ possédant les propriétés d'approximation désirées. Ces fonctions sont pondérées par des fonctions $(\phi_i)_{i \in I}$ formant une partition de l'unité de Ω , c'est-à-dire, telles que :

$$\sum_{i \in I} \phi_i(\underline{x}) = 1 .$$

En général, les fonctions $(\phi_i)_{i \in I}$ sont des fonctions de forme éléments finis, l'indice i étant alors le numéro du nœud du maillage associé à Ω .

L'approximation de la solution recherchée sur le domaine Ω s'écrit alors :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} \phi_i(\underline{x}) \left(\sum_{j \in J} a_j^i \underline{\psi}_j^i(\underline{x}) \right),$$

où, les a_j^i sont les inconnues du problème (nodales si les fonctions de pondérations sont des fonctions de forme éléments finis). On remarquera que cette approximation permet de reproduire n'importe quelle fonction. En particulier, si l'on note \underline{u}_s la solution du problème non discretisé, en choisissant $\Psi^i = \underline{u}_s|_{\Omega^i}$ et un jeu de coefficients unitaires, on obtient :

$$\underline{u}_h = \sum_{i \in I} \phi_i \underline{u}_s = \underline{u}_s.$$

GFEM, XFEM : La méthode des éléments finis généralisés GFEM [Strouboulis et al., 2001] et la méthode des éléments finis étendus XFEM [Moës et al., 1999] proposent de combiner une approche éléments finis standard avec la partition de l'unité. L'espace éléments finis est enrichi par des fonctions spatiales provenant d'une certaine connaissance du problème à traiter. Le champ solution est alors écrit sous la forme :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} \phi_i(\underline{x}) \underline{a}^i + \sum_{i \in I} \phi_i(\underline{x}) \left(\sum_{j \in J} b_j^i \underline{\psi}_j^i(\underline{x}) \right),$$

où, $(\underline{a}^i)_{i \in I} \in R^d$ et $(b_j^i)_{j \in J_i} \in R$ sont les inconnues du problème.

La GFEM propose de construire des fonctions d'enrichissement (fonctions *handbook*) de manière indépendante pour chacun des éléments du maillage grossier de départ. On résout pour cela un certain nombre de problèmes élémentaires sur un domaine englobant les hétérogénéités ou les trous (échelle microscopique) d'un élément grossier (voir Fig. 4.12).

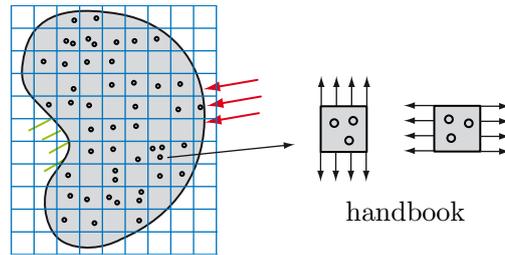


Fig. 4.12: GFEM : définition des handbooks.

La XFEM propose un choix de fonctions d'enrichissement permettant de représenter des solutions discontinues en s'affranchissant des problèmes de remaillage. La description géométrique des surfaces de discontinuité est effectuée par la technique de *level-set*. Pour les calculs de suivi de fissure en mécanique de la rupture, deux types de fonctions d'enrichissement sont proposés : des fonctions représentant la solution analytique d'une fissure sur les noeuds des éléments contenant une pointe de

fissure, et des fonctions représentant la discontinuité de déplacement sur les noeuds des éléments traversés par une fissure (voir Fig. 4.13).

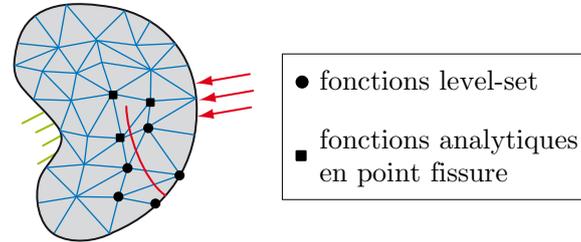


Fig. 4.13: XFEM : enrichissements nodaux pour la fissuration.

Bien que les techniques basées sur la partition de l'unité permettent d'obtenir une amélioration conséquente de la qualité de la solution par rapport aux approches éléments finis classiques, une attention particulière doit être portée sur le choix des fonctions spéciales afin d'éviter des problèmes de dépendances avec les fonctions éléments finis classiques. Une autre limitation de cette approche concerne l'intégration numérique. Les fonctions rajoutées peuvent être très complexes et nécessiter un effort conséquent pour leur intégration lors de la construction du problème discretisé. Le gain en temps de calcul obtenu sur les problèmes de remaillage est donc en partie contrebalancé par le coût de l'intégration numérique.

2.2 Méthodes de calcul multiéchelles

La résolution de problèmes de grande taille pour lesquels une résolution directe n'est plus envisageable conduit à la mise en place de techniques itératives spécifiques pour diminuer les coûts de calcul. La convergence de ces méthodes est accélérée à l'aide de problèmes grossiers auxiliaires pour améliorer les transferts d'information à grande longueur de variation de la solution. Nous nous intéressons aux méthodes multigrilles et aux méthodes de décomposition de domaine.

2.2.1 Méthodes multigrilles

Les méthodes multigrilles [Fedorenko, 1964] se basent sur la superposition de plusieurs échelles numériques pour résoudre des systèmes d'équations de grande taille. La résolution s'appuie sur des méthodes itératives de type gradient conjugué ou Gauss Seidel. L'idée est d'améliorer leur convergence par des résolutions incomplètes sur une hiérarchie de grilles de degrés de raffinement distincts. Chacune de ces résolutions permet de diminuer la part du résidu dont la longueur de variation correspond à la discrétisation de la grille.

Considérons un problème linéaire éléments finis issu d'une discrétisation fine $\underline{K}_m \underline{q}_m = \underline{f}_m$. La résolution de ce problème par une méthode à deux grilles fait intervenir une seconde grille (plus grossière) et une démarche cyclique (dite en V) entre ces deux maillages (voir Fig. 4.14). La grille fine traite les composantes à faible

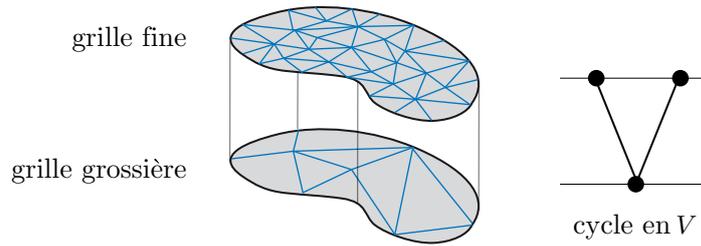


Fig. 4.14: Niveaux de discrétisation et cycle de calcul.

longueur de variation de l'erreur résiduelle, tandis que la grille grossière permet de capturer le résidu à grande longueur de variation. La réalisation d'un cycle en V sur deux échelles comporte les trois étapes suivantes :

- **Une étape de lissage sur la grille fine.** Plusieurs itérations sont réalisées sur la grille fine avec la méthode itérative choisie dans le but de faire diminuer les hautes fréquences de l'erreur.
- **Une étape de correction.** Le résidu d'équilibre $\underline{r}_m^i = \underline{f}_m - \underline{q}_m^i$ sur le maillage fin est alors calculé et restreint sur l'échelle grossière : $\underline{r}_M^i = \underline{R}\underline{r}_m^i$, où \underline{R} est un opérateur de restriction. Finalement, le problème $\underline{K}_M \underline{q}_M^i = \underline{r}_M^i$ est résolu, où \underline{K}_M est l'opérateur \underline{K}_m restreint à la grille grossière.
- **Une étape de mise à jour.** La solution à l'échelle grossière est ensuite prolongée sur le maillage fin et la solution fine est ainsi mise à jour : $\underline{q}_m^i = \underline{P}\underline{q}_M^i + \underline{q}_m^i$, où \underline{P} est l'opérateur de prolongement. Pour enlever des perturbations induites par l'opérateur de prolongement, des opérations de lissage supplémentaires peuvent ensuite être effectuées.

Suivant le type de problème considéré, le nombre de grilles peut être important et l'organisation du dialogue entre les différents niveaux de discrétisation conduit à la mise en place de différents cycles de calcul, soit par des résolutions successives entre les échelles (cycle V), soit par des résolutions intermédiaires (cycle W). Dans [Rannou, Gravouil, et Baïetto-Dubourg, 2009], le calcul de suivi de fissure réalisé fait appel à 9 grilles successives. La X-FEM est utilisée sur la grille la plus fine pour prédire l'avancée de la fissure, les autres grilles permettant d'améliorer la convergence des calculs. Cependant, la parallélisation des algorithmes multigrilles est moins naturelle que celle des méthodes basées sur les décompositions de domaine (Sec. 2.2.2).

La résolution de problèmes non linéaires peut être effectuée par l'application d'un algorithme multigrille linéaire aux étapes de prédictions linéaires d'un schéma de Newton ou par l'utilisation d'un schéma multigrille étendu pour la résolution de problèmes non linéaires [Brandt, 1982].

2.2.2 Méthodes de décomposition de domaine

On attribue généralement la paternité des méthodes de décomposition de domaine à [Schwarz, 1869], qui a proposé un premier algorithme de résolution d'une

équation aux dérivées partielles en partitionnant le domaine d'étude en deux sous-domaines. L'avènement des ordinateurs dans la deuxième moitié du XX^e siècle, et en particulier des ordinateurs parallèles, a fortement relancé l'étude de ces méthodes, et permis de nouveaux développements. En calcul de structures, on privilégie souvent les méthodes dites *sans recouvrement*, plus faciles à mettre en œuvre (voir Fig. 4.15). La plupart des méthodes de décomposition de domaine repose sur la résolution d'un problème condensé sur les inconnues d'interface et la résolution des problèmes indépendants de plus petite taille (aisément parallélisables) posés sur chacune des sous-structures (ou sous-domaines).

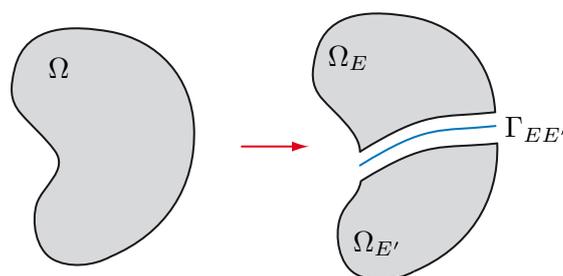


Fig. 4.15: Principe de la décomposition de domaine.

Les méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement peuvent être classées en trois familles, suivant le type de raccord d'interface qu'elles vérifient :

- **Les approches primales** vérifient la continuité des déplacements aux interfaces, comme la méthode de Schur primale [Przemieniecki, 1963] et la méthode BDD (*Balancing Domain Decomposition Method*) [Mandel, 1993].
- **Les approches duales** assurent l'équilibre des efforts aux interfaces. La méthode de Schur duale et la méthode FETI (*Finite Element Tearing and Interconnecting*) [Farhat et Roux, 1992] en font partie.
- **Les approches mixtes** raccordent les quantités primales et duales d'interface, telles que les méthodes basées sur un algorithme de type Lagrangien augmenté [Glowinski et Le Tallec, 1990], la méthode LaTIn [Ladevèze, 1999] ou la méthode FETI Dual-Primal [Farhat, Lesoinne, et Pierson, 2000].

L'efficacité obtenue par rapport aux méthodes directes n'est pas aussi grande que celle qu'on pourrait attendre lorsque le nombre de sous-domaines croît. Pour remédier à ce manque d'extensibilité, [Mandel, 1993] propose, dans le cadre de la méthode primale BDD, de construire un problème grossier associé à la vérification de l'orthogonalité des chargements locaux avec les déplacements de solide rigide des sous-structures. La restauration de l'extensibilité pour la méthode duale FETI est assurée de la même manière [Farhat et Roux., 1994]. Les singularités de coin pour les problèmes de plaques et coques conduisent à l'ajout de contraintes supplémentaires de régularité, d'abord imposées à l'aide d'un gradient conjugué augmenté [Le Tallec, Mandel, et Vidrascu, 1998], puis à l'aide d'algorithmes récondensés FETI-DP [Farhat et al., 2000] et BDDC [Dohrmann, 2003].

Par ailleurs, la résolution du problème condensé peut être directe ou itérative. Dans le premier cas, le problème condensé est assemblé et résolu classiquement. Dans le second cas, un solveur itératif adapté aux architectures des calculateurs parallèles est utilisé (gradient conjugué, GMRES, Krylov [Saad, 2003]), où les seuls problèmes devant être assemblés sont des problèmes locaux par sous-structure.

Nous considérons un problème d'élasticité linéaire en petites perturbations, posé sur un partitionnement de la structure \mathbf{E} en E sous-domaines. Un sous-domaine (E) est connecté à son voisin (E') par l'interface $\Gamma_{EE'}$. On dénote $\Gamma_E = \bigcup_{E' \in \mathbf{E}} \Gamma_{EE'}$ et $\Gamma = \bigcup_{E \in \mathbf{E}} \Gamma_E$. En supposant que les maillages sont conformes et compatibles sur Γ , le problème éléments finis $\mathbf{K}q = f$ peut se réécrire comme l'équilibre de chaque sous-domaine sous des contraintes aux interfaces :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^{(E)} & \mathbf{K}_{i\Gamma}^{(E)} \\ \mathbf{K}_{\Gamma i}^{(E)} & \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^{(E)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i^{(E)} \\ q_\Gamma^{(E)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i^{(E)} \\ f_\Gamma^{(E)} + \lambda_\Gamma^{(E)} \end{bmatrix}, \quad \forall (E)_{E \in \mathbf{E}}, \quad (4.10)$$

$$q_\Gamma^{(E)} = q_\Gamma^{(E')} \quad , \quad \text{sur } (\Gamma_{EE'})_{E, E' \in \mathbf{E} | \Gamma_E \cap \Gamma_{E'} \neq \emptyset}, \quad (4.11)$$

$$\lambda_\Gamma^{(E)} = -\lambda_\Gamma^{(E')} \quad , \quad \text{sur } (\Gamma_{EE'})_{E, E' \in \mathbf{E} | \Gamma_E \cap \Gamma_{E'} \neq \emptyset}, \quad (4.12)$$

où, l'indice i indique les inconnues internes et l'indice Γ désigne les inconnues à la frontière des sous-domaines. Les $\lambda_\Gamma^{(E)}$ sont les efforts nodaux exercés par les sous-structures adjacentes (E') sur (E) , à travers l'interface Γ_E . Nous introduisons trois différentes stratégies pour résoudre ce système. Par simplicité, nous limiterons leur présentation à un problème à deux sous-domaines.

Une revue détaillée de ces méthodes et leur généralisation à un grand nombre de sous-domaines peut être trouvée dans [Gosselet et Rey, 2006].

2.2.2.1 Les méthodes primales consistent à se donner les déplacements d'interfaces *a priori* continus. Pour ce faire, on procède à réécrire l'Éq. (4.10) de façon à éliminer les inconnues internes et à se ramener aux seules inconnues $q_\Gamma^{(E)}$:

$$\mathbf{S}_p^{(E)} q_\Gamma^{(E)} = b_p^{(E)} + \lambda_\Gamma^{(E)} \quad (E = 1, 2), \quad (4.13)$$

avec :

$$\mathbf{S}_p^{(E)} = \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^{(E)} - \mathbf{K}_{\Gamma i}^{(E)} (\mathbf{K}_{ii}^{(E)})^{-1} \mathbf{K}_{i\Gamma}^{(E)} \quad ; \quad b_p^{(E)} = f_\Gamma^{(E)} - \mathbf{K}_{\Gamma i}^{(E)} (\mathbf{K}_{ii}^{(E)})^{-1} f_i^{(E)}.$$

où, $\mathbf{S}_p^{(E)}$ et $b_p^{(E)}$ désignent respectivement le complément de Schur et le second membre condensé du sous-domaine E sur l'interface Γ_E . Le problème d'équilibre global (Éqs. 4.11, 4.12 et 4.13), en fonction de l'inconnue $q_\Gamma = q_\Gamma^{(1)} = q_\Gamma^{(2)}$, s'écrit :

$$\boxed{\left[\mathbf{S}_p^{(1)} + \mathbf{S}_p^{(2)} \right] q_\Gamma = b_p^{(1)} + b_p^{(2)} \quad (4.14)}$$

Après résolution du système (4.14), on obtient les solutions internes $q_i^{(E)}$ par :

$$q_i^{(E)} = (\mathbf{K}_{ii}^{(E)})^{-1} (f_i^{(E)} - \mathbf{K}_{i\Gamma}^{(E)} q_\Gamma) \quad (E = 1, 2).$$

L'efficacité de la méthode du complément de Schur primal dépend énormément du conditionnement du système à résoudre. Dans la pratique, on emploie systématiquement un préconditionneur, c'est-à-dire, une matrice \mathbf{M}^{-1} telle que $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}_p$ soit la mieux conditionnée possible. Appliquer ce type de préconditionneur à un résidu revient à résoudre un problème de Neumann sur chaque sous-domaine. Toutefois, tous les sous-domaines ne possèdent généralement pas suffisamment de conditions en déplacement (sous-domaines dits *flottants*), c'est-à-dire, leurs compléments de Schur ne sont pas inversibles. L'approche BBD propose de pré-équilibrer les efforts exercés sur chaque sous-domaine à l'aide d'un problème grossier auxiliaire. On obtient ainsi des problèmes locaux bien posés tout en assurant l'extensibilité.

2.2.2.2 Les méthodes duales consistent, inversement aux méthodes primales, à se donner des efforts d'interface *a priori* équilibrés. On exprime alors les déplacements d'interface, Éq. (4.13), en fonction de $\lambda_\Gamma^{(E)}$. La difficulté réside dans le fait que les compléments de Schur des sous-domaines flottants ne sont pas inversibles. Il est cependant possible d'écrire pour chaque sous-domaine [Farhat et Roux, 1991, 1992] :

$$q_\Gamma^{(E)} = \mathbf{S}_p^{(E)+} (b_p^{(E)} + \lambda_\Gamma^{(E)}) + \mathbf{R}^{(E)} \alpha^{(E)} \quad (E = 1, 2), \quad (4.15)$$

où, $\mathbf{S}_p^{(E)+}$ est une *pseudo-inverse* de $\mathbf{S}_p^{(E)}$, $\mathbf{R}^{(E)}$ désigne la matrice des mouvements de solide rigide d'interface du sous-domaine (E) (*ie.* une base du noyau de $\mathbf{S}_p^{(E)}$) et $\alpha^{(E)}$ est le vecteur de coefficients d'une combinaison linéaire des modes rigides à déterminer au cours de la résolution. L'équilibre correspond alors à l'orthogonalité avec tous les champs de mouvements de solide rigide, ce qui se traduit par l'équation d'admissibilité suivante :

$$\mathbf{R}^{(E)T} (b_p^{(E)} + \lambda_\Gamma^{(E)}) = 0 \quad (E = 1, 2). \quad (4.16)$$

Le problème condensé global, en termes des inconnues $\lambda_\Gamma = \lambda_\Gamma^{(1)} = -\lambda_\Gamma^{(2)}$, $\alpha^{(1)}$ et $\alpha^{(2)}$, après injection des équilibres locaux condensés (4.15) dans l'équation d'admissibilité cinématique (4.11), couplé aux conditions (4.11) et (4.16), s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_p^{(1)+} + \mathbf{S}_p^{(2)+} & \mathbf{R}^{(1)} & -\mathbf{R}^{(2)} \\ \mathbf{R}^{(1)T} & 0 & 0 \\ \mathbf{R}^{(2)T} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_\Gamma \\ \alpha^{(1)} \\ \alpha^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_p^{(1)+} b_p^{(1)} + \mathbf{S}_p^{(2)+} b_p^{(2)} \\ -\mathbf{R}^{(1)} \\ -\mathbf{R}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

La méthode FETI propose de résoudre le système (4.17) à l'aide d'une technique de type gradient conjugué projeté, où l'étape de projection est associée à la contrainte d'équilibre des sous-domaines, définissant ainsi un problème grossier qui assure l'extensibilité de la méthode [Farhat et Roux., 1994].

2.2.2.3 Les méthodes mixtes n'imposent *a priori* ni continuité ni équilibre aux interfaces et forment le problème d'interface à la fois en termes d'efforts et de déplacements. On se réfère ici à la méthode FETI2-champs proposée par [Series, Feyel, et Roux, 2003]. Une autre méthode mixte, l'approche micro/macro LaTIn, sera détaillée dans la suite de cette partie (Sec. 2.2.2.4).

L'idée essentielle de la méthode FETI2-champs est de réécrire les conditions d'interface en fonction d'une nouvelle variable d'interface : $\mu_\Gamma^{(E)} = \lambda_b^{(E)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(E)} q_\Gamma^{(E)}$, où les matrices $\mathbf{k}_\Gamma^{(E)}$ peuvent être interprétées comme des raideurs d'interface. Les équations d'admissibilité cinématique (4.11) et d'admissibilité statique (4.12) d'interface sont équivalentes au système suivant :

$$\begin{cases} \mu_\Gamma^{(1)} + \mu_\Gamma^{(2)} - \left(\mathbf{k}_\Gamma^{(1)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(2)} \right) q_\Gamma^{(1)} = 0 \\ \mu_\Gamma^{(1)} + \mu_\Gamma^{(2)} - \left(\mathbf{k}_\Gamma^{(1)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(2)} \right) q_\Gamma^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Les problèmes locaux condensés de chaque sous-structure deviennent :

$$\left(\mathbf{S}_d^{(E)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(E)} \right) q_\Gamma^{(E)} = \mu_\Gamma^{(E)} + b_p^{(E)} \quad (E = 1, 2).$$

Ces problèmes sont inversés sous réserve de régularisation de $\mathbf{S}_d^{(E)}$ par $\mathbf{k}_\Gamma^{(E)}$. Les solutions obtenues sont injectées dans l'admissibilité d'interface (4.18), ce qui conduit au système suivant, en termes des variables mixtes :

$$\mathbf{S}_m \mu_\Gamma = b_m \quad (4.19)$$

avec :

$$\mathbf{S}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_d & \mathbf{I}_d - (\mathbf{k}_\Gamma^{(1)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(2)}) (\mathbf{S}_d^{(2)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(2)})^{-1} \\ \mathbf{I}_d - (\mathbf{k}_\Gamma^{(1)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(2)}) (\mathbf{S}_d^{(1)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(1)})^{-1} & \mathbf{I}_d \end{pmatrix}$$

$$\mu_\Gamma = \begin{pmatrix} \mu_\Gamma^{(1)} \\ \mu_\Gamma^{(2)} \end{pmatrix} ; \quad b_m = \begin{pmatrix} (\mathbf{k}_\Gamma^{(1)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(2)}) (\mathbf{S}_d^{(2)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(2)})^{-1} b_p^{(1)} \\ (\mathbf{k}_\Gamma^{(1)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(2)}) (\mathbf{S}_d^{(1)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(1)})^{-1} b_p^{(2)} \end{pmatrix}$$

On observe qu'en choisissant $\mathbf{k}_\Gamma^{(1)} = \mathbf{S}_p^{(2)}$ et $\mathbf{k}_\Gamma^{(2)} = \mathbf{S}_p^{(1)}$, l'opérateur \mathbf{S}_m devient l'identité et la solution est trouvée de manière immédiate. Les matrices $\mathbf{k}_\Gamma^{(E)}$ doivent donc approcher le complément de Schur du voisinage afin d'obtenir le meilleur conditionnement possible, ce qui peut néanmoins s'avérer très coûteux.

On remarque enfin que la résolution de (4.19) pose aussi des problèmes d'extensibilité et la définition d'un problème grossier devient alors nécessaire. En pratique, on utilise le même type de problème grossier que pour les méthodes FETI ou BDD.

Résolution de problèmes non-linéaires

Pour traiter des problèmes non linéaires de grande taille, différentes approches de sous-structuration ont été proposées. Les plus répandues utilisent une décomposition de domaine pour résoudre une série de problèmes linéarisés. Cette démarche est notamment utilisée au sein des solveurs NKS (*Newton-Krylov-Schur*), où une itération de la méthode est composée de trois étapes : une procédure de linéarisation pour calculer les rigidités tangentes et le résidu dans chaque sous-structure ; l'assemblage et résolution du problème condensé primal aux interfaces par une méthode itérative de Krylov ; une étape de localisation linéaire des déplacements à l'intérieur de chaque sous-domaine (voir Fig. 4.16).

L'emploi de méthodes d'accélération adaptées, basées sur la réutilisation des sous-espaces de Krylov des résolutions précédentes, telles que les techniques GIRKS (*Generalized Iterative Reuse of Krylov Subspaces*) [Risler et Rey, 2000], GKC (*Generalized Krylov Correction*) [Rey, 1996] ou SRKS (*Selective Reuse of Krylov Subspaces*) [Gosselet et Rey, 2002], offrent de bonnes performances et une grande stabilité dans le cadre de la résolution de problèmes de non-linéarités diffuses.

Pour le traitement du flambage localisé, [Cresta, Allix, Rey, et Guinard, 2007; Hinojosa, Allix, Guidault, et Cresta, 2011] proposent d'effectuer des itérations non linéaires locales indépendantes sur chaque sous-domaine avec des conditions de raccord d'interface de type Robin. L'étape de localisation linéaire est ainsi remplacée par un calcul non linéaire sur chaque sous-domaine (voir Fig. 4.17). Une technique similaire est proposée par [Pebrel, Rey, et Gosselet, 2008], dans le cadre de l'élasticité endommageable, où des résolutions globales linéaires de type FETI et des localisations non linéaires par sous-domaine à effort imposé sont effectués.

Une autre technique utilisée pour résoudre des problèmes non linéaires est la méthode LaTIn micro-macro qu'on présente dans la suite.

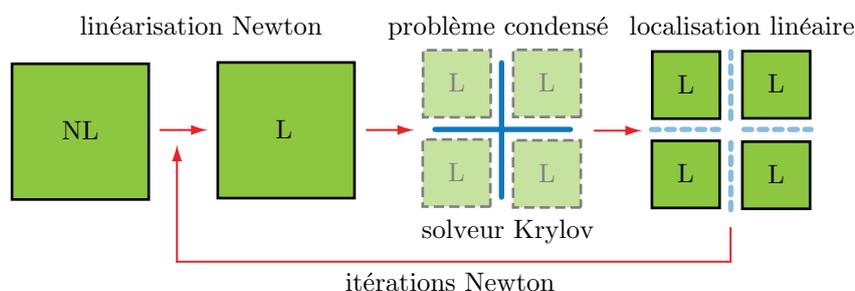


Fig. 4.16: Principe de la méthode NKS.

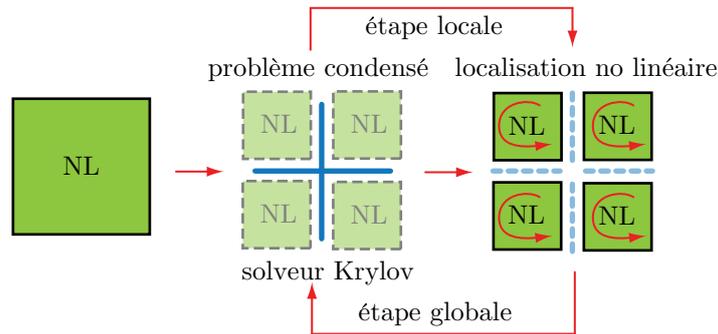


Fig. 4.17: Principe de la méthode de localisation non linéaire.

2.2.2.4 La méthode LaTIn micro-macro est une technique multiéchelle de décomposition de domaine mixte, reposant sur le solveur non linéaire LaTIn [Ladevèze et Nouy, 2003]. L'idée essentielle de cette méthode consiste à considérer les interfaces entre sous-domaines comme des identités mécaniques à part entière. Chaque interface possède ainsi une discrétisation indépendante et porte des champs de déplacements et d'efforts. Il est alors tout à fait possible d'attribuer aux interface des comportements complexes.

L'aspect multiéchelle est donné par la définition d'un problème grossier qui vérifie des conditions d'admissibilité d'interface, grâce à la définition d'un espace macroscopique et le calcul d'opérateurs homogénéisés des sous-structures au sens de ces quantités macroscopiques. Les composantes macroscopiques sont les parties à grande longueur de variation de la solution qui assurent l'extensibilité de la stratégie.

L'algorithme LaTIn (Sec. 1.4) est utilisé pour résoudre le problème sous-structuré. Normalement, l'admissibilité macroscopique des interfaces et l'admissibilité des sous-structures sont incluses dans le groupe d'équations linéaires, tandis que les comportements des interfaces, ainsi que le comportement non linéaire des sous-structures sont inclus dans le groupe des équations locales.

Cette stratégie s'est montrée efficace dans de nombreux domaines. On pourra citer les travaux de [Champany et al., 1999; Ladevèze et al., 2002; Roulet, Champany, et Boucard, 2011] pour l'étude du contact, ceux de [Guidault et al., 2008] pour les calculs de fissuration avec intégration de la XFEM ou les travaux de [Kerfriden et al., 2009] pour l'analyse du délaminage de stratifiés. Elle a également été utilisée pour le traitement de structures fortement hétérogènes [Ladevèze et al., 2001], pour la résolution de problèmes de composites stratifiés [Ladevèze, Lubineau, et Violeau, 2006], de problèmes multiphysiques [Néron et Dureisseix, 2008], de problèmes en grandes transformations [Boucard et al., 1997] et dans la réduction de modèles [Ladevèze, Passieux, et Néron, 2010].

Nous sommes particulièrement intéressés à la stratégie à trois échelles pour le traitement du délaminage présentée dans [Kerfriden et al., 2009]. Dans la deuxième partie de ce document, nous proposons une extension de cette méthode pour le couplage flambage-délaminage.

Bilan du chapitre

Compte tenu des objectifs de ce travail, nous avons porté une attention particulière aux techniques classiques permettant de traiter des problèmes non linéaires, telles que les méthodes itératives de Newton et ses dérivées, la méthode MAN et la méthode LaTIn. La deuxième partie de ce chapitre a été consacrée aux méthodes multiéchelles. Deux familles ont été distinguées : les méthodes de modélisation multiéchelle qui répondent à la problématique de la modélisation détaillée hors portée ; et les méthodes de calcul multiéchelle pour la résolution de problèmes numériques à grand nombre de degrés de liberté.

Ce chapitre met fin à l'étude bibliographique sur les problématiques d'intérêt. Dans la suite, nous proposons une stratégie multiéchelle pour le couplage flambage-délaminage basée sur la méthode LaTIn micro-macro, ainsi que son optimisation pour les structures élancées.

Deuxième partie

Une stratégie multiéchelle pour l'analyse du couplage flambage-délaminage de composites stratifiés

Une méthode multiéchelle pour le couplage flambage-délaminage

Une stratégie multiéchelle de décomposition de domaine mixte basée sur l'algorithme de résolution LaTin est ici introduite dans le cadre de non-linéarités géométriques et de l'endommagement d'interface avec la possibilité de contact.

Sommaire

1	Introduction	94
2	Problème de référence	95
2.1	Cinématique d'interface	95
2.2	Formulation sous-structurée	96
3	Stratégie de résolution numérique	99
3.1	Choix des espaces d'approximation	99
3.2	Introduction de l'échelle macroscopique	100
3.3	Admissibilité macroscopique	104
3.4	Algorithme itératif de résolution	105
3.5	Résolution du problème macroscopique	115
3.6	Implémentation de la stratégie	119

1 Introduction

La stratégie de décomposition de domaine multiéchelle que nous introduisons dans ce chapitre est basée sur la méthode LaTIn micro-macro (Sec. 2.2.2.4, Chap. 4) qui a été déjà appliquée à des problèmes de délaminage de stratifiés en petites perturbations par [Kerfriden et al., 2009]. Cette dernière repose sur les points fondamentaux suivants :

1. *Une décomposition de la structure en sous-structures (entités mécaniques volumiques) et en interfaces (entités mécaniques surfaciques).* Les interfaces permettent d'assurer la transmission des efforts et des déplacements entre les sous-structures ainsi que la vérification de comportements surfaciques. Conséquent, le problème de référence issu du mésomodèle (Sec. 1.2.1.5, Chap. 3) est naturellement sous-structuré et les conditions de décohésion et de contact sont gérées par les interfaces de la décomposition de domaine.
2. *Une séparation d'échelle réalisée sur les quantités d'interface.* Pour assurer l'extensibilité de la stratégie, des conditions d'admissibilité globale sont vérifiées sur les champs macroscopiques d'interface ayant une influence globale sur la structure.
3. *Un problème non linéaire résolu par l'algorithme LaTIn à chaque piquet de temps d'un schéma incrémental.* Bien que la méthode LaTIn (Large Time Increment) soit une stratégie globale en temps pour la résolution de problèmes d'évolution non linéaires, ici (problèmes quasistatiques) cette caractéristique n'est pas exploitée.
4. *Une procédure de résolution itérative LaTIn à deux étapes.* On cherche successivement des solutions vérifiant les équations d'admissibilité des sous-structures et les conditions macroscopiques sur les interfaces (étape linéaire), ainsi que des solutions vérifiant les conditions de raccord aux interfaces (étape locale).
5. *Une décomposition de domaine primale BDD pour la résolution du problème macroscopique.* Pour les problèmes à grand nombre d'interfaces, la résolution directe du problème macroscopique n'est plus envisageable, des super-sous-structures et des super-interfaces sont alors définies et une résolution itérative du problème macroscopique, par une méthode BDD, est réalisée.

Pour introduire les grandes transformations à la stratégie précédente, nous proposons une formulation Lagrangienne totale et le modèle d'interface cohésive de [Allix et Corigliano, 1999]. Dans un premier temps, nous avons essayé d'isoler les non-linéarités géométriques des sous-structures dans l'étape locale, en utilisant une direction de recherche supplémentaire reliant les tenseurs $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{F}}^t$, c'est-à-dire, nous avons voulu garder un caractère linéaire aux équations d'équilibre en rapportant toutes les non-linéarités au comportement local. Cette tâche s'est rendue difficile, à cause de la nature non symétrique des tenseurs $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{F}}^t$ qui entraîne l'absence d'une loi de comportement objective des liants. Cette idée n'ayant pas débouché dans un

temps raisonnable, nous avons donc choisi d'inclure les non-linéarités géométriques *via* les tenseurs $\underline{\pi}$ et \underline{E} dans l'étape d'admissibilité.

Dans la suite, nous décrivons la méthode alors proposée. D'abord, le problème de référence est rappelé, ensuite, la stratégie de résolution LaTin à trois échelles est présentée dans le cadre des non-linéarités géométriques et surfaciques.

2 Problème de référence

Le problème de référence et ses hypothèses ont été introduits dans la Sec. 2.2 du Chap. 1. On rappelle que le stratifié \mathbf{E} étudié (voir Fig. 5.1) occupe un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ dans la configuration actuelle \mathcal{C} . Il est composé d'un empilement de N_P plis P de masse volumique ρ_P occupant un domaine Ω_P de bord $\partial\Omega_P$, tel que $\Omega = \cup_{P \in \mathbf{E}} \Omega_P$. Un pli P est connecté au pli adjacent P' par l'interface $\Gamma_{PP'} = \partial\Omega_P \cap \partial\Omega_{P'}$. L'ensemble de plis adjacents au pli P est noté \mathbf{V}_P et l'ensemble d'interfaces est noté $\Gamma = \cup_{P \in \mathbf{E}} \Gamma_P$, $\Gamma_P = \cup_{P' \in \mathbf{V}_P} \Gamma_{PP'}$. Une distribution d'efforts \underline{F}_d (respectivement une distribution de déplacements \underline{u}_d) est imposée sur la partie $\partial\Omega_{F_d}$ (respectivement $\partial\Omega_{u_d}$) de $\partial\Omega$. Les efforts de volume sont notés \underline{f}_d . On note \underline{u}_P le champ de déplacement du pli P .

L'indice $(\cdot)_0$ d'une quantité fait allusion à la configuration initiale ou non déformée, pour faire la distinction avec sa représentation dans la configuration actuelle ou déformée.

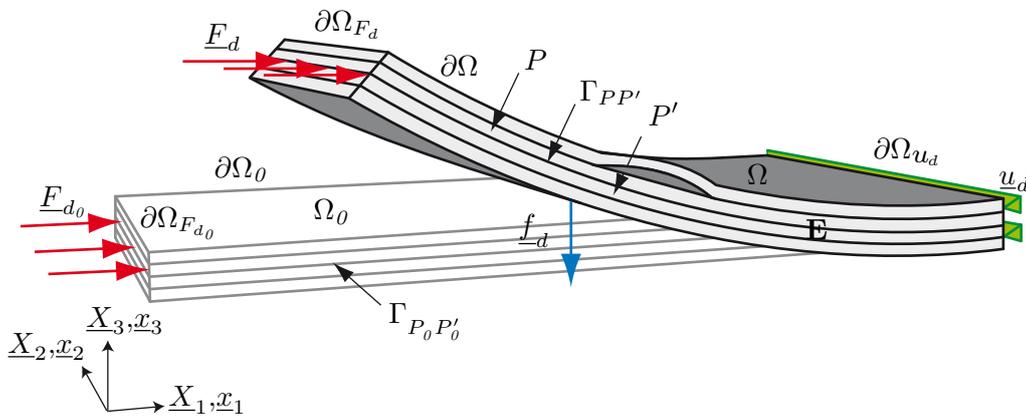


Fig. 5.1: Problème de référence : configurations initiale et déformée.

2.1 Cinématique d'interface

Si l'on considère que le saut de déplacement est faible dans les interfaces qui ne sont pas encore complètement endommagées ou dans la région de contact (Hyp. 9, Sec. 2.2, Chap. 1), alors on peut définir le déplacement de l'interface $\Gamma_{PP'}$ comme

la valeur moyenne des déplacements des plis adjacents P et P' :

$$\langle \underline{u}_{PP'} \rangle = \frac{1}{2}(\underline{u}_{P'} + \underline{u}_P), \text{ on } \Gamma_{PP'}.$$

Ainsi, l'interface déformée $\Gamma_{PP'}$ est définie par :

$$\Gamma_{PP'} \equiv \{ \underline{x} \mid \underline{x} = \underline{X} + \langle \underline{u}_{PP'} \rangle; \text{ on } \Gamma_{PP'} \}.$$

Avec cette dernière définition, l'interface $\Gamma_{PP'}$ est interprétée comme la surface moyenne entre les plis déformés P et P' et elle peut être considérée géométriquement coïncidente avec les plis P et P' (même aire et même orientation). De ce fait, on peut définir le tenseur gradient de la transformation de l'interface $\Gamma_{PP'}$, comme :

$$\underline{\underline{F}}_{PP'} = \underline{\underline{\nabla}}_0 \langle \underline{u}_{PP'} \rangle + \underline{\underline{I}}_d, \text{ on } \Gamma_{PP'}.$$

Le saut de déplacement est donné par :

$$[\underline{u}_{PP'}] = \underline{u}_{P'} - \underline{u}_P, \text{ on } \Gamma_{PP'}.$$

L'équation de Nanson¹ qui décrit la déformation d'un élément de surface, permet d'écrire le vecteur normal unitaire \underline{n}_3 de chaque point de l'interface déformée $\Gamma_{PP'}$ par :

$$\underline{n}_3 = \frac{\underline{\underline{F}}_{PP'}^{-t} \underline{N}_3}{\| \underline{\underline{F}}_{PP'}^{-t} \underline{N}_3 \|}, \quad (5.1)$$

où \underline{N}_3 est le vecteur unitaire normal à $\Gamma_{P_0P'_0}$ sortant de P_0 vers P'_0 (voir Fig. 5.2).

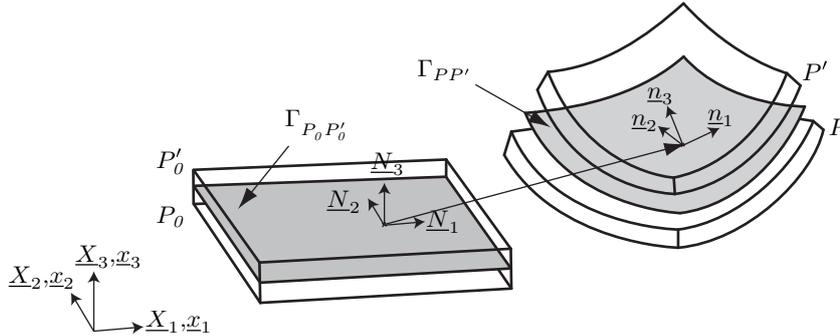


Fig. 5.2: Vecteurs normaux à l'interface : configuration initiale et déformée.

2.2 Formulation sous-structurée

La structure stratifiée \mathbf{E} est décomposée en sous-structures et interfaces sans recouvrement comme représenté sur la Fig. 5.3. Une sous-structure E définie sur

1. $\underline{n}_3 d\Gamma_{PP'} = \det(\underline{\underline{F}}_{PP'}) \underline{\underline{F}}_{PP'}^{-t} \underline{N}_3 d\Gamma_{P_0P'_0}$

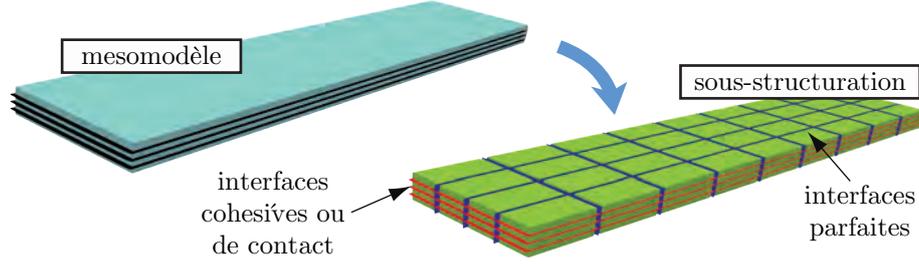


Fig. 5.3: Sous-structuration du problème de référence.

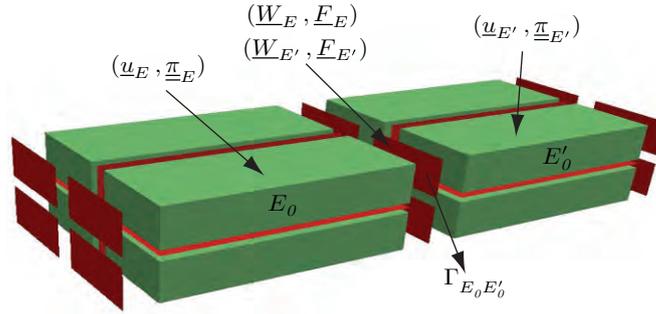


Fig. 5.4: Champs inconnus des sous-structures et des interfaces.

un domaine Ω_E est connectée à une sous-structure adjacente E' par l'intermédiaire d'une interface $\Gamma_{EE'} = \partial\Omega_E \cap \partial\Omega_{E'}$ (respectivement $\Gamma_{E_0E'_0} = \partial\Omega_{E_0} \cap \partial\Omega_{E'_0}$ dans la configuration initiale \mathcal{C}_0), voir Fig. 5.4. On note \mathbf{V}_E l'ensemble des structures adjacentes E' de E telles que $\Omega_E \cap \Omega_{E'} \neq \emptyset$.

On définit le champ de déplacement par \underline{u}_E , le tenseur de déformation de Green-Lagrange \underline{E}_E , le taux de déformation Lagrangien par $\dot{\underline{E}}_E$, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff par $\underline{\pi}_E$ et le tenseur gradient de la transformation par \underline{F}_{E_0} à chaque point de la sous-structure E . Les champs \underline{u}_E et $\underline{\pi}_E$ sont recherchés dans les espaces respectifs \mathcal{U}_E et \mathcal{S}_E .

L'entité surfacique $\Gamma_{EE'}$ impose des distributions d'effort \underline{F}_E ($\underline{F}_{E'}$) et de déplacement \underline{W}_E ($\underline{W}_{E'}$) à E (respectivement à E'). Ces distributions sont recherchées dans les espaces respectifs $\mathcal{W}_{EE'}$ et $\mathcal{F}_{EE'}$. On définit le saut de déplacement comme $[\underline{W}_E] = \underline{W}_{E'} - \underline{W}_E$, la valeur moyenne par $\langle \underline{W}_E \rangle = \frac{1}{2}(\underline{W}_{E'} + \underline{W}_E)$ et le gradient de la transformation comme $\underline{F}_{EE'} = \underline{\nabla}_0 \langle \underline{W}_E \rangle + \underline{I}_d$.

Sur la sous-structure E , telle que $\Gamma_E \cap (\partial\Omega_{F_d} \cup \partial\Omega_{u_d}) \neq \emptyset$, les conditions aux limites $(\underline{F}_d, \underline{u}_d)$ sont transmises par introduction d'une interface particulière Γ_{E_d} . On note l'ensemble des interfaces de la sous-structure E par $\Gamma_E = \bigcup_{E' \in \mathbf{V}_E} \Gamma_{EE'} \cup \Gamma_{E_d}$. Les champs cinématiques et statiques des interfaces de E sont recherchés respectivement dans les espaces $\mathcal{W}_E = \prod_{E' \in \mathbf{V}_E} \mathcal{W}_{EE'}$ et $\mathcal{F}_E = \prod_{E' \in \mathbf{V}_E} \mathcal{F}_{EE'}$. On note $\mathbf{\Gamma}$ l'ensemble des interfaces de la structure.

Le problème sous-structuré d'évolution quasistatique est résolu pas à pas. À

chaque piquet de temps t_n , où $n \in [1, \dots, N]$, le problème consiste à trouver $s = (s_E)_{E \in \mathbf{E}}$, où $s_E = (\underline{u}_E, \underline{\pi}_E, \underline{W}_E, \underline{F}_{E_0}) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{S}_E \times \mathcal{W}_E \times \mathcal{F}_E$ vérifie :

- Admissibilité cinématique non linéaire :

$$\underline{E}_E = \frac{1}{2} \left(\underline{\nabla}_0 \underline{u}_E + {}^t \underline{\nabla}_0 \underline{u}_E + {}^t \underline{\nabla}_0 \underline{u}_E \underline{\nabla}_0 \underline{u}_E \right), \text{ dans } \Omega_{E_0} \quad (5.2)$$

$$\underline{u}_E|_{\partial\Omega_E} = \underline{W}_E|_{\Gamma_E}, \text{ sur } \Gamma_E \quad (5.3)$$

- Équilibre non linéaire de la sous-structure E :

$$\forall (\underline{u}_E^*, \underline{W}_E^*) \in \mathcal{U}_E^0 \times \mathcal{W}_E^0, \text{ tels que } \underline{u}_E^*|_{\partial\Omega_{E_0}} = \underline{W}_E^*|_{\Gamma_{E_0}},$$

$$\int_{\Omega_{E_0}} \underline{\pi}_E : \underline{\dot{E}}(\underline{u}_E^*) d\Omega_0 = \int_{\Omega_{E_0}} \rho_{E_0} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_E^* d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{E_0}} \underline{F}_{E_0} \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma_0, \quad (5.4)$$

$$\text{où, } \underline{\dot{E}}(\underline{u}_E^*) = \frac{1}{2} (\underline{\nabla}_0 \underline{u}_E^* + {}^t \underline{\nabla}_0 \underline{u}_E^* + {}^t \underline{\nabla}_0 \underline{u}_E^* \underline{\nabla}_0 \underline{u}_E^* + {}^t \underline{\nabla}_0 \underline{u}_E^* \underline{\nabla}_0 \underline{u}_E^*).$$

- Comportement orthotrope linéaire des sous-structures :

$$\underline{\pi}_E = \underline{C}_{\underline{E}}^0 \underline{E}_E, \text{ dans } \Omega_{E_0} \quad (5.5)$$

- Relation constitutive des interfaces entre sous-structures adjacentes :

$$\mathcal{R}_{EE'}(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'}, \underline{F}_{E_0}, \underline{F}_{E'_0}) = \underline{0}, \text{ sur } \Gamma_{E_0 E'_0} \in \Gamma_{E_0} \quad (5.6)$$

- Relation constitutive des interfaces transmettant les conditions aux limites :

$$\mathcal{R}_{E_d}(\underline{W}_E, \underline{F}_{E_0}, \underline{u}_{dE}, \underline{F}_{dE_0}) = \underline{0}, \text{ sur } \Gamma_{E_d} \quad (5.7)$$

La relation de comportement écrite de manière générale sous la forme $\mathcal{R}_{EE'} = \underline{0}$ regroupe l'équation constitutive et l'équilibre local des interfaces entre sous-structures adjacentes. Dans notre cas d'étude, on peut utiliser trois types de comportement sur chaque point d'interface :

- Interfaces parfaites :

$$\text{sur } \Gamma_{E_0 E'_0} : \begin{cases} \underline{F}_E + \underline{F}_{E'} = \underline{0} \\ [\underline{W}_E] = \underline{0} \end{cases}$$

- Interfaces cohésives :

$$\text{sur } \Gamma_{E_0 E'_0} : \begin{cases} \underline{F}_E + \underline{F}_{E'} = \underline{0} \\ \mathcal{A}_{PP'}(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'}, \underline{F}_E, \underline{F}_{E'}) = \underline{0} \end{cases}$$

- Interfaces de contact unilatéral avec frottement :

$$\text{sur } \Gamma_{E_0 E'_0} : \begin{cases} \underline{F}_E + \underline{F}_{E'} = \underline{0} \\ \underline{n}_3 \cdot [\underline{W}_E] \geq 0 \text{ et } \underline{n}_3 \cdot \underline{F}_E \leq 0 \\ (\underline{n}_3 \cdot [\underline{W}_E])(\underline{n}_3 \cdot \underline{F}_E) = 0 \\ \text{si } \|\mathbf{P}\underline{F}_E\| \leq \mu |\underline{n}_3 \cdot \underline{F}_E| \text{ alors } \mathbf{P}[\underline{W}_E] = \underline{0} \text{ (adhérence)} \\ \text{si } \|\mathbf{P}\underline{F}_E\| = \mu |\underline{n}_3 \cdot \underline{F}_E| \text{ alors } \exists \lambda > 0 : \mathbf{P}[\underline{W}_E] = \lambda \mathbf{P}\underline{F}_E \text{ (gliss.)} \end{cases}$$

La relation $\mathcal{A}_{PP'}$ représente la loi d'interface cohésive définie entre la variable primale d'interface $[W_E]$ et la variable duale \underline{F}_E . \mathbf{P} est l'opérateur de projection tangentielle et \underline{n}_3 est le vecteur unitaire normal à $\Gamma_{EE'}$ sortant de E vers E' au point d'intérêt (voir Fig. 5.2). Ces comportements ont été ici donnés dans la configuration déformée, leur traitement sera détaillé dans la Sec. 3.4.1.

Les conditions aux limites extérieures exercées sur E sont appliquées par l'intermédiaire d'interfaces de deux types :

- Si $\Gamma_{E_d0} \in \partial\Omega_{F_d0}$, la relation $\mathcal{R}_{E_d} = \underline{0}$ s'écrit :

$$\underline{F}_E - \underline{F}_{dE} = \underline{0}, \text{ sur } \Gamma_{E_d0}$$

- Si $\Gamma_{E_d0} \in \partial\Omega_{u_d}$, la relation $\mathcal{R}_{E_d} = \underline{0}$ s'écrit :

$$W_E - u_{dE} = \underline{0}, \text{ sur } \Gamma_{E_d0}$$

D'autres types de conditions aux limites (symétrie, serrage...) peuvent être imposés au problème en réécrivant le comportement des interfaces particulières Γ_{E_d} .

Remarque : L'admissibilité des forces d'interface peut aisément être écrite sur la configuration de référence grâce à la coïncidence géométrique de l'interface déformée (hypothèse de saut de déplacement faible dans les régions de décohésion et de contact).

3 Stratégie de résolution numérique

Les points clés concernant la séparation des échelles micro-macro de la stratégie sont ici détaillés ainsi que l'algorithme de résolution basé sur la méthode LATIn. Ensuite, l'introduction de la troisième échelle dans la résolution du problème macroscopique est décrite. Enfin, nous présentons quelques précisions concernant l'implantation de l'approche dans le code orienté objet développé au LMT-Cachan.

3.1 Choix des espaces d'approximation

Les problèmes sur les sous-structures et les interfaces sont résolus numériquement en utilisant une technique éléments finis standard. Ainsi, le déplacement \underline{u}_E appartient à \mathcal{U}_E^h , espace des déplacements linéaires par morceaux sur E . Les éléments utilisés pour discrétiser les sous-structures dans les cas 3D ici traités sont des tétraèdres à 4 nœuds et des wedges à 6 nœuds. Dans le cadre de la méthode de décomposition de domaine mixte, une attention particulière doit être portée à la discrétisation des champs d'interface.

Si l'on choisit des éléments finis \mathcal{P}_1 pour les déplacements, un choix naturel est de prendre des fonctions constantes par morceaux comme espace d'approximation pour les interefforts. Cependant, une telle discrétisation génère des modes d'oscillation

parasites qui conduisent à des instabilités numériques. Une démarche usuellement retenue pour éviter ces inconvénients est de choisir les champs \underline{F}_E et \underline{W}_E dans le même espace de fonctions constantes par morceaux sur Γ_E ($\mathcal{W}_E^h = \mathcal{F}_E^h$) et de pratiquer une surdiscrétisation des champs déplacement de sous-structures [Ladevèze et al., 2002; Nouy, 2003]. Deux solutions sont proposées pour effectuer cette dernière étape. On peut choisir soit de raffiner localement, près des bords, le maillage des sous-structures (solution de type « h »), soit d'augmenter le degré d'interpolation des fonctions de forme des éléments de bord des sous-structures (solution de type « p ») (voir Fig. 5.5). On utilise, pour les travaux présentés dans ce mémoire, le raffinement de type « h ».

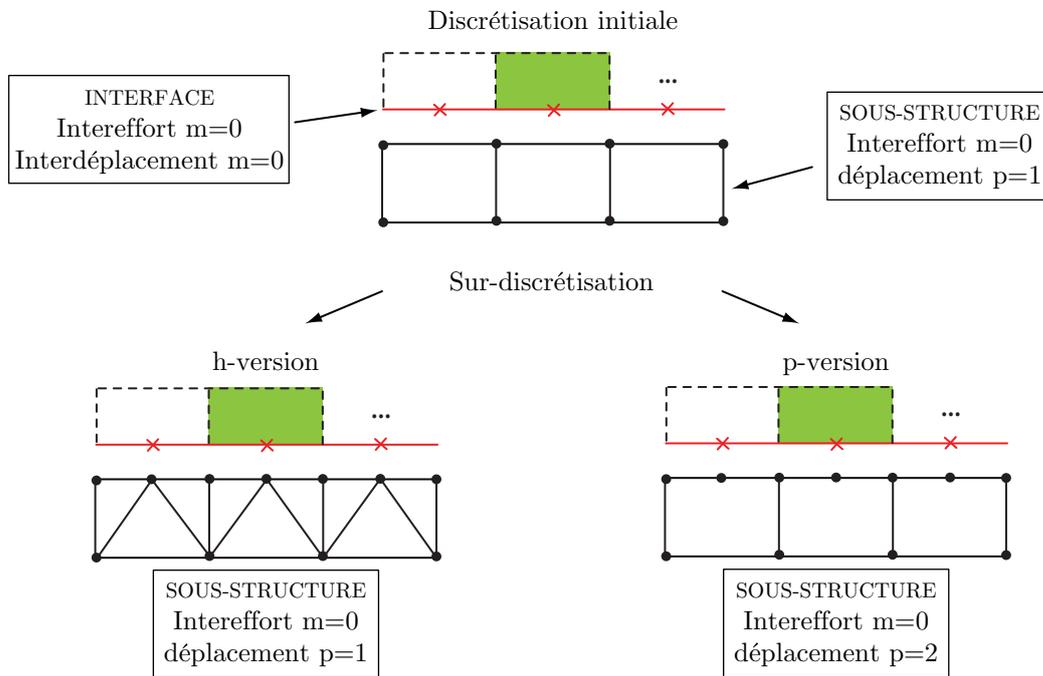


Fig. 5.5: Discrétisation des champs d'interface et de sous-structure.

3.2 Introduction de l'échelle macroscopique

Pour garantir l'extensibilité numérique de la méthode, [Ladevèze et Nouy, 2003] proposent d'imposer systématiquement, lors de la résolution des problèmes sur chaque sous-structure, la vérification de contraintes d'admissibilité globales. Dans un but d'efficacité, cette vérification est faite uniquement sur des quantités macroscopiques d'interface, lesquelles doivent transmettre les variations de la solution à grande longueur d'onde pour assurer le transfert d'information entre sous-structures. La construction du problème macroscopique sur les interfaces implique le calcul d'un comportement homogénéisé des sous-structures.

3.2.1 Séparation des échelles

Sur chaque interface $\Gamma_{E_0E'_0}$ et sur les interfaces de bord Γ_{Ed_0} , les champs cinématiques et statiques sont séparés en une partie macroscopique notée $(\cdot)^M$ et une partie microscopique notée $(\cdot)^m$:

$$\forall (\underline{F}_{E_0}, \underline{W}_E) \in \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'}, \quad \begin{cases} \underline{W}_E = \underline{W}_E^M + \underline{W}_E^m \\ \underline{F}_{E_0} = \underline{F}_{E_0}^M + \underline{F}_{E_0}^m \end{cases}$$

Les parties macroscopiques sont recherchées dans des sous-espaces de dimension finie $\mathcal{F}_{EE'}^M$ et $\mathcal{W}_{EE'}^M$ de $\mathcal{F}_{EE'}$ et $\mathcal{W}_{EE'}$ respectivement. Les parties microscopiques sont par suite recherchées dans les espaces $\mathcal{F}_{EE'}^m$ et $\mathcal{W}_{EE'}^m$ définis par les relations de supplémentarité $\mathcal{F}_{EE'}^M \oplus \mathcal{F}_{EE'}^m = \mathcal{F}_{EE'}$ et $\mathcal{W}_{EE'}^M \oplus \mathcal{W}_{EE'}^m = \mathcal{W}_{EE'}$.

Nous introduisons ici la forme bilinéaire de travail sur l'interface $\Gamma_{E_0E'_0}$, qui met en dualité les champs d'efforts et de déplacements :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_{E_0E'_0}} : \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\underline{F}_{E_0}, \underline{W}_E) &\mapsto \langle \underline{F}_{E_0}, \underline{W}_E \rangle_{\Gamma_{E_0E'_0}} = \int_{\Gamma_{E_0E'_0}} \underline{F}_{E_0} \cdot \underline{W}_E \, d\Gamma_0. \end{aligned}$$

Le découplage entre les parties macroscopiques et microscopiques est réalisé au sens des travaux d'interface : les parties macroscopiques (respectivement microscopiques) des efforts d'interface ne travaillent pas dans les déplacements microscopiques (respectivement macroscopiques) d'interface :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{F}_{E_0}, \underline{W}_E) \in \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'}, \\ \langle \underline{F}_{E_0}, \underline{W}_E \rangle_{\Gamma_{E_0E'_0}} = \langle \underline{F}_{E_0}^M, \underline{W}_E^M \rangle_{\Gamma_{E_0E'_0}} + \langle \underline{F}_{E_0}^m, \underline{W}_E^m \rangle_{\Gamma_{E_0E'_0}}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

On définit les espaces des interfaces de E suivants : $\mathcal{W}_E^M = \Pi_{E' \in \mathbf{V}_E} \mathcal{W}_{EE'}^M$ (respectivement $\mathcal{F}_E^M = \Pi_{E' \in \mathbf{V}_E} \mathcal{F}_{EE'}^M$), sous-espace de \mathcal{W}_E (respectivement de \mathcal{F}_E).

Remarque : La relation (5.8) peut s'interpréter comme une relation d'orthogonalité des espaces $\mathcal{W}_{EE'}^M$ et $\mathcal{F}_{EE'}^m$ et des espaces $\mathcal{F}_{EE'}^M$ et $\mathcal{W}_{EE'}^m$, au sens du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_{E_0E'_0}}$. Cette proposition de couplage d'énergie d'interface impose que les espaces aient la même dimension. Une façon de la respecter est alors de choisir un espace macroscopique commun pour les quantités statiques et cinématiques macroscopiques d'interface ($\mathcal{W}_{EE'}^M = \mathcal{F}_{EE'}^M$). Dans l'approche micro-macro, la définition des quantités macro est faite de façon à avoir un sens physique : ce sont des moyennes en espaces des déplacements et des efforts d'interface.

3.2.2 Choix des espaces macroscopiques

Projecteur macroscopique. On définit le projecteur orthogonal $\mathbf{\Pi}_{E_0E'_0}^M$ de l'interface $\Gamma_{E_0E'_0}$, en utilisant la base orthonormée $B_{E_0E'_0}^M = (\underline{e}_{E_0E'_0,i}^M, \dots, \underline{e}_{E_0E'_0,N_M}^M)$ du sous-espace $\mathcal{W}_{EE'}^M$ des quantités d'interface, tel que :

$$\forall(\underline{F}_{E_0}, \underline{W}_E) \in \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'} :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{F}_{E_0}^M = \mathbf{\Pi}_{E_0E'_0}^M \underline{F}_{E_0} = \sum_{i=1}^{N_M} \langle \underline{e}_{E_0E'_0,i}^M, \underline{F}_{E_0} \rangle_{\Gamma_{E_0E'_0}} \underline{e}_{E_0E'_0,i}^M \\ \underline{W}_E^M = \mathbf{\Pi}_{E_0E'_0}^M \underline{W}_E = \sum_{i=1}^{N_M} \langle \underline{e}_{E_0E'_0,i}^M, \underline{W}_E \rangle_{\Gamma_{E_0E'_0}} \underline{e}_{E_0E'_0,i}^M \end{array} \right.$$

Construction de la base macroscopique linéaire. Aucune contrainte n'est *a priori* imposée pour le choix des espaces macroscopiques. Cependant, pour assurer l'extensibilité numérique de la stratégie, la base macroscopique doit pouvoir extraire les résultantes et moments des efforts ainsi que les translations et rotations des déplacements. D'après la propriété de découplage, les parties complémentaires microscopiques sont alors à résultante et moment nuls. Le principe de Saint-Venant assurant qu'un effort à résultante et moment nuls a un effet localisé, les parties microscopiques ont un effet local tandis que les quantités macroscopiques possèdent l'information globale la plus pertinente.

Des études numériques précédentes montrent que l'extraction des parties linéaires des champs d'interface permet d'obtenir l'extensibilité de la méthode, les détails de la construction d'une base macroscopique linéaire pour des interfaces quelconques dans le cadre de la résolution de problèmes tridimensionnels peuvent être trouvés dans [Violeau, 2007]. Les grandes idées de cette construction sont ici rappelées.

On construit la base macroscopique $B_{E_0E'_0}^M$ d'une interface en utilisant les vecteurs propres $(\underline{N}_{E_0E'_0,i})_{i \in \{1,2,3\}}$ de la matrice d'inertie $\mathbf{I}_{E_0E'_0}$, laquelle est définie par :

$$\mathbf{I}_{E_0E'_0} = \int_{\Gamma_{E_0E'_0}} \underline{G}_{E_0E'_0} M \otimes \underline{G}_{E_0E'_0} M d\Gamma_0,$$

où, $\underline{G}_{E_0E'_0}$ (respectivement M) est le centre de gravité (respectivement un point courant) de l'interface $\Gamma_{E_0E'_0}$. $(\underline{N}_{E_0E'_0,i})_{i \in \{1,2,3\}}$ est aussi appelée base principale d'inertie de l'interface $\Gamma_{E_0E'_0}$.

Les vecteurs de $B_{E_0E'_0}^M$ permettant d'extraire les résultantes des efforts d'interface et les translations des déplacements d'interface sont :

$$\begin{aligned} \underline{e}_{E_0E'_0,1}^M &= \underline{N}_{E_0E'_0,1} \\ \underline{e}_{E_0E'_0,2}^M &= \underline{N}_{E_0E'_0,2} \\ \underline{e}_{E_0E'_0,3}^M &= \underline{N}_{E_0E'_0,3} \end{aligned}$$

Les vecteurs de base permettant d'extraire les moments ou rotations des champs d'interface s'écrivent :

$$\begin{aligned}\underline{e}_{E_0E'_0,4}^M &= (\underline{N}_{E_0E'_0,1} \wedge \underline{G}_{E_0E'_0} M) \\ \underline{e}_{E_0E'_0,5}^M &= (\underline{N}_{E_0E'_0,2} \wedge \underline{G}_{E_0E'_0} M) \\ \underline{e}_{E_0E'_0,6}^M &= (\underline{N}_{E_0E'_0,3} \wedge \underline{G}_{E_0E'_0} M)\end{aligned}$$

Ces fonctions sont orthogonales entre elles, grâce à la définition du centre de gravité qui assure que $\int_{\Gamma_{E_0E'_0}} \underline{G}_{E_0E'_0} M d\Gamma_0$, elles doivent encore être normalisées.

L'enrichissement de la base macroscopique linéaire revient à considérer l'interface comme un milieu déformable. On rajoute alors aux six vecteurs de base précédemment définis ceux permettant d'extraire les modes d'extension de l'interface $\Gamma_{E_0E'_0}$:

$$\begin{aligned}\underline{e}_{E_0E'_0,7}^M &= (\underline{N}_{E_0E'_0,1} \cdot \underline{G}_{E_0E'_0} M) \underline{N}_{E_0E'_0,1} \\ \underline{e}_{E_0E'_0,8}^M &= (\underline{N}_{E_0E'_0,2} \cdot \underline{G}_{E_0E'_0} M) \underline{N}_{E_0E'_0,2} \\ \underline{e}_{E_0E'_0,9}^M &= (\underline{N}_{E_0E'_0,3} \cdot \underline{G}_{E_0E'_0} M) \underline{N}_{E_0E'_0,3}\end{aligned}$$

et les modes de cisaillement de l'interface $\Gamma_{E_0E'_0}$:

$$\begin{aligned}\underline{e}_{E_0E'_0,10}^M &= (\underline{N}_{E_0E'_0,2} \cdot \underline{G}_{E_0E'_0} M) \underline{N}_{E_0E'_0,1} + (\underline{N}_{E_0E'_0,1} \cdot \underline{G}_{E_0E'_0} M) \underline{N}_{E_0E'_0,2} \\ \underline{e}_{E_0E'_0,11}^M &= (\underline{N}_{E_0E'_0,1} \cdot \underline{G}_{E_0E'_0} M) \underline{N}_{E_0E'_0,3} + (\underline{N}_{E_0E'_0,3} \cdot \underline{G}_{E_0E'_0} M) \underline{N}_{E_0E'_0,1} \\ \underline{e}_{E_0E'_0,12}^M &= (\underline{N}_{E_0E'_0,3} \cdot \underline{G}_{E_0E'_0} M) \underline{N}_{E_0E'_0,2} + (\underline{N}_{E_0E'_0,2} \cdot \underline{G}_{E_0E'_0} M) \underline{N}_{E_0E'_0,3}\end{aligned}$$

Hormis les fonctions correspondant aux cisaillements, les extensions sont orthogonales aux fonctions précédentes (compte tenu de l'orthogonalité de la base principale d'inertie). On orthonormalise alors les fonctions nécessaires selon le procédé de Gramm-Schmidt.

Remarque : Pour une interface plane, le produit scalaire $\underline{N}_3 \cdot \underline{G}_{E_0E'_0} M$, où \underline{N}_3 est la normale à l'interface, est nul. \underline{N}_3 est ici colinéaire au vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de la matrice d'inertie $\mathbf{I}_{E_0E'_0}$. Des six fonctions de base macroscopique correspondant à des modes de déformation de l'interface, trois sont nulles. La base macroscopique d'une interface plane est donc composée de seulement neuf vecteurs (voir Fig. 5.6).

Une augmentation du nombre de fonctions de base macroscopique a été étudiée dans [Ladevèze et al., 2001] afin d'apporter un enrichissement quadratique ou cubique. Il a été alors montré que ces améliorations jouent très peu sur la convergence de la solution et ne sont donc pas nécessaires. Cependant, l'utilisation d'une base macroscopique discontinue peut s'avérer très judicieuse dans le cas de fissures traversant une interface [Guidault et al., 2008]. [Kerfriden et al., 2009] ont montré

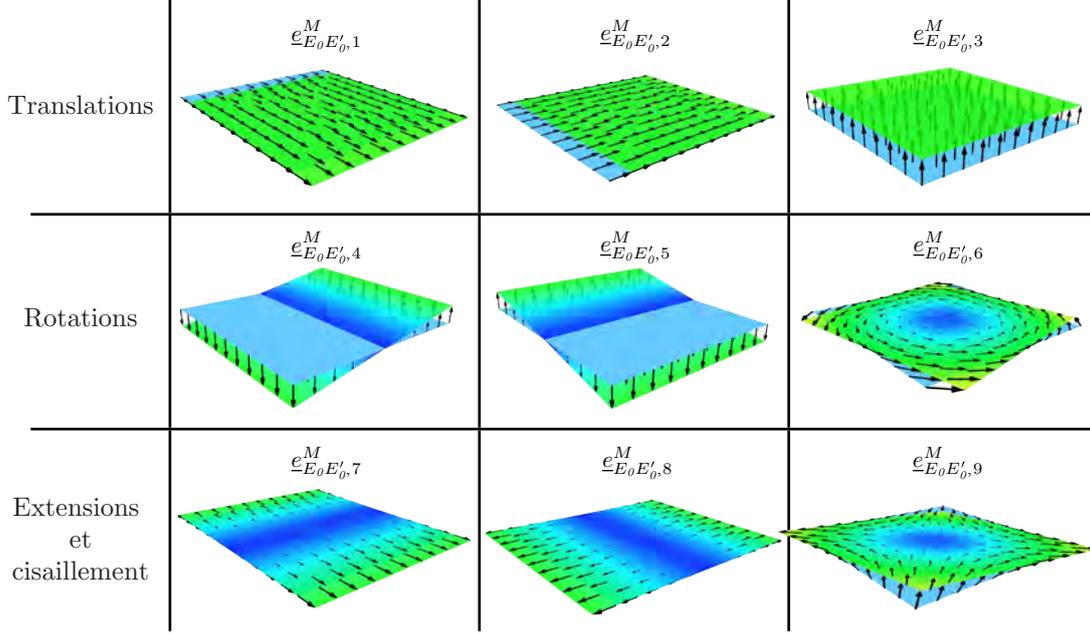


Fig. 5.6: Base macroscopique linéaire en 3D pour une interface plane.

que l'utilisation d'une base macroscopique complète (sur tous les degrés de liberté d'interface, ce qui revient à calculer le complément de Schur de la sous-structure associée) assure un taux de convergence optimal de la stratégie, mais alourdit les calculs.

3.3 Admissibilité macroscopique

La définition du problème macroscopique de l'approche micro-macro nécessite de donner des conditions d'admissibilité des champs macroscopiques d'interface vérifiant les problèmes posés sur les sous-structures.

On recherche donc les efforts macroscopiques des interfaces internes ainsi que de conditions limites dans l'espace d'admissibilité statique suivant :

$$\mathcal{F}_{\text{ad}}^M = \left\{ (\underline{F}_{E_0}^M)_{E \in \mathbf{E}} \in \Pi_{E \in \mathbf{E}} \mathcal{F}_E^M \mid \forall E \in \mathbf{E}, \forall E' \in \mathbf{V}_E, \underline{F}_{E_0}^M + \underline{F}_{E'_0}^M = \underline{0} \right\} \quad (5.9)$$

De façon similaire, il est possible de définir un espace $\mathcal{W}_{\text{ad}}^M$ des déplacements macroscopiques vérifiant les conditions de continuité aux interfaces :

$$\mathcal{W}_{\text{ad}}^M = \left\{ (\underline{W}_E^M)_{E \in \mathbf{E}} \in \Pi_{E \in \mathbf{E}} \mathcal{W}_E^M \mid \forall E \in \mathbf{E}, \forall E' \in \mathbf{V}_E, \underline{W}_E^M - \underline{W}_{E'}^M = \underline{0} \right\} \quad (5.10)$$

Il faut néanmoins noter que, à part les interfaces parfaites, la solution du problème ne vérifie pas forcément les conditions de transmission décrites par $\mathcal{W}_{\text{ad}}^M$, c'est le cas pour des interfaces de contact et cohésives. En revanche, pour n'importe quel comportement d'interface, l'équilibre des interfaces est toujours vérifié,

ce qui explique que la version de l'approche micro-macro qui utilise les conditions d'admissibilité décrites par \mathcal{F}_{ad}^M est classiquement retenue. Cependant, dans certains cas, comme nous verrons dans la Sec. 3.1 du Chap. 3, l'absence de contrainte macroscopique portant sur les déplacements macroscopiques d'interface conduit à des difficultés numériques.

3.4 Algorithme itératif de résolution

Pour la résolution des problèmes non linéaires sous-structurés, à chaque pas de temps du schéma d'intégration, les équations portant des non-linéarités géométriques et surfaciques sont séparées en deux groupes distincts :

- **Équations d'admissibilité** non linéaires des sous-structures et admissibilité macroscopique des interfaces :
 - admissibilité cinématique non linéaire des sous-structures, Éqs. (5.2), (5.3) ;
 - admissibilité statique non linéaire des sous-structures, Éq. (5.4) ;
 - comportement des sous-structures, Éq. (5.5) ;
 - admissibilité statique macroscopique, Éq. (5.9).
- **Équations locales** (éventuellement non linéaires) sur les interfaces :
 - comportement des interfaces, Éqs. (5.6), (5.7).

Les champs d'interface $s = (s_E)_{E \in \mathbf{E}} = (W_E, F_{E0})_{E \in \mathbf{E}}$ vérifiant le premier groupe d'équations définissent l'espace d'admissibilité \mathbf{A}_d , alors que les champs d'interface $\hat{s} = (\hat{s}_E)_{E \in \mathbf{E}} = (\hat{W}_E, \hat{F}_{E0})_{E \in \mathbf{E}}$ vérifiant le deuxième groupe d'équations appartiennent à l'espace Γ . La solution d'interface convergée s_{ref} est à l'intersection de ces deux espaces :

$$s_{ref} \in \mathbf{A}_d \cap \Gamma$$

Le schéma de résolution consiste à rechercher itérativement la solution s_{ref} dans ces deux espaces : on calcule successivement des solutions s_n dans \mathbf{A}_d et $\hat{s}_{n+\frac{1}{2}}$ dans Γ (voir Fig. 5.7). Pour que les problèmes soient bien posés, des directions de recherche \mathbf{E}^+ et \mathbf{E}^- liant les solutions s et \hat{s} au cours des itérations sont introduites. La résolution est donc constituée de deux étapes non linéaires :

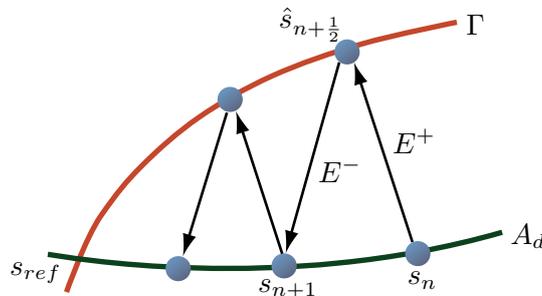


Fig. 5.7: Schéma de l'algorithme LaTIn.

– une étape d’admissibilité :

$$\text{Trouver } s_{n+1} \in \mathbf{A}_d \text{ tel que } (s_{n+1} - \widehat{s}_{n+\frac{1}{2}}) \in \mathbf{E}^-$$

– une étape locale :

$$\text{Trouver } \widehat{s}_{n+\frac{1}{2}} \in \Gamma \text{ tel que } (\widehat{s}_{n+\frac{1}{2}} - s_n) \in \mathbf{E}^+$$

Dans la suite, nous détaillons ces étapes. Afin d’alléger l’écriture, les indices n sont omis.

3.4.1 Étape locale

L’étape locale consiste en la résolution de problèmes locaux, éventuellement non linéaires, en chaque point d’intégration des interfaces. Le système d’équations à résoudre se compose des relations suivantes :

- comportement des interfaces intérieures $\mathcal{R}_{EE'} = \underline{0}$ et des interfaces de conditions aux limites $\mathcal{R}_{E_d} = \underline{0}$.
- direction de recherche \mathbf{E}^+ , qui s’écrit localement sur les interfaces d’une sous-structure E :

$$\text{En tout point de } \Gamma_{E_0}, \quad (\widehat{F}_{E_0} - F_{E_0}) - k_{E_0}^+(\widehat{W}_E - W_E) = \underline{0}.$$

où, le paramètre de direction de remontée $k_{E_0}^+$ est un opérateur local symétrique défini positif.

On détaille dans la section suivante les calculs nécessaires pour le traitement des interfaces parfaites, cohésives et de contact.

3.4.1.1 Cas des interfaces parfaites. Le système à résoudre en chaque point de Gauss d’une interface parfaite s’écrit :

Trouver $(\widehat{W}_E, \widehat{W}_{E'}, \widehat{F}_{E_0}, \widehat{F}_{E'_0}) \in \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'} \times \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'}$ tels que :

$$\text{En tout point de } \Gamma_{E_0E'_0}, \quad \begin{cases} \widehat{F}_{E_0} + \widehat{F}_{E'_0} = \underline{0} \\ [\widehat{W}_E] = \underline{0} \\ (\widehat{F}_{E_0} - F_{E_0}) - k_{E_0}^+(\widehat{W}_E - W_E) = \underline{0} \\ (\widehat{F}_{E'_0} - F_{E'_0}) - k_{E'_0}^+(\widehat{W}_{E'} - W_{E'}) = \underline{0} \end{cases}$$

Si l’on considère $k_{E'_0}^+ = k_{E_0}^+$, on peut écrire directement une relation entre les

inconnues et les données de l'étape d'admissibilité précédente :

$$\begin{aligned}\widehat{W}_E &= \widehat{W}_{E'} = \frac{1}{2}(W_E + W_{E'}) - \frac{1}{2}(k_{E_0}^+)^{-1}(\underline{F}_{E_0} + \underline{F}_{E'_0}) \\ \widehat{F}_{E_0} &= -\widehat{F}_{E'_0} = \frac{1}{2}(\underline{F}_{E_0} - \underline{F}_{E'_0}) - \frac{1}{2}k_{E_0}^+(W_E - W_{E'})\end{aligned}$$

3.4.1.2 Cas des interfaces cohésives. Le système à résoudre en chaque point de Gauss s'écrit :

$$\begin{aligned}\text{Trouver } (\widehat{W}_E, \widehat{W}_{E'}, \widehat{F}_{E_0}, \widehat{F}_{E'_0}) &\in \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'} \times \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'} \text{ tels que :} \\ \text{En tout point de } \Gamma_{E_0E'_0}, &\begin{cases} \widehat{F}_{E_0} + \widehat{F}_{E'_0} = \underline{0} \\ \mathcal{A}_{PP'}(\widehat{W}_E, \widehat{W}_{E'}, \widehat{F}_{E_0}, \widehat{F}_{E'_0}) = \underline{0} \\ (\widehat{F}_{E_0} - \underline{F}_{E_0}) - k_{E_0}^+(\widehat{W}_E - W_E) = \underline{0} \\ (\widehat{F}_{E'_0} - \underline{F}_{E'_0}) - k_{E'_0}^+(\widehat{W}_{E'} - W_{E'}) = \underline{0} \end{cases}\end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse du saut de déplacement faible dans les interfaces cohésives, la relation $\mathcal{A}_{PP'}$ peut être définie par la loi d'endommagement de [Allix et al., 1998] que nous avons présentée dans la Sec. 1.2.1.5 du Chap. 3 dans le cadre de petites perturbations. Sous cette hypothèse, [Allix et Corigliano, 1999] ont démontré que cette loi respecte le principe d'indifférence matérielle et qu'elle reste valable dans notre cas d'étude.

Nous devons toutefois noter que la loi d'interface qui relie les déplacements et les contraintes entre deux plis adjacents est définie sur la configuration déformée :

$$\widehat{F}_E = \mathbf{K}_{EE'}([\widehat{W}_E]) [\widehat{W}_E].$$

où, l'opérateur de rigidité $\mathbf{K}_{EE'}$ s'écrit par rapport au système cartésien local, orthonormé et en mouvement avec l'interface $\mathcal{B}_n = \{n_1, n_2, n_3\}$ (voir Fig. 5.2) au point d'intérêt. À cette loi on rajoute la relation suivante pour le passage des efforts entre les deux configurations :

$$\widehat{F}_{E_0} d\Gamma_{E_0E'_0} = \widehat{F}_E d\Gamma_{EE'}.$$

Pour que la résolution de ce système reste locale à chaque point d'intégration, nous proposons de considérer le système orthonormé \mathcal{B}_n et le rapport $d\Gamma_{EE'}/d\Gamma_{E_0E'_0}$ au point d'intérêt à partir de la solution issue de l'étape d'admissibilité. Ce problème reste néanmoins non linéaire à cause de la dépendance de $\mathbf{K}_{EE'}([\widehat{W}_E])$ au saut de déplacement. Il peut aisément être résolu par un algorithme itératif de Newton.

Les travaux de thèse de [Kerfriden et al., 2009] ont montré qu'une valeur trop faible des paramètres de direction de recherche entraîne une stagnation, et parfois,

la divergence, du processus itératif. Ils ont donc proposé de prendre une direction de recherche infinie à l'étape locale. Cette pratique a peu d'influence sur le taux de convergence, qui est alors exclusivement conditionné par la direction de recherche \mathbf{E}^- . De plus, à l'étape locale, le problème posé en chaque point de Gauss des interfaces cohésives est résolu explicitement à partir de la donnée des déplacements d'interface issus de l'étape d'admissibilité, ce qui donne le système à résoudre suivant :

$$\begin{aligned} \widehat{W}_E &= W_E \quad , \quad \widehat{W}_{E'} = W_{E'} \\ \widehat{F}_{E_0} &= -\widehat{F}_{E'_0} = \frac{d\Gamma_{EE'}}{d\Gamma_{E_0E'_0}} \mathbf{K}_{EE'}([W_E]) [W_E] . \end{aligned}$$

3.4.1.3 Cas des interfaces de contact avec frottement. Pour le traitement du contact, nous avons aussi retenu le système orthonormé $\mathcal{B}_n = \{\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3\}$ et le rapport $d\Gamma_{EE'}/d\Gamma_{E_0E'_0}$ de la solution issue de l'étape d'admissibilité. Le système à résoudre en chaque point de Gauss d'une interface de contact s'écrit :

Trouver $(\widehat{W}_E, \widehat{W}_{E'}, \widehat{F}_{E_0}, \widehat{F}_{E'_0}) \in \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'} \times \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'}$ tels que, en tout point de $\Gamma_{E_0E'_0}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{F}_E + \underline{F}_{E'} = \underline{0} \\ \underline{n}_3 \cdot [W_E] \geq 0 \text{ et } \underline{n}_3 \cdot \underline{F}_E \leq 0 \\ (\underline{n}_3 \cdot [W_E])(\underline{n}_3 \cdot \underline{F}_E) = 0 \\ \text{si } \|\mathbf{P}\underline{F}_E\| \leq \mu |\underline{n}_3 \cdot \underline{F}_E| \text{ alors } \mathbf{P}[W_E] = \underline{0} \quad (\text{adhérence}) \\ \text{si } \|\mathbf{P}\underline{F}_E\| = \mu |\underline{n}_3 \cdot \underline{F}_E| \text{ alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \mathbf{P}[W_E] = \lambda \mathbf{P}\underline{F}_E \quad (\text{glissement}) \\ \underline{F}_E d\Gamma_{EE'} = \underline{F}_{E_0} d\Gamma_{E_0E'_0} \\ (\widehat{F}_{E_0} - \underline{F}_{E_0}) - k_{E_0}^+ (\widehat{W}_E - W_E) = \underline{0} \\ (\widehat{F}_{E'_0} - \underline{F}_{E'_0}) - k_{E'_0}^+ (\widehat{W}_{E'} - W_{E'}) = \underline{0} \end{array} \right.$$

Une solution explicite à ce problème est obtenue, en tout point de l'interface, par un calcul suivant la normale puis dans le plan tangent. Pour cela, on définit un indicateur scalaire suivant la normale C_n et un indicateur vectoriel dans la direction tangente C_t . Ces indicateurs sont calculés en soustrayant les deux équations de direction de recherche (on considère $k_{E'_0}^+ = k_{E_0}^+$) et en les projetant sur chaque direction :

$$\begin{aligned} 2C_n &= -\underline{n}_3 \cdot [(\widehat{F}_{E'_0} - \underline{F}_{E'_0}) - k_{E'_0}^+ (\widehat{W}_{E'} - W_{E'})] \\ &= -\underline{n}_3 \cdot [(\underline{F}_{E'_0} - \underline{F}_{E_0}) - k_{E_0}^+ (W_{E'} - W_E)] , \end{aligned}$$

$$2C_t = -\mathbf{P}[(\widehat{F}_{E'_0} - \underline{F}_{E'_0}) - k_{E_0}^+ (\widehat{W}_{E'} - W_{E'})] = -\mathbf{P}[(\underline{F}_{E'_0} - \underline{F}_{E_0}) - k_{E_0}^+ (W_{E'} - W_E)] .$$

Il faut noter que les termes à droite de ces relations sont connus de l'étape d'admissibilité. On pose $(d\Gamma_{E_0E'_0}/d\Gamma_{EE'}) = a_\Gamma$ et $\mu|\underline{n}_3 \cdot \widehat{\underline{F}}_{E_0}| = g$, alors :

- **Si décollement :**
 $\underline{n}_3 \cdot \widehat{\underline{F}}_E = -\underline{n}_3 \cdot \widehat{\underline{F}}_{E'} = 0$ (respectivement $\underline{n}_3 \cdot a_\Gamma \widehat{\underline{F}}_{E_0} = -\underline{n}_3 \cdot a_\Gamma \widehat{\underline{F}}_{E'_0} = 0$) et $\underline{n}_3 \cdot [\widehat{\underline{W}}_E] > 0$ alors $C_n > 0$.
- **Si contact :**
 $\underline{n}_3 \cdot \widehat{\underline{F}}_E = -\underline{n}_3 \cdot \widehat{\underline{F}}_{E'} < 0$ (respectivement $\underline{n}_3 \cdot a_\Gamma \widehat{\underline{F}}_{E_0} = -\underline{n}_3 \cdot a_\Gamma \widehat{\underline{F}}_{E'_0} < 0$) et $\underline{n}_3 \cdot [\widehat{\underline{W}}_E] = 0$ alors $C_n < 0$.
- **Si adhérence :**
 $\|\mathbf{P}\widehat{\underline{F}}_E\| = \|\mathbf{P}\widehat{\underline{F}}_{E'}\| < \mu|\underline{n}_3 \cdot \widehat{\underline{F}}_E|$ (respectivement $\|\mathbf{P}\widehat{\underline{F}}_{E_0}\| = \|\mathbf{P}\widehat{\underline{F}}_{E'_0}\| < g$) et $\mathbf{P}[\widehat{\underline{W}}_E] = 0$ alors $\|\underline{C}_t\| < g = \mu|C_n|$.
- **Si glissement :**
 $\|\mathbf{P}\widehat{\underline{F}}_E\| = \|\mathbf{P}\widehat{\underline{F}}_{E'}\| = \mu|\underline{n}_3 \cdot \widehat{\underline{F}}_E|$ (respectivement $\|\mathbf{P}\widehat{\underline{F}}_{E_0}\| = \|\mathbf{P}\widehat{\underline{F}}_{E'_0}\| = g$) et $\mathbf{P}[\widehat{\underline{W}}_E] = \lambda\mathbf{P}\widehat{\underline{F}}_E = \lambda a_\Gamma \mathbf{P}\widehat{\underline{F}}_{E_0}$ alors $\|\underline{C}_t\| > g = \mu|C_n|$.

Ainsi, en fonction des valeurs de C_n et $\|\underline{C}_t\|$, on obtient directement la solution :

	$\text{Si } C_n > 0, \text{ décollement } \begin{cases} \widehat{\underline{F}}_{E'_0} = \widehat{\underline{F}}_{E_0} = \underline{0} \\ \widehat{\underline{W}}_E = \underline{W}_E - (k_{E_0}^+)^{-1} \underline{F}_{E_0} \\ \widehat{\underline{W}}_{E'} = \underline{W}_{E'} - (k_{E_0}^+)^{-1} \underline{F}_{E'_0} \end{cases}$
	$\text{Si } C_n < 0 \text{ et } \ \underline{C}_t\ < \mu C_n , \text{ contact adhérent } \begin{cases} \underline{n}_3 \cdot \widehat{\underline{F}}_{E'_0} = -\underline{n}_3 \cdot \widehat{\underline{F}}_{E_0} = C_n \\ \mathbf{P}\widehat{\underline{F}}_{E_0} = -\mathbf{P}\widehat{\underline{F}}_{E'_0} = \underline{C}_t \\ \widehat{\underline{W}}_E = \underline{W}_E + (k_{E_0}^+)^{-1} (\widehat{\underline{F}}_{E_0} - \underline{F}_{E_0}) \\ \widehat{\underline{W}}_{E'} = \underline{W}_{E'} + (k_{E_0}^+)^{-1} (\widehat{\underline{F}}_{E'_0} - \underline{F}_{E'_0}) \end{cases}$
	$\text{Si } C_n < 0 \text{ et } \ \underline{C}_t\ > \mu C_n , \text{ contact glissent } \begin{cases} \underline{n}_3 \cdot \widehat{\underline{F}}_{E'_0} = -\underline{n}_3 \cdot \widehat{\underline{F}}_{E_0} = C_n \\ \mathbf{P}\widehat{\underline{F}}_{E_0} = -\mathbf{P}\widehat{\underline{F}}_{E'_0} = g \frac{\underline{C}_t}{\ \underline{C}_t\ } \\ \widehat{\underline{W}}_E = \underline{W}_E + (k_{E_0}^+)^{-1} (\widehat{\underline{F}}_{E_0} - \underline{F}_{E_0}) \\ \widehat{\underline{W}}_{E'} = \underline{W}_{E'} + (k_{E_0}^+)^{-1} (\widehat{\underline{F}}_{E'_0} - \underline{F}_{E'_0}) \end{cases}$

3.4.2 Étape d'admissibilité

L'étape d'admissibilité consiste en la résolution du système d'équations non linéaires suivant :

- admissibilité cinématique des sous-structure ;
- admissibilité statique non linéaire des sous-structure ;
- comportement linéaire des sous-structures ;
- admissibilité des efforts macroscopiques des interfaces ;
- direction de recherche \mathbf{E}^- portant sur les quantités d'interface.

Cette étape est résolue par un algorithme itératif de Newton tangent. L'admissibilité des efforts macroscopiques est imposée au système d'équations linéarisé de chaque sous-structure.

En l'absence de contrainte macroscopique d'interface (version monoéchelle), la direction de recherche \mathbf{E}^- s'écrit localement sur les interfaces d'une sous-structure E :

$$\text{En tout point de } \Gamma_{E_0}, \quad (\underline{F}_{E_0} - \widehat{\underline{F}}_{E_0}) + k_{E_0}^- (\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E) = \underline{0} \quad (5.11)$$

où le paramètre de direction de descente $k_{E_0}^-$ est un opérateur local symétrique défini positif.

Ainsi, l'étape d'admissibilité dans sa version monoéchelle se traduit par le problème non linéaire par sous-structure suivant :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{u}_E^*, \underline{W}_E^*) \in \mathcal{U}_E^0 \times \mathcal{W}_E^0, \\ \underbrace{\int_{\Omega_{E_0}} \underline{C}_{\underline{E}}^0 \underline{E}_{\underline{E}}(\underline{u}_E) : \underline{\dot{E}}(\underline{u}_E^*) d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{E_0}} k_{E_0}^- \underline{W}_E \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma_0}_{-P^{int}(\underline{u}_E, \underline{W}_E)} \\ = \underbrace{\int_{\Omega_{E_0}} \rho_E \underline{f}_d \cdot \underline{u}_E^* d\Omega + \int_{\Gamma_{E_0}} (\widehat{\underline{F}}_{E_0} + k_{E_0}^- \widehat{\underline{W}}_E) \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma_0}_{P^{ext}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Après linéarisation du problème (5.12), la correction $({}^i\delta\underline{u}_E, {}^i\delta\underline{W}_E)$ est calculée à chaque itération i par :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{u}_E^*, \underline{W}_E^*) \in \mathcal{U}_E^0 \times \mathcal{W}_E^0, \\ \int_{\Omega_{E_0}} \underline{C}_{\underline{E}}^0 \underline{E}_{\underline{E}}({}^i\underline{u}_E) : ({}^t\underline{\nabla}_0 {}^i\delta\underline{u}_E \underline{\nabla}_0 \underline{u}_E^* + {}^t\underline{\nabla}_0 \underline{u}_E^* \underline{\nabla}_0 {}^i\delta\underline{u}_E) d\Omega_0 \\ + \int_{\Omega_{E_0}} \underline{C}_{\underline{E}}^0 \underline{\dot{E}}({}^i\delta\underline{u}_E) : \underline{\dot{E}}({}^i\underline{u}_E^*) d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{E_0}} k_{E_0}^- {}^i\delta\underline{W}_E \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma_0 = P^{ext} + P^{int}({}^i\underline{u}_E, {}^i\underline{W}_E) \end{aligned} \quad (5.13)$$

où, $\underline{\dot{E}}(v) = \frac{1}{2}(\underline{\nabla}_0 v + {}^t\underline{\nabla}_0 v + {}^t\underline{\nabla}_0 {}^i\underline{u}_E \underline{\nabla}_0 v + {}^t\underline{\nabla}_0 v \underline{\nabla}_0 {}^i\underline{u}_E)$ et $({}^i\underline{u}_E, {}^i\underline{W}_E)$ est la solution à l'itération précédente. La solution est alors obtenue par $({}^{i+1}\underline{u}_E, {}^{i+1}\underline{W}_E) = ({}^i\underline{u}_E, {}^i\underline{W}_E) + ({}^i\delta\underline{u}_E, {}^i\delta\underline{W}_E)$.

Dans la version multiéchelle, l'admissibilité des efforts macroscopiques, Éq. (5.9), est appliquée au problème linéarisé (5.13). Cependant, cette condition est incompatible avec la direction de recherche (5.11). [Ladevèze et Nouy, 2003] proposent de vérifier (5.11) au mieux sous la contrainte d'admissibilité des efforts macroscopiques d'interface. Pour cela, la stationnarité du multiplicateur de Lagrange

$({}^{i+1}\widetilde{W}_E^M)_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{ad}^{M,0}$, où $\mathcal{W}_{ad}^{M,0}$ est l'espace des déplacements macroscopiques continus aux interfaces et nuls sur $\partial\Omega_{u_d}$, permet de réécrire l'admissibilité des efforts macro au sens faible :

$$\begin{aligned} \forall (W_E^*)_{E \in \mathbf{E}} \in \Pi_{E \in \mathbf{E}} \mathcal{W}_E^M, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{E_0}} ({}^{i+1}\underline{F}_{E_0} - \widehat{\underline{F}}_{E_0}) \cdot W_E^* d\Gamma_0 \\ + \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{E_0}} \left(k_{E_0}^- ({}^{i+1}\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E) - k_{E_0}^- {}^{i+1}\widetilde{W}_E^M \right) \cdot W_E^* d\Gamma_0 = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \forall (\widetilde{W}_E^{M*})_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{ad}^{M,0}, \\ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{E_0}} {}^{i+1}\underline{F}_{E_0} \cdot \widetilde{W}_E^{M*} d\Gamma_0 = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_{F_d_0} \cap \Gamma_{E_0}} \underline{F}_{d_{E_0}} \cdot \widetilde{W}_E^{M*} d\Gamma_0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Pour résoudre ce problème, on calcule une relation couplant ${}^{i+1}\underline{F}_{E_0}^M$ et ${}^{i+1}\underline{W}_E$ par l'intermédiaire de la résolution de problèmes d'équilibre augmentés par la direction de recherche modifiée, Éq. (5.14), de façon à l'injecter dans (5.15) et obtenir ainsi un problème macroscopique formulé en variable primale.

Les problèmes d'équilibre linéarisés posés sur chaque sous-structure E alors s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall (u_E^*, \underline{W}_E^*) \in \mathcal{U}_E^0 \times \mathcal{W}_E^0, \\ \int_{\Omega_{E_0}} \underline{\underline{C}}_E^0 \underline{\underline{E}}_E ({}^i u_E) : \left({}^t \underline{\underline{\nabla}}_0 {}^i \delta u_E \underline{\underline{\nabla}}_0 u_E^* + {}^t \underline{\underline{\nabla}}_0 u_E^* \underline{\underline{\nabla}}_0 {}^i \delta u_E \right) d\Omega_0 \\ + \int_{\Omega_{E_0}} \underline{\underline{C}}_E^0 \underline{\underline{E}}_E ({}^i \delta u_E) : \underline{\underline{E}}_E (u_E^*) d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{E_0}} k_{E_0}^- {}^i \delta \underline{W}_E \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma_0 = {}^i \tilde{P}^{ext} + P^{int} ({}^i u_E, {}^i \underline{W}_E) \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\text{où } {}^i \tilde{P}^{ext} = P^{ext} + \int_{\Gamma_{E_0}} k_{E_0}^- {}^{i+1}\widetilde{W}_E^M \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma_0.$$

La direction de recherche permet de régulariser les problèmes par sous-structure (5.16), appelés *problèmes microscopiques*. $\underline{\underline{C}}_E^0$ et $k_{E_0}^-$ étant définis positifs, la solution de ces problèmes microscopiques est unique. La linéarité de (5.16) permet d'écrire une relation affine reliant la trace sur le bord du déplacement solution aux efforts d'interface :

$$\begin{aligned} \forall \underline{F}_{E_0}^* \in \mathcal{F}_{E_0}^0, \\ \int_{\Gamma_{E_0}} {}^{i+1}\underline{W}_E \cdot \underline{F}_{E_0}^* d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_{E_0}} \left({}^i \mathbb{H}_{E_0} (\widehat{\underline{F}}_{E_0} + k_{E_0}^- {}^{i+1}\widetilde{W}_E^M) + {}^i \underline{W}_{E_0}^c + {}^i \underline{W}_E \right) \cdot \underline{F}_{E_0}^* d\Gamma_0, \end{aligned}$$

où, $\widehat{\underline{F}}_{E_0} = \underline{\widehat{F}}_{E_0} + k_{E_0}^- \widehat{\underline{W}}_E$. L'opérateur ${}^i\mathbb{H}_{E_0}$ est le complément de Schur dual de la sous-structure E à l'itération i augmenté par la direction de recherche, lequel dépend de la configuration géométrique de l'itération précédente. Le champ d'interface ${}^i\underline{W}_{E_0}^c$ résulte de la condensation duale des efforts volumiques et de $P^{int}({}^i\underline{u}_E, {}^i\underline{W}_E)$ sur Γ_{E_0} . ${}^i\underline{W}_E$ sont les déplacements d'interface de l'itération précédente.

Les interefforts sont alors obtenus par la direction de recherche (5.14) et projetés dans l'espace macroscopique :

$$\forall \underline{W}_E^{M^*} \in \mathcal{W}_E^{M,0}, \quad \int_{\Gamma_{E_0}} {}^{i+1}\underline{F}_{E_0} \cdot \underline{W}_E^{M^*} d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_{E_0}} ({}^i\mathbb{L}_{E_0} {}^{i+1}\widetilde{\underline{W}}_E^M + {}^{i+1}\widetilde{\underline{F}}_{E_0}^M) \cdot \underline{W}_E^{M^*} d\Gamma_0, \quad (5.17)$$

où :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{E_0}} {}^i\mathbb{L}_{E_0} {}^{i+1}\widetilde{\underline{W}}_E^M \cdot \underline{W}_E^{M^*} d\Gamma_0 &= \int_{\Gamma_{E_0}} (k_{E_0}^- - k_{E_0}^- {}^i\mathbb{H}_{E_0} k_{E_0}^-) {}^{i+1}\widetilde{\underline{W}}_E^M \cdot \underline{W}_E^{M^*} d\Gamma_0, \\ \int_{\Gamma_{E_0}} {}^{i+1}\widetilde{\underline{F}}_{E_0}^M \cdot \underline{W}_E^{M^*} d\Gamma_0 &= \int_{\Gamma_{E_0}} (\widehat{\underline{F}}_{E_0} - k_{E_0}^- ({}^i\mathbb{H}_{E_0} \widehat{\underline{F}}_{E_0} + {}^i\underline{W}_{E_0}^c + {}^i\underline{W}_E)) \cdot \underline{W}_E^{M^*} d\Gamma_0. \end{aligned}$$

${}^i\mathbb{L}_{E_0}$ est classiquement interprété comme un opérateur homogénéisé de la sous-structure E . Il est calculé explicitement pour chaque sous-structure en résolvant une série de problèmes locaux (5.16), en prenant les vecteurs de la base macroscopique comme chargement sur Γ_{E_0} . ${}^i\mathbb{L}_{E_0}$ dépend de la configuration géométrique de l'itération précédente.

La relation (5.17) est finalement introduite dans l'équation traduisant l'admissibilité des efforts macroscopiques (5.15) afin d'obtenir le *problème macroscopique en déplacement* suivant :

$$\begin{aligned} \forall (\widetilde{\underline{W}}_E^{M^*})_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{ad}^{M,0}, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{E_0}} {}^i\mathbb{L}_{E_0} {}^{i+1}\widetilde{\underline{W}}_E^M \cdot \widetilde{\underline{W}}_E^{M^*} d\Gamma_0 \\ = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_{F_{d_0}} \cap \Gamma_{E_0}} \underline{F}_{d_{E_0}}^M \cdot \widetilde{\underline{W}}_E^{M^*} d\Gamma_0 - \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{E_0}} {}^{i+1}\widetilde{\underline{F}}_{E_0}^M \cdot \widetilde{\underline{W}}_E^{M^*} d\Gamma_0 \quad (5.18) \end{aligned}$$

Ce problème global admet une solution unique si $\text{mes}(\partial\Omega_{u_d}) \neq 0$. La différence par rapport à un problème de mécanique des milieux continus est que le problème macroscopique est un problème discret par définition (il porte sur des quantités finies que sont les inconnues macroscopiques par interface). La taille du problème macroscopique est égale au nombre d'interfaces multiplié par le nombre d'inconnues macroscopiques.

Trouver la solution de (5.18) requiert la résolution de problèmes indépendants sur chaque sous-structure afin de calculer le second membre ${}^{i+1}\widetilde{F}_{E_0}^M$. Ces derniers peuvent être interprétés comme des résidus d'équilibre macroscopique obtenus par la résolution d'une étape monoéchelle, c'est-à-dire, le problème microscopique (5.16) est résolu en prenant ${}^{i+1}\widetilde{W}_E^M$ nul.

Finalement, les multiplicateurs de Lagrange ${}^{i+1}\widetilde{W}_E^M$ solutions du problème macroscopique sont utilisés pour résoudre les problèmes microscopiques (5.16).

Remarques :

- L'évaluation de l'erreur des itérations Newton est faite sur la variation relative de la solution de chaque sous-structure $\frac{\|({}^i\delta \underline{u}_E, {}^i\delta \underline{W}_E)\|}{\|({}^i\underline{u}_E, {}^i\underline{W}_E)\|}$. Les itérations sont stoppées quand l'erreur maximale parmi tous les sous-structures est inférieure à une valeur donnée.
- La convergence de l'algorithme peut être améliorée par l'utilisation d'une étape de relaxation après l'étape d'admissibilité. Si la solution d'admissibilité est s_n , on la renomme \check{s}_n . La solution relaxée est alors définie par :

$$s_n = \mu \check{s}_n + (1 - \mu) s_{n-1} ,$$

où, μ est le paramètre de relaxation qui est usuellement pris égal à 0,8.

3.4.3 Indicateur d'erreur LaTIn

L'indicateur d'erreur LaTIn adopté ici mesure la non-vérification des équations de comportement d'interface par les solutions issues de l'étape d'admissibilité ($s_n \in \mathbf{A}_d$). Il a été utilisé pour le traitement du délaminage par [Kerfriden, 2008; Allix, Kerfriden, et Gosselet, 2010].

En d'autres termes, on cherche à obtenir une norme des relations locales d'interface $\mathcal{R}(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'}, \underline{F}_{E_0}, \underline{F}_{E'_0})$ sur la structure. On appelle q le nombre de types d'interface différents utilisés (c'est-à-dire le nombre de relations $\mathcal{R}_{EE'} = \underline{0}$ et $\mathcal{R}_{E_d} = \underline{0}$ distinctes sur les interfaces de la structure). On note Γ_i l'ensemble d'interface possédant le comportement i . La relation $\mathcal{R}_i = \underline{0}$ pour $i \in [1, q]$ est composée de p équations vectorielles $\mathcal{R}_{ij} = \underline{0}$ et ces dernières de m équations scalaires (correspondant en 3D à 6 équations scalaires pour les interfaces intérieures, et à 3 pour les interfaces de conditions aux limites). On évalue la vérification des équations vectorielles élémentaires par le critère d'erreur ν_{rdc} :

$$\nu_{rdc}^2 = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p \nu_{ij}^2 \quad \text{où} \quad \nu_{ij}^2 = \frac{\sum_{\Gamma_{EE'} \in \Gamma_i} \int_{\Gamma_{E_0 E'_0}} \mathcal{R}_{ij}^T \mathcal{R}_{ij} d\Gamma_0}{\sum_{\Gamma_{EE'} \in \Gamma_i} \int_{\Gamma_{E_0 E'_0}} \widetilde{\mathcal{R}}_{ij}^T \widetilde{\mathcal{R}}_{ij} d\Gamma_0} \quad (5.19)$$

– **Interface parfaite** ($\Gamma_{EE'} \in \Gamma_1$) :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{11} &= \underline{F}_{E_0} + \underline{F}_{E'_0} & \widetilde{\mathcal{R}}_{11} &= \underline{F}_{E_0} - \underline{F}_{E'_0} \\ \mathcal{R}_{12} &= \underline{W}_{E'} - \underline{W}_E & \widetilde{\mathcal{R}}_{12} &= \underline{W}_{E'} + \underline{W}_E\end{aligned}$$

– **Interface cohésive** ($\Gamma_{EE'} \in \Gamma_2$) :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{21} &= \underline{F}_{E_0} + \underline{F}_{E'_0} & \widetilde{\mathcal{R}}_{21} &= \underline{F}_{E_0} - \underline{F}_{E'_0} \\ \mathcal{R}_{22} &= \underline{F}_{E_0} - \mathbf{K}_{E_0E'_0}[\underline{W}_E] & \widetilde{\mathcal{R}}_{22} &= \underline{F}_{E_0} + \mathbf{K}_{E_0E'_0}[\underline{W}_E]\end{aligned}$$

L'opérateur de rigidité $\mathbf{K}_{E_0E'_0}$ de l'équation constitutive est mis à jour à partir de la donnée du saut de déplacement à l'interface $[\underline{W}_E]$.

– **Interface de contact** ($\Gamma_{EE'} \in \Gamma_3$) : Il faut calculer les indicateurs de contact C_n et \underline{G}_t à partir des quantités \underline{F}_{E_0} et \underline{W}_E de l'étape d'admissibilité.

• **Ouverture** ($C_n > 0$) :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{41} &= \underline{F}_{E_0} & \widetilde{\mathcal{R}}_{41} &= \underline{F}_{E_0} \\ \mathcal{R}_{42} &= \underline{F}_{E'_0} & \widetilde{\mathcal{R}}_{42} &= \underline{F}_{E'_0}\end{aligned}$$

• **Adhérence** ($C_n \leq 0$ et $\|\underline{G}_t\| < \mu|\underline{N}_3 \cdot \underline{F}_E|$) :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{41} &= \underline{F}_{E_0} + \underline{F}_{E'_0} & \widetilde{\mathcal{R}}_{41} &= \underline{F}_{E_0} - \underline{F}_{E'_0} \\ \mathcal{R}_{42} &= \underline{N}_3 \cdot (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) & \widetilde{\mathcal{R}}_{42} &= \underline{N}_3 \cdot (\underline{W}_{E'} + \underline{W}_E) \\ \mathcal{R}_{43} &= \mathbf{P}(\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) & \widetilde{\mathcal{R}}_{43} &= \mathbf{P}(\underline{W}_{E'} + \underline{W}_E)\end{aligned}$$

• **Glissement** ($C_n \leq 0$ et $\|\underline{G}_t\| \geq \mu|\underline{N}_3 \cdot \underline{F}_E|$) :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{41} &= \underline{F}_{E_0} + \underline{F}_{E'_0} & \widetilde{\mathcal{R}}_{41} &= \underline{F}_{E_0} - \underline{F}_{E'_0} \\ \mathcal{R}_{42} &= \underline{N}_3 \cdot (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) & \widetilde{\mathcal{R}}_{42} &= \underline{N}_3 \cdot (\underline{W}_{E'} + \underline{W}_E) \\ \mathcal{R}_{43} &= \mathbf{P}(\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \wedge \mathbf{P}\underline{F}_{E_0} & \widetilde{\mathcal{R}}_{43} &= \mathbf{P}(\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \wedge \mathbf{P}\underline{F}_{E_0} \\ \mathcal{R}_{44} &= \|\mathbf{P}\underline{F}_E\| - \mu|\underline{N}_3 \cdot \underline{F}_E| & \widetilde{\mathcal{R}}_{44} &= \|\mathbf{P}\underline{F}_E\| + \mu|\underline{N}_3 \cdot \underline{F}_E|\end{aligned}$$

– **Interface de condition limite de Neumann** ($\Gamma_{E_d} \in \Gamma_4$) :

$$\mathcal{R}_{41} = \underline{F}_{E_0} - \underline{F}_{dE_0} \quad \widetilde{\mathcal{R}}_{41} = \underline{F}_{E_0} + \underline{F}_{dE_0}$$

– **Interface de condition limite de Dirichlet** ($\Gamma_{E_d} \in \Gamma_5$) :

$$\mathcal{R}_{51} = \underline{W}_E - \underline{u}_{dE} \quad \widetilde{\mathcal{R}}_{51} = \underline{W}_E + \underline{u}_{dE}$$

3.4.4 Algorithme de la stratégie

La stratégie LaTIn micro-macro que nous avons proposée auparavant est résumée dans l'algorithme (1).

Le problème microscopique (5.16) posé sur une sous-structure E est écrit, après discrétisation :

$$({}^i\mathbf{K}_E + \mathbf{k}_E) {}^i\delta u_E = f_{dE} + \widehat{F}_E + {}^{i+1}\widetilde{W}_E^M + {}^iF_E^{int},$$

où, ${}^i\mathbf{K}_E$ est la matrice de rigidité éléments finis linéarisée de E ; \mathbf{k}_E est la matrice de rigidité correspondant à l'intégration du terme d'augmentation ; u_E est le vecteur de déplacements nodaux inconnus sur E ; f_{dE} est le vecteur des efforts nodaux résultant de l'intégration des efforts volumiques sur E ; \widehat{F}_E (respectivement ${}^{i+1}\widetilde{W}_E^M$) est le vecteur résultant de l'intégration des champs d'interface \widehat{F}_E et \widehat{W}_E (respectivement du champ d'interface ${}^{i+1}\widetilde{W}_E^M$) ; et ${}^iF_E^{int}$ est le vecteur résultant de l'intégration des efforts internes de l'itération précédente.

La base macroscopique discretisée d'une interface est notée $\mathbf{B}_{E_0E'_0}^M$. Le problème macroscopique assemblé (5.18), portant sur les degrés de liberté macroscopiques, est noté :

$${}^i\mathbf{L} {}^{i+1}\widetilde{W}^M = {}^{i+1}F^M, \quad (5.20)$$

où, ${}^i\mathbf{L}$ est l'opérateur de rigidité macroscopique assemblé, ${}^{i+1}\widetilde{W}^M$ est le vecteur d'inconnues macroscopiques, et ${}^{i+1}F^M$ est le vecteur second membre après assemblage.

3.5 Résolution du problème macroscopique

L'assemblage, le stockage et la résolution directe sur un seul processeur du problème macroscopique (5.20) peuvent devenir inefficaces et parfois prohibitifs dès que la taille de la structure augmente (le nombre de sous-structures progresse linéairement avec le nombre de plis du stratifié et de manière quadratique avec ses dimensions dans le plan). Dans des travaux précédents sur la méthode de décomposition de domaine LaTIn micro-macro, deux solutions distinctes ont été proposées pour résoudre le problème macroscopique. Toutes les deux reposent sur l'introduction d'une troisième échelle, dite super-macro, par le regroupement de sous-structures en super-sous-structures séparées par des super-interfaces.

La première possibilité propose une solution approchée du problème macroscopique par la définition d'un opérateur d'approximation entre les inconnues super-macro et les inconnues macroscopiques qui permet de définir le problème grossier. La résolution du problème super-macro se fait ensuite de manière directe, sa taille est très largement diminuée si les cellules super-macro contiennent de nombreuses interfaces. Le point clé de cette approximation super-macro repose dans le choix des opérateurs d'approximation. Dans les thèses de [Loiseau, 2001; Nouy, 2003], une approximation du déplacement par une cinématique de type milieu de Cosserat est

Algorithme 1 : Algorithme LaTIn micro-macro incrémental

```

□  $\forall E \in \mathbf{E}$ , calcul de  $\mathbf{k}_E$ ;
□  $\forall E \in \mathbf{E}$ ,  $\forall E' \in \mathbf{V}_E$ , détermination de  $\mathbf{B}_{E_0 E'_0}^M$ ;
pour ( $t = t_1, \dots, t_N$ ) faire
  □ Initialisation des quantités d'interface ;
  pour ( $n = 0, \dots, N$ ) faire
    Étape d'admissibilité;
    □  $\forall E \in \mathbf{E}$ , mise à jour éventuelle de  $\mathbf{k}_E$ ;
    pour ( $i = 0, \dots, M$ ) faire
      □  $\forall E \in \mathbf{E}$ , calcul de  ${}^i \mathbf{K}_E$  et assemblage de  $({}^i \mathbf{K}_E + \mathbf{k}_E)$ ;
      □  $\forall E \in \mathbf{E}$ , calcul de  $({}^i \mathbf{L}_E^M)_{E \in \mathbf{E}}$ ;
      □ Assemblage de  ${}^i \mathbf{L}$ ;
      □  $\forall E \in \mathbf{E}$ , résolution de  $({}^i \mathbf{K}_E + \mathbf{k}_E) {}^i \delta u_E^1 = f_{dE} + \widehat{F}_E + {}^i F_E^{int}$ ;
      □  $\forall E \in \mathbf{E}$ , calcul de  ${}^{i+1} u_E^1 = {}^i u_E^1 + {}^i \delta u_E^1$ ;
      □  $\forall E \in \mathbf{E}$ , obtention de  ${}^{i+1} \widetilde{F}_E^M$ ;
      □ Assemblage de  ${}^{i+1} F^M$  et résolution de  ${}^i \mathbf{L} {}^{i+1} \widetilde{W}^M = {}^{i+1} F^M$ ;
      □  $\forall E \in \mathbf{E}$ , résolution de  $({}^i \mathbf{K}_E + \mathbf{k}_E) {}^i \delta u_E^2 = \mathbf{k}_E {}^{i+1} \widetilde{W}_E^M$ ;
      □  $\forall E \in \mathbf{E}$ , calcul de  ${}^{i+1} u_E^2 = {}^i u_E^2 + {}^i \delta u_E^2$ ;
      □  $\forall E \in \mathbf{E}$ , calcul de la solution  ${}^{i+1} u_E = {}^{i+1} u_E^1 + {}^{i+1} u_E^2$ ;
      □ Calcul d'erreur Newton
    fin
    □ Étape de relaxation;
    Étape locale;
    □  $\forall E \in \mathbf{E}$ , en tout point d'intégration de  $\Gamma_E$ , calculer  $(\widehat{W}_E, \widehat{F}_E)$ ;
    □ Calcul d'erreur LaTIn
  fin
fin

```

proposée. Une autre approche basée sur une homogénéisation du problème macroscopique est introduite dans le travail de thèse de [Violeau, 2007]. Ces méthodes sont avantageuses dans les zones où la solution ne présente que de faibles gradients. Un raffinement local de la super-sous-structuration dans les zones à fort gradient doit être considéré pour rendre la méthode plus efficace.

La deuxième solution est constituée de véritables stratégies de calcul à trois échelles qui consistent à une résolution exacte du problème macroscopique par une méthode de décomposition de domaine posée sur les super-sous-structures et les super-interfaces. Une possibilité a été proposée par [Nouy, 2003], elle consiste à résoudre le problème macroscopique par une méthode LaTIn micro-macro. La difficulté potentielle de cette méthode réside dans le choix de bonnes directions de recherche, dont les propriétés de rigidité ne sont pas intuitives. Pour s'affranchir de cette complexité, les travaux de thèse de [Kerfriden, 2008] ont utilisé une décom-

position de domaine primale BDD pour la résolution du problème macroscopique. Nous avons retenu cette dernière démarche pour la résolution parallèle du problème macroscopique.

3.5.1 Condensation statique primale

La résolution du problème macroscopique par la méthode de décomposition de domaine primale est faite sur des super-sous-structures \bar{E} (regroupement de sous-structures E) occupant initialement un domaine $\Omega_{\bar{E}_0}$ de bord $\partial\Omega_{\bar{E}_0}$. Le nombre total de super-sous-structures de la structure \mathbf{E} est noté $\bar{N}_{\mathbf{E}}$. À l'intersection entre deux super-sous-structures adjacentes \bar{E} et \bar{E}' , on définit une super-interface $\Gamma_{\bar{E}_0\bar{E}'_0}$. En pratique, chaque super-sous-structure est composée de l'ensemble des sous-structures traitées sur un même processeur par la stratégie de décompositions de domaine mixte micro-macro.

La condensation primale (Sec. 2.2.2.1, Chap. 4) du problème macroscopique (5.20) sur les inconnues des super-interfaces de chaque super-sous-structure \bar{E} , s'écrit :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{p}}^{(\bar{E})} \widetilde{W}_{\Gamma}^{(\bar{E})} = b_p^{(\bar{E})} \quad , \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \mathbf{S}_{\mathbf{p}}^{(\bar{E})} = \mathbf{L}_{\Gamma\Gamma}^{(\bar{E})} - \mathbf{L}_{\Gamma i}^{(\bar{E})} \mathbf{L}_{ii}^{(\bar{E})^{-1}} \mathbf{L}_{i\Gamma}^{(\bar{E})} \\ b_p^{(\bar{E})} = F_{\Gamma}^{(\bar{E})} - \mathbf{L}_{\Gamma i}^{(\bar{E})} \mathbf{L}_{ii}^{(\bar{E})^{-1}} F_i^{(\bar{E})} \end{cases}$$

où, les indices $(\cdot)_i$ désignent les degrés de liberté internes à la super-sous-structure \bar{E} ; les indices $(\cdot)_{\Gamma}$ désignent les degrés de liberté de super-interface communs avec une super-sous-structure voisine; $\mathbf{S}_{\mathbf{p}}^{(\bar{E})}$ est le complément de Schur macroscopique primal de la super-sous-structure \bar{E} et $b_p^{(\bar{E})}$ est le second membre macroscopique local condensé de la super-sous-structure \bar{E} . Les exposants $(\cdot)^M$, $(\cdot)^{i+1}$ et $(\cdot)^i$ du multiplicateur macroscopique, des opérateurs de rigidité homogénéisés et du second membre macroscopique ont été omis afin d'alléger les écritures.

Le problème macroscopique condensé peut être écrit, après assemblage sur toutes les super-sous-structures, sous la forme :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{p}} \widetilde{W}_{\Gamma} = b_p \quad , \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \mathbf{S}_{\mathbf{p}} = \sum_{\bar{E}} \mathbf{A}^{(\bar{E})} \mathbf{S}_{\mathbf{p}}^{(\bar{E})} \mathbf{A}^{(\bar{E})T} \\ b_p = \sum_{\bar{E}} \mathbf{A}^{(\bar{E})} b_p^{(\bar{E})} \end{cases} \quad (5.21)$$

où, $\mathbf{A}^{(\bar{E})}$ est un opérateur d'assemblage. Ce problème est résolu par un algorithme itératif de type gradient conjugué qui permet aisément de paralléliser sa résolution. Pour ce faire, les opérations nécessaires de transfert ainsi que le stockage de données concernent uniquement des vecteurs de super-interfaces issus d'opérations locales effectuées sur chaque processeur (multiplication d'un vecteur par le complément de Schur local, addition de deux vecteurs, multiplication d'un vecteur par un scalaire). La solution est ensuite reconstruite localement sur les noeuds intérieurs de chaque super-sous-structure.

3.5.2 Résolution en parallèle par un gradient conjugué préconditionné projeté

L'utilisation d'un gradient conjugué pour résoudre le problème d'interface nécessite l'utilisation d'un bon préconditionneur d'une part et d'un projecteur d'autre part, afin de transmettre rapidement l'information à grande longueur de variation au cours des itérations.

Préconditionneur. L'introduction du projecteur dans la méthode de décomposition de domaine primale est associée à la résolution itérative du problème d'interface en utilisant le préconditionneur de Neumann :

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{p}}^{-1} = \sum_{\bar{E}} \widetilde{\mathbf{A}}^{(\bar{E})} \mathbf{S}_{\mathbf{p}}^{(\bar{E})+} \widetilde{\mathbf{A}}^{(\bar{E})T} ,$$

où, $\mathbf{S}_{\mathbf{p}}^{(\bar{E})+}$ est une pseudo-inverse du complément de Schur primal de la super-sous-structure \bar{E} . L'opérateur d'assemblage et de *scaling* est considéré comme $\widetilde{\mathbf{A}}^{(\bar{E})} = \frac{1}{\text{multiplicité}} \mathbf{A}^{(\bar{E})} = \frac{1}{2} \mathbf{A}^{(\bar{E})}$ (la définition des quantités macroscopiques exclue la possibilité d'avoir des ordres de multiplicité des degrés de liberté macroscopiques d'interface supérieurs à 2). Cette opération est suffisante pour assurer une bonne convergence de l'algorithme si les super-sous-structures ne sont pas macroscopiquement trop hétérogènes.

Projection sur une grille grossière. Le préconditionneur $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{p}}^{-1}$ est appliqué au résidu $r = b_p - \mathbf{S}_{\mathbf{p}} \widetilde{W}_b$. Ainsi, effectuer le produit $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{p}}^{-1} r$ consiste à résoudre des problèmes de Neumann sur chaque super-sous-structure avant d'effectuer une opération d'assemblage. Il est alors nécessaire d'assurer que le chargement r est autoéquilibré au sens de chaque super-sous-structure \bar{E} . Cette relation s'écrit algébriquement :

$$\mathbf{R}_b^{(\bar{E})T} \widetilde{\mathbf{A}}^{(\bar{E})T} r^{(\bar{E})} = 0 , \quad (5.22)$$

où, $\mathbf{R}_b^{(\bar{E})}$ est une base du noyau du complément de Schur primal de la super-sous-structure $\mathbf{S}_{\mathbf{p}}^{(\bar{E})}$. En définissant $\mathbf{C} = \left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(1)} \mathbf{R}_b^{(1)} \quad \dots \quad \widetilde{\mathbf{A}}^{(\bar{N}_{\mathbf{E}})} \mathbf{R}_b^{(\bar{N}_{\mathbf{E}})} \right)$, les contraintes locales (5.22) s'écrivent globalement :

$$\mathbf{C}^T r = 0 . \quad (5.23)$$

Cette contrainte est traitée classiquement en recherchant la solution du problème macroscopique condensé sous la forme :

$$\widetilde{W}_b = \widetilde{W}_{b_0} + \mathbf{P} \widetilde{W}_b^* .$$

La contrainte (5.23), pour l'initialisation \widetilde{W}_{b_0} et pour son complémentaire $\mathbf{P}\widetilde{W}_b^*$, peut s'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{C}^T(b_p - \mathbf{S}_p \widetilde{W}_{b_0}) = 0 \\ \mathbf{C}^T \mathbf{S}_p \mathbf{P} \widetilde{W}_b^* = 0 \end{cases}$$

Pour respecter ces conditions d'orthogonalité, on choisit usuellement :

$$\begin{cases} \widetilde{W}_{b_0} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^T \mathbf{S}_p \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T b_p \\ \mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^T \mathbf{S}_p \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{S}_p \end{cases}$$

L'opérateur $\mathbf{S}_p^G = (\mathbf{C}^T \mathbf{S}_p \mathbf{C})$ est une représentation grossière de la rigidité globale de la structure qui définit ce qu'on appelle problème super-macroscopique. L'initialisation \widetilde{W}_{b_0} est une combinaison des traces sur les super-interfaces des modes à énergie nulle des super-sous-structures : $\widetilde{W}_{b_0} \in \text{Im}(\mathbf{C})$. Par projection orthogonale, la partie complémentaire $\mathbf{P}\widetilde{W}_b^*$ est recherchée de manière itérative dans l'espace supplémentaire $\text{Ker}(\mathbf{C}^T \mathbf{S}_p)$.

L'algorithme 2 décrit le gradient conjugué préconditionné projeté utilisé.

Algorithme 2 : Algorithme du gradient conjugué préconditionné projeté

Calculer $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^T \mathbf{S}_p \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{S}_p$;

Calculer $\widetilde{W}_{b_0} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^T \mathbf{S}_p \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T b_p$;

Calculer $r_0 = b_p - \mathbf{S}_p \widetilde{W}_{b_0}$;

Calculer $z_0 = \mathbf{P}\widetilde{\mathbf{S}}_p^{-1} r_0$ et initialiser $w_0 = z_0$;

pour $j = 0, \dots, m$ **faire**

$p_j = \mathbf{S}_p w_j$;

$\alpha_j = (z_j, r_j) / (p_j, w_j)$;

$\widetilde{W}_{b_{j+1}} = \widetilde{W}_{b_j} + \alpha_j w_j$;

$r_{j+1} = r_j - \alpha_j p_j$;

$z_{j+1} = \mathbf{P}\widetilde{\mathbf{S}}_p^{-1} r_{j+1}$;

pour $0 \leq i \leq j$ **faire**

$\beta_j^i = -(z_{j+1}, p_i) / (w_i, p_i)$

fin

$w_{j+1} = z_{j+1} + \sum_{i=1}^j \beta_j^i w_i$

fin

La convergence de l'algorithme est évaluée en calculant la norme du résidu global à la fin de chaque itération, rapportée à la norme du résidu initial.

3.6 Implémentation de la stratégie

L'implantation de la stratégie multiéchelle de décomposition de domaine a été faite à l'intérieur d'un code de recherche éléments finis développé progressivement

par différents doctorants au sein du LMT-Cachan, notamment par A. Caignot, D. Violeau et P. Kerfriden. Il s'agit d'un code C++ / Python basé sur une plateforme logicielle commune au laboratoire conçue par H. Leclerc.

Pour la parallélisation de l'algorithme, un algorithme METIS répartit les sous-structures (maillages et opérateurs) sur les différents processeurs de façon à réduire à son minimum la quantité de données échangée entre processeurs au cours des itérations. La communication entre les processus est réalisée par des fonctions de la librairie MPI.

Bilan du chapitre

Ce chapitre a été consacré à la présentation de la méthode multiéchelle à trois échelles pour l'analyse du couplage flambage-délaminage. Les aspects théoriques de la séparation des échelles micro-macro ont été décrits ainsi que la résolution de chacune des étapes de l'algorithme itératif LaTin. Dans la suite, nous étudions les performances de la méthode sur des exemples de structures élancées.

Maîtrise de la convergence de la stratégie

Dans ce chapitre, nous proposons des améliorations aux paramètres de la stratégie multiéchelle proposée pour bien maîtriser la convergence du processus itératif. Nos efforts ont été principalement concentrés sur l'analyse des directions de recherche ainsi que sur les conditions macroscopiques de raccord d'interface.

Sommaire

1	Choix des directions de recherche	122
2	Problématique associée aux structures élancées	124
3	Analyse des paramètres de la stratégie	126
3.1	Interfaces parfaites	126
3.2	Interfaces de contact	133
3.3	Interfaces cohésives	138

1 Choix des directions de recherche

Le choix des directions de recherche de la stratégie LaTin multiéchelle, ou plus généralement des paramètres reliant les quantités statiques et cinématiques des méthodes de décomposition de domaine mixtes reste un problème relativement ouvert. Les paramètres des directions de recherche \mathbf{E}^+ et \mathbf{E}^- conditionnent fortement le taux de convergence de notre stratégie. En outre, pour la résolution de problèmes non linéaires, la convergence elle-même de la méthode peut être remise en cause par un mauvais choix de ces paramètres.

Il est possible de montrer que la direction de recherche optimale de l'étape d'admissibilité $k_{E_0}^-$ (reliant les efforts aux déplacements sur l'interface Γ_E de la sous-structure E) est le complément de Schur du complémentaire de Ω_E . Le calcul de cet opérateur n'est évidemment pas envisageable, puisqu'il nécessite des calculs globaux qui entraînent une perte d'efficacité de la résolution parallèle. Pour des problèmes linéaires, une approximation grossière de cet opérateur est souvent suffisante. Par exemple, un choix judicieux pour les interfaces parfaites de structures hétérogènes dans une résolution monoéchelle de la méthode (sans résolution du problème macroscopique) est $k_{E_0}^- \simeq Y/L_0$, où Y est une moyenne des modules de Young du matériau qui constitue la structure et L_0 est une longueur caractéristique de la structure [Cognard, Dureisseix, Lavedève, et Lorong, 1996]. Classiquement, les directions de recherche de l'étape locale sont prises égales à celles de l'étape d'admissibilité ($k_{E_0}^+ = k_{E_0}^-$).

La résolution du problème macroscopique de la méthode micro/macro permet de transmettre l'information à grande longueur de variation dans toute la structure, ce qui permet simplifier le choix des directions de recherche. En vertu du principe de Saint-Venant, les champs microscopiques, à résultants et moments nuls sur le bord $\partial\Omega_E$, n'ont qu'une influence localisée autour de cette sous-structure. Ainsi, l'opérateur optimal peut être approché et calculé localement autour de E . Dans le même contexte que précédemment, mais dans le cadre multiéchelle, [Dureisseix et Lavedève, 1997] proposent comme direction de recherche optimale $k_{E_0}^- \simeq Y_E/L_{\Gamma_{E_0}}$, où Y_E est une moyenne des modules de Young de la sous-structure et $L_{\Gamma_{E_0}}$ est une valeur représentative des dimensions de l'interface. Une possibilité, celle retenue dans ce mémoire, est de choisir $L_{\Gamma_{E_0}} = \sqrt{A_{\Gamma_{E_0}}}$, où $A_{\Gamma_{E_0}}$ est l'aire de l'interface considérée.

Dans le cadre de problèmes non linéaires ou de comportements d'interface plus complexes, ce choix de paramètres n'est pas très efficace. [Lavedève et al., 2001] proposent de séparer la direction de recherche en une partie micro $k_{E_0}^{-m}$ et une partie macro $k_{E_0}^{-M}$. De sorte que $k_{E_0}^{-M}$ puisse être choisie comme le comportement de l'interface, ce qui permet d'imposer à l'étape d'admissibilité le comportement d'interface. Cette séparation est réalisée en réécrivant l'Éq. (5.14) sous la forme

suivante :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{W}_E^{M^*})_{E \in \mathbf{E}} \in \Pi_{E \in \mathbf{E}} \mathcal{W}_E^M, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{E_0}} ({}^{i+1}\underline{F}_{E_0} - \widehat{\underline{F}}_{E_0}) \cdot \underline{W}_E^{M^*} d\Gamma_0 \\ + \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{E_0}} \left(k_{E_0}^- ({}^{i+1}\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E) - k_{E_0}^{-M} {}^{i+1}\widetilde{\underline{W}}_E^M \right) \cdot \underline{W}_E^{M^*} d\Gamma_0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall (\underline{W}_E^{m^*})_{E \in \mathbf{E}} \in \Pi_{E \in \mathbf{E}} \mathcal{W}_E^m, \\ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{E_0}} ({}^{i+1}\underline{F}_{E_0} - \widehat{\underline{F}}_{E_0}) \cdot \underline{W}_E^{m^*} d\Gamma_0 + \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{E_0}} k_{E_0}^{-m} ({}^{i+1}\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E) \cdot \underline{W}_E^{m^*} d\Gamma_0 = 0. \end{aligned}$$

Pour les interfaces parfaites, $k_{E_0}^{-M}$ est rejeté à l'infini afin d'assurer la continuité des déplacements macroscopiques d'interface [Loiseau, 2001]. Dans le cas des interfaces élastiques homogènes, la valeur optimale est en relation avec la rigidité d'interface $k_{E_0}^{-M} = 2k^0$ (où k^0 est la rigidité d'interface) [Kerfriden et al., 2009]. Pour la partie microscopique des directions de recherche, la valeur $k_{E_0}^{-m} = Y_E/L_{\Gamma_{E_0}}$ est un bon point de départ pour les interfaces parfaites et $k_{E_0}^{-m} = 2k^0$ pour les interfaces élastiques homogènes. À l'étape locale, on peut choisir $k_{E_0}^+ = k_{E_0}^{-m}$. Si la séparation d'une partie micro et une partie macro des directions de recherche s'avère favorable pour le taux de convergence de la méthode, elle implique une étape de projection de $k_{E_0}^-$ pour la construction des opérateurs de rigidité augmentés de l'étape d'admissibilité, ce qui implique des calculs supplémentaires. Dans la pratique, cette séparation est donc peu utilisée.

Du fait de l'absence de comportement macroscopique homogénéisé pour les interfaces de contact et cohésives, la différentiation des directions de recherche est impossible, alors $k_{E_0}^{-M} = k_{E_0}^{-m} = k_{E_0}^-$. [Ladevèze et al., 2002] montrent que la valeur $k_{E_0}^- = Y_E/L_{\Gamma_{E_0}}$ est une bonne approximation pour les interfaces de contact de structures massives.

Dans les problèmes faisant intervenir des interfaces cohésives, [Kerfriden et al., 2009] ont montré qu'une valeur trop faible des directions de recherche locales $k_{E_0}^+$ peut entraîner une divergence ou stagnation du processus itératif. Une solution proposée est de prendre une direction de recherche infinie à l'étape locale. Ce choix a peu d'influence sur le taux de convergence et de plus il permet une résolution explicite du problème local posé sur chaque point d'intégration. La direction de recherche $k_{E_0}^-$ optimale sous cette condition est égale à $2k^0(1-d)$ (où k^0 est la rigidité initiale et d l'endommagement courant). Néanmoins, utiliser cette valeur implique d'actualiser les opérateurs de l'étape d'admissibilité à chaque itération et alourdit les calculs. Une stratégie d'actualisation uniquement sur les interfaces entièrement endommagées a alors été proposée dans [Kerfriden et al., 2009].

Sous le choix des directions de recherche classique ici présenté, nous souhaitons évaluer les capacités que possède la méthode multiéchelle décrite au chapitre précédent pour traiter des problèmes de couplage flambage-délaminage de structures

élancées. On s'intéresse à des géométries délaminées qui peuvent facilement attendre un élancement de l'ordre de $L_{\text{délaminé}}/h_{\text{pli}} \gg 100$.

2 Problématique associée aux structures élancées

Nous procédons donc à l'étude d'une plaque mince en compression. Elle est composée de deux plis avec une préfissure centrale susceptible de se propager. Une perturbation symétrique perpendiculaire au plan de la plaque est introduite pour provoquer le flambage hors plan (voir Fig. 6.1). Nous avons utilisé pour ce calcul les directions de recherche habituelles, à savoir : $k_{E_0}^+ \rightarrow \infty$, $k_{E_0}^- = 2k^0(1-d)$ pour les interfaces cohésives et $k_{E_0}^- = k_{E_0}^+ = Y_E/L_{\Gamma_{E_0}}$ pour les interfaces parfaites et de contact.

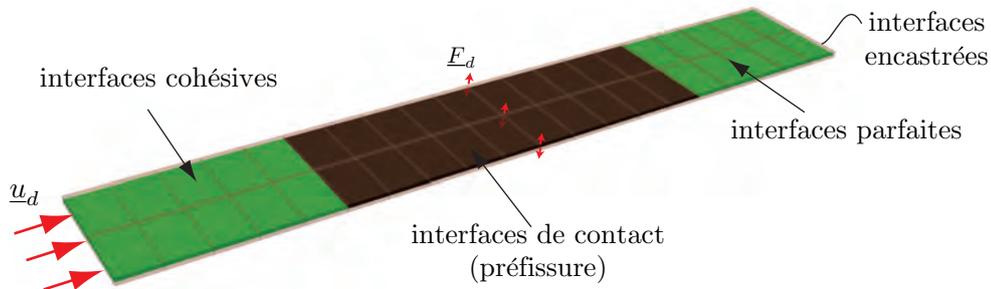


Fig. 6.1: Plaque préfissurée en compression : configuration, sous-structuration et interfaces

Des difficultés de convergence ont été rencontrées dès le premier incrément de temps. La Fig. 6.2 montre l'évolution de l'erreur au cours des itérations, ainsi que certaines configurations déformées. On observe que seulement après quelques centaines d'itérations la configuration déformée possède les interfaces de contact (préfissure) complètement séparées. De plus, la configuration déformée est proche de la solution de référence uniquement après mille itérations. Néanmoins, la charge de compression n'est pas correcte et des instabilités de type flambage apparaissent. On remarque que dans les configurations de flambage, les sous-structures ne sont pas bien raccordées en déplacement.

D'après cet exemple, il est donc mis en évidence que les valeurs de directions de recherche classiques ne sont pas adaptées pour notre étude. Différentes difficultés sont à surmonter :

- Il semble que la base macroscopique linéaire choisie (résultantes et moments des efforts, translations et rotations des déplacements et modes d'extension de l'interface) n'est plus pertinente pour traiter des structures très élancées et une partie de la réponse à grande longueur de variation n'est pas transmise à la structure entière. Une possibilité est de modifier les valeurs locales $k_{E_0}^- = Y_E/L_{\Gamma_{E_0}}$ des interfaces parfaites pour introduire des informations sur la géométrie de la structure.

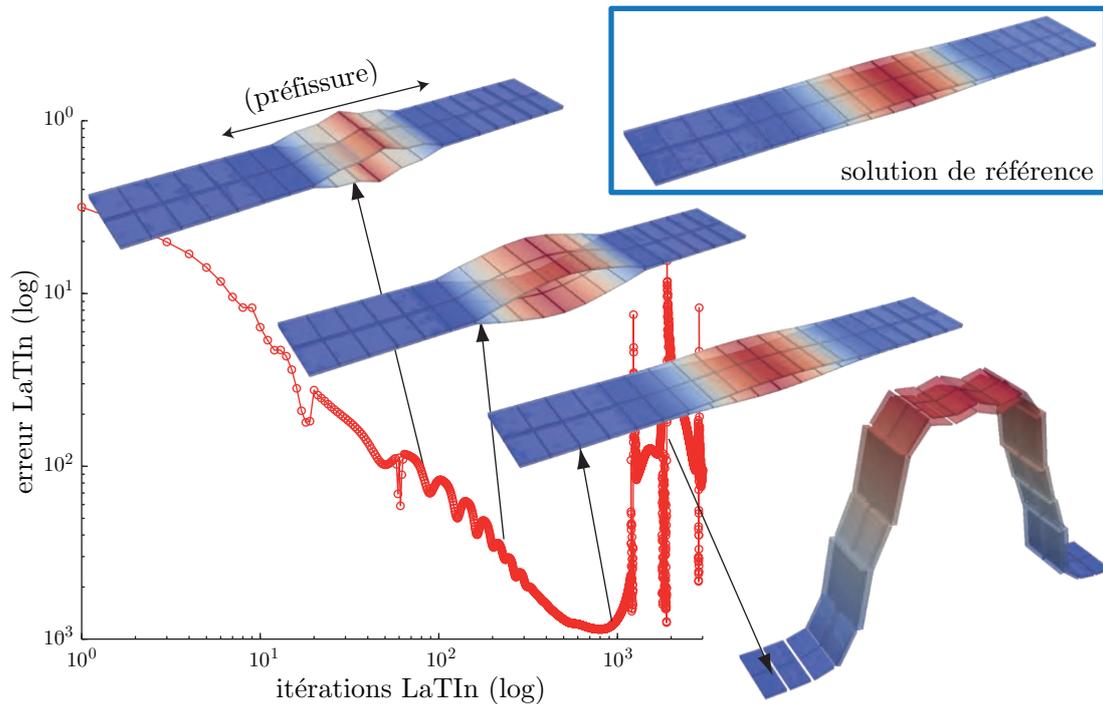


Fig. 6.2: Plaque préfissurée en compression : taux de convergence et configurations déformées du premier incrément (déformée amplifiée $\times 10$)

- En présence de flambage, la configuration déformée peut être très différente de l'initiale, ce qui nécessite probablement de conditions de raccord des quantités d'interface supplémentaires.
- Pour les interfaces endommagées, il est possible d'avoir des surfaces fissurées qui reviennent en contact ou *vice versa*. Alors, une même interface peut avoir différents états au cours des incréments, états qui sont impossibles à prédire. Malheureusement, il se trouve que les directions de recherche optimales sont très différentes selon l'état (séparation ou contact).
- Un dernier point à réviser est la pertinence de la mise à jour des directions de recherche des interfaces cohésives $k_{E_0}^- = 2k^0(1-d)$. Une technique d'actualisation uniquement sur les interfaces entièrement endommagées peut devenir inefficace pour les sous-structures élancées qui possèdent de grandes interfaces cohésives.

Dans le but d'isoler les difficultés, les nouveaux paramètres de la méthode sont recherchés indépendamment pour chaque type de comportement d'interface. Les sections suivantes présentent séparément des analyses pour les interfaces parfaites en flexion et en flambage (Sec. 3.1), pour les interfaces de contact (Sec. 3.2) et pour les interfaces cohésives (Sec. 3.3), sur des exemples académiques de structures élancées.

3 Analyse des paramètres de la stratégie

3.1 Interfaces parfaites

Nous proposons une étude sur les directions de recherche d'interfaces parfaites de structures élancées. Pour commencer, nous traitons une plaque en flexion sous l'hypothèse de petites perturbations (Section 3.1.1), puis en flambage (Sec. 3.1.2). L'analyse montre l'influence de la géométrie sur le taux de convergence et sur l'extensibilité de la stratégie.

3.1.1 Flexion

Le problème étudié est une plaque encadrée à une extrémité avec une force surfacique de flexion imposée sur le côté opposé (voir Fig. 6.3), sous l'hypothèse de petites perturbations. Le matériau est isotrope et homogène. Différentes sous-structurations ont été testées, toutes faites uniquement dans la direction X_1 . La Fig. 6.3 montre une sous-structuration en 8 sous-structures. En même temps, différents coefficients d'élancement de la plaque ont été analysés, pour cela, seulement l'épaisseur h_0 a été modifiée. La longueur et la profondeur ont été fixées à $L_0 = 20$ mm et $b_0 = 1$ mm, respectivement. Pour bien représenter la flexion, 10 éléments linéaires dans l'épaisseur des plaques ont été utilisés. Ainsi, les maillages comptent, en moyenne, 1,8 millions de degrés de liberté. Dans tous les cas, le problème macroscopique est résolu de manière directe en raison du faible nombre de sous-structures considéré.

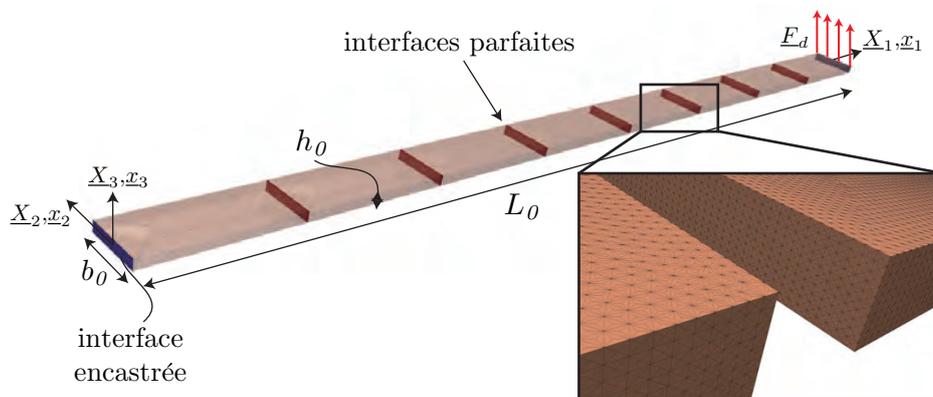


Fig. 6.3: Plaque encadrée 3D en flexion : géométrie, sous-structures et interfaces.

Nous avons commencé par étudier la version monoéchelle de la méthode. Dans ce cas, la sous-structuration était fixée à 4 sous-structures et l'élancement de la plaque variait. Le Tab. 6.1 montre le nombre d'itérations à convergence pour différents coefficients d'élancement L_0/h_0 . Pour l'instant, nous présentons les résultats de la ligne A du Tab. 6.1, où la valeur classique $k_{E_0}^- = k_{E_0}^+ = Y/L_0$ était prise en compte dans les calculs. On peut constater que le nombre d'itérations explose avec la croissance du coefficient d'élancement.

	coefficients d'élanement L_0/h_0	10	20	50	70	100
A	nombre d'itérations LaTIn à convergence sans directions de recherche anisotropes	96	282	914	1145	1388
B	nombre d'itérations LaTIn à convergence avec directions de recherche anisotropes	51	57	85	114	193

Tab. 6.1: Influence de la géométrie dans le taux de convergence : version mono-échelle, 4 sous-structures. Erreur LaTIn fixée à 0,01%

Dans la suite, tous nos calculs ont été réalisés en utilisant la version multi-échelle de la stratégie. Nous présentons dans le Tab. 6.2 une comparaison du nombre d'itérations à convergence pour une même géométrie ($L_0/h_0 = 100$) en variant le nombre de sous-structures. Dans tous les cas, on a utilisé $k_{E_0}^+ = k_{E_0}^{-m}$. La ligne A représente le choix $k_{E_0}^{-M} = k_{E_0}^{-m} = Y_E/L_{\Gamma_{E_0}}$. La ligne B est obtenue en assurant la continuité des déplacements macroscopiques ($k_{E_0}^{-M} \rightarrow \infty$) et en gardant $k_{E_0}^{-m} = Y_E/L_{\Gamma_{E_0}}$. On peut observer pour ces deux cas que le nombre d'itérations augmente avec le nombre de sous-structures, c'est-à-dire qu'il existe une perte d'extensibilité de la stratégie.

	coefficients d'élanement L_0/h_0	8	16	32	64
A	nombre d'itérations LaTIn à convergence sans continuité des déplacements macroscopiques et sans directions de recherche anisotropes	15	15	22	38
B	nombre d'itérations LaTIn à convergence avec continuité des déplacements macroscopiques et sans directions de recherche anisotropes	14	15	21	36
C	nombre d'itérations LaTIn à convergence sans continuité des déplacements macroscopiques et avec directions de recherche anisotropes	3	6	9	15
D	nombre d'itérations LaTIn à convergence avec continuité des déplacements macroscopiques et avec directions de recherche anisotropes	4	4	4	5

Tab. 6.2: Influence de la sous-structuration dans le taux de convergence : version multi-échelle ($L_0/h_0 = 100$). Erreur LaTIn fixée à 0,01%

Pour remédier aux inconvénients des versions mono et multi-échelle, nous proposons une modification aux directions de recherche microscopiques, du fait que les efforts et déformations sont très différents dans les directions normales et tangentes d'une structure mince.

Il est possible de faire une analyse d'ordre de grandeur à partir de l'admissibilité statique ($\sigma_{X_1X_1,X_1} + \tau_{X_1X_3,X_3} = 0$) et de l'admissibilité cinématique ($\varepsilon_{X_1X_3} = \frac{1}{2}(u_{X_1,X_3} + u_{X_3,X_1})$) de la théorie des plaques et d'obtenir les relations suivantes entre les contraintes normales et de cisaillement, et les déplacements normaux et

transverses :

$$O\left(\frac{\tau_{X_1X_3}}{h_0}\right) = O\left(\frac{\sigma_{X_1X_1}}{L_0}\right) \quad , \quad O\left(\frac{u_{X_1}}{h_0}\right) = O\left(\frac{u_{X_3}}{L_0}\right) .$$

Du fait que les directions de recherche relient les efforts aux déplacements d'interface ($F_{X_1X_1} = (k_{E_0}^{-m})_n W_{X_1}$ et $F_{X_1X_3} = (k_{E_0}^{-m})_t W_{X_3}$), on peut en déduire qu'elles doivent avoir des valeurs anisotropes :

$$\frac{(k_{E_0}^{-m})_n}{(k_{E_0}^{-m})_t} = \left(\frac{L_0}{h_0}\right)^2 \quad , \quad (6.1)$$

où, le rapport L_0/h_0 est une quantité macroscopique représentant la structure complète. Le choix de cette quantité sera discuté à la fin de cette section.

Remarque : Dans le cas de grandes transformations, la distinction normale et tangente des directions de recherche est faite à partir de la configuration de l'interface avant déformation, ainsi les directions de recherche anisotropes ne varient pas au cours des itérations. Des essais ont été faits en actualisant les directions de recherche selon les normales courantes, mais le gain en nombre d'itérations n'était pas suffisant par rapport aux temps de calculs supplémentaires. En plus, dans certains cas, on a observé des instabilités et la divergence du processus itératif.

En exploitant la correction (6.1) et en gardant la valeur normale égale à $(k_{E_0}^-)_n = Y/L_0$, on obtient une amélioration considérable du taux de convergence de la version monoéchelle. En plus, le taux de convergence est moins dépendant du coefficient d'éclatement (ligne B du Tab. 6.1).

En utilisant la relation (6.1) avec $(k_{E_0}^{-m})_n = Y_E/L_{\Gamma_{E_0}}$ dans la version multiéchelle, on trouve une réduction importante du nombre d'itérations si le choix $k_{E_0}^{-M} = (k_{E_0}^{-m})_n$ est utilisé (ligne C du Tab. 6.2) ; la stratégie est encore plus efficace et même extensible si la continuité des déplacements macroscopiques est imposée avec $k_{E_0}^{-M} \rightarrow \infty$ (ligne D du Tab. 6.2).

On analyse maintenant le choix du rapport d'anisotropie des directions de recherche microscopiques. Du fait que les directions de recherche microscopiques ont uniquement une influence locale si le problème macroscopique contient la partie de la solution à grande longueur de variation, on a testé un rapport d'anisotropie lié uniquement à la géométrie des sous-structures. La Fig. 6.4 permet de comparer le taux de convergence pour différentes sous-structurations, en utilisant comme rapport d'anisotropie les dimensions de la sous-structure $(L_0^{SST}/h_0^{SST})^2$ (barres A) et en utilisant celles de la structure entière $(L_0/h_0)^2$ (barres B). On constate que le rapport d'anisotropie local est beaucoup moins performant que le choix global. En effet, le nombre d'itérations à convergence des barres A dépend de la sous-structuration contrairement aux barres B qui ont un taux de convergence presque constant.

Une explication à ce phénomène pourrait se trouver dans le fait que la base macroscopique linéaire choisie n'est pas suffisante pour capter la variation à grande

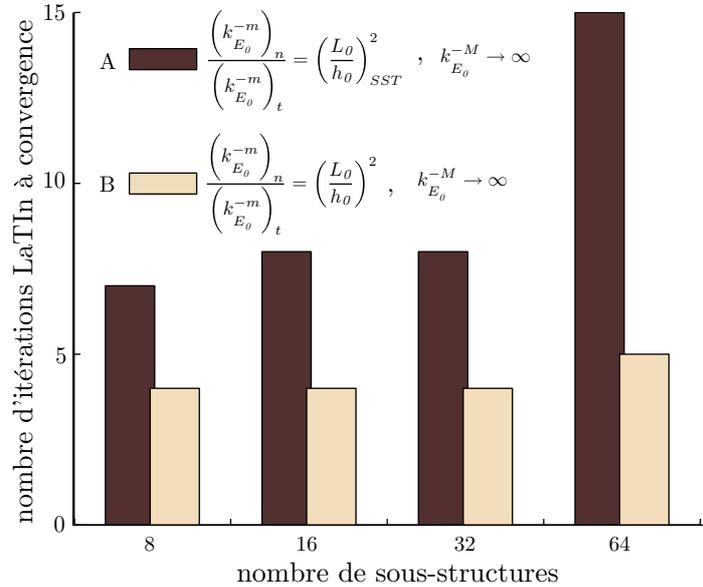


Fig. 6.4: Influence du rapport d'anisotropie dans le taux de convergence : version multiéchelle, $L_0/h_0 = 100$. Erreur LaTin 0,01%

longueur de la solution en flexion de structures minces. Cependant, nous avons testé une base macroscopique entière, c'est-à-dire, en considérant tous les degrés de liberté d'interface, sans trouver des résultats convaincants : le rapport d'anisotropie $(L_0/h_0)^2$ s'est montré toujours plus efficace.

Nous interprétons ces résultats comme une difficulté de l'homogénéisation macroscopique elle-même. Par définition, elle est réalisée indépendamment sur chaque sous-structure. Si le nombre de sous-structures augmente, alors L_0^{SST} diminue et le comportement homogénéisé en flexion est moins souple et plus éloigné de la rigidité réelle de la structure, augmentant le nombre d'itérations à convergence. Du fait que la souplesse en flexion est une quantité globale, il faudrait une homogénéisation à une échelle entière. Pour s'affranchir de cette dernière, un rapport d'anisotropie des directions de recherche microscopique portant sur des quantités globales telles que $(L_0/h_0)^2$ introduit la souplesse manquante et rend la stratégie efficace.

3.1.2 Flambage

Cette section concerne une étude des directions de recherche d'interfaces parfaites en grandes transformations. Il s'agit d'une plaque doublement encadrée avec une des deux extrémités soumise à un déplacement axial de compression \underline{u}_d . Une force perpendiculaire au plan de la plaque est appliquée en son centre pour induire le flambage hors plan. Les données sont : $L_0 = 10$ mm, $h_0 = 0,1$ mm, $b_0 = 1$ mm, $E = 135\,000$ MPa et $\nu = 0,3$. La géométrie est décomposée en 640 sous-structures et 1.464 interfaces (voir Fig. 6.5). Le maillage a 2,2 millions de degrés de liberté et 12 éléments linéaires dans l'épaisseur de la plaque. Le problème macroscopique et le

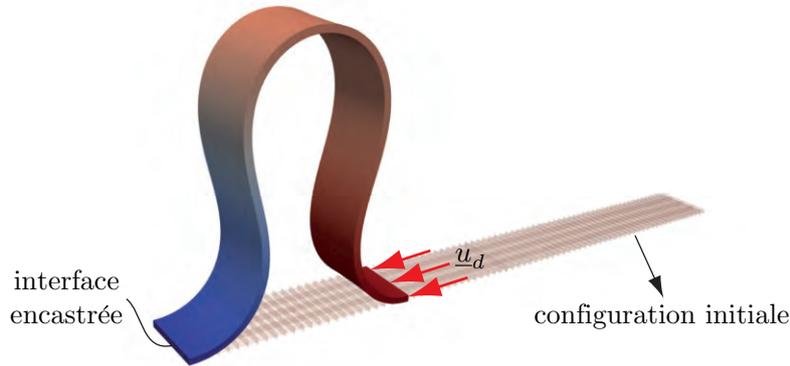


Fig. 6.5: Configuration initiale et finale en flambage.

problème super-macroscopique ont respectivement 13 176 et 372 degrés de liberté, en utilisant 64 processeurs.

Le calcul de flambage a été réalisé en 96 incréments, la Fig. 6.6 donne l'effort de compression axial en fonction du déplacement transversal du point central perturbé. La réponse numérique est en parfait accord avec la solution théorique [Timoshenko et Gere, 1936], laquelle a une force critique d'Euler égal à $P_c = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} = 4,4$ N. La configuration finale déformée est aussi représentée sur la Fig. 6.5. On remarque que le flambage commence près du 11^e incrément de temps.

Une analyse similaire à celle mise en place pour les interfaces parfaites en petites perturbations est réalisée ici. Tous les calculs sont multiéchelles et ils considèrent les directions de recherche locales égales aux directions de recherche microscopiques de l'étape d'admissibilité ($k_{E_0}^+ = k_{E_0}^{-m}$). Dans un premier temps, la différenciation entre les directions microscopiques et macroscopiques n'a pas été utilisée ($k_{E_0}^{-M} = k_{E_0}^{-m} = Y_E/L_{\Gamma_{E_0}}$). Malheureusement, le processus itératif ne converge plus

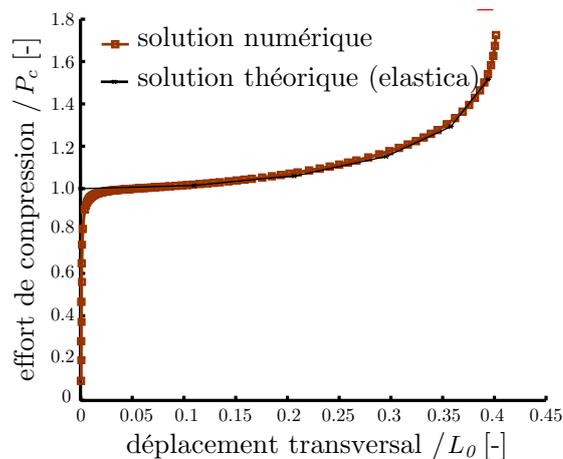


Fig. 6.6: Force de compression en fonction du déplacement transversal d'une plaque en flambage.

après le troisième pas de temps. De manière similaire, si des directions de recherche microscopiques anisotropes sont introduites ($(k_{E_0}^{-m})_n = Y_E/L_{\Gamma_{E_0}} = (L_0/h_0)^2(k_{E_0}^{-m})_t$) la stratégie diverge au moment du flambage (11^e incrément de temps). D'après la configuration déformée au cours des itérations, on a pu constater que le raccord en déplacement entre sous-structures est très difficile pour ces choix de paramètres.

Une première solution fut obtenue en rigidifiant les directions de recherche $k_{E_0}^{-M} = (k_{E_0}^{-m})_n = 100(Y_E/L_{\Gamma_{E_0}})$. Le nombre d'itérations des premiers 20 incréments est illustré par les barres A de la Fig. 6.7. Ce choix est proche d'imposer la continuité des déplacements macroscopiques et permet évidemment le raccord tôt des sous-structures. Les deux autres résultats de la Fig. 6.7 sont obtenus en assurant la continuité des déplacements macroscopiques ($k_{E_0}^{-M} \rightarrow \infty$), sans (barres B) et avec (barres C) des directions de recherche anisotropes. Ces deux jeux de paramètres améliorent le taux de convergence par rapport à la première solution. On observe qu'à la différence des barres C, les barres A et B présentent une augmentation des itérations autour du moment du flambage.

La Fig. 6.7 montre aussi les temps de calcul des trois options. Le premier choix est le plus coûteux et l'option C est la plus rapide, même si elle a besoin d'opérations supplémentaires de projection des directions de recherche. Ainsi, la continuité des déplacements et la différenciation des directions microscopiques normale et tangente offrent toujours la meilleure performance à la méthode, en ce qui concerne le nombre

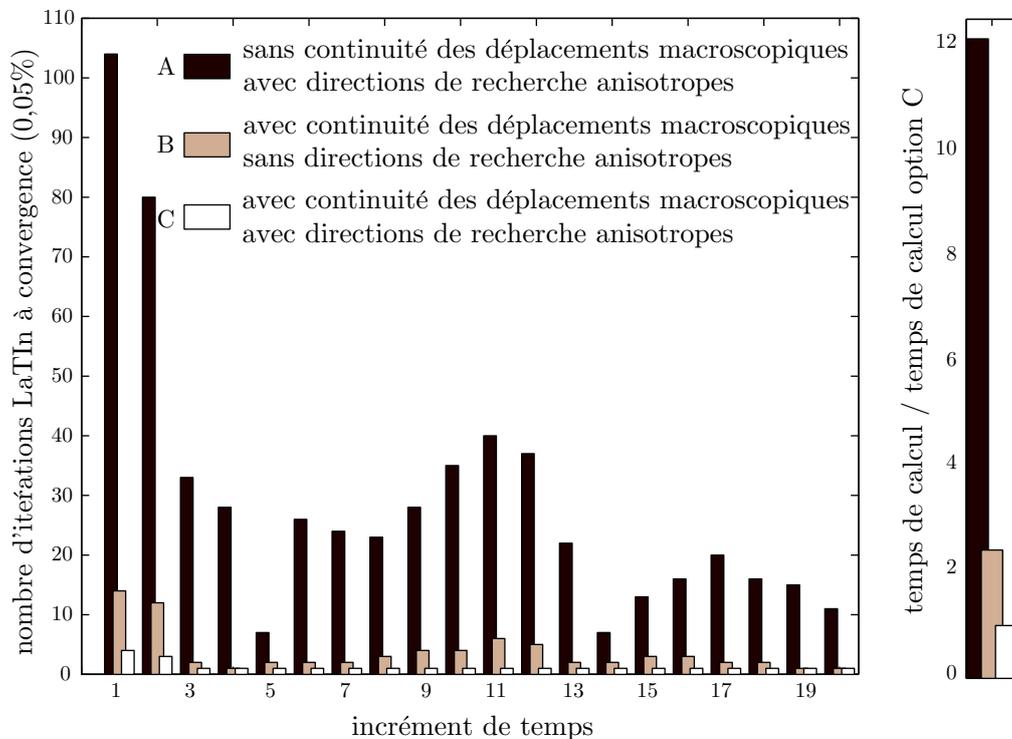


Fig. 6.7: Influence des directions de recherche en flambage.

d'itérations et le temps de calcul.

Remarque : Quand les changements de configuration sont importants dans le cadre des grandes transformations, la continuité des déplacements macroscopiques d'interface joue un rôle primordial pour assurer le raccord entre sous-structures. Elle sera alors toujours utilisée dans nos calculs.

Analyses supplémentaires en grandes transformations

Nous avons étudié l'influence du critère d'erreur de l'étape d'admissibilité sur la solution. La Fig. 6.8 montre le nombre total d'itérations des premiers 20 incréments de temps en fonction de la valeur du critère d'erreur Newton de l'étape d'admissibilité (erreur en variation relative du déplacement solution), à critère d'erreur LaTIn fixé (erreur_{LaTIn} = 0,05%). On observe évidemment une augmentation du nombre d'itérations de l'étape d'admissibilité pour les critères plus fins. Par contre, le nombre d'itérations LaTIn reste toujours le même. Quand on a comparé les réponses globales de chaque cas, toutes les solutions étaient confondues, sauf celle du critère d'erreur Newton égal à 1. De ces constats, on peut dire que les critères LaTIn et Newton sont indépendants entre eux. Nous choisissons donc d'utiliser un critère d'admissibilité assez fin (erreur_{Newton} = 0,01%) pour assurer une réponse correcte en flambage.

Pour l'exemple présenté auparavant (barres C de la Fig. 6.7, erreur_{LaTIn} = 0,05% et erreur_{Newton} = 0,01%), le nombre total d'itérations Newton de l'étape d'admissibilité ainsi que le nombre d'itérations LaTIn des premiers 20 incréments de temps sont présentés sur la Fig. 6.9. En moyenne, 3,6 itérations Newton sont réalisées à chaque itération LaTIn.

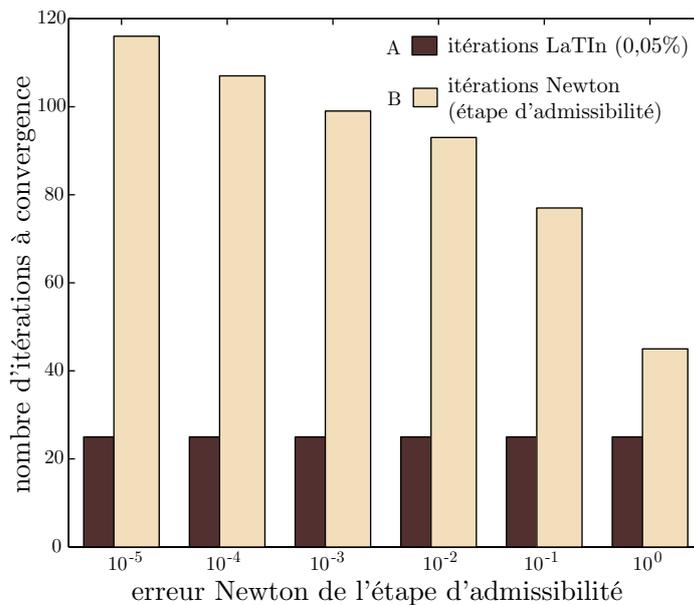


Fig. 6.8: Influence du critère d'erreur de l'étape d'admissibilité.

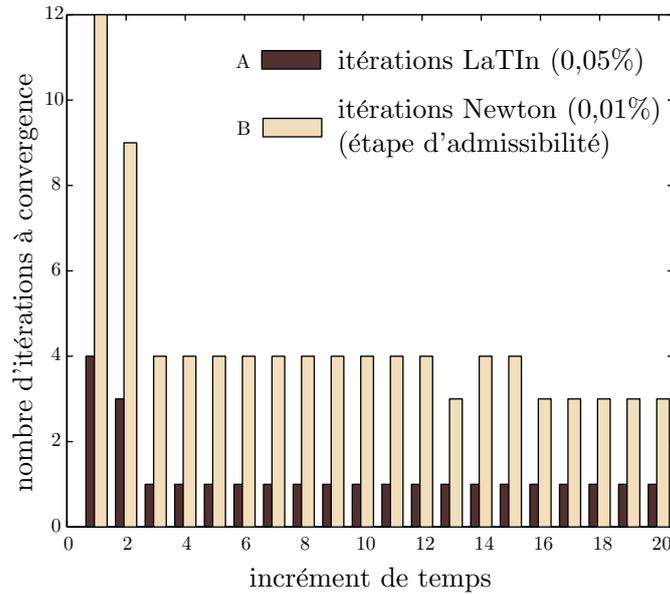


Fig. 6.9: Itérations LaTIn et itérations de l'étape d'admissibilité.

Remarque : Une propriété de la stratégie multiéchelle ici proposée est la possibilité de traiter des non-linéarités géométriques globales par la vérification du problème macroscopique à chaque itération de l'étape d'admissibilité. Néanmoins, cette vérification implique la mise à jour selon la configuration actualisée de l'opérateur homogénéisé ${}^i\mathbf{L}$, ce qui évidemment alourdit les calculs. Nous avons testé la méthode en actualisant le problème macroscopique seulement au début de chaque incrément de temps ou au début de chaque étape d'admissibilité. Malheureusement, des solutions erronées ou la divergence de la stratégie, selon la discrétisation temporelle, ont été rencontrées. Dans ce travail de thèse, la mise à jour continue du problème macroscopique est retenue, mais des critères additionnels pourraient être introduits pour réduire les actualisations et le temps de calcul, par exemple des critères énergétiques pour trouver les modes de flambage de moindre énergie.

3.2 Interfaces de contact

Des travaux précédents montrent que la valeur $k_{E_0}^+ = k_{E_0}^- = Y_E/L_{\Gamma_{E_0}}$ est une bonne approximation des directions de recherche d'interfaces de contact dans le cadre de structures massives [Ladevèze et al., 2002]. Nous avons constaté que ce choix est encore valable dans le cas de zones de contact en fermeture de structures minces. Par contre, dans le cas de zones de contact élancées en séparation, cette valeur n'est plus optimale, car le problème macroscopique introduit une raideur artificielle à l'interface que l'étape locale ne peut pas compenser rapidement. Un choix judicieux est donc de choisir $k_{E_0}^+ = k_{E_0}^- = 0$ pour les interfaces en ouverture.

Nous sommes alors en présence de deux directions de recherche selon l'état de

l'interface de contact ; un mauvais choix va dramatiquement détériorer le taux de convergence de la stratégie. De plus, la complexité des problèmes non linéaires rend impossible la connaissance *a priori* de l'état d'une interface. Nous sommes donc intéressés à définir un algorithme de mise à jour des directions de recherche en accord avec l'état actuel d'une interface de contact. Cette procédure de mise à jour doit chercher un compromis entre performance et stabilité de la méthode.

Nous proposons l'étude de mise à jour sur un problème de contact en ouverture et un autre en fermeture, chacun initialisé avec un état de contact erroné. Dans le but de simplifier l'analyse, le frottement est supposé nul. Bien que la zone de contact de la géométrie choisie soit très importante par rapport aux dimensions de la structure, ce type de configuration peut avoir lieu dans le cas de zones délaminées importantes, où des changements d'état de l'interface peuvent apparaître à cause de changements de modes de flambage, comme nous verrons dans la Sec. 1 du Chap. 7.

3.2.1 Interface de contact en séparation

Ce premier problème concerne une plaque isotrope doublement encastrée avec une préfissure initiale a_0 , soumise à un déplacement de compression et une perturbation symétrique qui induit le flambage hors plan, voir Fig. 6.10. Les données géométriques sont : $L_0 = 20$ mm, $h_0 = 0,2$ mm, $b_0 = 1$ mm, $a_0 = 10$ mm. La plaque est décomposée en 80 sous-structures et 126 interfaces. Les résultats présentés dans la suite correspondent au premier incrément de temps.

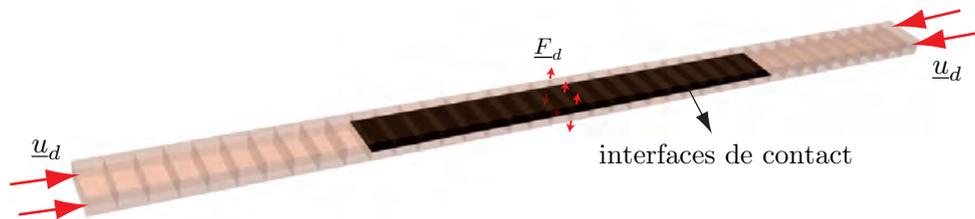


Fig. 6.10: Problème d'une interface de contact en ouverture.

La Fig. 6.11 montre l'évolution de l'erreur LaTin au cours des itérations. Si les paramètres de directions de recherche sont initialisés à la valeur correspondant à l'état d'ouverture ($k_{E_0}^+ = k_{E_0}^- = 0$), alors la solution converge de façon optimale en 10 itérations. Si l'on utilise la valeur d'un état de fermeture $k_{E_0}^+ = k_{E_0}^- = Y_E / L_{\Gamma E_0}$, il est extrêmement difficile d'atteindre la solution correcte. En effet, la rigidité additionnelle introduite pour les directions de recherche produit une stagnation du processus itératif vers une configuration non physique, similaire à la déformée montrée dans la première image de la Fig. 6.12.

En initialisant avec les paramètres de fermeture sur toutes les interfaces, nous proposons donc de vérifier l'état des interfaces à chaque dix itérations et de corriger les directions de recherche de celles qui sont en ouverture. La Fig. 6.12 présente les configurations obtenues après les mises à jour.

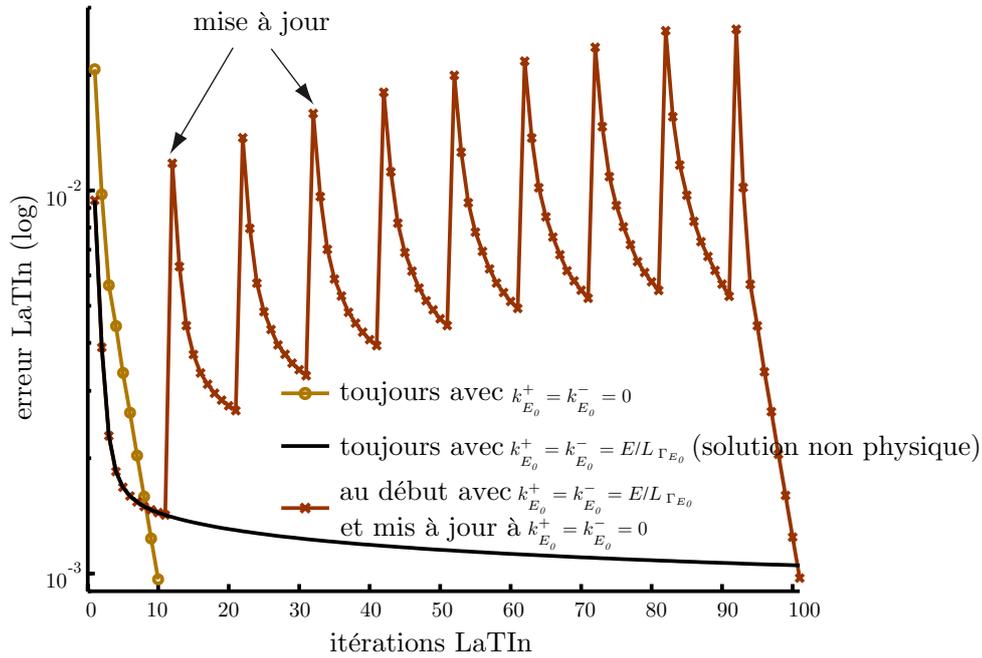


Fig. 6.11: Évolution de l'erreur LaTIn en séparation pour différentes directions de recherche.

Remarques :

- La convergence de la procédure de mise à jour a été seulement possible en initialisant les quantités d'interface (efforts et déplacements) à la valeur qu'ils avaient au début de l'incrément de temps. Des instabilités ont été observées si les quantités d'interface n'étaient pas réinitialisées.
- Une interface de contact est déclarée en état d'ouverture (respectivement fermeture) si tous ses points d'intégration ont été détectés ouverts (respectivement fermés) à l'étape locale.
- Des essais infructueux ont été effectués pour réaliser une mise à jour indépendante sur chaque point de l'interface, car des instabilités au cours des itérations ont été systématiquement rencontrées à cause des oscillations de l'état de contact.
- Une analyse similaire à la précédente a été réalisée en utilisant les directions de recherche $k_{E_0}^+ = k_{E_0}^- = E/L$, où L est la longueur de la structure. Cependant, le même comportement et les mêmes difficultés qu'auparavant ont été rencontrés.

Ces remarques restent valables dans le cas de contact en fermeture que nous analysons dans la suite.

3.2.2 Interface de contact en fermeture

L'étude de contact en fermeture concerne une plaque isotrope doublement encastree avec une préfissure initiale a_0 soumise à une force de flexion appliquée sur sa

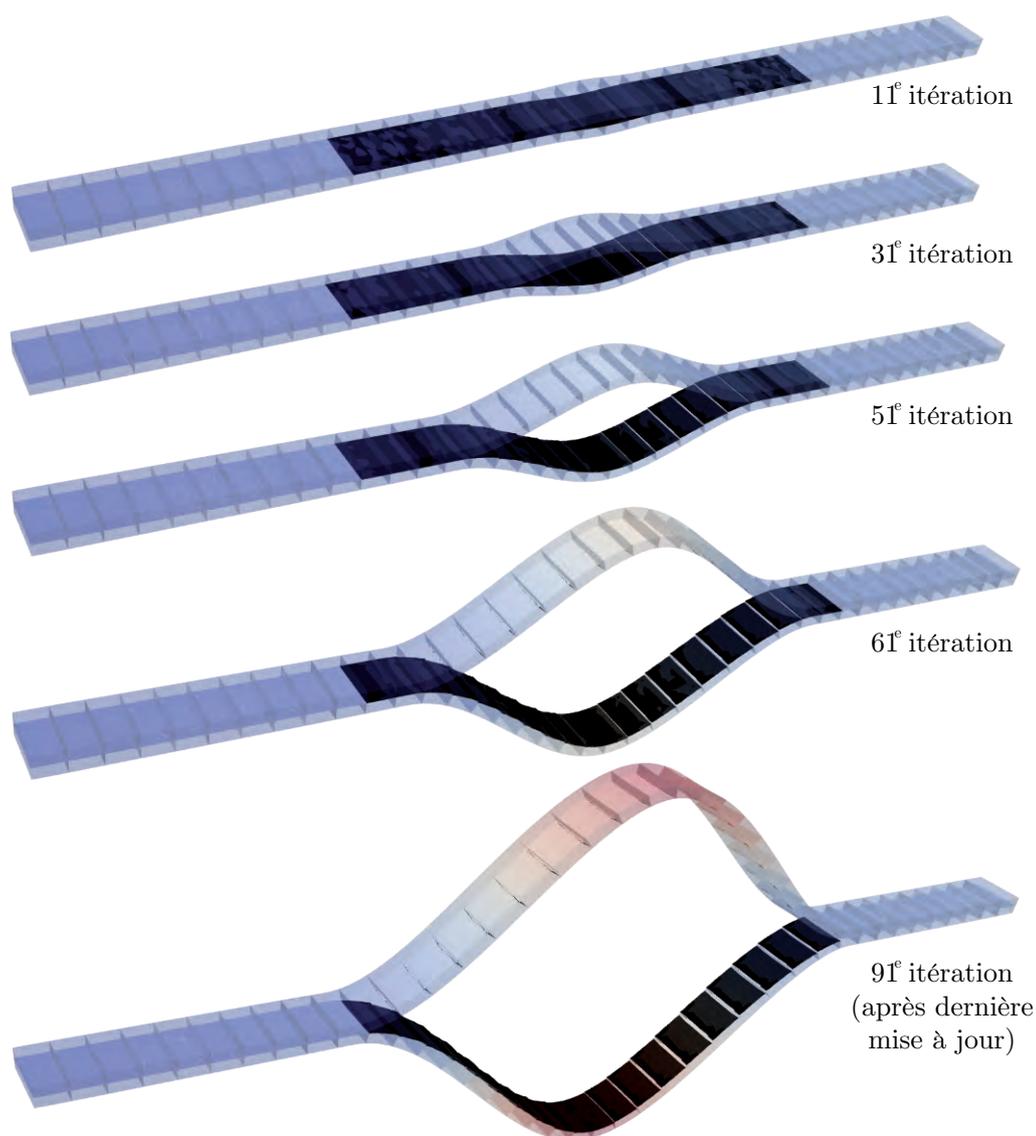


Fig. 6.12: Configurations déformées après mise à jour des directions de recherche (déformée amplifiée x500).

partie inférieure, voir Fig. 6.13. Les données géométriques sont les suivantes : $L_0 = 20$ mm, $h_0 = 0,2$ mm, $b_0 = 1$ mm et $a_0 = 16$ mm. La sous-structuration est la même que celle de l'étude en ouverture. Les résultats analysés dans la suite correspondent au premier incrément de temps.

Dans cet exemple, l'initialisation optimale des directions de recherche est $k_{E_0}^+ = k_{E_0}^- = Y_E/L_{\Gamma E_0}$, ce qui donne le taux de convergence montré dans la Fig. 6.14. Si, au contraire, le jeu de paramètres d'un état d'ouverture est choisi, alors une solution erronée avec interpénétration est obtenue. Il est alors nécessaire de mettre à jour les directions de recherche des interfaces qui sont en fermeture. Nous proposons, comme dans la section précédente, une correction au bout de 10 itérations si un

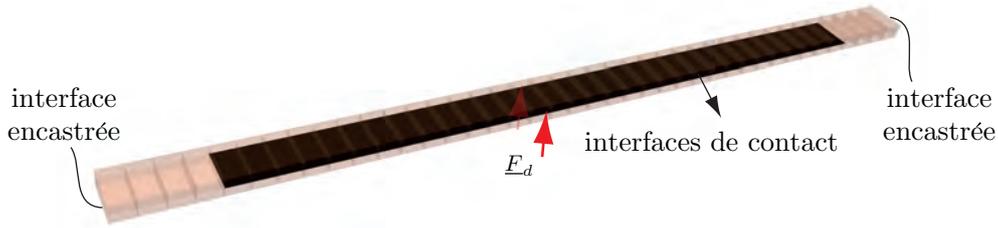


Fig. 6.13: Problème d'une interface de contact en fermeture.

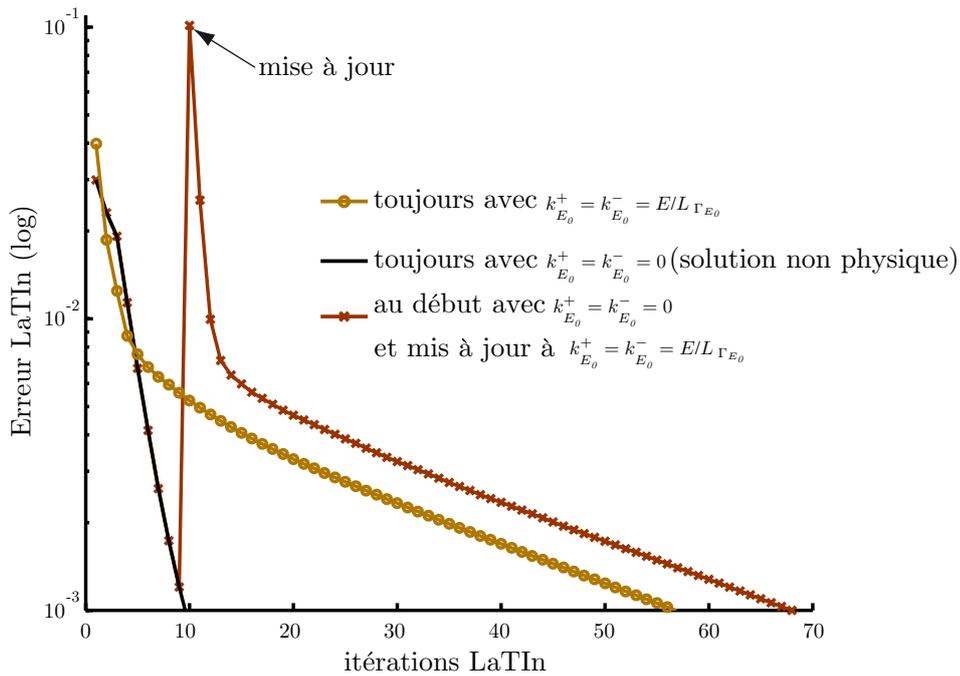


Fig. 6.14: Évolution de l'erreur LaTIn en contact pour différentes directions de recherche.

changement d'état d'interface est détecté (voir Fig. 6.14). Une seule mise à jour a été nécessaire dans ce cas, du fait que toutes les interfaces ont été en fermeture dès le début des itérations. La Fig. 6.15 présente la configuration déformée avant et après actualisation, où on peut observer l'interpénétration entre plis au début du calcul.

Remarque : Utiliser les directions de recherche $k_{E_0}^+ = k_{E_0}^- = Y_E/L_{\Gamma_{E_0}}$ (respectivement $k_{E_0}^+ = k_{E_0}^- = 0$) pour les interfaces de contact en fermeture (respectivement en séparation), assure un problème macroscopique représentant la véritable rigidité d'interface et une solution correcte à convergence. La mise à jour des directions de recherche selon l'état de l'interface de contact proposée précédemment semble une bonne procédure de calcul si l'interface passe d'une condition à l'autre. Néanmoins, dans le cas de problèmes plus complexes, où une interface peut avoir plusieurs passages d'état dans un même incrément de temps, nous avons rencontré des difficultés

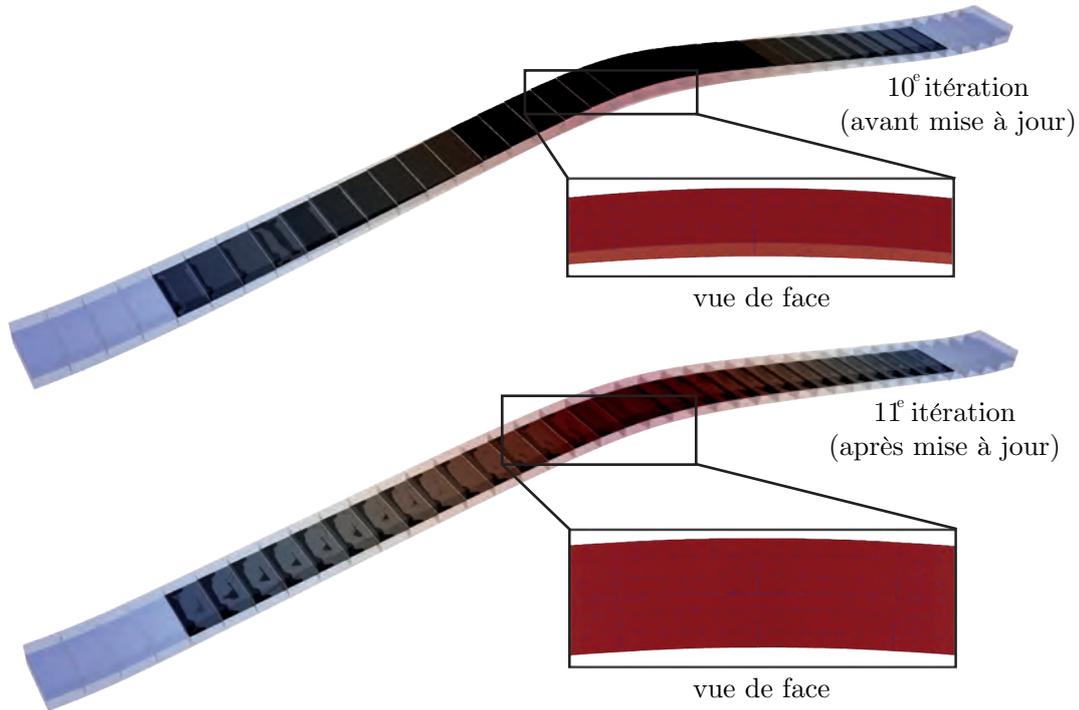


Fig. 6.15: Configuration déformée avant et après la mise à jour.

pour trouver un algorithme de mise à jour robuste qui puisse faire converger la stratégie.

Par conséquent, nous avons essayé de chercher une direction de recherche unifiée pour les deux états possibles. Après quelques tests empiriques, nous proposons la valeur $k_{E_0}^+ = k_{E_0}^- = (E/L_{\Gamma_{E_0}})/(L_0/h_0)^2$, où le rapport L_0/h_0 est le coefficient d'élançement de la structure. Ce choix permet de trouver des solutions sans une détérioration importante du taux de convergence. Des exemples en utilisant cette direction de recherche unifiée sont présentés dans le Chap. 7.

3.3 Interfaces cohésives

Le jeu de paramètres recommandé pour les interfaces cohésives est $k_{E_0}^+ \rightarrow \infty$ et $k_{E_0}^- = 2k^0(1-d)$ [Kerfriden et al., 2009]. L'enjeu principal est la définition d'une stratégie de mise à jour efficace et stable de $k_{E_0}^-$ par rapport à l'évolution de la variable d'endommagement d , car une actualisation continue des opérateurs implique des temps de calcul élevés. Il faut trouver un compromis entre nombre d'itérations et nombre d'actualisations.

Différentes procédures de mise à jour sont alors comparées sur un essai DCB en petites perturbations. la Fig. 6.16 présente la géométrie et la sous-structuration de la pièce. Les données géométriques et matériaux sont : $L_0 = 20$ mm, $h_0 = 0,5$ mm, $b_0 = 2$ mm, $a_0 = 10$ mm, $E = 135\,000$ MPa, $\nu = 0,3$, $k^0 = 100\,000$ N/mm³, $\alpha = 1$,

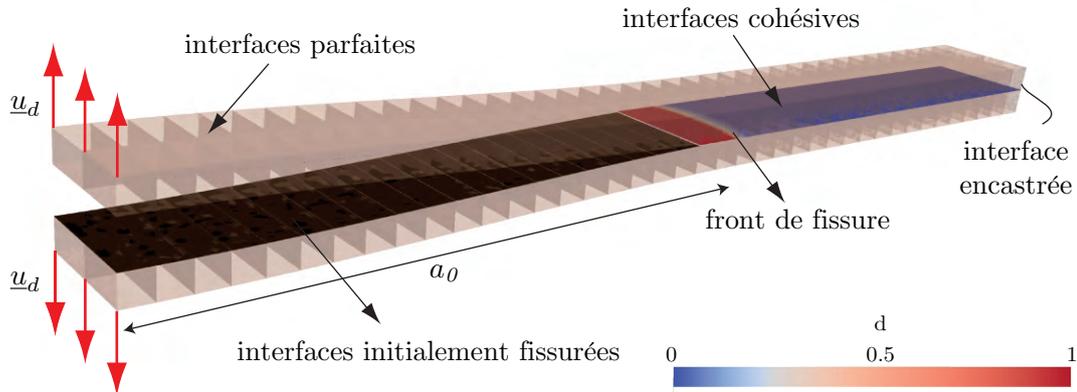


Fig. 6.16: Géométrie, sous-structuration et interfaces, ainsi que la déformée et le profil d'endommagement d'un essai DCB.

$n = 0,5$ et $Y_c = 0,4$ N/mm. La sous-structuration possède 160 sous-structures et 324 interfaces. Le maillage entier possède 550 000 degrés de liberté avec au moins 10 éléments linéaires dans la *process zone*. Le problème macroscopique a 2916 degrés de liberté.

D'après la Fig. 6.17 qui trace l'effort et le déplacement au bout d'une des deux extrémités chargées de l'éprouvette, la réponse globale de l'essai concorde avec la solution théorique. Cette dernière a été obtenue par trois calculs : les deux parties croissantes de la courbe correspondent à la réponse en flexion HPP d'une poutre sur une fondation élastique [Kanninen, 1973] et la partie adoucissante (propagation de la fissure) a été obtenue en utilisant la mécanique de la rupture fragile [Allix, Ladevèze, et Corigliano, 1995]. Une différence dans la pente juste avant la propagation de la fissure est justifiée par le caractère progressif de la loi d'endommagement utilisée. On remarque que le premier élément entièrement endommagé se produit au 10^e incrément, après lequel l'effort décroît. Pour la comparaison des différentes

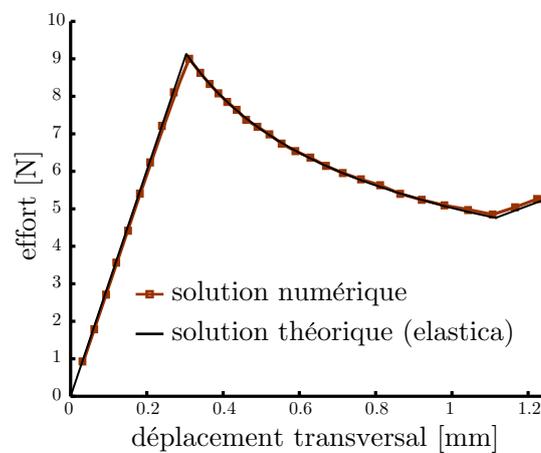


Fig. 6.17: Effort en fonction du déplacement transversal d'un essai DCB.

procédures de mise à jour, les premiers 16 incréments ont été considérés.

La Fig. 6.18 montre la *process zone* des pas de temps 15 et 16. Après le 10^e incrément, la *process zone* traverse une sous-structure à chaque nouvel incrément. À la fin du 16^e incrément, 5 interfaces ont été entièrement fissurées.

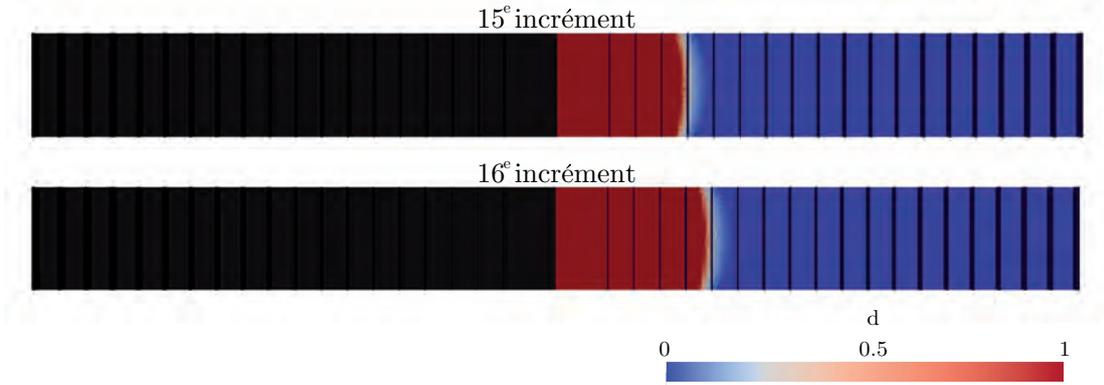


Fig. 6.18: Interfaces et *process zone* aux 15^e et 16^e incréments de temps.

La Fig. 6.19 fournit le taux de convergence et le temps total de calcul des différentes procédures. Tout d'abord on constate, comme attendu, que le nombre d'itérations augmente à partir du 10^e incrément. Si aucun type de mise à jour n'est utilisée, c'est-à-dire, si la valeur de rigidité initiale $k_{E_0}^- = 2k^0$ (avec $d = 0$) est gardée tout le long des itérations, alors le nombre d'itérations à convergence explose (barres A). Par contre, si les directions de recherche de chaque point de l'interface sont mises à jour à la valeur $k_{E_0}^- = 2k^0(1 - d)$ après chaque étape locale (barres D), le nombre d'itérations est minimal, mais le temps de calcul n'est pas praticable (5 fois plus lent que la première option). En utilisant la procédure proposée par [Kerfriden et al., 2009] (barres B) qui actualise uniquement les directions de recherche des interfaces entièrement endommagées par $k_{E_0}^- = 0$ (avec $d = 1$), en gardant la valeur $k_{E_0}^- = 2k^0$ pour les interfaces en cours de délaminage, on réduit le nombre d'itérations par 3 et le temps de calcul en facteur 2, par rapport au calcul sans mise à jour. Ici, une mise à jour est alors faite à chaque incrément de temps.

Finalement, nous proposons une actualisation des directions de recherche sur chaque point de l'interface à la valeur $k_{E_0}^- = 2k^0(1 - d)$ (barres C), mais uniquement après qu'un nombre d'itérations donné se soit écoulé (ici, aux 100^e et 120^e itérations). Ce choix est le meilleur par rapport aux techniques précédentes, car il permet de réduire encore plus le nombre d'itérations et le temps de calcul (65% de réduction en itérations et en temps par rapport à la stratégie B).

Remarque : La procédure de mise à jour des directions de recherche proposée devient possible uniquement si la première actualisation dans un incrément de temps donné est faite une fois que le front de fissure est plus au moins proche de sa configuration finale. Une mise à jour trop tôt produit des instabilités et la divergence de la méthode. La Fig. 6.20 montre la *process zone* en actualisant les directions

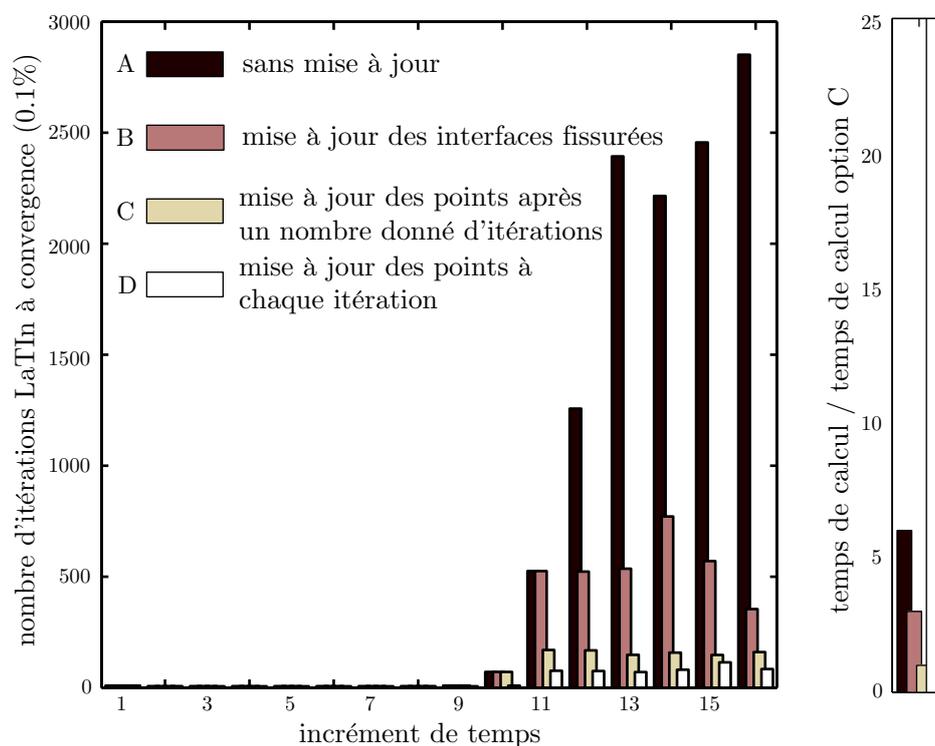


Fig. 6.19: Taux de convergence et temps de calcul de différentes stratégies de mise à jour.

de recherche à la 30^e itération ; on observe des instabilités dans le front de fissure qui induisent la ruine totale de l'interface. En ce sens, la procédure d'actualisation uniquement sur les interfaces complètement délaminées est plus stable, mais elle est moins efficace et surtout dépendante de la taille des sous-structures.

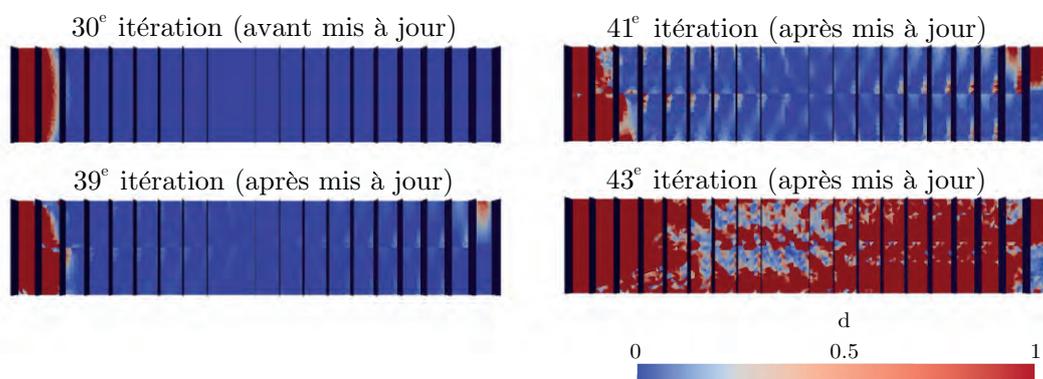


Fig. 6.20: Front de fissure en actualisant les directions de recherche à la 30^e itération (11^e incrément).

Analyse complémentaire

Nous avons fait une comparaison supplémentaire de la stratégie LaTin avec actualisation continue des directions de recherche (la plus efficace en terme du nombre d'itérations) par rapport à une résolution sans décomposition de domaine en utilisant un algorithme Newton tangent. Nous avons fait attention au choix des critères d'erreur de façon à trouver la même réponse globale. La Fig. 6.21 montre le nombre d'itérations pour chaque méthode. On observe une performance similaire dans les deux cas, ce qui rappelle les capacités de la stratégie LaTin pour traiter en même temps la décomposition de domaine et les non-linéarités du problème.

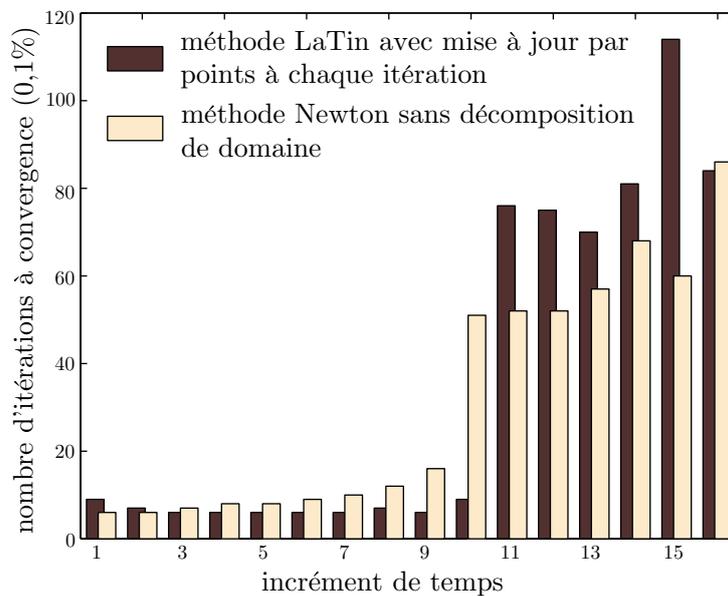


Fig. 6.21: Taux de convergence de la stratégie LaTin et d'une résolution par un algorithme de Newton sans décomposition de domaine.

Bilan du chapitre

Nous avons présenté les difficultés de convergence de la stratégie lors de l'utilisation des paramètres classiques de la méthode dans le cadre de structures élancées en flambage, contact et délaminage. Nous avons en suite proposé de directions de recherche pertinentes qui rendent la méthode efficace pour ce type de problèmes. Dans le chapitre suivant, nous allons traiter de premières analyses concernant le couplage flambage-délaminage, en utilisant ces nouveaux choix de paramètres.

CHAPITRE

7

Exemples de couplage flambage-délaminage

Après avoir introduit des améliorations aux paramètres de la stratégie multiéchelle, nous présentons ici différents exemples de couplage flambage-délaminage.

Sommaire

1	Plaque préfissurée en compression	144
2	Multiples délaminages dans un stratifié composite	147

1 Plaque préfissurée en compression

Cet exemple concerne une plaque préfissurée en grandes transformations soumise à un déplacement de compression \underline{u}_d et une perturbation symétrique hors plan \underline{F}_d , comme représentée sur la Fig. 7.1. La préfissure de longueur a_0 est susceptible de se propager. Les données géométriques et matériaux sont les suivants : $L_0 = 20$ mm, $h_0 = 0,2$ mm, $b_0 = 1$ mm, $a_0 = 10$ mm, $E = 135\,000$ MPa, $\nu = 0,3$, $k_n^0 = k_t^0 = 100\,000$ N/mm³, $\alpha = 1$, $n = 0,5$ et $Y_c = 0,4$ N/mm. La plaque est décomposée en 1280 sous-structures et 3248 interfaces (voir Fig. 7.1). Le maillage possède 1,4 million de degrés de liberté avec 24 éléments linéaires dans l'épaisseur (12 par pli). Les problèmes macroscopique et super-macroscopique ont respectivement 29 232 et 132 degrés de liberté, en utilisant 24 processeurs.

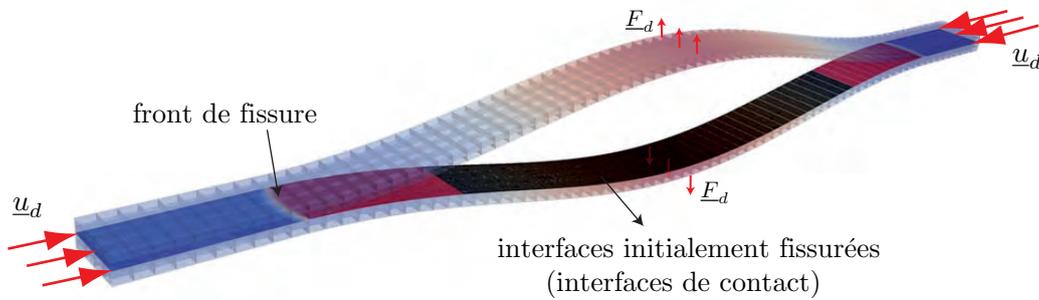


Fig. 7.1: Plaque préfissurée en flambage local : sous-structuration, configuration déformée (sans amplification) et front de fissure.

La solution de ce problème est caractérisée par la compétition entre le flambage local des plis et le flambage global de la structure entière. La charge critique de flambage est approchée par le double de la charge critique d'une seule poutre doublement encastree de longueur a_0 :

$$P_c^{local} = 2 \left(\frac{4\pi^2 EI_0}{a_0^2} \right) = 71,06 \text{ N},$$

où I_0 est le moment quadratique d'un seul pli.

La charge de flambage global de la plaque avec une préfissure centrale est approchée par la relation suivante [Allix et Corigliano, 1999] :

$$P_c^{global} = \left(\frac{L_0 - a_0}{L_0} \right) \left(\frac{4\pi^2 E 8 I_0}{L_0^2} \right) + \left(\frac{2a_0}{L_0} \right) \left(\frac{4\pi^2 EI_0}{L_0^2} \right) = 44,41 \text{ N}.$$

Cette charge critique est inférieure à celle en flambage local. Elle est aussi évidemment inférieure à la charge critique globale de la structure saine :

$$P_c^{global} (\text{sans fissure}) = \frac{4\pi^2 E 8 I_0}{L_0^2} = 71,06 \text{ N},$$

laquelle coïncide avec la charge de flambage local.

Dans le cas de flambage sans imperfections, la condition de propagation du délaminage peut être approchée par la relation suivante [Bruno et Grimaldi, 1990] :

$$\frac{3}{16}\xi^4 + 2\xi^2 = \frac{4G_c b_0}{\pi^2 P_c^{local}},$$

où, $\xi = w_{L_0/2}/a_0$ est un paramètre non dimensionnel de déplacement et G_c est le taux de restitution d'énergie (pour la loi d'endommagement ici utilisée, $G_c = Y_c$). Ainsi, la condition de propagation en flambage local est :

$$w_{L_0/2} = 0,34 \text{ mm} . \quad (7.1)$$

À partir de cette analyse, on peut en déduire que si les perturbations ne sont pas suffisamment importantes pour définir le mode local, alors le flambage global pourrait avoir lieu.

Nous démarrons avec un calcul de la structure en considérant une faible perturbation symétrique ($F_d = 0,2 \text{ N}$). Comme attendu, la perturbation, bien qu'elle soit symétrique, n'est pas capable d'induire le mode de flambage local. La Fig. 7.2 montre la force de compression en fonction du déplacement transversal maximal du pli supérieur. On observe qu'avant que le chargement atteigne la valeur critique $P_c^{local} = 71,06 \text{ N}$, il existe un passage de la structure vers une configuration d'équilibre d'énergie inférieure, qui correspond à la configuration de flambage global caractérisée par $P_c^{global} = 44,41 \text{ N}$. Quand le déplacement transversal est proche de la valeur 0,75 mm, le délaminage en mode II commence à se propager. La configuration déformée et le front de fissure au dernier incrément de temps sont représentés sur la Fig. 7.3.

Si l'amplitude de la perturbation est augmentée au moins 10 fois ($F_d = 2 \text{ N}$), le mode de flambage local apparaît. La Fig. 7.2 montre la réponse de la structure

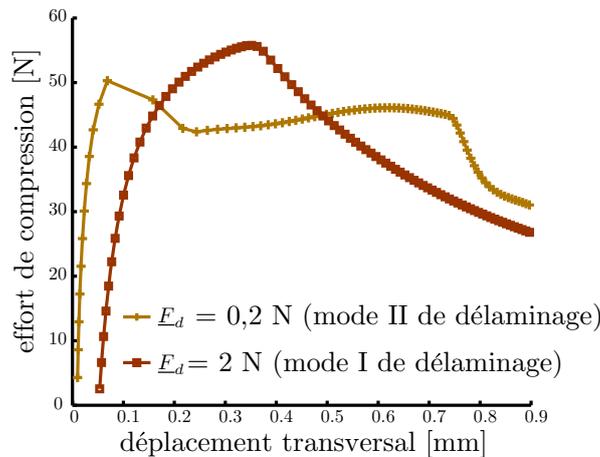


Fig. 7.2: Courbe force de compression en fonction du déplacement transversal d'une plaque préfissurée en flambage.

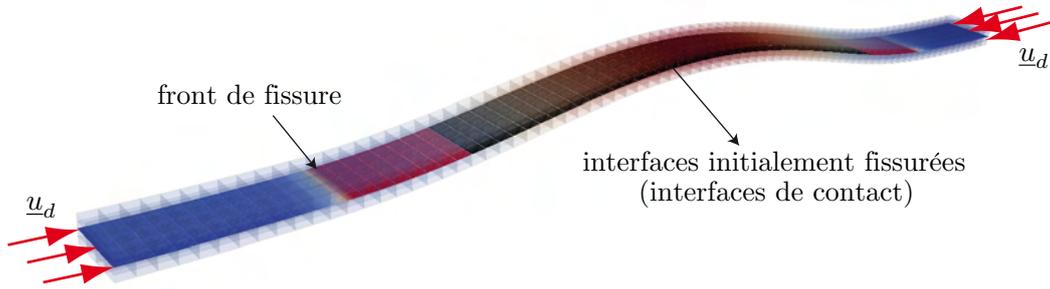


Fig. 7.3: Plaque préfissurée en flambage global : sous-structuration, configuration déformée (sans implification) et front de fissure.

ainsi obtenue. La charge critique se trouve autour de 56 N et elle est inférieure à la charge théorique ($P_c^{local} = 71,06$ N), probablement du fait que la perturbation n'a pas été prise en compte dans le calcul de cette dernière. Le délaminage en mode I survient quand le déplacement transversal maximal est proche de 0,36 mm, ce qui est très proche de la condition (7.1). La configuration déformée et le front de fissure au dernier incrément de temps sont représentés sur la Fig. 7.1.

La Fig. 7.4 montre le nombre d'itérations LaTIn des premiers 70 incréments pour les deux problèmes en étude. Les itérations sont plus nombreuses dès que le délaminage commence à se propager. Dans le premier cas étudié, on observe une augmentation des itérations au moment du changement de mode de flambage. Le temps de calcul de ces problèmes était de l'ordre de 2 jours.

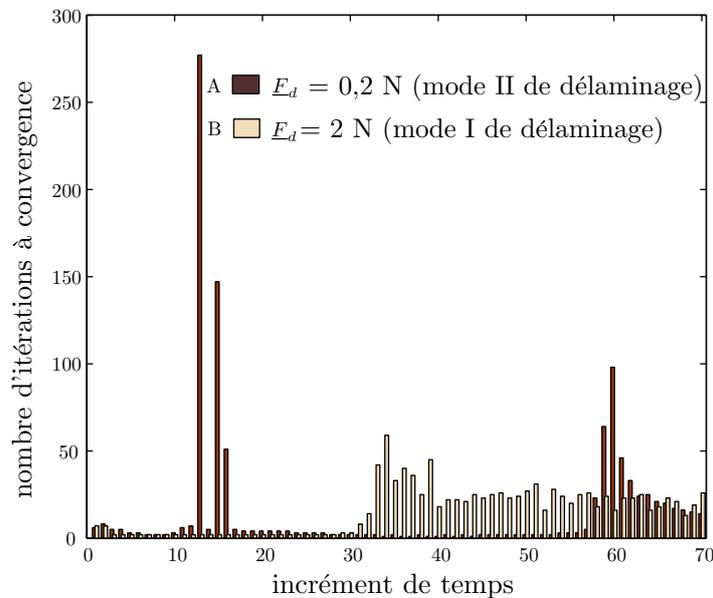


Fig. 7.4: Nombre d'itérations LaTIn par incrément de temps.

2 Multiples délaminages dans un stratifié composite

Nous sommes intéressés à modéliser une plaque composite constituée de 4 plis d'épaisseur h_0 chaque une, avec deux préfissures centrales de longueur a_0 à $2h_0$ et $3h_0$ d'épaisseur respectivement (les préfissures sont susceptibles de se propager). Elle est soumise à un déplacement de compression \underline{u}_d et à une perturbation hors plan \underline{E}_d dans le pli supérieur, comme illustré sur la Fig. 7.5. La séquence d'empilement est $[0^\circ/90^\circ]_s$. Les données géométriques et matériaux sont les suivants : $L_0 = 20$ mm, $h_0 = 0,2$ mm, $b_0 = 1$ mm, $a_0 = 10$ mm, $E_1 = 185\,500$ MPa, $E_2 = E_3 = 9900$ MPa, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,34$, $\nu_{23} = 0,5$, $G_{12} = G_{13} = 6160$ MPa, $G_{23} = 3080$ MPa, $k_n^0 = k_t^0 = 100\,000$ N/mm³, $\alpha = 1$, $n = 0,5$ et $Y_c = 0,4$ N/mm. La géométrie est décomposée en 1280 sous-structures et 3064 interfaces (voir Fig. 7.5). Le maillage compte 2 millions de degrés de liberté avec 12 éléments linéaires dans l'épaisseur de chaque pli. Des interfaces de contact ont été considérées dans les zones préfissurées et des interfaces cohésives autour de celles-ci. Les problèmes macroscopique et super-macroscopique ont respectivement 27 576 et 168 degrés de liberté, en utilisant 30 processeurs. Le problème a été résolu en considérant 120 incréments de temps.

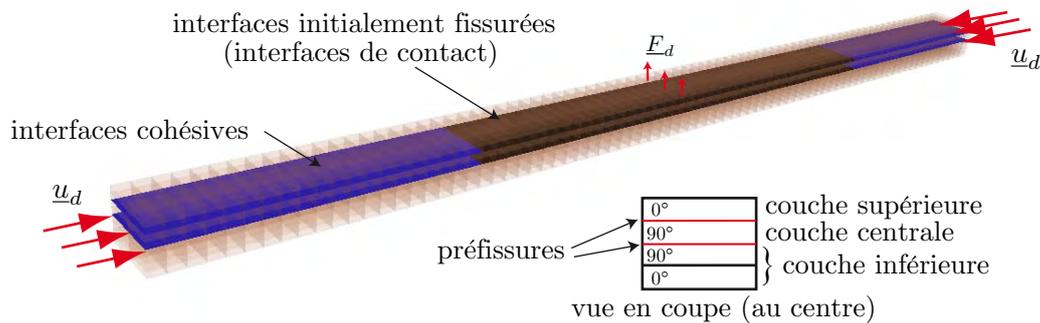


Fig. 7.5: Stratifié composite préfissuré en compression.

La Fig. 7.6 trace la force de compression par rapport au déplacement transversal maximal au centre de chaque couche. On observe que le flambage advient d'abord dans la couche supérieure, après 80 N, dans une configuration de flambage local non symétrique. Dans cet état, le déplacement transversal de la couche centrale est positif (tiré par la couche supérieure) et cette couche n'est pas en contact avec celle inférieure (point A dans la courbe). Quand la charge dépasse 100 N, le flambage apparaît dans les couches qui n'avaient pas été perturbées (centrale et inférieure), en développant une configuration symétrique. Au point B, les deux couches supérieures sont alors en contact. Quand le déplacement des plis supérieurs atteint un peu près 0,5 mm, la charge diminue du fait que le délaminage se propage entre les couches inférieure et centrale. Les points A, B et C marqués sur la courbe de comportement ont leur configuration déformée et leur front de fissure représentés sur la Fig. 7.7. Le temps de calcul de ce problème était de 7 jours.

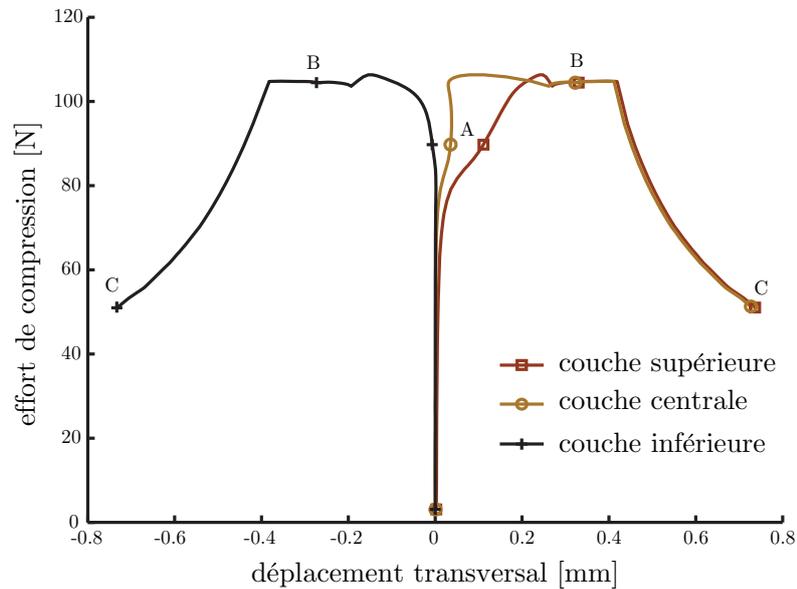


Fig. 7.6: Courbe effort de compression en fonction du déplacement transversal maximal des trois couches du stratifié. Note : seulement une sélection de points ont des marqueurs.

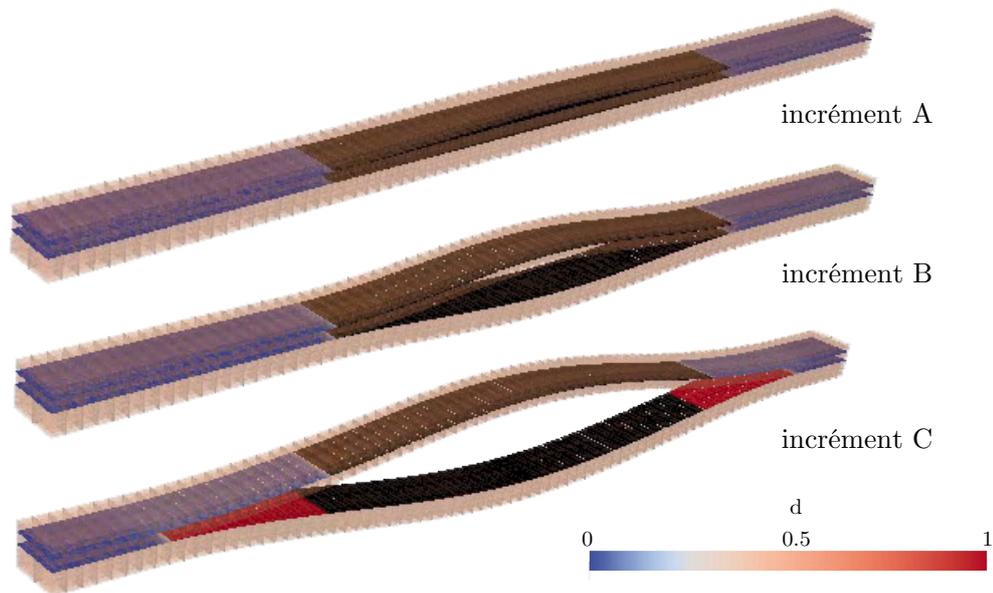


Fig. 7.7: Configuration déformée et front de fissure de trois incréments de temps.

Un calcul supplémentaire a permis de déterminer que la charge critique de flambage de la plaque saine est cinq fois supérieure à la charge critique de la plaque préfissurée.

Conclusion

Ce mémoire, mené dans le cadre du projet européen MAAXIMUS, s'inscrit dans la recherche de méthodes robustes et efficaces pour le traitement de l'endommagement de structures composites en grandes transformations dont la modélisation requière l'usage d'un grand nombre de degrés de liberté. L'axe privilégié est celui des méthodes de décomposition de domaine extensives. Si ces méthodes sont matures dans le cadre linéaire, il reste beaucoup à faire dans le domaine non linéaire, notamment en présence d'instabilités. C'est en particulier le cas des problèmes d'interaction flambage-délaminage dans les composites stratifiés, problème critique retrouvé, par exemple, lors de la compression après impact. Cette problématique est une des questions majeures pour le dimensionnement de ce type de structures.

Bien que faisant suite à des travaux sur la simulation multiéchelle du délaminage, les difficultés rencontrées dans ce travail se sont révélées nombreuses. La présence d'entités particulièrement élancées (susceptibles de perdre toute rigidité par flambage puis éventuellement d'en récupérer par contact) implique des mécanismes de forte interaction qui posent des problèmes ardu dans la définition de méthodes efficaces. En effet, suivant l'importance et le niveau d'interaction de ces phénomènes, les efforts transmis d'une zone locale à l'ensemble de la structure changent de façon drastique. Or la bonne transmission de ces efforts est essentielle au développement d'une méthode multiéchelle extensible dans le cas d'un grand nombre de sous-domaines. Une première idée serait d'enrichir excessivement l'espace macroscopique, mais cela conduirait à une condensation coûteuse des matrices de rigidité tangente. Aussi, nous nous sommes attachés dans ce travail à limiter au maximum ce type d'opération en jouant sur les autres paramètres influents de la méthode.

De façon plus précise, une information macroscopique concernant la géométrie globale de la structure a été ajoutée aux directions de recherche microscopiques. Cette modification est basée sur la forte différence entre les directions tangentielles et normales dans les admissibilités statique et cinématique des structures minces. De plus, dans le cas de grandes transformations, les configurations après flambage sont souvent très différentes des configurations initiales, nous avons alors constaté que la vérification de la continuité des déplacements macroscopiques est essentielle pour le raccord des sous-structures et la convergence de la méthode.

Un autre point à améliorer était le traitement du contact de grandes surfaces fissurées. Dans des travaux précédents, de petites zones de structures massives avaient été analysées en utilisant les mêmes directions de recherche pour la séparation et le contact de ces régions. Ici, nous avons relevé l'existence de directions de recherche optimales différentes pour l'ouverture et la fermeture des zones de contact. Nous avons alors proposé une mise à jour des opérateurs selon l'état de l'interface, ou, le cas échéant, une direction de recherche unifiée qui prend en compte la géométrie de

la zone de contact.

Ensuite, une dernière étude sur les directions de recherche a été menée sur les interfaces cohésives. Les valeurs optimales étant dépendantes de l'état d'endommagement des interfaces, différentes procédures de mise à jour ont été proposées et comparées pour optimiser la stratégie par rapport au nombre d'itérations et au temps de calcul.

La mise en œuvre de la méthode proposée sur une architecture parallèle était une étape à la fois lourde et indispensable. Il s'agit d'un code entièrement parallélisé qui permet la résolution parallèle des problèmes posés par sous-structures et interfaces ainsi que du problème macroscopique. L'implémentation a rendu possibles de premières analyses multiéchelles de problèmes de couplage flambage-délaminage à quelques millions de degrés de liberté, en considérant le traitement simultané de non-linéarités locales et globales.

À l'issue de ce travail, des aspects restent encore à étudier tant en matière d'efficacité numérique que d'applications. D'un point de vue numérique, un certain nombre de choix qui ont été faits mériterait d'être assis sur des estimateurs d'erreurs robustes, notamment pour piloter l'actualisation du problème macroscopique en fonction du degré de non-linéarité de la réponse. La question de la discrétisation temporelle n'a pas été abordée dans ce travail, pourtant une procédure automatique de détermination du chargement permettrait sans doute une diminution importante des temps de calcul. Bien qu'il ne nous semble pas avoir rencontré des problèmes particuliers dans les exemples traités, une méthode systématique de recherche des bifurcations correspondantes aux solutions d'énergie minimale est un aspect essentiel pour tout problème d'instabilité dont la mise au point dans un cadre multiéchelle reste à explorer. Une autre piste d'amélioration de la méthode est l'enrichissement de la base macroscopique par l'ajout de projecteurs quadratiques et cubiques issus d'une solution de la théorie des plaques, lesquels pourraient mieux transmettre la réponse en flexion à grande longueur de variation dans le cas des structures élancées.

Comme il a été signalé, un cas d'application potentiel particulièrement important de ces travaux est celui de la compression après impact. Être à même de simuler à la fois les impacts basse vitesse et la compression après impact est une perspective naturelle de cette approche multiéchelle qui demandera d'inclure également les non-linéarités intralaminaires, qu'elles soient diffuses ou localisées.

A Annexe

On montrera que le PPV dans la configuration actuelle (2.19) est bien associé à la formulation forte (2.8). D'après le théorème de la divergence¹, la formule de Liebniz appliquée à la divergence d'un produit² et des propriétés du produit contracté, on peut montrer que :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}[v^*] d\Omega &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{grad}} v^*)_{sym} d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{grad}}^t v^* d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \underline{\underline{grad}}^t v^* : \underline{\underline{\sigma}} d\Omega \\
&= \int_{\partial\Omega_{F_d}} \underline{\underline{\sigma}}^t \cdot \underline{\underline{n}} \cdot v^* dS - \int_{\Omega} \underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot v^* d\Omega \quad (\text{A.1}) \\
&= \int_{\partial\Omega_{F_d}} \underline{\underline{F}}_d \cdot v^* dS - \int_{\Omega} \underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot v^* d\Omega.
\end{aligned}$$

Pour montrer l'équivalence des PPV dans la configuration actuelle (2.19) et initiale (2.20) du Chap. 2, l'expression de la puissance des efforts intérieurs se réécrit comme³ :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_0} \underline{\underline{P}} : \underline{\underline{\dot{F}}}^t[v^*] d\Omega_0 &= \int_{\Omega_0} \underline{\underline{P}} : (\underline{\underline{grad}} v^* \underline{\underline{F}})^t d\Omega_0 \\
&= \int_{\Omega_0} J \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{grad}}^t v^* d\Omega_0 \\
&= \int_{\Omega_0} Tr[J \underline{\underline{\sigma}}^t \underline{\underline{F}}^{-t} \underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{grad}}^t v^*] d\Omega_0 \quad (\text{A.2}) \\
&= \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{grad}}^t v^* d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}[v^*] d\Omega.
\end{aligned}$$

L'équivalence des Éqs. (2.20) et (2.23) (Chap. 2) se met en évidence en constatant

-
1. Soit le vecteur $\underline{\underline{a}} : \int_S \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{n}} dS = \int_V \text{div } \underline{\underline{a}} dV$
 2. Soit le vecteur $\underline{\underline{a}}$ et le tenseur $\underline{\underline{A}} : \text{div}(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{a}}) = Tr[\underline{\underline{grad}}(\underline{\underline{a}}) \underline{\underline{A}}] + \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{div}} \underline{\underline{A}}$
 3. Soit le vecteur $\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{grad}} \underline{\underline{a}} = \frac{\partial a_i}{\partial X_j} \underline{\underline{E}}_i \otimes \underline{\underline{E}}_j = (\underline{\underline{grad}} \underline{\underline{a}}) \underline{\underline{F}}$

que $\underline{\dot{E}}[v^*] = \underline{F}^t \underline{d}[v^*] \underline{F}$. Ainsi on vérifie l'égalité des puissances des efforts intérieurs :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_0} \underline{\pi} : \underline{\dot{E}}[v^*] d\Omega_0 &= \int_{\Omega_0} J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-t} : \underline{F}^t \underline{d}[v^*] \underline{F} d\Omega_0 \\
 &= \int_{\Omega_0} \text{Tr}(J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-t} \underline{F}^t \underline{d}[v^*] \underline{F}) d\Omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \underline{\sigma} \underline{F}^{-t} : \underline{d}[v^*] \underline{F} d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{d}[v^*] d\Omega .
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Bibliographie

- Aggoune, W., H. Zahrouni, et M. Potier-Ferry (2006). Asymptotic numerical methods for unilateral contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 68(6), 605–631.
- Alfano, G. et M. A. Crisfield (2001). Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites : mechanical and computational issues. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50(7), 1701–1736.
- Alfano, G. et M. A. Crisfield (2003). Solution strategies for the delamination analysis based on a combination of local-control arc-length and line searches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58, 999–1048.
- Allix, O. (1987). Délaminage : approche par la mécanique de l’endommagement. Dans J. Fouet, P. Ladevèze, et R. Ohayon (Éditeurs.), *First Colloquium GRECO-GIS Calcul des Structures Giens, 19–22 May (1987)*, Volume 1 : Calcul des Structures et Intelligence Artificielle, Paris, pp. 39–53. Pluralis.
- Allix, O. (2008). The damage mesomodel for laminates : Interface identification and application to delamination. Dans D. Guegra et P. Ladevèze (Éditeurs.), *Course of Emerging Techniques for Damage Prediction and Failure Analysis of Composite Structures*. Cépaduès éditions.
- Allix, O. et A. Corigliano (1996). Modeling and simulation of cracks propagation in mixed-modes interlaminar fracture specimens. *International Journal of Fracture* 77(2), 111–140.
- Allix, O. et A. Corigliano (1999). Geometrical and interfacial non-linearities in the analysis of delamination in composites. *International Journal of Solids and Structures* 36(15), 2189–2216.
- Allix, O., P. Kerfriden, et P. Gosselet (2010). On the control of the load increments for a proper description of multiple delamination in a domain decomposition framework. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 83(11), 1518–1540.
- Allix, O. et P. Ladevèze (1992). Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination. *Composite Structures* 22(4), 235–242.
- Allix, O., P. Ladevèze, et A. Corigliano (1995). Damage analysis of interlaminar fracture specimens. *Composite Structures* 31(1), 61–74.

- Allix, O., D. Lévêque, et L. Perret (1998). Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model. *Composites Science and Technology* 58(5), 671–678.
- Arora, J. S., A. I. Chahande, et J. K. Paeng (1991). Multiplier methods for engineering optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32(7), 1485–1525.
- Azrar, L., B. Cochelin, N. Damil, et M. Potier-Ferry (1993). An asymptotic numerical method to compute the post-buckling behavior of elastic plates and shells. *Int. J. for Num. Meth. in Engrg.* 36, 1251–1277.
- Barenblatt, G. I. (1962). *The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture*, Volume 7, pp. 55–129. Elsevier.
- Bathe, K. J. (2007). *Finite Element Procedures*. Klaus-Jürgen Bathe.
- Bathe, K. J., E. Ramm, et E. L. Wilson (1975). Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 9(2), 353–386.
- Batoz, J. L. et G. Dhatt (1979). Incremental displacement algorithms for non-linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14(8), 1262–1267.
- Belytschko, T. et L. W. Glaum (1979). Applications of higher order corotational stretch theories to nonlinear finite element analysis. *Computers & Structures* 10(1-2), 175–182.
- Belytschko, T., W. Liu, et B. Moran (2000). *Nonlinear finite elements for continua and structures*. England : John Wiley & Sons.
- Ben Dhia, H. (1998). Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 326, 899–904.
- Ben Dhia, H. et O. Jamond (2010). On the use of X-FEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199, 1403–1414.
- Bernoulli, J. (1694). Curvatura laminae elasticae. Dans *Acta Eruditorum Lipsiae*, pp. 262–276.
- Biot, M. (1938). Theory of elasticity with large displacements and rotations. Dans *Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge, USA, pp. 117.
- Boisse, P., P. Ladevèze, et P. Rougée (1989). A large time increment method for elastoplastic problems. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 8(4), 257–275.

- Bolotin, V. V. (2001). Mechanics of delaminations in laminate composite structures. *Mechanics of Composite Materials* 37, 367–380. 10.1023/A :1014210527476.
- Bottega, W. J. et A. Maewal (1983). Delamination buckling and growth in laminates. *Journal of Applied Mechanics - Transactions of The ASME* 50(1), 184–189.
- Boucard, P.-A., P. Ladevèze, M. Poss, et P. Rougée (1997). A nonincremental approach for large displacement problems. *Computers & Structures* 64(1-4), 499 – 508.
- Brandt, A. (1982). Guide to multigrid development. Dans A. Hackbush et U. Trottenberg (Éditeurs.), *Conference on Multigrid Methods*, pp. 220–312.
- Brewer, J. C. et P. A. Lagace (1988). Quadratic stress criterion for initiation of delamination. *Journal of Composite Materials* 22, 1141–1155.
- Bruno, D. et F. Greco (2000). An asymptotic analysis of delamination buckling and growth in layered plates. *International Journal of Solids and Structures* 37(43), 6239–6276.
- Bruno, D. et A. Grimaldi (1990). Delamination failure of layered composite plates loaded in compression. *International Journal of Solids and Structures* 26(3), 313–330.
- Bryan, G. H. (1888). On the stability of elastic systems. *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 6, 199.
- Bryan, G. H. (1891). On the buckling of simply supported rectangular plates uniformly compressed in one direction. *Proc. London Math. Soc.* 22, 54.
- Budiansky, B. et J. W. Hutchinson (1964). Dynamic buckling of imperfection-sensitive structures. Rapport technique, Harvard University, Div. of Engineering and applied physics, Cambridge, USA.
- Bussy, P., P. Rougée, et P. Vauchez (1990). The large time increment method for numerical simulation of metal forming processes. Dans *Numerical Methods in Engineering*, pp. 102–109. Elsevier.
- Carpenter, N. J., R. L. Taylor, et M. G. Katona (1991). Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32(1), 103–128.
- Chai, H., C. D. Babcock, et W. G. Knauss (1981). One dimensional modeling of failure in laminated plates by delamination buckling. *International Journal of Solids and Structures* 17(11), 1069–1083.

- Champaney, L., J. Y. Cognard, et P. Ladèveze (1999). Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral contact conditions. *Computers & Structures* 73(1-5), 249 – 266.
- Chen, Z. et H. L. Schreyer (1990). A numerical solution scheme for softening problems involving total strain control. *Computers & Structures* 37(6), 1043–1050.
- Cherepanov, G. P. (1967). Crack propagation in continuous media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 31(3), 476–488.
- Cochelin, B., N. Damil, et M. Potier-Ferry (1997). *Méthode asymptotique numérique*. Hermes - Lavoisier.
- Cochelin, B. et M. Potier-Ferry (1991). A numerical model for buckling and growth of delaminations in composite laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 89(1-3), 361–380.
- Cognard, J.-Y. (1989). *Une nouvelle approche des problèmes de plasticité et de viscoplasticité : la Méthode à Grand Incrément de Temps*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- Cognard, J.-Y., D. Dureisseix, P. Lavedèze, et P. Lorong (1996). Expérimentation d’une approche parallèle en calcul de structures. *Revue Européenne des Eléments Finis* 5(2), 197–220.
- Combescure, A. (1995). *Etude de la stabilité non-linéaire géométrique et non-linéaire matériau des coques minces. Application aux coques de révolution avec imperfections soumises à des chargements complexes*. Habilitation à diriger des recherches, Ecole Doctorale MEGA, Lyon.
- Corigliano, A. (1993). Formulation, identification and use of interface models in the numerical analysis of composite delamination. *Int. Journal of Solids and Structures* 30(20), 2779–2811.
- Corigliano, A. et O. Allix (2000). Some aspects of interlaminar degradation in composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 185(2-4), 203–224.
- Cornetti, P., N. Pugno, A. Carpinteri, et D. Taylor (2006). Finite fracture mechanics : A coupled stress and energy failure criterion. *Engineering Fracture Mechanics* 73(14), 2021 – 2033.
- Cox, H. L. (1934). The buckling of thin plates in compression. *Aeron. Res. Comm., R. and M.* 1554.
- Cresta, P., O. Allix, C. Rey, et S. Guinard (2007). Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : Application to post-buckling analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196, 1436–1446.

- Crisfield, M. A. (1981). A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snap-through'. *Computers & Structures* 13, 55–62.
- Crisfield, M. A. (1990). A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 81(2), 131–150.
- Crisfield, M. A. (1991). *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Volume 1. Essentials. New York : J. Wiley and Sons.
- Damil, N. et M. Potier-Ferry (1990). A new method to compute perturbed bifurcations : Application to the buckling of imperfect elastic structures. *International Journal of Engineering Science* 28(9), 943–957.
- Daridon, L. et K. Zidani (2002). The stabilizing effects of fiber bridges on delamination cracks. *Composites Science and Technology* 62(1), 83–90.
- Daudeville, L. et P. Ladevèze (1993). A damage mechanics tool for laminate delamination. *Composite Structures* 25(1-4), 547–555.
- De Borst, R. (1987). Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids. *Computers & Structures* 25(2), 211–224.
- Destuynder, P., P. E. M. Djaoua, L. Chesnay, et J. C. Nedelec (1981). Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de rice en théorie de la rupture fragile. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 3(1), 70–87.
- Dohrmann, C. (2003). A preconditioner for substructuring based on constrained energy minimization. *SIAM Journal for Scientific Computing* 25, 246–258.
- Donnell, L. H. et C. C. Wan (1950). Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression. *Journal of Applied Mechanics* 17, 73–83.
- Dugdale, D. S. (1960). Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8(2), 100–104.
- Dureisseix, D. et P. Ladevèze (1997). Une approche parallèle et multi-échelles en calcul des structures : exemples et performances. *Revue Européenne des Eléments Finis* 7(73–87).
- Duvaut, G. et J. L. Lions (1972). *Les inéquations en mécanique et en physique*. Paris : Dunod.
- Euler, L. (1744). *Methodus inveniendi lineas curvas : maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Lausanne-Genève : Marcum-Michael Bousquet.

- Evans, A. G. et J. W. Hutchinson (1984). On the mechanics of delamination and spalling in compressed films. *International Journal of Solids and Structures* 20(5), 455–466.
- Farhat, C., M. Lesoinne, et K. Pierson (2000). A scalable dual-primal domain decomposition method. *Numer. Lin. Alg. Appl.* 7, 687–714.
- Farhat, C. et F.-X. Roux (1991). A method of finite element tearing and inter-connecting and its parallel solution algorithm. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 32, 1205–1227.
- Farhat, C. et F. X. Roux (1992). An unconventional domain decomposition method for an efficient parallel solution of large-scale finite element systems. *SIAM J. Sc. Stat. Comput.* 13, 379–396.
- Farhat, C. et F. X. Roux. (1994). Implicit parallel processing in structural mechanics. *Comput. Mech. Adv.* 2, 1–124.
- Fedorenko, R. (1964). The speed of convergence of one iterative process. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 4, 227–235.
- Felippa, C. A. et B. Haugen (2005). A unified formulation of small-strain corotational finite elements : I. theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194(21-24), 2285–2335.
- Feyel, F. et J.-L. Chaboche (2000). Fe2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 183, 309–330.
- Fish, J., K. Shek, M. Pandheeradi, et M. S. Shephard (1997). Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization : Theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 148, 53–73.
- Francfort, G. et J.-J. Marigo (1998). Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46(8), 1319 – 1342.
- Friedrichs, K. O. et J. J. Stoker (1941). The non-linear boundary value problem of the buckled plate. *American J. of Math.* 63, 839–888.
- Geers, M., V. Kouznetsova, et W. Brekelmans (2010). Multi-scale computational homogenization : Trends and challenges. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 234(7), 2175 – 2182.
- Geers, M. G. D. (1999). Enhanced solution control for physically and geometrically non-linear problems. part i - the subplane control approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46(2), 177–204.

- Gendre, L., O. Allix, P. Gosselet, et F. Comte (2009). Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity. *Computational Mechanics* 44(2), 233–245.
- Germain, P. (1968). *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Paris : Masson.
- Ghosh, S., K. Lee, et S. Moorthy (1995). Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenisation theory and voronoï cell finite element method. *International Journal of Solids and Structures* 32(1), 27–62.
- Glowinski, R. et P. Le Tallec (1990). Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping schwartz alternating method. Dans *Proceedings of Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pp. 224–231. SIAM, Philadelphia.
- Gosselet, P. et C. Rey (2002). On a selective reuse of Krylov subspaces in Newton-Krylov approaches for nonlinear elasticity. Dans *14th Conference on Domain Decomposition methods*, pp. 419–426.
- Gosselet, P. et C. Rey (2006). Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering* 13, 515–572.
- Griffith, A. A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of The Royal Society of London, Series A-Mathematical and Physical Sciences* 221, 163–198.
- Guidault, P. A., O. Allix, L. Champaney, et C. Cornuault (2008). A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197(5), 381–399.
- Hashin, Z. (1996). Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44(7), 1129–1145.
- Hellen, T. K. (1975). On the method of virtual crack extensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 9(1), 187–207.
- Hestenes, M. R. (1969). Multiplier and gradient methods. *Journal of Optimization Theory and Applications* 4, 303–320. 10.1007/BF00927673.
- Hillerborg, A., M. Modéer, et P. E. Petersson (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research* 6(6), 773–781.

- Hinojosa, J., O. Allix, P. A. Guidault, et P. Cresta (2011). On the robustness of a mixed domain decomposition method with nonlinear relocalization for handling geometrical instabilities. *Comp. Meth. in Applied Mech. and Eng.* À paraître.
- Hutchinson, J. W. et W. T. Koiter (1970). Postbuckling theory. *Applied Mechanics Reviews* 23(12), 1353–1366.
- Irwin, G. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics* 24, 361–364.
- Jamal, M., L. Lahlou, M. Midani, H. Zahrouni, A. Limam, N. Damil, et M. Potier-Ferry (2003). A semi-analytical buckling analysis of imperfect cylindrical shells under axial compression. *International Journal of Solids and Structures* 40(5), 1311–1327.
- Jetteur, P., S. Cescotto, V. de Ville de Goyet, et F. Frey (1983). Improved nonlinear finite elements for oriented bodies using an extension of marguerre’s theory. *Computers & Structures* 17(1), 129–137.
- Kachanov, L. M. (1976). Separation failure of composite materials. *Polymer Mechanics* 12, 812–815.
- Kanninen, M. F. (1973, 03). An augmented double cantilever beam model for studying crack propagation and arrest. *International Journal of Fracture* 9(1), 83–92.
- Kerfriden, P. (2008). *Stratégie de décomposition de domaine à trois échelles pour la simulation du délaminage dans les stratifiés*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan.
- Kerfriden, P., O. Allix, et P. Gosselet (2009). A three-scale domain decomposition method for the 3D analysis of debonding in laminates. *Computational Mechanics* 44(3), 343–362.
- Kikuchi, N. (1982). Penalty/finite element approximations of a class of unilateral contact problems. Dans ASME (Éditeur.), *Penalty method and finite element method*, New York.
- Koiter, W. T. (1945). *On the stability of Elastic Equilibrium (in Dutch)*. Thèse de doctorat, Wright-Patterson Air Force Base, Hollande. English translation issued as NASA TT-F-10833, Washington D.C. (1967) and as AFFDL-TR-10-25, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio (1970).
- Kouznetsova, V., M. G. D. Geers, et W. A. M. Brekelmans (2002). Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 54(8), 1235–1260.

- Ladevèze, P. (1985). Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. *Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique-physique, chimie, sciences de l'univers, sciences de la terre* 300, 41–44.
- Ladevèze, P. (1986). Sur la mécanique de l'endommagement des composites. Dans C. Bathias et D. Menkés (Éditeurs.), *Proc. of the 8ème Journées Nationales sur les Composites, JNC5*, Paris, pp. 667–683. Pluralis.
- Ladevèze, P. (1992). A damage computational method for composite structures. *Computers & Structures* 44(1-2), 79–87.
- Ladevèze, P. (1999). *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-incremental Methods of Calculation*. Berlin : Springer-Verlag.
- Ladevèze, P., O. Loiseau, et D. Dureisseix (2001). A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52(1-2), 121–138.
- Ladevèze, P., G. Lubineau, et D. Violeau (2006). A computational damage micro-model of laminated composites. *International Journal of Fracture* 137, 139–150. 10.1007/s10704-005-3077-x.
- Ladevèze, P. et A. Nouy (2003). On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192(28-30), 3061–3087.
- Ladevèze, P., A. Nouy, et O. Loiseau (2002). A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191(43), 4869–4891.
- Ladevèze, P., J.-C. Passieux, et D. Néron (2010). The LATIN multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199(21-22), 1287 – 1296.
- Le Tallec, P., J. Mandel, et M. Vidrascu (1998). A Neumann-Neumann domain decomposition algorithm for solving plate and shell problems. *SIAM J. Num. Ana.* 35, 836–867.
- Legay, A. et A. Combescure (2002). Efficient algorithms for parametric non-linear instability analysis. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 37(4-5), 709–722.
- Leguillon, D. (1999). A method based on singularity theory to predict edge delamination of laminates. *International Journal of Fracture* 100(1), 105–120.
- Leguillon, D. (2002). Strength or toughness? a criterion for crack onset at a notch. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 21(1), 61–72.

- Leguillon, D. et E. Sanchez-Palencia (1987). Effets de bords et singularités dans les matériaux composites. Dans *Annales des Composites, Effets de bords et singularités dans les matériaux composites stratifiés*, AMAC, Chatenay-Malabry, pp. 7–20.
- Levien, R. (2008). The elastica : a mathematical history. Rapport technique UCB/EECS-2008-103, EECS Department, University of California, Berkeley.
- Levy, S. (1945). Bending of rectangular plates with large deflections. Rapport technique 737, NACA.
- Loiseau, O. (2001). *Une stratégie de calcul multiéchelle pour les structures hétérogènes*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan.
- Lyapunov, A. M. (1892). *Problème général de la stabilité du mouvement*. Mathematics Society of Kharkov.
- Mandel, J. (1974). *Introduction à la mécanique des milieux continus déformables*. Varsovie : Éditions scientifiques de Pologne.
- Mandel, J. (1993). Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering* 9, 233–241.
- Matthies, H. et G. Strang (1979). The solution of nonlinear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14(11), 1613–1626.
- May, I. M. et Y. Duan (1997). A local arc-length procedure for strain softening. *Computers & Structures* 64(1-4), 297–303.
- Melenk, J. et I. Babuška (1996). The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 39, 289–314.
- Michalowski, R. et Z. Mroz (1978). Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems. *Archiwum Mechaniki Stosowanej* 30(3), 259–276.
- Moës, N., J. Dolbow, et T. Belytschko (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal of Engineering Science* 46, 131–150.
- Mooney, M. (1940). A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics* 11(9), 582–592.
- Needleman, A. (1987). A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal of Applied Mechanics - Transactions of The ASME* 54(3), 525–531.

- Néron, D. et D. Dureisseix (2008). A computational strategy for thermo-poroelastic structures with a time-space interface coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 75(9), 1053–1084.
- Nezamabadi, S., H. Zahrouni, J. Yvonnet, et M. Potier-Ferry (2010). A multiscale finite element approach for buckling analysis of elastoplastic long fiber composites. *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 8(3), 287–301.
- Nguyen, Q. S. (1995). Stabilité des structures élastiques. Dans J. Ghidaglia et P. Lascaux (Éditeurs.), *Mathématiques & Applications 18* (4e éd.). Springer-Verlag.
- Nilsson, K.-F. et A. E. Giannakopoulos (1990). Finite element simulation of delamination growth. Dans M. H. Aliabadi, C. A. Brebbia, et D. J. Cartwright (Éditeurs.), *Proc. of the first International Conference on Computer-Aided Assessment and Control of Localized Damage*, Portsmouth, UK, pp. 299–313. Springer-Verlag.
- Nouy, A. (2003). *Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace pour le calcul de structures fortement hétérogènes*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan.
- Nuismer, R. J. et J. M. Whitney (1974). Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations. *Journal of Composite Materials* 8, 253–265.
- Oden, J. T. et E. B. Pires (1983). Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity. *Journal of Applied Mechanics* 50(1), 67–76.
- Ogden, R. W. (1984). *Non-Linear Elastic Deformations*. Chichester, UK : Ellis Horwood Limited.
- Pebrel, J., C. Rey, et P. Gosselet (2008). A nonlinear dual domain decomposition method : application to structural problems with damage. *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 6(3), 251–262.
- Pipes, R. B. et N. J. Pagano (1970). Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension. *Journal of Composites Materials* 4, 538.
- Potier-Ferry, M. (1979). Perturbed bifurcation theory. *Journal of Differential Equations* 33, 112–146.
- Powell, M. J. D. (1969). A method for nonlinear constraints in minimization problems. Dans R. Fletcher (Éditeur.), *Optimization*, London, pp. 283–298. Academic Press.
- Pradeilles Duval, R.-M. (2004). Quasi-static evolution of delaminated structures : analysis of stability and bifurcation. *International Journal of Solids and Structures* 41(1), 103–130.

- Przemieniecki, J. S. (1963). Matrix structural analysis of substructures. *Am. Inst. Aero. Astro. J.* 1, 138–147.
- Qiu, Y., M. A. Crisfield, et G. Alfano (2001). An interface element formulation for the simulation of delamination with buckling. *Engineering Fracture Mechanics* 68(16), 1755–1776.
- Raju, I. S. (1987). Calculation of strain-energy release rates with higher order and singular finite elements. *Engineering Fracture Mechanics* 28(3), 251–274.
- Ramm, E. (1976). A plate/shell element for large deflections and rotations. Dans *US-Germany Symp. on Formulations and Computational Algorithms in Finite Element*. MIT-Press.
- Ramm, E. (1981). Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. Dans W. Wunderlich, E. Stein, et K. J. Bathe (Éditeurs.), *Proceedings of the Europe - US Workshop on Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Germany, July 28-31, 1980*, pp. 63–89. Springer-Verlag.
- Ramm, E. (1982). The Riks/Wempner approach - an extension of the displacement control method in non-linear analysis. Dans E. Hinton, D. R. J. Owen, et C. Taylor (Éditeurs.), *Recent advances in non-linear computational mechanics*, Swansea, UK, pp. 63–86. Pineridge Press.
- Rannou, J., A. Gravouil, et M. Baietto-Dubourg (2009). A local multigrid X-FEM strategy for 3-D crack propagation. *International Journal For Numerical Methods In Engineering* 77, 581–600.
- Rey, C. (1996). Une technique d'accélération de la résolution de problèmes d'élasticité non-linéaire par décomposition de domaine. *Compte rendu de l'Académie des Sciences 322 série IIB*, 601–606.
- Rice, J. R. (1968). A path independent integral and approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics* 35(2), 379.
- Riks, E. (1972). The application of newton's methods to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics* 39, 1060–1065.
- Riks, E. (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Int. Journal of Solids and Structures* 15, 524–551.
- Risler, F. et C. Rey (2000). Iterative accelerating algorithms with krylov subspaces for the solution to large-scale nonlinear problems. *Numerical algorithms* 23, 1–30.
- Roulet, V., L. Champaney, et P.-A. Boucard (2011). A parallel strategy for the multiparametric analysis of structures with large contact and friction surfaces. *Advances in Engineering Software* 42(6), 347 – 358.

- Rybicki, E. F. et M. F. Kanninen (1977). A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. *Engineering Fracture Mechanics* 9(4), 931–938.
- Saad, Y. (2003). *Iterative methods for sparse linear systems* (2e éd.). Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Salençon, J. (2005). *Mécanique des milieux continus. Tome 1 : Concepts Généraux*. Paris : Éditions de l'École Polytechnique.
- Sanchez-Palencia, E. (1980). Non homogeneous media and vibration theory. *Lecture Notes in Physics* 127.
- Schellekens, J. C. J. et R. de Borst (1991). Application of linear and nonlinear fracture mechanics options to free edge delamination in laminated composites. *HERON* 36(2), 37–48.
- Schellekens, J. C. J. et R. De Borst (1993). A non-linear finite element approach for the analysis of mode-i free edge delamination in composites. *International Journal of Solids and Structures* 30(9), 1239–1253.
- Schwarz, H. A. (1869). Über einige Abbildungsaufgaben. *Ges. Math. Abh.* 11, 65–83.
- Series, L., F. Feyel, et F.-X. Roux (2003). Une méthode de décomposition de domaine avec deux multiplicateurs de Lagrange, application au calcul de structure, cas du contact. Dans *Actes du 6^e colloque national en calcul des structures*.
- Simo, J. C. et L. Vu-Quoc (1986). A three-dimensional finite-strain rod model. part ii : Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 58(1), 79–116.
- Storåkers, B. et B. Andersson (1988). Nonlinear plate theory applied to delamination in composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 36(6), 689–718.
- Strouboulis, T., K. Coops, et I. Babuška (2001). The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190(32-33), 4081–4193.
- Thompson, J. M. T. et A. C. Walker (1968). The non-linear perturbation analysis of discrete structural systems. *International Journal of Solids and Structures* 4(8), 757–768.
- Timoshenko, S. P. (1953). *History of Strength of Materials*. New York : McGraw-Hill Book Co.
- Timoshenko, S. P. et J. M. Gere (1936). *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill Book Co.

- Treffitz, E. et K. Marguerre (1937). Über die tragfähigkeit eines längsbelasteten plattenstreifens nach überschreiten der beullast. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 17(2), 85–100.
- Truesdell, C. et R. A. Toupin (1960). The classic field theories. Dans S. Flügge (Éditeur.), *Handbuch Der Physik*, Volume III/1, pp. 226–790. Berlin : Springer-Verlag.
- Turner, M. J., E. H. Dill, H. C. Martin, et R. J. Melosh (1960). Large deflections of structures subjected to heating and external loads. *Journal of the Aeronautical Sciences* 27(2), 97–106.
- Tvergaard, V. (1990). Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal. *Materials Science and Engineering : A* 125(2), 203–213.
- Tzaferopoulos, M. A. et P. D. Panagiotopoulos (1993). Delamination of composites as a substationarity problem : Numerical approximation and algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 110(1-2), 63–85.
- Vannucci, P., B. Cochelin, N. Damil, et M. Potier-Ferry (1998). An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 41(8), 1365–1389.
- Violeau, D. (2007). *Une stratégie de calcul pour l'analyse à l'échelle "micro" des endommagements jusqu'à rupture des composites stratifiés*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan.
- von Kármán, T., E. E. Sechler, et L. H. Donnell (1932). The strength of thin plates in compression. *Transactions of the ASME* 54, 53–58.
- von Kármán, T. et H.-S. Tsien (1939). The buckling of spherical shells by external pressure. *Journal of the Aeronautical Sciences* 7, 43.
- von Kármán, T. et H.-S. Tsien (1941). The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. *Journal of the Aeronautical Sciences* 8, 303.
- Wempner, G. (1969). Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. *International Journal of Solids and Structures* 5(2), 117–153.
- Wempner, G. A. (1971). Discrete approximation related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures* 17, 1581–1599.
- Whitcomb, J. D. (1989). 3-dimensional analysis of a postbuckled embedded delamination. *Journal of Composites Materials* 23(9), 862–889.
- Whitcomb, J. D. (1991). Iterative global/local finite element analysis. *Computers & Structures* 40(4), 1027–1031.

- Wood, R. D. et O. C. Zienkiewicz (1977). Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells. *Computers & Structures* 7(6), 725–735.
- Wriggers, P. (2006). *Computational Contact Mechanics* (2e éd.). Springer-Verlag.
- Yaghmai, S. et E. P. Popov (1971). Incremental analysis of large deflections of shells of revolution. *International Journal of Solids and Structures* 7(10), 1375–1393.
- Zahrouni, H., B. Cochelin, et M. Potier-Ferry (1999). Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 175(1-2), 71–85.
- Zienkiewicz, O. C. (1977). *The Finite Element Method* (3e éd.). London : McGraw-Hill.
- Zohdi, T., J. Oden, et G. Rodin (1996). Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 138(1-4), 273–298.