N°d'ordre : D.U :1920
EDSPIC : 432

UNIVERSITE BLAISE PASCAL - CLERMONT II

ECOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGENIEUR DE CLERMONT-FERRAND

Thèse

Présentée par

Nattawit PROMMA

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITE

SPECIALITE : Mécanique du solide

Méthode des champs virtuels en grandes déformations : application à la caractérisation d'un matériau élastomère à partir de mesures de champs cinématiques

Soutenue publiquement le 24 avril 2009 devant le jury :

F. PIERRON	ENSAM, Châlons-en-Champagne	Président
S. AVRIL	Ecole des Mines de Saint-Etienne	Rapporteur
D. FAVIER	Université Joseph Fourier, Grenoble	Rapporteur
X. BALANDRAUD	IFMA, Clermont-Ferrand	Examinateur
E. TOUSSAINT	Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand	Examinateur
M. GREDIAC	Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand	Directeur de thèse
J.-B. LE CAM	IFMA, Clermont-Ferrand	Invité

Laboratoire de Mécanique et Ingénieries,
Université Blaise Pascal et Institut Français de Mécanique Avancée

Table des matières

Remerciements **13**

Résumé **15**

Abstract **17**

Introduction générale **19**

1 ETUDE BIBLIOGRAPHIE **21**

1.1 Introduction et problématique 21

1.2 Problème posé 23

1.3 Principales méthodes d'identification de paramètres de lois de comportement à partir de mesures de champs 25

1.3.1 Le recalage par éléments finis 25

1.3.2 La méthode l'erreur en relation de comportement 26

1.3.3 La méthode de l'écart à l'équilibre 27

1.3.4 La méthode de l'écart à la réciprocité 28

1.3.5 La Méthode des Champs Virtuels (MCV) 28

1.3.6 Conclusion 30

2 MCV en grandes déformations **31**

2.1 Introduction 31

2.2 Mécanique des milieux continus en grandes déformations 31

2.2.1 Déformations et contraintes en grandes déformations 32

2.2.2 Hyperélasticité en grandes déformations 35

2.2.3 Application à des cas simples de sollicitation 37

2.2.4 Densité d'énergie de déformation en incompressible 42
2.2.5 Conclusion 47
2.3 La MCV en grandes déformations 47
2.3.1 Introduction 47
2.3.2 Le PTV en grandes déformations 47
2.3.3 Cas des contraintes planes 48
2.3.4 Principe de la MCV 49
2.4 Conclusion 53

3 Etude à partir de simulations numériques par éléments finis 55
3.1 Introduction 55
3.2 Modèles simulés par éléments finis 56
3.2.1 Paramètres « matériau » utilisés pour les simulations 56
3.2.2 Géométrie en croix 56
3.2.3 Maillage 57
3.2.4 Conditions aux limites 58
3.2.5 Résolution 58
3.3 Post-traitement des champs de déplacements 60
3.4 Observation des champs obtenus 62
3.4.1 Introduction 62
3.4.2 Champs des déplacements 62
3.4.3 Champs des gradients 63
3.4.4 Hétérogénéité des essais 64
3.5 Procédure pour l'identification par la MCV 69
3.5.1 Introduction 69
3.5.2 Construction d'un champ de déplacements virtuels 70
3.5.3 Construction de champs de déplacements virtuels « optimisés » 71
3.6 Application de la MCV 73
3.6.1 Préambule 73
3.6.2 Identification à partir de données non bruitées 74
3.6.3 Identification à partir de données bruitées 77
3.7 Conclusion 80

4 Etude expérimentale **81**
4.1 Introduction . . . 81
4.2 Géométrie des éprouvettes . . . 81
4.3 Matériau . . . 81
4.4 Machine d'essais . . . 82
4.5 Sollicitations appliquées . . . 82
4.6 Traitement des résultats . . . 83
4.6.1 Principe de corrélation . . . 83
4.6.2 Choix des paramètres . . . 85
4.6.3 Taille de la région d'étude . . . 86
4.6.4 Résultats de calculs d'erreur . . . 87
4.6.5 Qualité de la mesure : choix de l'incrément entre deux images . . . 91
4.6.6 Lissage des champs de déplacements . . . 94
4.6.7 Conclusion . . . 99
4.7 Post-traitement des résultats . . . 100
4.7.1 Choix de la région d'étude en fonction de l'essai . . . 100
4.7.2 Analyse de l'essai équibiaxial . . . 102
4.7.3 Analyse de l'essai semi-bitraction . . . 105
4.7.4 Hétérogénéité des essais : Echantillon en croix . . . 109
4.8 Résultats et discussion . . . 115
4.8.1 Cas du chargement équibiaxial . . . 115
4.8.2 Essai de semi-bitraction . . . 124
4.9 Conclusion . . . 127

Conclusion générale et Perspectives **128**

Bibliographie **130**

Table des figures

2.1 Description de la cinématique. 32
2.2 Traction uniaxiale 38
2.3 Traction équibiaxiale 39
2.4 Traction biaxiale 40
2.5 Cisaillement pur 41
2.6 Essais de Treloar sur caoutchouc naturel pour des déformation modérées, d'après la thèse de Gilles MARCKMANN [1] – Comparaison entre mesure et modèle de Mooney (1940) pour les trois essais. 45
2.7 Représentation dans le plan (I_1, I_2) de l'hétérogénéité d'un essai – Illustration pour une hétérogénéité « idéale ». 46
2.8 Configuration Lagrangienne étudiée 48

3.1 Géométrie : éprouvette en forme de croix. 57
3.2 Maillage de la géométrie à l'état non déformé. 57
3.3 Conditions aux limites n°1 : traction equibiaxiale. 59
3.4 Conditions aux limites n°2 : essai de semibitraction. 59
3.5 Déformée obtenue pour la traction équibiaxiale (CL n°1) à $\lambda_a = 1,72$ avec le modèle de Mooney. 59
3.6 Déformée obtenue pour la semibitraction (CL n°2) à $\lambda_a = 1,36$ avec le modèle de Mooney. 59
3.7 Déplacements des quatre noeuds de l'élément fini. 60
3.8 Zone d'étude. 62
3.9 Champ des déplacements pour la traction equibiaxiale (CL n°1) à $\lambda_a = 1,72$ avec le modèle de Mooney. 63
3.10 Champ des déplacements pour la semibitraction (CL n°2) à $\lambda_a = 1,36$ avec le modèle de Mooney. 64

3.11 Champ des gradients pour la traction equibiaxiale (CL n°1) à $\lambda_a = 1,72$ pour le modèle de Mooney. 65
3.12 Champ des gradients pour la semibitraction (CL n°2) à $\lambda_a = 1,36$ pour le modèle de Mooney. 66
3.13 Représentation (I_1, I_2) de l'essai équibiaxial (CL n°1) à $\lambda_a = 1,72$ pour le modèle de Mooney. 68
3.14 Elongation maximum locale λ_{max} en fonction des coordonnées (X, Y) de la configuration non déformée, pour l'essai équibiaxial (CL n°1) à $\lambda_a = 1,72$ avec le modèle de Mooney. 68
3.15 Représentation (I_1, I_2) de la semibitraction (CL n°2) à $\lambda_a = 1,36$ pour le modèle de Mooney à deux paramètres. 69
3.16 Elongation maximum locale λ_{max} en fonction des coordonnées (X, Y) de la configuration non déformée, pour la semibitraction (CL n°2) à $\lambda_a = 1,36$ avec le modèle de Mooney à deux paramètres. 69
3.17 Douze sous-domaines permettant la construction de champs de déplacements virtuels par morceaux. 71
3.18 Premier exemple de champ de déplacements virtuels, illustré par les déplacements des noeuds définissant les sous-domaines. 72
3.19 Second exemple de champ de déplacements virtuels, illustré par les déplacements des noeuds définissant les sous-domaines. 72
3.20 Sensibilité de C_1 et C_2 sur la courbe $F - \lambda_a$ 74
3.21 Illustration dans le plan (C_1, C_2) de l'indépendance des deux champs de déplacements virtuels optimisés — Traction equibiaxiale, modèle de Mooney, données non bruitées. 76
3.22 Couples de champs de déplacements virtuels optimisés pour la traction équibiaxiale pour l'étirement maximum $\lambda_a = 1,72$ (données non bruitées). 77

4.1 ASTREE, LMT (Cachan) 82
4.2 Taille de la région d'intérêt 84
4.3 Présentation de la nouvelle RE. 87
4.4 Influence du nombre d'images traitées, de la taille de la ZEE et du décalage de la ZEE sur le calcul d'erreur pour une élongation globale maximum égale 1.72 88
4.4 Influence du nombre d'images traitées, de la taille de la ZEE et du décalage de la ZEE sur le calcul d'erreur pour une élongation globale maximum égale 1.72 89

4.5 Ecart type et moyenne des erreurs calculées dans la Figure 4.4 90
4.6 Influence de l'incrément entre deux images sur la qualité de la mesure 93
4.7 Influence du degré du polynôme sur l'écart type entre image brute et image lissée 95
4.8 Evaluation de l'écart-type de la différence du déplacement horizontal entre le champ non-lissé et le champs lissé (N=1 et ZEE 2^4 pixels) 96
4.9 Influence de l'option 'sub-pixel accurate' et 'pixel accurate' sur les écarts type du champ de déplacement horizontal 97
4.10 Influence de la taille de ZOI sur l'écart-type des déplacements 98
4.11 Essai équibiaxial 101
4.12 Essai semibitraction 101
4.13 RE obtenue pour les élongations globales λ_a maximum 102
4.14 Champ des déplacements obtenus lors de l'essai équibiaxial à élongation globale maximale λ_a = 1,73 103
4.15 Champs de gradients de l'essai équibiaxial, 1er cycle, élongation globale maximale λ_a = 1,73 104
4.16 Champ des déplacements lissés de l'essai équibiaxial à élongation globale maximale λ_a = 1,73 105
4.17 Champs de gradients lissés de l'essai équibiaxial, 1er cycle, élongation globale maximale λ_a = 1,73 106
4.18 Champ des déplacements de l'essai semibitraction à élongation globale maximale λ_a = 1,34 107
4.19 Champs de gradients de l'essai semibitraction, 1er cycle, élongation globale maximale λ_a = 1,34 108
4.20 Champ des déplacements lissés de l'essai semibitraction à élongation globale maximale λ_a = 1,34 109
4.21 Champs de gradients lissés de l'essai semibitraction, 1er cycle, élongation globale maximale λ_a = 1,34 110
4.22 Champs non-lissé et lissé de l'essai équibiaxial, 1er cycle, élongation globale maximale λ_a = 1,73 112
4.23 Champs non-lissé et lissé de l'essai semi-bitraction, 1er cycle, élongation globale maximale λ_a = 1,34 114
4.24 C_1 et C_2 en fonction de λ_a, essai équibiaxial, une image sur deux prise en compte, champs lissés 117

4.25 C_1 et C_2 en fonction de λ_a, essai équibiaxial, toutes les images prises en compte, champs lissé 119
4.26 C_1 et C_2 en fonction de λ_a, essai équibiaxial, une images sur deux prise en compte, champs non-lissé 120
4.27 C_{10}, C_{20} et C_{30} avec λ_a, chargement équibiaxial, 3 paramètres de Yeoh, une image sur deux, champ lissé 123
4.28 C_1 et C_2 avec λ_a, chargement de semibitraction, une image sur deux, lissé . . . 125

Liste des tableaux

1.1 Paramètres connus et inconnus pour le problème direct 24
1.2 Paramètres connus et inconnus pour le problème inverse 25

3.1 Paramètres « matériau » utilisés pour les simulations. 57
3.2 Optimisation des champs de déplacements virtuels. Meilleur conditionnement $rcond_{max}$ en fonction du nombre N de couples de champs virtuels générés — Traction equibiaxiale à $\lambda_a = 1,72$. 73
3.3 Identification à partir de données non-bruitées — Traction equibiaxiale (CL n°1), modèle de Mooney à deux paramètres. 75
3.4 Identification à partir de données non-bruitées — Traction équibiaxiale (CL n°1), modèle de Yeoh. 76
3.5 Identification à partir de données non-bruitées — Semibitraction (CL n°2), modèle de Mooney à deux paramètres. 78
3.6 Identification à partir de données bruitées — Chargement équibiaxial (CL n°1), modèle de Mooney. 79
3.7 Identification à partir de données bruitées — Semibitraction (CL n°2), modèle de Mooney. 79

4.1 Niveaux d'élongation choisis pour l'estimation des paramètres 86
4.2 Moyenne pondérée des paramètres identifiés, essai équibiaxial 121
4.3 Moyenne pondérée des paramètres identifiés de Yeoh en dépouillant une image sur deux, chargement équibiaxial, champ lissé 124
4.4 Moyenne pondérée des paramètres C_1 et C_2 identifiés, essai de semibitraction . 126

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, M. Grédiac Michel pour m'avoir proposé ce sujet de recherche, et pour tout son dynamisme et ses compétences scientifiques qui m'ont permis de mener à bien cette étude. Je tiens à remercier Mme Toussaint Evelyne pour sa confiance et les opportunités qui m'ont été offertes grâce à elle. Je tiens à remercier tout particulièrement M. Balandraud Xavier pour son intuition et ses nombreux conseils.

Je remercie également à M. Le Cam Jean-Benoît pour m'avoir apporté son aide précieuse.

Je remercie tous les membres de mon jury de thèse, M. Pierron Fabrice, M. Avril Stéphane et M. Denis Favier, de me faire l'honneur d'assister à ma soutenance.

Merci aussi à tous mes collègues et amis de longue date du laboratoire qui se reconnaitront ici.

Je remercie mes parents et ma soeur pour leur patience et leur présence tout au long des années.

Enfin, j'adresse une fois de plus un remerciement tout particulier Siwaporn pour tout ce qu'elle m'apporte d'essentiel.

Résumé

Ce travail est consacré à l'identification de paramètres constitutifs de matériaux élastomères avec la Méthode des Champs Virtuels. Cette méthode est adaptée à l'identification de paramètres constitutifs à partir de mesures de champs, mais elle n'avait été utilisée jusqu'à présent que dans le cas de petites déformations. La principale originalité de ce travail est de l'étendre au cas de l'hyperélasticité, dans le cadre des grandes déformations.
La méthode d'identification est présentée après quelques rappels sur l'hyperélasticité et les grandes déformations. Des simulations numériques permettent ensuite d'illustrer la faisabilité de la procédure avec une attention particulière sur l'influence de données bruitées sur les paramètres identifiés. Des essais sont ensuite réalisés pour deux cas de chargement différents. Les champs de déplacements sont mesurés par corrélation d'images numériques. Les résultats trouvés en termes de paramètres constitutifs sont en bon accord avec les valeurs classiques obtenues généralement pour les matériaux testés.

MOTS-CLES : mesures de champs, hyperélasticité, corrélation d'images, problème inverse, grandes déformations, caractérisation, Méthode des Champs Virtuels

Abstract

This work deals with the identification of constitutive parameters of elastomeric materials using the Virtual Fields Method. This method is suitable for identifying constitutive parameters from heterogeneous strain fields, but it had been used only in the case of small deformations until now. So the main originality of this work is to extend the method to the case of hyperelasticity, within the framework of large deformations.
The identification method is presented after some reminders on large deformations and hyperelasticity. Then, numerical simulations enables us to illustrate the feasibility of the procedure with a special emphasis on the influence of noisy data on identified parameters. Experiments are then carried out in two cases of loading conditions. Displacement fields are measured with a digital correlation programme. Results found in terms of constitutive parameters are in good agreement with usual values of the tested materials.

KEYWORDS : full-field measurements, hyperelasticity, image correlation, inverse problem, large deformations, mechanical characterization, Virtual Fields Method

Introduction générale

La caractérisation de matériaux à partir de mesures de champs cinématiques devient une préoccupation de plus en plus centrale au sein de nombreux laboratoires de mécanique des matériaux. En effet, l'avènement et la diffusion des techniques de mesure de champs au sein de la communauté mécanicienne entraînent de nouvelles possibilités parmi lesquelles la possibilité de conduire des essais non-conventionnels conduisant à des champs de déformations hétérogènes. Dans ce cas, un verrou important réside dans le fait qu'il n'existe généralement pas de modèles simples permettant de mettre en relation les mesures obtenues, le chargement et la géométrie de l'éprouvette testée. Mettre en place des stratégies de traitement de ces mesures de champs à des fins d'identification de paramètres pilotant des lois de comportement est ainsi devenu ces dernières années une thématique qui mobilise de plus en plus de chercheurs, tant sur le plan du développement et de l'amélioration des techniques que de leur mise en oeuvre pour divers matériaux.

Ce travail s'est déroulé directement dans le cadre d'un projet ANR baptisé "Photofit". Ce projet était dédié à certains aspects de la caractérisation des matériaux à partir de champs hétérogènes. Il s'est déroulé entre 2006 et 2009. Il regroupait le Laboratoire de Mécanique et de Procédés de Fabrication (LMPF/ENSAM), le Laboratoire de Mécanique et de Technologie (LMT/ENS Cachan) où se sont déroulés les essais et le Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI/Université Blaise Pascal-IFMA) au sein duquel cette thèse a été préparée. La contribution principale de ce travail de thèse à ce projet a été d'adapter au cas des grandes déformations une procédure qui avait été proposée initialement dans le cadre des petites déformations : la méthode dite des "champs virtuels". La méthode a ensuite été utilisée pour caractériser un matériau élastomère dans le cadre de l'hyperélasticité.

Le présent mémoire rend compte du travail effectué dans ce cadre. Il se compose de quatre grandes parties principales :

– Le premier chapitre présente d'abord l'intérêt des mesures de champs pour la caractérisa-

tion des matériaux, notamment les matériaux élastomères. Il décrit ensuite de façon succincte plusieurs méthodes d'identification adaptées au traitement des mesures de champs cinématiques à des fins d'identification de paramètres pilotant des lois de comportement.

– Divers rappels relatifs à la mécanique des milieux continus formulée en grandes déformations sont ensuite effectués au chapitre deux. Les principales lois adaptées aux matériaux élastomères sont données, puis le principe de la Méthode des Champs Virtuels (MCV) est formulé dans ce cadre.
– La méthode d'identification proposée a d'abord été testée avec des données numériques issues de simulations par éléments finis pour tester sa robustesse. Les résultats sont présentés au chapitre trois. Une attention particulière a été portée sur la sensibilité de la méthode au bruit de mesure qui est inévitable en pratique.
– La mise en oeuvre expérimentale de la méthode fait l'objet du chapitre quatre. On y présente l'instrumentation utilisée, en particulier la corrélation d'images numériques. Les résultats obtenus y sont discutés.

Le document se termine par une conclusion offrant quelques perspectives sur les développements ultérieurs à envisager à partir de ce travail.

CHAPITRE 1

ETUDE BIBLIOGRAPHIE

1.1 Introduction et problématique

L'utilisation des techniques de mesure de champs cinématiques dans un contexte de caractérisation mécanique se justifie par le fait que ces techniques fournissent une quantité d'information considérable par rapport aux techniques de mesure classiques de type jauges de déformation ou capteurs de déplacement qui ne délivrent quant à elles que des informations ponctuelles locales.

A ce jour, plusieurs techniques de mesure sont disponibles en pratique, chacune présentant des caractéristiques propres en termes de performances métrologiques et de domaines d'utilisation. Un mode de classification élégant de ces diverses techniques repose sur la nature même du phénomène physique mis en jeu : interférométrique ou non.

Dans le premier cas, l'information est obtenue en analysant des franges d'interférence obtenues à partir de sources de lumière cohérentes délivrées par un laser. La grandeur cinématique recherchée se trouve alors encodée dans la phase du signal périodique que représentent ces franges. Les techniques qui appartiennent à cette famille sont principalement le moiré interférométrique [2] et l'interférométrie de speckle [3, 4, 5]. Ces deux techniques se distinguent principalement par le fait qu'un réseau de pas très fin est déposé dans le premier cas alors que l'on utlise directement la réflexion diffuse due à la rugosité de surface dans le second cas. Ces techniques se caractérisent par leur capacité à mesurer de très faibles déplacements, mais aussi par leur grande sensibilité aux vibrations qui peut devenir rédhibitoire en milieu industriel.

Les techniques non-interférométriques reposent quant à elles toutes sur le même principe : celui de suivre les déplacements de motifs solidaires de la surface examinée. La nature des motifs permet de distinguer les diverses méthodes appartenant à cette famille. Ces motifs peuvent être distribués aléatoirement ou régulièrement sur la surface traitée. Dans le premier cas, il peut s'agir en pratique d'un mouchetis déposé à l'aide d'une bombe de peinture sur la sur-

face à analyser ou de la variation naturelle de la distribution des niveaux de gris en surface. Le principe de la corrélation d'images numériques utilisée dans cette étude consiste à mesurer les déplacements de tels motifs [6, 7]. Le paragraphe 4.6.1 décrit plus en détails cette technique. Dans le deuxième cas, le marquage de la surface est périodique, avec des grilles gravées [8] ou transférées [9]. Les méthodes correspondantes sont la méthode dite de la grille qui donne des déplacements plans [10, 11, 12], la méthode de projection de grille qui fournit des déplacements hors-plans [13, 14] et la déflectométrie qui permet d'accéder à des pentes en surface de plaques fléchies [15, 16, 17]. Le traitement de l'information s'apparente aux traitements utilisés dans le cas de franges d'interférence puisque l'information est contenue dans la phase d'un signal périodique dans chacun des deux cas. Un avantage notable des techniques non-interférométrique par rapport aux méthodes interférométriques est qu'elles sont généralement plus faciles à mettre oeuvre puisqu'elles sont utilisables en lumière blanche. Ces techniques s'avèrent également beaucoup moins sensibles aux vibrations parasites.

Ces diverses techniques ont connu un essor considérable ces dernières années. Ce succès est dû principalement aux performances croissantes des caméras CCD et à la diffusion de la micro-informatique qui a permis le développement d'outils numériques puissants pour traiter des images acquises par les caméras. Il faut cependant souligner que l'information délivrée par les techniques de mesure de champs est généralement le champ de déplacement en surface alors que la grandeur qui intéresse le mécanicien des matériaux est bien souvent la déformation. Le passage d'une information à l'autre s'effectue concrètement par dérivation numérique. Ce passage est cependant rendu délicat par le fait que le bruit de mesure inévitable est amplifié par la dérivation, surtout dans le cas de petites déformations. Diverses stratégies sont possibles pour limiter l'effet négatif de ce bruit, mais elles sont toutes basées sur des lissages ou des filtrages qui altèrent la résolution spatiale de la technique utilisée, c'est à dire la distance entre points de mesure indépendants. Il faut dès à présent souligner que cette limitation ne sera pas vraiment effective dans le cadre de cette étude puisque l'on s'est intéressé ici à des grands déplacements et à des grandes déformations. Dans ce cas, l'effet du bruit de mesure est largement atténué puisque les grandeurs mesurées sont significatives.

En même temps que ces techniques diffusaient dans la communauté de la mécanique des matériaux, s'est posée la question du traitement des informations qu'elles fournissaient, ceci à des fins d'identification de paramètres pilotant des lois de comportement. Si la question du lien entre mesure d'une déformation, effort appliqué sur l'éprouvette et paramètres de loi de comportement à identifier ne se pose pas véritablement dans le cas d'essais mécaniques générant

des champs de déformations/contraintes homogènes, il devient central lorsque l'on souhaite exploiter des essais générant des champs hétérogènes. Il faut insister sur le fait que de tels essais présentent plusieurs intérêts. Ils permettent d'activer simultanément plusieurs paramètres d'une même loi, voire tous les paramètres, ce qui permet de les identifier simultanément à partir d'un seul essai si une stratégie d'identification efficace est disponible. Cette liberté permet de s'affranchir des contraintes habituelles qui caractérisent les essais générant des champs homogènes en termes d'introduction des efforts et de géométrie d'éprouvette. On peut même envisager des essais sur des éléments de structures, voire optimiser ces essais pour obtenir la meilleure réponse possible de l'éprouvette. Le point bloquant réside dans le fait que dans le cas d'essais conduisant à des champs hétérogènes, il n'existe généralement pas de lien simple entre les mesures (de champs ou ponctuelles), le chargement et les paramètres à identifier. Cette difficulté qui est spécifique aux essais hétérogènes a conduit divers auteurs à proposer des stratégies adaptées pour identifier les paramètres recherchés à partir de champs de mesures cinématiques. L'objet du paragraphe ci-dessous est de dresser un inventaire succinct des méthodes d'identification disponibles. On s'est entre autre appuyé pour cela sur un article de synthèse sur ces méthodes paru récemment dans la littérature [18].

1.2 Problème posé

Le problème de l'identification des paramètres pilotant une loi de comportement à partir de champs cinématiques hétérogènes peut être posé de la façon suivante. Les équations de base définissant le problème mécanique sont scindées en trois groupes. Pour des raisons de simplicité dans la présentation, on les exprime ci-dessous dans le cadre des petites déformations et pour un matériau homogène élastique linéaire. Les équations disponibles sont donc les suivantes :

1. les équations d'équilibre statique, où les forces de volume sont considérées comme nulles :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{div}\boldsymbol{\sigma} & = & \vec{0} \\ \vec{T} & = & \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \end{array} \right. \tag{1.1}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ représente ici le tenseur des contraintes de Cauchy, $\vec{T}$ la densité surfacique de forces s'exerçant sur la frontière du solide considéré et $\vec{n}$ la normale en tout point de cette frontière ;

2. des relations purement cinématiques qui se traduisent dans le cas de petites défomations par une relation déplacement-déformation :

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left[grad\vec{u} + grad^T\vec{u}\right] \tag{1.2}$$

où $\vec{u}$ est le déplacement et ϵ est le tenseur des déformations linéarisées ;

3. la loi de comportement qui relie les contraintes aux déformations :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \epsilon \tag{1.3}$$

où **C** est le tenseur de l'élasticité considéré comme identique en tout point du milieu.

Le problème qui consiste à déterminer les champs de déplacements/déformations/contraintes est qualifié de *direct*. C'est le problème classique qui se pose en mécanique des structures. Dans ce cas, la géométrie du solide, les conditions aux limites et les paramètres qui pilotent la loi de comportement sont connus. Les caractéristiques principales de ce type de problème sont rassemblées dans le tableau 1.1.

TAB. 1.1 – Paramètres connus et inconnus pour le problème direct

Problème direct	
connus	inconnus
Géométrie	$\boldsymbol{\sigma}$
Conditions aux limites	ϵ
C	u

Pour ce type du problème, aucun lien explicite n'existe entre les inconnues du problème et sollicitation dans le cas général. La méthode des éléments finis est l'outil numérique le plus diffusé permettant de résoudre classiquement ce problème direct.

Le problème qualifié d'*inverse* est celui de la détermination des paramètres qui interviennent dans la réponse de la structure à partir de la connaissance des champs mesurés (déplacements ou déformations obtenues par différentiation des déplacements), de la résultante des sollicitations appliquées et de la géométrie supposée connue. Le tableau 1.2 synthétise les données disponibles et les inconnues du problème.

Aucun lien simple n'existe généralement entre données et inconnues du problème. Les méthodes spécifiques qui ont été développées pour résoudre ce problème sont au nombre de cinq :

TAB. 1.2 – Paramètres connus et inconnus pour le problème inverse

Problème inverse	
connus	inconnus
Géométrie Conditions aux limites ϵ u	$\boldsymbol{\sigma}$ **C**

– le recalage par éléments finis ;
– la méthode de l'erreur en relation de comportement ;
– la méthode de l'écart à l'équilibre ;
– la méthode de l'écart à la réciprocité ;
– la méthode des champs virtuels.

Examinons maintenant brièvement les grandes lignes de chacune de ces méthodes.

1.3 Principales méthodes d'identification de paramètres de lois de comportement à partir de mesures de champs

1.3.1 Le recalage par éléments finis

Le recalage par éléments finis est l'une des premières méthodes qui a été proposée. Elle consiste à résoudre le problème inverse en utilisant de façon itérative l'outil numérique développé spécifiquement pour résoudre le problème direct. La procédure consiste à construire une fonction-coût entre les mesures cinématiques disponibles et les valeurs données aux mêmes points par un logiciel de calcul par éléments finis. Cette fonction-coût est ensuite minimisée de façon itérative par rapport aux paramètres de la loi de comportement, ces paramètres étant considérés ici comme variables. On utilise à chaque pas l'outil prévu pour résoudre le problème direct, qui est dans le cas le plus général la méthode des éléments finis.

Cette méthode a été utilisée avec succès pour caractériser divers types de matériaux, ceci avec différents types de données. Mauvoisin [19] a caractérisé des plaques composites à partir de champs de flèches. Un exemple de caractérisation de composite peut également être trouvé dans la référence [20]. Le Magourou [21, 22] s'est quant à lui intéressé à l'identification de

propriétés visco-élastiques du bois. Il a également cherché à optimiser des configurations d'essais en jouant sur la localisation du chargement appliqué aux éprouvettes testées. Les propriétés élasto-plastiques de métaux ont été caractérisées avec ce type d'approche par Meuwissen *et al.* [23, 24] et Lecompte *et al.* [25]. Divers exemples de caractérisation de matériaux biologiques comme la peau sont également disponibles dans [26, 27, 28]. Vu le cadre de notre étude dédiée aux matériaux élastomères, il est intéressant d'indiquer qu'une loi hyperélastique de type Mooney-Rivlin a été caractérisée avec ce type d'approche dans [29] et [30].

De façon générale, cette méthode présente l'avantage de pouvoir fournir des résultats avec des données qui peuvent être en nombre réduit et en surface des éprouvettes testées seulement puisqu'elle fonctionne sans que des mesures de champs soient indispensables. Elle a également été éprouvée pour une grande variété de lois de comportement. Le fait de pouvoir calculer la sensibilité de la fonction coût à divers paramètres du modèle permet également d'envisager une optimisation des conditions d'essai.

La nécessité de conduire des calculs itératifs constitue incontestablement un inconvénient puisque les temps de calcul peuvent s'avérer très lourds, surtout dans le cas de lois non-linéaires. Le modèle élements finis nécessite également l'introduction d'une distribution d'efforts alors que seule la résultante est connue en général. Enfin, le choix initial des paramètres pour lancer la procédure est également posé puisqu'il affecte directement la durée des calculs et qu'il peut conduire à des convergences vers des minima locaux.

1.3.2 La méthode l'erreur en relation de comportement

L'erreur en relation de comportement a été introduite initialement pour qualifier des solutions de problèmes de mécanique obtenues par éléments finis [31]. Elle est basée sur l'estimation d'un écart F entre un champ de contraintes donné noté $\boldsymbol{\rho}$ et un autre champ de contraintes calculé en utilisant une loi de comportement, ici une loi élastique linéaire représentée par le tenseur des rigidités $\mathbf{C}$ et un champ de déplacement donné noté $\boldsymbol{\vartheta}$ [32] :

$$F\left(\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{C}\right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}[\boldsymbol{\vartheta}]\right) : \mathbf{C}^{-1} : \left(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}[\boldsymbol{\vartheta}]\right) dV \tag{1.4}$$

La solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ du problème mécanique vérifie les équations suivantes [31, 33] :

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \arg_{(\vartheta,\rho)\in C\times S} \ \min \ F\left(\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{C}\right) \ \text{ et } \ F\left(\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{C}\right) = 0 \tag{1.5}$$

où C et S représentent l'espace des champs de déplacements cinématiquement admissibles et

les champs de contraintes statiquement admissibles, respectivement. Si le tenseur $\mathbf{C}$ est considéré comme inconnu, on peut le déterminer en écrivant qu'il vérifie

$$\mathbf{C} = \arg_{\mathbf{C}^* \in \tilde{C}} \ \min J(\mathbf{C}^*) \ \text{ avec } \ J(\mathbf{C}^*) = \min_{(\vartheta,\rho)\in C\times S} \ F\left(\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{C}^*\right) \tag{1.6}$$

où $\tilde{C}$ représente l'espace des tenseurs d'élasticité admissibles, c'est à dire qui vérifient les symmétries classiques des tenseurs du 4ème ordre de l'élasticité. En pratique, la minimisation de F s'effectue en combinant alternativement une minimisation par rapport à ϑ et ρ à $\mathbf{C}^*$ fixé et une minimisation par rapport à $\mathbf{C}^*$ à ϑ et ρ fixés. Cette approche est intéressante car on peut aussi l'appliquer dans le cas où $\mathbf{C}^*$ est variable spatialement et dans le cas de lois de comportement non-linéaires définies par sous-domaines. Cette approche ne nécessite pas forcément comme données d'entrée des données qui soient des champs de mesures. Un inconvénient réside cependant dans le nombre des calculs à réaliser pour parvenir à la solution. Cette méthode a été utilisée initialement à des fins d'identification en dynamique [31, 34, 35, 36], puis pour caractériser des matériaux élastiques linéaires [37, 38, 39] et, plus récemment, des matériaux élasto-plastiques [40] à partir de mesures de champs.

1.3.3 La méthode de l'écart à l'équilibre

La méthode de l'écart à l'équilibre [41, 42] est basée sur l'écriture de l'équilibre local qui est vérifié en tout point d'une éprouvette. Cet équilibre est écrit en pratique sur les côtés de sous-domaines de forme carrée. On y introduit la loi de comportement et les déformations locales. Ces dernières sont considérées comme constantes par morceaux et exprimées en fonction des déplacements sur les côtés. Cette approche a été introduite initialement pour caractériser la distribution spatiale d'un endommagement. En considérant l'ensemble des sous-domaines, on aboutit alors à un système permettant de déterminer cette distribution. Une particularité de cette méthode est qu'elle fournit des champs de contrastes locaux de rigidités. Ces dernières sont donc connues à un coefficient multiplicatif près. Cette méthode a d'abord été appliquée pour caractériser l'endommagement dans une éprouvette en matériau composite soumise à un essai de traction biaxial [41], puis à la caractérisation de micro-poutres [43, 44, 45, 46]. Elle a également été étendue à l'identification de conductivités thermiques [47].

1.3.4 La méthode de l'écart à la réciprocité

La méthode de l'écart à la réciprocité est adaptée à des situations pour lesquelles les mesures sont disponibles en surface seulement. Elle a été utilisée pour caractériser des fissures [48, 49, 50], mais aussi pour identifier des distributions spatiales de modules élastiques [51, 52]. Le principe repose sur l'écriture du principe de réciprocité de Maxwell-Betti entre deux états différents

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(u) : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^*] : \boldsymbol{\epsilon}(u^*) dV = \int_{\partial\Omega} \left(\hat{\phi} \cdot u^* - \phi \cdot \hat{u} \right) dS = R\left(\mathbf{C}^*; u^*, u\right) \tag{1.7}$$

où (u, ϕ) représentent le déplacement et le vecteur contrainte dont la distribution mesurée sur la frontière $\partial\Omega$ est notée $(\hat{u}, \hat{\phi})$, u^* est un champ de déplacement qualifié d'adjoint qui découle de l'application de ϕ^* sur $\partial\Omega$. Quel que soit le champ de déplacement adjoint u^*, l'écart à la réciprocité $R\left(\mathbf{C}^*; u^*, u\right)$ doit être nul. On peut donc écrire

$$R\left(\mathbf{C}^*; \tilde{u}, u\right) = 0 \ \ \forall \phi \tag{1.8}$$

Généralement, u reste inconnu à l'intérieur du solide et doit être reconstruit par une procédure itérative, de même que $\mathbf{C}$. La procédure a également été appliquée pour identifier des rigidités de flexion de plaques [53].

1.3.5 La Méthode des Champs Virtuels (MCV)

Le dernière méthode est celle dite des champs virtuels. Introduite initialement dans le cadre de la flexion des plaques minces anisotropes élastiques [54], elle s'applique en fait à de très nombreux autres cas de chargement ou lois de comportement. Cette méthode est basée sur l'équilibre global de l'éprouvette testée. Cet équilibre est écrit avec le Principe des Travaux Virtuels(PTV) de la façon suivante :

$$-\int_V \boldsymbol{\sigma} : \epsilon^* dV + \int_{S_f} \mathbf{T} \cdot u^* dA = \int_V \rho\gamma dV \quad \forall u^*, \epsilon^*; C.A. \tag{1.9}$$

où u^* et ϵ^* représentent respectivement un champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible et le champ de déformation virtuel qui en découle. ρ et γ sont quant à eux la masse volumique et l'accélération en tout point. Le premier terme de cette égalité est le travail virtuel des efforts intérieurs, le deuxième le travail virtuel des efforts extérieurs et le troisième le travail virtuel des quantités d'accélération.

Une propriété importante réside dans le fait que l'égalité ci-dessus est vérifiée pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible. Cette propriété a été mise à profit pour identifier des paramètres de lois de comportement dans le cadre de la MCV. En effet, dans le cas d'une loi de comportement qui dépend linéairement des paramètres qui la pilote, on peut montrer que l'équation ci-dessus devient une équation linéaire en fonction des paramètres inconnus en question. Ecrire cette équation avec plusieurs champs virtuels cinématiquement admissibles différents et indépendants conduit à un système linéaire dont l'inversion conduit aux coefficients recherchés [55]. L'indépendance des équations du système est directement conditionnée par l'hétérogénéité du champ traité et par le choix des champs virtuels retenus. Un atout important de cette méthode est qu'elle est directe, ce qui évite les calculs itératifs du recalage par éléments finis ou de l'erreur en relation de comportement.

La question du choix optimum des champs virtuels a fait l'objet de plusieurs travaux qui ont d'abord abouti à la notion de champs virtuels dits spéciaux [56, 57] (ils rendent la matrice principale du système linéaire égale à la matrice identité), puis à la définition de champs virtuels spéciaux qui minimisent l'influence du bruit de mesure sur les paramètres identifiés [58].

Dans le cas de lois qui ne s'expriment plus linéairement en fonction des paramètres, on construit un résidu avec l'écart quadratique entre travaux virtuels des efforts intérieurs et extérieurs. Cet écart doit être nul pour tout champ cinématiquement admissible. La méthode consiste donc à minimiser cet écart en considérant les paramètres de la loi comme des inconnues, ceci pour des champs virtuels fixés *a priori*.

Cette méthode a été appliquée dans de nombreux cas, par exemple la flexion statique [59] et dynamique [60, 61] de plaque composites. Elle a été étendue aux rigidités complexes, permettant ainsi de traiter la viscoélasticité [62]. Elle a également été utilisée pour caractériser des composites dans leur plan, que ce soit dans le domaine linéaire élastique [63] ou pour identifier un endommagement [64]. Plus récemment, elle a été appliquée à l'identification de paramètres élasto-plastiques de matériaux métalliques [65, 66].

Un avantage de cette méthode est son aspect direct dans certains cas. On montre également que contrairement au recalage par éléments finis, on peut se contenter de la connaissance de la résultante des efforts appliqués, leur distribution spatiale sur la frontière pouvant rester inconnue.

1.3.6 Conclusion

L'inventaire des techniques de mesure de champs disponibles et des méthodes d'identification adaptées à l'extraction de paramètres de lois de comportement à partir de telles mesures montre l'étendue de la palette disponible. Concernant les méthodes d'identification, et plus particulièrement la MCV, on peut noter qu'elles ont été développées et utilisées principalement dans le cadre des petites déformations. L'objectif principal de ce travail est d'examiner l'extension du formalisme de la MCV aux grandes déformations en s'intéressant au cas le plus simple de l'hyperélasticité. Parmi les méthodes de mesure examinées ci-dessus, la corrélation d'images numériques s'impose comme étant la plus adaptée au cas traité.

Le chapitre suivant est d'abord consacré à divers rappels sur la mécanique des milieux continus en grandes déformations et sur l'hyperlasticité, puis au développement de la MCV dans ce cadre. Sa mise en oeuvre avec des données simulées, puis avec des données issues de mesures obtenues avec un système de corrélation d'images numériques, fait l'objet des chapitres ultérieurs.

CHAPITRE 2

MCV EN GRANDES DÉFORMATIONS

2.1 Introduction

Lorsque les déformations dans une structure sont petites au sens des petites perturbations, c'est-à-dire lorsque l'état actuel peut être confondu avec l'état de référence, on utilise classiquement les déformations linéarisées et le tenseur des contraintes de Cauchy pour décrire le comportement d'un matériau. Dans notre cas, les déformations sont plus importantes et les états actuel et de référence ne peuvent plus être confondus. L'objectif de ce chapitre est donc dans un premier temps de rappeler les différentes grandeurs de la mécanique des milieux continus en grandes déformations qui seront nécessaires par la suite. Il s'agira également d'introduire les notions principales d'hyperélasticité et de développer les solutions analytiques de cas simples de chargement correspondant aux essais classiques de caractérisation. Une fois ces rappels effectués, la MCV formulée en grandes déformations sera présentée. L'intérêt de cette méthode inverse étant d'identifier les paramètres matériau des équations constitutives à partir d'un seul essai suffisamment hétérogène, une discussion sur les critères de choix d'un essai pour une bonne identification clôt ce chapitre. Pour une présentation détaillée des différents concepts abordés ici, le lecteur peut se référer à [67] pour la mécanique des milieux continus en grandes déformations et à [54] ou [57] pour la MCV.

2.2 Mécanique des milieux continus en grandes déformations

L'objectif de ce paragraphe est de rappeler les bases de la mécanique des milieux continus en grandes déformations.

2.2.1 Déformations et contraintes en grandes déformations

2.2.1.1 Cinématique

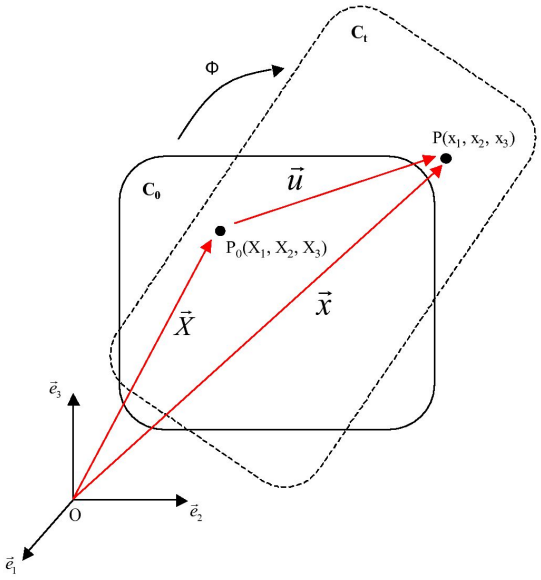


FIG. 2.1 – Description de la cinématique.

Un corps est matérialisé par un ensemble de points matériels dont la forme évolue au cours de sa transformation. L'ensemble des positions spatiales occupées par ces points à un instant t représente la configuration actuelle du solide, notée (C_t) (voir Figure 2.1). La configuration de référence sera quant à elle notée (C_0). Dans notre cas, elle correspond à la configuration dans laquelle le corps est non-déformé et non-contraint. Le point P de la configuration actuelle (C_t) est repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{x}$. Avant transformation, ce dernier occupait la position $\overrightarrow{OP}_0 = \overrightarrow{X}$ dans (C_0). Le mouvement global du point P peut être décrit par l'application vectorielle ϕ telle que :

$$\begin{aligned} &\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ &\overrightarrow{X} \mapsto \overrightarrow{x} = \phi(\overrightarrow{X}, t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

La déformation au voisinage du point considéré peut s'exprimer à partir des gradients de cette fonction. Les milieux matériellement simples sont, par définition, ceux pour lesquels la transformation linéaire tangente ou le tenseur gradient de la transformation **F** suffit à la description de la cinématique [68]. Le gradient de la transformation **F** est défini entre les deux

configurations (C_0) et (C_t) par :

$$\mathbf{F} = \text{grad}_{\vec{X}}\phi = \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \overrightarrow{X}} \tag{2.2}$$

Le déterminant de **F**, noté J, représente la variation locale de volume. Il est toujours positif en vertu du principe de non-interpénétration de la matière :

$$J = det\mathbf{F} > 0. \tag{2.3}$$

En partant de deux vecteurs $\overrightarrow{dX}_1$ et $\overrightarrow{dX}_2$ dans la configuration de référence se transformant respectivement en $\overrightarrow{dx}_1$ et $\overrightarrow{dx}_2$ dans la configuration actuelle, différentes quantités peuvent être définies. Relativement à la configuration de référence, le tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit **C** mesure les variations de longueur et d'angle :

$$\overrightarrow{dx}_1.\overrightarrow{dx}_2 = \overrightarrow{dX}_1.\mathbf{C}\overrightarrow{dX}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F^T F}. \tag{2.4}$$

Relativement à la configuration actuelle, cette mesure se fait par le tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche :

$$\overrightarrow{dX}_1.\overrightarrow{dX}_2 = \overrightarrow{dx}_1\mathbf{B}^{-1}\overrightarrow{dx}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mathbf{F F^T}. \tag{2.5}$$

À partir de ces deux tenseurs, deux mesures classiques de la déformation sont définies : un tenseur lagrangien **E**, dit de Green-Lagrange et un tenseur eulérien **A**, dit d'Euler-Almansi :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \tag{2.6}$$

où **I** représente le tenseur identité. Chaque tenseur de déformation ainsi défini est symétrique, défini positif et possède donc six composantes indépendantes dans une base donnée.

De par les définitions de **C** et **B** (Equations 2.4-2.5), ces tenseurs sont symétriques et définis positifs ; leurs matrices représentatives peuvent être diagonalisées sous la forme :

$$[C] = [N][\Lambda^2][N]^{-1} \quad \text{et} \quad [B] = [n][\Lambda^2][n]^{-1} \tag{2.7}$$

où $[N]$ et $[n]$ sont les matrices contenant respectivement les vecteurs propres de $[C]$ et $[B]$ qui définissent les directions principales de dilatation respectivement dans la configuration de

référence (C_0) et actuelle (C_t), et où $[\Lambda]$ est la matrice diagonale des extensions principales λ_i, $i = 1, 3$:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant imposés positifs [69]. Pour l'étude du comportement isotrope des matériaux, il nous faut introduire les trois invariants du tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit $\mathbf{C}$:

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) \tag{2.9}$$
$$I_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)] \tag{2.10}$$
$$I_3 = \det(\mathbf{C}). \tag{2.11}$$

2.2.1.2 Contraintes

L'état de contrainte autour d'un point est défini à partir de la résultante des efforts internes $\overrightarrow{df}$ s'exerçant sur un élément de surface orientée $ds\vec{n}$ de la configuration déformée. Ceci conduit à l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\overrightarrow{df} = \boldsymbol{\sigma}\,\overrightarrow{n}\,ds. \tag{2.12}$$

Ce tenseur est symétrique. En grandes transformations, les formules de transport convectif permettent de réécrire l'expression des surfaces et des efforts internes sur la configuration initiale et donc d'introduire deux nouveaux tenseurs des contraintes. Le tenseur de Piola-Kirchhoff de première espèce ou tenseur de Boussinesq $\mathbf{\Pi}$ est défini à partir des efforts internes dans la configuration actuelle et de la surface orientée dans la configuration initiale, transformée inverse de la surface orientée $ds\vec{n}$:

$$\overrightarrow{df} = \mathbf{\Pi}\overrightarrow{N}dS. \tag{2.13}$$

Il n'est a priori pas symétrique. En transportant artificiellement la résultante des efforts internes sur la configuration initiale, on définit le tenseur de Piola-Kirchhoff de seconde espèce :

$$\overrightarrow{dF} = \mathbf{S}\overrightarrow{N}dS. \tag{2.14}$$

Dépourvu de sens physique mais lagrangien, il est symétrique. Ces trois tenseurs des contraintes sont liés par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{\Pi}\mathbf{F}^T = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T. \tag{2.15}$$

2.2.2 Hyperélasticité en grandes déformations

2.2.2.1 Généralités

Nous restreignons l'étude au cas des matériaux matériellement simples pour lesquels l'état de contrainte au temps t dépend du gradient de la transformation au temps $\tau \in [0, t]$ ainsi que de la position $\overrightarrow{X}$ du point considéré. De plus, nous considérons le matériau homogène et élastique, ce qui signifie que l'état de contrainte au temps t ne dépend plus que du gradient de la transformation au temps t. Enfin, nous nous plaçons dans le cadre de l'hyperélasticité, caractérisée par l'existence d'une fonction scalaire densité d'énergie de déformation $\boldsymbol{W}$ dépendant de l'état de déformation [70] :

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}(\mathbf{F}). \tag{2.16}$$

La prise en compte du principe d'objectivité permet d'écrire $\boldsymbol{W}$ en fonction du tenseur de Cauchy-Green droit $\mathbf{C}$:

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}(\mathbf{C}). \tag{2.17}$$

La prise en compte de l'isotropie impose à $\boldsymbol{W}$ d'être une fonction isotrope du tenseur de Cauchy-Green gauche $\mathbf{B}$:

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}(\mathbf{B}) = \boldsymbol{W}(\mathbf{C}). \tag{2.18}$$

Ainsi, $\boldsymbol{W}$ étant une fonction scalaire isotrope du tenseur $\mathbf{B}$, elle est fonction des invariants de $\mathbf{B}$ (qui sont aussi ceux de $\mathbf{C}$) :

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}(I_1, I_2, I_3). \tag{2.19}$$

Les relations tensorielles contrainte-déformation sont alors les suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{B}\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \mathbf{B}} \tag{2.20}$$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \mathbf{E}} \tag{2.21}$$

$$\boldsymbol{\Pi} = \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \mathbf{F}}. \tag{2.22}$$

En utilisant 2.19, le tenseur des contraintes de Cauchy peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{B}\sum_{\mathrm{i}=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_{\mathrm{i}}}\frac{\partial I_{\mathrm{i}}}{\partial \mathbf{B}}, \tag{2.23}$$

c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1}\left[I_3\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_3}\mathbf{I} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_2}\right)\mathbf{B} + \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_2}\mathbf{B}^2\right] \tag{2.24}$$

$\partial \boldsymbol{W}/\partial I_1$, $\partial \boldsymbol{W}/\partial I_2$, $\partial \boldsymbol{W}/\partial I_3$ sont les fonctions matérielles à identifier.

2.2.2.2 Cas particulier de l'incompressibilité

Nous supposerons les matériaux étudiés incompressibles : les déformations se font sans variation de volume, ce qui se traduit par :

$$J = 1. \tag{2.25}$$

Donc, le troisième invariant des tenseurs des dilatations est lui aussi unitaire :

$$I_3 = 1. \tag{2.26}$$

La connaissance de l'état de déformation ne permet plus à elle seule de calculer l'état de contrainte. Celui-ci est déterminé à une pression hydrostatique p près [70] :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B}\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \mathbf{B}} \tag{2.27}$$

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{C}^{-1} + \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \mathbf{E}} \tag{2.28}$$

$$\boldsymbol{\Pi} = p\mathbf{F}^{-T} + \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \mathbf{F}} \tag{2.29}$$

où p doit être déterminée à l'aide des équations d'équilibre du problème donné. De même, en fonction des invariants, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{\Pi}$ peuvent s'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_1}\mathbf{B} - 2\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_2}\mathbf{B}^{-1} - p\mathbf{I} \tag{2.30}$$

$$\boldsymbol{S} = 2\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_2}\right)\mathbf{I} - \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_2}\mathbf{C}\right] - p\mathbf{C}^{-1} \tag{2.31}$$

$$\boldsymbol{\Pi} = 2\mathbf{F}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_2}\right)\mathbf{I} - \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_2}\mathbf{C}\right] - p\mathbf{F}^{-1} \tag{2.32}$$

Ces expressions peuvent également s'écrire en fonction des directions principales des tenseurs des contraintes. Par exemple, en formulant l'hypothèse de contraintes planes dans la direction de l'axe 3 ($\sigma_3 = 0$), $\boldsymbol{\sigma}$ s'écrirait :

$$\sigma_i = 2\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_1}\lambda_i^2 - 2\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_2}\frac{1}{\lambda_i^2} - p\delta_i \quad (i = 1,\ 2\ ou\ 3) \tag{2.33}$$

$$\tag{2.34}$$

Dans ce cas, l'indétermination sur p peut être levée en écrivant la différence $\sigma_i - \sigma_3$ ($i = 1,\ 2$) :

$$\sigma_i = 2\left[(\lambda_i^2 - \lambda_3^2)\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_1} - \left(\frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{1}{\lambda_3^2}\right)\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_2}\right] \tag{2.35}$$

Dans la suite, il est question d'utiliser le formalisme introduit dans ce paragraphe afin d'exprimer les solutions analytiques de cas simples de sollicitation.

2.2.3 Application à des cas simples de sollicitation

2.2.3.1 Traction uniaxiale

Ce mode de déformation consiste à étirer un échantillon sur lequel la partie utile peut être supposée en état de déformation uniaxiale (Figure 2.2 [71]).
Les contraintes dans la largeur et dans l'épaisseur de l'éprouvette sont considérées nulles. Le tenseur gradient de la transformation **F** est de la forme :

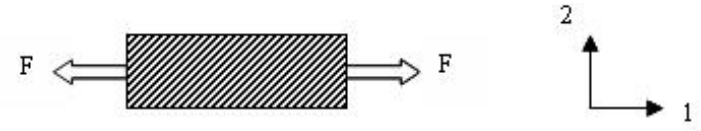


FIG. 2.2 – Traction uniaxiale

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

Les invariants de $\boldsymbol{C}$ sont donnés par les relations :

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \tag{2.37}$$

$$I_2 = \frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda \tag{2.38}$$

$$I_3 = 1 \tag{2.39}$$

La contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \lambda_1} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \lambda_2} \tag{2.40}$$

où $\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}$ et $\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}$ représentent les dérivées partielles de la fontion $\boldsymbol{W}$ lorsque celle-ci est écrite sous la forme $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

2.2.3.2 Traction équibiaxiale

L'extension équibiaxiale consiste à étirer un échantillon simultanément dans deux directions perpendiculaires avec la même valeur d'extension, la troisième direction étant libre. En général, on utilise une membrane sur laquelle on applique le même effort (F) sur chacun de côtés dans les deux directions (Figure 2.3 [71]).

Dans ce cas, les variables λ_i sont telles que :

$$\lambda_1 = \lambda_2 \tag{2.41}$$

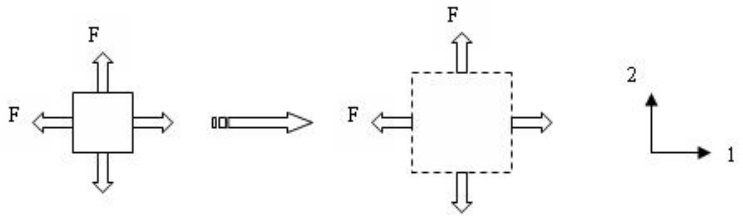


FIG. 2.3 – Traction équibiaxiale

Le tenseur gradient de la transformation s'écrit alors :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

Les invariants de **C** sont donnés par les relations :

$$I_1 = 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} \tag{2.43}$$

$$I_2 = \frac{2}{\lambda^2} + \lambda^4 \tag{2.44}$$

$$I_3 = 1 \tag{2.45}$$

Les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy dans les directions 1, 2 et 3 s'écrivent :

$$\sigma_1 = \sigma_{11} - \sigma_{33} \tag{2.46}$$

$$= 2\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_2}\right) \tag{2.47}$$

$$\sigma_{33} = 0 \tag{2.48}$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 \tag{2.49}$$

2.2.3.3 Traction biaxiale

La traction biaxiale correspond au cas où λ_1 et λ_2 prennent des valeurs différentes. La Figure 2.4 [1] présente le schéma de principe du montage expérimental de la traction biaxiale exercée sur une membrane.

Le tenseur gradient de la transformation dans la partie utile de l'éprouvette est de la forme :

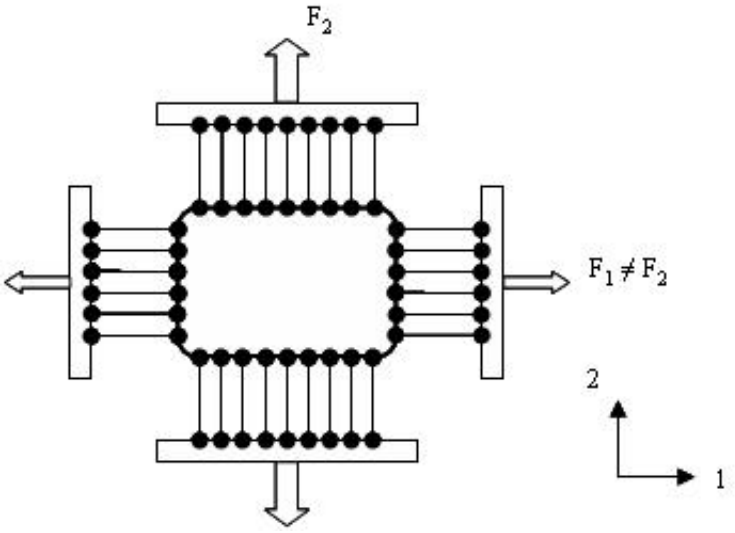


FIG. 2.4 – Traction biaxiale

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2} \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

et les invariants de **C** sont donnés par les relations :

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2} \tag{2.51}$$

$$I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \tag{2.52}$$

$$I_3 = 1 \tag{2.53}$$

La contrainte hors-plan est nulle, on obtient alors les composantes diagonales du tenseur de Cauchy :

$$\sigma_1 = \sigma_{11} - \sigma_{33} \tag{2.54}$$

$$= 2\left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_1} + \lambda_2^2\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_2}\right) \tag{2.55}$$

et

$$\sigma_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33} \tag{2.56}$$

$$= 2\left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_1} + \lambda_1^2\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_2}\right) \tag{2.57}$$

La traction équibiaxiale est un cas particulier de traction biaxiale.

2.2.3.4 Cisaillement pur

Cet essai consiste à pincer un échantillon de membrane rectangulaire sur ses bords les plus longs et à appliquer un effort perpendiculairement à ces bords (Figure 2.5 [71]). La contrainte hors plan est nulle.

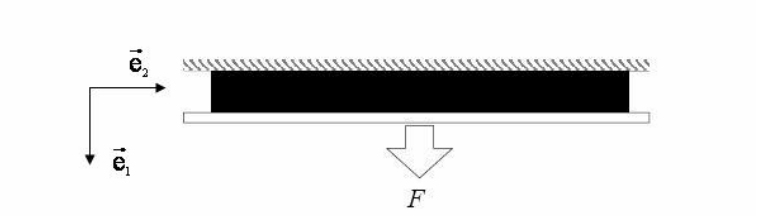


FIG. 2.5 – Cisaillement pur

Loin des bords libres de l'éprouvette, on peut supposer que l'état de déformation de l'échantillon reste uniforme et égal à celui qui règne au centre de l'éprouvette. On peut alors écrire le tenseur gradient de la transformation sous la forme suivante :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

Les invariants de **C** sont donnés par les relations :

$$I_1 = \lambda^2 + 1 + \frac{1}{\lambda^2} \tag{2.59}$$

$$I_2 = I_1 \tag{2.60}$$

$$I_3 = 1 \tag{2.61}$$

La composante du tenseur des contraintes de Cauchy dans la direction de la force appliquée est alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_1} + \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_2}\right) \tag{2.62}$$

2.2.4 Densité d'énergie de déformation en incompressible

De nombreuses formes de densité d'énergie de déformation ont été proposées dans la littérature, certaines se basant sur un formalisme physiquement motivé, d'autres demeurant purement phénoménologiques. L'objectif ici n'est pas d'en dresser une liste exhaustive, mais plutôt de présenter celles que nous avons choisies afin d'identifier, par méthode inverse, les paramètres matériau des équations constitutives dans le cadre d'un matériau considéré comme incompressible.

2.2.4.1 Le modèle néo-hookéen

Le modèle néo-hookéen [72] est le modèle hyperélastique le plus simple. Il permet de décrire la relation contrainte-déformation de matériaux pour des déformations modérées. La densité d'énergie de déformation est supposée de la forme :

$$\boldsymbol{W} = \frac{G}{2}\left(I_1 - 3\right) \tag{2.63}$$

où G est le module de cisaillement du matériau. On peut alors en déduire la forme du tenseur des contraintes de Cauchy sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = G\mathbf{B} - p\mathbf{I} \tag{2.64}$$

2.2.4.2 Le modèle de Mooney (1940)

Mooney [73] propose de formuler la densité d'énergie de déformation en se basant sur les hypothèses suivantes :

- le matériau est homogène et exempt d'hysterésis ;
- à l'état non-déformé, le caoutchouc est supposé isotrope dans le plan orthogonal à la direction de sollicitation ;
- il est incompressible ($J = 1$) ;

– il existe une relation linéaire entre les contraintes et les déformations en cisaillement comme dans la loi de Hooke.

Le modèle qui en découle s'écrit en fonction de deux paramètres matériau C_1, C_2 :

$$\boldsymbol{W} = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3) \tag{2.65}$$

Cette expression nous permet de retrouver la forme néo-hookéenne, en négligeant le terme avec le deuxième invariant. Il faut toutefois remarquer que le modèle de Mooney à deux paramètres est très employé dans de nombreux codes de calculs par éléments finis comme ABAQUS, ANSYS et SAMCEF, en raison de son nombre réduit de paramètres et de sa robustesse. Cependant, son domaine de validation est limité à environ 300% à 400% de déformation en traction pour un élastomère incompressible et ne permet pas une bonne modélisation des pièces confinées.

2.2.4.3 La série de Rivlin (1948)

La série de Rivlin [74] permet également d'écrire l'énergie de déformation en fonction des deux invariants I_1 et I_2 :

$$\boldsymbol{W} = \sum_{i+j=1}^{N} \boldsymbol{C}_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \tag{2.66}$$

où C_{ij} sont des paramètres constants. N peut prendre des valeurs infinies.

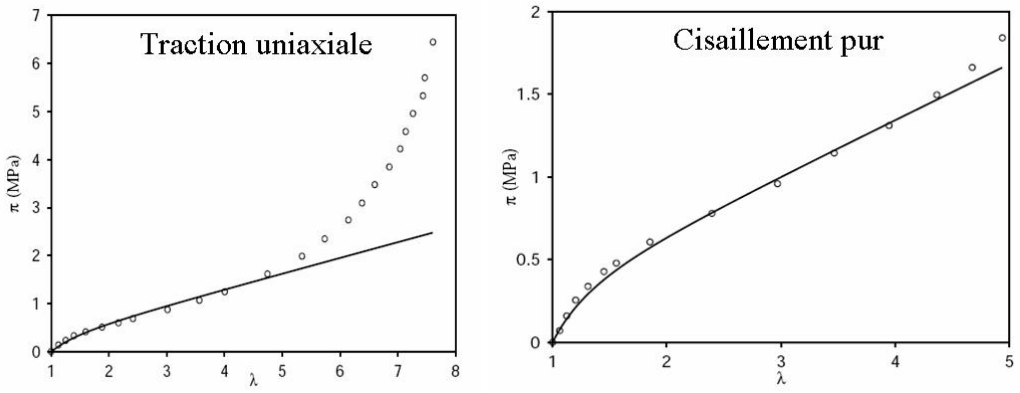
Il n'y a aucune limitation pour N. Plus N est élevé, meilleure est l'ajustement du modèle. Cependant, un nombre élevé de paramètres peut conduire à des difficultés numériques d'identification et nécessite de disposer de données expérimentales suffisantes. Donc une valeur élevée de N n'est habituellement pas recommandée.

2.2.4.4 Le modèle de Yeoh

Le modèle de Yeoh [75] est issu de la constatation expérimentale que $\dfrac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial I_2}$ est négligeable dans le cas de mélanges. Yeoh a ainsi proposé une densité d'énergie de déformation avec trois coefficients où le second invariant n'apparaît pas. La densité d'énergie de déformation proposée s'écrit :

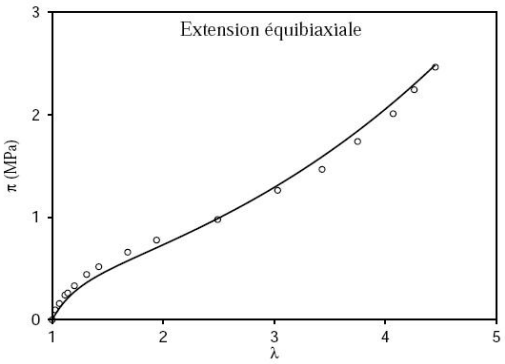
$$\boldsymbol{W} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \tag{2.67}$$

Remarque sur l'utilisation de ces lois de comportement Les différentes lois présentées précédemment n'ont pas les mêmes domaines de validité. Il faut donc vérifier que le domaine de validité de la loi de comportement considérée soit compatible avec les niveaux locaux de sollicitation. En guise d'exemple, Marckmann [1] utilise, entre autres, la loi de Mooney pour prédire les résultats expérimentaux de Treloar [76] obtenus avec un caoutchouc naturel. Ils sont présentés par la Figure 2.6. Pour des élongations λ modérées (inférieures à 4), cette loi permet de simuler la réponse de l'élastomère pour les trois essais simples de chargement (TU, TEQ, C). Il apparaît, en revanche, que pour des élongations supérieures, la modélisation s'éloigne de la mesure expérimentale. Ceci justifie que par la suite, le dépouillement des essais se fera jusqu'à des élongations principales maximales de 4 en traction simple si l'identification se fait avec la loi de Mooney.



(a) Essai traction uniaxiale

(b) Essai cisaillement pur



(c) Essai extension équibiaxiale

FIG. 2.6 – Essais de Treloar sur caoutchouc naturel pour des déformation modérées, d'après la thèse de Gilles MARCKMANN [1] – Comparaison entre mesure et modèle de Mooney (1940) pour les trois essais.

2.2.4.5 Caractérisation de l'hétérogénéité d'un champ de déformation

Classiquement, l'identification des paramètres matériau des lois hyperélastiques s'opère au travers de plusieurs essais simples, dîtes homogènes. La multiplicité des essais est justifiée par le fait que le jeu de paramètres matériau puisse évoluer avec le trajet de chargement. Il est classiquement admis qu'avec la traction uniaxiale, la traction équibiaxiale et le cisaillement pur, il est possible de largement décrire le domaine des trajets possibles de chargement [77]. Cette analyse est habituellement menée sur le plan (I_1,I_2). La Figure 2.7 montre trois courbes particulières dans ce plan. Elles représentent les trois états de sollicitation particuliers (traction uniaxiale TU, traction equibiaxiale TEQ et cisaillement pur C) pour lesquels les équations paramétrées en fonction de l'élongation λ ont été developpées précédemment. Avec une telle représentation, un état de sollicitation quelconque correspond à un point entre les courbes TU et TEQ.

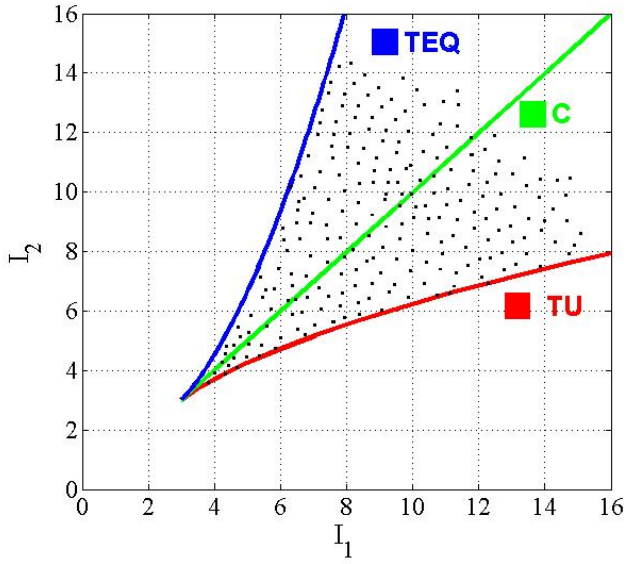


FIG. 2.7 – Représentation dans le plan (I_1, I_2) de l'hétérogénéité d'un essai – Illustration pour une hétérogénéité « idéale ».

Lorsque l'essai est hétérogène, la nature de l'hétérogénéité peut être observée dans ce plan. Même s'il est délicat de quantifier le caractère hétérogène d'un essai, certains critères issus du bon sens sont à vérifier. En effet, il semble acquis que plus la variété des cas de sollicitation est grande, meilleure sera l'identification. De même, pour des cas de chargement de même nature (par exemple la traction uniaxiale), plus les différents niveaux d'élongation sont représentés, meilleure sera l'identification. Par la suite, il s'agira donc de mettre en œuvre ce type d'indica-

teurs d'hétérogénéité pour discuter du caractère hétérogène d'un essai. Il faudra donc considérer la géométrie de l'échantillon mais aussi le type de chargement pour arriver à nos fins.

2.2.5 Conclusion

Après ces rappels concernant les grandes déformations et les lois de comportement, l'objectif du paragraphe suivant va être d'intégrer ces éléments dans l'écriture du PTV. La MCV formulée en grandes déformations en sera déduite et donnée dans le cas particulier de l'hyperélasticité.

2.3 La MCV en grandes déformations

2.3.1 Introduction

L'objectif de ce paragraphe est de présenter la MCV dans le cadre des grandes déformations. L'expression du PTV exprimé en grandes déformations est d'abord rappelée. On déduit ensuite de cette expression la MCV appliquée à l'identification des paramètres des lois de Mooney et de Yeoh.

2.3.2 Le PTV en grandes déformations

Le PTV représente la forme faible de l'équation d'équilibre. Il est vérifié indépendamment de la loi de comportement. Le PTV peut être écrit en coordonnées lagrangiennes, eulériennes ou mixtes. On se place ici dans le dernier cas uniquement car les grandeurs cinématiques seront toujours données dans le repère initial et les chargements dans la configuration courante.
On considère un volume V_o de surface extérieure S_o dans la configuration initiale. La frontière S_o^f est une partie de S_o sur laquelle une densité surfacique d'effort $\mathbf{\Pi} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}$ est appliquée. $\vec{\boldsymbol{N}}$ est la normale sortante extérieure à la surface S_o. La frontière S_o^u est une partie de S_o sur laquelle le déplacement appliqué $u = \overline{u}$ est connu.

En considérant que le chargement est quasi-statique et en l'absence de forces volumiques, le PTV s'exprime de la façon suivante :

$$-\int_{V_o} \mathbf{\Pi} : \frac{\partial \vec{\boldsymbol{U}}^*}{\partial \vec{\boldsymbol{X}}} d\boldsymbol{V}_o + \int_{S_o^f} \left(\mathbf{\Pi} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}\right) \cdot \vec{\boldsymbol{U}}^* \, d\boldsymbol{S}_o = 0 \;\; \forall \vec{\boldsymbol{U}}^* \; CA \tag{2.68}$$

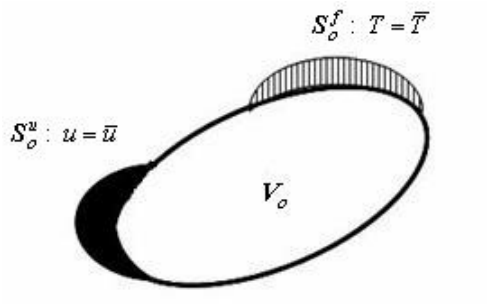


FIG. 2.8 – Configuration Lagrangienne étudiée

où :

- $\vec{\boldsymbol{U}}^*$ est un champ de déplacements virtuels cinématiquement admissible (C.A.).
- $\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{U}}^*}{\partial \vec{\boldsymbol{X}}}$ est la dérivée des déplacements virtuels écrite sur la configuration non-déformée.
- $\boldsymbol{\Pi}$ est 1^{re} tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

Le premier terme de l'équation ci-dessus représente le travail virtuel des efforts intérieurs, le terme de droite le travail virtuel des efforts extérieurs. Il faut souligner que cette équation est valide pour n'importe quel champ virtuel cinématiquement admissible. Cette propriété sera exploitée pour mettre en place la MCV dans le paragraphe ci-dessous.

2.3.3 Cas des contraintes planes

On se place ici dans le cas de contraintes planes dans le plan $x - y$. Le 1^{er} tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est donné par la relation ci-dessous :

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{pmatrix} \Pi_{XX} & \Pi_{XY} & 0 \\ \Pi_{YX} & \Pi_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_{ZZ} = 0 \end{pmatrix} \tag{2.69}$$

En notant *t* l'épaisseur initiale du matériau, le PTV devient

$$\begin{aligned} &t \int_{S_0} \Pi_{XX} \frac{\partial U_X^*}{\partial X} d\boldsymbol{S}_0 + t \int_{S_0} \Pi_{YY} \frac{\partial U_Y^*}{\partial Y} d\boldsymbol{S}_0 + t \int_{S_0} \Pi_{XY} \frac{\partial U_X^*}{\partial Y} d\boldsymbol{S}_0 + t \int_{S_0} \Pi_{YX} \frac{\partial U_Y^*}{\partial X} d\boldsymbol{S}_0 \\ &= \int_{S_{0f}} \left(\Pi \cdot \vec{\boldsymbol{N}} \right) \cdot \vec{\boldsymbol{U}}^* d\boldsymbol{S}_0 \end{aligned} \tag{2.70}$$

2.3.4 Principe de la MCV

L'Equation 2.70 ci-dessus est valable pour tout champ virtuel C.A.. Le principe de la MCV est d'écrire cette équation avec des champs virtuels particuliers et indépendants. Dans le cas d'une loi de comportement dépendant linéairement des paramètres pilotant cette loi, le PTV est une équation linéaire en fonction de ces paramètres. Le principe de la MCV consiste alors à écrire l'équation avec un nombre de champs virtuels indépendants au moins égal au nombre d'inconnues. On obtient alors un système d'équations dont les paramètres qui pilotent la loi sont les inconnues. Ce système est inversible si le champ de déformation est hétérogène et si les champs virtuels sont bien indépendants. L'avantage d'une telle procédure est qu'elle est directe et qu'elle ne nécessite pas de conduire de nombreux calculs itératifs comme dans le cas du recalage par éléments finis.

La question de la détermination des champs virtuels est centrale dans cette méthode car elle conditionne le degré d'indépendance des équations obtenues. Divers travaux ont été réalisés sur cette question dans le cadre des petites déformations [58]. On montre en particulier que la recherche d'un champ virtuel minimisant l'effet d'un bruit de mesure sur les paramètres identifiés conduit à une solution unique dans une base fonctionnelle donnée. Dans le cas des grandes déformations abordé ici, les coefficients des contraintes dans l'expression du PTV est beaucoup plus compliqué que dans le cas de petites déformations. Pour cette première approche, on s'est donc appuyé sur une démarche simple et semi-empirique pour définir les champs virtuels optimaux. L'idée est de générer aléatoirement un grand nombre de champs virtuels et à retenir l'ensemble de champs virtuels qui conduit à un conditionnement de système le meilleur possible. La procédure est décrite en détails dans le paragraphe 3.5.2 ci-dessous.

Il faut souligner que la démarche ci-dessus n'est pas applicable lorsque la loi de comportement ne dépend plus linéairement des paramètres qui la gouverne, comme dans le cas de la plasticité par exemple. On construit alors une fonction coût qui est l'écart quadratique entre travail virtuel des efforts intérieurs et extérieurs. Cette fonction est alors minimisée par rapport aux paramètres de la loi. Une telle démarche n'a pas été appliquée dans cette étude, les lois étudiées étant des expressions linéaires des paramètres de la loi de comportement.
Examinons maintenant l'expression du PTV dans le cas des lois de Mooney et de Yeoh.

2.3.4.1 Expression du PTV dans le cas d'une loi de Mooney

Réécrivons maintenant l'équation 2.68 en introduisant les équations 2.32 et 2.65. Il faut pour cela écrire connaître les contraintes $\mathbf{\Pi}$ en fonction des paramètres de la loi de comportement de Mooney C_1 et C_2, et des élongations λ_1 ($i = 1, \cdots 3$). Tous calculs faits, on obtient pour ces contraintes :

$$\begin{aligned}
\Pi_{11} = \;& 2C_1 \times \tfrac{1}{D}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)\left(P_{11}^2F_{22}-P_{11}P_{21}F_{12}\right)+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)\left(P_{12}^2F_{22}-P_{12}P_{22}F_{12}\right)\right] \\
& -2C_2 \times \tfrac{1}{D}\left[\left(\tfrac{1}{\lambda_1^2}-\tfrac{1}{\lambda_3^2}\right)\left(P_{11}^2F_{22}-P_{11}P_{21}F_{12}\right)+\left(\tfrac{1}{\lambda_2^2}-\tfrac{1}{\lambda_3^2}\right)\left(P_{12}^2F_{22}-P_{12}P_{22}F_{12}\right)\right] \\
\Pi_{12} = \;& 2C_1 \times \tfrac{1}{D}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)\left(-P_{11}^2F_{21}+P_{11}P_{21}F_{11}\right)+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)\left(-P_{12}^2F_{21}+P_{12}P_{22}F_{11}\right)\right] \\
& -2C_2 \times \tfrac{1}{D}\left[\left(\tfrac{1}{\lambda_1^2}-\tfrac{1}{\lambda_3^2}\right)\left(-P_{11}^2F_{21}+P_{11}P_{21}F_{11}\right)+\left(\tfrac{1}{\lambda_2^2}-\tfrac{1}{\lambda_3^2}\right)\left(-P_{12}^2F_{21}+P_{12}P_{22}F_{11}\right)\right] \\
\Pi_{21} = \;& 2C_1 \times \tfrac{1}{D}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)\left(-P_{21}^2F_{12}+P_{11}P_{21}F_{22}\right)+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)\left(-P_{22}^2F_{12}+P_{12}P_{22}F_{22}\right)\right] \\
& -2C_2 \times \tfrac{1}{D}\left[\left(\tfrac{1}{\lambda_1^2}-\tfrac{1}{\lambda_3^2}\right)\left(-P_{21}^2F_{12}+P_{11}P_{21}F_{22}\right)+\left(\tfrac{1}{\lambda_2^2}-\tfrac{1}{\lambda_3^2}\right)\left(-P_{22}^2F_{12}+P_{12}P_{22}F_{22}\right)\right] \\
\Pi_{22} = \;& 2C_1 \times \tfrac{1}{D}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)\left(P_{21}^2F_{11}-P_{11}P_{21}F_{21}\right)+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)\left(P_{22}^2F_{11}-P_{12}P_{22}F_{21}\right)\right] \\
& -2C_2 \times \tfrac{1}{D}\left[\left(\tfrac{1}{\lambda_1^2}-\tfrac{1}{\lambda_3^2}\right)\left(P_{21}^2F_{11}-P_{11}P_{21}F_{21}\right)+\left(\tfrac{1}{\lambda_2^2}-\tfrac{1}{\lambda_3^2}\right)\left(P_{22}^2F_{11}-P_{12}P_{21}F_{22}\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.71}$$

où P est la matrice de passage dont les composantes sont celles des vecteurs propres et où

$$D = F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21} \tag{2.72}$$

On introduit alors ces expressions dans l'Equation 2.68, ce qui donne

$$\begin{aligned}
& 2C_1\left(\int_{V_0}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)M_{xx}+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)N_{xx}\right]\frac{\partial U_x^*}{\partial X}dV_0+\int_{V_0}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)M_{yy}+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)N_{yy}\right]\frac{\partial U_y^*}{\partial Y}dV_0\right. \\
& \left.+\int_{V_0}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)M_{xy}+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)N_{xy}\right]\frac{\partial U_x^*}{\partial Y}dV_0+\int_{V_0}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)M_{yx}+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)N_{yx}\right]\frac{\partial U_y^*}{\partial X}dV_0\right) \\
& -2C_2\left(\int_{V_0}\left[(\frac{1}{\lambda_1^2}-\frac{1}{\lambda_3^2})M_{xx}+(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_3^2})N_{xx}\right]\frac{\partial U_x^*}{\partial X}dV_0+\int_{V_0}\left[(\frac{1}{\lambda_1^2}-\frac{1}{\lambda_3^2})M_{yy}+(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_3^2})N_{yy}\right]\frac{\partial U_y^*}{\partial Y}dV_0\right. \\
& \left.+\int_{V_0}\left[(\frac{1}{\lambda_1^2}-\frac{1}{\lambda_3^2})M_{xy}+(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_3^2})N_{xy}\right]\frac{\partial U_x^*}{\partial Y}dS_0+\int_{V_0}\left[(\frac{1}{\lambda_1^2}-\frac{1}{\lambda_3^2})M_{yx}+(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_3^2})N_{yx}\right]\frac{\partial U_y^*}{\partial X}dV_0\right) \\
& = \int_{\partial S_0^f}(\mathbf{\Pi}.\mathbf{n}).U^*dl
\end{aligned} \tag{2.73}$$

où

$$\begin{aligned} Mxx &= \frac{1}{D}\left(P_{11}^2 F_{22} - P_{11}P_{21}F_{12}\right) \\ Mxy &= \frac{1}{D}\left(-P_{11}^2 F_{21} + P_{11}P_{21}F_{11}\right) \\ Myx &= \frac{1}{D}\left(-P_{21}^2 F_{12} + P_{11}P_{21}F_{22}\right) \\ Myy &= \frac{1}{D}\left(P_{12}^2 F_{11} - P_{11}P_{21}F_{21}\right) \end{aligned} \tag{2.74}$$

et

$$\begin{aligned} Nxx &= \frac{1}{D}\left(P_{12}^2 F_{22} - P_{12}P_{22}F_{12}\right) \\ Nxy &= \frac{1}{D}\left(-P_{12}^2 F_{21} + P_{12}P_{22}F_{11}\right) \\ Nyx &= \frac{1}{D}\left(-P_{22}^2 F_{12} + P_{12}P_{22}F_{22}\right) \\ Nyy &= \frac{1}{D}\left(P_{22}^2 F_{11} - P_{12}P_{22}F_{21}\right) \end{aligned} \tag{2.75}$$

Comme indiqué dans l'introduction ci-dessus, on obtient une équation qui est linéaire en fonction des paramètres inconnus C_1 et C_2. Cette équation sera écrite au paragraphe 3.5.2 ci-dessous avec deux champs virtuels différents pour obtenir un système linéaire de deux équations à deux inconnues C_1 et C_2.

2.3.4.2 Expression du PTV en fonction des paramètres de Yeoh

Examinons maintenant le cas de la loi de Yeoh qui dépend quant à elle de 3 paramètres C_{10}, C_{20} et C_{30}. Les contraintes $\mathbf{\Pi}$ s'écrivent dans ce cas de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
\Pi_{11} = {} & 2C_{10} \times \frac{1}{D}\left[\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(P_{11}^2F_{22}-P_{11}P_{21}F_{12}\right)+\left(\lambda_2^2-\lambda_3^2\right)\left(P_{12}^2F_{22}-P_{12}P_{22}F_{12}\right)\right] \\
& + 4C_{20} \times \frac{1}{D}\left[\left(I_1-3\right)\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(P_{11}^2F_{22}-P_{11}P_{21}F_{12}\right)\right. \\
& \qquad \left. + \left(I_1-3\right)\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(P_{12}^2F_{22}-P_{12}P_{22}F_{12}\right)\right] \\
& + 6C_{30} \times \frac{1}{D}\left[\left(I_1-3\right)^2\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(P_{11}^2F_{22}-P_{11}P_{21}F_{12}\right)\right. \\
& \qquad \left. + \left(I_1-3\right)^2\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(P_{12}^2F_{22}-P_{12}P_{22}F_{12}\right)\right] \\
\Pi_{12} = {} & 2C_{10} \times \frac{1}{D}\left[\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(-P_{11}^2F_{21}+P_{11}P_{21}F_{11}\right)+\left(\lambda_2^2-\lambda_3^2\right)\left(-P_{12}^2F_{21}+P_{12}P_{22}F_{11}\right)\right] \\
& + 4C_{20} \times \frac{1}{D}\left[\left(I_1-3\right)\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(-P_{11}^2F_{21}+P_{11}P_{21}F_{11}\right)\right. \\
& \qquad \left. + \left(I_1-3\right)\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(-P_{12}^2F_{21}+P_{12}P_{22}F_{11}\right)\right] \\
& + 6C_{30} \times \frac{1}{D}\left[\left(I_1-3\right)^2\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(-P_{11}^2F_{21}+P_{11}P_{21}F_{11}\right)\right. \\
& \qquad \left. + \left(I_1-3\right)^2\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(-P_{12}^2F_{21}+P_{12}P_{22}F_{11}\right)\right] \\
\Pi_{21} = {} & 2C_{10} \times \frac{1}{D}\left[\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(-P_{21}^2F_{12}+P_{11}P_{21}F_{22}\right)+\left(\lambda_2^2-\lambda_3^2\right)\left(-P_{22}^2F_{12}+P_{12}P_{22}F_{22}\right)\right] \\
& + 4C_{20} \times \frac{1}{D}\left[\left(I_1-3\right)\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(-P_{21}^2F_{12}+P_{11}P_{21}F_{22}\right)\right. \\
& \qquad \left. + \left(I_1-3\right)\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(-P_{22}^2F_{12}+P_{12}P_{22}F_{22}\right)\right] \\
& + 6C_{30} \times \frac{1}{D}\left[\left(I_1-3\right)^2\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(-P_{21}^2F_{12}+P_{11}P_{21}F_{22}\right)\right. \\
& \qquad \left. + \left(I_1-3\right)^2\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(-P_{22}^2F_{12}+P_{12}P_{22}F_{22}\right)\right] \\
\Pi_{22} = {} & 2C_{10} \times \frac{1}{D}\left[\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(P_{21}^2F_{11}-P_{11}P_{21}F_{21}\right)+\left(\lambda_2^2-\lambda_3^2\right)\left(P_{22}^2F_{11}-P_{12}P_{22}F_{21}\right)\right] \\
& + 4C_{20} \times \frac{1}{D}\left[\left(I_1-3\right)\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(P_{21}^2F_{11}-P_{11}P_{21}F_{21}\right)\right. \\
& \qquad \left. + \left(I_1-3\right)\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(P_{22}^2F_{11}-P_{12}P_{22}F_{21}\right)\right] \\
& + 6C_{30} \times \frac{1}{D}\left[\left(I_1-3\right)^2\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(P_{21}^2F_{11}-P_{11}P_{21}F_{21}\right)\right. \\
& \qquad \left. + \left(I_1-3\right)^2\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(P_{22}^2F_{11}-P_{12}P_{22}F_{21}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2.76}
$$

En introduisant cette fois les expressions ci-dessus l'Equation 2.68, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&2C_{10}\left(\int_{V_0}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)M_{xx}+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)N_{xx}\right]\frac{\partial U_x^*}{\partial X}dV_0\right.\\
&+\int_{V_0}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)M_{yy}+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)N_{yy}\right]\frac{\partial U_y^*}{\partial Y}dV_0\\
&\left.+\int_{V_0}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)M_{xy}+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)N_{xy}\right]\frac{\partial U_x^*}{\partial Y}dV_0+\int_{V_0}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)M_{yx}+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)N_{yx}\right]\frac{\partial U_y^*}{\partial X}dV_0\right)\\
&+4(I_1-3)C_{20}\left(\int_{V_0}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)M_{xx}+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)N_{xx}\right]\frac{\partial U_x^*}{\partial X}dV_0\right.\\
&+\int_{V_0}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)M_{yy}+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)N_{yy}\right]\frac{\partial U_y^*}{\partial Y}dV_0\\
&\left.+\int_{V_0}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)M_{xy}+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)N_{xy}\right]\frac{\partial U_x^*}{\partial Y}dV_0+\int_{V_0}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)M_{yx}+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)N_{yx}\right]\frac{\partial U_y^*}{\partial X}dV_0\right)\\
&+6(I_1-3)^2C_{30}\left(\int_{V_0}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)M_{xx}+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)N_{xx}\right]\frac{\partial U_x^*}{\partial X}dV_0\right.\\
&+\int_{V_0}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)M_{yy}+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)N_{yy}\right]\frac{\partial U_y^*}{\partial Y}dV_0\\
&\left.+\int_{V_0}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)M_{xy}+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)N_{xy}\right]\frac{\partial U_x^*}{\partial Y}dV_0+\int_{V_0}\left[(\lambda_1^2-\lambda_3^2)M_{yx}+(\lambda_2^2-\lambda_3^2)N_{yx}\right]\frac{\partial U_y^*}{\partial X}dV_0\right)\\
&=\int_{\partial S_0^f}(\mathbf{\Pi}.\mathbf{n}).U^*dl
\end{aligned}
\tag{2.77}
$$

Là encore, l'équation 2.77 est une fonction linéaire des paramètres inconnus C_{10}, C_{20} et C_{30}. Cette équation sera donc écrite au paragraphe 3.5.2 ci-dessous avec cette fois trois champs virtuels différents, ceci pour obtenir un système linéaire de trois équations à trois inconnues C_{10}, C_{20} et C_{30}.

2.4 Conclusion

Des rappels sur les grandes déformations ont été donnés dans ce chapitre. Les principales lois utilisées dans le cadre de l'hyperélasticité ont également été rappelées. Enfin, les grandes lignes de la MCV étendue aux grandes déformations ont été présentées. Certains points comme le choix et la description des champs virtuels seront précisés dans le chapitre suivant dédié à la mise en oeuvre de la MCV dans des cas simulés par éléments finis.

CHAPITRE 3

ETUDE À PARTIR DE SIMULATIONS NUMÉRIQUES PAR ÉLÉMENTS FINIS

3.1 Introduction

Ce chapitre se place dans une démarche d'utilisation de données simulées, avant de passer au traitement des données expérimentales. Des simulations numériques seront donc utilisées pour obtenir des champs des déplacements. Le code de calcul par éléments finis Ansys 11.0 est employé afin de réaliser ces calculs en grandes déformations sur des modèles hyperélastiques.

L'objectif de ce chapitre est de :

- présenter la procédure de post-traitement des champs de déplacements pour une exploitation dans le cadre du PTV. Le calcul des champs de gradients est notamment détaillé,
- présenter la caractérisation de l'hétérogénéité d'essais numériques à l'aide de la signature dans le plan (I_1, I_2) qui a été décrite au chapitre précédent,
- réaliser l'identification des paramètres « matériau » à l'aide de la MCV. La robustesse de la méthode est étudiée en réalisant des identifications à partir de données non-bruitées puis bruitées.

Le paragraphe 3.2 présente la modélisation numérique faite à l'aide du code de calcul par éléments finis. Le paragraphe 3.3 décrit le post-traitement des champs de déplacements. Le paragraphe 3.4 présente les résultats issus des simulations et du post-traitement. Enfin les paragraphes 3.5 et 3.6 developpent la MCV pour l'indentification des paramètres « matériau »sur ces exemples numériques.

Une fois cette étude réalisée, il sera possible dans les chapitres suivants d'appliquer la MCV à des fins d'identification sur des cas expérimentaux.

3.2 Modèles simulés par éléments finis

Ce paragraphe présente les modèles numériques créés sous Ansys : matériau, géométrie, maillage, conditions aux limites et résolution.

3.2.1 Paramètres « matériau » utilisés pour les simulations

Plusieurs types de lois hyperélastiques sont disponibles dans le code de calcul par éléments finis Ansys. Le lecteur peut se reporter au chapitre 2 pour un rappel sur les lois d'hyperélasticité. Deux modèles simples sont utilisés dans la présente étude :

– le modèle de Mooney. Le modèle est bien adapté au cas du caoutchouc naturel sous sollicitation « modérée », c'est-à-dire pour des déformations inférieures à 300% [76]. Pour rappel, la densité d'énergie de déformation W utilisée s'écrit alors :

$$\boldsymbol{W} \;=\; C_1\,(I_1-3) \;+\; C_2\,(I_2-3)$$

où I_1 et I_2 sont les invariants de C (avec $\mathbf{C}=\mathbf{F}^T\mathbf{F}$ où $\mathbf{F}$ est le gradient de la transformation).

– le modèle de Yeoh. Le modèle est bien adapté au cas du caoutchouc naturel pour des déformations allant jusqu'à 700%. Pour rappel, la densité d'énergie de déformation W s'écrit alors :

$$\boldsymbol{W} \;=\; C_{10}\,(I_1-3) \;+\; C_{20}\,(I_1-3)^2 \;+\; C_{30}\,(I_1-3)^3$$

Les paramètres choisis pour chaque modèle sont donnés dans le Tableau 3.1. Elles sont typiques pour des matériaux élastomères. On peut noter la valeur négative du paramètre C_{20} du modèle de Yeoh, cohérente avec les données expérimentales (voir référence [75]).

On suppose de plus que la déformation est isovolumique : $J = \det \mathbf{F} = 1$.

3.2.2 Géométrie en croix

La géométrie de l'éprouvette est similaire à celle qui sera utilisée dans le chapitre suivant consacré aux essais expérimentaux. Une forme en croix est considérée car c'est ce type d'éprouvette qui a été testé en pratique, comme on le précisera au chapitre 4. Les dimensions sont indiquées sur la Figure 3.1. La longueur et la largeur initiales sont égales à 125 mm. Des congés

TAB. 3.1 – Paramètres « matériau » utilisés pour les simulations.

Modèle de Mooney à deux paramètres	Modèle de Yeoh
C_1 = 0,4 MPa	C_{10} = 0,5 MPa
C_2 = 0,04 MPa	C_{20} = -0,04 MPa
	C_{30} = 0,005 MPa

de raccordement de rayon 20 mm sont utilisés pour limiter les concentrations de contrainte. Un état plan de contrainte est considéré dans la simulation.

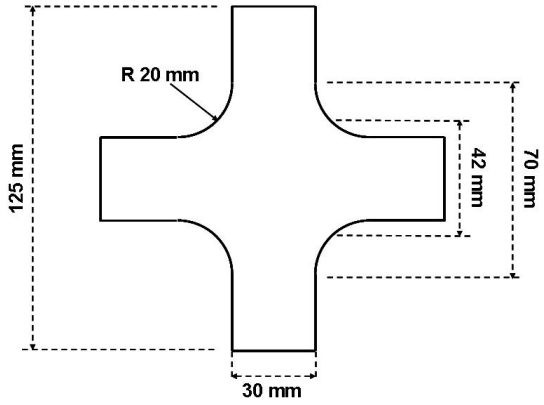


FIG. 3.1 – Géométrie : éprouvette en forme de croix.

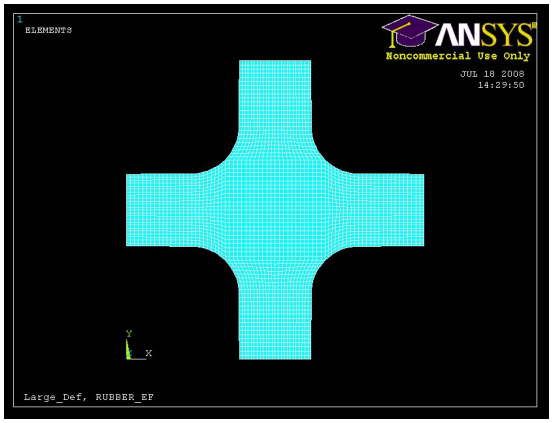


FIG. 3.2 – Maillage de la géométrie à l'état non déformé.

3.2.3 Maillage

L'élément bidimensionel à quatre noeuds PLANE182 du logiciel Ansys est utilisé. Il permet de réaliser les calculs en respectant l'hypothèse d'incompressibilité. Le maillage n'est pas réglé du fait de la géométrie de l'échantillon. Plusieurs niveaux de raffinement de maillage ont été testés. Une étude de convergence associée à un compromis par rapport au temps de calcul a permis de retenir le maillage présenté par la Figure 3.2. Le modèle est composé de 2976 éléments et de 3125 noeuds.

3.2.4 Conditions aux limites

Les conditions aux limites choisies reproduisent des chargements réalisables sur machine d'essais bidimensionelle. Aux extrémités des quatre branches, les déplacements sont uniformes et se font suivant l'axe de chaque branche. Les déplacements sont nuls dans la direction perpendiculaire aux branches de manière à reproduire, de manière simplifiée, une prise de mors. Deux cas de conditions limites (CL) sont testés :

- CL n°1 : des déplacements identiques sont appliqués aux extrémités des quatre branches (voir Figure 3.3). L'essai est qualifié de « traction équibiaxiale ».
- CL n°2 : les branches basse et gauche sont encastrées tandis que les deux autres branches sont soumises à des déplacements identiques. La Figure 3.4 montre le chargement. Il est proposé d'utiliser la désignation « essai de semibitraction » pour qualifier cet essai.

On appelle *élongation globale* ou *moyenne* λ_a le rapport de la longueur horizontale (ou verticale) de l'éprouvette déformée sur la longueur initiale (ici 125 mm). Quatre valeurs de λ_a sont appliquées pour chacun des deux types d'essais :

- pour la traction equibiaxiale (CL n°1), les valeurs de λ_a sont : 1,24 ; 1,40 ; 1,56 et 1,72.
- pour la semibitraction (CL n°2), les valeurs de λ_a sont : 1,12 ; 1,20 ; 1,28 et 1,36.

La valeur maximum de λ_a dans les deux types de conditions limites (1,72 et 1,36) correspond à un déplacement des mors mobiles de 45 mm. C'est la valeur maximum qui a été obtenue en pratique lors des essais, d'où ce choix. Il a été observé dans ces cas une déformation principale locale maximum d'environ 2,2. L'état de déformation maximum dans l'echantillon est donc compatible avec l'utilisation du modèle de Mooney choisi plus haut.

3.2.5 Résolution

Differents paramètres de résolution du problème non-linéaire sont définis suite à quelques tests, en termes de critère de convergence, norme de convergence, nombre de *substeps*. Différents essais de jeux de paramètres ont permis de s'assurer de la qualité du résultat fourni par le code de calcul. La durée des calculs présentées dans ce chapitre est de l'ordre de de 5 à 6 minutes pour chaque simulation. Les Figures 3.5 et 3.6 présentent à titre d'illustration les déformées obtenues pour les deux types de conditions aux limites considérées avec le modèle de Mooney.

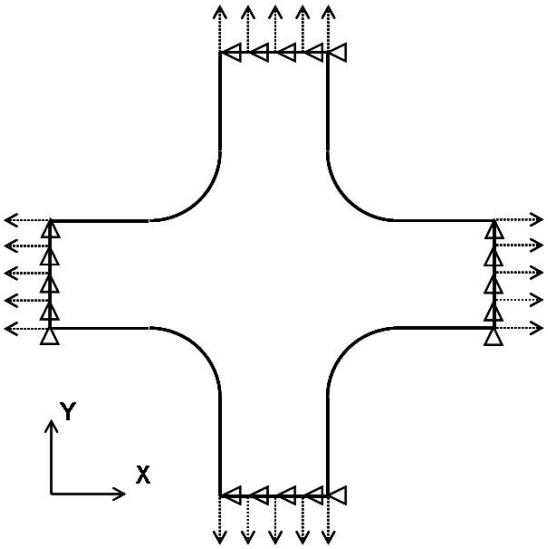


FIG. 3.3 – Conditions aux limites n°1 : traction equibiaxiale.

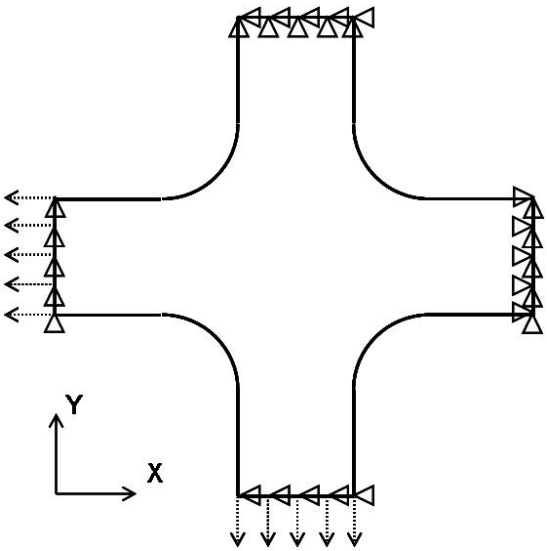


FIG. 3.4 – Conditions aux limites n°2 : essai de semibitraction.

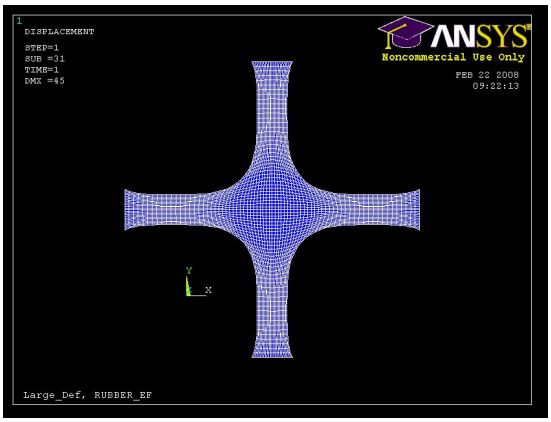


FIG. 3.5 – Déformée obtenue pour la traction équibiaxiale (CL n°1) à $\lambda_a = 1,72$ avec le modèle de Mooney.

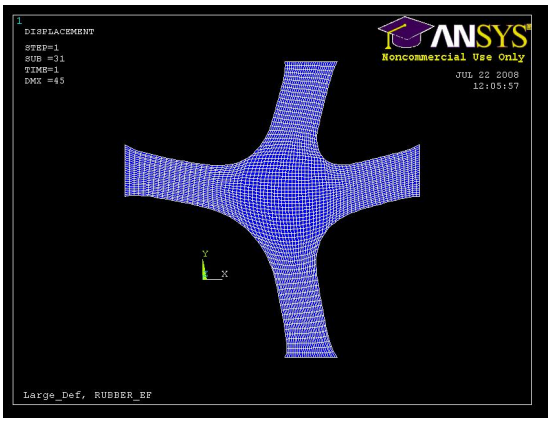


FIG. 3.6 – Déformée obtenue pour la semibitraction (CL n°2) à $\lambda_a = 1,36$ avec le modèle de Mooney.

3.3 Post-traitement des champs de déplacements

L'écriture du PTV nécessite la connaissance de plusieurs grandeurs issues du champ de déplacements réels (ici simulés) :

- les composantes du gradient de la transformation **F**,
- les valeurs propres λ_1^2, λ_2^2 et λ_3^2 de la matrice $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$.

Pour plus de précisions concernant l'intervention de ces grandeurs dans le PTV, le lecteur peut se reporter aux équations 2.73 et 2.77 pour les modèles de Mooney et de Yeoh, respectivement.

Le code de calcul Ansys pourrait évidemment fournir directement plusieurs champs utiles pour l'écriture du PTV : différents champs de déformations, de contraintes... Toutefois, cette possibilité n'est pas utilisée ici car seuls les déplacements plans en surface de l'éprouvette seront disponibles par la méthode de mesure expérimentale (corrélation d'images) qui sera employée dans le chapitre suivant. Les champs de déplacements simulés sont donc les données d'entrée du post-traitement. Pour chaque élement fini, on réalise les étapes suivantes afin de calculer les gradients de déplacements :

Etape 1 : obtention des déplacements aux quatre noeuds de l'élément. Les 4 positions initiales (X_i, Y_i) et les 4 déplacements (U_{X_i}, U_{Y_i}) des noeuds constituent des données d'entrée (Figure 3.7).

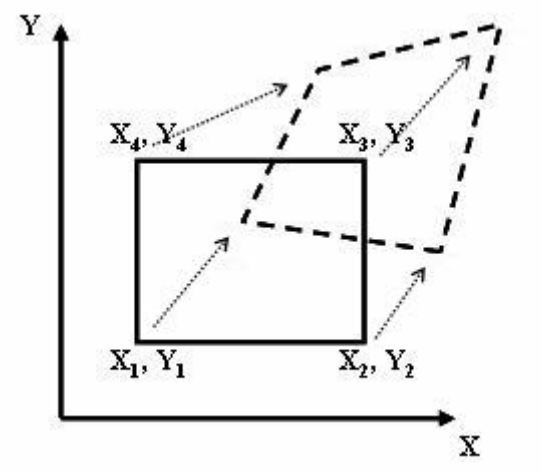


FIG. 3.7 – Déplacements des quatre noeuds de l'élément fini.

Etape 2 : calcul du gradient de la transformation F au centre de l'élément. Les champs de déplacements dans le plan (U_X, U_Y) sont considérés bilinéaires dans l'élément :

$$\begin{aligned} U_X\,(X,Y) &= a \cdot X + b \cdot Y + c \cdot X \cdot Y + d \\ U_Y\,(X,Y) &= e \cdot X + f \cdot Y + g \cdot X \cdot Y + h \end{aligned} \tag{3.1}$$

où X et Y sont les coordonnées dans la configuration non déformée de l'élement. Les 8 paramètres a, b, c, d, e, f, g et h sont obtenus par identification avec les déplacements connus des quatre noeuds (8 équations linéaires). La partie plane du gradient de la transformation **F** dans l'élément est ensuite calculée avec la définition suivante :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\partial U_X}{\partial X} & \dfrac{\partial U_X}{\partial Y} \\ \\ \dfrac{\partial U_Y}{\partial X} & 1 + \dfrac{\partial U_Y}{\partial Y} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

ce qui conduit aux composantes de **F** dans le plan suivantes :

$$\begin{aligned} F_{11} &= a + c \cdot Y + 1 \\ F_{22} &= f + g \cdot X + 1 \\ F_{12} &= b + c \cdot X \\ F_{21} &= e + g \cdot Y \end{aligned} \tag{3.3}$$

La valeur de chacune de ces composantes est ensuite calculée au centre de l'élément.

Etape 3 : calcul des valeurs propres λ_i^2 de $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$. Les deux valeurs propres λ_1^2 et λ_2^2 de la matrice $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ dans le plan du problème sont directement déterminées. Puis la troisème valeur propre λ_3^2 suivant la direction perpendiculaire au plan du problème est obtenue grâce à l'hypothèse d'incompressibilité du matériau ($J = \det \mathbf{F} = 1$) :

$$\lambda_3^2 = \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \tag{3.4}$$

La connaissance de λ_3 donne par ailleurs la composante F_{33} du gradient de la transformation **F**. Le tenseur **F** est alors complètement déterminé sachant que le problème est considéré comme plan, les composantes F_{13} et F_{23} sont nulles.

Différentes grandeurs peuvent ensuite être calculées pour chaque élément fini :

- les invariants I_1 et I_2 de la matrice $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$,

- la plus grande valeur propre λ_{max} de la matrice $\sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T\mathbf{F}}$. Cette grandeur λ_{max} est qualifiée d'*élongation maximum locale* dans la suite.

3.4 Observation des champs obtenus

3.4.1 Introduction

Dans la suite, les différents champs sont toujours représentés sur la géométrie non déformée. La Figure 3.8 précise la *zone d'étude* où seront conduites les observations. Cette zone d'étude correspond globalement à la zone qui sera observée par la caméra utilisée lors des mesures expérimentales. Le nombre d'éléments finis dans cette zone d'étude est de 1440, ce qui est comparable au nombre de points de « mesure de déplacements » qui seront obtenus lors des essais expérimentaux.

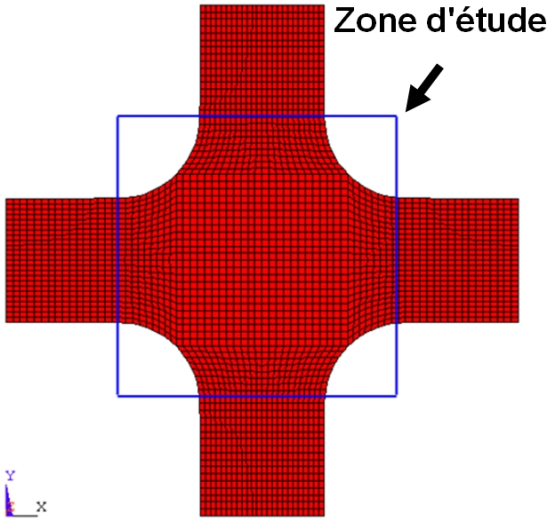


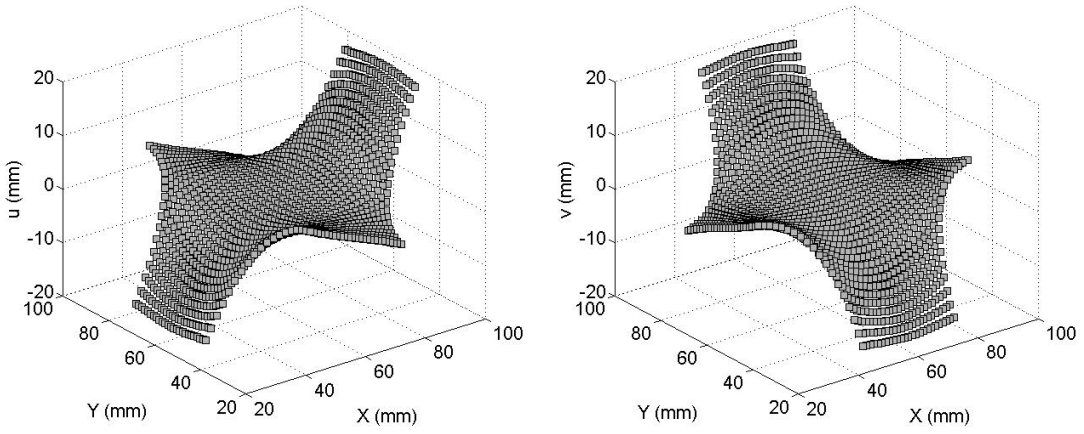
FIG. 3.8 – Zone d'étude.

3.4.2 Champs des déplacements

Quelques observations sont maintenant réalisées sur les champs de déplacements simulés. Ces champs seront comparés aux résultats des mesures expérimentales dans le chapitre suivant.

A titre d'exemple, la Figure 3.9 présente les champs de déplacements U_X et U_Y pour le chargement équibiaxial à λ_a = 1,72 avec le modèle de Mooney. On a bien une rotation de 90° entre les champs U_X et U_Y due à la symétrie du problème. Le déplacement au centre de l'échantillon est bien nul dû au chargement symétrique réalisé à l'aide de quatre mors mobiles. Dans la zone d'étude, le déplacement maximum est de l'ordre de 20 mm.

La Figure 3.10 présente les champs de déplacements simulées pour la semibitraction à λ_a = 1,36, toujours avec le modèle de Mooney. On observe bien une rotation de 90° entre les champs U et V due à la symétrie du problème suivant l'axe $X = Y$. Dans la zone d'étude, le déplacement maximum est de l'ordre de 25 mm.

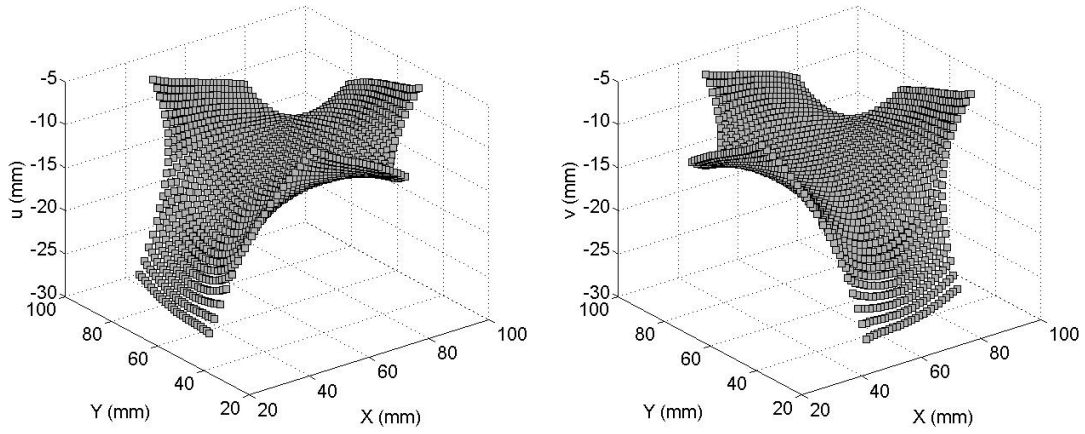


(a) U_X (b) U_Y

FIG. 3.9 – Champ des déplacements pour la traction equibiaxiale (CL n°1) à $\lambda_a = 1,72$ avec le modèle de Mooney.

3.4.3 Champs des gradients

La Figure 3.11 présente les champs de gradients correspondant à l'essai équibiaxial pour λ_a = 1,72 pour le modèle de Mooney. Quatre champs sont fournis : $\partial U_X/\partial X$, $\partial U_Y/\partial Y$, $\partial U_X/\partial Y$ et $\partial U_Y/\partial X$. On observe logiquement la rotation de 90° entre les champs $\partial U_X/\partial X$ et $\partial U_Y/\partial Y$. Les champs $\partial U_X/\partial Y$ et $\partial U_Y/\partial X$ sont quant à eux logiquement identiques.



(a) U_X (b) U_Y

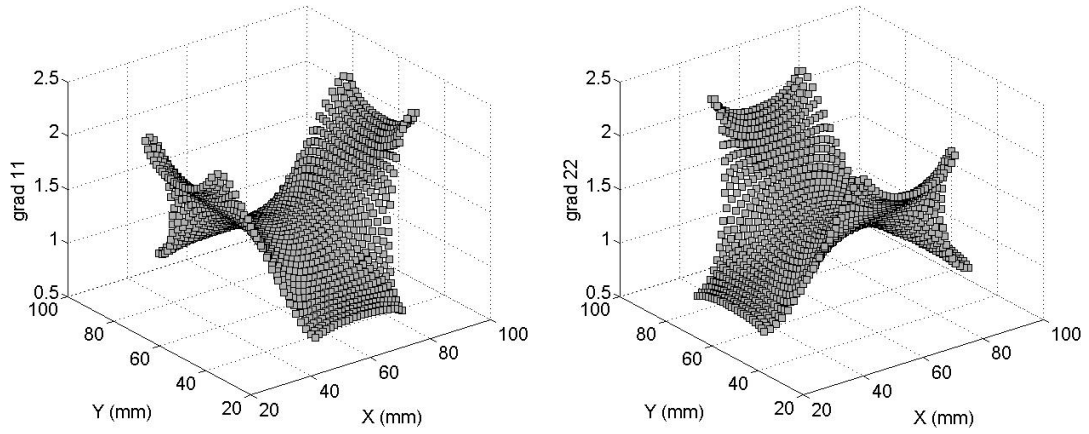
FIG. 3.10 – Champ des déplacements pour la semibitraction (CL n°2) à $\lambda_a = 1,36$ avec le modèle de Mooney.

De même, la Figure 3.12 présente le cas de l'essai semibitraction pour λ_a = 1,36. Du fait de la symétrie par rapport à l'axe $X = Y$, on observe logiquement une rotation de 90° entre les champs $\partial U_X/\partial X$ et $\partial U_Y/\partial Y$. Les champs $\partial U_X/\partial Y$ et $\partial U_Y/\partial X$ sont également symétriques par rapport à l'axe $X = Y$.

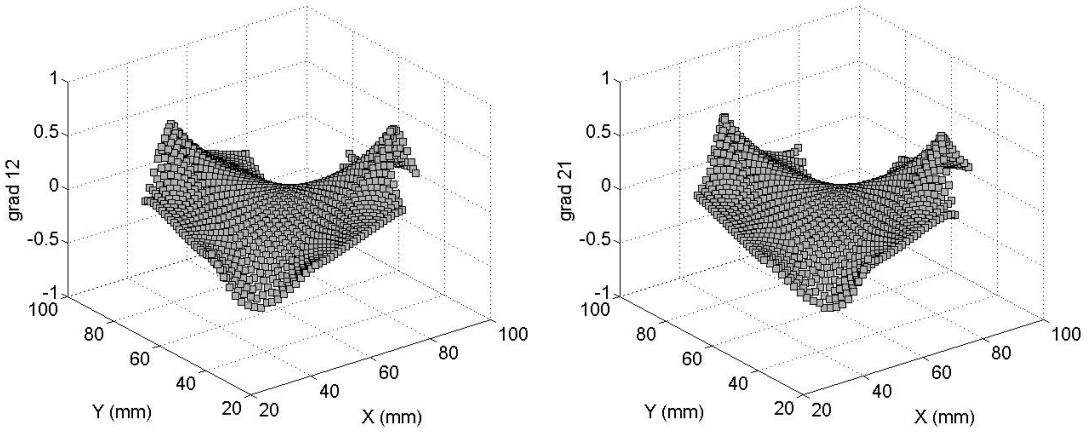
Ces champs pourront être comparés aux résultats issus des mesures expérimentales dans le chapitre suivant.

3.4.4 Hétérogénéité des essais

L'objectif de ce paragraphe est d'observer le caractère hétérogène des essais numériques réalisés. En effet, l'utilisation de la MCV afin d'identifier les paramètres « matériau » nécessite une forte hétérogénéité des déformations dans l'échantillon, que ce soit en termes de type de déformation locale (uniaxiale, biaxiale, traction, cisaillement...) qu'en termes de niveau de déformation. Cette hétérogénéité est décrite notamment par la « signature » (I_1, I_2) qui a été expliquée dans le chapitre précédent.

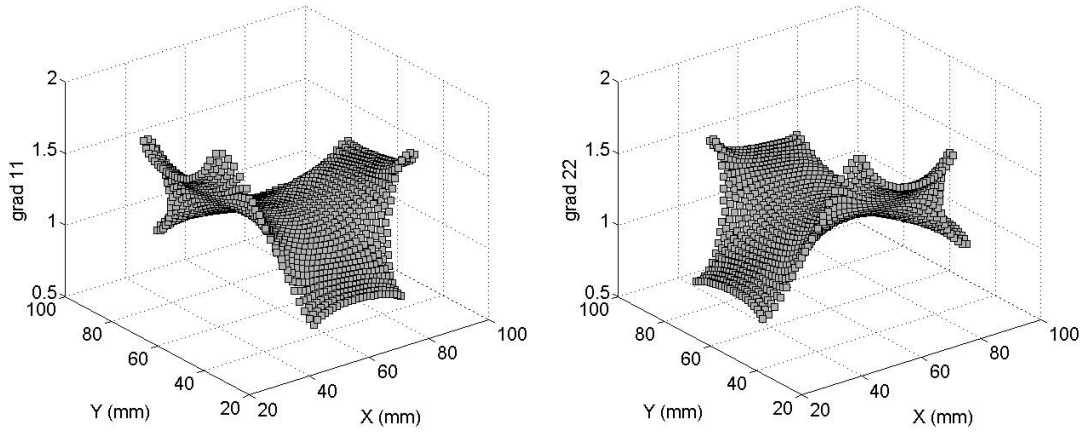


(a) $\dfrac{\partial U_X}{\partial X}$ (b) $\dfrac{\partial U_Y}{\partial Y}$

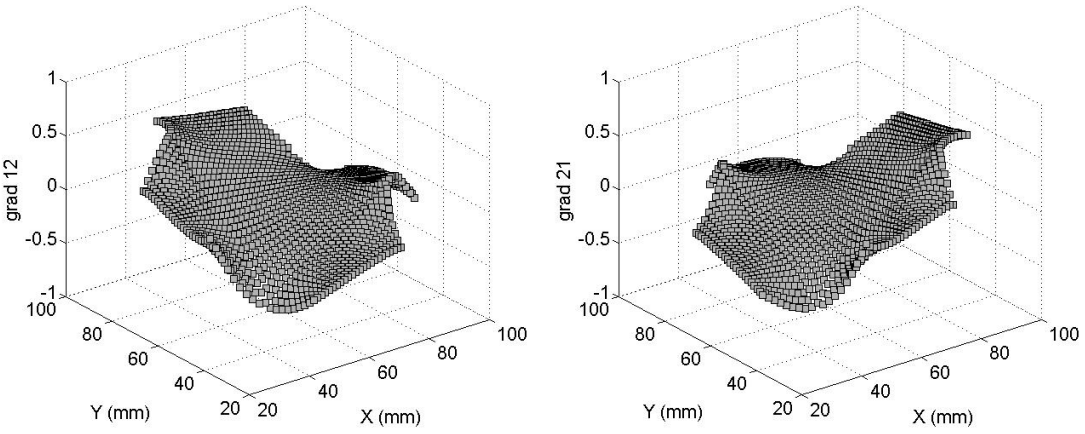


(c) $\dfrac{\partial U_X}{\partial Y}$ (d) $\dfrac{\partial U_Y}{\partial X}$

FIG. 3.11 – Champ des gradients pour la traction equibiaxiale (CL n°1) à $\lambda_a = 1,72$ pour le modèle de Mooney.



(a) $\dfrac{\partial U_X}{\partial X}$ (b) $\dfrac{\partial U_Y}{\partial Y}$



(c) $\dfrac{\partial U_X}{\partial Y}$ (d) $\dfrac{\partial U_Y}{\partial X}$

FIG. 3.12 – Champ des gradients pour la semibitraction (CL n°2) à $\lambda_a = 1,36$ pour le modèle de Mooney.

3.4.4.1 Cas du chargement équibiaxial (CL n°1)

La Figure 3.13 donne la représentation dans le plan (I_1,I_2) de l'essai équibiaxial (CL n°1) à $\lambda_a = 1,72$ pour le modèle de Mooney. Chaque point de la figure correspond à un élement fini du maillage dans la zone d'étude. Les observations suivantes méritent d'être relevées :

- les points apparaissent situés globalement sur une courbe dans le plan de la figure.
- de multiples points sont superposés sur la figure. D'une part, cela est dû logiquement à la symétrie du problème (points dans un même état de déformation). D'autre part, il a été constaté que de très nombreux points sont pratiquement superposés près de la courbe TEQ (traction équibiaxiale).
- la plupart des points sont situés entre la courbe TEQ (traction equi-biaxiale) et la ligne C (cisaillement pur). L'état TU (traction uniaxiale) est quant à lui peu réprésenté dans la zone d'étude.
- Les états peu déformés sont peu présents dans la zone de mesure. En effet, aucun point ne se trouve près du point traduisant une déformation nulle ($I_1 = 3$, $I_2 = 3$). Ceci peut être pénalisant en terme d'identification par la MCV.

Afin de préciser l'analyse notamment en termes de niveau d'élongation, la Figure 3.14 donne l'élongation maximum locale λ_{max} en fonction des coordonnées (X, Y) de la configuration non déformée. Une vue en 3D est utilisée pour une meilleure représentation des résultats. De plus, une couleur a également été affectée à chaque point, afin de relier le caractère de la déformation (TU, C, TEQ) à son amplitude (valeur de λ_{max}). Le bleu correspond à l'état TEQ, le rouge à l'état TU et le vert à l'état C. Une pondération de deux couleurs est utilisée pour les états intermédiaires entre TU et C et entre TEQ et C. Ces états sont définis par une couleur qui est la moyenne pondérée de deux couleurs, bleue et verte pour les états situés entre TEQ et C, verte et rouge pour les états situés entre C et TU. Le poids est défini en utilisant les distances de chaque point aux courbes. Les observations suivantes peuvent être formulées :

- logiquement, on observe que l'état TEQ (couleur bleue) apparait dans la zone centrale de l'éprouvette. Cette couleur bleue correspond à une valeur de λ_{max} qui varie assez peu. L'état de déformation peut être considéré comme fortement équibiaxial homogène dans la zone centrale de l'éprouvette.
- l'état C apparaît quant à lui près des branches et l'état TU est présent au niveau des rayons de courbure de l'éprouvette. Si la zone d'observation était plus grande, on observerait de la traction uniaxiale dans les branches et le cisaillement serait situé entre la traction uniaxiale et la traction équibiaxiale.

- la figure 3.14 confirme que les états peu déformés sont peu présents dans l'échantillon. En effet, aucun point ne se trouve près de $\lambda_{max} = 1$. La plus petite valeur de λ_{max} dans la zone d'étude est de 1,26.
- la plus grande valeur de λ_{max} dans la zone d'étude est d'environ 2,2. Elle correspond aux zones en TU.

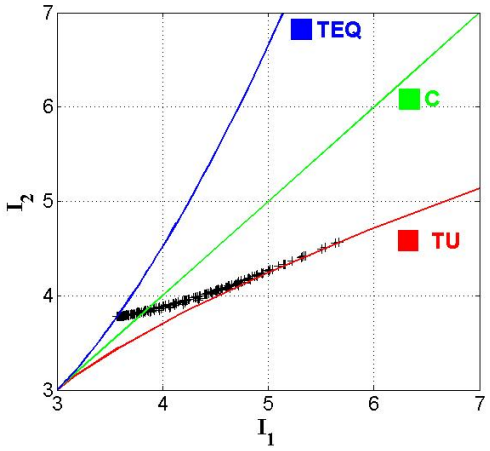


FIG. 3.13 – Représentation (I_1, I_2) de l'essai équibiaxial (CL n°1) à $\lambda_a = 1,72$ pour le modèle de Mooney.

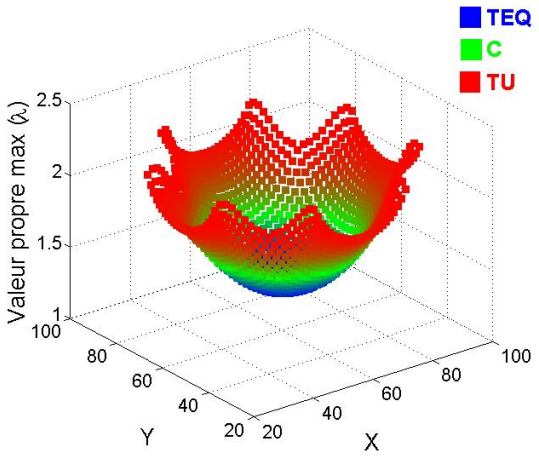


FIG. 3.14 – Elongation maximum locale λ_{max} en fonction des coordonnées (X, Y) de la configuration non déformée, pour l'essai équibiaxial (CL n°1) à $\lambda_a = 1,72$ avec le modèle de Mooney.

3.4.4.2 Cas du chargement semibitraction (CL n°2)

L'observation du caractère hétérogène est maintenant conduite sur la semibitraction (CL n°2) à $\lambda_a = 1,36$, toujours pour le modèle de Mooney. La Figure 3.15 donne la signature (I_1, I_2) de l'essai. Les observations suivantes peuvent être formulées :

- la plupart des points sont situés entre les courbes TU et TEQ. La zone entre TEQ et C est quant à elle peu couverte.
- par rapport à l'essai précédent (CL n°1), certains points points sont plus proches de l'état non déformé ($I_1 = 3$, $I_2 = 3$).

La Figure 3.16 complète l'analyse en présentant l'élongation maximum locale λ_{max} en fonction des coordonnées (X, Y) de la configuration non déformée. Les observations suivantes peuvent être faites :

- les élongations maximales locales λ_{max} sont mieux distribuées que dans le cas de la traction équibiaxiale. Notamment, des états plus proches de l'état non déformé $\lambda_{max} = 1$ sont obtenus. Dans la zone d'étude, la plus petite valeur de λ_{max} est de 1,04. Elle correspond à une zone en TEQ. La plus grande valeur de λ_{max} dans la zone d'étude est d'environ 2,2.
- les trois couleurs (correspondant aux trois états TEQ, TU et C) sont mieux équilibrées dans la zone d'étude que dans le cas de la traction équibiaxiale (CL n°1).

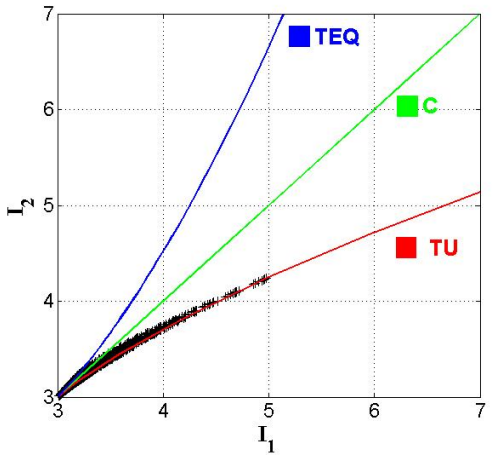


FIG. 3.15 – Représentation (I_1, I_2) de la semibitraction (CL n°2) à $\lambda_a = 1,36$ pour le modèle de Mooney à deux paramètres.

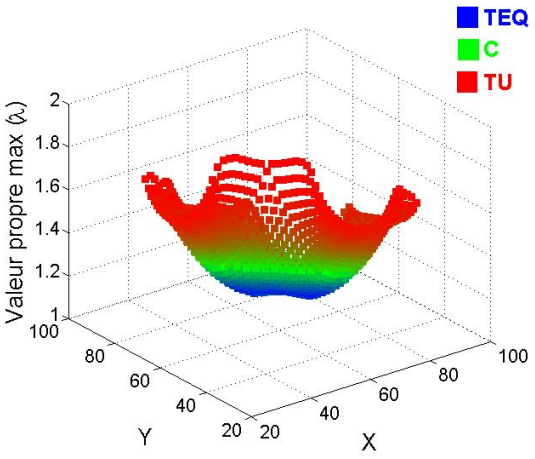


FIG. 3.16 – Elongation maximum locale λ_{max} en fonction des coordonnées (X, Y) de la configuration non déformée, pour la semibitraction (CL n°2) à $\lambda_a = 1,36$ avec le modèle de Mooney à deux paramètres.

Entre les deux types d'essais, il apparait que l'hétérogénéité semble plus forte dans le cas de la semibitraction (CL n°2) que dans le cas de la traction equibiaxiale (CL n°1). L'essai de semibitraction semble *a priori* mieux adapté pour l'identification des paramètres « matériau »à partir de la MCV.

3.5 Procédure pour l'identification par la MCV

3.5.1 Introduction

L'objectif est maintenant d'identifier les paramètres « matériau » à partir de données simulées similaires à celles qui sont obtenues lors des essais expérimentaux :

– le champ de déplacements (U_X, U_Y) dans la zone d'étude. Au niveau expérimental, ce sont les déplacements obtenus par corrélation d'images à l'aide d'une caméra CCD,
– les efforts *globaux* dans chacune des branches de l'échantillon. Au niveau expérimental, ce sont les efforts dans les mors de la machine d'essais.

La MCV s'appuie sur l'introduction d'un certain nombre de champs de déplacements virtuels (U_X^*, U_Y^*) dans le PTV, ce qui donne à chaque fois une nouvelle équation. La construction et l'optimisation du choix de ces champs sont détaillées dans les paragraphes suivants.

3.5.2 Construction d'un champ de déplacements virtuels

Les champs de déplacements virtuels (U_X^*, U_Y^*) sont des fonctions cinématiquement admissibles. Le choix des champs repose sur une autre contrainte liée au fait que seuls les efforts *globaux* dans chacune des branches de l'échantillon sont connus. Le travail virtuel des efforts extérieurs s'écrit en effet :

$$W_{ext}^* = \int_{\partial S_0^f} (\mathbf{\Pi}.\mathbf{n}).U^* dl$$

D'un point de vue expérimental, le profil de la distribution d'effort extérieur $\mathbf{\Pi}.\mathbf{n}$ ne peut pas être mesuré. Seule la résultante est connue dans chaque branche. Pour l'identification, la solution consiste alors à choisir un champ de déplacements virtuels *homogène* sur chacun des quatre bords et *dirigé* dans le sens de l'effort global (c'est à dire suivant l'axe de la branche).

Il n'est pas facile de construire un champ virtuel vérifiant ces contraintes à l'aide d'une seule fonction analytique. Il a donc été décidé de construire ce champ virtuel par morceaux [78]. Douze sous-domaines sont définis dans ce but (Figure 3.17).

Chaque sous-domaine est de forme quadrangulaire. Le champ des déplacements virtuels dans chaque sous-domaine est construit à l'aide d'une fonction de forme se basant sur les déplacements virtuels des quatre noeuds du sous-domaine. Il peut être noté sur la Figure 3.17 que certains sous-domaines sortent de la zone d'étude. Ceci ne pose pas de problème dans le sens où les calculs d'intégrales dans le PTV ne se font que sur la zone d'étude.

La construction d'un champ de déplacements virtuels vérifiant les contraintes définies précédemment consiste alors à appliquer des déplacements virtuels :

- verticaux et identifiques aux noeuds (1, 2, 3),

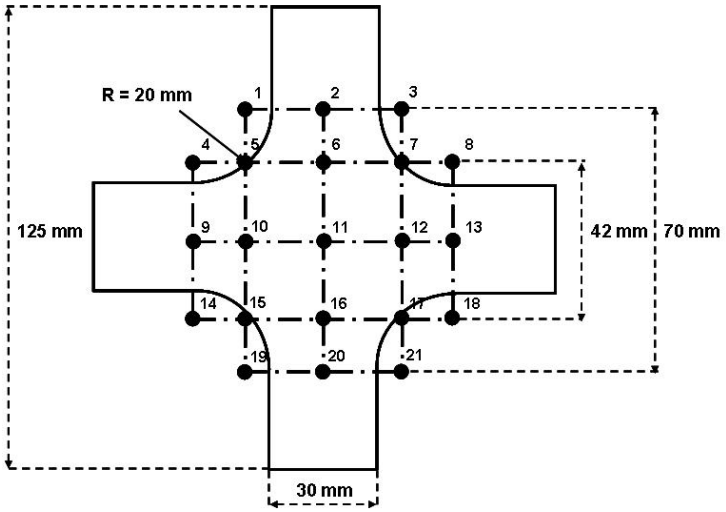


FIG. 3.17 – Douze sous-domaines permettant la construction de champs de déplacements virtuels par morceaux.

- verticaux et identifiques aux noeuds (19, 20, 21),
- horizontaux et identifiques aux noeuds (4, 9, 14),
- horizontaux et identifiques aux noeuds (8, 13, 18).

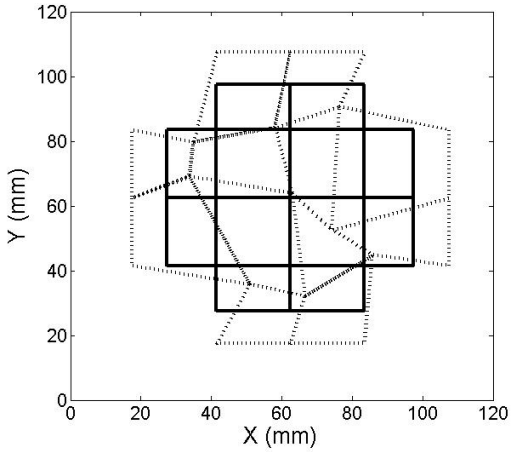
Les déplacements des autres noeuds ne sont soumis à aucune contrainte.

Les Figures 3.18 et 3.19 présentent des exemples de champs virtuels utilisables.

3.5.3 Construction de champs de déplacements virtuels « optimisés »

Dans le cas de la recherche des paramètres « matériau » d'une loi de comportement dépendant linéairement des paramètres pilotant la loi, le PTV est une équation dépendant lui aussi linéairement de ces paramètres, comme on l'a montré au chapitre 2. La stratégie d'identification consiste alors écrire le PTV avec un nombre de champs virtuels indépendants au moins égal au nombre d'inconnues. On utilise donc deux champs virtuels indépendants dans le cas du modèle de Mooney, et 3 dans le cas du modèle de Yeoh. La suite de ce paragraphe décrit une procédure de choix au mieux de ces champs virtuels, ceci pour assurer une bonne indépendance des champs virtuels.

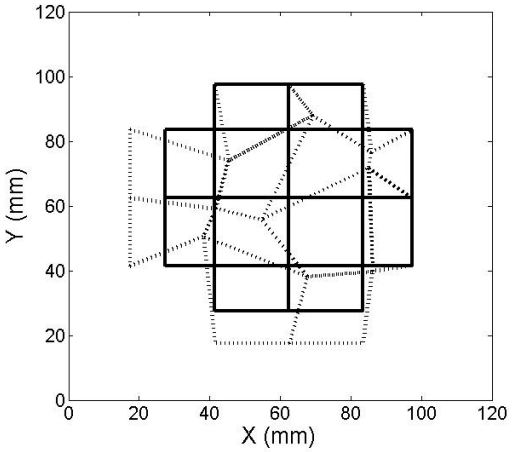
Seul le cas du modèle de Mooney est maintenant traité à titre d'illustration. Chacun des deux champs de déplacements virtuels à définir fournit une équation linéaire où C_1 et C_2 sont



$\cdots$: champs virtuels

— : sous-domaines

FIG. 3.18 – Premier exemple de champ de déplacements virtuels, illustré par les déplacements des noeuds définissant les sous-domaines.



$\cdots$: champs virtuels

— : sous-domaines

FIG. 3.19 – Second exemple de champ de déplacements virtuels, illustré par les déplacements des noeuds définissant les sous-domaines.

les inconnues (voir équation 2.73). Un système linéaire est alors obtenu :

$$[A] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{ext}^{1*} \\ W_{ext}^{2*} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

où W_{ext}^{1*} et W_{ext}^{2*} sont les travaux virtuels des efforts extérieurs pour chaque champ virtuel U_{ext}^{1*} et U_{ext}^{2*}, et où A est une matrice 2×2. La solution (C_1, C_2) du problème d'identification est obtenue en résolvant ce système linéaire.

Afin d'optimiser le choix des champs de déplacements virtuels, on génére d'abord aléatoirement de nombreux couples de champs. On sélectionne ensuite les deux champs les plus indépendants. Cette stratégie doit permettre notamment de réduire l'influence du bruit de mesures d'entrées sur le résultat de l'identification.

Le critère d'indépendance retenu est le conditionnement de la matrice A. Ce conditionnement est noté $rcond$. L'objectif est d'obtenir une valeur de $rcond$ la plus grande possible.

En pratique, les champs virtuels sont générés de la manière suivante :

- les déplacements virtuels des noeuds internes (5, 6, 7, 10, 11, 12, 15, 16, 17) des sous-domaines sont générés aléatoirement entre -10 mm à 10 mm. La fonction $rand$ de Matlab est utilisée pour cela.
- les déplacements virtuels des noeuds extérieurs (1, 2, 3, 4, 9, 14, 8, 13, 18, 19, 20, 21) sont quant à eux tous fixés à 10 mm pour que ce soit bien la résultante des efforts appliqués qui travaille virtuellement, la distribution exacte étant quant à elle inconnue en pratique.

Le choix du nombre de couples de champs virtuels à générer N_{max} est maintenant discuté. Le meilleur conditionnement $rcond$ pour une valeur de N_{max} fixée est noté *rcond*$_{max}$. Plus N est grand, plus on a de chance d'obtenir une valeur de *rcond*$_{max}$ grande. Toutefois, un nombre N_{max} trop important peut entraîner des temps de calculs rédhibitoires. A titre d'illustration, le Tableau 3.2 montre l'évolution de *rcond*$_{max}$ en fonction N pour l'essai équibiaxial à $\lambda_a = 1.72$. Les temps de calculs sont également indiqués. Dans la suite, le nombre de couples de champs générés est choisi égal à 3000. Ce nombre constitue un compromis entre un temps de calcul raisonnable et une indépendance des deux champs virtuels acceptable pour l'indentification.

TAB. 3.2 – Optimisation des champs de déplacements virtuels. Meilleur conditionnement *rcond*$_{max}$ en fonction du nombre N de couples de champs virtuels générés — Traction equibiaxiale à $\lambda_a = 1,72$.

N_{max}	500	1000	3000	6000	10000
rcond$_{max}$	0,1297	0,1486	0,1525	0,1561	0,1752
Temps de calcul	3 min.	6 min.	19 min.	40 min.	73 min.

3.6 Application de la MCV

Ce paragraphe aborde maintenant l'identification à partir de données non bruitées, puis bruitées. En préambule, une remarque est faite sur l'influence des paramètres C_1 et C_2 dans le cas du modèle de Mooney sur la réponse globale.

3.6.1 Préambule

L'influence des paramètres C_1 et C_2 peut être évaluée en traçant la réponse du matériau dans le plan force - élongation ($F - \lambda_a$) en traction uniaxiale. Différents jeux de paramètres sont

testés, en faisant varier séparemment C_1 et C_2 de 30% par rapport aux valeurs de référence. La Figure 3.20 présente les résultats obtenus. Il est clair que l'influence des deux paramètres est très différente. Changer 30% de C_1 aboutit à un décalage de la courbe beaucoup plus grand que si c'est le paramètre C_2 qui varie. Il parait clair que l'identification du paramètre C_2 sera donc beaucoup plus délicate que celle de C_1, surtout si les champs de déplacements sont bruités.

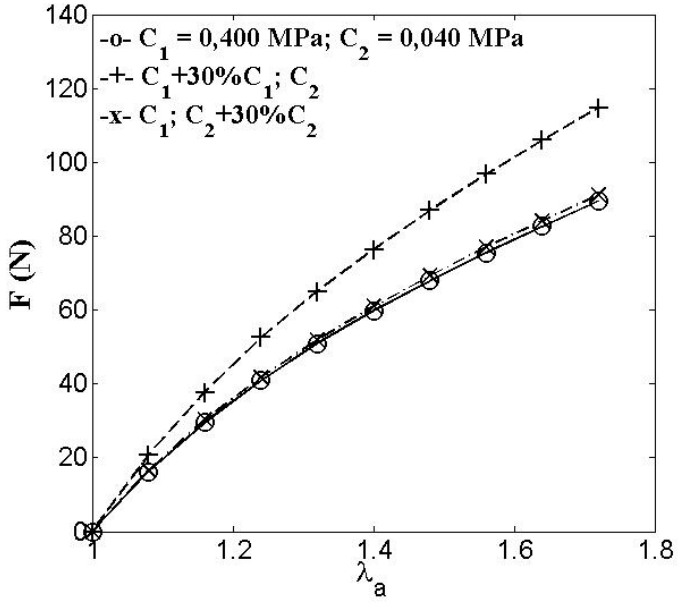


FIG. 3.20 – Sensibilité de C_1 et C_2 sur la courbe $F - \lambda_a$

3.6.2 Identification à partir de données non bruitées

Traction equibiaxiale (CL no °1). Le Tableau 3.3 présente les résultats de l'identification pour quatre valeurs d'élongation globale λ_a en traction équibiaxale, pour le modèle de Mooney. Les erreurs relatives par rapport aux valeurs de référence (Tableau 3.1) sont également indiquées. L'erreur sur le paramètre C_1 diminue lorsque λ_a augmente. Il est à noter également que l'erreur sur le paramètre C_2 est environ dix fois plus grande que pour le paramètre C_1. Toutefois ces erreurs peuvent être considérées comme faibles pour tous les cas d'élongation.

La Figure 3.21 illustre dans le plan (C_1, C_2) l'indépendance des deux champs de déplacements virtuels optimisés, obtenus pour chaque niveau d'élongation globale λ_a. Les équations des deux droites dans ce plan (C_1, C_2) correspondent à l'écriture du PTV pour chacun des deux champs de déplacements virtuels optimisés. L'intersection des deux droites fournit évidement

TAB. 3.3 – Identification à partir de données non-bruitées — Traction equibiaxiale (CL n°1), modèle de Mooney à deux paramètres.

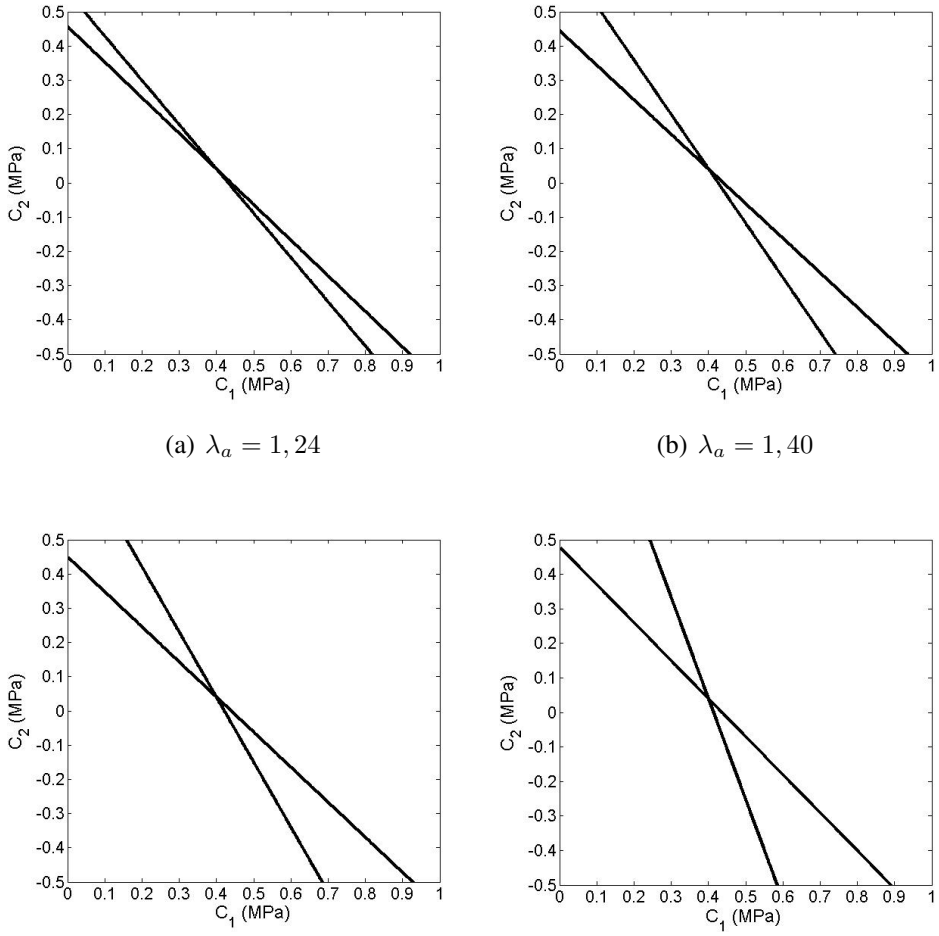
λ_a	1,24	1,40	1,56	1,72
C_1 (MPa)	0,3995	0,3995	0,3996	0,3997
Erreur	-0,125 %	-0,125 %	-0,1 %	-0,075 %
C_2 (MPa)	0,0405	0,0407	0,0405	0,0403
Erreur	1,25 %	1,75 %	1,25 %	0,75 %

la solution du problème d'identification pour la valeur de λ_a considérée. L'angle entre les deux droites caractérise l'indépendance des deux champs de déplacements virtuels. On observe que cet angle augmente à mesure que l'élongation λ_a augmente. Ce résultat est par ailleurs une illustration du caractère non-linéaire du comportement du matériau. En effet, plus les droites s'éloignent du parallélisme, moins la sensibilité au bruit de mesure est importante.

A titre d'illustration, la Figure 3.22 montre les deux champs de déplacements virtuels optimisés obtenus pour l'élongation maximale $\lambda_a = 1,72$.

Le cas de l'identification des trois paramètres « matériau » de la loi de Yeoh est maintenant abordé. La même procédure que précédemment est utilisée. Le nombre de champs indépendants permettant une identification est de trois. L'optimisation du triplet de champs est toujours effectuée en utilisant le conditionnement de la matrice A, dont la dimension est maintenant de 3×3. Le Tableau 3.4 présente les résultats de l'optimisation pour la traction equibiaxiale à $\lambda_a = 1.72$. Les erreurs relatives par rapport aux valeurs de référence (Tableau 3.1) sont également indiquées. Le paramètre C_{10} est très correctement identifié. Les erreurs relatives sur les paramètres C_{20} et C_{30} sont plus importantes : dix et vingt fois plus grandes, respectivement, que pour le paramètre C_{10}. Il faut cependant noter que l'influence des paramètres C_{20} et C_{30} sur la réponse globale du matériau est beaucoup plus faible que celle du paramètre C_{10} dans le domaine de déformation sur lequel l'identification est menée. Il n'est donc pas anormal de trouver des erreurs relatives élevées pour ces coefficients.
Le modèle de Yeoh ne sera plus considéré dans ce chapitre consacré à l'utilisation de données simulées.

Chargement de semibitraction (CL no °2). Le Tableau 3.5 présente les résultats de l'identification pour quatre valeurs d'élongation λ_a dans le cas de la semibitraction, toujours



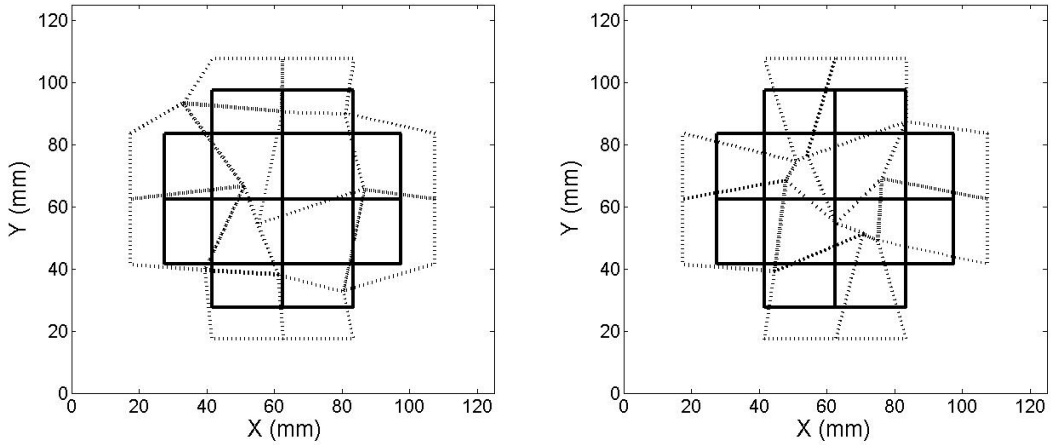
(a) $\lambda_a = 1,24$ (b) $\lambda_a = 1,40$

(c) $\lambda_a = 1,56$ (d) $\lambda_a = 1,72$

FIG. 3.21 – Illustration dans le plan (C_1, C_2) de l'indépendance des deux champs de déplacements virtuels optimisés — Traction equibiaxiale, modèle de Mooney, données non bruitées.

TAB. 3.4 – Identification à partir de données non-bruitées — Traction équibiaxiale (CL n°1), modèle de Yeoh.

λ_a	1,72
C_{10} (MPa)	0,5025
Erreur	0,5 %
C_{20} (MPa)	-0,0423
Erreur	5,75 %
C_{30} (MPa)	0,005584
Erreur	11,68 %



(a) Champ virtuel n°1 (b) Champ virtuel n°2

FIG. 3.22 – Couples de champs de déplacements virtuels optimisés pour la traction équibiaxiale pour l'étirement maximum $\lambda_a = 1,72$ (données non bruitées).

pour le modèle de Mooney. Les erreurs relatives par rapport aux valeurs de référence sont également indiquées. Les erreurs peuvent être considérées comme faibles. Toutefois, comme précédement, l'erreur sur le paramètre C_2 est plus grande que pour le paramètre C_1.

Bien que les niveaux d'élongation globale λ_a entre le chargement equibiaxial (CL n°1) et de semibitraction (CL n°2) ne soient pas les mêmes, une tentative de comparaison des résultats d'identification entre les deux cas peut être faite. L'étude de l'hétérogénéité des essais, notamment à travers la signature (I_1, I_2), a été présentée précédemment au chapitre 3.4.4. Les essais de semibitraction y semblaient *a priori* mieux adaptés pour l'indentification. Ceci n'apparait pas dans les résultats des identifications. Les résultats semblent même légèrement moins bons pour la semibitraction que pour le chargement équibiaxial. Toutefois, comme mentionné précédemment, l'identification à partir de données non bruitées fournit de bons résultats dans tous les cas considérés avec le modèle de Mooney.

3.6.3 Identification à partir de données bruitées

Introduction. Les résultats précédents ont été obtenus avec des champs de déplacements fournis par le code de calcul. Ils sont donc supposés parfaits, au caractère approché près de la méthode des éléments finis. Il est clair que les mesures expérimentales fournissent quant à elles

TAB. 3.5 – Identification à partir de données non-bruitées — Semibitraction (CL n°2), modèle de Mooney à deux paramètres.

λ_a	1,12	1,20	1,28	1,36
C_1 (MPa)	0,3985	0,3995	0,3997	0,3995
Erreur	-0,375 %	-0,125 %	-0,075 %	-0,125 %
C_2 (MPa)	0,0416	0,0409	0,0406	0,0407
Erreur	4,00 %	2,25 %	1,50 %	1,75 %

inévitablement des champs entachés de bruit. Il convient donc d'étudier l'influence de ce bruit sur la procédure d'identification décrite plus haut.

Prise en compte du bruit. Un bruit aléatoire est rajouté aux champs de déplacements fournis par le code de calcul. La fonction $rand$ de matlab est utilisée pour cela. L'amplitude A_n de ce bruit est fixée à 0,022 mm. Cette valeur correspond à un dixième de la taille du '$pixel$' (taille sur la surface de l'échantillon). Cette amplitude est considérée comme raisonnable par rapport aux conditions expérimentales qui seront présentées dans le chapitre suivant.

Pour chaque problème d'identification sur un champ de déplacements fourni par le code de calcul, vingt copies de bruit sont utilisés, ce nombre étant jugé suffisant. Vingt champs de déplacements bruités sont donc obtenus. L'identification par la MCV est effectuée pour chacun de ces champs. Trois grandeurs sont ensuite calculées à partir des vingts identifications de C_1 et C_2 : valeur moyenne, écart-type et coefficient de variation (= écart-type / moyenne).

Traction equibiaxiale (CL no °1). Le Tableau 3.6 présente les résultats de l'identification pour quatre valeurs d'élongation globale λ_a en traction equibiaxale. L'écart-type pour chaque paramètre identifié diminue clairement quand λ_a augmente. Ceci est logique car le rapport signal/bruit diminue.
L'écart-type est globalement le même pour C_1 pour C_2. En conséquence, le coefficient de variation est beaucoup plus grand pour C_2 : on a un facteur 10 entre le coefficient de variation de C_1 et celui de C_2. En conséquence, l'influence du bruit est beaucoup plus importante sur C_2 que sur C_1. Toutefois, les valeurs obtenues en présence de bruit peuvent être considérées comme satisfaisantes.

TAB. 3.6 – Identification à partir de données bruitées — Chargement équibiaxial (CL n°1), modèle de Mooney.

	λ_a	1,24	1,40	1,56	1,72
C_1	Moyenne (MPa)	0,3994	0,3994	0,3999	0,3999
	Ecart-type (MPa)	0,0032	0,0015	0,0007	0,0004
	Coef. de variation	0,0080	0,0038	0,0019	0,0011
C_2	Moyenne (MPa)	0,0412	0,0405	0,0403	0,0403
	Ecart-type (MPa)	0,0033	0,0018	0,0008	0,0005
	Coef. de variation	0,0809	0,0436	0,0198	0,0124

Chargement de semibitraction (CL no °2). Le Tableau 3.7 présente les résultats de l'identification pour quatre valeurs d'élongation λ_a dans le cas de la semibitraction, toujours pour le modèle de Mooney. Les tendances sont les mêmes que pour le cas du chargement equibiaxial. Une comparaison des résultats d'identification peut être faite entre le cas du chargement équibiaxial (CL n°1) et celui de la semibitraction (CL n°2). Comme cela a déjà été dit précédemment, le chapitre 3.4.4 semblait montrer que la semibitraction était *a priori* mieux adaptée pour l'indentification. Ceci n'apparait pas dans les résultats des identifications avec présence de bruit. Les résultats montrent ici que la semibitraction donne de moins bons résultats : le coefficient de variation est de l'ordre de 2 à 3 fois plus grand pour la semibitraction que pour le chargement equibiaxial.

TAB. 3.7 – Identification à partir de données bruitées — Semibitraction (CL n°2), modèle de Mooney.

	λ_a	1,12	1,20	1,28	1,36
C_1	Moyenne (MPa)	0,3985	0,3991	0,3993	0,3995
	Ecart-type (MPa)	0,0112	0,0041	0,0014	0,0012
	Coef. de variation	0,0281	0,0103	0,0035	0,0030
C_2	Moyenne (MPa)	0,0418	0,0411	0,0409	0,0407
	Ecart-type (MPa)	0,0120	0,0047	0,0018	0,0015
	Coef. de variation	0,2871	0,1143	0,0440	0,0368

3.7 Conclusion

Ce chapitre a été une étape préalable à l'utilisation de champs de déplacements expérimentaux à des fins d'identification. Les champs de déplacements étaient ici issus de simulations numériques. Ce chapitre a permis d'illustrer la mise en oeuvre et l'optimisation de champs de déplacements virtuels pour une identification par la MCV. Elle est applicable sans et avec présence de bruit dans le cas du modèle de Mooney. Il est cependant apparu que le second paramètre de la loi était plus sensible au bruit. Le modèle de Yeoh donne des résultats satisfaisants bien que les erreurs relatives sur les deuxième et troisième paramètres du modèle soient sensiblement plus grandes que pour le premier paramètre. Ceci s'explique par le fait que le niveau de déformation local ne permet pas d'induire un fort raidissement du matériau et donc d'activer convenablement les deux derniers paramètres de cette loi. Le chapitre suivant va traiter le cas de champs de déplacements obtenus expérimentalement.

CHAPITRE 4

ETUDE EXPÉRIMENTALE

4.1 Introduction

Ce chapitre présente la partie expérimentale du travail de thèse. Elle décrit tout d'abord en détail la géométrie des éprouvettes, le matériau utilisé, le dispositif d'essai ainsi que les conditions de chargement imposées. Ensuite, la technique de mesure sans contact utilisée afin d'obtenir le champ de déplacement à la surface des éprouvettes est présentée. Enfin, les résultats obtenus sont discutés en termes d'identification des paramètres matériau.

4.2 Géométrie des éprouvettes

La géométrie des éprouvettes est celle décrite dans la partie numérique. Comme le montre la Figure 3.1 , c'est une éprouvette en croix de 2 mm d'épaisseur et de longueur 125 mm dont la partie centrale correspond à un carré de $42 \times 42\ mm^2$. Des congés de raccordement de rayon 20 mm limitent les concentrations de contrainte.

4.3 Matériau

Le matériau utilisé est un caoutchouc naturel chargé de 34 pce (partie pour cent d'élastomère en masse) de noirs de carbone. Du fait des charges, sa surface est noire et présente donc certains avantages lorsqu'il s'agit de préparer la surface pour la mesure de champ. Ces aspects sont abordés dans la suite.

4.4 Machine d'essais

Les essais sont réalisés sur une machine multiaxiale du LMT à Cachan denommée ASTREE et présentée par la Figure 4.1. Elle est composée de six vérins hydrauliques permettant d'imposer des sollicitations selon trois directions opposées deux à deux. L'intérêt est de minimiser les déplacements de la zone centrale dans les cas de chargements symétriques et de permettre ainsi une meilleure observation de cette zone. Chaque axe est équipé d'un capteur d'effort d'une capacité de 2500 N. Ici, seules deux paires de vérins sont utilisées.



FIG. 4.1 – ASTREE, LMT (Cachan)

4.5 Sollicitations appliquées

Deux types d'essais sont réalisés dans cette étude. Un essai de traction équibiaxiale et un essai de semi-bitraction. Dans les deux cas, la sollicitation est imposée par un déplacement des mors. Pour la traction équibiaxiale, chaque mors se déplace de 45,5 mm, ce qui correspond à une élongation globale λ_a de 1,73 dans les deux axes de l'éprouvette. Cette valeur est très proche de celle appliquée pour la simulation numérique (1,72). Pour la semi-bitraction, deux mors orthogonaux se déplacent de 43 mm ce qui correspond à une élongation globale λ_a de 1,34 suivant les deux axes de l'éprouvette. Les deux autres mors sont bloqués en position initiale. La vitesse de déplacement des mors est de $0,19\ mm/s$.

Pour chaque essai, cinq cycles sont prélablement réalisés afin de s'affranchir du phénomène d'accommodation décrit par Mullins [79]. Une fois ces cycles effectués, la déformation résiduelle engendrant le flambement de l'éprouvette, celle-ci est légèrement réétirée de manière à commencer l'essai avec une éprouvette non flambée. La longueur initiale variant, le déplacement des vérins est réajusté de manière à conserver la même élongation globale. En toute rigueur, il faudrait donc restreindre l'analyse qui suit aux déformations vraiment vues par l'éprouvette au cours des dix cycles d'accommodation. Il faudrait également que, de fait, la vitesse de déformation varie légèrement entre les cycles d'accommodation et l'essai à proprement parlé. Par la suite, nous négligerons ces phénomènes.

Dans le paragraphe suivant, nous nous intéressons au traitement des images. La technique de corrélation d'images sert de support au calcul des champs de déplacements. Le principe de la méthode est maintenant rappelé.

4.6 Traitement des résultats

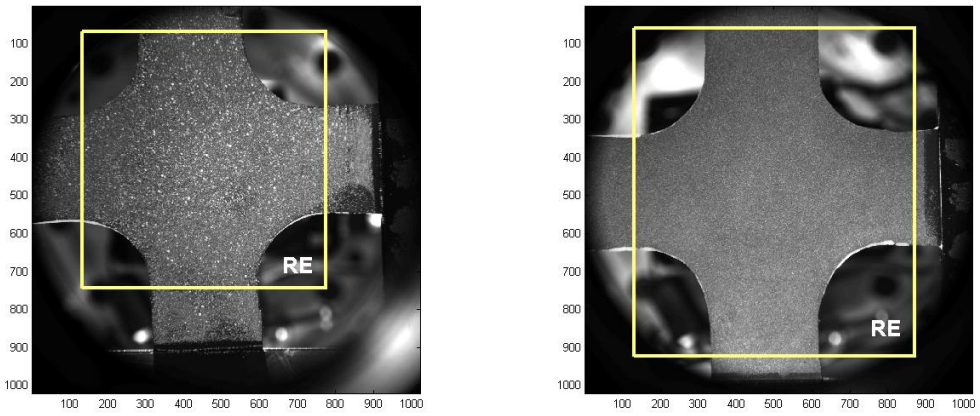
4.6.1 Principe de corrélation

Afin de quantifier finement les déplacements en tout point de la surface des éprouvettes, on utilise le logiciel de corrélation d'images $Correli^{LMT}$ développé au Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan par François Hild. En effet, la méthode de corrélation d'images est très bien adaptée pour les mesures de déplacement en grandes déformations. Elle a par exemple été utilisée pour tester des matériaux de type élastomères [80] ou des éprouvettes en fibres de verre [81].

En pratique, la surface à étudier est mouchetée au moyen de peinture blanche projetée avec un aérographe, ce dernier assurant une très bonne distribution aléatoire des niveaux de gris. Le principe de corrélation d'images est maintenant brièvement rappelé.

Une région d'étude (RE) est considérée. Il faut ensuite choisir différents paramètres avec les différentes fenêtres d'interrogation du logiciel : la taille des zones d'étude élémentaires (ZEE), le décalage des ZEE pour faire la corrélation (shift), et également le type de calcul (petites ou grandes déformations). Ici les élongations globales dépassant largement 10 $\%$, un calcul en grandes déformations est choisi. Dans le cadre de ce travail, une discussion sur la taille de la ZEE, sur le shift de cette ZEE ainsi que sur le nombre d'images à analyser est présentée dans la suite en terme d'erreur de corrélation notamment. L'ensemble des ZEEs définit la région

d'étude (Figure 4.2).



(a) RE, chargement équibiaxial (b) RE, chargement en semi-bitraction

FIG. 4.2 – Taille de la région d'intérêt

Le centre des ZEEs crée un maillage sur lequel les calculs de déplacement sont effectués. Le déplacement d'un "point" correspond à la valeur moyenne du déplacement de la ZEE. Le principe de la corrélation consiste à apparier le motif correspondant à la zone d'étude dans les deux images étudiées afin de pouvoir déterminer le déplacement du centre de la ZEE. Le déplacement entre deux zones d'étude correspond à un décalage entre deux signaux bidimensionnels. L'intercorrélation consiste alors à rechercher des vrais semblances entre deux images numériques. L'approche standard de la corrélation d'images développée dans $Correli^{LMT}$ consiste à faire un calcul de corrélation par transformée de Fourier rapide sur la RE. La valeur maximale du produit d'intercorrélation permet d'estimer le déplacement moyen $\overrightarrow{U_0}$ calculé sur tous les pixels de la RE. Puis le centre de la RE de l'image déformée est décalée de la même quantité $\overrightarrow{U_0}$ par rapport au centre de la RE de l'image de référence. Un deuxième calcul de corrélation est ensuite effectué indépendamment sur chaque ZEE. Chaque maxima de la fonction d'intercorrélation donne autant de corrections $\overrightarrow{\Delta U}$ que de ZEEs. Ces corrections sont alors utilisées pour décaler chaque centre de ZEE. Les résidus de déplacements sont alors inférieurs au demi-pixel suivant chaque direction. Un algorithme sub-pixel est ensuite utilisé. Il permet d'obtenir des résolutions en déplacement de l'ordre du centième de pixel.

Cette méthode est bien adaptée aux petites perturbations. Dans le cas de grands déplacements, l'information contenue dans la ZEE de l'image de référence ne se retrouve que partiel-

lement dans la ZEE de l'image déformée. Ainsi, la correction $\overrightarrow{\Delta U}$ n'est pas définie de manière fiable. Il faudrait alors choisir pour les grandes déformations des ZEEs plus grandes, mais ceci impliquerait alors de moyenner le déplacement sur une surface plus grande. Afin de résoudre ce problème, un algorithme multi-échelle a été implémenté dans $Correli^{LMT}$. Il permet alors de traiter des déplacements importants entre deux images successives.

L'approche multiéchelle consiste à appliquer la méthode précédente de manière récursive sur des images à des échelles différentes. Dans un premier temps, des déformations moyennes sont obtenues à partir de l'analyse d'images sur lesquelles les détails les plus fins sont supprimés. Pour rendre la méthode plus robuste, on applique des déplacements interpolés aux ZEEs analysées et ces derniers sont réévalués jusqu'à ce que la différence maximale entre deux itérations soit inférieure à une limite choisie. Les détails de l'image sont alors rajoutés, ce qui revient à changer d'échelle et on peut alors utiliser l'interpolation du déplacement comme première évaluation du champ à cette nouvelle échelle. Cette procédure est appliquée jusqu'à ce qu'on revienne à la RE initiale (avec tous ses détails). Pendant cette dernière étape, le déplacement n'est plus interpolé et on peut ainsi analyser des fluctuations dont les amplitudes sont supérieures à celles accessibles avec l'approche standard [82].

4.6.2 Choix des paramètres

Lors des essais et pour chaque cycle de chargement, 40 images sont enregistrées sur une face de l'éprouvette par une caméra numérique Dalsa de dynamique 12 bits et possédant 1024 $\times$ 1024 $pixels^2$. Plusieurs paramètres sont à choisir dans le logiciel $Correli^{LMT}$:

1. l'incrément d'images à analyser : 1 sur N, N variant de 1 à 5
2. la taille de la ZEE : de $2^3 = 8$ à $2^5 = 32$ pixels
3. le décalage sur la ZEE : de $2^3 = 8$ à $2^5 = 32$ pixels

Le choix des paramètres est effectué au moyen d'études basées sur l'erreur estimée par le logiciel. Ces études sont menées sur l'essai équibiaxial et à différents niveaux d'élongations globales présentées dans le Tableau 4.1 et pour différents incréments d'images N :

La dernière colonne correspond à une élongation globale moyenne qui sera reprise comme valeur de référence dans la suite. L'erreur estimée par $Correli^{LMT}$ est basée sur les variations d'intensité lumineuse se produisant pendant l'essai. Elles sont liées au déplacement de l'éprouvette par rapport à la source lumineuse. Avec ces variations d'intensité lumineuse, un pixel

TAB. 4.1 – Niveaux d'élongation choisis pour l'estimation des paramètres

N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	$\lambda_{a,moyenne}$
1.11	1.11	1.11	1.14	1.09	1.11
1.29	1.29	1.32	1.29	1.27	1.29
1.49	1.51	1.49	1.51	1.45	1.49
1.73	1.73	1.71	1.73	1.73	1.72

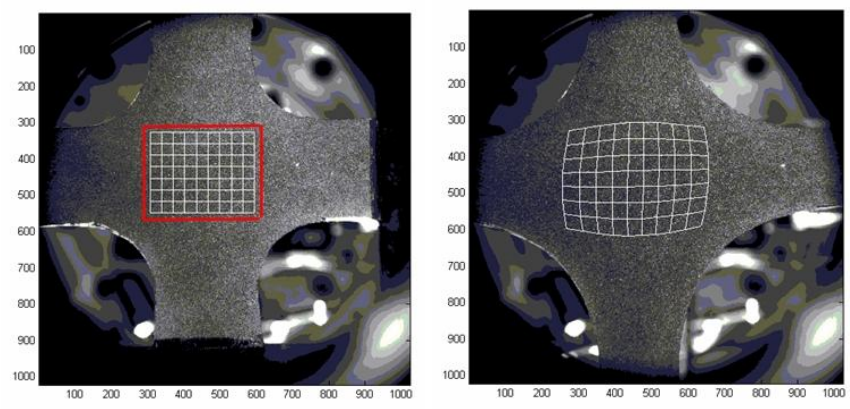
d'un certain niveau de gris dans l'image de référence pourra voir son niveau de gris varier dans l'image déformée. L'expression de l'indicateur d'erreur est la suivante :

$$E = \left| \frac{MOY(ZEE_{ref})}{MOY(RE_{ref})} - \frac{MOY(ZEE_{def})}{MOY(RE_{def})} \right| \sqrt{MOY(ZEE_{ref})MOY(ZEE_{def})} \qquad (4.1)$$

où MOY est la moyenne de la zone considérée. Avec une caméra de dynamique 12 bits, la corrélation est jugée correcte si l'erreur ne dépasse pas 64 pixels soit 1,56%.

4.6.3 Taille de la région d'étude

Afin de pouvoir effectuer l'analyse "une image sur N" pour N=5 notamment, une nouvelle taille de la RE doit être choisie. Elle est égale à 260×260 $pixels^2$. Elle est présentée sur la Figure 4.3 aussi bien dans la configuration de référence que pour l'élongation globale maximum et avec une taille de ZEE de 32 pixels avec un décalage de 32 pixels. La taille de la nouvelle RE est naturellement plus petite que celle présentée auparavant à cause des incréments de déformations plus importants entre deux images.



(a) image de référence (b) image déformée

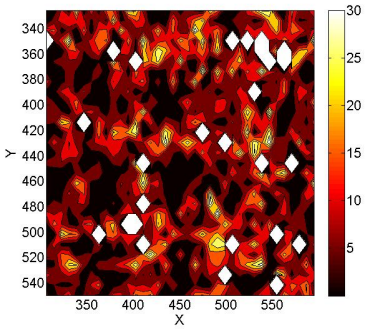
FIG. 4.3 – Présentation de la nouvelle RE.

4.6.4 Résultats de calculs d'erreur

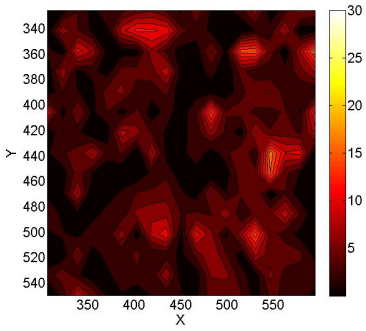
Nous présentons dans ce paragraphe différents résultats de calcul d'erreur en faisant varier les paramètres présentés dans le paragraphe 4.6.2. Pour des raisons de simplifications de lecture, seul le cas équibiaxial pour l'élongation globale maximum ($\lambda_a = 1.73$) est présenté. Les cartographies d'erreur sont représentés sur la Figure 4.4.

Afin de garantir des calculs de déplacements indépendants, le décalage de chaque ZEE est égal à sa taille. La Figure 4.4 présente les cartographies d'erreur pour des ZEEs croissantes de gauche à droite et pour des incréments entre deux images croissants de haut en bas. L'échelle d'erreur est la même pour toutes les images afin de simplifier la lecture de l'ensemble. Globalement, plus la taille de la ZEE augmente, plus l'erreur en niveau de gris diminue. Il faut cependant noter que la résolution spatiale diminue quand la taille de la ZEE augmente, puisque la taille de la RE est toujours la même. Enfin, l'erreur est également la plus faible quand l'incrément entre deux images est le plus faible (soit N=1).

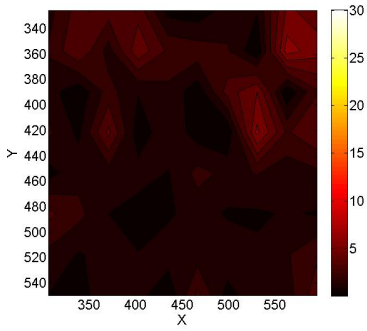
La Figure 4.5 confirme les résultats précédents. Les graphes représentent moyennes et écarts types de l'erreur pour les 4 élongations globales moyenne du Tableau 4.1 soit 1.11, 1.29, 1.49 et 1.72. L'écart relatif entre $2^3 = 8$ et $2^4 = 16$ pixels est plus important qu'entre $2^4 = 16$ et $2^5 = 32$ pixels. Ainsi, une première conclusion serait de choisir une taille de ZEE égale à 16 pixels. Le choix de l'incrément entre deux images ne peut pas être figé ici car un incrément faible entraîne également une erreur cumulée sur le calcul des déplacements plus grande. Nous présentons dans la suite un travail permettant d'apprécier l'écart-type entre deux images présentant le même



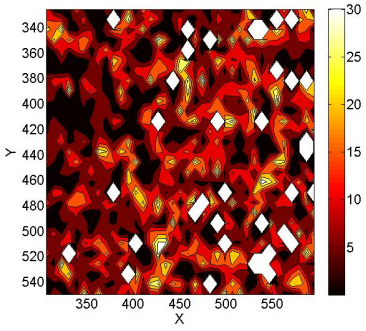
(a)une image sur un, 8 pixel



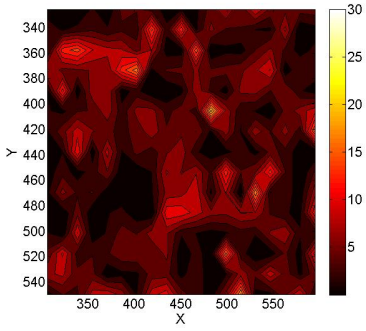
(b)une image sur un, 16 pixel



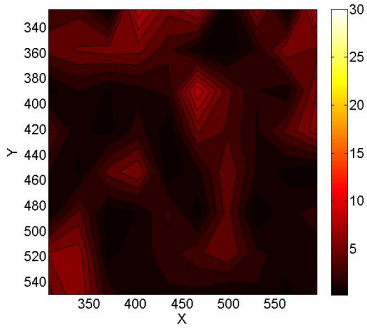
(c)une image sur un, 32 pixel



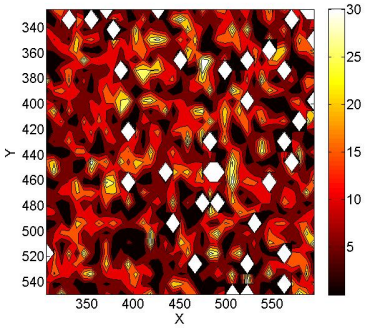
(d)une image sur deux, 8 pixel



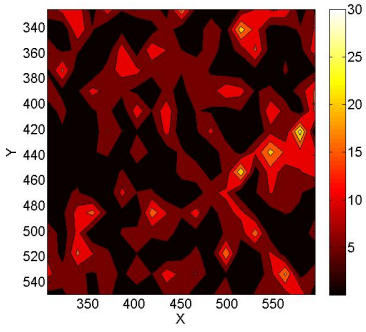
(e)une image sur deux, 16 pixel



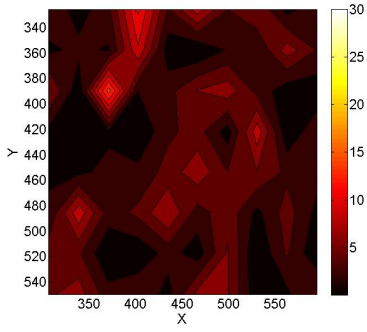
(f)une image sur deux, 32 pixel



(g)une image sur trois, 8 pixel

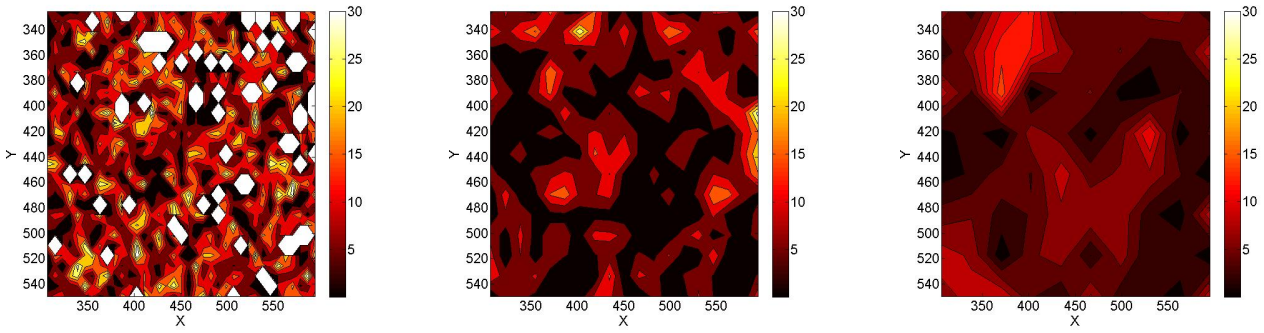


(h)une image sur trois, 16 pixel

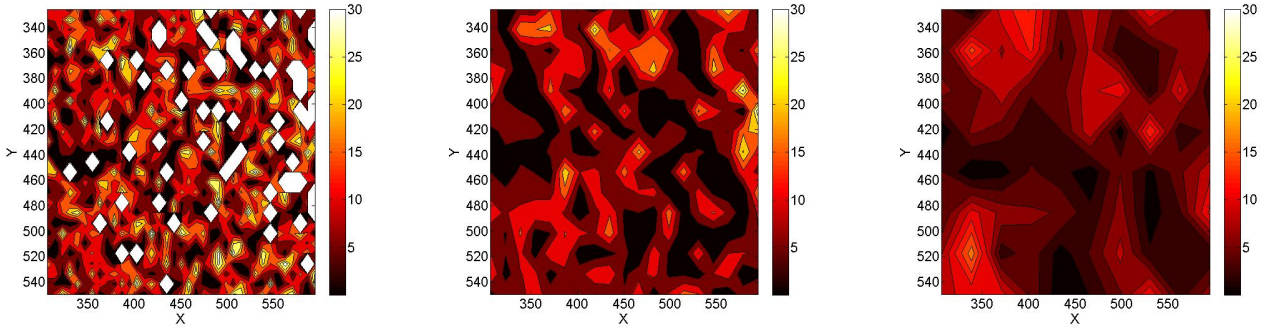


(i)une image sur trois, 32 pixel

FIG. 4.4 – Influence du nombre d'images traitées, de la taille de la ZEE et du décalage de la ZEE sur le calcul d'erreur pour une élongation globale maximum égale 1.72



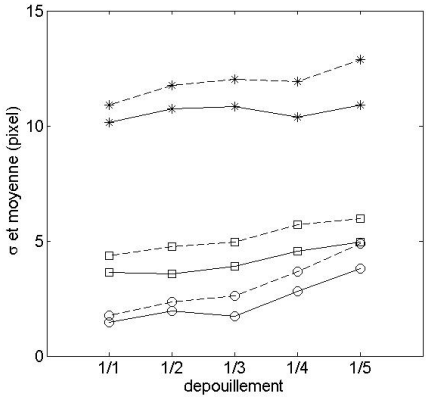
(j)une image sur quatre, 8 pixel (k)une image sur quatre, 16 pixel (l)une image sur quatre, 32 pixel



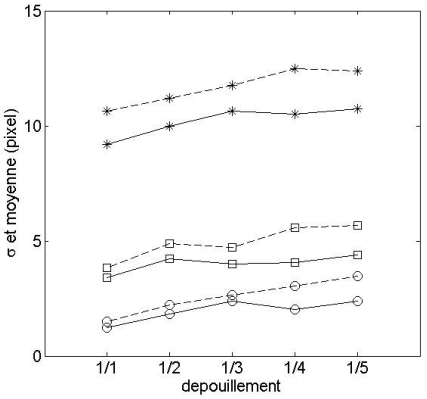
(m)une image sur cinq, 8 pixel (n)une image sur cinq, 16 pixel (o)une image sur cinq, 32 pixel

FIG. 4.4 – Influence du nombre d'images traitées, de la taille de la ZEE et du décalage de la ZEE sur le calcul d'erreur pour une élongation globale maximum égale 1.72

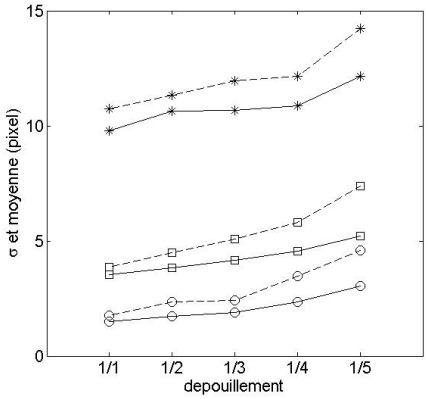
niveau global d'élongation en choisissant une image sur N, N variant de 1 à 5.



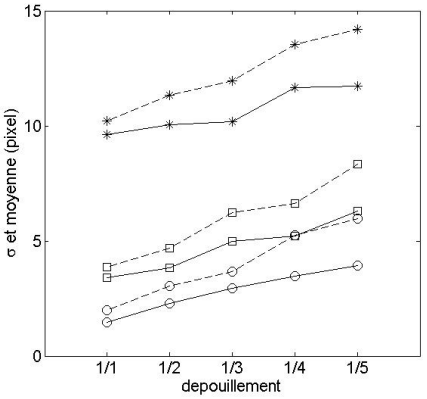
(a)$\lambda_a = 1.11$



(b)$\lambda_a = 1.29$



(c)$\lambda_a = 1.49$



(d)$\lambda_a = 1.72$

trait plein : écart type ; trait pointillé : moyenne

$*$: ZEE=2^3 pixels et shift=2^3 pixels

$\square$: ZEE=2^4 pixels et shift=2^4 pixels

$\circ$: ZEE=2^5 pixels et shift=2^5 pixels

FIG. 4.5 – Ecart type et moyenne des erreurs calculées dans la Figure 4.4

4.6.5 Qualité de la mesure : choix de l'incrément entre deux images

4.6.5.1 Estimation *a priori*

Un point important dans le code de corrélation est l'estimation de la qualité de la mesure. Cette dernière permet de contrôler les résultats de calculs de déplacements. Dans le cas présent, elle permet également de choisir l'incrément entre deux images corrélées. Ce choix est très important ici puisque des grands niveaux de déplacements et de déformations sont mesurés. A partir d'une image de référence actualisée, l'incertitude de mesure augmente avec le nombre d'images analysées. Inversement, si les images ne sont pas actualisées, la corrélation peut éventuellement échouer et aucun résultat ne sera produit. Par ailleurs, plus l'incrément entre deux images est grand, plus l'incertutude de mesure diminue et ainsi les résultats issus de la corrélation sont d'autant meilleurs. Ce compromis est évalué ici en estimant les performances du code de corrélation *a priori*. Elles sont estimées en suivant la procédure présentée dans [83]. La partie centrale de la RE est déplacée artificiellement de 0.5 pixel dans les deux directions en suivant un algorithme de transformée de Fourier rapide. Il a été montré que cette valeur conduit à un niveau d'incertitude maximum. Avec une ZEE de 2^4 pixels et un shift de 2^4 pixels, on obtient en prenant la première image de l'essai équibiaxial une incertitude égale à 0.022 pixel. Si l'on choisit maintenant systématiquement un shift de 2^3 pixels, on obtiendra pour des ZEE de 2^3, 2^4 puis 2^5 pixels, une incertitude de 0,1085, 0,0273 puis 0,0069 respectivement. Puisque la procédure d'actualisation est utilisée pour évaluer les grandes déformations, cette valeur peut être représentative de chaque incrément de mesure. Quand le nombre d'images à analyser augmente, on peut aussi s'attendre à ce que l'incertitude de mesure augmente aussi.

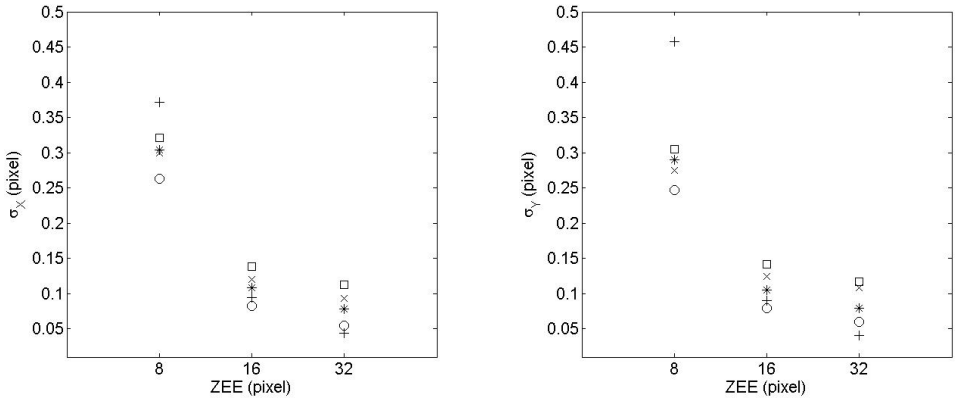
4.6.5.2 Estimation *a posteriori* à partir des champs de déplacements

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au choix de l'incrément entre deux images traitées vis-à-vis d'une estimation de la mesure. Pour ce faire, la taille de la ZEE varie de 2^3 à 2^5 pixels. Par contre, la taille du décalage est fixée à 2^3 pixels, quelle que soit la taille de la ZEE. Ceci permet de travailler avec le même nombre de points de mesure pour toutes les tailles de ZEE. L'incrément entre deux images varie de 1 à 5 et on compare deux champs de déplacements correspondant à la même élongation. L'image de référence est l'image à élongation égale à 1. Le premier champ pour faire la comparaison correspond à la montée (élongations croissantes), le deuxième champ correspond à la descente (élongations décroissantes). On s'attend donc à retrouver les mêmes cartographies de déplacement aux cumuls d'erreurs près.

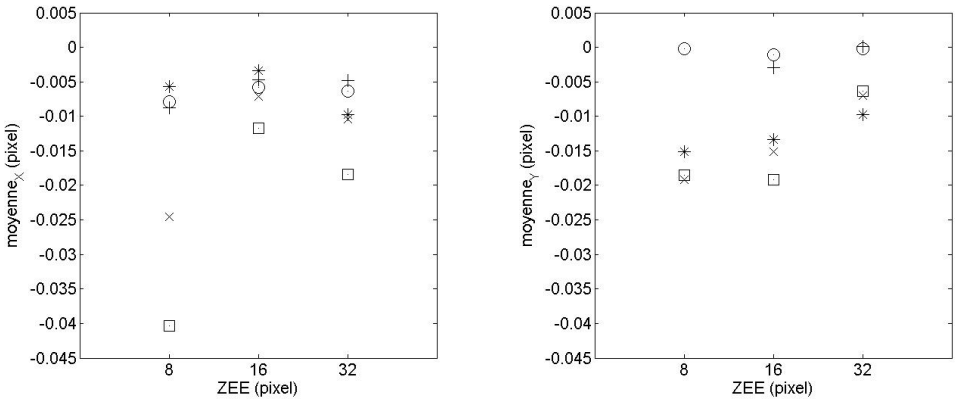
La Figure 4.6 présente les résultats d'écart-types σ et de moyenne sur les déplacements u_x et u_y obtenus après retour à une élongation unitaire pour N variant de 1 à 5 et pour des ZEE variant de 2^3 à 2^5 pixels.

On constate que les écarts-types résiduels sont plus grands pour un choix de ZEE de 2^3 pixels et que l'évolution entre 2^3 et 2^4 pixels est plus importante qu'entre 2^4 et 2^5 pixels. Le choix d'une taille de ZEE de 2^4 pixels se confirme donc également ici. De même, les moyennes sont en général plus grandes en valeur absolue pour des petites ZEE. La connexion entre l'estimation *a priori* et a *posteriori* fera l'objet d'un travail ultérieur en dehors du cadre de la thèse.

Concernant le choix de l'incrément entre deux images, à analyser, on constate que l'écart type augmente quand l'incrément augmente, excepté pour N=2 où l'écart type est le plus faible. Ainsi, retenir N=1 ou N=2 semble être un bon compromis pour l'analyse future.



(a) écart type sur u_x (b) écart type sur u_y



(c) moyenne sur u_x (d) moyenne sur u_y

$+$: N=1 ; $\circ$: N=2 ; $*$: N=3 ; $\times$: N=4 ; $\square$: N=5

FIG. 4.6 – Influence de l'incrément entre deux images sur la qualité de la mesure

4.6.6 Lissage des champs de déplacements

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au traitement des champs de déplacements pour le calcul des champs de gradients. En particulier, l'aspect lissage des champs de déplacements est abordé. En effet, l'identification des paramètres passe par le calcul des gradients de déplacements. Une question qui se pose est la nécessité ou pas de lisser les champs de déplacements avant de calculer les champs de gradients. Nous verrons l'influence du lissage dans le paragraphe 4.8 qui présente les résultats d'identification.

On peut néanmoins se poser la question du choix du degré M du polynôme $P(x, y)$ dans le cas où l'on choisit de lisser les champs de déplacements u_x et u_y par un polynôme du type :

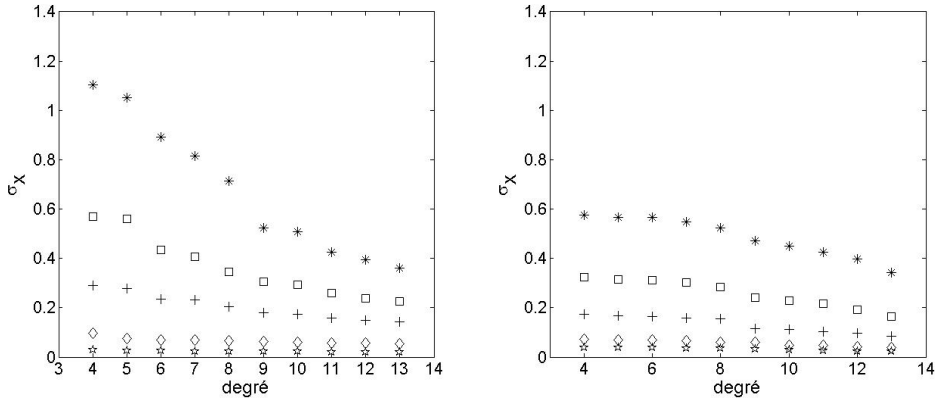
$$P(x,y) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=0}^{i} x^i y^{i-j} \tag{4.2}$$

Pour différentes configurations (incrément entre deux images, élongations globales variables, taille de la ZEE), l'écart-type entre déplacements réel et lissé est étudié en fonction du degré du polynôme. Le lissage est obtenu par la méthode des moindres carrés. Ici, on cherche à minimiser l'intégrale calculée sur toute la surface d'étude. Elle est définie par $\int_S (u(x,y) - P(x,y))^2 dS$. L'intégrale est approximée par une somme discrète en utilisant une routine développée par Stéphane Avril. Ainsi, si le nombre de points de mesure est inférieur au nombre de monômes du polynôme, on obtient toujours un résultat, mais l'équivalence entre intégrale et somme discrète devient incorrecte et la solution risque petit à petit de s'éloigner des données expérimentales que l'on veut filtrer.

4.6.6.1 Influence de l'incrément entre deux images pour différentes élongations

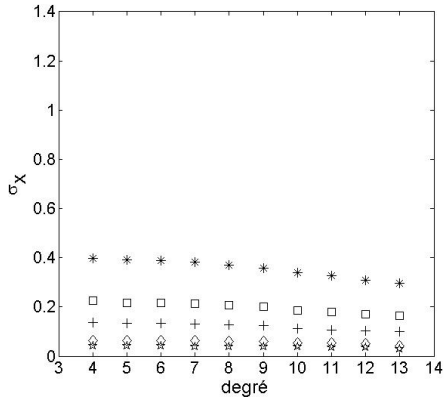
Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'influence de l'incrément entre deux images, ainsi que du degré du polynôme sur l'écart type entre image brute et image lissée. Pour des raisons de simplifications, seuls les écarts-types suivant la direction horizontale sont présentés sur la Figure 4.7. La taille de la ZEE et son décalage sont ici fixés à 16 pixels.

On constate une décroissance régulière de l'écart-type lorsque le degré du polynôme augmente dans tous les cas traités. L'écart-type est d'autant plus faible que l'élongation globale maximale est faible. A partir d'une image sur trois, on constate une stabilisation des résultats quel que soit le degré du polynôme. Il semblerait que plus le degré du polynôme est grand, meilleur est le résultat. Cependant, si l'on augmente encore le degré du polynôme, la courbe modélisant la réponse va s'inverser. En effet, le nombre de points de mesure devient alors trop

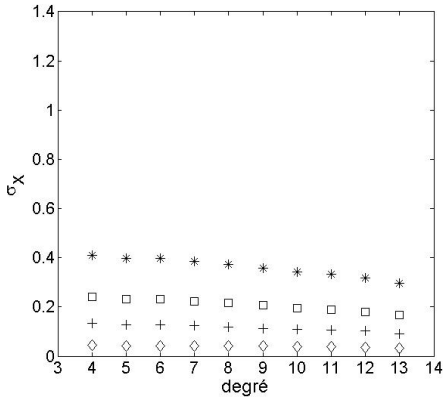


(a) σ_X, N=1

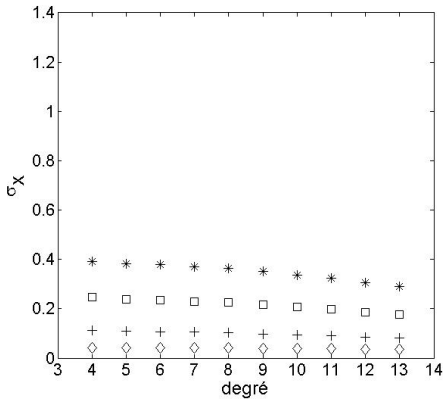
(b) σ_X, N=2



(c) σ_X, N=3



(d) σ_X, N=4



(e) σ_X, N=5

$$* : \lambda_{a,moyenne} = 1.72$$
$$\square : \lambda_{a,moyenne} = 1.49$$
$$+ : \lambda_{a,moyenne} = 1.29$$
$$\diamond : \lambda_{a,moyenne} = 1.11$$
$$\star : \lambda_{a,moyenne} = 1.02$$

FIG. 4.7 – Influence du degré du polynôme sur l'écart type entre image brute et image lissée

faible et la méthode de lissage est moins robuste. A titre d'illustration, la Figure 4.8 montre clairement que l'écart type augmente pour un degré de polynôme supérieur à 15 pour un incrément entre deux images de un (toutes les images sont traitées).

Enfin, si l'on s'intéresse au temps de calcul, il semble raisonnable de limiter le degré du polynôme. Par exemple, le temps de calcul nécessaire pour un polynôme de degré 9 est de 71 secondes alors qu'il est de 567 s pour un polynôme de degré 14, sans réel diminution de l'écart type. Ici un degré égal à 9 semble donc un bon compromis entre les valeurs d'écarts-type et le temps de calcul.

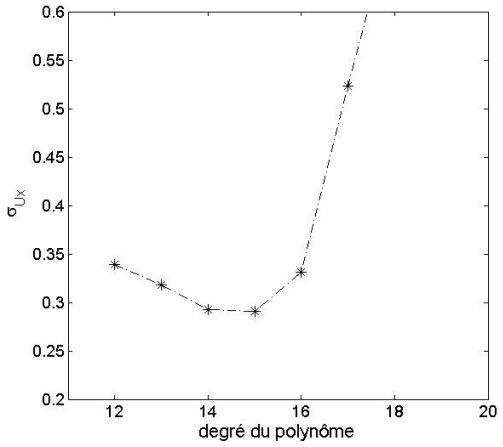
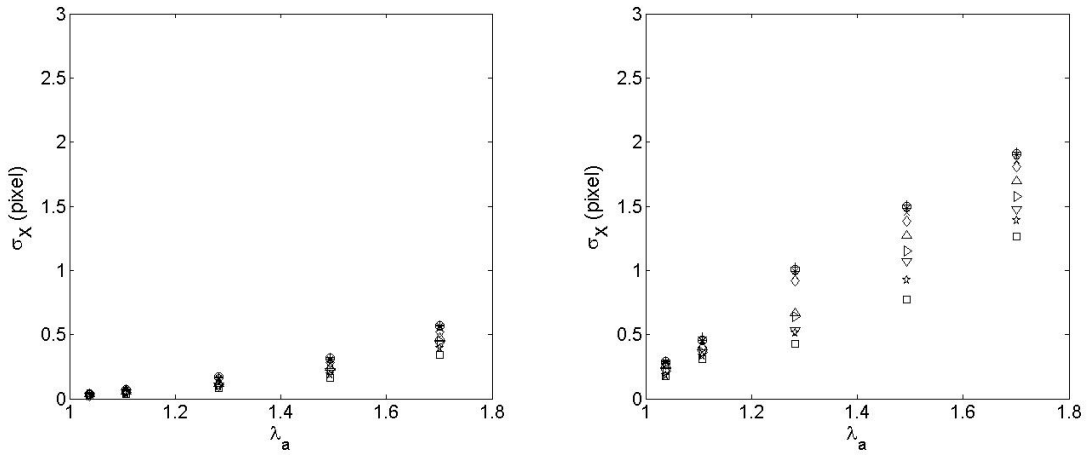


FIG. 4.8 – Evaluation de l'écart-type de la différence du déplacement horizontal entre le champ non-lissé et le champs lissé (N=1 et ZEE 2^4 pixels)

4.6.6.2 Influence de l'option 'sub-pixel accurate' et 'pixel accurate'

Dans ce paragraphe, nous présentons brièvement quelques résultats concernant le choix d'une option du logiciel de corrélation $Correli^{LMT}$. Il s'agit de l'option *pixel accurate* ou *sub-pixel accurate*. L'option *pixel accurate* fournit des résultats de déplacement en pixels entiers. l'option *sub-pixel accurate* donne des résultats de déplacements en fractions de pixels. La taille de la ZEE et son décalage sont fixés à 2^4 pixels. Le degré du polynôme varie de 4 à 13 et l'incrément entre les images varie de 1 à 5. Cinq niveaux d'élongation globales sont considérées. Pour des raisons simplificatrices, seuls les écarts-types relatifs au déplacement horizontal et pour un incrément d'images égal à 2 sont présentés sur la Figure 4.9.



(a)N=2, sub-pixel accurate (b)N=2 ; pixel accurate

Degré du polynôme
$+$:4 ; $\circ$: 5 ; $*$: 6, x : 7 ; $\diamond$: 8, $\triangle$ e : 9 ; $\triangleright$: 10, $\bigtriangledown$: 11 ; $\star$: 12, $\square$: 13

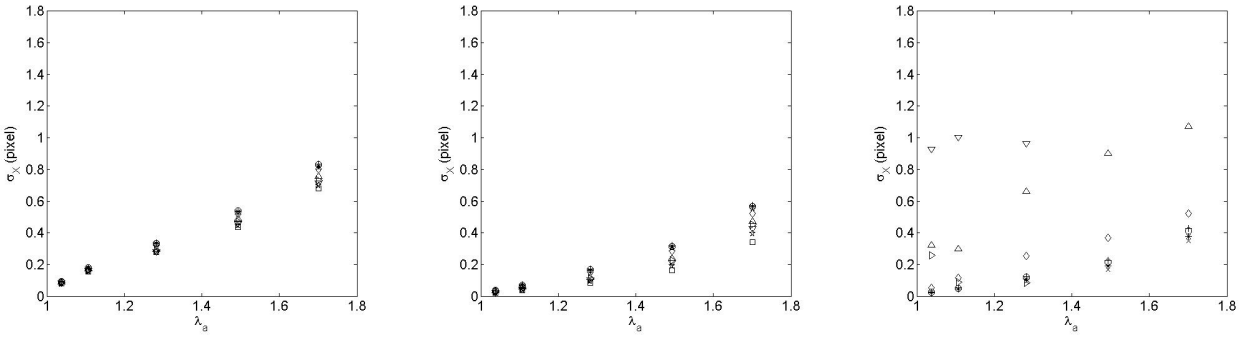
FIG. 4.9 – Influence de l'option 'sub-pixel accurate' et 'pixel accurate' sur les écarts type du champ de déplacement horizontal

On constate bien naturellement que les écarts-types sont plus faibles avec l'option *sub-pixel accurate*. Elle est conservée pour la suite des travaux. Notons que c'est aussi cette option qui a été utilisée aussi dans les études précédant ce paragraphe.

4.6.6.3 Influence de la taille de ZEE

Intéressons-nous maintenant au choix de la taille de la ZEE lorsqu'on utilise les données lissées. L'écart-type entre image brute et image lissée sert toujours pour comparer les différents cas de figure. Trois tailles de ZEE sont testées avec les mêmes décalages : 2^3, 2^4 et 2^5 pixels. Le degré du polynôme varie de 4 à 13. L'option *sub-pixel accurate* est retenue. Seuls les résultats pour le déplacement horizontal pour un incrément d'image de 2 sont présentés sur la Figure 4.10.

L'écart type diminue quand le degré du polynôme augmente. Il diminue aussi quand on passe d'une ZEE de 2^3 à une ZEE de 2^4. Pour une ZEE de 2^5, les résultats deviennent incorrects pour un degré de polynôme supérieur à 8, ceci étant lié au nombre de points de mesures disponibles qui est relativement faible.



(a)une image sur deux, 8 pixel (b)une image sur deux, 16 pixel (c)une image sur deux, 32 pixel

Degré du polynôme
$+$:4 ; $\circ$: 5 ; $*$: 6, x : 7 ; $\diamond$: 8, $\triangle$ e : 9 ; $\triangleright$: 10, $\bigtriangledown$: 11 ; $\star$: 12, $\square$: 13

FIG. 4.10 – Influence de la taille de ZOI sur l'écart-type des déplacements

4.6.7 Conclusion

Après avoir analysé divers configurations possibles, nous pouvons retenir les choix suivants pour le traitement des images :

1. option *sub-pixel accurate* ;
2. ZEE=2^4 pixels ;
3. décalage de ZEE=2^4 pixels
4. traitement d'une image sur une et une image sur deux ;
5. en cas de lissage, polynôme de degré 9

4.7 Post-traitement des résultats

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats de post-traitement. Les champs de déplacements sont analysés pour les deux essais "équibiaxial" et "semi-bitraction". Les gradients de déplacement sont ensuite calculés et une analyse en termes de caractérisation de l'hétérogénéité des essais est présentée.

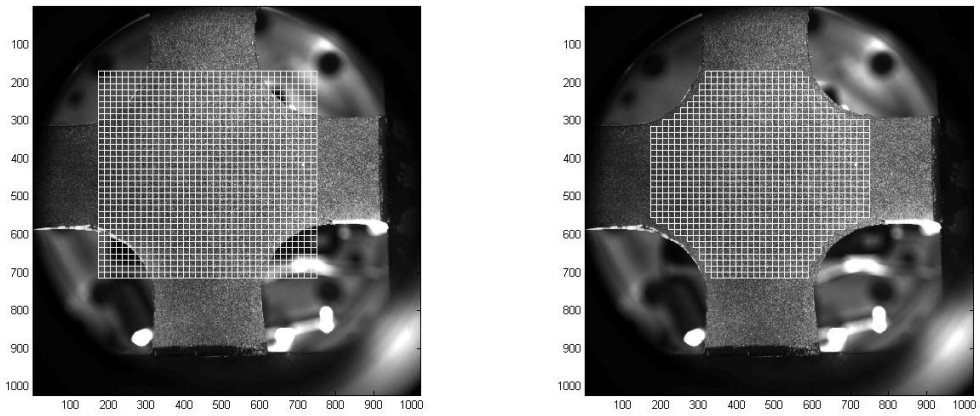
4.7.1 Choix de la région d'étude en fonction de l'essai

Le logiciel $Correli^{LMT}$ permet de choisir des RE rectangulaires. La géométrie des éprouvettes n'est donc pas appropriée avec cette forme de RE. On choisit donc initialement une RE plus grande que l'éprouvette et ensuite on supprime les ZEEs qui sont situées en dehors de l'éprouvette. Ce travail est réalisé une fois pour toutes. Il suffit ensuite de choisir toujours la même RE initiale. La Figure 4.11a présente l'éprouvette utilisée pour l'essai équibiaxial avec la RE rectangulaire. La Figure 4.11b présente la même éprouvette une fois que les ZEEs hors de l'éprouvette ont été otées. Il faut également remarquer que la nouvelle RE ne couvre pas les branches de l'éprouvette dans sa totalité. Ceci est dû au fait qu'une partie des branches disparait de la zone observée par l'objectif de la caméra pendant l'essai car les élongations sont importantes. Pour l'essai équibiaxial, la nouvelle RE compte 1028 ZEEs.

De la même façon, les Figures 4.12a et 4.12b présentent l'éprouvette utilisée pour l'essai de semi-bitraction avec la RE initiale rectangulaire et la RE obtenue après suppression des ZEEs hors de l'éprouvette. Ici le nombre de ZEEs obtenu est de 1224. La nouvelle RE n'est pas symétrique par rapport aux axes de l'éprouvette car seules les branches du bas et de gauche se déplacent pendant l'essai.

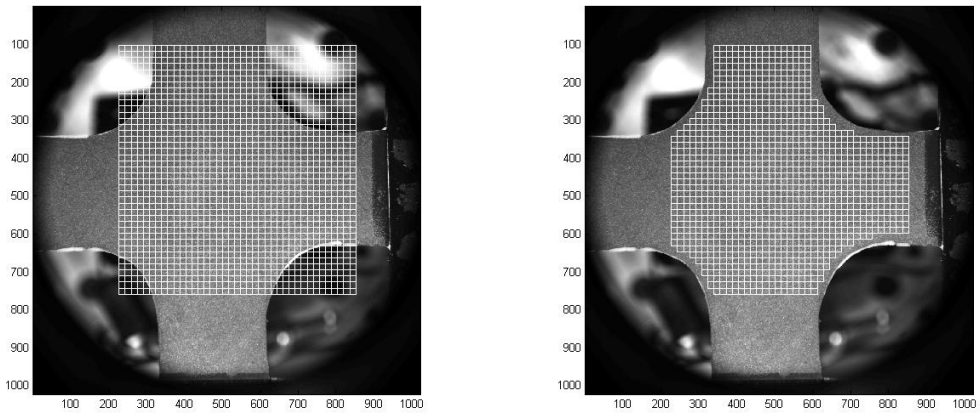
Pour les deux essais, la taille de chaque ZEE est de 16 pixels, conformément à l'étude préliminaire.

Les Figures 4.13a et b présentent la RE obtenue pour les élongations globales maximales soit 1.73 pour l'essai équibiaxial et 1.34 pour l'essai semi-bitraction. On constate que la RE ne dépasse pas la zone observée par l'objectif de la caméra, confirmant le choix initial de RE. Remarquons cependant que le logiciel $Correli^{LMT}$ adapte automatiquement la taille de la RE finale en fonction des ZEEs se situant dans l'image à étudier. L'étude précédente a donc été effectuée dans le but de traiter toujours la même région d'étude, quelle que soit l'élongation globale.



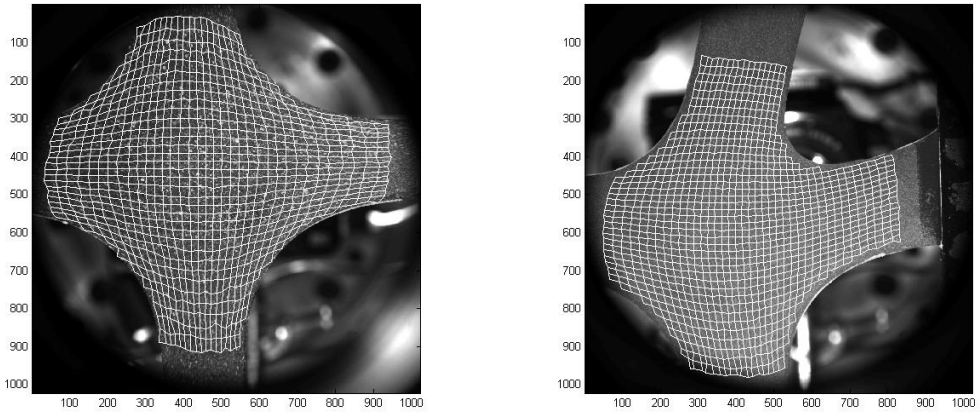
(a) Essai équibiaxial avec RE rectangulaire (b) Essai équibiaxial avec RE adaptée à la géométrie

FIG. 4.11 – Essai équibiaxial



(a) Essai semibitraction avec RE rectangulaire (b) Essai semibitraction avec RE adaptée à la favorable

FIG. 4.12 – Essai semibitraction



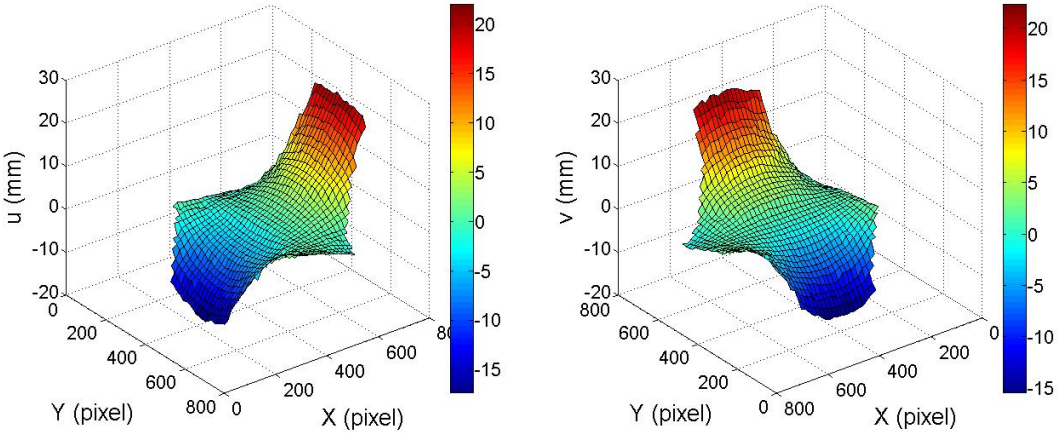
(a) Essai équibiaxial, λ_a = 1,73 (b) Essai semibitraction, λ_a = 1,34

FIG. 4.13 – RE obtenue pour les élongations globales λ_a maximum

4.7.2 Analyse de l'essai équibiaxial

Champs de déplacements et de gradients non-lissés La MCV nécessite le calcul des champs de gradients des déplacements mesurés. Dans un premier temps, nous présentons sur les Figures 4.14a et b un exemple de champs de déplacements horizontal et vertical obtenu pour l'élongation globale maximale, soit 1.73. Les valeurs de déplacement sont exprimées en mm et sont en bon accord avec les commandes imposées au niveau du pilotage de la machine d'essai multiaxiale ASTREE. On reconnait très clairement la partie centrale et les quatre branches de l'éprouvette. Par ailleurs, les deux figures sont très similaires, ce qui montre bien le caractère symétrique de l'essai.

Notons cependant que les déplacements horizontaux et verticaux présentent localement des légères ondulations qui sont dues aux erreurs cumulées lors de la corrélation. Ces erreurs peuvent être génantes lorque l'on calcule les gradients de déplacements qui sont utilisés dans la MCV. C'est effectivement ce qui est observé sur les Figures 4.15a, b, c et d. Même si l'allure globale est similaire à celle que l'on a obtenu lors des simulations par éléments finis (voir chapitre 3), les champs de gradients sont très bruités, ceci pouvant engendrer des perturbations également pour l'identification des paramètres matériaux. Notons que les champs de gradients sont calculés à partir des champs de déplacements au moyen d'un schéma de différence finie centrée et implémentée dans la fonction *gradient* du logiciel Matlab.

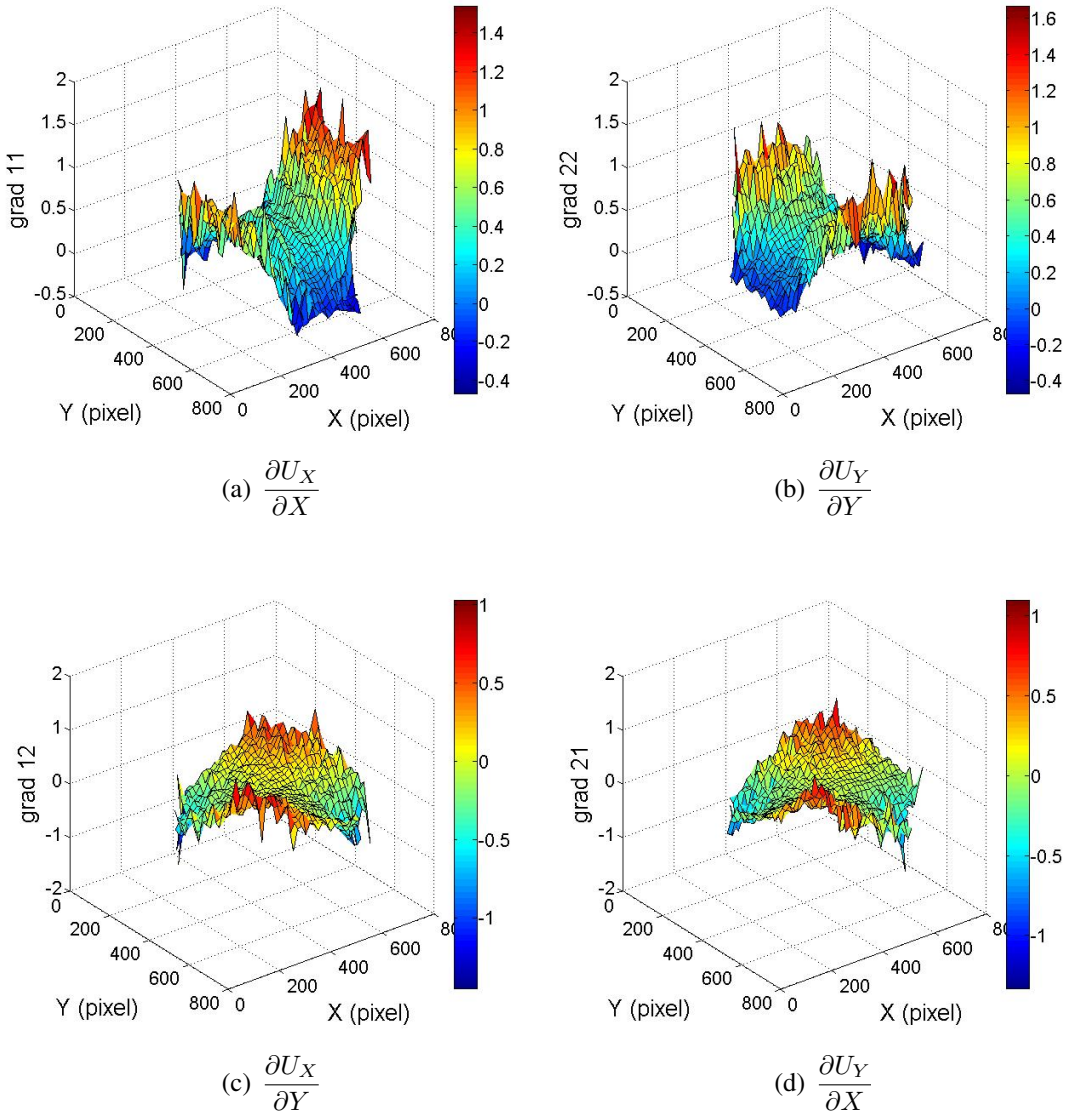


(a) U_X (b) U_Y

FIG. 4.14 – Champ des déplacements obtenus lors de l'essai équibiaxial à élongation globale maximale λ_a = 1,73

Champs de déplacements et de gradients lissés Afin de pallier le problème précédent, nous avons choisi de lisser les champs de déplacements par un polynôme de degré 9 conformément à l'analyse présentée dans le paragraphe 4.6.6. Les champs obtenus pour l'élongation globale maximale sont présentés sur les Figures 4.16a et b pour le déplacement horizontal et vertical respectivement. L'allure des champs est la même que précédemment mais les ondulations et autres imperfections ont disparu.

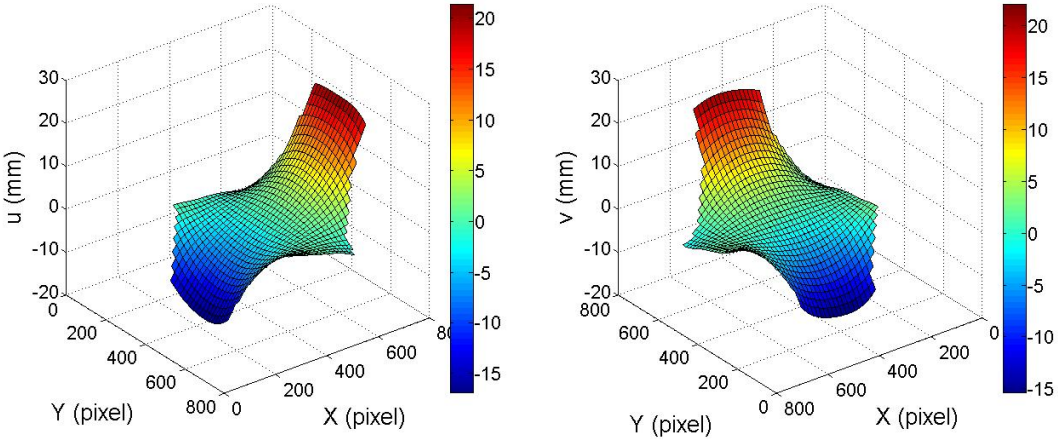
On peut maintenant en déduire les champs de gradients à partir des champs de déplacements lissés en utilisant toujours la fonction *gradient* du logiciel Matlab. Ces champs sont présentés dans les Figures 4.17a, b, c et d. Ils sont maintenant beaucoup plus proches des champs de gradients simulés que les champs lissés. Par ailleurs, on a bien les champs $\frac{\partial U_X}{\partial X}$ et $\frac{\partial U_Y}{\partial Y}$ qui sont symétriques, les champs $\frac{\partial U_X}{\partial Y}$ et $\frac{\partial U_Y}{\partial X}$ étant quant à eux très proches.



(a) $\frac{\partial U_X}{\partial X}$ (b) $\frac{\partial U_Y}{\partial Y}$

(c) $\frac{\partial U_X}{\partial Y}$ (d) $\frac{\partial U_Y}{\partial X}$

FIG. 4.15 – Champs de gradients de l'essai équibiaxial, 1er cycle, élongation globale maximale λ_a = 1,73



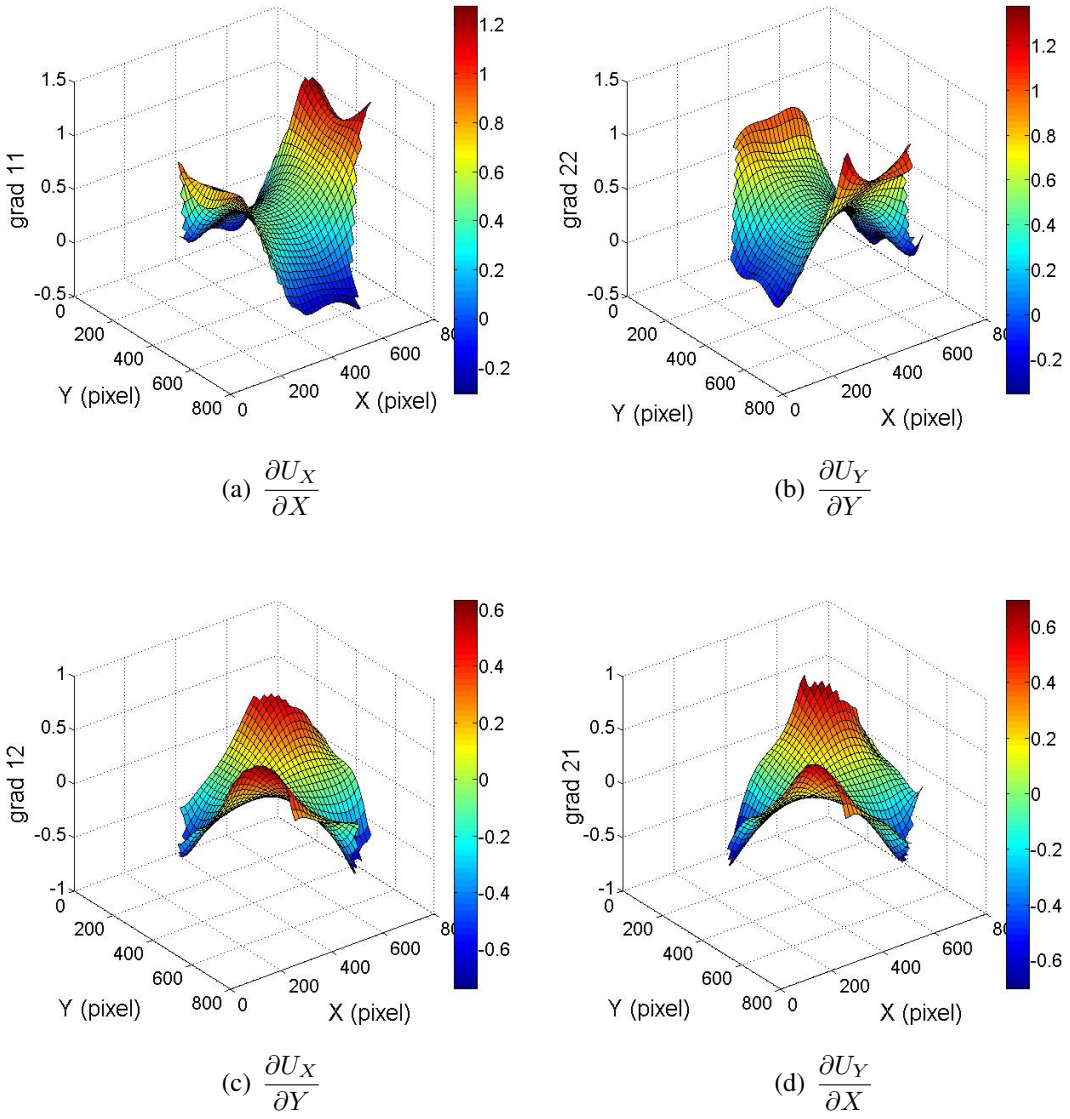
(a) U_X (b) U_Y

FIG. 4.16 – Champ des déplacements lissés de l'essai équibiaxial à élongation globale maximale λ_a = 1,73

4.7.3 Analyse de l'essai semi-bitraction

Champs de déplacements et de gradients non-lissés La même démarche que pour l'essai équibiaxial est présentée dans ce paragraphe. Les champs de déplacements pour l'élongation globale maximale de $1,34$ sont présentés sur les Figures 4.18a et$b$. Là aussi, les déplacements sont exprimés en mm et sont en bon accord avec le pilotage de la machine d'essais multiaxiale ASTREE. Les ondulations sont un peu moins visibles que pour l'essai équibiaxial.

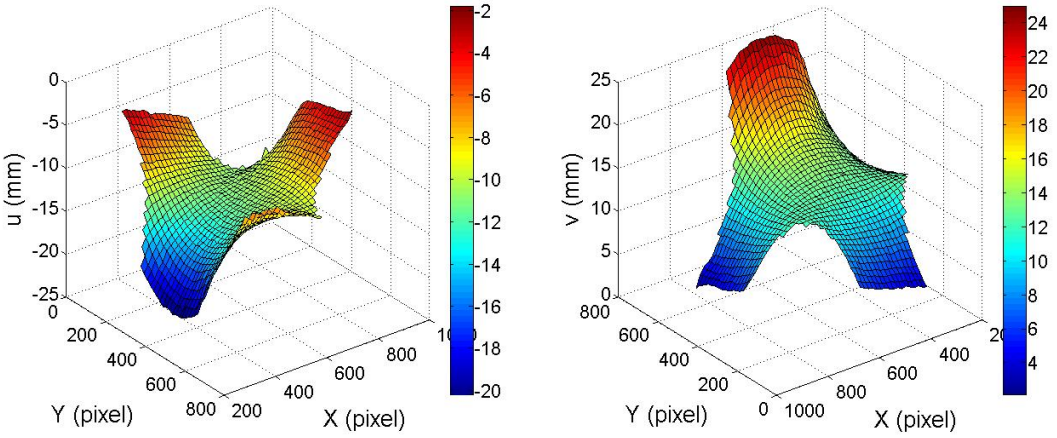
Les champs de gradients correspondant sont calculés par la fonction *gradient* du logiciel Matlab et sont présentés sur les Figures 4.19a, b, c et d. Bien que les champs de déplacements soient relativement "lisses", il apparaît quand même des perturbations locales importantes sur les champs obtenus.



(a) $\frac{\partial U_X}{\partial X}$ (b) $\frac{\partial U_Y}{\partial Y}$

(c) $\frac{\partial U_X}{\partial Y}$ (d) $\frac{\partial U_Y}{\partial X}$

FIG. 4.17 – Champs de gradients lissés de l'essai équibiaxial, 1er cycle, élongation globale maximale λ_a = 1,73

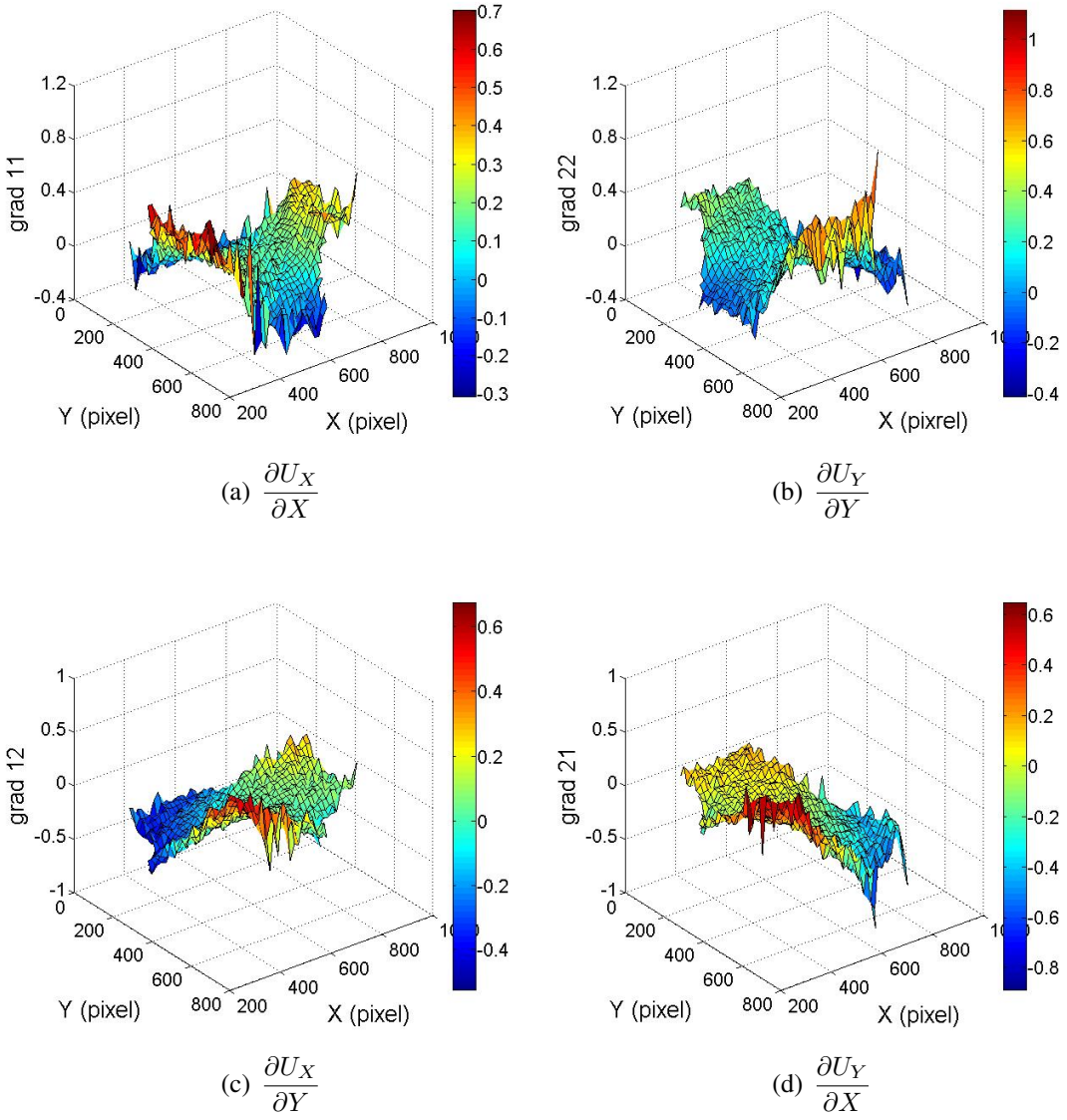


(a) U_X (b) U_Y

FIG. 4.18 – Champ des déplacements de l'essai semibitraction à élongation globale maximale λ_a = 1,34

Champs de déplacements et de gradients lissés Afin d'améliorer la qualité des champs de déplacements et de gradients, les champs de déplacements initiaux sont lissés avec un polynôme de degré 9 comme pour l'essai équibiaxial. Ils sont présentés sur les Figures 4.20a et b. On a ici une antisymétrie entre les déplacements horizontaux et verticaux, ce qui est cohérent avec l'essai réalisé.

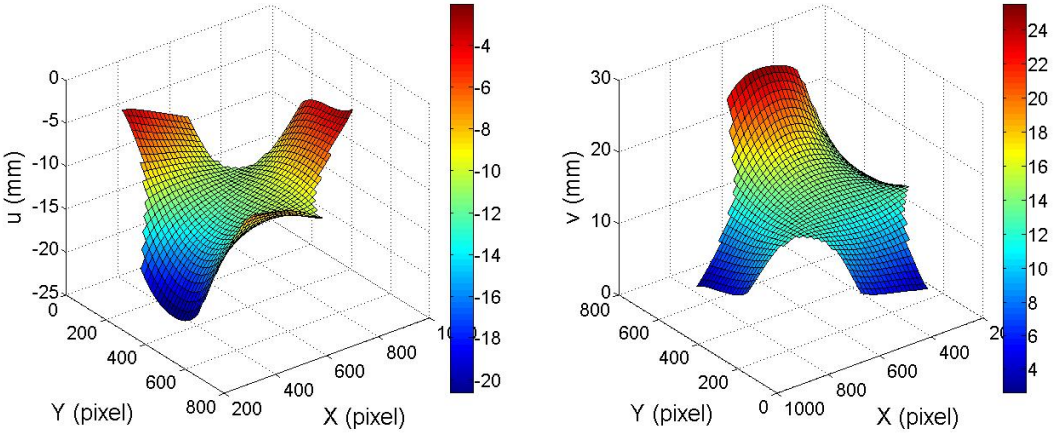
Ces champs de déplacements sont ensuite utilisés pour calculer les champs de gradients avec la fonction *gradient* du logiciel Matlab. Ils sont présentés sur les Figures 4.21a, b, c et d pour l'élongation globale maximale de $1,34$.



(a) $\frac{\partial U_X}{\partial X}$ (b) $\frac{\partial U_Y}{\partial Y}$

(c) $\frac{\partial U_X}{\partial Y}$ (d) $\frac{\partial U_Y}{\partial X}$

FIG. 4.19 – Champs de gradients de l'essai semibitraction, 1er cycle, élongation globale maximale λ_a = 1,34



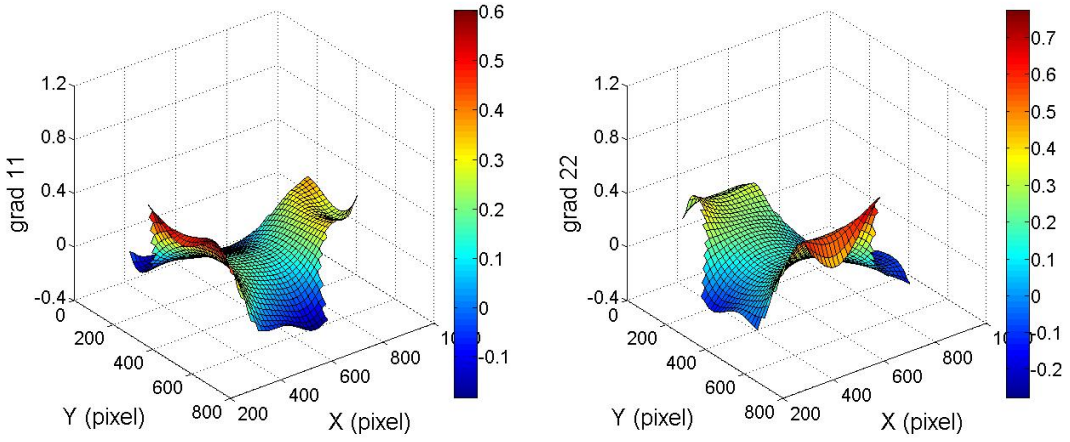
(a) U_X (b) U_Y

FIG. 4.20 – Champ des déplacements lissés de l'essai semibitraction à élongation globale maximale λ_a = 1,34

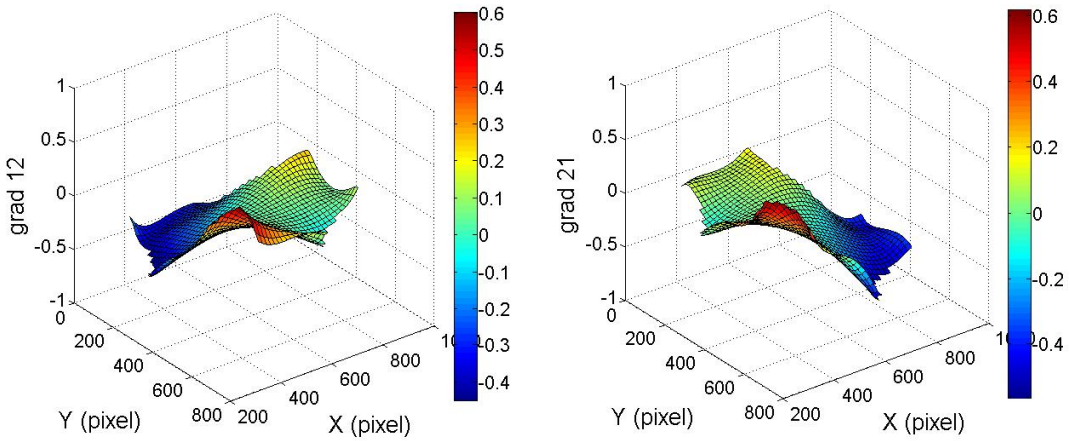
4.7.4 Hétérogénéité des essais : Echantillon en croix

Avant de passer à l'étape d'identification des paramètres, intéressons-nous maintenant au caractère hétérogène des deux essais précédemment effectués. Pour cela, nous nous appuyons sur les représentations utilisées dans le chapitre 3 pour les différentes simulations par éléments finis : représentation des cas de chargement dans le plan $I_1 - I_2$ et représentation de l'élongation principale maximale sur chaque ZEE. L'objectif est de comparer les différentes figures obtenues à partir des champs non-lissés et des champs lissés avec les figures obtenues par simulations par éléments finis.

Essai équibiaxial Les Figures 4.22a-f présentent les résultats de l'essai équibiaxial pour l'élongation globale maximale de $1,73$. La première colonne donne les résultats obtenus à partir des champs bruts (sans lissage) ; la deuxième colonne les résultats obtenus après lissage. Les résultats sans lissage sont très bruités alors qu'après lissage, on obtient des résultats beaucoup plus proches des résultats issus des simulations par éléments finis. En particulier, la distribution des cas de chargements dans le plan $I_1 - I_2$ est bien représentative de l'essai effectué. On retrouve également un état de traction équibiaxiale dans la partie centrale de l'éprouvette alors que les branches sont en traction pure. La partie située entre la traction équibiaxiale et la traction uniaxiale correspond bien au cisaillement pur. Pour ce qui est des ordres de grandeur



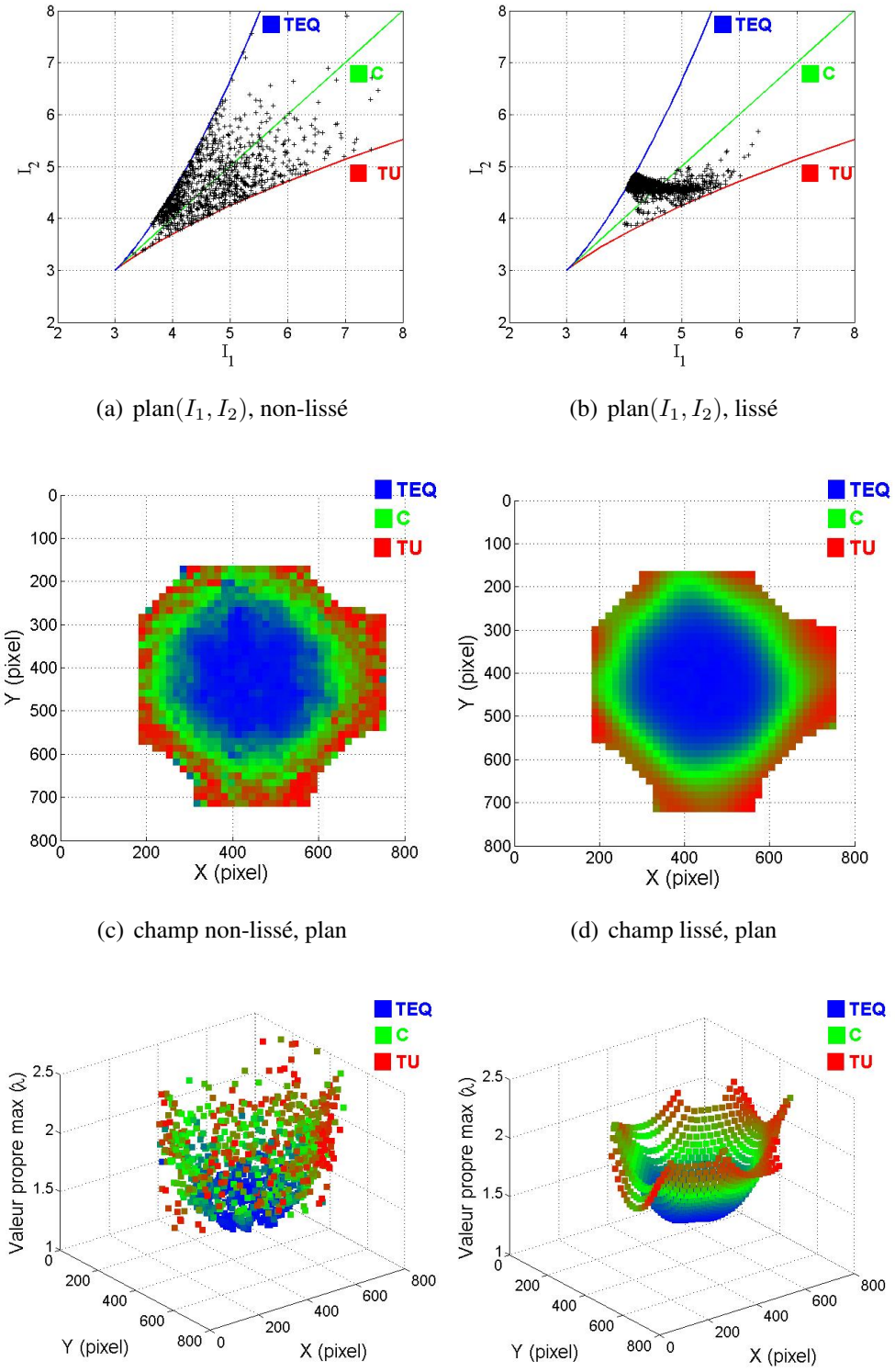
(a) $\frac{\partial U_X}{\partial X}$ (b) $\frac{\partial U_Y}{\partial Y}$



(c) $\frac{\partial U_X}{\partial Y}$ (d) $\frac{\partial U_Y}{\partial X}$

FIG. 4.21 – Champs de gradients lissés de l'essai semibitraction, 1er cycle, élongation globale maximale λ_a = 1,34

des élongations principales maximales, les résultats issus des simulations sont en bon accord avec les résultats simulés (voir Figure 3.13 et 3.14). Notons que le nombre de ZEEs (1028) est proche du nombre d'éléments finis (1440) afin de faciliter la comparaison des deux approches.



(a) plan(I_1, I_2), non-lissé

(b) plan(I_1, I_2), lissé

(c) champ non-lissé, plan

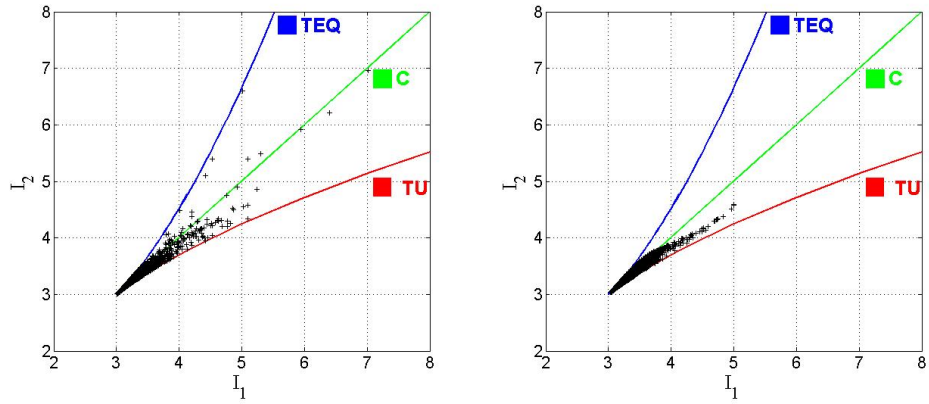
(d) champ lissé, plan

(e) champ non-lissé, élongation principale maximale

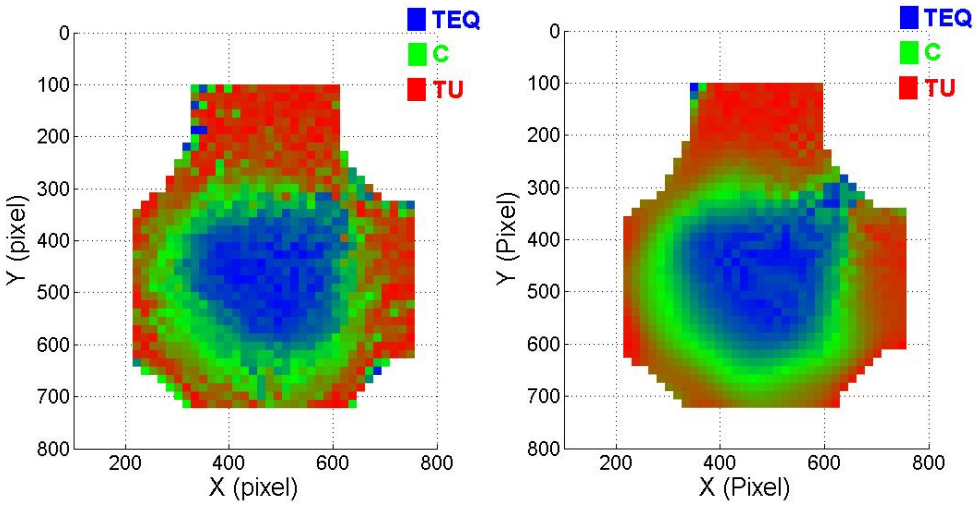
(f) champ lissé, élongation principale maximale

FIG. 4.22 – Champs non-lissé et lissé de l'essai équibiaxial, 1er cycle, élongation globale maximale λ_a = 1,73

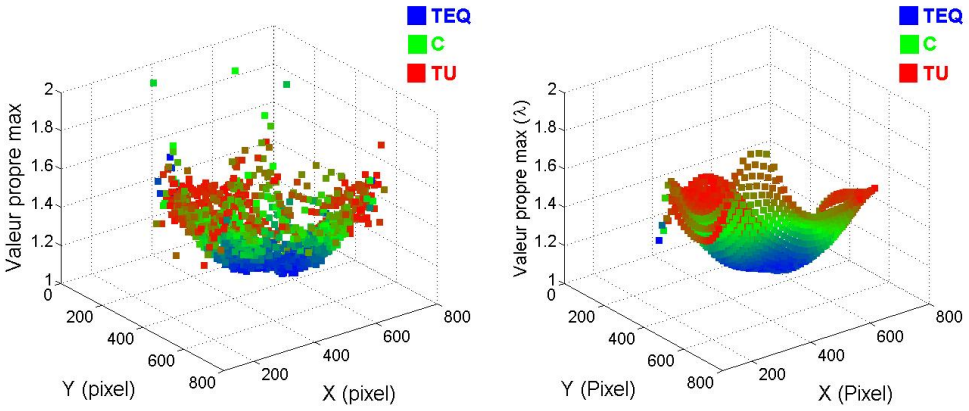
Essai semi-bitraction La même analyse est maintenant effectuée pour l'essai de semi-bitraction. Les Figures 4.23a à f correspondent à l'élongation globale maximale, soit $1,34$. Ici la représentation des cas de chargement dans le plan $I_1 - I_2$ est moins bruitée que pour l'essai équibiaxial. Seuls quelques points sont aberrants. Cependant les résultats après lissage qui sont présentés dans la colonne de droite sont quand même plus proches des résultats issus des simulations (voir Figure 3.15 et 3.16). Il en est de même pour les représentations des élongations maximales globales dans le plan de l'éprouvette. La répartition des cas de chargement est également cohérente avec les simulations.



(a) plan(I_1, I_2), non-lissé (b) plan(I_1, I_2), lissé



(c) champ non-lissé, plan (d) champ lissé, plan



(e) champ non-lissé, élongation principale maximale (f) champ lissé, élongation principale maximale

FIG. 4.23 – Champs non-lissé et lissé de l'essai semi-bitraction, 1er cycle, élongation globale maximale λ_a = 1,34

4.8 Résultats et discussion

4.8.1 Cas du chargement équibiaxial

4.8.1.1 Introduction

On s'intéresse ici au cas du chargement biaxial présenté ci-dessus. L'étude est conduite sur trois cycles stabilisés sachant que cinq cycles d'accommodation ont été conduits au préalable. Suite à l'étude précédente sur l'influence des paramètres pilotant la corrélation sur la qualité des mesures, les réglages suivants ont été retenus pour traiter les images obtenues avec $Correli^{LMT}$: la taille de ZEE est égale à 16 pixels avec un shift de 16 pixels entre chacune d'entre elles. Les options 'subpixel accurate' et 'GD' (grande déformation) sont activées.

Pour des raisons pratiques, les élongations globales maximales imposées ont été différentes d'un essai à l'autre. En effet, le déplacement maximum autorisé par chaque vérin est de $45\ mm$. Pour l'essai équibiaxial, l'élongation globale maximale est égale à $(125 + 2 \times 45)/125 \simeq 1.72$ puisque deux branches sont sollicitées. $125\ mm$ correspond à l'écartement minimum possible entre les vérins. Pour l'essai de semi-bitraction, cette valeur passe à $(125 + 45)/125 \simeq 1.36$. Sachant de surcroît que les hétérogénéités des champs sont différents d'un essai à l'autre, l'identification sur des cycles entiers sera donc effectuée dans des conditions différentes d'un essai à l'autre.

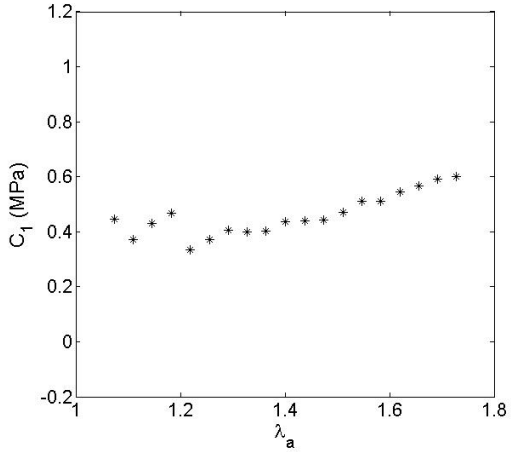
D'autres situations que celles considérées comme optimales ont également été testées, ceci afin d'examiner quelle serait l'influence des changements effectués sur les valeurs identifiées. Le dépouillement de toutes les images des cycles (et pas une sur deux) a donc aussi été effectué, ainsi que le traitement des images non-lissées. Par ailleurs, les champs de déplacements expérimentaux ont été traités de la même façon que les champs numériques : les champs de gradients sont ici calculés et utilisés comme données d'entrée par la MCV, les champs virtuels étant quant à eux optimisés en suivant la même procédure que pour le traitement des données simulées. 40 images sont saisies pendant la montée en charge, donc 40 jeux de valeurs sont obtenus lorsque toutes ces images sont traitées, 20 jeux quand on traite une image sur deux. Enfin, on a considéré ici deux types de modèles de comportement : le modèle de Mooney et le modèle de Yeoh, ce qui permet d'identifier à partir des mêmes essais 2 ou 3 paramètres d'un modèle à l'autre.

4.8.1.2 Modèle de Mooney

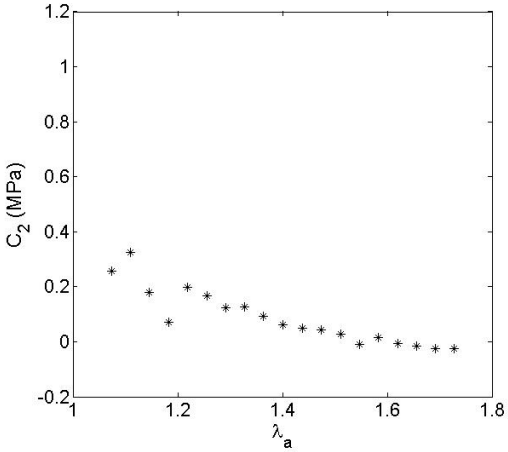
Résultats Les Figures 4.24 et 4.25 présentent l'évolution des paramètres C_1 et C_2 identifiés pas à pas au cours de chacun des trois cycles réalisés, ceci avec des données en déplacement non-lissées, en traitant une image sur deux ou toutes les images, respectivement. La Figure 4.26 est obtenue quant à elle de façon similaire, mais avec des valeurs en déplacement qui sont lissées cette fois et pour une image sur deux. Pour chaque valeur de λ_a, on associe donc l'image courante avec l'image initiale et les déplacements sont calculés selon la procédure présentée précédemment. Les gradients en sont déduits. Ils sont ensuite utilisés comme données d'entrée dans le programme d'identification. Pour chaque valeur de λ_a, on trouve donc un couple (C_1, C_2) pour le modèle de Mooney, ce qui permet de tracer les figures présentées ci-dessous.

L'analyse des résultats présentés Figure 4.24 conduit aux conclusions suivantes :

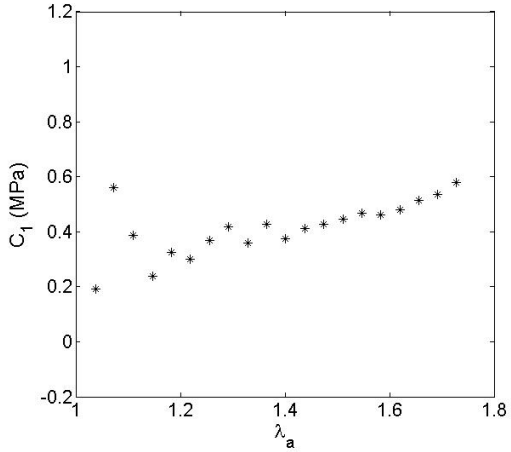
- dans l'ensemble, les valeurs de C_1 et C_2 obtenues évoluent régulièrement au fil de chacun des chargements. La valeur de C_1 augmente légèrement, celle de C_2 diminue quant à elle légèrement ;
- une dispertion plus grande apparaît au début de chaque distribution. Ce résultat peut être dû à deux phénomènes : le premier est une erreur relative plus grande sur les gradients mesurés lorsque ceux-ci sont faibles, la seconde est que l'hétérogénéité de l'état de déformation est également moins marquée au début de l'essai, ce qui rend le système linéaire à inverser plus instable, comme discuté dans le chapitre précédent avec des données issues de simulations ;
- on observe des réponses très similaires d'un cycle à l'autre ;



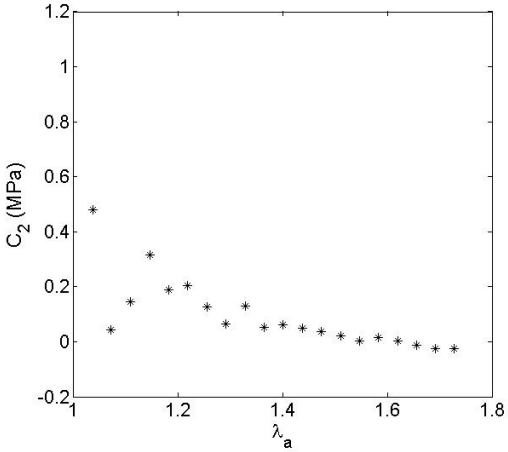
(a) C_1, 1e cycle



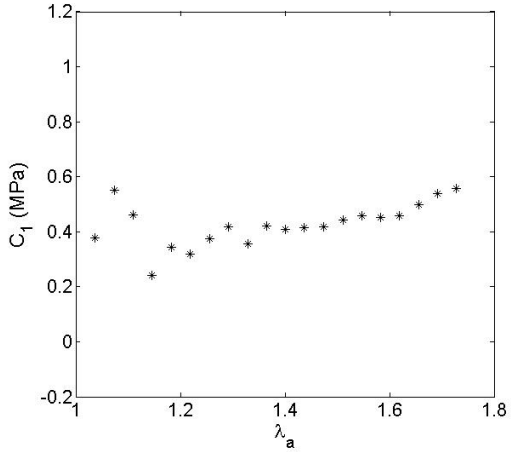
(b) C_2, 1e cycle



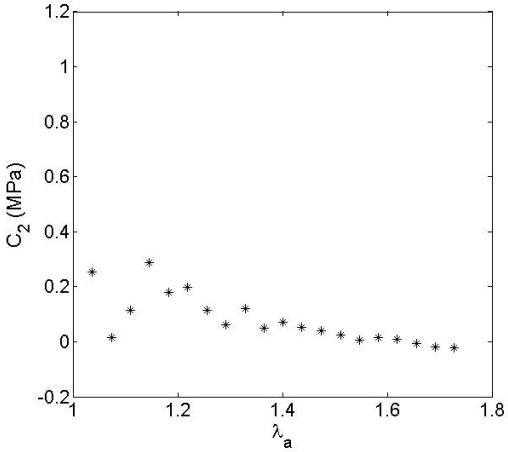
(c) C_1, 2e cycle



(d) C_2, 2e cycle



(e) C_1, 3e cycle



(f) C_2, 3e cycle

FIG. 4.24 – C_1 et C_2 en fonction de λ_a, essai équibiaxial, une image sur deux prise en compte, champs lissés

Calcul des valeurs moyennes des coefficients Les valeurs identifiées étant relativement stables, on peut calculer pour chacune une valeur moyenne qui serait la plus représentative de l'ensemble des résultats obtenus lors d'un cycle. Le fait que la dispersion soit plus marquée au début du chargement incite cependant à pondérer ces valeurs en fonction de la dispersion en question. Une solution consiste à prendre un coefficient de pondération qui soit lié à la dispersion des mesures de déplacement. On prend pour cela comme poids l'inverse de l'écart-type de la différence entre les champs de déplacements mesurés lissé et non-lissé, ceci pour chaque image dépouillée, cette valeur étant normalisée par l'élongation maximum. On obtient alors comme valeur moyenne pondérée :

$$\overline{C}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_t} \left(\frac{\lambda_{a_i} - 1}{std_i} \right) \times C_{ji}}{\sum_{i=1}^{n_t} \left(\frac{\lambda_{a_i} - 1}{std_i} \right)} \tag{4.3}$$

où

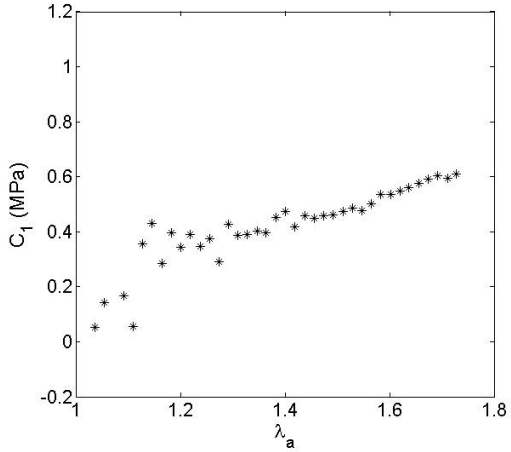
$$std_i = \sqrt{stdx_i^2 + stdy_i^2} \tag{4.4}$$

$stdx_i^2$ et $stdy_i^2$ sont les écart-types de difference entre les champs de déplacements (u_x et u_y) lissé et non-lissé, $i = 1, 2, ..., n_t$, où n_t est le nombre d'images dépouillées, C_{ji} est le paramètre j ($j = 1 ou 2$) identifié pour chaque image i.

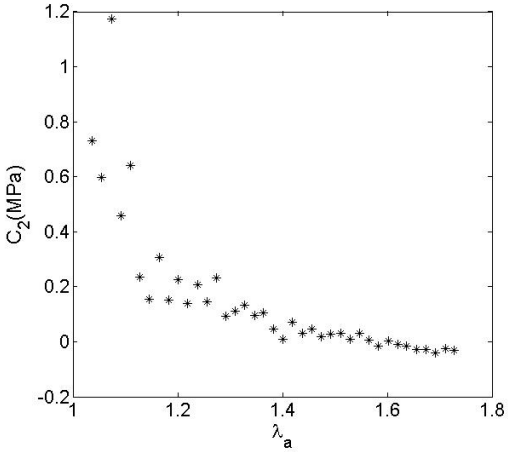
Les valeurs trouvées en traitant les résultats des essais ci-dessus sont rassemblées dans le Tableau 4.2, colonne de gauche.

Les valeurs trouvées sont relativement stables, surtout pour C_1 qui est le plus grand des deux coefficients, C_2 étant quant à lui un peu plus dispersé. Les deux valeurs obtenues sont proches des valeurs trouvées classiquement dans la littérature pour le matériau testé, ce qui conforte la démarche proposée.

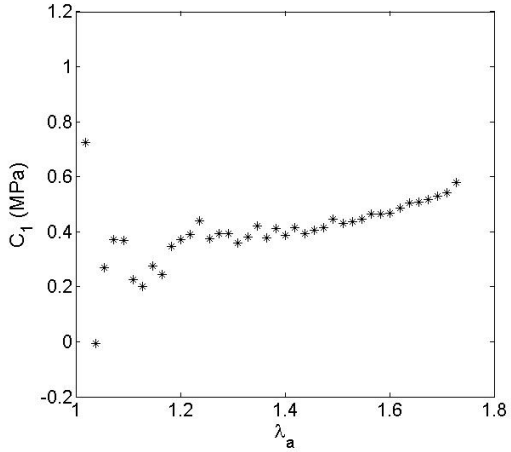
Influence de certains réglages sur l'identification Il est intéressant de voir comment ces valeurs identifiées sont sensibles à la variation de certains paramètres reconnus comme optimums dans le dépouillement des images. On a examiné pour cela l'influence du traitement de toutes les images au lieu d'une image sur deux, ainsi que l'influence de données plus bruitées en déplacement en choisissant de ne pas lisser ces dernières. Les résultats obtenus sont rassemblés dans les Figures 4.25 et 4.26 ci-dessous.



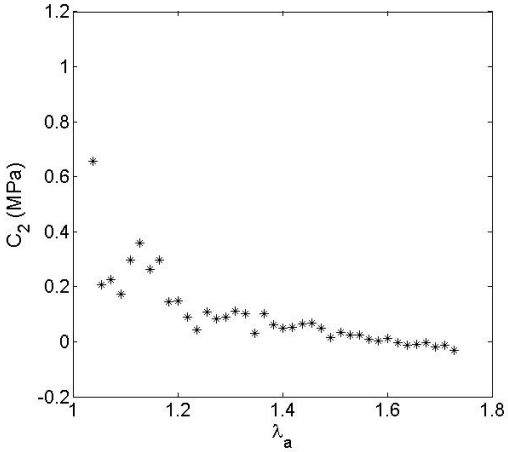
(a) C_1, 1e cycle



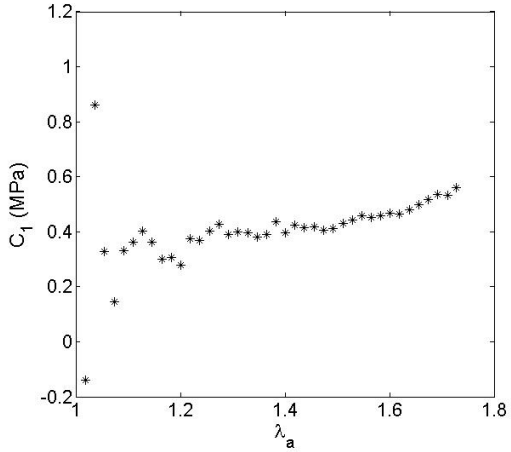
(b) C_2, 1e cycle



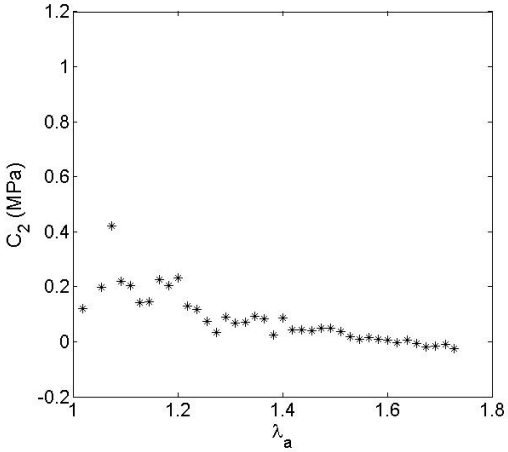
(c) C_1, 2e cycle



(d) C_2, 2e cycle

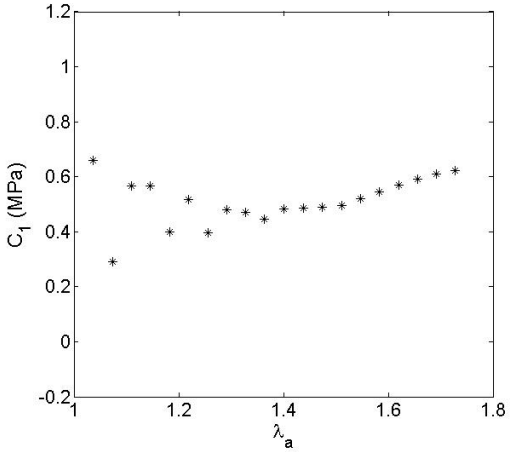


(e) C_1, 3e cycle

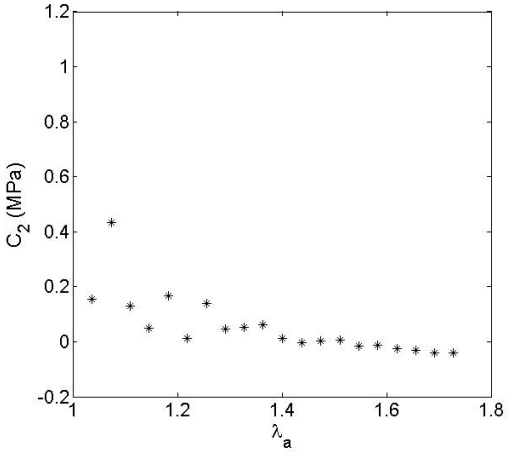


(f) C_2, 3e cycle

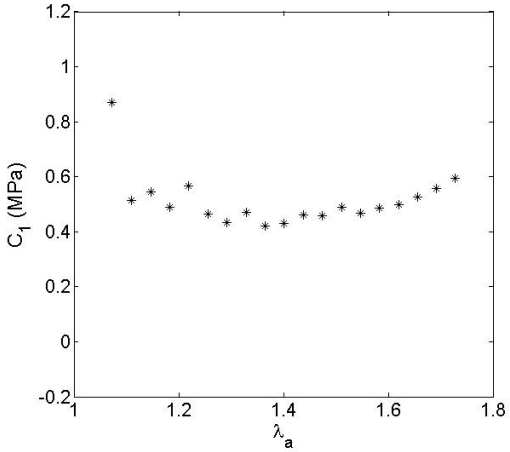
FIG. 4.25 – C_1 et C_2 en fonction de λ_a, essai équibiaxial, toutes les images prises en compte, champs lissé



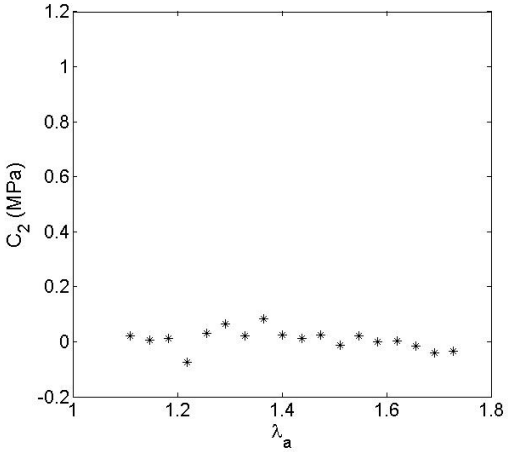
(a) C_1, 1e cycle



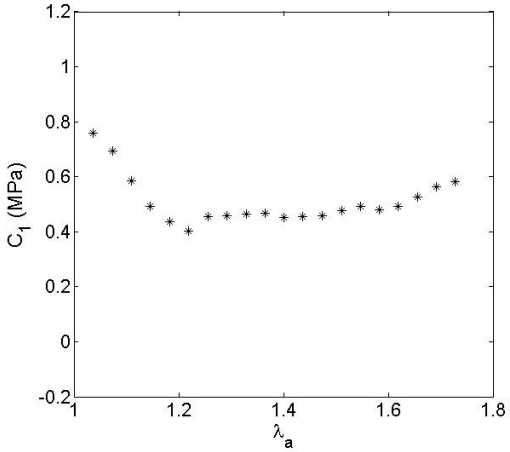
(b) C_2, 1e cycle



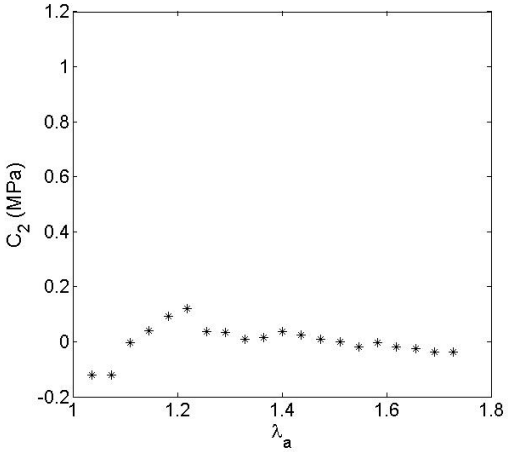
(c) C_1, 2e cycle



(d) C_2, 2e cycle



(e) C_1, 3e cycle



(f) C_2, 3e cycle

FIG. 4.26 – C_1 et C_2 en fonction de λ_a, essai équibiaxial, une images sur deux prise en compte, champs non-lissé

TAB. 4.2 – Moyenne pondérée des paramètres identifiés, essai équibiaxial

	lissé, 1 image sur 2		**lissé**, toutes les images		**non-lissé**, 1 image sur 2	
	$\overline{C}_1$ (MPa)	$\overline{C}_2$ (MPa)	$\overline{C}_1$ (MPa)	$\overline{C}_2$ (MPa)	$\overline{C}_1$ (MPa)	$\overline{C}_2$ (MPa)
cycle 1	0,4108	0,1389	0,4074	0,1335	0,5123	0,0414
cycle 2	0,4160	0,0906	0,3993	0,0875	0,5623	-0,0499
cycle 3	0,4280	0,0753	0,4033	0,0781	0,5105	0,0002

On constate sur ces figures que le fait de modifier les réglages change relativement peu l'aspect visuel général des distributions obtenues. Une analyse plus fine montre cependant que la dispersion des coefficients C_1 et C_2 est un peu plus importante avec des données non-lissées, ce qui semble logique (comparer notamment les Figures 4.24-b et 4.26-b, surtout en début de cycle où certains points sortent de la figure vu l'échelle retenue). Ce constat est vérifié lorsqu'on examine les variations des coefficients moyens pondérés obtenus d'un cycle à l'autre. Ces valeurs sont rassemblées dans le Tableau 4.2, colonnes 2 et 3. On peut constater que C_1 et C_2 varient finalement relativement peu, que l'on traite toutes les images ou une image sur deux. Ces valeurs deviennent en revanche plus disperseés d'un cycle à l'autre quand on traite des données non-lissées. On voit même que C_2 devient négatif pour le cycle 2 dans ce cas, ce qui est impossible en théorie. Cependant, vu le caractère notablement dispersés des gradients déduits des déplacements quand ceux-ci sont non-lissés (voir paragraphe 4.7.2 plus haut), on aurait pu craindre une dispersion encore plus marquée des paramètres. Cela n'est pas le cas. Ce constat est sans doute dû au fait que la MCV s'appuie sur des calculs d'intégrales de produits entre grandeurs cinématiques mesurées et gradients des déplacements virtuels. Ces intégrales peuvent être interprétées comme des valeurs moyennes pondérées des mesures. L'effet régularisant de l'intégration diminue l'effet de ce bruit, d'où cette distribution qui reste finalement relativement acceptable.

4.8.1.3 Modèle de Yeoh

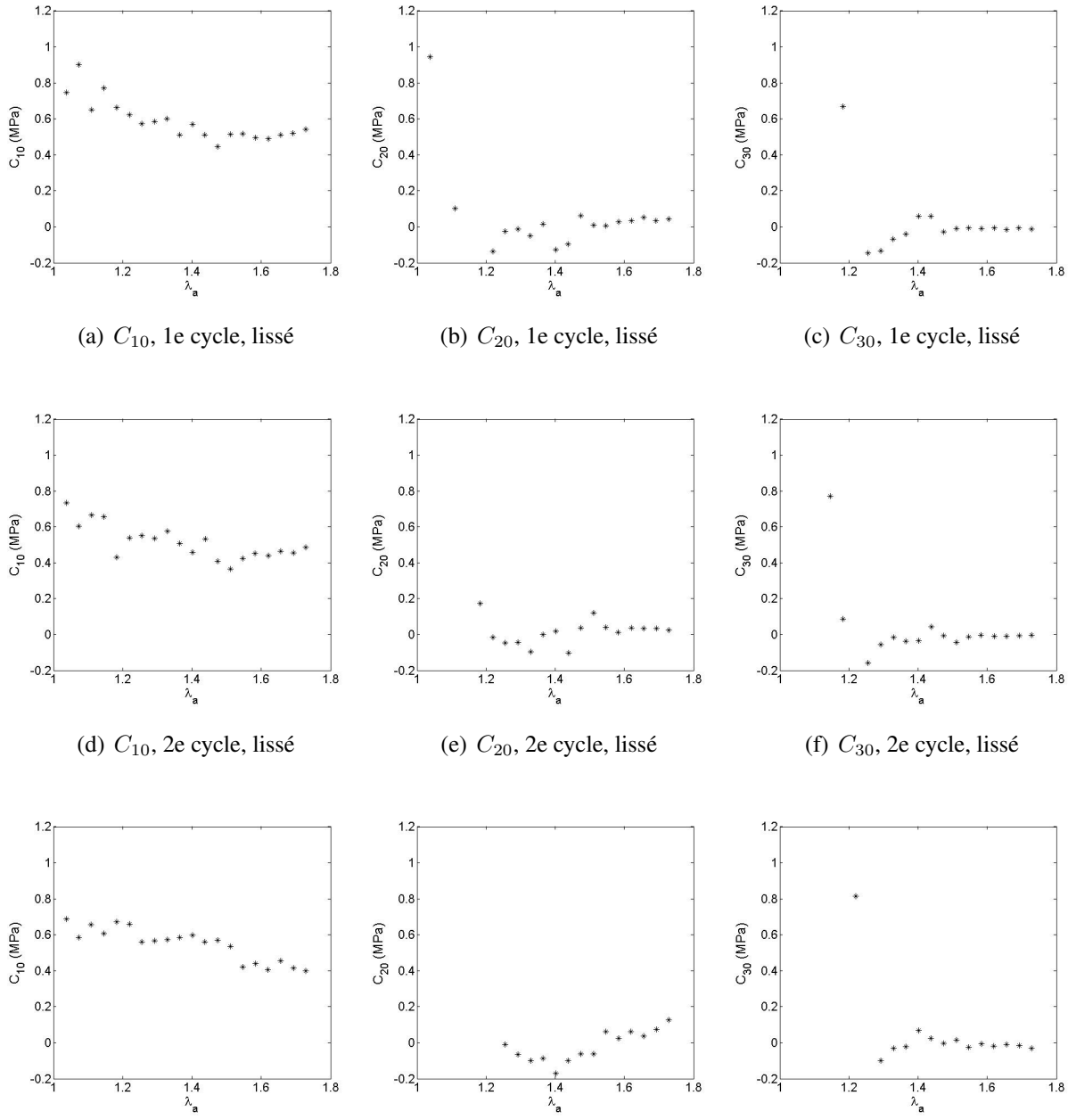
Introduction Après le modèle de Mooney, on considère ici le modèle de Yeoh. Une différence importante mérite d'être soulignée par rapport au cas précédent : trois paramètres au lieu de deux doivent être identifiés. Par ailleurs, le modèle ne dépend que de I_1 (et donc pas de I_2), ce qui se justifie entre autre par le fait que I_2 reste un terme qui, en pratique, est relativement peu influent sur la réponse du matériau. Enfin, il faut rappeler que ce modèle permet notamment de modéliser le raidissement qui se produit au-delà de $\lambda = 4$ environ. Cette valeur n'étant atteinte en théorie qu'en quelques points de l'éprouvette seulement, il sera intéressant de voir si les paramètres de ce modèle peuvent quand même être identifiés.

Les mêmes séquences d'images que précédemment sont traitées dans ce nouveau cadre. Les mêmes réglages sont également utilisés. Comme trois coefficients sont identifiés, trois champs virtuels doivent être trouvés pour construire un système linéaire de trois équations à trois inconnues. La procédure déjà discutée précédemment est utilisée dans ce but.

Les valeurs identifiées pour C_{10}, C_{20} et C_{30} au fil des trois différents cycles sont rassemblées dans la Figure 4.27 ci-dessous. Certains points aberrants ont été éliminés. Ces points concernaient uniquement C_{20} et C_{30}. Ils apparaitraient en effet en dehors des sous-figures concernées vues les échelles retenues pour la représentation. Ces points aberrants correspondent en fait à des valeurs impossibles à identifier de façon fiable vu leur trop faible implication dans les champs de mesures ou vu le bruit trop important pour des valeurs de déformation faibles correspondant à ces situations. On constate que le terme C_{10} est quant à lui identifiable dès le début des cycles.

Les courbes obtenues sont relativement peu perturbées. On note que C_{10} est légèrement décroissant au fil de l'essai alors que C_{20} est quant à lui légèrement croissant. La première observation est en bon accord avec celle concernant C_1 pour le modèle de Mooney, puisque C_1 était également croissant. Il faut rappeler ici que ces deux termes sont les coefficients de I_1 dans l'expression de l'énergie, d'où sans doute cette cohérence entre les deux modèles.

Résultats Le Tableau 4.3 rassemble les valeurs moyennes pondérées des trois coefficients obtenues en applicant la procédure décrite ci-dessus. On a pris soin d'enlever les points aberrants pour chacun des cycles. On observe une relative stabilité de $\overline{C}_{10}$ d'un cycle à l'autre. $\overline{C}_{20}$ est quant à lui négatif, ce qui n'est pas choquant car cette propriété a été signalée par Yeoh lui-



(a) C_{10}, 1e cycle, lissé (b) C_{20}, 1e cycle, lissé (c) C_{30}, 1e cycle, lissé

(d) C_{10}, 2e cycle, lissé (e) C_{20}, 2e cycle, lissé (f) C_{30}, 2e cycle, lissé

(g) C_{10}, 3e cycle, lissé (h) C_{20}, 3e cycle, lissé (i) C_{30}, 3e cycle, lissé

FIG. 4.27 – C_{10}, C_{20} et C_{30} avec λ_a, chargement équibiaxial, 3 paramètres de Yeoh, une image sur deux, champ lissé

même [75]. La valeur de $\overline{C}_{30}$ identifiée est quant à elle très petite et croissante d'un cycle à l'autre, sans que ces deux derniers résultats puissent être interprétés. De façon générale, il faut souligner que la loi de Yeoh, contrairement à la loi de Mooney, permet de modéliser le raidissement qui intervient pour des élongations en traction voisines de 4. Cette valeur n'est pas atteinte localement lors de nos essais. Même si les résultats de l'indentification observés restent satisfaisants, on peut penser qu'ils ne sont pas obtenus de façon optimale pour cette raison.

TAB. 4.3 – Moyenne pondérée des paramètres identifiés de Yeoh en dépouillant une image sur deux, chargement équibiaxial, champ lissé

Cycle	Enlever points au début	$\overline{C}_{10}$	$\overline{C}_{20}$	$\overline{C}_{30}$
1	5 points	0.5399	-0.0395	0.000262
2	4 points	0.4853	-0.0259	0.005291
3	6 points	0.5148	-0.0583	0.021504

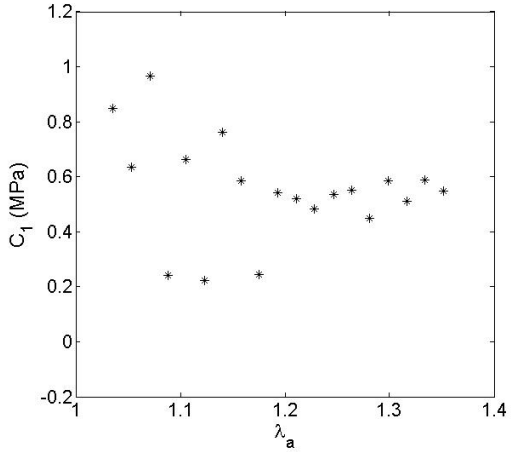
4.8.2 Essai de semi-bitraction

4.8.2.1 Introduction

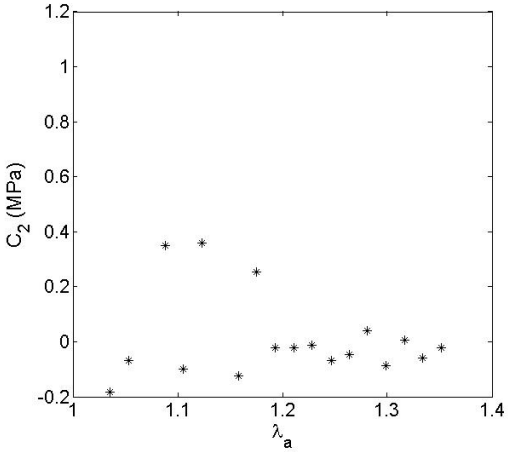
On s'intéresse ici au dépouillement des essais de semi-bitraction. Tous les réglages mentionnés ci-dessus sont repris : taille de ZEE de 16 pixels, décalage de 16 pixels, une image sur deux dépouillée, champs lissés. On rappelle un résultat mis en évidence dans la partie dédiée aux simulations numériques : la présence du bord libre entre les deux branches fixes permet d'avoir au moins un point de l'échantillon qui, dans tous les cas de chargement, ne subit aucun alongement. Une conséquence est qu'il existe toujours au moins un point à l'origine du plan (I_1, I_2), ce qui n'est pas le cas avec le chargement équibiaxial. On peut donc penser qu'avec une plus grande hétérogénéité, on puisse identifier plus facilement les paramètres. Cela dit, le déplacement maximum des vérins mobiles est limité ici à $45\ mm$, ce qui conduit à une élongation moyenne plus faible qu'avec l'essai précédent (voir paragraphe 4.8.1.1 ci-dessus), ce qui est *a priori* favorable à l'identification. Examinons les résultats obtenus.

4.8.2.2 Résultats

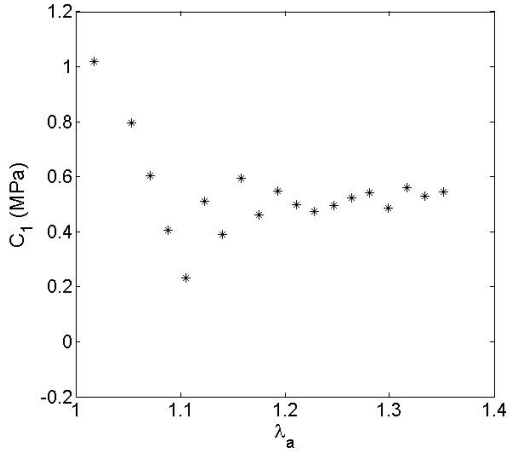
La Figure 4.28 présente les paramètres (C_1 et C_2) obtenus en appliquant la procédure, ceci pour chacun des trois cycles réalisés.



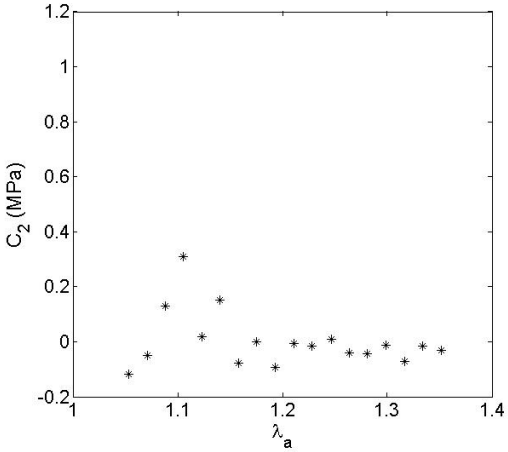
(a) C_1, 1e cycle



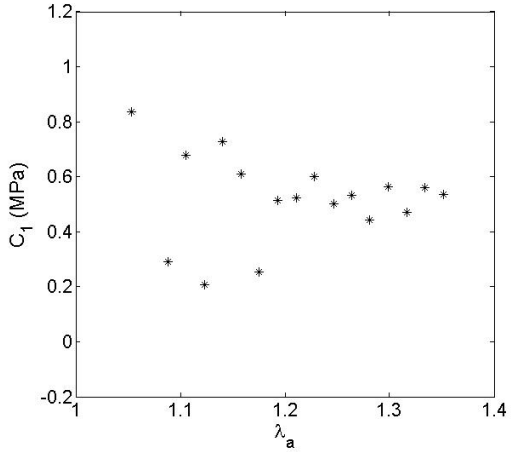
(b) C_2, 1e cycle



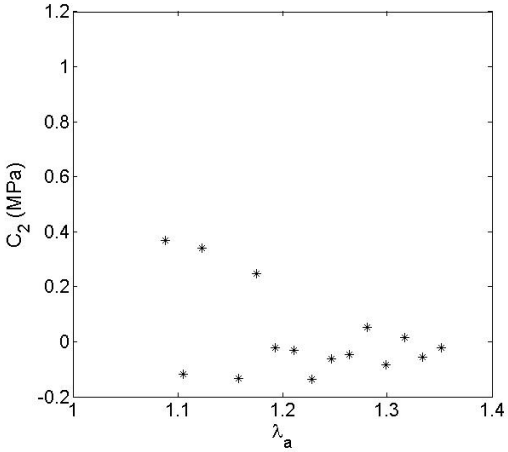
(c) C_1, 2e cycle



(d) C_2, 2e cycle



(e) C_1, 3e cycle



(f) C_2, 3e cycle

FIG. 4.28 – C_1 et C_2 avec λ_a, chargement de semibitraction, une image sur deux, lissé

On observe que la stabilité des valeurs identifiées au fil de l'essai est relative, ceci pour chacun des trois cycles. En particulier, les valeurs identifiées sont plus dispersées au début de l'essai, sans doute déjà pour les mêmes raisons que celles qui ont été mentionnées dans le cas précédemment, à savoir une hétérogénéité plus faible en début d'essai par rapport à la fin de l'essai et une erreur relative sur les gradients plus grande lorsque ceux-ci sont faibles. Une autre raison s'ajoute par rapport au cas précédent : le fait que l'élongation globale atteinte en fin d'essai soit moins élevée que dans le cas précédent : $\lambda_a = 1.36$ au lieu de $\lambda = 1.72$ dans le premier cas, comme rappelé ci-dessus.

Les courbes obtenues sont du coup plus dispersées que les courbes obtenues dans le cas du chargement précédent. On peut quand même noter que C_1 semble augmenter légèrement au fil de l'essai alors que C_2 semble diminuer. Ces deux tendances sont bien les mêmes que celles observées pour l'essai précédent.

Le Tableau 4.4 présente les valeurs des coefficients C_1 et C_2 obtenus en traitant l'ensemble des résultats. Les moyennes sont pondérées en suivant la règle donnée par l'équation 4.3.

TAB. 4.4 – Moyenne pondérée des paramètres C_1 et C_2 identifiés, essai de semibitraction

	$\overline{C}_1$ (MPa)	$\overline{C}_2$ (MPa)
cycle 1	0,5419	-0,0191
cycle 2	0,5531	-0,0344
cycle 3	0,5867	-0,0699

On observe que les valeurs moyennes de C_1 sont relativement peu dispersées. Elles sont notablement plus élevées que dans le cas de chargement précédent (voir Tableau 4.2). Une explication possible réside dans le fait que l'accomodation a été conduite dans des conditions

différentes du cas de chargement équibiaxial. Il semble donc légitime que le matériau puisse présenter un comportement différent en présentant une rigidité apparente plus importante. Le fait que la valeur de C_2 identifiée dans ce cas soit systématiquement négative semble indiquer que la configuration mécanique testée ici n'était pas optimale, contrairement à ce que l'on avait pu penser suite aux résultats obtenus avec les simulations numériques. Cette conclusion doit cependant être considérée avec prudence, les élongations globales imposées lors de ce deuxième essai étant deux fois plus faibles que pour l'essai précédent.

4.9 Conclusion

Des résultats obtenus lors de deux types d'essais conduits sur une machine d'essai biaxiale ont été présentés dans ce chapitre. On s'est d'abord intéressé aux conditions d'utilisation optimales du logiciel de corrélation, puis on appliqué ces conditions aux images obtenues lors des essais. Deux types de modèles ont été considérés : le modèle de Mooney piloté par deux paramètres et celui de Yeoh qui dépend quant à lui de trois paramètres. L'essai de traction biaxiale conduit à des valeurs en bon accord avec celle de littérature. Les résultats obtenus avec l'essai de semi-bitraction sont plus mitigés, mais l'alongement global maximal appliqué était plus réduit que pour l'essai biaxial pour des raisons techniques.

Conclusion générale et Perspectives

Ce travail avait pour objectif principal de mettre oeuvre la Méthode des Champs Virtuels dans le cadre formel des grandes déformations. Pour cela, le formalisme de l'hyperélasticité a été choisi. Au bilan, cette mise en oeuvre a bien été possible. Par rapport aux cas des petites déformations, on peut dresser les conclusions suivantes :

- les équations auxquelles on aboutit dans le PTV sont plus complexes dans le cas des grandes déformations, même pour des lois a priori simples comme celles de Mooney ou de Yeoh ;
- de ce fait et pour des questions de facilité de mise en oeuvre, la procédure d'optimisation des champs virtuels a été considérée de façon heuristique. Cette question mériterait cependant d'être reprise avec un formalisme proche de celui qui avait été utilisé dans le cas des petites déformations et qui avait conduit à une procédure de construction de champs virtuels optimisés uniques dans une base fonctionnelle donnée ;
- l'identification des paramètres constitutifs des lois de comportement à partir de champs de déplacements simulés par éléments finis a abouti à des résultats dont la qualité en terme de robustesse est tout à fait équivalente à celle obtenue au cours des études antérieures traitant de petites déformations. Toutefois, la précision des résultats de l'identification dépend fortement de la connaissance de la loi de comportement postulée et de l'influence effective des paramètres sur les champs mesurés ;
- comme on traite ici des champs hétérogènes, la question du meilleur choix de la géométrie de l'éprouvette et des conditions de chargement s'est posée comme dans le cas des petites déformations. Cette question difficile a été abordée de façon très parcellaire, en comparant simplement deux configurations données. Il a été décidé de réaliser cette comparaison en en appréciant la distribution des points expérimentaux dans le plan I1-I2. Intuitivement, on pouvait s'attendre à ce que les distributions conduisant à des distributions les plus larges aboutissent aux qualités d'identification les meilleures. On a constaté que cette attente n'était pas vraiment confirmée, mais cette question importante mériterait d'être reprise car les niveaux d'élongation n'étaient pas les mêmes dans les deux configurations comparées, ceci pour des raisons pratiques ;

– d'un point de vue expérimental, le fait de travailler avec des grandes déformations a amélioré la qualité relative des mesures par rapport au cas des petites déformations. En effet, à résolution spatiale donnée, il est plus difficile de mesurer de façon fiable des petites déformations que des grandes avec la plupart des systèmes de mesure de champs disponibles. On a bien observé en pratique des dispersions relativement faibles dès que les élongations moyennes atteignaient quelques pourcents. Les valeurs identifiées présentaient bien les mêmes ordres de grandeurs que celles qui étaient attendues pour le matériau élastomère traité. Par ailleurs, d'un point de vue pratique, la corrélation d'images numériques s'est avérée être un outil particulièrement adapté au cas de figure qui était examiné dans ce travail.

Plusieurs perspectives peuvent être dégagées suite à cette étude. Concernant les lois hyperélastiques, il faudrait reprendre plus en profondeur la question de l'optimisation des champs virtuels et celle du choix de la configuration de l'essai mécanique, ces questions n'ayant été abordées que de façon empirique. D'autres lois mériteraient également d'être examinées. Concernant d'autres matériaux comme les métaux par exemple, il serait intéressant d'introduire le formalisme des grandes déformations en élastoplasticité, les applications de la MCV dans ce cadre ayant toujours été conduites avec l'hypothèse de petites déformations. Au vu de l'expérience acquise dans la cadre de cette étude, ce passage semble parfaitement envisageable.

Bibliographie

[1] G. MARCKMANN : *Contribution à l'étude des élastomeres et des membranes soufflées*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2004.

[2] J.-R. LEE, J. MOLIMARD, A. VAUTRIN et Y. SURREL : Diffraction grating interferometers for mechanical characterisation of advanced fabric laminates. *Optics and Laser Technology*, 38(1):51–66, 2006.

[3] J.R. LEENDERTZ : Interferometric displacement measurement on scattering surfaces utilizing speckle effect. *Journal of Physics E : Scientific Instruments*, 3:214–218, 1970.

[4] J.R. LEENDERTZ et J.N. BUTTERS : An image-shearing speckle-pattern interferometer for measuring bending moments. *Journal of Physics E : Scientific Instruments*, 6:1107–1110, 1973.

[5] R.S. SIROHI : *Speckle methods in experimental mechanics*, chapitre 3 de Speckle metrology. Marcel Dekker Inc, 1993.

[6] M.A. SUTTON, W.J. WOLTERS, W.H. PERTERS, W.F. RANSON et S.R. MCNEILL : Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, 1(3):133–139, 1983.

[7] T.C. CHU, W.F. RANSON, M.A. SUTTON et PERTERS : Application of digital image correlation techniques to experimental mechanics. *Experimental Mechanics*, 3:232–244, 1985.

[8] R. MOULART : *Développement et mise en oeuvre d'une méthode de mesure de champs de déformation à l'échelle micrométrique*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Décembre 2007.

[9] J.-L. PIRO et M. GRÉDIAC : Producing and transferring low-spatial-frequency grids for measuring displacement fields with moiré and grid methods. *Experimental Techniques*, 28(4):23–26, 2004.

[10] Y. SURREL : Moiré and grid methods in optics : a signal-processing approach. *In Proceedings of SPIE*, 1994.

[11] V.J. PARKS : Strain measurement using grids. *Optical Engineering*, 21(4):633–639, 1982.

[12] P.M. BOONE, A.G. VINKIER, R.M. DENYS, W.M. SYS et E.N. DELEU : Application of specimen-grid moiré techniques in large scale steel testing. *Optical Engineering*, 21(44): 615–625, 1982.

[13] Y. SURREL : La techniques de la grille et ses applications. *Instrumentation mesure et métrologie*, 4(3-4):193–216, 2005.

[14] Y. SURREL : Les techniques optiques de mesure de champ : essai de classification. *Instrumentation mesure et métrologie*, 4(3-4):11–42, 2005.

[15] Y. SURREL, N. FOURNIER, M. GRÉDIAC et P.A. PARIS : Phase-stepped deflectometry applied to shape measurement for bend plates. *Experimental Mechanics*, 39(1):66–77, 1998.

[16] Y. SURREL : Deflectometry : a simple and efficient noninterferometric method for slope measurement. *In Proceedings of SEM International Congress*, Costa-Mesa (USA), 2004.

[17] S. AVRIL, M. GRÉDIAC, Y. SURREL et E. TOUSSAINT : Deflectometry and virtual field for identification of static plate bending stiffness. *In Proceedings of SEM International Congress*, Costa-Mesa (USA), 2004.

[18] S. AVRIL, M. BONNET, A.-S. BRETELLE, M. GRÉDIAC, F. HILD, P. IENNY, F. LATOURTE, D. LEMOSSE, S. PAGANO, E. PAGNAGO et F. PIERRON : Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics*, 48:381–402, 2008.

[19] G. MAUVOISIN : *Développement et mise en oevre d'une technique de moiré d'ombre quisi-hérodyne de mesure de relief en vue de la détermination de lois de comportement élastique de matériaux orthotropes*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 1993.

[20] G. SILVA, R. Le RICHE, J. MOLIMARD et A. VAUTRIN : Integrated strategy for identification of plate stiffness components. *In Photomechanics*, Clermont-Ferrand, France, 2006.

[21] L. Le MAGOROU : *Identification de la loi de comportement élastique et viscoélastique depanneaux structuraux à la base de bois*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 2002.

[22] L. Le MAGOROU, F. BOS et F. ROUGER : Identification of constitutive laws for wood-based panels by means of an inverse method. *Composite Science and Technology*, 62(4): 591–596, 2002.

[23] M. MEUWISSEN : *An inverse methode for the mechanical characterization of metals*. Thèse de doctorat, Eindhoven University of Technology, 1998.

[24] M.H.H MEUWISSEN, C.W.J. OOMENS, F.P.T BAAIJENS et R.PETER : Determination of the elasto-plastic properties of aluminium using a mixed numerical-experimental method. *Journal of Materials Processing Technology*, 75(1-3):204–211, 1998.

[25] D. LECOMPTE, H. SOL, J. VANTOMME et A.M. HABRAKEN : Comparision between homogeneous and heterogeneous field information for plastic material identification. *In Photomechanics*, Clermont-Ferrand, France, 2006.

[26] R. MEIJER, L.F.A. DOUVEN et C.W.J. OOMENS : Characerization of anisotropic and non-linear behaviour of human skin in-vivo. *Comput. Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 1:13–27, 1977.

[27] M.R. Van RATINGEN : *Mechanical identification of inhomogeneous solids : a mixed numerical experimental approach*. Thèse de doctorat, Eindhoven University of Technology, 1994.

[28] C.W.J. OOMENS, M.R. Van RATINGEN, J.D. JANSSEN, J.J. KOK et M.A.N HANDRIKS : A numerical-experimental method for a mechanical characterization of biological materials. *Journal of Biomechanics*, 26(4/5):617–621, 1993.

[29] K. GENOVESE, L. LAMBERTI et C. PAPPALETTERE : Mechanical characterisation of hyperelastic materials with fringe projection and optimisation techniques. *Optics and Lasers in Engineering*, 44:423–442, 2006.

[30] M. GITON, A.S. CARO-BRETELLE et P. IENNY : Hyper-elastic behaviour identification by a forward problem resolution : application to a tear test of a silicone-rubber. *Strain*, 42:291–297, 2006.

[31] P. LADEVÈZE et D. LEGUILLON : Error estimates procedure in the finite element method and applications. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 20:485–509, 1983.

[32] M. BONNET et A. CONSTANTINESCU : Inverse problems in elasticity. *Inverse problems*, 21(2):R1–R50, 2005.

[33] M. BONNET, H.D. BUI et A. CONSTANTINESCU : Principes variationnels et exploitation de mesures de champs en élasticité : Variational principles and exploitation of field measurements in elasticity. *Mécanique et Industrie*, 4(6):687–697, 2003.

[34] A. DERAEMAEKER, P. LADEVÈZE et Ph. LECONTE : Reduced basis for model updating in structural dynamics based on constitutive relation error. *Compt. Methods. Appl. Mech. Eng.*, 191:2427–2444, 2002.

[35] P. LADEVÈZE, M. REYNIER et D. Nedjar D. : Parametric correction of finite element models using modal tests. *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, pages 91–100, 1993.

[36] M. REYNIER : *Sur le contrôle de modélisation éléments finis : recalage à partir d'essais dynamiques*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Cuire, Paris, France, 1990.

[37] A. CONSTANTINESCU : On the identification of elastic moduli from displacement-force boundary measurements. *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, 1:293–315, 1995.

[38] G. GEYMONAT, F. HILD et S. PAGANO : Identification of elastic parameters by displacement field measurements. *Comptes Rendus Mécanique*, 330:403–408, 2002.

[39] G. GEYMONAT et S. PAGANO : Identification of mechanical properties by displacement field measurements : a variational approach. *Meccanica*, 38:535–545, 2003.

[40] F. LATOURTE, A. CHRYSOCHOOS, S. PAGANO et B. WATTRISSE : Elastoplastic behavior identification for heterogeneous loadings and materials. *Experimental Mechanics*, 48(4): 435–449, août 2007.

[41] D. CLAIRE, F. HILD et S. ROUX : Identification of damage fields using kinematic measurements. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(11):729–734, 2002.

[42] D. CLAIRE, F. HILD et S. ROUX : A finite formulation to identify damage fields : the equilibrium gab method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 61(2):189–208, 2004.

[43] F. AMIOT, F. HILD et J.P. ROGER : Mesure de champs de déplacements pour des mems. *In CFM 2005 - XVIIe Congrès français de mécanique*, France, 2005.

[44] F. AMIOT, F. HILD et J.P. ROGER : Identification of elastic property and loading fields from full-field displacement measurements. *International Journal of Solids and Structures*, 44(9):2863–2887, 2007.

[45] F. AMIOT, F. HILD et J.P. ROGER : Model and parameter identification using non-contact loading and full-field measurement. *In Proceedings of the SEM Conference on Experimental and Applied Mechanics*, Oregon, USA, 2005.

[46] N. GARRAUD, F. AMIOT, F. HILD et J.P. ROGER : Full-field measurement of microcantiliver displacement induced by molecule adsorption- identification of mechanical parameters. *In Photomechanics*, Clermont-Ferrand, France, 2006.

[47] D. CLAIRE, F. HILD et S. ROUX : Identification conductivités thermiques et de pripriétés élastiques locales par analyse de champs : Identification of thermal conductivities and elastic properties by field analyses. *Mécanique and Industrie*, 4(6):655–665, 2003.

[48] A. Ben ABDA, H. Ben AMEUR et M. JAOUA : Identification of 2D cracks by boundary elastic measurements. *Inverse Problems*, 15:67–77, 1999.

[49] S. ANDRIEUX, A. Ben ABDA et H.D. BUI : Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocité en élasticité. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, Sér. II(324):1431–1438, 1997.

[50] S. ANDRIEUX, A. Ben ABDA et H.D. BUI : Reciprocity principle and crack identification. *Inverse Problems*, 15:59–65, 1999.

[51] H.D. BUI : Sur quelques problème inverses élastiques en mécanique de l'endommagement. *In Deuxième colloque national de calcul des structures*, pages 26–35, Hermès, Lyon, 1995.

[52] M. IKEHATA : Inversion formulas for the linearized problem for an inverse boundary value problem in elastic prospection. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 50:1635–1644, 1990.

[53] M. IKEHATA : An inverse problem for the plate in the Love-Kirchhoff theory. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 53:942–970, 1993.

[54] M. GRÉDIAC : Principe des travaux virtuels et identification. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 309:1–5, 1989.

[55] M. GRÉDIAC, E. TOUSSAINT et F. PIERRON : Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 2- application to in-plane properties. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10):2707–2730, 2002.

[56] M. GRÉDIAC, E. TOUSSAINT et F. PIERRON : Principe de la méthode des champs virtuels avec champs spéciaux : Principle of the virtual fields method with special virtual fields. *Mécanique et Industrie*, 4:679–686, 2003.

[57] M. GRÉDIAC, E. TOUSSAINT et F. PIERRON : Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 1–principle and definition. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10):2691–2705, 2002.

[58] S. AVRIL, M. GRÉDIAC et F. PIERRON : Sensitivity of the virtual fields method to noisy data. *Computational Mechanics*, 34(6):439–452, 2004.

[59] M. Grédiac M. et A. VAUTRIN : A new method for determination of bending rigidities of thin anisotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 57:964–968, déc 1990. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers.

[60] M. GRÉDIAC et P.A. PARIS : Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis : theoretical and numerical aspects. *Journal of Sound and Vibration*, 195(3):401–415, 1996. Academic Press.

[61] M. GRÉDIAC, N. FOURNIER, P.A. PARIS et Y. SURREL : Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis : experiments and results. *Journal of Sound and Vibration*, 210(5):645–659, 1998. Academic Press.

[62] A. GIRAUDEAU, B. GUO et F. PIERRON : Stiffness and damping identification from full-field measurements on vibrating plates. *Experimental Mechanics*, 46(6):777–787, 2006.

[63] M. GRÉDIAC, F. PIERRON et Y. SURREL : Novel procedure for complete in-plane composite characterization using a T-shaped specimen. *Experimental Mechanics*, 39(2):142–149, 1999.

[64] H. CHALAL : *Identification numérique et expérimentale de lois de comportement non-linéaire de matériaux composite à partir de mesures de champs cinématiques*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Centre de Châlons en Champagne, juillet 2005.

[65] M. GRÉDIAC et F. PIERRON : Applying the virtual fields method to the identification of elastro-plastic constitutive parameters. *International Journal of Plasticity*, 22:602–627, 2006.

[66] T. The VINH : *Identification du comportement des matériaux métalliques au delà de leur limite d'élasticité par la méthode des champs virtuels*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Troyes, décembre 2008.

[67] G.A. HOLZAPFEL : *Non-linear solid mechanics : a continuum approach for engineering*. J. Wiley & Sons, 2004.

[68] C. TRUESDELL : *The Elements of Continuum Mechanics*. Springer Verlag, New-York, 1966.

[69] R. W. OGDEN : *Non-Linear Elastic Deformations*. Ellis Horwood, Chichester, 1984.

[70] M. F. BEATTY : Topics in finite elasticity : hyperelasticity of rubber, elastomers, and biological tissues - with examples. *Appl. Mech. Rev.*, 40(12):1699–1734, 1987.

[71] *ANSYS User's guide*, 2008.

[72] L.R.G TRELOAR : The elasticity of a network of long chain molecules (I et II). *Trans. Faraday Soc.*, 39:36–64 et 241–246, 1943.

[73] M. MOONEY : A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physic*, 11:582, 1940.

[74] R. RIVLIN : Large elastic deformations of isotropic material I-IV. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 240:459–490, 1948.

[75] O.H. YEOH : Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates. *Rubber Chemistry and Technology*, 63:792–805, 1990.

[76] L.R.G. TRELOAR : Stress-strain data for vocalnised rubber under various types of deformation. *Trans. Farady. Soc.*, 40:59–70, 1944.

[77] C. G'SELL et A. COUPARD : *Génie Mécanique des caoutchoucs et des élastomères thermoplastiques*. Appolor, Nancy, 1994.

[78] E. TOUSSAINT, M. GRÉDIAC et F. PIERRON : The virtual fields method with piecewise virtual fields. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48(3):256–264, 2006.

[79] L. MULLINS : Effect of stretching on the properties of rubber. *Rubber Chemistry Technology*, 21:281–300, 1948.

[80] L. CHEVALIER, S. CALLOCH, F. HILD et Y. MARCO : Digital image correlation used to analyze the multiaxial behavior of rubber-like materials. *European Journal of Mechanics*, 20(2):169–187, 2001.

[81] F. HILD, B. RAKA, M. BAUDEQUIN, S. ROUX et F. CANTELAUBE : Multi-scale displacement field measurements of compressed mineral wool samples by digital image correlation. *Applied Optics*, 41(32):6815–6828, 2002.

[82] F. HILD : $Correli^{LMT}$: a software for displacement field measurments dy digital image correlation. Internal report 254, LMT-Cachan, 2002.

[83] S. BERGONNIER, F. HILD et S. ROUX : Digital image correlation used for mechanical tests on crimped glass wool samples. *Journal of Strain Analysis*, 40:185–197, 2005.

Résumé

Ce travail est consacré à l'identification de paramètres constitutifs de matériaux élastomères avec la Méthode des Champs Virtuels. Cette méthode est adaptée à l'identification de paramètres constitutifs à partir de mesures de champs, mais elle n'avait été utilisée jusqu'à présent que dans le cas de petites déformations. La principale originalité de ce travail est de l'étendre au cas de l'hyperélasticité, dans le cadre des grandes déformations.
La méthode d'identification est présentée après quelques rappels sur l'hyperélasticité et les grandes déformations. Des simulations numériques permettent ensuite d'illustrer la faisabilité de la procédure avec une attention particulière sur l'influence de données bruitées sur les paramètres identifiés. Des essais sont ensuite réalisés pour deux cas de chargement différents. Les champs de déplacements sont mesurés par corrélation d'images numériques. Les résultats trouvés en termes de paramètres constitutifs sont en bon accord avec les valeurs classiques obtenues généralement pour les matériaux testés.

MOTS-CLES : mesures de champs, hyperélasticité, corrélation d'images, problème inverse, grandes déformations, caractérisation, Méthode des Champs Virtuels

Abstract

This work deals with the identification of constitutive parameters of elastomeric materials using the Virtual Fields Method. This method is suitable for identifying constitutive parameters from heterogeneous strain fields, but it had been used only in the case of small deformations until now. So the main originality of this work is to extend the method to the case of hyperelasticity, within the framework of large deformations.
The identification method is presented after some reminders on large deformations and hyperelasticity. Then, numerical simulations enables us to illustrate the feasibility of the procedure with a special emphasis on the influence of noisy data on identified parameters. Experiments are then carried out in two cases of loading conditions. Displacement fields are measured with a digital correlation programme. Results found in terms of constitutive parameters are in good agreement with usual values of the tested materials.

KEYWORDS : full-field measurements, hyperelasticity, image correlation, inverse problem, large deformations, mechanical characterization, Virtual Fields Method