

Analyse modale des structures avec incertitudes par la méthode des éléments finis stochastiques spectrale

Jalaa Ahmad

▶ **To cite this version:**

Jalaa Ahmad. Analyse modale des structures avec incertitudes par la méthode des éléments finis stochastiques spectrale. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2009. Français. NNT : 2009CLF21936 . tel-00725464

HAL Id: tel-00725464

https://theses.hal.science/tel-00725464

Submitted on 27 Aug 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : D.U. 1936
EDSPIC : 440

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL - CLERMONT FERRAND II

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR DE CLERMONT-FERRAND

Thèse

Présentée par

Jalaa AHMAD

Ingénieur ENIT Génie Mécanique

Formation Doctorale
Matériaux - Structures - Fiabilité

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

Spécialité : Génie Mécanique

Analyse modale des structures avec incertitudes par la méthode des éléments finis stochastiques spectrale

Soutenue publiquement le 24 juin 2009 devant le jury :

M. Didier CLOUTEAU	Président du jury
M. Abdelkhalak EL HAMI	Rapporteur
M. Franck SCHOEFS	Rapporteur
M. Ahmed MEBARKI	Examinateur
M. Alaa CHATEAUNEUF	Directeur de thèse
M. Philippe BRESSOLETTE	Co-directeur de thèse

J'ai des tas d'idées brillantes et nouvelles, mais les brillantes ne sont pas nouvelles, et les nouvelles ne sont pas brillantes...

Marcel Achard

Citer les pensées des autres, c'est regretté de ne pas les avoir trouvées soi-même.

Sacha Guitry

À ma famille

À ma femme Laila

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire de Mécanique et Ingénieries de l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand et de l'Institut Français de Mécanique Avancée, sous la direction de Monsieur **Alaa CHATEAUNEUF**, professeur des universités, directeur adjoint de Polytech'Clermont-Ferrand, qui m'a fait le grand honneur d'encadrer ce travail, et de me faire profiter de sa rigueur scientifique et de sa très haute compétence. Je tiens à le remercier pour ne pas m'avoir laissé trop souvent patauger dans l'incertitude et avoir su constituer le bon dosage entre l'indépendance et la direction dont j'avais besoin dans ce travail de longue haleine. Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur **Philippe BRESSOLETTE**, Maître de conférences à Polytech'Clermont-Ferrand, qui m'a fait l'honneur de co-diriger mon travail de thèse. Ses avis éclairés, ainsi que ses encouragements, m'ont été d'une aide très précieuse et m'ont permis de voir des horizons nouveaux dans des développements pratiques.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur **Didier CLOUTEAU**, professeur à l'Ecole Centrale de Paris, pour l'honneur qu'il m'a fait en assurant la présidence de mon jury, ainsi qu'a Monsieur **Abdelkhalak ELHAMI**, professeur à l'I.N.S.A de Rouen, et Monsieur **Franck SCHOFFS**, maître de conférences HDR, à l'Université de Nantes pour avoir accepté la tâche souvent longue et difficile de rapporter ce mémoire de thèse et de me faire part de leurs avis précieux. Leurs hautes compétences et leurs expériences dans le domaine de la dynamique stochastique ont permis de valoriser ce travail.

Je remercie Monsieur **Ahmed MEBARKI**, professeur à l'Université de Paris-Est, qui a bien voulu examiner ce travail et faire partie du jury.

Mes remerciements s'adressent maintenant à tous mes collègues du laboratoire. Merci d'avoir créé un environnement convivial de travail, mais aussi de détente (souvent musicale). Il m'a été agréable de bénéficier de leur soutien moral et amical, ainsi que de leurs conseils pertinents et leurs aides précieuses.

Je terminerai en profitant de cette occasion pour adresser une mention très spéciale réservée à ma femme **Laila** et à ma famille. Je leur dois beaucoup ; ces dernières années ont été difficiles, et je ne m'en serais pas sorti sans eux.

Résumé

Analyse modale des structures avec incertitudes par la méthode des éléments finis stochastiques spectrale

Dans le cadre de la modélisation de structures comportant des paramètres incertains, nous nous intéressons aux caractéristiques spectrales des systèmes mécaniques.

Alternatives aux méthodes de Monte-Carlo pour le traitement des problèmes de propagation d'incertitudes dans les modèles mécaniques structuraux, les méthodes d'éléments finis stochastiques (MEFS) connaissent un succès grandissant depuis une dizaine d'années, concrétisé par de nombreux travaux de recherche internationaux. Le présent travail s'inscrit dans le cadre de ces recherches.

Dans cette optique, nous décrivons dans une première partie les caractéristiques spectrales, aussi bien les valeurs propres que les modes propres, des structures comportant des paramètres modélisés par des variables aléatoires ou par des champs aléatoires. Pour ce faire, nous utilisons la méthode spectrale des éléments finis stochastiques, que nous avons étendue au calcul des valeurs et vecteurs propres. Les propriétés du matériau sont modélisées par un développement de Karhunen-Loève, alors que les valeurs et les vecteurs propres sont développés sur la base du chaos polynomial. Une méthode de résolution adoptée est proposée pour le découplage du système d'équations.

La méthode proposée, essentiellement valable pour les problèmes linéaires, présente l'intérêt de permettre la prise en compte, non seulement de variables aléatoires, mais également de champs stochastiques pour la modélisation probabiliste des paramètres incertains du modèle. Quatre applications à différents niveaux de complexité permettent de juger de ses possibilités.

Nous étudions ensuite le couplage de la conception robuste et de la MEFSS, cette dernière représente un outil puissant pour l'optimisation de la performance dynamique des systèmes mécaniques, puisqu'elle permet d'obtenir, à moindre coût, la moyenne et l'écart-type de la réponse, afin d'évaluer la solution robuste. L'intérêt de l'outil présenté est illustré par deux exemples sur des structures en automobile.

Mots clé

Analyse modale, propagation d'incertitudes, variables aléatoires, dynamique, Méthode Spectrale des Éléments Finis Stochastiques.

Abstract

Modal analysis of structures with uncertainties using the Spectral Stochastic Finite Elements Method

We are interested in modelling structures with uncertain parameters. We focus on the characteristics of dynamic responses of such mechanical systems, especially the modal frequencies and shapes.

Stochastic Finite Element Methods (SFEM) have been developed for thirty years to study uncertainty propagation in structural problems. The main issue aims at avoiding Monte-Carlo simulations, too expensive for many problems. This thesis is a contribution to the development of SFEM for modal analysis of structures.

In the first part, we investigate the case of structures with uncertain parameters. We are particularly interested in the dynamic response, such as eigenfrequencies and eigenmodes. An innovative method is carried out, which uses the spectral stochastic finite element method in order to determine the main stochastic characteristics of the response.

The material properties are modelled by a Karhunen-Loève series, whereas the eigenvalues and eigenvectors are developed on the basis of the polynomial chaos. The solution procedure is proposed for decoupling of the system of equations. This method, practical for linear problems, has the advantage of allowing the modelling of the uncertain input parameters as random variables and stochastic fields. Four numerical applications are considered to test the capabilities of the proposed method.

Finally, we studied the extension of the MEFSS to deal with robust mechanical design. The proposed approach represent a powerful tool for the optimization of the dynamic performance of the mechanical systems, since it is possible to obtain, with lower computation effort, the mean and the standard deviation of the response, in order to evaluate the robust solution. The advantage of the presented method is illustrated by two examples dealing with car structures.

Keywords

Modal analysis, uncertainty propagation, dynamics, Spectral Stochastic Finite Element.

Table des matières

Remerciements 4

Résumé 5

Abstract 6

Table des matières 7

Table des figures 11

Liste des tableaux 15

Introduction générale 18

1. Etude bibliographique 22

1.1 Position du problème 24
1.1.1 Contexte et objectif de l'étude 24
1.1.2 Equations générales du système dynamique 26
1.1.3 Dynamique des structures et analyse modale 27
1.1.3.1 Modélisation éléments finis 27
1.1.3.2 Calcul des modes propres 29
1.1.3.3 Méthode de superposition modale 29
1.2 Modélisation probabiliste des paramètres incertains 30
1.2.1 Introduction 30
1.2.2 Types des paramètres stochastiques 31
1.2.3 Variables aléatoires 31
1.2.3.1 Loi de probabilité normale 33
1.2.3.2 Variables aléatoires lognormales 34
1.2.4 Champs aléatoires 34
1.2.4.1 Présentation 34
1.2.4.2 Champs aléatoires lognormaux 35
1.2.4.3 Méthodes de discrétisation des champs aléatoires 35
1.2.4.4 Discrétisation de Karhunen-Loève 38
1.3 Méthodes stochastiques en calcul des structures 40
1.3.1 Méthode analytique 40
1.3.2 Simulations de Monte-Carlo 41
1.3.2.1 Avantages et inconvénients 41
1.3.2.2 Amélioration de la méthode 42
1.3.3 Méthodes des Eléments Finis Stochastiques 43

1.3.4 Méthode des Eléments Finis Stochastiques par perturbation 44
1.3.5 Méthode Spectrale des Eléments Finis Stochastiques 45
1.3.6 Autres méthodes 47
1.3.6.1 Méthode itérative ou séries de Neumann 47
1.3.6.2 La méthode de quadrature 48
1.3.6.3 Méthode fondée sur une discrétisation aléatoire par Intégrales Pondérées 49
1.3.6.4 Méthodes non paramétriques 49
1.3.6.5 La méthode de collocation stochastique 50
1.3.6.6 Méthodes des intervalles 50
1.4 Application des méthodes stochastiques en analyse modale 51
1.4.1 Calcul des modes propres aléatoires par la MEFS par perturbation 53
1.5 Conclusion du chapitre 56

2. Analyse modale des structures par la MEFSS 59

2.1 La méthode des éléments finis stochastiques spectral 61
2.1.1 Le chaos polynomial 61
2.1.1.1 Polynômes d'Hermite 62
2.1.1.2 Chaos Polynomial homogène 63
2.1.2 Résolution des problèmes statiques linéaires 63
2.2 Principe du calcul des paramètres modaux 67
2.2.1 Mise en équations 67
2.2.2 Modèles probabilistes des matrices de masse et de rigidité 67
2.2.3 Approximation de E et ρ 68
2.2.4 Approximation de $\{q\}$ 69
2.2.5 Approximation des valeurs propres λ 70
2.3 Formulation du problème 71
2.3.1 Méthode de recherche des valeurs propres 71
2.3.2 Méthode de recherche des modes propres aléatoires 76
2.3.3 Méthode de recherche du champ de déplacement aléatoire 78
2.3.4 Caractéristiques du second ordre du champ de déplacement aléatoire 79
2.4 Autres modélisations des paramètres stochastiques 80
2.4.1 Processus lognormal stationnaire 81
2.4.2 V.a. lognormale 82
2.5 Calcul de la fonction de transfert aléatoire 83
2.6 Méthode de superposition modale en contexte aléatoire 85
2.7 Conclusion du chapitre 86

3. Applications de la MEFSS 89

3.1 Incertitudes modélisées par variables aléatoires 92
3.1.1 Structure composée de deux barres articulées 92
3.1.1.1 Simulations de Monte-Carlo 93
3.1.1.2 Influence de l'ordre du chaos polynomial 94
3.1.1.3 Comparaison avec la méthode de perturbation classique 95
3.1.1.4 Sensibilité de la méthode vis-à-vis de l'écarte-type de l'entrée 95
3.1.1.5 Comparaison des temps des calculs 96
3.1.1.6 Distributions des valeurs propres 97

3.1.2 Treillis de plate forme pétrolière 99
3.2 Incertitudes modélisées par champs aléatoires 105
3.2.1 Application à une barre en traction 105
3.2.1.1 Description de la structure 105
3.2.1.2 Développement des processus aléatoires 106
3.2.1.3 Résolution du problème spectral 108
3.2.1.4 Simulation de Monte-Carlo 110
3.2.1.5 Analyse stochastique par la MEFSS 111
3.2.2 Ligne d'échappement d'un véhicule 116
3.2.2.1 Description du problème 116
3.2.2.2 Données aléatoires du problème 117
3.2.2.3 Analyse déterministe 118
3.2.2.4 Simulations de Monte-Carlo 119
3.2.2.5 Analyse stochastique par la MEFSS 120
3.2.2.6 Fonction de densité de probabilité des valeurs propres 121
3.3 Conclusion du chapitre 121

4. Conception robuste et analyse modale 124

4.1 Conception robuste 127
4.1.1 Introduction 127
4.1.2 Optimisation robuste 127
4.2 Conception robuste d'un système de suspension 128
4.2.1 Modélisation de la réponse 129
4.2.2 Application numérique 130
4.2.3 Conception déterministe optimale 132
4.2.4 Prise en compte des incertitudes 132
4.2.5 Conception robuste 132
4.3 Conception robuste d'une ligne d'échappement 137
4.3.1 Etude paramétrique de la conception de la ligne d'échappement 137
4.3.2 Position et valeur de la raideur des ressorts 139
4.3.3 Effet de la corrosion des tubes 141
4.4 Conclusion 142

Conclusion générale 144

Bibliographie 147

Annexes 160

A Notations 161
B Chaos polynomial 163
C Implémentation récursive du chaos polynomial 167

Table des figures

Figure 1.1.	Les outils et les applications de la thèse	25
Figure 1.2.	Procédure globale de résolution par la Méthode des Eléments Finis Stochastiques.	44
Figure 2.1.	MEFSS pour l'analyse modale des structures mécaniques	75
Figure 3.1.	Système de deux barres articulées	92
Figure 3.2.	Convergence de la moyenne de la première valeur propre en fonction du nombre de tirages	93
Figure 3.3.	Convergence du coefficient de variation de la première valeur propre en fonction du nombre de tirages	93
Figure 3.4.	Répartitions des valeurs propres obtenues par simulations de Monte-Carlo (10^5 tirages)	94
Figure 3.5.	Coefficient de variation de la première valeur propre en fonction du coefficient de variation de la masse volumique	96
Figure 3.6.	Evolution de temps de calcul en fonction de l'ordre du chaos polynomial p	97
Figure 3.7.	Histogramme de la première valeur propre aléatoire	98
Figure 3.8.	Structure étudié : plate forme pétrolière	100
Figure 3.9.	Dimensions géométriques du problème de la plateforme	100
Figure 3.10.	Modes propres associés au modèle déterministe de la plateforme pétrolière	101
Figure 3.11.	Modes propres aléatoires de la plate-forme pétrolière	102
Figure 3.12.	Histogramme de la première valeur propre	103

Figure 3.13.	Convergence numérique de la densité de probabilité de première valeur propre (courbes lissés)	103
Figure 3.14.	Barre en traction	105
Figure 3.15.	Fonctions d'autocorrélation du processus gaussien standard associé	107
Figure 3.16.	Convergence des simulations de Monte-Carlo (moyenne de la première valeur propre)	110
Figure 3.17.	Convergence des simulations de Monte-Carlo (écart-type de la première valeur propre)	111
Figure 3.18.	Coefficient de variation de la première valeur propre en fonction celui coefficient de la masse volumique	113
Figure 3.19.	Erreur relative du *CV* de la première valeur propre en fonction de $CV(E)$ et $CV(\rho)$ pour différents ordre de chaos polynomial (p=2,4,6 and 8)	115
Figure 3.20.	Ligne d'échappement.	116
Figure 3.21.	Configuration de système étudié.	117
Figure 3.22.	FDP obtenue par la MEFSS et par les simulations de Monte-Carlo	121
Figure 4.1.	Vibration forcée d'un système à deux degrés de liberté	129
Figure 4.2.	La réponse de la fonction de transfert normalisé pour 3 valeurs choisis d'amortissement: r_2=0, r_2=1000, and r_2=50000.	131
Figure 4.3.	Amplitude de masse m_2 avec $\boldsymbol{k}_1$ et $\boldsymbol{m}_2$ modélisée par des variables aléatoires lognormales, la courbe en rouge est la courbe déterministe.	133
Figure 4.4.	Histogramme de la pulsation propre ω_r	133
Figure 4.5.	Résultats d'optimisation robuste	134
Figure 4.6.	Simulation de Monte-Carlo (réel)	135
Figure 4.7.	Simulation de Monte-Carlo (α=1)	136
Figure 4.8.	Simulation de Monte-Carlo (α=0)	136
Figure 4.9.	Simulation de Monte-Carlo (α=0,5)	136
Figure 4.10.	Ecart-type des quatre premières fréquences propres en fonction de l'écart-type des ressorts.	138
Figure 4.11.	Ecart-type des premières quatre fréquences propres en fonction	139

des incertitudes des ressorts.

Figure 4.12. Moyenne et coefficient de variation de la première fréquence propre en fonction des raideurs k_1 and k_2. 139

Figure 4.13. CV de la première fréquence propre en fonction des raideurs k_1 et k_2. 140

Figure 4.14. Ecart-type de la première fréquence propre en fonction des positions des ressorts. 140

Figure 4.15. Effet de la corrosion active sur l'écart-type de la fréquence fondamentale de système 141

Figure C.1. Correspondance entre un tirage de boules et α pour (M=4, p=2). 170

Figure C.2. Génération récursive du chaos polynomial (M=4, p=2). 170

Liste des tableaux

Tableau 2.1.	Exemple de chaos polynomial pour $M = 3$ et $p = 3$	64
Tableau 2.2.	Nombre des polynômes P dans la base du chaos	64
Tableau 3.1.	Propriétés physiques et géométriques de la structure	92
Tableau 3.2.	Résultats numériques des valeurs propres ($CV(E,\rho)$=0,1)	94
Tableau 3.3.	Erreur relative sur le calcul des coefficients de variation des valeurs propres	95
Tableau 3.4.	Ecarts-types des valeurs propres par la MEFS par perturbation et spectrales	95
Tableau 3.5.	Temps de calcul de plusieurs méthodes et pour plusieurs valeurs de p	97
Tableau 3.6.	Les paramètres physiques et dimensions géométriques de la structure	99
Tableau 3.7.	Longueur des éléments de la structure (m)	99
Tableau 3.8.	Détail des pulsations propres et modes propres associés au modèle déterministe de la plateforme pétrolière	101
Tableau 3.9.	Erreur relative sur l'écart type des valeurs propres (M=15, $CV(E_i)$=10%)	103
Tableau 3.10.	Comparaison des écarts types obtenus pour la première pulsation propre par la MEFSS et simulations de Monte-Carlo	104
Tableau 3.11.	Paramètres de modèle déterministe	105
Tableau 3.12.	Résultats du modèle déterministe	106
Tableau 3.13.	Influence des valeurs de M et p sur l'écart-type de la première valeur propre	111

Tableau 3.14.	Influence de la longueur de la corrélation sur l'écart-type de la première valeur propre	112
Tableau 3.15.	Moyennes et coefficients de variation des paramètres de la ligne d'échappement	118
Tableau 3.16.	Valeurs propres déterministes $(rad/s)^2$	118
Tableau 3.17.	Résultats des valeurs propres aléatoires	119
Tableau 3.18.	Influence de l'ordre du chaos polynomial	120
Tableau 4.1.	Paramètres de conception du système de suspension	131
Tableau 4.2.	Les solutions de la conception robuste de d'un système de suspension	135
Tableau 4.3.	Ecart-type des quatre premières fréquences propres	137
Tableau 4.4.	Influence of individual spring uncertainties.	138

Introduction générale

L'incertitude n'est pas dans les choses mais dans notre tête : l'incertitude est une méconnaissance.

Jacques Bernoulli (1654-1705)

La connaissance progresse en intégrant en elle l'incertitude, non en l'exorcisant.

Edgar Morin (1921)

La modélisation de systèmes physiques nécessite une mise en équations mathématique, qui doit traduire au mieux les phénomènes étudiés. La résolution n'est pas toujours simple, car, plus le modèle est complet, plus la complexité des équations associées est importante. On est alors amené à faire un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, pour obtenir une modélisation qui reste satisfaisante du point de vue de la physique du problème, sans pour autant engendrer un modèle mathématique trop lourd.

Comme les performances des ordinateurs augmentent considérablement avec le temps, la prise en compte de phénomènes complexes jusque là négligés ou simplifiés devient envisageable. Ceci se traduit par une modélisation plus coûteuse, mais aussi plus réaliste des systèmes mécaniques. Ainsi, il devient possible de travailler sur des problèmes dont certaines données sont incertaines, ce qui permet de prendre en compte les incertitudes intrinsèques aux propriétés des matériaux et des structures. De plus, les paramètres mesurés peuvent varier à la fois d'une pièce à une autre, mais aussi dans le temps. C'est pourquoi on introduit la notion d'incertitude dans les modèles.

En fait, la gestion de la variabilité dans les modèles structuraux est une extension naturelle et nécessaire des techniques de calcul déterministes. En incorporant la modélisation de l'incertitude dans les méthodes de calcul, la méthode des éléments finis stochastiques (regroupant l'approche perturbative, l'approche spectrale et les techniques de simulation de Monte-Carlo) a reçu une grande attention dans la littérature scientifique. Une telle approche a souvent pour objectif de caractériser la sensibilité de la réponse du modèle à la variabilité des paramètres d'entrée. Elle peut aussi être exploitée pour étudier la fiabilité de la structure.

Dans ce contexte, cette thèse vise à développer une méthode pour l'analyse modale des structures et systèmes mécaniques, lorsque les propriétés des matériaux sont aléatoires. Ce

travail est orienté sur les approches dites de second ordre, dans lesquelles les deux premiers moments statistiques de la réponse de la structure sont estimés. Etant donné son aptitude à traiter des problèmes caractérisés par un fort niveau de variabilité, la méthode des éléments finis stochastiques spectrale est choisie pour étudier la propagation de la variabilité des paramètres d'un modèle dynamique incertain. Un outil de calcul est développé avec la capacité de gestion d'une définition large de la variabilité matérielle (variables et champs aléatoires) et ceci pour les matrices de rigidité et de masse. Les exigences de cet outil sont étudiées et optimisées, en réduisant la dimension aléatoire du problème et en améliorent les performances.

Finalement, les méthodes étudiées sont validées, au moyen de la confrontation des résultats avec ceux obtenus par la simulation de Monte-Carlo, à travers l'analyse de plusieurs applications : structures à barres articulées, barre en traction, plate-forme pétrolière et ligne d'échappement. La propagation de l'incertitude dans les effets propres à la modélisation par champs aléatoires est examinée. Quelques remarques relatives à l'influence de la loi de distribution des paramètres dans les méthodes de simulation sont évoquées.

Méthodes stochastiques

Les méthodes des éléments finis stochastiques combinent deux techniques, à savoir l'analyse déterministe par éléments finis et l'analyse probabiliste. On cherche en général à déterminer les caractéristiques stochastiques des réponses aléatoires, à partir de la connaissance des aléas sur les propriétés des matériaux, la géométrie, les conditions aux limites, ou encore les chargements appliqués. Ces réponses peuvent être des réponses statiques ou dynamiques. Dans ce travail, nous nous intéressons au calcul des valeurs et modes propres aléatoires.

Différentes techniques existent pour résoudre de tels problèmes [Ben88, Ibr87]. Ces méthodes sont généralement classées en trois catégories : les méthodes de simulation, les méthodes de perturbation et les méthodes spectrales. Ces méthodes d'éléments finis stochastiques traitent essentiellement des variables aléatoires, les champs aléatoires étant discrétisés.

Les simulations de Monte-Carlo sont considérées comme des méthodes de référence pour les calculs sur des systèmes comportant des paramètres incertains. Elles utilisent un échantillon de grande taille, représentatif des quantités aléatoires du problème. La solution obtenue par les statistiques sur la population des réponses permet de connaître les propriétés des grandeurs aléatoires. Néanmoins, la quantité de calculs mise en œuvre se révèle souvent prohibitive pour l'emploi de ces méthodes.

La méthode des perturbations est basée sur un développement en séries de Taylor de la réponse autour de sa moyenne. Ce développement permet de calculer directement les moyennes et les écarts-types des réponses par rapport aux variables aléatoires d'entrée [Alv98, Kle92]. Le problème principal des méthodes de développement en séries de Taylor provient des conditions assurant la convergence de ces séries. Les variables doivent avoir une faible dispersion, et la méthode est mise en difficulté lors des calculs de réponses dynamiques telles que les fonctions de transfert.

On peut envisager une autre forme de développement des solutions sous formes de polynômes. Ces méthodes utilisent des fonctions de base dans l'espace de Hilbert associé au

problème aléatoire. Nous pouvons utiliser des polynômes orthogonaux d'une façon générale, et en particulier un chaos polynomial [Gha91].

C'est cette dernière méthode que nous allons mettre en œuvre dans ce mémoire. Il semble en effet intéressant d'utiliser les propriétés de bonne convergence du chaos polynomial pour calculer les propriétés des réponses dynamiques des systèmes mécaniques. Nous traiterons donc le cas du calcul des valeurs propres aléatoires et celui du calcul des modes propres aléatoires, aussi bien que le calcul par superposition modale.

Structure du mémoire

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré à la problématique des systèmes comportant des incertitudes. Ce chapitre est composé d'une introduction générale et de trois parties. Après avoir introduit la dynamique des systèmes mécaniques, la théorie des probabilités est présentée pour permettre la prise en compte des incertitudes que l'on veut introduire dans les modèles. Ensuite nous présentons les principales méthodes de résolution des problèmes stochastiques, prenant en compte les incertitudes sous la forme de variables aléatoires et de champs stochastiques dans les modèles mécaniques.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les résultats des développements originaux effectués à partir de la méthode des éléments finis stochastiques spectrale proposée par Ghanem et Spanos. Cette méthode est adaptée pour le calcul des modes et des valeurs propres d'un système comportant des paramètres incertains. Nous commençons dans un premier temps par présenter la méthode permettant de connaître les paramètres modaux à travers une projection sur le chaos polynomial homogène. De plus, compte tenu de la taille importante des modèles éléments finis réalistes, nous présentons une approche permettant de réduire fortement la taille des problèmes stochastiques par les calculs des constantes issues de la méthode de Galerkin.

Dans le troisième chapitre, nous présentons quelques implémentations de la méthode développée dans le chapitre 2 sur des systèmes mécaniques relativement simples mais néanmoins représentatifs de problèmes réels. Dans un premier temps, nous montrons l'efficacité de la méthode sur un système à deux degrés de liberté dont les incertitudes sont représentées par des variables aléatoires normales ou lognormales, puis nous traitons le cas de structures plus compliquées comme une plate-forme pétrolière de plusieurs étages.

Ensuite, nous abordons le cas des champs aléatoires sur une barre où les incertitudes sur les matériaux sont représentées par des processus gaussiens et lognormaux. Sur cet exemple sont étudiés l'effet de troncature des processus et l'ordre du chaos polynomial. Les histogrammes des valeurs propres se révèlent instructifs quant à la répartition non gaussienne de la réponse modale.

Dans tous les exemples traités, la solution de référence est obtenue par simulations de Monte-Carlo. La convergence de ces solutions est effectuée avant de servir de référence.

Le quatrième chapitre traite le problème de fiabilité du produit en conception. La conception robuste vise l'optimisation de la solution moyenne et la réduction de la variabilité qui résulte de l'incertitude sur les paramètres. Après la présentation des principes de l'optimisation

robuste, nous appliquons la MEFSS proposée pour le dimensionnement probabiliste des structures dynamiques.

Enfin, une conclusion générale permet de dresser un bilan de ce travail et de tirer quelques perspectives de poursuites.

Chapitre1

Etude bibliographique

Sommaire

1.1 Position du problème 24
1.1.1 Contexte et objectif de l'étude 24
1.1.2 Equations générales du système dynamique 26
1.1.3 Dynamique des structures et analyse modale 27
1.1.3.1 Modélisation éléments finis 27
1.1.3.2 Calcul des modes propres 29
1.1.3.3 Méthode de superposition modale 29
1.2 Modélisation probabiliste des paramètres incertains 30
1.2.1 Introduction 30
1.2.2 Types des paramètres stochastiques 31
1.2.3 Variables aléatoires 31
1.2.3.1 Loi de probabilité normale 33
1.2.3.2 Variables aléatoires lognormales 34
1.2.4 Champs aléatoires 34
1.2.4.1 Présentation 34
1.2.4.2 Champs aléatoires lognormaux 35
1.2.4.3 Méthodes de discrétisation des champs aléatoires 35
1.2.4.4 Discrétisation de Karhunen-Loève 38
1.3 Méthodes stochastiques en calcul des structures 40
1.3.1 Méthode analytique 40
1.3.2 Simulations de Monte-Carlo 41
1.3.2.1 Avantages et inconvénients 41
1.3.2.2 Amélioration de la méthode 42
1.3.3 Méthodes des Eléments Finis Stochastiques 43
1.3.4 Méthode des Eléments Finis Stochastiques par perturbation 44
1.3.5 Méthode Spectrale des Eléments Finis Stochastiques 45
1.3.6 Autres méthodes 47
1.3.6.1 Méthode itérative ou séries de Neumann 47
1.3.6.2 La méthode de quadrature 48
1.3.6.3 Méthode fondée sur une discrétisation aléatoire par Intégrales Pondérées 49
1.3.6.4 Méthodes non paramétriques 49
1.3.6.5 La méthode de collocation stochastique 50
1.3.6.6 Méthodes des intervalles 50
1.4 Application des méthodes stochastiques en analyse modale 51
1.4.1 Calcul des modes propres aléatoires par la MEFS par perturbation 53
1.5 Conclusion du chapitre 56

Do not be proud of your knowledge; consult the ignorant and the wise. The limits of art are not reached.
Ptahhotep (2400 BC)

La probabilité de réussir la mise sur orbite d'une fusée est d'une chance sur un million. Dépêchons-nous de rater 999.999 lancements.
Jacques Rouxel - Extrait de la BD Les Shadoks

1.1 Position du problème

1.1.1 Contexte et objectif de l'étude

Dans le cadre de l'étude des systèmes mécaniques, une des principales hypothèses faites est que le modèle est déterministe, c'est-à-dire que les paramètres utilisés dans le modèle ont des valeurs bien définies et invariantes. Ces hypothèses se sont révélées nécessaires pour qu'une résolution numérique puisse être mise en œuvre. En effet, même si nous arrivons aujourd'hui à traiter des modèles éléments finis de grande taille, il est très difficile de prendre en compte le caractère incertain des données. Pourtant, il suffit d'avoir procédé à des expérimentations pour se rendre compte des limites d'une modélisation déterministe. En fait, la gestion de la variabilité présente dans les modèles structuraux est une extension naturelle et nécessaire des techniques de calcul déterministe. Le traitement des problèmes mécaniques modélisés par éléments finis dont certains paramètres sont incertains constitue le principal objectif de cette étude. Pour modéliser ces incertitudes statistiques, on utilise des variables aléatoires, dont on connaît la loi de probabilité. S'il s'agit de processus aléatoires, les propriétés des systèmes sont considérées comme des réalisations de ces processus qu'on discrétise généralement en termes de variables aléatoires ; le besoin de prendre en compte ces incertitudes conduit au développement de différents outils mathématiques, tant du point de vue stochastique que déterministe.

La prise en compte des incertitudes dans les modèles éléments finis peut répondre à différents types de besoins, parmi lesquels nous distinguons deux grandes catégories : analyse et conception. En général, les pièces ou structures modélisées doivent répondre à un cahier des charges, imposant par exemple des normes de sécurité, de fiabilité, ou encore de confort. Les modèles déterministes classiques permettent dans une certaine mesure de répondre à ces exigences. Le système mécanique est modélisé autour des paramètres moyens, considérés comme déterministes, et une série de calculs peut être lancée pour connaître son comportement mécanique (contraintes, déplacements, modes propres...). Introduire à ce niveau des paramètres incertains permet de s'assurer que les variations sur des entrées du

système vont se traduire par des variations des sorties telles qu'elles restent conformes au cahier des charges. Si ce n'est pas le cas, c'est que la sortie est "trop" sensible à certains paramètres. Il faudra alors soit réduire cette sensibilité, soit imposer une plus faible marge d'erreur sur les variables d'entrée. Un tel changement a un coût ; il semble alors intéressant de prendre en compte les incertitudes dès le début de la vie d'un produit, c'est-à-dire lors du processus de conception.

Dans la phase de préconception, nous ne connaissons souvent que "grosso modo" les valeurs globales des variables de conception. Ni la géométrie finale, ni les matériaux ne sont fixés. Par contre nous pouvons définir des valeurs limites dans un cahier des charges. Ceci est valable aussi bien pour les données géométriques, que pour les résultats mécaniques, tels que les déplacements, les fréquences propres, les amplitudes lors des résonances et les contraintes. Nous pouvons alors prendre en compte, dans une phase de conception, les incertitudes inhérentes au processus de fabrication (par exemple tolérances lors de l'usinage), et aux matériaux (module d'Young, coefficient de Poisson, masse volumique...). Lors de cette phase, les dimensions et les matériaux sont choisis en fonction de paramètres tels que le coût, la fiabilité... pour répondre au cahier des charges.

Nous présentons sur la figure 1.1 les outils utilisés dans cette thèse ainsi que les applications à développer. Ces outils seront développés dans ce qui suit.

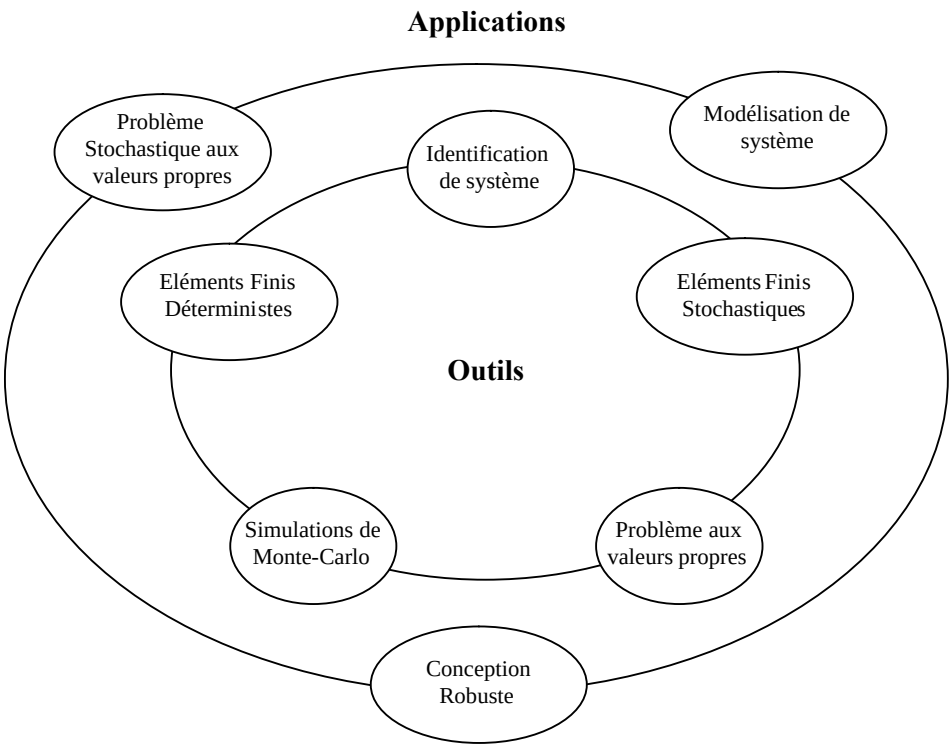


Figure 1.1. Les outils et les applications de cette thèse.

1.1.2 Equations générales du système dynamique

Le contexte de notre travail est le suivant : nous considérons une structure linéaire dont le comportement dynamique est décrit par un modèle éléments finis (EF) à *N* degrés de liberté (*ddl*), de la forme :

$$[M]\{\ddot{q}(t)\}+[C]\{\dot{q}(t)\}+[K]\{q(t)\}=\{f(t)\} \tag{1.1}$$

où [*M*], [*C*] et [*K*] sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité de la structure, et $\{\ddot{q}(t)\}$, $\{\dot{q}(t)\}$ et $\{q(t)\}$ sont les vecteurs d'accélérations, de vitesses et de déplacements nodaux.

Nous recherchons ainsi les propriétés statistiques des solutions du problème aux valeurs propres associé à l'équation (1.1) :

$$([\boldsymbol{K}] - \lambda[\boldsymbol{M}])\{\boldsymbol{\varphi}\}=0 \tag{1.2}$$

où $\{\boldsymbol{\varphi}\}$ est le vecteur propre aléatoire associé à la valeur propre aléatoire λ.

Pour toutes les méthodes décrites dans ce mémoire, nous prenons comme modèle un système physique ayant des propriétés aléatoires. Ce modèle comporte *m* paramètres scalaires incertains $\{\boldsymbol{y}_i\}_{1\le i\le m}$, affectant les matrices [***K***] et [***M***], donc nous pouvons décomposer [***K***] et [***M***] sous la forme :

$$[\boldsymbol{K}]=[\overline{K}]+[\boldsymbol{K}(\boldsymbol{y}_i)] \tag{1.3a}$$

$$[\boldsymbol{M}]=[\overline{M}]+[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{y}_i)] \tag{1.3b}$$

où $[\overline{K}]$et $[\overline{M}]$sont les parties déterministes de [***K***] et [***M***], et $[\boldsymbol{K}(\boldsymbol{y}_i)]et[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{y}_i)]$sont les parties aléatoires à moyenne nulle.

Le problème que l'on se pose est alors, connaissant [***K***] et [***M***], en se donnant une description probabiliste appropriée de l'incertitude sur $\boldsymbol{y}_i$, nous cherchons à évaluer les propriétés statistiques des solutions du problème aux valeurs propres (équation 1.2). Nous cherchons aussi les propriétés statistiques des vecteurs propres $\{\boldsymbol{\varphi}\}$.

Il s'agit typiquement d'un problème de propagation d'incertitude à travers un problème mécanique. Pour le résoudre, nous commençons par choisir (généralement sur la base d'une analyse statistique) un modèle probabiliste convenable pour $\boldsymbol{y}_i$. Soit $\boldsymbol{Y}_i$ un tel modèle, de type variable ou champ aléatoire.

Pour évaluer ces caractéristiques, la stratégie qui vient naturellement à l'esprit, compte tenu des difficultés de l'entreprise, est de recourir à l'emploi d'une méthode directe de Monte-Carlo [Dit96]. Néanmoins, les méthodes de ce type, qui consistent à simuler des réalisations de $\boldsymbol{Y}_i$, à calculer les réalisations correspondantes de la réponse du système et à estimer statistiquement les caractéristiques recherchées à partir de l'échantillon numérique de la réponse ainsi obtenue, peuvent être très onéreuses en temps de calcul du fait du nombre important d'appels à la fonction qu'elles nécessitent, pour garantir de bonnes approximations. C'est pourquoi, nous préférons généralement les réserver à des calculs exceptionnels ou au traitement d'exemples de référence destinés à tester la validité et les propriétés d'autres méthodes d'approximation. C'est le rôle que nous leur avons attribué dans ce travail. Nous notons que

les méthodes de Monte-Carlo ont connu un essor considérable ces vingt dernières années, dû non seulement aux progrès exceptionnels réalisés dans le domaine de l'informatique mais également à la prise de conscience des chercheurs et industriels des immenses possibilités de ces méthodes [Au 99].

En dehors des méthodes directes de Monte-Carlo, toutes les méthodes existantes dédiées à la résolution de ce problème sont regroupées sous l'appellation commune de Méthodes d'Eléments Finis Stochastiques (MEFS), parce qu'elles sont fondées sur l'emploi d'un modèle EF. Les recherches menées autour de ces méthodes ont pour beaucoup en perspective l'élaboration de procédures de calcul capables de traiter des problèmes réels (*i .e.* industriels), dans des temps raisonnables. La plupart des travaux concernent des problèmes mécaniquement linéaires. Ceux relatifs aux problèmes mécaniquement non linéaires sont plus rares mais font l'objet d'un engouement grandissant. Nous citons, par exemple, les travaux de [And99, And01 et Zha98] pour les comportements élastoplastiques, ceux de [Zel98] pour les comportements avec matériaux endommageables, ou encore ceux de [Liu87] pour les non linéarités géométriques. Tous ces travaux montrent qu'une MEFS se construit en deux grandes étapes : une étape opérant sur les modèles probabilistes des paramètres incertains et concernant notamment la façon de les prendre en compte (*i.e.* de les représenter) dans le modèle EF et une étape de choix et de construction des outils numériques destinés au calcul des grandeurs cibles (moments) liées aux paramètres de contrôle. Plusieurs options existent dans chacune de ces étapes qui, croisées, conduisent aux différents types de MEFS. Il importe de noter, et c'est un point de distinction très important, que certaines MEFS modifient le modèle EF [Kle92, Deo91a, Gha91], tandis que d'autres ne le modifient pas [Der88].

1.1.3 Dynamique des structures et analyse modale

Les approches stochastiques en mécanique sont généralement basées sur une transformation du problème stochastique en un problème déterministe équivalent simple ou en un ensemble de problèmes déterministes équivalents. L'approche spectrale de la MEFS se fonde sur une telle transformation et pour cette raison, le cadre déterministe est d'abord rappelé.

Cette section est consacrée à la dynamique analytique des systèmes mécaniques [Ger96]. Une approche basée sur la discrétisation du champ de déplacement par éléments finis conventionnels est abordée [Bat76, Zie89]. De plus, le régime harmonique permet de ramener l'ensemble des équations différentielles du second ordre à un ensemble d'équations algébriques complexes. Le cas harmonique est important pour deux aspects : d'une part, c'est le comportement du système en fonction de la fréquence que l'on peut identifier plus facilement par voie expérimentale, d'autre part, le régime harmonique est représentatif de nombreux modes d'excitation observés. Une fois les notions classiques de fréquences et de modes propres rappelées, nous abordons quelques aspects plus spécifiques dont la méthode de superposition modale pour le calcul de la réponse à une excitation extérieure.

1.1.3.1 Modélisation éléments finis

Si nous mettons de côté les aspects aléatoires, le comportement mécanique des structures est déjà très complexe, et la modélisation requiert des algorithmes numériques à la fois précis et efficaces. La méthode des éléments finis, depuis de nombreuses années, a prouvé son efficacité pour résoudre une grande variété de problèmes. Il apparaît donc clairement que l'introduction des aléas et des incertitudes doit rester compatible avec la formulation éléments finis déterministe classique.

Généralement, les déplacements sont approchés par une interpolation des vecteurs nodaux :

$$\{u(x,t)\} = [N(x)]\ \{q(t)\} \tag{1.4}$$

où $\{u(x,t)\}$ représente le champ de déplacements approchés, $[N(x)]$ est la matrice des fonctions de forme et $\{q(t)\}$ le vecteur des déplacements nodaux, dont les composantes sont les inconnues de l'approximation. L'utilisation de la méthode de Rayleigh-Ritz permet d'écrire l'équation matricielle linéaire (forme faible discrète) décrivant le comportement d'un système dynamique :

$$[M]\{\ddot{q}(t)\}+[C]\{\dot{q}(t)\}+[K]\{q(t)\}=\{F(t)\} \tag{1.5}$$

L'équation (1.5) est l'équation matricielle générale du mouvement d'un solide, avec :

$$[M]=\int_{\Omega}\rho[N]^T[N]d\Omega \tag{1.6a}$$

$$[C]=\int_{\Omega}\eta_a[N]^T[N]d\Omega+\int_{\Omega}\eta_b[B]^T[D][B]d\Omega \tag{1.6b}$$

$$[K]=\int_{\Omega}[B]^T[D][B]d\Omega \tag{1.6c}$$

où ρ est la masse volumique, η_a et η_b sont les coefficients d'amortissement externe et interne, $[B]$ est la matrice de passage des déplacements aux déformations et $[D]$ la matrice d'élasticité. Les matrices symétriques $[M]$, $[C]$ et $[K]$ sont les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité élastique, respectivement. Le vecteur $\{F\}$ est le vecteur des excitations. L'intégration des relations (1.6) sur le domaine Ω peut être ramené à un assemblage de matrices élémentaires. Les conditions aux limites doivent être imposées avant de résoudre le système (1.6). Enfin, la matrice d'amortissement $[C]$ est généralement exprimée comme une combinaison linéaire des deux matrices $[K]$ et $[M]$, ce qui permet un découplage complet de l'équation lors de la projection du système linéaire sur la base modale du problème. Nous parlons ainsi d'un amortissement de Rayleigh, lorsque la matrice d'amortissement s'écrit :

$$[C]=\alpha_M[M]+\alpha_K[K] \tag{1.7}$$

où α_M et α_K sont des coefficients.

La modélisation par éléments finis dans le domaine des fréquences conduit à l'équation matricielle suivante :

$$(-\omega^2[M] + \omega\ [C] + [K])\{q\}=\{F\} \tag{1.8}$$

Dans ce cas, l'amortissement est dit structural lorsque :

$$[C]=\frac{\eta}{\omega}[K] \tag{1.9}$$

La procédure de résolution du problème déterministe discret repose sur le calcul des matrices $[K]$, $[M]$ et $[C]$, et sur la solution, pour chaque fréquence discrète ω, du système linéaire (1.8).

1.1.3.2 Calcul des modes propres

L'hypothèse de vibration libre sans amortissement et de mouvement harmonique ramène l'équation (1.7) à la forme :

$$(-\omega^2[M] + [K])\{q\}=0 \tag{1.10}$$

Le problème de la détermination des modes et fréquences propres (ω_i et $\{\varphi_i\}, i\in \{1,\ldots, N\}$), de vibration d'un système mécanique se ramène toujours au calcul des solutions propres du système linéaire homogène :

$$[K]\{\varphi_i\} = \omega_i^2[M]\{\varphi_i\} \tag{1.11}$$

La propriété d'orthogonalité des vecteurs propres est exprimée par :

$$\begin{cases} \{\varphi_i\}^T[K]\{\varphi_j\} = \delta_{ij}\omega_i^2 \\ \{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_j\} = \delta_{ij} \end{cases} \tag{1.12}$$

quand les vecteurs propres sont normalisés par rapport à la masse, où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

1.1.3.3 Méthode de superposition modale

Une technique de superposition modale peut également être utilisé pour calculer la réponse du système dans le domaine de fréquence. Cette technique est basée sur l'identification d'une base appropriée pour représenter la réponse du système. Le principe de base est que la réponse de la structure est la combinaison de différents modes propres de vibration. La contribution de chacun des modes est donnée par un facteur d'amplitude à déterminer :

$$\{q\} \approx \sum_{i=1}^{N} y_i\{\varphi_i\} \tag{1.13}$$

où N est le nombre de termes significatifs et y_i est l'amplitude du mode i. Nous pouvons écrire :

$$\{q\} = [\Phi][y] \tag{1.14}$$

où $[\Phi]$ est la matrice des vecteurs propres du système et $[y]$ est la matrice d'amplitude modale. L'équation du mouvement, tronquée aux N premiers modes, est écrite sous la forme :

$$[M][\Phi]\{\ddot{y}\} + [C][\Phi]\{\dot{y}\} + [K][\Phi]\{y\} = \{F\} \tag{1.16}$$

Cette expression est multipliée par le vecteur propre du mode i

$$\{\varphi_i\}^T[M][\Phi]\{\ddot{y}\} + \{\varphi_i\}^T[C][\Phi]\{\dot{y}\} + \{\varphi_i\}^T[K][\Phi]\{y\} = \{\varphi_i\}^T\{F\} \tag{1.17}$$

L'orthogonalité des modes propres réduit le système à une série d'équations découplées (amortissement orthogonal) :

$$\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}\{\ddot{y}\} + \{\varphi_i\}^T[C]\{\varphi_i\}\{\dot{y}\} + \{\varphi_i\}^T[K]\{\varphi_i\}\{y\} = \{\varphi_i\}^T\{F\} \tag{1.18}$$

ou bien

$$\ddot{y}_i + 2c_i\omega_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = f_i \tag{1.19}$$

avec

$$f_i = \{\varphi_i\}^t \{F\} \tag{1.20}$$

et $c_i = \{\varphi_i\}^t [C] \{\varphi_i\}$ est le coefficient d'amortissement. Il suffit de résoudre séparément chacune de ces équations pour déterminer l'amplitude associée $y_i(t)$.

Une simplification de la méthode de superposition modale réside dans le fait que la solution complète du problème aux valeurs propres (1.11) n'est généralement pas nécessaire. En fait, seuls les vecteurs propres dominants doivent être identifiés pour l'analyse dynamique des structures en basse fréquence.

L'avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas une résolution complète à chaque fréquence discrète. En fait, la projection modale permet la diagonalisation du système, ce qui réduit considérablement l'effort numérique. Toutefois, la résolution du problème aux valeurs propres est nécessaire, ce qui représente un coût informatique non négligeable, mais ce calcul ne se fait qu'une seule fois. Des procédures de calcul très efficaces sont disponibles pour l'analyse spectrale en basse fréquence des matrices [*K*] et [*M*] [Bai00].

1.2 Modélisation probabiliste des paramètres incertains

1.2.1 Introduction

Les méthodes stochastiques sont les méthodes non déterministes les plus utilisées. La raison essentielle de ce succès vient tout simplement du fait qu'elles reposent sur la théorie des probabilités, dont l'utilisation s'impose naturellement lorsqu'il s'agit de modéliser les effets du hasard, et donc par extension les incertitudes que l'on veut introduire dans les modèles.

Les toutes premières notions de probabilité datent du seizième siècle et concernent les jeux de hasard (en particulier, les jeux de dés). Les concepts mathématiques associés ont été formalisés dès le début du dix-huitième siècle, à travers les travaux de Bernoulli, Bayes, Laplace, et Pascal.

Après une maturation progressive des concepts jusqu'à l'intervention de Kolmogorov qui fonde définitivement dans [Kol56] la théorie des probabilités dans les termes de la théorie de la mesure, des outils se sont développés de façon importante au cours de la seconde moitié du vingtième siècle avec la forte émergence des moyens informatiques. Dans le domaine de la mécanique, nous sommes peu à peu arrivés à la création d'une discipline à part entière, traitant du calcul stochastique en mécanique, en vue de modéliser précisément les incertitudes dans le système étudié, dont nous allons maintenant dresser un panorama non exhaustif (nous trouvons plus de précisions dans un état de l'art dans [Sch97], [Sch01]). Pour plus de détails sur la théorie des probabilités elle-même, nous pouvons par exemple conseiller de consulter [Gri91].

1.2.2 Types des paramètres stochastiques

Comme nous l'avons déjà évoqué dans l'introduction de ce mémoire, les méthodes stochastiques permettent d'étudier les effets des incertitudes affectant les paramètres du modèle sur la variabilité de la sortie. Pour cela, il faut préciser la définition des paramètres incertains en termes stochastiques.

Les types de paramètres incertains que l'on peut introduire dans des modèles stochastiques sont les suivants :

- les variables aléatoires, à valeurs dans $\mathbb{R}$, sont généralement caractérisées chacune par une densité de probabilité, et les unes vis-à-vis des autres par des matrices de corrélation (idéalement, une description complète de ces variables serait caractérisée par la loi conjointe de probabilité, mais celle-ci est souvent difficile à établir en pratique),

- les champs stochastiques sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, dépendant à la fois de l'aléa et de l'espace x ; ces champs sont généralement caractérisés chacun par la donnée d'une moyenne et d'une variance dépendant de l'espace, et d'une fonction de covariance entre deux points de l'espace,

- les processus stochastiques sont des fonctions dépendant à la fois de l'aléa et du temps ; les processus sont au temps ce que les champs stochastiques sont à l'espace, ce qui implique des possibilités de traitement analogues.

1.2.3 Variables aléatoires

Classiquement l'observation d'un phénomène aléatoire est appelée épreuve. Toutes les réalisations possibles d'une épreuve forment l'ensemble de tous les résultats d'une expérience aléatoire, qui sera noté Θ. Un événement E est défini comme un sous-ensemble de Θ contenant les réalisations $\theta \in \Theta$. La théorie des probabilités consiste en l'association de nombres aux événements, i.e. leur probabilité d'occurrence. Notons P cette mesure de probabilité. L'ensemble de tous les événements possibles ayant une probabilité ainsi définie est appelé une σ-algèbre associée à Θ, et est notée F. Finalement l'espace de probabilité construit grâce à ces notions est noté (Θ, F, P).

Une variable aléatoire réelle $\boldsymbol{X}$ est une application $\boldsymbol{X}$: (Θ, F, P) $\rightarrow \mathbb{R}$. Pour les variables aléatoires continues, la densité de probabilité et la fonction de répartition sont notées $f_{\mathrm{X}}(x)$ et $F_{\mathrm{X}}(x)$, respectivement, et l'indice $\boldsymbol{X}$ pourra être omis lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion. Pour souligner le caractère aléatoire de X, nous utilisons dans ce mémoire la notation $\boldsymbol{X}$. Un vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}$ est un vecteur dont les composantes sont des variables aléatoires.

L'espérance mathématique est notée $E[.]$:

$$E[g(\boldsymbol{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \tag{1.21}$$

La moyenne, la variance et les moments d'ordre n de $\boldsymbol{X}$ sont :

$$\mu_{\boldsymbol{X}} \equiv E[\boldsymbol{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \tag{1.21}$$

$$\sigma_{\boldsymbol{X}}^2 \equiv E\left[(\boldsymbol{X} - \mu_{\boldsymbol{X}})^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_{\boldsymbol{X}})^2 f_X(x) dx \tag{1.22}$$

$$E\left[\boldsymbol{X}^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \tag{1.23}$$

Les moments centrés réduits d'ordre 3 et 4 portent respectivement les noms de coefficient d'asymétrie (ou *skewness*) et d'aplatissement (ou *kurtosis*) ; ils sont définis par :

$$\delta = \frac{E\left[(\boldsymbol{X} - \mu_{\boldsymbol{X}})^3\right]}{\sigma_X^3} \tag{1.24}$$

$$\kappa = \frac{E\left[(\boldsymbol{X} - \mu_{\boldsymbol{X}})^4\right]}{\sigma_X^4} \tag{1.25}$$

La covariance de deux variables aléatoires $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ est définie par :

$$\mathrm{Cov}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] = E[(\boldsymbol{X}-\mu_{\mathbf{X}})\,(\boldsymbol{Y}-\mu_{\mathbf{Y}})] \tag{1.26}$$

En introduisant la densité de probabilité conjointe $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y)$ de ces variables, l'équation (1.26) peut se réécrire :

$$Cov[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_{\boldsymbol{X}})(y - \mu_{\boldsymbol{Y}})\, f_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}(x,y) dxdy \tag{1.27}$$

Si $\sigma_{\mathbf{X}}$ et $\sigma_{\mathbf{Y}}$ sont respectivement les écarts-types des variables $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$, le coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ est défini par :

$$\rho_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}} = \frac{Cov[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]}{\sigma_{\boldsymbol{X}}\sigma_{\boldsymbol{Y}}} \tag{1.28}$$

L'espace vectoriel de dimension finie des variables aléatoires réelles de second moment est noté $L(\Theta,F,P)$. L'opérateur de moyenne permet de définir dans cet espace un produit scalaire et une norme associée comme suit :

$$\langle \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y} \rangle \equiv E[\boldsymbol{XY}] \tag{1.29}$$

où :

$$E[\boldsymbol{XY}] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.y.f_{X,Y}(x,y) dxdy$$

$$\|\boldsymbol{X}\| = \sqrt{E\left[\boldsymbol{X}^2\right]} \tag{1.30}$$

Nous montrerons qu'on peut choisir comme base de $L(\Theta, F, P)$ les polynômes d'Hermite multidimensionnels de variables gaussiennes centrées réduites.

1.2.3.1 Loi de probabilité normale

Il est en général très courant de choisir pour une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ une loi de probabilité dite normale, dont la densité de probabilité s'écrit sous la forme :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \tag{1.31}$$

où $\mu=E[\boldsymbol{X}]$ est l'espérance et $\sigma=E[(\boldsymbol{X}-E[\boldsymbol{X}])^2]^{1/2}$ l'écart-type de la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ ainsi définie.

Dans tout ce mémoire, nous notons $\boldsymbol{\xi} = N(0, 1)$ une variable aléatoire gaussienne centrée réduite (v.a.g.c.r.) c'est-à-dire de moyenne nulle et d'écart-type 1, de densité de probabilité :

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \tag{1.32}$$

et de fonction de répartition :

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \tag{1.33}$$

L'importance de cette loi est due au théorème central limite, dont l'énoncé est le suivant :

Si l'on considère n variables aléatoires indépendantes $\boldsymbol{X}_1,\ldots,\boldsymbol{X}_n$ d'espérances respectives μ_k et d'écarts-types respectifs σ_k, alors la loi de répartition de :

$$\boldsymbol{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{X}_k \tag{1.34}$$

tend lorsque $n\to\infty$ vers une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ :

$$\mu = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \quad , \quad \sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2} \tag{1.35}$$

Ceci tend à justifier pourquoi les paramètres structuraux tels que la masse ou la rigidité sont souvent modélisés par des variables aléatoires de loi normale. Cette loi pose un problème théorique : vu que son domaine de définition est l'ensemble des réels, des réalisations non positives peuvent se produire, ce qui n'a pas de sens physique pour des paramètres tels que la masse ou la raideur. Deux solutions sont alors envisageables :

- si, avec la loi normale utilisée, la probabilité d'occurrence d'une valeur négative est suffisamment faible au regard des probabilités envisagées, nous pouvons faire en sorte de ne pas prendre en compte ces valeurs aberrantes, ce qui nécessite de normaliser ensuite la densité de probabilité de la loi,
- une loi de probabilité, proche de la loi normale, mais dont le domaine de définition est réduit à $\mathbb{R}^{*+}$, peut être utilisée : il s'agit de la loi lognormale [Mic00].

1.2.3.2 Variables aléatoires lognormales

Une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ est dite suivre une loi lognormale de paramètres μ_X et σ_X si la variable $\boldsymbol{Y}=\ln(\boldsymbol{X})$ suit une loi normale de paramètres μ et σ.

La loi lognormale de paramètres μ et σ admet pour densité

$$f(x)=\frac{1}{x\sigma_X\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{(ln\,x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right) \tag{1.36}$$

l'espérance μ_X et l'écart type σ_X étant reliés aux paramètres l'espérance μ et l'écart type σ de $\boldsymbol{Y}$ par les expressions :

$$\mu_X=e^{\mu+\sigma^2/2} \quad , \quad \sigma_X=\left(e^{\sigma^2}-1\right)e^{2\mu+\sigma^2} \tag{1.37}$$

1.2.4 Champs aléatoires

1.2.4.1 Présentation

Bien qu'ils soient de manipulation plus complexe, les champs stochastiques représentent de manière bien plus réaliste des paramètres mécaniques incertains, pour lesquels la prise en compte de la variabilité spatiale est nécessaire, comme par exemple les propriétés mécaniques et géométriques. En effet, modéliser le module de Young d'une poutre en acier par une variable aléatoire seulement revient à supposer que deux poutres en acier quelconques n'auront pas forcement le même module, mais par contre que le module de chaque poutre est constant sur toute sa longueur, et cette hypothèse implicite de constance du module de Young peut se révéler bien trop imprécise suivant les applications.

Un champ aléatoire scalaire $\boldsymbol{G}(x)$ peut être défini comme un ensemble de variables aléatoires indexées par un paramètre continu $x \in \Omega$, où Ω est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$ décrivant la géométrie du système. A x_0 fixé, $\boldsymbol{G}(x_0)$ est une variable aléatoire. Inversement, $\boldsymbol{G}_0(x)$ est une réalisation du champ aléatoire (trajectoire), c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Un champ aléatoire est dit vectoriel si la quantité $\boldsymbol{G}(x)$ attachée au point x est un vecteur aléatoire. Par souci de simplicité, nous ne considérons dans la suite que des champs scalaires multidimensionnels permettant de représenter le module de Young, les coefficients de Poisson, les charges réparties, etc.

Le champ aléatoire est gaussien si n'importe quel vecteur $\{\boldsymbol{G}(x_1),\ldots,\boldsymbol{G}(x_n)\}$ est un vecteur gaussien. Un champ aléatoire gaussien est complètement défini par sa moyenne $\mu(x)$, sa variance $\sigma^2(x)$ et sa fonction d'autocovariance $C(x_1, x_2)$ définie par :

$$C(x_1, x_2) = \mathrm{Cov}[\boldsymbol{G}(x_1), \boldsymbol{G}(x_2)] \tag{1.38}$$

Nous notons $\rho(x_1,x_2)$ la fonction d'autocorrélation :

$$\rho(x_1, x_2)=\frac{C(x_1,x_2)}{\sigma(x_1)\sigma(x_2)} \tag{1.39}$$

Un champ aléatoire est stationnaire d'ordre 2 si sa moyenne et sa variance sont constantes et si ρ ne dépend que de la différence x_2-x_1.

1.2.4.2 Champs aléatoires lognormaux

Soit $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{G}(x), x \in \mathbb{R})$ un champ gaussien, stationnaire, de moyenne μ_G et de fonction de covariance $C_G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u \to C_G(u)$ telle que $C_G(u) = E[(\boldsymbol{G}(x+u) - \mu_G)(\boldsymbol{G}(x) - \mu_G)]$. Alors le champ stationnaire $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y}(x), x \in \mathbb{R})$, à valeurs dans R^+, tel que :

$$\boldsymbol{Y} = e^{\boldsymbol{G}} \tag{1.40}$$

est dit lognormal scalaire. Sa moyenne $\mu_Y = E[\boldsymbol{Y}(x)]$ et sa fonction de covariance $C_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u \to C_Y(u) = E[(\boldsymbol{Y}(x + u) - \mu_Y)(\boldsymbol{Y}(x) - \mu_Y)]$ sont liées à celles de $\boldsymbol{G}$ par :

$$\mu_Y = exp\left(\mu_G + \frac{C_G(0)}{2}\right) \tag{1.41}$$

$$C_Y(u) = \left[exp(2\mu_G + C_G(0))\right]\left[exp(C_G(u) - 1)\right] \tag{1.42}$$

Il en résulte que tout champ lognormal scalaire stationnaire $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y}(x), x \in \mathbb{R})$, de moyenne μ_Y et fonction de covariance $u \to C_Y(u)$ données peut s'écrire : $\boldsymbol{Y} = e^{\boldsymbol{G}}$, avec $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{G}(x), x \in \mathbb{R})$ un champ gaussien stationnaire de moyenne μ_G et fonction de covariance $u \to C_G(u)$ telles que :

$$\mu_G = ln\left(\frac{\mu_Y}{\sqrt{1 + a_Y^2}}\right) \tag{1.43}$$

$$C_G(u) = ln\left(1 + \frac{C_Y(u)}{\mu_Y^2}\right) \tag{1.44}$$

où

$$a_Y = \frac{C_Y^{1/2}(0)}{\mu_Y} \tag{1.45}$$

est le coefficient de variation de $\boldsymbol{Y}$.

1.2.4.3 Méthodes de discrétisation des champs aléatoires

La représentation des champs aléatoires est un point important pour la modélisation éléments finis. Il s'agit de remplacer une quantité aléatoire continue par un ensemble de variables (plus simples à gérer). Autrement dit, la discrétisation d'un champ aléatoire est l'approximation de $\boldsymbol{G}(x)$ par $\widetilde{\boldsymbol{G}}(x)$ défini par un ensemble fini de variables aléatoires $\{\xi_i(\theta), i = 1,...,n\}$:

$$\boldsymbol{G}(x) \approx \widetilde{\boldsymbol{G}}(x) \tag{1.46}$$

Nous distinguons deux grandes classes d'approximation que nous allons succinctement présenter : les approximations discrètes et les approximations fonctionnelles. Pour ce faire, nous nous limitons au contexte gaussien stationnaire, qui est le contexte naturel (nous venons en effet de voir, dans le paragraphe précédent, que tout champ lognormal pouvait s'interpréter comme une transformation exponentielle d'un champ gaussien). Nous nous bornons en outre, pour simplifier, à un modèle probabiliste scalaire.

(a) Approximations discrètes

Nous regroupons sous l'appellation approximations discrètes, les approximations du champ $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{G}(x), x \in \Omega)$ obtenues, soit à partir de ses observations en des points de Ω, soit à partir de ses moyennes locales sur les éléments d'une partition de Ω, résultant par exemple d'un maillage EF, si celui-ci est utilisé.

Soient $F_n = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, un ensemble fini de points de Ω. Approcher ponctuellement $\boldsymbol{G}$ sur F_n consiste à remplacer $\boldsymbol{G}$ par un ensemble fini de ses observations aux points de F_n, autrement dit par les v.a. n-vectorielles $\boldsymbol{\xi}_j$ tel que $\boldsymbol{\xi}_j = \boldsymbol{G}(x_j)$, dont nous notons qu'elles sont complètement caractérisées : elles sont gaussiennes, de moyennes :

$$\mu_{\xi j} = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{\xi}_j] = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{G}(x_i)) = \mu_G \tag{1.47}$$

et de covariances :

$$C_{\xi}^{ij} = C_{\xi_i \xi_j} = E\left[\left(\boldsymbol{\xi}_i - \mu_{\xi_i}\right)\left(\boldsymbol{\xi}_j - \mu_{\xi_j}\right)\right] = E\left[\left(\boldsymbol{G}(x_i) - \mu_G\right)\left(\boldsymbol{G}(x_j) - \mu_G\right)\right] = C_G(x_i, x_j) \tag{1.48}$$

Nous voyons ici le défaut de ce type d'approximation : pour qu'il soit fidèlement représentatif du comportement statistique du champ $\boldsymbol{G}$ et notamment de sa corrélation, il nécessite un nombre de points conséquent (*i.e.* n très grand) et engendre de ce fait des temps de calcul très importants, voire irréalistes. Par ailleurs, il ne tient pas compte, par construction, du maillage EF : les points de F_n sont choisis a priori, indépendamment de ce dernier. C'est pourquoi d'autres versions de cette approche ont été développées pour tenir compte du maillage et pour utiliser moins de points (cf. par exemple [Mat97, Lem05]) :

- la méthode de discrétisation utilisant les centres de gravité des éléments (*mid-point method*) est la façon la plus simple de procéder : elle consiste à associer une variable aléatoire à chaque élément du maillage, en supposant que celle-ci est la valeur du champ stochastique au milieu de l'élément, les moments statistiques de ces variables aléatoires sont alors obtenus en considérant ceux du champ stochastique aux différents points milieux du maillage [Der88, Fal02, Imp03, Fal04],
- la méthode utilisant les noeuds des éléments (*Nodal point method*) et ses versions améliorées : la méthode d'interpolation polynomiale (*Interpolation method*, [Mat97]), la méthode des fonctions de forme (*Shape function method*), la méthode basée sur l'emploi d'une technique d'estimation linéaire optimale (*Optimal Linear Estimation*, [Li 93]), dite méthode OLE et qui n'est qu'une application particulière des techniques de krigeage,
- la méthode utilisant les points d'intégration (*Integration point method*, méthode citée par Matthies et *al.* [Mat97] et utilisée, à notre connaissance, par Brenner et Bucher [Bre95]),
- la discrétisation par moyenne locale (*local average method* en anglais, [Zhu92]), basée sur l'idée de construire les v.a. $\boldsymbol{\xi}_i$ en attribuant à chacune de ces variables la moyenne spatiale du processus $\boldsymbol{G}$ sur un élément. Cette moyenne spatiale peut a priori être calculée analytiquement ou estimée dans la pratique à partir d'observations du champ en des points particuliers (par exemple des sondages en géotechnique).

Nous notons que, dans toutes ces méthodes, le champ cible $\boldsymbol{G}$ est approché par un champ $\widetilde{\boldsymbol{G}}$ de la forme :

$$\widetilde{\boldsymbol{G}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x) \boldsymbol{X}_j \tag{1.49}$$

ou :

$$\widetilde{\boldsymbol{G}}(x) = \mu_G + \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x) \boldsymbol{\xi}_j \tag{1.50}$$

où les $\boldsymbol{X}_j$ sont des v.a. gaussiennes, $\boldsymbol{\xi}_j$ sont des v.a. gaussiennes centrées réduites et Φ_j sont des fonctions dont les expressions dépendent de la méthode d'approximation considérée : ce sont, par exemple, des fonctions indicatrices (celles des éléments) pour les première et quatrième méthodes et des fonctions d'interpolation ou de forme pour les deuxième et troisième méthodes.

- la discrétisation par intégrales pondérées (*weighted-integral method*) permet de transformer le champ stochastique initial en un vecteur de variables nodales, qui sont calculées lors de l'intégration numérique requise sur chaque élément pour le calcul de la rigidité élémentaire [Tak90a–b, Deo91a-b]. Dans [Tak92], il a été montré que cette discrétisation donnait une très bonne approximation de la variance de la réponse, tandis que la discrétisation au milieu de l'élément avait tendance à la surestimer, et la discrétisation par moyenne locale à la sous-estimer.

De l'expérience des utilisateurs de ces méthodes, nous pouvons avancer qu'aucune d'elles ne s'est véritablement imposée comme méthode de référence. Chacune a son domaine d'application, qui est plus au moins bien délimité, et de toute évidence des progrès restent à faire dans ce domaine. En particulier, toutes ces méthodes restent seulement applicables à des champs gaussiens [Sud00]. De plus, le fait que l'approximation discrète dépend du maillage peut être un handicap dans certaines situations (cf. par exemple [Mah91]). Il est montré en outre, pour la méthode de discrétisation par moyenne locale, que la variance du champ approché varie avec les dimensions du maillage EF (phénomène de réduction de variance ou effet d'échelle). Nous pouvons être alors amené à utiliser une autre forme d'approximation, basée sur un développement en série du champ, que nous allons brièvement évoquer ci-dessous.

(b) Approximations fonctionnelles

D'autres méthodes existent, comme le développement de Karhunen-Loève [Gha91], la méthode spectrale [Shi91], ou des méthodes de développements orthogonaux [Eli79, Zha94]. Le développement de Karhunen-Loève est basé sur un ensemble de fonctions orthogonales déterministes, qui sont les fonctions propres de la fonction de covariance du champ aléatoire. L'inconvénient qui s'ensuit est qu'on est obligé de connaître les valeurs propres et les fonctions propres de la fonction de covariance, dont la détermination par une équation intégrale est difficile sauf dans les cas particuliers où des solutions analytiques existent. Un avantage est que, en général, il faut moins de termes pour représenter correctement le champ aléatoire qu'avec des polynômes orthogonaux. Il peut néanmoins exister des cas où un grand nombre de termes est nécessaire.

L'idée est de rechercher une représentation du champ aléatoire sous la forme d'un développement en série, c'est-à-dire de l'écrire sous la forme [Law87] :

$$\boldsymbol{G}(x) = \mu_G + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)\boldsymbol{\xi}_i \tag{1.51}$$

où les $\boldsymbol{\xi}_i$ sont des v.a. gaussiennes centrées indépendantes et φ_i sont des fonctions orthogonales (par rapport à une certaine métrique) de Ω dans $\mathbb{R}$, puis d'approcher $\boldsymbol{G}$ par un champ $\widetilde{\boldsymbol{G}}$ obtenu en tronquant à un certain ordre P la série précédente :

$$\boldsymbol{G}(x) = \mu_G + \sum_{i=1}^{P} \varphi_i(x)\boldsymbol{\xi}_i \tag{1.52}$$

L'intérêt d'une telle procédure, basée sur l'écriture de $\boldsymbol{G}$ sur une certaine base fonctionnelle, est qu'elle ne fait pas intervenir le maillage EF. Ajoutons que, dans son application spécifique au contexte EF, elle est souvent couplée à un développement des coefficients aléatoires $\boldsymbol{\xi}_i$ en chaos de Wiener [Wie38].

Les deux bases fonctionnelles les plus courantes sont celle des polynômes d'Hermite normalisés (cf. annexe B) et celle des fonctions propres de l'opérateur de covariance du champ $\boldsymbol{G}$.

1.2.4.4 Discrétisation de Karhunen-Loève

La méthode de discrétisation de Karhunen-Loève [Loè77] permet de représenter tout champ aléatoire $\boldsymbol{G}(x)$ en une partie déterministe (la moyenne $\mu(x)$) et en une partie aléatoire décomposée sur la base des valeurs propres λ_i et des fonctions propres $f_i(x)$ de la fonction d'autocovariance $C_G(x, x') = \sigma(x)\,\sigma(x')\,\rho(x, x')$, solution du problème aux valeurs propres suivant (équation intégrale de Fredholm) :

$$\forall i = 1,\ldots \qquad \int_{\Omega} C_G(x,x') f_i(x') d\Omega = \lambda_i f_i(x') \tag{1.53}$$

Le noyau C_G étant une fonction d'autocovariance, il est borné, symétrique et défini positif. Ainsi l'ensemble des $\{f_i\}$ forme une base complète orthogonale de l'espace des fonctions de carrés intégrables $L^2(\Omega)$. Les valeurs propres sont réelles, positives et en nombre fini. Chaque réalisation de $G(.)$ peut ainsi être développée sur cette base :

$$G(x) = \mu(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\,\xi_i f_i(x) \tag{1.54}$$

où $\{\xi_i,\ i=1,\ldots.\}$ sont les coordonnées de la réalisation du champ aléatoire vis-à-vis de l'ensemble des fonctions déterministes $\{f_i\}$. En calculant $\mathrm{Cov}[\boldsymbol{G}(x), \boldsymbol{G}(x')]$ à partir de l'équation (1.27) et en imposant son égalité à $C_{\mathbf{G}}(x, x')$, nous avons :

$$E[\xi_k \xi_l] = \delta_{kl} \ \text{(Symbole de Kronecker)} \tag{1.55}$$

Cela signifie que la famille des $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ forme un ensemble orthonormal de variables aléatoires vis-à-vis du produit scalaire.

Propriétés

La discrétisation de Karhunen-Loève vérifie les propriétés suivantes :

• Comme il ne peut y avoir des valeurs propres multiples (excepté éventuellement 0), il est possible de les classer en une suite décroissante convergeant vers 0.
En tronquant la série (1.54) à un ordre *M*, nous avons l'approximation de Karhunen-Loève du champ aléatoire :

$$\widetilde{\boldsymbol{G}}(x) = \mu(x) + \sum_{i=1}^{M} \sqrt{\lambda_i}\,\boldsymbol{\xi}_i f_i(x) \tag{1.56}$$

• La base des fonctions propres de la fonction d'autocovariance est optimale au sens des moindres carrés pour l'erreur (intégrée sur Ω) due à la troncature à un ordre *M*.

• L'ensemble des variables aléatoires qui apparaissent dans l'équation (1.54) est orthonormal, c'est-à-dire qu'elles vérifient (1.55), si et seulement si les fonctions de base $\{f_i(x)\}$ et les constantes λ_i sont des solutions du problème aux valeurs propres (1.53).

• Comme les fonctions propres sont orthonormales, il est facile d'obtenir une expression de chaque variable aléatoire qui apparaît dans les séries :

$$\boldsymbol{\xi}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_{\Omega} \left[\boldsymbol{G}(x) - \mu(x)\right] f_i(x)\, d\Omega \tag{1.57}$$

Ainsi, quand $\boldsymbol{G}(.)$ est un champ gaussien, chaque variable aléatoire ξ_i est une variable aléatoire gaussienne. Il s'ensuit que les $\{\boldsymbol{\xi}_i\}_{1 \le i \le \infty}$ forment un ensemble de v.a.g.c.r. indépendantes. De plus, on montre que la discrétisation de Karhunen-Loève d'un champ gaussien est convergente presque sûrement.

• De l'équation (1.57), nous tirons que la variance de l'erreur obtenue après troncature à l'ordre *M* est définie par :

$$Var\left[\boldsymbol{G}(x) - \widetilde{\boldsymbol{G}}(x)\right] = \sigma^2(x) - \sum_{i=1}^{M} \lambda_i f_i^2(x) = Var\left[\boldsymbol{G}(x)\right] - Var\left[\widetilde{\boldsymbol{G}}(x)\right] \tag{1.58}$$

Le membre de gauche de l'équation ci-dessus est toujours positif (car c'est la variance de l'écart $\left[\boldsymbol{G}(x) - \widetilde{\boldsymbol{G}}(x)\right]$). Ainsi, la discrétisation de Karhunen-Loève sous-estime toujours la vraie variance du champ.

Il est à noter qu'il existe d'autres développements se substituant à celui de Karhunen-Loève. Ce dernier est en fait un cas particulier d'une famille plus large de développements, nommés OSE (*Optimal Series Expansions*), applicables à un champ aléatoire non nécessairement gaussien. Ce type de développement, cité dans [Sud00], semble cependant n'avoir été exploité que par ses auteurs [Zha94]. Un autre développement, nommé EOLE (*Expansion Optimal Linear Estimation*, [Li 93]), qui est une extension de la méthode OLE (variante de la méthode utilisant les nœuds des éléments), est appliqué dans le cadre d'une MEFS [Sud00]. Cette dernière méthode n'est plus limitée dans la pratique à quelques fonctions de covariance, mais dépend néanmoins du maillage EF, contrairement au développement de Karhunen-Loève.

Une dernière façon de procéder est de représenter le champ aléatoire par sa projection sur une base de fonctions orthogonales, des polynômes de Legendre par exemple ([Eli79], [Zha94]). Pour obtenir la même précision qu'un développement de Karhunen-Loève, il faut plus de termes, mais il y a moins de calculs puisqu'on évite la résolution d'une équation intégrale.

1.3 Méthodes stochastiques en calcul des structures

Cette partie donne un aperçu des différentes méthodes stochastiques, prenant en compte les incertitudes sous forme de variables aléatoires et de champs stochastiques dans les modèles mécaniques en calcul des structures. Nous étudions ensuite les concepts et les applications que peuvent apporter ces méthodes au niveau de la validation des modèles.

Nous présentons dans les paragraphes suivants les méthodes classiques de résolution des problèmes stochastiques [Ibr87, Ben88]. Quelques problèmes peuvent être résolus analytiquement, mais ce sont en général des problèmes académiques simples. Les simulations de Monte-Carlo sont largement employées, malgré leur fort coût en temps de calcul, et servent de référence pour les méthodes approchées. La méthode des perturbations, qui s'appuie sur un développement en séries de Taylor à un ordre faible (un ou deux en général), est la méthode la plus employée, malgré ses problèmes de convergence. Dans le même ordre d'idée, le développement en séries de Neumann peut être employé, mais il souffre lui aussi de problèmes de convergence. Une méthode plus récente est aussi présentée, qui utilise une projection sur une base de polynômes orthogonaux de variables gaussiennes. Enfin, lorsque les variables sont bornées, des méthodes spécifiques peuvent être envisagées.

1.3.1 Méthode analytique

Une première approche des problèmes aléatoires peut consister en une résolution analytique. Nous définissons pour cela la distribution de l'image d'une variable par une fonction.

Soit f une fonction à valeurs réelles. Soit $\boldsymbol{X}$ une variable aléatoire, $\boldsymbol{Y}$ est donnée par $\boldsymbol{Y}= f(\boldsymbol{X})$. Nous voulons connaître la distribution de $\boldsymbol{Y}$ sachant celle de $\boldsymbol{X}$. $\boldsymbol{Y}$ est aussi une variable aléatoire si $P[f(\boldsymbol{X}) \leq y]$ existe pour tout y. On peut montrer qu'il en est ainsi si $f(x)$ a au plus un nombre fini de discontinuités. Par définition,

$$F(y) = P[\boldsymbol{Y} \leq y] = P[f(\boldsymbol{X}) \leq y] = \int_{f(\boldsymbol{X}) \leq y} p(x)dx \tag{1.59}$$

L'intégrale s'étend sur tous les segments où l'inégalité est vérifiée. Nous avons donc :

$$p(y) = \frac{dF(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\int_{f(\boldsymbol{X}) \leq y} p(x)dx \tag{1.60}$$

En partitionnant sur les segments où la fonction est monotone, nous avons :

$$p(y) = \sum_k p(g_k(y))\left|\frac{dg_k}{dy}\right| \tag{1.61}$$

où g_k est l'application inverse de f sur le k^{ieme} segment.

Les limitations des résolutions analytiques sont atteintes très rapidement. En effet, nous ne connaissons que difficilement les problèmes sous la forme $\boldsymbol{Y} = f(\boldsymbol{X})$. En général, nous avons plutôt une forme implicite matricielle, qu'on ne sait pas résoudre analytiquement, la dépendance de la sortie recherchée étant non linéaire par rapport aux variables aléatoires [Ibr87].

1.3.2 Simulations de Monte-Carlo

L'approche la plus répandue est l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo, détaillée dans de nombreux ouvrages tels que [Fis96], qui est une approche statistique, car l'évaluation des caractéristiques stochastiques de la réponse du système passe par le calcul d'un grand nombre de problèmes déterministes.

En effet, l'utilisation de cette méthode nécessite de générer des réalisations des paramètres aléatoires du modèle, appelées tirages, qui tiennent compte des lois de probabilité respectives et des corrélations entre les différentes variables aléatoires mises en jeu. Nous obtenons ainsi, pour chaque tirage des différents paramètres aléatoires, une structure pour laquelle un calcul déterministe de la réponse peut être mené. Une étude statistique de ce jeu de réponses permet alors de déterminer une moyenne et un écart-type, ou encore une probabilité d'occurrence d'un critère mécanique.

1.3.2.1 Avantages et inconvénients

Le principal avantage des simulations de Monte-Carlo est de permettre de mener successivement plusieurs calculs déterministes une fois que les jeux de paramètres ont été tirés. Pour peu que le problème déterministe soit traitable par un code de calcul classique ou spécialement dédié, nous pouvons facilement étudier la réponse du modèle stochastique traité. Néanmoins cet avantage constitue également le principal inconvénient de la méthode car un nombre suffisamment grand de tirages doit être effectué pour que l'étude statistique de la réponse converge.

Un résultat de convergence à une dimension peut être donné par une application du théorème central limite : nous cherchons à estimer l'espérance d'une variable aléatoire $\boldsymbol{Y}$. La méthode de Monte-Carlo pour n tirages nous donne alors une estimation de cette espérance, à l'aide de n variables aléatoires $\{\boldsymbol{Y}_k\}_{k=1...n}$ de même loi de probabilité que $\boldsymbol{Y}$. Nous montrons alors que l'écart :

$$\varepsilon_n = \boldsymbol{Y} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{Y}_k \tag{1.62}$$

entre l'espérance de $\boldsymbol{Y}$ et son estimé suit une loi normale centrée d'écart-type $\sigma/\sqrt{n}$ où σ est l'écart-type de la variable aléatoire $\boldsymbol{Y}$. Autrement dit, la vitesse de convergence de la moyenne de Monte-Carlo est donc de l'ordre de $1/\sqrt{n}$ où n est le nombre de tirages.

Le nombre minimal de tirages requis pour un certain niveau de convergence peut alors devenir considérable suivant l'objet de l'étude statistique, mais aussi suivant le nombre de paramètres aléatoires du problème. C'est pourquoi de nombreuses techniques numériques ont été mises au point pour contrebalancer cette exigence, dont quelques-unes sont présentées ci-dessous.

1.3.2.2 Amélioration de la méthode

Parallélisation

La structure même de la méthode de Monte-Carlo permet une parallélisation aisée des opérations : il suffit de mener les résolutions des systèmes déterministes sur plusieurs processeurs (ou ordinateurs), ce qui réduit ainsi assez fortement les temps de calcul. Nous trouvons dans [Joh97, Pap99] quelques exemples récents d'implémentations.

Réduction de la variance

Les techniques dites de réduction de la variance (*Importance sampling*), permettent d'accélérer la convergence de la méthode en augmentant la densité des réalisations dans les régions d'intérêt, à savoir celles qui contribuent le plus à l'estimation statistique désirée. En effet, nous avons vu précédemment que l'écart entre l'espérance cherchée et l'estimation par Monte-Carlo suivait une loi normale centrée d'écart-type $\sigma/\sqrt{n}$ où σ est l'écart type de la variable aléatoire étudie, d'où l'idée de vouloir « réduire » cette variance.

La principale limitation de ce genre de méthode est liée au nombre de variables aléatoires indépendantes : au-delà de dix, le coût de la technique de réduction de la variance devient prohibitif par rapport au coût d'une méthode de Monte-Carlo classique.

Hypercube Latin sampling

La technique dite de l'*Hypercube Latin*, introduite dans [McK79], est très employée, car sa propriété de « stratification » permet de réduire assez nettement le nombre de tirages requis. Le domaine de définition de chaque variable aléatoire est divisé en n intervalles d'égales probabilités, et nous tirons aléatoirement une valeur sur chacun de ces intervalles. Ensuite, les n valeurs ainsi tirées pour la première variable aléatoire sont appariées aléatoirement avec les n valeurs tirées pour la seconde variable aléatoire, formant ainsi n couples qui sont alors associés aléatoirement avec les n valeurs tirées pour la troisième valeur aléatoire, et ainsi de suite pour obtenir np - uplets, où p est le nombre de variables aléatoires du modèle, qui constituent les n tirages finalement utilisés pour caractériser la réponse.

En pratique, ce nombre n de tirages est bien plus faible que celui requis avec une méthode de Monte-Carlo classique pour un même niveau de convergence. Diverses améliorations ont été menées depuis ; voir par exemple [Hel03].

Méta-modèles

Les techniques précédentes s'attachent à améliorer la méthode de Monte-Carlo elle-même. Il est bien sûr possible de réduire le temps de calcul requis par les résolutions déterministes en remplaçant le modèle « complet » initial par un modèle approché de substitution qui soit plus rapide à mettre en œuvre. Nous parlons souvent de méthodes de surface de réponse (*Response Surface Methods*) [Far89], ou encore de méta-modèles, dont le principe consiste à établir une surface approchée de la réponse du modèle.

Pour cela, la réponse du modèle déterministe complet est calculée pour différents jeux de paramètres, de façon à obtenir suffisamment de points de réponse pour interpoler ces derniers par une certaine forme de modèle de régression. Nous trouvons quelques exemples récents de cette façon de procéder dans [Sch01, Hem01, Bou03]. Bien entendu, une étape préliminaire indispensable dans l'élaboration de ces méta-modèles consiste à sélectionner les paramètres du modèle les plus influents sur la réponse, ce à quoi s'attachent les méthodes décrites dans le paragraphe 1.3.2.3, car comme pour les techniques précédentes, la principale limitation réside dans le nombre de variables aléatoires indépendantes du modèle.

Dans le domaine de la mécanique, les calculs déterministes qui sont réalisés pour les jeux de paramètres tirés font intervenir généralement une discrétisation spatiale du problème, de type Eléments Finis. Nous sommes donc en présence, quoique de façon indirecte, de méthodes que l'on pourrait qualifier d'Eléments Finis stochastiques.

1.3.3 Méthodes des Eléments Finis Stochastiques

Ce paragraphe présente succinctement les principales méthodes d'éléments finis stochastiques (MEFS) actuellement disponibles dans la littérature, le paragraphe se terminant par quelques éléments de comparaison entre ces méthodes. Depuis une vingtaine d'années, de nombreuses méthodes ont été développées pour prendre en compte l'aléa dans des problèmes mécaniques. L'expression éléments finis stochastiques regroupe différentes méthodes qui n'ont pas forcément les mêmes origines. L'ensemble des définitions présentes dans cette section est issu de [Van03, Van04, Sud00, Iem06].

C'est dans l'idée de mêler plus intimement la méthode des Eléments Finis, telle qu'elle existe pour les problèmes déterministes, avec les outils probabilistes que s'est développée la méthode des Eléments Finis Stochastiques (*Stochastic Finite Elements Method*). L'idée est de considérer l'aléa comme une dimension supplémentaire du problème traité, tout en employant la discrétisation spatiale proposée par le concept des Eléments Finis.

Soit le modèle EF d'un système mécanique, dont certains paramètres sont représentés par une v.a. vectorielle. Nous avons montré que cette v.a. vectorielle pouvait être obtenue par discrétisation de champs aléatoires et/ou par modélisation d'une ou plusieurs paramètres par des v.a. scalaires. Le problème à résoudre consiste à utiliser le modèle EF et cette v.a. vectorielle, afin de fournir une caractérisation probabiliste de la réponse mécanique, en termes de moyenne et de variance au moins.

La bibliographie relative aux MEFS comporte des centaines d'articles et quelques monographies [Sch97, Mat97, Sud00]. Citons aussi le récent ouvrage de Lemaire [Lem05] comportant un chapitre sur le sujet. Il existe enfin quelques articles de synthèse dont [Mat97]. Nous trouvons dans [Ste09] un état de l'art des derniers développements des méthodes des éléments finis stochastiques.

Après cette présentation générale, le paragraphe (1.3.4) porte sur la Méthode des éléments finis stochastiques par perturbation, et le paragraphe (1.3.5) décrit la méthode des éléments finis stochastiques spectrale.

La procédure globale de résolution de la Méthode des Eléments Finis Stochastiques est récapitulée sur la figure 1.2.

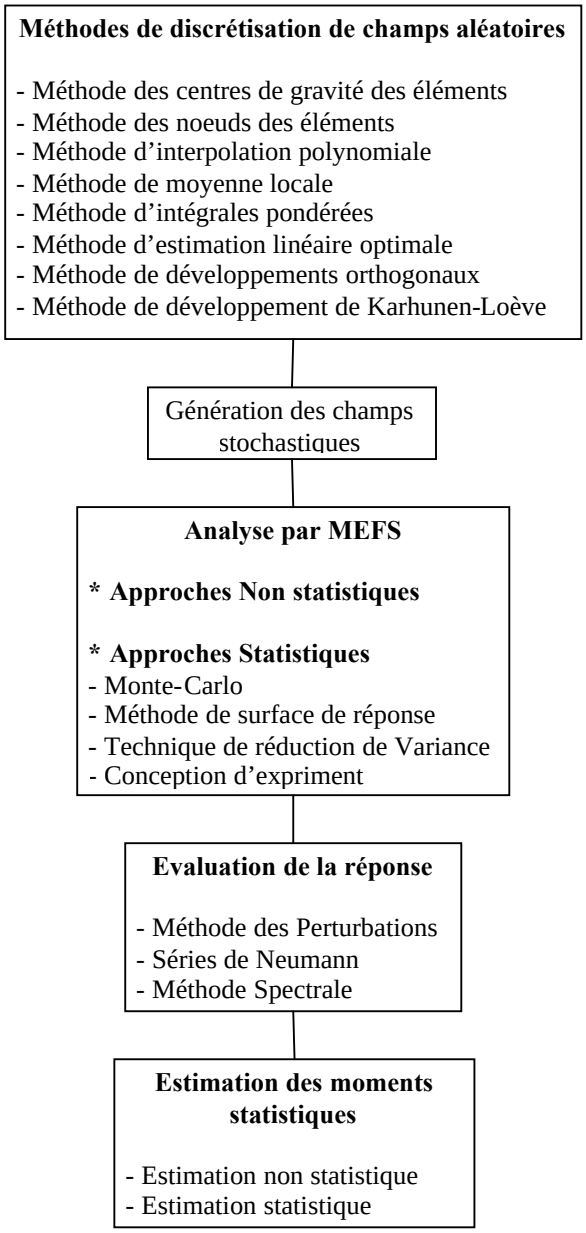


Figure 1.2. Procédure globale de résolution par la Méthode des Eléments Finis Stochastiques.

1.3.4 Méthode des Eléments Finis Stochastiques par perturbation

La méthode des Eléments Finis par perturbation (*Perturbation SFEM*) [Bae81] est très largement employée dans le domaine des éléments finis stochastiques. C'est une méthode basée sur une approximation des fonctions des variables aléatoires par leur développement en série de Taylor autour de leur valeur moyenne. Dans la pratique, ces développements sont tronqués à l'ordre deux, ce qui a l'avantage de n'utiliser que les deux premiers moments statistiques des paramètres stochastiques.

Par exemple, si le problème discrétisé revient à résoudre un système de la forme $[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{U}\}=\{F\}$, des développements à l'ordre deux par rapport aux n variables aléatoires $\boldsymbol{\xi}_k$ donnent :

$$[\boldsymbol{K}] = \left[K^0\right] + \sum_{i=1}^{n} \left[K_i^I\right] \xi_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left[K_{ij}^{II}\right] \xi_i \xi_j \tag{1.63}$$

$$\{\boldsymbol{U}\} = \left\{U^0\right\} + \sum_{i=1}^{n} \left\{U_i^I\right\} \xi_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left\{U_{ij}^{II}\right\} \xi_i \xi_j \tag{1.64}$$

où $[K^0]$, $\left[K_i^I\right]$ et $\left[K_{ij}^{II}\right]$ désignent respectivement la moyenne, et les dérivées premières et secondes de la matrice de rigidité $[K]$ par rapport aux variables aléatoires, $[U^0]$, $\left[U_i^I\right]$ et $\left[U_{ij}^{II}\right]$ sont les quantités analogues définies pour le champ de déplacement solution $\{\boldsymbol{U}\}$ que l'on recherche.

La résolution se fait alors ordre par ordre successivement : voici les expressions pour la détermination des ordres zéro, un et deux, avec $i, j = 1 \ldots n$:

$$[K_0]\{U_0\} = \{F\} \tag{1.65}$$

$$\left[K^0\right]\left\{U_i^I\right\} = -\left[K_i^I\right]\left\{U^0\right\} \tag{1.66}$$

$$\left[K^0\right]\left\{U_{ij}^{II}\right\} = -\left[K_i^I\right]\left\{U_j^I\right\} - \left[K_j^I\right]\left\{U_i^I\right\} - \left[K_{ij}^{II}\right]\left\{U^0\right\} \tag{1.67}$$

De nombreuses applications à des problèmes linéaires et non-linéaires ont été réalisées, en statique comme en dynamique, avec de bons résultats lorsque les paramètres incertains fluctuent dans des bandes étroites. Citons par exemple [Liu86a–b, Liu88] pour les premiers travaux, ainsi que plus récemment [Eli95, Mus00]. Le cas des éléments de poutre incertains est par exemple traité par [Cha91]. Les équations générales de résolution sont classiques, nous pouvons les trouver dans l'état de l'art présenté par [Ben88]. L'article de Hien et Kleiber [Hie90] est très complet, et permet d'avoir une version détaillée des calculs et des résultats.

La technique des perturbations étant basée sur un développement en séries de Taylor, elle est sujette aux conditions d'existence et de validité de telles séries, en particulier au problème lié au rayon spectral, comme le soulignent Ghanem et Spanos [Gha91] ; ce qui limite son champ d'application aux cas où les variables varient peu, en particulier dans le cas des systèmes dynamiques. [He00] présente néanmoins une méthode pour prendre en compte les paramètres de grande dispersion. Les approximantes de Padé [Wei, Bre96], qui font partie des méthodes d'accélération de convergence, peuvent être employés pour augmenter le domaine de validité de l'approximation basée sur un développement en séries de Taylor. Une technique de ce type a été utilisée par Roy et Spanos dans le cas d'une analyse non linéaire [Roy91].

1.3.5 Méthode Spectrale des Eléments Finis Stochastiques

Cette méthode est présentée de manière plus détaillée dans le chapitre 2, nous nous limitons ici à l'énoncé de son principe [Gha99a, Gha96, Gha91]. Considérons un problème mécanique décrit par un modèle EF, qui dépend d'un paramètre aléatoire $\boldsymbol{y}$. Le paramètre $\boldsymbol{y}$ est modélisé par un processus aléatoire gaussien stationnaire $\boldsymbol{Y}$. Ce processus fait l'objet d'une discrétisation par développement de Karhunen-Loève, (§ 1.2.4.4). La troncature du développement produit un ensemble fini de variables aléatoires gaussiennes standard dont la taille correspond à la dimension de la partie stochastique du modèle.

Cependant, cette base n'est pas appropriée pour la représentation du champ de réponse à cause de la relation non linéaire entre la réponse et la distribution gaussienne modélisant l'incertitude. La réponse stochastique exigée est alors projetée sur le chaos polynomial obtenu avec les variables aléatoires du développement de Karhunen-Loève. En fait, le chaos polynomial d'ordre *P* sert de base à la représentation de n'importe quel polynôme de variables aléatoires. Une expression explicite de la réponse aléatoire, analogue à une surface de réponse, est finalement obtenue et permet l'évaluation des moments statistiques de la réponse.

Des développements récents dans ce domaine ont visé l'identification de la structure particulière des systèmes linéaires impliqués dans les applications de la méthode et à proposer des techniques efficaces de résolution pour ces systèmes. Ghanem et Kruger [Gha96] proposent un arrangement efficace pour réduire la quantité de mémoire informatique exigée pour stocker la matrice de rigidité. En raison de la dominance diagonale de cette matrice, un procédé itératif de résolution peut être employé. Les méthodes de sous-espace, qui n'exigent pas un stockage explicite de la matrice du système, sont adaptées au problème. Une approche hiérarchique a été également proposée, dans laquelle une approximation de bas ordre est prise comme conjecture initiale suffisamment précise pour une analyse stochastique d'ordre plus élevé. Pellissetti et Ghanem [Pel00] analysent plus en détail ces techniques et recommandent plusieurs implémentations numériques. D'autres améliorations successives de la MEFSS sont apparues ces dernières années : développement pour un champ d'entrée lognormal [Bar07b] puis champs quelconques [Gha99c, Gha99a], calcul systématique des moments de la réponse sans recours au calcul formel [Sud00], recherche d'estimateurs d'erreurs dues à la discrétisation des champs [Gha02, Fie04], propositions d'adaptation au calcul parallèle. Une tentative de couplage entre la MEFSS et des simulations de Monte-Carlo a été proposée par Ghanem. Cette idée, retenue dans l'état de l'art par Sudret et Der Kiureghian [Sud00], n'a fait à notre connaissance l'objet d'aucun travail supplémentaire.

Les applications de la MEFSS sont nombreuses, mais restent limitées à des problèmes mécaniquement linéaires. De premières applications ont considéré des structures simples (poutres et plaques) [Spa89, Gha91, Gha99d], où le paramètre d'entrée incertain est un module d'élasticité longitudinal ou une rigidité flexionnelle, modélisés par un processus ou un champ gaussien, la matrice de rigidité aléatoire étant une fonction linéaire de ce paramètre. Les coefficients de variation des paramètres de sortie, ainsi que les densités de probabilité des déplacements sont estimés.

En statique, des massifs de sols ont été étudiés : (*i*) deux couches de sols, soumises à une pression constante sur une partie de la surface et séparées par une interface située à une profondeur variable modélisée par un champ gaussien, [Gha96], (*ii*) un massif de sol dont le module d'élasticité longitudinal est modélisé par un champ lognormal, soumis à une charge ponctuelle. Ce même modèle est exploité par Sudret et Der Kiureghian [Sud00], puis par Sudret et al. [Sud04]. Les variations des contraintes et des efforts dans une structure stochastique ont été étudiées par [Nga07].

Le développement de Neumann a été également employé par Ghanem et Spanos [Gha91] dans le cadre de la méthode spectrale et fournit un développement alternatif à la projection sur un chaos polynomial. L'avantage principal de ce traitement est que le système linéaire impliqué dans le calcul de la réponse stochastique est un système triangulaire inférieur (comme c'est le cas dans la méthode de perturbation), et par conséquent plus facile à résoudre que le système couplé généré par le développement sur la base du chaos polynomial. Les

applications numériques cependant montrent que le développement de Neumann produit de plus mauvais résultats que le développement sur chaos polynomial. Mei et al, [Mei98] emploient la méthode pour l'analyse stochastique des poutres.

Cette méthode a été également appliquée pour l'analyse dynamique des structures par Sarkar et Ghanem [Sar02] en couplant la MEFSS à trois cadres déterministes adaptés à la gamme de fréquence moyenne (*Dynamique element Method*, *Energy Operator Approach* et *Proper Orthogonal Décomposition*). Karakostas et Manolis [Kar02] proposent une procédure stochastique d'éléments de frontière basée sur la représentation spectrale, grâce à laquelle est calculée la réponse dynamique d'un tunnel en considérant les propriétés stochastiques de la terre. La MEFSS a aussi été appliquée à plusieurs problèmes de dynamique (interaction sol-structure [Ghi02], vibrations aléatoires [Li 97]).

Enfin, la base de variables aléatoires proposée pour l'analyse statique par Lawrence [Law87] peut être également considérée comme une approche spectrale. En fait, la méthode suppose que toutes les quantités aléatoires impliquées dans la réponse stochastique peuvent être écrites comme une somme de fonctions déterministes multipliées par des variables aléatoires non-corrélées. Les fonctions déterministes sont choisies de telle manière qu'elles forment une base complète (par exemple, des polynômes de Legendre). La moyenne et la variance des variables aléatoires sont calculées à partir de la série des données d'entrée (la matrice de raideur et le vecteur de force). Ce procédé implique, comme dans la SFEM spectrale, la résolution itérative d'un système linéaire, mais qui est beaucoup plus grand et de plus couplé.

1.3.6 Autres méthodes

1.3.6.1 Méthode itérative ou séries de Neumann

Le développement de Neumann a été initialement proposé pour ses propriétés de convergence et ses facilités de programmation, par rapport à la méthode de perturbations classique [Yam88, Shi88b]. La v.a. $\{\boldsymbol{q}\}$ modélisant le vecteur des déplacements nodaux peut être formellement obtenue par inversion du système linéaire :

$$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{q}\} = \{\boldsymbol{F}\} \Leftrightarrow \{\boldsymbol{q}\} = [\boldsymbol{K}]^{-1}\{\boldsymbol{F}\} \tag{1.68}$$

Décomposons la matrice de rigidité comme la somme d'un terme moyen $[K_0]$ et d'un terme aléatoire $[\boldsymbol{K}^*]$: $[\boldsymbol{K}] = [K_0] + [\boldsymbol{K}^*]$. Le développement en série tronquée de Neumann de l'inverse de la matrice de rigidité $[\boldsymbol{K}]$ s'écrit :

$$[\boldsymbol{K}]^{-1} = ([I] - [\boldsymbol{R}] + [\boldsymbol{R}]^2 - [\boldsymbol{R}]^3 + \ldots)\,[K_0]^{-1},\ [\boldsymbol{R}] = [K_0]^{-1}\,[\boldsymbol{K}^*] \tag{1.69}$$

La méthode de Neumann consiste à écrire la solution $\{\boldsymbol{q}\}$ sous forme d'une série $\{\boldsymbol{q}\} = \sum \{q_n\}$ [Ben88, Gha91].

L'approximation au premier ordre est la solution du problème sans $[\boldsymbol{K}^*]$:

$$\{q_0\} = [K_0]^{-1}\,\{F\} \tag{1.70}$$

La première itération sur $\{q_0\}$ donne un terme correctif $\{q_1\}$:

$$\{q_1\} = -[K_0]^{-1}\,[\boldsymbol{K}^*]\{q_0\} \tag{1.71}$$

Une itération de plus donne :

$$\{q_2\} = -[K_0]^{-1}\,[\boldsymbol{K}^*]\{q_1\} \tag{1.72}$$

$\{q\}$ peut donc être écrit :

$$\{q\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-[K_0]^{-1}\left[\boldsymbol{K}^*\right]\right)^n \{q_0\} \tag{1.73}$$

Bien entendu, nous retrouvons la condition de validité de la méthode :

$$\left\| [K_0]^{-1}\left[\boldsymbol{K}^*\right] \right\| < 1 \tag{1.74}$$

Les applications numériques ne tiennent compte que des premiers termes de cette série. Les applications ont par exemple concerné des structures constituées de barres [Shi88], une plaque soumise à une traction répartie sur un côté, dont le module d'élasticité longitudinal est un champ aléatoire bidimensionnel [Yam88]. Le développement de Neumann a été envisagé (mais non retenu) par Ghanem et Spanos [Gha91], dans le cadre de la Méthode des Eléments Finis Stochastiques Spectraux (MEFSS), que nous introduisons au paragraphe 1.4.

1.3.6.2 La méthode de quadrature

La méthode de quadrature permet d'estimer les moments d'ordre *i* d'une v.a. $\boldsymbol{Z} = g(\boldsymbol{Y})$, par l'intégration numérique de type quadrature de Gauss.

Dans le cas simplifié où les v.a. $\boldsymbol{Z}$ et $\boldsymbol{Y}$ sont scalaires, la méthode de quadrature consiste alors à approcher le moment d'ordre *i* de la v.a. $\boldsymbol{Z}$ par une somme de la forme :

$$\mu_Z^i \approx \sum_{k=1}^{N} g^i(y_k)\omega_k \tag{1.75}$$

où $(y_k, \omega_k)_{k=1..N}$ sont N couples des points et poids définis en utilisant la relation de récurrence suivante :

$$\Phi_{-1}(y) = 0\ ,\ \Phi_0(y) = 1\ ,\ \Phi_{j+1}(y) = (y - a_j)\Phi_j(y) - b_j\Phi_{j-1}(y) \tag{1.76}$$

Cette relation est valable pour toute famille de polynômes orthogonaux Φ_j dont le coefficient du monôme de plus haut degré est égal à 1, avec :

$$a_j = \frac{E\left[y\Phi_j \middle| \Phi_j\right]}{\Phi_j \middle| \Phi_j}\ ,\ b_j = \frac{E\left[\Phi_j \middle| \Phi_j\right]}{\Phi_{j-1} \middle| \Phi_{j-1}} \tag{1.77}$$

Les poids ω_k sont déduits de la relation :

$$\omega_k = \frac{E\left[\Phi_{N-1} \middle| \Phi_{N-1}\right]}{\frac{\partial \Phi_N}{\partial y_k}(y_k)\Phi_{N-1}(y_k)} \tag{1.78}$$

Les points y_k sont les racines des polynômes Φ_N.

Dans un cadre non linéaire, statique ou dynamique, pour un nombre modéré de v.a., la quadrature semble une alternative intéressante aux simulations. Une limite de l'approche est

que le nombre d'évaluations s'élève à N^M, où M est la dimension de $\boldsymbol{Y}$, ce qui rend les temps de calcul prohibitifs.

Cette méthode a été appliquée à des problèmes de géotechnique et d'une sphère sous pression [Sud03], où suite à l'estimation de plusieurs moments statistiques, une densité de probabilité de défaillance, puis une probabilité de défaillance sont éventuellement estimées. Si la dimension M est trop grande (suite à la discrétisation de champs aléatoires par exemple), les simulations de Monte-Carlo et ses variantes s'avèrent plus intéressantes [Gha99a].

1.3.6.3 Méthode fondée sur une discrétisation aléatoire par Intégrales Pondérées

La méthode fondée sur une discrétisation aléatoire par Intégrales Pondérées fut surtout développée par Deodatis [Deo91a, Gra01] et Takada [Tak90b, Tak90a]. Cette technique, appelée dans la littérature « méthode des intégrales pondérées (MIP) » (*weighted integrals method*) est à l'origine une technique de discrétisation de champs aléatoires (voir paragraphe 1.2.3). Par extension, les auteurs précités et les états de l'art ont appelé Méthode des Intégrales Pondérées la MEFS incluant cette technique de discrétisation originale, associée à une technique d'estimation de moments statistiques.

La MIP applique le principe de la perturbation à la représentation de la matrice de rigidité [$\boldsymbol{K}$], dépendant d'un champ aléatoire d'entrée $\boldsymbol{G}$, gaussien et stationnaire. Le vecteur des déplacements nodaux $\{\boldsymbol{q}\}$ est alors approché par un développement de Taylor au premier ordre. Dans cette approche, la variance de $\{\boldsymbol{q}\}$ s'écrit en fonction de la densité spectrale de puissance du champ gaussien $\boldsymbol{G}$ et d'une famille de fonctions appelées fonctions de variabilité de la réponse (*variability response function*). Ces fonctions sont calculables analytiquement pour le problème d'une barre dont le module d'élasticité longitudinal est modélisé par un processus gaussien [Deo90a, Deo90b]. Mais le calcul pratique de cette variance reste délicat dans un cas plus général [Sud00]. Malgré cette limite, la MIP a fait l'objet de diverses applications dans le cadre des techniques de discrétisation des champs (fondation au module d'élasticité longitudinal variable et soumise à une sollicitation aléatoire [Deo89], plaque en flexion [Gra98], coque dont les coefficients de Lamé et éventuellement l'épaisseur sont variables [Ste04]).

1.3.6.4 Méthodes non paramétriques

Dans toutes les méthodes stochastiques que nous venons de passer en revue, le choix des paramètres incertains du modèle, à savoir le type de données (variables aléatoires ou champs stochastiques) et des lois de probabilité associées, se révèle crucial pour l'étude de la variabilité de la réponse. Dans ce cas, nous supposons que le modèle est parfaitement connu, les incertitudes ne portant en effet que sur les paramètres de ce modèle. Or pour des systèmes mécaniques suffisamment complexes, cette hypothèse peut être excessive. Certaines zones, comme les liaisons par exemple, mettent en jeu des phénomènes qui souvent ne sont pas pris en compte dans le détail, et sont donc représentées par des modèles simplifiés, pour lesquels le choix des paramètres se révèle un peu artificiel. Il faut dans ces cas pouvoir prendre en compte des incertitudes de modélisation.

Peu de travaux considèrent ce type d'incertitudes, citons par exemple [Soi86] pour une première approche concernant le « chaos structural », défini comme l'ensemble des sous-systèmes mécaniques secondaires reliés à la structure maîtresse, et qui ne sont pas

modélisables classiquement, la finalité étant d'introduire une modélisation probabiliste globale de ce chaos structural. Ce concept n'a pas pour but premier d'étudier la variabilité de la réponse du système, mais vise à améliorer la prévision des *Fonctions de réponse en Fréquences* (FRF) déterministes, initialement dans le domaine des moyennes fréquences, puis dans la quantification des effets de l'amortissement dans le domaine des basses fréquences [Soi94]. Les lois de probabilité étant appliquées à des quantités globales telles que des impédances de frontière entre le flou structural et la structure maîtresse, cette dernière approche est qualifiée de non paramétrique.

Plus récemment [Soi00], une autre méthode non paramétrique a été proposée pour prendre en compte les incertitudes de modélisation, cette fois-ci avec pour but réel d'étudier la variabilité des FRF. Dans ce cas, la méthode est non paramétrique car les paramètres incertains ne sont pas directement modélisés par des variables aléatoires ou des champs stochastiques : les incertitudes sont prises en compte de façon globale en modélisant directement les matrices du modèle dynamique par des matrices aléatoires, formées à partir du principe du maximum d'entropie. Puisque les niveaux de dispersion peuvent varier fortement au sein d'une structure complexe, cette approche non paramétrique a été couplée dans [Che02] avec la méthode de sous-structuration dynamique de Craig-Bampton pour pouvoir l'appliquer sur chaque sous-domaine où le niveau d'incertitude peut être considéré comme homogène ; les résultats de cette méthode sont alors confrontés aux mesures expérimentales sur deux plaques boulonnées.

1.3.6.5 La méthode de collocation stochastique

La méthode stochastique de Galerkin a été employée avec succès pour différents problèmes avec petit nombre de variables aléatoires. L'inconvénient de cette méthode se situe dans sa difficulté d'application pour des problèmes non linéaires. La méthode de collocation stochastique a été développée comme une méthode numérique efficace pour la résolution des équations différentielles stochastiques partielles avec coefficients aléatoires. Baroth *et al.* [Bar07a] propose une méthode de collocation stochastique d'ordre élevé pour résoudre les systèmes mécaniques non linéaires dont les paramètres incertains peuvent être modélisés par variables aléatoires. Comme par les méthodes stochastiques de Galerkin, la convergence rapide peut être réalisée quand la réponse dans l'espace stochastique est lisse. Cependant, l'implémentation numérique de la méthode de collocation stochastique est aussi facile que la méthode de Monte-Carlo puisqu'elle exige de générer des réalisations du modèle déterministe existant.

1.3.6.6 Méthodes des intervalles

Les incertitudes dans les structures peuvent être traitées par les probabilités, ce qui est utilisé de manière classique. Une autre façon de voir consiste à utiliser une représentation par intervalles, car la distribution de probabilité est difficile à connaître dans beaucoup de cas. Dans ce contexte, l'arithmétique des intervalles a été développée, de façon à pouvoir faire des calculs qui prendraient en compte à la fois des erreurs physiques, expérimentales et les erreurs dues aux machines de calcul. Le résultat serait alors considéré comme "robuste".

Les idées principales du calcul par intervalles sont apparues dans la thèse de R.E. Moore, soutenue à Stanford en 1962. Moore publie son premier ouvrage, "Interval Analysis" [Moo66], considéré comme œuvre de référence par beaucoup.

Lorsque les systèmes mécaniques modélisés par éléments finis dépendent de paramètres incertains et bornés, ils peuvent être étudiés grâce à l'arithmétique des intervalles. Le calcul par intervalles a des propriétés spéciales en comparaison à l'arithmétique classique. En particulier, si une variable intervalle revient plusieurs fois dans une expression, il est très probable que le résultat sera surestimé. Pour la résolution de systèmes linéaires, il existe des algorithmes spécialisés. La majorité considère toujours des matrices intervalles pleines (c'est-à-dire chaque terme de la matrice est un intervalle indépendant). En effet, lors de la construction des matrices éléments finis, on peut factoriser les paramètres intervalles, ce qui permet d'éviter de trop importantes surestimations.

De nombreuses publications sont parues, où on pourra trouver les bases du calcul par intervalles, en particulier [Did97, Kea96].

1.4 Application des méthodes stochastiques en analyse modale

Nous avons montré dans les paragraphes précédents, le rôle prédominant joué par les méthodes stochastiques dans la modélisation des incertitudes des modèles mécaniques et la façon de quantifier la qualité de la prise en compte des ces incertitudes.

Dans ce paragraphe, nous présentons les applications des méthodes stochastiques pour le calcul des valeurs et des vecteurs propres des structures avec incertitudes. L'application de la méthode des éléments finis stochastiques par perturbation pour l'analyse modale des structures est détaillée dans le paragraphe 1.4.1.

La méthode des simulations de Monte-Carlo, qui est une méthode de référence dans le calcul stochastique, est souvent utilisée pour évaluer les statistiques des quantités modales aléatoires des structures avec paramètres aléatoires. A titre d'exemple Szekelu et Schuëller [Sze01] présentent des procédures pour le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres aléatoires basées sur la méthode des simulations de Monte-Carlo. Ces procédures permettent une réduction significative des efforts numériques de la simulation en utilisant un arrangement d'itérations de type sous-espace avec vecteurs initiaux (*start-vectors*) choisis de façon optimale. Les procédures ne sont limitées à aucun genre de technique d'échantillonnage.

Venini et Mariani [Ven97] Oh et Librescu [Oh97] ont proposé la méthode SRRM (*Stochastic Raleigh-Ritz Method*) pour la résolution des problèmes stochastiques aux valeurs propres, cette méthode étant une extension stochastique de la méthode de Rayleigh-Ritz. Elle permet de prendre en compte les aléas sur le module d'élasticité et la densité modélisés par des champs aléatoires. Lei et Qiu [Lei00] présentent l'application de la méthode d'éléments finis stochastiques de Neumann pour l'analyse dynamique des structures stochastiques, dont les résultats sont comparés dans le même article avec les résultats de la méthode des éléments finis stochastiques par perturbation et la méthode des simulations de Monte-Carlo.

Kaminski [Kam02] a utilisé la méthode de déférences finies stochastiques (*SFDM-Stochastique Finite Difference Method*) pour calculer les statistiques des quantités dynamiques des structures dont les paramètres sont modélisés par des variables ou champs aléatoires. Cependant cette méthode ne permet pas d'évaluer les moments de degré supérieur à 2.

Cheng et Xiao [Che05] proposent un algorithme pour l'analyse probabiliste des vibrations libres des ponts suspendus. Cet algorithme est basé sur la méthode des éléments finis stochastiques, les surfaces de réponse et la méthode des simulations de Monte-Carlo. Guedria *et al.* [Gue06] proposent une méthode de condensation dynamique de modèles stochastiques. La condensation de premier niveau est basée sur une stratégie qui combine les éléments finis stochastiques (SFEM) avec un modèle robuste de condensation. Elle est basée sur une technique de discrétisation des champs aléatoires qui a été établie suivant le développement de Karhunen-Loève. Alternativement, une approche modale de perturbation (MP) permet la synthèse rapide de la réponse aléatoire.

Dans [Gao07a], deux méthodes appelées, méthode de facteur aléatoire (*Random Factor Method- RFM*) et méthode d'intervalle des facteurs (*Interval Factor Method- IFM*), sont utilisées pour l'analyse des modes propres et fréquences propres des structures avec paramètres incertains. Dans la méthode RFM, les paramètres physiques et la géométrie peuvent être considérés en tant que variables aléatoires. La rigidité structurale et les matrices de masse peuvent alors, respectivement, être décrites comme un produit de deux parties aléatoire et déterministe. Les fréquences propres, les modes propres et la réponse aléatoire peuvent être exprimées en fonction des facteurs aléatoires. Puis les expressions numériques de la moyenne et de l'écart-type des fréquences et des modes propres sont calculées. Par contre dans la méthode IFM, les paramètres structuraux peuvent être considérés comme variables d'intervalle et les expressions numériques des limites inférieures et supérieures des fréquences et modes propres sont dérivées au moyen des opérations d'intervalle. Gao et Kessissoglou [Gao07b] ont utilisé les résultats de ces deux méthodes pour analyser les caractéristiques dynamiques des structures stochastiques des coques sous excitation aléatoire non stationnaire. Les expressions numériques de la moyenne, de l'écart type et du coefficient de variation de la valeur quadratique moyenne de la réponse aléatoire non stationnaire des déplacements sont développés.

La méthode appelée (*Modal Interval Analysis Method - MIAM*) a été utilisée par Sim *et al.* [Sim07] pour estimer les fréquences propres, les fonctions de réponse en fréquence (FRF) et les vecteurs propres des structures avec paramètres incertains (mais bornés). Cette méthode est basée sur une combinaison de l'analyse modale et du calcul d'intervalle. Elle cherche les limites supérieures et inférieures des caractéristiques comme les fréquences propres, les modes propres et les FRF.

Chen *et al.* [Che06] a utilisé la méthode d'analyse d'intervalle pour traiter le problème de contrôle de vibration dans les structures avec des paramètres d'intervalle. Les expressions des matrices d'intervalle de masse et de rigidité sont directement développées à partir des paramètres d'intervalle. Un algorithme pour estimer les limites supérieures et inférieures de la valeur propre complexe d'intervalle est développé. Par contre [Che09] a utilisé la théorie d'intervalle et les séries de Taylor de second ordre, pour résoudre les problèmes stochastiques aux valeurs propres des structures avec fortes incertitudes. Un algorithme, appelé epsilon-algorithme, est employé pour accélérer la convergence de la série de Neumann et pour augmenter la précision du calcul en réduisant l'effort numérique.

La méthode des éléments finis stochastiques par perturbation a été utilisée par Van den Nieuwenhof [Van04, Van03] pour développer une approche modale originale qui permet de calculer directement la dispersion des Fonctions de Réponse en Fréquence (*FRF*) pour des paramètres incertains. Pour cela, l'étude de la variabilité du problème aux valeurs propres a

été menée dans le cas d'incertitudes concernant aussi bien les raideurs que la géométrie. Numériquement, une méthode mixte de perturbation couplée à des tirages de Monte-Carlo permet de traiter, avec un faible coût, la variabilité des *FRF*, dont l'obtention est pourtant issue d'un problème fortement non linéaire au niveau des pics de résonances.

1.4.1 Calcul des modes propres aléatoires par la MEFS par perturbation

Nous reprenons ici le calcul des valeurs et des vecteurs propres présenté par Hien et Kleiber [Hie90]. Nous ne considérons que les modes propres réels, mais la procédure peut s'étendre au calcul des modes propres complexes.

Le mode aléatoire *i* vérifie l'équation :

$$([\boldsymbol{K}]-\lambda_i[\boldsymbol{M}])\{\boldsymbol{\varphi}_i\}=\{0\} \tag{1.79}$$

Les matrices [$\boldsymbol{K}$] et [$\boldsymbol{M}$] sont aléatoires et dépendent d'un vecteur de paramètres aléatoires $\{\boldsymbol{r}\}$. Nous définissons le vecteur de paramètres moyen $\{\bar{r}\}$ et la quantité $\{dr\}=\{\boldsymbol{r}\}-\{\bar{r}\}$. On fait alors un développement en séries de Taylor de toutes les quantités :

$$[\boldsymbol{K}(\{\boldsymbol{r}\})]=[K(\{\bar{r}\})]+\sum_k \frac{\partial[\boldsymbol{K}]}{\partial\{\boldsymbol{r}\}_k}\bigg|_{\{\bar{r}\}}\{d\boldsymbol{r}\}_k+\frac{1}{2}\sum_k\sum_l \frac{\partial^2[\boldsymbol{K}]}{\partial\{\boldsymbol{r}\}_k\partial\{\boldsymbol{r}\}_l}\bigg|_{\{\bar{r}\}}\{d\boldsymbol{r}\}_k\{d\boldsymbol{r}\}_l \tag{1.80}$$

$$[\boldsymbol{M}(\{\boldsymbol{r}\})]=[M(\{\bar{r}\})]+\sum_k \frac{\partial[\boldsymbol{M}]}{\partial\{\boldsymbol{r}\}_k}\bigg|_{\{\bar{r}\}}\{d\boldsymbol{r}\}_k+\frac{1}{2}\sum_k\sum_l \frac{\partial^2[\boldsymbol{M}]}{\partial\{\boldsymbol{r}\}_k\partial\{\boldsymbol{r}\}_l}\bigg|_{\{\bar{r}\}}\{d\boldsymbol{r}\}_k\{d\boldsymbol{r}\}_l \tag{1.81}$$

$$[\boldsymbol{\lambda}(\{\boldsymbol{r}\})]=[\boldsymbol{\lambda}(\{\bar{r}\})]+\sum_k \frac{\partial[\boldsymbol{\lambda}]}{\partial\{\boldsymbol{r}\}_k}\bigg|_{\{\bar{r}\}}\{d\boldsymbol{r}\}_k+\frac{1}{2}\sum_k\sum_l \frac{\partial^2[\boldsymbol{\lambda}]}{\partial\{\boldsymbol{r}\}_k\partial\{\boldsymbol{r}\}_l}\bigg|_{\{\bar{r}\}}\{d\boldsymbol{r}\}_k\{d\boldsymbol{r}\}_l \tag{1.82}$$

$$[\boldsymbol{\varphi}(\{\boldsymbol{r}\})]=[\phi(\{\bar{r}\})]+\sum_k \frac{\partial[\boldsymbol{\varphi}]}{\partial\{\boldsymbol{r}\}_k}\bigg|_{\{\bar{r}\}}\{d\boldsymbol{r}\}_k+\frac{1}{2}\sum_k\sum_l \frac{\partial^2[\boldsymbol{\varphi}]}{\partial\{\boldsymbol{r}\}_k\partial\{\boldsymbol{r}\}_l}\bigg|_{\{\bar{r}\}}\{d\boldsymbol{r}\}_k\{d\boldsymbol{r}\}_l \tag{1.83}$$

Pour une matrice [A] quelconque, nous adoptons les notations :

$$[A(\{\bar{r}\})]=\left[A^0\right] \tag{1.84}$$

$$\frac{\partial[\boldsymbol{A}]}{\partial\{\boldsymbol{r}\}_k}\bigg|_{\{\bar{r}\}}=\left[\boldsymbol{A}_k^I\right] \tag{1.85}$$

$$\frac{\partial^2[\boldsymbol{A}]}{\partial\{\boldsymbol{r}\}_k\partial\{\boldsymbol{r}\}_l}\bigg|_{\{\bar{r}\}}=\left[\boldsymbol{A}_{kl}^{II}\right] \tag{1.86}$$

On introduit dans un premier temps les équations (1.80) à (1.83) dans (1.79), et on regroupe les termes du même ordre. On obtient pour chaque mode *i* les équations suivantes :

ordre 0

$$\left(\left[K^0\right]-\lambda_i^0\left[M^0\right]\right)\left\{\phi_i^0\right\}=\{0\} \tag{1.87}$$

ordre 1

$$\sum_k\left(\left[K^0\right]-\lambda_i^0\left[M^0\right]\right)\left\{\varphi_{ik}^{\ I}\right\}\{d\boldsymbol{r}\}_k=-\sum_k\left(\left[\boldsymbol{K}_k^{\ I}\right]-\boldsymbol{\lambda}_i^{\ I}\left[M^0\right]-\lambda_i^0\left[\boldsymbol{M}_k^{\ I}\right]\right)\left\{\phi_i^0\right\}\{d\boldsymbol{r}\} \tag{1.88}$$

ordre 2

$$\begin{aligned}&\sum_k\sum_l\left(\left[K^0\right]^0-\lambda_i^0\left[M^0\right]^0\right)\left\{\varphi_{ikl}^{\ II}\right\}^{II}_{kl}\{d\boldsymbol{r}\}_k\{d\boldsymbol{r}\}_l=\\&-\sum_k\sum_l\left(\left(\left[\boldsymbol{K}_{kl}^{II}\right]-\boldsymbol{\lambda}_i^{II}\left[M^0\right]-2\boldsymbol{\lambda}_i^{\ I}\left[\boldsymbol{M}_k^{\ I}\right]-\lambda^0\left[\boldsymbol{M}_{kl}^{II}\right]\right)\left\{\phi_i^0\right\}+2\left(\left[\boldsymbol{K}_l^{\ I}\right]-\boldsymbol{\lambda}^I\left[M^0\right]-\lambda^0\left[\boldsymbol{M}_l^{\ I}\right]\right)\left\{\varphi_{il}^{\ I}\right\}\right)\{d\boldsymbol{r}\}_k\{d\boldsymbol{r}\}_l\end{aligned} \tag{1.89}$$

L'équation d'ordre 0 n'est autre que l'équation déterministe, que nous résoudrons par les méthodes habituelles. Pour les ordres 1 et 2, nous simplifions les problèmes en intégrant ces équations après les avoir multipliées par la densité de probabilité conjointe de $\{\boldsymbol{r}\}$.

Si N est le nombre de variables aléatoires, nous avons alors N systèmes à résoudre pour l'ordre 1, et un seul système pour l'ordre 2. Après quelques manipulations matricielles (voir [Hie90]), nous obtenons finalement les dérivées d'ordre 1 et 2 des valeurs propres et des vecteurs propres.

Nous notons r_n la $n^{\text{ième}}$ variable aléatoire, le développement ne pouvant se faire que pour des valeurs propres de multiplicité 1. La dérivée de la valeur propre du premier ordre est donnée par :

$$\frac{\partial\boldsymbol{\lambda}_i}{\partial\boldsymbol{r}_n}=\left\{\varphi_i^0\right\}^T\left(\frac{\partial[\boldsymbol{K}]}{\partial\boldsymbol{r}_n}-\lambda_i^0\frac{\partial[\boldsymbol{M}]}{\partial\boldsymbol{r}_n}\right)\left\{\phi_i^0\right\} \tag{1.90}$$

La valeur propre du deuxième ordre est définie comme la double somme de la dérivée partielle d'ordre 2 multipliée par la covariance des variables aléatoires :

$$\boldsymbol{\lambda}_i^{(2)}=\sum_n^N\sum_p^N\frac{\partial^2\boldsymbol{\lambda}_i}{\partial\boldsymbol{r}_n\partial\boldsymbol{r}_p}Cov(\boldsymbol{r}_p,\boldsymbol{r}_n) \tag{1.91}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i^{(2)}=\sum_{n,p}^N\left(\begin{array}{l}\left\{\phi_i^0\right\}^T\left(\dfrac{\partial^2[\boldsymbol{K}]}{\partial\boldsymbol{r}_n\partial\boldsymbol{r}_p}-2\dfrac{\partial\boldsymbol{\lambda}_i}{\partial\boldsymbol{r}_n}\dfrac{\partial[\boldsymbol{M}]}{\partial\boldsymbol{r}_p}-\lambda_i^0\dfrac{\partial^2[\boldsymbol{M}]}{\partial\boldsymbol{r}_n\partial\boldsymbol{r}_p}\right)\left\{\phi_i^0\right\}\\+2\left\{\phi_i^0\right\}^T\left(\dfrac{\partial[\boldsymbol{K}]}{\partial\boldsymbol{r}_n}-\dfrac{\partial\boldsymbol{\lambda}_i}{\partial\boldsymbol{r}_n}\left[M^0\right]-\lambda_i^0\dfrac{\partial[\boldsymbol{M}]}{\partial\boldsymbol{r}_n}\right)\left\{\phi_i^0\right\}\end{array}\right)Cov(\boldsymbol{r}_p,\boldsymbol{r}_n) \tag{1.92}$$

Pour le calcul des dérivées des vecteurs propres, il existe différentes techniques [Hum99]. Nous trouvons en particulier la méthode dite « exacte » de Nelson [Nel76] ; cette méthode a l'avantage de fournir les dérivées exactes, mais elle est très coûteuse en temps de calcul. La méthode de Fox par superposition modale [Fox68] est utilisée dans la suite de ce paragraphe.

Pour compenser l'effet de la troncature modale, Wang propose de compléter la base modale par un mode de correction statique [Wan91]. Zhang et Zerva proposent une implémentation itérative de la méthode de Wang [Zha97]. Nous pouvons aussi citer les méthodes itératives du gradient conjugué, proposées par Alvin [Alv98].

Nous décrivons ici deux méthodes. La première consiste à dériver les équations :

$$([\boldsymbol{K}]-\lambda_i[\boldsymbol{M}])\{\boldsymbol{\varphi}_i\}=\{0\} \tag{1.93}$$

$$\{\boldsymbol{\varphi}_i\}^t[\boldsymbol{M}]\{\boldsymbol{\varphi}_j\}=\delta_{ij} \tag{1.94}$$

par rapport aux variables aléatoires, pour obtenir une équation supplémentaire pour chaque couple valeur/vecteur propre. Cette technique a l'avantage de n'utiliser que la connaissance des valeurs/vecteurs propres spécifiés, mais est lourde du point de vue numérique.

La deuxième technique consiste à exprimer les vecteurs propres aléatoires comme combinaison linéaire des vecteurs propres du système d'origine (déterministe). On forme alors des équations donnant les coefficients de cette combinaison linéaire en utilisant les conditions d'orthogonalité par rapport aux matrices [***K***] et [***M***]. Un des avantages de cette méthode est qu'elle ne requiert que la connaissance d'un nombre restreint de vecteurs propres dominants. L'inconvénient majeur est qu'elle souffre de problèmes de précision liés à la troncature modale.

Nous écrivons pour la dérivée d'ordre 1 du vecteur propre *i* :

$$\frac{\partial\{\boldsymbol{\varphi}_i\}}{\partial \boldsymbol{r}_n}=\sum_{l=1}^{L}\boldsymbol{C}_{il}^{r_n}\{\phi_l^0\} \tag{1.95}$$

où $C_{il}^{r_n}$ correspond au coefficient *l* de la combinaison linéaire donnant la dérivée du vecteur propre *i* par rapport à la variable aléatoire r_n. Sa valeur est donnée par :

$$\boldsymbol{C}_{il}^{r_n}=\begin{cases}\dfrac{\{\phi_l^0\}^T\{\boldsymbol{R}_{i_{r_n}}^I\}}{\lambda_l-\lambda_i} & l\neq i\\ -\frac{1}{2}\{\phi_l^0\}^T\dfrac{\partial[\boldsymbol{M}]}{\partial \boldsymbol{r}_n}\{\phi_l^0\} & l=i\end{cases} \tag{1.96}$$

avec $\{\boldsymbol{R}_{i_{r_n}}^I\}=-\left(\dfrac{\partial[\boldsymbol{K}]}{\partial \boldsymbol{r}_n}-\dfrac{\partial\lambda_i}{\partial \boldsymbol{r}_n}[M^0]-\lambda_i^0\dfrac{\partial[\boldsymbol{M}]}{\partial \boldsymbol{r}_n}\right)\{\phi_i^0\}$.

De la même façon, nous trouvons pour la dérivée d'ordre 2 des vecteurs propres :

$$\{\boldsymbol{\varphi}_i\}^{(2)}=\sum_{n,p=1}^{N}\frac{\partial^2\{\boldsymbol{\varphi}_i\}}{\partial \boldsymbol{r}_n\partial \boldsymbol{r}_p}Cov(\boldsymbol{r}_n,\boldsymbol{r}_p) \tag{1.97}$$

que nous décomposons sous la forme :

$$\{\boldsymbol{\varphi}_i\}^{(2)} = \sum_{l=1}^{L} \boldsymbol{D}_{il}^{r_n} \{\boldsymbol{\phi}_l^0\} \tag{1.98}$$

avec :

$$\boldsymbol{D}_{il}^{r_n} = \begin{cases} \dfrac{\{\boldsymbol{\varphi}_l^0\}^T \{\boldsymbol{R}_{i r_n}^{II}\}}{\boldsymbol{\lambda}_l - \boldsymbol{\lambda}_i} & l \neq i \\ -\sum_{n,p=1}^{N} \left(\frac{1}{2} \{\boldsymbol{\phi}_l^0\}^T \dfrac{\partial^2[\boldsymbol{M}]}{\partial \boldsymbol{r}_n \partial \boldsymbol{r}_p} \{\boldsymbol{\phi}_l^0\} + 2 \{\boldsymbol{\phi}_l^0\}^T \dfrac{\partial[\boldsymbol{M}]}{\partial \boldsymbol{r}_n} \dfrac{\partial\{\boldsymbol{\varphi}_l\}}{\partial \boldsymbol{r}_n} + \boldsymbol{C}_{il}^{r_n} \boldsymbol{C}_{il}^{r_p} \right) Cov(\boldsymbol{r}_n, \boldsymbol{r}_p) & l = i \end{cases} \tag{1.99}$$

où :

$$\{R_{i r_n}^{II}\} = -\sum_{n,p=1}^{N} \left(\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial^2[\boldsymbol{K}]}{\partial \boldsymbol{r}_n \partial \boldsymbol{r}_p} - \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{\lambda}_i}{\partial \boldsymbol{r}_n \partial \boldsymbol{r}_p} [M^0] - 2 \dfrac{\partial \boldsymbol{\lambda}_i}{\partial \boldsymbol{r}_p} \dfrac{\partial[\boldsymbol{M}]}{\partial \boldsymbol{r}_n} - \lambda_i^0 \dfrac{\partial^2[\boldsymbol{K}]}{\partial \boldsymbol{r}_n \partial \boldsymbol{r}_p} \right) \{\boldsymbol{\phi}_i^0\} \\ + 2 \left(\dfrac{\partial[\boldsymbol{K}]}{\partial \boldsymbol{r}_p} - \dfrac{\partial \boldsymbol{\lambda}_i}{\partial \boldsymbol{r}_p} [M^0] - \lambda_i^0 \dfrac{\partial[\boldsymbol{M}]}{\partial \boldsymbol{r}_p} \right) \dfrac{\partial\{\boldsymbol{\varphi}_i\}}{\partial \boldsymbol{r}_n} \end{array} \right) Cov(\boldsymbol{r}_p, \boldsymbol{r}_n) \tag{1.100}$$

1.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons posé et formulé le problème que nous nous proposons d'étudier dans cette thèse, en mettant l'accent sur les spécificités et les difficultés qui lui sont attachées. Nous avons ensuite rappelé brièvement les modèles probabilistes que nous utiliserons tout au long de ce travail : des v.a. et des champs aléatoires scalaires gaussiens ou lognormaux. Pour les champs, nous avons rappelé les deux grands types d'approximations dont on fait généralement usage, et que nous utiliserons, en contexte éléments finis : l'approximation ponctuelle et l'approximation fonctionnelle.

La deuxième partie de ce chapitre a présenté une étude bibliographique des principales Méthodes d'Eléments Finis Stochastiques (MEFS). Les MEFS sont une alternative aux simulations de Monte-Carlo qui s'avèrent en pratique trop coûteuses. Après avoir présenté les méthodes de perturbation, nous avons passé en revue les principales MEFS.

Les critères de classification des MEFS sont variables, selon le problème traité. Il peut être utile de distinguer les MEFS modifiant ou non le modèle EF d'étude : si la modification du modèle représente un certain coût, un avantage est de pouvoir parfois prendre en compte une v.a. vectorielle de grande dimension ; cette v.a. vectorielle peut être le résultat de la discrétisation d'un champ aléatoire. Un inconvénient est que les MEFS exigent une modification du modèle et se limitent en pratique aux problèmes linéaires (MEFSS, MIP) ou faiblement non linéaires (perturbation). En revanche, les méthodes utilisant le modèle EF de manière externe peuvent a priori être appliquées plus rapidement à des modèles non linéaires (quadrature, surfaces de réponse). Une limite semble alors être le nombre de v.a. prises en compte.

L'étude des différents domaines d'application des MEFS peut conduire à de premiers critères de classification. En effet, chaque domaine d'application peut être évalué en fonction d'un degré d'analyse probabiliste, c'est-à-dire du nombre de v.a. prises en compte, ces v.a. pouvant être indépendantes dans leur ensemble ou corrélées. Un autre critère de classification pourrait être un indicateur du rapport (précision / temps de calcul) qui varie d'une méthode à l'autre. En particulier, le coût de calcul est directement lié au nombre d'appels au modèle EF. Il semble aussi d'un intérêt pratique de distinguer les méthodes modifiant ou non le modèle. Les premières méthodes exigent une étude préalable éventuellement longue de la modélisation EF. Remarquons enfin que nous avons distingué dans ce chapitre les méthodes de discrétisation du champ d'entrée indépendantes ou non du maillage EF. Cette distinction pourrait être aussi un critère pratique de classification. En effet, un maillage EF important implique une discrétisation du champ qui doit aussi être importante.

Revenons enfin sur les méthodes présentées :

(a) Les méthodes de perturbations sont intéressantes pour des problèmes faiblement non linéaires, où le coefficient de variation des v.a. ou champs d'entrée n'est pas élevé (15 à 20%). Le nombre de v.a. considérées en entrée doit être raisonnable. La méthode de perturbation classique s'applique à des champs aléatoires, discrétisés a priori par des méthodes dépendantes du maillage EF.

(b) La méthode de discrétisation par intégrales pondérées s'applique à l'étude des structures élastiques. Les variables peuvent être modélisées par des champs gaussiens, si la rigidité dépend linéairement de ceux-ci. Cette méthode nécessite la modification du modèle EF et dépend aussi du maillage EF. Les difficultés de l'estimation de la variance de la réponse du modèle EF conduisent à un temps de calcul prohibitif pour des structures à grand nombre de ddl.

(c) La méthode de quadrature est applicable à toute catégorie de problème mécanique. Elle s'applique de manière externe au modèle EF. Elle est simplement limitée à un nombre restreint de v.a. modélisant les paramètres d'entrée du modèle : la méthode n'est donc pas applicable en pratique à des champs aléatoires. Les coefficients de variation des v.a. d'entrée doivent être relativement modérés, suivant la non linéarité du problème traité.

(d) La méthode des EFS spectraux (MEFS) est appliquée à des problèmes linéaires où l'aléa peut être modélisé par des v.a. ou par des champs gaussiens ou lognormaux, quelle que soit la covariance associée. L'approche est intéressante pour l'étude de processus gaussiens ou lognormaux, caractérisés par certaines covariances, pour lesquelles la décomposition spectrale des processus est explicite. Un grand nombre de v.a. d'entrée peut être pris en compte avec des coefficients de variation importants. **Le chapitre 2 est consacré à l'étude de cette méthode et de certaines de ses possibilités.**

Chapitre2

Analyse modale des structures par la MEFSS

Sommaire

2.1 La méthode des éléments finis stochastiques spectral 61
2.1.1 Le chaos polynomial 61
2.1.1.1 Polynômes d'Hermite 62
2.1.1.2 Chaos Polynomial homogène 63
2.1.2 Résolution des problèmes statiques linéaires 63
2.2 Principe du calcul des paramètres modaux 67
2.2.1 Mise en équations 67
2.2.2 Modèles probabilistes des matrices de masse et de rigidité 67
2.2.3 Approximation de E et ρ 68
2.2.4 Approximation de $\{q\}$ 69
2.2.5 Approximation des valeurs propres λ 70
2.3 Formulation du problème 71
2.3.1 Méthode de recherche des valeurs propres 71
2.3.2 Méthode de recherche des modes propres aléatoires 76
2.3.3 Méthode de recherche du champ de déplacement aléatoire 78
2.3.4 Caractéristiques du second ordre du champ de déplacement aléatoire 79
2.4 Autres modélisations des paramètres stochastiques 80
2.4.1 Processus lognormal stationnaire 81
2.4.2 V.a. lognormale 82
2.5 Calcul de la fonction de transfert aléatoire 83
2.6 Méthode de superposition modale en contexte aléatoire 85
2.7 Conclusion du chapitre 86

That which is static and repetitive is boring. That which is dynamic and random is confusing. In between lies art.
John A. Locke (1632-1704)

Truth is nothing but a path traced between errors.
Franz Anton Mesmer (1734-1815)

Je vis dans l'approximatif et je m'en approche de plus en plus.
Julos Beaucarne (1936)

L'étude bibliographique a souligné l'intérêt de la Méthode des Eléments Finis Stochastiques Spectrale (MEFSS), initiée par Ghanem et Spanos [Gha91], par rapport aux autres MEFS. Cette approche permet la résolution de problèmes faisant intervenir des champs aléatoires, au moyen d'une variable aléatoire (v.a) vectorielle, issue de la discrétisation d'un champ aléatoire.

Nous nous focalisons dans cette partie sur la MEFSS. Dans un premier paragraphe, nous explicitons sa formulation pour les problèmes statiques linéaires. Ensuite, la MEFSS est étendue pour permettre le calcul des modes propres et des valeurs propres d'un système comportant des variables et champs aléatoires. Compte tenu de la grande taille des modèles éléments finis réels, nous proposons une méthode performante permettant de réduire fortement la taille des problèmes stochastiques. Le cas du calcul des fonctions de transfert stochastiques est abordé, ainsi que le cas du calcul par superposition modale.

2.1 La méthode des éléments finis stochastiques spectral

2.1.1 Le chaos polynomial

Dans ce paragraphe, nous introduisons les notions de base concernant le chaos polynomial. Les solutions stochastiques sont projetées sur une base de polynômes orthogonaux dont les variables sont gaussiennes orthonormales. Les propriétés de cette base de polynômes sont utilisées pour générer un système d'équations linéaires au moyen de projections. La résolution de ce système conduit à un développement de la réponse sur la base polynomiale, que nous pouvons utiliser pour trouver de manière soit analytique, soit numérique la moyenne, l'écart-type ou la distribution de la réponse aléatoire. La principale problématique est alors la construction du développement pour les variables du problème. La base fonctionnelle la plus courante est celle des polynômes d'Hermite normalisés détaillée ci-dessous.

2.1.1.1 Polynômes d'Hermite

La première définition des polynômes d'Hermite a été donnée en 1864 comme une suite fonctionnelle s'obtenant par dérivations successives :

$$H_n(x)=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=(-1)^n\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} \tag{2.1}$$

Ces polynômes vérifient la relation d'orthogonalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_n(x)H_m(x)\varphi(x)dx=\delta_{nm}n! \tag{2 .2}$$

où δ_{nm} est le symbole de Kronecker. Les polynômes d'Hermite vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} H_0(x)=1 \\ H_n(x)=xH_{n-1}(x)-\dfrac{dH_{n-1}(x)}{dx} \end{cases} \tag{2.3}$$

On note que le terme de plus haut degré de H_n est x^n. Les premiers polynômes d'Hermite sont :

$$\begin{aligned} H_0(x)&=1 \\ H_1(x)&=x \\ H_2(x)&=x^2-1 \\ H_3(x)&=x^3-3x \\ H_4(x)&=x^4-6x^2+3 \\ H_5(x)&=x^5-10x^3+15x \end{aligned} \tag{2.4}$$

Par ailleurs, les polynômes d'Hermite possèdent les propriétés suivantes, utiles par la suite :

$$\frac{dH_n(x)}{dx}=nH_{n-1}(x) \tag{2.5}$$

et :

$$H_i(x)H_j(x)=\sum_{k=|i-j|}^{i+j}C_{ijk}H_k(x) \tag{2.6}$$

avec :

$$\begin{cases} C_{ijk}=0 & \text{si} \quad \dfrac{i+j+k}{2}\notin N \\ C_{ijk}=\dfrac{i!\,j!}{\left(\frac{i+j-k}{2}\right)!\left(\frac{i+k-j}{2}\right)!\left(\frac{j+k-i}{2}\right)!} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour toute v.a.g.c.r. ξ, l'équation (2.6) s'interprète comme suit :

$$E\left[\boldsymbol{H}_m(\xi), \boldsymbol{H}_n(\xi)\right] = \delta_{nm} n! \tag{2.7}$$

Enfin, d'après (2.7), l'espérance d'un produit de trois polynômes de gaussiennes $D_{ijk} = E\left[\boldsymbol{H}_i(\xi)\boldsymbol{H}_j(\xi)\boldsymbol{H}_k(\xi)\right]$ vaut :

$$\begin{cases} D_{ijk} = \dfrac{i!\,j!\,k!}{\left(\dfrac{i+j-k}{2}\right)!\left(\dfrac{j+k-i}{2}\right)!\left(\dfrac{k+i-j}{2}\right)!}, & \text{si} \quad i+j+k \quad \text{pair et} \quad k \in \left[\left|i-j\right|, i+j\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.8}$$

2.1.1.2 Chaos Polynomial homogène

Le chaos polynomial de dimension M et d'ordre p est défini comme l'ensemble des polynômes d'Hermite multidimensionnels en M v.a.g.c.r. $\{\xi_1,\ldots, \xi_M\}$, dont le degré ne dépasse pas p. Chacun de ces polynômes est complètement défini par une liste de M entiers non négatifs $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_M\}$ comme suit :

$$\boldsymbol{\Psi}_\alpha = \prod_{i=1}^{M} \boldsymbol{H}_{\alpha_i}(\xi_i) \quad , \quad \alpha_i \geq 0 \tag{2.9}$$

où $\boldsymbol{H}_q(.)$ est le $q^{ième}$ polynôme d'Hermite. Notons aussi par $\partial_\alpha = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i$ le degré de la liste α.

Le tableau (2.1) présente un exemple complet du chaos polynomial à l'ordre 3 avec 3 variables aléatoires. Le nombre de polynômes de M variables de degré inférieur ou égal à p est :

$$P = \sum_{k=0}^{p} C_{M+k-1}^{k} = \frac{(M+p)!}{M!\,p!} \tag{2.10}$$

Le tableau (2.2) présente le nombre de termes dans un chaos polynomial en fonction de l'ordre du chaos p et du nombre de variables M.

2.1.2 Résolution des problèmes statiques linéaires

La MEFSS utilise, comme nous l'avons vu au paragraphe ci-dessus, une projection sur le chaos polynomial de la partie aléatoire de la réponse recherchée, en association avec une décomposition de Karhunen-Loève des paramètres incertains du modèle, le tout épaulé par une représentation spatiale par éléments finis.

La toute première étape de la méthode consiste à décomposer les champs stochastiques du modèle sur la base d'espace proposée par la décomposition de Karhunen-Loève décrite dans le paragraphe 1.2.4.4. Par exemple, si nous considérons que c'est le module d'Young qui est représenté par un champ $\boldsymbol{E}(x)$, nous pouvons écrire :

$$\boldsymbol{E}(x) = \overline{E}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \xi_i \tag{2.11}$$

où ξ_i sont des variables aléatoires non corré1ées de moyennes nulles et d'écarts-types unitaires, formant ainsi une base orthonormée de l'aléa. Si le champ stochastique $\boldsymbol{E}(x)$ suit une loi normale, alors les variables aléatoires ξ_i sont elles aussi normales, c'est l'hypothèse que nous adoptons dans la suite.

La seconde étape consiste à utiliser cette base orthonormée de variables aléatoires ξ_i pour décomposer le vecteur $\{\boldsymbol{q}\}$ contenant les inconnues nodales, provenant de la discrétisation Eléments Finis du champ de déplacement solution recherché $\{\boldsymbol{u}(x)\}$.

i	$\boldsymbol{\Psi}_i$	$E\left[\Psi_i^2\right]$
0	1	1
1	ξ_1	1
2	ξ_2	1
3	ξ_3	1
4	$\xi_1^2 - 1$	2
5	$\xi_1\xi_2$	1
6	$\xi_1\xi_3$	1
7	$\xi_2^2 - 1$	2
8	$\xi_2\xi_3$	1
9	$\xi_3^2 - 1$	2
10	$\xi_1^3 - 3\xi_1$	6
11	$(\xi_1^2 - 1)\xi_2$	2
12	$(\xi_1^2 - 1)\xi_3$	2
13	$(\xi_2^2 - 1)\xi_1$	2
14	$\xi_1\xi_2\xi_3$	1
15	$(\xi_3^2 - 1)\xi_1$	2
16	$\xi_2^3 - 3\xi_2$	6
17	$(\xi_2^2 - 1)\xi_3$	2
18	$(\xi_3^2 - 1)\xi_2$	2
19	$\xi_3^3 - 3\xi_3$	6

Tableau 2.1. Exemple de chaos polynomial pour $M = 3$ et $p = 3$

	P=1	p=2	p=3	p=4
M=2	3	6	10	15
M=4	5	15	35	70
M=6	7	28	84	210

Tableau 2.2. Nombre des polynômes P dans la base du chaos. (M est le nombre de variables aléatoires de la base et p le degré maximal)

Nous pouvons montrer que le vecteur de variables aléatoires inconnues $\{\boldsymbol{q}\}$ peut s'écrire sous la forme d'une somme de polynômes des variables aléatoires normales $\boldsymbol{\xi}_i$:

$$\{\boldsymbol{q}\} = \{q_0\}\boldsymbol{\Gamma}_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty}\{q_{i_1}\}\boldsymbol{\Gamma}_1(\boldsymbol{\xi}_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{i_1}\{q_{i_1 i_2}\}\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{\xi}_{i_1}, \boldsymbol{\xi}_{i_2}) + \ldots. \tag{2.12}$$

où $\boldsymbol{\Gamma}_p(\boldsymbol{\xi}_{i_1}(\theta),\ldots,\boldsymbol{\xi}_{i_p}(\theta))$ désigne le chaos polynomial d'ordre *p*, qui engendre un sous-espace de l'aléa appelé chaos homogène d'ordre *p* [Wie38] (nous trouvons dans [Gha91] le mode d'obtention de ces polynômes). En pratique, nous réordonnons les termes sous la forme d'une simple somme, que l'on tronque au $P^{\text{ième}}$ terme :

$$\{\boldsymbol{q}\} = \sum_{j=0}^{P-1}\{q_j\}\boldsymbol{\Psi}_j(\boldsymbol{\xi}_1,\ldots,\boldsymbol{\xi}_N) = \sum_{j=0}^{P-1}\{q_j\}\boldsymbol{\Psi}_j \tag{2.13}$$

Si nous ne considérons qu'un chaos polynomial de dimension *N*, c'est-à-dire si seules les *M* premières variables aléatoires $\boldsymbol{\xi}_i$ sont conservées, la détermination du champ de déplacement solution revient à déterminer les vecteurs $\{\boldsymbol{q}_j\}$ de la décomposition (2.13).

La discrétisation éléments finis de la structure conduite au calcul d'une matrice de rigidité globale issue de l'assemblage de matrices élémentaires de la forme :

$$[\boldsymbol{K}] = \int_{\Omega}[B]^T[\boldsymbol{D}(x)][B]d\Omega \tag{2.14}$$

où [*B*] est la matrice gradient exprimant les déformations en fonction du vecteur des inconnues nodales et [$\boldsymbol{D}(x)$] est la matrice du comportement, faisant intervenir dans notre cas le champ $\boldsymbol{E}(x)$. La décomposition de Karhunen-Loève (2.11) de ce champ, tronquée au $M^{\text{ième}}$ terme, nous donne :

$$[\boldsymbol{K}] = \sum_{i=0}^{M}[K_i]\boldsymbol{\xi}_i \tag{2.15}$$

où [K_i] correspond à l'intégration spatiale sur $\boldsymbol{E}$ de la quantité $\sqrt{\lambda_i}\,f_i(x)$ issue de la décomposition.

Le problème éléments finis revient alors à résoudre un système de la forme [$\boldsymbol{K}$]{$\boldsymbol{q}$}={F}, ce qui nous amène, en utilisant les équations (2.13) et (2.15), à résoudre l'équation suivante :

$$\sum_{j=0}^{P-1}\left(\sum_{i=0}^{M}[K_i]\boldsymbol{\xi}_i\right)\boldsymbol{\Psi}_j\{q_j\} = \{F\} \tag{2.16}$$

que nous multiplions par $\boldsymbol{\Psi}_k$, ce qui nous donne, en prenant l'espérance :

$$\sum_{j=0}^{P-1}\sum_{i=0}^{N}E[\boldsymbol{\xi}_i\boldsymbol{\Psi}_j\boldsymbol{\Psi}_k][K_i][q_j] = \{F\}E[\boldsymbol{\Psi}_k] \tag{2.17}$$

Au bilan, nous devons résoudre le système par blocs suivant :

$$\begin{pmatrix} [K_{00}] & [K_{01}] & \cdots & [K_{0(P-1)}] \\ [K_{10}] & [K_{11}] & \cdots & [K_{1(P-1)}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [K_{(P-1)0}] & [K_{(P-1)1}] & \cdots & [K_{(P-1)(P-1)}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{q_0\} \\ \{q_1\} \\ \vdots \\ \{q_{P-1}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{F\} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

où chaque bloc est défini par :

$$[K_{kj}] = \sum_{i=0}^{M} E[\xi_i \Psi_j \Psi_k][K_i] \tag{2.19}$$

La matrice finale étant d'ordre $M\times(P\text{-}1)$, nous avons tout intérêt à ne pas l'assembler explicitement. Dans [Gha96], deux algorithmes de résolutions sont proposés : le premier repose sur un schéma itératif basé sur l'algorithme du Gradient Conjugué (pour plus de précisions, voir [Axe94]), tandis que le second repose sur une hiérarchisation des systèmes à résoudre, rendue possible par le caractère lui-même hiérarchique de la technique du chaos polynomial.

Des méthodes hybrides ont également été développées dans [Gha99 a,b,c,d] : elles permettent de lier la *SFEM* à la méthode de Monte-Carlo et ses améliorations décrites dans le paragraphe 1.3.2.2, telles que le tirage d'importance (*Importance sampling*) ou la méthode d'hypercube latin (*Latin Hypercube sampling*).

Dans le cas où le champ stochastique $\boldsymbol{E}(x)$ ne suit pas une loi de probabilité normale, nous n'utilisons plus la décomposition de Karhunen-Loève (2.11) : à la place, nous appliquons directement la décomposition sur le chaos polynomial, à savoir :

$$\boldsymbol{E}(x) = \sum_{i=0}^{P-1} e_i(x)\Psi_i \tag{2.20}$$

où les vecteurs de la base d'espace $e_i(x)$ sont donnés par :

$$e_i(x) = \frac{E[\Psi_i \boldsymbol{E}(x)]}{[\Psi_i^2]} \tag{2.21}$$

Le raisonnement reste alors le même, les blocs matriciels s'exprimant maintenant comme suit :

$$[K_{kj}] = \sum_{i=0}^{M} E[\xi_i \Psi_j \Psi_k][K_i] \tag{2.22}$$

avec $[K_i]$ résultant de l'intégration spatiale de $e_i(x)$.

De la même façon, si le problème à traiter est non linéaire, la matrice de rigidité n'est plus une fonction linéaire des variables aléatoires ξ_i : nous la décomposons alors sur le chaos polynomial comme dans le cas de champs non normaux.

2.2 Principe du calcul des paramètres modaux

Le calcul des propriétés des paramètres modaux stochastiques est essentiel pour la connaissance du comportement global d'une structure réelle. Nous proposons, dans ce travail, une méthode basée sur une double projection : une projection spatiale sur une base de vecteurs, ici la base modale déterministe, et une projection sur l'espace aléatoire du chaos polynomial.

2.2.1 Mise en équations

La formulation de la MEFSS présentée dans ce chapitre concerne les problèmes mécaniquement linéaires, à N degrés de liberté (*ddl*). Le comportement est gouverné par l'équation :

$$([K] - \lambda_i[M])\{q_i\} = \{0\} \tag{2.23}$$

avec $[K]$ et $[M]$ les matrices globales de rigidité et de masse, respectivement, (de dimensions $N \times N$, où N est le degré de liberté de système). Les λ_i sont les valeurs propres du système (les carrés des pulsations propres ω_i^2) et $\{q_i\}$ sont les vecteurs propres correspondants. Chacun de ces vecteurs est lié au champ de déplacement u par la relation classique :

$$\{u(x)\} = [N(x)]\{q\} \tag{2.24}$$

où $[N(x)]$ est la matrice des fonctions de forme.

Nous nous intéressons au cas où l'incertitude affecte le module d'élasticité et la densité, dont les matrices de masse $[M]$ et de rigidité $[K]$ dépendent linéairement. Nous sommes donc dans la situation où les matrices de masse et de rigidité $[M]$ et $[K]$ sont aléatoires et par conséquent il en est de même des valeurs propres et des vecteurs propres du système. Nous les noterons désormais $[\boldsymbol{M}]$, $[\boldsymbol{K}]$, $\boldsymbol{\lambda}$ et $\{\boldsymbol{q}\}$, respectivement, pour indiquer ce caractère aléatoire. L'équation aux valeurs propres (2.24) prend alors la forme :

$$([\boldsymbol{K}] - \boldsymbol{\lambda}[\boldsymbol{M}])\{\boldsymbol{q}\} = \{0\} \tag{2.25}$$

Dans cette équation, il faut noter que les matrices $[\boldsymbol{M}]$ et $[\boldsymbol{K}]$ sont les données d'entrée, et l'ensemble $\{(\boldsymbol{\lambda}_i \text{ et } \{\boldsymbol{q}_i\}), i=1,N\}$ est la réponse du système à déterminer.

On note que $\{\boldsymbol{q}\}$ est une v.a. N-dimensionnelle, quel que soit le modèle probabiliste (variable, processus ou champ aléatoire) retenu pour l'aléa. Cette v.a. est appelée vecteur aléatoire des *ddl*. Par ailleurs, sachant que $\{\boldsymbol{q}\}$ est une v.a. N-dimensionnelle, nous allons chercher une approximation appropriée pour la résolution du problème probabiliste. Nous ferons ensuite le même travail pour $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{\rho}$.

2.2.2 Modèles probabilistes des matrices de masse et de rigidité

La matrice de rigidité aléatoire $[\boldsymbol{K}]$ résulte de l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires $[\boldsymbol{K}^e]$ relatives aux éléments du maillage du domaine Ω.

$$[\boldsymbol{K}] = \mathop{\mathcal{A}}_{e=1}^{N_{el}} [\boldsymbol{K}^e] \quad ; \quad [\boldsymbol{K}^e] = \int_{\Omega_e} [B_e(x)]^T [\boldsymbol{D}(x)][B_e(x)] dx \tag{2.26}$$

où $\boldsymbol{A}$ est l'opérateur d'assemblage, Ω_e le sous-ensemble de Ω occupé par l'élément fini e, N_{el} est le nombre total d'éléments du maillage, $[B_e(x)]$ est la matrice élémentaire reliant les déformations aux déplacements nodaux et $[\boldsymbol{D}(x)]$ est la matrice du comportement élastique linéaire du matériau.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que $[\boldsymbol{D}]$ est de la forme :

$$[\boldsymbol{D}] = \boldsymbol{E}(x)\,[\overline{D}] \tag{2.27}$$

où $[\overline{D}]$ est une matrice déterministe et $\boldsymbol{E}$ est une grandeur aléatoire scalaire modélisant le module d'élasticité longitudinal du matériau constitutif représenté par un processus gaussien stationnaire noté $\boldsymbol{E}(x)$.

De même, la matrice de masse aléatoire $[\boldsymbol{M}]$ résulte de l'assemblage des matrices de masse élémentaires $[\boldsymbol{M}^e]$ relatives aux éléments du maillage du domaine Ω.

$$[\boldsymbol{M}] = \underset{e=1}{\overset{N_{el}}{\boldsymbol{A}}}\left[\boldsymbol{M}^e\right] \quad ; \quad \left[\boldsymbol{M}^e\right] = \int_{\Omega_e} [N_e(x)]^T\, \boldsymbol{\rho}(x) [N_e(x)] dx \tag{2.28}$$

où $[N_e]$ est la matrice des fonctions de forme et $\boldsymbol{\rho}(x)$ est un processus aléatoire scalaire modélisant la masse volumique.

La formulation (2.25) peut maintenant être écrite en introduisant les expressions (2.26) et (2.28) de $[\boldsymbol{K}]$ et $[\boldsymbol{M}]$:

$$\left(\underset{e=1}{\overset{N_{el}}{\boldsymbol{A}}} \int_{\Omega_e} [B_e(x)]^T\, \boldsymbol{E}(x) [\overline{D}] B_e(x)] dx - \lambda \underset{e=1}{\overset{N_{el}}{\boldsymbol{A}}} \int_{\Omega_e} [N(x)]^T\, \boldsymbol{\rho}(x) [N(x)] dx \right) \{\boldsymbol{q}\} = \{0\} \tag{2.29}$$

2.2.3 Approximation de E et ρ

Comme nous l'avons vu dans 2.1.2, $\boldsymbol{E}$ est une grandeur aléatoire scalaire modélisant le module d'élasticité longitudinal du matériau constitutif. Nous supposons que $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{E}(x), x \in \Omega)$ est un processus gaussien stationnaire scalaire de moyenne μ_E, d'écart-type σ_E et de fonction de covariance C_E. Un tel processus peut alors s'écrire, $\forall x \in \Omega$:

$$\boldsymbol{E}(x) = \mu_E + \sigma_E \boldsymbol{G}(x) \tag{2.30}$$

où $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{G}(x), x \in \Omega)$ est un processus gaussien stationnaire, de moyenne nulle, d'écart-type unité et de fonction de covariance C_G, telle que, $\forall u \in \Omega$:

$$C_G(u) = \frac{C_E(u)}{\sigma_E^2} \tag{2.31}$$

Pour obtenir une approximation de $\boldsymbol{E}$, nous utilisons (toujours en suivant l'idée de Ghanem et Spanos [Gha91]) un développement de Karhunen-Loève de ce processus. Le processus $\boldsymbol{G}$ est de la forme :

$$\boldsymbol{G}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(x) \boldsymbol{\xi}_i \quad ; \quad x \in \Omega \tag{2.32}$$

avec $(\xi_i)_{1\le i<\infty}$ une famille dénombrable de copies indépendantes d'une v.a. gaussienne standard et $(h_i)_{1\le i<\infty}$ une suite de fonctions réelles, telles que, $\forall i \in \mathbb{N},\ \forall x \in \Omega$:

$$h_i(x) = \sqrt{\lambda_i}\, f_i(x) \tag{2.33}$$

où les λ_i et f_i sont les valeurs et les fonctions propres de la covariance C_G solutions du problème spectral relatif à C_G :

$$\int_\Omega C_G(x,x')f(x')d\Omega = \lambda_i f_i(x') \tag{2.34}$$

avec C_G donnée par (2.31). De (2.30) et (2.32), nous obtenons :

$$\boldsymbol{E}(x) = \mu_E + \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)\boldsymbol{\xi}_i \quad ; \quad x \in \Omega \tag{2.35}$$

qui est le développement de Karhunen-Loève de $\boldsymbol{E}$, avec $\forall i \in \mathbb{N},\ \forall x \in \Omega$:

$$g_i(x) = \sigma_E h_i(x) = \sigma_E \sqrt{\lambda_i}\, f_i(x) \tag{2.36}$$

Une M-approximation $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ de $\boldsymbol{E}$ s'obtient alors en tronquant le développement (2.34) à l'ordre M :

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(x) = \sum_{i=0}^{M} g_i(x)\boldsymbol{\xi}_i \quad ; \quad x \in \Omega \tag{2.37}$$

où :

$$g_0(x) \equiv \mu_G \quad ; \quad \xi_0 \equiv 1 \tag{2.38}$$

De même, l'approximation $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}$ de $\boldsymbol{\rho}$ est écrite sous la forme :

$$\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(x) = \sum_{l=0}^{M} r_l(x)\boldsymbol{\xi}_l \quad ; \quad x \in \Omega \tag{2.39}$$

2.2.4 Approximation de {*q*}

L'approximation du vecteur propre du système est construite en utilisant un développement de $\{\boldsymbol{q}\}$ sur les chaos de Wiener. Un tel développement s'écrit :

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{q}\} = \{q_0\}\boldsymbol{\Gamma}_0 \quad &+ \quad \sum_{i_1=1}^{\infty} \{q_{i_1}\}\boldsymbol{\Gamma}_1(\boldsymbol{\xi}_{i_1}) \\ &+ \quad \sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{i_1} \{q_{i_1 i_2}\}\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{\xi}_{i_1},\boldsymbol{\xi}_{i_2}) \\ &+ \quad \sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{i_1}\sum_{i_3=1}^{i_2} \{q_{i_1 i_2 i_3}\}\boldsymbol{\Gamma}_3(\boldsymbol{\xi}_{i_1},\boldsymbol{\xi}_{i_2},\boldsymbol{\xi}_{i_3}) \\ &+ \quad \cdots \end{aligned} \tag{2.40}$$

où $(\xi_i)_{1\le i\le\infty}$ est une famille de v.a. gaussiennes standard réelles et indépendantes, $\{q_{i_1}\}$, $\{q_{i_1 i_2}\}$, $\{q_{i_1 i_2 i_3}\}$, . . . sont des vecteurs déterministes N-dimensionnels et $\boldsymbol{\Gamma}_k$ $(1\le k<\infty)$ sont des polynômes s'identifiant à des polynômes d'Hermite. Rappelons qu'un chaos de Wiener d'indice d et d'ordre p est l'espace engendré par les polynômes d'Hermite d'ordre p (*i.e.* par tous les polynômes d'Hermite de degré de monôme le plus élevé égal à p).

On peut alors obtenir une approximation $\{\tilde{\boldsymbol{q}}\}$ de $\{\boldsymbol{q}\}$ en fixant le nombre de v.a. $\boldsymbol{\xi}_j$ à une valeur finie M, en se donnant un ordre p et en limitant le développement de $\{q\}$ aux p+1 premiers chaos. On obtient ainsi, après réarrangement et réindiçage :

$$\{\tilde{\boldsymbol{q}}\} = \sum_{j=0}^{P-1} \{q_j\} \boldsymbol{\Psi}_j(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.41}$$

où les coefficients $\{q_j\}$ sont à déterminer. $(\{q_j\})_{0\le j\le P-1}$ est une famille de vecteurs déterministes N-dimensionnels et, $\forall j \in \{0,\ldots,P-1\}$, $\boldsymbol{\Psi}_j$ est un polynôme d'Hermite et $\boldsymbol{\xi}$ une v.a. gaussienne standard d-dimensionnelle, avec $1\le d\le M$. P est lié à p et M par la relation :

$$P = P(p,M) = \sum_{k=0}^{p} C_{M+k-1}^{k} \tag{2.42}$$

Dans ce qui suit, nous posons :

$$\boldsymbol{\Psi}_j = \boldsymbol{\Psi}_j(\boldsymbol{\xi}) \quad , \quad \forall j \in \{0,\ldots,P-1\} \tag{2.43}$$

D'où la nouvelle expression de $\{\tilde{\boldsymbol{q}}\}$:

$$\{\tilde{\boldsymbol{q}}\} = \sum_{j=0}^{P-1} \{q_j\} \boldsymbol{\Psi}_j \tag{2.44}$$

Revenons à présent aux choix de modélisation probabiliste retenus pour le module d'élasticité $\boldsymbol{E}$, la masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ et les valeurs propres $\boldsymbol{\lambda}$, ainsi que les vecteurs propres $\{\boldsymbol{q}\}$. Cherchons pour chacun d'eux une approximation appropriée pour la résolution du problème.

2.2.5 Approximation des valeurs propres $\boldsymbol{\lambda}$

Le modèle retenu implique que les matrices aléatoires de masse et de rigidité soient gaussiennes, et non pas presque sûrement positives. L'approximation $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ de $\boldsymbol{\lambda}$ est obtenue en fixant le nombre de v.a. ξ_i à une valeur finie M, en se donnant un ordre p et en limitant le développement de $\boldsymbol{\lambda}$ aux p+1 premiers chaos. Nous obtenons ainsi, après réarrangement, sur la base tronquée du chaos polynomial :

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{k=0}^{P-1} \lambda_k \boldsymbol{\Psi}_k(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.45}$$

où λ_k est une famille de coefficients déterministes et, $\forall k \in \{0,\ldots,P-1\}$, $\boldsymbol{\Psi}_k$ est un polynôme d'Hermite et $\boldsymbol{\xi}$ une v.a. gaussienne standard d-dimensionnelle, avec $1\le d\le M$.
Dans la suite, nous notons :

$$\boldsymbol{\Psi}_k = \boldsymbol{\Psi}_k(\boldsymbol{\xi}) \quad , \quad \forall k \in \{0,\ldots,P-1\} \tag{2.46}$$

D'où la nouvelle expression de $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{k=0}^{P-1} \lambda_k \boldsymbol{\Psi}_k \tag{2.47}$$

Il est important de noter que les équations (2.44) et (2.47) correspondent à une valeur propre et au vecteur propre associé. L'expression des vecteurs propres et des valeurs propres en termes de chaos polynomial est informatiquement avantageuse car on obtient un système d'équations déterministes dérivées de l'équation stochastique. Le chaos polynomial est ordonné, tel que les premiers m+1 polynômes sont ceux d'ordre 0 ($\boldsymbol{\Psi}_0(\boldsymbol{\xi}) = 1$) et d'ordre 1 ($\boldsymbol{\Psi}_k(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}_k$).

2.3 Formulation du problème

2.3.1 Méthode de recherche des valeurs propres

La formulation MEFSS peut maintenant être écrite en intégrant l'aspect aléatoire de l'entrée et de la réponse du système : l'aléa dans les matrices de masse et de rigidité est modélisé par le développement de Karhunen-Loève et l'aléa de la réponse lié aux valeurs et vecteurs propres est représenté par le développement sur le chaos polynomial. Rappelons les approximations obtenues pour les quantités aléatoires $\{\boldsymbol{q}\}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{E}$:

$$\{\tilde{\boldsymbol{q}}\} = \sum_{j=0}^{P-1} \{q_j\} \boldsymbol{\Psi}_j \ , \ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{k=0}^{P-1} \lambda_k \boldsymbol{\Psi}_k \ , \ \tilde{\boldsymbol{E}}(x) = \sum_{i=0}^{M_1} g_i(x) \boldsymbol{\xi}_i \ , \ \tilde{\boldsymbol{\rho}}(x) = \sum_{l=0}^{M_2} \eta_l(x) \boldsymbol{\xi}_l$$

Rappelons par ailleurs l'expression (2.29) exprimant l'équation aux valeurs propres du système discrétisé :

$$\left(\left(\underset{e=1}{\overset{N_{el}}{A}} \int_{\Omega_e} \left[B_e(x)\right]^T \boldsymbol{E}(x) \left[\overline{D}\right] \left[B_e(x)\right] dx \right) - \left(\underset{e=1}{\overset{N_{el}}{A}} \int_{\Omega_e} \left[N_e(x)\right]^T \boldsymbol{\rho}(x) \left[N_e(x)\right] dx \right) \boldsymbol{\lambda} \right) \{\boldsymbol{q}\} = 0 \tag{2.48}$$

Introduisant les approximations de $\{\boldsymbol{q}\}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{\rho}$ dans cette équation, l'équation aux valeurs propres peut être écrite en fonction des paramètres tronqués. Par conséquent, l'équation ci-dessus prend la forme :

$$\left(\left(\underset{e=1}{\overset{N_{el}}{A}} \int_{\Omega_e} \left[B_e(x)\right]^T \tilde{\boldsymbol{E}}(x) \left[\overline{D}\right] \left[B_e(x)\right] dx \right) - \left(\underset{e=1}{\overset{N_{el}}{A}} \int_{\Omega_e} \left[N_e(x)\right]^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}(x) \left[N_e(x)\right] dx \right) \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \right) \{\tilde{\boldsymbol{q}}\} \approx 0 \tag{2.49}$$

Considérons le résidu :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\left(\underset{e=1}{\overset{N_{el}}{A}} \int_{\Omega_e} \left[B_e(x)\right]^T \tilde{\boldsymbol{E}}(x) \left[\overline{D}\right] \left[B_e(x)\right] dx \right) - \left(\underset{e=1}{\overset{N_{el}}{A}} \int_{\Omega_e} \left[N_e(x)\right]^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}(x) \left[N_e(x)\right] dx \right) \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \right) \{\tilde{\boldsymbol{q}}\} \tag{2.50}$$

qui s'écrit encore en introduisant les approximations des quantités aléatoires :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{j=0}^{P-1}\left(\left(\sum_{i=0}^{M_1}\left(\underset{e=1}{\overset{N_{el}}{A}}\int_{\Omega_e}\left[B_e(x)\right]^T g_i(x)\left[\overline{D}\right]\left[B_e(x)\right]dx\right)\boldsymbol{\xi}_i\boldsymbol{\Psi}_j\right)-\left(\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{l=0}^{M_2}\lambda_k\left(\underset{e=1}{\overset{N_{el}}{A}}\int_{\Omega_e}\left[N_e(x)\right]^T r_l(x)\left[N_e(x)\right]dx\right)\boldsymbol{\xi}_l\boldsymbol{\Psi}_k\boldsymbol{\Psi}_j\right)\right)\{q_j\} \tag{2.51}$$

Notons :

$$[K_i]=\underset{e=1}{\overset{N_{el}}{A}}\left[K_i^e\right] \quad ; \quad \left[K_i^e\right]=\int_{\Omega_e}\left[B_e(x)\right]^T g_i(x)\left[\overline{D}\right]\left[B_e(x)\right]dx \tag{2.52}$$

$$[M_l]=\underset{e=1}{\overset{N_{el}}{A}}\left[K_l^e\right] \quad ; \quad \left[M_l^e\right]=\int_{\Omega_e}\left[N_e(x)\right]^T r_l(x)\left[N_e(x)\right]dx \tag{2.53}$$

L'équation (2.51) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{j=0}^{P-1}\left(\left(\sum_{i=0}^{M_1}[K_i]\boldsymbol{\xi}_i\boldsymbol{\Psi}_j\right)-\left(\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{l=0}^{M_2}\lambda_k[M_l]\boldsymbol{\xi}_l\boldsymbol{\Psi}_k\boldsymbol{\Psi}_j\right)\right)\{q_j\} \tag{2.54}$$

La meilleure solution est obtenue quand l'espérance du résidu devient orthogonale à l'espace d'approximation, mesuré par le chaos polynomial. Cette condition mène à un ensemble d'équations algébriques non linéaires dont les variables sont les vecteurs $\{q_j\}$ et les grandeurs scalaires λ_k. En écrivant que ce résidu est orthogonal aux v.a. $\{\boldsymbol{\Psi}_n, n=0,\ldots,P\text{-}1\}$, c'est-à-dire que le produit intérieur (espérance) est égal à zéro (méthode de Galerkin) :

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\Psi}_n]=0 \quad , \quad \forall n\in\{0,\ldots,P-1\} \tag{2.55}$$

on obtient un système de la forme :

$$\sum_{j=0}^{P-1}\left([K_{n,j}]-\sum_{k=0}^{P-1}[M_{n,j,k}]\lambda_k\right)\{q_j\}=0 \quad ; \quad n=0,\ldots,P-1 \tag{2.56}$$

où :

$$[K_{n,j}]=\sum_{i=0}^{M_1}c_{nij}[K_i] \tag{2.57}$$

et :

$$[M_{n,j,k}]=\sum_{l=0}^{M_2}d_{nlkj}[M_l] \tag{2.58}$$

Les coefficients c_{nij} et d_{nlkj} dans l'équation ci-dessus sont définis par l'espérance du produit des variables aléatoires et des polynômes d'Hermite :

$$\begin{aligned} c_{nij} &= E[\boldsymbol{\Psi}_n\boldsymbol{\Psi}_j\boldsymbol{\xi}_i] \\ d_{nlkj} &= E[\boldsymbol{\Psi}_n\boldsymbol{\Psi}_k\boldsymbol{\Psi}_j\boldsymbol{\xi}_l] \end{aligned} \tag{2.59}$$

avec, $\forall (n, k, j) \in \{0,\ldots,P\text{-}1\}^3$

c_{nij} et d_{nkj} sont des nombres entiers qui sont évalués analytiquement en utilisant une formule récursive des polynômes unidimensionnels d'Hermite. Ayant les propriétés d'orthogonalité du chaos polynomial, la plupart des coefficients c_{nij} et d_{nkj} sont nuls. Nous présentons en annexe B une procédure permettant un calcul exact et automatique des espérances figurant dans (2.59).

Le système (2. 56) définit un système d'équations semblables à la formulation déterministe du problème aux valeurs propres, où chaque équation est basée sur un polynôme unidimensionnel d'Hermite. Dans ces équations, le premier terme (j=0) est lié à la moyenne de la réponse du système, alors que les termes additionnels mènent aux identifications des sensibilités du système par rapport aux incertitudes d'entrée (variables aléatoires).

Bien que ce système soit semblable au cas déterministe, sa solution présente deux grandes difficultés : à savoir la dépendance non linéaire des variables λ_{k} et de $\{q_{\text{j}}\}$ et le développement des procédures permettant, d'un part, le calcul exact et automatique des espérances figurant dans (2.59), et d'autre part l'évaluation des mesures globales des parties stochastiques dans les matrices de rigidité et de masse.

Comparant les définitions mentionnées ci-dessus au problème aux valeurs propres déterministe, nous pouvons voir que la formulation du problème non déterministe mène à un système de problèmes aux valeurs propres où la variabilité est introduite dans des sous modèles déterministes discrets. Ainsi nous pouvons employer le même opérateur déterministe pour calculer les sensibilités de la réponse. C'est l'un des avantages principaux de cette méthode. Le coût additionnel de l'analyse stochastique en comparaison à celui de l'analyse déterministe consiste seulement à résoudre le système non linéaire dont les matrices ont été précédemment factorisées.

Les coefficients λ_{k} peuvent être facilement calculés en résolvant les P déterminants :

$$det\left(\left[K_{n,j}\right]-\sum_{k=0}^{P-1}\left[M_{n,j}\right]\lambda_k\right)=0 \tag{2.60}$$

ce qui mène à un système de P équations non linéaires avec P inconnues. Ce système peut être résolu en utilisant des méthodes numériques standard, menant aux P solutions des coefficients λ_{k} et par conséquent, les statistiques des valeurs propres peuvent être directement données par :

$$\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_j=\left(\sum_{k=0}^{P-1}\lambda_k\boldsymbol{\Psi}_k\right)_j \tag{2.61}$$

Il est important de souligner que chaque valeur propre (de λ_{k} grandeurs scalaires) est associée à un vecteur propre $\{q_{\text{j}}\}$. Ceci implique que l'algorithme utilisé ne doit pas modifier l'ordre des différents modes. Pour cette raison, les solveurs itératifs ne sont pas appropriés car ils arrangent les valeurs propres dans l'ordre croissant, sans se préoccuper de la forme correspondante des modes. Ces solveurs présentent des solutions valables pour la moyenne de la réponse (solution déterministe), mais ils ne sont pas appropriés pour le calcul des coefficients de développement du chaos polynomial. En d'autres termes, le rapport entre les

coefficients pour un mode donné n'est pas le même pour tous les termes de la série. Par exemple, le premier mode aura la plus basse valeur propre pour k=0, mais pas nécessairement la plus basse pour tous les autres termes k>0. Pour surmonter cette difficulté, le solveur employé doit maintenir les valeurs propres dans le même ordre : cette condition est satisfaite ici en employant l'algorithme standard de Jacobi.

Une fois que les coefficients dans le développement du chaos polynomial de la réponse calculés, n'importe quelle analyse probabiliste désirée peut être exécutée en utilisant l'approximation (2.61). En particulier, la moyenne et l'écart-type de $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ sont calculés par :

$$E\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}\right)= \lambda_0 \tag{2.62a}$$

$$\sigma_{\tilde{\lambda}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{P-1} \lambda_k^2 \left\langle \boldsymbol{\Psi}_k^2 \right\rangle} \tag{2.62b}$$

De la même manière, les coefficients d'asymétrie (*skewness*) $\delta_{\tilde{\mu}}$ et d'aplatissement (*kurtosis*) $\kappa_{\tilde{\mu}}$ s'écrivent respectivement par :

$$\delta_{\tilde{\mu}} = \frac{1}{\sigma_{\tilde{\mu}}^3} \sum_{i=1}^{g-1} \sum_{j=1}^{g-1} \sum_{k=1}^{g-1} \left\langle \boldsymbol{\Psi}_i \boldsymbol{\Psi}_j \boldsymbol{\Psi}_k \right\rangle \mu_i \mu_j \mu_k \tag{2.62c}$$

$$\kappa_{\tilde{\mu}} = \frac{1}{\sigma_{\tilde{\mu}}^4} \sum_{i=1}^{g-1} \sum_{j=1}^{g-1} \sum_{k=1}^{g-1} \sum_{l=1}^{g-1} \left\langle \boldsymbol{\Psi}_i \boldsymbol{\Psi}_j \boldsymbol{\Psi}_k \boldsymbol{\Psi}_l \right\rangle \mu_i \mu_j \mu_k \mu_l \tag{2.62d}$$

La fonction de répartition et la fonction de densité de probabilité des valeurs propres peuvent être efficacement obtenues par des simulations de Monte-Carlo sur les expressions (2.61).

La procédure globale de résolution est récapitulée dans la figure 2.1.

On note que la caractérisation du vecteur aléatoire des valeurs propres est réduite à la résolution d'un système non linéaire de taille (N×P), où N est le nombre de degrés de liberté de la structure, et P est l'ordre de développement polynomial de la réponse. Ces deux facteurs déterminent la taille du problème. Comme il était mentionné auparavant, il y a un rapport entre le nombre des termes M retenus dans le développement de Karhunen-Loève d'un processus, et le nombre de polynômes P exigé pour un développement complet de l'ordre p. Le nombre de polynômes est relié au nombre de variables aléatoires M (ordre de l'expansion du procédé stochastique) et le p (ordre maximum des polynômes $\boldsymbol{\Psi}_j$) par :

$$P = P(p, M) = \sum_{k=0}^{p} C_{M+k-1}^{k} \tag{2.63}$$

Cette expression montre que l'effort informatique peut devenir très important si la dimension du problème stochastique augmente. Cependant, dans la pratique, seul un nombre restreint de variables aléatoires peut être considérées pour l'évaluation précise des valeurs propres stochastiques du système.

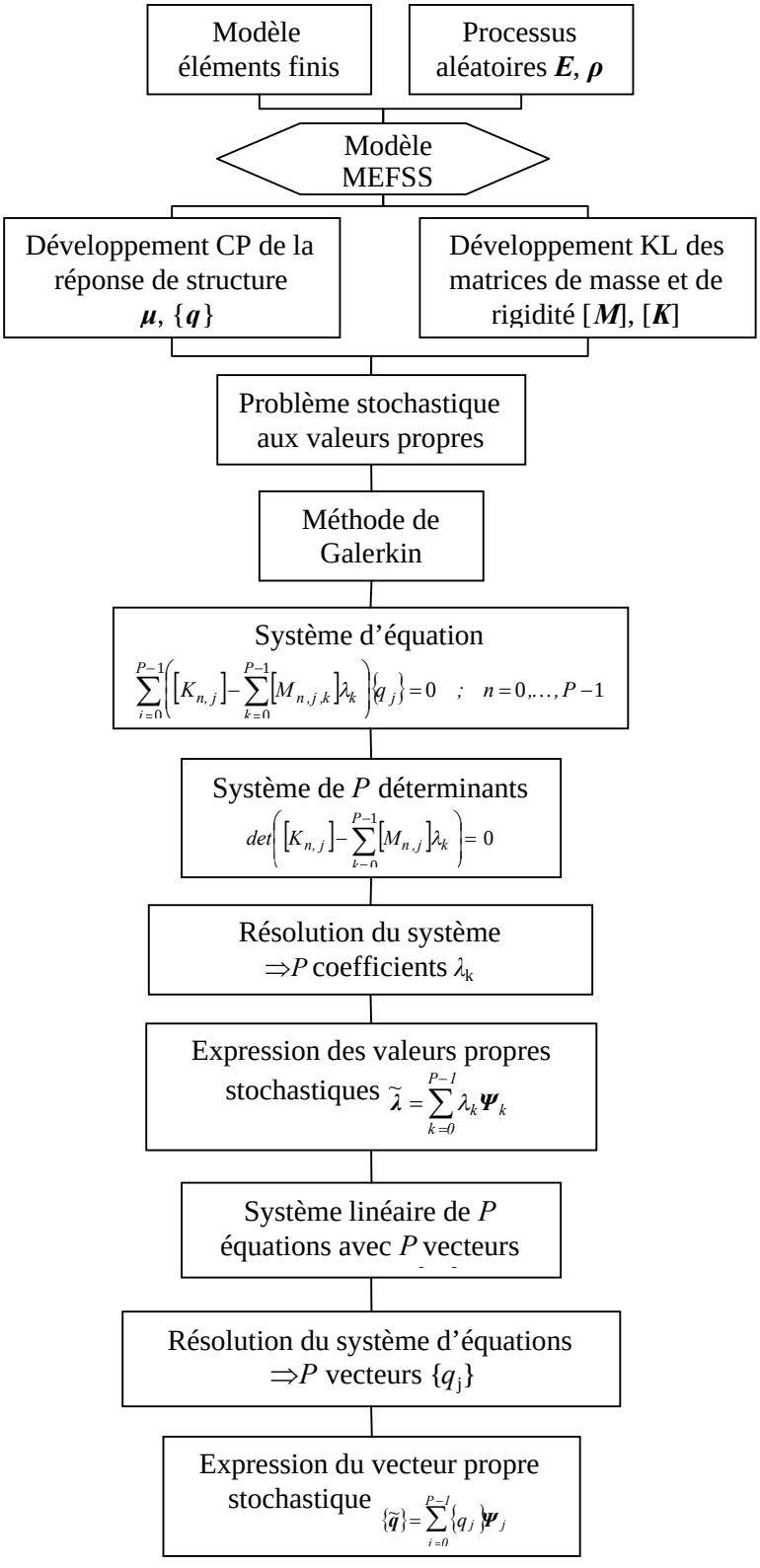


Figure 2.1. MEFSS pour l'analyse modale des structures mécaniques

2.3.2 Méthode de recherche des modes propres aléatoires

On cherche cette fois-ci à avoir l'orthogonalité des modes propres aléatoires par rapport aux matrices de masse et de rigidité aléatoires :

$$\{\boldsymbol{\varphi}_i\}^T [\boldsymbol{M}] \{\boldsymbol{\varphi}_j\} = \delta_{ij} \tag{2.64}$$

$$\{\boldsymbol{\varphi}_i\}^T [\boldsymbol{K}] \{\boldsymbol{\varphi}_j\} = \boldsymbol{\lambda}_j \delta_{\boldsymbol{ij}} = \boldsymbol{\omega}_j^2 \delta_{ij} \tag{2.65}$$

Comme on a vu dans (1.1.2), on prendra toujours en compte dans cette partie les aléas sur la matrice de rigidité et sur la matrice de masse. Les matrices [***K***] et [***M***] correspondent respectivement aux matrices aléatoires de rigidité et de masse de la structure. Nous réécrivons [***K***] et [***M***] (à partir du développement de Karhunen-Loève) par :

$$[\boldsymbol{K}] = \sum_{k=0}^{M_1} [K_k] \boldsymbol{\xi}_k \tag{2.66}$$

$$[\boldsymbol{M}] = \sum_{l=0}^{M_2} [M_l] \boldsymbol{\xi}_l \tag{2.67}$$

où les $\boldsymbol{\xi}_i$ sont des variables aléatoires gaussiennes réduites indépendantes correspondant aux polynômes Ψ_i.

Nous avons P inconnues pour $\boldsymbol{\lambda}_j$ (les λ_n, n=0..N), donc ($P \times N$) inconnues pour les pulsations propres, qui sont les coefficients λ_p^i des expressions :

$$\lambda_j = \boldsymbol{\omega}_j^2 = \omega_j^2 \sum_{p=0}^{P-1} \lambda_p^j \boldsymbol{\Psi}_p \tag{2.68}$$

De même, nous pouvons développer les modes propres aléatoires $\{\boldsymbol{\varphi}_j\}$ sur la base du chao polynomial par :

$$\{\boldsymbol{\varphi}_j\} = \sum_{p=0}^{P-1} \{\varphi_p^j\} \boldsymbol{\Psi}_p \tag{2.69}$$

Nous postulons qu'il est possible de décomposer $\{\varphi_p^j\}$ sur la base modale déterministe :

$$\{\varphi_p^j\} = \sum_{n=0}^{N} \gamma_p^n \{\varphi_n\} \tag{2.70}$$

avec les ($P \times N \times N$) inconnues pour les vecteurs propres qui sont les $\{\varphi_p^j\}$:

$$\{\boldsymbol{\varphi}_j\} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{p=0}^{P-1} \gamma_p^n \{\varphi_n\} \boldsymbol{\Psi}_p \tag{2.71}$$

La stratégie adoptée pour établir les équations permettant de trouver ces inconnues consiste à multiplier les expressions (2.64) et (2.65) par les polynômes $\boldsymbol{\Psi}_m$ (m=0…P-1) (faire des projections successives sur le chaos polynomial). En écrivant :

$$E\left[\left(\{\boldsymbol{\varphi}_i\}^T[\boldsymbol{M}]\{\boldsymbol{\varphi}_j\}\right)\boldsymbol{\Psi}_m\right]=\delta_{ij}E[\boldsymbol{\Psi}_m] \tag{2.72}$$

on remplace les expressions (2.67) et (2.71) dans l'équation (2.72), ce qui donne ($P\times N\times(N+1)$/2) équations non linéaires :

$$\sum_{p_i=0}^{P-1}\sum_{l=0}^{M_2}\sum_{p_j=0}^{P-1}\sum_{n_i=1}^{N}\sum_{n_j=1}^{N}\gamma_{p_i}^{n_i}\gamma_{p_j}^{n_j}\{\varphi_{n_i}\}^T[M_l]\{\varphi_{n_j}\}E\left[\boldsymbol{\Psi}_{p_i}\xi_l\boldsymbol{\Psi}_{p_j}\boldsymbol{\Psi}_m\right]=\delta_{ij}E[\boldsymbol{\Psi}_m] \tag{2.73}$$

De la même façon, en projetant (2.65) sur les polynômes $\boldsymbol{\Psi}_m$:

$$E\left[\left(\{\boldsymbol{\varphi}_i\}^T[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{\varphi}_j\}\right)\boldsymbol{\Psi}_m\right]=\delta_{ij}E\left[\left(\boldsymbol{\omega}_j^2\right)\boldsymbol{\Psi}_m\right] \tag{2.74}$$

et après avoir remplacé les expressions (2.66), (2.68) et (2.71) dans l'équation (2.74), nous obtenons encore $P\times N\times(N+1)$/2 équations :

$$\sum_{p_i=0}^{P-1}\sum_{k=0}^{M_1}\sum_{p_j=0}^{P-1}\sum_{n_i=1}^{N}\sum_{n_j=1}^{N}\gamma_{p_i}^{n_i}\gamma_{p_j}^{n_j}\{\varphi_{n_i}\}^T[K_k]\{\varphi_{n_j}\}E\left[\boldsymbol{\Psi}_{p_i}\xi_l\boldsymbol{\Psi}_{p_j}\boldsymbol{\Psi}_m\right]=\omega_j^2\delta_{ij}\sum_{p=0}^{P-1}\lambda_p^jE\left[\boldsymbol{\Psi}_p\boldsymbol{\Psi}_m\right] \tag{2.75}$$

Le problème de cette méthode est qu'elle oblige à trouver tous les vecteurs propres aléatoires en une seule fois. Le système à résoudre est alors très grand, avec $P\times N\times(N+1)$ équations non linéaires à $P\times N\times(N+1)$ inconnues. Nous résolvons ce système par une méthode numérique de type Newton-Raphson.

Nous avons alors pour les pulsations propres :

$$\boldsymbol{\omega}_i^2=\omega_i^2\sum_{p=0}^{P-1}\lambda_p^i\boldsymbol{\Psi}_p \tag{2.76}$$

dont les moyennes et les écarts-types sont comme suit :

- moyenne :

$$\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{2}}\right)=\omega_i^2\lambda_0 \tag{2.77}$$

- écart-type :

$$\sigma_{\boldsymbol{\omega}_i^2}=\omega_i^2\sqrt{\sum_{p=0}^{P-1}\left(\lambda_p^i\right)^2\left\langle\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{2}}\right\rangle} \tag{2.78}$$

De même, pour les vecteurs propres :

$$\{\boldsymbol{\varphi}_j\}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{p=0}^{P-1}\gamma_p^n\{\varphi_n\}\boldsymbol{\Psi}_p \tag{2.79}$$

- moyenne :

$$\boldsymbol{E}\left(\{\boldsymbol{\varphi}_j\}\right)=\sum_{n=1}^{N}\gamma_0^n\{\varphi_n\} \tag{2.80}$$

- écart-type :

$$\sigma^2_{\{\boldsymbol{\varphi}_j\}}=E\left[\left(\{\boldsymbol{\varphi}_j\}-E\left(\{\boldsymbol{\varphi}_j\}\right)\right)^2\right] \tag{2.81}$$

$$\sigma^2_{\{\boldsymbol{\varphi}_j\}}=E\left[\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^{N}\sum_{p=0}^{P-1}\gamma_p^n\boldsymbol{\Psi}_p\{\varphi_n\}\right)^2\right] \tag{2.82}$$

L'avantage de cette méthode est que les vecteurs propres aléatoires sont orthogonaux par rapport aux matrices de masse et de rigidité aléatoires. L'inconvénient principal est qu'on ne peut pas rechercher chaque couple (vecteur propre, pulsation propre) séparément. Le système non linéaire à résoudre est assez grand, même si le système matriciel de départ est de faible taille.

2.3.3 Méthode de recherche du champ de déplacement aléatoire

La modélisation par éléments finis dans le domaine des fréquences conduit à l'équation matricielle suivante :

$$(-\omega^2[M]+\omega\,[C]+[K])\{q\}=\{F\} \tag{2.83}$$

Dans l'hypothèse où la matrice d'amortissement structural [$\boldsymbol{C}$] peut se mettre sous la forme :

$$[\boldsymbol{C}]=i\eta[\boldsymbol{K}]$$

l'équation (2.83) s'écrit :

$$\left((1+i\eta)[\boldsymbol{K}]-\boldsymbol{\omega}^2[\boldsymbol{M}]\right)\{\boldsymbol{q}\}=\{F\} \tag{2.84}$$

où η est le facteur d'amortissement structural (appelé souvent facteur de pertes).

Nous décomposons [$\boldsymbol{K}$] et [$\boldsymbol{M}$] comme suit :

$$[\boldsymbol{K}]=\sum_{i=0}^{M_1}[K_i]\Psi_i \tag{2.85}$$

$$[\boldsymbol{M}]=\sum_{j=0}^{M_2}[M_j]\Psi_j \tag{2.86}$$

Le vecteur $\{\boldsymbol{q}\}$ est projeté sur la base du chaos polynomial :

$$\{\boldsymbol{q}\}=\sum_{k=0}^{P-1}\{q_k\}\boldsymbol{\Psi}_k \tag{2.87}$$

Nous pouvons développer les vecteurs déterministes $\{q_\mathrm{k}\}$ dans la base modale tronquée déterministe (les $\{\varphi_\mathrm{n}\}$) :

$$\{q_\mathrm{k}\}=\sum_{n=1}^{N}\gamma_n^k\{\varphi_n\} \tag{2.88}$$

Nous multiplions à gauche l'équation (2.82) par $\{\varphi_\mathrm{p}\}^\mathrm{T}$, pour p = 1..N. Nous nous servons des propriétés d'orthogonalité des modes propres déterministes pour simplifier les expressions.

$$(1+i\eta)\left(\{\varphi_p\}^T[\boldsymbol{K}]\left(\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N}\gamma_n^k\{\varphi_n\}\boldsymbol{\Psi}_k\right)\right)-\omega^2\left(\{\varphi_p\}^T[\boldsymbol{M}]\left(\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N}\gamma_n^k\{\varphi_n\}\boldsymbol{\Psi}_k\right)\right)=\{\varphi_p\}^T\{F\} \tag{2.89}$$

Cette expression peut s'écrire après développement et réarrangement sous la forme :

$$\begin{aligned}&(1+i\eta)\left(\omega_p^2\left(\sum_{k=0}^{P-1}\gamma_p^k\boldsymbol{\Psi}_k\right)+\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{M1}\gamma_n^k\{\varphi_p\}^T[K_i]\{\varphi_n\}\boldsymbol{\Psi}_i\boldsymbol{\Psi}_k\right)\\&-\omega^2\left(\left(\sum_{k=0}^{P-1}\gamma_p^k\boldsymbol{\Psi}_k\right)+\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M2}\gamma_n^k\{\varphi_p\}^T[M_j]\{\varphi_n\}\boldsymbol{\Psi}_j\boldsymbol{\Psi}_k\right)=\{\varphi_p\}^T\{F\}\end{aligned} \tag{2.90}$$

Nous avons donc N équations, que nous projettons sur les $\boldsymbol{\Psi}_\mathrm{m}$. Le système à résoudre est donc un système linéaire à $P\times N$ équations/inconnues :

$$\begin{aligned}&\left[(1+i\eta)\omega_p^2-\omega^2\right]\gamma_p^m E\left[\boldsymbol{\Psi}_m^2\right]+(1+i\eta)\left(\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{M1}\gamma_n^k\{\varphi_p\}^T[K_i]\{\varphi_n\}E\left[\boldsymbol{\Psi}_i\boldsymbol{\Psi}_k\boldsymbol{\Psi}_m\right]\right)\\&-\omega^2\left(\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M2}\gamma_n^k\{\varphi_p\}^T[M_j]\{\varphi_n\}E\left[\boldsymbol{\Psi}_i\boldsymbol{\Psi}_k\boldsymbol{\Psi}_m\right]\right)=E\left[\boldsymbol{\Psi}_m\right]\{\varphi_p\}^T\{F\}\end{aligned} \tag{2.91}$$

En résolvant ce système, nous obtenons les γ_n^k , et donc le vecteur $\{\tilde{\boldsymbol{q}}\}$:

$$\{\tilde{\boldsymbol{q}}\}=\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N}\gamma_n^k\{\varphi_n\}\boldsymbol{\Psi}_k \tag{2.92}$$

2.3.4 Caractéristiques du second ordre du champ de déplacement aléatoire

Une approximation $\{\tilde{\boldsymbol{u}}(x)\}$ du champ de déplacement aléatoire $\{\boldsymbol{u}(x)\}$ est obtenue en remplaçant la variable aléatoire vectorielle $\{\boldsymbol{q}\}$ par son approximation $\{\tilde{\boldsymbol{q}}\}$ donnée par (2.92), qui est maintenant connue. Le champ approximant $\{\tilde{\boldsymbol{u}}\}$ s'écrit donc :

$$\{\tilde{\boldsymbol{u}}(x)\}=[N(x)]\{\tilde{\boldsymbol{q}}\} \tag{2.93}$$

avec $\{\widetilde{\boldsymbol{q}}\}$ donné par (2.92). Les approximations recherchées de la moyenne $\mu_{\{u\}}(x)$, de la variance matricielle $V_{\{u\}}(x)$ et de la fonction de covariance matricielle $C_{\{q\}}(x,x')$ du champ $\{\boldsymbol{u}(x)\}$ sont alors obtenues en prenant les caractéristiques correspondantes de $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}(x)\}$:

$$\mu_{\{u\}}(x) \cong \mu_{\{\widetilde{u}(x)\}} \quad ; \quad V_{\{u\}}(x) \cong V_{\{\widetilde{u}\}}(x) \quad ; \quad C_{\{u\}}(x,x') \cong C_{\{\widetilde{u}\}}(x,x') \tag{2.94}$$

Or, d'après (2.94), nous pouvons écrire :

$$\mu_{\{\widetilde{u}\}}(x) = E\left[\{\widetilde{\boldsymbol{u}}(x)\}\right] = N(x)\mu_{\{\widetilde{q}\}} \tag{2.95}$$

$$V_{\{\widetilde{u}\}}(x) = E\left[\left(\{\widetilde{u}(x)\} - \mu_{\{\widetilde{u}\}}(x)\right)\left(\{\widetilde{u}(x)\} - \mu_{\{\widetilde{u}\}}(x)\right)^T\right] = N(x)C_{\{\widetilde{q}\}}N^T(x) \tag{2.96}$$

$$C_{\{\widetilde{u}\}}(x,x') = E\left[\left(\{\widetilde{u}(x)\} - \mu_{\{\widetilde{u}\}}(x)\right)\left(\{\widetilde{u}(x')\} - \mu_{\{\widetilde{u}\}}(x')\right)^T\right] = N(x)C_{\{\widetilde{q}\}}N^T(x') \tag{2.97}$$

où $\mu_{\{\widetilde{q}\}}$ et $C_{\{\widetilde{q}\}}$ sont la moyenne et la matrice de covariance de la v. a. vectorielle $\{\widetilde{\boldsymbol{q}}\}$, telle que, d'après (2.92) :

$$\mu_{\{\widetilde{q}\}} = E\left[\{\widetilde{\boldsymbol{q}}\}\right] = \sum_{j=0}^{P-1} \{q_j\} E\left[\Psi_j\right] = \{q_0\} \tag{2.98}$$

$$C_{\{\widetilde{q}\}} = E\left[\left(\{\widetilde{q}\} - \mu_{\{\widetilde{q}\}}\right)\left(\{\widetilde{q}\} - \mu_{\{\widetilde{q}\}}\right)^T\right] = \sum_{j=0}^{P-1} c_j \{q_j\}\{q_j\}^T \tag{2.99}$$

avec :

$$c_j = E\left[\Psi_j^2\right] \tag{2.100}$$

Les approximations recherchées sont finalement obtenues en portant (2.98) et (2.99) dans (2.95), (2.96) et (2.97).

$$\mu_{\{\widetilde{u}\}}(x) = N(x)\{q_0\} \tag{2.101}$$

$$V_{\{\widetilde{u}\}}(x) = N(x)\left(\sum_{j=0}^{P-1} c_j \{q_j\}\{q_j\}^T\right) N^T(x) \tag{2.102}$$

$$C_{\{\widetilde{u}\}}(x,x') = N(x)\left(\sum_{j=0}^{P-1} c_j \{q_j\}\{q_j\}^T\right) N^T(x') \tag{2.103}$$

2.4 Autres modélisations des paramètres stochastiques

Le processus gaussien stationnaire pose rigoureusement un problème théorique : vu que son domaine de définition est l'ensemble des réels, des réalisations non positives peuvent se produire, ce qui n'a pas de sens physique pour les paramètres tels que la masse ou la rigidité.

Bien qu'ils soient de manipulation plus complexe, les variables aléatoires ainsi que les champs aléatoires lognormaux représentent de manière bien plus réaliste des paramètres mécaniques incertains car leur domaine de définition est R_+^*.

2.4.1 Processus lognormal stationnaire

Nous supposons maintenant que $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{E}(x), x \in \Omega)$ est un processus lognormal stationnaire de moyenne μ_E, d'écart-type σ_E et de fonction de covariance C_E. Un tel processus peut alors s'écrire, $\forall x \in \Omega$:

$$\boldsymbol{E}(x) = exp\, G = exp\left(\mu_{\boldsymbol{G}} + \sigma_{\boldsymbol{G}} \dot{\boldsymbol{G}}(x)\right) \tag{2.104}$$

avec :

$$\mu_G = ln\left(\frac{\mu_E}{\sqrt{1+a_E^2}}\right) \quad ; \quad a_G^2 = ln\left(1+a_E^2\right) \quad ; \quad a_E = \frac{\sigma_E}{\mu_E} \tag{2.105}$$

et où $\dot{\boldsymbol{G}} = \left(\dot{\boldsymbol{G}}(x), x \in \Omega\right)$ est un processus gaussien stationnaire, de moyenne nulle, d'écart-type unitaire de fonction de covariance $C_{\dot{G}}$, telle que, $\forall u \in \Omega$:

$$C_G(u) = \frac{ln\left(1+\dfrac{C_E(u)}{\mu_E^2}\right)}{ln\left(1+a_E^2\right)} \tag{2.106}$$

Le développement de Karhunen-Loève de $\boldsymbol{G}$ est de la forme (2.32) avec les λ_i et f_i toujours solutions de (2.34) mais avec C_G donnée cette fois-ci par (2.106) et non plus par (2.31).

Une approximation $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ de $\boldsymbol{E}$ s'obtient alors en portant ce développement dans (2.104), en le tronquant à l'ordre M, et en développant le processus obtenu sur les chaos de Wiener d'indice M, jusqu'à l'ordre p. Il vient, tout calcul fait et après réarrangement :

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(x) = \sum_{j=0}^{P-1} e_j^M(x) \boldsymbol{\Psi}_j \quad ; \quad x \in \Omega \tag{2.107}$$

avec P donné par (2.42), $(\boldsymbol{\Psi}_j)_{0 \le j \le P-1}$ la famille de polynômes définie par (2.43) et les coefficients $e_j^M(x)$ sont donnés par :

$$e_j^M(x) = \tilde{\mu}_E c_j^{-1} \prod_{i=1}^{M} \left(g_i(x)\right)^{\alpha_i} \quad ; \quad (\alpha_1,\ldots,\alpha_M) \in N^M \tag{2.108}$$

où $(\alpha_1,\ldots,\alpha_M)$ est le multi-indice correspondant, dans le réindiçage utilisé, au polynôme d'Hermite $\boldsymbol{\Psi}_j$ définissant la v.a. $\boldsymbol{\Psi}_j$, c_j est donné par :

$$c_j = E\left[\boldsymbol{\Psi}_j^2\right] = \prod_{i=1}^{M} \alpha_i! \tag{2.109}$$

$g_i(x)$ est donné par (2.36), avec λ_i et f_i les éléments propres de la fonction de covariance (2.106), et $\tilde{\mu}_E$ est obtenu par :

$$\tilde{\mu}_E = exp\left(\mu_G + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}(g_i(x))^2 \right) \tag{2.110}$$

2.4.2 V.a. lognormale

Nous supposons ici que $\boldsymbol{E}$ est une v.a. lognormale de moyenne μ_E et d'écart-type σ_E. Nous pouvons donc l'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{E} = exp(\mu_G + \sigma_G \boldsymbol{X}) \tag{2.111}$$

avec :

$$\mu_G = ln\left(\frac{\mu_E^2}{\sqrt{1+a_E^2}} \right) \quad ; \quad \sigma_G^2 = ln(1+a_E^2) \quad ; \quad a_E = \frac{\sigma_E}{\mu_E} \tag{2.112}$$

où $\boldsymbol{X}$ est une v.a. gaussienne standard.

Considérons le développement sur les chaos de Wiener de $\boldsymbol{X}$ et introduisons ce développement dans (2.111), il vient, tous calculs faits :

$$E = \sum_{j=0}^{\infty} e_j \boldsymbol{H}_j(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.113}$$

où $\boldsymbol{\xi}$ est une v.a. gaussienne standard, $\boldsymbol{H}_j$ est le polynôme d'Hermite d'ordre j et e_j est donné par :

$$e_j = \frac{1}{j!} E\left[e^{\mu_G + \sigma_G \boldsymbol{\xi}} H_j(\boldsymbol{\xi}) \right] \tag{2.114}$$

Soit, après un calcul élémentaire,

$$e_j = \frac{\sigma_G^j}{j!} exp\left(\mu_G + \tfrac{1}{2}\sigma_G^2 \right) \tag{2.115}$$

Une approximation $\tilde{\boldsymbol{E}}$ de $\boldsymbol{E}$ s'obtient alors en tronquant le développement (2.113) à l'ordre p :

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \sum_{j=0}^{P-1} e_j \boldsymbol{H}_j(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.116}$$

avec :

$$P=P(p)=p+1 \tag{2.117}$$

Posons :

$$\boldsymbol{H}_j = \boldsymbol{H}_j(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.118}$$

cette approximation prend la forme :

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \sum_{j=0}^{P-1} e_j \boldsymbol{H}_j \tag{2.119}$$

On remarquera que c'est un cas particulier de l'approximation (2.107). En effet, pour M = 1, $\boldsymbol{\Psi}_j = \boldsymbol{H}_j$ et $e_j^M(x) = e_j$.

Ces approximations sont introduites dans l'équation (2.29), qui exprime l'équation aux valeurs propres du système stochastique discrétisé, de la même manière que l'expression (2.49), lorsque les propriétés des matériaux sont modélisées par des variables aléatoires lognormales (2.119) ou par des processus aléatoires lognormaux (2.107).

2.5 Calcul de la fonction de transfert aléatoire

L'équation dynamique matricielle générale d'un système mécanique linéaire est, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.1.3.1 :

$$\left(\left[K\right] + i\omega\left[C\right] - \omega^2\left[M\right]\right)\left\{q\right\} = \left\{F\right\} \tag{2.120}$$

Les matrices [K], [C] et [M] sont les matrices de rigidité, d'amortissement et de masse, de taille $N \times N$.

Si certains paramètres de la structure sont incertains, nous avons vu que cette équation comportait des matrices stochastiques et pouvait s'écrire :

$$\left(\left[\tilde{\boldsymbol{K}}\right] + i\,\omega\left[\tilde{\boldsymbol{C}}\right] - \omega^2\left[\tilde{\boldsymbol{M}}\right]\right)\left\{\boldsymbol{q}\right\} = \left\{\boldsymbol{F}\right\} \tag{2.121}$$

La matrice de transfert aléatoire $\left[\tilde{\boldsymbol{H}}\right]$ est définie par :

$$\left\{\tilde{\boldsymbol{q}}\right\} = \left[\tilde{\boldsymbol{H}}\right]\left\{F\right\} \tag{2.122}$$

et la fonction de transfert aléatoire $\left[\tilde{\boldsymbol{H}}_{ij}\right]$ est alors :

$$\left\{\tilde{\boldsymbol{q}}_i\right\} = \left[\tilde{\boldsymbol{H}}_{ij}\right]\left\{F_j\right\} \tag{2.123}$$

Nous pouvons décomposer la partie aléatoire des matrices de rigidité, de masse et d'amortissement comme suit :

$$\left[\tilde{\boldsymbol{K}}\right] = \sum_{k1=0}^{M1}\left[K_{k1}\right]\xi_{k1} \tag{2.124a}$$

$$\left[\tilde{\boldsymbol{C}}\right] = \sum_{k2=0}^{M2}\left[C_{k2}\right]\xi_{k2} \tag{2.124b}$$

$$\left[\tilde{\boldsymbol{M}}\right] = \sum_{k3=0}^{M3}\left[M_{k3}\right]\xi_{k3} \tag{2.124c}$$

Ces décompositions découlent soit de l'expression directe des paramètres aléatoires, soit de la décomposition des champs aléatoires (voir § 1.2 dans le premier chapitre) comme par exemple le développement de Karhunen-Loève.

Puisque la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction de transfert sont des variables aléatoires, nous pouvons admettre une décomposition sur la base du chaos polynomial pour les coefficients de la matrice $\left[\tilde{\boldsymbol{H}}\right]$:

$$\left[\tilde{\boldsymbol{H}}\right] = \sum_{p=0}^{P-1} [H_p] \boldsymbol{\Psi}_p = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{N} \sum_{p=0}^{P-1} h_p^{ij} \boldsymbol{\Psi}_p \tag{2.125}$$

Nous avons alors $P \times M^2$ inconnues h_p^{ij} ($p = 0..P\text{-}1$, $i = 1..N$ et $j = 1..N$).

Nous pouvons alors écrire le problème sous la forme :

$$\left[\left(\sum_{k_1=0}^{M_1} [K_{k_1}] \xi_{k_1} \right) + i\omega \left(\sum_{k_2=0}^{M_2} [C_{k_2}] \xi_{k_2} \right) - \omega^2 \left(\sum_{k_3=0}^{M_3} [M_{k_3}] \xi_{k_3} \right) \right] \sum_{p=0}^{P-1} [H_p] \boldsymbol{\Psi}_p = [I] \tag{2.126}$$

La méthode proposée en 2.2 permet de rechercher les [$\boldsymbol{H}_p$]. La projection de l'équation (2.126) sur les polynômes orthogonaux $\boldsymbol{\Psi}_m$, pour $m = 0..P\text{-}1$, conduit à un système linéaire de la forme :

$$\sum_{p=0}^{P-1} \left[\left(\sum_{k_1=0}^{M_1} [K_{k_1}] \boldsymbol{E}\left[\xi_{k_1} \boldsymbol{\Psi}_p \boldsymbol{\Psi}_m\right] \right) + i\omega \left(\sum_{k_2=0}^{M_2} [C_{k_2}] \boldsymbol{E}\left[\xi_{k_2} \boldsymbol{\Psi}_p \boldsymbol{\Psi}_m\right] \right) - \omega^2 \left(\sum_{k_3=0}^{M_3} [M_{k_3}] \boldsymbol{E}\left[\xi_{k_3} \boldsymbol{\Psi}_p \boldsymbol{\Psi}_m\right] \right) \right] [H_p] = E[\boldsymbol{\Psi}_m][I] \tag{2.127}$$

Une fois résolu, ce système donne les coefficients de la décomposition de la fonction de transfert aléatoire $\left[\tilde{\boldsymbol{H}}\right]$. Nous pouvons alors trouver facilement les premiers moments (moyenne et écart-type) grâce aux formules

$$\left\langle \left[\tilde{H}\right] \right\rangle = [H_0] \tag{2.128}$$

$$\sigma_{[\tilde{\boldsymbol{H}}]} = \sqrt{\sum_{p=1}^{P-1} \left\langle h_p^{ij} \right\rangle \left\langle \boldsymbol{\Psi}_p^2 \right\rangle} \tag{2.129}$$

Les simulations de Monte-Carlo peuvent aussi être effectuées sur l'expansion de $\left[\tilde{\boldsymbol{H}}\right]$ (équation (2.125)). C'est un calcul qui ne nécessite pas d'inversion, seulement une évaluation de fonctions polynomiales pour chaque tirage. Il s'agit donc d'une opération peu coûteuse en terme de temps de calcul, même lorsqu'on s'intéresse à un échantillon de grande taille. Cela permet de plus de pouvoir travailler sur le module de la fonction de transfert. En effet, la résolution du système construit par projection conduit à une expression des coefficients du développement sous forme de nombres complexes. Les moments du module sont difficilement calculables de façon analytique, puisque le calcul du module lui-même fait intervenir une expression non linéaire des parties réelles et imaginaires. Par ailleurs, une simulation de Monte-Carlo permet d'obtenir une estimation de la distribution, de la fonction de répartition, de la densité de probabilité des parties réelles et imaginaires, ainsi que du module. Nous pourrons également obtenir des informations sur les valeurs les plus probables, les corrélations entre fonctions de transfert, etc.

2.6 Méthode de superposition modale en contexte aléatoire

Le principe de base est que la réponse de la structure est la combinaison des différents modes propres de vibration. La contribution de chacun des modes est donnée par une amplitude à déterminer.

$$\{q\} = \sum_{i=1}^{n} Y_i \{\varphi_i\} \tag{2.130}$$

avec Y_i amplitude de mode i et $\{\varphi_i\}$ le vecteur propre correspondant.

On peut alors écrire, dans le cas aléatoire, $\{\boldsymbol{q}\}$ comme une décomposition sur la base du chaos polynomial et sur la base modale déterministe :

$$\{\boldsymbol{q}\} = \sum_{k=0}^{P-1} \sum_{n=1}^{N} Y_n^k \{\varphi_n\} \boldsymbol{\Psi}_k \tag{2.131}$$

La décomposition de $[\boldsymbol{K}]$ et $[\boldsymbol{M}]$ est donnée sous la forme :

$$[\boldsymbol{K}] = \sum_{j=0}^{M_1} [K_j] \boldsymbol{\Psi}_j \tag{2.132}$$

$$[\boldsymbol{M}] = \sum_{m=0}^{M_2} [M_m] \boldsymbol{\Psi}_m \tag{2.133}$$

Enfin, la matrice d'amortissement structural $[\boldsymbol{C}]$ est généralement exprimée comme une combinaison linéaire des deux matrices $[\boldsymbol{K}]$ et $[\boldsymbol{M}]$. Par exemple, un amortissement de Rayleigh est supposé, lorsque :

$$[\boldsymbol{C}] = \alpha_K [\boldsymbol{K}] + \alpha_M [\boldsymbol{M}]$$

donc

$$[\boldsymbol{C}] = \sum_{m=0}^{M_3 = max(M_2, M_1)} [C_m] \boldsymbol{\Psi}_m \tag{2.134}$$

Considérons l'équation du mouvement de la structure :

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{q}\} + [\boldsymbol{C}]\{\dot{q}\} + [\boldsymbol{K}]\{q\} = \{F\} \tag{2.135}$$

Nous remplaçons les expressions (2.131), (2.132), (2.133) et (2.134) dans l'équation (2.135), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{j=0}^{M_1} [K_j] \boldsymbol{\Psi}_j\right)\left(\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N} Y_n^k \{\varphi_n\} \boldsymbol{\Psi}_k\right) + \left(\sum_{p=0}^{M_3} [C_p] \boldsymbol{\Psi}_p\right)\left(\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N} \dot{Y}_n^k \{\varphi_n\} \boldsymbol{\Psi}_k\right) \\ &\quad + \left(\sum_{m=0}^{M_2} [M_m] \boldsymbol{\Psi}_m\right)\left(\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N} \ddot{Y}_n^k \{\varphi_n\} \boldsymbol{\Psi}_k\right) = \{F\} \end{aligned} \tag{2.136}$$

Nous multiplions à gauche l'équation (2.136) par le vecteur propre du mode *i*, $\{\varphi_i\}$, pour $i = 1..N$. Nous nous serrons des propriétés d'orthogonalité des modes propres déterministes pour simplifier les expressions.

$$\{\varphi_i\}^T\left(\sum_{j=0}^{M_1}[K_j]\boldsymbol{\Psi}_j\right)\left(\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N}Y_n^k\{\varphi_n\}\boldsymbol{\Psi}_k\right)+\{\varphi_i\}^T\left(\sum_{p=0}^{M_3}[C_p]\boldsymbol{\Psi}_p\right)\left(\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N}\dot{Y}_n^k\{\varphi_n\}\boldsymbol{\Psi}_k\right)$$
$$+\{\varphi_i\}^T\left(\sum_{m=0}^{M_2}[M_m]\boldsymbol{\Psi}_m\right)\left(\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N}\ddot{Y}_n^k\{\varphi_n\}\boldsymbol{\Psi}_k\right)=\{\varphi_i\}^T\{F\} \tag{2.137}$$

$$\left(\sum_{j=0}^{M_1}\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N}Y_n^k\{\varphi_i\}^T[K_j]\{\varphi_n\}\boldsymbol{\Psi}_j\boldsymbol{\Psi}_k\right)+\left(\sum_{p=0}^{M_3}\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N}\dot{Y}_n^k\{\varphi_i\}^T[C_p]\{\varphi_n\}\boldsymbol{\Psi}_p\boldsymbol{\Psi}_k\right)$$
$$+\left(\sum_{m=0}^{M_2}\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N}Y_n^k\{\varphi_i\}^T[M_m]\{\varphi_n\}\boldsymbol{\Psi}_m\boldsymbol{\Psi}_k\right)=\{\varphi_i\}^T\{F\} \tag{2.138}$$

Nous avons donc *P* équations, que nous projetons sur les polynômes orthogonaux $\boldsymbol{\Psi}_l$ (l=0..*P*-1). Le système à résoudre est donc un système linéaire d'équations différentielles à $P\times(N+1)$ équations/inconnues (les inconnues sont les variables Y_n^k) :

$$\left(\sum_{j=0}^{M_1}\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N}Y_n^k\{\varphi_i\}^T[K_j]\{\varphi_n\}\boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{\Psi}_j\boldsymbol{\Psi}_k\boldsymbol{\Psi}_l\right]\right)+\left(\sum_{p=0}^{M_3}\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N}\dot{Y}_n^k\{\varphi_i\}^T[C_p]\{\varphi_n\}\boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{\Psi}_p\boldsymbol{\Psi}_k\boldsymbol{\Psi}_l\right]\right)$$
$$+\left(\sum_{m=0}^{M_2}\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N}Y_n^k\{\varphi_i\}^T[M_m]\{\varphi_n\}\boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{\Psi}_m\boldsymbol{\Psi}_k\boldsymbol{\Psi}_l\right]\right)=\boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{\Psi}_l\right]\{\varphi_i\}^T\{F\} \tag{2.139}$$

Il suffit donc de résoudre ce système d'équations différentielles du 2ième ordre couplées pour déterminer l'amplitude associée $Y_n^k(t)$ et donc $\{\tilde{\boldsymbol{q}}\}$:

$$\{\tilde{\boldsymbol{q}}\}=\sum_{k=0}^{P-1}\sum_{n=1}^{N}Y_n^k\{\varphi_n\}\boldsymbol{\Psi}_k \tag{2.140}$$

2.7 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons développé une formulation de la méthode des éléments finis stochastiques spectrale (MEFSS) pour le calcul des réponses des systèmes dynamiques. En d'autres termes, nous avons proposé une méthode de résolution des problèmes aux valeurs propres dans le cadre des éléments finis stochastiques. Cette méthode est adaptée au calcul des valeurs propres et modes propres aléatoires des structures où les propriétés aléatoires sont caractérisées par des variables ou processus aléatoires gaussiens où lognormaux. Nous avons ainsi été capables de décrire la propagation d'incertitudes à chaque étape de la méthode. Le calcul des valeurs et vecteurs propres utilise une double projection sur une base modale déterministe, puis sur le chaos homogène. Cette méthode permet de se ramener à la résolution d'un système non linéaire. Nous pouvons alors évaluer les moments correspondant aux valeurs et vecteurs propres, soit de façon analytique, soit par des simulations de Monte-Carlo.

La résolution du système non linéaire est simplifiée grâce à une procédure de génération automatique des espérances des produits de polynômes d'Hermite.

Nous avons ensuite étendu la MEFSS proposée aux calculs des fonctions de transfert aléatoire et de la réponse par la méthode de superposition modale.

Un point fort de cette méthode est son aptitude à représenter un processus aléatoire par plusieurs dizaines de v.a. corrélées, indépendamment de la discrétisation EF du modèle. Cependant, la MEFSS nécessite la reformulation du modèle EF d'étude et ne reste a priori applicable que dans un cadre mécanique linéaire restrictif : la relation entre le vecteur des paramètres incertains du modèle et la réponse de ce dernier doit en effet être linéaire.

Chapitre 3

Applications de la MEFSS

Sommaire

3.1 Incertitudes modélisées par variables aléatoires 92
3.1.1 Structure composée de deux barres articulées 92
3.1.1.1 Simulations de Monte-Carlo 93
3.1.1.2 Influence de l'ordre du chaos polynomial 94
3.1.1.3 Comparaison avec la méthode de perturbation classique 95
3.1.1.4 Sensibilité de la méthode vis-à-vis de l'écarte-type de l'entrée 95
3.1.1.5 Comparaison des temps des calculs 96
3.1.1.6 Distributions des valeurs propres 97
3.1.2 Treillis de plate forme pétrolière 99
3.2 Incertitudes modélisées par champs aléatoires 105
3.2.1 Application à une barre en traction 105
3.2.1.1 Description de la structure 105
3.2.1.2 Développement des processus aléatoires 106
3.2.1.3 Résolution du problème spectral 108
3.2.1.4 Simulation de Monte-Carlo 110
3.2.1.5 Analyse stochastique par la MEFSS 111
3.2.2 Ligne d'échappement d'un véhicule 116
3.2.2.1 Description du problème 116
3.2.2.2 Données aléatoires du problème 117
3.2.2.3 Analyse déterministe 118
3.2.2.4 Simulations de Monte-Carlo 119
3.2.2.5 Analyse stochastique par la MEFSS 120
3.2.2.6 Fonction de densité de probabilité des valeurs propres 121
3.3 Conclusion du chapitre 121

I do not fear computers. I fear the lack of them
Isaac Asimov (1920-1992)

Computers are useless. They can only give you answers
Pablo Picasso (1881-1973)

Nous présentons dans ce chapitre quelques applications de la MEFSS sur des systèmes mécaniques relativement simples mais néanmoins représentatifs de problèmes réels.

Dans un premier temps, nous montrons l'efficacité de la méthode sur une structure simple forméede deux barres articulées à deux degrés de liberté, qui permet de comprendre l'influence des paramètres incertains représentés par variables aléatoires normales ou lognormales. L'effet des incertitudes dans les matrices de rigidité et de masse est étudié, ainsi que l'effet des écarts-types de ces variables. Le tracé de l'histogramme des valeurs propres pour différentes valeurs d'entrée se révèle instructif quant à la répartition non gaussienne de ces variables.

Ensuite, nous abordons le cas d'une barre en traction-compression, où les incertitudes sur les matériaux (module d'élasticité et densité) sont représentées par des processus gaussiens ou lognormaux, ce qui permet d'analyser l'influence des paramètres tels que l'effet de troncature des processus et l'ordre du chaos polynomial. Le cas où la masse volumique est modélisée par un processus stochastique est intéressant, car c'est un paramètre qui apparaît de façon non linéaire dans les équations dynamiques.

Le cas des structures plus complexes est intéressant du point de vue industriel. Nous avons alors appliqué la méthode proposée pour le calcul des valeurs propres dee structures suivantes :

- une plateforme pétrolière de plusieurs étages, où les incertitudes de modèle sont représentées par des variables aléatoires,
- une ligne d'échappement pour laquelle les incertitudes sont modélisées par des processus stochastiques.

Dans tous les exemples traités, la solution de référence est obtenue par des simulations de Monte-Carlo. L'étude de convergence de ces solutions est présentée avant de commencer l'analyse par la MEFSS. Dans le cas des processus aléatoires, il y a deux solutions de références à calculer. La première est obtenue par la simulation directe du processus et la deuxième par la simulation du développement de Karhunen-Loève du processus ; dans ce cas, les fonctions propres sont estimées au centre des éléments finis constituant le maillage.

3.1 Incertitudes modélisées par variables aléatoires

3.1.1 Structure composée de deux barres articulées

Le premier exemple d'étude est une structure plane composée de deux barres rectilignes en acier, assemblées par une articulation, comme l'illustre la figure 3.1. La section et les longueurs des deux barres sont notées A et l_i (i=1,2), respectivement. Nous supposons que les liaisons avec le bâti aux noeuds 1 et 3 sont parfaites, et que les barres ne travaillent qu'en traction-compression. Les caractéristiques de ces barres dont le matériau est supposé homogène et isotope sont données dans le tableau 3.1.

Le modèle stochastique est obtenu en introduisant, à partir du modèle déterministe précédent, des incertitudes sur la rigidité et la masse caractérisées pour chaque barre par des variables aléatoires. Le choix de la loi de probabilité est guidé par les réflexions menées au paragraphe 1.2.2. Si nous supposons que les sources d'incertitude proviennent uniquement des coefficients des matériaux, nous pouvons décider de choisir une loi de probabilité normale pour chacune de ces variables aléatoires. Nous considérons pour chaque barre, deux variables aléatoires de distribution normale pour représenter les dispersions du module de Young et de la masse volumique, de moyennes μ_{Ei} et $\mu_{\rho i}$, et d'écarts-types σ_{Ei} et $\sigma_{\rho i}$, respectivement. Nous décrivons les incertitudes en termes de coefficient de variation (CV) défini par le rapport de l'écart-type sur la moyenne de la variable aléatoire ($CV_{Ei} = \sigma_{Ei} / \mu_{Ei}$).

Ce problème comprend deux valeurs propres (carrés des pulsations propres ω_i^2). Nous appliquons la MEFSS proposée au chapitre précèdent pour montrer la sensibilité de la solution à l'écart-type des paramètres d'entrée. Nous évaluons aussi l'influence de l'ordre du chaos polynomial. Afin de vérifier l'efficacité de la MEFSS, les résultats sont comparés à ceux obtenus par simulations de Monte-Carlo.

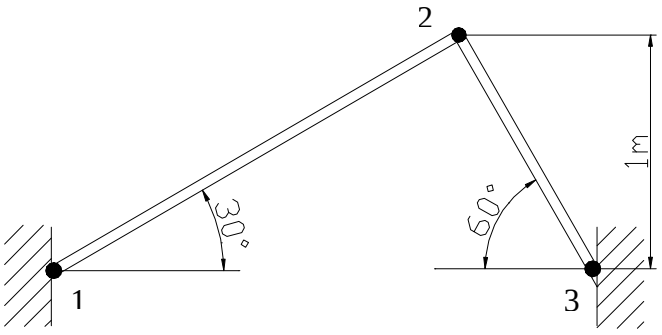


Figure 3.1. Système de deux barres articulées

	Notation	Distribution	Moyenne
Module de Young	E	Normale, Lognormale	210000 MPa
Masse volumique	ρ	Normale, Lognormale	7800 kg/m^3
Longueur du premier élément	l_1	Déterministe	2 m
Longueur du deuxième élément	l_2	Déterministe	1,155 m
Section	A	Déterministe	10^{-4} m^2

Tableau 3.1. Propriétés physiques et géométriques de la structure

3.1.1.1 Simulations de Monte-Carlo

La première étape lorsqu'on procède à des simulations de Monte-Carlo est de s'assurer que la convergence a été obtenue. Pour ce problème, nous avons tracé sur les figures 3.2 et 3.3 l'évolution de la moyenne et de l'écart-type de la première valeur propre ω_1^2 ; ces résultats correspondent à un coefficient de variation de 10% pour les paramètres d'entrée. Les résultats montrent que les simulations de Monte-Carlo peuvent être rendues précises en augmentant le nombre des tirages. Dans ce cas, les simulations de Monte-Carlo convergent complètement pour un nombre de tirages $N_{SMC}=10^5$. Ceci rend les simulations de Monte-Carlo très coûteuses. Nous représentons sur la figure 3.4 la répartition des valeurs propres obtenues avec ces simulations pour le premier mode.

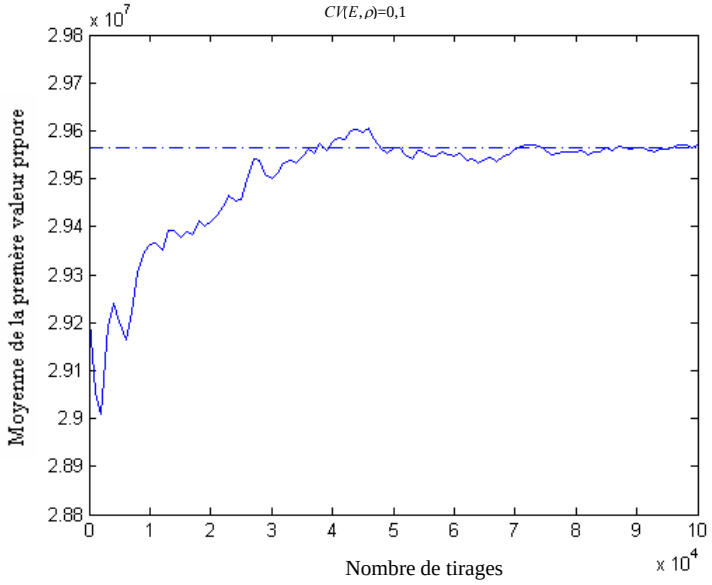


Figure 3.2. Convergence de la moyenne de la première valeur propre en fonction du nombre de tirages

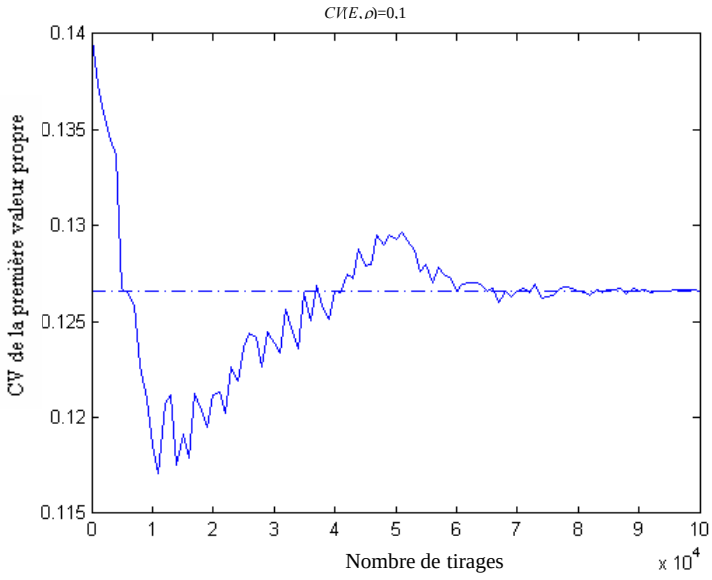


Figure 3.3. Convergence du coefficient de variation de la première valeur propre en fonction du nombre de tirages

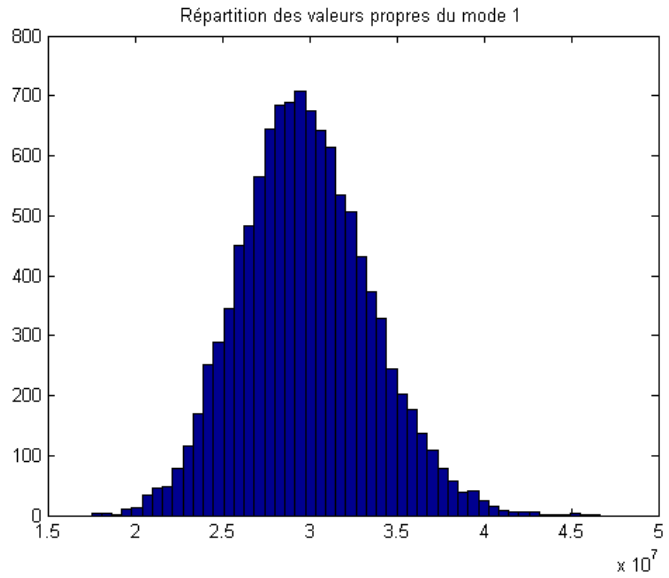


Figure 3.4. Répartitions des valeurs propres obtenues par simulations de Monte-Carlo (10^5 tirages)

3.1.1.2 Influence de l'ordre du chaos polynomial

La moyenne et l'écart-type des valeurs propres sont maintenant calculés par la MEFSS. Nous avons retenu une projection sur le chaos polynomial d'ordre 2. Les résultats numériques sont donnés dans le tableau 3.2. En outre, les résultats obtenus par les simulations de Monte-Carlo sont donnés (10^5 simulations), afin de vérifier l'efficacité de la MEFSS. Les résultats de notre méthode sont en bon accord avec les résultats estimés par les simulations de Monte-Carlo. Nous voyons aisément que ce type de développement polynomial est une bonne approximation de la réponse stochastique.

	MEFSS		SMC	
	Valeur moyenne $(\text{rad/s})^2$	Ecart type $(\text{rad/s})^2$	Valeur moyenne $(\text{rad/s})^2$	Ecart type $(\text{rad/s})^2$
Mode 1	$30{,}02\times10^6$	$3{,}502\times10^6$	$29{,}57\times10^6$	$3{,}713\times10^6$
Mode 2	$52{,}01\times10^6$	$6{,}207\times10^6$	$51{,}77\times10^6$	$6{,}499\times10^6$

Tableau 3.2. Résultats numériques des valeurs propres ($\boldsymbol{CV}(E,\rho)$=0,1)

Dans le tableau 3.3., l'erreur relative sur l'écart-type des valeurs propres est calculée pour différents coefficients de variation des variables aléatoires d'entrée, et pour différents ordres p du développement sur le chaos polynomial. Nous notons que l'approche MEFSS fournit des résultats précis quand les coefficients de variation des variables d'entrée sont faibles (entre 0 et 0,1) même pour les valeurs de p=1 ou 2. Pour des valeurs du coefficient de variation plus élevées, plus de termes sont nécessaires pour obtenir de bons résultats (p>3). Par exemple, pour CV=0,5 nous observons la diminution de l'erreur relative avec l'augmentation de p (17% pour p=1 et seulement 2% pour p=4).

Ainsi la SSFEM peut toujours être appliquée pour des valeurs importantes des coefficients de variation en augmentant l'ordre du chaos polynomial (nombre de termes). En revanche, le coût de calcul augmente rapidement avec l'ordre p ; ainsi la méthode devient numériquement coûteuse :

- quand le nombre de variables aléatoires M devient important, particulièrement ceux qui décrivent la densité aléatoire ;
- quand le coefficient de variation est extrêmement grand, de sorte que le deuxième ou le troisième ordre ne donne pas une évaluation précise.

p	CV=0,05	CV=0,1	CV=0,15	CV=0,25	CV=0,5
1	5,27%	6,75%	10,73%	11,51%	16,75%
2	2,31%	2,95%	4,50%	5,76%	6,70%
3	0,82%	1,27%	1,38%	1,91%	2,88%
4	0,66%	0,84%	1,04%	1,44%	2,16%

Tableau 3.3. Erreur relative sur le calcul des coefficients de variation des valeurs propres

3.1.1.3 Comparaison avec la méthode de perturbation classique

La méthode des perturbations décrite dans le paragraphe 1.4.1 est utilisée pour calculer le développement polynomial de la réponse.

Cette méthode, comme tout developpement en série de Taylor, est sujette à des problèmes de convergence. La variable doit en effet être inférieure en norme au rayon spectral de la série, sinon le developpement n'a plus de sens. Nous pouvons voir dans le tableau 3.4 les écarts-types de la valeur propre pour une méthode de perturbations à l'ordre 2 et 4. Nous pouvons voir aisément que ce type de développement polynomial ne donne pas une bonne approximation de la valeur propre aléatoire. Les coefficients de variation pour cet exemple sont de 10%. Nous comparons pour cet exemple la méthode des perturbations à une projection sur un chaos polynomial, d'ordre 2 et 4. Ces résultats montrent la bonne précision de la MEFSS par rapport à la méthode de perturbation de même ordre (erreur relative de 3% pour la MEFSS contre 10% pour la MEFS par perturbation). La projection sur le chaos polynomial est une approximation globale (projection sur des polynômes orthogonaux) par comparaison à l'approximation locale effectuée lors d'un developpement en série de Taylor.

Ecart type	Monte-Carlo	MEFS Spectrale		MEFS par perturbation	
		Ordre 2	Ordre 4	Ordre 2	Ordre 4
Mode 1	$3{,}713\times10^{6}$	$3{,}502\times10^{6}$	$3{,}668\times10^{6}$	$3{,}351\times10^{6}$	$3{,}492\times10^{6}$
Mode 2	$6{,}499\times10^{6}$	$6{,}207\times10^{6}$	$6{,}420\times10^{6}$	$5{,}921\times10^{6}$	$6{,}093\times10^{6}$

Tableau 3.4. Ecarts-types des valeurs propres par la MEFS par perturbation et spectrale ($\boldsymbol{CV}(E,\rho)$=0,1)

3.1.1.4 Sensibilité de la méthode vis-à-vis de l'écarte-type de l'entrée

Nous évaluons ici la sensibilité de la MEFSS vis-à-vis de l'écart type du module d'élasticité et de la masse volumique. Comme nous pouvons nous y attendre, le coefficient de variation du paramètre incertain joue un rôle important. Il est plus difficile d'approcher la solution et ses moments statistiques quand ce coefficient devient grand, parce que la solution peut dévier considérablement de sa valeur déterministe.

Dans le cas particulier où les incertitudes affectent le module de Young, la précision de la solution est obtenue pour des ordres réduits (p=1,2) du chaos polynomial, même si les coefficients de variation des variables d'entrées sont relativement élevés.

La solution approchée (pour un ordre donné du chaos polynomial) dévie plus lorsque l'écart type de la masse volumique est important, comme le montre la figure 3.5, sur laquelle le coefficient de variation des valeurs propres a été tracé en fonction du coefficient de variation de la masse volumique (0-50%) pour plusieurs ordres du chaos polynomial (ordre 1, 2, 3 et 4).

Sur cette figure, nous pouvons voir que quand le coefficient de variation est relativement faible (jusqu'à 20%) le chaos polynomial du premier ordre donne une évaluation assez précise. En revanche, pour des niveaux plus élevés de variabilité, plus de termes sont nécessaires pour obtenir de bons résultats (l'erreur sur l'écart-type est de 6% pour le premier ordre et de 3% pour le quatrième ordre).

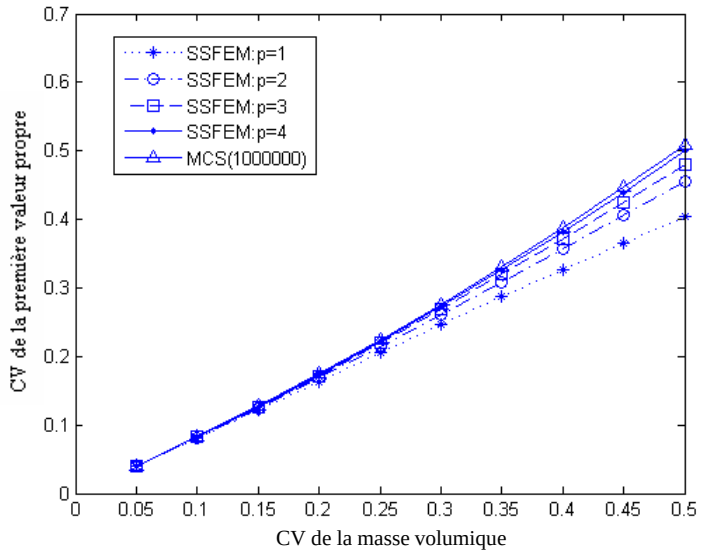


Figure 3.5. Coefficient de variation de la première valeur propre en fonction du coefficient de variation de la masse volumique

Nous pouvons en conclure que si le coefficient de variation est important, il faut augmenter l'ordre du chaos polynomial sur lequel on fait la projection pour obtenir une bonne approximation. De ces résultats, il s'avère que la MEFSS peut être appliquée sans risque pour des problèmes pour lesquels la densité est aléatoire de même pour de grands coefficients de variation. De plus, la MEFSS s'avère beaucoup plus simple et très efficace pour estimer l'effet des incertitudes structurales.

3.1.1.5 Comparaison des temps des calculs

Le tableau 3.5 illustre les temps de calcul (en secondes sur un ordinateur avec une processeur 3GHz) pour chacune des trois méthodes : perturbation, MEFSS et simulations de Monte-Carlo. Nous constatons que la MEFS par perturbations est la plus rapide, mais comme nous venons de voir en 3.1.1.3, cette méthode ne donne pas des bonnes évaluations de la moyenne et de l'écart-type sauf pour les cas où le coefficient de variations des variables d'entrée est inférieur à 15%. La MEFSS d'ordre inférieure à 4 est beaucoup plus rapide que les simulations de Monte-Carlo avec 10^5 simulations. Cependant le temps de calcul de la MEFSS augmente rapidement avec l'ordre polynomial (le temps de calcul est multiplié par 38 entre les ordres p=1 et p=6), mais il reste toutefois plus rapide que les simulations de Monte-Carlo). Les résultats sont donnés pour trois coefficients de variation CV=0,05 – 0,10 et 0,02. Une autre

remarque est que le temps de calcul augmente en fonction du coefficient de variation des variables d'entrée surtout pour les ordres polynomiaux les plus élevées.

Sur la figure 3.6, nous avons tracé l'évolution de temps de calcul en fonction de l'ordre de développement du chaos polynomial, pour différents coefficients de variation. Comme prévu, le temps de calcul augmente fortement avec l'ordre du chaos polynomial. Les coefficients élevés de variation produisent une très grande augmentation des temps du calcul.

CV(E,ρ)	Perturbation	SSFEM						MCS	
		p=1	p=2	P=3	p=4	p=5	p=6	10^4	10^5
0,05	1,2	1,8	2,2	3,3	7	20,1	66,1	33,1	162,1
0,1	1,2	1,8	2,2	3,3	7,5	21,9	71,2	34,2	166,9
0,2	1,2	1,8	2,2	3,9	9,9	32,7	116,5	42,1	206,9

Tableau 3.5. Temps de calcul de plusieurs méthodes et pour plusieurs valeurs de p

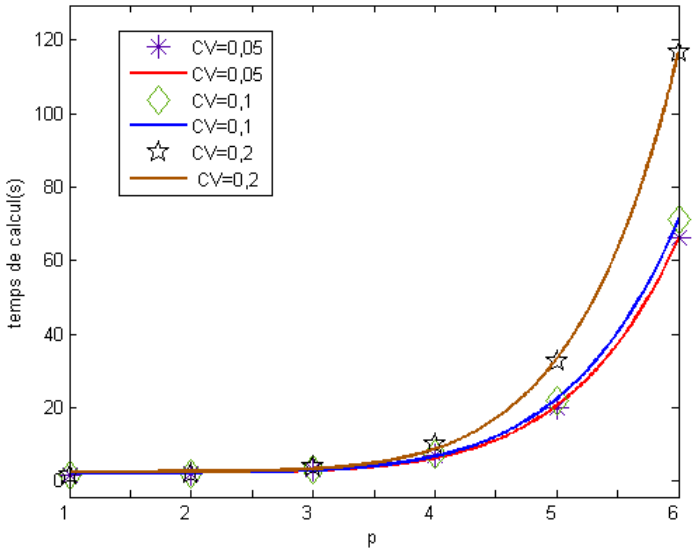


Figure 3.6. Evolution de temps de calcul en fonction de l'ordre du chaos polynomial p

3.1.1.6 Distributions des valeurs propres

Les variables gaussiennes sont souvent utilisées pour modéliser les paramètres incertains. Les méthodes stochastiques conduisent à des expressions de la réponse des systèmes mécaniques, permettant de calculer les moyennes et les écarts-types. On considère souvent, et à tort, que ces valeurs de sortie sont gaussiennes, ce qui permet de prendre la moyenne plus ou moins trois écarts-types comme intervalle de confiance de la réponse. Pour une variable gaussienne, cet intervalle contient en effet 99% des valeurs possibles. Mais nous montrons que ces paramètres (moyenne et écart-type) ne sont pas adaptés à la description précise du comportement aléatoire des valeurs propres.

Les simulations de Monte-Carlo peuvent être directement effectuées sur l'équation (2.30), ou sur le développement des valeurs propres obtenues par projection sur un chaos polynomial. Si nous divisons les valeurs de sortie en 100 classes, nous pouvons tracer un histogramme de ces valeurs, ce qui donne une bonne idée sur la distribution de la valeur propre pour un mode donné.

La figure 3.7 montre l'histogramme de la première valeur propre du système. Nous considérons toujours le développement sur le chaos polynomial de la réponse, dans laquelle les ξ_i, rappelons-le, sont des variables aléatoires de distribution normale, à moyenne nulle et à variance unitaire. Nous avons effectué 10^4 tirages de Monte-Carlo, qu'on a divisés en 100 classes. L'histogramme est calculé à la fois pour la résolution directe du problème et pour la projection des valeurs propres sur un chaos polynomial d'ordre 4 (CV=10%). La valeur déterministe, la valeur moyenne ainsi que l'intervalle de confiance à plus ou moins trois écarts-types ont été tracés.

A partir de la figure 3.7, nous remarquons que les deux solutions calculées par simulations de Monte-Carlo et par simulations du chaos polynomial sont pratiquement confondues, ce qui montre l'efficacité de notre méthode. Nous pouvons déjà nous apercevoir que $\mu_{\lambda i} \pm 3\sigma_{\lambda i}$ ne correspond pas à une enveloppe précise de la solution aléatoire pour ces fréquences et que cet histogramme ne correspond pas à celui d'une variable gaussienne. Ceci explique pourquoi il faut avoir recours à un chaos polynomial d'ordre élevé pour décrire correctement la solution par rapport aux variables stochastiques.

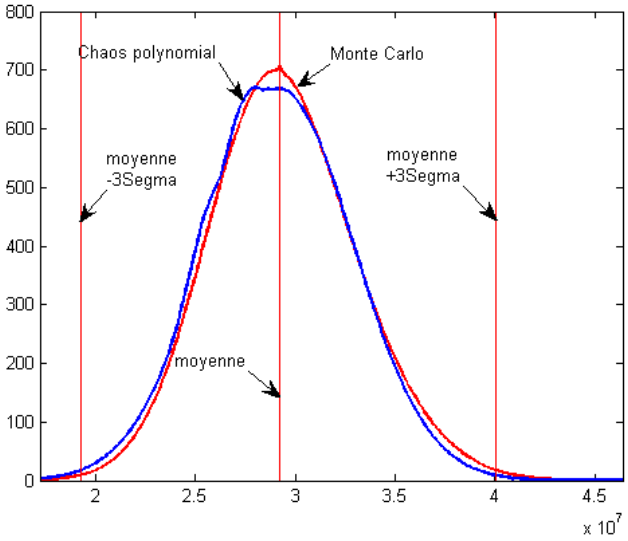


Figure 3. 7. Histogramme de la première valeur propre aléatoire

3.1.2 Treillis de plate forme pétrolière

Nous introduisons ici un exemple industriel dont les résultats pourront montrer l'efficacité de la MEFSS. Nous faisons l'hypothèse d'une plate-forme pétrolière dont les sources d'incertitudes sont parfaitement connues et qui peuvent être décrites à l'aide d'une méthode stochastique. Afin d'obtenir les dispersions présentes dans la structure considérée, nous décidons de représenter les incertitudes à 1'aide de paramètres stochastiques qui, dans le cadre de ce travail, se limitent aux rigidités structurales.

En pratique, nous avons besoin de définir la nature des paramètres stochastiques intervenant dans la simulation. Nous avons déjà eu 1'occasion de discuter de ce problème dans le paragraphe 1.2.1 et nous avons montré que tous les paramètres stochastiques peuvent être représentés à 1'aide de variables aléatoires, dont la manipulation est plus aisée.

La structure de plate-forme pétrolière est composée de quinze tubes (figure 3.8 et 3.9). La largeur de la structure est de 56 m et sa hauteur s'élève à 56 m. Elle est composée de trois étages et possède 12 degrés de liberté (translation dans les directions O $\vec{X}$ et O $\vec{Y}$), le matériau constitutif étant l'acier. La distribution de la masse des installations sur la structure est modélisée par deux charges appliquées sur les noeuds 4 et 5. Nous supposons que les liaisons au sol des noeuds 1 et 2 sont parfaites et que les barres ne travaillent qu'en traction-compression. Les caractéristiques de ces barres dont le matériau est supposé homogène et isotrope sont données dans le tableau 3.6 et les dimensions géométriques sont répertoriées dans le tableau 3.7.

	Notation	Moyenne
Module de Young	E	210 GPa
Masse volumique	ρ	7800 kg/m^3
Epaisseur des tubes	E	2×10^{-2} m
Rayons des tubes	R	1 m
Section	A	628×10^{-4} m^2

Tableau 3.6. Les paramètres physiques et dimensions géométriques de la structure

Elément	1 et 7	2 et 6	3 et 5	4	8	9	10 et 11	12 et 13	14 et 15
Longueur	27,16	18,1	11,06	16	22,21	18,36	36,87	27,12	20,4

Tableau 3.7. Longueur des éléments de la structure (m)

Le problème aux valeurs propres associé au modèle déterministe permet de déterminer douze modes propres de vibrations, dont les deux premiers sont représentés sur la figure 3.10 ; les composantes des quatre premiers modes (normalisés par rapport à leur maximum) ainsi que les valeurs propres (carrés des pulsations propres) associées, sont consignés dans le tableau 3.8.

Le modèle éléments finis associé, dont le maillage est précisé sur la figure 3.9, constitue le modèle déterministe. Nous considérons que les seules sources d'incertitudes sont liées au matériau, ce qui oriente notre choix vers une loi lognormale, dont la moyenne correspond au modèle déterministe. L'utilisation de la loi lognormale nous les réalisations non physiques (négatives).

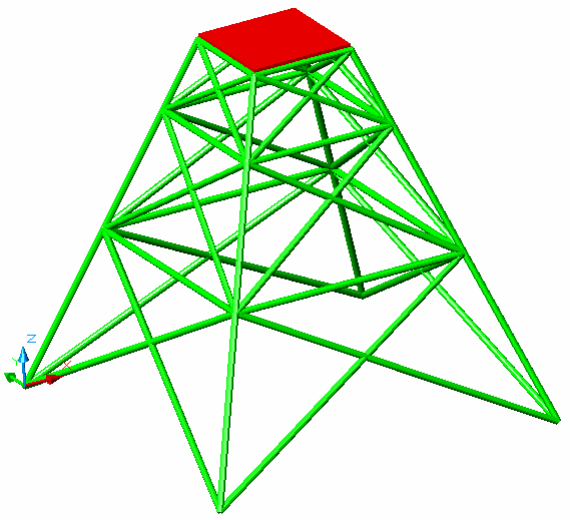


Figure 3.8. Structure étudié : plate-forme pétrolière

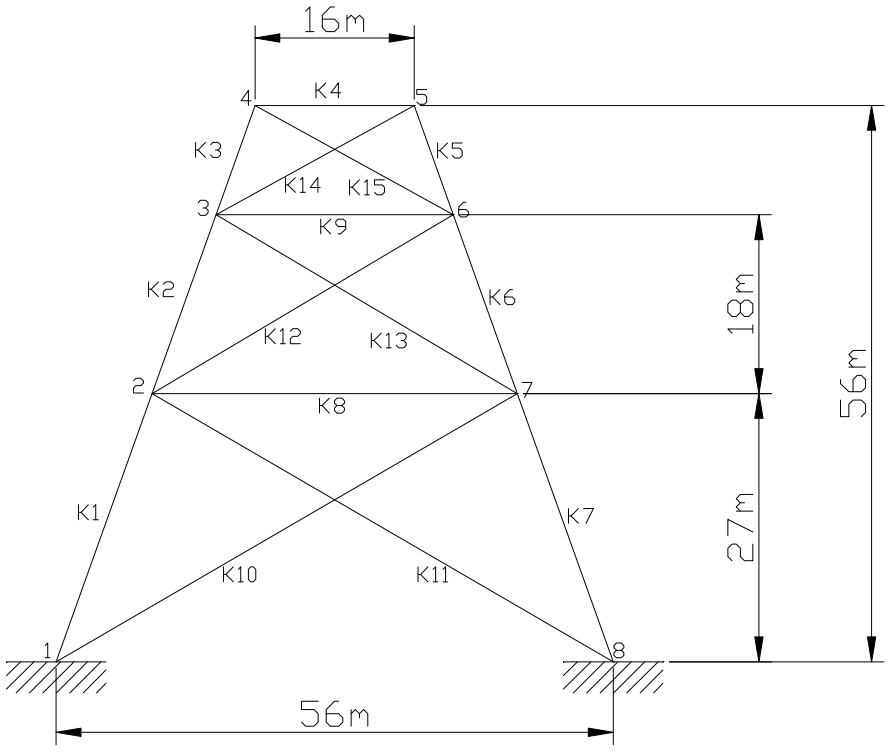
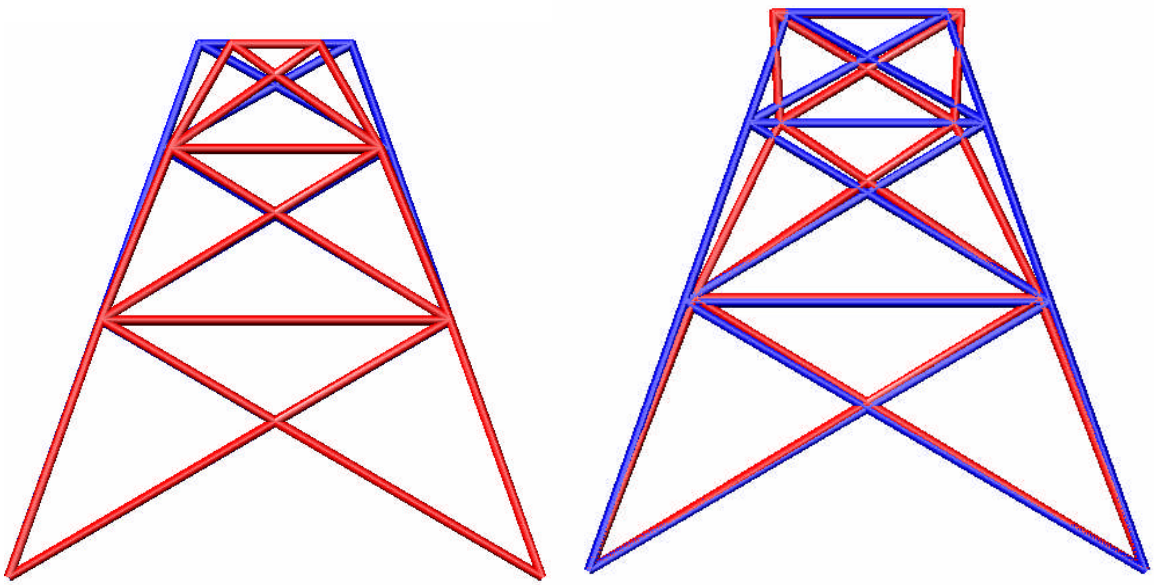


Figure 3.9. Dimensions géométriques du problème de la plate-forme

	i=1	i=2	i=3	i=4
Valeur propre λ_i	302	343	1920	4861
Modes φ_i	0,025	0,315	-0,278	-0,612
	0,007	0,125	-0,390	1,000
	0,258	1,000	0,822	0,028
	0,001	-0,001	0,012	-0,030
	1,000	-0,473	-1,000	-0,005
	-0,001	-0,004	0,004	0,001
	-1,000	0,473	-1,000	0,005
	-0,001	-0,004	-0,004	0,001
	-0,258	-1,000	0,822	-0,028
	0,001	-0,001	-0,012	-0,030
	-0,025	-0,315	-0,278	0,612
	0,007	0,125	0,390	1,000

Tableau 3.8. Détail des pulsations propres et modes propres associés au modèle déterministe de la plate-forme pétrolière



Mode 2 Mode 1

Figure 3.10. Modes propres associés au modèle déterministe de la plate-forme pétrolière

Plus précisément, pour chaque barre, nous supposons que $\boldsymbol{E}$ est une v.a. lognormale de moyenne μ_E et d'écart-type σ_E. Nous pouvons donc l'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{E} = exp\left(\mu_G + \sigma_G \boldsymbol{X}\right) \tag{3.1}$$

avec :

$$\mu_G = ln\left(\frac{\mu_E^2}{\sqrt{1+a_E^2}}\right) \quad ; \quad \sigma_G^2 = ln\left(1+a_E^2\right) \quad ; \quad a_E = \frac{\sigma_E}{\mu_E} \tag{3.2}$$

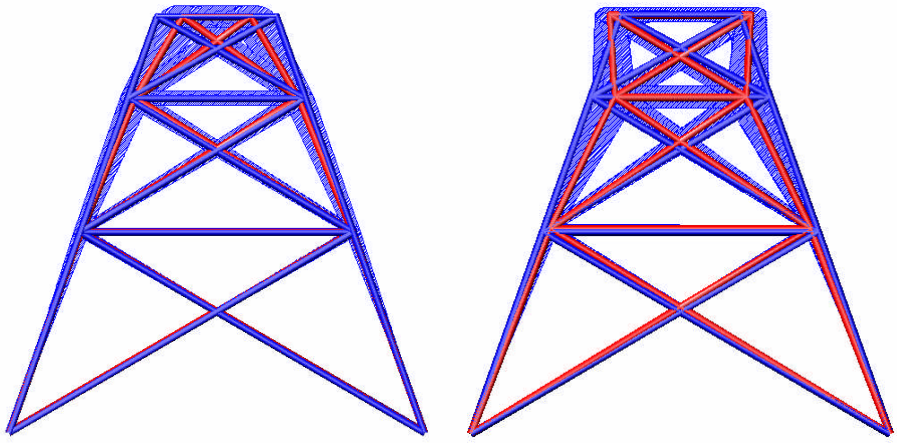
où $\boldsymbol{X}$ est une v.a. gaussienne standard.

Le calcul des valeurs propres stochastiques se fait par simulations de Monte-Carlo, puis par la MFESS, selon la technique expliquée par [Bar05]. Les développements polynomiaux de la réponse sont ainsi obtenus. Le coefficient de variation des variables d'entrée est égal à 10%. A partir des distributions, nous pouvons déterminer, pour chaque valeur propre, et pour un ordre polynomial p donné, la moyenne et l'écart-type. De même, nous pouvons déterminer les moments stochastiques concernant les modes propres.

Nous trouvons dans le tableau 3.9, l'erreur relative sur l'écart-type de la série polynomiale obtenue par la MEFSS, en comparaison avec ces mêmes quantités calculées par simulations de Monte-Carlo, pour les cinq premières valeurs propres du système. Ces résultats montrent que la MEFSS donne des résultats satisfaisants même pour les ordres polynomiaux faibles. L'erreur relative sur l'écart-type est de 14% pour les developpements polynomiaux d'ordre p=1. Le développement sur les chaos polynomiaux d'ordre 2 et 3 permet d'avoir des résultats plus précis, mais avec un coût numérique plus élevé, bien qu'il reste beaucoup plus efficace que les simulations de Monte-Carlo.

Les modes propres aléatoires peuvent être facilement évalués et tracés par une simple procédure de simulations de Monte-Carlo dont les dispersions des deux premiers modes propres sont représentées sur la figure 3.11.

Comme cité précédemment, un avantage important de la MEFSS, est la disponibilité d'une forme analytique de la réponse. Ayant les coefficients du chaos polynomial, la densité de probabilité des valeurs propres peut être facilement tracée sans calculs supplémentaires. La figure 3.12 représente l'histogramme calculé pour la première valeur propre par la méthode de Monte-Carlo et par un chaos polynomial d'ordre 4. On constate que les deux distributions sont éloignées l'une de l'autre. Ceci explique pourquoi il faut avoir recours à un chaos polynomial d'ordre élevé pour décrire correctement la solution par rapport aux variables stochastiques, au risque d'augmenter considérablement les temps de calcul. La figure 3.13 montre l'évolution de la FDP de la première valeur propre, pour différents ordres polynomiaux. Une convergence numérique est clairement observée sur cette figure vers la FDP de référence estimée par les simulations de Monte-Carlo, si on augmente l'ordre p du chao polynomial. En raison de la méthode d'estimation, les courbes correspondantes sont logiquement bruitées. C'est pourquoi des courbes lissées sont proposées à des fins de comparaison.



Mode 2 Mode 1

Figure 3.11. Modes propres aléatoires de la plate-forme pétrolière

Mode	Erreur relative sur l'écart-type			
	p=1	p=2	p=3	p=4
1	16,92%	6,15%	4,62%	3,08%
2	14,93%	7,76%	5,37%	2,99%
3	13,74%	6,14%	4,17%	3,04%
4	11,72%	5,27%	3,86%	3,04%
5	10,45%	4,97%	3,95%	3,05%

Tableau 3.9. Erreur relative sur l'écart type des valeurs propres (M=15, $CV(E_i)$=10%)

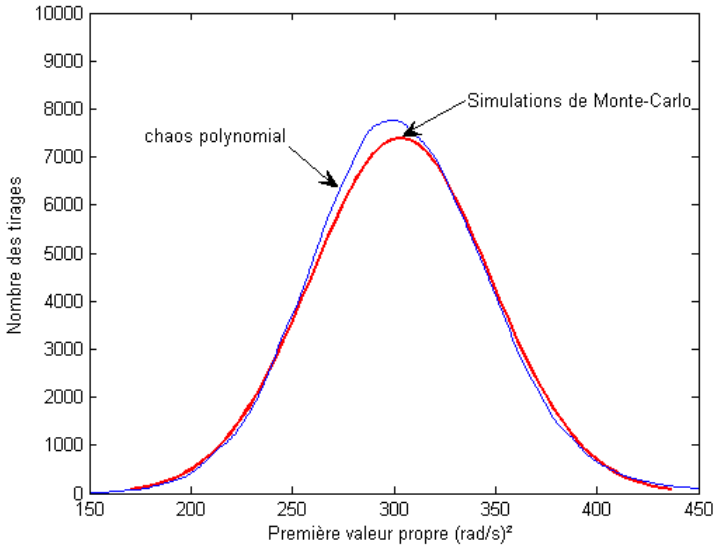


Figure 3.12. Histogramme de la première valeur propre

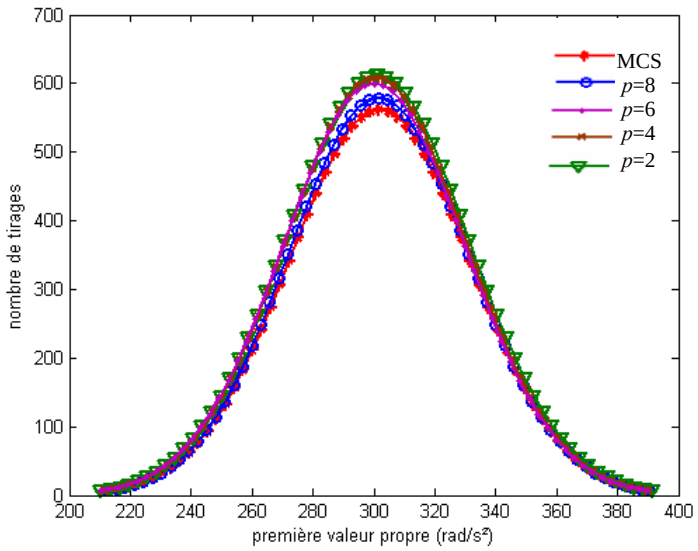


Figure 3.13. Convergence numérique de la densité de probabilité de la première valeur propre (courbes lissées)

Prise en compte des fortes incertitudes

Pour pouvoir juger de la validité de la méthode pour la prise en compte des fortes incertitudes, nous étudions à nouveau 1'exemple de la plate-forme pétrolière dont les incertitudes sont toujours modélisées par des lois lognormales, la différence étant que 1es barres sont maintenant caractérisées par des lois très « dispersées ». Nous avons volontairement exagéré 1'ecart-type de la loi des barres pour rendre le phénomène de forte incertitude plus visible sur cet exemple.

C'est le premier mode qui est le plus affecté par les fortes incertitudes, c'est donc celui-ci qui est retenu pour la détermination des variabilités effectives. Même si ce n'est pas nécessaire, vu le faible nombre de degrés de liberté de la structure, nous appliquons la méthode proposée dans son ensemble avec une base comprenant les 14 premiers modes propres, complétés par un mode statique, pour des valeurs du coefficient de variation de 50%, 70% et 99%.

La propagation des incertitudes est également réalisée par une méthode de Monte-Carlo avec 10^5 tirages, et les distributions obtenues permettent de déterminer les dispersions effectives de la première pulsation propre. Les résultats provenant des simulations de MC peuvent être encore une fois considérés comme précis, et constituent donc une référence pour les comparaisons effectuées.

Les résultats des deux méthodes, ainsi que les erreurs relatives, obtenues pour la première valeur propre, sont consignées dans le tableau 3.10. Nous constatons que la MEFSS sous-estime de près de 5% l'écart-type sur la première valeur propre à 99 %, et que cette méthode est toujours applicable, même pour les cas de fortes incertitudes sur les paramètres d'entrée, et donne des résultats proches de ceux obtenus à 1'aide des simulations de Monte-Carlo.

En conclusion, la MEFSS donne toujours de bons résultats pour les niveaux élevés d'incertitude, ce qui rend la méthode plus appropriée à l'étude des problèmes stochastiques en comparaison à d'autres méthodes, comme la méthode de perturbation, qui donne des résultats erronés dans les situations où le coefficient de variation est élevé.

Néanmoins, nous pouvons remarquer des résultats moins bons en ce qui concerne les densités de probabilité des valeurs propres de la structure. Une explication possible, déjà évoquée dans le paragraphe 3.1.3, est liée à la façon de modéliser les incertitudes de base, qui entraîne des résultats moins bons pour les valeurs à 70 % que pour les valeurs à 99 %.

Valeur de *CV*	Erreur relative sur l'écart type			
	p=1	*p*=2	*p*=3	*p*=4
99%	28,58%	13,27%	8,22%	5,1%
70%	25,9%	12,92%	7,8%	5%
50%	24,18%	11,97%	7,8%	5,1%

Tableau 3.10. Comparaison des écarts types obtenus pour la première pulsation propre par la MEFSS et simulations de Monte-Carlo

3.2 Incertitudes modélisées par champs aléatoires

3.2.1 Application à une barre en traction

L'objet de ce paragraphe est d'appliquer la MEFSS pour le calcul des valeurs propres d'une barre en traction. La caractérisation de la propagation des incertitudes dans le modèle dynamique par différents estimateurs d'erreur de moyenne et de variance est présentée. Nous menons alors une analyse de convergence de ces estimateurs d'erreur en fonction de différents paramètres. Les estimateurs d'erreurs des paramètres sont calculés par rapport aux moyennes et variances calculées par simulations de Monte-Carlo. Le modèle sera traité pour les 3 scénarios suivants :

- le module d'élasticité est un processus aléatoire,
- la masse volumique est un processus aléatoire,
- le module d'élasticité et la masse volumique sont modélisés par des processus stochastiques gaussiens indépendants.

3.2.1.1 Description de la structure

Le problème étudié est le suivant : une barre rectiligne homogène de section constante est encastrée à son origine et libre à son extrémité. Les variables déterministes du problème sont : S l'aire de la section et L la longueur de la barre. Nous nous intéressons au calcul des valeurs propres de la structure. Dix éléments finis sont employés dans le maillage de la structure (Figure 3.14).

Les paramètres incertains sont le module d'élasticité $\boldsymbol{E}$ et la masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ du matériau constitutif. Les paramètres déterministes géométriques et physiques sont indiqués dans le tableau 3.11.

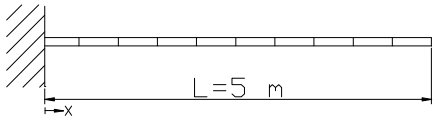


Figure 3.14. Barre en traction

Paramètre	Notation	Valeur
Module d'Young	E	210000 MPa
Masse volumique	ρ	7800 kg/m^3
Longueur	L	5 m
Section	A	10^{-5} m^2

Tableau 3.11. Paramètres de modèle déterministe

Les paramètres incertains $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{\rho}$ sont modélisés par des processus gaussiens stationnaires, notés $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{\rho}$, indexé sur $[0, L]$, de moyennes $\mu_E = 2{,}1\times10^{11}\ Pa$ et $\mu_\rho = 7800\ kg/m^3$, de fonctions d'autocorrélation R_E et R_ρ, et de fonctions de covariance C_E et C_ρ, telles que :

$$C_E(u) = R_E(u) - \mu_E^2 \ ,$$
$$C_\rho(u) = R_\rho(u) - \mu_\rho^2 \ ,$$

et d'écarts-types σ_E et σ_ρ, tels que $\sigma_E = CV_E \times \mu_E$ et $\sigma_\rho = CV_\rho \times \mu_\rho$, où CV_E et CV_ρ sont les coefficients de variation de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{\rho}$ respectivement. Nous savons que $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{\rho}$ peuvent alors s'écrire :

$$\boldsymbol{E}(x) = \mu_E + \sigma_E \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{E}}(x) \tag{3.3a}$$

$$\boldsymbol{\rho}(x) = \mu_\rho + \sigma_\rho \boldsymbol{G}_\rho(x) \tag{3.3b}$$

où $\boldsymbol{G}_E(x)$ et $\boldsymbol{G}_\rho(x)$ sont des processus gaussiens stationnaires centrés, de variance unité et de fonctions de covariance $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{G}_E}$ et $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{G}_\rho}$.

Pour les données d'entrée du tableau 3.10, les quatre premières valeurs propres déterministes de la structure sont données dans le tableau 3.12.

Mode de vibration	Valeur propre ($\times 10^6$ (rad/s)^2)
1	2,665
2	24,361
3	69,910
4	143,768

Tableau 3.12. Résultats du modèle déterministe

3.2.1.2 Développement des processus aléatoires

Comme indiqué dans le paragraphe précédent, les paramètres aléatoires de l'étude sont le module d'élasticité longitudinal et la masse volumique qui sont modélisés par deux processus stationnaires $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{E}(x), x \in [0,L])$ et $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{\rho}(x), x \in [0,L])$ indexés sur $[0,L]$.

Le développement ci-dessous est effectué pour le processus modélisant le module de Young, le traitement de la masse volumique étant identique.

Choix des modèles d'autocorrélation

Le processus du module d'élasticité est complètement caractérisé par sa moyenne constante $\mu_E = E[\boldsymbol{E}(x)]$ et sa fonction d'autocorrélation $R_E(u) = E[\boldsymbol{E}(x+u)\boldsymbol{E}(x)]$ ou sa fonction de covariance $C_E(u) = E[(\boldsymbol{E}(x+u)-\mu_E)(\boldsymbol{E}(x)-\mu_E)] = R_E(u) - \mu_E^2$.

Rappelons qu'au processus $\boldsymbol{E}$, est associé un processus gaussien stationnaire : le processus $\boldsymbol{G}$ de moyenne nulle et d'écart-type unitaire, tel que :

$$\boldsymbol{E}(x) = \mu_E + \sigma_E \boldsymbol{G}(x) \tag{3. 4}$$

Le relation entre les fonctions de covariance C_E et C_G de ces processus est :

$$C_G(u) = \frac{C_E(u)}{\sigma_E^2} \tag{3.5}$$

Sachant que les fonctions d'autocorrélation de $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{E}$ vérifient :

$$R_G(u) = C_G(u) + \mu_G^2 \quad ; \quad R_E(u) = C_E(u) + \mu_E^2 \tag{3.6}$$

L'expression (3.5) devient :

$$R_G(u) = \frac{R_E(u)}{\sigma_E^2} - a_E^2 \tag{3.7}$$

Pour la fonction d'autocorrélation, trois modèles sont possibles parmi d'autres :
* modèle A (exponentiel) :

$$R_G^A(u) = C_G^A(u) = exp\left(-\frac{|u|}{b}\right) \quad , \quad |u| \in [0, L] \tag{3.8}$$

* modèle B (triangulaire) :

$$R_G^B(u) = C_G^B(u) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|u|}{u_0} & \textbf{\textit{si}} \quad 0 \le |u| \le u_0 \\ 0 & \textbf{\textit{si}} \quad |u| \in [0, L] \end{cases} \tag{3.9}$$

* modèle C (exponentiel carré) :

$$R_G^C(u) = C_G^C(u) = exp\left(-\frac{u^2}{b}\right) \quad , \quad |u| \in [0, L] \tag{3.10}$$

où b, c et u_0 sont des constantes réelles strictement positives. À titre d'illustration, les trois fonctions d'autocorrélation (3.8), (3.9), (3.10) sont représentées graphiquement sur la figure 3.15.

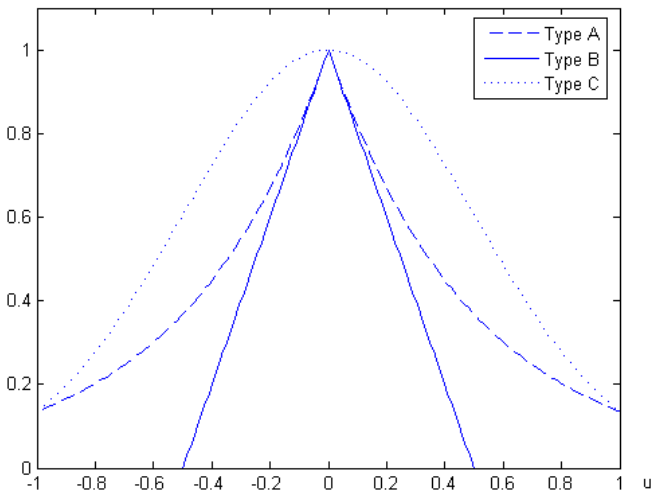


Figure 3.15. Fonctions d'autocorrélation du processus gaussien standard associé
$u_0 = b = c = 0{,}5$; $\mu_E = 1$; $a_E = 0{,}1$

Longueur de corrélation

Pour un processus stationnaire ***G*** de moyenne μ_G, d'écart-type σ_G et de fonction d'autocorrélation R_G, on définit la longueur de corrélation l_c comme la longueur à partir de laquelle la corrélation entre les observations $\boldsymbol{G}(x)$ et $\boldsymbol{G}(x + l_c)$ devient négligeable. En pratique,

on la calcule comme la solution du problème d'optimisation suivant : trouver la plus petite valeur de u qui réalise l'inégalité $R_G(u) - \mu_G^2 \leq \varepsilon \sigma_G^2$ où ε est un réel strictement positif petit fixé.

Cette caractéristique dépend bien entendu des paramètres de la fonction d'autocorrélation du processus. Ainsi, pour le processus ***E*** concerné, et pour chacun des modèles d'autocorrélation considérés, son expression est la suivante :

$$l_c^A = -b\,ln(\alpha) \quad ; \quad l_c^B = u_0(1-\alpha) \quad ; \quad l_c^C = \sqrt{-c\,ln(\alpha)} \tag{3.11}$$

avec :

$$\alpha = \frac{ln\left(1+\varepsilon a_E^2\right)}{ln\left(1+a_E^2\right)} \tag{3.12}$$

Un intérêt notable de ce paramètre est qu'il permet de rationaliser les comparaisons. Ainsi, si l'on veut comparer les performances ou les propriétés de plusieurs processus aléatoires dans une procédure d'approximation, il sera judicieux de régler préalablement leurs paramètres de telle sorte qu'ils aient tous la même longueur de corrélation. Le fait de rendre commune à tous ces processus la valeur d'une de leurs caractéristiques importantes est une façon de rationaliser la comparaison.

Par exemple, pour obtenir une longueur de corrélation l_c de 0,5 m avec chacun des trois modèles d'autocorrélation considérés pour le processus E, et en prenant pour ε et a_E les valeurs $\varepsilon = 10^{-2}$, $a_E = 0{,}1$, il faut donner aux paramètres b, u_0 et c les valeurs suivantes : b = 0,1 m, u_0 = 0,5 m et c = 0,05 m.

La fonction d'autocorrélation $R_{\widetilde{G}}$ du processus approximant $\widetilde{G}$ converge numériquement vers la cible R_G, en fonction du nombre M de termes du développement de Karhunen-Loève. Le nombre de termes nécessaires à une bonne approximation $R_{\widetilde{G}}$ de R_G augmente si la longueur de corrélation l_c diminue.

3.2.1.3 Résolution du problème spectral

Pour construire le développement de Karhunen-Loève de ***G***, il est nécessaire de résoudre le problème spectral relatif à C_G, c'est-à-dire l'équation de Fredholm en (λ, f) :

$$\int_0^L C_G(x_1 - x_2) f(x_2) dx_2 = \lambda f(x_1) \quad ; \quad (x_1, x_2) \in [0, L]^2 \tag{3.13}$$

La solution de ce problème, c'est-à-dire la famille dénombrable (λ_i, f_i) des valeurs et fonctions propres de C_G peut être calculée explicitement pour le modèle A et pour le modèle B si $u_0 > L$, ce que nous supposons ici. En revanche, pour le modèle C, elle doit être calculée numériquement. Nous donnons ci-dessous les résultats obtenus pour les modèles A et B [Gha91].

* modèle A :

$$\lambda_i^A = \frac{2}{b\left(\frac{1}{b^2} + \omega_i^2\right)} \quad ; \quad f_i^A(x) = \begin{cases} E_i^A \cos(\omega_i x) & \text{pour i est pair} \\ O_i^A \sin(\omega_i x) & \text{pour } i \text{ est impair} \end{cases} \tag{3.14}$$

avec :

$$E_i^A = \left(L + \frac{sin(2\omega_i L)}{2\omega_i} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad O_i^A = \left(L - \frac{sin(2\omega_i L)}{2\omega_i} \right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.15}$$

les ω_i étant solutions de :

$$\begin{cases} b^{-1} - \omega tan(\omega L) = 0 & pour\ i\ impair \\ \omega - b^{-1} tan(\omega L) = 0 & pour\ i\ pair \end{cases}$$

* modèle B :

$$\lambda_i^B = \frac{2}{\omega_i^2 u_0} \quad ; \quad f_i^B(x) = \begin{cases} E_i^B cos(\omega_i x) & pour\ i\ pair \\ O_i^B \left(cos(\omega_i x) + tan\left(\frac{\omega_i L}{2}\right) sin(\omega_i x) \right) & pour\ i\ impair \end{cases} \tag{3.16}$$

avec :

$$E_i^B = \left(\frac{L}{2} + \frac{sin(2\omega_i L)}{2\omega_i} \right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.17}$$

$$O_i^B = \left(L + \left(tan^2\left(\frac{\omega_i L}{2}\right) - 1 \right) \left(\frac{L}{2} - \frac{sin(2\omega_i L)}{4\omega_i} + \frac{sin^2(\omega_i L)}{\omega_i} tan\left(\frac{\omega_i L}{2}\right) \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.18}$$

les ω_i étant solutions de :

$$\begin{cases} \omega - i\pi / L = 0 & pour\ i\ impair \\ tan\left(\frac{\omega L}{2}\right) - 2(\omega(2u_0 - L))^{-1} = 0 & pour\ i\ pair \end{cases}$$

Construction des approximations

La famille des paramètres spectraux (λ_i, f_i) de C_G étant construite, le développement de Karhunen-Loève du processus $\boldsymbol{G}$ est complètement déterminé. Il s'écrit :

$$\boldsymbol{G}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \boldsymbol{\xi}_i \quad ; \quad x \in [0, L] \tag{3.19}$$

où $(\boldsymbol{\xi})_{1 \le i < \infty}$ est une famille dénombrable de copies indépendantes d'une v.a. gaussienne scalaire standard. On en déduit le développement de Karhunen-Loève du processus gaussien stationnaire $E = \mu_E + \sigma_E \boldsymbol{G}$:

$$\boldsymbol{E}(x) = \mu_E + \sigma_E \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \boldsymbol{\xi}_i \quad ; \quad x \in [0, L] \tag{3.20}$$

Une approximation $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ de $\boldsymbol{E}$ est obtenue en tronquant le développement de Karhunen-Loève (3.20) à l'ordre M :

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(x) = \mu_E + \sigma_E \sum_{i=1}^{M} \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \boldsymbol{\xi}_i \quad ; \quad x \in [0, L] \tag{3.21}$$

Formulation et résolution du problème

L'approximation visée des vecteurs propres aléatoires inconnus $\{\boldsymbol{q}\}$ et des valeurs propres aléatoires $\boldsymbol{\lambda}$ est recherchée sous la forme :

$$\{\boldsymbol{q}\} = \sum_{j=0}^{P-1} \{q_j\} \boldsymbol{\Psi}_j \tag{3.22}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \sum_{k=0}^{P-1} \lambda_k \boldsymbol{\Psi}_k \tag{3.23}$$

où le paramètre P et les v.a. $\boldsymbol{\Psi}_j$ sont fonctions des M variables aléatoires gaussiens $\boldsymbol{\xi}$ figurant dans l'approximation $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ de $\boldsymbol{E}$ et $\widetilde{\rho}$ de ρ, et les $\{q_j\}$ sont des vecteurs déterministes à calculer, ainsi que les valeurs déterministes λ_k : ce sont les inconnues du problème.

Pour calculer ces quantités déterministes, nous utilisons la démarche exposée dans le paragraphe 2.2, qui conduit à la résolution de l'équation (2.48). Une fois le système d'équations non linéaires résolu, les λ_k sont obtenus et par conséquent l'approximation $\widetilde{\lambda}$ de $\boldsymbol{\lambda}$.

3.2.1.4 Simulation de Monte-Carlo

Nous avons vu que, dans les modèles stochastiques, la taille du problème numérique à résoudre est directement liée au nombre de variables aléatoires d'entrée. Dans les simulations de Monte-Carlo, l'effort informatique est proportionnel au nombre d'échantillons N_{MCS}. Dans cette application, les simulations de Monte-Carlo sont basées sur une discrétisation du processus effectuée sur la base de ses valeurs au centre de chaque élément fini du maillage. Le problème aux valeurs propres correspondant est résolu pour déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la structure. Cette opération est répétée N_{MCS} fois. Les moments statistiques de la réponse, en particulier les valeurs propres sont ainsi calculées. Dans notre exemple, les simulations de Monte-Carlo convergent complètement pour 10^6 tirages. La moyenne et l'écart-type sont illustrés sur les figures 3.16 et 3.17. La première valeur propre montre une valeur moyenne de $2{,}665\times10^6$ $(\text{rad/s})^2$ et un écart-type de $2{,}042\times10^5$ $(\text{rad/s})^2$.

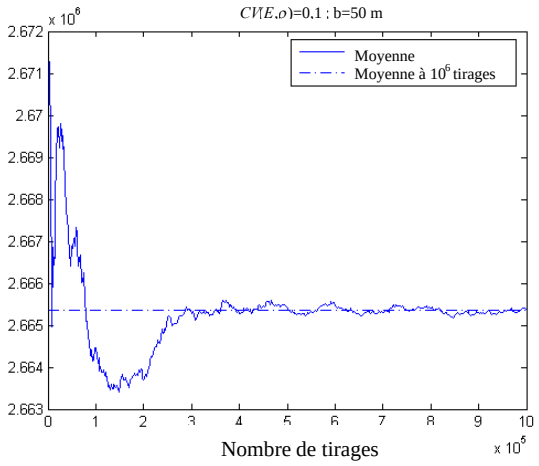


Figure 3.16. Convergence des simulations de Monte-Carlo (moyenne de la première valeur propre)

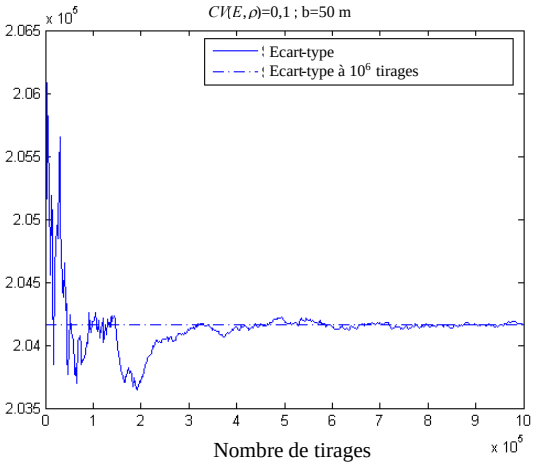


Figure 3.17. Convergence des simulations de Monte-Carlo (écart-type de la première valeur propre)

3.2.1.5 Analyse stochastique par la MEFSS

** Cas d'un processus modélisant le module de Young*

Dans cet exemple, le module de Young est un processus aléatoire gaussien, alors que la masse volumique est considérée déterministe. Nous supposons que le coefficient de variation (CV) du module de Young est égal à 0,1 et la fonction d'autocorrélation du processus est choisie du type exponentiel (modèle A) : $R_E(x) = e^{-|x|/b}$, où b est la longueur de corrélation, supposée égale à 50 m.

** Influence de l'ordre du chaos polynomial*

La précision de la MEFSS dépend du nombre de termes M dans le développement de Karhunen-Loève aussi bien que de l'ordre du chaos polynomial p de la réponse. Par conséquent, le taux de convergence doit être étudié en termes de ces deux paramètres. Pour chaque ensemble de M et p, la valeur de P et de l'écart-type des valeurs propres sont indiqués dans le tableau 3.13.

M	p	P	σ (SSFEM) $\times 10^3$	*Erreur relative*
1	2	3	160,1	21,4 %
	3	4	185,5	9 %
	4	5	194,3	4,7 %
	5	6	197,1	3,3 %
2	2	6	173,3	15 %
	3	10	195,4	4,1 %
	4	15	201,9	0,9 %
	5	21	203,2	0,3 %
3	2	10	180	11,7 %
	3	20	199,3	2,2 %
4	2	15	183,7	9,9 %
	3	35	201,6	1,1 %

Tableau 3.13. Influence des valeurs de M et p sur l'écart-type de la première valeur propre (b=50m).

L'exemple montre que l'erreur relative diminue fortement quand l'ordre du chaos polynomial augmente. Par exemple, pour M=2-3, p=3 assure une erreur relative inférieure à 5% pour l'écart-type. L'augmentation du nombre de termes M pris en compte dans le développement

de Karhunen-Loève permet également d'avoir des valeurs plus précises (erreur relative inférieure à 1% pour M=3 et p=4), mais son effet reste largement inférieur que si on augmente le nombre de termes dans le développement de la réponse (ordre p du chaos polynomial).

Cet exemple montre la convergence rapide avec peu de termes (ordres faibles du chaos polynomial), qui n'est pas tout à fait étonnante parce le processus d'entrée (module de Young) est gaussien.

** Influence de la longueur de corrélation*

Pour étudier l'influence de la longueur de corrélation, deux nouvelles valeurs (b = 10 m et b = 2 m) sont considérées, au lieu de 50 m, tout en gardant les valeurs initiales de tous les autres paramètres. Les résultats, donnés dans le tableau 3.14, peuvent être comparés à ceux dans le tableau 3.13 (avec b = 50 m). Ils montrent que, quand la longueur de corrélation diminue, un nombre plus élevé de termes M est exigé afin d'obtenir une précision acceptable dans la discrétisation du champ aléatoire. Il s'avère également que les résultats satisfaisants (i.e. erreur relative inférieure à 5%) sont obtenus pour M>3 et p>3 pour une longueur de corrélation de b=10m, alors que cette précision est réalisée seulement pour M>3 et p>5 pour une longueur de corrélation b=2 m. Il faut noter que des ordres plus élevés du chaos polynomial mèneraient à des temps de calcul très importants. L'erreur relative est toujours calculée par rapport aux valeurs de référence des simulations de Monte-Carlo.

M	*p*	*P*	*Erreur relative*	
			b=10 m	*b=2 m*
1	2	3	28.06 %	35.34%
	3	4	15.68 %	24.36%
	4	5	10.75 %	20.49%
	5	6	8.80 %	19.80%
2	2	6	18.99 %	24.18%
	3	10	7.28 %	12.32%
	4	15	3.08 %	7.36%
	5	21	1.63 %	4.91%
3	2	10	14.92 %	20.04%
	3	20	4.43 %	8.85%
4	2	15	12.74 %	18.42%
	3	35	2.94 %	7.49%

Tableau 3.14. Influence de la longueur de la corrélation sur l'écart-type de la première valeur propre

Une première conclusion sur cet exemple est que l'approche MEFSS s'applique indépendamment de la longueur de corrélation du champ, et donne des résultats assez précis. Elle est peu coûteuse sur le plan numérique pour le cas où la longueur de corrélation est grande, tant que le nombre de termes retenus dans le développement de KL ne dépasse pas 10. En revanche, dû au coût de calcul, il est difficile d'employer la MEFSS avec des ordres du chaos polynomial p>2 quand M=10 ou plus (cas des petites valeurs de la longueur de corrélation). Autrement dit, les résultats calculés avec un développement d'ordre inférieur peuvent ne pas être suffisamment précis.

** Masse volumique modélisée par un processus aléatoire*

Dans ce paragraphe, les incertitudes affectent uniquement la matrice de masse du système, le coefficient de variation de la masse volumique étant égal à 0,05. La fonction d'autocorrélation

du processus est du type exponentiel : $R(x) = e^{-|x|/b}$, où b est la longueur de corrélation, égale à 10 m.

Comme la précision dépend du nombre de termes M dans le développement de KL du processus d'entrée modélisant la masse volumique, et de l'ordre p du développement du chaos polynomial de la réponse, nous avons choisi M = 5 qui permet de bien représenter les fluctuations aléatoires de la masse volumique avec une excellente précision, les effets des termes supplémentaires étant largement inférieurs.

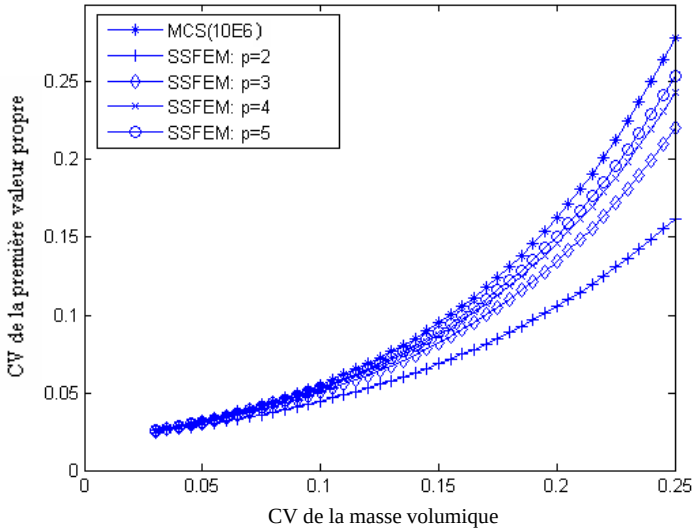


Figure 3.18. Coefficient de variation de la première valeur propre en fonction celui coefficient de la masse volumique

Le coefficient de variation de la première valeur propre en fonction de celui de la masse volumique est illustré sur la figure 3.18. Les résultats présentés sur cette figure sont calculés pour M=5 termes avec différentes valeurs de p. Nous pouvons voir facilement que quand le coefficient de variation est relativement faible (jusqu'à 15%) un chaos polynomial du troisième ordre donne une évaluation assez précise de la réponse. En revanche, pour des niveaux plus élevés de variabilité, plus de termes sont nécessaires dans le développement du chaos polynomial pour obtenir de bons résultats (l'erreur relative est de 20% pour le troisième ordre et de 8% pour le cinquième ordre pour une valeur de CV de 0,25). De ces résultats, il ressort que l'utilisation de la MEFSS pour l'analyse stochastique des problèmes aux valeurs propres donne toujours des résultats satisfaisants, quand les incertitudes affectent la matrice de la masse, même dans le cas de grands coefficients de variation.

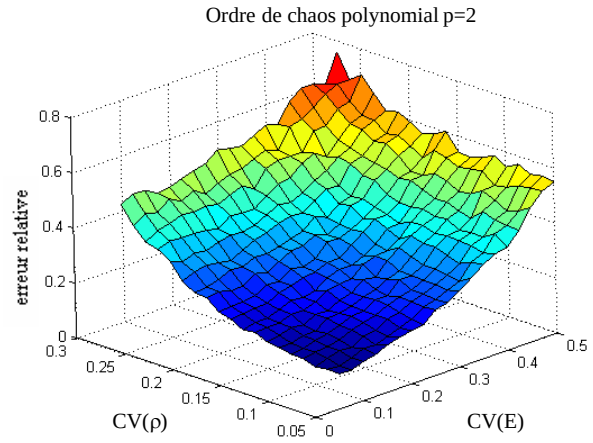
** Analyse stochastique avec deux processus stochastiques*

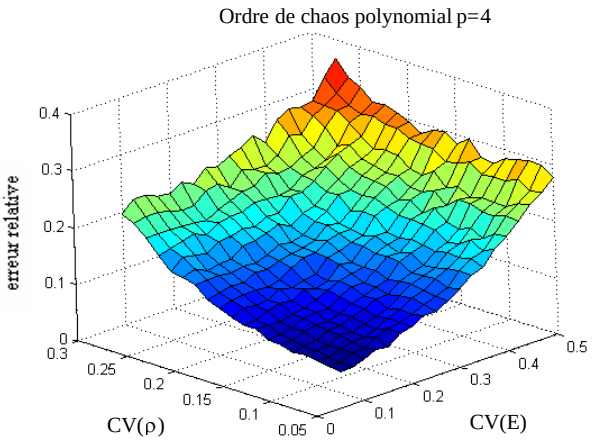
Dans ce paragraphe, la valeur moyenne et l'écart-type des valeurs propres sont calculés pour différents coefficients de variation des processus aléatoires d'entrée et pour différents ordres p du développement du chaos polynomial. L'analyse est faite avec 5 termes dans les développements de KL des deux processus $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{\rho}$ (M=10). Les résultats sont rapportés sur la figure 3.19.

Nous remarquons que, quand la MFESS est employée, la convergence de l'algorithme est toujours réalisée, le nombre d'ordres polynômes exigés variant de 2 à 8, selon la dispersion des données (des ordres polynomiaux plus élevées sont exigés pour un plus grand coefficient

de variation). L'erreur relative diminue rapidement avec la diminution de la variabilité du module de Young et de la masse volumique. Nous notons que des résultats de médiocre qualité sont obtenus pour CV(***E***)=0,5 et CV(***ρ***) =0,25. Ceci était prévisible parce que ces valeurs correspondent à un niveau élevé de variabilité, pour lequel l'approche MEFSS, avec des ordres polynomiaux relativement petits, fournit des résultats médiocres (voir ci-dessus pour l'influence de l'ordre polynomial). Dans tous les cas, le calcul par MEFSS converge vers la valeur calculée par les simulations de Monte-Carlo, particulièrement quand l'ordre du chaos polynôme est grand.

A partir des résultats de la figure 3.19, nous notons que l'approche MEFSS fournit des résultats précis quand les coefficients de variation des variables d'entrée sont faibles (inférieurs à 0,1) même pour les degrés p=2 à 4 de chaos polynomial. Pour des valeurs plus importantes du coefficient de variation, plus de termes dans le développement de chaos polynomial sont nécessaires pour obtenir une précision acceptable (p>4). Par exemple, pour le cas de CV (***E***)=0,25 et CV (***ρ***) =0,5, la convergence de l'écart type vers la valeur de référence est obtenue pour des ordres élevés de p (erreur relative égale à 0,76 pour p=2 et à 0,14 pour p=8).





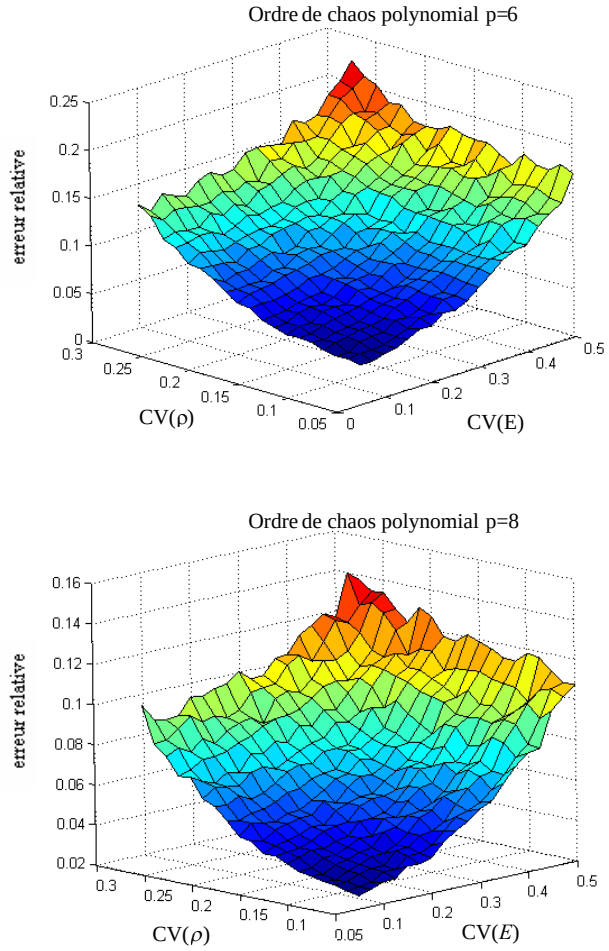


Figure 3.19. Erreur relative du CV de la première valeur propre en fonction de CV(E) et CV(ρ) pour différents ordre de chaos polynomial (p=2,4,6 and 8)

En conclusion, la MEFSS donne des résultats assez justes quand les niveaux élevés d'incertitudes affectent la matrice de rigidité seulement, ou quand les variabilités dans la matrice de masse sont relativement basses, même pour des chaos polynomial de deuxième et de troisième ordre. Quand le coefficient de variation est élevé, les chaos polynomiaux de deuxième et de troisième ordre ne donnent pas une évaluation suffisament précise, mais la méthode pourrait toujours être appliquée sans risque en augmentant l'ordre du chaos polynomal. En revanche, le temps de calcul augmente rapidement avec l'ordre p, et la méthode devient numériquement coûteuse.

3.2.2 Ligne d'échappement d'un véhicule

Dans ce paragraphe, nous montrons l'efficacité de la méthode proposée, sur un modèle de ligne d'échappement avec propriétés physiques incertaines. Le nombre de degrés de liberté est significatif de façon à montrer que cette méthode permet de traiter des cas réalistes. Le système est modélisé à l'aide du logiciel Matlab. Nous présentons les écarts-types et les moyennes des valeurs propres et des vecteurs propres. Les calculs sont effectués par projection sur le chaos polynomial et par simulations de Monte-Carlo.

3.2.2.1 Description du problème

Un système d'échappement est typiquement composé de tubes reliant différents éléments à partir du moteur et finissant par le tuyau d'échappement (Figure 3.21). Le système est soumis aux vibrations induites par le moteur du véhicule, le châssis et le gaz d'échappement. Pour ce système, la température induite par le moteur doit être prise en considération, car elle modifie les propriétés matérielles de l'acier, particulièrement le module d'élasticité. Pour l'analyse modale, il peut être raisonnable d'employer des éléments finis de type poutre pour modéliser cette structure.

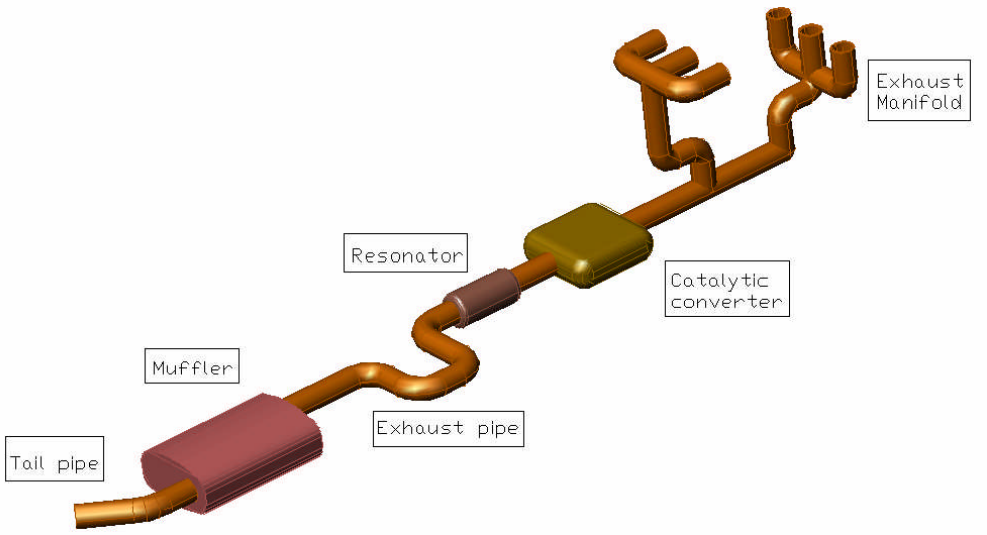


Figure 3.20. Ligne d'échappement.

Le système étudié est composé de 28 éléments de type poutre, de longueur L_i, qui représentent les différentes parties du système : pot d'échappement, convertisseur catalytique, résonateur et silencieux, comme représenté sur les figures 3.21 et 3.22. La section transversale du pot d'échappement est cylindrique avec rayon R_1. Le résonateur et le convertisseur catalytique sont également modélisés par un tube de rayon R_2, et le silencieux est modélisé par un tube de rayon R_3 (cette approximation est raisonnable pour l'analyse modale). e_i est l'épaisseur de la paroi de chacun des éléments.

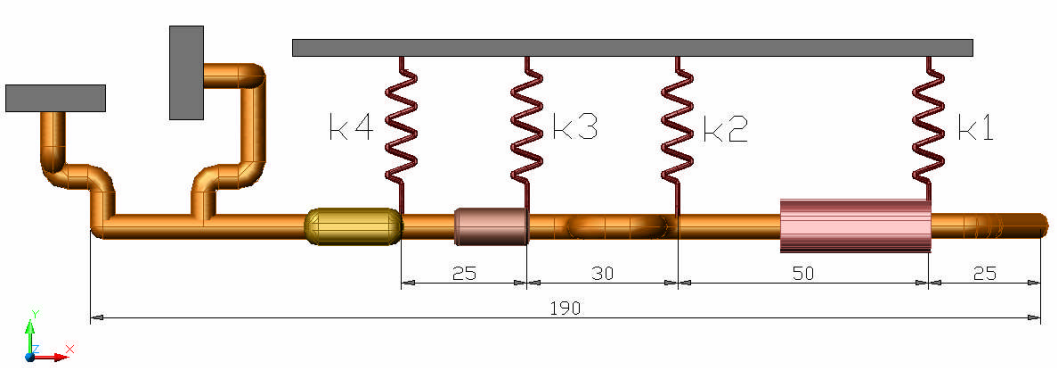


Figure 3.21. Configuration de système étudié.

Le système est encastré à la sortie du moteur. Il est attaché à la structure du véhicule par quatre ressorts élastiques, avec des raideurs k_1, k_2, k_3 et k_4. Nous supposons que les vibrations du système demeurent principalement dans le plan perpendiculaire à la surface de la route.

Un maillage fin a été employé initialement pour obtenir les valeurs de référence des valeurs propres de la structure. Des maillages moins raffinés sont ensuite été mis en œuvre afin de conserver le numbre minimum d'éléments possible, en respectant une erreur relative sur les valeurs propres inférieure à 1%. Un maillage avec 28 éléments a ainsi été par la suite choisi.

Le moteur induit un gradient de température élevé le long du système d'échappement, qui commence par une température de 800°C à la sortie de moteur et qui descend à 55°C à l'extrémité de la ligne d'échappement. Ce gradient de température modifie considérablement le module de Young, qui, par conséquent, influence de manière significative les fréquences de vibration. Ainsi, il est important de définir le rapport entre le module de Young et la température des tubes : un des modèles habituels est donné par l'expression [Ami06] :

$$E(T) = 216{,}2 - 0{,}0692\ T \tag{3.24}$$

avec E (module de Young) donné en GPa et T la température des éléments donnée en °C. La variation spatiale de la température est supposée linéaire dans la direction x (voir la figure 3.21) variant de 800°C à 55°C comme mentionné ci-dessus.

3.2.2.2 Données aléatoires du problème

La MEFSS est employée pour calculer les valeurs propres de la structure. L'hypothèse de départ est que le module de Young et la masse volumique sont considérés comme des quantités aléatoires modélisées par des processus aléatoires homogènes. Nous supposons que les processus varient seulement selon l'axe longitudinal des éléments. Ils sont donc modélisés par des processus aléatoires indépendants scalaires unidimensionnels. Pour simplifier l'étude nous considérons que les processus étudiés sont gaussiens.

La fonction d'autocorrélation des processus est du type exponentiel : $R(x) = e^{-|x|/b}$, où b est le paramètre de corrélation, supposé égal à 1 m pour les deux processus. Le coefficient de variation (CV) du module de Young et de la masse est égal à 0,1 et à 0,05, respectivement. Les variables aléatoires modélisant les variations stochastiques des raideurs suivent des distributions normales puisqu'elles représentent les erreurs de fabrication. Nous représentons dans le tableau 3.15 les moyennes et les coefficients de variation (CV) des paramètres de

conception. Il est à noter que la valeur moyenne du module de Young est calculée pour chaque élément en fonction de la température.

Variable	Notation	Valeur moyenne	Type	Coefficient de variation
Module de Young	E	$E(T)$	Processus aléatoire	0,1
Masse volumique	ρ	7650 kg/m^3	Processus aléatoire	0,05
Épaisseur des tubes	e_1	0,8 mm	Déterministe	
Épaisseur des tubes	e_2	1 mm	Déterministe	
Épaisseur des tubes	e_3	1,5 mm	Déterministe	
Épaisseur des tubes	e_4	1,25 mm	Déterministe	
Rayon des tubes	R_1	25 mm	Déterministe	
Rayon des tubes	R_2	40 mm	Déterministe	
Rayon des tubes	R_3	75 mm	Déterministe	
Raideur des ressorts	k_1, k_2, k_3, k_4	8 N/mm	Variable aléatoire	0,20

Tableau 3.15. Moyennes et coefficients de variation des paramètres de la ligne d'échappement.

La précision du développement de KL du processus aléatoire dépend du nombre de termes M retenus. Il s'avère que M=3 est suffisant pour assurer une erreur relative inférieure à 10%. Naturellement, cette valeur est étroitement liée aux paramètres définissant le champ aléatoire, en particulier la longueur de corrélation.

L'analyse probabiliste du système est divisée en trois parties :

1. analyse modale déterministe du système,
2. identification de la distribution de probabilité des valeurs propres par :
   - les simulations de Monte-Carlo,
   - la MEFSS,
3. quantification de l'impact des variabilités stochastiques d'entrée sur la dispersion des valeurs propres et effet de l'aspect aléatoire des raideurs des ressorts.

3.2.2.3 Analyse déterministe

Nous commençons l'étude par une analyse modale déterministe, avec les valeurs moyennes des paramètres. Le tableau 3.16 indique les quatre valeurs propres déterministes de la structure. Cette analyse est faite pour les deux cas où le module de Young est considéré constant ou dépendant de la température. Nous voyons clairement que l'effet de la température est plus significatif pour les vibrations à haute fréquence : la première valeur propre est seulement réduite de 22% tandis que la quatrième est réduite de 32%.

Valeur propre	Module de Young	
	Constant	$f(T)$
λ_1	22268	17383
λ_2	480686	349689
λ_3	3213999	2475527
λ_4	6486872	4411253

Tableau 3.16. Valeurs propres déterministes (rad/s)²

3.2.2.4 Simulations de Monte-Carlo

Dans cette partie, la technique de Monte-Carlo est appliquée pour évaluer les caractéristiques des valeurs propres, avec les paramètres aléatoires d'entrée, décrits dans le tableau 3.15. Les statistiques de la solution sont calculées en effectuant 10^6 simulations de Monte-Carlo. Deux cas sont considérés, selon l'hypothèse sur l'aspect aléatoire du système. Dans la première hypothèse, la masse volumique et le module d'élasticité suivent des processus aléatoires et dans la seconde, quatre variables aléatoires indépendantes sont ajoutées pour représenter les appuis élastiques aléatoires.

Nous représentons dans le tableau 3.17 les moyennes, les écarts-types et les coefficients de variation des quatre premières valeurs propres dans les deux cas. Nous pouvons facilement vérifier que les moyennes de valeurs propres sont très proches des résultats de l'analyse modale déterministe : cette observation confirme l'exactitude du procédé mis en œuvre. La comparaison entre les deux scénarios prouve que, alors qu'aucune différence significative n'est observée pour les valeurs moyennes, la dispersion est beaucoup plus grande pour le cas où les variabilités des ressorts élastique sont prises en compte.

La différence entre les deux cas est encore plus grande pour les basses fréquences, i.e. un coefficient de variation de 9,97% au lieu de 7,33% pour λ_1 contre 11,12% au lieu de 11,18% pour λ_4, ce qui représente 31,6% d'augmentation pour λ_1 contre 0,5% pour λ_4. Le tableau 3.16 montre également que le coefficient de variation est plus important dans les hautes fréquences, par exemple le coefficient de variation est de 11,12% pour λ_4 et de 7,33% pour λ_1. Cette observation mène à la constatation que les basses fréquences sont moins sensibles aux incertitudes sur les paramètres.

		Moyennes		Ecarts-types		Coefficients de variation	
	Déterministe	Scénario 1	Scénario 2	Scénario 1	Scénario 2	Scénario 1	Scénario 2
λ_1	17383	17286	17304	1278	1737	7,33%	9,97%
λ_2	349689	348471	348877	38180	38324	10,96%	11,02%
λ_3	2475527	2467136	2469682	276679	277666	11,12%	11,19%
λ_4	4411253	4404461	4406190	492853	494611	11,12%	11,18%

Tableau 3.17. résultats des valeurs propres aléatoires

Ces résultants montrent que le coefficient de variation des valeurs propres du système est de l'ordre de 10%, ce qui pose un souci de robustesse de la conception structurale pendant sa vie opérationnelle. Le calcul de l'asymétrie et de l'aplatissement prouve que les distributions des valeurs propres ne sont pas éloignées de la distribution normale (il est à rappeler que de distribution normale a une asymétrie égale à 0 et un aplatissement égal à 3). Le premier mode a une asymétrie de 0,29 et un applatissement de 3,14 (les effets aléatoires des supports élastiques l'amènent même plus près de la normale, avec un assymétrie de 0,18 et un applatissement de 3,10). Il est également observé que la distribution des valeurs propres n'est pas symétrique et que la queue inférieure est particulièrement prolongée pour cette valeur propre. Pour le processus de conception, cette observation signifie que la probabilité de fabriquer un système avec de basses fréquences fondamentales est significative, et donc le risque de résonance dans cette gamme doit être sérieusement considéré.

3.2.2.5 Analyse stochastique par la MEFSS

Pour chacune des valeurs de M et de p, le nombre correspondant de termes dans le développement du chaos polynomial P est donné dans le tableau 3.18, colonne 3. En suivant la méthode décrite dans le paragraphe 2.2, l'erreur relative sur l'écart type σ_{SSFEM} est donnée dans la colonne 4.

Comme prévu, l'écart-type de la première valeur propre σ_{SSFEM} converge vers l'écart-type calculé par simulations de Monte-Carlo σ_{MCS} pour chaque valeur de M, quand l'ordre p du développement du chaos polynomial est augmenté. D'après les résultats du tableau 3.18, il s'avère qu'au moins p=3 doit être choisi pour avoir une précision de 5%. En d'autres termes, pour un processus aléatoire donné, cette approche fournit de bons résultats pour l'évaluation de l'écart-type sans se soucier du nombre de termes dans le développement de Karhunen-Loève.

En employant la MEFSS avec un chaos polynomial d'ordre p=5, il s'avère que des résultats précis (c.-à-d. une erreur relative inférieure à 5% entre σ_{SSFEM} et σ_{MCS}) sont obtenus. Nous soulignons que dans cet exemple, nous avons adopté un développement du chaos polynomial tronqué composé de trois termes (M_1=M_2=3) qui assure une précision suffisante dans la discrétisation du champ aléatoire ; de ce fait, l'utilisation du chaos polynomial d'ordre 5 dans le développement de la réponse est toujours acceptable. Dans la pratique, le nombre de termes nécessaires pour réaliser une discrétisation précise du champ aléatoire est habituellement plus grand que 3. En conséquence, seul le chaos polynomial d'ordre 1 à 5 (p=1-5) est pratiquement applicable. En limitant l'analyse MEFSS au chaos polynomial du troisième ordre, nous remarquons que l'écart-type est précis (l'erreur relative est environ 5%). Il est évident que les termes d'ordre supérieur dans le développement sont nécessaires afin de calculer exactement la FDP des valeurs propres.

M	p	P	σ_{SSFEM} erreur relative
4	1	5	34,65%
	2	15	13,14%
	3	35	9,63%
	4	70	8,91%
	5	126	8,85%
6	1	7	25,1%
	2	28	9,04%
	3	84	6,56%
	4	210	6,11%
	5	462	6,14%
8	1	9	19,9%
	2	45	7,08%
	3	165	5,16%
10	1	11	17,36%
	2	66	6,2%

Tableau 3.18. Influence de l'ordre du chaos polynomial

Ces considérations soulèvent la question de la façon dont le chaos polynomial peut être pratiquement appliqué dans le cas général. D'abord nous notons que nous avons effectué le développement de Karhunen-Loève d'un processus gaussien homogène, et les différents types

de distribution avec leurs polynômes orthogonaux correspondants peuvent être plus précis et plus efficaces pour des problèmes spécifiques. En même temps, le choix du meilleur développement peut être difficile, parce que les incertitudes dans les structures peuvent atteindre des niveaux élevés. Dans ces cas, un degré élevé du chaos polynomial p est exigé ; des calculs d'ordre réduit peuvent être prévus pour capturer des effets importants de l'aspect aléatoire, mais ne représentent pas parfaitement la distribution de la réponse.

3.2.2.6 Fonction de densité de probabilité des valeurs propres

Un des avantages importants de la MEFSS est qu'elle fournit la réponse sous forme analytique. Nous pouvons donc facilement calculer la fonction de densité de probabilité de la réponse (p=7, M=8). Ainsi, la FDP de la première valeur propre est tracée sur la figure 3.23.

Nous pouvons voir que la FDP obtenue est très proche de la FDP obtenue par simulations de Monte-Carlo. Tandis que la région centrale de cette distribution est assez précise, les queues lointaines peuvent être moins précises.

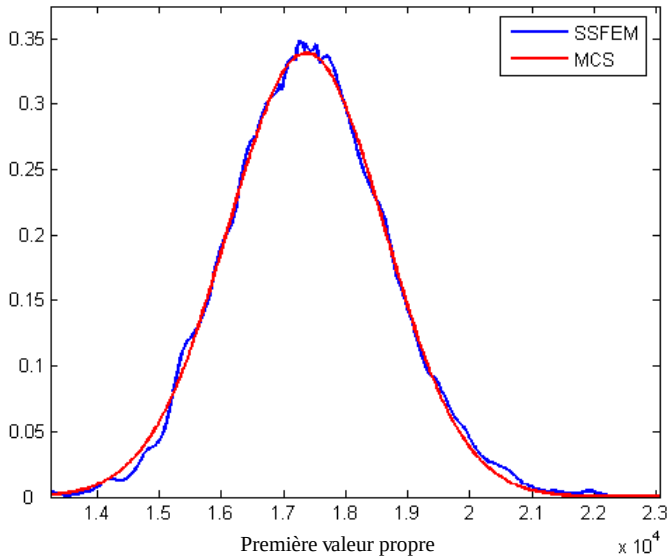


Figure 3.22. FDP obtenue par la MEFSS et par les simulations de Monte-Carlo

3.3 Conclusion du chapitre

L'approche spectrale est mise en œuvre dans ce chapitre sur quatre exemples de systèmes mécaniques. Nous avons commencé par un système simple de deux barres articulées à deux degrés de liberté, afin de tester la sensibilité de la méthode aux différents paramètres. Ensuite, nous abordons le cas d'une plateforme pétrolière de plusieurs étages. Les paramètres incertains des deux modèles (modules d'élasticité et masses volumiques des différentes barres constitutives) sont modélisés par une famille de variables aléatoires gaussiennes ou lognormales indépendantes.

Le cas d'une barre en traction-compression, où les incertitudes sur les matériaux (module d'élasticité et masse volumique) sont représentées par des processus gaussiens ou lognormaux

a ensuite été étudié, permettant d'analyser l'influence des paramètres tel que l'effet de troncature des processus et la longueur de corrélation.

Enfin, la dernière application a concerné la ligne d'échappement d'une voiture, une structure industrielle où les incertitudes sur les modules d'élasticité et les masses volumiques sont modélisées par des processus stochastiques gaussiens.

L'ordre du chaos polynomial joue un rôle important dans l'approximation. Plus il est élevé, meilleure est la solution trouvée, ce qui paraît évident. Néanmoins, le temps de calcul reste toujours faible en comparaison aux simulations de Monte-Carlo. Nous avons pu constater l'influence du coefficient de variation. Plus celui-ci est faible, plus le nombre de termes requis dans le développement du chaos polynomial est petit. L'histogramme des valeurs propres a été tracé et comparé avec celui évalué par simulations de Monte-Carlo.

Quelques remarques sur la mise en œuvre de la MEFSS

L'application de la MEFSS afin de déterminer les variabilités de la réponse est aisée ; les différentes étapes nécessaires pour sa mise en œuvre, ainsi que les estimations grossières des coûts de calcul associés, sont les suivantes :

- la résolution complète du modèle théorique déterministe, ce qui, en pratique, se traduit par la résolution d'un problème aux valeurs propres ;
- une phase de prétraitement qui se résume au développement de Karhunen-Loève des paramètres stochastiques d'entrée. Ce développement reste peu coûteux, le coût numérique résidant dans le nombre de termes à retenir ;
- en plus des développements des quantités d'entrée, s'ajoute le développement du chaos polynomial de la réponse, intervenant dans 1'expression effective des valeurs propres, dont la détermination des coefficients nécessite des résolutions de sous-problèmes aux valeurs propres. Heureusement, pour les modèles à grand nombre de degrés de liberté, il est possible d'utiliser des bases de réduction pour diminuer de façon très nette le coût de ces résolutions ;
- le coût de calcul des moments stochastiques (moyenne, écart-type) des quantités d'intérêt, et surtout la PDF, réside principalement dans le nombre de tirages de Monte-Carlo.

En comparaison à l'application directe des simulations de Monte-Carlo, la MFESS est, à précision égale, beaucoup moins onéreuse.

Ainsi, à la simplicité de mise en œuvre de la méthode s'ajoute aussi un coût de calcul total plus faible que celui correspondant aux simulations de Monte-Carlo dont les résultats nous ont servi de base de comparaison.

Chapitre 4

Conception robuste et analyse modale

Sommaire

4.1 Conception robuste 127
4.1.1 Introduction 127
4.1.2 Optimisation robuste 127
4.2 Conception robuste d'un système de suspension 128
4.2.1 Modélisation de la réponse 129
4.2.2 Application numérique 130
4.2.3 Conception déterministe optimale 132
4.2.4 Prise en compte des incertitudes 132
4.2.5 Conception robuste 132
4.3 Conception robuste d'une ligne d'échappement 137
4.3.1 Etude paramétrique de la conception de la ligne d'échappement 137
4.3.2 Position et valeur de la raideur des ressorts 139
4.3.3 Effet de la corrosion des tubes 141
4.4 Conclusion 142

Il n'y a rien de plus beau qu'une clef tant que l'on ne sait pas ce qu'elle ouvre
Maurice Maeterlinck

Tous les modèles sont faux ; quelques-uns sont utiles.
George Box

Dans ce chapitre, nous allons traiter le problème de l'optimisation stochastique et la conception robuste des structures dynamiques.

La conception d'une grande partie des systèmes mécaniques dépend fortement des caractéristiques dynamiques sous vibrations. Cependant, la réponse dynamique est relativement sensible aux incertitudes sur les propriétés géométriques et matérielles. Pour cette raison, la conception déterministe ne peut pas garantir la fiabilité requise. Pour éviter la résonance, non seulement la moyenne des fréquences propres doit être considérée, mais aussi leur écart-type doit être contrôlé. Toutefois, les applications de la conception robuste dans la dynamique sont très rares.

Deux exemples de conception robuste sont présentés dans ce travail : l'exemple de la conception robuste d'un système de suspension d'un véhicule est étudié pour démontrer l'application de ces techniques à l'analyse vibratoire. L'approche s'assure que l'amplitude du châssis est toujours inférieure à une limite critique sur un large intervalle de fréquences d'excitation. Le modèle mathématique du système est développé puis optimisé par la procédure de conception robuste combiné avec la méthode des simulations de Monte-Carlo.

Dans le deuxième exemple, l'effet des incertitudes structurales sur la vibration d'un dispositif d'échappement est étudié. Le modèle éléments finis est combiné avec la MEFSS que nous avons développé dans le deuxième chapitre, afin de calculer la dispersion des fréquences de vibration, due aux incertitudes sur les matériaux et la géométrie.

Dans les deux exemples, une comparaison entre l'analyse déterministe et probabiliste est effectuée. L'analyse de sensibilité nous permet d'identifier les paramètres sur lesquels nous devons agir pour minimiser l'écart-type des grandeurs d'intérêts (fréquences propres du système par exemple).

Le couplage entre la conception robuste et la MEFSS est un outil puissant pour l'optimisation de la performance dynamique des systèmes mécaniques, puisqu'elle permet d'obtenir, à moindre coût, non seulement la moyenne et l'écart type de la réponse, mais aussi une forme analytique de la réponse en fonction des variables aléatoires d'entrée. La comparaison est effectuée avec la méthode traditionnelle utilisée dans ce type de problèmes, qui est la méthode de Monte-Carlo.

4.1 Conception robuste

4.1.1 Introduction

La défaillance des systèmes technologiques en raison des vibrations est souvent rencontrée. Par exemple, dans le domaine de la microélectronique, la vibration est la deuxième cause de défaillance, qui compte 27% des cas (les défaillances dues à la température qui sont les plus prépondérantes s'élèvent environ à 40%). Dans les systèmes mécaniques, les niveaux excessifs de vibration induisent des problèmes de sûreté structuraux (fatigue par exemple) aussi bien que d'inconfort humain. L'optimisation déterministe a permis d'améliorer les performances dans tous les types de systèmes mécaniques. Cependant, l'optimisation déterministe ne peut pas garantir les objectifs désirés à cause des incertitudes liées aux paramètres matériels et géométriques tels que le module d'élasticité, l'épaisseur, la densité et les contraintes résiduelles, mais aussi les erreurs de fabrication et d'assemblage. Des problèmes de bruit et de vibration, provoqués par les paramètres incertains dans la dynamique structurale, sont rarement pris en compte dans l'optimisation de la conception. Par conséquent, les méthodes permettant de réduire l'effet des incertitudes sur les performances des produits sont considérées primordiales.

La conception robuste est une méthodologie qui tente de s'assurer que les réponses sont peu sensibles aux incertitudes d'entrée, sans éliminer réellement les causes. La conception robuste inclut les approches « ***parameter design »*** où la moyenne est ajustée tout en maintenant l'écart-type constant [Pha89], « ***tolerance design »*** où la moyenne est maintenue constante et l'écart-type est ajusté pour atteindre un coût minimum [Spe97], « ***integrated design »*** où la moyenne et l'écart-type sont simultanément ajustés [Sav06], et « ***conformance-based design »*** dont la conception connue sous le nom de « ***Six-Sigma*** » [Yan03] est un exemple. La conception robuste a été appliquée à une large variété de problèmes liés aux performances statiques. Il existe dans la littérature quelques applications de conception robuste liée à la performance dynamique en ce qui concerne la réduction des niveaux de vibration des systèmes mécaniques.

La conception robuste améliore la qualité du produit en réduisant au minimum l'effet des causes de la variation sans éliminer ces causes elles-mêmes. L'objectif est différent de celui de l'approche fiabiliste, il s'agit d'optimiser la performance moyenne et de réduire au minimum sa variation. Ceci est réalisé en optimisant le produit, ainsi que le processus de conception, pour rendre la performance la moins sensible possible aux diverses causes de variation. Par conséquent la conception robuste se concentre sur la distribution de probabilité au voisinage des valeurs moyennes.

4.1.2 Optimisation robuste

L'incertitude sur les paramètres de conception signifie que la performance du système est une variable aléatoire. Une option pour l'optimisation robuste est de réduire au minimum la déviation de la valeur moyenne $\left|\mu_f - t\right|$ et la variance σ_f^2 de la fonction de performance, où :

$$\mu_f(x,s) = E_z[f(s,z,x)] \tag{4.1}$$

$$\sigma_f^2(x,s) = E_z\left[\left(f(s,z,x) - \mu_f(x,s)\right)^2\right] \tag{4.2}$$

où $f(s,z,x)$ est la fonction objectif. La moyenne et l'écart-type de la performance du système peuvent être calculés lorsque la fonction de densité de probabilité (FDP) des paramètres incertains est connue. Pour la plupart des applications pratiques, ces FDPs sont inconnues, mais nous supposons que toutes les variables sont normales ou lognormales indépendantes. Cependant, les solutions des équations (4.1 et 4.2) sont extrêmement coûteuses. Pour réduire le temps de calcul, les approximations utilisant les développements en série peuvent être employés. Si seuls les termes linéaires sont retenus dans le développement, la moyenne et la variance de la réponse sont aisément calculées en termes de moyennes et de variances des paramètres incertains.

Les contraintes doivent également être respectées, pour toutes les valeurs des paramètres de contrôle et de bruit. Les contraintes pour la minimisation de l'équation (4.2) peuvent être approchée [Par93] par :

$$g_j(\bar{z},\bar{x}) + \sum_i \left| \frac{\partial g_i}{\partial z_i} \Delta z_i \right| + \sum_l \left| \frac{\partial g_j}{\partial x_l} \Delta x_l \right| \le 0 \tag{4.3}$$

Les dérivées sont évaluées en $\bar{z}$ et $\bar{x}$, et Δz_i et Δx_l représentent les déviations des éléments de z et x par rapport aux moyennes. En raison des valeurs absolues, cette approximation est susceptible d'être très conservatrice. Pour une analyse statistique, la probabilité que les contraintes soient satisfaites doit être choisie a priori. Les contraintes peuvent être écrites sous la forme :

$$g_i(\bar{z},\bar{x}) + k\sigma_{g_i}(z,x) \le 0 \tag{4.4}$$

où σ_{g_i} est une approximation de l'écart-type de la $i^{\text{ième}}$ contrainte et k est une constante qui reflète la probabilité que la contrainte soit satisfaite. Par exemple, k = 3 signifie qu'une contrainte est à 99,7% satisfaite, si les distributions des contraintes sont normales. Le développement de la variance de la contrainte en série de Taylor au premier ordre donne :

$$\sigma_{g_i}^2(z,x) = \sum_i \left(\frac{\partial g_i}{\partial z_i} \right)^2 \sigma_{z_i}^2 + \sum_l \left(\frac{\partial g_l}{\partial x_l} \right)^2 (\Delta x_l)^2 \tag{4.5}$$

On supposons que certains paramètres de conception sont stochastiques appelés les facteurs de bruit, tandis que les autres sont employés pour optimiser le système, ils sont appelés les facteurs de contrôle.

4.2 Conception robuste d'un système de suspension

La conception robuste est appliquée à l'analyse dynamique d'un amortisseur de véhicule avec paramètres incertains, utilisant l'approche d'optimisation par la programmation non linéaire. L'objectif est de déterminer les paramètres de rigidité et d'amortissement, pour réduire au minimum les déplacements du châssis sur une large gamme de fréquences d'excitation en dépit de l'incertitude.

4.2.1 Modélisation de la réponse

Le système adopté est montré sur la figure 4.1. La masse m_1 représente la masse de la roue plus une partie de la masse des bras de suspension, m_2 représente 1/4 de la masse du corps de la voiture (m_2 est calculée avec plus de précision en prenant en considération la position du centre de gravité de la voiture), k_1 est la raideur radiale des pneus, k_2 et r_2 sont la raideur et le coefficient d'amortissement linéaires du système de suspension. Les excitations stochastiques viennent de l'irrégularité de la route ξ [Zan05, Son07, Gob01]. Le modèle est généralement réputé être assez précis pour prendre en compte les caractéristiques essentielles du modèle. Les équations du mouvement sont :

$$m_1\ddot{x}_1 - r_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2(x_2 - x_1) + k_1(x_1 - \xi) = 0 \tag{4.6}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + r_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = 0 \tag{4.7}$$

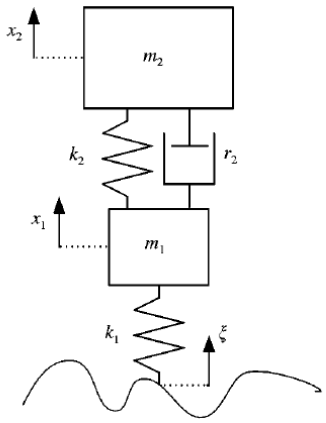


Figure 4.1. Vibration forcée d'un système à deux degrés de liberté

Les paramètres liés au système d'amortissement sont les paramètres de conception m_1, k_2 et r_2. La fonction de transfert entre le déplacement ξ et x_1 est donnée par :

$$X_1(j\omega) = \frac{k_1(k_2 + jr_2\omega - m_2\omega^2)}{D(j\omega)} \tag{4.8}$$

avec

$$D(j\omega) = k_1k_2 + jk_1r_2\omega - (k_2m_1 + k_1m_2 + k_2m_2)\omega^2 - jr_2(m_1 + m_2)\omega^3 + m_1m_2\omega^4 \tag{4.9}$$

où ω est la pulsation, et $j = \sqrt{-1}$.

La fonction de transfert entre le déplacement ξ et x_2 est donnée par :

$$X_2(j\omega) = \frac{k_1(k_2 + jr_2\omega)}{D(j\omega)} \tag{4.10}$$

Les deux amplitudes des fonctions de transfert X_1 et X_2 sont, respectivement :

$$|X_1| = k_1 \left(\frac{r_2^2\omega^2 + \left(k_2 - m_2\omega^2\right)^2}{r_2^2\omega^2\left(k_1 - m_1\omega^2 - m_2\omega^2\right)^2 + \left(k_2 m_2\omega^2 - \left(k_1 - m_1\omega^2\right)\left(k_2 - m_2\omega^2\right)\right)^2} \right)^{1/2} \quad (4.11)$$

$$|X_2| = k_1 \left(\frac{r_2^2\omega^2 + k_2^2}{r_2^2\omega^2\left(k_1 - m_1\omega^2 - m_2\omega^2\right)^2 + \left(k_2 m_2\omega^2 - \left(k_1 - m_1\omega^2\right)\left(k_2 - m_2\omega^2\right)\right)^2} \right)^{1/2} \quad (4.12)$$

Pour le cas où l'amortissement r_2 existe, le système principal a une fréquence propre que nous allons noter ω_r.

Pour le cas où l'amortissement est nul ($r_2 = 0$), le système d'équations 4.6 et 4.7 s'écrit sous la forme :

$$m_1\ddot{x}_1 - k_2(x_2 - x_1) + k_1(x_1 - \xi) = 0 \quad (4.13)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (4.14)$$

ou autrement sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 + k_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1\xi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Le système a deux fréquences propres que nous notons ω_1 et ω_2. Ces fréquences sont différentes de la fréquence propre du châssis ω_r. Elles sont la solution de l'équation aux valeurs propres définie par :

$$\left(-\omega^2[M] + [K]\right)\{X\} = \{0\} \quad (4.16)$$

avec :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_2 + k_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 \end{bmatrix}$$

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

4.2.2 Application numérique

Un véhicule type de petite taille est considéré ; les données de ce véhicule sont récapitulées dans le tableau 4.1. La masse m_2 représente le poids du châssis du véhicule vide ou chargé. Les variations de k_1 visent à représenter les raideurs des différents types de pneus. Par contre les paramètres k_2 et r_2 sont les paramètres de conception que nous cherchons à optimiser.

Tous les résultats graphiques obtenus sont pour le même véhicule, et ils n'ont donc pas ainsi une signification générale et pourraient même être qualitativement imprécis pour les autres types de véhicules. Cependant, les formules dérivées dans le paragraphe précédent ont une

signification générale et peuvent être employées pour simuler les performances des différents véhicules selon le modèle de la figure 4.1.

Paramètre	Valeur de référence	Limites inférieures et supérieures	CV
m_2 (kg)	229	150-400	10%
m_1 (kg)	31	-	
k_2 (kN/m)	25	10-40	3%
r_2 (Ns/m)	1000	600-2400	10%
k_1 (kN/m)	120	60-240	10%

Tableau 4.1. Paramètres de conception du système de suspension

La figure 4.2 montre les amplitudes de la fonction de transfert X_2 pour différentes valeurs de r_2. Les fréquences du système sont ω_1=9,1 rad/s, ω_2= 68,8 rad/s et ω_r= 21,4 Hz.

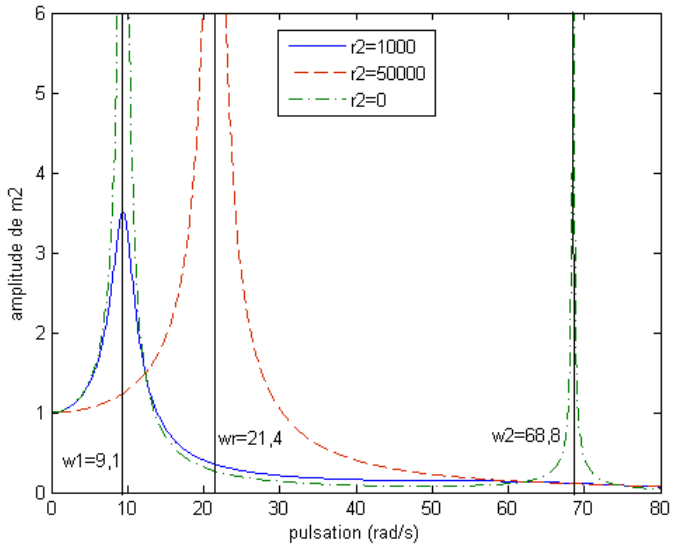


Figure 4.2. la réponse de la fonction de transfert normalisée pour 3 valeurs d'amortissement : r_2=0, r_2=1000, and r_2=50000.

Comme prévu, pour r_2=0 Ns/m, l'amplitude maximale se produit aux fréquences ω_1 et ω_2, mais elle est négligeable au ω_r. Par contre, pour des valeurs d'amortissement assez grandes (par exemple r_2=50000 Ns/m pour montrer l'effet d'un amortissement infini), l'amplitude maximum a lieu à ω_r. En conclusion, une valeur finie d'amortissement (par exemple r_2=1000 Ns/m) produit une amplitude normalisée sur tout l'intervalle des fréquences d'excitation, bien que des maxima et minima locaux se produisent près de ω_1, ω_2 et ω_r. Nous cherchons à obtenir une faible amplitude normale. Comme suggéré par la figure 4.2, une alternative raisonnable est de contrôler les amplitudes normales près des fréquences ω_1, ω_2 et ω_r. Ainsi, par la convenance, nous choisissons ces trois fréquences comme fréquences critiques pour représenter la plage de fréquences.

4.2.3 Conception déterministe optimale

Dans ce paragraphe, nous considérons que les paramètres de conception sont déterministes. Remplaçons les fréquences ω_1, ω_2 et ω_r dans l'expression 4.12, nous obtenons trois amplitudes :

$$\left|X_1\right|_i = \left|X_1(\omega_i)\right|,\ \omega_i=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_r\} \tag{4.17}$$

Afin de contrôler ces trois amplitudes, une fonction objectif est construit en termes des paramètres r_2 et k_2 :

$$\underset{r_2 k_2}{minimiser} \quad \sqrt{\left|X_1\right|_1 + \left|X_1\right|_1 + \left|X_1\right|_1} \tag{4.18}$$

$$\text{sous les contraintes} \quad 600 \le r_2 \le 2400$$
$$10000 \le k_2 \le 40000$$

Pour les paramètres du tableau 4.1, nous trouvons r_2= 2337 N.s/m et k_2=14000 N.m.

4.2.4 Prise en compte des incertitudes

La conception déterministe améliore fortement la performance des systèmes mécaniques. Cependant, elle peut nous mener à une conception non fiable si les incertitudes sur les paramètres ne sont pas prises en compte.

Considérons le cas simple où les paramètres $\boldsymbol{k}_1$ et $\boldsymbol{m}_1$ sont des variables aléatoires lognormales de moyennes μ_{k1}=120000 N.m et μ_{m2}=229 kg et d'écarts-types σ_{k1}=12000 N.m et σ_{m2}=30 kg. La figure 4.3 montre les amplitudes maximales et minimales obtenues par simulations de Monte-Carlo avec 10^4 tirages. Cette figure montre également la solution du problème d'optimisation déterministe. Les valeurs élevées de l'amplitude à cause des incertitudes dans les paramètres d'entrée soulignent la faiblesse de la conception déterministe.

4.2.5 Conception robuste

Pour simuler les incertitudes dans le système, les paramètres incertaines $\boldsymbol{m}_2$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{k}_1$ et $\boldsymbol{k}_2$ sont modélisés par des variables aléatoires lognormales comme indiqué dans le tableau 4.1.

Les fréquences propres $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ et $\boldsymbol{\omega}_r$ sont maintenant des quantités aléatoires ; par exemple, nous représentons sur la figure 4.4 l'histogramme de la fréquence $\boldsymbol{\omega}_r$ par la méthode des simulations de Monte-Carlo avec 10^4 tirages ; des histogrammes similaires peuvent être construits pour les fréquences $\boldsymbol{\omega}_1$ et $\boldsymbol{\omega}_2$. La valeur de la fréquence propre qui peut engendrer l'amplitude maximale du système est clairement inconnue.

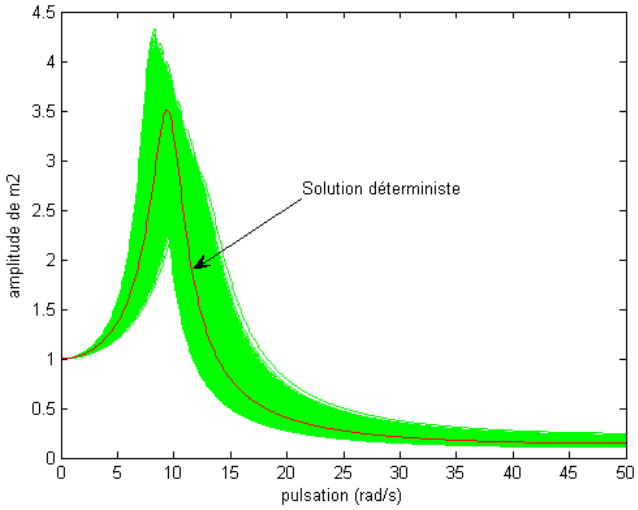


Figure 4.3. Amplitude de masse $\boldsymbol{m}_2$ avec $\boldsymbol{k}_1$ et $\boldsymbol{m}_2$ modélisée par des variables aléatoires lognormales, la courbe en rouge est la courbe déterministe.

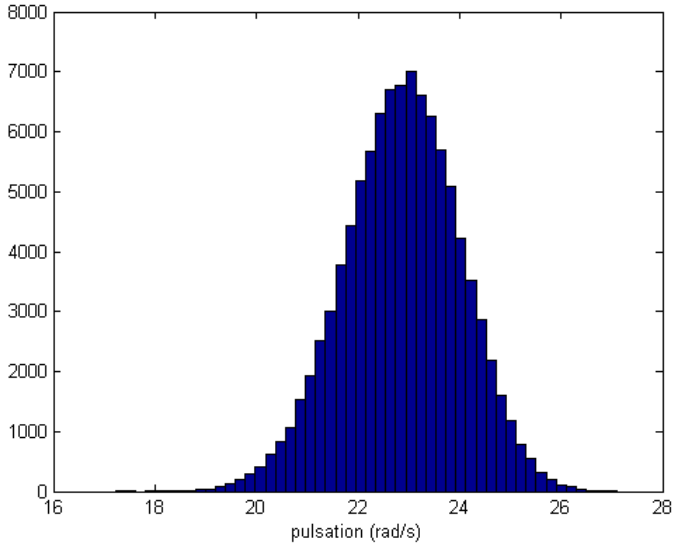


Figure 4.4. Histogramme de la pulsation propre $\boldsymbol{\omega}_r$

La réponse maximale de $\boldsymbol{X}_2$ est toujours obtenue pour les trois pulsations propres aléatoires $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ et $\boldsymbol{\omega}_r$. Définissons donc ces trois quantités aléatoires :

$$\left|\boldsymbol{X}_2\right|_i = \left|\boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{\omega}_i)\right|,\ \omega_i=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_r\} \tag{4.19}$$

Considérons les quantités suivantes :

$$\mu_{|X_2|_{max}} = E\left[max\left(|X_2|_i\right)\right] \tag{4.20}$$

$$\sigma_{|X_2|_{max}} = E\left[\ max\left(\sigma_{|X_2|_i}\right)\right] \tag{4.21}$$

Par conséquent, le problème de la conception robuste peut être formulée sous la forme :

$$\text{minimiser } \mu_{|X_2|_{max}}, \sigma_{|X_2|_{max}} \tag{4.22}$$

sous les contraintes

$$150 \le m_2 \le 400$$
$$600 \le r_2 \le 2400$$
$$60000 \le k_1 \le 240000$$
$$10000 \le k_2 \le 40000$$

Nous cherchons donc le point de conception permettant de minimiser les deux fonctions objectifs $\mu_{|X_2|_{max}}$ et $\sigma_{|X_2|_{max}}$.

Nous commençons par le point de conception optimale en minimisant chacune des deux fonctions objectifs séparément, que nous notons (μ^*, σ^*). Ensuite, les deux fonctions sont combinées dans une seule fonction objectif simple G :

$$G = \alpha \frac{\mu_{|X_2|_{max}}}{\mu^*} + (1-\alpha)\frac{\sigma_{|X_2|_{max}}}{\sigma^*} \tag{4.23}$$

où la pondération $\alpha \in [0, 1]$ représente l'importance relative des deux fonctions objectifs. G est réduite au minimum pour α entre 0 et 1. La figure 4.5 montre les résultats dans l'espace objectif, constitué des valeurs de $\mu_{|X_2|_{max}}$ et $\sigma_{|X_2|_{max}}$. La relation entre les deux fonctions objectives peut être clairement observée. Les points représentés sur la figure sont les résultats de l'optimisation des fonctions objectifs de la moyenne et de l'écart-type, pour différentes valeurs de α. Les 11 solutions optimisées pour les paramètres du système de suspension (rigidité et amortissement) ainsi que la solution issue d'une étude avec les valeurs de référence sont donnés dans le tableau 4.2.

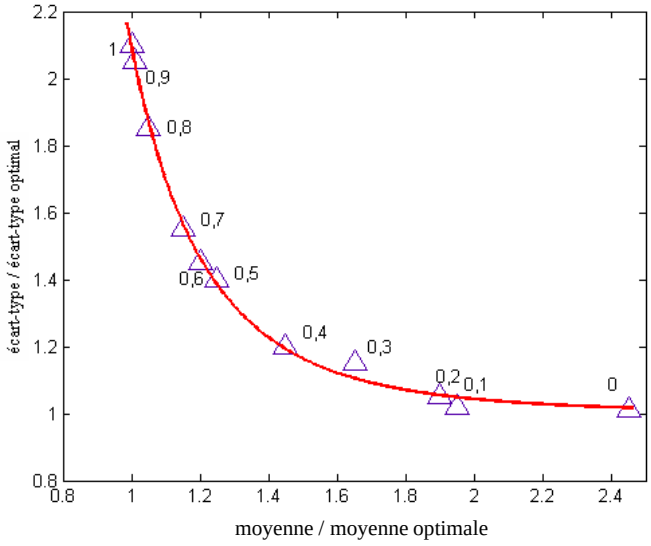


Figure 4.5. Résultats d'optimisation robuste

α	k_2 (N/m)	r_2 (Ns/m)
1	10100	2400
0,9	10800	2334
0,8	12000	1962
0,7	15100	1943
0,6	17000	1685
0,5	18800	1597
0,4	24600	1466
0,3	29600	1396
0,2	37400	1284
0,1	40000	1193
0	40000	1100
Référence	25000	1000

Tableau 4.2. les solutions de la conception robuste d'un système de suspension

A partir des résultats dans le tableau 4.2, nous remarquons que toutes les valeurs de l'optimisation sont supérieures à la valeur de référence utilisée pratiquement pour le système de suspension de cette voiture (1000 Ns/m). Les plus grandes valeurs d'amortissement peuvent réduire l'amplitude de la réponse maximale très efficacement, bien que dans la pratique la valeur de l'amortissement qu'on peut ajouter est limitée. Par contre la valeur de référence de la raideur est proche de celles issues de l'optimisation.

Quatre formes représentatives sont étudiées, à savoir pour α = 1, α = 0,5, α = 0 et le cas calculé à partir des valeurs de référence. Les dispersions de la réponse en fonction de la fréquence sont tracées dans les Figures 4.6 à 4.9, ainsi que la réponse moyenne correspondante. Les amplitudes de la réponse des trois cas de conception robustes (α = 1, α = 0,5 et α = 0) sont plus petites que ceux du système réel. Le cas α=1 a la moyenne de la réponse réduite au minimum et les variations les plus importantes, tandis que le cas (α=0) a la moyenne le plus élevée et les variations les moins importantes. Le cas (α=0,5) est un compromis entre les deux cas précédents, avec une moyenne relativement faible et des variations peu sensibles aux incertitudes. Une autre remarque importante sur la figure 4.9 est que les incertitudes déclenchent le mode de vibration associé à ω_r, c'est pourquoi nous avons commencé par étudier les réponses de système non seulement à ω_1 et ω_2 mais aussi à ω_r.

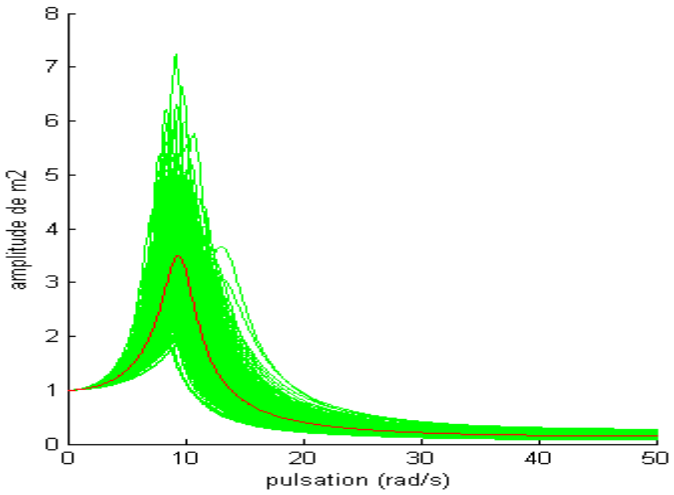


Figure 4.6. Simulation de Monte-Carlo (réel)

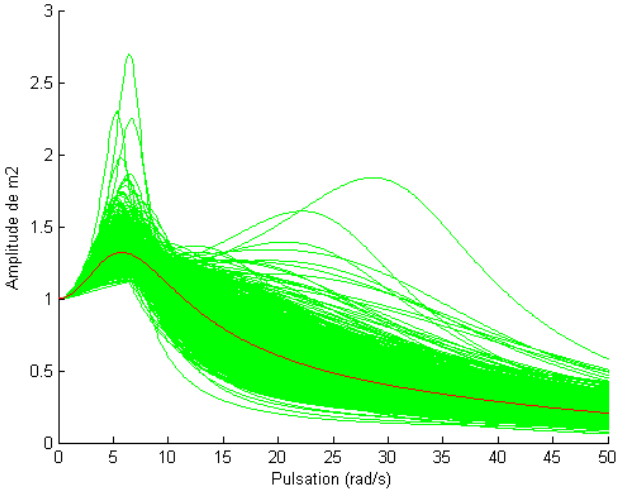


Figure 4.7. Simulation de Monte-Carlo (α=1)

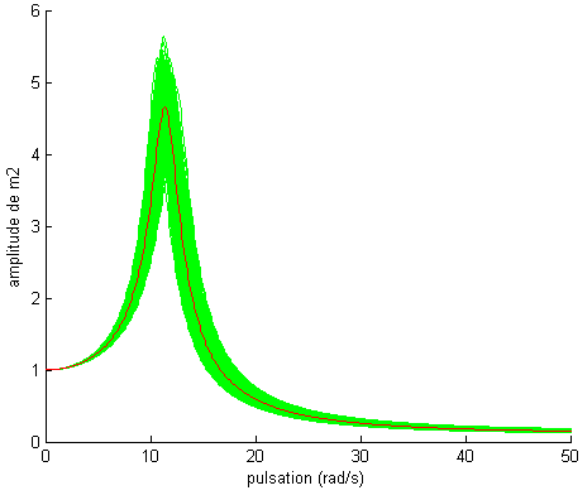


Figure 4.8. Simulation de Monte-Carlo (α=0)

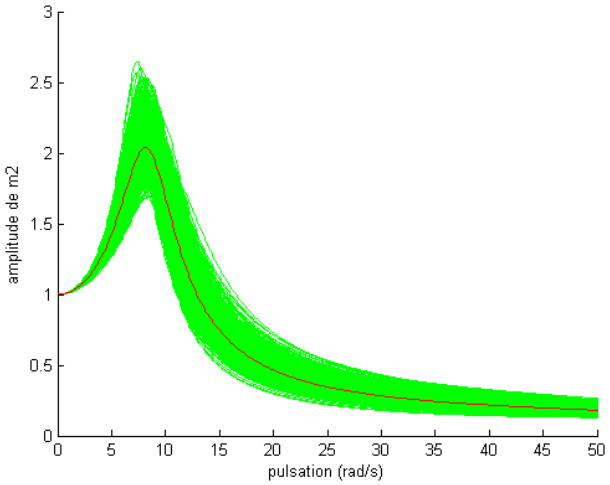


Figure 4.9. Simulation de Monte-Carlo (α=0,5)

4.3 Conception robuste d'une ligne d'échappement

La mise en œuvre de la méthode de conception robuste est maintenant réalisée sur l'exemple industriel d'une ligne d'échappement que nous avons eu l'occasion de décrire dans le paragraphe 3.2.2. Le modèle éléments finis associé est basé sur les caractéristiques géométriques et physiques précisées dans le tableau 3.14. Les résultats obtenus dans le paragraphe 3.2.2. constituent le modèle stochastique de base associé à notre problème de conception robuste. Nous présentons par la suite l'étude d'optimisation.

4.3.1 Etude paramétrique de la conception de la ligne d'échappement

Nous avons vu ci-dessus que la fiabilité structurale peut être améliorée en minimisant l'écart-type de la fréquence propre de la structure. C'est pourquoi il est important de comprendre l'effet de chaque paramètre sur la variabilité des valeurs propres du système. Dans cette étude, nous avons décidé de définir plusieurs groupes d'incertitudes, pour montrer clairement leur effet sur la dispersion des fréquences propres.

Les paramètres de la conception peuvent être divisés en trois groupes : 1) la masse volumique ρ, 2) les raideurs k_1 à k_4, et 3) Le rayon et l'épaisseur des tubes.

Les calculs numériques sont faits par la Méthode des Eléments Finis Stochastiques Spectrale pour les groupes 1 et 2 et par les simulations de Monte-Carlo pour le groupe 3.

Cas d'étude	CV	f_1(Hz)	f_2(Hz)	f_3(Hz)	f_4(Hz)
Tous les paramètres		3,90	4,24	6,92	7,33
Densité	0,02	0,23	0,4	1,19	1,64
Géométrie	R_1: 0,02; e: 0,05	0,64	1,47	4,29	4,81
	R_1: 0,02; e: 0,10	1,21	2,23	6,81	7,21
Les raideurs de ressorts (k_1 to k_4)	0,05	0,61	0,16	0,06	0,11
	0,10	1,19	0,32	0,12	0,21
	0,15	1,78	0,48	0,18	0,31
	0,20	2,45	0,63	0,24	0,42
	0,30	3,63	0,96	0,36	0,63

Tableau 4.3. Ecart-type des quatre premières fréquences propres

Le tableau 4.3 montre les quatre premières fréquences propres en fonction des coefficients de variations des paramètres du système. Il faut noter que les paramètres non mentionnés sont considérés comme déterministes pour quantifier le seul effet des paramètres étudiés.

A partir des résultats du tableau 4.3, nous pouvons constater que :

1- la première fréquence propre peut avoir un coefficient de variation allant jusqu'à 10%, et elle est la plus affectée par les incertitudes du système ;
2- pour le premier mode propre, les incertitudes des raideurs des ressorts ont un effet prépondérant sur la fréquence propre, suivies par l'épaisseur des tubes. Ce résultat est inversé pour les modes supérieurs, où l'épaisseur du tube devient en grande partie dominante.

3- les deux points précédents indiquent que les incertitudes des ressorts ont uniquement un effet sur la première fréquence propre, comme nous pouvons le voir sur la figure 4.10, ces incertitudes peuvent être négligées pour les modes supérieurs.
4- pour les modes supérieurs à 3, les incertitudes sur l'épaisseur deviennent les seuls paramètres à prendre en considération.

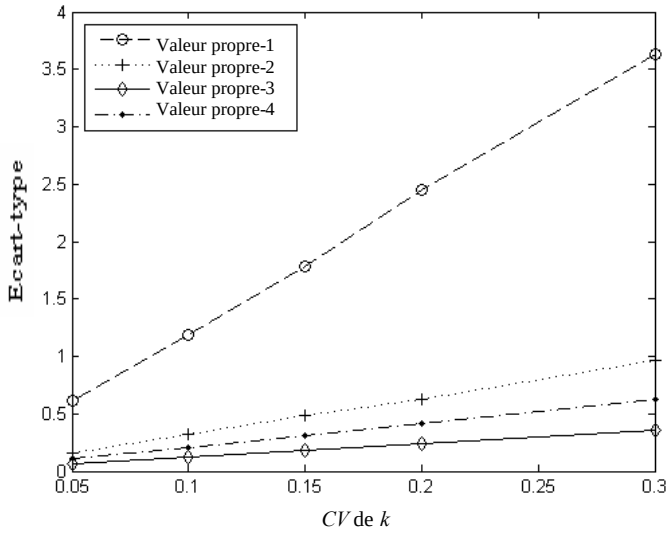


Figure 4.10. Ecart-type des quatre premières fréquences propres en fonction de l'écart-type des ressorts.

Nous allons donc concentrer notre étude sur le mode fondamental de vibration, où les effets des incertitudes des ressorts se sont montrés dominants en comparaison avec les autres paramètres.

Il est nécessaire maintenant de déterminer quel ressort, parmi les quatre, joue un rôle important dans les variabilités de la sortie. Ainsi, les raideurs de trois ressorts sont maintenues déterministes et le quatrième est considéré aléatoire avec un coefficient de variation de 20%. Nous trouvons donc les résultats présenté dans le tableau 4.4 et illustré sur la figure 4.11. Pour la première fréquence, nous remarquons que les ressorts 1 et 2 ont les effets les plus importants, tandis que les incertitudes des ressorts 3 et 4 ne sont pas significatives pour la première fréquence propre. Concernant le deuxième mode, le ressort 2 devient significatif, suivi par le ressort 3 ; cependant ces incertitudes restent faibles pour une conception pratique.

Cas d'étude	CV	f_1(Hz)	f_2(Hz)	f_3(Hz)	f_4(Hz)
ressort	k_1 : 0,2	3,447	0,154	0,118	0,012
	k_2 : 0,2	1,139	0,396	0,329	0,135
	k_3 : 0,2	0,308	0,826	0,046	0,043
	k_4 : 0,2	0,032	0,261	0,040	0,622

Tableau 4.4. influence des incertitudes des ressorts.

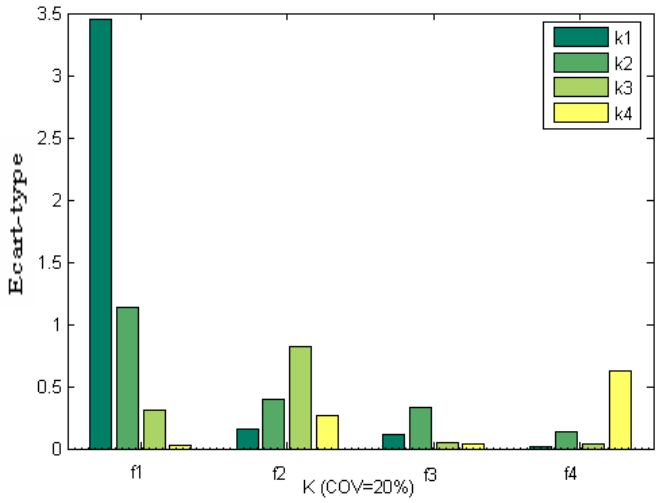
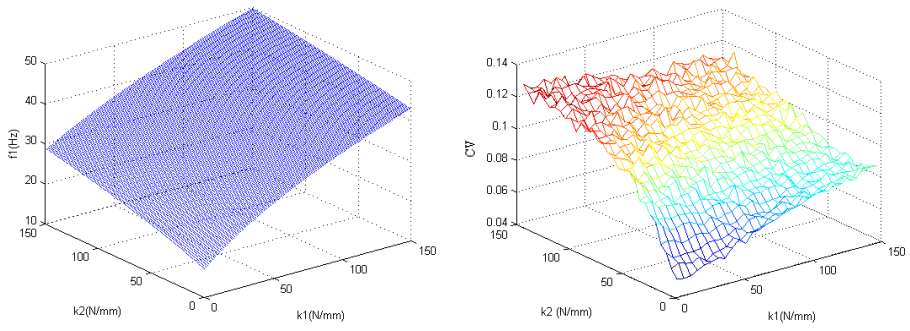


Figure 4.11. Ecart-type des premières quatre fréquences propres en fonction des incertitudes des ressorts.

4.3.2 Position et valeur de la raideur des ressorts

L'étude ci-dessus a montré l'effet des incertitudes des ressorts (surtout 1 et 2) sur la variation de la première fréquence propre. Par conséquent, il est intéressant d'optimiser la valeur moyenne de ces ressorts et puis de chercher la position optimale des supports, afin d'améliorer le niveau de fiabilité du système. La figure 4.12 montre l'effet des raideurs des ressorts 1 et 2 sur la moyenne de la première fréquence propre (figure 4.12.a) et sur le coefficient de variation (figure 4.12.b). Ces figures montrent que les valeurs élevées de k_2 augmentent non seulement la moyenne de la fréquence, mais aussi sa variabilité, tandis que les valeurs élevées de k_1 augmentent les valeurs moyennes de la fréquence en grande partie sans trop augmenter sa variabilité. Ce genre de courbes nous offre un outil puissant d'aide à la décision, afin de définir la meilleure combinaison des paramètres de la raideur.



(a) (b)

Figure 4.12. Moyenne et coefficient de variation de la première fréquence propre en fonction des raideurs k_1 and k_2.

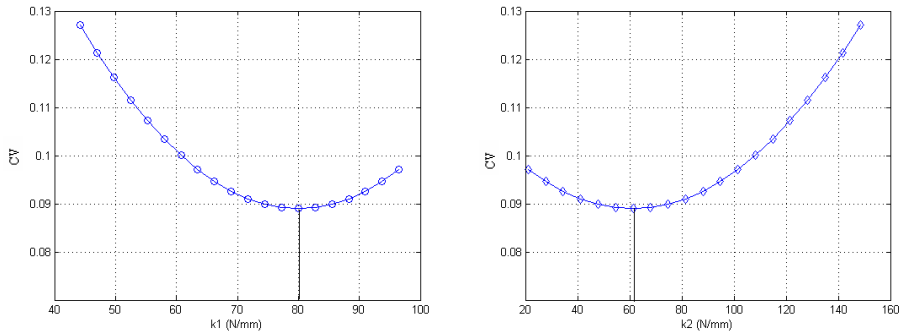


Figure 4.13. CV de la première fréquence propre en fonction des raideurs k_1 et k_2.

Sachant que la fréquence fondamentale désirée est fixée à 39 Hz, (valeur imposée par le cahier des charges), une conclusion pratique peut être déduite de la figure 4.12 en recherchant les valeurs des raideurs qui minimisent la dispersion de la fréquence propre. Ainsi, la surface de la figure 4.12.a est coupée par un plan horizontal à f_1=39 Hz, ce qui nous donne une courbe définissant la relation entre k_1 et k_2, notée $g(k_1,k_2)$=39 Hz. Ensuite, le coefficient de variation de la fréquence propre est tracé pour les points définis par cette équation, ce qui nous conduit aux courbes sur la figure 4.13. Ainsi, le point de conception optimal de ces deux ressorts sont k_1=80 N/mm et k_2=61,3 N/mm, puisqu'ils minimisent le coefficient de variation de la fréquence propre.

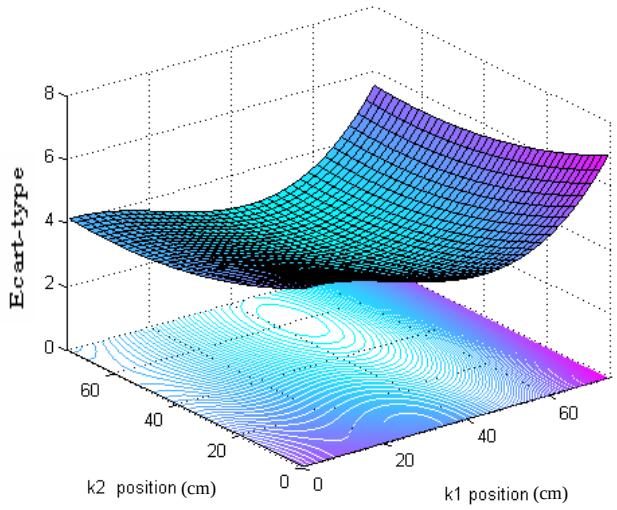


Figure 4.14. Ecart-type de la première fréquence propre en fonction des positions des ressorts.

Le choix des positions de ces ressorts est un autre paramètre important dans la conception probabiliste. En considérant les valeurs des raideurs (k_1 = 80 N/mm, k_2 = 61,3 N/mm), les deux premiers ressorts sont déplacés dans un intervalle de [0, 75] cm mesuré à partir de l'extrémité de la ligne d'échappement. La figure 4.14 montre les variations du coefficient de variation de la fréquence fondamentale en fonction des positions des deux ressorts. La solution optimale pour minimiser la dispersion de la fréquence propre est trouvée en déplaçant le premier ressort à 32 cm à partir de l'extrémité de la ligne d'échappement (au lieu de la distance initiale de 25 cm) et la position du deuxième ressort à 64 cm (au lieu de 75 cm). Dans

ce cas, l'écart-type de la fréquence propre est réduite à 3,1 au lieu de 3,9. Sur les bases de cette étude, le but de la conception robuste est achevé en choisissant la meilleure combinaison des moyennes et des positions des ressorts, afin d'atteindre la dispersion la plus basse tout en satisfaisant la moyenne escomptée de la fréquence propre.

4.3.3 Effet de la corrosion des tubes

Le phénomène de corrosion cause une perte aléatoire de l'épaisseur des tubes de la ligne d'échappement. Ainsi, il est important de concevoir le système non seulement pour une courte durée, mais aussi pour résister sur le long terme. Une méthode pratique pour prendre en compte le processus de la corrosion uniforme est d'utiliser une loi de puissance afin de modéliser les pertes d'épaisseur :

$$\Delta e = C\, t^{n} \tag{4.24}$$

où Δe est la perte d'épaisseur, t est le temps écoulé et C et n sont les constantes de la corrosion.
Sur la base des études statistiques en conditions atmosphériques, la moyenne et l'écart-type sont, respectivement, 0,066 et 0,037 pour le constant C, et 0,53 et 0,14 pour le constant n. Dans un environnement plus agressif, le processus de corrosion est activé et le paramètre C augmente. Par conséquent, pour la même période de référence (10 ans), quatre taux de corrosion sont considérés : taux atmosphérique, faible corrosion (C=0,132), corrosion modérée (C=0,198) et forte corrosion (C=0,224). Pendant la durée de vie du système, l'épaisseur (e-Δe) doit être considérée au lieu de l'épaisseur initiale.

La figure 4.15 montre l'évolution de l'écart-type de la fréquence fondamentale en fonction de la durée de vie du système, pour différents taux de corrosion. Comme prévu, l'écart-type augmente fortement avec le vieillissement du tube. La forte corrosion produit une très grande diminution de la fiabilité. La non linéarité de ces courbes est plus remarquée pour les taux de corrosion élevés.

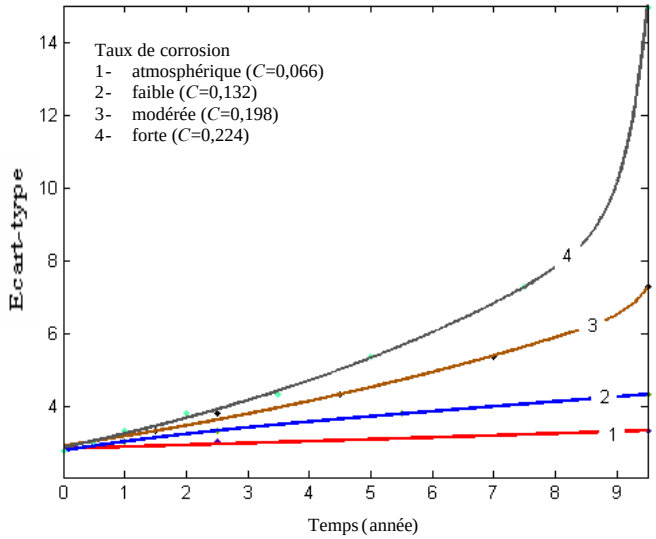


Figure 4.15. Effet de la corrosion active sur l'écart-type de la fréquence fondamentale de système.

Ces informations peuvent être directement intégrées dans la description du coût global de conception et de maintenance.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, l'effet des incertitudes sur les matériaux et les paramètres géométriques, vis-à-vis de la dispersion de la fréquence propre est analysé. La propagation des incertitudes est effectuée soit par la méthode des éléments finis stochastiques spectrale, soit par la méthode de Monte-Carlo. L'analyse des systèmes montre l'intérêt de la conception robuste. Elle fournit des informations utiles sur la variabilité des fréquences propres. De plus, elle permet de choisir les paramètres qui contrôlent la fiabilité du système. En comparaison avec la conception déterministe, l'analyse probabiliste offre un outil puissant pour la conception robuste des systèmes soumis aux charges dynamiques.

La MEFSS permet d'avoir à moindre coût les moments de la réponse (moyenne et écart-type) des valeurs propres en vue de pouvoir traiter des problèmes d'optimisation avec plusieurs fonctions objectifs. Nous avons montré par ces résultats que les méthodes de conception robustes ont un grand potentiel dans le domaine de la dynamique des structures.

Conclusion générale

Les méthodes d'éléments finis stochastiques (MEFS) sont des alternatives aux méthodes de Monte-Carlo, notamment pour le traitement des problèmes de propagation d'incertitudes dans les modèles mécaniques. Dans ce mémoire, nous avons proposé une méthode d'éléments finis stochastiques spectraux pour la résolution des problèmes aux valeurs propres. Cette méthode est basée sur une projection sur un chaos polynomial homogène. Le schéma de résolution est adapté au calcul des valeurs propres ainsi qu'aux modes propres aléatoires.

Après avoir défini le concept de l'étude stochastique permettant de représenter les incertitudes de la structure étudiée, divers outils mathématiques ont été introduits pour la description de ces incertitudes. L'étude bibliographique nous a conduit à une classification des MEFS. Il peut être utile de distinguer les MEFS modifiant ou non le modèle. La MEFSS présente l'avantage de pouvoir prendre en compte un grand nombre de v.a, ces dernières pouvant résulter, par exemple, de la discrétisation d'un champ aléatoire.

Nous nous sommes ensuite intéressés à l'élaboration d'une MEFSS pour l'analyse modale des structures linéaires avec incertitudes. La MEFSS est formulée pour l'analyse de la propagation des incertitudes dans les problèmes aux valeurs propres, où l'aléa porte sur le module d'élasticité et sur la masse volumique. Ces paramètres sont modélisés soit par des variables aléatoires (gaussiennes ou lognormales) soit par des processus (gaussiens ou lognormaux). Le calcul des valeurs et des modes propres utilise une double projection sur une base modale déterministe, et sur le chaos homogène. Cette méthode permet de se ramener à la résolution d'un système non linéaire de faible taille, même si le problème éléments finis est de taille importante. On peut alors trouver à moindre coût les moments correspondant aux valeurs et aux vecteurs propres, soit de façon analytique, soit par une rapide simulation de Monte-Carlo. Cette méthode permet d'obtenir, non seulement les moments de la réponse, mais également sa densité de probabilité, constituant ainsi un outil intéressant pour les analyses de fiabilité et de sensibilité.

La méthode proposée est ensuite mise en œuvre sur plusieurs exemples d'application, afin de montrer son efficacité, et ses performances. Après l'analyse d'une structure simple composée de deux barres articulées, nous avons étudié une plate-forme à trois étages. Les paramètres incertains du module d'élasticité et de la masse volumique sont modélisés par une famille de v.a. gaussiennes ou lognormales. Les processus stochastiques ont été validés sur l'exemple d'une barre en traction dont le module d'élasticité et la masse volumique sont aléatoires. Enfin la MEFSS est appliquée à la ligne d'échappement d'une voiture.

La mise en oeuvre de la méthode et sa comparaison avec les résultats de référence obtenus par les simulations de Monte-Carlo montrent l'efficacité et la bonne précision de cette méthode, aussi bien pour le calcul des valeurs propres que pour le calcul des modes propres. Dans ces exemples d'application, le coût de la MEFSS proposée paraît minime par rapport à celui des simulations de Monte-Carlo.

Finalement, nous avons étudié l'extension de La MEFSS pour traiter des cas d'études qui relèvent de la conception robuste. Deux applications sont concernées : un système d'amortissement et une ligne d'échappement.

Cette étude relève un certain nombre d'éléments susceptible d'être améliorés.

Tout d'abord, le choix des lois de probabilité pour la modélisation des incertitudes doit être étudié de manière plus approfondie afin d'améliorer la précision des résultats obtenues. Nous avons vu dans les exemples la nécessité de quantifier à quel point les développements utilisés du processus d'entrée et de la réponse permettent une vision réaliste de la variabilité de la réponse de la structure considérée. En effet, dans ces problèmes, le nombre de v.a. est important du fait de la nécessité de construire des approximations de ces champs sous la forme de développements en séries tronquées contenant beaucoup de v.a. en général. Nous avons néanmoins constaté l'effet de ces développements sur l'exactitude de la réponse, et il serait donc intéressant de mener des études complémentaires dans cette voie.

De plus, il serait intéressant de tester dans de futurs travaux la qualité d'estimation de la densité de probabilité dans le conteste du calcul fiabiliste. Il faudra en effet vérifier que la qualité des queues de distribution est satisfaisante pour le calcul de la probabilité de défaillance.

Enfin, il nous faut citer que dans ce mémoire, seules les incertitudes concernant les rigidités et les masses structurales sont prise en compte. Il reste à envisager son extension à la description des incertitudes concernant les excitations et l'environnement dans le contexte d'une analyse de la réponse dynamique au cours du cycle de vie de la structure.

Bibliographie

[Alv98] Alvin K. F. *Efficient computation of eigenvector sensitivities for structural dynamics*. *AIAA Journal*, 35 (11): 1760, 1998.

[Ami06] Amirat A., Mohames-Chateauneuf A. and Chaoui K. *Reliability assessment of underground pipelines under the combined effect of active corrosion and residual stress*. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 83: 107-117, 2006.

[And99] Anders M. and Hori M. *Stochastic finite element method for elasto-plastic body*. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 46(11): 1897-1916, 1999.

[And01] Anders M. and Hori M. *Three dimensional stochastic finite element method for elasto-plastic bodies*. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 51: 449-478, 2001.

[Au 99] Au S.K. and Beck J.L. *A new adaptative importance-sampling scheme for reliability calculations*. *Structural Safety*, 21: 135-158, 1999.

[Bae81] Baecher G. B. and Ingra T. S. *Stochastic FEM in settlement predictions*. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 107(4): 449-463, 1981.

[Bai00] Bai Z., Demmel J., Dongarra J., Ruhe A. and Van der Vorst H. *Templates for the solution of algebraic eigenvalue problems: a practical guide*. SIAM, Philadelphia, 2000.

[Bar05] Baroth J. *Analyse par éléments finis stochastiques de la propagation d'incertitudes dans un modèle mécanique non linéaire*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal-Clermont Ferrand II, 2005.

[Bar07a] Baroth J., Bressolette Ph.,Chauvière C. and Fogli M. *An efficient SFE Method using Lagrange Polynomial: Application to nonlinear mechanical problems with uncertain parameters*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(45-48): 4419-4429, 2007.

[Bar07b] Baroth J., Bodé L., Bressolette Ph.and Fogli M. *Numerical convergence of a Spectral Stochastic Finite Element Method (SSFEM) in lognormal context. International Conference on Applications of Statistics and Probability*, 2007.

[Bat76] Bathe K.J. and Wilson E. *Numerical methods in finite element analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.

[Ben88] Benaroya H. and Rehak M. *Finite element methods in probabilistic structural analysis: A selective review. Applied Mechanics Review*, ASME, 41(5): 201-213, 1988.

[Bou03] Boucard P.-A. and Champaney L. *A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contacts. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(9): 1259-1281, 2003.

[Bou06] Bouazara M., Richard M. J. and Rakheja S. *Safety and confort analysis of a 3-D vehicle model with optimal non-linear active seat suspension. Journal of Terramechanics*, 43: 97-118, 2006.

[Bre95] Brenner C. and Bucher C. *A contribution to the SFE-based reliability assessment of nonlinear structures under dynamic loading. Journal of Engineering Mechanics*, 10: 265-273, 1995.

[Bre96] Brezinski C. *Extrapolation algorithms and Padé approximations: a historical survey. Applied Numerical Mathematics*, 20: 299-318, 1996.

[Cha91] Chang C.C. and Yang H. *Random vibration of flexible, uncertain beam element. Journal of Engineering Mechanics*, 117(10): 2329-2350, 1991.

[Che02] Chebli H. *Modélisation des incertitudes aléatoires non homogènes en dynamique des structures pour le domaine des basses fréquences*. Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et des Métiers – Office National d'Etudes et de Recherche Aérospatiales, 2002.

[Che05] Cheng J. and Xiao R.-C. *Probabilistic free vibration and flutter analyses of suspension bridges. Engineering Structures*, 27: 1509-1518, 2005.

[Che06] Chen S. H., Zhang X. M. and Chen Y. D. *Interval eigenvalues of closed-loop systems of uncertain structures. Computers and Structures*, 84: 243-253, 2006.

[Che09] Chen S. H., Ma L., Meng G. W. and Guo R. *An efficient method for evaluating the natural frequencies of structures with uncertain-but-bounded parameters. Computers and structures*, 87: 582-590, 2009.

[Dea04] Dean A. M. and Lewis S. M. *Screening*. Springer Verlag, 2004.

[Deo89] Deodatis G. *Stochastic FEM sensitivity analysis of nonlinear dynamic problems. Probabilistic Engineering Mechanics*, 4(3): 135-141, 1989.

[Deo90a] Deodatis G. *Bounds on Response Variability of Stochastic Finite Elements Systems*. Journal of Engineering Mechanics, 116(3): 565-585, 1990.

[Deo90b] Deodatis G. *Bounds on Response Variability of Stochastic Finite Elements Systems: effect of statistical dependence*. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 5(2): 88-98, 1990.

[Deo91a] Deodatis G. *The weighted integral method. I: Stochastic stiffness matrix*. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 117(8): 1851-1864, 1991.

[Deo91b] Deodatis G. The weighted integral method. *II: Response variability and reliability*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 117(8): 1865-1877, 1991.

[Der88] DerKiureghian A. and Ke J. B. *The stochastic finite element method in structural reliability*. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 3(2): 83-91, 1988.

[Der04] Deraemaeker A., Ladevèze P. and Romeuf T. *Model validation in the presence of uncertain experimental data*. *Engineering Computations*, 21(8): 808-833, 2004.

[Did97] Didrit O. *Analyse par intervalles pour l'automatique; Résolution globale et garantie de problèmes non linéaire en robotique et en commande robuste. PhD thesis,* Université de Paris-Sud, UFR scientifique d'Orsay, 1997.

[Dit96] Ditlevsen O. and Madsen H. O. *Structural Reliability Methods*. John Wiley and Sons, 1996.

[Eli79] Elishakoff I. *Simulation of space-random fields for solution of stochastic boundary-value problems*. *Journal of the Acoustical society of America*, 65(2): 399-403, 1979.

[Eli95] Elishakoff I., Ren Y. J. and Shinozuka M. *Improved finite element method for stochastic problems*. *Chaos, Solitons and Fractals*, 5(5): 833-846, 1995.

[Fal02] Falsone G. and Impollonia N. *A new approach for the stochastic analysis of finite element modelled structures with uncertain parameters*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191: 5067-5085, 2002.

[Fal04] Falsone G. and Impollonia N. *About the accuracy of a novel response surface method for the analysis of finite element modelled uncertain structures*. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 19: 53-63, 2004.

[Far89] Faravelli L. *Response Surface approach for reliability analysis*. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(12): 2673-2781, 1989.

[Fie04] Field R.V. and Grigoriu M. *On the accuracy of the polynomial chaos approximation*. *Probabilistic Engineering Mechanical*, 19:65-80, 2004.

[Fis96] Fishman G. S. *Monte Carlo: Concepts, Algorithms and Applications*. Springer Verlag, 1996.

[Fox68] Fox R. L. and Kapoor M. P. *Rate of change of eigenvalues and eigenvectors*. *AIAA Journal*, 6(12): 2426-2429, 1968.

[Gao07a] Gao W. and Kessissoglou N. J. *Dynamic response analysis of stochastic truss structures under non-stationary random excitation using the random factor method*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(25-28): 2765-2773, 2007.

[Gao07b] Gao W. and Kessissoglou N. J. *Natural frequency and mode shape analysis of structures with uncertainty*. *Mechanical system and signal processing*, 21(1): 24-39, 2007.

[Ger96] Geradin M. and Rixen D. *Théorie des vibrations - Applications a la dynamique des structures*. Masson, Paris, 1996.

[Gha91] Ghanem R. G. and Spanos P. D. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[Gha96] Ghanem R. and Kurger R. *Numerical solution of spectral stochastic finite elements systems*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129: 289-303, 1996.

[Gha99a] Ghanem R. *Ingredients for a general-purpose stochastic finite elements implementation*. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 168: 19-34, 1999.

[Gha99b] Ghanem R. and Red-Horse J. *Propagation of probabilistic uncertainty in complex physical systems using a stochastic finite element approach*. *Physica D*, 133:137-144, 1999.

[Gha99c] Ghanem R. *The Nonlinear Gaussian Spectrum Lognormal Stochastic Processes*. *Journal of Applied Mechanics*, 66(4):964-973, 1999.

[Gha99d] Ghanem R. *Stochastic Finite Element with Multiple Random Non-Gaussian Properties*. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(1): 26-40, 1999.

[Gha02] Ghanem R. and Pellisseti M. *Adaptative refinement in the spectral stochastic finite element*. *Communication*. *Numerical Methods in Engineering*, (18): 141-151, 2002.

[Gha05] Ghanem R., Masri S., Pellisseti M. and Wolfe R. *Identification and prediction of stochastic dynamical systems in a polynomial chaos basis*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194: 1641-1654, 2005.

[Ghi02] Ghiocel D.M. and Ghanem R. *Stochastic finite element analysis of seismic soil-structure interaction*. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(1): 66-77, 2002.

[Gob01] Gobbi M. and Mastinu G. *Analytical description and optimisation of the dynamic behaviour of passively suspended road vehicles*. *Journal of Sound and Vibrations*, 245(3): 457-481, 2001.

[Gob06] Gobbi M., Levi F. and Mastinu G. *Multi-objective stochastic optimisation of the suspension system of road vehicles*. *Journal of Sound and Vibrations*, 298: 1055-1072, 2006.

[Gon05] Gontier C. *Energetic classifying of vibration modes in subspace stochastic modal analysis*. *Mechanical systems and signal processing*, 19(1): 1-19, 2005.

[Gon06] Gontier C., George D. and Raffy M.*Energetic mode contributions in stochastic modal analysis: An application to mode classification*. *Journal of Sound and Vibration*, 294(4-5): 944-965, 2006.

[Gra98] Graham L.L. and Deodatis G. *Variability response functions for stochastic plate bending problems*. *Structural Safety*, 20: 167-188, 1998.

[Gra01] Graham L.L. and Deodatis G. *Response and eigenvalue analysis of stochastic finite element systems with multiple correlated material and geometrical properties*. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16: 11-29, 2001.

[Gri91] Grimette G. R. and Stirzaker D. R. *Probability and Random Process*. Oxford Science Publication, 1991.

[Gue06] Guedria M., Bouhaddib N. and Majed R. *Reduction of the stochastic finite element models using a robust dynamic condensation method*. *Journal of Sound and Vibration*, 297: 123-145, 2006.

[He00] He J.-H. *A new perturbation technique which is also valid for large parameters*. *Journal of Sound and Vibration*, 229(5): 1257-1263, 2000.

[Hel03] Helton J. C. and Davis F. J. *Latin hypercube sampling and propagation of uncertainty in analysis of complex systems*. *Reliability Engineering and System Safety*, 81: 23-69, 2003.

[Hem01] Hemez F. M., Wilson A. C. and Doebling S. W. *Design of computer experiments for improving an impact test simulation*. Proceeding of the 19th International Modal Analysis Conference (IMAC-XIX), 977-985, Floride, 2001.

[Hem04] Hemez F. M., Doebling S. W. and Anderson M. C. *A brief tutorial on verification and validation*. Proceeding of the 22nd International Modal Analysis Conference (IMAC-XXII), Michigan, 2004.

[Hie90] Hien T. D. and Kleiber M. *Finite element analysis based on stochastic Hamilton variational principle*. *Computers and Structures*, 37(6): 893-902, 1990.

[Hum99] Humbert L. *Recalage des modèles éléments finis à partir de mesures vibratoires*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1999.

[Ibr87] Ibrahim R. A. *Structural dynamics with parameters uncertainties*. *Applied Mechanics Review*, ASME, 40(3): 309-328, 1987.

[Iem06] Iemma U., Morino L. and Diez M. *Digital holography and Karhunen-Loève decomposition for the modal analysis of two-dimensional vibrating structures*. *Journal of Sound and Vibration*, 291(1-2), 107-131, 2006.

[Imp03] Impollonia N. and Sofia A. *A response surface approach for the static analysis of stochastic structures with geometrical nonlinearities*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192: 4109-4129, 2003.

[Joh97] Johnson E. A., Bergman L. A. and Spencer B. F. *Parallel implementation of Monte Carlo Simulation – Comparative studies from stochastic structural dynamics*. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 12(4): 208-212, 1997.

[Kam02] Kaminski F. *Stochastic perturbation approach to engineering structure vibrations by the finite difference method*. *Journal of Sound Vibration*, 251(4): 651-670, 2002.

[Kar02] Karakostas C. Z. and Manolis G. D. *Dynamic response of tunnels in stochastic soils by the boundary element method*. *Engineering analysis Boundary Elements*, 26: 667-680, 2002.

[Kea96] Kearfott R. B. *Interval computations: Introduction, uses and resources*. *Euromath bulletin*, 2(1): 95-112, 1996.

[Ken01] Kennedy M. C. and O'Hagan A. *Bayesian calibration of computer models*. *Journal of the Royal Statistical Society (Series B)*, 63: 425-464, 2001.

[Kle92] Kleiber M. and Hien T. D. *The Stochastic Finite Element Method*. John Wiley & Sons, Chichester-England, 1992.

[Kol56] Kolmogorov A. N. *Foundations of the theory of probability*. Chelsea, 1956.

[Lad99] Ladevèze P. and Chouki A. *Application of a posteriori error estimation for structural model updating*. *Inverse Problems*, 15:49-58, 1999.

[Lad06] Ladevèze P., Puel G., Deraemaeker A. and Romeuf T. *Validation of structural dynamics model containing uncertainties*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(4-6): 373-393, 2006.

[Law87] Lawrence M. A. *Basis random variables in finite element analysis*. *International Journal of Numerical Methods Engineering*, 24: 1849-1863, 1987.

[Lei00] Lei Z. and Qiu C. *Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration for structures with stochastic parameters to random excitation. Computer & Structures*, 77(6): 651-657, 2000.

[Lem97] Lemaire M. *Reliability and Mechanical design. Reliability Engineering and System Safety*, 55(2): 163-170, 1997.

[Lem05] Lemaire M., Chateauneuf A. and Mitteau J.P. *Fiabilité des structures*. Hermès, 2005.

[Li 93] Li C.C. and Der Kiureghian A. *Optimal discretization of random fields. Journal of Engineering Mechanics*, 119(6): 1136-1154, 1993.

[Li 97] Li R. and Ghanem R. *Adaptative polynomial chaos expansions applied to statistics of extremes in nonlinear random vibration. Probabilistic Engineering Mechanics*, 13(2): 125-136, 1997.

[Liu86a] Liu W.K., Belitschko T. and Mani A. *Random field finite elements. International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 23: 1831-1845, 1986.

[Liu86b] Liu W.K., Besterfield G. and Mani A. *Probabilistic finite element method in non-linear structural dynamics. Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, 57: 61-81, 1986.

[Liu87] Liu W.K., Belytscko T. and Mani A. *Finite elements methods in probabilistic mechanics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2(4): 201-213, 1987.

[Liu88] Liu W.K., Besterfield G. and Belytschko A. *Transient probabilistic systems. Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67: 27-54, 1988.

[Loè77] Loève. *Probability theory*. 4th edition, Springer-Verlag, New York, 1977.

[Lu00] Lu M.-W. and Forrest M. D. Probabilistic engineering design. International Journal of Vehicle Design, 23(1-2): 68-77:2000.

[Mah91] Mahadevan S. and Haldar. *Practical random field discretization in stochastic finite element analysis. Structural safety*, 283-304, 1991.

[Mat97] Matthies H.G., Brenner C.E., Bucher C.G. and Guedes Soares C. *Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids - Stochastic finite elements. Structural Safety*, 19(3): 283-336, 1997.

[McK79] McKay M. D., Beckman R. J. and Conover W. J. *A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. Technometrics*, 21(2): 239-245, 1979.

[Mei98] Mei H., Agrawal O. P. and Pai S. S. *Wavelet-based model for stochastic analysis of beam structures. AAIA Journal*, 36 (3): 465-470, 1998.

[Mic00] Micaletti R.C. *Direct generation of non-Gaussian weighted integrals. Journal of Engineering Mechanics*, 126(1): 66-75, 2000.

[Moo66] Moore R. E. *Interval Analysis. Prentice-Hall, Englewood cliffs, New Jersey*, 1966.

[Mus00] Muscolino G., Ricciardi G. and Impollonia N. *Improved dynamic analysis of structures with mechanical uncertainties under deterministic input. Probabilistic Engineering Mechanics*, 15: 199-212, 2000.

[Nag07] Nagh M. F. and Yong A. *Application of the spectral stochastic finite element method for performance prediction of composite structures. Composite Structures*, 78: 447-456, 2007.

[Nel76] Nelson R. B. *Simplified calculation of eigenvector derivatives. AIAA Journal*, 14(9): 1201-1205, 1976.

[O'C01] O'Callaghan M. *Modelling random fields using transformations and Hermite polynomials. Probabilistic Engineering Mechanical*, 16: 245-252, 2001.

[Oh 97] Oh D. H. and Librescu L. *Free vibration and reliability of composite cantilevers featuring uncertain properties. Reliability Engineering&System safety*, 56(3): 265-272, 1997.

[Pap99] Papadrakakis M. and Papadopoulos V. *Parallel solution methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo simulation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 168:305-320, 1999.

[Pel00] Pellissetti M. F. and Ghanem R. G. *Iterative solution of system of linear equations arising in the context of stochastic finite elements. Advances in Engineering Software*, 31: 607-616, 2000.

[Pha89] Phadke M. S. *Quality Engineering using Robust Design*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

[Poi99] Poirion F. and Soize S. *Monte Carlo construction of Karhunen-Loève expansion for non-gaussian random fields*. In CDROM edited by N.-P. Jones and R.G. Ghanem, editors, Proceedings of the 13th ASCE Engineering Mechanics Division Conference. The Johns Hopkins University, Baltimore, MD, USA, June 13-16 1999.

[Pui02] Puig B., Poirion F. and Soize C. *Non-Gaussian simulation using Hermite polynomial expansion. Probabilistic Engineering Mechanical*, 17: 253-264, 2002.

[Qiu05] Qiu Z., Wang X. and Friswell M. *Eigenvalue bounds of structures with uncertain-but-bounded parameters. Journal of sound and vibrations*, 282(1-2): 297-312, 2005.

[Roy91] Roy R. V. and Spanos P. D. *Padé-type approach to nonlinear random vibrations analysis. Engineering Probabilistic Mechanics*, 6: 119-544, 1991.

[Sal04] Saltelli A., Tarantola S., Campolongo F. and Ratto M. *Sensitivity Analysis in Practice: A Guide to Assessing Scientific Models*. John Wiley ans Sons, 2004.

[Sar02] Sarkar A. and Ghanem R. *Mid-frequency structural dynamics with parameters uncertainty*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191: 5499-5513, 2002.

[Sav03] Savage G. J., Tong D. and Carr S. M. *Minimizing cost of multiple response systems by probabilistic robust design*. *Quality Engineering*. 16: 67-74, 2003.

[Sav06] Savage G. J., Tong D. and Carr S. M. *Optimal mean and tolerance allocation using performance-based design*. Quality and Reliability Engineering International. 22: 445-472, 2006.

[Sch97] Schuëller G.I. et al. *A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics*. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 12(4): 197-321, 1997.

[Sch01] Schuëller G.I. et al. *Computational stochastic mechanics - recent advances*. *Computers and Structures*, 79: 2225-2234, 2001.

[Shi88] Shinozuka M. and Yamazaki F. *Stochastic Structural Dynamics: Progress in Theory and Applications*. *Elsevier Applied Sciences*, editors: Ariaratnam S.T., Schuëller G.I., Elishakoff I., 1991.

[Shi91] Shinozuka M. and Deodatis G. *Simulation of stochastic process by spectral representation*. *Applied Mechanics Reviews*, ASME, 44(4): 191-204, 1991.

[Sim07] Sim J., Qiu Z. and Wang X.*Modal analysis of structures with uncertain-but-bounded parameters via interval analysis*. *Journal of Soundand Vibrations*, 303(1-2): 29-45, 2007.

[Soi86] Soize C. *Modélisation probabiliste du flou structural en dynamique linéaire des systèmes mécaniques complexes - I. Eléments théoriques*. *La Recherche Aéropostale*, 5 : 337-362, 1986.

[Soi93] Soize C. *Méthodes Mathématiques en Analyse du Signal*, Masson, Paris, 1993.

[Soi94] Soize C. *Vibration damping in low-frequency range due to structural complexity – a model based on the theory of fuzzy structures and parameters estimation*. *Computers and Structures*, 58(5): 901-915, 1994.

[Soi00] Soize C. *A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics*, *Probabilistic Mechanics Engineering*, 15: 277-294, 2000.

[Son07] Son Y. K. and Savage G. J. *Optimal probabilistic design of the dynamic performance of a vibration absorber. Journal of sound and vibration*. 307: 20-37, 2007.

[Spa89] Spanos P.D. and Ghanem R. *Stochastic finite element expansion for random media*. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(5): 1035-1053, 1989.

[Spe89] Spence R. and Soin S. R. *Tolerance Design of Electronic Circuits*. Imerial College Press, London 1997.

[Ste04] Stefanou G., Papadrakatis M. *Stochastic finite element analysis of shell with combined random material and geometric properties*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193: 139-160, 2004.

[Ste09] Stefanou G. *The Stochastic finite element method: Past, present and future*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198: 1031-1051, 2009.

[Sud00] Sudret B. and Der Kiureghian A. *Stochastic Finite Element Methods and Reliability*. A State-of-the-Art Report. Report No.UCB/SEMM-2000/08, Department of Civil & Engineering University of California, Berkeley, 2000.

[Sud03] Sudret B. and Cherradi I. *Quadrature method for finite element reliability analysis*. *Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, Millpress*, 1: 387-394, 2003.

[Sud04] Sudret B., Berviellerr M., Lemaire M. *éléments finis stochastiques en élasticité linéaire. C.R. Mécanique*, 332: 531-537, 2004.

[Sze01] Szekelu G. S. and Schuëller I. *Computational procedure for a fast calculation of eigenvectors and eigenvalues of structures with random properties*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(8-10): 799-816, 2001.

[Tak90a] Takada T. *Weighted integral method in multidimensional stochastic finite element analysis*. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 5(3): 146-156, 1990.

[Tak90b] Takada T. *Weighted integral method in multidimensional stochastic finite element analysis*. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 5(4): 158-166, 1990.

[Tak92] Takada T. *Variability response functions and stochastic field discretization in stochastic finite element methods*. Proceeding of the sixth Specially Conference on Probabilistic Mechanics and Structural and Geotechnical Reliability, Denver, Connecticut, July 1992.

[Van03] Van den Nieuwenhof B. and Coyette J.-P. *Modal approaches for the stochastic finite element analysis of structures with material and geometric uncertainties*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192: 3705-3729, 2003.

[Van04] Van den Nieuwenhof B. *Stochastic Finite Elements for Elastodynamics: Random Field and Shape Uncertainties Modelling Using Direct and Modal Perturbation-Based Approaches*. Thèse de doctorat, Université catholique de Louvain – Faculté des sciences appliqués – Unité de Génie Civil et Environnemental, 2004.

[Ven97] Venini P. and Mariani C. *Free vibrations of uncertain composite plates via stochastic Rayleigh-Ritz approach*. *Computers &Structures*, 64(1-4): 407-423, 1997.

[Wan91] Wang B. P. *Improved approximate method for computing eigenvector derivatives in structural dynamics*. AIAA Journal, 29(6): 1018-1021, 1991.

[Wei] Weisstein E. W. *Padé approximant*. Wolfram Research, Inc. http://mathworld.wolfram.com/PadeApproximant.html

[Wie38] Wiener N. *The homogeneous chaos. American Journal of Mathematics*, 60: 897-936, 1938.

[Xiu02] Xiu D., Karniadakis G.E. *Modelling uncertainty in steady state diffusion problems via generalized polynomial chaos*. *Computer Methods Applied Mechanical Engineering*, 191: 4927-4948, 2002.

[Yam88] Yamasaki F., Shinozuka M. and Dasgupta G. *Neumann expansion for stochastic finite element analysis*. *Journal of Engineering Mechanics*, 114(8): 1335-1354, 1988.

[Yan03] Yang K. and El-Haik B. *Design for six Sigma: A Roadmap for Product Development*. McGraw-Hill, New York, 2003.

[Zan05] Zang C., Friswell M. I. and Mottershead J. E. *A review of robuste optimal design and its application in dynamics*. *Computers and Structures*. 83: 315-326, 2005.

[Zel98] Zeldin B.A. and Spanos P.D. *On random field discretization in stochastic finite elements*. *Journal of Applied Mechanics*, 65(2): 320-327, 1998.

[Zie89] Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. *The finite element method* - 4th edition. McGraw-Hill Book Company, New York, 1989.

[Zha94] Zhang J. and Ellingwood B. *Orthogonal series expansions of random fields in the reliability analysis*. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 120(12): 2660-2677, 1994.

[Zha97] Zhang O. and Zerva A. *Accelerated iterative procedure for calculating eigenvector derivatives*. *AIAA Journal*, 35(2), 1997.

[Zha98] Zhao J.P., Huang W.L. and Dai S.H. *The application of 2D elasto-plastic stochastic finite element method in the field of fracture mechanics*. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 75: 281-286, 1998.

[Zha05] Zhang C., Friswell M.I. and Mottershead J.E. *A review of robust optimal design and its application in dynamics*. *Computers & Structures*, 83: 315-326, 2005.

[Zhu92] Zhu W.Q., Ren Y.J. and Wu W.Q. *Stochastic FEM based on local averages of random vector fields*. *Journal of Engineering Mechanics*, 118(3), 1992.

Annexes

Annexe A

Notations

A.1 Vecteurs, matrices et opérateurs

$\{X\}$	Vecteur Colonne – Matrice de dimension $N \times 1$
$[X]$ où $[X_{ij}]$	Matrice de dimension $N \times M$
$.^{T}$	Opérateur de transposition

A.2 Notations propres à la modélisation EF

Det(.) ou $\lvert . \rvert$	déterminant d'une matrice
Ω_e	domaine élémentaire d'un maillage EF
M	nombre des termes dans le développement de Karhunen-Loève
N_{el}	nombre d'EF
N	dimension du vecteur des déplacements nodaux $\{q\}$
$\overset{N_{el}}{\underset{e=1}{A}}$	opérateur d'assemblage sur l'ensemble des EF
$\{F\}$	vecteur des sollicitations nodales équivalentes
$\{q\}$	vecteur des déplacement nodaux
$\{\dot{q}\}$	vecteur d'accélérations
$\{\ddot{q}\}$	vecteur de vitesses
$\{u\}$	champ de déplacement
$[B_e]$	matrice des dérivées des fonctions de forme
$[C]$	matrice d'amortissement
$[D]$	matrice de comportement
$[H]$	matrice de transfert
$[K]$ et $[K^e]$	matrice de rigidité globale et élémentaire
$[M]$ et $[M^e]$	matrice de masse globale et élémentaire
$[N]$	matrice des fonctions de forme
δ_{ij}	symbole de Kronecker
λ_i	$i^{ième}$ valeur propre de système
η	coefficient d'amortissement structural

η_a	coefficient d'amortissement externe
η_b	coefficient d'amortissement interne
E	Module d'élasticité des matériaux
ρ	Coefficient de masse volumique
ω_i	$i^{ième}$ pulsation propre de système
$\{\varphi_i\}$	$i^{ième}$ mode propre de système
$[\Phi]$	matrice des vecteurs propres de système

A.2 Grandeurs aléatoires

$\boldsymbol{X}$	variable aléatoire en majuscule
x	réalisation d'une variable aléatoire en majuscule
$\boldsymbol{X}_T=\{\xi_1,\ldots,\xi_M\}$	v.a. M-dimensionnelle
ξ	variable aléatoire réelle
P_{Xi}	loi de probabilité de $\boldsymbol{X}_i$
$F_X(x)$ et $\Phi(x)$	fonction de répartition de probabilité de la v.a. $\boldsymbol{X}$
$f_X(x)$ et $\phi(x)$	fonction de densité de probabilité de la v.a. $\boldsymbol{X}$
μ_X	moyenne de la v.a. $\boldsymbol{X}$
$\tilde{\mu}_X$	approximation de μ_X
σ_X	écart-type de la v.a. $\boldsymbol{X}$
CV_X	coefficient de variation de la v.a. $\boldsymbol{X}$ ($CV_X=\sigma_X/\mu_X$)
$E[\boldsymbol{X}]$	espérance (moyenne) de la v.a. $\boldsymbol{X}$
Var[$\boldsymbol{X}$]	variance de la v.a. $\boldsymbol{X}$
Cov[$\boldsymbol{X}$,Y]	covariance de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$
Cor[$\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Y}$]	corrélation de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$
ρ_{XY}	coefficient de corrélation de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$
ρ_{kl}	coefficient de corrélation des v.a. scalaires $\boldsymbol{X}_k$ et $\boldsymbol{X}_l$
$\{x_1,\ldots,x_n\}$	Echantillon de réalisations de la v.a. $\boldsymbol{X}$, de taille n.
C_X	matrice de covariance du vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}$
$\boldsymbol{H}(\xi)$	polynôme d'Hermite unidimensionnel
$\boldsymbol{\Psi}_\alpha$	polynôme d'Hermite d'ordre α
op	plus haut degré des monômes de la base $(\Psi_\alpha)_{0\leq\|\alpha\|\leq op}$, i.e. ordre de la base
$\boldsymbol{G}$	Processus gaussien stationnaire de moyenne nulle et d'écart type unité

A.3 Abréviations courantes

Pr	probabilité
v.a.	variable aléatoire
DIV	division entière
ddl	degré(s) de liberté
FDP	fonction de Densité de Probabilité
MEF	méthode des éléments finis
MEFS	méthode des éléments finis stochastiques
MEFSS	méthode des éléments finis stochastiques spectrale
MIP	méthode des Intégrales Pondérées
MOD	reste de la division entière

Annexe B

Chaos polynomial

Le chaos polynomial $\boldsymbol{\Psi}_k(\boldsymbol{\xi})$, k=0,1,2,…,P d'ordre p en fonction des variables aléatoires gaussiennes $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_M\}$ est construit à partir d'une base de polynômes d'Hermite unidimensionnels $\boldsymbol{H}_n(\boldsymbol{\xi})$, n=1,2,….

La propriété des polynômes d'Hermite qui nous intéresse est leur lien étroit avec la distribution de probabilité gaussienne standard φ_M, qui se traduit par la relation suivante :

$$\boldsymbol{H}_n(\boldsymbol{\xi}) = (-1)^n \frac{\varphi_M^{(n)}(\boldsymbol{\xi})}{\varphi_M(\boldsymbol{\xi})} \tag{B.1}$$

avec :

$$\varphi_M(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \;,\; \varphi_M^{(n)}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{d^n}{dx^n}\varphi_M(\boldsymbol{\xi}) \tag{B.2}$$

L'orthogonalité des polynômes d'Hermite par rapport à un produit scalaire lié à la distribution de probabilité gaussienne standard s'exprime par la relation :

$$E[\boldsymbol{H}_n(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{\xi})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{H}_n(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{\xi}) e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\boldsymbol{\xi} = \delta_{n,m} n! \tag{B.3}$$

Cette propriété des polynômes d'Hermite rend possible d'autres relations intégrales, en posant par exemple m = 0, nous avons, pour tout n ≥ 1 :

$$E[\boldsymbol{H}_n(\boldsymbol{\xi})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{H}_n(\boldsymbol{\xi}) \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} d\boldsymbol{\xi} = 0 \tag{B.4}$$

Outre l'orthogonalité, nous pouvons obtenir d'autres relations de récurrence utiles :

$$\frac{d\boldsymbol{H}_n(\xi)}{d\xi} = n\boldsymbol{H}_{n-1}(\xi) \tag{B.5a}$$

$$\boldsymbol{H}_0(\xi)=1 \tag{B.5b}$$

$$\boldsymbol{H}_1(\xi)=\xi \tag{B.5c}$$

$$\boldsymbol{H}_{n+1}(\xi) = \xi\boldsymbol{H}_n(\xi)+n\boldsymbol{H}_{n-1}(\xi) \tag{B.5d}$$

À partir de ces relations, nous pouvons évaluer les espérances mathématiques suivantes :

$$E\left[\xi^{2m}\right] = \frac{(2m)!}{m!\,2^m}\ ,\ E[\xi_{2m+1}] = 0 \tag{B.6a}$$

$$E[\boldsymbol{H}_n(\xi)] = \delta_{n,0} \tag{B.6b}$$

$$E[\boldsymbol{H}_n(\xi + a)] = a^n,\ a\in\mathbb{R}\ ,\ n\in\mathbb{N} \tag{B.6c}$$

$$E[\boldsymbol{H}_n(\xi)\,\boldsymbol{H}_m(\xi)] = n!\ \delta_{n,m} \tag{B.6d}$$

$$E\left[\boldsymbol{H}_{2n+1}^3(\xi)\right] = 0\ ,\ E\left[\boldsymbol{H}_{2n}^3(\xi)\right] = \left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^3 \tag{B.6e}$$

$$E\left[\xi\boldsymbol{H}_n(\xi)\boldsymbol{H}_m(\xi)\right] = (n+1)!\,\delta_{n,m-1} + n!\,\delta_{n,m+1} \tag{B.6f}$$

$$E\left[\xi^2\boldsymbol{H}_n(\xi)\boldsymbol{H}_m(\xi)\right] = (n+2)!\,\delta_{n,m-2} + n!(2n+1)\delta_{n,m} + n!\,\delta_{n,m+2} \tag{B.6g}$$

Le chaos polynomial M-dimmensionnel $\boldsymbol{\Psi}_k(\xi)$ est défini par :

$$\boldsymbol{\Psi}_k(\xi) = \prod_{l=1}^{M} \boldsymbol{H}_{i_l^k}(\xi_l) \tag{B.7}$$

où les indices $\{ i_1^k, i_2^k, .., i_M^k \}$sont uniques pour chaque indice k, et l'ensemble des valeurs de k=0,1,2,….,P couvre toutes les combinaisons possibles de telle façon que $0 \le \sum_{l=1}^{M}\left(i_l^k\right) \le p$.

Le calcul des espérances particulières suivantes est d'un intérêt pratique pour la mise en œuvre de la méthode abordée dans cette thèse :

$$c_{mjk} = E\left[\xi_m\boldsymbol{\Psi}_j(\xi)\boldsymbol{\Psi}_k(\xi)\right],\ d_{mnjk} = E\left[\xi_m\boldsymbol{\Psi}_n(\xi)\boldsymbol{\Psi}_j(\xi)\boldsymbol{\Psi}_k(\xi)\right] \tag{B.8}$$

où $\boldsymbol{\Psi}_j$, $\boldsymbol{\Psi}_j$ et $\boldsymbol{\Psi}_k$ sont des polynômes d'Hermite d'ordres n, j et k, respectivement et ξ est une v.a. gaussienne standard.

(b) Calcul des espérances $c_{mjk} = E\left[\xi_m \Psi_j(\xi)\Psi_k(\xi)\right]$

Les coefficients c_{mjk} sont identifiés à partir de la liste d'indices $\{ i_1^k , i_2^k , ..., i_M^k \}_{k=0}^{P}$. Ils sont évalués à partir des relations (B.6b, d et f). Pour chaque indice k, il y a tout au plus $2M+1$ coefficients différents de zéros :

$$c_{mjk} = E\left[\xi_m \Psi_j(\xi)\Psi_k(\xi)\right] = E\left[\xi_m H_{i_m^{(j)}}(\xi_m) H_{i_m^{(k)}}(\xi_m)\right] \prod_{\substack{l=1 \\ (l\neq m)}}^{M} E\left[H_{i_l^{(j)}}(\xi_l) H_{i_l^{(k)}}(\xi_l)\right] \quad \text{(B.9)}$$

Les indices j sont identifiés selon la procédure suivante :

- pour m=0 (avec ξ_0=1), le seul terme c_{mjk} différent de zéro est celui où chaque indice j est égal à l'indice k correspondant ($i_l^j = i_l^k$) (l=1,2,…,M). Dans ce cas j=k et la relation (B.6d) donne :

$$c_{0kk} = E\left[\left(\Psi_k(\xi)\right)^2\right] = \prod_{l=1}^{M} \left(i_l^k\right)! \quad \text{(B.10)}$$

- pour m≠0, il y a au plus deux coefficients c_{mjk} différents de zéro associés à chaque indice k :

  - le premier est celui pour lequel l'indice j est déterminé par la relation $i_m^j = i_m^k + 1$ (à condition que $i_m^k \leq p-1$) et $i_l^j = i_l^k$, et la valeur du coefficient est donnée par l'expression :

$$c_{mjk} = \prod_{l=1}^{M} \left(i_l^j\right)! \quad \text{(B.11)}$$

  - l'autre coefficient non nul est celui où l'indice j est déterminé par $i_m^j = i_m^k - 1$ (à condition que $i_m^k \geq 1$) et $i_l^j = i_l^k$ (r≠m), et la valeur de coefficient est :

$$c_{mjk} = \prod_{l=1}^{M} \left(i_l^k\right)! \quad \text{(B.12)}$$

(b) Calcul des espérances $d_{mnjk} = E\left[\xi_m \Psi_n(\xi)\Psi_j(\xi)\Psi_k(\xi)\right]$

Par indépendance des v.a. gaussiennes standard, nous pouvons écrire :

$$d_{mnjk} = E\left[\xi_m \Psi_n(\xi)\Psi_j(\xi)\Psi_k(\xi)\right] = E\left[\xi_m H_{i_m^{(n)}}(\xi_m) H_{i_m^{(j)}}(\xi_m) H_{i_m^{(k)}}(\xi_m)\right] \prod_{\substack{l=1 \\ (l\neq m)}}^{M} E\left[H_{i_l^{(n)}}(\xi_l) H_{i_l^{(j)}}(\xi_l) H_{i_l^{(k)}}(\xi_l)\right] \quad \text{(B.13)}$$

L'espérance du produit de trois polynômes, notée $E\left[\boldsymbol{H}_{i_l^{(n)}}(\xi_l)\boldsymbol{H}_{i_l^{(j)}}(\xi_l)\boldsymbol{H}_{i_l^{(k)}}(\xi_l)\right]$ est donnée par :

- Si $i_l^{(n)} \neq 0$ et $i_l^{(j)} \neq 0$ et $i_l^{(k)} \neq 0$, nous avons :
  - ☛ si $i_l^{(n)} + i_l^{(j)} + i_l^{(k)}$ impair $E\left[\boldsymbol{H}_{i_l^{(n)}}(\xi_l)\boldsymbol{H}_{i_l^{(j)}}(\xi_l)\boldsymbol{H}_{i_l^{(k)}}(\xi_l)\right] = 0$
  - ☛ si $i_l^{(n)} + i_l^{(j)} + i_l^{(k)}$ pair :
    - o si $i_l^{(k)} \leq i_l^{(n)} + i_l^{(j)}$ alors g =(($i_l^{(n)} + i_l^{(j)} - i_l^{(k)}$) DIV 2)
      - ▪ si $i_l^{(n)} \geq g$ et $i_l^{(j)} \geq g$ $E\left[\boldsymbol{H}_{i_l^{(n)}}(\xi_l)\boldsymbol{H}_{i_l^{(j)}}(\xi_l)\boldsymbol{H}_{i_l^{(k)}}(\xi_l)\right] = C_{i_l^{(n)}}^{g} C_{i_l^{(j)}}^{g} g!\, i_l^{(k)}!$
      - ▪ sinon $E\left[\boldsymbol{H}_{i_l^{(n)}}(\xi_l)\boldsymbol{H}_{i_l^{(j)}}(\xi_l)\boldsymbol{H}_{i_l^{(k)}}(\xi_l)\right] = 0$
    - o si $i_l^{(k)} > i_l^{(n)} + i_l^{(j)}$ $E\left[\boldsymbol{H}_{i_l^{(n)}}(\xi_l)\boldsymbol{H}_{i_l^{(j)}}(\xi_l)\boldsymbol{H}_{i_l^{(k)}}(\xi_l)\right] = 0$
- Si un des indices $i_l^{(n)}$, $i_l^{(j)}$ et $i_l^{(k)}$ est nul, alors nous utilisons la relation B.6d

(DIV représente l'opérateur de division entière).

Annexe C

Implémentation récursive du chao polynomial

L'implémentation du chao polynomial requiert :

1. le calcul et le stockage des polynômes de Hermite unidimensionnels $H_n(x)$,
2. la génération de toutes les listes k, dont le degré est inférieure ou égal à p.

Pour chaque degré i=1,…,p, l'objectif est de calculer toutes les listes de M entiers positifs compris entre 0 et q dont la somme est égale à q. Ce problème est équivalent à celui de remplir (M+q-1) cases avec (M-1) boules (Figure C.1). La correspondance entre la séquence d'entiers et le remplissage des cases est la suivante :

- pour chaque entier α_i de la séquence, on laisse α_i cases vides et on place une boule dans la case suivante,
- réciproquement, pour chaque positionnement de boules, chaque entier de la séquence est égal au nombre de cases vides (y compris 0) entre deux boules consécutives.

Il en résulte que le nombre α de liste de degré q est le nombre de séquences de boules correspondantes. Il s'agit du coefficient binomial $\binom{M+q-1}{M-1}=\binom{M+q-1}{q}$. D'où le nombre de listes total $P=\sum_{q=0}^{p} C_{M+q-1}^{q}=\frac{(M+p)!}{M!\,p!}$.

L'algorithme utilisé ici pour générer tous les remplissages possibles de (M+q-1) cases avec (M-1) boules est le suivant :

- Pour un q donné, la position initiale est celle où les boules se trouvent dans les (M-1) premières cases, ce qui correspond à la liste α = {0,…, 0, q}.
- A partir d'un tirage de boules, le suivant est obtenu de manière récursive en déplaçant la boule le plus à droite d'une case à droite. Si ce n'est pas possible, i.e. la boule est déjà dans la position la plus à droite, alors on cherche la boule la plus à droite qui peut être déplacé d'une case vers la droite. Cette boule est déplacée, et toutes les boules se trouvant à sa droite sont ramenées dans la case se trouvant à leur gauche.

Cette procédure est illustrée dans la figure C.2.

Remplissage des cases	Séquence d'entiers	Base des polynômes
◻ ● ● ◻ ●	1 0 1 0	$H_1(\xi_1)H_1(\xi_3)=\xi_1\xi_3$
● ● ● ◻ ◻	0 0 0 2	$H_2(\xi_4)=\xi_4^2-1$

Figure C.1 : Correspondance entre un tirage de boules et α pour (M=4, p=2).

Remplissage des cases	Séquence d'entiers	Base des polynômes
● ● ● ◻ ◻	0 0 0 2	ξ_4^2-1
● ● ◻ ● ◻	0 0 1 1	$\xi_3\xi_4$
● ● ◻ ◻ ●	0 0 2 0	ξ_3^2-1
● ◻ ● ● ◻	0 1 0 1	$\xi_2\xi_4$
● ◻ ● ◻ ●	0 1 1 0	$\xi_2\xi_3$
● ◻ ◻ ● ●	0 2 0 0	ξ_2^2-1
◻ ● ● ● ◻	1 0 0 1	$\xi_1\xi_4$
◻ ● ● ◻ ●	1 0 1 0	$\xi_1\xi_3$
◻ ● ◻ ● ●	1 1 0 0	$\xi_1\xi_2$
◻ ◻ ● ● ●	2 0 0 0	ξ_1^2-1

Figure C.2 : Génération récursive du chaos polynomial (M=4, p=2).

Résumé

Analyse modale des structures avec incertitudes par la méthode des éléments finis stochastiques spectrale

Dans le cadre de la modélisation de structures comportant des paramètres incertains, nous nous intéressons aux caractéristiques spectrales des systèmes mécaniques.

Alternatives aux méthodes de Monte-Carlo pour le traitement des problèmes de propagation d'incertitudes dans les modèles mécaniques structuraux, les méthodes d'éléments finis stochastiques (MEFS) connaissent un succès grandissant depuis une dizaine d'années, concrétisé par de nombreux travaux de recherche internationaux. Le présent travail s'inscrit dans le cadre de ces recherches.

Dans cette optique, nous décrivons dans une première partie les caractéristiques spectrales, aussi bien les valeurs propres que les modes propres, des structures comportant des paramètres modélisés par des variables aléatoires ou par des champs aléatoires. Pour ce faire, nous utilisons la méthode spectrale des éléments finis stochastiques, que nous avons étendue au calcul des valeurs et vecteurs propres. Les propriétés du matériau sont modélisées par un développement de Karhunen-Loève, alors que les valeurs et les vecteurs propres sont développés sur la base du chaos polynomial. Une méthode de résolution adoptée est proposée pour le découplage du système d'équations.

La méthode proposée, essentiellement valable pour les problèmes linéaires, présente l'intérêt de permettre la prise en compte, non seulement de variables aléatoires, mais également de champs stochastiques pour la modélisation probabiliste des paramètres incertains du modèle. Quatre applications à différents niveaux de complexité permettent de juger de ses possibilités.

Nous étudions ensuite le couplage de la conception robuste et de la MEFSS, cette dernière représente un outil puissant pour l'optimisation de la performance dynamique des systèmes mécaniques, puisqu'elle permet d'obtenir, à moindre coût, la moyenne et l'écart-type de la réponse, afin d'évaluer la solution robuste. L'intérêt de l'outil présenté est illustré par deux exemples sur des structures en automobile.

Mots clé

Analyse modale, propagation d'incertitudes, variables aléatoires, dynamique, Méthode Spectrale des Éléments Finis Stochastiques.

Abstract

Modal analysis of structures with uncertainties using the Spectral Stochastic Finite Elements Method

We are interested in modelling structures with uncertain parameters. We focus on the characteristics of dynamic responses of such mechanical systems, especially the modal frequencies and shapes.

Stochastic Finite Element Methods (SFEM) have been developed for thirty years to study uncertainty propagation in structural problems. The main issue aims at avoiding Monte-Carlo simulations, too expensive for many problems. This thesis is a contribution to the development of SFEM for modal analysis of structures.

In the first part, we investigate the case of structures with uncertain parameters. We are particularly interested in the dynamic response, such as eigenfrequencies and eigenmodes. An innovative method is carried out, which uses the spectral stochastic finite element method in order to determine the main stochastic characteristics of the response.

The material properties are modelled by a Karhunen-Loève series, whereas the eigenvalues and eigenvectors are developed on the basis of the polynomial chaos. The solution procedure is proposed for decoupling of the system of equations. This method, practical for linear problems, has the advantage of allowing the modelling of the uncertain input parameters as random variables and stochastic fields. Four numerical applications are considered to test the capabilities of the proposed method.

Finally, we studied the extension of the MEFSS to deal with robust mechanical design. The proposed approach represent a powerful tool for the optimization of the dynamic performance of the mechanical systems, since it is possible to obtain, with lower computation effort, the mean and the standard deviation of the response, in order to evaluate the robust solution. The advantage of the presented method is illustrated by two examples dealing with car structures.

Keywords

Modal analysis, uncertainty propagation, dynamics, Spectral Stochastic Finite Element.