



**HAL**  
open science

# Courbes de Brody : dimension moyenne et distribution des valeurs

Bernardo Freitas Paulo da Costa

► **To cite this version:**

Bernardo Freitas Paulo da Costa. Courbes de Brody : dimension moyenne et distribution des valeurs. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris Sud - Paris XI, 2012. Français. NNT : 2012PA112106 . tel-00724444

**HAL Id: tel-00724444**

**<https://theses.hal.science/tel-00724444>**

Submitted on 23 Aug 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ PARIS SUD

Spécialité : Mathématiques

par

Bernardo FREITAS PAULO DA COSTA

## Courbes de Brody : dimension moyenne et distribution des valeurs

Soutenue le 2 juillet 2012 devant la commission d'examen:

M.	Julien DUVAL	(Directeur de thèse)
M.	Alexandre EREMENKO	(Rapporteur)
M.	Erwann ROUSSEAU	(Rapporteur)
M.	Nessim SIBONY	(Président du jury)
M.	Masaki TSUKAMOTO	



Thèse préparée au  
**Département de Mathématiques d'Orsay**  
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425  
Université Paris Sud  
91 405 Orsay CEDEX

## Résumé

Cette thèse présente une étude des propriétés des courbes de Brody, dont la plupart est motivée par des questions issues des calculs de dimension moyenne. On se positionne donc en quelque sorte à l'opposée du cadre qui leur a engendré, l'hyperbolicité des variétés complexes, où ces courbes sont plutôt rares. Dans cette voie, on montre que l'espace de courbes de Brody à valeurs dans une surface de Hopf est de dimension moyenne nulle, tandis que celles à valeurs dans certains complémentaires d'hyperplans de  $\mathbf{P}^n$  constituent un espace de dimension moyenne positive.

On sera aussi amené à comprendre la distribution des valeurs pour les courbes de Brody, en retrouvant des contraintes supplémentaires que leur structure particulière induit, dans la direction d'un second théorème.

**Mots-clefs** : Dimension moyenne, courbes de Brody, théorie de Nevanlinna.

---

## BRODY CURVES: MEAN DIMENSION AND VALUE DISTRIBUTION

### Abstract

This thesis focuses on properties of Brody curves which originated on questions about mean dimension. We present therefore a point of view opposite to the setting on which they were first applied, the hyperbolicity of complex varieties, where these curves are expected to be rare. In this setting, we show that the space of Brody curves on a Hopf surface has zero mean dimension, while that of curves avoiding a small number of hyperplanes in  $\mathbf{P}^n$  have a positive one.

In a second time, we'll study the value distribution theory for Brody curves, determining further constraints on their behaviour implied by their particular structure.

**Keywords** : Mean dimension, Brody curves, Nevanlinna theory.

# Remerciements

Premièrement, Julien Duval, qui depuis le M2 a dirigé mes recherches. Grâce à ce sujet et à nos discussions, j'ai entrevu et approfondi de nouvelles façons d'approcher des problèmes. Sa disponibilité et ses conseils ont été d'une très grande valeur pour moi. J'ai appris énormément pendant ces années, et je le remercie tout autant.

Je remercie Alexandre Eremenko et Erwan Rousseau pour avoir accepté de rapporter cette thèse. Je remercie aussi Nessim Sibony et Masaki Tsukamoto, qui me font l'honneur de participer à mon jury.

Je pense maintenant à tous ceux, professeurs, amis, collègues, qui m'ont appris des mathématiques, depuis mon plus jeune âge jusqu'à aujourd'hui. Par votre encouragement, vos leçons, vos questions, vos idées, j'ai pu me retrouver dans cette voie et prendre plaisir dans son parcours.

Je remercie aussi particulièrement Emmanuel, Benoît et JP, qui m'ont toujours entendu parler de cette dimension "moyenne" et des "surfaces" de dimension 4. . .

J'ai eu la chance d'être dans un cadre exceptionnel à Orsay. Son environnement mathématique et naturel ont été une source constante de motivation. Et si j'ai bien pris mon temps aux repas au CESFO, c'est aussi ma façon de bien profiter de ce temps passé ici.

Je remercie aussi l'École Doctorale et toutes les secrétaires dont l'aide et efficacité ont bien contribué dans toutes les étapes administratives.

Enfin, je remercie ma famille, particulièrement mes parents et mon frère, qui m'ont toujours encouragé dans cette aventure en France. Et mes familles, par adoption, qui ont elles aussi été présentes à mes côtés : les brésiliens, les nageurs, le BR, les doctorants.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Deux exemples de dimension moyenne</b>	<b>11</b>
2.1	Courbes de Brody . . . . .	11
2.2	Dimension moyenne . . . . .	13
2.3	Surfaces de Hopf . . . . .	15
2.3.1	Un cas particulier . . . . .	15
2.3.2	Analyse de croissance . . . . .	16
2.3.3	Discrétisation . . . . .	17
2.4	Déformations de courbes de Brody . . . . .	18
2.4.1	Une construction préliminaire . . . . .	19
2.4.2	Contrôle des déformations . . . . .	20
2.4.3	Dimension moyenne . . . . .	21
2.4.4	Remarques . . . . .	21
2.5	Dimension moyenne en une seule direction . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Distribution de valeurs</b>	<b>23</b>
3.1	Préliminaires . . . . .	23
3.2	Résultats . . . . .	24
3.3	Contrôle $L^1$ sur un disque et défauts dans $\mathbf{P}^1$ . . . . .	26
3.4	Le cas de $\mathbf{P}^2$ . . . . .	28
3.4.1	Le second disque est grand : $r' > 2r$ . . . . .	29
3.4.2	Le second disque est petit : $r' \leq 2r$ . . . . .	30
3.5	Le cas général . . . . .	32
3.5.1	Construction d'une chaîne de disques . . . . .	33
3.5.2	Propagation à travers la chaîne . . . . .	33
3.5.3	Étude du $\nu$ -disque . . . . .	34
3.5.4	Récapitulation . . . . .	35
3.6	Courbes de Brody d'énergie positive . . . . .	36



# Chapitre 1

## Introduction

La dimension moyenne a été développée par Gromov comme un invariant capable de distinguer différents espaces compacts de dimension topologique infinie [Gro99, LW00]. Pour cela, on compare les effets de l'action d'un groupe  $G$  sur ces espaces avec la croissance du groupe.

On s'intéresse à l'espace des courbes entières à valeurs dans une variété compacte complexe  $X$  et à dérivée uniformément bornée par 1. Ces courbes sont dites *de Brody* d'après son lemme de réparamétrisation [Bro78] qui produit de telles courbes entières sur toute variété compacte non hyperbolique. On note cet espace  $\mathcal{B}_1(X)$ , et on remarque qu'il admet une action naturelle de  $\mathbb{C}$  par translation à la source. La dimension moyenne de  $\mathcal{B}_1(X)$  par rapport à cette action sera notée  $\beta(X)$ .

Comme  $\beta(X)$  est toujours fini, une question naturelle est de décider quand  $\beta(X)$  s'annule. Si  $X$  est une courbe de genre supérieur ou égal à 1, l'espace  $\mathcal{B}_1(X)$  est de dimension finie, donc de dimension moyenne nulle. Inversement,  $\mathcal{B}_1(\mathbb{P}^1)$  est de dimension moyenne strictement positive [Gro99, Tsu09]. Ainsi, toute variété  $X$  contenant une courbe rationnelle satisfait  $\beta(X) > 0$ , et une conjecture centrale de la théorie est la réciproque pour les variétés projectives.

Pour les courbes de Brody à valeurs dans  $\mathbb{P}^n$ , on peut utiliser leur *indiatrice de croissance*,  $T(R)$ , et l'*ordre de croissance*,  $\limsup \frac{\log T(R)}{\log R}$ . La condition de Brody implique que l'ordre est au plus égal à deux. D'après Tsukamoto [Tsu08], les courbes atteignant cette borne supérieure suffisent à déterminer la dimension moyenne sur toute variété projective  $X \subseteq \mathbb{P}^n$ . Plus précisément, si l'on introduit l'*énergie moyenne* d'une courbe de Brody comme  $\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{T(R)}{\frac{\pi}{2}R^2}$ , et on définit

$$\mathcal{B}_1^+(X) = \text{adhérence de } \{f \in \mathcal{B}_1(X) \mid f \text{ est d'énergie strictement positive}\} \text{ dans } \mathcal{B}_1(\mathbb{P}^n),$$

alors  $\text{mdim}(\mathcal{B}_1^+(X) : \mathbb{C}) = \text{mdim}(\mathcal{B}_1(X) : \mathbb{C})$ .

La première partie de cette thèse étudie la dimension moyenne de deux espaces de courbes de Brody, répondant à des questions posées par Tsukamoto. Nous commençons par les courbes à valeurs dans une surface de Hopf.

Une surface de Hopf est une surface compacte complexe dont le revêtement universel est  $W = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Ces surfaces sont le premier exemple de surfaces non



Kählériennes, et par conséquent non projectives, mais certaines possèdent une fibration sur  $\mathbf{P}^1$  en courbes elliptiques. Par exemple,  $X = W / (z, w) \sim (2z, 2w)$  pour laquelle la projection canonique  $(z, w) \in W \mapsto (z : w) \in \mathbf{P}^1$  passe au quotient.

La détermination de la dimension moyenne de l'espace des courbes de Brody dans une surface de Hopf est un exemple d'application de la théorie de Nevanlinna à la dimension moyenne. L'étape principale de la démonstration est la construction d'une fonction méromorphe d'ordre 1 à partir d'une courbe de Brody dans une surface de Hopf et contenant presque toute l'information sur la courbe de départ. Après cela, on montre par un argument de discrétisation que

**Théorème 1.** *L'espace des courbes de Brody à valeurs dans une surface de Hopf est de dimension moyenne nulle pour l'action de  $\mathbf{C}$ .*

En particulier, l'exemple donnée ci-dessus montre que la dimension moyenne peut devenir nulle par fibrations.

Ensuite, nous passons à la construction d'un espace de courbes de Brody de dimension moyenne positive dans des complémentaires d'hyperplans dans  $\mathbf{P}^n$ , un cas particulier de [Tsu08, Problem 1.14].

Les problèmes traités ici sont bien plus rapprochés de l'hyperbolicité complexe. Les résultats généraux de Green [Gre75, Gre72], sur l'hyperbolicité de  $\mathbf{P}^n$  privé de  $2n + 1$  hyperplans en position générale, et ensuite ceux de dégénérescence donnant des résultats à la Borel, assurent la finitude de la dimension de l'espace des courbes de Brody à valeurs dans des complémentaires de degré assez grand. Le dernier complémentaire où cet espace est de dimension finie est celui des  $n + 1$  hyperplans coordonnées de  $\mathbf{P}^n$ , où, d'après Berteloot et Duval [BD01], seules les exponentielles linéaires  $(e^{a_0 z + b_0} : \dots : e^{a_n z + b_n})$  sont des courbes de Brody.

Eremenko a montré [Ere10] que les courbes de Brody à valeurs dans le complémentaire de  $n$  hyperplans en position générale de  $\mathbf{P}^n$  sont d'ordre au plus 1, ce qui implique la nullité de la dimension moyenne.

Complétant cette classification par la dimension, on prouve que, à l'étape suivante, on a une très grande quantité de courbes de Brody :

**Théorème 2.** *Les courbes de Brody dans le complémentaire de  $n - 1$  hyperplans en position générale de  $\mathbf{P}^n$  forment un espace de dimension moyenne strictement positive.*

La deuxième partie se tourne vers la distribution des valeurs pour les courbes de Brody, dans l'esprit des complémentaires d'hyperplans et en particulier dans le cas critique de positivité de la dimension moyenne, où l'on interdit  $n - 1$  hyperplans dans  $\mathbf{P}^n$ . En effet, la preuve du théorème 2 construit un espace de dimension moyenne positive où toutes les fonctions sont issues de courbes bipériodiques sur le complémentaire, et en particulier qui n'ont pas de défaut. Il est alors naturel de se demander quel est le comportement des courbes de Brody dans ce complémentaire, et en toute généralité dans  $\mathbf{P}^n$ .

Pour cela, on revient aux méthodes de théorie du potentiel développées par Eremenko et Barrett [Ere10, BE10] dans leur généralisation du théorème de Clunie et Hayman [CH65].

Ce théorème dit qu'une courbe de Brody évitant un point de  $\mathbf{P}^1$  est d'ordre au plus un. De la même manière que le second théorème de Nevanlinna précise le théorème de Picard [Nev29], on précise le théorème de Clunie et Hayman.

**Théorème 3.** *Toute courbe de Brody  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1$  satisfait*

$$T(R) \leq N(R; a) + O(R),$$

où  $T$  est l'indicatrice de croissance de Nevanlinna et  $N(R; a)$  la fonction de comptage des impacts de  $f$  sur  $a \in \mathbf{P}^1$ .

Le défaut de  $f$  en  $a \in \mathbf{P}^1$  est  $\delta(a) = \liminf_{R \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{N(R; a)}{T(R)}\right)$ . Le second théorème principal de Nevanlinna dit que, pour toute fonction méromorphe, la somme des défauts est au plus égale à 2. Il découle du résultat précédent que, si  $\liminf \frac{R}{T(R)} = 0$  pour une courbe de Brody  $f$  — en particulier si elle est d'ordre strictement plus grand que 1 —, alors elle n'a pas de défaut.

Passant à la dimension supérieure, on obtient une comparaison entre croissance et impacts dans le cas du complémentaire de  $n - 1$  hyperplans en position générale dans  $\mathbf{P}^n$ .

**Théorème 4.** *Soit  $f$  une courbe de Brody dans  $\mathbf{P}^n$  qui n'est incluse dans aucun hyperplan. Si  $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}, H$  sont des hyperplans en position générale et  $f$  évite les hyperplans  $H_1, \dots, H_{n-1}$ , alors*

$$T(R) \leq N(R; H) + O(R).$$

Si l'on se concentre sur les courbes d'énergie positive, on peut donner un résultat de défauts valable sans restrictions sur l'image de  $f$ .

**Théorème 5.** *Soient  $f$  une courbe de Brody dans  $\mathbf{P}^n$  d'énergie positive et  $(H_i)_{i=1}^q$  des hyperplans en position générale, ne contenant pas  $f(\mathbf{C})$ . Alors si l'on note  $\delta_i$  les défauts de  $f$  par rapport aux hyperplans  $H_i$ , on a*

$$\sum_{i=1}^q \delta_i \leq (n - 1).$$



# Chapitre 2

## Deux exemples de dimension moyenne

Ce chapitre s'ouvre par une présentation des courbes de Brody et de la dimension moyenne. Ensuite, nous montrons l'annulation de la dimension moyenne pour les surfaces de Hopf, en faisant intervenir la théorie de Nevanlinna. La dernière partie établit à son tour des résultats de positivité, en construisant explicitement des courbes de Brody.

### 2.1 Courbes de Brody

**Définition.** Une fonction holomorphe  $f : \mathbb{C} \rightarrow X$  à valeurs dans une variété complexe est dite une *courbe de Brody* si la dérivée  $df$  est uniformément bornée pour une métrique  $\|\cdot\|$  sur  $X$ . On dit que  $f$  est une courbe  $c$ -Brody lorsque  $\|df\| \leq c$ .

Pour  $X$  compacte, on note  $\mathcal{B}_c(X)$  l'espace des courbes  $c$ -Brody à valeurs dans  $X$ , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, ce qui le rend compact. Si  $X = Y \setminus D$  est le complémentaire d'un sous-ensemble analytique propre  $D$  dans une variété compacte  $Y$ ,  $\mathcal{B}_c(X)$  est défini comme l'adhérence dans  $\mathcal{B}_c(Y)$  des courbes  $c$ -Brody à valeurs dans  $X$ , et contient en particulier les courbes constantes à valeurs dans  $D$ .

La version suivante du lemme de Schwarz assure que les petites déformations d'une courbe de Brody restent de Brody :

**Lemme 6.** *Soit  $X$  une variété compacte complexe. Il existe  $\varepsilon > 0$ , dépendant uniquement de  $X$ , tel que pour chaque courbe 1-Brody  $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ , toutes les courbes  $g : \mathbb{C} \rightarrow X$   $\varepsilon$ -proches de  $f$  sont 2-Brody.*

On dit que  $g$  est  $\varepsilon$ -proche de  $f$  si, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f(z)$  et  $g(z)$  sont au plus à distance  $\varepsilon$  sur  $X$ .

*Démonstration.* On se donne un recouvrement fini de  $X$  par des cartes locales. Ainsi, tout ensemble de diamètre assez petit est inclus dans une de ces cartes. L'image par  $g$  des disques de centre  $z$  et rayon  $\delta$  est de diamètre borné par  $\varepsilon + \|df\|\delta$ , donc, pour  $\varepsilon$  et  $\delta$  assez petits,  $g(D(z, \delta))$  est contenue dans une même carte locale  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$  que  $f(D(z, \delta))$ . On fixe un tel  $\delta$ .

Dans la carte  $\phi(U)$ , le lemme de Schwarz classique donne un contrôle en  $\frac{\|d\phi\| \cdot \varepsilon}{\delta}$  pour la différence entre les dérivées de  $\phi \circ f$  et  $\phi \circ g$  en  $z$ . Revenant à  $X$ , on doit prendre en compte la distorsion des dérivées induite par la carte, aussi bien que le transport de la dérivée de  $f(z)$  à  $g(z)$ . Quitte à diminuer au départ les cartes locales, la distorsion est bornée ; le transport est quant à lui donné par  $(d\phi|_{g(z)})^{-1} \circ d\phi|_{f(z)}$ , qui est de norme proche de 1 pour  $g(z)$  proche de  $f(z)$ . Par la finitude du recouvrement, toutes les estimées dépendant uniquement de  $\phi$  sont uniformes, ce qui assure l'existence de  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit comme voulu.

Ce même argument montre qu'il existe  $\varepsilon(\alpha)$  tel que l'on peut remplacer 2 par  $1 + \alpha$  dans la conclusion.  $\square$

On présente par la suite quelques notations et résultats de la théorie de distribution des valeurs sur  $\mathbf{P}^1$  [Nev29, Hay64]. Suivant Ahlfors, l'indicatrice de croissance de  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1$  est la fonction réelle

$$T_f(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{D_t} \|df\|^2,$$

où  $D_t$  désigne le disque de rayon  $t$  centré en 0 et la norme de  $df$  est calculée par la métrique de Fubini-Study. Pour une fonction holomorphe  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ , on a la formule explicite

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \sqrt{1 + |f(re^{i\theta})|^2} d\theta.$$

L'ordre de croissance d'une fonction  $f$  est alors défini par

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(T_f(r))}{\log r}.$$

Ainsi, une courbe  $c$ -Brody vérifie  $T_f(\mathbf{R}) \leq c \frac{\pi R^2}{2}$  et est d'ordre au plus égal à deux.

Soit  $n_f(r; a)$  le nombre de pré-images (avec multiplicité) de  $a \in \mathbf{P}^1$  par  $f$  dans le disque de rayon  $r$ , et

$$N_f(r; a) = \int_0^r (n_f(t; a) - n_f(0; a)) \frac{dt}{t} + n_f(0; a) \log r,$$

son intégrale logarithmique, appelée *fonction d'impact*. Une conséquence du premier théorème fondamental de Nevanlinna est que

$$N_f(r; a) \leq T_f(r) + O(1).$$

Cela montre que  $T_f$  donne une limite asymptotique du nombre de fois que  $f$  peut prendre une valeur donnée sur  $\mathbf{P}^1$ .

Par analogie avec les fonctions, on dit qu'un ensemble discret  $F$  du plan complexe est d'ordre  $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(N_F(r))}{\log r}$ , où  $N_F(r)$  est défini comme  $N_f$  avec  $n_f(r) = \#(F \cap D_r)$  remplaçant  $n_f$ . Comme  $T_{f/g} \leq T_f + T_g + O(1)$ , deux fonctions distinctes ne peuvent pas coïncider sur un ensemble d'ordre strictement plus grand que leur ordre de croissance.

## 2.2 Dimension moyenne

On reprend les définitions de [Gro99] pour la dimension moyenne dans le cas particulier des actions de  $C$  et ses sous-groupes discrets.

Pour  $(M, d)$  un espace métrique compact, son  $\varepsilon$ -dimension est

$$\dim_\varepsilon(M, d) = \inf \{ \dim P \mid P \text{ polyèdre tel qu'il existe } j : M \xrightarrow{\varepsilon} P \},$$

où  $j : M \xrightarrow{\varepsilon} P$  dénote une application continue  $\varepsilon$ -injective : pour tout  $p \in P$ , le diamètre de  $j^{-1}\{p\}$  est inférieur ou égal à  $\varepsilon$ . La limite pour  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  de  $\dim_\varepsilon(M, d)$  est la dimension topologique  $\dim(M, d)$ , qui dépend uniquement de la topologie induite par  $d$ .

Si  $C$  agit sur  $(M, d)$ , on peut définir de nouvelles distances sur  $X$ , d'abord la famille des translatées  $d_t(x, y) = d(t \cdot x, t \cdot y)$  pour tout  $t$  dans  $C$ , et ensuite les *distances orbitales*  $d_\Omega = \sup_{t \in \Omega} d_t$  pour tout sous-ensemble borné  $\Omega$  de  $C$ . Une suite  $\Omega_n$  de sous-ensembles bornés est dite *moyennable* si pour tout  $w > 0$ , l'aire des bords  $w$ -épaissis

$$\{ t \in C \mid t \text{ est simultanément à distance } \leq w \text{ de } \Omega_n \text{ et de son complémentaire} \}$$

devient négligeable devant l'aire de  $\Omega_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Un exemple est la suite  $(D_n)$  des disques de rayon  $n$  centrés en  $0$ , et nous utiliserons aussi des rectangles de côtés  $nk_1$  et  $nk_2$ .

**Définition.** La dimension moyenne de  $(M, d)$  par rapport à une suite moyennable  $\Omega_n$  est

$$\text{mdim}(M, d : \{\Omega_n\}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dim_\varepsilon(M, d_{\Omega_n})}{|\Omega_n|}.$$

où  $|\cdot|$  indique l'aire dans  $C$ .

Quand l'action de  $C$  est uniformément continue, la limite intérieure existe et ne dépend pas de la suite moyennable choisie, et la limite en  $\varepsilon \rightarrow 0$  ne dépend pas non plus de la distance  $d$  de départ sur  $M$ . Ces hypothèses seront toujours vérifiées par la suite, et on écrit simplement  $\text{mdim}(M : C)$  dans ce cas.

La dimension moyenne par rapport à un réseau  $\Lambda = \mathbb{Z}z_1 \oplus \mathbb{Z}z_2$  de  $C$  se construit de façon analogue : on considère des sous-ensembles  $\Omega_n \subset \Lambda$ , les distances orbitales induites, et on remplace l'aire par la mesure de comptage. L'idée est de comparer deux taux de croissance, celui du groupe, mesuré par la suite moyennable  $\Omega_n$ , et celui des distances induites par l'action, mesuré par  $d_{\Omega_n}$ .

Comme pour la dimension topologique, la dimension moyenne est croissante : s'il existe une inclusion continue et  $C$ -équivariante de  $M$  dans  $N$ , alors  $\text{mdim}(M : C)$  est inférieure ou égale à  $\text{mdim}(N : C)$ . De plus, si  $P$  est homéomorphe à un polyèdre,  $\text{mdim}(P^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}) = \dim(P)$  pour l'action naturelle du *décalage de Bernoulli* sur  $P^{\mathbb{Z}}$ , donné par  $(1 \cdot p)_n = p_{n+1}$ .

Tout ce qui précède est très général. Pour les actions de  $C$ , on possède un argument de plus : l'homogénéité par changement d'échelle. Si  $\Lambda$  est un réseau dans  $C$ , alors

$\text{mdim}(M : \Lambda) = \text{mdim}(M : \mathbf{C}) \times |\mathbf{C}/\Lambda|$ . De plus, comme  $\Lambda$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}^2$ , on a encore  $\text{mdim}(P^\wedge : \Lambda) = \text{dim}(P)$  pour les polyèdres.

Ces propriétés sont au cœur des estimées de dimension moyenne : lorsque l'on a une injection continue et équivariante de  $M$  dans  $P^\wedge$ , on dit qu'on a réalisé une *discrétisation* et on obtient une borne supérieure pour la dimension moyenne de  $M$ . Réciproquement, si l'on montre une injection de  $P^\wedge$  dans  $M$ , on l'appelle une *interpolation* et on en déduit une minoration de la dimension moyenne.

Particularisons encore plus aux courbes de Brody.

**Définition.** On note  $\beta(X)$  la dimension moyenne de  $\mathcal{B}_1(X)$  muni de l'action de  $\mathbf{C}$  par translation à la source :  $(a \cdot f)(z) = f(z + a)$ . On a  $\beta(X) < +\infty$  d'après [Gro99, 3.1].

L'invariance d'échelle permet de voir que la nullité de  $\beta(X)$  est invariante par revêtements finis non ramifiés. D'une part, si  $X' \rightarrow X$  est un revêtement, cela induit le revêtement  $\mathbf{C}$ -équivariant  $\mathcal{B}_1(X') \rightarrow \mathcal{B}_1(X)$ . Par l'unicité après le choix d'un relèvement du point base, on a  $\text{mdim}(\mathcal{B}_1(X') : \mathbf{C}) \leq \text{mdim}(\mathcal{B}_1(X) : \mathbf{C})$  en choisissant  $p : \mathcal{B}_1(X') \rightarrow X' : f \mapsto f(0)$  dans le lemme suivant, qui est dans l'esprit des arguments de discrétisation.

**Lemme 7.** *Soit  $\pi : M' \rightarrow M$  continue et  $\mathbf{C}$ -équivariante entre deux espaces métriques compacts. S'il existe un polyèdre  $P$  et  $p : M' \rightarrow P$  continue telle que  $(\pi, p) : M' \rightarrow M \times P$  soit injective, alors*

$$\text{mdim}(M' : \mathbf{C}) \leq \text{mdim}(M : \mathbf{C}).$$

*Démonstration.* On considère une suite décroissante  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n, \dots$  de sous-réseaux de  $\mathbf{C}$ , et on construit les applications

$$\pi_n : M' \rightarrow M \times (P)^{\Lambda_n} : m' \mapsto (\pi(m'), (p(g \cdot m'))_{g \in \Lambda_n}),$$

qui sont continues,  $\Lambda_n$ -équivariantes et injectives. On en déduit  $\text{mdim}(M' : \Lambda_n) \leq \text{mdim}(M : \Lambda_n) + \text{dim}(P)$ , et donc  $\text{mdim}(M' : \mathbf{C}) \leq \text{mdim}(M : \mathbf{C}) + \frac{\text{dim}(P)}{|\mathbf{C}/\Lambda_n|}$ . Faisant  $n \rightarrow \infty$ , on obtient l'inégalité voulue.  $\square$

D'autre part, on peut munir  $X'$  d'une métrique pour laquelle le quotient est une isométrie locale. Les automorphismes de revêtement sont des isométries de  $X'$ , et de même pour  $\mathcal{B}_1(X')$ . Le lemme suivant permet alors de contrôler la dimension moyenne de  $\mathcal{B}_1(X)$ .

**Lemme 8.** *Soit  $\Gamma$  un groupe fini agissant isométriquement sur  $M'$ , et  $\pi : M' \rightarrow M$  le quotient. Alors*

$$\text{mdim}(M : \mathbf{C}) \leq \#\Gamma \text{mdim}(M' : \mathbf{C}).$$

*Démonstration.* Soient  $\delta > 0$  et  $\varepsilon > 0$  fixés. Comme la limite en  $\varepsilon$  dans la définition de la dimension moyenne est monotone, pour  $n$  assez grand il existe un polyèdre  $P$  de dimension au plus  $|\Omega_n|(\text{mdim}(M' : \mathbf{C}) + \delta)$  et une fonction  $\varepsilon$ -injective  $j : (M', d_n) \rightarrow P$ . Soit  $k = \#\Gamma$ , et  $\mathfrak{S}_k$  le groupe des permutations à  $k$  éléments. On pose

$$J : (M, d_n) \rightarrow P^k / \mathfrak{S}_k : m \mapsto \{j(m') \in P \mid m' \in M' \text{ et } \pi(m') = m\},$$

qui est  $\varepsilon$ -injective grâce à la compatibilité des métriques de  $M'$  et  $M$ . Comme  $\varepsilon$  et  $\delta$  étaient arbitraires, on a bien  $\text{mdim}(M : \mathbf{C}) \leq k \text{mdim}(M' : \mathbf{C})$ .  $\square$

## 2.3 Surfaces de Hopf

Une *surface de Hopf*  $S$  est une variété compacte complexe de dimension 2 dont le revêtement universel est  $W = \mathbf{C}^2 - \{(0,0)\}$ . Quand  $\pi_1(S)$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}$ , on montre [Kod66] que  $S$  est difféomorphe à  $S^1 \times S^3$  et que la structure analytique peut être obtenue comme quotient de  $W$  par l'action du groupe engendré par un difféomorphisme dilatant qui s'écrit [Lat11]

$$T_{(a,b,\lambda)} : W \rightarrow W : (z, w) \mapsto (az + \lambda w^n, bw),$$

où  $a$ ,  $b$  et  $\lambda$  sont des nombres complexes,  $|a| \geq |b| > 1$ ; si  $\lambda$  est différent de 0, on doit avoir  $a = b^n$ . On les appelle *surfaces de Hopf primaires*. Les autres surfaces de Hopf, dites *secondaires*, ont toujours une surface primaire comme revêtement fini.

Les bornes de croissance des courbes de Brody fournissent une borne pour la dimension moyenne [Tsu08, Theorem 1.9 et Lemma 2.1], et impliquent la remarque suivante : si toutes les courbes de Brody dans une variété projective  $X$  sont d'ordre strictement inférieur à 2, alors la dimension moyenne de  $\mathcal{B}_1(X)$  est nulle.

On montre que  $\beta(S) = 0$  pour toute surface de Hopf  $S$ . Comme la nullité de la dimension moyenne ne change pas par revêtement fini, on montrera le cas où  $S$  est une surface de Hopf primaire. La démonstration rendra précis l'argument suivant :

Les courbes de Brody à valeurs dans une surface de Hopf ont des coordonnées qui sont des fonctions d'ordre au plus un, donc forment un espace de dimension moyenne zéro.

### 2.3.1 Un cas particulier

Avant d'aborder le cas général, voyons l'exemple que nous avons déjà donné, celui d'une surface de Hopf  $S$  fibrée sur  $\mathbf{P}^1$ , correspondant au choix du biholomorphisme dilatant suivant :

$$T = T_{(2,2,0)} : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2 : (z, w) \mapsto (2z, 2w).$$

Notons  $\pi : S \rightarrow \mathbf{P}^1$  la projection  $[z, w] \rightarrow (z : w)$ , induite par la projection canonique de  $W = \mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$  sur  $\mathbf{P}^1$  et invariante par  $T$ .

Remarquons que la métrique sur  $W$  pour laquelle

$$\|df\|^2 = \frac{|\nabla(f_1, f_2)|^2}{|f_1|^2 + |f_2|^2}$$

est bien invariante par l'action de  $T$ , donc donne une métrique sur  $S$ , la surface de Hopf quotient.

Soit  $f$  une courbe de Brody dans  $S$ , de laquelle on choisit une relevée  $(f_1, f_2)$  à  $W$ . La condition de Brody implique que  $\nabla \log(|f_1|^2 + |f_2|^2) \leq 2$  : on a  $\nabla(|f_i|^2) \leq 2|\nabla f_i||f_i|$ , et par Cauchy-Schwarz

$$(|\nabla f_1||f_1| + |\nabla f_2||f_2|)^2 \leq (|f_1|^2 + |f_2|^2) (|\nabla f_1|^2 + |\nabla f_2|^2).$$

Il s'ensuit que les fonctions holomorphes  $f_1$  et  $f_2$  sont d'ordre au plus égal à un, et le même vaut pour la courbe  $\pi \circ f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1$ .



En reprenant l'idée de preuve par discrétisation de la nullité de la dimension moyenne, on pose l'application

$$P_\Lambda : \mathcal{B}_1(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{S}^\wedge \times (\mathbf{P}^1)^\wedge \\ f \mapsto f|_\Lambda, \quad \frac{f_1}{f_2}|_\Lambda$$

pour tout réseau  $\Lambda$  de  $\mathbf{C}$ . Elle est bien définie, car le choix d'un relèvement  $(f_1, f_2)$  à  $W$  ne change pas le quotient  $f_1/f_2$  dans  $\mathbf{P}^1$ , déterminé de toutes façons par  $\pi \circ f$ .

$P_\Lambda$  est continue et  $\mathbf{C}$ -équivariante ; voyons si elle est injective. Si  $f$  et  $g$  sont deux applications à valeurs dans  $\mathcal{S}$ , et si les courbes  $\pi \circ f$  et  $\pi \circ g$  coïncident sur le réseau  $\Lambda$ , alors elles coïncident partout, puisqu'elles sont d'ordre un, tandis que le réseau est d'ordre deux. Mais alors il existe une fonction holomorphe sans zéros  $h$  telle que

$$h = \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}.$$

Comme les fonctions  $f_i$  et  $g_i$  sont d'ordre un, il en est de même pour  $h$ , qui s'écrit donc

$$h(z) = \exp(az + b).$$

On se sert maintenant de la discrétisation sur  $\mathcal{S}$  pour conclure. L'égalité de  $f|_\Lambda$  et  $g|_\Lambda$ , se traduit en des équations sur  $h$  :

$$f(z) = g(z) \text{ implique qu'il existe } n \in \mathbf{Z} \text{ tel que } (f_1(z), f_2(z)) = T^n(g_1(z), g_2(z)).$$

Dans notre cas, où  $T(z, w) = (2z, 2w)$ , cela est simplement  $\log h(z) \in (\log 2)\mathbf{Z} + 2\pi i\mathbf{Z}$ . Comme  $\log h$  est affine, cela est déterminé par les valeurs en 0, et sur deux générateurs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de  $\Lambda$ . Ainsi :

$$b, a\lambda_1 + b \text{ et } a\lambda_2 + b \text{ sont dans } (\log 2)\mathbf{Z} + 2\pi i\mathbf{Z}$$

et alors  $a\lambda_1$  et  $a\lambda_2$  aussi. Or, pour presque tout choix de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , la seule possibilité pour satisfaire simultanément ces contraintes de rationalité est que  $a = 0$ . Mais alors  $h(z)$  est constante et correspond à l'action de  $T^{n(0)}$  vue la condition sur  $b$ . Alors, on a bien  $f = g$  sur  $\mathcal{S}$ .

On a vu que  $P_\Lambda$  est injective pour presque tout réseau  $\Lambda$  de  $\mathbf{C}$ . En conséquence,  $\text{mdim}(\mathcal{B}_1(\mathcal{S}) : \Lambda) \leq \text{mdim}(\mathcal{S}^\wedge \times (\mathbf{P}^1)^\wedge : \Lambda) = \dim(\mathcal{S} \times \mathbf{P}^1) = 6$ . Or, le changement d'échelle donne  $\text{mdim}(\mathcal{B}_1(\mathcal{S}) : \mathbf{C}) = \frac{\text{mdim}(\mathcal{B}_1(\mathcal{S}) : \Lambda)}{|\mathbf{C}/\Lambda|}$ , et faisant tendre le covolume du réseau vers  $+\infty$  on obtient

$$\text{mdim}(\mathcal{B}_1(\mathcal{S}) : \mathbf{C}) \leq \frac{6}{|\mathbf{C}/\Lambda|} \rightarrow 0.$$

### 2.3.2 Analyse de croissance

La preuve du cas général suit les deux étapes de la section précédente. On commence par établir le contrôle de la croissance des coordonnées  $(f_1, f_2)$  d'un relèvement d'une courbe de Brody  $f$  sur une surface de Hopf  $\mathcal{S}$  donnée.

On prend sur  $\mathcal{S}$  la métrique tirée en arrière de la métrique produit par le difféomorphisme  $\phi : \mathcal{S} \rightarrow S^1 \times S^3$ . Par compacité, cela ne change pas l'analyse de  $\beta(\mathcal{S})$ .

Soit  $p : W \rightarrow \mathcal{S}$  la projection canonique. Relevant  $\phi \circ p : W \rightarrow S^1 \times S^3$  au revêtement universel, on obtient une identification  $\hat{\phi}$  entre  $W$  et  $\mathbf{R} \times S^3$ , équivariante par rapport à l'action du groupe fondamental, qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \hat{\phi} : W & \rightarrow & \mathbf{R} \times S^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \phi : \mathcal{S} & \rightarrow & S^1 \times S^3 \end{array} .$$

On note  $W_k$  la « coquille sphérique » correspondant dans  $W$  au domaine fondamental  $[k, k+1] \times S^3$ .

Soit  $f$  une courbe 1-Brody sur  $\mathcal{S}$ , de laquelle on fixe un relèvement  $F = (f_1, f_2)$  à  $W$ . Grâce au choix de la métrique de  $\mathcal{S}$ , et comme la projection  $\pi_1 : S^1 \times S^3 \rightarrow S^1$  est à différentielle bornée par 1, on voit que

$$|d(\pi_1 \circ \phi \circ f)| \leq |d\pi_1| |d\phi| |df| = |df| \leq 1.$$

Donc, si  $\hat{\pi}_1 \circ \hat{\phi} \circ F(0) \in [m_0, m_0 + 1]$ , alors l'image du disque centré en 0 et de rayon  $R$  par  $\hat{\phi} \circ F$  est contenue dans  $[m_0 - R, m_0 + 1 + R] \times S^3$ . De retour à  $W$ , cela veut dire que  $F(D_R)$  est contenue dans

$$\bigcup_{|k| \leq R} T^k W_{m_0}.$$

Soient alors  $A_0$  et  $B_0$  des bornes pour le module des coordonnées des points de  $W_{m_0}$ . Traduisant l'inclusion précédente en coordonnées, on arrive à

$$\begin{aligned} |f_1| &\leq |a|^R (A_0 + |\lambda/a| R B_0^n) \\ |f_2| &\leq |b|^R B_0 \end{aligned} ,$$

car  $T^R(z, w) = (a^R z + \lambda R a^{R-1} w^n, b^R w)$ . Cela montre que les coordonnées  $f_i$  du relèvement sont des fonctions holomorphes d'ordre au plus 1.

### 2.3.3 Discrétisation

Le quotient  $f_1/f_2$  n'est pas invariant par une dilatation  $T$  générale, mais on voit que  $f'_2/f_2$  est bien défini dans  $\mathbf{P}^1$  dès que  $f_2$  n'est pas identiquement nulle : si  $(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) = T^k(f_1, f_2)$  est un autre relèvement de  $f$ ,  $\tilde{f}_2(z) = b^k f_2(z)$ . Cela revient à demander que  $f$  ne soit pas incluse dans la courbe elliptique  $\mathcal{E} = \{w = 0\}$  de  $\mathcal{S}$ .

Pour avoir une application bien définie sur  $\mathcal{B}_1(\mathcal{S})$  tout entier, nous introduisons  $C(\mathbf{P}^1)$ , le cône au-dessus de  $\mathbf{P}^1$  réalisé par des rayons  $r \cdot a$  pour  $0 \leq r \leq \text{diam}(\mathcal{S})$  et  $a \in \mathbf{P}^1$ . Cela permet de poser pour tout réseau  $\Lambda \subset \mathbf{C}$  l'application de discrétisation

$$\begin{aligned} P_\Lambda : \mathcal{B}_1(\mathcal{S}) &\rightarrow \mathcal{S}^\Lambda \times (C(\mathbf{P}^1))^\Lambda \\ f &\mapsto f|_\Lambda , \left( \text{dist}_{\mathcal{S}}(f, \mathcal{E}) \cdot \frac{f'_2}{f_2} \right) \Big|_\Lambda \end{aligned}$$

qui est continue et équivariante pour l'action de translation par  $\Lambda$  à la source.

On cherche à déterminer les réseaux  $\Lambda$  qui donnent une discrétisation injective. Soient  $f$  et  $g$  telles que  $P_\Lambda(f) = P_\Lambda(g)$ . Deux cas se présentent : soit  $f_2 \equiv 0$ , soit  $f'_2/f_2$  est bien définie.

Dans le premier cas,  $g_2(\Lambda) \equiv 0$ , et, comme c'est une application d'ordre un, on a  $g_2 \equiv 0$ . Ainsi, les images de  $f$  et  $g$  sont contenues dans la courbe elliptique  $\mathcal{E}$ . Les coordonnées  $f_1$  et  $g_1$  sont à valeurs dans  $\mathbf{C}^*$  et d'ordre un, donc  $f_1(z) = \exp(az + b)$  et  $g_1(z) = \exp(cz + d)$ . Comme  $f = g$  sur  $\Lambda$ , de la même façon que sur le cas fibré sur  $\mathbf{P}^1$ , pour presque tout choix des générateurs de  $\Lambda$  on obtient assez de contraintes sur les constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  pour conclure que  $f = g$  dans  $\mathcal{S}$ .

Dans le second cas, comme  $f_2$  est d'ordre un, il existe au plus un ensemble d'ordre un de points  $z$  dans  $\mathbf{C}$  où  $f_2(z) = 0$ , donc où  $d(f(z), \mathcal{E}) = 0$ . Cela montre que  $g_2(\Lambda)$  ne peut s'annuler que sur un ensemble d'ordre un. Pour tous les autres points de  $\Lambda$ , qui forment encore un ensemble d'ordre deux, on a  $f'_2/f_2 = g'_2/g_2$ . Mais ce sont deux applications d'ordre un (par le lemme de la dérivée logarithmique) qui coïncident sur un ensemble d'ordre deux ; elles sont donc égales sur  $\mathbf{C}$ . Intégrant cette égalité, on a  $f_2 = C_2 g_2$  avec  $C_2 \neq 0$ .

Revenant à la projection sur  $\mathcal{S}^\Lambda$ , pour tout  $z \in \Lambda$  il existe un entier  $k(z)$  tel que

$$(f_1, f_2)(z) = T^{k(z)}(g_1, g_2)(z).$$

L'égalité en 0 fixe  $C_2 = b^{k(0)}$ , car  $f_2(0) = b^{k(0)} g_2(0)$ . La relation entre les deuxièmes coordonnées, à son tour, montre que  $k(z) = k(0) = k$ , et alors

$$f_1(z) = a^k g_1(z) + k\lambda a^{k-1} g_2^n(z)$$

pour tout  $z$  de  $\Lambda$ . Toutes les fonctions étant d'ordre un, on a l'égalité précédente sur  $\mathbf{C}$ , donc  $(f_1, f_2) = T^k(g_1, g_2)$ , ce qui est exactement  $f = g$ .

L'injectivité de  $P_\Lambda$  pour presque tout  $\Lambda$  montre comme avant que

$$\text{mdim}(\mathcal{B}_1(\mathcal{S}) : \mathbf{C}) = 0.$$

## 2.4 Déformations de courbes de Brody

On illustre ici une technique permettant de déformer des courbes de Brody de façon holomorphe dans l'espace projectif, que l'on peut retracer à Donaldson [Don96]. En partant de courbes elliptiques, on déduit un contrôle explicite des déformations que l'on construit, permettant d'obtenir des résultats dans le cadre des complémentaires d'hyperplans, qui entraînent le théorème 2.

Pour éviter de surcharger les notations, on se place dans le cas de  $\mathbf{P}^2$  privé de la droite à l'infini, que l'on identifie à  $\mathbf{P}^1$  de coordonnées  $(x : y : 0)$ . La stratégie est la suivante : d'une part, on sait que la dimension moyenne de  $\mathcal{B}(\mathbf{P}^1)$  est positive ; d'autre part, toute courbe dans  $\mathbf{P}^1$  se relève à  $\mathbf{C}^2$ , qui est le complémentaire en étude. On cherchera alors à montrer qu'il existe une partie  $M \subset \mathcal{B}(\mathbf{P}^1)$ , de dimension moyenne positive, qui est aussi dans  $\mathcal{B}(\mathbf{P}^2 \setminus \mathbf{P}^1)$ . Plus exactement, chaque courbe dans  $M$  sera

dans l'adhérence d'une famille de ses relevées à  $\mathbf{C}^2$ , qui seront encore des courbes de Brody.

Cela découle du théorème d'approximation suivant :

**Théorème 9.** *On fixe une inclusion  $\mathbf{P}^1 \hookrightarrow \mathbf{P}^2$ . Soit  $\psi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1$  une courbe bipériodique de dérivée  $\|d\psi\| < 1$ . Alors il existe :*

- un espace  $M \subset \mathcal{B}_1(\mathbf{P}^1)$ , de dimension moyenne positive, de fonctions uniformément proches de  $\psi$  ;
- pour toute fonction  $\tilde{\psi}$  de  $M$ , une suite  $\tilde{\psi}_n$  de courbes 1-Brody à valeurs dans  $\mathbf{P}^2 \setminus \mathbf{P}^1$  convergeant, dans  $\mathcal{B}_1(\mathbf{P}^2)$ , vers  $\tilde{\psi}$ .

De plus, on peut choisir les courbes de la suite  $\tilde{\psi}_n$  parmi des relevées de  $\tilde{\psi}$ .

### 2.4.1 Une construction préliminaire

Cette partie introduit les objets nécessaires pour exhiber  $M$  comme un espace de déformations d'une courbe bipériodique dans  $\mathbf{P}^1$ .

Soit  $\psi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1$  une application bipériodique satisfaisant  $\|d\psi\| < 1$ . Il existe alors une courbe elliptique  $\mathcal{E} = \mathbf{C}/\Lambda$  et d'une application  $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{P}^1$  telles que  $\psi = \pi \circ p$ , où  $\pi : \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{E}$  est la projection canonique. On note  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{E}$  le fibré  $p^*\mathcal{O}(1)$ , et  $\sigma_0 = p^*X_0$  et  $\sigma_1 = p^*X_1$  les sections des zéros et pôles de  $p$ . Elles n'ont pas de zéro commun et  $p$  s'écrit aussi  $(\sigma_0 : \sigma_1)$ . De même, les  $\psi_i = \pi^*\sigma_i$  sont des sections du fibré  $\pi^*\mathcal{L} \rightarrow \mathbf{C}$ , et  $\psi = (\psi_0 : \psi_1)$ .

Comme  $\mathcal{L}$  est à courbure positive, il admet une métrique hermitienne dont la forme de courbure est dans la classe de  $\alpha \operatorname{dd}^c |z|^2$  pour une certaine constante  $\alpha > 0$  ; on peut même choisir la métrique pour avoir exactement cette courbure. Toute section  $s$  trivialisant  $\pi^*\mathcal{L}$  satisfait alors  $\operatorname{dd}^c \log \|s\|_{\mathcal{L}} = -\alpha \operatorname{dd}^c |z|^2$ , donc il existe une section holomorphe  $f$  de norme  $\|f(z)\|_{\mathcal{L}} = e^{-\alpha|z|^2}$ .

Le fibré  $\mathcal{L}$  donne en outre des *multiplicateurs*

$$e(\lambda, z) = \frac{\psi_0(z + \lambda)}{\psi_0(z)} \quad \text{pour } \lambda \in \Lambda \text{ et } z \in \mathbf{C},$$

correspondant à une translation par  $\lambda$  sur la base de  $\pi^*\mathcal{L}$  et au passage de la fibre  $(\pi^*\mathcal{L})_z$  vers  $(\pi^*\mathcal{L})_{z+\lambda}$  identifiées toutes les deux à  $\mathcal{L}_{\pi(z)}$  [GH78, p. 308]. Cela permet de définir des nouvelles sections  $f_\lambda(z + \lambda) = e(\lambda, z)f(z)$  qui sont des translatées de  $f$  ; en particulier,  $\|f_\lambda(z + \lambda)\|_{\mathcal{L}} = \|f(z)\|_{\mathcal{L}}$  par construction.

Ainsi, nous définissons les convolutions de  $f$  par une fonction bornée  $a : \Lambda' \rightarrow \mathbf{C}$

$$s_a(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda'} a_\lambda f_\lambda(z)$$

où  $\Lambda'$  est un sous-réseau de  $\Lambda$  qui sera déterminé à la fin de l'argument. En dehors des zéros de  $\psi_0$ , on a l'expression

$$\frac{s_a}{\psi_0}(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda'} a_\lambda \frac{f}{\psi_0}(z - \lambda),$$

qui peut être aussi utilisée pour définir  $s_a$  et qui justifie le terme convolution.

Donnons un exemple de cette construction. Choisissons directement les deux fonctions  $\psi_0$  et  $\psi_1$  comme des produits canoniques de Weierstrass, la première pour le réseau  $\Lambda$ , la deuxième pour les points  $z_0 + \Lambda$  avec  $z_0 \notin \Lambda$ , comme dans l'exemple de [Ere10]. Alors  $\psi = (\psi_0 : \psi_1)$  est bien une courbe bipériodique et de Brody.

Le fait que  $|\psi_0(z)|^2 + |\psi_1(z)|^2$  soit équivalente à  $\exp(\alpha|z|^2)$  nous suggère de choisir la métrique sur  $\pi^*\mathcal{L}$  par

$$\|\sigma\| = |\sigma| \exp(-\alpha|z|^2),$$

ce qui rend la fonction holomorphe  $f : z \mapsto 1$  à norme exponentiellement décroissante. Les sections translattées sont simplement

$$f_\lambda(z) = \exp(2\alpha z \bar{\lambda} - \alpha|\lambda|^2)$$

dont on vérifie que la norme est bien  $\exp(-\alpha|z - \lambda|^2)$ .

## 2.4.2 Contrôle des déformations

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} I : (D_\varepsilon)^{\Lambda'} &\rightarrow H^0(\pi^*\mathcal{L} \times \pi^*\mathcal{L}) \rightarrow \{f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1 \text{ holomorphe}\} \\ \mathbf{a} &\mapsto (\psi_0, \psi_1 + s_a) \mapsto (\psi_0 : \psi_1 + s_a) \end{aligned}$$

où l'on se restreint aux fonctions  $\mathbf{a} : \Lambda' \rightarrow \mathbf{C}$  bornées par  $\varepsilon > 0$  à fixer. Comme  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  n'ont pas de zéro commun,  $\|\psi_0\|_{\mathcal{L}}^2 + \|\psi_1\|_{\mathcal{L}}^2$  est minoré. De plus, comme  $\Lambda' \subset \Lambda$ ,

$$\sup_z \|s_a(z)\|_{\mathcal{L}} \leq \|\mathbf{a}\|_\infty \sup_z \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} \|f(z + \lambda)\|_{\mathcal{L}} \right),$$

donc il existe  $\varepsilon > 0$  et  $r > 0$  tels que  $(\psi_0, \psi_1 + s_a)$  évite un  $r$ -voisinage de la section nulle de  $\pi^*\mathcal{L} \times \pi^*\mathcal{L}$  dès que  $\|\mathbf{a}\| \leq \varepsilon$ . Cela assure que le passage à  $\mathbf{P}^1$  est bien défini.

Comme la projection de  $\mathbf{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  vers  $\mathbf{P}^1$  est Lipschitzienne en dehors d'un voisinage de l'origine, on voit que

$$\psi_a = (\psi_0 : \psi_1 + s_a)$$

est uniformément proche de  $\psi = (\psi_0 : \psi_1)$ , donc, par le lemme de Schwarz,  $\psi_a$  est 1-Brody pour  $\varepsilon$  assez petit (car  $\|d\psi\| < 1$ ), ce qui montre que l'image de  $I$  est dans  $\mathcal{B}_1(\mathbf{P}^1)$ .

On relève les  $\psi_a$  à  $\mathbf{C}^2$  : comme  $f$  n'est jamais nulle,  $\varphi_a = (\psi_0 : \psi_1 + s_a : f)$  ne coupe pas la droite à l'infini. Par ailleurs, les homothéties  $K\varphi_a = (\psi_0 : \psi_1 + s_a : f/K)$  convergent uniformément vers  $(\psi_0 : \psi_1 + s_a : 0)$  lorsque  $K \rightarrow \infty$ . Donc, pour  $K$  assez grand, les  $K\varphi_a$  sont uniformément proches de  $\psi$ , identifiée à  $(\psi_0 : \psi_1 : 0)$ . Et quitte à diminuer encore  $\varepsilon$ , les  $K\varphi_a$  seront aussi 1-Brody pour  $K > K_0$ , ce qui conclut la deuxième partie du théorème 9.

### 2.4.3 Dimension moyenne

Pour obtenir la stricte positivité de la dimension moyenne, il reste seulement à voir que  $I : \mathfrak{a} \mapsto (\psi_0 : \psi_1 + s_{\mathfrak{a}} : 0)$  est injective, continue et  $\Lambda'$ -équivariante. Cela montrera que son image  $M$  satisfait  $\text{mdim}(M : \Lambda') \geq \text{mdim}((D_\varepsilon)^{\Lambda'} : \Lambda') = 2$ , et comme  $M \subset \mathcal{B}_1(\mathbf{P}^2 \setminus \mathbf{P}^1)$ , on a la positivité annoncée.

La continuité découle du caractère linéaire de  $\mathfrak{a} \mapsto s_{\mathfrak{a}}$  puis Lipschitzien de la projection de  $\mathbf{C}^2 \setminus D_r$  vers  $\mathbf{P}^1$ . L'injectivité peut être obtenue par un choix convenable de  $\Lambda'$  : si  $\Lambda'$  est tel que

$$\sum_{0 \neq \lambda \in \Lambda'} \|f(\lambda)\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{2} \|f(0)\|_{\mathcal{L}},$$

alors la première application est injective : en choisissant  $\ell$  tel que  $|\mathfrak{a}_\ell| > (1 - \delta) \|\mathfrak{a}\|_\infty$ , on a

$$\begin{aligned} \|s_{\mathfrak{a}}(\ell)\|_{\mathcal{L}} &\geq |\mathfrak{a}_\ell| \|f(0)\|_{\mathcal{L}} - \sum_{\ell \neq \lambda \in \Lambda'} |\mathfrak{a}_\lambda| \|f(\ell - \lambda)\|_{\mathcal{L}} \\ &> \left(\frac{1}{2} - \delta\right) \|\mathfrak{a}\|_\infty \|f(0)\|_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Mais  $(\psi_0 : \psi_1 + s_{\mathfrak{a}}) = (\psi_0 : \psi_1 + s_{\mathfrak{b}})$  si et seulement si  $s_{\mathfrak{a}} - s_{\mathfrak{b}} = 0$ , car  $\psi_0$  n'est pas identiquement nulle et toutes les fonctions sont holomorphes. Donc la composée  $\mathfrak{a} \mapsto (\psi_0 : \psi_1 + s_{\mathfrak{a}})$  est injective.

Enfin, la quasi-périodicité des sections de  $\pi^*\mathcal{L}$  montre que  $I : (D_\varepsilon)^{\Lambda'} \rightarrow \mathcal{B}_1(\mathbf{P}^1)$  est une inclusion  $\Lambda'$ -équivariante. Pour toute translation  $\tau_w$  par un élément  $w \in \Lambda'$  on a

$$(\tau_w f_\lambda)(z) = f_\lambda(z + w) = f_{\lambda - w}(z) e(w, z)$$

et alors

$$\begin{aligned} s_{(\tau_w \mathfrak{a})}(z) &= \sum_{\lambda \in \Lambda'} \mathfrak{a}_{\lambda + w} f_\lambda(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda'} \mathfrak{a}_\lambda f_{\lambda - w}(z) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda'} \mathfrak{a}_\lambda f_\lambda(z + w) / e(w, z) = s_{\mathfrak{a}}(z + w) / e(w, z) \end{aligned}$$

ce qui conclut puisque  $\psi_i(z + w) = \psi_i(z) e(w, z)$  pour  $i = 0$  et  $1$ .

### 2.4.4 Remarques

Pourvu que  $k \geq 1$ , on peut refaire cette construction dans  $\mathbf{P}^n$  privé de  $(n - k)$  hyperplans. Leur intersection est un hyperplan de dimension au moins  $k$ , donc une courbe elliptique  $\mathcal{E} \rightarrow \mathbf{P}^k$  produit  $k + 1$  sections périodiques, que l'on complète avec des sections bornées, jamais nulles et décroissantes. Cela donne un espace  $M^k$ , inclus dans  $\mathcal{B}_1(\mathbf{P}^k)$ , de dimension moyenne positive, et formé de courbes de Brody qui sont dans le bord de  $\mathcal{B}_1(\mathbf{P}^n \setminus (n - k) \text{ hyperplans})$ .

En outre, on peut ne pas passer à la limite des courbes dans  $\mathbf{C}^2$  : comme  $\varphi = (\psi_0 : \psi_1 : f)$  est elle-même une courbe de Brody (disons  $\|d\varphi\| \leq c$ ), le contrôle Lipschitzien des déformations dans  $\mathbf{P}^2$  garantit que, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, il existe une image de  $M$  au voisinage de  $\varphi$ , donc cette image est dans  $X_{c+1}$  par le « lemme de Schwarz ».

## 2.5 Dimension moyenne en une seule direction

Les deux exemples d'annulation vus auparavant, le cas des surfaces de Hopf et celui des complémentaires d'hyperplans, découlent essentiellement d'un même argument d'injectivité après projection sur un réseau quelconque de  $\mathbf{C}$ , du fait de la croissance des fonctions bornée par  $O(\mathbf{R})$ . On peut se demander si, lorsqu'à la place d'une action de  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$  on s'intéresse uniquement à une seule direction  $\mathbf{Z}$ , la dimension moyenne devient non nulle.

L'exemple de construction que l'on donne ici est particulier à la surface de Hopf de la forme

$$\mathcal{S} = \mathbf{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} / (z, w) \sim (2z, 2w).$$

On fait jouer à la paire

$$\begin{aligned} \psi(z) &= (e^{2z}, e^{-2z}) \\ f_0(z) &= \frac{\sinh^2(z)}{z^2} \end{aligned}$$

le même rôle que dans le cas d'abondance des complémentaires d'hyperplans. Pour cela, on pose les convolutions

$$\begin{aligned} \mathbf{I} : (D_\varepsilon)^{\mathbf{Z}} &\rightarrow \{f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} \text{ holomorphe} \} \\ \mathbf{a} &\mapsto \left( e^{2z} + \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n f_0(z - 2\pi i n), e^{-2z} \right). \end{aligned}$$

Comme  $\left| \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n f_0(z - 2\pi i n) \right| \leq C \|\mathbf{a}\|_\infty \cosh(2\Re(z))$ , la distance entre  $[\phi(z)]$  et  $[\psi_{\mathbf{a}}(z)]$  est bornée donc  $[\psi_{\mathbf{a}}]$  est bien de Brody dans  $\mathcal{S}$ .

De plus, cette application est manifestement injective, puisque

$$\psi_{\mathbf{a}}(2\pi i m) = (e^{2z} + a_m, e^{-2z}).$$

Elle est aussi équivariante pour l'action de  $\mathbf{Z}$  par décalage sur  $(D_\varepsilon)^{\mathbf{Z}}$  et par les translations sur  $\mathcal{B}(\mathcal{S})$  multiples de  $2i\pi$ . Ainsi,  $\text{mdim}(\mathcal{B}_1(\mathcal{S}) : \mathbf{Z}) > 0$ .

D'autre part, il est clair que cette dimension moyenne est finie, puisque les bornes obtenues pour  $f_1$  et  $f_2$  impliquent une borne pour les indicatrices de croissance, donc une discrétisation suffisamment fine est injective.

# Chapitre 3

## Distribution de valeurs

Ce chapitre se tourne vers la distribution de valeurs des courbes de Brody dans l'espace projectif, et en particulier dans des complémentaires d'hyperplans que nous avons déjà rencontré lors de l'étude de la dimension moyenne.

Rappelons le théorème de Clunie et Hayman [CH65].

**Théorème 10.** *Soit  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\}$  une fonction entière dont la dérivée sphérique  $\|df(z)\| = \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}$  est bornée par  $O(|z|^k)$ . Alors*

$$T_f(\mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \sqrt{1 + |f(\mathbf{R}e^{i\theta})|^2} d\theta \leq O(\mathbf{R}^{k+1}).$$

Cet énoncé se comprend comme une limitation de la croissance d'une fonction à partir d'une borne de sa dérivée et la condition d'éviter le point à l'infini. En particulier, dans le cas des courbes entières et de Brody,  $\|df\| = O(1)$ , et cela implique que la courbe est d'ordre au plus égal à un, et non deux, comme on aurait en toute généralité.

Notre but sera alors de donner une version quantifiée de ce théorème, et une version en dimension supérieure, dans l'esprit des seconds théorèmes principaux.

### 3.1 Préliminaires

Soit  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^n$  une application holomorphe dont on a fixé un relèvement  $F = (f_0, f_1, \dots, f_n)$  à  $\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ . On lui associe la norme

$$\|F\|^2 = \sum_{i=0}^n |f_i(\mathbf{R}e^{i\theta})|^2$$

et la norme de sa dérivée par rapport à la métrique de Fubini-Study, qui s'écrit comme

$$\|df\|^2 = dd^c \log \|F\|^2 = \|F\|^{-4} \sum_{0 \leq i < j \leq n} |f'_i f_j - f_i f'_j|^2.$$



L'indicatrice de croissance de  $f$  et la fonction d'impact par rapport à un hyperplan  $H$  défini par une équation homogène  $\lambda(X) = 0$  sont respectivement

$$\begin{aligned} T_f(R) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|F(\operatorname{Re}^{i\theta})\| \, d\theta \\ N_f(R; H) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\lambda \circ F(\operatorname{Re}^{i\theta})| \, d\theta. \end{aligned}$$

Remarquons que, si l'on choisit un autre relèvement,  $T_f(R)$  et  $N_f(R; H)$  changent seulement d'une quantité indépendante de  $R$ . Cette ambiguïté n'est pas importante : l'étude de ces fonctions est concentrée sur leur comportement asymptotique, une différence constante disparaissant dans les termes d'erreur.

Lorsque l'on considère des hyperplans  $H_i$ , on introduit les coordonnées logarithmiques  $u_i = \log |\lambda_i \circ F|$ . Ce sont des fonctions sousharmoniques, et même harmoniques en dehors des zéros de  $\lambda_i \circ F$ , ou, plus géométriquement, des points envoyés sur  $H_i$ . Quand ils seront en position générale, on supposera toujours que les  $n + 1$  premiers hyperplans  $H_i$  sont les hyperplans des coordonnées, déterminés par  $\lambda_i(X) = X_i$  pour  $i = 0, \dots, n$ .

On pose  $t(z) = \max_{i=0}^n u_i(z)$ , qui est aussi une fonction sousharmonique, et on remarque qu'il existe une constante  $C$  telle que  $\log \|F(z)\| \leq t(z) + C$ , donc on a

$$T_f(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t(\operatorname{Re}^{i\theta}) \, d\theta + O(1).$$

Le défaut de  $f$  par rapport à l'hyperplan  $H$  est défini comme

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{N_f(R; H)}{T_f(R)} \right)$$

et est compris entre zéro et un. Le second théorème principal de Cartan [Kob70] assure que, si  $f$  n'est pas contenue dans un hyperplan, la somme de ses défauts sur une quantité quelconque d'hyperplans en position générale ne dépasse pas  $n + 1$ .

## 3.2 Résultats

Dans la première étape de la généralisation du théorème de Clunie et Hayman à la dimension supérieure [Ere10], Eremenko introduit  $t^* = \max_{i=1}^n u_i(z)$  et prouve

**Lemme 11.** *Soit  $v$  une fonction harmonique non-négative sur le disque fermé  $B(z, r)$ , vérifiant  $v(z_1) = 0$  pour un point  $z_1$  de son bord. Alors*

$$\frac{v(z)}{2r} \leq \partial_n v(z_1) \leq |\nabla v(z_1)|.$$

où  $\partial_n$  est la dérivée normale rentrante pour le disque  $B(z, r)$ .

Dans le cas où  $f$  est une courbe de Brody, l'égalité entre  $t$  et une des fonctions  $u_i$  pour  $i \geq 1$  donne  $|\nabla v(z_1)| = O(1)$ . Il en déduit l'inégalité  $t(z) \leq t^*(z) + O(|z|)$

lorsque les fonctions  $u_i$ , pour  $i \geq 1$ , sont harmoniques, ce qui correspond à  $f_i$  sans zéro, c'est-à-dire  $n$  hyperplans évités en dimension  $n$ .

On montre qu'une estimée analogue reste valable après intégration, sans hypothèse sur les  $u_i$ .

**Théorème 12.** *Soit  $f = (f_0 : f_1 : \dots : f_n) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n$  une courbe entière de Brody. Avec les notations ci-dessus, on a*

$$\int_0^{2\pi} t(\operatorname{Re}^{i\theta}) d\theta \leq \int_0^{2\pi} t^*(\operatorname{Re}^{i\theta}) d\theta + O(R).$$

En dimension 1 cela se traduit par :

**Corollaire.** *Toute courbe de Brody  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$  satisfait*

$$T_f(R) \leq N_f(R; a) + O(R).$$

*En particulier, si  $\liminf \frac{R}{T_f(R)} = 0$ ,  $f$  n'a pas de défaut.*

Ce résultat est optimal, vu que les exponentielles linéaires sont de Brody et vérifient simultanément  $T_f(R) \sim R$  et  $N_f(R; 0) = 0$ , et implique le théorème de Clunie et Hayman de la même façon que le second théorème de Nevanlinna implique le théorème de Picard. Remarquons que la condition de Brody permet de réduire le nombre de fonctions d'impact de trois à une seule, au prix d'un terme d'erreur qui ne dépend pas de  $T(R)$ .

Cette comparaison entre l'indicatrice de croissance et la fonction d'impact se généralise aux complémentaires d'hyperplans.

**Théorème 13.** *Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n$  une courbe de Brody. Fixons  $n$  hyperplans en position générale,  $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ , et supposons que  $f$  évite  $H_i$  pour  $i \geq 2$ . Alors*

$$T_f(R) \leq N_f(R; H_1) + O(R).$$

On peut choisir l'hyperplan  $H_0$  de telle façon que  $f(\mathbb{C}) \cap H_0 \cap H_1 = \emptyset$ . Après une projection centrale donnée par  $(f_0 : f_1 : \dots : f_n) \mapsto (f_0 : f_1) = \phi$ , on obtient

$$T_\phi(R) \geq N_\phi(R; 0) = N_f(R; H_1) + O(1) \geq T_f(R) - O(R).$$

Comme auparavant, dès que  $R \in o(T_f)$ , on en déduit que  $\phi$ , la projection de  $f$  sur la droite d'intersection des  $(n-1)$  hyperplans  $H_2, \dots, H_n$ , n'a pas de défaut, et sa croissance est équivalente à celle de  $f$ .

Enfin, on montre que, dans le cas particulier des fonctions à énergie positive, c'est-à-dire, quand  $T(R) \notin o(R^2)$ , on a en toute dimension une majoration des défauts, sans restrictions sur l'image de  $f$ .

**Théorème 14.** *Si  $f$  est une courbe de Brody d'énergie positive, et  $\delta_i$  les défauts aux hyperplans  $H_i$ , en position générale et ne contenant pas  $f(\mathbb{C})$ , alors*

$$\sum_i \delta_i \leq n - 1.$$

Cela correspond à un gain de deux, comme dans le cas de  $\mathbf{P}^1$ , par rapport aux défauts d'une courbe entière quelconque donnés par le second théorème principal.

Nous commencerons par établir le théorème dans le cas de  $\mathbf{P}^1$  à l'aide d'une version intégrée locale du lemme 11. Ensuite, nous introduirons deux variantes pour montrer le cas particulier des courbes de Brody dans le complémentaire d'une droite dans  $\mathbf{P}^2$ . Cette preuve possède déjà tous les outils nécessaires à la généralisation aux complémentaires en dimension quelconque, qui ne demande qu'une récurrence. On conclut avec le résultat de défauts.

### 3.3 Contrôle $L^1$ sur un disque et défauts dans $\mathbf{P}^1$

Commençons par rappeler les notations :  $f = (f_0 : f_1 : \dots : f_n)$  est une application holomorphe de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{P}^n$ , de coordonnées logarithmiques  $u_i = \log |f_i|$ . Les  $u_i$  sont sousharmoniques, de même que

$$t = \max_{0 \leq i \leq n} u_i \quad \text{et} \quad t^* = \max_{1 \leq i \leq n} u_i.$$

Pour avoir la plupart du temps des termes positifs, on choisit les fonctions de Green surharmoniques,  $g(\zeta, \xi) = -\log \left| \frac{\zeta - \xi}{1 - \zeta \bar{\xi}} \right|$  dans le disque unité, et on adopte la convention qui donne un Laplacien positif pour les fonctions surharmoniques. Pour la même raison, nous utiliserons les dérivées normales rentrantes.

Les objets géométriques qui interviendront le plus souvent seront  $B(z, r)$  et  $S(z, r)$ , respectivement le disque et le cercle de centre  $z$  et rayon  $r$ . Lorsqu'ils sont centrés à l'origine, on utilisera  $D(r)$  et  $\Gamma_r$ . L'intégrale d'une fonction  $v$  sur un (arc de) cercle  $\Gamma$  par rapport à l'élément d'angle sera symbolisée par  $\oint_{\Gamma} v$ . On abrègera l'intégrale sur  $\Gamma_R$  par  $\oint_R$ . Enfin,  $l(\Gamma)$  sera la longueur (euclidienne) de l'arc  $\Gamma$ , et  $r(\Gamma)$ , son rayon.

Nous présenterons les idées menant au premier théorème à travers les courbes de  $\mathbf{P}^1$ . Ainsi,  $t^* = u_1$  et il faut estimer

$$\oint_R (t - t^*) = \oint_R (u_0 - u_1)^+.$$

On peut supposer qu'il existe au moins un point  $z_0$  tel que  $|f(z_0)| = 1$ , c'est-à-dire, où  $u_0(z_0) = u_1(z_0)$ . Sinon, l'image de  $f$  serait contenue dans un disque, donc constante par Liouville, et le résultat est donc immédiat.

Soit  $|z| = R > |z_0|$  dans la région  $u_0 > u_1$ , auquel on associe le disque  $B(z, r_z)$  maximal pour  $u_0 > u_1$ . Maintenant, on sait seulement que  $u_0 - u_1$  est surharmonique, donc il n'est pas possible d'en borner des valeurs ponctuelles. Cependant, on peut en donner une estimée  $L^1$ , à condition que le domaine d'intégration ne converge pas vers un point. En effet, la condition de Brody permet de contrôler l'intégrale de  $(u_0 - u_1)$  sur un voisinage de  $z$  dépendant de  $r_z$  d'après le résultat suivant.

**Lemme 15** (Contrôle  $C^1$  implique contrôle  $L^1$ ). *Soit  $v$  une fonction surharmonique et positive sur le disque  $B(z, r)$ , nulle sur  $z'$  dans son bord. Soit  $\Gamma$  un arc de cercle de rayon au moins  $r/2$  et contenu dans  $B(z, r/2)$ . Alors, pour une constante universelle  $C > 0$ ,*

$$\oint_{\Gamma} v \leq Cr \partial_n v(z').$$

Dans notre cas,  $|z| > |z_0|$ , et alors  $r_z \leq |z| + |z_0| < 2R$ , donc en choisissant  $\Gamma_z = \Gamma_R \cap B(z, \frac{r_z}{2})$  on a

$$\oint_{\Gamma_z} (u_0 - u_1) \leq Cr_z \cdot |\partial_n(u_0 - u_1)(z')| \leq C l(\Gamma_z) \|df\|,$$

puisque l'égalité  $u_0 = u_1$  implique  $|\nabla(u_0 - u_1)| \leq 2\|df\|$  et  $r_z \leq l(\Gamma_z)$  par construction.

On considère la famille des arcs  $\Gamma_z/5$  pour tout  $z \in D(r) \cap (u_0 > u_1)$ . Par le lemme de 5-recouvrement de Vitali [Mat95], on peut en extraire une famille disjointe  $\Gamma_{z_i}/5$  telle que les  $\Gamma_{z_i}$  couvrent  $D(r) \cap (u_0 > u_1)$ . Ainsi, la différence  $\oint_{\Gamma} (u_0 - u_1)^+$  sera bornée par

$$\sum_i \oint_{\Gamma_{z_i}} (u_0 - u_1) \leq 2C \|df\| \sum_i l(\Gamma_{z_i}) \leq 2C \|df\| \cdot 5l(\Gamma_R) = O(R).$$

La comparaison entre  $\oint t$  et  $\oint t^*$  en dimension supérieure se traite de la même manière. La région  $t > t^*$  équivaut à  $u_0 > t^*$ , d'où le caractère harmonique de  $u_0$  sur le disque maximal. Le lemme précédent s'applique ainsi à la différence entre  $u_0$  et une fonction  $u_i$  qui lui est égale au bord. Enfin, la dérivée normale de  $u_0 - u_i$  au point d'égalité est un  $O(\|df\|)$ , et comme  $t - t^* \leq u_0 - u_i$  dans la région  $u_0 = t$ , on obtient le contrôle en  $O(R)$  après un argument de recouvrement similaire.

*Démonstration du lemme 15.* Par homogénéité, on peut supposer  $z = 0$ ,  $r = 1$  et  $z' = 1$ .

On pose  $w = \int_{D(2/3)} g(\cdot, \xi) \Delta v(\xi)$  le potentiel de  $\Delta v$  dans  $D(2/3)$ . Ainsi,  $v - w$  est harmonique à l'intérieur d'un plus petit disque, surharmonique dans le disque entier, et positive ou nulle au bord, donc positive ou nulle à l'intérieur. On estimera séparément  $w$  et  $v - w$ .

Comme on fait une intégrale par longueur d'arc sur  $\Gamma$ , il suffit de contrôler  $v - w$  en norme. Et comme cette fonction est harmonique sur  $D(2/3)$ , pour tout  $\zeta \in \Gamma \subset D(1/2)$   $(v - w)(\zeta)$  est équivalent à  $(v - w)(0)$  par l'inégalité de Harnack. Encore par Harnack, on a  $\frac{v(0)}{3} \leq \inf_{|t| \leq 1/3} (v - w)(t) = m$ . Soit alors  $h$  la fonction harmonique qui vaut 0 sur le cercle unité et  $m$  sur le cercle de rayon  $1/3$ . Comme  $h \leq v - w$  sur  $\partial D(1)$  et  $\partial D(1/3)$ ,  $h \leq v - w$  à l'intérieur de l'anneau  $D(1) \setminus D(1/3)$ . De plus,  $h(1) = 0 = (v - w)(1)$ , donc  $\partial_n h(1) \leq \partial_n (v - w)(1)$ . Or,

$$\partial_n h(1) = \frac{m}{\log(3)},$$

ce qui donne un contrôle de  $(v - w)(0)$  par  $K \partial_n (v - w)(1)$ .

Le contrôle de l'intégrale de  $w$  se fait en deux temps. Admettons que les intégrales des fonctions de Green sur le chemin  $\Gamma_z$  (par élément d'arc) sont uniformément bornées par une constante  $K'$ . Cela implique, par Fubini, que

$$\int_{\Gamma_z} w \leq K' \int_{D(2/3)} \Delta v(\xi).$$

Comme  $\xi$  est dans le disque de rayon  $2/3$ , le gradient des fonctions de Green en 1 parcourt l'intervalle  $[1/5, 5]$ , donc

$$\int_{\Gamma_z} w \leq K' \int_{D(2/3)} 5\partial_n g(1, \xi) \Delta v(\xi) = 5K' \partial_n w(1)$$

et sommant la première avec la deuxième borne on a bien un contrôle en  $C\partial_n v(1)$ .  $\square$

**Lemme 16** (Contrôle  $L^1$  des fonctions de Green sur le disque). *Il existe une constante universelle  $K'$  telle que, pour tout  $\xi \in D(1)$  et tout arc de cercle  $\Gamma$  de rayon  $r \geq 1/2$  et inclus dans  $D(1)$  :*

$$\oint_{\Gamma} -\log \left| \frac{\zeta - \xi}{1 - \zeta \bar{\xi}} \right| \leq K'.$$

*Démonstration.* Rappelons que si  $\Gamma$  est inclus dans le cercle  $S(c, r)$ , l'intégrale se fait par rapport à la paramétrisation  $\zeta = re^{i\theta} + c$ . On écrit alors  $\xi = \rho e^{i\alpha} + c$  et on remarque que

$$|\zeta - \xi| \geq r|\sin(\theta - \alpha)|.$$

D'une part, on a  $|1 - \zeta \bar{\xi}| \leq 2$  et  $\frac{1}{r} \leq 2$ , et comme  $\int_0^{2\pi} \log |\sin(\theta - \alpha)| d\theta = -2\pi \log(2)$  on déduit que les intégrales en  $\theta$  des fonctions de Green sont bornées indépendamment de  $\xi$ .  $\square$

Les constantes intervenant dans les estimées ci-dessus dépendent de la géométrie uniquement. On dit alors qu'un arc  $\gamma$  est *borné par un disque*  $D$  de rayon  $r$  si

1. son rayon est minoré par  $\alpha r$ ;
2. il est contenu dans un disque de même centre que  $D$  et rayon  $\beta r$ , avec  $0 < \beta < 1$ .

On dit qu'un arc  $\gamma$  est *comparable à un disque*  $D$  si de plus les rayons et longueurs de  $\gamma$  et  $\partial D$  sont comparables. Par la suite, il sera commode de pouvoir changer  $\alpha$  et  $\beta$  de manière finie, de façon à garder le raisonnement le plus direct possible.

### 3.4 Le cas de $P^2$

On se place dans le cas où l'on évite la droite à l'infini  $X_2 = 0$ . Ainsi,  $f = (f_0 : f_1 : f_2)$  pour  $f_2$  sans zéro.

Avec les mêmes notations qu'avant, on veut montrer

$$\oint_{\mathbb{R}} t \leq \oint_{\mathbb{R}} u_1 + O(R).$$

Par Liouville, on peut se restreindre au cas où il existe comme auparavant un point  $z_0$  tel que  $u_0(z_0) \leq t^*(z_0)$ . Donc on peut utiliser le théorème 1 et il suffira d'établir

$$\oint_{\mathbb{R}} \max(u_1, u_2) \leq \oint_{\mathbb{R}} u_1 + O(R).$$

On suppose en outre qu'il existe un point  $z_0^*$  où  $u_2 \leq u_1$  : si ce n'était pas le cas,  $\lambda = \frac{f_1}{f_2}$  serait bornée donc constante, et alors l'inégalité est immédiate puisque  $u_1 = u_2 + \log |\lambda|$ . On peut d'ailleurs ramener cette situation au résultat précédent dans  $\mathbb{P}^1$ , sans hypothèses sur le comportement de  $u_0$  : en effet, l'image de  $f$  étant contenue dans la droite  $f_1 = \lambda f_2$ , la projection  $(f_0 : f_2)$  est encore de Brody, et les intégrales de  $u_2$  et  $u_1$ , à une constante près, sont égales.

L'argument à la Vitali couvrant  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  s'applique si on dispose d'inégalités

$$\oint_{\Gamma_z} (u_2 - u_1)^+ \leq C l(\Gamma_z) \quad (*)$$

pour tout  $z \in (u_2 \geq u_1)$  de module assez grand. Cela passera comme précédemment par une estimée intermédiaire en  $r_z$ , le rayon d'un disque contenant  $z$ . Il faudra — selon la configuration des fonctions  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$  — considérer différents types de disque.

Soit maintenant, pour  $|z|$  suffisamment grand,  $B(z, r)$  le disque maximal pour  $u_2 > u_1$ , et  $z'$  le point où  $u_2 = u_1$  dans son bord. Il y a deux possibilités pour  $z'$  :

- soit il est dans  $(u_2 = u_1 \geq u_0)$  ;
- soit il est dans  $(u_2 = u_1 < u_0)$ .

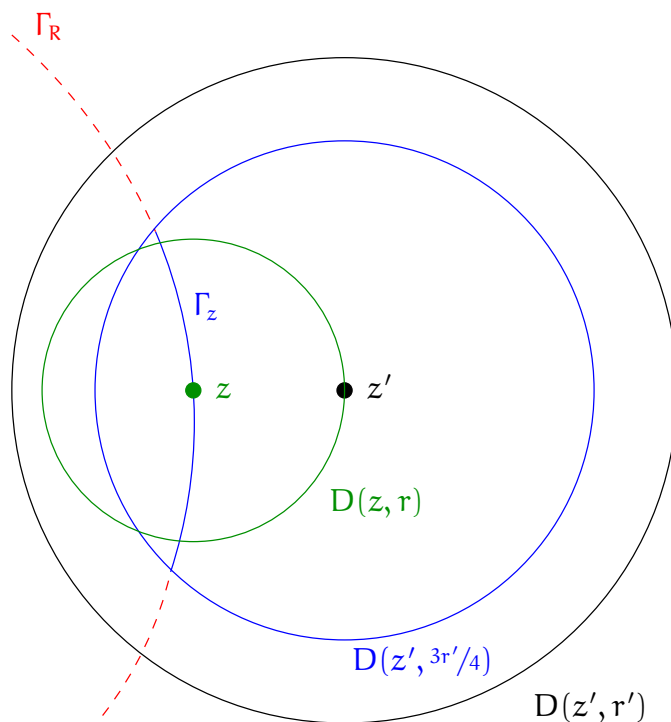
La première donne immédiatement une inégalité de type (\*) : le contrôle de la dérivée normale de  $u_2 - u_1$  en  $z'$  par  $\|df\|$  implique le contrôle de l'intégrale de  $u_2 - u_1$  sur  $\Gamma_z = \Gamma_{\mathbb{R}} \cap B(z, r/2)$  comme précédemment.

Pour la deuxième, nous considérons de plus le disque maximal  $B(z', r')$  où  $u_0 > \max(u_1, u_2)$ . On a quatre dispositions possibles, selon la taille relative des disques et la fonction  $u_1$  égale à  $u_0$  au bord de  $B(z', r')$ .

### 3.4.1 Le second disque est grand : $r' > 2r$

Si  $B(z', r')$  touche  $u_0 = u_1$ , on peut appliquer le lemme de contrôle  $L^1$  à  $u_0 - u_1$ , avec  $\Gamma_z = \Gamma_{\mathbb{R}} \cap B(z', 3r'/4)$ , qui est bien un arc borné par  $B(z', r')$  puisque  $r' < 3R$  dès que  $|z|$  est assez grand. De plus, ce choix de  $\Gamma_z$  assure que  $l(\Gamma_z) \geq \delta r'$  pour  $\delta > 0$  universel : si  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  sort de  $B(z', 3r'/4)$ , on a  $l(\Gamma_z) \geq 2(\frac{3}{4} - \frac{1}{2})r'$  puisque  $z \in B(z', r'/2)$  ; sinon,  $l(\Gamma_z) = 2\pi R$  qui est plus grand que  $r'$ . On a ainsi une inégalité de type (\*) pour  $u_0 - u_1$ , et comme  $u_0 \geq u_2$  sur  $B(z', r')$ , cela contrôle aussi l'intégrale de  $(u_2 - u_1)^+$  sur  $\Gamma_z$ .

Sinon,  $B(z', r')$  rencontre  $u_0 = u_2$  au bord, et le lemme original d'Eremenko donne un contrôle de  $u_0 - u_2$  en  $z'$  par  $Cr'$ , puisque  $u_2$  est harmonique. Comme  $u_2(z') = u_1(z')$ , on a un contrôle de  $u_0 - u_1$  en norme  $L^\infty$ , « proche » de  $z$  par rapport au disque  $B(z', r')$ . Le lemme suivant montre que cela suffit pour conclure avec  $\Gamma_z$  défini comme précédemment.

FIGURE 3.1 – La configuration  $r' > 2r$ 

**Lemme 17** (Contrôle  $L^\infty$  implique contrôle  $L^1$ ). *Il existe  $C > 0$  tel que, pour toute fonction  $v$ , surharmonique et positive dans le disque  $B(z', r')$ , et tout arc de cercle  $\Gamma$  de rayon au moins  $r'/3$  et contenu dans  $B(z', 3r'/4)$  on a :*

$$\oint_{\Gamma} v \leq Cv(z').$$

*Démonstration.* Prenons  $w$  le potentiel de  $\Delta v$  dans le disque intermédiaire  $B(z', 4r'/5)$ . Ainsi, l'intégrale de  $v-w$  sur  $\Gamma$  est bornée par  $K(v-w)(z')$  par Harnack. La contribution de  $w$  à chaque terme est, respectivement,

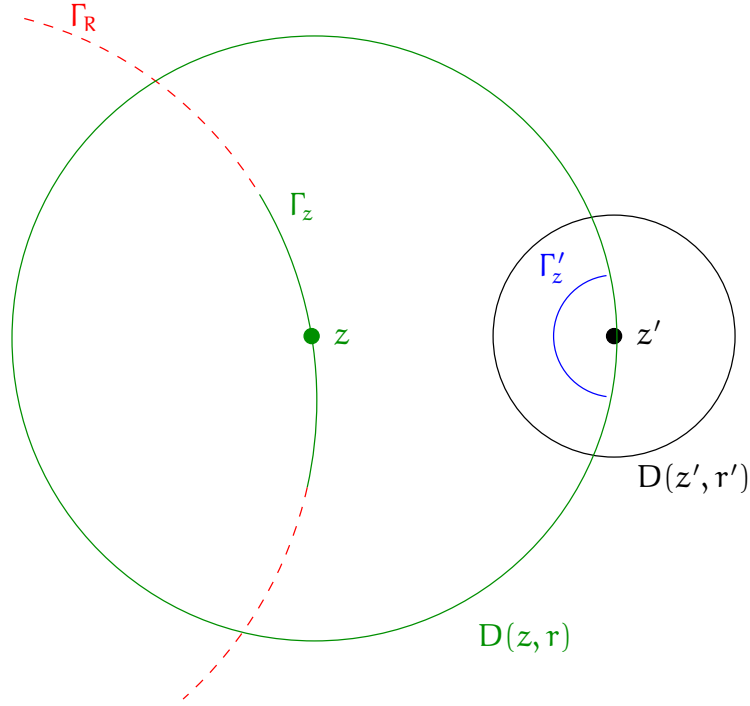
$$\int_{D(4/5)} \left( \oint_{\Gamma} g(\cdot, \xi) \right) \Delta v(\xi) \quad \text{et} \quad \int_{D(4/5)} g(z', \xi) \Delta v(\xi).$$

Encore une fois, d'un côté l'intégrale de  $g(\cdot, \xi)$  est uniformément bornée en  $\xi$ , et de l'autre  $g(z', \xi) > \log(5/4)$ , donc  $\oint_{\Gamma} w \leq K'w(z')$ . Quitte à choisir la plus grande constante, on contrôle l'intégrale de  $v$ .  $\square$

### 3.4.2 Le second disque est petit : $r' \leq 2r$

Voyons que le disque  $B(z', r')$  donne une borne en  $O(r')$  de l'intégrale de  $u_0 - u_1$  sur l'arc de cercle  $\Gamma'_z = S(z', r'/2) \cap D(z, r)$ . Comme  $u_0$  y est plus grand que  $u_2$ , cela implique le même contrôle pour  $u_2 - u_1$ .

Si le disque  $D(z', r')$  touche  $u_0 = u_1$ , cela revient au lemme de contrôle  $L^1$ . Si par contre  $u_0 = u_2$  au bord, alors on a  $(u_0 - u_2)(z') = O(r')$  par le lemme 11. Comme

FIGURE 3.2 – La configuration  $r' \leq 2r$ 

$u_0 - u_1$  est positive sur  $B(z', r')$ , son intégrale sur  $\Gamma'_z$  est majorée par celle sur  $S(z', r'/2)$ , qui par l'inégalité de la moyenne vaut au plus  $u_0(z') - u_1(z') = (u_0 - u_2)(z')$ .

Le contrôle de l'intégrale de  $u_2 - u_1$  sur  $\Gamma'_z$ , et le fait que  $r' \leq 2r$ , permet à son tour d'estimer l'intégrale de  $u_2 - u_1$  sur  $\Gamma_z$  avec une variante de transfert du contrôle  $L^1$  (lemme 15), où l'on remplace la dérivée en  $z'$  par l'intégrale sur un arc proche de  $z'$  :

**Lemme 18** (Transfert de contrôle  $L^1$ ). *Soit  $v$  une fonction surharmonique sur le disque  $D(z, r)$ , positive à l'intérieur. Soient  $\Gamma$  un arc de cercle de rayon au moins  $r/2$ , contenu dans  $D(z, 2r/3)$ ,  $0 < \rho \leq r$  un réel positif et  $\gamma$  l'intersection du cercle  $S(z + r, \rho)$  avec  $D(z, r)$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\oint_{\Gamma} v \leq C \frac{r}{\rho} \oint_{\gamma} v.$$

*Démonstration.* Remarquons pour commencer que la restriction de  $\gamma$  à  $D(z, r - \rho/2)$  est d'angle minoré, donc il suffit de montrer des inégalités de la forme  $\oint_{\Gamma} v \leq C \frac{r}{\rho} v(\zeta)$  pour tout  $\zeta$  dans  $\gamma \cap D(z, r - \rho/2)$ .

On suit le schéma du lemme 15, avec  $w = \int_{D(3r/4)} g(\cdot, \xi) \Delta v(\xi)$  le potentiel de  $\Delta v$  sur un disque intermédiaire. Les constantes dépendant uniquement des comparaisons géométriques seront indiquées par la même lettre  $C$ .

Commençons par le contrôle de  $(v - w)(0)$ . On introduit  $h$  la fonction harmonique qui vaut 0 sur  $S(z, r)$ ,  $m = \min_{D(z, 2r/3)} (v - w)$  sur  $D(z, 2r/3)$  et est harmonique sur l'anneau. Comme  $h \leq v - w$  au bord, et cette dernière est surharmonique, on a



$h \leq v - w$  sur l'anneau. Par ailleurs,

$$h(\zeta) = -\log\left(\frac{|\zeta - z|}{r}\right) \frac{m}{C} > -\log\left(1 - \frac{\rho}{2r}\right) \frac{m}{C} > \frac{\rho}{2r} \frac{m}{C}$$

dès que  $2r/3 < |\zeta - z| < r - \rho/2$ . D'autre part,  $h(\zeta) = m$  dans  $D(z, 2r/3)$ , mais cette région ne rencontre  $\gamma$  que si  $\rho > r/3$ , donc il est vrai que  $h(\zeta) \geq \frac{\rho}{r} m$ , puisque  $\rho \leq r$ . Dans tous les cas,

$$h(\zeta) > \frac{\rho}{r} \frac{m}{C} \quad \text{pour } |\zeta| < r - \rho/2,$$

et comme  $m \geq C(v - w)(0)$  toujours par Harnack, on a bien un contrôle de  $(v - w)(0)$  par  $h(\zeta)$  sous la forme voulue.

D'autre part, la fonction de Green  $g(\zeta, \xi)$  pour  $\zeta \in \gamma \cap B(z, r - \rho/2)$  et  $\xi \in D(z, 3r/4)$  est minorée par  $g(r - \rho/2, -3r/4) > \frac{1}{7} \frac{\rho/2}{r}$ , donc pour tout  $\zeta$  tel que  $|\zeta - z| < r - \rho/2$  on a :

$$w(\zeta) = \int_{D(z, 3r/4)} g(\zeta, \xi) \Delta v(\xi) \geq \int_{D(z, 3r/4)} \frac{1}{C} \frac{\rho}{r} \Delta v(\xi).$$

Comme précédemment, on estime  $\oint_{\Gamma} w$  à l'aide du contrôle  $L^1$  des fonctions de Green donné par le lemme 16. Ainsi :

$$\oint_{\Gamma} w = \int_{D(z, 3r/4)} \Delta v(\xi) \oint_{\Gamma} g(\cdot, \xi) \leq \int_{D(z, 3r/4)} \Delta v(\xi) C.$$

Ces deux inégalités donnent bien  $\oint_{\Gamma} w \leq C \frac{r}{\rho} w(\zeta)$  pour tout  $\zeta$  dans  $\gamma \cap D(z, r - \rho/2)$ .  $\square$

### 3.5 Le cas général

On procède par récurrence sur la dimension. On peut toujours supposer que l'image de  $f$  n'est incluse dans aucun hyperplan : si  $f$  dégénère, alors on applique le résultat en dimension plus petite, qui donne un ordre de croissance au plus égal à un.

Remarquons que les seules propriétés en jeu pour le résultat de  $\mathbf{P}^2$  étaient que  $u_1$  était sousharmonique, que  $u_2$  était harmonique, que  $u_0$  était harmonique lorsqu'elle dominait un disque ; et que  $u_i = u_j = \max(u_0, u_1, u_2)$  impliquait le contrôle  $|\nabla(u_i - u_j)| = O(1)$ . Insistons aussi sur le fait que l'on n'a jamais fait intervenir un disque dominé par  $u_1$ .

Pour mettre ces caractéristiques en évidence, les fonctions seront :

- $u$ , la fonction dont on calcule l'impact, anciennement  $u_1$  ;
- $v$ , l'autre fonction sousharmonique,  $u_0$  ;
- $h_k$ , les fonctions harmoniques provenant des coordonnées qui ne s'annulent pas.

On suppose par récurrence que l'on a montré que

$$\oint_{\mathbb{R}} t \leq \oint_{\mathbb{R}} u + O(R)$$

où l'on a  $n$  fonctions harmoniques  $h_i$  en plus de  $u$  et  $v$  dans la définition de  $t = \max(u, v, h_1, \dots, h_n)$ , et on contrôle la différence des gradients lorsque deux fonctions sont égales à  $t$ . Voyons comment passer au cas de  $n + 1$  fonctions harmoniques.

En prenant  $U = \max(u, h_{n+1})$ , l'ensemble  $(U, h_1, \dots, h_n, v)$  satisfait bien sûr les conditions d'harmonicité. C'est aussi le cas pour le contrôle du gradient. Lors d'une triple égalité  $u = \varphi = h_{n+1}$  au bord d'un disque où  $\varphi > U$ , les lieux  $u = \varphi$  et  $\varphi = h_{n+1}$  au voisinage du point d'égalité sont des courbes analytiques tangentes extérieurement au cercle. Alors, le gradient (vers l'intérieur du disque) de  $\varphi - U$  est majoré par ceux de  $\varphi - u$  et de  $\varphi - h_{n+1}$ , qui ont la même direction et sont à leur tour contrôlés par  $\|df\|$ .

Appliquant le même raisonnement pour  $U = \max(u, h_k)$  pour tous les  $k$  on a

$$(n+1) \oint_{\mathbb{R}} t - O(R) \leq \oint_{\mathbb{R}} \sum_{1 \leq k \leq n+1} \max(u, h_k) = \oint_{\mathbb{R}} \sum_{1 \leq j \leq n+1} \max(u, H_j),$$

où  $H_j(z)$  est la  $j$ -ème plus grande valeur parmi les  $h_k(z)$ . Mais  $\max(u, H_j) \leq t$ , donc

$$\oint_{\mathbb{R}} t \leq \oint_{\mathbb{R}} \max(u, H_{n+1}) + O(R).$$

Il reste à voir que cette dernière intégrale est à  $O(R)$  de  $\oint_{\mathbb{R}} u$ . On suit les idées utilisées pour le cas de  $\mathbb{P}^2$ .

### 3.5.1 Construction d'une chaîne de disques

Soit alors un point  $z = z_1 \in \Gamma_{\mathbb{R}}$  tel que  $u(z_1) < H_{n+1}(z_1)$ . Si  $h_i(z_1) = H_1(z_1)$  est une fonction harmonique atteignant la plus grande valeur des  $h_k$  en  $z_1$ , on choisit  $\varphi_1 \equiv h_i$ . On définit ainsi le premier disque de la chaîne comme  $D_1 = D(z_1, r_1)$ , maximal pour  $u < \varphi_1$ .

Au point d'égalité,  $z_2$ , dans le bord, il peut arriver 3 situations.

Premièrement, on pourrait avoir  $u = \varphi_1 = t$ . La chaîne de disques se termine en  $D_1$ .

Ensuite, il se pourrait que  $u = \varphi_1 = t^* < v$ . On introduit alors le  $v$ -disque  $D_v = D(z_2, r_v)$  maximal pour  $v > t^*$ . Cela arrête aussi la chaîne.

Sinon, on a  $u = \varphi_1 < t^*$  en  $z_2$ , et on définit  $\varphi_2$  comme une plus grande fonction harmonique en ce point. On pose alors  $D_2 = D(z_2, r_2)$  le disque maximal pour  $\varphi_2 > \max(u, \varphi_1)$ . Au point  $z_3$  de son bord où il y a égalité, on applique la même analyse.

On produit de cette façon une chaîne de disques  $D_i = D(z_i, r_i)$  et fonctions  $\varphi_i$  qui dominant  $\max(u, \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})$  à l'intérieur de  $D_i$  et sont égales à  $H_1$  au centre.

Observons que, dans tous les cas, lorsque la chaîne s'arrête, on obtient un contrôle du gradient de la différence de deux fonctions au bord du dernier disque. Cela donne alors un contrôle des intégrales sur des arcs de cercle comparables à ce disque.

### 3.5.2 Propagation à travers la chaîne

Par le choix des  $\varphi_i$ , la suite de disques est décroissante tant qu'on a uniquement  $u$  et les  $\varphi_i$  qui interviennent. On cherche alors à appliquer le lemme de propagation  $L^1$

pour ramener le contrôle à la fonction  $\varphi_1 - u$  sur  $D_1$ , puisque  $\oint (H_{n+1} - u)^+ \leq \oint \varphi - u$  sur un arc borné par  $D_1$ . Voyons comment cela se fait.

Supposons que sur le disque  $D_{j+1}$  on contrôle toutes les intégrales de  $\varphi_{j+1} - \psi_{j+1}$  sur tous les arcs  $\gamma$  bornés par  $D_{j+1}$ , où  $\psi_{j+1}$  est soit une fonction harmonique  $\varphi_i$  pour  $i < j + 1$ , soit  $u$ .

Si  $\psi_{j+1}$  n'est pas la fonction  $\varphi_j$ , on pose  $\psi_j = \psi_{j+1}$ . Le contrôle de  $\varphi_j - \psi_j$  sur l'arc  $\gamma_{j+1} = S(z_{j+1}, r_{j+1}/2) \cap D_j$  découle de  $\varphi_j < \varphi_{j+1}$  sur  $D_{j+1}$ . Comme  $r_{j+1} < r_j$ , on a  $r(\gamma_{j+1}) < r_j$ , le lemme de transfert  $L^1$  s'applique et donne le contrôle de toutes les intégrales de  $\varphi_j - \psi_j$  sur les arcs bornés par  $D_j$ , comme on avait commencé.

Sinon, on a  $\psi_{j+1} = \varphi_j$ , et alors il existe une fonction  $\psi_j$  qui coïncide avec  $\varphi_j$  en  $z_j$ . Comme  $\psi_{j+1}$  est harmonique, le contrôle  $L^1$  des intégrales de  $\varphi_{j+1} - \psi_{j+1}$  est équivalent à celui de  $\varphi_{j+1} - \psi_{j+1}$  en  $z_{j+1}$ , donc de  $(\varphi_{j+1} - \psi_j)(z_{j+1})$ . On peut avoir  $\psi_j$  harmonique ou susharmonique, mais dans tous les cas cela implique le contrôle de l'intégrale de  $\varphi_{j+1} - \psi_j$  sur l'arc  $\gamma_{j+1} = S(z_{j+1}, r_{j+1}/2) \cap D_j$ , et on finit comme précédemment.

### 3.5.3 Étude du $\nu$ -disque

La chaîne pourrait s'arrêter seulement au  $\nu$ -disque. Si  $D_\nu$  est de taille comparable au dernier disque  $D_j$ , disons de rayon inférieur à  $3r_j$ , le contrôle  $C^1$  implique une borne pour les intégrales sur  $\gamma_\nu = S(z_\nu, r_\nu/3) \cap D_j$ , qui est de rayon plus petit que  $r_j$ . Cela permet comme auparavant de démarrer l'argument de propagation  $L^1$ .

Il se peut que le disque  $D_\nu$  soit beaucoup plus grand que les disques précédents. Il faut alors trouver un disque de taille équivalente pour pouvoir transporter sur lui le contrôle  $L^1$  obtenu par le caractère Brody de  $f$ .

Commençons par le cas extrême, lorsque  $D_\nu$  contient  $2D_i$  pour tous les  $i$ . Comme la chaîne est décroissante, on voit que la distance entre  $z_\nu$  et  $z_1$  est au plus  $nr_1$ . La condition d'inclusion donne  $2r_1 < r_\nu - |z_1 - z_\nu|$ , donc  $|z_1 - z_\nu| \leq \frac{n}{n+2}r_\nu$ . Changeant la constante que donne le contrôle du gradient, on a un contrôle de  $\nu - \psi_\nu$  sur  $\frac{n+1}{n+2}D_\nu$  pour une certaine fonction  $\psi_\nu$  égale à  $\nu$  au bord de  $D_\nu$ .

Si  $\psi_\nu$  était la fonction  $u$ , on n'a que le contrôle  $L^1$ , mais cela suffit car l'arc  $\Gamma = \Gamma_R \cap (\frac{n+1}{n+2}D_\nu)$  est borné par  $D_\nu$  puisque  $r_1 \leq 2R$  et  $r_\nu \leq 2(R + nr_1)$ .

Si  $\psi_\nu = \varphi_i$  pour une fonction harmonique, alors on contrôle  $(\nu - \varphi_i)(z_1)$  directement. Comme  $\varphi_1(z_1) \geq \varphi_i(z_1)$ , l'inégalité de Harnack donne un contrôle de  $\nu - \varphi_1(z_1)$  en  $z_2$ , qui est dans  $\frac{n+1}{n+2}D_\nu$ . Mais cela est un contrôle de  $\nu - u$ , puisque  $u(z_2) = \varphi_1(z_2)$  par construction, et on peut conclure par le lemme de transfert  $L^\infty$ , quitte à augmenter un peu le disque, en choisissant par exemple  $\frac{2n+3}{2n+4}D_\nu$ .

Si  $D_\nu$  ne contient pas tous les doubles des disques, il suffit d'appliquer ce raisonnement au dernier disque  $D_i$  dont le double est inclus dans  $D_\nu$ . Comme  $r_\nu \geq 3r_j$ , et on garde l'inégalité  $|z_j - z_\nu| \leq \frac{n}{n+2}r_\nu$ . Une fois le contrôle obtenu pour ce  $D_i$ , on déduit le contrôle sur  $D_1$  par l'argument de propagation que l'on a établi.

### 3.5.4 Récapitulation

Le mécanisme sous-jacent à la chaîne des disques peut être condensé en la proposition suivante.

**Proposition 19.** *Soient  $(u, v, h_1, \dots, h_n)$  comme auparavant. Alors pour tout  $z$  dans  $u < t = \max(u, v, h_1, \dots, h_n)$ , il existe une fonction  $\varphi$  parmi  $v$  et les  $h_i$  et un disque  $D_\varphi = D(z, r_\varphi)$  où  $\varphi > u$  et on a le contrôle*

$$\oint_{\gamma} \varphi - u \leq O(r(\gamma))$$

pour tout arc de cercle  $\gamma$  borné par  $D_\varphi$ .

Observons que cela suffit, toujours par un argument de recouvrement, à montrer que  $\oint_{\mathbb{R}} \max(u, H_{n+1}) \leq \oint_{\mathbb{R}} u + O(R)$ .

*Démonstration.* Le cas où il n'y a pas de fonction harmonique est celui de  $\mathbb{P}^1$ ; on continue par récurrence.

Si  $u(z) > h_i(z)$ , on pose  $U = \max(u, h_i)$  et on obtient par récurrence un contrôle de  $\oint_{\gamma} \varphi - U$  sur les arcs  $\gamma$  bornés par  $D_\varphi$ . D'après le lemme d'élimination harmonique suivant, cela implique un contrôle de  $\oint_{\gamma} \varphi - u$ .

**Lemme 20** (Élimination d'une fonction harmonique). *Soient  $w$  une fonction sur-harmonique et  $h$  une fonction harmonique, toutes les deux positives sur un disque  $D$  et telles que  $w \leq h$  au centre de  $D$ . Supposons que  $\oint_{\Gamma} \min(w, h) = O(r(\Gamma))$  pour un arc  $\Gamma$  comparable à  $D$ . Alors  $\oint_{\gamma} w = O(r(\gamma))$  pour tous les arcs  $\gamma$  bornés par  $D$ .*

Sinon, on considère le disque maximal pour  $u < h_{n+1}$ . Si son bord touche  $u = h_{n+1} = t$ , on prend  $\varphi = h_{n+1}$  car on contrôlera  $|\nabla(u - h_{n+1})|$ . Sinon, on applique la récurrence en  $z'$  avec la fonction  $U = \max(u, h_{n+1})$ , et on obtient encore une fois un contrôle de  $\oint_{\gamma'} \varphi' - U$ . Toujours par le lemme d'élimination, cela donne aussi  $\oint_{\gamma'} \varphi' - u = O(r(\gamma'))$ . Si le nouveau disque est grand par rapport au premier, alors il contient un disque centré en  $z$  et on prend les estimées sur  $\gamma'$ . Si le nouveau disque est petit, le contrôle des intégrales de  $\varphi' - u$  sur  $\gamma'$  implique celui de  $h_{n+1} - u$  et on conclut par le lemme de transfert, en choisissant  $\varphi = h_{n+1}$ .  $\square$

*Preuve du lemme d'élimination.* Le contrôle de l'intégrale sur  $\Gamma$  montre que le minimum de  $w$  et  $h$  est un  $O(r(\Gamma)) = O(r(D))$  car les rayons sont comparables et l'angle de  $\Gamma$ , minoré. Si cela arrive en un point où  $w \leq h$ , on a une borne pour  $w$  à distance minorée du bord de  $D$ , et le lemme de transfert  $L^\infty$  vers  $L^1$  permet de conclure.

Sinon, cela arrive en un point où  $h \leq w$ , mais comme  $h$  est harmonique on obtient un contrôle  $O(r(\Gamma))$  au centre du disque par l'inégalité de Harnack, donc il en est de même pour  $w$ , et on conclut comme ci-dessus.  $\square$

Le lemme d'élimination résume ainsi dans le caractère *comparable* de  $\Gamma$  les deux éléments qui ont permis d'établir le transfert construit explicitement avec des arcs de rayon moitié : la majoration du rayon de l'arc et la position centrée par rapport au disque  $D$ , qui impliquaient le contrôle  $L^\infty$  d'une fonction harmonique à partir du contrôle de l'intégrale sur un arc comparable.

### 3.6 Courbes de Brody d'énergie positive

Si l'on s'affranchit de l'hypothèse d'évitement d'hyperplans, on peut donner une version avec une erreur plus large.

**Théorème 21.** *Si  $f$  est une courbe de Brody dans  $\mathbf{P}^n$  et  $N_i$  les fonctions de comptage par rapport aux hyperplans  $H_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , supposés en position générale et ne contenant pas l'image de  $f$ , alors*

$$(q - (n - 1))T(R) \leq \sum N_i(R) + o(R^2).$$

Le terme  $(n - 1)$  est naturel en vue de l'existence (et même l'abondance) des courbes de Brody évitant exactement  $n - 1$  hyperplans et issues de courbes bipériodiques ; on conjecture que le même résultat est vrai pour une erreur  $O(R)$ .

Cela permet de limiter les défauts que peut avoir une courbe de Brody d'énergie positive. Rappelons qu'une courbe de Brody est d'énergie positive si  $\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{T(R)}{R^2} > 0$ .

**Corollaire.** *Si  $f$  est une courbe de Brody d'énergie positive, et  $\delta_i$  les défauts aux hyperplans  $H_i$  en position générale et ne contenant pas l'image de  $f$ , alors*

$$\sum_{i=0}^q \delta_i \leq n - 1.$$

*Démonstration du théorème.* Suivant Eremenko [Ere10], et par l'absurde, on choisit une suite  $R_n \rightarrow \infty$  telle que  $(q - (n - 1))T(R) - \sum N_i(R) \geq \varepsilon R^2$ . On pose

$$u(z) = \frac{1}{2} \log \left( \sum_{i=1}^q |f_i|^2 \right)$$

$$u_I(z) = \max_{i \in I} u_i(z) \quad \text{pour } I \text{ un sous-ensemble de } \{1, 2, \dots, q\}.$$

Remarquons que, par position générale, on a  $u = u_I + O(1)$  lorsque  $I$  correspond à au moins  $n + 1$  hyperplans.

Soit  $h_n$  la plus petite majorante harmonique de  $u$  sur  $2R_n$ . La condition de Brody implique que  $h_n(0) = \oint_{2R_n} u \leq CR_n^2$ . Avec cela, on peut introduire les fonctions suivantes sur  $D(2)$  :

$$\begin{aligned} v_i(z) &= \lim \frac{u_i(R_n z) - h_n(R_n z)}{R_n^2} \\ v_I(z) &= \lim \frac{u_I(R_n z) - h_n(R_n z)}{R_n^2} \\ v(z) &= \lim \frac{u(R_n z) - h_n(R_n z)}{R_n^2} \end{aligned}$$

quitte à extraire une sous suite pour que toutes les limites existent dans  $L_{\text{loc}}^1$ , ce que l'on supposera par la suite quand on écrit  $r \rightarrow \infty$  pour ne pas alourdir les notations. On observe que l'on peut supposer que  $v(0) = \lim_k \frac{(u-h_n)(0)}{R_k^2} = -\lim_k \frac{h_n(0)}{R_k^2}$  existe, et alors  $v_i(0) = v(0)$ .

**Lemme 22.** *On a  $v_I(z) = v(z)$  dès que  $I$  correspond à au moins  $n$  hyperplans.*

*Démonstration.* Soit  $J$  contenant  $I$  et correspondant à au moins  $n+1$  hyperplans. Le théorème 12, comparant  $t = u_J$  et  $t^* = u_I$  donne

$$\oint_{J_R} (u - u_I) \leq O(R)$$

puisque  $u = u_J + O(1)$ . Mieux encore, on a des estimées décentrées :

$$\oint_{S(p,r)} (u - u_I) \leq O(|p| \log(|p|/r)) + O(r).$$

Cela s'obtient soit parce que  $S(p, 2r)$  est inclus dans le disque maximal  $D(p, r_p)$  pour  $u_J - u_I$ , et alors le terme dominant est en  $r_p \log \frac{r_p}{r}$  pour le contrôle des fonctions de Green, et  $r_p \leq O(|p|)$ ; soit parce qu'on aura des disques sur chaque  $z \in S(p, r)$  de rayon inférieur ou égal à  $3r$  ce qui donne le terme  $O(r)$  par le même argument de recouvrement que dans le cas centré.

Soit  $\mathcal{C}$  la couronne  $D(\rho) \setminus D(\rho/2)$ . Par la sousharmonicité de  $u$ , donc de  $v$  :

$$v(z) \leq \oint_{\mathcal{C}} v(z + \zeta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{\mathcal{C}} \frac{u(rz + r\zeta)}{r^2}.$$

En remplaçant les estimées intégrales comparant  $u$  et  $u_I$  sur les cercles de rayon  $r^{\rho/2}$  jusqu'à  $r\rho$ ,

$$v(z) \leq \lim \oint_{\mathcal{C}} \frac{u_I(rz + r\zeta)}{r^2} + \oint_{\rho/2}^{\rho} \frac{O(|rz| + rt + |rz| \log(|z|/t))}{r^2} t dt$$

Mais la dernière intégrale est limitée par

$$\frac{O(|rz|(1 + \log |z|))}{r^2} + \frac{O(r\rho - |rz| \frac{\log \rho}{\rho})}{r^2}$$

qui, pour tous  $z \in \mathbb{C}$  et  $\rho > 0$ , tend vers zéro lorsque  $r \rightarrow \infty$ . En même temps, la première intégrale converge vers  $\oint_{\mathcal{C}} v_1(z + \zeta)$ , donc pour tout  $\rho > 0$ , on a  $v(z) \leq \oint_{\mathcal{C}} v_1(z + \zeta)$ . Par la semi-continuité de  $v_1(z)$ , la limite pour  $\rho \rightarrow 0$  de cette dernière expression est  $v_1(z)$ .  $\square$

Cela montre que, en chaque point  $z$ , il y a au plus  $n - 1$  fonctions  $v_i$  qui sont différentes de  $v$ . Supposons donc que  $v_1, \dots, v_j$  soient égales à  $v$ , où  $q - j \leq n - 1$ .

Le caractère Brody de  $f$  et la définition de  $v$  donnent l'absolue continuité de  $\Delta v$  par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$|\Delta v(D(z, t))| \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{|\Delta u(D(rz, rt))|}{r^2} \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{(rt)^2 C \|df\|}{r^2} = C t^2,$$

puisque  $|\Delta u|$  est, à une constante de normalisation près, égal à  $\|df\|$ . Comme en plus  $v \geq v_i$  partout, on verra que cela donne  $\Delta(v - v_i)(z) = 0$  pour  $1 \leq i \leq j$ . Alors

$$\sum_{1 \leq i \leq q} \Delta(v - v_i)(z) = \sum_{j < i \leq q} \Delta(v - v_i)(z) \geq (q - j)\Delta v(z) \geq (n - 1)\Delta v(z)$$

car les  $v_i$  sont aussi susharmoniques.

Par la formule de Jensen, on a enfin

$$\begin{aligned} (n - 1) \left( \oint_1 v - v(0) \right) &= (n - 1) \int_0^1 -\Delta v(tD) \frac{dt}{t} \\ &\geq \int_0^1 \sum_{i=1}^q -\Delta(v - v_i)(tD) \frac{dt}{t} = \sum_{i=1}^q \oint_1 (v - v_i). \end{aligned}$$

Lorsque l'on revient à la définition de  $v$  et  $v_i$ , cela exhibe une suite  $R_k$  telle que

$$(n - 1) \lim_k \left( \oint_{R_k} \frac{u - h_k + h_k(0)}{R_k^2} \right) \geq \lim_k \sum_{i=1}^q \oint_{R_k} \frac{u - u_i}{R_k^2} = \lim_k \sum_{i=1}^q \frac{T(R_k) - N_i(R_k)}{R_k^2}.$$

Or,  $h_n$  est harmonique, donc  $\oint_{R_k} h_n = h_n(0)$ , et le terme de gauche est bien

$$(n - 1) \lim_k \oint_{R_k} \frac{u}{R_k^2} = (n - 1) \lim_k \frac{T(R_k)}{R_k^2}. \quad \square$$

Montrons enfin le point clé de cette renormalisation, c'est-à-dire le résultat, local, d'annulation de la masse avec une condition de régularité, qui s'inspire d'une construction due à Eremenko et Sodin [ES92, Lemma 2].

**Lemme 23** (Régularité implique nulité). *Soit  $w = f - g$  une différence de deux fonctions surharmoniques. On suppose que  $w \geq 0$  sur le disque fermé  $D$ , et que la masse négative  $\mu^- = \Delta g$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors la mesure  $\Delta w$  ne charge pas la région  $(w = 0) \cap D/4$ .*

*Démonstration.* On note  $\mu = \Delta w = \Delta f - \Delta g = \mu^+ - \mu^-$ .

L'hypothèse sur  $\mu^-$ , avec la régularisation du noyau de Green, assure que  $g$  est continue. L'ensemble  $K = (w = 0) \cap D/4$  est donc un fermé de  $D$ , puisque  $f$  est surharmonique et  $0 = \inf w$ .

Remplaçons  $w$  par un prolongement  $\delta$ -surharmonique  $\tilde{w}$  sur la couronne  $D \setminus D/2$ , gardant  $\tilde{w} \geq 0$  à l'intérieur et obtenant  $\tilde{w} = 0$  au bord extérieur. On est ainsi réduit au cas où la fonction est nulle au bord du disque, et par linéarité on peut travailler sur les composantes connexes de  $D \setminus K$ . Soit  $\mathcal{D}$  une telle composante et  $\Gamma$  son bord. Comme  $G(z, \xi) = 0$  sur les points réguliers de la frontière  $\Gamma$ , et que  $f = g$  sur  $\Gamma$ , la représentation

$$w(z) = \int_{\mathcal{D}} G(z, \xi) d\mu(\xi)$$

est valide pour tout  $z \in \mathbb{C}$  en dehors d'un ensemble polaire du bord de  $\mathcal{D}$ . Comme  $G(z, \xi) = -\log|z - \xi| - \int_{\Gamma} \log|z - \zeta| \omega_{\mathcal{D}}(\xi, d\zeta)$ , on déduit que la masse de Riesz de  $w$  sur  $\Gamma \cap K$  vaut

$$\nu(E) = \int_{\mathcal{D}} \omega_{\mathcal{D}}(\xi, E \cap K) d\tilde{\mu}(\xi).$$

Or, le support de la mesure  $\omega_{\mathcal{D}}(\xi, \cdot)$  ne dépend pas de  $\xi$ , et est de mesure de Lebesgue nulle [Øks72]. Il en est de même pour  $\nu$ , qui est alors singulière par rapport à  $\mu^+$ .

Revenant à la décomposition de  $\mu$  comme la différence de mesures positives  $\mu^+ - \mu^-$ , on obtient

$$\nu(E) = \mu^+(E \cap K) - \mu^-(E \cap K).$$

Choisissant  $E = \text{supp}(\nu)$ , l'hypothèse d'absolue continuité de  $\mu^-$  implique que le dernier terme à droite est nul. Le lemme de Grishin [Gri83] assure que  $\nu$  est négative, donc la seule possibilité est que les trois termes  $\nu(E)$ ,  $\mu^+(E \cap K)$  et  $\mu^-(E \cap K)$  soient nuls, donc en particulier  $\mu(K) = \nu(K) = 0$ .  $\square$





# Bibliographie

- [BD01] François Berteloot and Julien Duval. Sur l'hyperbolicité de certains complémentaires. *L'Enseignement Mathématique*, 47(3/4):253–268, 2001.
- [BE10] Matthew Barrett and Alexandre Eremenko. Generalization of a theorem of Clunie and Hayman. *Arxiv preprint arXiv:1011.3907*, 2010.
- [Bro78] Robert Brody. Compact manifolds and hyperbolicity. *Transactions of the American Mathematical Society*, 235:213–219, 1978.
- [CH65] James G. Clunie and Walter Kurt Hayman. The spherical derivative of integral and meromorphic functions. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 40(1):117–148, 1965.
- [Don96] Simon Kirwan Donaldson. Symplectic submanifolds and almost-complex geometry. *Journal of Differential Geometry*, 44(4):666–705, 1996.
- [Ere10] Alexandre Eremenko. Brody curves omitting hyperplanes. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*, 35(2):565–570, 2010.
- [ES92] Alexandre È. Eremenko and Mikhail L. Sodin. The value distribution of meromorphic functions and meromorphic curves from the point of view of potential theory. *St. Petersburg Math. J.*, 3(1):109–136, 1992.
- [GH78] Phillip Augustus Griffiths and Joseph Daniel Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley, 1978.
- [Gre72] Mark Lee Green. Holomorphic maps into complex projective space omitting hyperplanes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 169, 1972.
- [Gre75] Mark Lee Green. Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties. *American Journal of Mathematics*, 97(1):43–75, 1975.
- [Gri83] Anatolii Filippovich Grishin. Sets of regular growth of entire functions (in russian). *Teor. Funktsii, Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 40:36–47, 1983.
- [Gro99] Misha Gromov. Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps: I. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 2(4):323–415, 1999.
- [Hay64] Walter Kurt Hayman. *Meromorphic Functions*. Clarendon press, Oxford, 1964.
- [Kob70] Shoshichi Kobayashi. *Hyperbolic complex spaces*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin, 1970.

- [Kod66] Kunihiro Kodaira. On the structure of compact complex analytic surfaces: II. *American Journal of Mathematics*, 88(3):682–721, July 1966.
- [Lat11] Samuel Lattès. Sur les formes réduites des transformations ponctuelles à deux variables. *CR Acad. Sci. Paris*, 152:1566–1569, 1911.
- [LW00] Elon Lindenstrauss and Benjamin Weiss. Mean topological dimension. *Israel Journal of Mathematics*, 115:1–24, 2000.
- [Mat95] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 1995.
- [Nev29] Rolf Nevanlinna. *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*. Gauthier-Villars, Paris, 1929.
- [Øks72] Bernt Karsten Øksendal. Null sets for measures orthogonal to  $R(X)$ . *American Journal of Mathematics*, 94:331–342, 1972.
- [Tsu08] Masaki Tsukamoto. Moduli space of brody curves, energy and mean dimension. *Nagoya Mathematical Journal*, 192:27–58, 2008.
- [Tsu09] Masaki Tsukamoto. Deformation of brody curves and mean dimension. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 29(05):1641–1657, 2009.