

Combinatoire bijective et énumérative des cartes pointées sur une surface

Alain Giorgetti

▶ **To cite this version:**

Alain Giorgetti. Combinatoire bijective et énumérative des cartes pointées sur une surface. Mathématique discrète [cs.DM]. Université de Marne la Vallée, 1998. Français. NNT : . tel-00724977

HAL Id: tel-00724977
https://theses.hal.science/tel-00724977

Submitted on 23 Aug 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à
l'Université de Marne-la-Vallée
par

Alain Giorgetti

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MARNE-LA-VALLÉE

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE FONDAMENTALE

Combinatoire bijective et énumérative des cartes pointées sur une surface

Soutenue le 10 décembre 1998 devant le jury composé de :

MM.	Robert Cori	*Président et rapporteur*
	Alexandre Zvonkine	*Rapporteur*
	Jean-Yves Thibon	*Examinateur*
	Paul Zimmermann	*Examinateur*
	Didier Arquès	*Directeur de thèse*

RÉSUMÉ :

Une carte est le plongement d'un graphe dans une surface, à un homéomorphisme près. Ainsi, une carte est un objet topologique énumérable, en fonction du nombre de ses sommets, de ses arêtes et de ses faces. Les cartes admettent des symétries internes qui rendent leur énumération difficile. On n'envisage dans ce travail que l'énumération des cartes pointées, le pointage supprimant toutes les symétries.

Le nombre exact de cartes pointées sur une surface donnée n'est connu que pour les surfaces de petit genre, comme la sphère (genre 0), le tore ou le plan projectif (genre 1). En effet, la complexité des méthodes de calcul de ces nombres augmente rapidement avec le genre des surfaces.

Un travail important de cette thèse a été de convertir l'une de ces méthodes de calcul en une preuve de l'existence d'une structure commune à toutes les séries génératrices de cartes pointées de genre non nul.

Pour chaque surface orientable, on réduit le problème à la détermination d'un polynôme, dont le degré est majoré par une fonction simple du genre de la surface. Un résultat analogue est obtenu pour les cartes pointées sur les surfaces non orientables.

Des conséquences pratiques et une implantation logicielle de tous ces résultats sont décrites. De nouvelles formules explicites d'énumération sont données.

Indépendamment, une bijection géométrique nouvelle est exposée, entre certaines cartes 2-coloriables et les partitions de polygones, énumérées par les nombres de Schröder.

MOTS CLÉS : combinatoire, énumération, graphe, carte, surface topologique, série formelle.

DISCIPLINE : Informatique fondamentale

INTITULÉ ET ADRESSE DU LABORATOIRE :

Équipe de Synthèse d'Images

Institut Gaspard Monge

Université de Marne-la-Vallée

5, boulevard Descartes

Champs-sur-Marne

77454 Marne-la-Vallée Cedex 2

France

Remerciements

Je suis reconnaissant à M. Didier Arquès d'avoir dirigé mon travail, avec une compétence et un sérieux qui ont contribué de façon essentielle à l'élaboration de cette thèse. Ses conseils m'ont été précieux tout au long de mes recherches. Ses suggestions se sont toujours révélées judicieuses et ses encouragements m'ont souvent soutenu dans des moments difficiles. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude.

Merci à MM. les Rapporteurs, Robert Cori et Alexandre Zvonkine, pour le temps qu'ils ont consacré à l'examen de ce mémoire et leur participation au jury. De même, je remercie vivement, pour leur aide et pour leur participation, les autres membres du jury, MM. Jean-Yves Thibon, Paul Zimmermann et Didier Arquès. Que chacun trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Il m'a été très agréable de travailler avec Jean-François Béraud, dont j'ai apprécié le dynamisme, les idées et l'aide précieuse. Je ne saurai jamais lui rendre la pareille des innombrables services qu'il m'a rendu, lorsque mon éloignement professionnel me privait de moyens informatiques et de documentation. Mes remerciements s'adressent également aux autres membres de l'équipe de recherche en synthèse d'images de l'Institut Gaspard Monge pour leur soutien et leur accueil chaleureux, à chacun de mes passages parmi eux.

Ma gratitude va à l'Université Henri Poincaré, qui, en me recrutant en 1996 comme Professeur Agrégé, m'a apporté tout à la fois un financement, un environnement scientifique humain et des ressources matérielles et de documentation.

Je remercie également M. Michel Cosnard, directeur du LORIA (Laboratoire lOrrain de Recherche en Informatique et ses Applications) et M. Paul Zimmermann, responsable de l'équipe PolKA (Polynômes, Combinatoire et Arithmétique), pour les moyens qu'ils ont mis à ma disposition.

Pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, je tiens à remercier tous les membres de l'équipe de recherche PolKA, qui m'ont fait profiter de leur expérience à travers de nombreux et enrichissants échanges. Merci aussi à tous mes collègues du département informatique de l'Université Henri Poincaré, ainsi que les personnels administratifs des établissements auxquels j'ai successivement appartenu au cours de ces 4 années de recherche.

Table des matières

Partie 1 : Contexte de la thèse

1. LA COMBINATOIRE DES CARTES POINTEES 2

1. Les précurseurs 2
2. Les fondateurs 3
3. Diverses approches 3
4. Contributions de cette thèse 5

2. DEFINITIONS ET NOTATIONS 9

1. Définitions 9
2. Notations 23

Partie 2 : Combinatoire bijective

3. BIJECTION GEOMETRIQUE ENTRE UNE FAMILLE D'HYPERCARTES ET UNE FAMILLE DE POLYGONES 27

1. Introduction 27
2. Définitions 28
3. Énumération des partitions de polygones 29
4. Énumération des hypercartes 31
5. Une bijection géométrique entre P et H 36
6. Conclusion du chapitre 42

Partie 3 : Combinatoire énumérative

4. BIJECTIONS ET EQUATIONS FONCTIONNELLES 45

1. Bijections de décomposition topologique des cartes pointées 45
2. Systèmes d'équations fonctionnelles 58
3. Forme inductive des équations fonctionnelles 62

5. ÉNUMERATION PARAMETRIQUE DES CARTES POINTEES SUR UNE SURFACE 67

1. Théorèmes d'énumération paramétrique 68
2. Énumération paramétrique en nombre d'arêtes 70
3. Apports de ces théorèmes et corollaires 71
4. Plans de démonstration des théorèmes 72

6. DEMONSTRATION DU THEOREME D'ENUMERATION DES CARTES ORIENTABLES 78

1. Forme faible du théorème 5.1 78
2. Nécessité d'étudier les cartes multi-pointées et leurs dérivées 80
3. Forme générale pour les séries de cartes multi-pointées et leurs dérivées 82
4. Méthode de calcul par récurrence de la forme générale des séries $Q_g[n_1,...,n_r]$ 87
5. Démonstration de la proposition 6.1 par récurrence 92

7. DEMONSTRATION DU THEOREME D'ENUMERATION DES CARTES GENERALES 102

1. Forme faible du théorème 5.2 102
2. Nécessité d'étudier les cartes générales multi-pointées et leurs dérivées 104
3. Forme générale pour les séries de cartes multi-pointées et leurs dérivées 106
4. Méthode de calcul par récurrence de la forme générale de $S_\tau[n_1,\ldots,n_r]$ 111
5. Démonstration de la proposition 7.1 par récurrence 114

8. RESULTATS D'ENUMERATION 130

1. Énumération paramétrique explicite 130
2. Utilisation de l'inversion de Lagrange 135
3. Tables numériques pour les cartes non orientables 141

9. CALCUL EFFICACE DES NOMBRES DE CARTES POINTEES 143

1. Équations algébriques 143
2. La forme P-récursive 147
3. Nouvelles méthodes d'énumération 150
4. Conclusion 153

Partie 4 : Outil logiciel de calcul sur les cartes

10. MAP, UNE BOITE A OUTILS POUR LES CARTES 156

1. Installation de la librairie MAP 156
2. Description générale 157
3. Principales fonctions 158
4. Conclusion 172

11. LISTE DES SYMBOLES 173

1. Symboles par ordre alphabétique 173
2. Symboles par catégorie 174

12. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 176

Partie 1

Contexte de la thèse

Avant-propos

Puisqu'on va beaucoup parler de cartes dès cette première partie, il serait bon d'en donner avant tout une idée intuitive.

Considérez une carte de géographie politique de la Terre, avec ses pays et ses frontières entre pays. Puisque la surface terrestre est assimilable à une sphère, la représentation la plus naturelle d'une carte de la Terre est la mappemonde, ou globe terrestre.

Géométriquement, il est possible de dessiner sur une telle sphère une infinité de cartes politiques, et l'Histoire nous en a montré la diversité. C'est parce que la géométrie prend en compte les notions de distance et de superficie. Si l'on essaie de faire abstraction de ces grandeurs, pour ne plus considérer que les positions relatives des pays entre eux, on se rapproche de l'idée topologique de carte. Dans cette vision, les pays peuvent être déformés comme des surfaces élastiques, les frontières peuvent être étirées et contractées à volonté (à ceci près qu'on s'interdit de réduire une ligne frontière à un point ou un pays à sa frontière).

Supposez qu'on apprenne l'existence d'une planète sphérique, sans océan, avec 2 pays et 4 points frontières, reliés entre eux par 4 frontières. Imaginez une allure possible de la carte politique de cette planète. Imaginez ensuite une deuxième topologie possible des lieux, non superposable avec la première, *même par déformations élastiques*. En répétant ce processus sans vous tromper, vous trouverez un nombre fini de cartes politiques *différentes* pour cette planète (93 exactement). Comment obtenir ce nombre plus sûrement, en fonction du nombre de pays, de points et de lignes frontières ?

La partie principale de cette thèse est consacrée à cette question. Elle y apporte de nombreuses réponses. Les cartes y sont définies un peu plus rigoureusement que dans ces premières lignes. La surface de la " planète " sur laquelle elles sont dessinées est quelconque. On commence par la sphère, modèle idéal de la Terre, puis on y perce des trous (comme le tunnel sous la Manche, qui ajoute une frontière entre l'Angleterre et la France). Enfin, on perd le nord, sur des " planètes " non orientables, comme le plan projectif. Les cartes sont comptées en fonction du nombre de pays (les faces), du nombre de lignes frontières (les arêtes) et du nombre de points frontière (les sommets).

Méfions-nous cependant de l'analogie géographique, qui a ses limites. Notamment, dans les cartes que l'on compte ici, un pays ne peut pas être totalement à l'intérieur d'un autre pays (comme le Lesotho, enclave de l'Afrique du Sud). Autre différence : dans nos cartes, un pays peut avoir une frontière avec lui-même.

Par cet avant-propos, j'espère avoir satisfait le lecteur curieux du propos de ce document, dont le discours est, par nécessité de rigueur, un peu plus abstrait. Je prie le lecteur qui ne serait pas familier avec certaines notions admises comme classiques dans cet exposé de bien vouloir m'en excuser.

Chapitre 1

La combinatoire des cartes pointées

1. Les précurseurs

Les cartes trouvent une partie de leurs racines dans la très ancienne théorie des polyèdres. C'est dans ce cadre que L. Euler [Eul58] a énoncé sa célèbre formule

$$s - a + f = 2 \tag{1.1}$$

reliant les nombres de sommets (s), de faces (f) et d'arêtes (a) d'un polyèdre ou d'un graphe planaire connexe. À la même époque, Lhuilier prolongea cette formule en

$$s - a + f = 2 - 2g \tag{1.2}$$

pour le polyèdre à g trous.

La notion de carte répondait au besoin de représenter un graphe sans que ses arêtes ne se croisent, sur une surface qui fut d'abord le plan. D'un point de vue combinatoire, une carte est un graphe dont on a ordonné les arêtes, afin de réduire la complexité de ses symétries internes. Lorsque toutes les arêtes sont ordonnées, l'objet résultant est plongeable dans une surface topologique, ce qui a conduit à la notion de genre d'un graphe.

L'origine du mot " carte " lui-même semble être le célèbre problème dit " des quatre couleurs ". En 1852, Francis Guthrie remarque que 4 couleurs suffisent pour colorier la carte de l'Angleterre, et se demande s'il en est de même pour toutes les cartes. Son frère Frederick en fait part à Augustus De Morgan, qui communique le problème à d'autres mathématiciens. En 1878, le problème revoit le jour, lors d'une rencontre de la London Mathematical Society, lorsque Cayley demande s'il est résolu. L'année suivante, Kempe produit sa "preuve" dans le tout nouveau American Journal of Mathematics. Cette preuve est tenue pour bonne, jusqu'à ce que Heawood y trouve une erreur, en 1890. Il sauve ce qui peut l'être, en limitant à 5 le nombre de couleurs nécessaires pour colorier une carte dessinée sur le plan (carte planaire). Il propose un nombre de couleur minimal pour les cartes sur le tore à g trous, pour g non nul, formule qui est prouvée en 1968. Depuis, le cas planaire (g nul) n'a toujours pas reçu de démonstration simple. En effet, les preuves complètes de ce théorème des 4 couleurs, dues à Appel, Haken et Koch [AH76, AH77, AHK77], nécessitent l'analyse de plus de 2000 configurations et le recours à des calculs d'ordinateur.

2. Les fondateurs

Les premiers travaux portant sur le dénombrement des cartes pointées ont été menés dans les années 60 par W. Tutte et ses étudiants.

2.1. *W. Tutte*

Dans la série des 4 " census papers ", W. Tutte [Tut62a, Tut62b, Tut62c, Tut63] se propose de construire les fondements de l'énumération des cartes planaires. Il énumère successivement diverses familles de cartes, entre lesquelles il établit des relations structurelles. Il parvient ainsi au premier dénombrement des cartes planaires pointées.

En 1968, W. Tutte [Tut68] propose une autre technique, plus directe, d'énumération des cartes planaires pointées. Il propose de décomposer les cartes en supprimant ou en contractant une arête. On associera désormais le nom de W. Tutte à cette méthode et à ses généralisations, qui permettent d'établir des bijections entre familles de cartes, de traduire ces bijections en équations, puis de résoudre algébriquement ces équations.

2.2. *R. Mullin*

Étudiant de W. Tutte, R. Mullin poursuit son investigation des cartes planaires, en considérant les cartes pointées triangulaires dans [Mul64] et [Mul65].

2.3. *W. Brown*

Le propos des " census papers " de W. Tutte est généralisé par W. Brown [Bro66] aux surfaces quelconques, orientables ou non. De nouveau, le dénombrement des cartes est ramené à celui des cartes séparables. Cependant, il n'est pas réalisé effectivement.

Dans de nombreuses situations d'énumération de cartes par des séries génératrices formelles, W. Brown constate la nécessité de disposer d'une condition d'existence d'une racine carrée dans certains anneaux de séries formelles. Il répond à cette question dans [Bro65] et la généralise aux racines de degré supérieur dans [Bro67].

3. Diverses approches

À partir des années 70, l'explosion du sujet d'étude des cartes pointées est telle qu'il n'est pas aisé d'en rendre compte de manière chronologique. Devant la multitude des outils et la variété des points de vue, j'ai opté pour un exposé par approche méthodologique et objectifs poursuivis.

3.4. *Approche bijective*

Initialement, W. Tutte [Tut62a, Tut62b, Tut62c, Tut63] a cherché à mettre en bijection la famille des cartes planaires pointées avec d'autres familles combinatoires, afin de proposer les premières formules d'énumération de cartes.

Cette approche bijective n'est pas qu'un outil d'énumération. Elle a également une vertu explicative, quant à la structure des cartes. La signification topologique des bijections a intéressé D. Arquès [Arq85a, Arq85c] et ses étudiants [AJ93, AB97b, AB98a].

Des bijections avec des familles d'arbres étiquetés ont été proposées par R. Cori et B. Vauquelin [CV81] pour les cartes planaires, puis généralisées aux cartes pointées quelconques par M. Marcus et B. Vauquelin [MV95].

En 1975, R. Cori [Cor75] hisse l'énumération des cartes planaires au niveau non commutatif de la théorie des langages. Il propose alors plusieurs codes pour les cartes et hypercartes planaires pointées, dont l'un par un langage algébrique sur un alphabet infini. De tels codages permettent notamment de générer des cartes aléatoirement ou systématiquement.

Certaines familles de cartes sont énumérées par des séries connues auparavant pour compter telle ou telle famille d'arbres. Il est alors très instructif de chercher une bijection conservant certaines caractéristiques des cartes (sommets, faces, arêtes …) [CJS97, Arq86, AG97b].

3.5. *Approche topologique*

Il s'agit d'étudier l'effet sur les cartes de diverses opérations topologiques.

En utilisant l'opération topologique élémentaire de contraction d'une arête, W. Tutte a pu proposer une équation fonctionnelle pour la série génératrice des cartes planaires pointées et une énumération explicite de ces cartes [Tut68].

À l'aide de la décomposition topologique utilisée par W. Tutte, T. Walsh et A. Lehman [WL72a, WL72b] généralisent aux surfaces orientables quelconques ces équations fonctionnelles, pour compter les cartes en fonction de leur nombre d'arêtes. Des généralisations ultérieures, aux surfaces quelconques et en fonction du nombre de sommets et de faces, ont ensuite été réalisées [BCR88a, AB97a, AG97a].

En 1985, D. Arquès [Arq85b] établit une autre relation fonctionnelle sur les cartes planaires pointées, associée à l'opération topologique de contraction de la face extérieure, en fonction des nombres de sommets et de faces des cartes. Cette équation, conjointement avec celle de type " Tutte ", généralisée à ces deux paramètres, lui permet d'expliciter plus simplement la série dénombrant les cartes planaires pointées en fonction des nombres de sommets et de faces des cartes. En 1993, D. Arquès et I. Jacques [AJ93] donnent une nouvelle équation fonctionnelle pour le genre 1, analogue à celle de [Arq85b] pour le genre 0.

En 1987, D. Arquès [Arq87a] énumère explicitement les cartes de genre 1 en fonction des nombres de sommets et de faces, en résolvant le système composé d'une équation généralisant celle de W. Tutte au genre 1 et d'une équation pour les cartes planaires doublement pointées.

3.6. *Approche asymptotique*

À partir de 1986, E. Bender étudie l'énumération asymptotique des cartes pointées. Avec E. Canfield, il décrit [BC91] une méthode générale de résolution des équations fonctionnelles de type " Tutte ". Cette méthode, appliquée aux cartes pointées comptées selon leur nombre d'arêtes [BC86, BCR88a], puis selon leur nombre de sommets et de

faces [BCR93], permet d'établir des équivalents asymptotiques pour les nombres de cartes. Au passage, cette méthode donne une énumération explicite des cartes sur les surfaces de genre inférieur ou égal à 1 [BCR88b].

3.7. *Approche énumérative*

Dès qu'une famille de structures combinatoires est définie, on cherche à savoir combien d'objets elle contient, lorsqu'on fixe un nombre suffisant de paramètres de ces structures. C'est le domaine de la combinatoire énumérative. Lorsque ces nombres sont organisés en séries, il est précieux de savoir si ces séries sont rationnelles ou algébriques, car ceci permet un calcul effectif plus ou moins efficace, comme je le montrerai dans ce document.

Cette question est traitée par T. Walsh, dans le cadre de sa thèse [Wal71] sous la direction de A. Lehman [WL72a, WL72b, WL75]. Ses travaux proposent une méthode d'énumération des cartes sur une surface de genre g, pour un genre g et des nombres de sommets, faces et arêtes raisonnables. La complexité théorique exponentielle de cette méthode ne permet pas de construire rapidement de grandes tables de valeurs, mais elle a le mérite d'être la première du genre, et servira de référence dans les travaux ultérieurs. Pour les cartes sur un tore, T. Walsh [Wal83] propose une méthode plus efficace (polynomiale).

3.8. *Approche algébrique*

Les cartes, définies topologiquement, sont néanmoins dénombrables et entrent ainsi dans le champ d'étude de la combinatoire. Dans cette partie des mathématiques, on apprécie les descriptions constructives, issues de la théorie naïve des ensembles, des familles d'objets étudiés. Une description dans le cadre de la combinatoire algébrique (par des permutations) est utilisée dans [WL72a].

De récents travaux de D. Jackson et T. Visentin [JV90a, JV90b, JV96] utilisent les propriétés du groupe symétrique pour étudier les cartes pointées orientables, vues comme un couple de permutations agissant transitivement sur l'ensemble des arêtes orientées de la carte. La signification topologique des résultats obtenus n'est pas connue à ce jour.

4. Contributions de cette thèse

Ce paragraphe expose les divers aspects de mon travail et présente le plan de ce rapport.

4.9. *Une nouvelle bijection géométrique*

Je remercie vivement D. Arquès d'avoir eu la clairvoyance de me proposer de débuter cette thèse par un premier sujet plaisant. D'une part, l'énoncé est simple à comprendre. D'autre part, le sujet m'a conduit à lire des articles sur les cartes, les arbres et leur énumération, avec un objectif précis de démonstration. Le sujet pourrait se résumer ainsi :

On sait que les dissections de polygones et une certaine classe d'hypercartes sont énumérées par la même séquence de nombres. Cette séquence de nombres, dits de Schröder, apparaît en combinatoire dans de nombreux contextes différents comme séquence énumérative. Existe-t-il une bijection structurelle (c'est-à-dire une bijection admettant la même définition pour toutes les valeurs du paramètre d'énumération) entre

ces deux familles ? Une telle bijection, si elle existe, pourrait de surcroît s'expliquer géométriquement, puisque les deux familles se représentent par des dessins dans le plan. D'où l'idée de chercher une telle bijection, aussi simple que possible.

Il y avait dans ce premier travail un enjeu esthétique (puisqu'on cherchait une bijection géométriquement élégante) et un intérêt pédagogique (puisqu'il préparait à des exercices plus difficiles, en mettant en confiance).

La synthèse de ce travail est donnée dans le chapitre 3. Le résultat, très visuel, a été exposé sous forme de poster à la conférence " Séries Formelles et Combinatoire Algébrique " en 1997. Une version détaillée de l'exposé est publiée dans le numéro spécial "FPSAC'97 Vienna" de la revue *Discrete Mathematics* [AG98b].

4.10. *Forme générale des séries génératrices*

En étudiant chronologiquement divers articles visant à l'énumération des cartes, j'ai observé les diverses formes, de plus en plus générales, que prenaient les équations fonctionnelles vérifiées par les séries génératrices ordinaires des cartes pointées sur une surface.

La première fut écrite par W. Tutte [Tut68] pour la série $M_0(v,z)$ des cartes pointées de genre 0 (planaires) comptées selon leur nombre d'arêtes (degré de z) et selon le degré de leur sommet pointé (degré de v) :

$$M_0(v,z) = 1 + v^2 z M_0(v,z)^2 + vz\frac{vM_0(v,z) - M_0(1,z)}{v-1}. \qquad (1.1)$$

D. Arquès [Arq87a] montre comment énumérer explicitement les cartes de genre 1 en résolvant un système de **deux** équations fonctionnelles : l'une généralisant celle de W. Tutte au genre 1 et l'autre pour les cartes planaires doublement pointées.

La résolution des équations fonctionnelles pour les genres supérieurs passe par la prise en compte d'un plus grand nombre d'équations. Cette perspective est vite hors de portée d'un calcul sur papier. J'entrepris alors, en informaticien, de confier ces lourds calculs à un logiciel de calcul formel. Après avoir étudié en détail la méthode suggérée dans [Arq87a] et [BC86], je l'ai traduite en un programme pour un logiciel de calcul formel. Ceci permit alors de relever le défi calculatoire des genres 2 et 3.

Mais le plus important, c'est que les solutions des genres 1, 2 et 3 présentaient un remarquable air de famille, que je parvins à expliquer et à généraliser au genre quelconque [AG97a]. J'étends ces travaux aux surfaces quelconques (orientables ou non) dans [AG98a]. Le chapitre 5 contient les résultats obtenus, sous forme de théorèmes d'énumération paramétrique. Les chapitres 6 et 7 sont consacrés à la preuve de ces théorèmes, respectivement pour les cartes orientables et pour les cartes générales.

4.11. *Une démarche explicitée en détail*

Au départ, la démarche d'énumération suivie est classique. On établit d'abord un système complet de bijections structurelles entre diverses familles d'objets combinatoires. Puis on traduit, lorsque c'est possible, ces bijections en équations fonctionnelles sur les

séries génératrices (ordinaires ou exponentielles) dénombrant les objets de ces familles en fonction des paramètres. Les bijections et les équations fonctionnelles dénombrant les cartes pointées sont données dans le chapitre 4.

Enfin, on cherche une technique algébrique ou analytique permettant de résoudre le système d'équations ainsi obtenu. Dans le cas des cartes, les équations fonctionnelles déduites de la décomposition bijective de W. Tutte sont connues, la technique de résolution est employée, mais jamais à fond. En effet, si la nature de ces équations permet d'annoncer la nature algébrique des séries solutions [Cor72], aucun auteur ne donne d'information sur le degré d'un polynôme annulant les séries. C'est que ces équations sont assez complexes pour rendre pénible toute tentative de démonstration générale. Dans le présent travail, la méthode de résolution de ces équations est analysée avec assez de finesse pour atteindre deux objectifs. Le premier objectif fut une automatisation complète des calculs, pour repousser les limites des résultats connus dans ce domaine. Le second objectif fut l'élaboration d'une preuve générale de la nature algébrique du résultat, avec majoration du degré des polynômes liés à cette formulation algébrique.

4.12. *Originalité : calcul formel intensif*

Une partie importante de ce travail a consisté en un usage intensif, quasi-systématique, de logiciels de calcul formel. Ces outils de calcul symbolique se sont révélés être de bons assistants, même pour élaborer la démonstration de formules génériques.

La méthode de calcul développée, qui portait sur des fractions rationnelles, a été réduite en un système de relations récursives entre polynômes à coefficients entiers. Ces relations entre polynômes présentent l'intérêt pratique de diminuer la charge de calcul.

Les étapes ultérieures d'exploitation des résultats théoriques d'énumération obtenus font encore appel à des calculs lourds, utilisant des outils développés dans diverses équipes de recherche en calcul formel et flirtant avec les limites actuelles de capacité de traitement des logiciels utilisés.

Ainsi, ce travail initialement théorique, revêt toujours un fort aspect algorithmique. Il se traduit par une librairie de fonctions (pour le logiciel de calcul formel Maple) mise au point en étroite collaboration avec Jean-François Béraud. Cette librairie est décrite dans le chapitre 10, chapitre commun avec la thèse de Jean-François Béraud [Ber98].

4.13. *Énumération efficace des cartes sur une surface*

Les méthodes connues d'énumération exacte des cartes révèlent de fortes limitations en termes d'efficacité. Pourtant, des tables de valeurs numériques sont précieuses au combinatoricien, pour vérifier son intuition, comme aux autres chercheurs confrontés au concept de carte. Sur ce constat, en tant qu'informaticien, je me suis naturellement posé la question suivante. Existe-t-il un algorithme d'énumération efficace, c'est-à-dire dont le temps de calcul dépendrait polynomialement de la taille des données (ici, le genre et les nombres de sommets, d'arêtes et de faces des cartes) ?

Mon travail s'est orienté sur cette motivation pratique. La forme générale commune des séries énumérées, énoncée dans le chapitre 5, est assez précise pour être traduite en un

algorithme efficace de calcul des coefficients des séries. Le coût linéaire de cet algorithme en fonction du nombre d'arêtes des cartes pulvérise les méthodes antérieures visant au même but. Les conséquences des théorèmes pour l'énumération pratique sont exposées dans les chapitres 8 et 9.

Chapitre 2

Définitions et notations

5. Définitions

Historiquement, une carte fut d'abord un objet topologique : elle était vue comme une représentation d'une surface topologique par des " cellules " de dimension 0 (sommets), 1 (arêtes) et 2 (faces), à un homéomorphisme près. Les premières cartes furent dessinées sur la sphère, la surface topologique la plus simple. Les premières généralisations ont porté sur le tore et sur le plan projectif. L'extension de l'étude des cartes aux autres surfaces topologiques, éventuellement non orientables, est un enjeu plus récent, au cœur de notre sujet. Il importe de commencer ces définitions par quelques considérations topologiques.

5.14. *Éléments de topologie*

On suppose connues les notions classiques de topologie générale (espace topologique séparé, espace métrique, ouvert, voisinage …) et on donne ici quelques définitions nécessaires à la compréhension de la notion de surface utilisée dans la suite.

5.14.1. *Homéomorphisme*

Soient E_1 et E_2 deux espaces topologiques. Une application f de E_1 dans E_2 est ***continue*** si, pour tout ouvert U de E_2, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E_1.

Un *homéomorphisme* est une bijection h de E_1 sur E_2, telle que h et h^{-1} soient continues. On dit alors que E_1 et E_2 sont *homéomorphes*. La relation " est homéomorphe à " est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont appelées *classes d'homéomorphie*.

5.14.2. *Variété topologique*

On note D le disque ouvert de $\mathbf{R}^2$ défini par :

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

Une *variété topologique* V de dimension 2 est un espace topologique séparé dont tout point admet un voisinage homéomorphe à D.

5.14.3. *Surface topologique*

Une ***surface*** S est une variété topologique compacte et connexe de dimension 2.

EXEMPLE. La 2-sphère S^2 désigne toute surface homéomorphe à la sphère unité S de $\mathbf{R}^3$, définie par :

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

5.14.4. *Construction de surfaces par quotient*

Soit E un espace topologique et $\mathtt{R}$ une relation d'équivalence sur E. On munit l'ensemble quotient $E/\mathtt{R}$ d'une topologie dont les ouverts sont les parties U de $E/\mathtt{R}$ telles que $p^{-1}(U)$ soit un ouvert pour la topologie de E, où p désigne la projection canonique de E sur $E/\mathtt{R}$.

Nous allons utiliser cette notion de quotient pour construire des surfaces intuitivement, par pliage et collage d'un patron. La relation d'équivalence définit les points à identifier pour réaliser le collage.

5.14.5. *Exemples de construction de surfaces par quotient*

On considère l'espace E représenté sur la figure 2.1 et défini par :

$$E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}.$$

EXEMPLE 1. Soit $\mathtt{T}$ la relation d'équivalence sur E définie pour tous les réels x et y dans l'intervalle [0 ; 1] par :

$$(0, y)\ \mathtt{T}\ (1, y) \text{ et } (x, 0)\ \mathtt{T}\ (x, 1).$$

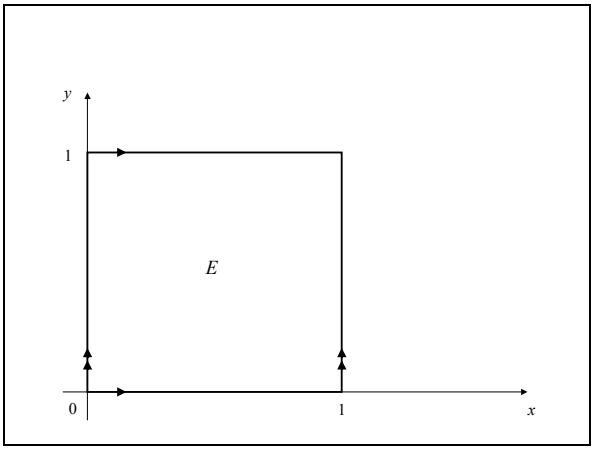


Figure 2.1 : l'espace topologique E et la relation $\mathtt{T}$, qui définit le tore par quotient.

Alors $E/\mathtt{T}$ est une surface topologique (admis) appelée ***tore*** et notée **T**, voir figure 2.2 et figure 2.3.

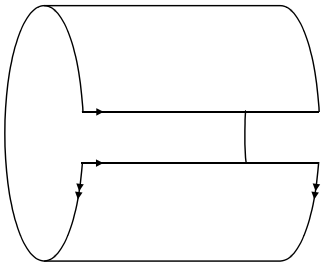


Figure 2.2 : Identification des points $(x, 0)$ et $(x, 1)$.

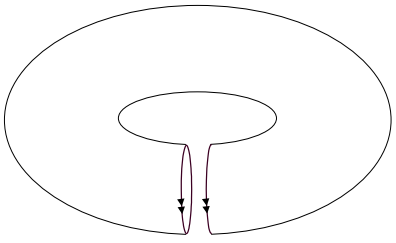


Figure 2.3 : Identification des points $(0, y)$ et $(1, y)$.

EXEMPLE 2. Soit P la relation d'équivalence sur E définie pour tous les réels x et y dans l'intervalle [0 ; 1] par :

$$(1, y)\ \mathtt{P}\ (0, 1\text{-}y) \text{ et } (x, 0)\ \mathtt{P}\ (1\text{-}x, 1).$$

Alors E/P est une surface topologique (admis) appelée ***plan projectif*** et notée **P**.

L'identification $(1, y)$ P $(0, 1\text{-}y)$ définit un ruban de Möbius, qui est une variété topologique de dimension 2, connexe, mais non compacte. Sa frontière est homéomorphe à un cercle. Lorsqu'on identifie les points opposés de ce cercle, ce qui correspond à l'identification $(x, 0)$ P $(1\text{-}x, 1)$, on obtient la surface qu'on appelle plan projectif.

Une surface de $\mathbf{R}^3$ homéomorphe au plan projectif **P** possède nécessairement une auto-intersection. On peut représenter une telle surface de manière stylisée, comme sur la figure 2.4. Le trait horizontal matérialise l'auto-intersection, qui met en relation l'avant et l'arrière de la moitié gauche de la surface. Les pointillés révèlent des tracés vus par transparence. La règle de traversée du trait est illustrée sur le déplacement d'une main sur la figure, qui illustre également le caractère non orientable du plan projectif.

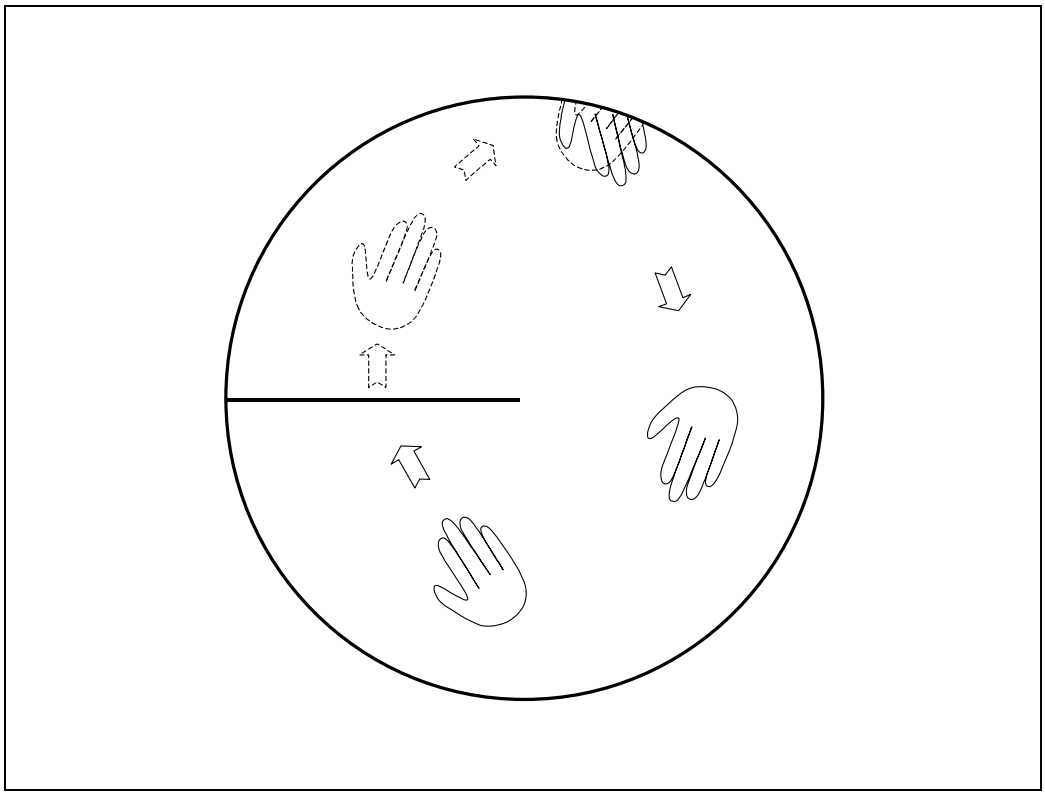


Figure 2.4 : Représentation du plan projectif comme une surface avec auto-intersection.

EXEMPLE 3. Soit B la relation d'équivalence sur E définie pour tous les réels x et y dans l'intervalle [0 ; 1] par :

$$(1, y)\ \mathtt{B}\ (0, 1\text{-}y) \text{ et } (x, 0)\ \mathtt{B}\ (x, 1).$$

Alors E/B est une surface topologique (admis) appelée ***bouteille de Klein*** et notée **K**. Une représentation de la bouteille de Klein est donnée dans la figure 4.6 du chapitre 4.

5.14.6. *Somme connexe de deux surfaces*

La ***somme connexe*** $S_1\#S_2$ de deux surfaces S_1 et S_2 est la surface obtenue par identification des bords de deux disques découpés respectivement dans S_1 et S_2. On peut définir cette construction plus rigoureusement à l'aide des espaces quotient :

Soient p_1 un point de la surface S_1 et p_2 un point de la surface S_2. Soit V_1 (resp. V_2) un voisinage de p_1 (resp. p_2) homéomorphe au disque unité D de $\mathbf{R}^2$. Soit φ_1 (resp. φ_2) un homéomorphisme de D sur V_1 (resp. V_2), prolongé par continuité à la frontière de D.

On définit l'espace E par :

$$E = (S_1 - V_1) \cup (S_2 - V_2)$$

Soit R la relation d'équivalence sur E définie pour tout point p de la frontière de D par :

$$\varphi_1(p) \ \mathrm{R} \ \varphi_2(p)$$

Alors E/R est une surface topologique (admis) appelée ***somme connexe de S_1 et S_2*** et notée $S_1\#S_2$.

Ainsi, la bouteille de Klein est la somme connexe de deux plans projectifs, ce qui s'écrit :

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \# \mathbf{P}$$

5.14.7. *Théorème de classification des surfaces*

On trouve dans les ouvrages sur la topologie des surfaces le résultat classique de la classification complète des surfaces à un homéomorphisme près. Nous rappelons ce résultat sous la forme du théorème suivant, qui nous sert aussi de définition de l'orientabilité d'une surface.

THÉORÈME 2.1. *Toute surface est soit orientable, soit non orientable.*

- *Toute surface orientable est homéomorphe à la somme connexe d'un nombre g fini, éventuellement nul, de tores. On parle de " surface orientable à g trous ".*
- *Toute surface non orientable est homéomorphe à la somme connexe d'un nombre fini non nul de plans projectifs.*

Dans toute la suite, lorsqu'on n'impose pas à une surface d'être orientable, on dira que cette surface est quelconque, ou générale, ou encore localement orientable. On parlera également de carte quelconque, ou générale, ou localement orientable.

5.14.8. *Genre d'une surface*

Le théorème de classification implique que toute surface peut être définie par son orientabilité et un nombre entier. Ce nombre est le ***genre*** de la surface. Précisément, il est défini de la façon suivante.

Si la surface est orientable, alors son genre est simplement le nombre de trous qui la traversent. Si la surface n'est pas orientable, alors son genre est le nombre de plans projectifs dont la somme connexe forme la surface.

Toute surface de genre 0 est homéomorphe à la sphère, qui est élément neutre pour l'opération de somme connexe.

5.14.9. *Type d'une surface*

Soit S une surface. Nous reprenons ici la nouvelle classification, proposée dans [BCR93], des surfaces selon leur type.

- Le type d'une surface orientable est égal au genre de la surface.
- Le type d'une surface non orientable est égal à la moitié du genre de cette surface.

Ainsi, le type de la sphère est 0, le type du plan projectif est ½, le type du tore et de la bouteille de Klein est 1.

Le type de la surface S sera noté $\tau(S)$, ou plus simplement τ, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Désigner le type d'une surface par la lettre τ est un choix collectif de notre équipe de recherche. Il est plus pratique de classer les surfaces selon leur type que selon leur genre, notamment pour les raisons suivantes :

- Le type τ d'une surface est lié linéairement à la caractéristique d'Euler, désignée par la lettre grecque χ :

$$\chi = 2 - 2\ \tau. \tag{2.1}$$

- Le type présente l'intérêt d'être additif pour l'opération de somme connexe :

$$\tau(S_1 \# S_2) = \tau(S_1) + \tau(S_2) \tag{2.2}$$

- Le type permet d'écrire une seule relation d'Euler-Poincaré pour toutes les cartes, orientables ou non. Cette relation est donnée dans le paragraphe 5.15.15.
- Enfin, le type compte le nombre de trous de la surface, si l'on admet que l'auto-intersection d'un plan projectif compte pour un demi-trou.

5.14.10. *Notation et représentation des surfaces*

On notera $\mathbf{T}_\tau$ la surface orientable de type τ (pour tout entier naturel τ) et $\mathbf{P}_\tau$ la surface non orientable de type τ (pour tout demi entier naturel non nul τ).

La surface $\mathbf{T}_\tau$ est représentée comme un tore à τ trous disjoints, vu en perspective (voir figure 2.5).

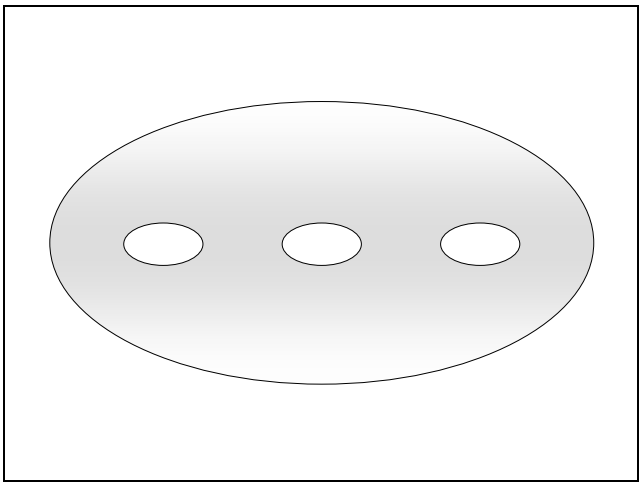


Figure 2.5 : Représentation du tore à 3 trous.

Pour représenter la surface $\mathbf{P}_\tau$, on utilise la propriété suivante (admise) :

$$\mathbf{P} \# \mathbf{P} \# \mathbf{P} = \mathbf{T} \# \mathbf{P}$$

Il en résulte, par associativité de la somme connexe, que $\mathbf{P}_\tau$ peut être considérée comme la somme connexe de $\mathbf{P}$ et de $\mathbf{T}_{\tau-½}$, si τ n'est pas entier ou de $\mathbf{P} \# \mathbf{P}$ et de $\mathbf{T}_{\tau-1}$, si τ est entier. Ainsi $\mathbf{P}_\tau$ est représentée comme un tore à τ-½ (si τ n'est pas entier) ou τ-1 (si τ est entier) trous disjoints, complété par une ou deux auto-intersections disjointes. La figure 2.4 montre $\mathbf{P}_{½} = \mathbf{P}$.

5.15. *Plusieurs définitions des cartes*

Les cartes ont d'abord été définies de manière topologique, comme dans le paragraphe 5.15.11. Il s'agit d'une définition très voisine de la définition originellement proposée par W. Tutte en 1962 [Tut62c].

Puis, on donne dans le paragraphe 5.15.12 la définition d'une carte combinatoire, qui est un bon outil de description de la méthode de décomposition bijective. On trouvera dans les notes bibliographiques de [CM92] des indications sur les origines historiques de cette définition combinatoire.

L'équivalence entre les deux définitions est décrite sans démonstration dans le paragraphe 5.15.13.

5.15.11. *Carte topologique*

On appelle ***carte topologique*** sur une surface S une partition C de la surface S en trois ensembles finis de ***cellules*** :

- L'ensemble $V(C)$ des sommets de C, qui sont des points de la surface S ;
- L'ensemble $E(C)$ des arêtes de C, qui sont des arcs simples ouverts de Jordan deux à deux disjoints, dont les extrémités (confondues ou non) sont des sommets de C ;

- L'ensemble $F(C)$ des faces de C, qui sont des domaines simplement connexes (homéomorphes à des disques) dont la frontière est une réunion de sommets et d'arêtes de C.

Deux cellules sont dites ***incidentes*** si l'une est dans la frontière de l'autre. Une ***boucle*** est une arête incidente à un seul sommet. Un ***isthme*** est une arête incidente à une seule face. Le ***degré d'un sommet*** est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes, une boucle comptant pour deux dans le degré de son unique extrémité. Le ***degré d'une face*** est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes, un isthme comptant pour deux dans le degré de son unique face incidente.

5.15.11.1. Carte topologique orientable

Une carte topologique est dite ***orientable*** si et seulement si la surface qui la porte est orientable.

Dans une carte orientable C, un ***brin*** est une arête orientée de la carte. On note alors $B(C)$ l'ensemble des brins de la carte C.

On dit que l'arête ***porte*** le brin. Tout brin admet un ***brin opposé***, porté par la même arête, mais correspondant au sens de parcours opposé de l'arête. Ainsi, même si l'arête est une boucle, les deux brins opposés qu'elle porte sont distincts. L'orientation de l'arête définit pour le brin un ***sommet initial*** et un ***sommet final***, identiques si l'arête est une boucle.

Orienter la surface qui porte la carte orientable C revient à choisir l'une des deux faces incidentes au brin pointé. Cette face est alors appelée ***face initiale***. L'autre face est appelée ***face finale***. La face initiale et la face finale sont identiques si l'arête est un isthme. Cependant, il y a toujours deux orientations différentes de la surface (donc, de la carte), correspondant aux deux sens opposés de traversée de l'arête.

5.15.11.2. Carte topologique non orientable

Une carte topologique est dite ***non orientable*** si la surface qui la porte est non orientable.

Dans une carte topologique non orientable C, un ***brin*** est un triplet formé d'une arête, d'un sens de parcours et d'un sens de traversée de cette arête. Le sens de parcours définit un ***sommet initial*** et un ***sommet final***. Le sens de traversée définit une ***face initiale*** et une ***face finale***.

5.15.12. *Carte combinatoire*

Pour un nombre d'arêtes (par exemple) donné, il y a un nombre fini de cartes. Sur ce constat, on a soupçonné l'existence d'une définition ensembliste des cartes, qui couperait le cordon ombilical qui reliait jusqu'alors les cartes à la topologie, pour la faire vivre pleinement comme une structure combinatoire.

Les cartes topologiques orientables sont en bijection avec certains couples de permutations définis dans le paragraphe 5.15.12.3.

La famille qui réunit les cartes topologiques orientables et non orientables est en bijection avec certains triplets de permutations, définis dans le paragraphe 5.15.12.4.

5.15.12.3. Carte combinatoire orientable

Une carte combinatoire orientable est un triplet (B, σ, α) tel que :

- B est un ensemble fini de cardinalité paire.
- σ est une permutation de B.
- α est une involution sans point fixe de B.
- Le groupe engendré par $\{\sigma, \alpha\}$ opère transitivement sur B.

On note $\overline{\sigma}$ la permutation σ o α de B.

5.15.12.4. Carte combinatoire générale

On reprend ici la définition proposée par Jean-François Béraud dans son rapport de thèse [Ber98].

Une carte combinatoire générale est un quadruplet (D, σ, β, ρ) tel que :

- D est un ensemble fini de cardinalité divisible par 4.
- σ est une permutation de D.
- β est une involution sans point fixe de D.
- ρ est une involution sans point fixe de D.
- Le groupe engendré par $\{\sigma, \beta, \rho\}$ opère transitivement sur D.
- $\beta \circ \rho$ est une involution sans point fixe.

L'involution sans point fixe $\beta \circ \rho$ est notée α. On note $\overline{\sigma}$ la permutation σ o α de D.

Cette définition d'une carte combinatoire générale permet de retrouver la définition d'une carte combinatoire orientable, de la manière suivante. On identifie les éléments de B avec les cycles de ρ. On définit alors les permutations σ et α sur B comme les images des permutations σ et α sur D, lorsque les cycles de ρ sont identifiés aux éléments de B.

Dans la suite, nous utiliserons essentiellement les cartes combinatoires générales. Les permutations σ, β, ρ et α auront alors la signification que leur donne la présente définition.

On appellera ***brin*** un élément de l'ensemble sur lequel agissent les permutations définissant la structure combinatoire considérée. Si c'est une carte combinatoire générale, alors un brin sera un élément de D. Si c'est une carte combinatoire orientable, alors un brin

sera un élément de B. On peut déduire du paragraphe suivant que les éléments de B sont en bijection avec les arêtes orientées de la carte orientable. Ainsi, la notion de brin, généralisée ici à toute surface, coïncide avec les définitions d'un brin données dans le cas orientable dans le paragraphe 5.15.11.1 et dans le cas non orientable dans le paragraphe 5.15.11.2.

5.15.13. *Équivalence entre les 2 définitions*

On obtient une bijection structurelle entre cartes topologiques sur une surface quelconque et cartes combinatoires générales par l'application qui associe à la carte topologique C la carte combinatoire (D, σ, β, ρ) telle que :

Chaque arête e de $E(C)$ est associée à 4 éléments de D. Notons V et V' les deux sommets (distincts ou non) incidents à l'arête e. Notons F et F' les deux faces (distinctes ou non) incidentes à l'arête e. On peut désigner par $[e, V, F]$, $[e, V', F]$, $[e, V, F']$ et $[e, V', F']$ les 4 éléments de D associés à l'arête e.

Les éléments $[e, V, F]$ et $[e, V', F]$ correspondent aux deux sens de parcours possibles de l'arête e, respectivement depuis les sommets initiaux V et V'.

Les éléments $[e, V, F]$ et $[e, V, F']$ correspondent aux deux sens de traversée possibles de l'arête e, respectivement de faces initiales F et F'.

La définition de σ est illustrée par la figure 2.6. σ est la permutation de D qui à tout élément $[e, v, f]$ de D associe l'élément $[e', v, f']$ tel que e' soit l'arête rencontrée en tournant autour du sommet v à partir de l'arête e, à l'intérieur de la face f', qui est la deuxième face incidente à l'arête e, la première étant f.

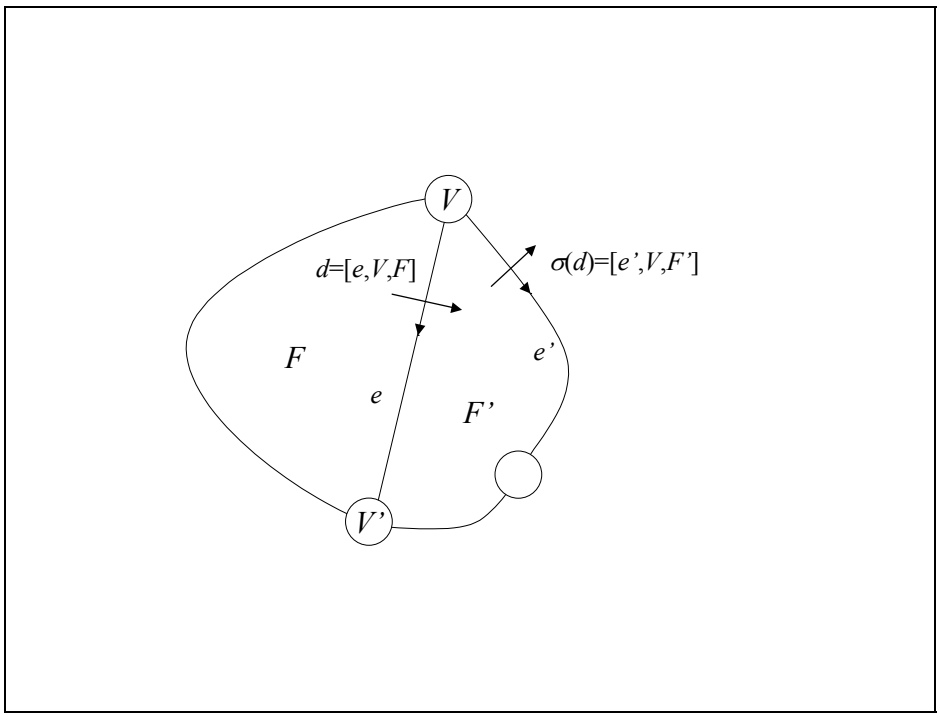


Figure 2.6 : Signification de la permutation σ.

On dit que deux cycles distincts de σ sont dans la même classe s'ils contiennent les mêmes arêtes. Alors, ces classes de cycles de σ sont en bijection avec les sommets de la carte *C*.

β est l'involution sans point fixe qui échange les éléments de même sens de traversée et de sens de parcours opposés. Par exemple,

$$\beta([e, V, F]) = [e, V', F],$$

$$\beta([e, V', F']) = [e, V, F'].$$

On dit que deux cycles distincts de β forment une paire s'ils contiennent la même arête. Alors, ces paires de cycles de β sont en bijection avec les côtés des arêtes de la carte *C*.

ρ est l'involution sans point fixe qui échange les éléments de même sens de parcours mais de sens de traversée opposés. Par exemple,

$$([e, V, F], [e, V, F'])$$

et

$$([e, V', F'], [e, V', F])$$

sont des cycles de ρ.

Deux cycles distincts de ρ forment une paire s'ils contiennent la même arête. Alors, ces paires de cycles de ρ sont en bijection avec les arêtes orientées de la carte *C*.

Il résulte des définitions de β et ρ que α est l'involution sans point fixe qui échange les éléments de sens de parcours et de sens de traversée opposés.

La permutation $\overline{\sigma}$, égale à σ o α, a également une signification topologique. On associe chaque cycle de $\overline{\sigma}$ avec son image selon α. Alors, les paires ainsi formées sont en bijection avec les circuits parcourant les frontières des faces topologiques de la carte *C*. Si l'on associe par classes les cycles de $\overline{\sigma}$ contenant la même arête, les classes de cycles seront en bijection avec les faces de la carte.

NOTATION. Soit φ une permutation de l'ensemble *E* et soit *x* un élément de *E*. Alors, on note $\varphi^*(x)$ le cycle de φ engendré par *x*.

PROPOSITION. Soient *e*, *V* et *F* une arête, un sommet et une face mutuellement incidents de la carte topologique *C*. Le brin *d* de *D* associé à [*e*, *V*, *F*] peut être matérialisé comme sur la figure 2.7 par deux flèches :

- Une première flèche, portée par l'arête *e*, oriente cette arête en choisissant un ***sens de parcours***. L'empennage (arrière) de cette flèche désigne le sommet *V*, appelé ***sommet initial*** du brin *d*. La pointe de la flèche désigne l'autre extrémité de l'arête *e*, appelée ***sommet final*** du brin *d*.

- Une deuxième flèche, perpendiculaire à la première en son centre, choisit un ***sens de traversée*** de l'arête *e*. L'empennage de cette flèche désigne la face *F*, appelée ***face initiale*** du brin *d*. La pointe de la flèche désigne l'autre face incidente à l'arête *e*, qui est appelée ***face finale*** du brin *d*.

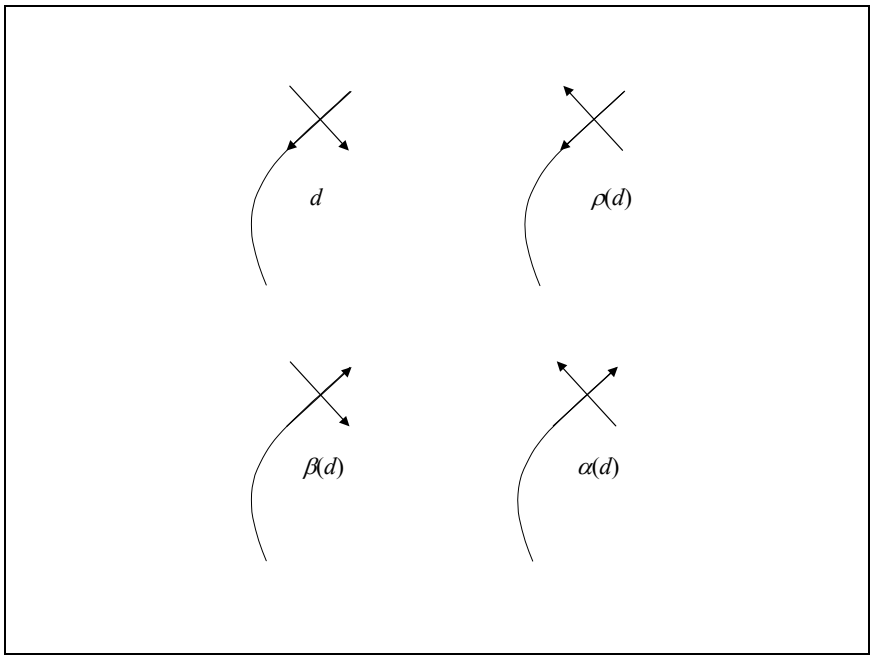


Figure 2.7 : Représentation des 4 éléments de *D* associés à une arête.

5.15.14. *Genre et type d'une carte*

Le ***genre* (*resp. le type*) *d'une carte topologique*** est le genre (resp. le type) de la surface qui porte la carte.

Le type τ d'une carte combinatoire orientable (B, σ, α) est défini par :

$$Z(\sigma) - Z(\alpha) + Z(\sigma \circ \alpha) = 2 - 2\ \tau \qquad (2.3)$$

où $Z(\varphi)$ désigne le nombre de cycles de la permutation φ.

Le type τ d'une carte combinatoire générale (D, σ, β, ρ) est défini par :

$$Z(\sigma) - Z(\beta \circ \rho) + Z(\sigma \circ \beta \circ \rho) = 4 - 4\ \tau. \qquad (2.4)$$

Le ***genre g d'une carte combinatoire*** est égal au type τ de cette carte combinatoire si la surface est orientable et à 2τ si la surface n'est pas orientable.

La concordance entre les définitions topologiques et combinatoires du genre et du type est garantie par la relation d'Euler-Poincaré.

5.15.15. *La relation d'Euler-Poincaré*

Soit C une carte de genre g, composée de v sommets, e arêtes et de f faces.

Si C est orientable, alors le genre g de C est relié aux nombres de sommets, d'arêtes et de faces de cette carte C par la **relation d'Euler-Poincaré** :

$$v - e + f = 2 - 2g. \tag{2.5}$$

Si C n'est pas orientable, alors le genre g de C est relié aux nombres de sommets, d'arêtes et de faces de cette carte C par :

$$v - e + f = 2 - g. \tag{2.6}$$

Classer les surfaces et les cartes selon leur type τ, et non selon leur genre, permet d'écrire une unique relation d'Euler-Poincaré, qui convient pour les cartes orientables ou non, et qui s'écrit :

$$v - e + f = 2 - 2\ \tau \tag{2.7}$$

pour une carte C de type τ.

5.15.16. *Cartes pointées*

5.15.16.5. Carte simplement pointée

Une ***carte* (*simplement*) *pointée*** est une carte dans laquelle un brin est distingué. Ce brin est dit ***pointé***. Son sommet initial, l'arête qui le porte et sa face initiale sont respectivement appelés ***sommet pointé***, ***arête pointée*** et ***face pointée***.

Deux cartes pointées sur une même surface sont dites ***isomorphes*** s'il existe un homéomorphisme de la surface qui applique les sommets, les arêtes et les faces de l'une des cartes sur ceux de l'autre carte, en conservant le sommet, l'arête et la face pointés.

Il résulte de la conservation des éléments pointés et de la définition d'un homéomorphisme de surface que tout isomorphisme entre cartes pointées conserve toutes les relations d'incidence entre sommets, arêtes et faces.

Dans toute la suite, on désigne également par carte pointée une classe d'isomorphie de cartes pointées.

5.15.16.6. Carte pointée séquencée

Soit k un entier naturel. J'appelle **carte pointée *k*-séquencée (par des sommets)** une carte pointée dans laquelle une séquence de sommets, distincts deux à deux et du sommet pointé, a été distinguée.

Deux cartes pointées k-séquencées sur une même surface sont dites ***isomorphes*** s'il existe un isomorphisme entre les deux cartes pointées qui applique la séquence des sommets distingués de l'une des cartes sur celle de l'autre carte, en conservant l'ordre. Dans toute la suite, on désigne également par carte pointée k-séquencée une classe d'isomorphie de cartes pointées k-séquencées.

On désigne par ***carte pointée séquencée*** toute carte pointée k-séquencée dont on ne précise pas le nombre k de sommets distingués. Les cartes duales des cartes pointées séquencées (où une séquence de faces est distinguée) ont été introduites dans [BC86] sans vocabulaire spécifique.

5.15.16.7. Carte multi-pointée

Soit r un entier naturel non nul. On appelle **carte *r*-pointée** une carte pointée (r-1)-séquencée dans laquelle on distingue une arête orientée issue de chaque sommet distingué. On pourra noter $a_1, a_2, \ldots, a_r$ la séquence dans laquelle a_1 est l'arête orientée correspondant au brin pointé, et $a_2, \ldots, a_r$ la séquence des arêtes orientées distinguées.

Cette définition mérite d'être analysée. En effet, pointer une carte, c'est distinguer un de ses brins. Donc, pointer une carte *plusieurs* fois, ce devrait être distinguer *plusieurs* brins. Alors, pourquoi la définition précédente suggère-t-elle de ne distinguer qu'un brin, puis de distinguer (r-1) arêtes orientées ? La question se pose quand on étudie les cartes générales. Il nous faut y répondre pour montrer la pertinence de cette définition.

Pour une carte orientable, les notions de brin et d'arête orientée se confondent, de sorte qu'on peut également dire qu'une **carte orientable *r*-pointée** est une carte orientable dans laquelle une séquence de r brins (de sommets initiaux distincts) est distinguée, le premier brin distingué étant appelé brin pointé.

En revanche, pour une carte générale, un brin n'est pas une arête orientée. C'est une arête orientée *munie d'un sens de traversée*. Par conséquent, pour distinguer une séquence de r brins dans une carte générale r-pointée, il faut choisir un sens de traversée pour les arêtes orientées $a_2, \ldots, a_r$. Il y a 2^{r-1} tels choix, mais nous allons montrer comment le brin pointé b_1 détermine un unique brin b_i de l'arête orientée distinguée a_i, pour i compris entre 2 et r.

On utilise la définition combinatoire (D, σ, β, ρ) de la carte. On construit un arbre couvrant A les sommets de la carte, par un parcours prioritairement en profondeur des arêtes orientées de la carte, à partir du brin pointé b_1, à l'aide de σ et α (où $\alpha = \beta \circ \rho$).

Voici une description succincte de ce parcours : pour commencer, on marque le brin b_1 avec l'entier 0. Supposons que le brin b soit marqué par l'entier naturel n. Soit s le sommet final de b. Si le sommet s n'a jamais été visité (n'est pas le sommet initial d'un brin marqué), alors on marque $\alpha(b)$ avec n+1. Sinon, on marque avec n+1 le premier brin de $\sigma^*(b)$ dont le sommet final n'a jamais été visité. S'il n'existe pas de tel brin, le parcours s'arrête si $n = 0$, ou bien continue à partir du brin marqué n-1.

Dans l'arbre couvrant A, soit a la première arête orientée (marquée par le plus petit entier) de même sommet initial que l'arête a_i. On associe à cette arête orientée a son unique brin b qui est dans la même orbite que b_1 pour l'action de $\{\sigma, \alpha\}$ sur les brins de D portés par les arêtes de l'arbre A. Si $a_i = a$, alors on pose $b_i = b$. Sinon, b_i est le brin qui est dans le même cycle de σ que b.

Il résulte de cette analyse que les 2^{r-1} choix d'un sens de traversée pour les r-1 arêtes orientées distinguées produisent toujours 2^{r-1} objets différents (les cartes " r-pointées " naïves), donc que ces choix ne sont pas utiles à l'énumération des cartes. Par conséquent, la définition que nous proposons pour les cartes r-pointées est pertinente, puisqu'elle conserve toutes les propriétés de la définition naïve et qu'elle divise la taille des familles énumérées par 2^{r-1}.

Deux cartes r-pointées sur une même surface sont dites ***isomorphes*** s'il existe un isomorphisme de cartes pointées entre ces cartes qui applique les arêtes orientées distinguées de l'une des cartes sur celles de l'autre carte, en conservant l'ordre. Dans toute la suite, on désigne également par carte r-pointée une classe d'isomorphie de cartes r-pointées.

On désigne par ***carte multi-pointée*** toute carte r-pointée dont on ne précise pas le nombre r d'arêtes orientées distinguées.

5.15.16.8. Pourquoi pointer les cartes ?

Une carte non pointée C admet, selon sa structure, un nombre variable de symétries internes. Plus rigoureusement, ces symétries sont des automorphismes de la surface de la carte C qui conservent globalement les ensembles de sommets, d'arêtes et de faces de C (notés $V(C)$, $E(C)$ et $F(C)$ respectivement). Ceci complique singulièrement l'énumération des cartes.

En revanche, un automorphisme de carte pointée, qui conserve le sommet, l'arête et la face pointés, ne peut être que l'identité. Ceci se déduit aisément de proche en proche de la connexité de la carte.

Toutes les techniques d'énumération exposées ici ne s'appliquent qu'aux cartes pointées au moins une fois. Un des objectifs de cette thèse est d'énumérer les cartes pointées selon leur type. Pour atteindre cet objectif, nous devrons énumérer certaines familles de cartes pointées séquencées. Nous utiliserons également, la notion de carte multi-pointée, plus pratique pour certains calculs.

5.15.17. *Dualité sommets-faces*

La propriété de dualité des cartes est d'une importance essentielle pour leur énumération. Elle se définit facilement sur les cartes combinatoires.

5.15.17.9. Carte duale d'une carte combinatoire orientable

La carte duale de la carte combinatoire orientable (B, σ, α) est la carte combinatoire orientable $(B, \overline{\sigma}, \alpha)$.

Cette définition simple se généralise aux cartes combinatoires générales comme suit.

5.15.17.10. Carte duale d'une carte combinatoire générale

La carte duale de la carte combinatoire (D, σ, β, ρ) est la carte combinatoire $(D, \overline{\sigma}, \rho, \beta)$. La dualité échange le sens de parcours et le sens de traversée des arêtes.

Topologiquement, le passage à la carte duale est une transformation intuitive qui justifie les définitions précédentes.

5.15.17.11. Carte duale d'une carte topologique

Soit C une carte topologique et C^d sa carte duale. On obtient les sommets de C^d en plaçant un sommet à l'intérieur de chaque face de C. On relie ensuite par une arête deux sommets de C^d qui sont à l'intérieur de faces adjacentes de C, de telle sorte que cette arête coupe l'arête de C formant la frontière commune entre les deux faces adjacentes de C. Les sommets de C sont alors à l'intérieur des faces de C^d.

Si la carte C est pointée, alors la carte C^d est pointée de telle sorte que :

- le sommet pointé de l'une des cartes soit à l'intérieur de la face pointée de l'autre carte,
- les arêtes pointées des deux cartes soient sécantes.

5.15.17.12. Propriétés

- Une carte et sa duale ont la même surface support.
- Toute carte est homéomorphe à la duale de sa carte duale.

6. Notations

6.16. *Exemple introductif*

On notera $Q_\tau(v_1,\ldots,v_r,s,f)$ la série génératrice ordinaire du nombre de cartes r-pointées sur la surface orientable de type τ. L'exposant de la variable v_1 est le degré du sommet pointé. Pour tout entier i compris entre 2 et r, l'exposant de la variable v_i est le degré du i^{e} sommet distingué. L'exposant de la variable s est le nombre de sommets moins un. L'exposant de la variable f est le nombre de faces moins une.

Ce sont en fait plusieurs familles de séries, avec des variables différentes en quantité et en nature, et divers paramètres, qui sont définies ici par des notations homogènes et suggestives. La cohérence globale de ce système de notation devrait permettre au lecteur de le mémoriser en première lecture, afin d'aborder la lecture des chapitres suivants sans avoir à revenir au présent texte explicatif. Toutes ces notations sont résumées dans une liste des symboles en fin de document.

6.17. *Noms des séries génératrices*

Nous n'utiliserons que 5 symboles pour désigner toutes les séries utilisées.

La lettre Q est choisie pour désigner toutes les séries génératrices de cartes multi-pointées orientables. On souhaitait éviter la lettre O, qui est pourtant, en français comme en anglais, l'initiale du mot " orientable ", car le O présente des risques de confusion avec le zéro. La forme de la lettre Q rappelle celle de la lettre O mais évite toute confusion. Cette série Q peut porter en indice soit le genre, soit le type des cartes. Dans les deux cas, elle a la même signification.

La lettre N est choisie pour désigner toutes les séries génératrices de cartes multi-pointées sur les surfaces non orientables. Son indice est toujours le type de la surface.

La lettre S est choisie pour désigner toutes les séries génératrices de cartes multi-pointées sur des surfaces quelconques (dites " localement orientables ") de type fixé. C'est l'initiale de mot " surface ", mais aussi du mot " somme " (" sum ", en anglais) car c'est effectivement la somme des séries Q et N de mêmes variables et de même type. Par cette notation, S_0 compte les cartes sur la sphère. La série S est toujours indexée par le type.

Les symboles M et Mo (" o " pour orientable) sont les analogues respectifs de S et de Q pour les cartes pointées séquencées.

6.18. *Les paramètres, notés en indices*

Le nom d'une série génératrice (Q, S, N …) ne nous informe que sur l'orientabilité de la surface qui supporte les cartes dénombrées par la série. Les autres informations, de nature numérique, sont introduites soit comme exposant d'une variable de la série, soit comme paramètre. Ces paramètres sont notés en indice du nom de la série.

Voici la liste des paramètres et leur ordre d'apparition, comme indices des séries génératrices.

- τ type d'une carte.
- g genre d'une carte.
- k nombre de sommets distingués dans une carte pointée séquencée.
- r nombre d'arêtes orientées distinguées dans une carte multi-pointée.

6.19. *Les variables*

L'exposant de chaque variable d'une série génératrice est un élément statistique utile à l'énumération.

Dans toutes les séries génératrices utilisées de ce document, les variables ont une signification liée à leur nom. Le tableau suivant définit ce lien entre le nom d'une variable (première colonne) et la quantité dénombrée par son exposant (seconde colonne), dans toutes les séries où cette variable apparaît. L'ordre du tableau est l'ordre d'apparition des variables dans l'expression d'une série à plusieurs variables.

Variable	L'exposant de cette variable est le …
v ou v_1	degré du sommet pointé d'une carte pointée.
v_i	degré du i^e ($2 \le i \le r$) sommet distingué d'une carte r-pointée.
w_j	degré du j^e ($1 \le j \le k$) sommet distingué d'une carte pointée k-séquencée.
f	nombre de faces d'une carte moins une.
s	nombre de sommets d'une carte moins un.
z	nombre d'arêtes d'une carte.

6.20. *Fonctions symétriques*

Nous proposons ici une notation pratique pour les fonctions symétriques à plusieurs variables.

Soit α un entier naturel non nul, β un entier naturel et Φ une fonction de $(\alpha+\beta)$ variables. Si Φ est symétrique par rapport à ses α premières variables, alors, pour toute permutation σ sur l'ensemble $\{1,\ldots,\alpha\}$, les expressions $\Phi(x_1,..,x_\alpha,x_{\alpha+1},..,x_{\alpha+\beta})$ et $\Phi(x_{\sigma(1)},..,x_{\sigma(\alpha)},x_{\alpha+1},..,x_{\alpha+\beta})$ sont égales. On note donc, pour simplifier, $\Phi(Y,x_{\alpha+1},..,x_{\alpha+\beta})$ une quelconque de ces expressions, où Y est l'ensemble $\{x_1,\ldots,x_\alpha\}$.

6.21. *Symétrie des séries génératrices utilisées*

Par sa définition, la série formelle $Q_\tau(v_1,\ldots,v_r,s,f)$ est symétrique par rapport aux variables $v_2,\ldots,v_r$. Ceci justifie la notation $Q_\tau(v_1,W,s,f)$ utilisée dans les équations, si W est l'ensemble $\{v_2,\ldots,v_r\}$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les autres expressions du même type utilisées dans la suite sont légitimées par la symétrie de la fonction considérée, par rapport à certaines de ses variables.

Les séries $Q_\tau(v_1,\ldots,v_r,s,f)$ et $S_\tau(v_1,\ldots,v_r,s,f)$ présentent l'avantage sur leurs analogues respectifs *Mo* et *M* d'offrir une symétrie supplémentaire. En effet, nous avons montré (paragraphe 5.15.16.7) qu'une carte multi-pointée correspond à un choix unique parmi les 2^{r-1} possibilités d'attribuer un sens de traversée à (r-1) arêtes orientées distinguées. Ces 2^{r-1} possibilités forment la famille des cartes munies d'une séquence de r brins de sommets initiaux distincts. La définition de cette famille étant symétrique selon tous les brins, il en résulte que S et Q sont symétriques selon toutes leurs variables $v_1,\ldots,v_r$.

6.22. *Conversion des séries de sommets/faces vers arêtes*

Toute série $F(z)$ qui compte les cartes sur une surface de type τ en fonction du nombre d'arêtes (degré de z) se déduit de la série analogue de deux variables $G(x, y)$ qui compte les mêmes cartes en fonction de leur nombre de faces (exposant de x) et de leur nombre de sommets (exposant de y), grâce à la formule suivante :

$$F(z) = G(z, z)\, z^{2\tau-2} \tag{2.8}$$

C'est une conséquence de la relation d'Euler-Poincaré (voir paragraphe 5.15.15).

Partie 2

Combinatoire bijective

Chapitre 3

Bijection géométrique entre une famille d'hypercartes et une famille de polygones

Ce chapitre est indépendant du reste de la thèse. Il porte sur un problème de combinatoire bijective que m'a proposé D. Arquès au début de ma thèse. La résolution de ce problème, qui a pris six mois, nous a conduit à la rédaction d'un article et à la réalisation d'affiches pour une " poster session " de la conférence " Séries Formelles et Combinatoire Algébrique ", à Vienne, en 1997. J'en donne ici une version détaillée et illustrée. Le lecteur familier des cartes et des hypercartes aura une bonne idée des arguments de la bijection, en observant l'évolution de l'exemple au fil des figures. La lecture complète de ce chapitre devrait permettre aux autres lecteurs de découvrir la notion de carte, dans le cadre simple des cartes planaires 2-coloriables.

7. Introduction

En 1870, Ernst Schröder [Sch70] aborde la question suivante : quel est le nombre de parenthésages différents d'une somme non-commutative de n termes ? Il divise cette question en " Vier combinatorische Probleme ", du cas I au cas IV. Le cas I traite du parenthésage complet, dans lequel chaque paire de parenthèses encadre une somme d'exactement deux termes ou expressions parenthésées. Le cas II correspond au parenthésage partiel, dans lequel chaque paire de parenthèses entoure au moins deux termes ou expressions parenthésées.

En 1940, I. M. H. Etherington [Eth40] illustre cette question par des découpes de polygones convexes et généralise le problème au parenthésage avec contraintes sur l'arité des sommes parenthésées. Le cas I de Schröder correspond alors à la contrainte maximale, qui impose que chaque somme parenthésée soit d'arité 2. Le cas II correspond au contraire à l'absence de telles contraintes d'arité.

On trouve de nombreuses traces, antérieures à 1870, de résolution du cas I. Pour $n \geq 1$, le nombre de parenthésages est égal au nombre de Catalan C_{n-1}. On rappelle que

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

En 1983, la solution du cas II est nommée *"Schröder-Etherington sequence"* par S. G. Kettle [Ket83], qui propose diverses interprétations combinatoires de cette série de nombres.

Ces nombres auraient une origine beaucoup plus ancienne : R. P. Stanley [Sta97] attribue le calcul du nombre de parenthésages d'une somme de 10 termes (égal à 103 049) à Hipparchus, grand astronome de la Grèce antique. Tout récemment, D. Foata et D. Zeilberger [FZ97] donnent une interprétation combinatoire d'une relation de récurrence linéaire à trois termes permettant de calculer rapidement cette suite de nombres. Ceci témoigne de l'intérêt considérable encore porté à ces nombres millénaires, qu'on appelle désormais les *nombres de Schröder*.

En 1985, D. Arquès [Arq85a] établit de manière indépendante que la famille des hypercartes planaires pointées dont tous les sommets sont sur la face extérieure est également énumérée par ces nombres. Ces hypercartes seront appelées " *hypercartes superficielles* " dans la suite.

Or, ces hypercartes superficielles et les partitions de polygones d'Etherington ont en commun d'être des objets dessinables dans le plan, ce qui laisse entrevoir l'existence d'une transformation géométrique bijective entre ces deux familles. Toutefois, s'il est souvent immédiat d'établir des bijections entre la plupart des familles de Schröder et la famille des partitions de polygones, il n'en est pas de même avec la famille d'hypercartes superficielles.

Ce chapitre expose une bijection " naturelle " entre ces deux familles, c'est-à-dire interprétable comme une transformation géométrique réversible des objets d'une famille de taille donnée en objets de l'autre famille de même taille.

Précisons que les hypercartes superficielles sont dénombrées en fonction de leur nombre total d'arêtes plus une et que les partitions de polygones sont dénombrées en fonction de leur nombre d'arêtes extérieures moins une.

Les deux familles étudiées sont définies en détail dans le paragraphe 8. La famille des partitions de polygones est énumérée dans le paragraphe 9. La famille des hypercartes superficielles est énumérée dans le paragraphe 10. Le paragraphe 11 est l'exposé de la bijection, décomposée en quatre étapes ayant chacune une interprétation graphique élémentaire. Chacune de ces étapes est illustrée par une figure portant sur un unique exemple traité de bout en bout.

8. Définitions

8.23. *Hypercartes planaires pointées*

Une hypercarte peut être vue comme une carte particulière. Les cartes planaires pointées sont définies dans le chapitre 2.

La face pointée d'une carte planaire pointée est encore appelée ***face extérieure*** de la carte. Dans une projection stéréographique d'une telle carte sur le plan, la face extérieure est envoyée sur la partie infinie de sa représentation. On appelle brin pointé l'orientation de

l'arête pointée issue du sommet pointé et telle que la face extérieure soit à droite du brin pointé pour l'orientation positive du plan.

Une ***hypercarte planaire pointée*** est une carte planaire pointée dont on peut colorier les faces avec deux couleurs, de telle sorte que toute arête soit incidente à deux faces de couleurs. On désigne alors par ***hyperface*** toute face de la même couleur que la face extérieure, et par ***hyperarête*** toute face de l'autre couleur différentes (sur l'hypercarte *H* de la figure 3.2, les hyperarêtes apparaissent en grisé).

Remarque : deux hypercartes planaires pointées sont isomorphes s'il existe un homéomorphisme du plan préservant son orientation et échangeant les sommets, arêtes, hyperarêtes, hyperfaces et brin pointé de la première hypercarte et de la deuxième. Sous le nom d'hypercartes planaires pointées, ce sont en fait des classes d'hypercartes isomorphes qu'on dénombre et manipule dans la suite.

On s'intéressera plus particulièrement dans la suite à la famille **H** des hypercartes planaires pointées dites " superficielles ", dont tous les sommets sont incidents à la face extérieure. La figure 3.2 présente une hypercarte de cette famille, dont la décomposition est définie plus loin.

8.24. *Partitions de polygones*

Un polygone convexe coupé selon une de ses diagonales donne naissance à deux polygones convexes. Chacun d'entre eux peut à nouveau être coupé selon une diagonale, et ce processus de découpage peut être poursuivi jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des triangles, ou interrompu avant. En effectuant r coupures, le polygone initial a été décomposé en r+1 sous-polygones. Une telle décomposition est appelée ***partition du polygone***. Elle correspond au choix de r diagonales du polygone non intersectantes.

Deux partitions du même polygone sont différentes si elles mettent en jeu des diagonales différentes relativement à une arête de référence du bord du polygone. Cette arête de référence sera dite distinguée ou pointée, et sera représentée en gras sur les figures. On parlera alors de polygone pointé.

On note **P** la famille des partitions de polygones (convexes) pointés par une arête. Le plus petit polygone de **P**, au sens du nombre d'arêtes extérieures, est constitué de 2 arêtes confondues, dont l'une est distinguée. Ce polygone est appelé p_2. Le plus petit polygone de **P** après p_2 est le triangle pointé.

9. Énumération des partitions de polygones

Nous rappelons très rapidement, pour fixer les définitions et notations, l'énumération classique des partitions de polygones par la suite de Schröder. La famille **P** peut être définie inductivement : toute partition de polygone pointé différent de p_2 se décompose de manière unique en partitions de polygones pointés plus petits. L'exemple suivant illustre cette décomposition.

Exemple : La partition du polygone pointé P de la figure 3.1 se décompose en son arête pointée (en pointillés) et en trois autres partitions de polygones pointés P_1, P_2 et P_3. Leur

arête distinguée est leur unique arête incidente à la même face de P que l'arête pointée de P. P_2 est dans cet exemple le polygone de **P** réduit à deux arêtes confondues, qu'on a noté p_2.

Remarque : Le polygone p_2 est indécomposable. Il est considéré comme ayant deux arêtes extérieures confondues.

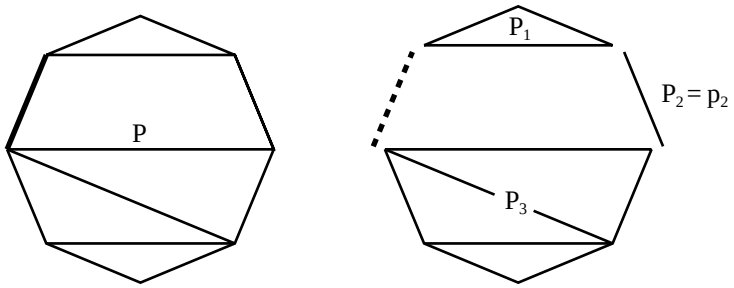


Figure 3.1 : décomposition d'une partition de polygone.

Dans la décomposition de P, il y a au moins une arête extérieure (l'arête distinguée). Si P n'est pas le polygone p_2, alors il y a au moins deux autres partitions de polygones. D'où la bijection de décomposition de **P** suivante :

$$\mathbf{P} \leftrightarrow \{p_2\} + \sum_{k \geq 2} \mathbf{P}^k \tag{3.1}$$

Soit $P(c)$ la série génératrice ordinaire des polygones de **P**, dénombrés selon leur nombre d'arêtes extérieures autres que l'arête distinguée (exposant de c). D'après la bijection de décomposition de **P** qui précède, $P(c)$ est solution de l'équation :

$$P(c) = c + \sum_{k \geq 2} P(c)^k \tag{3.2}$$

c'est-à-dire de l'équation :

$$P(c) = c + \frac{P(c)^2}{1 - P(c)}. \tag{3.3}$$

L'unique solution de cette équation est la série de Schröder ([Eth40], page vi).

La formule d'inversion de Lagrange appliquée à cette équation donne le nombre P_n de partitions de polygones à n arêtes extérieures (autres que l'arête distinguée), pour $n \geq 2$:

$$P_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-2} \binom{n}{k+1} \binom{n-2}{k} 2^k \tag{3.4}$$

Les 20 premiers termes de la série de Schröder sont 1, 1, 3, 11, 45, 197, 903, 4279, 20793, 103049, 518859, 2646723, 13648869, 71039373, 372693519, 1968801519, 10463578353, 55909013009, 300159426963, 1618362158587.

10. Énumération des hypercartes

Soit **H** la famille des hypercartes planaires pointées dont tous les sommets sont incidents à la face extérieure, et soit $P_{\mathbf{H}}$ cette propriété. Toute sous-hypercarte d'une hypercarte de **H** hérite de la propriété $P_{\mathbf{H}}$ (évident). Bien que ne contenant aucune arête, l'hypercarte constituée d'un seul sommet sera également dite pointée et sera notée h_0 : c'est la plus petite hypercarte de **H** au sens du nombre d'arêtes. La plus petite hypercarte de **H** autre que h_0 est composée du sommet pointé et du brin pointé formant une boucle sur le sommet pointé, définissant ainsi une hyperarête.

10.25. *Décomposition d'une hypercarte de* **H**

Soit H une hypercarte de **H** différente de h_0. On note $\tilde{b}$ le brin pointé de H et $C = \bar{\sigma}^*(\tilde{b})$ le circuit des brins extérieurs de H. La décomposition de H est illustrée par la figure 3.2.

Soit $b_1 = \alpha(\tilde{b})$ le brin opposé au brin pointé. On appelle hyperarête principale de H, l'unique hyperarête de H incidente (à droite) à b_1. Soit $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ le circuit $\bar{\sigma}^*(b_1)$ des brins laissant l'hyperarête principale de H à leur droite (voir figure 3.2). Soit b_i l'un de ces brins, d'extrémité initiale s_i ($i = 1,\ldots, k$). b_i est incident (à gauche) à une unique hyperface de H.

On va associer à b_i une hypercarte H_i de **H**. Pour ce faire, on distingue deux cas, selon que b_i est incident ou non à la face extérieure.

10.25.18. *Premier cas :* b_i *est incident à gauche à la face extérieure*

Autrement dit, $\alpha(b_i)$ appartient à C. C'est toujours le cas pour b_1, car le brin pointé $\tilde{b} = \alpha(b_1)$ appartient à C (voir figure 3.2). On pose $b_{s_i} = \sigma(b_i)$. C'est le brin suivant $\alpha(b_i)$ dans C. Son extrémité initiale est s_i.

10.25.18.13. Premier sous-cas

Si b_{s_i} est l'unique brin de C d'extrémité initiale s_i, on pose $H_i = h_0$. C'est le cas pour b'_1 dans l'hypercarte H_1 de la figure 3.2.

10.25.18.14. Deuxième sous-cas

Si b_{s_i} n'est pas l'unique brin de C d'extrémité initiale s_i, soit C_i le sous-circuit de C dont le premier brin est b_{s_i} et dont le dernier brin est le dernier brin de C d'extrémité finale s_i. C_i est le circuit des brins extérieurs d'une sous-hypercarte de H.

Soit H_i cette hypercarte de frontière extérieure C_i, pointée par b_{s_i}.

On note $\mathbf{H_1}$ l'ensemble de ces hypercartes H_i, lorsque H décrit **H**.

H_i, sous-hypercarte de H qui vérifie la propriété $P_{\mathbf{H}}$, hérite de cette propriété. Par conséquent, $\mathbf{H_1}$ est une sous-famille de **H**. Réciproquement, toute hypercarte de **H** est dans $\mathbf{H_1}$, car toute hypercarte de **H** peut être complétée par une boucle issue du sommet pointé

et dans la face extérieure, formant une hypercarte pour laquelle le deuxième sous-cas s'applique. On montre ainsi que $\mathbf{H_1} = \mathbf{H}$.

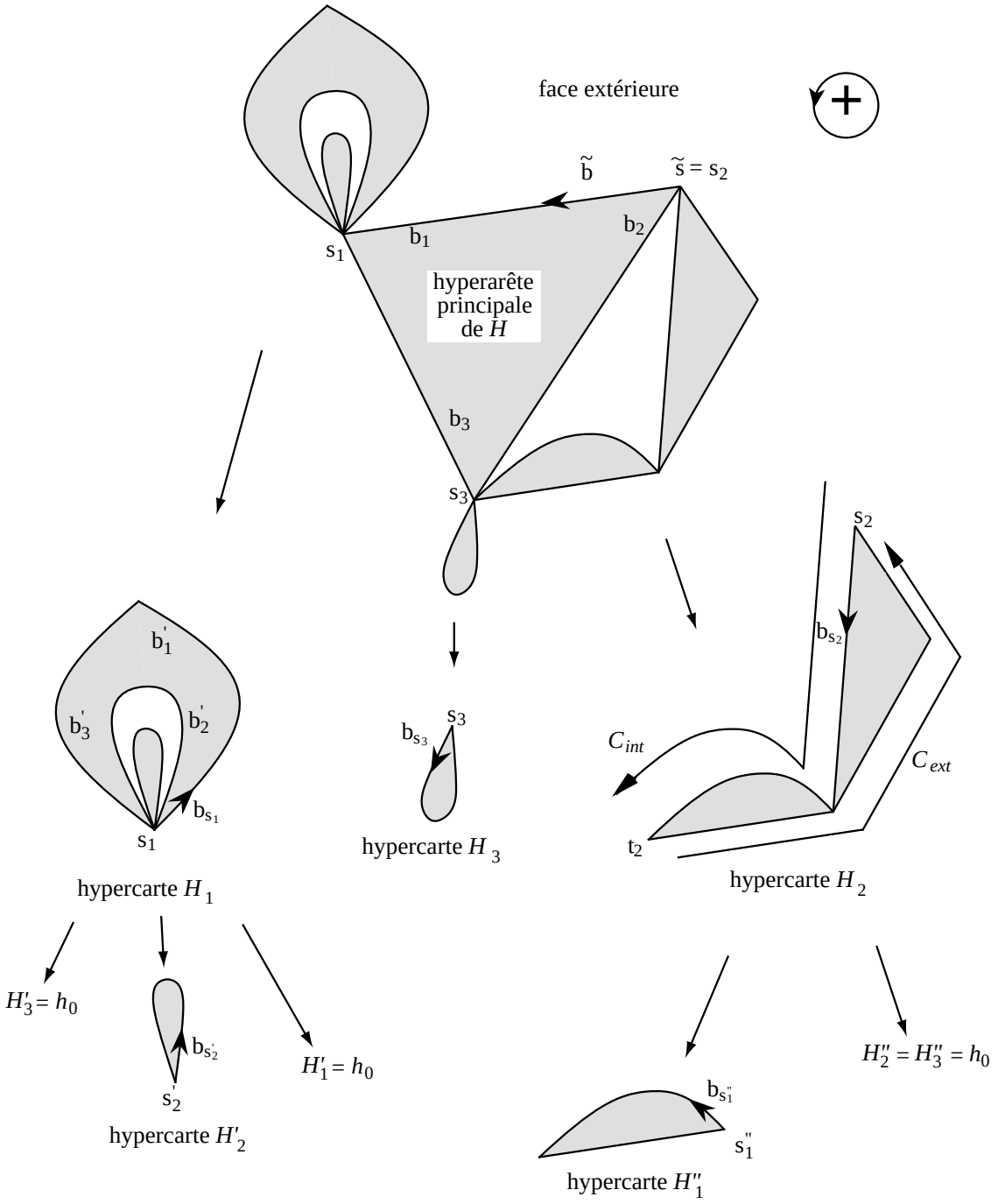


Figure 3.2 : décomposition d'une hypercarte H en sous-hypercartes.

10.25.19. *Deuxième cas*

Le brin b_i est incident à gauche à une hyperface F de H autre que la face extérieure. Puisque H vérifie la propriété $P_{\mathbf{H}}$, b_i est l'unique brin de $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ incident à F (sinon, le sommet final de b_i ne serait pas incident à la face extérieure, mais à F).

10.25.19.15. Premier sous-cas : b_i est une boucle

C'est le cas de b'$_2$ dans l'hypercarte H_1 de la figure 3.2.

On note H_i l'hypercarte à l'intérieur de cette boucle. Si H_i n'est pas h_0, alors on pointe H_i avec $b_{Si} = \sigma(b_i)$. H_i est une hypercarte planaire pointée à un seul sommet s_i. D'après la propriété $P_{\mathbf{H}}$, c'est une hypercarte de **H**.

10.25.19.16. Deuxième sous-cas : b_i n'est pas une boucle

C'est le cas de b_2 dans l'hypercarte H de la figure 3.2. On note t_i l'extrémité finale de b_i et on pose $b_{Si} = \sigma(b_i)$.

Soit C_{int} le chemin $\overline{\sigma}^*(b_{Si})\backslash\{\alpha(b_i)\}$ constitué des brins de H autres que $\alpha(b_i)$ laissant l'hyperface F à leur droite. C_{int} va de s_i à t_i et le premier brin de C_{int} est b_{Si}.

Soit C_{ext} le sous-chemin de $C = \overline{\sigma}^*(\tilde{b})$ qui va du dernier brin de C d'extrémité initiale t_i au dernier brin de C d'extrémité finale s_i (inclus).

En concaténant C_{ext} à la suite de C_{int}, on construit un circuit de brins $C_i = C_{int} \,.\, C_{ext}$, d'origine et d'extrémité s_i. C_i est le circuit des brins extérieurs d'une sous-hypercarte de H. Soit H_i cette sous-hypercarte de H, pointée par b_{Si}, dont la frontière extérieure est C_i.

H_i, sous-hypercarte de H qui vérifie la propriété $P_{\mathbf{H}}$, hérite de cette propriété. H_i est une hypercarte de **H** qui compte au moins deux sommets distincts s_i et t_i (car b_i n'est pas une boucle).

En conclusion du deuxième cas, on note $\mathbf{H_2}$ la famille de ces hypercartes H_i, lorsque H décrit **H** et que b_i est incident à une hyperface non extérieure. H_i, sous-hypercarte de H qui vérifie la propriété $P_{\mathbf{H}}$, hérite de cette propriété. Par conséquent, $\mathbf{H_2}$ est une sous-famille de **H**. Réciproquement, on vérifie que toute hypercarte de **H** est dans $\mathbf{H_2}$. Si cette hypercarte de **H** n'a qu'un seul sommet, on crée une hyperface supplémentaire en entourant l'hypercarte avec deux boucles issues du sommet pointé, pour former une hypercarte pour laquelle le premier sous-cas s'applique. Sinon, cette hypercarte de **H** a au moins deux sommets. On lui ajoute une hyperface et deux arêtes non boucle, de telle sorte que le deuxième sous-cas s'applique. Ceci permet d'établir que $\mathbf{H_2} = \mathbf{H}$.

10.26. ***Reconstruction de l'hypercarte***

Nous allons montrer que chaque cas de la décomposition précédente de l'hypercarte H admet une opération de reconstruction inverse. En ce qui concerne le dernier sous-cas, l'unicité de cette reconstruction découle du lemme suivant.

LEMME 3.1. *Soit H une hypercarte de* **H** *ayant au moins deux sommets. Alors il existe au moins deux sommets de H desquels soit issu, outre des boucles éventuelles, un unique brin extérieur non boucle de H.*

Rappel : On appelle brin extérieur de H tout brin du circuit $\overline{\sigma}^*(\tilde{b})$ des brins bordant la face extérieure de l'hypercarte H.

Preuve : Soit H' l'hypercarte construite à partir de H en supprimant dans H toutes les boucles et toutes les arêtes non extérieures. H' est une hypercarte de **H** sans boucle, sans

hyperface autre que la face extérieure, dont toutes les arêtes sont incidentes à la face extérieure. De plus, *H*' a les mêmes sommets et les mêmes arêtes extérieures non boucles que *H*.

On note *a*, *s* et *h* respectivement les nombres d'arêtes, de sommets et d'hyperarêtes de l'hypercarte *H*'. *a* est aussi le nombre de brins extérieurs de *H*'. *H*' étant une hypercarte planaire (c'est-à-dire de genre 0), la relation d'Euler-Poincaré s'écrit :

$$a = s + h - 1. \tag{3.5}$$

Or, chaque arête de *H*' est incidente à une unique hyperarête de *H*' et une hyperarête de *H*' est bordée par au moins deux arêtes distinctes (car *H*' est sans boucle). On a donc :

$$a \geq 2\ h. \tag{3.6}$$

De (3.5) et (3.6), il résulte que $a \leq 2\ s - 2$.

Tout brin extérieur de *H*' admet exactement un sommet de *H*' pour extrémité initiale et de tout sommet de *H*' est issu au moins un brin extérieur. Par conséquent, l'inégalité $a \leq 2\ s - 2$ montre qu'il existe au moins deux sommets de *H*' desquels soit issu un unique brin extérieur, car sinon on aurait $a \geq 2\ s - 1$. Ceci est vrai aussi dans *H* et achève la démonstration. CQFD.

Le problème de la reconstruction peut s'énoncer de la manière suivante. Soit *k* un entier strictement positif, soit H_1 une hypercarte de $\mathbf{H_1}$ et soient $H_2,\ldots,H_k$ des hypercartes de $\mathbf{H_1}$ ou $\mathbf{H_2}$ (On sait que $\mathbf{H_1} = \mathbf{H_2} = \mathbf{H}$, donc la distinction entre H_i hypercarte de $\mathbf{H_1}$ et H_i hypercarte de $\mathbf{H_2}$ est un attribut supplémentaire de H_i qui est l'entier **1** ou **2**).

Pour *i* compris entre 1 et *k*, on note s_i le sommet pointé de H_i et b_{s_i} son brin pointé.

Nous donnons ici un algorithme permettant de construire l'unique hypercarte de **H** dont la décomposition conduit à la séquence d'hypercartes $(H_1,\ldots,H_k)$. Par commodité, s_1 est aussi désigné par s_{k+1}, b_1 par b_{k+1} et b_k par b_0.

Algorithme de reconstruction

On dispose les sommets distingués s_1 à s_k des hypercartes H_1 à H_k sur un cercle, dans cet ordre lorsqu'on parcourt le cercle dans le sens négatif, en confondant les sommets s_i et s_{i+1} si l'hypercarte H_i appartient à $\mathbf{H_2}$ et si le sommet s_i est l'unique sommet de H_i, *i* étant un entier compris entre 1 et *k*.

On relie les sommets s_i et s_{i+1} par deux brins opposés notés b_i et $\alpha(b_i)$. Si les sommets s_i et s_{i+1} sont distincts, alors le brin b_i est d'extrémité initiale s_i et d'extrémité finale s_{i+1}. Si les sommets s_i et s_{i+1} sont confondus, alors les brins b_i et $\alpha(b_i)$ sont tels que $b_i = \sigma(\alpha(b_{i-1}))$ et $\sigma(\alpha(b_i)) = b_{i+1}$. On a ainsi recréé l'hyperarête principale de *H*.

10.26.20. *Premier cas*

Ce cas correspond au premier cas de décomposition. H_i est une hypercarte de $\mathbf{H_1}$. Alors la position de H_i par rapport au brin b_i est telle que $\sigma(b_i)$ soit le brin b_{s_i}.

10.26.21. *Deuxième cas*

Ce cas correspond au deuxième cas de décomposition. H_i est une hypercarte de $\mathbf{H_2}$.

Premier sous-cas : H_i a un seul sommet.

Alors la position de H_i par rapport au brin b_i est telle que $\sigma(b_i)$ soit le brin b_{s_i}.

Deuxième sous-cas : H_i a au moins deux sommets.

On note t_i le premier sommet différent de s_i rencontré sur le circuit C_i des brins extérieurs de H_i duquel soit issu un unique brin extérieur non boucle. On note b_{t_i} cet unique brin non boucle de C_i d'extrémité initiale t_i. Le lemme 3.1 montre que t_i existe toujours.

On raccroche l'hypercarte H_i en confondant les sommets t_i et s_{i+1} de telle sorte que :

- Le brin $\sigma(b_i)$ soit le brin b_{s_i}.
- Le brin b_{t_i} soit l'unique brin extérieur de H_i d'extrémité initiale t_i qui reste extérieur après raccrochage du sommet t_i en s_{i+1}. Les autres brins extérieurs de H_i d'extrémité initiale t_i sont des boucles que l'on rencontre entre b_{t_i} et $\alpha(b_i)$ en tournant autour du sommet s_{i+1} dans le sens positif.

Fin de l'algorithme.

On obtient alors une hypercarte de **H** en pointant le brin $\alpha(b_1)$.

10.27. *Bijection de décomposition et énumération de* H

On a décomposé toute hypercarte H de **H** de façon unique en un nombre fini k (égal au nombre d'arêtes de l'hyperarête principale de H) d'hypercartes de $\mathbf{H_1}$ ou $\mathbf{H_2}$ (la première de ces hypercartes, associée au brin b_1, est dans $\mathbf{H_1}$).

Si $H = h_0$, alors $k = 0$. Sinon, parmi ces k ($k \geq 1$) hypercartes, on sait que celle qui est associée au brin pointé est un élément de $\mathbf{H_1}$. D'où la décomposition bijective :

$$\mathbf{H} \leftrightarrow \{h_0\} + \mathbf{H_1} \,.\, (\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2})^* \tag{3.7}$$

$$\text{avec } \mathbf{H_1} \leftrightarrow \mathbf{H} \text{ et } \mathbf{H_2} \leftrightarrow \mathbf{H}. \tag{3.8}$$

Soit $K(a)$ la série génératrice ordinaire des hypercartes de **H**, dénombrées selon leur nombre d'arêtes plus une (exposant de a). D'après la décomposition bijective de **H** qui précède, $K(a)$ est solution de l'équation :

$$K(a) = a\left(1 + \frac{K(a)}{1 - 2K(a)}\right) \tag{3.9}$$

qui se réécrit sous la forme :

$$K(a) = a + \frac{K(a)^2}{1 - K(a)}. \qquad (3.10)$$

On reconnaît la relation qui définit la série de Schröder. Par conséquent, le nombre d'hypercartes de **H** à (n-1) arêtes, coefficient de a^n dans $K(a)$, est le n^{e} nombre de la série de Schröder.

10.28. *Conclusion de l'énumération des hypercartes*

Le nombre d'hypercartes de **H** à n arêtes est égal au nombre de polygones de **P** à n+2 arêtes extérieures. On est alors naturellement conduit à chercher une bijection simple entre ces deux familles de structures.

11. Une bijection géométrique entre P et H

Pour définir cette bijection f de **H** sur **P**, on s'appuie sur la décomposition des hypercartes de **H** décrite précédemment. Avec les mêmes notations, on construit une partition de polygone $f(H)$ de **P** à partir d'une hypercarte H de **H** en quatre transformations bijectives successives.

11.29. *Première transformation : insertion d'arêtes*

La plus petite hypercarte de **H** ayant au moins un brin est une boucle. La bijection f de **H** sur **P** applique cette hypercarte sur le plus petit polygone de **P** non réduit à une arête, c'est-à-dire le triangle pointé. On voit donc qu'il sera nécessaire, pour construire un polygone à partir d'une hypercarte, d'ajouter des arêtes qui "élargiront" notamment les boucles pour en faire des triangles. C'est l'objet de cette première étape :

On insère deux arêtes non boucles, qu'on appellera A et B, et un sommet r entre A et B, au bord de l'hyperarête principale de H, entre le sommet pointé $\tilde{s}$ et le brin pointé $\tilde{b}$.

On induit cette insertion d'arêtes à tous les niveaux de la décomposition récursive de H.

Ainsi, on insère deux arêtes non boucles, qu'on appellera A_i et B_i, et un sommet r_i entre A_i et B_i, entre le sommet s_i et le brin b_{S_i}. Ce brin b_{S_i} est le brin pointé de chaque hypercarte H_i (non réduite à un sommet) de la décomposition de H.

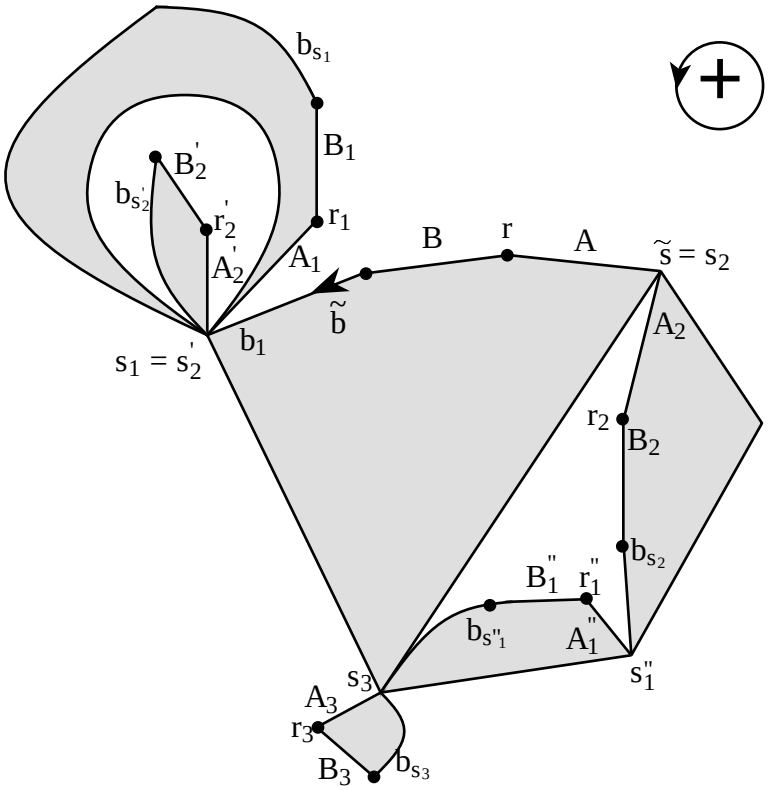


Figure 3.3 : Insertion d'arêtes et de sommets dans l'hypercarte.

Cette opération, réalisée récursivement à tous les niveaux de la décomposition récursive de H (voir figure 3.3), est à l'évidence bijective. On note $f_1(H)$ l'hypercarte ainsi obtenue.

11.30. ***Deuxième transformation* : *ouverture des hyperfaces de $f_1(H)$ autres que la face extérieure et ajout d'arêtes repérant ces ouvertures***

Soit r le sommet incident (intermédiaire) aux arêtes A et B de $f_1(H)$.

Soit b_i un brin de $(b_2, \ldots, b_k)$, d'extrémité initiale s_i ($i = 2, \ldots, k$), incident à l'hyperarête principale de H. On note t_i l'extrémité finale de b_i. b_i est incident à une unique hyperface de H.

Si b_i est incident à une hyperface F de H autre que la face extérieure, alors on ajoute à $f_1(H)$ une arête entre r et t_i. Puis on ouvre cette hyperface F en décrochant la sous-hypercarte H_i en t_i. Cette opération est bijective, car l'arête ajoutée repère la sous-hypercarte H_i de $\mathbf{H_2}$ à "raccrocher", créant ainsi dans H des hyperfaces internes.

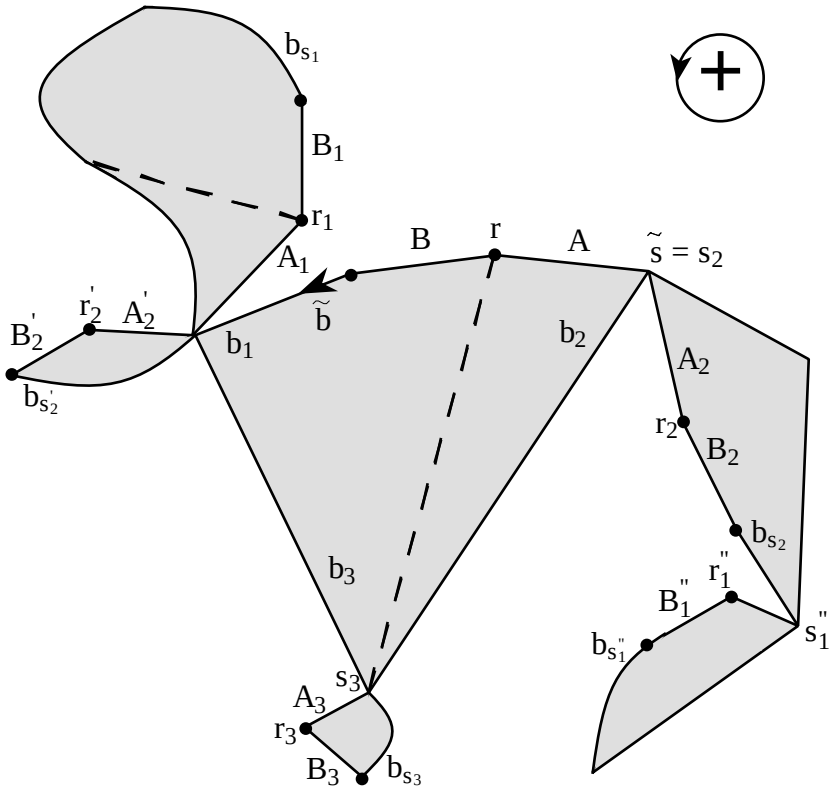


Figure 3.4 : Ouverture des hyperfaces non extérieures et repérage par des arêtes pointillées.

On induit cet ajout d'arêtes diagonales sur les hypercartes de la décomposition de H, à tous les niveaux de la décomposition de H. La structure ainsi obtenue n'est plus une hypercarte, car des arêtes traversent certaines de ses hyperarêtes. On la note $f_2(H)$. Sur la figure 3.4, les arêtes ajoutées sont représentées en pointillés. Cette opération est à l'évidence bijective.

11.31. ***Troisième transformation : collage d'arêtes***

Pour i compris entre 1 et k, on confond l'arête A_i (si elle existe, c'est-à-dire si la sous-hypercarte H_i n'est pas réduite à un sommet) avec l'arête portant le brin b_i, qui précède A_i (pour l'orientation positive du plan, voir figure 3.5) lorsqu'on tourne autour de leur sommet commun s_i. Les arêtes issues de ces recollements deviennent des arêtes internes à des hyperarêtes et s'ajoutent à celles en pointillés créées à la deuxième étape.

On induit ce collage d'arêtes sur les hypercartes de la décomposition de $f_2(H)$, et ainsi de suite récursivement à tous les niveaux de la décomposition de $f_2(H)$. On note $f_3(H)$ la structure ainsi obtenue (voir figure 3.5). On peut considérer cette structure $f_3(H)$ comme une carte planaire pointée dont tous les sommets sont incidents à la face extérieure et dont les arêtes sont de deux types : pleines ou pointillées.

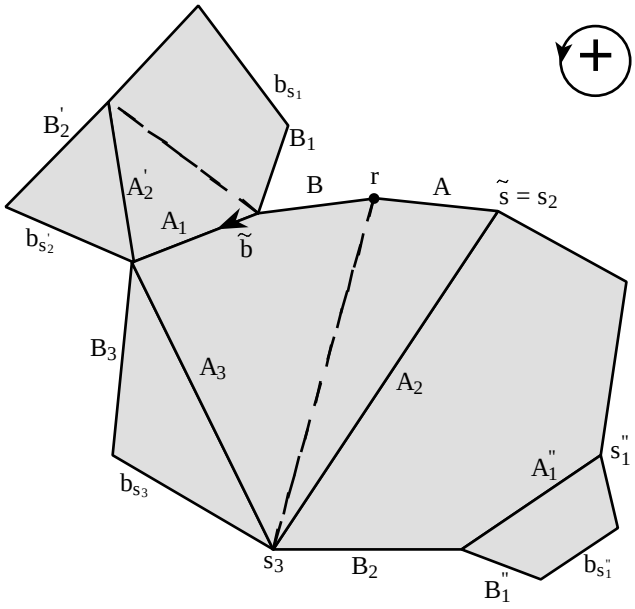


Figure 3.5 : Collage des arêtes de type " A " sur leur arête précédente.

Montrons que cette carte est " polygonale ", c'est-à-dire que le circuit des brins extérieurs de cette carte rencontre chaque sommet extérieur exactement une fois, définissant ainsi un polygone du plan. Pour cela, nous allons démontrer que le nombre de sommets et le nombre d'arêtes extérieures de cette carte sont égaux.

On note *ae*, *ai*, *ap*, *s* et *f* respectivement les nombres d'arêtes extérieures, d'arêtes intérieures pleines, d'arêtes intérieures pointillées, de sommets et de faces de la carte $f_3(H)$. On note *ha* et *hf* respectivement les nombres d'hyperarêtes et d'hyperfaces des hypercartes *H* et $f_1(H)$.

Par la première transformation, on associe une unique arête (de type " A ") à chaque hyperarête de *H*. Pour toutes les hyperarêtes autres que l'hyperarête principale, cette arête de type " A " devient, par collage dans la troisième transformation, une arête intérieure pleine de $f_3(H)$, d'où :

$$ha - 1 = ai. \tag{3.11}$$

Par la deuxième transformation, les hyperarêtes de $f_1(H)$ sont partitionnées par des arêtes pointillées, pour donner les (f-1) faces de $f_3(H)$ autres que la face extérieure, d'où :

$$f - 1 = ha + ap. \tag{3.12}$$

La relation d'Euler-Poincaré pour la carte $f_3(H)$ s'écrit :

$$ae + ai + ap = s + f - 2, \tag{3.13}$$

c'est-à-dire $ae = s$, compte tenu de (3.11) et (3.12). CQFD.

Par conséquent, $f_3(H)$ est un polygone avec deux types de diagonales (pleines et pointillées). On le pointe avec l'arête B insérée lors de la première transformation entre le sommet pointé $\tilde{s}$ et le brin pointé $\tilde{b}$ (voir paragraphe 11.29).

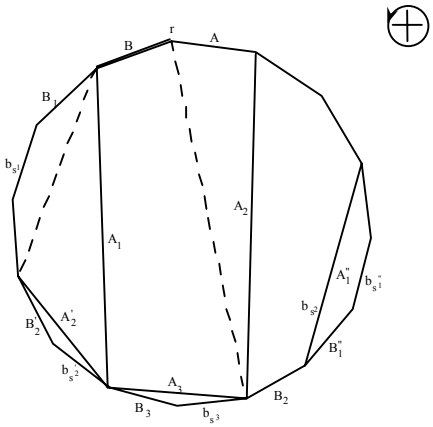


Figure 3.6 : Image de l'hypercarte, sous la forme d'un polygone convexe régulier.

L'opération inverse de décollage des arêtes s'applique à toutes les diagonales non pointillées du polygone, dans l'ordre où elles apparaissent dans la décomposition du polygone définie dans la partie 9. Ce décollage est réalisé autour du deuxième sommet de la diagonale rencontré lorsqu'on parcourt le bord extérieur du polygone $f_3(H)$ à partir de l'arête B dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Cette transformation est donc bijective.

La figure 3.6 présente la partition d'un polygone pointé régulier obtenue à partir du polygone irrégulier de la figure 3.5 par réorganisation des sommets sur un cercle et déformation d'arêtes.

11.32. *Quatrième transformation* : *"oubli" de la différence entre diagonales pointillées et pleines du polygone*

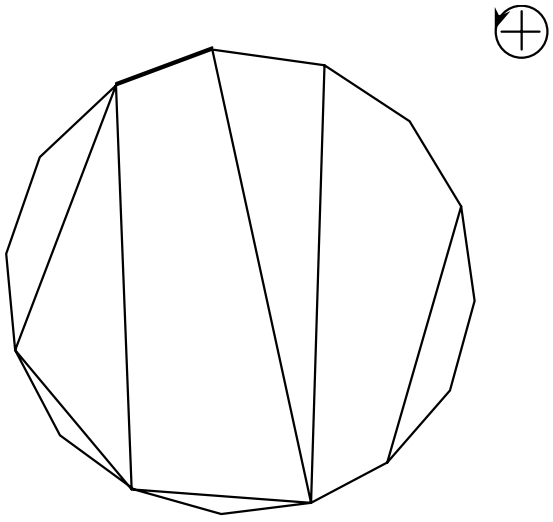


Figure 3.7 : Partition de polygone pointé en bijection avec l'hypercarte.

En ignorant dans le polygone $f_3(H)$ la distinction entre diagonales pleines et pointillées, on obtient un polygone $f(H)$ de **P** (voir figure 3.7).

Contrairement aux apparences, nous allons montrer que cette opération est bijective, en produisant un algorithme qui retrouve dans $f(H)$ les arêtes pointillées.

11.33. ***Algorithme de caractérisation des diagonales pointillées dans le polygone***

Les arêtes extérieures du polygone $f(H)$ sont orientées conformément à l'orientation positive du plan. Soit r le sommet initial de l'arête distinguée du polygone $f(H)$ pour cette orientation. L'algorithme consiste en un parcours du circuit des sommets du polygone à partir du sommet pointé dans le sens positif, avec marquage des diagonales.

Prétraitement : Toutes les diagonales issues du sommet r sont des diagonales pointillées. On marque toutes ces diagonales. Le sommet courant t est initialement le sommet qui suit le sommet r dans le circuit des sommets du polygone.

Itération :

Tant que t n'est pas égal à r faire :
parcourir les diagonales issues de t non marquées dans le sens contraire de l'orientation du plan.
La première de ces diagonales non marquées est pleine, les suivantes sont pointillées.
On marque toutes les diagonales issues du sommet t.
Le nouveau sommet t devient le sommet suivant t dans le circuit des sommets du polygone.
Fait.

JUSTIFICATION.

Le sommet r a été ajouté lors de la première transformation entre les deux arêtes ajoutées A et B. Il n'est donc pas l'extrémité d'une arête de H. L'arête B est l'arête distinguée du polygone $f(H)$. L'arête A est l'autre arête extérieure de $f(H)$ d'extrémité r. Par conséquent, toutes les diagonales dont l'origine est le sommet r ont été ajoutées par la deuxième transformation. Ce sont toutes des arêtes pointillées. Ceci justifie le prétraitement.

La justification de l'algorithme peut être déduite de la propriété suivante : si l'hypercarte H se décompose en la séquence d'hypercartes $(H_1, \ldots, H_k)$, alors le polygone $f_3(H)$ se construit à partir des polygones $f_3(H_1), \ldots, f_3(H_k)$ par collage de leur arête de type "A" sur une arête d'un polygone bijectivement associé à l'hyperarête principale de H (voir figure 3.6). Autrement dit, la quatrième transformation peut être définie inductivement sur la décomposition du polygone $f_3(H)$ qui est décrite dans la partie 9.

Par ailleurs, un sommet t du polygone dont est issue au moins une diagonale était, avant recollage des arêtes (troisième transformation), un sommet de type "r", ajouté lors la première transformation entre une arête de type "A" et une arête de type "B".

Il résulte de la propriété et de la nature du sommet t qu'on peut reprendre le raisonnement portant sur le sommet r en l'adaptant au sommet t. Il suffit d'ignorer la première diagonale non marquée rencontrée, qui est l'arête de type "A" recollée et qui est pleine. Comme pour le sommet r, les autres diagonales non marquées (c'est-à-dire celles dont la première extrémité rencontrée au cours de l'algorithme est le sommet t) sont des diagonales pointillées.

12. Conclusion du chapitre

En comparant les définitions des deux familles étudiées dans ce chapitre, on constate d'importantes différences de structure et de méthode de décomposition. Pourtant, ces deux familles sont énumérées par la série de Schröder. Ceci est vrai si le paramètre d'énumération est le nombre d'arêtes pour les hypercartes et le nombre d'arêtes extérieures pour les polygones.

C'est pourquoi la recherche d'une telle bijection m'a semblé un enjeu pertinent. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer les quelques figures de cet article : les hypercartes planaires et les partitions de polygones sont en général très différentes d'aspect. Expliciter une bijection " visuelle " entre ces deux familles, c'est notamment expliquer ce qu'il advient des boucles et des couleurs des hypercartes planaires (qui sont également des cartes planaires 2-coloriables) lorsqu'on les transforme en polygones.

Cet article a construit une bijection géométrique, dont les quatre étapes élémentaires traitent, le plus " naturellement " possible, les divergences de structure entre hypercartes et polygones : on ajoute d'abord aux hypercartes " assez d'arêtes pour que les boucles deviennent des triangles ", puis on " ouvre " les hyperfaces intérieures pour les supprimer. Ensuite, on " colle " certaines arêtes ajoutées à la première étape, ce qui permet de transformer le bord extérieur de l'hypercarte en un polygone régulier. Enfin, on uniformise les diagonales de ce polygone, ce qui revient à ignorer la bicoloration des hypercartes. Mais on prouve que cette étape est encore bijective, comme le sont toutes les précédentes.

Partie 3

Combinatoire énumérative

Cette partie présente une méthode algébrique d'énumération des cartes pointées sur une surface. Elle est fondée sur la résolution d'équations fonctionnelles vérifiées par les séries génératrices de diverses familles de cartes pointées. Lorsque la résolution exacte s'avère trop lourde, on lui substitue une démonstration formelle de la nature algébrique du résultat. Mieux encore, on démontre l'existence d'une forme paramétrique rationnelle pour chaque résultat, lorsque le système paramétrique est bien choisi. Ces théorèmes sont d'une grande utilité pratique, car ils réduisent l'inconnu du problème à un polynôme, dont on majore soigneusement le degré.

Voici un aperçu de la démarche suivie dans les chapitres de cette partie.

On sait depuis longtemps traduire l'opération de suppression d'une arête de W. Tutte en bijections entre familles de cartes. On sait ensuite traduire ces bijections en équations fonctionnelles sur les séries génératrices des cartes. Ces décompositions bijectives et leur traduction en équations fonctionnelles sont données dans le chapitre 4.

Il s'agit ensuite de trouver une méthode de résolution de ces équations, pour chaque type de surface. Une telle méthode a été utilisée par Arquès [Arq87a] pour l'énumération des cartes pointées orientables de genre (ou de type) 1. Elle a été décrite pour les cartes de genre quelconque par E. Bender et E. Canfield [BC91]. Sa complexité croît rapidement avec le type des surfaces, ce qui anéantit tout espoir de résolution explicite. Même si l'on disposait d'outils de calcul formel de puissance illimitée, on serait bien incapable de prouver l'exactitude des résultats qu'ils délivreraient.

En revanche, l'examen de [Arq87a], de [BC91] et des premiers résultats explicites suggère l'existence d'une forme générale implicite pour toutes les surfaces. On a trouvé une telle structure, dont la portion inconnue est réduite à un polynôme. C'est ce que propose le chapitre 5, sous forme de théorèmes d'énumération paramétrique des cartes pointées sur une surface. Le premier théorème traite du cas orientable, le second du cas général.

Les chapitres 6 et 7 sont consacrés à la démonstration de ces théorèmes.

Chapitre 4

Bijections et équations fonctionnelles

13. Bijections de décomposition topologique des cartes pointées

La méthode, utilisée pour la première fois par W. Tutte [Tut68] pour énumérer les cartes planaires pointées, consiste à supprimer une arête, afin de relier la famille des cartes pointées à n arêtes avec des familles de cartes à n-1 arêtes. Par suppression d'une arête, il faut comprendre, en toute rigueur, l'identification de cette arête avec ses deux faces incidentes.

Cette méthode, sous sa forme duale de contraction d'une arête, est généralisée à toutes les surfaces orientables par T. Walsh et B. Lehman [WL72a]. Elle est étendue aux cartes sur une surface quelconque par E. Bender et E. Canfield [BC86], qui l'améliorent, selon un point de vue détaillé dans le paragraphe 13.34.

Dans ce qui suit, j'adopte systématiquement le point de vue de contraction d'une arête choisi par T. Walsh et B. Lehman.

Pour les cartes planaires, la décomposition ne distingue que deux cas, selon que l'arête pointée est ou n'est pas une boucle. Si c'est une boucle, on la supprime en séparant la carte en deux cartes planaires, initialement à l'intérieur et à l'extérieur de la boucle. Si l'arête pointée n'est pas une boucle, sa contraction produit une seule carte planaire et l'opération inverse est possible à condition de connaître le degré du sommet pointé.

Pour les cartes pointées sur une surface orientable autre que la sphère, les choses sont un peu moins simples. En effet, la suppression de certaines boucles ne déconnecte pas la carte. Une telle boucle étant seule à emprunter un trou de la surface, sa suppression permet de boucher ce trou, donc de diminuer le genre de la carte. L'opération inverse n'est possible qu'à partir d'une carte dans laquelle un deuxième sommet est distingué : on déformera alors la surface pour confondre ce deuxième sommet avec le sommet pointé, en collant la surface sur elle-même selon deux petits disques passant respectivement par chaque sommet. Le bord commun de ces deux disques forme une boucle supplémentaire. Cette opération ajoute un trou à la surface, et les deux sommets ne forment plus qu'un seul sommet, incident à la boucle ajoutée.

Cette description intuitive est formalisée dans les paragraphes suivants. Elle permet d'ores et déjà de comprendre pourquoi il est nécessaire de connaître le degré de plusieurs sommets d'une carte pointée. C'est ce qui nous a conduit à définir les cartes pointées séquencées, dans lesquelles une séquence de sommets est distinguée.

On détaillera la décomposition des cartes pointées dans le cas d'une surface quelconque, orientable ou non, au paragraphe 13.36. On montrera dans le paragraphe 13.36.23.20 que cette décomposition admet une forme plus simple lorsqu'on se restreint aux surfaces orientables.

13.34. ***Diverses manières de pointer***

Dans [WL72a], les auteurs désignent par *slicing* une carte orientable dont tous les sommets sont ordonnés et dont chaque sommet est l'extrémité initiale d'un unique brin distingué. Avec ce pointage systématique des sommets, il n'y a qu'un seul cas de contraction d'une arête non boucle, car son extrémité finale est toujours un sommet distingué. Toutefois, les *slicings* présentent deux inconvénients. D'une part, il y a confusion entre le nombre de brins distingués et le nombre de sommets de la carte, ce qui contraint ce nombre de sommets à être un paramètre des familles de cartes, et non un élément statistique de l'énumération. D'autre part, une telle précision de pointage, qui se traduit par des familles de cartes de grande taille, n'est pas requise, comme le montre le système de pointage adopté dans [BC86].

Dans [BC86], les auteurs réduisent le pointage au strict nécessaire : les seuls sommets distingués sont ceux qui sont introduits par la suppression d'une boucle non déconnectante. De plus, on ne distingue pas de brin issu de ces sommets distingués. On incorpore seulement le degré de chaque sommet distingué dans la liste des paramètres de l'énumération. Le nombre de manières de distinguer un brin issu d'un tel sommet est en effet égal au degré de ce sommet. Ce pointage est le plus économique, dans la mesure où il réduit au mieux la taille des familles de cartes considérées. Toutefois, il présente l'inconvénient d'entraîner deux cas de contraction d'une arête non boucle, selon que l'extrémité finale est distinguée ou non. Le chapitre suivant montre comment le cas supplémentaire, pour lequel l'extrémité finale n'est pas distinguée, complique singulièrement la résolution des équations fonctionnelles.

Pour l'exposé des bijections, nous avons suivi la manière économique de pointer de [BC86], en décomposant la famille des cartes pointées séquencées.

13.35. ***Notations***

Soit τ un demi entier et k un entier naturel. On désigne par $M_{\tau, k}$ (resp. $MO_{\tau, k}$) la famille des cartes pointées k-séquencées sur une surface quelconque (resp. orientable) de type τ. Si τ est entier, on sait qu'il y a une surface orientable et une surface non orientable de type τ. La famille $M_{\tau, k}$ réunit alors les cartes sur ces deux surfaces.

Pour tout entier naturel n et pour toute séquence $D = d_1, \ldots, d_k$ d'entiers naturels non nuls, on désigne par $M_{\tau, k, n, D}$ la sous-famille de $M_{\tau, k}$ des cartes dont le sommet pointé est de degré n et dont les sommets distingués ont pour degré respectif $d_1, \ldots, d_k$. On note $d.D$ la séquence $d, d_1, \ldots, d_k$. On écrit $D_1 \subseteq D$ pour exprimer que D_1 est une sous-séquence de D, et D-D_1 pour désigner la sous-séquence complémentaire.

On note $s(C)$, $a(C)$ et $f(C)$ respectivement les nombres de sommets, d'arêtes et de faces d'une carte topologique C et on désigne par S la surface qui la porte. On note s, a et f

respectivement le sommet, l'arête et la face pointée de C. Soit d le brin pointé associé à (a, s, f), dans la carte combinatoire pointée (D, σ, β, ρ) associée à la carte topologique C. On note encore α l'involution sans point fixe $\beta \circ \rho$.

La famille $M_{\tau, k, n, D}$ est trivialement la réunion disjointe des 4 familles suivantes :

- La sous-famille $D_{\tau, k, n, D}$ des cartes dont l'arête pointée est une boucle, dont la contraction déconnecte la carte.
- La sous-famille $N_{\tau, k, n, D}$ des cartes dont l'arête pointée est une boucle, dont la contraction ne déconnecte pas la carte.
- La sous-famille $A_{\tau, k, n, D}$ des cartes dont l'arête pointée n'est pas une boucle et dont l'extrémité finale n'est pas un sommet distingué.
- La sous-famille $P_{\tau, k, n, D}$ des cartes dont l'arête pointée n'est pas une boucle et dont l'extrémité finale est un sommet distingué.

De manière analogue, pour les cartes orientables, on définit les familles $MO_{\tau, k, n, D}$, $DO_{\tau, k, n, D}$, $NO_{\tau, k, n, D}$, $AO_{\tau, k, n, D}$ et $PO_{\tau, k, n, D}$.

13.36. *Surfaces quelconques*

La carte C est décomposée par contraction de son arête pointée a. L'exposé de la décomposition se fonde sur la structure topologique de la surface S, donnée par le théorème de classification des surfaces.

Chacune des 4 sections suivantes décrit une bijection entre l'une des sous-familles $D_{\tau, k, n, D}$, $N_{\tau, k, n, D}$, $A_{\tau, k, n, D}$, $P_{\tau, k, n, D}$ et une structure impliquant des familles de cartes ayant moins d'arêtes. Le symbole $\leftrightarrow$ traduit l'existence d'une bijection entre ses deux membres. Les symboles + et $\sum$ désignent respectivement la réunion de deux ou plusieurs ensembles disjoints.

13.36.22. *L'arête pointée est une boucle*

La réunion du sommet pointé s et de la boucle pointée a de C forme une courbe simple fermée c sur la surface S. On découpe la surface S le long de cette courbe c et on supprime chaque bord, homéomorphe à un cercle, en y collant un disque. Ainsi, on obtient soit deux surfaces S_1 et S_2, soit une seule surface S'. Ce dernier cas ne peut se produire que si le type de la carte n'est pas nul. Nous étudions séparément ces deux cas dans les deux sections suivantes.

13.36.22.17. Boucle pointée déconnectante

C est une carte de la famille $D_{\tau, k, n, D}$. On note C_1 et C_2 les restrictions de la carte C aux surfaces S_1 et S_2 respectivement. On renomme les sommets s de C_1 et C_2 respectivement en s_1 et s_2, puis on supprime dans C_1 et C_2 la boucle a. C_1 et C_2 sont deux cartes qui se partagent :

- les $s(C)$-1 sommets de C autres que le sommet pointé s,
- les $a(C)$-1 arêtes de C autres que la boucle pointée supprimée a,
- les $f(C)$ faces de C,
- la séquence des k sommets distingués de C.

Les sommets s_1 et s_2 deviennent les sommets pointés de C_1 et C_2 (voir figure 4.1).

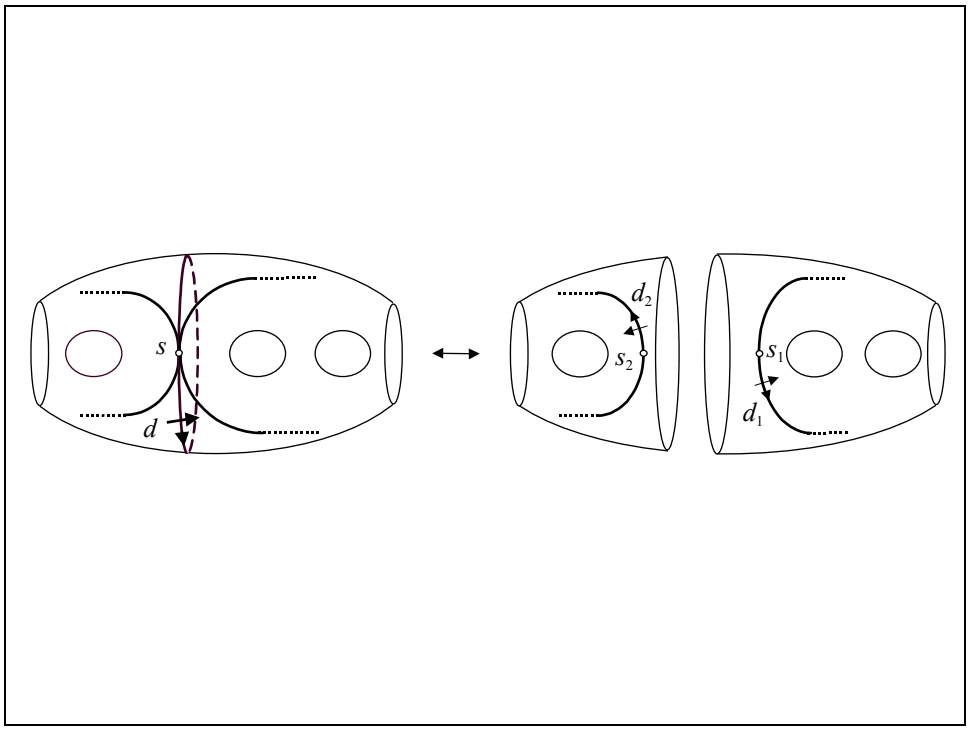


Figure 4.1 : Cas d'une arête déconnectante.

Si la carte C_1 n'est pas réduite au sommet s_1, le brin $d_1 = \sigma(d)$ dans C est pointé dans C_1. Si la carte C_2 n'est pas réduite au sommet s_2, le brin $d_2 = \sigma(\alpha(d))$ dans C est pointé dans C_2.

La séquence des sommets distingués de C_1 (respectivement C_2) est la restriction de la séquence des sommets distingués de C aux sommets inclus dans la surface S_1 (respectivement S_2). Les surfaces S_1 et S_2 (et les cartes C_1 et C_2) se partagent le type τ de la carte C selon les types respectifs τ_1 et τ_2 (demi entiers positifs ou nuls) de somme τ.

Par conséquent, on décompose ainsi toute carte C de $D_{\tau,k}$ en un couple (C_1, C_2) de cartes de $M_{\tau_1,k_1} \times M_{\tau_2,k_2}$ telles que $\tau_1 + \tau_2 = \tau$ et $k_1 + k_2 = k$. Cette décomposition est bijective, car l'opération inverse est la somme connexe des cartes C_1 et C_2, qui généralise simplement la notion de somme connexe de deux surfaces, avec ajout d'une arête canoniquement pointée, le long du bord de connexion.

L'effet sur le degré du sommet pointé et sur les séquences de degrés des sommets distingués est précisé dans la bijection suivante :

$$D_{\tau,k,n+2,D} \leftrightarrow \sum_{\substack{\tau_1+\tau_2=\tau \\ k_1+k_2=k}} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ D_1 \subseteq D}} M_{\tau_1,k_1,n_1,D_1} \times M_{\tau_2,k_2,n_2,D-D_1} \quad (4.4)$$

13.36.22.18. Boucle pointée non déconnectante

C est une carte de la famille $N_{\tau, k, n, D}$. En découpant la surface *S* le long de la courbe *c*, on obtient soit un seul bord homéomorphe à un cercle, soit deux bords homéomorphes à deux cercles.

Bord homéomorphe à un cercle

Ce premier cas n'existe que si la surface *S* n'est pas orientable. On dit que l'arête pointée *a* traverse une auto-intersection (ou un demi-trou) de la surface *S*. Une bande étroite autour de *a* est homéomorphe à un ruban de Möbius et l'effacement de *a* forme un bord homéomorphe au bord d'un ruban de Möbius, donc un cercle. On supprime ce bord en l'identifiant avec le bord d'un disque, et on obtient la surface S_1, de type τ-½. On note C_1 la carte résultant de la carte *C* par cette opération.

C_1 est une carte sur la surface S_1 ayant :

- les $s(C)$ sommets de *C*,
- les $a(C)$-1 arêtes de *C* autres que la boucle supprimée *a*,
- les $f(C)$ faces de *C*,
- la séquence de *k* sommets distingués de *C*.

Première forme

Si la carte C_1 n'est pas réduite au sommet *s*, alors il existe dans *C* des arêtes incidentes à *s* distinctes de *a*. Si $\sigma(d) = \beta(d)$ dans *C*, comme sur la figure 4.2, alors on pointe dans C_1 le brin $d_1 = \sigma(\beta(d))$. C_1 est une carte de $M_{\tau-½,k}$ et l'opération de reconstruction inverse est définie par le brin pointé de C_1.

Seconde forme

Si $\sigma(d) \neq \beta(d)$ dans *C*, alors on définit deux brins d_1 et d_2 dans C_1 selon les règles suivantes.

Si $\sigma(\beta(d)) = d$ dans *C*, comme dans la figure 4.3, alors on pose $d_2 = d_1 = \sigma(d)$.

Sinon, dans les autres cas, où $\sigma(d) \neq \beta(d)$ et $\sigma(\beta(d)) \neq d$, comme dans la figure 4.4, on pose $d_1 = \sigma(d)$ et $d_2 = \sigma(\beta(d))$. Les brins d_1 et d_2 définissent une unique manière de reconstruire *C* à partir de C_1.

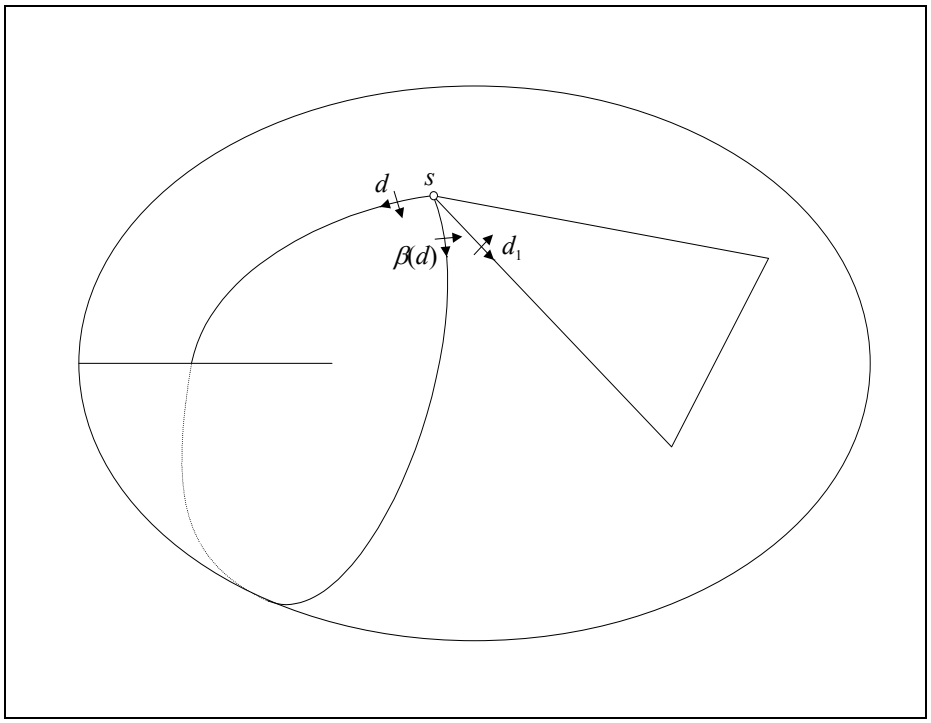


Figure 4.2 : cas où $\sigma(d) = \beta(d)$.

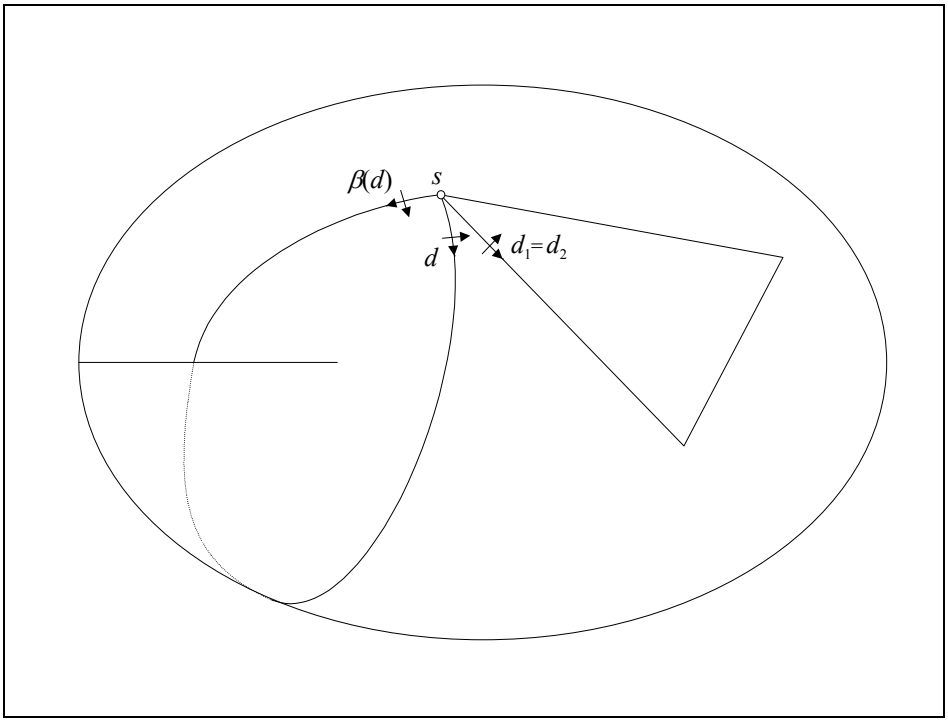


Figure 4.3 : cas où $\sigma^{-1}(d) = \beta(d)$.

Dans la carte C_1, pointée par le brin d_1, un brin d_2 issu de s est distingué, donc C_1 n'est pas une carte séquencée. On obtient une carte séquencée C' à partir de C_1 en oubliant ce

brin distingué. Alors, le nombre de manières différentes de choisir d_2 dans le même cycle de σ que d_1 est égal au degré du sommet s.

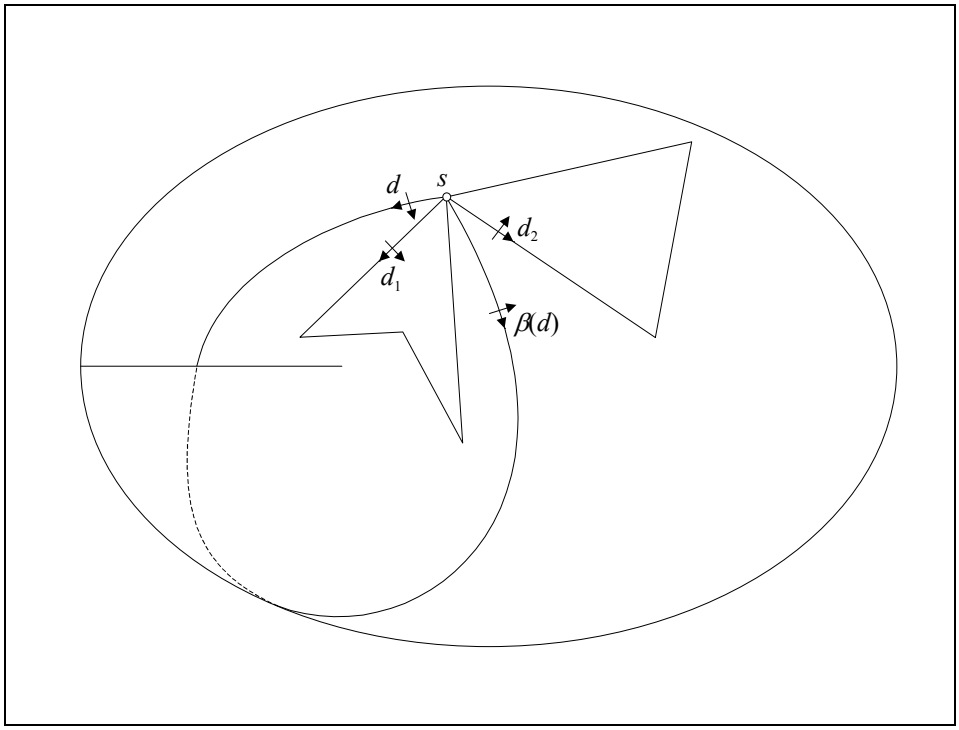


Figure 4.4 : Autres cas.

Si le degré du sommet s dans C_1 est n, alors il y a exactement n choix possibles du brin d_2 (dans le même cycle de σ que d_1) dans cette deuxième forme de reconstruction.

Synthèse des deux formes

La première forme ajoute un choix aux n choix de la seconde forme. La contribution de ces deux formes dans la décomposition de la famille $N_{\tau, k, n+2, D}$ donnée à la fin de cette section, est donc :

$$M_{\tau-\frac{1}{2},k,n,D} \times \{1,\ldots,n+1\} \tag{4.5}$$

Bord homéomorphe à deux cercles

Ce deuxième cas n'existe que si la surface S est de type non nul. La surface S_1 obtenue en fermant les bords par deux disques disjoints est de type τ-1.

Voici comment on obtient une carte C_1 sur la surface S_1.

Les brins d et $\alpha(d)$ partagent le cycle $\sigma^*(d) = (d, \ldots, \alpha(d), \ldots, \sigma^{-1}(d))$ de brins issus de s en deux sous-séquences :

- la sous-séquence $\sigma(d), \ldots, \sigma^{-1}(\alpha(d))$
- la sous-séquence $\sigma(\alpha(d)), \ldots, \sigma^{-1}(d)$

Ces sous-séquences sont nécessairement non vides : dans le cas contraire, l'une des deux faces incidentes à la boucle a n'admettrait que a comme bord et la suppression de la boucle a déconnecterait S en une surface homéomorphe à S et en une sphère, ce qui a été étudié dans la section 13.36.22.17.

Par conséquent, les brins $d_1 = \sigma(d)$ et $d_2 = \sigma(\alpha(d))$ existent toujours.

Le sommet s est remplacé par deux sommets s_1 et s_2, de telle sorte que les brins de la séquence $\sigma(d),\ldots, \sigma^{-1}(\alpha(d))$ soient incidents à s_1 et que les brins de la séquence $\sigma(\alpha(d)),\ldots, \sigma^{-1}(d)$ soient incidents à s_2.

La boucle a est effacée et on note C_1 la carte résultante. Dans C_1, on pointe le brin d_1.

C_1 est une carte sur la surface S_1 ayant :

- les $s(C)$ sommets de C, plus le nouveau sommet s_2,
- les $a(C)$-1 arêtes de C autres que la boucle supprimée a,
- les $f(C)$ faces de C,
- la séquence de k sommets distingués de C, augmentée du sommet s_2 (disons, arbitrairement, en début de séquence).

Dans la carte C_1, le brin d_2 issu de s_2 est distingué, donc C_1 n'est pas une carte séquencée. On obtient une carte séquencée C' à partir de C_1 en oubliant ce brin distingué, pour ne conserver que le sommet distingué s_2.

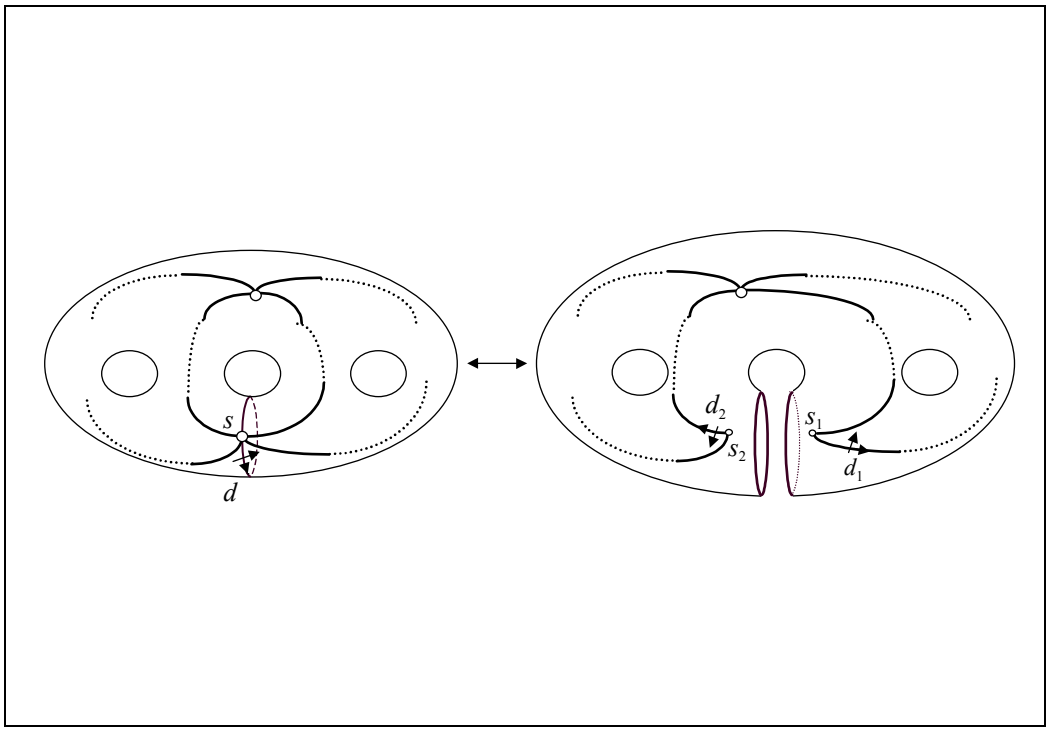


Figure 4.5 : Bord homéomorphe à deux cercles, cas orientable.

Étudions l'opération inverse de reconstruction de C à partir d'une carte séquencée C_1 sur une surface S_1 de type τ-1.

Soit s_1 le sommet pointé de C_1, soit s_2 le premier sommet distingué de C_1 et soit p le degré de s_2. L'entier naturel non nul p compte le nombre de brins (un brin est une arête munie d'un sens de parcours) issus de ce sommet. Or un brin admet deux sens de traversée opposés. Il y a donc $2p$ manières différentes de choisir un brin d_2 issu du sommet s_2.

Topologiquement, ce raccordement consiste à déformer la surface S_1 pour confondre les sommets s_1 et s_2, soit par l'extérieur (figure 4.5) selon une anse de tore, soit par double auto-intersection en formant une bouteille de Klein (figure 4.6), afin que les brins d et $\alpha(d)$ (portés par la boucle ajoutée) soient opposés. Par ses pointillés, la figure 4.5 se veut symboliquement générale. En revanche, la figure 4.6 ne présente qu'un cas particulier : à partir de cette figure, on obtiendrait une carte C_1 réduite à une arête non boucle, dont le sommet non pointé serait distingué.

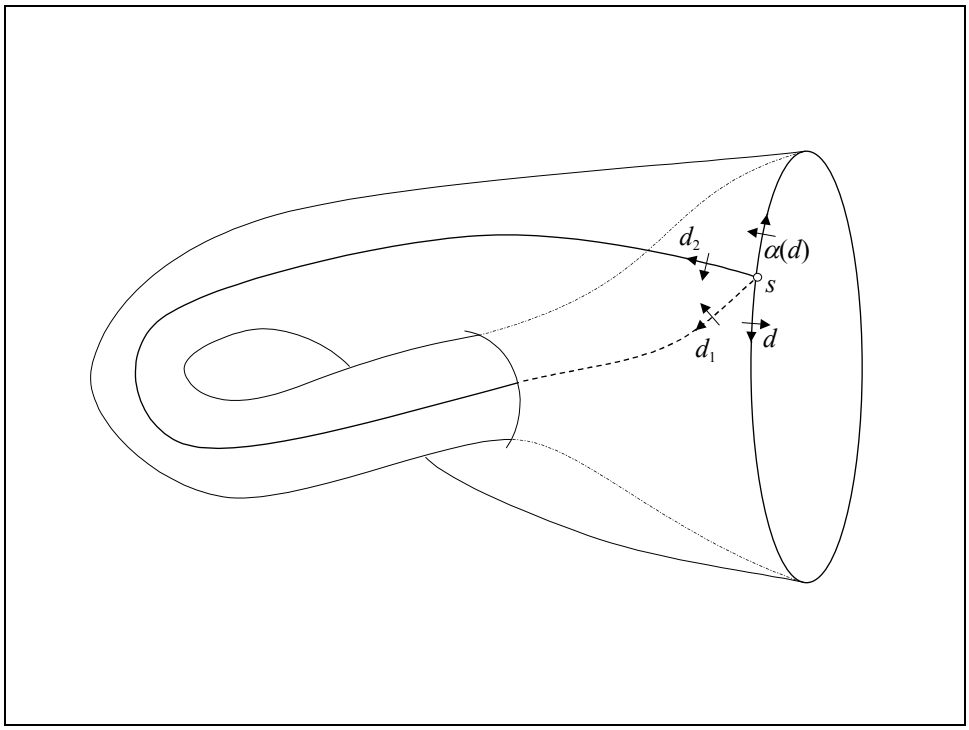


Figure 4.6 : Bord homéomorphe à deux cercles, cas non orientable.

On décompose ainsi toute carte C de $N_{\tau,k}$ en $2p$ cartes de $M_{\tau-1,k+1}$.

Pour tout entier naturel n et pour toute séquence $D = d_1, \ldots, d_k$ d'entiers naturels non nuls, on désigne par $N_{\tau,k,n+2,D}$ la sous-famille de $N_{\tau,k}$ des cartes dont le sommet pointé est de degré n+2 et dont les sommets distingués ont pour degré respectif $d_1, \ldots, d_k$.

On résume cette section par la bijection suivante :

$$N_{\tau,k,n+2,D} \leftrightarrow M_{\tau-\frac{1}{2},k,n,D} \times \{1,\ldots,n+1\} + \sum_{p=1}^{n-1} M_{\tau-1,k+1,n-p,p.D} \times \{1,\ldots,2p\} \qquad (4.6)$$

13.36.23. *Arête pointée non boucle*

On désigne par *s*' le sommet final de l'arête pointée *a*, c'est-à-dire l'extrémité de l'arête pointée distincte du sommet pointé *s*. On contracte l'arête pointée *a*, en identifiant ses deux extrémités *s* et *s*' en un unique sommet s_1, et on désigne par C_1 la carte ainsi obtenue. Il s'agit d'une opération locale, qui ne modifie ni le type ni l'orientabilité de la carte.

Si C_1 n'est pas réduite au sommet s_1, on pointe le brin $d_1 = \sigma(d)$ dans *C*. C_1 est une carte sur la surface *S* ayant :

- les $s(C)$-1 sommets de *C* autres que le sommet *s*,
- les $a(C)$-1 arêtes de *C* autres que l'arête supprimée *a*,
- les $f(C)$ faces de *C*.

On distingue deux cas, selon que le sommet *s*' est distingué ou non.

13.36.23.19. Le sommet final n'est pas distingué

C est une carte de la famille $\mathcal{A}_{\tau, k, n+1, D}$. C_1 a la même séquence de *k* sommets distingués que *C*. Partant de C_1, de sommet pointé s_1 de degré *d*, il y a *d*+1 manières distinctes de partager les brins issus de s_1, à partir du brin pointé d_1, entre deux sommets, que l'on relie ensuite par une arête non boucle.

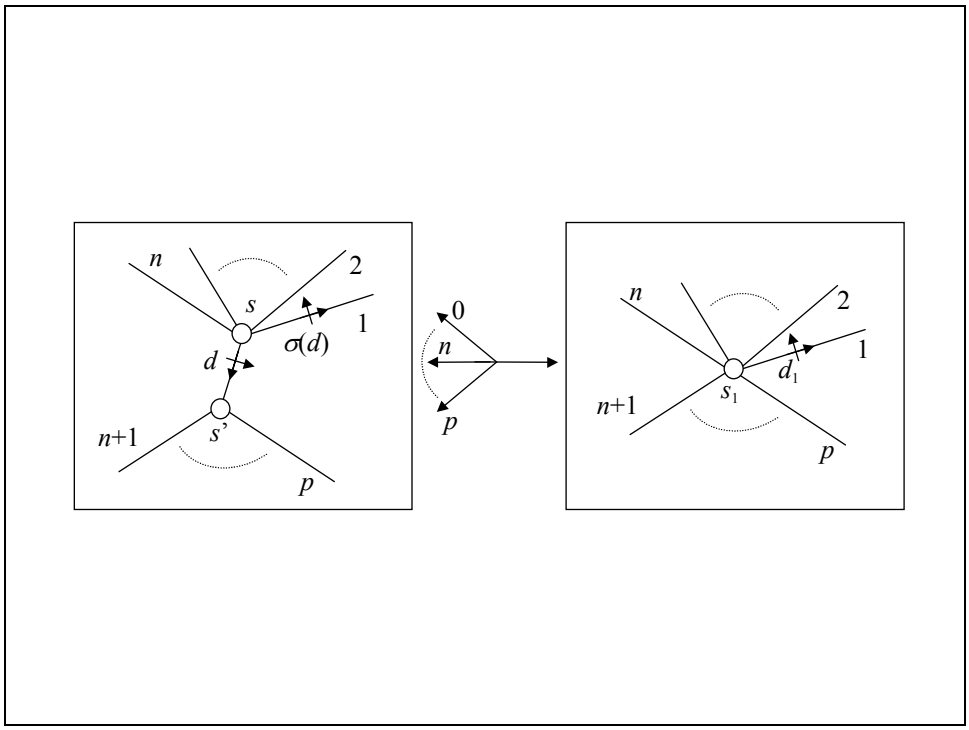


Figure 4.7 : Vue locale. L'extrémité finale de l'arête non boucle n'est pas distinguée.

On décompose ainsi toute carte *C* de $\mathcal{A}_{\tau, k, n+1, D}$ (dont le sommet pointé est de degré *n*+1) en un couple (C_1, n) de $\mathcal{M}_{\tau, k, p, D} \times \{0, \ldots, p\}$, avec $p \geq n$. Dans le couple (C_1, n), l'entier *n*

repère le dernier brin issu du sommet pointé s_1 de C_1 qui sera incident au sommet initial de l'arête non boucle ajoutée.

On résume ce cas par la bijection suivante :

$$A_{\tau,k,n+1,D} \leftrightarrow \sum_{p \geq n} M_{\tau,k,p,D} \times \{0,\ldots,p\} \tag{4.7}$$

13.36.23.20. Le sommet final est distingué

C est une carte de la famille $P_{\tau,k,n+1,D}$. Le sommet s' est l'un des sommets distingués $s_1, \ldots, s_k$ de C. On le note s_j ($1 \leq j \leq k$). La séquence de sommets distingués de C_1 est $s_1, \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_k$. Comme dans le cas précédent, si le sommet pointé de C_1 est de degré p, alors il y a p+1 manières distinctes de partager les brins issus de ce sommet entre deux sommets, que l'on relie ensuite par une arête non boucle.

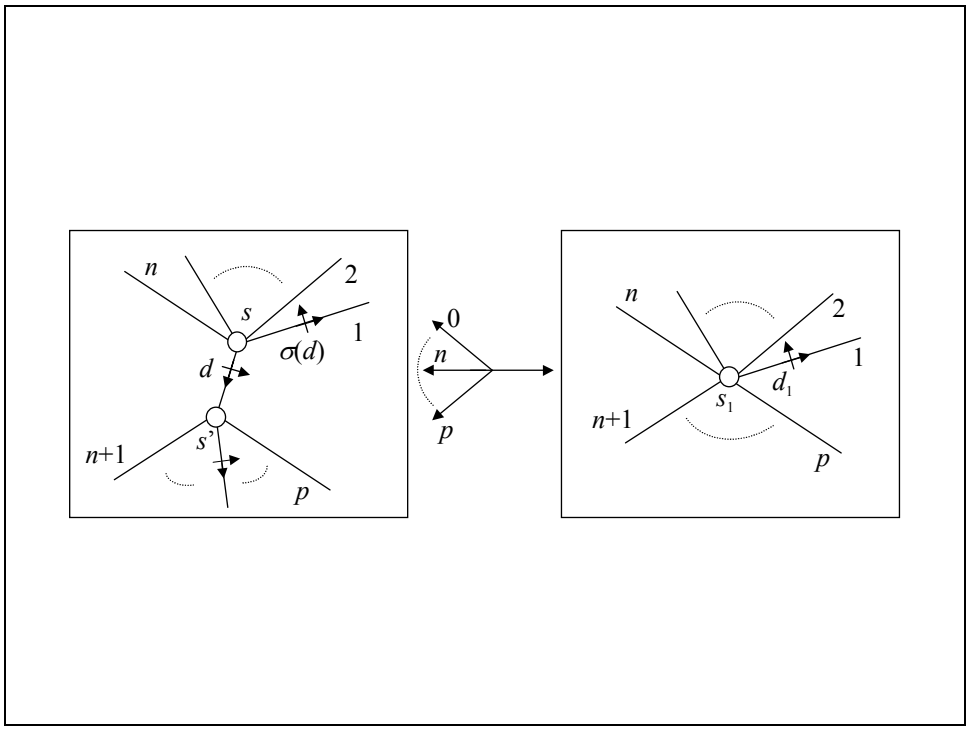


Figure 4.8 : Vue locale. L'extrémité finale de l'arête non boucle est distinguée.

Pour tout entier naturel i et pour tout entier j de $\{1, \ldots, k\}$, on désigne par $P_{\tau,k,n+1,j,D}$ la sous-famille de $P_{\tau,k}$ des cartes dont le sommet pointé est de degré n+1 et dont le sommet final de l'arête pointée est le j^{e} sommet distingué. On a montré que $P_{\tau,k,n+1,j,D}$ est en bijection avec la réunion des ensembles $M_{\tau,k-1,p,D-d_j} \times \{0, \ldots, p\}$, pour tout entier p supérieur ou égal à n.

On résume ce cas par la bijection suivante :

$$P_{\tau,k,n+1,D} \leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} \sum_{p \geq n} M_{\tau,k-1,p,D-\{d_j\}} \times \{0,\ldots,p\} \tag{4.8}$$

13.36.24. *Synthèse de la bijection*

Les notations que nous avons introduites et les bijections (4.4), (4.6), (4.7) et (4.8) nous permettent de décrire symboliquement la décomposition des cartes pointées séquencées sur une surface quelconque par :

$$\begin{aligned} M_{\tau,k,n,D} \leftrightarrow & \sum_{\substack{\tau_1+\tau_2=\tau \\ k_1+k_2=k}} \sum_{\substack{n_1+n_2=n-2 \\ D_1\subseteq D}} M_{\tau_1,k_1,n_1,D_1} \times M_{\tau_2,k_2,n_2,D-D_1} \\ & + M_{\tau-\frac{1}{2},k,n-2,D} \times \{1,\ldots,n-1\} \\ & + \sum_{p=1}^{n-3} M_{\tau-1,k+1,n-2-p,p.D} \times \{1,\ldots,2p\} \\ & + \sum_{p\geq n-1} M_{\tau,k,p,D} \times \{0,\ldots,p\} \\ & + \sum_{j=1}^{k} \sum_{p\geq n-1} M_{\tau,k-1,p,D-\{d_j\}} \times \{0,\ldots,p\} \\ & + \Delta_{(\tau,k,n),(0,0,0)} \end{aligned} \tag{4.9}$$

où $\Delta_{a,b}$ désigne un ensemble à un seul élément si $a = b$ et l'ensemble vide sinon et où les familles indexées par des entiers négatifs sont vides.

$\Delta_{(\tau,k,n),(0,0,0)}$ correspond à la carte sans arêtes réduite à un sommet et à une face, qui n'a pas été considérée dans la décomposition générale précédente.

13.37. *Surfaces orientables*

La décomposition est plus simple, puisqu'elle exclut les surfaces non orientables. Elle ne concerne que des familles de cartes de type entier. Voici le détail pour les quatre cas de décomposition.

Premier cas : la bijection (4.4) est réduite aux types τ_1 et τ_2 entiers.

$$Do_{\tau,k,n+2,D} \leftrightarrow \sum_{\substack{\tau_1+\tau_2=\tau \\ \tau_1 \text{ et } \tau_2 \text{ entiers} \\ k_1+k_2=k}} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ D_1\subseteq D}} Mo_{\tau_1,k_1,n_1,D_1} \times Mo_{\tau_2,k_2,n_2,D-D_1} \tag{4.10}$$

Deuxième cas : dans la bijection (4.6), le type reste entier et il n'y a qu'un seul cas de reconstruction qui conserve l'orientabilité, de sorte qu'on a :

$$No_{\tau,k,n+2,D} \leftrightarrow \sum_{p=1}^{n-1} M_{\tau-1,k+1,n-p,p.D} \times \{1,\ldots,p\} \tag{4.11}$$

Les troisième et quatrième cas se restreignent aux types entiers et aux familles de cartes orientables sans autre changement :

$$Ao_{\tau,k,n+1,D} \leftrightarrow \sum_{p\geq n} Mo_{\tau,k,p,D} \times \{0,\ldots,p\} \tag{4.12}$$

$$Po_{\tau,k,n+1,D} \leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} \sum_{p \geq n} Mo_{\tau,k-1,p,D-\{d_j\}} \times \{0,\ldots,p\} \tag{4.13}$$

La bijection complète s'écrit alors :

$$\begin{aligned} Mo_{\tau,k,n,D} \leftrightarrow & \sum_{\substack{\tau_1+\tau_2=\tau \\ \tau_1 \text{ et } \tau_2 \text{ entiers} \\ k_1+k_2=k}} \sum_{\substack{n_1+n_2=n-2 \\ D_1 \subseteq D}} Mo_{\tau_1,k_1,n_1,D_1} \times Mo_{\tau_2,k_2,n_2,D-D_1} \\ & + \sum_{p=1}^{n-3} Mo_{\tau-1,k+1,n-2-p,p.D} \times \{1,\ldots,p\} \\ & + \sum_{p \geq n-1} Mo_{\tau,k,p,D} \times \{0,\ldots,p\} \\ & + \sum_{j=1}^{k} \sum_{p \geq n-1} Mo_{\tau,k-1,p,D-\{d_j\}} \times \{0,\ldots,p\} \\ & + \Delta_{(\tau,k,n),(0,0,0)} \end{aligned} \tag{4.14}$$

14. Systèmes d'équations fonctionnelles

Nous traduisons ici les bijections décrites dans la section 13 en familles d'équations fonctionnelles. Ces équations relient entre elles les séries génératrices ordinaires de diverses familles de cartes pointées.

Les premières équations sont les traductions algébriques directes des bijections de la section 13, qui portent sur des familles de cartes pointées séquencées. Toutefois, les séries génératrices qu'elles relient n'ont pas toute la symétrie requise pour la suite. On effectue donc un changement de série génératrice apportant cette symétrie supplémentaire selon le sommet pointé. On montre que cette " symétrisation " revient, à un coefficient près, à énumérer les cartes multi-pointées.

Nous présentons ensuite ces nouvelles équations sous une forme (dite " inductive ") permettant de les résoudre par une récurrence portant sur les paramètres des séries (type, nombre de brins pointés). Nous achevons cette section en donnant quelques propriétés des équations de récurrence ainsi obtenues. Ces propriétés sont utiles pour la résolution de ces équations au cours de la démonstration des théorèmes du chapitre 5.

14.38. *Notations*

Nous définissons d'abord ici quelques notations utilisées dans l'écriture des équations.

- g désigne un entier naturel.
- τ désigne un entier naturel ou un demi entier naturel.
- k désigne un entier naturel et r désigne un entier naturel non nul.
- W désigne l'ensemble vide si $r = 1$, et l'ensemble $\{v_2,\ldots,v_r\}$ si $r \geq 2$.
- Si X est une partie de W (ce que l'on note $X \subseteq W$), alors W-X désigne la partie complémentaire de X dans W.
- I désigne un ensemble quelconque d'entiers naturels et ω désigne un entier naturel n'appartenant pas à I.
- Si S est un ensemble d'entiers naturels alors w_S désigne la séquence des w_s, lorsque s parcourt les éléments de S dans l'ordre croissant.
- Enfin, on note $\delta_{a,b}$ le symbole de Kronecker, égal à 1 si a et b sont égaux et à 0 sinon.

14.39. *Cartes pointées séquencées*

On note $M_\tau(v, w_1, \ldots, w_k, x, y)$ et $Mo_g(v, w_1, \ldots, w_k, x, y)$ les séries génératrices ordinaires des cartes pointées séquencées, respectivement sur une surface localement orientable de type τ et sur une surface orientable de genre g.

Ces définitions signifient que :

$$M_\tau(v,x,y,w_1,\ldots,w_k) = \sum_{\substack{n\geq 0\\ d_1\geq 1,\ldots,d_k\geq 1}} \sum_{C\in M_{\tau,k,n,d_1,\ldots,d_k}} x^{f(C)} y^{s(C)} v^n w_1^{d_1}\ldots w_k^{d_k} \tag{4.15}$$

et que :

$$Mo_g(v,x,y,w_1,\ldots,w_k) = \sum_{\substack{n\geq 0\\ d_1\geq 1,\ldots,d_k\geq 1}} \sum_{C\in Mo_{g,k,n,d_1,\ldots,d_k}} x^{f(C)} y^{s(C)} v^n w_1^{d_1}\ldots w_k^{d_k} \tag{4.16}$$

14.39.25. *Cartes localement orientables*

La bijection (4.9) se traduit en équations fonctionnelles sur les séries *M*, qu'on peut écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} M_\tau(v,w_I,x,y) = {} & \frac{v^2}{y}\sum_{i=0}^{2\tau}\sum_{S\subseteq I} M_{\frac{i}{2}}(v,w_S,x,y) M_{\tau-\frac{i}{2}}(v,w_{I-S},x,y) \\ & + v^2\frac{\partial}{\partial v}\left[vM_{\tau-\frac{1}{2}}(v,w_I,x,y)\right] \\ & + 2\frac{v^2}{y}\frac{\partial}{\partial w_\omega} M_{\tau-1}(v,w_{I\cup\{\omega\}},x,y)_{|w_\omega=v} \\ & + vy\frac{vM_\tau(v,w_I,x,y) - M_\tau(1,w_I,x,y)}{v-1} \\ & + vy\sum_{i\in I}\frac{w_i}{w_i-v}\left[w_i M_\tau(w_i,w_{I-\{i\}},x,y) - vM_\tau(v,w_{I-\{i\}},x,y)\right] \\ & + \delta_{\tau,0}\delta_{k,0}xy \end{aligned} \tag{4.17}$$

avec $M_\tau = 0$ si $\tau < 0$.

14.39.26. *Cartes orientables*

La bijection (4.14) se traduit en équations fonctionnelles entre les séries *Mo*, qui peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Mo_g(v,w_I,x,y) = {} & \frac{v^2}{y}\sum_{i=0}^{g}\sum_{S\subseteq I} Mo_i(v,w_S,x,y) Mo_{g-i}(v,w_{I-S},x,y) \\ & + \frac{v^2}{y}\frac{\partial}{\partial w_\omega} Mo_{g-1}(v,w_{I\cup\{\omega\}},x,y)_{|w_\omega=v} \\ & + vy\frac{vMo_g(v,w_I,x,y) - Mo_g(1,w_I,x,y)}{v-1} \\ & + vy\sum_{i\in I}\frac{w_i}{w_i-v}\left[w_i Mo_g(w_i,w_{I-\{i\}},x,y) - vMo_g(v,w_{I-\{i\}},x,y)\right] \\ & + \delta_{g,0}\delta_{k,0}xy \end{aligned} \tag{4.18}$$

avec $Mo_g = 0$ *si* $g < 0$.

Mises sous forme inductive, ces équations sont une réécriture dans nos notations des équations données par E. Bender, E. Canfield et L. Richmond dans [BCR93].

14.40. *Cartes multi-pointées*

Les démonstrations à venir sont simplifiées si l'on parvient à unifier la variable v (dont l'exposant est le degré du sommet pointé) et les variables w_i précédentes (dont l'exposant est le degré du i^e sommet distingué). Il suffit pour cela de choisir une arête orientée issue de chaque sommet distingué, ce qui conduit à la notion de carte multi-pointée, dont les séries génératrices sont notées S (pour les cartes localement orientables) et Q (pour les cartes orientables).

La série S est en relation avec la série M précédente selon :

$$sfS_\tau(v_1,v_2,..,v_r,s,f)=\left(\prod_{i=2}^{i=r}v_i\right)\frac{\partial^{r-1}}{\prod_{i=2}^{i=r}(\partial v_i)}M_\tau(v,v_{\{2,\dots,r\}},x,y)\Big|_{\substack{x=f,y=s\\v=v_1}} \tag{4.19}$$

La série Q est en relation avec la série Mo précédente selon :

$$sfQ_g(v_1,v_2,..,v_r,s,f)=\left(\prod_{i=2}^{i=r}v_i\right)\frac{\partial^{r-1}}{\prod_{i=2}^{i=r}(\partial v_i)}Mo_g(v,v_{\{2,\dots,r\}},x,y)\Big|_{\substack{x=f,y=s\\v=v_1}} \tag{4.20}$$

14.40.27. *Cartes orientables*

Le cas orientable concerne la famille des séries génératrices des cartes r-pointées de genre g, pour tout entier naturel g.

$$\begin{aligned}Q_g(v_1,W,s,f)=&fv_1^{\,2}\sum_{j=0}^{g}\sum_{X\subseteq W}Q_j(v_1,X,s,f)Q_{g-j}(v_1,W-X,s,f)\\&+\frac{v_1^{\,2}}{s}Q_{g-1}(v_1,v_1,W,s,f)\\&+v_1 s\frac{v_1Q_g(v_1,W,s,f)-Q_g(1,W,s,f)}{v_1-1}\\&+s\sum_{j=2}^{j=r}v_1v_j\frac{\partial}{\partial v_j}\left[v_j\frac{v_jQ_g(v_j,W-\{v_j\},s,f)-v_1Q_g(v_1,W-\{v_j\},s,f)}{v_j-v_1}\right]\\&+\delta_{g,0}\delta_{r,1}\end{aligned} \tag{4.21}$$

avec $Q_g = 0$ si $g < 0$ et $\sum_{j=2}^{j=1}=0$.

14.40.28. *Cartes générales*

Le cas général concerne la famille des séries génératrices des cartes r-pointées sur une surface quelconque de type τ, pour tout demi entier naturel τ.

$$
\begin{aligned}
S_\tau(v_1,W,s,f) = f{v_1}^2 \sum_{i=0}^{2\tau} \sum_{X\subseteq W} S_{\frac{i}{2}}(v_1,X,s,f) S_{\tau-\frac{i}{2}}(v_1,W-X,s,f) \\
+ 2\frac{{v_1}^2}{s} S_{\tau-1}(v_1,v_1,W,s,f) \\
+ v_1 s \frac{v_1 S_\tau(v_1,W,s,f) - S_\tau(1,W,s,f)}{v_1-1} \\
+ s\sum_{j=2}^{j=r} v_1 v_j \frac{\partial}{\partial v_j}\left[v_j \frac{v_j S_\tau(v_j,W-\{v_j\},s,f) - v_1 S_\tau(v_1,W-\{v_j\},s,f)}{v_j - v_1} \right] \\
+ {v_1}^2 \frac{\partial}{\partial v_1}\left[v_1 S_{\tau-\frac{1}{2}}(v_1,W,s,f) \right] + \delta_{\tau,0}\delta_{r,1}
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

avec $S_\tau = 0$ si $\tau < 0$ et $\sum_{j=2}^{j=1} = 0$.

15. Forme inductive des équations fonctionnelles

15.41. *Équation fonctionnelle des cartes planaires pointées*

Dans le cas où g est nul et W est vide ($r = 1$), l'équation (4.21) définit la série génératrice des cartes pointées de genre 0. Cette série $Q_0(v,s,f)$ est solution de l'équation quadratique suivante :

$$\big(1 - v + v^2 s - v^2 f(1-v) Q_0(v,s,f)\big) Q_0(v,s,f) = v s Q_0(1,s,f) + 1 - v \tag{4.23}$$

Pour simplifier l'expression des équations suivantes, on définit la série $A(v,s,f)$ par :

$$A(v,s,f) = 1 - v + v^2 s - 2v^2 f(1-v)\, Q_0(v,s,f) \tag{4.24}$$

15.42. *Équations inductives pour les cartes orientables multi-pointées*

Pour tout entier naturel g et tout entier naturel non nul r, avec $(g,r) \neq (0,1)$, on écrit l'équation (4.21) sous une forme mettant en évidence une relation de récurrence entre $Q_g(v_1,\ldots,v_r,s,f)$ et $Q_j(X,s,f)$, pour j strictement inférieur à g ou X strictement inclus dans l'ensemble $\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}$.

$Q_g(v_1,W,s,f)$ est solution de :

$$\begin{aligned}\frac{A(v_1,s,f)}{v_1} Q_g(v_1,W,s,f) = f v_1 (1-v_1) \sum_{j=0}^{g} \sum_{\substack{X \subseteq W \\ (j,X) \neq \{(0,\varnothing),(g,W)\}}} Q_j(v_1,X,s,f) Q_{g-j}(v_1,W-X,s,f) \\ + \frac{v_1(1-v_1)}{s} Q_{g-1}(v_1,v_1,W,s,f) + s Q_g(1,W,s,f) \\ + s T_g(v_1,W,s,f)\end{aligned} \tag{4.25}$$

avec :

$$T_g(v_1,W,s,f) = \sum_{j=2}^{j=r} (1-v_1) v_j \frac{\partial}{\partial v_j} \left[v_j \frac{v_j Q_g(v_j,W-\{v_j\},s,f) - v_1 Q_g(v_1,W-\{v_j\},s,f)}{v_j - v_1} \right] \tag{4.26}$$

15.43. *Équations inductives pour les cartes générales multi-pointées*

Pour tout entier ou demi entier naturel τ et tout entier naturel non nul r, avec $(\tau,r) \neq (0,1)$, on écrit l'équation (4.22) sous une forme mettant en évidence une relation de récurrence entre $S_\tau(v_1,\ldots,v_r,s,f)$ et $S_j(X,s,f)$, pour j strictement inférieur à τ ou X strictement inclus dans l'ensemble $\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}$.

$$\begin{aligned}\frac{A(v_1,s,f)}{v_1}S_\tau(v_1,W,s,f)=fv_1(1-v_1)\sum_{i=0}^{2\tau}\sum_{\substack{X\subseteq W\\(i,X)\notin\{(0,\varnothing),(2\tau,W)\}}}S_{\frac{i}{2}}(v_1,X,s,f)S_{\tau-\frac{i}{2}}(v_1,W-X,s,f)\\+2\frac{v_1(1-v_1)}{s}S_{\tau-1}(v_1,v_1,W,s,f)+sS_\tau(1,W,s,f)\\+v_1(1-v_1)\frac{\partial}{\partial v_1}\left[v_1S_{\tau-\frac{1}{2}}(v_1,W,s,f)\right]\\+s\sum_{j=2}^{j=r}(1-v_1)v_j\frac{\partial}{\partial v_j}\left[v_j\frac{v_jS_\tau(v_j,W-\{v_j\},s,f)-v_1S_\tau(v_1,W-\{v_j\},s,f)}{v_j-v_1}\right]\end{aligned}\tag{4.27}$$

Ces équations ont été données pour la première fois dans [BCR93] (où il faut lire z_ω au lieu de w_ω) pour la série génératrice voisine $M_\tau(u, v, y, I)$ des cartes pointées séquencées.

15.44. *Quelques propriétés des équations inductives*

15.44.29. *Choix d'un paramétrage des variables s et f*

On peut démontrer qu'il existe un unique couple (p, q) de séries formelles en les variables s et f tel que :

$$s=p(1-p-2q)\,,\ f=q(1-2p-q) \tag{4.28}$$

$$\text{et } p = q = 0 \text{ quand } s = f = 0.$$

Ce système paramétrique (p, q) des variables s et f a été introduit dans [Arq85b]. Il sera systématiquement utilisé dans la suite.

15.44.30. *Application de la méthode quadratique*

Pour résoudre l'équation (4.23), on a recours à une technique appelée " méthode quadratique ", décrite par exemple dans [GJ83], pages 138 à 145.

De l'équation (4.23) et de la définition (4.24) de la série A, on déduit que :

$$A(v,s,f)^2 = B(v,s,f)$$

avec

$$B(v,s,f) = 4\,v^3 f s\,(v\text{-}1)\,Q_0(1,s,f) - 4\,v^2 f\,(v\text{-}1)^2 + (1\text{-}v\text{+}v^2 s)^2.$$

La condition $A(V,s,f) = 0$ se traduit donc par le système

$$\begin{cases} B(V,s,f)=0\\ B^{(1,0,0)}(V,s,f)=0\end{cases}$$

Les deux équations de ce système sont indépendantes et déterminent les deux séries formelles inconnues V et $Q_0(1,s,f)$ des variables s et f. En utilisant le système paramétrique (4.28), on trouve :

$$V = \frac{1}{1-p} \tag{4.29}$$

et

$$sf\,Q_0(1,s,f) = pq(1-2p-2q) \tag{4.30}$$

La relation (4.30) est une expression paramétrique de la série $sf\,Q_0(1,s,f)$ qui dénombre les cartes pointées de genre 0 en fonction du nombre de sommets (exposant de s) et du nombre de faces (exposant de f).

Pour les calculs à venir, la propriété

$$A(V,s,f) = 0 \tag{4.31}$$

est essentielle.

15.45. ***Équations de calcul des séries que l'on recherche***

Les équations fonctionnelles précédentes permettent de dénombrer les cartes en fonction des degrés de certains de leurs sommets. Ces familles de cartes, leurs séries génératrices et leurs équations fonctionnelles ne nous intéressent que pour énumérer les cartes simplement pointées, de genre ou de type fixé, indépendamment du degré de leurs sommets, autrement dit à trouver une expression pour les séries $Q_g(1,s,f)$ et $S_\tau(1,s,f)$.

L'évaluation en $v = 1$ des équations (4.25) et (4.27) pour $r = 1$ donne un résultat trivial. Pour accéder aux séries cherchées, on évalue plutôt ces équations en $v = V$, afin de profiter de la propriété (4.31) de V. On obtient les équations suivantes :

15.45.31. *Cas des cartes orientables*

Pour g supérieur ou égal à 1, on déduit de la relation (4.31) et de l'équation (4.25), dans laquelle on remplace v_1 par V et W par $\varnothing$, une relation définissant la série $s\,f\,Q_g(1,s,f)$ que l'on recherche.

Si $g \geq 1$, alors la série génératrice ordinaire $s\,f\,Q_g(1,s,f)$ des cartes pointées de genre g dénombrées en fonction de leur nombre de sommets (*exposant de s*) *et de leur nombre de faces* (*exposant de f*) *vérifie la relation* :

$$s\,f\,Q_g(1,s,f) = fV(V-1)\left[f\sum_{j=1}^{g-1} Q_j(V,s,f)\,Q_{g-j}(V,s,f) + \frac{1}{s}Q_{g-1}(V,V,s,f) \right] \qquad (4.32)$$

15.45.32. *Cas des cartes générales*

Pour tout type τ non nul, on remplace v_1 par V et W par $\varnothing$ dans l'équation (4.27). Grâce à la relation (4.31), on obtient une relation pour la série $s\,f\,S_\tau(1,s,f)$ que l'on recherche.

Dans les chapitres suivants, on verra que cette relation permet de calculer $s\,f\,S_\tau(1,s,f)$.

Si tout entier ou demi entier τ non nul, alors la série génératrice ordinaire $s\,f\,S_\tau(1, s, f)$ des cartes pointées de type τ dénombrées en fonction de leur nombre de sommets (*exposant de s*) *et de leur nombre de faces* (*exposant de f*) *vérifie la relation* :

$$s\,f\,S_\tau(1,s,f) = fV(V-1)\left(\begin{array}{c} f\displaystyle\sum_{i=1}^{2\tau-1} S_{\frac{i}{2}}(V,s,f)\,S_{\tau-\frac{i}{2}}(V,s,f) \\ +\dfrac{2}{s}S_{\tau-1}(V,V,s,f) + \dfrac{\partial}{\partial v}\left[vS_{\tau-\frac{1}{2}}(v,s,f) \right]_{v=V} \end{array} \right) \qquad (4.33)$$

Chapitre 5

Énumération paramétrique des cartes pointées sur une surface

Notre objectif est à présent la résolution des équations fonctionnelles du chapitre précédent pour toutes les surfaces, quel que soit leur type et leur orientabilité.

L'énumération explicite des cartes pointées orientables de genre 1 a été réalisée par D. Arquès [Arq87a]. Une méthode algébrique générale de résolution a été décrite pour les cartes pointées orientables de genre quelconque par E. Bender et E. Canfield [BC91]. Les auteurs montrent que la série génératrice des cartes pointées orientables de genre g non nul, exprimée en fonction de la variable z dénombrant les arêtes, est de la forme :

$$\frac{(\rho-1)^{2g}}{\rho^{5g-3}(\rho+2)^{b}(\rho+5)^{c}}P(\rho) \tag{5.1}$$

avec

$$\rho(z)=\sqrt{1-12z}\,, \tag{5.2}$$

b et c étant deux entiers naturels et P un polynôme tel que $P(0) \neq 0$ et $P(1) \neq 0$.

E. Bender et E. Canfield conjecturent, sans le démontrer, que le degré du polynôme P est majoré par $5g + b + c - 4$ et que c est nul.

En généralisant dans [BCR93] l'énumération asymptotique des cartes pointées aux nombres de sommets et de faces, les auteurs affirment (THEOREM 3) que la série génératrice correspondante, pour tout type τ non nul, s'écrit comme une fraction rationnelle des paramètres p et q (introduits par D. Arquès dans [Arq85b]) dont le dénominateur est de la forme :

$$[(1-2p-2q)^2-4pq]^{5\tau-3}(1-p)^{b(\tau)} \tag{5.3}$$

pour une certaine fonction $b(\tau)$. Ils conjecturent encore que $b(\tau) = 0$, sans qu'il leur soit possible de le démontrer.

C'est à la lecture de ces théorèmes, suffisants pour l'énumération asymptotique, mais incomplets pour l'énumération exacte, que j'ai envisagé d'expliciter complètement la méthode de calcul utilisée, afin de l'automatiser. J'ai alors utilisé un logiciel de calcul formel, afin de mener le plus loin possible la résolution des équations fonctionnelles. L'observation des premières séries formelles calculées m'a permis d'affiner les théorèmes

de [BC91] et [BCR93], de démontrer leurs conjectures et de majorer le degré du polynôme inconnu.

Ce chapitre expose ces résultats de résolution formelle des équations fonctionnelles du chapitre précédent. Cette résolution est dite formelle (ou " symbolique ") car elle ne vise pas l'explicitation complète de la solution, qui est en général trop coûteuse à calculer et trop lourde à manipuler. Elle ne vise qu'à établir l'existence d'une forme paramétrique commune à toutes les séries solutions, dont la partie inconnue n'est plus qu'un polynôme de degré connu.

Cette forme paramétrique commune est donnée dans les théorèmes de la section 16 du présent chapitre. Ces théorèmes énumèrent les cartes pointées de type non nul selon deux quantités : leur nombre de sommets et leur nombre de faces. Des énumérations selon le nombre d'arêtes des cartes s'en déduisent. Elles sont données dans les corollaires de la section 17. La section 18 compare ces théorèmes et corollaires avec des résultats voisins connus. Dans la section 19, nous présentons le plan de la démonstration de ces théorèmes.

16. Théorèmes d'énumération paramétrique

Les théorèmes donnés ici sont des résultats centraux de cette thèse. Ils affirment l'existence d'une forme paramétrique commune à toutes les séries génératrices des cartes pointées de type fixé non nul.

Le premier théorème traite du cas particulier des cartes orientables, le deuxième théorème traite du cas général. Le troisième théorème, qui traite le cas des cartes non orientables, est une conséquence immédiate des deux premiers.

16.46. *Théorème pour les cartes orientables*

Pour g supérieur ou égal à 1, nous établissons dans le théorème 5.1 une forme générale paramétrique de la série $Q_g(1,s,f)$.

THÉORÈME 5.1. *Pour tout entier g non nul, la série* $sf\,Q_g(1,s,f)$ *qui dénombre les cartes pointées orientables de genre g en fonction du nombre de sommets* (*exposant de s*) *et du nombre de faces* (*exposant de f*) *est définie par* :

$$s = p(1-p-2q)$$

$$f = q(1-2p-q)$$

$$sf\,Q_g(1,s,f) = \frac{pq(1-p-q)P_g(p,q)}{[(1-2p-2q)^2 - 4pq]^{5g-3}} \tag{5.4}$$

où $P_g(p,q)$ *est un polynôme symétrique en p et q à coefficients entiers et de degré total inférieur ou égal à* $6g - 6$.

Dans le cas des cartes orientables, ce théorème révèle que toutes les séries génératrices s'écrivent comme des fractions rationnelles des paramètres p et q.

16.47. ***Théorème pour les cartes générales***

La série génératrice S_τ énumère toutes les cartes pointées de type τ donné, en regroupant les cartes orientables et les cartes non orientables de même type τ. Le théorème 5.2 affirme l'existence d'une forme paramétrique commune à toutes ces séries, à l'exception de S_0 (=Q_0, série des cartes planaires) et de $S_{½}$ (série des cartes sur le plan projectif). Une formule d'énumération explicite pour $S_{½}$ (= $N_{½}$) est donnée dans le chapitre 8.

THÉORÈME 5.2. *Pour tout demi entier naturel τ supérieur ou égal à* 1*, la série $sfS_\tau(1, s, f)$ qui dénombre les cartes pointées générales* (*orientables ou non*) *de type τ en fonction du nombre de sommets* (*exposant de s*) *et du nombre de faces* (*exposant de f*) *est définie par* :

$$s = p(1-p-2q)$$

$$f = q(1-2p-q)$$

$$sfS_\tau(1,s,f) = \frac{R_\tau(p,q,a)}{\left[(1-2p-2q)^2 - 4pq\right]^{5\tau-3}} \tag{5.5}$$

avec
$$a = \sqrt{(1-2p-2q)^2 - 4pq}\,, \tag{5.6}$$

où $R_\tau(p,q,a)$ est un polynôme des variables p, q et a, symétrique en p et q, de degré total inférieur ou égal à 6τ - 3.

La relation (5.6) introduit un nouveau paramètre a quadratique par rapport aux paramètres p et q. L'observation des résultats explicites du chapitre 8, par exemple pour $\tau = 1$, révèle la présence nécessaire de puissances impaires de a dans l'écriture de $R_\tau(p,q,a)$ en somme de monômes.

Dans la pratique, on pourra réduire à 1 le degré de a au numérateur de la relation (5.5), en appliquant la relation (5.6).

16.48. ***Théorème pour les cartes non orientables***

Puisqu'une carte générale est soit orientable soit non orientable, le théorème d'énumération des cartes pointées non orientables se déduit par différence du théorème 5.2 sur les cartes pointées générales et du théorème 5.1 sur les cartes pointées orientables. On l'énonce néanmoins ici afin d'y faire référence dans la suite. Rappelons seulement que la surface non orientable $\mathbf{P}_\tau$ de type τ peut être définie comme la somme connexe de τ plans projectifs (cette surface est décrite dans le paragraphe 1.1.9 du chapitre 2).

THÉORÈME 5.3. *Pour tout demi entier naturel τ supérieur ou égal à* 1*, la série $sfN_\tau(1, s, f)$ qui dénombre les cartes pointées sur la surface non orientable de type τ en*

fonction du nombre de sommets (*exposant de s*) *et du nombre de faces* (*exposant de f*) *est définie par* :

$$s = p(1-p-2q)$$

$$f = q(1-2p-q)$$

$$sf\,N_\tau(1,s,f) = \frac{M_\tau(p,q,a)}{\left[(1-2p-2q)^2 - 4pq\right]^{5\tau-3}} \tag{5.7}$$

avec $$a = \sqrt{(1-2p-2q)^2 - 4pq}\,,$$

où $M_\tau(p,q,a)$ *est un polynôme des variables p, q et a, symétrique en p et q, de degré total inférieur ou égal à* 6τ - 3.

17. Énumération paramétrique en nombre d'arêtes

Comme expliqué dans le paragraphe 2.7 du chapitre 2, une énumération en nombre d'arêtes se déduit de l'énumération analogue en nombre de sommets et nombre de faces, par la formule (2.8). On applique cette formule ici, pour établir les corollaires 5.1 et 5.2.

On définit le paramètre ρ par :

$$\rho^2 = 1\text{-}12\,z \quad \text{et} \quad \rho = 1 \quad \text{pour} \quad z = 0, \tag{5.8}$$

En posant $s = f = z$ dans le système paramétrique (4.28) des variables s et f en p et q, on obtient la relation suivante entre ρ et le paramètre $m = p(z,z) = q(z,z)$.

$$\rho = 1\text{-}6\,m. \tag{5.9}$$

Pour g supérieur ou égal à 1, on déduit du théorème 5.1 une forme générale paramétrique pour la série génératrice des cartes pointées orientables de genre g en fonction du nombre d'arêtes.

COROLLAIRE 5.1. *Pour tout entier naturel g non nul, la série* $Q_g(z)$ *qui dénombre les cartes pointées orientables de genre g en fonction du nombre d'arêtes* (*exposant de z*) *est définie par* :

$$Q_g(z) = 4.3^{5g-4} z^{2g} \frac{P_g(\frac{1-\rho}{6})}{(\rho+1)^2 \rho^{5g-3} (\rho+2)^{5g-4}} \tag{5.10}$$

où $\rho = \sqrt{1-12z}$ *et où* P_g *est un polynôme à coefficients entiers et de degré inférieur ou égal à* 6g - 6.

Pour établir ce corollaire, on remplace p et q par m dans le théorème 5.1, puis on applique la relation (5.9), sachant que les séries $sf\,Q_g(1,s,f)$ et $Q_g(z)$ sont reliées entre elles conformément à la formule (2.8). La relation (5.8) permet de faire apparaître z^{2g} au numérateur, ce qui est naturel, car on sait par la relation d'Euler-Poincaré qu'une carte orientable de genre g admet au moins $2g$ arêtes.

Ce corollaire précise utilement la forme générale (5.1) proposée pour ces séries dans [BC91], en démontrant notamment la nullité de l'exposant c de $(\rho + 5)$ conjecturée dans cet article. Nous reviendrons en détail sur ce fait dans la section 18.

Comme pour le corollaire 5.1, on déduit du théorème 5.2 une forme générale paramétrique pour la série génératrice des cartes pointées générales de type non nul, en fonction du nombre d'arêtes.

COROLLAIRE 5.2. *Pour tout demi entier naturel τ supérieur ou égal à* 1*, la série $S_\tau(z)$ qui dénombre les cartes pointées générales de type τ en fonction du nombre d'arêtes* (*exposant de z*) *est définie par* :

$$S_\tau(z) = 3^{5\tau-3}\, z^{2\tau-2}\, \frac{R_\tau\left(\dfrac{1-\rho}{6}, b\right)}{\left[\rho(\rho+2)\right]^{5\tau-3}} \tag{5.11}$$

avec

$$b = \sqrt{\frac{\rho(\rho+2)}{3}}\,, \tag{5.12}$$

où $R_\tau(m,b)$ est un polynôme des variables m et b, de degré total inférieur ou égal à 6τ - 3.

L'expression de b se déduit de l'expression (5.6) de a en remplaçant p et q par m, puis en appliquant la relation (5.9).

18. Apports de ces théorèmes et corollaires

Comparés à leurs analogues énoncés dans [BC91] et [BCR93], les théorèmes et corollaires de ce chapitre apportent les précisions suivantes :

Une preuve des conjectures des articles [BC91] et [BCR93].

Un majorant du degré du polynôme de ces formes générales.

La première précision a été apportée en invoquant la dualité des nombres de cartes en sommets et faces. La deuxième précision provient d'une analyse fine de la contribution de chaque terme dans le calcul générique et symbolique qui a permis d'énoncer les théorèmes.

Ces précisions sont établies par la démonstration détaillée des théorèmes, dans le chapitre 6 pour les cartes orientables et dans le chapitre 7 pour les cartes générales.

La comparaison avec les articles [BC91] et [BCR93] est approfondie dans les deux paragraphes suivants.

18.49. ***Apport à l'énumération des cartes orientables***

On compare dans ce paragraphe le corollaire 5.1 avec le théorème de [BC91] rappelé en introduction du présent chapitre. La comparaison de la formule (5.10) avec la formule (5.1) est facilitée si on remplace z par $(1-\rho)(1+\rho)/12$, conformément à la relation (5.8), dans la formule (5.10).

Alors, il s'avère que la formule (5.10) du corollaire confirme l'exposant $5g$-3 de ρ au dénominateur, qu'elle propose pour b la valeur $5g$-4 et qu'elle établit que l'exposant de c dans (5.1) est nul.

Mais le corollaire 5.1 apporte des informations supplémentaires. La factorisation du numérateur de la formule (5.10) par z^{2g} montre que le polynôme $P(\rho)$ de la formule (5.1) peut être factorisé par $(1+\rho)^{2g-2}$. Le cofacteur de cette factorisation est un polynôme dont le degré est égal au degré du polynôme P_g du corollaire. Par conséquent, le majorant $6g$-6 du polynôme P_g se révèle meilleur que le majorant $8g$-6 conjecturé pour $P(\rho)$ dans [BC91].

18.50. ***Apport à l'énumération des cartes générales***

On compare ici le théorème 5.2 avec le THEOREM 3 de [BCR93] rappelé en introduction du présent chapitre.

La comparaison de la formule (5.5) avec la formule (5.3) confirme le degré de

$$[(1-2p-2q)^2 - 4pq]$$

au dénominateur et établit la conjecture que $b(\tau) = 0$.

En revanche, le théorème 5.2 ne confirme pas l'affirmation du THEOREM 3 de [BCR93], selon laquelle $sfS_t(1,s,f)$ s'écrirait comme une fraction *rationnelle* des paramètres p et q. On peut seulement dire qu'elle s'écrit comme une fraction rationnelle de p, q et du troisième paramètre a défini par (5.6). S'il n'est pas tout à fait correct dans la lettre, le THEOREM 3 reste néanmoins vrai dans l'esprit, puisque nous montrerons que l'écriture de cette série est rationnelle dans le système paramétrique (α, β) défini dans le chapitre 8.

19. Plans de démonstration des théorèmes

Les arguments de démonstration des théorèmes 5.1 et 5.2 sont essentiellement les mêmes, même si l'ajout des cartes non orientables augmente et complique légèrement la démonstration. Cependant, pour plus de clarté, j'ai choisi de démontrer les deux théorèmes séparément, au prix de certaines redites. J'ai souhaité faire en sorte que le lecteur puisse lire l'une des deux démonstrations sans devoir lire l'autre. Le théorème 5.1 est démontré dans le chapitre 6 et le théorème 5.2 est démontré dans le chapitre 7.

Les démonstrations détaillées des théorèmes 5.1 et 5.2 étant assez longues, on se propose d'illustrer ici la structure de chaque démonstration par une figure commentée, qui explique l'organisation générale des arguments. Cette figure et son commentaire d'accompagnement montrent et nomment les phases de la démonstration.

Chaque figure est un véritable “ synopsis ” de démonstration. Elle occupe une page complète, afin que le lecteur puisse la détacher et s’en servir comme d’un repère utile au fil de sa lecture.

Les plans de démonstration des théorèmes 5.1 et 5.2 sont respectivement exposés dans les paragraphes 19.51 et 19.52.

19.51. ***Cas des cartes orientables***

Le chapitre 6 est entièrement consacré à la démonstration du théorème 5.1 d’énumération des cartes orientables. La structure de cette démonstration est décrite par la figure 5.1, qui donne une vision synthétique des divers arguments qui mènent au théorème.

Pour plus de clarté encore, les phases de la démonstration correspondent aux sections du chapitre 6. Les résultats intermédiaires sont énoncés dans des propositions et des lemmes numérotés.

Nous invitons le lecteur à lire attentivement le présent commentaire de cette figure. Il pourra ensuite, au cours de la lecture du chapitre 6, se reporter à cette figure pour mieux comprendre sa situation relativement à l’ensemble de la démonstration.

On commente la figure du bas vers le haut, en partant du théorème 5.1, qui est l’aboutissement de la démonstration, pour remonter phase par phase jusqu’à des résultats connus ou établis ailleurs. Ce mode de raisonnement (qu’on peut appeler raisonnement “ inductif ”, car c’est le contraire du raisonnement “ déductif ”, qui part des prémisses pour aboutir à la conclusion) est suivi lors de la démonstration rédigée dans le chapitre 6.

Dans ce mode de raisonnement, on réduit progressivement le nombre ou l’importance des éléments qui restent à établir. Ainsi, le lecteur peut interrompre sa lecture dès qu’il a atteint le niveau de justification qui lui convient.

La première phase de la démonstration est un affaiblissement du théorème 5.1. Cette forme faible du théorème 5.1 est requise pour le bon fonctionnement des phases suivantes. La restriction du théorème à sa forme faible est justifiée dans la section 1 du chapitre 6 à l’aide d’un argument de dualité.

La deuxième phase de la démonstration subordonne l’objectif premier, qui est l’énumération des cartes simplement pointées, à l’énumération de diverses familles de cartes multi-pointées et de leurs dérivées (qu’on désigne ainsi car leurs séries génératrices s’obtiennent par dérivations partielles de celles des cartes multi-pointées). On montre que tout ceci s’explique par l’observation des équations (4.21), (4.25) et (4.26). On déduit encore de ces équations une méthode complète de résolution, c’est-à-dire une méthode qui ne met en jeu, dans tous les cas, qu’un nombre fini de familles de cartes plus simples à énumérer.

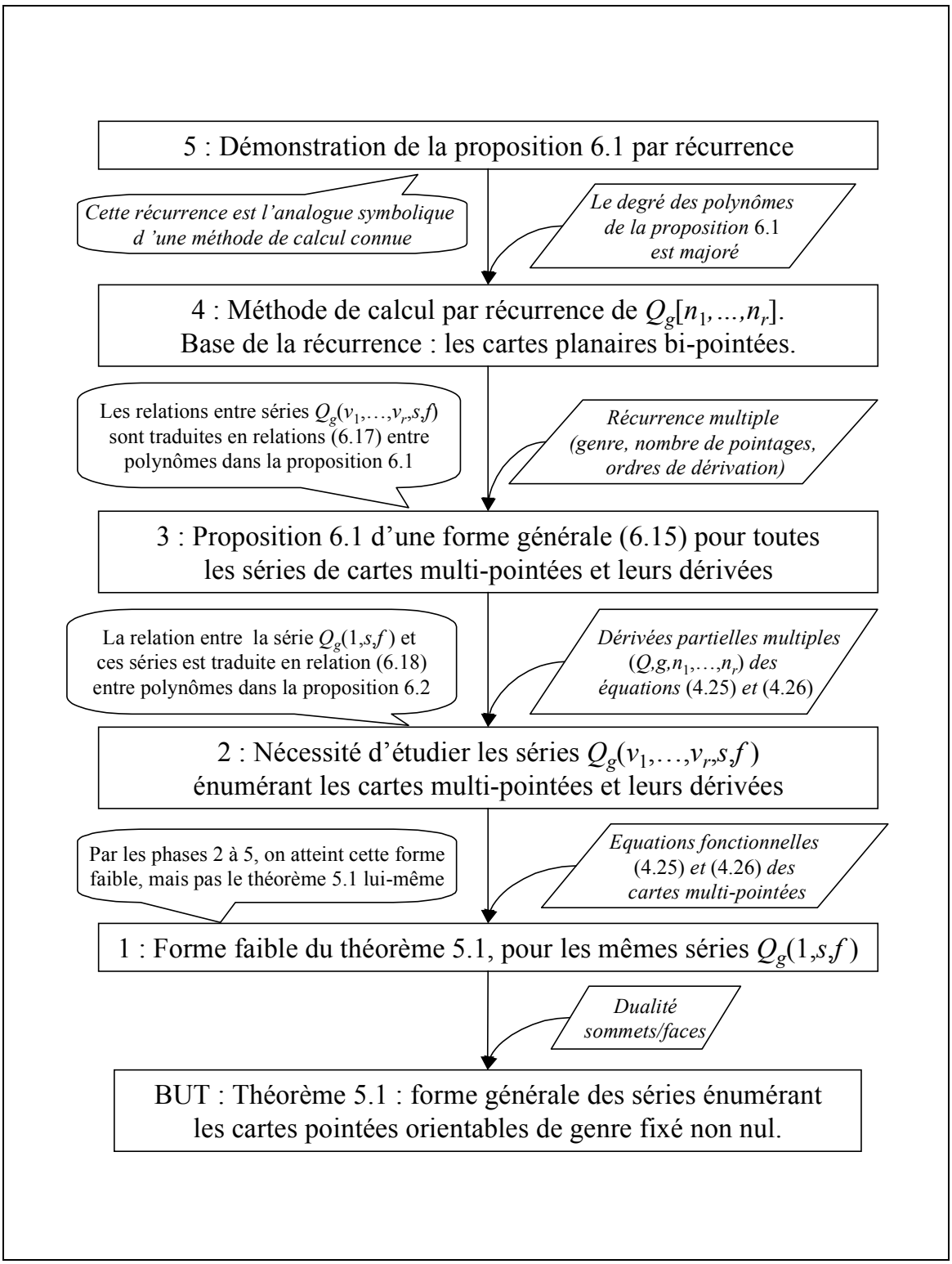


Figure 5.1 : plan de la démonstration du théorème 5.1 (chapitre 6)

Dans la troisième phase de la démonstration, on introduit des notations et des définitions utiles pour traiter toutes les séries génératrices de cartes multi-pointées et de leurs dérivées dans un même discours. Puis on exprime le nouvel objectif de la démonstration sous la forme de la proposition 6.1. Cette proposition ressemble à une généralisation aux cartes multi-pointées et à leurs dérivées de la forme faible du théorème 5.1. La troisième phase se contente d'admettre momentanément la proposition 6.1, pour en déduire la forme faible du théorème 5.1 exigée par la première phase.

La quatrième phase montre comment démontrer la proposition 6.1 par une récurrence multiple, sur plusieurs paramètres entiers naturels. La preuve elle-même sera faite dans la cinquième phase. Cette quatrième phase explicite l'hypothèse de la récurrence et présente également la base de la récurrence sous la forme du lemme 6.2, qui sera démontré dans la cinquième phase. On explique alors pourquoi la base de la récurrence est l'énumération des cartes planaires bi-pointées et non celle des cartes planaires simplement pointées.

La cinquième et ultime phase démontre la proposition 6.1 par récurrence. Le lemme 6.2, qui constitue la base de la récurrence, est établi. La récurrence elle-même est assez technique. Elle contient des nombreux calculs, présentés dans des tableaux. Elle permet notamment une majoration fine du degré du polynôme inconnu défini dans la proposition 6.1.

Ces cinq phases constituent l'ensemble de la démonstration du théorème 5.1.

19.52. ***Cas des cartes générales***

Le chapitre 7 est consacré à la démonstration du théorème 5.2 d'énumération des cartes générales. La figure 5.2 donne une vision synthétique des divers arguments qui mènent au théorème. Elle sert de guide dans la lecture du chapitre 7.

On commente ici la figure 5.2 du bas vers le haut.

Le théorème 5.2 est l'aboutissement de la démonstration, dont les cinq phases sont représentées par les rectangles numérotés de la figure. Leur numéro correspond aux sections du chapitre 7.

La première phase de la démonstration est un affaiblissement du théorème 5.2, requis pour le bon fonctionnement des phases suivantes et justifié dans la section 1 du chapitre 7 par un argument de dualité.

La deuxième phase de la démonstration montre qu'il est nécessaire d'étendre l'objectif premier d'énumération des cartes simplement pointées à l'énumération de diverses familles de cartes multi-pointées et de leurs dérivées (qu'on désigne ainsi car leurs séries génératrices s'obtiennent par dérivations partielles de celles des cartes multi-pointées).

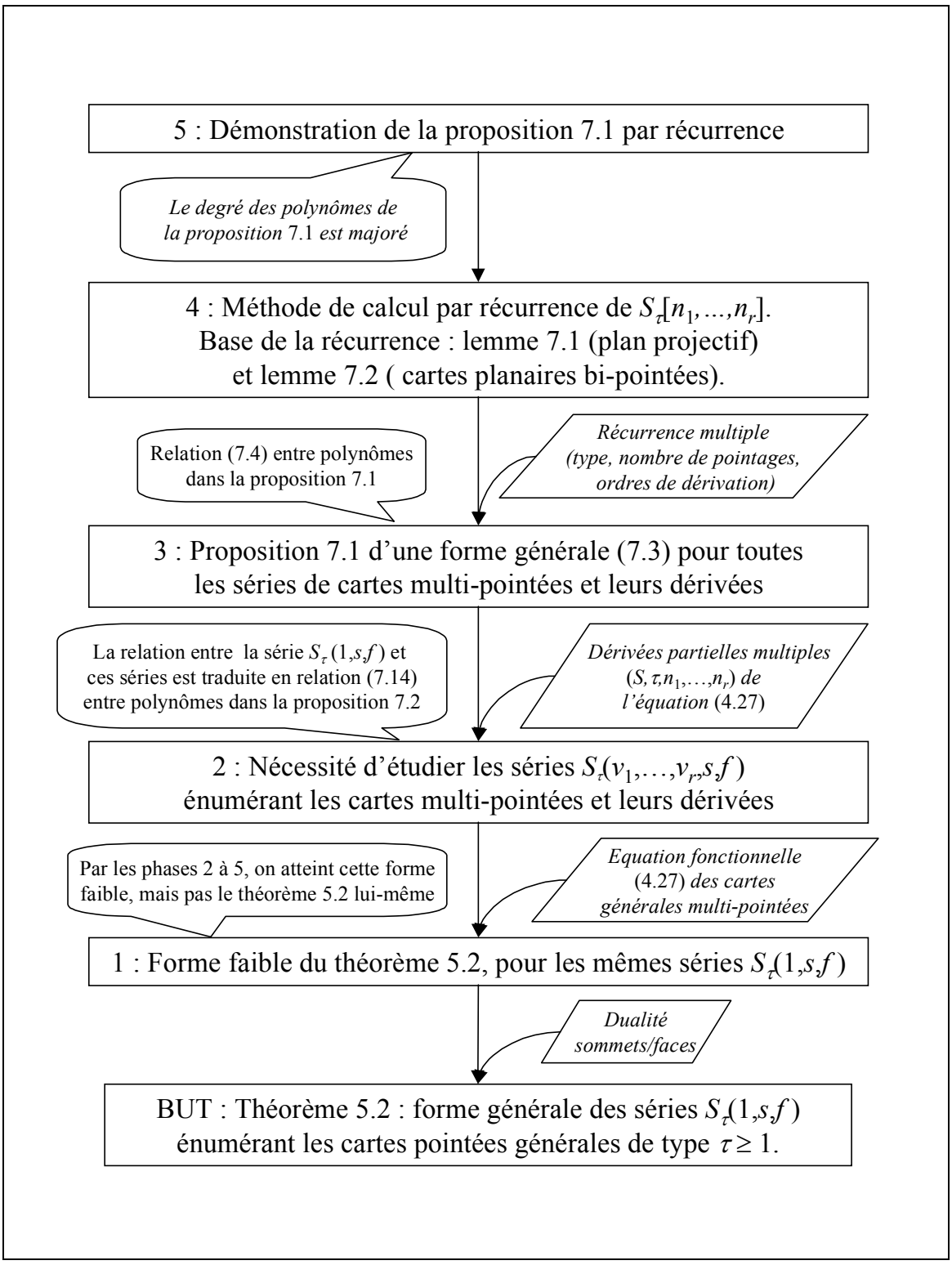


Figure 5.2 : plan de la démonstration du théorème 5.2 (chapitre 7)

Dans la troisième phase de la démonstration, on exprime le nouvel objectif de la démonstration sous la forme de la proposition 7.1, qui affirme l'existence d'une forme générale pour les séries de cartes multi-pointées et à leurs dérivées, calculées en un point particulier. La troisième phase admet momentanément la proposition 7.1 pour en déduire la forme faible du théorème 5.2 exigée par la première phase.

La quatrième phase de la démonstration met en place une récurrence multiple pour démontrer la proposition 7.1, en explicitant l'hypothèse de la récurrence et en présentant également la base de la récurrence sous la forme des lemmes 7.1 et 7.2.

La cinquième et ultime phase démontre la proposition 7.1 par récurrence. Les lemmes 7.1 et 7.2, qui constituent la base de la récurrence, sont établis. La récurrence elle-même est assez technique. Elle contient des nombreux calculs, présentés dans des tableaux. Elle permet notamment une majoration fine du degré du polynôme inconnu défini dans la proposition 6.1.

Ces cinq phases constituent l'ensemble de la démonstration du théorème 5.2.

Chapitre 6

Démonstration du théorème d'énumération des cartes orientables

L'objectif unique de ce chapitre est la démonstration complète et détaillée du théorème 5.1 du chapitre 5.

La structure générale de cette démonstration est décrite par la figure 5.1 du chapitre 5. Chaque section du présent chapitre correspond à la phase de démonstration de même numéro.

20. Forme faible du théorème 5.1

La première phase de la démonstration est exposée ici. On y réduit l'énoncé du théorème à un énoncé plus facile à démontrer, qu'on appelle forme faible du théorème 5.1 et qu'on énonce dans le paragraphe 20.53.

Parallèlement, on montre ici l'avantage de travailler sur des séries génératrices des deux variables s et f énumérant respectivement les sommets et les faces, plutôt que sur les séries génératrices d'une seule variable z dénombrant les arêtes. Ce niveau (plus général, grâce à la formule d'Euler-Poincaré) permet, plus fondamentalement, de traduire la propriété de dualité classique sur les cartes : les séries sont symétriques en les variables s et f (dont les exposants sont respectivement le nombres de sommets moins un et le nombre de faces moins une). Le principe de cette astuce précieuse (sans laquelle la démonstration n'aurait pas été complète) est exposé dans le paragraphe 20.54.

20.53. ***Énoncé de la forme faible du théorème* 5.1**

Tous les paragraphes de ce chapitre, à partir du paragraphe 2, visent à démontrer phase par phase une forme faible du théorème 5.1, qui, pour $g \geq 1$, s'énonce ainsi :

FORME FAIBLE DU THÉORÈME 5.1. *Pour tout entier g non nul, la série* $sf\,Q_g(1,s,f)$ *qui dénombre les cartes pointées orientables de genre g en fonction du nombre de sommets* (*exposant de s*) *et du nombre de faces* (*exposant de f*) *est définie par* :

$$s = p(1-p-2q)$$

$$f = q(1-2p-q)$$

$$sf\,Q_g(1,s,f) = \frac{pq(1-p-q)R_g(p,q)}{\left[(1-2p-2q)^2-4pq\right]^{5g-3}(1-p)^{4g-2}} \tag{6.1}$$

où $R_g(p,q)$ *est un polynôme en p et q à coefficients entiers et de degré total inférieur ou égal à* $10g - 8$.

20.54. ***De la forme faible, on déduit le théorème* 5.1**

On utilise ici la propriété de dualité pour les cartes pointées orientables de genre donné, selon laquelle le nombre de cartes pointées orientables de genre g à n sommets et m faces est égal au nombre de cartes pointées orientables de même genre à m sommets et n faces, pour tous les entiers naturels n et m.

Ceci implique que la série $Q_g(1,s,f)$ est symétrique en les variables s et f. Par ailleurs, les paramètres p et q s'échangent lorsqu'on échange les variables s et f. On obtient donc, à partir de l'expression (6.1), une autre expression de $sf\,Q_g(1,s,f)$:

$$fs\,Q_g(1,s,f) = \frac{qp(1-q-p)R_g(q,p)}{\left[(1-2q-2p)^2-4qp\right]^{5g-3}(1-q)^{4g-2}} \tag{6.2}$$

En comparant les deux expressions (6.1) et (6.2), on obtient l'égalité suivante entre polynômes des variables p et q :

$$(1-p)^{4g-2}R_g(q,p) = (1-q)^{4g-2}R_g(p,q) \tag{6.3}$$

Dans l'anneau $\mathbf{Z}[p,q]$ des polynômes à deux indéterminées p et q à coefficients entiers, les polynômes $(1-p)^{4g-2}$ et $(1-q)^{4g-2}$ sont premiers entre eux et il résulte de l'égalité (6.3) que le polynôme $R_g(p,q)$ est divisible par $(1-p)^{4g-2}$.

En notant $P_g(p,q)$ le quotient du polynôme $R_g(p,q)$ par $(1-p)^{4g-2}$, on obtient la formule du théorème 5.1. La symétrie du polynôme $P_g(p,q)$ par rapport aux variables p et q se déduit encore de celle de $Q_g(1,s,f)$ par rapport aux variables s et f. Si les coefficients du polynôme $R_g(p,q)$ sont entiers, alors il en est de même pour ceux du polynôme $P_g(p,q)$, qu'on obtient par $4g-2$ divisions successives de $R_g(p,q)$ par $(1-p)$.

21. Nécessité d'étudier les cartes multi-pointées et leurs dérivées

La deuxième phase de la démonstration justifie la nécessité d'élargir l'étude à certaines familles de cartes multi-pointées et à leurs dérivées. Elle décrit une méthode de calcul symbolique de l'expression (6.1) de la forme faible du théorème 5.1, fondée sur les relations (4.25), (4.26), (4.31) et (4.32).

La nature inductive (en particulier, finie) du calcul est établie dans le paragraphe 21.55. La méthode requiert le calcul de certaines dérivées partielles, pour lesquelles on introduit des notations pratiques dans la section suivante, où la proposition 6.1 affirme l'existence d'une forme paramétrique commune pour toutes les séries génératrices de cartes multi-pointées et leurs dérivées.

21.55. *La méthode de calcul est inductive*

Dans ce paragraphe, on démontre le caractère inductif et fini du calcul de la série $s\,f\,Q_g(1,s,f)$ en fonction des paramètres p et q.

D'après la relation (4.32), la série $s\,f\,Q_g(1,s,f)$ s'exprime en fonction de s, f, V, $Q_{g\text{-}1}(V,V,s,f)$ et $Q_j(V,s,f)$, pour j compris entre 1 et g-1. Nous allons montrer que ceci implique l'étude d'un nombre fini de cartes multi-pointées et de leurs dérivées.

21.55.33. *Premier constat*

Pour obtenir l'expression de $Q_{g\text{-}1}(V,V,s,f)$ nécessaire au calcul de $s\,f\,Q_g(1,s,f)$, il faut étudier la série $Q_{g\text{-}1}(v_1,v_2,s,f)$, qui dénombre les cartes bi-pointées de genre (g-1). Cette série est définie par les équations (4.25) et (4.26), dans lesquelles on remplace g par (g-1) et r par 2. Le deuxième terme du membre de droite de l'équation (4.25), dans laquelle on remplace g par (g-1) et r par 2, s'écrit :

$$\frac{v_1(1-v_1)}{s}Q_{g-2}(v_1,v_1,v_2,s,f) \tag{6.4}$$

Cette expression fait apparaître la série $Q_{g\text{-}2}(v_1,v_1,v_2,s,f)$, qui doit à son tour être étudiée. En répétant ce raisonnement jusqu'au genre 0, on montre que le calcul de la série $Q_g(1,s,f)$ passe par l'étude de séries de la forme $Q_{g\text{-}r+1}(v_1,\ldots,v_r,s,f)$, avec $2 \le r \le g+1$. Il en résulte qu'il faut étudier toutes les familles de cartes r-pointées de genre g-r+1, pour tout entier r compris entre 2 et g+1.

21.55.34. *Deuxième constat*

Par ailleurs, l'équation (4.26), dans laquelle on remplace g par (g-1) et r par 2, s'écrit :

$$T_{g-1}(v_1,v_2,s,f)=(1-v_1)v_2\frac{\partial}{\partial v_2}\left[v_2\frac{v_2Q_{g-1}(v_2,s,f)-v_1Q_{g-1}(v_1,s,f)}{v_2-v_1}\right] \tag{6.5}$$

Cette expression fait apparaître la dérivée partielle première de la série $Q_{g\text{-}1}(v,s,f)$ selon la variable v. Cette série dénombre des cartes pointées orientables de genre g-1 dans lesquelles un deuxième brin issu du sommet pointé est distingué. De telles cartes seront

dites “ dérivées ” des cartes pointées, car leur série génératrice s’obtient par dérivation partielle selon v d’une série génératrice de cartes pointées.

Il résulte de l’observation de l’équation (4.26) que le calcul de la série $s\,f\,Q_g(1,s,f)$ passe par le calcul de dérivées de séries génératrices de certaines familles de cartes.

21.55.35. *Troisième constat*

Pour calculer $Q_{g\text{-}1}(V,V,s,f)$, il ne suffit pas de remplacer v_1 et v_2 par V dans les équations (4.25) et (4.26), écrites pour g-1 et r égal à 2. En effet, ceci annule le coefficient $A(V,s,f)/V$ de $Q_{g\text{-}1}(V,V,s,f)$, compte tenu de (4.31).

Il est nécessaire de dériver d’abord (4.25) et (4.26) selon v_1, puis de remplacer ensuite v_1 et v_2 par V. Ceci fait apparaître dans les membres de droite des équations (4.25) et (4.26) d’autres séries génératrices de cartes dérivées.

Ainsi, pour calculer $T_{g\text{-}1}(V,V,s,f)$, il faudra étudier des dérivées partielles de $Q_{g\text{-}1}(v,s,f)$ selon la variable v jusqu’à l’ordre 3. Cette affirmation sera justifiée en détail dans le paragraphe 24.62.

21.55.36. *Conclusion des trois constats*

Il résulte des trois précédents constats que le calcul de $s\,f\,Q_g(1,s,f)$ passe par le calcul d’un nombre fini de dérivées partielles selon $v_1,\ldots,v_r$ de séries du type $Q_j(v_1,\ldots,v_r,s,f)$, avec $j < g$ et $r \leq g + 1$. Ces séries dénombrent diverses familles de cartes multi-pointées et leurs familles dérivées.

Si l’on connaît la valeur d’une quantité suffisante de telles séries pour $v_1 = \ldots = v_r = V$, alors on peut organiser un calcul inductif de l’expression de $s\,f\,Q_g(1,s,f)$ en un nombre fini d’étapes. Cette “ quantité suffisante ” de séries à connaître sera précisée dans les phases suivantes de la démonstration.

22. Forme générale pour les séries de cartes multi-pointées et leurs dérivées

Dans cette troisième phase de démonstration, on affirme l'existence d'une forme générale pour la valeur en $v_1 = \ldots = v_r = V$ de toutes les séries décrites dans la deuxième phase.

Pour démontrer la proposition 6.2, on admet dans cette phase la proposition 6.1, qui sera démontrée dans la troisième phase. Le paragraphe 22.59 montre comment on déduit la proposition 6.2 de la proposition 6.1. Cette forme générale est donnée dans la proposition 6.1 du paragraphe 22.57. Pour l'énoncer, on introduit quelques notations dans le paragraphe 22.56. Dans les paragraphes 22.58 et 22.59, on montre comment la proposition 6.1 permet de démontrer la forme faible du théorème 5.1.

22.56. *Notations*

Les notations introduites ici vont permettre d'exprimer la proposition 6.1 (dans le paragraphe 22.57) et d'expliciter (dans le paragraphe 23.60) toutes les équations qui serviront à la démonstration de cette proposition.

22.56.37. *Notations des dérivées partielles*

Nous avons constaté que la démonstration de la forme faible du théorème passe par la vérification inductive de l'existence d'une forme générale pour certaines dérivées partielles des séries formelles impliquées dans les équations inductives (4.25) et (4.26).

Nous proposons ici une notation pratique pour les dérivées partielles de séries formelles, vues comme des fonctions de plusieurs variables.

Soit α un entier naturel non nul et soit Φ une série formelle quelconque des variables $v_1,\ldots,v_\alpha$, s et f. Alors on note dans la suite $\Phi[n_1,\ldots,n_\alpha]$ la série formelle en p et q égale à la dérivée multiple partielle de la série formelle Φ aux ordres $n_1,\ldots,n_\alpha$ par rapport aux variables $v_1,\ldots,v_\alpha$, calculée en $v_1 = \ldots = v_\alpha = V$, et qui s'écrit usuellement $\Phi^{(n_1,..,n_\alpha,0,0)}(V,..,V,s,f)$.

Exemple : $A(v,s,f)$ étant la série définie avec l'équation (4.24), $A[k]$ désigne $A^{(k,\,0,\,0)}(V,s,f)$, c'est-à-dire $\dfrac{\partial^k A}{(\partial v)^k}(v,s,f)_{|v=V}$, qui est une série formelle des variables p et q.

22.56.38. *Notation pour deux polynômes*

L'écriture des équations à venir est allégée si l'on donne un nom à deux polynômes présents dans les équations (4.25) et (4.26).

Dans toute la suite, on note M et L les polynômes définis respectivement par

$$M(v) = v\,(1 - v) \tag{6.6}$$

et

$$L(v) = v^2\,(1 - v). \tag{6.7}$$

Un simple calcul permet d'établir les résultats suivants.

$$M[m] = m!\ (1\text{-}p)^{m\text{-}2}\ M_m(p) \tag{6.8}$$

$$M_0(p) = -p,\ M_1(p) = -1\text{-}p,\ M_2(p) = -1 \tag{6.9}$$

et $M_m(p)$ est le polynôme nul pour $m \geq 3$.

$$L[k] = k!\ (1\text{-}p)^{k\text{-}3}\ L_k(p) \tag{6.10}$$

$$L_0(p) = -p,\ L_1(p) = -1\text{-}2p,\ L_2(p) = -2\text{-}p,\ L_3(p) = -1 \tag{6.11}$$

et $L_k(p)$ est le polynôme nul pour $k \geq 4$.

22.56.39. *Autres notations*

Dans tout ce qui suit, r désigne un entier naturel non nul et $(n_1,\ldots,n_r)$ désigne une séquence d'entiers naturels. On note n la somme de ces r entiers :

$$n = n_1 + \ldots + n_r \tag{6.12}$$

et on pose :

$$N! = n_1!\ \ldots\ n_r! \tag{6.13}$$

On rappelle que W désigne l'ensemble de variables $\{v_2,\ldots,v_r\}$ si $r \neq 1$ et l'ensemble vide si $r = 1$. Si $X \subseteq W$, alors N_X désigne la séquence des n_i tels que v_i appartient à X. L'ordre des n_i dans la séquence importe peu, puisque les expressions où N_X apparaît sont symétriques selon $n_2, \ldots, n_r$.

Enfin, on utilise la notation suivante pour le coefficient multinomial :

$$\binom{n_1+1}{i,\ j} = \frac{(n_1+1)!}{i!\,j!\,(n_1+1-i-j)!}. \tag{6.14}$$

22.57. *Forme générale de $Q_g[n_1,\ldots,n_r]$*

La notation $Q_g[n_1,\ldots,n_r]$, définie dans le paragraphe 22.56, désigne la série formelle en s et f obtenue en posant $v_1 = \ldots = v_r = V$ dans la dérivée partielle multiple de la série $Q_g(v_1,\ldots,v_r,s,f)$ selon $v_1,\ldots,v_r$ aux ordres respectifs $n_1,\ldots,n_r$.

On a montré dans le paragraphe 21.55 qu'il est possible de relier entre elles toutes ces séries $Q_g[n_1,\ldots,n_r]$ par des équations permettant leur calcul par récurrence sur g, sur r et sur $n_1,\ldots,n_r$. Ces équations seront explicitées dans le paragraphe 23.60.

Auparavant, on énonce la proposition 6.1, qui affirme l'existence d'une forme générale pour toutes ces séries.

PROPOSITION 6.1. *Pour* $(g, r) \neq (0, 1)$ *et pour tous les entiers naturels* $n_1,\ldots,n_r$, *on a* :

$$Q_g[n_1,\ldots,n_r] = \frac{N!\,s^{r-1} q(1-p-q)(1-p)^{n-2r-4g+4} R_{g,n_1,\ldots,n_r}(p,q)}{f\,A[1]^{2n+7r+10g-10}} \tag{6.15}$$

où

$$A[1] = -\sqrt{(1-2p-2q)^2-4pq} \tag{6.16}$$

et où $R_{g,n_1,\ldots,n_r}(p,q)$ *est un polynôme en p et q à coefficients entiers, de degré total inférieur ou égal à* $10g+2n+7r-12$, *défini par récurrence par* :

$$R_{0,0,0} = (1-p)^2 \tag{6.17}$$

et, pour $(n_1,n_2) \neq (0,0)$:

$$R_{0,n_1,n_2} = (1-p)^2 \begin{bmatrix} 2q(1-p-q) \displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=n_1+1 \\ i>0,\ k<n_1}} (-1)^{j+1} A[1]^{2j} E_i R_{0,k_1,n_2} \\ -n_2 A[1]^2 E_{n_1+n_2+2} - (n_2+1) E_{n_1+n_2+3} \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

Si $(g,r) \neq (0,2)$, *alors* :

$$\begin{aligned} R_{g,n_1,N_W} = & \sum_{\substack{i+j+k=n_1+1 \\ i>0,\ k<n_1}} 2q(1-p-q)(1-p)^2 E_i (-1)^{j+1} A[1]^{2j} R_{g,k,N_W} \\ & + q(1-p-q) \sum_{j=0}^{g} \sum_{\substack{X \subseteq W \\ (j,X) \neq \{(0,\varnothing),(g,W)\}}} \sum_{k+l+m=n_1+1} M_m A[1]^{2m} R_{j,k,N_X} R_{g-j,l,N_{W-X}} \\ & + \sum_{i+j+m=n_1+1} M_m A[1]^{2m} R_{g-1,i,j,N_W} \\ & + \sum_{j=2}^{r} \left[n_j \sum_{k+l=n_1+n_j+2} L_k A[1]^{2k+2} R_{g,l,N_j} + (n_j+1) \sum_{k+l=n_1+n_j+3} L_k A[1]^{2k} R_{g,l,N_j} \right] \end{aligned} \tag{6.19}$$

avec

$$E_1 = \frac{1}{2q(1-p-q)(1-p)^2} \tag{6.20}$$

$$E_2 = \frac{-p-4q+2p^2+4q^2+4pq}{2q(1-p-q)(1-p)^2}\,. \tag{6.21}$$

$$E_3 = -1 \tag{6.22}$$

et, pour k supérieur ou égal à 4,

$$E_k = -\sum_{i=2}^{i=k-1} q(1-p-q)(1-p)^2 E_i E_{k+1-i} \tag{6.23}$$

La signification des relations (6.17) à (6.23) sera donnée au fur et à mesure de la démonstration de la proposition 6.1 par récurrence. Les notations utilisées dans cette proposition 6.1, telles que N_W, M_m ou L_k, ont été définies dans le paragraphe 22.56.

La définition (6.16) de $A[1]$ sera justifiée plus loin. Au numérateur du membre de droite de la formule (6.15), on remarque certains facteurs connus et un polynôme inconnu noté $R_{g,n_1,\ldots,n_r}(p,q)$, dont on majore le degré. Afin d'économiser les notations, on désigne ce polynôme comme dans la formule (6.1) par la lettre R, sans confusion possible, puisque le polynôme R_g de la formule (6.1) n'a qu'un indice, alors que le présent polynôme est indexé par au moins 2 indices : le genre et une séquence non vide d'ordres de dérivation.

À propos de la proposition 6.1, il est important de donner encore quelques explications.

Pour trouver une forme générale qui soit à la fois démontrable par récurrence et assez précise pour permettre de prouver tous les détails de la version faible du théorème 5.1, il n'a pas suffi d'observer les premiers termes calculés. Il fallait de plus faire une hypothèse que le degré de (1-p) au numérateur, par exemple qu'il puisse s'écrire comme une combinaison linéaire de n, r et g.

A priori, la base du calcul par récurrence devait être une forme générale de $Q_0[k]$. Malgré de multiples tentatives, je n'ai pas trouvé de forme générale de $Q_0[k]$ suffisamment précise pour initier la preuve. Cette résistance du cas le plus simple (cartes planaires pointées, sur la sphère) rappelle l'étrangeté du cas planaire dans le problème dit " des 4 couleurs " : pour toutes les surfaces autres que la sphère, il est aisé de déterminer le nombre minimal de couleurs nécessaires. En revanche, on ne sait pas démontrer simplement que toute carte planaire peut être coloriée en au plus 4 couleurs.

C'est pourquoi la forme générale des séries $Q_g[n_1,\ldots,n_r]$ n'est donnée dans la proposition que pour (g,r) différent de (0,1). La difficulté est contournée en commençant la récurrence sur r et g avec $Q_0[n_1,n_2]$, dont nous établirons une forme générale dans la quatrième phase de la démonstration.

22.58. *Proposition pour le calcul du polynôme de la forme faible du théorème* 5.1

La proposition 6.2 suivante relie les polynômes de la proposition 6.1 avec le polynôme $R_g(p,q)$ de la forme faible du théorème 5.1, énoncée dans le paragraphe 20. Elle est démontrée à partir de la proposition 6.1, dans le paragraphe 22.59, ce qui permet d'établir la forme faible du théorème 5.1.

PROPOSITION 6.2. *Pour tout genre g non nul, le polynôme $R_g(p,q)$ de la formule* (6.1) *se calcule à partir de certains polynômes $R_{g,n_1,..,n_r}(p,q)$ de la proposition* 6.1 *selon* :

$$R_g = R_{g-1,0,0} + \sum_{j=1}^{g-1} q(1-p-q) R_{j,0} R_{g-j,0} \tag{6.24}$$

22.59. *Preuve de la forme faible du théorème* 5.1 *à partir de la proposition* 6.1

D'après la relation (4.32), $s\,f\,Q_g(1,s,f)$ s'exprime en fonction de s, de f, de V, et des séries $Q_{g-1}[0,0]$ et $Q_j[0]$, pour j compris entre 1 et g-1. Pour toutes ces séries, on dispose,

par la proposition 6.1, d'une forme générale qu'on injecte dans la relation (4.32), pour obtenir l'expression cherchée de la série $s\,f\,Q_g(1,s,f)$.

Ainsi, on substitue dans la relation (4.32) les formules suivantes, qui sont des cas particuliers de la proposition 6.1 :

$$Q_j[0] = \frac{q(1-p-q)(1-p)^{2-4j} R_{j,0}(p,q)}{f\,A[1]^{10j-3}} \tag{6.25}$$

$$Q_{g-1}[0,0] = \frac{sq(1-p-q)(1-p)^{-4(g-1)} R_{g-1,0,0}(p,q)}{f\,A[1]^{4+10(g-1)}} \tag{6.26}$$

Alors, on obtient :

$$s\,f\,Q_g(1,s,f) = \frac{pq(1-p-q)(1-p)^{2-4g}}{A[1]^{10g-6}} \left[\begin{array}{l} q(1-p-q)\sum_{j=1}^{g-1} R_{j,0}(p,q) R_{g-j,0}(p,q) \\ +R_{g-1,0,0}(p,q) \end{array} \right] \tag{6.27}$$

On reconnaît la formule (6.1), ce qui permet d'établir la relation (6.24) de la proposition 6.2.

En considérant la majoration des degrés des polynômes $R_{j,0}$ et $R_{g\text{-}1,0}$ donnée dans la proposition 6.1, on vérifie par la relation (6.24) que $R_g(p,q)$ est un polynôme de degré total inférieur ou égal à 10g - 8. De plus, toujours selon la relation (6.24), le polynôme $R_g(p,q)$ est à coefficients entiers car il en est de même pour les polynômes $R_{j,0}$ et $R_{g\text{-}1,0}$, selon la proposition 6.1.

Par conséquent, la proposition 6.2 est établie.

La relation (6.27) et la proposition 6.2 constituent ensemble la forme faible du théorème 5.1, qui est ainsi établie, sous réserve d'une démonstration de la proposition 6.1.

23. Méthode de calcul par récurrence de la forme générale des séries $Q_g[n_1,\ldots,n_r]$

La quatrième phase de la démonstration explique comment la proposition 6.1 peut être démontrée par une récurrence multiple. Elle met en place tout le matériel nécessaire à cette preuve par récurrence, qui sera menée dans la section 24.

L'équation qui permet de calculer $Q_g[n_1,\ldots,n_r]$, qui sera notée $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$, est explicitée dans le paragraphe 23.60. On verra, au cours de la démonstration de la récurrence, comment cette équation $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$ est remplacée par la relation (6.19) entre polynômes de la proposition 6.1.

Dans le paragraphe 23.61, on explicite la structure d'une récurrence multiple sur les entiers g, r, $n_1,\ldots,n_r$ qui permet le calcul de $Q_g[n_1,\ldots,n_r]$.

23.60. *Obtention de l'équation définissant $Q_g[n_1,\ldots,n_r]$*

On définit à présent l'équation qui permet de calculer $Q_g[n_1,\ldots,n_r]$.

À partir de l'équation (4.25), on effectue les transformations algébriques suivantes :

- On dérive partiellement l'équation de récurrence (4.25) à l'ordre $n_1+1,n_2,\ldots,n_r$ par rapport aux variables $v_1,v_2,\ldots,v_r$ respectivement.
- On évalue cette équation différentielle au point particulier ($v_1 = \ldots = v_r = V$).
- Dans le membre de gauche de l'équation ainsi obtenue, le terme $Q_g[n_1+1,\ldots,n_r]$ apparaît multiplié par $A(V,s,f)$, qui est nul, d'après la relation (4.31). Le membre de gauche de cette équation ne dépend donc que de $Q_g[k,\ldots,n_r]$, pour $k \le n_1$. On isole dans ce membre de gauche le terme contenant $Q_g[n_1,\ldots,n_r]$.

On obtient finalement l'équation $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$ de la proposition 6.3 suivante.

PROPOSITION 6.3. *L'expression $Q_g[n_1,\ldots,n_r]$ est définie par l'équation* :

$$\begin{aligned}\frac{(n_1+1)A[1]}{V}Q_g[n_1,N_W] \quad = \quad & \sum_{\substack{i+j+k=n_1+1\\ i>0,\ k<n_1}} \binom{n_1+1}{i,j}\frac{(-1)^{j+1}\,j!}{V^{j+1}}A[i]Q_g[k,N_w] \\ & + f\sum_{\substack{j=0\\(j,X)\notin\{(0,\varnothing),(g,W)\}}}^{g}\ \sum_{X\subseteq W}\ \sum_{k+l+m=n_1+1}\binom{n_1+1}{k,l}M[m]Q_j[k,N_X]Q_{g-j}[l,N_{W-X}] \\ & + \frac{1}{s}\sum_{i+j+k=n_1+1}\binom{n_1+1}{i,j}M[k]Q_{g-1}[i,j,N_W] \\ & + s\sum_{j=2}^{r}\frac{(n_1+1)!\,n_j!}{(n_1+n_j+2)!}\left(\begin{array}{c} n_j F_g\left[n_1+n_j+2,N_j\right] \\ +\dfrac{V(n_j+1)}{n_1+n_j+3}F_g\left[n_1+n_j+3,N_j\right]\end{array}\right)\end{aligned} \qquad (Q,g,n_1,\ldots,n_r)$$

où N_j représente la séquence $n_2,\ldots,n_{j-1},n_{j+1},\ldots,n_r$ et où F_g est la série définie pour tout entier h non nul par :

$$F_g(v_1,\ldots,v_h,s,f) = v_1^{\,2}\,(1-v_1)\,Q_g(v_1,\ldots,v_h,s,f) \qquad (6.28)$$

La série $T_g(v_1,W,s,f)$ qui apparaît dans le membre de droite de l'équation (4.25) devrait se traduire dans l'équation $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$ par une série $T_g[n_1+1,N_W]$. Dans la proposition 6.3, on a directement remplacé cette série $T_g[n_1+1,N_W]$ par une expression liée aux séries du type $Q_g(v_1,W\text{-}\{v_j\},s,f)$, pour j compris entre 2 et r. Ce remplacement mérite quelques explications, qui sont données dans le paragraphe 23.60.40.

23.60.40. *Expression du terme $T_g[n_1+1,\ldots,n_r]$ de l'équation $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$*

Il s'agit ici de justifier en détail la dernière somme (pour j compris entre 2 à r) du membre de droite de l'équation $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$.

Cette dernière somme explicite l'expression $T_g[n_1+1,N_W]$, qui dérive de la série $T_g(v_1,W,s,f)$ définie par (4.26) selon la notation des dérivées partielles exposée dans le paragraphe 22.56.37. Il s'agit donc d'établir le lemme 6.1 suivant :

LEMME 6.1. *Pour $r \geq 2$ et pour tous les entiers naturels $g, n_1,\ldots,n_r$, on a* :

$$T_g\left[n_1+1,N_W\right]=\sum_{j=2}^{r}\frac{\left(n_1+1\right)!n_j!}{\left(n_1+n_j+2\right)!}\left(n_jF_g\left[n_1+n_j+2,N_j\right]+\frac{V\left(n_j+1\right)}{n_1+n_j+3}F_g\left[n_1+n_j+3,N_j\right]\right) \quad (6.29)$$

où F_g est la série définie par (6.28).

On prouve immédiatement le lemme 6.1. Dans cette preuve, W désigne toujours l'ensemble $\{v_2,\ldots,v_r\}$.

En observant que

$$\frac{\partial}{\partial v_j}\left[\frac{\left(v_j-v_1\right)v_1Q_g\left(v_1,W-\left\{v_j\right\},s,f\right)}{v_j-v_1}\right]=0\,, \quad (6.30)$$

on établit que la série $T_g(v_1,W,s,f)$ est égale à

$$\sum_{j=2}^{r}v_j\frac{\partial}{\partial v_j}\left[\frac{{v_j}^2\left(1-v_1\right)Q_g\left(v_j,W-\left\{v_j\right\},s,f\right)-{v_1}^2\left(1-v_1\right)Q_g\left(v_1,W-\left\{v_j\right\},s,f\right)}{v_j-v_1}\right] \quad (6.31)$$

On a également

$$\frac{\partial^{n_1+1}}{\partial {v_1}^{n_1+1}}\left[\frac{{v_j}^2\left(v_j-v_1\right)Q_g\left(v_j,W-\left\{v_j\right\},s,f\right)}{v_j-v_1}\right]=0\,, \quad (6.32)$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{\partial^{n_1+1}}{\partial {v_1}^{n_1+1}}T_g\left(v_1,..,v_r,s,f\right)=\sum_{j=2}^{r}v_j\frac{\partial^{n_1+2}}{\partial {v_1}^{n_1+1}\partial v_j}\left[\frac{F_g\left(v_j,W-\left\{v_j\right\},s,f\right)-F_g\left(v_1,W-\left\{v_j\right\},s,f\right)}{v_j-v_1}\right] \quad (6.33)$$

Si Ψ est une série formelle quelconque d'une seule variable, on démontre aisément, à partir de l'écriture de Ψ en série de Taylor, que :

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}}\left[\frac{\Psi(x)-\Psi(y)}{x-y}\right]_{x=y=a}=\frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}\Psi^{(\alpha+\beta+1)}(a) \tag{6.34}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'en appliquant ce résultat à la fonction $F_g(v,W\text{-}\{v_j\},s,f)$, considérée comme série formelle de la seule variable v, dans l'expression de la dérivée partielle multiple

$$\frac{\partial^{n_1+\ldots+n_r+1}}{\partial v_1^{\,n_1+1}\ldots\partial v_r^{\,n_r}}T_g(v_1,\ldots,v_r,s,f), \tag{6.35}$$

on obtient le résultat du lemme 6.1.

Ceci achève la démonstration du lemme 6.1 et la justification de la proposition 6.3, car le reste de l'équation $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$, quoique lourd, n'est que l'application directe des transformations algébriques définies dans le paragraphe 23.60. ■

23.61. ***Structure générale de la récurrence***

Ce paragraphe met en évidence la structure récurrente du système d'équations $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$, puis énonce la base de la récurrence (paragraphe 23.61.41) et l'hypothèse de récurrence (paragraphe 23.61.42).

Dans le membre de droite de l'équation $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$, on vérifie que :

- Le premier terme ne dépend que de dérivées partielles de Q_g à l'ordre $(k,n_2,\ldots,n_r)$, pour k strictement inférieur à n_1 ,
- Le deuxième terme et le troisième terme ne dépendent que de dérivées partielles de Q_j pour j strictement inférieur à g, ou de dérivées de Q_g pour un nombre de variables strictement inférieur à r,
- Le quatrième terme correspond à $T_g[n_1+1,\ldots,n_r]$. Ce terme est nul si $r = 1$. Sinon, nous avons montré dans le lemme 6.1 que ce terme s'exprime en fonction de diverses expressions du type $Q_g[k_1,\ldots,k_{r\text{-}1}]$, où $k_1,\ldots,k_{r\text{-}1}$ sont $(r\text{-}1)$ entiers naturels qui dépendent de $n_1,\ldots,n_r$.

Par conséquent, l'équation $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$ définit $Q_g[n_1,\ldots,n_r]$ à partir de dérivées partielles de Q_j, pour j strictement inférieur à g, ou sinon pour un nombre de variables strictement inférieur à r, ou sinon pour un ordre total de dérivation strictement inférieur à $n_1+\ldots+n_r$.

23.61.41. *Base de la récurrence*

En principe, la base de la récurrence qui démontre la proposition 6.1 ne devrait être que le cas $g = 0$, $r = 2$ et $n_1 = n_2 = 0$. En réalité, il est nécessaire d'élargir cette base à tous les entiers naturels n_1 et n_2, car l'équation $(Q,0,n_1,n_2)$ implique des séries $Q_0[k]$, pour lesquelles on ne dispose pas d'une forme générale suffisamment précise pour induire la forme générale de $Q_0[n_1,n_2]$ requise par la proposition 6.1. Il faut alors passer par la série $A(v,s,f)$ définie par l'équation (4.24) et donc traiter le cas $(g,r) = (0,2)$ séparément. Par conséquent,

la base de la récurrence s'exprime comme dans le lemme 6.2, qui est démontré dans le paragraphe 24.62.

LEMME 6.2. *Pour tous les entiers naturels n_1 et n_2, on a* :

$$Q_0[n_1,n_2]=\frac{n_1!n_2!sq(1-p-q)(1-p)^{n_1+n_2}R_{0,n_1,n_2}(p,q)}{fA[1]^{2(n_1+n_2+2)}}, \tag{6.35}$$

où $R_{0,n_1,n_2}(p,q)$ est un polynôme en p et q à coefficients entiers de degré total inférieur ou égal à $2(n_1+n_2)+2$, défini par récurrence par les relations (6.17) *et* (6.18) *rappelées ici* :

$$R_{0,0,0}=(1-p)^2$$

et, pour $(n_1,n_2)\neq(0,0)$:

(6.18)
$$R_{0,n_1,n_2}=(1-p)^2\left[\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=n_1+1\\ i>0,\,k<n_1}}2q(1-p-q)(-1)^{j+1}A[1]^{2j}E_i\,R_{0,k_1,n_2}\\ -n_2A[1]^2E_{n_1+n_2+2}-(n_2+1)E_{n_1+n_2+3}\end{array}\right]$$

Le lemme 6.2 donne une signification aux relations (6.17) et (6.18) de la proposition 6.1.

23.61.42. *Hypothèse de récurrence*

On exprime ici l'hypothèse faite dans la récurrence multiple menée dans la section 24.

Pour :

- $0\le j<g$ et $k\ge 2$,
- $j=g$ et $2\le k<r$,
- $j=g$, $k=r$ et $(m_1,\ldots,m_k)$ lexicographiquement inférieur à $(n_1,\ldots,n_r)$,

on suppose que la formule (6.15) de la proposition 6.1 est vérifiée, c'est-à-dire que :

$$Q_j[m_1,\ldots,m_k]=\frac{M!s^{k-1}q(1-p-q)(1-p)^{m-2k-4j+4}R_{j,m_1,\ldots,m_k}(p,q)}{fA[1]^{2m+7k+10j-10}} \tag{6.36}$$

et que $R_{j,m_1,\ldots,m_k}(p,q)$ est un polynôme en p et q à coefficients entiers de degré total inférieur ou égal à $10j+2m+7k-12$, avec $m=m_1+\ldots+m_k$ et $M!=m_1!\ldots m_k!$

23.61.43. *Principe d'une itération de la récurrence*

Une itération de la récurrence consiste à injecter les formules (6.36) dans l'équation $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$, pour prouver les formules (6.15) et (6.19) de la proposition 6.1.

Les calculs intermédiaires engendrés par cette itération sont détaillés dans la section 24.

23.61.44. *Remarque*

Si l'on ambitionne de montrer que le degré total de $R_{g,n_1,\ldots,n_r}(p,q)$ est effectivement ***égal à*** $2n+7r+10g-12$, comme les premiers calculs explicites le laissent penser, il faut considérer le coefficient de plus haut degré de chaque terme du calcul et montrer qu'il ne peut y avoir annulation. Ceci requiert une analyse encore plus fine et complique la preuve, car le calcul comporte de nombreuses soustractions. C'est pourquoi on se contente ici de démontrer que le degré est ***majoré par*** $2n+7r+10g-12$.

24. Démonstration de la proposition 6.1 par récurrence

La cinquième phase de la démonstration démontre la proposition 6.1 par une récurrence multiple. C'est la partie la plus technique de la démonstration.

La base de la récurrence est établie dans le paragraphe 24.62.

L'hypothèse de récurrence énoncée au paragraphe 23.61.42 permet (dans le paragraphe 24.63) de démontrer la relation (6.19) et d'en déduire toutes les propriétés du polynôme $R_{g,n_1,\ldots,n_r}(p,q)$ annoncées dans la proposition 6.1.

24.62. *Démonstration de la base de la récurrence*

Ce paragraphe démontre le lemme 6.2, qui est le cas initial de la démonstration par récurrence de la proposition 6.1, pour lequel on a $g = 0$, $r = 2$ et $n_1 = n_2 = 0$.

Le lemme 6.2 se démontre par l'intermédiaire de la série $A(v,s,f)$, définie par l'équation (4.24). D'abord, on explicite dans le paragraphe 24.62.45 la relation qui existe entre $Q_0[n_1,n_2]$ et certains $A[k]$. Puis on établit une forme générale pour tous les $A[k]$, dans le lemme 6.3 du paragraphe 24.62.46. Enfin, on démontre le lemme 6.2 dans le paragraphe 24.62.47.

24.62.45. *Relation entre $Q_0[n_1,n_2]$ et les dérivées de $A(v,s,f)$*

L'équation $(Q,0,n_1,n_2)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{(n_1+1)A[1]}{V}Q_0[n_1,n_2] = &\sum_{\substack{i+j+k=n_1+1\\ i>0,\ k<n_1}}\binom{n_1+1}{i,j}\frac{(-1)^{j+1}j!}{V^{j+1}}A[i]Q_0[k,n_2]\\ &+s\frac{(n_1+1)!n_2!}{(n_1+n_2+2)!}\left(\begin{array}{c}n_2F_0[n_1+n_2+2]\\ +\dfrac{V(n_2+1)}{n_1+n_2+3}F_0[n_1+n_2+3]\end{array}\right)\end{aligned} \qquad (Q,0,n_1,n_2)$$

Or, on déduit de (4.24) et de (6.28) que :

$$A(v,s,f) = 1\text{-}v + v^2s - 2fF_0(v,s,f), \tag{6.37}$$

d'où la relation suivante, pour k supérieur ou égal à 2, entre les dérivées des séries $A(v,s,f)$ et $F_0(v,s,f)$:

$$A[k] = 2s\ \delta_{k,2} - 2fF_0[k]. \tag{6.38}$$

Il en résulte que $Q_0[n_1,n_2]$ se calcule à partir de $A[k]$, pour k compris entre 1 et n_1+n_2+3, selon :

$$12\,fA[1]\,Q_0[0,0] = -\,sV^2A[3] \tag{6.39}$$

et, pour $(n_1,n_2) \neq (0,0)$, selon :

$$\frac{(n_1+1)A[1]}{V}Q_0[n_1,n_2]=\sum_{\substack{i+j+k=n_1+1\\ i>0,\,k<n_1}}\binom{n_1+1}{i,j}\frac{(-1)^{j+1}\,j!}{V^{j+1}}A[i]Q_0[k,n_2]$$
$$-\frac{s}{2f}\frac{(n_1+1)!n_2!}{(n_1+n_2+2)!}\left(\begin{array}{c}n_2\,A[n_1+n_2+2]\\ +\dfrac{V(n_2+1)}{n_1+n_2+3}A[n_1+n_2+3]\end{array}\right) \tag{6.40}$$

On ramène ainsi le calcul de $Q_0[n_1,n_2]$ à celui de A[k], pour lequel nous allons démontrer le lemme 6.3 dans le paragraphe 24.62.46.

24.62.46. *Forme générale des séries A*[k]

On rappelle que $A(v,s,f)$ est la série définie par l'équation (4.24), série qui dépend simplement de la série $Q_0(v,s,f)$. Le lemme 6.3 donne la forme générale de $A[k]$.

LEMME 6.3. *Pour tout entier naturel k non nul, on a* :

$$A[k]=\frac{k!2q(1-p-q)(1-p)^{k+1}E_k(p,q)}{A[1]^{2k-3}} \tag{6.41}$$

où E_1 *et* E_2 *sont les fractions rationnelles en p et q définies par les relations* (6.20) *et* (6.21) *rappelées ici* :

(6.20) $$E_1=\frac{1}{2q(1-p-q)(1-p)^2}$$

(6.21) $$E_2=\frac{-p-4q+2p^2+4q^2+4pq}{2q(1-p-q)(1-p)^2}.$$

Si k est supérieur ou égal à 3*, alors* $E_k(p,q)$ *est un polynôme en p et q à coefficients entiers, de degré total inférieur ou égal à* $2k-6$*, défini par les relations* (6.22) *et* (6.23) *rappelées ici* :

(6.22) $$E_3 = -1$$

et, pour k supérieur ou égal à 4 :

(6.23) $$E_k = -\sum_{i=2}^{i=k-1} q(1-p-q)(1-p)^2 E_i E_{k+1-i}$$

24.62.46.21. Preuve du lemme 6.3

De l'équation (4.23) et de la définition de la série A, on déduit que :

$$A(v,s,f)^2 = B(v,s,f) \tag{6.42}$$

avec

$$B(v,s,f) = 4\,v^3 f s\,(v\text{-}1)\,Q_0(1,s,f) - 4\,v^2 f (v\text{-}1)^2 + (1\text{-}v+v^2 s)^2. \tag{6.43}$$

On rappelle ici le procédé de calcul des $B[k]$, pour tout entier naturel k, donnés pour la première fois dans [BCR91], page 328.

De la relation (6.42) et de $A[0] = 0$ (autre écriture de (4.31)), il résulte que

$$B[0] = B[1] = 0. \tag{6.44}$$

On obtient l'expression de $B[2]$ (respectivement $B[3]$ et $B[4]$) en fonction de p et q en dérivant la relation (6.42) à l'ordre 2 (respectivement 3 et 4) par rapport à la variable v, puis en substituant V à v dans la relation ainsi obtenue. Les expressions de s, f, V et $Q_0(1,s,f)$ en fonction de p et q sont données par les relations (4.28), (4.29) et (4.30).

$$B[2] = 2\,(1 - 4p - 4q + 4p^2 + 4pq + 4q^2) \tag{6.45}$$

$$B[3] = 12\,(1 - p)\,(-p - 4q + 2p^2 + 4pq + 4q^2) \tag{6.46}$$

$$B[4] = 24\,(1 - p)^2\,(- 4q + p^2 + 4pq + 4q^2) \tag{6.47}$$

Par ailleurs, $B[k] = 0$ pour tout entier k supérieur ou égal à 5, car $B(v,s,f)$ est de degré 4 par rapport à la variable v.

En dérivant la relation (6.42) à l'ordre 2 par rapport à la variable v, on obtient l'égalité :

$$2\,A[1]^2 = B[2] \tag{6.48}$$

de sorte que $A[1]^2$ s'exprime en fonction de p et q selon :

$$A[1]^2 = (1 - 2p - 2q)^2 - 4pq \tag{6.49}$$

La notation $A[1]$ a été utilisée pour la première fois dans la proposition 6.1, dans laquelle on affirme (6.16), c'est-à-dire :

(6.16) $$A[1] = -\sqrt{(1-2p-2q)^2 - 4pq}$$

Il est temps de donner un sens à cette écriture de $A[1]$ et de justifier le signe " moins ".

D'abord, on écrit $A[1]^2$ sous la forme :

$$A[1]^2 = (1-2p)^2\left[1 - \frac{4q(1-p-q)}{(1-2p)^2}\right] \tag{6.50}$$

On constate alors qu'on est dans les conditions d'application du théorème (2.1) de [Bro65], qui permet d'affirmer que $A[1]^2$ admet une racine carrée dans l'anneau $Z[[p,q]]$ des séries formelles des variables commutatives p et q, à coefficients dans l'anneau des entiers relatifs Z. En fait, il y a exactement deux solutions opposées et on note

$$\sqrt{(1-2p-2q)^2 - 4pq}$$

celle des deux solutions dont le terme constant est +1. Il reste à établir que $A[1]$ est l'autre solution. Pour cela, on dérive la définition (4.24) de $A(v,s,f)$ selon v et on évalue le résultat en $v = V$. Il vient :

$$A[1] = -V + 2Vs - f\left(\left(4V - 6V^2\right) Q_0(V,s,f) - 2V^2 f(1-V)\, Q_0[1]\right) \qquad (6.51)$$

Les variables s et f étant reliées aux variables p et q par (4.28), le terme constant de $A[1]$ est celui de $-V$, qui est -1, par définition (4.29) de V comme l'inverse de $(1-p)$. Ceci justifie complètement la relation (6.16).

Après cette petite digression, reprenons le cours de la preuve du lemme 6.3.

Pour obtenir la définition (6.20) de la fraction rationnelle E_1, on remplace simplement k par 1 dans (6.41).

Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on dérive la relation (6.42) à l'ordre $(k+1)$ par rapport à la variable v, puis on remplace v par V dans la relation ainsi obtenue. Sachant que $A[0] = 0$, on obtient l'expression suivante de $A[k]$ en fonction de $B[k+1]$, de p, de q et de $A[i]$, pour tous les entiers i compris entre 2 et $(k-1)$.

$$A[k] = \frac{1}{2(k+1)A[1]}\left[B[k+1] - \sum_{i=2}^{i=k-1} \binom{k+1}{i} A[i]A[k+1-i]\right] \qquad (6.52)$$

Pour $k = 2$, on obtient :

$$A[2] = \frac{2(1-p)(-p-4q+2p^2+4q^2+4pq)}{A[1]} \qquad (6.53)$$

dont on déduit la définition (6.21) de la fraction rationnelle E_2.

Pour $k = 3$, on obtient :

$$A[3] = \frac{-3!2q(1-p-q)(1-p)^4}{A[1]^3} \qquad (6.54)$$

et la formule (6.41) du lemme 6.3 est vérifiée en posant $E_3(p,q) = -1$, qui est bien un polynôme à coefficients entiers de degré $2k - 6$, c'est-à-dire 0. Ainsi, la relation (6.22) est justifiée.

On démontre à présent le reste du lemme 6.3 par récurrence sur k, pour k supérieur ou égal à 4.

Soit k un entier fixé, $k \geq 4$. On suppose le lemme 6.3 démontré pour toutes les séries de $A[2]$ à $A[k-1]$.

On substitue cette hypothèse de récurrence, appliquée à $A[i]$ et à $A[k+1-i]$, dans (6.52), sachant que, pour $k \geq 4$, $B[k+1] = 0$. Après calculs, on obtient :

$$A[k] = \frac{k!2q(1-p-q)(1-p)^{k+1}}{A[1]^{2k-3}}\left[-\sum_{i=2}^{i=k-1} q(1-p-q)(1-p)^2 E_i E_{k+1-i}\right] \qquad (6.55)$$

En comparant (6.55) avec la formule (6.41), on obtient la relation (6.23). Cette relation (6.23) et l'hypothèse de récurrence permettent de montrer que E_k est un polynôme à coefficients entiers et de degré total inférieur ou égal à $2k-6$.

Ceci achève la preuve du lemme 6.3. ■

24.62.47. *Preuve du lemme* 6.2 *pour* $Q_0[n_1,n_2]$

On poursuit à présent la preuve du lemme 6.2 par une récurrence sur (n_1,n_2). Comme $Q_0[n_1,n_2] = Q_0[n_2,n_1]$, il suffit d'établir $Q_0[0,0]$, puis de montrer que $Q_0[n_1,n_2]$ se déduit de $Q_0[k,n_2]$, pour k compris entre 0 et n_1-1.

À partir de l'équation $(Q,0,0,0)$, explicitée en (6.39), et de l'expression (6.54) de $A[3]$, on obtient :

$$Q_0[0,0]=\frac{sq(1-p-q)(1-p)^2}{f\,A[1]^4} \tag{6.56}$$

et on vérifie la formule (6.35) et du lemme 6.2 en posant :

$R_{0,0,0} = (1-p)^2$.

Pour $(n_1,n_2) \neq (0,0)$, l'équation (6.40) relie $Q_0[n_1,n_2]$ à $Q_0[k,n_2]$, pour k compris entre 0 et n_1-1, et à A[i], pour i compris entre 1 et $n_1 + n_2 + 3$.

Comme hypothèse de récurrence, on admet le lemme 6.2 pour k strictement inférieur à n_1. Dans (6.40), on remplace $Q_0[k,n_2]$ par sa valeur selon la relation (6.35) du lemme 6.2 et on remplace $A[i]$ par sa valeur selon le lemme 6.3. Après calculs, on obtient :

$$Q_0[n_1,n_2]=\frac{n_1!n_2!sq(1-p-q)(1-p)^{n_1+n_2+2}}{fA[1]^{2(n_1+n_2)+4}}\begin{pmatrix}2q(1-p-q)\displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=n_1+1\\ i>0,\,k<n_1}}(-1)^{j+1}A[1]^{2j}E_iR_{0,k,n_2}\\ -n_2A[1]^2E_{n_1+n_2+2}-(n_2+1)E_{n_1+n_2+3}\end{pmatrix}$$

On vérifie alors la relation (6.35) du lemme 6.3 en posant la relation (6.18) :

$$R_{0,n_1,n_2}=(1-p)^2\begin{bmatrix}2q(1-p-q)\displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=n_1+1\\ i>0,\,k<n_1}}(-1)^{j+1}A[1]^{2j}E_i\,R_{0,k_1,n_2}\\ -n_2A[1]^2E_{n_1+n_2+2}-(n_2+1)E_{n_1+n_2+3}\end{bmatrix} \tag{6.18}$$

La relation (6.18) permet de vérifier, compte tenu de l'hypothèse de récurrence et du lemme 6.3, que R_{0,n_1,n_2} est un polynôme à coefficients entiers.

Par hypothèse, pour k compris entre 0 et n_1-1, le degré total de R_{0,k,n_2} est majoré par $2(k+n_2)+2$. On déduit de (6.18) que le degré total de R_{0,n_1,n_2} est successivement majoré par :

$$2 + max[2+2j+(2i-6)+2(k+n_2)+2,\ 2 + 2(n_1 + n_2 + 2) - 6,\ 2(n1 + n_2 + 3) - 6]$$

$$2 + max[2(i+j+k+n_2)-2,\ 2(n_1 + n_2)]$$

$$2(n_1 + n_2)+2$$

Ceci achève la preuve du lemme 6.2. ■

24.63. ***Itération de la récurrence, avec majoration du degré des polynômes***

Chaque paragraphe, de 24.63.49 à 24.63.52, applique l'itération de la récurrence à un terme du second membre de l'équation $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$. Auparavant, le paragraphe 24.63.48 précise ce qu'on entend par " terme " du second membre de l'équation $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$.

24.63.48. *Termes de l'équation* $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$

Pour simplifier, on appelle respectivement premier, deuxième, troisième termes du membre de droite de l'équation $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$ les expressions suivantes, notées $I_g[n_1,\ldots,n_r]$, $II_g[n_1,\ldots,n_r]$ et $III_g[n_1,\ldots,n_r]$.

$$I_g[n_1,\ldots,n_r]=\sum_{\substack{i+j+k=n_1+1\\ i>0,\ k<n_1}}\binom{n_1+1}{i,j}\frac{(-1)^{j+1}\,j!}{V^{j+1}}A[i]Q_g[k,n_2,\ldots,n_r]$$

$$II_g[n_1,\ldots,n_r]=f\sum_{j=0}^{g}\sum_{\substack{X\subseteq W\\ (j,X)\notin\{(0,\varnothing),(g,W)\}}}\sum_{k+l+m=n_1+1}\binom{n_1+1}{k,l}M[m]Q_j[k,N_X]Q_{g-j}[l,N_{W-X}]$$

$$III_g[n_1,\ldots,n_r]=\frac{1}{s}\sum_{i+j+k=n_1+1}\binom{n_1+1}{i,j}M[k]Q_{g-1}[i,j,N_W]$$

Le quatrième terme de l'équation $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$ est déjà noté $s\,T_g[n_1+1,\ldots,n_r]$. Chaque paragraphe suivant traite d'un de ces quatre termes du membre de droite de l'équation $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$.

24.63.49. *Premier terme*

Le lemme 6.3 permet d'affirmer que, pour tout i non nul, on a :

$$A[i]=\frac{i!2q(1-p-q)(1-p)^{i+1}E_i(p,q)}{A[1]^{2i-3}}$$

où $E_i(p, q)$ est un polynôme en p et q à coefficients entiers de degré total inférieur ou égal à $2i$ - 6 pour i supérieur ou égal à 3.

Remarque : Si $i = 1$ ou $i = 2$, alors $E_i(p, q)$ est certes une fraction rationnelle en p et q (à coefficients entiers) mais le degré du numérateur, diminué du degré du dénominateur, est encore inférieur ou égal à $2i$ - 6.

Par ailleurs, l'hypothèse de récurrence (paragraphe 23.61.42) nous permet d'affirmer que :

$$Q_g[k,n_2,\ldots,n_r]=\frac{k!N_W!s^{r-1}q(1-p-q)(1-p)^{k+n_W-2r-4g+4}R_{g,k,n_2,..,n_r}(p,q)}{f\,A[1]^{2(k+n_W)+7r+10g-10}}$$

avec $n_W = n_2 + \ldots + n_r$, $N_W! = n_2! \ldots n_r!$ et $R_{g,k,n_2,..,n_r}(p,q)$ un polynôme en p et q à coefficients entiers de degré total inférieur ou égal à $10g + 2(k+n_W) + 7r - 12$.

En injectant les expressions de $A[i]$ et de $Q_g[k,n_2,\ldots,n_r]$ dans $I_g[n_1,\ldots,n_r]$, on obtient les simplifications de termes de même nature résumées dans le tableau suivant, sachant que $i+j+k = n_1+1$ et $n=n_1+n_W$.

Nature	venant de $j!(-1)^{j+1}/(V^{j+1})$	venant de $A[i]$	venant de $Q_g[k,n_2,\ldots,n_r]$	il reste
factorielles	$j!$	$i!$	$k!\ N_W!$	$(n_1+1)!\ N_W!$
degré de s	0	0	r-1	r-1
Coefficient entier	$(-1)^{j+1}$	2	1	$2(-1)^{j+1}$
$q(1-p-q)$	Non	oui	oui	$q^2(1-p-q)^2$
Degré de $(1-p)$	$j+1$	$i+1$	$k+n_W-2r-4g+4$	$n-2r-4g+7$
degré de f	0	0	-1	-1

Le dénominateur est $A[1]$ à la puissance $2(i+k+n_W)+7r+10g-3-10$, que l'on multiplie par $A[1]^{2j}$ pour obtenir un dénominateur commun égal à $A[1]$ à la puissance $2n+7r+10g-11$. Le polynôme en facteur au numérateur du premier terme est :

$$\sum_{\substack{i+j+k=n_1+1 \\ i>0,\ k<n_1}} 2q(1-p-q)(1-p)^2 E_i(-1)^{j+1} A[1]^{2j} R_{g,k,n_2,\ldots,n_r} \qquad (6.57)$$

On reconnaît dans (6.57) le premier terme du membre de droite de la relation (6.19). On vérifie que (6.57) est un polynôme et que son degré total est successivement inférieur ou égal à :

$$4+(2i-6)+(2j)+[2(k+n_W)+7r+10g-12]$$

$$2(i+j+k+n_W)+7r+10g-14$$

$$2n+7r+10g-12$$

24.63.50. *Deuxième terme*

En injectant les expressions de $M[m]$, de $Q_j[k,N_X]$ et de $Q_{g-j}[l,N_{W-X}]$ dans $II_g[n_1,\ldots,n_r]$, on obtient les simplifications de termes de même nature résumées dans le tableau suivant, sachant que, pour le degré de $(1-p)$, on a utilisé le fait que $k+l+m = n_1+1$ et que $n_1+n_X+n_{W-X} = n$.

Nature	venant de $M[m]$	venant de $Q_j[k,N_X]$	venant de $Q_{g-j}[l,N_{W-X}]$	Il reste
factorielles	$m!$	$k!\ N_X!$	$l!\ N_{W-X}!$	$(n_1+1)!\ N_W!$
degré de s	0	x	$r-x-1$	r-1
$q(1-p-q)$	non	oui	oui	$q^2(1-p-q)^2$
degré de $(1-p)$	m-2	$k+n_X-2(x+1)-4j+4$	$l+n_{W-X}-2(r-x)-4(g-j)+4$	$n-2r-4g+5$
degré de f	0	-1	-1	-1

Dans la réduction au même dénominateur avec multiplication par $A[1]^{2m}$, le degré de $A[1]$ est successivement inférieur ou égal à :

$$(2m)+[2(k+n_X)+7(x+1)+10j\text{-}10]+[2(l+n_{W\text{-}X})+7(r\text{-}x)+10(g\text{-}j)\text{-}10]$$

$$2(m+l+k)+2(n_X+n_{W\text{-}X})+7(r+1)+10g\text{-}20$$

$$2n+7r+10g\text{-}11$$

car $k+l+m=n_1+1$ et $n_1+n_X+n_{W\text{-}X}=n$.

Après factorisation par $(n_1+1)!\ N_W!\ s^{r-1}\ q(1\text{-}p\text{-}q)(1\text{-}p)^{n-2r-4g+5}$, le numérateur du deuxième terme est :

$$q(1-p-q)\sum_{j=0}^{g}\sum_{\substack{X\subseteq W\\(j,X)\notin\{(0,\varnothing),(g,W)\}}}\sum_{k+l+m=n_1+1}M_m A[1]^{2m} R_{j,k,N_X} R_{g-j,l,N_{W-X}} \qquad (6.58)$$

On reconnaît dans (6.58) le deuxième terme du membre de droite de la relation (6.19), qui est un polynôme de degré total successivement inférieur ou égal à :

$$2+1+(2m)+[2(k+n_X)+7(x+1)+10j\text{-}12]+[2(l+n_{W\text{-}X})+7(r\text{-}x)+10(g\text{-}j)\text{-}12]$$

$$2(m+l+k)+2(n_X+n_{W\text{-}X})+7(r+1)+10g\text{-}21$$

$$2n+7r+10g\text{-}12$$

car $k+l+m=n_1+1$ et $n_1+n_X+n_{W\text{-}X}=n$.

24.63.51. *Troisième terme*

En injectant les expressions de $M[k]$ et de $Q_{g\text{-}1}[i,j,N_W]$ dans $III_g[n_1,\ldots,n_r]$, on obtient les simplifications de termes de même nature résumées dans le tableau suivant, sachant que, pour le degré de $(1\text{-}p)$, on a utilisé le fait que $i+j+k=n_1+1$ et que $n_1+n_W=n$.

Nature	venant de $M[k]$	venant de $Q_{g\text{-}1}[i,j,N_W]$	il reste
Factorielles	$k!$	$i!\ j!\ N_W!$	$(n_1+1)!\ N_W!$
degré de s	0	r	r-1
$q(1\text{-}p\text{-}q)$	non	oui	$q(1\text{-}p\text{-}q)$
degré de $(1\text{-}p)$	k-2	$i+j+n_W$-2$(r+1)$-4$(g-1)$+4	n-2r-4g+5
degré de f	0	-1	-1

Dans la réduction au même dénominateur avec multiplication par $A[1]^{2k}$, le degré de $A[1]$ au dénominateur est successivement égal à :

$$(2k)+[2(i+j+n_W)+7(r+1)+10(g-1)\text{-}10]$$

$$2(i+j+k+n_W)+7(r+1)+10g\text{-}13$$

$$2n+7r+10g\text{-}11$$

car $i+j+k=n_1+1$ et $n_1+n_W=n$.

Après factorisation par $(n_1+1)!\ N_W!\ s^{r-1}\ q(1-p-q)(1-p)^{n-2r-4g+5}$, le numérateur du troisième terme est :

$$\sum_{i+j+k=n_1+1} A[1]^{2k} M_k R_{g-1,i,j,N_W} \tag{6.59}$$

On reconnaît dans (6.59) le troisième terme du membre de droite de la relation (6.19), qui est un polynôme de degré total successivement inférieur ou égal à :

$$(2k)+1+[2(i+j+n_W)+7(r+1)+10(g-1)-12]$$

$$2(i+j+k+n_W)+7r+10g-14$$

$$2n+7r+10g-12$$

car $i+j+k = n_1+1$ et $n_1+n_W = n$.

Par conséquent, ce polynôme est de degré total inférieur ou égal à $2n+7r+10g-12$.

24.63.52. *Quatrième terme*

Le lemme 6.1 précise la relation qui existe entre la série $T_g[n_1+1,N_W]$ et les dérivées partielles de séries du type $Q_g(v_1, W-\{v_j\}, s, f)$, pour j compris entre 2 et r. Ce lemme invite d'abord à établir, pour tout entier naturel m, la forme générale de $F_g[m,N_j]$, en injectant les expressions de $L[k]$ et de $Q_g[l,N_j]$ dans $F_g[m,N_j]$.

On obtient les simplifications de termes de même nature résumées dans le tableau suivant, sachant que $k+l = m$.

Nature	venant de $L[k]$	venant de $Q_g[l,N_j]$	il reste
Factorielles	$k!$	$l!\ N_j!$	$m!\ N_j!$
degré de s	0	$r-2$	$r-2$
$q(1-p-q)$	non	oui	$q(1-p-q)$
degré de $(1-p)$	$k-3$	$l+n_W-n_j-2(r-1)-4g+4$	$m+n_W-n_j-2r-4g+3$
degré de f	0	-1	-1

Dans la réduction au même dénominateur avec multiplication par $A[1]^{2k}$, le degré de $A[1]$ au dénominateur est successivement égal à :

$$(2k)+[2(l+n_W-n_j)+7(r-1)+10g-10]$$

$$2(m+n_W-n_j)+7r+10g-17$$

car $k+l = m$.

Après factorisation par $m!\ N_j!\ s^{r-2}\ q(1-p-q)(1-p)^{m+n_W-n_j-2r-4g+3}$, le polynôme au numérateur dans $F_g[m,N_j]$ est :

$$\sum_{k+l=m} A[1]^{2k} L_k R_{g,l,N_j} \tag{6.60}$$

On substitue $F_g[n_1+n_j+2,N_j]$ et $F_g[n_1+n_j+3,N_j]$ dans $T_g[n_1+1,N_W]$, conformément au lemme 6.1. Après réduction au dénominateur commun, égal à $A[1]^{2n+7r+10g-11}$, et factorisation de $(n_1+1)!\ N_W!\ s^{r-1}\ q(1-p-q)(1-p)^{n-2r-4g+5}$, le numérateur du quatrième terme est :

$$\sum_{j=2}^{r}\left[n_j \sum_{k+l=n_1+n_j+2} A[1]^{2k+2} L_k R_{g,l,N_j} + (n_j+1) \sum_{k+l=n_1+n_j+3} A[1]^{2k} L_k R_{g,l,N_j} \right] \qquad (6.61)$$

On reconnaît dans (6.61) le quatrième terme du membre de droite de la relation (6.19), qui est un polynôme de degré total inférieur ou égal au maximum des deux expressions des deux colonnes suivantes :

$(2k+2)+1+[2(l+n_W-n_j)+7(r-1)+10g-12]$	$2k+1+[2(l+n_W-n_j)+7(r-1)+10g-12]$
$2(k+l+n_W-n_j)+7r+10g-16$	$2(k+l+n_W-n_j)+7r+10g-18$
$2n+7r+10g-12$	$2n+7r+10g-12$
car $k+l=n_1+n_j+2$	car $k+l=n_1+n_j+3$

Par conséquent, le polynôme (6.61) est de degré total inférieur ou égal à $2n+7r+10g-12$.

Il résulte de cette étude des quatre termes du membre de droite de l'équation $(Q,g,n_1,\ldots,n_r)$ que la proposition 6.1 est démontrée. Nous sommes à présent au terme des cinq phases de la démonstration du théorème 5.1.

Chapitre 7

Démonstration du théorème d'énumération des cartes générales

L'objectif de ce chapitre est la démonstration du théorème 5.2 du chapitre 5, qui affirme l'existence d'une forme paramétrique commune pour toutes les séries énumérant les cartes pointées générales (orientables ou non) de type donné, supérieur ou égal à 1.

Les cinq phases de la démonstration sont décrites dans la figure 5.2 du chapitre 5. Chaque section du présent chapitre correspond à la phase de démonstration de même numéro.

25. Forme faible du théorème 5.2

Dans cette première phase de la démonstration, on réduit le théorème 5.2 à un énoncé plus facile à démontrer, qu'on appelle " forme faible du théorème 5.2 " et qu'on énonce dans le paragraphe 25.64. La propriété de dualité des cartes (paragraphe 1.2.7 du chapitre 2) est utilisée dans le paragraphe 25.65 pour déduire le théorème 5.2 de sa forme faible.

25.64. *Énoncé de la forme faible du théorème* 5.2

FORME FAIBLE DU THÉORÈME 5.2. *Pour tout demi entier naturel τ supérieur ou égal à* 1*, la série $sfS_\tau(1, s, f)$ qui dénombre les cartes pointées générales* (*orientables ou non*) *de type τ en fonction du nombre de sommets* (*exposant de s*) *et du nombre de faces* (*exposant de f*) *est définie par* :

$$s=p(1-p-2q)$$

$$f=q(1-2p-q)$$

$$sfS_\tau(1,s,f)=\frac{F_\tau(p,q,c)}{(1-p)^{6\tau-2}\,p^{4\tau-1}(1-2c)^{10\tau-6}} \tag{7.1}$$

avec

$$1-2c=a=\sqrt{(1-2p-2q)^2-4pq} \tag{7.2}$$

où $F_\tau(p,q,c)$ *est un polynôme des variables p, q et c, de degré total inférieur ou égal à* 16τ - 6.

Pour des raisons techniques, on n'utilise pas la série *a* définie par (5.6), mais la série *c* des variables *p* et *q* reliée à *a* par (7.2).

25.65. ***De la forme faible, on déduit le théorème*** **5.2**

Comparée à la formule (5.5) du théorème 5.2, la formule (7.1) de la forme faible fait apparaître des facteurs parasites au dénominateur.

Or, la dualité entre les sommets et les faces des cartes pointées générales implique la symétrie de la relation (7.1) selon les variables *p* et *q*, ce qui justifie la divisibilité du numérateur $F_\tau(p,q,c)$ par $(1-p)^{6\tau-2}\, p^{4\tau-1}$.

En notant $U_\tau(p,q,c)$ le quotient du polynôme $F_\tau(p,q,c)$ par $(1-p)^{6\tau-2}\, p^{4\tau-1}$, on obtient la formule (5.5) du théorème 5.2.

Le majorant du degré de $U_\tau(p,q,c)$ dans le théorème 5.2 se déduit du majorant du degré du polynôme $F_\tau(p,q,c)$ dans la forme faible du théorème 5.2. La symétrie du polynôme $U_\tau(p,q,c)$ selon les variables *p* et *q* se déduit de la symétrie de la série $s\,f\,S_\tau(1, s, f)$ selon les variables *s* et *f*.

26. Nécessité d'étudier les cartes générales multi-pointées et leurs dérivées

Cette section traite la deuxième phase de la démonstration du théorème 5.2, dans laquelle on montre la nécessité d'élargir l'énumération à des familles de cartes générales multi-pointées et à leurs dérivées. Les dernières sont dites " dérivées " car leur série génératrice s'obtient par dérivation partielle de la série génératrice des premières.

Elle décrit une méthode de calcul symbolique de l'expression (7.1) de la forme faible du théorème 5.2, fondée sur les relations (4.27), (4.31) et (4.33).

La nature inductive (en particulier, finie) du calcul est établie dans le paragraphe 21.55. Au passage, on montre que certaines dérivées partielles de séries de cartes multi-pointées sont impliquées dans ce calcul.

26.66. *La méthode de calcul est inductive*

Dans ce paragraphe, on démontre le caractère inductif et fini du calcul de la série $s\,f\,S_\tau(1,s,f)$ en fonction des paramètres p et q.

D'après la relation (4.33), la série $s\,f\,S_\tau(1,s,f)$ s'exprime en fonction de s, f, V, $S_{\tau-1}(V,V,s,f)$, $S_{\tau-½}(V,s,f)$, $S_{\tau-½}^{(1,0,0)}(V,s,f)$ et $S_{i/2}(V,s,f)$, pour i compris entre 1 et 2τ-1.

Pour calculer $S_{\tau-1}(V,V,s,f)$, il faut étudier la série $S_{\tau-1}(v_1,v_2,s,f)$, qui dénombre les cartes générales bi-pointées de type $(\tau-1)$. Cette contrainte est développée dans le paragraphe 26.66.53.

Pour calculer $S_{\tau-½}^{(1,0,0)}(V,s,f)$, il faut étudier la dérivée partielle de la série $S_{\tau-½}(v_1,s,f)$ selon v_1, qui dénombre une famille dite " dérivée " des cartes générales pointées de type $(\tau-½)$. Cette contrainte est développée dans le paragraphe 26.66.54.

26.66.53. *Étude de familles de cartes multi-pointées*

La série $S_{\tau-1}(v_1,v_2,s,f)$, qui dénombre les cartes bi-pointées de genre $(\tau-1)$, est définie par l'équation (4.27), dans laquelle on remplace τ par $(\tau-1)$ et r par 2. À son tour, cette équation requiert l'étude de la série $S_{\tau-2}(v_1,v_1,v_2,s,f)$ et ainsi de suite, jusqu'à ce que le type soit inférieur à 1. À chaque fois, le nombre de variables v_i de la série est augmenté de 1 et le type de la série est réduit de 1.

En répétant ce raisonnement jusqu'au type 0 ou ½, on montre que le calcul de la série $S_\tau(1,s,f)$ passe par l'étude de toutes les séries de la forme $S_{\tau-r+1}(v_1,\ldots,v_r,s,f)$, avec $2 \le r \le \tau+1$. Il en résulte qu'il faut étudier toutes les familles de cartes générales r-pointées de type $\tau-r+1$, pour tout entier r compris entre 2 et $\tau+1$.

Mais il faut également étudier la série $S_{\tau-½}(v_1,s,f)$ et, par suite, toutes les séries de la forme $S_{\tau-½-r+1}(v_1,\ldots,v_r,s,f)$, avec $2 \le r \le \tau+½$.

26.66.54. *Étude de familles de cartes dérivées*

La présence de dérivations partielles selon v_1 dans l'équation (4.27) suffit à elle seule à justifier la nécessité d'étudier certaines dérivées partielles des séries S_τ selon v_1.

De plus, le terme $S_{\tau-1}(v_1,v_1,W,s,f)$ du membre de droite de l'équation (4.27) montre la nécessité d'élargir l'étude aux dérivées partielles des séries S_τ selon toutes les variables v_i.

Il s'agit donc surtout ici de s'assurer que, pour un type fixé, seul un nombre fini de telles dérivées est à étudier.

Dans l'équation (4.27), chaque fois qu'une dérivée partielle selon v_1 est calculée, on constate la diminution du type de la série concernée, ou la diminution de son nombre de variables v_i, par rapport à τ et à r respectivement.

Ainsi, dans le cadre d'une double récurrence menée sur le type et sur le nombre de variables v_i, seul un nombre fini de dérivées partielles de séries devra être étudié.

26.66.55. *Conclusion de la section*

Il résulte des analyses des deux paragraphes précédents que le calcul de $s\,f\,S_\tau(1,s,f)$ passe par le calcul d'un nombre fini de séries du type $S_j(v_1,\ldots,v_r,s,f)$ et de leurs dérivées partielles selon $v_1,\ldots,v_r$, avec $j < \tau$ et $r \leq \tau + 1$. Ces séries dénombrent diverses familles de cartes multi-pointées et leurs familles dérivées.

Si l'on connaît la valeur d'une quantité suffisante de telles séries pour $v_1 = \ldots = v_r = V$, alors on peut organiser un calcul inductif de l'expression de $s\,f\,S_\tau(1,s,f)$ en un nombre fini d'étapes. Cette " quantité suffisante " de séries à connaître sera précisée dans les phases suivantes de la démonstration.

27. Forme générale pour les séries de cartes multi-pointées et leurs dérivées

Dans cette troisième phase de démonstration, on affirme l'existence d'une forme générale pour la valeur en $v_1 = \ldots = v_r = V$ de toutes les séries décrites dans la deuxième phase. Cette forme générale est donnée dans la proposition 7.1 du paragraphe 27.68. Pour l'énoncer, on utilise les notations introduites dans le chapitre 6, que l'on rappelle brièvement dans le paragraphe 27.67 du présent chapitre. Dans les paragraphes 22.58 et 22.59, on montre comment la proposition 7.1 permet de démontrer la forme faible du théorème 5.2.

27.67. *Notations*

Ces notations permettent d'exprimer la proposition 7.1 (dans le paragraphe 27.68) et d'expliciter (dans le paragraphe 28.71) toutes les équations qui serviront à la démonstration de cette proposition.

27.67.56. *Notations des dérivées partielles*

Soit α un entier naturel non nul et soit Φ une série formelle quelconque des variables $v_1,\ldots,v_\alpha$, s et f. Alors on note dans la suite $\Phi[n_1,\ldots,n_\alpha]$ la série formelle en p et q égale à la dérivée multiple partielle de la série formelle Φ aux ordres $n_1,\ldots,n_\alpha$ par rapport aux variables $v_1,\ldots,v_\alpha$, calculée en $v_1 = \ldots = v_\alpha = V$, et qui s'écrit usuellement $\Phi^{(n_1,..,n_\alpha,0,0)}(V,..,V,s,f)$.

Exemple : $A(v,s,f)$ étant la série définie avec l'équation (4.24), $A[k]$ désigne $A^{(k,\,0,\,0)}(V,s,f)$, c'est-à-dire $\dfrac{\partial^k A}{(\partial v)^k}(v,s,f)_{|v=V}$, qui est une série formelle des variables p et q.

27.67.57. *Notation pour deux polynômes*

On rappelle ici les noms donnés à deux polynômes, pour simplifier l'écriture des équations à venir. Ces polynômes apparaissent dans l'équation (4.27).

Dans toute la suite, on note M et L les polynômes définis respectivement par

(6.6) $$M(v) = v\,(1 - v)$$

et

(6.7) $$L(v) = v^2\,(1 - v).$$

Un simple calcul permet d'établir les résultats suivants.

(6.8) $$M[m] = m!\,(1\text{-}p)^{m\text{-}2}\,M_m(p)$$

(6.9) $$M_0(p) = -p,\ M_1(p) = -1\text{-}p,\ M_2(p) = -1$$

et $M_m(p)$ est le polynôme nul pour $m \geq 3$.

(6.10) $$L[k] = k!\,(1\text{-}p)^{k\text{-}3}\,L_k(p)$$

(6.11) $$L_0(p) = -p,\ L_1(p) = -1\text{-}2p,\ L_2(p) = -2\text{-}p,\ L_3(p) = -1$$

et $L_k(p)$ est le polynôme nul pour $k \geq 4$.

27.67.58. *Autres notations*

Dans tout ce qui suit, r désigne un entier naturel non nul et $(n_1,\ldots,n_r)$ désigne une séquence d'entiers naturels. On note n la somme de ces r entiers :

$$n = n_1 + \ldots + n_r \tag{6.12}$$

et on pose :

$$N! = n_1! \ldots n_r! \tag{6.13}$$

On rappelle que W désigne l'ensemble de variables $\{v_2,\ldots,v_r\}$ si $r \neq 1$ et l'ensemble vide si $r = 1$. Si $X \subseteq W$, alors N_X désigne la séquence des n_i tels que v_i appartient à X. L'ordre des n_i dans la séquence importe peu, puisque les expressions où N_X apparaît sont symétriques selon $n_2, \ldots, n_r$.

Enfin, on utilise la notation suivante pour le coefficient multinomial :

$$\binom{n_1+1}{i,j} = \frac{(n_1+1)!}{i!\,j!\,(n_1+1-i-j)!}. \tag{6.14}$$

27.68. *Forme générale de $S_\tau[n_1,\ldots,n_r]$*

La notation $S_\tau[n_1,\ldots,n_r]$ désigne la série formelle en s et f obtenue en posant $v_1 = \ldots = v_r = V$ dans la dérivée partielle multiple de la série $S_\tau(v_1,\ldots,v_r,s,f)$ selon $v_1,\ldots,v_r$ aux ordres respectifs $n_1,\ldots,n_r$.

On a montré dans la section 26 qu'il est possible de relier entre elles toutes ces séries $S_\tau[n_1,\ldots,n_r]$ par des équations permettant leur calcul par récurrence sur τ, sur r et sur $n_1,\ldots,n_r$. Ces équations seront explicitées dans le paragraphe 28.71.

Auparavant, on énonce ici la proposition 7.1, qui affirme l'existence d'une forme générale pour toutes ces séries.

PROPOSITION 7.1. *Pour $(\tau, r) \neq (0, 1)$ et pour tous les entiers naturels $n_1,\ldots,n_r$, on a* :

$$S_\tau[n_1,\ldots,n_r] = \frac{N!\,s^{r-1}(1-p)^{-6\tau+n-2r+4}F_{\tau,n_1,\ldots,n_r}(p,q,c)}{f\,p^{4\tau+n+3r-3}(1-2c)^{10\tau+2n+7r-10}} \tag{7.3}$$

où $F_{\tau,n_1,\ldots,n_r}(p,q,c)$ est un polynôme des variables p, q et c, de degré total inférieur ou égal à $16\tau+3n+10r-13$, défini par récurrence par :

$$F_{\tau,n_1,N_W} = -\left(\begin{array}{l} \sum\limits_{\substack{i+j+k=n_1+1 \\ i>0,\ k<n_1}} (-1)^{j+1} p^{i+j-1} D_i (1-2c)^{2j} F_{\tau,k,N_W} \\ +\sum\limits_{i=0}^{2\tau} \sum\limits_{\substack{X\subseteq W \\ (i,X)\notin\{(0,\varnothing),(2\tau,W)\}}} \sum\limits_{k+l+m=n_1+1} M_m p^{m-1} (1-2c)^{2m} F_{\frac{i}{2},k,N_X} F_{\tau-\frac{i}{2},l,N_{W-X}} \\ +2(1-p)^2 \sum\limits_{i+j+k=n_1+1} p^k (1-2c)^{2k} M_k F_{\tau-1,i,j,N_W} \\ +\sum\limits_{j=2}^{r} \left[n_j \sum\limits_{k+l=n_1+n_j+2} p^{k+1} (1-2c)^{2k+2} L_k F_{\tau,l,N_j} + \sum\limits_{k+l=n_1+n_j+3} p^k (1-2c)^{2k} L_k F_{\tau,l,N_j} \right] \\ +(1-p) \sum\limits_{i+j=n_1+1} p^i (1-2c)^{2i} \left[p(1-2c)^2 M_i F_{\tau-\frac{1}{2},j,N_W} + (j+1) L_i F_{\tau-\frac{1}{2},j+1,N_W} \right] \end{array} \right) \tag{7.4}$$

avec

$$F_{0,0}(p,q,c) = \frac{q}{(1-p)(1-2c)^3}, \tag{7.5}$$

$$F_{0,1}(p,q,c) = \frac{(1-p)(c-p)-q}{(1-p)(1-2c)} \tag{7.6}$$

$$F_{0,2} = \frac{1}{1-p}\left[\begin{array}{l} p+q+p^2+2pq-3p^3-4p^2q-2pq^2+p^4+2p^3q+2p^2q^2 \\ +c(1-3p-2q+p^2+3p^3)+c^2(1+2p-4p^2) \end{array} \right] \tag{7.7}$$

Pour $k \geq 3$,

$$F_{0,k} = p^{k-1}\frac{D_k}{2} + \sum_{\substack{i+j=k \\ i\geq 1}} L_i p^{i-1} (1-2c)^{2i} F_{0,j} \tag{7.8}$$

et

$$D_0 = 0 \tag{7.9}$$

$$D_1 = -1 \tag{7.10}$$

$$D_2 = p + 4q - 2p^2 - 4q^2 - 4pq \tag{7.11}$$

$$D_3 = 2\,q\,(1-p-q)\,(1-p)^2 \tag{7.12}$$

Pour $k \geq 4$,

$$D_k = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{i=k-1} D_i D_{k+1-i}\ . \tag{7.13}$$

La signification des relations (7.5) à (7.13) sera donnée au fur et à mesure de la démonstration de la proposition 7.1. Les autres notations utilisées dans cette proposition 7.1, telles que N_W, M_m ou L_k, ont été définies dans le paragraphe 27.67.

27.69. ***Proposition pour le calcul du polynôme de la forme faible du théorème* 5.2**

La proposition 7.2 suivante relie les polynômes de la proposition 7.1 avec le polynôme $F_\tau(p,q)$ de la forme faible du théorème 5.2, énoncée dans la section 25. Elle est démontrée à partir de la proposition 7.1, dans le paragraphe 22.59, ce qui permet d'établir la forme faible du théorème 5.2.

PROPOSITION 7.2. *Pour tout demi entier naturel τ supérieur ou égal à* 1*, le polynôme $F_\tau(p,q,c)$ de la formule* (7.1) *s'exprime en fonction des polynômes $F_{\tau,n_1,\ldots,n_r}(p,q,c)$ de la proposition* 7.1 *selon* :

$$\begin{aligned} F_\tau = &\sum_{i=1}^{2\tau-1} F_{\frac{i}{2},0} F_{\tau-\frac{i}{2},0} + 2p(1-p)^2 F_{\tau-1,0,0} \\ &+ p^2(1-p)(1-2c)^2 F_{\tau-\frac{1}{2},0} + p(1-p) F_{\tau-\frac{1}{2},1} \end{aligned} \tag{7.14}$$

27.70. ***Preuve de la forme faible du théorème* 5.2 *à partir de la proposition* 7.1**

On substitue dans (4.33) les formules suivantes, données par la proposition 7.2 :

$$S_{\frac{i}{2}}[0] = \frac{(1-p)^{-3i+2} F_{\frac{i}{2},0}(p,q,c)}{f\, p^{2i}(1-2c)^{5i-3}} \tag{7.15}$$

$$S_{\tau-1}[0,0] = \frac{s(1-p)^{-6(\tau-1)} F_{\tau-1,0,0}(p,q,c)}{f\, p^{4(\tau-1)+3}(1-2c)^{10(\tau-1)+4}} \tag{7.16}$$

$$S_{\tau-\frac{1}{2}}[0] = \frac{(1-p)^{-6\left(\tau-\frac{1}{2}\right)+2} F_{\tau-\frac{1}{2},0}(p,q,c)}{f\, p^{4\left(\tau-\frac{1}{2}\right)}(1-2c)^{10\left(\tau-\frac{1}{2}\right)-3}} \tag{7.17}$$

$$S_{\tau-\frac{1}{2}}[1] = \frac{(1-p)^{-6\left(\tau-\frac{1}{2}\right)+3} F_{\tau-\frac{1}{2},1}(p,q,c)}{f\, p^{4\left(\tau-\frac{1}{2}\right)+1}(1-2c)^{10\left(\tau-\frac{1}{2}\right)-1}} \tag{7.18}$$

et on obtient :

$$sfS_\tau(1,s,f) = fV(V-1)\left(\begin{array}{c} f\sum_{i=1}^{2\tau-1} \dfrac{(1-p)^{-3i+2}F_{\frac{i}{2},0}(p,q,c)}{fp^{2i}(1-2c)^{5i-3}} \dfrac{(1-p)^{-6\tau+3i+2}F_{\tau-\frac{i}{2},0}(p,q,c)}{fp^{4\tau-2i}(1-2c)^{10\tau-5i-3}} \\ + \dfrac{2}{s}\dfrac{s(1-p)^{-6\tau+6}F_{\tau-1,0,0}(p,q,c)}{fp^{4\tau-1}(1-2c)^{10\tau-6}} \\ + \dfrac{(1-p)^{-6\tau+5}F_{\tau-\frac{1}{2},0}(p,q,c)}{fp^{4\tau-2}(1-2c)^{10\tau-8}} \\ + V\dfrac{(1-p)^{-6\tau+6}F_{\tau-\frac{1}{2},1}(p,q,c)}{fp^{4\tau-1}(1-2c)^{10\tau-6}} \end{array}\right) \tag{7.19}$$

$$sfS_\tau(1,s,f) = \frac{(1-p)^{-6\tau+2}}{p^{4\tau-1}(1-2c)^{10\tau-6}}\left(\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{2\tau-1} F_{\frac{i}{2},0}(p,q,c)F_{\tau-\frac{i}{2},0}(p,q,c) \\ + 2p(1-p)^2F_{\tau-1,0,0}(p,q,c) \\ + p^2(1-p)(1-2c)^2F_{\tau-\frac{1}{2},0}(p,q,c) \\ + p(1-p)F_{\tau-\frac{1}{2},1}(p,q,c) \end{array}\right) \tag{7.20}$$

On reconnaît la formule (7.1), ce qui permet d'établir la relation (7.14) de la proposition 7.2. On vérifie grâce à cette relation (7.14) et à la proposition 7.1 que $F_\tau(p,q,c)$ est un polynôme de degré total égal à 16τ - 6.

Par conséquent, la proposition 7.2 est établie.

La relation (7.20) et la proposition 7.2 constituent ensemble la forme faible du théorème 5.2, qui est ainsi établie, sous réserve d'une démonstration de la proposition 7.1.

28. Méthode de calcul par récurrence de la forme générale de $S_\tau[n_1,\ldots,n_r]$

La quatrième phase de la démonstration explique comment la proposition 7.1 peut être démontrée par une récurrence multiple. Elle met en place tout le matériel nécessaire à cette preuve par récurrence, qui sera menée dans la section 29.

L'équation qui permet de calculer $S_\tau[n_1,\ldots,n_r]$, qui sera notée $(S,\tau,n_1,\ldots,n_r)$, est explicitée dans le paragraphe 28.71. Dans le paragraphe 28.72, on explicite la structure d'une récurrence multiple (sur les entiers r, $n_1,\ldots,n_r$ et sur le demi entier τ) qui permet le calcul de $S_\tau[n_1,\ldots,n_r]$.

28.71. *Obtention de l'équation définissant $S_\tau[n_1,\ldots,n_r]$*

On explicite à présent l'équation qui permet de calculer $S_\tau[n_1,\ldots,n_r]$. À partir de l'équation (4.27), on effectue les transformations algébriques suivantes :

- On dérive partiellement l'équation (4.27) à l'ordre $n_1+1, n_2, \ldots, n_r$ par rapport aux variables $v_1, v_2, \ldots, v_r$ respectivement.
- On évalue cette équation différentielle au point particulier ($v_1 = \ldots = v_r = V$).
- Dans le membre de gauche de l'équation ainsi obtenue, le terme $S_\tau[n_1+1, \ldots, n_r]$ apparaît multiplié par $A(V,s,f)$, qui est nul, d'après la relation (4.31). Le membre de gauche de cette équation ne dépend donc que de $S_\tau[k, \ldots, n_r]$, pour $k \le n_1$. On isole dans ce membre de gauche le terme contenant $S_\tau[n_1, \ldots, n_r]$.

On obtient finalement l'équation $(S, \tau,n_1,\ldots,n_r)$ de la proposition 7.3.

PROPOSITION 7.3. *L'expression $S_\tau[n_1, \ldots, n_r]$ est définie par* :

$$
\begin{aligned}
\frac{(n_1+1)A[1]}{V} S_\tau[n_1, N_W] \quad = \quad & \sum_{\substack{i+j+k=n_1+1 \\ i>0,\ k<n_1}} \binom{n_1+1}{i,j} \frac{(-1)^{j+1} j!}{V^{j+1}} A[i] S_\tau[k, N_W] \\
& + f \sum_{\substack{i=0 \\ (i,X)\notin\{(0,\varnothing),(2\tau,W)\}}}^{2\tau} \sum_{X\subseteq W} \sum_{k+l+m=n_1+1} \binom{n_1+1}{k,l} M[m] S_{\frac{i}{2}}[k, N_X] S_{\tau-\frac{i}{2}}[l, N_{W-X}] \\
& + \frac{2}{s} \sum_{i+j+k=n_1+1} \binom{n_1+1}{i,j} M[k] S_{\tau-1}[i,j,N_W] \\
& + s \sum_{j=2}^{j=r} (n_1+1)! n_j! \left(\begin{array}{c} n_j \displaystyle\sum_{k+l=n_1+n_j+2} \frac{L[k]}{k!} \frac{S_\tau[l,N_j]}{l!} \\ + V(n_j+1) \displaystyle\sum_{k+l=n_1+n_j+3} \frac{L[k]}{k!} \frac{S_\tau[l,N_j]}{l!} \end{array} \right) \\
& + \sum_{i+j=n_1+1} \binom{n_1+1}{i} \left[M[i] S_{\tau-\frac{1}{2}}[j, N_W] + L[i] S_{\tau-\frac{1}{2}}[j+1, N_W] \right]
\end{aligned}
\qquad (S,\tau,n_1,\ldots,n_r)
$$

Certaines notations de la proposition 7.3 ont été définies dans le paragraphe 27.67.

28.72. ***Structure générale de la récurrence***

Ce paragraphe met en évidence la structure récurrente du système d'équations $(S,\tau,n_1,\ldots,n_r)$, puis énonce la base de la récurrence (paragraphe 28.72.59) et l'hypothèse de récurrence (paragraphe 28.72.62).

Dans le membre de droite de l'équation $(S,\tau,n_1,\ldots,n_r)$, la première somme (sur i, j et k) ne dépend que de dérivées partielles de S_τ à l'ordre $(k,n_2,\ldots,n_r)$, pour k strictement inférieur à n_1. Le reste du membre de droite de l'équation $(S,\tau,n_1,\ldots,n_r)$ ne dépend que de dérivées partielles de S_j pour j strictement inférieur à τ, ou de dérivées de S_τ pour un nombre de variables strictement inférieur à r.

Par conséquent, l'équation $(S,\tau,n_1,\ldots,n_r)$ définit $S_\tau[n_1,\ldots,n_r]$ à partir de dérivées partielles de S_j, pour j strictement inférieur à τ, ou sinon pour un nombre de variables strictement inférieur à r, ou sinon pour un ordre total de dérivation strictement inférieur à $n_1+\ldots+n_r$.

Ceci suggère de démontrer la proposition 7.1 par une récurrence multiple sur τ, r et $n_1,\ldots,n_r$.

28.72.59. *Base de la récurrence*

La proposition 7.1 est énoncée pour tout couple (τ,r) différent de (0, 1) formé d'un demi entier naturel τ et d'un entier naturel non nul r. Dans une démonstration par récurrence de cette proposition 7.1, il faut donc étudier deux cas initiaux.

Le cas initial $(\tau,r) = (½, 1)$ est traité dans le lemme 7.2 du paragraphe 28.72.60.

Le cas initial $(\tau,r) = (0, 2)$ est traité dans le lemme 7.3 du paragraphe 28.72.61.

La démonstration de ces deux lemmes est reportée à la section 29.

28.72.60. *Forme générale de* $S_{½}[n]$

Le lemme 7.1 affirme que la proposition 7.2 est vraie pour $(\tau, r) = (½, 1)$. Il propose donc une forme générale pour $S_{½}[n]$.

LEMME 7.1. *Pour n supérieur ou égal à* 0*, on a* :

$$S_{\frac{1}{2}}[n] = \frac{n!\,(1-p)^{n-1} F_{½,n}(p,q,c)}{f p^{n+2} (1-2c)^{2n+2}}, \tag{7.21}$$

où $F_{½,n}(p, q, c)$ *est un polynôme en p, q et c, de degré total inférieur ou égal à* $3n+5$*, défini par* :

$$\begin{aligned} F_{\frac{1}{2},n} = & \sum_{\substack{i+j+k=n+1 \\ i>0,\ k<n}} (-1)^j\, p^{i+j-1} D_i (1-2c)^{2j} F_{\frac{1}{2},k} \\ & -(1-p) \sum_{i+j=n+1} p^i (1-2c)^{2i} \left[p(1-2c)^2 M_i F_{0,j} + (j+1) L_i F_{0,j+1} \right] \end{aligned} \tag{7.22}$$

avec $F_{0,j}$ *défini par les relations* (7.5) *à* (7.8) *et* D_i *défini par les relations* (7.9) *à* (7.13)*.*

Le lemme 7.1 est démontré dans le paragraphe 29.73.68.

28.72.61. *Forme générale de $S_0[n_1,n_2]$*

Le lemme 7.2 affirme que la proposition 7.2 est vraie pour $(\tau, r) = (0, 2)$. Il propose donc une forme générale pour $S_0[n_1,n_2]$.

LEMME 7.2. *Pour tous les entiers naturels n_1 et n_2, on a* :

$$S_0[n_1,n_2] = \frac{n_1!n_2!s(1-p)^{n_1+n_2}F_{0,n_1,n_2}(p,q,c)}{f\,p^{n_1+n_2+3}(1-2c)^{2(n_1+n_2+2)}} \tag{7.23}$$

où $F_{0,n_1,n_2}(p,q,c)$ *est un polynôme de degré total inférieur ou égal à* $3(n_1+n_2)+7$*, défini par récurrence par* :

$$\begin{aligned} F_{0,n_1,n_2} = & \sum_{\substack{i+j+k=n_1+1 \\ i>0,\ k<n_1}} (-1)^j p^{i+j-1}(1-2c)^{2j} D_i(p,q) F_{0,k,n_2}(p,q,c) \\ & -n_2 \sum_{k+l=n_1+n_2+2} p^{k+1}(1-2c)^{2k+2} L_k F_{0,l}(p,q,c) \\ & -(n_2+1) \sum_{k+l=n_1+n_2+3} p^k (1-2c)^{2k} L_k F_{0,l}(p,q,c) \end{aligned} \tag{7.24}$$

avec $F_{0,l}$ défini par les relations (7.5) *à* (7.8) *et D_i défini par les relations* (7.9) *à* (7.13)*.*

Le lemme 7.2 est démontré dans le paragraphe 29.73.69.

28.72.62. *Hypothèse de récurrence*

On exprime ici l'hypothèse de la récurrence multiple menée dans la section 5.

On suppose la formule (7.3) de la proposition 7.1 vérifiée pour la série $S_j[n_1,...,n_k]$,

- Pour tout demi entier naturel j strictement inférieur à τ et pour $k \geq 2$,
- pour $j = \tau$ et $2 \leq k < r$,
- pour $j = \tau$, $k = r$ et $(m_1,\ldots,m_k)$ lexicographiquement inférieur à $(n_1,\ldots,n_r)$,

avec $(j,k) \neq (0,1)$, ce qui s'écrit :

$$S_j[n_1,\ldots,n_k] = \frac{N!s^{k-1}(1-p)^{-6j+n-2k+4}F_{j,n_1,\ldots,n_k}(p,q,c)}{f\,p^{4j+n+3k-3}(1-2c)^{10j+2n+7k-10}} \tag{7.25}$$

avec $n = n_1 + \ldots + n_k$, $N! = n_1! \,..\, n_k!$ et $F_{j,n_1,\ldots,n_k}(p,q,c)$ un polynôme en p, q et c de degré total égal à $16j + 3n + 10k - 13$.

On injecte ces formules dans l'équation $(S,\tau,n_1,\ldots,n_r)$ et on prouve la proposition 7.1.

29. Démonstration de la proposition 7.1 par récurrence

La cinquième phase de la démonstration établit la proposition 7.1 par une récurrence multiple. C'est la partie la plus technique de la démonstration.

La base de la récurrence est établie dans le paragraphe 29.73.

Dans le paragraphe 29.74, on fait l'hypothèse de récurrence du paragraphe 28.72.62 et on utilise l'équation (S, τ,n_1,…,n_r) de la proposition 7.3 pour en déduire la relation (7.4) de la proposition 7.1. Cette relation permet de vérifier la majoration du degré du polynôme $F_{\tau,n_1,\ldots,n_r}(p,q,c)$ annoncée par la proposition 7.1.

29.73. *Démonstration de la base de la récurrence*

Les deux cas initiaux de la récurrence sont les lemmes 7.1 et 7.2. Ces lemmes requièrent la connaissance d'une forme générale pour les $S_0[k]$, qu'on obtient plus aisément en passant par la série $A(v,s,f)$. Le lemme 7.3 établit une forme générale de $A[k]$ convenable pour la suite.

Une forme générale de $S_0[k]$ est donnée dans le lemme 7.4 du paragraphe 29.73.65. Cependant, on montre dans le paragraphe 29.73.66 que ce lemme 7.4 sur $S_0[k]$ ne permet pas de prolonger la proposition 7.1 au cas $(\tau,r) = (0, 1)$.

Heureusement, les dérivées de $Q_0(v,s,f)$ n'interviennent que dans le calcul des dérivées de $Q_0(v_1,v_2,s,f)$ et de $Q_{½}(v,s,f)$. Ainsi, ce sont les formules générales établies pour ces séries dans les lemmes 7.1 et 7.2 qui servent de base à la démonstration par récurrence de la proposition 7.1. Ces lemmes sont démontrés respectivement dans les paragraphes 29.73.68 et 29.73.69.

29.73.63. *Forme générale de $A[k]$*

Le lemme 7.3 propose une forme générale pour les dérivées partielles de $A(v,s,f)$ selon v, calculées en $v = V$.

LEMME 7.3. *Pour tout entier naturel k, on a* :

$$A[k] = \frac{k!\,(1-p)^{k-1} D_k(p,q)}{(1-2c)^{2k-3}} \tag{7.26}$$

où

$$D_0 = 0 \tag{7.9}$$

et où $D_k(p, q)$ est un polynôme en p et q de degré total inférieur ou égal à $2k - 2$, pour k non nul, défini par récurrence par les relations (7.10) *à* (7.13) *rappelées ici* :

$$D_1 = -1 \tag{7.10}$$

$$D_2 = p + 4q - 2p^2 - 4q^2 - 4pq \tag{7.11}$$

$$D_3 = 2\,q\,(1-p-q)\,(1-p)^2 \tag{7.12}$$

Pour $k \geq 4$,

$$D_k = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{i=k-1} D_i D_{k+1-i} \tag{7.13}$$

29.73.64. *Preuve de la forme générale de* $A[k]$

Le lemme 7.3 est une variante du lemme 6.3 du chapitre 6. En posant :

$$D_k = -2q(1-p-q)(1-p)^2 E_k \tag{7.27}$$

le lemme 7.3 se déduit directement du lemme 6.3. En particulier, la relation (6.23), qu'on rappelle ici

$$E_k = -\sum_{i=2}^{i=k-1} q(1-p-q)(1-p)^2 E_i E_{k+1-i} \tag{6.23}$$

donne la relation (7.13) du lemme 7.3 :

$$D_k = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{i=k-1} D_i D_{k+1-i} \tag{7.13}$$

La relation (7.13) permet de vérifier par récurrence que la propriété de degré des polynômes se transmet à D_k.

Ceci achève la preuve du lemme 7.3. ■

29.73.65. *Forme générale de* $S_0[k]$

On donne dans le lemme 7.4 une forme générale pour les dérivées partielles de la série $S_0(v,s,f)$ selon v, calculées en $v = V$, notées $S_0[k]$. Rappelons que la série $S_0(v,s,f)$ des cartes planaires *générales* simplement pointées est égale à la série $Q_0(v,s,f)$ des cartes planaires *orientables* simplement pointées, définie par l'équation (4.23).

LEMME 7.4. *Pour k supérieur ou égal à* 0*, on a* :

$$S_0[k] = \frac{k!(1-p)^{k+1} G_{0,k}(p,q,c)}{f p^k (1-2c)^{2k-3}}, \tag{7.28}$$

où

$$G_{0,0}(p,q,c) = \frac{q}{(1-2c)^3}, \tag{7.29}$$

$$G_{0,1}(p,q,c) = \frac{(1-p)(c-p)-q}{1-2c} \tag{7.30}$$

et où $G_{0,k}(p, q, c)$ *est un polynôme en p, q et c, de degré total inférieur ou égal à* $3k–2$*, pour k supérieur ou égal à* 2*, défini par* :

$$G_{0,2} = p + q + p^2 + 2pq - 3p^3 - 4p^2q - 2pq^2 + p^4 + 2p^3q + 2p^2q^2 + c\left(1 - 3p - 2q + p^2 + 3p^3\right) + c^2\left(1 + 2p - 4p^2\right) \tag{7.31}$$

et, pour $k \geq 3$:

$$G_{0,k} = (1-p)p^{k-1}\frac{D_k}{2} + \sum_{\substack{i+j=k \\ i\geq 1}} L_i p^{i-1}(1-2c)^{2i} G_{0,j} \tag{7.32}$$

avec D_k *défini par les relations* (7.9) *à* (7.13).

29.73.66. *Remarque*

Dans le lemme 7.4, il suffirait que $G_{0,k}(p, q, c)$ soit divisible par $(1-p)$ pour qu'on puisse inclure $S_0[k]$ dans la proposition 7.1, pour $k \geq 2$. Ce n'est pas le cas et c'est dommage, car ceci simplifierait la démonstration de la proposition 7.1, en réduisant la base de la récurrence au cas unique de $S_0[k]$. Alors, les lemmes 7.1 et 7.2 n'auraient plus aucune raison d'être.

Par ailleurs, le lemme 7.4 ne permet pas d'induire une autre proposition sur $S_\tau[n_1,\ldots,n_r]$ incluant le cas $(\tau,r) = (0, 1)$ et assez forte pour permettre de démontrer la forme faible du théorème 5.1. Toutes mes tentatives dans ce sens ont échoué.

29.73.67. *Preuve de la forme générale de* $S_0[k]$

Le lemme 7.4 se démontre à partir de la relation (4.24) qu'on rappelle ici

$$A(v,s,f) = 1 - v + v^2 s - 2v^2 f(1-v)\, Q_0(v,s,f)$$

et qu'on écrit :

$$A(v,s,f) = 1 - v + v^2 s - 2v^2 f(1-v)\, S_0(v,s,f) \tag{7.33}$$

On dérive (7.33) à l'ordre k selon la variable v, puis on évalue le résultat en $v = V$. On obtient :

$$A[k] = \frac{\partial^k}{\partial v^k}\left(1 - v + v^2 s\right)_{v=V} - 2f \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} L[i] S_0[j] \tag{7.34}$$

On traite les cas de $S_0[0]$, $S_0[1]$ et $S_0[2]$ par calcul direct et on vérifie ainsi (7.29), (7.30) et (7.31). Le degré total de $G_{0,2}$ est 4, ce qui prouve le lemme 7.4 pour $k = 2$.

Pour $k \geq 3$, on admet le lemme 7.4 jusqu'à k-1 et on déduit de (7.34) que :

$$S_0[k] = \frac{1}{-2fL[0]}\left[A[k] + 2f \sum_{\substack{i+j=k \\ i\geq 1}} \binom{k}{i} L[i] S_0[j] \right] \tag{7.35}$$

Pour $A[k]$, on utilise la forme générale du lemme 7.3. Pour $S_0[j]$, avec $j < k$, on a admis le lemme 7.4. Par conséquent (7.35) devient :

$$S_0[k]=\frac{1}{-2fL[0]}\left[\frac{k!\,(1-p)^{k-1}D_k(p,q)}{(1-2c)^{2k-3}}+2f\sum_{\substack{i+j=k\\ i\geq 1}}\binom{k}{i}L[i]\frac{j!\,(1-p)^{j+1}G_{0,j}(p,q,c)}{fp^j(1-2c)^{2j-3}}\right] \quad (7.36)$$

$$S_0[k]=\frac{k!(1-p)^{k+1}}{fp}\left[\frac{(1-p)p^{k-1}D_k(p,q)}{2p^{k-1}(1-2c)^{2k-3}}+\sum_{\substack{i+j=k\\ i\geq 1}}L_i\frac{p^{i-1}(1-2c)^{2i}G_{0,j}(p,q,c)}{p^{k-1}(1-2c)^{2k-3}}\right] \quad (7.37)$$

d'où

$$S_0[k]=\frac{k!\,(1-p)^{k+1}G_{0,k}(p,q,c)}{fp^k(1-2c)^{2k-3}}, \quad (7.33)$$

avec :

$$G_{0,k}=(1-p)p^{k-1}\frac{D_k}{2}+\sum_{\substack{i+j=k\\ i\geq 1}}L_i p^{i-1}(1-2c)^{2i}G_{0,j} \quad (7.32)$$

La formule (7.32) montre que $G_{0,k}$ est un polynôme et permet de vérifier la propriété de degré de $G_{0,k}$ énoncée dans le lemme 7.4. En effet, le degré total de $G_{0,k}$ est inférieur ou égal à $1+(k\text{-}1)+(2k\text{-}2)$ et au maximum de $\{1+(i\text{-}1)+2i+(3j\text{-}2)$ avec $i+j=k$ et $i\geq 1\}$, donc inférieur ou égal à $3k$ -2.

Ceci achève la preuve du lemme 7.4. ■

29.73.68. *Preuve de la forme générale de* $S_{½}[n]$

Le lemme 7.1 se démontre par récurrence sur l'entier naturel n.

Pour $n = 0$, on vérifie le lemme 7.1 par calcul direct.

$$S_{\frac{1}{2}}[0]=\frac{F_{\frac{1}{2},0}}{fp^2(1-p)(1-2c)^2}, \quad (7.38)$$

avec :

$$F_{\frac{1}{2},0}=p(1-p)^2(1-2q)(c-p-q) \quad (7.39)$$

qui est un polynôme de degré total égal à 5.

Soit n un entier naturel non nul. On suppose le lemme 7.1 vérifié pour $k<n$. En particulier, on a :

$$S_{\frac{1}{2}}[k]=\frac{k!(1-p)^{k-1}F_{\frac{1}{2},k}(p,q,c)}{fp^{k+2}(1-2c)^{2k+2}}, \quad (7.40)$$

On pose $\tau = ½$ et $r = 1$ dans l'équation $(S,\tau,n_1,\ldots,n_r)$:

$$(n+1)\frac{A[1]}{V}S_{\frac{1}{2}}[n]=\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\ i\geq 1,\ k\leq n-1}}\binom{n+1}{i,j}\frac{(-1)^{j+1}j!}{V^{j+1}}A[i]S_{\frac{1}{2}}[k]$$
$$+\sum_{i+j=n+1}\binom{n+1}{i}\left[M[i]S_0[j]+L[i]S_0[j+1]\right] \qquad (S,\tfrac{1}{2},n)$$

On a établi dans les lemmes précédents des formules pour $A[i]$ et $S_0[j]$.

En injectant les expressions de $A[i]$, de $S_{\frac{1}{2}}[k]$, de $S_0[j]$ et de $S_0[j+1]$ dans $(S,\frac{1}{2},n)$, on obtient, après simplifications :

$$\frac{A[1]}{V}S_{\frac{1}{2}}[n]=n!\left[\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\ i\geq 1,\ k\leq n-1}}\frac{(-1)^{j+1}(1-p)^{i+j+k-1}D_iF_{\frac{1}{2},k}}{f\ p^{k+2}(1-2c)^{2(i+k)-1}}\\ \displaystyle+\sum_{i+j=n+1}\left[\begin{array}{l}\displaystyle(1-p)^{i-2+k+1}\frac{M_iG_{0,j}}{fp^j(1-2c)^{2j-3}}\\ \displaystyle+(1-p)^{i-3+k+2}\frac{L_iG_{0,j+1}}{fp^{j+1}(1-2c)^{2(j+1)-3}}\end{array}\right]\end{array}\right] \qquad (7.41)$$

$$S_{\frac{1}{2}}[n]=\frac{-n!(1-p)^{n-1}}{fp^{n+2}(1-2c)^{2n+2}}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\ i\geq 1,\ k\leq n-1}}(-1)^{j+1}D_ip^{i+j-1}(1-2c)^{2j}F_{\frac{1}{2},k}\\ \displaystyle+\sum_{i+j=n+1}\left[\begin{array}{l}p^{i+1}(1-2c)^{2i+2}M_iG_{0,j}\\ +(j+1)p^i(1-2c)^{2i}L_iG_{0,j+1}\end{array}\right]\end{array}\right] \qquad (7.42)$$

d'où :

(7.21)
$$S_{\frac{1}{2}}[n]=\frac{n!(1-p)^{n-1}F_{\frac{1}{2},n}}{fp^{n+2}(1-2c)^{2n+2}},$$

avec :

$$F_{\frac{1}{2},n}=\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\ i\geq 1,\ k\leq n-1}}(-1)^jD_ip^{i+j-1}(1-2c)^{2j}F_{\frac{1}{2},k}$$
$$-\sum_{i+j=n+1}p^i(1-2c)^{2i}\left[p(1-2c)^2M_iG_{0,j}+(j+1)L_iG_{0,j+1}\right] \qquad (7.43)$$

Pour vérifier la relation (7.22) du lemme 7.1, on pose, pour tout entier naturel j :

$$F_{0,j}=\frac{G_{0,j}}{1-p} \qquad (7.44)$$

Alors, (7.43) s'écrit :

$$F_{\frac{1}{2},n} = \sum_{\substack{i+j+k=n+1 \\ i\geq 1,\ k\leq n-1}} (-1)^j D_i p^{i+j-1}(1-2c)^{2j} F_{\frac{1}{2},k}$$
$$-(1-p)\sum_{i+j=n+1} p^i (1-2c)^{2i}\left[p(1-2c)^2 M_i F_{0,j} + (j+1)L_i F_{0,j+1}\right]$$

qui est la relation (7.22) du lemme 7.1.

La relation (7.22) permet de vérifier que $F_{½,n}$ est un polynôme dont le degré est majoré par $3n+5$.

Ceci achève la preuve du lemme 7.1 ■

29.73.69. *Preuve de la forme générale de* $S_0[n_1,n_2]$

On peut voir le lemme 7.2 comme une variante du lemme 6.2 du chapitre 6. En effet, les cartes générales de type 0 sont les cartes orientables de type (ou de genre) 0, donc :

$$S_0[n_1,n_2] = Q_0[n_1,n_2] \tag{7.45}$$

Le lemme 7.2 se démontre par récurrence sur les entiers naturels n_1 et n_2, en utilisant la symétrie de $S_0[n_1,n_2]$ selon n_1 et n_2.

Pour $n_1 = n_2 = 0$, la relation (6.56) donne :

$$S_0[0,0] = \frac{sq(1-p-q)(1-p)^2}{f\,A[1]^4} \tag{7.46}$$

et on vérifie la formule (7.23) du lemme 7.2 en posant :

$$F_{0,0,0}(p,q,c) = p^3 q(1-p-q)(1-p)^2 . \tag{7.47}$$

Soient n_1 et n_2 deux entiers naturels tels que $(n_1, n_2) \neq (0, 0)$. On suppose le lemme 7.2 vérifié pour tout couple (k, n_2) de somme strictement inférieure à n_1+n_2.

L'équation $(S,0,n_1,n_2)$ s'écrit :

$$\frac{(n_1+1)A[1]}{V} S_0[n_1,n_2] = \sum_{\substack{i+j+k=n_1+1 \\ i>0,\ k<n_1}} \binom{n_1+1}{i,j} \frac{(-1)^{j+1} j!}{V^{j+1}} A[i] S_0[k,n_2]$$
$$+s(n_1+1)!n_2!\left(\begin{array}{c} n_2 \displaystyle\sum_{k+l=n_1+n_2+2} \frac{L[k]}{k!}\frac{S_0[l]}{l!} \\ +V(n_2+1)\displaystyle\sum_{k+l=n_1+n_2+3} \frac{L[k]}{k!}\frac{S_0[l]}{l!} \end{array}\right) \qquad (S,0,n_1,n_2)$$

Dans $(S,0,n_1,n_2)$, on remplace $S_0[k,n_2]$ par sa valeur selon la relation (7.23) du lemme 7.2 et on remplace $S_0[l]$ par sa valeur selon le lemme 7.4. On obtient :

$$\frac{A[1]}{V}S_0[n_1,n_2]=\frac{s}{f}n_1!n_2!\sum_{\substack{i+j+k=n_1+1\\ i>0,\ k<n_1}}(-1)^{j+1}\frac{(1-p)^{j+i+k+n_2}\,p^{i+j-1}(1-2c)^{2j}\,D_i(p,q)F_{0,k,n_2}(p,q,c)}{p^{n_1+n_2+3}(1-2c)^{2n_1+2n_2+3}}$$

$$+\frac{s}{f}n_1!n_2!\left(\begin{array}{l} n_2\displaystyle\sum_{k+l=n_1+n_2+2}L_k\frac{(1-p)^{l+k-2}\,p^{k+1}(1-2c)^{2k+2}\,G_{0,l}(p,q,c)}{p^{l+k+1}(1-2c)^{2k+2l-1}}\\ +(n_2+1)\displaystyle\sum_{k+l=n_1+n_2+3}L_k\frac{(1-p)^{l+k-3}\,p^{k}(1-2c)^{2k}\,G_{0,l}(p,q,c)}{p^{l+k}(1-2c)^{2k+2l-3}}\end{array}\right)$$

On remplace $G_{0,l}$ par $F_{0,l}$ selon (7.44), pour obtenir :

$$S_0[n_1,n_2]=\frac{n_1!n_2!s(1-p)^{n_1+n_2}}{fp^{n_1+n_2+3}(1-2c)^{2n_1+2n_2+4}}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=n_1+1\\ i>0,\ k<n_1}}(-1)^j\,p^{i+j-1}(1-2c)^{2j}\,D_i(p,q)F_{0,k,n_2}(p,q,c)\\ -\left(\begin{array}{l} n_2\displaystyle\sum_{k+l=n_1+n_2+2}L_k\,p^{k+1}(1-2c)^{2k+2}\,F_{0,l}(p,q,c)\\ +(n_2+1)\displaystyle\sum_{k+l=n_1+n_2+3}L_k\,p^{k}(1-2c)^{2k}\,F_{0,l}(p,q,c)\end{array}\right)\end{array}\right] \quad (7.48)$$

En définissant F_{0,n_1,n_2} par la relation (7.24), on déduit de (7.48) la relation (7.23) du lemme 7.2.

Toutefois, le lemme 7.2 n'est pas totalement établi, puisque la relation (7.24) ne permet pas de prouver que F_{0,n_1,n_2} est un polynôme. En effet, les $F_{0,l}$ ne sont pas des polynômes. La fin de cette preuve consiste à établir une autre relation pour F_{0,n_1,n_2}, qui montre que F_{0,n_1,n_2} est effectivement un polynôme.

On a remarqué que le lemme 7.2 est une variante du lemme 6.2 du chapitre 6, qui établit que :

$$Q_0[n_1,n_2]=\frac{n_1!n_2!sq(1-p-q)(1-p)^{n_1+n_2}\,R_{0,n_1,n_2}(p,q)}{f\,A[1]^{2(n_1+n_2+2)}}$$

où R_{0,n_1,n_2} est un polynôme de degré total inférieur ou égal à $2(n_1 + n_2)+2$.

(6.18)
$$R_{0,n_1,n_2}=(1-p)^2\left[\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=n_1+1\\ i>0,\ k<n_1}}2q(1-p-q)(-1)^{j+1}\,A[1]^{2j}\,E_i\,R_{0,k_1,n_2}\\ -n_2\,A[1]^2\,E_{n_1+n_2+2}-(n_2+1)E_{n_1+n_2+3}\end{array}\right]$$

Le relation (7.23) du lemme 7.2 se déduit de la relation (6.35) du lemme 6.2, en posant :

$$F_{0,n_1,n_2}(p,q,c)=q(1-p-q)p^{n_1+n_2+3}R_{0,n_1,n_2}(p,q) \quad (7.49)$$

La relation (7.49) permet de vérifier, compte tenu du lemme 6.2, que F_{0,n_1,n_2} est un polynôme et que son degré total est majoré par $3(n_1 + n_2)+7$.

Ceci achève la preuve du lemme 7.2, cas particulier de la proposition 7.2, dans lequel $\tau = 0$ et $r = 2$. ■

29.74. ***Itération de la récurrence, avec majoration du degré des polynômes***

Il s'agit d'établir la proposition 7.1 pour une valeur donnée de $(\tau,r,n_1,\ldots,n_r)$, en admettant cette proposition vérifiée pour toutes les valeurs inférieures, au sens de l'hypothèse de récurrence exprimée dans le paragraphe 28.72.62.

Chaque paragraphe, de 29.74.71 à 29.74.75, applique l'itération de la récurrence à une partie du second membre de l'équation $(S,\tau,n_1,\ldots,n_r)$, qu'on appelle " terme ". Le paragraphe 29.74.70 précise le sens exact qu'on donne à cette notion de " terme " du membre de droite.

Dans chacun de ces termes, on cherche à factoriser

$$(n_1+1)!\ N_W!\ s^{r-1}\ (1-p)^{-6\tau+n-2r+5} \tag{7.50}$$

au numérateur et

$$f\,p^{4\tau+n+3r-3}(1-2c)^{10\tau+2n+7r-11} \tag{7.51}$$

au dénominateur, afin de justifier la relation (7.3) dans le paragraphe 29.74.76.

On établit la relation (7.4), afin de majorer le degré de chaque polynôme $F_{j,n_1,\ldots,n_k}(p,q,c)$.

29.74.70. *Termes de l'équation* $(S,\tau,n_1,\ldots,n_r)$

On a défini dans la proposition 7.3 du paragraphe 28.71 une équation notée $(S,\tau,n_1,\ldots,n_r)$.

Pour simplifier, on découpe le membre de droite de cette équation en cinq ***termes*** correspondant aux cinq lignes de l'écriture de cette équation dans la proposition 7.3.

Ces termes sont notés $R1_\tau[n_1,\ldots,n_r]$, $R2_\tau[n_1,\ldots,n_r]$, $R3_\tau[n_1,\ldots,n_r]$, $R4_\tau[n_1,\ldots,n_r]$ et $R5_\tau[n_1,\ldots,n_r]$.

Par exemple, on a :

$$R4_\tau[n_1,..,n_r]=s\sum_{j=2}^{j=r}(n_1+1)!n_j!\left(\begin{array}{l} n_j\sum_{k+l=n_1+n_j+2}\frac{L[k]}{k!}\frac{S_\tau[l,N_j]}{l!} \\ +V(n_j+1)\sum_{k+l=n_1+n_j+3}\frac{L[k]}{k!}\frac{S_\tau[l,N_j]}{l!}\end{array}\right)$$

29.74.71. *Premier terme*

Le lemme 7.3 permet d'affirmer que, pour tout entier naturel i,

$$A[i]=\frac{i!\,(1-p)^{i-1}D_i(p,q)}{(1-2c)^{2i-3}},$$

où $D_0 = 0$ et où D_i est un polynôme de degré total inférieur ou égal à $2k-2$, pour k non nul.

Par ailleurs, l'hypothèse de récurrence s'applique à $S_\tau[k,n_2,\ldots,n_r]$, dans les conditions du premier terme $R1_\tau[n_1,\ldots,n_r]$.

En injectant les expressions de $A[i]$ et de $S_\tau[k,n_2,\ldots,n_r]$ dans $R1_\tau[n_1,\ldots,n_r]$, on obtient les simplifications de termes de même nature résumées dans les tableaux suivants :

Pour le numérateur, sachant que $i+j+k = n_1+1$ et que $n = n_1+n_W$:

Nature	venant de $(-1)^{j+1}j!/(V^{j+1})$	venant de $A[i]$	venant de $S_\tau[k,n_2,..,n_r]$	Il reste
factorielles	$j!$	$i!$	$k!\ N_W!$	$(n_1+1)!\ N_W!$
exposant de s	0	0	r-1	r-1
coefficient entier	$(-1)^{j+1}$	1	1	$(-1)^{j+1}$
exposant de (1-p)	j+1	i-1	$-6\tau+k+n_W-2r+4$	$-6\tau+n-2r+5$

Pour le dénominateur :

Nature	Complément	venant de $A[i]$	venant de $S_\tau[k,n_2,..,n_r]$	On obtient
exposant de f	0	0	1	1
exposant de p	$\boldsymbol{i+j-1}$	0	$4\tau+k+n_W+3r-3$	$4\tau+n+3r-3$
exposant de (1-2c)	$\boldsymbol{2j}$	$2i-3$	$10\tau+2k+2n_W+7r-10$	$10\tau+2n+7r-11$

On multiplie le numérateur et le dénominateur de chaque terme ($i > 0$) par $p^{i+j-1}(1-2c)^{2j}$, pour obtenir (7.51) comme dénominateur commun.

Après factorisation de (7.50), le numérateur du premier terme est :

$$\sum_{\substack{i+j+k=n_1+1\\ i>0,\,k<n_1}} (-1)^{j+1}\, p^{i+j-1}(1-2c)^{2j}\, D_i F_{\tau,k,n_2,..,n_r} \qquad (7.52)$$

On reconnaît dans (7.52) la première somme du membre de droite de la relation (7.4). On vérifie que (7.52) est un polynôme en p, q et c, de degré total successivement inférieur ou égal à :

$$(i+j-1)+(2j)+(2i-2)+[16\tau+3(k+n_W)+10r-13]$$

$$16\tau+3(i+j+k+n_W)+10r-16$$

$$16\tau+3n+10r-13.$$

29.74.72. *Deuxième terme*

En injectant les expressions de $M[m]$, de $S_{i/2}[k,N_X]$ et de $S_{\tau-i/2}[l,N_{W-X}]$ dans $R2_\tau[n_1,\ldots,n_r]$, on obtient les simplifications de termes de même nature résumées dans les tableaux suivants :

Pour le numérateur, sachant que $k+l+m = n_1+1$ et que $n_1+n_X+n_{W-X} = n$:

Nature	venant de $M[m]$	venant de $S_{i/2}[k,N_X]$	venant de $S_{\tau-i/2}[l,N_{W-X}]$	il reste
factorielles	$m!$	$k!\ N_X!$	$l!\ N_{W-X}!$	$(n_1+1)!\ N_W!$
Exposant de s	0	x	$r-x-1$	$r-1$
Exposant de $(1-p)$	$m-2$	$-3i+k+n_X-2(x+1)+4$	$-6\tau+3i+l+n_{W-X}-2(r-x)+4$	$-6\tau+n-2r+5$

Pour le dénominateur :

Nature	Complément	venant de $S_{i/2}[k,N_X]$	venant de $S_{\tau-i/2}[l,N_{W-X}]$	il reste
Exposant de f	0	1	1	1
Exposant de p	$\boldsymbol{m-1}$	$2i+k+n_X+3(x+1)-3$	$4\tau-2i+l+n_{W-X}+3(r-x)-3$	$4\tau+n+3r-3$
Exposant de $(1-2c)$	$\boldsymbol{2m}$	$5i+2k+2n_X+7(x+1)-10$	$10\tau-5i+2l+2n_{W-X}+7(r-x)-10$	$10\tau+2n+7r-11$

On multiplie le numérateur et le dénominateur de chaque terme par $p^{m-1}(1-2c)^{2m}$, pour obtenir (7.51) au dénominateur. Après factorisation de (7.50), le numérateur du deuxième terme est :

$$\sum_{i=0}^{2\tau} \sum_{\substack{X\subseteq W \\ (i,X)\notin\{(0,\varnothing),(2\tau,W)\}}} \sum_{k+l+m=n_1+1} M_m p^{m-1}(1-2c)^{2m} F_{\frac{i}{2},k,N_X} F_{\tau-\frac{i}{2},l,N_{W-X}} \qquad (7.53)$$

On reconnaît dans (7.53) la deuxième somme du membre de droite de la relation (7.4). On vérifie que (7.53) est un polynôme des variables p, q et c (car M_0 est divisible par p), de degré total successivement inférieur ou égal à :

$$m+(2m)+[8i+3k+3n_X+10(x+1)-13]+[16\tau-8t+3l+3n_{W-X}+10(r-x)-13]$$

$$16\tau+3(m+l+k)+3(n_X+n_{W-X})+10(r+1)-26$$

$$16\tau+3n+10r-13$$

car $k+l+m = n_1+1$ et $n_1+n_X+n_{W-X} = n$.

Par conséquent, ce polynôme est de degré total inférieur ou égal à $16\tau+3n+10r-13$.

29.74.73. *Troisième terme*

En injectant les expressions de $M[k]$ et de $S_{\tau\text{-}1}[i,j,N_W]$ dans $R3_\tau[n_1,\ldots,n_r]$, on obtient les simplifications de termes de même nature résumées dans les tableaux suivants :

Pour le numérateur, sachant que $i+j+k = n_1+1$ et $n = n_1+n_W$:

Nature	venant de $2/s$	venant de $M[k]$	venant de $S_{\tau\text{-}1}[i,j,N_W]$	Il reste :
factorielles	1	$k!$	$i!\ j!\ N_W!$	$(n_1+1)!\ N_W!$
Exposant de s	-1	0	$(r+1)$-1	r-1
coefficient entier	2	1	1	2
Exposant de $(1\text{-}p)$	0	k-2	$-6(\tau-1)+i+j+n_W-2(r+1)+4$	$-6\tau+n-2r+7$

Pour le dénominateur :

Nature	Complément	venant de $M[k]$	venant de $S_{\tau\text{-}1}[i,j,N_W]$	On obtient
Exposant de f	0	0	1	1
Exposant de p	$\boldsymbol{k}$	0	$4(\tau-1)+i+j+n_W+3r$	$4\tau+n+3r$-3
Exposant de $(1\text{-}2c)$	$\boldsymbol{2k}$	0	$10(\tau-1)+2i+2j+2n_W+7(r+1)$-10	$10\tau+2n+7r$-11

On multiplie le numérateur et le dénominateur de chaque terme par $p^k(1\text{-}2c)^{2k}$, pour obtenir un dénominateur commun égal à (7.51). Après factorisation par (7.50), le numérateur du troisième terme est :

$$2(1-p)^2 \sum_{i+j+k=n_1+1} p^k (1-2c)^{2k} M_k F_{\tau-1,i,j,N_W} \qquad (7.54)$$

On reconnaît dans (7.54) la troisième somme du membre de droite de la relation (7.4). On vérifie que (7.54) est un polynôme de degré total successivement inférieur ou égal à :

$$2+k+(2k)+1+[16(\tau\text{-}1)+3(i+j+n_W)+10(r+1)\text{-}13]$$

$$16\tau+3(i+j+k+n_W)+10r\text{-}16$$

$$16\tau+3n+10r\text{-}13$$

car $i+j+k = n_1+1$ et $n_1+n_W = n$.

Par conséquent, ce polynôme est de degré total inférieur ou égal à $16\tau+3n+10r$-13.

29.74.74. *Quatrième terme*

Pour chaque valeur de j, compris entre 2 et r, on injecte les expressions de $L[k]$ et de $S_\tau[l,N_j]$ dans les deux parties de $R4_\tau[n_1,\ldots,n_r]$. On traite séparément les deux parties.

Pour les parties :

$$s(n_1+1)!\,n_j!\,n_j \sum_{k+l=n_1+n_j+2} \frac{L[k]}{k!}\frac{S_\tau[l,N_j]}{l!},$$

on obtient les simplifications résumées dans les tableaux suivants.

Pour le numérateur, sachant que $k+l = n_1+n_j+2$ et que $n = n_1+n_W$:

Nature	Constantes	venant de $L[k]$	venant de $S_\tau[l,N_j]$	Il reste :
factorielles	$(n_1+1)!\ n_j!$ / $(k!\ l!)$	$k!$	$l!\ N_j!$	$(n_1+1)!\ N_W!$
Exposant de s	1	0	$(r\text{-}1)\text{-}1$	$r\text{-}1$
coefficient entier	n_j	1	1	n_j
Exposant de $(1\text{-}p)$	0	$k\text{-}3$	$-6\tau+l+n_W$ $-n_j-2(r\text{-}1)+4$	$-6\tau+n-2r+5$

Pour le dénominateur :

Nature	Complément	venant de $L[k]$	venant de $S_\tau[l,N_j]$	On obtient
Exposant de f	0	0	1	1
Exposant de p	$\boldsymbol{k+1}$	0	$4\tau+l+n_W-n_j$ $+3(r\text{-}1)\text{-}3$	$4\tau+n+3r\text{-}3$
Exposant de $(1\text{-}2c)$	$\boldsymbol{2k+2}$	0	$10\tau+2l+2(n_W-n_j)$ $+7(r\text{-}1)\text{-}10$	$10\tau+2n+7r\text{-}11$

On multiplie le numérateur et le dénominateur de chaque terme par $p^{k+1}(1\text{-}2c)^{2k+2}$, pour obtenir un dénominateur commun égal à (7.51). Après factorisation par (7.50), le numérateur est :

$$n_j \sum_{k+l=n_1+n_j+2} p^{k+1}(1-2c)^{2k+2} L_k F_{\tau,l,N_j} \qquad (7.55)$$

On reconnaît dans (7.55) la première partie de la quatrième somme du membre de droite de la relation (7.4). On vérifie que (7.55) est un polynôme de degré total successivement inférieur ou égal à :

$$(k+1)+(2k+2)+1+[16\tau+3(l+n_W - n_j)+10(r\text{-}1)\text{-}13]$$

$$16\tau+3(k+l+n_W - n_j)+10r\text{-}19$$

$$16\tau+3n+10r\text{-}13$$

car $k+l = n_1+n_j+2$ et $n = n_1+n_W$.

Par conséquent, ce polynôme est de degré total inférieur ou égal à $16\tau+3n+10r\text{-}13$.

Procédons de même pour les parties :

$$s(n_1+1)!\,n_j!\,V(n_j+1)\sum_{k+l=n_1+n_j+3}\frac{L[k]}{k!}\frac{S_\tau[l,N_j]}{l!}$$

On obtient les simplifications résumées dans les tableaux suivants, sachant que $k+l = n_1+n_j+3$ et que $n = n_1+n_W$.

Pour le numérateur :

Nature	Constantes	venant de $L[k]$	venant de $S_\tau[l,N_j]$	Il reste :
factorielles	$(n_1+1)!\ (n_j+1)!$ / $(k!\ l!)$	$k!$	$l!\ N_j!$	(n_j+1) $(n_1+1)!\ N_W!$
Exposant de s	1	0	$(r\text{-}1)\text{-}1$	$r\text{-}1$
Coefficient entier	1	1	1	1
Exposant de $(1\text{-}p)$	-1	$k\text{-}3$	$-6\tau+l+n_W-n_j-2(r\text{-}1)+4$	$-6\tau+n-2r+5$

Pour le dénominateur :

Nature	Complément	venant de $L[k]$	venant de $S_\tau[l,N_j]$	On obtient
Exposant de f	0	0	1	1
Exposant de p	$\boldsymbol{k}$	0	$4\tau+l+n_W-n_j+3(r\text{-}1)\text{-}3$	$4\tau+n+3r\text{-}3$
Exposant de $(1\text{-}2c)$	$\boldsymbol{2k}$	0	$10\tau+2l+2(n_W-n_j)$ $+7(r\text{-}1)\text{-}10$	$10\tau+2n+7r\text{-}11$

On multiplie le numérateur et le dénominateur de chaque terme par $p^k(1\text{-}2c)^{2k}$, pour obtenir un dénominateur commun égal à (7.51). Après factorisation par (7.50), le numérateur est :

$$\sum_{k+l=n_1+n_j+3} p^k(1-2c)^{2k}L_k F_{\tau,l,N_j} \qquad (7.56)$$

On reconnaît dans (7.56) la deuxième partie de la quatrième somme du membre de droite de la relation (7.4). On vérifie que (7.56) est un polynôme de degré total successivement inférieur ou égal à :

$$k+(2k)+1+[16\tau+3(l+n_W - n_j)+10(r\text{-}1)\text{-}13]$$

$$16\tau+3(k+l+n_W - n_j)+10r\text{-}22$$

$$16\tau+3n+10r\text{-}13$$

car $k+l = n_1+n_j+3$ et $n = n_1+n_W$.

Par conséquent, ce polynôme est de degré total inférieur ou égal à $16\tau+3n+10r\text{-}13$.

29.74.75. *Cinquième terme*

En injectant les expressions de $M[i]$, de $L[i]$ et de $S_{\tau\text{-}1/2}[j,N_W]$ dans $R5_\tau[n_1,\ldots,n_r]$, on obtient les simplifications de termes de même nature résumées dans les tableaux suivants :

Pour le numérateur du terme en $M[i]$, sachant que $i+j = n_1+1$ et que $n = n_1+n_W$:

Nature	venant de $M[i]$	venant de $S_{\tau\text{-}1/2}[j,N_W]$	Il reste :
factorielles	$i!$	$j!\ N_W!$	$(n_1+1)!\ N_W!$
Exposant de s	0	r-1	r-1
Exposant de (1-p)	i-2 pour $M[i]$	$-6\tau+3+j+n_W-2r+4$	$-6\tau+n-2r+6$

Pour le dénominateur du terme en $M[i]$:

Nature	Complément	venant de $M[i]$	venant de $S_{\tau\text{-}1/2}[j,N_W]$	On obtient
Exposant de f	0	0	1	1
Exposant de p	$\boldsymbol{i+1}$	0	$4\tau-2+j+n_W+3r-3$	$4\tau+n+3r-3$
Exposant de (1-2c)	$\boldsymbol{2i+2}$	0	$10\tau-5+2j+2n_W+7r-10$	$10\tau+2n+7r-11$

On multiplie le numérateur et le dénominateur de chaque terme par $p^{i+1}(1\text{-}2c)^{2i+2}$, pour obtenir un dénominateur commun égal à (7.51). Après factorisation par (7.50), le numérateur de la partie du cinquième terme comportant $M[i]$ est :

$$(1-p)\sum_{i+j=n_1+1} p^{i+1}(1-2c)^{2i+2} M_i F_{\tau-\frac{1}{2},j,N_W} \qquad (7.57)$$

On reconnaît dans (7.57) la partie de la cinquième somme du membre de droite de la relation (7.4) contenant M_i. On vérifie que (7.57) est un polynôme de degré total successivement inférieur ou égal à :

$$1+(i+1)+(2i+2)+1+[16\tau-8+3(j+n_W)+10r-13]$$

$$16\tau+3(i+j+n_W)+10r-16$$

$$16\tau+3n+10r-13$$

car $i+j = n_1+1$ et $n_1+n_W = n$.

Par conséquent, ce polynôme est de degré total inférieur ou égal à $16\tau+3n+10r-13$.

Pour le numérateur du terme en $L[i]$, sachant que $i+j = n_1+1$ et que $n = n_1+n_W$:

Nature	venant de $L[i]$	venant de $S_{\tau\text{-}1/2}[j+1,N_W]$	Il reste :
factorielles	$i!$	$(j+1)!\ N_W!$	$(j+1)\ (n_1+1)!\ N_W!$
Exposant de s	0	r-1	r-1
Exposant de $(1-p)$	i-3 pour $L[i]$	$-6\tau+3+j+1$ $+n_W-2r+4$	$-6\tau+n-2r+6$

Pour le dénominateur du terme en $L[i]$:

Nature	Complément	venant de $L[i]$	venant de $S_{\tau\text{-}1/2}[j+1,N_W]$	On obtient
Exposant de f	0	0	1	1
Exposant de p	$\boldsymbol{i}$	0	$4\tau-2+j+1+n_W+3r-3$	$4\tau+n+3r-3$
Exposant de $(1-2c)$	$\boldsymbol{2i}$	0	$10\tau-5+2j+2$ $+2n_W+7r-10$	$10\tau+2n+7r-11$

On multiplie le numérateur et le dénominateur de chaque terme par $p^i(1-2c)^{2i}$, pour obtenir un dénominateur commun égal à (7.51). Après factorisation par (7.50), le numérateur de la partie du cinquième terme comportant $L[i]$ est :

$$(1-p)\sum_{i+j=n_1+1}(j+1)p^i(1-2c)^{2i}L_iF_{\tau-\frac{1}{2},j+1,N_W} \tag{7.58}$$

On reconnaît dans (7.58) la partie de la cinquième somme du membre de droite de la relation (7.4) contenant L_i. On vérifie que (7.58) est un polynôme de degré total successivement inférieur ou égal à :

$$1+i+2i+1+[16\tau-8+3(j+1+n_W)+10r-13]$$

$$16\tau+3(i+j+n_W)+10r-16$$

$$16\tau+3n+10r-13$$

car $i+j=n_1+1$ et $n_1+n_W=n$.

Par conséquent, ce polynôme est de degré total inférieur ou égal à $16\tau+3n+10r-13$.

29.74.76. *Fin de la démonstration de la proposition* 7.1

On a obtenu un polynôme en factorisant la fraction :

$$\frac{(n_1+1)!n_2!\ldots n_r!s^{r-1}(1-p)^{-6\tau+n-2r+5}}{f\ p^{4\tau+n+3r-3}(1-2c)^{10\tau+2n+7r-11}} \tag{7.59}$$

dont le numérateur est (7.50) et dont le dénominateur est (7.51).

Pour conclure, il reste à observer que le membre de gauche de l'équation $(S,\tau,n_1,\ldots,n_r)$ est :

$$\frac{(n_1+1)A[1]}{V} S_\tau[n_1, N_W]$$

Pour obtenir $S_\tau[n_1, N_W]$, il faut multiplier (7.59) par

$$\frac{V}{(n_1+1)A[1]}$$

qui, d'après (4.29), (7.2) et (6.16) est égal à :

$$\frac{-1}{(n_1+1)(1-2c)}.$$

On obtient :

$$\frac{-n_1!n_2!\ldots n_r!s^{r-1}(1-p)^{-6\tau+n-2r+4}}{f\ p^{4\tau+n+3r-3}(1-2c)^{10\tau+2n+7r-10}} \tag{7.60}$$

Si l'on compare (7.60) avec (7.3), on conclue que le polynôme calculé dans les paragraphes précédents est l'opposé du polynôme $F_{j,n_1,\ldots,n_k}(p,q,c)$ cherché.

Ceci explique le signe " moins " de la formule (7.4) et achève la démonstration de la proposition 7.1.

Chapitre 8

Résultats d'énumération

Pour les séries génératrices ordinaires des cartes pointées sur une surface, nous avons démontré deux théorèmes d'énumération implicite qui ouvrent la voie à de nouveaux résultats, qui sont exposés dans le chapitre 9. Auparavant, le présent chapitre fait le bilan des résultats explicites connus.

La section 30 fait la synthèse de l'ensemble des formules connues d'énumération de cartes pointées sur une surface de type donné (en séparant surfaces orientables et surfaces non orientables) en fonction du nombre de sommets et du nombre de faces, ou en fonction du nombre d'arêtes des cartes. Ces formules ont été établies soit par calcul manuel (pour les types 0 et 1 en orientable, pour le type ½ en non orientable), soit à l'aide d'un logiciel de calcul formel. Dans cette thèse, la limite de ces formules explicites a été repoussée au genre 4 en orientable et au type 5/2 en non orientable, par des calculs intensifs, avec le système de calcul formel MAPLE.

La formule d'inversion de Lagrange permet d'exploiter ces formules à différents niveaux d'abstraction, comme le montre la section 31.

La section 32 termine ce chapitre par quelques tables de nombres de cartes inédites, puisqu'elles concernent des surfaces non orientables jamais étudiées par ailleurs.

Cependant, les théorèmes d'énumération implicite présentent surtout l'intérêt de suggérer de nouvelles méthodes de calcul des nombres de cartes, assez importantes pour que le chapitre 9 leur soit entièrement dédié.

30. Énumération paramétrique explicite

Nous avons choisi le système paramétrique

$$s=p(1-p-2q)\,,\quad f=q(1-2p-q) \tag{4.28}$$

pour lister l'ensemble des formules explicites connues qui énumèrent des cartes pointées sur une surface. Ces formules sont classées par nature (surfaces orientables ou non) et par type croissant. La paternité de ces formules est donnée ensuite. Des outils d'exploitation de ces formules sont donnés dans les sections suivantes.

30.75. *Énumération selon les nombres de sommets et de faces*

30.75.77. *Cartes orientables*

On explicite ici les séries génératrices ordinaires des cartes pointées sur une surface orientable de genre 0, 1, 2 et 3.

THÉORÈME 8.1. *Pour tout entier naturel g inférieur ou égal à* 3*, la série génératrice ordinaire* $sfQ_g(1,s,f)$ *qui dénombre les cartes pointées de genre g en fonction du nombre de sommets* (*exposant de s*) *et du nombre de faces* (*exposant de f*) *est définie par le système paramétrique suivant, où p et q sont les paramètres* :

$$s=p(1-p-2q)$$

$$f=q(1-2p-q)$$

$$sfQ_0(1,s,f)=pq(1-2p-2q)$$

$$sfQ_1(1,s,f)=\frac{pq(1-p-q)}{\left[(1-2p-2q)^2-4pq\right]^2}$$

$$sfQ_2(1,s,f)=\frac{3pq(1-p-q)P_2(p,q)}{\left[(1-2p-2q)^2-4pq\right]^7}$$

avec $P_2(p,q) = 7 - 49(p+q) + 105(p^2+q^2) - 280(p^4+q^4) + 336(p^5+q^5) - 112(p^6+q^6) + 393pq - 1048(p^2q+pq^2) + 960(p^3q+pq^3) + 80(p^4q+pq^4) - 336(p^5q+pq^5) + 2952p^2q^2 - 2864(p^3q^2+p^2q^3) + 672(p^4q^2+p^2q^4) + 1904p^3q^3$

$$sfQ_3(1,s,f)=\frac{pq(1-p-q)P_3(p,q)}{\left[(1-2p-2q)^2-4pq\right]^{12}}$$

avec $P_3(p,q) = 1485 - 17622(p+q) + 63712(p^2+q^2) + 89100(p^3+q^3) - 1522070(p^4+q^4) + 5767520(p^5+q^5) - 11514272(p^6+q^6) + 12691712(p^7+q^7) - 5614400(p^8+q^8) - 3266560(p^9+q^9) + 5547520(p^{10}+q^{10}) - 2669568(p^{11}+q^{11}) + 444928(p^{12}+q^{12}) + 273643pq - 1566909(p^2q+pq^2) + 3310316(p^3q+pq^3) + 4908860(p^4q+pq^4) - 44516400(p^5q+pq^5) + 112109680(p^6q+pq^6) - 147779072(p^7q+pq^7) + 104321088(p^8q+pq^8) - 30722560(p^9q+pq^9) - 2990592(p^{10}q+pq^{10}) + 2669568(p^{11}q+pq^{11}) + 12412890p^2q^2 - 44301496(p^3q^2+p^2q^3) + 63728832(p^4q^2+p^2q^4) + 45281424(p^5q^2+p^2q^5) - 309719744(p^6q^2+p^2q^6) + 479913216(p^7q^2+p^2q^7) - 350578176(p^8q^2+p^2q^8) + 116160000(p^9q^2+p^2q^9) - 11539968(p^{10}q^2+p^2q^{10}) + 207749968p^3q^3 - 458396880(p^4q^3+p^3q^4) + 423917056(p^5q^3+p^3q^5) + 97719616(p^6q^3+p^3q^6) - 518095872(p^7q^3+p^3q^7) + 370179072(p^8q^3+p^3q^8) - 82170880(p^9q^3+p^3q^9) + 1205285632p^4q^4 - 1476597696(p^5q^4+p^4q^5) + 726563328(p^6q^4+p^4q^6) + 34744320(p^7q^4+p^4q^7) - 95966208(p^8q^4+p^4q^8) + 1869685248p^5q^5 - 962062848(p^6q^5+p^5q^6) + 138525696(p^7q^5+p^5q^7) + 332616192p^6q^6.$

Les formules pour les genres 0 et 1 ont été démontrées respectivement dans les articles [Arq85b] et [Arq87a]. Les solutions pour les genres 2 et 3 sont deux résultats nouveaux sur les cartes. Elles ont été obtenues par l'application programmée des relations entre polynômes de la proposition 6.1 du chapitre 6. L'énumération des cartes pointées de genre 2, c'est-à-dire l'obtention d'une expression pour la série $Q_2(1,s,f)$, a conduit à l'écriture et à

la résolution d'un système de 16 équations. Pour le genre 3, 51 équations supplémentaires ont été nécessaires.

30.75.78. *Cartes non orientables*

THÉORÈME 8.2. *Pour tout demi entier naturel non nul τ inférieur ou égal à 2, la série génératrice ordinaire $sfN_\tau(1,s,f)$ qui dénombre les cartes pointées sur la surface non orientable de type τ en fonction du nombre de sommets* (*exposant de s*) *et du nombre de faces* (*exposant de f*) *est définie par le système paramétrique suivant, où p et q sont les paramètres* :

$$s = p(1-p-2q)$$

$$f = q(1-2p-q)$$

$$sfN_{\frac{1}{2}}(1,s,f) = \frac{1}{2}\left(1-2p-2q-\sqrt{(1-2p-2q)^2-4pq}\right)$$

$$sfN_1(1,s,f) = \frac{M_1(p,q)}{\left[(1-2p-2q)^2-4pq\right]^2}$$

avec

$$M_1(p,q) = \left(2-5(p+q)+2\left(p^2+q^2\right)+8pq\right)\left(1-2(p+q)-\sqrt{(1-2(p+q))^2-4pq}\right)$$

$$sfN_{\frac{3}{2}}(1,s,f) = \frac{R_{\frac{3}{2}}(p,q)}{\left[(1-2p-2q)^2-4pq\right]^{\frac{9}{2}}}$$

avec

$$\begin{aligned} R_{\frac{3}{2}}(p,q) = {} & -208\left(p^6+q^6\right)+336\left(p^5q+pq^5\right)-1200\left(p^4q^2+p^2q^4\right)-2720p^3q^3 \\ & -528\left(p^5+q^5\right)+252\left(p^4q+pq^4\right)+4344\left(p^3q^2+p^2q^3\right) \\ & +376\left(p^4+q^4\right)-1660\left(p^3q+pq^3\right)-4380p^2q^2 \\ & +48\left(p^3+q^3\right)+1595\left(p^2q+pq^2\right)-171\left(p^2+q^2\right)-581pq \\ & +73(p+q)-10+T_{\frac{3}{2}}(p,q)\sqrt{(1-2p-2q)^2-4pq} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_{\frac{3}{2}}(p,q) = {} & 104\left(p^5+q^5\right)+72\left(p^4q+pq^4\right)-584\left(p^3q^2+p^2q^3\right)-212\left(p^4+q^4\right)+324\left(p^3q+pq^3\right) \\ & +1288p^2q^2+82\left(p^3+q^3\right)-664\left(p^2q+pq^2\right)+65\left(p^2+q^2\right)+348pq-53(p+q)+10 \end{aligned}$$

$$sfN_2(1,s,f)=\frac{D_0(p,q)+D_1(p,q)\sqrt{(1-2p-2q)^2-4pq}}{\left[(1-2p-2q)^2-4pq\right]^7}$$

avec

$$\begin{aligned}
D_0(p,q) = {} & 5248\,(q^9+p^9) + 84224\,(q^8p+qp^8) + 223232\,(q^7p^2+q^2p^7) \\
& -53632\,(q^6p^3+q^3p^6) - 749824\,(q^5p^4+q^4p^5) \\
& -43200\,(q^8+p^8) - 374016\,(q^7p+qp^7) - 482496\,(q^6p^2+q^2p^6) \\
& +1065600\,(q^5p^3+q^3p^5) + 2444544\,q^4p^4 + 119008\,(q^7+p^7) \\
& +599680\,(q^6p+qp^6) - 19872\,(q^5p^2+q^2p^5) - 2444192\,(q^4p^3+q^3p^4) \\
& -159152\,(q^6+p^6) - 400832\,(q^5p+qp^5) + 798880\,(q^4p^2+q^2p^4) \\
& +2129088\,q^3p^3 + 113736\,(q^5+p^5) + 34080\,(q^4p+qp^4) \\
& -800760\,(q^3p^2+q^2p^3) - 39844\,(q^4+p^4) + 105488\,(q^3p+qp^3) \\
& +335304\,q^2p^2 + 1610\,(q^3+p^3) - 61912\,(q^2p+qp^2) \\
& +3711\,(q^2+p^2) + 14220\,qp - 1199\,(q+p) + 122
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D_1(p,q) = {} & 2624\,(q^8+p^8) + 38720\,(q^7p+qp^7) + 70016\,(q^6p^2+q^2p^6) \\
& -89920\,(q^5p^3+q^3p^5) - 250240\,q^4p^4 - 20288\,(q^7+p^7) \\
& -144176\,(q^6p+qp^6) - 61056\,(q^5p^2+q^2p^5) + 495088\,(q^4p^3+q^3p^4) \\
& +49360\,(q^6+p^6) + 174696\,(q^5p+qp^5) - 194664\,(q^4p^2+q^2p^4) \\
& -676544\,q^3p^3 - 54896\,(q^5+p^5) - 58772\,(q^4p+qp^4) \\
& +323140\,(q^3p^2+q^2p^3) + 29420\,(q^4+p^4) - 37606\,(q^3p+qp^3) \\
& -174348\,q^2p^2 - 5212\,(q^3+p^3) + 35952\,(q^2p+qp^2) \\
& -1801\,(q^2+p^2) - 10156\,qp + 955\,(q+p) - 122
\end{aligned}$$

Les formules pour les types ½ et 1 ont été démontrées respectivement dans les articles [BCR93] et [AB97a]. Les solutions pour les types 3/2 et 2 sont deux résultats nouveaux sur les cartes qui ont été obtenus en appliquant les relations entre polynômes des propositions du chapitre 7.

30.76. *Énumération selon le nombre d'arêtes*

La relation d'Euler-Poincaré (voir paragraphe 1.2.5 du chapitre 2) permet de déduire les formules suivantes de celles du théorème 8.1, puisque :

$$Q_g(z) = z^{2g}\,Q_g(1,s,f)_{|s=f=z}$$

30.76.79. *Cartes orientables*

THÉORÈME 8.3. *Pour tout entier naturel g inférieur ou égal à* 3*, la série génératrice ordinaire* $Q_g(z)$ *qui dénombre les cartes pointées de genre g en fonction du nombre d'arêtes* (*exposant de z*) *est définie par* :

$$\rho = \sqrt{1-12z}$$

$$Q_0(z) = \frac{4(1+2\rho)}{3(1+\rho)^2}$$

$$Q_1(z) = \frac{(1-\rho)^2}{3.2^2\rho^2(2+\rho)}$$

$$Q_2(z) = \frac{(1-\rho)^4(1+\rho)^2}{3^2 2^8 \rho^7 (2+\rho)^4} N_2(\rho)$$

avec

$$N_2(\rho) = 112 + 248\rho + 225\rho^2 + 122\rho^3 + 49\rho^4$$

$$Q_3(z) = \frac{(1-\rho)^6(1+\rho)^4}{3^4 2^{13} \rho^{12} (2+\rho)^7} N_3(\rho)$$

avec

$$N_3(\rho) = 156800 + 541280\rho + 802640\rho^2 + 678074\rho^3 + 381047\rho^4 + 176738\rho^5 + 87662\rho^6 + 45488\rho^7 + 17111\rho^8$$

On doit la formule du genre 0 (sphère) à W. Tutte [Tut63] et celle du genre 1 (tore) à D. Arquès [Arq87a]. Pour les genres 2 et 3, les formules ont été établies dans [BC86].

30.76.80. *Cartes non orientables*

THÉORÈME 8.4. *Pour tout demi entier naturel non nul* τ *inférieur ou égal à* 2*, la série génératrice ordinaire* $N_\tau(z)$ *qui dénombre les cartes pointées sur la surface non orientable de type* τ *en fonction du nombre d'arêtes* (*exposant de z*) *est définie par* :

$$\rho = \sqrt{1-12z}$$

$$N_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{6}\left(2\rho + 1 - \sqrt{3\rho(\rho+2)}\right)$$

$$N_1(z) = \frac{(\rho+1)\left(2\rho+1-\sqrt{3\rho(\rho+2)}\right)}{\rho^2(\rho+2)}$$

$$N_{\frac{3}{2}}(z) = \frac{(\rho+1)(\rho-1)}{48(\rho+2)^3\rho^5}\left[\begin{array}{c} 34\rho^5 + 140\rho^4 + 294\rho^3 + 404\rho^2 + 208\rho \\ -\left(28\rho^4 + 59\rho^3 + 114\rho^2 + 119\rho + 40\right)\sqrt{3\rho(\rho+2)} \end{array}\right]$$

$$N_2(z)=\frac{(\rho+1)^2(\rho-1)^2}{96(\rho+2)^4\rho^7}\left[\begin{array}{l}142\rho^6+280\rho^5+629\rho^4+1480\rho^3+2129\rho^2+1528\rho+400\\-\left(60\rho^5+96\rho^4+267\rho^3+636\rho^2+777\rho+360\right)\sqrt{3\rho(\rho+2)}\end{array}\right]$$

La formule pour le type ½, (plan projectif) a été établie dans [BCR88]. La formule pour le type 1 (bouteille de Klein) est issue de [AB97a]. Les formules pour les types 3/2 et 2 sont deux résultats nouveaux déduits de leurs analogues en sommets et faces du théorème 8.2.

30.77. *Le système paramétrique* (α,β)

Le système paramétrique (α,β) a été introduit dans [Arq87a]. Il est relié au système (p,q) par :

$$p=\frac{\alpha}{1+2\alpha+2\beta+\alpha\beta}$$

$$q=\frac{\beta}{1+2\alpha+2\beta+\alpha\beta}$$

Nous le rappelons ici, car ce système permet de donner une expression paramétrique sans radical des séries génératrices des cartes pointées non orientables. En effet, on a :

$$\sqrt{(1-2p-2q)^2-4pq}=\frac{1-\alpha\beta}{1+2\alpha+2\beta+\alpha\beta}$$

Par exemple, la série génératrice ordinaire $sfN_{\frac{1}{2}}(1,s,f)$ des cartes pointées sur le plan projectif, comptées en fonction du nombre de sommets (exposant de s) et du nombre de faces (exposant de f), s'écrit :

$$sfN_{\frac{1}{2}}(1,s,f)=\frac{\alpha\beta}{1+2\alpha+2\beta+\alpha\beta}$$

On verra l'un des avantages de cette fraction rationnelle de α et β dans le paragraphe 31.79.84.

31. Utilisation de l'inversion de Lagrange

On présente d'abord (paragraphe 31.78) la formule d'inversion de Lagrange, puis on présente son intérêt (paragraphe 31.79) pour l'énumération des cartes pointées.

31.78. *La formule d'inversion de Lagrange*

La formule d'inversion de Lagrange [Lag69] est un outil très couramment utilisé en combinatoire énumérative. Classiquement, elle permet l'extraction des termes d'une série formelle. Cette formule est d'origine analytique, mais elle s'applique sans restriction aux séries formelles, pour lesquelles elle s'interprète comme un changement de variable. Nous donnons cette formule ici et nous l'utilisons à des fins diverses dans la suite.

Pour une démonstration de cette formule voir, par exemple, [Hof79] ou [Lab81].

31.78.81. *Inversion de Lagrange à une variable*

Soit $F(X)$ une série formelle de la variable X et soit $Y = G(X)$ un changement de variable, où $G(X)$ est une série formelle qui s'écrit :

$$G(X) = \frac{X}{H(X)} \tag{8.1}$$

avec

$$H(0) \neq 0 \tag{8.2}$$

On note $G^{<-1>}$ la fonction réciproque de G, définie par :

$$G^{<-1>}(Y) = X \tag{8.3}$$

et on montre, à partir des conditions imposées à G, que $G^{<-1>}$ est une série formelle. On pose :

$$E(Y) = F(G^{<-1>}(Y)) \tag{8.4}$$

La formule suivante permet d'obtenir le n^{e} terme de la série formelle $E(Y)$, noté $[Y^n]\, E(Y)$, lorsqu'on ne sait pas expliciter la série $G^{<-1>}$.

$$[Y^n]\, F(G^{<-1>}(Y)) = [X^n]\, F(X)\, G'(X)\, H(X)^{n+1} \tag{8.5}$$

Cette formule est une version de la formule d'inversion de Lagrange à une variable.

31.78.82. *Inversion de Lagrange à plusieurs variables*

Plus exactement, on attribue cette généralisation à Good [Goo60], mais elle était connue par Jacobi [Jac30].

À présent, $X = (x_1, \ldots, x_p)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_p)$ sont des vecteurs de p variables. Le changement de variables $Y = G(X)$ est un vecteur $(g_1, \ldots, g_p)$ de p séries formelles des variables $(x_1, \ldots, x_p)$. Les conditions d'application de la formule sont :

$$\forall k \in \{1, \ldots, p\}, \quad g_k(X) = \frac{x_k}{h_k(X)} \tag{8.6}$$

où h_k est une série formelle des variables $(x_1, \ldots, x_p)$ telle que :

$$h_k(0, \ldots, 0) \neq 0 \tag{8.7}$$

Soit $F(X)$ une série formelle des variables du vecteur X et soit $E(Y)$ la série formelle des variables du vecteur Y définie par :

$$E(Y) = F(G^{<-1>}(Y)) \tag{8.8}$$

La formule suivante permet d'obtenir le coefficient

$$y_1^{n_1} \ldots y_p^{n_p}$$

de la série formelle $E(Y)$, noté $[Y^n]$, avec $n = (n_1, \ldots, n_p)$.

$$\left[Y^n\right]E(Y) = \left[X^n\right]F(X)\det\frac{\partial G(X)}{\partial X}H(X)^{n+1} \tag{8.9}$$

avec

$$n+1 = (n_1+1, \ldots, n_p+1) \tag{8.10}$$

31.79. ***Application à l'énumération des cartes pointées***

Appliquée pour une valeur explicite de n, la formule d'inversion de Lagrange (8.5) délivre la valeur numérique du n^{e} terme d'une série génératrice énumérant des cartes pointées. Si n n'est pas explicité, on peut obtenir une formule close pour l'expression du n^{e} terme. Le cas du tore est traité dans le paragraphe 31.79.83. Le cas du plan projectif est traité dans le paragraphe 31.79.84.

Le paragraphe 31.79.85 explique comment utiliser une inversion de Lagrange à deux variables pour une énumération selon le nombre de sommets et le nombre de faces des cartes.

31.79.83. *Formule close du nombre de cartes pointées sur le tore*

À titre d'exemple d'application de la formule de Lagrange, nous traitons ici le cas de la série génératrice ordinaire $Q_1(z)$ des cartes pointées sur le tore, comptées selon leur nombre d'arêtes (exposant de z). Cette série admet une forme rationnelle selon le paramètre ρ, qui est :

$$Q_1(z) = \frac{(1-\rho)^2}{3.2^2\rho^2(2+\rho)} \tag{8.11}$$

avec

$$\rho = \sqrt{1-12z} \tag{8.12}$$

En posant

$$\rho = 1 - 6m, \tag{8.13}$$

on a

$$z = m(1-3m) \tag{8.14}$$

et

$$\frac{(1-\rho)^2}{3.2^2\rho^2(2+\rho)} = \frac{m^2}{(1-2m)(1-6m)^2} \tag{8.15}$$

On définit le changement de variable :

$$G(m) = m(1-3m) \tag{8.16}$$

conforme aux conditions (8.1) et (8.2) et on note

$$F(m) = \frac{m^2}{(1-2m)(1-6m)^2} \tag{8.17}$$

$$H(m) = \frac{1}{1-3m} \tag{8.18}$$

La formule (8.5) s'écrit alors :

$$[z^n]Q_1(z) = [m^n]\frac{m^2}{(1-2m)(1-6m)(1-3m)^{n+1}} \tag{8.19}$$

Il en résulte que :

$$[z^0]\ Q_1(z) = [z^1]\ Q_1(z) = 0 \tag{8.20}$$

et que, pour $n \geq 2$, on a :

$$[z^n]Q_1(z) = [m^{n-2}]\frac{1}{(1-2m)(1-6m)}\sum_{k\geq 0}\binom{k+n}{k}3^k m^k \tag{8.21}$$

$$[z^n]Q_1(z) = \sum_{i+k=n-2}^{i+k=n-2} 3^{i+k}2^{n-k-2}\binom{k+n}{k} \tag{8.22}$$

qui est la formule close la plus simple connue pour le nombre de cartes pointées à n arêtes sur un tore, établie dans [Arq87a].

31.79.84. *Formule close du nombre de cartes pointées sur le plan projectif*

On présente ici un second exemple d'application de la formule de Lagrange, dont le résultat est une formule close inédite pour le nombre de cartes pointées à n arêtes sur le plan projectif.

On sait (théorème 8.4) que la série génératrice ordinaire $N_{½}(z)$ des cartes pointées sur le plan projectif, s'écrit :

$$N_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{6}\left(2\rho + 1 - \sqrt{3\rho(\rho+2)}\right)$$

selon le paramètre ρ. Cette expression comporte un radical. Pour que l'inversion de Lagrange s'applique simplement, il est préférable d'utiliser un autre paramètre que ρ, selon lequel $N_{½}(z)$ admet une écriture rationnelle.

Or on a remarqué dans le paragraphe 30.77 que le système paramétrique (α,β) rend rationnelles toutes les séries génératrices de cartes pointées non orientables. En l'appliquant au plan projectif, on a trouvé :

$$sfN_{\frac{1}{2}}(1,s,f) = \frac{\alpha\beta}{1+2\alpha+2\beta+\alpha\beta} \tag{8.23}$$

On définit le paramètre γ par $\alpha = \beta = \gamma$ lorsqu'on pose $p = q = m$.

D'après (8.14), on a :

$$z = \gamma \frac{1+\gamma+\gamma^2}{\left(1+4\gamma+\gamma^2\right)^2} \tag{8.24}$$

D'après la formule (2.8), on a :

$$N_{\frac{1}{2}}(z) = z^{-1} s f N_{\frac{1}{2}}(1,s,f)_{|s=f=z} \tag{8.25}$$

d'où :

$$N_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{\gamma\left(1+4\gamma+\gamma^2\right)}{1+\gamma+\gamma^2} \tag{8.26}$$

On définit le changement de variable :

$$G(\gamma) = \gamma \frac{1+\gamma+\gamma^2}{\left(1+4\gamma+\gamma^2\right)^2} \tag{8.27}$$

conforme aux conditions (8.1) et (8.2) et on note :

$$F(\gamma) = \frac{\gamma\left(1+4\gamma+\gamma^2\right)}{1+\gamma+\gamma^2} \tag{8.28}$$

$$H(\gamma) = \frac{\left(1+4\gamma+\gamma^2\right)^2}{1+\gamma+\gamma^2} \tag{8.29}$$

On a :

$$G'(\gamma) = \frac{(1+\gamma)(1-\gamma)^3}{\left(1+4\gamma+\gamma^2\right)^3} \tag{8.30}$$

La formule (8.5) s'écrit alors :

$$\left[z^n\right] N_{\frac{1}{2}}(z) = \left[\gamma^n\right] \frac{\gamma(1+\gamma)(1-\gamma)^3\left(1+4\gamma+\gamma^2\right)^{2n}}{\left(1+\gamma+\gamma^2\right)^{n+2}} \tag{8.31}$$

Il en résulte que :

$$[z^0]\, N_{½}(z) = 0 \tag{8.32}$$

et que, pour $n \geq 1$, on a :

$$\left[z^n\right] N_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{t=1}^{t=4} (-1)^{t-1} \binom{t-1}{3} \sum_{k=0}^{n-t} (-1)^k \binom{k+n+1}{k} \sum_{l=0}^{l=k+1} \binom{k+1}{l} \sum_{j=0}^{j=2n} 4^{n-t-k-l-2j} \binom{2n}{n-t-k-l-2j, j} \tag{8.33}$$

La formule (8.33) est une formule close nouvelle pour le nombre de cartes pointées à n arêtes sur le plan projectif.

31.79.85. *Inversion des paramètres p et q*

Les théorèmes d'énumération paramétrique du chapitre 5 et du chapitre 8 sont fondés sur le système paramétrique (p, q) défini par :

$$s = p\ (1\text{-}p\text{-}2q)$$

$$f = q\ (1\text{-}2p\text{-}q)$$

Une inversion de Lagrange à deux variables permet d'en déduire des formules d'énumération selon le nombre i ($i \geq 1$) de sommets et le nombre j ($i \geq 1$) de faces des cartes énumérées.

On pose :

$$X = (p, q), \tag{8.34}$$

$$G(X) = (s, f), \tag{8.35}$$

$$H(X) = \left(\frac{1}{1-p-2q}, \frac{1}{1-2p-q} \right) \tag{8.36}$$

Ici, $F(p,q)$ désigne toute série formelle des variables p et q, telle qu'on peut en trouver dans les théorèmes d'énumération paramétrique des précédents chapitres.

On cherche une formule pour le terme $e_{i,j}$ de :

$$E(s, f) = F(G^{<-1>}(s, f)), \tag{8.37}$$

défini par :

$$E(s, f) = \sum_{i \geq 1, j \geq 1} e_{i,j} s^{i-1} f^{j-1} \tag{8.38}$$

Pour ces deux variables, la formule (8.9) d'inversion de Lagrange s'écrit :

$$\left[s^{i-1} f^{j-1} \right] E(s, f) = \left[p^{i-1} q^{j-1} \right] F(p, q) \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1(p,q)}{\partial p} & \frac{\partial g_1(p,q)}{\partial q} \\ \frac{\partial g_2(p,q)}{\partial p} & \frac{\partial g_2(p,q)}{\partial q} \end{vmatrix} h_1(p,q)^i h_2(p,q)^j \tag{8.39}$$

$$e_{i,j} = \left[p^{i-1} q^{j-1} \right] F(p, q) \frac{(1-2p-2q)^2 - 4pq}{(1-p-2q)^i (1-2p-q)^j} \tag{8.40}$$

En guise d'application simple de (8.37), on suggère l'inversion des paramètres p et q.

En posant $F(p,q) = p$, on obtient une formule close pour les coefficients de la série formelle $p(s,f)$ définie par (4.28). Au delà de leur définition, ces coefficients ont une signification. En effet, G. Schaeffer [Sch97] remarque que :

$$p(s,f)=\frac{\partial}{\partial f}\left[sfQ_0(1,s,f)\right]$$

Il résulte de cette remarque que les coefficients de la série $p(s,f)$ sont des entiers naturels, qui comptent le nombre de cartes planaires pointées dans lesquelles une seconde face est distinguée, en fonction du nombre de sommets (exposant de s) et du nombre de faces moins une (exposant de f).

Plus généralement, lorsqu'on choisit pour $F(p,q)$ le membre de droite d'une expression des théorèmes 8.1 ou 8.2, on obtient des tables de nombres, comme celles du paragraphe suivant.

32. Tables numériques pour les cartes non orientables

Les fonctions de l'outil logiciel qui accompagne cette thèse permettent d'obtenir rapidement les premiers nombres de cartes pour lesquelles une formule paramétrique est connue. On trouve de telles tables de nombres dans [WL72a]. Par conséquent, on n'explicite ici ces nombres que pour les séries, plus rarement étudiées, de cartes non orientables. Le type ½ a été énuméré dans [BCR88], le type 1 dans [AB97a].

32.80. *Selon les nombres de sommets et de faces*

Une inversion de Lagrange à deux variables est appliquée aux formules du théorème 8.2 pour obtenir les tables I et II, qui donnent les nombres de cartes pointées non orientables de types 3/2 et 2 respectivement, pour de petites valeurs des nombres de sommets et de faces.

		j					
		0	1	2	3	4	5
i	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	41	690	7150	58760	420182
	2	0	690	16925	237652	2518957	22417804
	3	0	7150	237652	4306778	56864524	613687758
	4	0	58760	2518957	56864524	910734615	11675167470
	5	0	420182	22417804	613687758	11675167470	174833737848

Table I. nombre de cartes pointées avec i sommets et j faces sur la surface non orientable de type 3/2

		j					
		0	1	2	3	4	5
i	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	488	11660	160680	1678880	14771680
	2	0	11660	375552	6652366	86303920	918342738
	3	0	160680	6652366	146387872	2298445830	28995928200
	4	0	1678880	86303920	2298445830	42795288180	629732269188
	5	0	14771680	918342738	28995928200	629732269188	10663498973088

Table II. nombre de cartes pointées avec i sommets et j faces sur la surface non orientable de type 2

32.81. ***Selon le nombre d'arêtes***

Pour compter les cartes pointées non orientables selon leur nombre d'arêtes, on peut appliquer l'inversion de Lagrange aux formules du théorème 8.4. Les nombres obtenus sont donnés dans la table III.

k	Type 3/2	Type 2
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	41	0
4	1380	488
5	31225	23320
6	592824	696912
7	10185056	16662492
8	164037704	348539072
9	2525186319	6664492800
10	37596421940	119448394500
11	545585129474	2038649084648
12	7758174844664	33485525450304
13	108518545261360	533300750150792
14	1497384373878512	8280704684511728
15	20426386710028260	125874875824299840
16	275940187259609296	1879220531953481856
17	3696482210884173349	27623679628336696672
18	49156971656519842272	400620376541743419888
19	649518488455293338528	5741857194453928418268
20	8533530692114424030920	81439444090140433607840
21	111549042221954044659210	1144400134614241780601088
22	1451544868635080958615448	15947842815693549007349256
23	188112204041009365746335 08	22057946308499247001220900 8
24	24288046398795630017854478 4	30302255722645842577060508 16
25	31253753581005796943608124 00	41371174793045515157274738000
26	40093328447290694185024851488	56164992408867494625582246 3632
27	51287695783426361711586486654 0	75854577182522764916766093978 24
28	65436964048895806381196467359 20	10195892779945673982767268542 6976
29	83289180631771031104108450159316	13644410781956154478126816263544 64

Table III. nombres de cartes pointées avec k arêtes
sur les surfaces non orientables de types 3/2 et 2

Chapitre 9

Calcul efficace des nombres de cartes pointées

L'une des motivations de ce chapitre est de proposer de nouvelles méthodes de calcul des nombres de cartes pointées sur une surface d'orientabilité et de type donnés. Ces méthodes ont pour origine les théorèmes d'énumération implicite du chapitre 5.

Plus précisément, les théorèmes 5.1, 5.2, 5.3 et leurs corollaires expriment que toutes les séries génératrices considérées sont solutions d'équations algébriques. Ce point de vue est exposé dans la section 33. On montre ensuite dans la section 34 comment ces équations algébriques se traduisent en équations différentielles. Dans la section 35, on traduit ces équations différentielles en récurrences linéaires à coefficients polynomiaux. Ces récurrences linéaires fournissent des algorithmes efficaces de calcul des nombres de cartes, qui sont décrits dans la section 35.90.

En résumé, on décrit dans ce chapitre une application pratique de la démarche d'énumération paramétrique des cartes pointées, qui est l'obtention d'algorithmes nouveaux efficaces (linéaires) de calcul des coefficients des séries génératrices. Au delà de cette application, ce travail suggère de nouvelles voies d'investigation, comme celles qui sont mentionnées dans la section 36.

33. Équations algébriques

On trouvera une définition complète et précise d'une série algébrique à la page 119 de [CR72]. Pour simplifier, on dira ici qu'une série formelle est ***algébrique*** si elle annule un polynôme dont les coefficients sont des polynômes des variables de la série. Savoir qu'une série est algébrique permet de simplifier le calcul de ses coefficients [Com64]. De plus, ceci permet d'envisager l'existence d'un langage algébrique en bijection avec la famille énumérée, comme dans le cas [CR72] des cartes planaires.

Puisqu'on connaissait une méthode algébrique de calcul des séries de cartes pointées de type fixé, on pouvait affirmer le caractère algébrique de ces séries. Mais on n'avait jamais cherché à majorer le degré d'un polynôme annulant les séries. Les théorèmes et corollaires du chapitre 5 permettent de répondre à cette question, sous la forme du théorème 9.1, dans le cas d'une énumération en nombre d'arêtes.

On aurait pu rendre ces théorèmes plus précis en donnant le degré de chaque coefficient d'un polynôme annulateur, mais on a préféré ne pas alourdir ce chapitre avec de tels résultats dont l'intérêt n'est pas flagrant.

33.82. *Énumération selon le nombre d'arêtes*

Illustrons d'abord, la méthode générale d'obtention d'une équation algébrique, avec le cas le plus simple de la série génératrice $Q_0(z)$ des cartes pointées sur la sphère, comptées selon leur nombre d'arêtes (exposant de z). Les notations sont celles des théorèmes du chapitre 8. La série formelle $Q_0(z)$, le paramètre ρ et la variable z sont liés par les deux équations algébriques suivantes :

$$3(1+\rho)^2 Q_0(z) = 4(1+2\rho) \tag{9.1}$$

$$\rho^2 = 1 - 12z \tag{9.2}$$

Il suffit d'éliminer le paramètre ρ, pour trouver :

$$27\, z^2\, Q_0(z)^2 + (1\text{-}18z)\, Q_0(z) + 16\, z - 1 = 0 \tag{9.3}$$

Le procédé est le même pour toutes les séries $Q_g(z)$, ce qui permet de démontrer la première partie du théorème 9.1 du paragraphe suivant.

Degré des équations algébriques

Le théorème 9.1 majore le degré d'une équation algébrique vérifiée par les séries génératrices de cartes pointées de type fixé, comptées selon leur nombre d'arêtes. Ce degré ne dépend que de la nature (orientable ou non) des cartes énumérées.

THÉORÈME 9.1. *Pour tout entier naturel g, la série génératrice ordinaire $Q_g(z)$ des cartes pointées orientables de genre g énumérées en fonction du nombre d'arêtes* (*exposant de z*) *est définie par une équation quadratique* (*algébrique de degré* 2) *dont les coefficients sont des polynômes de z.*

Pour tout demi-entier naturel non nul τ, la série génératrice ordinaire $N_\tau(z)$ qui dénombre les cartes pointées sur la surface non orientable de type τ en fonction du nombre d'arêtes (*exposant de z*) *est définie par une équation algébrique de degré* 4 *dont les coefficients sont des polynômes de z.*

PREUVE DU THÉORÈME 9.1.

Le cas des cartes planaires est traité à titre d'exemple au début du paragraphe 33.82. D'après le corollaire 5.1, toutes les autres séries $Q_g(z)$ de cartes pointées orientables, de genre g non nul, s'expriment comme des fractions rationnelles du paramètre ρ.

Or, d'après (9.2), ρ est une série formelle quadratique de la variable z. L'élimination de ρ s'effectue par un calcul direct : dans (5.10), on applique (9.2) pour réduire le degré de ρ jusqu'à 1, puis on résout l'équation ainsi obtenue selon ρ et on substitue la solution dans (9.2), ce qui conduit à une équation quadratique pour $Q_g(z)$.

Pour démontrer que $N_\tau(z)$ vérifie une équation de degré 4, on procède, pour toutes les valeurs de τ, comme dans le cas le plus simple des cartes pointées sur le plan projectif.

D'après le théorème 8.4, la série $N_{½}(z)$ est définie par :

$$N_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{6}\left(2\rho + 1 - \varphi\right) \tag{9.4}$$

avec

$$\varphi^2 = 3\rho\left(\rho + 2\right) \tag{9.5}$$

On élimine d'abord φ entre (9.4) et (9.5), ce qui conduit à une relation algébrique entre $N_{½}(z)$ et ρ, où le degré de $N_{½}(z)$ est 2. Puis on élimine ρ comme dans le cas de la série $Q_0(z)$. L'équation résultante est de degré 4 en $N_{½}(z)$.

Pour $\tau \geq 1$, on déduit des corollaires 5.1 et 5.2 que la série $N_\tau(z)$, égale à $S_\tau(z)$-$Q_\tau(z)$, s'exprime comme une fraction rationnelle de ρ et φ. En procédant comme pour $\tau = ½$, on obtient une équation algébrique de degré 4 vérifiée par $N_\tau(z)$. ■

Premières équations algébriques explicites

La proposition 9.1 explicite les équations algébriques vérifiées par $Q_g(z)$ et $N_\tau(z)$, pour les petites valeurs de g et τ.

PROPOSITION 9.1. *Pour* $0 \leq g \leq 3$*, les séries génératrices ordinaires* $Q_g(z)$ *énumérant les cartes pointées de genre g en fonction du nombre d'arêtes* (*exposant de z*) *vérifient les équations quadratiques suivantes* :

$$27\, z^2\, Q_0(z)^2 + (1-18z)\, Q_0(z) + 16\, z - 1 = 0, \tag{9.6}$$

$$3\,(4z+1)\,(12z-1)^2\, Q_1(z)^2 - (12z-1)\,(8z-1)\, Q_1(z) + z^2 = 0, \tag{9.7}$$

$$\begin{aligned} &(4z+1)^4\,(12z-1)^7\, Q_2(z)^2 \\ &-4\, z^2\,(12z-1)^4\,(2944z^4 - 1856z^3 + 408z^2 - 20z + 1)\, Q_2(z) \\ &+3\, z^6\,(115248z^4 - 67080z^3 + 12331z^2 - 616z + 28) = 0 \end{aligned} \tag{9.8}$$

et

$$\begin{aligned} &(4z+1)^7\,(12z-1)^{12}\, Q_3(z)^2 \\ &-4\, z^4\,(12z-1)^6\,(701300736z^8 - 1489227776z^7 + 873868288z^6 - 247100928z^5 \\ &\quad + 38015360z^4 - 3542416z^3 + 202620z^2 - 5060z + 115)\, Q_3(z) \\ &+9\, z^{10}\,(899439578112z^8 - 837913955328z^7 + 413004653184z^6 - 115854778624z^5 \\ &\quad + 19536249020z^4 - 1887518940z^3 + 122373335z^2 - 3015760z + 75900) = 0. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Pour tout demi-entier naturel non nul $\tau \leq 1$*, les séries génératrices ordinaires* $N_\tau(z)$ *énumérant pointées non orientables de type* τ *en fonction du nombre d'arêtes* (*exposant de z*) *vérifient les équations algébriques suivantes* :

$$9z^3 N_{\frac{1}{2}}(z)^4 - 6z^2 N_{\frac{1}{2}}(z)^3 + 2z(21z-1) N_{\frac{1}{2}}(z)^2 + (10z-1) N_{\frac{1}{2}}(z) + z = 0 \tag{9.10}$$

et

$$\begin{aligned}&(4z+1)^2(12z-1)^4 N_1(z)^4\\&-4(4z+1)(12z-1)^3(4z-1)N_1(z)^3\\&+16z(12z-1)^2(168z^2+46z-3)N_1(z)^2\\&-192z^2(12z-1)(28z-3)N_1(z)+2304z^4=0\end{aligned} \tag{9.11}$$

33.83. ***Énumération selon les nombres de sommets et de faces***

Les théorèmes 5.1, 5.2 et 5.3 énumèrent les séries génératrices de cartes pointées en fonction de leur nombre de sommets et de leur nombre de faces, à travers le système paramétrique (4.28). Les séries énumérées par ces théorèmes annulent un polynôme à coefficients dans les polynômes en s et f. Pour trouver ces équations algébriques, il faut passer par l'élimination de plusieurs paramètres : dans le cas des cartes pointées orientables, d'après le théorème 5.1, on obtient une équation algébrique pour $sf\,Q_g(1,s,f)$ en éliminant les paramètres p et q. Dans le cas des cartes pointées non orientables, d'après le théorème 5.3, il faut éliminer les trois paramètres p, q et a.

Le théorème 9.2 précise le degré de l'équation algébrique résultant de l'élimination des paramètres.

THÉORÈME 9.2. *Pour tout entier naturel g, la série génératrice ordinaire* $sf\,Q_g(1,s,f)$ *des cartes pointées orientables de genre g énumérées en fonction de leur nombre de sommets* (*exposant de s*) *et de leur nombre de sommets* (*exposant de f*) *est définie par une équation algébrique de degré* 4, *dont les coefficients sont des polynômes de s et f.*

Pour tout demi-entier naturel non nul τ, *la série génératrice ordinaire* $sf\,N_\tau(1,s,f)$ *qui dénombre les cartes pointées sur la surface non orientable de type* τ *en fonction de leur nombre de sommets* (*exposant de s*) *et de leur nombre de sommets* (*exposant de f*) *est définie par une équation algébrique de degré* 8, *dont les coefficients sont des polynômes de s et f.*

PREUVE DU THÉORÈME 9.2.

Les paramètres p et q sont reliés aux variables s et f par les relations algébriques :

$$s=p(1-p-2q) \tag{9.12}$$

et

$$f=q(1-2p-q)\,. \tag{9.13}$$

En extrayant p de (9.13) et en substituant dans (9.12), on obtient que q annule le polynôme suivant de $K[T]$, où K est le corps $\mathbf{Q}(s,f)$ des fractions rationnelles en s et f, à coefficients rationnels :

$$P_q(T)=3T^4-4T^3+(2f-4s+1)T^2-f^2\,. \tag{9.14}$$

On note $K(q)$ l'extension algébrique finie du corps K selon q, c'est-à-dire le plus petit corps contenant K et q. On peut considérer $K(q)$ comme un espace vectoriel de dimension finie sur K, dont la dimension est égale au degré du polynôme minimal de q sur K. Cette dimension est notée $[K(q):K]$ et s'appelle *degré* de l'extension. On admettra que le

polynôme minimal de q sur K est égal à $P_q/3$ (il doit être unitaire) donc que le degré de $K(q)$ sur K est 4 (dans tous les cas, on sait que ce degré est inférieur ou égal à 4).

D'après (9.13), p appartient à $K(q)$, donc $K(p,q) = K(q)$. Or le théorème 8.1 affirme que toutes les séries $sf\,Q_g(1,s,f)$ sont des fractions rationnelles de p et q, donc des éléments de $K(q)$. Dans l'espace vectoriel $K(q)$, de dimension inférieure ou égale à 4 sur K, ceci implique que $sf\,Q_g(1,s,f)$ satisfait une équation algébrique de degré inférieur ou égal à 4. Il en est de même pour $Q_g(1,s,f)$, ce qui établit la première partie du théorème.

Pour la seconde partie, qui concerne les cartes générales, il s'agit prendre en compte le paramètre supplémentaire a, vérifiant la relation algébrique (9.15), déduite de (5.6) :

$$a^2 = (1-2p-2q)^2 - 4pq\,. \tag{9.15}$$

Ceci revient à considérer l'extension $K(q,a)$ de $K(q)$. Soit a appartient à $K(q)$, soit $K(q,a)$ est une extension quadratique de $K(q)$. Or le théorème 8.2 affirme que toutes les séries $sf\,N_t(1,s,f)$ sont des éléments de $K(q,a)$, qui est dans tous les cas un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à 8 sur K. Il en résulte que $sf\,N_t(1,s,f)$ satisfait une équation algébrique de degré inférieur ou égal à 8, ce qui établit la seconde partie du théorème 9.2. ■

En pratique, le calcul explicite des équations algébriques annoncées dans le théorème 9.2 est lourd et requiert des outils qui mériteraient en eux-mêmes de longues explications, qu'on réserve à un futur exposé. Nous y montrerons notamment comment des méthodes plus directes permettent de se dispenser de connaître une équation algébrique pour les séries de cartes à deux variables.

34. La forme P-récursive

Nous avons vu que la série génératrice des cartes pointées sur une surface de type donné vérifie une équation algébrique. Or, ceci implique l'existence d'une relation de récurrence entre les termes de la série, de la forme :

$$\sum_{i=0}^{i=k} P_i(n)\,u_{n+i} = 0 \tag{9.16}$$

Les termes de la série sont les u_{n+i}, les P_i sont des polynômes. Il convient que le polynôme P_{n+k} ne s'annule pas sur les entiers. Cette relation permet de déduire u_{n+k} à partir des k termes précédents de la série. Cette récurrence est dite ***linéaire*** (en raison du signe somme) et ***à coefficients polynomiaux***. Le nombre de termes de cette récurrence est k+1.

Une suite de nombres est dite ***P-récursive*** si elle vérifie une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux. La série correspondante est dite ***holonome***. Elle satisfait une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux.

Toutes les séries algébriques sont holonomes (la réciproque est fausse). Une récurrence linéaire sur les termes d'une suite est synonyme d'un algorithme de calcul efficace de ces termes. L. Comtet expose cette idée dans [Com64]. Dans le cas d'une série à une variable, la traduction d'une équation algébrique en équation holonome, puis en récurrence a été implantée dans le package GFUN [SZ92] du logiciel de calcul formel *MAPLE*.

34.84. *Équations différentielles et relations de récurrence calculées*

On peut illustrer la méthode de conversion d'une équation algébrique en équation différentielle en traitant en détail le cas le plus simple : les cartes planaires pointées comptées selon leur nombre d'arêtes.

On a vu que la série génératrice ordinaire $Q_0(z)$ des cartes planaires pointées comptées selon leur nombre d'arêtes (exposant de z) vérifie l'équation quadratique (9.3), qu'on rappelle ici :

$$27\, z^2\, Q_0(z)^2 + (1-18z)\, Q_0(z) + 16\, z - 1 = 0 \tag{9.3}$$

On dérive (9.3) selon z :

$$54\, z\, Q_0(z)^2 + 54\, z^2\, Q_0(z)\, Q_0'(z) - 18\, Q_0(z) + (1-18z)\, Q_0'(z) + 16 = 0 \tag{9.17}$$

On élimine $Q_0(z)^2$ dans (9.17) à l'aide de (9.3).

$$\begin{aligned} &54\, z^3\, Q_0(z)\, Q_0'(z) \\ &+(-2+18\, z)\, Q_0(z) + (1-18z)\, z\, Q_0'(z) + 32\, z - 1 = 0 \end{aligned} \tag{9.18}$$

Puis on multiplie le résultat par $Q_0(z)$ pour éliminer encore $Q_0(z)^2$.

$$\begin{aligned} &-2\, z\, ((1-18z)\, Q_0(z) + 16\, z - 1)\, Q_0'(z) \\ &-(-2+18\, z)\, ((1-18z)\, Q_0(z) + 16\, z - 1) \\ &+(1-18z)\, z\, Q_0(z)\, Q_0'(z) + (32\, z - 1)\, Q_0(z) = 0 \end{aligned} \tag{9.19}$$

Enfin, on élimine $Q_0(z)\, Q_0'(z)$ à l'aide de (9.18), pour obtenir l'équation différentielle :

$$(6z-2)\, Q_0(z) + z\, (12z-1)\, Q_0'(z) + 2 = 0 \tag{9.20}$$

Cette équation a été obtenue indépendamment par Jean-François Béraud [Bér98], par comparaison de la solution avec les fonctions de Bessel.

On note $q_0(n)$ le n^{e} coefficient de la série $Q_0(z)$. L'équation différentielle (9.20) se traduit en une relation de récurrence sur les coefficients.

Pour tout entier naturel n, on a :

$$(3+n)\, q_0(n+1) - (6+12n)\, q_0(n) = 0 \tag{9.21}$$

avec

$$q_0(0) = 1 \tag{9.22}$$

On constate que $q_0(n)$ est une suite hypergéométrique, c'est-à-dire une suite P-récursive à 2 termes.

Par la même méthode, on obtient les résultats suivants, triés par type. Les récurrences pour le plan projectif et le tore sont données sans explication dans [BCR88b].

Si $G(z)$ est une série formelle, alors on note toujours $g(n)$ son n^{e} coefficient.

34.85. *Plan projectif*

34.85.86. *Rappel de l'équation algébrique*

$$9z^3 N_{\frac{1}{2}}(z)^4 - 6z^2 N_{\frac{1}{2}}(z)^3 + 2z(21z-1)N_{\frac{1}{2}}(z)^2 + (10z-1)N_{\frac{1}{2}}(z) + z = 0$$

34.85.87. *Équation différentielle*

$$(-6912z^5 +288z^3 -32z^2 +z)\, N_{½}^{(3)}(z)+(-41472z^4 +1728z^3 +1008z^2 -108z +3)\, N_{½}^{(2)}(z)$$
$$+(-46656z^3 +3888z^2 +288z -24)\, N_{½}^{(1)}(z)+(-5184z^2+ 648z)\, N_{½}(z) -36 = 0$$

avec

$$N_{½}^{(1)}(0) = 1 \quad \text{et} \quad N_{½}(0) = 0.$$

34.85.88. *Relation de récurrence*

$$n_{½}(0) = 0,\ n_{½}(1) = 1,\ n_{½}(2) = 10,\ n_{½}(3) = 98$$

$$(60 +47n +12n^2 +n^3)\, n_{½}(n+4)-(912 +916n +300n^2 +32n^3)\, n_{½}(n+3)$$
$$+(2592 +3888n +1872n^2 +288n^3)\, n_{½}(n+2)+(4536 +5616n +1728n^2)\, n_{½}(n+1)$$
$$-(5184 +19008n +20736n^2 +912\, n^3)\, n_{½}(n) = 0$$

34.86. *Tore*

34.86.89. *Rappel de l'équation quadratique*

Sous forme développée, l'équation (9.7) s'écrit :

$$(1728\, z^3 +144\, z^2 -60\, z +3)\, Q_1(z)^2 + (-96\, z^2 +20\, z -1)\, Q_1(z) + z^2 = 0$$

34.86.90. *Équation différentielle*

$$Q_1(0) = 0,\ Q_1^{(1)}(0) = 0$$
$$(1152z^4 -480z^3 -88z^2 +22z -1)\, Q_1^{(1)}(z)+(576z^3 -1056z^2 +84z)\, Q_1(z) +16z^2 +2z = 0$$

34.86.91. *Relation de récurrence*

$$q_1(0) = 0,\ q_1(1) = 0,\ q_1(2) = 1,\ q_1(3) = 20$$

$$(-n -4)\, q_1(n+4) +(22n +66)\, q_1(n +3) +(-92 -88n)\, q_1(n+2)$$
$$+(-1536 -480n)\, q_1(n+1) +(576 +1152n)\, q_1(n) = 0$$

34.87. *Bouteille de Klein*

34.87.92. *Rappel de l'équation algébrique*

Sous forme développée, l'équation (9.11) s'écrit :

$$\left(331776z^6+55296z^5-20736z^4-768z^3+496z^2-40z+1\right)N_1(z)^4$$
$$+\left(-110592z^5+27648z^4+4608z^3-1664z^2+144z-4\right)N_1(z)^3$$
$$+\left(387072z^5+41472z^4-21888z^3+1888z^2-48z\right)N_1(z)^2$$
$$+\left(-64512z^4+12288z^3-576z^2\right)N_1(z)+2304z^4=0$$

34.87.93. *Équation différentielle*

$$N_1(0)=0,\quad N_1^{(1)}(0)=0,\quad N_1^{(2)}(0)=8$$

$$(63700992z^8+46448640z^7-3649536z^6-3326976z^5$$
$$+364800z^4+58944z^3-12560z^2+788z-17)\,N_1^{(3)}(z)$$
$$+(445906944z^7+313196544z^6-45785088z^5-14469120z^4$$
$$+2519040z^3-26112z^2-12192z+504)\,N_1^{(2)}(z)$$
$$+(621084672z^6+430977024z^5-109983744z^4-6815232z^3+2559744z^2-148944z+1944)N_1^{(1)}(z)$$
$$+(95551488z^5+67682304z^4-26832384z^3+1399680z^2+122976z-8088)\,N_1(z)$$
$$1327104z^4+1299456z^3-362880z^2-22464z+4536=0$$

34.87.94. *Relation de récurrence*

$$(-5712-2482n-357n^2-17n^3)\,n_1(n+8)+(186648+90868n+14688n^2+788n^3)\,n_1(n+7)$$
$$+(-1861296-1061608n-200592n^2-12560n^3)\,n_1(n+6)$$
$$+(2261592+2386416n+681216n^2+58944n^3)\,n_1(n+5)$$
$$+(49345632+29677824n+5802240n^2+364800n^3)\,n_1(n+4)$$
$$+(-125822592-115757568n-34430976n^2-3326976n^3)\,n_1(n+3)$$
$$+(-338370048-254638080n-56733696n^2-3649536n^3)\,n_1(n+2)$$
$$+(498659328+697724928n+313196544n^2+46448640n^3)\,n_1(n+1)$$
$$(95551488+302579712n+254803968n^2+63700992n^3)\,n_1(n)=0$$

avec

$$n_1(0)=0,\ n_1(1)=0,\ n_1(2)=4,\ n_1(3)=84,\ n_1(4)=1340,$$
$$n_1(5)=19280,\ n_1(6)=263284,\ n_1(7)=3486224$$

35. Nouvelles méthodes d'énumération

Les récurrences linéaires explicitées dans le paragraphe précédent permettent d'obtenir le n^{e} terme de la suite en O(n) opérations.

Dans le paragraphe 35.88, on précise cette évaluation en montrant comment le coût du calcul dépend du genre (ou du type) des cartes énumérées. L'efficacité linéaire (en nombre d'opérations) des récurrences suggère une nouvelle méthode d'énumération, exposée dans le paragraphe 35.89.

Toutefois, cette méthode est conditionnée par la connaissance d'un nombre suffisamment important de premiers termes de la suite. C'est là que réside toute la complexité (en coût) de l'énumération.

Dans le paragraphe 35.90, on propose une seconde méthode qui requiert un nombre moins important de premiers termes. Le paragraphe 35.91 conclut sur l'intérêt de coupler ces deux méthodes.

35.88. ***Le coût du calcul***

Cependant, on constate que le nombre de termes de ces récurrences croît avec le type de la surface. Selon quelle fonction ? La conjecture suivante apporte un élément de réponse à cette question.

CONJECTURE 9.1. *Pour toute surface orientable de genre g non nul, il existe une récurrence linéaire à* 6*g*-1 *termes qui définit la suite des nombres de cartes pointées sur cette surface, comptées selon leur nombre d'arêtes. De plus, les coefficients de cette récurrence sont des polynômes de degré au plus* 1.

La conjecture 9.1 a été déduite de calculs effectués pour les genres de 1 à 6. À ce jour, on ne dispose pas de tous les éléments d'une preuve de cette conjecture. La recherche d'une démonstration est un nouveau sujet de recherche mis à jour par ce travail.

Lorsqu'une telle démonstration aura été bâtie, on pourra sans doute énoncer et démontrer des résultats analogues pour les cartes non orientables, et pour les énumérations selon les nombres de sommets et de faces.

Le coût d'un algorithme fondé sur une récurrence linéaire ne dépend pas que du nombre de termes de la récurrence, mais aussi du degré de ses coefficients polynomiaux. C'est pourquoi la conjecture 9.1 n'omet pas de majorer ce degré (par 1). La connaissance de cette information suggère une nouvelle méthode d'énumération des cartes, exposée dans le paragraphe 35.89.

35.89. ***Méthode par détermination des coefficients de la récurrence***

On reprend l'écriture

$$\sum_{i=0}^{i=k} P_i(n) u_{n+i} = 0 \qquad (9.16)$$

d'une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux.

Si cette récurrence est connue, elle constitue le moyen le plus rapide d'obtenir la valeur exacte d'un terme. Mais on ne connaît pas à ce jour la forme générale des récurrences sur les nombres de cartes pointées de type donné.

On propose donc ici une méthode de détermination de cette récurrence, lorsqu'on ne connaît que son nombre de termes (k+1) et un majorant du degré de chaque polynôme P_i. Il s'agit de considérer les coefficients des polynômes comme des inconnues. On appelle alors ***taille*** de cette récurrence le nombre de ses coefficients inconnus.

On calcule alors un nombre de termes initiaux consécutifs de la suite solution égal à cette taille. Puis, on écrit le système dont les inconnues sont les coefficients des polynômes et dont les équations sont déduites des termes initiaux calculés. Si ce système est inversible, on détermine la récurrence en inversant le système.

La réussite de cette méthode est conditionnée par l'inversibilité d'un système linéaire, qu'on peut sans doute établir en utilisant un nombre " assez grand " (supérieur à la taille) de termes initiaux. Mais le calcul de chaque terme est coûteux, de sorte qu'on s'attachera à trouver des conditions minimales d'inversibilité.

35.90. ***Méthode d'énumération paramétrique***

Il s'agit d'exploiter les théorèmes d'énumération paramétrique du chapitre 5.

On ne traite ici, à titre d'exemple, que le cas des cartes pointées sur une surface orientable autre que la sphère, comptées selon leur nombre d'arêtes. Le corollaire 5.1 peut s'écrire en fonction du paramètre m défini par (8.12), (8.13) et (8.14), pour donner le corollaire 9.1.

COROLLAIRE 9.1. *Pour $g \geq 1$, la série $Q_g(z)$ qui dénombre les cartes pointées orientables de genre g en fonction du nombre d'arêtes est définie par* :

$$z = m(1-3m)$$

$$Q_g(z) = z^{2g} \frac{P_g(m)}{(1-3m)^2 (1-2m)^{5g-4} (1-6m)^{5g-3}} \tag{9.23}$$

où P_g est un polynôme de degré inférieur ou égal à $6g$-6.

Nous allons montrer comment déterminer les coefficients $p_g(i)$ du polynôme P_g à partir des nombres $q_g(k)$ de cartes pointées orientables de genre g à k arêtes.

Les coefficients $p_g(i)$ de P_g sont définis par :

$$P_g(m) = \sum_{i=0}^{i=6g-6} p_g(i)\, m^i \tag{9.24}$$

et le nombre $q_g(k)$ de cartes pointées orientables de genre g à k arêtes est défini par :

$$Q_g(z) = \sum_{k \geq 2g} q_g(k)\, z^k \tag{9.25}$$

En effet, pour $k < 2g$, le nombre $q_g(k)$ de cartes orientables de genre g avec k arêtes est nul, ce qu'on peut déduire, par exemple, de la formule d'Euler-Poincaré.

(9.23) s'écrit :

$$(1-3m)^2 (1-2m)^{5g-4} (1-6m)^{5g-3} \frac{\sum_{k \geq 2g} q_g(k) z^k}{z^{2g}} = \sum_{i=0}^{i=6g-6} p_g(i) m^i \tag{9.26}$$

On substitue (8.14) dans (9.26) et on s'intéresse à un degré particulier i de m. Si i est inférieur ou égal à 6g-6, alors on obtient la relation suivante entre les coefficients de P_g et les premiers nombres de cartes non nuls, de $q_g(2g)$ à $q_g(8g\text{-}6)$.

$$p_g(i) = [m^i] \sum_{j=0}^{5g-4} \binom{j}{5g-4} (-2m)^j \sum_{p=0}^{5g-3} \binom{p}{5g-3} (-6m)^p \sum_{k \geq 2g} q_g(k) m^{k-2g} (1-3m)^{k-2g+2} \qquad (9.27)$$

Au passage, la relation (9.27) montre que les coefficients du polynôme P_g sont des entiers.

La méthode d'énumération est la suivante :

On détermine le polynôme P_g en appliquant la relation (9.27), ce qui nécessite de connaître les 6g-5 premiers nombres de cartes non nuls. Ensuite, la formule d'énumération paramétrique (9.23) permet d'obtenir les termes suivants, par développement limité, par inversion de Lagrange ou tout autre procédé (comme ceux du présent chapitre).

Le nombre de termes nécessaires à la détermination du polynôme ne dépend que de son degré. Par conséquent, la méthode est améliorée par tout résultat permettant de réduire ce degré, par exemple la connaissance d'un facteur explicite. On comprend alors l'intérêt du facteur $pq(1\text{-}p\text{-}q)$ du théorème 5.1.

35.91. *Méthode couplée*

La méthode de calcul par récurrence linéaire du paragraphe 35.89 est plus efficace que la méthode paramétrique du paragraphe 35.90. Toutefois, la seconde peut, dans certains cas, se révéler moins gourmande en premiers termes. De plus, si elle aboutit, elle offre une information complète sur la série, qui doit permettre d'en déduire une récurrence linéaire. Ce travail reste à faire.

Toute autre méthode d'obtention des premiers termes de la suite est bonne à prendre. On pense notamment à la plus élémentaire (et à la moins efficace) d'entre elles, qui est la méthode directe par un développement limité des séries, qu'on substitue itérativement dans (4.21), par exemple, pour obtenir le coefficient suivant. Une méthode plus rapide est exposée dans la série d'articles " Counting rooted maps by genus " [WL72a, WL72b, WL75]. Elle pourra être mise à contribution.

36. Conclusion

Que faut-il appeler " résultat " dans ce travail de recherche ? Que doit-on au contraire considérer comme simple étape pour accéder au résultat suivant ?

Il est préférable d'adopter le point de vue d'un cheminement par le calcul, dont les étapes les plus significatives sont appelées " résultats ". Chaque étape est ainsi justifiée par l'étape suivante.

Comme étape finale, le présent chapitre propose une famille de méthodes de calculs directement exploitables. Si l'objectif visé était l'énumération exacte des cartes pointées de type fixé, alors la réponse est claire : la complexité de l'énumération croît toujours fortement avec le type des cartes. On pourra mesurer plus précisément cette complexité.

Pour des surfaces avec un grand nombre de trous, il faudra chercher d'autres voies que celle proposée ici. D'autres applications, telles que l'énumération asymptotique, méritent d'être approfondies à la lumière des présents résultats.

L'étape précédente de nos calculs a mis à jour de nouvelles équations algébriques et différentielles sur les séries génératrices de cartes. Ces équations sont issues de calculs longs. Peut-on les obtenir plus directement ? L'idéal serait une interprétation topologique de ces équations. Sinon, on apprécierait une interprétation à travers la définition combinatoire des cartes. Comme on l'a vu dans le cas simple des nombres de Schröder, il sera peut être utile de passer par une autre famille d'objets en bijection avec les cartes.

La première étape fut une démarche originale de conversion d'une méthode de calcul en preuve formelle. Parce que cette preuve était considérée comme une étape vers des calculs ultérieurs, l'accent n'a été mis sur son élégance, mais sur sa justesse démonstrative. Il est certainement possible de simplifier considérablement cette démonstration, en mettant en place des outils appropriés. Toute simplification peut être précieuse, avant de chercher à généraliser cette démarche à d'autres problèmes où elle s'applique.

Même si le calcul formel a occupé une place importante dans le chemin suivi, certaines considérations topologiques et astuces de calcul montrent que la démarche complète ne peut pas se passer d'intervention humaine, ce qui garantit à l'ensemble de ce travail de nombreuses possibilités d'extension à des sujets voisins.

Dans le domaine précis du sujet de cette thèse, les réponses données suggèrent de nouvelles questions, qui ouvrent ainsi la porte à de nouvelles recherches.

Partie 4

Outil logiciel de calcul sur les cartes

Chapitre 10

MAP, Une boîte à outils pour les cartes

Il est toujours prudent de confronter un nouveau résultat à des travaux antérieurs, évalués et validés par la communauté scientifique. Or, en combinatoire des cartes, les résultats d'énumération sont nombreux, ils impliquent de grands nombres et des formules lourdes, qui utilisent de plus des systèmes de notations très variés.

Sur ce constat, nous avons choisi de développer, Jean-François Béraud et moi-même, les outils logiciels de manipulation des séries génératrices de cartes pointées correspondants à nos travaux de thèse respectifs.

Nous avons programmé conjointement une boîte à outils, ou librairie (*package*, en anglais) en langage *Maple*, qui se veut relativement simple d'utilisation, tout en regroupant des fonctions précieuses pour l'énumération des cartes pointées. Nous avons également rédigé en commun l'essentiel du présent chapitre.

Installation de la librairie MAP

La librairie `MAP` peut a priori être utilisée sur n'importe quel système informatique muni de *Maple V* (version 4 ou 5). Cette librairie a été développée à la fois sur un système *Unix* et sur un système *Windows NT*, il se pourrait donc qu'il ne soit pas trivial de l'installer sur un système d'un autre type (*Macintosh* par exemple). Néanmoins, elle a été écrite en pensant aux problèmes de compatibilité, particulièrement au niveau du source *Maple*, ce qui devrait limiter les problèmes.

On suppose que la librairie `MAP` a été compilée conformément aux instructions données dans le fichier `README.TXT`. Vous devez maintenant être capable de dire où la librairie a été installée. Nous supposerons qu'il s'agit du répertoire `/people/roger/maple/lib`.

Maple doit savoir où les librairies se trouvent. Pour cela, vous devez créer, ou modifier s'il existe déjà, le fichier `.mapleinit` dans votre répertoire personnel (il s'agit du répertoire dont le nom est la valeur de la variable `HOME`). Dans ce fichier `.mapleinit`, vous devez insérer les lignes suivantes :

```
MAPLib := `/people/roger/maple/lib`:
libname := libname, MAPLib:
```

Ce fichier est lu chaque fois que le logiciel *Maple* est exécuté, pour préciser où se trouvent les librairies. Notez que la variable `libname` contient en fait la liste des emplacements de toutes les librairies, et il est donc possible qu'elle contienne plus d'un emplacement (la liste doit contenir au moins l'emplacement de notre librairie `MAP`).

Vous êtes désormais prêt à lancer la librairie `MAP`. Au cours d'une session *Maple*, vous devez taper

```
with(MAP);
```

Pour accéder à la documentation de la librairie pendant une session *Maple*, tapez

```
?MAP
```

Pour accéder à la documentation liée à chaque fonction de `MAP`, utilisez soit

```
?MAP[<fonction>]
```

soit

```
?MAP,<fonction>
```

Description générale

Dans cette librairie, les fonctions peuvent être regroupées en trois grandes familles, correspondant à nos trois motivations majeures lors de la conception de cet outil. Ces familles sont présentées dans les paragraphes qui suivent.

Un catalogue de résultats

À la recherche de nouveaux résultats (tables de valeurs, formules, théorèmes…), les spécialistes de la combinatoire des cartes apprécieront probablement de disposer d'un outil logiciel de vérification rapide de leurs conjectures. Ayant effectué la vérification systématique de nos propres résultats, nous avons été sensibles à ce besoin. C'est pourquoi nous avons stocké dans la librairie `MAP` les résultats d'énumération des cartes pointées antérieurs à nos travaux, pour comparaison, puis les résultats nouveaux que nous avons établis, après les avoir contrôlés (lorsqu'ils recoupaient des résultats connus). Nous avons également mis au point des outils permettant de présenter ces résultats sous divers aspects.

En résumé, la librairie `MAP` fournit aux spécialistes de la combinatoire des cartes un accès pratique aux résultats connus dans ce domaine à ce jour, sous diverses formes, selon des besoins d'exploitation que nous avons tenté d'anticiper.

Des outils de manipulation

Nous avons eu recours à l'outil informatique pour la quasi totalité de nos calculs algébriques, ceci afin de réduire les risques d'erreurs de calcul et d'accélérer le rythme d'obtention des résultats. Ainsi, nous avons traduit les calculs exposés dans le présent document en fonctions *Maple* réutilisables. Nous mettons une sélection des fonctions les plus utiles à la disposition de l'utilisateur, pour lui permettre de reproduire nos calculs et de les comprendre de manière algorithmique.

On retrouve le concept de cartes dans de nombreux domaines scientifiques (physique quantique, chimie moléculaire, théorie des nœuds). Nous avons essayé d'apporter aux spécialistes de ces domaines des fonctions simples, aux noms et aux options explicites, pour leur permettre l'investigation de l'aspect dénombrement des cartes.

Ces outils de manipulation peuvent être organisés en deux groupes principaux : il s'agit des outils de conversion, et des outils de vérification.

Outils de conversion

Certaines formules d'énumération de cartes pointées s'expriment implicitement dans un système paramétrique. Historiquement, plusieurs systèmes ont été proposés. Nous offrons à l'utilisateur la possibilité de convertir chaque formule dans le système paramétrique de son choix.

Outils de vérification

Le calcul des premiers termes d'une série à partir d'une formule écrite à l'intérieur d'un système paramétrique est quelquefois aisé (dans le cas de séries à une variable) mais peut également être beaucoup plus difficile à effectuer.

En effet, un simple développement de Taylor ne suffit pas toujours, et nous pouvons avoir besoin d'une inversion de Lagrange à 1 et 2 variables (la généralisation à un nombre quelconque de variables est envisagée pour une version ultérieure, mais ne nous a jamais été nécessaire).

Des outils d'investigation

Notre travail de recherche n'aurait pas pu être mené à bien dans les mêmes délais si nous n'avions pu confier à un ordinateur une importante charge de calculs. La puissance de calcul dont nous disposions nous a permis d'expliciter certains résultats, qui requéraient des calculs intensifs. D'autres résultats restent néanmoins hors de notre portée à l'heure actuelle, par la lourdeur des calculs qu'ils impliquent.

Compte tenu de la rapidité d'accroissement de la puissance des systèmes informatiques, ces calculs pourraient prochainement devenir accessibles. C'est pourquoi nous fournissons à l'utilisateur les moyens de poursuivre nos calculs au delà de leurs limites actuelles. Il se pourrait qu'il obtienne ainsi des résultats nouveaux éclairant la théorie de l'énumération des cartes.

Dans l'avenir, le spécialiste de la combinatoire des cartes trouvera sans doute d'autres méthodes que les nôtres pour énumérer les cartes pointées. Il pourra alors les confronter aux méthodes de calcul fournies ici, pour évaluer leur efficacité respective.

Principales fonctions

Cette section décrit quelques fonctions de la librairie. Les explications ne sont pas du tout exhaustives, le but étant ici de présenter la librairie et de fournir quelques exemples d'utilisation.

Consultation du catalogue de résultats

Notre catalogue dispose d'un générateur automatique d'équations dites de Tutte, liées à l'opération topologique de suppression du brin pointé (par dualité, de contraction). La visualisation de ces équations peut être utile pour aborder les problèmes d'énumération des cartes pointées.

`TutteEq` Étant donné un type et un nombre de pointages, cette fonction construit l'équation fonctionnelle de Tutte dont la série génératrice de la famille de cartes en question est solution.

```
    |\^/|     Maple V Release 4 (U-Marne La Valle)
._|\|   |/|_. Copyright (c) 1981-1996 by Waterloo Maple Inc. All rights
 \  MAPLE  /  reserved. Maple and Maple V are registered trademarks of
 <____ ____>  Waterloo Maple Inc.
      |       Type ? for help.
> with(MAP):
> TutteEq(1,1);
Q[1][1](u[1], x, y, z) =

          2
    z u[1]  Q[0][1](u[1], x, y, z) Q[1][1](u[1], x, y, z)
  2 ------------------------------------------------------
                              x

          2
    z u[1]  Q[0][2](u[1], v[1], x, y, z)
  + ------------------------------------
                     x

    z u[1] x (u[1] Q[1][1](u[1], x, y, z) - Q[1][1](1, x, y, z))
  + ------------------------------------------------------------
                              u[1] - 1
```

On se rend compte que l'équation de Tutte ci-dessus, pour laquelle la famille des cartes pointées sur le tore est solution, fait appel à d'autres familles de cartes, de type inférieur à un. Pour obtenir le système complet des équations de Tutte, il suffit d'ajouter l'option `` `system` `` en argument de la fonction `TutteEq`.

```
> TutteEq (1,1,`system`);
                                      2
                              z u[1]  %1 Q[1][1](u[1], x, y, z)
{Q[1][1](u[1], x, y, z) = 2 ---------------------------------
                                           x

            2
      z u[1]  Q[0][2](u[1], v[1], x, y, z)
    + ------------------------------------
                       x

      z u[1] x (u[1] Q[1][1](u[1], x, y, z) - Q[1][1](1, x, y, z))
    + ------------------------------------------------------------,
                              u[1] - 1
```

```
%1 =

             2   2
       z u[1]  %1    z u[1] x (u[1] %1 - Q[0][1](1, x, y, z))
x y + ----------- + ---------------------------------------,
            x                        u[1] - 1

Q[0][2](u[1], u[2], x, y, z) =

      2
z u[1]  Q[0][2](u[1], u[2], x, y, z) %1
---------------------------------------- + z u[1] x
                   x

(u[1] Q[0][2](u[1], u[2], x, y, z) - Q[0][2](1, u[2], x, y, z))/

(u[1] - 1) +

             /  d   u[2] (u[1] %1 - u[2] Q[0][1](u[2], x, y, z))\
z u[1] u[2] |----- ----------------------------------------------|
             \du[2]                 u[1] - u[2]                 /

}

%1 := Q[0][1](u[1], x, y, z)
```

Ce système d'équations a été utilisé par exemple par D. Arquès dans [Arq87a] pour énumérer les cartes pointées sur le tore. La librairie `MAP` fournit directement la solution de ces équations.

`MapFormula` Étant donné un type passé en argument, cette fonction renvoie la forme paramétrée par les variables p et q de la série génératrice des cartes (orientables, par défaut) du type considéré.

Ainsi, on obtient l'expression de la série génératrice ordinaire des cartes pointées sur le tore par :

```
> Q1pq := MapFormula(1);
                                  p q (1 - p - q)
                    Q1pq := --------------------------
                                          2         2
                            ((1 - 2 p - 2 q)  - 4 p q)
```

Pour obtenir la série des cartes pointées sur le tore en fonction de la variable z, dont l'exposant compte le nombre d'arêtes, on utilise un changement de paramètre.

`pq2z` Étant donné une expression paramétrée par les variables p et q et le type de la famille de cartes correspondante, cette fonction renvoie l'expression de la série génératrice de cette même famille de cartes, paramétrée cette fois par la variable z (dont l'exposant compte le nombre d'arêtes).

```
> Q1z := pq2z(Q1pq, 1);
                                 1/2       2                   1/2    /
Q1z := - 1/2 (-1 + (1 - 12 z)    + 2 z)  (-5 + (1 - 12 z)   )  /  (
                                                              /

                            1/2
  (12 z - 1 + 5 (1 - 12 z)   )

                    1/2                           1/2         2
  (1 + 7 (1 - 12 z)    - 14 z + 16 (1 - 12 z)    z + 24 z ))
```

Pour obtenir ensuite les premiers coefficients de la série, on effectue un simple développement en série (fonction standard `series` de *Maple*).

```
> series(Q1z, z, 11);

 2       3        4         5          6           7            8
z  + 20 z  + 307 z  + 4280 z  + 56914 z  + 736568 z  + 9370183 z  +

             9               10      11
  117822512 z  + 1469283166 z   + O(z  )
```

Les coefficients de cette série sont ceux de la table 2 de l'article [BCR88b].

On peut appliquer la même méthode pour énumérer les cartes pointées sur le plan projectif par exemple, selon leur nombre d'arêtes :

```
> series(pq2z(MapFormula(1/2,nonorientable),1/2),z,9);

         2       3        4          5           6            7
  z + 10 z  + 98 z  + 982 z  + 10062 z  + 105024 z  + 1112757 z  +

                  8      9
        11934910 z  + O(z )
```

On peut également utiliser ces fonctions pour obtenir les résultats concernant les cartes pointées indépendamment du type (avec l'option `` `typeless` `` en lieu et place du type). Ici par exemple, on commence par afficher l'équation fonctionnelle dont la série génératrice des cartes pointées localement orientables (avec l'option `` `all` ``) indépendamment du type est solution. On donne les premiers niveaux de la fraction continue solution, puis on calcule les premiers termes de cette série génératrice :

```
> TutteEq(`typeless`,1,`all`);
                                 2                     2 /d         \
         S(y, z) = y + z S(y, z)  + 2 z S(y, z) + 4 z  |-- S(y, z)|
                                                       \dz        /
```

```
> Syz := MapFormula(`typeless`,`all`,10);
                                        y
         Syz := ---------------------------------------------------
                                    (y + 2) z
                1 - ---------------------------------------------
                                     (y + 4) z
                    1 - -----------------------------------------
                                      (y + 6) z
                        1 - -------------------------------------
                                       (y + 8) z
                            1 - ---------------------------------
                                        (y + 10) z
                                1 - -----------------------------
                                         (y + 12) z
                                    1 - -------------------------
                                           (y + 14) z
                                        1 - ---------------------
                                              (y + 16) z
                                            1 - -----------------
                                                  (y + 18) z
                                                1 - -------------
                                                    1 - (y + 20) z


> SeriesSyz := expand(series(Syz,z,10));
                      2                 3       2          2
SeriesSyz := y + (y  + 2 y) z + (2 y  + 10 y  + 12 y) z  +

        4       3        2           3
    (5 y  + 44 y  + 128 y  + 120 y) z  +

         5        4        3         2            4
    (13 y  + 166 y  + 796 y  + 1680 y  + 1296 y) z  +

                       2          3         4        5       6   5
    (14112 y + 21552 y  + 12920 y  + 3840 y  + 570 y  + 34 y ) z  +

                      2           3          4          5
    (153792 y + 270432 y  + 195408 y  + 74800 y  + 16080 y

             6       7   6                            2            3
     + 1848 y  + 89 y ) z  + (1676160 y + 3335040 y  + 2814624 y

               4           5          6         7        8   7
     + 1312832 y  + 366880 y  + 61608 y  + 5770 y  + 233 y ) z  + (

                           2             3             4
    18268416 y + 40573440 y  + 39118464 y  + 21466560 y

               5            6           7          8        9   8
     + 7354288 y  + 1614320 y  + 222132 y  + 17546 y  + 610 y ) z

                                 2              3              4
     + (199107072 y + 488256768 y  + 529009920 y  + 333348096 y

                  5             6            7           8
     + 134931296 y  + 36447536 y  + 6579560 y  + 766384 y
```

```
              9          10   9      10
     + 52324 y  + 1597 y  ) z  + O(z  )
```

```
> subs(y=1, SeriesSyz);
               2        3         4           5            6
7
1 + 3 z + 24 z  + 297 z  + 4896 z  + 100278 z  + 2450304 z  + 69533397 z

                  8                9      10
   + 2247492096 z  + 81528066378 z  + O(z  )
```

Il existe d'autres options à ces fonctions, qui sont documentées dans les pages d'aide de la librairie `MAP`.

Changement de paramètres

Dans l'expression de la `série des cartes pointées sur le tore en fonction de la variable z, un radical apparaît,` qui peut s'avérer embarrassant pour certaines applications. On préfère parfois écrire cette série sous une forme paramétrique qui ne fait pas apparaître de radical. Les paramètres *m* et ρ permettent une telle écriture.

`z2m` Étant donné une expression paramétrée par la variable *z*, cette fonction renvoie l'expression équivalente, selon le paramètre *m*.

On peut d'abord utiliser cette fonction pour retrouver la relation entre *m* et *z* :

```
> z = z2m(z);
```

```
                          z = -m (-1 + 3 m)
```

Ensuite, pour la série des cartes pointées sur le tore, on obtient :

```
> z2m(Q1z);
```

```
                           2             2 2                      2
  1/2 (-1 + sqrt((-1 + 6 m) ) + 2 m - 6 m )  (-5 + sqrt((-1 + 6 m) ))

           /              2                          2
          /  ((12 m - 36 m  - 1 + 5 sqrt((-1 + 6 m) )) (-1
         /

                         2               2
         - 7 sqrt((-1 + 6 m) ) + 14 m - 66 m

                        2                          2   2        3
         - 16 sqrt((-1 + 6 m) ) m + 48 sqrt((-1 + 6 m) ) m  + 144 m

                4
         - 216 m ))
```

Maple ne sait pas si l'expression sous la racine est positive ou non, donc ne fait pas la simplification espérée. Il faut compléter la définition de *m*, sachant que *m* est nul si *z* est nul.

```
> assume(1-6*m,positive): z2m(Q1z);
```

$$-\frac{m\tilde{}^2}{(12\,m\tilde{}^2 - 8\,m\tilde{} + 1)\,(-1 + 6\,m\tilde{})}$$

On obtient une fraction rationnelle du paramètre *m*.

À présent, on veut une formule d'énumération des cartes pointées sur le tore en fonction de deux variables : la variable *x* dont l'exposant compte le nombre de faces et la variable *y* dont l'exposant compte le nombre de sommets. Ceci revient à passer du système paramétrique (*p*,*q*) au système (*x*,*y*).

Pour retrouver les relations algébriques qui lient ces deux systèmes, on écrit :

```
> x = xy2pq(x), y = xy2pq(y);
```

$$x = -q\,(-1 + 2\,p + q),\ y = -p\,(-1 + p + 2\,q)$$

Mais l'inversion de ce système conduirait à des formules peu lisibles. On ne propose donc pas d'outil calculant ce genre de formule. En revanche, on propose une fonction qui délivre les premiers coefficients de la série en *x* et *y*. Le principe de cette fonction est une inversion de Lagrange à 2 variables.

`pq2xy` Étant donnée une expression paramétrée par les variables *p* et *q*, et deux entiers, cette fonction renvoie les premiers termes de l'expression (considérée comme une série des variables *x* et *y*). Le premier entier donné est le degré maximal de *y*, le second est le degré maximal de *x* dans ce développement limité.

```
> pq2xy(Q1pq,5,3);
```

$$2278660\,x^3y^5 + 256116\,x^3y^4 + 100156\,x^2y^5 + 24164\,x^3y^3 + 14065\,x^2y^4 + 2310\,xy^5 + 1720\,x^3y^2 + 1720\,x^2y^3 + 420\,xy^4 + 70\,x^3y + 167\,x^2y^2 + 70\,xy^3 + 10\,x^2y + 10\,xy^2 + xy$$

Les autres fonctions de conversion sont documentées dans les pages d'aide.

Poursuite des calculs

Plusieurs méthodes permettent d'obtenir des nombres de cartes pointées. On peut prendre conscience de leur efficacité respective, avant de s'engager dans des calculs lourds.

Voici d'abord comment évaluer le temps de calcul requis pour obtenir les 50 premiers nombres de cartes pointées sur le tore à deux trous, par un développement en série.

```
> Q2z := pq2z(MapFormula(2),2):
> st := time(): series(Q2z,z,50): time()-st;
```

3.520

Voici ensuite une fonction dont l'intérêt principal est son efficacité pour le calcul de nombres de cartes pointées.

`MapProc` Étant donné un type, cette fonction renvoie (pour les petites valeurs de ce type) une procédure *Maple* de calcul rapide du nombre de cartes pointées sur la surface (orientable, par défaut) de ce type.

Pour les cartes pointées sur le tore à deux trous, on a :

```
> p2 := MapProc(2):
```

Orientable rooted maps of genus 2

Dans cette version de la librairie `MAP`, la procédure renvoyée par `MapProc` admet un unique paramètre, qui est le nombre d'arêtes. Ainsi, on obtient le nombre de cartes pointées sur le tore à deux trous de 0 à 50 arêtes, par :

```
> st := time(): seq(p2(n),n=0..50): time()-st;
```

1.050

Pourquoi le calcul de ces nombres est-il plus rapide qu'un développement en série ? C'est parce que la procédure est la traduction d'une récurrence linéaire entre ces nombres.

`MapRec` Étant donné un type, cette fonction renvoie (pour les petites valeurs de ce type) une récurrence linéaire vérifiée par les nombres de cartes pointées sur la surface (orientable, par défaut) de ce type.

Pour le tore à 2 trous, on a :

```
> MapRec(2,f,n);

{f(6) = 27954, f(7) = 650076, f(8) = 13271982, f(9) = 248371380,

 f(5) = 966, (390168576+780337152*n)*f(n)

 +(-4827340800-1735852032*n)*f(n+1)+(4717688832+744062976*n)*f(n+2)

 +(-1568337408-63516672*n)*f(n+3)+(208089216-28998144*n)*f(n+4)

 +(-2368032+9131776*n)*f(n+5)+(-2709400-1223680*n)*f(n+6)

 +(380678+95344*n)*f(n+7)+(-26172-4673*n)*f(n+8)

 +(980+140*n)*f(n+9)+(-16-2*n)*f(n+10), f(3) = 0,

 f(4) = 21, f(1) = 0, f(2) = 0, f(0) = 0}
```

Pour l'utilisateur qui souhaite pousser les calculs au delà des limites actuelles, voici des fonctions d'investigation.

`ComputeFormula` Étant donné un type, cette fonction tente de calculer la forme paramétrée par les variables p et q de la série génératrice des cartes (orientables, par défaut) du type considéré. Attention : il est possible que la fonction sature les ressources du logiciel ou de la machine sans trouver la solution.

Ainsi, pour obtenir l'expression de la série génératrice ordinaire des cartes pointées générales de type 5/2, on écrirait :

```
> ComputeFormula(5/2,nonorientable)
```

Comme le calcul est long et le résultat peu lisible, il est préférable d'évaluer le temps de calcul et de n'afficher le résultat qu'ensuite. On écrirait alors :

```
> st := time(): N5d2 := ComputeFormula(5/2,nonorientable): time()-st;
                                  829.480
```

Ici, le calcul a réussi après plus de 800 secondes. Nous laissons à l'utilisateur le plaisir d'effectuer le calcul à son tour pour découvrir le résultat.

Puisqu'on a montré dans [AG97a] et [AG98a] que la connaissance des séries de cartes pointées se ramène à celle d'un polynôme, il " suffit " de déterminer les premiers termes de ces séries pour obtenir les coefficients du polynôme inconnu, ce qui détermine la série. La fonction suivante offre cette possibilité, par un calcul direct sur les équations de [BC86] et [BCR93].

`BenderSeries` Étant donné un type, un nombre de pointages et un degré, cette fonction renvoie le développement de la série génératrice des cartes pointées de ce type, jusqu'au degré de z donné. L'exposant de v est le degré du premier sommet pointé (par dualité, de la face pointée), l'exposant de x est le nombre de faces (par dualité, le nombre de sommets), l'exposant de y est le nombre de sommets (par dualité, le nombre de faces), l'exposant de z est le nombre d'arêtes. L'option z accélère les calculs, en posant $x = y = 1$ avant tout calcul.

```
> st := time(): Q2 := subs(v=1,BenderSeries(2,1,10,z)): time()-st; Q2;
```

```
                                130.450
```

$$21\,z^4 + 966\,z^5 + 27954\,z^6 + 650076\,z^7 + 13271982\,z^8 + 248371380\,z^9 + 4366441128\,z^{10}$$

On retrouve dans ce résultat les conditions initiales de la récurrence linéaire pour le tore à deux trous. Le temps est affiché pour attirer l'attention de l'utilisateur sur la longueur de ces calculs. Les versions ultérieures de la librairie `MAP` auront, parmi leurs objectifs, celui d'accélérer ces calculs et de proposer des solutions alternatives.

La fonction suivante fonctionne de manière similaire à la fonction `BenderSeries`, mais utilise cette fois un calcul direct sur les équations de [Arq87a, AB97a].

`ArquesSeries` Étant donné un type, un nombre de pointages et un degré, cette fonction renvoie le développement de la série génératrice des cartes pointées de ce type, jusqu'au degré de z donné. L'exposant de $u[i]$ est le degré de la i^{e} face pointée (par dualité, du i^{e} sommet pointé), l'exposant de x est le nombre de faces (par dualité, le nombre de sommets), l'exposant de y est le nombre de sommets (par dualité, le nombre de faces), l'exposant de z est le nombre d'arêtes. L'option z accélère les calculs, en posant $x = y = 1$ avant tout calcul.

Cette fonction permet par exemple de calculer les premiers termes de la série génératrice des cartes 2-pointées sur le plan projectif :

```
> st := time(): Puxyz := ArquesSeries(1/2,2,5,`nonorientable`): time()-
st;
```

```
                                4.100
```

```
> Puxyz;
         2       3         2  2       2         3  2          2
(3 u[2] x  y u[1]  + 2 u[2]  x  y u[1]  + 3 u[2]  x  y u[1]) z  + (

           5  2  2               3  2     3  2
    25 u[1]  x  y  u[2] + 27 u[1]  x  u[2]  y

          2     4     2  2          4  3                3       3
     + 20 x  u[1]  u[2]  y  + 12 u[1]  x  u[2] y + 6 u[1]  u[2] x  y

           2     3  3             3       2         2  3       2
     + 12 u[2]  u[1]  x  y + 4 u[2] x  y u[1]  + 4 u[2]  x  y u[1]

           3  3       2          4  2  2     2
     + 12 u[2]  x  y u[1]  + 20 u[2]  x  y  u[1]

          2  3                3  3                 4  3
     + 4 u[2]  x  y u[1] + 6 u[2]  x  y u[1] + 12 u[2]  x  y u[1]

           5  2  2                3          3
     + 25 u[2]  x  y  u[1] + 3 u[2] x  y u[1]) z  + (

          3  2               4  4       2          3  4       2
    25 u[2] x  y  u[1] + 36 u[2]  x  y u[1]  + 36 u[2]  x  y u[1]

            6  2  3     2           5  3  2     2
     + 132 u[2]  x  y  u[1]  + 150 u[2]  x  y  u[1]

           4  3  2     2           6  3  2
     + 60 u[2]  x  y  u[1]  + 150 u[2]  x  y  u[1]

           5       4            4       4            3     3  4
     + 30 u[1]  u[2] x  y + 36 u[1]  u[2] x  y + 36 u[2]  u[1]  x  y

           3     2  4             7  2  3
     + 36 u[1]  u[2]  x  y + 154 u[1]  x  y  u[2]

           4     2  4             6  3  2
     + 36 u[1]  u[2]  x  y + 150 u[1]  x  y  u[2]

            5  2  3     3           6  2  3     2
     + 180 u[1]  x  y  u[2]  + 132 u[1]  x  y  u[2]

           4  3     2  2           5  3  2     2
     + 60 u[1]  x  u[2]  y  + 150 u[1]  x  y  u[2]

           3  3     3  2           3  2     5  3
     + 81 u[1]  x  u[2]  y  + 180 u[1]  x  u[2]  y

            3  3     4  2           4  2     4  3
     + 168 u[1]  x  u[2]  y  + 152 u[1]  x  u[2]  y

           5  3  2                4  3     3  2
     + 75 u[1]  x  y  u[2] + 168 u[1]  x  u[2]  y

           4  3       2       3  2     3
     + 56 u[1]  x  u[2] y  + 42 x  y  u[1]  u[2]
```

```
      3  2     3     2            4       2
+ 54 x  y  u[1]  u[2]  + 30 u[2] x  y u[1]

           4       3            3  2     2
+ 33 u[2] x  y u[1]  + 30 u[2] x  y  u[1]

         2  3  2               3  3  2
+ 30 u[2]  x  y  u[1] + 42 u[2]  x  y  u[1]

         4  3  2               3  4                 2  4
+ 56 u[2]  x  y  u[1] + 33 u[2]  x  y u[1] + 30 u[2]  x  y u[1]

         3  3  2     2          2  3  2     2
+ 54 u[2]  x  y  u[1]  + 30 u[2]  x  y  u[1]

         2  4       2            4                  5  4
+ 30 u[2]  x  y u[1]  + 25 u[2] x  y u[1] + 30 u[2]  x  y u[1]

          7  2  3               4  4
+ 154 u[2]  x  y  u[1] + 36 u[2]  x  y u[1]

         5  3  2        4              5
+ 75 u[2]  x  y  u[1]) z  + (154 u[2] x  y u[1]

           3  3                5  4  2     3
+ 154 u[2] x  y  u[1] + 645 u[1]  x  y  u[2]

          4  4     4  2        3  3     5
+ 672 u[1]  x  u[2]  y  + 370 x  y  u[1]  u[2]

       3  3     4                  3  3     3
+ 296 x  y  u[1]  u[2] + 246 u[2] x  y  u[1]

           4  2     2             4  2
+ 432 u[2] x  y  u[1]  + 378 u[2] x  y  u[1]

      3  3     2     2        3  3     3
+ 176 x  y  u[2]  u[1]  + 246 x  y  u[2]  u[1]

       4  2     2                4  5     2
+ 432 x  y  u[2]  u[1] + 144 u[1]  x  u[2]  y

         3     4  5              7  3  3     2
+ 84 u[1]  u[2]  x  y + 1232 u[1]  x  y  u[2]

       2     4     6  4           6  3  3
+ 912 x  u[1]  u[2]  y  + 492 u[1]  x  y  u[2]

       3  3     5     2           5  4  2
+ 480 x  y  u[1]  u[2]  + 580 u[1]  x  y  u[2]

       4  2     4             3  3     4     3
+ 560 x  y  u[1]  u[2] + 552 x  y  u[1]  u[2]

       4  2     4     2        3  3     3     2
+ 568 x  y  u[1]  u[2]  + 288 x  y  u[1]  u[2]
```

```
       3  3     3     3        3  3     3     4
+ 414 x  y  u[1]  u[2]  + 552 x  y  u[1]  u[2]

       4  2     3     3        4  2     3     2
+ 648 x  y  u[1]  u[2]  + 552 x  y  u[1]  u[2]

       3  3     4     2        4  2     3
+ 304 x  y  u[1]  u[2]  + 507 x  y  u[1]  u[2]

            5       2        3  3     2
+ 176 u[2] x  y u[1]  + 176 x  y  u[2]  u[1]

          4  3  3                5  3  3
+ 296 u[2]  x  y  u[1] + 370 u[2]  x  y  u[1]

          4  4  2                3  4  2
+ 560 u[2]  x  y  u[1] + 507 u[2]  x  y  u[1]

            5       4             5       3
+ 156 u[2] x  y u[1]  + 171 u[2] x  y u[1]

          5  4  2                4  5
+ 580 u[2]  x  y  u[1] + 156 u[2]  x  y u[1]

          6  3  3                3  5
+ 492 u[2]  x  y  u[1] + 171 u[2]  x  y u[1]

          2  5               3  3     3     2
+ 176 u[2]  x  y u[1] + 288 x  y  u[2]  u[1]

          4  3  3     2           5  3  3     2
+ 304 u[2]  x  y  u[1]  + 480 u[2]  x  y  u[1]

          4  4  2     2           3  4  2     2
+ 568 u[2]  x  y  u[1]  + 552 u[2]  x  y  u[1]

          2  5       3           3  5       2
+ 168 u[2]  x  y u[1]  + 168 u[2]  x  y u[1]

       4  2     2     2           2  5       2
+ 432 x  y  u[2]  u[1]  + 176 u[2]  x  y u[1]

            3  3     2           5  4  2     2
+ 176 u[2] x  y  u[1]  + 600 u[1]  x  y  u[2]

       3  3     5     3           6  3  3     2
+ 720 x  y  u[1]  u[2]  + 528 u[1]  x  y  u[2]

          6  4  2                5  5     2
+ 600 u[1]  x  y  u[2] + 80 u[1]  x  u[2]  y

          5  5                   3  3     5  3
+ 120 u[1]  x  u[2] y + 720 u[1]  x  u[2]  y

        2     3     7  4           4  3     4  3
+ 1029 x  u[1]  u[2]  y  + 608 u[1]  x  u[2]  y
```

```
           3  3     6  3           3  4     5  2
+ 1476 u[1]  x  u[2]  y  + 645 u[1]  x  u[2]  y

          3  4     4  2           4  4     3  2
+ 672 u[1]  x  u[2]  y  + 672 u[1]  x  u[2]  y

           4  3     5  3           6  2  4     4
+ 1480 u[1]  x  u[2]  y  + 912 u[1]  x  y  u[2]

          6  4  2     2            6  3  3     3
+ 600 u[1]  x  y  u[2]  + 1476 u[1]  x  y  u[2]

           5  2  4     5         3  3     5     4
+ 1075 u[1]  x  y  u[2]  + 1480 x  y  u[1]  u[2]

          8  2  4     2            7  2  4     3
+ 744 u[1]  x  y  u[2]  + 1029 u[1]  x  y  u[2]

           8  3  3                 9  2  4
+ 1232 u[1]  x  y  u[2] + 837 u[1]  x  y  u[2]

          7  4  2                 7  3  3
+ 525 u[1]  x  y  u[2] + 616 u[1]  x  y  u[2]

         6       5             3     3  5
+ 60 u[1]  u[2] x  y + 144 u[1]  u[2]  x  y

         4  5     3            6  5
+ 84 u[1]  x  u[2]  y + 60 u[2]  x  y u[1]

           8  3  3                 7  4  2
+ 1232 u[2]  x  y  u[1] + 525 u[2]  x  y  u[1]

          7  3  3                 6  4  2
+ 616 u[2]  x  y  u[1] + 600 u[2]  x  y  u[1]

          5  5                   9  2  4
+ 120 u[2]  x  y u[1] + 837 u[2]  x  y  u[1]

           7  3  3     2           6  4  2     2
+ 1232 u[2]  x  y  u[1]  + 600 u[2]  x  y  u[1]

         5  5       2           4  5       2
+ 80 u[2]  x  y u[1]  + 144 u[2]  x  y u[1]

          6  3  3     2           5  4  2     2
+ 528 u[2]  x  y  u[1]  + 600 u[2]  x  y  u[1]

          8  2  4     2   5
+ 744 u[2]  x  y  u[1] ) z
```

Si l'on n'est pas intéressé par la partition en fonction des degrés des faces pointées, il suffit de poser $u[1] = u[2] = 1$:

```
> subs(u[1]=1,u[2]=1,Puxyz);

   2    2        3          2  2   3
8 x  y z  + (75 x  y + 117 x  y ) z

            3  2         2  3        4     4
   + (1706 x  y  + 1084 x  y  + 493 x  y) z

             4  2          3  3         2  4         5     5
   + (15812 x  y  + 22328 x  y  + 8119 x  y  + 2792 x  y) z
```

Conclusion

Cette librairie MAP nous sert tous les jours, et elle est en constante évolution. En effet, elle est à la fois imparfaite et incomplète, mais elle nous est néanmoins particulièrement utile. Le but de ce chapitre a été de démontrer son utilité sur des exemples simples. Nous organisons la libre diffusion de cette librairie et l'assistance aux utilisateurs.

Liste des symboles

Symboles par ordre alphabétique

Symbole	Signification
a	Série formelle des variables p et q
A	Série formelle des variables v, s et f
B	Série formelle des variables v, s et f
c	Série formelle des variables p et q
D	Polynômes de la forme générale faible des dérivées partielles de A selon v en V
E	Polynômes et fractions de la forme générale des dérivées partielles de A selon v en V
f	Variable dont le degré compte le nombre de faces sauf une
F	Série formelle liée à A et à Q_0
g	Genre d'une carte ou d'une surface
L, M	Polynômes de la variable v
n	Degré total des sommets distingués
N	Série génératrice des cartes non orientables
p	Paramètre, série formelle des variables s et f
P	Polynôme des variables p et q
q	Paramètre, série formelle des variables s et f
Q	Série génératrice des cartes orientables
r	Nombre de brins pointés
R	Polynôme des variables p et q
R^3	Espace euclidien de dimension 3
s	Variable dont le degré compte le nombre de sommets sauf un
S	Série génératrice des cartes quelconques
T	Partie de l'équation fonctionnelle d'énumération des cartes
U	Polynôme des variables p, q et a
V	Série de la variable p
W	Ensemble de variables v_i

x	Variable dont le degré compte le nombre de faces
y	Variable dont le degré compte le nombre de sommets
z	Variable dont le degré compte le nombre d'arêtes
Z	Ensemble des entiers relatifs

Symboles par catégorie

Les paramètres

Liste des paramètres et ordre d'apparition en indice des séries

τ	le type d'une carte
g	le genre d'une carte
r	le nombre de brins pointés

Les variables

Variable	L'exposant de cette variable est le … d'une carte (ou hypercarte) :
v	degré du sommet initial du brin pointé d'une carte simplement pointée
v_i	degré du sommet initial du i^{e} $(1 \leq i \leq r)$ sommet pointé d'une carte r-pointée
x	nombre de faces d'une carte
f	nombre de faces d'une carte moins une
y	nombre de sommets d'une carte
s	nombre de sommets d'une carte moins un
z	nombre d'arêtes d'une carte
b	nombre de brins d'une carte
t	genre d'une carte

Séries génératrices

Q	cartes multi-pointées sur une surface orientable
N	cartes multi-pointées sur une surface non orientable
S	cartes multi-pointées sur une surface quelconque
Mo	cartes séquencées sur une surface orientable
M	cartes séquencées sur une surface quelconque

Polynômes

Nom	Apparaît dans …
F_τ	Forme faible du théorème d'énumération paramétrique des cartes générales de type τ
M_τ	Théorème d'énumération paramétrique des cartes non orientables de type τ
P_g	Théorème d'énumération paramétrique des cartes orientables de genre g
R_g	Forme faible du théorème d'énumération paramétrique des cartes orientables de genre g
U_τ	Théorème d'énumération paramétrique des cartes générales de type τ

Références bibliographiques

[AB97a] D. ARQUES et J.-F. BERAUD, Énumération des cartes pointées sur la bouteille de Klein, *Inform. Théor. Appl.*, **31** (1997), 385-409.

[AB97b] D. ARQUES et J.-F. BERAUD, Le schéma de carte et ses applications, *Institut Gaspard Monge, Rapport Interne*, **24** (1997), à paraître dans *Theoret. Comput. Sci.*

[AB98a] D. ARQUES et J.-F. BERAUD, Équation de composition en genre quelconque, *Actes de FPSAC'98, Fields Institute, Toronto*, (1998), 19-30.

[AB98b] D. ARQUES et J.-F. BERAUD, Rooted maps on orientable surfaces, Riccati's equation and continued fractions, (1998), à paraître dans *Discrete Math.*

[AB98c] D. ARQUES et J.-F. BERAUD, Rooted maps on locally orientable surfaces and continued fractions, (1998),), à paraître dans *European J. Combin.*

[AB98d] D. ARQUES et J.-F. BERAUD, Rooted hypermaps, Riccati's equations and continued fractions, (1998), en cours de rédaction.

[AG97a] D. ARQUES et A. GIORGETTI, Énumération des cartes pointées de genre quelconque en fonction des nombres de sommets et de faces, *Institut Gaspard Monge, Rapport Interne*, **21** (1997).

[AG97b] D. ARQUES et A. GIORGETTI, Une bijection géométrique entre une famille d'hypercartes et une famille de polygones énumérées par la série de Schröder, *Actes de FPSAC'97, Universität Wien, Vienne*, (1997), 14-25.

[AG98a] D. ARQUES et A. GIORGETTI, Counting rooted maps on a surface, *Institut Gaspard Monge, Rapport Interne*, **12** (1998).

[AG98b] D. ARQUES et A. GIORGETTI, Une bijection géométrique entre une famille d'hypercartes et une famille de polygones énumérées par la série de Schröder, *Discrete Math.*, *FPSAC'97 Vienna*, (1998), à paraître.

[AG99a] D. ARQUES et A. GIORGETTI, Énumération des cartes pointées de genre quelconque en fonction des nombres de sommets et de faces, (1999), à paraître dans *J. Combin. Theory Ser. B*.

[AG99b] D. ARQUES et A. GIORGETTI, Counting rooted maps on a surface, (1999), à paraître dans *Theoret. Comput. Sci.*

[AH76] K. APPEL et W. HAKEN, Every planar map is four colorable, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **82** (1976), 711-712.

[AH77] K. APPEL et W. HAKEN, Every planar map is four colorable. Part I. Discharging, *Illinois J. Math.*, **21** (1977), 429-490.

[AHK77] K. APPEL, W. HAKEN et J. KOCH, Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility, *Illinois J. Math.*, **21** (1977), 491-567.

[AJ93] D. ARQUES et I. JACQUES, Classification des cartes pointées de genre 1 et relation fonctionnelle associée, *Theoret. Comput. Sci.*, **117** (1993), 45-65.

[AJO91] D. ARQUES, I. JACQUES et K. ORIEUX, Une équation fonctionnelle liant la série génératrice des cartes planaires à celle des mots de Dyck, *Rapport de recherche 52, Université de Franche-Comté*, (1991).

[Apé87] F. APÉRY, Models of the real projective plane, *Vieweg*, (1987).

[Arq85a] D. ARQUES, Énumération et codage des cartes et hypercartes planaires pointées, calcul formel sur les fractions multicontinues, *Thèse de Doctorat d'État, Université de Haute-Alsace*, (1985).

[Arq85b] D. ARQUES, Une relation fonctionnelle nouvelle sur les cartes planaires pointées, *J. Combin. Theory Ser. B*, **39** (1985), 27-42.

[Arq85c] D. ARQUES, Relations fonctionnelles et dénombrement des hypercartes planaires pointées, *Colloque de combinatoire énumérative, Montréal, Québec, Lecture Notes Springer,* **1234** (1985), 5-26.

[Arq86] D. ARQUES, Les hypercartes planaires sont des arbres très bien étiquetés, *Discrete Math.*, **58** (1986), 11-24.

[Arq87a] D. ARQUES, Relations fonctionnelles et dénombrement des cartes pointées sur le tore, *J. Combin. Theory Ser. B*, **43** (1987), 253-274.

[Arq87b] D. ARQUES, Hypercartes pointées sur le tore : décompositions et dénombrements, *J. Combin. Theory Ser. B*, **43** (1987), 275-286.

[BC86] E. BENDER, E. CANFIELD, The asymptotic number of rooted maps on a surface, *J. Combin. Theory Ser. A*, **43** (1986), 244-257.

[BC91] E. BENDER et E. CANFIELD, The number of rooted maps on an orientable surface, *J. Combin. Theory Ser. B*, **53** (1991), 293-299.

[BC94] E. BENDER et E. CANFIELD, The number of degree-restricted rooted maps on the sphere, *SIAM J. Discrete Math.*, **7** (1994), 9-15.

[BCR88a] E. BENDER, E. CANFIELD et R. ROBINSON, The asymptotic number of tree-rooted maps on a surface, *J. Combin. Theory Ser. A*, **48** (1988), 156-164.

[BCR88b] E. BENDER, E. CANFIELD et R. ROBINSON, The enumeration of maps on the torus and the projective plane, *Canad. Math. Bull.*, **31 (3)** (1988), 257-271.

[BCR93] E. BENDER, E. CANFIELD et B. RICHMOND, The asymptotic number of rooted maps on a surface. II. Enumeration by vertices and faces, *J. Combin. Theory Ser. A*, **63** (1993), 318-329.

[Ben91] E. BENDER, Some unsolved problems in map enumeration, *Bull. Inst. Combin. Appl.*, **3** (1991), 51-56.

[Ber98] J.-F. BERAUD, Étude topologique des cartes, équations fonctionnelles et énumérations, *Rapport de thèse*, *Université de Marne-le-Vallée*, (1998).

[Bro63] W. G. BROWN, Enumeration of non separable planar maps, *Canad. J. Math.*, **15** (1963), 526-545.

[Bro65] W. G. BROWN, On the existence of square roots in certain rings of power series, *Math. Ann.*, **158** (1965), 82-89.

[Bro66] W. G. BROWN, On the enumeration of non-planar maps, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 65 (1966).

[Bro67] W. G. BROWN, On k^{th} roots in power series rings, *Math. Ann.*, **170** (1967), 327-333.

[CG92a] B. W. CHAR, K. O. GEDDES, G. H. GONNET, B. L. LONG, M. B. MONAGAN et S. M. WATT, First leaves : a tutorial introduction to Maple V, *Springer-Verlag*, (1992).

[CG92b] B. W. CHAR, K. O. GEDDES, G. H. GONNET, B. L. LONG, M. B. MONAGAN et S. M. WATT, Maple V language reference manual, *Springer-Verlag*, (1992).

[CG92c] B. W. CHAR, K. O. GEDDES, G. H. GONNET, B. L. LONG, M. B. MONAGAN et S. M. WATT, Maple V library reference manual, *Springer-Verlag*, (1992).

[CH75] R. CORI et J. HARDOUIN-DUPARC, Manipulation des cartes planaires à partir de leur codage, *Journées de Combinatoire et Informatique, Bordeaux*, (1975).

[CJS97] R. CORI, B. JACQUARD et G. SCHAEFFER, Description trees for some families of planar maps, *Actes de FPSAC'97, Universität Wien*, (1997), 196-208.

[CM92] R. CORI et A. MACHI, Maps, hypermaps and their automorphisms : a survey, I, II, III, *Expo. Math.*, **10** (1992), 403-427, 429-447, 449-467.

[Com64] L. COMTET, Calcul pratique des coefficients de Taylor d'une fonction algébrique, *Enseign. Math. (2),* **10** (1964), 267-270.

[Com70] L. COMTET, Analyse combinatoire Tome I, *PUF*, (1970).

[Cor70] R. CORI, Planar maps and bracketting systems, Comb. structures and their applications, Gordon Breach, New-York, (1970).

[Cor72] R. CORI, Sur la rationalité de certaines séries génératrices, *Discrete Math.,* **3** (1972), 215-231.

[Cor75] R. CORI, Un code pour les graphes planaires et ses applications, *Astérisque, S.M.F.,* **27** (1975).

[CR72] R. CORI et J. RICHARD, Énumération des graphes planaires à l'aide des séries formelles en variables non commutatives, *Discrete Math.,* **2** (1972), 115-162.

[CV81] R. CORI et B. VAUQUELIN, Planar maps are well labelled trees, *Canad. J. Math.*, **33 (5)** (1981), 1023-1042.

[Edm60] J. R. EDMONDS, A combinatorial representation for polyhedral surfaces, *Notices Amer. Math. Soc.,* **7** (1960), 646-650.

[Eth40] I. M. H. ETHERINGTON, Some problems of non-associative combinations (I), *The Edinburgh Mathematical Notes*, **32** (1940), i-vi.

[Eul58] L. EULER, Elementa doctrinae solidorum, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, **4** (1758), 109-140.

[FZ97] D. FOATA et D. ZEILBERGER, A classical proof of a recurrence for a very classical sequence, *J. Combin. Theory Ser. A*, **80** (1997), 380-384.

[Gao91a] Z.-C. GAO, The number of rooted triangular maps on a surface, *J. Combin. Theory Ser. B*, **52** (1991), 236-249.

[Gao91b] Z.-C. GAO, The number of rooted 2-connected triangular maps on a surface, *J. Combin. Theory Ser. B*, **53** (1991), 130-142.

[Gao92] Z.-C. GAO, The asymptotic number of rooted 2-connected triangular maps on a surface, *J. Combin. Theory Ser. B*, **54** (1992), 102-112.

[GJ83] I. P. GOULDEN et D. M. JACKSON, Combinatorial Enumeration, *Wiley-Interscience Series in Discrete Math., John Wiley & Sons*, (1983).

[GJ96a] I. P. GOULDEN et D. M. JACKSON, Connection coefficients, matchings, maps and combinatorial conjectures for Jack symmetric functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348 (3)** (1996), 873-892.

[GJ96b] I. P. GOULDEN et D. M. JACKSON, Maps in locally orientable surfaces, the double coset algebra, and zonal polynomials, *Canad. J. Math.*, **48 (3)** (1996), 569-584.

[Goo60] I. J. GOOD, Generalizations to several variables Lagrange's expansion, with applications to stochastic processes, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **56** (1960), 367-380.

[GS98] A. GOUPIL et G. SCHAEFFER, Enumeration of maps on a surface of genus g and products of permutations, *Actes de FPSAC'98, Fields Institute, Toronto*, (1998), 321-332.

[Hof79] J. HOFBAUER, A short proof of the Lagrange-Good formula, *Discrete Math.*, **25** (1979), 135-139.

[Jac95] D. M. JACKSON, The genus series for maps, *J. Pure Appl. Algebra*, **105** (1995), 293-297.

[Jac30] C. JACOBI, De resolutione aequationum per series infinitas, *J. Reine Angew. Math.*, **6** (1830), 257-286.

[Jac68] A. JACQUES, Sur le genre d'une paire de substitutions, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **267** (1968), 625-627.

[JV90a] D. M. JACKSON et T. I. VISENTIN, A character theoric approach to embeddings of rooted maps in an orientable surface of given genus, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **322** (1990), 343-363.

[JV90b] D. M. JACKSON et T. I. VISENTIN, Character theory and rooted maps in an orientable surface of given genus: face-colored maps, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **322** (1990), 365-376.

[JV96] D. M. JACKSON et T. I. VISENTIN, A formulation for the genus series for regular maps, *J. Combin. Theory Ser. A*, **74** (1996), 14-32.

[Ket83] S. G. KETTLE, Families enumerated by the Schröder-Etherington sequence and a renewal array it generates, *Lecture Notes in Mathematics,* **1036** (1983), 244-274.

[Lab81] G. LABELLE, Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange, *Advances in Math.*, **42** (1981), 217-247.

[Lag69] J. L. LAGRANGE, Nouvelles méthodes pour résoudre les équations littérales par le moyen de séries, *Œuvres, Gauthier-Villars Paris*, vol. 3 (1869), 1-73.

[LS82] D. LEHMANN et C. SACRE, Géométrie et topologie des surfaces, *PUF*, **516** (1982).

[Mas77] W. S. MASSEY, Algebraic topology : an introduction, *Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag*, **56** (1977).

[Mul64] R. C. MULLIN, The enumeration of rooted triangular maps, *Amer. Math. Monthly*, **71** (1964), 1007-1010.

[Mul65] R. C. MULLIN, On counting rooted triangular maps, *Canad. J. Math.*, **17** (1965), 373-382.

[MV95] M. MARCUS et B. VAUQUELIN, Un codage des cartes de genre quelconque, *Actes de FPSAC'95, France*, (1995), 399-415.

[Re93] D. REDFERN, The Maple handbook, Maple V release 3, *Springer-Verlag*, (1993).

[Ric71] J. RICHARD, Sur un type d'équations liées à certains problèmes combinatoires, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A Math.,* **272** (1971), 203-206.

[Sch70] E. SCHRÖDER, Vier combinatorische Probleme, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, **15** (1870), 371-376.

[Sch97] G. SCHAEFFER, Bijective census and random generation of Eulerian planar maps with prescribed vertex degrees, *Electron. J. Combin.*, **4** (1997), #R20.

[Sta97] R. P. STANLEY, Hipparchus, Plutarch, Schröder and Hough, *Amer. Math. Monthly*, **104** (1997), 344-350.

[SZ94] B. SALVY and P. ZIMMERMANN, Gfun: a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable, *ACM Trans. Math. Software*, **20 (2)** (1994), 163-177.

[Tut60] W. T. TUTTE, Convex representation of graphs, *Proc. London Math. Soc.*, 3rd ser., **10** (1960), 304-320.

[Tut62a] W. T. TUTTE, A census of planar triangulations, *Canad. J. Math.*, **14** (1962), 21-38.

[Tut62b] W. T. TUTTE, A census of Hamiltonian polygons, *Canad. J. Math.*, **14** (1962), 402-417.

[Tut62c] W. T. TUTTE, A census of slicings, *Canad. J. Math.*, **14** (1962), 708-722.

[Tut63] W. T. TUTTE, A census of planar maps, *Canad. J. Math.*, **15** (1963), 249-271.

[Tut68] W. T. TUTTE, On the enumeration of planar maps, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **74** (1968), 64-74.

[Tut69] W. T. TUTTE, On the enumeration of four coloured maps, *SIAM J. Appl. Math.*, **17** (1969), 454-460.

[Tut75] W. T. TUTTE, On elementary calculus and the Good formula, *J. Combin. Theory Ser. B*, **18** (1975), 97-137.

[Tut84] W. T. TUTTE, Graph theory, Encyclopedia of mathematic and its applications, Addison-Wesley, London, **21** (1984).

[Vin83a] A. VINCE, Combinatorial maps, *J. Combin. Theory Ser. B*, **34** (1983), 1-21.

[Vin83b] A. VINCE, Regular combinatorial maps, *J. Combin. Theory Ser. B*, **35** (1983), 256-277.

[Wal71] T. R. S. WALSH, Combinatorial enumeration of non-planar maps, *Ph.D. Thesis, University of Toronto*, (1971).

[Wal75] T. R. S. WALSH, Hypermaps versus bipartite maps, *J. Combin. Theory Ser. B*, **18** (1975), 155-163.

[Wal79] D. W. WALKUP, How many ways can a permutation be factored into two cycles, *Discrete Math.*, **28** (1979), 315-319.

[Wal83] T. R. S. WALSH, A polynomial-time algorithm for counting rooted toroïdal maps, *ARS Combin.*, **16** (1983), 49-56.

[WL72a] T. R. S. WALSH et A. B. LEHMAN, Counting rooted maps by genus. I, *J. Combin. Theory Ser. B*, **13** (1972), 192-218.

[WL72b] T. R. S. WALSH et A. B. LEHMAN, Counting rooted maps by genus. II, *J. Combin. Theory Ser. B*, **13** (1972), 122-141; **14** (1973), 185.

[WL75] T. R. S. WALSH et A. B. LEHMAN, Counting rooted maps by genus. III : nonseparable maps, *J. Combin. Theory Ser. B*, **18** (1975), 222-259.