



**HAL**  
open science

# Dynamique des anneaux de Saturne : ondes de densité et distribution en taille des particules dans les anneaux

Pierre-Yves Longaretti

► **To cite this version:**

Pierre-Yves Longaretti. Dynamique des anneaux de Saturne : ondes de densité et distribution en taille des particules dans les anneaux. Planétologie et astrophysique de la terre [astro-ph.EP]. Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1987. Français. NNT: . tel-00725111

**HAL Id: tel-00725111**

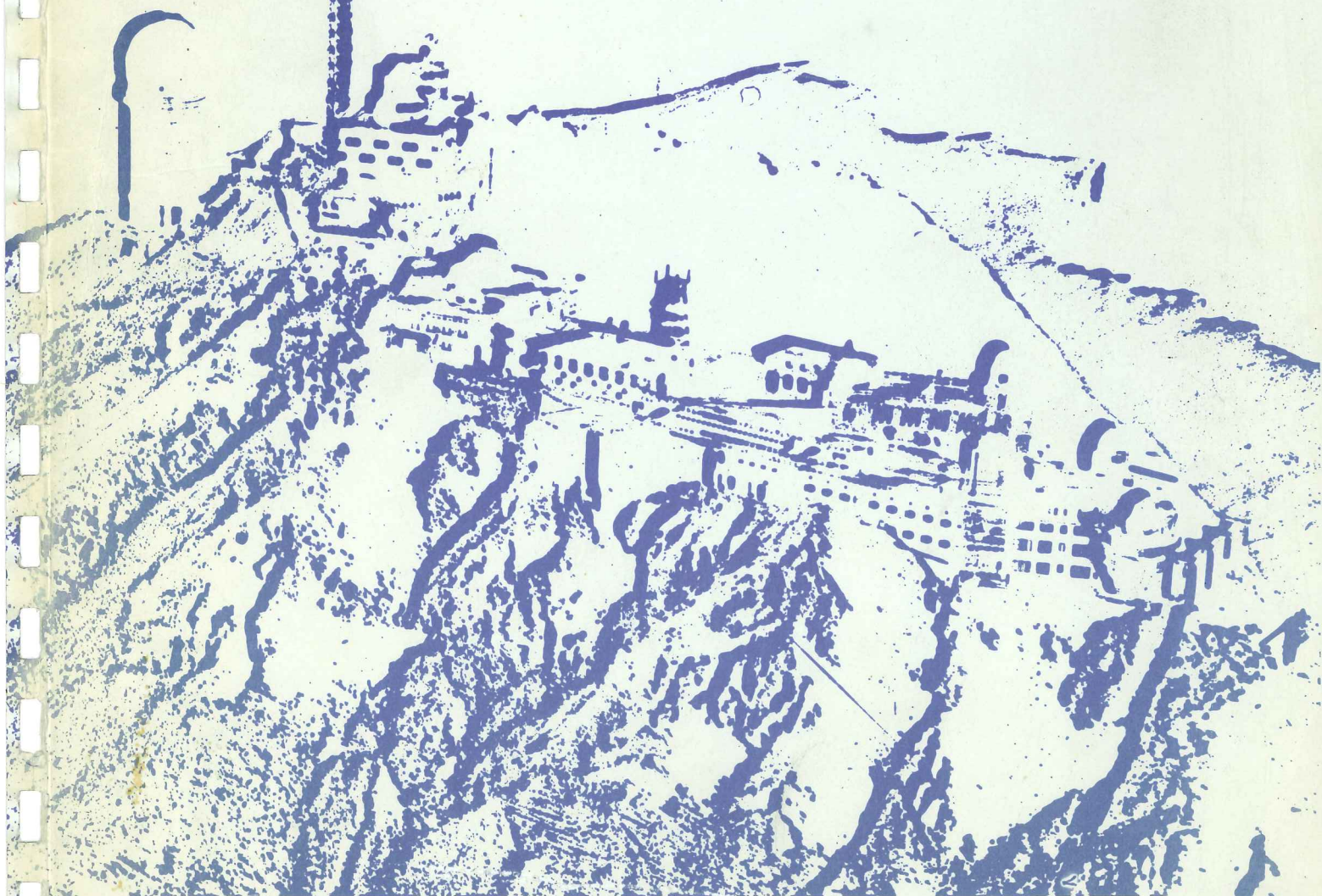
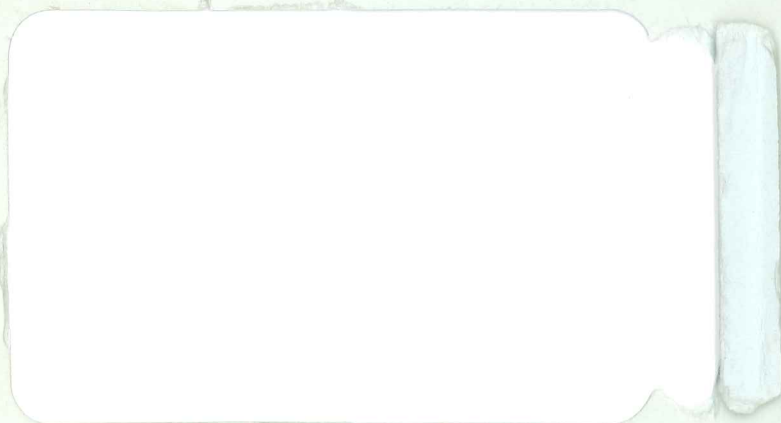
**<https://theses.hal.science/tel-00725111>**

Submitted on 24 Aug 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# OBSERVATOIRE DU PIC-DU-MIDI ET DE TOULOUSE



9, rue du Pont-de-la-Moulette, 65200 Bagnères-de-Bigorre  
Tél. : 62.95.19.69

14, avenue Edouard-Belin, 31400 Toulouse  
Tél. : 61.25.21.01 - Télex : 530 776 F

Thèse de l'USTMG

Pierre-Yves LONGARETTI

**DYNAMIQUE DES ANNEAUX DE SATURNE:  
ONDES DE DENSITE ET DISTRIBUTION  
EN TAILLE DES PARTICULES DANS LES ANNEAUX**

O.P.M.T. Février 1987

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier ici Alain Omont, à qui je dois mes premiers contacts avec le monde de la recherche.

Je remercie Jean-Paul Zahn, qui m'a accueilli à l'Observatoire de Toulouse pour la préparation de cette thèse.

Je remercie vivement Nicole Borderies qui a encadré ce travail avec une disponibilité sans faille. Je lui dois nombre de conversations fructueuses sur les multiples chausse-trappes qui parsèment la dynamique des anneaux.

La compétence informatique d'Amaury Legait m'a été d'une aide précieuse tout au long de mon travail.

Je remercie tout particulièrement Sylvie et Gérard Vauclair, Noël Dolez, ainsi que tous les autres membres de l'Observatoire, pour la chaleur et la sympathie de leur accueil.

Je remercie aussi Michel Hénon, René Pellat et Jacques Henrard, qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse, ainsi que les membres du jury: N. Borderies, A. Brahic, J. Henrard, R. Pellat, A. Omont et S. Vauclair.

**SOMMAIRE**

Introduction générale	p 6
<b>I Ondes de densité non-linéaires: formalisme et étude d'une onde:</b>	<b>p 14</b>
I.1 Formalisme en lignes de courant:	p 15
I.1.1 Mouvement d'une particule-test perturbée par un satellite	p 15
I.1.2 Mouvement elliptique perturbé	p 18
I.1.3 Lignes de courant	p 20
I.1.4 Cas d'une planète ne possédant pas la symétrie sphérique	p 22
Article 1	p 26
I.2 Etude non-linéaire d'une onde de densité	p 60
I.2.1 Position du problème	p 60
I.2.2 Principe de la représentation non-linéaire d'une onde et calcul du couple non-linéaire	p 61
I.2.3 Perspectives	p 65
Article 2	p 66
Références bibliographiques	p 116
<b>II Distribution en taille des particules dans les anneaux de Saturne</b>	<b>p 118</b>

Introduction: contraintes observationnelles et présentation des travaux antérieurs	p 119
Préliminaire:	p 127
1 Quelques ordres de grandeur	p 127
2 De la nécessité de considérer des processus d'accrétion et d'érosion collisionnels	p 130
3 Mécanisme de création de la coupure de la distribution	p 132
II.1 Elaboration de critères d'accrétion mutuelle de deux particules:	p 133
II.1.1 Attraction entre particules	p 133
II.1.2 Etude d'une collision binaire	p 142
II.1.3 Conclusion et discussion	p 154
II.2 Hypothèses et équation de la fonction de distribution	p 156
II.2.1 Introduction	p 156
II.2.2 Hypothèses générales du modèle	p 156
II.2.3 Forme de l'équation d'évolution de la distribution	p 158
II.3 Modèle de "quasi sphères dures"	p 165
II.3.1 Introduction	p 165
II.3.2 Modèle d'érosion	p 165
II.3.3 Intégration sur $v_p$ et sur S	p 167
II.3.4 Résumé des principales équations	p 191
II.3.5 Présentation des résultats	p 192
II.4 Second modèle	p 196
II.4.1 Introduction	p 196
II.4.2 Modèle d'érosion	p 197
II.4.3 Reformulation des différents termes	p 200
II.4.4 Présentation des résultats	p 211
II.5 Discussion et perspectives	p 211

## Références bibliographiques

p 225

Appendice A

p 230

Appendice B

p 232

Appendice C

p 236

Appendice D

p 239

***INTRODUCTION:***



Depuis leur découverte au XVII<sup>e</sup> siècle, les anneaux de Saturne n'ont cessé de susciter l'intérêt tant des scientifiques que du public. L'aspect unique que confère ce système d'anneau à la planète autour de laquelle il gravite fait du système saturnien l'un des objets célestes les plus beaux et les plus intrigants à observer.

Jusque vers la fin des années 1970, les principaux problèmes théoriques posés par les anneaux semblaient résolus: ils étaient formés d'un essaim de particules constituées principalement de glace. L'aplatissement du système s'expliquait par l'inélasticité des collisions entre particules. La structure générale était contrôlée partiellement par des phénomènes de diffusion et partiellement par l'influence résonante des satellites de la planète. On expliquait ainsi la plupart des propriétés observées depuis la Terre.

L'avalanche de données obtenues successivement par les sondes Pioneer 11 en septembre 1979, Voyager I en novembre 1980 et Voyager II en août 1981 lors de leurs rencontres avec Saturne a bouleversé ces conceptions et suscité un vif regain d'intérêt pour l'étude des anneaux de planète. La découverte de l'extraordinaire complexité de la structure des anneaux, en opposition complète avec les modèles, a surpris voire déconcerté les spécialistes (on pourra se faire une idée de cette structure en se reportant à l'appendice A qui présente les profils en profondeur optique des anneaux. Les variations de profondeur optique ne sont pas dues au bruit mais représentent un phénomène réel).

La caractéristique la plus frappante des anneaux est leurs dimensions: les anneaux principaux s'étalent sur plusieurs dizaines de milliers de kilomètres de largeur pour une épaisseur qui n'excède pas quelques dizaines de mètres (à titre de comparaison, le rayon de Saturne

**TABLE I**  
**Ring Nomenclature and Dimensions<sup>a</sup>**

$R_S$  = Saturn's Radius = 60,330 km  
 $M_S$  = Saturn's Mass =  $5.685 \times 10^{29}$  g  
 $GM_S$  =  $3.793 \times 10^{22}$  cm<sup>2</sup> s<sup>-2</sup>

Ring Region	Boundaries		Orbital	Mass
	( $R_S$ )	(km) <sup>b</sup>	Frequency $\Omega$ ( $10^{-4}$ s <sup>-1</sup> )	
----- D	1.11	66,970	3.554	?
----- C	1.235	74,510	3.028	$\sim 2 \times 10^{-9} M_S^c$
----- B	1.525	92,000	2.207	$\sim 5 \times 10^{-8} M_S^c$
----- Cassini Division	1.949 <sup>d</sup>	117,580 <sup>d</sup>	1.528	$\sim 1 \times 10^{-9} M_S^c$
----- A	2.025	122,170	1.442	$\sim 1.1 \times 10^{-8} M_S^c$
----- ---Atlas---	2.267	136,780	1.218	
(1980S28)	2.282	137,670	1.208	$1.47 \times 10^{-11} M_S^e$
---1980S27---	2.310	139,350	1.186	$1.03 \times 10^{-9} M_S^e$
---F---	2.324 <sup>d</sup>	140,180 <sup>d</sup>	1.176	
---1980S26---	2.349	141,700	1.157	$6.38 \times 10^{-10} M_S^e$
Epimetheus (1980S3)	2.510	151,420	1.047	$1.55 \times 10^{-9} M_S^{eh}$
Janus (1980S1)	2.511	151,470	1.047	$6.48 \times 10^{-9} M_S^{eh}$
----- G	2.82	170,100	0.878	$(1-4) \times 10^{-17} M_S^f$
----- ---Mimas---	3.075	185,540	0.772	$6.60 \times 10^{-8} M_S$ $(8.00 \times 10^{-8} M_S)^g$
----- E	3.0-8.0	181,000 483,000	0.8 0.2	?
----- ---Enceladus---	3.946	238,040	0.531	$1.48 \times 10^{-7} M_S$

<sup>a</sup>Sources: Smith et al. (1982); Esposito et al. (1984); Synnott et al. (1983).

<sup>b</sup>Distances rounded to the nearest 10 km, roughly the uncertainty of the observations.

<sup>c</sup>See Table III.

<sup>d</sup>Eccentric feature; semimajor axis is tabulated.

<sup>e</sup>These satellite masses assume mass density =  $1.2$  g cm<sup>-3</sup>.

<sup>f</sup>Obtained from results of Van Allen (1983).

<sup>g</sup>Second mass is from Tyler et al. (1981).

<sup>h</sup>These satellites exchange orbits every 4 yr.

TABLE II  
Distribution of Mass in the Rings, as Scaled from Optical Depth  $\tau/\sigma$   
Determined in Density-Wave Regions

Region	Boundaries ( $R_S$ )	Mean Optical Depth (PPS)	Mass ( $10^{-4} M_S$ ) PPS <sup>a</sup> UVS <sup>b</sup>	
Inner C	1.23–1.39	0.08	0.05	
Outer C	1.39–1.53	0.15	0.09	0.2
Inner B	1.53–1.66	1.21	0.80	
Middle B	1.66–1.72	1.76	0.60	5.0
Outer B	1.75–1.95	1.84	2.0	
Cassini Division	1.95–2.02	0.12	0.06	0.1
Inner A	2.02–2.16	0.70	0.70	
Outer A	2.16–2.27	0.57	0.40	1.1
Total Ring Mass <sup>c</sup>			5.0	6.0

<sup>a</sup>Esposito et al. 1983b.

<sup>b</sup>Holberg et al. 1982.

<sup>c</sup>Total ring mass obtained from Voyager radio occultation particle size distribution, assuming solid water ice (Marouf et al. 1983)  $\sim 3 \times 10^{-4} M_S$ .

Average A and B Ring mass density from cosmic ray albedo neutrons (Cooper et al. 1982)  $\sim 100\text{--}200 \text{ g cm}^{-3}$  ( $\sim 5\text{--}10 \times 10^{-4} M_S$ ).

est d'environ 60 000 kilomètres). On distingue traditionnellement de l'intérieur vers l'extérieur les anneaux D, C, B, la division de Cassini, et l'anneau A; toutes ces structures sont assez larges (10 000 kilomètres ou plus) et se différencient facilement à l'aide de leur profondeur optique moyenne:  $\sim 0.1$  pour l'anneau C et la division de Cassini,  $\sim 1.5$  pour l'anneau B, et  $\sim 0.5$  pour l'anneau A. Ces caractéristiques sont résumées dans les tables 1 et 2 (tirées de Cuzzi et al. [1]). La densité moyenne des anneaux est de l'ordre de 50 à 100 g/cm<sup>2</sup>. A l'extérieur de l'anneau A, on trouve les premiers satellites de Saturne, ainsi que les anneaux F, G et E, qui diffèrent assez largement des quatre anneaux principaux par leur propriétés physiques (densité, profondeur optique...).

Les recherches en vue d'expliquer la complexité de la structure des anneaux s'orientent principalement dans trois directions.

Le premier axe de recherche concerne l'étude statistique des effets collectifs dans les anneaux. L'inélasticité des collisions peut en effet être la cause de comportements inhabituels pour un gaz de particules. Par exemple, le modèle collisionnel de Goldreich et Tremaine [2] prévoit l'existence d'une instabilité "visqueuse" qui amplifie spontanément tout contraste radial dans la densité des anneaux. Une étude plus récente par Araki et Tremaine [3] prévoit elle une transition du type liquide-gaz lorsque les anneaux sont suffisamment denses.

D'un autre côté, un certain nombre de chercheurs voit l'origine de la structure des anneaux dans la présence à l'intérieur de ceux-ci d'une collection de satellites, trop petits pour avoir pu être détectés par Voyager, mais suffisamment gros pour créer un vide par échange cumulatif de moment cinétique à chaque rencontre avec les particules des anneaux (voir par exemple Petit et Hénon [4]).

Enfin, les résonances avec les satellites permettent d'expliquer

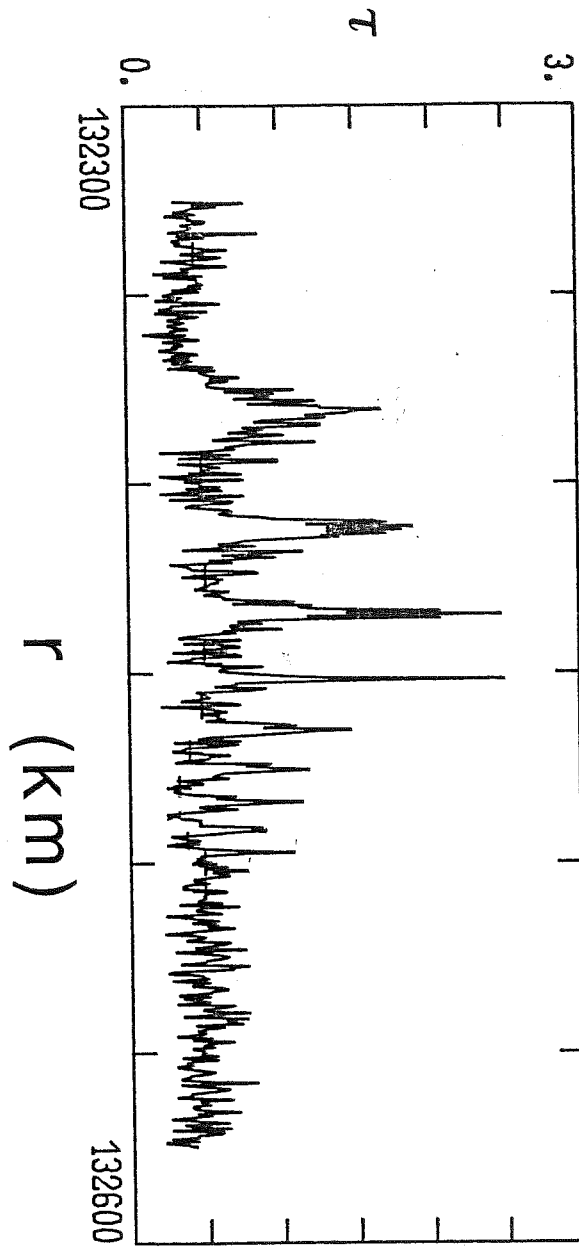


Fig. 1

une partie de la structure des anneaux. En particulier, des ondes de densité spirales peuvent être générées aux résonances. Ces ondes de densité sont analogues à celles que l'on trouve dans les galaxies spirales, mais sont nettement plus "enroulées". L'existence de telles ondes dans les anneaux avait été proposée pour la première fois en 1978 par Goldreich et Tremaine [5] en vue d'expliquer la formation de la division de Cassini. Depuis, on a détecté une cinquantaine de trains d'ondes dans les données de Voyager. Ceux-ci sont facilement identifiables dans les données parce qu'ils sont associés à des résonances avec les satellites de Saturne, et parce que la longueur d'onde décroît comme l'inverse de la distance à la résonance, en accord avec la théorie hydrodynamique linéaire de Goldreich et Tremaine (la figure 1 montre l'un de ces profils en profondeur optique).

La première partie de cette thèse est motivée par un problème important soulevé par la théorie linéaire des ondes de densité. Celle-ci prévoit en effet un transfert de moment cinétique entre une onde et le satellite qui l'excite. Ce transfert devrait créer l'effondrement des anneaux sur la planète, en particulier de l'anneau A, et l'éloignement des satellites en des temps caractéristiques très courts devant l'âge du système solaire ([6] et [7]), ce qui contredit l'hypothèse de l'origine primordiale des anneaux, qui semblait a priori la plus simple pour expliquer leur existence. Plusieurs hypothèses ont été avancées pour résoudre cette question: soit bien sûr les anneaux sont jeunes, soit le calcul du transfert de moment cinétique par la théorie linéaire est largement surestimé, soit encore la physique qui permet la survivance des anneaux n'est pas comprise. Le but de mon travail est de tester la deuxième hypothèse, en utilisant une représentation non-linéaire des ondes de densité. Dans un premier temps, j'expliquerai les bases du formalisme non-linéaire utilisé, qui a été développé par Borderies, Goldreich et Tremaine et appliqué par ce groupe à une grande variété de problèmes de dynamique des anneaux de planètes. Je présenterai également un travail théorique formulant ce formalisme dans le cas où le corps

central ne possède pas la symétrie sphérique. J'expliquerai ensuite comment je l'ai utilisé dans l'étude d'un des profils d'onde enregistré par Voyager, et je montrerai les implications de cette étude sur notre connaissance des caractéristiques physiques des anneaux et de leur dynamique.

La seconde partie de cette thèse se rattache au premier des axes de recherche mentionné ci-dessus. Les études statistiques des anneaux portent en quasi-totalité sur la détermination de la dispersion de vitesse des particules, qui dans la plupart des cas sont supposées toutes identiques. A l'inverse, je me suis intéressé à un problème encore peu étudié: la distribution en taille des particules dans les anneaux. J'exposerai un modèle analytique que j'ai développé en vue d'expliquer les caractéristiques de la distribution dans les anneaux de Saturne, qui a pu être déterminée à l'aide des données de l'expérience d'occultation radio des anneaux réalisée par Voyager. L'un des buts d'une telle étude est d'entreprendre un premier pas dans l'élaboration d'une théorie statistique des anneaux plus complète que celles dont on dispose actuellement (en vue par exemple, d'une détermination couplée de la dispersion de vitesse et de la distribution en taille des particules).

**I ONDES DE DENSITE NON-LINEAIRES:  
FORMALISME ET ETUDE D'UNE ONDE**



### I.1 Formalisme en ligne de courants:

Il ne s'agit pas de reproduire ici le détail des calculs que le lecteur pourra trouver dans les références citées au fil du texte, mais d'indiquer la démarche et les bases générales de ce formalisme.

#### I.1.1 Mouvement d'une particule test perturbée par un satellite:

Le calcul qui suit est développé dans la référence [7].

On considère un système constitué de trois corps: un corps central (planète) de masse  $M_p$ , un satellite de masse  $M_s$  et une particule de masse négligeable devant les masses des deux autres corps. Le satellite et la particule test orbitent dans le plan équatorial de la planète. On suppose le potentiel planétaire axisymétrique. Les premiers termes du développement de ce potentiel  $\phi_p$  sont:

$$\phi_p(r) = - \frac{GM_p}{r} \left[ 1 + \frac{1}{2} J_2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right] \quad (1)$$

où  $R$  est le rayon de la planète et  $r$  la distance au centre de masse du système. Le terme en  $J_2$  représente la contribution de l'aplatissement de la planète.

La position de la particule test est repérée en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Les équations du mouvement de la particule sont:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left[ \frac{d\theta}{dt} \right]^2 = - \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (2a)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ r^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (2b)$$

où  $\phi$  est le potentiel.

En l'absence de satellite, un mouvement circulaire uniforme de la particule test est possible. La vitesse angulaire  $\Omega$  de ce mouvement est donnée par:

$$\Omega^2 = - \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \quad (3)$$

En linéarisant les équations (2), autour de la solution circulaire, on obtient la solution connue sous le nom de mouvement épicyclique:

$$r = r_0 [1 - \epsilon \cos(\kappa t + \delta)] \quad (4a)$$

$$\theta = \theta_0 + \Omega t + \frac{2\Omega}{\kappa} \epsilon \sin(\kappa t + \delta) \quad (4b)$$

où  $\kappa$  est défini par:

$$\kappa^2 = 4\Omega^2 + \frac{d\Omega^2}{dr} r \quad (4c)$$

et où  $\Omega$  et  $\kappa$  sont calculés en  $r = r_0$ . Les paramètres  $\epsilon$ ,  $\delta$  et  $\theta_0$  sont des constantes d'intégration.

Au voisinage d'une résonance de Lindblad, le potentiel du satellite varie comme:

$$\varphi_s = B(r) \cos(m\theta - m\Omega_p t) \quad (5)$$

où la fréquence  $\Omega_p$  est fixée par le satellite (l'entier  $m$  dépend de la résonance considérée) et où  $B(r)$  s'exprime en fonction des coefficients de Laplace. La solution particulière des équations (2) linéarisées avec  $\phi = \phi_p + \varphi_s$  est, pour le rayon:

$$r = r_0 + A(r_0) \cos(m\theta - m\Omega_p t) \quad (6)$$

où  $A$  est proportionnel au rapport  $M_s/M_p$  et devient infini au rayon de résonance (celui-ci est défini par  $|m(\Omega - \Omega_p)| = \kappa$ ).

La solution générale du problème linéaire est la somme de (4a) et de (6) pour  $r$  (on a une équation analogue pour  $\theta$ ).

### I.1.2 Mouvement elliptique perturbé:

En fait, le problème traité dans le paragraphe précédent est un problème de résonance orbite-orbite, qu'il est intéressant d'examiner de manière plus poussée. Un certain nombre d'auteurs ont étudié cette question, entre autres Greenberg [8], et Henrard et Lemaître [9].

L'analyse de Greenberg est fondée sur les équations de Lagrange du mouvement elliptique perturbé. Il est en effet commode de représenter le mouvement de la particule test par une ellipse. A l'ordre 1 en excentricité, on a:

$$r = a [ 1 - e \cos(\lambda - w) ] \quad (8)$$

où le demi grand axe  $a$ , l'excentricité  $e$ , la longitude moyenne  $\lambda$ , et l'argument du périapse  $w$  sont des fonctions du temps.

Pour simplifier la discussion, on supposera que la planète possède la symétrie sphérique, de sorte qu'en l'absence de satellite,  $a$ ,  $e$  et  $w$  sont constants, et  $\lambda = nt + \text{cste}$ , où  $n$  est le moyen mouvement. Ces quatre quantité suffisent à définir le mouvement de la particule, puisqu'on suppose comme précédemment que les orbites de la particule et du satellite sont coplanaires.

On s'intéresse au problème perturbé par le potentiel exprimé en (5). L'analyse de Greenberg montre alors l'existence d'une famille d'orbites d'équilibre (stables) où  $a$  et  $e$  sont constants ( $a$  est quelconque et  $e$  se comporte comme la quantité  $A(r_0)$  définie en (6)). De plus, la relation:

$$m(\lambda - \Omega_p t) + \delta = \lambda - w \quad (9)$$

avec  $\delta = 0$  ou  $\pi$ , qui est la relation de résonance, est toujours satisfaite (la vitesse de précession  $dw/dt$  s'ajuste sous l'action du satellite pour que cette relation soit satisfaite même lorsque le demi grand axe  $a$  n'est plus égal au rayon de résonance). En fait, on vérifie que dans le cas d'une planète sphérique, ces orbites périodiques coïncident exactement à l'ordre un en excentricité avec la solution (6) (car à l'ordre 1 en  $e$ , on peut remplacer  $\lambda$  par  $\theta$  dans (8)).

L'analyse de Henrard et Lemaître, fondée sur une formulation hamiltonienne du problème, montre l'existence au "voisinage" de ces solutions d'équilibre, d'orbites correspondant à la solution générale (4a) + (6) trouvée dans la section précédente.

En résumé, à l'ordre 1 en excentricité, et pour une planète à symétrie sphérique, on a une famille de solutions de la forme:

$$\begin{aligned} r &= a [ 1 - e \cos (\theta - w) ] \\ &= a \{ 1 - e \cos [ m(\theta - \Omega_p t) + \delta ] \} \end{aligned} \quad (10)$$

où  $a$ ,  $e$  et  $w$  sont des éléments elliptiques, qui obéissent donc aux équations du mouvement elliptique perturbé, et où la vitesse le long de ces orbites est la vitesse képlérienne.

### I.1.3 Lignes de courant:

Considérons maintenant une collection de particules. Elles sont soumises à l'action de la planète, du satellite perturbateur, du champ d'auto-gravité qu'elles génèrent, et de leurs collisions mutuelles. On se place toujours dans le cas d'une planète sphérique. Si toutes ces forces sont faibles, le mouvement de ces particules est bien représenté en termes d'orbites elliptiques perturbées.

Pour aller plus loin dans l'élaboration du formalisme (du moins dans l'état actuel de son développement), nous devons avoir recours à une hypothèse. Les remarques suivantes permettent de la comprendre et de la justifier partiellement.

Le mouvement général de chaque particule en l'absence de collisions et d'auto-gravitation s'exprime, on l'a vu, comme la somme du terme forcé (6), identique pour toutes les particules, et d'un terme libre (4a). Le terme (4a) est en fait un terme aléatoire en ce sens qu'il est quelconque pour chaque particule, et change aléatoirement au cours des collisions (ce terme représente les mouvements aléatoires, et cause la dispersion des vitesses dans les anneaux). Passons maintenant à l'approximation fluide: on considère alors un élément de volume des anneaux contenant un grand nombre de particules. Le mouvement de cet élément de fluide est la moyenne des mouvements individuels. Dans cette moyenne, la composante aléatoire (4a) disparaît et le mouvement du fluide dans son ensemble est représenté par (6).

L'étape suivante consiste à tirer profit de l'analogie formelle existant entre les équations de la dynamique pour une particule et les équations de l'hydrodynamique exprimées en variables lagrangiennes. Si le mouvement du fluide est bien représenté par (6), qui correspond à la solution d'équilibre décrite dans la section précédente pour le mouvement d'une particule en résonance, alors l'équation (10) s'applique au mouvement du fluide de particules. On obtient donc (avec les notations usuelles du formalisme):

$$r(a, \theta, t) = a [ 1 - e(a) \cos (\theta - \omega) ] \quad (11a)$$

$$= a \{ 1 - e(a) \cos [ m(\theta - \Omega_p t) + m\Delta(a) ] \} \quad (11b)$$

où  $a$  joue le rôle d'une variable lagrangienne. L'équation (11) suppose que l'auto-gravité du système et le tenseur des contraintes n'ont qu'une influence quantitative et pas qualitative sur le mouvement imposé par le satellite. Ceci se comprend dans la mesure où le satellite est le "moteur" du phénomène; les forces liées à l'auto-gravité et au tenseur des contraintes ne font que "réagir" à son action. Notons que  $e$ ,  $\delta$  et  $\omega$  n'ont plus les valeurs prédites par les orbites périodiques (en particulier,  $e$  ne diverge plus à la résonance; et ce n'est généralement plus le satellite qui impose la vitesse de précession nécessaire pour satisfaire (9), mais par exemple dans le cas des ondes de densité l'auto-gravité).

L'évolution temporelle de  $a$ ,  $e$  et  $\omega$  est régie par les équations de Gauss du mouvement elliptique perturbé. La vitesse le long des lignes de courant représentées par (11b) est la vitesse du mouvement képlérien.

Deux faits supplémentaires jouent en faveur de cette représentation:

- i) Des lignes de courant de la forme (11b) ont maintenant été fréquemment observées dans les anneaux de planètes (par exemple, les anneaux d'Uranus sont elliptiques, ce qui correspond au cas  $m = 1$ ; le bord extérieur de l'anneau B est une ellipse centrée sur Saturne, que l'on obtient dans le cas  $m = 2$ ...)
- ii) Les composantes de la vitesse sont données par:

$$u_r = m(\Omega - \Omega_p)ae \sin(m\varphi + m\Delta) \quad (12a)$$

$$u_\theta = \Omega a[1 + e \cos(m\varphi + m\Delta)] \quad (12b)$$

$$u_z = 0 \quad (12c)$$

où  $\varphi = \theta - \Omega_p t$ .

Par ailleurs, on peut montrer que les forces dues au satellite et à l'auto-gravité du disque sont d'ordre  $e^2$  (voir par exemple Shu et al. [10], équation (40)). De plus, comme on a typiquement  $e \sim 10^{-5}$ , on peut montrer que le terme de force provenant du tenseur des contraintes est négligeable à l'ordre 1 en  $e$ , en raison de la faible dispersion de vitesse des anneaux (de l'ordre 1 mm/s dans les anneaux de Saturne). On vérifie alors que l'expression (12) de la vitesse satisfait les équations de Navier-Stokes à l'ordre 1 en excentricité. Ceci montre que les lignes de courant sont une des solutions possibles pour le mouvement du fluide, même si ce n'est pas la seule. Toute la question consiste alors à trouver les conditions qui doivent être remplies pour que cette solution existe. Une fois ces conditions établies, on sait *a fortiori* que la solution est une des solutions possibles du problème hydrodynamique. Ces conditions s'expriment généralement à partir des variations temporelles de  $a$ ,  $e$  et  $w$  sous l'action de l'auto-gravité du disque, des contraintes visqueuses, et du satellite, que l'on obtient à l'aide des équations de Gauss du mouvement elliptique perturbé, et qui peuvent être trouvées dans diverses publications, par exemple [11] et [12].

#### I.1.4 Cas d'une planète ne possédant pas la symétrie sphérique:

Ce formalisme pose problème lorsque les coefficients harmoniques du potentiel de la planète ne sont pas nuls. Pour simplifier, nous allons



considérer seulement le premier terme de ce potentiel, de sorte que le développement est fourni par l'équation (1).

En l'absence de satellite perturbateur, et si l'on observe le système des anneaux que sur des temps courts devant le temps de diffusion, les lignes de courant sont des cercles (voir par exemple Stewart et al. [13], équation (61) qui montre que  $u_r \ll u_\theta$ ):

$$r = r_0 \quad (13)$$

c'est-à-dire que  $e = 0$  dans (11b).

Les quelques remarques suivantes permettent de cerner le problème.

i) Déterminons le demi grand axe de l'orbite osculatrice au cercle de rayon  $r = r_0$ :

On trouve le demi-grand axe à partir de l'expression de la vitesse:

$$v^2 = [ r_0 \Omega(r_0) ]^2 \quad (14a)$$

$$= GM_p [ 2/r_0 - 1/a ] \quad (14b)$$

où  $\Omega$  est donné par (3), la deuxième égalité provenant des propriétés du mouvement elliptique. On en déduit la valeur de  $a$ :

$$a = \frac{r_0}{1 - 3/2 J_2 (R/r_0)^2} \quad (15)$$

Il est clair que (11) n'est plus valide, puisqu'on devrait avoir  $a = r_0$ .

ii) Les équations (11) supposent que l'équation (9) est satisfaite. En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient:

$$m ( n(a) - \Omega_p ) = n(a) - \frac{dw}{dt} (a) \quad (16)$$

où  $n = (GM_p/a^3)^{1/2}$  désigne le moyen mouvement.

La relation de résonance, que l'on obtient par la théorie épicyclique, est:

$$m ( \Omega(r_0) - \Omega_p ) = \kappa(r_0) \quad (17)$$

La résolution de (17) donne le rayon  $r_0$  de résonance. La résolution de (16) donne un "demi grand axe  $a$  de résonance". Le lien entre ces deux quantités est donné par (15).

Ces résultats suggèrent en fait que le quantité  $a$  intervenant dans (11) n'est pas un élément elliptique, mais un "élément épicyclique", c'est-à-dire l'une des constantes ( $r_0$ ,  $\varepsilon$ ,  $\delta$ ,  $\theta_0$ ) intervenant dans (4). Lorsque la planète est à symétrie sphérique, ces quatre constantes sont identiques aux éléments elliptiques ( $r_0 = a$ ,  $\varepsilon = e$ ,  $kt + \delta = M$  et  $\Omega t + \theta_0 = \lambda$ ).

L'une des sources du problème est que lorsque la planète n'est pas sphérique, les éléments elliptiques ont des variations à courtes périodes. De ce fait, la vitesse donnée par (12) ne vérifie plus les équations de Navier-Stokes, à moins de ne conserver que la partie séculaire des éléments elliptiques, ce que rien ne justifie. Notons que les éléments épicycliques sont eux constants par nature.

L'ensemble de ces remarques suggère que les équations (11) doivent être exprimées non en fonction des éléments elliptiques, mais des éléments épicycliques (appelés dans la suite éléments géométriques). L'article qui suit a pour but de déterminer le lien entre ces éléments et les éléments elliptiques, et à dériver les équations régissant l'évolution temporelle de ces éléments.

**ARTICLE 1**

Soumis pour publication dans *Icarus*

20 January 1987

**DESCRIPTION AND BEHAVIOUR OF STREAMLINES IN PLANETARY RINGS**

by

**N. BORDERIES and P.Y. LONGARETTI**

*Observatoire du Pic-du-Midi et de Toulouse, 14 Avenue Edouard Belin  
31400 Toulouse, France*

**Abstract :** *The dynamical behaviour of planetary rings is often described in terms of streamline deformations and motions. We argue that the standard formula giving the shape of the streamlines involves geometric elements rather than orbital elements. We relate the geometric elements to the orbital elements and derive the differential equations which govern the variations with time of the geometric elements.*

**-I- INTRODUCTION**

Ring particle streamlines are a powerful concept in the subject of ring dynamics. This concept has been introduced by Borderies, Goldreich and Tremaine (1982) and used by these authors in several of their subsequent papers (1983a, 1983b, 1985, 1986, 1987). The shape of perturbed streamlines is given by

$$r = r_0 [1 - \epsilon \cos (m\phi + m\Delta)], \quad (1)$$

where  $r$  is the radius and  $\phi$  the longitude in a frame rotating with the pattern speed  $\Omega_p$ :  $\phi$  is related to the longitude  $\theta$  relative to an inertial reference frame by

$$\phi = \theta - \Omega_p t, \quad (2)$$

where  $\theta$  is the longitude in an inertial reference frame. In the most general case, each variable  $r_0$ ,  $\epsilon$  and  $\Delta$  is a function of  $t$  and  $\phi$ . If the streamlines are stationary in the rotating frame,  $r_0$ ,  $\epsilon$  and  $\Delta$  are function of  $\phi$  only. If  $r_0$ ,  $\epsilon$  and  $\Delta$  are constant along a streamline, the latter can be specified by its  $r_0$ , and  $\epsilon$  and  $\Delta$  considered as functions of  $r_0$ . As emphasized by Borderies, Goldreich and Tremaine (1985), this representation is very general. It applies to the streamlines near a Lindblad resonance with a satellite, to the streamlines of a ring perturbed by a nearby satellite in a circular orbit, to the streamlines of a narrow elliptical ring, and to the streamlines of the flow of particles in the case of axisymmetric perturbations. All these features can be viewed as tightly wound density waves.

This paper follows from the realization by its authors that  $r_0$  and  $\epsilon$  are not a semi-major axis and an eccentricity but geometric elements. We begin in section II by recalling what are the bases for describing a ring in terms of streamlines. In section III we develop the epicyclic

theory to the order 2. The order 2 is required in order to be able to relate the geometric elements to the orbital elements, which is done in section IV, and to derive the equations of variations of the geometric elements, which is done in section V. Section VI contains a conclusion.

## **-II- PHILOSOPHY OF THE STREAMLINE FORMALISM**

### **-II-1- WHERE DOES EQUATION (1) COME FROM ?**

Where does equation (1) come from ? The answer involves several points.

#### **a) First point**

Equation (1) may be viewed as representing a class of solutions for a number of problems of test particle motion. Let us give two examples. In these examples we assume that  $O$ -XYZ is a quasi-inertial system of coordinate axes such that  $O$  coincides with the center of mass of the planet,  $OZ$  is an axis of symmetry for it, and  $O$ -XY is a plane of symmetry. Then, as will be shown in section III, motions in the  $O$ -XY plane are possible. We describe the dynamical state of the particle by its cylindrical coordinates  $r, \theta$  with respect to the reference frame  $O$ -XY. The motion is governed by the Lagrange equations. One looks for a solution in the form of a nearly-circular orbit. The equations are solved by successive approximations. The solution is formally developed as a series in power of a small parameter which expresses the departures from a circular orbit. This is the epicyclic theory (see Chandrasekhar, 1942).



First example : motion in the gravitational field of the planet alone. The first-order solution is

$$r = r_0 (1 - \epsilon \cos \xi), \quad (3)$$

$$\theta = \theta_{00} + \Omega t + \frac{2\Omega}{\kappa} \epsilon \sin \xi, \quad (4)$$

with

$$\xi = \kappa t + \delta. \quad (5)$$

Thus the motion is completely defined by four geometric elements,  $r_0$ ,  $\epsilon$ ,  $\delta$  and  $\theta_{00}$ , which are four constants of integration. The frequencies  $\kappa$  and  $\Omega$  are functions of  $r_0$ . By eliminating the time between equations (3) and (4), we obtain an equation of the form given by equation (1) with  $m = 1$ ,  $\Omega_p = \Omega - \kappa$  and  $\Delta = \delta - \theta_{00}$ .

Another approach to study the same problem would consist in using the particle osculating orbital elements with respect to the system of coordinate axes O-XY. These elements are  $a$ , the semi-major axis of the osculating orbit,  $e$ , the eccentricity,  $w$ , the longitude of periapsis, and  $M$ , the mean anomaly. The motion is governed by the Gauss variational equations, or, since the force is derivable from a scalar potential function, by the Lagrange variational equations. The equations are solved by a perturbation method. The unperturbed problem corresponds to the approximation that the planet possesses the spherical symmetry; it has for solution the keplerian motion. The additional forces due to the departures from spherical symmetry are proportional to the small parameter  $J_2$ , the harmonic coefficient of degree 2. One looks for a solution developed according to the successive powers of this small parameter.

When we are dealing with planetary rings, the epicyclic theory applies very well because the  $\epsilon$  of the particle orbits are very small, of the order  $10^{-5}$  at most, such that a first order theory gives a good

description of the test particle motion. Furthermore the solution does not involve any approximation with respect to  $J_2$  and the other harmonic coefficients of the planet gravitational potential. But there is a deeper reason for which the geometric elements are more appropriate than the orbital elements to study planetary ring dynamics : it is that the geometric elements of a test particle orbiting in the gravitational field of the planet alone are constant, while the orbital elements have short-periodic variations which make more complicated the relation between the elements used to describe the motion and the shape of the orbit. For instance, if the orbit is circular, we have  $r = r_0$ , but we do not have  $r = a$ . Of course the two approaches become equivalent in the case where it is assumed that all the harmonic coefficients of the planet gravitational potential are equal to zero. Such an assumption is justified when one is interested in understanding theoretically some isolated physical process. But when one wants to compare the theory to the observations one cannot any more make this assumption and it matters to know which elements to use.

Second example : motion near a Lindblad resonance with a satellite.

Near a Lindblad resonance, the satellite potential varies as  $\cos (m\theta - m\Omega_p t)$  where the pattern speed  $\Omega_p$  is fixed by the satellite. Goldreich and Tremaine (1982) have computed the particular solution of the linearized equations of motion which correspond to the periodic orbits. This solution is of the form

$$r = r_0 + A(r_0) \cos (m\theta - m\Omega_p t), \quad (6)$$

$$\theta = \theta_{00} + \Omega t + B(r_0) \sin (m\theta - m\Omega_p t), \quad (7)$$

where A and B are proportional to the ratio of the satellite mass to the planet mass and become infinite at the Lindblad resonance :

$$|m(\Omega - \Omega_p)| = \kappa. \text{ Equation (6) is of the same form as equation (1).}$$

b) Second point

The second point follows from the fact that we can treat the ring as a fluid. The fluid approximation is justified by the fact that one can apply the concept of element of volume with each element of volume containing a considerable number of particles. Each volume element can be described by its Lagrangian coordinates  $r, \theta$  which are function of the time and of the initial conditions  $r^0, \theta^0$ . Note that the particles in this volume element move freely inside it, such that  $r, \theta$  represents their mean position. The motion of the volume element obeys the fundamental law of dynamics

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{r^0, \theta^0} = \frac{1}{\rho} F, \quad (8)$$

where  $v$  is the velocity,  $\rho$  the density, and  $F$  the total force exerted on the fluid element. As a first approximation we can neglect the interaction of particles through their gravitational attraction and mutual collisions. Then the equations which govern the motion of the volume element become formally the same as those governing the motion of a test particle. The solutions are also formally the same.

### c) Third point

The third and last point is that the existence of streamlines depends in general on a certain number of assumptions. Again we give few examples.

First example : unperturbed ring. The motion of each fluid element is given by equations (3) and (4). But collisions among particles reduce  $\epsilon$  to 0. This can be seen for instance in Stewart, Lin and Bodenheimer (1984, formula (61)) : in the fluid approximation, the effects of collisions are modelled as a viscous stress depending on a parameter of viscosity  $\nu$ ; the radial velocity  $u_r$  of the fluid is proportional to  $\nu$ ,

which expresses a very slow diffusion of the ring; if we are interested in time-scales much shorter than the diffusion time-scale, then we have  $u_r \approx 0$ , such that we can take  $\epsilon = 0$ . Since the particles have a coherent mean motion there exist streamlines; these streamlines are circles. It can be shown that self-gravity does not destroy this symmetry. No assumption is necessary in that case.

Second example : eccentric ringlet. Let us assume that some physical process, like the excitation by a nearby satellite (see Goldreich and Tremaine, 1981) or a viscous instability (see Borderies, Goldreich and Tremaine, 1985), forces the eccentricities of the particle orbits. The motion of each volume element is once again given by equations (3) and (4). The existence of eccentric streamlines lies on the assumption that  $\epsilon$  on one hand and  $\Delta = \delta - \theta_{00}$  on the other hand are the same for all volume elements with a given  $r_0$ . The existence of an eccentric ringlet requires in addition that streamlines at different  $r_0$  have the same  $\Omega_p = \Omega - \kappa$ . This condition can be produced by the self-gravity of the ring (see Goldreich and Tremaine, 1979 and Borderies, Goldreich and Tremaine, 1983b).

Third example : streamlines near a Lindblad resonance. It can be shown that because of collisions each volume element follows a periodic orbit (that is to say has a forced eccentricity but no free eccentricity). Nevertheless the existence of streamlines whose shape is given by equation (1) rests on the assumption that viscosity and self-gravity change only quantitatively and not qualitatively this equation : in other words, the shape of the streamlines is given by equation (1), but  $\epsilon$  and  $\Delta$  do not have any more the values which they had in the case of periodic orbits, as given by equation (6).

The justification for making the above assumptions is twofold : they do not violate the observations and they do not violate the theory. To take again the same examples as above, we observe eccentric ringlets in planetary ring systems, and we observe near many inner Lindblad resonances, trailing density waves which can be described as sets of streamlines with a positive gradient of  $\Delta$ . Moreover, we can construct

consistent theoretical representations of several regions of a ring system based on the assumption that streamlines whose shape is given by equation (1) exist. These streamlines are not broken down by the forces acting in the ring. On the contrary one can study how these forces modify the three parameters  $r_0$ ,  $\epsilon$  and  $\delta$  characterizing each streamline, and one can also find stationary solutions.

#### -II-2- RELATION BETWEEN VOLUME ELEMENTS AND STREAMLINES

We represent the position and the velocity of a volume element by the same equations as in the unperturbed case (where the only acting force is the gravitational attraction exerted by the planet) in which  $r_0$ ,  $\epsilon$ ,  $\delta$  and  $\theta_{00}$  no more constant. The method of variation of parameters allows to derive ordinary differential equations which govern the behaviour of these quantities. This is exactly the same approach as when one defines osculating elements from keplerian elements.

By identifying equations (1) and (3), we have to zero-order with respect to  $\epsilon$  :

$$\xi = m\phi + m\Delta. \quad (9)$$

In the absence of perturbations the streamlines of the flow of particles are circles ( $r = r_0$ ). The identification which allows to obtain equation (9) is rigorous because  $r$  in equation (3) is expressed in terms of geometric elements.

#### -III- EPICYCLIC THEORY TO SECOND ORDER

##### -III-1- EQUATIONS

Let  $x, y, z$  be the rectangular coordinates relative to the reference frame  $O$ -XYZ and  $r, \theta, z$  the cylindrical coordinates relative to this system. We study the motion of a test particle orbiting in the gravitational field  $\varphi^P(r, z)$  of an axisymmetric body whose center of mass coincides with  $O$ . Moreover we assume that the plane  $z = 0$  is a plane of symmetry such that

$$\frac{\partial \varphi^P}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial^2 \varphi^P}{\partial r \partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (10)$$

The equations which govern the motion of the test particles are the Lagrange equations (Goldstein, 1950) :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (11)$$

where the dot indicates the time derivative and with the Lagrangian

$$L = T - \varphi^P; \quad (12)$$

$T$  is the kinetic energy per unit mass. In cylindrical coordinates we have

$$T = \frac{1}{2} \left[ \left[ \frac{dr}{dt} \right]^2 + r^2 \left[ \frac{d\theta}{dt} \right]^2 + \left[ \frac{dz}{dt} \right]^2 \right]. \quad (13)$$

The Lagrange equations read

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left[ \frac{d\theta}{dt} \right]^2 = - \frac{\partial \varphi^P}{\partial r}, \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ r^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = - \frac{\partial \varphi^P}{\partial \theta}, \quad (15)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = - \frac{\partial \varphi^P}{\partial z}. \quad (16)$$

These equations admit the energy integral :

$$E = T + \varphi^P = \text{const.} \quad (17)$$

The assumption that the planet is axisymmetric implies that the z-component of the angular momentum is conserved :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h = \text{const.} \quad (18)$$

The assumption that the plane O-XY is a plane of symmetry implies that orbits lying in the XY-plane are possible : if at a given time  $z = 0$  and  $dz/dt = 0$ , then the orbit remains in the XY-plane. For the sake of simplicity we shall study in this paper orbits in the XY-plane : we shall consider  $\varphi^P$  as a function of  $r$  only. The Lagrange equations reduce to equations (18) and

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} = - \frac{d\varphi^P}{dr}. \quad (19)$$

## -III-2- CIRCULAR ORBITS

Circular orbits are possible. They are such that

$$r = r_0, \quad (20)$$

and

$$\theta = \theta_{00} + \Omega t \quad (21)$$

with

$$\Omega = \frac{h}{r_0^2} = \left[ \frac{1}{r_0} \frac{d\phi^P}{dr} (r_0) \right]^{1/2}. \quad (22)$$

## -III-3- NEARLY CIRCULAR ORBITS

We write formally the solution under the form :

$$r = r_0 + r_1 + r_2, \quad (23)$$

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2, \quad (24)$$

where  $r_0 = \text{const.}$ ,

$$|r_1|/r_0 = O(\zeta), \quad |r_2|/r_0 = O(\zeta^2),$$

$$|d\theta_1/dt|/(d\theta_0/dt) = O(\zeta), \quad |d\theta_2/dt|/(d\theta_0/dt) = O(\zeta^2),$$

$\zeta$  being a small parameter. Equations (19) and (18) become



$$\begin{aligned} \frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{d^2 r_2}{dt^2} - \frac{h^2}{r_0^3} \left[ 1 - 3 \frac{r_1}{r_0} - 3 \frac{r_2}{r_0} + 6 \frac{r_1^2}{r_0^2} \right] &= - \frac{d\psi}{dr} (r_0) - r_1 \frac{d^2 \psi}{dr^2} (r_0) \\ - r_2 \frac{d^2 \psi}{dr^2} (r_0) - \frac{1}{2} r_1^2 \frac{d^3 \psi}{dr^3} (r_0), & \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} r_0^2 \frac{d\theta_0}{dt} + r_0^2 \frac{d\theta_1}{dt} + 2r_0 r_1 \frac{d\theta_0}{dt} + 2r_0 r_1 \frac{d\theta_1}{dt} + 2r_0 r_2 \frac{d\theta_0}{dt} + r_1^2 \frac{d\theta_0}{dt} \\ + r_0^2 \frac{d\theta_2}{dt} = h. \end{aligned} \quad (26)$$

#### b) Zero-order solution

The zero-order equations are

$$\frac{h^2}{r_0^3} = \frac{d\psi}{dr} (r_0), \quad (27)$$

$$\frac{d\theta_0}{dt} = \frac{h}{r_0^2}. \quad (28)$$

The solution is a circular orbit of radius  $r_0$  defined by equation (27) and with

$$\theta_0 = \theta_{00} + \Omega t, \quad (29)$$

where  $\Omega$  is given by equation (22);  $\theta_{00}$  is a constant of integration.

c) First-order solution

The first-order equations are

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \kappa^2 r_1 = 0, \quad (30)$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\frac{2\Omega}{r_0} r_1, \quad (31)$$

with

$$\kappa^2 = \left[ \frac{3}{r} \frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2 \psi}{dr^2} \right]_{r=r_0}. \quad (32)$$

Integration of equation (30) gives

$$r_1 = -r_0 \varepsilon \cos \xi, \quad (33)$$

with

$$\xi = \kappa t + \delta; \quad (34)$$

$\varepsilon$  and  $\delta$  are constants of integration. Integration of equation (31) gives next

$$\theta_1 = \frac{2\Omega}{\kappa} \varepsilon \sin \xi, \quad (35)$$

where the additional constant of integration has been taken equal to zero in order that  $\theta_1$  tends to zero as  $r_1$  tends to zero.

**d) Second-order solution**

The second-order equations are

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2} + k^2 r_2 = \frac{3}{2} \eta^2 \epsilon^2 r_0 + \frac{3}{2} \eta^2 \epsilon^2 r_0 \cos 2\xi, \quad (36)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{2\Omega}{r_0} r_2 + \frac{3}{2} \Omega \epsilon^2 + \frac{3}{2} \Omega \epsilon^2 \cos 2\xi, \quad (37)$$

with

$$\eta^2 = \left[ \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{r}{6} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} \right]_{r=r_0} \quad (38)$$

The general solution of equation (36) is

$$r_2 = r_{20} \cos(kt + \delta') + \frac{3\eta^2}{2k^2} \epsilon^2 r_0 - \frac{\eta^2}{2k^2} \epsilon^2 r_0 \cos 2\xi. \quad (39)$$

We set  $r_{20}$  equal to 0 in order that  $r_2 = O(\epsilon^2)$ . By integrating equation (37) we obtain

$$\theta_2 = \Omega \left[ \frac{3}{2} - \frac{3\eta^2}{k^2} \right] \epsilon^2 t + \frac{\Omega}{2k} \left[ \frac{3}{2} + \frac{\eta^2}{k^2} \right] \epsilon^2 \sin 2\xi, \quad (40)$$

where the additional constant of integration has been taken equal to zero.

## e) Summary

By substituting equations (33) and (39) into equation (23) and equations (29), (35) and (40) into equation (24), we obtain :

$$r = r_0 \left[ 1 + \frac{3\eta^2}{2\kappa^2} \epsilon^2 - \epsilon \cos \xi - \frac{\eta^2}{2\kappa^2} \epsilon^2 \cos 2\xi \right], \quad (41)$$

$$\theta = \theta_{00} + \Omega \left[ 1 + \left[ \frac{3}{2} - \frac{3\eta^2}{\kappa^2} \right] \epsilon^2 \right] t + \frac{2\Omega}{\kappa} \epsilon \sin \xi + \frac{\Omega}{2\kappa} \left[ \frac{3}{2} + \frac{\eta^2}{\kappa^2} \right] \epsilon^2 \sin 2\xi. \quad (42)$$

We have also :

$$\frac{dr}{dt} = \kappa r_0 \left[ \epsilon \sin \xi + \frac{\eta^2}{\kappa^2} \epsilon^2 \sin 2\xi \right], \quad (43)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega \left[ 1 + \left[ \frac{3}{2} - \frac{3\eta^2}{\kappa^2} \right] \epsilon^2 + 2\epsilon \cos \xi + \left[ \frac{3}{2} + \frac{\eta^2}{\kappa^2} \right] \epsilon^2 \cos 2\xi \right]. \quad (44)$$

## -III-4- FREQUENCIES

## a) Planet potential

The planet potential is conventionally expanded under the form

$$\psi^P = \psi_0^P + \psi_1^P, \quad (45)$$

with

$$\psi_0^P = -\frac{\mu}{r}, \quad (46)$$

$$\psi_1^P = \frac{\mu}{r} \sum_{l=2}^{+\infty} \left[ \frac{R}{r} \right]^l J_l P_{l0}(0); \quad (47)$$

$\mu$  is the product of the gravitational constant  $G$  by the planet mass  $M_p$ :

$$\mu = GM_p; \quad (48)$$

the  $J_l$  are the harmonic coefficients with respect to the reference frame  $O$ -XYZ. Since  $O$  coincides with the center of mass of the planet,  $J_1 = 0$ .

The  $P_{l0}$  are Legendre polynomials :

$$P_{l0}(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} & \text{if } l = 2n, \\ 0 & \text{if } l \text{ is odd.} \end{cases} \quad (49)$$

b) Calculation of  $Q^2$ ,  $K^2$  and  $H^2$

We have :

$$\begin{aligned}\Omega^2 &= \frac{\mu}{r_0^3} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{R}{r_0} \right]^{2n} J_{2n} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{2n} (n!)^2} \right] \\ &= \frac{\mu}{r_0^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left[ \frac{R}{r_0} \right]^2 - \frac{15}{8} J_4 \left[ \frac{R}{r_0} \right]^4 + \frac{35}{16} J_6 \left[ \frac{R}{r_0} \right]^6 - \dots \right] \quad (50)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa^2 &= \frac{\mu}{r_0^3} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{R}{r_0} \right]^{2n} J_{2n} \frac{(-1)^n (2n)! (4n^2 - 1)}{2^{2n} (n!)^2} \right] \\ &= \frac{\mu}{r_0^3} \left[ 1 - \frac{3}{2} J_2 \left[ \frac{R}{r_0} \right]^2 + \frac{45}{8} J_4 \left[ \frac{R}{r_0} \right]^4 - \frac{175}{16} J_6 \left[ \frac{R}{r_0} \right]^6 + \dots \right] \quad (51)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta^2 &= \frac{\mu}{r_0^3} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{R}{r_0} \right]^{2n} J_{2n} \frac{(-1)^n (2n)! (4n^2 - 1) (n+3)}{3 \cdot 2^{2n} (n!)^2} \right] \\ &= \frac{\mu}{r_0^3} \left[ 1 - 2 J_2 \left[ \frac{R}{r_0} \right]^2 + \frac{75}{8} J_4 \left[ \frac{R}{r_0} \right]^4 - \frac{175}{8} J_6 \left[ \frac{R}{r_0} \right]^6 + \dots \right] \quad (52)\end{aligned}$$

### -III-5- CASE OF A SPHERICAL PLANET

If the planet possesses the spherical symmetry, all the harmonic coefficients of the potential are null. We have

$$\Omega = \kappa = \eta = \left[ \frac{\mu}{r_0^3} \right]^{1/2} \quad (53)$$

Equations (41) to (44) reduce to

$$r = r_0 \left[ 1 + \frac{3}{2} \epsilon^2 - \epsilon \cos \xi - \frac{1}{2} \epsilon^2 \cos 2\xi \right], \quad (54)$$

$$\theta = \theta_{00} + \Omega \left[ 1 - \frac{3}{2} \epsilon^2 \right] t + 2\epsilon \sin \xi + \frac{5}{4} \epsilon^2 \sin 2\xi, \quad (55)$$

$$\frac{dr}{dt} = \Omega r_0 (\epsilon \sin \xi + \epsilon^2 \sin 2\xi), \quad (56)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega \left[ 1 - \frac{3}{2} \epsilon^2 + 2\epsilon \cos \xi + \frac{5}{2} \epsilon^2 \cos 2\xi \right]. \quad (57)$$

#### -IV- GEOMETRIC ELEMENTS VERSUS ORBITAL ELEMENTS

##### -IV-1- SEMI-MAJOR AXIS

We compute  $a$  from

$$V^2 = \mu \left[ \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right], \quad (58)$$

where  $V$  is the velocity :

$$V^2 = \left[ \frac{dr}{dt} \right]^2 + r^2 \left[ \frac{d\theta}{dt} \right]^2. \quad (59)$$

By using equations (41), (43) and (44), and by introducing  $u$  such that

$$\Omega^2 = \frac{\mu}{r_0^3} (1 + \nu), \quad (60)$$

we obtain

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{a} = & 1 - \left[ \frac{1}{2} + \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} \right] \epsilon^2 - \nu \left[ 1 + \left[ \frac{3}{2} + \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} - \frac{3\eta^2}{\kappa^2} \right] \epsilon^2 \right] - 2\nu\epsilon \cos \xi \\ & + \left[ -\frac{1}{2} + \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} - \nu \left[ \frac{3}{2} - \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} + \frac{\eta^2}{\kappa^2} \right] \right] \epsilon^2 \cos 2\xi. \end{aligned} \quad (61)$$

We infer

$$\begin{aligned} a = & \frac{r_0}{(1 - \nu)} \left[ 1 + \frac{2\nu}{(1 - \nu)} \epsilon \cos \xi + \frac{1}{(1 - \nu)} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} + \nu \left[ \frac{3}{2} + \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3\eta^2}{\kappa^2} \right] + \frac{2\eta^2}{(1 - \eta)} \right] \epsilon^2 + \frac{1}{(1 - \eta)} \left[ \frac{1}{2} - \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} + \nu \left[ \frac{3}{2} - \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} + \frac{\eta^2}{\kappa^2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{2\eta^2}{(1 - \eta)} \right] \epsilon^2 \cos 2\xi \right]. \end{aligned} \quad (62)$$

#### -IV-2- ECCENTRICITY

We compute the eccentricity from the angular momentum formula :



$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = [ \mu a(1 - e^2) ]^{1/2}. \quad (63)$$

From equations (18), (22), (28) and (29) we have

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = r_0^2 \Omega. \quad (64)$$

Combining equations (60), (63) and (64) yields

$$a(1 - e^2) = r_0^2 (1 + \nu). \quad (65)$$

By using equation (61) we obtain

$$e^2 = \nu^2 + 2\nu(1 + \nu)\epsilon \cos \xi + (1 + \nu) \left[ \frac{1}{2} + \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} + \nu \left[ \frac{3}{2} + \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} - \frac{3\eta^2}{\kappa^2} \right] \right] \epsilon^2 \\ + (1 + \nu) \left[ \frac{1}{2} - \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} + \nu \left[ \frac{3}{2} - \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} + \frac{\eta^2}{\kappa^2} \right] \right] \epsilon^2 \cos 2\xi. \quad (66)$$

#### -IV-3- TRUE ANOMALY

We compute  $e \cos f$ , where  $f$  is the true anomaly, from

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}. \quad (67)$$

Substituting equations (41) and (65) into equation (67) gives

$$e \cos f = u + (1 + u) \left[ \left[ \frac{1}{2} - \frac{3\eta^2}{2\kappa^2} \right] \epsilon^2 + \epsilon \cos \xi + \left[ \frac{1}{2} + \frac{\eta^2}{2\kappa^2} \right] \epsilon^2 \cos 2\xi \right] \quad (68)$$

To compute  $e \sin f$  one introduces the angle  $\Psi$  between the vectors  $\mathbf{r}$  and  $d\mathbf{r}/dt$ . We have

$$\cotg \Psi = \frac{r \, dr}{h \, dt} = \frac{1 \, dr}{r \, df} = \frac{r e \sin f}{a(1 - e^2)}. \quad (69)$$

By using equations (28), (29) and (65) we obtain :

$$e \sin f = \frac{(1 + u) \, dr}{r_0 \Omega \, dt}. \quad (70)$$

We substitute equation (43) in equation (70) and obtain

$$e \sin f = (1 + u) \frac{\kappa}{\Omega} \left[ \epsilon \sin \xi + \frac{\eta^2}{\kappa^2} \epsilon^2 \sin 2\xi \right]. \quad (71)$$

#### -IV-4- LONGITUDE OF THE PERIAPSIS

It can be computed from

$$w = \theta - f. \quad (72)$$

#### -IV-5- CASE OF A SPHERICAL PLANET

Equations (61), (66), (68) and (71) reduce to :

$$a = \frac{r_0}{(1 - \epsilon^2)}, \quad (73)$$

$$e = \epsilon, \quad (74)$$

$$\cos f = \cos \xi - \epsilon + \epsilon \cos 2\xi, \quad (75)$$

$$\sin f = \sin \xi + \epsilon \sin 2\xi. \quad (76)$$

The two last equations imply that

$$M = \xi. \quad (77)$$

By combining equations (67), (73), (74) and (75), we find again equation (54) giving  $r$ . To find  $\theta$ , as given by equation (55), we need the equation relating  $f$  to  $M$  to second order in  $e$  :

$$f = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M, \quad (78)$$

and the relation between  $\Omega(a)$  and  $\Omega(r_0) = \Omega$  :

$$\Omega(a) = \Omega(r_0) - \frac{3}{2} \Omega e^2. \quad (79)$$

#### -V- VARIATIONS OF THE GEOMETRIC ELEMENTS

We have studied the motion of a test particle which obeys the

differential equations :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left[ \frac{d\theta}{dt} \right]^2 = - \frac{\partial \varphi^P}{\partial r}, \quad (80)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ r^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = - \frac{\partial \varphi^P}{\partial \theta}. \quad (81)$$

Once the initial position and velocity are specified, the motion is completely defined by equations (41) to (44). It depends on four constants of integration :  $r_0$ ,  $\varepsilon$ ,  $\delta$  and  $\theta_{00}$ . At each instant  $t$  there is a bijective correspondance  $\tau$  between  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (r, \theta, dr/dt, d\theta/dt)$  and  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (r_0, \varepsilon, \delta, \theta_{00})$ .

Suppose now that the particle is submitted to an additional perturbing force. The equations of motion become :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left[ \frac{d\theta}{dt} \right]^2 = - \frac{\partial \varphi^P}{\partial r} + R, \quad (82)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ r^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = - \frac{\partial \varphi^P}{\partial \theta} + rS. \quad (83)$$

Let us apply the change of variables defined by the transformation  $\tau$ . The system of equations (82) and (83) is transformed into a new system of the form

for  $i = 1, 2, 3, 4$ ,

$$\frac{dc_i}{dt} = F_i(c_1, c_2, c_3, c_4, t). \quad (84)$$

This four new variables can be called osculating geometrical elements. If at any time  $t$  the perturbing force disappeared, these elements would

remain constant and the particle orbit would be given by equations (41) to (44). The aim of this section is to find the expression of equations (84).

Let

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = g(c_1, c_2, c_3, c_4) \quad (85)$$

be an integral of the differential equations of the unperturbed problem. By differentiating equation (85) we obtain :

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial g}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} \quad (86)$$

Let us replace in the above equation  $d^2r/dt^2$  and  $d^2\theta/dt^2$  by the expressions drawn from equations (82) and (83). The left-hand side member becomes the sum of a term independent of R and S and of a term arising from the perturbation. If the first of these two terms is then expressed in function of the time and the geometric elements, it will be equal to  $dg/dt$  in the unperturbed motion, which vanishes. Hence, equation (86) can be replaced by :

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} R + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial x_4} S = \sum_j \frac{\partial g}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} \quad (87)$$

=V=1= VARIATIONS OF  $r_\theta$

We use the angular momentum integral (see equation (64))

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = r_0^2 \Omega = h.$$

Note that  $h$  depends only on  $r_0$  so that a variation of  $r_0$  is only due to a variation of angular momentum. In contrast, when one uses osculating elements, a variation of  $a$  is due to a variation to a variation of energy. Application of (87) gives

$$\frac{\partial h}{\partial r_0} \frac{dr_0}{dt} = rS. \quad (88)$$

Differentiation of  $\Omega$ , as given by equation (22), involves derivatives of  $\psi^P$ . By combining the equations (22), (32) and (38) giving respectively,  $\Omega$ ,  $\kappa^2$  and  $\eta^2$ , we obtain

$$\frac{d\psi^P}{dr} (r_0) = r_0 \Omega^2, \quad (89)$$

$$\frac{d^2\psi^P}{dr^2} (r_0) = \kappa^2 - 3\Omega^2, \quad (90)$$

$$\frac{d^3\psi^P}{dr^3} (r_0) = \frac{12\Omega^2 - 6\eta^2}{r_0}. \quad (91)$$

We compute  $dh/dr_0$  from equations (89) and (90) and substitute the result as well as equation (41) for  $r$  in equation (88). The differential equation for  $r_0$  becomes

$$\frac{dr_0}{dt} = \frac{2\Omega}{\kappa^2} \left[ 1 + \frac{3\eta^2}{2\kappa^2} \epsilon^2 - \epsilon \cos \xi - \frac{\eta^2}{2\kappa^2} \epsilon^2 \cos 2\xi \right] S. \quad (92)$$

-V-2- VARIATIONS OF  $\epsilon$ 

We use the integral of energy (see equation (17)) :

$$E = \psi^P(r) + \frac{1}{2} \left[ \left[ \frac{dr}{dt} \right]^2 + r^2 \left[ \frac{d\theta}{dt} \right]^2 \right]. \quad (93)$$

To express  $E$  in function of the geometric elements, we expand the potential energy term around  $r_0$  to order 2 in  $\epsilon$  and use equations (89), (90) and (91), and we substitute in the kinetic energy term equations (41), (43) and (44) for  $r$ ,  $dr/dt$  and  $d\theta/dt$ . We obtain :

$$E = \psi^P(r) + \frac{\Omega^2 r_0^2}{2} \left[ 1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \epsilon^2 \right]. \quad (94)$$

Application of (87) gives

$$\frac{\partial E}{\partial r_0} \frac{dr_0}{dt} + \frac{\partial E}{\partial \epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{dr}{dt} R + r \frac{d\theta}{dt} S. \quad (95)$$

We compute  $\partial E/\partial r_0$  by using equations (89) to (91). We substitute equations (41), (43), (44), and (92) into equation (95). We find the differential equation for the variations of  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{dt} = & \frac{1}{r_0 k} \left[ \sin \xi + \frac{\eta^2}{k^2} \epsilon \sin 2\xi \right] R + \frac{\Omega}{r_0 k^2} \left[ 2 \cos \xi + \left[ -\frac{9}{2} + \frac{3\eta^2}{k^2} \right] \epsilon \right. \\ & \left. + \left[ \frac{1}{2} + \frac{\eta^2}{k^2} \right] \epsilon \cos 2\xi \right] S. \end{aligned} \quad (96)$$

### -V-3- VARIATIONS OF $\delta$

We look for a differential equation for  $\xi = \kappa t + \delta$  rather than for  $\delta$ . From their definitions both the coordinates and velocity components in the perturbed motion are related to the geometric elements by the same formulae as in the unperturbed motion. Hence we have from equations (41) and (43) :

$$\frac{dr}{dt} = \kappa r_0 \left[ \epsilon \sin \xi + \frac{\eta^2}{k^2} \epsilon^2 \sin 2\xi \right] = \frac{\partial r}{\partial r_0} \frac{dr_0}{dt} + \frac{\partial r}{\partial \epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt}. \quad (97)$$

By using equations (92) and (96) we obtain the differential equation for  $\xi$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} = & \kappa + \frac{1}{\kappa r_0 \epsilon} \left[ \cos \xi - \frac{3\eta^2}{k^2} \epsilon + \frac{\eta^2}{k^2} \epsilon \cos 2\xi \right] R \\ & - \frac{\Omega}{k^2 r_0 \epsilon} \left[ 2 \sin \xi + \left[ \frac{1}{2} + \frac{\eta^2}{k^2} \right] \epsilon \sin 2\xi \right] S. \end{aligned} \quad (98)$$



-V-4- VARIATIONS OF  $\theta_{00}$ 

It is more convenient to look for a differential equation for

$$\gamma = \theta_{00} + \Omega \left[ 1 + \left[ \frac{3}{2} - \frac{3\eta^2}{\kappa^2} \right] \epsilon^2 \right], \quad (99)$$

rather than to look for a differential equation for  $\theta_{00}$ . The principle to derive the equation for  $\gamma$  is the same as the one to derive the equation for  $\delta$  except that we use  $\theta$  instead of  $r$ . From equations (42), (44) and (99) we infer

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega (1 + 2\epsilon \cos \xi) = \frac{d\gamma}{dt} + \frac{\partial(\theta - \gamma)}{\partial r_0} \frac{dr_0}{dt} + \frac{\partial(\theta - \gamma)}{\partial \epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{\partial(\theta - \gamma)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt}. \quad (100)$$

By using equations (92), (96) and (98) we obtain the differential equation for  $\gamma$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} = \Omega - \frac{\Omega}{\kappa^2 r_0} \left[ 2 + \left[ \frac{3}{2} - \frac{3\eta^2}{\kappa^2} \right] \epsilon \cos \xi \right] R \\ + \frac{\Omega^2}{\kappa^3 r_0} \left[ 21 - \frac{2\kappa^2}{\Omega^2} - \frac{18\eta^2}{\kappa^2} \right] \epsilon \sin \xi S. \end{aligned} \quad (101)$$

## -V-5- CASE OF A SPHERICAL PLANET

Equations (92), (96), (98), and (101) reduce to

$$\frac{dr_0}{dt} = \frac{2}{\Omega} \left[ 1 + \frac{3}{2} \epsilon^2 - \epsilon \cos \xi - \frac{1}{2} \epsilon^2 \cos 2\xi \right] S, \quad (102)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{r_0 \Omega} \left[ (\sin \xi + \epsilon \sin 2\xi) R + \left( 2 \cos \xi - \frac{3}{2} \epsilon + \frac{3}{2} \epsilon \cos 2\xi \right) S \right], \quad (103)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \Omega + \frac{1}{\Omega r_0 \epsilon} \left[ (\cos \xi - 3\epsilon + \epsilon \cos 2\xi) R - \left( 2 \sin \xi + \frac{3}{2} \epsilon \sin 2\xi \right) S \right], \quad (104)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \Omega - \frac{1}{\Omega r_0} \left[ \left( 2 - \frac{3}{2} \epsilon \cos \xi \right) R - \epsilon \sin \xi S \right]. \quad (105)$$

We can retrieve Gauss' equations as follows. From equations (73) and (74), we have to the order 2 in eccentricity

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= (1 + \epsilon^2) \frac{dr_0}{dt} + 2 r_0 \epsilon \frac{d\epsilon}{dt} \\ &= \frac{2}{\Omega(a)} \left[ R \epsilon \sin f + S \left( 1 + \epsilon \cos f + \frac{1}{2} \epsilon^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (106)$$

where we have used equations (102), (103), (75), (76) and (79). By substituting equations (74) to (76) into equation (103) we obtain

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{a\Omega(a)} \left[ R \sin f + S \left( 2 \cos f + \frac{1}{2} \epsilon - \frac{1}{2} \epsilon \cos 2f \right) \right]. \quad (107)$$

By substituting equations (74) to (77) into equation (104) we obtain

$$\frac{dM}{dt} = \Omega(a) + \frac{1}{a\Omega(a)\epsilon} \left[ R (\cos f - 2\epsilon) - S (2 - \epsilon \cos f) \sin f \right]. \quad (108)$$

We have finally by combining equations (55), (72), (78) and (99)

$$\omega = \gamma - \xi. \quad (109)$$

Substituting equations (74) to (76), (104) and (105) into equation (109) gives

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{a\Omega(a)e} \left[ -R \cos f + S (2 - e \cos f) \sin f \right]. \quad (110)$$

#### -VI- SUMMARY AND CONCLUSION

Equations (41) to (44) give the relations between cylindrical coordinates and geometric elements. Equations (61), (66), (68), (71) and (72) relate the geometric elements to the orbital elements. The equations which govern the variations with time of the geometric elements are equations (92), (96), (98) and (101). We intend in a next paper to integrate these equations to calculate the perturbations exerted on a narrow eccentric ring by a satellite on an eccentric orbit. Such a calculation is necessary to study in detail from the Voyager data the effects of the small satellites of Uranus on the Uranian rings.

## REFERENCES

- BORDERIES, N., P. GOLDREICH, AND S. TREMAINE (1982). Sharp edges of planetary rings. *Nature* **299**, 209-211.
- BORDERIES, N., P. GOLDREICH, AND S. TREMAINE (1983a). Perturbed Particle Disks. *Icarus* **55**, 124-132.
- BORDERIES, N., P. GOLDREICH, AND S. TREMAINE (1983b). The Dynamics of Elliptical Rings. *Astron. J.* **88**, 1560-1568.
- BORDERIES, N., P. GOLDREICH, AND S. TREMAINE (1985). A Granular Flow Model for Dense Planetary Rings. *Icarus* **63**, 406-420.
- BORDERIES, N., P. GOLDREICH, AND S. TREMAINE (1986). Nonlinear Density Waves in Planetary Rings. *Icarus*, accepted for publication.
- BORDERIES, N., P. GOLDREICH, AND S. TREMAINE (1987). Confinement of Narrow Rings. In preparation.
- CHANDRASEKHAR, S. (1942). *Principles of Stellar Dynamics*. Univ. of Chicago Press, Chicago.
- GOLDREICH, P., AND S. TREMAINE (1979). Precession of the  $\epsilon$  Ring of Uranus. *Astron. J.* **84**, 1638-1641.
- GOLDREICH, P., AND S. TREMAINE (1981). The Origin of the Eccentricities of the Rings of Uranus. *Astrophys. J.* **243**, 1062-1075.
- GOLDREICH, P., AND S. TREMAINE (1982). The Dynamics of Planetary Rings. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **20**, 249-283.
- GOLDSTEIN, H. (1970). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company.

STEWART, G. R., D.N.C. LIN, AND P. BODENHEIMER (1984). Collision-Induced Transport Processes in Planetary Rings. In *Planetary Rings* (R. Greenberg and A. Brahic, Ed.), University of Arizona press, Tucson, 447-512.

## I.2 Etude non-linéaire d'une onde de densité:

### I.2.1 Position du problème:

Comme je l'ai déjà mentionné dans l'introduction, les données de Voyager ont permis d'identifier des profils de profondeur optique d'ondes de densité dans les anneaux. La théorie hydrodynamique linéaire du phénomène prévoit un effondrement des anneaux sur la planète, et l'éloignement des satellites (qui génèrent les ondes) en des temps courts comparés à l'âge du système solaire.

Sans entrer dans l'exposé mathématique de cette théorie, qui enflerait démesurément le volume de cette thèse, (le lecteur pourra se référer à [5], [6], [14] et [15]) on peut comprendre qualitativement ces phénomènes de la manière suivante. Une onde de densité est excitée à une résonance avec l'un des satellites de la planète. L'amplitude de l'onde est imposée par le satellite, et la distribution de matière est donc connue (la théorie détermine simultanément la vitesse du fluide de particules des anneaux, la pression, la densité, et le potentiel auto-gravitant); cette distribution est une spirale très enroulée (beaucoup plus qu'un sillon de disque, par exemple). Ces ondes sont en phase avec l'une des composantes de Fourier du potentiel du satellite excitateur, c'est-à-dire que dans un repère tournant avec la vitesse angulaire caractéristique de la composante de Fourier considérée, l'onde et cette composante apparaissent stationnaire. Comme la distribution de matière n'est pas axisymétrique, le satellite exerce un couple sur l'onde (et réciproquement). Ce couple conduit à un transfert permanent de moment cinétique de l'onde vers le satellite. On trouve alors le temps caractéristique d'évolution de l'orbite d'un satellite en sommant les contributions de toutes les ondes de densité qu'il exerce dans les anneaux, et le temps caractéristique d'évolution des anneaux en sommant les contributions de toutes les ondes qu'il contient. Cette procédure

montre par exemple que les satellites S26 et S27 (qui sont les satellites bergers de l'anneau F) doublent leurs distances à la planète en des temps de l'ordre de  $2 \cdot 10^8$  et  $2 \cdot 10^7$  ans, respectivement.

Ce calcul suggère que les anneaux sont jeunes et que leur espérance de vie est brève, à moins que le transfert de moment cinétique entre les anneaux et les satellites ne soit largement surestimé. Cette dernière hypothèse n'est a priori pas à rejeter puisque les profils d'ondes de densité observé dans les anneaux sont clairement non-linéaires (c'est-à-dire non sinusoïdaux), et que l'effet des non-linéarités est de limiter l'amplitude des variations de densité de matière, et donc de limiter l'échange de moment cinétique. Le travail que j'ai accompli, et qui est présenté dans la section suivante, a pour motivation de vérifier cette possibilité.

### I.2.2 Principe de la représentation non-linéaire d'une onde et calcul du couple non-linéaire:

Le détail de la procédure est décrit dans l'article qui suit. Je vais me contenter ici d'expliquer la démarche et de résumer les résultats.

Le but que l'on s'est fixé est de calculer le couple exercé par un satellite donné sur une onde qu'il excite, à partir du profil de profondeur optique de cette onde. En l'occurrence, le satellite est Mimas, et l'onde choisie est désignée par Mimas 5:3 (les chiffres 5 et 3 désignent la résonance à partir de laquelle l'onde se propage; cette onde se trouve dans l'anneau A). Le profil de profondeur optique de cette onde (cf figure 1) a été enregistré par un photopolarimètre monté à bord de Voyager II au cours de l'occultation d'une étoile par les anneaux (pour plus de renseignements sur cette expérience, se reporter par exemple à Esposito et al. [16]). La question consiste en fait à déduire la répartition de densité de surface des anneaux de ce profil.

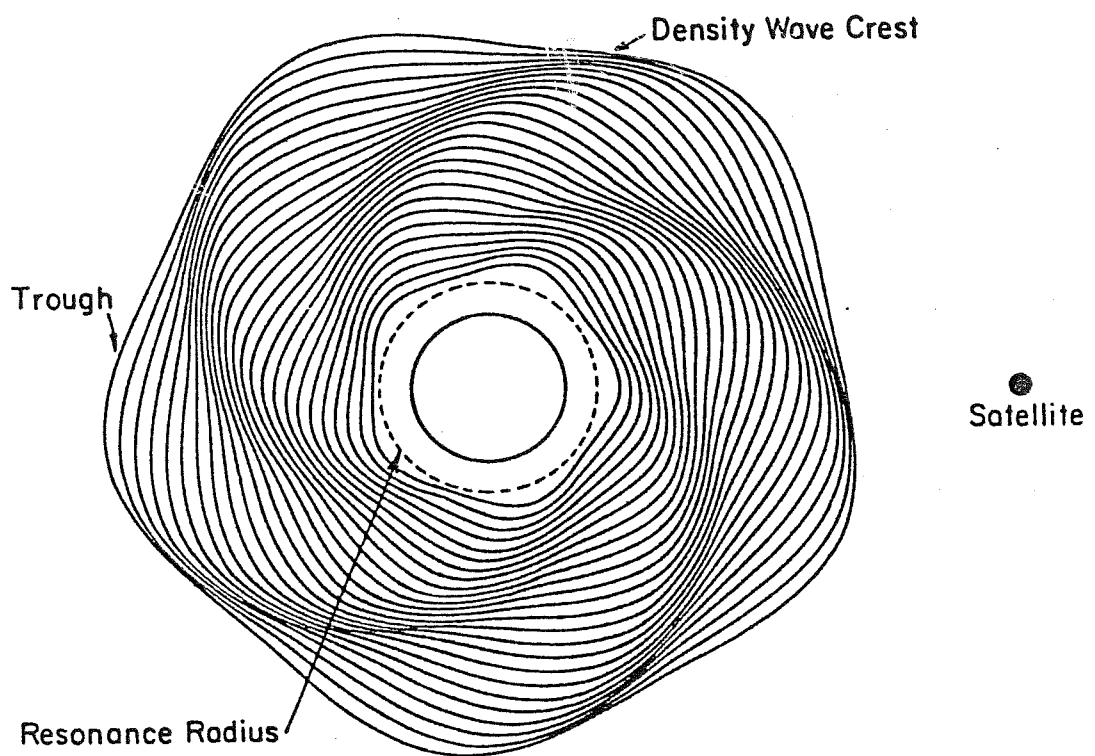


Fig. 12. Schematic diagram of the particle path pattern and the associated trailing spiral density wave generated by the  $p=4$  Lindblad resonance. If the ratio of the resonant mean motions is  $p/(p+1)$ , then  $p+1$  spiral arms are generated.



L'idée de base de la représentation d'une onde de densité spirale par les lignes de courant décrites au I.1 est entièrement contenue dans la figure 2, tirée de Dermott [17]: l'onde se dessine d'elle même lorsqu'on décale systématiquement les lignes de courant les unes par rapport aux autres.

On obtient simplement l'expression de la densité de surface des anneaux en écrivant la conservation de la masse entre les états non perturbés et perturbés, ou en résolvant l'équation de continuité dans laquelle la vitesse est celle donnée par les équations (12) de la section I.1.3 . Les deux méthodes donnent le même résultat:

$$\sigma(a) = \frac{\sigma_0(a)}{1 - q(a) \cos(m\varphi + m\Delta(a) + \gamma(a))} \quad (1a)$$

où, l'on a posé:

$$q \cos(\gamma) = \frac{d(ae)}{da} \quad (1b)$$

$$q \sin(\gamma) = mae \frac{d\Delta}{da} \quad (1c)$$

et où les autres notations sont celles du I.1 .

La densité de surface est reliée à la profondeur optique  $\tau$  par l'hypothèse  $\sigma/\tau = \text{constante}$  (cette hypothèse est discutée dans l'article). Le profil enregistré étant un profil radial, on a  $\varphi$  constant, et donc  $\tau$  est de la forme:

$$\tau(a) = \frac{\tau_0(a)}{1 - q(a) \cos(f(a))} \quad (2)$$

où  $\tau_0(a)$ ,  $q(a)$ ,  $f(a)$  sont trois fonctions inconnues qu'il nous faut déterminer. Le problème admet a priori une infinité de solutions, puisqu'on a une seule équation pour trois inconnues. Toutefois, en remarquant que  $\tau_0$ ,  $q$  et  $f$  sont des fonctions dont les échelles caractéristiques de variations spatiales sont plus grandes qu'une longueur d'onde, j'ai montré que la solution était unique. Le raisonnement qui permet d'aboutir à ce résultat et la manière dont les trois fonctions inconnues sont déterminées à partir du profil sont exposés dans la section 3 de l'article.

Les fonctions  $e(a)$  et  $\gamma(a)$  sont alors obtenues en résolvant numériquement le système (1b) et (1c) par approximations successives (on utilise le fait que  $f(a) = m\Delta(a) + \gamma(a) + \text{cstante}$ , ce qui permet de ne garder que  $e$  et  $\gamma$  comme fonctions inconnues avec  $q$  et  $f$  comme fonctions paramètres). La détermination de  $e$  est nécessaire car  $e$  intervient dans l'expression intégrale du couple.

Il ne reste plus qu'à déterminer la valeur du rapport  $\sigma/\tau$  pour connaître la densité de surface sur toute l'onde. Ce rapport est obtenu à partir de la relation de dispersion non-linéaire des ondes de densité (qui permet de trouver également la position de la résonance). Cette relation a été dérivée par Shu et al. [11] et Borderies et al. [8].

Le couple est finalement obtenu par intégration numérique. Pour diverses raisons explicitées dans l'article, la valeur de ce couple n'est pas connue à mieux d'un facteur 2, mais cette précision est suffisante pour répondre à la question de départ.

Cette étude a permis d'obtenir deux types de résultats:

i) Des valeurs précises du rapport  $\sigma/\tau$  et de la position de la résonance sont déterminés par la méthode utilisée: on a trouvé  $\sigma/\tau = 80 \pm 5 \text{ g/cm}^2$ , soit une densité de l'ordre de  $50 \text{ g/cm}^2$  dans cette région des anneaux.

Ce genre de détermination est important car il fournit le moyen le plus précis de calculer la masse des anneaux. Notons que la position obtenue pour la résonance diffère d'environ 40 kilomètres de la position théorique. Cette différence n'est pas encore expliquée.

ii) La valeur du couple trouvée n'est pas beaucoup plus petite que la valeur prédite par la théorie linéaire. Ce résultat a également été obtenu par Shu et al. [11]. Il semble donc bien que la non-linéarité des ondes de densité ne résolve pas le problème de l'échelle de temps d'évolution des anneaux.

### 1.2.3 Perspectives:

Ce travail peut être développé dans plusieurs directions:

i) Une étude similaire de la même onde devrait être menée à partir des données radio. Ceci permettrait de vérifier plus précisément l'hypothèse  $\sigma/\tau = \text{constante}$ , et éclairerait très certainement la question toujours en suspens de la position de la résonance.

ii) Une analyse identique d'un grand nombre de profils d'ondes de densité pourrait apporter un certain nombre de renseignements fondamentaux. En effet, outre une détermination plus précise de la masse des anneaux, il devrait être possible d'analyser précisément l'amortissement de ces ondes, et peut-être de contraindre la forme du tenseur de pression, qui comme je l'ai souligné dans l'introduction, reste l'objet de recherches très actives. L'analyse de l'amortissement devrait de toutes façons donner des renseignements sur la dispersion de vitesse dans les anneaux.

**ARTICLE 2**

Publié dans *Icarus* (août 1986)

**NON-LINEAR STUDY OF THE MIMAS 5:3 DENSITY WAVE**

Pierre-Yves Longaretti and Nicole Borderies

Observatoire du Pic du Midi et de Toulouse  
14, avenue Edouard Belin  
31400 Toulouse, France

Pages: 50

Figures: 14

Tables: 2

**ABSTRACT**

The Mimas 5:3 density wave profile obtained by the Voyager 2 photopolarimeter experiment is studied on the basis of the streamline formalism, and all the functions involved in this formalism are derived from the data. The non-linear dispersion relation for density waves is checked, and yields new and precise estimates for the resonance location:  $r_L = 132340 \pm 5\text{km}$ , and for the opacity:  $\sigma/r = 80 \pm 5 \text{ g.cm}^{-2}$ . An order of magnitude estimate of the torque exerted by Mimas on the wave is obtained and shows that non-linear effects cannot reduce the torque much below its linear value.

## 1. Introduction

The linear theory of density waves, based on the linearized equations of hydrodynamics, is now well-established (Goldreich and Tremaine, 1978). However, as seen for instance on fig. 1, the density waves profiles obtained from the Voyager data show that the phenomenon is clearly non linear: generally, the surface density  $\sigma$  cannot be represented by a function of the form :

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma = \sigma_0 + S_1(r) \exp\{i[\int k(r) dr + m(\theta - \Omega_p t)]\}, \quad (1a) \\ S_1(r) = |S_1| \exp(im\delta), \quad (1b) \end{array} \right.$$

where  $S_1(r)$  is a complex amplitude,  $k(r)$  the wave number,  $m$  the number of arms, and  $\Omega_p$  the pattern speed.

The purpose of this work is to apply the streamline formalism developed by Borderies, Goldreich and Tremaine, 1983a, 1983b, to the Mimas 5:3 density wave profile obtained by the photopolarimeter experiment, and thus to provide an approach of the study of the non linearity of a typical wave; more precisely, it is possible to derive all the functions involved in the streamline formalism, to check the

non linear dispersion relation derived by Shu et al., 1984 and by Borderies, Goldreich and Tremaine, 1985, and to obtain an order of magnitude estimate of the torque exerted by the exciting satellite on the wave directly from the data.

Fig. 1

The theoretical form of the surface density is derived in section 2. The methods used to fit the theoretical expression to the data are presented in section 3. The torque exerted by Mimas on the wave, and the eccentricity along the wave, are determined in section 4. The results and the related problems are discussed in section 5.

## 2. Theoretical model

The first subsection is devoted to the description of the kinematics, and the second one to the form of the surface density. The last subsection provides heuristical evaluations of the eccentricity along the wave, and remarks on the formalism.

### 2.1 Kinematics

Density waves are excited at resonance locations with Saturn's satellites. Particle orbits are perturbed by the oblateness of the planet, the satellite, the disk self-gravity, and interparticle collisions. The satellite potential  $\phi_s$  may be expanded in a double Fourier series which is characterized by an azimuthal wave number  $m > 0$ , and a pattern speed  $\Omega_p$ . In a frame rotating with the angular speed  $\Omega_p$ , the potential Fourier component is stationary, and varies with longitude  $\varphi$  as  $\cos(m\varphi)$  (Goldreich and Tremaine, 1980 & 1982). Each density wave is associated with one Fourier component of the potential.

In the rotating frame, the shape of the streamlines is given by (Borderies, Goldreich, and Tremaine, 1982):



$$r = a\{1 - e(a)\cos[m\varphi + m\Delta(a)]\}, \quad (2a)$$

where  $(r, \varphi)$  are the cylindrical coordinates in the rotating frame,  $e$  the eccentricity, and  $\Delta$  a phase angle. Expression (2) is valid to first order in  $e$ , which is justified by the fact that the perturbations are small. Note that, to zeroth order in  $e$ , we have  $m\varphi + m\Delta = M$ , where  $M$  is the mean anomaly of the particles traveling along the streamline. The longitude in the inertial frame is related to  $\varphi$  by

$$\theta = \varphi + \Omega_p t. \quad (2b)$$

After Borderies, Goldreich, and Tremaine, we define:

$$J(a, \varphi) = \left. \frac{\partial r}{\partial a} \right|_{\varphi} = 1 - q\cos[m(\varphi + \Delta) + \gamma], \quad (3)$$

where:

$$q = \left[ \left( \frac{dae}{da} \right)^2 + \left( mae \frac{d\Delta}{da} \right)^2 \right]^{1/2}; \quad 0 \leq q \leq 1. \quad (4a)$$

$$q\sin(\gamma) = mae \frac{d\Delta}{da}; \quad \tan(\gamma) = \frac{mae(d\Delta/da)}{d(ae)/da} \quad (4b)$$

We will see in the next subsection that in most of the wave zone  $\Delta$  varies rapidly in comparison with  $ae$  such that  $\gamma$  is nearly equal to  $\pi/2$ . Moreover, it is apparent that  $\gamma$  does not vary rapidly with  $a$  if  $md\Delta/da$  varies slowly with  $a$ .

The linear theory corresponds to the limit  $q \ll 1$ ; actually, the rings offer many examples in which  $q = O(1)$ , although  $e$  is generally negligible with respect to  $q$ , as is the case for the Mimas 5:3 density wave (see section 4).

To first order in  $e$ , the components of the mean velocity in the rotating frame are:

$$\begin{cases} u_r = m(\Omega - \Omega_p) a e \sin[m(\varphi + \Delta)], & (5a) \\ u_\varphi = (\Omega - \Omega_p) a \{1 + (2m - 1)e \cos[m(\varphi + \Delta)]\}, & (5b) \\ u_z = 0, & (5c) \end{cases}$$

where  $\Omega(a)$  is the mean motion at radius  $a$ .

## 2.2 Surface density

The simplest way to derive the surface density consists in considering two neighbouring streamlines, at radii  $r$  and  $r + dr$ , and to estimate the mass enclosed between these two streamlines and between two rays defining an elementary angle  $d\varphi$ , in the unperturbed and perturbed cases. From the conservation of mass, we obtain the surface density in the form:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - q \cos[m(\varphi + \Delta) + \gamma]} \quad (6)$$

It is easy to check that the surface density given by Eq.(6) and the velocity taken from (4) satisfy the continuity equation to zeroth order in  $e$  (so that Eq.(6) is only valid to this order in  $e$ ).

Note that we recover the linear expression (Eq.(1)) in the limit  $q \ll 1$ ; developing the right-hand side member of Eq.(6) to first order in  $q$  yields:

$$\sigma = \sigma_0 \{1 + q \cos[m(\varphi + \Delta) + \gamma]\}, \quad (7)$$

which is identical to (1) if :

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{|S_1|}{\sigma_0}, \\ m\Delta + \gamma = m\delta + \int k(r)dr. \end{array} \right. \quad (8a)$$

$$(8b)$$

In eq.(8), we did not distinguish between  $r$  and  $a$ , because we took the expression of the surface density to 0th order in  $\epsilon$ .

### 2.3 Heuristical determination of $\epsilon$ and $\gamma$ ; remarks on the link between $r$ and $a$

An order of magnitude of the eccentricity along the wave can be obtained as follows : we may represent "unwinded" streamlines in a  $xy$  axes system where  $x = a\varphi$  and  $y = r - a_0$  (cf fig. 2) . We expect that, as in the linear case, the variations of  $\Delta$  with  $r$  have a more important effect than the variation of  $\epsilon$ . For nearly crossing streamlines, the point of closest approach occurs where  $|m\varphi + m\Delta| \approx \pi/2 \text{ mod. } (2\pi)$ . Moreover, the lines of maximum surface density are almost straight lines of slope  $\alpha$  equal to:

$$\alpha = \left| \frac{dy}{dx} \right|_{|m\varphi + m\Delta| = \pi/2} = m\epsilon. \quad (9)$$

Fig. 2

Let us consider in the  $xy$  plane the rectangular triangle ABC such

that the hypotenuse BC is parallel to a line of maximum surface density, and such that  $AB = 2\pi a$ . By construction, we have  $AC = \alpha AB = 2\pi m a e$  and  $AC = m\lambda$ , where  $\lambda$  is the radial wavelength, so that:

$$e \sim \lambda / 2\pi a = 1/ka, \quad (10)$$

where  $k$  is the wave number. Estimating the peak to peak distance on fig. 1 yields  $\lambda \sim 20$  km. ;  $a \sim 130,000$  km so that:

$$e \sim 2.10^{-5} \quad (11)$$

Note that this method for deriving the order of magnitude of  $e$  does not apply in the case of linear ( $q \ll 1$ ) waves, or in the case of loosely-wound density waves.

The above estimate of  $e$  shows that Eq.(6) is accurate enough to represent the data. We may nevertheless feel concerned by the fact that  $ae \sim 2 \times 1.3 \sim 3$  km, so that we cannot confound  $r$  and  $a$  ( the resolution of the data is 0.5 km ). An answer to this problem can be obtained from the estimation of  $\gamma$  along the wave:

It can be seen from Eq.(8b) or directly from Eq.(6) that the wave number  $k$  is related to  $\Delta$  and  $\gamma$  by:

$$k(a) = m \frac{d\Delta(a)}{da} + \frac{d\gamma(a)}{da}, \quad (12)$$

so that Eq.(4b) may be recast as:

$$q \sin(\gamma) = ae \left[ k(a) - \frac{d\gamma(a)}{da} \right] . \quad (13)$$

Let  $\Delta a$  be the distance between the first and last peaks. In the case of the Mimas 5:3 density wave,  $\Delta a \approx 100$  km. For a stable density wave, the eccentricity is maximum at the resonance and decreases to 0 over the distance  $\Delta a$ , so that the gradient  $dae/da$  is negative, and, because of Eq.(4b),  $\pi/2 < \gamma < 3\pi/2$ . This provides a maximum estimate for the gradient of  $\gamma$  which is (rapid oscillations of  $\gamma$  are unphysical):

$$\frac{d\gamma(a)}{da} < \frac{\pi}{\Delta a} . \quad (14)$$

On the other hand,  $k \approx 2\pi/\lambda$ , so that  $k$  is at least 10 times greater than  $d\gamma/da$ . Consequently, we may neglect this term in Eq.(13). Moreover, our previous remark on the damping of  $e$  show that  $d(ae)/da \approx -ae/\Delta a$ , so that, a combination of Eq.(4b), (13) and these results yields:

$$\cotg(\gamma) \approx - \frac{ae/\Delta a}{aek} = - \frac{\lambda}{2\pi \cdot \Delta a} \approx - \frac{1}{20} \quad (15)$$

Finally, we obtain ( $q \sin(\gamma) > 0$  for a trailing wave):

$$\gamma \approx \text{constant} \approx \text{and} \geq \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

which justifies *a fortiori* the fact that we have neglected  $d\gamma/da$  in Eq. (13) .

This result will be used below (section 4) as the starting point of the determination of  $e$ . It shows that we may assume  $k = mae(d\Delta/da)$  for a tightly wound density wave, and illustrates the physical significance of  $\gamma$ . The above derivation of  $\gamma$  does not apply at the very beginning of the wave because  $q = 0$  at resonance. But it already yields an interesting property of streamlines at peaks or troughs: at these locations, the surface density is extremum and  $\cos(m\varphi + m\Delta + \gamma) = \pm 1$  (cf section 3.2); taking  $\gamma = \pi/2$  gives  $\cos(m\varphi + m\Delta) = 0$ , and finally :

$$r = a \quad \text{at peaks and troughs} \quad (17)$$

The important consequence of Eq.(17) is that if we devise a processing involving only peaks and troughs, we don't need to distinguish  $r$  and  $a$ , and then don't need an *a priori* knowledge of the eccentricity along the wave. This is what is done in the next section.

To conclude these remarks on the link between  $r$  and  $a$ , let us consider any function  $g(a)$  defined on the wave (for example,  $q$  or  $e$ ). For a given longitude,  $g$  may be regarded as a function of  $r$ . If  $g(a)$  is a "smooth" function,  $g(r)$  fluctuates at the frequency of the wave, and vice-versa. Nevertheless, at peaks and troughs,  $g(r) = g(a)$ , so that the overall variations of  $g(r)$  and  $g(a)$  are the same ( because  $e$  is very small). The various functions involved in the streamline formalism are smooth functions of  $a$ , because of the form of the equations they satisfy (basic equations governing a non-linear density wave in the streamline formalism are derived in Borderies, Goldreich and Tremaine 1985). We will make use of this remark for the determination of these functions (see next section).

### 3. Data processing :

We have used the optical depth profile of the density wave excited at the 5:3 resonance with Mimas, obtained during the Voyager 2 photopolarimeter stellar occultation experiment (fig. 1). This density wave was first studied by Esposito et al., 1983, with the same data, and by Holberg et al., 1982, with the Voyager 2 UV stellar occultation data, to derive from the linear theory the resonance position and the unperturbed surface density at the location of the wave. Our aim is to study this wave from a non-linear point of view. The first subsection presents our assumptions, as well as a description and a discussion of the preliminary treatment which we have applied to the data. In the following subsections, we explain how the functions entering the expression of the surface density were extracted from the data.

### 3.1 Assumptions and preliminary treatment:

The first assumption concerns the link between the surface density  $\sigma$  and the optical depth  $\tau$ . After Holberg et al., 1982, we merely assume that the opacity  $K$  is constant. This is probably the most critical point of this work, and it will be discussed further in section 5.

We thus look for an optical depth profile of the form:

$$\left[ \begin{array}{l} \tau(r) = \frac{\tau_0(r)}{1 - q(r)\cos[f(r)]} \quad (18a) \\ f(r) = m(\alpha_0 + \Delta(r)) + \gamma \quad (18b) \\ \tau(r) = K\sigma(r) \quad (18c) \\ \tau_0(r) = K\sigma_0(r) \quad (18d) \end{array} \right.$$

where  $\alpha_0$  is the longitude of the profile at  $t = 0$  in the inertial frame (cf Eq.(2a)&(6) ). It depends on the choice of time and angle

origins. We have evaluated  $\alpha_0$  from the recording time of the profile and found  $\alpha_0 \approx 220^\circ$ . Because of the time and length scales involved, the profile can be considered as truly radial and instantaneous.

The quantities  $\tau_0$ ,  $q$ , and  $f$  may be interpreted as follows:

$\tau_0$  is the unperturbed (or background) optical depth, that is to say, the non wavy-part of the optical depth.

$q$  is a parameter measuring the degree of non-linearity of the wave; as  $q$  tends towards 1,  $\tau_0$  becomes infinite at some azimuthal locations, and the wave is more and more non-linear; when  $q$  tends towards 0, we recover the behaviour of the linear theory. Thus  $q$  is also an index of the peak to trough depth.

$df/da$  is the wave number.

It can be seen on fig. 1 that  $\tau_0$  cannot be chosen constant, because for instance  $\tau$  at the second and third trough is greater than before the beginning of the wave (no fit assuming  $\tau_0$  constant was possible). Thus, we must find a fit for the data of the form (18), where all quantities are functions of radius. We expect that, as in the linear theory, the scales of variation of  $\tau_0(a)$ ,  $q(a)$ , and  $f(a)$  are larger than the wavelength. This implies that the high frequency variations (peak to trough) are only caused by the cosine at denominator of Eq.(18a), and insures that there is at most one solution (see next subsections).

Fig. 3

As can be seen on fig. 1, the data are very noisy, and the third and fourth peaks are "saturated". To investigate heuristically the effect of the noise, we have applied the treatment which is described in the next paragraphs to two kinds of data: the raw data (see fig. 1) and smoothed data (see fig. 3), which were obtained by averaging the raw data with a gliding mask method (each value is replaced with a weighted local average; here the average was made on three points, with a 1-2-1 weight set). The peaks of fig. 3 are reduced to a value compatible with the noise level of the raw data, so that the comparison between both processing will give an idea of the errors on  $q$ ,  $f$  ... due to the noise. The effect of the saturation will be addressed in section 3.3 .



Next, the data of figs. 1 or 3 were sampled: 22 locations were retained, corresponding to the peaks, troughs, beginning and end of the wave (they are marked out with crosses on figs. 1 and 3), because, as already mentioned,  $r = a$  at these locations, and because of the implied simplification of eq. (18a) (see just below).

We can now proceed to determine the form of the  $f$  function.

### 3.2 Determination of $f$ :

We have already assumed the rapid variation of the profile to be caused by the cosine; thus we can consider that  $\cos(f) = 1$  at peak locations and  $\cos(f) = -1$  at trough locations, so that:

$$\tau_p = \frac{\tau_0(r_p)}{1 - q(r_p)} \quad (19a)$$

$$\tau_t = \frac{\tau_0(r_t)}{1 + q(r_t)} \quad (19b)$$

where the indexes  $p$  and  $t$  refer to the peaks and troughs respectively. This allows to find the form of function  $f(a)$ : we retain only the peak locations, which are better defined than the trough's, and impose at these positions  $2n\pi$  ( $n$  integer) values in crescent order for  $f(a)$ , the first peak value being assigned to  $2\pi$ ; thus,  $f(a)$  is defined within an arbitrary phase of  $2\pi$ , which corresponds to an arbitrary phase of  $\pi/2$  on  $\theta$ ; this fact has no importance, because the surface density as defined in Eq.(6) is periodic of period  $\pi/2$  in  $\theta$ . Before the first peak,  $f(a)$  is extrapolated as follows: the first trough (corresponding to the 2nd sampled point) is assumed to be a real trough of the wave, and  $f$  is there constrained to  $\pi$ ; the first sampled point is constrained to  $\pi/2$  (the exact value must be very close, and has no influence on the rest of the fit). The obtained points are interpolated by using cubic spline functions. The positions of the

troughs (as marked on fig. 2) were deduced as the locations corresponding to the  $(2n+1)\pi$  values of  $f(a)$ . The value of  $f$  after the last peak is obtained by extrapolation, but since the last point of the fit is very close to the last peak, the corresponding error is negligible. The function determined this way is  $f(a)$  and not  $f(r)$  because of our concluding remark of section 2.3 .

Function  $f$  is plotted on fig. 4.

Fig. 4

### 3.3 Determination of $\tau_0$ and $q$

There are at least two ways to determine the two remaining unknown functions  $\tau_0(a)$  and  $q(a)$ . First, note that, as the resolution of the data is just finer than the highest frequencies of the wave, there is a systematic error in the data on the last peak values. But, as we are mainly interested in the first peaks, we did not attempt to correct this error, especially because the related corrections are probably negligible when compared with imprecisions in the peak values due to the noise.

#### First way:

For each of the 22 sampled point (except for the first and last ones), local averages are made (trough to trough for each peak, and reversely for the troughs). These averages are made both on the data and Eq.(18a), assuming locally constant  $\tau_0$  and  $q$ , and linearizing  $f(r)$  around the considered point. The calculation is straightforward and yields:

$$\langle \tau \rangle = \frac{\tau_0}{(1-q^2)^{1/2}} \quad (20)$$

where  $\langle \tau \rangle$  is the local average determined from the data (with an error of order  $\epsilon$ ),  $\tau_0$  and  $q$  are the values of the unknown functions at the

considered point. At each point, we solved Eq.(19) and (20) for  $\tau_0$  and  $q$ . At the first and last point,  $q$  is constrained to be equal to 0 (no wave exists at these locations), and  $\tau_0$  to the averaged values respectively before and after the wave.

This method does not converge for Mimas 5:3 (the obtained functions strongly oscillate at the frequency of the wave), most probably because  $\tau_0$  and  $q$  cannot be considered as constant over one wavelength; but it may possibly give good results for other wave profiles.

Fig. 5,6,7,8

Second way:

The first and last values of  $\tau_0$  and  $q$  are constrained as before. We couple the peaks and troughs by pairs (each peak with the following trough), and assume that  $\tau_0$  and  $q$  are constant over each pair. Then we solve simultaneously Eq.(19a) and (19b) for  $\tau_0$  and  $q$ . This procedure is repeated, coupling peaks and troughs differently (each trough with the following peak). We thus obtain, for each sampled point, two values of  $\tau_0$  and  $q$ , that we average. The resulting functions  $\tau_0$  and  $q$  are plotted on fig. 5 and 6 for the raw data, 7 and 8 for the averaged data. Note that, as  $\tau = \tau_0(1 \pm q)$  at peaks and troughs, the three following operations are equivalent:

- .averaging the two values of  $q$  and deducing  $\tau_0$  with Eq.(19).
- .averaging the two values of  $\tau_0$  and deducing  $q$  with Eq.(19).
- .averaging both  $q$  and  $\tau_0$ .

As already mentioned, the differences between fig. 5 and 7, and 6 and 8 gives an estimate of the error bars due to the noise. Another way to determine this effect consists in calculating the bars from the noise level by supposing that each quantity supports one-half of the related error. Both methods yield error bars of order  $\pm 0.05$  (in absolute values) for  $q$  and  $\tau_0$ .

The following argument insures that the functions represented on fig.5 through 8 represent the right solution to our problem, within the limit of the error bars. Suppose, for example, that  $\tau_0$  is underestimated; because of our remark of section 3.1, it must be

underestimated over a distance larger than the wavelength. At the peak locations, because of Eq.(19a), increasing  $\tau_0$  would impose to decrease  $q$ , whereas at trough locations, it would result in increasing  $q$  (Eq. 19b): the  $q$  function would then exhibit variations over a wavelength. The same kind of argument applies when the roles of  $q$  and  $\tau_0$  are reversed. The above argument only apply on the body of the wave, where the functions  $q$  and  $\tau_0$  are well behaved. Nevertheless, we are sure of the first point of the fit, because  $q = 0$  at this point; and, as the value of  $q$  at the second point is consistent with the values on the rest of the fit, we cannot change much the value of  $\tau_0$  at this point without obtaining unphysical results (the possible variations of  $q$  and  $\tau_0$  at this point fall within the error bars).

The above argument shows that the sharp enhancement of  $\tau_0$  at the beginning of the wave is real. The steep increase of  $q$  at the same location reflects the fact that the wave is almost immediately non-linear. Note that the rate of increase is exactly that predicted by the linear theory. The small peak of  $\tau_0$  at the end of the wave is visible on the data: at the same location, the corresponding peaks and troughs lie higher than the surrounding ones. The sharp decrease of  $q$  at the end of the wave is maybe an artifact of our cutoff of the wave after the tenth peak, where it is no longer visible, because of the noise level.

The fact that the third and fourth peaks are saturated is not of great importance, because we do not expect these peaks to be much higher than the surrounding ones, so that only small variations in  $q$  would be required to match the data: increase of  $q$  from 0.7 to 0.8 enhances  $\tau$  1.5 times at the peaks (cf Eq.(18a)).

In the rest of the paper, only curves concerning the averaged data will be shown (they are quite similar for the raw data ). Quantitative results will be given for both type of data.

Fig. 9

To obtain the global fit of fig. 9  $\tau_0$  was linearly interpolated (spline functions or combinations of spline and a priori functions introduced fluctuations, and did not improve the fit),  $q$  and  $f$  were

interpolated by using spline functions, to yield  $q(a)$ ,  $f(a)$ , and  $\tau_0(a)$ . The resulting function obtained from Eq.(18) is  $\tau(a)$  (see fig.9). The dotted line represent the original data. Note that the fit does not precisely follow the data. This is because, as already mentionned, we must distinguish between  $r$  and  $a$ . The comparison between  $\tau(r)$  and the data will be made in section 4, after the derivation of  $e(a)$  and  $\gamma(a)$ .

#### 4. Derived results

The first subsection is devoted to the determination of the eccentricity and of  $\gamma$  along the wave, the second to the link between  $\tau_0$  and  $\sigma_0$ , and the last to the calculation of the torque.

##### 4.1 Eccentricity behaviour

As already mentionned in section 2.3, we have  $\gamma \approx \pi/2$ . This allows us to determine  $e(a)$  and  $\gamma(a)$  in two successive approximations. As a first approximation, we take  $\gamma = \pi/2$ . Thus, Eq.(4b) becomes:

$$q = ma e \frac{d\Delta}{da} = ae \frac{df}{da} \quad (21)$$

where we have made use of Eq.(18b) .

We may recast Eq.(21) differently:

$$e = \frac{q}{a(df/da)} \quad (18)$$

which provides a first approximation for  $e(a)$ . Making use of Eq.(4b), we then obtain a first approximation for  $\gamma(a)$ , too. This procedure shows that the approximation  $\gamma = \pi/2$  is very good on the middle part of the wave ( with a relative precision of 1 per 1000) and very bad at the beginning of the wave. In our second order approximation, we have recast Eq.(4b) into the form:

$$q\sin(\gamma) = ae \left[ \frac{df}{da} - \frac{d\gamma}{da} \right] \quad (23)$$

so that Eqs. (4a) and (23) form a differential system with two unknowns,  $e$  and  $\gamma$ , and with two parameter functions,  $q$  and  $f$ . We have then numerically integrated Eqs. (4b) and (23) from a point in the middle of the wave, and with values of  $e$  and  $\gamma$  at this point given by our first approximation (we used Bulirsch and Stoer's algorithm). The resulting functions are shown on fig. 10 and 11. The exact form of  $\gamma$  and  $e$  at the beginning of the wave depends on the way by which  $f$  has been extrapolated before the first peak.

Fig. 10,11,12

We can now compute the exact  $\tau(r)$  function. It is obtained as follows: for each value of  $a$ , we compute  $r(a)$  from Eq. (2) and  $\tau(a)$  as indicated in the preceding section, which yields a parametric  $\tau(r)$  relation.  $\tau(r)$  is represented on fig. 12. As expected, the agreement between the data and the fit is greatly improved.

#### 4.2 Link between $\tau$ and $\sigma$ : values of the ratio $\sigma/\tau$ and of the resonance radius

The non linear dispersion relation (Shu et al., 1984 and BGT, 1985) reads:

$$C(q)k = \frac{D}{2\pi G \sigma_0 a_L} (a - a_L) \quad (24a)$$

where  $G$  is the gravitational constant,  $a_L$  the resonance radius, and:

$$D = \left[ a \frac{dD}{da} \right]_{a_L} \quad (24b)$$

$$D = \kappa^2 - m^2 (\Omega - \Omega_p)^2 \quad (24c)$$

$$C(q) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty du \frac{\sin^2 u}{u^2} H \left[ \frac{q^2 \sin^2 u}{u^2} \right] \quad (24d)$$

$$H(q^2) = \frac{1 - (1 - q^2)^{1/2}}{q^2 (1 - q^2)^{1/2}} \quad (24d)$$

here,  $\kappa(a)$  is the epicyclic frequency of particles at radius  $a$ .  $C(q)$  varies from 1 to 2 for values of  $q$  ranging from 0 to 0.9.

It is possible to recast Eq.(24a) into the form:

$$g(a) = (\tau_0/B)(\sigma_0/\tau_0)kC(q) = (a - a_L)/a_L \quad (25)$$

where  $B$  is a constant. The functions  $\tau_0$ ,  $q$  and  $f$  have been determined independently from the dispersion relation. Hence, the relation yields a good check of the determination of these functions. If we plot  $g(a)$  in function of  $a - a_L$ , we should obtain a straight line. This is indeed what we get, as shown on fig. 13 (the parameter  $C(q)$  was numerically calculated). We have made on the other hand a plot of the dispersion relation assuming constant  $\sigma_0$ . The linear relationship

implied by Eq.(24a) is much less closely followed. This point is discussed in more details in section 5.

Fig. 13

Moreover, the dispersion relation can be used to determine the opacity and the resonance radius, using the three following methods (originally suggested by Esposito et al.):

- 1) a non linear least squares fit of  $1/g$  with a rational function of the form  $A_1/(a-A_2)$ .
- 2) a linear least squares fit of  $g$  as a function of  $a$ .
- 3) a linear least squares fit of  $a$  as a function of  $g$ .

The various data necessary to perform these calculations are those given by Lissauer and Cuzzi, 1982, and are presented in table I; the results are shown in table II; they are consistent with Esposito's and Holberg's values, with a greatly improved precision, because the linear dispersion relation is not precise enough in the case of the Mimas 5:3 density wave. Nevertheless, our value for the resonance radius is 40 km greater than the predicted value. This cannot be explained by the uncertainty on Saturn's harmonic coefficients, nor by the shift in resonance location that the previously mentioned enhancement in the background surface density on the wave could create. The error estimates on the values of  $q$  and  $\tau_0$  are also too small to explain this discrepancy. We may then question the validity of the dispersion relation itself: the relation is not very precise close to the resonance where the wavelength varies rapidly, but, apart from the fact this is a too small effect, the three first points of fig. 13 were dismissed in our fits; moreover, particles collisions enter the dispersion relation through a viscous term which Borderies, Goldreich and Tremaine (personal communication) have shown to be negligible. Thus, we believe that the dispersion relation is not in error, and the 40 km discrepancy in the resonance location remains a puzzle to us.

Table I, II

#### 4.3 Torque exerted by Mimas on the ring

The torque exerted by Mimas on the ring is:



$$\tau = \int_0^{2\pi} \int_{r_m(\theta)}^{r_M(\theta)} \sigma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} r dr d\theta, \quad (26)$$

where the limits of integration are such that all the wave is contained between  $r_m$  and  $r_M$ , and where  $\phi$  is the satellite potential.

#### 4.3.1 Satellite potential

Goldreich and Tremaine, 1980, showed that  $\phi$  may be developed in a double Fourier series of the form:

$$\phi(r, \theta, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{lm}(r) \cos[m(\theta - \Omega_{lm}^p t)], \quad (27)$$

where:

$$\Omega_{lm}^p = \Omega_M + [(1-m)/m] \kappa_M, \quad (28)$$

is the pattern speed of the  $l, m$  Fourier component.

The  $\phi_{lm}$  functions are of order  $e_M^{|1-m|}$ . Up to this order, we have:

$$\left[ \begin{array}{l} \phi_{m,m} = -(GM_M/2a_M) b_{1/2}^m(\beta) (2 - \delta_{m,0}) , \\ \phi_{m\pm 1,m} = -(GM_M e_M/2a_M) (2 - \delta_{m,0}) \{ (1/2 \pm m\Omega_M/\kappa_M + \beta/2d/d\beta) b_{1/2}^m(\beta) , \\ \beta = r/a_M . \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (29a) \\ (29b) \\ (29c) \end{array}$$

where we have made use of the Laplace coefficients, which are defined as:

$$b_{p/2}^m(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(m\theta) d\theta}{[1 - 2\beta \cos\theta + \beta^2]^{1/2}} \quad (30)$$

and obey the following recurrence relation:

$$\frac{d}{d\beta} b_{p/2}^m(\beta) = (p/2) [-2\beta b_{p/2+1}^m(\beta) + b_{p/2}^{m+1}(\beta) + b_{p/2}^{m-1}(\beta)] \quad (31)$$

The Fourier component associated with the Mimas 5:3 density wave corresponds to  $l_0 = 5$  and  $m_0 = 4$ .

#### 4.3.2 Torque

Using Eq.(27), the torque formula Eq.(26) can be rewritten under the form:

$$T = - \int_0^{2\pi} \int_{r_m}^{r_M} \sigma \left[ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} m \phi_{lm}(r) \sin[m(\theta - \Omega_{lm}^p t)] \right] r dr d\theta \quad (32)$$

We make the change of variable:  $(r, \theta)$  to  $(a, \lambda)$ , where  $\lambda$  is the mean longitude. To first order in eccentricity, we have:

$$\phi_{1m}(r) = \phi_{1m}(a) - ae(d\phi_{1m}/da)\cos(M) , \quad (33a)$$

$$\sin n(\theta - \Omega_p t) = \sin m(\lambda - \Omega_p t) + 2me\cos m(\lambda - \Omega_p t)\sin(M) . \quad (33b)$$

Moreover, the mass of an element of the rings must be conserved between its unperturbed and perturbed states. Hence:

$$\sigma_0 r dr d\theta = \sigma_0 a da d\lambda . \quad (34)$$

It is easy to check that only the  $l_0, m_0$  term of eq.(32) contributes to the secular part of the torque to lowest order in  $e_M$ . Using Eqs.(32), (33) and (34), we obtain for the torque:

$$T = \pi m \int_a^a \sigma_0 ae \left[ a \frac{d\phi_{1,m}}{da} + 2m\phi_{1,m} \right] \sin(m\Delta) da . \quad (35)$$

where the integration is extended to all regions with non null eccentricity.

### 4.3.3 Linear torque

The above expression allows to recover the usual torque formula in the linear limit. We proceed as follows:

As in the non linear case, we find  $e$  in assuming that  $\gamma = \pi/2$ ,

which yields (Eq. 4b):

$$q = mae \cdot \frac{d\Delta}{da} = aek, \quad (36a)$$

which is valid outside the resonance radius.

Moreover, Eq.(8a) gives  $q$  and  $k$  in the linear limit (Goldreich and Tremaine, 1978):

$$q = \frac{x |\Psi_{1,m}|}{2\pi a_L^2 D} \left[ \frac{D a_L}{G\sigma_0} \right]^{3/2}, \quad (36b)$$

$$k = \frac{D x}{2\pi G\sigma_0}, \quad (36c)$$

where  $x = (a - a_L)/a_L$  the relative distance to the resonance.  $\Psi_{1,m}$  is defined as follows:

$$\Psi_{1,m} = a \frac{d\phi_{1,m}}{da} + 2m\phi_{1,m}. \quad (36d)$$

( $\Psi_{1,m}$  is negative). Eqs.(36) yield for  $e$ :

$$e = \frac{|\Psi_{1,m}|}{(D \sigma_0 G)^{1/2} a_L^{3/2}}. \quad (37)$$

Eq.(37) shows that  $e$  is constant, so that  $\gamma$  is constant too (cf Eq.(4b) ) and equal to  $\pi/2$ . The only remaining unknown in (35) is  $m\Delta$ . Eq.(8b) connects  $m\Delta + \gamma$  to the phase of the perturbed density. This

can be obtained directly from Eqs.(17) and (45) of Goldreich and Tremaine, 1979 or more rigorously from Eq.(17) of Goldreich and Tremaine, 1978 and a calculation of the phase in their Eq.(A10) . Both procedure yields:

$$m\Delta + \gamma = \frac{Dx^2 a_L}{4\pi G\sigma_0} + \frac{3\pi}{4} \quad (38)$$

with  $\gamma = \pi/2$ . Putting Eq.(37) and (38) in (35), taking out of the integral every term but  $\sin(m\Delta)$ , and integrating from the resonance radius yields:

$$T = - m\pi^2 (\sigma_0 / D) \left| \Psi_{1,m} \right|^2 \quad (39)$$

which is the linear torque formula (Goldreich and Tremaine, 1978). Note that our derivation of Eq.(39) is not quite rigorous, because we did not take into account the contribution of the regions lying outside the resonance radius. In fact, Eq.(36c), which is valid to first order in  $x$  only, introduces errors which compensate the neglect of this contribution.

#### 4.3.4 Practical calculation

In our case, the calculation of the torque from the data is made difficult by the fact that the absolute phase at the beginning of the wave is not precisely known, and has a large influence on the exact value of the torque (it introduces a factor two of uncertainty). Moreover, the integration must be performed over all the region where the eccentricity is not equal to 0; in particular, this includes regions inside the resonance radius, where we don't have any

observational constraints on  $\sigma_0$ ,  $e$  and  $\Delta$ . Thus, only a rough estimate of the torque can be obtained from our data.

Shu et al., 1985a, have shown that most of the torque is deposited outside the resonance radius. Thus, the neglect of the contribution arising from the regions lying inside the resonance radius introduces little additional error.

The integral Eq.(35) is thus numerically calculated from the resonance radius, and yields an estimate of the torque which is of order  $-10^{19}$  g.cm<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>.

### 5. Discussion

In what follows, we discuss the assumption of constant opacity, the enhancement of the background density at the beginning of the wave, and the value of the torque.

First, we go back to our assumption of constant ratio  $\sigma/\tau$ . This assumption is obviously related to an assumption of constant relative size distribution of the particles along the wave. It seems likely that there are more small particles in the region of the wave than outside this region, because at peak locations, collisions are more frequent (nevertheless, there is no local enhancement of small particles on the peaks with respect to the troughs because particles travel on streamlines from peaks to troughs and reversely). Thus the ratio  $\sigma/\tau$  must be lower on the wave than outside the wave, and our assumption does not hold everywhere. Nevertheless, it is probably not too bad as is shown below.

To investigate heuristically the effect of the radial dependence of the ratio, let us recast eq.(18d) as :

$$\tau_0(a) = K(a)\sigma_0(a) . \quad (40)$$

There are obviously two extreme cases:

- 1)  $K$  is constant, which we have studied.
- 2)  $\sigma_0$  is constant.

In both cases, the method which we have devised to find out  $\tau_0$ ,  $q$  and  $f$  is valid, so that the only difference between the two cases in our processing is in the non-linear dispersion relation (Eq.(24a)). In the constant  $\sigma_0$  assumption, Eq.(24) reads :

$$h(a) = (\sigma_0/B)C(q) = (a - a_L)/a_L \quad (41)$$

Fig. 14

The function  $h$  is plotted on fig. 14. Obviously, the linear relationship was much more closely followed on fig. 13.

Nevertheless, it would be interesting to apply the same treatment as the ours on the Voyager 1 radio occultation data, for which the assumption of constant opacity would be far better (radio wavelength are much less sensitive to the small particles).

The enhancement of  $\sigma_0$  at the beginning of the wave is in agreement with theoretical results (Borderies, Goldreich, and Tremaine, 1986) and can be understood by considering a ring of uniform surface density in which a strong density wave is launched. If  $q$  is close enough to 1 in the wave zone, the luminosity of angular momentum is negative in this region, while it is positive inside and outside it. The result is that the ring material piles up in the wave zone, which increases  $\sigma_0$ . The increase in  $\sigma_0$  leads to a diminution of  $q$  until a steady state is reached. This result is independent on the assumed model for viscosity. Note that this theoretical prediction provides an other argument in favor of the constant opacity assumption, which leads to the enhancement of  $\sigma_0$  at the beginning of the wave.

The linear torque Eq.(39) in  $\text{g.cm}^2/\text{s}^2$  is  $\tau_L = 3.10^{19}$  for  $\sigma_0 = 50 \text{ g/cm}^2$ , which is very close to our non linear estimate.

The question of determining precisely the value of the torque

directly from the data is certainly hopeless because, we would need at least one other profile (recorded in the same conditions so that the data are comparable) inside the resonance radius to constrain all the parameter functions of our model. Nevertheless, our estimate is precise enough to allow us to conclude that non linear effects do not decrease the torque much below its linear value, and thus cannot provide an answer to the time scale problem of Saturn's satellites (Goldreich and Tremaine, 1982, and Borderies, Goldreich and Tremaine, 1984). A similar conclusion was also reached by Shu, Yuan and Lissauer, 1985a, by an approximate theoretical analysis which assumed that  $\sigma_0$  is constant in the wave excitation region.



**ACKNOWLEDGMENTS**

We thank Dr. L. Esposito for providing the data which have been analysed in this paper as well as for giving many useful advices. We are grateful to Dr. P. Goldreich and S. Tremaine for invaluable discussions. Dr F. Shu and a anonymous referee suggested several modifications of the paper which we have incorporated in it. We thank them for helping us to improve this paper. This work could not have been done without the support of ATP Planetologie n° 57-22; P.-Y. Longaretti acknowledges supports from Comite National Francais d'Astronomie.

## REFERENCES:

- Borderies, N., Goldreich, P., and Tremaine, S. (1982): Sharp Edges of Planetary Rings. *Nature*, **299**, 209-211.
- Borderies, N., Goldreich, P., and Tremaine, S. (1983a): The Variations in Eccentricity and Apse Precession Rate of a Narrow Ring Perturbed by a Close Satellite. *Icarus*, **53**, 84-89.
- Borderies, N., Goldreich, P., and Tremaine, S. (1983b): The Dynamics of Elliptical Rings. *Astron. J.*, **88**, 1560-1568.
- Borderies, N., Goldreich, P., and Tremaine, S. (1983c): Perturbed Particle Disks. *Icarus*, **55**, 124-132.
- Borderies, N., Goldreich, P., and Tremaine, S. (1984): Unsolved Problems in Planetary Ring Dynamics. In *Planetary Rings*, (R. Greenberg and A. Brahic, Ed.), pp. 713-734. Univ. of Arizona Press, Tucson.
- Borderies, N., Goldreich, P., and Tremaine, S. (1985): A Granular Flow Model for Dense Planetary Rings. *Icarus*, **63**, 402-420.
- Borderies, N., Goldreich, P., and Tremaine, S. (1986): Non Linear Density Waves in Planetary Rings. *Icarus* (submitted)
- Esposito, L.W., C. Callaghan, W., West, R.A. (1985): The Structure of Saturn's Rings: Implications from the Voyager Stellar Occultation. *Icarus*, **56**, 439-452.

- Goldreich, P., and Tremaine, S. (1980): Disk-Satellite Interactions. *Ap.J.*, **241**, 425-441.
- Goldreich, P., and Tremaine, S. (1982): The Dynamics of Planetary Rings. *Ann. rev. A. & A.*, **20**, 249-283.
- Goldreich, P., and Tremaine, S. (1978): The Formation of the Cassini Division in Saturn's Rings. *Icarus*, **34**, 240-253.
- Goldreich, P., and Tremaine, S. (1979): The Excitation of Density Waves at the Linblad and Corotation Resonance by an External Potential. *Ap.J.*, **233**, 857-871.
- Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M.: *Table of Series, Integrals, and Products*. A. P.
- Holberg, J.B., Forrester, W.T., and Lissauer, J.J. (1982): Identification of Resonant Features within the Rings of Saturn. *Nature*, **297**, 115-120.
- Lissauer, J.J., and Cuzzi, J.N. (1982): Resonances in Saturn's Rings. *Astron. J.*, **87**, 1051-1058.
- Shu, F. H., Yuan, C., and Lissauer, J.J. (1985): Nonlinear Spiral Density Waves: an Inviscid Theory. *Ap. J.*, **291**, 356-376
- Shu, F. H., Dones, L., Lissauer, J. J., Yuan, C., and Cuzzi, J. N. (1985): Nonlinear Spiral Density Waves: Viscous Damping. *Ap. J.*, **299**, 542-573

TABLE I

## SATURN AND MIMAS PARAMETERS USED

Saturn:

Gravitationnal mass:

$$GM_S = (3.792\ 914 \pm 0.000240) \times 10^{22} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}$$

Equatorial radius:  $R_S = 60\ 330 \text{ km}$ 

Gravitationnal moments:  $J_2 = (16\ 299.1 \pm 18) \times 10^{-6}$   
 $J_4 = (-916.7 \pm 38) \times 10^{-6}$   
 $J_6 = 81.3 \times 10^{-6}$

Mimas:Eccentricity:  $e_M = 0.0201$ Period:  $T = 81425.0 \text{ s}$ Mean radius:  $a_M = 185540 \text{ km}^a$ Mass:  $M_M / M_S = 0.659 \times 10^{-7}$ 

<sup>a</sup> obtained from Mimas period and from the harmonic coefficients of Saturn.

TABLE II

## RESONANCE LOCATION AND OPACITY OBTAINED BY USING

	<u>The averaged data:</u>		<u>The raw data:</u>	
	$r_L$ (km)	$\sigma/\tau$ ( $\text{g}\cdot\text{cm}^{-2}$ )	$r_L$ (km)	$\sigma/\tau$ ( $\text{g}\cdot\text{cm}^{-2}$ )
1st method	132338.3	83.8	132337.0	78.9
2nd method	132339.9	82.2	132340.3	75.9
3rd method	132342.1	75.3	132344.6	66.0

## FIGURE CAPTIONS

fig. 1: The Mimas 5:3 density wave profile (optical depth scan by courtesy of Dr L. Esposito)

fig. 2: Representation of "unwinded" streamlines (cf text)

fig. 3: The Mimas 5:3 density wave profile averaged with a gliding mask method.

fig. 4: The integrated wave number as a function of  $a$ .

fig. 5: The unperturbed optical depth as a function of  $a$ , determined by using the raw data. The second scale (unperturbed surface density) is determined in section 4.2 .

fig. 6:  $q$  as a function of  $a$ , determined by using the raw data. The first and last crosses are set equal to zero.

fig. 7: The unperturbed optical depth as a function of  $a$ , determined by using the averaged data. The second scale (unperturbed surface density) is determined in section 4.2 .

fig. 8:  $q$  as a function of  $a$ , determined by using the averaged data. The first and last crosses are set equal to zero.

fig. 9: The optical depth as a function of  $a$ . The dotted line represent the data, and the solid line our fit.

fig. 10: The eccentricity along the wave as a function of  $a$ .

fig. 11:  $\gamma$  as a function of  $a$ .

fig. 12: The optical depth as a function of  $r$ . The dotted line represent the data, the solid line our fit.

fig. 13: The plot of  $g = (\tau_0/B)(\sigma_0/\tau_0)kC(q)$  as a function of  $a$ , with a constant opacity assumption.

fig. 14: The plot of  $h = (\sigma_0/B)kC(q)$  as a function of  $a$ , with a constant unperturbed surface density assumption.

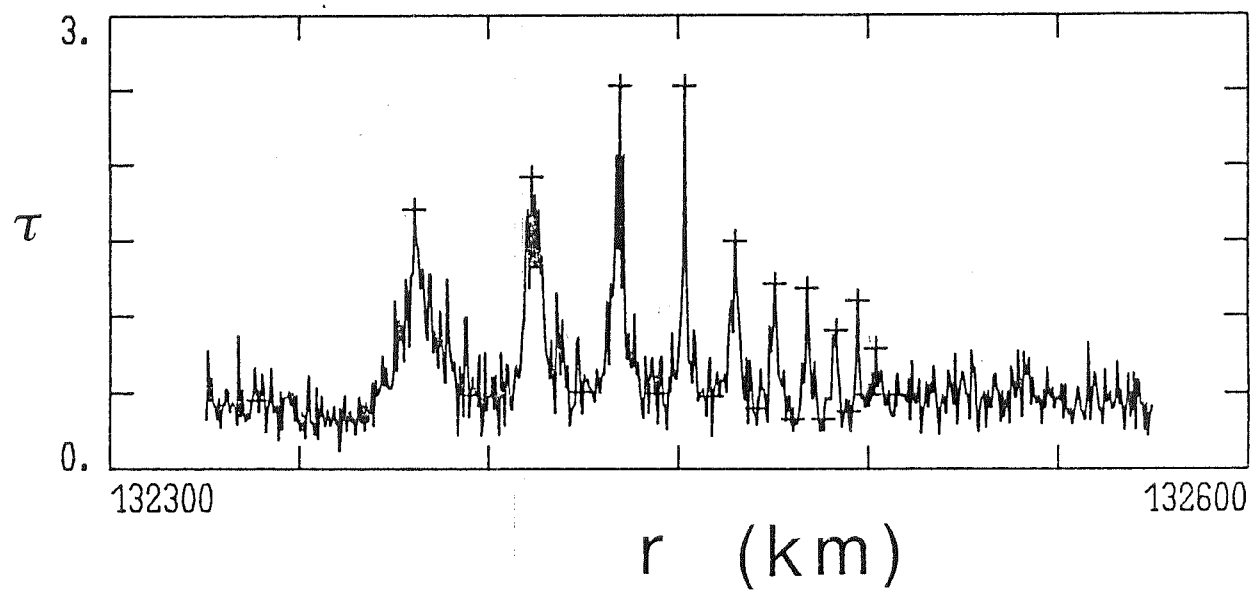


Fig. 1



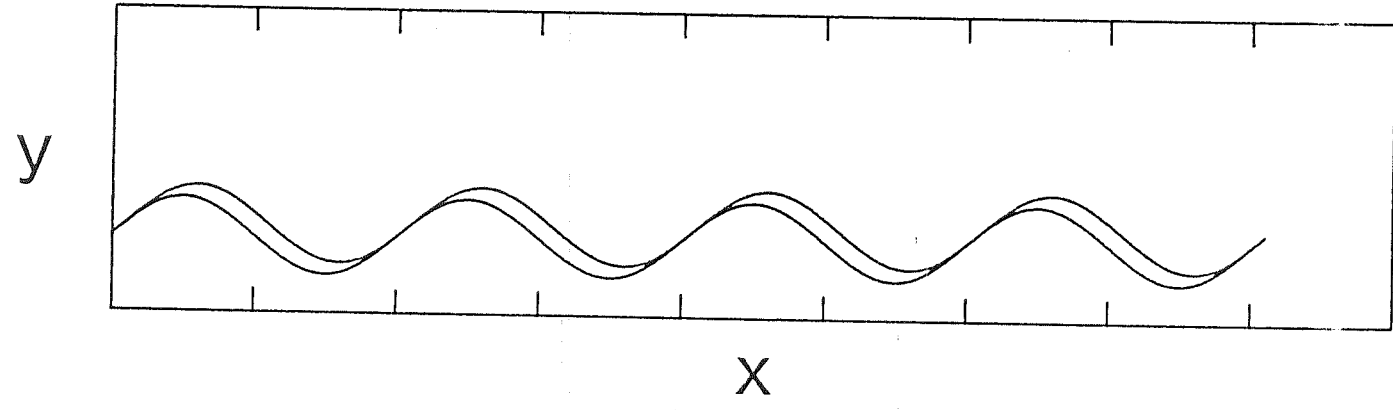
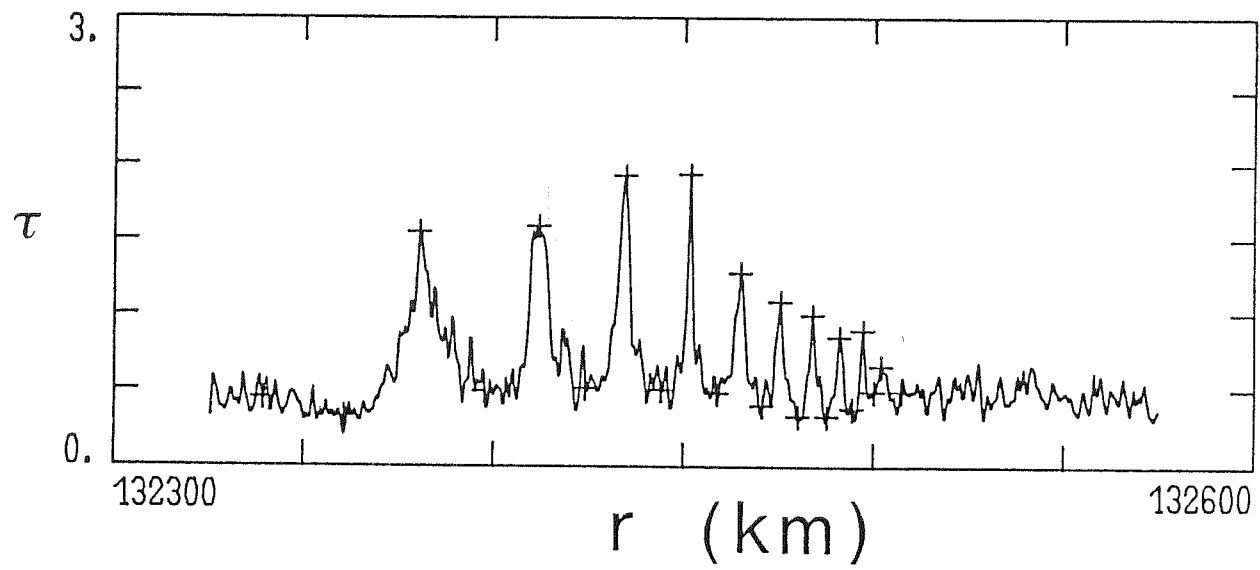


Fig. 2



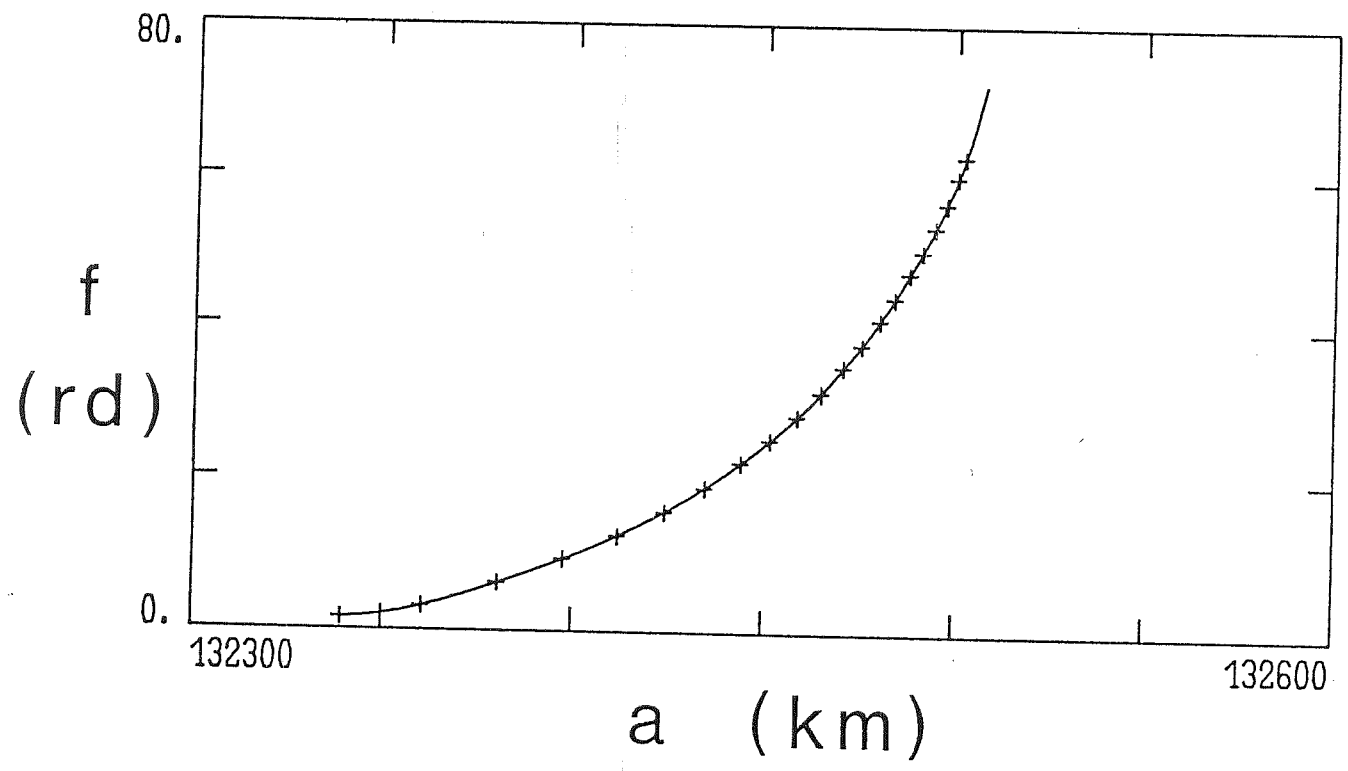


Fig. 4

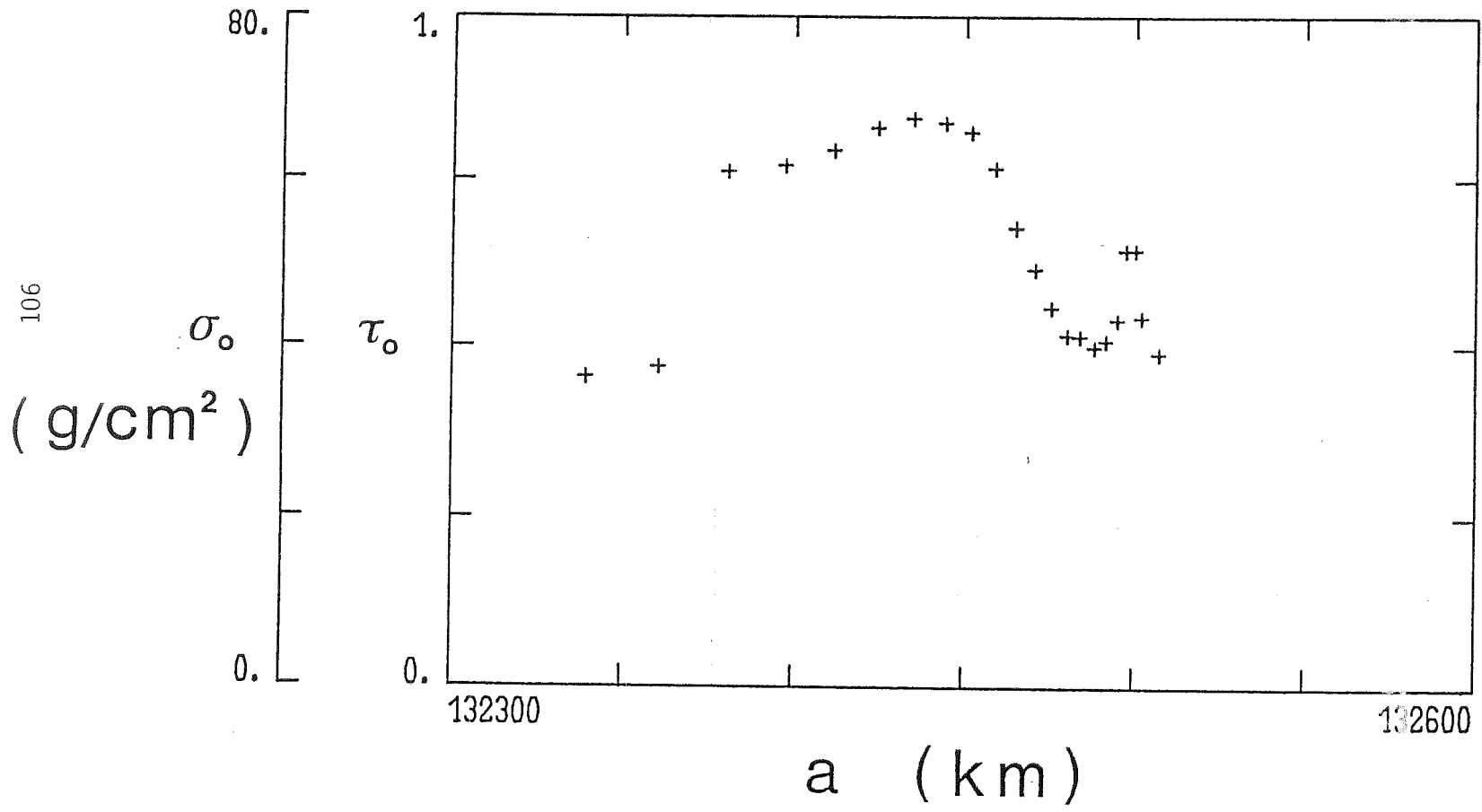


Fig. 5

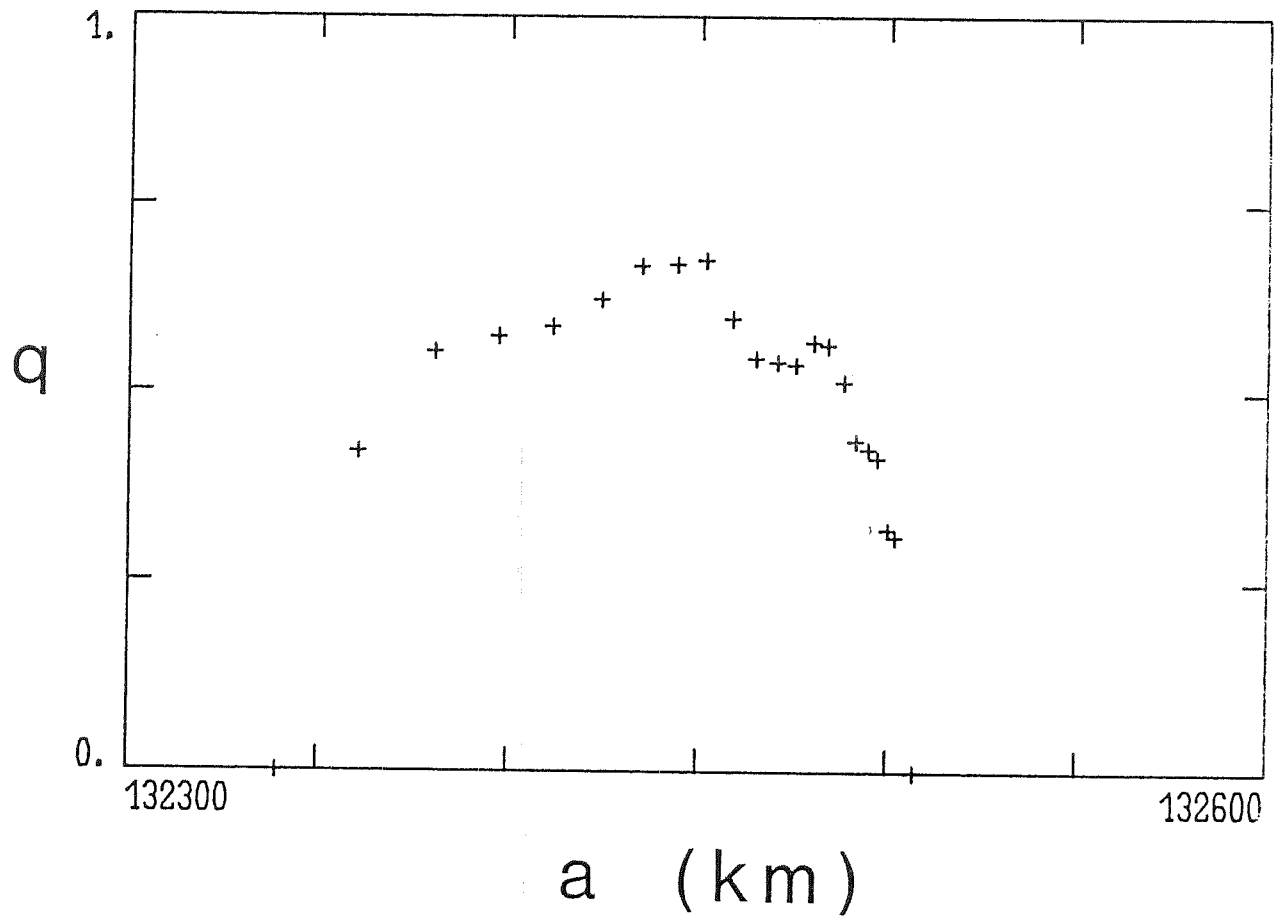


Fig. 6

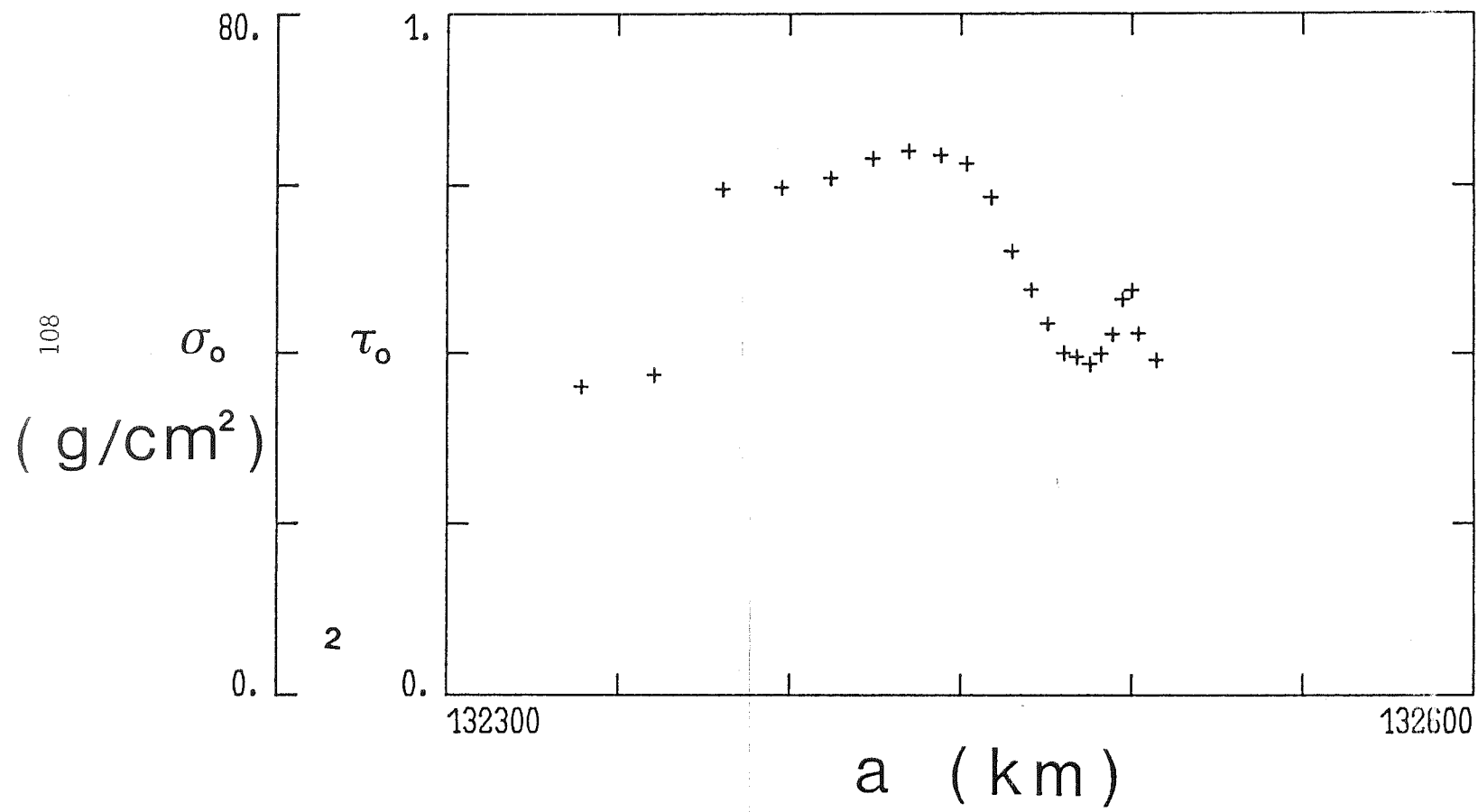


Fig. 7

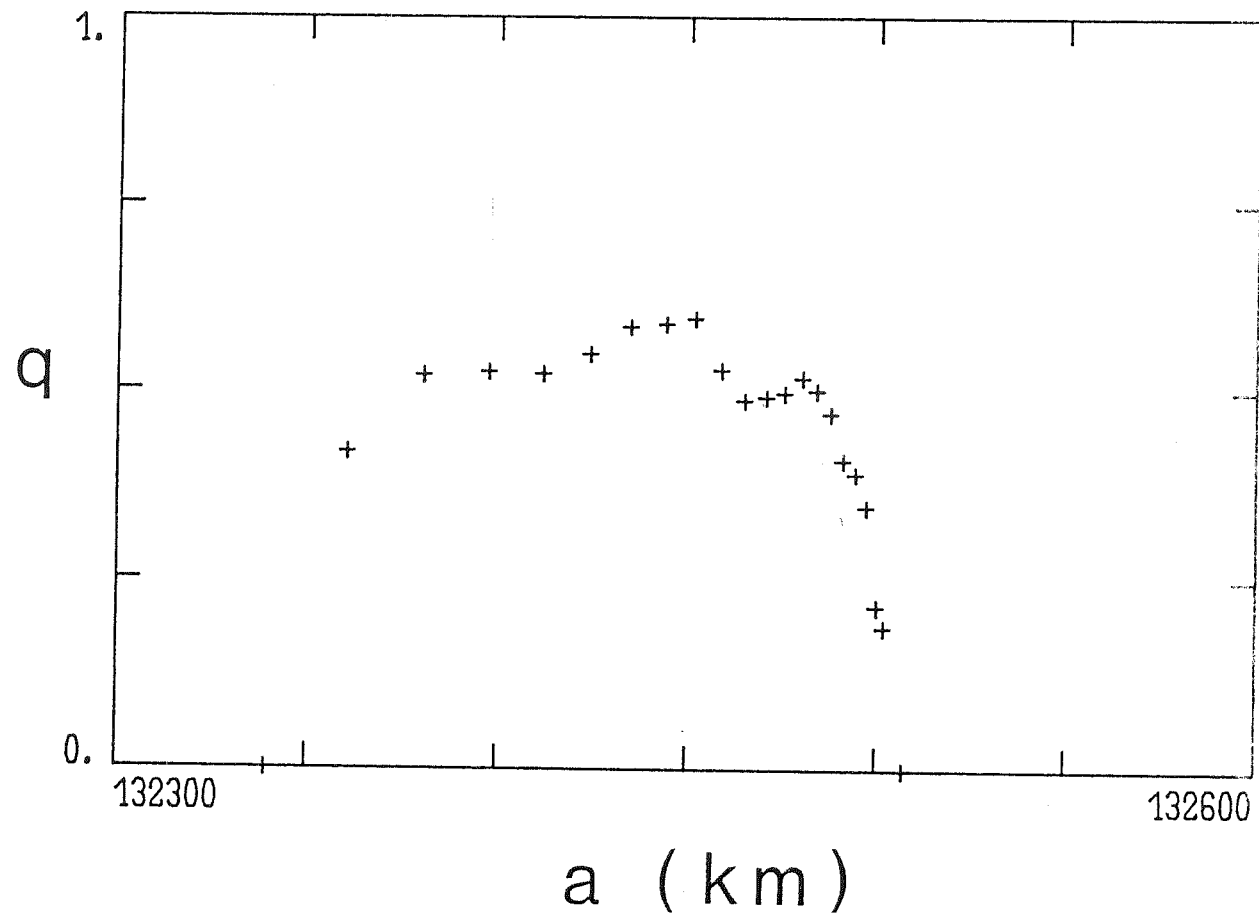


Fig. 8

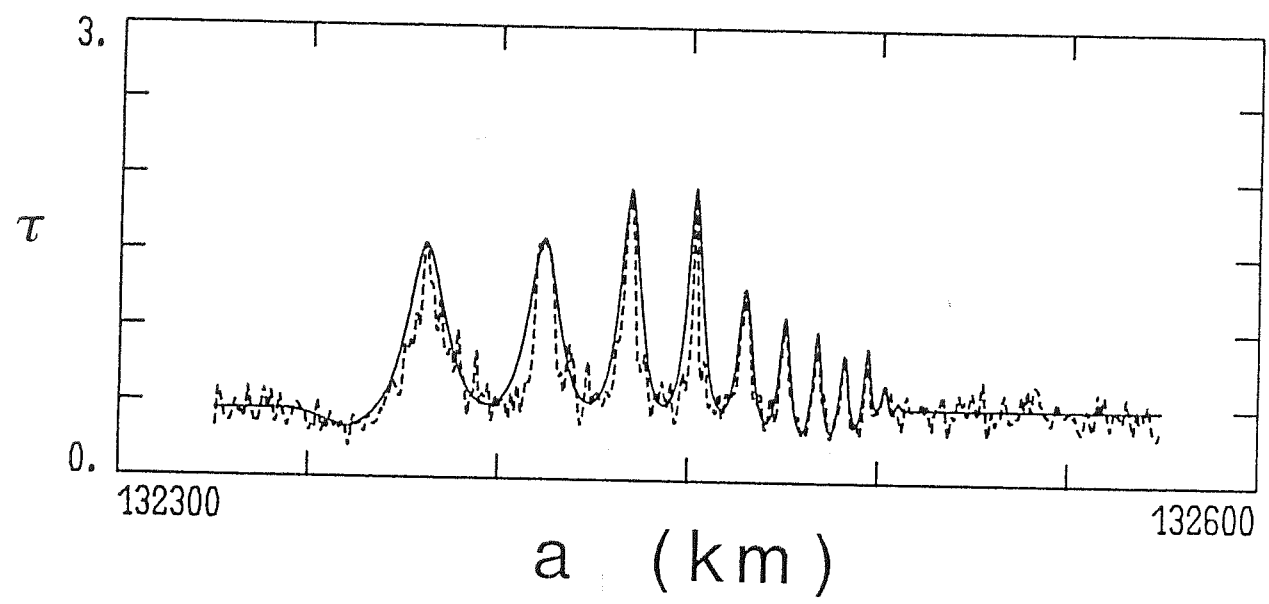


Fig. 9



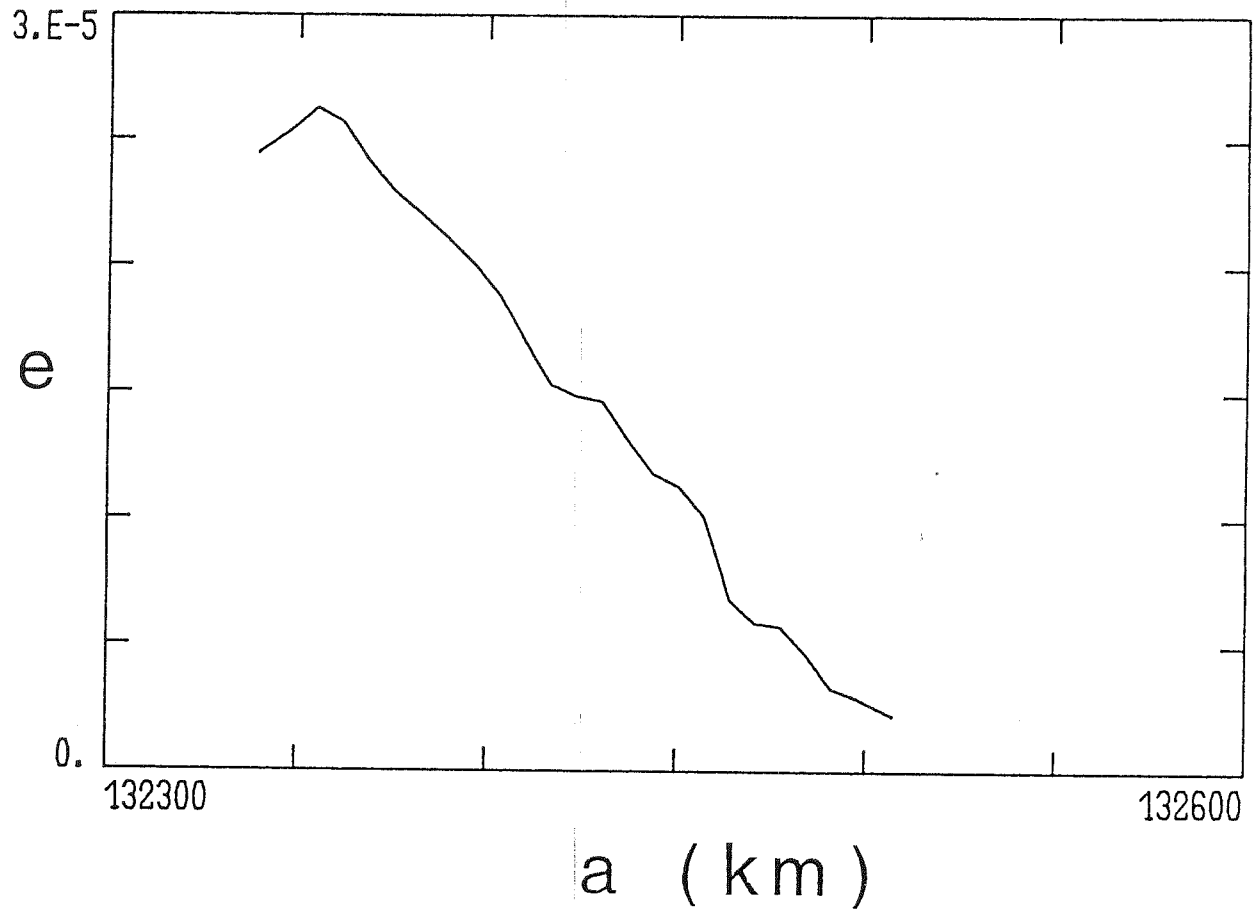


Fig. 10

112

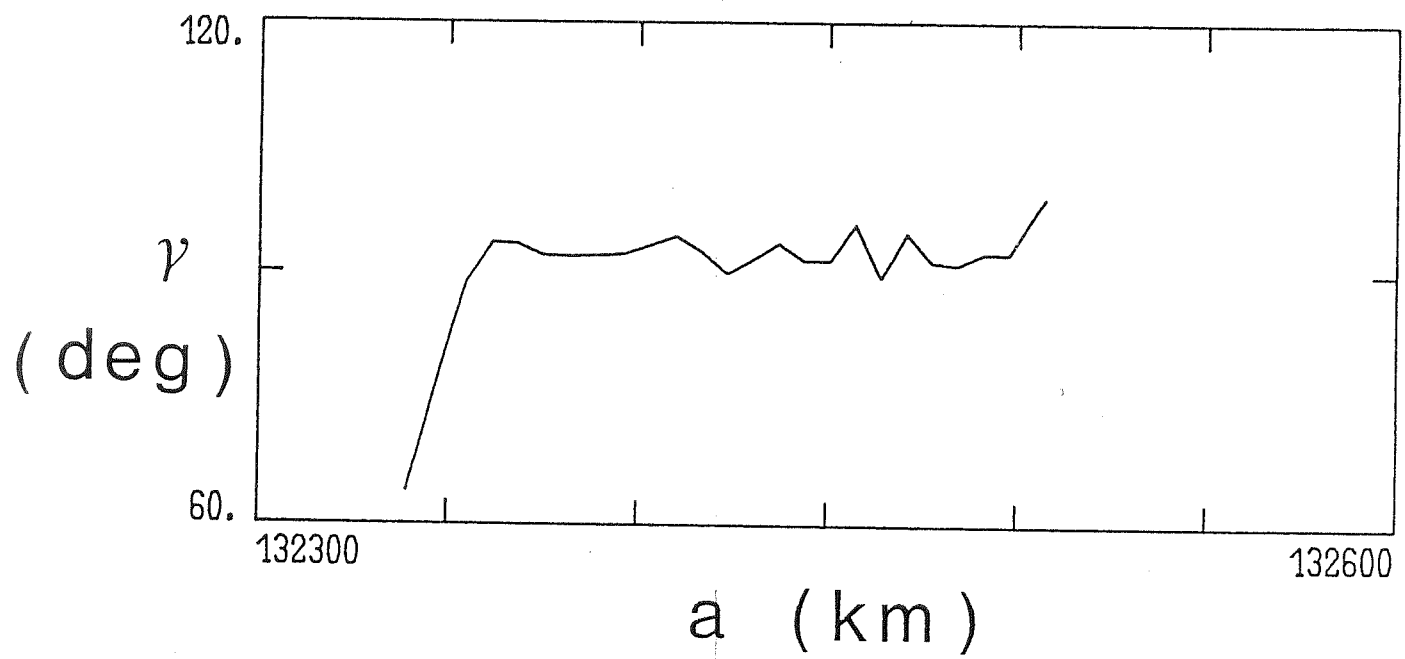
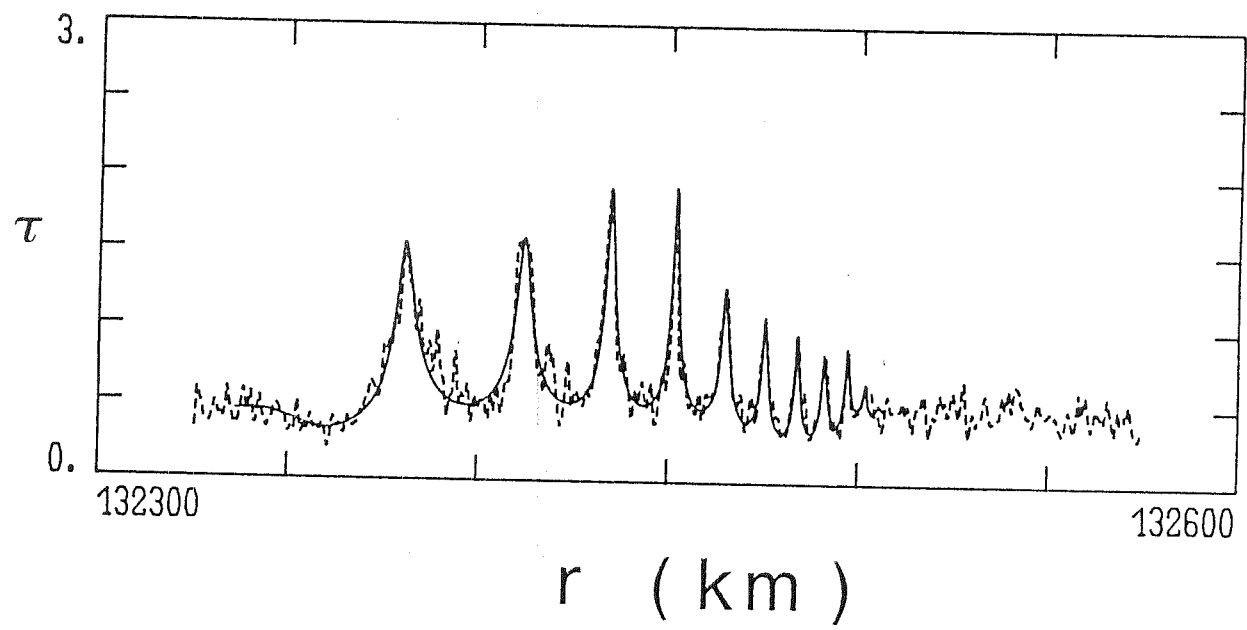


Fig. 11



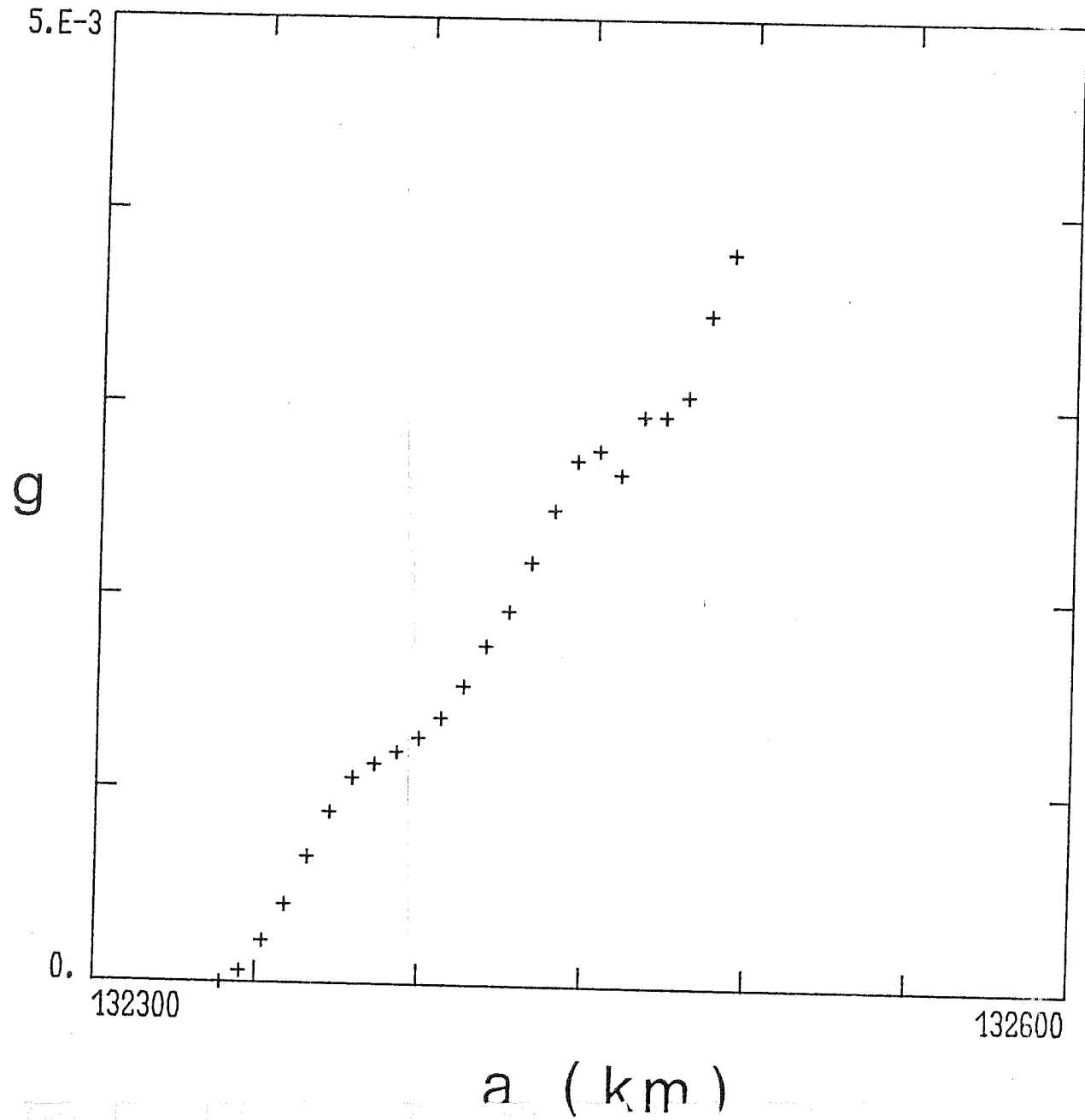


Fig. 13

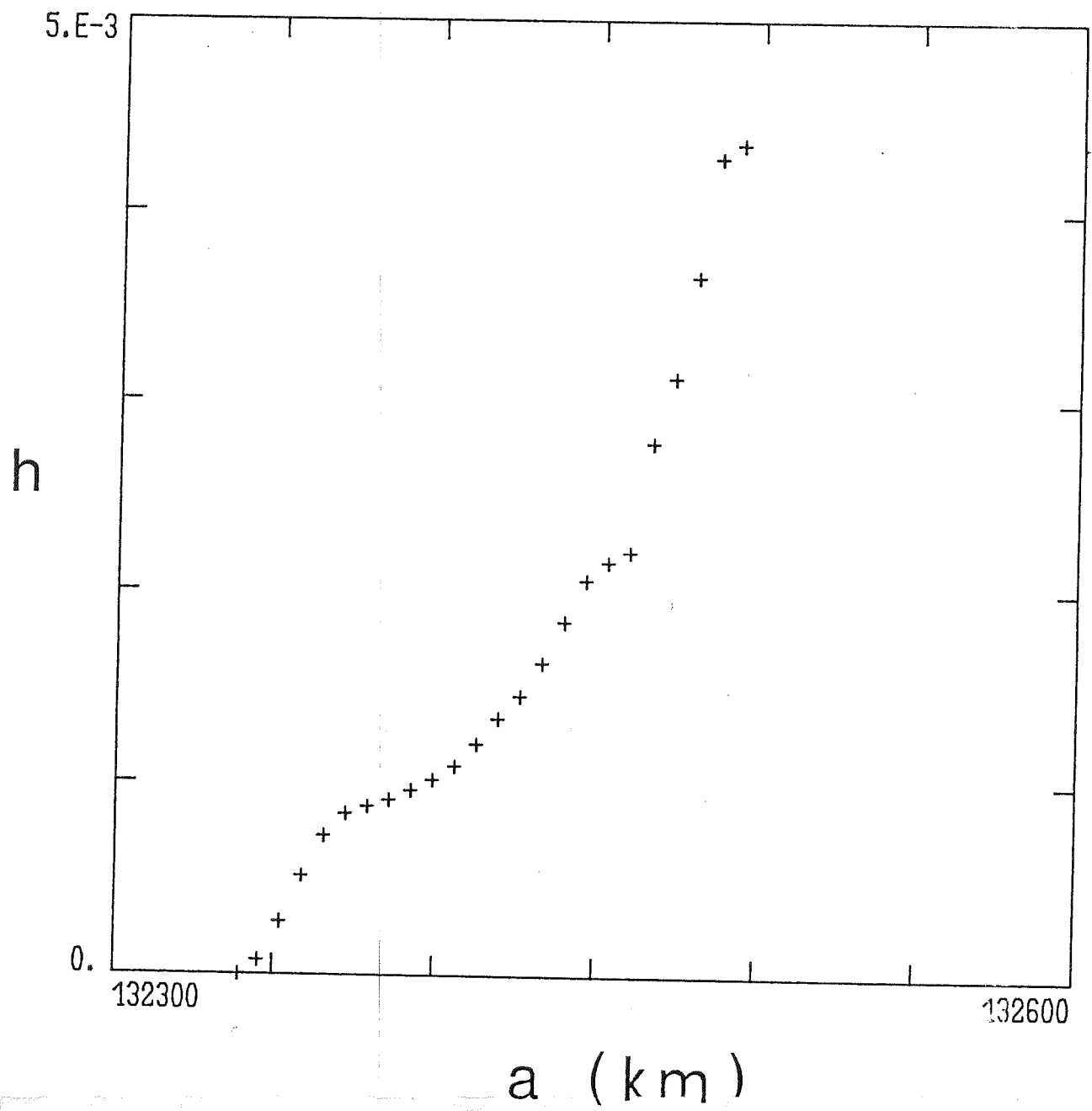


Fig. 14

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Cuzzi, J. N. et al.: Saturn's rings: properties and processes; in *Planetary Rings*, University of Arizona Press; André Brahic et Richard Greenberg, éditeurs (1984).
- [2] Goldreich, P., and Tremaine, S.: The velocity dispersion in Saturn's rings; *Icarus*, **34**, 227-239 (1978).
- [3] Araki, S. and Tremaine, S.: The dynamics of dense particle disks; *Icarus*, **65**, 83-109 (1986).
- [4] Petit, J. M., et Hénon, M.: A numerical simulation of planetary rings; *preprint*; accepté pour publication dans *Astron. and Astrophys.* (1987).
- [5] Goldreich, P., and Tremaine, S.: The formation of the Cassini Division in Saturn's rings; *Icarus*, **34**, 240-253 (1978).
- [6] Goldreich, P., and Tremaine, S.: Disk-satellite interactions; *Astrophys. J.*, **241**, 425-441 (1980).
- [7] Goldreich, P., and Tremaine, S.: The dynamics of planetary rings; *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **20**, 249-283 (1982).

- [8] Greenberg, R.: Evolution of satellite resonances by tidal dissipation; *Astron. J.*, **78**, 338-346 (1973).
- [9] Henrard, J., and Lemaître, A.: A second fundamental model for resonance; *Cel. Mech.*, **30**, 197-218 (1983).
- [10] Shu, F. H., Yuan, C., and Lissauer, J. J.: Nonlinear spiral density waves: an inviscid theory; *Astrophys. J.*, **291**, 356-376 (1985).
- [11] Borderies, N., Goldreich, P., and Tremaine, S.: The dynamics of elliptical rings; *Astron. J.*, **88**, 1560-1568 (1983).
- [12] Borderies, N., Goldreich, P., and Tremaine, S.: A granular flow model for dense planetary rings; *Icarus*, **63**, 406-420 (1983).
- [13] Stewart, G. R., et al.: Collision-induced transport processes in planetary rings; in *Planetary Rings*, University of Arizona Press; Richard Greenberg and André Brahic, éditeurs (1984).
- [14] Goldreich, P., and Tremaine, S.: The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential; *Astrophys. J.*, **233**, 857-871 (1979).
- [15] Shu, F. H.: Waves in planetary rings; in *Planetary Rings*, University of Arizona Press; Richard Greenberg and André Brahic, éditeurs (1984).
- [16] Esposito, L. H., O'Callaghan, H., and West, R. A.: The structure of Saturn's rings: implications from the Voyager stellar occultation; *Icarus*, **56**, 439-452 (1983).
- [17] Dermott, S. F.: Dynamics of narrow rings; in *Planetary Rings*, University of Arizona Press; Richard Greenberg et André Brahic, éditeurs (1984).

*II DISTRIBUTION EN TAILLE DES PARTICULES  
DANS LES ANNEAUX DE SATURNE*



*INTRODUCTION:**CONSTRAINTES OBSERVATIONNELLES ET  
PRESENTATION DES TRAVAUX ANTERIEURS*

Cassini semble être le premier à avoir suggéré vers la fin du XVII<sup>e</sup> siècle que l'anneau de Saturne était composé d'une myriade de petits corps solides. On doit toutefois à Laplace [1], [2] le premier examen théorique sérieux de la dynamique des anneaux dans son traité de Mécanique Céleste, datant du début du XIX<sup>e</sup> siècle. Ecartant l'hypothèse d'un anneau solide formulée par Huyghens en 1655 [3] en montrant qu'aucun des matériaux connus ne pouvait résister aux forces de marées générées par Saturne, il proposait que l'anneau était constitué d'une quantité d'annelets solides "irréguliers", en conformité avec ses idées sur l'origine du système solaire (ces annelets ne peuvent pas être concentriques circulaires car, ainsi que Laplace lui-même l'a montré, un tel système est dynamiquement instable: il correspond à un maximum d'énergie potentielle). Cependant, les annelets de Laplace ne survécurent pas à l'examen de Maxwell [4], qui montra qu'ils devaient être instables dans la plupart des cas. Celui-ci montra aussi, mais à l'aide d'arguments malheureusement faux, qu'un anneau liquide ou gazeux serait également instable, et donc que l'anneau devait être constitué de particules (la première confirmation expérimentale de cette hypothèse remonte à 1895, où l'observation spectroscopique par Keeler et Campbell

des raies de Fraunhofer du Soleil réfléchies par les anneaux a fait apparaître un profil de rotation différentielle képlérienne). Des arguments simples ont été avancés par Jeffreys en 1947 [5] pour éliminer les deux dernières possibilités: un anneau liquide montrerait la planète en réflexion, et un anneau gazeux serait trop épais.

Bien que la nature particulière des anneaux soit maintenant fermement établie, et malgré les rencontres des deux sondes Voyager avec le système saturnien, aucune particule individuelle n'a pu être observée, et la controverse quant à leur nature et leur aspect est encore vive. On sait cependant, à partir de l'analyse de la lumière solaire réfléchie par les anneaux, que les particules sont principalement constituées de glace d'eau; la présence de silicates a aussi été détectée (pour plus de renseignements, voir l'article de revue de Cuzzi et al. [6]). De plus, l'expérience d'occultation radio des anneaux montée à bord de Voyager I a permis de déterminer la répartition en taille des particules en différentes positions des anneaux (par "taille" des particules, on fait généralement référence à leur rayon en les supposant grossièrement sphériques). Au cours de cette expérience, on a enregistré depuis la Terre l'absorption complexe - variation d'intensité et de phase - par les anneaux de signaux radio de deux longueurs d'onde différentes (3.6 cm et 13 cm) émis par la sonde, située alors derrière les anneaux par rapport à la Terre. L'analyse de la phase des signaux enregistrés donne des informations sur la quantité de petites particules, c'est-à-dire de taille inférieure au centimètre. Le signal diffusé vers l'avant permet lui de remonter à la distribution de particules de l'ordre du mètre. Les tailles intermédiaires sont déterminées en comparant les absorptions relatives des deux signaux et en supposant que la loi de distribution est une loi puissance (cf Marouf et al. [7], Zebker et al. [8]; on pourra trouver un résumé dans Cuzzi et al. [6]). Une loi puissance est attendue dans la mesure où ce type de loi intervient dans un grand nombre de processus géophysiques (Hartmann [9]), et où une simple comparaison à l'oeil des deux signaux montre une

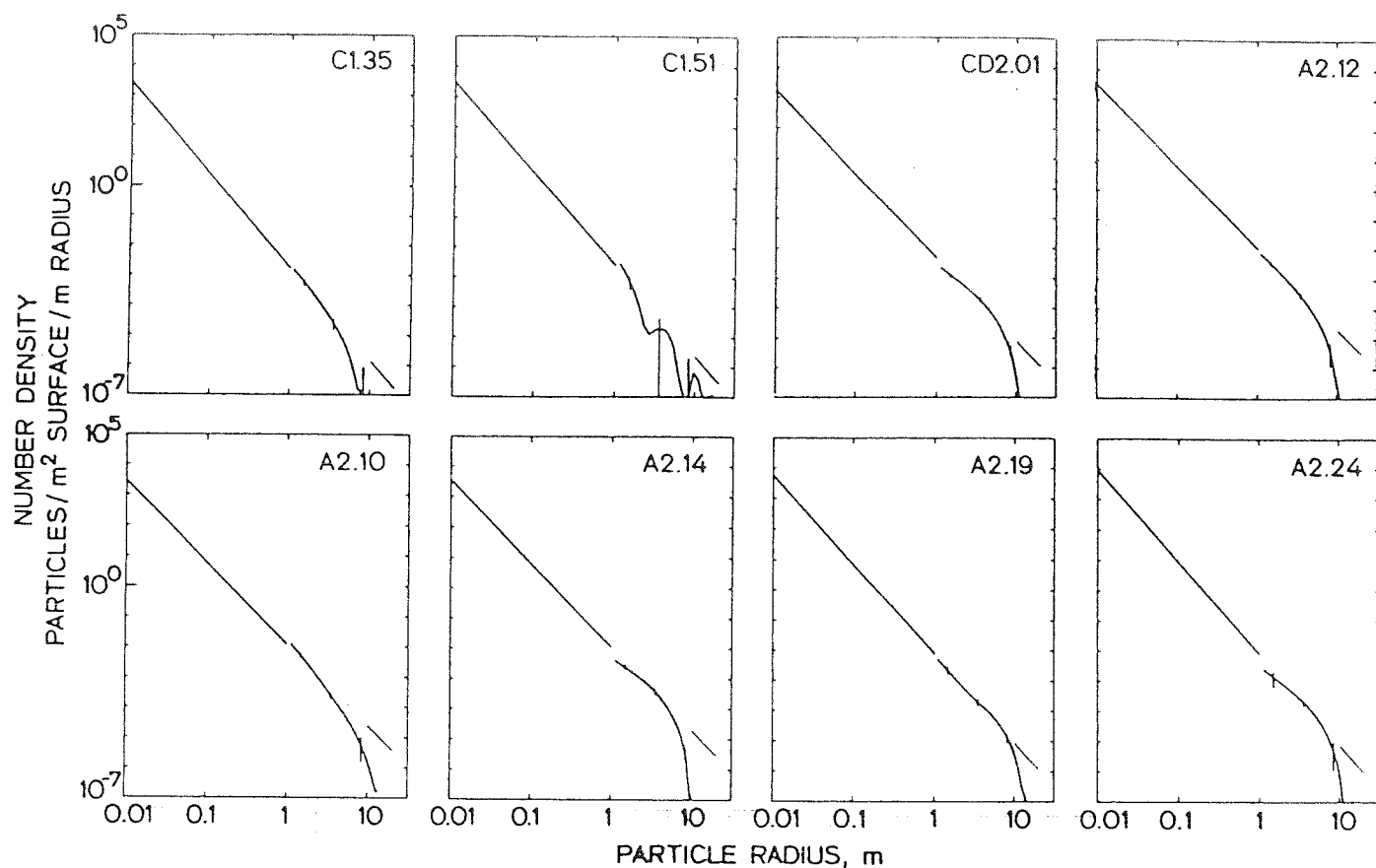


FIG. 6. Particle size distribution functions for eight ring regions in Fig. 4. Solution for each region exhibits near inverse-cubic behavior with an effective upper size cutoff in the 5- to 10-m range. Also shown as a line segment in the 10- to 20-m-size range is an extrapolation of the submeter power law; note that the number density falls markedly below the power-law extrapolation for radius  $a > 10$  m.

Region	Power-law index, $q$	Upper radius cutoff, $m$	1-cm Density #/m <sup>2</sup> /m, $n(1 \text{ cm})$	Number of layers, $N$
Ring C				
C1.35	3.11	4.5	2700	1
C1.51	3.05	2.4-5.3	2990	1
Cassini division				
CD2.01	2.79	7.5	1780	2
Ring A				
A2.12	2.74	5.4	3300	3
A2.10	2.70	5.0	2870	3
A2.14	2.75	6.3	3530	3
A2.19	2.93	11.2	5650	3
A2.24	3.03	8.9	8950	3

plus grande abondance de "petites" particules (les profils de profondeur optique des anneaux sont donnés en appendice A). Cette analyse a été effectuée pour diverses positions dans l'anneau C, la division de Cassini, et l'anneau A; l'anneau B est optiquement trop épais pour permettre l'inversion du signal. Quelques-uns des résultats de Zebker et al. sont présentés sur la figure 2.1 (on donne le nombre de particules par unité de rayon des particules et de surface des anneaux en fonction du rayon). Les résultats peuvent être résumés de la façon suivante:

- i) Il y a relativement peu de particules subcentimétriques: elles ne dominent ni la masse des anneaux, ni leur profondeur optique (non visible sur la figure).
- ii) Pour des rayons de particules variant entre quelques centimètres et quelques mètres, la fonction de distribution varie à peu près comme  $r^{-3}$  ]
- iii) Les courbes présentent une coupure en  $r = R_0 \approx 5$  m. Pour  $r > R_0$ , la fonction de distribution décroît aussi vite ou plus vite que  $r^{-5}$ .

L'écrasante majorité des travaux publiés sur les propriétés statistiques des anneaux concerne l'étude de la dispersion de vitesse des particules à partir de l'équation de Boltzmann ([10] à [18]; une revue récente peut être trouvée dans Stewart et al. [15]). Dans ces études, les particules sont toujours considérées comme des sphères dures indestructibles, souvent identiques, quelquefois de deux tailles différentes; le terme de collision est fréquemment du type Boltzmann, modifié pour prendre en compte l'inélasticité des collisions. Ces études ne peuvent être appliquées qu'aux particules de rayon  $r \ll R_0$ , qui dominent la masse des anneaux et leur dynamique. Elles supposent qu'il n'existe aucun processus d'érosion ou d'accrétion des particules dans les anneaux, ou du moins que ceux-ci affectent suffisamment peu leur masse pour pouvoir être négligés.

En fait, si l'on excepte quelques travaux fragmentaires et antérieurs à "l'ère Voyager" ([19] et [20]), il n'existe dans la littérature qu'un seul modèle de distribution en taille des particules

dans les anneaux: le modèle "d'objets dynamiques éphémères" (en anglais: "Dynamic Ephemeral Bodies" ou "DEBs"; Davis et al. [21], et Weidenschilling et al. [22]). Il s'agit d'une simulation numérique de l'évolution de la distribution en taille des particules utilisant un programme précédemment développé par les auteurs pour l'étude du dernier stade de formation des planètes par accréation [23] et l'évolution collisionnelle de la population des astéroïdes [24]. Les auteurs argumentent que, contrairement à l'opinion jusqu'alors généralement admise, la situation des anneaux à l'intérieur de la limite de Roche de la planète ne peut empêcher la formation par accréation d'aggrégats lâches et peu denses de petites particules. Ces objets se formeraient sur des échelles de temps relativement courtes, de l'ordre de quelques jours, et leur taille serait limitée par les forces de marées de l'environnement saturnien, du fait de leur très faible résistance interne: lorsqu'une certaine taille critique est atteinte, l'aggrégat est détruit et ses composants élémentaires dispersés. Les simulations numériques effectuées par les auteurs montrent que l'on peut obtenir de la sorte une distribution stationnaire de particules compatible avec la distribution déterminée à l'aide des données de Voyager, mais où aucun des objets la constituant ne peut survivre individuellement plus de quelques jours, d'où leur désignation. Le problème essentiel posé par ce modèle est qu'on ne comprend pas clairement comment le processus invoqué par les auteurs peut fonctionner. On s'attendrait en effet à ce que les effets de marée limitent la taille des aggrégats: une particule tombant sur l'un d'eux ayant atteint sa taille critique ne peut en effet être accrétée car elle n'est pas liée gravitationnellement. Or pour que les aggrégats soient dispersés par effets de marée, il faut qu'ils puissent dépasser cette valeur critique de la taille.

Le but du modèle que je présente ici est d'examiner certains des problèmes posés:

- 1) Peut-on considérer les particules dominant la distribution ( $r < R_0$ ) comme des sphères dures ?

2) Peut-on imaginer un autre mécanisme que celui exposé ci-dessus pour expliquer la coupure de la distribution pour des rayons de particules de l'ordre de cinq mètres ?

3) Des mécanismes d'accrétion et d'érosion simples sont-ils suffisants pour expliquer la valeur de l'exposant de la loi de distribution ?

L'approche adoptée dans ce modèle est essentiellement analytique, bien que l'équation intégral-différentielle finale soit résolue numériquement. Ce modèle ne peut pas dans sa forme actuelle être appliqué aux plus petites particules de la distribution, dont la dynamique et le nombre sont fortement influencés par des effets d'origine électromagnétique non pris en compte (car négligeables pour les grosses particules), et pour lesquelles les processus d'accrétion et d'érosion décrits plus loin ne sont vraisemblablement pas adaptés.

En fait deux modèles ont été envisagés. Dans le premier les particules se comportent plus ou moins comme des sphères dures; j'ai alors montré qu'une distribution du type de celle des anneaux ne peut correspondre à un état stationnaire: les plus petites particules disparaissent rapidement au profit des plus grosses. Ceci conduit de façon quasi-obligée à envisager un deuxième modèle où les particules ont un comportement plus proche de celui des DEBs, et où une distribution stationnaire est possible. Le deuxième modèle découlant plus ou moins naturellement du précédent, le plan de l'exposé sera donc le suivant:

En guise de préliminaire, je donnerai quelques ordres de grandeur de quantités physiques caractérisant les anneaux; je montrerai qualitativement que des processus d'accrétion et d'érosion ont lieu dans les anneaux, de sorte que la distribution actuelle des particules ne peut pas être primordiale, à moins que les anneaux soient extrêmement jeunes. Je présenterai également un mécanisme plausible pouvant expliquer la coupure supérieure de cette distribution.

Dans une première partie je vais discuter et établir des critères d'accrétion, qui seront utilisés dans les deux modèles envisagés.

La seconde partie regroupe la présentation des hypothèses générales des deux modèles et la dérivation de la forme générale de l'équation intégral-différentielle régissant l'évolution de la fonction de

distribution en taille des particules.

La troisième partie sera consacrée au premier modèle: on examinera d'abord le modèle d'érosion choisi, puis l'équation régissant la distribution sera calculée dans le cas étudié et les résultats obtenus exposés.

La quatrième partie présentera le second modèle. Le plan sera le même que dans la seconde partie.

En conclusion, je résumerai les résultats obtenus, et discuterai les limitations et perspectives d'avenir de ce modèle.

On peut avancer principalement deux raisons pour expliquer le peu de recherches effectuées jusqu'à présent sur le problème de la distribution en taille des particules:

- i) Un argument utilisé pendant longtemps était que la situation des anneaux à l'intérieur de la limite de Roche de la planète empêchait toute accréation; donc, du fait même de l'existence des anneaux, les particules ne pouvaient pas non plus être érodées, et se comportaient comme des sphères dures.
- ii) Il est apparu assez récemment et de façon de plus en plus aiguë que l'argument précédent n'est pas valide (cf [22] et [25]), et que le modèle des sphères dures, utilisé dans la quasi-totalité des études statistiques des anneaux, est très sûrement inadéquat. Cependant, comme dans l'état actuel de nos connaissances, on ne peut que conjecturer sur la forme, la densité, l'état de surface, la structure interne des particules... qui contrôlent pourtant leur comportement au cours des collisions, il semblerait que le problème ait plus ou moins été laissé de côté par les dynamiciens.

Néanmoins, notre compréhension théorique des anneaux est parvenue à un point où l'introduction dans les modèles de phénomènes d'accréation et d'érosion, (de même qu'une distribution en taille de particules) semble nécessaire, sinon essentielle. En fait, l'une des motivations de cette étude (bien qu'elle n'apparaisse jamais explicitement) est de tenter de

voir comment cette étape peut être abordée.

Le modèle que je présente ici n'est qu'une première itération. De ce fait, la discussion qui suit restera quelquefois assez qualitative (avantage ou inconvénient, selon le point de vue, des sujets peu voire pas défrichés). Par exemple en ce qui concerne l'élaboration de critères d'accrétion, j'ai surtout cherché à mettre en évidence les concepts et paramètres physiques qui me paraissaient importants pour la modélisation du phénomène, en précisant leurs ordres de grandeur chaque fois que cela était possible. Il s'agit en fait de comprendre comment une distribution en taille d'équilibre peut s'établir, et éventuellement de définir plus précisément les questions à résoudre dans l'avenir, plutôt que d'ajuster finement les paramètres en vue de prédictions quantitatives dont la précision serait inévitablement toute relative dans ce modèle, du moins sous sa forme actuelle.

? M  
Note: Les résultats observationnels rappelés plus haut, ainsi que l'essentiel de la discussion qui suit ne concernent que les anneaux principaux, qui diffèrent grandement des anneaux E, F, G tant en ce qui concerne leurs propriétés physiques (épaisseur...) que leur dynamique. De même, elles ne s'appliquent pas aux régions perturbées des anneaux.



PRELIMINAIRE:1 Quelques ordres de grandeur:1.1 Vitesses relatives de collision:

Il est intéressant, avant de s'intéresser à une possible évolution collisionnelle de la distribution en taille des particules des anneaux, de considérer l'ordre de grandeur des vitesses relatives de choc entre ces particules.

Une estimation de la dispersion de vitesse  $c$  dans les anneaux peut être obtenue de diverses façons:

- i) En supposant que les anneaux se sont étalés par diffusion sur une échelle de temps comparable à l'âge du système solaire, on obtient  $c \approx 2$  mm/s ([10] et [25]).
- ii) L'analyse, à l'aide de la théorie linéaire des ondes de densité, de l'échelle spatiale caractéristique d'amortissement d'une onde fournit une valeur approchée du coefficient de viscosité dynamique, lequel peut être relié à la dispersion de vitesse. On obtient ainsi une valeur de  $c$  de l'ordre de quelques millimètres par seconde [26].
- iii) Aucune analyse non-linéaire de ce type n'a encore été menée. Cependant, une estimation des effets non-linéaires peut être trouvée dans [25], et conduit à une valeur de  $c$  de quelques dixièmes de millimètres par seconde.
- iv) Il est très vraisemblable que les particules de rayon  $r \approx R_0$  forment une monocouche, ainsi que l'ont montré plusieurs simulations numériques (dont celles de Brahic [27]) et certains travaux analytiques récents (cf Shukhmann [17]; voir également Cuzzi et al. [28] pour une discussion de la structure verticale des anneaux). On obtient là encore une valeur de quelques dixièmes de millimètres par seconde pour la dispersion de vitesse [29].

En résumé, une estimation raisonnable de la dispersion de vitesse dans les anneaux est  $c \approx 10^{-3}$  m/s, à un facteur de l'ordre de l'unité

effets radiatifs / 1  
jusqu'à 2.

près. Notons que l'inélasticité des collisions empêche l'équipartition de l'énergie entre particules de masses différentes, et que cette valeur de  $c$  est en première approximation indépendante de la masse des particules, à un facteur de l'ordre de quelques unités près ([30] et [31]); on peut également vérifier que si l'équipartition était réalisée, le volume occupé par les petites particules conduirait à un anneau beaucoup trop épais - 100 km - par rapport aux limites imposées par l'observation).

Le champ de vitesse moyenne dans les anneaux est un champ képlérien (la nonsphéricité de Saturne et le champ moyen créé par les anneaux eux-mêmes ne causent que des perturbations relativement faibles par rapport au potentiel newtonien et peuvent être négligés avec une assez bonne approximation). Des particules suffisamment petites ont des vitesses moyennes pratiquement égales et les vitesses relatives de choc sont de l'ordre de  $c$ . Si les particules sont assez grosses, au contraire, la vitesse relative du choc sera dominée par la vitesse différentielle képlérienne. On définit de la sorte un rayon de particule critique  $r_0$  pour lequel la vitesse différentielle képlérienne est égale à  $c$ . Pour un profil de rotation képlérien, on a :

$$r_0 = 2c/\Omega$$

car  $dv/da = \Omega/2$ , où  $\Omega$  est la vitesse angulaire képlérienne, et  $a$  le rayon de l'orbite circulaire. Comme  $\Omega \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ,  $r_0 \approx 10 \text{ m}$ , soit du même ordre de grandeur que  $R_0$ .

Donc, les particules de rayon  $r < r_0$  subissent des collisions à des vitesses relatives extrêmement lentes de l'ordre de  $c$ .

### 1.2 Epaisseur des anneaux:

Il est intéressant de noter que  $r_0$  est également du même ordre que l'épaisseur des anneaux. En effet, les particules se comportant verticalement comme des oscillateurs, on a équipartition entre l'énergie cinétique verticale, de l'ordre de  $1/2mc^2$  où  $m$  est la masse de la particule et l'énergie potentielle, de l'ordre de  $1/2m\Omega^2h^2$  où  $h^2$  est l'écart quadratique moyen de la particule au plan des anneaux [29] (cette expression de l'énergie potentielle est le premier terme non nul du développement du potentiel newtonien au voisinage du plan des anneaux pris comme origine). L'épaisseur  $H$  des anneaux étant de l'ordre de  $2h$ , l'égalité des deux expressions ci-dessus donne  $H \sim r_0$ . On retrouve naturellement que les particules dont le rayon est de l'ordre du rayon de coupure de la distribution forment probablement une monocouche.

### 1.3 Vitesses de spin des particules:

Il n'existe pratiquement aucune étude de la rotation des particules sur elles-mêmes. Cependant, du fait de l'inélasticité des collisions, on a un couplage entre les degrés de liberté de rotation et les degrés de liberté de translation. On s'attend donc qualitativement à une équipartition de l'énergie entre ces divers degrés de liberté, à un facteur de l'ordre de quelques unités près. Dans la suite, on supposera cette équipartition établie. Il ne s'agit pas là d'une hypothèse très critique, puisque l'on retrouve au moins de manière approchée et qualitative ce résultat dans des cas très différents:

- i) Collisions de sphères dures: l'une des seules études analytiques prenant en compte la rotation des particules est celle de Shukhmann [17]. On peut vérifier à partir des courbes qu'il donne qu'il y a presque équipartition de l'énergie entre la rotation et la translation.
- ii) Une étude des rotations des astéroïdes par Harris [32], qui correspond au cas diamétralement opposé (la distribution de taille des astéroïdes est dominée par les fragmentations durant les collisions, qui se font à des vitesses relatives de plusieurs km/s) conduit (très !) qualitativement à un résultat assez similaire. On pourra à ce sujet se

reporter à l'application de cette étude aux anneaux de Saturne que Weidenschilling et al. ont faite pour leur modèle [22]. Il est cependant douteux que les mécanismes à l'oeuvre dans la ceinture d'astéroïdes soient importants dans le cas des anneaux, et l'argument est à manier avec précaution.

Si  $w$  désigne la vitesse de rotation propre des particules, et  $I$  leur moment d'inertie, on doit donc avoir  $1/2 I w^2 \approx 1/2 m v_r^2$ .

Pour  $r < r_0$ ,  $v_r \propto c$ , soit, si l'on suppose les particules sphériques,  $w \propto c/r$ . Comme la dispersion de vitesse est en première approximation isotrope, l'orientation de l'axe de rotation propre sera a priori quelconque.

Pour  $r > r_0$ ,  $v_r \propto \Omega r$ , soit  $w \propto \Omega$ , l'axe de rotation étant alors orthogonal au plan des anneaux.

#### 1.4 Fréquence de collision:

L'importance des chocs pour l'évolution des anneaux de planète est liée à leur grande fréquence. Un ordre de grandeur de celle-ci peut être obtenu de la manière suivante [29]:

La fréquence de collision  $f$  est donnée par  $f = 2\pi R^2 n c$  où  $n$  est la densité de particules par unité de volume des anneaux, et  $R$  la taille "typique" des particules. De plus, nous venons de voir que  $c \propto \Omega H$ , et pour des profondeurs optiques  $\tau$  pas trop élevées, on a  $\tau \propto \pi R^2 n H$ . On en déduit  $f \propto \Omega \tau$ : comme  $\tau \propto 1$  pour les régions qui nous intéressent, les particules subissent environ une ou deux collisions par orbite, soit quelques milliers de collisions par an.

#### 2 De la nécessité de considérer des processus d'érosion et d'accrétion collisionnels:

En dépit d'une fréquence de collision relativement élevée, les très faibles vitesses relatives de choc soulèvent très naturellement la

question suivante: les taux d'érosion due aux collisions entre particules sont-ils suffisamment importants pour conduire à une évolution sensible de la masse des particules sur de longues échelles de temps ?

Il est assez clair que le résultat d'un choc ( y a-t-il accrétion ? érosion ? production de débris ? selon quelle distribution ?) dépend beaucoup de la nature des particules (le lecteur avide d'en savoir plus pourra trouver un intéressant exposé de ce problème dans Weidenschilling et al. [22]).

Hartmann [33] envisage trois types de particules, qui semblent couvrir l'éventail des possibilités: i) des particules de glace solides sans aspérités de surfaces (modèle de sphères dures); ii) des particules constituées d'un corps de glace solide et d'une surface granuleuse moins résistante (régolithe ou autre); iii) des agrégats de glace de faible résistance interne. En se basant sur des résultats d'expériences qu'il a réalisées, il conclut que les deux premiers types de particules sont érodés sur des échelles de temps variant entre  $10^3$  et  $10^7$  ans. Le dernier type de particule étant marginalement stable dans un environnement domine par les effets de marée, elles peuvent être complètement détruites en une seule collision, même à très faible vitesse d'impact.

Borderies et al. [25] montrent, à partir d'une estimation théorique du taux de fragmentation de la glace dans les conditions des anneaux, que le premier type de particules est érodé en l'absence de toute réaccrétion en une période de l'ordre de 100 000 ans. De plus, il paraît clair que ce type de particule est le plus difficilement érodé puisqu'une partie de l'énergie disponible au cours du choc doit être utilisée pour fracturer la surface. Les particules quelle que soit leur nature sont donc érodées en des temps assez courts, et la distribution actuelle est très probablement le résultat d'un équilibre entre des processus en cours (à moins que les anneaux ne soient extrêmement jeunes, hypothèse qui n'est cependant pas à exclure, bien qu'a priori peu probable).

Par ailleurs, les auteurs de [22] ont amplement argumenté que la

situation des anneaux à l'intérieur de la limite de Roche de la planète n'empêche pas l'accrétion mutuelle des particules dans les anneaux.

En conclusion il apparaît nécessaire de considérer des processus d'érosion et d'accrétion si l'on veut rendre compte de la distribution actuelle des tailles des particules qui composent les anneaux.

### 3 Mécanisme de création de la coupure de la distribution:

Comme cela a été mentionné plus haut, les particules de rayon  $r < r_0$  subissent des chocs à des vitesses relatives de l'ordre de  $c$ , alors que les particules de rayon  $r > r_0$  subissent des chocs à des vitesses relatives de l'ordre de  $\Omega r$ . Les vitesses de choc étant plus grandes pour la deuxième catégorie de particules que pour la première, on s'attend qualitativement à ce que leur taux d'érosion soit relativement plus important et leur taux d'accrétion relativement plus faible. Il paraît donc assez naturel d'identifier  $r_0$  avec la coupure [25].

## II.1 ELABORATION DE CRITERES D'ACCRETION DE DEUX PARTICULES

Ces critères d'accrétion seront établis dans l'hypothèse de particules sphériques, dont on ne considérera pas la structure propre (agrégats, coeurs solides recouverts d'une couche moins compacte et moins résistante...).

### II.1.1 Attraction entre particules:

La philosophie de cette étude est que l'on s'attend à ce que des particules ayant une gravité de surface dirigée vers l'intérieur soient capable d'accréter d'autres particules au cours des collisions. Cette gravité de surface est la résultante du champ gravitationnel propre de la particule et du champ de marée créé par la planète. Seuls quelques cas simples seront discutés semi-quantitativement, afin de clarifier la physique du problème.

On considère deux particules sphériques de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$ , avec, pour fixer les idées,  $m_1 > m_2$ . On s'intéresse au problème suivant: à quelle condition la petite particule est-elle gravitationnellement liée à la surface de la grande ? (voir également [22])

Pour simplifier l'étude on ne considérera que la configuration de la figure 2.2, qui est celle où la force de marée due à Saturne est la plus grande (la ligne des centres des deux particules se trouve dans le plan de l'orbite).  $G_0$  désigne le centre de gravité des deux masses,  $A_1$  et  $A_2$  leurs centres de masse respectifs, et  $O$  le centre de la planète. On appelle  $\omega$  le vecteur rotation de  $G_0A_2$  par rapport à un repère inertiel; on suppose ce vecteur orthogonal au plan de l'orbite. On écrit le bilan des forces s'exerçant sur  $m_2$  dans un repère lié à  $G_0$  et tournant avec  $\omega$ . Si la petite particule est liée à la grande, la somme de ces forces a une résultante nulle. On obtient la relation suivante:

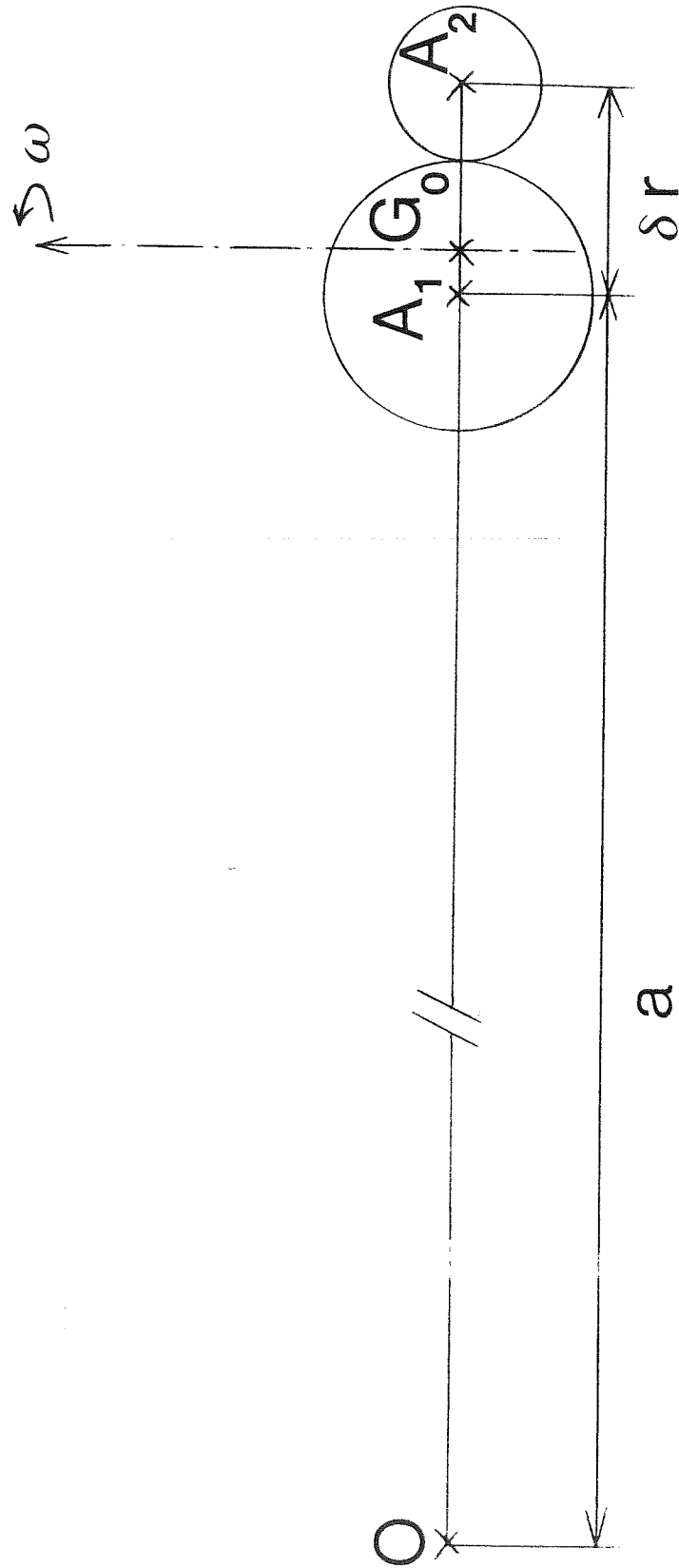


Fig. 2.2



$$-\frac{Gm_1}{\delta r^2} - \frac{GM_S}{(a + \delta r)^2} + \frac{GM_S}{(a + a_1)^2} + (\delta r - a_1)\omega^2 + R = 0 \quad (1)$$

où  $G$  est la constante de la gravitation,  $a = OA_1$ ,  $M_S$  la masse de Saturne,  $R$  la réaction de la grosse particule,  $\delta r = r_1 + r_2$ , et  $a_1 = \delta r - G_0 A_2$ . Les deux particules sont liées gravitationnellement si  $R > 0$ , c'est-à-dire si :

$$\frac{Gm_1}{(\delta r)^2} \geq \left[ \frac{2GM_S}{a^3} + \omega^2 \right] \frac{m_1}{m_1 + m_2} \delta r \quad (2)$$

où l'on a développé l'expression précédente à l'ordre 1 en  $\delta r$ . En posant

$$C = 2\rho_s (R_S/a)^3 + \frac{\omega^2}{4/3 \pi G \rho} \quad (3a)$$

$$\alpha = r_2/r_1 \quad (3b)$$

où  $\rho_s = 0.6 \text{ g/cm}^3$  et  $R_S$  sont la densité moyenne et le rayon de Saturne,  $\rho$  la densité des particules (supposée indépendante de leur taille), on obtient l'inégalité suivante :

$$\rho/C (1 + \alpha^3) \geq (1 + \alpha)^3 \quad (4)$$

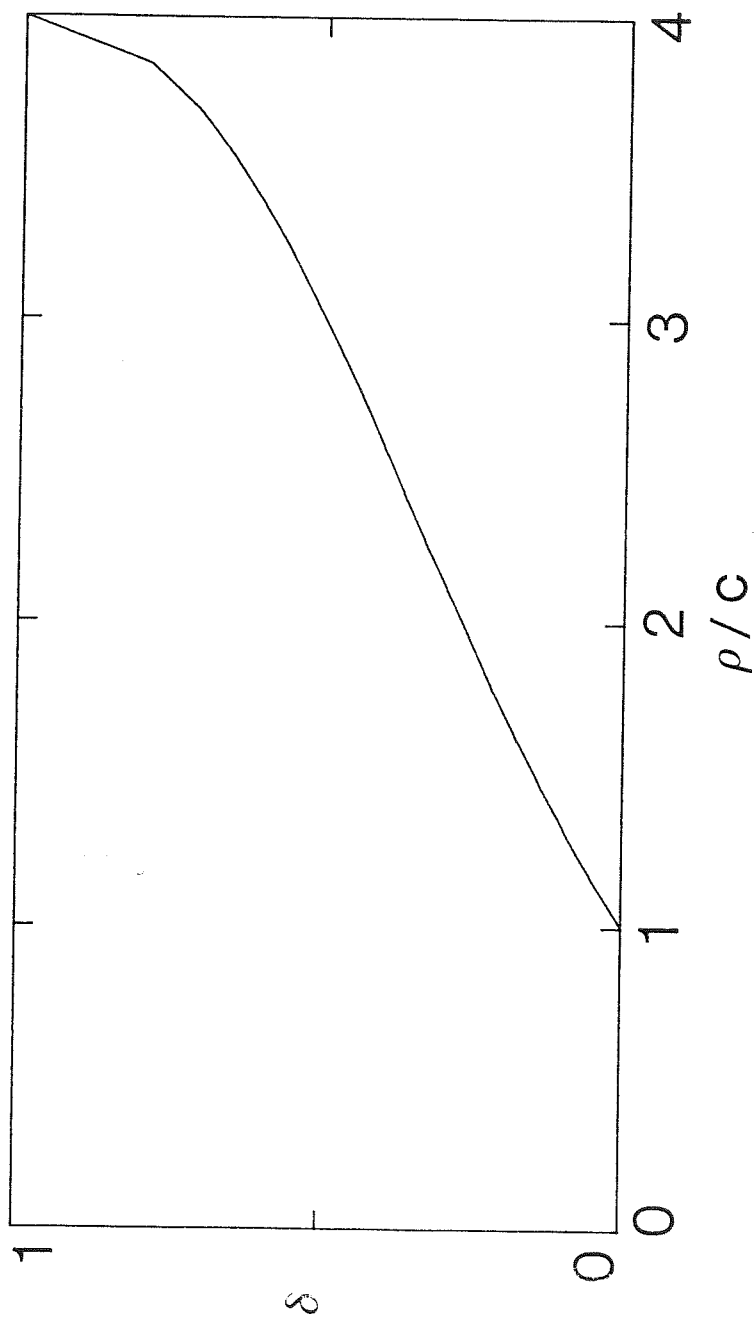


Fig. 2.3

Cette inégalité n'est satisfaite que si:

$$\rho/C \geq 1 \quad (5a)$$

$$\alpha \leq \delta \quad (5b)$$

avec:

$$\delta = \frac{(\rho/C + 2) - [12 \rho/C - 3 (\rho/C)^2]^{1/2}}{2 (\rho/C - 1)} \approx 1/4(\rho/C - 1) \quad (5c)$$

cette valeur approchée étant tirée de la figure 2.3.

Nous allons examiner deux cas particuliers de rotation:

i) La particule  $m_2$  se déplace librement sur l'autre particule. En raison de la force de marée due à Saturne, la configuration de la figure 2.2 est stationnaire, et la rotation synchrone. On a donc  $\omega \approx \Omega$ . Ce cas correspond à une absence de "collage" entre les particules.

ii) La particule  $m_2$  ne peut pas se déplacer sur l'autre particule. L'ensemble est rotation avec une vitesse  $\omega$  correspondant à peu près à celle discutée dans le préliminaire. C'est le cas lorsqu'il y a collage entre les particules, mais cette éventualité paraît moins probable que la précédente (cf II.1.3).

1) Premier cas:

Dans les deux cas,  $w$  est supérieur ou égal à  $\Omega$ . La condition (5a) donne alors:

$$\rho \geq \rho_c \quad (6a)$$

avec

$$\rho_c = 3 \rho_s (R_s/a)^3 \quad (6b)$$

La valeur de  $\rho_c$  varie entre  $0.17 \text{ g/cm}^3$  pour le bord extérieur de l'anneau A et  $0.75 \text{ g/cm}^3$  pour le milieu de l'anneau C (les particules étant constituées principalement de glace d'eau, leur densité maximale est de l'ordre de  $1 \text{ g/cm}^3$ ): on a donc besoin de densité relativement grandes pour lier gravitationnellement les particules.

## 2) Deuxième cas:

Supposons la condition (6a) réalisée. Dans le deuxième cas de rotation envisagé ci-dessus, pour  $r < r_0$  on a  $w \approx c/r$ , et  $r$  doit être plus grand qu'une valeur minimale  $r_m$  pour que la condition (5a) soit réalisée ( $r$  est un "rayon effectif" des deux particules; en première approximation, on a  $r \approx r_1$ ). On a:

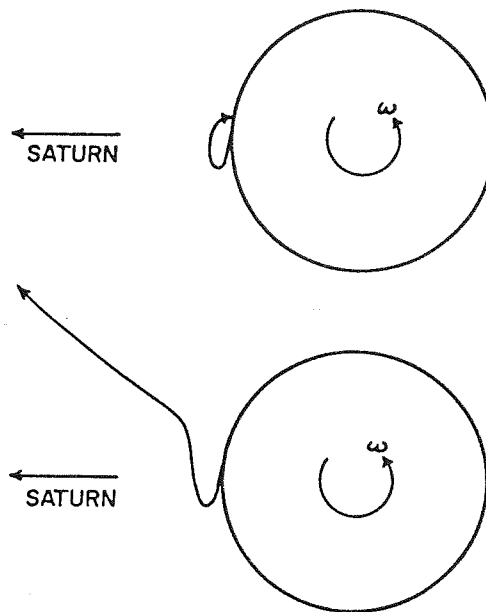


Fig. 3. Two types of trajectories followed by small particles that spontaneously leak off the surface of large, rotating ring particles with  $\rho = 0.5 \text{ g cm}^{-3}$  at  $a/R = 1.75$ . Motion is seen in a rotating coordinate system in which the direction to Saturn is fixed. Top: spontaneous leakage with immediate reimpact,  $P = 6.0 \text{ hr}$ . Bottom: spontaneous leakage with escape,  $P = 5.95 \text{ hr}$ .

$$r_m = \left[ \frac{3 c^2 / 4 \pi G}{\varrho - 2 \varrho_S (R_S/a)^3} \right]^{1/2} \leq r_0 \quad (7)$$

Comme  $\varrho \sim \varrho_c$  (à un facteur de l'ordre de l'unité près),  $r_m$  est de l'ordre du mètre.

Notons que, puisque  $w^2$  décroît en  $1/r^2$ , le rapport  $\varrho/c$  atteint rapidement sa valeur limite  $\varrho/\varrho_c$  quand  $r$  croît. On peut donc considérer que  $\delta = 0$  pour  $r < r_m$ , et  $\delta$  indépendant de  $r$  pour  $r > r_m$ .

On pourrait plus généralement reprendre cette discussion en considérant une orientation quelconque de l'axe de rotation et une position relative quelconque des deux particules, puis effectuer un moyennage sur les angles mis en jeu, mais cette procédure n'apporte aucun résultat qualitatif nouveau, et modifie peu les résultats.

Remarquons pour conclure cette discussion que même si la condition (2) n'est pas satisfaite, le système peut rester gravitationnellement lié. Le "lien" n'est plus alors statique mais dynamique: des simulations numériques présentées dans [22] montrent qu'on a une certaine probabilité de recapture de la petite particule par la grande juste après leur séparation (cf figure 2.4, tirée de [22]). Les auteurs ont paramétré cet effet dans le cas où  $u = 0$  en donnant la valeur limite de  $w$  assurant la capture, soit

$$\left[ \frac{w}{w_0} \right]^2 \leq \frac{(a/R_S + 1.75)^2}{q} \left[ \frac{\varrho}{\varrho_c} (R_S/a)^3 - 2 \right] \quad (8a)$$

avec:

$$\omega_0^2 = \frac{GM_S}{a^3} \quad (8b)$$

L'inégalité (2) prévoit dans le même cas:

$$\left[ \frac{\omega}{\omega_0} \right]^2 \leq \rho/\rho_S (R_S/a)^3 - 2 \quad (8c)$$

Les deux expressions diffèrent d'un facteur variant entre 1 et 1.5 de l'anneau C à l'anneau A. Ce phénomène de recapture sera donc négligé dans toute la suite.

Trois points sont principalement à retenir de ce calcul:

- i) A une distance donnée de la planète, deux particules en contact ne peuvent s'attirer que si leur densité  $\rho$  est supérieure à une certaine densité critique  $\rho_c$ , qui ne dépend que de la distance considérée (cf 8b). Typiquement,  $\rho_c \approx 0.5 \text{ g/cm}^3$ . Comme on pouvait l'escompter physiquement,  $\rho_c$  augmente lorsque l'on se rapproche de la planète.
- ii) La condition précédente étant réalisée, les deux particules ne s'attirent effectivement que si le rapport  $\alpha$  de leurs rayons (on choisit  $\alpha < 1$ ) est plus petit qu'une valeur critique  $\delta$  dépendant en particulier de la densité des particules et de la distance à la planète.
- iii) l'état de rotation réel de l'ensemble des deux particules est

peut-etre intermédiaire entre les deux cas envisagés. Il est donc possible que  $\delta$  soit nul pour des particules trop petites (elles ne sont alors jamais liées gravitationnellement). Lorsque  $\delta$  n'est pas nul, on peut en première approximation le prendre indépendant de la taille des particules.

Dans toute la suite on suppose la condition (i) satisfaite. Si l'on choisit comme premier critère d'accrétion l'existence d'un "lien gravitationnel" entre deux particules, (ii) impose  $\alpha < \delta$ . Ce choix sera discuté au II.1.3. (iii) montre que la possibilité qu'une petite particule en accrete une autre n'est pas définie. Cependant, la sous-section suivante rend inutile un examen plus approfondi de ce problème.

### II.1.2 Etude d'une collision binaire:

La motivation de ce calcul est la suivante:

Un système de deux particules initialement libre peut devenir lié si la perte d'énergie au cours d'un choc inélastique entre les deux particules est suffisamment grande. Si tel est le cas, les deux particules n'en formeront finalement plus qu'une, puisqu'on peut alors vérifier facilement que, dans l'approximation à deux corps, on va observer une succession de rebonds entre les deux particules, jusqu'à ce que finalement toute l'énergie cinétique relative ait été dissipée. L'application de ce scénario aux anneaux suppose que l'on peut négliger l'influence de la planète et des autres particules. Ce point sera discuté en fin de section.

Considérons donc deux particules de masses  $m_1$  et  $m_2$ , de rayons  $r_1$  et  $r_2$ , avec de nouveau  $m_1 > m_2$ . Designons par  $O_1$  et  $O_2$  leurs centres respectifs, et par  $O$  le centre de la planète. On pose:



$$\mathbf{r} = \begin{matrix} \overrightarrow{0 \ 0} \\ 1 \ 2 \end{matrix} \quad (9a)$$

L'équation du mouvement s'écrit:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{G (m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} \quad (9b)$$

et admet l'intégrale première habituelle d'énergie:

$$v^2 - \frac{2G (m_1 + m_2)}{r} = 2E \quad (10)$$

ou  $v$  est la vitesse relative des deux particules.

Posons:

$$v_e^2 = \frac{2G (m_1 + m_2)}{r_1 + r_2} \quad (11a)$$

et désignons la vitesse relative d'approche des deux particules par  $v_0$ , la vitesse relative juste avant le choc par  $v_r$ , la vitesse relative juste après le choc par  $v_r'$ . L'équation d'énergie s'écrit alors:

$$v_r^2 - v_e^2 = v_0^2 \quad (11b)$$

On cherche à savoir à quelle(s) condition(s) le système est lié après la collision, c'est-à-dire à quelle(s) condition(s) l'inégalité

$$v_r^2 - v_e^2 \leq 0 \quad (12)$$

est satisfaite.

Nous allons exprimer la variation de vitesse relative  $v_{rf} - v_{ri}$  en fonction des coefficients de restitution normal et tangentiel qui caractérisent la perte d'énergie au cours du choc (voir aussi [18]).

Soit  $\lambda$  est le vecteur unitaire dans la direction  $O_1O_2$ . Dans la suite, les indices 1 et 2 se réfèrent aux particules, les indices n et t aux composantes normales (parallèles à  $\lambda$ ) et tangentielles (orthogonales à  $\lambda$ ) des différents vecteurs; les quantités prises après le choc sont primées.

Soit  $\Delta P$  la variation de la quantité de mouvement de la particule 1 au cours du choc. La conservation de la quantité de mouvement et le théorème des moments imposent:

$$\Delta P = m_1 (v_1' - v_1) = -m_2 (v_2' - v_2) \quad (11a)$$

$$\lambda \times \Delta P = \frac{r_1}{r_1} (\omega_1' - \omega_1) = \frac{r_2}{r_2} (\omega_2' - \omega_2) \quad (11b)$$

où les  $v_i$  sont les vitesses des particules, les  $\omega_i$  leurs vecteurs de spin et les  $I_i$  leurs moments d'inertie. Soit  $W$  la vitesse relative au point de contact. On a :

$$W = v_r + (r_1 \omega_1 + r_2 \omega_2) \times \lambda \quad (14a)$$

$$W' = v_r' + (r_1 \omega_1' + r_2 \omega_2') \times \lambda \quad (14b)$$

Les coefficients de restitution normal  $\epsilon_n$  et tangentiel  $\epsilon_t$  sont définis par :

$$W_n' = -\epsilon_n W_n \quad 0 \leq \epsilon_n \leq 1 \quad (15a)$$

$$W_t' = \epsilon_t W_t \quad -1 \leq \epsilon_t \leq 1 \quad (15a)$$

Ces coefficients sont caractéristiques du matériau et de la structure des particules, et sont généralement des fonctions décroissantes de la vitesse d'impact. Le choc est parfaitement élastique si  $\epsilon_n = 1$  et si  $|\epsilon_t| = 1$ . De (13a) et (13b), on tire :

$$\Delta P = \mu (v_r - v_r') \quad (16a)$$

$$r_1 \omega_1' + r_2 \omega_2' = r_1 \omega_1 + r_2 \omega_2 - \left[ \frac{r_1^2}{I_1} + \frac{r_2^2}{I_2} \right] \lambda \times \Delta P \quad (16b)$$

où  $\mu$  est la masse réduite des deux particules.

En combinant (14a), (14b), (16a), (16b), on obtient finalement:

$$\Delta P = \mu \left[ W - W' - \left[ \frac{r_1^2}{I_1} + \frac{r_2^2}{I_2} \right] \lambda \times \Delta P \right] \quad (17a)$$

La projection de cette relation donne les composantes normales et tangentielles de la variation de quantité de mouvement:

$$\Delta P_n = 2\mu \kappa_n W_n \quad (17b)$$

$$\Delta P_t = 2\mu \kappa_t W_t \quad (17c)$$

avec:

$$\kappa_n = \frac{1 + \epsilon_n}{2} \quad (17d)$$

$$\kappa_t = \frac{1 - \epsilon_t}{2} \left[ 1 + \left[ \frac{r_1^2}{I_1} + \frac{r_2^2}{I_2} \right] \right]^{-1} = \frac{1 - \epsilon_t}{2} \quad (17e)$$

Ces définitions de  $\kappa_n$  et  $\kappa_t$  ont été choisies pour faciliter la

comparaison avec [18]. En utilisant (16a) on obtient finalement la vitesse relative apres le choc en fonction de la vitesse relative avant le choc et des vitesses de rotation des particules:

$$\mathbf{v}'_{rn} = -\frac{e}{n} \mathbf{v}_{rn} \quad (18a)$$

$$\mathbf{v}'_{rt} = (1 - 2k_t) \mathbf{v}_{rt} - 2k_t (r_1 \boldsymbol{\omega}_1 + r_2 \boldsymbol{\omega}_2) \times \boldsymbol{\lambda} \quad (18b)$$

Pour simplifier la discussion, nous allons nous limiter au cas de particules de rayons inférieurs à  $r_0$  (défini dans le préliminaire). La vitesse d'approche des particules est alors de l'ordre de  $c$  en module et quelconque en direction. De même les vecteurs rotations sont d'orientation quelconque et tels que  $r_i \omega_i \ll c$ . De plus, nous allons moyenner sur les collisions les orientations de ces vecteurs et de  $\boldsymbol{\lambda}$ , de façon à s'affranchir des conditions particulières du choc considéré.

De (18b), on tire:

$$\begin{aligned} v'^2_{rt} &= (1 - 2k_t)^2 v^2_{rt} + 4k_t^2 (\mathbf{S} \times \boldsymbol{\lambda})^2 \\ &\quad - 4k_t (1 - 2k_t) (\mathbf{S} \times \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{v}_{rt} \end{aligned} \quad (19a)$$

ou l'on a pose:

$$\mathbf{S} = r_1 \boldsymbol{\omega}_1 + r_2 \boldsymbol{\omega}_2 \quad (19b)$$

Pour chaque valeur de  $S$  et de  $\lambda$ , l'isotropie de  $c$  (et donc de  $v_r$ ) entraîne qu'il y a autant de chocs avec  $v_{rt}$  que  $-v_{rt}$  et le dernier terme de (19a) est nul en moyenne. De même, on a en moyenne:

$$v_{rt}^2 = 2/3 v_r^2 \quad (20a)$$

$$v_{rn}^2 = 1/3 v_r^2 \quad (20b)$$

Effectuons une moyenne du second terme sur l'orientation de  $\lambda$ .  $S$  et  $\lambda$  étant deux vecteurs indépendants, on obtient:

$$(S \times \lambda)^2 = 2/3 S^2 \quad (20c)$$

Moyennons finalement  $S^2$  sur les collisions.  $w_1$  et  $w_2$  sont deux vecteurs indépendants, et leur produit scalaire est en moyenne nul. Il vient donc:

$$S^2 = r_1^2 w_1^2 + r_2^2 w_2^2 = 2c^2 \quad (20d)$$

la dernière égalité provient de l'estimation du II.1.1 de la rotation propre des particules.

L'expression de la moyenne recherchée est donc la suivante:

$$v_r'^2 = \left[ \frac{2(1 - 2\kappa_t)^2 + \epsilon_n^2}{3} \right] v_r^2 + 16/3 \kappa_t^2 c^2 \quad (20e)$$

Les valeurs de  $\kappa_t$  et de  $\epsilon_n$  intervenant dans cette dernière équation sont aussi des valeurs moyennes. Remarquons que  $v_r'$  n'est jamais nul, même si les coefficients de restitution le sont.

En combinant cette égalité avec (11b), on peut mettre (12) sous la forme:

$$v_e^2 \geq \frac{\beta + 16/3 \kappa_t^2}{1 - \beta} c^2 \quad (21a)$$

où l'on a posé:

$$\beta = \frac{2(1 - 2\kappa_t)^2 + \epsilon_n^2}{3} \quad (21b)$$

En introduisant comme dans la section précédente le rapport des rayons des particules, l'inégalité (21a) peut encore être mise sous la forme suivante:

$$r_1^2 \geq r_c^2 \quad (22a)$$

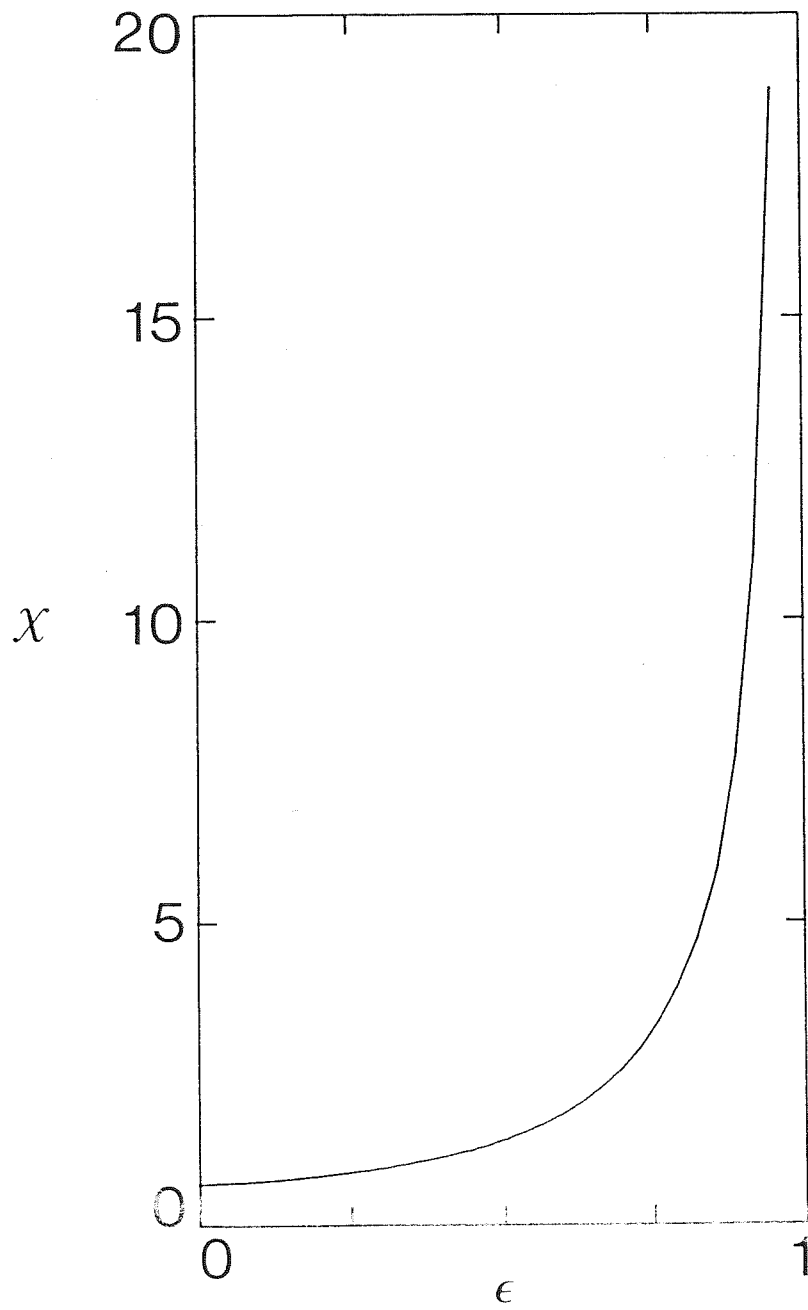


Fig. 2.5



avec

$$r_c^2 = \left[ \frac{3\Omega^2}{32\pi G\rho} \right] \left[ \frac{\beta + 16/3\kappa_t^2}{1 - \beta} \right] \left[ \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha^3} \right] r_0^2 \quad (22b)$$

et où on a exprimé  $c$  en fonction du rayon  $r_0$  qui a été défini au II.1 ( $c = \Omega r_0 / 2$ )

Nous allons estimer  $r_c$  dans le cas  $e_n = e_t = \epsilon$ . Le facteur  $(1 + \alpha)/(1 + \alpha^3)$  varie entre  $3/4$  et  $1$  pour  $\alpha$  compris entre  $0$  et  $1$ . On le prend donc égal à  $1$ . Le facteur  $\chi = (\beta + 16/3\kappa_t^2)/(1 - \beta)$  est une fonction croissante de  $\epsilon$ , infinie pour  $\epsilon = 1$ , mais qui reste de l'ordre de  $1$  tant que  $\epsilon < 0.8$  (cf figure 2.5). Il ne vaut que  $20$  pour  $\epsilon = 0.95$ , qui est probablement une valeur extrême pour  $\epsilon$  (les surfaces des particules ne sont vraisemblablement pas assez régulières et dures pour rendre possibles des valeurs plus proches de l'unité). En prenant  $\rho \approx 0.5$  g/cm (cf II.1.1) et  $\Omega \approx 2 \cdot 10^{-4}$  s<sup>-1</sup>, on vérifie que l'on a toujours  $r_c < r_0$ . De plus pour  $r_0 \approx 5$  m,  $r_c$  est de l'ordre du mètre.

Cette étude peut être résumée de la sorte:

1) Même si les chocs sont totalement inélastiques, il n'y a pas nécessairement capture d'une des deux particules par l'autre au cours du choc. La cause physique de ce résultat est que lorsque les coefficients de restitution sont nuls, le couplage entre l'énergie de translation et l'énergie de rotation des particules est maximal et empêche que la vitesse relative après le choc ne prenne des valeurs trop basses. De ce fait, on a toujours  $v_1 > v_2$ . En dépit de ce résultat, l'énergie cinétique est la source des mouvements aléatoires de translation comme de rotation.

(par l'intermédiaire de la rotation képlérienne différentielle) et compense la dissipation d'énergie au cours des collisions.

ii) La capture n'est assurée (en moyenne) que si le rayon de la plus grande particule est plus grand qu'une valeur critique  $r_c$ , qui est de l'ordre du mètre dans les anneaux de Saturne. On a  $r_c < r_0$ . Ceci peut se comprendre physiquement de la manière suivante: pour des particules plus petites que  $r_0$ , la vitesse relative d'impact (avant ou après le choc) est indépendante de leur taille, et est de l'ordre de la dispersion de vitesse. De plus, il ne peut y avoir capture que si la vitesse d'échappement  $v_e$  est plus grande que la vitesse relative après le choc, et donc plus grande que  $c$  (cf 12). Or, cette vitesse d'échappement est une fonction croissante du rayon des particules et tend vers 0 quand les rayons des particules tendent vers 0 (cf 11a). Il existe donc un rayon critique en-dessous duquel la capture n'est pas possible.

On peut se demander ce que donne le critère précédent appliqué aux particules de rayons plus grands que  $r_0$ . Le détail des calculs est sensiblement plus pénible que dans le cas précédent (car la vitesse relative d'approche dépendant du paramètre d'impact, la vitesse relative d'impact n'est plus indépendante de  $\lambda$ ), et n'apporte rien par rapport à l'argument semi-quantitatif suivant:

Avec les mêmes notations que ci-dessus, et en vertu des mêmes arguments, on a  $v_r \approx v_c \approx Q(r_1 + r_2)/2$ , à des facteurs de l'ordre de l'unité près. L'inégalité (12) donne alors, en introduisant le rapport des rayons des particules:

$$\frac{1 + \alpha^3}{(1 + \alpha)^3} > \frac{3Q^2}{32\alpha g} \quad (21)$$

Le membre de gauche varie entre 1 et  $1/4$  pour  $\alpha$  compris entre 0 et 1; le membre de droite est de l'ordre de  $10^{-2}$ . L'inégalité (23) est donc toujours satisfaite: la conclusion ii) est inchangée.

Le problème principal posé par l'étude précédente est celui de la validité de l'approximation à deux corps, qui est pratiquement inévitable dans toute approche statistique d'un système à grand nombre de particules. Il ne peut être question ici de discuter en détail cette approximation, et on se limitera aux quelques remarques suivantes.

#### 1) Effet des particules voisines:

Une condition suffisante pour négliger les interactions avec les particules du voisinage du lieu de la collision est que les distances entre particules soient assez grandes pour que l'effet d'une quelconque de ces particules soit négligeable. Cette condition n'est malheureusement pas réalisée dans les anneaux de Saturne. On s'attend cependant à ce que les particules perturbantes soient distribuées de manière assez uniforme pour que les perturbations qu'elles engendrent se compensent plus ou moins. On supposera donc les résultats précédents qualitativement corrects, à une éventuelle sous-estimation de  $r_c$  près (les particules proches ne peuvent en effet que rendre plus difficile la capture).

#### 2) Effet de la planète:

L'étude faite au 11.1.1 montre que pour  $r_2/r_1 \ll \delta$ , la planète n'a quasiment aucune influence sur le résultat de la collision. Dans le cas où  $r_2/r_1 \approx \delta$ , il n'y aura pas de capture si les deux particules s'éloignent radialement l'une de l'autre; au contraire, si elles s'éloignent orthoradialement, la planète n'aura aucune influence.

Il paraît vraisemblable que l'effet de la planète pourra plus ou moins être pris en compte en définissant un paramètre  $\delta$  effectif plus

petit que celui qui apparait au II.1.1 (dont la valeur n'était de toute façon déterminée qu'en ordre de grandeur).

La manière la plus satisfaisante d'envisager l'effet de la planète aurait été de faire une étude numérique des collisions à trois corps (les deux particules et la planète). Deux études de ce genre ont déjà partiellement été menées pour le problème de la formation des planètes par accréation ([34] et [35]). Les auteurs de [34] concluent que l'approximation à deux corps est "souvent" très bonne, et "presque toujours" correcte en ordre de grandeur, cependant les conditions de leur étude diffèrent assez largement de celles qui prévalent dans les anneaux (en particulier en ce qui concerne l'importance de la force de marée), et l'application aux anneaux paraît douteuse. Aucune exploration systématique n'a été réalisée. Un tel travail, bien que nécessaire à long terme, aurait été hors de proportion avec les objectifs limités du modèle que je présente ici.

### II.1.3 Conclusion et discussion:

En conclusion des deux sous-sections précédentes, les critères d'accréation suivants seront retenus:

L'accréation ne n'est possible que si la densité des particules est plus grande qu'une valeur critique  $\rho_c$ , qui est de l'ordre de  $0.5 \text{ g/cm}^3$ , et qui croit lorsqu'on se rapproche de la planète.

Au cours d'une collision entre deux particules de rayons respectifs  $r_1$  et  $r_2$ , avec  $r_1 > r_2$ , la petite particule sera accréetée par la grande si:

i) le rapport  $r_2/r_1$  est plus petit qu'une valeur critique  $\delta$  ( $0 < \delta < 1$ ), caractéristique de la nature des particules et de la distance à la planète.

ii) le rayon  $r_1$  de la plus grande des particules est plus grand qu'une valeur critique  $r_c$ , qui est vraisemblablement de l'ordre du mètre. On supposera toujours réalisée la condition  $r_1 > r_c$ , ainsi que cela est

suggéré par le II.1.2.

Les critères énoncés ci-dessus supposent l'absence de collage entre particules au cours des collisions (ou du moins que les forces de collage ne sont pas dominantes). On peut avancer deux arguments en faveur de cette hypothèse:

Si les particules sont des blocs plus ou moins compacts, leurs surfaces sont très probablement recouvertes d'un régolithe, ou d'une couche plus ou moins granuleuse, soit du fait des collisions interparticules (voir les estimations du préliminaire), soit à cause des impacts de micrométéorites (Durisen [36] montre qu'une couche de régolithe d'un centimètre d'épaisseur peut ainsi être formée en  $10^3$  ans). De plus, les très faibles vitesses de choc doivent empêcher que les particules s'enfoncent profondément dans cette couche de surface. Si les particules sont des agrégats, la situation est encore plus favorable. Notons que Froidevaux et al. [37] montrent que les courbes de réponse thermique des particules sont en désaccord avec un modèle de particules du type sphères dures (surfaces de glace parfaites).

Les très basses températures des particules ne sont pas favorables à la formation rapide de liens chimiques, d'autant plus que la fréquence de collision élevée doit prévenir une accréation définitive (une particule accrétée peut quitter la particule accretante au cours d'un choc ultérieur).

rayonnement ?

## II.2 HYPOTHESES ET EQUATION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION:

Sommaire

### II.2.1 Introduction:

Dans la section précédente, de même que dans la suite, on désigne par accrétion le fait qu'une particule initialement libre reste liée à une particule plus grosse après une collision avec celle-ci. Par "érosion", on désigne le fait que deux particules en collision subissent une perte de masse du fait de la collision. L'érosion est entièrement définie par les deux caractéristiques suivantes:

- i) La masse totale perdue au cours de la collision (désignée par  $M_e$  dans la suite).
- ii) La répartition de cette masse entre les divers fragments.

Ces deux caractéristiques seront spécifiées dans chacun des modèles présentés dans la suite.

### II.2.2 Hypothèses générales du modèle:

Dans un traitement statistique rigoureux des anneaux, il faudrait considérer une fonction de distribution dépendant a priori d'un nombre assez élevé de variables: le temps, la position, la vitesse de translation  $v$ , la vitesse de rotation  $\omega$ , et la masse des particules (et éventuellement un certain nombre d'autres paramètres statistiques définissant les caractéristiques des surfaces, de la structure interne des particules...). L'élaboration d'une telle théorie représente un travail titanesque voire irréalisable, et on se limitera plus modestement ici au cas entrant dans le cadre des diverses approximations explicitées ci-dessous:

- i) On découplera les évolutions de la distribution en taille de celles des distributions de vitesse. Cette hypothèse n'est justifiée en toute rigueur que si un régime stationnaire est établi; elle n'est cependant

pas critique pour la suite puisque je me suis justement limite a la recherche d'un tel regime.

ii) L'influence de la distribution des rotations propres des particules sera supposee prise en compte par les criteres d'accrétion et d'erosion discutees dans les sections precedentes. Cette hypothese paraît raisonnable en ce qui concerne l'accrétion, mais moins justifiee pour l'erosion (on n'a jamais experimente l'influence de la rotation des projectiles sur les taux d'erosion des cibles: cf II.3.2).

iii) la distribution des vitesses de translation sera prise independante de la masse (à ce sujet, voir [15], [28], [30] et [31]). Les auteurs de [30] et [31] sont les seuls à considerer une distribution continue en taille du type de celle des anneaux, et montrent que la dispersion des vitesses ne varie que comme la puissance  $-1/12$  de la masse des particules, soit environ une variation d'un facteur de l'ordre de 5 ou 6 entre les particules de 10 cm et celles de 100 m de rayon.

iv) On neglige bien naturellement les correlations multiples comme il est usuel en statistique (cette approximation, bien que banalisee, n'est cependant pas tres bonne dans le cas des anneaux, contrairement à d'autres systemes statistiques gravitationnels): la fonction de distribution de vitesse de n particules est le n-produit de la fonction de distribution à une particule.

v) Les quantites les plus importantes du modele sont  $r_0$ ,  $r_c$  et  $\delta$ , et sont considerees dans la suite comme des parametres libres (dans la limite des contraintes imposees dans les sections precedentes). Il est egalement commode de definir deux autres parametres dependant des precedents, mais qui interviennent frequemment dans la suite:  $m_1 = 4/3\pi\rho r_c^3$  et  $m_0 = 4/3\pi\rho r_0^3$ , qui sont les masses de particules de densite  $\rho$  et de rayon  $r_c$  et  $r_0$  respectivement.

Avec ces hypotheses, la fonction de distribution ne depend plus que de la masse, de la vitesse des particules et du temps. Elle peut de plus se factoriser:  $f_0(m,v,t) = f(m,t).F(v)$  ou  $F(v)$  est la proportion de particules ayant la vitesse v (F est normalise a 1); f est un nombre de particules par unite de volume des anneaux et par unite de masse de

particules. Remarquons pour terminer que la fonction de distribution des vitesses relatives de deux particules  $F(v_r)$  s'obtiendra à partir de la fonction de distribution à deux particules  $F(v_1)F(v_2)$  dans laquelle on effectue le changement de variable  $(v_1, v_2) \rightarrow (v_c, v_r)$ , où  $v_c$  est la vitesse du centre de masse des deux particules, et en intégrant sur  $v_c$  (cette procédure suppose la vitesse relative indépendante de la position relative des deux particules, c'est-à-dire que l'on néglige le phénomène dit de focalisation gravitationnelle).

### II.2.3 Forme de l'équation d'évolution de la distribution:

Muni de cet attirail, nous pouvons enfin chercher l'équation d'évolution de  $f(m,t)$ . La méthodologie de ce calcul est assez proche par l'esprit d'une étude menée par Dohnanyi [38] sur la distribution en taille des astéroïdes. Elle en diffère assez largement dans la pratique parce que l'auteur ne considère ni processus d'accrétion, ni une éventuelle coupure de la distribution.

On considère le nombre de particules ayant une masse  $m$  donnée à  $dm$  près. La variation temporelle de ce nombre due aux collisions entre particules est la somme de quatre contributions différentes:

i) Les particules accrètent en permanence des particules plus petites. On a ainsi un accroissement continu de la masse d'une particule donnée au cours du temps, et de ce fait un "flux" continu de particules entrant et sortant d'une "tranche"  $dm$  donnée. On note cette contribution par  $(\partial f/\partial t)_{acc}$ .

ii) Inversement, les processus d'érosion engendrent une décroissance continue de la masse d'une particule et un flux contraire au précédent. Cette contribution est notée  $(\partial f/\partial t)_{er}$ .

En plus (et à cause) des deux évolutions "continues" précédentes, il y a des apparitions et disparitions "brutales" de particules:

iii) Apparitions de particules éjectées par érosion au cours d'une collision entre particules plus grandes ( $(\partial f/\partial t)_{e,2}$ ).

iv) Disparitions de particules lorsqu'elles sont accrétées par des particules plus grandes ( $(\partial f/\partial t)_{a,2}$ ).



Nous allons estimer chacune de ces quatre contributions.

### II.2.3.1 Expression de la première contribution:

Soit  $\dot{m}_{ac}$  la vitesse de variation de la masse  $m$  d'une particule au cours du temps, due à l'accrétion de particules plus petites. *A priori*, cette vitesse est fonction (positive) de  $m$  et du temps.

Le nombre  $N^+$  de particules par unité de volume entrant dans l'intervalle  $[m, m + dm]$  durant l'intervalle de temps  $dt$  est

$$N^+ = f(m, t) \dot{m}_{ac}(m, t) dt \quad (24)$$

Le nombre  $N^-$  de particules par unité de volume quittant le même intervalle de masse durant le même intervalle de temps est

$$N^- = f(m + d\bar{m}, t) \dot{m}_{ac}(m + dm, t) dt \quad (25)$$

En sommant ces deux contributions et par un développement à l'ordre 1 en  $dm$ , on obtient:

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{ac} = - \frac{\partial}{\partial m} \left[ f(m, t) \dot{m}_{ac}(m, t) \right] \quad (26)$$

qui est la forme attendue d'une équation de continuité.

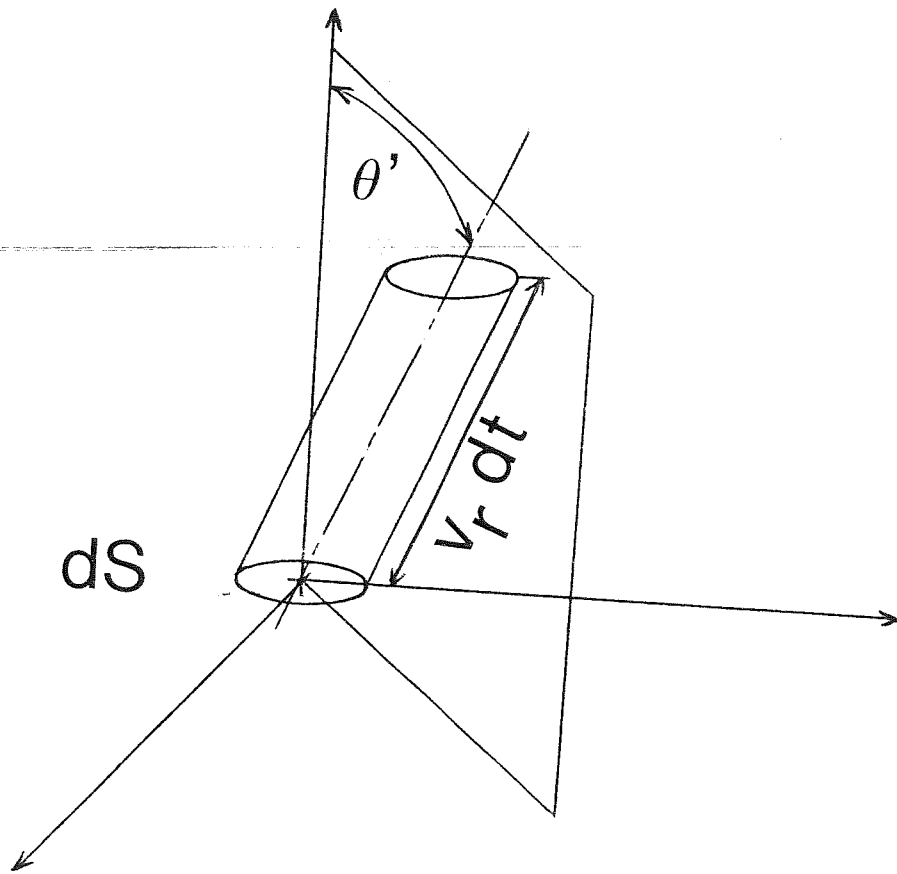


Fig. 2.6

Il nous suffit maintenant de dériver l'expression de la vitesse d'accrétion.

Les particules de masse  $\mu$  à  $d\mu$  près tombant sur une particule de masse  $m$  pendant un temps  $dt$  avec une vitesse relative  $v_r$  à  $d^3v_r$  près proviennent du parallélépipède représenté sur la figure 2.6, dont le volume par  $v_r dt \cos\theta' dS$  où  $dS$  est une surface élémentaire prise sur la sphère de rayon égal à la somme des rayons des particules. Le nombre  $\delta N$  de ces particules est égal au produit de ce volume par la densité volumique de particules de masse  $\mu$  et de vitesse relative  $v_r$  par rapport à  $m$ , soit:

$$\delta N = (f(\mu, t) d\mu) (F(v_r) d^3v_r) (v_r dt \cos\theta' dS) \quad (27)$$

Si ces collisions conduisent à une accrétion, la variation de masse de  $m$  sera égale au produit de  $\mu$  par le nombre de collisions. On en déduit l'expression suivante de  $\dot{m}_{ac}$ :

$$\dot{m}_{ac} = \int d\mu \int dS \int d^3v_r P_{ac1}(m, \mu, v_r, t) v_r F(v_r) \cos\theta' \mu f(\mu, t) \quad (28)$$

où  $P_{ac1}(m, \mu, v_r, t)$  est la probabilité d'accrétion au cours de la collision, et où les intégrales sont prises sur toutes les valeurs de  $\mu$ ,  $v_r$ , et sur toute la sphère  $S$ .

### II.2.3.2 Expression de la deuxième contribution:

Soit  $\dot{m}_{er}$  la vitesse de variation de masse  $m$  d'une particule au cours du temps due à l'érosion. On choisit  $\dot{m}_{er} > 0$ , de sorte que en fait la vitesse en question est l'opposé de cette quantité. Un raisonnement analogue au précédent montre que, en gardant les mêmes notations que ci-dessus:

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{er1} = \frac{\partial}{\partial m} \left[ f(m,t) \dot{m}_{er}(m,t) \right] \quad (29)$$

avec:

$$\dot{m}_{er} = \int d\mu \int dS \int d^3 v_r P_{er1}(M_e, m, \mu, v_r, t) v_r F(v_r) \cos\theta' \alpha(m, \mu) M_e f(\mu, t) \quad (30)$$

où  $P_{er1}(M_e, m, \mu, v_r, t)$  est la probabilité que la collision considérée produise une masse érodée  $M_e$ , et  $\alpha(m, \mu)$  est la proportion de la masse érodée qui est arrachée à  $m$  (cette masse se répartit a priori entre  $m$  et  $\mu$ ). La dépendance exacte de  $\alpha$  avec les masses des deux particules en collision n'a pas une grande influence sur l'intégrale et on choisira arbitrairement pour simplifier  $\alpha \propto m$ , soit  $\alpha = m/(m + \mu)$  (on pourrait plus généralement prendre  $\alpha$  proportionnel à une certaine puissance de  $m$ , mais on ne ferait qu'introduire inutilement un paramètre supplémentaire dans ce modèle). Les intégrales sont comme précédemment étendues à toutes les valeurs de  $\mu$ , de  $v_r$  et sur toute la sphère de rayon égal à la somme des rayons des particules.

### II.2.3.3 Expression de la troisième contribution:

On cherche à évaluer le nombre de particules de masse  $m$  à  $dm$  près produites au cours d'une collision entre deux particules de masses  $m_1$  et  $m_2$  avec  $m_2 > m_1 > m$ . Soit  $g(\mu, m_1, m_2)$  la distribution des masses  $\mu$  produites par érosion au cours de la collision entre  $m$  et  $m_2$  ( $g(\mu, m_1, m_2)d\mu$  est le nombre de particules de masse  $\mu$  à  $d\mu$  près produites par unité de volume des anneaux; cette quantité peut être nulle). Par un raisonnement analogue aux précédents, on obtient, avec les mêmes notations:

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{er2} = \int dm_2 \int dm_1 \int dS \int d^3 v P_{er2}(m_1, m_2, \mu, v, t) v_r F(v_r) \cos\theta' g(m, m_1, m_2) \times \dots$$

$$f(m_1, t) f(m_2, t) \quad (31)$$

où  $P_{er2}$  est la probabilité que la collision conduise à une érosion, et où les intégrales sont étendues à toutes les valeurs de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $v$ , et à toute la surface  $S$ .

#### II.2.3.4 Expression de la quatrième contribution:

Le nombre de particules de masse  $m$  à  $dm$  près par unité de volume des anneaux disparaissant du fait de leur accrétion au cours de chocs avec des particules plus grandes est égal au nombre de ces chocs conduisant à une accrétion. Un raisonnement analogue à ceux des précédentes sous-sections donne alors:

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{ac2} = -f(m,t) \int d\mu \int dS \int d^3 v_r P_{ac2}(m,\mu,v_r,t) v_r F(v_r) \cos\theta' f(\mu,t) \quad (32)$$

avec les mêmes remarques et notations que précédemment.

L'équation recherchée est en résumé:

$$\partial f / \partial t = (\partial f / \partial t)_{er1} + (\partial f / \partial t)_{ac1} + (\partial f / \partial t)_{er2} + (\partial f / \partial t)_{ac2}$$

Les intégrations en vitesse et en masse sont effectuées dans les sections ultérieures pour chacun des modèles.

### II.3 MODELE DE "QUASI SPHERES DURES":

#### II.3.1 Introduction:

Plusieurs arguments ont été avancés dans les sections précédentes pour justifier que les particules ne sont pas des sphères dures parfaites. Néanmoins, le modèle des sphères dures pourrait être au moins qualitativement correct pour décrire les anneaux si les particules qui dominent la masse et la dynamique - c'est-à-dire celles dont le rayon est de l'ordre de  $r_0$  - ne sont pas très "affectées" par les phénomènes d'érosion ou d'accrétion. Ce sera le cas si ces phénomènes ne conduisent qu'à de faibles (à la limite négligeables) variations de leur masse au cours des collisions.

Cette section est consacrée à l'étude d'une telle possibilité. Compte-tenu des conclusions de la section II.1, il paraît clair qu'un "régime de faible accrétion" sera caractérisé par des valeurs de  $\delta$  petites devant l'unité (par exemple  $\delta \sim 10^{-2}$ ). Cette condition est supposée réalisée dans la suite de cette section.

#### II.3.2 Modèle d'érosion:

Le but de cette sous-section est de répondre à deux des questions que soulève nécessairement l'élaboration de notre modèle.

- i) Quelle est la masse totale éjectée au cours d'une collision conduisant à une érosion ? En particulier, il est important de connaître l'ordre de grandeur de cette masse, et sa dépendance vis-à-vis de la vitesse relative de la collision et des masses des particules.
- ii) Comment se répartit la masse éjectée (nombre et distribution des fragments) ?

On a réalisé en laboratoire un certain nombre d'expériences

d'érosion ou de fragmentation collisionnelles pour divers types de matériaux, mais dans des conditions qui ne sont malheureusement jamais celles des anneaux de planètes. Ces expériences consistent généralement à bombarder une cible plane "semi-infinie" d'un type donné (que l'on désire étudier) par des projectiles de masses variables (toujours petites devant celle de la cible) et avec diverses vitesses d'impact ([9], [39], [40] et [41]). Ces expériences donnent toutes des résultats similaires, qui peuvent être résumés de la sorte:

- i) La masse éjectée est proportionnelle à la masse du projectile et à certaine puissance  $p$  de la vitesse d'impact. On a généralement  $p$  plus petit que, mais de l'ordre 2. Le facteur de proportionnalité dépend des propriétés du matériau.
- ii) La masse éjectée est répartie entre un grand nombre de fragments, distribués suivant une loi puissance en fonction de leurs rayons. L'exposant de cette loi est de l'ordre de 3.

Les dépendances mentionnées au i) s'interprètent qualitativement d'une manière relativement simple puisqu'on s'attend en première approximation à ce que la masse éjectée croisse comme l'énergie disponible au cours de la collision, c'est-à-dire à l'énergie cinétique relative des deux corps, qui est proportionnelle à leur masse réduite et à leur vitesse relative au carré (dans les expériences considérées, où la cible est très grande devant le projectile, la masse réduite est égale à la masse de ce dernier).

Les expériences menées par Hartmann [39] et rapportées par l'auteur dans [33] sont celles qui se rapprochent le plus du cas qui nous intéresse, tant du point de vue des vitesses d'impact (de l'ordre du mètre par seconde) que du matériau choisis (impact dans du régolithe). Elles donnent des rapports de la masse totale éjectée à la masse du projectile de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-8}$  à  $5 \cdot 10^{-7}$  pour des vitesses d'impact comprises entre  $1/10$  mm/s et 1 mm/s; remarquons à ce sujet qu'une estimation théorique du même rapport dans le cas de particules de glace parfaites [25] aboutit à une valeur de l'ordre de  $10^{-9}$ . Hartmann indique également que la masse éjectée dépend de la vitesse relative du choc à

quelle vitesse



la puissance 1.4; l'estimation théorique mentionnée donne 1.2 .

En résumé, on retiendra l'expression analytique suivante pour la masse  $M_e$  éjectée au cours d'une collision:

$$M_e = \gamma_e v_r^p \mu_0 \quad (33)$$

où  $\mu_0$  est la masse réduite des particules, et avec  $p \approx 1.5$  et  $\gamma_e \approx 10^{-2}$  en unités SI.

Les éjections seront distribuées selon une loi puissance de leur rayon, d'exposant de l'ordre de 3 (on vérifie que dans ce cas, la plus grande masse éjectée deux à trois fois plus petite que  $M_e$ ).

Notons finalement que (33) prévoit  $M_e/\mu_0 \approx 10^{-2}$  pour  $v_r \approx 1$  m/s, c'est-à-dire pour des collisions entre particules de plusieurs kilomètres de rayons. On pourra donc supposer que  $M_e/\mu_0$  est toujours très petit devant 1. Ceci montre que l'on peut séparer les collisions résultant en une accréation de celles conduisant à une érosion. En effet,  $\mu_0$  est de l'ordre de la plus petite des deux masses en collision, qui est justement la masse "accréciable" au cours de la collision; on pourra donc parfaitement négliger l'érosion des particules lorsque la collision conduit à leur accréation.

### II.3.3 Intégration sur $v_r$ et sur $S$ :

Les intégrales de la section II.2 portent sur six variables (sept pour l'une d'entre elles). Une intégration numérique directe serait

beaucoup trop couteuse en temps calcul, et nous allons donc intégrer analytiquement par rapport à toutes les variables sauf la masse.

### II.3.3.1 Choix de la fonction de distribution des vitesses relatives:

La quasi totalité des études analytiques de la dispersion de vitesse dans les anneaux supposent que la fonction de distribution est une gaussienne (seuls les auteurs de [16], ayant choisi un terme de collision relativement simple, ne font pas cette hypothèse et intègrent directement les équations des moments). On peut avancer deux arguments en faveur de cette hypothèse:

- i) On peut espérer que le régime stationnaire des anneaux n'est pas trop éloigné de l'état d'équilibre thermodynamique d'un gaz de particules. Toutefois, l'inélasticité des collisions introduit un comportement qualitativement différent de celui des gaz que l'on rencontre usuellement en statistique.
- ii) Si on interprète la fonction de distribution comme la moyenne sur les particules des fonctions de distribution de chaque particule, on peut probablement appliquer le théorème de la limite centrale.

Notons que cette gaussienne ne peut pas être isotrope, puisque les anneaux ne sont pas à l'équilibre thermodynamique. Cependant, compte-tenu des diverses approximations que nous avons faites jusqu'ici, et de celles auxquelles nous allons être contraints par la suite, on peut sans introduire d'erreur quantitative importante supposer que cette fonction de distribution est une gaussienne isotrope (se reporter aux études déjà citées pour un examen quantitatif de cette question).

Soit donc  $F(\mathbf{v})$  cette fonction de distribution ( $\mathbf{v}$  est la vitesse des particules). On a:

$$F(\mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} c^3} \exp \left[ - \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2c^2} \right] \quad (34)$$

où  $u$  est le mouvement moyen des particules (vitesse circulaire képlérienne), et  $c$  la dispersion des vitesses.

On en déduit la fonction de distribution des vitesses relatives  $F(v_r)$  suivante (cf II.2.2):

$$F(v_r) = \frac{1}{8\pi^{3/2} c^3} \exp \left[ -\frac{(v_r - \delta u)^2}{4c^2} \right] \quad (35)$$

où  $\delta u$  est la différence de vitesse moyenne entre les deux particules considérées.

L'inconvénient de cette fonction de distribution est qu'elle ne permet pas toujours l'intégration analytique sur les trois composantes de la vitesse, et mène de toute façon à des expressions peu maniables dans le cas contraire. Nous allons donc la simplifier de la manière suivante:

On constate que lorsque  $|\delta u| \ll c$ , la gaussienne est presque isotrope et la plupart des paires de particules ont des vitesses relatives de l'ordre de  $c$ . Au contraire, lorsque  $|\delta u| \gg c$ , la gaussienne est fortement piquée autour de  $\delta u$  et la plupart des paires de particules ont des vitesses relatives de l'ordre de  $\delta u$ . On supposera donc que toutes les paires de particules ont des vitesses relatives isotropes et égales à  $c$  quand  $\delta u < c$ , et des vitesses relatives égales à  $\delta u$  dans le cas contraire. Les intégrales ayant un effet de moyennisation, on s'attend à ce que ce procédé n'introduise pas de grandes erreurs quantitatives, au moins en regard des diverses approximations faites jusqu'ici. La fonction de distribution choisie est finalement:

$$F(v_r) = \frac{\delta(v_r - c)}{4\pi c^2} \quad \text{si } |\delta u| < c \quad (36a)$$

$$F(v_r) = \delta(v_r - \delta u) \quad \text{si } |\delta u| \geq c \quad (36b)$$

Remarquons que la condition  $|\delta u| < c$  est équivalente à la condition  $r_3 < r_0$  où  $r_3$  est le rayon de la sphère d'intégration des différentes expressions introduites dans les quatre sous-sections précédentes. En effet, on vérifie facilement que  $|\delta u| = \Omega(r_m + r_\mu)/2$  où  $r_m$  et  $r_\mu$  sont les rayons des deux particules considérées.

### II.3.3.2 Quelques remarques sur les bornes d'intégration:

Les masses intervenant dans les expressions précédentes prennent a priori toutes les valeurs réelles. Cependant, on l'a déjà mentionné, ce modèle ne s'applique pas à la distribution des très petites particules (pour fixer les idées, moins d'un centimètre de rayon). De plus, une distribution en puissance négative du rayon des particules comme celles que l'on considère prévoit nécessairement un nombre fractionnaire de très grandes particules, ce qui est sans signification. La distribution doit être coupée au moins aux rayons pour lesquels elle prévoit un seul corps dans tout le volume des anneaux (c'est-à-dire dans le cas de Saturne, pour des rayons de l'ordre de quelques kilomètres).

De ce fait, les intégrales par rapport à la masse des particules ne s'étendent de toutes façons qu'entre deux valeurs limites  $m_{\min}$  et  $m_{\max}$ . Le choix de  $m_{\min}$  n'est pas essentiel car on vérifie assez facilement que les intégrales précédentes sont convergentes lorsque  $m_{\min}$  tend vers zéro. La même remarque s'applique pour  $m_{\max}$  à condition que l'exposant de la distribution soit suffisamment grand pour des rayons  $r > r_0$ . On choisira dans la suite une valeur de  $m_{\min}$  correspondant à des rayons de l'ordre de quelques centimètres; il n'est pas possible pour des raisons

numériques explicitées plus loin de choisir une valeur de  $m_{\max}$  correspondant à des rayons de l'ordre de quelques kilomètres et en général dans les résolutions numériques présentées dans les sections suivantes, les rayons maximaux des particules sont de l'ordre de quelques dizaines de mètres.

### II.3.3.3 Fonctions de probabilité:

Dans le cadre des critères d'accrétion choisis, la probabilité  $P_{ac1}$  ne prend que les deux valeurs 0 ou 1. La valeur 0 est prise si  $m < m_c$  (défini plus haut) ou si  $m > m_c$  et  $\mu > \delta^3 m$ ; la valeur 1 est prise dans les autres cas.

Pour les mêmes raisons et du fait de la remarque faite au II.3.2, la probabilité  $P_{er1}$  vaut 0 lorsque  $m < m_c$  et  $\mu > m/\delta^3$ , ou lorsque  $m > m_c$  et  $\mu < \delta^3 m$  ou  $\mu > m/\delta^3$ . Elle vaut 1 dans les autres cas.

La fonction de probabilité  $P_{er2}$  est nulle si  $m_2 > m_c$  et  $m_1 < \delta^3 m_2$ , et vaut 1 dans le cas contraire.

La fonction de probabilité  $P_{ac2}$  est nulle si  $m < m_c$ , ou si  $m > m_c$  et  $\mu < m/\delta^3$ ; elle vaut 1 dans les autres cas.

En fait, les valeurs "tout ou rien" des fonctions de probabilité se traduisent par une limitation du domaine d'intégration en masse. les bornes de ces domaines seront précisées pour chaque terme dans la suite du calcul.

### II.3.3.4 Calcul de $m_{er}$ :

Posons (cf (10) ):

$$\dot{m}_{er} = \int J \, d\mu \quad (37)$$

Nous allons calculer l'intégrand  $J$ . Soit  $r_m$  et  $r_\mu$  les rayons des deux particules de masses respectives  $m$  et  $\mu$  intervenant dans cette expression. Le rayon de la sphère  $S$  est  $r_S = r_m + r_\mu$ . Le choix de la fonction de distribution des vitesses relatives montre qu'il faut distinguer les deux cas  $r_S < r_0$  et  $r_S > r_0$ .

*i) Premier cas:  $r_S < r_0$ :*

La géométrie est celle de la figure 2.6 et on a  $|\delta u| < c$ . Compte-tenu de (33) et (36a), il est plus pratique pour l'intégration d'exprimer  $v_r$  en coordonnées sphériques  $(v_r, \theta, \varphi)$ . On a  $d^3 v_r = v_r^2 dv_r \sin\theta d\theta d\varphi$ , et l'intégration en vitesse et en surface donne:

$$J = J_1 = \left[ \frac{3}{4\pi Q} \right]^{2/3} \pi c^{p+1} \mu_0 \gamma_e \alpha(m, \mu) (m^{1/3} + \mu^{1/3})^2 f(\mu, t) \quad (38)$$

où  $\mu_0$  est la masse réduite des deux particules et où leurs rayons ont été exprimés en fonction de leurs masses (on s'est placé dans le cas  $P_{erl} = 1$ ).

*ii) Deuxième cas:  $r_S > r_0$ :*

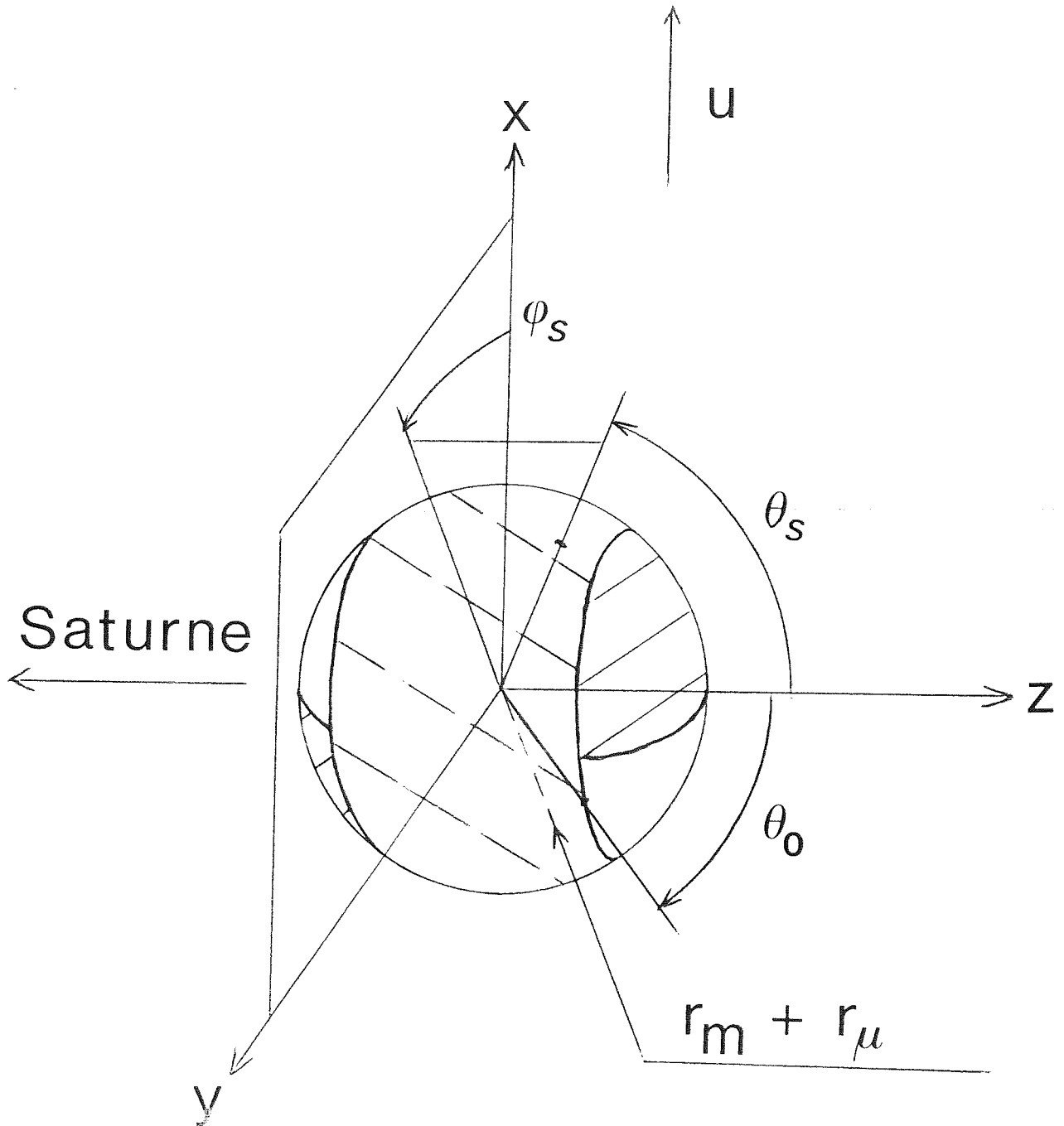


Fig. 2.7

La géométrie des chocs est celle de la figure 2.7. Les surfaces hachurées correspondent à des chocs dont les vitesses relatives sont données par (36b); les surfaces pointillées correspondent à des chocs de vitesses relatives données par (36a); il n'y a aucun choc sur les surfaces blanches avec les approximations que l'on a faites. On a défini un angle critique  $\theta_0$  délimitant les deux premiers types de surface; cet angle est tel que:

$$\cos\theta_0 = \frac{m_0^{1/3}}{m^{1/3} + \mu^{1/3}} \quad (39a)$$

$$\sin\theta_0 = \left[ 1 - \frac{m_0^{2/3}}{[m^{1/3} + \mu^{1/3}]^2} \right]^{1/2} \quad (39b)$$

L'intégration sur la surface pointillée se fait comme précédemment, et ne présente pas de difficultés. L'intégration sur les surfaces hachurées est légèrement plus compliquée. Il est préférable d'exprimer le facteur  $\cos\theta'$  de (30) à l'aide des angles  $\theta_S$  et  $\psi_S$  du repère sphérique de la figure 2.7 (qui n'est pas le même que le précédent). On trouve assez facilement que, comme dans ce cas  $\mathbf{v}_r = \delta\mathbf{u}$  est parallèle à l'axe des x de la figure 2.7,  $\cos\theta' = \cos\psi_S \sin\theta_S$ . On trouve alors après intégration:

$$J = J_2 = \left[ \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \right]^{2/3} \pi c^{p+1} \mu_0 \gamma_e \alpha(m, \mu) (m^{1/3} + \mu^{1/3}) m_0^{1/3} f(\mu, t) + \quad (40a)$$

$$4 \left[ \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \right]^{(p+3)/3} \left[ \frac{Q}{2} \right]^{p+1} (m^{1/3} + \mu^{1/3})^{p+3} \gamma_e \mu_0 \alpha(m, \mu) f(\mu, t) I(\theta_0, p)$$



avec

$$I(\theta_0, p) = \int_0^{\theta_0} \cos^{p+1} \theta \sin^2 \theta \, d\theta \quad (40b)$$

Le premier terme de (40a) provient des collisions de vitesse relative  $c$ , le second des collisions de vitesse relative  $\delta u$ .

Il est commode d'avoir une expression analytique de  $I(\theta_0, p)$ . Malheureusement, celle-ci n'existe que pour  $p$  entier ou pour  $\theta_0 = \pi/2$  (et  $p$  réel quelconque). Les expressions pour les valeurs paires de  $p$  sont formellement assez analogues entre elles, mais différent de celles pour  $p$  impair. On peut vérifier que l'on n'introduit pas une grosse erreur en interpolant linéairement en  $p$  l'expression (40b) entre les valeurs paires de  $p$ . Dans ces conditions, on peut écrire en première approximation:

$$I(\theta_0, p) = \frac{\sin^3 \theta_0}{3} - \frac{p}{2} \frac{\sin^5 \theta_0}{5} \quad \text{si } 0 \leq p \leq 2 \quad (41a)$$

$$I(\theta_0, p) = \frac{\sin^3 \theta_0}{3} - \frac{p}{2} \frac{\sin^5 \theta_0}{5} + \frac{p-2}{4} \frac{\sin^7 \theta_0}{7} \quad \text{si } 2 \leq p \leq 4 \quad (41b)$$

Pour déterminer complètement  $\dot{a}_{e_1}$ , il nous faut encore définir le domaine d'intégration par rapport à  $p$ , et en particulier les valeurs des bornes et les domaines d'application de chacun des deux cas précédents. C'est ce qui est fait dans le prochain sous-paragraphe.

iii) Bornes d'intégration et forme finale de  $m_{er}$ :

Le choix des bornes est imposé par les domaines de valeur non nulle de  $P_{er1}$  et par les limites imposées à  $\mu$  (cf plus haut). L'intégrale [37] s'étend entre deux valeurs de  $\mu$ ,  $\mu_{min}$  et  $\mu_{max}$ , qui dépendent a priori de  $m$ . Considérons d'abord le cas  $\mu < m$ . Si  $m < m_c$ , la masse  $\mu$  n'est jamais accrétée par la masse  $m$ . Si  $m > m_c$ ,  $\mu$  n'est accrétée que si  $\mu < \delta^3 m$ . On obtient donc finalement:

$$\mu_{min} = m_{min} \text{ si } m < m_c \quad (42a)$$

$$\mu_{min} = \sup(\delta^3 m, m_{min}) \text{ si } m > m_c. \quad (42b)$$

Dans le cas  $\mu > m$ ,  $\mu$  accrète  $m$  si  $\mu > m_c$  d'une part, et  $\mu > m/\delta^3$  d'autre part, ce qui impose:

$$\mu_{max} = \inf(\sup(m_c, m/\delta^3), m_{max}) \quad (42c)$$

Les deux cas i) et ii) précédents s'appliquent dans des domaines de valeurs de  $\mu$  dépendant de la valeur relative de  $m$  et de certains des paramètres du modèle, en particulier. Une discussion du problème montre que l'on a toujours:

$$m_{\min} \leq m \leq m_1 : \dot{m}_{er} = \int_{\mu_{\min}}^{\mu_{\max}} J_1 d\mu \quad (42d)$$

$$m_1 \leq m \leq m_2 : \dot{m}_{er} = \int_{\mu_{\min}}^{\mu_c} J_1 d\mu + \int_{\mu_c}^{\mu_{\max}} J_2 d\mu \quad (42e)$$

$$m_2 \leq m \leq m_{\max} : \dot{m}_{er} = \int_{\mu_{\min}}^{\mu_{\max}} J_2 d\mu \quad (42f)$$

où l'on a posé:

$$\mu_c = (m_0^{1/3} - m^{1/3})^3 \quad (42g)$$

et où  $J_1$  est donné par (38) et  $J_2$  par (40). La discussion permettant d'aboutir à ce résultat, qui est un peu longue, n'est pas reproduite ici car elle est assez simple et n'apporte rien à la physique du problème. Le principe de cette discussion est de chercher les domaines de valeurs de  $m$  pour lesquelles les contraintes  $\mu_c < \mu_{\min}$ ,  $\mu_{\min} < \mu_c < \mu_{\max}$ , et  $\mu_{\max} < \mu_c$  sont satisfaites ( $\mu_c$  diminue lorsque  $m$  croît). Les équations (42d) à (42f) se comprennent de la façon suivante. Il ne faut pas perdre de vue que la vitesse différentielle maximale possible au cours d'un choc entre deux particules est proportionnelle à la somme des rayons des particules. Pour les petites valeurs de  $m$  ( $m < m_1$ ), les collisions entre  $m$  et  $\mu$  conduisant à une érosion se font nécessairement à des vitesses relatives égales à  $v$  ( $\mu$  est trop petit pour que la rotation différentielle képlérienne joue un rôle). Pour des valeurs intermédiaires de  $m$  ( $m_1 < m < m_2$ ),  $\mu_{\max}$  peut être assez grand pour que la rotation différentielle commence à intervenir: les vitesses relatives

de chocs avec des particules de masse  $\mu \sim \mu_{\max}$  peuvent être plus grandes que  $c$  alors que pour  $\mu \sim \mu_{\min}$ , elles restent de l'ordre de  $c$ . Pour de plus grandes valeurs de  $m$  ( $m > m_2$ ), les vitesses maximales relatives de chocs "érosifs" avec des particules  $\mu > \mu_{\min}$  sont nécessairement dominées par la rotation différentielle.

Les valeurs de  $m_1$  et  $m_2$  dans les différents cas sont résumées dans le tableau suivant:

	$m_1$	$m_2$	
$(1 + \delta)^3 m_c \leq m_0$	$\left[ \frac{\delta}{1+\delta} \right]^3 m_0$	$m_0 / (1+\delta)^3$	(T1)
$m_c \leq m_0 \leq (1 + \delta)^3 m_c$	$(m_0^{1/3} - m_c^{1/3})^3$	$m_c$	

### II.3.3.5 Calcul de $\dot{m}_{ac}$ :

Par analogie avec le calcul précédent, posons:

$$\dot{m}_{ac} = \int \mu f(\mu, t) J' d\mu \quad (43)$$

Un calcul absolument identique au précédent montre qu'il faut encore distinguer les deux cas  $r_s < \text{ou} > r_0$  et donne:

$$J' = J'_1 = \left[ \frac{3}{4\pi\varrho} \right]^{2/3} \pi c (m_0^{1/3} + m^{1/3})^2 \quad \text{si } r_s \leq r_0 \quad (44a)$$

$$J' = J'_2 = \left[ \frac{3}{4\pi\varrho} \right]^{2/3} \pi c (m_0^{1/3} + m^{1/3}) m_0^{1/3} + \frac{\Omega}{2\pi\varrho} (m^{1/3} + \mu^{1/3})^3 \sin^3 \theta_0 \quad \text{si } r_s > r_0 \quad (44b)$$

où  $\sin \theta_0$  est donné par (39).

L'intégrale (43) est prise entre deux bornes  $\mu'_{\min}$  et  $\mu'_{\max}$ . On a nécessairement:

$$\mu'_{\min} = m_{\min} \quad (45a)$$

De plus, il est clair que  $m_{ac}$  est nul lorsque la masse  $m$  de la particule accrétante ( $m > \mu$ ) est plus petite que  $m_c$ ; on tiendra compte de ce point en imposant  $\mu'_{\max} = \mu'_{\min}$ . De ce fait, on obtient:

$$\mu'_{\max} = \sup(m_{\min}, \delta^3 m) \quad \text{si } m > m_c \quad (45b)$$

$$\mu'_{\max} = m_{\min} \quad \text{si } m < m_c \quad (45c)$$

Une discussion tout aussi longue, simple, sans intérêt physique et

fondée sur le même principe que celle qui n'a pas été reproduite ci-dessus montre que l'on a toujours:

$$m_{\min} \leq m \leq m_1' : \dot{m}_{ac} = \int_{\mu_{\min}}^{\mu_{\max}} J_1' \mu f(\mu) d\mu \quad (45d)$$

$$m_1' \leq m \leq m_2' : \dot{m}_{ac} = \int_{\mu_{\min}}^{\mu_c} \mu f(\mu) J_1' d\mu + \int_{\mu_c}^{\mu_{\max}} J_2' \mu f(\mu) d\mu \quad (45e)$$

$$m_2' \leq m \leq m_{\max} : \dot{m}_{ac} = \int_{\mu_{\min}}^{\mu_{\max}} J_2' \mu f(\mu) d\mu \quad (45f)$$

avec les mêmes notations que précédemment, où  $J_1'$  et  $J_2'$  sont donnés par (44), et où les valeurs de  $m_1'$  et  $m_2'$  dans les différents cas sont résumées dans le tableau ci-dessous:

	$m_1'$	$m_2'$	
$(1 + \delta)^3 m_c \leq m_0$	$m_0 / (1 + \delta)^3$	$m_0$	(T2)
$m_c \leq m_0 \leq (1 + \delta)^3 m_c$	$m_c$ : car $\dot{m}_{ac} = 0$ quand $m < m_c$	$m_0$	

Les équations (45c) à (45e) s'interprètent de la même façon que les équations (42d) à (42f).

### II.3.3.6 Calcul de la quatrième contribution:

On pose:

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{ac2} = -f(m) \int f(\mu, t) J'' d\mu \quad (46)$$

où il est clair que:

$$\mu''_{max} = m_{max} \quad (47a)$$

$$\mu''_{min} = \inf(\sup(m_c, m/\delta^3), m_{max}) \quad (47b)$$

L'intégration oblige à distinguer les mêmes cas que précédemment, et on vérifie aisément que  $J''$  est donné par (44a) ou (44b) selon le cas.

De manière générale, on obtient:

$$m_{min} \leq m \leq m_1'' : \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{ac2} = -f(m) \int_{\mu_{min}}^{\mu_c} f(\mu, t) J_1'' d\mu - f(m) \int_{\mu_c}^{\mu_{max}''} f(\mu, t) J_2'' d\mu \quad (47c)$$

$$m_1'' \leq m \leq m_{max}'' : \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{ac2} = -f(m) \int_{\mu_{min}}^{\mu_{max}''} f(\mu, t) J_2'' d\mu \quad (47d)$$

où les valeurs de  $m''_1$  dans les différents cas de figure sont présentées dans le tableau ci-dessous:

	$m''_1$	
$(1 + \delta)^3 m_c \leq m_0$	$\left[ \frac{\delta}{1 + \delta} \right]^3 m_0$	(13)
$m_c \leq m_0 \leq (1 + \delta)^3 m_c$	$(m_0^{1/3} - m_c^{1/3})^3$	

### II.3.3.7 Calcul de la troisième contribution:

#### i) Choix de la fonction $g$ :

Il a déjà été mentionné que le modèle d'éjection choisi était une distribution des éjecta suivant une loi puissance de leurs rayons, avec un exposant voisin de 3. On s'attend donc à une relation du type:

$$g(m) dm \ll r^{-q} dr \quad (48)$$

avec  $q$  de l'ordre de 3. Par ailleurs, comme  $m \ll r^3$ ,  $dm \ll r^2$ , on obtient:



$$g(m) dm = A m^{-q_0} \quad (49a)$$

$$q_0 = \frac{q' + 2}{3} \approx 5/3 \quad (49b)$$

Il nous reste à spécifier A et la masse  $m_M$  de la plus grosse éjection. Le nombre de particules éjectées de masse m donnée à  $\delta m \sim m$  près est de l'ordre de  $mg(m)$  à un facteur de l'ordre de quelques unités près. Il est clair que la plus grosse éjection  $m_M$  est telle que  $m_M g(m_M) \sim 1$ . On choisira donc:

$$A = \frac{1}{m_M g(m_M)} \quad (50)$$

Remarquons qu'une erreur sur le choix de  $m_M$  n'est pas capitale car elle équivaut à une erreur sur  $\gamma_e$  qui n'est pas non plus déterminé avec une grande précision.

On détermine  $m_M$  à partir de la masse totale éjectée. En effet:

$$\begin{aligned}
 M_e &= \int_{m_{\min}}^{m_{\max}} m g(m) dm = \\
 &= \frac{m_M}{2 - q_0} - \frac{m_{\min}^{2-q_0}}{(2-q_0)m_M^{1-q_0}} \approx \frac{m_M}{2 - q_0}
 \end{aligned}
 \tag{51a}$$

la dernière égalité étant valable lorsque  $m_{\min}$  tend vers 0.  
 soit l'expression suivante de  $m_M$  :

$$m_M = (2 - q_0) \gamma_e \mu_0 v_r^p \sim M_e / 3
 \tag{51b}$$

L'inconvénient de ce choix est qu'il entraîne une dépendance de la masse éjectée, et donc des bornes d'intégration en masse, vis-à-vis de la vitesse relative des collisions, ce qui ne permet plus de procéder à l'intégration en vitesse et surface indépendamment de l'intégration en masse. Nous allons donc simplifier le problème de la manière suivante. On pose :

$$g(m) = \frac{\alpha_0 m^{-q_0}}{m_M^{1-q_0}}
 \tag{52a}$$

$$m_M = (2 - q_0) \gamma_e \mu_0 c^p
 \tag{52b}$$

où  $\alpha_0$  représente le nombre de particules de masse  $m_H$  produites au cours des collisions. Pour  $v_r = c$  (resp.  $> 1$ ),  $\alpha_0 = 1$  (resp.  $> 1$ ).

L'expression (52b) est correcte pour  $v_r = c$  et sous-estimée pour  $v_r > c$ . On introduit en fait deux types d'erreurs:

i) On sous-estime le nombre de petites particules produites au cours de collisions (cf (49a), (51b) et (52b)). Cependant, la sous-estimation est le fait des collisions faisant intervenir des masses plus grandes que  $m_0$ , et on vérifie facilement que la contribution de ces collisions n'est pas dominante, du fait de la pondération par la fonction de distribution qui décroît plus vite que la puissance cinquième du rayon de ces particules. De plus, cet effet est plus ou moins corrigé par la dépendance de  $\alpha_0$  avec la vitesse d'impact (cf ci-dessous).

ii) Pour  $v_r > c$ , on "oublie" la production de particules dont la masse est comprise entre les expressions (51b) et (52b). Comme ci-dessus, cet oubli est compensé si les particules considérées peuvent également être produites au cours de chocs de vitesse relative égale à  $c$ . Cependant, il est clair qu'on sous-estime la production des particules les plus grosses. Toutefois, le terme devenant *a priori* négligeable pour ces particules (cf pondération par la fonction de distribution), on négligera la contribution en question. Cette hypothèse se vérifie en fait *a posteriori* à l'aide d'un calcul du majorant de l'erreur commise, que l'on fait à partir des résultats numériques présentés plus bas, et donnés dans l'appendice II.8 (le principe de calcul de ce majorant est exposé ci-dessous au paragraphe iii) ).

Il ne nous reste qu'à calculer  $\alpha_0$  à l'aide de la masse totale collectée:

$$M_e = \frac{\alpha_0 m_H}{2 - q_0} \quad (53a)$$

$$\alpha_0 = \frac{(2 - q_0) M_e}{m_H} = \left[ \frac{v_r}{c} \right]^p \quad (53b)$$

En résumé, la fonction de distribution des particules est donnée par (52a), (52b) et (53b).

*ii) Intégration par rapport à la vitesse relative et à la surface:*

Dans l'intégrale (31), les collisions contribuant à la production de particules de masse  $m$  donnée sont celles pour lesquelles  $m_H > m$ . Pour obtenir une expression simple des bornes inférieures pour  $m_1$  et  $m_2$  dans (31), nous allons approximer la masse réduite des deux particules en collision:  $\mu_0 \sim \inf(m_1, m_2) = m_1$ . Cette approximation est très bonne pour  $m_1 \ll m_2$ , et introduit une différence d'un facteur 2 pour  $m_1 = m_2$ , qui est de l'ordre de grandeur des diverses approximations faites jusqu'ici et ne va donc pas créer d'erreur supplémentaire importante. Pour la cohérence du calcul, nous allons faire la même approximation dans les expressions de tous les termes d'érosion et d'accrétion.

Avec cette approximation, on obtient:

$$m_H = \Gamma m_1 \quad (54a)$$

$$\Gamma = (2 - q_0) \gamma_p \quad (54b)$$

La contrainte  $m_M > m$  donne alors  $m_1 > m/\Gamma$ . Comme par ailleurs  $m_2 > m_1 > \delta^3 m_2$ , on trouve les valeurs suivantes pour les bornes inférieures et supérieures de  $m_1$  et  $m_2$ :

$$\mu_{\min 1} = \sup(m/\Gamma, \delta^3 m_2) \quad (55a)$$

$$\mu_{\min 2} = m/\Gamma \quad (55b)$$

avec des notations analogues à celles des précédents termes.

Un calcul du même type que les précédents montre que le terme considéré peut toujours se mettre sous l'une des deux formes suivantes:

$$1^{\text{er}} \text{ cas: } m_0/8 \leq m_c \leq m_0:$$

$$m_{\min} \leq m \leq m_1^{**} :$$

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{er2} = m^{-q_0} \int_{\mu_{\min 2}}^{\mu_2} f(m_2) dm_2 \left[ \int_{\mu_{\min 1}}^{\mu_1} dm_1 \frac{f(m_1)}{m_M^{1-q}} J_1'' + \int_{\mu_1}^{m_2} dm_1 \frac{f(m_1)}{m_M^{1-q}} J_2'' \right] + m^{-q_0} \int_{\mu_2}^{m_{\max}} dm_2 f(m_2) \int_{\mu_{\min 1}}^{m_2} dm_1 \frac{f(m_1)}{m_M^{1-q}} J_2'' \quad (55c)$$

$$m_1^{**} \leq m \leq \Gamma m_{\max} :$$

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{er2} = m^{-q_0} \int_{\mu_{\min 2}}^{m_{\max}} dm_2 f(m_2) \int_{\mu_{\min 1}}^{m_2} dm_1 \frac{f(m_1)}{m_M^{1-q}} J_2'' \quad (55d)$$

$$\Gamma m_{\max} \leq m \leq m_{\max} :$$

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{er2} = 0 \quad (55e)$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas: } m_c \leq m_0/8 :$$

$$m_{\min} \leq m \leq m_2^{**} :$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{er2} &= m^{-q_0} \int_{\mu_{\min 2}}^{\mu_2} dm_2 f(m_2) \int_{\mu_{\min 1}}^{m_2} dm_1 \frac{f(m_1)}{m_M^{1-q}} J_1'' + \\ & m^{-q_0} \int_{\mu_2}^{\mu_2} f(m_2) dm_2 \left[ \int_{\mu_{\min 1}}^{\mu_1} dm_1 \frac{f(m_1)}{m_M^{1-q}} J_1'' + \int_{\mu_1}^{m_2} dm_1 \frac{f(m_1)}{m_M^{1-q}} J_2'' \right] \\ & + m^{-q_0} \int_{\mu_2}^{m_{\max}} dm_2 f(m_2) \int_{\mu_{\min 1}}^{m_2} dm_1 \frac{f(m_1)}{m_M^{1-q}} J_2'' \end{aligned} \quad (55f)$$

$$m_2^{**} \leq m \leq \Gamma m_{\max} :$$

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{er2} = m^{-q_0} \int_{\mu_{\min 2}}^{m_{\max}} dm_2 f(m_2) \int_{\mu_{\min 1}}^{m_2} dm_1 \frac{f(m_1)}{m_M^{1-q}} J_2'' \quad (55g)$$

$$\Gamma m_{\max} \leq m \leq m_{\max} :$$

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{er2} = 0 \quad (55h)$$

avec:

$$m_1'' = \delta^3 (m_0^{1/3} - m_c^{1/3})^3 \quad (56a)$$

$$\mu_1 = (m_0^{1/3} - m_c^{1/3})^3 \quad (56b)$$

$$H_2 = [m_0^{1/3} - (m/\Gamma)^{1/3}]^3 \quad (56c)$$

$$m_2'' = \delta^3 m_0 / 8 \quad (56d)$$

$$\mu_2' = m_0 / 8 \quad (56e)$$

et où l'on a posé:

$$J_1'' = \left[ \frac{3}{4\pi Q} \right]^{2/3} \pi c (m_1^{1/3} + m_2^{1/3})^2 \quad (57a)$$

$$J_2'' = \left[ \frac{3}{4\pi Q} \right]^{2/3} \pi c (m_1^{1/3} + m_2^{1/3}) m_0^{1/3} + \left[ \frac{3}{4\pi Q} \right]^{(p+3)/3} 4/c^p (\Omega/2)^{p+1} (m_1^{1/3} + m_2^{1/3})^{p+3} I(\theta_0, p) \quad (57b)$$

$I(\theta_0, p)$  est donnée par les formules (41a) et (41b).

iii) Expression du majorant de l'erreur induite par l'approximation de la valeur de  $m_M$ :

On obtient en effet un tel majorant en remplaçant  $m_k$  par  $m_k v_M^p$  où  $v_M$  est la vitesse relative maximale possible au cours d'un choc entre deux particules (lorsqu'elles se choquent tangentiellement). Pour simplifier, on prendra un majorant de  $v_M$ , que l'on trouve en calculant



la vitesse relative maximale de choc entre particules de masse  $m_{\max}$ . Avec la valeur de  $m_{\max}$  de l'appendice II.B, on trouve  $v_M \approx 10c$ . Ceci revient à définir une valeur de  $\Gamma$  effective,  $\Gamma_{\text{eff}}$ ,  $10^9$  fois plus grande que celle de (54b). En fait, ce majorant surévalue très largement l'erreur, d'une part parce que  $v_M$  est très surévalué pour la majeure partie des collisions, et d'autre part parce que seule une infime fraction des chocs entre les particules se fait avec la vitesse relative  $v_M$ .

La procédure de calcul de ce majorant est alors la suivante:

- i) Pour une valeur de  $m$  donnée, on calcule  $m/\Gamma_{\text{eff}}$  et on cherche la valeur  $m'$  telle que  $m'/\Gamma = m/\Gamma_{\text{eff}}$ .
- ii) Un majorant de  $(\partial f/\partial t)_{\text{er}2}(m)$  est alors  $(\partial f/\partial t)_{\text{er}2}(m') \cdot (m/m')^{-9}$ . (On a une majoration supplémentaire du fait que l'on devrait prendre la quantité  $\alpha$  définie par (53b) égale à 1 alors qu'on a toujours  $\alpha > 1$ ).

Le calcul du majorant ainsi obtenu à l'aide des résultats de l'appendice II.B montre que l'erreur est toujours négligeable.

### II.3.4 Résumé des principales équations:

La variation temporelle de la fonction de distribution en taille est la somme de quatre contributions:

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right] = \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{\text{ac}1} + \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{\text{ac}2} + \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{\text{er}1} + \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{\text{er}2} \quad (58)$$

$(\partial f/\partial t)_{\text{er}1}$  est entièrement défini par (29), (42) et le tableau (T1). Les quantités intervenant dans (42) sont précisées par les équations (38) à (41) incluses.

$(\partial f/\partial t)_{\text{ac}1}$  est donné par (26), (44), (45) et (T2).

$(\partial f/\partial t)_{\text{er}2}$  par (55) à (57), (54b), (52b) et (41).

$(\partial f / \partial t)_{a, c_2}$  par (47), (44) et (T3).

Dans ces expressions,  $\mu_0$  n'est plus la masse réduite mais la plus petite des deux masses en collision.

### II.3.5 Présentation des résultats:

On pourrait résoudre analytiquement de manière approchée l'équation (58) avec  $\partial f / \partial t = 0$ , en cherchant a priori  $f$  sous la forme d'une fonction puissance par morceaux. Toutefois, la quantité d'intégrales à calculer est assez décourageante, et j'ai préféré programmer le membre de droite de (58) en vue d'une résolution numérique.

Compte-tenu des discussions des sections antérieures sur les ordres de grandeur de  $m_c$  et  $m_0$ , la programmation a été faite dans le cas  $m_0 > 8m_c$  ( $r_0 > 2r_c$ ), qui est le plus probable. Comme  $\delta < 1$ , ceci correspond également au cas  $(1 + \delta)^3 m_c < m_0$  des tableaux (T1), T(2) et (T3).

L'équation (58) a été discrétisée sur une cinquantaine de points répartis logarithmiquement entre  $m_{\min}$  et  $m_{\max}$ . Typiquement, j'ai choisi  $m_{\min} \approx 1$  cm et  $m_{\max} \approx 50$ m. Le choix du nombre de points et de  $m_{\max}$  (les deux questions sont liées) est un compromis entre la précision du calcul et le temps calcul nécessaire à l'évaluation du membre de droite de (58). Des tests réalisés avec 100 et 150 points montrent que la précision du calcul des différents termes est de l'ordre de 20% pour les 50 points choisis, ce qui est suffisant pour les objectifs de ce modèle. Les intégrales sont calculés par la méthode des trapèzes; celle-ci a été retenue en raison de sa rapidité et parce que la perte de précision vis-à-vis de méthodes plus performantes est assez faible pour la discrétisation choisie. Le deuxième terme d'erosion est le plus coûteux à calculer à cause de l'intégrale double (le nombre d'opérations est proportionnel à  $n^2$  où  $n$  est le nombre de points de discrétisation, alors qu'il est proportionnel à  $n$  seulement pour les autres termes). La dérivation est obtenue par un sous-programme utilisant un développement de Taylor sur trois points. Bien que ce calcul soit précis à l'ordre

deux du développement, la précision finale est essentiellement limitée par le faible nombre de points de discrétisation (la précision des dérivations numériques est malheureusement plus mauvaise que celle des intégrations).

Une recherche numérique de la solution stationnaire de (58) comporte plusieurs phases:

- i) On cherche d'abord une solution approchée en calculant le membre de gauche à partir de fonctions d'essai. Pour notre problème, les fonctions d'essai sont des fonctions puissance du type  $f(m) \propto m^{-q}$  pour toute valeur de  $m$ , ou bien  $f(m) \propto m^{-q}$  pour  $m < m_0$  et  $f(m) \propto m^{-r}$  pour  $m > m_0$ .
- ii) En prenant comme point de départ la meilleure fonction obtenue par la méthode précédente, on peut chercher à résoudre par une méthode itérative l'équation (58): on remplace celle-ci par un système de  $n$  équations (non-linéaires) à  $n$  inconnues, où  $n$  est le nombre de points de discrétisation, et les inconnues les  $n$  valeurs de  $f(m)$  en ces points, que l'on résout par exemple par une méthode de Newton-Raphson.
- iii) Si les fonctions d'essai ne sont pas suffisamment "proches" de la solution pour permettre la convergence de l'algorithme utilisé, on a toujours la possibilité de faire évoluer (58) en temps pour se "rapprocher" de la distribution d'équilibre.

En fait seule la première étape a été réalisée, car elle montre que la distribution stationnaire dans le cas qui nous intéresse ( $\delta \ll 1$ ) est très différente de la distribution des anneaux. J'ai calculé les différents termes pour  $f(m) \propto m^{-q}$  avec  $q = 4/3, 5/3, 2, 7/3, 8/3$  (soit des distributions en rayon des particules variant entre  $r^{-2}$  et  $r^{-6}$  par sauts d'une unité de l'exposant de puissance), et pour quelques valeurs de  $\delta$  comprises entre  $10^{-2}$  et  $10^{-3}$ ; j'ai également calculé ces termes dans le cas  $f(m) \propto m^{-5/3}$  pour  $m < m_0$  et  $f(m) \propto m^{-q}$  pour  $m > m_0$  avec  $q = 2, 7/3, 8/3$  et pour les mêmes valeurs de  $\delta$ .

Tous ces calculs donnent des résultats analogues. Le dernier type de résultat est présenté en appendice 8, pour  $\delta = 6 \cdot 10^{-3}$ ,  $r_c = 2$  m et  $r_0 = 5$  m,  $\gamma_p = 10^{-2}$ ,  $\rho = 1.5$ ,  $q_0 = 5/3$ ,  $\rho = 0.25$  g/cm<sup>3</sup>,  $\Omega = 1.3 \times 10^{-4}$  /s,  $c = 0.3$  mm/s. On trouve successivement en ligne pour chacune des valeurs

de  $q$ : le rayon des particules en mètres, la masse correspondante en kg, la valeur de la fonction de distribution en rayon pour le rayon considéré, la valeur de la fonction de distribution en masse, les valeurs de  $(\partial f/\partial t)_{er1}$ ,  $(\partial f/\partial t)_{ac1} + (\partial f/\partial t)_{ac2}$ ,  $(\partial f/\partial t)_{er2}$ , la somme de ces différents termes. La fonction de distribution est normalisée pour correspondre approximativement aux données (cf figure 2.1), qui sont en nombre de particules par  $m^2$  de surface des anneaux et par  $m$  de rayon des particules.

Ici la fonction de distribution est donnée en nombre de particules par  $m^3$  (volume des anneaux) et par  $m$  (rayon des particules) ou kg (masse des particules), en normalisant l'épaisseur des anneaux à un mètre; pour obtenir la fonction de distribution "reelle", il faut diviser les valeurs de  $f$  par l'épaisseur des anneaux. De même, les valeurs des termes doivent être divisées par l'épaisseur des anneaux au carré (les différents termes de (58) dépendent tous quadratiquement de  $f$  puisque l'on a considéré des collisions binaires).

On a sommé les deux termes d'accrétion car comme le premier est nul pour les petits rayons de particules, le second nul pour les grands rayons, et les deux nuls simultanément pour les rayons intermédiaires, on peut aisément reconnaître leurs contributions. Remarquons que l'annulation de  $(\partial f/\partial t)_{ac2}$ , de même que celle de  $(\partial f/\partial t)_{er2}$  pour les grandes valeurs des rayons des particules sont des artefacts de calcul liés à la valeur relativement modeste de  $m_{na}$ . J'ai effectué des tests avec des valeurs plus grandes (10 et 100 fois plus) qui montrent que les résultats sont assez peu affectés par le choix de la coupure: bien sûr, les termes d'accrétion et d'érosion en question ne s'annulent plus pour les mêmes valeurs du rayon des particules, mais on ne change pratiquement pas l'importance relative des termes ni leur ordre de grandeur.

Les résultats présentés dans l'appendice B montrent que les termes d'accrétion sont partout très largement dominant devant les termes d'érosion, et que les fonctions d'essai sont loin de la solution d'équilibre: on voit que ces fonctions d'essai doivent évoluer

rapidement de manière à réduire fortement le nombre de petites particules au profit des plus grandes: les temps caractéristiques d'évolution  $f/(\partial f/\partial t)$  que l'on peut calculer à l'aide des résultats de l'appendice sont tous inférieurs ou très inférieurs à l'année. Cette tendance est confirmée par une intégration temporelle de (58) que j'ai partiellement réalisée (avec l'algorithme de Bulirsch et Stoer). Cette intégration a malheureusement dû être arrêtée au bout de quelques pas de temps car elle était beaucoup trop coûteuse en temps calcul. Cependant, elle montrait clairement une disparition rapide des plus petites particules, et une distribution de grandes particules "plate", voire croissante (en fonction de leur rayon) totalement incompatible avec les observations.

La conclusion de ces quelques calculs est que le modèle de quasi sphères dures ne peut pas rendre compte de la répartition en taille des particules dans les anneaux, à moins d'augmenter de manière invraisemblable l'efficacité des mécanismes d'érosion. Dans un tel modèle, la distribution actuelle des anneaux devrait évoluer très rapidement (sur des échelles de temps inférieures à ou de l'ordre de l'année) vers une distribution ne comportant que de grandes particules, incompatible avec les observations.

Notons que cette situation est encore aggravée si les particules ont la possibilité de "coller" entre elles au cours des collisions (cette possibilité augmente l'efficacité des processus d'accrétion).

La section II.4 est consacrée à l'élaboration d'un modèle assez différent dans sa forme. Bien que semblant dans la forme dont le but est de résoudre ce problème.

## II.4 SECOND MODELE:

### II.4.1 Introduction:

Le modèle précédent montre que l'hypothèse  $\delta \ll 1$  n'est très vraisemblablement pas réalisée dans les anneaux de Saturne. Ceci est cohérent avec l'expression (5c) qui prévoit des valeurs beaucoup plus grandes de  $\delta$  (quelques dixièmes d'unité) de l'anneau C à l'anneau A pour des valeurs raisonnables de la densité des particules (entre 0.5 et 1  $\text{g/cm}^3$ ). De plus, l'argument suivant permet de comprendre comment le problème posé par le précédent modèle peut être résolu:

Considérons une particule de masse  $m > m_c$  donnée. La plus grande masse que cette particule peut accréter au cours d'une collision est  $\delta^3 m$ . Or, on a vu dans la section II.1 qu'une particule de masse  $\delta^3 m$  n'est que très faiblement liée (à la limite non liée) à la particule accréteuse. On s'attend donc à ce que la particule accréteuse puisse être facilement arrachée au cours d'un choc ultérieur, même si la vitesse relative du choc n'est que de l'ordre de  $c$ . Il s'agit là d'un processus "d'érosion" considérablement plus efficace que celui du modèle précédent: la fraction de masse perdue au cours d'une collision peut être  $10^5$  fois plus grande. De plus, bien qu'une augmentation de la valeur de  $\delta$  entraîne une efficacité accrue des processus d'accrétion, les expressions de  $(\partial f / \partial t)_{acc2}$  et  $(\partial f / \partial t)_{acc1}$  montrent que  $(\partial f / \partial t)_{acc1}$  va croître au détriment de  $(\partial f / \partial t)_{acc2}$  si l'on fait croître  $\delta$ . On peut donc espérer que les deux termes, qui sont de signes contraires, finiront par se compenser mutuellement.

Le but des sections suivantes est donc de redéfinir le modèle d'érosion, et de déterminer la manière dont les différents termes doivent être modifiés.

### II.4.2 Modèle d'érosion:

Comme dans le modèle précédent, il faut définir à la fois la masse totale éjectée au cours d'un choc et la répartition des éjections.

Le deuxième point est le plus simple à résoudre. Les arguments développés dans l'introduction indiquent que les particules éjectées au cours d'une collision sont en fait des particules précédemment accrétées par les particules qui subissent la collision. Cette remarque entraîne les deux conclusions suivantes:

- i) Les particules dont la masse est plus petite que  $m_c$  ne peuvent pas être érodée selon ce mécanisme, puisqu'elles ne peuvent pas accrêter d'autres particules. Elles restent toutefois soumises au type d'érosion du premier modèle.
- ii) La distribution des particules éjectées est nécessairement proportionnelle à la distribution des particules  $f(m)$ , au moins en régime stationnaire.

Examinons maintenant le premier point. La masse éjectée  $M_e$  était liée gravitationnellement avant le choc aux particules entrant en collision. L'énergie de liaison est une énergie gravitationnelle effective, qui est donc proportionnelle à  $M_e$ . Par ailleurs, l'énergie disponible au cours du choc est  $\mu v_r^2$  où  $\mu$  est la masse réduite. On a donc de bonnes raisons de penser que, comme dans le modèle précédent, on a  $M_e \propto \mu v_r^q$  avec  $q \approx 2$ . Posons donc:

$$M_e = \Gamma_e \mu v_r^q$$

(1.9)

Il reste à définir la constante de proportionnalité  $\Gamma_e$ . Pour cela, nous allons considérer un cas particulier. Soient  $m_1$  et  $m_2$  les deux masses en collision ( $m_2 > m_1$ ). Comme précédemment, approximations  $\mu$  par  $m_1$ , et considérons une collision de vitesse relative égale à  $c$ . La plus grande des masses éjectées au cours de la collision est  $m_M$  ( $m_M < \delta^3 m_2$ ). On pose de nouveau, pour les mêmes raisons que celles exposées au II.2.4.5, 6), et en fonction des remarques précédentes sur la distribution des éjections:

$$g(m) = \frac{\alpha_0 f(m)}{m_M (f m_M)} \quad (60)$$

où  $g(m)$  est naturellement la quantité intervenant dans (31), et  $\alpha_0$  celle définie en (53b) (cette quantité est réintroduite ici pour la même raison que dans le modèle précédent).

Pour simplifier la discussion, posons  $f(m) \propto m^{-s}$  avec  $s \approx 5/3$  (soit une distribution en puissance -3 du rayon des particules). L'effet de cette approximation sera discuté à la fin de cette section. On obtient alors, pour une collision de vitesse relative  $c$ :

$$M_e = m_M / (2-s) = \Gamma_e c^3 m_1 \quad (61)$$

Pour continuer, nous avons besoin d'une hypothèse sur la valeur du rapport  $m_M/m_1$ . Nous ne disposons malheureusement que de très peu d'indices, et force est de constater que le choix est plus ou moins arbitraire. Tout au plus pouvons-nous faire la remarque suivante.

La valeur de la plus grande masse accrétée par  $m_1$  ou  $m_2$  est  $\delta^3 m_2$ .



Cette valeur est également la masse de la plus grande particule qui puisse être éjectée au cours du choc. La valeur de  $\delta$  est très certainement inférieure à sa valeur limite (5c), pour laquelle une particule de masse  $\delta^3 m_2$  n'est que marginalement liée à la particule de masse  $m_2$ . Il paraîtrait donc surprenant qu'un choc de la masse  $m_2$  avec une particule de masse  $m \ll \delta^3 m_2$  conduise à une érosion où  $m_H = \delta^3 m_2$ . Réciproquement, cela paraît vraisemblable si  $m \gg \delta^3 m_2$ .

Néanmoins, cet argument est assez faible, et justifie peu (voire pas du tout) l'hypothèse suivante: nous supposons qu'une particule de masse  $m_1 = m_2$  est nécessaire pour avoir  $m_H = \delta^3 m_2$ . On vérifie alors facilement que pour toute valeur de  $m_1 < m_2$ ,  $m_H/m_1 = \delta^3$ .

Pour éventuellement examiner l'influence de cette hypothèse, nous allons en fait poser:

$$m_H/m_1 = \delta^3 \quad (62)$$

Une formulation équivalente de (61) est:  $m_H = \delta^3 m_1$  au cours d'un choc entre  $m_2$  et  $m_1/\eta$  ( $m_2 > m_1/\eta$ ).

A l'aide de (61) et (62), nous obtenons finalement:

$$\Gamma_e = \frac{\delta^3}{(2 - s)c^q} \quad (63)$$

Remarquons qu'une variation de  $\eta$  dans (63) est équivalente à une variation de  $\delta$  (une incertitude d'un ordre de grandeur sur  $\eta$  correspond à un facteur deux sur  $\delta$ ). Par ailleurs, on constate que  $\Gamma_e \approx \gamma_e$  pour  $\delta$  compris entre  $10^{-3}$  et  $10^{-2}$ , c'est-à-dire que ce second modèle redonne le

premier pour les valeurs de  $\delta$  du premier modèle.

Pour clore cette section, examinons l'approximation  $f(m) \propto m^{-5/3}$  faite plus haut. En fait,  $f(m)$  doit décroître plus vite que  $m^{-5/3}$  pour  $m > m_0$ , et de ce fait (60) surestime la production de particules d'une masse  $m$  donnée quelconque au cours de chocs entre particules de masses supérieures à  $m_0$ . La surestimation est négligeable pour les petites particules ( $m < m_0$ ) du fait même de la décroissance rapide de  $f(m)$  (cf pondération par  $f(m_1)f(m_2)$  dans (32)), car ces particules sont en quasi-totalité produites par des collisions entre particules de masses inférieures à  $m_0$ . La surestimation du nombre de grandes particules n'est pas importante car le terme en cause ( $(\partial f/\partial t)_{er2}$ ) est négligeable devant les autres termes (voir plus bas les résultats de ce modèle).

#### II.4.3 Reformulation des différents termes de (58):

L'expression de  $M_e$  est formellement la même que dans le modèle précédent, et donc on pourrait croire que les expressions des deux termes d'érosion vont a priori être peu modifiées, celle des termes d'accrétion ne changeant pas. Cependant, deux des conditions qui étaient satisfaites dans le premier modèle ne le sont plus maintenant:

i)  $M_e$  n'est plus négligeable devant les masses des deux particules en collision (il peut même devenir plus grand lors de collisions entre particules avec des vitesses relatives supérieures à  $c$ ). Les expressions (59) et (63) ne sont alors plus valables.

ii) De ce fait, la séparation des collisions avec accrétion des collisions avec érosion n'est plus aussi nette que ce qui est indiqué à la fin de la section II.2.2.

On résout la première difficulté en limitant la valeur de  $M_e$  à une valeur limite  $M_1$ . Nous avons la encore besoin d'une hypothèse permettant de définir cette valeur limite. On peut au moins obtenir un ordre de grandeur raisonnable de la façon suivante. Le modèle que l'on considère ici implique plus ou moins nécessairement que les particules pouvant accréter sont en fait constituées d'une particule centrale monobloc

constituant en quelque sorte un noyau, entouré d'une "couche" de particules accrétée au cours des diverses collisions qu'a subie le corps central. Cette couche, dont l'épaisseur est de l'ordre de  $\delta r$  où  $r$  est le rayon du corps central, représente la masse maximale qui puisse être arrachée au cours d'une collision. On trouve donc:

$$M_L = \xi \sup(m, \mu) \quad (64a)$$

$$\xi = \frac{(1 + \delta)^3 - 1}{(1 + \delta)^3} \quad (64b)$$

où  $m$  est la masse érodée.

Occupons-nous maintenant de la deuxième difficulté. Celle-ci n'est pas levée par la limitation de  $M_e$  car on peut encore avoir  $M_L$  plus grand que la plus petite des deux masses en collision. Une manière simple de tourner le problème est la suivante: si  $\mu$  désigne la plus petite des deux masses en collision, on considérera qu'il y a accrétion sans érosion lorsque  $M_e < \mu$ , et érosion sans accrétion dans le cas contraire (cette approximation est correcte à un facteur de l'ordre de deux près).

Il ne nous reste plus qu'à recalculer chacun des quatre termes de l'équation (58) dans l'optique des paragraphes précédents. Dans toute la suite, on se place dans le cas  $m_0 > 8m_c$ , qui est le seul à avoir été étudié dans chacun des deux modèles.

#### II.4.3.1 Calcul de $(\partial f / \partial t)_{ac}$

La discussion du paragraphe précédent montre que seule l'expression (44b) doit être changée dans le cas où  $\mu < M_e$ . Comme dans le modèle précédent (et de manière plus poussée), j'ai résolu numériquement

l'équation finale. De manière à modifier aussi peu que possible le programme déjà écrit, j'ai procédé de la façon suivante.

On définit  $X_1$  par:

$$M_e^0 X_1^q = \inf(m, \mu) \quad (65a)$$

$$M_e^0 = \Gamma_e \left[ \frac{3}{4\pi\varrho} \right]^{q/3} \left[ \frac{\Omega}{2} \right]^q (m^{1/3} + \mu^{1/3})^q \inf(m, \mu) \quad (65b)$$

où  $M_e^0$  est la masse maximale éjectée au cours d'une collision entre deux particules de masse  $m$  et  $\mu$  (on vérifie que pour  $\mu < \delta^3 m$ , comme c'est le cas ici, l'expression (65b) est plus petite que (64)).

On en tire:

$$X_1 = \left[ \frac{2 - \alpha_0}{\delta^3 \eta} \right]^{1/q} \frac{m_0^{1/3}}{m^{1/3} + \mu^{1/3}} \quad (66)$$

où l'on a exprimé  $\Gamma_e$  à l'aide de (63) et  $c$  en fonction de  $m_0$ .

La possibilité  $M_e > \mu$  est équivalente à  $X_1 < 1$ . On considèrera simplement que dans ce cas, il n'y a pas accrétion. Un calcul identique à ce qui a été fait dans le premier modèle donne alors:

$$J'_2 = \left[ \frac{3}{4\pi\bar{q}} \right]^{2/3} \pi c (m_0^{1/3} + \mu^{1/3}) m_0^{1/3} + \frac{\Omega}{2\pi\bar{q}} (m^{1/3} + \mu^{1/3})^3 \sin^3 \theta_0 \quad \text{si } X_1 \geq 1 \quad (67a)$$

$$J'_2 = \left[ \frac{3}{4\pi\bar{q}} \right]^{2/3} \pi c (m_0^{1/3} + m^{1/3}) m_0^{1/3} + \frac{\Omega}{2\pi\bar{q}} (m^{1/3} + \mu^{1/3})^3 (\sin^3 \theta_0 - \sin^3 \theta_1) \quad \text{si } X_1 < 1 \quad (67b)$$

où  $J'_2$  est la quantité préalablement définie en (44b),  $\sin\theta_0$  la quantité habituelle, et où l'on a posé:

$$\sin\theta_1 = (1 - X_1^2)^{1/2} \quad (68)$$

Le test sur  $X_1$  est effectué dans le programme.

En résumé,  $(\partial f/\partial t)_{ac1}$  est maintenant donné par (26), (44a), (66), (67), (68), (45) et (T2).

#### II.4.3.2 Calcul de $(\partial f/\partial t)_{ac2}$ :

Le calcul vient d'être fait pour  $(\partial f/\partial t)_{ac1}$ . Ce terme est maintenant donné par (47), (44a), (66), (67), (68), et (T3). (Notons que  $X_1$  est symétrique en  $m$  et  $\mu$  et que l'échange des rôles des deux masses ne change pas (66) ).

### II.4.3.3 Calcul de $(\partial f/\partial t)_{er}$ :

Deux cas sont à distinguer:  $m < m_c$  et  $m > m_c$ .

Pour  $m < m_c$ , les particules n'accrètent pas, et leur type d'érosion est celui du premier modèle. Le calcul fait alors est encore valable.

Pour  $m > m_c$ , l'érosion est celle discutée ci-dessus.

Lorsque les deux particules en collision (de masses  $m$  et  $\mu$ ) sont telles que  $m^{1/3} + \mu^{1/3} < m_0^{1/3}$  (c'est-à-dire dans le cas  $r_s < r_0$  du calcul de  $\dot{m}_{er}$  du premier modèle), l'intégrand  $J_1$  de (38) est formellement correct: il suffit de remplacer  $\gamma_e$  par  $\Gamma_e$  et  $p$  par  $q$ . On pose donc:

$$J_3 = \left[ \frac{3}{4\pi G} \right]^{2/3} \pi c^{q+1} \inf(m,\mu) \Gamma_e \alpha(m,\mu) (m^{1/3} + \mu^{1/3})^2 f(\mu,t) \quad (69)$$

Dans le cas contraire, il faut étendre le domaine d'intégration de  $m_{er}$  à  $[m_{min}, m_{max}]$  pour inclure les collisions où  $\mu < \delta^3 m$  ou  $\mu > m/\delta^3$  conduisent à une érosion.

On définit une nouvelle quantité  $X_2$  par:

$$M_e^0 X_2^q = M_l \quad (70a)$$

où  $M_e^0$  est la quantité définie au II.4.3.1, et  $M_l$  celle introduite au début du II.4.3.

A l'aide de (64) et (65b), on obtient:

$$X_2 = \left[ \frac{2 - q_0}{\delta^3 \eta} \xi \frac{\inf(m, \mu)}{\sup(m, \mu)} \right]^{1/q} \frac{m_0^{1/3}}{m^{1/3} + \mu^{1/3}} \quad (70b)$$

Nous pouvons maintenant recalculer la quantité définie en (40). Le calcul est similaire à celui fait alors et amène à envisager deux sous-cas.

i)  $\mu < \delta^3 m$  ou  $\mu > m/\delta^3$ :

On vérifie facilement que dans ce cas l'inégalité  $X_1 < X_2$  est toujours satisfaite. L'intégration donne alors:

$$J_4 = 0 \quad \text{si } 1 \leq X_1 \leq X_2 \quad (71a)$$

$$J_4 = 4 \left[ \frac{3}{4\pi\theta} \right]^{(q+3)/3} \left[ \frac{\Omega}{2} \right]^{q+1} (m^{1/3} + \mu^{1/3})^{q+3} \Gamma_q \alpha(m, \mu) \inf(m, \mu) f(\mu) I(\theta_1, q) \\ \text{si } X_1 \leq 1 \leq X_2 \quad (71b)$$

$$J_4 = 4 \left[ \frac{3}{4\pi\theta} \right]^{(q+3)/3} \left[ \frac{\Omega}{2} \right]^{q+1} (m^{1/3} + \mu^{1/3})^{q+3} \Gamma_q \alpha(m, \mu) \inf(m, \mu) f(\mu) \times \\ \left\{ [I(\theta_1, q) - I(\theta_2, q)] + X_2^q \sin^3 \theta_2 / 3 \right\} \\ \text{si } X_1 \leq X_2 \leq 1 \quad (71c)$$

ou  $\sin \theta_1$  est défini par (68) et avec:

$$\sin\theta_2 = (1 - X_2^2)^{1/2} \quad (72)$$

$I(\theta, q)$  est la fonction définie en (41).

ii)  $\delta^3 m < \mu < m/\delta^3$ :

Seul  $X_2$  intervient:

$$J_4 = \left[ \frac{3}{4\pi\theta} \right]^{2/3} \pi c^{q+1} \inf(m, \mu) \Gamma_e \alpha(m, \mu) (m^{1/3} + \mu^{1/3}) m_0^{1/3} f(\mu, t) +$$

$$4 \left[ \frac{3}{4\pi\theta} \right]^{(q+3)/3} \left[ \frac{\Omega}{2} \right]^{q+1} (m^{1/3} + \mu^{1/3})^{q+3} \Gamma_e \alpha(m, \mu) \inf(m, \mu) f(\mu) I(\theta_0, q)$$

si  $1 \leq X_2$  (73a)

$$J_4 = \left[ \frac{3}{4\pi\theta} \right]^{2/3} \pi c^{q+1} \inf(m, \mu) \Gamma_e \alpha(m, \mu) (m^{1/3} + \mu^{1/3}) m_0^{1/3} f(\mu, t) +$$

$$4 \left[ \frac{3}{4\pi\theta} \right]^{(q+3)/3} \left[ \frac{\Omega}{2} \right]^{q+1} (m^{1/3} + \mu^{1/3})^{q+3} \Gamma_e \alpha(m, \mu) \inf(m, \mu) f(\mu) \times$$

$$\left[ I(\theta_0, q) - I(\theta_2, q) + X_2^3 \sin^3 \theta_2 / 3 \right]$$

si  $X_2 \leq 1$  (71c)

où  $\theta_0$  est le paramètre habituel.



Nous sommes maintenant en mesure d'écrire l'expression finale de  $\dot{m}_{er}$ . Pour fixer les idées, nous allons nous placer dans l'hypothèse  $(\delta^3/(1+\delta)^3)m_0 < m_c < m_0/8$ , qui est la seule à avoir été examinée (les autres sont laissées en exercice au lecteur courageux qui est parvenu jusque là).

$$m_{min} \leq m \leq \left[ \frac{\delta}{1+\delta} \right]^3 m_0 \quad : \quad \dot{m}_{er} = \int_{\mu_{min}}^{\mu_{max}} J_1 d\mu \quad (74a)$$

$$\left[ \frac{\delta}{1+\delta} \right]^3 m_0 \leq m \leq m_c \quad : \quad \dot{m}_{er} = \int_{\mu_{min}}^{\mu_c} J_1 d\mu + \int_{\mu_c}^{\mu_{max}} J_2 d\mu \quad (74b)$$

$$m_c \leq m \leq m_0/(1+\delta)^3 \quad : \quad \dot{m}_{er} = \int_{\mu_{min}}^{\mu_c} J_3 d\mu + \int_{\mu_c}^{\mu_{max}} J_4 d\mu \quad (74c)$$

$$m_0/(1+\delta)^3 \leq m \leq m_{max} \quad : \quad \dot{m}_{er} = \int_{\mu_{min}}^{\mu_{max}} J_4 d\mu \quad (74d)$$

où  $\mu_{min}$  et  $\mu_{max}$  sont précisés de (42a) à (42c),  $\mu_c$  en (42g),  $J_1$  et  $J_2$  en (38) et (40),  $J_3$  et  $J_4$  ci-dessus de (69) à (73).

Les tests sur les valeurs de  $X_1$  et  $X_2$  sont effectués numériquement. Remarquons pour conclure que pour  $m < m_c$ , le terme d'érosion ainsi calculé sera négligeable devant les termes d'accrétion puisqu'il repose sur le type d'érosion du premier modèle.

#### II.4.3.3 Calcul de $(\partial f/\partial t)_{er2}$

La discussion est assez similaire à celle de la section précédente.

Deux remarques permettent de simplifier les expressions:

i) L'érosion des particules de masses inférieures à  $m_c$  est environ  $10^5$  fois moins efficace que celle des particules de masses supérieures à  $m_c$ . On peut donc négliger la contribution des premières aux intégrales, ce qui allège sensiblement le calcul.

ii) Le choix fait en (60) pour la fonction de distribution des particules éjectées au cours d'une érosion ainsi que la contrainte (62) montrent qu'une masse  $m$  ne peut être produite au cours d'un choc entre deux particules de masses  $m_1$  et  $m_2$  ( $m_1 < m_2$ ) que si  $m_1 \geq m/\delta^3$ . On obtient alors les expressions des nouvelles bornes d'intégration en remplaçant  $m/\Gamma$  par  $m/\delta^3$ .

Compte-tenu de ces deux remarques, les équations (55a) et (55b) deviennent:

$$\mu'_{\min 1} = \sup(m/\delta^3, \delta^3 m_2) \quad (75a)$$

$$\mu'_{\min 2} = \sup(m_c, \delta^3 m_2) \quad (75b)$$

Les mêmes considérations que celles développées pour le premier terme d'érosion s'appliquent. Les deux mêmes cas sont à distinguer:

i)  $m_1 < \delta^3 m_2$ :

Avec les mêmes définitions de  $X_1$  et  $X_2$ , on a encore  $X_1 < X_2$  et l'intégrand  $J_2''$  devient:

$$J_3'' = 0 \quad \text{si } 1 \leq X_1 \leq X_2 \quad (76a)$$

$$J_3'' = \left[ \frac{3}{4\pi Q} \right]^{(q+3)/3} 4/c^q (\Omega/2)^{q+1} (m_1^{1/3} + m_2^{1/3})^{q+3} I(\theta_1, q) \\ \text{si } X_1 \leq 1 \leq X_2 \quad (76b)$$

$$J_3'' = \left[ \frac{3}{4\pi Q} \right]^{(q+3)/3} 4/c^q (\Omega/2)^{q+1} (m_1^{1/3} + m_2^{1/3})^{q+3} [ I(\theta_1, q) - \\ I(\theta_2, q) + X_2^q \sin^3 \theta_2 / 3 ] \quad \text{si } X_1 \leq X_2 \leq 1 \quad (76c)$$

avec les mêmes définitions de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

ii)  $\delta^3 m_2 < m_1$ :

Seul  $X_2$  intervient:

$$J_3'' = \left[ \frac{3}{4\pi Q} \right]^{2/3} \pi c (m_1^{1/3} + m_2^{1/3}) m_0^{1/3} + \\ \left[ \frac{3}{4\pi Q} \right]^{(q+3)/3} 4/c^q (\Omega/2)^{q+1} (m_1^{1/3} + m_2^{1/3})^{q+3} I(\theta_0, q) \\ \text{si } X_2 \geq 1 \quad (76d)$$

$$J_3'' = \left[ \frac{3}{4\pi Q} \right]^{2/3} \pi c (m_1^{1/3} + m_2^{1/3}) m_0^{1/3} + \\ \left[ \frac{3}{4\pi Q} \right]^{(q+3)/3} 4/c^q (\Omega/2)^{q+1} (m_1^{1/3} + m_2^{1/3})^{q+3} [ I(\theta_0, q) - \\ I(\theta_2, q) + X_2^q \sin^3 \theta_2 / 3 ] \quad \text{si } X_2 \leq 1 \quad (76e)$$

où  $\theta_0$  et  $\theta_1$  ont toujours la même signification.

Il ne reste plus qu'à écrire l'expression finale du terme recherché dans le cas qui nous intéresse ( $m_c < m_0/8$ ):

$$m_{\min}^3 < m < \delta^3 m_0/8 :$$

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{er2} = f(m) \int_{\mu_{\min 2}}^{m_0/8} dm_2 f(m_2) \int_{\mu_{\min 1}}^{m_2} dm_1 \frac{f(m_1)}{\delta^3 m_1 f(\delta^3 m_1)} J_1'' +$$

$$f(m) \int_{\mu_2}^{\mu_3} f(m_2) dm_2 \left[ \int_{\mu_{\min 1}}^{\mu_4} dm_1 \frac{f(m_1)}{\delta^3 m_1 f(\delta^3 m_1)} J_1'' + \int_{\mu_4}^{m_2} dm_1 \frac{f(m_1)}{\delta^3 m_1 f(\delta^3 m_1)} J_3'' \right] +$$

$$f(m) \int_{\mu_3}^{m_{\max}} dm_2 f(m_2) \int_{m/\delta^3}^{m_2} dm_1 \frac{f(m_1)}{\delta^3 m_1 f(\delta^3 m_1)} J_3'' \quad (77a)$$

$$\delta^3 m_0/8 < m < \delta^3 m_{\max} :$$

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{er2} = f(m) \int_{\mu_{\min 2}}^{m_{\max}} dm_2 f(m_2) \int_{m/\delta^3}^{m_2} dm_1 \frac{f(m_1)}{\delta^3 m_1 f(\delta^3 m_1)} J_3'' \quad (77b)$$

$$\delta^3 m_{\max} < m < m_{\max} :$$

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{er2} = 0 \quad (77c)$$

avec  $J_1''$  défini par (57a),  $J_3''$  par (76) et les bornes inférieures des intégrales par (75), et où l'on a posé.

$$\mu_3 = (m_0^{1/3} - m^{1/3}/\delta)^3 \quad (77e)$$

$$\mu_4 = (m_0^{1/3} - m_2^{1/3})^3 \quad (77f)$$

#### II.4.4 Présentation des résultats:

Le programme utilisé est celui du modèle précédent, modifié en accord avec les nouvelles expressions des différents termes de l'équation. Les caractéristiques sont donc celles qui ont été exposées dans la section II.3.5. En particulier, le nombre de points de discrétisation est à peu près le même (52 ici contre 50 auparavant); les intégrales sont toujours calculées par la méthode des trapèzes, et les dérivées par un algorithme sur trois points. Des contraintes internes, qu'il serait un peu long d'exposer, ne permettent pas de répartir les points de discrétisation régulièrement sur tout le domaine (on pourrait s'affranchir de cette contrainte au détriment du temps calcul); en particulier, la densité de points autour de  $m_p$  est plus importante que dans le reste du domaine de masse. Le nombre de points d'échantillonnage étant limité (essentiellement par des impératifs de temps calcul, voir plus bas), il n'est plus possible de prendre  $m_{min} \approx 1$  cm, mais  $m_{min}$  est maintenant compris entre 10 et 20 centimètres. Ceci n'a d'ailleurs que peu d'incidence sur le résultat car les intégrales de borne inférieure  $m_{min}$  sont convergentes en 0.

La recherche numérique de la solution comporte les mêmes étapes.

*i) Recherche "à la main" d'une solution approchée:*

J'ai essayé le même type de fonctions que dans le premier modèle, pour des valeurs de  $\delta$  comprises entre 0.1 et 0.5. Le meilleur résultat a été obtenu pour  $\delta = 0.4$  et avec une fonction de distribution en  $r^{-3}$  pour  $r < r_0$  et en  $r^{-6}$  pour  $r > r_0$ . Ces résultats sont donnés en appendice C. Les valeurs des autres paramètres sont les mêmes que dans le modèle précédent. On a de plus  $q = 2$ , et  $r_g = 2 \cdot 10^6$ .

~~Le premier tableau de résultats fournit de nouveau à~~ chaque ligne: le rayon des particules en mètres, la masse correspondante en kg, la fonction de distribution en rayon, la fonction de distribution en masse, les valeurs de  $T_1 = (\partial f / \partial t)_{er1}$ ,  $T_2 = (\partial f / \partial t)_{ac1} + (\partial f / \partial t)_{ac2}$ ,  $T_3 = (\partial f / \partial t)_{er2}$ ,  $T_4$  = la somme de ces termes. Comme précédemment, la fonction de distribution est donnée en nombre de particules par  $m^3$  (de volume des anneaux) et par  $m$  (de rayon des particules) ou kg (masse des particules), avec une épaisseur des anneaux normalisée à un mètre. Pour  $r \gg r_c$ , le premier terme d'accrétion domine assez vite la somme des deux termes d'accrétion comme l'indique le changement de signe.

Le deuxième tableau de résultats donne les rapports  $r_1 = T_1 / T_4$ ,  $r_2 = T_2 / T_4$  et  $r_3 = T_3 / T_4$ . Ces rapports permettent de comprendre comment l'équilibre s'établit. Pour  $m \ll m_0$ , on constate que  $r_2$  et  $r_3$  sont de signes contraires, et plus grands que (voire très grand devant) l'unité, alors que  $r_1$  est négligeable. Ceci indique que dans ce domaine de masse, l'équilibre s'établit par compensation mutuelle des deuxièmes termes d'accrétion et d'érosion, les deux autres étant négligeables. Pour  $m \gg m_0$ , l'examen des résultats et un raisonnement analogue montrent que l'équilibre s'établit par compensation de la somme des premiers termes d'érosion et d'accrétion. Les points du voisinage de  $m_{max}$  ont un comportement sensiblement différent, qui est en fait un problème purement numérique dû à la coupure brutale de certaines intégrales en  $m = m_{max}$ . Pour les valeurs de  $m \approx m_0$ , on a une situation intermédiaire

où tous les termes sont du même ordre de grandeur.

*ii) Résolution numérique par une méthode itérative en partant de la meilleure approximation de la solution obtenue par la première étape:*

Après discrétisation, la fonction continue  $f(m)$  est remplacée par un tableau monodimensionnel de  $n$  inconnues  $f(m_i)$  où les  $m_i$  sont les  $n$  valeurs des masses retenues. En calculant les intégrales par la méthode des trapèzes et les dérivations par un développement de Taylor, on remplace l'équation intégral-différentielle fondamentale du problème en un système de  $n$  équations algébriques non-linéaires à  $n$  inconnues  $f(m_i)$ , à second membre nul car on ne s'intéresse qu'au problème stationnaire. La résolution de ce système par une méthode itérative standard soulève deux difficultés:

i) Les différents termes de notre équation sont quadratiques par rapport à  $f$ . De plus,  $f$  décroît relativement vite pour les grandes valeurs de  $m$ , de sorte que le poids des dernières inconnues (correspondant aux plus grandes valeurs des paramètres  $m_i$ ) dans l'algorithme de résolution est très faible: on obtient généralement des valeurs correctes pour les premières inconnues, et des valeurs plus ou moins fantaisistes pour les dernières.

ii) Une solution particulière (et particulièrement inintéressante) de notre équation est  $f(m) = 0$ . Par ailleurs, si  $f(m)$  est solution,  $\alpha f(m)$  sera également solution. Or, dans la quasi-totalité des algorithmes de résolution de systèmes algébriques, on cherche la solution en minimisant la somme des carrés des premiers membres du système d'équation. Il est évident que la meilleure minimisation possible est celle où  $\alpha = 0$  (car alors les premiers membres sont tous nuls), et tout algorithme glisse naturellement vers cette solution en remplaçant  $f$  par  $\alpha f$  avec  $\alpha$  tendant vers zéro.

La première difficulté est résolue en utilisant comme variables  $f/f_0$  au lieu de  $f$ , où  $f_0$  est la fonction d'essai, ce qui revient à

normaliser les inconnues à un.

La seconde difficulté est éliminée à l'aide de l'astuce suivante.

Au lieu de résoudre l'équation:

$$(\text{somme des termes}) = 0$$

résolvons l'équation:

$$\frac{(\text{somme des termes})}{(\text{somme des valeurs absolues des termes})} = 0$$

Comme l'équilibre est obtenu par compensation mutuelle des différents termes, le dénominateur n'est jamais nul. Par ailleurs, l'algorithme n'a plus tendance à converger vers la solution identiquement nulle, puisque s'il réduit  $f$ , il réduit le numérateur et le dénominateur dans les mêmes proportions (Si on remplace  $f$  par  $\alpha f$ , numérateur et dénominateur sont multipliés par  $\alpha^2$  et le quotient reste inchangé).

Dans l'algorithme que j'ai utilisé (HYBRID; origine: MIT), la correction est obtenue à chaque itération par une combinaison linéaire des méthodes de la plus grande pente (pour la sûreté de la convergence) et de Newton-Raphson (pour la rapidité du calcul).

Le résultat de cette résolution numérique est donné en appendice D. La fonction d'essai est celle obtenue au II et présentée en appendice C; les divers paramètres du modèle ont naturellement les mêmes valeurs.

Comme précédemment (ou presque), le premier tableau de résultats fournit de nouveau à chaque ligne: le rayon des particules, la masse



correspondante, la fonction de distribution en rayon. Les valeurs de  $(\partial f/\partial t)_{er1}$ ,  $(\partial f/\partial t)_{ac1}$ ,  $(\partial f/\partial t)_{ac2}$ ,  $(\partial f/\partial t)_{er2}$ , et la somme de ces termes. La fonction de distribution est toujours donnée en nombre de particules par  $m^3$  (de volume des anneaux) et par mètre (rayon des particules), avec une épaisseur des anneaux normalisée à un mètre.

Les valeurs de la solution pour les deux ou trois premières et huit à dix dernières valeurs de  $f(r)$  n'ont aucune signification physique. Les premières valeurs sont biaisées d'une part du fait de la coupure inférieure des intégrales à  $m_{min}$ , et d'autre part en raison de l'influence extrêmement locale des premières inconnues sur le système total: on vérifie en effet facilement que les premières inconnues ont un poids faible (convergence des intégrales en lorsque  $m_{min}$  tend vers 0) ou nul (lorsque les bornes des intégrales sont plus grandes que les masses des points de discrétisation proches de  $m_{min}$ ) sur l'ensemble du système d'équations, les premières équations exceptées. L'algorithme choisit donc une solution minimisant localement la norme des second membre des équations (résidus) de manière compatible avec le choix de  $m_{min}$ . Les valeurs des dernières inconnues sont elles complètement forcées par la coupure des intégrales en  $m_{max}$ , dont l'effet se fait principalement ressentir sur les dix dernières équations.

La courbe  $f(r)$  est représentée sur la figure 2.8 (on a supprimé les points litigieux). L'irrégularité de la courbe me semble être principalement l'effet du faible échantillonnage (50 valeurs réparties entre  $10^2$  et  $10^9$ ), qui a une double influence: d'une part, il favorise la tendance de l'algorithme à choisir des minima "locaux", et d'autre part, il influe largement sur le calcul des dérivations par rapport à la masse. En effet, celles-ci se font à l'aide d'une formule sur trois points avec une estimation spéciale nettement moins précise pour les points "extrêmes", or, l'existence de fonctions anguleuses oblige à répartir certains de ces points à l'intérieur du domaine de masse (le programme sous sa forme actuelle n'est de toutes façons qu'un programme-test, et je n'ai pas cherché à optimiser ce genre de calculs).

Notons que l'augmentation du nombre de points ne peut se faire qu'au détriment d'un accroissement considérable du temps calcul: en

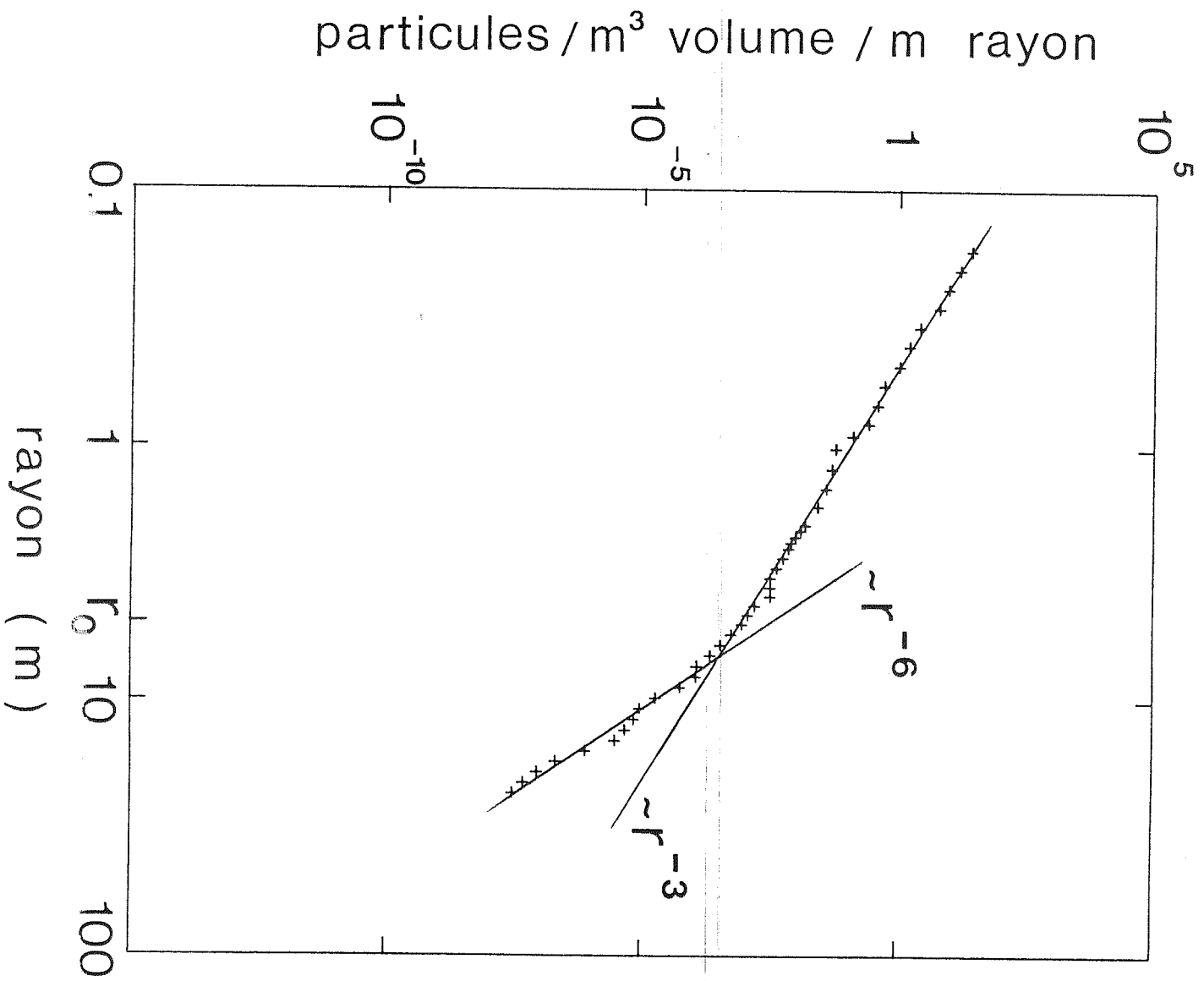


Fig. 2.8

effet, le nombre d'opérations requis pour l'évaluation du système d'équation est proportionnel à  $n^2$  ( $n$  est le nombre d'équations), à cause de l'intégrale double du terme  $(\partial f/\partial t)_{er2}$ ; à chaque itération, l'algorithme évalue le jacobien du système et résout un système linéaire d'ordre  $n$ , soit  $n$  évaluations du système au moins; de plus, la convergence demande environ  $n$  itérations, soit finalement un temps calcul global proportionnel à  $n^4$  au moins, ce qui est très rapidement prohibitif. A titre indicatif, la convergence s'est faite ici en 20 mn d'unité centrale sur un CDC 990. Doubler le nombre de points multiplie le temps calcul par un facteur 15: il nous faudrait 5h30 de CDC 990 !!! Il vaut mieux changer complètement de méthode de résolution. De plus, l'intérêt d'une augmentation de la précision du calcul est tout relatif, puisque, comme je l'ai mentionné dans l'introduction, ce modèle cherche en premier lieu à clarifier la manière dont l'équilibre s'établit plutôt qu'à donner des résultats quantitatifs très précis.

Plusieurs caractéristiques essentielles de cette courbe doivent être soulignées:

- i) On observe nettement une coupure de la distribution en  $r = r_0$ .
- ii) Les pentes sont à peu près celles de la fonction d'essai, soit  $f(r) \propto r^{-3}$  pour  $r < r_0$ , et  $f(r) \propto r^{-6}$  pour  $r > r_0$ .
- iii) On n'observe aucune particularité au voisinage de  $r = r_c$ .
- iv) La courbe peut être approximée avec une bonne précision par une fonction puissance par morceaux. L'approximation la plus simple consiste à prendre seulement deux exposants (-3 et -6). Une demi-douzaine d'exposants semble être un nombre largement suffisant pour représenter correctement la courbe.

La première de ces remarques donne confiance dans l'efficacité du mécanisme retenu pour expliquer la coupure de la distribution (cf préliminaire). La deuxième pourrait être utilisée en vue d'une résolution analytique approchée de l'équation intégral-différentielle de départ. La dernière suggère qu'il n'est pas nécessaire de résoudre numériquement un système comportant autant d'inconnues. On pourrait se contenter d'ajuster par moindres carrés non-linéaires une fonction puissance par morceaux (les inconnues étant les divers exposants). Le

procédé serait beaucoup plus économique en temps calcul (on réduit d'un facteur 10 le nombre d'inconnues), ce qui permettrait d'améliorer considérablement la question de l'échantillonnage.

Le deuxième tableau de résultats de l'appendice D concerne les vitesses d'érosion et d'accrétion des particules. On trouve successivement en ligne le rayon des particules, leurs masses,  $\dot{m}_{er}$ ,  $\dot{m}_{ac}$ . Il est intéressant de constater que pour  $r > r_0$ , on a  $\dot{m}_{er} \sim \dot{m}_{ac}$ . Ce résultat n'est pas surprenant puisque pour  $r \gg r_0$ , l'équation se réduit à  $(\partial f / \partial t)_{er1} + (\partial f / \partial t)_{ac1} = 0$  (les autres termes deviennent négligeables). L'interprétation quantitative est plus ambiguë. Si l'on excepte les dernières valeurs, qui n'ont pas de sens physique, la quantité  $m / (\dot{m}_{er} - \dot{m}_{ac})$  donne l'échelle de temps de variation de la masse d'une particule. Avec les données de l'appendice, elle est de l'ordre de 10 jours pour les valeurs de  $m$  supérieures à  $m_0$ , et pour une épaisseur des anneaux de 10 m. Mais cela indique-t-il le temps de survie moyen d'une particule, ou la précision avec laquelle les dérivations sont effectuées ?

Une autre quantité intéressante du point de vue des échelles de temps est le rapport  $f / (\partial f / \partial t)_{ac2}$ , qui indique le temps moyen au bout duquel une particule est accrétée par une particule plus grande. Ce temps caractéristique, n'est a priori pas trop dépendant de la précision du calcul, et fournit un meilleur indicateur de l'ordre de grandeur du temps de vie d'une particule donnée. Ce temps varie entre une dizaine d'heures pour les particules les plus petites et un an pour les particules de rayon  $r \approx 10$  m (on a choisi une épaisseur des anneaux de 10 m).

La conclusion de cette petite étude est que de toutes façons aucune particule ne peut survivre individuellement sur de longues échelles de temps.

En conclusion, remarquons que l'identification de  $r_0$  avec le rayon de coupure supérieure de la distribution permet d'obtenir la valeur de la dispersion de vitesse  $c$  en différentes positions des anneaux. On a en

effet  $c = r_0 \Omega / 2$ . En utilisant les valeurs de  $r_0$  déduites par Zebker et al. [8] à l'aide des données d'occultation radio des anneaux obtenues par Voyager, on trouve le tableau suivant de valeurs de  $c$ . La première colonne donne la position: C pour l'anneau C, CD pour la division de Cassini, A pour l'anneau A; les lettres sont suivies de la distance à la planète exprimées en rayons planétaires (le rayon de Saturne est de 60 330 km).

position	c en $10^{-4}$ m/s
C 1.35	6.0
C 1.51	2.7 - 5.9
CD 2.01	5.5
A 2.12	3.6
A 2.10	3.4
A 2.14	4.2
A 2.19	7.1
A 2.24	5.5

Ces estimations souffrent de plusieurs incertitudes d'origine différentes, difficiles à chiffrer:

- i) Dans ce modèle,  $c$  désigne la dispersion de vitesse relative, et non pas directement la dispersion de vitesse dans les anneaux.
- ii) On a supposé  $c$  indépendant de la masse des particules.
- iii) la détermination par Zebker et al. du rayon de coupure n'est pas précise à mieux de 50% (Tyler, communication personnelle).

Néanmoins, ces estimations suggèrent deux commentaires:

- i) Les régions de "faible" profondeur optique (anneau C, division de Cassini) semblent avoir une dispersion de vitesse plus grande que dans les régions de profondeur optique plus importante (anneau A partie extérieure exceptée). On peut voir là une confirmation de la relation  $\epsilon(r)$  due à Goldreich et Tremaine [10]: à l'équilibre,  $\epsilon$  est une fonction croissante de  $r$ ; comme  $\epsilon$  est également fonction de  $c$ , décroissante pour les matériaux usuels,  $c$  doit être à l'équilibre une fonction

décroissante de  $\tau$ .

ii) La croissance de  $c$  lorsqu'on s'approche du bord extérieur de l'anneau A peut être causé par un taux de perturbations plus fort de ces régions, dû à l'action des satellites de Saturne.

### II.5 DISCUSSION ET PERSPECTIVES:

La démarche générale et les conclusions essentielles de cette étude peuvent être résumées de la manière suivante.

Le mécanisme d'érosion présenté dans la section II.3 est en quelque sorte un mécanisme d'érosion "minimal" (les taux d'érosion des particules au cours des collisions sont au moins ceux prévus par ce mécanisme). Ce mécanisme prévoit une disparition rapide des particules, sur des périodes de l'ordre de 100 000 ans. Il est donc nécessaire d'envisager des processus d'accrétion pour rendre compte de la distribution actuelle des particules dans les anneaux. Le mécanisme d'accrétion envisagé est lui aussi sous certains aspects un mécanisme minimal, en ce sens que même en l'absence de toute force attractive de contact entre particule (collage, friction due aux aspérités des surfaces...), la gravité au moins demeure dans les conditions choisies pour lier les particules entre elles. Avec ces deux mécanismes, le premier modèle montre qu'il est impossible de considérer les particules comme des sphères dures, même dans un sens restreint, car l'accrétion, bien que "minimale" est trop efficace et détruit la distribution des anneaux sur des échelles de temps de l'ordre de l'année au plus. Dans le second modèle un mécanisme "d'érosion" vraisemblable est considéré pour résoudre le problème d'échelle de temps soulevé par le premier modèle. On peut alors obtenir une distribution stationnaire du type de celle rencontrée dans les anneaux, mais dans laquelle les particules ne survivent individuellement que pendant des périodes assez brèves, ce qui rapproche ce modèle de celui des DEBs [22]. Il en diffère cependant sur deux points essentiels:

i) le mécanisme créant la coupure supérieure de la distribution est totalement différent. En particulier, dans le modèle des DEBs, il ne

peut exister de particules de taille supérieure au rayon de coupure, ce qui n'est pas le cas ici.

ii) Dans le modèle des DEBs, les agrégats ne peuvent que croître jusqu'à leur destruction complète. Dans le modèle présenté ici, l'évolution de la taille des plus grandes particules est contrôlée par la quantité  $\dot{m}_{er} - \dot{m}_{ac}$ , qui peut être positive ou négative, conduisant à une croissance ou une diminution de la taille des particules concernées.

Le modèle dans sa forme actuelle pose des problèmes qui peuvent être groupés en deux catégories: les problèmes techniques, et les problèmes "conceptuels".

Mis à part toutes les questions d'échantillonnage qui ont été soulevées dans la section précédente, deux points me semblent entrer dans la première catégorie.

i) Il n'est pas absolument certain que la solution numérique que j'ai obtenue soit une solution d'équilibre, même si cela paraît très vraisemblable. L'algorithme peut avoir trouvé un minimum local du système d'équations, qu'il a pris pour une solution. Une manière de s'assurer de cette question serait de laisser évoluer en temps la solution trouvée.

ii) La formulation mathématique de l'équation, qui est assez adaptée dans le premier modèle, l'est moins dans le second, car la variation de masse d'une particule au cours d'une collision peut être assez importante. En particulier les expressions de  $(\partial f/\partial t)_{er}$  et  $(\partial f/\partial t)_{ac}$  ne sont peut-être plus très adaptées (les concepts de vitesses d'érosion et d'accrétion pour la masse d'une particule ne sont valides que si la masse varie assez lentement au cours des collisions). Toutefois, il ne s'agit probablement pas là d'une limitation importante.

Au nombre des problèmes conceptuels, je ne mentionnerai que le problème suivant.

Dans le modèle présenté au II.4, les particules de masse inférieure à  $m_c$  n'accrètent pas mais par contre sont érodées selon le mécanisme discuté dans le premier modèle. La question posée est donc celle de la survie à long terme de ces particules (et de la distribution). Leurs



"disparitions", si elles sont accrétées, ou "apparitions", si elles sont produites lors d'une érosion ne changent rien au problème puisque les particules produites sont celles précédemment accrétées. On peut avancer plusieurs arguments pour répondre à cette question:

i) Les auteurs de [22] considèrent que le processus d'érosion en cause est auto-limité: une fois qu'un régolithe est formé, sa présence même empêche toute érosion ultérieure. Il ne s'agit toutefois que d'une estimation qualitative, et a priori non justifiée.

ii) On pourrait envisager le scénario suivant: le nombre de particules de masse  $m$  à  $dm$  près reste constant car l'érosion fait entrer autant de particules dans la tranche  $dm$  qu'elle n'en fait sortir (on fait momentanément abstraction de l'accrétion ou de la production éventuelle de ces particules au cours des collisions). La distribution serait alors globalement en équilibre, à l'exception des plus grandes particules (disons de la taille du kilomètre), qui elles peuvent survivre beaucoup plus longtemps à l'érosion que les particules de l'ordre du mètre. La question est alors de savoir si l'exposant de puissance de la distribution est le bon. A titre indicatif, le premier terme d'érosion s'annule pour une distribution proportionnelle à  $r^{-2}$  et pour des collisions se faisant toutes à la même vitesse relative [41], ce qui est plutôt défavorable. De toutes façons, même si l'on fait abstraction de cette question, l'application aux anneaux n'est pas évidente: comment combiner ce processus avec ceux de la section précédente pour retrouver la "bonne" distribution? Cela suppose-t-il de développer un modèle tenant compte de la structure et de l'histoire des particules? Le développement d'un tel modèle est-il possible?

iii) Le fait que les particules de masse  $m < m_c$  ne peuvent pas accréter est la conséquence d'une hypothèse simplificatrice faite au III.1: les collisions se font toutes avec la même vitesse relative  $v$ . En fait, on a une distribution de vitesses relatives (gaussienne ou autre), et certaines collisions peuvent donc quand même conduire à une accrétion.

iv) Un certain "collage" entre les particules en collision n'est pas à exclure. Dans ces conditions, les particules éjectées au cours d'une érosion peuvent avoir une distribution différente de celles qui ont été

accrétées au cours de collisions antérieures; de plus, les particules de masse  $m < m_c$  peuvent accréter. Toutefois, les critères d'accrétion ne sont plus les mêmes (notons à ce sujet que le modèle des DEBs suppose un certain collage, puisque les auteurs "fragmentent" leurs particules par effet de marée de manière *ad hoc* pour retrouver la distribution des anneaux; or, les critères d'accrétion sont purement gravitationnels, ce qui paraît contradictoire).

En conclusion, sans se polariser sur les inévitables problèmes que rencontre toute étude à caractère exploratoire, un certain nombre d'améliorations pourrait être apporté à ce modèle:

- i) Examiner de manière plus précise (numériquement ou autre) le critère d'accrétion discuté au II.1.2.
- ii) Introduire une fonction de distribution des vitesses relatives plus réaliste dans les calculs.
- iii) Essayer d'étudier un peu plus quantitativement le problème du collage entre particules. Un modèle phénoménologique est peut-être suffisant.

Quelques problèmes tentant pourraient être abordés rapidement. Par exemple, on a suggéré que la distribution des particules n'est pas continue, mais présente des "trous". Mon sentiment est que ceux-ci devraient disparaître très vite, étant donné les temps caractéristiques des phénomènes discutés dans ce modèle; une intégration numérique en temps est assez simple à programmer et résoudrait la question. Il serait aussi particulièrement intéressant d'appliquer ce modèle à d'autres systèmes d'anneaux, dont les anneaux d'Uranus, que Voyager II a récemment visités.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Laplace, P. S. de: Exposition du système du monde (Paris, 1796); *Oeuvres complètes de Laplace*, 14 vols. (Paris, 1878 - 1912), VI.
- [2] Laplace, P. S. de: Mécanique céleste (Paris, 1799 - 1825); *Oeuvres complètes de Laplace*, 14 vols. (Paris, 1878 - 1912), I - V.
- [3] Huyghens, C. : ~~Systema Saturnium~~ (1659); *Oeuvres complètes de Christiaan Huyghens*, vol. XV (La Hague, 1925).
- [4] Maxwell, J. C. : On the stability of motions of Saturn's rings (1859); *Scientific papers of James Clerk Maxwell* (Cambridge University Press, 1890), vol. I.
- [5] Jeffreys, H.: The effects of collisions on Saturn's rings; *M.N.R.A.S.*, **107**, 263-267 (1947).
- [6] Cuzzi, J. N. et al.: Saturn's rings: properties and processes; in *Planetary Rings*, University of Arizona Press; André Brahic et Richard Greenberg, éditeurs (1984).
- [7] Marouf, E. A. et al.: Particle-size distribution in Saturn's rings from Voyager I radio occultation; *Icarus*, **54**, 180-211 (1983).
- [8] Zebker, H. A. et al.: Saturn's rings: particle-size distributions from thin layer model; *Icarus*, **64**, 531-548 (1985).
- [9] Hartmann, W. K.: Terrestrial, lunar, and interplanetary rock fragmentation; *Icarus*, **10**, 201-213 (1969).

- [10] Goldreich, P., and Tremaine, S.: The velocity dispersion in Saturn's rings; *Icarus*, 34, 227-239 (1978).
- [11] Borderies, N., Goldreich, P., and Tremaine, S.: Perturbed particle disks; *Icarus*, 55, 124-132 (1983).
- [12] Hameen-Anttila, K. A.: An improved and generalized theory for the collisional evolution of Keplerian systems; *Astrophys. Sp. Sc.*, 58, 477-520 (1978).
- [13] Hameen-Anttila, K. A.: Quasi-equilibrium in collisional systems; *Moon Planets*, 25, 477-506 (1981).
- [14] Hameen-Anttila, and Lukkari, J.: Numerical simulations of collisions in Keplerian systems; *Astrophys. Sp. Sc.*, 71, 475-497 (1980).
- [15] Stewart, G. R., et al.: Collision-induced transport processes in planetary rings; in *Planetary Rings*, University of Arizona Press; André Brahic et Richard Greenberg, éditeurs (1984).
- [16] Shu, F. H., and Stewart, G. R.: The collisional dynamics of particulate disks; *Icarus*, 62, 360-382 (1985).
- [17] Shukhman, I. G.: Collisional dynamics of particles in Saturn's rings; *Astr. Zh.*, 61, 985-1004; Traduit dans *Sov. Astron. AJ*, 28, 574-585.
- [18] Araki, S. and Tremaine, S.: The dynamics of dense particle disks; *Icarus*, 65, 83-100 (1986).
- [19] Harris, A. W.: Collisional breakup in a planetary ring; *Icarus*, 24, 190-192 (1975).
- [20] Greenberg, R., et al.: Size distribution of particles in planetary

- rings; *Icarus*, 30, 769-779 (1977).
- [21] Davis, D. R., et al.: Saturn's ring particles as dynamic ephemeral bodies; *Science*, 224, 744-747 (1984).
- X [22] Weidenschilling, S. J., et al.: Ring particles: collisional interactions and physical nature; in *Planetary Rings*, University of Arizona Press; André Brahic et Richard Greenberg, éditeurs (1984).
- [23] Greenberg, R., et al.: Planetesimals to planets: numerical simulation of collisional evolution; *Icarus*, 35, 1-26 (1978).
- [24] Davis, D. R., et al.: Collisional evolution of asteroids: populations, rotations and velocities; in *Asteroids*, University of Arizona Press; T. Gehrels, éditeur (1979).
- X [25] Borderies, N., et al.: Unsolved problems in planetary ring dynamics; in *Planetary Rings*, University of Arizona Press; André Brahic et Richard Greenberg, éditeurs (1984).
- [26] Cuzzi, J. N., et al.: Density waves in Saturn's rings; *Nature*, 292, 703-707 (1981).
- [27] Brahic, A.: System of colliding bodies in a gravitational field: numerical simulation of the standard model; *Astron. Astrophys.*, 54, 895-907 (1977).
- [28] Cuzzi, J. N., et al.: The vertical structure and thickness of Saturn's rings; *Icarus*, 38, 54-68 (1979).
- [29] Goldreich, P. and Tremaine, S.: The dynamics of planetary rings; *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 20, 249-283 (1982).
- [30] Hornung, P.: Contribution à la dynamique du nuage protoplanétaire:

- dispersion des vitesses des planétésimaux; thèse de 3<sup>ème</sup> cycle (Université de Paris VI, 1983).
- [31] Horning, P., et al.: Thermal velocity equilibrium in the protoplanetary cloud; *Icarus*, 64, 295-307 (1985).
- [32] Harris, A. W.: Asteroids rotation rates; II. A theory for the collisional evolution of the rotation rates; *Icarus*, 40, 145-153 (1979).
- [33] Hartmann, W. K.: Comments on collision mechanics in ring systems; in proceedings of IAU-Colloquium 75, *Planetary Rings*, ed. A. Brahic (Toulouse, 1982).
- [34] Wetherill, G. W., and Cox, L. P.: The range of validity of the two-body approximation in models of terrestrial planet accumulation; *Icarus*, 60, 40-55 (1984).
- [35] Carusi, A., Valsecchi, G. B., Greenberg, R.: Outcome of planetary close encounters: validity of the two-body approximation; poster présenté au dernier D.P.S. meeting (Paris, 1986); résumé dans *B.A.A.Sé.*, 18, 719-856 (1986).
- [36] Durisen, R. H.: Transport effects due to particle erosion mechanisms; in *Planetary Rings*, University of Arizona Press; A. Brahic et R. Greenberg, éditeurs (1984).
- [37] Froidevaux, L., et al.: Thermal response of Saturn's ring particles during and after eclipse; *Icarus*, 46, 43-55 (1981).
- [38] Hartmann, W. K.: Continued low-velocity impact experiments at Ames vertical gun facility: miscellaneous results; *L'un. Plan. Sci. Abstracts*, XI, 404-406 (1980).

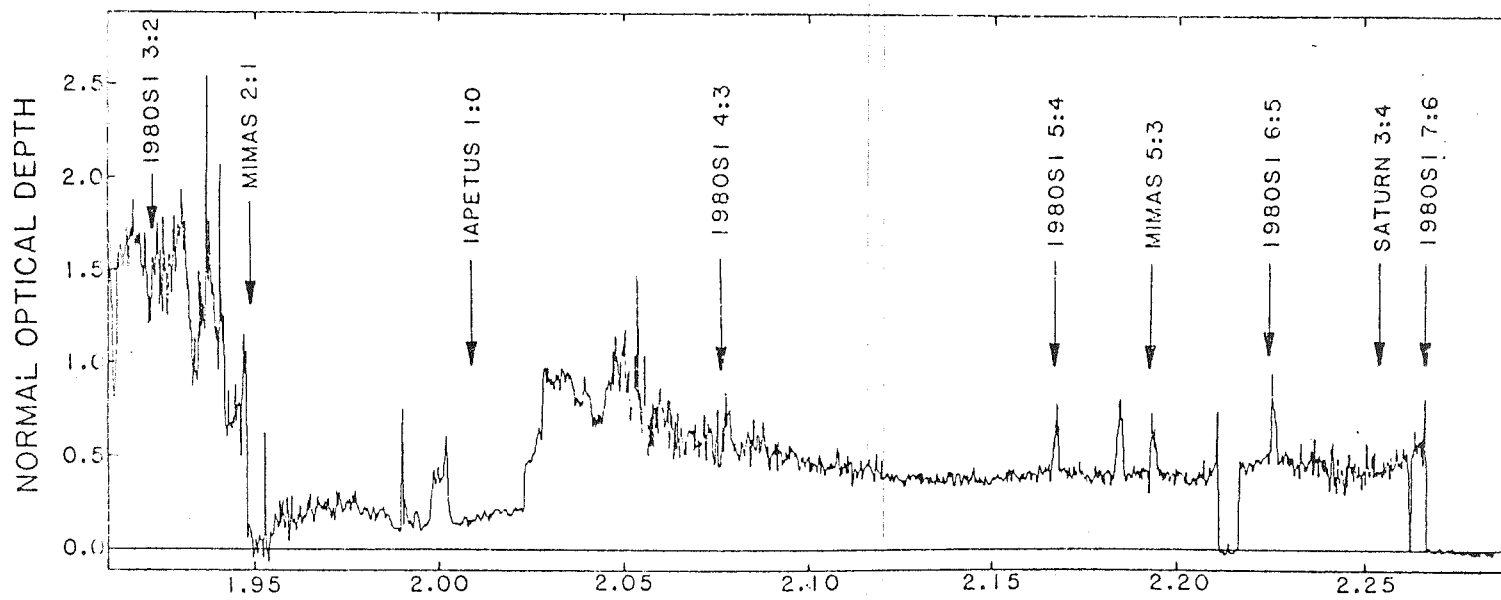
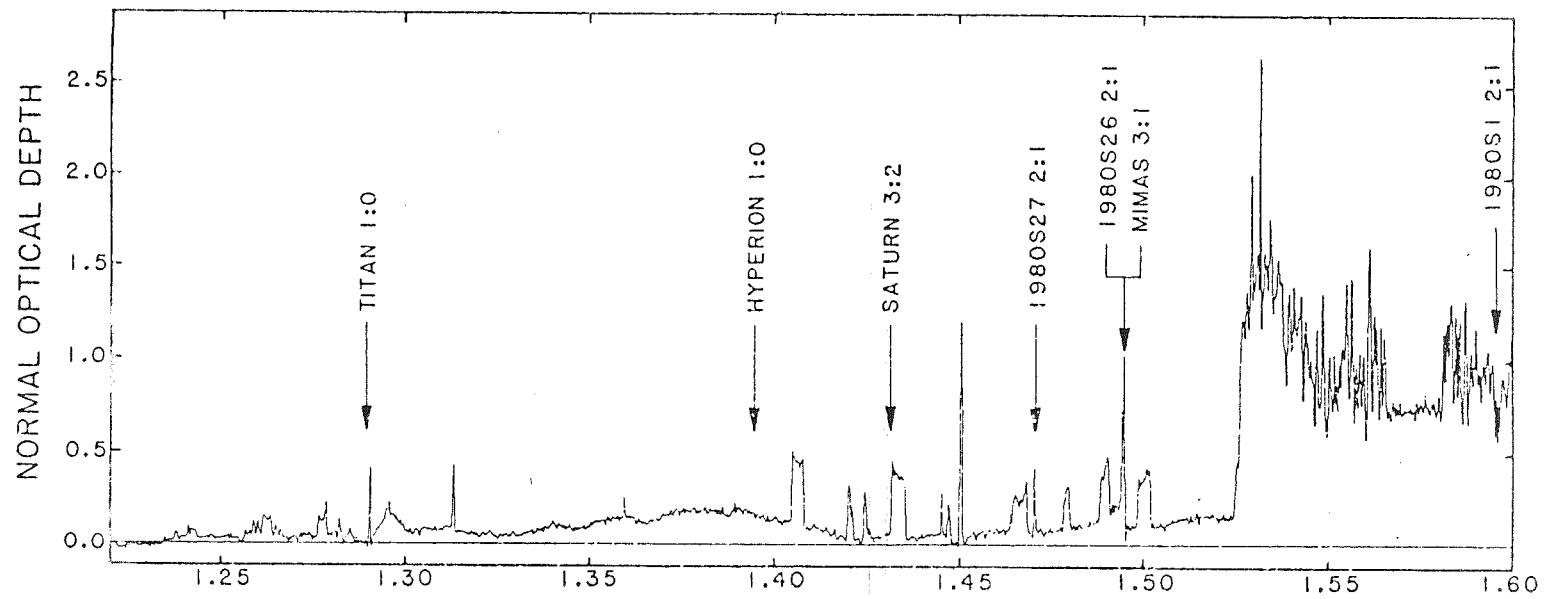
[39] Hartmann, W. K.: Planet formation: mechanism of early growth; *Icarus*, 33, 50-61 (1978)

[40] Gault, D. E., et al.: Spray ejected from the lunar surface by meteoroid impact, *NASA Rept. TND-1767* (1963).

[41] Dohnanyi, J. S.: Collisionnal model of asteroids and their debris; *J. Geophys. Res.*, 74, 2531-2554 (1969).

**APPENDICE A**





DISTANCE FROM SATURN CENTER ( $R_S$ )

FIGURE 1

**APPENDICE B**

FONCTION D'ESSAI : f(r) VARIE COMME R<sup>2</sup> POUR R > 9

r	f(r)	m(r)	f(r)	f(m)	er1	ac1+ac2	er2	somme
1	.552E-02	.528E-03	.595E+05	.207E+07	-.157E-05	-.450E+03	.761E+00	-.449E+03
2	.810E-02	.167E-02	.188E+06	.304E+06	-.118E-05	-.661E+02	.109E+00	-.560E+02
3	.119E-01	.528E-02	.595E+05	.446E+05	.373E-07	-.972E+01	.143E-01	-.970E+01
4	.133E-01	.738E-02	.425E+05	.255E+05	-.147E-06	-.530E+01	.801E-02	-.529E+01
5	.149E-01	.103E-01	.304E+05	.146E+05	-.990E-07	-.287E+01	.439E-02	-.287E+01
6	.210E-01	.289E-01	.109E+05	.262E+04	-.354E-07	-.415E+00	.695E-03	-.414E+00
7	.296E-01	.811E-01	.337E+04	.470E+03	.172E-07	-.562E-01	.105E-03	-.561E-01
8	.374E-01	.164E+00	.192E+04	.146E+03	-.165E-08	-.148E-01	.297E-04	-.148E-01
9	.472E-01	.331E+00	.951E+03	.453E+02	-.520E-09	-.392E-02	.820E-05	-.391E-02
10	.597E-01	.667E+00	.471E+03	.140E+02	-.163E-09	-.101E-02	.214E-05	-.101E-02
11	.754E-01	.125E+01	.233E+03	.435E+01	-.513E-10	-.267E-03	.573E-06	-.267E-03
12	.953E-01	.272E+01	.116E+03	.135E+01	-.160E-10	-.682E-04	.143E-05	-.681E-04
13	.120E+00	.549E+01	.572E+02	.419E+00	-.501E-11	-.166E-04	.329E-07	-.165E-04
14	.152E+00	.111E-02	.264E+02	.130E+00	-.156E-11	-.389E-05	.715E-08	-.388E-05
15	.192E+00	.224E+02	.140E+02	.403E-01	-.486E-12	-.748E-06	.104E-08	-.747E-06
16	.243E+00	.451E+02	.696E+01	.125E-01	-.151E-12	-.120E-06	.799E-10	-.120E-06
17	.307E+00	.911E+02	.345E+01	.387E-02	-.470E-13	.000E+00	.000E+00	-.470E-13
18	.388E+00	.184E+03	.171E+01	.120E-02	-.146E-13	.000E+00	.000E+00	-.146E-13
19	.491E+00	.371E+03	.846E+00	.373E-03	-.454E-14	.000E+00	.000E+00	-.454E-14
20	.620E+00	.750E+03	.419E+00	.116E-03	-.141E-14	.000E+00	.000E+00	-.141E-14
21	.784E+00	.151E+04	.208E+00	.358E-04	-.438E-15	.000E+00	.000E+00	-.438E-15
22	.991E+00	.306E+04	.103E+00	.111E-04	-.136E-15	.000E+00	.000E+00	-.136E-15
23	.125E+01	.617E+04	.509E-01	.345E-05	-.420E-16	.000E+00	.000E+00	-.420E-16
24	.156E+01	.125E+05	.252E-01	.107E-05	-.125E-16	.000E+00	.000E+00	-.125E-16
25	.200E+01	.251E+05	.125E-01	.332E-06	-.404E-17	.000E+00	.000E+00	-.404E-17
26	.215E+01	.314E+05	.100E-01	.229E-06	-.208E-17	.388E-13	.000E+00	.388E-13
27	.232E+01	.393E+05	.800E-02	.158E-06	-.150E-18	.299E-13	.000E+00	.299E-13
28	.250E+01	.491E+05	.640E-02	.109E-06	-.595E-16	.235E-13	.000E+00	.234E-13
29	.253E+01	.138E+05	.228E-02	.195E-07	-.284E-17	.760E-14	.000E+00	.760E-14
30	.497E+01	.386E+06	.814E-03	.350E-08	.182E-17	-.323E-14	.000E+00	-.323E-14
31	.498E+01	.337E+06	.811E-03	.347E-08	-.280E-19	.553E-15	.000E+00	.553E-15
32	.499E+01	.389E+06	.807E-03	.345E-08	-.275E-19	-.244E-13	.000E+00	-.244E-13
33	.499E+01	.391E+06	.804E-03	.342E-08	-.270E-19	.186E-14	.000E+00	.186E-14
34	.500E+01	.393E+06	.800E-03	.340E-08	-.277E-19	.131E-12	.000E+00	.131E-12
35	.577E+01	.605E+06	.450E-03	.143E-08	-.117E-18	.894E-15	.000E+00	.894E-15
36	.667E+01	.931E+06	.253E-03	.604E-09	-.583E-19	.344E-15	.000E+00	.344E-15
37	.770E+01	.140E+07	.142E-03	.255E-09	-.302E-19	.132E-15	.000E+00	.132E-15
38	.899E+01	.221E+07	.800E-04	.107E-09	-.162E-19	.571E-16	.000E+00	.571E-16
39	.103E+02	.340E+07	.450E-04	.453E-10	-.890E-20	.246E-16	.000E+00	.246E-16
40	.119E+02	.524E+07	.253E-04	.191E-10	-.499E-20	.106E-16	.000E+00	.106E-16
41	.137E+02	.806E+07	.142E-04	.805E-11	-.283E-20	.510E-17	.000E+00	.510E-17
42	.156E+02	.124E+08	.800E-05	.340E-11	-.162E-20	.228E-17	.000E+00	.227E-17
43	.183E+02	.191E+08	.450E-05	.143E-11	-.932E-21	.108E-17	.000E+00	.108E-17
44	.211E+02	.294E+08	.253E-05	.604E-12	-.540E-21	.523E-18	.000E+00	.522E-18
45	.243E+02	.453E+08	.142E-05	.255E-12	-.315E-21	.238E-18	.000E+00	.238E-18
46	.281E+02	.698E+08	.800E-06	.107E-12	-.186E-21	.121E-18	.000E+00	.121E-18
47	.325E+02	.109E+09	.450E-06	.453E-13	-.112E-21	.571E-19	.000E+00	.570E-19
48	.375E+02	.166E+09	.253E-06	.191E-13	-.695E-22	.268E-19	.000E+00	.267E-19
49	.433E+02	.255E+09	.142E-06	.805E-14	-.451E-22	.137E-19	.000E+00	.136E-19
50	.500E+02	.393E+09	.800E-07	.340E-14	-.248E-22	.199E-20	.000E+00	.196E-20

-5  
 FONCTION D'ESSAI: F(R) VARIE COMME R POUR R ) R  
 0

n	r(n)	m(n)	f(r)	f(m)	er1	aci+ac2	er2	somme
1	.552E-02	.528E-03	.595E+06	.207E+07	-.157E-05	-.318E+03	.157E+00	-.318E+03
2	.810E-02	.167E-02	.188E+06	.304E+06	-.118E-05	-.467E+02	.218E-01	-.467E+02
3	.119E-01	.528E-02	.595E+05	.446E+05	-.373E-07	-.687E+01	.280E-02	-.687E+01
4	.133E-01	.738E-02	.425E+05	.255E+05	-.147E-06	-.367E+01	.145E-02	-.367E+01
5	.149E-01	.103E-01	.304E+05	.146E+05	-.990E-07	-.194E+01	.728E-03	-.194E+01
6	.210E-01	.289E-01	.109E+05	.262E+04	-.354E-07	-.247E+00	.972E-04	-.247E+00
7	.296E-01	.811E-01	.387E+04	.479E+03	-.172E-07	-.261E-01	.110E-04	-.261E-01
8	.374E-01	.164E+00	.192E+04	.146E+03	-.165E-08	-.572E-02	.254E-05	-.572E-02
9	.472E-01	.331E+00	.951E+03	.453E+02	-.520E-09	-.125E-02	.553E-06	-.125E-02
10	.597E-01	.667E+00	.471E+03	.140E+02	-.163E-09	-.266E-03	.111E-06	-.266E-03
11	.754E-01	.135E+01	.233E+03	.435E+01	-.513E-10	-.612E-04	.241E-07	-.612E-04
12	.953E-01	.272E+01	.116E+03	.135E+01	-.160E-10	-.135E-04	.463E-08	-.135E-04
13	.120E+00	.549E+01	.572E+02	.419E+00	-.501E-11	-.281E-05	.847E-09	-.281E-05
14	.152E+00	.111E+02	.284E+02	.130E+00	-.156E-11	-.585E-06	.145E-09	-.585E-06
15	.192E+00	.224E+02	.140E+02	.403E-01	-.486E-12	-.957E-07	.163E-10	-.957E-07
16	.243E+00	.451E+02	.696E+01	.125E-01	-.151E-12	-.142E-07	.928E-12	-.142E-07
17	.307E+00	.911E+02	.345E+01	.387E-02	-.470E-13	.000E+00	.000E+00	-.470E-13
18	.388E+00	.184E+03	.171E+01	.120E-02	-.146E-13	.000E+00	.000E+00	-.146E-13
19	.491E+00	.371E+03	.846E+00	.373E-03	-.454E-14	.000E+00	.000E+00	-.454E-14
20	.620E+00	.750E+03	.419E+00	.116E-03	-.141E-14	.000E+00	.000E+00	-.141E-14
21	.784E+00	.151E+04	.208E+00	.358E-04	-.438E-15	.000E+00	.000E+00	-.438E-15
22	.991E+00	.305E+04	.103E+00	.111E-04	-.136E-15	.000E+00	.000E+00	-.136E-15
23	.125E+01	.617E+04	.509E-01	.345E-05	-.420E-16	.000E+00	.000E+00	-.420E-16
24	.158E+01	.125E+05	.252E-01	.107E-05	-.125E-16	.000E+00	.000E+00	-.125E-16
25	.200E+01	.251E+05	.125E-01	.332E-06	-.403E-17	.000E+00	.000E+00	-.403E-17
26	.215E+01	.314E+05	.100E-01	.229E-06	-.214E-17	.388E-13	.000E+00	.388E-13
27	.232E+01	.393E+05	.800E-02	.158E-06	-.150E-16	.299E-13	.000E+00	.299E-13
28	.250E+01	.491E+05	.640E-02	.109E-06	-.595E-16	.235E-13	.000E+00	.234E-13
29	.263E+01	.138E+06	.228E-02	.195E-07	-.289E-17	.760E-14	.000E+00	.760E-14
30	.297E+01	.386E+06	.814E-03	.350E-08	-.178E-17	-.323E-14	.000E+00	-.323E-14
31	.498E+01	.387E+06	.811E-03	.347E-08	-.728E-19	.553E-15	.000E+00	.553E-15
32	.499E+01	.389E+06	.807E-03	.345E-08	-.723E-19	-.244E-13	.000E+00	-.244E-13
33	.499E+01	.391E+06	.804E-03	.342E-08	-.718E-19	.186E-14	.000E+00	.186E-14
34	.500E+01	.393E+06	.800E-03	.340E-08	-.731E-19	.131E-12	.000E+00	.131E-12
35	.577E+01	.605E+06	.390E-03	.124E-08	-.199E-18	.107E-14	.000E+00	.107E-14
36	.667E+01	.931E+06	.190E-03	.453E-09	-.867E-19	.363E-15	.000E+00	.363E-15
37	.770E+01	.143E+07	.924E-04	.165E-09	-.379E-19	.124E-15	.000E+00	.124E-15
38	.889E+01	.221E+07	.456E-04	.604E-10	-.166E-19	.470E-16	.000E+00	.470E-16
39	.103E+02	.340E+07	.219E-04	.220E-10	-.735E-20	.178E-16	.000E+00	.178E-16
40	.119E+02	.524E+07	.107E-04	.805E-11	-.326E-20	.677E-17	.000E+00	.677E-17
41	.137E+02	.806E+07	.520E-05	.294E-11	-.144E-20	.282E-17	.000E+00	.282E-17
42	.158E+02	.124E+08	.253E-05	.107E-11	-.641E-21	.111E-17	.000E+00	.111E-17
43	.183E+02	.191E+08	.123E-05	.392E-12	-.284E-21	.456E-18	.000E+00	.456E-18
44	.211E+02	.294E+08	.600E-06	.143E-12	-.126E-21	.191E-18	.000E+00	.191E-18
45	.243E+02	.453E+08	.292E-06	.523E-13	-.559E-22	.767E-19	.000E+00	.767E-19
46	.281E+02	.698E+08	.142E-06	.191E-13	-.248E-22	.334E-19	.000E+00	.334E-19
47	.325E+02	.108E+09	.683E-07	.697E-14	-.110E-22	.137E-19	.000E+00	.137E-19
48	.375E+02	.166E+09	.337E-07	.255E-14	-.493E-23	.563E-20	.000E+00	.563E-20
49	.433E+02	.255E+09	.164E-07	.930E-15	-.222E-23	.246E-20	.000E+00	.245E-20
50	.500E+02	.392E+09	.800E-08	.340E-15	-.355E-24	.110E-21	.000E+00	.109E-21

FONCTION D'ESSAI: F(R) VARIE COMME R<sup>-6</sup> POUR R > R<sub>0</sub>

n	r(n)	m(n)	f(r)	f(m)	er1	ac1+ac2	er2	somme
1	.552E-02	.528E-03	.595E+06	.207E+07	-.157E-05	-.276E+03	-.833E-01	-.276E+03
2	.810E-02	.167E-02	.188E+06	.304E+06	-.118E-05	-.406E+02	.113E-01	-.406E+02
3	.119E-01	.528E-02	.595E+05	.446E+05	.373E-07	-.598E+01	.146E-02	-.598E+01
4	.133E-01	.738E-02	.425E+05	.255E+05	-.147E-06	-.316E+01	.707E-03	-.316E+01
5	.149E-01	.103E-01	.304E+05	.146E+05	-.990E-07	-.165E+01	.320E-03	-.165E+01
6	.210E-01	.289E-01	.109E+05	.262E+04	-.354E-07	-.194E+00	.359E-04	-.194E+00
7	.296E-01	.811E-01	.387E+04	.470E+03	.172E-07	-.166E-01	.284E-05	-.166E-01
8	.374E-01	.164E+00	.192E+04	.146E+03	-.165E-08	-.298E-02	.460E-06	-.298E-02
9	.472E-01	.331E+00	.951E+03	.453E+02	-.520E-09	-.518E-03	.672E-07	-.518E-03
10	.597E-01	.667E+00	.471E+03	.140E+02	-.163E-09	-.855E-04	.931E-08	-.855E-04
11	.754E-01	.135E+01	.233E+03	.435E+01	-.513E-10	-.165E-04	.144E-08	-.165E-04
12	.953E-01	.272E+01	.116E+03	.135E+01	-.160E-10	-.300E-05	.188E-09	-.300E-05
13	.120E+00	.549E+01	.572E+02	.419E+00	-.501E-11	-.517E-06	.257E-10	-.517E-06
14	.152E+00	.111E+02	.284E+02	.130E+00	-.156E-11	-.929E-07	.318E-11	-.928E-07
15	.192E+00	.224E+02	.140E+02	.403E-01	-.486E-12	-.125E-07	.265E-12	-.125E-07
16	.243E+00	.451E+02	.696E+01	.125E-01	-.151E-12	-.171E-08	.110E-13	-.171E-08
17	.307E+00	.911E+02	.345E+01	.387E-02	-.470E-13	.000E+00	.000E+00	-.470E-13
18	.388E+00	.184E+03	.171E+01	.120E-02	-.146E-13	.000E+00	.000E+00	-.146E-13
19	.491E+00	.371E+03	.846E+00	.373E-03	-.454E-14	.000E+00	.000E+00	-.454E-14
20	.620E+00	.750E+03	.419E+00	.116E-03	-.141E-14	.000E+00	.000E+00	-.141E-14
21	.784E+00	.151E+04	.208E+00	.358E-04	-.438E-15	.000E+00	.000E+00	-.438E-15
22	.991E+00	.306E+04	.103E+00	.111E-04	-.136E-15	.000E+00	.000E+00	-.136E-15
23	.125E+01	.617E+04	.509E-01	.345E-05	-.420E-16	.000E+00	.000E+00	-.420E-16
24	.158E+01	.125E+05	.252E-01	.107E-05	-.125E-16	.000E+00	.000E+00	-.125E-16
25	.200E+01	.251E+05	.125E-01	.332E-06	.403E-17	.000E+00	.000E+00	.403E-17
26	.215E+01	.314E+05	.100E-01	.229E-06	-.217E-17	.388E-13	.000E+00	.388E-13
27	.232E+01	.393E+05	.800E-02	.158E-06	-.151E-16	.299E-13	.000E+00	.299E-13
28	.250E+01	.491E+05	.640E-02	.109E-06	-.596E-16	.235E-13	.000E+00	.234E-13
29	.263E+01	.138E+06	.228E-02	.195E-07	-.292E-17	.760E-14	.000E+00	.760E-14
30	.497E+01	.386E+06	.814E-03	.350E-08	.175E-17	-.323E-14	.000E+00	-.323E-14
31	.498E+01	.387E+06	.811E-03	.347E-08	-.996E-19	.553E-15	.000E+00	.553E-15
32	.499E+01	.389E+06	.807E-03	.345E-08	-.991E-19	-.244E-13	.000E+00	-.244E-13
33	.499E+01	.391E+06	.804E-03	.342E-08	-.986E-19	.186E-14	.000E+00	.186E-14
34	.500E+01	.393E+06	.800E-03	.340E-08	-.100E-18	.131E-12	.000E+00	.131E-12
35	.577E+01	.605E+06	.337E-03	.107E-08	-.244E-18	.121E-14	.000E+00	.121E-14
36	.667E+01	.931E+06	.142E-03	.340E-09	-.888E-19	.360E-15	.000E+00	.360E-15
37	.770E+01	.143E+07	.600E-04	.107E-09	-.318E-19	.108E-15	.000E+00	.108E-15
38	.889E+01	.221E+07	.253E-04	.340E-10	-.113E-19	.357E-16	.000E+00	.357E-16
39	.103E+02	.340E+07	.107E-04	.107E-10	-.404E-20	.118E-16	.000E+00	.118E-16
40	.119E+02	.524E+07	.450E-05	.340E-11	-.144E-20	.394E-17	.000E+00	.394E-17
41	.137E+02	.806E+07	.190E-05	.107E-11	-.516E-21	.142E-17	.000E+00	.142E-17
42	.158E+02	.124E+08	.800E-06	.340E-12	-.185E-21	.487E-18	.000E+00	.486E-18
43	.183E+02	.191E+08	.337E-06	.107E-12	-.664E-22	.174E-18	.000E+00	.174E-18
44	.211E+02	.294E+08	.142E-06	.340E-13	-.239E-22	.630E-19	.000E+00	.630E-19
45	.243E+02	.453E+08	.600E-07	.107E-13	-.868E-23	.221E-19	.000E+00	.221E-19
46	.281E+02	.698E+08	.253E-07	.340E-14	-.317E-23	.826E-20	.000E+00	.826E-20
47	.325E+02	.108E+09	.107E-07	.107E-14	-.116E-23	.295E-20	.000E+00	.295E-20
48	.375E+02	.166E+09	.450E-09	.340E-15	-.431E-24	.105E-20	.000E+00	.105E-20
49	.433E+02	.255E+09	.190E-09	.107E-15	-.161E-24	.395E-21	.000E+00	.396E-21
50	.500E+02	.393E+09	.800E-09	.340E-16	.338E-27	-.236E-22	.000E+00	-.236E-22

**APPENDICE C**

## FONCTION D'ESSAI DEUXIEME MODELE. DELTA=0.4

n	r(n)	r(m)	f(r)	f(m)	er1	ac= ac1+ac2	er2	s=somme
1	.172E+00	.161E+02	.195E+02	.698E-01	.184E-13	-.916E-05	.935E-05	.188E-06
2	.204E+00	.268E+02	.117E+02	.297E-01	-.516E-14	-.397E-05	.397E-05	-.312E-08
3	.242E+00	.448E+02	.702E+01	.127E-01	-.236E-13	-.173E-05	.169E-05	-.424E-07
4	.288E+00	.747E+02	.421E+01	.540E-02	-.184E-13	-.754E-06	.715E-06	-.390E-07
5	.341E+00	.125E+03	.252E+01	.230E-02	-.109E-13	-.330E-06	.303E-06	-.272E-07
6	.404E+00	.208E+03	.151E+01	.991E-03	-.575E-14	-.145E-06	.128E-06	-.168E-07
7	.480E+00	.347E+03	.907E+00	.418E-03	-.283E-14	-.643E-07	.534E-07	-.109E-07
8	.569E+00	.578E+03	.543E+00	.178E-03	-.133E-14	-.287E-07	.216E-07	-.710E-08
9	.675E+00	.964E+03	.326E+00	.760E-04	-.612E-15	-.129E-07	.861E-08	-.426E-08
10	.800E+00	.161E+04	.195E+00	.324E-04	-.846E-16	-.579E-08	.337E-08	-.243E-08
11	.894E+00	.225E+04	.140E+00	.185E-04	-.141E-15	-.307E-08	.177E-08	-.131E-08
12	.100E+01	.314E+04	.100E+00	.106E-04	-.857E-16	-.161E-08	.914E-09	-.700E-09
13	.120E+01	.536E+04	.586E-01	.435E-05	-.398E-16	-.557E-09	.315E-09	-.242E-09
14	.143E+01	.916E+04	.343E-01	.178E-05	-.287E-17	-.182E-09	.104E-09	-.786E-10
15	.169E+01	.152E+05	.207E-01	.769E-06	-.719E-17	-.616E-10	.343E-10	-.274E-10
16	.200E+01	.251E+05	.125E-01	.332E-06	-.808E-18	-.185E-10	.957E-11	-.895E-11
17	.211E+01	.297E+05	.106E-01	.251E-06	-.428E-18	-.532E-11	.617E-11	-.342E-11
18	.224E+01	.351E+05	.894E-02	.190E-06	-.326E-18	-.274E-11	.382E-11	-.218E-11
19	.235E+01	.415E+05	.757E-02	.144E-06	-.265E-18	-.104E-11	.245E-11	-.123E-11
20	.250E+01	.491E+05	.640E-02	.109E-06	-.207E-18	-.255E-12	.155E-11	-.776E-12
21	.273E+01	.641E+05	.490E-02	.696E-07	-.127E-18	.334E-12	.748E-12	-.190E-12
22	.299E+01	.838E+05	.375E-02	.445E-07	-.809E-18	.524E-12	.359E-12	.745E-13
23	.327E+01	.110E+06	.287E-02	.285E-07	-.471E-18	.445E-12	.172E-12	.146E-12
24	.357E+01	.143E+06	.220E-02	.183E-07	-.335E-18	.338E-12	.832E-13	.862E-13
25	.388E+01	.184E+06	.171E-02	.120E-07	-.116E-18	.283E-12	.426E-13	.209E-12
26	.423E+01	.237E+06	.133E-02	.787E-08	-.747E-18	.283E-12	.221E-13	.230E-12
27	.460E+01	.305E+06	.103E-02	.517E-08	-.530E-18	.166E-12	.117E-13	.124E-12
28	.500E+01	.393E+06	.800E-03	.340E-08	-.730E-18	.876E-13	.631E-14	.209E-13
29	.550E+01	.524E+06	.450E-03	.158E-08	-.899E-18	.138E-12	.240E-14	.502E-13
30	.606E+01	.698E+06	.253E-03	.731E-09	-.447E-18	.633E-13	.895E-15	.195E-13
31	.667E+01	.931E+06	.142E-03	.340E-09	-.224E-18	.295E-13	.327E-15	.751E-14
32	.734E+01	.124E+07	.800E-04	.158E-09	-.114E-18	.140E-13	.117E-15	.281E-14
33	.808E+01	.166E+07	.450E-04	.731E-10	-.570E-18	.674E-14	.407E-16	.109E-14
34	.889E+01	.221E+07	.253E-04	.340E-10	-.287E-18	.327E-14	.138E-16	.417E-15
35	.979E+01	.294E+07	.142E-04	.158E-10	-.143E-18	.160E-14	.456E-17	.172E-15
36	.108E+02	.393E+07	.800E-05	.731E-11	-.676E-18	.786E-15	.145E-17	.111E-15
37	.119E+02	.524E+07	.450E-05	.340E-11	-.320E-18	.395E-15	.438E-18	.752E-16
38	.131E+02	.698E+07	.253E-05	.158E-11	-.140E-18	.209E-15	.124E-18	.686E-16
39	.144E+02	.931E+07	.142E-05	.731E-12	-.821E-18	.111E-15	.316E-19	.490E-16
40	.158E+02	.124E+08	.800E-06	.340E-12	-.277E-18	.544E-16	.662E-20	.267E-16
41	.174E+02	.166E+08	.450E-06	.158E-12	-.137E-18	.248E-16	.858E-21	.111E-16
42	.192E+02	.221E+08	.253E-06	.731E-13	-.733E-18	.106E-16	.000E+00	.329E-17
43	.211E+02	.294E+08	.142E-06	.340E-13	-.402E-17	.441E-17	.000E+00	.393E-18
44	.232E+02	.393E+08	.800E-07	.158E-13	-.221E-17	.179E-17	.000E+00	-.415E-18
45	.255E+02	.524E+08	.450E-07	.731E-14	-.120E-17	.718E-18	.000E+00	-.486E-18
46	.281E+02	.698E+08	.253E-07	.340E-14	-.652E-18	.284E-18	.000E+00	-.368E-18
47	.309E+02	.931E+08	.142E-07	.158E-14	-.351E-18	.112E-18	.000E+00	-.239E-18
48	.341E+02	.124E+09	.800E-08	.731E-15	-.188E-18	.436E-19	.000E+00	-.145E-18
49	.375E+02	.166E+09	.450E-08	.340E-15	-.101E-18	.170E-19	.000E+00	-.837E-19
50	.413E+02	.221E+09	.253E-08	.158E-15	-.538E-19	.656E-20	.000E+00	-.473E-19
51	.454E+02	.294E+09	.142E-08	.731E-16	-.288E-19	.253E-20	.000E+00	-.263E-19
52	.500E+02	.393E+09	.800E-09	.340E-16	-.969E-20	.117E-21	.000E+00	-.957E-20

n	er1/s	ac/s	er2/s
1	.98E-07	-.49E+02	.50E+02
2	.17E-05	.13E+04	-.13E+04
3	.56E-06	.41E+02	-.40E+02
4	.47E-06	.19E+02	-.18E+02
5	.40E-06	.12E+02	-.11E+02
6	.34E-06	.86E+01	-.76E+01
7	.26E-06	.59E+01	-.49E+01
8	.19E-06	.40E+01	-.30E+01
9	.14E-06	.30E+01	-.20E+01
10	.35E-07	.24E+01	-.14E+01
11	.11E-06	.24E+01	-.14E+01
12	.12E-06	.23E+01	-.13E+01
13	.16E-06	.23E+01	-.13E+01
14	.37E-07	.23E+01	-.13E+01
15	.26E-06	.23E+01	-.13E+01
16	.90E-07	.21E+01	-.11E+01
17	.12E+01	.16E+01	-.18E+01
18	.15E+01	.13E+01	-.18E+01
19	.21E+01	.84E+00	-.20E+01
20	.27E+01	.33E+00	-.20E+01
21	.67E+01	-.18E+01	-.39E+01
22	-.11E+02	.70E+01	.48E+01
23	-.32E+01	.30E+01	.12E+01
24	-.39E+01	.39E+01	.97E+00
25	-.55E+00	.14E+01	.20E+00
26	-.32E+00	.12E+01	.96E-01
27	-.43E+00	.13E+01	.94E-01
28	-.35E+01	.42E+01	.30E+00
29	-.18E+01	.27E+01	.48E-01
30	-.23E+01	.32E+01	.46E-01
31	-.30E+01	.39E+01	.44E-01
32	-.40E+01	.50E+01	.42E-01
33	-.52E+01	.62E+01	.37E-01
34	-.69E+01	.78E+01	.33E-01
35	-.83E+01	.93E+01	.26E-01
36	-.61E+01	.71E+01	.13E-01
37	-.43E+01	.53E+01	.58E-02
38	-.20E+01	.30E+01	.18E-02
39	-.13E+01	.23E+01	.64E-03
40	-.10E+01	.20E+01	.25E-03
41	-.12E+01	.22E+01	.77E-04
42	-.22E+01	.32E+01	.00E+00
43	-.10E+02	.11E+02	.00E+00
44	.53E+01	-.43E+01	.00E+00
45	.25E+01	-.15E+01	.00E+00
46	.18E+01	-.77E+00	.00E+00
47	.15E+01	-.47E+00	.00E+00
48	.13E+01	-.30E+00	.00E+00
49	.12E+01	-.20E+00	.00E+00
50	.11E+01	-.14E+00	.00E+00
51	.11E+01	-.96E-01	.00E+00
52	.10E+01	-.12E-01	.00E+00



*APPENDICE D*

## FONCTION FINALE DEUXIEME MODELE. DELTA=0.4

n	r(n)	m(n)	essai f(r)	resultat f(m)	er1	ac1	ac2	er2	somme
1	.172E+00	.161E+02	.195E+02	-.772E+00	-.146E-12	.000E+00	.446E-06	-.529E-06	-.831E-07
2	.204E+00	.268E+02	.117E+02	-.486E+01	.371E-13	.000E+00	.203E-05	-.273E-05	-.698E-06
3	.242E+00	.448E+02	.702E+01	.928E+01	.926E-13	.000E+00	-.281E-05	.377E-05	.957E-06
4	.288E+00	.747E+02	.421E+01	.149E+01	-.340E-13	.000E+00	-.328E-06	.431E-06	.103E-06
5	.341E+00	.125E+03	.252E+01	.259E+01	.143E-13	.000E+00	-.416E-06	.524E-06	.108E-06
6	.404E+00	.208E+03	.151E+01	.162E+01	-.207E-14	.000E+00	-.190E-06	.231E-06	.406E-07
7	.480E+00	.347E+03	.907E+00	.104E+01	-.184E-14	.000E+00	-.903E-07	.106E-06	.155E-07
8	.569E+00	.578E+03	.543E+00	.529E+00	-.146E-14	.000E+00	-.341E-07	.370E-07	.286E-08
9	.575E+00	.964E+03	.326E+00	.390E+00	-.218E-15	.000E+00	-.188E-07	.190E-07	.126E-09
10	.800E+00	.161E+04	.195E+00	.258E+00	-.346E-15	.000E+00	-.935E-08	.835E-08	-.100E-08
11	.894E+00	.225E+04	.140E+00	.126E+00	-.394E-15	.000E+00	-.344E-08	.308E-08	-.360E-09
12	.100E+01	.314E+04	.100E+00	.581E-01	-.155E-15	.000E+00	-.120E-08	.104E-08	-.157E-09
13	.120E+01	.536E+04	.586E-01	.489E-01	-.108E-16	.000E+00	-.586E-09	.511E-09	-.751E-10
14	.143E+01	.916E+04	.343E-01	.178E-01	-.504E-16	.000E+00	-.128E-09	.103E-09	-.245E-10
15	.169E+01	.152E+05	.207E-01	.260E-01	-.584E-17	.000E+00	-.101E-09	.709E-10	-.299E-10
16	.200E+01	.251E+05	.125E-01	.148E-01	-.159E-16	.000E+00	-.306E-10	.212E-10	-.943E-11
17	.211E+01	.297E+05	.106E-01	.122E-01	-.659E-11	.112E-10	-.208E-10	.138E-10	-.236E-11
18	.224E+01	.351E+05	.994E-02	.953E-02	-.511E-11	.100E-10	-.132E-10	.832E-11	.212E-13
19	.235E+01	.415E+05	.757E-02	.791E-02	-.791E-02	.505E-11	-.859E-11	.537E-11	-.498E-12
20	.250E+01	.491E+05	.640E-02	.705E-02	-.407E-12	.308E-11	-.619E-11	.357E-11	.497E-13
21	.273E+01	.641E+05	.490E-02	.553E-02	-.126E-11	.271E-11	-.353E-11	.191E-11	-.161E-12
22	.299E+01	.938E+05	.375E-02	.415E-02	-.888E-12	.182E-11	-.161E-11	.171E-12	.417E-13
23	.327E+01	.110E+06	.287E-02	.311E-02	-.528E-12	.113E-11	-.882E-12	.301E-12	.183E-13
24	.357E+01	.143E+06	.220E-02	.235E-02	-.440E-12	.716E-12	-.413E-12	.140E-12	.426E-14
25	.388E+01	.184E+06	.171E-02	.313E-02	-.216E-12	-.296E-13	-.281E-12	.927E-13	-.114E-16
26	.423E+01	.237E+06	.133E-02	.154E-02	-.637E-12	.915E-12	-.898E-13	.320E-13	.220E-12
27	.460E+01	.305E+06	.103E-02	.115E-02	-.102E-12	.185E-12	-.480E-13	.177E-13	.527E-13
28	.500E+01	.393E+06	.800E-03	.878E-03	-.878E-13	.954E-13	-.217E-13	.878E-14	-.531E-14
29	.550E+01	.524E+06	.450E-03	.549E-03	-.933E-13	.118E-12	-.782E-14	.351E-14	.208E-13
30	.606E+01	.698E+06	.253E-03	.336E-03	-.518E-13	.624E-13	-.233E-14	.147E-14	.982E-14
31	.667E+01	.931E+06	.142E-03	.214E-03	-.305E-13	.327E-13	-.571E-15	.644E-15	.224E-14
32	.734E+01	.124E+07	.800E-04	.118E-03	-.133E-13	.137E-13	-.154E-15	.272E-15	.503E-15
33	.808E+01	.166E+07	.450E-04	.113E-03	-.294E-14	.294E-14	-.918E-16	.204E-15	.166E-15
34	.889E+01	.221E+07	.253E-04	.559E-04	-.135E-13	.109E-13	-.305E-16	.813E-16	-.252E-16
35	.979E+01	.294E+07	.142E-04	.186E-04	-.674E-14	.532E-14	-.695E-17	.216E-16	-.141E-14
36	.108E+02	.393E+07	.900E-05	.911E-05	-.171E-14	.146E-14	-.239E-17	.832E-17	-.245E-15
37	.119E+02	.524E+07	.450E-05	.305E-05	-.497E-15	.464E-15	-.537E-18	.217E-17	-.310E-16
38	.131E+02	.698E+07	.253E-05	.475E-05	-.139E-15	-.162E-15	-.590E-18	.249E-17	-.204E-16
39	.144E+02	.931E+07	.142E-05	.302E-05	-.203E-15	.258E-15	-.214E-18	.116E-17	.560E-16
40	.158E+02	.124E+08	.800E-06	.804E-06	-.169E-15	.193E-15	-.504E-19	.346E-18	.282E-16
41	.174E+02	.156E+08	.450E-06	.208E-06	-.377E-16	.396E-16	-.501E-20	.314E-19	.187E-17
42	.192E+02	.221E+08	.253E-06	.910E-07	-.679E-17	.643E-17	.000E+00	.000E+00	-.358E-18
43	.211E+02	.294E+08	.142E-06	.491E-07	-.180E-17	.179E-17	.000E+00	.000E+00	.709E-20
44	.232E+02	.393E+08	.900E-07	.892E-07	-.857E-18	.821E-18	.000E+00	.000E+00	.282E-19
45	.255E+02	.524E+08	.450E-07	.220E-07	-.274E-18	.253E-18	.000E+00	.000E+00	-.210E-19
46	.281E+02	.698E+08	.253E-07	.143E-07	-.137E-18	.128E-18	.000E+00	.000E+00	-.921E-20
47	.309E+02	.931E+08	.142E-07	.125E-07	-.535E-19	.508E-19	.000E+00	.000E+00	-.267E-20
48	.341E+02	.124E+09	.900E-08	.721E-08	-.323E-19	.334E-19	.000E+00	.000E+00	.109E-20
49	.375E+02	.156E+09	.450E-08	.837E-08	-.116E-18	.168E-19	.000E+00	.000E+00	-.995E-19
50	.413E+02	.221E+09	.253E-08	-.495E-09	-.122E-19	.121E-19	.000E+00	.000E+00	-.823E-22
51	.454E+02	.294E+09	.142E-08	.929E-09	.399E-18	-.137E-19	.000E+00	.000E+00	.385E-18
52	.500E+02	.393E+09	.900E-09	.513E-08	-.574E-18	.310E-19	.000E+00	.000E+00	-.543E-18

n	f(n)	g(n)	h(n)	k(n)
			ef	ac
1	.17235E+00	.16085E+02	.17240E-10	.00000E+00
2	.20441E+00	.25831E+02	.51078E-10	.00000E+00
3	.24242E+00	.44757E+02	.16501E-09	.00000E+00
4	.28751E+00	.74660E+02	.36869E-09	.00000E+00
5	.34097E+00	.12454E+03	.81106E-09	.00000E+00
6	.40433E+00	.20775E+03	.16381E-08	.00000E+00
7	.47959E+00	.34654E+03	.31218E-08	.00000E+00
8	.56878E+00	.57806E+03	.56656E-08	.00000E+00
9	.67455E+00	.96427E+03	.10046E-07	.00000E+00
10	.80000E+00	.16085E+04	.17112E-07	.00000E+00
11	.95443E+00	.22479E+04	.23907E-07	.00000E+00
12	.10000E+01	.31416E+04	.33206E-07	.00000E+00
13	.11952E+01	.53642E+04	.56860E-07	.00000E+00
14	.14286E+01	.91592E+04	.97812E-07	.00000E+00
15	.16903E+01	.15172E+05	.17098E-06	.00000E+00
16	.20000E+01	.25133E+05	.64286E+00	.11629E+01
17	.21147E+01	.29711E+05	.77034E+00	.14219E+01
18	.22361E+01	.35124E+05	.92106E+00	.16909E+01
19	.23644E+01	.41523E+05	.11070E+01	.19916E+01
20	.25000E+01	.49087E+05	.13023E+01	.23037E+01
21	.27332E+01	.64143E+05	.17243E+01	.29209E+01
22	.29881E+01	.83815E+05	.22927E+01	.37588E+01
23	.32658E+01	.10952E+06	.31897E+01	.49281E+01
24	.35714E+01	.14311E+06	.41565E+01	.62119E+01
25	.38846E+01	.18419E+06	.59157E+01	.77279E+01
26	.42258E+01	.23707E+06	.82534E+01	.10174E+02
27	.46966E+01	.30512E+06	.11592E+02	.13533E+02
28	.50000E+01	.39270E+06	.16304E+02	.17678E+02
29	.55035E+01	.52367E+06	.23868E+02	.24315E+02
30	.60576E+01	.69833E+06	.35300E+02	.33438E+02
31	.66576E+01	.93124E+06	.52488E+02	.46876E+02
32	.73390E+01	.12418E+07	.77354E+02	.66388E+02
33	.80780E+01	.16560E+07	.11332E+03	.94352E+02
34	.88914E+01	.22083E+07	.15969E+03	.13450E+03
35	.97897E+01	.29448E+07	.21674E+03	.20215E+03
36	.10772E+02	.39270E+07	.28506E+03	.30131E+03
37	.11857E+02	.52367E+07	.37789E+03	.43269E+03
38	.13051E+02	.69833E+07	.51359E+03	.60666E+03
39	.14365E+02	.93124E+07	.72190E+03	.80644E+03
40	.15811E+02	.12418E+08	.10555E+04	.10215E+04
41	.17404E+02	.16560E+08	.16162E+04	.12483E+04
42	.19156E+02	.22083E+08	.23814E+04	.14862E+04
43	.21085E+02	.29448E+08	.37532E+04	.17744E+04
44	.23208E+02	.39270E+08	.58069E+04	.20723E+04
45	.25545E+02	.52367E+08	.87357E+04	.23518E+04
46	.28117E+02	.69833E+08	.13514E+05	.26352E+04
47	.30948E+02	.93124E+08	.20158E+05	.29269E+04
48	.34065E+02	.12418E+09	.31126E+05	.32698E+04
49	.37495E+02	.16560E+09	.48359E+05	.36499E+04
50	.41270E+02	.22083E+09	.73723E+05	.40353E+04
51	.45426E+02	.29448E+09	.11305E+06	.44367E+04
52	.50000E+02	.39270E+09	.17449E+06	.48704E+04