



HAL
open science

Caractérisation du rayonnement acoustique d'un rail à l'aide d'un réseau de microphones

Baldrik Faure

► **To cite this version:**

Baldrik Faure. Caractérisation du rayonnement acoustique d'un rail à l'aide d'un réseau de microphones. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Grenoble, 2011. Français. NNT : 2011GRENT087 . tel-00721959

HAL Id: tel-00721959

<https://theses.hal.science/tel-00721959v1>

Submitted on 31 Jul 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Signal, Image, Parole, Télécoms**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Baldrik FAURE

Thèse dirigée par **Christine SERVIÈRE**,
co-encadrée par **Olivier CHIELLO** et **Marie-Agnès PALLAS**,

préparée au sein des Laboratoires

**Laboratoire Transports et Environnement de l'IFSTTAR et
Grenoble Images Parole Signal Automatique (GIPSA-Lab)**,

dans l'école doctorale

Électronique Électrotechnique Automatique et Traitement du Signal

Caractérisation du rayonnement acoustique d'un rail à l'aide d'un réseau de microphones

Thèse soutenue publiquement le **22 septembre 2011**

devant le jury composé de :

M. Jean-Louis LACOUME

Professeur émérite à Grenoble INP, Président du jury

M. Antoine CHAIGNE

Professeur à l'École Nationale Supérieure de Techniques Avancées, Rapporteur

M. Jean-Claude PASCAL

Professeur émérite à l'Université du Maine, Rapporteur

M. David THOMPSON

Professeur à l'Université de Southampton, Examineur

M^{me} Christine SERVIÈRE

Chargée de recherche HDR à Grenoble INP, Directrice de thèse, Examinatrice

M. Olivier CHIELLO

Chargé de recherche à l'IFSTTAR, Co-encadrant, Examineur

M^{me} Marie-Agnès PALLAS

Chargée de recherche à l'IFSTTAR, Co-encadrante, Invitée

M. Franck POISSON

Chargé de recherche à la Direction de la Recherche de la SNCF, Invité



Résumé

Le secteur des transports ferroviaires en France est marqué par un dynamisme lié notamment à l'essor du réseau à grande vitesse et à la réimplantation du tramway dans de nombreuses agglomérations. Dans ce contexte, la réduction des nuisances sonores apparaît comme un enjeu majeur pour son développement. Afin d'agir efficacement à la source, il est indispensable d'identifier et d'étudier précisément les sources responsables de ces nuisances au passage des véhicules. Parmi les approches possibles, les antennes microphoniques et les traitements associés sont particulièrement adaptés à la caractérisation des sources ponctuelles mobiles, omnidirectionnelles et décorrélés.

Pour les vitesses inférieures à 300 km/h, le bruit de roulement constitue la source principale du bruit ferroviaire ; il résulte du rayonnement acoustique des éléments tels que les roues, le rail et les traverses. Le rail, dont la contribution au bruit de roulement est prépondérante aux moyennes fréquences (entre 500 Hz et 1000 Hz environ), est une source étendue et cohérente pour laquelle les principes classiques de traitement d'antenne ne sont pas adaptés.

La méthode de caractérisation proposée dans cette thèse est une méthode inverse d'optimisation paramétrique utilisant les signaux acoustiques issus d'une antenne microphonique. Les paramètres inconnus d'un modèle vibro-acoustique sont estimés par minimisation d'un critère des moindres carrés sur les matrices spectrales mesurée et modélisée au niveau de l'antenne. Dans le modèle vibro-acoustique, le rail est assimilé à un monopôle cylindrique dont la distribution longitudinale d'amplitude est liée à celle des vitesses vibratoires. Pour le calcul de ces vitesses, les différents modèles proposés mettent en évidence des ondes vibratoires se propageant dans le rail de part et d'autre de chaque excitation. Chacune de ces ondes est caractérisée par une amplitude au niveau de l'excitation, un nombre d'onde structural réel et une atténuation. Ces paramètres sont estimés par minimisation du critère, puis utilisés pour reconstruire le champ acoustique.

Dans un premier temps, des simulations sont réalisées pour juger des performances de la méthode proposée, dans le cas d'excitations ponctuelles verticales. En particulier, sa robustesse est testée en présence de bruit ou d'incertitudes sur les paramètres supposés connus du modèle. Les effets de l'utilisation de modèles dégradés sont également étudiés. Concernant l'estimation des amplitudes, les résultats ont montré que la méthode est particulièrement robuste et efficace pour les excitations les plus proches de l'antenne. En revanche, pour l'estimation des autres paramètres, les performances sont supérieures pour les positions d'antenne excentrées. De manière générale, le nombre d'onde est correctement estimé sur l'ensemble des fréquences étudiées. Dans les cas à faible atténuation, un traitement classique par formation de voies en ondes planes suffit. En ce qui concerne l'estimation de l'atténuation, la faible sensibilité du critère limite l'efficacité de la méthode proposée.

Enfin, certains résultats obtenus à partir des simulations ont été vérifiés lors de mesures *in situ*. L'excitation d'un rail expérimental par un marteau de chocs a tout d'abord permis de valider le modèle vibratoire pour la flexion verticale. Pour tester la méthode d'optimisation paramétrique, le rail a également été excité verticalement à l'aide d'un pot vibrant. Les principaux résultats des simulations ont été retrouvés, et des comportements

particuliers relatifs à la présence de plusieurs ondes dans le rail ont été observés, ouvrant des perspectives de généralisation du modèle vibratoire utilisé.

Mots-clés : Transport ferroviaire, bruit de roulement, antenne microphonique, traitement d'antenne, formation de voies, rail, optimisation, critère des moindres carrés.

Abstract

In France, railway transport has been boosted by the expansion of the high-speed rail service and the resurgent implantation of tram networks in many city centers. In this context, the reduction of noise pollution becomes a crucial issue for its development. In order to directly act on the source area, it is necessary to precisely identify and study the sources responsible for this nuisance at train pass-by. Among all the potential approaches, microphone arrays and related signal processing techniques are particularly adapted to the characterization of omnidirectional and uncorrelated moving point sources.

For speeds up to 300 km/h, rolling noise is the main railway noise source. It arises from the acoustic radiation of various elements such as wheels, rail or sleepers. The rail, which mainly contributes to rolling noise at mid-frequencies (from 500 Hz to 1000 Hz approximately), is an extended coherent source for which classical array processing methods are inappropriate.

The characterization method proposed in this thesis is an inverse parametric optimization method that uses the acoustical signals measured by a microphone array. The unknown parameters of a vibro-acoustical model are estimated through the minimization of a least square criterion applied to the entries of the measured and modelled spectral matrices. In this vibro-acoustical model, the rail is considered as a cylindrical monopole whose lengthwise amplitude distribution is obtained from the vibratory velocity one. The different models proposed to obtain this velocity highlight the propagation of vibration waves towards both sides of every forcing point. Each wave is characterized by an amplitude at the forcing point, a real structural wavenumber and a decay rate. These parameters are estimated by the minimization of the least square criterion, and are then used in the vibro-acoustical model to rebuild the acoustical field radiated by the rail.

First, simulations are performed in order to appraise the performances of the proposed method, in the case of vertical point excitations. In particular, its robustness to additive noise and to uncertainties in the model parameters that are supposed to be known is tested. The effect of using simplified models is also investigated. Results show that the method is efficient and robust for the amplitude estimation of the nearest contacts to the array. On the other hand, the estimation of the other parameters is improved when the array is shifted away from the contact points. The wavenumber is generally well estimated over the entire frequency range, and when the decay rate is low, a single beamforming technique may be sufficient. Concerning the decay rate estimation, the efficiency of the method is limited by the low sensitivity of the criterion.

At last, measurements are performed in order to verify some results obtained from the simulations. The vibratory model is first validated for the vertical flexural waves through the use of an impact hammer. Then, the parametric optimization method is tested by the vertical excitation of the rail with a modal shaker. The main simulation results are found, and some particular behavior due to other waves existing in the rail can be observed, opening the perspective of a generalized method including more complex vibratory modelings.

Keywords : Railway transport, rolling noise, microphone array, array processing, beamforming, rail, optimization, least square criterion.

Remerciements

« Une thèse ? Mais quand est-ce que tu vas réellement te mettre à travailler ? »

Voici l'image du travail de thèse qu'ont eu parents, amis, entourage, et plus généralement celles et ceux qui n'ont pas eu la chance de connaître une telle aventure, scientifique et humaine. Pour avoir largement contribué à la réussite de ce projet, je souhaite tout d'abord et tout particulièrement remercier les soutiens de tous les jours, mes encadrants au sein du Laboratoire Transports et Environnement de l'IFSTTAR, Marie-Agnès PALLAS et Olivier CHIELLO. Non sans difficulté j'imagine, ils ont su canaliser mon énergie à bon escient ; quand il le fallait, ils m'ont épaulé, orienté, suggéré et parfois même empêché ! Ils ont su maîtriser la bête et lui inculquer un sens du devoir scientifique, un sens du plaisir par la rigueur. En dehors de l'arène, nous avons pu partager d'excellentes tranches de vies autour de nos passions communes, comme la musique ou les campagnes de mesures hivernales pour ne citer qu'elles.

À la baguette, je souhaite également remercier chaleureusement Christine SERVIÈRE, ma directrice de thèse du Département Images et Signal du Gipsa-Lab de Grenoble. Christine est en effet responsable (mais pas coupable) de mon parcours dans la recherche, depuis mon projet de fin d'études qu'elle a encadré à l'ENSIEG, jusqu'à cette thèse qu'elle a ensuite portée à ma connaissance, puis dirigée. Toujours en phase, nous avons pu travailler ensemble de manière efficace, simple et agréable.

Je souhaite pareillement remercier le prestigieux jury ayant accepté d'examiner mes travaux ; tout d'abord Jean-Louis LACOUME en tant que président, ainsi que Jean-Claude PASCAL et Antoine CHAIGNE en tant que rapporteurs. Enfin, je remercie David THOMPSON et Franck POISSON pour leurs avis d'experts dans le domaine du bruit ferroviaire.

Au cours de ces trois années et quelques mois, j'ai eu la chance de rencontrer de nombreuses personnes avec lesquels les échanges scientifiques et humains ont été aussi variés qu'appréciables. En premier lieu mes collègues de l'équipe Acoustique Physique du LTE : Jean-François, le grand sage de l'équipe qui aujourd'hui envoie les balles de golf à la vitesse du son, Joël, le nouveau sage, toujours pris dans le trafic, Philippe, l'éternel doctorant gonflé à bloc, et Jean-Michel, Mac Guyver avec un stéthoscope, parlant le PULSE comme personne, et résistant aux températures les plus extrêmes, malheureusement pas comme notre pot vibrant ! Une pensée toute spéciale à Roger, mon co-bureau, qui a partagé/subi mes humeurs en montagnes russes. Un vert et un grenat sur la même moquette, le terrain d'entente était tout trouvé ! Tels de vrais petits gones, tous les jeux de balles y sont passés : le jorky, le foot à Parilly, et surtout le lancé/évitage d'objets divers et variés à chaque tentative de création de tableau sous \LaTeX . D'ailleurs, il faudra bien que tu t'y mettes un jour ! J'ajoute un mot pour les autres, membres de LTE ou d'ailleurs, qui ont rendu unique chaque journée passée à l'INRETS, entre autres tournois de volleyball, entre-midis pingpong, pots de départ et Cie.

Je remonte à présent le temps pour revenir au pied des montagnes grenobloises, car c'est ici, entre flocons et cours de traitement du signal, que tout a commencé. Avec les Loupf★ck évidemment, les anciennes générations du cercle, les nouvelles, les NRJ, les SiSy,

bref, tous ceux qu'on croisait plus volontiers au bar à TNT de LE SONO MUSIC qu'aux TPs du vendredi matin... La bise aux locataires du 7 Avenue Général Champon : Virginie titulaire du brevet virginiade catégorie plat à tartes, Cyril le responsable vinaigrette à l'huile, et Alex pour qui faire une piperade n'a jamais été la mer à boire. Toutes nos excuses à la famille Dominguez. Franche accolade aux locataires du 82 Cours Berriat, avec en prem's Julien a.k.a. fils Bonnel, également connu sous son blaz de gangster gentleman, Juju-Bobo. Compagnon de tout trip, du dinosaure Lego[®] aux concerts de métal qui tache, en passant les Pas et les courses de Karting dans le salon. D'ailleurs, hein ?! Qui fournit le rétroprojecteur même le dimanche matin ? C'est Gaspar évidemment ! Avec lui les journées, les soirées, les nuits même sont meilleures : peau gommée aux soins Roger crackvaillès, cheveux lissés kloranés, oranges se pressant toutes seules le matin... Le luxe version Monop'. Dès mon départ, les goules ont envahi l'appartement ; c'était sans compter sur Bertrand qui a éliminé ces bestioles à coup de souris, et de billes sur la moquette. Évidemment, et même s'il est à présent bien loin, il y avait un dénominateur commun à ces deux numéros d'appartement : Raph a.k.a. Rafioul ou Rafal pour les intimes de la première ligne. Sans le savoir, Raph a rendu service à tout un tas de personnes ; il m'a fait apprécier d'autres musiques que le métal ! Sans lui, je n'aurais jamais su que le Hip Hop K1RI, ça passait C.R.E.A.M. ! Sans lui, pas de Rapper's Delight dans mon ghetto blaster, pas d'Atmosphere dans la R19 sans chaînes, partie rider les montagnes de poudreuse. Pas une prise de tête en cinq ans, que des fous rires et des épopées mémorables. J'ajouterais également quelques mots pour ceux qui ont eu la lourde tâche d'encadrer tous ces éléments plus qu'instables, les professeurs de la spécialité ATIS. Je tairais leur noms, ils ont encore une belle carrière devant eux... En tout cas, ils ont étrangement donné goût à la recherche à beaucoup d'entre nous ! Nous dirons simplement que l'année 2006/2007 était un très bon millésime !

Que notre pote Antoine, notre maminou veille sur nous autres IEGays, comme il aimait tant nous appeler.

De la noix à la praline, des montagnes aux collines, il n'y eut qu'un pas que j'ai franchi lors de l'été 2008. À pied, à cheval ou en velo'v, on applaudi les guignols. Avec Ludo et Xav, l'alchimie a tout de suite pris. Pour faire de bons polyfrères d'armes, le dosage devait être, et a toujours été parfait : un savant mélange de tubes des musclés, d'essais du CSBJ, de buvette graduée, et surtout, un agitateur, pour que ça mousse sur quelques notes de blues. Dans la troupe, pas de langue de bois mais deux Nicos. Mon premier est un roi du péno, un fier guerrier berjallien qui dézingue les demis emmêlés, aussi bien coude levé en terres Irlandaises que tête baissée sur un terrain vert. Mon second est un prince de la délicatesse au doigté inégalé. Bourreau des cœurs et des oreilles avec seulement six cordes à son arc, il est le seul à pouvoir poser cacartes sur table en toute circonstance. Aussi et surtout, il y a Marjolaine, la plus belle découverte que j'ai faite au cours de ma thèse. Quelques mots, pas plus, car tout ceci, elle le sait déjà, et que de le lui dire encore une fois, alors ça mon coco, elle ne le supporterait pas ! Peut être est-ce simplement parce que je ne sais pas vraiment qui remercier, pour ce que je lui dois et ce qu'elle m'a apporté.

Pour terminer cette escapade Lyonnaise par une touche musicale (sic), je lève ma mousse-tache à tous les membres de REMIND. Écrire cet album en même temps que ma thèse était une aventure périlleuse, menée à bien à la force de l'Impact 2-16, tant dans la joie que dans la torture. N'est-ce pas là l'unique recette pour faire un bon disque de Trash Metal ? En tout cas je ne retiens déjà plus que les bons moments que le Maître Du Je nous a fait passer ensemble.

Passons à présent par la Lorraine et sa préfecture Metz, capitale du royaume de la Klauchy Krou. Plus qu'un gang, plus qu'un posse, nous sommes une bande à part, une famille de joyeux trublions qui avons dépassé de loin les quatre cents coups. De Fabert

au coin Kayak, de la rue des Parmentiers au city stade, déjà plus d'une dizaine d'années se sont écoulées et bien plus encore nous attendent. La réussite de cette thèse, je vous la dois un peu à tous. Aussi et surtout, je la dois à ma famille. Même si vous avez mis un an à comprendre que je n'étais pas encore en stage, même si vous n'avez mesuré le travail accompli que lors de la soutenance, même si pour vous une antenne se fixe au toit et qu'un train fait toujours autant bruit après ma thèse, vous m'avez toujours soutenu, aveuglément, sans aucune mesure, et dans tout ce que j'ai pu entreprendre. J'ai de la chance de vous avoir, et j'en suis conscient, alors merci ; sachez tout de même que vous n'êtes pas au bout de vos peines !

Enfin, je terminerais par un petit mot pour ma nouvelle famille d'accueil à la SNCF. Même si le gros du travail était accompli avant que je vous rejoigne, vous m'avez tous encouragé dans la montée du dernier col, à coups de piqûres de bonne humeur et de transfusions de sens de l'humour. Pierre-Emile, Florent, Estelle et Florence, j'aurais fini ma thèse bien plus tôt si j'avais su que c'était pour bosser avec vous !

Table des matières

Remerciements	7
Introduction	15
1 Phénomènes à l'origine du bruit rayonné par la voie	19
1.1 Généralités sur le bruit de roulement	20
1.1.1 Mécanismes de génération	20
1.1.2 L'excitation	20
1.1.3 Comportement vibro-acoustique de la roue	21
1.1.4 Comportement vibro-acoustique de la voie	22
1.1.5 Contributions respectives de la roue et de la voie	22
1.2 Comportement vibratoire du rail	22
1.2.1 Modélisation des éléments de la voie	23
1.2.2 Le rail sur support continu uniforme	25
1.2.3 Le rail sur supports périodiques	30
1.2.4 Le rail avec déformation de section	34
1.2.5 Conclusion	35
1.3 Rayonnement acoustique du rail	35
1.3.1 Les différents modèles	36
1.3.2 Le cas simplifié du cylindre vibrant	36
1.3.3 Cas simplifiés de rayonnement isotrope dans le plan (\vec{x}, \vec{y})	40
1.3.4 Étude numérique	41
1.4 Conclusion	44
2 La caractérisation du rayonnement acoustique de la voie dans la littérature	47
2.1 Méthodes de séparation acoustiques et vibratoires des contributions roue/rail	47
2.1.1 Approche acoustique : méthode du champ acoustique réverbérant . .	47
2.1.2 Approches acoustiques et vibratoires	48
2.2 Utilisation d'antennes microphoniques	50
2.2.1 Principe de la formation de voies	50
2.2.2 Approche INRETS pour une source linéique	57
2.2.3 Analyse par la dynamique des cartographies	58
2.2.4 Comportement d'une antenne linéaire vis-à-vis du rail	59
2.3 Conclusion	63
3 Approche signal des méthodes multi-capteurs	65
3.1 Vecteur source	66
3.2 Maximum de vraisemblance	67
3.2.1 Maximum de vraisemblance en présence d'une source déterministe .	68
3.2.2 Maximum de vraisemblance en présence d'une source aléatoire . . .	70
3.3 Critère des moindres carrés	71

3.3.1	Écriture du critère	71
3.3.2	Cas d'une source aléatoire de paramètre ζ connu	71
3.3.3	Cas d'une source aléatoire de paramètre ζ inconnu	72
3.3.4	Cas de N_s sources aléatoires indépendantes de paramètres ζ_p connus	73
3.3.5	Cas de N_s sources aléatoires indépendantes de paramètres ζ_p inconnus	75
3.3.6	Positivité des variances dans le cas de plusieurs sources	75
3.3.7	Variance du bruit	75
3.4	Conclusion	76
4	Développement de méthodes adaptées au rail : évaluation des performances par simulations	77
4.1	Formation de voies en présence d'un champ acoustique cylindrique	78
4.1.1	Espace transformé des nombres d'onde structuraux	78
4.1.2	Estimation du nombre d'onde structural à partir de la formation de voies	79
4.2	L'estimateur des moindres carrés appliqué au cas du rail	83
4.2.1	Construction du vecteur source dans le cas du rail	83
4.2.2	Critères de représentativité	86
4.2.3	Autres caractéristiques des simulations	88
4.3	Estimation de l'amplitude dans le cas d'un seul contact	88
4.3.1	Influence du bruit de mesure	89
4.3.2	Incertitudes sur les paramètres supposés connus	91
4.3.3	Modèle source dégradé par rapport au modèle réel	101
4.4	Estimation des amplitudes dans le cas de contacts multiples	115
4.4.1	Position du problème	115
4.4.2	Erreur sur l'atténuation	116
4.4.3	Erreur sur le nombre d'onde	118
4.4.4	Plusieurs contacts - Synthèse	120
4.5	Estimation du nombre d'onde complexe dans le cas d'un seul contact	120
4.5.1	Représentation des fonctions à maximiser ou à minimiser	121
4.5.2	Modèle réel et modèle source identiques	122
4.5.3	Dégradations du modèle source	127
4.6	Estimation du nombre d'onde complexe dans le cas de contacts multiples	133
4.6.1	Position du problème	133
4.6.2	Résultats	134
4.6.3	Plusieurs contacts - synthèse	136
4.7	Conclusion	138
5	Expérimentations vibro-acoustiques	139
5.1	Le site expérimental	139
5.2	Mesures vibratoires - Excitation du rail à l'aide d'un marteau de chocs	140
5.2.1	Description des mesures	140
5.2.2	Flexion verticale - Résultats	142
5.2.3	Flexion latérale - Résultats	144
5.2.4	Validation du modèle vibratoire	146
5.3	Mesures acoustiques - Excitation du rail à l'aide d'un pot vibrant	147
5.3.1	Description des mesures	148
5.3.2	Formation de voies	149
5.3.3	Estimation du nombre d'onde complexe par optimisation paramétrique	154
5.3.4	Synthèse concernant l'identification du nombre d'onde complexe	159

6 Conclusion	163
6.1 Synthèse	163
6.2 Limitations, perspectives	165
Bibliographie	167
A Annexe - Les différents types de pose de voie	173
B Annexe - Le rail sur support continu	177
B.1 Poutre mince d'Euler	177
B.1.1 Constantes de propagation	177
B.1.2 Fonction de Green	177
B.2 Poutre épaisse de Timoshenko	178
B.2.1 Constantes de propagation	179
B.2.2 Fonction de Green	179
B.3 Comparaison des différentes constantes de propagation	180
C Annexe - Le rail sur supports périodiques	181
C.1 Constantes de propagation	181
C.2 Fonction de Green	182
C.3 Poutre d'Euler	183
D Annexe - Problématique des sources mobiles	185
D.1 Cinématique	185
D.2 Champ de pression d'une source en mouvement	186
E Annexe - Maximum de vraisemblance en présence d'une source aléatoire	187
F Annexe - Approximation de la matrice spectrale mesurée dans le sous-espace engendré par les vecteurs source	189
G Annexe - Indicateurs de représentativité du champ acoustique	191
G.1 Directivité du champ acoustique sur une ligne parallèle au rail	191
G.1.1 Intensité acoustique	191
G.1.2 Vitesse acoustique	191
G.1.3 Directivité moyenne	192
G.2 Puissance totale rayonnée	193
G.3 Pression quadratique moyenne sur une ligne parallèle au rail	194
H Annexe - Liste des symboles	195

Introduction

Depuis l'invention de la roue vers -3500 , le secteur des transports, des hommes ou des marchandises, n'a cessé au cours de l'histoire de s'imposer comme un acteur essentiel de la vie économique et comme un créateur de liens sociaux. Une seconde révolution fut le développement au XVII^e siècle de la machine à vapeur qui fit entrer les transports dans une nouvelle ère. À l'heure de la révolution industrielle, la locomotive à vapeur a fait des chemins de fers un rouage fondamental de l'industrialisation. Dès lors, les transports se sont développés à une vitesse fulgurante, ils se sont rapidement perfectionnés, diversifiés, organisés et intégrés dans la société. Depuis plusieurs décennies, le secteur bénéficie également d'avancées considérables au niveau des systèmes de traitement des informations, décuplant ainsi son potentiel évolutif.

Aujourd'hui, l'avènement de l'automobile et de l'aviation ainsi que la demande croissante de mobilité des usagers, imposent aux transports de s'intégrer dans une vision globale de l'aménagement du territoire, répondant aux contraintes d'intermodalité, de compétitivité et de durabilité, tout en réduisant leurs impacts sur l'environnement. Les transports ferroviaires apportent une solution judicieuse à cette problématique notamment grâce à l'essor du réseau à grande vitesse et à la réimplantation du tramway dans de nombreuses agglomérations. En conséquence, de nouvelles sources de gêne comme le bruit sont apparues chez les riverains [1, 2]. Ainsi, la réduction des nuisances sonores apparaît désormais comme un enjeu majeur pour le développement des transports ferroviaires. Afin d'agir efficacement à la source et éviter les coûteuses solutions palliatives de type « écran anti-bruit », il est indispensable d'identifier et d'étudier précisément les sources responsables de ces nuisances, aussi bien sur le véhicule que sur l'infrastructure.

Parmi les diverses approches possibles, les antennes microphoniques permettent une caractérisation de ces sources en matière de localisation spatiale, de niveau de bruit et de contenu fréquentiel. Cette technique est utilisée depuis plusieurs années de façon opérationnelle par des organismes de recherche ou des bureaux d'études spécialisés [3–6]. Les traitements associés dérivent généralement du principe de formation de voies, adaptés d'une part au contexte d'un diagnostic en champ proche (focalisation), et d'autre part au caractère instationnaire lié au mouvement du véhicule (suivi des sources et dédopplérisation). Ces méthodes sont, dans leur principe, optimales pour des sources ponctuelles, omnidirectionnelles et décorréées. En première approximation, les roues et les équipements bruyants compacts comme les moteurs ou les systèmes de ventilation peuvent vérifier ces conditions.

Cependant, pour les vitesses allant au moins jusqu'à 300 km/h, la source principale du bruit émis au passage d'un véhicule ferroviaire est le bruit de roulement [5]. Généré au niveau du contact entre les roues et le rail, il résulte du rayonnement des structures mises en vibration, que ce soit sur le matériel roulant ou sur l'infrastructure [7, 8]. Le comportement vibroacoustique du rail, en particulier la propagation de vibrations sur une très grande distance dans certaines gammes de fréquences, conduit à le considérer comme une source étendue ayant une grande longueur de cohérence. Le principe du traitement d'antenne tel qu'il est utilisé actuellement est donc mal adapté à ce type de source [9]. Or, pour les différents acteurs des transports ferroviaires (gestionnaires des infrastructures, exploitants

et fabricants de matériels roulants) il est indispensable de pouvoir estimer correctement les contributions respectives de la voie et des roues au bruit de roulement, afin de mettre en place les mesures correctives adaptées. L'enjeu de cette séparation est d'autant plus important depuis la mise en place de l'interopérabilité ferroviaire et la répartition des responsabilités entre ces différents acteurs. Les travaux présentés dans ce document sont consacrés à la caractérisation de la composante du bruit de roulement rayonnée par le rail.

Les traitements d'antenne classiques tels que la formation de voies reposent sur la connaissance préalable des caractéristiques des sources. Pour développer une méthode de caractérisation adaptée au rail, il est donc nécessaire, dans un premier temps, d'étudier de manière détaillée les propriétés de cette source acoustique particulière. Ainsi, après une brève introduction sur les phénomènes à l'origine du bruit de roulement, le premier chapitre résume les résultats principaux concernant le comportement vibroacoustique du rail à travers la présentation de différents modèles proposés dans la littérature. Une étude plus détaillée pourra être trouvée dans le chapitre 1 du rapport bibliographique [10]. De manière générale, ces modèles mettent en évidence la propagation d'ondes vibratoires dans le rail dont les propriétés sont étudiées en fonction des hypothèses du modèle, de la fréquence et de la nature de la voie (voie béton, voie sur ballast, système d'attaches périodique). L'essentiel des résultats présentés concerne la réponse à une excitation verticale ponctuelle en basses et moyennes fréquences, cas pour lequel l'hypothèse de poutre en flexion est appropriée.

Lorsque ces ondes vibratoires sont peu atténuées, un modèle analytique de source cylindrique peut être utilisé pour approcher le rayonnement acoustique du rail. Ce modèle simple conduit à un résultat théorique essentiel dans le cadre de nos travaux : les ondes acoustiques sont rayonnées avec une directivité longitudinale marquée par rapport à l'axe du rail. Cet angle de rayonnement dépend directement des caractéristiques de l'onde vibratoire et donc de la fréquence. Plus généralement, pour prendre en compte l'atténuation des ondes vibratoires, le rail est assimilé à un ensemble de sources monopolaires cohérentes, équi-réparties sur son axe, dont l'amplitude complexe est liée à la vitesse vibratoire le long du rail. Ce modèle permet de montrer l'hétérogénéité des propriétés spatiales et fréquentielles du champ acoustique à caractériser.

Ensuite, le chapitre 2 propose une revue de différentes méthodes de caractérisation acoustique : les traitements classiques par formation de voies, ainsi que certaines méthodes spécifiques au rayonnement du rail. Plusieurs techniques sont ainsi présentées selon les types de mesures effectuées : utilisation de microphones directifs ou de véhicules de référence, mesures vibratoires, mesures par antenne microphonique. En rapport avec la problématique abordée dans cette thèse ainsi que les résultats du chapitre 1, les limites de ces méthodes sont soulevées, justifiant le développement d'une nouvelle procédure. Une étude plus détaillée pourra être trouvée dans les chapitres 2, 3 et 4 du rapport bibliographique [10].

La méthode proposée dans cette thèse est une méthode d'optimisation paramétrique qui repose sur l'utilisation des modèles présentés dans le chapitre 1. Le champ acoustique rayonné par le rail est reconstruit à partir de ce modèle vibroacoustique (modèle source) dont certains paramètres caractéristiques sont estimés par minimisation d'un critère des moindres carrés sur les matrices spectrales. Le chapitre 3 propose une approche signal de cette méthode, en introduisant la notion de vecteur source. Les similitudes entre la méthode proposée et les méthodes d'estimation classiques en traitement du signal, comme le maximum de vraisemblance ou les techniques de formation de voies sont détaillées dans le cas d'une source unique. Le cas de sources multiples décorréélées est également étudié dans l'optique d'une caractérisation du champ acoustique résultant de plusieurs excitations vibratoires sur le rail (contacts roues/rail).

Dans le chapitre 4, la méthode est appliquée au rail à travers l'expression des vecteurs sources, en ne considérant principalement qu'un seul type d'onde (flexion verticale), pour une ou plusieurs excitations fixes. Selon le modèle vibroacoustique retenu, ses performances sont étudiées numériquement en explorant indépendamment différents aspects. Pour les cas où le problème d'optimisation est linéaire vis-à-vis des paramètres inconnus (amplitudes complexes des vecteurs sources), la robustesse de la méthode est évaluée pour les perturbations suivantes : présence de bruit additif sur les mesures, incertitudes existant sur les paramètres ondulatoires supposés connus (atténuation, nombre d'onde) et utilisation d'un modèle source dégradé (périodicité du support et effet de cisaillement négligés, hypothèse de poutre négligée). Pour les cas où le problème d'optimisation n'est pas linéaire vis-à-vis des paramètres inconnus, les performances de la méthode sont évaluées pour les perturbations suivantes : présence de bruit et utilisation d'un modèle source dégradé (périodicité et cisaillement négligés, recherche de plusieurs ondes avec un modèle source mono-onde). Une approche permettant d'identifier le nombre d'onde structural dans le rail à partir d'un traitement de formation de voies est également proposée en début de chapitre.

Enfin, le chapitre 5 est consacré à la validation expérimentale du modèle vibroacoustique adopté, ainsi qu'à celle de la méthode proposée. Les résultats concernent deux types de mesures effectuées sur un rail expérimental. Dans un premier temps, la validation du modèle vibroacoustique est assurée par des essais au marteau de chocs. Cette première phase permet également de déterminer les paramètres mécaniques spécifiques au site expérimental. Dans un second temps, le rail est excité par un pot vibrant afin de rechercher les comportements prévus par les simulations. La méthode d'optimisation est appliquée à la caractérisation du champ rayonné, et les apports de la méthode sont évalués relativement à la formation de voies en ondes planes.

1 – Phénomènes à l’origine du bruit rayonné par la voie

Sur un véhicule ferroviaire, il existe de nombreuses sources acoustiques associées à différents éléments du véhicule et résultant de phénomènes physiques multiples. Elles peuvent être regroupées en trois classes : bruits d’origine aérodynamique, bruits d’origine mécanique propres au véhicule et bruits de contact roue/rail.

Les bruits d’origine aérodynamique sont générés lorsque l’écoulement de l’air autour du véhicule est perturbé, par exemple au niveau du nez, du pantographe, des bogies ou encore des césures entre les voitures. Le bruit aérodynamique contribue majoritairement au bruit total pour les vitesses supérieures à 300 km/h [5].

Les bruits d’origine mécanique propres au véhicule concernent les moteurs et les autres constituants de la chaîne motrice, certains équipements électriques comme les ventilateurs, ou encore les systèmes de freinage. Elles sont généralement localisées spatialement et leur rayonnement, proche de celui d’une source ponctuelle, est bien caractérisé par les méthodes classiques de traitement d’antenne (cf. partie 2.2.1.2). La contribution de ces sources au bruit total émis par un véhicule ferroviaire est importante surtout pour les faibles vitesses, inférieures à 50 km/h.

Les bruits de contact roue/rail sont liés aux efforts de contact induits par le déplacement du véhicule sur la voie. Il résulte de la mise en vibration puis du rayonnement des structures telles que les roues, le rail, les traverses et les autres éléments qui constituent la voie. Suivant la nature de l’excitation au niveau des contacts, on distingue trois catégories de bruit de contact [7] :

- **Le bruit d’impact** [11–14]

Il est lié aux discontinuités du contact engendré par les plats de roue ou les défauts ponctuels du rail, par exemple au niveau des joints ou des aiguillages. Il est localisé spatialement et, de par la nature impulsionnelle de l’excitation, temporellement.

- **Le bruit de crissement** [12, 15–18]

Dans les courbes à faible rayon, il existe une vitesse de glissement latérale au niveau des contacts. Les forces de frottement qui s’y appliquent sont instables et engendrent des vibrations auto-entretenues principalement de la roue, mais aussi du rail et de la voie. Dans ce cas, l’excitation est caractérisée par un spectre de raies.

- **Le bruit de roulement**

Lié aux irrégularités des surfaces de roulement (tête du rail, bande de roulement de la roue), il est la source prépondérante de bruit de contact roue/rail. Systématiquement présent dès lors que le véhicule est en mouvement, il constitue la source principale de bruit ferroviaire pour des vitesses comprises entre 50 et 300 km/h [5]. On considère généralement que son niveau évolue avec la vitesse V en $30 \log V$ [8]. Dans ce cas, le spectre de l’excitation est large bande.

L’objectif de ce chapitre est de présenter les phénomènes qui sont à l’origine du bruit de roulement, en particulier le bruit émis par le rail, depuis l’excitation jusqu’au rayonnement acoustique. Après une première partie consacrée aux mécanismes de génération et aux caractéristiques vibroacoustique principales des différents éléments, l’étude se foca-

lise ensuite sur le rail dont la caractérisation constitue la problématique de la thèse. Ses comportements vibratoire et acoustique sont décrits à partir de modèles qui seront utilisés ultérieurement pour la méthode de caractérisation proposée.

1.1 Généralités sur le bruit de roulement

1.1.1 Mécanismes de génération

La modélisation du bruit de roulement a été initiée par P.J. Remington en 1976 [19,20], et largement développée par D.J. Thompson [7, 21–25]. Dans ces travaux, les rugosités combinées de la roue et du rail engendrent un déplacement vertical relatif de la roue par rapport au rail. Il en résulte la mise en vibration du système roue/rail qui, par le biais de mécanismes d'interaction, conduit à des efforts ponctuels multi-directionnels au niveau du contact. Dans le cas où l'amplitude des déplacements est faible (faibles amplitudes de rugosité), les différents phénomènes peuvent être considérés comme linéaires, permettant une approche fréquentielle. Le champ acoustique global rayonné est la superposition des champs rayonnés par les différents éléments mis en vibration. Cette approche a notamment été implémentée dès les années 90 dans un outil informatique de prédiction du bruit de roulement appelé TWINS¹ [26].

1.1.2 L'excitation

L'état de surface des bandes de roulement de la roue et du rail est caractérisé par la rugosité, décrivant le profil vertical des irrégularités en fonction de l'abscisse le long de la bande de roulement. Par le biais du déplacement à la vitesse V de la roue sur le rail, le spectre spatial se traduit en un spectre fréquentiel (fig. 1.1).

Signal spatial de rugosité	Signal temporel de rugosité
Espace	Temps
Longueur d'onde	Période
Amplitude des irrégularités	Amplitude des irrégularités
Fréquence spatiale μ (en m^{-1})	Fréquence temporelle f (en Hz)
↓	↓
$r_z(z)$	$r_t(t) = r_z(Vt)$
Signal aléatoire stationnaire	Signal aléatoire stationnaire
Corrélation :	Corrélation :
$\Gamma_{r_z}(\chi) = \mathbf{E}[r_z(z) r_z(z - \chi)]$	$\Gamma_{r_t}(\tau) = \mathbf{E}[r_t(t) r_t(t - \tau)]$
↑↑ TF	↑↑ TF
Densité spectrale de puissance :	Densité spectrale de puissance :
$\gamma_{r_z}(\mu) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{r_z}(\chi) e^{-2j\pi\mu\chi} d\chi$	$\gamma_{r_t}(f) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{r_t}(\tau) e^{-2j\pi f\tau} d\tau$
Comme $\mu = \frac{f}{V}$ on a :	$\gamma_{r_t}(f) = \frac{1}{V} \gamma_{r_z}\left(\frac{f}{V}\right)$

FIGURE 1.1: *Spectre spatio-temporel de rugosité*

Les longueurs d'ondes qui contribuent à la génération du bruit pour les vitesses usuelles des véhicules ferroviaires, peuvent aller de 5 mm à 200 mm environ avec des amplitudes

1. TWINS : Track-Wheel Interaction Noise Software

verticales comprises entre $0.1 \mu\text{m}$ et $50 \mu\text{m}$. Enfin, il est important de noter que le contact entre la roue et le rail n'est pas ponctuel; il intervient en réalité sur une surface elliptique qui agit comme un filtre de contact. Ce filtrage spatial limite l'influence des petites longueurs d'onde de la rugosité [24].

1.1.3 Comportement vibro-acoustique de la roue

Les roues des véhicules ferroviaires sont fabriquées en acier et sont solidaires de l'essieu par montage. Le plus souvent, des roues à bandage sont utilisées : une couche métallique d'usure est fixée autour du voile. Le bandage comporte par ailleurs un boudin, garantissant le guidage de la roue sur le rail. La géométrie du voile dépend du type de roue. Un exemple de profil de roue représentant ces différents éléments est donné figure 1.2.

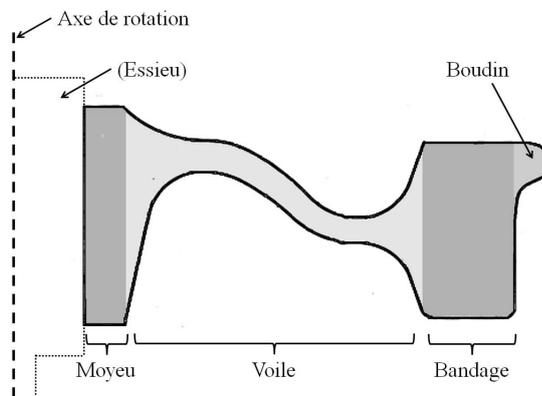


FIGURE 1.2: Profil d'une roue ferroviaire.

Pour les fréquences supérieures à 400 Hz , le comportement vibratoire de la roue est proche de celui d'un disque, en dessous de cette fréquence il faut plutôt considérer l'essieu complet. Une approche modale peut alors être utilisée pour analyser ses vibrations [7] : le champ vibratoire de la roue est la superposition des déformées des modes dans la bande de fréquence d'étude. La réponse est importante (résonance) lorsque la fréquence d'excitation est proche des fréquences propres correspondantes. Selon la géométrie de la roue et surtout du voile, les fréquences et les déformées des modes sont différentes. On utilise fréquemment la méthode des éléments finis pour les déterminer [22, 27].

D'un point de vue acoustique, une grande partie de l'énergie est rayonnée par le voile en flexion (vibrations axiales). Le reste de l'énergie est plutôt rayonné par le bandage (vibrations radiales). L'efficacité de rayonnement² est différente selon les modes de vibration, mais toujours assez faible en dessous de 500 Hz . À l'inverse, au delà de 500 Hz environ, le rayonnement est important [27].

À l'échelle d'un véhicule ferroviaire, la roue est une source que l'on peut qualifier de ponctuelle en première approximation, et dont le rayonnement acoustique semble correctement estimé par les méthodes de traitement d'antenne classiques détaillées dans la partie 2.2.1.

2. L'efficacité de rayonnement est définie par C.E. Wallace dans [28] comme le rapport entre la puissance acoustique rayonnée par une structure et la puissance acoustique rayonnée par un piston plan de même surface et de même vitesse vibratoire moyenne.

1.1.4 Comportement vibro-acoustique de la voie

Une voie ferrée est une structure mécanique formée de différents éléments qui supportent et guident les véhicules ferroviaires. La voie la plus courante en France, utilisée notamment pour les trains, est constituée de deux files de rail fixées sur des traverses en béton ou en bois, elles-mêmes reposant sur une couche de ballast. Des semelles sont intercalées entre chaque traverse et le pied du rail. Pour les voies de tramway en milieu urbain, on rencontre plus souvent une pose sur dalle avec ou sans traverse. Ce type de pose permet de recouvrir les voies d'un revêtement bitumineux ou pavé afin de les partager avec les véhicules routiers et les piétons. L'annexe A propose une revue de différents types de pose.

Le comportement vibro-acoustique du rail est évoqué en détail dans la suite du chapitre. Il faut toutefois rappeler que les autres éléments de la voie (traverses, ballast et dalle le cas échéant) contribuent également au bruit de roulement, en particulier aux basses fréquences. Contrairement à la roue, les vibrations dans la voie peuvent se propager sur une longue distance. L'approche modale n'est plus pertinente dans la mesure où la structure est quasiment infinie. Les sources de bruit associées à la voie présentent un support spatial étendu, comme l'ont montré certaines mesures [29].

1.1.5 Contributions respectives de la roue et de la voie

Un résultat important obtenu à l'aide des outils prédictifs tels que TWINS concerne la contribution sonore relative des éléments de la voie suivant la gamme de fréquence considérée. Dans le cas d'une voie de chemin de fer classique, on peut énoncer les généralités suivantes [7] :

- Le bruit rayonné par les traverses domine en basse fréquence (jusqu'à environ 500 Hz).
- Le rayonnement de la roue devient dominant en haute fréquence (à partir du premier mode radial de roue, soit 1 kHz environ). Le spectre présente des fortes émergences à proximité des fréquences propres des modes de roue radiaux et axiaux à un cercle nodal.
- Le rail est la source dominante dans les moyennes fréquences (jusqu'au premier mode radial de roue) mais sa contribution reste tout de même importante aux fréquences plus élevées.

Remarque : Il est important de noter que les frontières entre ces domaines dépendent étroitement des caractéristiques mécaniques des éléments considérés (voie, roue, rail, etc...).

1.2 Comportement vibratoire du rail

La partie précédente a souligné l'importance du rayonnement acoustique du rail dans le bruit ferroviaire :

- pour des vitesses inférieures à 300 km/h, le bruit de roulement constitue la source principale de bruit ferroviaire [5],
- pour des fréquences comprises entre 500 Hz et 1 kHz, le rayonnement du rail est la composante principale du bruit de roulement [7],
- la source acoustique formée par le rail a un support spatial étendu.

Pour comprendre le rayonnement du rail et développer une méthode de caractérisation adaptée, il est nécessaire d'analyser préalablement son comportement vibratoire. Dans cette partie sont exposés différents modèles vibratoires largement développés dans la littérature, ainsi que les résultats essentiels qui en résultent. Une attention particulière

est portée aux modèles qui seront utilisés par la suite pour bâtir la nouvelle méthode de caractérisation.

On considère ici que le rail est soumis à une excitation ponctuelle verticale, et seule la réponse vibratoire verticale du rail est examinée. Les formulations théoriques restent cependant valables pour les vibrations latérales, seuls les valeurs des paramètres mécaniques et le domaine fréquentiel de validité des différents modèles sont modifiés dans ce cas. Des ondes vibratoires se propageant de part et d’autre du point d’excitation sont mises en évidence. Les résultats essentiels de cette partie résident dans l’expression des vibrations verticales le long du rail, suivant les modèles utilisés.

1.2.1 Modélisation des éléments de la voie

1.2.1.1 Modélisation du rail

Pour la modélisation du rail, l’hypothèse de poutre est souvent utilisée [30–37], notamment à travers le modèle de poutre mince d’Euler-Bernoulli³ (cf. 1.2.2.1) et le modèle de poutre épaisse de Timoshenko (cf. 1.2.2.2). L’hypothèse de poutre atteint ses limites en hautes fréquences : au delà de 3 – 4 kHz pour les vibrations verticales, et au delà de 1 kHz pour les vibrations latérales [38]. En dehors de ces domaines les déformations de la section (en particulier celles du pied du rail) doivent alors être prises en compte. Des méthodes alliant approche ondulatoire le long du rail et discrétisation par éléments finis de sa section sont généralement utilisées dans ce cas [23, 31, 39–41] (cf. 1.2.4) mais d’autres techniques existent [42].

1.2.1.2 Modélisation du support

La modélisation du support du rail est déterminée en premier lieu par la nature des éléments qui le constituent. De nombreux types de pose existent (cf. annexe A) caractérisés notamment par la plate-forme et le système de fixation du rail. La propagation des vibrations dans la plate-forme (le plus souvent constituée par du ballast ou par une dalle de béton) est souvent négligeable au-delà de 100 Hz environ, et un modèle d’impédance mécanique localisée peut alors être utilisé.

Dans le cas d’une pose discontinue, le rail est généralement fixé à des traverses, *via* des semelles en élastomère. Le plus souvent, la traverse peut être considérée comme rigide, ce qui conduit à des modèles à quelques degrés de liberté dont le plus courant prend en compte (pour une file de rail) :

- une raideur complexe⁴ \underline{s}_p caractérisant la semelle et le système de fixation du rail en général,
- une masse M_t caractérisant une demi-traverse,
- une raideur complexe \underline{s}_b caractérisant la plate-forme (dalle, ballast).

Dans ce cas, la raideur dynamique apparente du support (en régime harmonique) a pour expression :

$$s(\omega) = \underline{s}_p \frac{M_t \omega^2 - \underline{s}_b}{M_t \omega^2 - (\underline{s}_p + \underline{s}_b)} \quad (1.1)$$

où ω est la pulsation.

Dans le cas d’une dalle, la raideur de la plate-forme étant très grande, seule la raideur de la semelle intervient : $s(\omega) = \underline{s}_p$. On peut par ailleurs déduire de l’équation (1.1) les

3. Dans ce document, on utilise plutôt les expressions simplifiées *poutre d’Euler* ou *hypothèse d’Euler*.

4. Une raideur \underline{s} complexe indique que les phénomènes de dissipation sont pris en compte, à travers un facteur de pertes η . On écrira ainsi : $\underline{s} = s(1 + \eta i)$, s étant une raideur réelle.

comportements aux limites du support :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{s(\omega)} = \frac{1}{\underline{s}_p} + \frac{1}{\underline{s}_b} \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} s(\omega) = \underline{s}_p$$

Aux très basses fréquences, la raideur apparente correspond à celles du ballast et de la semelle placées en série. Aux très hautes fréquences elle est égale à celle de la semelle, les supports béton et ballast sont dans ce cas équivalents.

Lorsque l'on s'intéresse aux vibrations du rail, cette modélisation du support par des impédances mécaniques localisées à seulement quelques degrés de liberté est satisfaisante dans la plupart des cas. Pour augmenter localement la précision, ou dès lors que l'on s'intéresse aux déformations du support, des modèles plus complets peuvent être utilisés intégrant par exemple la modélisation de chaque traverse par une poutre [43] ou par un modèle éléments finis [44, 45].

1.2.1.3 Modélisation de l'ensemble de la voie

On peut distinguer deux types de modèles selon que l'on conserve la nature discrète du support ou non (voir figure 1.3) :

- le rail sur support continu uniforme (cf. 1.2.2) pour lequel une raideur linéique équivalente $s'(\omega) = s(\omega)/a$ est définie, a étant l'espace inter-traverses,
- le rail sur supports ponctuels périodiques (cf. 1.2.3).

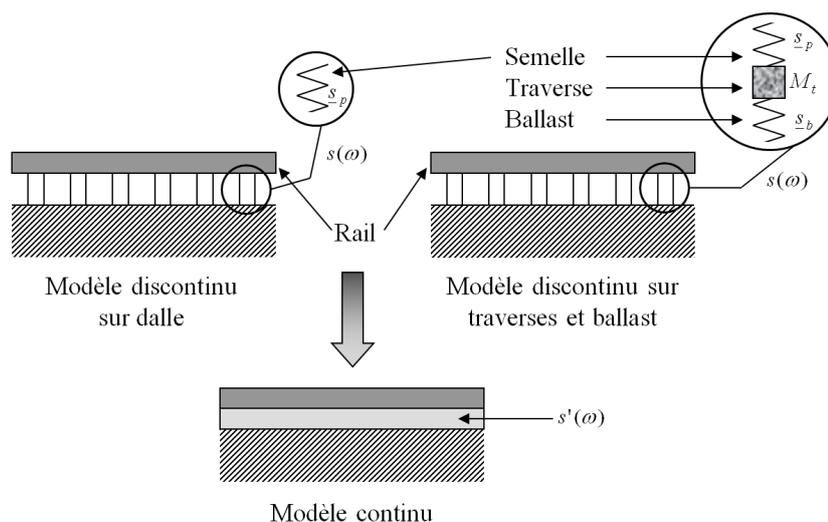


FIGURE 1.3: Modélisation continue d'un rail sur appuis discontinus

Les valeurs des paramètres mécaniques du rail et de son support utilisées pour les applications numériques de ce chapitre sont données table 1.1 [35]. Ces valeurs correspondent à l'étude des vibrations verticales, on rappelle toutefois que les formulations pour les vibrations latérales sont identiques ; seule la valeur de certains paramètres change, ce qui a pour effet de déplacer les fréquences caractéristiques du système.

La prise en compte des phénomènes dissipatifs dans le rail se traduit sur le module d'élasticité E , le module de cisaillement G et la rigidité en flexion verticale B à travers le coefficient de pertes internes η_E : $\underline{E} = E(1 + i\eta_E)$, $\underline{B} = \underline{E}I$ et $\underline{G} = \underline{E}/(2 + 2\nu)$. Pour l'ensemble de l'étude les phénomènes dissipatifs sont pris en compte, on omettra cependant de souligner le nom de ces variables afin d'alléger les notations.

Rail		Support	
Module d'élasticité (N/m ²)	$E = 2.1 \cdot 10^{11}$	Masse d'une demi-traverse (kg)	$M_t = 80$
Coefficient de pertes internes	$\eta_E = 4 \cdot 10^{-3}$	Raideur de la semelle (N/m)	$s_p = 3 \cdot 10^8$
Moment d'inertie (m ⁴)	$I = 3.05 \cdot 10^{-5}$	Facteur de pertes dans la semelle	$\eta_p = 0.1$
Coefficient de poisson	$\nu = 0.3$	Raideur du ballast (N/m)	$s_b = 7.5 \cdot 10^7$
Module de cisaillement (N/m ²)	$G = E/(2+2\nu)$	Facteur de pertes dans le ballast	$\eta_b = 0.4$
Masse volumique (kg/m ³)	$\rho = 8000$		
Rigidité en flexion verticale (Nm ²)	$B = EI$		
Masse par unité de longueur (kg/m)	$M = 60$		
Coefficient de cisaillement	$\kappa = 2.4$		

TABLE 1.1: Paramètres mécaniques typiques de la voie, ondes de flexion verticales. Ces valeurs sont issues de travaux précédents [35]. En particulier, il faut noter que le taux d'amortissement dans le rail est plutôt faible en comparaison à celui utilisé en pratique.

1.2.2 Le rail sur support continu uniforme

Dans ce chapitre, le rail est modélisé successivement par une poutre mince d'Euler et une poutre épaisse de Timoshenko. Dans cette partie, les appuis discontinus sont modélisés de façon continue; la pose sur dalle et la pose sur traverses et ballast sont abordées. Le rail, orienté selon l'axe \vec{z} , est soumis à l'excitation d'une force ponctuelle appliquée en z_e comme l'indique la figure 1.4.

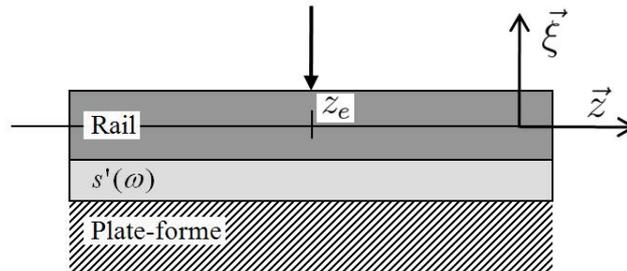


FIGURE 1.4: Modélisation de la voie avec support continu

On se place en régime harmonique à la pulsation ω , les grandeurs considérées sont des amplitudes complexes (on omet d'écrire la dépendance temporelle en $e^{i\omega t}$). De manière générale, les équations vérifiées par le déplacement vertical du rail ξ ont pour base de solutions les ondes de la forme $e^{\pm\gamma(\omega)z}$. La grandeur complexe $\gamma(\omega)$ est appelée constante de propagation, sa partie réelle définit l'atténuation⁵ et sa partie imaginaire définit le nombre d'onde. Pour chaque cas étudié (selon le modèle de poutre et le type de support), on formulera les deux fonctions suivantes :

- la relation de dispersion $\gamma(\omega)$,
- la fonction de Green $G_\omega(z, z_e)$ qui représente le déplacement ξ du rail excité par une force ponctuelle unitaire en $z = z_e$.

Les calculs permettant d'arriver aux résultats énoncés sont donnés dans l'annexe B et les paramètres mécaniques utilisés pour les applications numériques sont ceux de la table 1.1.

5. L'atténuation Δ en dB/m est donnée par : $\Delta = \Re(\gamma)20 \log e$ où $\Re(\gamma)$ désigne la partie réelle de γ .

1.2.2.1 Le modèle d'Euler

Avec les hypothèses d'Euler, la relation de dispersion s'écrit [35] :

$$\gamma^4(\omega) = k_B^4 \left[1 - \frac{s'(\omega)}{M\omega^2} \right] \quad (1.2)$$

Avec :

k_B le nombre d'onde de flexion d'une poutre mince tel que $k_B^4 = \frac{M\omega^2}{B}$.

L'équation de dispersion (1.2) admet donc quatre solutions k_β , $-k_\beta$, ik_β et $-ik_\beta$ où k_β est la solution à partie réelle positive et à partie imaginaire négative.

La fonction de Green est donnée par [35] :

$$G_\omega(z, z_e) = -\frac{1}{4k_\beta^3} \frac{1}{B} \left[e^{-k_\beta|z-z_e|} + ie^{-ik_\beta|z-z_e|} \right] \quad (1.3)$$

Ainsi, lorsque le rail est soumis à une excitation ponctuelle, deux ondes vibratoires se propagent de part et d'autre du point d'application :

- une onde potentiellement propagative $e^{-ik_\beta|z-z_e|}$ très peu atténuée dans certaines bandes de fréquences,
- une onde de champ proche $e^{-k_\beta|z-z_e|}$ fortement atténuée, et légèrement rétropropagative. Cette onde également appelée onde évanescence existe dans un voisinage proche du point d'excitation. Par exemple, à 500 Hz, l'effet de champ proche ne se fait sentir que sur une zone de l'ordre du mètre.

Fréquences caractéristiques

Suivant le signe de la partie réelle de γ^4 , des fréquences caractéristiques peuvent être mises en évidence.

Dans le cas du rail sur support béton pour lequel la raideur $s(\omega)$ est égale à la raideur des seules semelles s_p (la raideur s_b de la plate-forme est grande devant s_p), on peut distinguer la fréquence particulière $f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{s_p}{aM}}$ ($f_p = 460$ Hz ici⁶). Cette fréquence correspond à la résonance d'un système masse/ressort dans lequel la masse serait le rail et le ressort le support continu.

Dans le cas du rail sur support ballast pour lequel les ensembles {semelles + traverses + ballast} sont modélisés par des systèmes {raideur - masse - raideur} comme décrit précédemment par la figure 1.3, plusieurs fréquences caractéristiques sont mises en évidence :

- $f_{ballast}$ correspondant à la résonance en phase du rail et de la traverse sur la raideur du ballast (la raideur de la semelle intervient peu). ($f_{ballast} = 130$ Hz⁶)
- f_{anti} correspondant à la résonance de la traverse entre les raideurs du ballast et de la semelle (les mouvements du rail sont faibles). ($f_{anti} = 340$ Hz⁶)
- $f_{semelle}$ correspondant à la résonance du rail sur la raideur de la semelle, le déplacement de la traverse restant faible. ($f_{semelle} = 560$ Hz⁶)

Constantes de propagation

De part et d'autre des fréquences caractéristiques du système, les ondes vibratoires se propagent avec des propriétés différentes.

Sur un support rigide, l'atténuation des ondes propagatives se produit essentiellement aux basses fréquences, elle est d'autant plus élevée que la raideur des semelles est forte.

6. Pour les paramètres typiques de la table 1.1.

L'atténuation de ces ondes aux basses fréquences est nettement meilleure pour une voie sur dalle que pour une voie sur ballast. En revanche, sur voie ballast, il existe deux zones fréquentielles à forte atténuation. En hautes fréquences, le comportement du rail sur son support (dalle ou ballast) est proche de celui d'un rail isolé : la propagation des ondes potentiellement propagatives n'est plus affectée par le support.

Les figures 1.5 et 1.6 illustrent ces propriétés (tracé de l'atténuation et du nombre d'onde pour l'onde propagative et l'onde de champ proche en fonction de la fréquence).

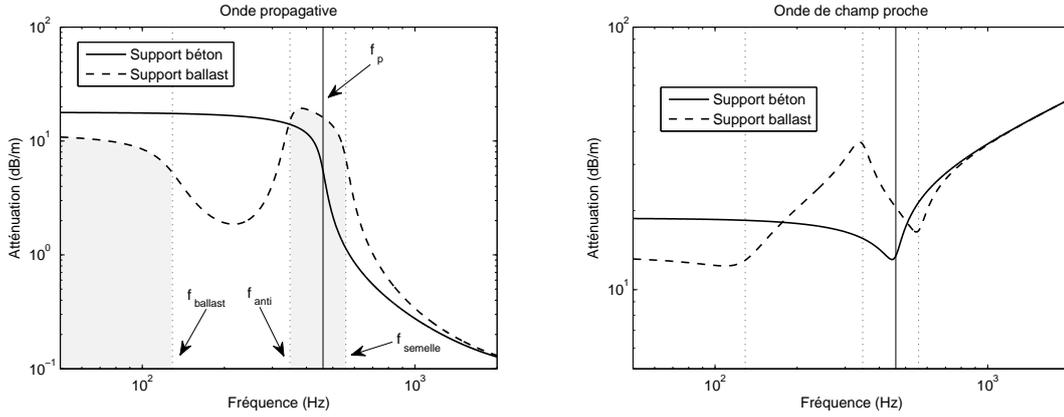


FIGURE 1.5: Atténuation des ondes de vibration verticales le long d'un rail - Cas d'une poutre mince d'Euler sur support continu. Gauche : onde potentiellement propagative. Droite : onde de champ proche.

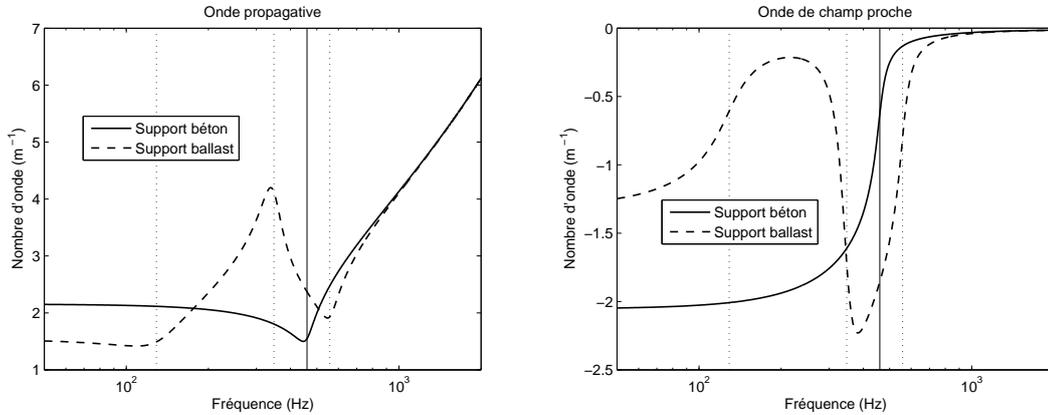


FIGURE 1.6: Nombre d'onde des ondes de vibration verticales le long d'un rail - Cas d'une poutre mince d'Euler sur support continu. Gauche : onde potentiellement propagative. Droite : onde de champ proche.

1.2.2.2 Le modèle de Timoshenko

Le modèle de poutre épaisse de Timoshenko inclut les effets de cisaillement et d'inertie rotationnelle. Dans ce cas, la relation de dispersion devient :

$$\gamma^4 + \left(k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right) \gamma^2 - \left(k_B^4 - k_c^2 k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{B} \left[1 - \frac{B}{K} k_c^2 \right] \right) = 0 \quad (1.4)$$

Avec :

$k_c = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}$: Nombre d'onde des ondes de compression

$k_t^* = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G^*}}$: Nombre d'onde des ondes de cisaillement

$G^* = G/\kappa$

$K = G^*M/\rho$: Rigidité au cisaillement

L'équation de dispersion (1.4) admet donc quatre solutions k_d , $-k_d$, ik_p et $-ik_p$, avec k_d et k_p à partie réelle positive et partie imaginaire négative.

La fonction de Green est donnée par :

$$G_\omega(z, z_e) = -\frac{1}{B} \left[F_d e^{-k_d|z-z_e|} + iF_p e^{-ik_p|z-z_e|} \right] \quad (1.5)$$

Avec :

$$F_p = \frac{1 - \frac{B}{K}(-k_p^2 + k_c^2 + \frac{s'(\omega)}{K})}{2k_p(k_p^2 + k_d^2)} \quad F_d = \frac{1 - \frac{B}{K}(k_d^2 + k_c^2 + \frac{s'(\omega)}{K})}{2k_d(k_p^2 + k_d^2)} \quad (1.6)$$

amplitudes homogènes à $1/k_\beta^3$ (c'est-à-dire à un volume).

Comme dans le cas de la poutre mince d'Euler, on retrouve ici une réponse vibratoire formée par la superposition de deux ondes se propageant de part et d'autre du point d'excitation :

- une onde potentiellement propagative $e^{-ik_p|z-z_e|}$ très peu atténuée dans certaines bandes de fréquences,
- une onde de champ proche $e^{-k_d|z-z_e|}$ fortement atténuée.

L'utilisation d'un modèle de poutre de Timoshenko modifie le comportement vibratoire du rail à plusieurs niveaux. Si les fréquences caractéristiques restent proches dans les deux cas, on note toutefois des écarts au niveau des constantes de propagation et des amplitudes.

Fréquences caractéristiques

Quel que soit le modèle de poutre utilisé, les mêmes fréquences caractéristiques sont mises en évidence, pour le support ballast comme pour le support béton. Elles prennent de plus les mêmes valeurs à une dizaine de Hertz près.

Constantes de propagation

Alors que le modèle d'Euler ne fait intervenir qu'une seule grandeur k_β , le modèle de poutre de Timoshenko fait intervenir deux constantes de propagation k_p et k_d , liées par la relation :

$$k_p^2 - k_d^2 = k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \quad (1.7)$$

Un plus grand nombre de paramètres est donc nécessaire pour caractériser le comportement vibratoire d'une poutre de Timoshenko par rapport à une poutre d'Euler.

Pour les basses fréquences où l'influence du support est importante, les écarts sont relativement faibles. Pour le support ballast, ils sont principalement localisés au voisinage des fréquences caractéristiques du système. On observe notamment une atténuation de l'onde propagative plus importante pour le modèle de Timoshenko au niveau de $f = f_{anti}$ de quelques dB/m par rapport au modèle d'Euler.

Pour les fréquences plus élevées, le modèle d'Euler atteint ses limites [34], et les deux modèles de poutre divergent notablement.

La figure 1.7 illustre ces propriétés pour l'onde propagative.

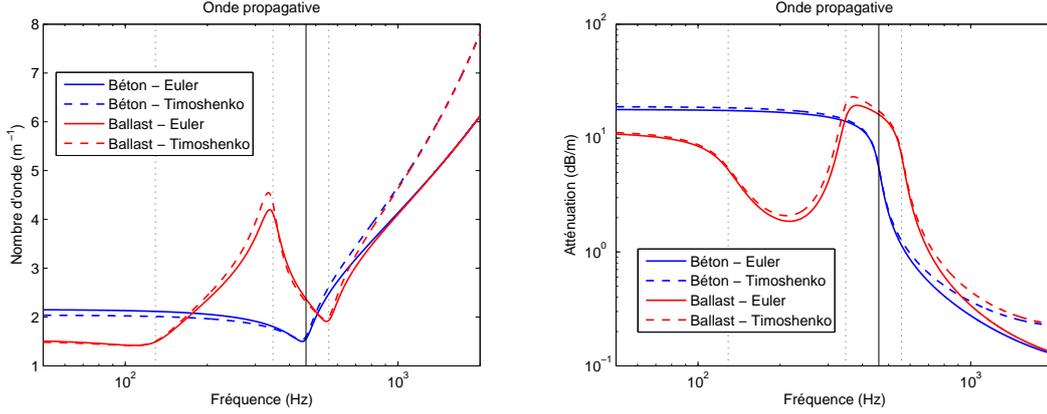


FIGURE 1.7: Constante de propagation de l'onde propagative de flexion verticale, pour le rail sur support continu. Gauche : nombre d'onde. Droite : atténuation.

Amplitudes

Comme pour les constantes de propagation, l'influence du support en basses fréquences estompe les différences entre les deux modèles de poutre au niveau de l'amplitude. Pour la poutre d'Euler, l'onde propagative et l'onde de champ proche ont la même amplitude à un déphasage de $\pi/2$ près (cf. équation (1.3)). Pour le modèle de poutre de Timoshenko, l'onde de champ proche et l'onde propagative ont des amplitudes différentes, à savoir F_d et F_p (cf. équations (1.5) et (1.6)). Ces deux amplitudes sont liées par la relation :

$$k_d F_d - k_p F_p = -\frac{B}{2K} \quad (1.8)$$

Pour les hautes fréquences, lorsqu'on se rapproche du rail libre, la différence entre les amplitudes F_d et F_p peut atteindre 9 dB (cf. figure 1.8).

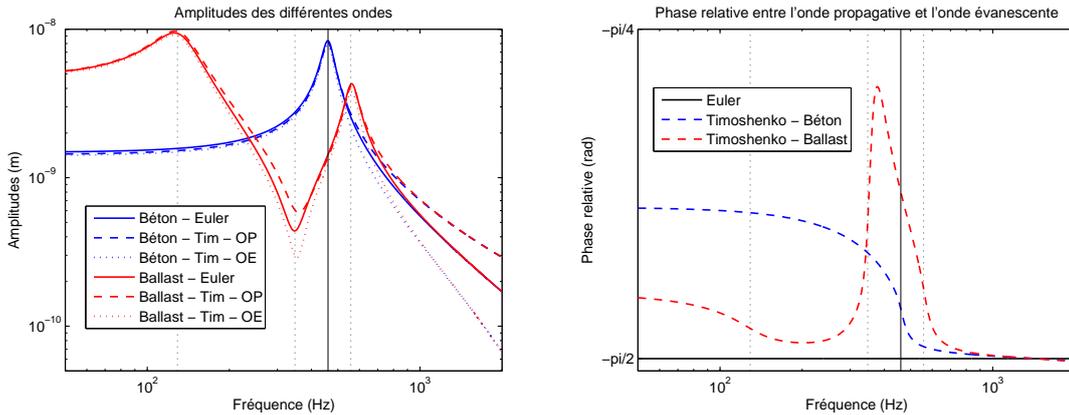


FIGURE 1.8: Amplitudes des différentes ondes suivant le modèle de poutre. Gauche : valeurs en mètres des différentes amplitudes. Droite : phase relative entre l'amplitude de l'onde évanescente et l'amplitude de l'onde propagative. — OP : onde propagative. OE : onde évanescente.

D'après l'équation (1.8), l'onde de champ proche et l'onde propagative sont cohérentes et de fait, elles donnent lieu à des interférences vibratoires. Le déphasage entre ces ondes a ainsi des conséquences sur la façon dont le champ total est recomposé. Pour le modèle d'Euler ce déphasage est constant et vaut $\pm\pi/2$. Pour la poutre de Timoshenko le

déphasage entre les deux ondes varie, surtout pour les fréquences inférieures à 1000 Hz, dans un intervalle de l'ordre de $\pi/4$ radians (cf. figure 1.8). Dans la mesure où l'onde de champ proche est rapidement atténuée de part et d'autre de l'excitation, le problème de recomposition de phase devrait se limiter au voisinage de l'excitation.

1.2.3 Le rail sur supports périodiques

Dans la section précédente, les supports du rail sont modélisés de façon continue en remplaçant leur raideur par une raideur linéique constante le long du rail. Cependant, comme l'a montré l'étude menée par Nordborg dans [32, 46] pour une poutre mince en flexion, reprise par J.-F. Hamet dans [34, 36] pour une poutre épaisse, et généralisée par M. Heckl [37], la périodicité du support influe notablement sur le comportement vibratoire du rail.

Le problème périodique représenté sur la figure 1.9 est défini comme suit :

- les points d'attache du rail repérés par les abscisses z_n sont équidistants et en nombre infini⁷,
- les différents supports ont des propriétés mécaniques identiques,
- on note $s(\omega)$ l'impédance mécanique de chaque support,
- a est l'intervalle entre deux traverses,
- l'origine des abscisses est placée sur une traverse,
- on pose $z_0 = 0$ et donc $z_n = na$,
- l'excitation est repérée par l'abscisse z_e ,
- le rail est modélisé par une poutre de Timoshenko.

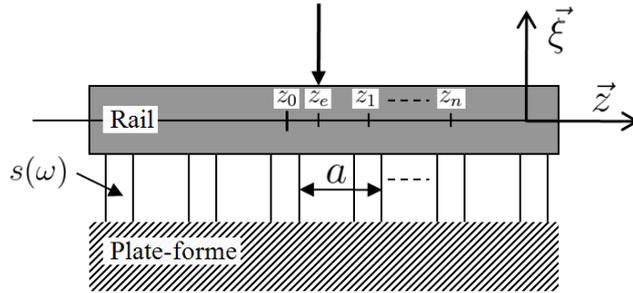


FIGURE 1.9: Modélisation de la voie avec supports périodiques

La mise en équation du problème utilisant la théorie de Floquet (cf. annexe C) conduit à la relation de dispersion suivante :

$$\begin{aligned} \cosh^2(\gamma a) + \left[\frac{s(\omega)}{B} (F_d \sinh(k_d a) - F_p \sin(k_p a)) - (\cosh(k_d a) + \cosh(k_p a)) \right] \cosh(\gamma a) \\ + \frac{s(\omega)}{B} (F_p \cosh(k_d a) \sin(k_p a) - F_d \cos(k_p a) \sinh(k_d a)) + \cosh(k_d a) \cos(k_p a) = 0 \quad (1.9) \end{aligned}$$

qui admet deux solutions : $\cosh(\gamma_p a)$ et $\cosh(\gamma_d a)$. À ces solutions correspondent deux constantes de propagation complexes $\pm\gamma_p$ et $\pm\gamma_d$, γ_p et γ_d ayant leurs parties réelles positives et leurs parties imaginaires négatives.

7. Un autre modèle proposé par Maria Heckl [33] consiste à ne considérer qu'un nombre fini de supports (pas nécessairement identiques). On peut ainsi prendre en compte des espacements irréguliers entre traverses.

On pose $z = \tilde{z} + na$, avec $0 \leq \tilde{z} < a$.

La fonction de Green pour la poutre de Timoshenko sur supports périodiques s'écrit :

$$\begin{aligned} G_\omega(z, z_e) &= a_1 Y(\tilde{z}, -\gamma_d) e^{n\gamma_d a} + a_2 Y(\tilde{z}, -\gamma_p) e^{n\gamma_p a} & z = \tilde{z} + na < z_e \\ &= b_1 Y(\tilde{z}, \gamma_d) e^{-n\gamma_d a} + b_2 Y(\tilde{z}, \gamma_p) e^{-n\gamma_p a} & z = \tilde{z} + na > z_e \end{aligned} \quad (1.10)$$

Les coefficients a_1 , a_2 , b_1 et b_2 sont solutions du système (C.12) donné dans l'annexe C. La fonction $Y(z, \gamma)$ a pour expression :

$$Y(z, \gamma) = F_p \frac{\sin(k_p(a-z)) + e^{-\gamma a} \sin(k_p z)}{\cos(k_p a) - \cosh(\gamma a)} - F_d \frac{\sinh(k_d(a-z)) + e^{-\gamma a} \sinh(k_d z)}{\cosh(k_d a) - \cosh(\gamma a)} \quad (1.11)$$

1.2.3.1 Constantes de propagation

Les ondes qui se propagent dans le rail sur supports ponctuels ont les mêmes propriétés que dans le cas du support continu. En particulier, on peut mettre en évidence les mêmes zones d'atténuation des ondes potentiellement propagatives.

La spécificité des supports périodiques consiste en l'apparition de phénomènes particuliers pour les fréquences où la longueur d'onde dans le rail est égale au double de la distance entre traverses. À ces fréquences appelées fréquences *pin-pin*, l'onde propagative est stationnaire et légèrement plus atténuée que dans le cas d'un support continu.

La figure 1.10 illustre ces propriétés sur la constante de propagation de l'onde propagative.

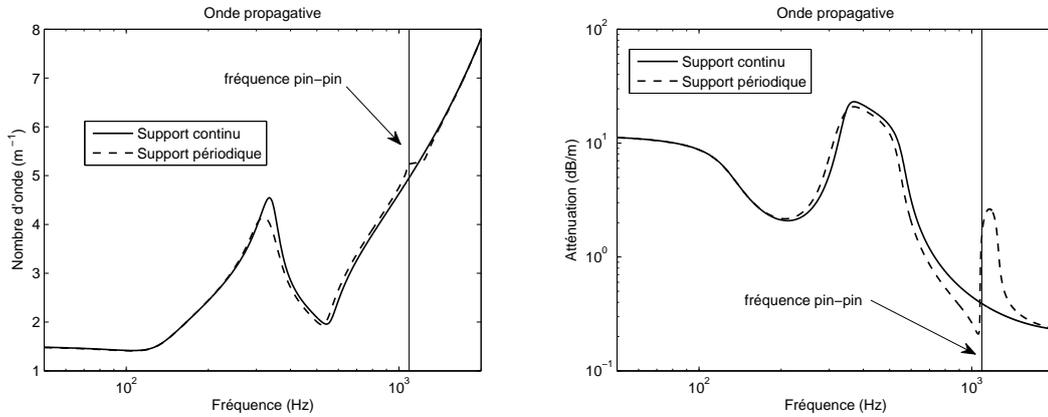


FIGURE 1.10: Constante de propagation de l'onde propagative de flexion verticale - Comparaison entre la modélisation continue et périodique d'un support de type ballast, pour une poutre de Timoshenko. Gauche : nombre d'onde. Droite : atténuation.

Remarques :

- Dans le cas d'une dalle rigide (support béton), la prise en compte de la périodicité conduit aux mêmes observations. En particulier, la valeur de la fréquence *pin-pin* reste la même (1090 Hz).
- Lorsque la périodicité du support est prise en compte, l'onde de champ proche et l'onde propagative ont des constantes de propagation distinctes, même dans le cas d'une poutre mince d'Euler (cf. équation (C.6) annexe C). Il en est de même pour les amplitudes de ces deux ondes.

1.2.3.2 Amplitudes

Pour un support continu, l'amplitude des vibrations le long du rail décroît exponentiellement de part et d'autre du point d'excitation. Avec un support périodique, la résolution du système (C.12) conduit à des expressions plus complexes de l'amplitude des vibrations le long du rail. Des variations locales importantes apparaissent suivant la position du point courant par rapport aux points d'attache voisins. En particulier, la périodicité du support entraîne une dissymétrie de la réponse vibratoire autour du point d'excitation, lorsque ce dernier n'est pas sur une traverse ou entre et à égale distance de deux traverses :

$$\forall z \neq \left(0 + k\frac{a}{2}\right), k \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} a_1 \neq b_1 \\ a_2 \neq b_2 \end{cases} \quad (1.12)$$

1.2.3.3 Réponses spatiales (fonctions de Green)

La prise en compte de la périodicité du support introduit des disparités au niveau des amplitudes et des constantes de propagation des ondes vibratoires : le profil vibratoire le long du rail s'en trouve alors modifié. Les paramètres mécaniques utilisés pour les exemples suivants sont ceux de la table 1.1.

En basses fréquences, l'influence de la périodicité est limitée sur l'amplitude mais conséquente sur la phase (cf. figure 1.11). Dans la mesure où les ondes vibratoires sont fortement atténuées dans ce cas, les propriétés du champ acoustique correspondant ne devraient pas être affectées.

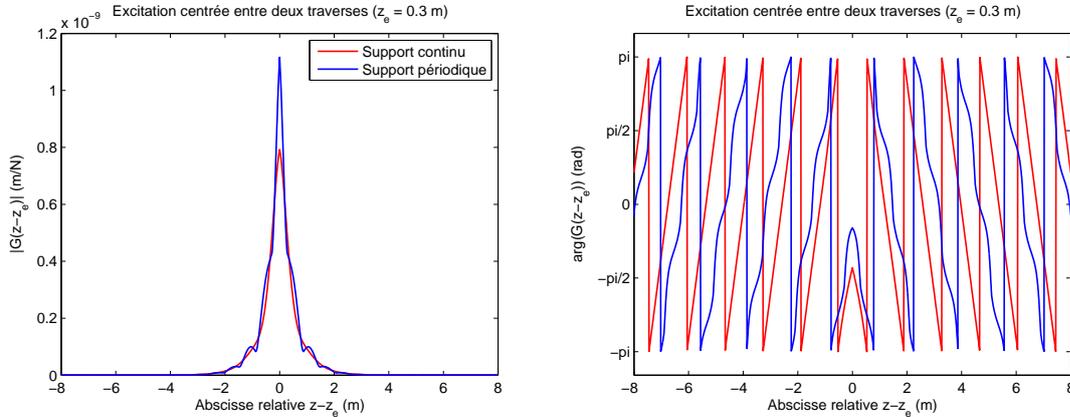


FIGURE 1.11: *Fonction de Green pour une excitation au centre entre deux traverses pour $f = 340$ Hz (atténuation de l'onde propagative : $\Delta = 17.7$ dB/m). Gauche : module. Droite : phase.*

L'influence de la périodicité du support est bien plus nette en hautes fréquences : le champ vibratoire présente des ventres et des nœuds de vibration dont l'enveloppe globale est atténuée de façon identique au cas du support continu, sauf pour la fréquence *pin-pin* où l'atténuation est plus importante, de l'ordre du dB/m (cf. figure 1.12). À cette fréquence ($f = 1090$ Hz⁸), le champ vibratoire est par ailleurs stationnaire.

8. Pour les paramètres de la table 1.1.

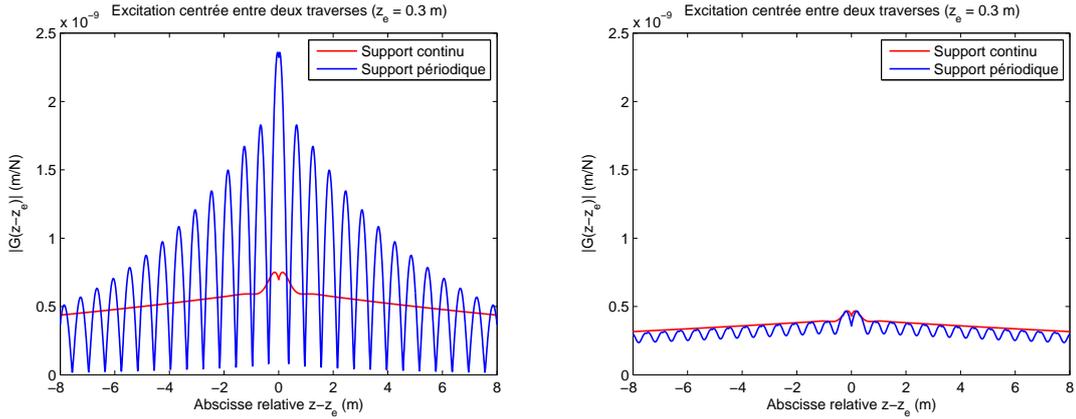


FIGURE 1.12: *Fonction de Green en module pour une excitation au centre entre deux traverses. Gauche : $f = 1090$ Hz ($\Delta = 1.56$ dB/m). Droite : $f = 1500$ Hz ($\Delta = 0.31$ dB/m).*

La position de l'excitation par rapport aux traverses influe sur la réponse vibratoire à plusieurs niveaux. Tout d'abord elle est déterminante pour l'amplitude des vibrations au niveau du point d'excitation : la réceptance. Cette dernière présente notamment une résonance ou une antirésonance à la fréquence *pin-pin* selon que l'excitation soit entre deux traverses ou sur une traverse (cf. figure 1.13 de gauche en comparaison à la figure 1.12 de gauche). Son effet est perceptible pour l'ensemble des fréquences supérieures à 500 Hz⁹

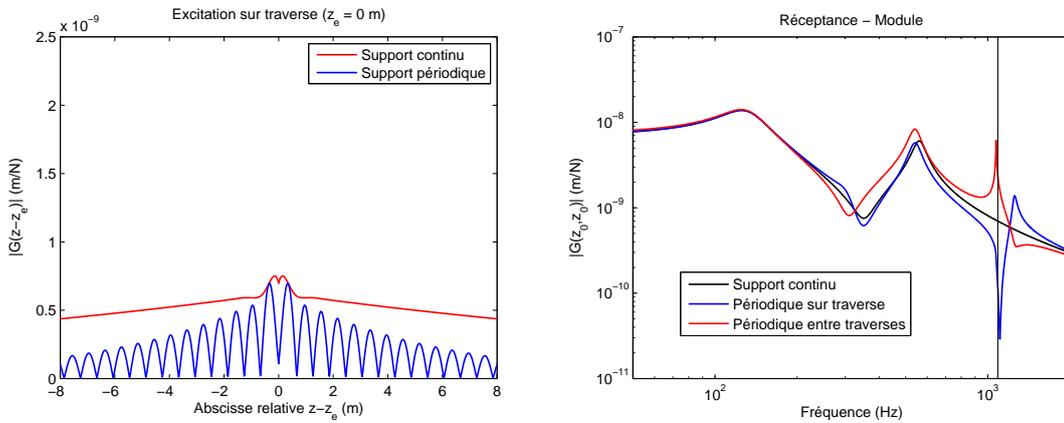


FIGURE 1.13: *Influence de la position de l'excitation sur la réceptance. Gauche : fonction de Green pour une excitation sur traverse pour $f = 1090$ Hz. Droite : réceptance (module) en fonction de la fréquence.*

Enfin, si l'excitation est décentrée par rapport aux traverses (cf. équation (1.12)), le champ vibratoire dans le rail n'est plus symétrique de part et d'autre du point d'excitation, surtout pour les hautes fréquences (cf. figure 1.14). Nous verrons plus loin que cette spécificité causée par la périodicité du support, et plus généralement par un système d'attaches discret, se répercute également au niveau du champ acoustique rayonné par le rail (cf. 1.3.2.6).

9. Pour les paramètres de la table 1.1.

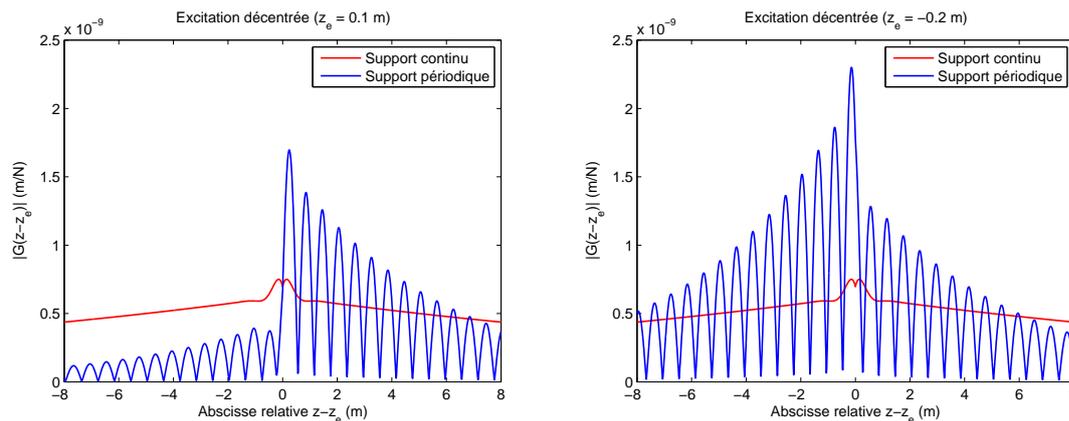


FIGURE 1.14: *Fonction de Green (module) pour une excitation décentrée pour $f = 1090$ Hz. Gauche : à 10 cm d'une traverse. Droite : à 10 cm du milieu entre deux traverses (distance entre traverses : 60 cm).*

1.2.4 Le rail avec déformation de section

L'approche plus générale, où le rail n'est plus assimilé à une poutre et où les déformations de section sont prises en compte, nécessite l'utilisation de la méthode des éléments finis dans la section du rail [23, 31, 39–41]. Cette approche permet également de tenir compte des couplages entre les vibrations verticales et latérales.

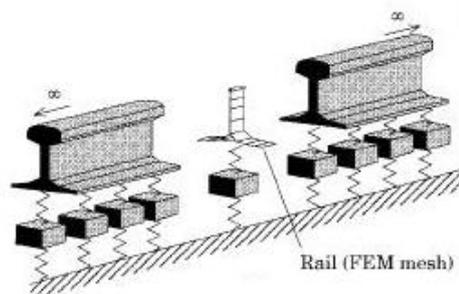


FIGURE 1.15: *Modèle de voie à support continu incluant la déformation de section (tirée de [31]).*

Un résultat essentiel obtenu à l'aide de cette méthode est la mise en évidence d'un nombre important d'ondes qui se propagent dans le rail. Parmi ces ondes on retrouve des ondes de flexion verticales et latérales proches de celles correspondant au modèle de poutre. Les effets des déformations de section sur les nombres d'onde se font sentir à partir de 3–4 kHz pour l'onde de flexion verticale et dès 1 kHz pour l'onde de flexion latérale. La plupart des autres ondes sont fortement atténuées avant 4 kHz à l'exception d'une onde de torsion et d'une onde impliquant la déformation du pied du rail excitées principalement par des efforts latéraux.

Au final, la réponse à une excitation verticale est assez proche de celle correspondant au modèle de poutre avant 4 kHz. En revanche, la prise en compte des déformations de section est nécessaire pour bien représenter la réponse à une excitation latérale même à partir de 1 kHz [38].

1.2.5 Conclusion

La modélisation des vibrations se propageant dans un rail est un phénomène complexe qui met en œuvre de nombreuses considérations physiques. Pour recentrer ce problème complexe sur la problématique de la thèse, voici les principaux résultats à retenir :

- Plusieurs modélisations du rail et de la voie sont possibles mais dans tous les cas, on peut mettre en évidence la présence d’ondes propagatives et de champ proche de part et d’autre du point d’excitation.
- Les ondes potentiellement propagatives ne sont atténuées que dans certaines zones fréquentielles (les « stop bands ») alors que les ondes de champ proche le sont très fortement sur tout l’axe des fréquences.
- Dans le cas du rail sur voie ballast, la mise en équation des ondes de flexion permet de mettre en évidence quatre zones fréquentielles aux caractéristiques de propagation marquées. Les frontières de ces domaines dépendent étroitement des caractéristiques du rail et de la voie. Ces fréquences spécifiques correspondent à des comportements particuliers du système (résonance de la voie, résonance des traverses, couplage de certains éléments).
- Dans le cas du support périodique, une autre fréquence est mise en évidence : la fréquence *pin-pin* où la demi-longueur d’onde de la vibration est égale à l’espace entre les supports. À cette fréquence, l’onde dans le rail n’est plus propagative.
- La périodicité du support modifie le profil vibratoire dans le rail surtout pour les hautes fréquences. En particulier, les propriétés du champ vont dépendre de la position de l’excitation par rapport aux traverses, et donc du temps lorsque le contact est mobile.

Les conclusions énoncées ci-dessus concernent les vibrations verticales du rail. Le modèle de poutre peut s’utiliser de la même façon pour analyser le comportement vibratoire du rail en flexion latérale. Le domaine de validité est toutefois beaucoup plus restreint.

1.3 Rayonnement acoustique du rail

Lorsqu’un objet est mis en vibration, les mouvements de sa structure agissent sur les particules du fluide qui l’entoure. La pression du fluide au niveau de la surface de l’objet subit alors des variations qui se propagent dans le milieu. Ce phénomène est appelé rayonnement acoustique d’une structure. Après avoir étudié les propriétés vibratoires du rail dans le chapitre précédent, nous nous intéressons à son rayonnement acoustique.

Après une brève revue des différents modèles proposés dans la littérature, le rayonnement acoustique du rail est dans un premier temps approché en utilisant un modèle simple de cylindre vibrant. Cette approche permet entre autres d’étudier le rayonnement dû à des ondes vibratoires se propageant sur de grandes distances dans la structure. Ensuite, un modèle tridimensionnel (3D) plus complet est utilisé afin de mettre en avant les spécificités du champ acoustique rayonné par un rail sur son support. Le rail est assimilé à un ensemble de monopôles équirépartis sur son axe et la vitesse à la surface de chacun de ces monopôles est déterminée à partir des résultats vibratoires de la partie 1.2. En parallèle, une étude analytique montre l’équivalence entre les deux modèles (modèle 3D et monopôle cylindrique) sous certaines hypothèses.

1.3.1 Les différents modèles

Pour prédire le rayonnement du rail, des modèles en deux dimensions (section du rail) ont été proposés, la plupart basés sur des méthodes intégrales (sources équivalentes sur la section [26], éléments finis de frontière [47]). Deux conditions sont toutefois nécessaires pour justifier cette approche :

- la longueur d'onde structurale dans le rail doit être plus grande que la longueur d'onde acoustique dans l'air,
- l'atténuation vibratoire dans le rail doit être faible.

Dans ce cas, le problème est effectivement invariant selon l'axe du rail. Ces études montrent entre autre que le rail isolé (en négligeant les réflexions sur le support) rayonne comme un dipôle cylindrique 2D ($k_z \ll k$) jusqu'à environ 800 Hz pour les vibrations verticales et 570 Hz pour les vibrations latérales, avec un facteur de rayonnement en ω^3 . Au delà, l'efficacité de rayonnement est proche de un et le champ de pression présente des interférences liées à la géométrie particulière du rail. Thompson a étudié en détail la validité de cette approximation bidimensionnelle [47] en utilisant un modèle 3D constitué d'un ensemble de dipôles équi-répartis sur l'axe du rail comme le montre la figure 1.16.

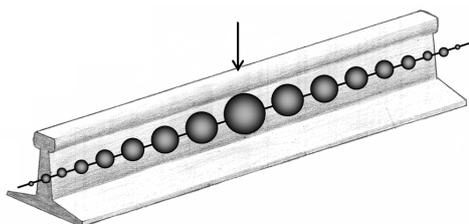
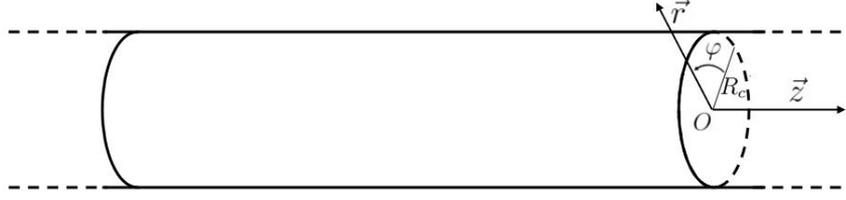


FIGURE 1.16: *Modélisation du rail par un ensemble de sources ponctuelles*

L'amplitude de chacune des sources est proportionnelle à la vitesse vibratoire du rail parcouru par une onde caractérisée par un nombre d'onde complexe (constante de propagation et atténuation) donné de part et d'autre du point d'excitation. Du point de vue de la puissance rayonnée, l'article montre que l'approximation 2D est justifiée dans la plupart des cas. En ce qui concerne la directivité, les résultats indiquent que l'angle de rayonnement moyen (intégré sur une ligne parallèle au rail) est proche de l'angle analytique déterminé dans le cas du cylindre vibrant (Eq. (1.22)) pour des atténuations faibles. Inversement, lorsque l'atténuation est importante, cet angle tend vers celui d'un dipôle placé au niveau de l'excitation. En particulier on peut noter qu'un angle de rayonnement persiste même à haute fréquence et que les fronts d'onde ne sont jamais parallèles au rail. L'approche bidimensionnelle est donc très insuffisante si l'on souhaite simuler un champ de pression réaliste. Des méthodes couplant éléments finis de frontière et approche ondulatoire peuvent être utilisées [48].

1.3.2 Le cas simplifié du cylindre vibrant

Un cylindre vibrant infiniment long, de rayon R_c et d'axe $\vec{O}z$, rayonne dans l'espace infini rempli d'un fluide initialement au repos :


 FIGURE 1.17: Repère $(0, \vec{r}, \vec{z})$ associé au cylindre vibrant

1.3.2.1 Solution générale

Le mouvement du cylindre est décrit par la vitesse vibratoire radiale harmonique de sa surface, dont l'amplitude complexe est :

$$\mathcal{V}_r(r = R_c) = \mathcal{V}_0 e^{-ik_z z} \cos(m_0 \varphi) \quad (1.13)$$

Avec :

k_z le nombre d'onde dans le cylindre,

m_0 le nombre quantique dépendant du cas étudié,

(r, φ) les coordonnées polaires dans le plan perpendiculaire à l'axe \vec{O}_z du cylindre.

On peut donner l'amplitude complexe de la pression dans le cas général [49] :

$$p(r, \varphi, z) = \frac{-i}{4} A_l H_{m_0}^{(2)}(k_w r) e^{-ik_z z} \cos(m_0 \varphi) \quad (1.14)$$

$$A_l = \frac{4 k c \rho_0 \mathcal{V}_0}{\left. \frac{\partial}{\partial r} H_{m_0}^{(2)}(k_w r) \right|_{r=R_c}}$$

Avec :

k_w le nombre d'onde dans le plan (r, φ) tel que $k^2 = k_w^2 + k_z^2$

$H_{m_0}^{(2)}$ la fonction de Hankel du deuxième type, d'ordre m_0

L'expression (1.14) montre que dans tout plan contenant l'axe \vec{O}_z , les ondes rayonnées par le cylindre vibrant sont planes.

1.3.2.2 Monopôle et dipôle cylindriques

Le monopôle cylindrique, également appelé cylindre pulsant, est un vibreur d'ordre zéro ($m_0 = 0$). Dans le cas limite où le rayon R_c du cylindre est très inférieur à la longueur d'onde considérée ($k_w R_c \ll 1$) :

$$A_l = i \omega Q_l \quad (1.15)$$

où $Q_l = 2\pi R_c \mathcal{V}_0 \rho_0$ est le débit massique linéique du monopôle.

Le dipôle cylindrique, également appelé cylindre oscillant, est un vibreur d'ordre un ($m_0 = 1$). Dans le cas limite où le rayon R_c du cylindre est très inférieur à la longueur d'onde considérée ($k_w R_c \ll 1$) :

$$A_l = i \omega M_l k_w \quad (1.16)$$

où $M_l = Q_l R_c$ est le moment dipolaire massique linéique du dipôle.

1.3.2.3 Expression en champ lointain

Lorsque $|x| = |k_w r| \rightarrow \infty$ (ce qui correspond physiquement à $r \gg 2\pi/k_w$) la fonction de Hankel peut s'écrire [50] :

$$H_{m_0}^{(2)}(x = k_w r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - (2m_0+1)\frac{\pi}{4})} = \sqrt{\frac{2}{\pi k_w r}} e^{-i(k_w r - (2m_0+1)\frac{\pi}{4})} \quad (1.17)$$

Cette expression s'apparente donc à une fonction d'onde cylindrique à décroissance en $\frac{1}{\sqrt{r}}$.

1.3.2.4 Nombre d'onde critique

En posant $\alpha = k_z/k$, on peut écrire k_w de la manière suivante :

$$k_w^2 = k^2 - k_z^2 \quad (1.18)$$

$$= k^2(1 - \alpha^2) \quad (1.19)$$

Ainsi plusieurs situations se présentent suivant la valeur de α :

– Si $\alpha \leq 1$ alors $1 - \alpha^2 \geq 0$ et $k_w = k\sqrt{1 - \alpha^2}$

– Si $\alpha \geq 1$ alors $1 - \alpha^2 \leq 0$ et $k_w = -ik\sqrt{\alpha^2 - 1}$

Remarque : Les signes sont attribués de manière à respecter les conventions utilisées pour les fonctions de Hankel. Cette convention impose à la variable $k_w r$ d'avoir sa partie réelle positive et sa partie imaginaire négative.

On peut alors donner l'expression du champ de pression en champ lointain, pour un monopôle cylindrique ($m_0 = 0$) :

$$p(r, z) = \begin{cases} -\frac{i}{4} A \sqrt{\frac{2}{\pi k r \sqrt{1 - \alpha^2}}} e^{-ikr\sqrt{1 - \alpha^2} + i\pi/4} e^{-ik\alpha z} & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \text{ou} & \\ -\frac{i}{4} A \sqrt{\frac{2}{-i\pi k r \sqrt{\alpha^2 - 1}}} e^{-kr\sqrt{\alpha^2 - 1} + i\pi/4} e^{-ik\alpha z} & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases} \quad (1.20)$$

Cette approximation permet d'observer deux modes de propagation. Pour $\alpha \leq 1$, la dépendance radiale du champ de pression est une onde propagative vers les r croissants avec une amplitude en $1/\sqrt{r}$. Pour $\alpha \geq 1$ il n'y a plus de propagation : l'onde est évanescente en r avec une amplitude qui décroît exponentiellement.

1.3.2.5 Angle de rayonnement

Lorsque $\alpha \leq 1$ (c'est-à-dire lorsque $k_z \leq k$), la pression rayonnée au point $M(r, \varphi, z)$ peut s'écrire sous la forme :

$$p(r, \varphi, z) = -\frac{i}{4} A \sqrt{\frac{2}{\pi k r \sqrt{1 - \alpha^2}}} e^{(2m_0+1)i\frac{\pi}{4}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{OM}} \cos(m_0\varphi) \quad (1.21)$$

avec : $\vec{k} = k \sin \theta \vec{u}_r + k \cos \theta \vec{u}_z$ et

$$\theta = \arccos\left(\frac{k_z}{k}\right) = \arccos(\alpha) \quad \alpha \in [0, 1] \quad (1.22)$$

Cet angle de rayonnement θ correspond à la direction de propagation de l'onde acoustique par rapport à l'axe \vec{z} du cylindre comme le montre la figure 1.18.

Remarque : lorsque $\alpha = 0$ la direction de propagation est perpendiculaire à l'axe du cylindre ($k_z = 0$, cas 2D); lorsque α tend vers 1 le nombre d'onde k tend vers la valeur critique k_z et l'onde devient rasante et ne se propage plus selon l'axe \vec{r} .

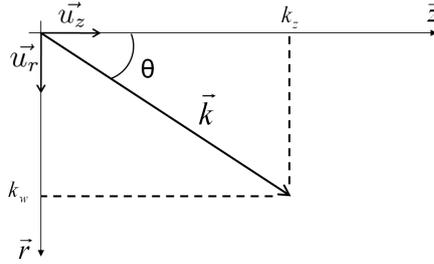


FIGURE 1.18: Composition des vecteurs d'onde, angle de rayonnement

1.3.2.6 Application au cas du rail

Ce modèle de cylindre vibrant peut être utilisé pour représenter en première approche le rayonnement du rail d'un côté de l'excitation, dans le cas où l'atténuation des ondes est faible, c'est-à-dire pour les hautes fréquences. Le nombre d'onde k_z dans le cylindre est assimilé à la partie imaginaire (propagative) de la constante de propagation γ_p des ondes propagatives dans le rail. À une fréquence et un modèle vibratoire donnés correspond ainsi une valeur de α et un angle de rayonnement θ particuliers.

Dans l'exemple suivant, le modèle vibratoire retenu pour le rail est une poutre d'Euler sur support continu de type ballast. L'expression de $k_z = \Im(ik_\beta)$ découle donc de la relation de dispersion (1.2) du paragraphe 1.2.2.1. La figure 1.19 représente, pour deux fréquences données, la phase dans le plan (r, z) de la pression rayonnée par un monopôle cylindrique infini, parcouru par une onde vibratoire non atténuée.

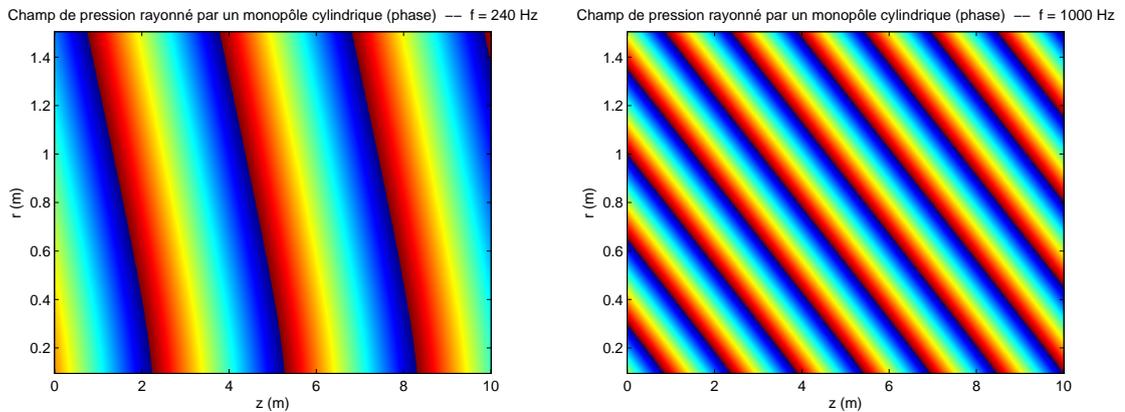


FIGURE 1.19: Phase de la pression rayonnée par un rail modélisé acoustiquement par un monopôle cylindrique (modèle vibratoire de poutre d'Euler sur support continu de type ballast). Gauche : $f = 240$ Hz, $\alpha = 0.63$, $\theta = 51^\circ$. Droite : $f = 1000$ Hz, $\alpha = 0.22$, $\theta = 77^\circ$.

Pour $f = 240$ Hz, l'atténuation de l'onde propagative dans le rail vaut 2 dB/m (cf. figure 1.5 paragraphe 1.2.2.1). Pour $f = 1000$ Hz, elle vaut 0.34 dB/m. Pour ces valeurs d'atténuation relativement faibles, l'onde propagative se propage effectivement sur une grande distance le long du rail et le modèle de cylindre infini reflète correctement le rayonnement acoustique du rail. La figure 1.19 illustre bien l'angle de directivité évoqué précédemment. Plus généralement, lorsque l'atténuation dans le rail est faible, l'utilisation d'un modèle simple de cylindre vibrant met en évidence la propagation d'ondes acoustiques cylindriques

dont la directivité dépend du nombre d'onde dans le rail, et donc de la fréquence

Pour les fréquences où l'atténuation de l'onde propagative dans le rail est importante, l'hypothèse de cylindre vibrant infini n'est plus représentative du comportement rayonnant du rail. Par exemple, avec le modèle vibratoire adopté ici (poutre d'Euler sur support continu de type ballast), la limite $\alpha = 1$ correspond à une fréquence $f = 80$ Hz pour laquelle l'atténuation de l'onde propagative est proche de 10 dB/m.

1.3.3 Cas simplifiés de rayonnement isotrope dans le plan (\vec{x}, \vec{y})

En trois dimensions l'expression du champ de pression rayonné par le rail dépend donc à la fois de la nature des ondes vibratoires qui le parcourent mais aussi du rayonnement 2D lié à la géométrie particulière du rail.

Formulation intégrale classique

En première approche, on peut négliger l'effet de cette géométrie et considérer le rail comme une infinité de sources ponctuelles élémentaires placées sur son axe. Dans le cas de sources monopolaires, la pression rayonnée ne dépend pas de φ et peut alors s'écrire en coordonnées cylindriques :

$$p(r, z) = \int_{z_s=-\infty}^{+\infty} i\omega dQ(z_s) \frac{e^{-ikr_s(z, z_s)}}{4\pi r_s(z, z_s)} \quad (1.23)$$

Avec : $r_s(z, z_s) = \sqrt{r^2 + (z - z_s)^2}$, r étant la distance à l'axe du rail.

$dQ(z_s)$ est le débit massique élémentaire de la source placée à l'abscisse z_s , que l'on suppose proportionnel à la vitesse vibratoire $\mathcal{V}_r(z_s)$ du rail (flexion verticale, latérale ou autre type de déformation de section) tel que :

$$dQ(z_s) = \rho \mathcal{V}_r(z_s) 2\pi R_{eq} dz_s = Q_{l0} \mathcal{V}_r(z_s) dz_s \quad (1.24)$$

avec R_{eq} rayon équivalent de rayonnement du rail.

Au final, le champ de pression peut s'écrire :

$$p(r, z) = i\omega Q_{l0} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}_r(z_s) \frac{e^{-ikr_s(z, z_s)}}{4\pi r_s(z, z_s)} dz_s \quad (1.25)$$

Formulation dans le domaine de Fourier

Soit $\widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu)$ la transformée de Fourier de $\mathcal{V}_r(z)$ dans le domaine des nombres d'onde telle que :

$$\widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}_r(z) e^{-i\mu z} dz \quad (1.26)$$

En appliquant la transformée inverse, on a :

$$\mathcal{V}_r(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu) e^{i\mu z} d\mu \quad (1.27)$$

Le champ vibratoire dans le rail peut donc s'écrire comme la superposition d'une infinité d'ondes vibratoires pures, d'amplitude $\widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu)$ et de nombre d'onde μ^{10} . En supposant que le rail parcouru par une onde pure rayonne comme un monopôle cylindrique (cf. partie 1.3.2), on peut écrire le champ de pression total en intégrant sur les nombres d'onde structuraux μ :

$$p(r, z) = \frac{\omega Q_{l_0}}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu) H_0^{(2)}(k_w r) e^{i\mu z} d\mu \quad (1.28)$$

avec k_w le nombre d'onde dans le plan (r, φ) tel que $k^2 = k_w^2 + \mu^2$.

Ainsi, le champ de pression rayonné par un rail de profil vibratoire $\mathcal{V}_r(z)$ peut être considéré comme la superposition de champs élémentaires cylindriques dont les contributions sont données par $\widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu)$. Par ailleurs, en utilisant un modèle de poutre pour modéliser les vibrations du rail, l'expression de $\widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu)$ est analytique. En s'appuyant sur les résultats de [34], on obtient, dans le cas d'une poutre d'Euler sur support continu [51] :

$$\widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu) = \frac{i\omega}{B} \frac{e^{-i\mu z_e}}{\mu^4 - k_\beta^4} \quad (1.29)$$

Et dans le cas d'une poutre de Timoshenko sur support continu :

$$\widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu) = \frac{i\omega}{B} \frac{1 - \frac{B}{K}(-\mu^2 + k_c^2 + \frac{s'(\omega)}{K})}{(\mu^2 - k_p^2)(\mu^2 - k_d^2)} e^{-i\mu z_e} \quad (1.30)$$

Des expressions plus complexes existent également dans les cas où la périodicité du support est prise en compte [51].

1.3.4 Étude numérique

Avec les expressions précédentes, la pression peut être calculée numériquement soit en discrétisant l'intégrale (1.25), soit en effectuant une transformée de Fourier rapide (FFT) pour évaluer l'intégrale (1.28) (ces deux équations sont équivalentes). La première méthode est plus adaptée aux cas où l'atténuation des ondes est importante car l'intégrale peut être évaluée sur une longueur totale assez faible et en basses fréquences car la longueur d'onde étant importante, le pas de discrétisation peut être grossier. Inversement, la deuxième méthode est adaptée aux cas où l'atténuation des ondes est faible. En effet, dans le cas contraire, des singularités peuvent apparaître dans le domaine de Fourier, ce qui implique le choix d'un pas de discrétisation très fin.

Dans cette thèse, les simulations du champ de pression dans l'espace sont réalisées à partir du modèle 3D, par discrétisation de l'intégrale (1.25) dans les conditions suivantes :

- La distance Δ_z entre deux monopôles successifs doit être suffisamment petite par rapport aux longueurs d'onde dans le rail et dans l'air. Une précision suffisante est assurée pour $\Delta_z = (1/5) \cdot \min(\lambda_{rail}, \lambda_{air})$.
- Une source est placée en z_e , puis tous les Δ_z jusqu'à atteindre 60 dB d'atténuation pour l'onde propagative.

10. Avec la convention adoptée pour définir la transformée de Fourier, $\mu > 0$ correspond à des ondes se propageant vers les z décroissants et inversement.

La figure 1.20 reprend la figure 1.16 avec les paramètres de la discrétisation.

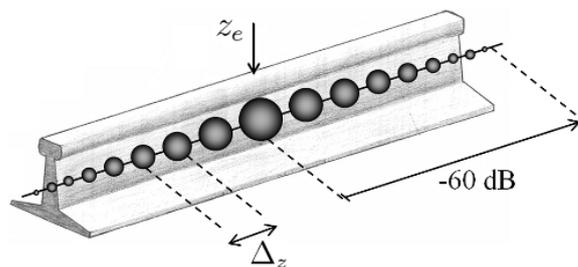


FIGURE 1.20: *Discrétisation spatiale du rail*

La suite du paragraphe propose une visualisation, en module et en phase, du champ de pression rayonné par un rail soumis à une excitation ponctuelle unitaire en z_e , pour plusieurs fréquences. Le champ vibratoire dans le rail est obtenu à partir d'un modèle de poutre de Timoshenko sur supports périodiques de type ballast. Les paramètres mécaniques du rail sur son support sont identiques à ceux utilisés dans la partie 1.2 (cf. table 1.1).

Pour chaque tracé, l'atténuation Δ_p de l'onde propagative à la fréquence étudiée ainsi que la position de z_e par rapport aux traverses sont précisées. La dynamique des tracés en amplitude est fixée à 60 dB et le maximum correspond au niveau de pression maximum calculé.

Atténuation élevée ($f = 340$ Hz, $\Delta_p = 17.7$ dB/m)

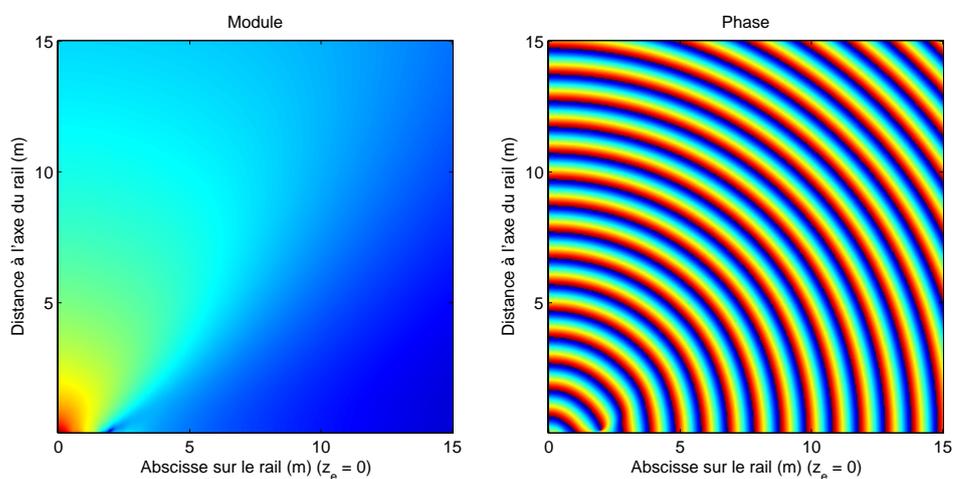


FIGURE 1.21: *Champ de pression rayonné par le rail pour $f = 340$ Hz. Dynamique du module de la pression : 60 dB. Effort centré appliqué entre traverses.*

À cette fréquence, les ondes vibratoires sont rapidement atténuées le long du rail ; ce dernier ne vibre qu'au voisinage du point d'application de l'effort et se comporte donc comme une source ponctuelle. Les fronts d'onde (les lignes où la phase est constante) ont alors des allures sphériques. La périodicité du support ainsi que la position de l'excitation par rapport aux traverses ont peu d'influence sur l'allure du champ de pression.

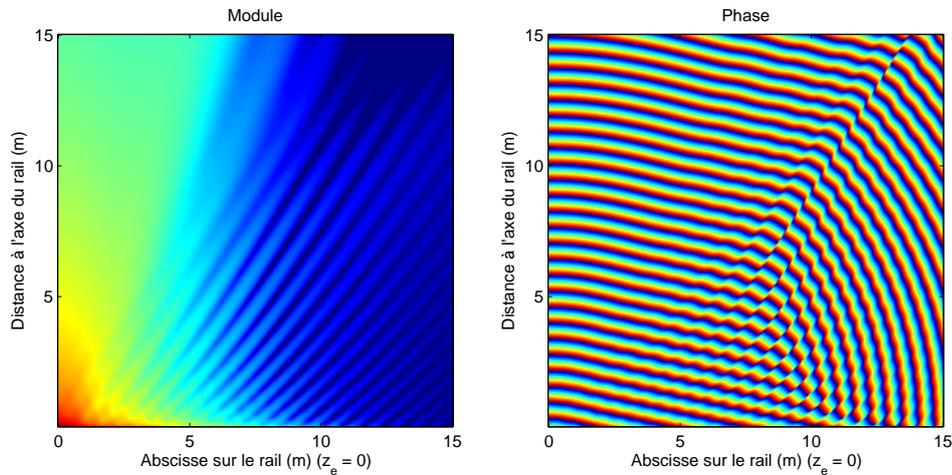
Atténuation intermédiaire ($f = 560 \text{ Hz}$, $\Delta_p = 4.07 \text{ dB/m}$)


FIGURE 1.22: *Champ de pression rayonné par le rail pour $f = 560 \text{ Hz}$. Dynamique du module de la pression : 60 dB. Effort centré appliqué entre traverses.*

Pour $f = 560 \text{ Hz}$, l'onde propagative est moyennement atténuée dans le rail, et l'atténuation de l'onde de champ proche atteint un minimum. Pour la portion d'espace proche de la partie vibrante du rail, la phase du champ de pression rayonné fait clairement apparaître des fronts d'onde plans inclinés par rapport à l'axe du rail. En effet, on se rapproche du cas analytique du cylindre vibrant de la partie 1.3.2 où la notion d'angle de directivité que l'on retrouve ici a été abordée. Toutefois, à grande distance du point d'excitation, l'effet du caractère étendu de la source disparaît, et le champ acoustique retrouve un caractère sphérique. Ainsi, pour ce cas intermédiaire, les propriétés du champ acoustique rayonné par le rail sont hétérogènes et varient fortement selon la portion de l'espace considérée.

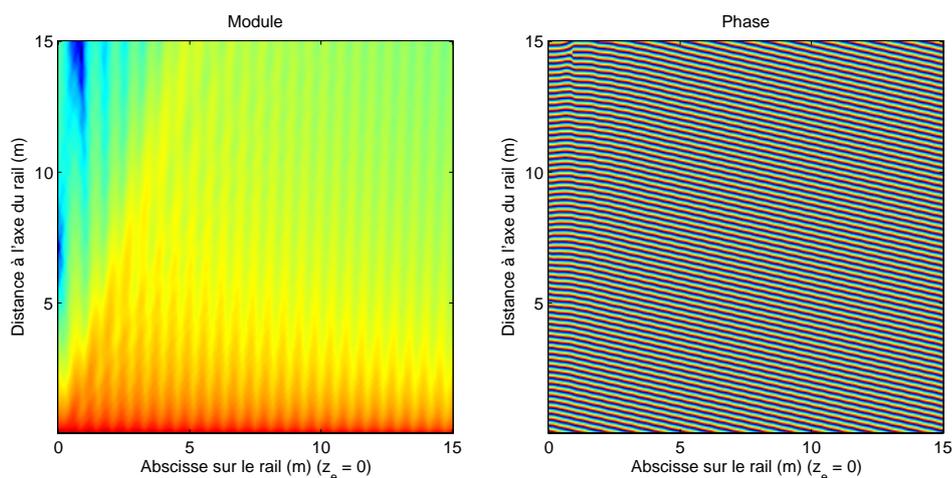
Atténuation faible ($f = 1600 \text{ Hz}$, $\Delta_p = 0.28 \text{ dB/m}$)


FIGURE 1.23: *Champ de pression rayonné par le rail pour $f = 1600 \text{ Hz}$. Dynamique du module de la pression : 60 dB. Effort centré appliqué entre traverses.*

Pour $f = 1600$ Hz, les ondes vibratoires se propagent sur une grande distance dans le rail, qui se comporte de plus en plus comme un cylindre vibrant. Les fronts d'onde sont plans dans tout l'espace observé (à l'exception de la zone située au droit du point d'excitation) et sont inclinés suivant un angle de directivité identique à celui étudié dans la partie 1.3.2.5. L'allure du module du champ de pression laisse apparaître l'effet de la périodicité du support dans la mesure où la fréquence se rapproche de la fréquence *pin-pin*.

Fréquence *pin-pin* ($f = 1090$ Hz, $\Delta_p = 1.56$ dB/m)

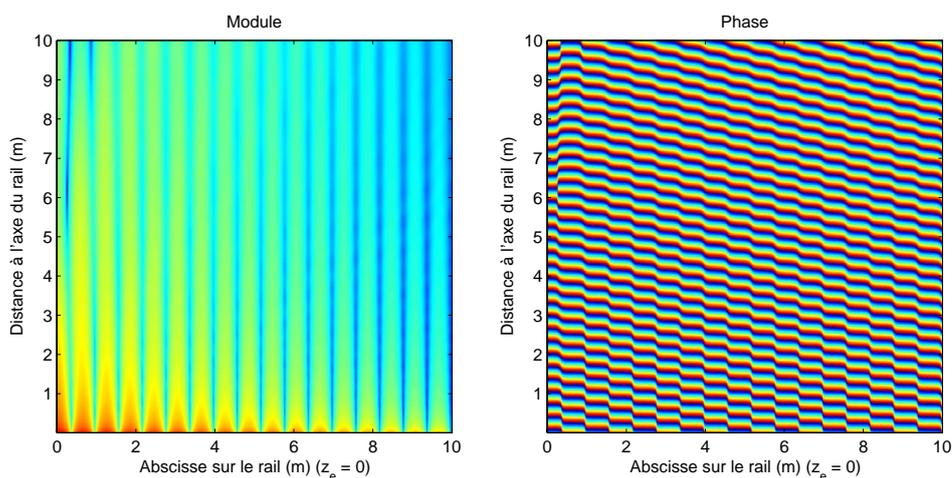


FIGURE 1.24: *Champ de pression rayonné par le rail pour $f = 1090$ Hz. Dynamique du module de la pression : 60 dB. Effort centré appliqué entre traverses.*

À la fréquence *pin-pin*, des nœuds et des ventres de vibration apparaissent le long du rail. D'un point de vue vibratoire, les ondes sont quasi-stationnaires et vont entraîner un rayonnement acoustique normal à l'axe du rail.

1.4 Conclusion

À travers l'étude des propriétés vibro-acoustiques du rail, nous avons dans ce chapitre mis en avant des résultats essentiels concernant la caractérisation du champ de pression rayonné par le rail.

Plusieurs sortes d'ondes vibratoires se propagent dans le rail, en particulier des ondes de flexion verticales et latérales. Ces types d'ondes sont composés d'une onde de champ proche fortement atténuée ainsi que d'une onde propagative dont l'atténuation, beaucoup plus faible, dépend de la fréquence et de la nature du support du rail. Suivant que cette onde est effectivement propagative ou non, le champ de pression rayonné par le rail aura des propriétés différentes. Pour une atténuation élevée, le rail se comporte comme une source ponctuelle et rayonne une onde sphérique ; en revanche, pour une atténuation faible, le rail est une source étendue au comportement proche de celui d'un cylindre vibrant, il rayonne une onde plane caractérisée par un angle de rayonnement lié au rapport des nombres d'onde structural et acoustique. Pour les cas intermédiaires, suivant les portions de l'espace observées, le champ de pression est une superposition de ces champs élémentaires. Nous avons également vu que la périodicité du support a une influence importante sur l'allure du champ de pression pour les fréquences proches de la fréquence *pin-pin*. Pour ces fréquences, le rayonnement acoustique du rail est normal à son axe.

Ainsi, au passage d'un véhicule ferroviaire, pour chaque contact roue/rail, chaque onde vibratoire rayonne ce type de champ acoustique dans le référentiel mobile du contact. C'est ce champ de pression complexe que nous cherchons à caractériser à l'aide des antennes microphoniques.

2 – La caractérisation du rayonnement acoustique de la voie dans la littérature

La caractérisation du rayonnement acoustique de la voie, et plus particulièrement du rail, a donné lieu à relativement peu de publications. La plupart des approches, qu'elles soient basées ou non sur l'utilisation d'une antenne microphonique, sont quantitatives et ne tiennent pas compte des spécificités vibro-acoustiques de la source. Ce chapitre présente ces méthodes de caractérisation, ainsi qu'une analyse plus approfondie du comportement d'une antenne linéaire vis-à-vis du rail réalisée par Toshiki Kitagawa dans le cadre de sa thèse [9].

2.1 Méthodes de séparation acoustiques et vibratoires des contributions roue/rail

2.1.1 Approche acoustique : méthode du champ acoustique réverbérant

Cette méthode expérimentale décrite par A. Frid dans [52] est basée sur certains principes de l'acoustique des salles appliqués au volume d'air de la cavité délimitée sous le véhicule ferroviaire par un bogie, la voie et le châssis.

2.1.1.1 Principe

Un bilan de la puissance acoustique dans la cavité est effectué, à partir de certaines mesures réalisées au passage.

Le niveau de pression sur la surface au sol de la cavité est mesuré à l'aide d'un microphone directement positionné entre les rails, à même le ballast. En tenant compte des effets de réverbération et d'absorption dans la cavité, on déduit de cette mesure la puissance acoustique s'échappant par la surface libre de la cavité.

On mesure la puissance acoustique directement rayonnée par la voie. Cette mesure est effectuée à l'aide d'un microphone directif (microphone parabolique), en dehors du passage du bogie. Avec ce même microphone on mesure enfin, lors du passage d'un bogie, la puissance acoustique totale s'échappant de la cavité. Elle comprend la puissance qui s'échappe de la cavité, la puissance rayonnée par la voie, ainsi que la puissance rayonnée par la roue qui est donc déduite des mesures précédentes.

Remarques :

La mesure de pression réalisée par le système directif nécessite une étape préalable de calibration effectuée ici à partir de la mesure sous châssis (elle dépend donc de la validité des hypothèses avancées). L'auteur indique que cette étape de calibration doit être développée.

En dehors de son diamètre (2,2 m), rien n'est précisé quant à l'utilisation du réflecteur parabolique. En particulier, sa position par rapport à la voie n'est pas mentionnée. Cette indication est utile pour étudier ses caractéristiques de directivité et notamment connaître l'étendue de la zone source vue par le récepteur pour chaque bande de fréquence.

Enfin, la méthode impose que les sources aéroacoustiques soient faibles pour ne pas entacher les mesures ; elle n'est donc pas adaptée aux grandes vitesses.

2.1.2 Approches acoustiques et vibratoires

Trois méthodes sont évoquées dans ce paragraphe. Elles utilisent toutes des mesures vibratoires au moyen d'accéléromètres placés sur la voie, ainsi que des mesures acoustiques en champ proche. Elles suivent une démarche générale commune, qui est la suivante :

- détermination d'une fonction de transfert entre les vibrations et le bruit rayonné par la voie (fonction de transfert vibro-acoustique de la voie),
- au passage d'un train, détermination de la contribution de la voie à partir de la mesure des signaux vibratoires, *via* la fonction de transfert déterminée précédemment,
- détermination de la contribution des roues par différence entre le bruit total au passage d'une rame et la contribution de la voie.

Ces trois méthodes se différencient entre elles par la façon d'appréhender la fonction de transfert vibro-acoustique. Les deux premières sont décrites dans un article de M.G. Dittrich et M. H. A. Janssens [53], qui détaille plusieurs approches permettant de caractériser le bruit de contact roue/rail (rugosité, localisation des sources, séparation des contributions roue/voie) en vue de réaliser des essais de type. La troisième méthode a été développée par la SNCF [54]. Ces méthodes ont été testées et comparées dans le cadre du projet européen STAIRRS (Strategies and Tools to Assess and Implement noise Reducing measures for Railway Systems) finalisé en 2003.

2.1.2.1 Méthode du véhicule de référence

Cette méthode repose sur l'utilisation d'un véhicule de référence, garantissant une contribution faible au bruit de roulement [53]. Les hypothèses suivantes sont formulées :

- La vibration verticale du rail est un assez bon indicateur de l'excitation dans la zone du contact roue rail.
- Le comportement vibro-acoustique de la voie est invariant dans le temps.

Des véhicules de référence pour lesquels la contribution des roues est très faible sont utilisés dans un premier temps pour déterminer la fonction de transfert vibro-acoustique de la voie. On effectue ensuite des mesures acoustiques et vibratoires au passage de véhicules standards pour déterminer leurs contributions respectives par rapport à celle de la voie. Pour contrôler le niveau de bruit des véhicules de référence, l'article suggère d'appliquer la méthode des forces équivalentes décrite ci-dessous ou d'autres méthodes de mesure réciproque sur véhicule à l'arrêt [55]. Des outils de simulation tels que TWINS peuvent également être utilisés.

Une difficulté principale pour la mise en œuvre de cette procédure réside dans la nécessité de disposer des matériels spécifiques (véhicules de référence).

2.1.2.2 Méthode des forces équivalentes

Cette méthode est basée sur le calcul des fonctions de transfert vibro-acoustiques de la voie, déterminées au cours de mesures statiques sans charge [53]. Les fonctions de transfert sont ensuite utilisées pour extraire la contribution de la voie au bruit mesuré au passage d'un train. Dans cette approche, l'excitation par le matériel roulant est remplacée par une excitation virtuelle (forces équivalentes) produisant la même réponse structurelle. La pression acoustique est ensuite déterminée. On peut distinguer deux phases dans le déroulement de la procédure :

Une phase de mesures statiques :

- On applique n forces $\{F\}_n$ sur la voie seule (à l’aide d’un pot vibrant ou d’un marteau de choc).
- On mesure l’accélération du rail $\{a\}_m$ en m points, et la pression acoustique $\{p\}_p$ en p points.
- On détermine la matrice $[\mathbf{A}]_{n \times m}$ des fonctions de transfert entre $\{F\}$ et $\{a\}$, ainsi que la matrice $[\mathbf{H}]_{n \times p}$ des fonctions de transfert entre les $\{F\}$ et $\{p\}$.

Une phase de mesures au passage :

- Les vibrations du rail $\{a^{mes}\}$ sont mesurées lors du passage du train.
- On en déduit les forces équivalentes $\{F^{eq}\}$ telles que $[\mathbf{A}]\{F^{eq}\} = \{a^{mes}\}$. Ces forces équivalentes sont les forces qui, appliquées seules au système, engendrent les mêmes réponses vibratoires que le passage du train.
- Enfin, on estime la pression $\{\hat{p}\}$ telle que $\{\hat{p}\} = [\mathbf{H}]\{F^{eq}\}$. Ces réponses en pression acoustique sont donc les estimations de la contribution de la voie seule à la pression acoustique engendrée par le passage du véhicule.

Cette méthode présente l’avantage principal de ne nécessiter aucun moyen logistique lourd, mais seulement quelques microphones et accéléromètres ainsi qu’un système d’acquisition approprié. En revanche, un inconvénient réside dans le fait qu’une partie des mesures est à réaliser sans véhicule sur la voie (sans charge), ce qui a pour effet d’en modifier sa dynamique. Par ailleurs, la prise en compte du déplacement des efforts le long du rail s’avère indispensable pour une meilleure approche de la problématique ferroviaire en situation d’exploitation.

D’après les auteurs, il a été montré que cette méthode convient particulièrement aux mesures de directivité (estimation de la pression sur la surface latérale d’un quart de cylindre d’axe confondu avec le rail) ; l’article laisse cependant entendre que cette directivité concerne un rail seul, sans considérer la présence du matériel roulant.

L’article décrit essentiellement le principe de la procédure proposée, mais ne donne pas d’information détaillée ni sur la mise en œuvre opérationnelle (choix de la position des forces équivalentes, des accéléromètres, des microphones), ni sur les méthodes d’estimation des différentes fonctions de transfert.

2.1.2.3 Méthode MISO (Multiple Input Single Output separation method)

Cette méthode a été développée par la SNCF [54], dans le cadre du projet européen STAIRRS. Elle repose sur le traitement et l’analyse de mesures acoustiques et vibratoires au passage, et notamment sur le calcul de la fonction de réponse en fréquence (FRF) entre les vibrations de la voie et la pression mesurée en champ proche. Cette approche rejoint donc dans l’idée la méthode de M. G. Dittrich décrite précédemment. La méthode MISO s’articule de la façon suivante :

Phase 1 : calcul de la fonction de réponse en fréquence (FRF) de la voie

Deux accéléromètres sont placés sur chaque rail pour les vibrations latérales et verticales, un cinquième pour les vibrations verticales d’une traverse. Un microphone est positionné en champ proche, à 1.75 m du centre de la voie. La FRF de la voie $\{H_{\gamma p}\}_{5 \times 1}$ est calculée¹ entre les accélérations et la pression mesurée en champ proche, sur des portions de signal où la pression est supposée ne pas être affectée par le rayonnement du véhicule (entre les bogies) :

$$\{H_{\gamma p}\} = [\mathbf{G}_{\gamma\gamma}]^{-1} \cdot \{G_{\gamma p}\} \quad (2.1)$$

1. Dans l’article [54], l’estimation de $\{H_{\gamma p}\}$, et notamment l’inversion de $[\mathbf{G}_{\gamma\gamma}]$, fait l’objet d’une décomposition en valeurs singulières relative à la corrélation partielle des signaux d’accélération.

avec :

$[\mathbf{G}_{\gamma\gamma}]_{5 \times 5}$ la matrice des densités interspectrales de puissance entre les signaux accélérométriques,

$\{G_{\gamma p}\}_{5 \times 1}$ le vecteur des densités interspectrales de puissance entre les accélérations et la pression.

Phase 2 : calcul de la contribution de la voie en champ proche pour un passage complet

À partir de la FRF calculée entre les bogies, et des mesures vibratoires réalisées sur l'ensemble d'un passage, on détermine la contribution de la voie :

$$G_{pp}^{\text{voie}} \Big|_{\text{passage}} = \{H_{\gamma p}\}^\dagger \cdot [\mathbf{G}_{\gamma\gamma}] \cdot \{H_{\gamma p}\} \quad (2.2)$$

où $\{H_{\gamma p}\}^\dagger$ est le vecteur transposé conjugué de $\{H_{\gamma p}\}$.

Phase 3 : Calcul de la contribution du véhicule pour un passage complet

Pour la bande de fréquence de largeur Δf centrée sur f , la pression quadratique relative au rayonnement du véhicule est la contribution complémentaire à celle de la voie dans le bruit total :

$$P_{\text{véhicule}}^2(f, \Delta f) = P_{\text{total}}^2(f, \Delta f) - \int_{\Delta f} G_{pp}^{\text{voie}}(f) \Big|_{\text{passage}} \cdot df \quad (2.3)$$

Remarques

L'estimation des densités spectrales de puissance impose la stationnarité des signaux concernés. La taille des fenêtres temporelles utilisées par les auteurs pour estimer les matrices interspectrales n'est pas précisée. Dans la mesure où l'atténuation des vibrations dans le rail peut être importante, la stationnarité des signaux accélérométriques lors des mesures au passage n'est pas garantie.

La méthode MISO repose sur la représentation par filtrage linéaire des canaux de propagation entre les vibrations du rail et le signal acoustique mesuré par le microphone. Or la fonction de transfert vibro-acoustique dépend de la position par rapport à l'excitation : il n'y a pas stationnarité spatiale de cette fonction de transfert.

Les auteurs indiquent que la validation de cette méthode reste difficile en raison de l'impossibilité de connaître les valeurs réelles des contributions respectives. De manière plus générale, c'est également le cas pour l'ensemble des méthodes de séparation.

2.2 Utilisation d'antennes microphoniques

Les méthodes de caractérisation qui utilisent les antennes microphoniques sont particulièrement intéressantes dans la mesure où les traitements associés s'appliquent directement sur les mesures issues d'une antenne. Elles ne nécessitent donc aucune mise en œuvre particulière. Cette partie rappelle le principe des traitements d'antenne classiques, dont la formation de voies, et leur utilisation pour la localisation de sources au passage de véhicules. Elle décrit également, à partir des travaux de thèse de T. Kitagawa, en quoi cette approche est insuffisante dans le cas de la caractérisation du bruit rayonné par le rail.

2.2.1 Principe de la formation de voies

Une antenne microphonique est un ensemble de microphones répartis dans l'espace selon une disposition géométrique adaptée au contexte de la mesure. Le principe de formation

de voies consiste à combiner *a posteriori* les signaux reçus par les différents microphones pour créer des interférences constructives ou destructives, et ainsi privilégier une direction d'écoute [56]. Le principe présenté dans cette section concerne le cas de l'antenne linéaire à capteurs équidistants étudiée par M.-A. Pallas dans [57].

2.2.1.1 Traitement ondes planes

Lorsqu'une source acoustique est suffisamment éloignée de l'antenne, on peut considérer que l'onde reçue par cette dernière est plane. Les fronts d'onde (ensemble des points où la phase de la pression est constante) sont des plans parallèles entre eux. Considérons une antenne linéaire composée de N_c microphones espacés de la distance d . On peut caractériser la direction d'arrivée d'une onde de célérité c par l'angle d'incidence θ qu'elle forme avec la normale à l'axe de l'antenne, comme le montre la figure 2.1.

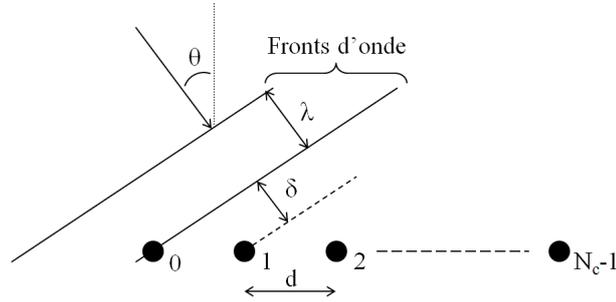


FIGURE 2.1: Onde plane sous incidence θ et antenne linéaire à capteurs équidistants.

Le signal $s_n(t)$ reçu par le microphone n est retardé de $\tau = nd \sin \theta / c$ par rapport au microphone 0. Pour un signal monochromatique de fréquence f , ce retard se traduit par un déphasage :

$$s_n(t) = s_0(t) e^{-2j\pi f n \frac{d \sin \theta}{c}} = s_0(t) e^{-2j\pi n \frac{d}{\lambda} \sin \theta} \quad (2.4)$$

Le principe de la formation de voies consiste à compenser les différences introduites par la propagation pour une direction d'écoute θ_0 sélectionnée. On moyenne ensuite les signaux :

$$S_{FV}(t, \theta_0) = \frac{1}{N_c} \sum_{n=0}^{N_c-1} s_n(t) e^{2j\pi n \frac{d}{\lambda} \sin \theta_0} \quad (2.5)$$

En substituant les signaux $s_n(t)$ donnés par l'équation (2.4) pour une incidence θ , on obtient :

$$S_{FV}(t, \theta_0) = s_0(t) H_{FV}(f, \theta_0, \theta) e^{j\pi(N_c-1) \frac{d}{\lambda} (\sin \theta_0 - \sin \theta)} \quad (2.6)$$

avec :

$$H_{FV}(f, \theta_0, \theta) = \frac{\sin \left[\pi N_c \frac{d}{\lambda} (\sin \theta_0 - \sin \theta) \right]}{N_c \sin \left[\pi \frac{d}{\lambda} (\sin \theta_0 - \sin \theta) \right]} \quad (2.7)$$

La formation de voies agit donc comme un filtre spatial de gain $H_{FV}(f, \theta_0, \theta)$, fonction dépendant de l'angle de préformation de l'antenne θ_0 ainsi que de l'angle d'incidence de l'onde θ . Le gain de ce filtre présente un lobe principal autour de la direction θ_0 encadré d'une succession de lobes d'amplitude décroissante. La figure 2.2 représente le gain d'une antenne de 13 capteurs préformée dans les directions $\theta_0 = 0^\circ$ et $\theta_0 = 30^\circ$:

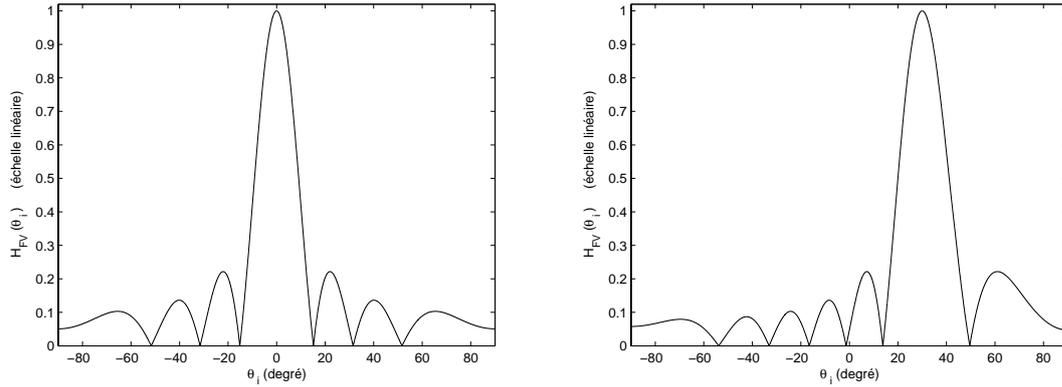


FIGURE 2.2: Réponse de l'antenne linéaire : $N_c = 13$, $f = 1000$ Hz, $d = 10$ cm. Gauche : $\theta_0 = 0^\circ$. Droite : $\theta_0 = 30^\circ$.

On caractérise généralement la résolution spatiale par la largeur à -3 dB du lobe principal, ou encore par la largeur à la base de ce lobe, plus facile à formuler analytiquement :

$$L_\theta = \left| \arcsin \left(\sin \theta_0 + \frac{\lambda}{dN_c} \right) - \arcsin \left(\sin \theta_0 - \frac{\lambda}{dN_c} \right) \right| \quad (2.8)$$

Ainsi, pour une fréquence et un angle d'écoute donnés (f et θ_0 fixés), la résolution de l'antenne (capacité à séparer deux sources voisines) est meilleure si le lobe principal est étroit, c'est à dire si le produit dN_c est grand. Ce produit représente la « longueur de l'antenne », il est souvent appelé ouverture (*aperture* en anglais).

Pour une longueur d'antenne donnée (N_c et d fixés), la résolution est meilleure pour les hautes fréquences que pour les basses fréquences, avec toutefois une limite de validité fréquentielle liée à la condition d'échantillonnage spatial de Shannon : $\lambda \geq 2d$ soit $f_{max} \leq c/(2d)$.

Pour une fréquence et une longueur d'antenne données (f , N_c et d fixés), la résolution est meilleure pour θ_0 proche de 0, c'est-à-dire lorsque l'antenne est préformée dans une direction voisine de sa normale. La figure 2.2 illustre cette propriété.

L'antenne réalise un échantillonnage spatial d'un signal de pression pour un nombre de points défini par le nombre de microphones. Elle permet de ce fait d'observer le champ de pression au travers d'une fenêtre spatiale dont l'étendue est fixée par la longueur de l'antenne. Par analogie avec le fenêtrage temporel, on peut modifier le fenêtrage spatial réalisé par les microphones de l'antenne en attribuant des coefficients de pondération w_n à chaque capteur n , et ainsi affecter la réponse de l'antenne, notamment l'amplitude des lobes secondaires et la largeur du lobe principal :

$$S_{FV}(t, \theta_0) = \frac{1}{N_c} \sum_{n=0}^{N_c-1} w_n s_n \left(t + \frac{nd \sin \theta}{c} \right)$$

2.2.1.2 Traitement ondes sphériques (ou champ proche)

Lorsque les sources acoustiques, supposées ponctuelles, sont proches de l'antenne, les fronts d'onde ne peuvent plus être considérés comme plans sur la longueur de l'antenne, ils présentent une forme sphérique comme l'illustre la figure 2.3.

Le principe de compensation des retards et de moyennage des signaux, décrit précédemment pour les ondes planes, reste valable ici, à la différence près que :

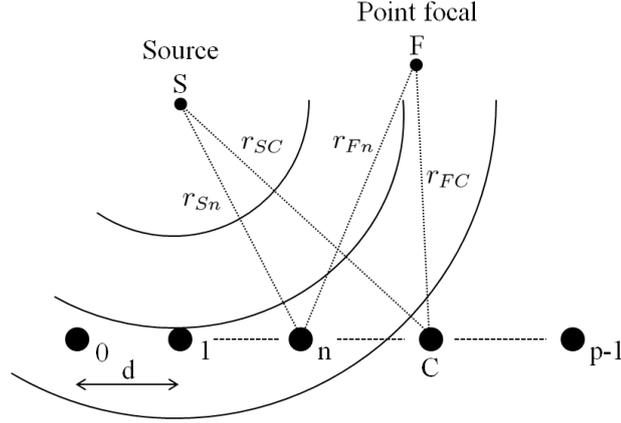


FIGURE 2.3: Onde sphérique et antenne linéaire à capteurs équidistants.

- l’antenne réalise une écoute focalisée en un point F (point focal),
- pour compenser les différences d’atténuation entre les capteurs, on peut introduire un terme d’atténuation dans l’expression des signaux reçus par chaque capteur.

Ainsi, en choisissant un point de référence C , par exemple le centre de l’antenne, on peut écrire le signal reçu par le capteur n :

$$s_n(t) = \frac{r_{SC}}{r_{Sn}} s_C \left(t - \frac{r_{Sn} - r_{SC}}{c} \right) \quad (2.9)$$

La focalisation de l’antenne en un point F peut donc s’écrire :

$$S_{FOC}(t, F) = \frac{1}{N_c} \sum_{n=0}^{N_c-1} w_n \frac{r_{Fn}}{r_{FC}} s_n(t) e^{2j\pi \left(\frac{r_{Fn} - r_{FC}}{\lambda} \right)} \quad (2.10)$$

Avec :

$s_n(t)$ le signal reçu par le capteur n

r_{SC} la distance qui sépare la source S du point de référence C

r_{Sn} la distance qui sépare la source S du capteur n

r_{FC} la distance qui sépare le point focal F du point de référence C

r_{Fn} la distance qui sépare le point focal F du capteur n

w_n le coefficient de pondération spatiale pour le capteur n

De la même manière qu’avec les ondes planes, la focalisation en champ proche réalise également un filtrage spatial. Les propriétés de la réponse de ce filtre (lobes de directivité, repli spatial) obtenues en déplaçant le point de focalisation le long d’une parallèle à l’antenne sont semblables à celles pour un traitement ondes planes lorsque l’on fait varier l’angle de préformation.

2.2.1.3 Effets du mouvement de la source

Lorsqu’une source acoustique est en mouvement par rapport à un récepteur, le signal reçu est altéré en amplitude (effet de convection) et en fréquence (effet Doppler) [58]. Les équations décrivant la cinématique du problème ainsi que la dynamique du champ de pression sont détaillées en annexe D.

Effet sur l'amplitude : **convection**

Le signal reçu est amplifié lorsque la source se rapproche du récepteur et atténué lorsqu'elle s'en éloigne, relativement à une source immobile située à la même abscisse. Le coefficient de convection est :

$$\frac{1}{(1 - M_{ach} \sin \theta)^2} \quad (2.11)$$

où $M_{ach} = V/c$ est le nombre de Mach, V la vitesse de la source et θ est l'angle d'incidence.

Effet sur les fréquences : **effet Doppler**

L'effet Doppler traduit la compression-dilatation de l'échelle temporelle (répercutée de manière duale dans l'espace fréquentiel) par une modification de la fréquence perçue relativement à la fréquence f_0 de la source. Nous verrons dans la suite que le suivi des sources permet de rétablir ces échelles au niveau du récepteur. Le coefficient Doppler est :

$$\frac{f}{f_0} = \frac{1}{1 - M_{ach} \sin \theta}$$

Le tracé de ces coefficients est donné figure 2.4 pour deux vitesses et pour une trajectoire à 2.5 m du récepteur.

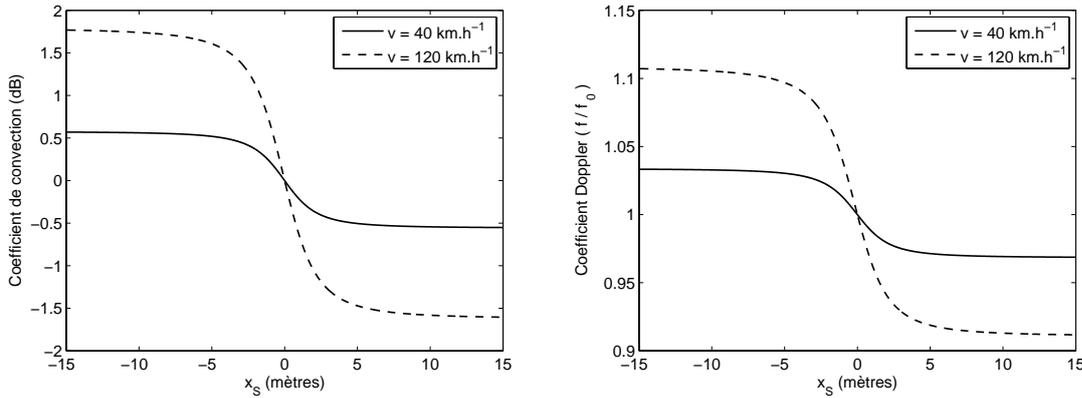


FIGURE 2.4: Effet du mouvement relatif entre une source S ($x_S, y_S = 2.5$ m) se déplaçant de gauche à droite et un observateur O ($0, 0$). Gauche : coefficient de convection. Droite : coefficient Doppler.

2.2.1.4 Suivi de sources

Pour simplifier les écritures, on suppose que l'antenne est formée d'un nombre N_c impair de microphones espacés de d , repérés par rapport au microphone central par leur indice n , avec $-\frac{N_c+1}{2} \leq n \leq \frac{N_c+1}{2}$. Un raisonnement similaire peut être conduit pour N_c pair.

Soit une source mobile, de trajectoire rectiligne parallèle à l'antenne repérée par son abscisse x_S . En $t = t_0$ la source se trouve en face de l'antenne à $x_S = 0$ (voir figure 2.5).

Chaque microphone de l'antenne est affecté par les effets décrits au paragraphe 2.2.1.3, ce qui a pour incidence :

- Les signaux reçus par les différents microphones sont dopplérisés, chacun étant affecté, à t donné, d'un coefficient Doppler distinct en champ proche. Ceci a pour effet de dégrader les performances du traitement d'antenne par focalisation.
- La durée de passage de la source dans le lobe d'écoute de l'antenne focalisée en une direction donnée peut se révéler trop brève pour permettre une analyse précise du

signal (contenu spectral, puissance). Au contraire, la durée d'analyse peut recouvrir le passage de plusieurs sources voisines dans le lobe d'écoute, générant une image floutée des sources.

Afin de pallier à ces difficultés, on procède au suivi des sources pendant leur déplacement [59]. La figure 2.5 illustre la géométrie du problème de suivi de sources.

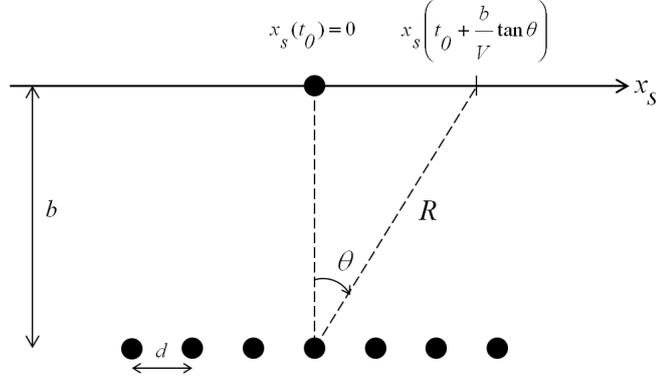


FIGURE 2.5: Géométrie d'un problème de suivi de sources

L'explication du principe est basée ici sur un raisonnement par échantillon :

- L'échantillon émis à t_0 en $x_s = 0$ est reçu par le capteur n à l'instant $t_0 + \frac{\sqrt{b^2 + n^2 d^2}}{c}$, avec $n \in \left[\left[-\frac{N_c+1}{2}, \frac{N_c+1}{2} \right] \right]$.
- Au cours du déplacement à la vitesse V , la source est vue au centre de l'antenne sous l'angle θ à l'instant $t_0 + \frac{b}{V} \tan \theta$. L'échantillon émis à l'instant $t_0 + \frac{b}{V} \tan \theta$ est reçu par le capteur n à l'instant $t_0 + \frac{b}{V} \tan \theta + \frac{\sqrt{b^2 + (b \tan \theta - nd)^2}}{c}$.
- Pour observer cet échantillon, la focalisation doit effectuer :

$$\frac{1}{N_c} \sum_{n=-\frac{N_c+1}{2}}^{\frac{N_c+1}{2}} s_n \left(t_0 + \frac{b}{V} \tan \theta + \frac{\sqrt{b^2 + (b \tan \theta - nd)^2}}{c} \right) \quad (2.12)$$

Ces calculs montrent qu'il est possible, en faisant constamment coïncider le point de focalisation de l'antenne sur la position de la source au cours de son mouvement, de suivre cette source, et ainsi délivrer correctement les échantillons émis lors de son déplacement. L'effet Doppler est intrinsèquement corrigé (la base de temps est rétablie dans le référentiel de la source).

L'effet de convection peut être corrigé de façon similaire en agissant sur l'amplitude par le biais de l'équation (D.6) de l'annexe D.

Remarque : cette technique nécessite une connaissance précise de la vitesse et de la trajectoire de la source.

2.2.1.5 Géométries d'antenne

Dans ce qui précède, les principes de traitement d'antenne ont été énoncés et représentés pour une géométrie d'antenne particulière : l'antenne linéaire à capteurs équidistants. Cependant, d'autres géométries d'antenne peuvent être utilisées, permettant ainsi d'adapter les caractéristiques au contexte acoustique et expérimental.

L'antenne linéaire à une dimension

L'antenne linéaire permet de localiser les sources suivant leur angle d'incidence par rapport à l'axe de l'antenne. Sa directivité présente donc une symétrie autour de son axe. L'utilisation d'une telle antenne sur un véhicule ne permet de localiser les différentes sources que suivant une direction parallèle à l'axe de l'antenne.

Pour une antenne donnée, la gamme d'analyse fréquentielle est limitée (cf. 2.2.1.1). L'utilisation d'antennes linéaires imbriquées, avec la mise en commun de certains microphones, permet d'étendre la bande d'analyse tout en limitant le nombre de capteurs (voir figure 2.7), au prix cependant d'une résolution spatiale médiocre (voir figure 2.6).

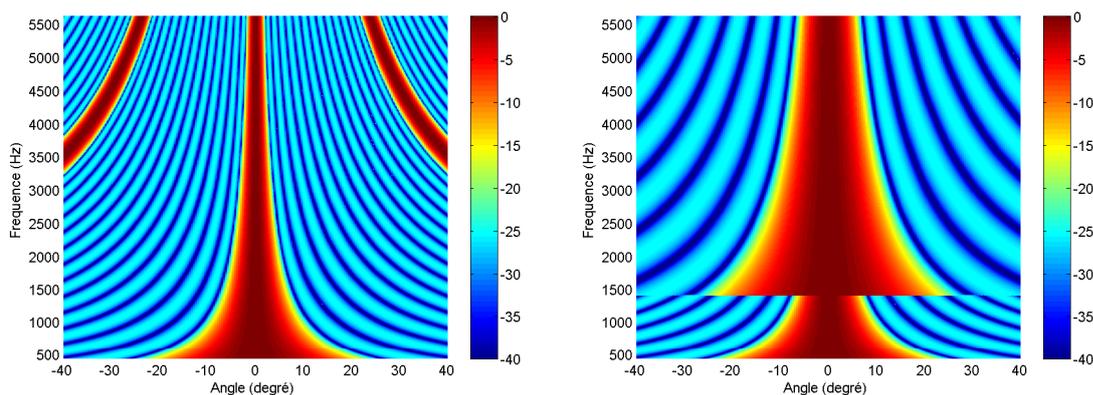


FIGURE 2.6: Réponses d'antennes en dB. Gauche : antenne à 15 capteurs équidistants espacés de 15 cm. Droite : Antennes imbriquées (15 capteurs espacés de 15 cm en basses fréquences puis 13 capteurs espacés de 5 cm).

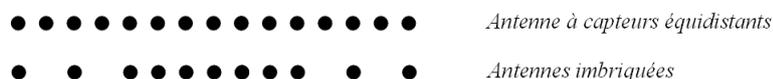


FIGURE 2.7: Différentes antennes linéaires

L'antenne à deux dimensions

Afin de localiser les sources dans un plan, il faut utiliser une antenne à deux dimensions. Le traitement par focalisation, comme pour l'antenne linéaire, s'effectue simultanément sur l'ensemble des capteurs. Cependant, la répartition de capteurs sur un plan peut nécessiter un nombre important de microphones.

Un compromis permettant de réduire ce nombre consiste à utiliser une antenne en croix, combinaison de deux antennes linéaires perpendiculaires se croisant en leur centre (cf. figure 2.8). Dans ce cas, réaliser une formation de voies avec les microphones des deux branches n'est plus efficace, dynamique et résolution s'en trouvent dégradées. Le traitement approprié à cette configuration consiste à corrélérer les résultats de formation de voies de chacune des deux branches linéaires [60]. Les performances spatiales de cette méthode sont correctes, avec toutefois une dynamique de détection plus faible dans l'alignement des deux branches. Pour la caractérisation des sources acoustiques d'un tramway, l'équipe Acoustique Physique du Laboratoire Transport et Environnement a utilisé cette configuration d'antenne, permettant de construire des cartographies acoustiques comme celle de la figure 2.9.



FIGURE 2.8: Antenne en croix utilisée par le LTE pour la caractérisation acoustique des tramways

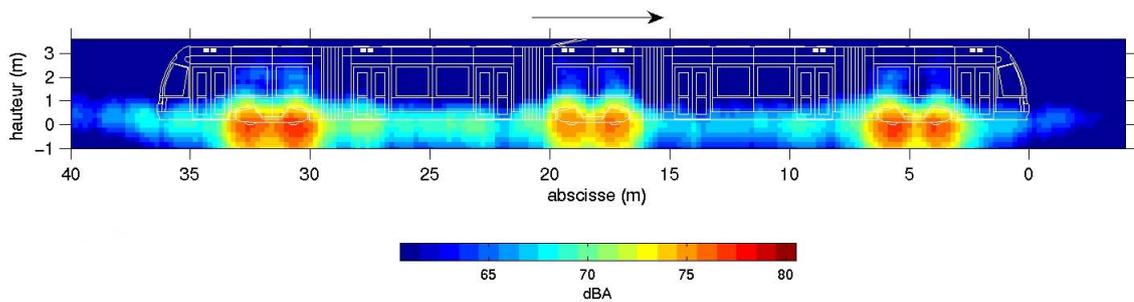


FIGURE 2.9: Exemple de cartographie d'un tramway - Vitesse : 30 km/h - Niveau global.

2.2.2 Approche INRETS pour une source linéique

La méthode implémentée par le LTE (INRETS) a été développée pour l'estimation de la contribution de la voie dans le cadre des mesures effectuées dans le projet PREDIT "Bruit et vibrations des tramways". L'estimation de la contribution de la voie est effectuée indépendamment de celle des roues. Elle se base sur une hypothèse de source linéique cohérente lentement variable [4]. Les cartographies obtenues (voir par exemple la figure 2.9) ont mis en évidence la présence d'une source étendue en partie basse sur toute la longueur de la rame, dont la contribution diffère avec le type de voie (type de pose, revêtement de surface). Cette source inclut le bruit rayonné par la voie (dont le rail).

2.2.2.1 Principe

On suppose que cette source étendue est une juxtaposition de sources élémentaires d'abscisses x . Le traitement d'antenne étant une transformation linéaire, le signal S_{FOC} en sortie d'antenne (focalisée en x_F) sera la superposition des contributions élémentaires.

Ainsi, à la fréquence f :

$$S_{FOC}(t, x_F, f) = e^{2j\pi ft} \int_{\mathbb{R}} s(x, f) h(x_F, x, f) dx \quad (2.13)$$

Avec :

$s(x, f)$ le signal émis par la source d'abscisse x ,

$h(x_F, x, f)$ la fonction caractéristique du fenêtrage spatial réalisé par l'antenne.

En effectuant les approximations suivantes :

- les caractéristiques spatiales de la voie varient lentement relativement au support de h :

$$s(x, f) h(x_F, x, f) \approx s(x_F, f) h(x_F, x, f) \quad (2.14)$$

- les effets du déplacement du véhicule sur les signaux sont négligés,

on estime la contribution moyenne du signal source pendant le défilement du véhicule sur une longueur L devant l'antenne :

$$\overline{|s(f)|^2} = \frac{\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} |S_{FOC}(x_S, f)|^2 dx_S}{L \cdot \left| \int_{\mathbb{R}} h(x_F, x, f) dx \right|^2} \quad (2.15)$$

2.2.2.2 Commentaires

La procédure employée intègre un certain nombre d'hypothèses ou d'approximations, dont les principales sont résumées et discutées ci-dessous.

La pression quadratique en sortie d'antenne, pour une abscisse source x_S donnée, résulte en réalité d'une intégration temporelle liée au suivi de la source. Pendant cette intégration, il y a donc déplacement du point focal (relativement à l'antenne) et, par suite, variation de la réponse $h(x_F, x, f)$. On suppose cependant que cette variation est négligeable et que $h(x_F, x, f) \simeq h(x_F = 0, x, f)$ pour tout x_F sur la longueur du suivi de sources autour de $x_F = 0$.

La relation (2.14) suppose que la source est constante sur l'étendue spatiale équivalente à la réponse de l'antenne focalisée. Cependant, étant donné les performances spatiales de l'antenne utilisée au regard des longueurs d'onde vibratoires dans le rail, cette condition n'est généralement pas vérifiée.

Les ondes vibratoires dans le rail sont plus ou moins atténuées suivant la fréquence. Dans le cas où les vibrations sont peu atténuées (pour les hautes fréquences), la source peut être considérée comme relativement uniforme sur la section de rame analysée. Pour les autres fréquences, la source n'est pas uniforme sur la longueur de section de rame considérée : la contribution de la source estimée par (2.15) est donc une valeur moyenne sur cette section.

Malgré les approximations sous-jacentes, la validation des résultats du modèle par comparaison avec des mesures réelles est très satisfaisante, y compris sur les sites où la pose de voie implique une forte contribution du rayonnement de la voie [1].

2.2.3 Analyse par la dynamique des cartographies

L'article [61] propose une méthode d'estimation empirique des contributions respectives du rail et de la roue en utilisant une antenne de microphones. Deux phases sont distinguées :

1. Détermination d'un seuil à partir de simulations.

- Un modèle de sources est construit pour représenter 2 bogies successifs (4 roues) où chaque roue est un ensemble de sources ponctuelles décorréliées.
 - Des mesures au passage sont simulées avec ces sources fictives : on applique une formation de voies avec suivi de sources pour construire une cartographie acoustique (l’antenne utilisée est une antenne en spirale).
 - La cartographie acoustique obtenue est divisée en deux : une partie où ne sont conservées que les zones correspondant aux roues (des cercles de diamètre égal à celui d’une roue plus deux largeurs de lobe de directivité de l’antenne utilisée), et l’autre partie comprenant les zones complémentaires considérées comme du « bruit ». Cette dernière est donc constituée par les lobes secondaires liés à la présence des roues.
 - Pour chaque tiers d’octave, on diminue la dynamique de la cartographie globale jusqu’à ce que la puissance du « bruit » soit inférieure de 10 dB à celle des roues. Un Rapport Signal sur Bruit (RSB) seuil est ainsi défini pour chaque tiers d’octave.
2. Application des seuils aux mesures.
- Pour chaque tiers d’octave, la valeur seuil est appliquée à la cartographie mesurée. Le bruit de mesure (dû aux lobes secondaires de la directivité de l’antenne) est ainsi éliminé selon Nordborg.
 - Les contributions des roues et de la voie sont déterminées à partir du découpage « zones roues »/« zones complémentaires » sur la cartographie seuillée.

Remarque :

La méthode de séparation proposée par Nordborg consiste à trouver, en simulation, une correction permettant d’isoler graphiquement des sources connues, en s’affranchissant des lobes secondaires. En utilisant cette correction dans un cas réel, on tient pour acquis que les sources ainsi isolées ne seront que les roues. Une fois retiré le bruit provenant d’une surface équivalente aux roues (à la largeur de lobe près) seule reste la puissance due à la voie. Ces considérations sont *a priori* réductrices dans la mesure où elles ne tiennent pas compte du caractère étendu du rail et des dérives apportées par la formation de voie dans ce cas. Cette problématique du traitement d’antenne appliqué au rail est détaillée par T. Kitagawa dans sa thèse [9] qui fait l’objet de la partie suivante.

2.2.4 Comportement d’une antenne linéaire vis-à-vis du rail

Dans la section précédente, plusieurs méthodes de séparation des contributions de la voie et des roues au bruit de roulement généré au passage d’un véhicule ferroviaire ont été présentées. Certaines d’entre elles mettent en œuvre une antenne microphonique, sans tenir compte de la nature cohérente de la source liée au rail [61], ou en s’appuyant sur des hypothèses simplificatrices réductrices vis-à-vis du comportement réel du rail [4]. Les traitements d’antenne tels qu’ils sont employés actuellement ne sont pas adaptés au rayonnement du rail.

Dans cette partie, le comportement d’une antenne linéaire vis-à-vis du rail est étudié en utilisant une modélisation vibro-acoustique du rail. Ceci constitue une partie essentielle des travaux de thèse de Toshiki Kitagawa [9], qui décrit de façon originale cette problématique en reliant les études vibro-acoustiques du rail développées à l’ISVR² et les méthodes de mesure classiques par antenne microphonique.

2. Institute of Sound and Vibration Research : www.isvr.soton.ac.uk

2.2.4.1 Modélisation vibro-acoustique du rail

Comme dans la partie 1.3.4, le rail est assimilé à un ensemble de sources ponctuelles (les cas monopolaires et dipolaires sont étudiés), dont les caractéristiques (espacement, amplitude, relation de phase) sont déterminées à partir du modèle vibratoire de poutre de Timoshenko sur support continu [47]. En ce qui concerne les amplitudes des sources, T. Kitagawa choisit de travailler à puissance acoustique totale émise constante. Pour une modélisation absolue des amplitudes, il conviendrait de tenir compte également de l'espacement entre les sources, ainsi que de la surface de la section du rail.

Les paramètres de discrétisation de l'intégrale (1.25) sont différents de ceux utilisés dans la partie 1.3.4 :

- La distance séparant les sources est fixée, pour chaque fréquence, au quart de la longueur d'onde acoustique.
- La longueur effective du demi-rail rayonnant est fixée comme étant la longueur au delà de laquelle on observe une atténuation vibratoire supérieure à 56 dB relativement au point d'excitation.
- Pour les hautes fréquences où l'atténuation et les longueurs d'onde sont faibles, un très grand nombre de sources est alors nécessaire. Pour éviter d'alourdir les calculs, T. Kitagawa propose, lorsque ce nombre dépasse 1000, de ne considérer que la moitié des sources nécessaires (ce qui correspond à une atténuation limite de 28 dB).

2.2.4.2 Simulations

Pour les simulations, une antenne linéaire associée à un traitement onde plane est utilisée. Elle est composée de 119 microphones répartis sur trois axes parallèles au rail, à 5,72 m de ce dernier. Afin d'obtenir une réponse spatiale adaptée à l'ensemble des fréquences, seuls certains microphones sont sélectionnés pour chaque tiers d'octave, formant ainsi une sous-antenne linéaire à capteurs équidistants. L'espacement entre les microphones est fixé, pour chaque tiers d'octave, à la limite du critère de Shannon pour la fréquence centrale du tiers considéré. La figure 2.10 représente la réponse angulaire à une onde plane de cette antenne préformée dans la direction $\theta_0 = 0^\circ$.

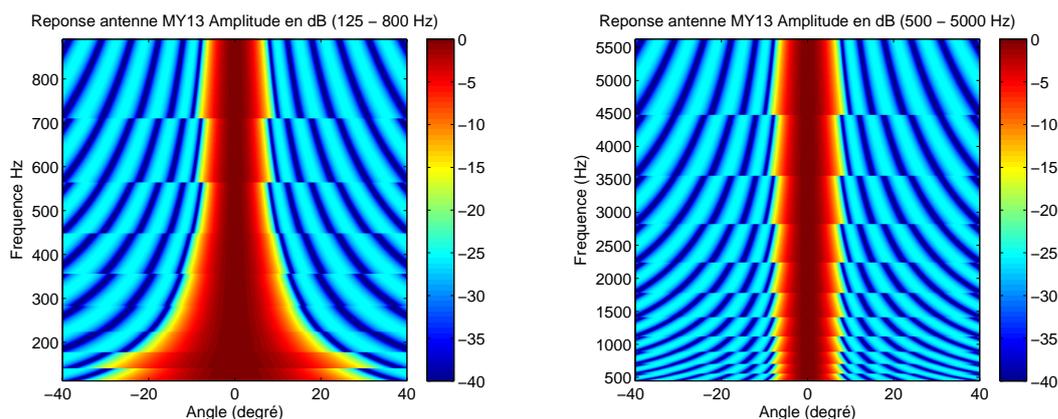


FIGURE 2.10: Réponse de l'antenne MY13 à une onde plane. Gauche : basses fréquences. Droite : hautes fréquences.

Pour étayer l'inadéquation de la formation de voies à l'analyse du rayonnement d'un rail, T. Kitagawa effectue des simulations de mesures de l'émission du rail, pour chaque fréquence centrale de tiers d'octave :

- La pression acoustique le long d’une ligne parallèle et à 5.72 m du rail, qui coïncide donc avec le support des microphones de l’antenne (courbes bleues).
- Le résultat de la formation de voies pour l’antenne MY13 préformée dans la direction de sa normale ($\theta_0 = 0^\circ$), pour différentes positions du centre de l’antenne relativement à celle du point d’excitation vibratoire (courbes rouges).

Deux modèles de sources différents sont utilisés, selon que l’on tienne compte de la cohérence entre les sources élémentaires du rail (courbes en trait plein) ou non (courbes en pointillés).

Les conclusions et les résultats suivants ont été obtenus en appliquant la démarche de T. Kitagawa aux paramètres mécaniques de la table 1.1.

Pour $f = 340$ Hz, les ondes de flexion sont rapidement atténuées, le rail est alors équivalent à une source peu étendue, voire ponctuelle (cf. figure 1.11 partie 1.2.3.3) ; le rayonnement d’une telle source est omnidirectionnel. La figure 2.11 de gauche montre que l’antenne restitue plutôt bien le caractère compact de cette source, en gardant à l’esprit que la largeur du lobe principal de sa directivité pour ces fréquences est importante, et que le traitement qui lui est associé est de type onde plane. Dans ce cas, la prise en compte de la cohérence entre les sources influe peu sur le résultat des simulations, relativement à ce que délivre l’antenne pour les mêmes sources incohérentes.

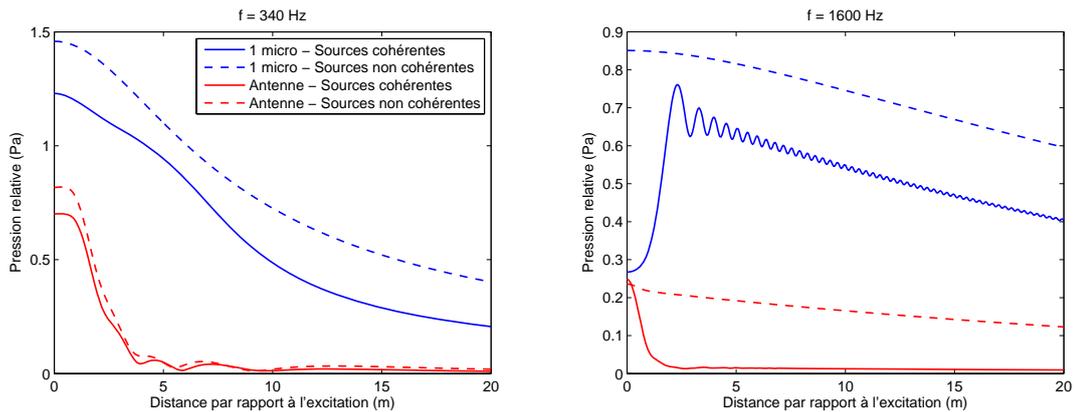


FIGURE 2.11: *Comportement de l’antenne MY13 vis-à-vis du rail. Gauche : $f = 340$ Hz, $\Delta = 16.54$ dB/m. Droite : $f = 1600$ Hz, $\Delta = 0.26$ dB/m.*

Pour $f = 1600$ Hz les ondes de flexion sont très peu atténuées dans le rail et le support spatial de la source est étendu (cf. partie 1.2.3.3). Dans le cas où les sources élémentaires sont cohérentes, la figure 2.11 de droite montre que des phénomènes d’interférence apparaissent. Le champ de pression observé à 5.72 m du rail présente un maximum qui n’est pas situé en face du point d’excitation, mais suivant un angle proche de 13° par rapport à la normale au rail. La courbe rouge en trait plein montre que le traitement d’antenne est inadapté au caractère cohérent du rail intervenant à cette fréquence, et plus généralement lorsque l’atténuation dans le rail est faible. L’antenne n’a pu estimer correctement que le champ de pression dû à l’onde de champ proche dans le rail, la partie due à l’onde propagative qui pourtant rayonne n’a pas été détectée.

Afin de confirmer ce comportement, Kitagawa effectue une nouvelle simulation en faisant varier la direction de préformation θ_0 de l’antenne. Les résultats à 340 Hz et 1600 Hz sont donnés figure 2.12.

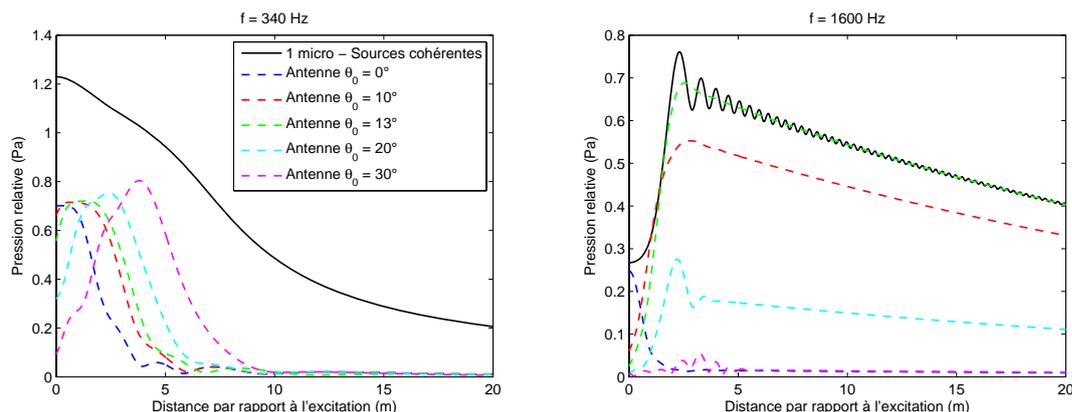


FIGURE 2.12: Comportement de l'antenne MY13 vis-à-vis du rail en fonction de l'angle de préformation. Gauche : 340 Hz. Droite : 1600 Hz

Dans le cas où l'atténuation des ondes vibratoires est forte (courbes de gauche, pour $f = 340$ Hz), la source n'est plus observée lorsque l'antenne est au droit du point d'excitation, mais pour une abscisse correspondant à la présence de la source dans le lobe principal de l'antenne préformée à θ_0 .

Dans le cas où l'atténuation des ondes vibratoires est faible (courbes de droite, pour $f = 1600$ Hz), le rail rayonne sous un angle d'environ 13° par rapport à la normale au point d'excitation (cf. parties 1.3.2.5 et 1.3.2.6). La courbe verte de la figure 2.12 de droite montre effectivement que cette onde est bien détectée lorsque l'antenne est préformée pour un angle voisin de cette direction de propagation, et l'allure générale de la décroissance le long du rail traduit l'atténuation des ondes vibratoires. Elle est détectée de façon plus atténuée pour $\theta_0 = 20^\circ$ ou $\theta_0 = 10^\circ$, de par la directivité spatiale de l'antenne.

Le traitement onde plane de l'antenne MY13, non optimal pour des sources ponctuelles, peut donc être adapté au rayonnement du rail dans le cas où les vibrations sont peu atténuées, dans la mesure où l'angle de préformation est correctement choisi. La difficulté pratique réside dans le fait que cet angle de rayonnement acoustique varie avec la fréquence, et que l'angle de préformation optimal doit alors être adapté à chaque fréquence. Les conclusions sont similaires pour un modèle de sources élémentaires dipolaires.

2.2.4.3 Mesures au pot vibrant

Pour confirmer les résultats obtenus à partir de ses simulations, T. Kitagawa a réalisé une étude expérimentale en excitant un rail à l'aide d'un pot isolé acoustiquement. Le rail, d'une longueur de 25 m, est supporté périodiquement sur une voie de type ballast. Il est excité par des signaux harmoniques purs calés sur les huit tiers d'octave suivants : 500, 630, 800, 1000, 1250, 1600, 2000 et 2500 Hz.

L'antenne utilisée est plus réduite que l'antenne MY13 : elle est composée de deux sous-antennes linéaires de 9 microphones équidistants, espacés de 0.136 m pour les tiers [500 – 1250 Hz] et de 0.068 m pour les tiers [1600 – 2500 Hz]. La position de son centre varie le long du rail, de 1.5 m à 5 m relativement à la position du point d'excitation, et son angle de préformation varie de -60° à $+60^\circ$.

Le dispositif expérimental utilisé par T. Kitagawa dans le cas d'une excitation verticale est illustré figure 2.13.

Dans un premier temps, T. Kitagawa réitère de façon plus concise la démarche d'analyse par simulations, prenant en compte les nouveaux paramètres de la voie et les nouvelles caractéristiques de l'antenne, à la fois pour un traitement onde plane et un traitement onde

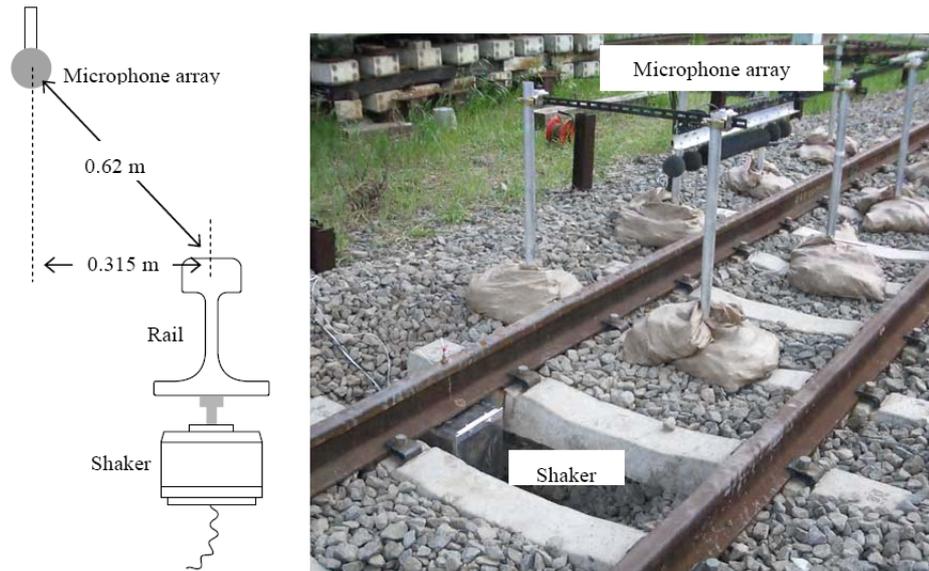


FIGURE 2.13: Dispositif expérimental mis en place par T. Kitagawa pour les mesures au pot vibrant, pour une excitation verticale. Figure tirée de [9].

sphérique. L'antenne étant située à 0.62 m du rail, on peut s'attendre à ce que l'approximation onde plane pour une source ponctuelle soit inadaptée. Cependant, les résultats avancés par T. Kitagawa lorsque le support de la source est compact semblent relativement proches pour les traitements onde plane ou onde sphérique. Les différentes orientations de l'axe de l'antenne de préformation (resp. de focalisation) conduisent également à des résultats similaires. Il conviendrait d'approfondir l'analyse pour discuter ces résultats.

Les mesures montrent également que le comportement observé pour une forte atténuation ne coïncide pas avec celui d'une source ponctuelle. En revanche, les résultats sont beaucoup plus clairs aux fréquences élevées où les vibrations sont peu atténuées : simulations pour le rail cohérent et mesures concordent, et une analyse par antenne préformée (traitement onde plane) conduit à des résultats consistants. L'allure des résultats issus des mesures et ceux prédits à l'aide du modèle de rail décrit dans la partie 2.2.4.1 étant assez proches, on peut conclure quant à l'intérêt d'une telle modélisation.

L'étude expérimentale analyse également les comportements à la fréquence *pin-pin*. Les simulations, basées sur un modèle continu, ne permettent pas de représenter ce phénomène : il faudrait recourir à un modèle de rail sur support discret. Un traitement d'antenne onde plane est *a priori* inadapté à ce contexte. Ce comportement est à rapprocher des résultats présentés dans la partie 1.3.4 sur la base des travaux de J. Laget et O. Chiello [51] : à cette fréquence, une onde vibratoire stationnaire s'installe dans le rail, qui rayonne alors suivant sa normale quelle que soit la position de l'observateur par rapport à l'excitation.

2.3 Conclusion

Les méthodes de séparation des contributions roue/rail présentées dans ce chapitre utilisent différentes techniques qui dans leurs principes ne tiennent pas compte des spécificités vibroacoustiques du rail. Or, nous avons vu dans le chapitre 1 que les propriétés du champ acoustique rayonné par le rail sont étroitement liées à ces caractéristiques. Ces résultats montrent ainsi l'intérêt de développer une nouvelle méthode intégrant une connaissance

précise de la source.

Dans l'optique d'une méthode de caractérisation du bruit de contact roue/rail utilisant une antenne microphonique, l'étude menée par T. Kitagawa [9] soulève des résultats essentiels pour la poursuite des investigations. Concernant la modélisation du rail, cette étude a montré que la représentation du rail par un ensemble de sources acoustiques ponctuelles cohérentes permet de bien restituer le caractère étendu et cohérent de la source, en particulier lorsqu'il est parcouru par une onde vibratoire peu atténuée. Pour les domaines de fréquences où les ondes vibratoires sont peu atténuées, une importante partie de la puissance rayonnée n'est pas restituée par une antenne préformée sur sa normale (qui coïncide avec la normale au rail). Préformer l'antenne dans une direction proche de celle de l'onde rayonnée par le rail permet d'adapter l'antenne à ce champ acoustique, ce qui constitue l'une des principales conclusions des travaux de T. Kitagawa.

3 – Approche signal des méthodes multi-capteurs

L'étude bibliographique réalisée dans le chapitre précédent a montré que les méthodes d'estimation de la composante rail du bruit de roulement ne donnent pas entière satisfaction, soit au niveau des performances, soit au niveau de la mise en œuvre expérimentale. Les méthodes proposées, et en particulier celles basées sur l'utilisation d'antennes microphoniques, n'intègrent pas ou peu de connaissances *a priori* sur la source. Ces approches aveugles montrent ici leurs limites en présence d'une source aux propriétés hétérogènes très marquées.

La démarche proposée dans cette thèse consiste, à partir de mesures acoustiques, à déterminer les paramètres inconnus caractéristiques d'un modèle vibro-acoustique représentatif de la source, pour caractériser ensuite le champ acoustique en tout point de l'espace. La théorie de l'estimation offre un cadre théorique pour la résolution de ce type de problèmes inverses. Dans ce chapitre, nous présentons les techniques d'estimation sur lesquelles nous nous appuyons pour faire le choix d'une méthode adaptée à notre contexte. Les ouvrages de S. Marcos [62] et de D.H. Johnson et D.E. Dudgeon [56] constituent des ouvrages de références pour les notions présentées dans ce chapitre ; elles ne sont pas citées systématiquement pour ne pas alourdir la présentation, mais le lecteur pourra s'y reporter avantageusement.

La méthode du maximum de vraisemblance, basée sur des arguments probabilistes, peut conduire à des performances optimales et, en ce sens, nous l'utilisons comme méthode de référence. Son principe est rappelé dans la partie 3.2, d'abord pour une source déterministe puis pour une source aléatoire. La méthode est ensuite appliquée à l'estimation de l'amplitude et de la direction d'une source, dans les contextes classiques des ondes planes ou des ondes sphériques, faisant ainsi le lien avec les méthodes de formation de voies présentées dans le chapitre 2.

Dans le cas de paramètres multiples et non linéaires, le maximum de vraisemblance nécessite cependant l'utilisation de procédures complexes. Ainsi, une autre approche est présentée ; elle consiste à minimiser un critère de distance entre des matrices de covariance mesurée et modélisée. Cet estimateur au sens des moindres carrés, qui fait l'objet de la partie 3.3, conduit souvent à la mise en place d'algorithmes d'optimisation. Il s'appuie sur la connaissance des relations reliant les paramètres inconnus d'un modèle physique aux mesures. Dans certains cas qui seront soulignés, méthode du maximum de vraisemblance et minimisation de l'erreur quadratique sont équivalentes. Parmi les résultats présentés dans ce chapitre, le cas de plusieurs sources indépendantes est en partie issu de développements personnels.

Ces deux méthodes font appel à la notion de vecteur source dans les modèles physiques. Elle est introduite préalablement dans la partie 3.1 et illustrée dans les cas bien connus des ondes planes et sphériques. La notion de vecteur source adaptée au cas du rail est détaillée dans le chapitre 4.

Enfin, en conclusion de ce chapitre, une démarche est retenue pour le cas du rail développé dans cette thèse.

3.1 Vecteur source

On considère un ensemble de N_s sources dont le rayonnement acoustique est mesuré par une antenne constituée de N_c capteurs. Les sources sont supposées stationnaires. Dans le cadre de cette thèse, cette hypothèse peut se justifier par la stationnarité du signal d'excitation. En effet, comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.1.2, le signal spatial de rugosité, stationnaire, se traduit par l'intermédiaire du déplacement de la roue sur le rail en un signal d'excitation temporel, également stationnaire. On peut ainsi adopter une approche fréquentielle : on se place à la fréquence f , chaque source p délivre un signal $s_p(f)$ de densité spectrale de puissance

$$\gamma_p(f) = E \left[s_p(f) \cdot s_p^\dagger(f) \right]$$

où E représente l'espérance mathématique et † l'opérateur de transconjugaison.

Les phénomènes vibro-acoustiques qui relient les sources aux récepteurs (propagation des ondes vibratoires, rayonnement du rail) sont linéaires, ils peuvent donc être représentés par une fonction de transfert complexe. Dans notre cas, le milieu de propagation est dispersif (cf. partie 1.2), l'amplitude de la fonction de transfert dépend donc de la fréquence, tout comme sa phase qui en dépend de façon non linéaire. Ainsi, le capteur n reçoit, relativement à la source p , le signal

$$y_{np}(f) = a_{np}(f) s_p(f) e^{-i\phi_{np}(f)}$$

où $a_{np}(f)$ traduit l'atténuation dans le milieu de propagation. On peut écrire l'ensemble des signaux reçus sur les N_c capteurs de l'antenne à la fréquence f sous forme vectorielle :

$$\underline{y}_p(f) = s_p(f) \underline{v}_p(f)$$

Le vecteur $\underline{v}_p(f)$ est appelé vecteur source :

$$\underline{v}_p(f) = \left[a_{np}(f) e^{-i\phi_{np}(f)} \right]_{n \in \llbracket 1, N_c \rrbracket} \quad (3.1)$$

On définit également le vecteur source normalisé :

$$\underline{d}_p(f) = \frac{\underline{v}_p(f)}{\|\underline{v}_p(f)\|} \quad \text{avec} \quad \|\underline{v}_p(f)\| = \left(\sum_{n=1}^{N_c} |a_{np}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

et on a alors

$$\underline{y}_p(f) = \|\underline{v}_p(f)\| s_p(f) \underline{d}_p(f) \quad (3.3)$$

Pour la source p , on peut calculer la densité interspectrale de puissance entre les signaux des capteurs m et n :

$$\gamma_{mn,p}(f) = a_{mp}(f) a_{np}(f) \gamma_p(f) e^{-i(\phi_{mp}(f) - \phi_{np}(f))} \quad (3.4)$$

et pour N_s sources non corrélées ($\gamma_{pq}(f) = 0 \forall p \neq q$) :

$$\gamma_{mn}(f) = \sum_{p=1}^P a_{mp}(f) a_{np}(f) \gamma_p(f) e^{-i(\phi_{mp}(f) - \phi_{np}(f))} \quad (3.5)$$

On peut enfin écrire la matrice interspectrale de puissance :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{\Gamma} &= E \left[\underline{y}_p(f) \cdot \underline{y}_p^\dagger(f) \right] \\
 &= \sum_{p=1}^{N_s} \gamma_p(f) \underline{v}_p(f) \underline{v}_p^\dagger(f) \\
 &= \sum_{p=1}^{N_s} \gamma_p(f) \|\underline{v}_p(f)\|^2 \underline{d}_p(f) \underline{d}_p^\dagger(f)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Cas particulier des ondes planes, avec une antenne linéaire à capteurs équidistants

On se place dans la situation évoquée dans la partie 2.2.1.1 ; dans ce cas le milieu est non dispersif. Pour une source p , les signaux reçus par les capteurs ont la même amplitude mais sont décalés dans le temps. Par analogie avec l'équation (2.4), le vecteur source se caractérise par :

$$a_{np} = 1 \quad \text{et} \quad \phi_{np}(f) = 2\pi f \left(\tau_{0p} + n \frac{d \sin \theta_p}{c} \right) \tag{3.7}$$

où τ_{0p} est la durée de propagation entre la source p et le capteur 0 choisi comme référence. D'où l'expression du vecteur source :

$$\underline{v}_p(f) = \left[1 \quad e^{-2i\pi \frac{d \sin \theta_p}{\lambda}} \quad \dots \quad e^{-2i\pi n \frac{d \sin \theta_p}{\lambda}} \quad \dots \quad e^{-2i\pi (N_c-1) \frac{d \sin \theta_p}{\lambda}} \right]^T \tag{3.8}$$

Cas particulier des ondes sphériques, avec une antenne quelconque

On se place dans la situation évoquée dans la partie 2.2.1.2, sans toutefois faire d'hypothèse sur la forme de l'antenne. Pour une source ponctuelle p , les signaux reçus par les capteurs sont atténués et retardés :

$$a_{np} = \frac{1}{4\pi r_{np}} \quad \text{et} \quad \phi_{np}(f) = 2\pi f \frac{r_{np}}{c} \tag{3.9}$$

où r_{np} est la distance entre la source p et le capteur n .

Le vecteur source s'exprime alors :

$$\underline{v}_p(f) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{e^{-2i\pi r_{1p}/\lambda}}{r_{1p}} \quad \dots \quad \frac{e^{-2i\pi r_{np}/\lambda}}{r_{np}} \quad \dots \quad \frac{e^{-2i\pi r_{N_cp}/\lambda}}{r_{N_cp}} \right]^T \tag{3.10}$$

3.2 Maximum de vraisemblance

Soit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_N)$ une réalisation de N variables aléatoires qui dépendent d'un paramètre θ . On appelle vraisemblance la fonction $f_{\underline{x}}(\theta)$ qui représente la probabilité d'observer \underline{x} pour la valeur θ du paramètre :

$$\begin{aligned}
 f_{\underline{x}} &: \Theta \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\
 \theta &\longmapsto f_{\underline{x}}(\theta)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

où Θ est l'espace d'appartenance de θ .

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_{MV}$ sélectionne pour l'observation \underline{x} , la valeur du paramètre θ pour laquelle la probabilité d'observer \underline{x} est la plus forte. $\hat{\theta}_{MV}$ est l'argument qui maximise la vraisemblance (ou la log vraisemblance) :

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_{MV} &= \arg \max_{\theta \in \Theta} f_{\underline{x}}(\theta) \\
 &= \arg \max_{\theta \in \Theta} \log f_{\underline{x}}(\theta)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.2.1 Maximum de vraisemblance en présence d'une source déterministe

On se place à une fréquence f donnée, et l'on omettra d'écrire la dépendance fréquentielle. On considère une seule source caractérisée par une amplitude complexe s et un paramètre $\underline{\zeta}$ inconnu. Le vecteur $\underline{\zeta}$ que l'on peut supposer réel, regroupe l'ensemble des paramètres inconnus de la source vis-à-vis desquels les relations sont non linéaires. Le vecteur \underline{y} des observations sur les N_c capteurs, en présence d'un bruit \underline{b} indépendant du signal source s'écrit :

$$\underline{y} = s \underline{v}(\underline{\zeta}) + \underline{b} \quad (3.13)$$

On suppose que le bruit est une variable aléatoire gaussienne complexe centrée, de matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}_b$. La densité de probabilité du bruit s'écrit :

$$p(\underline{b}) = \frac{1}{\pi^{N_c} \det(\mathbf{\Gamma}_b)} \exp\left(-\underline{b}^\dagger \mathbf{\Gamma}_b^{-1} \underline{b}\right) \quad (3.14)$$

La vraisemblance est quant à elle donnée par :

$$f_{\underline{y}}(s, \underline{\zeta}) = \frac{1}{\pi^{N_c} \det(\mathbf{\Gamma}_b)} \exp\left(-[\underline{y} - s \underline{v}(\underline{\zeta})]^\dagger \mathbf{\Gamma}_b^{-1} [\underline{y} - s \underline{v}(\underline{\zeta})]\right) \quad (3.15)$$

Les paramètres \hat{s}_{MV} et $\hat{\underline{\zeta}}_{MV}$ estimés par le maximum de vraisemblance sont les paramètres qui maximisent $f_{\underline{y}}$; c'est-à-dire tels que :

$$\begin{aligned} (\hat{s}_{MV}, \hat{\underline{\zeta}}_{MV}) &= \arg \max_{s, \underline{\zeta}} \left\{ f_{\underline{y}}(s, \underline{\zeta}) \right\} \\ &= \arg \max_{s, \underline{\zeta}} \left\{ -[\underline{y} - s \underline{v}(\underline{\zeta})]^\dagger \mathbf{\Gamma}_b^{-1} [\underline{y} - s \underline{v}(\underline{\zeta})] \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \hat{s}_{MV} &= \frac{\underline{v}(\hat{\underline{\zeta}}_{MV})^\dagger \mathbf{\Gamma}_b^{-1} \underline{y}}{\underline{v}(\hat{\underline{\zeta}}_{MV})^\dagger \mathbf{\Gamma}_b^{-1} \underline{v}(\hat{\underline{\zeta}}_{MV})} \\ \hat{\underline{\zeta}}_{MV} &= \arg \max_{\underline{\zeta}} \frac{|\underline{v}(\underline{\zeta})^\dagger \mathbf{\Gamma}_b^{-1} \underline{y}|^2}{\underline{v}(\underline{\zeta})^\dagger \mathbf{\Gamma}_b^{-1} \underline{v}(\underline{\zeta})} \end{cases} \quad (3.17)$$

Le terme $\underline{v}(\underline{\zeta})^\dagger \mathbf{\Gamma}_b^{-1} \underline{y}$ peut être interprété comme le résultat de la formation de voies pondérée par l'inverse de la covariance du bruit sur les capteurs. La position de la source est donnée par le maximum en module de la formation de voies pondérée par l'inverse de la covariance du bruit et normalisée. L'amplitude de la source est alors donnée par la valeur de cette fonction pour $\underline{\zeta} = \hat{\underline{\zeta}}_{MV}$. On notera ainsi que dans le cas général, la connaissance de la covariance du bruit est nécessaire pour calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance.

À présent, on suppose que le bruit est spatialement blanc, de variance identique sur tous les capteurs σ_b^2 . En notant \mathbf{I} la matrice identité, la matrice de covariance du bruit et son inverse peuvent s'écrire :

$$\mathbf{\Gamma}_b = \sigma_b^2 \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \mathbf{\Gamma}_b^{-1} = \frac{1}{\sigma_b^2} \mathbf{I} \quad (3.18)$$

Ainsi, l'équation (3.16) se simplifie pour donner :

$$\begin{aligned} (\hat{s}_{MV}, \hat{\underline{\zeta}}_{MV}) &= \arg \max_{s, \underline{\zeta}} \left\{ -[\underline{y} - s \underline{v}(\underline{\zeta})]^\dagger [\underline{y} - s \underline{v}(\underline{\zeta})] \right\} \\ &= \arg \min_{s, \underline{\zeta}} \|\underline{y} - s \underline{v}(\underline{\zeta})\|^2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ainsi, dans le cas d'un bruit spatialement blanc, il y a équivalence entre l'estimateur du maximum de vraisemblance et celui des moindres carrés. Le système (3.17) se simplifie alors pour donner :

$$\begin{cases} \hat{s}_{MV} &= \frac{\underline{v}(\hat{\underline{\zeta}}_{MV})^\dagger \underline{y}}{\|\underline{v}(\hat{\underline{\zeta}}_{MV})\|^2} \\ \hat{\underline{\zeta}}_{MV} &= \arg \max_{\underline{\zeta}} \frac{|\underline{v}(\underline{\zeta})^\dagger \underline{y}|^2}{\|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^2} \end{cases} \quad (3.20)$$

Avec l'hypothèse de bruit spatialement blanc, la connaissance du bruit n'est plus nécessaire pour le calcul de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Cas d'une onde plane avec une antenne linéaire de N_c capteurs

Dans ce cas, la position de la source est caractérisée par la direction d'incidence de l'onde plane θ . D'après l'expression de $\underline{v}(\theta)$ donnée par l'équation (3.8) :

$$\underline{v}(\theta)^\dagger = \left[1 \quad e^{i\phi_1(\theta)} \quad \dots \quad e^{i\phi_{N_c-1}(\theta)} \right] \quad \text{et} \quad \|\underline{v}(\theta)\|^2 = N_c \quad (3.21)$$

avec $\phi_n(\theta) = 2\pi n \frac{d \sin \theta}{\lambda}$.

On en déduit l'écriture de l'estimateur du maximum de vraisemblance en présence d'un bruit spatialement blanc :

$$\begin{cases} \hat{s}_{MV} &= \frac{1}{N_c} \sum_{n=0}^{N_c-1} y_n e^{2i\pi n \frac{d \sin \hat{\theta}_{MV}}{\lambda}} \\ \hat{\theta}_{MV} &= \arg \max_{\theta} \left| \sum_{n=0}^{N_c-1} y_n e^{2i\pi n \frac{d \sin \theta}{\lambda}} \right|^2 \end{cases} \quad (3.22)$$

Le maximum de vraisemblance s'identifie ainsi à la formation de voies avec pondération spatiale uniforme sur l'antenne (cf. équation (2.5) dans la partie 2.2.1) :

$$\begin{cases} \hat{s}_{MV} &= \tilde{s}_{FV}(\hat{\theta}_{MV}) \\ \hat{\theta}_{MV} &= \arg \max_{\theta} |N_c \tilde{s}_{FV}(\theta)|^2 \end{cases} \quad (3.23)$$

où $\tilde{s}_{FV}(\theta)$ représente l'amplitude complexe de la formation de voies à la fréquence d'étude f , pour la direction d'écoute θ .

Cas d'une onde sphérique avec une antenne quelconque de N_c capteurs

Dans ce cas, la position de la source est donnée par ses coordonnées dans l'espace $\underline{\zeta} = (x_s, y_s, z_s)$. D'après l'expression de $\underline{v}(\underline{\zeta})$ donnée par l'équation (3.10) :

$$\underline{v}(\underline{\zeta})^\dagger = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{e^{i\phi_1(\underline{\zeta})}}{r_1(\underline{\zeta})} \quad \dots \quad \frac{e^{i\phi_{N_c}(\underline{\zeta})}}{r_{N_c}(\underline{\zeta})} \right] \quad \text{et} \quad \|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{n=1}^{N_c} \frac{1}{r_n(\underline{\zeta})^2} \quad (3.24)$$

avec :

$r_n(\underline{\zeta})$ la distance entre le capteur n et le point d'abscisse $\underline{\zeta}$,

$\phi_n(\underline{\zeta}) = 2\pi r_n(\underline{\zeta})/\lambda$.

On en déduit l'écriture de l'estimateur de l'amplitude au sens du maximum de vraisemblance en présence d'un bruit spatialement blanc :

$$\hat{s}_{MV} = \frac{\underline{v}(\hat{\underline{\zeta}})^\dagger \underline{y}}{\|\underline{v}(\hat{\underline{\zeta}})\|^2} = \frac{4\pi}{\sum_n \frac{1}{r_n(\hat{\underline{\zeta}})^2}} \sum_{n=1}^{N_c} \frac{1}{r_n(\hat{\underline{\zeta}})} y_n e^{2i\pi \frac{r_n(\hat{\underline{\zeta}})}{\lambda}} \Bigg|_{\underline{\zeta}=\hat{\underline{\zeta}}_{MV}} \quad (3.25)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance se différencie du calcul de focalisation (2.10) décrit dans la partie 2.2.1 au niveau de la prise en compte des atténuations liées à la propagation.

3.2.2 Maximum de vraisemblance en présence d'une source aléatoire

On suppose dans ce paragraphe que le signal source s est une variable aléatoire gaussienne centrée complexe¹. Un bruit gaussien indépendant du signal, spatialement blanc et de variance σ_b^2 se superpose aux signaux reçus sur les capteurs. Le signal observé $\underline{y} = s \underline{v}(\underline{\zeta}) + \underline{b}$ est un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance :

$$\mathbf{\Gamma}_y = \sigma_s^2 \underline{v}(\underline{\zeta}) \cdot \underline{v}(\underline{\zeta})^\dagger + \sigma_b^2 \mathbf{I} \quad (3.26)$$

Avec :

$\sigma_s^2 = \gamma_s(f)$ la densité spectrale de puissance moyenne du signal s à la fréquence f ,
 \mathbf{I} la matrice identité de taille $N_c \times N_c$.

On écrit la vraisemblance :

$$f_y(\sigma_s^2, \underline{\zeta}) = \frac{1}{\pi^{N_c} \det(\mathbf{\Gamma}_y)} \exp\left(-\underline{y}^\dagger \mathbf{\Gamma}_y^{-1} \underline{y}\right) \quad (3.27)$$

À partir de l'expression (3.27) on peut écrire une condition nécessaire que doit vérifier l'estimateur de σ_s^2 (cf. annexe E) :

$$\widehat{\sigma}_{sMV}^2 = \left. \frac{\underline{v}(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}}_y \underline{v}(\underline{\zeta})}{\|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^4} - \frac{\sigma_b^2}{\|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^2} \right|_{\underline{\zeta} = \widehat{\underline{\zeta}}_{MV}} \quad (3.28)$$

Le paramètre σ_s^2 que l'on cherche à estimer, est une densité spectrale de puissance moyenne (dspm) qui est une grandeur positive. Ainsi, la maximisation de la vraisemblance doit être réalisée sous contrainte de positivité, impliquant la possibilité que la condition nécessaire (3.28) ne soit pas vérifiée par la solution qui se trouve alors sur la borne de son demi espace de définition. Ce problème d'estimation par maximum de vraisemblance sous contrainte est étudié par Y. Bresler dans [64] pour un cas plus complexe. Dans son article, Y. Bresler considère un ensemble de N sources cohérentes dont il cherche à estimer la matrice de covariance, avec la contrainte qu'elle soit définie positive. Ses résultats appliqués à une seule source de variance σ_s^2 inconnue mènent à l'estimateur suivant :

$$\widehat{\sigma}_{sMV}^2 = \max \left[\left. \frac{\underline{v}(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}}_y \underline{v}(\underline{\zeta})}{\|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^4} - \frac{\sigma_b^2}{\|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^2} \right|_{\underline{\zeta} = \widehat{\underline{\zeta}}_{MV}}, 0 \right] \quad (3.29)$$

En effet, la fonction de vraisemblance est convexe vis-à-vis du paramètre σ_s^2 , garantissant l'existence d'un unique maximum pour lequel la condition nécessaire (3.28) est vérifiée. Si cette condition conduit à un point hors du domaine de définition, le maximum de vraisemblance sous contrainte de positivité, alors supérieur au maximum de vraisemblance sans contrainte, se trouve exactement sur la borne du domaine : $\widehat{\sigma}_{sMV}^2 = 0$. Dans ce cas, la source caractérisée par le vecteur $\underline{v}(\underline{\zeta})$ ne contribue pas au champ acoustique mesuré par l'antenne et il est légitime de douter de la pertinence du modèle adopté.

1. Cette condition est notamment vérifiée lorsque l'on travaille dans le domaine des fréquences, et que le signal analysé à la fréquence f résulte de la transformée de Fourier d'un signal aléatoire gaussien stationnaire.

3.3 Critère des moindres carrés

Dans la section précédente, la fonction de vraisemblance est utilisée pour caractériser les sources observées à partir d'un modèle dont l'amplitude et certains paramètres sont inconnus. Cette nouvelle section suit le même principe, mais en mettant en œuvre un critère différent de la vraisemblance. L'estimateur proposé ici est obtenu par minimisation de l'écart entre la matrice spectrale mesurée et la matrice spectrale obtenue à partir du modèle. Il sera par la suite utilisé pour caractériser le champ acoustique rayonné par le rail, *via* l'estimation des paramètres inconnus d'un modèle vibro-acoustique issu du chapitre 1, explicité dans la partie 4.2.1 du chapitre suivant.

3.3.1 Écriture du critère

On considère N_s sources décorrélées et une antenne de géométrie quelconque constituée de N_c capteurs. De plus, un bruit additif spatialement blanc se superpose au signal sur les capteurs. Soit \underline{y} le vecteur des pressions mesurées sur l'antenne, et $\widehat{\mathbf{\Gamma}}$ la matrice spectrale estimée associée. On pose :

$$\mathbf{S} = \sum_{p=1}^{N_s} \sigma_p^2 \underline{v}(\zeta_p) \cdot \underline{v}(\zeta_p)^\dagger + \sigma_b^2 \mathbf{I} = \sum_{p=1}^{N_s} \mathbf{S}_p + \sigma_b^2 \mathbf{I} \quad (3.30)$$

la matrice spectrale modélisée sur l'antenne, avec :

σ_p^2 la variance de la source p ,

σ_b^2 la variance du bruit, supposée connue,

\mathbf{S}_p la matrice spectrale modélisée sur l'antenne relative à la source p .

Pour résoudre le problème inverse et retrouver les paramètres σ_p^2 et ζ_p à partir des mesures \underline{y} , nous proposons de minimiser un critère d'erreur quadratique basé sur l'écart entre les matrices spectrales mesurée et modélisée :

$$\mathcal{C} = \sum_{m,n} |\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{m,n} - \mathbf{S}_{m,n}|^2 = \|\widehat{\mathbf{\Gamma}} - \mathbf{S}\|_F^2 \quad (3.31)$$

où $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius telle que, pour une matrice carrée \mathbf{M} à coefficients complexes a_{mn} :

$$\|\mathbf{M}\|_F^2 = \sum_{m,n} |a_{mn}|^2 = \text{tr}(\mathbf{M}^\dagger \mathbf{M}) \quad (3.32)$$

On développe l'équation (3.31) en utilisant l'opérateur trace :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \text{tr}[(\widehat{\mathbf{\Gamma}} - \mathbf{S})^\dagger (\widehat{\mathbf{\Gamma}} - \mathbf{S})] \\ &= \text{tr}[\widehat{\mathbf{\Gamma}}^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} - \widehat{\mathbf{\Gamma}}^\dagger \mathbf{S} - \mathbf{S}^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} + \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S}] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Comme \mathbf{S} et $\widehat{\mathbf{\Gamma}}$ sont des matrices spectrales, elles sont hermitiennes par définition. Il en suit que $\text{tr}(\mathbf{S}^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}}) = \text{tr}(\widehat{\mathbf{\Gamma}}^\dagger \mathbf{S})$ et le critère (3.31) devient :

$$\mathcal{C} = \|\widehat{\mathbf{\Gamma}}\|_F^2 + \|\mathbf{S}\|_F^2 - 2 \text{tr}(\widehat{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{S}) \quad (3.34)$$

3.3.2 Cas d'une source aléatoire de paramètre ζ connu

On ne considère qu'une source de variance σ^2 inconnue, et on suppose ici que ζ est connu ($\underline{v}(\zeta) = \underline{v}$). En développant l'équation (3.34) on peut écrire :

$$\mathcal{C} = \|\widehat{\mathbf{\Gamma}}\|_F^2 - 2\sigma_b^2 \text{tr}(\widehat{\mathbf{\Gamma}}) + N_c \sigma_b^4 + \sigma^2 \|\underline{v}\|^4 \left(\sigma^2 - 2 \frac{\text{tr}(\widehat{\mathbf{\Gamma}} \underline{v} \cdot \underline{v}^\dagger)}{\|\underline{v}\|^4} + 2 \frac{\sigma_b^2}{\|\underline{v}\|^2} \right) \quad (3.35)$$

où $\|v\|$ est la norme euclidienne du vecteur v .

Une condition nécessaire pour que $\widehat{\sigma^2}_C$, l'estimateur de σ^2 , minimise le critère \mathcal{C} est que la dérivée de \mathcal{C} en $\sigma^2 = \widehat{\sigma^2}_C$ soit nulle. En remarquant que $\text{tr}(\widehat{\mathbf{\Gamma}}^\dagger v \cdot v^\dagger) = v^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v$, cette condition s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial (\sigma^2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma^2 = \frac{v^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v}{\|v\|^4} - \frac{\sigma_b^2}{\|v\|^2} \\ \text{ou} \\ \sigma^2 = 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

où l'on retrouve l'expression de l'estimateur du maximum de vraisemblance (3.28).

Le critère \mathcal{C} est convexe vis-à-vis de σ^2 , ce qui garantit l'absence de minima locaux et donc l'unicité de la solution. En ajoutant à la condition nécessaire la contrainte de positivité sur $\widehat{\sigma^2}_C$ on obtient l'estimateur suivant :

$$\widehat{\sigma^2}_C = \max \left[\frac{v^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v}{\|v\|^4} - \frac{\sigma_b^2}{\|v\|^2}, 0 \right] \quad (3.37)$$

Ainsi, dans le cas d'une source aléatoire de paramètres $\underline{\zeta}$ connus, la minimisation de l'écart entre mesures et modèle *via* la norme de Frobenius revient à rechercher le maximum de vraisemblance :

$$\widehat{\sigma^2}_C = \widehat{\sigma^2}_{MV}$$

Remarque : l'existence et l'unicité de la solution peut également se démontrer en utilisant l'approximation de $\widehat{\mathbf{\Gamma}}$ dans un sous-espace engendré par les vecteurs sources. Cette méthode basée sur la projection orthogonale est présentée dans l'annexe F.

3.3.3 Cas d'une source aléatoire de paramètre ζ inconnu

Dans ce cas, le paramètre $\underline{\zeta}$ doit être estimé en même temps que la variance de la source σ^2 . Ces procédures d'estimation qui doivent être réalisées *a priori* conjointement, peuvent faire l'objet d'une démarche séquentielle, comme évoqué dans [65]. En effet, la condition nécessaire exprimée dans le paragraphe précédent implique :

$$\sigma^2 = \frac{v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v(\underline{\zeta})}{\|v(\underline{\zeta})\|^4} - \frac{\sigma_b^2}{\|v(\underline{\zeta})\|^2} \Bigg|_{\substack{\sigma^2 = \widehat{\sigma^2}_C \\ \underline{\zeta} = \widehat{\underline{\zeta}}_C}} \quad \text{avec } \sigma^2 \geq 0 \quad (3.38)$$

Pour minimiser le critère \mathcal{C} il suffit donc de vérifier le système suivant :

$$\begin{cases} \widehat{\sigma^2}_C = \frac{v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v(\underline{\zeta})}{\|v(\underline{\zeta})\|^4} - \frac{\sigma_b^2}{\|v(\underline{\zeta})\|^2} \quad \text{avec } \widehat{\sigma^2}_C \geq 0 \\ \widehat{\underline{\zeta}}_C = \arg \min_{\underline{\zeta}} \mathcal{C} \left(\sigma^2 = \frac{v^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v}{\|v\|^4} - \frac{\sigma_b^2}{\|v\|^2}, \underline{\zeta} \right) \end{cases} \quad (3.39)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \left(\sigma^2 = \frac{v^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v}{\|v\|^4} - \frac{\sigma_b^2}{\|v\|^2}, \underline{\zeta} \right) &= \|\widehat{\mathbf{\Gamma}}\|_F^2 - 2 \left[\frac{v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v(\underline{\zeta})}{\|v(\underline{\zeta})\|^4} - \frac{\sigma_b^2}{\|v(\underline{\zeta})\|^2} \right] v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v(\underline{\zeta}) - 2\sigma_b^2 \text{tr}(\widehat{\mathbf{\Gamma}}) \\ &+ N_c \sigma_b^4 + \left[\frac{v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v(\underline{\zeta})}{\|v(\underline{\zeta})\|^2} - \sigma_b^2 \right]^2 + 2\sigma_b^2 \left[\frac{v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v(\underline{\zeta})}{\|v(\underline{\zeta})\|^2} - \sigma_b^2 \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

On cherche à minimiser $\mathcal{C}(\underline{\zeta})$ par rapport à $\underline{\zeta}$:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\underline{\zeta}} \mathcal{C}(\underline{\zeta}) &= \arg \min_{\underline{\zeta}} \left(\left[\frac{v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v(\underline{\zeta})}{\|v(\underline{\zeta})\|^2} - \sigma_b^2 \right]^2 + 2\sigma_b^2 \left[\frac{v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v(\underline{\zeta})}{\|v(\underline{\zeta})\|^2} - \sigma_b^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[\frac{v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v(\underline{\zeta})}{\|v(\underline{\zeta})\|^4} - \frac{\sigma_b^2}{\|v(\underline{\zeta})\|^2} \right] v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v(\underline{\zeta}) \right) \\ &= \arg \max_{\underline{\zeta}} \left(\left[\frac{v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v(\underline{\zeta})}{\|v(\underline{\zeta})\|^2} - \sigma_b^2 \right]^2 \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Étant donné que

$$\frac{v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v(\underline{\zeta})}{\|v(\underline{\zeta})\|^2} - \sigma_b^2 = \|v(\underline{\zeta})\|^2 \cdot \sigma^2 \quad \text{il s'ensuit que} \quad \frac{v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v(\underline{\zeta})}{\|v(\underline{\zeta})\|^2} - \sigma_b^2 > 0$$

On obtient au final :

$$\widehat{\underline{\zeta}}_{\mathcal{C}} = \arg \max_{\underline{\zeta}} \frac{v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v(\underline{\zeta})}{\|v(\underline{\zeta})\|^2} \quad (3.42)$$

Dans le cas d'une source aléatoire de paramètre $\underline{\zeta}$ et de variance σ^2 la minimisation du critère \mathcal{C} mène à la solution suivante :

$$\begin{cases} \widehat{\underline{\zeta}}_{\mathcal{C}} &= \arg \max_{\underline{\zeta}} \frac{v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v(\underline{\zeta})}{\|v(\underline{\zeta})\|^2} \\ \widehat{\sigma^2}_{\mathcal{C}} &= \frac{v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} v(\underline{\zeta})}{\|v(\underline{\zeta})\|^4} - \frac{\sigma_b^2}{\|v(\underline{\zeta})\|^2} \Big|_{\underline{\zeta}=\widehat{\underline{\zeta}}_{\mathcal{C}}} \end{cases} \quad (3.43)$$

Le système (3.43) montre qu'il est nécessaire de connaître la variance du bruit pour estimer correctement l'amplitude de la source, contrairement à l'estimation du paramètre $\underline{\zeta}$. De plus, il n'y a pas de garantie de positivité de $\widehat{\sigma^2}_{\mathcal{C}}$ lorsqu'il y a du bruit.

3.3.4 Cas de N_s sources aléatoires indépendantes de paramètres ζ_p connus

On considère N_s sources aléatoires indépendantes de variances inconnues. On suppose par ailleurs que les paramètres $\underline{\zeta}_p$ de chaque source sont connus. À partir du cas général (3.30) on donne l'expression de la matrice spectrale modélisée en présence de bruit spatialement blanc sur les capteurs :

$$\mathbf{S} = \sum_{p=1}^{N_s} \sigma_p^2 v(\underline{\zeta}_p) \cdot v(\underline{\zeta}_p)^\dagger + \sigma_b^2 \mathbf{I} \quad (3.44)$$

où σ_p^2 est la variance du signal associé au contact p , et σ_b^2 la variance du bruit.

L'équation (3.34) conduit critère \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \|\widehat{\mathbf{\Gamma}}\|_F^2 + \sum_{p=1}^{N_s} \sum_{t=1}^{N_s} \sigma_p^2 \sigma_t^2 v(\underline{\zeta}_t)^\dagger v(\underline{\zeta}_p) v(\underline{\zeta}_p)^\dagger v(\underline{\zeta}_t) \\ &\quad - 2 \sum_{p=1}^{N_s} \sigma_p^2 v(\underline{\zeta}_p)^\dagger \left(\widehat{\mathbf{\Gamma}} - \sigma_b^2 \mathbf{I} \right) v(\underline{\zeta}_p) - 2\sigma_b^2 \text{tr}(\widehat{\mathbf{\Gamma}}) + \sigma_b^4 N_c \end{aligned} \quad (3.45)$$

Dans la mesure où les paramètres ζ_p sont supposés connus, on cherche le vecteur des variances $\widehat{\underline{X}}_{\mathcal{C}} = {}^t[\widehat{\sigma}_{1\mathcal{C}}^2, \dots, \widehat{\sigma}_{N_s\mathcal{C}}^2]$ qui minimise le critère \mathcal{C} . Le vecteur $\widehat{\underline{X}}_{\mathcal{C}}$ doit vérifier la condition nécessaire suivante :

$$\nabla \mathcal{C} \left(\widehat{\underline{X}}_{\mathcal{C}} \right) = 0 \quad (3.46)$$

où ∇ est l'opérateur de gradient relativement aux paramètres σ_p^2 .

Cette condition nécessaire peut s'exprimer matriciellement, comme dans [66], de la manière suivante :

$$\mathbf{V} \widehat{\underline{X}}_{\mathcal{C}} = \underline{U} \quad (3.47)$$

avec :

$$\mathbf{V}_{p,t} = \underline{v}(\zeta_t)^\dagger \underline{v}(\zeta_p) \underline{v}(\zeta_p)^\dagger \underline{v}(\zeta_t) = \left| \underline{v}(\zeta_p)^\dagger \underline{v}(\zeta_t) \right|^2$$

$$U_p = \underline{v}(\zeta_p)^\dagger \left(\widehat{\mathbf{\Gamma}} - \sigma_b^2 \mathbf{I} \right) \underline{v}(\zeta_p)$$

La matrice \mathbf{V} est donc une matrice symétrique à coefficients réels strictement positifs.

Utilisation du produit de Hadamard :

On pose : $\mathbf{W} = \left[\underline{v}(\zeta_1) \ \underline{v}(\zeta_2) \ \dots \ \underline{v}(\zeta_{N_s}) \right]$. Le matrice \mathbf{V} peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= (\mathbf{W}^\dagger \cdot \mathbf{W}) \odot {}^t(\mathbf{W}^\dagger \cdot \mathbf{W}) \\ &= (\mathbf{W}^\dagger \cdot \mathbf{W}) \odot (\mathbf{W}^\dagger \cdot \mathbf{W})^* \end{aligned} \quad (3.48)$$

où \odot représente le produit de Hadamard (produit terme à terme de deux matrices).

La matrice $\mathbf{W}^\dagger \cdot \mathbf{W}$ est une matrice de Gram :

$$\left(\mathbf{W}^\dagger \cdot \mathbf{W} \right)_{p,t} = \left\langle \underline{v}(\zeta_p), \underline{v}(\zeta_t) \right\rangle \quad (3.49)$$

où $\langle \ , \ \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur \mathbb{C}^n .

D'après [67] la matrice $\mathbf{W}^\dagger \cdot \mathbf{W}$ est de rang plein si et seulement si la famille de vecteurs $\left\{ \underline{v}(\zeta_1), \dots, \underline{v}(\zeta_{N_s}) \right\}$ est libre et si $N_c > N_s$. Dans ce cas les matrices $\mathbf{W}^\dagger \cdot \mathbf{W}$ et $(\mathbf{W}^\dagger \cdot \mathbf{W})^*$ sont inversibles et définies strictement positives. Or, d'après [68] le produit de Hadamard de deux matrices définies positives est une matrice définie positive ; la matrice \mathbf{V} est donc inversible.

On pourra ainsi écrire une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que $\widehat{\underline{X}}_{\mathcal{C}}$ minimise \mathcal{C} :

$$\widehat{\underline{X}}_{\mathcal{C}} = \mathbf{V}^{-1} \underline{U} \quad (3.50)$$

Par ailleurs, soit \mathbf{H} la matrice hessienne² de \mathcal{C} . A partir de l'équation (3.45), on peut facilement montrer que :

$$\mathbf{H}(\mathcal{C}) = \mathbf{V} \quad (3.51)$$

est définie positive. Ceci garantit que la solution (3.50) est un minimum :

$$\widehat{\underline{X}}_{\mathcal{C}} = \arg \min_{\underline{X}} \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\underline{X}}_{\mathcal{C}} = \mathbf{V}^{-1} \underline{U} \quad (3.52)$$

sans toutefois garantir la positivité des solutions $\widehat{\sigma}_{p\mathcal{C}}^2$ dans le cas général où il y a du bruit.

Remarque : l'existence et l'unicité de la solution peut ici aussi se démontrer en utilisant l'approximation de $\widehat{\mathbf{\Gamma}}$ dans un sous-espace engendré par les vecteurs sources (cf. annexe F).

2. La matrice hessienne d'une fonction est la matrice carrée de ses dérivées partielles secondes.

3.3.5 Cas de N_s sources aléatoires indépendantes de paramètres ζ_p inconnus

Suivant la même démarche que dans le cas d'une source aléatoire de paramètre ζ inconnu, la minimisation du critère revient à déterminer $\{\widehat{\underline{X}}_C, \widehat{\underline{\zeta}}_{1C}, \dots, \widehat{\underline{\zeta}}_{N_s C}\}$ vérifiant le système :

$$\begin{cases} \widehat{\underline{X}}_C = \mathbf{V}^{-1}\underline{U} \Big|_{(\underline{\zeta}_1 = \widehat{\underline{\zeta}}_{1C}, \dots, \underline{\zeta}_{N_s} = \widehat{\underline{\zeta}}_{N_s C})} \\ \{\widehat{\underline{\zeta}}_{1C}, \dots, \widehat{\underline{\zeta}}_{N_s C}\} = \arg \min_{\underline{\zeta}_1, \dots, \underline{\zeta}_{N_s}} \mathcal{C}(\underline{X} = \mathbf{V}^{-1}\underline{U}, \underline{\zeta}_1, \dots, \underline{\zeta}_{N_s}) \end{cases} \quad (3.53)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\underline{X} = \mathbf{V}^{-1}\underline{U}, \underline{\zeta}_1, \dots, \underline{\zeta}_{N_s}) &= \|\widehat{\mathbf{\Gamma}}\|_F^2 + {}^t \underline{X} \mathbf{V} \underline{X} - 2 {}^t \underline{X} \underline{U} - 2\sigma_b^2 \text{tr}(\widehat{\mathbf{\Gamma}}) + \sigma_b^4 N_c \\ &= \|\widehat{\mathbf{\Gamma}}\|_F^2 + {}^t (\mathbf{V}^{-1}\underline{U}) \mathbf{V} (\mathbf{V}^{-1}\underline{U}) - 2 {}^t (\mathbf{V}^{-1}\underline{U}) \underline{U} \\ &\quad - 2\sigma_b^2 \text{tr}(\widehat{\mathbf{\Gamma}}) + \sigma_b^4 N_c \end{aligned} \quad (3.54)$$

Dans cette écriture, seuls la matrice \mathbf{V} et le vecteur \underline{U} dépendent des ζ_p . Ainsi, la minimisation de \mathcal{C} par rapport aux ζ_p mène à :

$$\{\widehat{\underline{\zeta}}_{1C}, \dots, \widehat{\underline{\zeta}}_{N_s C}\} = \arg \max_{\underline{\zeta}_1, \dots, \underline{\zeta}_{N_s}} {}^t \underline{U} \mathbf{V}^{-1} \underline{U} \quad (3.55)$$

3.3.6 Positivité des variances dans le cas de plusieurs sources

D'après les équations (3.52) et (3.53), la minimisation du critère \mathcal{C} peut conduire à des variances optimales $\widehat{\sigma}_{pC}^2$ négatives. Dans ce cas, l'unicité de la solution du problème non contraint implique la nullité d'au moins une des variances solution du problème sous contrainte de positivité.

On adopte alors la procédure suivante : pour un ensemble de N_s sources, on définit $2^{N_s} - 1$ sous-cas correspondant à l'ensemble des combinaisons pour lesquelles au moins une source est éliminée du modèle source. Le critère \mathcal{C} est alors évalué pour l'ensemble de ces sous-cas. La solution finale du problème est, parmi les cas conduisant à des variances optimales toutes positives, celle qui minimise le critère \mathcal{C} .

3.3.7 Variance du bruit

Dans ce qui précède, nous avons supposé connue la variance du bruit σ_b^2 . Nous avons par ailleurs montré que les différents estimateurs font intervenir cette variance dans leurs formulations. Il est cependant possible de considérer la variance du bruit comme un paramètre inconnu à estimer suivant les mêmes critères. C'est notamment ce que fait Y. Besler dans [64] pour le maximum de vraisemblance. Dans le cas du critère des moindres carrés présenté dans cette section, on peut écrire la condition nécessaire que doit vérifier \mathcal{C} dans le cas d'une source :

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial (\sigma_b^2)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_b^2 = \frac{1}{N_c} \left(\text{tr}(\widehat{\mathbf{\Gamma}}) - \sigma^2 \|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^2 \right) \quad (3.56)$$

En écrivant que la variance de la source vérifie $\sigma^2 = \frac{\underline{v}(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} \underline{v}(\underline{\zeta})}{\|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^4} - \frac{\sigma_b^2}{\|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^2}$ au point solution, on obtient :

$$\widehat{\sigma}_{bC}^2 = \frac{1}{N_c - 1} \left(\text{tr}(\widehat{\mathbf{\Gamma}}) - \frac{\underline{v}(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} \underline{v}(\underline{\zeta})}{\|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^2} \right) \quad (3.57)$$

ce qui correspond au résultat obtenu par Y. Besler en utilisant la vraisemblance. Ainsi, dans le cas d'une source, le critère des moindres carrés et le maximum de vraisemblance conduisent à des estimateurs de la variance du bruit équivalents :

$$\widehat{\sigma}_{bC}^2 = \widehat{\sigma}_{bMV}^2$$

Dans le chapitre suivant, on suppose que la variance du bruit σ_b^2 est connue et qu'elle est nulle. L'influence de cette hypothèse sur les performances de la méthode de caractérisation est étudiée dans la partie 4.3.1.

3.4 Conclusion

L'objectif de ce chapitre est d'estimer les paramètres linéaires et non linéaires d'un modèle vibro-acoustique, à partir d'une série de mesures. Les estimateurs du maximum de vraisemblance et des moindres carrés sont présentés; ils sont mis en relation entre eux, ainsi qu'avec les méthodes de formation de voies classiques. Dans le cas d'une source aléatoire gaussienne en présence d'un bruit blanc, l'équivalence entre ces deux estimateurs est montrée. Dans le cas général de plusieurs sources, il n'y a en revanche pas d'équivalence. Dans ce chapitre, le critère des moindres carrés a été appliqué à plusieurs sources décorréélées, par l'introduction de développements personnels. Par ailleurs plus facile à mettre œuvre que le maximum de vraisemblance, cet estimateur est retenu pour la méthode développée dans cette thèse. Cependant, comme le souligne D.H. Johnson dans [56], l'utilisation de cet estimateur nécessite une bonne connaissance du modèle physique sous-jacent. En effet, même lorsque le modèle est erroné, l'estimateur des moindres carrés conduit toujours à un résultat.

4 – Développement de méthodes adaptées au rail : évaluation des performances par simulations

Les chapitres précédents ont répondu à un certain nombre de questions permettant de progresser dans la résolution de la problématique. Dans le chapitre 1, les propriétés du champ acoustique rayonné par le rail ont été examinées à partir de modèles vibroacoustiques simples : poutre en flexion rayonnant comme une superposition de cylindres infinis, ou comme un ensemble de monopôles acoustiques. Dans le chapitre 2, une revue bibliographique a soulevé les limites des méthodes de caractérisation existantes, en partie à cause du manque de prise en compte des spécificités de la source, justifiant ainsi le développement d'une méthode inverse dont certains aspects théoriques ont été présentés dans le chapitre 3. À partir d'un échantillon de mesures, ces méthodes inverses permettent de reconstruire le champ acoustique en déterminant les paramètres inconnus d'un modèle représentatif des sources.

La problématique abordée dans cette thèse concerne le rail en tant que source isolée. Cependant, dans un contexte de bruit des véhicules ferroviaires, les problèmes soulevés par son interaction avec les autres sources acoustiques devraient être préalablement étudiés.

En particulier, il conviendrait d'analyser les perturbations induites par le rayonnement du rail dans les méthodes classiques de focalisation utilisées pour la caractérisation des sources de bruit à support spatial compact. Inversement, la présence des autres sources, principalement compactes, constitue une composante potentiellement perturbatrice pour l'analyse du rayonnement du rail. L'introduction d'une étape préliminaire de séparation verticale des sources pourrait par exemple être explorée, *via* l'utilisation d'une antenne bidimensionnelle. L'impact de la contribution des roues, à la fois proches et *a priori* non décorréelées du rayonnement du rail, mériterait entre autres une attention particulière. Ces aspects ne sont pas étudiés dans cette thèse et on suppose que la séparation a pu être effectuée.

Dans la partie 1.3.3, il a été montré que le champ acoustique rayonné par le rail peut être représenté par la superposition de champs élémentaires cylindriques, correspondant à la propagation d'ondes vibratoires pures dans le rail. La première partie de ce chapitre vise à traduire l'effet théorique vis-à-vis des vibrations du rail, et notamment des paramètres structuraux les caractérisant, de la formation de voies face à ce champ complexe (section 4.1).

Les parties suivantes sont consacrées à l'application au cas du rail de l'estimateur des moindres carrés présenté dans le chapitre précédent. Tout d'abord sa mise en œuvre est abordée dans la section 4.2 à travers la construction des vecteurs sources reposant sur les modèles vibroacoustiques présentés dans le chapitre 1. Les paramètres $\underline{\zeta}$ dont dépendent ces vecteurs sources sont ici caractéristiques des vibrations dans le rail : une atténuation et un nombre d'onde structural regroupés dans un nombre d'onde complexe. Selon le modèle vibroacoustique utilisé pour les vecteurs sources, les performances de cette méthode d'estimation sont ensuite étudiées à l'aide de simulations numériques : d'une part lorsque les paramètres $\underline{\zeta}$ sont supposés connus (sections 4.3 et 4.4), d'autre part lorsqu'ils sont inconnus et estimés par minimisation du critère des moindres carrés (sections 4.5 et 4.6).

4.1 Formation de voies en présence d'un champ acoustique cylindrique

Bien que la formation de voies soit inadaptée au rail, T. Kitagawa a néanmoins montré dans sa thèse [9] qu'il était possible de restituer en partie son rayonnement en utilisant un angle de préformation adapté (cf. partie 2.2.4). En utilisant une formulation intégrale du champ vibratoire dans le rail associée à un modèle de cylindre pulsant, nous proposons ici une approche permettant d'estimer, dans certains cas, le nombre d'onde structural dans le rail à partir de la formation de voies.

4.1.1 Espace transformé des nombres d'onde structuraux

D'après l'équation (1.28), le champ de pression rayonné par le rail de profil vibratoire $\mathcal{V}_r(z)$ est la superposition de champs élémentaires cylindriques :

$$p(r, z) = \frac{\omega Q_{l_0}}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu) H_0^{(2)}(k_w r) e^{i\mu z} d\mu \quad (4.1)$$

avec k_w le nombre d'onde dans le plan (r, φ) tel que $k^2 = k_w^2 + \mu^2$.

La contribution respective de chaque champ élémentaire au champ total, pour le nombre d'onde μ , est donnée par la transformée réciproque :

$$\frac{\omega Q_{l_0}}{4} \widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu) H_0^{(2)}(k_w r) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(r, z) e^{-i\mu z} dz = \tilde{p}(r, \mu) \quad (4.2)$$

où $\tilde{p}(r, \mu)$ est la transformée de Fourier du champ de pression dans le domaine des nombres d'onde.

Le champ de pression $p_e(r, z)$ mesuré par une antenne linéaire parallèle au rail, constituée de N_c capteurs équidistants, est une observation échantillonnée, sur une fenêtre spatiale finie, du champ de pression $p(r, z)$:

$$p_e(r, z) = p(r, z) \cdot w(z - z_c) \cdot \delta_d(z - z_c) \quad (4.3)$$

avec :

d l'espacement entre les microphones de l'antenne,

z_c l'abscisse du microphone central (p impair),

$w(z - z_c)$ la fenêtre spatiale centrée sur z_c (uniforme, Hanning, Chebyshev...),

$\delta_d(z - z_c)$ le peigne de diracs espacés de d centré sur z_c .

En effectuant le calcul de la transformée de Fourier de l'équation (4.3) on obtient :

$$\tilde{p}_e(r, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_e(r, z) e^{-i\mu z} dz = \sum_{n=0}^{N_c-1} w(z_n - z_c) p(r, z_n) e^{-i\mu z_n} d = d N_c S_{FV}(-\theta_\mu) \quad (4.4)$$

où $S_{FV}(-\theta_\mu)$ est l'expression de la formation de voies réalisée par l'antenne préformée dans la direction $-\theta_\mu$ telle que $\mu = k \sin \theta_\mu$ (équation (2.5), partie 2.2.1). Ainsi, pour une fréquence donnée, la formation de voies en ondes planes effectue le périodogramme spatial du champ de pression pour la projection μ du nombre d'onde sur l'axe du rail. La fenêtre spatiale échantillonnée par les positions des capteurs conduit à une périodisation et à un

étalement (lissage) du spectre spatial théorique. Pour une fenêtre uniforme de largeur dN_c , la transformée de Fourier de l'équation (4.3) donne :

$$\tilde{p}_e(r, \mu) = \tilde{p}(r, \mu) \otimes dN_c \operatorname{sinc} \frac{\mu dN_c}{2} e^{-i\mu z_c} \otimes \frac{1}{d} \delta_{2\pi/d}(\mu) e^{-i\mu z_c} \quad (4.5)$$

Avec :

⊗ le produit de convolution sur la variable μ ,
 sinc la fonction sinus cardinal telle que $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$.

Au final, en combinant les équations (4.2), (4.4) et (4.5) :

$$S_{FV}(-\theta_\mu) = \frac{\omega Q_{l_0}}{4d} \widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu) H_0^{(2)}(k_w r) \otimes \operatorname{sinc} \frac{\mu dN_c}{2} e^{-i\mu z_c} \otimes \delta_{2\pi/d}(\mu) e^{-i\mu z_c} \quad (4.6)$$

L'équation (4.6) montre qu'il est possible, à partir d'une antenne linéaire à capteurs équidistants et d'un traitement d'antenne par formation de voies ondes planes, d'obtenir une expression de la fonction $\widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu) H_0^{(2)}(k_w r)$. Cette fonction, dont le terme $H_0^{(2)}(k_w r)$ est connu pour un μ donné, est altérée par le lissage et la périodisation en μ . Cependant, elle possède des propriétés particulières pouvant être identifiées même après convolution par la mesure de l'antenne.

En effet, l'expression de $\widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu)$ est obtenue par transformée de Fourier du champ vibratoire spatial donné par la fonction de Green $G_\omega(z, z_e)$ (cf. partie 1.3.3). On rappelle cette expression dans le cas d'une poutre d'Euler sur support continu :

$$\widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu) = \frac{i\omega}{B} \frac{e^{-i\mu z_e}}{\mu^4 - k_\beta^4} \quad (4.7)$$

et dans le cas d'une poutre de Timoshenko sur support continu :

$$\widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu) = \frac{i\omega}{B} \frac{1 - \frac{B}{K}(-\mu^2 + k_c^2 + \frac{s'(\omega)}{K})}{(\mu^2 - k_p^2)(\mu^2 - k_d^2)} e^{-i\mu z_e} \quad (4.8)$$

Ainsi, les fonctions (4.7) et (4.8) possèdent des points singuliers, et donc des maxima, dont les abscisses sont les nombres d'onde caractéristiques du modèle de poutre retenu. L'intérêt de cette approche, sous réserve de pouvoir localiser ces maxima, est d'estimer les paramètres structuraux du modèle en utilisant l'antenne associée à un traitement classique de formation de voies.

4.1.2 Estimation du nombre d'onde structural à partir de la formation de voies

Dans cette partie, nous nous intéressons au produit $f(\mu) = \widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu) H_0^{(2)}(k_w r)$ vu au travers de la formation de voies ainsi qu'à son expression analytique. Ces fonctions de la variable réelle μ prennent des valeurs complexes ; les résultats présentés ici concernent le module de ces fonctions, l'étude des parties réelles et imaginaires menant aux mêmes conclusions. Le modèle vibratoire utilisé pour le rail est une poutre de Timoshenko en flexion verticale sur support continu (cf. partie 1.2.2.2). C'est donc l'équation (4.8) qui est utilisée pour l'expression de $\widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu)$. Le rail est acoustiquement assimilé à un ensemble de monopôles sphériques (cf. partie 1.3.3). L'antenne utilisée pour la simulation est une antenne linéaire à capteurs équidistants parallèle au rail, à $R = 2.5$ m de ce dernier. Pour chaque fréquence, les microphones sont espacés de manière à respecter strictement le critère de Shannon spatial. La position du microphone central z_r par rapport à la position du point d'excitation sur le rail est un paramètre de l'étude.

Les figures 4.1 à 4.3 représentent le module des fonctions $f(\mu)$ et $S_{FV}(\mu)$ pour différentes fréquences, le paramètre μ variant de $-k$ à $+k$ (k_w réel). La formation de voies $S_{FV}(\mu)$ est obtenue avec une fenêtre rectangulaire, en normalisant la pression mesurée sur l'antenne par la racine carrée de la puissance totale sur l'antenne. Sur chaque tracé, des pointillés verticaux permettent de repérer la valeur théorique du nombre d'onde k_z^{-1} de l'onde propagative pour la fréquence étudiée (plus exactement sur l'opposé de cette valeur à cause de la présence du signe moins devant θ_μ dans l'équation (4.6)). Quelle que soit la fréquence, la contribution de l'onde de champ proche à la fonction $f(\mu)$ n'est pas suffisamment marquée pour permettre de repérer le nombre d'onde k_d (réponse plate en raison de la forte atténuation de cette onde) ; c'est pourquoi cet aspect est volontairement occulté dans ce qui suit.

Pour $f = 340$ Hz et $f = 560$ Hz, l'atténuation de l'onde propagative est importante, la réponse vibratoire du rail est localisée spatialement, se traduisant par un spectre relativement large dans le domaine transformé (figures 4.1 et 4.2 de gauche). On remarque par ailleurs sur ces figures que les extrema de $f(\mu)$, très peu marqués, ne sont pas localisés sur $\mu = \pm k_z$. Ce résultat se retrouve sur la figure 4.1 de droite pour $f = 340$ Hz, jusqu'à $z_c = 3$ m. Lorsque l'antenne est plus excentrée ($z_c \geq 3$ m), on peut toutefois identifier un maximum sur le module de la formation de voies. Cependant, la valeur de μ/k associée dépendant de z_c , elle ne peut pas correspondre au nombre d'onde k_z recherché.

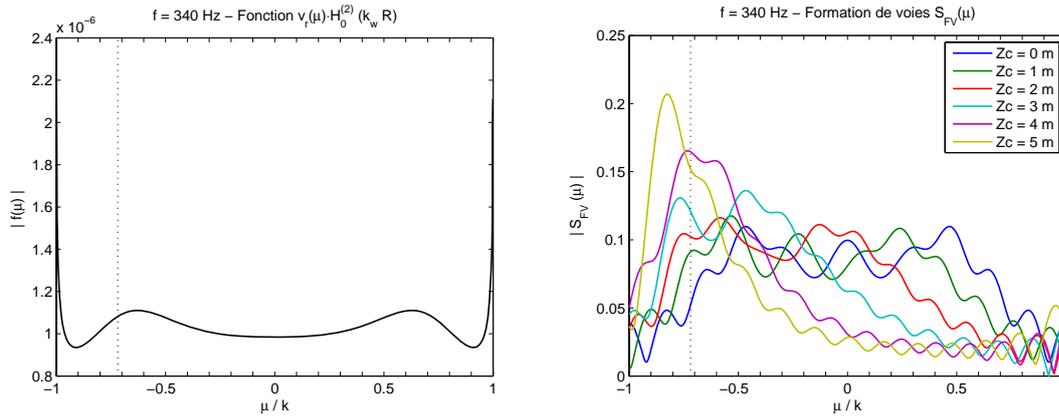


FIGURE 4.1: Localisation du nombre d'onde de l'onde propagative dans le rail à partir de la formation de voies, pour $f = 340$ Hz. Gauche : fonction $|\widetilde{\mathcal{V}}_r(\mu)H_0^{(2)}(k_w r)|$. Droite : formation de voies $S_{FV}(\mu)$.

Dans la mesure où le rail est une source acoustique à support spatial compact pour cette fréquence, on peut s'interroger sur le comportement de la formation de voies vis-à-vis de cette source. En effet, du point de vue de la formation de voies en ondes planes, une telle source localisée au niveau de l'excitation correspond à une direction d'arrivée privilégiée θ_ϕ (ou μ_ϕ) sur l'antenne telle que :

$$\sin \theta_\phi = \frac{\mu_\phi}{k} = -\frac{z_c/R}{\sqrt{1 + (z_c/R)^2}} \quad (4.9)$$

On pourrait ainsi s'attendre à ce que le maximum de $|S_{FV}(\mu)|$, pour un z_c donné, soit localisé sur la valeur de μ_ϕ/k correspondante. Cependant, les valeurs données table 4.1 infirment cette hypothèse, montrant ainsi que l'on ne peut pas considérer le rail comme

1. Dans cette partie, on note k_z la partie réelle du nombre d'onde de l'onde propagative : $k_z = \Re(k_p)$.

une source ponctuelle au sens de la formation de voies dans cette configuration, même s'il est une source acoustique à support spatial compact.

z_c (m)	0	1	2	3	4	5
μ_ϕ/k	0	0.37	0.62	0.77	0.85	0.89

TABLE 4.1: Direction d'arrivée sur l'antenne à $R = 2.5$ m du rail et centrée en z_c , du champ acoustique rayonné par une source compacte localisée sur le rail en $z_e = 0$ m.

Pour $f = 560$ Hz, la valeur de μ correspondant au maximum de $|S_{FV}(\mu)|$, par ailleurs bien marqué, reste stable à partir de $z_c = 2$ m (figure 4.2 de droite). Pour ces positions d'antenne excentrées, il est donc possible de localiser le nombre d'onde k_z qui dans ce cas diffère nettement de μ_ϕ .

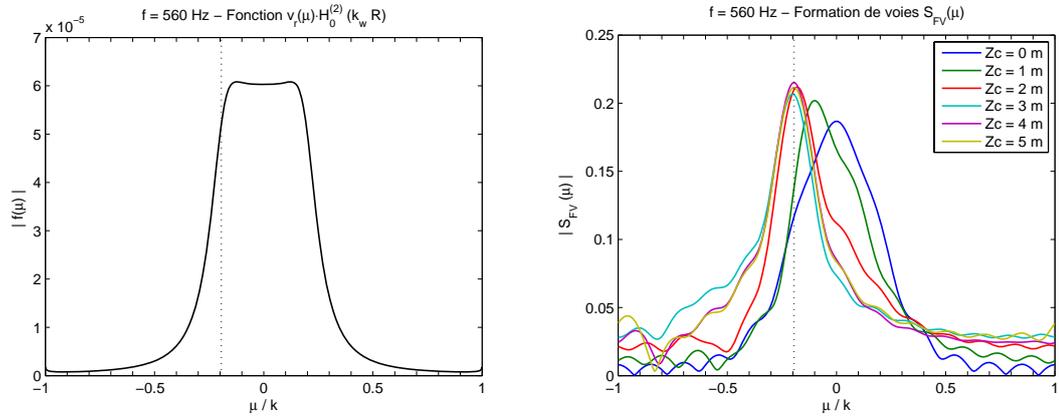


FIGURE 4.2: Localisation du nombre d'onde de l'onde propagative dans le rail à partir de la formation de voies, pour $f = 560$ Hz. Gauche : fonction $|\tilde{V}_r(\mu)H_0^{(2)}(k_w R)|$. Droite : formation de voies $S_{FV}(\mu)$.

Pour les fréquences plus élevées, les ondes potentiellement propagatives sont peu atténuées dans le rail. Leurs propriétés sont proches de celles des ondes pures, notamment au niveau des spectres qui sont localisés dans le domaine transformé (dirac en $\pm k_z$ pour une onde pure de nombre d'onde k_z). Par suite, la réponse de l'antenne pour ces fréquences présente un maximum en $\mu = -k_z$. La figure 4.3 illustre ces propriétés pour $f = 1600$ Hz.

Lorsque l'on tient compte de la périodicité du support, les conclusions énoncées ci-dessus restent inchangées, sauf pour les fréquences proches de la fréquence *pin-pin* (valant 1090 Hz dans ce cas). À ces fréquences, l'allure de $\tilde{V}_r(\mu)$ et donc celle de $f(\mu)$ est fortement modifiée, mais le maximum en sortie d'antenne est toujours obtenu pour $\mu = -k_z$ (figure 4.4). On observe de plus un second maximum pour les valeurs positives de μ en $\mu = +k_z$. Ce phénomène correspond probablement à la superposition de deux ondes cohérentes de mêmes caractéristiques se propageant dans le rail dans des sens opposés, créant le champ vibratoire stationnaire évoqué dans la partie 1.2.3.

En conclusion, lorsque le rail est parcouru par une onde peu atténuée, il est possible d'estimer le nombre d'onde de cette dernière à partir d'un traitement de formation de voies en ondes planes, sous réserve que l'antenne soit suffisamment excentrée par rapport à l'excitation. Cependant, les autres paramètres structuraux comme l'atténuation de l'onde propagative ou le nombre d'onde complexe de l'onde de champ proche associée dans le cas d'un modèle de poutre, ne peuvent pas être déterminés avec cette méthode. Ainsi, le

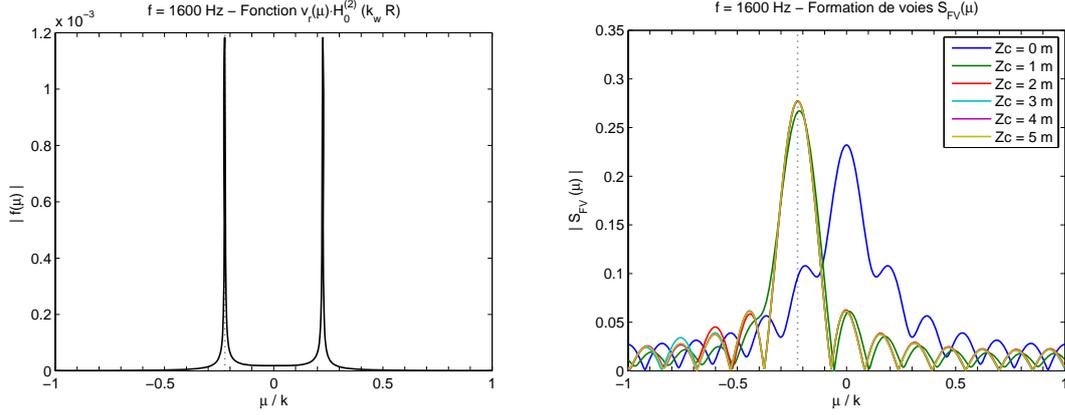


FIGURE 4.3: Localisation du nombre d'onde de l'onde propagative dans le rail à partir de la formation de voies, pour $f = 1600$ Hz. Gauche : fonction $|\widehat{\mathcal{V}}_r(\mu)H_0^{(2)}(k_w r)|$. Droite : formation de voies $S_{FV}(\mu)$.

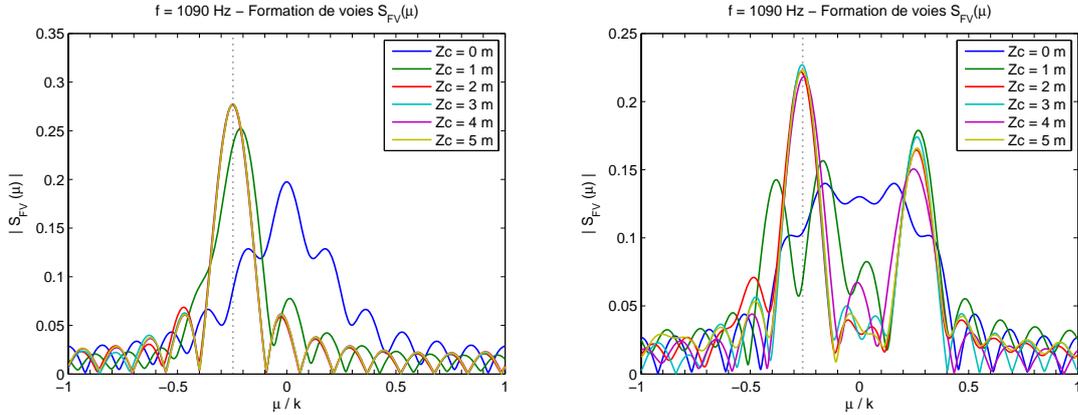


FIGURE 4.4: Localisation du nombre d'onde de l'onde propagative dans le rail à partir de la formation de voies, pour $f = 1090$ Hz. Gauche : formation de voies $S_{FV}(\mu)$ pour un support continu. Droite : formation de voies $S_{FV}(\mu)$ pour un support périodique.

champ acoustique rayonné par le rail ne peut pas être correctement reconstruit dans le cas général à l'aide d'un traitement ondes planes classique, ce qui souligne la déficience de cette méthode dans le cas du rail.

De plus, seul un point de contact a été considéré dans cette étude, en ne prenant en compte qu'un seul type d'onde. Dans un contexte de mesure au passage, la question des contacts multiples peut se résoudre en effectuant la formation de voies pour des positions particulières de l'antenne par rapport aux contacts, comme par exemple entre deux bogies (nombres d'onde de signes opposés) ou en dehors des extrémités du véhicule (pour s'affranchir de la contribution des contacts éloignés). Pour ce qui est de la prise en compte d'autres types d'onde, comme les ondes de flexion latérales par exemple, étudier la capacité à discerner plusieurs nombres d'onde revient à discuter du pouvoir discriminant d'une antenne associée à un traitement en formation de voies en présence de plusieurs ondes d'incidences différentes. Ces performances sont, comme évoqué dans la partie 2.2.1, liées à la longueur de l'antenne.

4.2 L'estimateur des moindres carrés appliqué au cas du rail

La méthode de formation de voies évoquée ci-dessus, est une méthode optimale au sens des moindres carrés dans le cas où des ondes planes sont reçues sur l'antenne. Rapportée à la source, cette situation se retrouve lorsque le rail peut être modélisé par un cylindre pulsant infini parcouru par une onde de la forme $e^{\pm ik_z z}$. Comme nous venons de le voir, cette modélisation est insuffisante pour caractériser le rail. L'objectif de cette partie est d'appliquer le critère des moindres carrés au rail en utilisant, d'après les résultats du chapitre 1, une modélisation vibroacoustique du rail plus complète.

La méthode d'optimisation paramétrique présentée dans la partie 3.3 est basée sur la minimisation d'un critère d'erreur quadratique entre les éléments de la matrice spectrale mesurée et ceux de la matrice spectrale modélisée :

$$\mathcal{C} = \sum_{m,n} |\hat{\Gamma}_{m,n} - \mathbf{S}_{m,n}|^2 = \|\hat{\Gamma} - \mathbf{S}\|_F^2 \quad (4.10)$$

Cette matrice spectrale modélisée \mathbf{S} est construite à partir des vecteurs sources, représentatifs du type de source considérée ainsi que de la propagation jusqu'aux récepteurs :

$$\mathbf{S} = \sum_{p=1}^{N_s} \sigma_p^2 \underline{v}(\underline{\zeta}_p) \cdot \underline{v}(\underline{\zeta}_p)^\dagger + \sigma_b^2 \mathbf{I} \quad (4.11)$$

Les performances de cette méthode sont donc liées au choix du modèle de sources à travers les points suivants :

- Le modèle de source doit représenter le plus fidèlement possible la physique des sources.
- Le nombre de paramètres caractérisant les sources *a priori* doit être le plus limité possible. Plus on doit connaître d'informations sur les sources, moins la méthode est autonome.
- Le nombre de paramètres sur lesquels porte l'optimisation doit également être le plus limité possible. En effet, un problème inverse pour lequel on recherche plus d'inconnues que l'on ne dispose de mesures est en général mal posé. De plus, les procédures d'optimisation exhaustives nécessitent l'utilisation d'algorithmes complexes dont l'utilisation constitue une spécialité à part entière.

4.2.1 Construction du vecteur source dans le cas du rail

Pour bien représenter le rail, le vecteur source doit traduire l'ensemble des phénomènes physiques intervenant entre la force d'excitation et les capteurs acoustiques. À ce titre, plusieurs modèles, notamment vibratoires, émergent de l'étude réalisée dans le chapitre 1. Ces modèles présentés dans les paragraphes suivants, dépendent d'un grand nombre de paramètres, principalement liés aux propriétés mécaniques du rail. Dans les sections 4.3 à 4.6, la pertinence d'inclure ces modèles vibratoires complexes dans le vecteur source est étudiée en termes de représentativité du champ acoustique et de robustesse.

4.2.1.1 Modèle acoustique

Le modèle acoustique 3D utilisé dans la partie 1.3.3 est un modèle simple (en comparaison avec la méthode des éléments finis) qui permet de bien représenter le rayonnement du rail [69] à partir d'un ensemble de monopôles équirépartis sur l'axe du rail. D'après

l'équation (1.25), le champ acoustique peut être reconstruit dès lors que l'on connaît le profil de vitesse le long du rail $\mathcal{V}_r(z)$ ainsi que la quantité Q_{l_0} :

$$p(r, z) = i\omega Q_{l_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}_r(z_s) \frac{e^{-ikr_s(z, z_s)}}{4\pi r_s(z, z_s)} dz_s \quad (4.12)$$

4.2.1.2 Expression générale des vecteurs sources

On pose $G_\omega(z, \underline{\zeta})$ le déplacement du rail soumis à une force ponctuelle unitaire (1 N), dépendant des paramètres $\underline{\zeta}$. L'expression de $G_\omega(z, \underline{\zeta})$ et la nature des paramètres $\underline{\zeta}$ dépendent du modèle vibratoire. D'après l'intégrale (1.25), la pression en un point (r, z) de l'espace s'écrit, pour un contact :

$$p(r, z, \underline{\zeta}) = Av(\underline{\zeta}) \quad (4.13)$$

où l'on a défini le vecteur source $v(\underline{\zeta})$ par

$$v(\underline{\zeta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{V}_r(z_s, \underline{\zeta})}{\mathcal{V}_r(z_e, \underline{\zeta})} \frac{e^{-ikr_s}}{4\pi r_s} dz_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_\omega(z_s, \underline{\zeta})}{G_\omega(z_e, \underline{\zeta})} \frac{e^{-ikr_s}}{4\pi r_s} dz_s \quad (4.14)$$

avec :

$$r_s = \sqrt{r^2 + (z - z_s)^2},$$

$$A = i\omega Q_{l_0} \mathcal{V}_r(z_e, \underline{\zeta}) = -\omega^2 Q_{l_0} F G_\omega(z_e, \underline{\zeta}),$$

F l'amplitude complexe de la force au niveau du point de contact.

L'amplitude A associée au vecteur source inclut donc l'amplitude de l'excitation vibratoire, la réceptance au point d'excitation et le débit massique linéique unitaire du rail, caractéristique de sa capacité à rayonner de l'énergie acoustique pour une vitesse vibratoire donnée. Cette amplitude représente une variation de débit massique linéique : elle est homogène à une pression. Le vecteur source $v(\underline{\zeta})$ est vibroacoustique : il traduit les effets de propagation vibratoire dans le rail et acoustique dans le milieu fluide environnant. Il a été obtenu en normalisant la vitesse vibratoire dans le rail par sa valeur au point d'excitation.

On considère à présent un réseau de N_c microphones, en présence de N_s contacts. Le signal de pression reçu au niveau du microphone n de coordonnées (r_n, z_n) , relatif au contact p est noté $y_{n,p} = A_p v_n(\underline{\zeta}_p)$. On peut écrire, pour le contact p , l'ensemble des signaux reçus sur les N_c capteurs sous forme vectorielle :

$$\begin{aligned} \underline{y}_p &= A_p^t \left[v_1(\underline{\zeta}_p), \dots, v_{N_c}(\underline{\zeta}_p) \right] \\ &= A_p \underline{v}(\underline{\zeta}_p) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$\underline{v}(\underline{\zeta}_p)$ est le vecteur source relatif au contact p d'amplitude complexe A_p . La modélisation vibroacoustique du rail est ainsi linéaire vis-à-vis de A_p , et non linéaire vis-à-vis des paramètres $\underline{\zeta}_p$.

4.2.1.3 Modèles vibratoires

Pour compléter la construction du vecteur source à partir du modèle décrit ci-dessus, il reste à connaître le profil vibratoire $\mathcal{V}_r(z_s)$. Dans le rail, les vibrations sont dues à la superposition d'ondes qui se propagent de part et d'autre de chaque point d'excitation. Ces ondes sont caractérisées par la position des excitations ainsi que par des nombres d'onde complexes qui découlent, selon le modèle vibratoire, de certains paramètres mécaniques du rail et de son support. Pour une excitation en z_e appliquée à un type d'onde donné, on donne ci-dessous l'expression des composantes v_n du vecteur source \underline{v} pour les quatre modèles vibratoires retenus dans cette étude.

Onde miroir

On suppose qu'une seule onde vibratoire se propage de part et d'autre du point d'excitation d'abscisse z_e . Le paramètre $\underline{\zeta}$ caractérisant cette onde est un nombre d'onde complexe k_z , dont les parties réelle et imaginaire définissent respectivement le nombre d'onde réel et l'atténuation. La composante du vecteur source relative au microphone n a pour expression :

$$v_n(z_e, k_z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_z|z_s - z_e|} \frac{e^{-ik_r r_{ns}}}{4\pi r_{ns}} dz_s \quad (4.16)$$

avec : $r_{ns} = \sqrt{r_n^2 + (z_n - z_s)^2}$ la distance qui sépare le microphone n de la source élémentaire d'abscisse ($r = 0, z_s$).

Poutre d'Euler sur support continu

Deux ondes vibratoires associées respectivement à l'onde propagative et à l'onde de champ proche se propagent de part et d'autre du point d'excitation d'abscisse z_e (on utilisera parfois le terme « Champ force » dans la suite). Le paramètre $\underline{\zeta}$ caractérisant cette onde est le nombre d'onde complexe k_β (cf. partie 1.2.2.1). La composante du vecteur source relative au microphone n a pour expression :

$$v_n(z_e, k_\beta) = \frac{1}{1+i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-k_\beta|z_s - z_e|} + i e^{-ik_\beta|z_s - z_e|} \right] \frac{e^{-ik_r r_{ns}}}{4\pi r_{ns}} dz_s \quad (4.17)$$

Poutre de Timoshenko sur support continu

Dans ce cas, deux paramètres caractérisent le champ force : k_p et k_d . La composante du vecteur source relative au microphone n a pour expression :

$$v_n(z_e, k_p, k_d) = \frac{1}{F_d + iF_p} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[F_d e^{-k_d|z_s - z_e|} + iF_p e^{-ik_p|z_s - z_e|} \right] \frac{e^{-ik_r r_{ns}}}{4\pi r_{ns}} dz_s \quad (4.18)$$

Lorsque les paramètres mécaniques du rail libre sont fixés, les amplitudes complexes F_p et F_d sont des fonctions dépendant seulement de k_p et k_d .

Poutre de Timoshenko sur supports périodiques

Dans ce cas, la composante du vecteur source relative au microphone n a pour expression :

$$v_n(z_e, \gamma_p, \gamma_d) = \frac{1}{G_\omega(z_e, z_e, \gamma_p, \gamma_d)} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\omega(z_s, z_e, \gamma_p, \gamma_d) \frac{e^{-ik_r r_{ns}}}{4\pi r_{ns}} dz_s \quad (4.19)$$

avec

$$\begin{aligned} G_\omega(z, z_e, \gamma_p, \gamma_d) &= a_1 Y(\tilde{z}, -\gamma_d) e^{n\gamma_d a} + a_2 Y(\tilde{z}, -\gamma_p) e^{n\gamma_p a} & z = \tilde{z} + na < z_e \\ &= b_1 Y(\tilde{z}, \gamma_d) e^{-n\gamma_d a} + b_2 Y(\tilde{z}, \gamma_p) e^{-n\gamma_p a} & z = \tilde{z} + na > z_e \end{aligned} \quad (4.20)$$

La fonction $Y(\tilde{z}, \gamma)$ ne dépend que des paramètres du rail libre, ainsi, lorsque les paramètres mécaniques du rail sont fixés, les amplitudes complexes des différentes ondes ne dépendent que de γ_p et γ_d (équations (C.4) et (C.12) de l'annexe C).

Ainsi, pour une excitation relative à un type d'onde donné, le vecteur source exprimé ci-dessus pour quatre modèles vibratoires différents dépend de la position du contact z_e et

d'un ou deux nombres d'onde. Il en est de même pour tout autre vecteur source relatif à un autre contact et/ou à un autre type d'onde.

Dans un premier temps, on peut supposer que les positions des excitations et des différents nombres d'onde sont connus, soit directement, soit par l'intermédiaire de mesures préliminaires. Les positions des contacts peuvent être par exemple obtenues à l'aide de détecteurs. En ce qui concerne les nombres d'onde, plusieurs types de mesures peuvent être réalisées :

- Si le rail est modélisé par une poutre, épaisse ou mince, les nombres d'onde s'expriment en fonction des paramètres mécaniques du rail et de son support. On peut alors déterminer les nombres d'onde à l'aide d'une méthode d'estimation paramétrique [70] ou par simple recalage mesures/modèle (cf. partie 5.2.1).
- Pour rester le plus général possible, on peut s'abstenir de l'hypothèse de poutre et déterminer les différents nombres d'onde à l'aide de méthodes directes, par exemple dérivées de la méthode de Prony [71, 72].

Quel que soit le cas envisagé, il est important d'analyser l'impact d'incertitudes entourant les connaissances de ces paramètres sur les performances de la méthode d'optimisation, c'est l'objet de la partie 4.3.2 pour un vecteur source unique (un seul contact, un seul type d'onde).

Dans un deuxième temps, on considérera ces paramètres comme des inconnues du problème qui doivent être estimés par la méthode d'optimisation paramétrique. C'est l'objet des sections 4.5 et 4.6.

Répercussion des erreurs selon le modèle vibratoire

Les incertitudes sur les paramètres vibratoires des différents modèles ne concernent que l'onde propagative, elles peuvent cependant se répercuter sur d'autres paramètres selon le modèle.

Le nombre d'onde k_z de référence pour le modèle *onde miroir* est le nombre d'onde k_p de l'onde propagative pour un modèle de poutre de Timoshenko sur support continu. Les incertitudes au niveau du modèle source ne concernent que k_z .

Pour le modèle *poutre d'Euler sur support continu*, les incertitudes relatives à l'onde propagative se répercutent sur l'onde de champ proche par le biais du nombre d'onde k_β .

Pour le modèle *poutre de Timoshenko sur support continu*, on suppose que l'erreur sur k_p provient d'une raideur apparente de support $s'(\omega)$ incorrecte, déterminée à partir de l'équation de dispersion (1.4). À partir de cette même équation, on répercute ensuite l'erreur sur k_b , et enfin sur F_p et F_d par le biais de l'équation (1.6).

Pour le modèle *poutre de Timoshenko sur supports périodiques*, une démarche similaire est adoptée. L'erreur sur γ_p est répercutée sur γ_d par le biais de $s(\omega)$, en utilisant l'équation de dispersion (1.9). Les erreurs sont ensuite répercutées sur les amplitudes des différentes ondes par le biais du système (C.12).

4.2.2 Critères de représentativité

Disposant de plusieurs possibilités pour modéliser les vibrations du rail, nous souhaitons réaliser une étude permettant de conclure quant à leurs performances respectives, à la fois en termes de robustesse et de représentativité du rail.

Considérons un problème donné de caractérisation de champ acoustique rayonné par un rail. La minimisation du critère \mathcal{C} , représentatif de l'écart entre les mesures de pression sur l'antenne et les pressions calculées à partir d'un modèle, permet d'estimer les paramètres inconnus de ce modèle. Cependant, qu'en est-il du champ global rayonné par le rail ? Le modèle adopté associé aux paramètres optimisés est-il effectivement bien représentatif du

champ rayonné par le rail, en terme de niveau et de signature spatiale ? Un écart faible entre observations sur l'antenne et prévisions garantit-il la « proximité » entre source réelle et source modélisée (problématique des problèmes mal posés au sens d'Hadamard) ? Pour quantifier cette représentativité, et donc évaluer en partie l'efficacité de la méthode proposée dans cette thèse, on effectue, avant toute validation expérimentale, une étude numérique approfondie de son comportement. L'avantage d'une telle étude réside dans le fait que des indicateurs inapplicables à des mesures *in situ* peuvent être utilisés. Dans cette démarche, il faut distinguer :

- le modèle retenu pour simuler le champ acoustique de référence (modèle réel),
- le modèle utilisé dans la méthode d'optimisation paramétrique pour construire les vecteurs sources (modèle source),

tous deux choisis parmi les possibilités décrites ci-dessus (paragraphe 4.2.1.3).

Pour les champs acoustiques associés respectivement au modèle réel et au modèle source, on calcule et on compare les indicateurs suivants, inspirés de l'article [47] de D.J. Thompson (l'annexe G précise plus en détail le calcul de ces indicateurs).

La directivité moyenne ϑ du champ acoustique sur une demi-droite parallèle au rail

Ce critère, dépendant de la distance au rail, est donné pour deux distances au rail distinctes, à savoir sur l'axe de l'antenne (2.5 m) ainsi qu'à 7.5 m. Pour les cas où l'on ne considère qu'un seul contact, la directivité moyenne est évaluée sur la demi-droite dont l'origine se situe en face du point d'excitation d'abscisse z_e :

$$\tan \vartheta = \frac{\int_{z_e}^{+\infty} I_{\vec{r}}(R, z) dz}{\int_{z_e}^{+\infty} I_{\vec{z}}(R, z) dz} \quad (4.21)$$

avec :

$I_{\vec{z}}(R, z)$ l'intensité acoustique longitudinale au point (R, z) de l'espace,

$I_{\vec{r}}(R, z)$ l'intensité acoustique radiale au point (R, z) de l'espace.

La directivité ϑ représente ici l'angle moyen que forme le vecteur intensité \vec{I} avec l'axe \vec{z} du rail.

La puissance acoustique totale rayonnée par les N sources équivalentes représentant le rail

$$W_{tot} = \sum_n \frac{\rho c k^2 |Q_n|^2}{8\pi} + \sum_{\substack{n,j \\ n \neq j}} \frac{\rho c k^2 \Re [Q_n Q_j^*] \sin(kr_{nj})}{8\pi kr_{nj}} \quad (4.22)$$

avec :

Q_n le débit volumique de la source n ,

$r_{nj} = (n - j)\Delta_z$ la distance entre les sources n et j .

La pression acoustique quadratique moyenne sur un segment parallèle au rail

Comme la directivité moyenne, ce critère dépend de la distance au rail, il est évalué pour les deux mêmes distances au rail, sur un segment d'origine z_e de longueur L précisée dans l'annexe G :

$$\langle p^2 \rangle = \frac{1}{L} \int_{z_e}^{z_e+L} \frac{|p(R, z)|^2}{2} dz \quad (4.23)$$

4.2.3 Autres caractéristiques des simulations

Normalisation des pressions

Pour toutes les simulations, les vecteurs sources ainsi que la matrice spectrale mesurée sont normalisés :

$$\underline{d}(\zeta_p) = \frac{\underline{v}(\zeta_p)}{\|\underline{v}(\zeta_p)\|} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{\Gamma}} = \frac{\hat{\mathbf{\Gamma}}}{\|\hat{\mathbf{\Gamma}}\|_F} \quad (4.24)$$

Les amplitudes estimées sont donc sans unité.

Caractéristiques de l'antenne

Les vecteurs sources $\underline{v}(\zeta_p)$ traduisent les phénomènes qui relient la force d'excitation appliquée à un type d'onde donné aux récepteurs (ici, des microphones) ; leurs expressions dépendent donc de la position des microphones dans l'espace. Comme pour les méthodes de traitement d'antenne classiques, les performances de la méthode proposée dans cette thèse dépendent des caractéristiques de l'antenne utilisée. La recherche d'une géométrie d'antenne optimale pour cette méthode n'étant pas l'objectif principal de cette étude, il est dans un premier temps souhaitable d'analyser les performances de la méthode proposée indépendamment des qualités de l'antenne. La démarche suivante est adoptée :

- Une antenne linéaire horizontale à capteurs équidistants est utilisée.
- Lorsque rien n'est précisé, le nombre de microphones est fixé à $N_c = 13$ et ils sont espacés de manière à vérifier strictement, pour chaque fréquence f , le critère de Shannon spatial, à savoir : $d = \lambda/2$ (cf. partie 2.2.1.1). L'écart d entre deux microphones successifs est donc différent pour chaque fréquence d'étude.
- La position du centre de l'antenne par rapport aux différents contacts est un paramètre dont l'influence est étudiée, il sera donc précisé pour chaque cas.
- L'axe de l'antenne est parallèle au rail, à une distance de 2.5 m de ce dernier.

Fréquences caractéristiques étudiées

Quatre fréquences caractéristiques sont étudiées dans chaque cas :

- La fréquence f_{anti} de résonance de la traverse entre les raideurs du ballast et de la semelle. Pour une poutre d'Euler $f_{anti} = 348$ Hz, et pour une poutre de Timoshenko $f_{anti} = 340$ Hz (avec supports périodiques ou non).
- La fréquence $f_{semelle} = 560$ Hz de résonance du rail sur la raideur de la semelle. Cette valeur est commune à l'ensemble des modèles.
- La fréquence *pin-pin* f_{pin} . Dans cette étude, la prise en compte de la périodicité ne concerne que la poutre de Timoshenko. On retient donc comme valeur celle de la fréquence *pin-pin* correspondant à une poutre de Timoshenko sur supports périodiques : $f_{pin} = 1090$ Hz. Pour le modèle vibratoire faisant intervenir une poutre d'Euler, cette fréquence est tout de même étudiée (elle correspond à de faibles atténuations dans le rail).
- Une fréquence élevée $f_{HF} = 1600$ Hz. Cette fréquence est surtout utile dans le cas de la poutre de Timoshenko sur supports périodiques pour lequel elle correspond à des faibles atténuations dans le rail, sans influence de la périodicité sur le profil vibratoire du rail.

4.3 Estimation de l'amplitude dans le cas d'un seul contact

Dans cette partie, on considère un seul contact sur le rail, et on suppose que les paramètres vibratoires ζ du modèle sont connus. En particulier, on connaît la valeur des

différents nombres d'onde des ondes vibratoires se propageant dans le rail. Ainsi, seule la variance de l'amplitude au contact fait l'objet de la procédure d'optimisation.

Si les paramètres $\underline{\zeta}$ sont supposés connus, c'est soit qu'ils ont été mesurés préalablement, soit que l'on dispose des propriétés mécaniques du rail et surtout de son support (raideurs des semelles, du ballast, etc.). Dans les deux cas, des erreurs peuvent avoir été commises, il est donc judicieux de prendre en compte l'effet d'incertitudes sur la connaissance de $\underline{\zeta}$; c'est l'objet de la partie 4.3.2. Dans un premier temps, nous étudions l'influence de la présence d'un bruit additif sur l'estimation de la variance de l'amplitude A .

4.3.1 Influence du bruit de mesure

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la présence d'un bruit additif (supposé blanc) sur les capteurs, nécessite de prendre en compte la variance σ_b^2 de ce bruit dans l'estimateur des moindres carrés. Dans cette thèse, nous faisons le choix de supposer cette variance nulle dans le modèle source et d'observer les dégradations que cette hypothèse engendre sur les performances de la méthode d'estimation, dans le cas où les mesures sont tout de même entachées de bruit. Pour étudier l'influence du bruit indépendamment des autres sources d'erreur, nous prenons un modèle source strictement identique au modèle réel. Les paramètres $\underline{\zeta}$ sont parfaitement connus, ainsi on peut retenir comme seul indicateur celui de l'erreur d'estimation sur la variance de l'amplitude au contact. D'après l'équation (3.36) du paragraphe 3.3.2, l'estimateur qui minimise le critère \mathcal{C} pour une variance de bruit nulle s'écrit :

$$\widehat{\sigma^2_{\mathcal{C}}} = \frac{\underline{v}^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}} \underline{v}}{\|\underline{v}\|^4} \quad (4.25)$$

et en utilisant les grandeurs normalisées :

$$\widehat{\sigma^2_{\mathcal{C}}} = \underline{d}^\dagger \widetilde{\mathbf{\Gamma}} \underline{d} \frac{\|\widehat{\mathbf{\Gamma}}\|_F}{\|\underline{v}\|^2} \quad (4.26)$$

L'estimation $\widehat{\mathbf{\Gamma}}$ de la matrice spectrale mesurée est obtenue en moyennant K réalisations des signaux mesurés sur l'antenne :

$$\widehat{\mathbf{\Gamma}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left[\underline{b}(k) + \sum_{p=1}^{N_s} A_p(k) \underline{v}(\underline{\zeta}_p) \right] \left[\underline{b}(k) + \sum_{p=1}^{N_s} A_p(k) \underline{v}(\underline{\zeta}_p) \right]^\dagger \quad (4.27)$$

Avec :

$A_p(k)$ la k -ième réalisation de A_p , amplitude complexe au contact p , variable aléatoire normale complexe, centrée, de variance σ_p^2

$\underline{b}(k)$ la k -ième réalisation du bruit sur l'ensemble des capteurs, vecteur aléatoire complexe, de composantes indépendantes (spatialement blanc), centrées, de variance σ_b^2 .

En substituant l'équation (4.27) pour $N_s = 1$ dans (4.25), on peut déterminer les expressions analytiques des performances de l'estimateur. Le biais relatif est donné par :

$$\frac{E \left[\widehat{\sigma^2_{\mathcal{C}}} \right] - \sigma^2}{\sigma^2} = \frac{1}{N_c R_{sb}} \quad (4.28)$$

avec R_{sb} le rapport signal sur bruit tel que : $R_{sb} = \frac{\sigma^2 \|\underline{v}\|^2}{N_c \sigma_b^2}$.

Le biais relatif n'est pas lié au nombre K de réalisations utilisées pour estimer la matrice spectrale mesurée. En revanche, il dépend du nombre de microphones, ainsi que

du rapport signal sur bruit. Plus l'antenne comporte de microphones, moins l'estimateur est biaisé. La variance relative est donnée par :

$$\frac{E \left[\widehat{\sigma^2_{\mathcal{C}}}^2 \right] - E^2 \left[\widehat{\sigma^2_{\mathcal{C}}} \right]}{\sigma^4} = \frac{1}{K} \quad (4.29)$$

Contrairement au biais relatif, la variance relative dépend de K et elle n'est pas liée, ni au rapport signal à bruit, ni au nombre de microphones. Elle tend vers 0 lorsque $K \rightarrow \infty$.

Enfin, remarquons que biais et variance ne dépendent pas de l'expression des vecteurs sources. Les performances de l'estimateur sont indépendantes du modèle de source et donc de la fréquence ainsi que des caractéristiques de l'antenne autres que le nombre de microphones N_c . La figure 4.5 représente l'erreur d'estimation sur σ^2 pour deux valeurs de K ; le biais relatif et la variance relative donnés par les équations (4.28) et (4.29) sont également tracés. Une antenne de $N_c = 13$ microphones a été utilisée pour ces simulations.

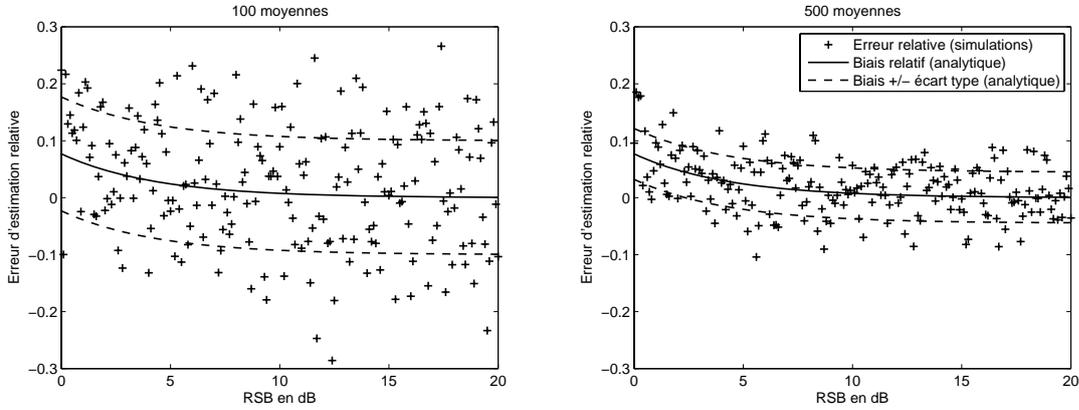


FIGURE 4.5: *Erreur relative d'estimation sur σ^2 en fonction du rapport signal à bruit. Gauche : $K = 100$. Droite : $K = 500$. Estimation par minimisation du critère \mathcal{C} .*

Lorsqu'il y a autant de signal que de bruit (0 dB de rapport signal sur bruit), l'erreur moyenne commise sur l'estimation de σ^2 est inférieure à 0.7dB.

Le critère (4.10) est une somme d'écart quadratiques sur l'ensemble des éléments des matrices spectrales. Or, lorsqu'un bruit spatialement blanc vient s'ajouter aux mesures, la puissance du bruit s'ajoute sur la diagonale des matrices spectrales, impliquant le biais d'estimation. En construisant un critère pour lequel l'écart quadratique sur les éléments diagonaux des matrices spectrales n'est pas pris en compte, on pourrait construire un estimateur non biaisé :

$$\mathcal{C}' = \sum_{\substack{m,n \\ m \neq n}} |\widehat{\Gamma}_{m,n} - \mathbf{S}_{m,n}|^2 \quad (4.30)$$

qui conserve $1/K$ pour variance relative (figure 4.6).

Pour les cas où l'on ne considère qu'un seul contact, la positivité des $\widehat{\sigma^2_{\mathcal{C}'}}$ est assurée par les propriétés des matrices hermitiennes. Dans les cas plus complexes (plusieurs contacts et paramètres inconnus), une attention particulière devra être portée au signe des $\widehat{\sigma^2_{\mathcal{C}'}}$. Notons toutefois que de telles contraintes sur le signe des paramètres à optimiser peuvent s'implémenter aisément dans un algorithme numérique d'optimisation.

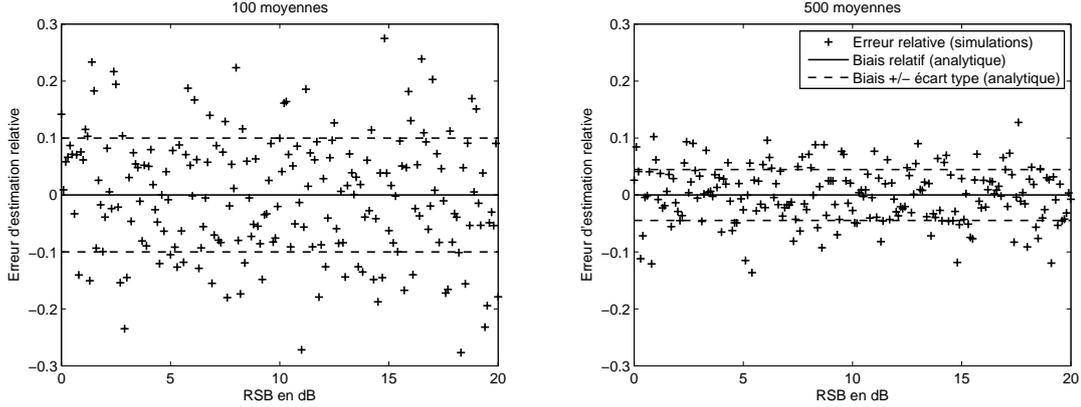


FIGURE 4.6: Erreur relative d'estimation sur σ^2 en fonction du rapport signal à bruit. Gauche : $K = 100$. Droite : $K = 500$. Estimation par minimisation du critère C' .

4.3.2 Incertitudes sur les paramètres supposés connus

Lorsqu'une erreur est commise sur ζ au niveau du modèle, l'erreur d'estimation sur l'amplitude ne reflète pas intégralement l'incidence sur le champ acoustique global. Les critères de représentativité présentés dans le paragraphe 4.2.2 sont donc également étudiés.

Pour le modèle source, des erreurs non cumulées sont introduites sur les paramètres suivants : atténuation, nombre d'onde réel et position de l'excitation z_c . Elles sont introduites de façon relative par rapport à la valeur exacte du paramètre en question. Différents cas sont étudiés suivant le modèle vibratoire adopté, que ce soit pour simuler le champ réel ou le modèle source.

Les conclusions énoncées ci-dessous s'appuient sur de nombreux résultats qui ne peuvent pas être présentés en intégralité dans ce mémoire. Pour chaque type d'erreur (sur l'atténuation, le nombre d'onde et la position du contact), pour chaque modèle (voir paragraphe précédent) et pour chaque fréquence, l'erreur sur les indicateurs a été tracée en fonction de l'erreur sur le paramètre en question, et ce, pour cinq valeurs différentes de l'abscisse z_c du centre de l'antenne ($z_c = 0$ signifie que le centre de l'antenne est en face du point d'excitation).

4.3.2.1 Erreur sur l'atténuation

Pour une fréquence donnée, l'atténuation du modèle source est définie comme suit :

- Si l'atténuation réelle Δ est inférieure 2 dB/m, l'atténuation erronée varie de $\Delta/2$ à 4 dB/m.
- Si $2 \leq \Delta < 10$, l'atténuation erronée varie de $\Delta/2$ à $3\Delta/2$.
- Si $\Delta > 10$, l'atténuation erronée varie de $\Delta - 5$ à $\Delta + 5$.

On s'intéresse ainsi à des erreurs réalistes par rapport à l'atténuation exacte.

Directivité moyenne sur une ligne

L'équation (4.21) montre que la directivité moyenne sur une ligne ϑ ne dépend pas de l'amplitude de la source. L'influence sur la directivité d'une erreur sur un paramètre du modèle ne dépend donc pas de la position de l'antenne par rapport au contact. De manière générale, la directivité est peu affectée par les erreurs sur l'atténuation. Pour les hautes fréquences, nous savons que ϑ est lié à la partie propagative du nombre d'onde. Pour les basses fréquences, l'atténuation reste élevée même lorsqu'elle est erronée, le rail

reste une source à support spatial limité, et les propriétés du champ acoustique sont peu modifiées. Les différents modèles à support continu sont équivalents et la prise en compte de la périodicité conduit aux erreurs les plus importantes, notamment pour $f = f_{pin}$. Sur l'ensemble des modèles et des fréquences, les erreurs observées sont de l'ordre du degré.

Puissance totale rayonnée par le rail et pression quadratique moyenne

Pour les basses fréquences, et quel que soit le modèle retenu, une erreur sur l'atténuation a très peu d'incidence sur les indicateurs, surtout pour les positions d'antenne proches du point d'excitation sur le rail. Les ondes vibratoires sont fortement atténuées dans le rail qui se comporte comme une source ponctuelle, même lorsque l'atténuation du modèle source est erronée. Si l'on sous-évalue trop l'atténuation, l'onde potentiellement propagative commence à effectivement se propager. La portion du rail rayonnante est plus étendue et peut alors être "vue" par une antenne excentrée, menant ainsi à des erreurs plus importantes sur les critères. La figure 4.7 illustre ce comportement dans le cas d'une poutre de Timoshenko sur support continu.

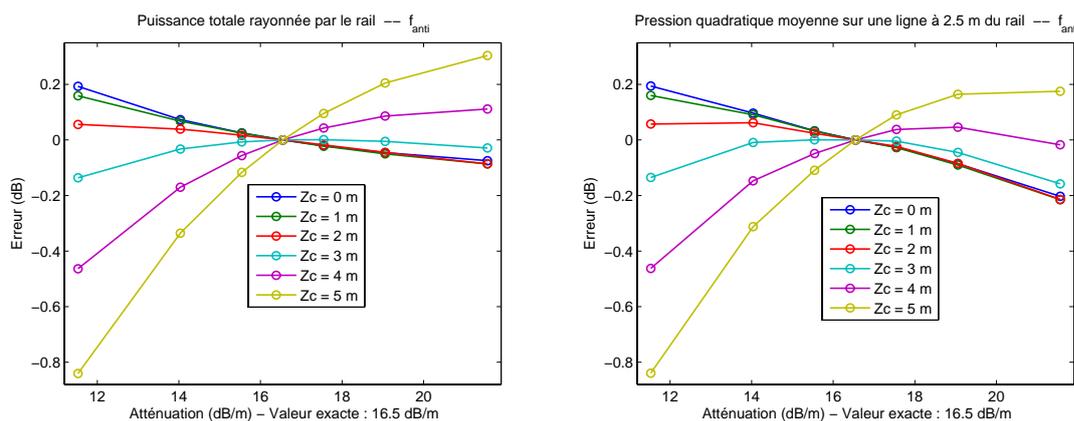


FIGURE 4.7: Influence de l'erreur sur l'atténuation de l'onde propagative pour $f = f_{anti}$. Modèle : poutre de Timoshenko sur support continu. Gauche : erreur en dB sur la puissance totale rayonnée par le rail. Droite : erreur en dB sur la pression quadratique moyenne sur une ligne à 2.5 m du rail.

Pour les hautes fréquences (fréquence *pin-pin* incluse), la variance de l'amplitude du contact est correctement estimée lorsque l'antenne est positionnée en face du contact ; les pressions quadratiques moyennes sur une ligne sont ainsi peu erronées (de l'ordre du dB), à l'inverse de la puissance totale rayonnée, affectée par la diminution de la portion de rail rayonnante due à une atténuation plus forte. Pour les position plus excentrées, la méthode d'estimation compense l'effet d'une atténuation plus élevée en sur-estimant l'amplitude de la source. Cette erreur sur l'amplitude de la source se répercute directement sur la pression quadratique moyenne avec des erreurs dépassant la dizaine de dB, alors qu'elle vient compenser le manque de puissance rayonnée induit par l'atténuation plus élevée. La figure 4.8 illustre ces comportements dans le cas d'une poutre de Timoshenko sur support continu. Les autres modèles vibratoires conduisent aux mêmes résultats.

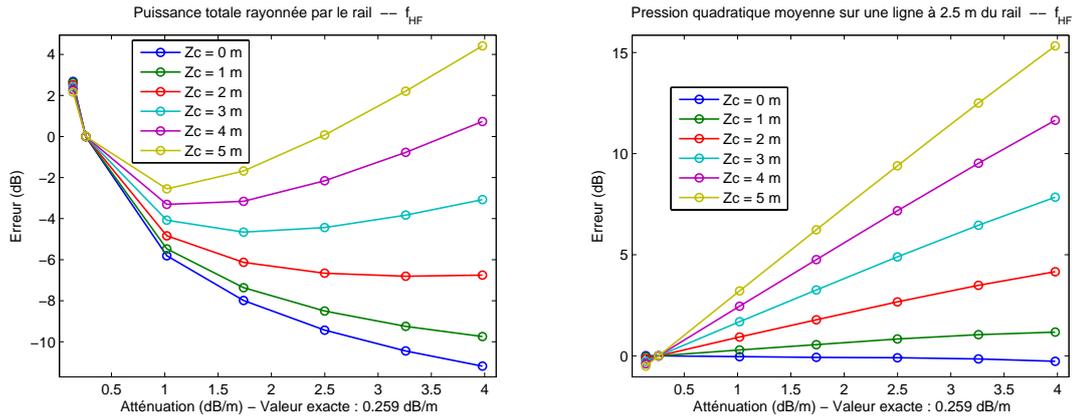


FIGURE 4.8: Influence de l'erreur sur l'atténuation de l'onde propagative pour $f = f_{HF}$. Modèle : poutre de Timoshenko sur support continu. Gauche : erreur en dB sur la puissance totale rayonnée par le rail. Droite : erreur en dB sur la pression quadratique moyenne sur une ligne à 2.5 m du rail.

Pour les fréquences intermédiaires ($f = f_{semelle}$), les positions d'antenne proches du point d'excitation minimisent, comme pour les hautes fréquences, l'erreur d'estimation sur l'amplitude de la source. Les résultats sont semblables à ceux obtenus pour les hautes fréquences à l'exception de l'indicateur de puissance totale dont le comportement tend à se rapprocher des indicateurs de pression quadratique moyenne comme le montre la figure 4.9.

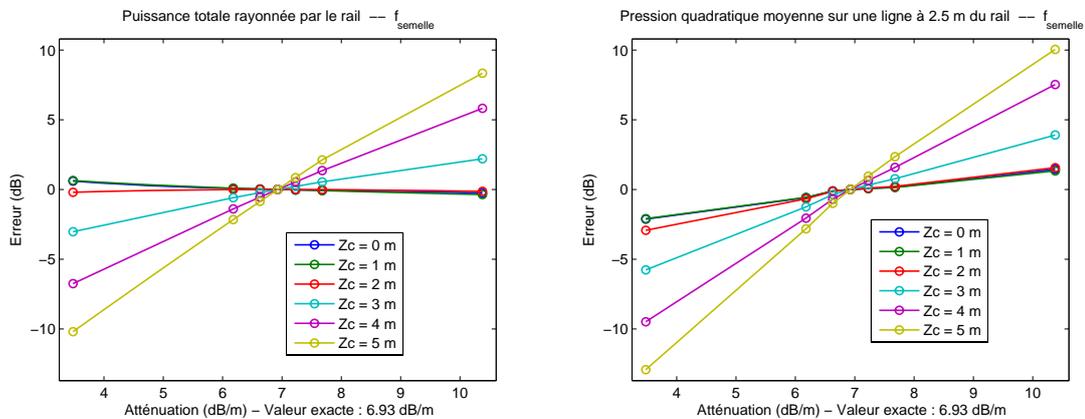


FIGURE 4.9: Influence de l'erreur sur l'atténuation de l'onde propagative pour $f = f_{semelle}$. Modèle : poutre de Timoshenko sur support continu. Gauche : erreur en dB sur la puissance totale rayonnée par le rail. Droite : erreur en dB sur la pression quadratique moyenne sur une ligne à 2.5 m du rail.

4.3.2.2 Erreur sur le nombre d'onde

Dans cette partie, on note k_z la partie propagative du nombre d'onde erroné de l'onde propagative ($k_z = \Re(k_p)$). Pour une fréquence donnée, le nombre d'onde erroné varie de 0.5 fois à 1.5 fois sa valeur exacte.

Directivité moyenne sur une ligne

Quels que soient la fréquence et le modèle vibratoire étudié, les résultats montrent que la directivité est très sensible aux erreurs sur k_z (cf. figure 4.10 pour $f = f_{anti}$ et $f = f_{HF}$ avec un modèle de poutre de Timoshenko sur support continu).

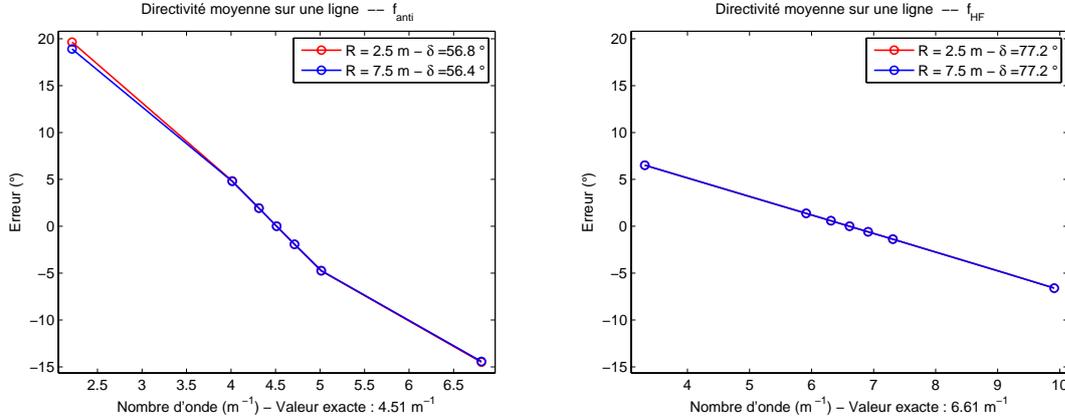


FIGURE 4.10: Influence de l'erreur sur le nombre d'onde k_z - Erreur en degrés sur la directivité moyenne du champ acoustique. Modèle : poutre de Timoshenko sur support continu. Gauche : $f = f_{anti}$. Droite : $f = f_{HF}$.

En hautes fréquences, ce résultat était attendu dans la mesure où chaque partie du rail de part et d'autre du point d'excitation rayonne un champ acoustique cylindrique dont la directivité est liée au nombre d'onde k_z : $\vartheta = \arccos(k_z/k)$.

En basses fréquences, le rail reste une source acoustique localisée même lorsque l'on affecte une valeur de k_z erronée au modèle source. Cependant, le champ acoustique au droit de l'excitation est fortement modifié, comme le montre la figure 4.11 de gauche.

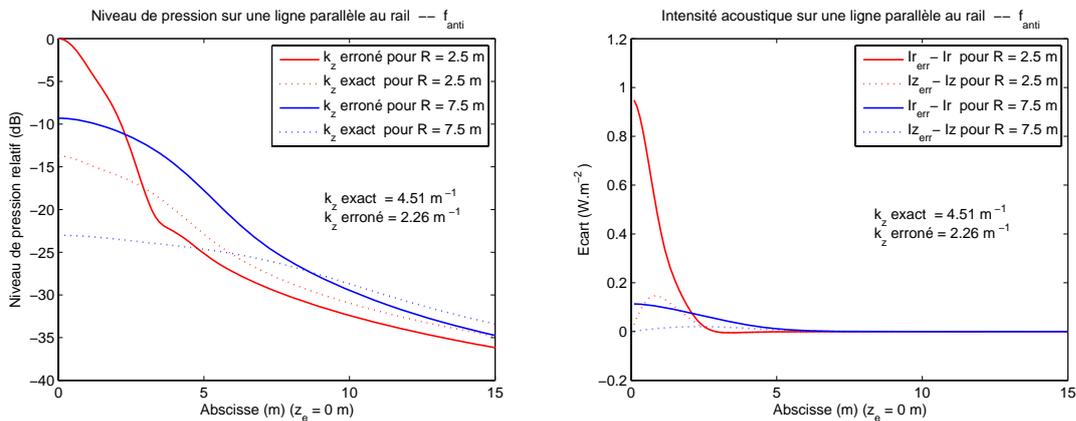


FIGURE 4.11: Influence de l'erreur sur le nombre d'onde k_z pour $f = f_{anti}$ - Influence sur la directivité moyenne du champ acoustique. Modèle : poutre de Timoshenko sur support continu. Gauche : niveau de pression relatif sur une ligne parallèle au rail. Droite : écart sur les composantes radiales et longitudinales de l'intensité acoustique - I_r : intensité radiale - I_z : intensité longitudinale - Indice err pour le modèle erroné.

Cette figure représente le niveau de pression relatif le long d'une ligne parallèle au rail. Les différentes courbes correspondent aux niveaux obtenus pour le modèle réel et le

modèle erroné, à 2.5 m et 7.5 m du rail. Les pressions sont normalisées par le maximum observé sur l'ensemble des tracés. Cette modification du champ de pression au droit de l'excitation se traduit par une augmentation de l'intensité acoustique bien plus importante sur la composante radiale que sur la composante longitudinale, comme le montre la figure 4.11 de droite. Cette figure représente l'écart entre les différentes intensités obtenues pour le modèle réel et le modèle erroné sur une ligne parallèle au rail. Les intensités ont été préalablement normalisées par l'intensité maximale calculée pour l'ensemble des courbes.

Puissance totale rayonnée par le rail et pression quadratique moyenne

Quelle que soit la fréquence, on peut, comme pour l'atténuation, minimiser l'influence de l'erreur sur k_z en positionnant l'antenne en face du point d'excitation (exemple figure 4.12 pour la pression quadratique moyenne, pour une poutre de Timoshenko sur support continu, pour $f = f_{anti}$ et $f = f_{semelle}$).

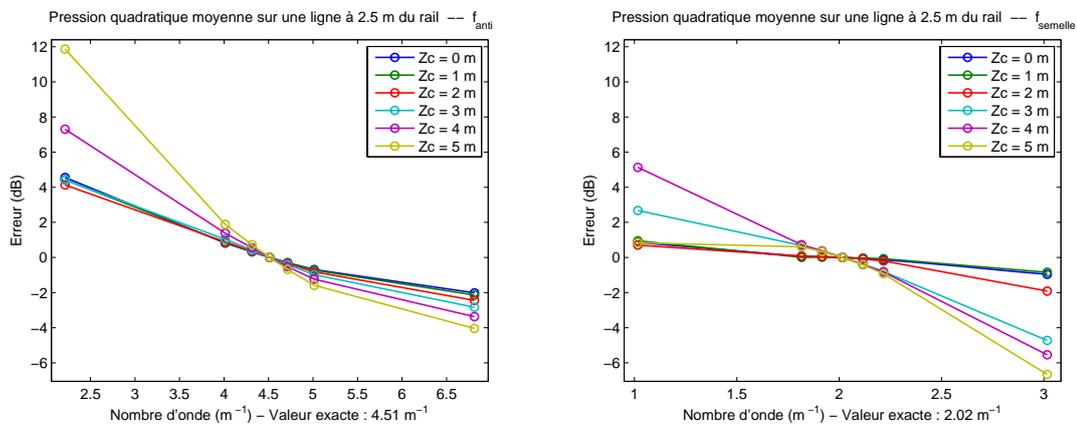


FIGURE 4.12: Influence de l'erreur sur le nombre d'onde k_z - Erreur en dB sur la pression quadratique moyenne sur une ligne à 2.5 m du rail. Modèle : poutre de Timoshenko sur support continu. Gauche : $f = f_{anti}$. Droite : $f = f_{semelle}$.

Pour les hautes fréquences, en raison du lien entre nombre d'onde et directivité moyenne, on retrouve vis-à-vis du nombre d'onde supposé un comportement pour notre méthode proche de celui d'une formation de voies en ondes planes vis-à-vis de son angle de préformation. Une erreur sur k_z peut ainsi conduire à de fortes erreurs d'estimation sur l'amplitude de la source. Par suite, ces erreurs se répercutent directement sur la pression quadratique moyenne ainsi que sur la puissance totale rayonnée par le rail comme le montre la figure 4.13.

Périodicité du support

La prise en compte de la périodicité du support ne modifie pas les résultats pour f_{anti} et $f_{semelle}$. En revanche, pour f_{pin} et f_{HF} , les erreurs observées sur les indicateurs prennent des valeurs plus élevées lorsque l'on tient compte de la périodicité. En effet, pour ces fréquences où l'atténuation dans le rail est faible, les propriétés du champ vibratoire dans le rail, et donc du champ acoustique, dépendent fortement de la valeur de k_z . Pour f_{pin} , une valeur erronée de k_z au niveau du modèle source conduit à la disparition des propriétés liées à l'effet *pin-pin*, à la fois pour le champ vibratoire et pour le champ acoustique. Selon le même principe, pour f_{HF} , les valeurs erronées de k_z tendent à se rapprocher des valeurs à la fréquence *pin-pin* ($k_z = 5.24 \text{ m}^{-1}$) et au double de cette dernière ($k_z = 10.48 \text{ m}^{-1}$).

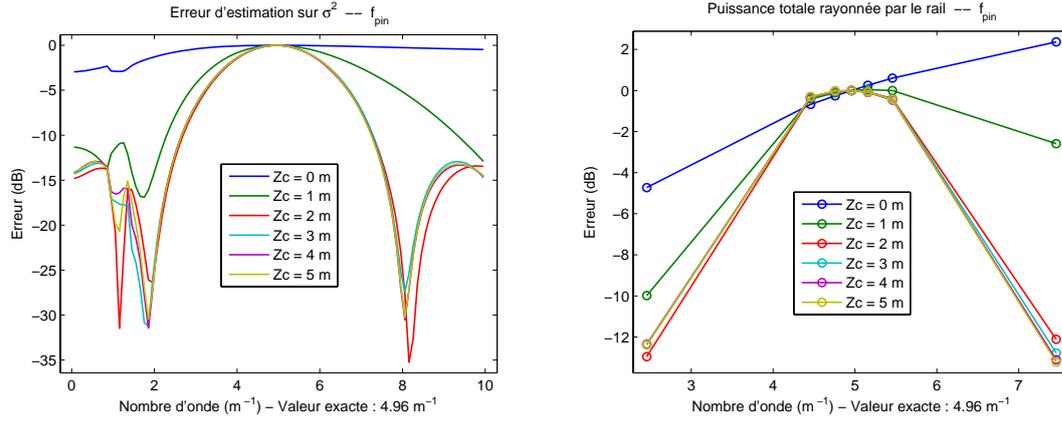


FIGURE 4.13: Influence de l'erreur sur le nombre d'onde k_z pour $f = f_{pin}$ - Lien entre directivité et nombre d'onde dans le rail. Modèle : poutre de Timoshenko sur support continu. Gauche : erreur d'estimation en dB sur la variance de la source. Droite : erreur en dB sur la puissance totale rayonnée par le rail.

La figure 4.14 illustre cette remarque sur la puissance totale rayonnée par le rail, pour $f = f_{HF}$.

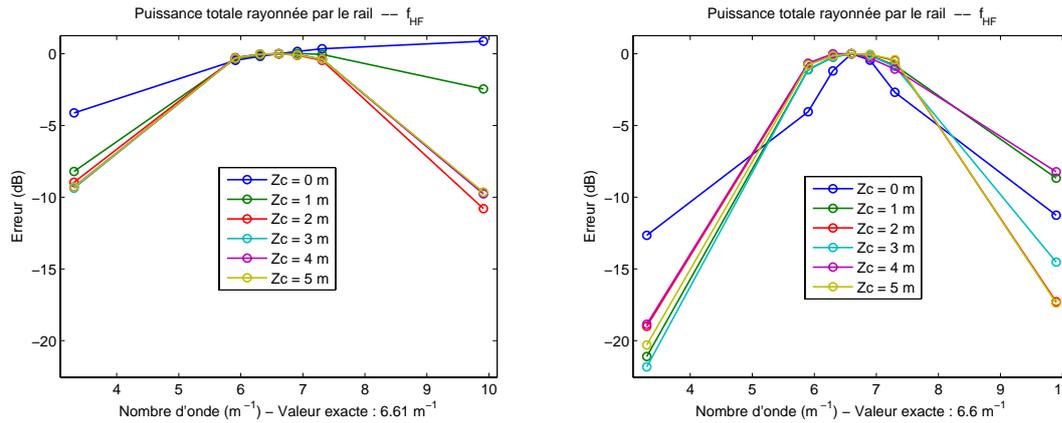


FIGURE 4.14: Influence de l'erreur sur le nombre d'onde k_z pour $f = f_{HF}$ - Effet de la périodicité du support : erreur en dB sur la puissance totale rayonnée par le rail. Gauche : poutre de Timoshenko sur support continu. Droite : poutre de Timoshenko sur supports périodiques.

4.3.2.3 Erreur sur la position du contact

Dans ce cas, la position supposée de l'excitation sur le rail pour le modèle source est erronée (on note \tilde{z}_e la position erronée du contact). La position \tilde{z}_e du modèle source varie jusqu'à la moitié de la distance entre deux traverses de part et d'autre de la valeur exacte z_e ($z_e \pm 0.3$ m).

Modélisations continues du support

Lorsqu'on ne tient pas compte de la périodicité du support, une erreur sur z_e se traduit sur le champ acoustique de la manière suivante :

- l’allure du champ acoustique est simplement décalée dans l’espace,
- l’estimation de la variance de l’amplitude du contact est ainsi entachée d’erreur.

Si le calcul des indicateurs s’effectuait sur des demi-droites d’origine \tilde{z}_e variable, on n’observerait aucune erreur sur la directivité, et l’erreur sur les autres indicateurs serait égale à l’erreur d’estimation sur la variance. C’est pourquoi les indicateurs nécessitant ce type d’intégration sont calculés en prenant z_e pour origine constante de la demi-droite.

Pour $f = f_{anti}$, le rail est une source acoustique localisée spatialement autour de z_e . Notre méthode se comporte dans ce cas comme un traitement de focalisation sur une source ponctuelle localisée au niveau de l’abscisse supposée du contact. Cette remarque est illustrée par la figure 4.15 de gauche, pour une position \tilde{z}_e variant sur un grand intervalle. Les comportements de la puissance totale et de la pression quadratique moyenne suivent celui de l’erreur d’estimation sur la variance, avec notamment une plus grande sensibilité aux erreurs sur la position du contact lorsque l’antenne est positionnée au droit de l’excitation. Sur l’intervalle de variation considéré, ces erreurs maximales atteignent 3 dB pour la puissance totale rayonnée (cf. figure 4.15 de droite). L’erreur sur la directivité ne dépasse pas 4° .

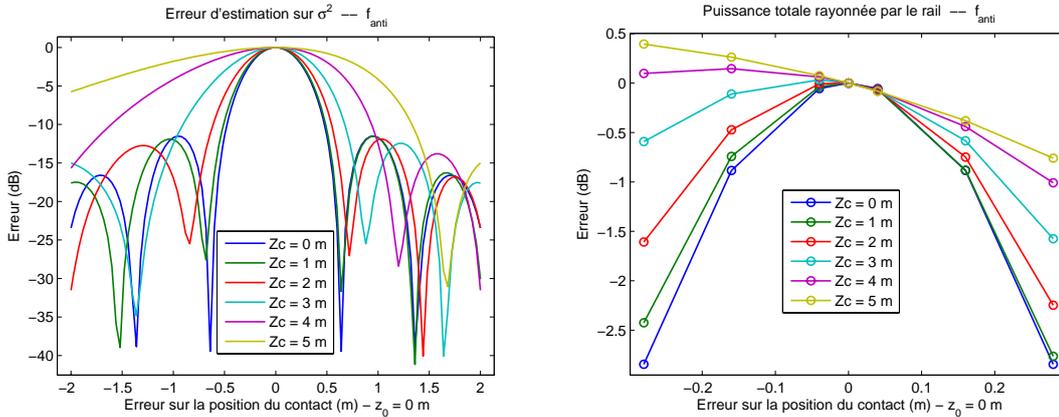


FIGURE 4.15: Influence de l’erreur sur la position du contact pour $f = f_{anti}$. Modèle : poutre de Timoshenko sur support continu. Gauche : erreur d’estimation en dB sur la variance de la source. Droite : erreur en dB sur la puissance totale rayonnée par le rail.

Pour $f = f_{semelle}$, les erreurs observées restent faibles, sur l’intervalle considéré, elles atteignent au maximum 2.5 dB pour les indicateurs de puissance et 1.5° environ pour la directivité. Contrairement à $f = f_{anti}$, les positions d’antenne excentrées ne sont plus celles qui minimisent les erreurs maximales sur les indicateurs de puissance. En effet, les propriétés spatiales du champ acoustique sont hétérogènes à cette fréquence (cf. paragraphe 1.3.4). Lorsque l’antenne est excentrée par rapport au point d’excitation, les microphones se situent en pleine zone perturbée du champ acoustique, et une erreur sur z_e peut entraîner une modification plus importante du champ acoustique au niveau de l’antenne, et de fait des erreurs plus importantes sur les indicateurs pour ces positions.

Pour les hautes fréquences, lorsque l’antenne est excentrée, les microphones se trouvent dans un champ cylindrique caractérisé par sa directivité. Lorsqu’on se trompe sur z_e , le champ reconstruit conserve ses propriétés et notamment la directivité au niveau de l’antenne, comme le montre la figure 4.16 de gauche. La variance de la source est correctement estimée, et les erreurs observées sur les indicateurs de puissance sont faibles (cf. figure 4.16 de droite).

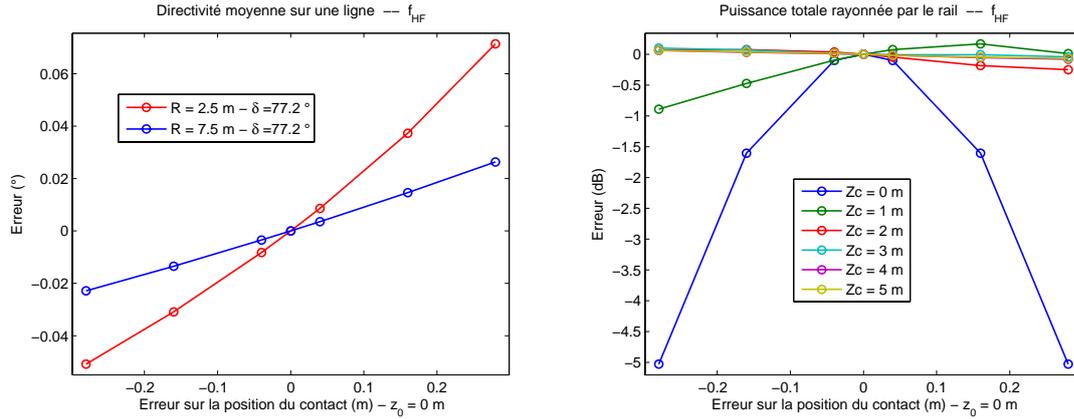


FIGURE 4.16: Influence de l'erreur sur la position du contact pour $f = f_{HF}$. Modèle : poutre de Timoshenko sur support continu. Gauche : erreur en degrés sur la directivité moyenne sur une ligne parallèle au rail. Droite : erreur en dB sur la puissance totale rayonnée par le rail.

Modélisation périodique du support

Dans ce cas, les propriétés du champ acoustique rayonné par le rail dépendent fortement de la position de l'excitation par rapport aux traverses. La symétrie par rapport au plan $z = z_e$ est notamment perdue dès lors que z_e n'est plus à égale distance de deux traverses. Pour les fréquences où la périodicité du support influe peu sur le profil vibratoire dans le rail, les erreurs sur les indicateurs de puissance restent faibles, alors que l'erreur sur la directivité peut atteindre une quinzaine de degrés pour $f = f_{anti}$ lorsque $z_e - \tilde{z}_e$ vaut la moitié de la distance entre deux traverses (cf. figure 4.17 de gauche). Ce comportement s'explique par les fortes modifications engendrées sur les composantes du vecteur intensité dans ce cas, comme le montre la figure 4.17 de droite à 2.5 m du rail.

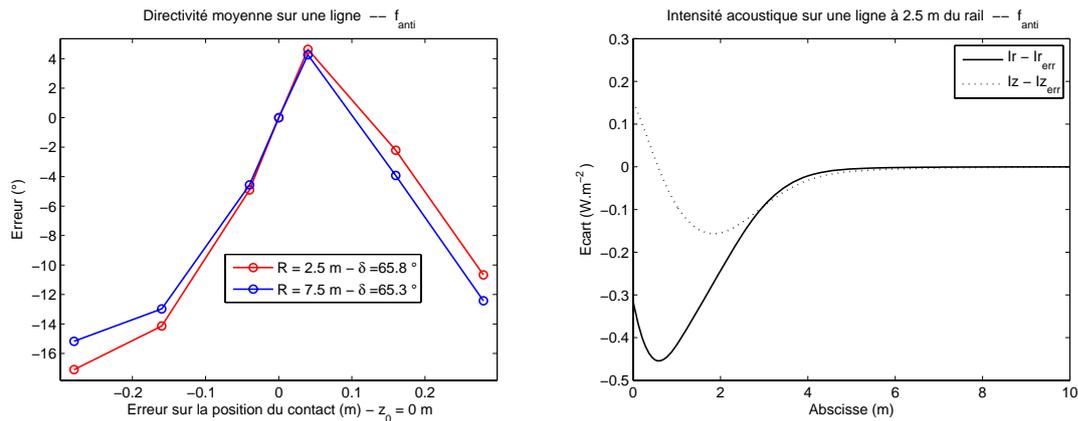


FIGURE 4.17: Erreur sur la position du contact : influence de la périodicité du support sur la directivité moyenne pour $f = f_{anti}$. Modèle : poutre de Timoshenko sur supports périodiques. Gauche : erreur en degrés sur la directivité moyenne. Droite : écart sur les composantes radiales et longitudinales de l'intensité acoustique à 2.5 m du rail - I_r : intensité radiale - I_z : intensité longitudinale - Indice err pour le modèle erroné. $z_e = 0$ m. $\tilde{z}_e = -0.3$ m.

Pour $f = f_{pin}$, le champ acoustique est seulement modifié au droit de l'excitation. Lorsque l'on s'en éloigne, le champ retrouve son caractère stationnaire avec notamment des minima et des maxima localisés respectivement en face des traverses et entre deux traverses (cf. figure 4.18). Les composantes du vecteur intensité ne sont également modifiées qu'au droit de l'excitation, et la directivité moyenne reste peu affectée.

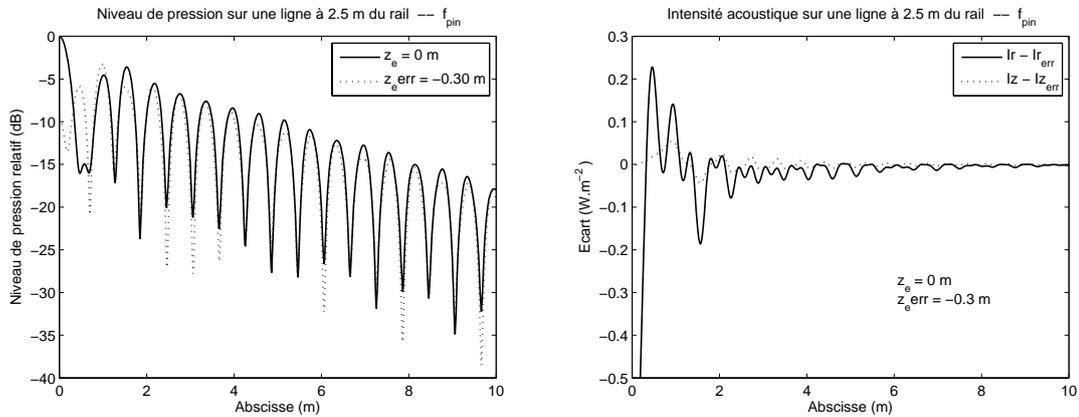


FIGURE 4.18: Erreur sur la position du contact : influence de la périodicité du support sur la directivité moyenne pour $f = f_{pin}$. Modèle : poutre de Timoshenko sur supports périodiques. Gauche : niveau de pression relatif sur une ligne à 2.5 m du rail. Droite : écart sur les composantes radiales et longitudinales de l'intensité acoustique à 2.5 m du rail - I_r : intensité radiale - I_z : intensité longitudinale - Indice err pour le modèle erroné. $z_e = 0$ m, $\tilde{z}_e = -0.3$ m.

Lorsque l'antenne est située en face de l'excitation, elle voit un champ très variable suivant l'erreur commise sur z_e . Une erreur d'estimation très élevée peut être commise sur la variance de l'amplitude, et par conséquent sur la pression quadratique moyenne et la puissance totale (jusqu'à 15 dB sur cette dernière comme le montre la figure 4.19).

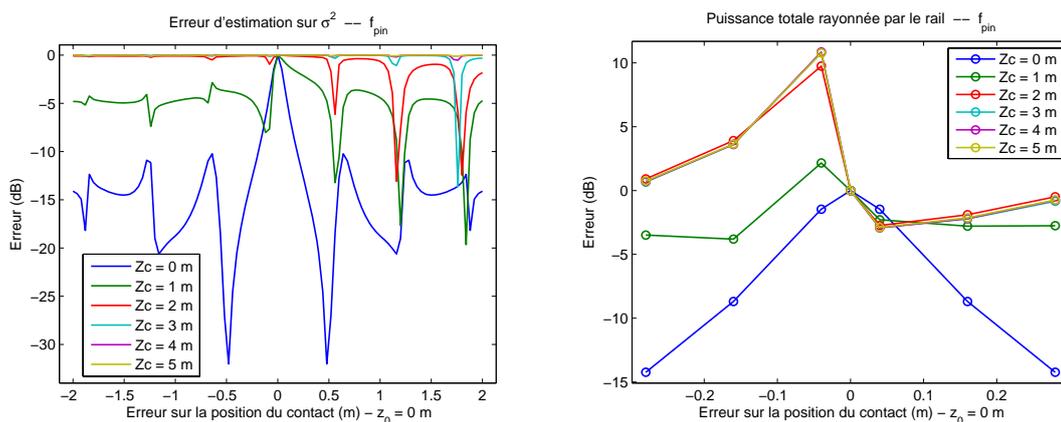


FIGURE 4.19: Influence de l'erreur sur la position du contact pour $f = f_{pin}$. Modèle : poutre de Timoshenko sur supports périodiques. Gauche : erreur d'estimation en dB sur la variance de la source en fonction de l'erreur sur z_e . Droite : erreur en dB sur la puissance totale rayonnée par le rail en fonction de l'erreur sur z_e .

Pour $f = f_{HF}$, le support n'a plus d'influence sur le champ acoustique rayonné par le rail. On retrouve dans ce cas les comportements observés pour les modèles qui négligent la périodicité du support.

4.3.2.4 Conclusion

Lorsque l'on commet des erreurs sur les paramètres caractéristiques du modèle source, le champ acoustique rayonné par le rail est reconstruit de façon dégradée. Selon le paramètre sur lequel porte l'erreur, les répercussions sur les indicateurs sont plus ou moins importantes suivant la fréquence, la position de l'antenne par rapport au contact ou le modèle retenu pour représenter le rail. Pour synthétiser les résultats analysés dans les parties précédentes, on reporte dans un tableau bilan (tableau 4.2), pour chaque fréquence, l'influence sur les indicateurs des erreurs commises sur les paramètres du modèle.

Horizontalement, chaque ensemble de quatre lignes correspond à l'un des paramètres du modèle sur lesquels a porté l'étude : Δ pour l'atténuation de l'onde propagative, k_z pour le nombre d'onde réel de l'onde propagative et z_e pour l'abscisse de l'excitation. Les quatre lignes qui composent chaque groupe correspondent aux quatre fréquences d'étude.

Verticalement, chaque ensemble de trois colonnes correspond à un critère de représentativité : W_{tot} pour la puissance totale rayonnée par le rail, $\langle P^2 \rangle$ pour la pression quadratique moyenne sur une ligne parallèle au rail, ϑ pour la directivité moyenne sur une ligne parallèle au rail. Concernant la pression quadratique moyenne sur une ligne parallèle au rail, les résultats n'ont pas montré de différence significative suivant la distance au rail, c'est pourquoi le tableau ne comporte qu'une seule colonne $\langle P^2 \rangle$. Pour W_{tot} et $\langle P^2 \rangle$, les deux premières sous-colonnes correspondent respectivement à la position d'antenne $z_c = 0$ m (antenne au droit du point d'excitation) et $z_c = 5$ m (l'abscisse du centre de l'antenne est décalée de 5 m). Pour la directivité, les deux premières sous-colonnes correspondent aux deux lignes parallèles au rail sur lesquelles le critère a été calculé, à 2.5 m et à 7.5 m de ce dernier. Pour chaque critère, la colonne de droite correspond à l'effet de la prise en compte de la périodicité par rapport aux résultats obtenus avec un modèle continu. Les différences entre les autres modèles n'étant pas significatives, elles ne sont pas représentées dans ce tableau.

Enfin, on reporte dans chaque case l'influence sur les indicateurs d'une erreur sur les différents paramètres :

- = pour pas d'influence (écarts de l'ordre de 0.1 dB ou 0.5°),
- + légère dégradation (écarts inférieurs au dB ou de l'ordre du degré),
- ++ dégradation marquée (écarts supérieurs au dB ou au degré),
- +++ dégradation excessive (écarts supérieurs à 10 dB ou à 10°),
- les – indiquent que la prise en compte de la périodicité diminue les erreurs sur les indicateurs.

On retiendra les résultats suivants :

- L'influence d'une erreur sur l'atténuation est limitée voire négligeable lorsque l'antenne est au droit de l'excitation.
- La connaissance du nombre d'onde est déterminante, et c'est lorsque l'antenne est au droit de l'excitation que le modèle est le plus robuste.
- L'influence d'une erreur sur la position du contact est assez importante aux basses fréquences pour lesquelles le rail est une source localisée spatialement. Cette influence est limitée lorsque l'antenne est décalée par rapport au contact. Pour les hautes fréquences, dès lors que l'on s'éloigne du droit de l'excitation, le champ acoustique est invariant, et le modèle de source est robuste aux erreurs sur la position du contact.
- La prise en compte de la périodicité augmente la sensibilité aux erreurs sur le nombre

		W_{tot}			$\langle P^2 \rangle$			ϑ		
		$z_c = 0$	$z_c = 5$	Per/Cont	$z_c = 0$	$z_c = 5$	Per/Cont	2.5 m	7.5 m	Per/Cont
Δ	340 Hz	=	+	+	=	+	+	=	=	+
	560 Hz	+	+++	-	+	+++	-	=	=	+
	1090 Hz	+	++	=	=	+++	-	=+	=+	+
	1600 Hz	+	+++	=	=	+++	=	=+	=+	=
k_z	340 Hz	+	++	=	++	+++	=	+++	+++	--
	560 Hz	+	++	=	+	++	=	++	++	=
	1090 Hz	++	+++	+++	++	+++	+++	++	++	=
	1600 Hz	++	+++	+++	++	+++	+++	++	++	+++
z_e	340 Hz	++	+	++	++	=	++	++	+	+++
	560 Hz	+	++	-	+	+	-	+	=+	=
	1090 Hz	++	=	+++	++	=	+++	=	=	+
	1600 Hz	++	=	=	++	=	=	=	=	=

TABLE 4.2: Tableau récapitulatif de l'influence sur les critères de représentativité des erreurs sur les paramètres du modèle.

d'onde pour les hautes fréquences, ainsi que la sensibilité aux erreurs sur la position du contact mais seulement à la fréquence *pin-pin*.

Ainsi, pour les cas où la position du contact est bien connue, il conviendra pour minimiser les risques d'erreur liés aux imprécisions sur les autres paramètres, de positionner l'antenne en face de l'excitation pour estimer la variance de son amplitude.

4.3.3 Modèle source dégradé par rapport au modèle réel

Dans ce cas, le modèle source est différent du modèle utilisé pour simuler le champ acoustique réel rayonné par le rail. L'objectif d'une telle approche est d'identifier de manière précise le modèle source le plus approprié pour la méthode proposée dans cette thèse. Ce modèle doit être suffisamment complet pour représenter les caractéristiques principales du champ acoustique rayonné par le rail, mais également relativement simple pour limiter le nombre de paramètres inconnus à retrouver par optimisation.

On ne considère qu'une seule excitation dont la variance inconnue est estimée à partir du critère des moindres carrés, pour plusieurs positions de l'antenne par rapport à l'excitation. Les indicateurs utilisés pour quantifier la représentativité du modèle source sont identiques à ceux de la partie précédente. L'écart en dB entre la variance de la source réelle et la variance estimée du modèle est un résultat donné à titre indicatif. En effet, ces variances se rapportent à deux modèles différents dont la contiguïté globale n'est pas garantie par un faible écart entre leurs variances respectives, même après normalisation sur l'antenne.

On s'intéresse particulièrement aux effets des dégradations suivantes :

- périodicité du support négligée,
- effet de cisaillement négligé,
- hypothèse de poutre supprimée.

4.3.3.1 Périodicité du support négligée

Le modèle réel tient compte de la périodicité du support contrairement au modèle de source pour lequel un support continu est adopté. Les paramètres caractéristiques ζ du modèle source sont connus : le nombre d'onde k_p de l'onde propagative du modèle source

est égal à $-i\gamma_p$, où γ_p est la constante de propagation du modèle réel tenant compte de la périodicité du support (cf. annexe C). Pour un k_p donné, les paramètres k_d , F_p et F_d du modèle source sont déterminés de manière analogue à ce qui a été décrit dans la partie 4.2.1.3 ($k_d = -ik_p$ et $F_d = F_p = 1$ pour une poutre d'Euler). La périodicité du support a été négligée pour quatre différents modèles :

- poutre d'Euler, *onde miroir*²,
- poutre d'Euler, *champ force*³,
- poutre de Timoshenko, *onde miroir*,
- poutre de Timoshenko, *champ force*.

Les caractéristiques géométriques de l'antenne sont inchangées (cf. partie 4.2.1.2) ; son axe est parallèle au rail, à 2.5 m de ce dernier, et l'abscisse de son centre z_c varie de z_e à $z_e + 5$ m, par pas de un mètre. La position z_e de l'excitation par rapport aux traverses étant importante lorsque la périodicité du support est évoquée, elle constitue ici une variable d'étude prenant trois valeurs : $z_e = 0$ cm, $z_e = 15$ cm et $z_e = 30$ cm (les traverses sont espacées de 60 cm et $z_e = 0$ cm correspond à une excitation sur une traverse).

On suppose que les effets de cette dégradation se répercutent sur les indicateurs par une erreur totale qui est le cumul de deux erreurs distinctes : une erreur uniquement liée à la dégradation et une erreur liée à l'estimation de l'amplitude de la source. Ainsi, pour une fréquence donnée, on adopte la démarche expérimentale suivante :

- Pour chaque modèle, on calcule l'erreur sur les indicateurs lorsque les variances du modèle réel et du modèle source sont identiques. Cette erreur représente uniquement l'effet de la dégradation sur les propriétés spatiales du champ acoustique ; elle ne dépend pas de la position de l'antenne qui n'influe que sur l'estimation de la variance de la source dans ce cas. Dans la suite on appelle cette erreur *l'erreur modèle*.
- Pour chaque modèle, on calcule l'erreur commise sur l'estimation de la variance de la source σ^2 en fonction de la position z_c du centre de l'antenne.
- L'erreur totale sur les indicateurs, qui dépend de la position de l'antenne, est donc la somme de ces erreurs exprimées en dB, sauf pour la directivité qui ne dépend pas de la variance des sources.

Présentation des résultats

La négligence de la périodicité du support se traduit de façon identique sur les indicateurs quel que soit le modèle utilisé. Les erreurs modèle sont notamment du même ordre de grandeur, alors que les erreurs commises sur l'estimation de la variance de la source peuvent différer de 2 dB entre deux modèles. Seuls les résultats qui concernent le modèle *Timoshenko champ force* sont illustrés dans cette partie.

L'erreur modèle est donnée table 4.3 : W_{tot} représente la puissance totale rayonnée par le rail, $\langle P^2 \rangle_{2.5}$ (resp. $\langle P^2 \rangle_{7.5}$) la pression quadratique moyenne sur une ligne parallèle au rail, à 2.5 m (resp. 7.5 m) de ce dernier et $\vartheta_{2.5}$ (resp. $\vartheta_{7.5}$) la directivité moyenne sur une ligne parallèle au rail, à 2.5 m (resp. 7.5 m) de ce dernier. Les erreurs sur ces critères sont obtenues en prenant des variances identiques pour la source réelle et la source modélisée.

Basses fréquences ($f = f_{anti}$)

La figure 4.20 représente l'écart en dB entre la variance de la source réelle et la variance estimée à l'aide du critère des moindres carrés ($10 \log(\sigma^2 / \widehat{\sigma^2}_c)$), en fonction de la position de l'antenne et selon l'abscisse de l'excitation par rapport aux traverses.

2. *Onde miroir* : une onde propagative se propageant de part et d'autre de l'excitation.

3. *Champ force* : deux ondes corrélées (onde propagative et onde de champ proche) se propageant de part et d'autre de l'excitation.

Erreur modèle z_e (cm)	f_{anti}			$f_{semelle}$			f_{pin}			f_{HF}		
	0	15	30	0	15	30	0	15	30	0	15	30
W_{tot} (dB)	2.3	1.3	0.26	-0.08	-1.2	-1.7	2.0	-5.6	-8.1	-0.83	-0.52	0.67
$\langle P^2 \rangle_{2.5}$ (dB)	0.55	3.7	2.8	0.36	-0.89	-1.4	1.0	7.3	-8.5	-0.83	-0.61	0.83
$\langle P^2 \rangle_{7.5}$ (dB)	0.74	3.7	2.8	0.13	-0.60	-1.2	1.0	-6.7	-8.7	-0.80	-0.56	0.75
$\vartheta_{2.5}$ (°)	-3.6	-0.30	10.7	0.06	0.01	0.06	-11.6	-11.1	-9.9	-0.20	-0.22	-0.26
$\vartheta_{7.5}$ (°)	-3.5	-0.10	10.5	0	0.09	0	-6.4	-7.5	-6.1	-0.19	-0.25	-0.25

TABLE 4.3: Périodicité du support négligée - Influence sur les critères de représentativité en fonction de la fréquence et de l'abscisse de l'excitation (erreurs modèle). Modèle : poutre de Timoshenko, champ force.

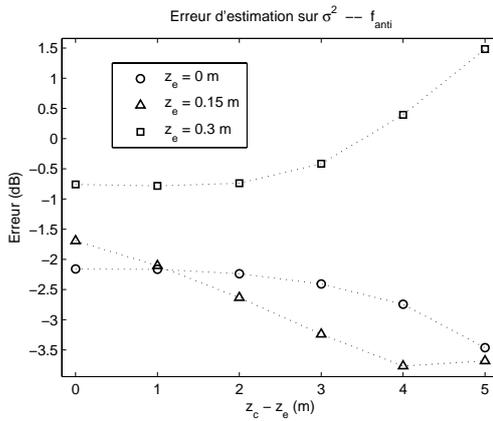


FIGURE 4.20: Périodicité du support négligée - Influence sur l'estimation de la variance de la source en fonction de la position de l'antenne. Modèle : Timoshenko Force. $f = f_{anti}$.

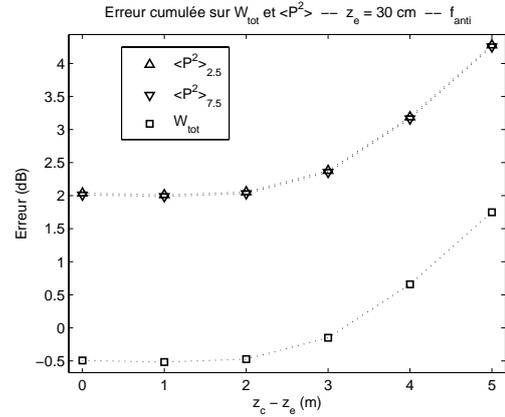


FIGURE 4.21: Périodicité du support négligée - Erreur cumulée sur la puissance totale rayonnée et sur la pression quadratique moyenne. Modèle : Timoshenko Force. $z_e = 30$ cm, $f = f_{anti}$.

Le croisement des erreurs apportées par la dégradation du modèle à variance équivalente (table 4.3) avec les erreurs relatives à l'estimation de cette variance (figure 4.20) montre que l'ensemble des paramètres étudiés a une influence sur les résultats. Selon le modèle vibratoire (non illustré ici), la position de l'antenne, ou la position de l'excitation par rapport aux traverses, seules quelques tendances peuvent être déduites des résultats.

L'étude du comportement vibratoire du rail effectuée dans le chapitre 1, et notamment l'étude de l'influence de la périodicité (cf. partie 1.2.3.3), laissait présager une faible influence de la nature du support pour $f = f_{anti}$. Cependant, comme le montre la figure 4.21 pour $z_e = 30$ cm, on peut observer des erreurs cumulées atteignant 4 dB sur la pression quadratique moyenne. Ces erreurs s'expliquent par les fortes dérives apportées par l'antenne sur l'estimation de la variance, pour les positions excentrées (figure 4.20).

Dans certains cas, l'erreur sur la variance et l'erreur modèle peuvent se compenser, comme on peut le voir sur la figure 4.21 pour W_{tot} .

Globalement, lorsque l'antenne est située en face du point d'excitation, les erreurs observées sont faibles. Suivant la position du contact par rapport aux traverses, les indicateurs de puissance sont surestimés ou sous-estimés lorsque l'on décale l'antenne du droit de l'excitation.

Pour $z_e = 30$ cm, l'erreur sur la directivité est maximale. En effet, lorsque l'on excite le rail au niveau d'une attache, les champs vibratoires et acoustiques possèdent un minimum local en $z = z_e$. Cette perturbation au droit de l'excitation se traduit en champ lointain, sur une ligne parallèle au rail, par une diminution importante de la composante longitudinale du vecteur intensité.

Fréquences intermédiaires ($f = f_{semelle}$)

Pour cette fréquence, la périodicité du support a très peu d'influence sur l'ensemble des indicateurs. Les erreurs cumulées sur la puissance totale et la pression quadratique moyenne n'excèdent pas le décibel (figure 4.23 pour $z_e = 30$ cm), les erreurs sur la directivité sont inférieures au degré. L'étude croisée de la table 4.3 et de la figure 4.22 montre cependant que les faibles erreurs cumulées observées résultent de phénomènes compensatoires entre l'erreur modèle et l'erreur sur la variance qui ont dans la plupart des cas des signes opposés.

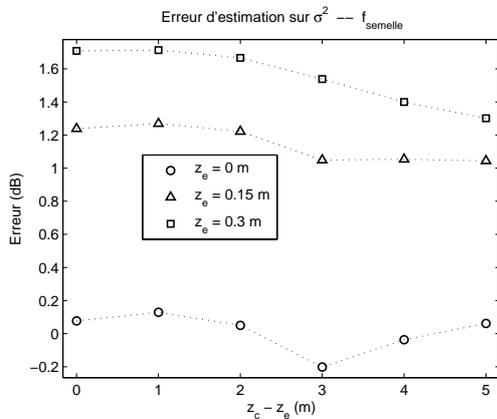


FIGURE 4.22: Périodicité du support négligée - Influence sur l'estimation de la variance de la source en fonction de la position de l'antenne. Modèle : Timoshenko Force. $f = f_{semelle}$.

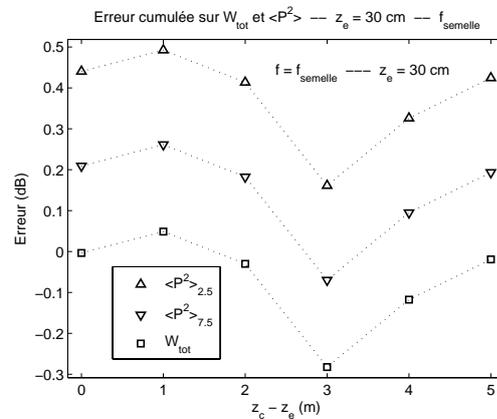


FIGURE 4.23: Périodicité du support négligée - Erreur cumulée sur la puissance totale rayonnée et sur la pression quadratique moyenne. Modèle : Timoshenko Force. $z_e = 30$ cm, $f = f_{semelle}$.

En ce qui concerne les différents modèles vibratoires, les erreurs les plus importantes ont été observées pour une poutre de Timoshenko. La présence ou non de l'onde de champ proche ne modifie pas les résultats.

Fréquence *pin-pin* ($f = f_{pin}$)

Pour cette fréquence particulière, la prise en compte de la périodicité se traduit par les effets *pin-pin* décrits dans la partie 1.2.3. Le champ vibratoire dans le rail présente des nœuds localisés au niveau des attaches, induisant un champ acoustique stationnaire aux propriétés similaires. Lorsque la périodicité du support est négligée, on se retrouve dans un cas où l'atténuation des ondes vibratoires dans le rail est faible. Ce dernier rayonne des ondes cylindriques suivant un angle lié au nombre d'onde dans le rail. Ainsi, c'est au niveau des indicateurs de directivité qu'apparaissent les dérives les plus importantes, comme le montre la table 4.3.

Pour ce qui est de la puissance totale rayonnée et de la pression quadratique moyenne, on se retrouve à nouveau dans un cas où l'erreur modèle et l'erreur sur la variance tendent à se compenser. Les erreurs cumulées sur ces critères sont de l'ordre de 4 dB (figure 4.25 pour $z_e = 30$ cm).

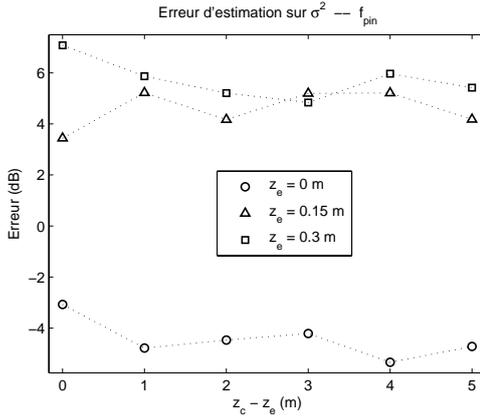


FIGURE 4.24: Périodicité du support négligée - Influence sur l'estimation de la variance de la source en fonction de la position de l'antenne. Modèle : Timoshenko Force. $f = f_{pin}$.

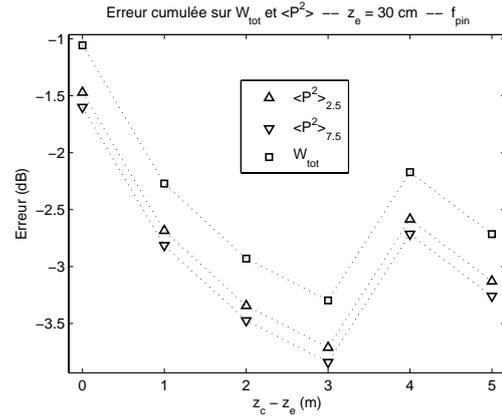


FIGURE 4.25: Périodicité du support négligée - Erreur cumulée sur la puissance totale rayonnée et sur la pression quadratique moyenne. Modèle : Timoshenko Force. $z_e = 30$ cm, $f = f_{pin}$.

Avec un modèle périodique, les propriétés du champ vibratoire dans le rail et donc du champ acoustique associé dépendent fortement de la position de l'excitation par rapport aux traverses. Les erreurs modèle regroupées dans la table 4.3 varient de manière significative suivant la position de l'excitation. En revanche, le motif du champ acoustique étant régulier à cette fréquence (cf. section 1.3.4), la position de l'antenne a très peu d'influence sur les résultats (cf. figure 4.24). Enfin, les erreurs les plus importantes ont été observées pour une poutre de Timoshenko. La présence ou non de l'onde de champ proche ne modifie pas les résultats.

Hautes fréquences ($f = f_{HF}$)

Pour les hautes fréquences, le profil vibratoire dans le rail n'est pas influencé par la périodicité du support, sauf au niveau de l'excitation (cf. partie 1.2.3). Le champ acoustique est cylindrique quel que soit le modèle, et l'ensemble des indicateurs est bien représenté avec une modélisation continue du support (figure 4.26 pour l'erreur d'estimation sur σ^2 et figure 4.27 pour un exemple d'erreurs cumulées avec $z_e = 30$ cm).

Conclusion

Lorsque la périodicité du support est négligée, les résultats montrent que de nombreux paramètres influencent les erreurs sur les indicateurs. Ces erreurs interviennent à deux niveaux : l'erreur sur la variance de la source et l'erreur apportée par le modèle dégradé. Dans beaucoup de cas, ces erreurs se compensent, conduisant ainsi à des erreurs cumulées de l'ordre de quelques décibels.

Pour les hautes fréquences et pour la fréquence de résonance de la semelle, la prise en compte de la périodicité du support n'est pas nécessaire pour bien représenter le champ acoustique rayonné par le rail, au sens des indicateurs utilisés.

En revanche, pour les basses fréquences, et surtout pour la fréquence *pin-pin*, des dérives importantes sont apportées par la négligence de la périodicité. Dans ce cas, la position d'antenne qui minimise les erreurs observées dépend de la position de l'excitation par rapport aux traverses.

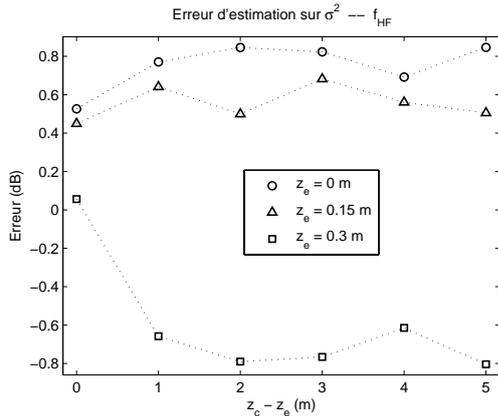


FIGURE 4.26: Périodicité du support négligée - Influence sur l'estimation de la variance de la source en fonction de la position de l'antenne. Modèle : Timoshenko Force. $f = f_{HF}$.

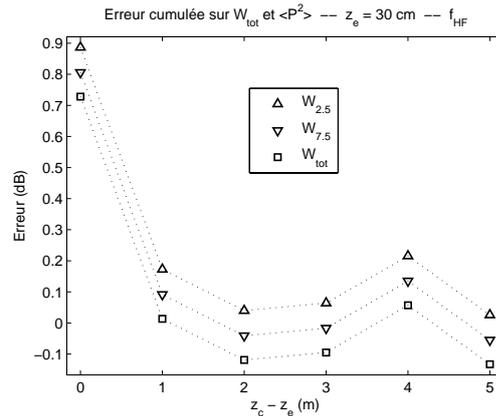


FIGURE 4.27: Périodicité du support négligée - Erreur cumulée sur la puissance totale rayonnée et sur la pression quadratique moyenne. Modèle : Timoshenko Force. $z_e = 30$ cm, $f = f_{HF}$.

4.3.3.2 Effet de cisaillement négligé

Connaissant les grandeurs mécaniques du rail et de son support, la prise en compte du cisaillement est nécessaire pour étudier le comportement vibratoire du rail au-delà de 1 kHz [34], notamment pour déterminer les paramètres caractéristiques des ondes qui s'y propagent en fonction de la fréquence. Cependant, dans cette section où nous supposons ces paramètres connus, le cisaillement n'intervient qu'au niveau des rapports entre les amplitudes complexes et les nombres d'onde complexes relatifs à l'onde de champ proche et à l'onde propagative. Ces rapports nécessitant la connaissance de plus de paramètres dans le cas d'une poutre épaisse de Timoshenko, l'objectif de cette étude est de montrer dans quelle mesure l'utilisation de ce modèle plus complexe est justifiée.

Le modèle réel est un modèle de poutre épaisse de Timoshenko sur support continu, caractérisé par deux nombres d'onde k_p et k_d , solutions de l'équation de dispersion (1.4). L'onde de champ proche et l'onde propagative ont des amplitudes complexes F_p et F_d différentes, obtenues à partir de k_p , k_d et des équations mécaniques relatives au modèle de poutre de Timoshenko.

Le modèle source est un modèle de poutre mince d'Euler sur support continu, caractérisé par la constante de propagation k_β supposée connue et égale à k_p .

Les résultats présentés ici concernent le cas du support continu. La table 4.4 regroupe les erreurs ainsi que les valeurs exactes de la directivité moyenne sur une ligne parallèle au rail, pour les quatre fréquences d'étude. Les figures 4.28 et 4.29 représentent les erreurs cumulées en dB sur la puissance totale rayonnée par le rail ainsi que sur la pression quadratique moyenne sur un ligne parallèle au rail.

Ces résultats montrent que dans le cas où l'on néglige la périodicité du support, si l'on connaît la valeur du nombre d'onde de l'onde propagative, on peut alors négliger les effets du cisaillement sans dégrader la représentativité du champ acoustique. On obtient par ailleurs les résultats suivants concernant la position de l'antenne :

- pour les hautes fréquences les erreurs sur les indicateurs de puissance et de pression quadratique moyenne sont minimales lorsque l'antenne est décalée par rapport à l'excitation,
- pour $f = f_{anti}$ ces erreurs sont minimales lorsque $z_c = z_e$.

Erreur sur la Directivité	f_{anti}		$f_{semelle}$		f_{pin}		f_{HF}	
	Valeur exacte	Erreur						
$\vartheta_{2.5}(\circ)$	56.8	4.32	83.7	0.27	76	0.15	77.2	0.09
$\vartheta_{7.5}(\circ)$	56.4	4.25	83.3	0.22	76	0.15	77.2	0.09

TABLE 4.4: Cisaillement négligé - Influence sur la directivité moyenne sur une ligne parallèle au rail en fonction de la fréquence. Modèle réel : poutre de Timoshenko sur support continu. Modèle source : poutre d'Euler sur support continu.

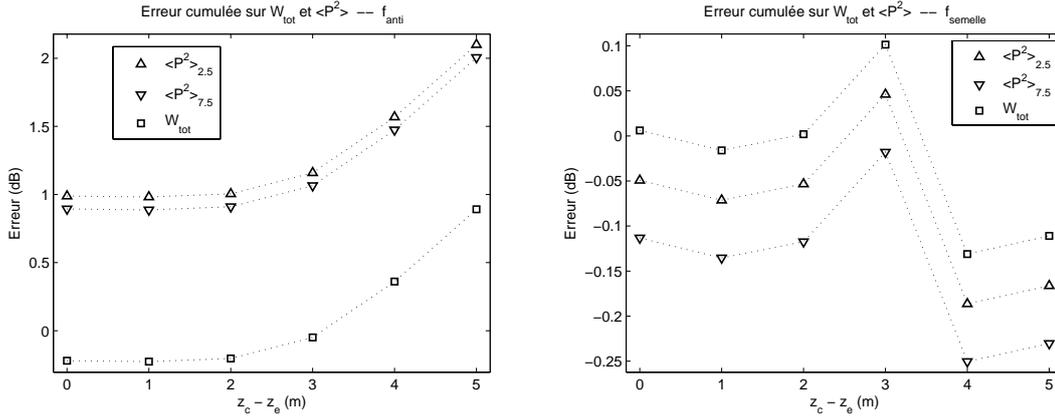


FIGURE 4.28: Cisaillement négligé - Erreur cumulée sur la puissance totale rayonnée et sur la pression quadratique moyenne. Modélisation continue du support. Gauche : $f = f_{anti}$. Droite : $f = f_{semelle}$.

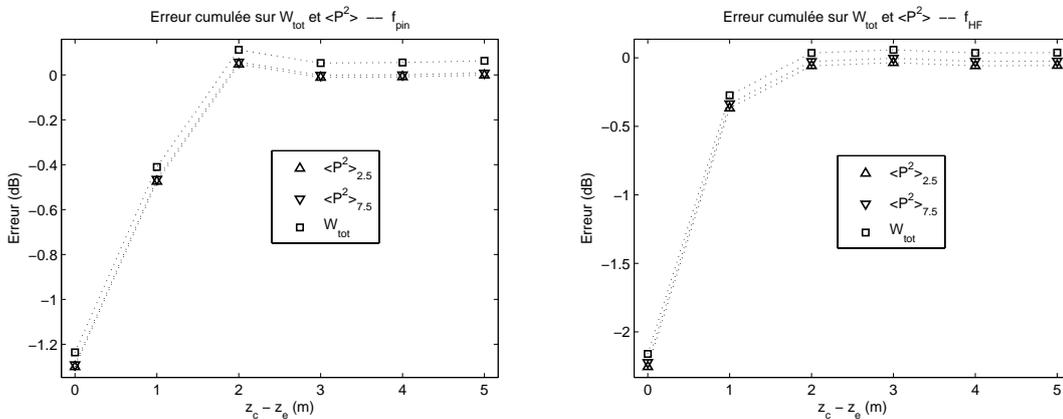


FIGURE 4.29: Cisaillement négligé - Erreur cumulée sur la puissance totale rayonnée et sur la pression quadratique moyenne. Modélisation continue du support. Gauche : $f = f_{pin}$. Droite : $f = f_{HF}$.

4.3.3.3 Décorrélation des ondes de flexion

La modélisation du rail par une poutre, mince ou épaisse, est appropriée pour étudier le comportement vibratoire du rail jusqu'à 3 kHz environ dans le cas d'une excitation verticale (1 kHz pour la poutre mince). Elle permet notamment d'identifier deux types d'ondes corrélées se propageant dans le rail soumis à une excitation : une onde de champ

proche et une onde propagative. Les paramètres caractéristiques de ces ondes sont liés par des grandeurs mécaniques dont la connaissance peut poser problème, en particulier pour la poutre de Timoshenko où les amplitudes des deux ondes nécessitent de nombreuses données. L'objectif de cette étude est de vérifier si l'hypothèse de poutre qui lie ces deux ondes est nécessaire pour représenter le champ acoustique rayonné par le rail au sens de nos indicateurs. L'idée est donc de rechercher de manière indépendante les paramètres caractéristiques de deux ondes décorréelées se propageant de part et d'autre de la même excitation. Dans ce cas, on s'intéresse à une onde fortement atténuée et à une onde propagative, mais l'idée de rechercher deux ondes décorréelées pourrait s'appliquer à deux ondes de natures différentes également corrélées (une onde de flexion et une onde de torsion par exemple), ou à plus hautes fréquences pour des ondes de déformation de section.

Le modèle réel est un modèle de poutre sur support continu. Pour le modèle source, deux ondes décorréelées d'amplitudes inconnues se propagent de part et d'autre de l'excitation. Elles correspondent à une onde propagative et une onde de champ proche dont les nombres d'onde complexes sont supposés connus. Le modèle source fait donc intervenir, pour une seule excitation, deux sources de paramètres connus et de variance inconnue. Pour estimer ces variances, il suffit d'utiliser les résultats de la partie 3.3.4 avec $N = 2$ sources.

Selon le cas étudié (fréquence, position de l'antenne), la variance obtenue en utilisant la méthode d'optimisation sans contrainte de positivité peut s'avérer négative pour l'onde de champ proche. L'optimisation sous contrainte est réalisée en suivant la démarche présentée dans le chapitre 3 (3.3.6) qui conduit à annuler cette variance et à estimer celle de l'onde propagative seule.

Type de poutre

Pour un modèle réel de poutre d'Euler, la négligence de l'hypothèse de poutre ne simplifie pas le modèle source en termes de nombre d'inconnues. Même lorsque l'onde de champ proche et l'onde propagative sont corrélées, il n'y a qu'un seul paramètre qui définit le modèle source en plus de la variance : le nombre d'onde complexe k_β . L'étude de ce cas ayant peu d'intérêt, les résultats présentés concernent essentiellement la poutre de Timoshenko.

On peut toutefois noter que la décorrélation des ondes conduit à des comportements proches suivant le type de poutre utilisé, bien que les valeurs des erreurs soient plus importantes dans le cas de la poutre mince d'Euler, notamment au niveau de la directivité moyenne sur une ligne parallèle au rail. Un exemple significatif est donné figure 4.31.

Basses fréquences ($f = f_{anti}$)

La figure 4.30 représente les erreurs en dB commises sur les indicateurs de puissance et de pression quadratique moyenne en fonction de la position de l'antenne par rapport à l'excitation. L'écart entre les variances estimées pour le modèle source et les variances du modèle réel est également tracé : σ_p^2 pour l'écart entre les variances de l'onde propagative et σ_d^2 pour l'écart entre les variances de l'onde de champ proche.

La figure 4.31 représente les erreurs en degrés commises sur les directivités moyennes calculées sur des lignes parallèles au rail, à 2.5 et 7.5 m de ce dernier. Les valeurs $\vartheta_{2.5}$ et $\vartheta_{7.5}$ données à titre indicatif correspondent aux valeurs des directivités moyennes obtenues à partir du modèle réel.

Dans les différentes légendes, les valeurs entre parenthèses représentent les erreurs obtenues lorsque l'on prend les variances des ondes décorréelées du modèle source égales aux variances théoriques du modèle réel, pour lequel les ondes sont corrélées. Cette information permet notamment de déterminer si les dérives sont apportées par la dégradation du

modèle proprement dite (décorrélation des ondes), ou bien par une mauvaise estimation des variances.

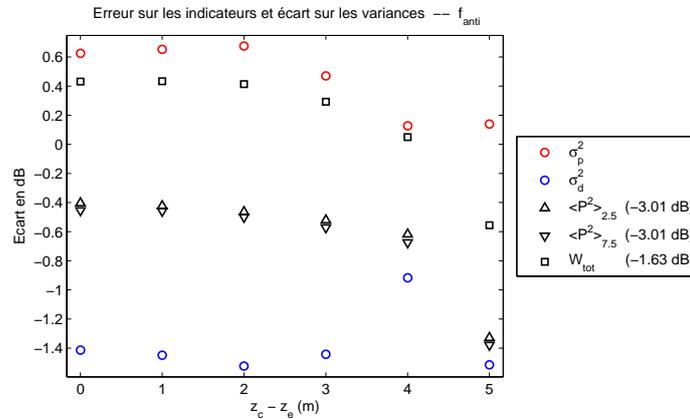


FIGURE 4.30: Hypothèse de poutre négligée - Influence sur les indicateurs en fonction de l'abscisse du centre de l'antenne. Erreur sur la puissance totale et la pression quadratique, et écart sur les variances. Modèle réel : poutre de Timoshenko sur support continu. $f = f_{anti}$.

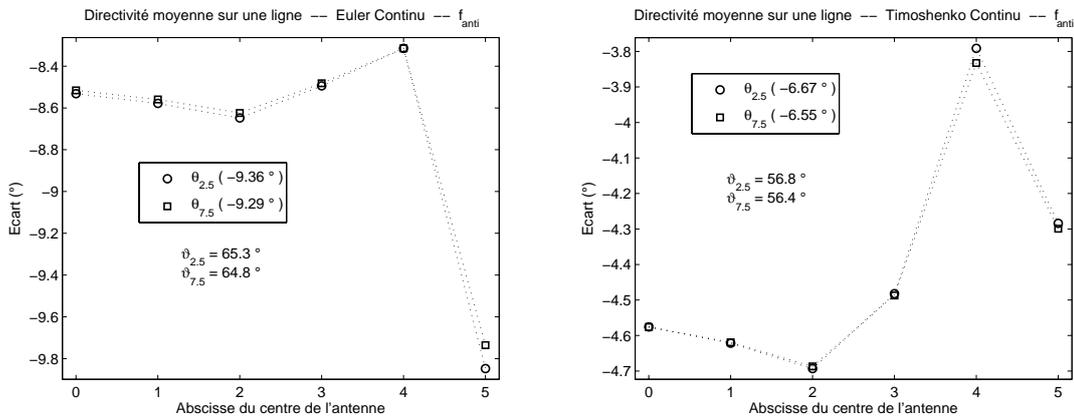


FIGURE 4.31: Hypothèse de poutre négligée - Influence sur la directivité moyenne en fonction de l'abscisse du centre de l'antenne. Modèle réel : poutre d'Euler (gauche) ou poutre de Timoshenko (droite) sur support continu. $f = f_{anti}$.

Pour cette fréquence, l'hypothèse de poutre n'est pas nécessaire pour représenter le champ acoustique rayonné par le rail au sens des indicateurs utilisés. Lorsqu'une poutre mince est utilisée pour le modèle réel, les erreurs observées sur les indicateurs sont de l'ordre du double (cf. figure 4.31 pour la directivité).

En outre, les valeurs des erreurs entre parenthèses dans les légendes montrent que la décorrélation des ondes est compensée par la procédure d'optimisation au niveau des variances. En effet, utiliser les variances estimées pour le modèle conduit à des erreurs plus faibles qu'en utilisant pour ce même modèle les variances théoriques des ondes corrélées.

Fréquences intermédiaires ($f = f_{semelle}$)

Pour certaines positions d'antenne excentrées, des variances nulles sont estimées pour l'onde de champ proche. L'écart en dB correspondant, non défini, n'est pas représenté. Pour ces cas sont tracés des pictogrammes verts qui représentent les erreurs qui seraient obtenues en prenant pour variance de l'onde de champ proche du modèle source, la valeur théorique du modèle réel (cf. figure 4.32).

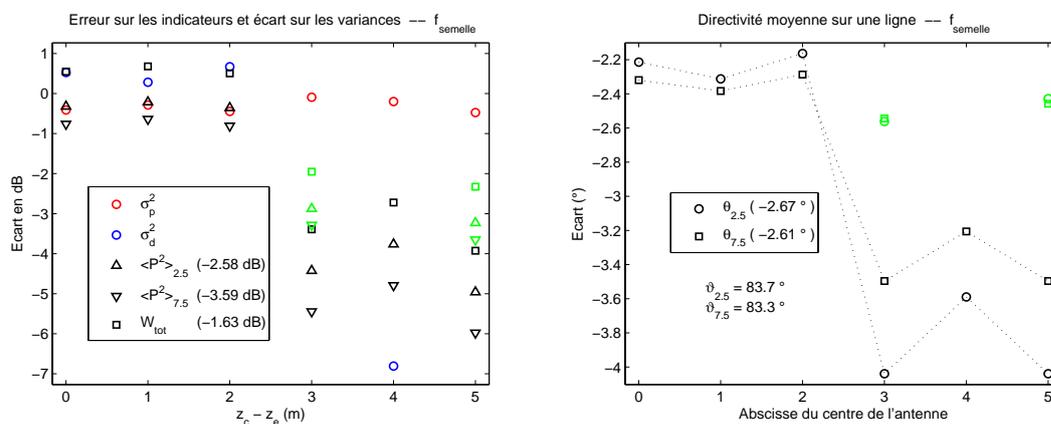


FIGURE 4.32: *Hypothèse de poutre négligée - Influence sur les indicateurs en fonction de l'abscisse du centre de l'antenne. Modèle réel : poutre de Timoshenko sur support continu. Gauche : erreur sur la puissance totale et la pression quadratique, et écart sur les variances. Droite : erreur sur la directivité moyenne. $f = f_{semelle}$.*

Il faut ici s'interroger sur la signification d'une variance estimée nulle pour l'onde de champ proche. Dans un premier temps, on peut supposer que pour ce modèle source (deux ondes décorréelées), l'onde de champ proche n'est pas nécessaire pour représenter le champ acoustique rayonné par le rail à cette fréquence. Cependant, ces cas singuliers n'apparaissent que pour des positions d'antenne particulières, et ils engendrent des erreurs élevées sur les indicateurs. Ceci suggère que ce comportement est une dérive liée à la méthode d'optimisation elle-même, et non à la modélisation de la source. En effet, le champ de pression vu par l'antenne pour ces positions est très perturbé, pouvant même masquer l'influence de l'onde de champ proche (cf. partie 1.3.4). Affecter une variance nulle à cette dernière est la meilleure solution pour approcher le champ dans cette portion limitée de l'espace. Pour d'autres points de l'espace, le champ est mal reconstruit induisant les erreurs observées sur les indicateurs. L'utilisation d'une antenne couvrant une plus grande partie de l'espace pourrait s'avérer utile dans ce cas.

Hautes fréquences ($f = f_{HF}$)

Nous avons vu déjà plusieurs fois dans ce document que le rail pouvait être approché acoustiquement par un cylindre vibrant semi infini pour les hautes fréquences. Dès lors que l'on s'éloigne du point d'excitation, le champ vibratoire dans le rail est caractéristique d'une onde propagative peu atténuée. Ainsi, lorsque l'antenne est légèrement décalée du droit de l'excitation, notre méthode suggère une variance nulle pour l'onde de champ proche sans pour autant dégrader la représentativité du champ acoustique au sens des indicateurs présentés (cf. figure 4.33 où les pictogrammes noirs et verts se superposent). Pour $z_c = 4$ m on observe un comportement singulier pour lequel une variance non nulle de l'onde de champ proche est estimée. Les erreurs sur les indicateurs sont encore plus faibles dans ce cas (il faudrait agrandir la zone en question pour les indicateurs de puissance).

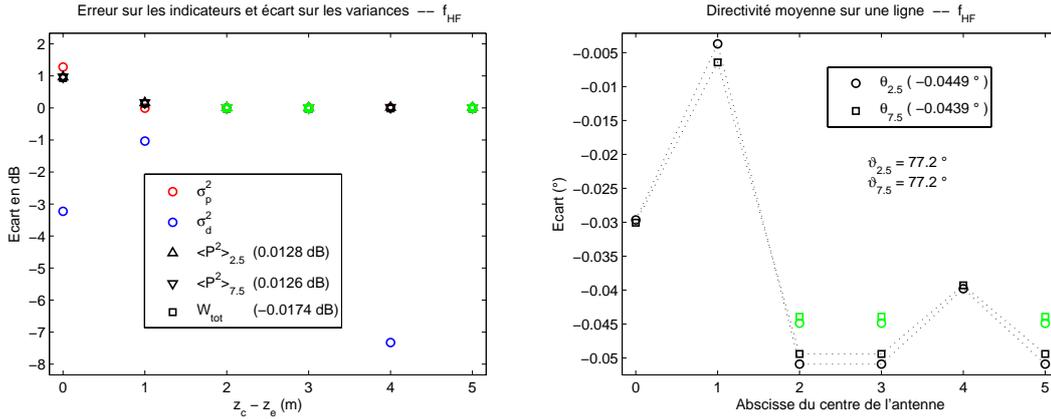


FIGURE 4.33: *Hypothèse de poutre négligée - Influence sur les indicateurs en fonction de l'abscisse du centre de l'antenne. Modèle réel : poutre de Timoshenko sur support continu. Gauche : erreur sur la puissance totale et la pression quadratique, et écart sur les variances. Droite : erreur sur la directivité moyenne. $f = f_{HF}$.*

Dans cette partie *hypothèse de poutre négligée*, le modèle réel retenu fait intervenir une modélisation continue du support. La fréquence *pin-pin* correspond donc à une simple haute fréquence pour laquelle les résultats sont identiques à ceux pour $f = f_{HF}$.

Conclusion

En choisissant des positions d'antenne adéquates suivant la fréquence, et donc suivant la nature du champ acoustique rayonné par le rail, un modèle de source dégradé peut être utilisé pour caractériser le rail. Ce modèle sans hypothèse de poutre est construit par superposition de deux ondes vibratoires décorréelées se propageant de part et d'autre de l'excitation. Testée pour une onde propagative et une onde de champ proche, cette hypothèse a montré en sus que l'onde de champ proche pouvait être négligée pour les hautes fréquences, lorsque l'onde propagative est très peu atténuée. L'intérêt d'une telle approche est de réduire le nombre de paramètres nécessaires à la modélisation du rail, tout en conservant la description des ondes qui s'y propagent.

Enfin, il faut garder à l'esprit que cette étude a été effectuée sans tenir compte de la périodicité du support. Le paragraphe *périodicité du support négligée* (cf. 4.3.3.1) permet de déduire les effets de cette dégradation pour un support périodique.

4.3.3.4 Onde de champ proche modélisée par une source ponctuelle

À l'aide de ce modèle nous souhaitons étudier la possibilité de remplacer l'onde de champ proche, localisée spatialement au niveau du contact, par une source ponctuelle au niveau de l'excitation. Il n'est pas nécessaire d'envisager ce modèle pour les hautes fréquences, dans la mesure où nous avons déjà montré que l'onde de champ proche pouvait être négligée dans ce cas. Seules les fréquences f_{anti} et $f_{semelle}$ sont étudiées.

Le modèle réel est un modèle de poutre de Timoshenko sur support continu. Le modèle source est l'association non corrélée d'une source ponctuelle localisée au niveau de l'excitation et d'une onde miroir propagative de nombre d'onde complexe supposé connu et égal à k_p , le nombre d'onde de l'onde propagative du modèle réel.

Les figures 4.34 et 4.35 représentent les erreurs sur les indicateurs engendrées par cette dégradation pour $f = f_{anti}$ et $f = f_{semelle}$. Dans ce cas, σ_d^2 représente l'écart entre la

variance de l'onde de champ proche du modèle réel et la variance de la source ponctuelle du modèle source. À cet effet, on ajoute au vecteur source associé à la source ponctuelle un facteur correctif permettant d'ajuster les dimensions (unités) des variances à comparer.

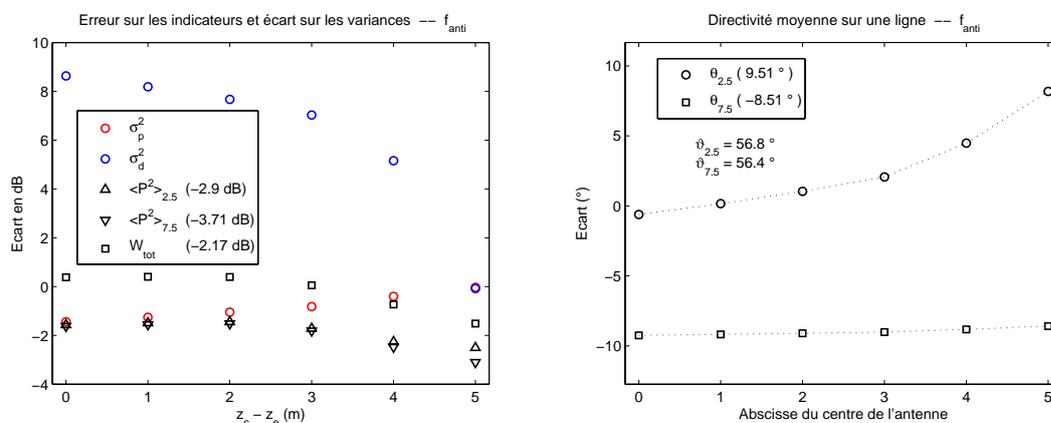


FIGURE 4.34: Onde de champ proche modélisée par une source ponctuelle - Influence sur les indicateurs en fonction de l'abscisse du centre de l'antenne. Modèle réel : poutre de Timoshenko sur support continu. Gauche : erreur sur la puissance totale et la pression quadratique, et écart sur les variances. Droite : erreur sur la directivité moyenne. $f = f_{anti}$.

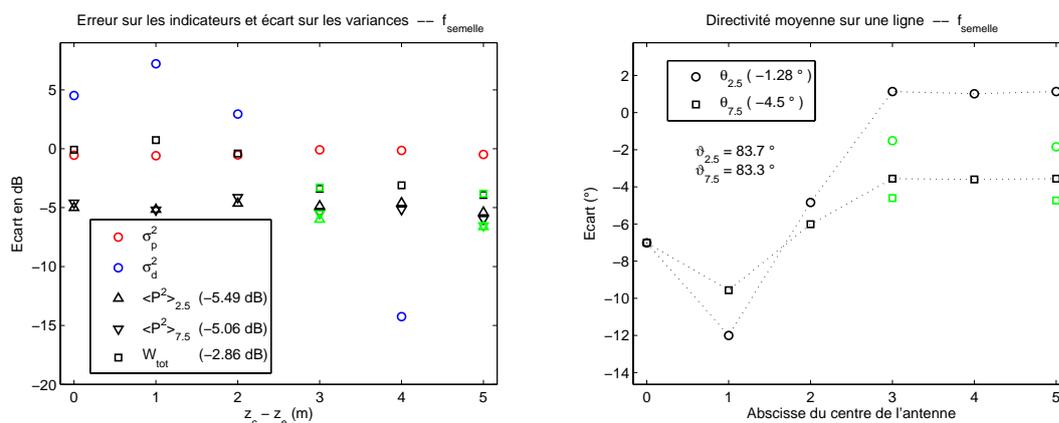


FIGURE 4.35: Onde de champ proche modélisée par une source ponctuelle - Influence sur les indicateurs en fonction de l'abscisse du centre de l'antenne. Modèle réel : poutre de Timoshenko sur support continu. Gauche : erreur sur la puissance totale et la pression quadratique, et écart sur les variances. Droite : erreur sur la directivité moyenne. $f = f_{semelle}$.

Ces figures montrent que le modèle dégradé *une onde propagative + une source ponctuelle* n'est pas représentatif du champ acoustique rayonné par le rail pour l'ensemble des cas étudiés. Pour f_{anti} , c'est la directivité qui est la plus affectée, avec des erreurs pouvant atteindre la dizaine de degrés. Les vibrations étant fortement atténuées dans le rail, on s'attend à ce qu'il rayonne comme une source ponctuelle. Or, la directivité moyenne sur une ligne pour une source ponctuelle est de 45° [47], soit 10° de moins que ce qui est calculé pour le rail (figure 4.34 de droite). Dans ce cas il semble que des phénomènes liés à l'onde de champ proche, et à son interaction avec l'onde propagative (pourtant atténuée)

influent sensiblement sur les caractéristiques spatiales du champ acoustique, notamment au droit de l'excitation. Même lorsque l'on prend les variances du modèle source égales aux variances du modèle réel, des erreurs atteignant $\pm 9^\circ$ sont observées (valeurs entre parenthèses dans la légende de la figure 4.34 de droite).

Pour $f_{semelle}$, la directivité moyenne est mieux approchée, aux dépens des autres indicateurs qui présentent des erreurs bien supérieures à ce qu'on avait obtenu en négligeant l'hypothèse de poutre (cf paragraphe 4.3.3.3 onde de champ proche et onde propagative décorréelées). Les positions d'antenne pour lesquelles la source ponctuelle est supprimée par l'optimisation (variance nulle estimée) correspondent aux mêmes positions qui entraînent la suppression de l'onde de champ proche lorsque l'hypothèse de poutre est négligée. Les erreurs observées pour ces positions d'antenne sont ainsi identiques entre les deux modèles.

L'ensemble de ces remarques montre qu'il est nécessaire, lorsque l'atténuation est importante dans le rail, de tenir compte de la présence de l'onde de champ proche, même si cette dernière est indépendante de l'onde propagative.

4.3.3.5 Dégradation du modèle - Synthèse

Suivant la fréquence, et donc suivant les propriétés du champ acoustique rayonné par le rail, les résultats précédents montrent que des modèles vibratoires simplifiés suffisent à représenter le rail au sens de nos indicateurs. En partant d'un modèle réel de poutre de Timoshenko supportée périodiquement, on propose ci-dessous des simplifications du modèle source.

Pour les basses fréquences jusqu'à $f_{semelle}$, on peut négliger la périodicité du support et les effets de cisaillement : la simple superposition de deux ondes de constantes de propagation liées (γ_p et $-i\gamma_p$) convient, comme le montrent les figures 4.36 à 4.38. Deux modèles sources sont adoptés ici, selon que l'on tienne compte ou non de la corrélation entre ces ondes.

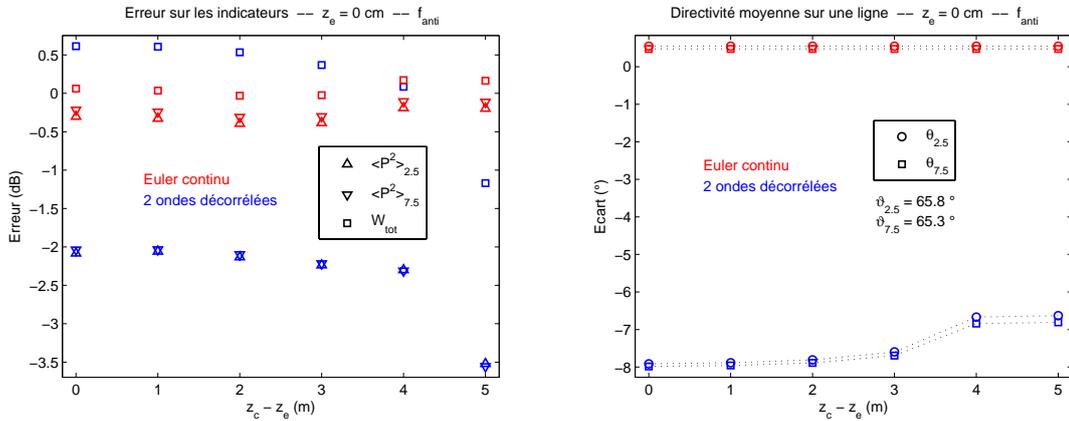


FIGURE 4.36: *Dégradations cumulées - Influence sur les indicateurs en fonction de l'abscisse du centre de l'antenne. Modèle réel : poutre de Timoshenko supportée périodiquement, $z_e = 0$ cm. Modèle source : deux ondes de constantes de propagation liées (γ_p et $-i\gamma_p$), corrélées (rouge) ou décorréelées (bleu). $f = f_{anti}$.*

Pour f_{anti} , les erreurs sur les indicateurs relatives aux deux modèles sources dépendent de la position z_e de l'excitation par rapport aux traverses (figures 4.36 et 4.37). Pour cette fréquence, les propriétés du champ acoustique rayonné par le rail semblent donc dépendre d'un certain nombre de phénomènes localisés au niveau de l'excitation en particulier les

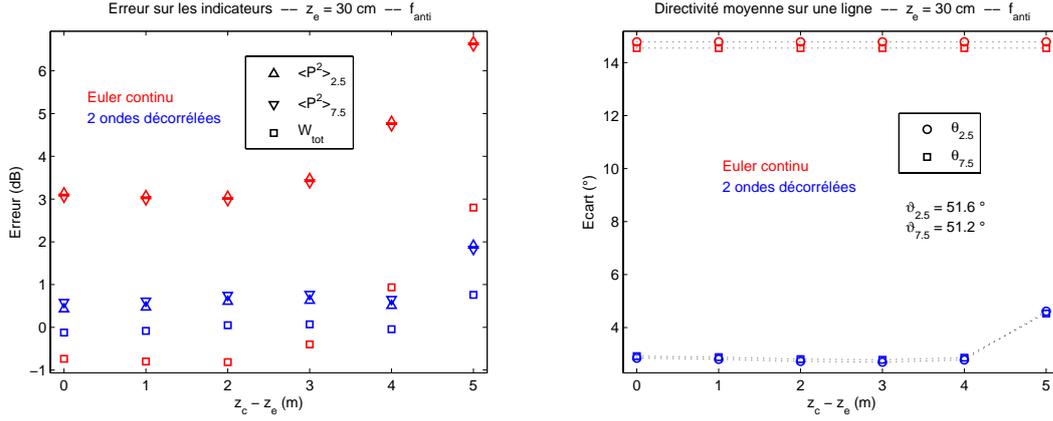


FIGURE 4.37: *Dégradations cumulées - Influence sur les indicateurs en fonction de l'abscisse du centre de l'antenne. Modèle réel : poutre de Timoshenko supportée périodiquement, $z_e = 30$ cm. Modèle source : deux ondes de constantes de propagation liées (γ_p et $-i\gamma_p$), corrélées (rouge) ou décorréelées (bleu). $f = f_{anti}$.*

interférences entre l'onde de champ proche et l'onde propagative ainsi que les effets de périodicité. La directivité est en particulier affectée, avec des erreurs pouvant varier de 10° selon z_e . On peut supposer que pour un ensemble de valeurs de z_e , les performances des deux modèles dégradés soient similaires.

En revanche, pour $f_{semelle}$, la figure 4.38 montre que le modèle où les ondes sont corrélées est plus approprié. Les erreurs sur les indicateurs restent cependant faibles dans les deux cas.

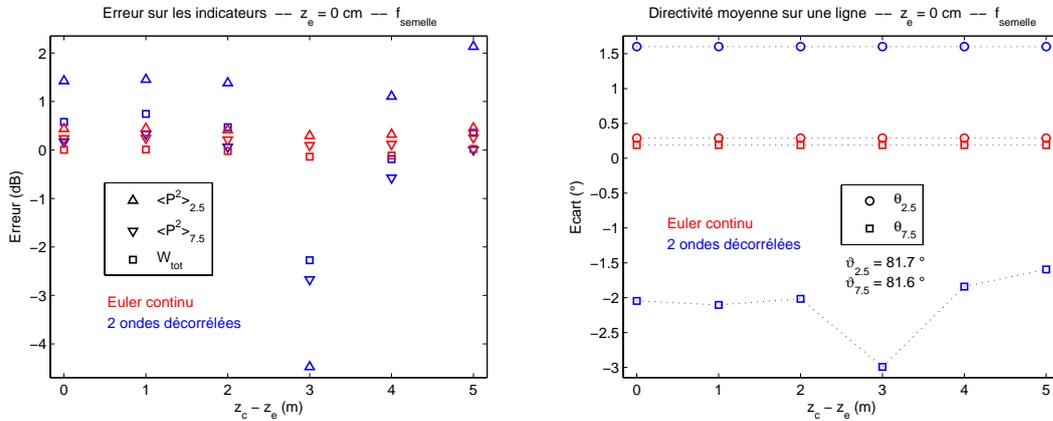


FIGURE 4.38: *Dégradations cumulées - Influence sur les indicateurs en fonction de l'abscisse du centre de l'antenne. Modèle réel : poutre de Timoshenko supportée périodiquement, $z_e = 30$ cm. Modèle source : deux ondes de constantes de propagation liées (γ_p et $-i\gamma_p$), corrélées (rouge) ou décorréelées (bleu). $f = f_{semelle}$.*

Pour ces deux fréquences, les positions d'antenne qui minimisent les erreurs observées sont proches du droit de l'excitation, jusqu'à $z_c - z_e = 2$ m (à l'exception de la directivité moyenne pour $f = f_{anti}$).

Pour les hautes fréquences, l'effet de l'onde de champ proche peut être négligé : une seule onde propagative dont la constante de propagation prend pour valeur celle du modèle

réel γ_p convient, comme le montre la figure 4.39. Ce modèle est entièrement caractérisé par un nombre d'onde complexe et une amplitude.

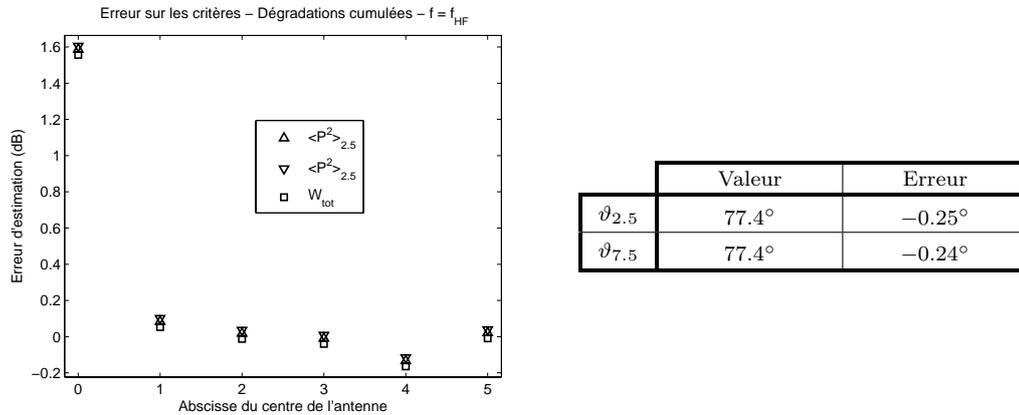


FIGURE 4.39: Dégradations cumulées - Influence sur les indicateurs de puissance en fonction de l'abscisse du centre de l'antenne. Modèle réel : poutre de Timoshenko supportée périodiquement. Modèle source : une onde miroir. $f = f_{HF}$.

Pour la fréquence *pin-pin*, les dégradations étudiées ont systématiquement conduit à des erreurs importantes sur les indicateurs. Pour cette fréquence, il est nécessaire d'utiliser un modèle complexe tenant compte de la périodicité. Dans la mesure où les effets de la périodicité dépendent de l'abscisse de l'excitation, il conviendrait d'étudier les effets du déplacement de cette dernière (éventuel lissage spatio-temporel des propriétés du champ acoustique), et les implications sur les modèles simplifiés envisageables.

4.4 Estimation des amplitudes dans le cas de contacts multiples

4.4.1 Position du problème

Dans cette partie, on considère un ensemble de quatre contacts représentant les quatre essieux d'un véhicule ferroviaire. On fait l'hypothèse que les excitations au niveau de chaque contact sont décorrélées deux à deux. Les positions des excitations z_p sur le rail sont supposées connues ; elles sont choisies de manière à approcher les cotes pour deux bogies successifs d'un tramway (cf. figure 4.40) :

$$z_1 = 0 \text{ m} \quad z_2 = 2 \text{ m} \quad z_3 = 15 \text{ m} \quad z_4 = 17 \text{ m}$$



FIGURE 4.40: Plusieurs contacts, paramètres inconnus - Abscisses des excitations.

Pour plus de réalisme, les variances σ_p^2 sont différentes pour chacune des quatre excitations soit respectivement 2.3, 1.9, 2 et 1.7, ce qui représente un écart type de 12.5%.

Les résultats présentés sont donc particuliers à cette distribution arbitraire.

Le modèle réel et le modèle source sont identiques, à savoir un modèle de poutre mince d'Euler sur support continu. Pour chaque contact, on suppose qu'un onde de champ proche et un onde propagative se propagent de part et d'autre du point d'excitation. Ces 16 ondes sont caractérisées par le même nombre d'onde complexe k_β supposé connu, c'est-à-dire par une seule atténuation et un seul nombre d'onde structural réel.

Soit $\widehat{\underline{X}}_{\mathcal{C}} = {}^t[\widehat{\sigma}_{1\mathcal{C}}^2, \dots, \widehat{\sigma}_{4\mathcal{C}}^2]$ le vecteur des variances estimées par minimisation du critère des moindres carrés \mathcal{C} . Soit \underline{v}_p le vecteur source traduisant la propagation vibroacoustique entre le contact p et les microphones de l'antenne. D'après les résultats de la partie 3.3.4, $\widehat{\underline{X}}_{\mathcal{C}}$ a pour expression analytique :

$$\widehat{\underline{X}}_{\mathcal{C}} = \mathbf{V}^{-1}\underline{U} \quad (4.31)$$

avec :

$$\mathbf{V}_{p,t} = \underline{v}_t^\dagger \underline{v}_p \underline{v}_p^\dagger \underline{v}_t = \left| \underline{v}_p^\dagger \underline{v}_t \right|^2$$

$$\underline{U}_p = \underline{v}_p^\dagger \widehat{\Gamma} \underline{v}_p$$

$\widehat{\Gamma}$ une estimation de la matrice spectrale mesurée sur les microphones de l'antenne.

Les cas conduisant à des variances estimées négatives sont traités suivant la démarche présentée dans le chapitre 3 (cf. 3.3.6).

La mise en place des indicateurs étant plus délicate dans ce cas, on s'intéresse exclusivement aux erreurs d'estimation sur la variance des excitations. Également par souci de simplicité, l'influence de l'erreur sur la position des contacts n'est pas étudiée. Pour l'influence des erreurs sur l'atténuation et sur le nombre d'onde, on reprend les démarches décrites dans la partie 4.3.2, à l'exception des différentes positions d'antenne. Ici, quatre positions d'antenne par rapport aux excitations sont étudiées : en face du premier bogie ($z_c = 1$ m), entre les deux bogies ($z_c = 8.5$ m), au-delà des deux bogies ($z_c = 20$ m) et enfin pour une position intermédiaire ($z_c = 5.25$ m). Par ailleurs, les résultats concernant la fréquence *pin-pin* ne sont pas discutés, dans la mesure où ils sont similaires à ceux obtenus pour $f = f_{HF}$ lorsque la périodicité du support est négligée.

4.4.2 Erreur sur l'atténuation

Dans certains cas, des variances nulles sont estimées. Les courbes relatives à l'erreur d'estimation en dB correspondante sont alors interrompues sur les tracés. Les figures 4.41⁴ et 4.42 représentent l'erreur d'estimation sur les variances des contacts en fonction de l'atténuation erronée de l'onde propagative, pour les quatre positions d'antenne décrites ci-dessus, pour $f = f_{anti}$.

En dehors du point solution où les variances des quatre contacts sont correctement estimées, de fortes erreurs sont observées pour les contacts les plus éloignés de l'antenne. Certaines variances estimées sont même nulles lorsque l'on se trompe trop sur l'atténuation. Pour cette fréquence, bien que les ondes vibratoires soient limitées spatialement au voisinage de chaque contact, l'antenne et le traitement associé peinent à dissocier les contacts excentrés.

Pour les contacts au droit ou proches de l'antenne, les erreurs d'estimation restent limitées même lorsqu'on se trompe sur l'atténuation. C'est pour la position d'antenne à égale distance des deux bogies que les performances sont les meilleures sur l'ensemble des variances.

4. Sur la figure 4.41 de gauche, les courbes bleues et rouges sont superposées.

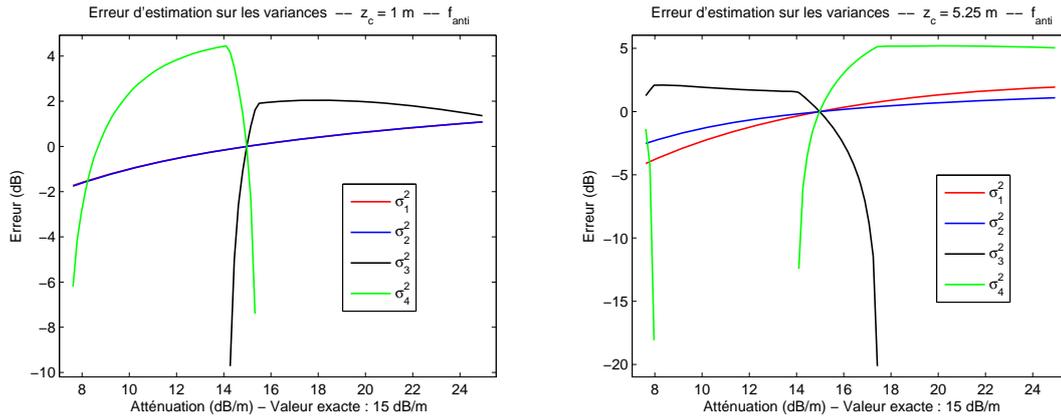


FIGURE 4.41: Plusieurs contacts - Influence d'une erreur sur l'atténuation de l'onde propagative. Erreur d'estimation sur les variances des contacts en fonction de l'atténuation. Modèle réel et modèle source identiques : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{anti}$. Gauche : $z_c = 1$ m. Droite : $z_c = 5.25$ m.

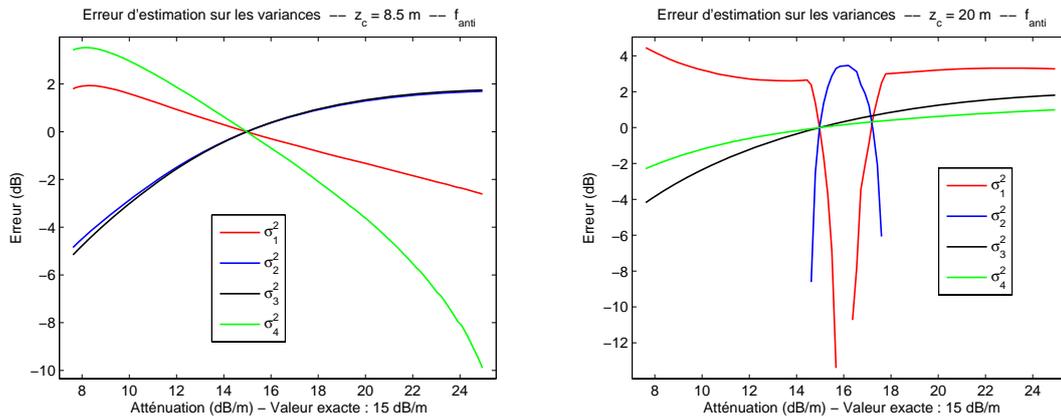


FIGURE 4.42: Plusieurs contacts - Influence d'une erreur sur l'atténuation de l'onde propagative. Erreur d'estimation sur les variances des contacts en fonction de l'atténuation. Modèle réel et modèle source identiques : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{anti}$. Gauche : $z_c = 8.5$ m. Droite : $z_c = 20$ m.

Pour $f = f_{semelle}$, les résultats sont semblables ; les erreurs observées ont toutefois des valeurs beaucoup plus importantes (cf. figure 4.43⁵ pour $z_c = 1$ m et $z_c = 8.5$ m).

Pour $f = f_{HF}$, dès que l'atténuation du modèle source est erronée, il est impossible de limiter les erreurs d'estimation sur l'ensemble des quatre variances. En revanche, les deux variances des contacts d'un même bogie peuvent être estimées avec des erreurs minimales lorsque l'antenne est positionnée en face du bogie. On retrouve ici les résultats obtenus pour un seul contact étendus à deux contacts : plus l'antenne est éloignée d'un contact, plus l'influence de l'erreur sur l'atténuation est importante pour l'estimation de la variance de ce contact. La figure 4.44 illustre ce résultat pour $z_c = 1$ m et $z_c = 8.5$ m.

5. Sur la figure 4.43 la courbe bleue se superpose à la courbe rouge à gauche et à la courbe noire à droite.

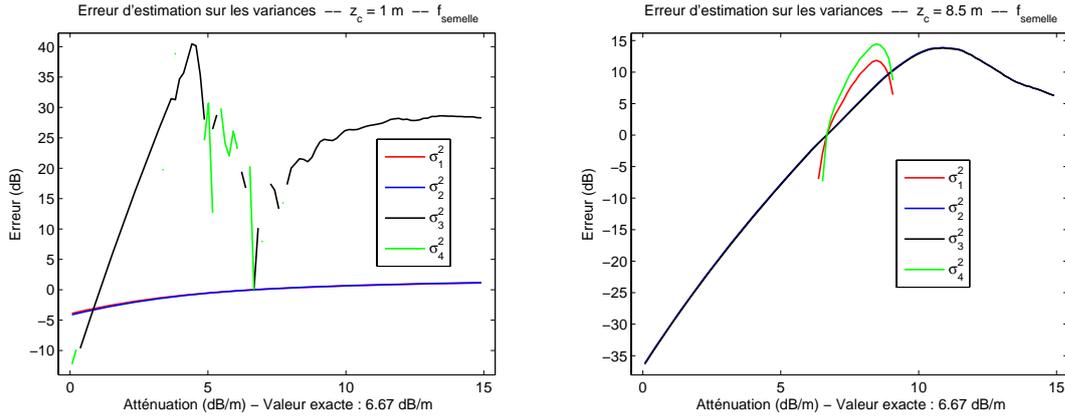


FIGURE 4.43: Plusieurs contacts - Influence d'une erreur sur l'atténuation de l'onde propagative. Erreur d'estimation sur les variances des contacts en fonction de l'atténuation. Modèle réel et modèle source identiques : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{\text{semelle}}$. Gauche : $z_c = 1$ m. Droite : $z_c = 8.5$ m.

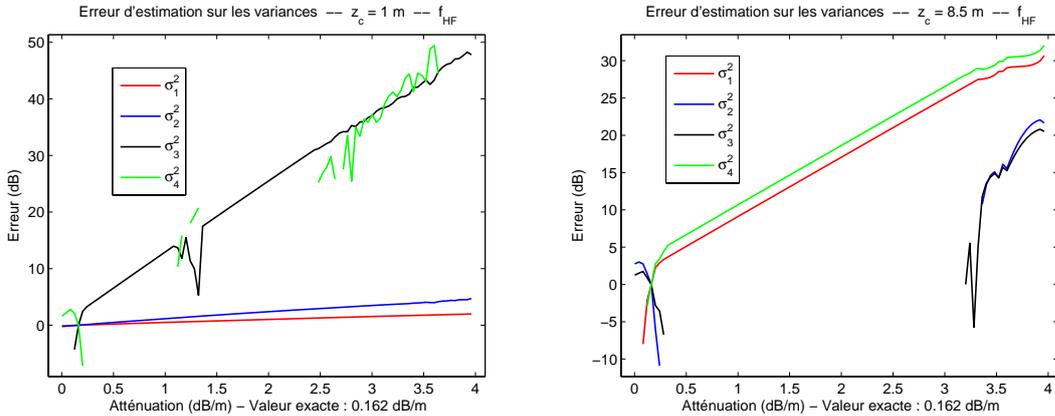


FIGURE 4.44: Plusieurs contacts - Influence d'une erreur sur l'atténuation de l'onde propagative. Erreur d'estimation sur les variances des contacts en fonction de l'atténuation. Modèle réel et modèle source identiques : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{\text{HF}}$. Gauche : $z_c = 1$ m. Droite : $z_c = 8.5$ m.

4.4.3 Erreur sur le nombre d'onde

Comme dans le cas d'un seul contact (cf. partie 4.3.2.2), l'influence de l'erreur sur le nombre d'onde peut être limitée jusqu'à $f = f_{\text{semelle}}$ pour les contacts situés en face de l'antenne. En revanche, pour ce cas à plusieurs contacts, les erreurs d'estimation sur les variances des contacts éloignés sont très importantes. Dès lors que l'on s'écarte de la bonne valeur pour le nombre d'onde du modèle source, les deux essieux d'un bogie éloigné de l'antenne sont systématiquement regroupés en une seule source située en l'un ou l'autre des contacts (figure 4.45 pour $z_c = 1$ m).

Pour les positions d'antenne intermédiaires, des variances non nulles sont estimées pour les contacts les plus proches de l'antenne (σ_2^2 et σ_3^2). De manière générale, l'antenne étant éloignée des contacts, des erreurs élevées sont rapidement atteintes (cf. figure 4.46 pour $z_c = 8.5$ m).

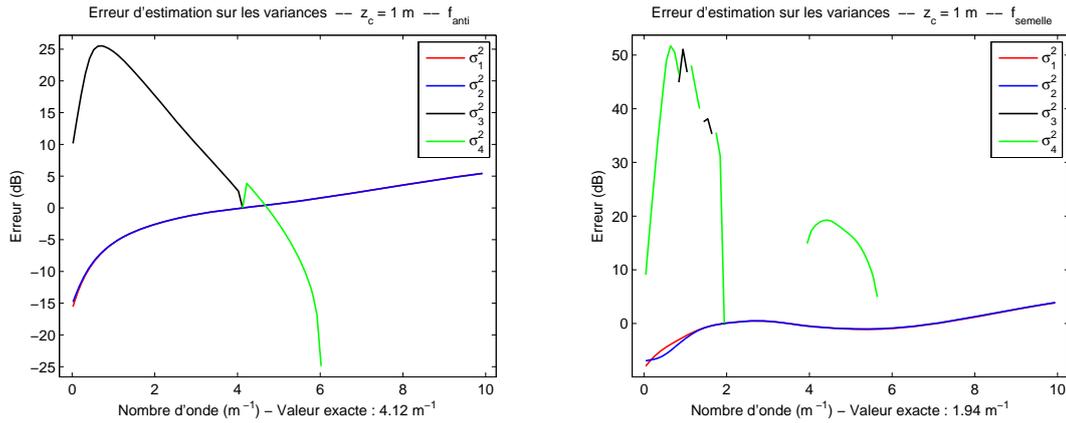


FIGURE 4.45: Plusieurs contacts - Influence d'une erreur sur le nombre d'onde de l'onde propagative. Erreur d'estimation sur les variances des contacts en fonction du nombre d'onde. Modèle réel et modèle source identiques : poutre d'Euler sur support continu. $z_c = 1$ m. Gauche : $f = f_{anti}$. Droite : $f = f_{semelle}$.

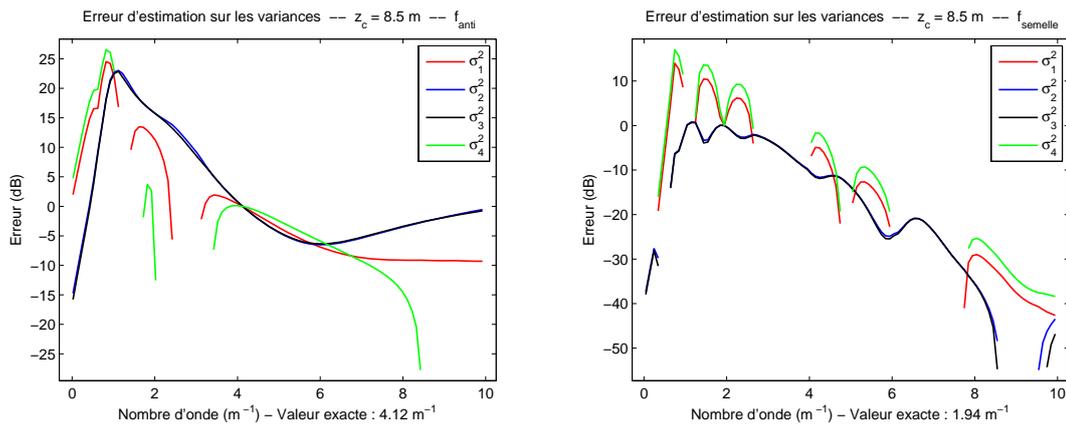


FIGURE 4.46: Plusieurs contacts - Influence d'une erreur sur le nombre d'onde de l'onde propagative. Erreur d'estimation sur les variances des contacts en fonction du nombre d'onde. Modèle réel et modèle source identiques : poutre d'Euler sur support continu. $z_c = 8.5$ m. Gauche : $f = f_{anti}$. Droite : $f = f_{semelle}$.

Pour $f = f_{HF}$, nous avons vu dans le cas d'un contact que le champ acoustique dépendait fortement du nombre d'onde dans le rail. Il en est de même pour plusieurs contacts pour lesquels chaque champ élémentaire (un champ force autour de chaque contact) est lié au même nombre d'onde. Ainsi, les erreurs d'estimation sur les variances sont élevées, quel que soit le contact, et quelle que soit la position de l'antenne par rapport à ce contact. Les valeurs des erreurs sont par ailleurs proches de l'erreur observée pour un seul contact. La figure 4.47 illustre ce comportement pour $z_c = 1$ m et $z_c = 8.5$ m. Lorsque l'antenne est en position intermédiaire (8.5 m), une seule variance non nulle est estimée par bogie, non nécessairement pour le contact le plus proche de l'antenne.

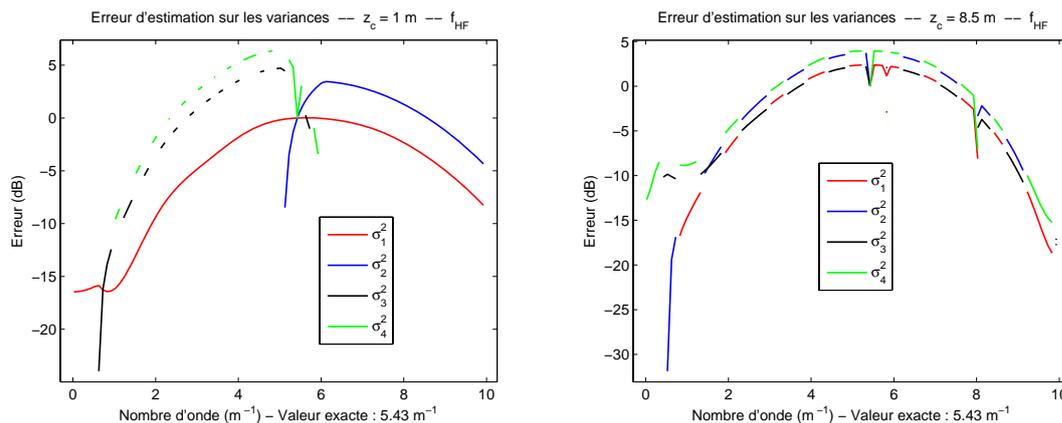


FIGURE 4.47: Plusieurs contacts - Influence d'une erreur sur le nombre d'onde de l'onde propagative. Erreur d'estimation sur les variances des contacts en fonction du nombre d'onde. Modèle réel et modèle source identiques : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{HF}$. Gauche : $z_c = 1$ m. Droite : $z_c = 8.5$ m.

4.4.4 Plusieurs contacts - Synthèse

L'étude proposée ci-dessus concerne exclusivement les erreurs commises sur l'estimation des variances des différentes excitations. Elle a permis de montrer qu'en situation réelle, c'est-à-dire lorsque la connaissance des paramètres vibratoires du rail est imprécise, il est impossible d'estimer simultanément les variances de plusieurs contacts avec une simple position d'antenne. Au mieux, en positionnant l'antenne au droit d'un bogie, les variances de ses deux essieux peuvent être estimées simultanément sans trop d'erreurs même avec un nombre d'onde complexe imprécis pour le modèle source.

Du point de vue de l'antenne, un bogie éloigné constitue une unique source acoustique. Il faudrait réaliser une étude plus approfondie pour établir une démarche optimale pour l'estimation des différentes variances, en rapport aux indicateurs déjà utilisés précédemment. En effet, il se peut que le regroupement de plusieurs contacts soit une solution acceptable, voire optimale, au sens de certains indicateurs (puissance totale rayonnée, etc.).

4.5 Estimation du nombre d'onde complexe dans le cas d'un seul contact

Dans la section précédente, les paramètres $\underline{\zeta}$ caractéristiques des modèles sources utilisés ont été supposés connus : nombres d'onde complexes, position du contact. Le problème d'optimisation, linéaire vis-à-vis des inconnues du problème (les variances des différents contacts), pouvait se résoudre analytiquement. Lorsque les paramètres $\underline{\zeta}$ sont également des inconnues du problème, la solution n'est plus analytique ; des algorithmes d'optimisation doivent être utilisés. L'étude de ces méthodes, à travers le choix de l'algorithme, sa paramétrisation, ou l'évaluation de ses performances, constitue un champ d'investigation à part entière, non exploré dans cette thèse. En guise de première approche, nous proposons une étude qualitative de cas simples à deux inconnues qui permettent de représenter graphiquement les fonctions d'intérêt.

L'objectif de cette section est de discuter des performances de la méthode proposée dans cette thèse, en ce qui concerne la détermination de certains paramètres vibratoires caractéristiques du rail, en particulier une atténuation et un nombre d'onde structural.

L'influence de la position de l'antenne par rapport au contact est notamment étudiée pour deux valeurs de $z_c - z_e$: 0 et 3 m. On suppose par la suite que la variance σ_b^2 du bruit est nulle et que la position z_e du seul contact considéré est connue ($z_e = 0$ si rien n'est précisé).

4.5.1 Représentation des fonctions à maximiser ou à minimiser

D'après le chapitre 3, dans le cas d'une source de paramètres inconnus, on peut écrire le critère des moindres carrés \mathcal{C} , pour $\sigma_b^2 = 0$:

$$\mathcal{C} \left(\sigma^2 = \frac{v^\dagger \widehat{\Gamma} v}{\|v\|^4}, \underline{\zeta} \right) = \|\widehat{\Gamma}\|_F^2 - \left[\frac{v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\Gamma} v(\underline{\zeta})}{\|v(\underline{\zeta})\|^2} \right]^2 \quad (4.32)$$

avec :

$\widehat{\Gamma}$ l'estimation de la matrice spectrale mesurée sur les microphones de l'antenne, $v(\underline{\zeta})$ le vecteur source traduisant la propagation vibroacoustique depuis le contact jusqu'aux microphones de l'antenne.

La minimisation de (4.32) conduit aux estimateurs de σ^2 et de $\underline{\zeta}$, solution du système :

$$\begin{cases} \widehat{\underline{\zeta}}_C &= \arg \max_{\underline{\zeta}} \frac{v(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\Gamma} v(\underline{\zeta})}{\|v(\underline{\zeta})\|^2} = \arg \max_{\underline{\zeta}} \mathcal{F}(\underline{\zeta}) \\ \widehat{\sigma^2}_C &= \frac{v(\widehat{\underline{\zeta}}_C)^\dagger \widehat{\Gamma} v(\widehat{\underline{\zeta}}_C)}{\|v(\widehat{\underline{\zeta}}_C)\|^4} \Big|_{\underline{\zeta}=\widehat{\underline{\zeta}}_C} \end{cases} \quad (4.33)$$

On note $\sigma_{opt}^2(\underline{\zeta})$ la variance qui minimise le critère \mathcal{C} pour $\underline{\zeta}$ donné : $\sigma_{opt}^2(\underline{\zeta}) = \frac{v^\dagger \widehat{\Gamma} v}{\|v\|^4}$. Si les vecteurs sources et la matrice spectrale mesurée sont normalisés ($\|\widehat{\Gamma}\|_F = 1$ et $\|v\| = 1$), on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\sigma^2 = \sigma_{opt}^2(\underline{\zeta}), \underline{\zeta}) = \mathcal{C}(\underline{\zeta}) &= 1 - [\sigma_{opt}^2(\underline{\zeta})]^2 \\ &= 1 - \mathcal{F}(\underline{\zeta})^2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Cette expression permet donc de relier les trois fonctions du paramètre $\underline{\zeta}$ suivantes : le critère \mathcal{C} pour la variance optimale, la variance optimale σ_{opt}^2 et la fonction \mathcal{F} égale à σ_{opt}^2 dans ce cas. En particulier, les extrema de ces trois fonctions coïncident.

Suivant la fonction observée dans le plan défini par $\underline{\zeta}$, et suivant l'échelle de représentation adoptée (linéaire ou logarithmique), les allures des variations autour du point solution ne sont pas comparables. En effet, \mathcal{F} est proche de 1 au point solution, alors que \mathcal{C} est proche de 0. Par ailleurs, la proximité de \mathcal{F} et \mathcal{C} avec 1 et 0 au point solution dépend de la discrétisation de l'espace de variation de $\underline{\zeta}$. Ces problématiques également inhérentes aux algorithmes numériques ne sont pas discutées ici. On choisit de s'intéresser par la suite à la fonction \mathcal{F} , qui est une fonction analogue aux fonctions discriminantes de formation de voies classiques (cf. chapitre 3).

Dans cette thèse, on limite de plus le nombre de paramètres inconnus à deux. De cette façon, il est possible de représenter graphiquement les valeurs de la fonction \mathcal{F} dans un plan \mathcal{P} de variation pour les deux paramètres inconnus. Pour l'ensemble des cas étudiés, les deux paramètres inconnus sont en fait le nombre d'onde structural réel k_z et l'atténuation Δ relatifs à un nombre d'onde complexe : $\underline{\zeta} = {}^t[\Delta; k_z]$. Pour résoudre ce problème d'optimisation à deux dimensions sans faire appel à des algorithmes numériques, en discrétisant le plan \mathcal{P} de la sorte :

- le plan de variation est constitué de 320×320 points,
- l'atténuation varie de 10^{-3} à 20 dB/m lorsque l'atténuation réelle est supérieure à 2 dB/m et de 10^{-3} à 10 dB/m sinon,
- le nombre d'onde varie de 10^{-3} m^{-1} à k .

Ceci définit les pas de discrétisation suivants :

$$\begin{aligned}\Delta_{k_z} &\simeq \frac{2\pi}{320c} f \simeq 5.77 \cdot 10^{-5} \times f \text{ m}^{-1} \\ \Delta_{\Delta} &\simeq \frac{\Delta_{max}}{320} \simeq 6.25 \cdot 10^{-2} \text{ (ou } 3.13 \cdot 10^{-2} \text{ dB/m)}\end{aligned}\quad (4.35)$$

Ensuite, on recherche dans le plan \mathcal{P} le point pour lequel la fonction \mathcal{F} représentée en dB est maximale. Ce point correspond ainsi à la solution du problème d'optimisation, avec la précision que définissent les pas de discrétisation (4.35). Enfin, afin de juger de la sélectivité de la méthode, on place autour du maximum obtenu un contour à -3 dB sur la fonction \mathcal{F} représentée sur une échelle logarithmique.

4.5.2 Modèle réel et modèle source identiques

4.5.2.1 Caractéristiques de la fonction discriminante \mathcal{F}

Le modèle réel est une poutre mince d'Euler sur support continu. Deux ondes propagatives et deux ondes de champ proche se propagent de part et d'autre de l'excitation. Ces ondes sont caractérisées par une variance σ^2 égale à 1 au point solution et par un nombre d'onde complexe k_β . Pour le modèle source, ces paramètres sont inconnus.

Remarque : lorsque la périodicité du support n'est pas prise en compte, comme dans ce cas, la fréquence *pin-pin* n'est pas étudiée. Pour cette fréquence l'onde propagative est peu atténuée dans le rail, et les résultats sont similaires à ceux obtenus pour $f = f_{HF}$.

La figure 4.48 représente la fonction $\mathcal{F}(\underline{\zeta})$ en dB dans le plan \mathcal{P} pour deux positions de l'antenne par rapport à l'abscisse de l'excitation, pour $f = f_{anti}$. Le cercle noir localise le nombre d'onde complexe solution du modèle réel, le + noir localise le maximum de la fonction $\mathcal{F}(\underline{\zeta})$ calculée sur \mathcal{P} . La courbe noire est une courbe de niveau correspondant à -3 dB.

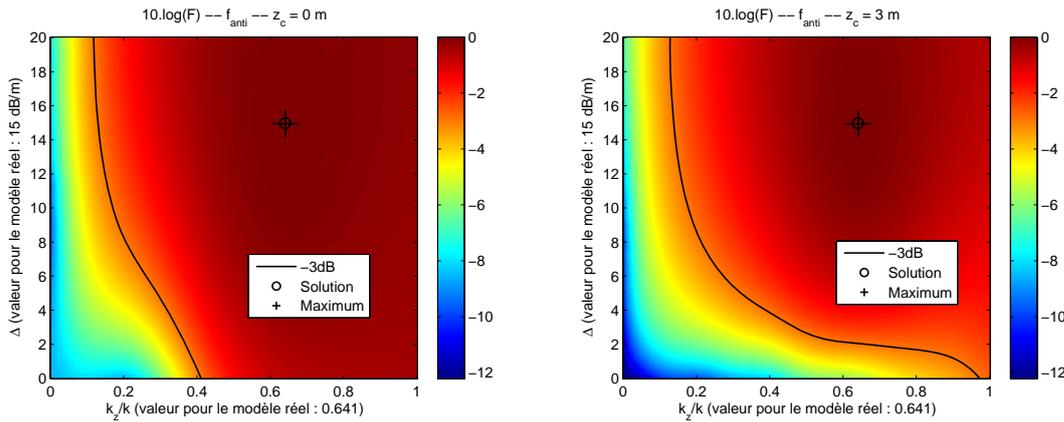


FIGURE 4.48: *Un contact, paramètres inconnus - Influence de la position de l'antenne sur la localisation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative. Gauche : $z_c = 0$ m. Droite : $z_c = 3$ m. Modèle réel identique au modèle source : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{anti}$.*

Pour cette fréquence, on n'observe aucun maximum local autre que le maximum correspondant au point solution. Le contour à -3 dB est assez éloigné du maximum, ce que l'on

peut rapprocher d'une grande largeur de lobe de sélectivité pour un cas unidimensionnel. Pour $f_{semelle}$, la position de l'antenne par rapport à l'excitation a plus d'influence, comme l'illustre la figure 4.49. Lorsque l'antenne est éloignée par rapport au droit de l'excitation, la fonction \mathcal{F} est bien discriminante sur la dimension du nombre d'onde, contrairement à l'atténuation.

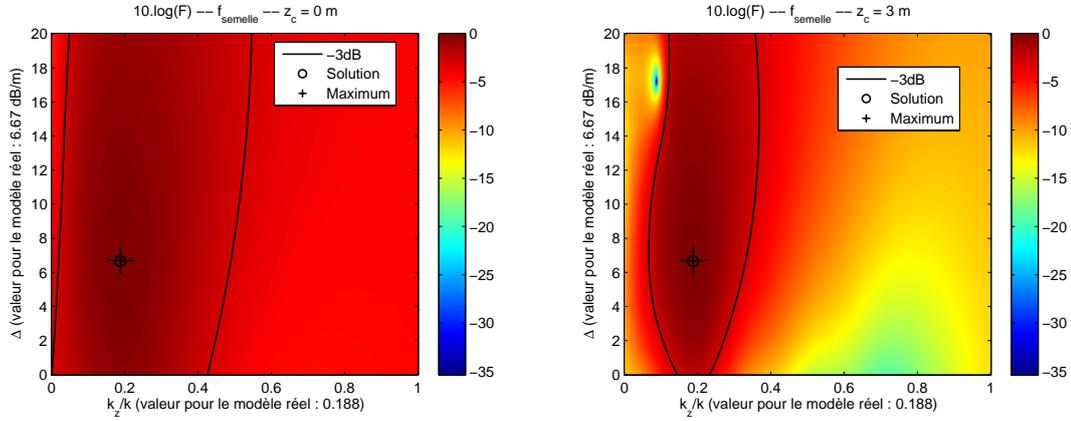


FIGURE 4.49: *Un contact, paramètres inconnus - Influence de la position de l'antenne sur la localisation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative. Gauche : $z_c = 0$ m. Droite : $z_c = 3$ m. Modèle réel identique au modèle source : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{semelle}$.*

Pour les hautes fréquences, il est indispensable d'éloigner l'antenne par rapport au point d'excitation pour localiser le nombre d'onde complexe. Pour $z_c = 0$ m la dynamique de \mathcal{F} dans \mathcal{P} (qui se limite à 10 dB/m pour l'atténuation) n'atteint même pas 1.5 dB. La figure 4.50 de gauche montre que lorsque $z_c = 3$ m, la fonction est encore une fois plus discriminante en nombre d'onde qu'en atténuation. On remarque également l'apparition de maxima locaux, qui, à atténuation fixée, sont les lobes de sélectivité secondaires que l'on aurait pour une formation de voies classique en ondes planes.

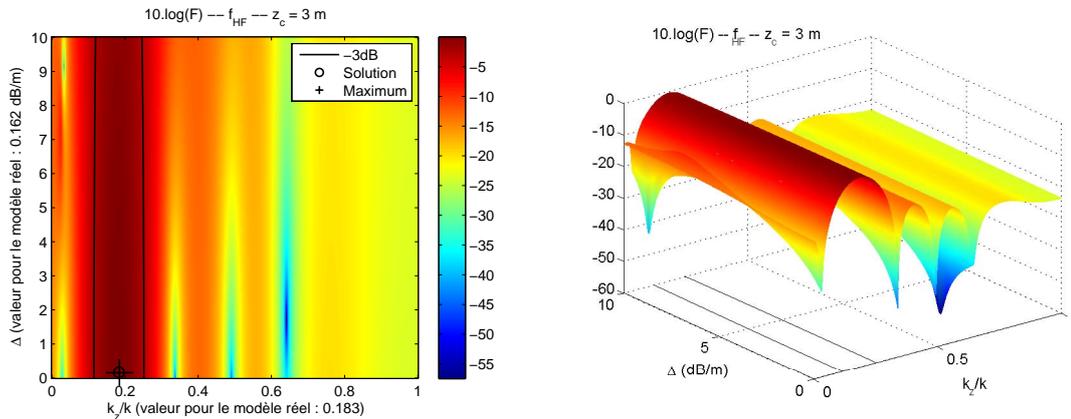


FIGURE 4.50: *Un contact, paramètres inconnus - Localisation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative. $z_c = 3$ m. Modèle réel identique au modèle source : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{HF}$.*

La figure 4.50 de droite, qui est une représentation en trois dimensions de la figure de gauche illustre bien ce comportement. Pour ce tracé, le contour à -3 dB a été projeté sur le plan \mathcal{P} .

Pour compléter l'étude du pouvoir discriminant suivant l'atténuation, on s'intéresse à présent au tracé de la fonction \mathcal{F} en fonction de l'atténuation du modèle source, en supposant k_z connu. Ce tracé donné figure 4.51 correspond en fait à un plan de coupe effectué sur la figure 4.50 pour $k_z/k = \Re(k_\beta)/k$.

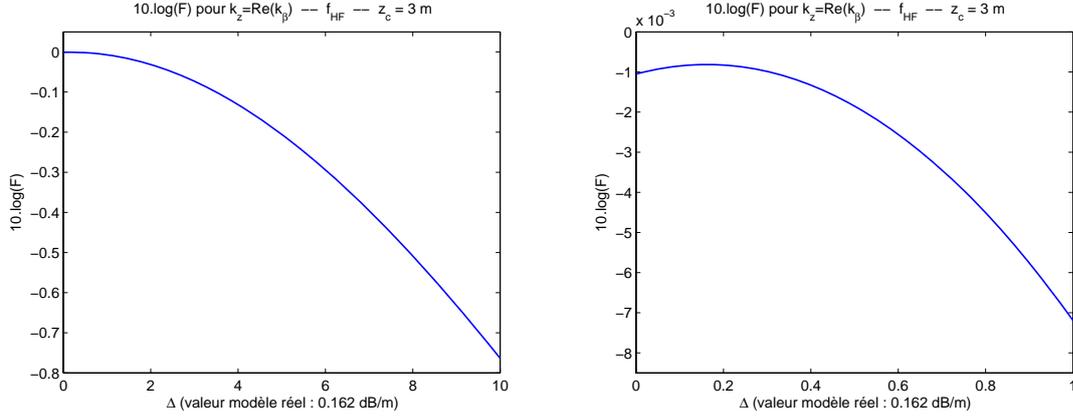


FIGURE 4.51: *Un contact, paramètres inconnus - Localisation de l'atténuation de l'onde propagative pour k_z connu. $z_c = 3$ m. Modèle réel identique au modèle source : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{HF}$.*

La figure 4.51 montre bien que la dynamique de \mathcal{F} est très faible suivant l'atténuation (inférieure à 1 dB sur l'intervalle considéré). Cependant, la concavité de la fonction dans ce plan de coupe assure l'unicité du maximum dans ce cas. Ce comportement vis-à-vis de l'atténuation rejoint les conclusions de la partie 4.3.2.1 : en hautes fréquences, l'atténuation de l'onde propagative au niveau du modèle source peut être erronée, sans pour autant commettre une erreur importante sur la variance de l'amplitude au contact.

4.5.2.2 Signaux bruités

Bien que le modèle source n'inclue pas la présence bruit, on ajoute à présent au modèle réel un bruit spatialement blanc de variance σ_b^2 sur les capteurs. L'influence de ce type de bruit sur l'estimation de la variance au contact a déjà été étudié dans la partie 4.3.1 : l'estimateur de σ^2 est biaisé. On cherche ici à étudier l'influence de ce bruit sur les performances de la méthode en ce qui concerne la localisation du nombre d'onde complexe k_β .

Du fait de la normalisation de la matrice spectrale $\hat{\Gamma}$ et des vecteurs sources $\underline{v}(\zeta)$, la fonction \mathcal{F} atteint toujours un maximum unitaire au point solution. Pour les autres points du plan \mathcal{P} , l'ajout de bruit se traduit par une diminution de la dynamique par rapport au point solution. Ainsi, quelle que soit la valeur du rapport signal à bruit, le maximum reste localisé au bon endroit alors que la sélectivité est dégradée. La figure 4.52 (resp. 4.53) illustre ce comportement pour $f_{semelle}$ (resp. f_{HF}), pour deux valeurs du rapport signal à bruit (5 dB et 15 dB) pour une antenne positionnée à 3 m du droit de l'excitation.

Si la dynamique générale dans le plan \mathcal{P} est effectivement diminuée, ces tracés montrent que le contour à -3 dB n'est pas étendu de manière significative. Les performances de la méthode sur le plan de la localisation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative

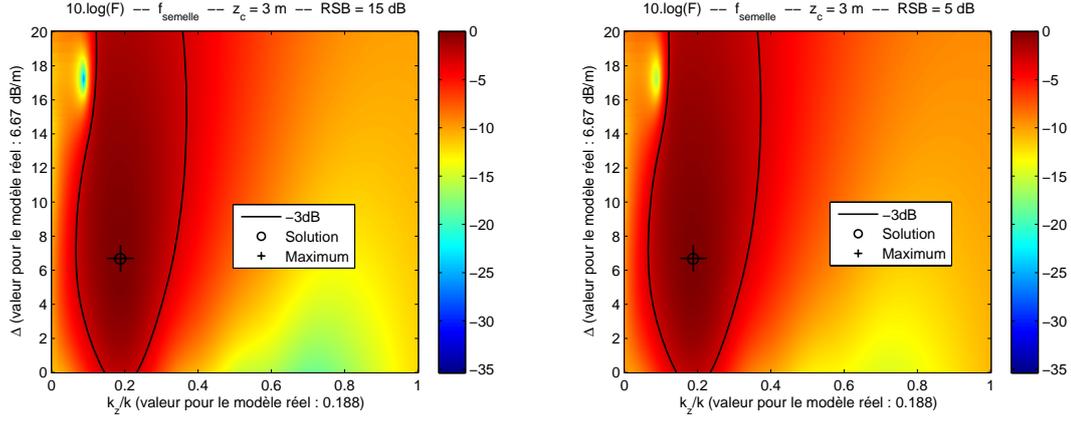


FIGURE 4.52: Un contact, paramètres inconnus - Influence du bruit sur la localisation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative. $z_c = 3$ m. Modèle réel identique au modèle source : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{semelle}$. Gauche : $RSB = 15$ dB. Droite : $RSB = 5$ dB.

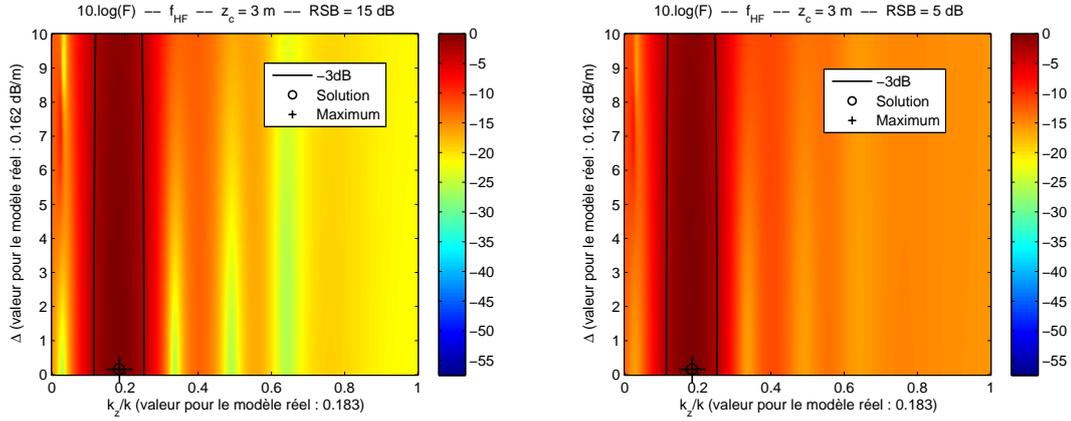


FIGURE 4.53: Un contact, paramètres inconnus - Influence du bruit sur la localisation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative. $z_c = 3$ m. Modèle réel identique au modèle source : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{HF}$. Gauche : $RSB = 15$ dB. Droite : $RSB = 5$ dB.

ne sont pas dégradées en présence de bruit.

4.5.2.3 Erreur sur la position du contact

Dans ce paragraphe, les performances de la méthode pour la localisation du nombre d'onde complexe sont brièvement étudiées lorsque la position du contact est erronée dans le modèle source. La position de l'excitation erronée \tilde{z}_e du modèle source vaut 15 cm. Deux positions de l'antenne par rapport à la position exacte de l'excitation $z_e = 0$ cm sont étudiées : $z_c - z_e = 0$ et 3 m.

En fait, cette étude vient corroborer les résultats de la partie 4.3.2 concernant l'influence d'une erreur sur la position du contact. Plus l'atténuation est élevée, plus la précision sur la position de l'excitation est cruciale, notamment pour l'estimation de la variance de l'excitation au contact. Pour $z_c - z_e = 3$ m, la source en \tilde{z}_e est plus proche de l'antenne qui

reçoit alors plus de puissance acoustique qu'elle ne devrait. La dérive est compensée par une variance plus faible (cf. figure 4.15 paragraphe 4.3.2.3) et une atténuation plus forte (cf. figure 4.54 ci-dessous).

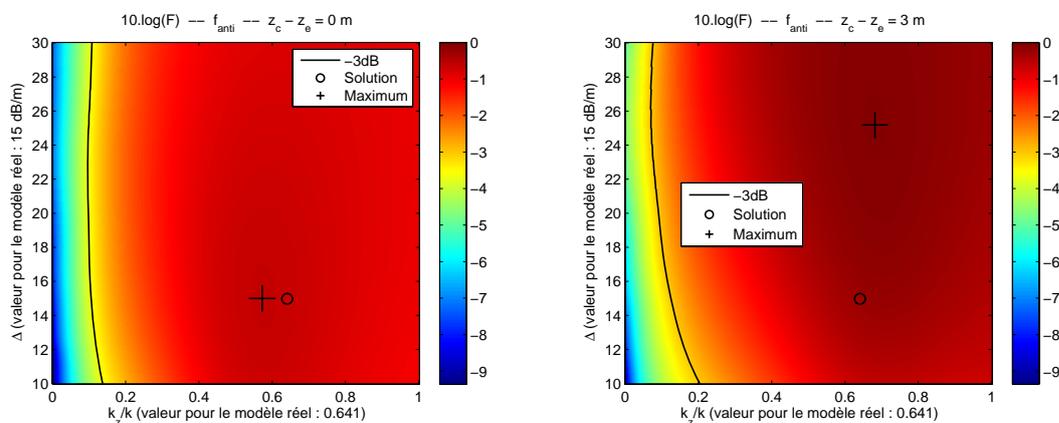


FIGURE 4.54: *Un contact, paramètres inconnus - Influence d'une erreur sur la position du contact sur la localisation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative. Modèle réel identique au modèle source : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{anti}$. $z_e = 15$ cm. Gauche : $z_c - z_e = 0$ m. Droite : $z_c - z_e = 3$ m.*

En revanche, pour $f_{semelle}$ et f_{HF} , la méthode reste discriminante même lorsque l'on se trompe sur la position du contact, lorsque l'antenne est excentrée de l'excitation. En effet, pour $z_c - z_e = 3$ m l'antenne se trouve dans une portion de l'espace où les propriétés du champ acoustique cylindrique rayonné par le rail varient peu spatialement. Une erreur sur la position du contact ne modifie pas ces propriétés, et le nombre d'onde complexe exact peut être identifié (cf. figure 4.55).

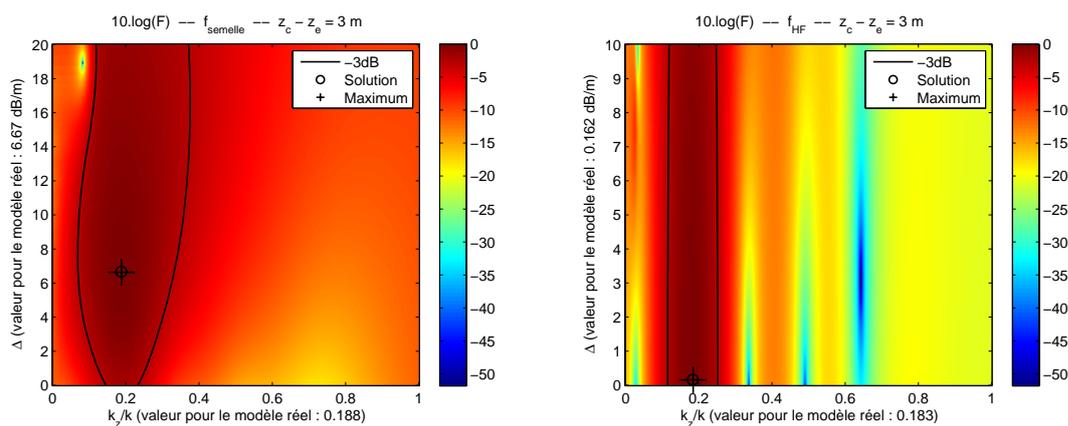


FIGURE 4.55: *Un contact, paramètres inconnus - Influence d'une erreur sur la position du contact sur la localisation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative. Modèle réel identique au modèle source : poutre d'Euler sur support continu. $z_e = 15$ cm. $z_c - z_e = 3$ m. Gauche : $f = f_{semelle}$. Droite : $f = f_{HF}$.*

4.5.3 Dégradations du modèle source

4.5.3.1 Périodicité et cisaillement négligé

Suite aux conclusions de la partie 4.3.3, on s'intéresse ici à la possibilité de localiser le nombre d'onde complexe de l'onde propagative du modèle réel, en utilisant un modèle source dégradé. Le modèle réel est une poutre de Timoshenko supportée périodiquement. Le modèle source est une poutre d'Euler sur support continu. Lorsque les paramètres vibratoires du modèle source sont connus, les effets de cette dégradation ont été présentés dans la partie 4.3.3.5. L'objectif de ce paragraphe est d'étudier dans quelle mesure ces paramètres peuvent être localisés à l'aide de notre méthode.

Les simulations couvrent l'ensemble des cas suivants, pour chacune des quatre fréquences d'étude :

- trois positions différentes de l'excitation par rapport aux traverses, $z_e = 0, 15$ et 30 cm ($z_e = 0$ correspond à une excitation au droit d'une traverse, l'écart inter-traverses vaut 60 cm),
- deux positions de l'antenne par rapport à l'excitation, en face et décalée de trois mètres.

Pour $f = f_{anti}$, la méthode est peu discriminante, surtout en ce qui concerne l'atténuation qui est estimée avec des écarts pouvant atteindre 8 dB/m par rapport à l'atténuation réelle (cf. figure 4.56 de droite). Le nombre d'onde structural est quant à lui généralement mieux approché. La position de l'antenne par rapport au droit de l'excitation a peu d'influence sur les résultats qui dépendent en revanche de la position de l'excitation par rapport aux traverses. C'est pour $z_e = 0$ cm que le nombre d'onde complexe est le mieux approché (cf. figure 4.56 de gauche⁶).

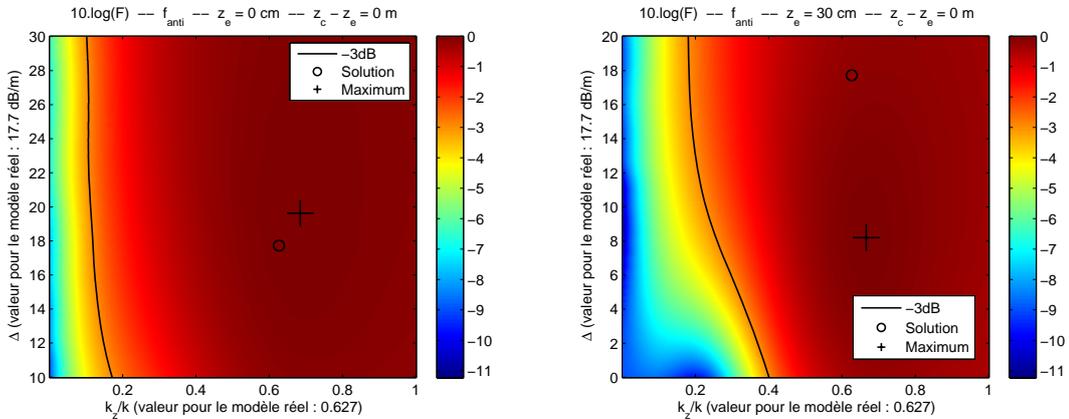


FIGURE 4.56: *Un contact, paramètres inconnus - Estimation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative à partir d'un modèle source dégradé. Modèle réel : poutre de Timoshenko supportée périodiquement. Modèle source : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{anti}$. $z_c - z_e = 0$ m. Gauche : $z_e = 0$ cm. Droite : $z_e = 30$ cm.*

Pour $f = f_{semelle}$, le maximum de la fonction \mathcal{F} dans \mathcal{P} correspond systématiquement à la solution pour le modèle réel. Cependant on note toujours un faible pouvoir discriminant pour l'atténuation. La position de l'excitation par rapport aux traverses n'a pas d'influence sur les résultats et la dynamique est améliorée lorsque l'antenne est décalée par rapport à l'excitation ($z_c - z_e = 3$ m). La figure 4.57 illustre ces résultats pour $z_e = 30$ cm.

6. On prendra soin de noter que l'atténuation varie de 10 à 30 dB/m pour ce tracé, afin de représenter

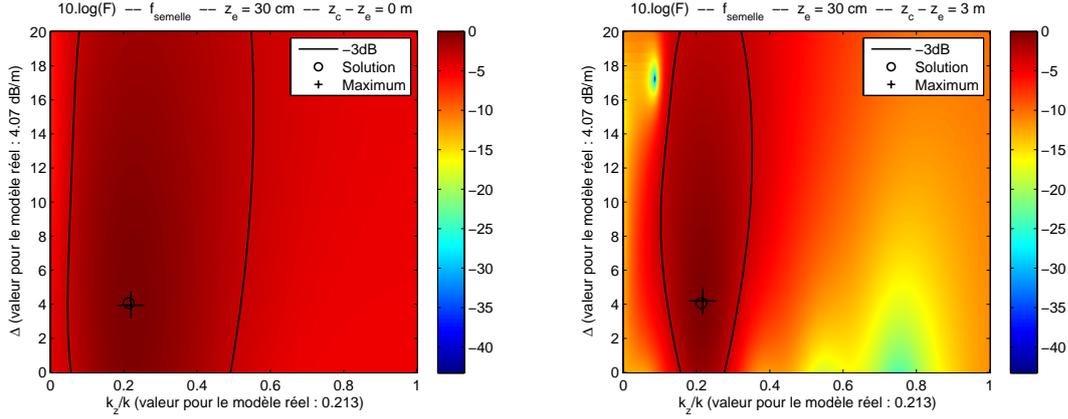


FIGURE 4.57: *Un contact, paramètres inconnus - Estimation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative à partir d'un modèle source dégradé. Modèle réel : poutre de Timoshenko supportée périodiquement. Modèle source : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{semelle}$. $z_e = 30$ cm. Gauche : $z_c - z_e = 0$ cm. Droite : $z_c - z_e = 3$ m.*

Pour les hautes fréquences, la position d'antenne au droit de l'excitation ($z_c - z_e = 0$ cm) ne donne aucun résultat correct. En effet, l'antenne est dans ce cas positionnée dans une zone singulière de jonction entre les deux demi-espaces pour lesquels le rail peut être considéré comme un cylindre infini. Les propriétés cylindriques du champ acoustique ne sont pas vérifiées et en particulier, on ne peut relier la directivité du champ dans cette zone au nombre d'onde dans le rail.

En revanche, pour $z_c - z_e = 3$ m, on retrouve les résultats de la partie 4.5.2 obtenus pour un modèle source identique au modèle réel. Même à la fréquence *pin-pin* pour laquelle les effets de la périodicité sont importants, le nombre d'onde complexe est bien localisé, quelle que soit la valeur de z_e , avec toutefois une légère erreur pour l'atténuation. La figure 4.58 illustre ces résultats pour $z_e = 30$ cm.

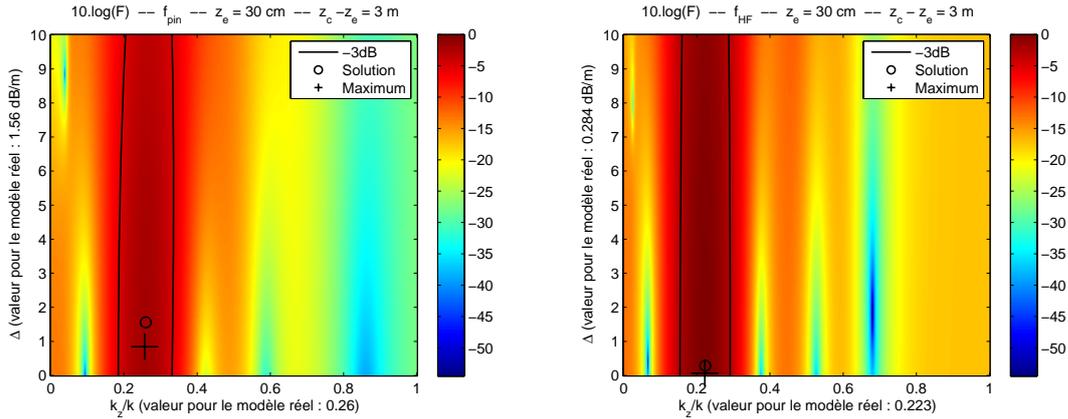


FIGURE 4.58: *Un contact, paramètres inconnus - Estimation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative à partir d'un modèle source dégradé. Modèle réel : poutre de Timoshenko supportée périodiquement. Modèle source : poutre d'Euler sur support continu. $z_c - z_e = 3$ m. $z_e = 30$ cm. Gauche : $f = f_{pin}$. Droite : $f = f_{HF}$.*

le point maximum en dehors du plan \mathcal{P} habituel.

4.5.3.2 Perturbation par un autre type d'onde

Dans cette section, on étudie l'effet induit par une onde vibratoire supplémentaire non prise en compte dans le modèle. Le modèle réel tient compte à la fois des ondes de flexion verticales et des ondes de flexion latérales. On associe un champ force à chaque type de flexion⁷. En adoptant un modèle de poutre d'Euler sur support continu, ces ondes sont caractérisées par deux nombres d'onde complexes : $k_{\beta v}$ pour les ondes de flexion verticales et $k_{\beta l}$ pour les ondes de flexion latérales. Ces deux types d'ondes, générées au niveau de la même interface de contact roue/rail, sont cohérentes et ont même amplitude d'excitation. Pour cette étude, on fixe arbitrairement une phase entre les ondes de flexion verticales et les ondes de flexion latérales ; deux valeurs différentes sont testées pour ce déphasage. Les paramètres mécaniques du rail et de la voie pour les flexions latérales sont données dans la table 4.5. À partir de ces paramètres mécaniques, on donne pour les fréquences d'étude, l'atténuation et le nombre d'onde de l'onde propagative pour la flexion latérale dans la table 4.6.

Rail		Support	
Module d'élasticité (N/m ²)	$E = 2.1 \cdot 10^{11}$	Masse d'une demi-traverse (kg)	$M_t = 80$
Coefficient de pertes internes	$\eta_E = 4 \cdot 10^{-3}$	Raideur de la semelle (N/m)	$s_p = 1.5 \cdot 10^7$
Moment d'inertie (m ⁴)	$I = 3.05 \cdot 10^{-5}$	Facteur de pertes dans la semelle	$\eta_p = 0.9$
Coefficient de poisson	$\nu = 0.3$	Raideur du ballast (N/m)	$s_b = 2.5 \cdot 10^7$
Module de cisaillement (N/m ²)	$G = E/(2+2\nu)$	Facteur de pertes dans le ballast	$\eta_b = 0.15$
Masse volumique (kg/m ³)	$\rho = 8000$		
Rigidité en flexion verticale (Nm ²)	$B = EI$		
Masse par unité de longueur (kg/m)	$M = 60$		
Coefficient de cisaillement	$\kappa = 2.4$		

TABLE 4.5: Paramètres mécaniques typiques de la voie, ondes de flexion latérales [51].

	f_{anti}	$f_{semelle}$	f_{pin}	f_{HF}
k_z (m ⁻¹)	4.13	5.31	8.60	9.05
Δ (dB/m)	0.87	0.42	0.16	0.15

TABLE 4.6: Ondes de flexion latérale - Atténuation et nombre d'onde réel de l'onde propagative. Modèle : poutre d'Euler sur support continu.

Pour le modèle source, on associe au contact un seul champ force pour une poutre d'Euler sur support continu. Les deux ondes propagatives et les deux ondes de champ proche se propageant de part et d'autre de l'excitation sont caractérisées par un nombre d'onde complexe inconnu. L'idée est ici d'évaluer la fonction \mathcal{F} dans le plan \mathcal{P} afin de repérer deux maxima locaux localisés chacun sur l'un des nombres d'onde $k_{\beta v}$ ou $k_{\beta l}$.

En premier lieu, de manière analogue à l'étude menée dans la partie 4.5.2, les résultats obtenus pour $z_c - z_e = 0$ m ont montré que cette position d'antenne est inappropriée, en termes de dynamique, pour l'ensemble des fréquences. Seuls les résultats concernant $z_c - z_e = 3$ m sont discutés dans cette partie. Pour les tracés présentés dans cette partie, le contour à -3 dB est relatif au maximum de la fonction \mathcal{F} en dB (différent de 0 dans ce cas où le modèle source est dégradé). Lorsque deux maxima locaux peuvent être visuellement repérés, le contour à -3 dB est relatif à la plus petite des deux valeurs maximales

7. On rappelle que pour un contact, un champ vibratoire de type *champ force* est constitué de deux ondes propagatives et de deux ondes de champ proche se propageant de part et d'autre du contact.

(notation $\min(\max)$ dans la légende). L'échelle colorimétrique inclut la valeur 0 dans un souci d'uniformité.

Pour $f = f_{anti}$ les deux nombres d'onde dans le rail sont proches alors que les atténuations diffèrent de manière significative. Dans cette configuration, il est impossible de dissocier les deux nombres d'onde complexes (figure 4.59). Le caractère sélectif de la fonction \mathcal{F} dans la direction des nombres d'onde permet cependant de donner une unique approximation des deux nombres d'onde, par ailleurs proches, en se basant sur le maximum de \mathcal{F} .

Ce résultat n'est pas étonnant dans la mesure où les études précédentes, notamment la partie 4.5.2, ont montré que la fonction \mathcal{F} ne présente pas de caractère sélectif selon l'atténuation. Pour s'assurer cependant que ce résultat n'est pas dû à la corrélation des ondes, un nouveau test est réalisé en supposant que les ondes de flexion verticale et les ondes de flexion latérale du champ réel sont décorrélées. Les résultats ont montré qu'il est également impossible de dissocier les deux atténuations dans ce cas.

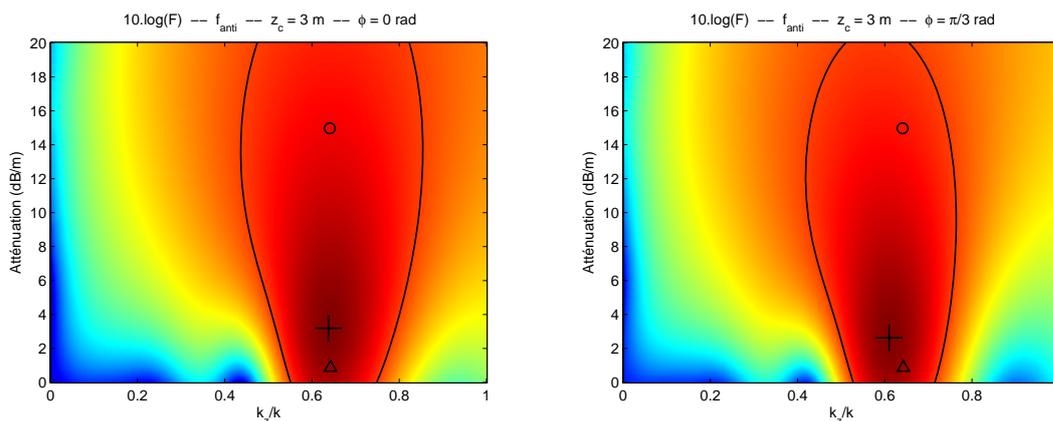


FIGURE 4.59: *Un contact, paramètres inconnus - Estimation de deux nombres d'onde complexes à partir d'un modèle source dégradé. Modèle de poutre : poutre d'Euler sur support continu. Modèle réel : deux champs force. Modèle source : un seul champ force. $f = f_{anti}$. $z_c - z_e = 3$ m. Gauche : $\phi = 0$ rad. Droite : $\phi = \pi/3$ rad.*

Pour $f = f_{semelle}$ (figures 4.60 et 4.61), les deux nombres d'onde complexes diffèrent à la fois par leurs atténuations et par leurs nombres d'onde réels. Que les ondes soient corrélées ou non, la fonction \mathcal{F} admet un maximum bien localisé sur le nombre d'onde complexe avec la plus petite atténuation ($k_{\beta l}$). La dynamique de \mathcal{F} sur l'atténuation est de plus meilleure que ce qui a pu être observé jusqu'à présent. L'antenne située à 3 m du rail se trouve dans un champ acoustique dont les propriétés dépendent essentiellement des ondes qui ont la plus faible atténuation. Les ondes plus fortement atténuées, limitées au point d'excitation, peuvent être regroupées dans un ensemble d'ondes de champ proche. La contribution du nombre d'onde $k_{\beta v}$ n'est pas assez marquée pour entraîner un maximum local pour \mathcal{F} , et l'onde verticale ne peut être identifiée.

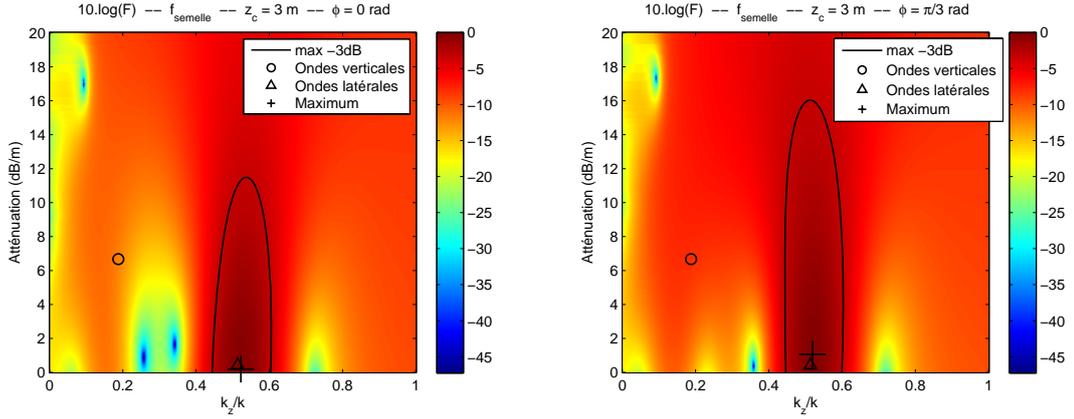


FIGURE 4.60: *Un contact, paramètres inconnus - Estimation de deux nombres d'onde complexes à partir d'un modèle source dégradé. Modèle de poutre : poutre d'Euler sur support continu. Modèle réel : deux champs force. Modèle source : un seul champ force. $f = f_{semelle}$. $z_c - z_e = 3$ m. Gauche : $\phi = 0$ rad. Droite : $\phi = \pi/3$ rad.*

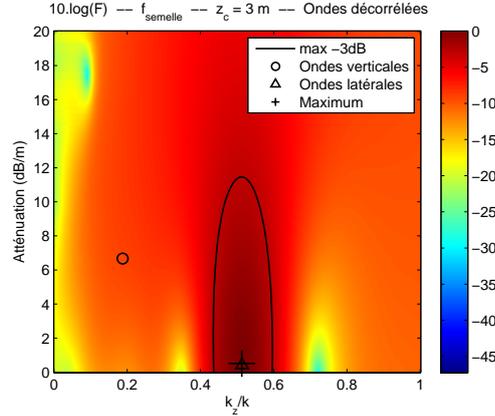


FIGURE 4.61: *Un contact, paramètres inconnus - Estimation de deux nombres d'onde complexes à partir d'un modèle source dégradé. Modèle de poutre : poutre d'Euler sur support continu. Modèle réel : deux champs force décorrelés. Modèle source : un seul champ force. $f = f_{semelle}$. $z_c - z_e = 3$ m.*

Pour $f = f_{HF}$, les ondes de flexion verticale et latérale ont des atténuations très faibles et des nombres d'onde sensiblement différents. D'après les résultats précédents, on s'attend à ce que l'on puisse dissocier leurs nombres d'onde respectifs plus facilement que leurs atténuations. Cependant, comme le montre la figure 4.62, la capacité à dissocier deux maxima locaux pour \mathcal{F} dans le plan \mathcal{P} dépend de la phase entre les deux types d'onde. Pour $\phi = 0$ rad, la fonction \mathcal{F} présente deux maxima locaux permettant d'identifier deux nombres d'onde structuraux. En revanche, pour $\phi = \pi/3$ rad, \mathcal{F} présente un unique minimum correspondant à un nombre d'onde structural intermédiaire. Les propriétés discriminantes de la méthode sont donc dans ce cas dépendantes de la phase entre les deux types d'onde considérées. La figure 4.63 pour laquelle les ondes de flexion verticale et latérale sont décorrelées confirme ce résultat. En ce qui concerne les atténuations respectives, il est impossible dans ce cas de localiser l'une comme l'autre.

Cette incapacité à dissocier les nombres d'onde structuraux des ondes vibratoires dans

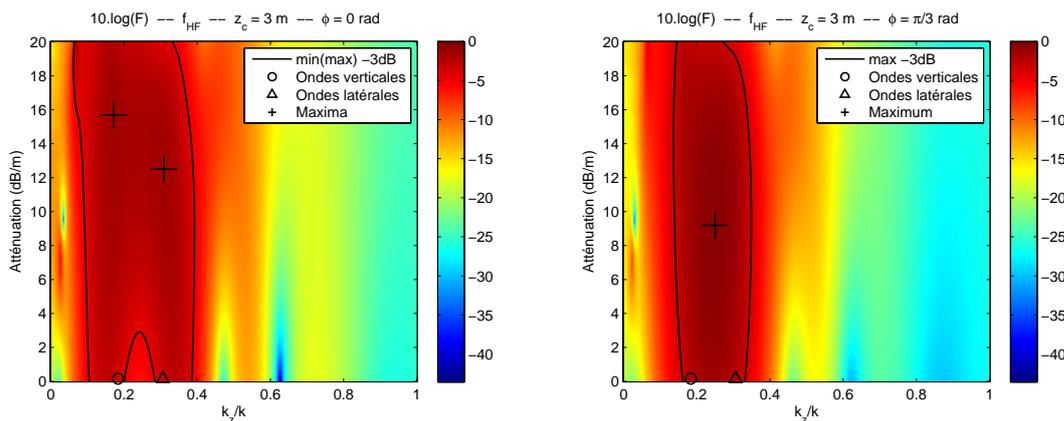


FIGURE 4.62: *Un contact, paramètres inconnus - Estimation de deux nombres d'onde complexes à partir d'un modèle source dégradé. Modèle de poutre : poutre d'Euler sur support continu. Modèle réel : deux champs force. Modèle source : un seul champ force. $f = f_{HF}$. $z_c - z_e = 3$ m. Gauche : $\phi = 0$ rad. Droite : $\phi = \pi/3$ rad.*

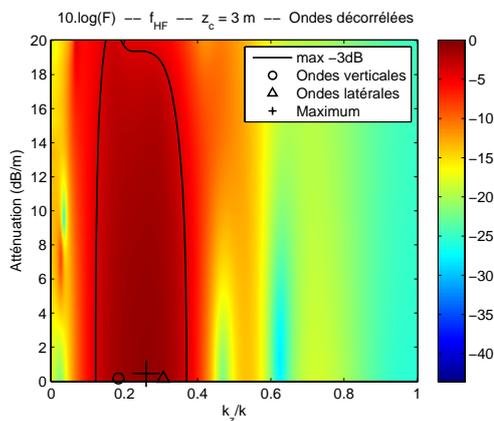


FIGURE 4.63: *Un contact, paramètres inconnus - Estimation de deux nombres d'onde complexes à partir d'un modèle source dégradé. Modèle de poutre : poutre d'Euler sur support continu. Modèle réel : deux champs force décorrélés. Modèle source : un seul champ force. $f = f_{HF}$. $z_c - z_e = 3$ m.*

le rail aux fréquences élevées est un résultat lié aux performances des traitements d'antenne classiques basés sur la formation de voies. Lorsque des ondes planes ont des directions d'incidences trop proches, le filtrage spatial réalisé par l'antenne n'est pas suffisamment sélectif pour les dissocier. Comme nous l'avons vu dans la partie 2.2.1, ce pouvoir sélectif dépend de ses caractéristiques à travers le produit pd . Les conclusions sont semblables dans ce cas où les ondes vibratoires sont faiblement atténuées dans le rail, et pour lequel la directivité du champ acoustique rayonné par le rail est liée au nombre d'onde structural des ondes vibratoires qui le parcourent.

Pour vérifier cette hypothèse, nous simulons deux champs force pour lesquels les nombres d'onde réels associés à $k_{\beta v}$ et à $k_{\beta l}$ diffèrent de manière plus significative. Pour les ondes de flexion latérale, le nombre d'onde structural k_{zl} est fixé à 12 m^{-1} au lieu de 9.05 m^{-1} . Dans ce cas, comme le montre la figure 4.64, les deux nombres d'onde complexes peuvent être facilement dissociés. Avec cette démarche simplifiée basée sur la discrétisation

arbitraire de l'espace de définition de \mathcal{F} , il est difficile de conclure quant au réel pouvoir sélectif de la méthode. En comparant l'allure des contours à -3dB , on peut toutefois supposer que cette sélectivité dépend de la phase entre les deux champs proches.

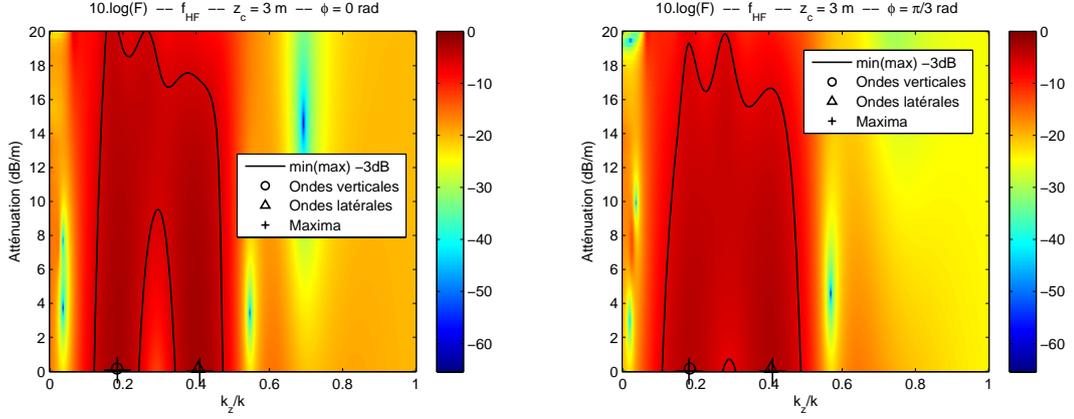


FIGURE 4.64: *Un contact, paramètres inconnus - Estimation de deux nombres d'onde complexes à partir d'un modèle source dégradé. Modèle de poutre : poutre d'Euler sur support continu. Modèle réel : deux champs force. Modèle source : un seul champ force. $k_{zl} = 12 \text{ m}^{-1}$. $f = f_{HF}$. $z_c - z_e = 3 \text{ m}$. Gauche : $\phi = 0 \text{ rad}$. Droite : $\phi = \pi/3 \text{ rad}$.*

Cette approche simplifiée permet donc d'énoncer un résultat essentiel pour la poursuite des investigations : lorsque plusieurs types d'ondes vibratoires se propagent dans le rail, les nombres d'onde complexes les caractérisant ($k_{\beta i}$) ne peuvent pas être systématiquement dissociés à l'aide d'un modèle source ne faisant intervenir qu'un seul type d'ondes. Selon les similitudes entre les atténuations (Δ_i) et les nombres d'onde structuraux ($k_{z i}$), différents comportements ont été soulevés :

- lorsque les $k_{z i}$ sont proches, les $k_{\beta i}$ ne sont pas dissociables,
- les ondes les moins atténuées sont les mieux identifiées,
- la maximisation de la fonction \mathcal{F} conduit systématiquement à l'estimation d'un k_z qui représente soit le k_z d'un type d'ondes peu atténuées, soit un k_z approché pour un ensemble d'ondes ayant des $k_{z i}$ proches,
- pour les hautes fréquences on se rapproche d'un problème de formation de voies classique ; suivant les caractéristiques de l'antenne (non discutées ici), des ondes suffisamment éloignées en termes de k_z (ou en termes d'angle d'incidence) peuvent être différenciées. Par rapport à la formation de voies, s'ajoute dans le cas de notre méthode une identification des atténuations.

4.6 Estimation du nombre d'onde complexe dans le cas de contacts multiples

4.6.1 Position du problème

Comme dans la section 4.4, on considère un ensemble de quatre contacts représentant les quatre essieux d'une voiture ferroviaire. Le modèle réel et le modèle source sont identiques, à savoir un modèle de poutre mince d'Euler sur support continu. Pour chaque contact, on suppose qu'une onde de champ proche et une onde propagative se propagent de part et d'autre du point d'excitation. Ces 16 ondes sont caractérisées par le même nombre d'onde complexe k_β supposé inconnu ($\zeta = k_\beta$).

Dans le cas de plusieurs contacts de paramètres inconnus, et en l'absence de bruit, on peut écrire les estimateurs des variances et des paramètres inconnus d'après les résultats de la partie 3.3.5 du chapitre 3 :

$$\begin{cases} \widehat{\underline{X}}_{\mathcal{C}} = \mathbf{V}^{-1}\underline{U} \Big|_{\underline{\zeta}=\widehat{\underline{\zeta}}_{\mathcal{C}}} \\ \widehat{\underline{\zeta}}_{\mathcal{C}} = \arg \max_{\underline{\zeta}} {}^t\underline{U} \mathbf{V}^{-1}\underline{U} \end{cases} \quad (4.36)$$

avec : $\mathbf{V}_{p,t} = |\underline{v}_p(\underline{\zeta})^\dagger \underline{v}_t(\underline{\zeta})|^2$ et $U_p = \underline{v}_p(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\underline{\Gamma}} \underline{v}_p(\underline{\zeta})$.

On rappelle que $\widehat{\underline{\Gamma}}$ est l'estimation de la matrice spectrale mesurée sur les microphones de l'antenne et on note $\underline{v}_p(\underline{\zeta})$ le vecteur source traduisant la propagation vibroacoustique depuis le contact p jusqu'aux microphones de l'antenne. Pour un $\underline{\zeta}$ donné, on note $\underline{X}_{opt}(\underline{\zeta})$ le vecteur des variances pour lequel le critère \mathcal{C} est minimisé :

$$\underline{X}_{opt}(\underline{\zeta}) = \mathbf{V}^{-1}\underline{U}$$

On réécrit ensuite le système 4.36 sous cette forme :

$$\begin{cases} \widehat{\underline{X}}_{\mathcal{C}} = \underline{X}_{opt}(\underline{\zeta} = \widehat{\underline{\zeta}}_{\mathcal{C}}) \\ \widehat{\underline{\zeta}}_{\mathcal{C}} = \arg \max_{\underline{\zeta}} {}^t\underline{X}_{opt}(\underline{\zeta}) \mathbf{V} \underline{X}_{opt}(\underline{\zeta}) \end{cases} \quad (4.37)$$

À partir de cette écriture, on remarque que la fonction $\mathcal{F}_N = {}^t\underline{X}_{opt}(\underline{\zeta}) \mathbf{V} \underline{X}_{opt}(\underline{\zeta})$ que l'on cherche à maximiser représente, pour un $\underline{\zeta}$ donné, la norme de la projection de $\widehat{\underline{\Gamma}}$ dans la base du sous-espace engendré par les vecteurs sources exprimés en $\underline{\zeta}$, et affectés des variances optimales correspondantes. Ainsi, lorsque modèle réel et modèle source sont identiques et normalisés, cette fonction vaut 1 au point solution (au point solution, cette base engendrée par les vecteurs sources est orthonormée). On s'intéresse par la suite à cette fonction $\mathcal{F}_N(\underline{\zeta})$ dans un plan \mathcal{P} de variation de $\underline{\zeta}$ identique à celui décrit dans la section 4.5 précédente.

Pour cette étude, trois positions d'antenne par rapport aux abscisses des contacts sont adoptées, toujours à 2.5 m de l'axe du rail :

- en face du premier bogie ($z_c = 1$ m),
- au milieu des deux bogies ($z_c = 8.5$ m),
- à trois mètres du dernier bogie ($z_c = 20$ m).

4.6.2 Résultats

Les figures 4.65 et 4.66 représentent la fonction \mathcal{F}_N en dB dans le plan de variation \mathcal{P} , pour les trois positions d'antenne étudiées, pour $f = f_{anti}$. La table 4.7 donne l'erreur d'estimation en dB sur la variance des contacts.

Comme pour les cas précédemment étudiés, la dynamique sur \mathcal{P} de la fonction \mathcal{F}_N est très faible. Le maximum reste cependant bien localisé sur le point solution. Pour ce point, les variances des sources sont estimées sans erreur pour les deux premières positions d'antenne ($z_c = 1$ m et $z_c = 8.5$ m). Pour $z_c = 20$ m, les contacts les plus éloignés de l'antenne sont "vus" comme un seul contact. Leurs variances respectives sont légèrement surestimée pour l'une et sous-estimée pour l'autre. En fait, pour cette position d'antenne, l'une des deux sources éloignées est affectée d'une variance nulle dès que l'on s'éloigne du point solution.

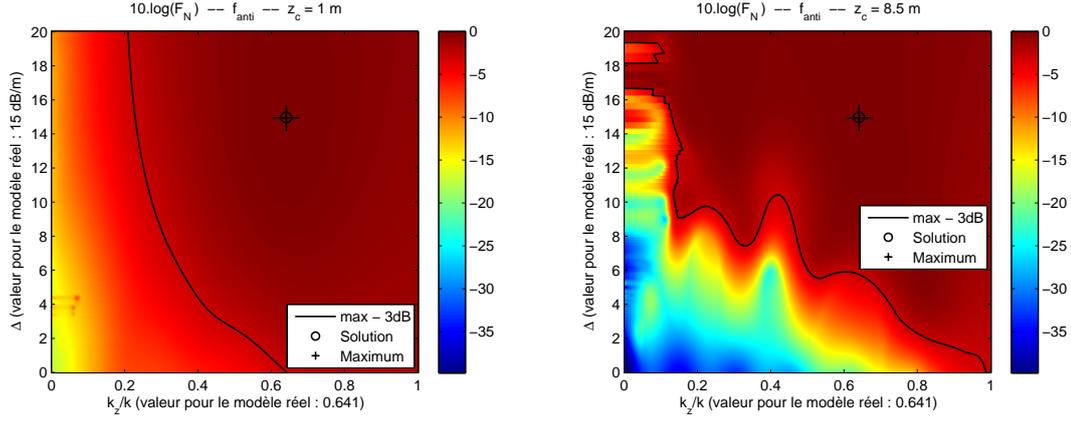


FIGURE 4.65: Plusieurs contacts, paramètres inconnus - Influence de la position de l'antenne par rapport aux contacts. Modèle réel et modèle source identiques : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{anti}$. Gauche : $z_c = 1$ m. Droite : $z_c = 8.5$ m.

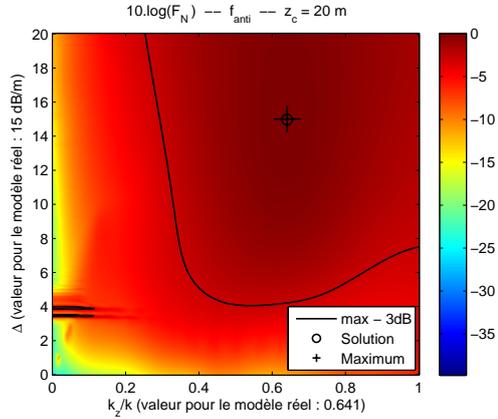


FIGURE 4.66: Plusieurs contacts, paramètres inconnus - Influence de la position de l'antenne par rapport aux contacts. Modèle réel et modèle source identiques : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{anti}$. $z_c = 20$ m.

f_{anti}	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_4^2
$z_c = 1$ m	0.00	0.00	-0.77	1.12
$z_c = 8.5$ m	0.00	-0.03	-0.03	0.00
$z_c = 20$ m	-1.85	1.44	0.01	0.01

TABLE 4.7: Plusieurs contacts, paramètres inconnus - Influence de la position de l'antenne par rapport aux contacts. Erreur d'estimation en dB au point maximum sur les variances des contacts. $f = f_{anti}$.

Pour $z_c = 8.5$ m, la figure 4.65 de droite montre que la fonction \mathcal{F}_N est très perturbée. Ces comportements sont dus à la mise à zéro de certaines variances.

Pour $f = f_{semelle}$, un positionnement approprié de l'antenne permet d'améliorer le pouvoir discriminant de la méthode pour la localisation du nombre d'onde complexe (figure 4.67 pour $z_c = 8.5$ m). En revanche, des erreurs importantes sont observées au niveau de l'estimation des variances (cf. table 4.8) : pour $z_c = 1$ m et $z_c = 20$ m, même au point où \mathcal{F}_N est maximum (qui ne correspond pas exactement au point solution en raison du maillage réalisé pour construire \mathcal{P}), la variance des deux contacts les plus éloignés est fixée à zéro⁸. Ce résultat montre qu'en situation de mesure, il sera impossible d'utiliser cette méthode pour estimer les variances des sources trop éloignées de l'antenne, ce qui

8. Une variance nulle correspond à une erreur en dB notée $-\infty$ dans les tables 4.8 et 4.9.

est également le cas en ne considérant qu'un seul contact.

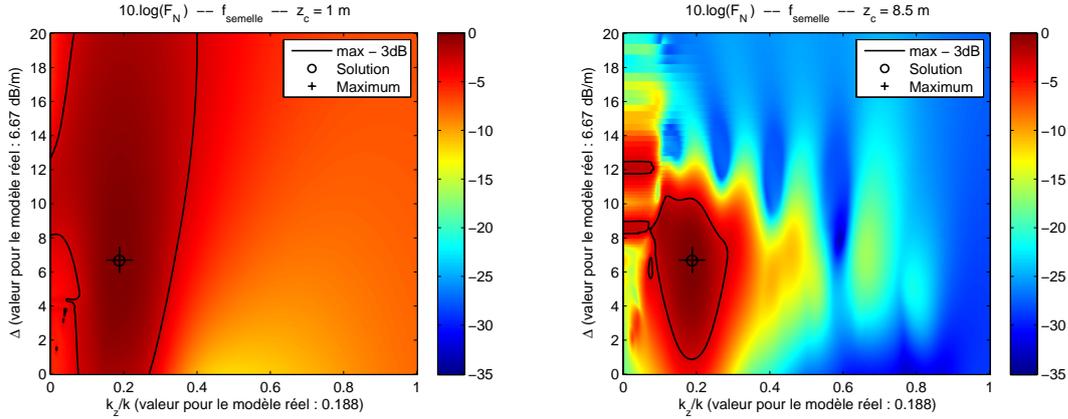


FIGURE 4.67: Plusieurs contacts, paramètres inconnus - Influence de la position de l'antenne par rapport aux contacts. Modèle réel et modèle source identiques : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{semelle}$. Gauche : $z_c = 1$ m. Droite : $z_c = 8.5$ m.

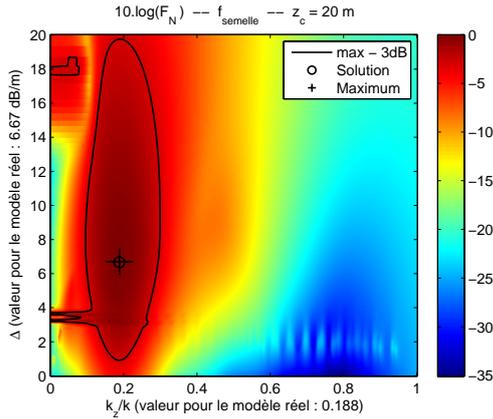


FIGURE 4.68: Plusieurs contacts, paramètres inconnus - Influence de la position de l'antenne par rapport aux contacts. Modèle réel et modèle source identiques : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{semelle}$. $z_c = 20$ m.

$f_{semelle}$	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_4^2
$z_c = 1$ m	0.01	0.01	$-\infty$	$-\infty$
$z_c = 8.5$ m	0.47	0.10	0.09	0.83
$z_c = 20$ m	$-\infty$	$-\infty$	1.75	-0.10

TABLE 4.8: Plusieurs contacts, paramètres inconnus - Influence de la position de l'antenne par rapport aux contacts. Erreur d'estimation en dB au point maximum sur les variances des contacts. $f = f_{semelle}$.

Pour $f = f_{HF}$ aucune position d'antenne éloignée des contacts ne permet de restituer les variances des excitations. Seules les variances des contacts situés en face de l'antenne pour $z_c = 1$ m sont estimées avec des erreurs inférieures à 1 dB (cf. table 4.9). En revanche, ici encore, le nombre d'onde complexe est localisé avec une meilleure dynamique que celle observée dans le cas d'un seul contact (cf. figures 4.69 et 4.70).

4.6.3 Plusieurs contacts - synthèse

Les résultats de cette étude réalisée dans le cas de plusieurs contacts de paramètres vibratoires inconnus rejoint ce qui a été obtenu précédemment dans le cas de paramètres

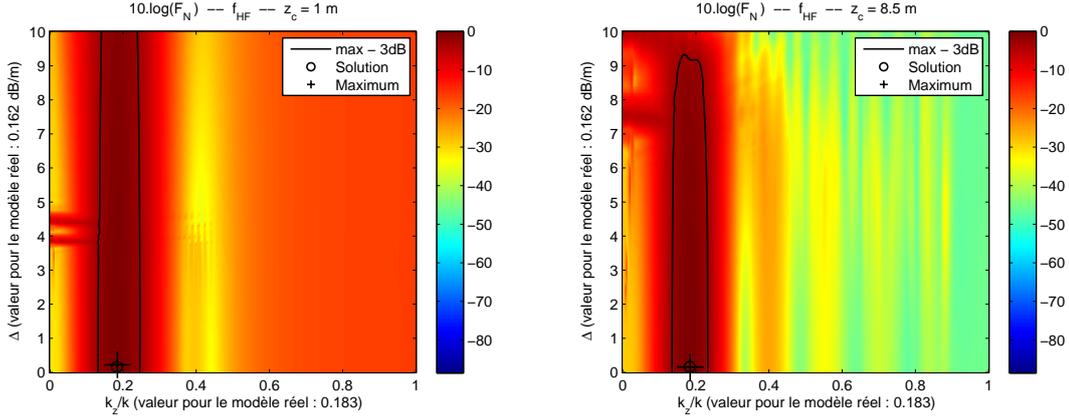


FIGURE 4.69: Plusieurs contacts, paramètres inconnus - Influence de la position de l'antenne par rapport aux contacts. Modèle réel et modèle source identiques : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{HF}$. Gauche : $z_c = 1$ m. Droite : $z_c = 8.5$ m.

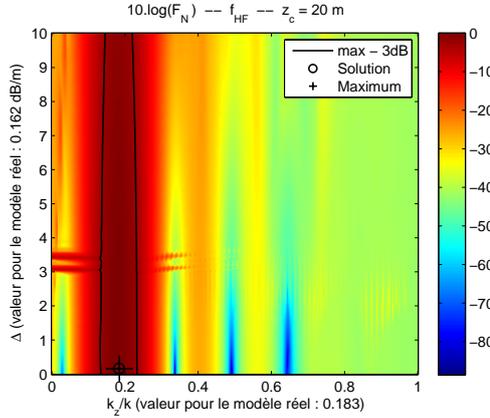


FIGURE 4.70: Plusieurs contacts, paramètres inconnus - Influence de la position de l'antenne par rapport aux contacts. Modèle réel et modèle source identiques : poutre d'Euler sur support continu. $f = f_{HF}$. $z_c = 20$ m.

f_{HF}	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_4^2
$z_c = 1$ m	0.04	0.43	$-\infty$	4.52
$z_c = 8.5$ m	2.35	$-\infty$	$-\infty$	3.92
$z_c = 20$ m	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	5.97

TABLE 4.9: Plusieurs contacts, paramètres inconnus - Influence de la position de l'antenne par rapport aux contacts. Erreur d'estimation en dB au point maximum sur les variances des contacts. $f = f_{HF}$.

connus (cf. section 4.4). Pour estimer la variance de plusieurs excitations, il faut, pour chaque contact, ou pour chaque groupe de contacts suffisamment proches, placer l'antenne autant que possible face à ces derniers. En revanche, comme dans le cas d'un seul contact, pour localiser les paramètres vibratoires inconnus (un nombre d'onde complexe dans ce cas), positionner l'antenne entre les différents contacts permet d'améliorer le pouvoir discriminant de la méthode.

Ainsi, dans l'optique d'une application *in situ*, le déplacement du véhicule par rapport à l'antenne peut ouvrir des perspectives intéressantes. Disposant des signaux acoustiques mesurés par les microphones d'une antenne lors du passage d'un véhicule ferroviaire, on peut imaginer n'utiliser que les portions de signal correspondant à des positions optimales de l'antenne pour l'objectif visé (estimation des variances des contacts, estimation des paramètres vibratoires, etc.).

4.7 Conclusion

L'investigation menée dans ce chapitre permet de conclure sur certains points de la problématique abordée dans cette thèse.

Modèle vibratoire pour le rail et son support

Dans la partie 4.2.2, nous avons défini un ensemble d'indicateurs caractéristiques des propriétés du champ acoustique rayonné par le rail : puissance totale rayonnée, pression quadratique moyenne et directivité moyenne sur une ligne. Nous avons ensuite utilisé ces indicateurs pour conclure quant à l'importance de certains aspects mécaniques comme la périodicité du support, l'hypothèse de poutre, l'effet de cisaillement ou la connaissance imprécise de certains paramètres vibratoires (cf. partie 4.3).

Il en ressort que dans la plupart des cas, l'utilisation d'un modèle complexe n'est pas indispensable pour bien représenter le champ acoustique, tout en conservant une bonne robustesse vis-à-vis des paramètres vibratoires caractérisant ce modèle. Jusqu'à la fréquence de résonance du rail sur la raideur des semelles ($f_{semelle}$), un modèle de poutre mince d'Euler sur support continu peut être adopté sans impact significatif sur les indicateurs (en dehors de la directivité pour f_{anti}). En plaçant de plus l'antenne en face de l'excitation, l'influence d'imprécisions sur les paramètres vibratoires (atténuation, nombre d'onde structural) est minimisée. Pour la fréquence *pin-pin*, les propriétés du champ acoustique dépendent fortement de la périodicité du support qui ne peut être négligée pour cette fréquence. Pour les hautes fréquences, le modèle de poutre mince sur support continu convient parfaitement, sous réserve de connaître avec précision le nombre d'onde structural. La position de l'excitation s'avère être un paramètre déterminant, en dehors des hautes fréquences.

Par ailleurs, dans l'optique d'une généralisation à plusieurs types d'onde pouvant inclure des déformations de section, il faut souligner que l'utilisation de vecteurs sources *ondes miroir décorréélées* conduit à des résultats acceptables sur l'estimation distinctes des variances des deux ondes de flexion verticale (onde de champ proche et onde propagative).

Estimation des paramètres vibratoires inconnus

Cette procédure requiert l'utilisation d'un algorithme d'optimisation numérique. Cependant, dans le cas où le nombre de paramètres à estimer ne dépasse pas deux, nous avons proposé dans les parties 4.5 et 4.6 une première investigation basée sur une représentation de la fonction à maximiser \mathcal{F} dans un espace discrétisé à deux dimensions. Suivant l'hypothèse que chaque type d'ondes vibratoires dans le rail était caractérisé par une atténuation et un nombre d'onde structural, nous nous sommes intéressés aux performances de la méthode en termes d'identification de ces paramètres. De manière générale, l'allure de \mathcal{F} autour du point solution est propice à une recherche de maximum (peu de fluctuations). Quelle que soit la fréquence, et quelle que soit la position de l'antenne par rapport aux contacts, il est difficile d'estimer une atténuation. En revanche, la méthode est beaucoup plus discriminante en ce qui concerne le nombre d'onde structural ; les résultats ont ainsi démontré la possibilité de différencier deux nombres d'onde suffisamment éloignés, même à partir d'un modèle ne tenant compte que d'une seule onde.

En présence de plusieurs contacts, une perspective a été ouverte concernant l'utilisation de plusieurs positions d'antenne pour améliorer les performances de la méthode : parvenir à la fois à une bonne estimation des variances des contacts (en positionnant l'antenne en face de ces derniers) tout en améliorant la localisation des paramètres vibratoires (lorsque l'antenne est décalée), notamment en ce qui concerne l'atténuation. Pour compléter cette première étude, il serait souhaitable d'implémenter dans le cas de plusieurs contacts les indicateurs utilisés dans la partie 4.3 pour un seul contact.

5 – Expérimentations vibro-acoustiques

La méthode de caractérisation proposée et étudiée dans les chapitres précédents est basée sur une modélisation vibratoire et acoustique du rail sur son support. Afin de valider les modèles décrits dans le chapitre 1 et d'étudier les performances de la méthode *in situ*, des mesures ont été réalisées sur un rail expérimental situé sur les pistes d'essai du LIER (Laboratoire d'essais INRETS Équipements de la Route¹). Une première campagne de mesures au marteau de choc a été réalisée pour valider le modèle vibratoire. Une seconde campagne associant une excitation du rail par un pot vibrant à un dispositif de mesures acoustiques par antenne microphonique a été menée pour valider le modèle acoustique et évaluer les performances de la méthode de caractérisation proposée dans cette thèse.

5.1 Le site expérimental

Un rail de type UIC60 de 30 m de long est fixé à des blochets en béton² par l'intermédiaire de semelles en caoutchouc. Les traverses sont placées dans des chaussons en élastomère et posées sur une chaussée. La souplesse des chaussons permet de découpler le système rail + traverses de la chaussée dans la bande de fréquence d'intérêt. Ils jouent un rôle équivalent au ballast dans les modèles vibratoires étudiés. Les raideurs complexes des semelles et du ballast sont supposées inconnues. Enfin, pour éviter les réflexions qui pourraient se produire aux extrémités du rail, celles-ci sont ensevelies dans du sable sur plusieurs mètres (figure 5.1). Les paramètres mécaniques du rail et des traverses, en dehors des raideurs complexes des semelles et du ballast qui sont inconnues, sont résumés dans la table 5.1. Les phénomènes dissipatifs sont pris en compte de manière identique à ce qui est décrit dans le paragraphe 1.2.1.3.

Paramètre	Valeur
Module d'élasticité (N/m ²)	$E = 2.1 \cdot 10^{11}$
Coefficient de pertes internes	$\eta_E = 2 \cdot 10^{-3}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Module de cisaillement (N/m ²)	$G = E/(2+2\nu)$
Masse volumique (kg/m ³)	$\rho = 8000$
Rigidité en flexion verticale (Nm ²)	$B_v = 6.4 \cdot 10^6$
Rigidité en flexion latérale (Nm ²)	$B_l = 9 \cdot 10^5$
Masse par unité de longueur (kg/m)	$M = 60$
Coefficient de cisaillement	$\kappa = 2.4$
Masse d'une demi-traverse (kg)	$M_t = 80$

TABLE 5.1: Paramètres mécaniques de la voie expérimentale du LIER.

1. <http://www.lier.fr/>

2. En fait il s'agit d'un seul des deux éléments en béton d'une traverse bi-bloc.



FIGURE 5.1: *Le rail expérimental du LIER. Extrémité ensablée pour éviter les réflexions en bout de rail.*

5.2 Mesures vibratoires - Excitation du rail à l'aide d'un marteau de chocs

La mise en place de ce rail expérimental, en 1997, dans le cadre d'un accord INRETS-D.T.T (Direction des Transports Terrestres), a fait l'objet d'une étude théorique [34,35] et expérimentale [73]. Les mesures ont en particulier montré que les paramètres mécaniques des attaches sont disparates, et que cette disparité agit sur le comportement vibratoire du rail. Dans le cadre de cette étude, nous conservons toutefois une modélisation basée sur un nombre de supports infini aux caractéristiques mécaniques identiques. L'objectif des mesures vibratoires réalisées au cours de l'été 2008 est donc de valider le modèle vibratoire de rail infini supporté périodiquement en déterminant les paramètres mécaniques inconnus qui maximisent la concordance entre prédictions et observations. Dans notre cas, nous avons choisi de baser notre recalage sur l'atténuation dans le rail, dont la procédure de mesurage a fait l'objet d'une directive européenne [74]. Ces mesures ont en partie été réalisées grâce à la collaboration de Julien Laget [51], étudiant de l'INSA-Lyon en MASTER acoustique.

5.2.1 Description des mesures

Le rail est excité par un marteau de choc et la vibration du rail (vitesse et accélération) est mesurée à plusieurs distances du point d'excitation. Pour des contraintes de mise en œuvre évidentes, un seul point de mesure est instrumenté et c'est l'excitation qui est déplacée tout en restant suffisamment loin des extrémités du rail pour se préserver d'éventuelles réflexions. Deux séries de mesures sont réalisées, pour les vibrations verticales et pour les vibrations latérales (pas de mesures croisées).

Pour les mesures verticales, l'accéléromètre est placé sur la tête du rail; le choc est également donné sur la tête (figure 5.2 de gauche). Pour les mesures latérales, l'accéléromètre est placé sur un côté du champignon et le choc est donné de l'autre côté (figure 5.2 de droite). Le spectre de l'excitation par choc est plus ou moins large bande selon la dureté du matériau utilisé pour la pointe du marteau; on s'assure donc du bon choix de pointe pour la gamme de fréquence considérée (bonne cohérence entre la force et la vibration). Jusqu'à 2 kHz, le matériau utilisé pour la tête du marteau de choc est une pointe

en plastique. Au delà, l'utilisation d'une pointe métallique permet en théorie d'étendre le spectre d'excitation jusqu'à 5 kHz. En pratique, les résultats sont ici décevants à partir de 3 kHz.



FIGURE 5.2: Disposition du marteau de choc par rapport à l'accéléromètre. Gauche : vibrations verticales. Droite : vibrations latérales

Les fonctions de transfert Force/Accélération sont obtenues, pour chaque position, en moyennant les interspectres de puissance obtenus pour 5 impacts. Les positions pour lesquelles la cohérence entre le signal d'excitation et la réponse vibratoire est insuffisante sont retirées du jeu de mesure (le seuil est fixé à 0.9). Pour certaines basses fréquences où l'atténuation dans le rail est importante, un certain nombre de mesures est ainsi inexploitable (figure 5.4).

Le principe de la mesure est basé sur l'hypothèse que le champ vibratoire résulte de la superposition de deux ondes : une onde de champ proche et une onde potentiellement propagative. L'influence de l'onde de champ proche sur les vibrations du rail étant localisée au voisinage de l'excitation, effectuer des mesures loin du point d'excitation semble être suffisant pour bien identifier l'atténuation de l'onde propagative. Cette observation est d'autant plus vraie que l'atténuation de l'onde propagative est faible. En revanche, la figure 1.10 de la partie 1.2.3 montre bien que l'onde propagative peut également être rapidement atténuée, notamment aux basses fréquences. Dans ce cas on est réduit à estimer l'atténuation globale des vibrations et à la comparer avec les valeurs données par la modélisation. C'est à partir de ces observations qu'ont été déterminées les positions des points de mesure données figure 5.3. Cette répartition, établie dans la directive européenne [74], permet à la fois une bonne densité de mesure en champ proche pour les atténuations élevées ainsi qu'un nombre suffisant de mesures éloignées pour les faibles atténuations.

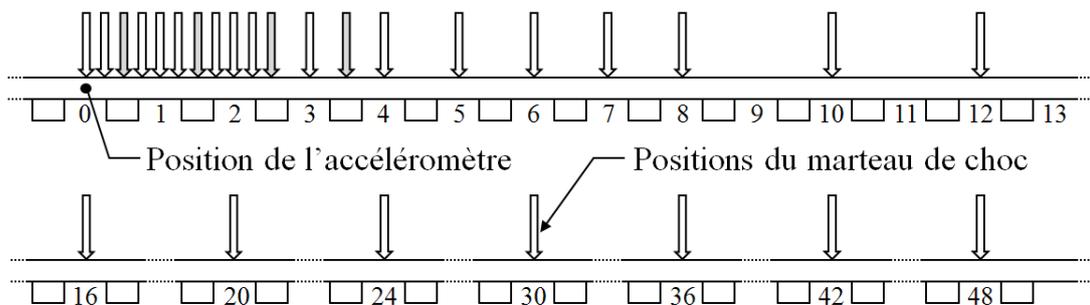


FIGURE 5.3: Positions des impacts au marteau de choc par rapport à l'accéléromètre [74].

Le point de repère 0 où sont mesurées les vibrations est au niveau du point médian du premier espace inter-traverses (les numéros correspondent aux indices des espaces inter-traverses). Pour les vibrations verticales, si l'accéléromètre est placé sur la tête du rail, le coup en 0 doit être porté aussi près que possible de ce dernier. Le rail expérimental du LIER étant de taille limitée, et afin d'éviter l'influence des éventuelles réflexions en bout de rail, nous avons limité les mesures à l'inter-traverses n° 30. La figure 5.4 représente la cohérence entre le signal d'excitation et le signal mesuré en fonction de la fréquence et de la position de l'excitation (l'indice 1 correspond à la 1^{ère} flèche de la figure 5.3).

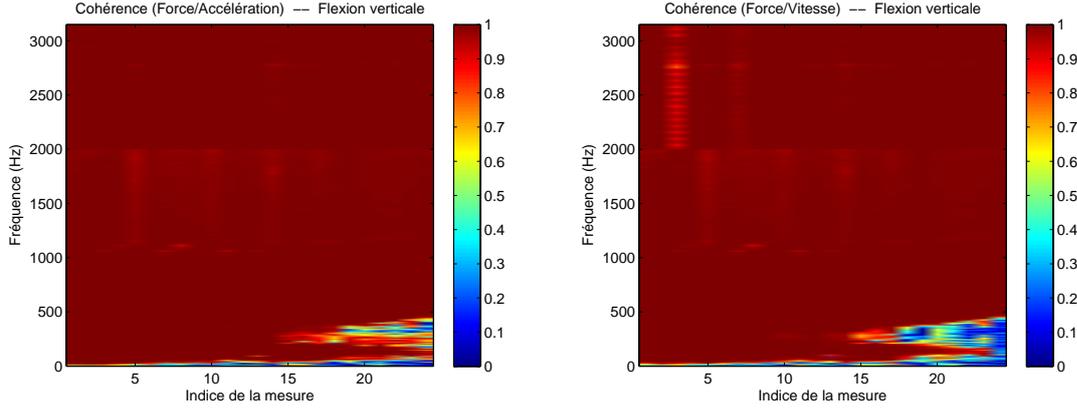


FIGURE 5.4: Cohérence entre le signal d'excitation et le signal mesuré, en flexion verticale. L'indice de la mesure correspond à la position de l'excitation. Gauche : signal mesuré brut, directement issu de l'accéléromètre. Droite : signal mesuré intégré analogiquement en sortie d'accéléromètre.

L'atténuation dans le rail est estimée à partir du protocole décrit dans la directive européenne [74]. En supposant que les vibrations sont atténuées de façon exponentielle dans le rail (hypothèse compatible avec l'hypothèse de poutre), on peut écrire la réponse A du rail (en vitesse ou en accélération) au point d'abscisse z en fonction de la réponse à l'origine : $A(z) = A(0)e^{-\beta z}$, où β est la constante de décroissance. Le taux de décroissance est déterminé par intégration du rapport des réponses en puissance le long du rail sur la réponse en puissance à l'origine :

$$\int_0^{\infty} \frac{|A(z)|^2}{|A(0)|^2} dz = \int_0^{\infty} e^{-2\beta z} dz = \frac{1}{2\beta} \quad (5.1)$$

Disposant en pratique d'un ensemble de points de mesure sur le rail (cf. figure 5.3), le taux de décroissance en dB ($\beta \cdot 20 \log e$) est estimé en discrétisant et en bornant l'intégrale 5.1 :

$$\Delta(\text{dB/m}) = \frac{10 \log(e)}{\sum_{z=0}^{z_{max}} \frac{|A(z)|^2}{|A(0)|^2} \Delta_z} \quad (5.2)$$

où Δ_z est l'intervalle entre les points à mi-distance des positions de mesurage des deux côtés (placé symétriquement autour de $z = 0$ et z_{max}).

5.2.2 Flexion verticale - Résultats

Pour des raisons de dynamique, la directive [74] recommande d'intégrer analogiquement les signaux issus des accéléromètres. En pratique, ces intégrations effectuées lors des

mesures ont conduit à des résultats identiques pour l'évaluation de l'équation 5.2, que l'on utilise des FRF en accélération ou en vitesse³. Les résultats obtenus en utilisant les FRF en vitesse se sont parfois avérés décevants : comme le montre la figure 5.4, la cohérence entre le signal d'excitation et le signal mesuré est plus élevée dans le cas du signal d'accélération. Les résultats présentés dans la suite sont issus des signaux d'accélération.

5.2.2.1 Atténuation globale

La figure 5.5 représente l'atténuation globale des ondes de flexion verticale, à la fois pour la mesure ainsi que pour le modèle dont les paramètres ont été calés sur la mesure.

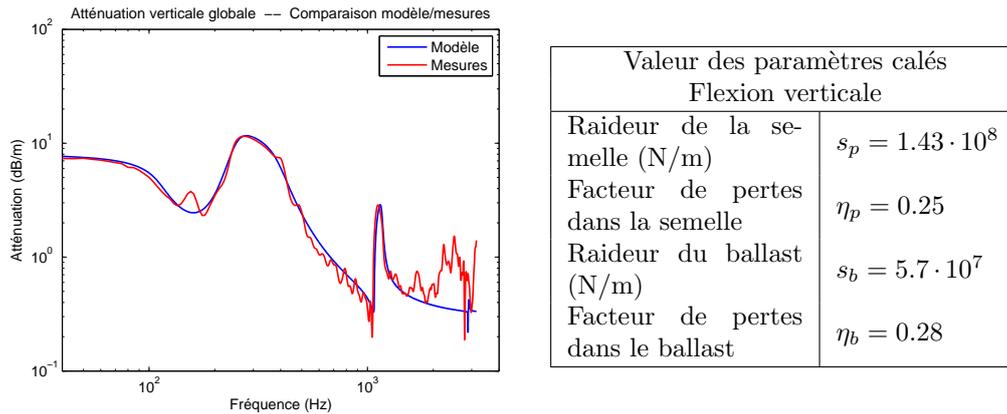


FIGURE 5.5: Atténuation globale des ondes de flexion verticale dans le rail - Comparaison des mesures au modèle dont les paramètres déterminés expérimentalement sont donnés à droite.

Mesures et modèle coïncident bien jusqu'à 2 kHz, soit pour les mesures effectuées en utilisant l'embout plastique.

5.2.2.2 Réceptance

La figure 5.6 représente la réceptance verticale mesurée entre traverses, en phase et en module.

Pour ces tracés de réceptance, les paramètres qui permettent de caler au mieux le modèle sur les mesures sont légèrement différents de ceux de la figure 5.5 trouvés pour l'atténuation :

$$\begin{aligned} s_p &= 1.46 \cdot 10^8 & \eta_p &= 0.14 \\ s_b &= 3.5 \cdot 10^7 & \eta_b &= 0.75 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Cette différence peut s'expliquer par le fait que lors d'une mesure de réceptance, ce sont surtout les paramètres du ou des supports avoisinants qui sont déterminants. Or, comme l'a montré J.-F. Hamet dans [73], les raideurs des chaussons et des semelles varient d'un support à l'autre. Les paramètres optimaux calés sur l'atténuation sont en fait des paramètres « moyens » pour l'ensemble des supports de notre rail expérimental. La figure 5.7 représente la réceptance verticale mesurée au droit d'une traverse (l'une des traverses au centre desquelles a été effectuée la mesure de réceptance inter-traverses).

Vers 1750 Hz, on peut constater l'existence d'une seconde résonance similaire à celle observée à la fréquence *pin-pin*. Ce comportement que l'on ne retrouve pas au niveau du modèle, peut éventuellement s'expliquer par la présence d'un ou plusieurs éléments

3. FRF : Fonction de Réponse en Fréquence (force/accélération ou force/vitesse)

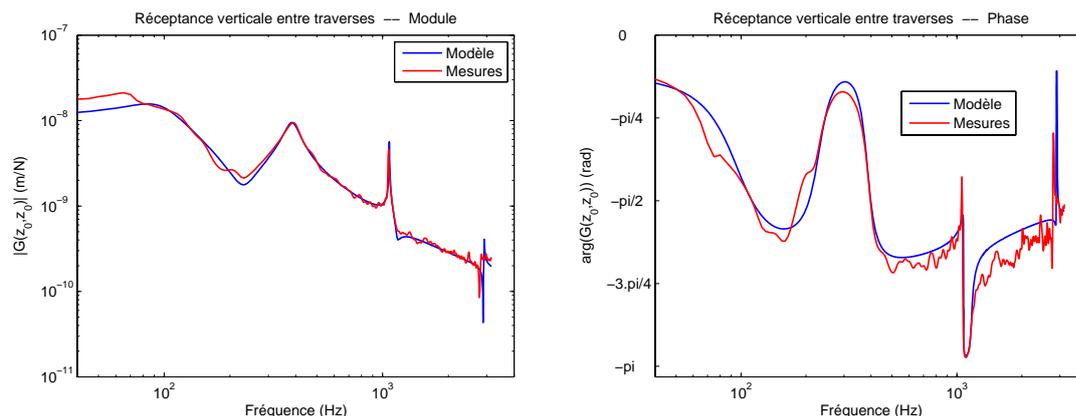


FIGURE 5.6: Réceptance verticale entre traverses - Comparaison des mesures au modèle. Gauche : module. Droite : Phase.

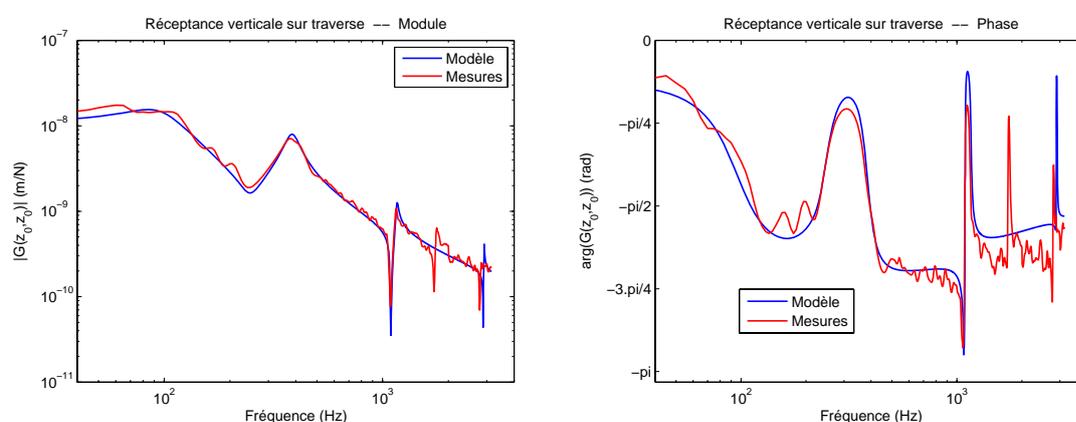


FIGURE 5.7: Réceptance verticale sur traverse - Comparaison des mesures au modèle avec les paramètres de l'équation (5.3) obtenus par recalage de la réceptance. Gauche : module. Droite : Phase.

défectueux au niveau point de mesure (traverse, semelle, chausson ou attache). En dehors de cette singularité, les mesures en flexion verticale coïncident très bien avec les prédictions du modèle vibratoire décrit dans la partie 1.2.

5.2.3 Flexion latérale - Résultats

Comme pour les vibrations en flexion verticale, on cherche à retrouver les raideurs mécaniques des semelles et du ballast pour les vibrations latérales, par recalage de l'atténuation globale entre les mesures et un modèle de poutre. La figure 5.8 représente la cohérence entre le signal d'excitation et le signal mesuré en fonction de la fréquence et de la position de l'excitation.

5.2.3.1 Atténuation globale

En ce qui concerne l'atténuation globale en flexion latérale (figure 5.9), les mesures confirment la validité du modèle même si l'on peut observer une dispersion globalement plus grande par rapport au cas vertical, en particulier la présence de deux pics entre

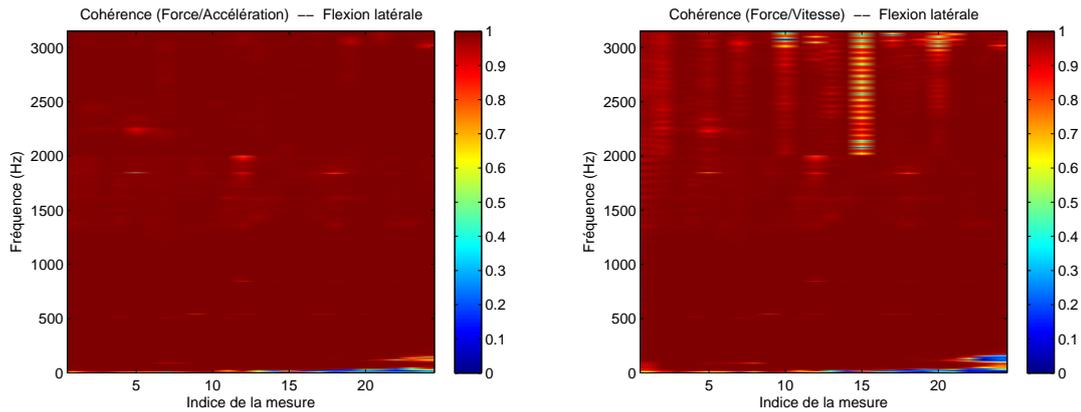


FIGURE 5.8: Cohérence entre le signal d'excitation et le signal mesuré, en flexion latérale. L'indice de la mesure correspond à la position de l'excitation. Gauche : signal mesuré brut, directement issu de l'accéléromètre. Droite : signal mesuré intégré analogiquement en sortie d'accéléromètre.

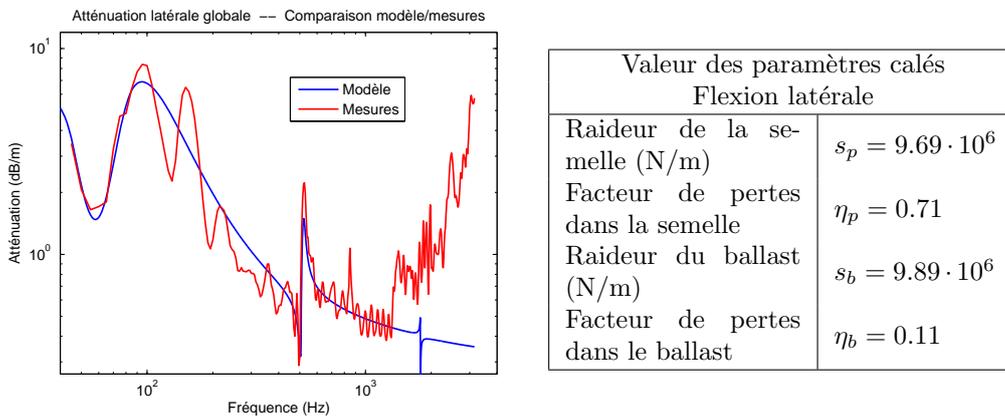


FIGURE 5.9: Atténuation globale des ondes de flexion latérale dans le rail - Comparaison des mesures au modèle dont les paramètres déterminés expérimentalement sont donnés à droite.

100 Hz et 200 Hz. Après 2 kHz, l'excitation avec l'embout en métal semble également poser problème : les valeurs élevées d'atténuation obtenues ne sont pas réalistes.

5.2.3.2 Réceptance

Les figures 5.10 et 5.11 représentent le module et la phase de la réceptance latérale, pour les mesures et pour le modèle, suivant la position de l'excitation par rapport aux traverses. Les paramètres utilisés pour le modèle (courbes bleues) sont ceux obtenus par calage de l'atténuation globale (cf. figure 5.9). Des différences de niveau importantes sont observées entre mesures et modèle pour la réceptance latérale (de l'ordre de 6 dB). Si l'on se réfère par exemple aux études [31, 38], plusieurs phénomènes expliquent ces différences de niveau. Dans un premier temps, vu la position de l'excitation sur le rail relativement aux systèmes d'attache, il est certain que des ondes de torsion sont excitées en plus de l'onde de flexion latérale. Enfin, des ondes de déformation de section, notamment au niveau du pied du rail, apparaissent à partir de 1250 Hz. Pour représenter ces phénomènes, il est

nécessaire d'adopter une modélisation par la méthode des éléments finis (l'onde de torsion est généralement mal décrite par un modèle de poutre).

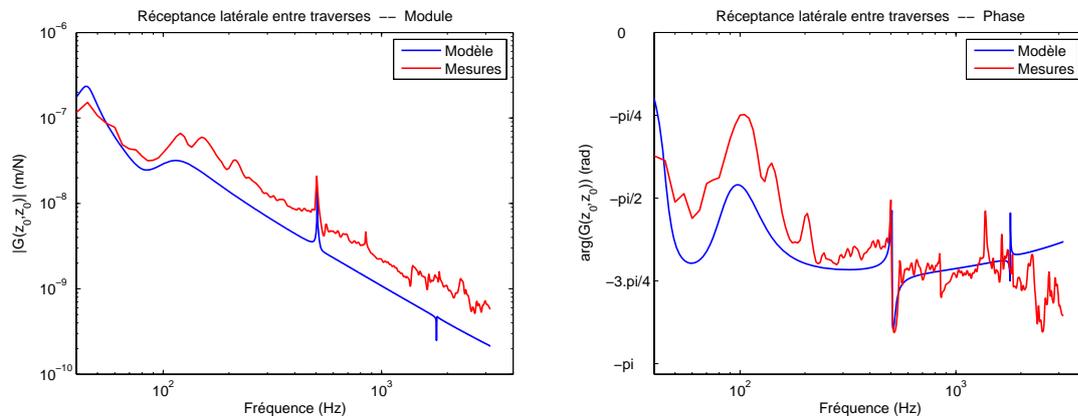


FIGURE 5.10: Réceptance latérale entre traverses - Comparaison des mesures au modèle. Gauche : module. Droite : Phase.

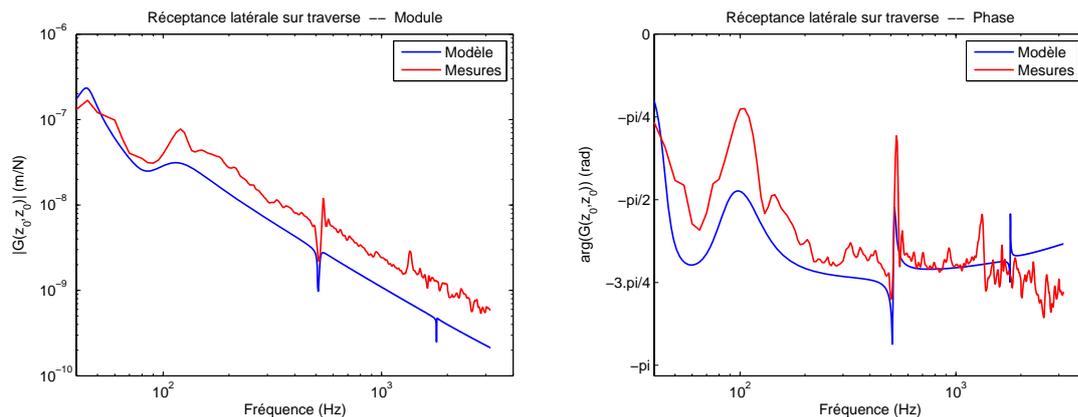


FIGURE 5.11: Réceptance latérale sur traverse - Comparaison des mesures au modèle. Gauche : module. Droite : Phase.

5.2.4 Validation du modèle vibratoire

Cette campagne de mesures vibratoires au marteau de choc a permis de valider le modèle vibratoire du rail par une poutre épaisse de Timoshenko sur supports périodiques (cf. partie 1.2.3). Des résultats connus ont été retrouvés :

- Le modèle de poutre permet de caractériser assez bien les vibrations en flexion verticale jusqu'à 3 kHz.
- Les effets de la périodicité du support sont moins significatifs pour les vibrations latérales.
- Pour les vibrations latérales, le modèle de poutre montre ses limites car il ne tient pas compte des modes de torsion qui sont excités dans ce cas ainsi que des déformations de la section du rail qui apparaissent.
- Les impédances complexes des semelles et des chaussons varient d'un support à

l'autre [73]. Lorsqu'elles sont évaluées à partir de l'atténuation globale, elles correspondent à des valeurs moyennes sur l'ensemble de la zone de mesure. Les vibrations du rail se trouvent localement modifiées par rapport aux prévisions d'un modèle où les supports sont identiques. Il en est de même pour le champ acoustique résultant [33].

- La procédure expérimentale décrite dans la directive [74] permet d'évaluer une atténuation globale dans le rail. En utilisant le modèle vibratoire, nous avons pu déterminer les raideurs complexes des semelles et du ballast pour lesquelles les mesures sont conformes aux prévisions. À partir de ces paramètres, il est possible de calculer les nombres d'onde complexes des ondes vibratoires dans le rail. Ainsi, vis-à-vis de l'estimation de ces nombres d'onde, la procédure expérimentale est indirecte. Cependant, il existe des procédures permettant d'extraire directement les nombres d'onde complexes ; l'une d'entre elles, utilisant la méthode de Prony, est décrite et utilisée dans [72].

5.3 Mesures acoustiques - Excitation du rail à l'aide d'un pot vibrant

Le rail est excité verticalement par un pot vibrant pouvant délivrer jusqu'à 400 N. Afin d'atténuer le bruit émis par la structure du pot, ce dernier est placé dans un coffrage acoustiquement isolant. L'ensemble est positionné au dessus de la tête du rail à l'aide d'une structure tubulaire fixée sur la dalle de béton. La figure 5.12 représente le système d'excitation mis en place sur le site expérimental ainsi que les caractéristiques fréquentielles de l'atténuation apportée par le caisson à 1 m de ce dernier.

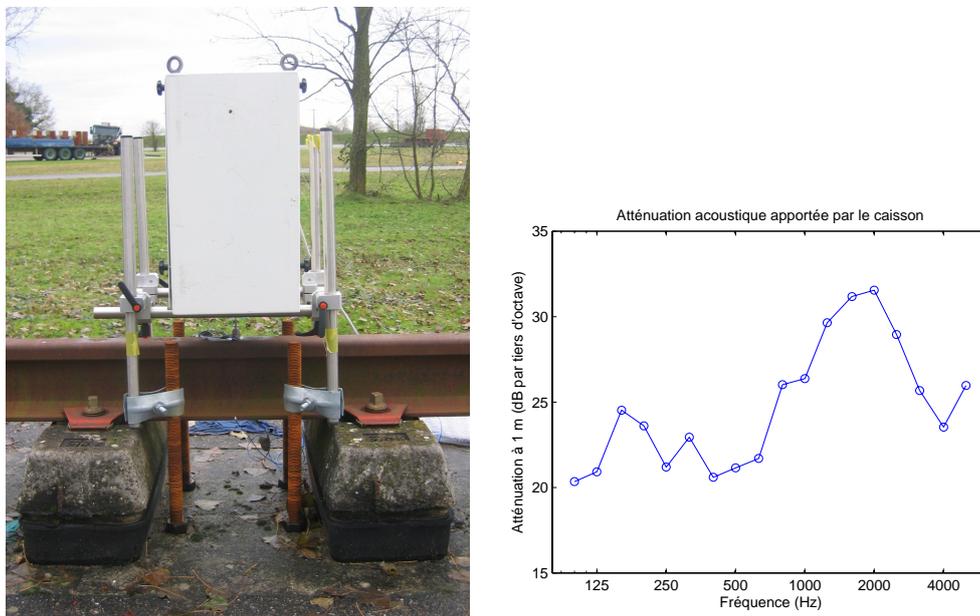


FIGURE 5.12: *Gauche : le pot vibrant dans son coffrage isolant, positionné pour une excitation verticale du rail. Droite : atténuation acoustique à 1 m du caisson par tiers d'octave.*

5.3.1 Description des mesures

L'antenne linéaire utilisée est composée de 21 microphones permettant de construire deux sous-antennes imbriquées composées chacune de 13 microphones, espacés de $d = 5$ ou 15 cm selon la fréquence. La configuration retenue pour chaque fréquence est discutée plus loin. L'axe de l'antenne est parallèle à l'axe du rail, à une distance $R = 2.64$ m de ce dernier. Le microphone central de l'antenne (commun aux deux sous-antennes) est décalé de $z_c = 3$ m par rapport au droit de l'excitation. Le point d'excitation est placé sur la tête du rail exactement à égale distance des deux traverses les plus proches. Une photographie du dispositif est donnée figure 5.13.



FIGURE 5.13: *Dispositif expérimental : pot vibrant et antenne microphonique.*

Pour des raisons de maintien de la structure, les deux branches de l'antenne ont dû être montées. Cependant, comme le montre la figure 5.13, seule la branche horizontale est équipée de microphones.

Afin d'obtenir un niveau de pression suffisant au niveau des microphones de l'antenne, un signal d'excitation monochromatique est utilisé. Une première série de mesures est réalisée avec un signal sinusoïdal pur ; le signal d'excitation est dans ce cas déterministe. Pour se rapprocher des hypothèses du chapitre 3, une seconde série de mesures est réalisée avec un signal pseudo-aléatoire obtenu par modulation d'amplitude. Les fréquences étudiées sont les fréquences centrales des tiers d'octave de 160 à 3150 Hz. La cohérence entre le signal d'excitation et les signaux acoustiques sur l'antenne est insuffisante pour les fréquences inférieures à 160 Hz. La figure 5.14 représente la cohérence entre le signal d'excitation (force) et les signaux de pression acoustique mesurés par les différents microphones.

On utilise les raideurs mécaniques déterminées dans la section 5.2 à partir des mesures d'atténuation au marteau de choc (cf. figure 5.5) pour donner les valeurs des différentes fréquences caractéristiques du système :

$$f_{ballast} = 113 \text{ Hz} \quad f_{anti} = 253 \text{ Hz} \quad f_{semelle} = 380 \text{ Hz} \quad f_{pin} = 1098 \text{ Hz}$$

Pour les trois premières fréquences ($f_{ballast}$, f_{anti} et $f_{semelle}$), ces valeurs sont inférieures à celles retenues pour les simulations (valeurs relatives aux paramètres mécaniques de la table 1.1). La fréquence $f_{ballast}$, pour laquelle la cohérence s'est avérée insuffisante, n'a

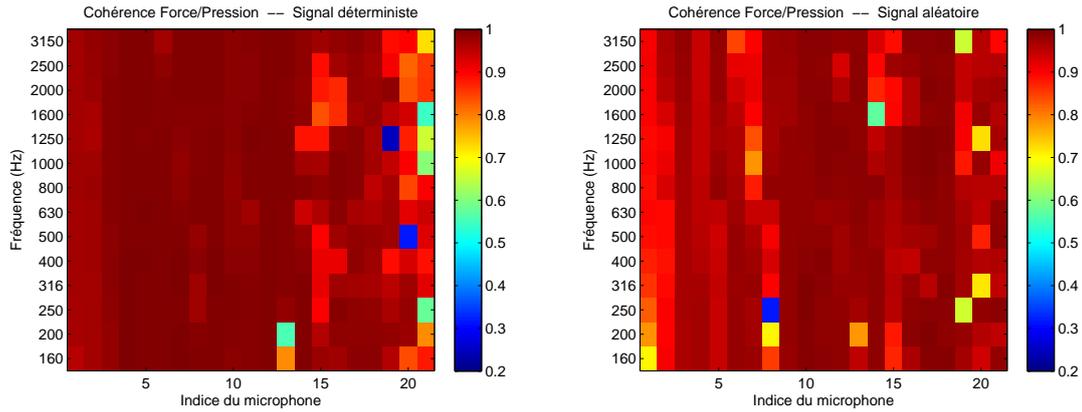


FIGURE 5.14: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Cohérence entre le signal d'excitation et les signaux de pression acoustique mesurés sur les microphones de l'antenne. Gauche : signal d'excitation déterministe. Droite : signal d'excitation pseudo-aléatoire.

pu être étudiée. La valeur de f_{pin} est quant à elle inchangée. La figure 5.15 représente l'atténuation et le nombre d'onde réel de l'onde propagative dans le rail pour le modèle.

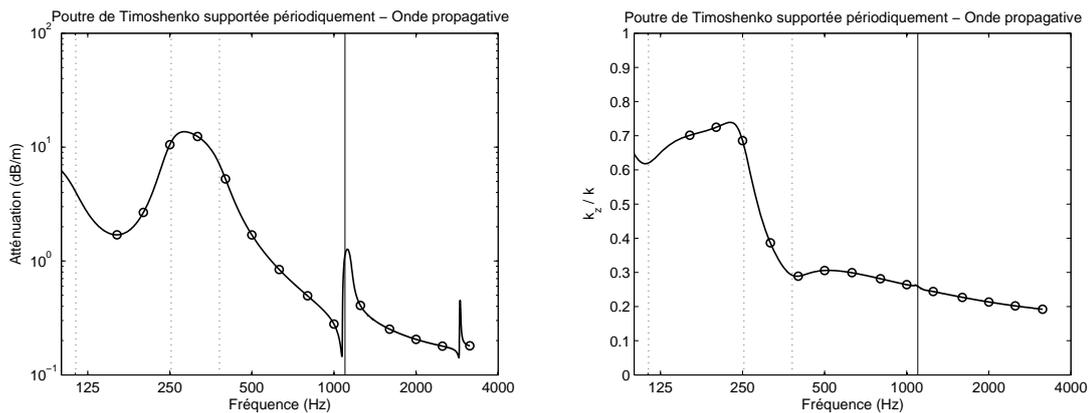


FIGURE 5.15: Poutre de Timoshenko supportée périodiquement - Nombre d'onde complexe de l'onde propagative de flexion verticale. Gauche : atténuation en dB/m. Droite : nombre d'onde réduit.

5.3.2 Formation de voies

Suivant une démarche similaire à la section 4.1, un premier traitement par formation de voies est effectué dans l'optique d'une identification du nombre d'onde de l'onde propagative dans le rail.

5.3.2.1 Caractéristiques de l'antenne, pondération

- Parmi les deux sous-antennes à disposition, on retient les configurations suivantes :
- jusqu'à 2 kHz on utilise la sous-antenne pour laquelle les microphones sont espacés de $d = 15$ cm,
 - au-delà on utilise la sous-antenne pour laquelle les microphones sont espacés de 5 cm.

Par rapport au critère de Shannon évoqué dans la partie 2.2.1.1, cette configuration pose un problème théorique de repli spatial pour les fréquences comprises entre 1250 et 2000 Hz. Pour ces fréquences la longueur d'onde acoustique λ est en effet inférieure à deux fois la distance entre les microphones ($\lambda/2 = 13.6 \text{ cm} < d$ pour $f = 1250 \text{ Hz}$). Cependant, vu la position de l'antenne par rapport au point d'excitation, et étant donné l'absence de sources autres que la voie ferroviaire excitée (notamment absence de source sous les incidences positives), la limite de Shannon peut être assouplie, ce qui permet d'utiliser la sous-antenne plus longue, donc spatialement plus performante, jusqu'à 2000 Hz. On peut par ailleurs restreindre l'intervalle balayé par la formation de voies au demi-espace correspondant aux angles négatifs, c'est-à-dire associé aux valeurs de μ comprises entre 0 et $-k$ ($k_z \in [0, +k]$).

Enfin, en complément des conditions de l'étude théorique de la partie 2.2.1.1, on utilise ici une pondération spatiale de Dolph-Chebyshev de paramètre $\alpha = 25$. L'utilisation d'un fenêtrage spatial dans ce cas pratique permet de réduire le niveau des lobes secondaires, facilitant ainsi la détection de plusieurs nombres d'onde dans l'éventualité où plusieurs ondes se superposeraient dans le rail.

5.3.2.2 Résultats

On s'intéresse au module de la formation de voies en fonction du paramètre μ/k en comparant les résultats suivants :

- La formation de voies appliquée aux signaux mesurés sur l'antenne pour les deux types d'excitation au pot vibrant (sinusoïdale et pseudo-aléatoire).
- La formation de voies simulée pour le modèle de poutre de Timoshenko supportée périodiquement. Pour chaque fréquence, le nombre d'onde k_z de l'onde de flexion verticale obtenu à partir de ce modèle⁴ est repéré par les pointillés noirs sur les tracés.
- Jusqu'à 500 Hz, la formation de voies simulée pour un modèle de source ponctuelle placée au niveau du pot vibrant sur le rail. Dans ce cas, la direction de préformation optimale pour la formation de voies correspond à un nombre d'onde μ_ϕ/k (repérée par les pointillés verts sur les tracés), indépendant de la fréquence, obtenu à partir de la configuration géométrique du problème :

$$\mu_\phi/k = \frac{z_c/R}{\sqrt{1 - (z_c/R)^2}} = 0.75$$

Enfin, l'axe des abscisses est retourné pour proposer une représentation de la formation de voies dans le domaine des nombres d'onde positifs.

Jusqu'à 250 Hz, les résultats issus des mesures sont proches des simulations, aussi bien pour le modèle de poutre que pour le modèle de source ponctuelle (cf. figure 5.16 et figure 5.17 de gauche). Pour ces fréquences, la résolution spatiale de l'antenne est faible (largeur du lobe principal importante), et du point de vue de la formation de voies, le rail est proche d'une source ponctuelle. De plus, pour ce qui est de la valeur de μ correspondant au maximum en sortie de formation de voies, il y a ambiguïté entre direction de la source ponctuelle localisée au niveau de l'excitation et nombre d'onde dans le rail. Pour ces fréquences, le nombre d'onde dans le rail k_z est en effet proche de μ_ϕ . Cette ambiguïté pose notamment problème à 160 Hz, fréquence pour laquelle le rail n'est pas sensé se comporter comme une source ponctuelle étant donnée la faible atténuation prévue dans ce cas (cf. figure 5.15). Pour les basses fréquences, il n'est donc pas possible, dans les conditions de cette expérience, de tirer de conclusions sur le rayonnement du rail.

4. Les paramètres mécaniques de ce modèle sont issus des mesures vibratoires (cf figure 5.5).

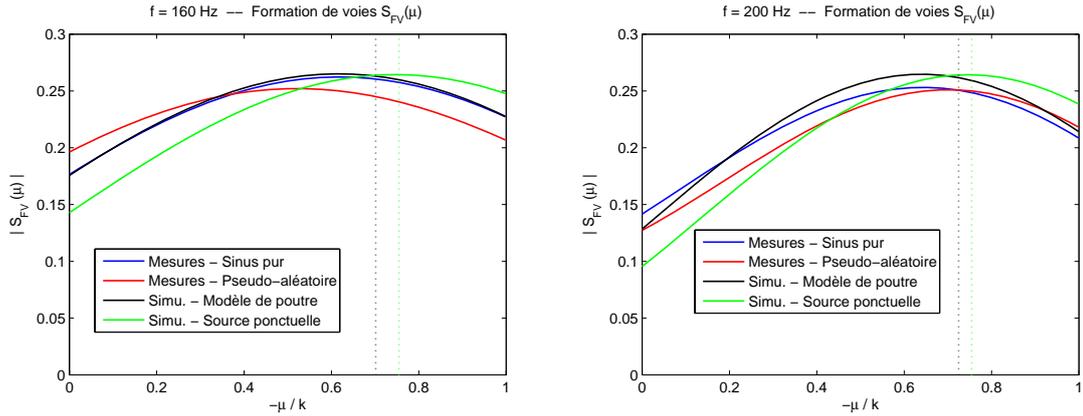


FIGURE 5.16: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Localisation du nombre d'onde de l'onde propagative dans le rail par formation de voies. Gauche : $f = 160$ Hz. Droite : $f = 200$ Hz.

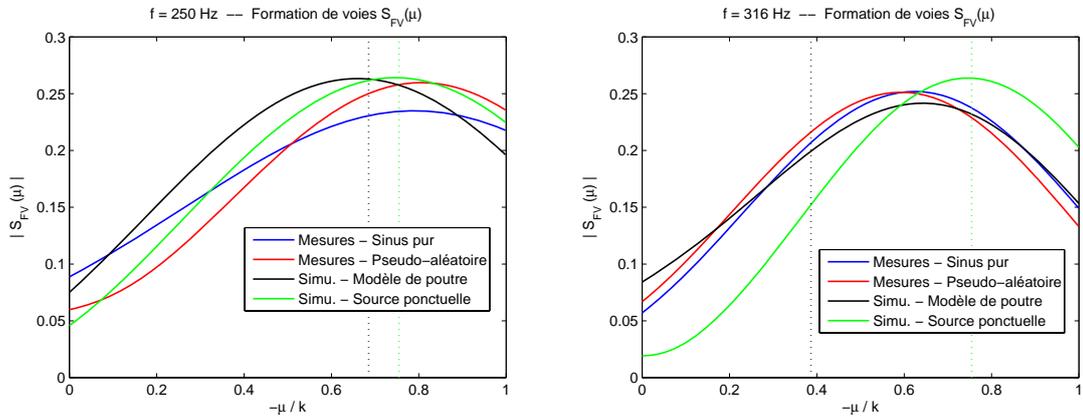


FIGURE 5.17: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Localisation du nombre d'onde de l'onde propagative dans le rail par formation de voies. Gauche : $f = 250$ Hz. Droite : $f = 316$ Hz.

À partir de $f = 316$ Hz, il n'y a plus d'ambiguïté entre μ_ϕ et k_z . Pour cette fréquence, mesures et modèles s'accordent cependant à montrer que le comportement du rail, au sens de la formation de voies, est intermédiaire entre celui d'un cylindre vibrant et celui d'une source localisée spatialement. La figure 5.17 de droite montre que le maximum de la formation de voies ne correspond ni à k_z ni à μ_ϕ , que ce soit pour le modèle ou les mesures. Pour $f = 400$ Hz et $f = 500$ Hz, le modèle prédit une bonne localisation de k_z par la formation de voies (cf. figure 5.18). Or, les résultats montrent que le maximum est localisé sur une valeur de μ différente de k_z et de μ_ϕ , correspondant au rayonnement d'une onde presque rasante au niveau de l'antenne (fronts d'onde quasiment perpendiculaires à l'axe de l'antenne). Les éléments dont nous disposons ne permettent pas d'expliquer ce phénomène.

À partir de 630 Hz et jusqu'à 1250 Hz on retrouve, conformément aux prévisions, une bonne localisation du nombre d'onde. Pour $f = 630$ Hz, les résultats obtenus pour le signal d'excitation sinusoïdal sont complètement divergents et ne peuvent être interprétés physiquement. On remarque par ailleurs l'influence du système d'excitation en tant que

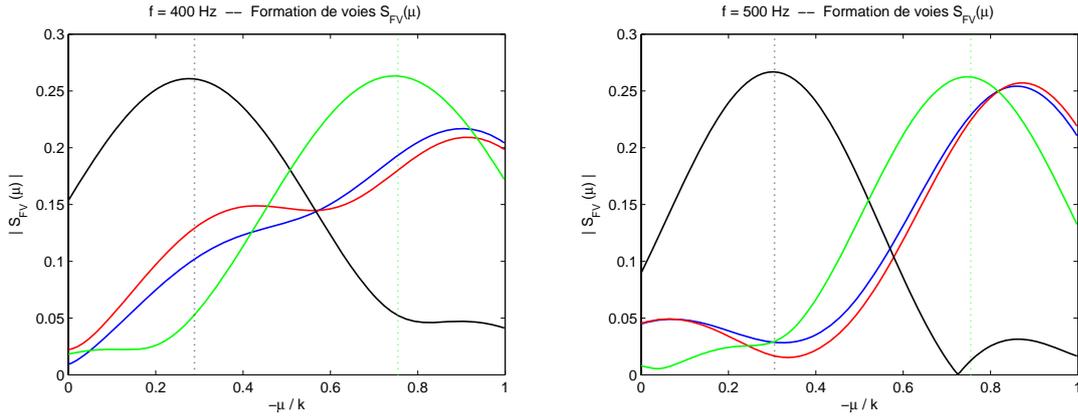


FIGURE 5.18: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Localisation du nombre d'onde de l'onde propagative dans le rail par formation de voies. Gauche : $f = 400$ Hz. Droite : $f = 500$ Hz. Légende identique à celle de la figure 5.17.

source localisée par la présence d'un rebond localisé sur μ_ϕ . Le niveau de ce maximum local, observable pour la plupart des hautes fréquences, est plus ou moins marqué selon la fréquence ; pour $f = 2500$ Hz il constitue même le maximum global (figure 5.22 de gauche).

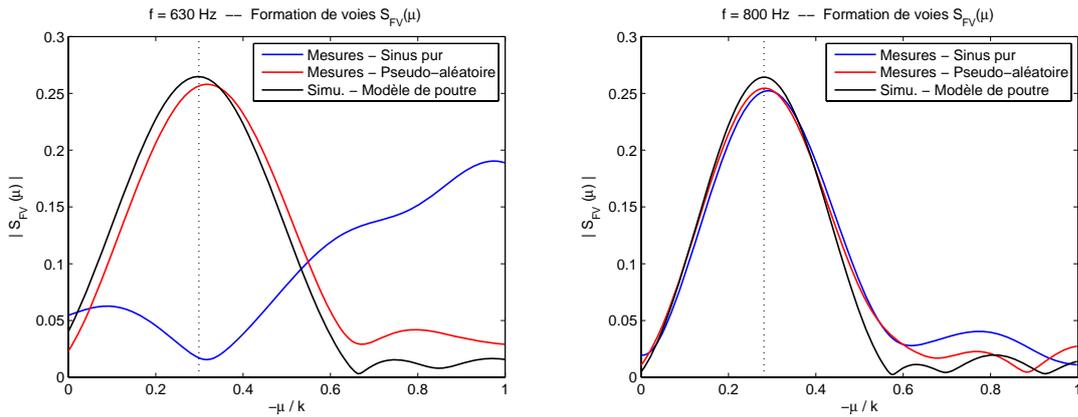


FIGURE 5.19: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Localisation du nombre d'onde de l'onde propagative dans le rail par formation de voies. Gauche : $f = 630$ Hz. Droite : $f = 800$ Hz.

Pour $f = 1250$ Hz, on distingue sur la figure 5.20 de droite la présence de deux lobes principaux en sortie de formation de voies. Le lobe d'amplitude la plus faible correspond au nombre d'onde de l'onde de flexion verticale. La valeur de μ repérée par le lobe d'amplitude la plus importante est à la limite du domaine de variation, ce qui correspond à une onde rasante par rapport à l'axe de l'antenne ($\theta = -\pi/2$). Comme pour $f = 400$ Hz et 500 Hz, nous n'avons pas d'hypothèse solide pour expliquer ce phénomène.

Pour $f = 1600$ Hz et $f = 2000$ Hz, la valeur de k_z est bien retrouvée par la formation de voies. Cependant, on distingue un maximum secondaire localisé sur une valeur de μ différente de k_z et de μ_ϕ (respectivement pour $\mu \simeq 0.4$ et pour $\mu \simeq 0.5$). Ce lobe correspond sans doute à un autre type d'ondes vibratoires pouvant se propager dans le rail. Pour identifier la nature de cette onde, il conviendrait d'approfondir l'étude du comportement

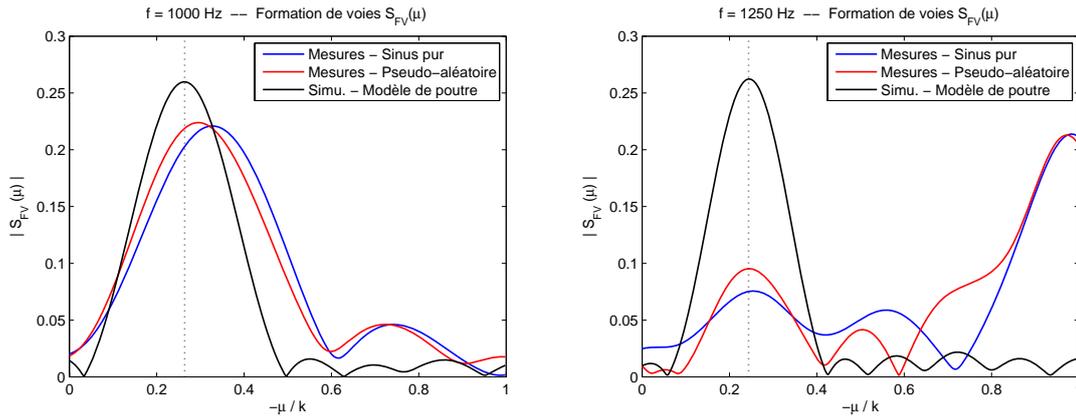


FIGURE 5.20: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Localisation du nombre d'onde de l'onde propagative dans le rail par formation de voies. Gauche : $f = 1000$ Hz. Droite : $f = 1250$ Hz.

vibroacoustique du rail.

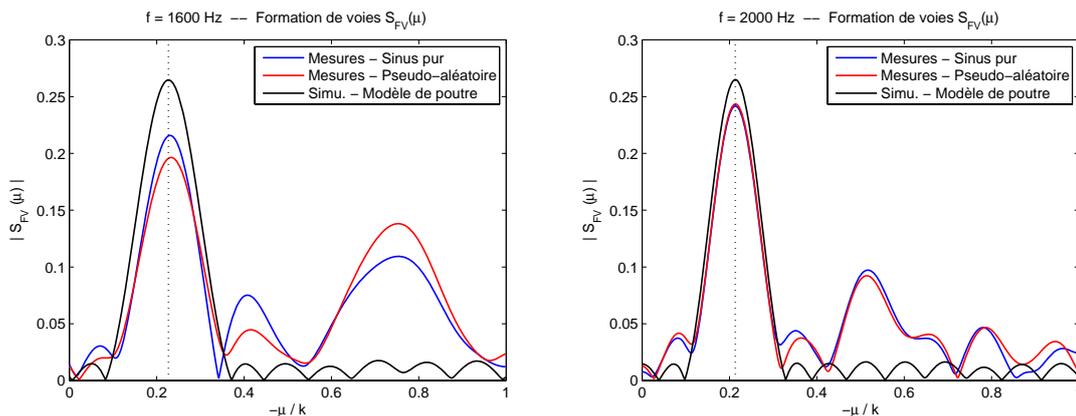


FIGURE 5.21: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Localisation du nombre d'onde de l'onde propagative dans le rail par formation de voies. Gauche : $f = 1600$ Hz. Droite : $f = 2000$ Hz.

Lorsque la fréquence augmente, il est nécessaire d'alimenter le pot vibrant avec un signal de plus en plus puissant pour assurer un niveau acoustique suffisant au niveau des microphones de l'antenne. La contribution du système d'excitation au champ acoustique est alors plus importante, ce qui explique la faible contribution de l'onde de flexion verticale relativement aux contributions d'une part du pot en μ_ϕ et d'autre part des éventuelles autres ondes évoquées ci-dessus. Le nombre d'onde k_z reste cependant une direction privilégiée comme le montre la figure 5.22.

Au final, on retiendra tout d'abord de ces résultats une bonne adéquation entre mesures et prévisions issues du modèle de poutre, assurant dans une certaine mesure la validité du modèle vibroacoustique retenu. Différents phénomènes distincts selon les fréquences viennent toutefois perturber l'analyse.

Pour les basses fréquences, la faible résolution de l'antenne associée au support spatial localisé du rail conduisent à une ambiguïté au niveau de la formation de voies entre direc-

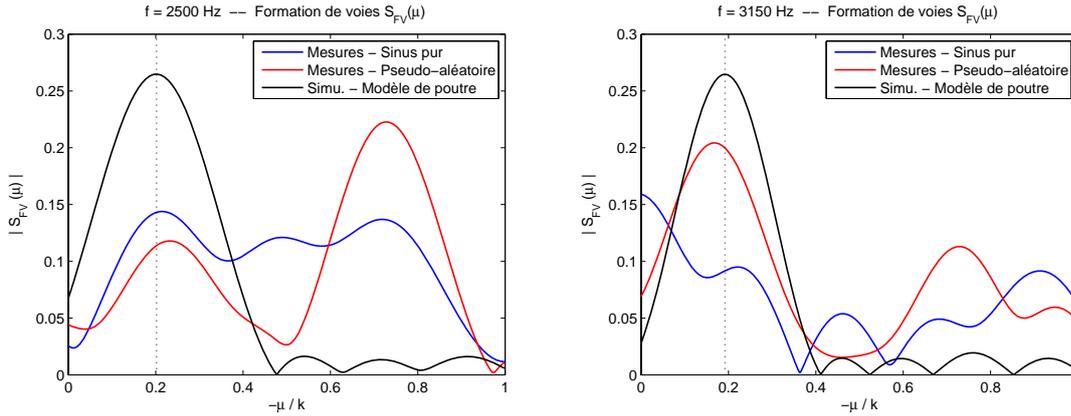


FIGURE 5.22: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Localisation du nombre d'onde de l'onde propagative dans le rail par formation de voies. Gauche : $f = 2500$ Hz. Droite : $f = 3150$ Hz.

tion du pot vibrant μ_ϕ et nombre d'onde de l'onde de flexion k_z . La formation de voies ne permet pas dans ce cas de déduire les caractéristiques vibratoires du rail.

Dès lors que les ondes vibratoires se propagent effectivement dans le rail (pour les faibles atténuations), le nombre d'onde k_z peut être retrouvé par la formation de voies. En parallèle, des ondes vibratoires autres que l'onde de flexion verticale ont été détectées. Ces ondes dont l'on souhaitait s'affranchir en appliquant une excitation la plus verticale et centrée possible sur le rail, ont peut-être été excitées accidentellement à cause des imprécisions de positionnement du pot vibrant.

Enfin, notons pour cette configuration expérimentale particulière les singularités suivantes : la contribution non négligeable du système d'excitation lui-même en tant que source acoustique (relevée sur la majeure partie des résultats), et la présence inexplicée d'ondes rasantes à trois fréquences (400 Hz, 500 Hz et 1250 Hz).

5.3.3 Estimation du nombre d'onde complexe par optimisation paramétrique

On procède avec les signaux mesurés de façon similaire à l'étude réalisée en simulation dans la section 4.5. Le modèle vibratoire adopté pour représenter les vibrations verticales du rail est un modèle de poutre d'Euler sur support continu. Ce modèle dégradé est optimal d'après les simulations réalisées dans le chapitre précédent. Il est caractérisé par un nombre d'onde complexe k_β inconnu. On s'intéresse ici à la localisation par optimisation de ce nombre d'onde par le biais de l'atténuation Δ et du nombre d'onde réel k_z qu'il définit.

Pour le traitement par formation de voies, une sous-antenne linéaire horizontale de 13 microphones équidistants a été utilisée pour chaque fréquence d'étude, parmi les 21 microphones disponibles. Ce type d'antenne permet en effet une implémentation simple des traitements dont les performances ont par ailleurs été largement étudiées. En ce qui concerne la méthode d'optimisation paramétrique, ce même type d'antenne a été utilisé en simulation dans la section 4.5, avec un écart entre les microphones adapté à chaque fréquence afin de limiter les dérives liées à l'antenne. Pour le traitement de ces mesures, le choix des microphones utilisés pour estimer les matrices spectrales peut modifier les performances de la méthode d'optimisation. Cet aspect est discuté parmi les trois choix suivants :

- la sous-antenne linéaire de 13 microphones espacés de $d = 5$ cm (notée SA_5),
- la sous-antenne linéaire de 13 microphones espacés de $d = 15$ cm (notée SA_{15}),
- l’antenne complète de 21 microphones constituée au centre de 13 microphones espacés de 5 cm puis de 4 microphones espacés de 15 cm de part et d’autre.

Pour chaque cas étudié, la fonction de discrimination \mathcal{F} définie par l’équation (4.32) (cf. 4.5.1) est évaluée dans un plan de variation $\mathcal{P} = (\Delta, k_z)$ du nombre d’onde complexe k_β du modèle source. Ce plan est identique à celui utilisé pour les simulations dans la section 4.5, notamment en ce qui concerne les bornes et le nombre de points (cf. équation (4.35)). Ce calcul est effectué pour chaque fréquence, pour chaque type de signal d’excitation (sinus ou pseudo-aléatoire), et pour chaque antenne. Le nombre d’onde recherché⁵ est repéré par un \circ sur les tracés et le maximum de \mathcal{F} sur \mathcal{P} (ou un maximum local dans certains cas) est repéré par le symbole $+$. La figure 5.23 est un exemple de représentation pour $f = 160$ Hz avec la sous-antenne SA_{15} .

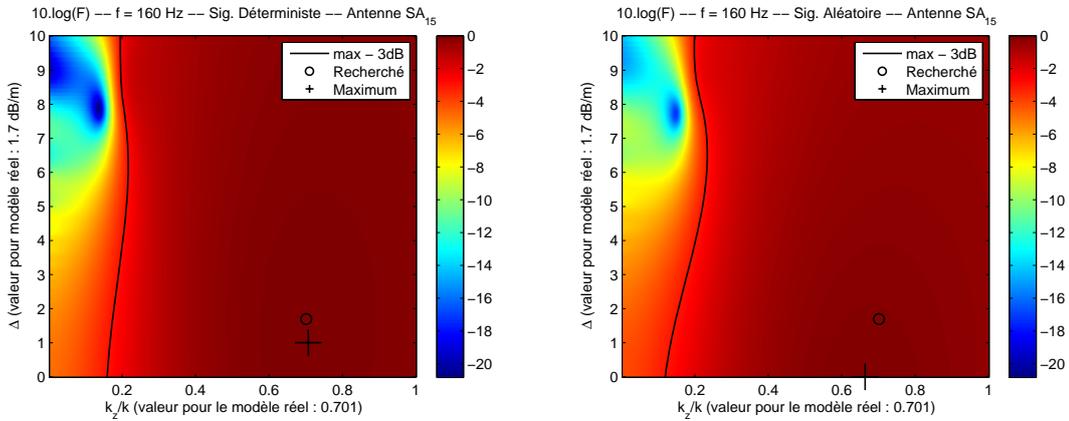


FIGURE 5.23: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Localisation du nombre d’onde complexe de l’onde propagative dans le rail par optimisation paramétrique. Modèle source : poutre d’Euler sur support continu. $f = 160$ Hz, sous-antenne SA_{15} . Gauche : signal d’excitation déterministe. Droite : signal d’excitation aléatoire.

La localisation du nombre d’onde k_z réalisée dans la partie précédente à l’aide d’un traitement de formation de voies, repose sur l’hypothèse de cylindre pulsant infini. En supposant qu’une onde vibratoire donnée n’est pas atténuée dans le rail, on peut relier son nombre d’onde k_z à sa direction d’arrivée sur l’antenne, c’est-à-dire à son angle de directivité. Ainsi, les réponses d’antenne obtenues dans la partie 5.3.2 pourraient être retrouvées en partie sur un tracé comme ceux de la figure 5.23 en effectuant une coupe en $\Delta = 0$ dB/m. La différence réside dans la présence d’une onde de champ proche dans le cas de notre méthode.

5.3.3.1 Résultats

Généralités

Jusqu’à $f = 1600$ Hz, l’antenne complète ou la sous-antenne SA_{15} conduisent à des résultats semblables tandis que la sous-antenne SA_5 n’est appropriée qu’à partir de 2500 Hz. Ainsi, les critères géométriques relatifs à la formation de voies pour les antennes linéaires assurent également de bonnes performances pour la méthode d’optimisation paramétrique.

⁵. Nombre d’onde complexe obtenu à partir des paramètres mécaniques du tableau de la figure 5.5 utilisés dans un modèle de poutre de Timoshenko supportée périodiquement.

La nature du signal d'excitation n'influence pas les résultats. En effet, les différences observées suivant le type d'excitation ne sont pas plus importantes que celles observées entre plusieurs réalisations d'une mesure pour un même type de signal.

Faibles atténuations

Les cas *faibles atténuations* correspondent aux fréquences pour lesquelles l'atténuation est inférieure à 1 dB/m : de 630 Hz à 3150 Hz (figures 5.24 à 5.27). Pour ces fréquences, le nombre d'onde complexe est bien estimé, aussi bien en termes d'atténuation que de nombre d'onde structural. La sélectivité suivant l'atténuation reste cependant très faible, conformément aux simulations précédemment réalisées.

Pour certaines fréquences une atténuation légèrement supérieure aux prévisions du modèle est estimée (figure 5.24 pour 630 Hz et 800 Hz, figure 5.25 pour 1600 Hz et 2000 Hz).

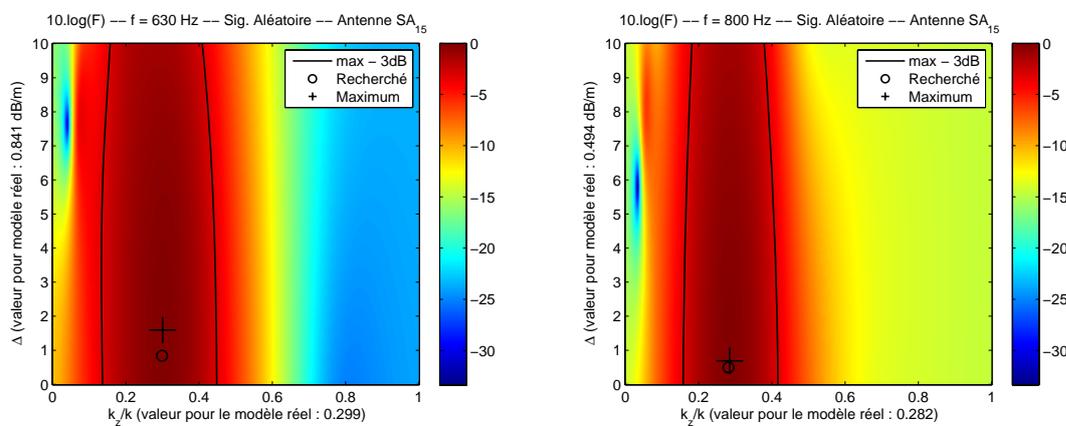


FIGURE 5.24: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Localisation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative dans le rail par optimisation paramétrique. Modèle source : poutre d'Euler sur support continu. Signal d'excitation aléatoire, sous-antenne SA₁₅. Gauche : $f = 630$ Hz. Droite : $f = 800$ Hz.

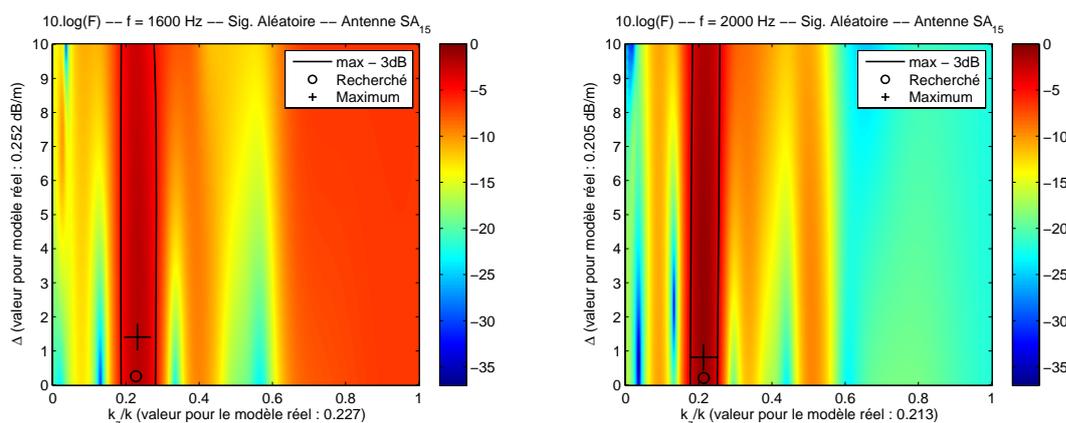


FIGURE 5.25: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Localisation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative dans le rail par optimisation paramétrique. Modèle source : poutre d'Euler sur support continu. Signal d'excitation aléatoire, sous-antenne SA₁₅. Gauche : $f = 1600$ Hz. Droite : $f = 2000$ Hz.

Pour les autres fréquences, ce manque de précision se traduit par une estimation nulle de l'atténuation (figure 5.26 pour 1000 Hz et 1250 Hz, figure 5.27 pour 2500 Hz et 3150 Hz). Contrairement aux simulations, la géométrie de l'antenne n'est pas adaptée à chaque fréquence. Par suite, vu les faibles atténuations dans le rail, les caractéristiques du champ acoustique varient très peu sur la longueur totale de l'antenne (180 cm ou 60 cm pour 2500 Hz et 3150 Hz), expliquant le faible pouvoir discriminant sur l'atténuation.

Pour $f = 1250$ Hz, le maximum de la fonction \mathcal{F} se trouve en dehors du domaine de variation initialement adopté pour l'atténuation (de 0 à 10 dB/m). Ce dernier a été étendu jusqu'à 30 dB/m pour permettre une meilleure compréhension des résultats (figure 5.26 de droite). Le point repéré par un + correspond au maximum global alors que les points repérés par un \times correspondent à des minima locaux. Comme pour les résultats obtenus à partir de la formation de voies, les phénomènes que l'on observe ici sont difficiles à interpréter. La présence de plusieurs maxima locaux suggère cependant la présence d'autres ondes dans le rail, notamment à $k_z/k \simeq 0.4$.

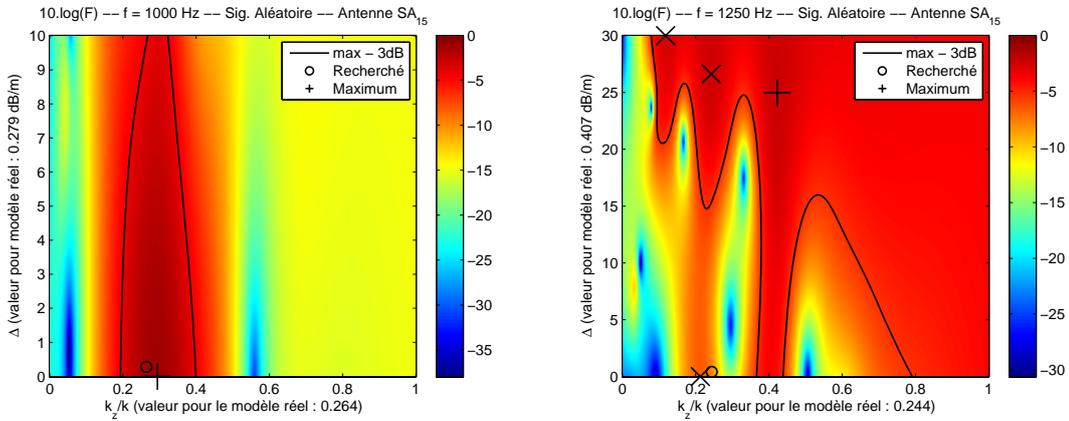


FIGURE 5.26: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Localisation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative dans le rail par optimisation paramétrique. Modèle source : poutre d'Euler sur support continu. Signal d'excitation aléatoire, sous-antenne SA_{15} . Gauche : $f = 1000$ Hz. Droite : $f = 1250$ Hz.

Pour $f = 2500$ Hz, la formation de voies présentait un maximum dans la direction μ_ϕ du système d'excitation (cf. figure 5.22). On remarque sur la figure 5.27 de gauche que la méthode d'optimisation paramétrique permet de s'affranchir de cette contribution pour présenter un maximum global localisé sur le nombre d'onde complexe recherché.

Atténuations intermédiaires

Les cas *atténuations intermédiaires* correspondent aux fréquences pour lesquelles l'atténuation est comprise entre 1 dB/m et 6 dB/m : 160 Hz, 200 Hz, 400 Hz et 500 Hz (figures 5.28 et 5.29).

Contrairement à la formation de voies qui ne permettait pas de localiser correctement k_z , la méthode d'optimisation paramétrique conduit à une estimation correcte de ce dernier. En revanche, les atténuations sont difficilement approchées, elles sont soit estimées nulles (cf. figure 5.28 pour 160 Hz et 200 Hz) soit largement surestimées (cf. figure 5.29 pour 400 Hz et 500 Hz). Pour les deux premières basses fréquences, c'est sûrement la faible résolution de l'antenne qui limite les performances de la méthode. Pour les deux fréquences plus élevées, on se retrouve à nouveau en présence de phénomènes dont l'interprétation est délicate (ondes rasantes détectées par la formation de voies).

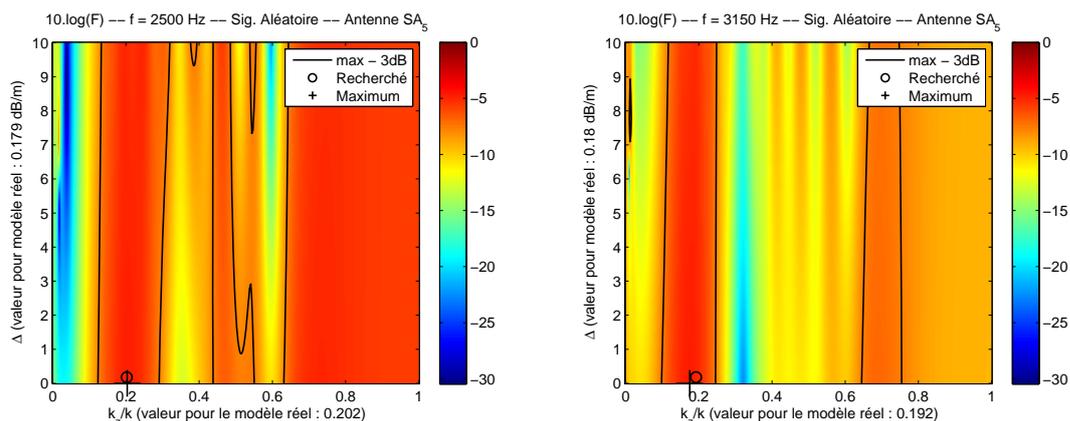


FIGURE 5.27: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Localisation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative dans le rail par optimisation paramétrique. Modèle source : poutre d'Euler sur support continu. Signal d'excitation aléatoire, sous-antenne SA₅. Gauche : $f = 2500$ Hz. Droite : $f = 3150$ Hz.

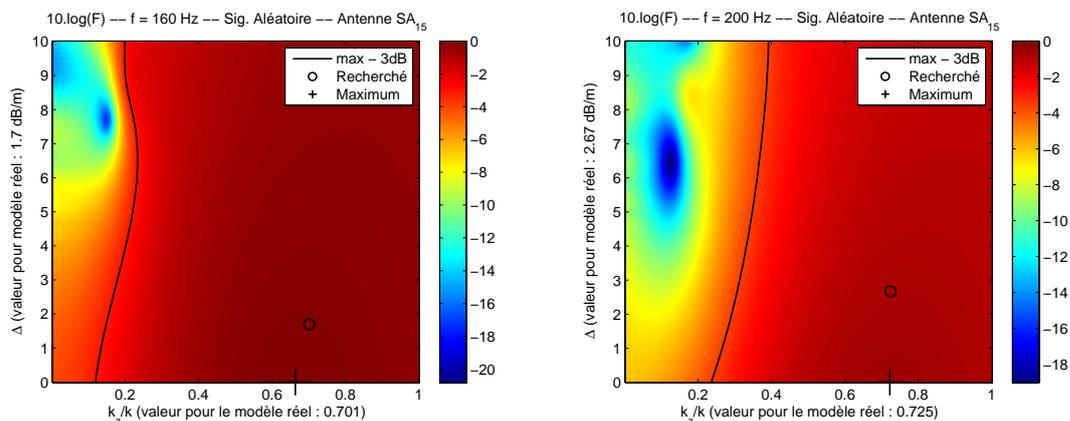


FIGURE 5.28: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Localisation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative dans le rail par optimisation paramétrique. Modèle source : poutre d'Euler sur support continu. Signal d'excitation aléatoire, sous-antenne SA₁₅. Gauche : $f = 160$ Hz. Droite : $f = 200$ Hz.

Atténuations élevées

Les cas *atténuations élevées* correspondent aux fréquences pour lesquelles l'atténuation est supérieure à 6 dB/m : 250 Hz et 316 Hz (figure 5.30). Pour $f = 250$ Hz, la méthode d'optimisation paramétrique ne converge pas vers une solution dans le plan de variation considéré. On ne peut tirer aucune conclusion dans ce cas, aussi bien pour l'atténuation que pour le nombre d'onde structural. Pour $f = 316$ Hz, le maximum trouvé est une solution cohérente, à la fois par rapport aux résultats de la formation de voies (au niveau de l'estimation de k_z), ainsi que par rapport à l'atténuation estimée, relativement proche de celle recherchée. Au niveau des courbes théoriques issues du modèle (cf. figure 5.15), cette fréquence se situe dans un domaine de fortes variations pour l'atténuation et le nombre d'onde structural. La différence observée entre les nombres d'onde complexes estimé et recherché peut ainsi provenir d'un décalage fréquentiel des courbes du modèle, donc d'une légère différence au niveau des paramètres mécaniques de la voie.

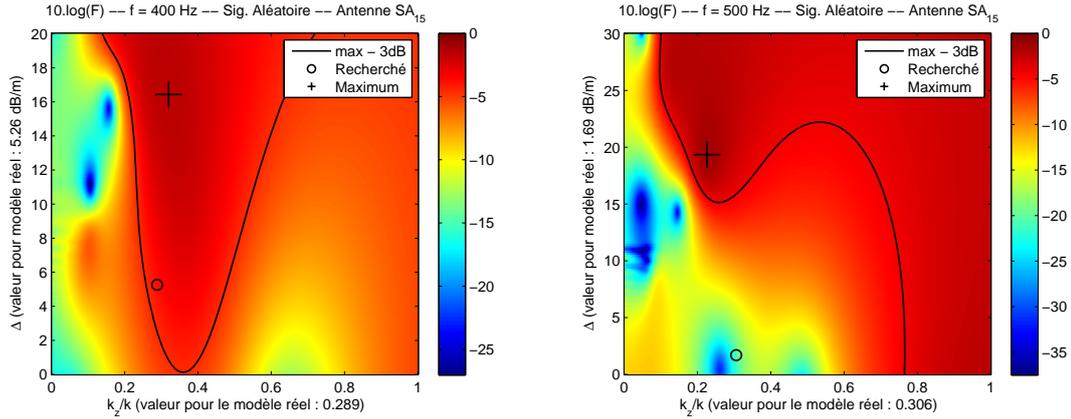


FIGURE 5.29: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Localisation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative dans le rail par optimisation paramétrique. Modèle source : poutre d'Euler sur support continu. Signal d'excitation aléatoire, sous-antenne SA_{15} . Gauche : $f = 400$ Hz. Droite : $f = 500$ Hz.

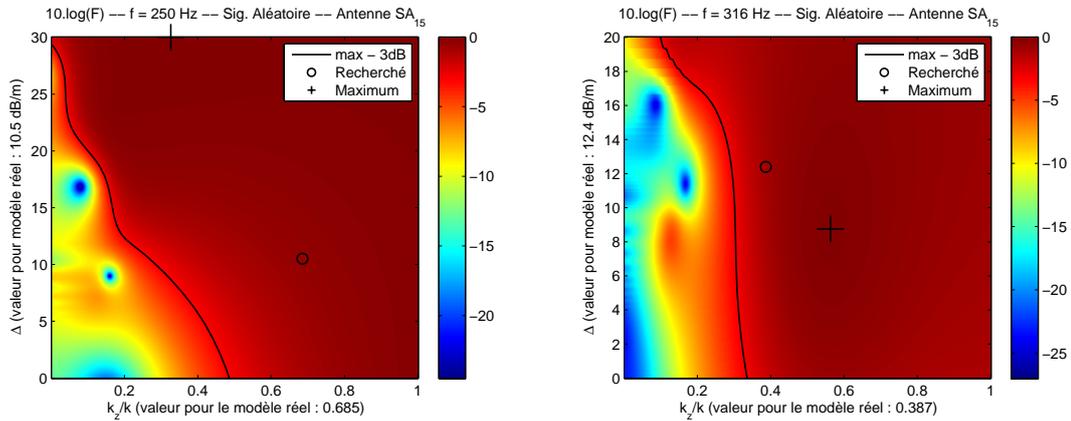


FIGURE 5.30: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Localisation du nombre d'onde complexe de l'onde propagative dans le rail par optimisation paramétrique. Modèle source : poutre d'Euler sur support continu. Signal d'excitation aléatoire, sous-antenne SA_{15} . Gauche : $f = 250$ Hz. Droite : $f = 316$ Hz.

5.3.4 Synthèse concernant l'identification du nombre d'onde complexe

La figure 5.31 représente le nombre d'onde réduit k_z/k estimé selon la méthode et le type de signal d'excitation (figure 5.31 de gauche pour un signal déterministe et figure 5.31 de droite pour un signal pseudo-aléatoire).

La figure 5.32 représente l'atténuation estimée par la méthode d'optimisation paramétrique selon le type de signal d'excitation. La figure 5.32 de gauche représente ce qui aurait été obtenu en appliquant le protocole de mesure [74] dans les conditions expérimentales 5.2.1 sur un champ vibratoire simulé à partir du nombre d'onde estimé (modèle de poutre de Timoshenko supportée périodiquement). Les résultats des mesures vibratoires sont ainsi représentés sur cette figure. La figure 5.32 de droite représente l'atténuation de l'onde propagative seule.

Ainsi, ces mesures associant l'excitation du rail par un pot vibrant à des mesures par

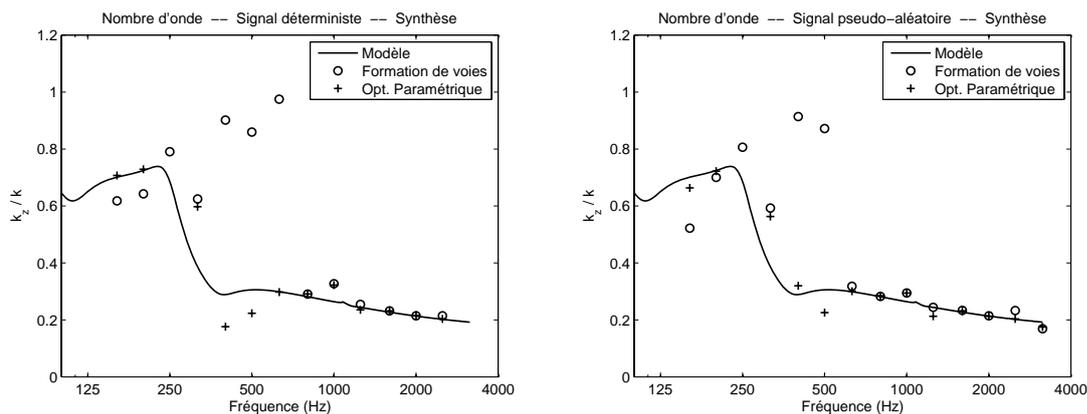


FIGURE 5.31: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Localisation du nombre d'onde structural, synthèse. Valeur de k_z estimée en fonction de la fréquence, selon la méthode. Gauche : signal d'excitation déterministe. Droite : signal d'excitation pseudo-aléatoire.

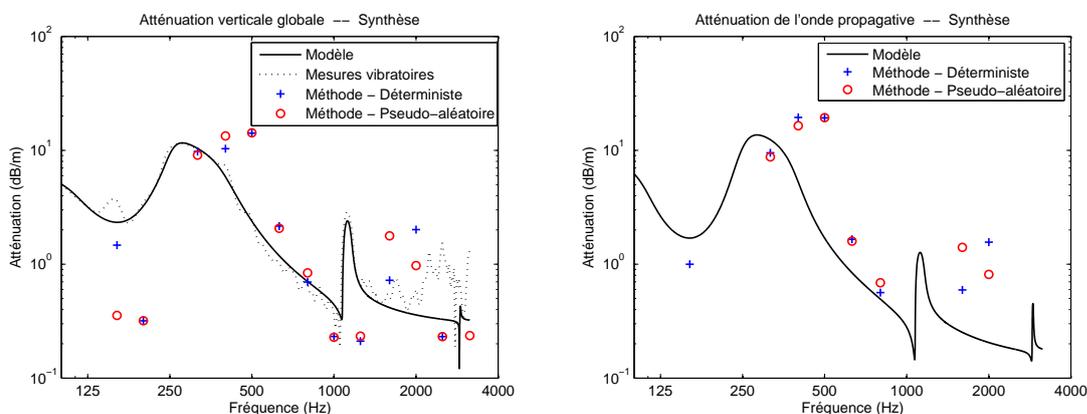


FIGURE 5.32: Mesures au pot vibrant, excitation verticale - Localisation de l'atténuation dans le rail, synthèse. Atténuation estimée par optimisation paramétrique en fonction de la fréquence. Gauche : atténuation globale. Droite : atténuation de l'onde propagative.

antenne microphonique, ont permis de justifier plusieurs choix effectués dans cette thèse.

En premier lieu, et en complément des mesures au marteau de chocs qui ont validé le modèle vibratoire, nous avons retrouvé les caractéristiques principales du rayonnement du rail prévues par le modèle. Les similitudes observées entre les résultats issus des mesures acoustiques et les résultats de simulations, aussi bien pour la formation de voies que pour la méthode d'optimisation paramétrique, montrent que les modèles retenus sont globalement appropriés.

Concernant l'identification des paramètres, le traitement classique de formation de voies conduit à des estimations correctes du nombre d'onde (réel) dans le rail dans le cas où les ondes sont peu atténuées (ici à partir de 800 Hz). Pour ce paramètre, la méthode d'optimisation paramétrique proposée donne quant à elle des résultats consistants sur toute la bande de fréquences, y compris dans les cas où l'atténuation des ondes dans le rail est élevée ou intermédiaire. Par ailleurs, cette méthode permet d'obtenir une première estimation de l'atténuation de l'onde vibratoire dans le rail. Cependant, conformément aux résultats des simulations, la précision sur l'identification de ce paramètre reste limitée

pour une position d’antenne fixe. Pour les fortes atténuations, les simulations ont toutefois montré que ce manque de précision n’était pas critique vis-à-vis des indicateurs caractéristiques du champ acoustique. En revanche, lorsque l’atténuation est faible, les erreurs d’estimation (en particulier les estimations nulles de l’atténuation) empêchent une bonne reconstruction du champ rayonné.

Des comportements particuliers ont également été soulevés. Dans certains cas, les divergences avec les prévisions s’expliquent en partie par l’utilisation d’un modèle de poutre ne faisant intervenir qu’un seul type d’onde vibratoire, alors que les résultats semblent confirmer la présence de plusieurs autres. Pour aller dans le sens de ces observations, il faudrait étendre l’étude du comportement vibratoire du rail aux hautes fréquences afin de comparer les ondes localisées aux ondes prévues pour ces fréquences. Par ailleurs, en basses fréquences, il reste à analyser l’effet du rayonnement acoustique propre aux traverses. Dans d’autres cas, les connaissances vibro-acoustiques sur le rail et la voie regroupées dans cette thèse ne permettent pas d’interpréter les comportements observés.

Enfin, pour être tout à fait précis avec les conditions expérimentales, il convient de souligner les différents éléments relevés lors de cette thèse ou des campagnes de mesure antérieures :

- Certaines traverses ne sont plus en contact avec le sol. Lors des mesures vibratoires, nous avons observé des faibles cohérences entre les signaux vibratoires mesurés au niveau de ces traverses et le signal d’excitation.
- La zone centrale où sont positionnées les différentes excitations a fait l’objet de plusieurs mesures incluant la présence de charges statiques élevées. Ces contraintes ont modifié localement les caractéristiques mécaniques du système. D’autres disparités dans les paramètres mécaniques locaux ont par ailleurs été relevées dans [73].
- Comme le montre la figure 5.12, les traverses sont placées à même le sol, par l’intermédiaire de chaussons simulant la raideur d’un ballast. Le rail est ainsi surélevé d’une hauteur de 25 cm environ par rapport au sol, ce qui crée des cavités acoustiques pouvant amplifier le rayonnement du pied du rail. De plus, le sol constitue une surface sur laquelle pourront se réfléchir les ondes acoustiques (sources images), modifiant la composition des phases au niveau de l’antenne.

En définitive, ces premières mesures encourageantes constituent une réelle validation des travaux proposés dans cette thèse.

6 – Conclusion

6.1 Synthèse

Dans un contexte de mesure ou de prédiction du bruit des véhicules ferroviaires au passage, l'importance de la prise en compte du bruit de contact roue/rail est aujourd'hui largement acquise. Les différents travaux entrepris pour comprendre les phénomènes à l'origine de ce type de bruit ont conduit à l'élaboration de modèles vibroacoustiques complets, utilisés dans des outils prédictifs opérationnels. Parmi les mécanismes identifiés, ces modèles ont permis de souligner l'importance du bruit de roulement, et particulièrement de sa composante relative au rail. Concernant l'évaluation de cette composante à partir de mesures *in situ*, les méthodes utilisées actuellement ne donnent pas entière satisfaction ; elles sont pour certaines inadaptées à la source particulière que représente le rail et pour d'autres très exigeantes en moyens expérimentaux. Les travaux de recherche présentés dans ce document ont ainsi été menés avec pour objectif de développer une méthode de caractérisation adaptée aux spécificités du rayonnement acoustique du rail, en utilisant un réseau de microphones.

Dans un premier temps nous avons étudié le comportement vibratoire du rail à l'aide d'un modèle de poutre tenant compte des interactions mécaniques avec les éléments de la voie. L'hypothèse de poutre, valable jusqu'à 3 kHz dans le cas des ondes de flexion verticale, met en évidence la propagation d'une onde de champ proche et d'une onde propagative de part et d'autre de chaque contact roue/rail. Les caractéristiques de ces ondes, et par suite celles du champ acoustique rayonné par le rail, sont hétérogènes avec la fréquence. Le champ vibratoire qui peut dans certains cas rester localisé au niveau des excitations peut également s'étendre sur plusieurs dizaines de mètres, notamment pour les hautes fréquences. S'ajoutent à cela des phénomènes singuliers liés à la périodicité du système d'attaches.

Pour déduire de ce comportement vibratoire les propriétés du champ acoustique, nous avons utilisé une modélisation acoustique du rail simplifiée : une répartition linéaire et périodique de sources monopolaires cohérentes sur l'axe du rail. Comme pour les vibrations, le champ acoustique résultant de cette modélisation a des propriétés hétérogènes à la fois en fonction de la fréquence, mais également spatialement pour une fréquence donnée. Lorsque les ondes vibratoires sont fortement atténuées, le rail rayonne comme une source ponctuelle localisée au niveau de l'excitation. Lorsque les ondes vibratoires sont peu atténuées, le rail rayonne comme un monopôle cylindrique. Entre ces cas extrêmes, on trouve des situations intermédiaires aux comportements moins marqués.

Cette étude vibroacoustique s'est avérée présenter un double intérêt. D'une part, comme l'a montré T. Kitagawa dans sa thèse, elle a permis de montrer que les traitements d'antenne classiques basés sur la formation de voies sont inadaptés au rail. D'autre part, elle a conduit à l'élaboration de modèles pertinents qui ont été utilisés pour développer la méthode proposée dans cette thèse.

Ainsi, nous avons proposé de caractériser le champ acoustique rayonné par le rail en utilisant un modèle dont certains paramètres inconnus sont retrouvés à partir des signaux mesurés par une antenne. Comme dans le cas de la formation de voies, c'est la théorie

de l'estimation qui fournit le cadre théorique nécessaire à la résolution de ce problème inverse. L'estimateur qui a été utilisé est basé sur la minimisation d'un critère des moindres carrés. Ce critère est représentatif de l'écart entre la matrice spectrale obtenue à partir du modèle de source et la matrice spectrale mesurée sur l'antenne. Dans le cas d'une seule source aléatoire, cet estimateur correspond à celui du maximum de vraisemblance. Le modèle source est construit en rapport avec l'étude vibro-acoustique : on associe à chaque contact une source élémentaire correspondant à la propagation d'un type d'onde donné. Les paramètres qui caractérisent chaque source (amplitude, nombre d'onde, atténuation) sont retrouvés par minimisation du critère des moindres carrés, et également dans certaines limites par formation de voies pour le seul nombre d'onde. Dans le cas d'une onde vibratoire non atténuée, il y a en effet équivalence entre ces deux méthodes pour l'estimation du nombre d'onde.

À partir des résultats de l'analyse théorique effectuée dans le chapitre 3, une étude numérique a été réalisée afin d'évaluer les performances de la méthode. Dans un premier temps, nous avons étudié le cas simple d'une seule source élémentaire d'amplitude inconnue ; la solution du problème se formule analytiquement dans ce cas. Plusieurs aspects ont été testés : la présence de bruit sur les capteurs, l'existence d'erreurs sur des paramètres supposés connus (position de l'excitation, valeur d'un nombre d'onde), et l'utilisation d'un modèle source dégradé. À cet effet, trois indicateurs de performance ont été utilisés : la puissance totale rayonnée par le rail, la directivité moyenne sur une ligne parallèle au rail, et la puissance acoustique efficace moyenne sur une ligne parallèle au rail. L'influence de la position de l'antenne par rapport à l'excitation a également été étudiée. Les résultats ont montré qu'un modèle de poutre d'Euler sur support continu était suffisant pour représenter le rayonnement du rail dans la plupart des cas. La décorrélation de l'onde de champ proche et de l'onde propagative a également ouvert des perspectives pour des cas intégrant la présence d'autres ondes comme les ondes de torsion ou celles comportant des déformations de section. Les effets liés à la périodicité du support autour des fréquences *pin-pin* restent quant à eux mal décrits par ce type de modèle dégradé. En ce qui concerne la position de l'antenne, le meilleur compromis consiste à adopter une position intermédiaire, ni trop éloignée de l'excitation, ni trop en face de cette dernière.

Dans un second temps, la méthode a été testée en termes d'identification de paramètres autres que l'amplitude, vis-à-vis desquels le problème d'optimisation n'est plus linéaire. Ce type de résolution nécessitant généralement l'utilisation d'algorithmes numériques spécifiques, nous avons proposé une démarche simplifiée en limitant le nombre de ces paramètres à deux (un nombre d'onde vibratoire complexe en plus de l'amplitude). Cette démarche consiste en l'évaluation de la fonction coût dans un plan de variation des paramètres inconnus, borné et discrétisé. Les résultats ont montré qu'il était effectivement possible d'estimer correctement le nombre d'onde complexe, avec cependant une bien meilleure résolution sur le nombre d'onde structural que sur l'atténuation.

Dans le cas d'excitations multiples, les simulations ont montré que l'estimation des amplitudes est sensible aux incertitudes sur les paramètres. Au mieux, avec une simple position d'antenne, seules les amplitudes des essieux d'un même bogie peuvent être identifiées. Cette sensibilité s'avère toutefois avantageuse pour l'estimation des nombres d'onde complexes ; positionner l'antenne entre les différents contacts permet d'améliorer le pouvoir discriminant de la méthode.

Pour valider expérimentalement ces résultats, deux campagnes de mesures ont été menées sur un site expérimental. En suivant une procédure normalisée de mesure d'atténuation, des essais au marteau de chocs ont tout d'abord permis de valider le modèle vibratoire de poutre en flexion verticale. Les paramètres mécaniques spécifiques au site

expérimental ont également été relevés grâce à ces mesures. Enfin, en excitant le rail à l'aide d'un pot vibrant suffisamment puissant, nous avons pu mettre en place une série de mesures acoustiques par antenne. Les résultats des études numériques ont été partiellement retrouvés. En particulier, nous avons pu déterminer dans certains cas les nombres d'onde vibratoires complexes prévus par le modèle de poutre, permettant de conclure quant à l'efficacité de la méthode proposée : le nombre d'onde structural est bien identifié sur la majeure partie du domaine fréquentiel contrairement à l'atténuation dont l'estimation est plus délicate.

6.2 Limitations, perspectives

La caractérisation du bruit de contact roue/rail à l'aide d'une antenne microphonique est une problématique complexe dont la résolution nécessite de surmonter de nombreuses difficultés. Ainsi, un certain nombre d'hypothèses restrictives ont été formulées dans le cadre de cette thèse.

En premier lieu, nous avons focalisé notre attention sur la composante rail du bruit de roulement. La méthode que nous avons proposée a été développée et testée en considérant le champ acoustique rayonné par un seul rail isolé sur la voie. Or, dans un contexte de mesure au passage, les signaux reçus par l'antenne résultent de la contribution d'un ensemble conséquent de sources acoustiques. Certaines de ces sources pouvant être correctement caractérisées par des méthodes existantes, on peut supposer que leurs contributions peuvent être retirées du champ total. Relativement au bruit de roulement, le rayonnement des roues pose cependant question, non par leur étendue (ce sont des sources ponctuelles du point de vue de l'antenne), mais par son interaction avec le rail. En effet, pour un contact donné, la mise en vibration du rail et de la roue résulte de la même excitation. Il en suit le rayonnement de champs acoustiques cohérents qui peuvent interférer spatialement, et notamment au niveau de l'antenne. Supposer que les composantes relatives aux roues peuvent être entièrement estimées à l'aide d'une focalisation en champ proche c'est effectuer une hypothèse réductrice au niveau des mécanismes de génération du bruit de roulement.

La seconde hypothèse forte formulée dans cette étude est la stationnarité des signaux acoustiques mesurés par l'antenne. Cette hypothèse est indispensable à l'analyse spectrale basée sur l'ergodicité des processus. En situation réelle, le déplacement relatif des excitations sur le rail vient compromettre cette hypothèse. En particulier, comme pour toute source acoustique en mouvement, l'effet Doppler modifie le contenu spectral des signaux au cours du temps. Par analogie avec les procédés de suivi de sources existant pour certains traitements d'antenne, il serait nécessaire de tenir compte de ce phénomène pour la caractérisation du champ acoustique rayonné par le rail.

D'autre part, lorsque le rail est supporté périodiquement, nous avons vu que les propriétés du champ acoustique pouvaient dépendre fortement de la position de l'excitation par rapport aux points d'attache, et donc du temps par le biais de son déplacement. Si cette remarque remet évidemment en cause la stationnarité des signaux sur l'antenne, le problème du déplacement des excitations ouvre cependant certaines pistes de recherche pour compléter la démarche proposée. En effet, relativement au temps d'acquisition nécessaire à l'analyse spectrale, l'écart entre les attaches est suffisamment petit pour que les instationnarités soient avantageusement moyennées lors du traitement. Les comportements singuliers obtenus pour une position donnée peuvent être gommés au bénéfice d'un comportement moyen.

Par ailleurs, certains résultats obtenus concernant la position de l'antenne par rapport

aux excitations pourraient être mis à profit pour améliorer les performances de la méthode dans un contexte de sources mobiles : robustesse, estimation des amplitudes et localisation des paramètres inconnus. Le déplacement des excitations relativement à l'antenne peut ainsi être utilisé à bon escient afin de sélectionner la position adaptée à chaque objectif visé. Par exemple, pour estimer l'amplitude d'une source élémentaire avec un maximum de robustesse, il faudrait se placer au droit de cette source. À l'inverse, pour estimer un nombre d'onde vibratoire, il est préférable de décaler l'antenne par rapport au droit de l'excitation. La démarche ainsi construite serait séquentielle ; à chaque étape une certaine position d'antenne est utilisée pour un objectif particulier, atteint par minimisation du même critère. Afin d'augmenter le pouvoir discriminant de la méthode, notamment en ce qui concerne l'atténuation, on pourrait imaginer sur le même principe la construction d'un nouveau critère utilisant plusieurs positions d'antenne. Une première approche a notamment été présentée dans [75].

Enfin, dans la perspective d'une utilisation opérationnelle, le développement d'une méthode réellement adaptée à la présence de plusieurs types d'ondes est indispensable.

Les travaux présentés dans cette thèse, validés expérimentalement, ont ainsi permis de synthétiser un ensemble de connaissances vibroacoustiques relatives au rail dans une nouvelle méthode de caractérisation par antenne microphonique. Si son implémentation dans une procédure de mesure opérationnelle n'est pas encore d'actualité, les résultats obtenus ont néanmoins prouvé son efficacité tout en suggérant des axes de recherche qui permettront de poursuivre l'étude de cette problématique.

Bibliographie

- [1] M.-A. PALLAS *et al.* : *Bruit et vibrations dus aux tramways : émission et perception*. Rapport INRETS 279. Les collections de l'INRETS, 2009.
- [2] J. LAMBERT, P. CHAMPELOVIER et I. VERNET : Annoyance from high speed train noise : A social survey. *Journal of Sound and Vibration*, 193(1):21–28, 1996.
- [3] B. BARSIKOW : Experiences with various configurations of microphone arrays used to locate sound sources on railway trains operated by the DB AG. *Journal of Sound and Vibration*, 193(1):283–293, 1996.
- [4] M.-A. PALLAS, J. LELONG et R. CHATAGNON : Characterisation of tram noise emission and contribution of the noise sources. *Applied Acoustics*, 72(7):437–450, 2011.
- [5] C. MELLET *et al.* : High speed train noise emission : Latest investigation of the aerodynamic/rolling noise contribution. *Journal of Sound and Vibration*, 293(3-5): 535–546, 2006.
- [6] Séminaire GdR Bruit des Transports. *Localisation de sources acoustiques sur les véhicules*, INRETS, Bron, 2008.
- [7] D.J. THOMPSON et C.J.C. JONES : A review of the modelling of wheel/rail noise generation. *Journal of Sound and Vibration*, 231(3):519–536, 2000.
- [8] D.J. THOMPSON : *Railway Noise and Vibration - Mechanisms, Modelling and Means of Control*. Elsevier, 2010.
- [9] T. KITAGAWA : *An investigation into inconsistencies between theoretical predictions and microphone array measurements of railway rolling noise*. Thèse de doctorat, University Of Southampton, 2007.
- [10] B. FAURE : Bruit de contact roue/rail et méthodes de séparation multicauteurs : état de l'art. Rapport LTE 0831, INRETS, Décembre 2008.
- [11] I.L. VÉR, C.S. VENTRES et M.M. MYLES : Wheel/rail noise - part III : Impact noise generation by wheel and rail discontinuities. *Journal of Sound and Vibration*, 46(3):395–417, 1976.
- [12] P.J. REMINGTON : Wheel/rail squeal and impact noise : What do we know ? What don't we know ? Where do we go from here ? *Journal of Sound and Vibration*, 116(2): 339–353, 1985.
- [13] T.X. WU et D.J. THOMPSON : A hybrid model for the noise generation due to railway wheel flats. *Journal of Sound and Vibration*, 251(1):115–139, 2002.
- [14] T.X. WU et D.J. THOMPSON : On the impact noise generation due to a wheel passing over rail joints. *Journal of Sound and Vibration*, 267(3):485–496, 2003.
- [15] M.J. RUDD : Wheel/rail noise - Part II : Wheel squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 46:395–417, 1976.
- [16] U. FINGBERG : A model of wheel-rail squealing noise. *Journal of Sound and Vibration*, 143(3):365–377, 1990.
- [17] N. VINCENT *et al.* : Curve squeal of urban rolling stock - Part 1 : State of the art and field measurements. *Journal of Sound and Vibration*, 293(3-5):691 – 700, 2006.

- [18] O. CHIELLO *et al.* : Curve squeal of urban rolling stock - Part 3 : Theoretical model. *Journal of Sound and Vibration*, 293(3-5):710–727, jun 2006.
- [19] P.J. REMINGTON : Wheel/rail noise - Part I : Characterization of the wheel/rail dynamic system. *Journal of Sound and Vibration*, 46(3):359–379, 1976.
- [20] P.J. REMINGTON : Wheel/rail noise - Part IV : Rolling noise. *Journal of Sound and Vibration*, 46(3):419–436, 1976.
- [21] D.J. THOMPSON : Wheel-rail noise generation, part I : Introduction and interaction model. *Journal of Sound and Vibration*, 161(3):387–400, 1993.
- [22] D.J. THOMPSON : Wheel-rail noise generation, part II : Wheel vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 161(3):401–419, 1993.
- [23] D.J. THOMPSON : Wheel-rail noise generation, part III : Rail vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 161(3):421–446, 1993.
- [24] D.J. THOMPSON : Wheel-rail noise generation, part IV : Contact zone and results. *Journal of Sound and Vibration*, 161(3):447–466, 1993.
- [25] D.J. THOMPSON : Wheel-rail noise generation, part V : Inclusion of wheel rotation. *Journal of Sound and Vibration*, 161(3):467–482, 1993.
- [26] D.J. THOMPSON, B. HEMSWORTH et N. VINCENT : Experimental validation of the TWINS prediction program for rolling noise, Part 1 : description of the model and method. *Journal of Sound and Vibration*, 193(1):123–135, 1996.
- [27] D.J. THOMPSON et C.J.C. JONES : Sound radiation from a vibrating railway wheel. *Journal of Sound and Vibration*, 253(2):401–419, 2002.
- [28] C.E. WALLACE : Radiation resistance of a rectangular panel. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 51(3B):946–952, 1972.
- [29] M.-A. PALLAS, J. LELONG et R. CHATAGNON : Tram noise emission : spectral analysis of the noise source contributions. In *EuroNoise 08, 7th European Conference on Noise Control*, pages 2863–8, Paris, 2008.
- [30] KL. KNOTHE et S.L. GRASSIE : Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies. *Vehicle System Dynamics : International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 22(3):209 – 262, 1993.
- [31] D.J. THOMPSON et N. VINCENT : Track dynamic behaviour at high frequencies. Part 1 : Theoretical models and laboratory measurements. *Vehicle System Dynamics : International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 24(1 supp 1):86 – 99, 1995.
- [32] A. NORDBORG : *Vertical rail vibrations : noise and structure-borne sound generation*. Thèse de doctorat, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1995.
- [33] M.A. HECKL : Railway noise - Can random sleeper spacings help? *Acustica*, 81:559–564, 1995.
- [34] J.-F. HAMET : Propagation des ondes de flexion d'un rail posé sur traverses - Modèles d'Euler et de Timoshenko. Rapport technique MMA 9704, INRETS, 1997.
- [35] J.-F. HAMET : Influence des attaches du rail sur le bruit ferroviaire émis par la voie. Modèle simple d'un rail sur support continu - Étude paramétrique. Rapport technique MMA 9802, INRETS, 1998.
- [36] J.-F. HAMET : Railway noise : use of the timoshenko model in rail vibration studies. *Acta Acustica*, 85:54–62, 1999.
- [37] M.A. HECKL : Coupled waves on a periodically supported timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 252(5):849–882, 2002.

- [38] N. VINCENT et D.J. THOMPSON : Track dynamic behaviour at high frequencies. Part 2 : Experimental results and comparisons with theory. *Vehicle System Dynamics : International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 24(1 supp 1):100 – 114, 1995.
- [39] L. GRY : Dynamic modelling of railway track based on wave propagation. *Journal of Sound and Vibration*, 195(3):477–505, 1996.
- [40] L. GRY et C. GONTIER : Dynamic modelling of railway track : a periodic model based on a generalized beam formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 199(4):531–558, 1997.
- [41] J. RYUE *et al.* : Investigations of propagating wave types in railway tracks at high frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 315(1-2):157–175, 2008.
- [42] T. X. WU et D. J. THOMPSON : A double timoshenko beam model for vertical vibration analysis of railway track at high frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 224(2):329–348, 1999.
- [43] S.L. GRASSIE : Dynamic modelling of concrete railway sleepers. *Journal of Sound and Vibration*, 187(5):799–813, 1995.
- [44] S. KAEWUNRUEN et A.M. REMENNIKOV : Sensitivity analysis of free vibration characteristics of an in situ railway concrete sleeper to variations of rail pad parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 298(1-2):453–461, 2006.
- [45] S. KAEWUNRUEN et A.M. REMENNIKOV : Dynamic flexural influence on a railway concrete sleeper in track system due to a single wheel impact. *Engineering Failure Analysis*, 16(3):705–712, 2009.
- [46] A. NORDBORG : Vertical rail vibrations : Pointforce excitation. *Acta Acustica united with Acustica*, 84(2):280–288, 1998.
- [47] D.J. THOMPSON, C.J.C. JONES et N. TURNER : Investigation into the validity of two-dimensional models for sound radiation from waves in rails. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 113(4):1965–1974, 2003.
- [48] C.M. NILSSON *et al.* : A waveguide finite element and boundary element approach to calculating the sound radiated by railway and tram rails. *Journal of Sound and Vibration*, 321(3-5):813–836, 2009.
- [49] M. BRUNEAU : *Manuel d’acoustique fondamentale*. Études en mécanique des matériaux et des structures. Hermès, Paris, 1998.
- [50] M. ABRAMOWITZ et I.A. STEGUN : *Handbook of Mathematical Functions*. Applied Mathematics Series 55. National Bureau of Standards, Washington, D.C. 20402, 1964.
- [51] J. LAGET : Étude du rayonnement acoustique d’un rail soumis à une excitation ponctuelle. Mémoire de master, INRETS, Décembre 2008.
- [52] A. FRID : A quick and practical experimental method for separating wheel and track contributions to rolling noise. *Journal of Sound and Vibration*, 231(3):619–629, 2000.
- [53] M.G. DITTRICH et M.H.A. JANSSENS : Improved measurements methods for railway rolling noise. *Journal of Sound and Vibration*, 231(3):595–609, 2000.
- [54] P.-E. GAUTIER et F. LÉTOURNEAUX : Analyse des stratégies de réduction de bruit : la séparation des contributions sonores voie/matériel roulant (projet STAIRRS). *Revue Générale des Chemins de Fer*, Numéro spécial Bruit - 2e partie, Novembre 2003.
- [55] M. WIRNSBERGER *et al.* : The METARAIL project - Final report for publication, 1999.

- [56] D.H. JOHNSON et D.E. DUDGEON : *Array Signal Processing : Concepts And Techniques*. Prentice Hall.
- [57] M.-A. PALLAS : Localisation des sources de bruit des transports guidés - Les antennes microphoniques. *Instrumentation, Mesure, Métrologie (I2M)*, 2(1/2, Capteurs et traitement du signal pour les transports guidés):9–36, 2002.
- [58] P.M. MORSE et K.U. INGARD : *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986.
- [59] B. BARSIKOW et W.F. KING III : On removing the doppler frequency shift from array measurements of railway noise. *Journal of Sound and Vibration*, 120(1):190–196, 1988.
- [60] G. ELIAS : Source localization with a two-dimensional focused array : optimal signal processing for a cross-shaped array. In *Inter-Noise 95*, Newport Beach, USA, 1995.
- [61] A. NORDBORG *et al.* : Wheel/rail noise separation with microphone array measurements. In *Internoise 2001*, La Haye, Pays-Bas, 2001.
- [62] S. MARCOS : *Méthodes à haute résolution : traitement d'antenne et analyse spectrale*. Collecion Traitement du Signal. HERMES, 1998.
- [63] D.E. DUDGEON et R.M. MERSEREAU : *Multidimensional Digital Signal Processing*. Signal Processing Series. Prentice Hall, 1995.
- [64] Y. BRESLER : Maximum likelihood estimation of a linearly structured covariance with application to antenna array processing. In *Fourth Annual ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling*, Minneapolis, USA, pages 172–175, 1988.
- [65] B. FAURE *et al.* : Characterization of the acoustic field radiated by a rail using a microphone array. In *The 17th International Congress on Sound and Vibration*, Le Caire, 2010.
- [66] D. BLACODON et G. ELIAS : Level estimation of extended acoustic sources using an array of microphones. In *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference & Exhibit*, volume 63, Hilton Head, USA, 2003. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [67] F.R. GANTMACHER : *Matrix Theory*. Traduction en anglais par K.A. Hirsch du livre russe Теория Матриц. Chelsea Publishing Company, 1959.
- [68] R.A. HORN et C.R. JOHNSON : *Topics in matrix analysis*. Cambridge University Press. 1991.
- [69] T. KITAGAWA et D.J. THOMPSON : The horizontal directivity of noise radiated by a rail and implications for the use of microphone arrays. *Journal of Sound and Vibration*, 329(2):202–220, 2010.
- [70] A.J. HULL et D.A. HURDIS : A parameter estimation method for the flexural wave properties of a beam. *Journal of Sound and Vibration*, 262(1):187–197, 2003.
- [71] K. GROSH et E.G. WILLIAMS : Complex wave-number decomposition of structural vibrations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 93(2):836–848, 1993.
- [72] D.J. THOMPSON : Experimental analysis of wave propagation in railway tracks. *Journal of Sound and Vibration*, 203(5):867–888, 1997.
- [73] J.-F. HAMET : Étude expérimentale de l'influence des attaches du rail sur le bruit ferroviaire émis par la voie. Rapport technique MMA 9806, INRETS, Décembre 1998.
- [74] Journal Officiel de l'Union Européenne. *Décision de la Commission du 23 décembre 2005 relative à la spécification technique d'interopérabilité concernant le sous-système « Matériel roulant - bruit » du système ferroviaire transeuropéen conventionnel*, Février 2006. L37 - ISSN 1725-2563.

- [75] B. FAURE *et al.* : Caractérisation spatiale du rayonnement acoustique d'un rail à l'aide d'un réseau de microphones - simulations. *In 10ème Congrès Français d'Acoustique*, Lyon, 2010.
- [76] C. ESVELD : *Modern Railway Track*. MRT-Productions, 2001.
- [77] CERTU : Plates-formes de tramway - Pathologie et conception. Rapport technique, CERTU, 2004.

A – Annexe - Les différents types de pose de voie

Depuis l'apparition des voies ferrées, de nombreux types de pose de voie ont été développés en particulier en milieu urbain, la plupart ayant évolué empiriquement.

Fixation du rail

Au niveau de la fixation du rail, on peut distinguer la pose continue de la pose discontinue (voir [76], et [77] pour ce qui concerne plus spécifiquement les tramways).

La pose continue

Le patin du rail repose en intégralité sur un matériau (sable, concassé, asphalte, polyuréthane ou autre matériau synthétique) qui transmet les efforts à la plate-forme (généralement en béton). L'écartement entre les rails est maintenu constant grâce à des entretoises régulièrement espacées. La figure A.1 représente un tel type de pose.

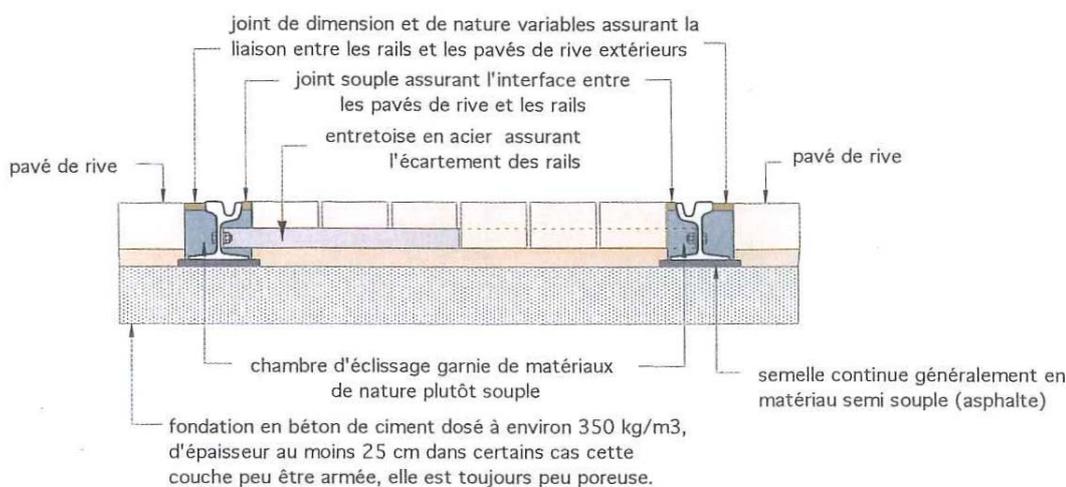


FIGURE A.1: *Principe de pose sur appui continu* [77]

Dans certains cas, le rail peut être noyé (pose en caniveau) dans une dalle en béton ménagée d'une "gouttière". L'espace entre le rail et la gouttière est comblé par un matériau de remplissage comme de la résine par exemple. Le maintien de la position des rails, et donc de l'écartement, est assuré par ce matériau.

Ce type de pose qui concerne plutôt les voies de tramway, est très peu utilisé en France, contrairement au second principe détaillé ci-après.

La pose discontinue

Cette pose est très répandue pour les chemins de fer, et a été également adoptée pour la majeure partie des voies de tramway françaises. Le rail est fixé sur des traverses (ou

blochets) à l'aide de fixations de natures très variées ; on pourra citer par exemple les attaches vissées, élastiques ou à ressort. Les traverses, auparavant en bois, sont aujourd'hui en béton, soit en un seul bloc (traverses monobloc) ou en deux blocs reliés par une barre métallique (traverse bi-bloc). Elles sont différemment espacées suivant la courbe. Un autre type de pose périodique est la pose sur selles. Les traverses sont remplacées par des supports généralement métalliques équipés de fixations. Deux de ces types de poses à appuis discontinus sont représentés sur les figures A.2 et A.3.

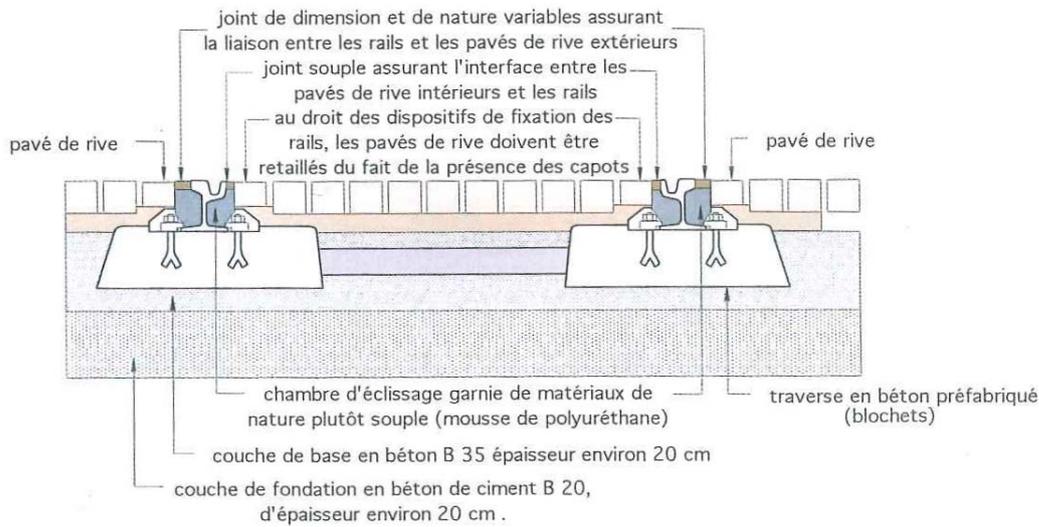


FIGURE A.2: *Principe de pose sur blochets (appuis discontinus)* [77]

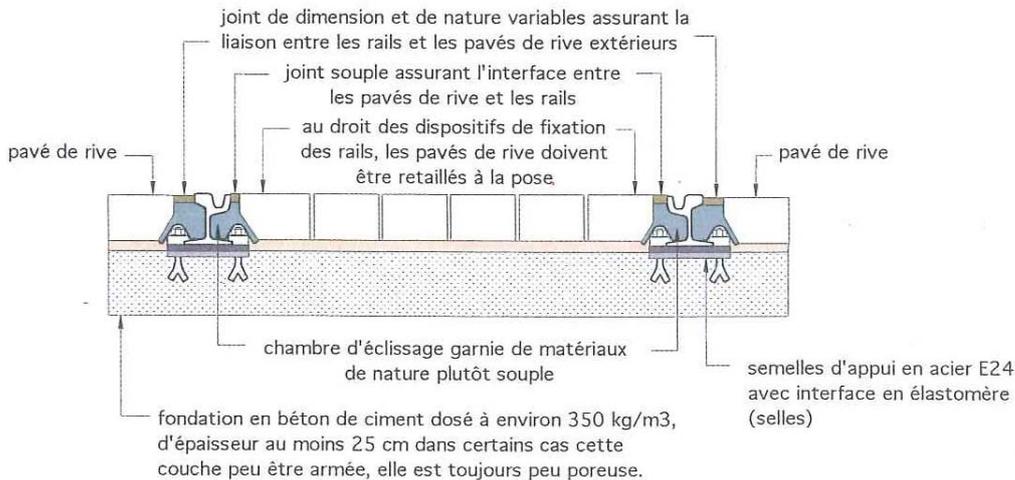


FIGURE A.3: *Principe de pose sur selles (appuis discontinus)* [77]

Entre le rail et son support (traverse ou selle), on peut intercaler une couche de matériau souple appelé semelle. Caractérisée par sa raideur mécanique, la semelle a pour rôle d'atténuer les vibrations transmises à la plate-forme. Dans le même objectif, un matériau souple peut être intercalé entre la traverse et la plate-forme (chausson).

Plate-forme

Un autre élément qui détermine les propriétés d'une voie est la plate-forme sur laquelle repose le rail et son système de fixation. Les deux types de support que l'on peut mentionner sont le ballast (lit de graviers) et le béton. Il existe de nombreuses poses discontinues sur dalle béton, notamment en France en ce qui concerne les voies de tramway. Une représentation du rail sur un support de type {semelle + traverse + ballast} est donnée figure A.4.

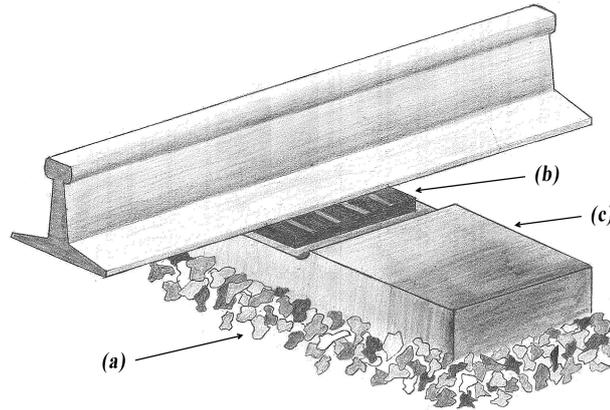


FIGURE A.4: Pose ferroviaire classique sur appuis discontinus et ballast : (a) Ballast - (b) Semelle - (c) Traverse.

Voies enterrées

Les voies de tramway sans ballast que l'on retrouve en site urbain (une pose sur ballast pouvant être employée en dehors des zones de circulation), ont la particularité de comporter un revêtement de surface, naturel (herbe) ou synthétique (asphalte). Seule la partie supérieure du rail (par ailleurs à gorge pour ce type de voie) est apparente, limitant donc le rayonnement latéral du rail. La figure A.5 représente un tramway Nantais circulant sur une voie revêtue d'herbe.



FIGURE A.5: *Revêtement de surface naturel (herbe) sur une voie de tramway à Nantes*

B – Annexe - Le rail sur support continu

B.1 Poutre mince d'Euler

L'équation différentielle du mouvement d'une poutre mince d'Euler en flexion s'écrit [35] :

$$\frac{d^4}{dz^4}\xi(z, \omega) - k_B^4 \xi(z, \omega) = \frac{1}{B} F(\omega) Z^{-1}(z) \quad (\text{B.1})$$

Avec :

$k_B = \left(\frac{M\omega^2}{B}\right)^{\frac{1}{4}}$ le nombre d'onde de flexion d'une poutre mince,
 $F(\omega)Z^{-1}(z)$ le champ spatial des forces extérieures en N/m.

Les forces extérieures qui s'appliquent sur le rail sont :

- la force d'excitation $F_{ex}(\omega)$ localisée en z_0 ,
- les forces de rappel dues au support qui s'appliquent en chaque point du rail.

Le champ des forces extérieures s'écrit donc :

$$F(\omega)Z^{-1}(z) = F_{ex}(\omega)\delta(z - z_0) - s'(\omega)\xi(z, \omega) \quad (\text{B.2})$$

avec $s'(\omega)$ la raideur équivalente du support (cf. 1.2.1).

B.1.1 Constantes de propagation

Les solutions générales de l'équation différentielle (B.1) sont des combinaisons linéaires d'ondes de la forme $\xi(z, \omega) = e^{\gamma(\omega)z}$. Pour déterminer les valeurs possibles de la constante de propagation, on substitue l'expression précédente dans l'équation (B.1) sans force extérieure autre que la réaction du support. On recherche donc les $\gamma(\omega)$ tels que $\xi(z, \omega)$ est solution de (B.1) pour $F_{ex}(\omega) = 0$.

On obtient l'équation de dispersion suivante :

$$\begin{aligned} \gamma^4(\omega) &= k_B^4 \left[1 - \frac{s'(\omega)}{M\omega^2}\right] \\ &= k_\beta^4 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

où $k_\beta = k_B \left[1 - \frac{s'(\omega)}{M\omega^2}\right]^{\frac{1}{4}}$ est le nombre d'onde de flexion d'une poutre mince sur support continu de raideur linéique équivalente $s'(\omega)$. La racine quatrième est définie de manière à ce que k_β ait sa partie réelle positive et sa partie imaginaire négative.

Les solutions générales de l'équation (B.1) sont donc de la forme :

$$\xi(z, \omega) = a_1 e^{k_\beta z} + a_2 e^{ik_\beta z} + b_1 e^{-k_\beta z} + b_2 e^{-ik_\beta z} \quad (\text{B.4})$$

B.1.2 Fonction de Green

La fonction de Green $G_\omega(z, z_0)$ associée à l'équation (B.1) est la réponse du rail à une force unitaire en z_0 . C'est la solution de l'équation :

$$\frac{d^4}{dz^4}G_\omega(z, z_0) - k_\beta^4 G_\omega(z, z_0) = \frac{1}{B}\delta(z - z_0) \quad (\text{B.5})$$

On tient le raisonnement suivant [35] :

1- En tout point $z \neq z_0$, aucune force extérieure autre que la réaction du support n'est appliquée, on doit donc avoir :

$$\forall z \neq z_0, \quad \frac{d^4}{dz^4} G_\omega(z, z_0) - k_\beta^4 G_\omega(z, z_0) = 0 \quad (\text{B.6})$$

2- Au point $z = z_0$, la fonction et ses deux premières dérivées sont continues, la discontinuité étant assumée par la dérivée d'ordre 3. Ainsi, en intégrant l'équation (B.5) de part et d'autre de z_0 on obtient :

$$\frac{d^3}{dz^3} G_\omega(z, z_0) \Big|_{z_0^-}^{z_0^+} = \frac{1}{B} \quad (\text{B.7})$$

3- En $\pm\infty$ la fonction est bornée.

Comme toute solution de l'équation (B.1), la fonction de Green est de la forme (B.4). D'après les conditions aux limites **3** on obtient :

$$\begin{aligned} G_\omega(z, z_0) &= a_1 e^{k_\beta(z-z_0)} + a_2 e^{ik_\beta(z-z_0)} & z < 0 \\ &= b_1 e^{-k_\beta(z-z_0)} + b_2 e^{-ik_\beta(z-z_0)} & z > 0 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Pour déterminer les coefficients a_1 , a_2 , b_1 et b_2 on utilise les conditions **1** et **2** :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_\omega(z, z_0) \Big|_{z_0^-}^{z_0^+} = 0 \\ \frac{d}{dz} G_\omega(z, z_0) \Big|_{z_0^-}^{z_0^+} = 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} G_\omega(z, z_0) \Big|_{z_0^-}^{z_0^+} = 0 \\ \frac{d^3}{dz^3} G_\omega(z, z_0) \Big|_{z_0^-}^{z_0^+} = \frac{1}{B} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -k_\beta & -ik_\beta & -k_\beta & -ik_\beta \\ k_\beta^2 & -k_\beta^2 & -k_\beta^2 & k_\beta^2 \\ -k_\beta^3 & ik_\beta^3 & -k_\beta^3 & ik_\beta^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{B} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

On obtient :

$$G_\omega(z, z_0) = -\frac{1}{4k_\beta^3} \frac{1}{B} \left[e^{-k_\beta|z-z_0|} + ie^{-ik_\beta|z-z_0|} \right] \quad (\text{B.10})$$

B.2 Poutre épaisse de Timoshenko

L'équation différentielle du mouvement d'une poutre épaisse de Timoshenko en flexion s'écrit [35] :

$$\left[\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_c^2 \right\} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_t^{*2} \right\} - k_B^4 \right] \xi(z, \omega) = \frac{F(\omega)}{B} \left[1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_c^2 \right\} \right] Z^{-1}(z) \quad (\text{B.11})$$

Avec :

$k_c = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}$: Nombre d'onde des ondes de compression

$k_t^* = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G^*}}$: Nombre d'onde des ondes de cisaillement

$G^* = G/\kappa$

$K = G^* M/\rho$: Rigidité au cisaillement

$F(\omega)Z^{-1}(z)$ le champ spatial des forces extérieures, identique à (B.2).

B.2.1 Constantes de propagation

Pour déterminer les valeurs possibles de la constante de propagation, on procède de la même manière que dans le cas de la poutre d'Euler : on injecte l'expression $\xi(z, \omega) = e^{\gamma(\omega)z}$ dans (B.11) pour $F_{ex}(\omega) = 0$.

On obtient l'équation de dispersion suivante :

$$\gamma^4 + \left(k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right) \gamma^2 - \left(k_B^4 - k_c^2 k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{B} \left[1 - \frac{B}{K} k_c^2 \right] \right) = 0 \quad (\text{B.12})$$

qui admet quatre solutions k_d , $-k_d$, ik_p et $-ik_p$ avec :

$$k_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left[\left(k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right)^2 + 4 \left(k_B^4 - k_c^2 k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{B} \left[1 - \frac{B}{K} k_c^2 \right] \right) \right]^{\frac{1}{2}} + \left(k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left[\left(k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right)^2 + 4 \left(k_B^4 - k_c^2 k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{B} \left[1 - \frac{B}{K} k_c^2 \right] \right) \right]^{\frac{1}{2}} - \left(k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

la notation $\frac{1}{2}$ représentant la racine carrée à partie réelle positive et à partie imaginaire négative.

Les solutions générales de l'équation (B.11) sont donc de la forme :

$$\xi(z, \omega) = a_1 e^{k_d z} + a_2 e^{ik_p z} + b_1 e^{-k_d z} + b_2 e^{-ik_p z} \quad (\text{B.13})$$

B.2.2 Fonction de Green

La fonction de Green $G_\omega(z, z_0)$ associée à l'équation (B.11) est la réponse du rail à une force unitaire en z_0 . C'est la solution de l'équation :

$$\left[\frac{d^4}{dz^4} + \left(k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right) \frac{d^2}{dz^2} - k_B^4 + k_c^2 k_t^{*2} + \frac{s'(\omega)}{B} \left(1 - \frac{B}{K} k_c^2 \right) \right] G_\omega(z, z_0) = \left[\frac{1}{B} \left\{ 1 - \frac{B}{K} k_c^2 \right\} - \frac{1}{K} \frac{d^2}{dz^2} \right] \delta(z - z_0) \quad (\text{B.14})$$

On tient ensuite le même raisonnement que pour la poutre mince d'Euler.

1- En tout point $z \neq z_0$, aucune force extérieure autre que la réaction du support n'est appliquée, on doit donc avoir :

$$\left[\frac{d^4}{dz^4} + \left(k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right) \frac{d^2}{dz^2} - k_B^4 + k_c^2 k_t^{*2} + \frac{s'(\omega)}{B} \left(1 - \frac{B}{K} k_c^2 \right) \right] G_\omega(z, z_0) = 0 \quad (\text{B.15})$$

2- Au point $z = z_0$, la fonction est continue. Contrairement au cas du modèle d'Euler, la présence d'une dérivée d'ordre 2 dans le second membre de l'équation (B.11) impose des discontinuités dès la dérivée d'ordre 1. Ainsi, en intégrant successivement l'équation (B.14) de part et d'autre de z_0 on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d^3}{dz^3} G_\omega(z, z_0) \Big|_{z_0^-}^{z_0^+} + \left(k_c^2 + k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right) \frac{d}{dz} G_\omega(z, z_0) \Big|_{z_0^-}^{z_0^+} = \frac{1}{B} \left[1 - \frac{B}{K} k_c^2 \right] \\ \frac{d^2}{dz^2} G_\omega(z, z_0) \Big|_{z_0^-}^{z_0^+} = 0 \\ \frac{d}{dz} G_\omega(z, z_0) \Big|_{z_0^-}^{z_0^+} = -\frac{1}{K} \\ G_\omega(z, z_0) \Big|_{z_0^-}^{z_0^+} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

3- En $\pm\infty$ la fonction est bornée.

Comme toute solution de l'équation (B.11), la fonction de Green est de la forme (B.13). D'après les conditions aux limites **3** on obtient :

$$\begin{aligned} G_\omega(z, z_0) &= a_1 e^{k_d(z-z_0)} + a_2 e^{ik_p(z-z_0)} & z < 0 \\ &= b_1 e^{-k_d(z-z_0)} + b_2 e^{-ik_p(z-z_0)} & z > 0 \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Pour déterminer les coefficients a_1 , a_2 , b_1 et b_2 on utilise les conditions **1** et **2**, ce qui revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -k_d & -ik_p & -k_d & -ik_p \\ k_d^2 & -k_p^2 & -k_d^2 & k_p^2 \\ -k_d^3 & ik_p^3 & -k_d^3 & ik_p^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/K \\ 0 \\ \frac{1}{B} - \frac{1}{K} \left[k_t^{*2} - \frac{s'(\omega)}{K} \right] \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

On obtient :

$$G_\omega(z, z_0) = -\frac{1}{B} \left[F_d e^{-k_d|z-z_0|} + iF_p e^{-ik_p|z-z_0|} \right] \quad (\text{B.19})$$

Avec :

$$F_p = \frac{1 - \frac{B}{K}(-k_p^2 + k_c^2 + \frac{s'(\omega)}{K})}{2k_p(k_p^2 + k_d^2)} \quad F_d = \frac{1 - \frac{B}{K}(k_d^2 + k_c^2 + \frac{s'(\omega)}{K})}{2k_d(k_p^2 + k_d^2)} \quad (\text{B.20})$$

B.3 Comparaison des différentes constantes de propagation

La figure B.1 permet de comparer les constantes de propagation relatives à la poutre d'Euler et à la poutre de Timoshenko sur support continu (ballast ou béton) à travers le tracé des rapports suivants :

- pour la poutre de Timoshenko, le rapport des parties réelles et imaginaires de k_p et k_d ,
- pour l'onde de champ proche, le rapport des parties réelles et imaginaires de k_p et k_β (k_β étant le nombre d'onde de la poutre d'Euler sur support continu (cf. partie 1.2.2.1),
- pour l'onde propagative, le rapport des parties réelles et imaginaires de k_d et k_β .

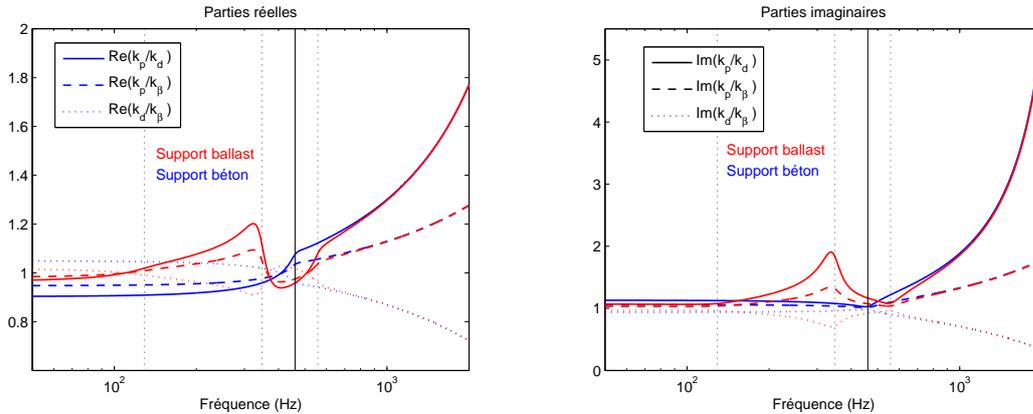


FIGURE B.1: Comparaison des différentes constantes de propagation pour les deux types de poutre, suivant le support, en fonction de la fréquence. Gauche : parties réelles. Droite : parties imaginaires.

C – Annexe - Le rail sur supports périodiques

Rappel des hypothèses [36] :

- les points d’attache du rail repérés par les abscisses z_n sont équidistants et en nombre infini,
- les différents supports ont des propriétés mécaniques identiques,
- on note $s(\omega)$ l’impédance mécanique de chaque support,
- a est l’intervalle entre deux traverses,
- l’origine des abscisses est placée sur une traverse,
- on pose $z_0 = 0$ et donc $z_n = na$,
- l’excitation est repérée par l’abscisse z_e ,
- le rail est modélisé par une poutre de Timoshenko.

Le modèle inclut la réaction de chaque support modélisée par une force de rappel $F_n(\omega)$ proportionnelle au déplacement du rail $\xi(z_n, \omega)$ ainsi qu’à l’impédance $s(\omega)$ du support :

$$F_n(\omega) = -s(\omega)\xi(z_n, \omega) \quad (\text{C.1})$$

C.1 Constantes de propagation

Soit $G_\omega^L(z, z_0)$ la fonction de Green associée à un rail modélisé par une poutre épaisse de Timoshenko, sans support (équation (1.5) pour $s'(\omega) = 0$) ; l’indice L signifiant donc que le rail est *libre*. Chaque force $F_n(\omega)$ en $z = z_n$ engendre un déplacement le long du rail qui s’exprime alors $F_n(\omega)G_\omega^L(z, z_n)$. Donc, par principe de superposition, le déplacement du rail soumis à l’ensemble des forces (excitation en z_e et forces de rappel) est :

$$\xi(z, \omega) = -s(\omega) \sum_n \xi(z_n, \omega)G_\omega^L(z, z_n) + F(\omega)G_\omega^L(z, z_e) \quad (\text{C.2})$$

En appliquant le théorème de Floquet relatif aux structures périodiques, la solution peut être cherchée sous la forme : $\xi(z+na, \omega) = \xi(z, \omega)e^{-n\gamma a}$. Ainsi, en utilisant l’équation (C.2) et en remplaçant $G_\omega^L(z, na)$ par sa valeur (équation (1.5) pour $s'(\omega) = 0$), le déplacement du rail peut s’écrire pour $F(\omega) = 0$ (ondes libres) :

$$\xi(z, \omega) = \xi(0, \omega) \frac{s(\omega)}{B} \sum_n \left[F_d e^{-k_d|z-na|} + iF_p e^{-ik_p|z-na|} \right] e^{-n\gamma a} \quad (\text{C.3})$$

Pour $0 \leq z < a$ et pour un nombre de supports infini, la somme ci-dessus converge et, en posant

$$Y(z, \gamma) = F_p \frac{\sin(k_p(a-z)) + e^{-\gamma a} \sin(k_p z)}{\cos(k_p a) - \cosh(\gamma a)} - F_d \frac{\sinh(k_d(a-z)) + e^{-\gamma a} \sinh(k_d z)}{\cosh(k_d a) - \cosh(\gamma a)} \quad (\text{C.4})$$

la solution élémentaire peut s’écrire :

$$\forall z \in [0, a[\quad \xi(z, \omega) = -\xi(0, \omega) \frac{s(\omega)}{B} Y(z, \gamma) \quad (\text{C.5})$$

Les solutions en dehors de ce domaine s'obtiennent en appliquant le théorème de Floquet.

En écrivant que l'équation (C.5) doit être vérifiée pour $z = 0$, on peut écrire une relation de dispersion du second degré en $\cosh(\gamma a)$:

$$\begin{aligned} & \cosh^2(\gamma a) + \left[\frac{s(\omega)}{B} (F_d \sinh(k_d a) - F_p \sin(k_p a)) - (\cosh(k_d a) + \cos(k_p a)) \right] \cosh(\gamma a) \\ & + \frac{s(\omega)}{B} (F_p \cosh(k_d a) \sin(k_p a) - F_d \cos(k_p a) \sinh(k_d a)) + \cosh(k_d a) \cos(k_p a) = 0 \quad (\text{C.6}) \end{aligned}$$

Cette équation admet deux solutions : $\cosh(\gamma_p a)$ et $\cosh(\gamma_d a)$. A chacune de ces solutions correspond deux valeurs complexes $\pm\gamma_p$ et $\pm\gamma_d$ de la constante de propagation (on notera γ_p et γ_d les constantes de propagation à parties réelles positives). Ainsi, la solution générale du système libre peut être écrite comme la superposition de quatre solutions élémentaires :

$$\xi(z, \omega) = a_1 Y(\tilde{z}, -\gamma_d) e^{n\gamma_d a} + a_2 Y(\tilde{z}, -\gamma_p) e^{n\gamma_p a} + b_1 Y(\tilde{z}, \gamma_d) e^{-n\gamma_d a} + b_2 Y(\tilde{z}, \gamma_p) e^{-n\gamma_p a} \quad (\text{C.7})$$

avec $z = \tilde{z} + na$ tel que $0 \leq \tilde{z} < a$.

C.2 Fonction de Green

La fonction de Green $G_\omega(z, z_n)$ pour le support périodique est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} & \left[\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_c^2 \right\} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_t^{*2} \right\} - k_B^4 \right] G_\omega(z, z_e) \\ & + \frac{s(\omega)}{B} \left[1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_c^2 \right\} \right] \sum_n G_\omega(na, z_e) \delta(z - na) \\ & = \frac{1}{B} \left[1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_c^2 \right\} \right] \delta(z - z_e) \quad (\text{C.8}) \end{aligned}$$

On reprend le raisonnement suivant :

1- En tout point $z \neq z_e$, le système est libre, on doit donc avoir :

$$\begin{aligned} & \left[\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_c^2 \right\} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_t^{*2} \right\} - k_B^4 \right] G_\omega(z, z_e) \\ & + \frac{s(\omega)}{B} \left[1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_c^2 \right\} \right] \sum_n G_\omega(na, z_e) \delta(z - na) = 0 \quad (\text{C.9}) \end{aligned}$$

2- Au point $z = z_e$, la fonction vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d^3}{dz^3} G_\omega(z, z_e) \Big|_{z_e^-}^{z_e^+} = \frac{1}{B} \left[1 + \frac{B}{K} k_t^{*2} \right] \\ \frac{d^2}{dz^2} G_\omega(z, z_e) \Big|_{z_e^-}^{z_e^+} = 0 \\ \frac{d}{dz} G_\omega(z, z_e) \Big|_{z_e^-}^{z_e^+} = -\frac{1}{K} \\ G_\omega(z, z_e) \Big|_{z_e^-}^{z_e^+} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

3- En $\pm\infty$ la fonction est bornée.

Comme toute solution générale, la fonction de Green est de la forme (C.7). D'après les conditions aux limites **3** on obtient :

$$\begin{aligned} G_\omega(z, z_e) &= a_1 Y(\tilde{z}, -\gamma_d) e^{n\gamma_d a} + a_2 Y(\tilde{z}, -\gamma_p) e^{n\gamma_p a} & z = \tilde{z} + na < z_e \\ &= b_1 Y(\tilde{z}, \gamma_d) e^{-n\gamma_d a} + b_2 Y(\tilde{z}, \gamma_p) e^{-n\gamma_p a} & z = \tilde{z} + na > z_e \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Les coefficients a_1 , a_2 , b_1 et b_2 sont déterminés en résolvant le système (C.10) autour de z_e en prenant l'expression (C.11) pour $G_\omega(z, z_e)$. Les coefficients a_1 , a_2 , b_1 et b_2 sont alors solution du système suivant :

$$\begin{bmatrix} -Y(z_e, -\gamma_d) & -Y(z_e, -\gamma_p) & Y(z_e, \gamma_d) & Y(z_e, \gamma_p) \\ -\dot{Y}(z_e, -\gamma_d) & -\dot{Y}(z_e, -\gamma_p) & \dot{Y}(z_e, \gamma_d) & \dot{Y}(z_e, \gamma_p) \\ -\ddot{Y}(z_e, -\gamma_d) & -\ddot{Y}(z_e, -\gamma_p) & \ddot{Y}(z_e, \gamma_d) & \ddot{Y}(z_e, \gamma_p) \\ -\ddot{\ddot{Y}}(z_e, -\gamma_d) & -\ddot{\ddot{Y}}(z_e, -\gamma_p) & \ddot{\ddot{Y}}(z_e, \gamma_d) & \ddot{\ddot{Y}}(z_e, \gamma_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/K \\ 0 \\ \frac{1}{B} \left[1 + \frac{B}{K} k_t^{*2} \right] \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

C.3 Poutre d'Euler

Pour le modèle de poutre Euler, le raisonnement reste le même, il suffit de poser $k_p = k_d = k_B$ et $F_p = F_d = \frac{1}{4k_B^3}$ pour l'ensemble du problème. Les amplitudes a_1 , a_2 , b_1 et b_2 sont par contre solution d'un système différent :

$$\begin{bmatrix} -Y(z_e, -\gamma_d) & -Y(z_e, -\gamma_p) & Y(z_e, \gamma_d) & Y(z_e, \gamma_p) \\ -\dot{Y}(z_e, -\gamma_d) & -\dot{Y}(z_e, -\gamma_p) & \dot{Y}(z_e, \gamma_d) & \dot{Y}(z_e, \gamma_p) \\ -\ddot{Y}(z_e, -\gamma_d) & -\ddot{Y}(z_e, -\gamma_p) & \ddot{Y}(z_e, \gamma_d) & \ddot{Y}(z_e, \gamma_p) \\ -\ddot{\ddot{Y}}(z_e, -\gamma_d) & -\ddot{\ddot{Y}}(z_e, -\gamma_p) & \ddot{\ddot{Y}}(z_e, \gamma_d) & \ddot{\ddot{Y}}(z_e, \gamma_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/B \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

D – Annexe - Problématique des sources mobiles

D.1 Cinématique

Soit une source omnidirectionnelle S de coordonnées (x_S, y_S, z_S) animée d'un mouvement linéaire à vitesse constante V et un observateur O immobile repéré par ses coordonnées (x, y, z) . On considère que la source part de $x = 0$ à $t = 0$ et qu'elle suit une trajectoire rectiligne suivant l'axe \vec{x} ; on a donc $x_S = Vt$. La pression observée en O à l'instant t a été émise par la source S à l'instant t_e .

On appelle R la distance qui sépare O et S à l'instant t_e et θ l'angle¹ formé par R et la trajectoire de S . La représentation géométrique du problème est donnée figure D.1.

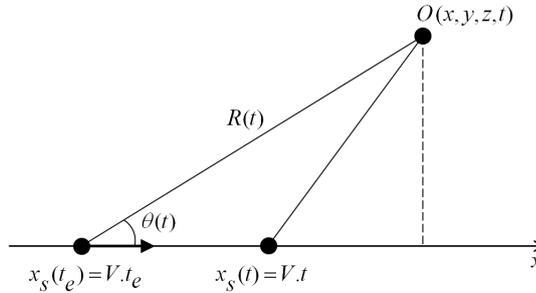


FIGURE D.1: Géométrie d'un cas où la source acoustique est mobile

D'après la figure D.1 et ce qui précède on peut écrire :

$$\begin{aligned} R^2 &= [x - x_S(t_e)]^2 + [y - y_S(t_e)]^2 + [z - z_S(t_e)]^2 \\ R^2 &= \left[x - x_S \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]^2 + \left[y - y_S \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]^2 + \left[z - z_S \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

avec $t_e = t - \frac{R}{c}$, c étant la célérité des ondes acoustiques dans le milieu considéré.

Dans la mesure où le déplacement de S est rectiligne suivant l'axe \vec{x} , on pourra toujours se ramener à un problème plan (une droite et un point de l'espace définissent toujours un plan) et ainsi poser $y_S = 0$ et $z = z_S = 0$. L'équation D.1 devient :

$$R^2 = \left[x - V \cdot \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]^2 + y^2 \quad (\text{D.2})$$

Dans le cas des ondes subsoniques, c'est-à-dire lorsque le nombre de Mach $M = V/c$ est inférieur à 1, l'unique solution de cette équation du second degré en R est [58] :

$$R(t) = \frac{\sqrt{(x - Vt)^2 + (1 - M^2)y^2}}{1 - M \cos \theta(t)} \quad (\text{D.3})$$

où θ est l'angle formé par R et l'axe \vec{x} .

1. La convention adoptée ici pour l'angle θ est différente de celle adoptée pour la partie 2.2.1.

D.2 Champ de pression d'une source en mouvement

Considérons à présent une source acoustique ponctuelle, monopolaire et mobile. Soit $q(t)$ son débit massique instantané. La source étant repérée par ses coordonnées ($x_S = x - Vt$, $y_S = 0$, $z_S = 0$), on peut exprimer la densité de source par une distribution :

$$Q(x, y, z, t) = q(t)\delta(x - Vt)\delta(y)\delta(z) \quad \text{avec} \quad \delta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et ainsi caractériser la propagation des ondes acoustiques en présence de sources par l'équation d'Helmholtz inhomogène :

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} q(t)\delta(x - Vt)\delta(y)\delta(z) \quad (\text{D.4})$$

À partir de l'équation D.4 on peut montrer que le champ de pression vérifiant cette équation est de la forme [58] :

$$p(t) = \frac{1}{4\pi R(1 - M \cos \theta)^2} \dot{q}(t - R/c) + \frac{q(t - R/c)}{4\pi R^2(1 - M \cos \theta)^3} (\cos \theta - M)V \quad (\text{D.5})$$

C'est le premier des deux termes qui représente en majeure partie le rayonnement acoustique de la source. Dans la suite, nous négligeons le second membre :

$$p(t) \approx \frac{1}{4\pi R(1 - M \cos \theta)^2} \dot{q}(t - R/c) \quad (\text{D.6})$$

D'après [58], en se plaçant dans le cas d'une source monochromatique telle que $q(t) = q_0 \sin(\omega_0 t)$, la phase du champ de pression donné par D.6 est égale à :

$$\phi(t) = \omega_0 \left(t - \frac{R}{c} \right)$$

Pour définir exactement la fréquence instantanée à partir de la phase ϕ , il faudrait remonter à la notion de signal analytique. Pour simplifier, nous allons définir la fréquence de $p(t)$ comme étant la dérivée temporelle de sa phase instantanée. On obtient ainsi :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega_0}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{c} \frac{dR}{dt} \right) = \frac{\omega_0}{2\pi} \left(1 + \frac{M \cos \theta(t)}{1 - M \cos \theta(t)} \right) = \frac{f_0}{1 - M \cos \theta(t)} \quad (\text{D.7})$$

E – Annexe - Maximum de vraisemblance en présence d'une source aléatoire

Le signal source s est une variable aléatoire gaussienne centrée complexe. Un bruit additif gaussien, indépendant du signal se superpose aux signaux reçus sur les capteurs. Le signal observé $\underline{y} = s\underline{v}(\underline{\zeta}) + \underline{b}$ est un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance :

$$\mathbf{\Gamma}_y = \sigma_s^2 \underline{v}(\underline{\zeta}) \cdot \underline{v}(\underline{\zeta})^\dagger + \mathbf{\Gamma}_b \quad (\text{E.1})$$

Avec :

$\mathbf{\Gamma}_b$ la matrice de covariance du bruit,

σ_s^2 la densité spectrale de puissance moyenne du signal s à la fréquence f .

On écrit la vraisemblance :

$$f_{\underline{y}}(\sigma_s^2, \underline{\zeta}) = \frac{1}{\pi^{N_c} \det(\mathbf{\Gamma}_y)} \exp\left(-\underline{y}^\dagger \mathbf{\Gamma}_y^{-1} \underline{y}\right) \quad (\text{E.2})$$

Disposant de K réalisations indépendantes \underline{y}_k , $k \in \llbracket 1; K \rrbracket$, on cherche σ_{sMV}^2 et $\underline{\zeta}_{MV}$ qui maximisent la vraisemblance, ou la log vraisemblance :

$$\arg \max_{\sigma_s^2, \underline{\zeta}} \left[-K \log(\det(\mathbf{\Gamma}_y)) - \sum_{k=1}^K \underline{y}_k^\dagger \mathbf{\Gamma}_y^{-1} \underline{y}_k \right] \quad (\text{E.3})$$

On se place dans le cas d'un bruit spatialement blanc de variance σ_b^2 identique sur tous les capteurs. Dans ce cas, on peut exprimer la matrice de covariance du bruit ainsi :

$$\mathbf{\Gamma}_b = \sigma_b^2 \mathbf{I} \quad (\text{E.4})$$

Pour calculer $\mathbf{\Gamma}_y^{-1}$, on applique la formule de Woodbury¹ à l'équation (E.1) pour $\mathbf{\Gamma}_b = \sigma_b^2 \mathbf{I}$:

$$\mathbf{\Gamma}_y^{-1} = \frac{1}{\sigma_b^2} \left[\mathbf{I} - \frac{\sigma_s^2}{\sigma_b^2 + \sigma_s^2 \|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^2} \underline{v}(\underline{\zeta}) \cdot \underline{v}(\underline{\zeta})^\dagger \right] \quad (\text{E.5})$$

On exprime ensuite le déterminant de $\mathbf{\Gamma}_y$ comme le produit de ses valeurs propres :

$$\det(\mathbf{\Gamma}_y) = \left(\sigma_s^2 \|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^2 + \sigma_b^2 \right) \cdot \sigma_b^{N_c - 1}$$

L'écriture (E.3) est ainsi équivalente à :

$$\arg \max_{\sigma_s^2, \underline{\zeta}} \left[-\log \left(\sigma_s^2 \|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^2 + \sigma_b^2 \right) + \frac{1}{\sigma_b^2} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_b^2 + \sigma_s^2 \|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^2} \underline{v}(\underline{\zeta})^\dagger \left(\sum_{k=1}^K \underline{y}_k \underline{y}_k^\dagger \right) \underline{v}(\underline{\zeta}) \right] \quad (\text{E.6})$$

Le terme $\sum_{k=1}^K \underline{y}_k \underline{y}_k^\dagger$ de l'équation (E.6) représente la matrice de covariance estimée du signal observé, au facteur K près :

$$\sum_{k=1}^K \underline{y}_k \underline{y}_k^\dagger = K \widehat{\mathbf{\Gamma}}_y$$

1. $(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$

et l'écriture (E.6) est finalement équivalente à :

$$\arg \max_{\sigma_s^2, \underline{\zeta}} \left[-\log \left(\sigma_s^2 \|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^2 + \sigma_b^2 \right) + \frac{1}{\sigma_b^2} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_b^2 + \sigma_s^2 \|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^2} \underline{v}(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}}_y \underline{v}(\underline{\zeta}) \right] \quad (\text{E.7})$$

Les paramètres σ_{sMV}^2 et $\underline{\zeta}_{MV}$ qui maximisent la vraisemblance vérifient la condition nécessaire d'annuler les dérivées partielles d'ordre 1 du terme entre crochets ci-dessus. Appliquée au paramètre σ_{sMV}^2 , cette condition nécessaire conduit à la relation :

$$\widehat{\sigma_{sMV}^2} = \frac{\underline{v}(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}}_y \underline{v}(\underline{\zeta})}{\|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^4} - \frac{\sigma_b^2}{\|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^2} \Bigg|_{\underline{\zeta} = \widehat{\underline{\zeta}}_{MV}} \quad (\text{E.8})$$

De manière analogue à la démarche séquentielle utilisée pour l'estimation des paramètres $\underline{\zeta}$ dans le cas des moindres carrés, le critère (E.7) peut être réécrit pour ces variances optimales. On peut alors montrer que le maximum de vraisemblance conduit au même estimateur de $\underline{\zeta}$ que les moindres carrés, à savoir :

$$\widehat{\underline{\zeta}}_{MV} = \widehat{\underline{\zeta}}_{\mathcal{C}} = \arg \max_{\underline{\zeta}} \frac{\underline{v}(\underline{\zeta})^\dagger \widehat{\mathbf{\Gamma}}_y \underline{v}(\underline{\zeta})}{\|\underline{v}(\underline{\zeta})\|^2} \quad (\text{E.9})$$

F – Annexe - Approximation de la matrice spectrale mesurée dans le sous-espace engendré par les vecteurs source

Soit H le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices hermitiennes de taille $N_c \times N_c$. On munit H du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \varphi : H \times H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\longmapsto \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

tel que

$$\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \langle \mathbf{X} | \mathbf{Y} \rangle = \text{tr}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) \quad (\text{F.2})$$

Le \mathbb{R} -espace vectoriel H muni du produit scalaire (F.2) est un espace préhilbertien. La norme associée au produit scalaire (F.2) est la norme matricielle de Frobenius $\|\cdot\|_F$ telle que :

$$\forall \mathbf{X} \in H, \quad \|\mathbf{X}\|_F^2 = \langle \mathbf{X} | \mathbf{X} \rangle \quad (\text{F.3})$$

Remarque : le produit scalaire défini par l'équation (F.2) est bien à valeurs dans \mathbb{R} puisqu'il s'applique à des matrices hermitiennes.

On se replace à présent dans le contexte de la mesure d'un champ de pression par une antenne microphonique. On peut associer à chaque source p un vecteur source $\underline{v}(\zeta_p)$ (noté \underline{v}_p pour alléger les notations). Chaque \underline{v}_p représente, pour une source p donnée, d'amplitude unitaire, le vecteur des pressions mesurées sur les N_c microphones de l'antenne. On peut également associer à cette source p la matrice spectrale unitaire $\underline{v}_p \underline{v}_p^\dagger \in H$.

On suppose $\forall p \neq q$ que la famille $(\underline{v}_p \underline{v}_p^\dagger, \underline{v}_q \underline{v}_q^\dagger)$ est libre. En termes physiques, cela signifie que lorsque l'on définit notre modèle de source, on s'applique à choisir des sources indépendantes les unes des autres.

Soit F le sous-espace de H engendré par les matrices spectrales unitaires des N_s sources du modèle. Pour toute matrice $\mathbf{\Gamma} \in H$, on cherche la meilleure approximation de $\mathbf{\Gamma}$ dans F . La théorie des espaces préhilbertiens assure que cette approximation existe, qu'elle est unique et qu'elle est donnée par la projection orthogonale de $\mathbf{\Gamma}$ sur F (théorème de représentation de Riesz). Soit \mathbf{S} la projection orthogonale de $\mathbf{\Gamma}$ sur F . Comme la famille $(\underline{v}_p \cdot \underline{v}_p^\dagger)_{1 \leq p \leq N_s}$ est une base de F , on peut écrire :

$$\mathbf{S} = \sum_{p=1}^{N_s} \sigma_p^2 \underline{v}_p \underline{v}_p^\dagger \quad (\text{F.4})$$

les σ_p^2 étant solutions du système d'équations normales :

$$\left\{ \sum_{p=1}^{N_s} \langle \underline{v}_q \underline{v}_q^\dagger | \underline{v}_p \underline{v}_p^\dagger \rangle \sigma_p^2 = \langle \mathbf{\Gamma} | \underline{v}_q \underline{v}_q^\dagger \rangle \quad 1 \leq q \leq N_s \right. \quad (\text{F.5})$$

ce qui équivaut à résoudre le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \langle \underline{v}_1 \underline{v}_1^\dagger | \underline{v}_1 \underline{v}_1^\dagger \rangle & \cdots & \langle \underline{v}_1 \underline{v}_1^\dagger | \underline{v}_{N_s} \underline{v}_{N_s}^\dagger \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \underline{v}_{N_s} \underline{v}_{N_s}^\dagger | \underline{v}_1 \underline{v}_1^\dagger \rangle & \cdots & \langle \underline{v}_{N_s} \underline{v}_{N_s}^\dagger | \underline{v}_{N_s} \underline{v}_{N_s}^\dagger \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \vdots \\ \sigma_{N_s}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{\Gamma} | \underline{v}_1 \underline{v}_1^\dagger \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{\Gamma} | \underline{v}_{N_s} \underline{v}_{N_s}^\dagger \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{F.6})$$

En remarquant que

$$\langle \underline{v}_p \underline{v}_p^\dagger | \underline{v}_q \underline{v}_q^\dagger \rangle = \text{tr} \left(\underline{v}_p \underline{v}_p^\dagger \cdot \underline{v}_q \underline{v}_q^\dagger \right) = \underline{v}_q^\dagger \underline{v}_p \underline{v}_p^\dagger \underline{v}_q \quad (\text{F.7})$$

on retrouve bien le système (3.47) en l'absence de bruit :

$$\mathbf{V} \widehat{X}_C = \underline{U} \quad (\text{F.8})$$

G – Annexe - Indicateurs de représentativité du champ acoustique

G.1 Directivité du champ acoustique sur une ligne parallèle au rail

La directivité ϑ du champ acoustique en un point M de l'espace de coordonnées cylindriques (r, z) est donnée par :

$$\vartheta = \arctan \frac{I_{\vec{r}}(r, z)}{I_{\vec{z}}(r, z)} \quad (\text{G.1})$$

avec :

$I_{\vec{z}}(r, z)$ l'intensité acoustique longitudinale (selon l'axe \vec{z}) au point (r, z) de l'espace,

$I_{\vec{r}}(r, z)$ l'intensité acoustique radiale (selon l'axe \vec{r}) au point (r, z) de l'espace.

Exprimée ainsi, la directivité ϑ représente l'angle entre le vecteur \vec{z} et le vecteur intensité acoustique $\vec{I}(r, z)$ au point M .

G.1.1 Intensité acoustique

Les intensités acoustiques présentes dans (G.1) s'expriment en fonction de la pression et de la vitesse acoustique :

$$I_{\vec{z}}(r, z) = \frac{1}{2} \Re [p^*(r, z) \cdot U_{\vec{z}}(r, z)] \quad \text{et} \quad I_{\vec{r}}(r, z) = \frac{1}{2} \Re [p^*(r, z) \cdot U_{\vec{r}}(r, z)] \quad (\text{G.2})$$

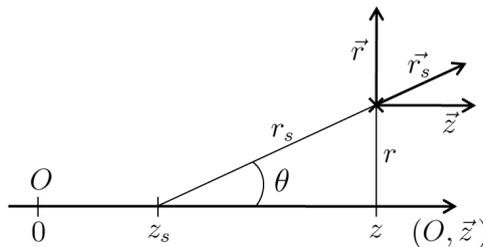
avec :

$U_{\vec{z}}(r, z)$ la vitesse acoustique longitudinale (selon l'axe \vec{z}) au point (r, z) de l'espace,

$U_{\vec{r}}(r, z)$ la vitesse acoustique radiale (selon l'axe \vec{r}) au point (r, z) de l'espace.

G.1.2 Vitesse acoustique

Dans le repère cylindrique (\vec{r}, \vec{z}) associé au rail, on considère une source ponctuelle sur l'axe \vec{z} en $z = z_s$. Soit r_s la coordonnée d'un point de l'espace dans le repère sphérique (z_s, r_s) associé à cette source :



$$\begin{aligned} \vec{r}_s &= \sin \theta \vec{r} + \cos \theta \vec{z} \\ &= \frac{r}{r_s} \vec{r} + \frac{z - z_s}{r_s} \vec{z} \end{aligned}$$

La vitesse acoustique en un point de $r_s \rightarrow (r, z)$ de l'espace est :

$$U(r_s) \vec{r}_s = -\frac{1}{i\omega\rho} \frac{dp(r_s)}{dr_s} \vec{r}_s \quad (\text{G.3})$$

$$\text{or } p(r_s) = i\omega Q \frac{e^{-ikr_s}}{4\pi r_s} \quad \text{donc} \quad U(r_s) = p(r_s) \left[\frac{k}{\omega\rho} - \frac{i}{\omega\rho r_s} \right]$$

Il reste à projeter $U(r_s)$ sur \vec{r} et \vec{z} pour obtenir :

$$U_{\vec{z}}(r_s) = \frac{p(r_s)}{\omega\rho} \left[k - \frac{i}{r_s} \right] \frac{z - z_s}{r_s} \quad (\text{G.4})$$

$$U_{\vec{r}}(r_s) = \frac{p(r_s)}{\omega\rho} \left[k - \frac{i}{r_s} \right] \frac{r}{r_s} \quad (\text{G.5})$$

Ce qui donne, pour un ensemble de sources réparties sur l'axe du rail :

$$U_{\vec{z}}(r, z) = \int_{z_s=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikr_s}}{4\pi\rho r_s} \left[ik + \frac{1}{r_s} \right] \frac{z - z_s}{r_s} dQ(z_s) \quad (\text{G.6})$$

$$U_{\vec{r}}(r, z) = \int_{z_s=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikr_s}}{4\pi\rho r_s} \left[ik + \frac{1}{r_s} \right] \frac{r}{r_s} dQ(z_s) \quad (\text{G.7})$$

avec :

$$r_s = \sqrt{r^2 + (z - z_s)^2}$$

$dQ(z_s)$ le débit massique élémentaire de la source placée à l'abscisse z_s (cf. équation (1.24) paragraphe 1.3.3).

Pour implémenter numériquement le calcul de la directivité, les intégrales (G.6) et (G.7) doivent être discrétisées et bornées. On utilisera le même pas et les mêmes bornes que pour le calcul de pression (1.20).

G.1.3 Directivité moyenne

Sur une ligne parallèle au rail, à la distance R de ce dernier, la directivité moyenne $\bar{\vartheta}$ du champ acoustique est donnée par :

$$\tan \vartheta = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\vec{r}}(R, z) dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\vec{z}}(R, z) dz} \quad (\text{G.8})$$

Lorsque le champ acoustique possède un plan de symétrie $z = z_{sym}$ normal à l'axe \vec{z} , alors $p(R, z_{sym} + z) = p(R, z_{sym} - z)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\vec{z}}(R, z) dz = 0$. La symétrie du champ acoustique est liée à la symétrie du champ vibratoire dans le rail que l'on retrouve par exemple dans les cas suivants :

- Un seul contact avec un modèle de rail sur support continu.
- Un seul contact avec un modèle tenant compte de la périodicité du support, si le contact est sur une traverse ou exactement entre deux traverses.
- Plusieurs contacts répartis symétriquement de part et d'autre de z_{sym} , avec un modèle de rail sur support continu.
- Et ainsi de suite.

Pour les cas où l'on ne considère qu'un seul contact d'abscisse z_e , et si rien d'autre n'est précisé, les intégrales sont évaluées sur la demi-droite $[z_e, +\infty)$:

$$\tan \vartheta = \frac{\int_{z_e}^{+\infty} I_{\vec{r}}(R, z) dz}{\int_{z_e}^{+\infty} I_{\vec{z}}(R, z) dz} \quad (\text{G.9})$$

Tout comme l'intégrale de pression, les intégrales de directivité moyenne doivent être discrétisées et bornées. Le pas en z est conservé ($\Delta_z = (1/5) \cdot \min(\lambda_{rail}, \lambda_{air})$) et l'abscisse maximale z_{max} est fixée telle que :

$$10 \log \frac{\max_z |p(R, z)|^2}{|p(R, z_{max})|^2} \geq 40 \text{ dB} \quad (\text{G.10})$$

À noter que cette convention pour z_{max} est adoptée dans une optique de comparaison entre un champ mesuré et un champ reconstruit. Le résultat obtenu ne représente donc pas avec précision la directivité moyenne sur une droite infinie. Une étude réalisée en parallèle, non présentée ici, a montré que la directivité moyenne ne variait pas au-delà du pourcent lorsque la puissance acoustique en z_{max} est inférieure de 60 dB à la puissance acoustique au niveau du dernier maximum sur la même ligne. La valeur de 40 dB adoptée dans l'équation (G.21) permet simplement de diminuer les temps de calcul.

G.2 Puissance totale rayonnée

La puissance acoustique rayonnée à travers une surface de contrôle fermée \mathcal{S} s'écrit :

$$W_S = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{I} \cdot d\vec{S} \quad (\text{G.11})$$

avec \vec{I} le vecteur intensité acoustique.

Pour un monopôle sphérique de rayon a , si l'on prend comme surface de contrôle la surface du monopôle, on obtient :

$$W_S = 4\pi a^2 I(a) = 2\pi a^2 \Re [p^*(a)U(a)] \quad (\text{G.12})$$

avec :

$I(a)$ l'intensité acoustique normale à la surface du monopôle,
 $U(a)$ la vitesse acoustique normale à la surface du monopôle,
 $p(a)$ la pression acoustique à la surface du monopôle.

Pour un ensemble linéique de N monopôles sphériques de rayon a , espacés de Δ_z tel que $\Delta_z \gg a$, on effectue plusieurs hypothèses simplificatrices.

La vitesse acoustique normale à la surface du monopôle n n'est pas influencée par les autres sources :

$$U_n(a) = \frac{Q_n}{4\pi a^2} \quad (\text{G.13})$$

avec Q_n le débit volumique du monopôle n .

La pression acoustique à la surface du monopôle n est uniforme sur cette surface et résulte de la contribution de l'ensemble de sources :

$$p_n(a) = \frac{i\omega\rho}{1+ika} \frac{Q_n}{4\pi a} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N \frac{i\omega\rho}{1+ika} \frac{Q_j}{4\pi r_{nj}} e^{-ikr_{nj}} \quad (\text{G.14})$$

avec $r_{nj} = (n-j)\Delta_z$ la distance entre les centres du monopôle n et du monopôle j .

La puissance totale rayonnée par l'ensemble des monopôles est la somme des puissances rayonnées par chaque monopôle :

$$W_{tot} = 2\pi a^2 \sum_{n=1}^N \Re [p_n^*(a)U_n(a)] \quad (\text{G.15})$$

Des équations (G.13), (G.14) et (G.15) on tire :

$$W_{tot} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \Re \left[Q_n \left(\frac{i\omega\rho}{1+ika} \frac{Q_n}{4\pi a} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N \frac{i\omega\rho}{1+ika} \frac{Q_j}{4\pi r_{nj}} e^{-ikr_{nj}} \right)^* \right] \quad (\text{G.16})$$

Après développements :

$$W_{tot} = \sum_n \frac{\rho ck^2 |Q_n|^2}{8\pi(1+k^2a^2)} + \sum_{\substack{n,j \\ n \neq j}} \frac{\rho ck}{8\pi(1+k^2a^2)r_{nj}} \Re \left[Q_n Q_i^* e^{ikr_{nj}} (ka - i) \right] \quad (\text{G.17})$$

À présent, on fait tendre a vers 0 :

$$W_{tot} = \sum_n \frac{\rho ck^2 |Q_n|^2}{8\pi} + \sum_{\substack{n,j \\ n \neq j}} \frac{\rho ck}{8\pi r_{nj}} \Im \left[Q_n Q_i^* e^{ikr_{nj}} \right] \quad (\text{G.18})$$

avec $\Im [Q_n Q_i^* e^{ikr_{nj}}] = \Re [Q_n Q_i^*] \sin(kr_{nj}) + \Im [Q_n Q_i^*] \cos(kr_{nj})$.

Comme $\Im [Q_n Q_i^*] = -\Im [Q_i Q_n^*]$ on obtient au final :

$$W_{tot} = \sum_n \frac{\rho ck^2 |Q_n|^2}{8\pi} + \sum_{\substack{n,j \\ n \neq j}} \frac{\rho ck^2 \Re [Q_n Q_i^*] \sin(kr_{nj})}{8\pi kr_{nj}} \quad (\text{G.19})$$

G.3 Pression quadratique moyenne sur une ligne parallèle au rail

Sur un segment $[z_e, z_{max}]$ de longueur L :

$$\langle p^2 \rangle = \frac{1}{L} \int_{z_e}^{z_{max}} \frac{|p(R, z)|^2}{2} dz \quad (\text{G.20})$$

Dans ce cas z_{max} est l'abscisse sur la demi-droite $[z_e, +\infty)$ pour laquelle la puissance acoustique est de 20 dB inférieure à la puissance maximale rencontrée en parcourant la demi-droite depuis $z = z_e$.

$$10 \log \frac{\max_z |p(R, z)|^2}{|p(R, z_{max})|^2} \geq 20 \text{ dB} \quad (\text{G.21})$$

H – Annexe - Liste des symboles

Remarque : les unités précédées d'un astérisque * indiquent que la variable en question peut également être sans unité, dans le cas où la matrice $\mathbf{\Gamma}$ est normalisée.

B	Rigidité en flexion verticale	Nm ²
C	Critère des moindres carrés	*Pa ⁴
E	Module d'élasticité de l'acier	N/m ²
F	Force	N
\mathcal{F}	Fonction à minimiser	
F_d/B	Amplitude complexe de l'onde de champ proche dans une poutre épaisse en flexion sur support continu	m/N
F_p/B	Amplitude complexe de l'onde propagative dans une poutre épaisse en flexion sur support continu	m/N
G	Module de cisaillement de l'acier	N/m ²
G_ω	Fonction de Green vibratoire	m/N
H_{FV}	Gain du filtrage spatial réalisé par la formation de voies	
$H_{m_0}^{(2)}$	Fonction de Hankel du deuxième type, d'ordre m_0	
\mathbf{I}	Matrice identité	
I	Moment d'inertie du rail	m ⁴
$I_{\bar{r}}$	Intensité acoustique radiale	W/m ²
$I_{\bar{z}}$	Intensité acoustique longitudinale	W/m ²
K	Rigidité au cisaillement	N
L_θ	Largeur à la base du lobe principal de directivité de la formation de voies en onde planes	rad
\mathbf{M}	Matrice carrée complexe	
M	Masse du rail par unité de longueur	kg/m
M_{ach}	Nombre de Mach	
M_l	Moment dipolaire massique linéique du dipôle cylindrique	kg/s
M_t	Masse d'une demi traverse	kg
N_c	Nombre de microphones d'une antenne	
O	Origine des repères	
\mathcal{P}	Plan de variation Atténuation / Nombre d'onde	
P^2	Pression quadratique	Pa ²
Q_n	Débit volumique de la source n	m ³ /s
Q_l	Débit massique linéique du monopôle cylindrique	kg/(ms)
Q_{l_0}	Débit massique linéique unitaire du monopôle cylindrique	
R	Distance entre l'axe du rail et celui de l'antenne	m
R_c	Rayon du cylindre vibrant	m
R_{eq}	Rayon équivalent de rayonnement du rail	m
R_{sb}	Rapport signal à bruit	
\mathbf{S}	Matrice spectrale modélisée sur l'antenne	
S_{FOC}	Sortie complexe de la formation de voies ondes sphériques	
S_{FV}	Sortie complexe de la formation de voies ondes planes	

\underline{U}	Vecteur dépendant des vecteurs source (eq. (3.47))	*Pa ²
\underline{V}	Matrice carrée symétrique dépendant des vecteurs source (eq. (3.47))	*Pa ²
V	Vitesse du véhicule ferroviaire	m/s
\mathcal{V}_r	Amplitude complexe de la vitesse vibratoire radiale harmonique de la surface du rail	m/s
$\widetilde{\mathcal{V}}_r$	Transformée de Fourier de la vitesse vibratoire	m/s
\mathcal{V}_0	Amplitude réelle de la vitesse vibratoire radiale harmonique de la surface du rail	m/s
W_{tot}	Puissance acoustique totale rayonnée par le rail	Pa ²
\underline{X}	Vecteur des variances des sources	*Pa ²
Y	Fonction de l'abscisse sur le rail z et de la constante de propagation γ (eq. (1.11))	m ³
a	Espace inter-traverses	m
$a_{1,2}$	Coefficients solutions du système (C.12)	m ^{-2/N}
a_{np}	Atténuation dans le milieu de propagation entre la source s et le microphone n	
b	Distance entre l'axe de l'antenne et la trajectoire d'une source mobile	m
\underline{b}	Amplitude complexe du bruit sur les microphones de l'antenne	Pa
$b_{1,2}$	Coefficients solutions du système (C.12)	m ^{-2/N}
\underline{d}_p	Vecteur source normalisé relatif à la source p	
d	Distance entre les microphones d'une antenne linéaire à capteurs équidistants	m
f	Fréquence	Hz
f_p	Fréquence de résonance d'un rail sur support béton	
f_{anti}	Fréquence de résonance de la traverse entre les raideurs du ballast et de la semelle (support ballast)	Hz
$f_{ballast}$	Fréquence de résonance du rail et de la traverse en phase sur la raideur du ballast (support ballast)	Hz
$f_{semelle}$	Fréquence de résonance du rail sur la raideur de la semelle (support ballast)	Hz
$f_{\underline{x}}$	Fonction de vraisemblance de la réalisation \underline{x}	
h	Fonction caractéristique du fenêtrage spatial réalisé par l'antenne	
k	Nombre d'onde dans l'air	rad/m
k_B	Nombre d'onde de flexion d'une poutre mince	m ⁻¹
k_β	Nombre d'onde complexe d'une poutre mince en flexion sur support continu	m ⁻¹
k_c	Nombre d'onde des ondes de compression	m ⁻¹
k_d	Nombre d'onde complexe de champ proche d'une poutre épaisse en flexion sur support continu	m ⁻¹
k_p	Nombre d'onde complexe propagatif d'une poutre épaisse en flexion sur support continu	m ⁻¹
k_t^*	Nombre d'onde des ondes de cisaillement	m ⁻¹
k_w	Nombre d'onde dans le plan (r, φ)	
k_z	Nombre d'onde structural réel suivant la direction \vec{z}	m ⁻¹
m_0	Nombre quantique pour les fonctions de Hankel	
p	Amplitude complexe de la pression acoustique dans l'espace	Pa
r	Coordonnée radiale du repère cylindrique	m
r_{FC}	Distance entre le point focal F et le microphone de référence C	m
r_{Fn}	Distance entre le point focal F et le microphone n	m
r_{np}	Distance entre la source p et le capteur n (chapitre 3)	m

r_{ns}	Distance entre la source élémentaire d'abscisse z_s sur le rail et le microphone n	m
r_{SC}	Distance entre la source S et le microphone de référence C	m
r_{Sn}	Distance entre la source S et le microphone n	m
r_s	Distance entre le point courant et la source élémentaire d'abscisse z_s sur le rail	m
r_t	Signal temporel de rugosité	m
r_z	Signal spatial de rugosité	m
s	Signal source (complexe)	Pa
\underline{s}	Raideur dynamique apparente d'une attache	N/m
\underline{s}'	Raideur dynamique linéique équivalente du support	N/m ²
s_0	Amplitude réelle d'une source acoustique	Pa
s_b	Raideur du ballast	N/m
s_n	Signal acoustique complexe reçu par le microphone n	Pa
s_p	Raideur de la semelle	N/m
t	Temps	s
\underline{v}_p	Vecteur source relatif à la source p	
w	Pondération spatiale	
x_S	Abscisse d'une source mobile	m
x_F	Abscisse du point focal	m
\underline{y}_p	Amplitudes complexes sur l'antenne relatives à la source p	Pa
z	Abscisse absolue sur le rail	m
\tilde{z}	Abscisse relative entre deux traverses	m
z_c	Abscisse du microphone central de l'antenne	m
z_e	Abscisse de l'excitation sur le rail	m
\tilde{z}_e	Abscisse erronée de l'excitation sur le rail	m
z_s	Abscisses des sources ponctuelles élémentaires sur le rail	m
Δ	Atténuation d'une onde vibratoire	dB/m
Δ_Δ	Pas de discrétisation en atténuation	dB/m
Δ_{k_z}	Pas de discrétisation en nombre d'onde	m ⁻¹
Δ_p	Atténuation de l'onde propagative	dB/m
Δ_z	Pas de discrétisation en z	m
Γ	Fonction d'autocorrélation	
$\mathbf{\Gamma}$	Matrice de covariance (matrice interspectrale)	Pa ²
α	Nombre d'onde réduit (k_z/k)	m ⁻¹
β	Constante de décroissance d'une onde	m ⁻¹
γ	Constante de propagation complexe	m ⁻¹
γ_d	Constante de propagation complexe de l'onde de champ proche (poutre supportée périodiquement)	m ⁻¹
γ_p	Constante de propagation complexe de l'onde propagative (poutre supportée périodiquement)	m ⁻¹
γ_p	Densité spectrale de puissance de la source p (chapitre 3)	[unit] ² /Hz
γ_s	Densité spectrale de puissance du signal s	[unit] ² /Hz
γ_{mn}	Densité interspectrale de puissance entre les signaux m et n	[unit] ² /Hz
δ_L	Peigne de diracs espacés de L	
$\underline{\zeta}$	Paramètres inconnus d'un problème inverse	
η_b	Facteur de pertes dans le ballast	
η_e	Coefficient de pertes internes dans l'acier	
η_p	Facteur de pertes dans la semelle	
θ	Angle d'incidence	rad
ϑ	Directivité du champ acoustique	rad
θ_0	Angle d'écoute de la formation de voies	rad

κ	Coefficient de cisaillement	
λ_{air}	Longueur d'onde dans l'air	m
λ_{rail}	Longueur d'onde dans le rail	m
μ	Fréquence spatiale	m^{-1}
μ_ϕ	Nombre d'onde correspondant à la direction de l'excitation	
ν	Coefficient de poisson	
ξ	Déplacement vertical du rail	m
ρ	Masse volumique de l'acier	kg/m^3
ρ_0	Masse volumique de l'air	kg/m^3
σ_s^2	Variance du signal s	Pa^2
τ	Retard	s
ϕ	Déphasage	rad
φ	Coordonnée angulaire du repère cylindrique	rad
χ	Décalage spatial (figure 1.1)	m
ω	Pulsation	rad/s

Liste des indices, exposants, accents et abréviations courantes

0	Référence, origine
FV	Formation de voies
FOC	Focalisation
MV	Maximum de vraisemblance
TF	Transformée de Fourier
eq	Équivalent
b	Relatif au bruit
max	Maximum
mes	Mesuré
min	Minimum
mod	Modélisé
n	Relatif au microphone n (chapitre 3)
opt	Optimisé
p	Relatif à la source p (chapitre 3)
$\mathbf{E}[\dots]$	Espérance mathématique
$\mathbf{H}(\dots)$	Matrice hessienne (chapitre 3)
$\hat{}$	Estimation
*	Opération de conjugaison simple
t	Opération de transposition simple
\dagger	Opération « transposée conjuguée »
\mathbf{M}^{-1}	Inversion de matrice
$\det(\mathbf{M})$	Déterminant
$\langle \cdot \rangle$	Moyenne spatiale
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire canonique sur \mathbb{C}^n
$\llbracket 1, N \rrbracket$	Entiers compris entre 1 et N
∇	Opérateur gradient
\odot	Produit de Hadamard (produit terme à terme de deux matrices)
\otimes	Produit de convolution
\Im	Partie imaginaire
\Re	Partie réelle
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{Z}	Ensemble des nombres entiers relatifs