



**HAL**  
open science

# Mélange par convection et survivance des hétérogénéités géochimiques dans le manteau

Sylvaine Ferrachat

► **To cite this version:**

Sylvaine Ferrachat. Mélange par convection et survivance des hétérogénéités géochimiques dans le manteau. Tectonique. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2000. Français. NNT : . tel-00720115

**HAL Id: tel-00720115**

**<https://theses.hal.science/tel-00720115>**

Submitted on 23 Jul 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*UNIVERSITE JOSEPH FOURIER-GRENOBLE 1*  
*SCIENCES ET GEOGRAPHIE*

**THESE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER**

**Discipline : Sciences de la Terre**

présentée et soutenue publiquement

par

**FERRACHAT Sylvaine**

**Mélange par convection**

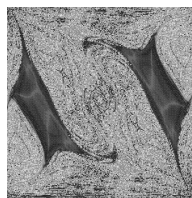
**et**

**survivance des hétérogénéités géochimiques**

**dans le manteau**

Directeur de Thèse :

**Yanick RICARD**



Composition du jury :

M. Michel Campillo, président du jury

M. Claude Jaupart, rapporteur

M. Jörg Schmalzl, rapporteur

M. Francis Albarède, examinateur

M. Bernard Legras, examinateur

M. Yanick Ricard, directeur de thèse

*A l'issue de ces années de thèse, l'heure est aux remerciements.*

*Je remercie tout d'abord les membres du jury, qui ont bien voulu consacrer une partie de leur temps à mon travail et qui l'ont enrichi de remarques constructives.*

*Yanick a joué un rôle crucial dans cette affaire. Ses cours de géophysique ont été l'un des rares points lumineux d'une sombre année de maîtrise. Par la suite, il a su me guider et m'encourager. Il est toujours une source inépuisable d'idées.*

*Merci à l'ensemble de l'équipe, et tout particulièrement au grand frère Jan, qui défriche le chemin (au propre et au figuré...), au petit frère Nico, débordant d'imagination, à Gilles, Hervé, Sylvain, Fred, Cédric, Laurent...*

*Une pensée particulière enfin pour mes deux loustics...*

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduction</b>   | <b>7</b>  |
| Le manteau terrestre vu par les géochimistes . . . . .              | 8         |
| Considérations générales sur le processus de fusion partielle . . . | 8         |
| Les basaltes issus des dorsales . . . . .                           | 10        |
| Les basaltes issus de points chauds . . . . .                       | 13        |
| Classification des différentes sources des basaltes et modèles dy-  |           |
| namiqes sous-jacents . . . . .                                      | 15        |
| Conclusion . . . . .  | 16        |
| Le manteau terrestre vu par les géophysiciens . . . . .             | 17        |
| Un système en convection pleinement développée . . . . .            | 17        |
| Une ou deux couches convectives ? . . . . .                         | 19        |
| Une couche et demie ? . . . . .                                     | 28        |
| Conclusion . . . . .  | 29        |
| Compléments sur la longueur d'onde des hétérogénéités géochimiques  |           |
| dans le manteau . . . . .   | 29        |
| <b>1 Chaos lagrangien _ Approche physique du mélange</b>            | <b>35</b> |
| 1.1 Bibliographie des principales études de mélange dans le manteau |           |
| terrestre . . . . .   | 35        |
| 1.1.1 Modèles bidimensionnels dépendants du temps : plusieurs       |           |
| théories s'affrontent . . . . .                                     | 35        |
| 1.1.2 Modèles tridimensionnels : la convection du manteau serait-   |           |
| elle inapte à mélanger de manière efficace ? . . . . .              | 39        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 1.2      | Rappels de mécanique classique – Physique du mélange . . . . .                                | 41         |
| 1.2.1    | Cadre de l'étude . . . . .  | 43         |
| 1.2.2    | Un exemple classique de mélange efficace : la transforma-<br>tion du boulanger . . . . .      | 45         |
| 1.2.3    | Notion d'hamiltonien . . . . .  | 47         |
| 1.2.4    | Section de Poincaré . . . . .   | 55         |
| 1.2.5    | Notion de stabilité: points elliptiques et hyperboliques . . .                                | 57         |
| 1.2.6    | Effets d'une perturbation dans un système intégrable . . .                                    | 60         |
| 1.2.7    | Un exemple d'étirement-repliement . . . . .   | 65         |
| 1.2.8    | Une mesure de la sensibilité aux conditions initiales: les<br>exposants de Lyapunov . . . . . | 66         |
| 1.3      | Conclusion et définitions du chaos . . . . .  | 70         |
| <b>2</b> | <b>Chaos lagrangien dans un modèle tridimensionnel stationnaire</b>                           | <b>71</b>  |
| 2.1      | Description du modèle . . . . .   | 72         |
| 2.1.1    | La décomposition du champ de vitesse : composantes<br>poloïdale et toroïdale . . . . .        | 72         |
| 2.1.2    | Description du modèle et méthode de résolution . . . . .                                      | 75         |
| 2.1.3    | Conditions aux limites . . . . .  | 78         |
| 2.1.4    | Advection des traceurs . . . . .  | 79         |
| 2.1.5    | Outils d'observation . . . . .  | 82         |
| 2.2      | Mélange chaotique ou régulier dans le manteau terrestre . . . . .                             | 86         |
| 2.3      | Conclusion et critiques . . . . .   | 109        |
| <b>3</b> | <b>Influence de paramètres géophysiques :</b>   |            |
|          | <b>Variation de la viscosité,</b>   |            |
|          | <b>différenciation chimique</b>   | <b>111</b> |
| 3.1      | Précédentes études sur le rôle des variations de viscosité . . . . .                          | 112        |
| 3.1.1    | Variations radiales de viscosité . . . . .  | 112        |
| 3.1.2    | L'hypothèse des <i>blobs</i> . . . . .  | 114        |
| 3.2      | Temps de mélange en fonction de la longueur d'onde des hétéro-<br>généités . . . . .          | 114        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.2.1    | Principe de calcul . . . . .   | 114        |
| 3.2.2    | Remarque sur l'adimensionnalisation du te . . . . .  | 117        |
| 3.2.3    | Lien avec les exposants de Lyapunov . . . . .  | 118        |
| 3.3      | Stockage de croûte océanique dans la couche D'' . . . . .  | 120        |
| 3.4      | Caractéristiques chimiques du modèle . . . . .   | 122        |
| 3.4.1    | Contenu chimique des traceurs . . . . .  | 122        |
| 3.4.2    | Fusion partielle et différenciation chimique aux dorsales . . . . .                                    | 124        |
| 3.4.3    | Ségrégation dans la couche D'' . . . . .   | 125        |
| 3.4.4    | Age des particules . . . . .   | 126        |
| 3.5      | Résultats du modèle bidimensionnel . . . . .   | 126        |
| 3.6      | Résultats du modèle tridimensionnel . . . . .  | 149        |
| 3.6.1    | Caractéristiques du modèle . . . . .   | 149        |
| 3.6.2    | Temps de mélange en fonction de la longueur d'onde . . . . .   | 149        |
| 3.6.3    | Exposants de Lyapunov . . . . .  | 151        |
| 3.7      | Conclusion . . . . .   | 152        |
| <b>4</b> | <b>Convection et modèles de boîtes géochimiques</b>  | <b>153</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .   | 153        |
| 4.2      | Box modeling the chemical evolution of geophysical systems: case study of the Earth's mantle . . . . . | 156        |
|          | <b>Conclusions et perspectives</b>   | <b>161</b> |
| <b>A</b> | <b>Calcul de stabilité : points elliptiques et points hyperboliques</b>                                | <b>165</b> |
| <b>B</b> | <b>Calcul du champ de vitesse</b>  | <b>169</b> |
| B.1      | Détermination de $u_2^s$ et $v_1^s$ (cas forçage par plaques lithosphériques)                          | 171        |
| B.2      | Résolution de la partie poloïdale . . . . .  | 171        |
| B.2.1    | Solution en bas . . . . .  | 171        |
| B.2.2    | Simplification de $P$ et $S$ . . . . .   | 172        |
| B.3      | Résolution de la partie toroïdale . . . . .  | 174        |
| B.3.1    | Solution en bas . . . . .  | 175        |
| B.3.2    | Simplification de $T$ . . . . .  | 175        |

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| B.4      | Cas d'une discontinuité de viscosité . . . . . | 175        |
| <b>C</b> | <b>Exemples de champs de vitesse</b>           | <b>177</b> |
| C.1      | Cas isovisqueux . . . . .                      | 177        |
| C.1.1    | Composantes poloïdale et toroïdale . . . . .   | 177        |
| C.1.2    | Composante poloïdale uniquement . . . . .      | 179        |
| C.1.3    | Composante toroïdale uniquement . . . . .      | 179        |
| C.2      | Cas d'une stratification visqueuse . . . . .   | 181        |
| <b>D</b> | <b>Animations</b>                              | <b>183</b> |

1

---

<sup>1</sup>Note : Les figures pp. **22, 23, 31, 54, 60, 82, 95, 96, 100, 142, 144, 145, 146, 189** et **190** sont en version couleur sur le web à l'adresse :

*<http://www.ens-lyon.fr/~sferrach/these.html>*

# Introduction

La composition chimique et isotopique des basaltes fabriqués au niveau des dorsales ou dans les volcans de points chauds nous renseigne sur la dynamique du manteau terrestre. Le manteau superficiel, d'une part, est échantillonné dans les basaltes de rides, et nous apparaît essentiellement homogène, fortement dégazé, et ayant une signature géochimique très différente de celle du manteau primitif. D'autre part, le manteau profond, échantillonné dans les basaltes de points chauds, semble très hétérogène avec des caractéristiques géochimiques extrêmement variables. Si ces spécificités permettent d'émettre des hypothèses sur la dynamique des échanges entre surface lithosphérique et manteau, elles ne permettent pas l'émergence d'un modèle unique. Les observations et contraintes issues de la géophysique sont alors nécessaires pour discriminer entre les différents scénarii.

Dans ce travail, nous nous proposons, à partir de modèles simples de convection bi- et tridimensionnelle, de comprendre et expliquer les processus de mélange dans le manteau terrestre, afin de tenter de donner un sens à la signature géochimique des basaltes en surface.

Le plan de cette thèse est le suivant : nous poursuivons ce chapitre introductif en rappelant les observations et contraintes fournies par la géochimie et la géophysique, et nous tentons de synthétiser leurs résultats. Dans le premier chapitre, nous abordons le problème de la physique du mélange d'un point de vue théorique, tout en restreignant l'étude à des caractéristiques pertinentes pour la Terre. Le deuxième chapitre est consacré à l'analyse des propriétés de mélange d'un écoulement tridimensionnel stationnaire simulant le manteau terrestre. Dans le troisième chapitre, nous étudions l'effet de la stratification



visqueuse du manteau sur ces propriétés de mélange, et nous ajouterons des caractéristiques chimiques au modèle pour observer la distribution des éléments et des rapports isotopiques au sein du système. Enfin dans le quatrième et dernier chapitre, nous présentons une étude réalisée en collaboration avec Nicolas Coltice qui a pour but de comparer les résultats des modèles de boîtes géochimiques et ceux de modèles advectifs comme celui que nous avons développé.

## **Le manteau terrestre vu par les géochimistes**

La détermination des compositions chimique et isotopique des basaltes océaniques constitue *a priori* une donnée de premier ordre pour comprendre la dynamique du manteau terrestre. L'augmentation du nombre et de la précision de ces mesures au cours des trente dernières années a permis d'élaborer des modèles, puis d'en raffiner les hypothèses, pour conduire actuellement à une classification assez complexe des différents types de basaltes échantillonnés à la surface de la Terre. Malheureusement, l'accroissement de la diversité du message géochimique n'a en général pas permis de contraindre ses implications pour la dynamique du manteau : différents modèles existent actuellement, et les controverses persistent.

### **Considérations générales sur le processus de fusion partielle**

Les basaltes sont fabriqués lors de la fusion partielle du manteau péridotitique. Ce processus modifie la composition chimique des basaltes par rapport à leur source : en effet, tous les éléments chimiques contenus dans la péridotite n'ont pas la même compatibilité, c'est-à-dire la même propension à partir dans la phase liquide, ou au contraire à rester dans le résidu solide réfractaire. Plus un élément est incompatible, plus il a tendance à se concentrer dans la phase liquide.

Lorsqu'on fond partiellement un échantillon de roche, les éléments les plus incompatibles sont extraits les premiers. Si on augmente le taux de fusion partielle (en augmentant la température ou en abaissant la pression), la phase

liquide va s'enrichir en éléments de plus en plus compatibles. Par conséquent, l'analyse de la composition chimique d'un basalte nous renseigne à la fois sur la composition de la source mantellique, mais aussi sur le taux de fusion partielle subi. Il n'est pas toujours possible de déterminer les rôles relatifs de ces deux composantes dans la composition finale du basalte.

La compatibilité d'un élément est *grosso modo* liée à la taille de l'atome : plus l'atome est gros, plus l'élément aura tendance à être incompatible (la valence de l'élément joue aussi). Pour cette raison, le phénomène de fusion partielle ne fractionne pas les isotopes d'un même élément. Pourtant, nous allons voir comment il contribue à modifier les rapports isotopiques  $^{\alpha}\text{X}/^{\beta}\text{X}$  du basalte par rapport à sa source. Prenons l'exemple du néodyme, avec le rapport  $^{143}\text{Nd}/^{144}\text{Nd}$ . Le  $^{143}\text{Nd}$  provient de la désintégration radioactive du  $^{147}\text{Sm}$ , avec une demi-vie de 106 Ga, alors que le  $^{144}\text{Nd}$  est un isotope stable. Or, le néodyme est plus incompatible que son radionucléide-père. Il va donc se concentrer préférentiellement dans le basalte par rapport au samarium. Appauvri en samarium, le basalte verra son rapport  $^{143}\text{Nd}/^{144}\text{Nd}$  diminuer par rapport à la source mantellique. A l'inverse, le résidu solide de la fusion partielle développera un rapport  $^{143}\text{Nd}/^{144}\text{Nd}$  plus élevé que celui de la source. Par conséquent, la composition isotopique d'une roche conserve une trace fossile des éventuelles fusions partielles subies dans le passé.

Il est important de signaler que les phénomènes de fusion partielle ne sont pas les seuls responsables de la modification de la composition isotopique. En effet, érosion, altération, déshydratation sont autant de mécanismes potentiellement efficaces. Par conséquent, la composition isotopique et élémentaire d'une lithosphère peut évoluer significativement durant la subduction et la traversée de la zone de transition (Albarède 1998).

Ces considérations vont nous permettre de mieux comprendre les implications des compositions chimiques et isotopiques des basaltes pour la dynamique du manteau.

## Les basaltes issus des dorsales

Les basaltes fabriqués au niveau des dorsales (*MORB, ie Mid-Oceanic Ridge Basalts*) échantillonnent le manteau superficiel : en effet, le mouvement divergent des deux plaques lithosphériques de part et d'autre de la dorsale entraîne une décompression superficielle du manteau (de l'ordre d'une centaine de kilomètres de profondeur), ce qui à son tour induit la fusion partielle d'une fraction du manteau péridotitique.

On a, depuis relativement longtemps, clairement identifié une signature chimique et isotopique précise des MORB (Gast 1968). Cette signature est relativement homogène sur l'ensemble de la surface de la Terre, c'est-à-dire que l'amplitude des variations isotopiques est petite par rapport au domaine de variation observé pour l'ensemble des basaltes. Elle est caractérisée au premier ordre par un dégazage important, et une faible abondance en éléments très incompatibles par rapport à d'autres basaltes ou aux granites de la croûte continentale, par exemple. Ceci indique que le réservoir-source des MORB a subi une importante fusion partielle depuis la formation de la Terre. Cet événement est généralement attribué à la formation de la croûte continentale (Armstrong and Hein 1973; Jacobsen and Wasserburg 1979; Allègre et al. 1983a; Allègre et al. 1983b; Hofmann 1988) : le réservoir-source des MORB correspondrait au résidu solide issu de l'extraction de la croûte continentale.

Hofmann (1988) a analysé les concentrations élémentaires des MORB et de la croûte continentale, (*cf figure 1*) : il remarque que celles-ci semblent confirmer cette hypothèse. Dans la **figure 1**, il classe les éléments par compatibilité croissante, en définissant la compatibilité comme inversement proportionnelle à l'abondance moyenne estimée dans la croûte continentale. La courbe ainsi obtenue pour les MORB met en évidence une anti-corrélation avec celle de la croûte continentale pour les éléments les plus incompatibles, ce qui est cohérent avec l'hypothèse de complémentarité entre la source des MORB et la croûte continentale. Les éléments moyennement compatibles apparaissent plus concentrés dans les MORB que dans la croûte continentale : cela peut s'expliquer par un taux de fusion partielle plus élevé lors de la fabrication des MORB. Dans les

deux cas, les faibles concentrations en éléments très compatibles sont dus au fait que MORB et croûte continentale sont issus d'une fusion partielle.

Afin d'estimer la taille du réservoir des MORB, plusieurs auteurs (Jacobsen

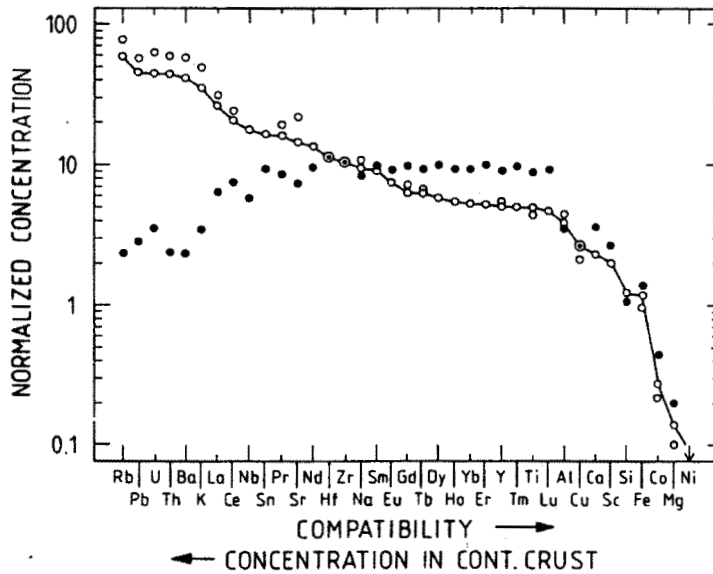


FIG. 1 – Concentrations élémentaires dans un MORB ‘normal’ (symboles noirs) et dans la croûte continentale (symboles blancs), normalisées par leur concentration dans une roche primitive, c’est-à-dire n’ayant subi aucune fusion partielle. Les valeurs de la croûte continentale correspondent à des moyennes estimées. Les éléments sont classés par ordre de compatibilité croissante, définie ici comme l’inverse de la concentration dans la croûte continentale. On observe une certaine anti-corrélation des deux courbes pour les éléments les plus incompatibles. D’après Hofmann (1988).

and Wasserburg 1979; O’Nions et al. 1979; Allègre et al. 1983b) ont tenté, à partir de bilans massiques, de déterminer quelle fraction volumique de manteau primitif était nécessaire pour extraire la croûte continentale telle qu’elle nous apparaît : Jacobsen and Wasserburg l’estiment à 30%, en utilisant les rapports de néodyme et de strontium, ce qui est cohérent avec les résultats de O’Nions et al. (à savoir la fraction de volume de manteau primitif appauvri représente moins de 50% du volume total). Allègre et al. (1983b) quant à eux trouvent une plage de valeurs comprise entre 30 et 90%, suivant les différentes hypothèses de leur modèle.

La valeur de 30% est intéressante, car elle correspond *grosso modo* au volume du manteau supérieur. Etant donné que les MORB sont fabriqués superficiellement, on a souvent utilisé ce résultat pour assimiler le manteau supérieur au réservoir-source des MORB, et par voie de conséquence en déduire qu'il n'y a pas d'échange de matière entre les parties supérieure et inférieure du manteau.

Cependant, cette valeur dépend très fortement de données plus ou moins bien contraintes : les compositions chimiques respectives du manteau primitif, des MORB et de la croûte continentale (Allègre et al. 1983b), mais aussi la taille et du degré d'enrichissement d'une troisième 'entité', la lithosphère continentale (Carlson 1984; Silver et al. 1988). Ces derniers imaginent en effet, que la lithosphère continentale puisse constituer un réservoir caché d'éléments incompatibles. Dans ce cas, la fraction volumique de manteau primitif mise en jeu n'en serait que plus importante. Dans son modèle, Carlson (1984) fait varier la masse de la lithosphère continentale de 5 à 10 fois celle de la croûte continentale, et son degré d'enrichissement de 1 à 6 par rapport au manteau primitif : il trouve que la fraction de manteau appauvri en éléments incompatibles varie entre 50 et 100% du volume total.

Il en ressort qu'il est impossible de conclure, quant à la taille du réservoir appauvri, ni même quant à la réelle complémentarité de la source des MORB et de la croûte continentale.

Cette complémentarité est d'ailleurs également remise en cause par la détermination de l'âge du dégazage de la source des MORB. A travers l'analyse des rapports isotopiques  $^{40}\text{Ar}/^{36}\text{Ar}$  et  $^{129}\text{Xe}/^{130}\text{Xe}$ , un certain nombre d'auteurs (Sarda et al. 1985; Allègre et al. 1986; Hart et al. 1986) montrent que le dégazage massif du réservoir-source des MORB date des 100 premiers millions d'années de la Terre, ce qui est antérieur à la formation de la croûte continentale. Si on suppose que source des MORB et croûte continentale sont complémentaires, il reste alors à trouver un scénario susceptible d'expliquer le dégazage d'une partie du manteau primitif dans un premier temps, puis l'extraction de la croûte continentale dans un deuxième temps.

Dans leur article de revue, Silver et al. (1988) poussent l'analyse un peu plus

loin en affirmant que source des MORB et croûte continentale ne peuvent pas être complémentaires : en utilisant l'information issue du rapport  $^{143}\text{Nd}/^{144}\text{Nd}$ , ils montrent que l'appauvrissement de la source des MORB en éléments incompatibles est antérieur à la formation de la croûte continentale. Cependant, il est dans ces conditions difficile de déterminer la cause de l'appauvrissement de la source des MORB, ni même d'identifier le réservoir 'caché' qui lui serait complémentaire.

### Les basaltes issus de points chauds

A la différence des MORB, les OIB (*ie* Oceanic Island Basalts) sont issus de volcans de points chauds. Ils échantillonnent le manteau profond (*cf* discussion dans la section intitulée *le manteau terrestre vu par les géophysiciens*).

Les OIB présentent une large gamme de variations de leur composition chimique et isotopique (**figure 2**).

Que pouvons-nous déduire de l'origine des OIB d'après l'analyse de leurs caractéristiques géochimiques ? Intéressons-nous par exemple au rapport isotopique  $^3\text{He}/^4\text{He}$ . L' $^4\text{He}$  est produit par la désintégration de l'uranium et du thorium, alors que l' $^3\text{He}$  est primordial. Lors de la fusion partielle, la majeure partie de l'hélium (3 et 4) est dégazée dans l'atmosphère. Comme l' $^4\text{He}$  est en permanence produit par l'uranium et le thorium, toute roche ayant subi un dégazage voit son rapport isotopique  $^3\text{He}/^4\text{He}$  baisser. Pour cette raison, les rapports  $^3\text{He}/^4\text{He}$  élevés dans les basaltes hawaïens (Loihi) sont généralement interprétés comme la preuve de l'existence d'une composante primitive (*ie* jamais dégazée) dans la source de ces basaltes (Kaneoka and Takaoka 1980; Kurz et al. 1982; Allègre et al. 1983). Pourtant, Coltice and Ricard (1999) ont proposé une explication différente. L'uranium et le thorium sont fortement incompatibles : lors de la fusion partielle au niveau des dorsales, ils vont se concentrer préférentiellement dans le liquide basaltique par rapport au résidu lithosphérique. Par conséquent, la lithosphère océanique développera à terme un rapport isotopique  $^3\text{He}/^4\text{He}$  plus élevé que celui de la croûte océanique fabriquée simultanément. Recyclée dans le manteau par l'intermédiaire des zones

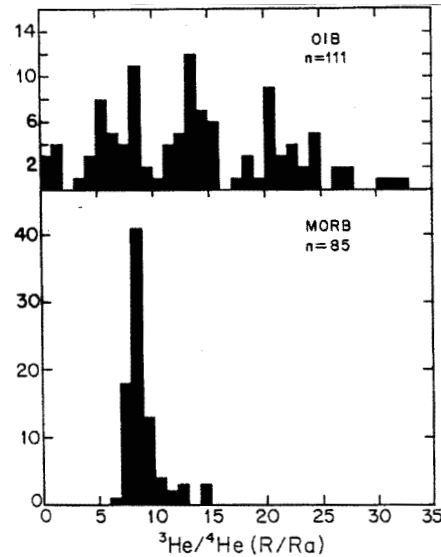


FIG. 2 – Un exemple de la variabilité isotopique des OIB par rapport aux MORB : on a représenté un histogramme du rapport isotopique  $^3\text{He}/^4\text{He}$  pour un grand nombre d'OIB (en haut), ou de MORB (en bas). Le spectre de variations du rapport  $^3\text{He}/^4\text{He}$  est beaucoup plus large pour les OIB que pour les MORB. D'après Zindler and Hart (1986).

de subduction, la lithosphère océanique peut alors être interprétée comme une composante importante de la source des basaltes hawaïens. Nous développerons ce type de modèle dans les expériences de mélange présentées au **chapitre 3**.

Par ailleurs, en mesurant des rapports isotopiques d'hafnium, Blichert-Toft et al. (1999) ont montré qu'il existe une composante de sédiments recyclés dans la source des basaltes hawaïens, ce qui prouve qu'ils ne peuvent pas provenir d'un réservoir purement primitif.

A travers cet exemple particulier, on peut retenir que la signature géochimique des OIB apporte un message complexe, qui aboutit généralement à des interprétations dynamiques variées et contradictoires. Dans tous les cas, l'hypothèse la plus simple d'un manteau divisé en deux parties, l'une superficielle, appauvrie en éléments incompatibles et source des MORB, l'autre profonde, primitive et source des OIB, n'est pas réaliste.

Certains auteurs (Zindler et al. 1982; White 1985; Allègre and Turcotte

1985; Zindler and Hart 1986) ont cherché à classer les différents types de basaltes suivant leurs caractéristiques géochimiques pour en déduire les pôles purs contenus dans le manteau, dont le mélange en proportions variées pourraient reconstituer l'ensemble du message géochimique en surface. Dans le paragraphe suivant, nous rappelons brièvement leurs différentes propositions.

### Classification des différentes sources des basaltes et modèles dynamiques sous-jacents

Zindler et al. (1982) envisagent ainsi un manteau à trois réservoirs : source des MORB, 'BSE' ('*Bulk silicate Earth*' ie manteau primitif) et un troisième composant de type de celui qui est échantillonné à S<sup>t</sup> Hélène, qui pourrait correspondre à de la croûte océanique recyclée. Ils définissent ainsi un 'plan mantellique' dans un espace à trois dimensions ( $^{143}\text{Nd}/^{144}\text{Nd} \times ^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr} \times ^{206}\text{Pb}/^{204}\text{Pb}$ ) : tous les échantillons présentés sont inclus dans ce plan.

Cependant, ce modèle semble trop simple pour permettre de comprendre et prédire les données géochimiques, car un certain nombre d'OIB (en particulier ceux provenant de Polynésie Française) ne sont pas contenus dans ce plan.

White (1985), ainsi qu'Allègre and Turcotte (1985) proposent donc une classification en cinq réservoirs distincts : la source des MORB, ainsi que quatre pôles purs : les OIB seraient alors issus de mélanges variables entre ces cinq composantes. Allègre and Turcotte (1985) prolongent l'observation en en donnant une interprétation dynamique : selon eux, les cinq pôles purs correspondent respectivement à : du manteau appauvri en éléments incompatibles, de la croûte continentale ancienne, de la croûte continentale jeune, de la lithosphère continentale, et du manteau primitif. Ils proposent un modèle de recyclage du matériel mantellique dans lequel l'origine des OIB se situe à l'interface entre un manteau inférieur quasiment primitif et un manteau supérieur appauvri. Cette interface correspond au lieu de stockage du matériel superficiel recyclé en profondeur (croûte, lithosphère), ce qui expliquerait donc la diversité des OIB. Autrement dit, Allègre and Turcotte (1985) plaident en faveur d'une convection mantellique à deux couches distinctes (manteau supérieur et manteau inférieur),



avec une quantité très limitée de flux de matière entre les deux (*cf* discussion dans la section intitulée *le manteau terrestre vu par les géophysiciens*).

Zindler and Hart (1986) quant à eux proposent une classification différente des différents pôles purs présents dans le manteau : DMM (*Depleted MORB Mantle ie* source des MORB), EM I et EM II (*Enriched Mantle, ie* manteau enrichi en éléments incompatibles), HIMU (*High  $\mu$  ie* grand rapport U/Pb), BSE (*Bulk Silicate Earth*). Ils envisagent également la présence d'une composante appelée PREMA (*PREvalent MANTle*), qui aurait des caractéristiques isotopiques fréquemment rencontrées à la surface de la Terre et pourrait correspondre à un mélange entre les quatre précédentes. Leur interprétation dynamique, bien que largement ouverte, laisse une place importante à un modèle alternatif de transport dans le manteau : la convection en une seule et même couche (*ie* flux de matière important entre le manteau supérieur et le manteau inférieur). Dans ce cas, les hétérogénéités de compositions chimique et isotopique pourraient s'expliquer soit par la présence de 'bulles' non-homogénéisées (les '*blobs*') au sein du manteau (voir aussi Davies 1981; Gurnis and Davies 1986b; Gurnis and Davies 1986a), soit par la présence de croûte océanique ancienne stockée à l'interface noyau/manteau, puis recyclée dans certains OIB (Hofmann and White 1982).

## Conclusion

De ces rappels sur les observations et contraintes géochimiques, on peut extraire deux points essentiels.

- Tout d'abord, il apparaît que si le message géochimique est complexe, il possède néanmoins quelques caractères fondamentaux : les MORB sont relativement homogènes d'un point de vue chimique et isotopique sur l'ensemble de la Terre. Cela signifie qu'ils sont issus d'un 'réservoir' qui est lui-même homogène, ou bien qu'ils proviennent de plusieurs 'pôles purs' dont le processus de mélange est extrêmement reproductible. Les OIB quant à eux sont très hétérogènes sur une large gamme de longueurs d'onde (*cf* discussion sur la longueur d'onde des hétérogénéités dans le

manteau), mais ceci n'est pas dû à un processus aléatoire : il semble se dégager quelques grandes classes d'OIB, ce qui laisse supposer la présence de plusieurs réservoirs distincts dans le manteau.

- Enfin, l'information géochimique seule est insuffisante pour contraindre la dynamique des échanges dans le manteau. Cette remarque est d'ailleurs assez peu surprenante, si l'on prend conscience de la nature des données en géochimie : celles-ci sont intégrées sur le temps (elles représentent l'histoire de l'échantillon dans son ensemble), sur l'espace (la fusion partielle qui génère le liquide basaltique tend à effacer les hétérogénéités à plus courte longueur d'onde que la taille caractéristique de la chambre magmatique), et enfin filtrées (la fusion partielle modifie, directement et indirectement, les compositions chimiques et isotopiques).

## Le manteau terrestre vu par les géophysiciens

### Un système en convection pleinement développée

A l'échelle de l'âge de la Terre, le manteau terrestre est un système fluide. La plupart du flux de chaleur évacué à la surface de la Terre est originaire du manteau (environ 36 TW sur 41 TW au total, 5 TW proviennent donc de la radioactivité crustale). Le flux de chaleur du manteau provient en majorité de la désintégration radioactive de l'uranium, du thorium et du potassium qu'il contient ( $\sim 65\%$ ), mais aussi du refroidissement séculaire de la Terre ( $\sim 25\%$  pour le refroidissement du manteau lui-même, et  $\sim 10\%$  pour le refroidissement du noyau) (Davies 1999a)<sup>2</sup>. On estime que le nombre de Rayleigh  $Ra$  du manteau est au moins de l'ordre de  $10^7$  (le nombre de Rayleigh correspond au rapport entre le temps caractéristique de diffusion de la chaleur et le temps caractéristique d'advection d'une particule fluide). Or, un transport de chaleur par convection apparaît lorsque le nombre de Rayleigh est supérieur ou égal à  $\sim 1000$ . On en déduit que le manteau est un système en convection pleinement développée.

---

<sup>2</sup>La proportion de refroidissement par rapport à la production radioactive ou nombre d'Urey peut varier significativement selon les auteurs

Lorsqu'on modélise la convection du manteau, c'est-à-dire qu'on résoud, avec des conditions aux limites appropriées, un système d'équations comprenant l'équation de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, on est généralement amené à utiliser les simplifications suivantes :

- les forces d'inertie sont négligeables devant les forces visqueuses, car le rapport  $Ra/Pr$  est nul dans le manteau (le nombre de Prandl  $Pr$ , qui correspond au rapport entre les temps caractéristiques de diffusion de la quantité de mouvement et de la chaleur, est infini) ;
- le matériel mantellique est un fluide de Boussinesq, c'est-à-dire que sa densité dépend faiblement de la température, et est indépendante de la pression dynamique. La densité peut dépendre de la profondeur dans certains modèles (de 3.2 en surface à 5.5 t m<sup>-3</sup> à l'interface noyau/manteau), mais les modifications apportées par cet effet n'ont pas beaucoup d'influence pour la convection.

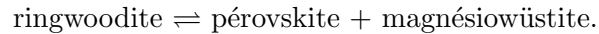
La tectonique des plaques est l'expression surfacique de la convection du manteau. En effet, la lithosphère s'identifie à la couche limite froide en surface, et les plaques en subduction aux instabilités froides descendantes.

De même, les volcans de points chauds sont dus à des instabilités chaudes montantes provenant d'une couche limite thermique chaude en profondeur. Le problème est de localiser cette couche limite thermique. En effet, il existe une discontinuité de vitesses sismiques à 660 km de profondeur entre manteau supérieur et manteau inférieur, et on peut se demander si cette interface correspond ou non à une barrière au flux de matière entre manteau supérieur et manteau inférieur. Dans l'affirmative, manteaux supérieur et inférieur convectent séparément, il y a une couche limite thermique à l'interface, et elle est la source des points chauds échantillonnés en surface. Dans le cas contraire, le matériel issu des points chauds provient de la seule couche limite thermique existante dans ce cas, à savoir celle qui se trouve à l'interface noyau/manteau.

Pourquoi envisage-t-on la présence d'une frontière imperméable entre manteau supérieur et manteau inférieur ? La raison la plus directe pourrait venir d'une différenciation chimique entre le manteau supérieur et le manteau inférieur

(plus riche en fer ou en silice). Cette hypothèse a ses défenseurs (?; Anderson 1982), mais elle semble en perte de vitesse actuellement.

Une autre explication est associée à la présence de la discontinuité de vitesses sismiques à 660 km de profondeur, qui est due à la transition de phase :



Or, cette transformation est endothermique lorsqu'on accroît la pression (pente de Clapeyron négative), ce qui implique qu'une hétérogénéité plus froide que le manteau subit cette transition de phase à plus grande profondeur. Comme l'assemblage pérovskite + magnésioiwüstite est plus dense que la ringwoodite, le manteau devient localement plus dense qu'une plaque lithosphérique froide en subduction (*slab*) immédiatement après 660 km. Suivant les écarts de densité entre manteau et slab, ce mécanisme pourrait empêcher le passage des slabs dans le manteau inférieur et rendre nul le flux de matière entre parties supérieure et inférieure.

Cette question a été (et reste encore!) beaucoup discutée, et nous allons tenter de synthétiser les différentes observations physiques qui pourraient permettre de trancher.

### Une ou deux couches convectives ?

On cherche à déterminer si le manteau convecte en une seule couche ou bien en deux couches distinctes, ce qui est à peu près équivalent à se demander si les slabs, traversent ou non la discontinuité sismique à 660 km de profondeur.

### La contrainte du géoïde

Le géoïde correspond à la surface equipotentielle du champ de gravité qui se confond avec le niveau moyen des océans. Si la Terre était rigide, la présence d'une zone plus dense que la moyenne au sein du manteau donnerait lieu à une élévation du géoïde en surface. Dans une Terre fluide, cette anomalie de densité entraîne une déformation de la surface qui modifie la réponse du géoïde par rapport au cas rigide, et peut même conduire à la présence de 'creux' du géoïde

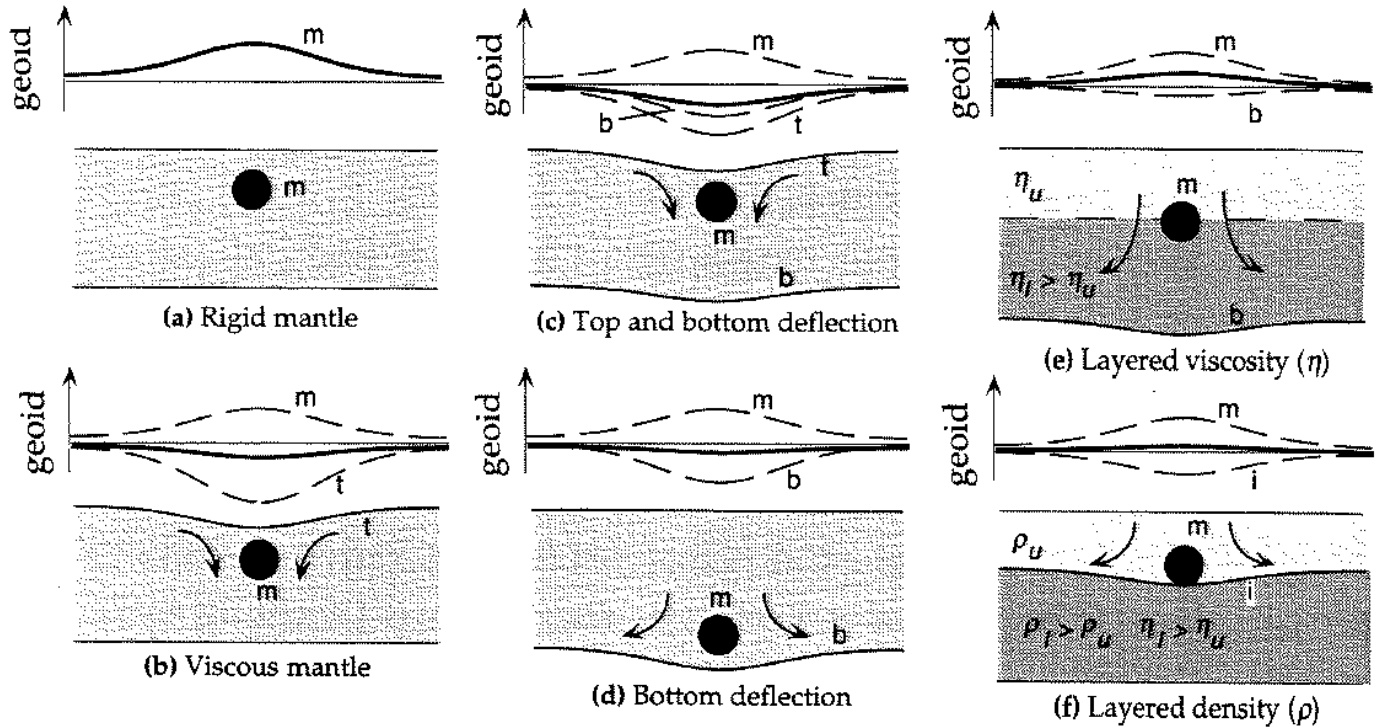


FIG. 3 – Réponse du géoïde à la présence d’une masse plus dense que la moyenne au sein du système dans un cas rigide (a) ou déformable avec ou sans discontinuité de viscosité et de densité. Les courbes tiretées correspondent respectivement aux contributions de la masse ( $m$ ), et des déflexions de la surface ( $t$ ), du fond ( $b$ ) et de la discontinuité intermédiaire ( $i$ ). La courbe pleine correspond à l’amplitude totale du géoïde. On remarque que la rhéologie du système a d’importantes conséquences sur le géoïde, dont le signal peut même être anti-corrélé avec la présence d’une anomalie de densité (cas (b) (c) et (d)). D’après Davies (1999b).

à l’aplomb d’une masse plus dense que la moyenne (Ricard et al. 1984; Richards and Hager 1984; Hager 1984)(*cf* **figure 3**).

La perturbation du géoïde due à la présence d’une masse hétérogène est maximale pour les longueurs d’onde de l’ordre de la profondeur de l’hétérogénéité elle-même. Autrement dit, les variations du géoïde à courte longueur d’onde reflètent la présence d’hétérogénéités superficielles, alors qu’à l’inverse, les hétérogénéités profondes sont marquées par des anomalies du géoïde à grande longueur d’onde.

Compte-tenu de ces informations, on peut espérer que l’analyse croisée du géoïde à grande longueur d’onde, de la topographie, de la présence de zones de

subduction *etc* ... va nous permettre d'obtenir des informations sur la dynamique du manteau.

Ricard et al. (1984), Richards and Hager (1984) et Hager (1984) ont étudié l'influence sur le géoïde et la topographie de paramètres tels que la présence d'une stratification visqueuse et/ou chimique<sup>3</sup> à 660 km. Ils montrent que les ondulations du géoïde à grande longueur d'onde requièrent la présence de zones anormalement denses à de grandes profondeurs (au-delà de 660 km) sous les zones de subduction. Ces anomalies de densité sont évidemment interprétés comme étant due à des slabs plus denses (car plus froids) que le manteau. D'autre part, l'hypothèse de stratification visqueuse du manteau (entre un et deux ordres de grandeur) est nécessaire pour expliquer l'amplitude des variations du géoïde et la corrélation positive entre 'bosses' du géoïde et zones de subduction. S'il n'est pas possible dans ces études de confirmer ou d'infirmer la présence d'une stratification chimique, Hager (1984) montre que ce dernier paramètre n'est pas nécessaire pour expliquer les observations.

Par la suite, diverses études ont permis de préciser les conclusions précédentes (Forte and Peltier 1987; Ricard et al. 1989; Ricard and Vigny 1989; Hager and Clayton 1989; Richards and Engebretson 1992; Ricard et al. 1993) : Richards and Engebretson (1992) et Ricard et al. (1993) prennent en compte l'histoire des vitesses de plaques depuis  $\sim 180$  Ma. Ils montrent qu'un modèle de convection à une couche avec un rapport moyen de viscosité d'environ 30 entre manteaux supérieur et inférieur explique de façon remarquable les ondulations du géoïde à grande longueur d'onde.

### Les récentes études tomographiques

La tomographie sismique permet, en inversant les temps d'arrivée de nombreux rais sismiques, de détecter la présence de zones hétérogènes où la vitesse de propagation des ondes est anormalement lente ou rapide par rapport à un modèle radial donné comme le modèle PREM (Dziewonski and Anderson 1981) par exemple. Ces anomalies de vitesse peuvent être interprétées en termes de

---

<sup>3</sup>une stratification chimique équivaut à une condition de flux de matière nul à l'interface

différences chimiques et/ou thermiques par rapport au milieu environnant. Elle peuvent donc nous renseigner sur la dynamique du manteau.

Par le passé, les résultats de nombreuses études tomographiques ont été controversés car ils présentaient assez peu de cohérence entre eux. Cette remarque ne semble plus vraie aujourd'hui. En effet, Grand et al. (1997) ont réalisé deux études indépendantes en inversant les temps de trajets d'ondes P (voir aussi van der Hilst et al. (1997)) et d'ondes S (Grand 1994). Sans être identiques, leurs résultats sont relativement bien corrélés. Ils mettent notamment en évidence la présence d'une large anomalie de vitesse rapides sous l'Amérique qui s'étend largement sous la frontière entre manteau supérieur et manteau inférieur (*cf* **figure 4**). Interprétée en termes d'hétérogénéité thermique, cette zone est plus froide que le manteau environnant et pourrait donc correspondre à l'ancienne plaque Farallon en subduction. Ceci est d'autant plus convaincant que la position de cette hétérogénéité coïncide avec la reconstruction de l'histoire de la subduction dans cette région durant les  $\sim 100$  derniers millions d'années (Ricard et al. 1993).

Ces résultats constituent un argument de poids en faveur d'un modèle de convection du manteau à une couche. Pourtant, des travaux plus récents semblent nuancer les conclusions précédentes. Sans remettre en question le fait que les slabs semblent traverser la discontinuité à 660 km, van der Hilst and Kárason (1999) montrent qu'il existe une zone à la base du manteau inférieur ( $\sim 1000$  km d'épaisseur) qui apparaît très hétérogène du point de vue des vitesses d'ondes sismiques (avec notamment la présence de réflecteurs). Ils estiment que ces hétérogénéités sont difficilement explicables en invoquant simplement des variations thermiques. Ils proposent que cette couche soit constituée de matériel primitif (avec un modèle revisité de convection à deux couches), bien qu'il n'y ai pas à ce jour d'argument minéralogique robuste qui permette de corroborer l'existence d'un tel modèle : cette couche profonde devrait être suffisamment dense pour ne pas être entraînée par la convection, et suffisamment proche de la composition minéralogique du manteau sus-jacent pour ne pas être détectée par les modèles à symétrie radiale tels que PREM.

Plusieurs études de convection numériques (Kellogg et al. 1999; Montague and Kellogg 2000) et expérimentales (Davaille 1999) ont testé l'existence d'une couche dense à la base du manteau inférieur.

Kellogg et al. (1999) estiment qu'une couche d'épaisseur très variable allant de 0 à  $\sim 1000$  km et intrinsèquement plus dense de 4% que le manteau sus-jacent serait dynamiquement stable (*cf* **figure 5**). Leur modèle pourrait permettre d'expliquer à la fois la signature géochimique des basaltes en surface et les résultats des études de tomographie.

A l'aide d'expériences de convection superposant deux couches de densité et viscosité différentes, Davaille (1999) aboutit qualitativement à des conclusions similaires, à savoir que ce modèle de convection semble réaliste pour la Terre. Pourtant, elle fournit une justification dynamique sensiblement différente par rapport aux travaux de Kellogg et al. (1999). Loin d'envisager un régime de convection bi-couche stationnaire, elle met en évidence l'existence d'un régime transitoire (appelé *régime de dômes*) dans lequel la couche inférieure se déstabiliserait lentement en formant de larges ondulations identiques à celles de la **figure 5**. Ce mode de convection est obtenu lorsque l'écart de densité intrinsèque entre les couches inférieure et supérieure est de l'ordre de 1%. Davaille (1999) conclut que la convection du manteau terrestre a pu évoluer d'un régime purement stratifié à l'origine, à un régime de dômes actuellement.

## La minéralogie

On a vu dans la section concernant la géochimie du manteau que le phénomène de fusion partielle contribue à modifier la composition chimique de la phase liquide par rapport au matériel source. Ceci est dû aux degrés de compatibilité variables des divers éléments constituant la source (*cf* **figure 1**).

Lorsqu'un slab s'enfonce dans le manteau, la minéralogie et la densité de la partie crustale (MORB) et du résidu réfractaire (harzburgite, lherzolite *etc* ...) vont chacune subir des modifications différentes par rapport au manteau péridotitique. Savoir si l'assemblage MORB+résidu réfractaire est suffisamment plus dense que le manteau péridotitique pour traverser la discontinuité sismique



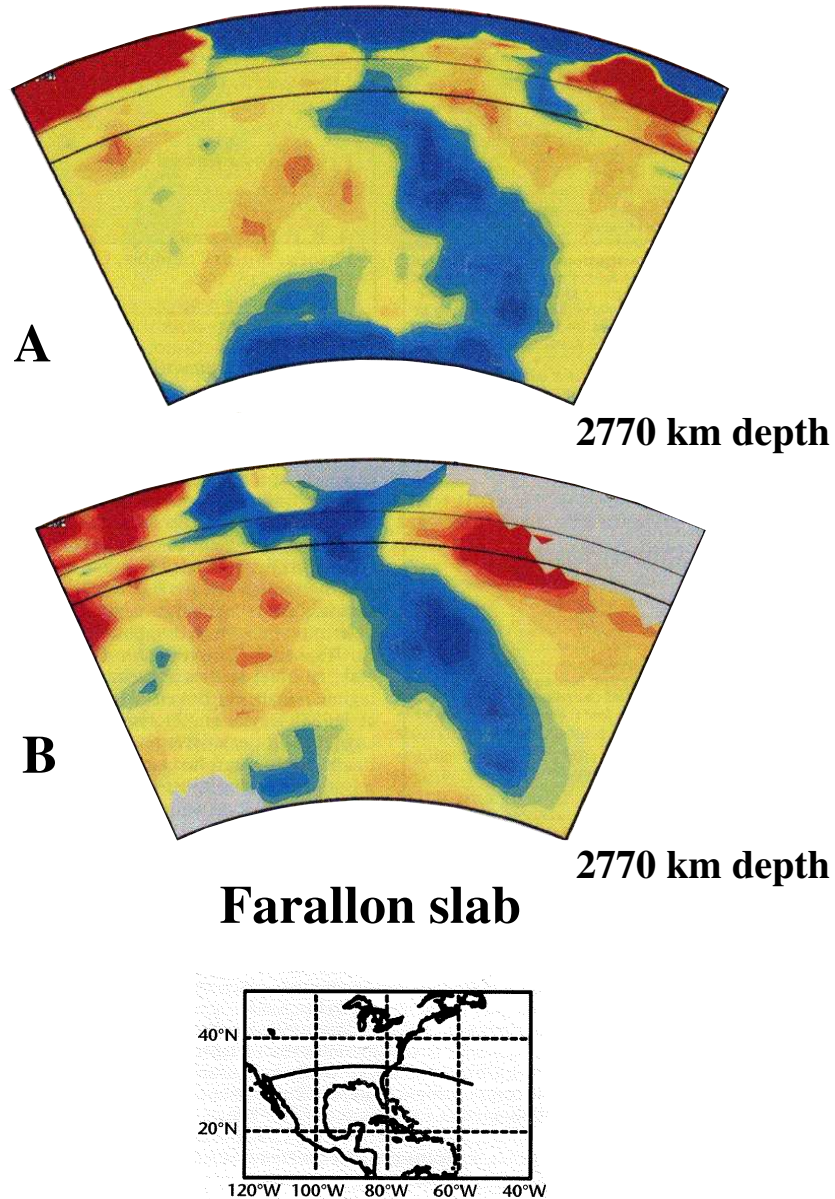


FIG. 4 – Anomalies de vitesse d’ondes P (a) et S (b) le long d’une coupe transversale sous l’Amérique. La couleur rouge indique des anomalies de vitesse lentes, c’est-à-dire qu’elles correspondent potentiellement à des zones plus chaudes que le manteau environnant. Le bleu représente la tendance inverse (plus rapide que la moyenne, et donc potentiellement plus froid). Les deux cartes identifient clairement une zone rapide qui traverse la majeure partie du manteau, et qui est interprétée comme la plaque Farallon en subduction. D’après Grand et al. (1997).

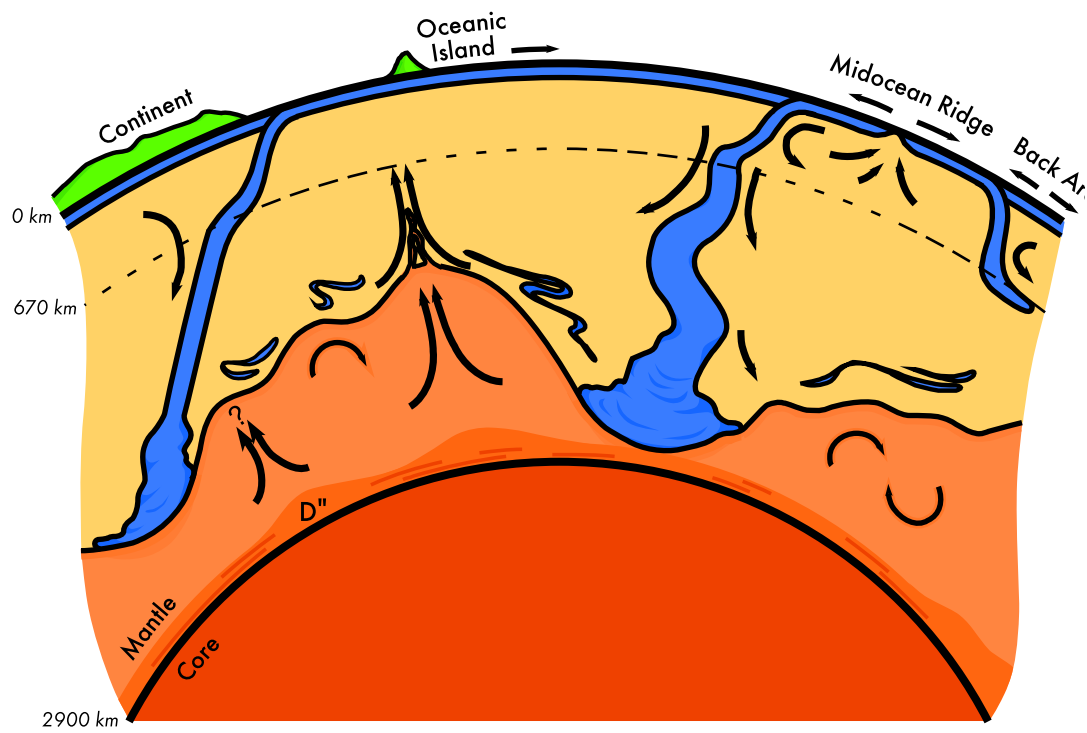
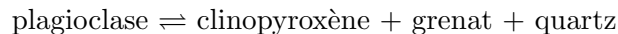


FIG. 5 – Vue schématique du modèle proposé par Kellogg et al. (1999). D'après Kellogg et al. (1999).

à 660 km a donné lieu à de nombreuses études (Ringwood and Irifune 1988; Irifune and Ringwood 1993; Kesson et al. 1994; Kesson et al. 1998).

Comparons les abondances en éléments majeurs (Si, Fe, Mg, Ca, Al, Na) dans un MORB et dans le manteau primitif. D’après le **tableau 1**, on vérifie bien que les MORB sont d’autant plus enrichis que les éléments sont incompatibles. De ce fait, les rapports molaires sont profondément modifiés par rapport à ceux du manteau primitif (*cf* **tableau 1**, partie inférieure). En particulier, les MORB présentent un excès important d’aluminium et de calcium par rapport à la quantité de magnésium. Ceci a d’importantes conséquences sur la pétrologie des MORB par rapport au manteau péridotitique. En effet, le manteau péridotitique, dont la composition en éléments majeurs est très proche de celle du manteau primitif, est composé de  $\sim 60\%$  d’olivines et  $\sim 40\%$  de pyroxènes à basse pression. Ceci correspond à une composition dite *pyrolitique*. Les MORB quant à eux sont principalement formés d’un mélange de pyroxènes et de plagioclases, dus à la forte teneur en aluminium, calcium et sodium. La quasi-absence d’olivines est due au fait que les rapports Fe/Si et Mg/Si sont très bas<sup>4</sup>. Le détail des transitions de phases lorsqu’on augmente la pression dans un MORB ou une péridotite dépasse largement le cadre de cette thèse. Cependant, on peut remarquer deux points essentiels.

- La transformation :



dans les  $\sim 100$  premiers kilomètres fait apparaître une quantité non-négligeable de quartz ( $\text{SiO}_2$ ) dans les MORB<sup>5</sup>. Or, la phase de haute pression de  $\text{SiO}_2$ , nommée *stishovite*, est l’une des phases les plus denses du manteau. On ne trouve quasiment pas de stishovite dans une péridotite.

- L’aluminium est majoritairement stocké dans les grenats, qui représentent environ 90% d’une éclogite dans la zone de transition, c’est-à-dire entre 400 et 700 km de profondeur. Or, en présence d’aluminium, l’équation d’état des grenats est très mal contrainte. Ceci signifie qu’il y a énormément

<sup>4</sup>Ils sont très inférieurs à 1, alors que la stoechiométrie de l’olivine requiert 2 Fe (ou Mg) pour un Si.

<sup>5</sup>Un MORB à haute pression s’appelle une éclogite.

d'incertitudes sur la densité.

En résumé, les élogites contiennent à la fois de la stishovite très dense, mais aussi des grenats plus légers dont on connaît mal la densité. Par conséquent, il est difficile de contraindre précisément l'écart de densité entre une élogite et une péridotite.

Il est important de remarquer qu'en toute rigueur, on devrait développer le même type de discussion pour la partie réfractaire des slabs (qui contiennent plus d'olivines et moins de pyroxènes que le manteau péridotitique).

|       | Manteau<br>Primitif | MORB | MORB/<br>Prim. |
|-------|---------------------|------|----------------|
| Na    | .108                | .864 | 8.00           |
| Al    | .796                | 2.99 | 3.76           |
| Ca    | .572                | 2.02 | 3.53           |
| Si    | 7.66                | 8.41 | 1.10           |
| Fe    | 1.05                | 1.45 | 1.38           |
| Mg    | 9.37                | 1.88 | 0.20           |
| Na/Mg | .012                | .057 | 4.750          |
| Al/Mg | .085                | 1.59 | 18.70          |
| Ca/Mg | .061                | 1.07 | 17.54          |
| Si/Mg | .817                | 4.47 | 5.471          |
| Fe/Mg | .112                | .772 | 6.893          |

TAB. 1 – Partie supérieure : abondances en mol kg<sup>-1</sup> pour le manteau primitif, les MORB, et rapport MORB/manteau primitif; partie inférieure : abondances normalisées par le magnésium. Ces valeurs sont calculées d'après Hofmann (1988). Les éléments sont classés par compatibilité croissante. Issus d'une fusion partielle, les MORB sont d'autant plus enrichis que les éléments sont incompatibles (exception faite de Fe et Si qui ont des comportements similaires). Dans les MORB, les abondances normalisées par le magnésium sont toujours supérieures à celles du manteau primitif car le magnésium est très compatible. Cela modifie de manière drastique les rapports molaires.

A partir d'expériences de haute pression, Ringwood and Irifune (1988) et Irifune and Ringwood (1993) estiment que :

- les élogites sont toujours plus denses (d'environ 0.1 g cm<sup>-3</sup>) qu'une péridotite, sauf entre 600 et 800 km de profondeur ;
- les harzburgites (composé réfractaire des slabs) sont quasiment toujours

moins denses qu'une péridotite ;

- un slab composé de 80% de harzburgite et 20% d'éclogite est toujours légèrement plus dense qu'une péridotite, sauf entre 650 et 700 km de profondeur. Cette zone pourrait être le lieu d'un stockage temporaire des slabs.

D'un point de vue dynamique, il semble que la zone de moindre densité des slabs décrite par Ringwood and Irifune (1988) soit trop peu épaisse pour constituer une barrière efficace à la pénétration des slabs dans le manteau inférieur.

Christensen and Hofmann (1994) ont réalisé des modèles numériques de convection en simulant la formation d'éclogites et de harzburgites, respectivement plus et moins denses que le manteau moyen à une profondeur donnée. Moyennant quelques simplifications sur le calcul des densités des différentes espèces, ils montrent qu'il est possible d'obtenir une certaine forme de stratification non pas dans la zone de transition, mais à la base du manteau inférieur. Dans cette simulation en effet, la partie éclogitique des slabs est suffisamment dense pour se séparer gravitationnellement de la partie harzburgitique : la première forme une couche stable à l'interface noyau/manteau, tandis que la deuxième est recyclée dans le flux de retour du matériel mantellique. Nous présentons dans le **chapitre 3** des modèles numériques de mélange qui simulent ce phénomène.

### Une couche et demie ?

Sans prendre en compte les différences minéralogiques entre MORB et péridotite discutées plus haut, certains auteurs ont introduit dans leur modèles numériques de convection des variations de densité dues aux transitions de phase d'une péridotite. Ils ont ainsi testé l'effet de la transition de phase endothermique à 660 km de profondeur (*cf* discussion plus haut) sur la dynamique du manteau (Machetel and Weber 1991; Solheim and Peltier 1994; Yuen et al. 1994; Tackley et al. 1994). Ce type de modèle de convection est dit *modèle à une couche et demie* car il génère à la fois :

- un stockage temporaire des slabs dans la zone de transition, lorsque ceux-

- ci sont moins denses que le manteau ;
- des ‘avalanches’ de matériel lithosphérique dans le manteau inférieur, lorsque l’accumulation de slabs entre manteau supérieur et manteau inférieur devient gravitationnellement instable.

Il est difficile d’évaluer le degré de réalisme d’un tel modèle. On peut néanmoins émettre des doutes sur la pertinence de ces simulations qui ont eu tendance à sur-estimer la pente de Clapeyron, sous-estimer l’expansivité thermique, et à simplifier la minéralogie (en particulier toutes les transitions des pyroxènes et des grenats vers des phases de plus hautes pressions sont exothermiques (?). En outre, Bunge et al. (1997) ont montré que le flux de masse à travers l’interface à 660 km moyenné sur plusieurs épisodes d’avalanches est identique à celui obtenu dans le cadre d’un modèle sans transition de phase. Par conséquent, d’un point de vue géochimique, l’effet ‘transition de phase’ ne crée pas deux réservoirs distincts dans le manteau.

## Conclusion

La quasi-majorité des observations et contraintes issues de la géophysique semble plaider en faveur d’une convection globale du manteau (ou du moins suppose l’existence de flux de matière importants entre manteau sup. et manteau inf.), même si on a vu que les modèles proposés sont beaucoup plus nuancés qu’une dichotomie grossière du type convection à deux couches/convection à une couche. En effet, il est possible d’envisager des régimes de convection transitoires, avec la déstabilisation lente d’une couche dense à la base du manteau (Davaille 1999), ou le stockage temporaire des slabs dans la zone de transition (Ringwood and Irifune 1988; Machetel and Weber 1991).

## Compléments sur la longueur d’onde des hétérogénéités géochimiques dans le manteau

Plusieurs études (Dupré and Allègre 1983; Hart 1984; Zindler and Hart 1986; Gurnis 1986b) ont permis de préciser la gamme de longueurs d’ondes des varia-

tions isotopiques des basaltes à la surface de la Terre. A partir de ces travaux, on a pu en déduire certaines contraintes sur le spectre d'hétérogénéités dans le manteau (Zindler and Hart 1986; Gurnis 1986b; Kenyon 1990).

Il ressort des études de données sur les basaltes que les hétérogénéités isotopiques existent sur une très large gamme de longueurs d'onde, allant de 1 à 10 000 km. L'exemple le plus frappant d'hétérogénéité à très grande longueur d'onde est sans conteste l'anomalie de Dupal, qui est caractérisée par des rapports isotopiques de strontium et de plomb anormaux par rapport à une référence donnée. Cette anomalie est présente dans les MORB comme dans les OIB, dans une large zone centrée sur la latitude 30°S qui s'étend de l'Atlantique Sud au Pacifique Ouest à travers l'Océan Indien.

On peut également s'intéresser aux relations entre longueur d'onde et amplitude des hétérogénéités. Zindler and Hart (1986) ont montré d'une part que de faibles amplitudes<sup>6</sup> d'hétérogénéités sont présentes sur toute la gamme de longueurs d'ondes. D'autre part, ils constatent que pour une longueur d'onde donnée, l'amplitude maximale observée est d'autant plus importante que la longueur d'onde est grande.

Le très large spectre de variations isotopiques dans les basaltes laisse supposer qu'il en va de même dans le manteau (Zindler and Hart 1986; Gurnis 1986b). Pourtant, on peut se demander quel rôle exact jouent les processus complexes d'extraction du magma. En effet, on peut raisonnablement supposer qu'ils agissent comme un filtre qui modifie les amplitudes et le contenu fréquentiel des sources mantelliques lors de la fabrication des basaltes. Kenyon (1990) a tenté d'analyser les différents processus susceptibles de modifier la distribution des hétérogénéités. Elle isole trois phénomènes distincts : dispersion due à l'écoulement du fluide magmatique en milieu poreux, échanges d'éléments entre la phase fluide et la phase solide, et enfin brassage convectif au sein de la chambre magmatique. Elle montre d'une part que les deux premiers processus sont assez peu efficaces pour mélanger latéralement, mais sont responsables d'atténuations sensibles des variations temporelles de la source mantellique.

---

<sup>6</sup>la notion de faible ou forte amplitude est exprimée en fonction des variations maximales observées sur l'ensemble des basaltes

D'autre part, elle met en évidence le rôle de la convection dans la chambre magmatique : à partir d'une source de type *bruit blanc*, c'est-à-dire un signal où toutes les fréquences sont présentes avec la même amplitude, le processus de convection tend à atténuer très fortement les courtes longueurs d'onde, et à laisser les grandes longueurs d'ondes inchangées. L'échelle de coupure coïncide avec la taille caractéristique de la chambre magmatique. En confrontant cette expérience avec des données de variations isotopiques dans les basaltes, on peut vérifier d'une part que la distribution des hétérogénéités est cohérente avec une source de type bruit blanc, et d'autre part on peut tenter d'en déduire la taille caractéristique de la chambre magmatique prévue par ce modèle. Kenyon (1990) a repris les calculs de transformée de Fourier effectués par Gurnis (1986b) sur des basaltes de la dorsale médio-atlantique, et elle trouve un accord raisonnable avec son modèle en supposant que la taille caractéristique de la chambre magmatique est de l'ordre de 1000 km (*cf* **figure 6**). Cette valeur n'est bien évidemment pas géologiquement raisonnable. Elle en conclut que l'allure du spectre des variations isotopiques de ces basaltes est probablement déjà contenue dans la source mantellique.



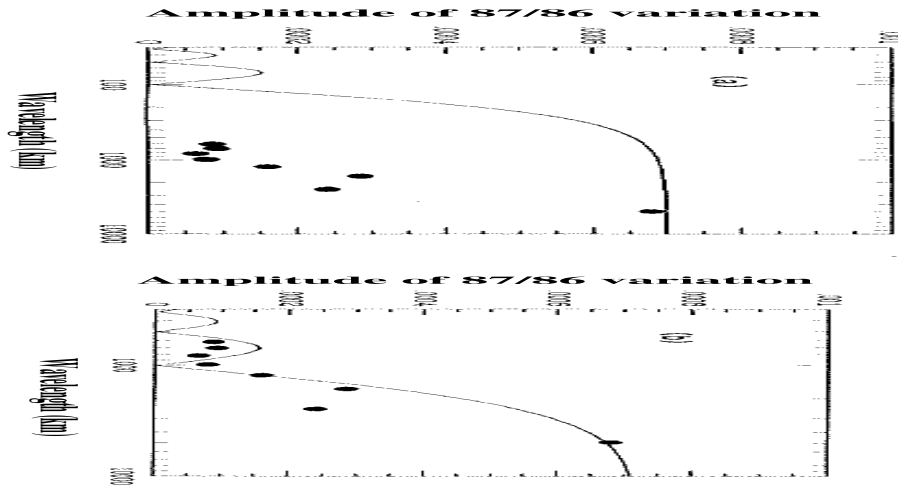


FIG. 6 – Amplitude des variations du rapport isotopique  $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$  après un brassage convectif efficace au sein d’une chambre magmatique de taille caractéristique 100 km (a) ou 1000 km (b). Les points correspondent aux données de Gurnis (1986b) pour les basaltes de la dorsale médio-atlantique. L’accord entre modèle et données semble acceptable dans le cas (b). D’après Kenyon (1990).

En conclusion, il ressort que le manteau contient très vraisemblablement un très large spectre d’hétérogénéités dont les amplitudes peuvent être très importantes au moins pour les grandes longueurs d’onde.

## Synthèse

Nous avons vu que les observations et contraintes issues de la géochimie et de la géophysique conduisent à des interprétations extrêmement variées de la dynamique du manteau et des échanges entre manteau et surface. La **figure 7** résume les principaux modèles qui en émergent.

Le modèle proposé par Allègre and Turcotte (1985) est en complète contradiction avec les contraintes du géoïde et de la tomographie. Il n’apparaît pas réaliste. Les autres modèles semblent plus envisageables pour le manteau terrestre. Pourtant, aucun n’explique réellement comment il est possible, au sein du système convectif mantellique, d’obtenir d’une part des MORB relativement homogènes, et d’autre part des OIB dont les caractéristiques géochimiques sont à la fois très variables et très spécifiques.

Dans cette thèse, nous cherchons à savoir s'il est possible d'expliquer les différents régimes de mélange du manteau terrestre (zones homogènes et zones hétérogènes) avec un modèle de convection du manteau à une seule couche, cette dernière hypothèse nous apparaissant suffisamment robuste en l'état actuel des connaissances.

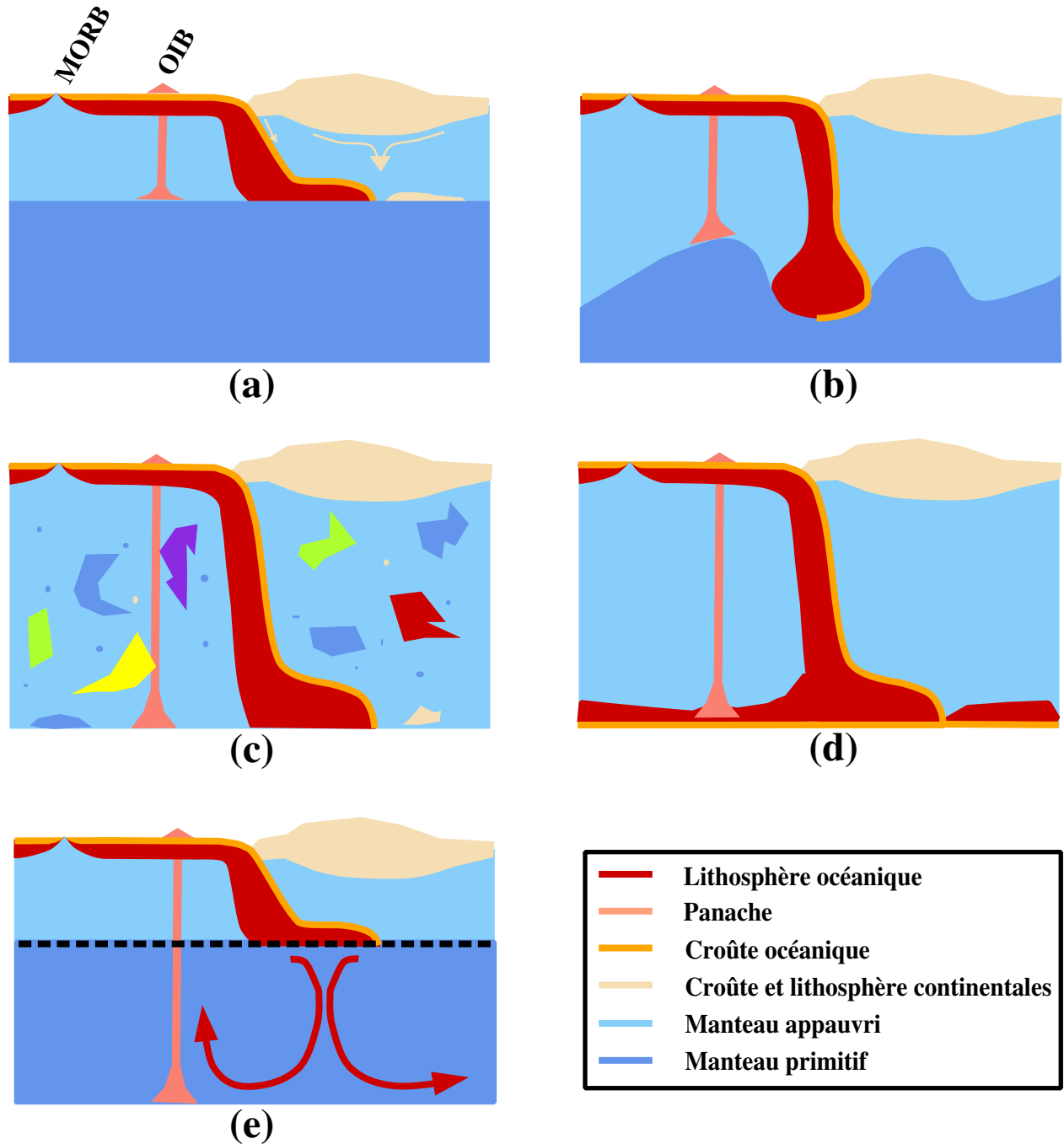


FIG. 7 – Synthèse des principaux modèles dynamiques du manteau. (a) convection à deux couches avec une interface à la limite entre manteau sup. et manteau inf., (Allègre and Turcotte 1985); (b) convection à deux couches avec une interface au milieu du manteau inférieur, (Kellogg et al. 1999); (c) convection à une couche avec des blobs hétérogènes, (Davies 1981); (d) convection à une couche avec ségrégation de croûte océanique à l'interface noyau/manteau, (Christensen and Hofmann 1994); (e) convection à une couche et demie, (Machetel and Weber 1991).

# Chapitre 1

## Chaos lagrangien – Approche physique du mélange

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la physique du mélange dans un cadre approprié à l'étude du manteau terrestre. Dans une première partie, nous résumerons les principaux résultats des précédentes études de mélange appliquées au manteau terrestre. A l'aide de résultats fondamentaux de la théorie des systèmes dynamiques, nous tenterons ensuite de comprendre les mécanismes de mélange.

### 1.1 Bibliographie des principales études de mélange dans le manteau terrestre

#### 1.1.1 Modèles bidimensionnels dépendants du temps : plusieurs théories s'affrontent

Les premières études de mélange dans le manteau terrestre datent de la fin des années soixante dix, lorsque l'observation géochimique devient plus précise, et que l'on met en évidence le fait que la diffusion moléculaire est inefficace pour mélanger les hétérogénéités à grande échelle dans le manteau (Hoffmann and Hart 1978). McKenzie (1979) détaille formellement le mécanisme de déformation dans un écoulement fluide, et conclut que la convection du manteau

est capable d'étirer et brasser des hétérogénéités de manière très efficace. Plus tard, Olson et al. (1984) simulent la convection du manteau au moyen d'une cellule de convection bidimensionnelle stationnaire. Ils montrent que le mélange y est *laminaire*, c'est-à-dire très peu efficace. Quel que soit le type de convection envisagé (une ou deux couches), ils prédisent un temps caractéristique de mélange dans le manteau de l'ordre de l'âge de la Terre. Ceci implique que le manteau terrestre est très peu mélangé : la question de l'homogénéité des MORB à l'échelle de la Terre reste donc entière.

Hoffman and McKenzie (1985) prolongent l'étude théorique de McKenzie (1979) avec un système en convection thermique bidimensionnel dépendant du temps (*cf* **figure 1.1**). Avec plusieurs modes de chauffage différents (chauffage par l'intérieur, ou bien chauffage pour moitié par l'intérieur et pour moitié par le bas), leurs résultats indiquent que toute hétérogénéité doit s'effacer au bout d'un temps variant de 500 millions à 1 milliard d'années. Par conséquent, ils estiment que la seule manière d'expliquer la présence de réservoirs générateurs d'OIB est de supposer que la convection du manteau est composée de deux couches distinctes, comme dans le modèle de Jacobsen and Wasserburg (1979).

Gurnis and Davies (1986b) utilisent un modèle bidimensionnel de convection thermique chauffé en volume. De plus, ils imposent des vitesses horizontales à la surface du système qui simulent celles de plaques lithosphériques rigides. Ces vitesses dépendent du temps et définissent des dorsales et des zones de subduction là où les plaques divergent ou convergent les unes par rapport aux autres. Ils y introduisent des traceurs passifs (c'est-à-dire qui ont les mêmes propriétés physiques que leur environnement), qui sont extraits sous les dorsales et réinjectés dans les zones de subduction. Dans ces conditions, des groupes de traceurs persistent au sein du système en convection pleinement développée. Ils aboutissent donc à des conclusions opposées à celles de Hoffman and McKenzie (1985) : l'hypothèse de convection *globale* du manteau est viable, dans la mesure où l'écoulement produit des zones de moindre mélange, qui pourraient être échantillonnées dans les OIB. Ces zones sont réparties dans l'ensemble du système, et ne sont donc pas particulièrement associées au manteau inférieur.

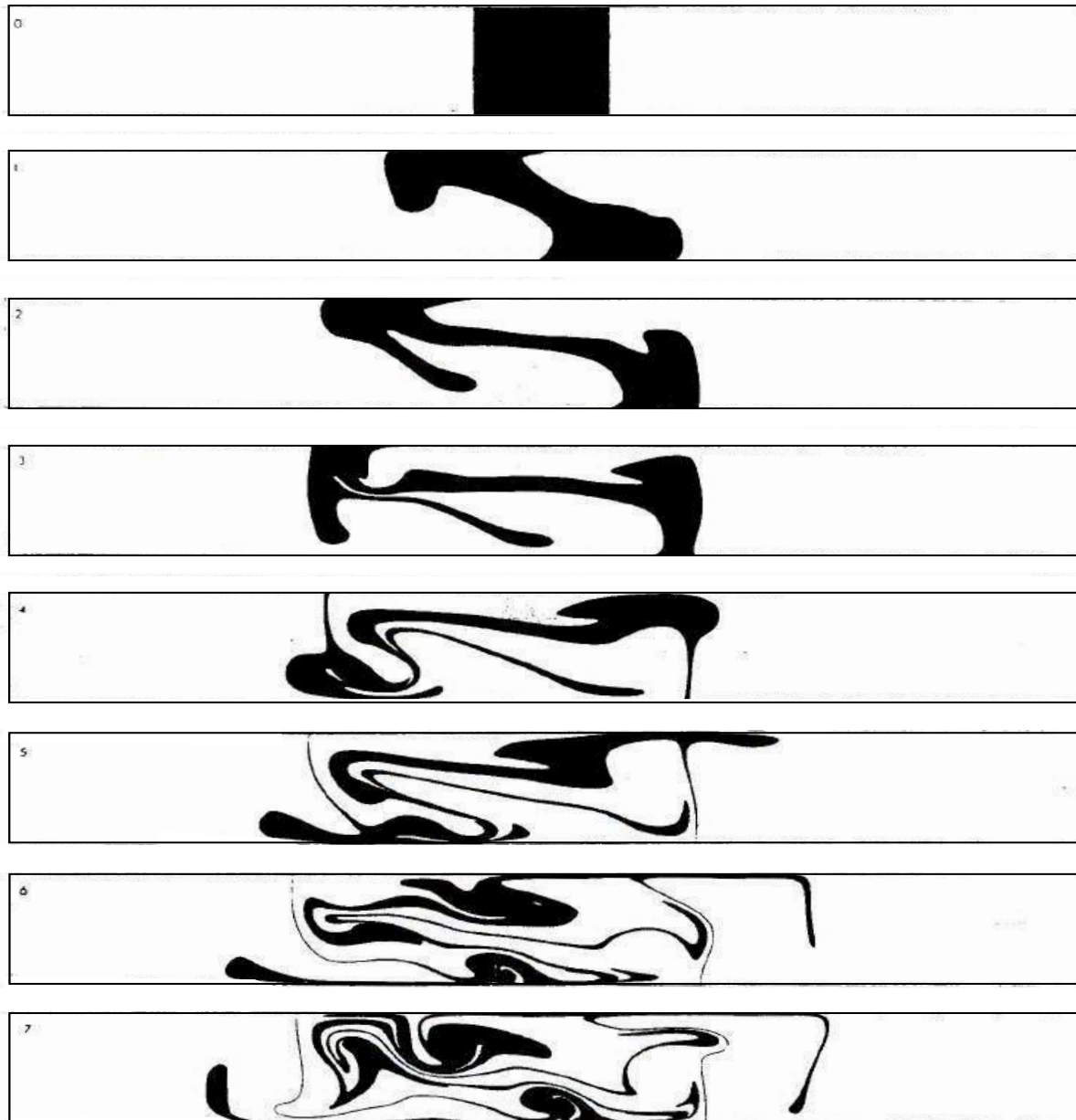


FIG. 1.1 – Exemple de mélange d'une hétérogénéité dans un système en convection thermique. D'après Hoffman and McKenzie (1985).

Ces résultats corroborent le modèle de *blobs* proposé par Davies (1979). Gurnis (1986c) explique en partie les divergences de ces résultats par rapport à ceux de Hoffman and McKenzie (1985) de la manière suivante : il remarque que le temps de mélange d'une hétérogénéité dépend de sa longueur d'onde initiale. Plus la longueur d'onde est petite, plus le temps nécessaire à son homogénéisation est long (voir aussi Olson et al. (1984)). Or, dans leurs expériences numériques, Hoffman and McKenzie (1985) ont choisi des hétérogénéités de la taille d'une cellule de convection (*cf* **figure 1.1**). A l'opposé, l'introduction de traceurs au niveau des zones de subduction dans le modèle de Gurnis and Davies (1986b) génère des hétérogénéités avec des longueurs d'onde plus courtes que celles de l'écoulement : elles auront un comportement différent et seront plus difficilement homogénéisées.

Christensen (1989) propose plusieurs modèles bidimensionnels différents, dont la géométrie et la dépendance en temps varient. Certains sont purement cinématiques, générés par des conditions aux limites imposées, d'autres sont dynamiquement gouvernés par un écart de température fixé entre la base et la surface du système. Il trouve que les propriétés de mélange d'un écoulement dépendent énormément des caractéristiques choisies. Parmi les différents modèles cinématiques, il distingue trois grands régimes de mélange : l'un conduit à une homogénéisation rapide et totale du système, le deuxième mélange très peu, tandis que le troisième correspond à un régime intermédiaire, dans lequel il existe des zones de moindre mélange au sein d'un ensemble globalement homogène. Ces conclusions auraient pu aider à concilier les résultats contradictoires des études précédentes. Cependant, les différents modèles de convection dynamiques de Christensen (1989), sensés représenter la convection du manteau de manière plus réaliste que leurs équivalents cinématiques, conduisent tous à une homogénéisation rapide par rapport à l'âge de la Terre. Le problème de la signature isotopique des OIB à la fois variable et très spécifique à chaque point chaud reste donc toujours inexpliqué.

Parmi les principales études bidimensionnelles de mélange dans le manteau terrestre, on doit également citer les travaux de Kellogg and Turcotte (1990).

Ces derniers soulignent le fait que la convection du manteau est instationnaire, et se proposent d'étudier les propriétés de mélange d'un écoulement à la fois chaotique en temps et en espace. Leur écoulement obéit aux équations de Lorenz, développées en séries de Fourier tronquées à l'ordre trois (Lorenz 1963; Bergé et al. 1984; Turcotte 1992). Ils trouvent que le mélange est très efficace, avec des caractéristiques qui pourraient correspondre aux observations géologiques (effet de *gâteau marbré*, comme cela a déjà été souligné par Allègre and Turcotte (1986)). Malheureusement, ce modèle ne peut pas représenter la convection du manteau<sup>1</sup>. Compte-tenu des observations de Christensen (1989) selon lesquelles les propriétés de mélange dépendent fortement de la structure fine de l'écoulement, on comprend bien qu'on puisse difficilement prolonger ces résultats pour la Terre.

### 1.1.2 Modèles tridimensionnels : la convection du manteau serait-elle inapte à mélanger de manière efficace ?

Face aux résultats contradictoires des études bidimensionnelles et aux problèmes toujours non résolus, certains ont tenté de savoir s'il est réellement possible d'extrapoler les propriétés de mélange d'un système bidimensionnel à celles d'un fluide réel tridimensionnel.

Contrairement aux affirmations de Hoffman and McKenzie (1985) selon lesquelles un système tridimensionnel devrait mélanger de manière plus efficace que son équivalent bidimensionnel, Davies (1990a) reste plus prudent, mais émet l'hypothèse qu'il ne saurait y avoir de lien direct entre les deux. En effet, dans un système à deux dimensions, toute instabilité montante ou descendante (type panache, plaque lithosphérique en subduction, ...) possède une structure linéaire implicite dans la 'troisième direction' (*cf figure 1.2*). Ceci a d'importantes conséquences sur les propriétés de mélange, dans la mesure où cette structure entraîne une rupture profonde de l'écoulement et donc une modification majeure des trajectoires. Si les anciennes plaques lithosphériques en

---

<sup>1</sup>Lorsque le nombre de Prandtl devient infini comme dans la Terre, le modèle de Lorenz, tel qu'il est développé plus haut, ne conduit plus à un écoulement chaotique (voir aussi Stewart and Turcotte (1989)).



subduction possèdent bien cette structure en feuille dans le manteau terrestre, les panaches quant à eux admettent plutôt une symétrie cylindrique, et ont une moindre influence sur l'écoulement. Cet effet n'est pas modélisable à deux dimensions.

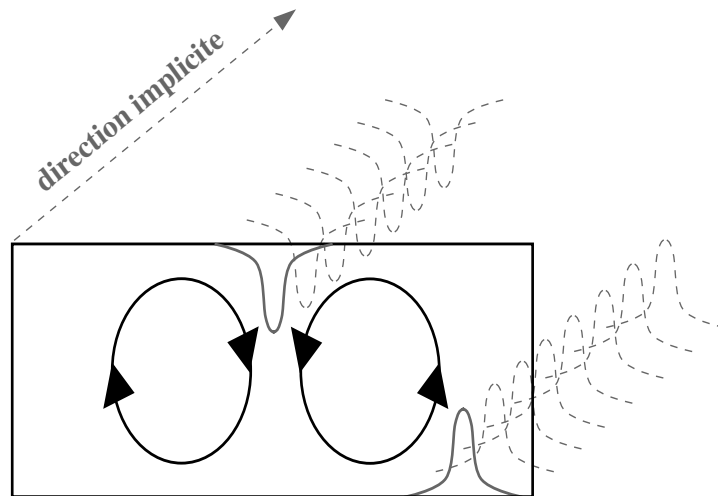


FIG. 1.2 – Dans toute simulation bidimensionnelle, toute instabilité montante ou descendante possède une structure implicite en feuille dans la troisième dimension.

Schmalzl et al. (1995) ont réalisé une expérience numérique de convection thermique tridimensionnelle stationnaire dans laquelle ils ont suivi l'évolution de traceurs passifs. Ils observent un comportement parfaitement régulier des trajectoires, qui s'enroulent sur la surface de tores emboîtés les uns dans les autres (*cf* **figure 1.3**). Chaque particule paraît donc piégée sur un tore donné, et il n'y a pas de mélange possible. Schmalzl et al. (1995) émettent l'hypothèse que l'absence de comportement chaotique est due au fait que l'écoulement est stationnaire. Ils réalisent alors une expérience identique (Schmalzl et al. 1996), en y ajoutant une dépendance temporelle. Ils trouvent que cet écoulement est capable de générer des trajectoires chaotiques, mais qu'il est beaucoup moins efficace qu'un système équivalent bidimensionnel instationnaire pour effacer une

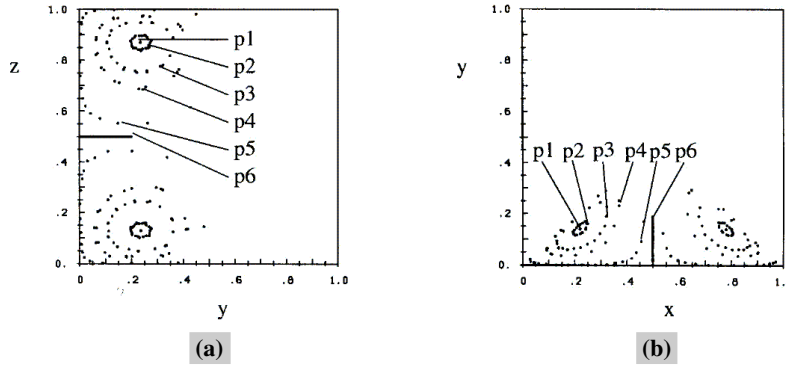


FIG. 1.3 – Intersection entre les trajectoires de 6 traceurs d’une part, et le plan yz (a), ou xy (b). Les deux groupes de cercles concentriques correspondent à la section de tores emboîtés les uns dans les autres. D’après Schmalzl et al. (1995).

hétérogénéité (*cf* **figure 1.4**). Ceci semble correspondre à l’hypothèse formulée par Davies (1990a). En faisant varier le nombre de Rayleigh de  $0.8 \cdot 10^6$  à  $3 \cdot 10^6$  et en supposant que le manteau convecte en une seule couche <sup>2</sup>, Schmalzl et al. (1995) trouvent un temps de mélange moyen dans le manteau compris entre 25 Ga et 3 Ga. Si le manteau convecte en deux couches distinctes, ces temps varient de 1.5 Ga à 0.2 Ga. Ils en concluent que la convection du manteau (à une ou deux couches) est capable de préserver des hétérogénéités, mais que malheureusement ces résultats ne permettent pas de contraindre la nature de la convection.

## 1.2 Rappels de mécanique classique – Physique du mélange

Nous rappelons ici les résultats fondamentaux de la mécanique classique qui permettent de comprendre les mécanismes du mélange.

La physique du chaos et du mélange est largement abordée dans la litté-

<sup>2</sup>cette plage de valeurs sous-estime quelque peu le nombre de Rayleigh du manteau terrestre qui est plutôt de l’ordre de  $10^7$

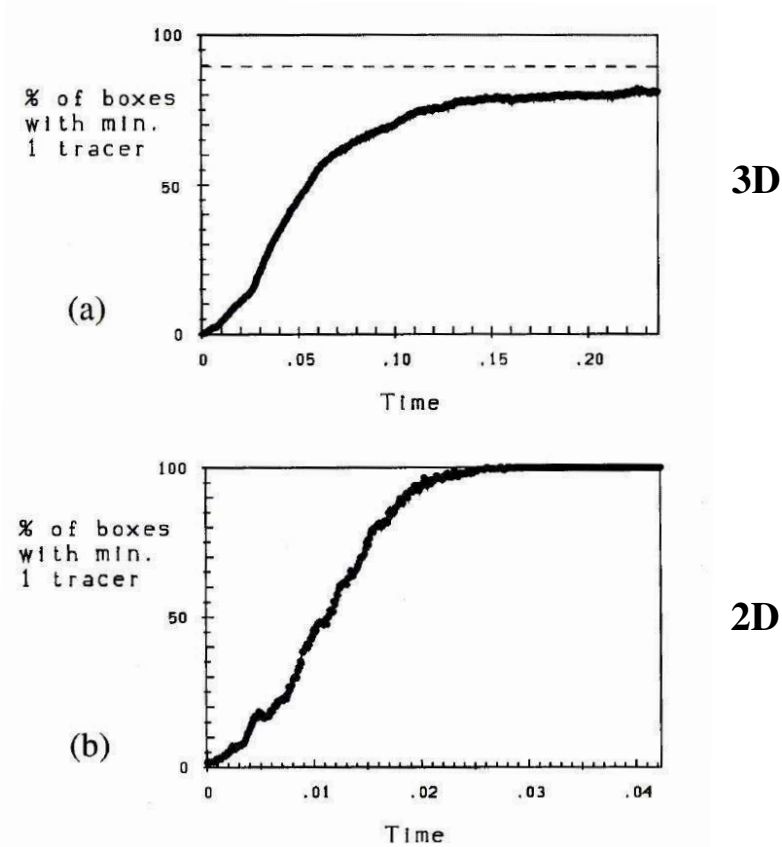


FIG. 1.4 – Le système a été découpé suivant une grille de  $40 \times 40 \times 10$  cellules-unité. On a représenté le nombre de cellules contenant au moins un traceur pour l'expérience 3D dépendant du temps (a), et pour l'expérience 2D dépendant du temps (b). Le temps est adimensionné par un temps caractéristique de chaque écoulement. Alors qu'après 0.02 unités de temps caractéristique les traceurs sont répartis dans toutes les cellules dans le cas bidimensionnel, à trois dimensions seulement 10% des cellules sont occupées. De plus, le nombre de cellules contenant au moins un traceur atteint un palier de saturation à trois dimensions, ce qui caractérise un état de mélange incomplet. D'après Schmalzl et al. (1996).

rature. Les résultats énoncés ci-dessous sont tirés des ouvrages de Bergé et al. (1984), Lichtenberg and Lieberman (1983), Ottino (1989), Ott (1993), Reichl (1992), Zaslavsky et al. (1991) et de la thèse de Raynal (1992), auxquels le lecteur pourra se reporter pour plus de détails.

### 1.2.1 Cadre de l'étude

Nous avons vu dans le chapitre introductif qu'à l'échelle de l'âge de la Terre, le manteau terrestre est un système fluide en convection pleinement développée, dans lequel les forces d'inertie (terme  $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$  dans l'équation de Navier-Stokes) sont négligeables devant les forces visqueuses (terme  $\mu \Delta \vec{v}$ ). On en déduit que l'écoulement n'est pas *turbulent* au sens de Kolmogorov, c'est-à-dire que l'énergie n'y est pas transportée par cascades successives des grandes échelles vers les plus fines. Au contraire, un écoulement dont les forces visqueuses sont prédominantes est dit *laminaire*. Par conséquent, nous ne nous intéresserons dans la suite qu'au mélange en écoulement laminaire, qui est généralement nommé *chaos lagrangien* ou *turbulence lagrangienne* dans la littérature.

Il est important de remarquer que lorsqu'on place une hétérogénéité au sein d'un système fluide, deux mécanismes très différents peuvent concourir à son homogénéisation : il s'agit d'une part du transport par *diffusion moléculaire*, et d'autre part du transport par *advection fluide*. La diffusion moléculaire est un processus non déterministe, caractérisé par un coefficient  $D$  (dimension  $L^2T^{-1}$ ), qui dépend des propriétés du fluide considéré. Elle agit sur des échelles caractéristiques  $H = \sqrt{Dt}$  (où  $t$  est un temps), et pour des temps caractéristiques  $\tau = l^2/D$  (où  $l$  est une longueur). L'advection fluide, quant à elle, est déterministe (si on connaît exactement la position d'une particule fluide à l'instant  $t$ , on peut déterminer sa position à  $t + \delta t$ ), et agit sur des échelles de longueur et de temps intrinsèquement liées au champ de vitesse. En général, les échelles de longueur diffusive et advective sont très différentes, et les deux processus agissent de manière complémentaire : par exemple l'advection, en étirant et brassant, diminue la longueur d'onde des hétérogénéités jusqu'au seuil critique où la diffusion devient efficace. On peut également rencontrer des cas où la diffusion agit directement, avant que l'advection n'ait fait effet.

**Rq:** En mécanique des fluides, on introduit un nombre sans dimension, le nombre de Peclet ( $Pe$ ), qui est défini par le rapport du temps caractéristique diffusif sur le temps caractéristique advectif.

Dans le manteau terrestre, le coefficient de diffusion moléculaire en phase

solide vaut environ  $10^{-13} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  (Hofmann and Hart 1978). Ceci signifie que pendant un temps équivalent à l'âge de la Terre, la diffusion moléculaire n'a d'effet sensible que sur les hétérogénéités dont la taille caractéristique est inférieure ou égale au mètre. Si l'on suppose que la vitesse moyenne dans le manteau est de l'ordre de  $1 \text{ mm an}^{-1}$ , et que la taille du système vaut  $10\,000 \text{ km}$ , on trouve que le nombre de Peclet du manteau est de l'ordre de  $10^{14}$ . On négligera donc la diffusion moléculaire dans le problème du mélange dans le manteau.

**Rq:** *Au sens strict du terme, le mélange n'est parfait que lorsque la diffusion moléculaire a agi. La Terre est donc beaucoup trop jeune pour que le manteau soit homogène. Par abus de langage, on parle de système homogène lorsque l'advection fluide a été suffisamment efficace pour réduire la plupart des longueurs d'onde des hétérogénéités initiales à une taille inférieure à celle que l'on peut échantillonner. En géologie par exemple, le processus de fusion partielle dans les chambres magmatiques tend à faire disparaître toute hétérogénéité dont la taille est inférieure à celle de la chambre magmatique elle-même. On pourra donc considérer que le seuil d'homogénéité est atteint lorsque les hétérogénéités ont une taille égale (ou inférieure) à celle de la taille caractéristique d'une chambre magmatique ( $\sim 10^2 \text{ km}$ ).*

Déterminer les propriétés de mélange d'un système donné revient à étudier le comportement d'hétérogénéités au sein du fluide. Dans le cadre de ce travail, ces hétérogénéités correspondent à des portions de matière chimiquement et/ou isotopiquement distinctes du manteau moyen environnant.

Une hétérogénéité quelconque peut être représentée par une fonction concentration  $C(\vec{x}, t)$ , où  $\vec{x}$  représente la position et  $t$  le temps. Cette concentration détermine la quantité de matière 'anormale' par unité de volume, et elle est définie sur l'ensemble du domaine fluide. Elle est régie par l'équation d'évolution :

$$\frac{DC}{Dt} = 0, \quad (1.1)$$

lorsque l'on considère que le transport par diffusion est négligeable devant le transport par advection (nombre de Peclet infini). Cette d'approche est qualifiée d'*eulérienne*, ce qui signifie qu'on ne s'intéresse pas au comportement particulier de chaque particule de matière 'anormale', mais plutôt à l'évolution

de l'ensemble de l'hétérogénéité dans un référentiel immobile.

A l'opposé de la description eulérienne, on peut également étudier les propriétés de mélange d'un système en y répartissant des particules sensées tracer l'hétérogénéité de départ, et en déterminant leur position au cours du temps. Cette approche, est dite *lagrangienne*. Dans ce cas, pour chaque particule considérée, on doit résoudre les équations qui régissent sa trajectoire :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(\vec{r}, t), \quad (1.2)$$

où  $\vec{r}$  représente la position d'une particule, et  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  le champ de vitesse *a priori* au sein du fluide.

**Rq:** *Cette représentation implique que la diffusion est négligeable devant l'advection. La présence d'un processus de diffusion non négligeable reviendrait à ajouter au champ de vitesse macroscopique  $\vec{v}$  un champ aléatoire microscopique  $\vec{\mu}$  représentant l'agitation moléculaire.*

Les descriptions eulérienne et lagrangienne sont équivalentes c'est-à-dire qu'elles véhiculent la même quantité d'information, même si leurs contenus diffèrent : la description lagrangienne, par exemple, permet d'isoler des comportements particuliers (réguliers ou chaotiques) au cours du temps. Par contre, comme l'information y est nécessairement ponctuelle, on doit effectuer des moyennes spatiales si l'on veut accéder à des fonctions continues telles que la concentration. Ce moyennage implique qu'on utilise un grand nombre de traceurs pour que la description statistique soit suffisante. Malgré cet inconvénient d'ordre numérique, nous nous placerons toujours dans le cadre de la description lagrangienne.

### 1.2.2 Un exemple classique de mélange efficace : la transformation du boulanger

Avant de caractériser formellement les mécanismes du mélange, on peut s'intéresser à la transformation du boulanger (appelée ainsi par une analogie évidente avec le processus d'étirement-repliement effectué lors de la fabrication de la pâte à pain). En effet, il s'agit d'une application extrêmement simple,

qui réunit tous les ingrédients d'un mélange efficace. Le principe de la transformation du boulanger est décrit dans la **figure 1.5**. En itérant le processus de la **figure 1.5**, on constate que deux points, initialement très proches, peuvent s'éloigner l'un de l'autre de manière exponentielle. Ceci illustre une caractéristique essentielle d'un système chaotique, à savoir la *sensibilité aux conditions initiales*.

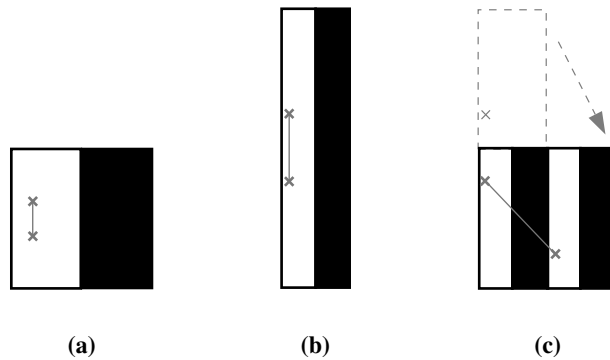


FIG. 1.5 – (a) état initial. (b) étirement : la hauteur est deux fois plus grande que la largeur car on suppose que le volume est conservé. (c) découpage et recollage : retour à la forme initiale. Cette dernière étape est également appelée repliement.

De plus, cet exemple simple montre qu'il ne suffit pas d'étirer pour mélanger. L'étape (b), bien qu'essentielle, n'a introduit aucun désordre. Ce n'est qu'à l'étape (c) qu'un certain désordre apparaît, lorsqu'on introduit une dichotomie entre les particules de la partie inférieure et celles de la partie supérieure de (a). En effet, l'avenir d'un segment donné va se trouver grandement modifié, selon que ces deux extrémités se trouvent du même côté ou non de cette frontière. Ce double mécanisme d'étirement-repliement est à la base de tout processus de mélange.

Cette application n'est pas un simple cas d'école illustrant la théorie du mélange : en effet, si on peut prouver qu'une transformation donnée quelconque

peut s'apparenter avec la transformation du boulanger, alors on a démontré que cette application génère des comportements chaotiques.

### 1.2.3 Notion d'hamiltonien

Comme il a été précisé dans la **section 1.2.1**, nous adoptons le point de vue lagrangien pour décrire les propriétés de mélange d'un écoulement donné, c'est-à-dire que nous nous intéressons aux trajectoires de particules. Elles sont données par :

$$\frac{d\vec{r}(\vec{r}_0, t)}{dt} = \vec{v}(\vec{r}, t), \quad (1.3)$$

où  $\vec{r}$  représente la position d'une particule définie par sa position à l'instant  $t = 0$ , et  $\vec{v}$  le champ de vitesse dans l'écoulement.

Considérons un écoulement bidimensionnel, stationnaire et incompressible<sup>3</sup>. La condition d'incompressibilité s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(x, y) = 0. \quad (1.4)$$

Dans ce cas, on peut toujours trouver une fonction potentiel  $\psi(x, y)$  telle que :

$$\begin{cases} \frac{dr_x}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{dr_y}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.5)$$

Le champ de vitesse est toujours perpendiculaire au gradient du potentiel, donc toute trajectoire est inscrite dans une courbe équipotentielle. Intuitivement, on peut penser qu'une telle propriété n'est pas favorable à un mélange efficace. Pour le vérifier, on a calculé la trajectoire de particules au sein d'une cellule de convection bidimensionnelle stationnaire, dont la fonction potentiel s'écrit :

$$\psi = \psi_0 \sin(\pi x/L_x) \sin(\pi y/L_y), \quad (1.6)$$

<sup>3</sup>En toute rigueur, le manteau n'est pas incompressible. Cependant, l'équation de conservation de la masse implique que la quantité  $\rho \vec{v}$  dérive d'un potentiel, donc on peut s'attendre à ce que les résultats ne soient pas affectés par l'hypothèse d'incompressibilité.



où  $L_x$  et  $L_y$  sont les dimensions du système. Les résultats, présentés dans la **figure 1.6**, montrent bien qu'il n'y a pas de mélange efficace dans ce cas.

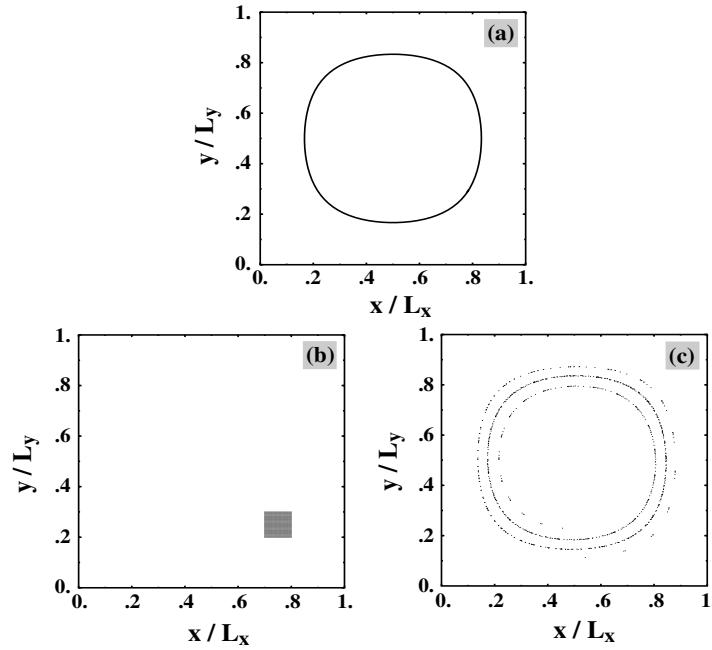


FIG. 1.6 – Exemple d'un écoulement correspondant à une cellule de convection ( $\psi = \psi_0 \sin(\pi x/L_x) \sin(\pi y/L_y)$ , avec  $L_x$  et  $L_y$ , dimensions du système). (a) : trajectoire d'une particule donnée. L'équipotentielle correspondante est une ellipse, donc une courbe fermée sur elle-même. La particule est piégée, et ne peut parcourir l'ensemble du système. (b) : position initiale d'un nuage de 900 particules, et (c) : position finale des particules après une durée  $t$  d'advection. Le nuage a été étiré car chaque particule appartient à une équipotentielle particulière et décrit une ellipse avec une vitesse angulaire donnée : on obtient une spirale parfaitement régulière. On constate qu'aucun brassage efficace n'a eu lieu.

Si maintenant on considère le même type d'écoulement que précédemment, mais en supprimant l'hypothèse de stationnarité. On peut toujours exprimer le champ de vitesse à l'aide d'une fonction potentiel, mais cette fois-ci  $\vec{v}$  et  $\psi$  sont fonctions du temps. On choisit par exemple :

$$\psi = \psi_0 [a \sin(\pi x/L_x) + b |\sin(2\pi t/T)| \sin(2\pi x/L_x)] \sin(\pi y/L_y), \quad (1.7)$$

$a$  et  $b$  sont des constantes, et  $T$  une période donnée. Il s'agit de la même cellule de convection que précédemment, additionnée de deux cellules deux fois moins larges, dont l'amplitude varie au cours du temps. On trouvera dans la **figure 1.7** une représentation des équipotentielles à différents instants. Les trajectoires, bien que toujours perpendiculaires au gradient instantané du potentiel, ne sont plus obligatoirement *régulières* car le gradient dépend du temps. Le mélange peut éventuellement devenir efficace (*cf figure 1.8*).

En résumé, on a donc remarqué qu'un écoulement incompressible bidimen-

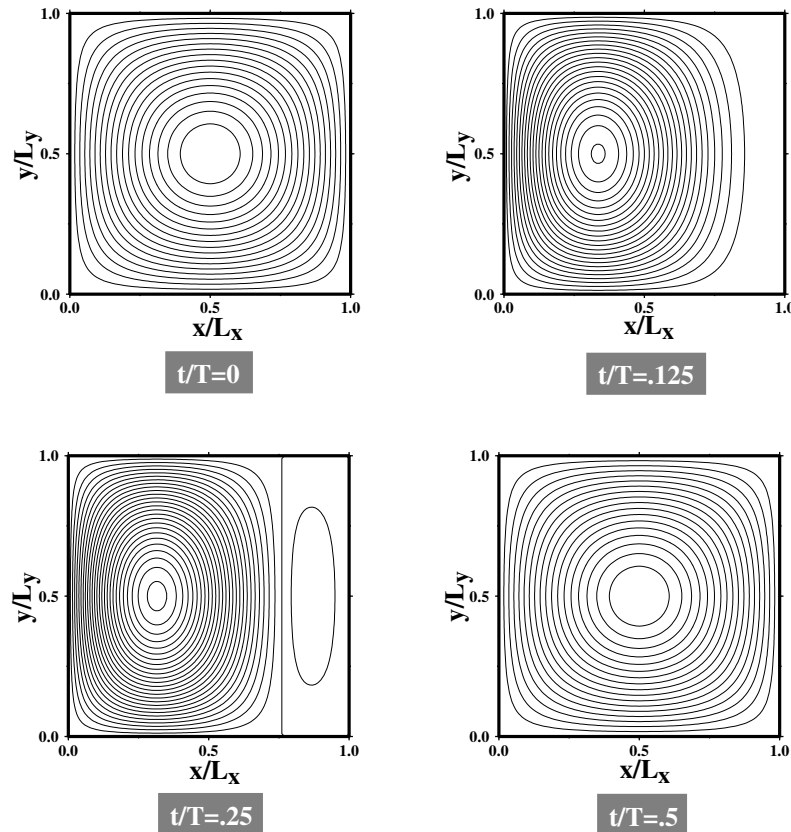


FIG. 1.7 – Lignes équipotentielles de l'écoulement bidimensionnel dépendant du temps défini plus haut (*cf* texte) pour différentes valeurs de  $t/T$ . L'amplitude du gradient de la fonction potentiel, ainsi que la taille des cellules de convection varient au cours du temps.

sionnel apparaît régulier lorsqu'il est stationnaire, et peut devenir chaotique si on lui incorpore une dépendance temporelle. Ce résultat peut s'expliquer dans

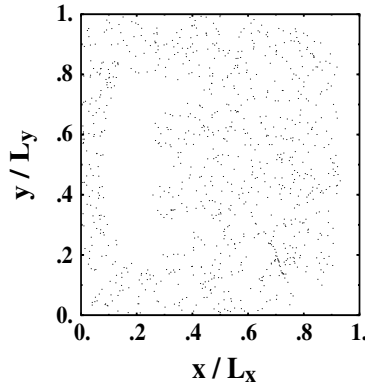


FIG. 1.8 – Résultats de l’expérience d’advection pour l’écoulement présenté dans la **figure 1.7**. Les conditions initiales, la durée d’advection et l’énergie cinétique totale moyennée sur une période sont identiques à celles de la **figure 1.6b, c**. Le mélange apparaît beaucoup plus efficace dans ce cas : il n’y a plus d’ordre perceptible, et les particules semblent avoir visité une portion de l’espace beaucoup plus importante.

le cadre général de la *théorie hamiltonienne*.

En mécanique classique, tout système d’équations de la forme du système 1.3, est appelé *système dynamique* :

$$\frac{d\vec{r}(\vec{r}_0, t)}{dt} = \vec{f}(\vec{r}, t) \quad (1.8)$$

Généralement,  $\vec{r}$  et  $\vec{f}$  perdent leurs significations physiques respectives de position et vitesse.

Si on peut décrire le système à l’aide d’un nouveau système de coordonnées  $(q_k, p_k, t)$  et d’une fonction  $H(q_k, p_k, t)$  ( $k = 1, \dots, N$ ) telle que :

$$\begin{cases} \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}, \quad (1.9)$$

alors on dit que le système est *hamiltonien*.

$(q_k, p_k, t)$  définit l’*espace des phases*;  $H(q_k, p_k, t)$  s’appelle l’*hamiltonien*. Si  $\vec{q}$  et  $\vec{p}$  sont de dimension  $N$ , alors le système comporte  $N$  degrés de liberté (plus une si  $H$  dépend explicitement du temps  $t$ ).

Un système hamiltonien possède la propriété de conserver les volumes et l'orientation (un trièdre direct doit rester direct au cours du temps) dans l'espace des phases. La conservation des volumes s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.10)$$

**Rq:** Un système qui contracte les volumes dans l'espace des phases, ie :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{r}, t) < 0$$

est dit *dissipatif*.

En posant  $H = \psi$ , les systèmes (1.5) et (1.9) sont identiques. On voit donc que l'écoulement bidimensionnel et incompressible vu plus haut correspond à un système hamiltonien, et que l'hamiltonien coïncide avec la fonction potentiel. L'espace des phases correspond quant à lui à l'espace physique réel. Ce système dynamique comporte un degré de liberté lorsque l'écoulement est stationnaire, et deux lorsqu'il dépend du temps.

L'utilisation du formalisme hamiltonien permet d'obtenir *a priori* des informations sur le caractère chaotique ou non d'un système dynamique donné. Il suffit pour cela d'étudier son *intégrabilité*. En effet, la non-intégrabilité d'un système est une condition nécessaire (mais pas suffisante) à la présence de chaos. On dit qu'un système est *intégrable* si et seulement si on peut trouver autant de grandeurs conservatives du système (indépendantes entre elles) que de degrés de liberté. Ces grandeurs conservatives (ou *intégrales premières*) peuvent correspondre à des constantes physiques telles que l'énergie, le moment cinétique, *etc ...*

Pour une définition plus formelle, on peut introduire la notation des crochets de Poisson :

Soient deux fonctions  $u(\vec{q}, \vec{p}, t)$  et  $v(\vec{q}, \vec{p}, t)$ . Le crochet de Poisson  $[u, v]$  est défini par :

$$[u, v] = \sum_k \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k}.$$

Le système est intégrable s'il existe  $N$  fonctions indépendantes  $F_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) telles que :

$$[F_i, H] = 0.$$

Dans ce cas, le système se subdivise en  $N$  sous-systèmes indépendants comportant un degré de liberté chacun.

**Rq:** En développant  $[F_i, H]$ , on obtient :

$$[F_i, H] = \sum_k \frac{\partial F_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (1.11)$$

$$= \sum_k \frac{\partial F_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \quad (1.12)$$

$$= \vec{f} \cdot \vec{\nabla} F_i, \quad (1.13)$$

où  $\vec{f}$  représente la 'vitesse' dans l'espace des phases.  $[F_i, H]$  correspond donc à la partie spatiale de la dérivée particulaire  $\frac{DF_i}{Dt}$  :

$$\frac{DF_i}{Dt} = [F_i, H] + \frac{\partial F_i}{\partial t} \quad (1.14)$$

Les équations  $[F_i, H] = 0$  définissent ainsi une famille de surfaces pour lesquelles les fonctions  $F_i$  sont constantes, pour une date  $t$  fixée. A chaque instant, les vitesses sont incluses dans ces surfaces.

Il est très simple de vérifier qu'on a toujours :

$$[H, H] = 0.$$

Par conséquent, un système hamiltonien possède toujours au moins une grandeur conservative : l'hamiltonien lui-même. Ceci implique que tous les systèmes hamiltoniens à un degré de liberté sont intégrables, donc non-chaotiques. Ceci permet donc d'expliquer pourquoi l'écoulement bidimensionnel stationnaire et incompressible nous apparaissait régulier dans l'exemple du début. A l'inverse, ajouter une dépendance temporelle à l'écoulement revient à ajouter un degré

de liberté supplémentaire, et le système n'est plus *a priori* intégrable : il est possible d'obtenir des trajectoires chaotiques comme nous l'avons vu dans la **figure 1.8**.

**Rq:** *H n'étant qu'une fonction conservative  $F_i$  particulière, la condition d'intégrabilité peut s'exprimer d'une manière plus générale :*

*Un système (S) donné est intégrable si et seulement si il existe N fonctions  $F_i$  indépendantes entre elles telles que :*

$$[F_i, F_j] = 0, \quad \forall i, j$$

Intéressons-nous au cas du manteau terrestre. On suppose de nouveau que l'écoulement est stationnaire et incompressible <sup>4</sup>, mais contrairement aux exemples précédents le système est tridimensionnel. Il est possible de démontrer que le système est hamiltonien et qu'il comporte deux degrés de liberté (Whiteman 1977; Cary and Littlejohn 1983; Zaslavsky et al. 1991), bien qu'on ne puisse pas dans le cas général trouver d'expression analytique pour l'hamiltonien H. Dans ce cas, on traite l'écoulement comme un système bidimensionnel dans lequel la troisième dimension (z, par exemple) deviendrait l'équivalent du temps dans un système bidimensionnel instationnaire. Comme le système comporte deux degré de liberté, il n'est pas *a priori* intégrable. Contrairement aux suppositions de Schmalzl et al. (1995) (*cf section 1.1.2*), il n'est donc pas nécessaire que le champ de vitesse dépende du temps pour générer des comportements chaotiques.

Pour illustrer ce qui précède, nous avons calculé les trajectoires de plusieurs particules au sein d'un écoulement stationnaire incompressible et tridimensionnel. Cet écoulement est mû par des conditions aux limites imposées qui simulent des vitesses de plaques rigides en surface (nous généralisons à trois dimensions l'approche initiée par Gurnis and Davies (1986b)). Les raisons d'un tel choix, ainsi que les détails de la méthode numérique pourront être trouvés dans la partie 2.1. Les résultats sont représentés dans la **figure 1.9**.

Cet exemple nous permet bien de vérifier que le système n'est pas intégrable

---

<sup>4</sup>l'hypothèse de stationnarité est manifestement fautive, mais elle permet dans un premier temps de simplifier le problème.

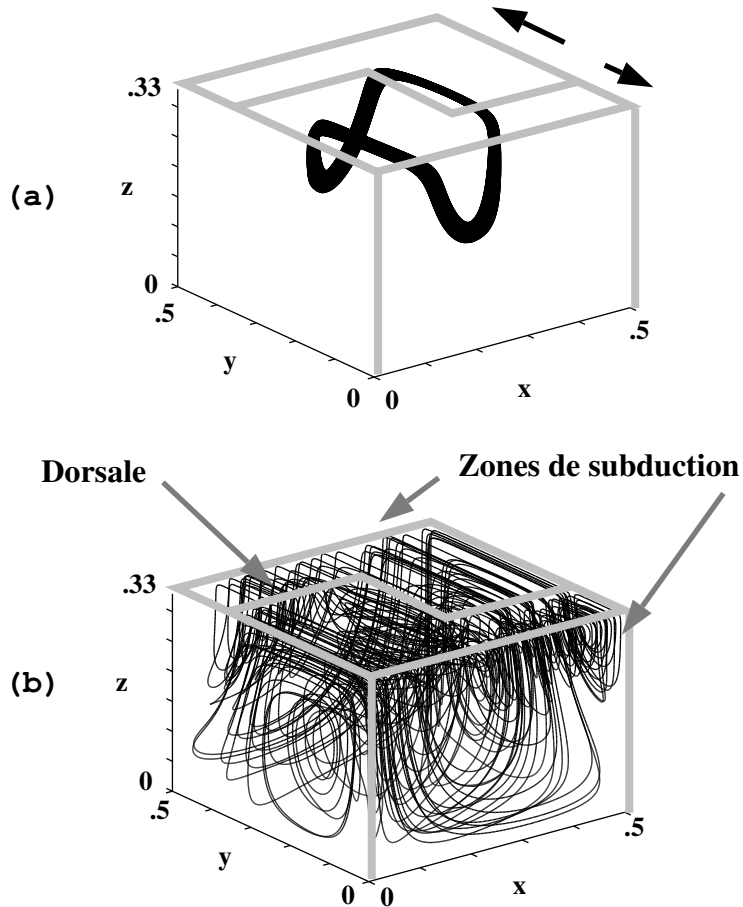


FIG. 1.9 – Deux traceurs (a) et (b) ont été injectés au sein du système, et advectés pendant des temps identiques. A la surface du système, on a représenté la géométrie du champ de vitesse imposé, qui simule des conditions aux limites de plaques rigides comprenant une dorsale et deux zones de subduction. Bien que les positions initiales soient très proches, les deux traceurs ont des comportements rigoureusement différents : le traceur (a) décrit une trajectoire régulière inscrite sur une surface torique, alors que le traceur (b) parcourt une grande partie du système de manière chaotique. On peut penser que la portion d'espace visitée par le traceur (b) correspond à une zone de mélange efficace, contrairement au cas du traceur (a).

dans ce cas, ce qui implique qu'il est susceptible de mélanger de manière efficace. Il est toutefois important de remarquer qu'il existe au moins un îlot non-chaotique (échantillonné par le traceur (a) dans la **figure 1.9**). Par conséquent, cette simple expérience est insuffisante pour caractériser rigoureusement les propriétés de mélange de l'écoulement.

### 1.2.4 Section de Poincaré

On a vu que les trajectoires des particules peuvent être complexes (*cf* **figure 1.9**). D'une manière générale, lorsque la dimension de l'espace des phases est grande, ou qu'il n'est pas possible de connaître les trajectoires pour chaque date  $t$ , on a recours à la méthode des *sections de Poincaré* pour faciliter l'observation. Cela consiste en fait à cartographier les intersections successives  $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots$  d'une trajectoire avec une surface donnée dans l'espace des phases (*cf* **figure 1.10**). Dans le cas d'un écoulement fluide, cette surface peut être un plan de l'espace réel (*cf* **figure 1.11** et **figure 1.3**). On peut également observer le comportement de particules au sein du système à toutes les dates  $t = t_0 + n\tau$ , où  $\tau$  est un pas de temps fixé. Ceci qui correspond à une vue stroboscopique de l'écoulement.

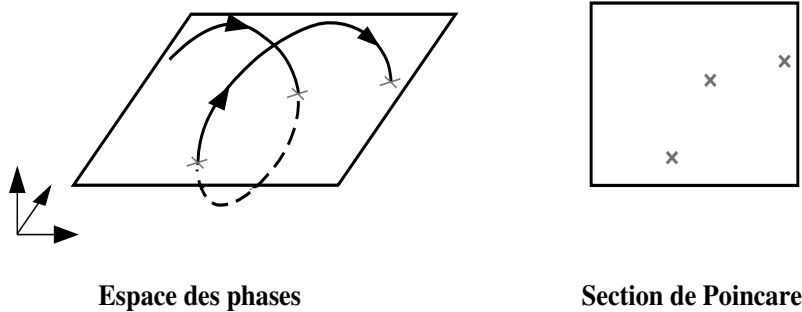


FIG. 1.10 – Vue schématique d'une section de Poincaré.

D'un point de vue mathématique, on définit une application  $\vec{\Phi}$ , *application*



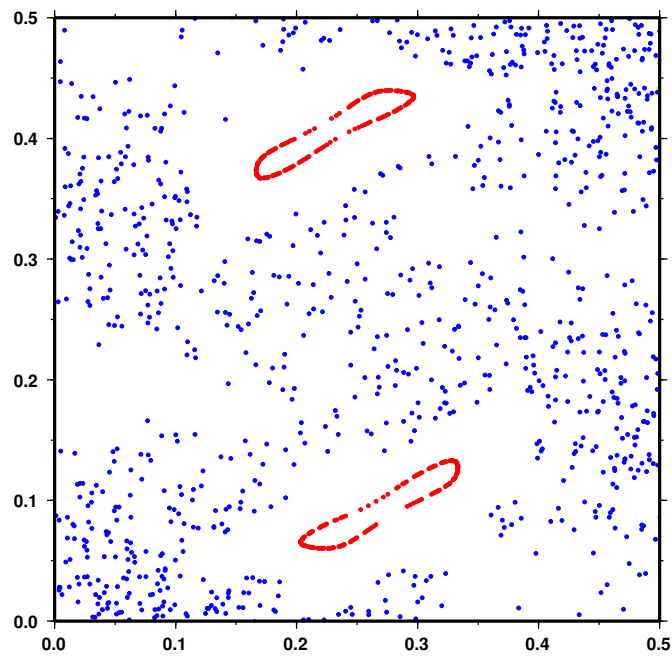


FIG. 1.11 – Sections de Poincaré correspondantes aux trajectoires de la **figure 1.9** pour un plan horizontal à mi-hauteur du système.

successives) :

$$\begin{aligned} (q_k, p_k, t) &\longrightarrow (q_k, p_k, t) \\ \vec{x}_0 &\longrightarrow \vec{x}_1 = \vec{\Phi}(\vec{x}_0) \end{aligned}$$

**Rq:**

$$\vec{x}_n = \vec{\Phi}(\vec{x}_{n-1}) = \vec{\Phi}^n(\vec{x}_0)$$

La donnée de  $\Phi$  détermine un système dynamique discret équivalent au système dynamique continu défini plus haut, dans un sous-espace de l'espace des phases.

Comme dans l'espace des phases complet, les aires et l'orientation sont des grandeurs conservées dans une même section de Poincaré.

### 1.2.5 Notion de stabilité : points elliptiques et hyperboliques

Pour comprendre la dynamique d'un système, il est important de s'intéresser à ses points d'équilibre, et de déterminer s'il s'agit de points d'équilibre stable ou instable.

Considérons par exemple deux cellules de convection côte à côte, comme dans la **figure 1.12**. Les points A, B, C et D sont des points d'équilibre car la vitesse s'y annule, mais le comportement du fluide au voisinage de ces points est très différent en A et D, et en B et C : le point A (ou D) correspond à l'intersection de lignes de courant tantôt convergent vers A, et tantôt divergent depuis A. Intuitivement, on voit bien que A et D sont des points d'équilibre instable. A l'opposé, B et C correspondent à deux centres de rotation (les lignes de courant décrivent des ellipses concentriques centrées sur ces points). Il s'agit de points d'équilibre stable. On devine aisément que le comportement des particules de fluide sera différent selon s'il est au voisinage d'un point d'équilibre stable ou bien instable, et on peut penser que les points d'équilibre instables seront potentiellement à l'origine de comportements chaotiques.

Dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques, les points d'équilibre sont appelés *points fixes* (ou points périodiques). Soit un système  $\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}_0, t)$

$(\frac{d\vec{r}(\vec{r}_0, t)}{dt} = \vec{f}(\vec{r}, t))$   $\vec{P}$  est un point fixe de l'écoulement si et seulement si :

$$\vec{P} = \vec{F}(\vec{P}, t) \quad \forall t. \quad (1.15)$$

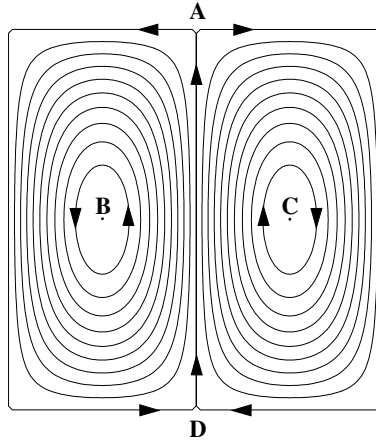


FIG. 1.12 – Deux cellules de convection. Les points A et D sont deux points d'équilibre instable, tandis que B et C sont deux points d'équilibre stable.

De même, c'est un point périodique si :

$$\vec{P}_{t+T} \left( = \vec{F}(\vec{P}_t, t + T) \right) = \vec{P}_t \quad \forall t. \quad (1.16)$$

**Rq:** *Un point périodique d'un système continu peut être un point fixe d'un système discret équivalent.*

On trouvera en **annexe A** le détail du calcul de stabilité qui permet de déterminer la nature des points fixes ou périodiques du système. Dans le cadre de cette discussion, il est simplement important de retenir que :

- les points d'équilibre stable sont appelés *points elliptiques* car les trajectoires au voisinage de ces points décrivent des ellipses dans un système à deux dimensions. En dimension trois, les trajectoires s'inscrivent à la surface de tores (*cf figure 1.3, 1.6, 1.9*). Ces trajectoires peuvent être périodiques (elles bouclent sur elles-mêmes au bout d'un nombre fini de tours autour du point elliptique). On parle alors d'*orbite rationnelle*. Elles peuvent également être quasi-périodiques (la surface du tore est décrite de manière dense). Dans ce dernier cas, on parle d'*orbite irrationnelle*, et le tore est appelé *tore de KAM* (Kolmogorav-Arnold-Moser).

- les points d'équilibre instable sont appelés *points hyperboliques* car les trajectoires au voisinage de ces points décrivent des hyperboles ou des hyperboloïdes, dont les axes principaux sont associés à des lignes de courant convergentes (*direction de stabilité ou contraction*), ou divergentes (*direction d'instabilité ou de dilatation*). L'ensemble des points qui convergent vers un point hyperbolique donné est appelé *variété stable*, tandis que l'ensemble des points qui en divergent est appelé *variété instable*.

La **figure 1.13** résume les différents comportements possibles au voisinage de points hyperboliques et elliptiques.

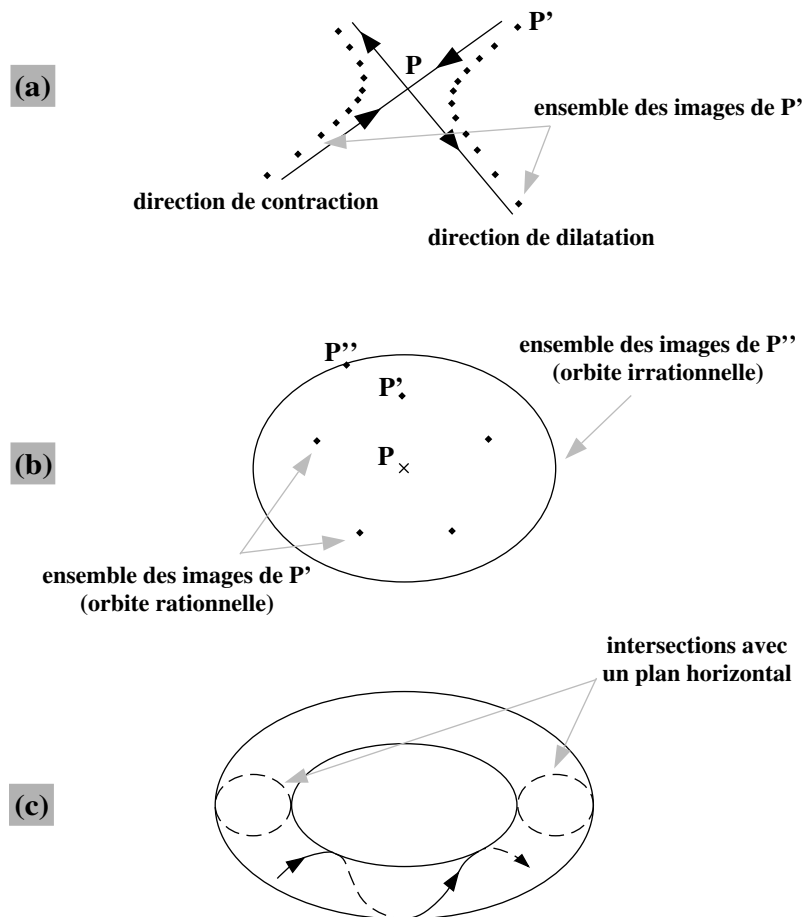


FIG. 1.13 – Sections de Poincaré au voisinage d'un point hyperbolique (a) ou elliptique (b). (c) : vue tridimensionnelle d'une trajectoire à la surface d'un tore.

Considérons par exemple un pendule simple sans frottement (c'est-à-dire sans perte d'énergie). Ce pendule est soumis au poids de la masse ponctuelle située à son extrémité, et à la tension du fil relié à l'axe (*cf* **figure 1.14**). On note  $\theta$  l'angle que fait le pendule avec l'axe vertical orienté vers le bas, et on se place dans l'espace des phases  $(\theta, \dot{\theta})$ . Ici, l'hamiltonien représente l'énergie totale du système, c'est-à-dire la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Il vaut :

$$H = \frac{1}{2}mh^2\dot{\theta}^2 - mg \cos(\theta) \quad (1.17)$$

Le point  $(0,0)$  (équilibre stable) est un point elliptique, tandis que  $(\pi,0)$  (équilibre instable) est un point hyperbolique. Dans la **figure 1.15**, on a représenté des courbes d'iso-valeurs de l'hamiltonien  $H$ . Cette figure est caractéristique de tout système hamiltonien intégrable.

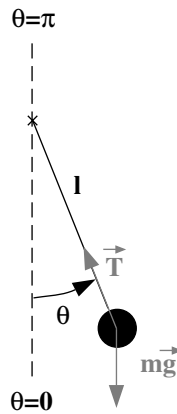


FIG. 1.14 – Vue schématique d'un pendule simple.

### 1.2.6 Effets d'une perturbation dans un système intégrable

Dans la section 1.2.5, nous avons vu quels pouvaient être les différents types de comportement au voisinage de points fixes d'un système intégrable (*cf* **figure 1.13**). On se demande ici comment évoluent ces comportements sous l'effet d'une perturbation du système.

Observons les trajectoires de quelques traceurs injectés dans un écoulement

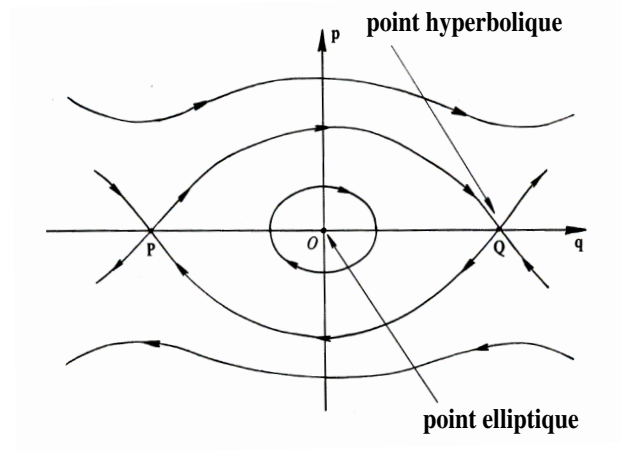


FIG. 1.15 – Portrait de phase du pendule simple sans frottement.  $q$  représente l'angle  $\theta$ , et  $p$  sa dérivée temporelle  $\dot{\theta}$ . Chaque courbe est déterminée par une valeur particulière de l'hamiltonien. On peut remarquer que les variétés stables et instables n'ont aucune intersection entre elles (en-dehors des points hyperboliques eux-mêmes), mais se rejoignent tangentiellement deux-à-deux. D'après Ottino (1989).

similaire à celui qui a été utilisé dans la **figure 1.9**. La **figure 1.16** représente une section de Poincaré à mi-hauteur du système. Chaque couleur caractérise un traceur donné. On observe quelques traceurs semblant parcourir des surfaces KAM (référence (1) sur la figure). D'autres (référence (2)) décrivent un ensemble de petites ellipses, qui correspondent à la section d'un tube fin s'enroulant autour d'un tore (*cf* **figure 1.17** pour une vision 3D). Enfin, on remarque également la présence de trajectoires désordonnées (référence (3)). Ce comportement est caractéristique d'un système quasi-intégrable, comme nous allons le voir dans la suite.

La théorie hamiltonienne permet de formaliser les différents types comportement possibles des particules, lorsque l'on perturbe un système intégrable :

★ Au voisinage de points hyperboliques :

Dans un système intégrable, s'il y a un ou plusieurs points hyperboliques, les variétés stables et instables n'ont pas d'intersection, mais peuvent se connecter tangentiellement. Sous l'effet d'une perturbation (à condition qu'elle ne présente

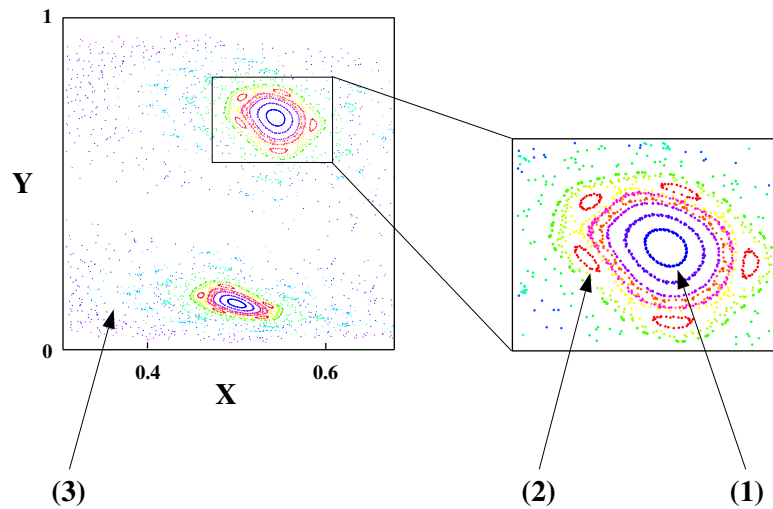


FIG. 1.16 - Section de Poincaré horizontale à mi-hauteur de l'écoulement. Chaque couleur correspond à un traceur particulier. On isole des comportements réguliers (1) et (2), ou chaotiques (3).

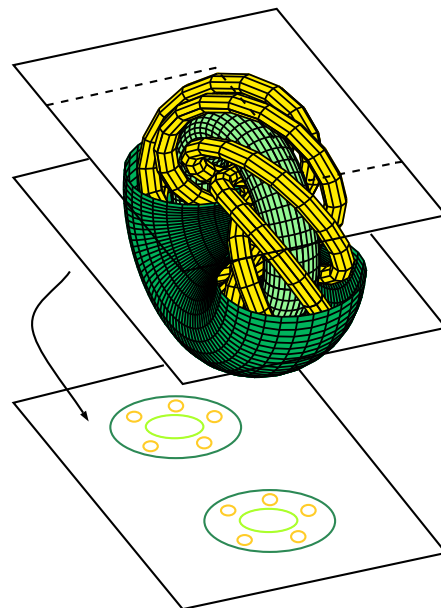


FIG. 1.17 - Vue tridimensionnelle d'un tube (jaune) s'enroulant autour de tores (verts) emboîtés.

pas les mêmes symétries que le système), on peut créer des intersections entre variétés (cf **figure 1.18**). Ces intersections sont appelées *points homoclines* ou *points hétéroclines*, et elles constituent le point de départ de comportements chaotiques.

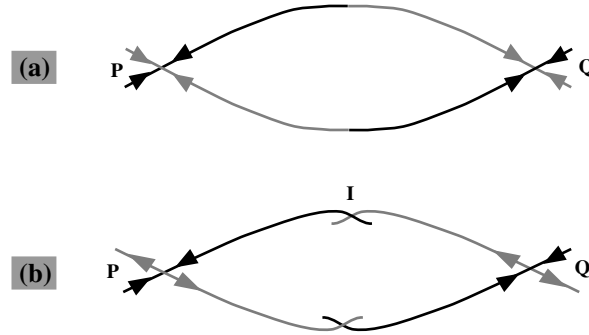


FIG. 1.18 – Effet d’une perturbation au voisinage d’un point hyperbolique. (a) avant perturbation, (b) après perturbation.

★ Au voisinage de points elliptiques :

-Cas d’une orbite rationnelle (trajectoire périodique) :

Le théorème de *Poincaré-Birkhoff* démontre qu’une orbite rationnelle perturbée donne naissance à un nombre pair de nouveaux points fixes :  $n$  points elliptiques et  $n$  points hyperboliques en alternance. Les points hyperboliques seront à leur tour la cause de nouveaux comportements chaotiques dans leur voisinage.

-Cas d’une orbite irrationnelle (traj. quasi-périodique, surface KAM) :

Sous l’effet d’une perturbation, une orbite irrationnelle reste essentiellement inchangée (sous réserve qu’elle soit suffisamment ‘irrationnelle’). Ce résultat constitue le théorème *Kolmogorov-Arnold-Moser* (cf **figure 1.19**). Les conséquences de ce théorème sont extrêmement importantes. En effet, comme toute trajectoire est toujours perpendiculaire au gradient de l’hamiltonien  $H$  (cf **section 1.2.3**), aucune trajectoire (le long de laquelle  $H = c^{te}$ ) ne peut traverser une surface KAM. Il en résulte que les surfaces KAM se comportent comme des parois imperméables au sein de l’écoulement. Etant relativement stables sous l’effet d’une perturbation, elles isolent donc les volumes qu’elles englobent



du reste du système. Ainsi, chaque portion d'espace dont les frontières sont définies par une surface KAM possède ses propres caractéristiques de mélange. Le système ne peut être homogène que s'il ne comporte aucune surface KAM. Inversement, on peut envisager des écoulements qui permettent la coexistence permanente d'une zone très chaotique et d'une zone régulière.

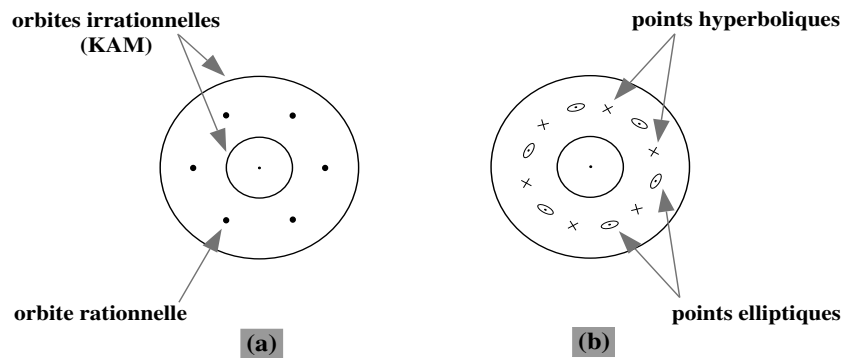


FIG. 1.19 – Effet d'une perturbation au voisinage d'un point elliptique. (a) avant perturbation, (b) après perturbation.

La **figure 1.20** résume le comportement d'un système quasi-intégrable.

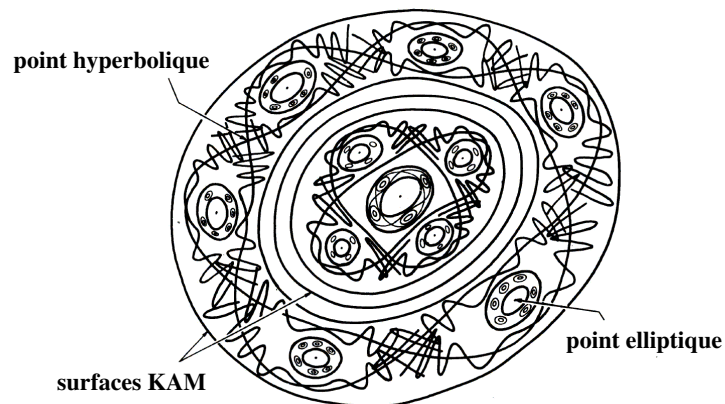


FIG. 1.20 – Portrait de phase d'un système quasi-intégrable. Les intersections multiples entre variétés stables et instables sont à l'origine de comportements chaotiques. D'après Ottino (1989).

### 1.2.7 Un exemple d'étirement-repliement

Nous avons vu (*cf* **section 1.2.2**) que le mécanisme d'étirement-repliement est caractéristique de la présence de chaos. Nous allons tenter de l'analyser à l'aide d'un écoulement simple.

Soit un écoulement bidimensionnel, incompressible, dont la fonction potentiel s'écrit :

$$\psi = \psi_0 [\sin(\pi x/L_x) + (y - .5) \sin(3\pi t/T) \sin(2\pi x/L_x)] \sin(\pi y/L_y), \quad (1.18)$$

Il s'agit de trois cellules de convection dont les frontières oscillent. On a représenté dans la **figure 1.21** les lignes de courant de cet écoulement à différents instants.

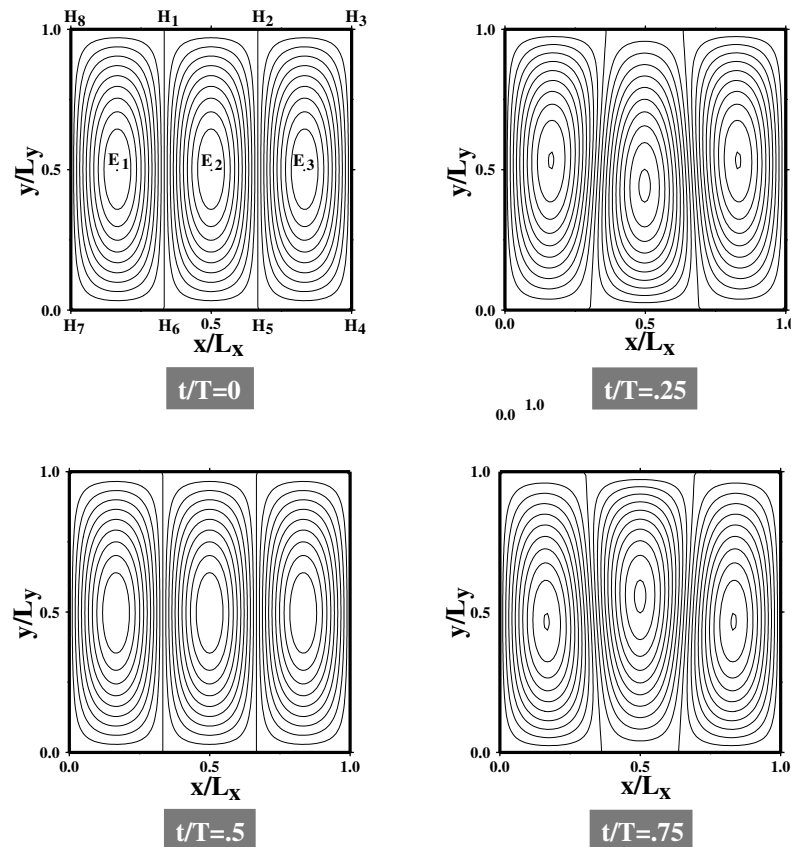


FIG. 1.21 – Lignes de courant (iso-valeurs de  $\psi$ ) à différents instants pour l'écoulement défini en 1.18. Les points  $H_1, \dots, H_8$  sont des points hyperboliques, tandis que les points  $E_1, E_2$  et  $E_3$  sont elliptiques.

Plaçons un ensemble de traceurs dans cet écoulement, et observons son évolution (*cf* **figure 1.22**).

A mesure que les traceurs se rapprochent de  $H_1$ , ils se mettent à osciller. Le filament qu'ils composent s'étire, en formant des boucles de plus en plus étroites, et de plus en plus allongées. Ceci correspond exactement au mécanisme d'*étirement*. Cela s'explique par le fait que la droite  $[H_6H_1]$  est une direction de contraction par rapport à  $H_1$  (sous-espace stable), tandis que  $[H_1H_2]$  et  $[H_1H_8]$  sont des directions de dilatation par rapport à  $H_1$  (sous-espace instable). Par conséquent, au voisinage de  $H_1$ , tout ensemble de points matériels a tendance à se contracter selon  $[H_6H_1]$ , et se dilater selon  $[H_1H_2]$  et  $[H_1H_8]$ . On assiste à des comportements identiques au voisinage des autres points hyperboliques.

Le mécanisme de *repliement*, parfaitement visible dans la figure complexe que l'on obtient à la fin de l'expérience, est dû au fait que l'écoulement est incompressible. Comme le filament ne peut pas se recouper lui-même (dans le cas contraire il n'y aurait pas unicité des trajectoires), il doit nécessairement, tout en s'étirant, former des circonvolutions de plus en plus complexes.

**Rq:** *Le processus d'étirement-repliement présenté ici n'est pas dû à la seule présence de points hyperboliques. En effet, si on avait réalisé la même expérience en supprimant le terme dépendant du temps dans l'expression de la fonction potentiel, la répartition des points hyperboliques aurait été la même, mais les traceurs se seraient simplement répartis régulièrement le long des frontières entre les différentes cellules de convection. Ici, on vérifie donc une fois de plus que la perturbation temporelle est responsable de l'apparition du chaos.*

### 1.2.8 Une mesure de la sensibilité aux conditions initiales : les exposants de Lyapunov

Dans l'exemple fondamental de la transformation du boulanger (*cf* section 1.2.2), nous avons vu que la sensibilité aux conditions initiales est caractéristique de la présence de chaos. Rigoureusement parlant, un système dynamique donné

$(\frac{d\vec{r}(\vec{r}_0, t)}{dt} = \vec{f}(\vec{r}, t))$  est sensible aux conditions initiales si et seulement si :

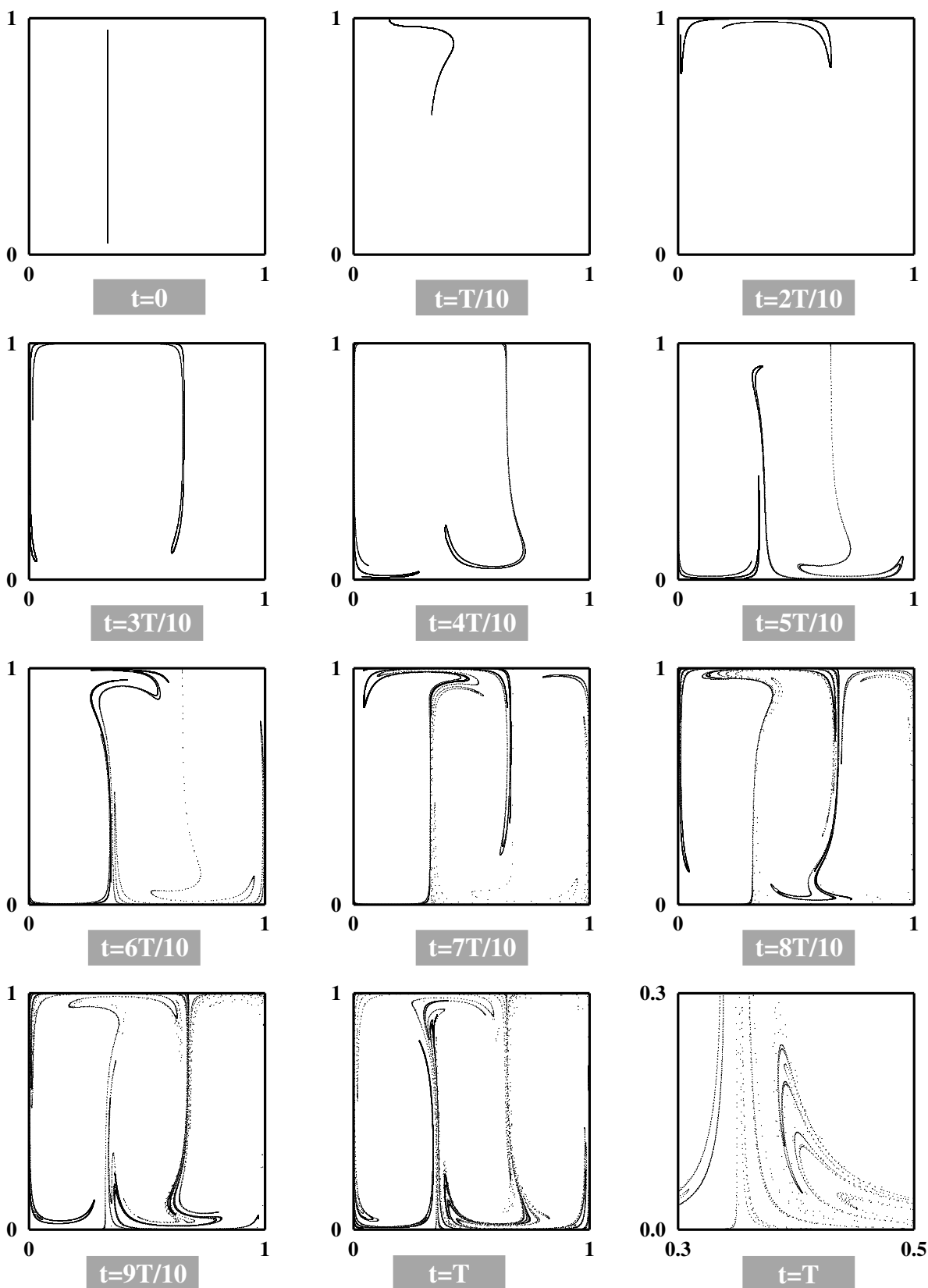


FIG. 1.22 - Position initiale ( $t=0$ ), puis à des instants ultérieurs de 5000 trajecteurs. Le dernier graphe représente un détail.

pour tout  $\vec{r}_1(0) \neq \vec{r}_2(0)$  tel que  $|\vec{r}_1(0) - \vec{r}_2(0)| < \epsilon$  ( $\epsilon > 0$  aussi petit que l'on veut), il existe une date  $t$  finie pour laquelle  $|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| > \epsilon$  (cf **figure 1.23**).

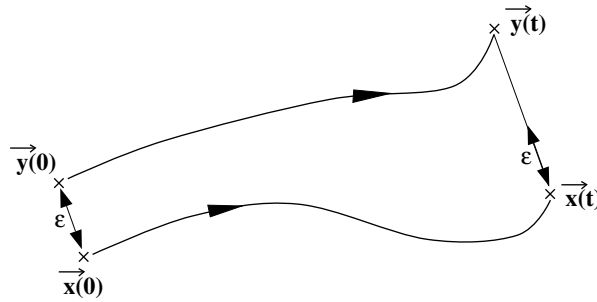


FIG. 1.23 – Sensibilité aux conditions initiales

On cherche donc à mesurer le taux d'éloignement moyen entre deux points infiniment proches à l'origine. On définit l'exposant de Lyapunov  $\sigma_i$  dans la direction  $e_i$  par :

$$\sigma_i = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ |\vec{r}_0| \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{|\vec{r}|}{|\vec{r}_0|} \right), \quad (1.19)$$

avec  $\vec{r}_0 = a\vec{e}_i$ .

Un exposant de Lyapunov a donc la dimension de l'inverse d'un temps, et il caractérise le taux de croissance exponentielle de la longueur d'un segment dans une direction donnée.

**Rq:** *Un exposant de Lyapunov égal à zéro ne veut pas dire que la longueur du segment reste constante, mais plutôt que son taux d'étirement croît moins vite qu'une fonction exponentielle. L'allongement d'un segment donné peut par exemple varier linéairement avec le temps.*

Dans le cas très particulier où l'hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps (*système autonome*), et lorsque l'on considère une trajectoire périodique dans l'espace des phases, un exposant de Lyapunov est directement relié à une valeur propre de la matrice jacobienne de  $\vec{f}$  notée  $D\vec{f}$ <sup>5</sup>.

<sup>5</sup>  $\vec{f}$  correspond au 'champ de vitesse généralisé' dans l'espace des phases

Dans le cas général,  $D\vec{f}$  dépend du temps et n'est *a priori* pas *diagonalisable* dans un repère fixe, c'est-à-dire qu'on ne peut pas définir de valeurs propres. Néanmoins, il a été montré (voir Lichtenberg and Lieberman 1983) que les exposants de Lyapunov existent dans le cas général.

Pour chaque particule infinitésimale donnée, il y a autant d'exposants de Lyapunov que de dimensions dans l'espace des phases. Si le système est ergodique, la valeur des exposants de Lyapunov ne dépend pas de la position initiale, donc le système admet exactement  $N$  exposants de Lyapunov ( $N$ , dimension du système).

On a vu que dans un système hamiltonien on conserve les volumes. Cette caractéristique implique que la somme des  $N$  exposants de Lyapunov doit être nulle.

Le long d'une trajectoire donnée, la longueur d'un segment ne peut croître que linéairement avec le temps. Ceci implique que l'un des exposants de Lyapunov est toujours nul.

Dans le cas d'un écoulement fluide tridimensionnel comme la convection du manteau terrestre, il y a seulement trois exposants de Lyapunov par domaine ergodique, et l'un de ces trois exposants est nul. Si le système présente une sensibilité aux conditions initiales, alors le plus grand des exposants de Lyapunov,  $\sigma_1$ , est strictement positif. Quant au plus petit exposant de Lyapunov, il est égal à  $-\sigma_1$ , car  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ . En conséquence, la seule donnée de  $\sigma_1$  suffit à caractériser le système.

**Rq:** *Etant donné que les exposants de Lyapunov sont définis comme double limite (sur le temps et l'espace), il n'est pas possible de les calculer exactement dans une expérience numérique. On calcule plutôt un taux de croissance exponentiel cumulé pour un temps fini et un segment de longueur finie. Ce taux de croissance varie énormément au cours du temps, mais il converge vers la valeur théorique de l'exposant de Lyapunov correspondant.*

### 1.3 Conclusion et définitions du chaos

Le *pouvoir de mélange* d'un système est un concept relativement complexe. Il est indissociable de trois facteurs distincts :

★ Le système doit générer des **comportements chaotiques**. Il n'est pas nécessaire pour cela que le champ de vitesse soit turbulent : on peut créer des trajectoires chaotiques dans un écoulement laminaire extrêmement simple, et même stationnaire (*cf* **section 1.2.3**). Au cours de ces rappels de mécanique classique, on a rencontré trois phénomènes différents caractéristiques du chaos :

- Le système produit des comportements du type *transformation du boulanger*, c'est-à-dire qu'il génère des *étirement-repliements* (*cf* **section 1.2.2** et **section 1.2.7**).
- Le système comporte des intersections entre variétés stables et instables (*cf* **section 1.2.6**).
- Le système possède un ensemble de points fixes, et il est sensible aux conditions initiales (au moins un exposant de Lyapunov strictement positif) (*cf* **section 1.2.8**).

Si l'une au moins de ces trois conditions est vérifiée, alors le système est chaotique.

★ L'ensemble des points ayant un comportement chaotique doit avoir une **taille caractéristique** du même ordre de grandeur que celle du système. En effet, la notion de mélange est une notion *globale* : la (ou les) zone(s) chaotique(s) doit (doivent) impliquer une partie significative de l'écoulement.

★ Le **temps caractéristique** de mélange doit être comparable au temps d'observation. Un brassage plus lent que le temps d'observation ne peut pas être considéré comme efficace.

## Chapitre 2

# Chaos lagrangien dans un modèle tridimensionnel stationnaire

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les résultats de nombreuses expériences de mélange appliquées au manteau terrestre sont d'une part contradictoires, et d'autre part difficiles à utiliser pour déterminer le rôle de la convection dans la signature géochimique des basaltes. Il est frappant de constater à quel point les propriétés de mélange d'un écoulement sont sensibles aux caractéristiques du modèle choisi telles que le mode de chauffage, la présence ou non de plaques rigides en surface, la dépendance en temps, la bi- ou tridimensionnalité du système, etc...

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'utiliser les résultats énoncés dans le chapitre précédent concernant la physique du mélange, pour déterminer l'effet de la tridimensionnalité sur les propriétés de mélange de l'écoulement mantellique, et pour tester l'influence de la présence de plaques lithosphériques rigides. Pour ce faire, nous utiliserons un modèle simple, tridimensionnel et stationnaire, de circulation dans le manteau.



## 2.1 Description du modèle

### 2.1.1 La décomposition du champ de vitesse : composantes poloïdale et toroïdale

On suppose que le manteau est un fluide incompressible, donc on peut écrire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.1)$$

où  $\vec{v}$  correspond au champ de vitesse du fluide. Ceci implique qu'on peut toujours décomposer  $\vec{v}$  de la manière suivante (Hager and O'Connell 1978; Hager and O'Connell 1981; Forte and Peltier 1987; Ricard et al. 1989; O'Connell et al. 1991; Gable et al. 1991; Olson and Bercovici 1991; Čadek and Ricard 1992; Lithgow-Bertelloni and Richards 1993) :

$$\vec{v}(x, y, z) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge A_P(x, y, z) \vec{z} + \vec{\nabla} \wedge A_T(x, y, z) \vec{z}. \quad (2.2)$$

$\vec{z}$  correspond au vecteur unité vertical vers le bas dans un repère cartésien.  $A_P(x, y, z)$  et  $A_T(x, y, z)$  sont deux champs scalaires orthogonaux, respectivement composantes *poloïdale* et *toroïdale* du champ de vitesse.

La partie poloïdale correspond à la divergence horizontale de la vitesse, c'est-à-dire qu'elle représente les flux de matière verticaux. Dans la Terre, ce type de champ de vitesse est lié aux dorsales et aux zones de subductions (mouvements divergents ou convergents).

La partie toroïdale est associée à la vorticité verticale de la vitesse, c'est-à-dire à des mouvements de rotation dans un plan horizontal. Les failles transformantes (zones de cisaillement) sont des sources de vitesse toroïdale (*cf* **figure 2.1**).

**Rq:** La décomposition (2.2) revient à écrire :

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial^2 A_P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial A_T}{\partial y} \\ v_y = \frac{\partial^2 A_P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial A_T}{\partial x} \\ v_z = -\frac{\partial^2 A_P}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 A_P}{\partial^2 y} \end{cases}$$

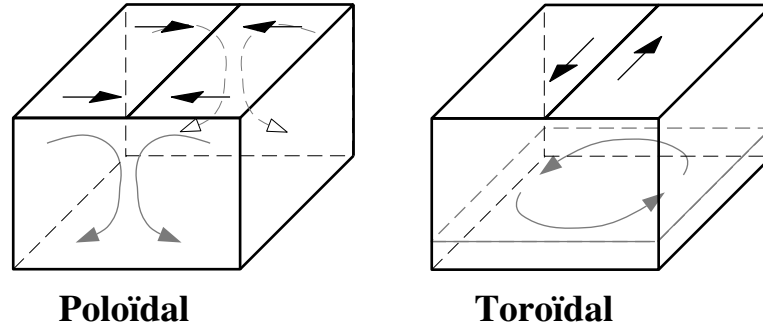


FIG. 2.1 – Vue schématique des deux composantes du champ de vitesse

On peut montrer (Bercovici et al. *ress*) que si la viscosité ne dépend que de la profondeur  $z$ , il n'y a pas de source d'énergie toroïdale. Par conséquent, dans ce cas la seule manière de créer un champ de vitesse toroïdal consiste à imposer une source toroïdale dans les conditions aux limites. Pour le manteau terrestre, les conditions aux limites sont données par la géométrie et la vitesse des plaques lithosphériques (en haut), et l'interface noyau-manteau (en bas). Les différences de viscosité entre le manteau et le noyau externe sont telles (plus de vingt ordres de grandeur) que le noyau n'exerce pas de contraintes cisailantes sur le manteau : on a donc une condition de surface libre en bas et par conséquent aucune source toroïdale. Par contre, en surface la lithosphère imprime une contrainte sur l'écoulement mantellique, et on a vu que les failles transformantes présentes aux frontières de plaques génèrent des vitesses toroïdales. A la surface de la Terre, la répartition des dorsales, zones de subduction et failles transformantes est telle que les énergies poloïdale et toroïdale présentent des amplitudes comparables sur une large gamme de longueurs d'onde depuis au moins 120 Ma (O'Connell et al. 1991; Olson and Bercovici 1991; Čadek and Ricard 1992; Lithgow-Bertelloni and Richards 1993) (*cf* **figure 2.2**). Il existe donc bien une composante toroïdale non négligeable dans l'écoulement du manteau terrestre. Par conséquent, tout modèle de convection dans le manteau n'incorporant pas

de conditions aux limites de plaques rigides néglige obligatoirement une partie importante des caractéristiques de l'écoulement mantellique. S'agissant de simuler les propriétés de mélange dans le manteau, on peut craindre que cela ait des conséquences importantes sur les résultats obtenus.

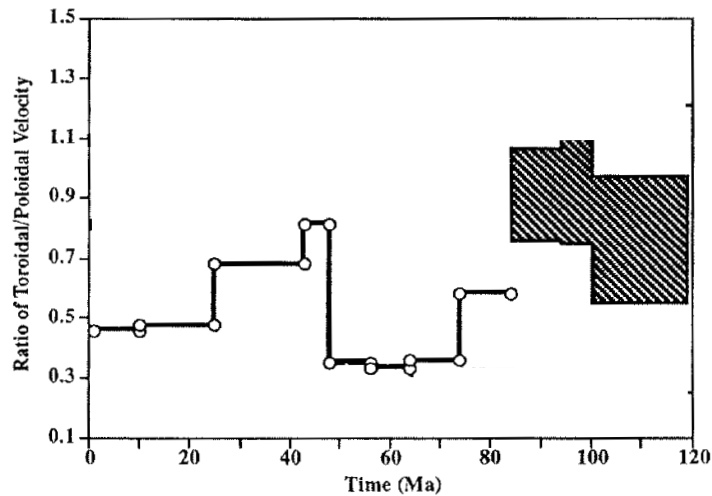


FIG. 2.2 – Rapport des vitesses toroïdales sur les vitesses poloïdales depuis 120 Ma. D'après Lithgow-Bertelloni and Richards (1993).

Ce qui précède nous conduit à deux remarques importantes à propos des propriétés de mélange du manteau :

- ★ La composante toroïdale du champ de vitesse n'est modélisable que dans un système tridimensionnel (car on a vu que l'énergie toroïdale génère des mouvements de rotation dans un plan horizontal). Dans ce contexte, on peut d'ores et déjà affirmer qu'on ne peut pas *a priori* appliquer les propriétés de mélange d'un système bidimensionnel à un écoulement réel.

- ★ Les modèles de convection tridimensionnels stationnaires ou dépendants du temps de Schmalzl *et al.* (94, 95) n'incorporent pas de conditions aux limites de plaques rigides en surface. Comme dans les modèles bidimensionnels, l'énergie cinétique y est par conséquent purement poloïdale. On peut donc émettre des doutes sur la pertinence des résultats obtenus.

A l'aide du modèle développé ci-dessous, nous allons donc tester le rôle de la présence simultanée d'énergie cinétique poloïdale et toroïdale sur les propriétés de mélange d'un écoulement tridimensionnel.

### 2.1.2 Description du modèle et méthode de résolution

Dans cette étude, on se place dans le cadre d'un modèle semi-cinématique, c'est-à-dire que les mouvements de convection sont générés à la fois par des vitesses imposées à la surface du système (simulant des conditions aux limites de plaques lithosphériques), et par des zones *a priori* plus denses que leur environnement (simulant des plaques lithosphériques en subduction). On ne prend jamais en compte les variations du champ de température, responsables des mouvements de convection dans le manteau. Mathématiquement parlant, cela signifie qu'on ne résout pas l'équation de conservation de la chaleur pour simuler des mouvements de convection.

On suppose que :

- le fluide est incompressible
- les variations du champ de gravité due aux anomalies de densité sont négligeables (fluide non-autogravitationnel).

On choisit une géométrie cartésienne.

Le champ de vitesse est solution du système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 & (1) \\ \eta \Delta \vec{v} = \vec{\nabla} P + \delta \rho \vec{g} & (2) \\ \tau = \eta \dot{\epsilon} - PI & (3), \end{array} \right. \quad (2.3)$$

avec :

- $\eta$ , viscosité dynamique
- $P$  la pression non-hydrostatique
- $\delta \rho$  l'excès de densité par rapport à la moyenne à une profondeur donnée
- $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur
- $\tau$  le tenseur des contraintes
- $\dot{\epsilon}$  le tenseur du taux de déformation

–  $I$  la matrice identité.

On écrit la solution de la manière suivante (Ricard 1986) :

$$\begin{cases} v_z(x, y, z) = u_{1nm}(z)f^{nm}(x, y) \\ v_x(x, y, z) = u_{2nm}(z)\frac{\partial f^{nm}}{\partial x} + v_{1nm}(z)\frac{\partial f^{nm}}{\partial y} \\ v_y(x, y, z) = u_{2nm}(z)\frac{\partial f^{nm}}{\partial y} - v_{1nm}(z)\frac{\partial f^{nm}}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{zz}(x, y, z) = u_{3nm}(z)f^{nm}(x, y) \\ \tau_{xz}(x, y, z) = u_{4nm}(z)\frac{\partial f^{nm}}{\partial x} + v_{2nm}(z)\frac{\partial f^{nm}}{\partial y} \\ \tau_{yz}(x, y, z) = u_{4nm}(z)\frac{\partial f^{nm}}{\partial y} - v_{2nm}(z)\frac{\partial f^{nm}}{\partial x} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} P(x, y, z) = \tilde{P}_{nm}(z)f^{nm}(x, y) \\ \delta\rho(x, y, z) = \tilde{\delta\rho}_{nm}(z)f^{nm}(x, y) \end{cases}$$

Les fonctions  $f_{nm}(x, y)$  représentent les fonctions de base dans l'espace de Fourier, et s'écrivent :

$$f_{nm}(x, y) = e^{i(k_n x + k_m y)}. \quad (2.5)$$

On peut montrer très simplement que le vecteur  $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  représente la partie poloïdale de l'écoulement, tandis que  $V = (v_1, v_2)$  représente la partie toroïdale.

En reportant la solution 2.4 dans le système 2.3, on trouve que les parties poloïdale et toroïdale se découpent, pour donner naissance à deux équations différentielles indépendantes :

$$\frac{dU}{Dz} = M_1 U + N, \quad (2.6)$$

$$\frac{dV}{Dz} = M_2 V, \quad (2.7)$$

avec :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & k_{nm}^2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1/\eta \\ 0 & 0 & 0 & k_{nm}^2 \\ 0 & 4k_{nm}^2\eta & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/\eta \\ \eta k_{nm}^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

et

$$N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\rho}g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$(k_{nm}^2 = k_n^2 + k_m^2).$$

La solution est alors calculée grâce à une méthode classique de propagateurs, déjà utilisée de nombreuses fois dans ce cadre (Ricard et al. 1984; Vigny 1989; Corrieu-Sipahimalani 1995) :

$$U(z) = e^{M_1(z-z_0)}U(z_0) + \int_{z_0}^z e^{M_1(z-\tilde{z})}N(\tilde{z})d\tilde{z} \quad (2.11)$$

$$V(z) = e^{M_2(z-z_0)}V(z_0). \quad (2.12)$$

Les matrices  $e^{M_1(z-z_0)}$  et  $e^{M_2(z-z_0)}$  sont appelées respectivement *propagateurs poloïdal* et *toroïdal*, car elles propagent la solution de  $z_0$  à  $z$ . Connaissant les conditions aux limites de l'écoulement (*cf* section suivante), on est capable de déterminer les vecteurs  $U$  et  $V$  en tout point du système. Il suffit ensuite d'effectuer une transformée de Fourier pour obtenir le champ de vitesse. Le lecteur trouvera l'essentiel de la méthode numérique de résolution en **annexe B**.

En introduction de cette section, nous avons précisé que les mouvements du fluide sont générés par deux causes différentes : d'une part des vitesses imposées en surface qui simulent les conditions imposées par des plaques lithosphériques rigides ; d'autre part des zones plus denses que le manteau moyen qui représentent des plaques lithosphériques en subduction. Dans le calcul nu-

mérique, ces deux causes sont découplées. On résout d'abord le système sans anomalie de masse ( $N \equiv 0$ ) avec des vitesses imposées non nulles en surface. Dans un deuxième temps, on reprend les équations avec des anomalies de masse (dont les positions sont fixes et définies *a priori*), et on impose que les vitesses soient nulles en surface (surface bloquée). Enfin, on additionne les deux champs de vitesse. Tout se passe comme si vitesses surfaciques et masses plongeantes étaient l'expression d'un seul et même phénomène, le mouvement des plaques lithosphériques *à la surface* et *dans* le manteau. Dans ce contexte, on devrait normaliser les deux champs de vitesse de telle sorte que l'équilibre des forces soit respecté, c'est-à-dire que la *traction* due aux plaques en subduction (*slab pull*) égale la *résistance* visqueuse du manteau (*mantle drag*). Dans la Terre, ce bilan des forces est incomplet, car il néglige l'effet de l'épaississement et du refroidissement de la lithosphère (*ridge push*) qui induit une force dans le même sens que le *slab pull*. Afin de rendre compte de cet effet dans notre modèle, nous avons normalisé les deux champs de vitesse l'un par rapport à l'autre en choisissant :

$$\tau_m^{surf} = \frac{1}{2}\tau_p^{surf}, \quad (2.13)$$

où  $\tau_p^{surf}$  est la contrainte totale à la surface du système imposée par les vitesses de plaques, et  $\tau_m^{surf}$  son équivalent pour le champ de vitesse dû aux masses internes. Le coefficient 1/2 indique que les forces motrices du *slab pull* sont ici considérées comme égales à celles du *ridge push*.

### 2.1.3 Conditions aux limites

On se place en géométrie cartésienne, avec une boîte parallélépipédique de section horizontale carrée, et dont la hauteur vaut un tiers du côté.

Les conditions aux limites sont les suivantes :

- pas de vitesse verticale en haut et en bas de la boîte (surface imperméable) :

$$\begin{aligned} u_1^{bas} &= 0 \\ u_1^{surf} &= 0 \end{aligned}$$

- pas de contrainte cisailante à la frontière noyau-manteau (surface libre) :

$$\begin{aligned} u_4^{bas} &= 0 \\ v_2^{bas} &= 0 \end{aligned}$$

- vitesse connues en surface :

$$\begin{aligned} \text{forçage par plaques lithos. :} & \quad \begin{cases} u_2^{surf} \text{ connu, non nul} \\ v_1^{surf} \text{ connu, non nul} \end{cases} \\ \text{forçage par masses internes :} & \quad \begin{cases} u_2^{surf} = 0 \\ v_1^{surf} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- périodicité horizontale de la solution. Ceci découle de l'utilisation de transformées de Fourier horizontales. Le champ de vitesse calculé se reproduit à l'infini selon le motif de base calculé dans la boîte parallélépipédique de départ.

Dans la **figure 2.3**, on a représenté le champ de vitesse imposé en surface ainsi que la position des anomalies de masses. Ces conditions aux limites excitent à la fois les composantes poloïdale et toroïdale du champ de vitesse.

Le lecteur pourra trouver en **annexe C** différentes coupes de champs de vitesse calculés à l'aide de la méthode décrite plus haut.

### 2.1.4 Advection des traceurs

Dans la **section 1.2**, nous avons précisé que nous nous placerions toujours dans le cadre d'une description lagrangienne, c'est-à-dire que nous calculerions les trajectoires de particules au sein du fluide, plutôt que le devenir d'un champ de concentration.

Nous supposons que les particules sont des traceurs *passifs*, c'est-à-dire qu'elles ont toujours les mêmes propriétés physiques que leur environnement (viscosité, densité, *etc* ...). De ce fait, le calcul de leurs trajectoires est parfaitement découplé de celui du champ de vitesse, car elles n'agissent pas sur l'écoulement.

Numériquement parlant, nous intégrons les trajectoires déterminées par la



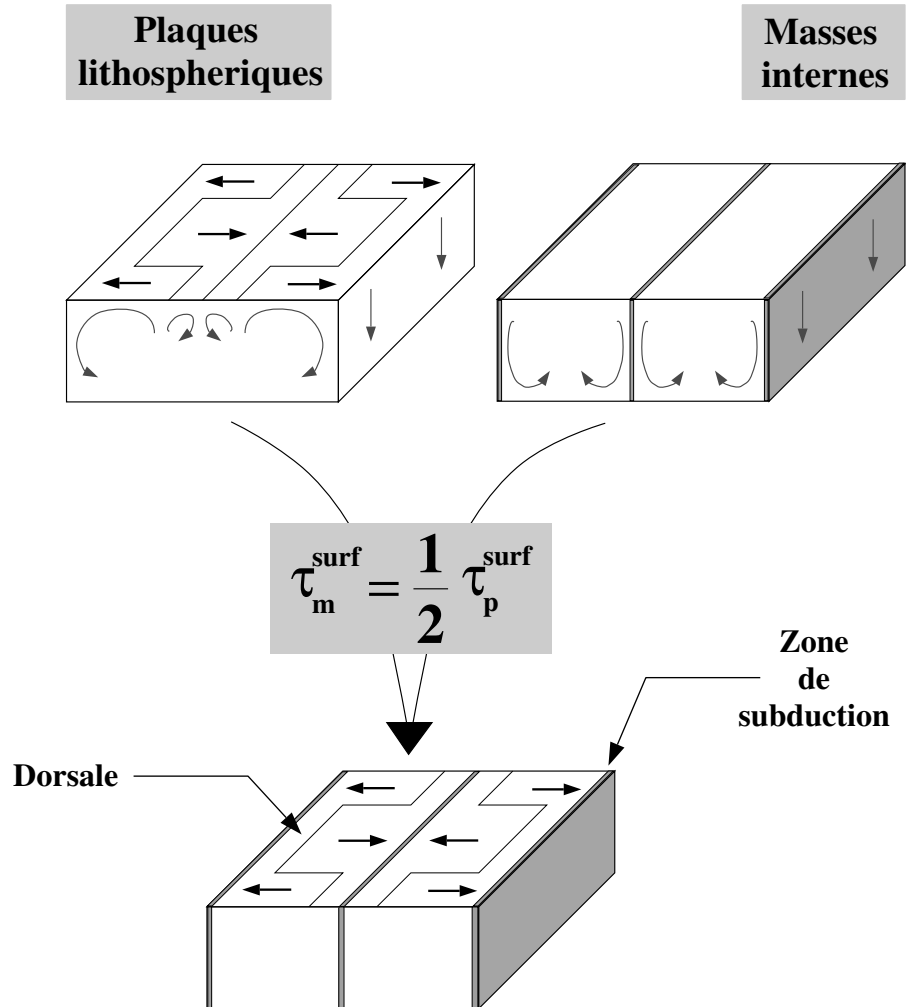


FIG. 2.3 – Conditions aux limites imposées en surface. Les zones de divergence/convergence d’une part, et de cisaillement d’autre part, simulent des dorsales, zones de subduction et failles transformantes. Elles génèrent des composantes poloïdale et toroïdale.

donnée d'une position initiale et de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z) \end{array} \right. , \quad (2.14)$$

en utilisant la méthode de Runge-Kutta à pas variables au cinquième ordre (Press et al. 86).

Deux alternatives sont possibles pour étudier les propriétés de mélange de l'écoulement : on peut tout simplement placer un ensemble de traceurs formant une tache dense dans le système et observer son évolution au cours du temps. Pourtant, il peut paraître plus judicieux de ne s'intéresser qu'au comportement du contour de cette tache. En effet, il est suffisant de déterminer le contour d'une hétérogénéité pour la décrire dans son ensemble, et cette opération est *a priori* moins coûteuse en temps de calcul puisqu'elle évite de déterminer la trajectoire de la majeure partie des traceurs.

Cette technique, largement développée en météorologie sous le nom de *contour advection with surgery* (Dritschel 1988; Mariotti et al. 1994; Waugh and Plumb 1994; Mariotti et al. 1997), présente cependant certaines difficultés. En effet, il faut d'une part garantir que le contour soit toujours décrit avec le même degré de précision en tout point. Cette précision dépend de la complexité du contour (circonvolutions multiples ou bien surface quasi-lisse), c'est-à-dire *grosso modo* du rayon de courbure local. Supposons que l'on advecte pendant un temps  $\delta t$  un certain nombre de traceurs initialement placés le long du contour d'une hétérogénéité. Après  $\delta t$ , l'espacement entre deux traceurs voisins ne sera pas *a priori* conservé. Suivant la géométrie de l'écoulement, certaines régions vont concentrer les traceurs, d'autres au contraire en seront dépourvues. Il faut donc régulièrement veiller à redistribuer les traceurs le long du contour en les concentrant là où la courbure est importante.

D'autre part, on a vu précédemment (**section 1.2.7**) qu'un écoulement

chaotique conduit à la formation de circonvolutions de plus en plus fines et de plus en plus complexes. Par conséquent, le nombre de traceurs nécessaires pour décrire le contour avec une précision constante doit augmenter au cours du temps. Cette croissance alourdit évidemment les calculs, et peut ruiner les performances numériques de la technique d'advection d'un contour si on ne fixe pas un seuil limite (une échelle de coupure) pour la distance minimale autorisée entre deux traceurs voisins.

Enfin, il peut arriver que la taille de certaines circonvolutions (formant de longs filaments extrêmement minces) devienne inférieure à la résolution du calcul d'advection et/ou à des échelles où le mélange ne s'effectue plus par advection mais par diffusion : on doit supprimer ces circonvolutions, car elles n'ont pas de sens physique. Ceci correspond à la procédure dite de *surgery* (chirurgie).

En conclusion, les deux méthodes d'observation des propriétés de mélange (advection d'un ensemble de traceurs ou bien advection du contour) présentent des avantages différents. L'advection d'un contour, bien que relativement complexe, peut se révéler plus efficace que l'advection de l'ensemble des traceurs en termes de temps de calcul. Pourtant, la suppression des filaments trop fins n'est pas anodine : elle conduit à une perte constante de matière à mesure que la tache s'homogénéise au sein du fluide, ce qui finit par être absurde. Enfin, on peut remarquer que cette technique a été développée pour des écoulement bidimensionnels. Il semble peu probable qu'on puisse l'étendre de manière simple à des cas tridimensionnels.

Dans les expériences numériques qui suivent, nous n'utiliserons pas la procédure d'advection d'un contour. Néanmoins, nous présentons dans les **figure 2.4** et **figure 2.5** les résultats comparés de l'advection de plusieurs ensembles de traceurs d'une part, et de leurs contours respectifs d'autres part, au sein d'un écoulement convectif bidimensionnel dépendant du temps.

### 2.1.5 Outils d'observation

Nous avons vu dans la **section 1.2** le principe et l'intérêt des *sections de Poincaré* pour décrire les propriétés de mélange d'un écoulement donné. Leur

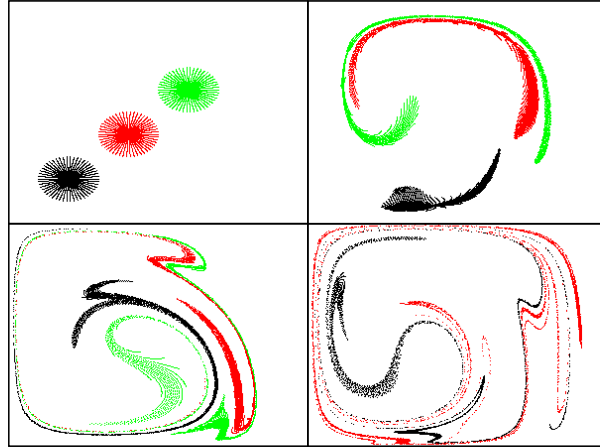


FIG. 2.4 – Advection de trois ensembles de traceurs. Pour plus de clarté, on a supprimé les traceurs appartenant à l'une des trois taches initiales dans le dernier graphe. A la fin de l'expérience, les contours de chaque ensemble sont très mal définis du fait de la faible densité de traceurs par endroits.

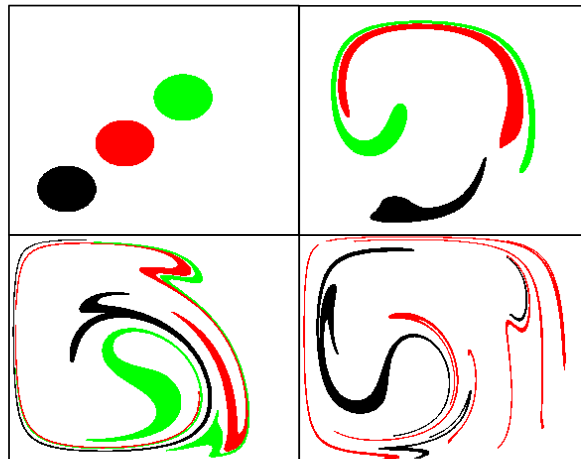


FIG. 2.5 – Même expérience que dans la figure précédente, en advectant seulement le contour de chaque tache. Contrairement au cas précédent, les contours sont parfaitement déterminés tout au long de l'expérience. Dans le dernier graphe, on peut remarquer l'absence de certains filaments par rapport à la **figure 2.4**. Ceci indique que l'on a perdu une petite quantité de matière.

calcul ne présente pas de difficulté particulière, car il consiste simplement à déterminer la position des intersections multiples entre une trajectoire et un plan donné dans le système.

Nous avons également introduit les *exposants de Lyapunov*, qui constituent un outil quantitatif de la description du pouvoir de mélange. La méthode de calcul théorique, qui fait appel à la matrice jacobienne du champ de vitesse, n'a pas été utilisée ici. Rappelons la définition d'un exposant de Lyapunov, noté  $\sigma_i$ , associé à la direction propre  $e_i$  :

$$\sigma_i = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ |\vec{r}_0| \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{|\vec{r}|}{|\vec{r}_0|} \right), \quad (2.15)$$

avec  $\vec{r}_0 = a\vec{e}_i$ . Physiquement parlant, il suffit simplement de calculer le taux d'étirement exponentiel d'un segment infinitésimal le long d'une direction propre donnée. Nous avons vu que pour chaque trajectoire il y a trois exposants de Lyapunov dans un système tridimensionnel, mais qu'il suffit par exemple de connaître le plus grand des trois pour déterminer les deux autres (l'un est forcément nul, et la somme des trois doit être nulle). Lorsqu'on ne connaît pas analytiquement le champ de vitesse, le problème est de déterminer les trois directions propres, c'est-à-dire les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de la matrice jacobienne du champ de vitesse. Pourtant, on peut s'affranchir de cette difficulté en remarquant qu'un segment infinitésimal, initialement orienté de manière aléatoire, va naturellement s'aligner le long de la direction propre associée au plus grand des exposants de Lyapunov, car elle correspond à la direction d'élongation maximale (*cf figure 2.6*).

Dans nos calculs, nous avons donc placé un segment infinitésimal (matérialisé par deux traceurs très proches) avec une orientation quelconque dans le système, puis nous avons mesuré son taux de croissance exponentielle. On suppose que l'erreur commise au début, c'est-à-dire lorsque le segment n'est pas encore totalement aligné le long d'une direction propre, est négligeable pour des temps d'advection suffisamment longs.

La mesure des exposants de Lyapunov doit être effectuée localement, le long d'une trajectoire donnée. Plus la longueur du segment est grande, plus la me-

sure est fausse. Il faut donc régulièrement renormaliser l'éloignement entre ses deux extrémités (cf **figure 2.7**).

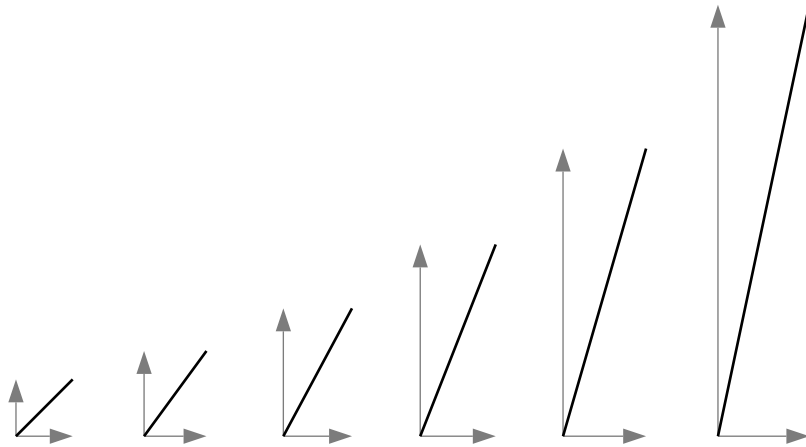


FIG. 2.6 – Un segment aléatoirement orienté s'aligne peu à peu le long de la direction d'élongation maximale.

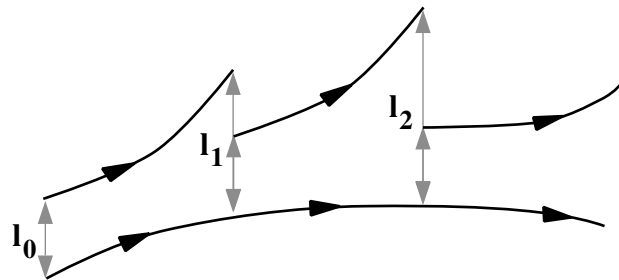


FIG. 2.7 – Après chaque pas de temps, on renormalise l'éloignement entre les deux traceurs. A la fin, l'élongation totale  $\frac{l_{tf}}{l_0}$  vaut :  $\frac{l_1}{l_0} \times \frac{l_2}{l_0} \times \dots \times \frac{l_n}{l_0}$ .

## 2.2 Mélange chaotique ou régulier dans le manteau terrestre

Dans ce qui suit, nous présentons une première série de résultats de notre modèle, qui concerne l'approche physique des propriétés de mélange du manteau.

Ces résultats ont fait l'objet d'un article publié dans *Earth and Planetary Science Letters* en 1998.

Le champ de vitesse calculé est seulement induit par des vitesses imposées en surface simulant des plaques lithosphériques (pas de forçage par masses internes), et il est stationnaire. La viscosité est uniforme.

Nous montrons que la présence simultanée des composantes poloïdale et toroïdale permet d'isoler des zones régulières au sein d'un système largement chaotique. Les frontières entre zones régulières et chaotiques sont imperméables, et pourraient s'interpréter comme les limites d'entités chimiquement et isotopiquement distinctes. Ceci pourrait expliquer les apparentes contradictions entre les observations géochimiques d'une part (présence certaine de réservoirs distincts dans le manteau), et les contraintes issues de la géophysique d'autre part (convection vigoureuse, mieux expliquée dans le cadre d'un modèle à une seule couche).

## REGULAR VS. CHAOTIC MANTLE MIXING

Sylvaine Ferrachat, Yanick Ricard

Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

Fax : 33 4 72 72 86 77

E-mail : sferrach@geologie.ens-lyon.fr, ricard@geologie.ens-lyon.fr

### Abstract

Most quantitative models of mantle mixing have been based on simulations of tracer advection by 2-D flows. The present work shows that the mixing properties of 3-D time-independent flows cannot be understood or extrapolated from previous 2-D models. Steady convective flows appropriate to simulate a uniform fluid with large viscosity are restricted to poloidal components. They seem to have regular streamlines. However, the existence of plates on the Earth's surface, imposes the existence of a strong toroidal field. Flows where both poloidal and toroidal components are present can yield chaotic pathlines which are very efficient in mixing the mantle. Within areas of turbulent mixing where the stretching increases exponentially with time, regular islands of laminar stretching persist in which unmixed material can survive. Our findings indicate that the intrinsic three-dimensionality of convection coupled with plates as much as its time-dependence must be included in numerical models to understand the mixing properties of the mantle. As the viscosity is significantly larger in the lower mantle than in the upper mantle, the toroidal component of the flow is confined to the upper mantle where a more thorough mixing should take place.

### Introduction

Mantle geochemical heterogeneities are created at shallow level by partial melting under ridges and erosion/sedimentation processes. These heterogeneities, frozen in the cooling oceanic lithosphere, are ultimately destroyed by mantle convection. Samples from the mantle are extracted at ridges and hotspots. Their elemental and isotopic composition suggests the existence of various geochemical reservoirs at depth (e.g. [1-4]). One of them, the MORB reservoir, is well mixed and is the source of ridge basalts. The isotopic heterogeneity of



other reservoirs shows that they have been isolated for billion years. Understanding the rehomogenization and mixing in the mantle is thus fundamental for interpreting these observations.

As diffusion in solid phases is very slow even at mantle temperature, material heterogeneities must be thinned down to meter size before diffusion becomes efficient. Therefore the behavior of heterogeneities can be studied from models where tracers are simply advected. The pathline of a tracer reads

$$\frac{d x_i}{d t} = u_i, \quad (1)$$

where  $t$  is the time,  $x_i(t)$  are the coordinates of the tracer and  $u_i$  are the velocity components. Various papers have studied the implications of equation (1) for geochemistry. What has been done is to simulate the mantle circulation in 2-D models where the flow is induced by imposing plate-like velocities at the surface, is computed by a 2-D convection code, or both (e.g., [5-9]). Previous work has generally assumed that the tracers are passive, i.e. have mechanical properties comparable to that of the surrounding mantle. In that case, the background velocity is independent of the distribution of tracers. More recently, this assumption of passive tracers has been removed in 2-D studies where the entrained bodies have different viscosities [10] or densities [11]. Tackling the problem of the mixing properties of the mantle using a 3-D flow has been addressed only by *Gable et al.*, [12] and *Schmalzl et al.*, [13-14].

### Considerations on the Flow Pattern

Assuming that the mantle is incompressible, the mass conservation equation allows us to express in the most general way the velocity field into two components. They are known as the poloidal (or spheroidal) and toroidal components and can be deduced from two 3-D scalar fields  $P$  and  $T$ . The general form of

equation (1) on Cartesian coordinates with  $z$  vertical, reads :

$$\frac{d x}{d t} = \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x}, \quad (2a)$$

$$\frac{d y}{d t} = -\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}, \quad (2b)$$

$$\frac{d z}{d t} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}. \quad (2c)$$

The poloidal flow has a 3-D structure without vertical vorticity, the toroidal flow corresponds to rotations in horizontal plane. In spherical coordinates the poloidal flow has no radial vorticity, the toroidal flow is confined on spherical shells. In other words, the surface expressions of the mantle poloidal flow are ridges and trenches, the surface expressions of the toroidal flow are strike slip faults.

This differential system is somewhat akin to the Hamiltonian system of classical mechanics. When the flow is only two dimensional, system (2) is equivalent to a Hamiltonian system with one degree of freedom in the steady case. This means that a conserved quantity can be defined, or equivalently, that the velocities are perpendicular to the equipotentials of a stream-function. For example, when the flow is confined to the  $xy$  plane,  $T$  is conserved. In a steady flow, the pathlines described by the tracers also correspond to streamlines. Therefore, in 2-D time-independent flows, the trajectories are closed loops that tracers follow indefinitely.

In the 3-D case, the larger dimensionality of system (2) could lead to a much more complex dynamics. This system can be shown to be equivalent to a two-degrees of freedom Hamiltonian (e.g. [15-16]). In this case one can expect that the system will yield a chaotic behavior even in the case of a steady flow. For example, the so-called ABC flows [17], other space periodic flows [18] or bounded flows [19-20] are steady flows yielding chaotic pathlines. While these flows are quite idealized and are not appropriate for the Earth mantle, they give a glimpse on the intricacy of chaotic and regular regions in 3-D flows.

In the case of Rayleigh-Bénard convection, chaos is present at finite Prandlt

number [21]. On the contrary, *Schmalzl et al.*, [13], have found that 3-D steady-state convection at infinite Prandtl number is associated with a non-chaotic behavior. In their numerical experiments the tracers are found to be confined at the surface of tori. The intersections of these tori by planes define closed loops. The trajectory of a tracer at the surface of a torus can either be periodic or may densely fill the surface of the torus. Even in this case, the strong confinement of the trajectories forbids an efficient mixing.

*Schmalzl et al.*, [13] used a convection model at infinite Prandtl number and with constant viscosity. In this case, it can be shown that the toroidal field  $T$  of equation (2), is zero (e.g. [22]). It seems thus, that although kinematically imposed 3-D flows could induce chaotic pathlines [19] even when they are reduced to poloidal components [20], 3-D poloidal flows which are solutions of convection equations at infinite Prandtl number and with free surface conditions cannot. In the case of thermal convection, the presence of toroidal motion, either naturally excited at low Prandtl number [21] or kinematically imposed [19], can be the cause of chaotic motions.

At the surface of the Earth, the poloidal and toroidal components of motion have been roughly equal for tens of million years [23-25] as the consequence of the existence of rigid and independent tectonic plates. The problem of mixing in the mantle has never been studied in a regime where kinetic energies described by the poloidal and toroidal components are comparable.

### **A Simple Flow Pattern**

In this paper, we consider a circulation model driven by surface motions only. We use a 3-D Cartesian geometry and confine the flow to a box of square horizontal section whose depth  $H$  is two third of the section width  $L$ . To excite both poloidal and toroidal flows, the surface is divided into two rigid plates. The two plates are separated by a "transform fault" and two "ridges". The two ridges have the same length equal to  $L/2$ . Each plate has a constant and uniform velocity parallel to the transform fault. We impose free slip conditions at the bottom of the box and reflecting boundary conditions on the four lateral

faces. Therefore, the boundary at the front simulates a "subduction". This very simple geometry is described in Figure 1 in a case where one plate remains fixed. A schematic view of the flow imposed at the surface and computed at the front and the right sides of the box is also depicted.

The numerical solution for the induced 3-D cavity flow can be easily found through a Fourier transform in the horizontal directions. The vertical variations of the flow are obtained by means of a classic propagator method [26]. The velocity flow is computed on a  $128 \times 128 \times 129$  grid. Within each element, the velocity components are interpolated from the eight closest neighbors using a trilinear scheme. We define the poloidal and toroidal amplitudes  $\sigma_P$  and  $\sigma_T$  of a flow by

$$\sigma_P^2 = \int \left[ \left( \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (3a)$$

$$\sigma_T^2 = \int \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy, \quad (3b)$$

where the integrals are computed on the top surface of the box. We can modify the toroidal/poloidal ratio of the flow,  $\sigma_T/\sigma_P$ , by modifying the length of the transform fault. When no transform fault is present, the flow field is purely 2-D and poloidal. When the length of the transform fault is  $L$ , the toroidal field attains its maximum amplitude but a poloidal component still exists. Indeed, the reflecting boundary conditions impose a subduction on the front face of the box and a ridge on the back face. With this geometry, the ratio between toroidal and poloidal amplitudes reaches 58%.

In the computation of the flow, poloidal and toroidal velocity components decouple. Therefore, for a given choice of surface plate motion, we can also study the effects of the two components separately or by adding them in variable proportions. The velocity fields that can be obtained by arbitrarily mixing the two components satisfy the boundary conditions of zero normal velocity on the faces of the box and of free slip at the vertical faces and at the bottom of the box. However, the composite surface velocity does not correspond to the motion

of rigid plates anymore, unless the two components are in the same proportion as in the original case.

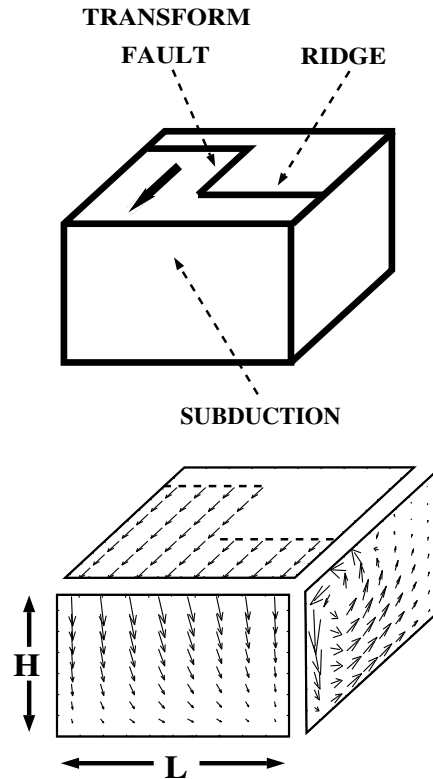


FIG. 1 – Box of aspect ratio  $2/3$  in which the computation is performed. The flow is only driven by a surface motion mimicking a real plate with a segmented ridge, a transform fault and a subduction zone (top). The resulting flows at the surface, the front and the right faces are depicted at the bottom.

### Regular and Chaotic Behavior

When the computation of the three velocity components  $u_i$  is done, the motions of tracers are computed from the advection equation 1. The advection equation is solved by a fifth-order step adaptive Runge-Kutta method. As the pathlines may be very complex in 3-D, we resort to Poincaré mapping, i.e., we simply consider the successive intersections between a pathline and a fixed

plane that we choose as horizontal and located at mid-depth of the box.

Figure 2 depicts various experiments made with different geometries where the length of the transform fault is varied from 0 (2a) to  $L$  (2f). The corresponding toroidal/poloidal ratios are 0, 11, 23, 32, 47 or 58%. The plate geometries and surface motions (one fixed, one moving) are indicated with dashed lines. Only a few tracers are followed in their motions and each tracer is represented by a different color. The number of tracers, their initial positions and the total duration of the advection are for the moment, without importance. They have been chosen only to highlight the geometry of the Poincaré sections. Although the flow pattern is merely a simple roll in all the experiments, the behaviors of the pathlines change drastically with the length of the transform fault.

When the flow is purely poloidal and 2-D, (2a), the trajectories are closed loops in vertical planes perpendicular to the ridge. Thus, the Poincaré section for each tracer consists of only a couple of points (in Figure 2a, 24 tracers are followed and give rise to 24 couples of points). When the toroidal component has a small amplitude (2b), the Poincaré section reveals, at least locally, regular motions mapped through concentric loops. This indicates that the tracers orbit on the surface of embedded tori. The axis of the tori are parallel to the ridges. The tracers are crossing the mid-depth plane going upward below the fixed plate and downward below the moving plate. Regular island chains are also observed between loops. For example, a green tracer draws a 7-island chain in the blow-up of panel 2b. These islands are cross-sections of invariant tubes winding between the tori.

When the toroidal/poloidal ratio increases, the domain of regular motions with loops and island chains decreases in size. In the case (2c), only a very small region of loops surrounded by a 3-island chain persists (see blow-up of panel 2c). A further increase in the toroidal/poloidal ratio (2d) apparently destroys all regularity in the pathlines. When the transform fault is even longer (2e), the pathlines regain some regularity as the poloidal flow itself becomes less twisted. In the extreme case where the transform fault cuts the surface into two rectangular plates (2e), the Poincaré sections reduce to couples of points.

The trajectories are again closed loops although they are bent and do not lie on vertical planes like those of case (2a).

The numerical experiments depicted in Figure 2 suggest a relationship between the variations of the toroidal/poloidal ratio and the amount of ergodicity in the pathlines. The evolution of the topology of the Poincaré sections from (2a) to (2d) is indeed comparable to the well-known transition to chaos for near-integrable Hamiltonian systems [27-29]. The regions close to elliptic points (i.e. surrounded by closed loops) are stable under the effect of a perturbation whereas the tracers start wandering erratically next to the hyperbolic points (i.e. between two islands). The invariant structures of low periodicity are the most stable : as the percentage of toroidal/poloidal ratio increases, more and more winding tubes and more and more tori are destroyed until the flow appears ergodic.

However, the transition observed from (2d) to (2f) shows that the presence of a large amount of vertical vorticity in addition to a poloidal flow does not forbid the existence of regular pathlines. This indicates that the poloidal field, by itself, must be complex enough to be associated with chaotic pathlines. One thus wonders whether the changes in the Poincaré sections from (2a) to (2f) may not be related rather to an increase in the complexity of the poloidal field reaching a maximum in (d) than to the presence of a toroidal component.

In order to test this hypothesis we consider separately the poloidal and toroidal components of the flow field corresponding to case (2d) and add them in variable proportions before computing the Poincaré sections. These numerical experiments allows us to verify that the transition from regular to chaotic pathlines is not simply due to the changes in the geometry of each velocity component.

In Figure 3, we have mixed the toroidal and poloidal components present in the flow corresponding to Figure 2d. In Figure 3a, the flow is purely toroidal, in 3b, purely poloidal, in 3c and 3d, the toroidal/poloidal ratio is 10% and 20%, respectively. Adding the two flows with a ratio of 32% would again lead to the Poincaré section depicted in Figure 2d. In the presence of the purely toroidal

field (3a), the pathlines are very simple. As seen from inspection of equation (2), the motions are only 2-D (the vertical velocity is zero) and the pathlines are closed concentric horizontal loops (the isolines of  $T$ ) and they coincide with the Poincaré sections. In Figure 3b, the flow corresponds to the poloidal field alone. In this case, the Poincaré section shows regular structures. If the pathlines in a purely poloidal field correspond to the dynamics of an integrable Hamiltonian system, any perturbation may destroy the stability of the structures of highest periodicity. We think that the wiggles and islands drawn in the outer loops of the Poincaré section of Figure 3b reveal the existence of perturbations inherent to the numerical treatment of the problem.

Adding some toroidal components (3c and 3d) partly destroys the regularity of the sections. The transition between regularity and ergodicity already observed when the length of the transform fault is increased is again found with the same gradual destruction of tori and of island chains of large periodicity. Thus, for our cavity flow, the presence of toroidal field seems to be necessary to obtain a large domain of chaotic pathlines. Its absence explains why only regular structures are found in the numerical experiments of *Schmalzl et al.*, [13].

### **Implications for Mantle Mixing**

For a 2-D steady flow, heterogeneities are trapped by closed pathlines, the mixing is inefficient and each streamline behaves as an isolated "geochemical reservoir". In the time-dependent case, the mixing rate is related to the explicit time-dependence of the flow but the problem is to keep unmixed reservoirs as requested by geochemical observations.

The characteristics of the 3-D steady mixing is drastically different and depends upon the poloidal flow complexity and the toroidal/poloidal ratio of the flow. Figure 4 depicts the general topology of the invariant surfaces when the toroidal component has a vanishing amplitude as revealed by the Poincaré sections of Figures 2 and 3. The tracers are spiraling on the various surfaces, either tori (dark grey) or tubes, like the one light grey winding five times around



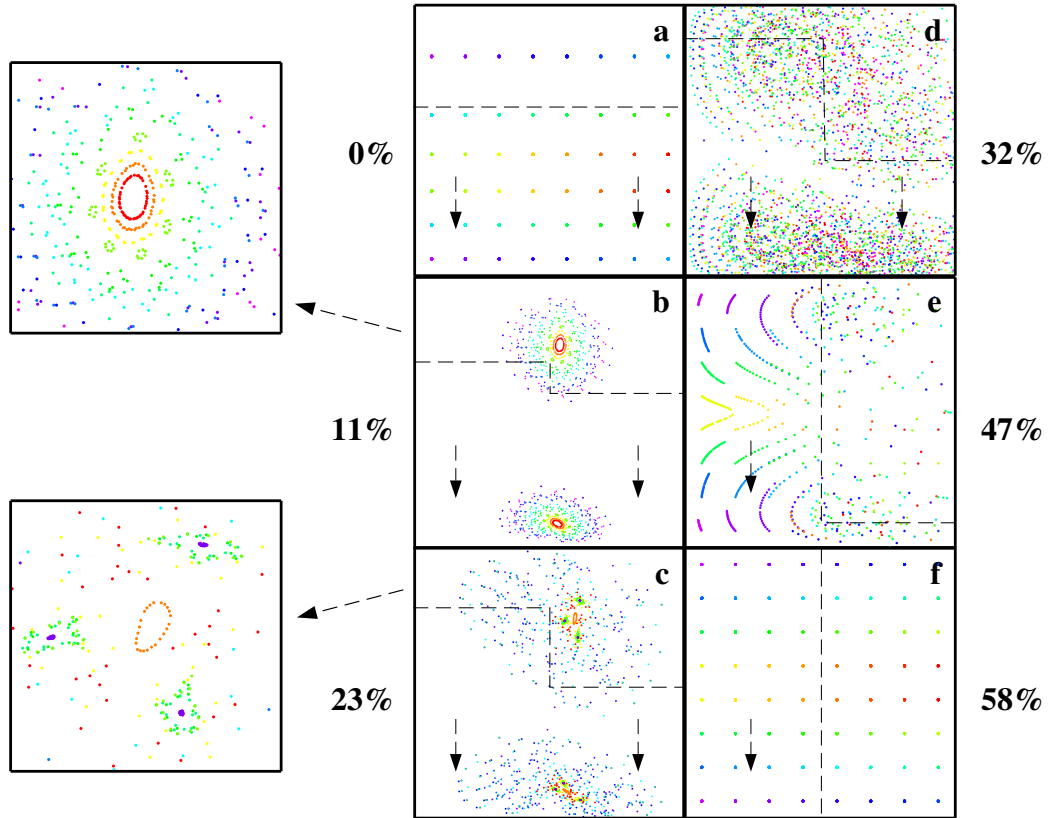


FIG. 2 – Poincaré sections obtained by plotting the intersections of the pathlines of  $\sim 50$  tracers with the horizontal mid-depth plane. Each tracer has its own color. The shapes of the surface velocities are indicated by dashed lines. The values of the toroidal/poloidal ratios are given in %. Two blow-up on details of sections (2b) and (2c) are depicted on the left hand side. The transition from (2a) to (2d) is associated with an increase in the ergodicity of the pathlines.

the inner torus. According to the ratio between the periodicities of a tracer around the small and large radii of the tori (rational or irrational), these surfaces can be densely filled or not. The mixing occurs slowly and at most on a 2-D surface. As heterogeneities remain confined on nested surfaces, an infinite number of isolated reservoirs are present.

With a small percentage of toroidal flow, some invariant tori are preserved but between them, the pathlines start wandering. The flow topology consists

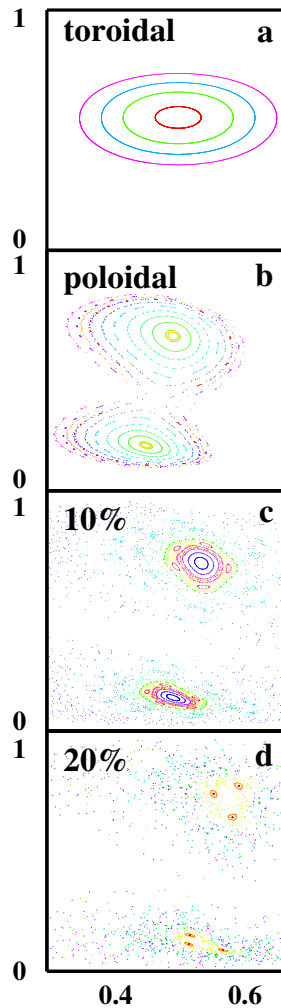


FIG. 3 – Poincaré sections obtained for various 3-D flows obtained by arbitrarily mixing the poloidal and toroidal components present in Figure 2d. In (3a), the flow is only toroidal, in (3b) poloidal. The toroidal/poloidal ratios are 10% and 20% in (3c) and (3d), respectively. Whereas the sections obtained for either a pure toroidal or a pure poloidal flow (3a and 3b) are regular, chaotic regions develop in 3c and 3d.

of stable tori like the dark grey surfaces in Figure 4, but some light grey tubes are destroyed yielding 3-D impermeable but mixed reservoirs. The presence of segregated stable tubes coexisting with chaotic advection has also been observed experimentally in other steady flows with different geometries [18]. Above some

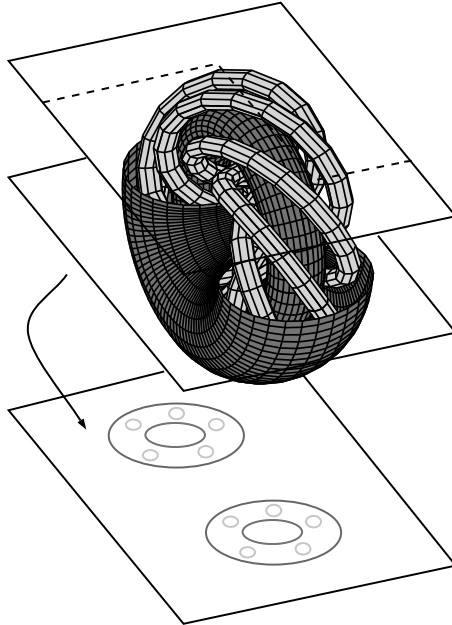


FIG. 4 – Topology of the pathlines obtained for a pure poloidal field. The tracers are spiraling around the tori and tubes. The intersection of pathlines by a plane give rise to the loops and island chains seen in Figures 2 and 3. Adding some toroidal components breaks tubes, then tori.

threshold for the toroidal energy, all tori seem to be destroyed and the whole box corresponds to a single reservoir.

It seems intuitive that the efficiency of mixing should be the fastest in regions where the flow is chaotic. However, this is not necessarily true, as mixing efficiency is not only related to stretching but also to reorientation and folding of the streak-lines. In addition, during the computations of the Poincaré sections, we never compare the duration of the advection experiment with the characteristic return time of mantle convection. In Figure 3b for example, a tracer belonging to the outermost loops has performed some 150 overturns. This is probably from 2 to 20 times the number of overturns a mantle heterogeneity can experience in the whole history of the Earth notwithstanding the obvious fact that the mantle flow is certainly not steady. The above advection experiments are only meant to reveal the behavior of a flow.

Computing the Lyapunov exponents is far more illustrative than discussing Poincaré sections to understand the implications of pathline ergodicity on mantle mixing. The Lyapunov exponents are related to the local stretching. If  $X$  is the length of a vector  $\vec{X}$  located at the position  $M$  and  $X(t)$  its length after a time  $t$ , the Lyapunov exponent  $\sigma(M, \vec{X})$  is defined by

$$\sigma(M, \vec{X}) = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ X \rightarrow 0}} \left[ \frac{1}{t} \ln \left( \frac{X(t)}{X} \right) \right]. \quad (4)$$

In a 3-D incompressible flow, there are three Lyapunov exponents at each point and their sum is zero. The existence of at least one strictly positive exponent (at most two) is a mark of chaos. This means that the stretching undergone by a tracer increases asymptotically as an exponential function of time. This phenomenon is also called turbulent mixing whereas the cases in which the Lyapunov exponents are zero (for example, when the stretching increases linearly with time) correspond to a laminar mixing [30]. Computing the three exponents in a 3-D flow is complex. However, computing the largest one is much easier when one realizes that any arbitrary  $\vec{X}$  likely has a non zero component along the eigenvector associated with the largest Lyapunov exponent and therefore will stretch at a rate controlled by this exponent.

Practically, we follow the distance between two very close tracers and re-normalize this distance periodically. The Lyapunov exponent that we obtain is certainly neither obtained for an infinitely small starting vector nor for an infinite time as would be implied by equation (4). It is preferable to call it a finite time Lyapunov exponent [28]. The numerical computation of a non-zero exponent cannot be taken as a proof of chaoticity as even a linear stretching would yield a non-zero finite time Lyapunov exponent. The finite time Lyapunov exponents have been computed for tracers located at mid depth of the box and the local stretching has been followed during 100 transit times; a transit time being the box depth divided by the plate velocity.

Figure 5 depicts the Lyapunov exponents computed in four different cases and plotted at the starting positions of the  $240^2$  tracers. The blue color corres-

ponds to low exponents. The reader must realize that the color homogeneity in the blue areas is associated with low stretching rates and therefore with mantle heterogeneity. On the contrary, the areas of visually heterogeneous green to red colors are associated with a well-mixed mantle. On the top part of the figure (5a and 5b), the flow is purely poloidal. The left panel (5a) corresponds to the poloidal part of the flow induced by only one plate moving with the velocity  $V$ . The flow is thus the same as what led to the Poincaré section of Figure 3b. In the right panel (5b), the flow corresponds to the poloidal part of the velocity obtained when the two plates are moved in opposite directions at the same velocity  $V$ . For the flows induced by the motion of rigid plates (poloidal and toroidal components together), the Lyapunov exponents are depicted in the bottom part. In (5c), only one plate moves. This corresponds to the case already studied in Figure 2d. In (5d) the two plates move in opposite directions. We scale the velocity flows in the poloidal cases to have the same surface kinetic energy than in their toroidal/poloidal counterparts. Plotting the Lyapunov exponents at the starting positions of the advected tracers rather than at the ending positions is arbitrary but easier : in the latter case the data would not have been regularly spaced on a grid. We verified however that comparable figures are obtained when the Lyapunov exponents are plotted at the ending positions.

The scale is in units of  $V/H$ , in other words a Lyapunov exponent of .0175 means that the relative stretching is of order  $e^{.0175} = 1.018$  every  $H/V$  time. Taking  $H = 670$  km and  $V = 10$  cm/yr, a 7 km thick oceanic crust located in a spot where the Lyapunov exponent is larger than .00175 is reduced to 10 cm in less than 4.2 by. This stretching rate may seem low but is in fact fast for a steady state flow ; it is also comparable with what is inferred from field and geochemical observations by *Allègre and Turcotte* [31]. However, scaling this toy model to the real Earth is rather arbitrary as the mixing properties have a strong dependency on the details of the flow pattern [32].

The differences between the Lyapunov exponents computed for purely poloidal flows (5a and 5b) and plate driven flows (5c and 5d) are obvious. The

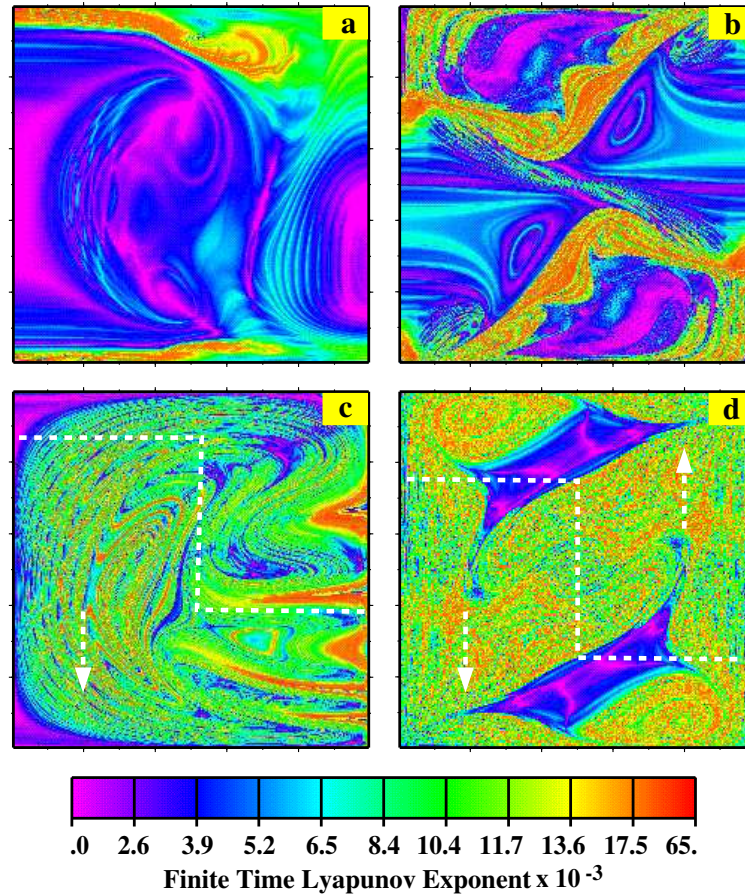


FIG. 5 – Finite time Lyapunov exponents for tracers initially located at mid-depth in the box. The flows are either poloidal (top) or correspond to cavity flows induced by rigid plates (bottom). In the left column only one plate is moving whereas the two plates are moving in opposite directions in the right column as shown in the bottom row. The differences between regular and chaotic regions are obvious. The large area of laminar mixing shrinks when toroidal components are present. Islands of laminar mixing can coexist with ergodic regions (5d).

exponents are on average much larger in the plate driven flows than in the purely poloidal flows; the presence of the toroidal component enlarges the ergodic areas. The areas of chaoticity are sheeted. Even in the pure poloidal cases some seemingly chaotic zones exist. This observation is puzzling. It seems to

contradict the conclusions of *Arter*, [21] or *Schmalzl et al.*, [13] that suggest the inexistence of pathline chaoticity in Rayleigh-Bénard convection with infinite Prandtl number, i.e, when the flow is only poloidal. We are aware however, that the computed 3-D cavity flow does not correspond to the convection pattern of a fluid with uniform viscosity. Flows induced by plates, although presenting mostly chaotic regions can also exhibit regular areas. In (5d), the blue areas of near zero Lyapunov exponents are enclosed by very sharp boundaries.

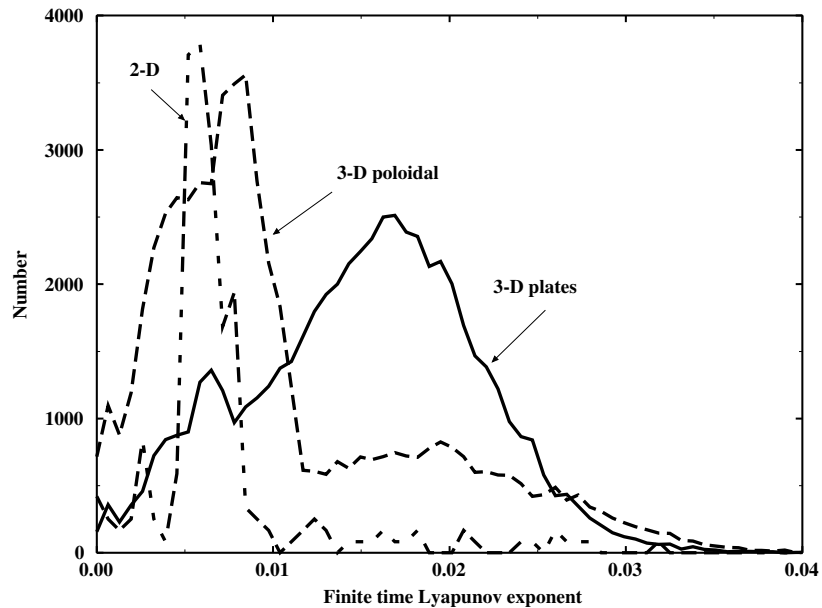


FIG. 6 – Histograms of the finite time Lyapunov exponents seen in Figures 5b and 5d. An histogram of the values obtained in the case of a pure 2-D poloidal field (a simple ridge without transform fault) is also depicted. The exponents of the 2-D case and the 3-D poloidal case are comparable. The existence of plates leads to larger exponents (curve labeled '3-D plates').

Figure 6 depicts an histogram of the Lyapunov exponents obtained with three different flow patterns having the same surface kinetic energy. The curve labeled '2-D' is for the purely 2-D poloidal case of panel (2a). In this case we know that the pathlines are regular, that the stretching is linear rather than exponential and that the computation of non-zero Lyapunov is only due to the

finite duration of the experiment. The curves '3-D plates' and '3-D poloidal' are obtained when the flow is induced by symmetrically divergent plates and by the restriction of this flow to its poloidal component. The histogram for the 3-D poloidal case has roughly the same average as the 2-D case. The flow induced by plates is associated with  $\sim 3$  times larger exponents.

## Conclusion

In previous works, steady-state Rayleigh-Bénard convection flows were apparently unable to generate Lagrangian chaos at infinite [13] or large Prandtl numbers [21]. A large Prandtl number reduces the flow to a pure poloidal field. In the present work, we have considered velocity patterns imposed by surface conditions rather than being the consequences of thermal convection in a homogeneous fluid. The presence of chaotic pathlines which are suspected in Figure 5b indicates that poloidal flows driven by imposed motions do not behave as poloidal flows induced by thermal convection. It is however clear that, if they exist, the ergodic regions in pure poloidal flows are small and restricted to cell boundaries. On the contrary, a more general flow such as that existing in the mantle lead to large areas of chaotic pathlines and to a turbulent exponential mixing even without explicit time-dependence of the flow. This result agrees with the conclusions obtained for the first time by *Bajer and Moffatt*, [19] for a general quadratic flow confined in a sphere. This explains why faster stretching rates are observed in models with plates than without [12].

An important result of our study that should be remembered when interpreting geochemical data is best illustrated by Figure 5d. In this case of two diverging plates we obtain apparently three reservoirs. The two unmixed (blue) reservoirs are in fact connected and belong to the same torus. The well-mixed (green to red) and the unmixed reservoirs are separated by impermeable boundaries. This is obtained in a situation where no density stratification and no viscosity variations are present in the convecting fluid. Transposing this model to the Earth, we see that all samples dragged above the diverging and transforming boundaries could have been sampling a shallow well-mixed mantle whereas



hotspots might have sampled an isolated unmixed domain. It would have been erroneous to conclude that the underlying fluid was stratified or heterogeneous in its physical properties.

The mantle convection is certainly not at steady state. Mixing studies using 2-D time dependent convection patterns have predicted that the upper mantle is homogenized by stirring within  $\sim 200$  my. This is much shorter than the time-scale on which geochemical isotope systems evolve (Rb-Sr or Sm-Nd for example). The conclusions about the homogenization of the lower mantle are far less certain and depend on the amount of viscosity increase with depth [8]. On the contrary, the only study on 3-D time dependent mantle convection (with poloidal flow) we are aware of, by *Schmalzl et al.*, [14], concludes that 3-D convection is far less efficient than 2-D convection to mix the mantle. Their arguments agree with those of *Davies*, [33]. In the 2-D case, the boundary layer instabilities have implicit sheet-like structures. They split the large scale flow and generate stagnation points yielding turbulent mixing. In the 3-D case, many instabilities have columnar structures which penetrate the large-scale flow without major disruption and give way to laminar mixing (zero Lyapunov exponents). If the conclusions of *Schmalzl et al.*, [14] are correct, the mixing of the mantle due to the explicit time-dependence of the convection may not be more efficient than that due to the very existence of plates.

Models of mantle dynamics agree on an increase in viscosity with depth in the mantle, the sluggish lower mantle being one or two orders of magnitude more viscous. In that case, the toroidal energy of the mantle flow is mostly confined to the upper mantle and the toroidal/poloidal ratio decreases from  $\sim 1$  in the asthenosphere to barely zero in the lower mantle [34-35]. This favors a pathline topology yielding a chaotic upper mantle on top of a quasi-regular lower mantle where independent more or less well mixed reservoirs are present. The time dependence in the convection within the Earth will reinforce the differences between the mixing rates of the active upper mantle and the stiffer lower mantle. These speculations will have to be tested by studies with both time-dependent flows and toroidal/poloidal quasi equipartition to quantify the

relative importance of these two ingredients for the mantle mixing. At any rate, our findings show that previous studies restricted to the 2-D case did not capture one fundamental aspect of the physics of mantle mixing.

*Acknowledgments : This study benefited from suggestions by and discussions with F. Albarède, U. Christensen, R. O'Connell, C. Gable and J. Schmalzl.*

## References

- [1] Allègre C. J., Chemical geodynamics, *Tectonophysics*, **81**, 109-132, 1982.
- [2] Zindler A., and S. Hart, Chemical geodynamics, *Ann. Rev. Earth Sci*, **14**, 493-571, 1986.
- [3] Hofman A. W., Chemical differentiation of the Earth : the relationship between mantle, continental crust, and oceanic crust, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **90**, 297-314, 1988.
- [4] Hart S., and A. Zindler, Constraints on the nature and development of chemical heterogeneities in the mantle, in *Mantle convection, plate tectonics and global dynamics*, W. R. Peltier ed., Gordon and Breach Science publishers, 261-387, 1989.
- [5] McKenzie D., Finite deformation during fluid flow, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **58**, 689-715, 1979.
- [6] Hoffman N. R. A. and D. P. McKenzie, The destruction of geochemical heterogeneities by differential fluid motions during mantle convection, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **82**, 163-206, 1985.
- [7] Gurnis M., G. F. Davies, Mixing in numerical models of mantle convection incorporating plate kinematics, *J. Geophys. Res.*, **91**, 6375-6395, 1986.
- [8] Christensen U., Mixing by time-dependent convection, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **95**, 382-394, 1989.
- [9] Kellogg L. H., and D. L. Turcotte, Mixing and the distribution of heterogeneities in a chaotically convecting mantle, *J. Geophys. Res.*, **95**, 421-432, 1990.
- [10] Manga M., Mixing of heterogeneities in the mantle : effect of viscosity differences, *Geophys. Res. Lett.*, **23**, 403-406, 1996.
- [11] Christensen U., and A. Hoffmann, Segregation of subducted oceanic crust in the convecting mantle, *J. Geophys. Res.*, **99**, 19,867-19,884, 1994.
- [12] Gable C. W., H. A. Stone and R. J. O'Connell, Chaotic mantle mixing : Time dependence is unnecessary, *EOS* **72**, 269, 1991.
- [13] Schmalzl J., G. A. Houseman and U. Hansen, Mixing properties of three-

- dimensional stationary convection, *Phys. Fluids*, **7**, 1027-1033, 1995.
- [14] Schmalzl J., G. A. Houseman and U. Hansen, Mixing in vigorous time-dependent 3D convection and application to the Earth's mantle, *J. Geophys. Res.*, **10**, 21,847-21,858, 1996.
- [15] Whiteman K. J., Invariants and stability in classical mechanics, *Rep. Prog. Phys.*, **40**, 1033-1069, 1977.
- [16] Cary J. R., and R. G. Littlejohn, Noncanonical Hamiltonian mechanics and its application to magnetic field line flow, *Annals of Physics*, **151**, 1-34, 1983.
- [17] Dombre T., U. Frisch, J. M. Greene, M. Hénon, A. Mehr, and A. M. Soward, Chaotic streamlines in the ABC flows, *J. Fluid Mech.*, **167**, 353-391, 1986.
- [18] Kusch H. A., and J. M. Ottino, Experiments on mixing in continuous chaotic flows, *J. Fluid Mech.*, **236**, 319-348, 1992.
- [19] Bajer K., and H. K. Moffatt, On a class of steady confined Stokes flows with chaotic streamlines, *J. Fluid Mech.*, **212**, 337-363, 1990.
- [20] Toussaint V., P. Carrière and F. Raynal, A numerical Eulerian approach to mixing by chaotic advection, *Phys. Fluids*, **7**, 2587-2600, 1995.
- [21] Arter W., Nonlinear Rayleigh-Bénard convection with square planform, *J. Fluid Mech.*, **152**, 391-418, 1985.
- [22] Ricard Y. and C. Vigny, Mantle dynamics with induced plate tectonics, *J. Geophys. Res.*, **94**, 17,543-17,559, 1989.
- [23] Hager B. H. and R. J. O'Connell, Subduction zone dip angles and flow driven by plate motion, *Tectonophysics*, **50**, 111-133, 1978.
- [24] Čadek O., and Y. Ricard, Toroidal/poloidal partitioning and global lithospheric rotation during Cenozoic time, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **109**, 621-632, 1992.
- [25] Lithgow-Berteloni C., M. A. Richards, Y. Ricard and R. J. O'Connell, Toroidal-poloidal partitioning of Cenozoic and Mesozoic plate motions, *Geophys. Res. Lett.*, **20**, 375-378, 1993.
- [26] Hager B. H. and R. J. O'Connell, A simple global model of plate dynamics and mantle convection, *J. Geophys. Res.*, **86**, 4843-4867, 1981.
- [27] Ottino J. M., The Kinematics of Mixing : Stretching, Chaos and Transport,

- Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [28] Lichtenberg A. J. and M. A. Lieberman, Regular and chaotic dynamics, Springer-Verlag, 1992.
- [29] Ott E., Chaos in dynamical systems, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [30] Olson P., D. A. Yuen and D. Balsiger, Mixing of passive heterogeneities by mantle convection, *J. Geophys. Res.*, **89**, 425-436, 1984.
- [31] Allègre C. J., and D. L. Turcotte, Implications of a two-component marble-cake mantle, *Nature*, **323**, 123-127, 1986.
- [32] Metcalfe G., C. R. Bina, and J. M. Ottino, Kinematic considerations for mantle mixing, *Geophys. Res. Lett.*, **22**, 743-746, 1995.
- [33] Davies G. F., Comment on "Mixing by time-dependent convection" by U. Christensen, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **98**, 405-407, 1990.
- [34] Vigny C., Géoïde et dynamique interne de la Terre, PhD Thesis, University of Paris-Sud Orsay, 1986.
- [35] Gable C. W., R. J. O'Connell and B. J. Travis, Convection in three dimensions with surface plates : generation of toroidal flow, *J. Geophys. Res.*, **96**, 8391-8405, 1991.

### 2.3 Conclusion et critiques

Dans ce chapitre, nous avons vu que dans le cadre de l'étude des propriétés de mélange du manteau terrestre, on ne peut pas directement extrapoler les résultats de modèles bidimensionnels, aussi complexes soient-ils. D'autre part, la présence simultanée de composantes poloïdales et toroïdales dans le champ de vitesse joue un rôle crucial sur l'efficacité du mélange. Il est possible d'obtenir des zones aux caractéristiques très différentes au sein d'un écoulement obéissant aux équations de la convection. Etant donné que notre modèle est stationnaire, nous avons montré que la dépendance temporelle du champ de vitesse présent dans le manteau n'est pas une condition nécessaire à l'efficacité du mélange, même s'il est certain qu'elle contribue à l'accroître.

Nous avons également montré en quoi la théorie du mélange dans les systèmes hamiltoniens peut se révéler utile à l'analyse du comportement des modèles étudiés.

Pourtant, si ces résultats semblent encourageants pour la compréhension du rôle de la convection dans la signature géochimique des basaltes, ils possèdent néanmoins des limites importantes, et ne doivent pas être interprétés trop directement pour la Terre. En effet, on peut imaginer que les structures régulières que nous avons mis en évidence sont échantillonnées dans les panaches. Isolées du reste du manteau, elles pourraient être responsables de la signature très particulière des OIB, alors que les MORB ne seraient l'expression que d'un manteau *normal*, à peu près homogène. Cependant, si ces structures sont préservées du mélange global, il est probable qu'elles aient conservé une forte proportion d'éléments radiogéniques tels que l'uranium, le thorium et le potassium, principales sources de chaleur dans le manteau. On peut se demander si l'excès de chaleur produite ne pourrait pas finir par les déstabiliser, les faire remonter à la surface, et finalement les réhomogénéiser à l'ensemble du manteau. Becker et al. (1999) ont étudié les contraintes thermiques liées à l'existence de larges hétérogénéités primordiales au sein du manteau, et concluent que le modèle est viable si la composition chimique particulière de ces *blobs* les rend légèrement plus denses que leur environnement (à peine quelques % pour des

hétérogénéités dont la taille caractéristique est de l'ordre de 500 km). Ceci est minéralogiquement raisonnable.

D'autre part, il a été montré (Farnetani and Richards 1995) que les panaches échantillonnent probablement très peu (moins de 10%) du manteau qu'ils traversent et échantillonnent essentiellement la signature de leur origine. Ceci est-il néanmoins suffisant pour que les zones régulières que nous avons décrites puissent être responsables de la signature des OIB ?

Enfin, nous avons vu que les frontières entre zones chaotiques et régulières sont imperméables, c'est-à-dire que le champ de vitesse y est en tout point tangent. Dans ce cas, le trajet de remontée des panaches devrait être dévié le long de ces frontières, et par conséquent ne jamais traverser la zone régulière.

En fait, on peut supposer que si de larges zones régulières existent réellement dans la Terre, elles ont une durée de vie limitée, à cause de la dépendance temporelle du champ de vitesse. En supposant que la convection du manteau possède un temps d'autocorrélation de l'ordre de 150 Ma (Bunge et al. 1998), on peut raisonnablement penser que ces structures devraient laisser des traces suffisamment importantes dans la distribution générale des éléments au sein du manteau, et pourraient être responsables de la présence d'hétérogénéités à très grande longueur d'onde (jusqu'à 10 000 km) dans le manteau (Zindler and Hart 1986; Gurnis 1986b).

## Chapitre 3

# Influence de paramètres géophysiques : Variation de la viscosité, différenciation chimique

Dans ce chapitre, nous raffinons le modèle présenté dans le chapitre précédent en incluant un saut de viscosité variable entre le manteau supérieur et le manteau inférieur d'une part, et en incorporant des caractéristiques chimiques et isotopiques à chaque traceur advecté. L'utilisation de traceurs chimiques nous permet de tester le rôle d'un éventuel stockage d'une partie de la croûte ancienne subductée dans la couche D".

Parallèlement, nous développons une méthode de calcul de temps de mélange associé à une longueur d'onde donnée, à partir d'une idée originale de Olson et al. (1984).



### 3.1 Précédentes études sur le rôle des variations de viscosité

#### 3.1.1 Variations radiales de viscosité

Plusieurs études géodynamiques (Ricard et al. 1984; Richards and Hager 1984; Forte et al. 1991; Ricard et al. 1993) ont montré que la viscosité du manteau inférieur augmente en moyenne au moins d'un facteur 30 par rapport à celle du manteau supérieur. Dans le cadre de modèles de convection à une seule couche, cette différence rhéologique a parfois été invoquée pour expliquer la signature géochimique des OIB (Davies 1984; Gurnis and Davies 1986a; Davies 1990b). En effet, étant donné que le matériel présent dans le manteau inférieur subit un taux de déformation beaucoup plus faible que dans le manteau supérieur, il serait par conséquent moins bien étiré, donc finalement moins bien homogénéisé. Ceci pourrait expliquer la grande diversité des compositions chimiques et isotopiques des OIB. D'autre part, le temps de résidence dans le manteau inférieur est plus grand (car les vitesses y sont plus faibles), ce qui pourrait impliquer que des basaltes issus du manteau inférieur tels que ceux qui composent les OIB présentent des rapports isotopiques plus anciens que dans les MORB.

Si Davies (1984) se contente d'envisager un tel mécanisme, Gurnis and Davies (1986a) réalisent une série d'expériences numériques en testant l'influence d'une stratification visqueuse sur les propriétés de mélange d'un écoulement donné. Ils utilisent un code de convection bidimensionnel (dont les caractéristiques sont identiques à celles de Gurnis and Davies (1986b)) en ajoutant une dépendance exponentielle de la viscosité avec la profondeur. Cette loi fait appel à un modèle rhéologique classique dans lequel la viscosité dépend exponentiellement de la pression via un volume d'activation. Leurs résultats montrent que le manteau inférieur doit contenir une portion significative de matériel primitif (c'est-à-dire n'ayant jamais été fondu en surface) si la viscosité moyenne y est au moins 100 fois plus élevée que dans le manteau supérieur. Compte-tenu de l'incertitude sur la viscosité du manteau inférieur, cette étude ne permet pas

réellement de contraindre les processus de mélange et de recyclage dans le manteau.

En reprenant le modèle développé par Gurnis and Davies (1986a), mais en exploitant différemment les résultats, Davies (1990b) montre que la présence d'une grande variation de viscosité entre la base et le fond du manteau (plusieurs ordres de grandeur) entraîne la formation d'hétérogénéités sur une vaste gamme de longueurs d'ondes. Il ressort également de cette étude que les hétérogénéités formées ne sont pas confinées dans la partie la plus visqueuse, mais semblent uniformément réparties dans l'ensemble du système. Ceci tend à aller à l'encontre de l'hypothèse de départ, à savoir que le manteau inférieur serait essentiellement hétérogène, par opposition à un manteau supérieur (échantillonné dans les MORB) *grosso modo* homogène.

Pour finir, on peut également évoquer les travaux de van Keken and Ballentine (1998) (voir aussi van Keken and Ballentine (1999)). Ils réalisent un modèle de convection axicylindrique à une couche (c'est-à-dire que le manteau a une forme annulaire), en imposant tantôt une viscosité constante, tantôt un saut de viscosité entre le manteau supérieur et le manteau inférieur. Ils y advectent des traceurs transportant un contenu en uranium et en hélium ( $^3\text{He}$  et  $^4\text{He}$ ). En se désintégrant, l'uranium libère de  $^4\text{He}$ . Ils simulent un dégazage aux dorsales, et observent le comportement du rapport  $^3\text{He}/^4\text{He}$ . Ils trouvent que la stratification visqueuse n'entraîne pas de stratification du rapport  $^3\text{He}/^4\text{He}$ , car l'état de mélange est constant sur toute l'épaisseur du système. Contrairement à toute attente, le modèle incorporant un saut de viscosité semble mieux mélanger que celui qui est isovisqueux, et le dégazage y est globalement plus important.

Cet exemple montre une fois de plus que le mécanisme évoqué plus haut apparaît trop naïf pour expliquer les observations géochimiques, et que la stratification visqueuse ne semble pas en être un facteur déterminant. Dans ce travail, nous réaliserons toutefois des expériences en présence de variations verticales de viscosité pour tenter de quantifier l'efficacité relative du mélange entre deux couches de viscosités différentes.

### 3.1.2 L'hypothèse des *blobs*

En marge des travaux prenant en compte la stratification visqueuse du manteau, certains ont envisagé la présence de variations latérales de viscosité dans le manteau inférieur.

Manga (1996), par exemple, a étudié le comportement de bulles (*blobs*) plus (ou moins) visqueuses que leur environnement. Il conclut que de petites hétérogénéités, beaucoup plus visqueuses que le reste du système, subissent un taux de déformation amoindri d'une part, et ont tendance à s'agglomérer entre elles pour former des hétérogénéités à grande longueur d'onde d'autre part.

Ces résultats sont intéressants pour l'étude des propriétés de mélange dans le manteau, mais il reste encore à justifier la présence de tels entités d'un point de vue géodynamique. Manga (1996) suppose que ces blobs pourraient provenir d'hétérogénéités de composition.

Tout en restant très prudent sur leur origine, Becker et al. (1999) évaluent les contraintes thermiques liées à l'existence de ces bulles hétérogènes dans le manteau inférieur. En effet, comme elles sont supposées primitives, cela implique qu'elles présentent des concentrations élevées en uranium, thorium et potassium, et donc que leur température soit plus élevée que le manteau environnant. Cependant l'écart de température ne doit pas être trop important pour ne pas les déstabiliser trop rapidement, ni diminuer leur viscosité de manière drastique. En se basant sur un écart de température inférieur à 300 K et une taille caractéristique de l'ordre de 800 km, Becker et al. (1999) concluent que ce type de modèle est viable. En effet, il n'implique qu'une très faible augmentation de la densité intrinsèque des blobs par rapport à celle du manteau environnant (de l'ordre de quelques %), ce qui est minéralogiquement acceptable.

## 3.2 Temps de mélange en fonction de la longueur d'onde des hétérogénéités

### 3.2.1 Principe de calcul

Olson et al. (1984) et Gurnis (1986c) ont mis en évidence le fait que la notion de temps de mélange n'a de sens qu'en fonction de la longueur d'onde à

laquelle on se place : homogénéiser consiste essentiellement à déplacer le spectre de longueurs d'onde des hétérogénéités vers les plus courtes longueurs d'ondes. Par conséquent, plus on abaisse le seuil en-deçà duquel on considère que le système est homogène (c'est-à-dire plus la longueur d'onde maximale souhaitée est petite), plus le temps nécessaire pour l'atteindre doit être grand.

Pour rendre compte des différences éventuelles de temps de mélange entre deux couches de viscosité différentes, nous nous basons sur une méthode développée par Olson et al. (1984), que nous avons partiellement modifiée pour l'adapter à notre étude.

Le système, dans lequel nous advectons un ensemble de traceurs, est simultanément découpé suivant plusieurs systèmes de grilles emboîtées les unes dans les autres. Pour chaque grille, les cellules-unités sont carrées et de dimension constante. La taille d'une cellule définit la longueur d'onde à laquelle est associée une grille donnée.

Au cours de l'advection des traceurs, il s'agit de calculer, pour chaque grille, la variance du nombre de traceurs présents dans chaque cellule-unité, c'est-à-dire :

$$Var_{\lambda}(t) = \frac{1}{c_{\lambda} - 1} \sum_{i=1}^{c_{\lambda}} (n_{\lambda}^i - \bar{n}_{\lambda})^2, \quad (3.1)$$

où  $\lambda$  caractérise la longueur d'onde de la grille,  $c_{\lambda}$  le nombre de cellules-unités,  $n_{\lambda}^i$  le nombre de traceurs dans la cellule numéro  $i$ , et  $\bar{n}_{\lambda}$  le nombre moyen de traceurs par cellule.

La variance représente physiquement l'écart de la distribution réelle des traceurs par rapport à la distribution uniforme à la longueur d'onde  $\lambda$ . Elle constitue donc une bonne mesure de l'état de mélange du système. Une variance nulle caractérise un système homogène. Olson et al. (1984) définissent le temps de mélange associé à la longueur d'onde  $\lambda$  par :

$$\tau_{\lambda} = \int_0^{\infty} \frac{Var_{\lambda}(t)}{Var_{\lambda}(0)} dt. \quad (3.2)$$

Ce temps de mélange s'identifie à la constante de temps dans le cas d'une décroissance exponentielle de la variance. Il définit donc un *temps caractéristique*

de mélange plutôt que le temps nécessaire à une homogénéisation parfaite.

En théorie, lorsque le système devient homogène (pour une longueur d'onde donnée), la variance de la distribution des traceurs tend vers zéro, donc l'intégrale converge. En pratique, le nombre de traceurs utilisés pour l'expérience est une quantité finie. Ceci a pour conséquence que la variance ne s'annule jamais complètement. Au contraire, la variance tend vers la limite statistique correspondant à une distribution aléatoire de traceurs au sein du système. Une brève incursion dans le monde des probabilités nous permet d'affirmer qu'elle s'identifie à la variance d'une distribution de Poisson, c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Var_{\lambda}(t) = Var_{\lambda}^{Poisson} = \frac{n}{c_{\lambda}}, \quad (3.3)$$

où  $n$  est le nombre total de traceurs.

Comme dans les expériences de Olson et al. (1984), la répartition initiale des traceurs est la suivante : une moitié des cellules-unités contient la même quantité de traceurs, et l'autre moitié est vide de traceurs (*cf* **figure 3.1(a)**). La variance initiale vaut donc :

$$\begin{aligned} Var_{\lambda}(0) &= \frac{\frac{c_{\lambda}}{2}(2\bar{n}_{\lambda} - \bar{n}_{\lambda})^2 + \frac{c_{\lambda}}{2}(0 - \bar{n}_{\lambda})^2}{c_{\lambda} - 1} \\ &= \frac{n^2}{c_{\lambda}(c_{\lambda} - 1)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Par conséquent, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Var_{\lambda}(t)}{Var_{\lambda}(0)} = \frac{c_{\lambda} - 1}{n} = V_{lim}. \quad (3.5)$$

Quand le nombre total de traceurs tend vers l'infini,  $V_{lim}$  tend vers zéro, ce qui est cohérent avec la théorie.

On modifie la définition du temps de mélange comme suit :

$$\tau_{\lambda} = \int_0^{T_{\infty}} \left[ \frac{Var_{\lambda}(t)}{Var_{\lambda}(0)} - V_{lim} \left( 1 - e^{-t/\tau_{\lambda}} \right) \right] dt. \quad (3.6)$$

Choisie arbitrairement, cette correction obéit néanmoins à plusieurs exigences :

- la valeur de l'intégrale est peu affectée par la correction pour les temps courts, c'est-à-dire lorsque le biais statistique est négligeable devant la valeur du rapport des variances (et *vice versa*);
- la notion de *temps court / temps infini* est définie par rapport à  $\tau_\lambda$  lui-même (car la constante de temps de l'exponentielle vaut  $\tau_\lambda$ );
- l'intégrale est rendue convergente et indépendante du nombre de traceurs choisi;
- l'intégrale tend vers la valeur exacte lorsque  $V_{lim}$  tend vers 0, c'est-à-dire que le nombre de traceurs tend vers l'infini.

L'équation 3.6 est une équation implicite, qui converge rapidement et ne pose pas de problème numérique particulier. On trouvera dans la **figure 3.1** un schéma récapitulatif de la méthode de calcul du temps de mélange en fonction de la longueur d'onde.

### 3.2.2 Remarque sur l'adimensionnalisation du te

Plusieurs choix sont possibles pour adimensionner le temps. On peut par exemple définir comme temps caractéristique l'inverse du taux de déformation associé au champ de vitesse moyenné sur l'ensemble du système<sup>1</sup>. On peut également utiliser le rapport d'une longueur sur une vitesse caractéristiques de l'écoulement.

La première méthode, utilisée dans les travaux de Olson et al. (1984), peut paraître plus rigoureuse que la seconde pour comparer les propriétés de mélange de différents écoulements. En effet, elle se base sur une grandeur particulièrement pertinente pour l'efficacité du mélange.

Dans nos expériences, nous lui préférons cependant la seconde méthode, en adimensionnant le temps par le rapport  $H/V$ , où  $H$  correspond à la hauteur du système, et  $V$  la vitesse quadratique moyenne en surface. Ce rapport est généralement nommé *transit time* dans la littérature. Ce choix est justifié par le fait que le *transit time* est une grandeur bien contrainte pour la Terre, ce qui

<sup>1</sup>le taux de déformation est défini comme le second invariant du tenseur des taux de déformation  $\vec{\epsilon}$

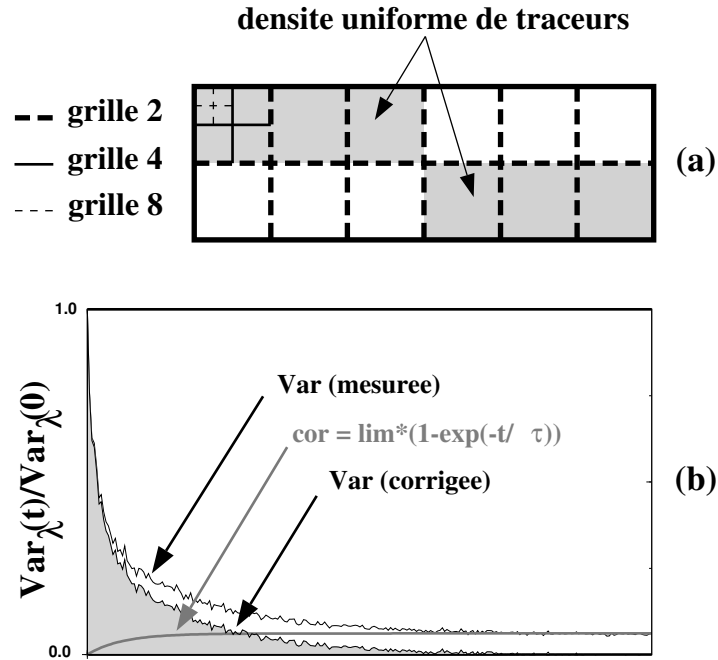


FIG. 3.1 – (a) Répartition initiale des traceurs. (b) Variance calculée et variance corrigée en fonction du temps, pour une longueur d’onde donnée.

n’est pas le cas du taux de déformation moyen.

### 3.2.3 Lien avec les exposants de Lyapunov

Lorsque nous avons introduit les exposants de Lyapunov, nous avons remarqué que l’inverse d’un exposant de Lyapunov ( $1/\sigma$ , noté  $\tau_\sigma$ ) a la dimension d’un temps. On peut se demander quel est le lien de ce temps avec les temps de mélange définis précédemment. Nous n’avons pas pu donner de réponse rigoureuse à cette question. A défaut, nous avancerons des arguments heuristiques qui semblent correspondre avec l’expérience.

Imaginons que la longueur  $l(t)$  d’un segment infinitésimal obéisse à la loi suivante :

$$l(t) = l(0)e^{t/\tau_\sigma} + f(t), \quad (3.7)$$

où  $f(t)$  est loi quelconque qui croît moins vite que l'exponentielle.

Supposons que l'on fixe le critère de mélange suivant :

*Le temps de mélange  $\tau_\lambda$  associé à la longueur d'onde  $\lambda$  correspond au temps nécessaire pour que la longueur d'un segment de taille  $\lambda$  atteigne l'ordre de grandeur de la taille du système.*

Cela se traduit par :

$$1 = \lambda e^{\tau_\lambda/\tau_\sigma} + f(\tau_\lambda), \quad (3.8)$$

où les distances sont normalisées par la taille du système.

Lorsque  $\lambda$  est suffisamment petit,  $\tau_\lambda$  est grand, donc on admet que le terme exponentiel est très supérieur à  $f(\tau_\lambda)$ . On aboutit donc à la relation :

$$\tau_\sigma \sim \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\tau_\lambda}{\ln(1/\lambda)}. \quad (3.9)$$

Cette équation signifie que l'inverse d'un exposant de Lyapunov s'apparente à un temps de mélange pour la limite des courtes longueurs d'onde.

Vérifions la véracité de cette interprétation à travers un exemple simple. Nous avons choisi un écoulement bidimensionnel dont la fonction potentiel s'écrit :

$$\psi(x, z) = \sin(\pi z) \left[ \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi x}{H}\right) + \sin(\omega t) \sin\left(\frac{3\pi x}{H}\right) \right], \quad (3.10)$$

où  $\omega$  est une pulsation variable (successivement 0, 1, 1.75, 2), et  $H$  la hauteur du système. Cet écoulement est inspiré des modèles K11, 12, 13 de Christensen (1989). Pour chaque valeur du paramètre  $\omega$ , nous avons calculé simultanément les temps de mélange sur une gamme donnée de longueurs d'onde (*cf* **figure 3.2**), et les exposants de Lyapunov d'un grand nombre de trajectoires. Nous avons comparé le rapport  $\tau_\lambda/\ln(1/\lambda)$  pour  $\lambda = H/32$ , et la médiane des histogrammes des exposants de Lyapunov. Les résultats sont présentés dans le **tableau 3.1**. On trouve un bon accord entre les deux méthodes de calcul.



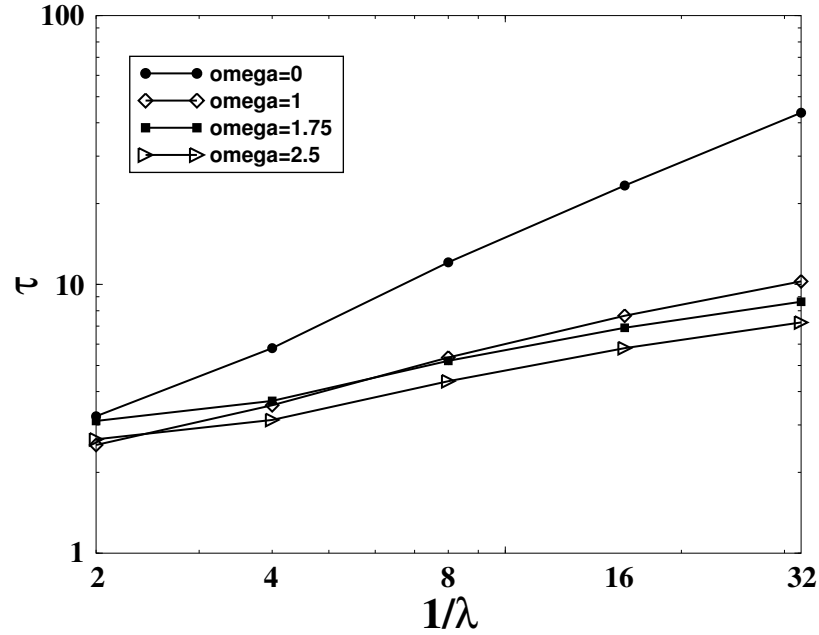


FIG. 3.2 –  $\ln \tau_\lambda$  en fonction de  $\ln(1/\lambda)$  pour différentes valeurs de  $\omega$ . Le temps est adimensionné par le ‘transit time’ c’est-à-dire  $H/V$ , où  $V$  est la vitesse de surface;  $\lambda$  est adimensionné par  $H$ . On remarque que le temps de mélange croît avec la résolution. Plus la pulsation est grande, plus les temps de mélange sont petits. Comme dans les travaux de Olson et al. (1984),  $\ln \tau_\lambda$  apparaît proportionnel à  $\ln(1/\lambda)$  lorsqu’il n’y a pas de dépendance temporelle.

|                 | $\frac{1}{\sigma_{med.}}$ | $\frac{\tau_{H/32}}{\ln(32/H)}$ |
|-----------------|---------------------------|---------------------------------|
| $\omega = 0$    | 20.82                     | 12.66                           |
| $\omega = 1$    | 3.87                      | 2.96                            |
| $\omega = 1.75$ | 2.5                       | 2.48                            |
| $\omega = 2.5$  | 2.1                       | 2.08                            |

TAB. 3.1 – Comparaison des résultats des calculs de temps de mélange et d’exposants de Lyapunov. Ces résultats apparaissent cohérents.

### 3.3 Stockage de croûte océanique dans la couche D’’

Hofmann and White (1982) ont proposé un modèle alternatif pour expliquer la signature géochimique des OIB : étant donné que de nombreux OIB

présentent des rapports isotopiques témoignant soit d'un appauvrissement, soit d'un enrichissement en éléments incompatibles par rapport à une composition chondritique (ce qui prouve qu'ils ne peuvent pas provenir d'une source purement primitive), ils supposent que les sources des OIB contiennent une certaine quantité de croûte océanique recyclée dans le manteau. En effet, Hofmann and White (1982) se basent sur le fait que les basaltes en subduction subissent un ensemble de transformations de phases (*éclogitisation*) qui les rendent légèrement plus denses que le manteau environnant. Ringwood and Irifune (1988) ont montré que ceci est vrai à toutes les profondeurs, excepté dans la zone de transition entre 650 et 750 km où les éclogites sont sensiblement moins denses que le manteau (*cf* discussion minéralogique dans le chapitre introductif). Dynamiquement parlant, plusieurs études s'accordent sur le fait que l'inversion des rapports de densité dans la zone de transition n'est pas suffisante pour empêcher la pénétration de matériel dans le manteau inférieur sous-jacent. Ainsi, la croûte océanique pourrait traverser l'ensemble du manteau et se stabiliser à l'interface noyau-manteau, dans la couche D". L'action combinée du flux de chaleur provenant du noyau et de la décomposition radioactive de l'uranium, du thorium et du potassium (fortement concentrés dans la croûte) conduirait alors à déstabiliser cette couche dense en formant des panaches, source des OIB en surface. Ce mécanisme permettrait d'expliquer à la fois la signature non-primitive des OIB, et leur âge apparemment ancien.

Gurnis (1986a) a testé cette hypothèse en incluant des traceurs actifs (plus denses que leur environnement) dans un modèle de convection (caractéristiques identiques à Gurnis and Davies (1986b)). Dans une gamme de paramètres raisonnables pour le manteau terrestre, il trouve que la ségrégation de croûte océanique au fond du manteau ne peut être que marginale, et ne conduit pas à une augmentation significative du temps de résidence des traceurs dans ce cas.

Christensen and Hofmann (1994) ont réalisé une série d'expériences numériques ressemblant à celles de Gurnis (1986a), mais en ajoutant aux traceurs des caractéristiques chimiques (concentration en uranium, plomb, samarium et néodyme). Par ailleurs, ils utilisent deux sortes de traceurs : d'une part des

traceurs plus denses que le manteau qui représentent des particules de croûte, et d'autre part des traceurs passifs qui sont associés à la lithosphère résiduelle. La fusion partielle aux dorsales ainsi que la différenciation chimique qui en découle sont également modélisées. Ils aboutissent à des conclusions totalement opposées à celles de Gurnis (1986a), à savoir que le mécanisme de ségrégation de la croûte océanique est viable pour la Terre. Ils trouvent des rapports isotopiques (pour le plomb ou le néodyme) significativement cohérents avec ceux des observations géochimiques.

Deux études récentes tendent à confirmer la possibilité de l'existence d'un tel mécanisme dans la Terre.

Coltice and Ricard (1999), d'une part, ont réalisé des bilans massiques et thermiques, et montrent que la couche D'' est un bon candidat pour le stockage d'un réservoir caché d'uranium dans le manteau. Ils ont élaboré un modèle de boîtes géochimiques basé sur l'existence d'un réservoir de croûte océanique dans la couche D'', et ils trouvent des résultats cohérents avec l'observation pour un grand nombre de rapports isotopiques.

Rudnick et al. (2000), d'autre part, montrent que l'existence d'un réservoir élogitique caché pourrait équilibrer les bilans de massiques de plusieurs éléments (Nb, Ta, Ti).

Considérant que tous ces éléments semblent suffisamment convaincants pour qu'on prenne en compte l'existence d'un stockage partiel de croûte océanique dans la couche D'', nous testerons dans la suite l'effet d'un tel mécanisme sur les propriétés de mélange de nos modèles. Pour ce faire, nous ajouterons des caractéristiques chimiques aux traceurs.

## **3.4 Caractéristiques chimiques du modèle**

### **3.4.1 Contenu chimique des traceurs**

Les traceurs, initialement répartis de manière homogène dans l'ensemble du système, transportent de l' $^{238}\text{U}$ , de l' $^3\text{He}$  et de l' $^4\text{He}$ . L' $^3\text{He}$  est un isotope stable, tandis que l' $^4\text{He}$  est issu de la décomposition radioactive de l' $^{238}\text{U}$ , de l' $^{235}\text{U}$ , et du  $^{232}\text{Th}$ . La concentration initiale des traceurs en  $^{238}\text{U}$  est calculée de manière

à ce que le taux de production d' $^4\text{He}$  soit équivalent au taux de production cumulé de l' $^{238}\text{U}$ , de l' $^{235}\text{U}$ , et du  $^{232}\text{Th}$ . Compte-tenu de ces observations, l'équation d'évolution de la concentration en  $^4\text{He}$  s'écrit :

$$[{}^4\text{He}]_t \simeq [{}^4\text{He}]_0 + \widetilde{[{}^{238}\text{U}]_0}(1 - e^{-\lambda_{238}t}), \quad (3.11)$$

avec :

$$\widetilde{[{}^{238}\text{U}]_0} = 18.7 [{}^{238}\text{U}]_0 \quad (3.12)$$

De la même manière, on écrit l'équation d'évolution de la concentration en uranium :

$$[{}^{238}\text{U}]_t = [{}^{238}\text{U}]_0 e^{-\lambda_{238}t}. \quad (3.13)$$

Au début de l'expérience les concentrations initiales valent :

|                        | Concentrations<br>$10^{-7} \text{ mol.kg}^{-1}$ |
|------------------------|---|
| $[{}^{238}\text{U}]_0$ | 1.85  |
| $[{}^3\text{He}]_0$    | $1.2 \times 10^{-3}$                            |
| $[{}^4\text{He}]_0$    | 3.7   |

Ces valeurs correspondent aux valeurs généralement admises pour la Terre primitive (McDonough and Sun 1995; Harper and Jacobsen 1996).

### 3.4.2 Fusion partielle et différenciation chimique aux dorsales

Sous chaque dorsale, déterminée par le lieu de divergence de deux plaques, on définit une zone semi-circulaire de rayon équivalent à 150 km (si la hauteur du système équivaut à 3000 km). Cette portion de volume simule la zone de fusion partielle sous les dorsales. On y effectue une moyenne glissante de la quantité totale d'U, d' $^3\text{He}$  et d' $^4\text{He}$  suivant le contenu chimique des traceurs qui s'y trouvent.

Chaque traceur qui pénètre dans la zone de fusion partielle est stoppé, puis au même instant on en libère un arbitrairement à droite ou à gauche de la dorsale. Cette nouvelle particule a une probabilité 1/10 de former de la croûte océanique. Dans ce cas, elle est placée aléatoirement dans une couche superficielle de 7 km d'épaisseur, et on fixe son contenu chimique de la manière suivante :

Soient  $\langle [^{238}\text{U}] \rangle_t$ ,  $\langle [^3\text{He}] \rangle_t$  et  $\langle [^4\text{He}] \rangle_t$  les concentrations moyennes en U,  $^3\text{He}$  et  $^4\text{He}$  dans la zone de fusion partielle à la date  $t$ . A sa sortie de la dorsale, une particule de croûte océanique transporte alors les concentrations :

$$\begin{aligned} [^{238}\text{U}]_t^{cr} &= \langle [^{238}\text{U}] \rangle_t \times 9.91 & \text{(a)} \\ [^3\text{He}]_t^{cr} &= \langle [^3\text{He}] \rangle_t \times 0.001 & \text{(b)} \\ [^4\text{He}]_t^{cr} &= \langle [^4\text{He}] \rangle_t \times 0.001 & \text{(c)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

L'équation (3.14a) simule un enrichissement en uranium de la croûte océanique par rapport à sa source (l'uranium est un élément incompatible), tandis que (3.14b) et (3.14c) représentent un dégazage important en hélium.

Une particule peut également former de la lithosphère océanique (probabilité 9/10). Dans ce cas, elle est placée dans une couche d'épaisseur 63 km sous la croûte océanique, et son contenu chimique vaut :

$$\begin{aligned} [^{238}\text{U}]_t^{lith} &= \langle [^{238}\text{U}] \rangle_t \times 0.01 & \text{(a)} \\ [^3\text{He}]_t^{lith} &= \langle [^3\text{He}] \rangle_t \times 0.02 & \text{(b)} \\ [^4\text{He}]_t^{lith} &= \langle [^4\text{He}] \rangle_t \times 0.02 & \text{(c)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ici, la particule est appauvrie en uranium (3.14a), et plus faiblement dégazée que dans la croûte océanique (3.14b et 3.14c). On remarquera que le bilan

massique d'uranium est équilibré, contrairement à celui de l'hélium, dont une partie importante est perdue dans l'atmosphère.

Un schéma récapitulatif du processus de fusion partielle et différenciation est représenté dans la **figure 3.3**.

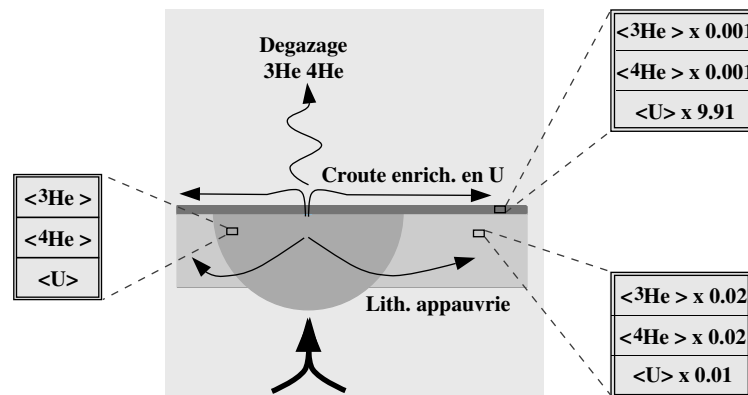


FIG. 3.3 – Processus de fusion et différenciation au niveau des dorsales

### 3.4.3 Ségrégation dans la couche D''

Nous avons supposé que le stockage d'une partie de la croûte océanique dans la couche D'' est dû à un effet gravitationnel. Dans notre modèle, les traceurs sont passifs, c'est-à-dire qu'ils ont, entre autres, la même densité que leur environnement. Pour simuler l'effet de la ségrégation, on suppose que les particules de croûte océanique ancienne qui pénètrent dans les 200 premiers kilomètres à la base du système seront nécessairement piégées dans la couche D'', donc on les retire du système. A l'inverse, les particules de lithosphère sont libres d'entrer et de sortir de cette zone.

Ce procédé peut paraître rudimentaire, mais cela n'est pas réellement gênant dans la mesure où on ne cherche jamais à prouver la réalité de la ségrégation de la croûte dans la Terre, mais seulement à observer ses effets sur la distribution chimique.

### 3.4.4 Age des particules

Parallèlement aux données chimiques, nous observons également la répartition des âges dans le système, c'est-à-dire en fait le temps écoulé, pour chaque particule, entre la date de passage dans une zone de fusion partielle, et la date d'observation. Ceci nous permet de tester le rôle du saut de viscosité entre manteau supérieur et manteau inférieur sur la distribution des âges, et éventuellement de mesurer le temps de résidence moyen dans le système.

## 3.5 Résultats du modèle bidimensionnel

Malgré toutes les réserves émises au chapitre précédent sur la pertinence des modèles bidimensionnels, nous commencerons par utiliser les techniques énoncées plus haut (temps de mélange, traceurs chimiques) dans le cadre d'un modèle simple à deux dimensions. Les résultats ont fait l'objet de l'article qui suit, soumis à la revue *Geochemistry, Geophysics and Geosystems*.

Dans cet article, le champ de vitesse est calculé de manière rigoureusement similaire à la méthode précédemment décrite pour les écoulements tridimensionnels. Il est induit par des mouvements de plaques en surface et des masses plongeantes sous les zones de subduction. Ce champ de vitesse est évidemment purement poloidal. Pour le rendre chaotique, nous imposons une dépendance temporelle en modifiant la vitesse et la géométrie des plaques lithosphériques à intervalles de temps réguliers.

Le calcul des temps de mélange est effectué jusqu'à la longueur d'onde  $H/64$  (équivalant à  $\sim 50$  km), ce qui nécessite d'advecter plus de 300 000 traceurs pour que la représentation statistique soit correcte à cette échelle ( $\sim 25$  traceurs en moyenne par cellule-unité). Nous avons donc parallélisé le code en utilisant le langage MPI pour accélérer le temps de calcul.

Nos résultats montrent qu'à deux dimensions, un saut de viscosité, même important (deux ordres de grandeur), ne modifie pas de manière significative les propriétés de mélange d'une couche par rapport à l'autre. La discontinuité visqueuse ne constitue pas une barrière efficace contre les flux de matière entre

les deux couches. Ceci implique qu'on ne peut pas *localiser* les propriétés de mélange de l'écoulement. Ce résultat est vrai sur toute la gamme des longueurs d'onde. Il est en accord avec ceux de van Keken and Ballentine (1998).

Concernant les expériences mettant en jeu des traceurs chimiques, nous montrons que la seule stratification visqueuse ne permet pas d'obtenir de variation verticale significative du rapport  $^3\text{He}/^4\text{He}$  dans le manteau. A l'inverse, l'hypothèse de ségrégation d'une partie de la croûte océanique dans la couche D" génère une large zone où le rapport  $^3\text{He}/^4\text{He}$  est sensiblement plus élevé que dans le reste du manteau. Cette portion de volume pourrait être interprétée comme la source (ou une partie de la source) des basaltes Hawaïiens. Loin de correspondre à du matériel primitif, cette zone est essentiellement constituée de lithosphère recyclée.



*Geochemistry, Geophysics, Geosystems (soumis Juin 2000)*

**Mixing properties in the Earth's mantle :  
effects of the viscosity stratification  
and  
of oceanic crust segregation**

Sylvaine Ferrachat, Yanick Ricard

Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

Fax : 33 4 72 72 86 77

E-mail : sferrach@geologie.ens-lyon.fr, ricard@geologie.ens-lyon.fr

**Abstract**

Although a large quantity of geochemical data on oceanic basalts has been collected, it is not sufficient to characterize the recycling processes between the Earth's mantle on the one hand, and the crust and the lithosphere on the other hand. In particular, it remains unclear why Mid Oceanic Ridge Basalts (MORBs) are relatively homogeneous throughout the world, while Oceanic Island Basalts (OIBs) present a wide spectrum of heterogeneities. Assuming whole mantle convection, it is often argued that the viscosity increase with depth could be responsible for some stratification of the mixing properties of the mantle, and consequently could generate the observed geochemical and isotopic differences between MORB's and OIB's. In this study, we test this assumption by means of 2D circulation models where passive tracers are advected. First, we quantify the ability of the upper and lower mantles to erase heterogeneities. Second, we simulate the evolutions of U-,  $^4\text{He}$ -, and  $^3\text{He}$ -concentrations taking into account the magmatic processes at ridges (differentiation, outgassing and recycling). We conclude that the viscosity layering does not induce any vertical stratification of the mixing properties of the mantle. On the contrary, the partial segregation of the oceanic crust in the D'' layer, would explain the generation of large zones of high  $^3\text{He}/^4\text{He}$  ratios on top of D''. In our simulations, these zones have a primitive He signature although they have already been processed at ridges. Trapping oceanic crust in D'' would not only explain the presence of recycled components in hotspots and particularly in the HIMU-type hotspots (Hofmann and White 1982) but also would suggest that the high  $^3\text{He}/^4\text{He}$  ratios of volcanoes like Loihi could have their origin in ancient subducted lithosphere.

**Introduction**

Geochemical systematics has given a relatively clear picture of the compositional and isotopic differences between MORBs and OIBs. Whereas MORBs are rather homogeneous all around the Earth, OIBs present wide spectra of isotopic heterogeneities. Some have an apparently primitive signature (Kaneoka and Takaoka 1980; Kurz et al. 1982; Allègre et al. 1983), although the signature of recycled oceanic crust is at the same time ubiquitous (White 1985; Blichert-Toft et al. 1999).

The case of helium is rather exemplary :  $^3\text{He}/^4\text{He}$  ratio, which corresponds to stable over radiogenic isotope ratio, is equal to  $\sim 8\text{Ra}$  (Ra stands for the atmospheric ratio) in MORBs with very small dispersion, whereas in OIBs it ranges from  $\sim 0$  to  $\sim 35\text{Ra}$  (?). Undegassed, and subsequently old material has a high  $^3\text{He}/^4\text{He}$  ratio because it has kept a large amount of  $^3\text{He}$ . Plumes like Hawaii, Iceland, Galápagos and others, have such a primitive signature. On the contrary, helium ratio is low in oceanic (or continental) crust, though equal  $^3\text{He}$ - and  $^4\text{He}$ -degassing, because it is enriched in incompatible elements,  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$  and  $^{232}\text{Th}$ , that produce  $^4\text{He}$ . Plumes called HIMUs like St Helena, or Tubuaiï have a He ratio lower than MORBs and thus tap an enriched, rather than depleted, reservoir.

In the 70's-80's, most interpretations of the geochemical data were based on a layered convection model of the mantle : MORBs coming from a depleted, shallow and young reservoir, and OIBs coming from deeper and rather primitive reservoirs. From simple mass balance considerations the depleted reservoir was estimated to have a mass larger than, but of the same order as the upper mantle (Jacobsen and Wasserburg 1979; Allègre and Turcotte 1985). Though Anderson (1982) considered a rather different model with the various geochemical reservoirs located in the upper mantle, he also assumed that there was very little exchanges between the lower and the upper mantle.

The standard model of the 80's with a primitive lower mantle is now untenable. The OIBs are too variable in composition to be explained by a uniform reservoir and the presence of some ancient oceanic crust is documented in most

cases. The tomographic studies (van der Hilst et al. 1997; Grand et al. 1997) detect high-velocity anomalies (interpreted as slabs) in the lower mantle, which imply an important stirring of the whole mantle. Moreover, several works (Richards and Engebretson 1992; Ricard et al. 1993) have demonstrated that deep slab penetration into the lower mantle remarkably explains the large scale gravity anomalies.

A modified version of the two layer model has recently been proposed (Kellogg et al. 1999). It suggests that the mantle is not stratified below the transition zone but at a much larger depth. The bottom  $\sim 1000$  km of the mantle would consist of primitive and chemically dense material separated from the rest of the mantle by a thermo-chemical interface with large undulations. Although appealing, this model does not clearly explain the variability of OIB signature, their crustal component and requests a very peculiar mineralogy. The deep mantle has to be dense enough not to be entrained by convection without being easily detected by seismology, neither in radial models that suggest a uniform lower mantle nor by tomography.

Assuming whole mantle convection, it is however difficult to understand the geochemical data. Some authors have simply studied the mixing properties of the mantle and how initial heterogeneities can survive convection. Their results are complex and sometimes contradictory. Christensen (1989) and Kellogg and Turcotte (1990), using 2D numerical experiments agree that no large scale anomaly could survive after one billion years in a chaotically convective system. This conclusion has been disputed (Gurnis and Davies 1986b; Davies 1990a). Mixing properties of a real 3D flow can however be quite different from those at 2D. 3D convection seems to have less efficient mixing properties (Schmalzl et al. 1995; Schmalzl et al. 1996), and large unmixed zones might survive (?).

More promising may be the studies where rather than erasing heterogeneities the problem has been stated in terms of generating heterogeneities. van Keken and Ballentine (1998;1999) have used a 2D axisymmetric convection model mimicking degassing under oceanic ridges. They have shown that even a large viscosity increase with depth does not lead to a stronger degassing of the

upper mantle than of the lower mantle.

At least two mechanisms have been proposed to maintain the heterogeneities continuously created at ridges. Albarède (1998) proposed that the slab content in incompatible elements stored in the oceanic crust layer, can be totally stripped off by fluid extraction during subduction. This mechanism concentrates the incompatible elements in the upper mantle, keeps a primitive He ratio in the lower mantle while barren slabs penetrate the lower mantle. This model that leads to an enriched upper mantle is however difficult to reconcile with the apparent depleted nature of the MORB source.

Another process has been suggested by Hofmann and White (1982). The oceanic crust, entrained in the deep mantle with the harzburgitic lithosphere, could segregate and accumulate in D", at the core-mantle boundary. This could be justified by the fact that eclogitized basalts are slightly denser than the surrounding mantle at almost all depths (Ringwood and Irifune 1988). Christensen and Hofmann (1994) have tested these assumptions in a 2D convective model and concluded that it is viable from a fluid dynamic point of view and that enriched HIMU-type OIBs could indeed rise from ancient segregated oceanic crust. More recently, Coltice and Ricard (1999) have extended this model to show that it could also explain the apparent primitive He ratios of some Hawaiian-type OIBs if they derived from a mixture made mostly from depleted peridotitic old lithosphere.

The aim of this paper is to test separately the role of the viscosity increase and the possible trapping of ancient oceanic crust in the D", on both mixing efficiency and isotopic distribution of material in the case of He-U system. Convection of the mantle will be modeled with 2D advective systems in a cartesian geometry.

### **Model features**

We simulate the convective mantle with a 2D circulation model. We think that unless the generation and evolution of plate tectonics can be self-consistently modeled in thermo-mechanical numerical codes, simple Stokes flows driven by

both boundary conditions and prescribed internal loads are as realistic to represent the mantle flow as many much more complex simulations. Therefore, we do not solve the whole set of convection equations including heat conservation.

We use a flow that verifies the Navier Stokes equation inside a box of depth  $H$ , width  $L = 3H$ , with periodic conditions and a free slip bottom boundary. The viscosity can increase with depth in a step-like manner between  $\eta_{UM}$  and  $\eta_{LM}$ . The flow is partially driven by internal density anomalies beneath the subduction zones in order to simulate cold slabs sinking in the whole mantle. The flow is also forced by diverging-converging velocities at the surface of a box. The configuration of these plate-like velocities simulates a ridge and two subduction zones on the two lateral faces. Time-dependence is imposed by moving the position of the ridge successively located at  $L/8$ ,  $L/2$ , and  $7L/8$ . Each plate is in mechanical equilibrium between the slab pull induced by internal loads and the mantle drag due to the imposed surface motion (Ricard et al. 1989) (because our model is missing the ridge push force, we scale the slab pull to be only half of the mantle drag). The requirement of plate equilibrium imposes the plate velocities. When the ridge is at the center of the box, the two plates have the same velocity amplitude  $U$ . When the ridge is ex-centered, the largest plate is the slowest. We imposed that the ridge is jumping every time  $T = 2H/U$ . A simple sketch of the flow is depicted in **Figure 1**.

Scaling with  $U = 10 \text{ cm yr}^{-1}$  and  $H = 3000 \text{ km}$ , this model assumes that the two subduction zones are 9,000 km apart and that the ridge system reorganizes every 60 Myrs. For a given viscosity profile, the total root mean square velocity in the box remains roughly constant through time, i.e. does not change much when the ridge jumps. Increasing the lower mantle viscosity decreases the average velocity. However, increasing the mantle viscosity by 100 in the lower half of the box only reduces the root mean square velocity by .40 (as all models are scaled by the same surface velocity, when the lower mantle is stiffer the amount of internal loads must increase). The transit time  $H/U$  of the model is 30 Myrs. Therefore  $\sim 100$  transit times are needed to simulate the evolution of the mantle through the Earth's history.

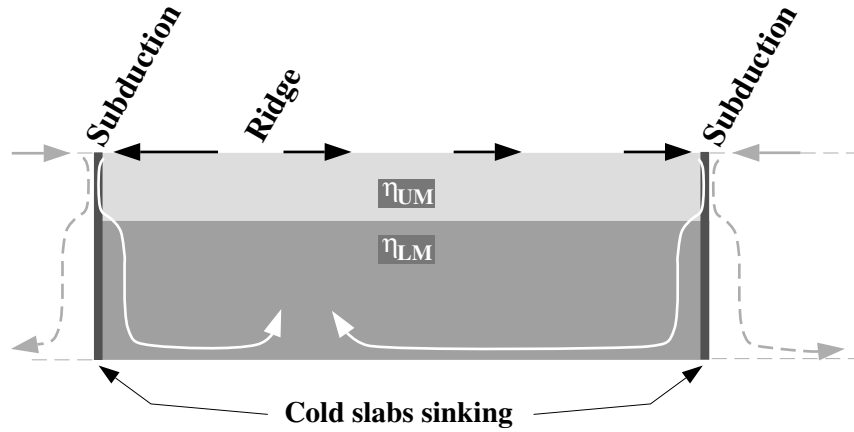


FIG. 1 – Sketch of the computed flow. Black arrows denote the surface velocities, the two imposed mass anomalies mimicking cold sinking slabs are represented by the dark vertical bands. Two examples of pathlines (white arrows) are shown. The system is laterally periodic (dashed lines).

Once the flow is computed, we advect  $\sim 300,000$  tracers by means of a fifth-order Runge-Kutta method, interpolating the velocity field with a bilinear scheme from a  $64 \times 65$  grid. These tracers are passive, *e.g.* they have the same density and viscosity as their vicinity.

### Erasing heterogeneities : an increase in mantle viscosity with depth has barely no effects

In this section, we present two different types of numerical experiments to try to understand the effects of the viscosity layering on the mantle mixing. We only consider the intrinsic mixing properties of the different flows without any chemical consideration : tracers are simply advected and we only focus on their distribution through time.

#### 1. Mixing time as a function of length scale

The main idea of this experiment is to compare the mixing times of upper and lower parts of the mantle with different viscosity jumps between them.

The concept of mixing time is intrinsically related to the peculiar length scale considered : the better the resolution (defined as the reciprocal length

scale), the longer the time necessary to homogenize. Our way of computing mixing times is largely inspired by Olson et al. (1984). Olson et al performed experiments where mixing times are computed in the following manner : the system is divided into several grids, from the coarsest (size of the cells equal to  $H/2$ ,  $H$  being the total height of the box), to the finest (for example  $H/64$ ). At the beginning, tracers are distributed in a chessboard manner as shown in **Figure 2a**.

The principle is to compute, regularly and for each grid, the variance of the number of tracers in the cells. In mathematical terms, it can be written :

$$Var_{\lambda}(t) = \frac{1}{c_{\lambda} - 1} \sum_{i=1}^{c_{\lambda}} (n_{\lambda}^i - \bar{n}_{\lambda})^2, \quad (1)$$

where  $\lambda$  characterizes the length scale of the grid,  $c_{\lambda}$  the number of cells,  $n_{\lambda}^i$  the number of tracers in the  $i^{th}$  cell, and  $\bar{n}_{\lambda}$  the average number of tracers per cell for the grid  $\lambda$ . The variance characterizes the deviation of the distribution from a strictly homogeneous one. When normalized by  $Var_{\lambda}(t = 0)$ , it ranges from 1 to 0. Olson et al defined the mixing time related to the grid  $\lambda$  as :

$$\tau_{\lambda} = \int_0^{+\infty} \frac{Var_{\lambda}(t)}{Var_{\lambda}(0)} dt. \quad (2)$$

When the variance decreases exponentially with time,  $\tau_{\lambda}$  corresponds to the usual decay time. The faster the decrease of variance, the shorter the mixing time and the more efficient the mixing. The problem is that, as the number of tracers is finite,  $Var_{\lambda}$  tends (in an ideal case of ergodic system) to the statistical limit and not to zero. Therefore the previous integral does not converge. The statistical limit of  $Var_{\lambda}(t)/Var_{\lambda}(0)$  is

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Var_{\lambda}(t)}{Var_{\lambda}(0)} = \frac{c_{\lambda} - 1}{n}. \quad (3)$$

We slightly change the definition of  $\tau$  and use the implicit expression :

$$\tau_{\lambda} = \int_0^{T+\infty} \left( \frac{Var_{\lambda}(t)}{Var_{\lambda}(0)} - \frac{c_{\lambda} - 1}{n} (1 - \exp(-t/\tau_{\lambda})) \right) dt. \quad (4)$$

This integral converges and gives a mixing time numerically independent of  $n$ . The numerical protocol is depicted in **Figure 2**. As the purpose is to apply

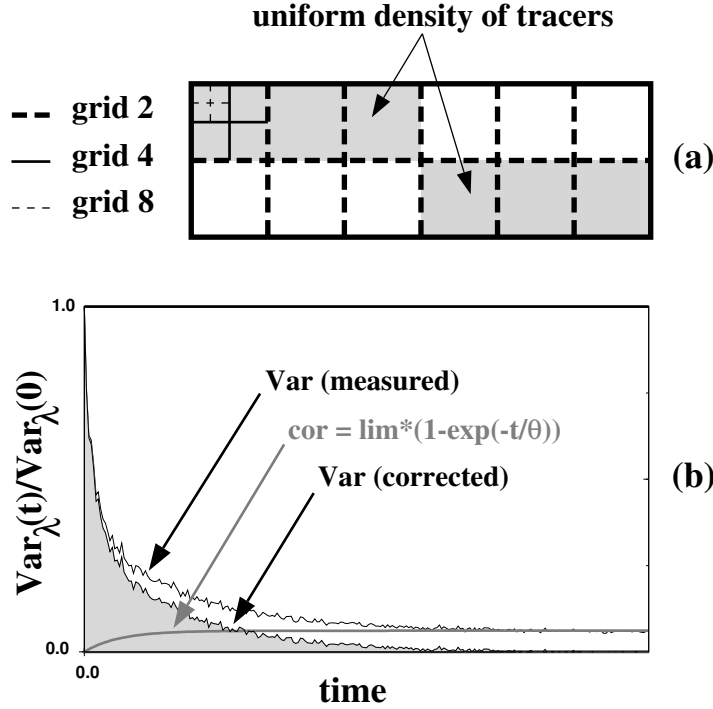


FIG. 2 – (a) : Initial distribution of the tracers. The shaded areas correspond to a uniform distribution of tracers. The box is divided into several regular grids, with finer and finer length scales. (b) : Plot of the measured, and corrected normalized variances as function of time, for a given length scale.

the results for the Earth, the upper bound of the integral is chosen equal to 100 transit times ( $\sim 3$ byrs). This is sufficient to reach the statistical limit of uniform distribution in cases with homogeneous viscosity. In the case where the lower mantle is very sluggish, a significant departure from uniformity remains at the end of the numerical simulation. This indicates that the Earth's history may not be long enough for a thorough mixing of the mantle.

**Figure 3** summarizes the results in the  $\log(1/\lambda) - \log(\tau_\lambda)$  plane, for three different viscosity profiles :  $\eta_{LM}/\eta_{UM} = 1, 10, \text{ and } 100$ . The viscosity discontinuity is placed at mid-depth in order to coincide with the grid cells used for the variance computation. The mixing time have only been computed up to the



resolution  $1/\lambda = 64$  in order to have a statistically significant number of tracers in each cell in uniform distribution limit (at least 25 tracers/cell). We have simultaneously performed the computations for the two sub-systems UM, (a), LM, (b), and compared the results (c). The mixing times are regularly increasing with  $1/\lambda$  (Olson et al. 1984). We can see that the effects of the viscosity are more or less identical for all length scales. Increasing the lower mantle viscosity increases the mixing times in both the upper and the lower mantle. However, even a two order of magnitude increase in  $\eta_{LM}$  only lengthens the mixing times by a factor  $\sim 5$ .

In (c), a  $\tau_{LM}/\tau_{UM}$  ratio around 1 indicates that the upper and lower mantle mixing times are comparable in the case of a viscosity jump lower than 10. Even in the case of a rather large viscosity jump by a factor 100, whereas it is generally estimated to be  $\sim 30$  for the mantle (Ricard et al. 1993; Forte et al. 1991), the mixing times of the more viscous part are only less than 4 times those of the less viscous part.

The slight increase of the mixing time ratios in the short length scale limit is likely to be attributed to the intrinsic configuration of the flow. Even in the isoviscous case (plain curve) the velocity field is richer in short wavelength components in the upper mantle than in the lower mantle as the flow induced by the surface motions smoothes out with depth.

From a physical point of view, it would have been more pertinent to non-dimensionalize the computed mixing times by a global quantity like the inverse of the averaged stretching rate  $\dot{\epsilon}$  to derive specific mixing properties. Instead we normalized by the transit time computed from the surface velocity. Transit times are the same for the three viscosity jumps, whereas  $\dot{\epsilon}$  varies with the viscosity ratios. Surprisingly, the average stretching rate increases with the lower mantle viscosity as a rheological stratification develops a strong horizontal shearing near the upper-lower mantle interface. The geophysicist should prefer to normalize by the observed plate velocities than by the poorly constrained averaged stretching rate of the mantle.

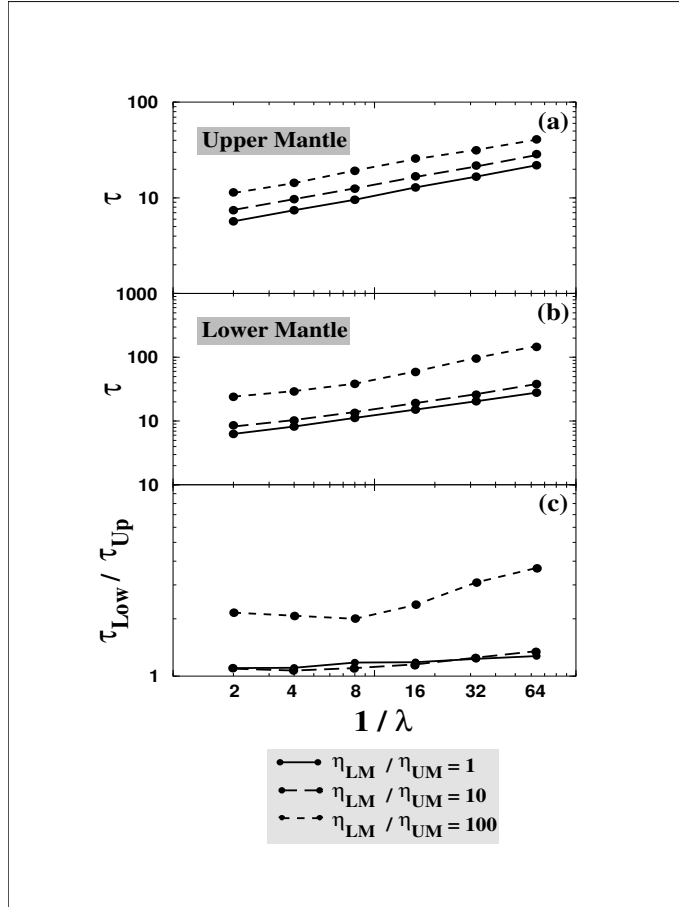


FIG. 3 – Mixing times as a function of resolution for the upper and lower mantles, (a) and (b), and their ratio (c). Mixing times are non-dimensionalized by the transit time. Experiments are performed for 3 different viscosity ratios between upper and lower part : 1, 10 and 100 (the viscosity jump is located at mid-depth of the box). A viscosity increase does not change drastically neither the mixing times nor the ratio of mixing times between upper and lower mantles.

These various experiments do not favor the assumption of a strong role of the viscosity layering to substantially differentiate the mixing states of the upper and lower parts of the mantle. This conclusion holds for all wavelengths larger than  $H/64 \sim 50$  km. In order to understand what happens at shorter wavelengths we can compute Lyapunov exponents rather than mixing times.

## 2. Lyapunov exponents

Beyond the computation of mixing times, Lyapunov exponents are another powerful tool to quantify mixing efficiency. It consists in computing the ex-

ponential stretching rates of initially infinitesimal segments. A more rigorous mathematical definition is :

$$\alpha = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ l(0) \rightarrow 0}} \ln \left( \frac{l(t)}{l(0)} \right) \times \frac{1}{t}, \quad (5)$$

where  $\alpha$  is the Lyapunov exponent (in fact the largest Lyapunov exponent),  $t$  the time, and  $l(t)$  the time-dependent length of the segment (Lichtenberg and Lieberman 1983). It has the dimension of an inverse time. The greater the Lyapunov exponent, the faster the mixing. A zero Lyapunov exponent does not mean that there is no mixing but simply that the stretching rate is slower than exponential growth (in the case of simple shear, the distance between two advected tracers increases linearly which implies that the Lyapunov exponent is zero).

Coming back to the former experiments, the Lyapunov exponents could intuitively be related to mixing times in the short length scale limit. According to a simple interpretation of the definition of a Lyapunov exponent, the size  $\lambda H$  of a small segment increases with  $\exp(\alpha t)$ . This size will be comparable to the size of the box itself,  $H$ , after a time  $\tau_\lambda$  corresponding to the mixing time associated to the resolution  $\lambda$ . Therefore in the limit of very small  $\lambda$ ,

$$\lambda \exp(\alpha \tau_\lambda) \sim 1 \quad (6)$$

As previously, though Lyapunov exponents are defined as a limit at infinite time, here we only consider finite time Lyapunov exponents computed over 100 transit times. Practically we advect 54,000 pairs of tracers initially regularly distributed in the box. The viscous jump is kept at mid-depth of the box for coherence with the previous experiments.

The results are plotted in **Figure 4**. It represents the histograms of finite time Lyapunov exponents for thousands of tracers initially located in the upper part (a) and lower part (b) of the mantle (the histograms remain basically unchanged when the tracers are classified by their final, rather than initial position in the mantle). Histograms (a) and (b) are very similar with only a slight

difference in the extreme case of  $\eta_{LM}/\eta_{UM}=100$ . The maxima of these distributions correspond to Lyapunov exponents very similar to those obtained using equation (8) with  $\lambda = 1/64$  and the values for  $\tau_\lambda$  taken from **Figure 3**. This indicates that the behavior of the mixing time discussed at large wavelength (for  $1/2 > \lambda > 1/64$ ) can be safely extrapolated to short wavelengths.

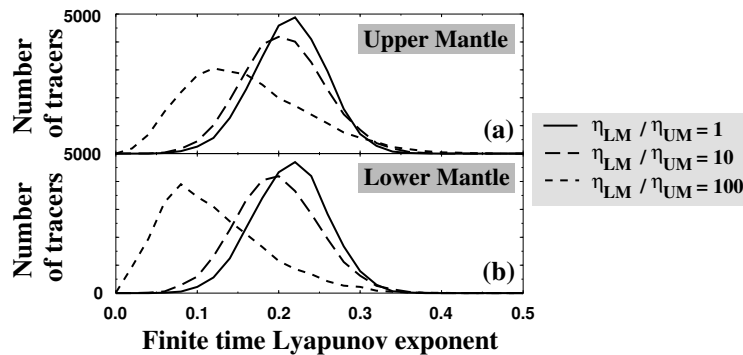


FIG. 4 – Histograms of finite time Lyapunov exponents for thousands of tracers initially homogeneously located in the upper part (a), or in the lower part (b). Viscosity increases with depth by a factor 1, 10 or 100. Lyapunov exponents have the dimension of inverse time, normalized by the inverse of transit time. The distributions are quite insensitive to the position in the mantle ((a) and (b)). Only in the case of the highest viscosity jump, tracers in the lower mantle undergo a somewhat lower stretching (a lower average Lyapunov exponent).

We conclude that, whatever the viscosity stratification (at least up to two orders of viscosity increase), the global stretching history is nearly the same in the upper and lower mantle. This is confirmed at large and small wavelengths by the mixing time and the Lyapunov studies. The physical reason is simple : even with a very large viscosity contrast, a significant mass flow crosses the upper-lower mantle interface in our model (?). This flow continuously introduces tracers in the lower mantle that have experienced a large stretching in the upper mantle and replenishes the upper mantle with poorly stretched material. Of course, this conclusion is obtained under the assumption that the major effects at 670 km depth are related to a viscosity increase and that other phenomena that could impede the slab penetration (such as endothermic phase transitions)

are negligible, which is supported by recent convection simulations (Bunge et al. 1997).

### The generation of heterogeneities at ridges

In a new set of experiments, each tracer carries a time-dependent concentration of  $^{238}\text{U}$ ,  $^3\text{He}$  and  $^4\text{He}$ . Initially the whole system is homogeneous and

**Table 1** summarizes the different initial concentrations.

| Species       | Concentrations<br>( $10^{-7}\text{mol.kg}^{-1}$ ) |
|---------------|---|
| $^3\text{He}$ | $1.2 \times 10^{-3}$                              |
| $^4\text{He}$ | 3.7   |
| U             | 1.85  |

TAB. 1 – Concentrations associated to each tracer at the beginning of experiments. They correspond to an estimate of the primitive Earth composition (McDonough and Sun 1995; Harper and Jacobsen 1996)

These concentrations evolve in different manners, due to radioactive decay or production and because of chemical fractionation during tectonic processes.  $^{238}\text{U}$  decays following

$$\frac{d[^{238}\text{U}]}{dt} = -\lambda_{238} [^{238}\text{U}], \quad (7)$$

and  $[^4\text{He}]$  is produced following

$$\frac{d[^4\text{He}]}{dt} \simeq [^4\text{He}] + 18.7 [^{238}\text{U}] \lambda_{238}. \quad (8)$$

The factor 18.7 takes into account the fact that  $^4\text{He}$  is not only provided from the radioactive decay of  $^{238}\text{U}$ , but also from  $^{235}\text{U}$  and  $^{232}\text{Th}$  and that the Th/U ratio remains constant.

Our model takes into account melt fractionation and outgassing during the formation of oceanic crust and lithosphere. We compute the running average of the global  $^3\text{He}$ -,  $^4\text{He}$ - and  $^{238}\text{U}$ -content in a semi-circular area beneath the ridge

(with a dimensionalized radius of 150 km). This way, we mimick a magma chamber with full homogenization of material during the partial melting. As soon as a new tracer enters the magma chamber, one tracer is released, either in the crust (7 km thick) with probability  $p = 1/10$ , or in the underlying lithosphere (63 km thick) with probability  $1 - p = 9/10$ . This tracer is  $^3\text{He}$ - and  $^4\text{He}$ -degassed with respect to the magma chamber by a factor 1/1000 in the crust, or 1/50 in the lithosphere. Similarly, its U-content is enriched by 9.91 in the crust or depleted by 1/100 in the lithosphere (these coefficients respect element conservation as  $9.91p + 0.01(1 - p) = 1$ ). **Figure 5** depicts the global fractionation process. We advect  $\sim 300,000$  tracers initially homogeneously located, with the chemical rules of evolution described above. The viscosity jump (at a depth  $H/3$  to reproduce the volumic ratio between the upper mantle and the lower mantle in cartesian geometry) is deliberately rather large :  $\eta_{LM} = 100\eta_{UM}$ .

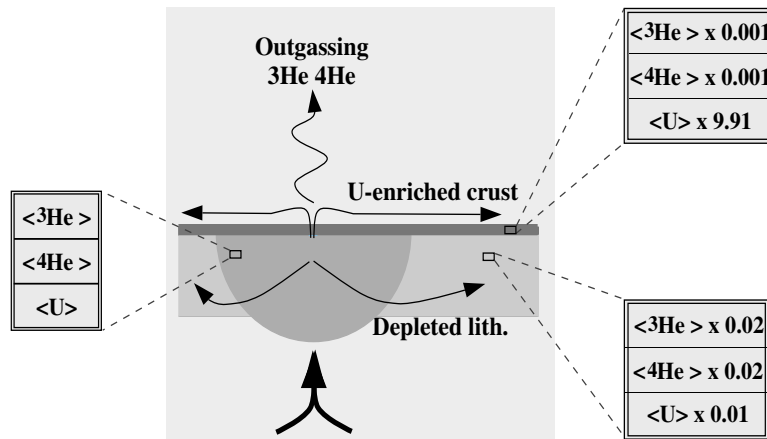


FIG. 5 – Fractionation and outgassing during partial melting in the magma chamber. After entering the magma chamber, a tracer loses the memory of its former  $^3\text{He}$ -,  $^4\text{He}$ - and U-concentrations. New tracers, enriched or depleted with respect to the magma chamber composition are released either in the crust or in the mantle lithosphere respecting elemental conservation during fractionation processes.

The time since each tracer has left the ridge is mapped in **Figure 6**. To plot this map and the following ones, the discrete values carried by each tracers have been gridded over surfaces equal to that of the magma chamber. The density of tracers remains rather homogeneous during the numerical experiment so that each interpolated value represents an average of about 100 tracers.

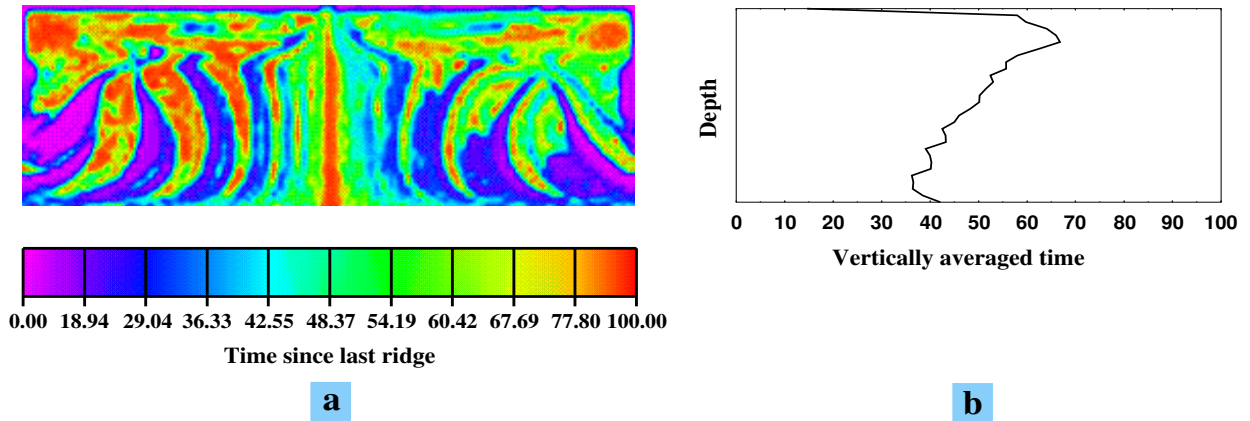


FIG. 6 – Snapshot of the distribution of time since each tracer has left the ridge (a) and averages values over 30 km-thick layers (b), after 100 transit times ( eg 3 byrs) of advection. The viscosity jump is equal to 100, and located at depth  $H/3$ . The lower part is somewhat younger than the upper part.

We observe that the lower mantle is on average somewhat younger than the upper mantle in this simulation (**Figure 6b**). This astonishing distribution of ages is explained by the fact that the viscosity increase does not constitute a strong barrier to the flow : almost all the slabs do penetrate the lower mantle, and material in the upper mantle is mostly provided from the return flow. The existence of a rather young lower mantle seems to be an inescapable implication of whole mantle convection models. The large-scale heterogeneities of the lower mantle correspond to slabs that are thickened and folded during their sinking. The color scale is graduated in transit times : every 180 Myrs a new fold is formed (the period of the imposed surface tectonics) and this piece of slab reaches the bottom of the mantle in about 150 Myrs (i.e, the sinking velocities predicted in the lower mantle are of order  $1.5 \text{ cm yr}^{-1}$ ).

**Figure 7** depicts the  $^3\text{He}/^4\text{He}$  ratios after the end of the simulation (100 transit times). **Animation 1** shows the evolution of He ratios from  $t=0$  to  $t=100$  transit times. The first and surprising remark we can make is that the viscosity layering is absolutely not visible in the He ratio distribution (**7a** and **Animation 1**) nor in the vertical averaged curve (**7b**). Although the  $^3\text{He}/^4\text{He}$  ratio decreases with depth no obvious large scale He anomaly can be detected. The upper part of the mantle has a more primitive  $^3\text{He}/^4\text{He}$  ratio because it contains tracers that have undergone a fewer number of degassing events. Small scale structures with sizes lower than  $\sim 200$  km are rather homogeneously distributed and correspond to lumps of either mantle lithosphere or oceanic crust. Crustal and lithospheric bodies close together have generally a similar age. This explains why the age map (**6a**) is smoother than that of the He ratio (**7a**).

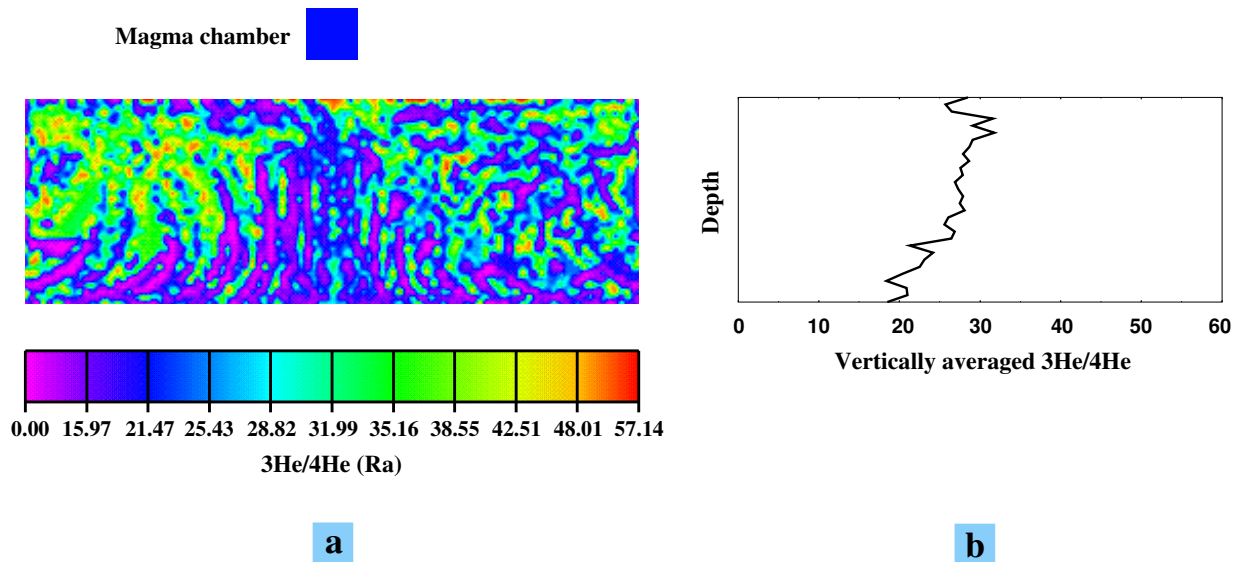


FIG. 7 – Same as in **Figure 6** for  $^3\text{He}/^4\text{He}$  distribution. The top square box represents the average  $^3\text{He}/^4\text{He}$  ratio in the magma chamber. Helium ratios are normalized to the present day atmospheric ratio (Ra). The viscosity stratification is not associated with a variation in the helium ratio distribution.



The He ratios under the ridge are about 20 Ra at the end of the simulation which is rather different from those found in MORBs (8 Ra). However there are various reasons why the absolute He ratios of the simulation should be significantly higher than those observed. The duration of the experiment  $\sim 3$  byrs, is shorter than the age of the Earth. The vigor of mantle convection has decreased with time (?; ?) and therefore, we underestimate the number of melting episodes. The early Earth may have undergone a large degassing (Allègre et al. 1986). These three phenomena decrease the  $^3\text{He}/^4\text{He}$  ratio. The recycling of continental crust would also lower the He ratio but recent work suggests that recycling is minor (?).

The comparison of **Figure 6a** and **Figure 7a** show that there is very little correlation between the helium ratio and the time since the last melting at ridge. It is not very surprising since both crustal and lithospheric layers are simultaneously generated at ridges, whereas they will develop very different helium ratios due to their drastically different U-concentrations.

As a conclusion of this numerical experiment, whole mantle circulation (with or without viscosity increase) is associated with a lower mantle younger than the upper mantle, and with a more depleted He signature. The viscosity layering alone does not seem to be responsible for large isotopic variations in the mantle. Moreover, it does not induce any vertical stratification of the material properties (composition, age since last ridge ...) as the amplitudes of lateral and vertical variations are on the same order of magnitude in **Figure 6a** and **7a**.

### **Role of an oceanic crust trapping in the D'' layer**

We now test the effects of a possible oceanic crust trapping in D'' on the variations of isotopic compositions. The purpose is not to decipher whether it really happens or not, but to evaluate the impact for helium and uranium distributions.

As the tracers are passive in our model, the segregation of the crust cannot spontaneously occur because of the negative buoyancy of eclogites as could be the case for the real Earth. We simply mimick the trapping process by removing

from the simulations all the tracers coming from the oceanic crust that enter the lowermost 200 km of the mantle. These tracers do not participate furthermore to the U-,  $^3\text{He}$ -, and  $^4\text{He}$ -budgets of the mantle.

Results are depicted in **Figures 8** and **9**, and in **Animation 2**. In the two figures, the trapped tracers are represented in the bottom box. At the end of the experiment,  $\sim 10,000$  crust particles have been removed, corresponding of 21.5% of the total generated crust, and 25.7% of the global uranium budget, which fits in the range proposed by Coltice and Ricard (1999).

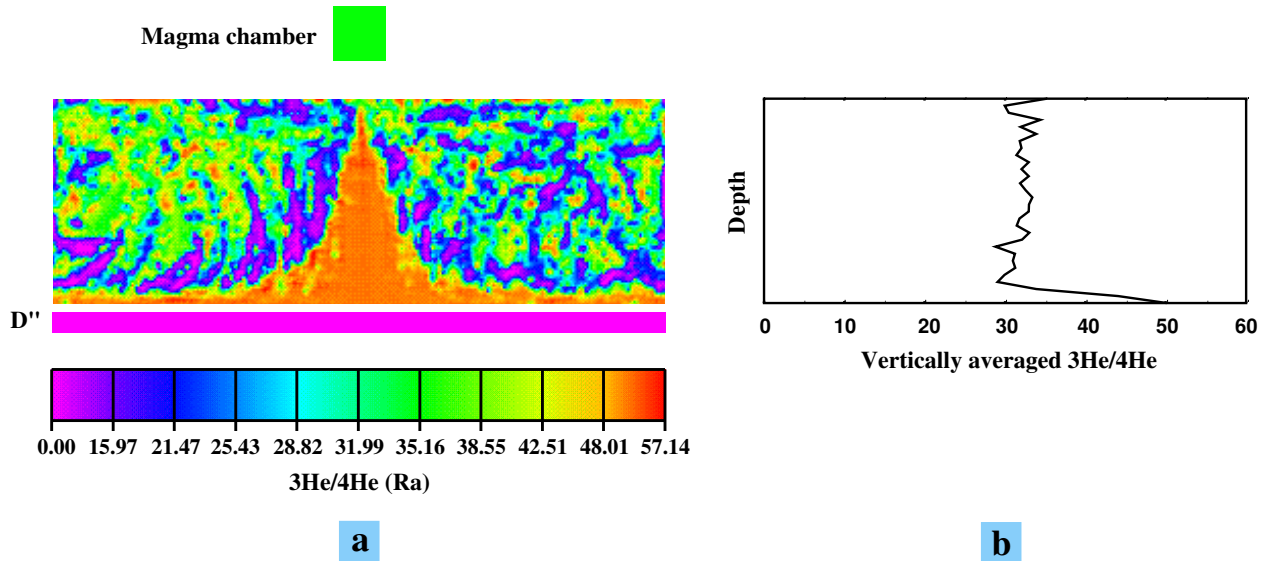


FIG. 8 – Same as in **Figure 7** with oceanic crust trapping in D''. The average  $^3\text{He}/^4\text{He}$  ratio of trapped tracers is plotted in the bottom box. A large area with high helium ratios is created, anchored on top of D''. This area with large  $^3\text{He}/^4\text{He}$  ratio is however not correlated with a primitive mantle (see **Figure 6**)

The map of time since each tracer has left the ridge is not shown because it is closely similar to **Figure 6**. Trapping some oceanic crust in the lowermost kilometers of the mantle has no effects on the ages distribution in this model.

Contrarily to the previous numerical experiment, the map of  $^3\text{He}/^4\text{He}$  ratio (**Figure 8a**) presents a large, high  $^3\text{He}/^4\text{He}$  area in a globally homogenized mantle with a significantly lower  $^3\text{He}/^4\text{He}$  (see also **Animation 2**). It is impor-

tant to notice that this area has roots in the very deep part of the box, where hotspots (in a globally convective system) are intended to rise. This large scale anomaly is not sampled in large proportions in the magma chamber : the average today's helium ratio is  $\sim 31$  Ra in the magma chamber, far from  $\sim 50$  Ra in the red area for example (**Figure 8a**).

The apparently "primitive" anomaly of the lower mantle is clearly not associated with a zone of the mantle that has remained pristine (the ages are depicted in **Figure 6**). On the contrary, there is a strong anti-correlation between  $^3\text{He}/^4\text{He}$  ratios and the U-concentrations (**Figures 8 and 9**). U provides  $^4\text{He}$  through radioactive decay : where U concentration is high,  $^3\text{He}/^4\text{He}$  is likely to be low, and vice versa. The segregation of the oceanic crust has left a U-depleted ancient lithosphere on top of the CMB. The paucity of radioactive elements in this layer freezes the evolution of the  $^3\text{He}/^4\text{He}$  ratio. This layer is slowly and passively entrained by the average return flow and forms a huge upwelling zone far from subductions.

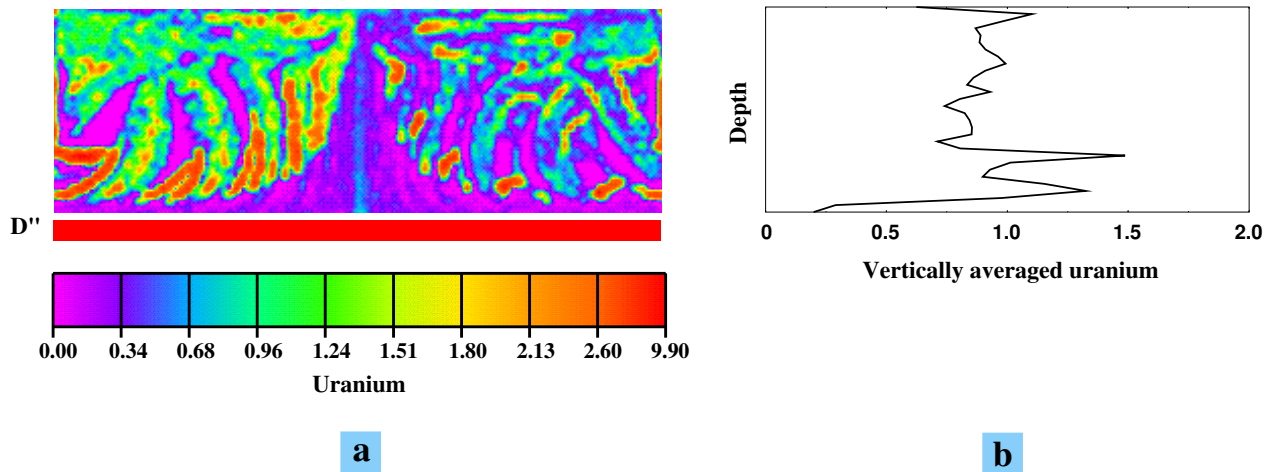


FIG. 9 – Same as in **Figure 8** for the uranium distribution. A comparison with the previous figure shows that they are strongly anti-correlated.

### Discussion and Conclusions

In the previous sections, we saw that, though attractive, the intuitive idea that the viscosity layering of the mantle plays an important role for the mixing

efficiency and isotopic or ages distributions is likely to be wrong : as the convection is assumed to be one-layered, almost all the material goes across the viscosity discontinuity, even large. The material properties (whatever their nature) remain more or less homogeneous in the whole system due to this interpenetration.

On the contrary, we have shown that segregation of ancient oceanic crust could be a viable assumption for explaining the helium data, as already argued by Coltice and Ricard (1999) using a simpler box model. If so, hot spot basalts could originate from a variable mixture of two end-members : ancient lithospheric material in large-scale zones of the lower mantle, and ancient oceanic crust in D". The former could possibly be at the origin of the apparently "primitive" He signature of some hotspots like Loihi (although containing evidence of recycling (Blichert-Toft et al. 1999)), the latter being at the origin of HIMU hotspots.

We have already discussed the fact that we obtain helium ratios that are significantly larger than in the Earth. We could have complexified the numerical code by renormalizing the unit of time to the secular heat flow decrease, like in the paper of Gurnis and Davies (1986b). However, it would not have qualitatively affected the results, as it would only have increased the number of times each tracer would have been processed in the magma chamber, but the intrinsic dynamics (which is responsible for those peculiar distributions) would have remained unchanged.

We have performed other simulations by changing the relative compatibilities of He and U. The conclusions remain the same. As the MORB source is made of stripes of ancient lithosphere and oceanic crust, its  $^3\text{He}/^4\text{He}$  ratio is necessary in between the low  $^3\text{He}/^4\text{He}$  ratio of the pieces of oceanic crust and that of the lithosphere. Any zone of the mantle rich in ancient lithosphere has therefore a high, apparently more primitive  $^3\text{He}/^4\text{He}$  ratio.

In contradiction to most usual views of mantle chemistry, it seems difficult in the frame-work of whole mantle convection to keep a lower mantle older than the upper mantle. Allègre and Turcotte (1985) explains the elemental budget

of the Earth by a balance between a pristine lower mantle, a depleted upper mantle and the enriched continental crust. Geophysical observations, according to our interpretation favors a balance between a depleted whole mantle and two enriched reservoirs, the continental crust and D”.

*Acknowledgments* This work benefited from numerous and constructive discussions with Nicolas Coltice. It has been supported by CNRS-INSU programs. Parallel computations were performed thanks to the PSMN computing facilities.

### Animation captions<sup>2</sup>

**Animation 1** :  $^3\text{He}/^4\text{He}$  evolution from time  $t=0$  to  $t=100$  transit times with the same features as in **Figure 7**. Contrarily to **Figure 7** where the He ratios are normalized by today's atmospheric ratio, He ratios are normalized by the chondritic value at the corresponding time  $t$ . Blue areas (less than 1) represent depleted material, whereas red areas (more than 1) correspond to enriched zones. As the color scale does not evolve with time, the ongoing degassing shifts the average values towards the blue.

**Animation 2** : Same as in **Animation 1** with oceanic crust trapping in the D”. The He ratios at the end of the experiment correspond to those of **Figure 8**, but with a different normalization (chondritic rather than atmospheric). The density of tracers remains homogeneous in the whole box, including the white area.

---

<sup>2</sup>Le lecteur trouvera des images issues de ces animations en **annexe D**

## 3.6 Résultats du modèle tridimensionnel

Nous avons réalisé des expériences de calcul de temps de mélange et d'exposants de Lyapunov dans le cadre de modèles tridimensionnels à viscosité variable. L'advection de traceurs chimiques avec ou sans ségrégation de croûte océanique dans la couche D" n'a pas été réalisée par manque de temps.

### 3.6.1 Caractéristiques du modèle

Le champ de vitesses utilisé présente les caractéristiques suivantes :

- il est induit par des vitesses de plaques lithosphériques, et par des masses internes plus denses que le manteau à l'aplomb des zones de subduction ;
- la géométrie et la vitesse des plaques sont identiques à celles de la **figure 2.3** ;
- il est stationnaire ;
- la discontinuité visqueuse, d'amplitude variable, est placée à mi-hauteur du système pour coïncider avec les grilles de calcul de temps de mélange.

Toutes les expériences sont réalisées pour un temps total d'advection de 100 *transit times*, ce qui correspond à 3 Ga pour une dimensionnalisation à l'échelle du manteau global et en choisissant une vitesse quadratique moyenne de surface égale à 10 cm an<sup>-1</sup>.

### 3.6.2 Temps de mélange en fonction de la longueur d'onde

Nous avons calculé des temps de mélange en fonction de la longueur d'onde dans les deux cas extrêmes où il n'y a pas de saut de viscosité d'une part, et où le rapport des viscosités vaut 100 d'autre part. La longueur d'onde varie de  $H/2$  à  $H/32$ , ce qui nécessite l'advection de plus d'un million de traceurs. Comme dans le cas bidimensionnel, le code a dû être parallélisé.

Les résultats sont présentés dans la **figure 3.4**.

On constate qu'en présence d'un saut de viscosité important, les temps de mélange semblent en général légèrement plus élevés que dans le cas isovisqueux. Toutefois, l'augmentation du temps de mélange avec la longueur d'onde apparaît

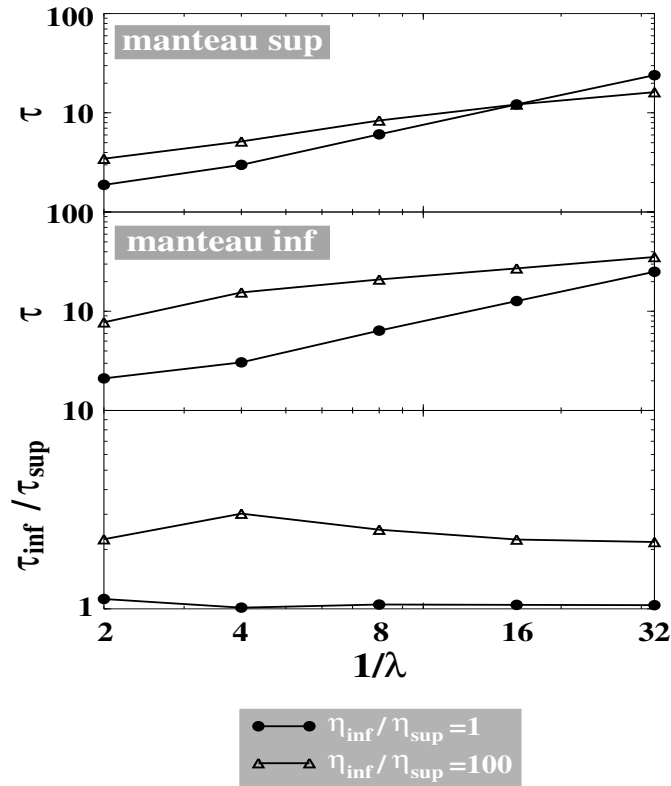


FIG. 3.4 – Temps de mélange en fonction de la longueur d’onde dans le manteau supérieur (a), dans le manteau inférieur (b), et rapport des deux (c). Les temps et les longueurs sont adimensionnés de la même manière que dans les expériences bidimensionnelles.

moins rapide lorsqu’il y a une stratification visqueuse : pour la longueur d’onde la plus courte, les temps de mélange sont du même ordre de grandeur dans les deux expériences. On peut se demander si cela traduit des comportements asymptotiques différents pour la limite des courtes longueur d’onde.

De plus, le graphe (c) montre que les rapports entre temps de mélange de la partie inférieure et temps de mélange de la partie supérieure sont toujours de l’ordre de 2 en présence du saut de viscosité. Ceci confirme les conclusions précédentes tirées des expériences bidimensionnelles : on démontre ici de manière encore plus probante qu’un saut de viscosité, même important, ne

différence pas de manière significative les propriétés de mélange des deux sous-systèmes.

### 3.6.3 Exposants de Lyapunov

Là encore, nous avons réalisé le même type d'expériences que dans le cas bidimensionnel, avec des sauts de viscosité variant de 1 à 200. Les résultats sont présentés dans la **figure 3.5**.

Ces calculs montrent qu'à courte longueur d'onde, on ne distingue toujours

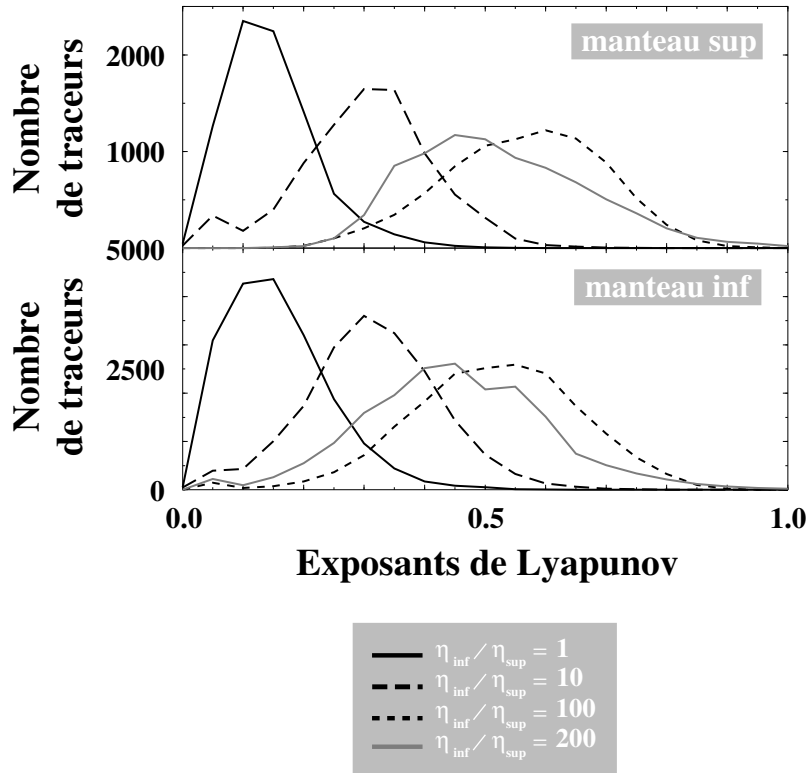


FIG. 3.5 – Histogrammes d'exposants de Lyapunov pour des traceurs initialement placés dans la partie supérieure (a), ou inférieure (b). L'adimensionnalisation est identique à celle des expériences bidimensionnelles.

pas de différences de propriétés de mélange entre les deux couches.

Il est également très intéressant de constater que dans une gamme de rapports de viscosité raisonnables (jusqu'à 100), la médiane des histogrammes aug-



mente avec le rapport des viscosité. Ceci indique que plus la différence de viscosité est grande, plus le temps de mélange à courte longueur d'onde est petit. On confirme donc la tendance décelée dans les expériences tridimensionnelles de temps de mélange en fonction de la longueur d'onde. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'une variation brutale de viscosité induit une zone de fort cisaillement à l'interface. Comme la plupart des traceurs traversent la discontinuité, ils y subissent un étirement accru, ce qui augmente *globalement* les propriétés de mélange dans l'écoulement. On peut penser que ce comportement est particulièrement bien mis en évidence pour les courtes longueurs d'onde car le signal dû à ce cisaillement est lui-même à très courte longueur d'onde (l'épaisseur de fluide mise en jeu est petite par rapport à la taille du système).

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons testé le rôle de variations verticales de la viscosité sur les propriétés de mélange d'un écoulement simulant le manteau terrestre. Nous vérifions que la stratification visqueuse du manteau n'est pas un facteur de premier ordre pour expliquer la signature géochimique des basaltes, comme le laissaient déjà supposer les précédents travaux de van Keken and Ballentine (1998). De plus, nous montrons qu'à trois dimensions, la présence d'une stratification visqueuse tend à augmenter l'efficacité du mélange à courte longueur d'onde.

D'autre part, nous avons simulé les effets d'un stockage partiel de croûte océanique dans la couche D". Il s'avère que les résultats obtenus dans le cadre d'un modèle bidimensionnel semblent pouvoir s'intégrer dans une interprétation au premier ordre du message géochimique. Bien évidemment, ces résultats ne constituent nullement une preuve de l'existence de ce phénomène dans la Terre.

# Chapitre 4

## Convection et modèles de boîtes géochimiques

### 4.1 Introduction

Les nombreuses études sur la dynamique du manteau ont été élaborées à l'aide de modèles de convection (Hoffman and McKenzie; Gurnis and Davies; Christensen, *etc* ...), ou de modèles de boîtes géochimiques (Jacobsen and Wasserburg 1979; O'Nions et al. 1979; Allègre et al. 1983a; Allègre et al. 1983b; Allègre et al. 1987; Allègre and Lewin 1989; Kellogg and Wasserburg 1990; Porcelli and Wasserburg 1988; O'Nions and Tolstikhin 1996; Albarède 1998; Davies 1999b; Coltice and Ricard 1999). Cette dernière approche a déjà été également utilisée en météorologie ou en océanographie (Garçon and Minster 1988). Elle consiste à définir *a priori* des ensembles homogènes au sein du système étudié (*ie* boîtes), puis à y fixer des conditions initiales (concentrations dans chaque boîte) ainsi que des conditions de transport (flux de matière entre les boîtes, coefficients de partition des différents éléments en présence). En résolvant les équations de transport qui s'y rapportent, on peut alors observer l'évolution des caractéristiques géochimiques respectives de chaque boîte.

Alors que la plupart des modèles de boîtes géochimiques sont supposés à l'état stationnaire, certains y introduisent une dépendance temporelle (Albarède 1998) pour reproduire les observations d'une manière plus satisfaisante.

Avec le même souci de perfectionner cette méthode, Allègre and Lewin (1989) proposent un modèle dans lequel les boîtes ne sont pas parfaitement homogènes, mais sont représentées par une valeur moyenne et un écart-type des concentrations pour chaque espèce.

Pourquoi les modèles de boîtes ont-ils été (et sont-ils encore !) si développés ? La raison principale réside dans le fait qu'ils sont la plupart du temps plus simples à mettre en place et moins coûteux en temps de calcul que les modèles de convection. En outre, ces derniers ne peuvent pas, en l'état actuel des connaissances, reproduire des caractéristiques importantes de la convection du manteau terrestre, comme par exemple la formation 'auto-consistante' de plaques lithosphériques.

Cependant, les modèles de boîtes sont extrêmement sensibles aux hypothèses de départ : loin d'avoir des résultats convergents, la multitude de modèles proposés aboutit à des réponses variées et dynamiquement contradictoires. Jacobsen and Wasserburg (1979) et O'Nions et al. (1979) déduisent de leurs modèles que le manteau convecte en deux couches séparées, tandis que c'est le contraire pour Albarède (1998), Davies (1999b) et Coltice and Ricard (1999) (bien que ces trois modèles n'aient pas beaucoup de points communs dans leurs implications).

Dans l'article qui suit (qui a fait l'objet d'une publication dans *Geophysical Research Letters* en Juin 2000), nous présentons une étude visant à comparer les résultats des modèles de boîtes et ceux de modèles de convection. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Nicolas Coltice.

Nous montrons que les équations de transport qui régissent un modèle de boîtes s'apparentent à une équation de diffusion-convection, dans laquelle le coefficient de diffusion est entièrement lié à la taille de chaque boîte : si le nombre de boîtes est petit, la taille de chaque boîtes sera grande, et le coefficient de diffusion sous-jacent n'en sera que d'autant plus important.

Cette représentation en termes de diffusion-convection n'est pas intrinsèquement absurde : elle est couramment utilisée en turbulence, où les mécanismes de mélange aux longueurs d'onde inférieures à la résolution du modèle sont as-

similés à un phénomène de diffusion, caractérisé par un coefficient de diffusion  $D$  (Taylor 1921). Dans ce cas,  $D$  est fixé par les propriétés de l'écoulement à très courte longueur d'onde (amplitude moyenne, temps d'autocorrélation), contrairement aux modèles de boîtes où le coefficient de diffusion est gouverné par la taille des boîtes. Nous montrons donc que l'élaboration d'un modèle de boîtes devrait nécessairement passer par une détermination préalable du coefficient de diffusion acceptable pour le système, ce qui permettrait ensuite de fixer la taille et le nombre de boîtes requis. Nous estimons que pour le manteau terrestre, il faudrait utiliser une quinzaine de boîtes, ce qui est largement supérieur à tous les travaux publiés à ce sujet.

En outre, nous mettons en évidence la sensibilité des modèles de boîtes à l'organisation des flux de matière entre chaque boîte.

## **4.2 Box modeling the chemical evolution of geophysical systems : case study of the Earth's mantle**

## Box modeling the chemical evolution of geophysical systems: case study of the Earth's mantle

N. Coltice, S. Ferrachat and Y. Ricard

Laboratoire des Sciences de la Terre, Ecole Normale Supérieure de Lyon, France

**Abstract.** Geochemical measurements have been widely used for understanding geophysical dynamic systems. Fluid mechanics and box models are quantitative tools for testing the reliability of these interpretations. We present here the connection between these two methods, especially in the case of the Earth's mantle. We show that box models implicitly assume a chemical diffusivity inversely proportional to the number of boxes. From fluid dynamics considerations we suggest that at least 15 boxes should be used to model the mantle. Then, we compare the results of a simple convective geochemical model with box models to illustrate a way to incorporate dynamical constraints in them.

### Introduction

Modeling the chemical evolution of dynamic systems is of interest in various fields of planetary sciences: oceanography, atmospheric and solid Earth sciences. The fully-dynamical description is the most straightforward approach: in the case of Earth's mantle, it consists in solving the convection equations and advecting chemical tracers [Gurnis and Davies, 1986; Kellogg and Turcotte, 1990; Christensen and Hofmann, 1994]. However, the difficulties of modeling some physical processes (turbulence for the atmosphere and ocean, or generation of plate tectonics), and the computational cost of this technique, make box models an alternative method.

Box models refer to the computation of the chemical evolution of structural units exchanging elements. These units are homogeneous boxes (in some cases defined by mean and rms concentrations [Allègre and Lewin, 1995]). The example of mantle geochemistry shows that it is difficult to design coherent and realistic box models. The same data has led to contradictory views: Albarède [1998], Coltice and Ricard [1999] argue for whole mantle convection, Jacobsen and Wasserburg [1979] for a separation between upper and lower mantle, and Anderson [1982] for an even more complicated layering. These conflicts are essentially due to the choice of the number of boxes and the difficulties for incorporating dynamical constraints [Garçon and Münster, 1988].

The goal of this paper is to describe quantitatively the framework of an accurate box modelisation. The results presented are applied mostly to the chemistry of the Earth's mantle, which is at the center of conflicts between geochemists and geophysicists [see Hofmann, 1997, for a review].

### Assumptions of box models

#### Equations

To describe the equations used in chemical box models, we use the same formalism as in Albarède [1998]. The mass conservation for a reservoir  $i$  reads

$$\frac{dM_i}{dt} = \sum_{j \neq i} Q_{j \rightarrow i} - \sum_{j \neq i} Q_{i \rightarrow j}, \quad (1)$$

where  $M_i$  is the mass of the box  $i$ ,  $t$  the time and  $Q_{i \rightarrow j}$  the mass flux from box  $i$  to box  $j$ .

The conservation of the chemical element  $k$  with concentration  $C_i^k$  in the reservoir  $i$  is

$$\begin{aligned} \frac{dC_i^k}{dt} = & -(\lambda^k + \frac{\sum_{j \neq i} Q_{i \rightarrow j} K_{i \rightarrow j}^k}{M_i} + \frac{\sum_{j \neq i} (Q_{j \rightarrow i} - Q_{i \rightarrow j})}{M_i}) C_i^k \\ & + \frac{\sum_{j \neq i} Q_{j \rightarrow i} K_{j \rightarrow i}^k}{M_i} C_j^k + \lambda^{k-1} C_i^{k-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

where  $K_{i \rightarrow j}^k$  is the enrichment factor due to the fractionation of element  $k$  upon transfer from box  $i$  to box  $j$ . The element  $k$  can be produced by the parent  $k-1$  and produces the daughter element  $k+1$  with radioactive decay constants  $\lambda^{k-1}$  and  $\lambda^k$ .

Equation (2) implicitly states that the concentration in each reservoir is homogeneous. A simple example will show how the size at which a fluid can be considered homogeneous can be linked to, or estimated from the flow pattern in this fluid.

### A simple example: the plug flow

The most obvious characteristics of convection with internal heating is that there is only one thermal boundary layer, the cold lithosphere. The downwellings are intense and very localized, the hot return flow is very slow and diffuse. A possible zero-order model of the mantle flow might be a 1-D plug flow: the material that has reached the surface is brought back by subduction to the bottom of the mantle and then rises slowly back to

1580 N. COLTICE, S. FERRACHAT AND Y. RICARD: BOX MODELS OF THE EARTH'S MANTLE

the surface. To model this scenario with boxes, we can divide the mantle into  $n$  superposed boxes with masses  $M/n$  where  $M$  is the mass of the mantle. These boxes are crossed by a uniform mass flux  $Q = \rho v_z S$  where  $\rho$  is the density,  $S$  the surface between two boxes, and  $v_z$  the vertical return velocity.

The easiest case to model is the transport of an inert gas. The  $n$  equations to solve are of the form

$$\frac{M}{n} \frac{dC_i}{dt} = Q(K_{i-1}C_{i-1} - K_i C_i), \quad (3)$$

where all  $K_i$  are equal to 1 (mass transport) except for the top box where  $K_n = K_{top}$  (degassing) and for the bottom box (reinjection) where  $K_0 C_0 = K_{bottom} C_n$  (implicitly the atmosphere box accounts for mass conservation of the degassed species).

By a second order Taylor expansion in  $z$ ,

$$C_{i-1} = C_i - \frac{\partial C}{\partial z} \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \Delta z^2 \quad (4)$$

( $\Delta z = \frac{L}{n}$  where  $L$  is the mantle thickness), equation (3) becomes

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_z \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{v_z \Delta z}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}, \quad (5)$$

where the concentration  $C(z, t)$ , is now a function of both depth and time.

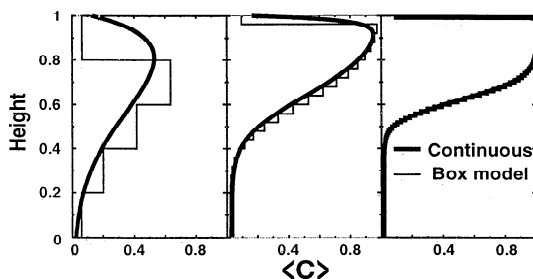
The two boundary conditions read, at the surface

$$\frac{\partial C}{\partial t}(top) + v_z \frac{\partial C}{\partial z}(top) = \frac{v_z}{\Delta z} (1 - K_{top}) C(top), \quad (6)$$

and at the core mantle boundary

$$C(bottom) = K_{bottom} C(top). \quad (7)$$

The physical meaning of a box model representation is clearly shown by equation (5). Implicitly this type of box model assumes that the transport is characterized by an advection term and a diffusion term. The latter has an equivalent diffusivity  $v_z \Delta z / 2$ . When the number of boxes increases to infinity ( $\Delta z \rightarrow 0$ ), the equivalent diffusivity goes to zero and the concentrations are purely advected by the flow. Fig. 1 depicts various concentration profiles computed either with equation (3) (thin line) or with equation (5) (thick line). The good agreement between the two computations increases with



**Figure 1.** Concentration profiles,  $C(t)/C(0)$ , as a function of normalized depth ( $K_{top} = 10$ ,  $K_{bottom} = 0.2$ ,  $t = 1.8$  Gyrs,  $v_z = 1$  mm.yr $^{-1}$ ).

the number of boxes (5 on the left, 25 in the middle, 100 on the right).

The return velocity imposed by slab subduction  $v_z$  is around 1 mm yr $^{-1}$  (the flux of slab divided by the Earth's surface). When geochemical data are explained by a two reservoir mantle, a diffusivity coefficient of 25.10 $^{-6}$  m $^2$  s $^{-1}$  is implicitly assumed. We will see in the following that this implicit diffusivity coefficient is not related to that of solid state chemical diffusivity. The latter is  $\sim 10^{-20}$  m $^2$  s $^{-1}$  [Allègre and Turcotte, 1986], hence a diffusivity 14 orders of magnitude smaller than that of a 2 box model.

### The fluid dynamicist point of view

Modeling the evolution of concentration in a convection model where the incompressible velocity field is  $\vec{v}$ , only consists in solving

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) C = 0, \quad (8)$$

assuming a negligible chemical diffusivity.

Following the reasoning of Taylor [1921], the dispersion of particles around a mean position in a mixing flow is similar to a diffusive behavior in Lagrangian coordinates. The convective velocity can be divided into a large scale, slowly varying velocity,  $\vec{V}$  and a remaining velocity  $\vec{u}$ . Taylor has shown that equation (8) can be recast as

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) C = \bar{u}^2 \tau \nabla^2 C, \quad (9)$$

where  $\tau$  is the correlation time of the velocity field, i.e. the time after which the memory of the initial field has vanished, and  $\bar{u}$  some average of  $\|\vec{u}\|$ . Intuitively the advection by a small scale, time dependent flow that is responsible for chaotic mixing is equivalent to diffusion at a larger scale.

Equation (9) has been mostly used for turbulent flows [i.e., Pedlosky, 1987] and in hydrology where this Taylor diffusivity is called dispersivity [Bear and Bachmat, 1990]. However the idea that transport at a given scale appears as diffusion at a larger scale can be extended to most complex flows. When Taylor's idea of modeling sub-scale transport by diffusion does not hold, mixing cannot be understood without the computation of the finest scales of the flow, and hence the interpretation of transport by box model becomes impossible.

By comparison of equations (5) and (9), one sees that modeling convective mixing with box models requires a number of boxes given by

$$n = \frac{L}{2\bar{u}\tau}, \quad (10)$$

where we assume comparable amplitudes for  $\vec{V}$  and  $\vec{u}$ .

Putting numbers in (10) is certainly hazardous, our goal is only to show that the number of boxes can, in principle, be deduced from the space and time characteristics of mantle convection. Lower mantle veloci-

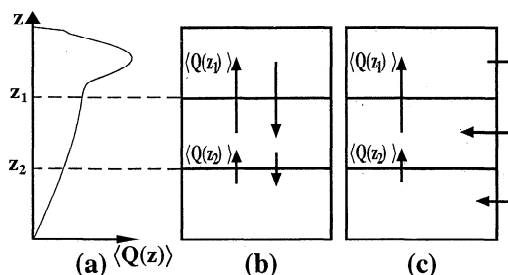
ties are around  $1 \text{ mm yr}^{-1}$ . The mantle has a memory of about 100 Myrs, a value that has been estimated from convection models [Ricard *et al.*, 1993; Bunge *et al.*, 1998]. In this case, a box model would require at least 15 boxes to predict the results of a convection code (i.e., boxes with sizes comparable to that of the boundary layers of the mantle), a number larger than what is commonly assumed. This corresponds to a diffusivity of  $\sim 3.10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , an order of magnitude smaller than that corresponding to a simple two box model.

### Box vs. geodynamic models: case studies

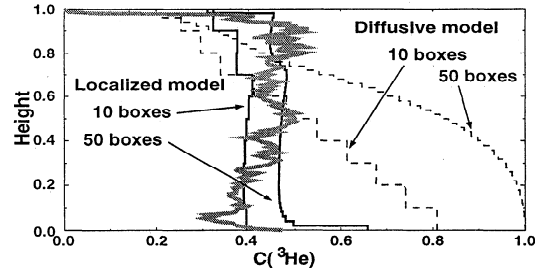
We compare the two approaches using a 2D circulation model in a rectangular domain of aspect ratio 3. We do not solve the whole convection system including the heat equation: the flow is only driven by a surface forcing simulating two plates diverging from a ridge, and by an internal forcing corresponding to two associated slabs [see Ferrachat and Ricard, 1998]. The ridge moves sinusoidally and sweeps the whole surface every 180 Myrs. The viscosity increases by a factor 100 in the lower  $2/3^{\text{rd}}$  of the box. During 3 Gyrs, 300,000 tracers are advected carrying  $^3\text{He}$  and U with an initially homogeneous concentration.

To model melt fractionation and outgassing at ridges, we compute the running average over 3,000 tracers of the He and U contents of the tracers that enter a semi circular area beneath the ridge (mimicking a magma chamber of radius 150 km). As soon as a new tracer enters the magma chamber, a tracer is released, either in the crust (7 km thick) with probability 1/10, or in the underlying lithosphere (63 km thick) with probability 9/10. This tracer is degassed with respect to the magma chamber by a factor 1/1000 in the crust, or 1/50 in the lithosphere. Similarly its U-content is enriched by 9.91 in the crust or depleted by 1/100 in the lithosphere.

From the velocity field, we compute the rms vertical flux (horizontally- and time-averaged)  $\langle Q(z) \rangle$ . We also monitor the horizontally averaged  $^3\text{He}$  and U concentrations as a function of time and depth.



**Figure 2.** Averaged vertical fluxes  $\langle Q(z) \rangle$  of (a) the geodynamic model, from which schemes of fluxes of (b) "diffusive" and (c) "localized" models are extracted.



**Figure 3.** Vertical profiles of  $^3\text{He}$  concentration normalized by the initial concentration for "diffusive" (dotted), "localized" (thin line) and convection (thick line) models.

### Case one: $^3\text{He}$ degassing

We investigate two opposite organizations of the fluxes in the box models. In the first case we consider that each horizontal box only exchanges with adjacent boxes. We call this model the "diffusive" model. In the second case, we consider that the down-going mass fluxes are very localized, as downwellings carry directly the concentrations from the top boxes. Therefore we add fluxes from the uppermost boxes where toward lower boxes (see Fig. 2). We call this model the "localized" model. Results from the convective code and from the "diffusive" and "localized" box models are depicted in Fig. 3, for different numbers of boxes. The upward fluxes in the box models at each box interfaces are exactly those of the circulation model,  $\langle Q(z) \rangle$ .

The horizontally averaged content of  $^3\text{He}$  of the convection model (thick line) shows that 60% of the mantle is degassed. Despite of the rather high viscosity jump, the mantle is surprisingly homogeneous in agreement with previous studies [van Keken and Ballentine, 1999]. The only acceptable box model is the "localized" model, independently of the number of boxes. In this model, each layer has roughly the same input flux of degassed material from the near surface which results in a homogeneous mantle. In the "diffusive" model, the signal of degassing is diluted with depth so that the deepest boxes are kept undegassed. According to equation (5), more diffusion occurs in models with a low number of boxes.

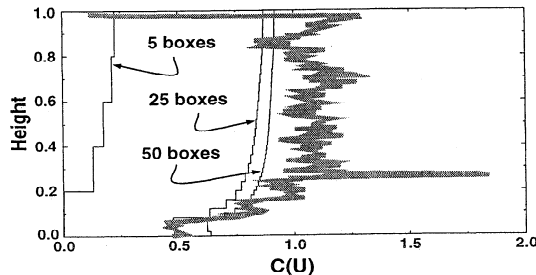
### Case two: U trapping in D"

The only way with our simple convection model to obtain a significant depth dependence of element concentrations is to artificially impose the segregation of the oceanic crust which enters the lowermost 200 km [Hofmann and White, 1982]. Storing the U-rich crust into an isolated D" layer depletes the lower mantle [Coltice and Ricard, 1999].

In the box model, crustal segregation implies that only depleted material enters the boxes in the bottom 200 km, because U-enriched crust is removed from the



1582 N. COLTICE, S. FERRACHAT AND Y. RICARD: BOX MODELS OF THE EARTH'S MANTLE



**Figure 4.** Vertical profiles of U concentration normalized by the initial concentration with natural decay for “localized” (thin) and convection (thick line) models. The convection model assumes oceanic crust segregation in D”.

budget. This effect is introduced in the “localized” model by an enrichment coefficient  $K_{bottom}^U = 0.01$  from the top box toward the lower-most boxes.

Fig. 4 depicts the U concentration computed with the convective model after 3 Gyrs of simulation (thick line). As for  $^3\text{He}$ , the horizontally averaged U content is relatively constant with depth, except near the bottom where it is depleted by segregation. The D” layer is not represented and has stored 1/10 of the initial amount of U. The box model results are shown by thin lines for various numbers of boxes. The box model predicts the vertical structure of the convective model fairly well for a number of boxes larger than 20. With a smaller number, the equivalent diffusivity is too large and the whole mantle is depleted.

## Conclusions

Although ultimately, chemical exchanges will have to be modeled by a fully dynamical description, this goal is presently out of reach for several reasons that make box model of particular interest. We have shown that the box model equations are equivalent to advection-diffusion equations with a diffusivity related to the mixing properties in a fluid dynamics analysis. Then, the topology and the number of boxes must be deduced from a flow analysis, that would give, for mantle convection, a number of boxes larger ( $\sim 15$ ) than what is commonly considered.

The results of box models are highly dependent on the flux configuration: a box model assuming localized downwellings (“localized” model) reproduces our fluid dynamics results whereas a box model assuming symmetrical upwellings and downwellings (“diffusive” model) does not. However, a good prediction requires  $\sim 20$  superposed boxes.

These conclusions leave apart the fact that the fluid dynamics code also predicts large scale lateral variations that have not been considered by our depth-dependent box model, and the fact that 3 D mixing properties might not be easily extrapolated from simple 2 D models [Ferrachat and Ricard, 1998].

**Acknowledgments.** We thank F. Albarède for his comments, Eric Lewin, Michael Manga and an anonymous reviewer for their constructive suggestions. This work is supported by the CNRS INSU programs. Computations are performed on the PSMN facilities.

## References

- Albarède, F., Time-dependent models of U-Th-He and K-Ar evolution and the layering of mantle convection, *Chem. Geol.* **145**, 413-429, 1998.
- Allègre, C. J. and D. L. Turcotte, Implications of a two component marble-cake mantle, *Nature* **323**, 123-127, 1986.
- Allègre, C.J. and E. Lewin, Isotopic systems and stirring times of the Earth’s mantle, *Earth Planet. Sci. Lett.* **136**, 629-646, 1995.
- Anderson, D. L., Isotopic evolution of the mantle: a model, *Earth Planet. Sci. Lett.* **57**, 13-24, 1982.
- Bear, J. and Y. Bachmat, Introduction to modeling of transport phenomena in porous media, Kluwer Academic Publishers, 1990.
- Bunge, H.-P., M. A. Richards, C. Lithgow-Bertelloni, J. R. Baumgardner, S. P. Grand, and B. A. Romanowicz, Time scales and heterogeneous structure in geodynamic Earth models, *Science* **280**, 91-94, 1998.
- Christensen, U. and A. W. Hofmann, Segregation of subducted oceanic crust in the convective mantle, *J. Geophys. Res.* **99**, 19867-19884, 1994.
- Coltice, N. and Y. Ricard, Geochemical observations and one layer mantle convection, *Earth Planet. Sci. Lett.* **174**, 125-137, 1999.
- Ferrachat, S. and Y. Ricard, Regular vs. Chaotic mixing, *Earth Planet. Sci. Lett.* **155**, 75-86, 1998.
- Garçon, V.C. and J.-F. Minster, Heat, carbon and water fluxes in a 12-box model of the world ocean, *Tellus* **40B**, 161-177, 1988.
- Gurnis, M. and G. F. Davies, Mixing in numerical models of mantle convection incorporating plate kinematics, *J. Geophys. Res.* **91**, 6375-6395, 1986.
- Hofmann, A. W., Mantle geochemistry: the message from oceanic volcanism, *Nature* **385**, 219-229, 1997.
- Hofmann, A. W. and W. M. White, Mantle plumes from ancient oceanic crust, *Earth Planet. Sci. Lett.* **57**, 421-436, 1982.
- Jacobsen, S. B. and G. J. Wasserburg, The mean age of mantle and crustal reservoirs, *J. Geophys. Res.* **84**, 7411-7427, 1979.
- Kellogg, L. H. and D. L. Turcotte, Mixing and the distribution of heterogeneities in a chaotically convecting mantle, *J. Geophys. Res.* **95**, 421-432, 1990.
- Pedlosky, J., Geophysical fluid dynamics, Springer Verlag, 1987.
- Ricard, Y., M. A. Richards, C. Lithgow-Bertelloni and Y. LeStunff, A geodynamic model of mantle density heterogeneity, *J. Geophys. Res.* **98**, 21895-21909, 1993.
- Taylor, G. I., Diffusion by continuous movements, *Proc. of the Lond. Math. Soc.* **20**, 196-211, 1921.
- van Keken, P. E. and C. J. Ballentine, Dynamical models of mantle volatile evolution and the role of phase transitions and temperature dependent rheology, *J. Geophys. Res.* **104**, 7137-7168, 1999.

Laboratoire des Sciences de la Terre, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d’Italie 69364 Lyon cedex 07, France. (email: ncoltice@ens-lyon.fr; sferrachat@ens-lyon.fr; ricard@ens-lyon.fr)

(Received July 30, 1999; revised March 3, 2000; accepted March 29, 2000.)

# Conclusions et perspectives

En commençant cette thèse, nous espérions qu'en conjuguant observations géochimiques d'une part, et études de mélange d'autre part, nous pourrions obtenir des informations (à défaut de contraintes) sur la dynamique du manteau et les processus de recyclage entre surface et profondeur. Cette approche, caractéristique d'un problème inverse, s'inscrivait en quelque sorte dans le prolongement des études de Gurnis and Davies (1986b) et Christensen (1989). Nous avons vu que ce n'est pas concluant. En effet, le problème direct qui consiste à fixer des hypothèses sur la dynamique, puis à en déduire des observables géochimiques à travers les propriétés de mélange de l'écoulement, est très non-linéaire. En d'autres termes, la distribution des hétérogénéités est très dépendante des caractéristiques fines de l'écoulement : dans le cadre précis de notre étude, nous avons montré que la tridimensionnalité, la géométrie des conditions aux limites, ou encore le rapport des énergies cinétiques poloïdale et toroïdale jouent des rôles cruciaux pour l'efficacité du mélange. A titre d'exemple supplémentaire, on peut remarquer que les larges zones hétérogènes mises en évidence dans le cadre d'un modèle isovisqueux semblent disparaître lorsqu'on impose une stratification visqueuse. Rien ne pouvait nous laisser supposer un tel comportement à partir de la théorie hamiltonienne.

Néanmoins, deux points au moins semblent robustes. D'une part, on ne peut pas invoquer la présence d'une stratification visqueuse dans le manteau pour expliquer la signature géochimique des basaltes en surface. En effet, des variations radiales de viscosité (mêmes importantes) ne suffisent pas à localiser les propriétés de mélange. D'autre part, tous les écoulements étudiés présentent une distribution d'hétérogénéités aussi bien latérales que radiales. Ceci pose

de sérieuses restrictions sur la pertinence des modèles de boîtes géochimiques dans le manteau : ces derniers supposent généralement l'existence de couches horizontales homogènes.

L'objectif initial était sous-tendu par le fait que nous pensions pouvoir expliquer le message géochimique sans supposer l'existence de réservoirs individuels dus à des processus minéralogiques ou chimiques. Cette idée est naïve, et nous avons vu que cela semble peu probable. En effet, s'il est possible de fabriquer des 'entités' indépendantes, hétérogènes, au sein d'un modèle de circulation dans le manteau (*cf* **chapitre 2**), il est néanmoins difficile de savoir si celles-ci peuvent être responsables de la signature des OIB en surface : il reste encore à démontrer que d'une part elles restent stables au sein du manteau malgré un écart prévisible de température, et que d'autre part leur présence modifie sensiblement le contenu du manteau transporté dans les panaches (voir aussi Becker et al. (1999) et Farnetani and Richards (1995)).

Au contraire, nous avons montré qu'envisager l'existence d'un réservoir formé de croûte océanique ancienne dans la couche D'' pourrait permettre d'expliquer la signature géochimique en surface (voir aussi Coltice and Ricard (1999)).

Pourquoi avoir placé ce réservoir dans la couche D'' ? Tout d'abord, les modèles radiaux tels que PREM prévoient l'existence d'une couche plus dense à la base du manteau, ce qui est cohérent avec la présence de croûte océanique éclostisée. De plus, le coefficient d'expansivité thermique est vraisemblablement très faible à l'interface noyau/manteau :  $< 10^{-5} \text{ K}^{-1}$  (?). Cela contribue à stabiliser cette couche. Ensuite, Coltice and Ricard (1999) ont montré à l'aide de bilans de masse et de chaleur que cette hypothèse est viable et qu'elle reproduit la signature isotopique de types de basaltes (MORB, HIMU, Loihi). Enfin, on peut ajouter que la couche D'' est suffisamment mal connue pour qu'on puisse spéculer sur ses caractéristiques !

En conclusion, il semble qu'à l'avenir on ne puisse s'affranchir de réaliser des modèles du manteau qui mêlent à la fois la convection thermique et des caractéristiques chimiques. On pourrait par exemple envisager d'utiliser des tra-

ceurs actifs, plus ou moins denses que le manteau moyen, et qui en véhiculant des éléments radiogéniques modifieraient localement le champ de température. Ceci permettrait entre autres de vérifier la stabilité d'une couche dense riche en éléments radiogéniques à la base du manteau. Nous pourrions également tester l'influence des traceurs actifs sur les propriétés de mélange et la distribution des hétérogénéités au sein de l'écoulement.



## Annexe A

# Calcul de stabilité : points elliptiques et points hyperboliques

Plaçons-nous dans un système discret, et imaginons le comportement d'un point  $\vec{P}' = \vec{P} + \delta\vec{p}$  au voisinage d'un point fixe  $\vec{P}$ . Soit  $\vec{P}'' = \vec{P} + \delta\vec{p}'$  l'image de  $\vec{P}'$  par une application de Poincaré  $\vec{\Phi}$ .

$$\begin{aligned} \vec{P}'' &= \vec{\Phi}(\vec{P}') \\ \Leftrightarrow \vec{P} + \delta\vec{p}' &= \vec{\Phi}(\vec{P} + \delta\vec{p}) \\ \Leftrightarrow \delta\vec{p}' &= \vec{\Phi}(\vec{P} + \delta\vec{p}) - \vec{\Phi}(\vec{P}) \\ \Leftrightarrow \delta\vec{p}' &= D\vec{\Phi} \cdot \delta\vec{p}, \end{aligned} \tag{A.1}$$

où  $D\vec{\Phi}$  est la matrice différentielle de  $\vec{\Phi}$ , et s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial r_1} & \dots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial r_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\Phi_N}{\partial r_1} & \dots & \frac{\partial\Phi_N}{\partial r_N} \end{bmatrix},$$

avec  $N$ , dimension de l'espace des phases.

Etudier le comportement d'un point  $\vec{P}'$  au voisinage de  $\vec{P}$  revient donc à

s'intéresser aux valeurs propres  $\lambda_i$  de  $D\Phi$ , c'est-à-dire à résoudre l'équation :

$$\det(D\Phi - \lambda I) = 0, \quad (\text{A.2})$$

où  $I$  est la matrice unité.

Plaçons-nous dans le cas d'un système bidimensionnel (un degré de liberté). L'équation (A.2) s'écrit :

$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr}(D\vec{\Phi}) - \det(D\vec{\Phi}) = 0. \quad (\text{A.3})$$

La condition de conservation des volumes implique que :

$$\det(D\vec{\Phi}) = 1. \quad (\text{A.4})$$

Le discriminant de l'équation vaut donc :

$$\Delta = \text{Tr}(D\vec{\Phi})^2 - 4. \quad (\text{A.5})$$

★ Si  $\Delta > 0$  ( $|\text{Tr}(D\vec{\Phi})| > 2$ ) :

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles et de type  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_2 = 1/\lambda$  (car  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ ).

Dans ce cas, les images successives d'un point  $\vec{P}'$  au voisinage du point fixe  $\vec{P}$  appartiennent à une hyperbole d'équation  $xy = c^{te}$  dans l'espace des phases, et dont les axes passent par  $\vec{P}$ .  $\vec{P}$  est appelé *point hyperbolique*. Il correspond à un point d'équilibre instable du système. Les axes de l'hyperbole, qui décrivent les deux sous-espaces propres respectivement associés à  $\lambda$  et  $1/\lambda$ , correspondent à une direction de stabilité ou d'instabilité.

On appelle *variété stable associée à  $\vec{P}$*  l'ensemble  $W^s$  tel que :

$$W^s = \{\vec{P}', \text{ tels que } \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\Phi}^n(\vec{P}') = \vec{P}\}$$

De même, on appelle *variété instable associée à  $P$*  l'ensemble  $W^u$  tel que :

$$W^u = \{\vec{P}', \text{ tels que } \lim_{n \rightarrow -\infty} \vec{\Phi}^n(\vec{P}') = \vec{P}\}$$

**A Calcul de stabilité : points elliptiques et points hyperboliques 167**

★ Si  $\Delta < 0$  ( $|\text{Tr}(D\vec{\Phi})| < 2$ ) :

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont complexes conjuguées et de module 1 ( $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\lambda_1^* = |\lambda_1| = 1$ ).

Elles s'écrivent :

$$\lambda_1 = e^{i\alpha}, \quad \lambda_2 = e^{-i\alpha}. \quad (\text{A.6})$$

Ici, les images  $\vec{P}'_1 \dots \vec{P}'_n$  successives de  $\vec{P}'$  au voisinage de  $\vec{P}$  appartiennent à une ellipse de centre  $\vec{P}$ .  $\vec{P}$  est appelé *point elliptique* (point d'équilibre stable).

Si  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ , avec  $n$  un entier quelconque, alors l'ensemble  $\{\vec{P}'_i\}$  est périodique de période  $n$  sur l'ellipse. Par contre, si  $\alpha$  est incommensurable avec  $2\pi$ ,  $\{\vec{P}'_i\}$  est dense sur l'ellipse.

Ces résultats se généralisent à  $N$  dimensions.





## Annexe B

### Calcul du champ de vitesse

On doit résoudre :

$$\frac{dU}{Dz} = M_1 U + N, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{dV}{Dz} = M_2 V, \quad (\text{B.2})$$

avec :

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & k_{nm}^2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1/\eta \\ 0 & 0 & 0 & k_{nm}^2 \\ 0 & 4k_{nm}^2\eta & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/\eta \\ \eta k_{nm}^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

et

$$N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\rho}g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$(k_{nm}^2 = k_n^2 + k_m^2).$$

La solution s'écrit :

$$U(z) = e^{M_1(z-z_b)}U(z_b) + \int_{z_b}^z e^{M_1(z-\tilde{z})}N(\tilde{z})d\tilde{z} \quad (\text{B.8})$$

$$V(z) = e^{M_2(z-z_b)}V(z_b). \quad (\text{B.9})$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

– en bas de la boîte ( $z = z_b$ ) :

$$U(z_b) = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2^b \\ u_3^b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

$$V(z_b) = \begin{bmatrix} v_1^b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

– en haut de la boîte ( $z = z^s$ ) :

$$U(z_s) = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2^s \\ u_3^s \\ u_4^s \end{bmatrix} \leftarrow \text{connu} \quad (\text{B.12})$$

$$V(z_s) = \begin{bmatrix} v_1^s \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{connu} \quad (\text{B.13})$$

## B.1 Détermination de $u_2^s$ et $v_1^s$ (cas forçage par plaques lithosphériques)

On impose des vitesses non nulles à la surface du système. On a :

$$\begin{cases} V_x^s(x, y) = i \sum_{n,m} [u_1^s(k_n, k_m) k_n e^{i(k_n x + k_m y)} + v_1^s(k_n, k_m) k_m e^{i(k_n x + k_m y)}] & (1) \\ V_y^s(x, y) = i \sum_{n,m} [u_1^s(k_n, k_m) k_m e^{i(k_n x + k_m y)} - v_1^s(k_n, k_m) k_n e^{i(k_n x + k_m y)}] & (2) \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

On effectue (1) $\times$ ( $ik_{n_0} e^{i(k_{n_0} x + k_{m_0} y)}$ ) + (2) $\times$ ( $ik_{m_0} e^{i(k_{n_0} x + k_{m_0} y)}$ ) et on intègre sur une période, ce qui donne :

$$\iint_0^{2\pi} (ik_{n_0} V_x(x, y) + ik_{m_0} V_y(x, y)) e^{i(k_{n_0} x + k_{m_0} y)} dx dy = -(k_{x_0}^2 + k_{m_0}^2) u_1(k_{n_0}, k_{m_0}) \quad (\text{B.15})$$

$u_1^s(k_{n_0}, k_{m_0})$  et  $v_1^s(k_{n_0}, k_{m_0})$  s'obtiennent donc respectivement par transformée de Fourier de :

$$\begin{aligned} ik_{n_0} V_x(x, y) + ik_{m_0} V_y(x, y) \\ \text{et de : } ik_{m_0} V_x(x, y) - ik_{n_0} V_y(x, y), \end{aligned}$$

et en divisant par  $-k_{nm}^2$ .

## B.2 Résolution de la partie poloïdale

### B.2.1 Solution en bas

Dans un premier temps, on détermine la solution en bas de la boîte. On note  $P_{z_b \rightarrow z} = e^{M_1(z-z^b)}$  le propagateur poloïdal, et  $S_{z_b \rightarrow z} = \int_{z_b}^z e^{M_1(z-\tilde{z})} d\tilde{z}$  la matrice intégrale des anomalies de densité. On a :

$$U(z_s) = P_{b \rightarrow s} U(z_b) + S_{b \rightarrow s} N \quad (\text{B.16})$$

(on a choisi  $N(z) = c^{te}$ ).

Après résolution de ce système, on obtient :

$$u_2^b = \frac{(P_{b \rightarrow s}^{23} S_{b \rightarrow s}^{13} - P_{b \rightarrow s}^{13} S_{b \rightarrow s}^{23}) \tilde{\delta} \rho g + P_{b \rightarrow s}^{13} u_2^s}{P_{b \rightarrow s}^{22} P_{b \rightarrow s}^{13} - P_{b \rightarrow s}^{12} P_{b \rightarrow s}^{23}} \quad (\text{B.17})$$

et

$$u_3^b = \frac{(P_{b \rightarrow s}^{12} S_{b \rightarrow s}^{23} - P_{b \rightarrow s}^{22} S_{b \rightarrow s}^{13}) \tilde{\delta} \rho g - P_{b \rightarrow s}^{12} u_2^s}{P_{b \rightarrow s}^{22} P_{b \rightarrow s}^{13} - P_{b \rightarrow s}^{12} P_{b \rightarrow s}^{23}}, \quad (\text{B.18})$$

ce qui détermine entièrement  $U(z_b)$ .

### B.2.2 Simplification de $P$ et $S$ .

Afin d'éviter des problèmes d'instabilité numérique, on homogénéise les dimensions dans la matrice  $M_1$  à l'aide du changement de variables suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_1 = u_1 \\ \bar{u}_2 = k u_2 \\ \bar{u}_3 = \frac{u_3}{2\eta k} \\ \bar{u}_4 = \frac{u_4}{2\eta} \end{array} \right. \quad (\text{B.19})$$

où  $k = \sqrt{k_{nm}^2}$ .

On obtient :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 2k & -k & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

Le propagateur poloïdal peut se décomposer de la manière suivante :

$$P_{z_b \rightarrow z} = L_1 e^{k(z-z_b)} + L_2 e^{-k(z-z_b)} + k(z-z_b) L_3 e^{k(z-z_b)} + k(z-z_b) L_4 e^{-k(z-z_b)}, \quad (\text{B.21})$$

avec :

$$L_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.22})$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.23})$$

$$L_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.24})$$

$$L_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.25})$$

Avec cette décomposition, on peut calculer analytiquement l'intégrale  $S$  :

$$\begin{aligned} S_{z_b \rightarrow z} = & \frac{1}{k} e^{k(z-z_b)} [L_1 + (k(z-z_b) - 1)L_3] \\ & - \frac{1}{k} e^{-k(z-z_b)} [L_2 + (k(z-z_b) + 1)L_4] \\ & + \frac{1}{k} [L_1 + L_2 + L_3 + L_4]. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Connaissant  $P_{z_b \rightarrow z}$  et  $S_{z_b \rightarrow z}$ , on propage la solution à n'importe quelle profondeur  $z$  donnée. On obtient alors la composante poloïdale du champ de vitesse par transformée de Fourier inverse de  $U(z)$ .

### B.3 Résolution de la partie toroïdale

Le principe est identique à celui de la partie poloïdale.

### B.3.1 Solution en bas

On note  $T_{z_b \rightarrow z} = e^{M_2(z-z^b)}$  le propagateur toroïdal. En écrivant la relation de propagation entre  $z_b$  et  $z_s$ , on obtient :

$$v_1^b = \frac{1}{T_{z_b \rightarrow z_s}^{11}} v_1^s. \quad (\text{B.27})$$

### B.3.2 Simplification de $T$

De la même manière que précédemment, on homogénéise les dimensions dans la matrice  $M_2$  :

$$\begin{cases} \bar{v}_1 = kv_1 \\ \bar{v}_2 = \frac{v_2}{\eta} \end{cases}. \quad (\text{B.28})$$

On trouve :

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.29})$$

On a :

$$T_{z_b \rightarrow z} = L_1 e^{k(z-z_b)} + L_2 e^{-k(z-z_b)}, \quad (\text{B.30})$$

avec :

$$L_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.31})$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.32})$$

## B.4 Cas d'une discontinuité de viscosité

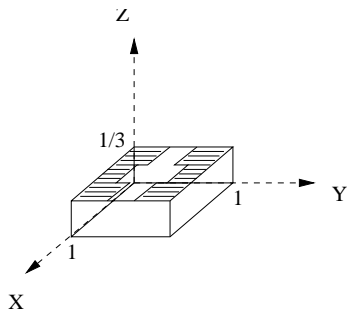
Il est possible d'introduire des discontinuités verticales de viscosité. Il suffit pour cela d'écrire des relations de propagation intermédiaires en faisant intervenir la profondeur  $z_i$  de l'interface.





## Annexe C

# Exemples de champs de vitesse



### C.1 Cas isovisqueux

#### C.1.1 Composantes poloïdale et toroïdale

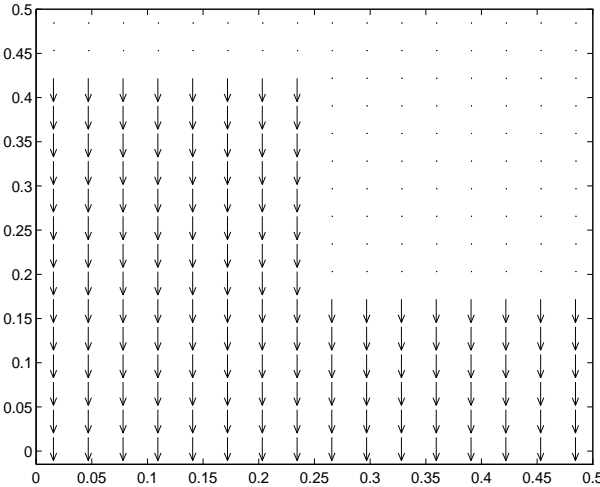


FIG. C.1 – Coupe en  $z = z_{surface}$

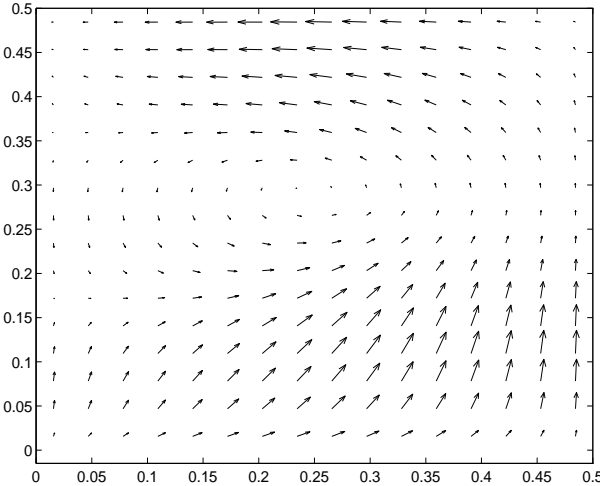


FIG. C.2 – Coupe en  $z \simeq 0.2$

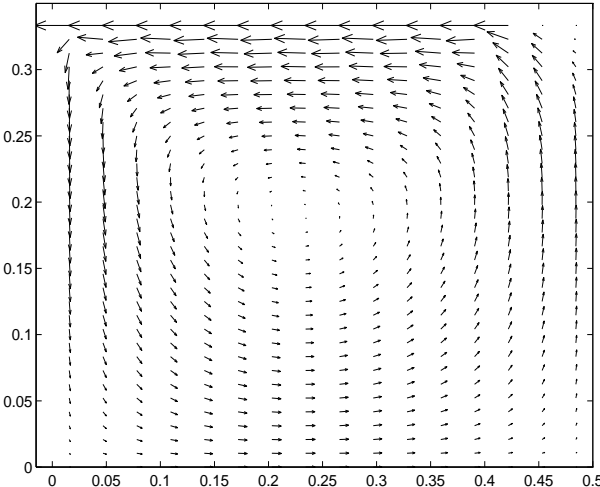
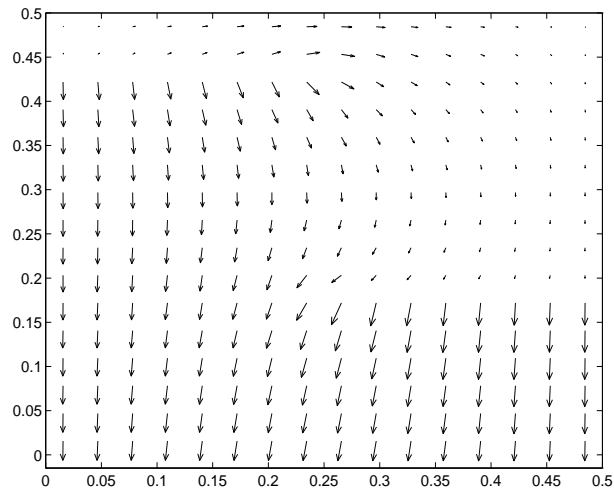
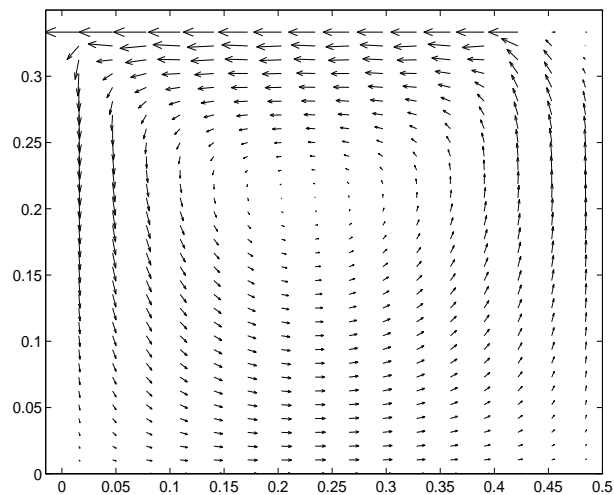


FIG. C.3 – Coupe en  $x \simeq 0.15$

## C.1.2 Composante poloïdale uniquement

FIG. C.4 – Coupe en  $z = z_{surface}$ FIG. C.5 – Coupe en  $x \simeq 0.15$ 

## C.1.3 Composante toroïdale uniquement

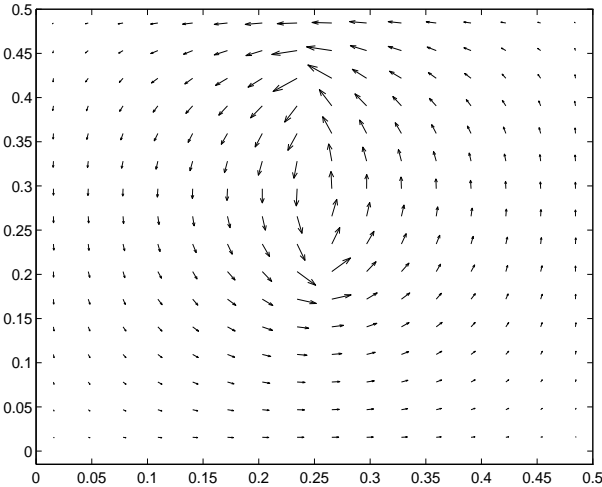


FIG. C.6 – Coupe en  $z = z_{surface}$

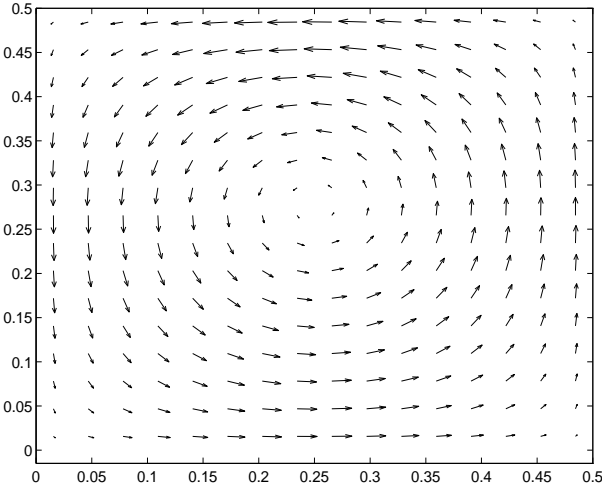


FIG. C.7 – Coupe en  $z = z_{milieu}$

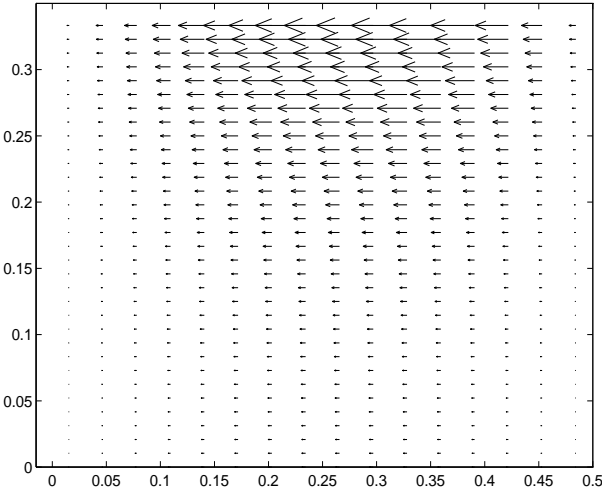
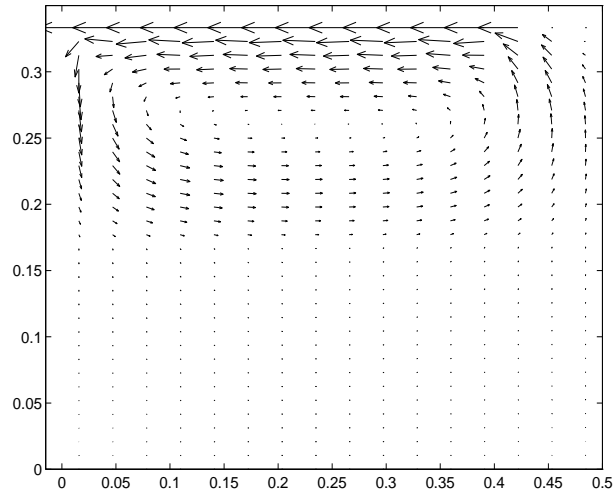


FIG. C.8 – Coupe en  $x \simeq 0.15$ . Il n’y a pas de transport vertical. On peut remarquer que l’énergie décroît avec la profondeur.

## C.2 Cas d'une stratification visqueuse

FIG. C.9 – Coupe en  $x \simeq 0.15$   $\eta_{bas} = 50\eta_{haut}$ .



## Annexe D

# Animations

Les images des pages suivantes sont issues des animations incluses dans l'article **Mixing properties in the Earth's mantle : effects of the viscosity stratification and of oceanic crust segregation** (*cf* section 3.5).

**Animation 1 :** Evolution du rapport  $^3\text{He}/^4\text{He}$  de  $t = 1$  *transit time* à  $t = 100$  *transit time*, pour la même expérience que celle présentée dans la **figure 7** de l'article. Les rapports d'hélium sont normalisés par le rapport chondritique à la date correspondante. Il est important de noter que la densité de traceurs est homogène dans tout le système (y compris dans les zones blanches). Les carrés représentent la valeur moyenne du rapport  $^3\text{He}/^4\text{He}$  dans la chambre magmatique.

Au début de l'expérience, on distingue bien la croûte océanique en bleu (enrichie en uranium), et la lithosphère en rouge (appauvrie en uranium). Au fur et à mesure que le temps s'écoule, la fraction volumique de manteau dégazée augmente, ce qui fait décroître la valeur moyenne du rapport  $^3\text{He}/^4\text{He}$  (évolution vers le bleu). On constate que la composition isotopique en hélium ne présente jamais de variations notables entre la partie supérieure (viscosité 1) et la partie inférieure (viscosité 100).

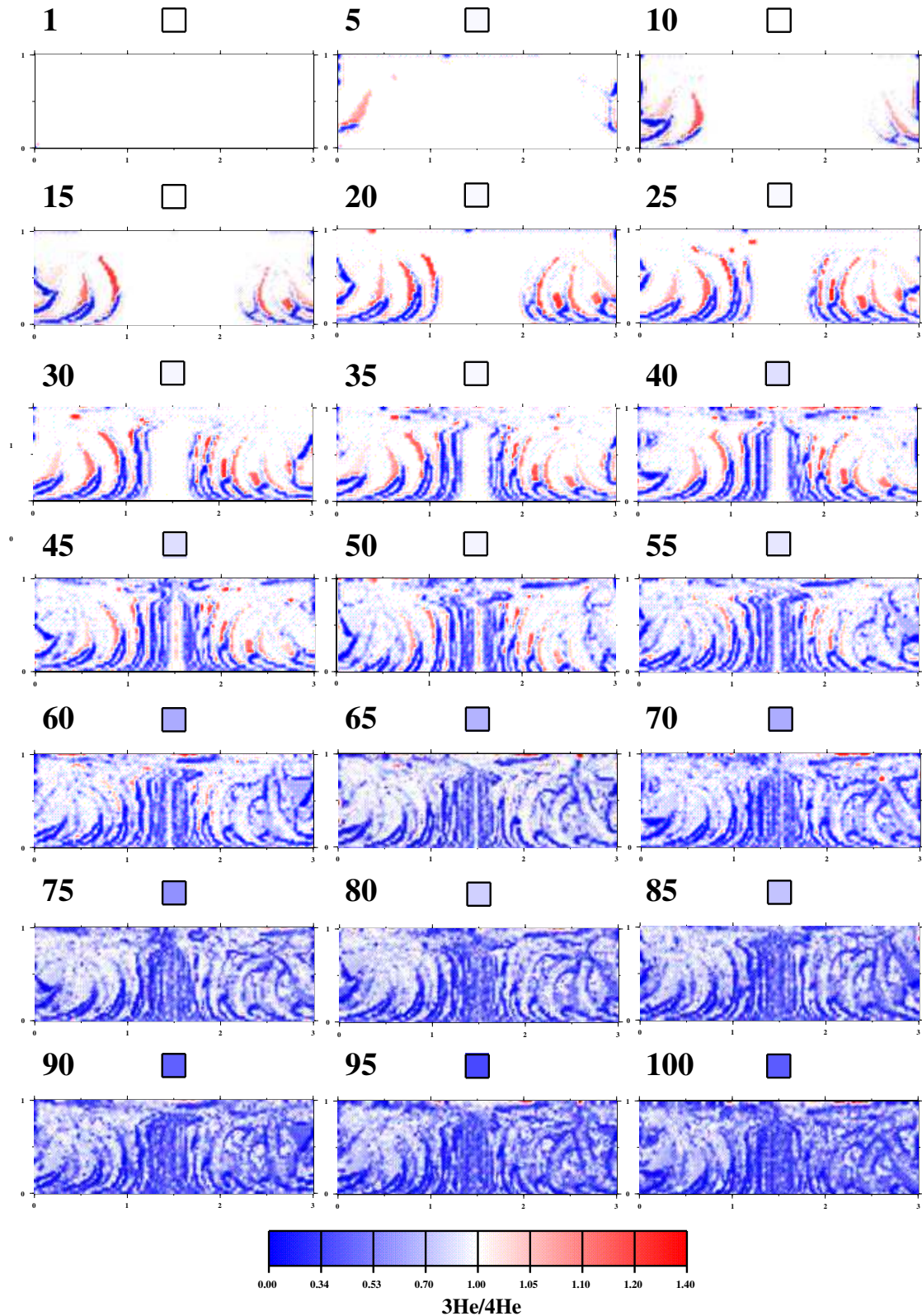
**Animation 2 :** Mêmes caractéristiques que pour l'animation 1, dans le cas où on simule la ségrégation de croûte océanique dans la couche D" (expérience



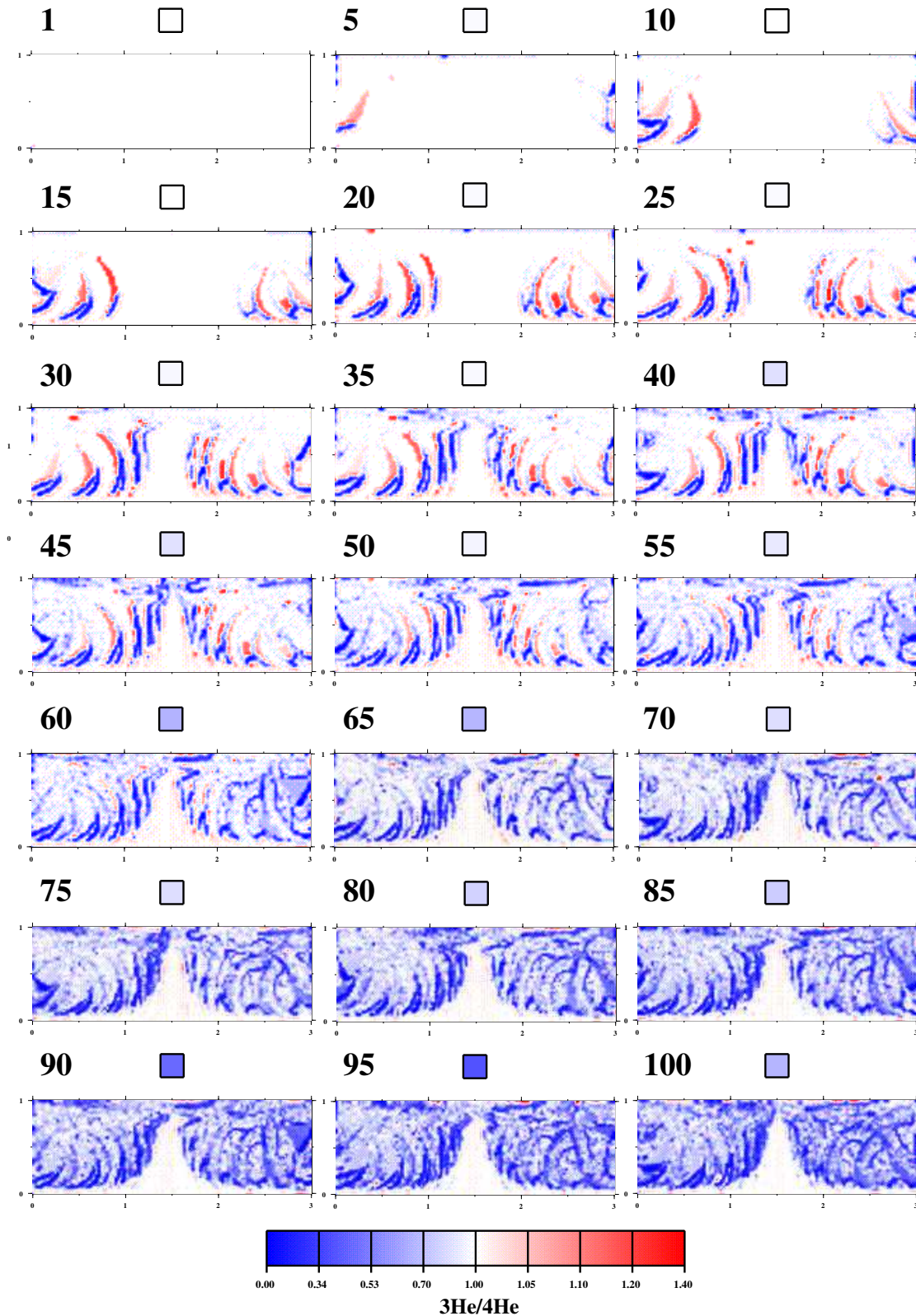
identique à celle de la **figure 8** dans l'article). Les particules de croûte océanique stockées dans la couche D'' ne sont pas représentées sur ces figures.

Il se forme une large zone où le rapport  $^3\text{He}/^4\text{He}$  est notablement plus élevé que dans le reste du manteau ( $\sim 1$ ). Le contenu isotopique du matériel échantillonné dans les chambres magmatiques n'est pas affecté par l'hypothèse de ségrégation de croûte océanique dans la couche D''.

**Animation 1 : pas de segregation  
de croute oceanique dans la couche D''**



**Animation 2 : segregation de croute oceanique dans la couche D'' (D''=200 km)**



# Table des figures

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1   | Concentrations élémentaires dans les MORB et la croûte continentale . . . . .  | 11 |
| 2   | Un exemple de la variabilité isotopique des OIB par rapport aux MORB . . . . .   | 14 |
| 3   | Réponse du géoïde à la présence d'une masse dense en fonction de la rhéologie . . . . .  | 20 |
| 4   | Anomalies de vitesse d'ondes P (a) et S (b) le long d'une coupe transversale sous l'Amérique. D'après Grand et al. (1997). . . . . | 24 |
| 5   | Vue schématique du modèle proposé par Kellogg et al. (1999). D'après Kellogg et al. (1999). . . . .                                | 25 |
| 6   | Amplitude des variations isotopiques en fonction de la longueur d'onde, d'après Kenyon (1990) . . . . .                            | 32 |
| 7   | Synthèse des principaux modèles dynamiques du manteau . . . . .  | 34 |
| 1.1 | Exemple de mélange d'une hétérogénéité dans un système en convection thermique. D'après Hoffman and McKenzie (1985). . . . .       | 37 |
| 1.2 | Structure implicite d'une instabilité thermique à deux dimensions  | 40 |
| 1.3 | Trajectoires régulières à trois dimensions. D'après Schmalzl et al. (1995). . . . .  | 41 |
| 1.4 | Efficacité du mélange à deux et à trois dimensions. D'après Schmalzl et al. (1996). . . . .  | 42 |
| 1.5 | Transformation du boulanger . . . . .  | 46 |
| 1.6 | Trajectoires dans une cellule de convection bidimensionnelle stationnaire . . . . .  | 48 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.7  | Lignes équipotentielles d'un écoulement bidimensionnel dépendant du temps . . . . .  | 49 |
| 1.8  | Trajectoires dans un écoulement bidimensionnel instationnaire . . . . .  | 50 |
| 1.9  | Trajectoire régulière ou chaotique dans un écoulement tridimensionnel stationnaire . . . . .                                       | 54 |
| 1.10 | Vue schématique d'une section de Poincaré. . . . .   | 55 |
| 1.11 | Sections de Poincaré correspondantes aux trajectoires de la <b>figure 1.9</b> . . . . .  | 56 |
| 1.12 | Points elliptiques et hyperboliques dans un écoulement convectif . . . . .   | 58 |
| 1.13 | Sections de Poincaré au voisinage d'un point hyperbolique ou elliptique . . . . .  | 59 |
| 1.14 | Vue schématique d'un pendule simple. . . . .   | 60 |
| 1.15 | Portrait de phase du pendule simple sans frottement . . . . .  | 61 |
| 1.16 | Section de Poincaré dans un système quasi-intégrable . . . . .   | 62 |
| 1.17 | Vue schématique tridimensionnelle de structures régulières . . . . .   | 62 |
| 1.18 | Effet d'une perturbation au voisinage d'un point hyperbolique . . . . .  | 63 |
| 1.19 | Effet d'une perturbation au voisinage d'un point elliptique . . . . .  | 64 |
| 1.20 | Portrait de phase d'un système quasi-intégrable. D'après Ottino (1989) . . . . .   | 64 |
| 1.21 | Lignes de courant d'un écoulement bidimensionnel dépendant du temps . . . . .  | 65 |
| 1.22 | Trajectoires de 5000 traceurs dans l'écoulement de la <b>figure 1.21</b> . . . . .   | 67 |
| 1.23 | Sensibilité aux conditions initiales . . . . .   | 68 |
| 2.1  | Vue schématique des deux composantes du champ de vitesse . . . . .   | 73 |
| 2.2  | Rapport des vitesses toroïdales sur les vitesses poloïdales depuis 120 Ma. D'après Lithgow-Bertelloni and Richards (1993). . . . . | 74 |
| 2.3  | Conditions aux limites imposées en surface . . . . .   | 80 |

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 2.4 | Advection de trois ensembles de traceurs. Pour plus de clarté, on a supprimé les traceurs appartenant à l'une des trois taches initiales dans le dernier graphe. A la fin de l'expérience, les contours de chaque ensemble sont très mal définis du fait de la faible densité de traceurs par endroits. . . . .  | 83  |
| 2.5 | Même expérience que dans la figure précédente, en advectant seulement le contour de chaque tache. Contrairement au cas précédent, les contours sont parfaitement déterminés tout au long de l'expérience. Dans le dernier graphe, on peut remarquer l'absence de certains filaments par rapport à la <b>figure 2.4</b> . Ceci indique que l'on a perdu une petite quantité de matière. . . . . | 83  |
| 2.6 | Un segment aléatoirement orienté s'aligne peu à peu le long de la direction d'élongation maximale. . . . .   | 85  |
| 2.7 | Renormalisation de la longueur d'un segment dans le calcul d'exposants de Lyapunov . . . . .   | 85  |
| 1   | Boundary conditions . . . . .  | 92  |
| 2   | Poincaré sections with varying toroidal/poloidal ratios . . . . .  | 96  |
| 3   | Poincaré sections obtained for various 3-D flows . . . . .   | 97  |
| 4   | Topology of the pathlines obtained for a pure poloidal field . . . . .   | 98  |
| 5   | Finite time Lyapunov exponents . . . . .   | 101 |
| 6   | Histograms of the finite time Lyapunov exponents seen in Figures 5b and 5d . . . . .   | 102 |
| 3.1 | Principe de calcul du temps de mélange en fonction de la longueur d'onde . . . . .   | 118 |
| 3.2 | Temps de mélange en fonction de la longueur d'onde . . . . .   | 120 |
| 3.3 | Processus de fusion et différenciation au niveau des dorsales . . . . .  | 125 |
| 1   | Sketch of the computed flow . . . . .  | 133 |
| 2   | Initial distribution of the tracers and plot of the measured, and corrected normalized variances as function of time . . . . .   | 135 |
| 3   | Mixing times as a function of resolution for the upper and lower mantles . . . . .   | 137 |

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 4   | Histograms of finite time Lyapunov exponents for thousands of tracers initially homogeneously located . . . . .                    | 139 |
| 5   | Fractionation and outgassing during partial melting in the magma chamber . . . . .   | 141 |
| 6   | Snapshot of the distribution of time since each tracer has left the ridge . . . . .  | 142 |
| 7   | Same as in <b>Figure 6</b> for ${}^3\text{He}/{}^4\text{He}$ distribution . . . . .  | 143 |
| 8   | Same as in <b>Figure 7</b> with oceanic crust trapping in D” . . . . .   | 145 |
| 9   | Same as in <b>Figure 8</b> for the uranium distribution . . . . .  | 146 |
| 3.4 | Temps de mélange 3D en fonction de la longueur d’onde . . . . .  | 150 |
| 3.5 | Histogrammes d’exposants de Lyapunov 3D avec variations verticales de viscosité . . . . .  | 151 |
| 4.1 | Concentration profiles as a function of normalized depth. . . . .  | 158 |
| 4.2 | Averages vertical fluxes for the geodynamic, diffusive and localized models. . . . .   | 159 |
| 4.3 | Vertical profiles of ${}^3\text{He}$ concentration. . . . .  | 159 |
| 4.4 | Vertical profiles of U concentration. . . . .  | 160 |
| C.1 | Coupe en $z = z_{surface}$ . . . . .   | 178 |
| C.2 | Coupe en $z \simeq 0.2$ . . . . .  | 178 |
| C.3 | Coupe en $x \simeq 0.15$ . . . . .   | 178 |
| C.4 | Coupe en $z = z_{surface}$ . . . . .   | 179 |
| C.5 | Coupe en $x \simeq 0.15$ . . . . .   | 179 |
| C.6 | Coupe en $z = z_{surface}$ . . . . .   | 180 |
| C.7 | Coupe en $z = z_{milieu}$ . . . . .  | 180 |
| C.8 | Coupe en $x \simeq 0.15$ . Il n’y a pas de transport vertical. On peut remarquer que l’énergie décroît avec la profondeur. . . . . | 180 |
| C.9 | Coupe en $x \simeq 0.15$ $\eta_{bas} = 50\eta_{haut}$ . . . . .  | 181 |

# Références

- Albarède, F. (1998). Time-dependent models of U-Th-He and K-Ar evolution and the layering of mantle convection. *Chemical Geology* 145, 413–429.
- Allègre, C. J., S. R. Hart, and J. F. Minster (1983a). Chemical structure and evolution of the mantle and continents determined by inversion of nd and sr isotopic data, i. theoretical methods. *Earth and Planetary Science Letters* 66, 177–190.
- Allègre, C. J., S. R. Hart, and J. F. Minster (1983b). Chemical structure and evolution of the mantle and continents determined by inversion of nd and sr isotopic data, ii. numerical experiments and discussion. *Earth and Planetary Science Letters* 66, 191–213.
- Allègre, C. J. and E. Lewin (1989). Chemical structure and history of the earth : evidence from global non-linear inversion of isotopic data in a three-box model. *Earth and Planetary Science Letters* 96, 61–88.
- Allègre, C. J., T. Staudacher, and P. Sarda (1987). Rare gas systematics : formation of the atmosphere, evolution and structure of the earth's mantle. *Earth and Planetary Science Letters* 81, 127–150.
- Allègre, C. J., T. Staudacher, P. Sarda, and M. Kurz (1983). Constraints on evolution of Earth's mantle from rare gas systematics. *Nature* 303, 762–766.
- Allègre, C. J., T. Staudacher, and P. Sarda (1986). Rare gas systematics : formation of the atmosphere, evolution and structure of the mantle. *Earth and Planetary Science Letters* 81, 127–150.
- Allègre, C. J. and D. L. Turcotte (1985). Geodynamic mixing in the me-



- osphere boundary layer and the origin of oceanic islands. *Geophysical Research Letters* 12, 207–210.
- Allègre, C. J. and D. L. Turcotte (1986). Implications of a two component marble-cake mantle. *Nature* 323, 123–127.
- Anderson, D. L. (1982). Isotopic evolution of the mantle : a model. *Earth and Planetary Science Letters* 57, 13–24.
- Armstrong, R. L. and S. M. Hein (1973). Computer simulation of pb and sr isotope evolution of the earth's crust and upper mantle. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 37, 1–18.
- Becker, T. W., J. B. Kellogg, and R. J. O'Connell (1999). Thermal constraints on the survival of primitive blobs in the lower mantle. *Earth and Planetary Science Letters* 171, 351–365.
- Bercovici, D., Y. Ricard, and M. Richards (in press). The relation between mantle dynamics and plate tectonics : a somewhat primary biased primer. In M. A. Richards, R. Gordon, and R. van der Hilst (Eds.), *History and dynamics of global plate motion*. American Geophysical Union.
- Bergé, P., Y. Pomeau, and C. Vidal (1984). *L'ordre dans le chaos*. Hermann.
- Blichert-Toft, J., F. A. Frey, and F. Albarède (1999). Hf isotope evidence for pelagic sediments in the source of hawaiian basalts. *Science* 285, 879–882.
- Bunge, H.-P., M. A. Richards, and J. R. Baumgardner (1997). A sensitivity study of 3-D spherical mantle convection at  $10^8$  Rayleigh number : effects of depth-dependent viscosity, heating mode and endothermic phase change. *Journal of Geophysical Research* 102, 11991–12007.
- Bunge, H.-P., M. A. Richards, C. Lithgow-Bertolloni, J. R. Baumgardner, S. P. Grand, and B. A. Romanowicz (1998). Time scales and heterogeneity structure in geodynamic earth models. *Science* 280, 91–94.
- Carlson, R. W. (1984). Isotopic constraints on columbia river flood basalt genesis and the nature of the subcontinental mantle. *Geochimica et Cosmochimica Acta* 48, 2357–2372.
- Cary, J. R. and R. G. Littlejohn (1983). Noncanonical hamiltonian mechanics and its application to magnetic field line flow. *Annals of Physics* 151, 1–

34.

- Christensen, U. (1989). Mixing by time-dependent convection. *Earth and Planetary Science Letters* 95, 382–394.
- Christensen, U. and A. W. Hofmann (1994). Segregation of subducted oceanic crust in the convecting mantle. *Journal of Geophysical Research* 99, 19,867–19,884.
- Coltice, N. and Y. Ricard (1999). Geochemical observations and one layer mantle convection. *Earth and Planetary Science Letters* 174, 125–137.
- Corrieu-Sipahimalani, V. (1995). *Modèles dynamiques du manteau terrestre : observations et contraintes*. thèse, Université de Cergy-Pontoise.
- Davaille, A. (1999). Simultaneous generation of hotspots and superswells by convection in a heterogeneous planetary mantle. *Nature* 402, 756–760.
- Davies, G. F. (1979). Earth's neodymium budget and structure and evolution of the mantle. *Nature* 290, 208–213.
- Davies, G. F. (1981). Earth's neodymium budget and structure and evolution of the mantle. *Nature* 290, 208–213.
- Davies, G. F. (1984). Geophysical and isotopic constraints on mantle convection : an interim synthesis. *Journal of Geophysical Research* *Journal of Geophysical Research* 89, 6017–6040.
- Davies, G. F. (1990a). Comment on "mixing by time-dependent convection", by U. Christensen. *Earth and Planetary Science Letters* 98, 405–407.
- Davies, G. F. (1990b). Mantle plumes, mantle stirring and hotspot chemistry. *Earth and Planetary Science Letters* 99, 94–109.
- Davies, G. F. (1999a). *Dynamic Earth. Plates, plumes and mantle convection*. Cambridge University Press.
- Davies, G. F. (1999b). Geophysically constrained mantle mass flows and the  $^{40}\text{Ar}$  budget : a degassed lower mantle? *Earth and Planetary Science Letters* 166, 149–162.
- Dritschel, D. G. (1988). Contour surgery : a topological reconnection scheme for extended integrations using contour dynamics. *Journal of Computational Physics* 77, 240–266.

- Dupré, B. and C. J. Allègre (1983). Pb-Sr isotope variation in Indian Ocean basalts and mixing phenomena. *Nature* 303, 142–146.
- Dziewonski, A. and D. L. Anderson (1981). Preliminary reference earth model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 25, 297–.
- Farnetani, C. G. and M. A. Richards (1995). Thermal entrainment and melting in mantle plumes. *Earth and Planetary Science Letters* 136, 251–267.
- Forte, A. and W. Peltier (1987). Plate tectonics and aspherical Earth's structure : the importance of poloidal-toroidal coupling. *Journal of Geophysical Research* 92, 3645–3679.
- Forte, A., W. Peltier, and A. Dziewonski (1991). Inferences of mantle viscosity from tectonic plate velocities. *Geophysical Research Letters* 18, 1747–1750.
- Gable, C. W., R. J. O'Connell, and B. J. Travis (1991). Convection in three dimensions with surface plates : generation of toroidal flow. *Journal of Geophysical Research* 96, 8391–8405.
- Garçon, V. and J. Minster (1988). Heat, carbon and water in a 12-box model of the world-ocean. *Tellus* 40B, 161–177.
- Gast, P. (1968). Trace element fractionation and the origin of tholeiitic and alkaline magma types. *Geochimica Cosmochimica Acta* 32, 1057–1086.
- Grand, S. P. (1994). Mantle shear structure beneath the Americas and the surrounding oceans. *Journal of Geophysical Research* 99, 11,591–11,621.
- Grand, S. P., R. D. van der Hilst, and S. Widiyantoro (1997). Global seismic tomography : a snapshot of convection in the Earth. *GSA Today* 7, 1–7.
- Gurnis, M. (1986a). The effects of chemical density differences on convective mixing in the Earth's mantle. *Journal of Geophysical Research* 91(B11), 11,407–11,419.
- Gurnis, M. (1986b). Quantitative bounds on the size spectrum of isotopic heterogeneity within the mantle. *Nature* 323, 317–320.
- Gurnis, M. (1986c). Stirring and mixing in the mantle by plate-scale flow : large persistent blobs and long tendrils coexist. *Geophysical Research Letters* 13, 1474–1477.

- Gurnis, M. and G. F. Davies (1986a). The effects of depth-dependent viscosity on convective mixing in the mantle and the possible survival of primitive mantle. *Geophysical Research Letters* 13, 541–544.
- Gurnis, M. and G. F. Davies (1986b). Mixing in numerical models of mantle convection incorporating plate kinematics. *Journal of Geophysical Research* 91(B6), 6375–6395.
- Hager, B. H. (1984). Subducted slabs and the geoid : constraints on mantle rheology and flow. *Journal of Geophysical Research* 89, 6003–6015.
- Hager, B. H. and R. H. Clayton (1989). Constraints on the structure of mantle convection using seismic observations, flow models and the geoid. In W. R. Peltier (Ed.), *Mantle convection*. Gordon and Breach New York.
- Hager, B. H. and R. J. O’Connell (1978). Subduction zone dip angle and flow driven by plate motion. *Tectonophysics* 50, 111–133.
- Hager, B. H. and R. J. O’Connell (1981). A simple global model of plate dynamics and mantle convection. *Journal of Geophysical Research* 86, 4843–4867.
- Harper, C. L. and S. B. Jacobsen (1996). Noble gases and Earth’s accretion. *Science* 273, 1814–1818.
- Hart, R., L. Hogan, and J. Dymond (1986). Archean degassing of the upper mantle and formation of the atmosphere. *Earth and Planetary Science Letters*.
- Hart, S. R. (1984). A large southern isotope anomaly in the Southern Hemisphere mantle. *Nature* 309, 753–757.
- Hoffman, N. R. A. and D. P. McKenzie (1985). The destruction of geochemical heterogeneities by differential fluid motions during mantle convection. *Geophys. J. R. Soc.* 82, 163–206.
- Hofmann, A. W. (1988). Chemical differentiation of the Earth : the relationship between mantle, continental crust, and oceanic crust. *Earth and Planetary Science Letters* 90, 297–314.
- Hofmann, A. W. and S. R. Hart (1978). An assessment of local and regional isotopic equilibrium in the mantle. *Earth and Planetary Science*

*Letters* 38, 44–62.

Hofmann, A. W. and W. M. White (1982). Mantle plumes from ancient oceanic crust. *Earth and Planetary Science Letters* 57, 421–436.

Irifune, T. and A. E. Ringwood (1993). Phase transformations in subducted oceanic crust and buoyancy relationships at depths of 600–800 km in the mantle. *Earth and Planetary Science Letters* 117, 101–110.

Jacobsen, S. B. and G. J. Wasserburg (1979). The mean age of mantle and crustal reservoirs. *Journal of Geophysical Research* 84, 7411–7427.

Kaneoka, I. and N. Takaoka (1980). Rare gas isotopes in Hawaiian ultramafic nodules and volcanic rocks : constraints and genesis relationships. *Science* 208, 1366–13669.

Kellogg, L. H., B. H. Hager, and R. D. van der Hilst (1999). Compositional stratification in the deep mantle. *Science* 283, 1881–1884.

Kellogg, L. H. and D. L. Turcotte (1990). Mixing and the distribution of heterogeneities in a chaotically convecting mantle. *Journal of Geophysical Research* 95, 421–432.

Kellogg, L. H. and G. J. Wasserburg (1990). The role of plumes in mantle helium fluxes. *Earth and Planetary Science Letters* 99, 276–289.

Kenyon, P. M. (1990). Trace element and isotopic effects from magma migration beneath mid-ocean ridges. *Earth and Planetary Science Letters* 101, 367–378.

Kesson, S. E., J. D. F. Gerald, and J. M. G. Shelley (1994). Mineral chemistry and density of subducted basaltic crust at lower mantle pressure. *Nature* 372, 767–769.

Kesson, S. E., J. D. F. Gerald, and J. M. G. Shelley (1998). Mineralogy and dynamics of a pyrolite lower mantle. *Nature* 393, 252–255.

Kurz, M. D., W. J. Jenkins, and S. R. Hart (1982). Helium isotopic systematics of oceanic islands and mantle heterogeneity. *Nature* 297, 43–47.

Lichtenberg, A. J. and M. A. Lieberman (1983). *Regular and chaotic dynamics*. Springer-Verlag.

- Lithgow-Bertelloni, C. and M. A. Richards (1993). Toroidal-poloidal partitioning of plate motions since 120 Ma. *Geophysical Research Letters* 20, 375–378.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences* 20, 130–141.
- Machetel, P. and P. Weber (1991). Intermittent layered convection in a model mantle with an endothermic phase change at 670 km. *Nature* 350, 55–57.
- Manga, M. (1996). Mixing heterogeneities in the mantle : effect of viscosity differences. *Geophysical Research Letters* 23, 403–406.
- Mariotti, A., B. Legras, and D. G. Dritschel (1994). Vortex stripping and the erosion of coherent structures in two-dimensional flows. *Phys. Fluids* 6, 3954–3962.
- Mariotti, A., M. Moustouai, B. Legras, and H. Teitelbaum (1997). Comparison between vertical ozone soundings and reconstructed potential vorticity maps by contour advection with surgery. *Journal of Geophysical Research* 102, 6131–6142.
- McDonough, W. F. and S. Sun (1995). The composition of the Earth. *Chemical Geology* 120, 223–253.
- McKenzie, D. (1979). Finite deformation during fluid flow. *Geophysical Journal of the Royal Astronomy Society* 58, 689–715.
- Montague, N. L. and L. H. Kellogg (2000). Numerical models of a dense layer at the base of the mantle and implications for the geodynamics of d”. *Journal of Geophysical Research* 105, 11,101–.
- O’Connell, R. J., C. W. Gable, and B. H. Hager (1991). Toroidal-poloidal partitioning of lithospheric plate motions. In R. Sabadini (Ed.), *Glacial isostasy, sea-level and mantle-rheology*, pp. 535–551. Kluwer Academic Publishers.
- Olson, P. and D. Bercovici (1991). On the equipartition of kinetic energy in plates tectonics. *Geophysical Research Letters* 18, 1751–1754.
- Olson, P., D. A. Yuen, and D. Balsiger (1984). Mixing of passive heterogeneities by mantle convection. *Journal of Geophysical Research* 89, 425–436.

- O’Nions, R. K., N. M. Evensen, and P. J. Hamilton (1979). Geochemical modeling of mantle differentiation and crustal growth. *Journal of Geophysical Research* 84, 6091–6101.
- O’Nions, R. K. and I. N. Tolstikhin (1996). Limits on the mass flux between lower and upper mantle and stability of layering. *Earth and Planetary Science Letters* 139, 213–222.
- Ott, E. (1993). *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press.
- Ottino, J. M. (1989). *The kinematics of mixing : stretching, chaos, and transport*. Cambridge University Press.
- Porcelli, D. and G. Wasserburg (1988). Mass transfer of helium, neon, argon, and xenon through a steady-state upper mantle. *Geochimica et Cosmochimica Acta* 59, 4921–4937.
- Press, W. H., B. P. Flannery, and S. A. T. W. T. Vetterling (86). *Numerical Recipes*. Cambridge University Press.
- Raynal, F. (1992). *Etude des mécanismes de mélange dans les écoulements laminaires incompressibles en configuration plane ou tridimensionnelle*. thèse, Université Claude Bernard LYON I.
- Reichl, L. E. (1992). *The transition to chaos in conservative classical systems : quantum manifestations*. Springer-Verlag.
- Ricard, Y. (1986). *Dynamique interne de la Terre et observations gravimétriques*. Ph. D. thesis, Université Paris-sud.
- Ricard, Y., L. Fleitout, and C. Froidevaux (1984). Geoid height and lithospheric stresses for a dynamic Earth. *Annales Geophysicae* 2, 267–286.
- Ricard, Y., M. A. Richards, C. Lithgow-Bertelloni, and Y. LeStunff (1993). A geodynamic model of mantle density heterogeneity. *Journal of Geophysical Research* 98, 21895–21909.
- Ricard, Y. and C. Vigny (1989). Mantle dynamics with induced plates tectonics. *Journal of Geophysical Research* 94, 17,543–17,559.
- Ricard, Y., C. Vigny, and C. Froidevaux (1989). Mantle heterogeneities, geoid and plate motion : a monte carlo inversion. *Journal of Geophysical Research* 94, 13,739–13,754.

- Richards, M. A. and D. C. Engebretson (1992). Large-scale mantle convection and the history of subduction. *Nature* 355, 437–440.
- Richards, M. A. and B. H. Hager (1984). Geoid anomalies in a dynamic earth. *Journal of Geophysical Research* 89, 5987–6002.
- Ringwood, A. E. and T. Irifune (1988). Nature of the 650-km seismic discontinuity : implications for mantle dynamics and differentiation. *Nature* 331, 131–136.
- Rudnick, R. L., M. Barth, I. Horn, and W. F. McDonough (2000). Rutile-bearing refractory eclogites : missing links between continents and depleted mantle. *Science* 287(3), 278–281.
- Sarda, P., T. Staudacher, and C. J. Allègre (1985).  $^{40}\text{Ar}/^{36}\text{Ar}$  in morb glasses : constraints on atmosphere and mantle evolution. *Earth and Planetary Science Letters* 72, 357–375.
- Schmalzl, J., G. A. Houseman, and U. Hansen (1995). Mixing properties of three-dimensional stationary convection. *Physics of Fluids* 7, 1027–1033.
- Schmalzl, J., G. A. Houseman, and U. Hansen (1996). Mixing in vigorous, time-dependent 3D convection and application to the Earth’s mantle. *Journal of Geophysical Research* 101, 21,847–21,858.
- Silver, P. G., R. W. Carlson, and P. Olson (1988). Deep slabs, geochemical heterogeneity, and the large-scale structure of mantle convection. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 16, 477–541.
- Solheim, L. P. and W. R. Peltier (1994). Phase boundary deflections at 660-km depth and episodically layered isochemical convection in the mantle. *Journal of Geophysical Research* 99, 15,861–15,875.
- Stewart, C. A. and D. L. Turcotte (1989). The route to chaos in thermal convection at infinite Prandtl number. 1. some trajectories and bifurcations. *Journal of Geophysical Research* 94, 13,707–13,717.
- Tackley, P. J., D. J. Stevenson, G. A. Glatzmaier, and G. Schubert (1994). Effects of multiple phase transitions in a three-dimensional spherical model of convection in earth’s mantle. *Journal of Geophysical Research* 99, 15877–15901.



- Taylor, G. I. (1921). Diffusion by continuous movements. *Proceedings of the London Mathematical Society* 20, 196–211.
- Turcotte, D. L. (1992). *Fractals and chaos in geology and geophysics*. Cambridge University Press.
- van der Hilst, R., S. Widiyantoro, and E. R. Engdahl (1997). Evidence for deep mantle circulation from global tomography. *Nature* 386, 578–584.
- van der Hilst, R. D. and H. Kárason (1999). Composition heterogeneity in the bottom 1000 kilometers of Earth’s mantle : toward a hybrid convection model. *Nature* 283, 283.
- van Keken, P. E. and C. J. Ballentine (1998). Whole-mantle convection and the role of a high viscosity lower mantle in terrestrial volatile evolution. *Earth and Planetary Science Letters* 156, 19–32.
- van Keken, P. E. and C. J. Ballentine (1999). Dynamical models of mantle volatile evolution and the role of phase transitions and temperature-dependent rheology. *Journal of Geophysical Research* 104, 7137–7168.
- Čadež, O. and Y. Ricard (1992). Toroidal-poloidal energy partitioning and global lithospheric rotation during Cenozoic time. *Earth and Planetary Science Letters* 109, 621–632.
- Vigny, C. (1989). *Géοide et dynamique interne de la Terre*. thèse, Université Paris-sud.
- Waugh, D. and R. Plumb (1994). Contour advection with surgery : a technique for investigating fine scale structure in tracer transport. *Journal of atmospheric sciences* 51, 530–540.
- White, W. M. (1985). Sources of oceanic basalts : radiogenic isotopic evidence. *Geology* 13, 115–118.
- Whiteman, K. J. (1977). Invariants and stability in classical mechanics. *Rep. Prog. Phys.* 40, 1033–1069.
- Yuen, D. A., D. M. Reuteler, S. Balachandar, V. Steinbach, A. V. Malevsky, and J. J. Smedsmo (1994). Various influences on three-dimensional mantle convection with phase transitions. *Physics of the Earth and Planetary interiors* 86, 185–203.

- 
- Zaslavsky, G. M., R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov, and A. A. Chernikov (1991). *Weak chaos and quasi-regular patterns*. Cambridge University Press.
- Zindler, A. and S. Hart (1986). Chemical geodynamics. *Annual Review Earth Planetary Sciences* 14, 493–571.
- Zindler, A., E. Jagoutz, and S. Goldstein (1982). Nd, sr and pb isotopic systematics in a three-component mantle : a new perspective. *Nature* 298, 519–523.