



**HAL**  
open science

# Mesure des anisotropies de polarisation du fond diffus cosmologique avec l'interféromètre bolométrique QUBIC

Romain Charlassier

► **To cite this version:**

Romain Charlassier. Mesure des anisotropies de polarisation du fond diffus cosmologique avec l'interféromètre bolométrique QUBIC. Cosmologie et astrophysique extra-galactique [astro-ph.CO]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2010. Français. NNT : . tel-00725929

**HAL Id: tel-00725929**

**<https://theses.hal.science/tel-00725929>**

Submitted on 28 Aug 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7  
UFR de PHYSIQUE

THÈSE  
présentée en vue de l'obtention du grade de  
DOCTEUR ES SCIENCES

**ROMAIN CHARLASSIER**

**Mesure des anisotropies de polarisation du fond diffus  
cosmologique avec l'interféromètre bolométrique QUBIC**

sous la direction de Jean-Christophe HAMILTON,  
soutenue le 7 juillet 2010 au Laboratoire AstroParticule et Cosmologie,  
devant la commission d'examen composée de :

Pierre	BINÉTRUY	Examineur
François	BOUCHET	Examineur
Vincent	BRETON	Examineur
Jean-Christophe	HAMILTON	Directeur de thèse
Bruno	MAFFEI	Examineur
James	RICH	Examineur
Daniel	SANTOS	Rapporteur
Peter	TIMBIE	Rapporteur



# Remerciements

Je remercie les membres du jury de cette thèse.

Je remercie Pierre Binétruy de m'avoir accueilli au laboratoire APC et Yannick Giraud-Héraud d'avoir rendu possible ma venue dans son groupe de cosmologie observationnelle.

Je remercie Jean-Christophe Hamilton ; son enthousiasme volontariste, sa bonne humeur gauloise et ses compétences scientifiques en font un directeur de thèse idéal. Je remercie Jean Kaplan ; son sens de la mesure, sa rigueur intellectuelle et sa gentillesse naturelle en font l'incarnation d'une « certaine idée de la science ». Jean-Christophe et Jean, ce fut un honneur et un plaisir de travailler avec vous. Je remercie également Michel Piat, Eric Bréelle, Damien Prêle, Cyrille Rosset, Adnan Ghribi et Joseph Martino, membres du groupe QUBIC de l'APC. C'est au cours des discussions que nous avons eues tous ensemble qu'ont émergé nombre des idées qui traversent cette thèse. Je remercie enfin l'ensemble des membres de QUBIC avec lesquels j'ai eu le plaisir de collaborer, et plus particulièrement Ted Bunn, Greg Tucker, Peter Timbie, Siddharth Malu et Andrea Tartari.

Je remercie les doctorants du groupe à qui cette thèse doit bien plus qu'ils ne l'imaginent ; merci à Sébastien (le plus gentil), Clément (le plus gaulliste), Florian (le plus moodyien), Gaël (le plus rusé), Marianna, Silvia, Guillaume, George, Joseph et Marie-Anne (puisse ce manuscrit être utile à tous deux).

Je remercie mes amis, cigales ou fourmis, d'ici ou d'ailleurs ; merci à Simon, Elodie, Nicolas, Pierre, Ingeborg, Lucas, Guillaume, Lucile, Thibaud, et bien sûr merci à John et ses amis, Ray, Robert, Honoré, Fiodor et Marcel !

Je remercie mon père, ma mère, mon frère, ma soeur, ma grand-mère, mes grand-parents, mon beau-frère, Charlotte et Jules, ainsi que l'ensemble de ma famille. Puisque l'occasion m'est donnée ici d'outrepasser une certaine pudeur bordelaise, qu'ils sachent que j'ai, pour chacun d'eux, la plus grande des affections.

Je dédie cette thèse à Fanny, qui rend la vie plus belle.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 Une brève histoire de la cosmologie scientifique</b>	<b>15</b>
1.1 De Platon à Einstein . . . . .	15
1.1.1 Les premières cosmologies scientifiques . . . . .	15
1.1.2 Le « modèle » héliocentrique . . . . .	17
1.1.3 Le mystère des nébuleuses . . . . .	17
1.1.4 Cosmologie newtonienne au XIX <sup>e</sup> siècle . . . . .	18
1.1.5 La relativité générale . . . . .	19
1.2 L'homme du Big Bang . . . . .	20
1.3 Découverte du Fond Diffus Cosmologique . . . . .	21
1.3.1 Nucléosynthèse primordiale . . . . .	21
1.3.2 Penzias et Wilson . . . . .	22
1.4 Emergence du modèle standard . . . . .	22
1.4.1 Premiers soupçons de matière noire . . . . .	23
1.4.2 Le temps des grandes échelles . . . . .	24
1.4.3 Nucléosynthèse primordiale . . . . .	25
1.4.4 Les supernovae . . . . .	25
1.4.5 Anisotropies de température et de polarisation du CMB . . . . .	26
1.5 Perspective . . . . .	27
<b>2 Le modèle <math>\Lambda</math>CDM confronté aux observations en 2010</b>	<b>29</b>
2.1 Concordance des observations . . . . .	30
2.2 Matière noire et théories modifiées de la gravitation . . . . .	34
2.3 Accélération de l'expansion et remise en cause du Principe Cosmologique . . . . .	36
2.4 Anomalies du CMB . . . . .	40
2.4.1 Méthodologie statistique et science expérimentale . . . . .	40
2.4.2 Non-gaussianités . . . . .	42
2.5 Futur proche de la cosmologie observationnelle . . . . .	43
<b>3 Le Fond Diffus Cosmologique et sa polarisation</b>	<b>47</b>

3.1	Le plasma primordial . . . . .	47
3.2	Anisotropies de température . . . . .	49
3.2.1	Le spectre de puissance angulaire des fluctuations . . . . .	49
3.2.2	Anisotropies primaires . . . . .	51
3.2.3	Anisotropies secondaires . . . . .	54
3.2.4	Avants-plans . . . . .	55
3.2.5	Contraintes sur les paramètres cosmologiques . . . . .	57
3.2.6	Contexte expérimental . . . . .	59
3.3	Anisotropies de polarisation . . . . .	60
3.3.1	Les paramètres de Stokes . . . . .	60
3.3.2	Génération de polarisation par anisotropie quadrupolaire . . . . .	61
3.3.3	Les champs $E$ et $B$ . . . . .	63
3.3.4	Origine de la polarisation du fond diffus cosmologique . . . . .	64
3.3.5	Contraintes cosmologiques . . . . .	66
3.3.6	Contexte expérimental . . . . .	68
3.4	Inflation et modes $B$ de polarisation . . . . .	69
3.4.1	Limitations du modèle standard sans inflation . . . . .	69
3.4.2	Une brève histoire de l'inflation . . . . .	71
3.4.3	Contraintes observationnelles sur $r$ en 2010 . . . . .	75
3.4.4	La course expérimentale aux modes $B$ . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Vers l'interférométrie bolométrique</b>	<b>81</b>
4.1	Interférométrie et astronomie . . . . .	81
4.1.1	Interférométrie optique . . . . .	81
4.1.2	Interférométrie et radio-astronomie . . . . .	83
4.2	Interférométrie hétérodyne dédiée au fond diffus cosmologique . . . . .	84
4.2.1	Historique . . . . .	84
4.2.2	Intérêt de l'interférométrie dédiée à la mesure CMB . . . . .	85
4.2.3	Principe théorique . . . . .	86
4.2.4	Concept instrumental . . . . .	89
4.3	Naissance de l'interférométrie bolométrique . . . . .	91
4.3.1	Historique . . . . .	91
4.3.2	Concept instrumental . . . . .	92
4.4	La collaboration QUBIC . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Sommation cohérente des lignes de base équivalentes et reconstruction des visibilités</b>	<b>97</b>
5.1	Formalisme théorique . . . . .	98
5.1.1	Cornets . . . . .	98
5.1.2	Lignes de base équivalentes/redondantes . . . . .	99
5.1.3	Séparation des polarisations transverses . . . . .	101

5.1.4	Déphaseurs contrôlés . . . . .	101
5.1.5	Combineur de faisceaux . . . . .	102
5.1.6	Puissance mesurée par un détecteur . . . . .	104
5.2	Reconstruction des visibilitées . . . . .	105
5.2.1	Problème linéaire . . . . .	105
5.2.2	Reconstruction simultanée ou indépendante sur les détecteurs . . . . .	106
5.2.3	Inversion naïve du problème . . . . .	107
5.2.4	Bruit d'un détecteur . . . . .	108
5.2.5	Matrice de covariance de l'estimateur . . . . .	108
5.3	La sommation cohérente des lignes de base équivalentes . . . . .	109
5.3.1	Matrice de covariance du nouvel estimateur . . . . .	110
5.4	Séquences de phases et fréquences de rotation respectant la sommation cohérente des lignes de base équivalentes . . . . .	112
5.4.1	Différences de phases (cas non polarisé) . . . . .	112
5.4.2	Séparation des polarisations . . . . .	113
5.4.3	Modulations temporelle et fréquentielle . . . . .	114
5.4.4	Déphasages géométriques . . . . .	115
5.5	Etude numérique . . . . .	115
5.5.1	Description de la simulation . . . . .	115
5.5.2	Evolution de la sensibilité en fonction du nombre de ligne de base équivalentes . . . . .	116
5.5.3	Evolution de la sensibilité en fonction de la longueur des séquences et du nombre de valeurs discrètes de phases . . . . .	116
5.6	Contraintes instrumentales sur les déphaseurs . . . . .	117
5.6.1	Modulation temporelle . . . . .	117
5.6.2	Modulation fréquentielle . . . . .	118
5.7	Conclusion . . . . .	118
<b>6</b>	<b>Le problème de la largeur de bande</b>	<b>121</b>
6.1	Visibilités large bande et effets de lissage . . . . .	122
6.1.1	Visibilités monochromatiques . . . . .	122
6.1.2	Visibilités large bande . . . . .	122
6.1.3	Forme analytique approchée du noyau de convolution . . . . .	124
6.1.4	Visibilités large bande en unité de température . . . . .	126
6.1.5	Un calcul plus correct du noyau de convolution . . . . .	127
6.2	L'interféromètre bolométrique large bande . . . . .	128
6.2.1	Puissances mesurées par les bolomètres large bande . . . . .	128
6.2.2	Déphasages sans dépendance spectrale . . . . .	129
6.2.3	Déphasages avec dépendance spectrale linéaire . . . . .	130
6.3	La division en sous bandes virtuelles . . . . .	131

6.3.1	Principe . . . . .	131
6.3.2	Perte de rapport signal à bruit . . . . .	132
6.3.3	Une piste pour la résolution du problème des déphasages à dépendance spectrale . . . . .	133
6.4	Dégradation de la sensibilité pour une expérience CMB . . . . .	133
6.4.1	Généralisation de l'estimateur de pseudo-spectre . . . . .	134
6.4.2	Inefficacité de la méthode de reconstruction en sous-bandes virtuelles . . . . .	135
6.5	Simulation numérique . . . . .	136
6.5.1	Architecture de la simulation . . . . .	136
6.5.2	Test de l'estimateur large bande . . . . .	138
6.5.3	Effet lié à la dépendance spectrale des déphasages . . . . .	138
6.6	Conclusion . . . . .	138
<b>7</b>	<b>Deux nouvelles architectures utilisant les phases géométriques</b>	<b>141</b>
7.1	Description . . . . .	141
7.1.1	Architecture alternative avec lame demi-onde rotative . . . . .	141
7.1.2	Architecture alternative avec pseudo-corrélateur . . . . .	142
7.2	Signal mesuré par les détecteurs . . . . .	142
7.3	Reconstruction des visibilitées . . . . .	145
7.4	Comparaison des architectures . . . . .	145
7.5	Vers une meilleure compréhension de l'interférométrie bolométrique . . . . .	146
<b>8</b>	<b>Sensibilité d'un interféromètre bolométrique dédié à l'observation du CMB</b>	<b>147</b>
8.1	Définition d'un estimateur du spectre de puissance à partir du jeu de visibilitées . . . . .	148
8.1.1	Couverture du plan-uv . . . . .	148
8.1.2	Effets de largeur de bande . . . . .	149
8.1.3	Des visibilitées de Stokes aux modes E et B . . . . .	149
8.1.4	Un estimateur de pseudo-spectre non-biaisé et sa variance . . . . .	150
8.2	Comparaison des sensibilités en imagerie, interférométries hétérodyne et bolométrique . . . . .	151
8.2.1	Puissance et température équivalentes de bruit (NEP et NET) . . . . .	152
8.2.2	Mesure d'un paramètre de Stokes . . . . .	153
8.2.3	Mesure simultanée de $Q$ et $U$ . . . . .	156
8.2.4	Filtre dans l'espace des $C_\ell$ . . . . .	157
8.2.5	Effets de largeur de bande . . . . .	158
8.2.6	Uniformité du bruit sur la carte . . . . .	158
8.2.7	Détecteurs . . . . .	159
8.3	Conséquences pour QUBIC . . . . .	160
<b>9</b>	<b>Estimation des spectres de puissance à partir des visibilitées</b>	<b>161</b>
9.1	Méthodes de maximum de vraisemblance . . . . .	162

9.1.1	Position du problème . . . . .	162
9.1.2	Maximisation de la vraisemblance . . . . .	162
9.2	Calcul des fonctions fenêtres . . . . .	164
9.2.1	Matrice de covariance des visibilitées dans l'approximation de ciel plat . . . . .	164
9.2.2	Expressions analytiques des fonctions fenêtres . . . . .	164
9.2.3	Intégration numérique . . . . .	165
9.2.4	Lobe primaire gaussien et intégration semi-analytique . . . . .	166
9.2.5	Au-delà de l'approximation de ciel plat... . . . .	168
9.3	Erreurs obtenues sur les spectres de puissance . . . . .	169
<b>10</b>	<b>Auto-calibration grâce aux lignes de base redondantes et contrôle des effets systématiques</b>	<b>173</b>
10.1	Les procédures d'auto-calibration en interférométrie . . . . .	174
10.1.1	Termes de clotûre et synthèse d'image hybride . . . . .	174
10.1.2	Utilisation de la redondance . . . . .	176
10.1.3	L'omniscopie . . . . .	176
10.2	Auto-calibration en interférométrie bolométrique . . . . .	177
10.2.1	Matrice de Jones . . . . .	177
10.2.2	Principe expérimental . . . . .	177
10.2.3	Sur-détermination du problème . . . . .	179
10.2.4	Radio-interférométrie traditionnelle et omniscopie . . . . .	179
10.2.5	Matrice de Muller pour un interféromètre sensible à la polarisation . . . . .	180
10.3	Résolution numérique . . . . .	180
10.4	Prise en compte des erreurs induites par le combineur . . . . .	181
10.5	Discussion . . . . .	183
<b>11</b>	<b>Participation à l'analyse de données MBI-4</b>	<b>185</b>
11.1	Le prototype MBI-4 . . . . .	185
11.2	Analyse de la campagne de données 2009 . . . . .	185
11.3	Simulation de l'instrument . . . . .	187
11.4	Limite de l'analyse . . . . .	188
<b>12</b>	<b>Contraintes instrumentales pour QUBIC</b>	<b>191</b>
12.1	Conséquences de notre étude au regard des possibilités technologiques . . . . .	192
12.1.1	Architecture générale . . . . .	192
12.1.2	Distribution des cornets . . . . .	192
12.1.3	Largeur de bande . . . . .	192
12.1.4	Interrupteurs polarisés . . . . .	192
12.1.5	Lame demi-onde en rotation . . . . .	192
12.1.6	Combineur optique . . . . .	193
12.1.7	Détecteurs au plan focal . . . . .	193

12.2	Optimisation de l'instrument . . . . .	193
12.2.1	Nombre de cornets et fenêtre du cryostat . . . . .	194
12.2.2	Distance focale et taille des bolomètres . . . . .	195
12.2.3	Nombre de bolomètres . . . . .	196
12.2.4	Résultat . . . . .	197
12.3	Récapitulatif . . . . .	197
<b>13</b>	<b>Epilogue : vers une interférométrie sans visibilités ?</b>	<b>199</b>
13.1	Un « imageur synthétique » . . . . .	199
13.1.1	Observation de champs fixes et estimation des spectres sans reconstruction des visibilités . . . . .	200
13.1.2	Balayage altazimuthal du ciel . . . . .	201
13.2	Equivalence des descriptions . . . . .	201
13.3	Intérêt de la nouvelle approche . . . . .	203
	<b>Conclusion</b>	<b>205</b>
<b>A</b>	<b>Publications</b>	<b>207</b>
	<b>Article :</b> <i>An efficient phase-shifting scheme for bolometric additive interferometry</i> . . .	207
	<b>Article :</b> <i>Sensitivity of a bolometric interferometer to the CMB power spectrum</i> . . . . .	217
	<b>Article :</b> <i>Bandwidth in bolometric interferometry</i> . . . . .	222
	<b>Bibliographie</b>	<b>235</b>

# Introduction

Je voudrais, en ouverture de cette thèse, mentionner un fait qui, s'il semblera anecdotique à certains, cristallise une grande partie de l'émerveillement que j'éprouve vis à vis de la cosmologie scientifique. On entend souvent raconter la pittoresque histoire de la découverte fortuite du fond diffus cosmologique, mais on insiste plus rarement sur le fait si incroyable que les formes des spectres de puissance des anisotropies ont été prédites à la fin des années 1980, dans le cadre du modèle standard de la cosmologie ( $\Lambda$ CDM à l'époque), plusieurs années avant la première détection des anisotropies par le satellite COBE ; on se référera à la figure 3.4 pour s'en convaincre. Ces courbes si particulières – sûrement les plus belles de la physique –, signatures du fossile de l'univers primordial, qui résultent d'une combinaison de processus dont la description nécessite le recours à la physique des particules, à la physique des plasmas relativistes, à la relativité générale – en bref à l'ensemble de la physique contemporaine –, n'ont pas été théoriquement expliquées *a posteriori* mais bien prédites *a priori* de leur mesure expérimentale.

Au cours de ces trois années, j'ai eu la chance de pouvoir partager mon enthousiasme pour la cosmologie avec les doctorants et chercheurs du groupe Cosmologie & Gravitation de l'APC. Les nombreuses discussions que nous avons eues, notamment lors du rituel presque quotidien du *café preprint*, m'ont permis d'approfondir grandement ma compréhension de la cosmologie contemporaine ; j'en ressors en particulier avec une confiance accrue dans le paradigme du modèle standard, pour des raisons que j'ai détaillées dans les chapitres 1 et 2.

J'ai essayé de donner au chapitre 3 une introduction qualitative à la science des anisotropies du fond diffus cosmologique. Comme nous le verrons, un important effort expérimental est en cours au sein de la communauté des cosmologistes en vue de la détection des modes B primordiaux de polarisation du fond diffus. Leur détection et leur mesure nous offriraient des renseignements extrêmement précieux sur l'inflation, cette phase d'expansion accélérée qui aurait eu lieu aux tous premiers instants de l'Univers.

C'est donc dans le cadre d'une forte compétition internationale que s'inscrit le projet QUBIC. Cette expérience se base sur le concept novateur d'interférométrie bolométrique imaginé par Peter Timbie et Lucio Piccirillo il y a une dizaine d'années. Les passerelles conceptuelles et les divergences entre interférométrie optique, interférométrie hétérodyne et interférométrie bolométrique, que j'ai dégagées au chapitre 4, offrent une mise en perspective instructive de cette technologie.

Des deux côtés de l'Atlantique, deux projets similaires dénommés BRAIN et MBI ont éclos il y

a quelques années. J'ai rejoint en 2008 l'équipe BRAIN du groupe Cosmologie & Gravitation de l'APC ; des campagnes de test du site et des recherches instrumentales (notamment la démonstration du concept d'interférométrie bolométrique) étaient déjà en cours, des ébauches d'études sur les concepts généraux et l'architecture de l'instrument avaient été menées. C'est, je le crois, une grande chance d'avoir pu travailler au sein d'une équipe si complémentaire d'instrumentalistes, d'ingénieurs, de spécialistes de l'analyse de données, et de théoricien(s). Je voudrais ici citer leurs noms : Jean-Christophe Hamilton, Jean Kaplan, Michel Piat, Damien Prêle, Eric Bréelle, Yannick Giraud-Héraud, Cyrille Rosset, Andrea Tartari, Adnan Ghribi, Joseph Martino. Je ferai, dans la suite de cette introduction, un usage de la première personne du pluriel pour signifier que les travaux décrits sont issus d'une réflexion collective (le lecteur trouvera en tête des chapitres la liste des collaborateurs ayant plus spécifiquement participé à chaque étude).

Ma première tâche fut de développer un mécanisme d'extraction des observables intéressantes à partir des données ordonnées en temps des détecteurs ; nous verrons en effet – et c'est là une spécificité du concept – que les observables de base de l'interférométrie ne sont pas mesurées directement par un interféromètre bolométrique, mais qu'elles peuvent être obtenues par résolution d'un problème linéaire impliquant les mesures des détecteurs et une matrice de modulation. C'est au cours de cette phase qu'a émergé le concept crucial de "sommation cohérente des lignes de base équivalentes" ; nous avons ainsi montré dans l'article [1] (reproduit en annexe), que les lignes de base équivalentes devaient être modulées identiquement et que les visibilitées devaient être "reconstruites" d'une certaine manière, afin de garantir une sensibilité compétitive à l'instrument (chapitre 5). Nous verrons par ailleurs au chapitre 9 comment les spectres de puissance des anisotropies de température ou de polarisation du fond diffus peuvent être estimés, à partir du jeu de visibilitées reconstruites, à l'aide de méthodes standards de maximisation de vraisemblance.

Parallèlement à ces études, nous avons cherché à déterminer comment la sensibilité d'un interféromètre bolométrique se comparait à celles d'un imageur ou d'un interféromètre hétérodyne de même complexité instrumentale (chapitre 8). Nous ne nous doutions pas alors de la difficulté d'une telle tâche, et des émotions qu'elle allait nous procurer. Nous avons obtenu dans l'article [2] (reproduit en annexe), une formule analytique – équivalente à celle de Knox pour les imageurs – donnant la sensibilité d'un interféromètre bolométrique aux spectres de puissance des anisotropies du fond diffus en fonction des paramètres instrumentaux (nombre, distribution et lobes des récepteurs, fraction du ciel observé, temps d'intégration, etc.). Si les résultats obtenus à l'époque étaient qualitativement corrects, de nombreuses subtilités – en particulier concernant le fonctionnement des interféromètres hétérodynes – nous avaient alors échappé. Leur découverte progressive a résulté en un grand nombre de phases d'oscillations plus ou moins rapides durant lesquelles nous étions soit désespérés, soit enchantés par la sensibilité théorique de notre instrument ; nous avons finalement acquis la conviction – étayée – que l'interférométrie bolométrique est bel et bien une technique compétitive pour la quête des modes B.

Les expériences BRAIN et MBI ont fusionné à l'occasion du *workshop* sur l'interférométrie bolométrique organisé par Jean-Christophe Hamilton en juin 2008. Chacun, conscient de l'ampleur de la tâche et de la forte compétition internationale dans la course aux modes B, avait compris que seule une mise en commun des forces des deux expériences nous permettrait d'espérer des résultats scientifiques intéressants dans les prochaines années. Le nouveau projet QUBIC s'est organisé en groupes d'étude et j'ai ainsi eu l'occasion de travailler avec un plus grand nombre de collaborateurs – je pense en particulier à Ted Bunn, Greg Tucker, Peter Timbie et Siddharth Malu.

Je me suis à cette époque intéressé au problème de la largeur de bande spectrale (chapitre 6), après avoir pris conscience que nous avons implicitement fait l'hypothèse d'un instrument opérant en bande mince dans nos précédentes études. J'ai en particulier déterminé quantitativement, dans l'article [3] (reproduit en annexe), la dégradation de sensibilité due à l'effet de lissage pour un instrument large bande ; celle-ci pourrait sembler étonnamment raisonnable à un spécialiste d'interférométrie radio.

J'ai par ailleurs eu alors la chance de participer à l'analyse de la dernière campagne de données du prototype réalisé par nos collaborateurs de MBI ; les résultats obtenus démontrent clairement la validité du concept d'interférométrie bolométrique avec combineur de faisceaux (chapitre 11).

Les activités de R&D instrumentale se poursuivant au sein de la collaboration, un point noir s'est rapidement dessiné dans le cadre de l'architecture standard alors envisagée : la réalisation des déphaseurs contrôlés sur lesquels nous avons mis des contraintes si fortes par nos précédents travaux (chapitre 5) allait s'avérer extrêmement délicate. C'est dans ce contexte – et dans celui d'une oscillation négative de nos estimations de sensibilité – que j'ai commencé à réfléchir aux possibilités d'une architecture alternative. Après discussions avec les membres du groupe d'étude de l'APC, deux nouveaux concepts ont finalement émergé dans lesquels nous avons remplacé les déphaseurs contrôlés par une lame demi-onde en rotation ou des pseudo-corrélateurs (chapitre 7). La première de ces alternatives est aujourd'hui considérée comme l'architecture standard de l'instrument QUBIC.

Durant ma dernière année de thèse, j'ai également cherché à déterminer si les concepts intéressants que nous avons développés – je pense en particulier à celui de "sommation cohérente des lignes de base équivalentes" – pouvaient trouver application dans d'autres domaines. Alors que je présentais une application algorithmique, je me suis rendu compte qu'un concept d'interféromètre totalement numérique proposé en 2009 par Tegmark et Zaldarriaga [207, 208] était une sorte d'équivalent numérique à l'interféromètre bolométrique ; leur concept nommé "omniscopes" est particulièrement prometteur en ce que son coût computationnel est en  $N \log N$  quand celui des interféromètres radios numériques standards est en  $N^2$  (leur algorithme tire parti des nombreuses lignes de base redondantes de leur distribution d'antennes !). Ce parallèle m'a amené à m'intéresser aux méthodes d'auto-calibration en interférométrie radio. J'ai alors pris conscience que le haut degré de redondance dans la distribution de cornets d'un interféromètre bolométrique – imposé par les contraintes de sensibilité mises à jour aux chapitres 5 et 8 – rendait possible de puissantes procédures d'auto-calibration ; la méthode proposée au chapitre 10, en ce qu'elle permettrait un contrôle sans équivalent des effets systématiques instrumentaux, pourrait je le crois devenir un argument majeur en faveur de l'interférométrie bolométrique ; ce travail devrait faire l'objet d'une future publication.

Une ultime percée conceptuelle a été réalisée alors que la rédaction de ce manuscrit était pratiquement achevée ; l'idée peut sembler assez "révolutionnaire" : il s'agirait d'éviter l'étape de reconstruction des visibilitées et d'estimer directement les spectres de puissance à partir des images synthétiques mesurées au plan focal du combineur. Nous verrons brièvement au chapitre 13 que, si cela ne modifie ni la validité de ce qui est présenté dans cette thèse, ni l'architecture de l'instrument, cela augmenterait les potentialités de celui-ci et résoudrait les derniers problèmes que nous nous posons en terme d'analyse des données !

Il me semble ainsi que des avancées significatives ont été réalisées concernant la compréhension du concept d'interférométrie bolométrique. Au fil de l'évolution de nos travaux, la collaboration QUBIC a été amenée à explorer de nombreuses pistes technologiques pour chacun des composants de l'instrument ; certains choix se sont progressivement imposés, et l'architecture actuelle décrite au chapitre 12 s'est peu à peu esquissée. Nous reviendrons en conclusion de cette thèse sur le travail conceptuel qui reste à accomplir.

Puisse ce manuscrit être utile aux doctorants ou chercheurs qui s'engageraient sur les voies tant sinueuses que prometteuses de l'interférométrie bolométrique !

Paris – Berson, mai 2010

# Chapitre 1

## Une brève histoire de la cosmologie scientifique

---

Il existe finalement peu d'ouvrages d'histoire de la cosmologie scientifique ; [13], [14] et [15] sont tout de même très recommandables. Ce chapitre introductif n'a bien évidemment pas vocation à se substituer à ce qui pourrait faire l'objet d'une thèse à part entière ; nous souhaiterions plutôt, au long de cette brève histoire de la cosmologie scientifique, mettre en avant des points qui nous semblent particulièrement intéressants, notamment d'un point de vue épistémologique ou sociologique.

---

### 1.1 De Platon à Einstein

Nombreux sont les cosmologistes qui aiment à considérer la publication de la relativité générale en 1915 et la découverte du décalage vers le rouge des spectres des galaxies par Hubble en 1929 comme les actes de naissance, théorique et observationnel, de la cosmologie scientifique. Si ces dates marquent sans conteste l'avènement de la cosmologie moderne, il serait réducteur de considérer la période qui précède comme une ère préscientifique, où les arguments cosmologiques auraient uniquement pris la forme de vaines spéculations métaphysiques. Si la remise en cause de la géométrie euclidienne comme description physique du monde et la découverte du caractère non immuable de l'univers constituent deux gigantesques sauts épistémologiques, de nombreuses questions cosmologiques furent formulées avant le XX<sup>e</sup> siècle, de manière scientifique.

#### 1.1.1 Les premières cosmologies scientifiques

La question de la distinction entre cosmologies religieuses et scientifiques dépasse évidemment le cadre de ce chapitre introductif. Nous nous bornerons à déclarer comme scientifique, un système cosmologique qui se voudrait issu d'une démarche hypothético-déductive, mêlant empirisme et

rationalisme, plutôt qu'un système "révélé" (par le biais d'un processus transcendant), imposé comme dogmatique et ne se prêtant ainsi pas à une quelconque réfutation expérimentale<sup>1</sup>.

Il est communément admis par les historiens de la philosophie, sur ce genre de base même, que le *Timée* de Platon représente la première tentative de cosmologie scientifique. Si l'ouvrage passe en revue l'ensemble des sciences et techniques de l'époque, un survol sommaire du texte laissera sans doute perplexe le lecteur contemporain quant à son caractère scientifique : c'est que Platon, comme à son habitude y a recours au mythe comme explication heuristique des phénomènes (autrement dit, déclarant que comme le poète, le philosophe est dans l'incapacité d'accéder au Vrai en ce qui concerne les choses du Cosmos, il propose une explication seulement vraisemblable permettant néanmoins l'appréhension des phénomènes sensibles). L'importance du *Timée* réside ainsi surtout dans la déclaration d'intention qui y est faite : Platon décrit explicitement ce qui sera appelé plus tard la démarche expérimentale (ou encore la méthode hypothético-déductive), consistant à poser *a priori* une liste d'axiomes, puis à vérifier, en se fondant sur des règles d'inférence (la logique), si les propositions déduites (les théorèmes) présentent une correspondance convenable avec les observations<sup>2</sup>. Dans le *Timée*, les axiomes sont en fait posés *a posteriori* par Platon qui, à la suite de l'exposé de son système cosmologique, "oubliera" d'y adjoindre les observations (il n'est précisément fait mention que de trois expériences, une expérience de pensée relative à la pesanteur du feu, une expérience réelle relative à la formation des odeurs et une autre relative au rôle des fibres dans le sang). Deux raisons majeures peuvent expliquer cet "oubli" : l'état des sciences physiques de l'époque bien sûr, mais surtout la méfiance bien connue de Platon pour les "apparences sensibles"<sup>3</sup>.

Aristote, l'élève "empiriste" rebelle, fut le premier à proposer une conception de l'Univers en rupture avec le mythe et se voulant en accord avec les observations de l'époque. Dans l'univers géocentrique du stagirite, huit sphères concentriques tournent à des distances fixes autour de la Terre. Chaque sphère contient un astre : la Lune pour la plus proche, puis, dans l'ordre d'éloignement, le Soleil, Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne, la dernière sphère contenant les étoiles fixes. Tout ceci est immuable et existe depuis toujours. Au II<sup>e</sup> siècle, Ptolémée introduisit dans le monde des sphères un système ingénieux de combinaisons de mouvements circulaires, les épicycles, rendant compte des observations de rétrogradation des planètes. A l'apogée du système ptolémien, qui perdura jusqu'à la renaissance occidentale, la dernière sphère contenait 1022 étoiles fixes cataloguées dans 48 constellations.

<sup>1</sup>On entrevoit aisément les limites de ce genre d'assertion, dont l'anachronisme des concepts utilisés (empirisme, rationalisme, falsificationnisme) masque mal une forêt de problèmes épistémologiques ; le cas du "mythe", discours synthétique tentant d'expliquer et de prédire les phénomènes (i.e. les "observations") par un système cohérent et réduit de concepts, est éclairant (si l'on peut dire...) de ce point de vue.

<sup>2</sup>On sait les critiques que la philosophie des sciences du XX<sup>e</sup> siècle formulera à l'égard de cette vision naïve de la démarche scientifique ! Ces deux dogmes de l'empirisme postulant l'existence de jugements kantien *a priori* et analytique (la logique) ainsi que celle de faits neutres (les observations libres de toute interprétation) seront sévèrement critiqués. Quine notamment, proposera de naturaliser la logique (celle-ci se formerait *a posteriori* au cours d'une expérience structuraliste), et de remplacer la chimère des "énoncés observationnels irréductibles" de Carnap par un holisme salvateur.

<sup>3</sup>Toute la théorie des Idées/Formes platonicienne a originellement été introduite *contre* les "empiristes" pré-socratiques, et en vue d'atteindre une Vérité immuable et non soumise à la mesure de l'homme, pour paraphraser l'expression des sophistes prônant le relativisme du savoir et selon lesquels "l'homme est la mesure de toute chose".

### 1.1.2 Le « modèle » héliocentrique

Copernic proposa au XVI<sup>e</sup> siècle son fameux système héliocentrique afin de donner une explication simplifiée au mouvement des astres. Notons qu'un tel système avait déjà été proposé par Aristarque de Samos au III<sup>e</sup> siècle avant J.C. ; ces travaux, connus à travers la critique qu'Archimède en a fait, ont pu influencer Copernic.

Cette première révolution copernicienne, fut rapidement suivit d'une seconde (étayée il est vrai, par moins de preuves observationnelles) grâce au travaux de Giordano Bruno. Ils décrivent un univers au caractère infini, éternel et homogène à grande échelle (notons au passage qu'il s'agit de la première formulation du Principe Cosmologique), dans lequel le Soleil est une étoile comme une autre. Les étoiles, qui possèdent chacune leur propre cortège planétaire, ne sont plus à une distance fixe de la Terre mais distribuées selon une répartition tridimensionnelle. Tous ces astres circulent dans un fluide, "l'éther", qui n'oppose pas de résistance à leurs mouvements.

L'énonciation par Isaac Newton de sa théorie de la gravitation universelle en 1687 est souvent considérée comme l'acte fondateur de la physique moderne. Nous voudrions défendre ici le parallèle historique selon lequel la théorie newtonienne est au modèle héliocentrique ce que la relativité générale est au modèle standard du Big Bang. Les deux "théories" mettent à jour un cadre universel – reliant le monde qui nous entoure et l'infiniment grand – alors que les deux "modèles" décrivent seulement le comportement particulier des cieux ; mais dans les deux cas, théorie et modèle se soutiennent l'une l'autre et affrontent ensemble le tribunal de l'expérience.

Nous donnons ici la liste synthétique des observations en faveur du modèle héliocentrique qu'aurait pu dresser un physicien du XVIII<sup>e</sup> siècle, dans l'esprit de celle que nous donnons au chapitre 2 pour le modèle standard du Big Bang :

1. A l'aide de la lunette astronomique qu'il mit au point, Galilée effectua une série d'observations en faveur du modèle héliocentrique. La première fut la découverte des lunes de Jupiter en 1609 : celle-ci rendait crédible la thèse héliocentriste contestée selon laquelle la Lune suivait la Terre dans sa révolution.
2. Galilée observa par la suite les variations de taille de Mars et Vénus, ainsi que les différentes phases de Vénus : ces phénomènes avaient été spécifiquement prédits par Copernic.
3. Les lois de Kepler furent énoncées en 1609 pour les deux premières, et en 1616 pour la troisième ; elles permettent de décrire complètement les mouvements des planètes sans recourir aux épicycles, et découlent naturellement de la théorie newtonienne ; rajoutons que cette dernière explique en particulier pourquoi c'est le Soleil, plus massif, et non la Terre, qui doit se tenir presque immobile au centre du système.
4. Le phénomène d'aberration des étoiles fut mis en évidence par James Bradley dans une publication de 1727 ; il s'explique naturellement par la vitesse de rotation de la Terre. La première mesure de parallaxe d'une étoile, principale prédiction du modèle copernicien, ne sera cependant effectuée qu'en 1838 par Bessel.

### 1.1.3 Le mystère des nébuleuses

Ce sont les observations astronomiques et la question des mystérieuses nébuleuses qui vont progressivement étendre le champ des théories cosmologiques, qui se limitaient au début du XVIII<sup>e</sup> siècle à la description du système solaire.

Le mathématicien et astronome britannique Thomas Wright publia en 1750 un ouvrage intitulé "An original theory", dans lequel il décrivait la Voie Lactée, comme un ensemble d'étoiles coplanaires toujours plus distantes qui résultent pour l'observateur terrestre en cette barre lumineuse barrant le ciel. Kant formula à la même époque, indépendamment, et de manière moins obscure, les théories de Wright, dans son ouvrage de jeunesse, "Histoire Générale de la Nature et Théorie de l'Univers". Il y décrit les nébuleuses, ces taches diffuses recensées dans les catalogues astronomiques de l'époque comme des « univers-îles », semblables à notre Voie Lactée. On voit qu'il s'agit là d'une troisième révolution copernicienne, puisque que l'idée de Kant suggère que même la Voie Lactée – notre univers-île – n'occupe pas de position privilégiée dans l'Univers.

William Herschel favorable à l'idée de Kant, entreprit à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle un balayage systématique du ciel, catalogua les nébuleuses et tenta de les résoudre une à une, en construisant des télescopes toujours plus imposants (il découvrit au passage une nouvelle planète, Uranus). L'impossibilité d'en résoudre certaines offrit un argument de poids aux partisans de la théorie adverse selon laquelle les nébuleuses n'étaient pas des objets extra-galactiques mais de simples nuages de gaz (ce que sont bien sûr effectivement ce que nous appelons aujourd'hui les nébuleuses diffuses ou planétaires).

Il fallut attendre le début du XX<sup>e</sup> siècle pour que la question soit finalement tranchée. En 1925, Edwin Hubble découvrit une céphéide dans la plus brillante des nébuleuses spirales, Andromède (figure 1.1). En utilisant la relation période-luminosité des céphéides calibrée par Henrietta Leavitt en 1908, il conclut définitivement à la nature extra-galactique d'Andromède.

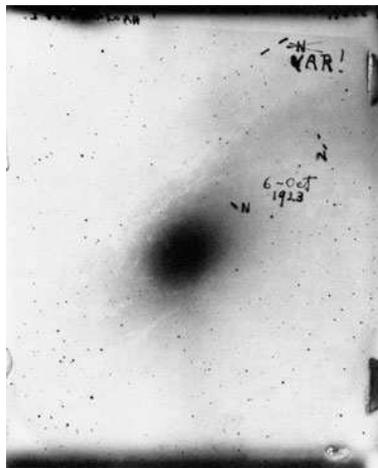


FIG. 1.1: *Plaque photographique originale de l'observation de M31 annotée par Hubble. Les "N" indiquaient les novae. Dans le coin supérieur droit, Hubble à inscrit "Var!" pour "variable" en dessous d'un "N" barré : c'est la fameuse céphéide !*

#### 1.1.4 Cosmologie newtonienne au XIX<sup>e</sup> siècle

Les essais de cosmologie newtonienne au XIX<sup>e</sup> siècle se heurtèrent à certaines contradictions en considérant (implicitement) un univers euclidien infini.

Notons d'abord que la théorie newtonienne prédit qu'un univers organisé autour d'un quelconque centre de masse est voué à s'effondrer sur lui-même, et ne peut donc être éternel ou im-

muable. Pour obtenir un modèle cosmologique sans centre dans le cadre de la théorie newtonienne, il faut considérer – ainsi que le fit Newton lui-même – un nuage emplissant uniformément l'univers (i.e. de densité constante dans l'espace, aux grandes échelles en tous cas). Un tel modèle est toutefois confronté à un problème majeur, connu sous le nom de « paradoxe de Olbers ». Celui-ci fut clairement formulé pour la première fois par Haley en 1720 : si le nombre des étoiles fixes était infini, leur contribution totale au rayonnement observé serait infinie dans toutes les directions, et le ciel uniformément lumineux. Autrement dit, l'obscurité de la nuit est une observation qui falsifie le modèle d'un univers newtonien uniforme et infini.

L'astronome allemand Seeliger énonça, à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, ce qui, selon lui, constituait un autre argument à l'encontre d'un tel modèle d'univers : l'intensité du potentiel gravitationnel y serait infini en tout point. Cette assertion, aussi connue sous le nom de « paradoxe de Seeliger », est largement reprise dans la littérature d'histoire des sciences. Einstein lui-même lui accorde du crédit et en donne une démonstration dans la marge du célèbre petit livre de vulgarisation qu'il a consacré à la relativité [25]. A y regarder de plus près, la pertinence de l'argument semble pour le moins discutable<sup>4</sup> : le potentiel n'étant défini qu'à une constante près, que son calcul dans un référentiel particulier conduise à une valeur infinie n'est pas problématique. Un simple argument de symétrie permet en réalité de montrer que la force exercée au centre d'une sphère massive de densité uniforme est nulle. Si l'on fait tendre le rayon de cette sphère vers l'infini, on aboutit à la conclusion que la force exercée en tout point d'un univers newtonien infini et (parfaitement) uniforme est bien nulle : le prétendu « paradoxe » est ainsi levé<sup>5</sup>.

Quoi qu'il en soit, l'impossibilité de l'univers newtonien infini et uniforme demeure en raison du paradoxe d'Olbers ; il ne reste alors qu'à imaginer un petit groupe d'univers-îles perdus dans un océan infini de vide, dont l'histoire ne peut pas être éternelle (alors que le temps, lui, coule depuis toujours...). La question de savoir si le centre de masse de ce conglomerat de matière serait au repos ou en translation uniforme dans un référentiel absolu, semblerait d'ailleurs épineuse. Voilà l'image, "peu satisfaisante" (pour reprendre une expression d'Einstein), des conséquences cosmologiques du superbe édifice de Newton.

### 1.1.5 La relativité générale

La publication de la relativité générale en 1915 ouvrit la voie de la cosmologie moderne ; il est d'ailleurs remarquable qu'elle en constitue toujours l'armature étincelante après un siècle de recherche, si riche en observations nouvelles. En 1917, Einstein appliqua ses équations à l'univers en faisant l'hypothèse du principe cosmologique, principalement pour des raisons de simplicité (alors qu'aucune observation ne venait l'étayer). Il introduisit pour la première fois sa constante cosmologique  $\Lambda$  dans le but avoué d'obtenir un univers fermé, fini et stationnaire. Einstein, voyait à juste titre dans l'univers "sphérique" fini (et donc "sans bord") qu'il proposait, une solution miraculeuse à tous les problèmes de la cosmologie newtonienne : l'univers ne s'effondrait plus sur lui-même et le paradoxe d'Olbers était évité. Einstein avait par ailleurs déjà compris les implications de la relativité générale concernant la détermination de la géométrie de l'univers : celle-ci peut être déterminée soit par la mesure de la somme des angles de n'importe quelle surface ou volume, soit par la mesure de la densité de matière de l'univers. Deux mesures observationnelles difficilement concevables au début des années 20...

<sup>4</sup>Que Jean Kaplan soit ici remercié pour m'en avoir fait prendre très récemment conscience !

<sup>5</sup>Il reste que nous avons utilisé des infinis pour en annuler d'autres : procédure certes "classique" en théorie quantique des champs par exemple, mais un peu moins usuelle au début du XX<sup>e</sup> siècle...

Après les résultats de Hubble, Einstein abandonna l'univers stationnaire, et n'eut alors plus de raison de conserver une préférence pour un univers fermé : il publia en 1931 avec de Sitter un article où ils optaient pour le modèle euclidien infini. Pourtant, alors qu'aucune indication observationnelle n'était disponible, les univers fermés ont eu la faveur de nombreux théoriciens jusqu'au début des années 60, et ce malgré les premières mesures de  $\Omega_m$ <sup>6</sup>. Cela provient peut-être des réticences conçues par de nombreux physiciens vis-à-vis de l'infini (qui n'est pour eux qu'un concept mathématique dont l'existence soulève de nombreuses objections métaphysiques). L'univers fini "sans bord" à courbure sphérique d'Einstein reste la première solution proposée à la première antinomie de la raison énoncée par Kant dans sa "Critique de la raison pure" : la conciliation d'un univers fini et pourtant non limité<sup>7</sup>. Rajoutons qu'en dernière analyse, les questions relatives à la forme globale de l'espace et, en particulier, son extension finie ou infinie, relèvent non pas de la relativité générale (une théorie physique locale) mais de la topologie (théorie mathématique globale). La mesure des anisotropies du CMB nous apprend que notre univers "local" (délimité par l'horizon cosmologique) est plat dans une très bonne approximation, mais elles ne nous disent rien sur la topologie de l'univers "global" ; que cette question puisse être un jour élucidée n'est pas évident...

## 1.2 L'homme du Big Bang

En 1914, Vesto Slipher mesura les décalages vers le rouge des "nébuleuses spirales", et les interpréta comme des vitesses d'éloignement. Ses travaux furent reconnus et posèrent deux questions : pourquoi ces vitesses étaient-elles si élevées et pourquoi les "nébuleuses" semblaient-elles toutes s'éloigner ?

Le jeune ingénieur météorologiste russe Alexander Friedmann publia en 1922 dans "Zeitschrift für Physik", le premier modèle d'univers en expansion, en reprenant les équations d'Einstein débarrassées de la constante cosmologique. Il remarqua que les données astronomiques de l'époque étaient insuffisantes pour conclure à une contraction ou une expansion de l'univers, et donna au passage des ordres de grandeur très acceptables de la masse ( $5 \times 10^{21} M_\odot$ ) et de l'âge de l'univers (10 milliards d'années). Einstein mit quelques années à admettre la pertinence des remarques de Friedmann, qui mourut prématurément en 1925 d'une pneumonie contractée durant un vol en ballon.

De manière indépendante, le chanoine belge George Lemaître publia en 1927 dans les annales de la Société Scientifique de Bruxelles un article au titre explicite, "Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra galactiques", dans lequel il établissait les mêmes équations que Friedmann, les interprétait, répondait aux questions posées par les observations de Slipher, et prédisait la "loi de Hubble" avant les observations de Hubble (obtenant même une estimation "correcte" de la constante de Hubble de  $625 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ ) ; ses travaux restèrent cependant ignorés par une large partie de la communauté, et aujourd'hui encore, la notoriété de Lemaître n'est pas aussi grande qu'elle devrait sans doute l'être. Au conseil de Solvay de 1927, Einstein prit position contre un univers en expansion ; on reste songeur devant les propos qu'il tenut à Lemaître à cette occasion : « Vos mathématiques sont superbes, mais votre physique est abominable ! »... Eddington qui était le professeur de Lemaître à Cambridge, publia une traduction incomplète de ses travaux (sans la "loi de Hubble")

<sup>6</sup>cf. chapitre 3 et table 3.1 pour la définition des paramètres cosmologiques.

<sup>7</sup>Einstein appréciait Kant mais nous ne savons pas s'il a formulé explicitement cette remarque.

en 1931. Cette même année, Lemaître publia sa théorie de "l'Atome primitif" où il introduisait la notion d'instant zéro.

Ce n'est qu'en 1929 – si l'on peut dire – qu'Hubble découvrit la fameuse relation linéaire entre distance et décalage vers le rouge des galaxies éloignées grâce au télescope de 2,54 mètres de diamètre du Mont Wilson [19]. Contrairement à un mythe tenace, Hubble n'interpréta pas ses résultats et se montra longtemps très sceptique vis-à-vis de l'idée d'un univers en expansion. La communauté scientifique appréhenda cependant immédiatement toute l'importance de sa découverte ; les travaux de Lemaître furent redécouverts et complétés (notamment par Robertson et Walker en 1935). La métrique Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker était née, et avec elle le paradigme aujourd'hui standard d'un univers en expansion où la courbure de l'espace-temps et la densité de matière sont étroitement couplées par les équations de la relativité générale.

Einstein abandonna en 1931 "sa" constante qu'il aurait qualifiée plus tard de « plus grande bourde de sa vie »<sup>8</sup>. Le Principe Cosmologique fut clairement énoncé pour la première fois par Milne en 1933 : *l'Univers est à grande échelle spatialement homogène et isotrope*. Ce n'est pas ce qui sera observé par les premiers relevés de galaxies (voir figure 1.2), mais l'idée dominante fut toujours qu'une transition vers l'homogénéité devait intervenir à une certaine échelle afin d'assurer la conservation du Principe Cosmologique. Les observations aux très grandes échelles, l'isotropie du fond de rayon X et du fond diffus cosmologique semblent aujourd'hui le confirmer (nous reviendrons sur cette problématique au chapitre 2).

La première difficulté à laquelle fut confronté le modèle du Big Bang fut celui du « paradoxe de l'âge de l'univers » ; celui-ci provenait de la valeur, alors dix fois trop élevée, de la mesure par Hubble lui-même de sa constante,  $H_0 = 558 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ , qui conduisait à un âge de l'univers trop court (2 milliards d'années) en comparaison de l'estimation géologique de l'âge de la Terre (située alors vers 3,5 milliards d'années). Lemaître [32] proposa en 1934 un modèle dit d'"univers hésitant" dans lequel il réintroduisait la constante cosmologique (et dans lequel il notait déjà l'éventuel lien entre densité d'énergie du vide et constante cosmologique !). Le « paradoxe de l'âge » fut finalement résolu par les nouvelles mesures de  $H_0$  par Baade en 1954 et Sandage en 1958.

Par une double ironie du sort, le terme "Big Bang" fut introduit par Fred Hoyle, l'un des plus farouches défenseur du modèle stationnaire, qui présenta Lemaître à ses collègues en 1950 par ces mots : « This is the Big Bang man ! ».

Le débat entre partisans du modèle stationnaire et partisans du Big Bang fit rage jusqu'à l'observation, en 1965, d'un certain fond radio diffus. Lemaître fut informé de cette découverte, par son secrétaire, quelques jours avant sa mort, en juin 1966 [15].

## 1.3 Découverte du Fond Diffus Cosmologique

### 1.3.1 Nucléosynthèse primordiale

Dans les années trente, Hans Bethe mit à jour les mécanismes de fusion au coeur des étoiles, en s'appuyant sur les récentes découvertes de la relativité restreinte et de la mécanique quantique.

<sup>8</sup>Ce mot célèbre a été rapporté par Gamow dans son autobiographie [33].

Les physiciens qui tentaient de résoudre le problème de la formation des éléments en utilisant la nucléosynthèse stellaire se heurtaient alors à de grandes difficultés.

Gamow évoqua pour la première fois en 1942 l'idée d'une nucléosynthèse primordiale. En 1948, Gamow, Alpher et Herman prédirent un fond diffus cosmologique, alors qu'ils travaillaient sur un modèle de Big Bang chaud faisant l'hypothèse d'un univers primordial seulement composé de neutrons (qui se désintègreraient par la suite en protons). En utilisant les estimations de densité de matière de l'époque, ils estimèrent la température de ce fond à 5 K. Enrico Fermi et Anthony Turkevich reprirent et corrigèrent ces travaux en 1953, en remarquant que la barrière Coulombienne et l'instabilité des noyaux de 5 ou 8 nucléons empêchent la formation de noyaux lourds lors de cette nucléosynthèse primordiale. De leurs côtés, les adversaires du Big Bang, Geoffrey et Margaret Burbidge, Fowler et Hoyle montrèrent dans un célèbre article de 1957 que la synthèse des éléments lourds a lieu dans les étoiles, en particulier lors des explosions en supernovae où le flux de neutrons est intense. A tout cela, s'ajoutait une étude de Suess et Urey réalisée en 1956 qui indiquait une abondance en masse de l'hydrogène dans l'univers de 75%.

Alors que tout ces résultats auraient pu créer une effervescence autour des modèles de nucléosynthèse primordiale, les travaux de Gamow restèrent largement ignorés et la prédiction d'un fond diffus cosmologique fut seulement de nouveau faite vers 1964 (indépendamment par Robert Dicke, Yakov Zel'dovich, Peebles et Hoyle).

### 1.3.2 Penzias et Wilson

David Wilkinson et Peter Roll, collègues de Dicke à Princeton, entreprirent alors la construction d'un radiomètre capable de mesurer un fond aux fréquences radio. Mais en 1965, Arno Penzias et Robert Wilson, des Laboratoires Bell, jouaient depuis déjà deux ans avec le radiomètre de précision qu'ils avaient construit dans le New Jersey à des fins d'études expérimentales de radio-astronomie et de communications par satellite. Ils cherchaient depuis quelques temps à se débarrasser d'un étrange bruit radio isotrope, équivalent à une température d'antenne de 3,5 K (et avaient à cette fin entrepris l'extermination de toutes les espèces de pigeons de la région, si on en croit la légende). Penzias entendit alors parler des travaux de Peebles sur l'existence d'un fond diffus cosmologique et passa finalement son fameux coup de téléphone à Dicke.

Comme le fait remarquer Weinberg dans son intéressante analyse de cette pittoresque histoire [26], « ce qui est surprenant ici, ce n'est pas tant que la plupart des astrophysiciens aient ignoré les prédictions de Alpher et Herman – un article ou deux peuvent toujours passer inaperçu dans l'immense océan de la littérature scientifique. Ce qui est plus étrange, c'est que personne ne suivit le même raisonnement pendant plus de dix ans alors que tout le matériau historique était accessible. »

## 1.4 Emergence du modèle standard

La fin du XX<sup>e</sup> siècle a vu l'émergence de ce que nous appelons le *modèle standard de la cosmologie*, à la suite de la convergence d'un ensemble d'observations indépendantes. Nous retraçons ici les voies parallèles qui permirent l'établissement des piliers observationnels du modèle.

Années	Citations
1955-59	2
1960-64	6
1965-69	5
1970-74	2
1975-89	63
1990-99	71

TAB. 1.1: Nombre de citations de l'article de 1933 de Zwicky (recherche effectuée par Van Den Bergh [40]).

### 1.4.1 Premiers soupçons de matière noire

Hubble [18] proposa en 1934 la première mesure de la densité de matière (visible) de l'Univers  $\rho_m = (1.3 - 1.6) \times 10^{-30} \text{ g.cm}^{-3}$  basée sur une masse moyenne galactique mesurée de  $(6 - 8) \times 10^8 M_\odot$  et une densité de galaxies de  $(20 - 30) \text{ Mpc}^{-3}$ ; sa fameuse loi lui permettait en effet de calculer des volumes et donc des densités. Une mesure de la densité de matière (visible) qui n'est pas si mauvaise puisque qu'en 1965, Abell l'estimera à  $\rho_m = 10^{-30} \text{ g.cm}^{-3}$  (en utilisant  $H_0 = 75 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ ).

En 1933, Fritz Zwicky mesura la dispersion des vitesses radiales de huit galaxies dans l'amas de Coma [20] et trouva une valeur  $\sigma = 1019 \pm 360 \text{ km.s}^{-1}$  étonnamment grande. Il en déduisit que la densité moyenne de l'amas devait être 400 fois plus grande que celle prédite en utilisant la "méthode de Hubble"; Zwicky prit d'ailleurs une valeur trop forte de ce rapport en utilisant pour constante de Hubble  $H_0 = 558 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ . Sa conclusion, dans laquelle il introduisait le terme de "matière noire", était pour le moins prophétique : « Si cet excès de masse est confirmé, nous en arriverons à la surprenante conclusion que de la matière noire est présente dans l'amas de Coma avec une densité bien plus grande que la matière lumineuse. ». En 1936, Sinclair Smith [52] mesura par la même méthode un excès de masse du même ordre ( $2 \times 10^{11} M_\odot$ ) pour les galaxies de l'amas de la Vierge. Notons pour l'anecdote qu'un cosmologiste visionnaire aurait pu, en 1934, estimer  $\Omega_m = 0.3$  s'il avait utilisé la constante de Hubble "originale", la mesure de densité de matière visible de Hubble, et le rapport  $\Omega_b/\Omega_m$  obtenu par Zwicky (les erreurs se compensent...) ! Eric Holmberg mesura en 1937 la masse de systèmes binaires de galaxies et trouva une masse moyenne de  $10^{11} M_\odot$  également en accord avec les résultats de Zwicky. Enfin, Horace Babcock obtint en 1939 un spectre de M31 indiquant des vitesses de rotations trop élevées pour les régions extérieures de la spirale par rapport aux prédictions de dynamique newtonienne [53]. Il ne fit pas référence aux travaux de Zwicky, ni à ceux de Smith mais conclut : « soit l'absorption joue un rôle très important dans les régions extérieures de la spirale, soit de nouvelles considérations dynamiques doivent être envisagées ».

La réputation sulfureuse, le mauvais caractère de Zwicky<sup>9</sup>, et la publication en langue allemande de son article dans une obscure revue suisse n'expliquent pas que ses travaux (ainsi que ceux de Smith et Babcock) aient pu être ignorés jusqu'au début des années 70 (voir la table 1.1).

<sup>9</sup>Rajoutons, pour la postérité de Zwicky, qu'il prédit dans un article de 1937 [21] que les effets de lentille gravitationnelle fourniraient « les plus simples et les plus précises déterminations des masses des nébuleuses » et que les supernovae (dont il fut un grand découvreur) permettraient « certainement d'étudier l'univers sur des dizaines de millions d'années lumières »...

En 1966, Felten et al. observèrent une forte émission de rayon X dans l'amas de Coma [55] marquant la présence de gaz chaud ( $10^8$  K) et pensèrent ainsi avoir résolu le problème de la masse manquante ; mais Einasto, Kaasik et Saar estimèrent en 1974 que le gaz intergalactique chaud n'était pas suffisant pour constituer plus de 10% de la masse manquante. Parallèlement, Rubin et Ford en 1970, puis Roberts et Whitehurst en 1975 montrèrent de façon irréfutable que les vitesses radiales de M31 restaient constantes jusqu'à au moins 30 kpc en utilisant la raie à 21 cm de l'hydrogène.

Relayant sans doute la pensée et les doutes d'une majorité de physiciens, Weinberg écrivait pourtant en 1977 [26] : « La matière visible dans les galaxies ne semble pas atteindre plus de quelques pourcents de la densité critique. Cependant là non plus, nous n'avons pas de certitudes ». Il fait ensuite référence à la matière noire sous une forme particulière : « il pourrait exister un gaz intergalactique d'hydrogène ionisé non détecté, éventuellement en quantité suffisante pour atteindre la valeur critique ».

Durant les trente années qui vont suivre, les observations ne cesseront de s'accumuler, sans qu'aucune détection dite "directe" ne soit pourtant obtenue. Nous ferons le point sur l'état du débat au chapitre 2.

#### 1.4.2 Le temps des grandes échelles

Dans les années 50, l'analyse méticuleuse des milliers de plaques photographiques réalisées avec la chambre de Schmidt de 1,20 mètre du mont Palomar avait permis de décompter jusqu'à 50 000 galaxies sur quelques degrés carrés, dans certaines régions du ciel telles Coma Berenice, Persée ou les Poissons. Gérard de Vaucouleurs observa en 1953 des regroupements d'amas de galaxies (qu'il nomma *super-amas*) sur des distances de quelques dizaines de mégaparsecs. Harrison en 1970 et Zel'dovitch en 1972 proposèrent les premiers modèles de formation des structures basés sur les fluctuations de densité de l'univers primordial. Peebles calcula consécutivement l'évolution des fluctuations de densité après la recombinaison [103], et le scénario de formation hiérarchique des amas fut proposé par Gott et Rees en 1975 [35]. Ces développements théoriques furent appuyés par l'émergence des théories inflationnaires [36] au début des années 80. Tous ces travaux jetèrent les bases de la théorie de formation des structures moderne.

Le célèbre premier relevé du CfA parut en 1985, révélant les structures filamenteuses de l'univers proche (voir figure 1.2).

Une multitude de grands "surveys" dans différentes longueurs d'ondes (APM Galaxy Survey, IRAS, etc.) apportèrent alors des observations de plus en plus précises pour des redshifts de plus en plus élevés. Les premières analyses du spectre de puissance des fluctuations de densité  $P(k)$  parurent à la fin des années 80. Théories et observations convergèrent alors peu à peu vers le paradigme actuel d'un univers dominé par la matière noire froide avec formation hiérarchique des amas. L'engouement pour les modèles d'inflation qui requièrent<sup>10</sup>  $\Omega_T = 1$  donna, au début des années 90, la faveur de la communauté scientifique au modèle SCDM ("Standard Cold Dark Matter") dans lequel  $\Omega_m = 1$  et  $\Omega_\Lambda = 0$  (et ce malgré des mesures indépendantes qui donnaient déjà  $\Omega_m \approx 0.3$ ).

<sup>10</sup>cf. chapitre 3 et table 3.1 pour la définition des paramètres cosmologiques.

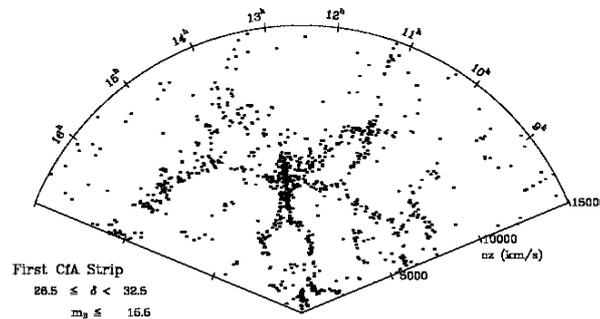


FIG. 1.2: Premier relevé par le CfA Redshift survey de la distribution de matière aux grandes échelles (1100 galaxies dans une bande de ciel de  $6 \times 130$  degrés), aussi connu sous le nom de "bonhomme" CfA.

### 1.4.3 Nucléosynthèse primordiale

Après la découverte du CMB, Peebles, Wagoner, Fowler et Hoyle refirent les calculs des modèles de Big Bang chaud et expliquèrent la répartition (75%  $^1\text{H}$ , 25%  $^4\text{He}$ ) des abondances observées en masse (en 1964, Hoyle et Tayler avaient mesuré une telle abondance en masse pour l'hélium). En 1972, Geiss et Reeves déterminèrent indirectement l'abondance de deutérium dans le présystème solaire à partir d'une mesure de  $^3\text{He}$ , ce qui permit de fixer une limite sur la densité de baryons ( $\Omega_b < 0.1$ ). Au début des années 80, les abondances des éléments légers (D,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^7\text{Li}$ ) étaient toutes mesurées.

Tytler et Burles [41] réalisèrent en 1998 une mesure de précision de l'abondance primordiale relative en deutérium en utilisant le spectre d'absorption en Lyman  $\alpha$  des quasars lointains. Cette méthode marque une nouvelle ère de précision des mesures de  $\Omega_b$  permises par la théorie de la nucléosynthèse primordiale.

### 1.4.4 Les supernovae

Les observations du diagramme de Hubble des supernovae de type Ia vont finalement réconcilier avec retentissement les mesures faibles de  $\Omega_m$ , le modèle de formation des structures hiérarchique avec matière noire froide et le scénario inflationnaire. En observant des luminosités plus faibles que celles attendues, deux groupes indépendants mesurèrent des valeurs négatives du paramètre de décélération  $q_0 = \Omega_m/2 - \Omega_\Lambda$ . Les premiers résultats du groupe de Perlmutter en 1997 basés sur un échantillon de 7 supernovae  $z \simeq 0.4$  étaient plutôt compatibles avec  $\Omega_m = 1$  ( $\Omega_m = 0.9 \pm 0.3, \Omega_\Lambda = 0$ ), mais ils évoluèrent après la découverte de nouvelles supernovae. Le groupe de Garnavich publia en 1998 une mesure basée sur 4 autres supernovae plutôt consistante avec un  $\Omega_m$  faible. Ces résultats furent confirmés par le groupe de Perlmutter en 1999 dans une étude basée sur 42 supernovae indiquant de façon probante  $\Omega_m = 0.3$  et  $\Omega_\Lambda = 0.7$ .

Il est intéressant de revenir sur les deux principales explications astrophysiques alternatives qui furent considérées afin d'expliquer la faible luminosité des supernovae lointaines autrement que par une accélération de l'expansion [37] :

- La luminosité moyenne des supernovae aurait été plus faible dans le passé, peut-être parce que la variation des abondances des éléments au cours du temps modifierait le mécanisme

de chandelle standard. Cet effet existe sans doute à un certain niveau (et pourrait être une source d'erreur systématique gênante pour les futurs programmes de caractérisation de l'énergie noire), mais les observations de supernovae dans des galaxies proches d'âges différents indiquent que son amplitude est limitée.

- La lumière "manquante" serait absorbée durant le trajet entre les supernovae et la Terre ; toutefois cette absorption devrait être indépendante de la longueur d'onde puisque la forme du spectre des supernovae est standard ! Ces poussières absorbantes auraient des caractéristiques différentes de la poussière de la Voie Lactée et émettraient de plus un fond isotrope dans l'infra-rouge.

Si aucune de ces deux propositions ne semblent effectivement convaincantes, un astrophysicien pourrait nous rétorquer à juste titre qu'elles ne sont pas plus déraisonnables que l'introduction d'un mystérieux fluide de pression négative dont l'existence est en contradiction avec toute la physique des particules. Si les résultats des supernovae et leurs implications cosmologiques ont été si facilement acceptés, c'est bien sûr qu'ils arrivaient à *temps*, comme la dernière pièce du puzzle. Notons que cette primauté historique des supernovae a un peu tendance à masquer les preuves observationnelles supplémentaires de l'accélération de l'expansion dont nous disposons aujourd'hui (cf. chapitre 2).

#### 1.4.5 Anisotropies de température et de polarisation du CMB

Avant de conclure ce chapitre, nous voudrions brièvement établir ici deux chronologies parallèles, l'une relatant les progrès concernant la description théorique des anisotropies du fond diffus cosmologique, l'autre donnant les étapes clefs de leurs mesures expérimentales.

##### Chronologie théorique

Cette chronologie se voulant plus indicative qu'exhaustive, que les physiciens oubliés nous pardonnent :

- Sachs et Wolfe décrivent l'effet qui porte leur nom dans un article de 1967 [104].
- La description actuelle du plasma primordial comme un fluide étroitement couplé d'électrons, de baryons et de photons ainsi que celle des oscillations acoustiques qui y naissent furent données par Peebles et Yu en 1968 et 1970 [102, 103].
- Silk prédit l'effacement des anisotropies aux échelles plus petites que le libre parcours moyen des photons à la recombinaison en 1967 [105].
- L'effet Sunyaev-Zel'dovich fut prédit en 1972 [107].
- Les progrès de l'informatique et le développement des modèles de formation des structures rendirent possible, au début des années 1980, le calcul des spectres de puissances des anisotropies (par intégration de l'équation de Boltzmann relativiste) ; il faut notamment citer les travaux de Bond et Efstathiou en 1984 et 1987 [106, 112]. L'incroyable figure 3.4 est tirée de ce dernier article.
- Hu et Sugiyama publièrent leur précieux travail de description analytique des spectres de puissance des anisotropies au milieu des années 1990 [108, 109].
- Seljak et Zaldarriaga développèrent CMBFAST à partir de 1996 [113].
- La décomposition de la polarisation en mode E/B fut introduite simultanément par Zaldarriaga et Seljak d'une part [115] et par Kamionkowski, Kosowsky et Stebbins d'autre part [116]

en 1997 ; Zaldarriaga – toujours lui – prédit la même année le pic de la réionisation [117].

Une description qualitative des processus évoqués ici est donnée au chapitre 3.

### Chronologie expérimentale

A partir de 1965, de nombreuses expériences, en ballon ou en fusée, réussirent à recouvrir une bonne partie du spectre de corps noir du CMB. Mais une trentaine d'années furent nécessaires avant que les anisotropies de températures ne soient détectées :

- Un appel à propositions de missions scientifiques spatiales fut lancé par la NASA en 1976. Trois groupes se rassemblèrent (FIRAS, DMR, DIRBE) pour proposer le projet COBE. La construction du satellite commença en 1982 (l'expérience IRAS eut la priorité de la NASA, ce qui retarda COBE). L'explosion de Challenger en 1986, reporta encore un peu son lancement (des modifications durent être apportées pour permettre au satellite d'être lancé par une fusée). COBE fut finalement mis en orbite en 1989. Ses premiers résultats en 1992 confirmèrent le spectre parfait de corps noir du CMB, ainsi que son isotropie jusqu'à  $\Delta T/T \sim 10^{-5}$  (une fois le dipôle soustrait) ; le groupe FIRAS mesura  $T = 2,735 \pm 0,016 \text{ K}$ . Mais surtout les anisotropies primordiales à grandes échelles furent observées par DMR [148].
- Les expériences au sol ou en ballon se multiplièrent alors afin d'obtenir le premier pic acoustique. Le ballon BOOMERANG fit le tour du pôle sud en une dizaine de jours et observa le pic tant convoité [151]. Quelques mois plus tard, le ballon MAXIMA survola l'Amérique du nord durant dix heures, confirmant ces résultats [152].
- La liaison entre les mesures à petites et grandes échelles fut obtenue par l'expérience ARCHEOPS (également destinée à tester en vol le cryostat à dilution qui est utilisé sur Planck) [133].
- Les données publiées par le satellite WMAP à partir de 2003 marquèrent évidemment une nouvelle ère de précision [158].
- Le signal des anisotropies de polarisation fut détecté pour la première fois par les interféromètres DASI et CBI en 2002 [146, 194].
- Les spectres TE et EE ont depuis été plus précisément mesurés par WMAP, BICEP et QUAD [134, 160, 138].

Pour reprendre mon commentaire introductif, je trouve absolument fascinant que l'ensemble de la théorie des anisotropies du fond diffus ait été développée *a priori* de leur caractérisation expérimentale ; y penser me laisse toujours songeur quant à la déraisonnable aptitude de la physique contemporaine à décrire l'univers.

## 1.5 Perspective

La fin du XX<sup>e</sup> siècle a ainsi vu l'émergence d'un modèle standard de la cosmologie dont nous discuterons les bases observationnelles au chapitre suivant. La combinaison des différentes sondes cosmologiques permet aujourd'hui de contraindre les paramètres du modèle à un tel degré, qu'il est d'usage de dire que nous sommes entrés dans « l'ère de la cosmologie de précision ».

Les progrès scientifiques effectués en un siècle sont sans précédent dans l'histoire de l'humanité. Au début du XX<sup>e</sup> siècle, nous ne savions pas si l'extension de l'univers dépassait les bornes de notre galaxie, nous n'avions pas la moindre idée du fonctionnement des astres, la nature atomique

ou ondulatoire de la matière était une question non tranchée. Au début du XXI<sup>e</sup> siècle, nous pensons connaître aussi bien l'histoire de l'Univers, du premier milliardième de milliardième de secondes jusqu'à nos jours, que la structure de l'infiniment petit ; mieux, nous avons obtenu une conciliation presque miraculeuse des deux infinis.

Nous serions ainsi presque tenté de paraphraser la fameuse prédiction que Lord Kelvin a formulé à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle :

*La physique est définitivement constituée dans ses concepts fondamentaux ; tout ce qu'elle peut désormais apporter c'est la détermination précise de quelques décimales supplémentaires. Il y a bien deux petits problèmes : celui du résultat négatif de l'expérience de Michelson et celui du corps noir, mais ils seront rapidement résolus et n'altèrent en rien notre confiance.*

Ces *deux petits problèmes* cachaient bien entendu la théorie de la relativité et la mécanique quantique ! Certains utilisent ainsi *a contrario* ce précédent historique pour développer l'idée que nous serions à la veille d'une révolution scientifique : matière noire, énergie noire et incapacité des théoriciens à réconcilier la théorie quantique des champs et la relativité générale, seraient les anomalies khuniennes<sup>11</sup> signant la décadence de notre paradigme...

Je suis pour ma part très sceptique quant à cette éventualité d'une révolution en germe ; les situations historiques me semblent justement infiniment différentes : un physicien du début du XX<sup>e</sup> siècle n'avait qu'à lever les yeux au ciel pour effectuer une observation non expliquée par le paradigme de l'époque (pourquoi la nuit est-elle noire, comment fonctionne les étoiles, etc.), alors que nous dépensons aujourd'hui des milliards en vue de créer ne serait-ce que la possibilité d'une observation non expliquée (LHC, Planck, etc.). Que le lecteur inquiet se rassure, le XXI<sup>e</sup> siècle ne devrait tout de même pas être ennuyeux, au moins pour les raisons décrites dans la section 2.5.

---

<sup>11</sup>Thomas Kuhn a introduit en [16] sa célèbre théorie selon laquelle l'histoire des sciences se résume à un éternel retour cyclique de deux phases : une première phase dite "normale" durant laquelle un paradigme prédictif fait l'objet d'un large consensus, et une deuxième phase dite de "crise" durant laquelle de petites anomalies expérimentales aboutissent finalement à une révolution scientifique débouchant sur la mise en place d'un nouveau paradigme.

## Chapitre 2

# Le modèle $\Lambda$ CDM confronté aux observations en 2010

---

Nous essaierons de donner ici la vision de l'auteur sur les controverses relatives aux parts d'ombre du modèle standard de la cosmologie (matière noire, énergie noire, anomalies du fond diffus). Ce chapitre est par là même l'occasion de dresser un inventaire des observations cruciales en 2010.

---

Le "modèle standard de la cosmologie" tire son nom de celui du *modèle standard* de la physique des particules, l'autre grand paradigme de la physique contemporaine. Ce dernier est une théorie quantique des champs résultant de la combinaison, réalisée au début des années 1970, de la chromodynamique quantique et de la théorie électro-faible. Il possède 29 paramètres libres qui décrivent les masses des particules élémentaires ainsi que différentes constantes de couplages. Son accord, à ce jour, avec l'ensemble des (très nombreuses) observations atteint un tel degré, que l'activité des physiciens des particules durant ces trente dernières années pourrait malicieusement être résumée comme une série de coûteuses tentatives de le falsifier.

Vu au travers du prisme cosmologiste, son plus grand succès reste d'avoir permis l'établissement de l'autre modèle standard, celui de la cosmologie, en ce qu'il permet de décrire les tout premiers instants de l'univers, durant lesquels les énergies en jeu étaient justement celles de la physique des particules<sup>1</sup>.

Les deux arguments qui, pour une grande majorité de physiciens des particules, vouent ce modèle à l'incomplétude, sont *primo* le fait qu'il ne décrit pas l'interaction gravitationnelle (ou dit autrement qu'il ne réconcilie pas théorie quantique des champs et relativité générale), et *deuxio* le fait que les valeurs des paramètres ne soient pas fixées par des principes premiers mais détermi-

---

<sup>1</sup>Remarquons d'ailleurs que c'est spécifiquement parce que l'univers est en expansion – et issu d'un Big Bang – que ces deux modèles se trouvent être si imbriqués ; autrement dit, les liens entre infiniment grand et infiniment petit seraient peut-être bien plus ténus pour des physiciens embarqués sur un univers stationnaire.

nées expérimentalement<sup>2</sup>. La principale piste théorique explorée durant les trente dernières années par la communauté scientifique en vue de résoudre ces "problèmes" est la théorie des cordes, dont nous dirons que la destinée future (succès ou échec) est pour le moins difficile à prévoir. Une autre piste – plus sujette à controverse que la première – est celle des différentes classes de principe anthropique (notons d'ailleurs que celui-ci a acquis une plus grande crédibilité depuis qu'il a émergé au sein de la communauté cordiste, à la suite de l'apparition du "Landscape"<sup>3</sup>).

Le modèle standard de la physique des particules est en passe de se voir récompenser pour services rendus à la cosmologie, puisque cette dernière commence à produire des contraintes sans équivalent en laboratoire (masse des neutrinos, violation CPT, etc.) et qu'elle est actuellement le seul domaine de la physique à fournir des observations non expliquées par le modèle standard de la physique des particules (matière noire et énergie noire).

## 2.1 Concordance des observations

Pour en revenir au modèle standard de la cosmologie, nous avons vu au chapitre 1, comme il a émergé de la concordance d'un ensemble d'observations indépendantes. A la fin des années 1980 et au début des années 1990, il existait encore une certaine tension entre différentes observations que l'introduction de la constante cosmologique est venue résoudre. Le nombre de paramètres du modèle, qui n'est pas aussi bien fixé que dans le cas de celui de la physique des particules, se situe aux environs de 12 (cf. table 3.1).

Nous tentons de donner ici une liste synthétique des observations en faveur du modèle  $\Lambda$ CDM. Cette liste n'a évidemment rien d'originale ; toutefois nous voudrions y inclure certaines observations, parfois un peu oubliées en raison de la tendance qu'ont certains cosmologistes à ne mettre en avant que les observations donnant les meilleures contraintes sur les paramètres cosmologiques<sup>4</sup>.

1. **Diagramme de Hubble à bas redshift.** La meilleure estimation actuelle de la constante de Hubble est donnée par le HST Key Project [73]. Les barres d'erreurs relativement élevées s'expliquent du fait que cette mesure est toujours dépendante de la calibration en distance des céphéides ! Plus précisément, [73] utilisent la relation empirique période-luminosité des Céphéides pour obtenir la distance de 31 galaxies et calibrer un jeu d'indicateurs secondaires de distances (supernovae type Ia et type II, relation de Tully-Fisher, fluctuations de brillance de surface) sur une distance de 400 à 600 Mpc. Ils estiment  $H_0 = 72 \pm 3(\text{stat.}) \pm 7(\text{syst.}) \text{ km.s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ . Les sources d'incertitudes majeures restent la métallicité des céphéides et la mesure de distance au grand nuage de Magellan (qui permet de calibrer la relation des céphéides). Cette mesure critique, dont la primauté est presque autant historique que psychologique, constitue paradoxalement à l'heure actuelle un point (relativement) faible du jeu d'observation, comme nous le verrons en 2.3, puisque la détermination des paramètres  $\Omega_m$  et  $\Omega_\Lambda$  grâce aux anisotropies du CMB en dépend totalement.
2. **Spectre de corps noir du CMB.** La forme du spectre de corps noir absolument parfait me-

<sup>2</sup>Il y aurait sans doute beaucoup à dire, d'un point de vue épistémologique, sur le bien-fondé des présupposés réductionnistes que sous-tendent ces deux arguments.

<sup>3</sup>Les cordistes auraient réussi à rendre la théorie des cordes compatible avec une constante cosmologique positive aux débuts des années 2000 ; une des conséquences malheureuse de ce travail serait qu'il existe un "Landscape" de l'ordre de  $10^{500}$  théories des cordes possibles ; on comprend alors la nécessité d'introduire un principe anthropique...

<sup>4</sup>Cette tendance est d'autant plus déplorable que la valeur d'un paradigme scientifique ne découle évidemment pas de la précision avec laquelle sont mesurés ses paramètres libres.

surée par FIRAS, et donnant une mesure de température du CMB  $T_0 = 2.725 \pm 0.001$  K, est une des plus forte observation en faveur d'un modèle de Big Bang chaud. Il est incroyablement difficile, pour user d'un euphémisme, d'imaginer un quelconque processus astrophysique local aboutissant à ce genre de courbe (la figure 3.1 est éloquent à cet égard), alors qu'il est naturel de l'obtenir si l'on suppose que l'univers est passé par une phase d'équilibre thermique. Notons enfin qu'il existe des observations [86] en accord avec l'évolution de la température du fond en fonction du redshift  $T_\gamma(z) = T_0(1+z)$  (voir figure 3.2).

3. **Anisotropies de température du CMB.** Nous consacrerons le chapitre 3 à cette pierre philosophale de la cosmologie (et de la connaissance en général du reste !). Contentons nous de dire que la prédiction théorique de la forme si particulière du spectre TT, résultant de la combinaison de processus complexes au sein du plasma primordial, ainsi que la parfaite gaussianité des fluctuations observées sont des preuves saisissantes en faveur du paradigme.
4. **Anisotropies de polarisation du CMB.** Nous différencions à dessein ces anisotropies des précédentes. Leur récente observation a peut-être suscité moins d'excitation que celle des anisotropies de température, probablement en raison du fait qu'elles ne permettent d'améliorer que marginalement la précision sur la mesure des paramètres cosmologiques (exception faite des paramètres de la réionisation). Il faut pourtant se rendre compte que la mesure si précise des spectres TE et EE, en parfait accord avec la prédiction théorique effectuée à partir des paramètres cosmologiques dérivés du spectre TT, marque le triomphe absolu de la théorie du Big Bang et démontre à quel point nous comprenons la physique du plasma primordial ! Le lecteur notera en particulier les anti-corrélations entre les spectres TT et EE (cf. chapitre 3).
5. **Abondance des éléments légers.** Troisième partie du "tryptique originel" (décalages vers le rouge/fond diffus/abondance des éléments légers). De nouvelles mesures ont récemment été rendues possible par les observations des spectres d'absorption Lyman  $\alpha$  des quasars. Le fait que l'estimation de  $\Omega_b$  issue de cette mesure soit en si bon accord avec celle issue des anisotropies du CMB est bien sûr tout à fait remarquable.
6. **Supernovae type Ia.** Les meilleurs contraintes sont données en 2010 par l'échantillon "Union sample" de plus de 300 SNe Ia [69]. Le terme de "chandelles standard" souvent utilisé ne doit pas cacher le fait que l'on ignore presque tout du processus astrophysique qui est à leur origine (l'explication des naines blanches accrétant la matière d'un compagnon jusqu'à atteindre la limite de Chandrasekar est mise à mal par certaines observations récentes). Malgré cela, l'amplitude du pic de luminosité peut être utilisé, après l'application de corrections empiriques non triviales, comme un excellent indicateur de distance. Disons à nouveau que si les premiers résultats ont été si facilement acceptés par la communauté, c'est qu'ils apportaient la pièce manquante du puzzle, dans un contexte où de nombreuses autres observations étaient déjà en tension avec  $\Omega_m = 1$ . La statistique et la précision du traitement des courbes de luminosité se sont depuis largement améliorées, faisant de cette sonde une des plus compétitives en vue de la détermination de l'équation d'état de l'énergie noire.
7. **Distribution de la matière (lumineuse) aux grandes échelles.** La distribution de la matière lumineuse est un traceur – certes biaisé – de la distribution de matière noire. Dans les modèles de matière noire froide, la forme du spectre de puissance des fluctuations de matière aux grandes échelles est déterminée par le spectre de puissance des fluctuations primordiales et par  $\Omega_m h$  ; la continuité observée entre ces fluctuations et celles du CMB est simplement remarquable, tout comme l'accord avec les résultats des simulations numériques N-corps.

8. **Oscillations acoustique des baryons (BAO).** L'empreinte des oscillations acoustiques des baryons dans le plasma primordial peut également être détectée dans les relevés de structures à grande échelle, sur des distances de l'ordre de 100 à 150 Mpc/h. Il s'agit à nouveau d'une *prédiction* hautement spécifique du modèle  $\Lambda$ CDM (certains modèles alternatifs ont d'ailleurs été discrètement abandonnés après la première détection du pic dans la fonction de corrélation en 2005) ! Les BAOs sont appelées à devenir une des sondes privilégiées pour la détermination de l'équation d'état de l'énergie noire.

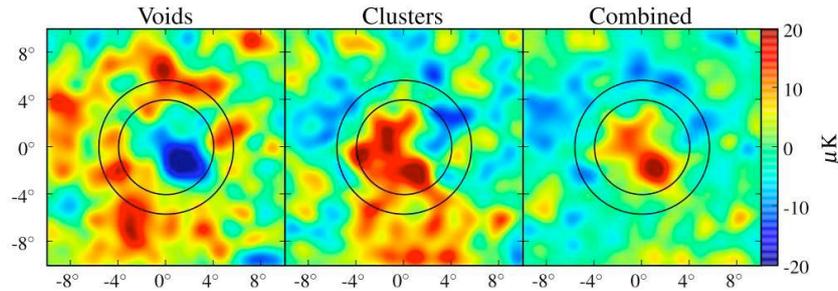


FIG. 2.1: *Détection statistique à  $4\sigma$  de l'effet Sachs-Wolfe intégré, signant l'accélération de l'expansion : à gauche et au centre, empilements de régions CMB correspondant respectivement à 50 super-vides et à 50 super-amas dans le catalogue SDSS LRG (à droite, superposition des deux échantillons). Le rayon du plus petit cercle est de  $4^\circ$ , ce qui correspond à une échelle spatiale de  $100 h^{-1}$  Mpc. Notons au passage que ces super-vides (resp. super-amas) semblent entourés de super-amas (resp. super-vides), comme attendu dans le cadre du modèle standard. Graphe tiré de [72].*

9. **Manifestations astrophysique de la matière noire.** Il est tout à fait remarquable que la matière noire, dont la découverte résulte de toute une série d'observations astrophysiques, soit si naturellement devenue une pierre angulaire du modèle standard de formation des structures ; si bien qu'il n'est pas faux de dire que ce sont aujourd'hui les sondes cosmologiques (CMB, formation des structures, BAO) qui constituent les preuves les plus déterminantes en faveur de l'existence de la matière noire. Nous y reviendrons dans la section 2.2. Ces observations astrophysiques incluent bien sûr les courbes de rotation des galaxies, les vitesses particulière des galaxies au sein des amas, l'ensemble des observations de lentillages gravitationnels dont une des manifestations les plus marquantes est le fameux "bullet cluster" (voir figure 2.3).
10. **Age des étoiles.** Une des meilleures limites inférieures de source astrophysique sur l'âge de l'univers est fournie par l'observation des amas globulaires de la Voie Lactée ; [67] donnent  $t_0 \geq 11.2 \times 10^9$  années à  $2\sigma$ . Insistons sur le fait que toutes les autres observations géologiques ou astrophysiques donnent actuellement des limites plus basses. Cet âge est en parfait accord avec celui calculé par intégration du paramètre de Hubble sur le redshift,  $t_0 = \int_0^\infty dz/(1+z)H(z)$ . Ce succès doit être souligné par sa mise en perspective historique : le "paradoxe" de l'âge, qui a agité la cosmologie pendant plus d'une cinquantaine d'année est résolu dans le cadre de  $\Lambda$ CDM (la suppression de la constante cosmologique conduit à un univers trop jeune).
11. **Cosmologie des amas.** Les amas de galaxies sont des objets complexes qui ne sont pas encore parfaitement compris d'un point de vue astrophysique ; certains diront ainsi que leur utilisation à des fins cosmologiques est prématurée. Ils donnent toutefois déjà des contraintes

intéressantes en très bon accord avec  $\Lambda$ CDM (ce n'était pas le cas il est vrai il y a encore quelques années, ce qui en faisait le canal d'observation privilégié des pourfendeurs du modèle standard). Leur comptage par tranche de masse et de redshift donne des contraintes sur  $\sigma_8$  à différentes époques<sup>5</sup> [74] (et l'évolution de  $\sigma_8$  donne une contrainte sur  $\Omega_m$ ); les observations en X permettent également d'estimer la fraction baryonique,  $f_b = \Omega_b/\Omega_m$ . Là encore, les observations sont concordantes [75]. Enfin, des spectres de puissance de leurs distributions peuvent être calculés, à un niveau de précision qui permet déjà une détection statistique des BAO [99].

12. **Effet Sachs-Wolfe intégré.** Cet effet n'est à notre sens pas assez cité comme "preuve" en faveur de l'accélération de l'expansion. L'énergie des photons du CMB est modifiée lorsqu'ils traversent le puit gravitationnel des structures soumises à une expansion accélérée (il est important de comprendre que cet effet est nul dans un univers pour lequel  $\Omega_m = 1$ ). Cet effet est actuellement détecté statistiquement, par différentes équipes [70][71], à un niveau de confiance typique de  $4\sigma$ , par corrélation des anisotropies à grande échelles angulaires du CMB et de la distribution de matière aux grandes échelles. La figure 2.1 nous semble particulièrement convaincante à cet égard : l'empilement de 50 régions CMB correspondant à des super-vides (resp. super-amas) proches dans le relevé à grande échelle SDSS LRG montre un défaut (resp. excès) significatif de température.
13. **Spectre des quasars (en particulier l'effet Gunn-Peterson).** Les spectres des quasars de redshifts supérieurs à 6 montrent un large creux entre les raies de l'hydrogène en lieu et place de la forêt Lyman- $\alpha$  observée pour les quasars de redshifts moins élevés : cela donne une forte contrainte sur la proportion d'hydrogène neutre situé sur la ligne de visée. Cet effet prédit par Gunn et Peterson en 1965 a été observé pour la première fois par SDSS en 2001 (figure 3.13). Il démontre que la réionisation a eu lieu autour d'un redshift  $6 < z < 15$ , en bon accord avec les observations des anisotropies de polarisation du CMB aux larges échelles angulaires.

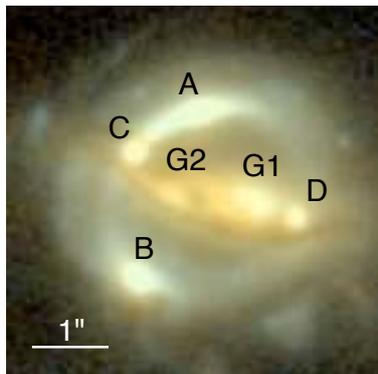


FIG. 2.2: Image HST-ACS de B1608+656. A, B, C et D sont quatre images lentillées d'une même galaxie source variable. G1 et G2 sont les deux galaxies responsables de ce lentillage fort. La mesure des délais temporels entre les images constitue une puissante sonde cosmologique (voir texte). Image tirée de [101].

14. **Lentillage faible.** Il s'agit sûrement du canal d'observation du futur, le plus puissant pour contraindre l'équation d'état de l'énergie noire, en tant que traceur exact de la distribution de matière (noire); les mesures de spectres de puissance dans des petites régions disparates du

<sup>5</sup>  $\sigma_8$  est la normalisation du spectre de puissance des fluctuations de matière à  $8h^{-1}$  Mpc.

ciel sont déjà en bon accord avec le modèle standard. De nombreux défis devront cependant être relevés pour les programmes futurs : contrôle des effets systématiques (liés par exemple à la fonction d'étalement du point des télescopes) ou simulation précise des spectres aux échelles non linéaires sondées par la méthode.

15. **Vitesses particulières.** Le champ de vitesses particulières des galaxies est également une sonde potentielle de la distribution de matière (et permet de contraindre  $\Omega_m$ ); les vitesses particulières peuvent être déduites du redshift et de la distance des galaxies. Les indicateurs de distances ne sont malheureusement pas assez précis à l'heure actuelle (Tully-Fisher ne permet pas d'atteindre mieux que 15%) pour rendre cette sonde compétitive. Les progrès en terme de détection de l'effet SZ cinétique pourrait changer la donne dans le futur.
16. **Lentillage fort.** Les systèmes astrophysiques présentant des effets de lentillage fort de sources variables constituent une sonde cosmologique assez méconnue quoique fort puissante. Il est en effet possible de mesurer des délais temporels entre les différentes images lentillées d'une galaxie source variable (voir figure 2.2). Ces délais dépendent de la cosmologie et de la distribution du potentiel gravitationnel de la galaxie lentille. Si cette dernière peut être estimée par un autre canal d'observation (e.g. la dispersion des vitesses stellaires de la lentille), une estimation très précise des paramètres cosmologiques  $H_0$ ,  $\Omega_k$  et  $w$  peut être obtenue. L'étude du seul système B1608+656 donne par exemple, par combinaison avec les données WMAP-5,  $H_0 = 69.7^{+4.9}_{-5.0}$  km.s<sup>-1</sup>Mpc<sup>-1</sup> et  $w = -0.94^{+0.17}_{-0.19}$  (68% C.L.) [101]. L'observation de délais temporels pour 4000 lentilles avec LSST permettrait selon [100] une mesure de  $H_0$  à 1% et une détermination de  $w$  à un niveau correspondant au "Stage IV - optimiste" du *Dark Energy Task Force* [66].

Cette liste est d'autant plus impressionnante si l'on lui adjoint le fait qu'il n'existe aucune liste "opposée"; autrement dit, il n'y a, à l'heure actuelle, aucune observation en désaccord avec le modèle standard<sup>6</sup>. A partir des points 1-8, on peut établir par exemple le graphe 2.9, et la table 3.1 de mesures des paramètres cosmologiques. Il y a bien sûr un certain nombre de questions laissées sans réponse par le modèle (voir par exemple section 3.4.1); mais celles-ci appellent plus à un enrichissement du modèle qu'à une révolution.

L'objection majeure soulevée à l'encontre du paradigme est qu'il dépeint un univers composé à 96% de constituants "inconnus" (la matière noire et l'énergie noire); par "inconnus", il faut bien sûr entendre qu'ils sont non expliqués dans le cadre du modèle standard de la physique des particules. Les alternatives proposées à  $\Lambda$ CDM ont souvent pour objectif de s'affranchir de l'une ou de l'autre de ces composantes. La plupart n'ont pas survécu à l'accumulation des observations concordantes. Nous discutons brièvement dans la suite de ce chapitre, quelques unes des rares alternatives actuellement considérées comme crédibles.

## 2.2 Matière noire et théories modifiées de la gravitation

La théorie modifiée de la gravitation MOND (pour Modified Newtonian Dynamics) a été introduite par Milgrom en 1983 afin de résoudre le problème des courbes de rotation des galaxies sans introduire de matière noire [91]. Celle-ci a d'abord été conçue comme une modification purement empirique du potentiel newtonien à grande échelle (la force d'interaction gravitationnelle en  $1/r^2$  est remplacée au delà d'une certaine échelle par une force en  $1/r$ ). Bekenstein a donné en 2004 un

<sup>6</sup>Cette assertion fait tout du moins l'objet d'un très large consensus au sein de la communauté des cosmologistes expérimentateurs.

cadre plus solide à cette théorie [92], en montrant qu'elle apparaissait comme la limite de champ faible d'une théorie relativiste (qui fut prénommée TeVes). Ces modifications suffisent effectivement à expliquer la plupart des manifestations astrophysiques de la matière noire. Les partisans de cette dernière ont cependant récemment mis en avant l'observation combinée de données optique/rayon X/lentillage gravitationnel, connue sous le nom de "bullet cluster" [76]; dans le cadre du modèle standard, la figure 2.3 s'interprète naturellement comme la conséquence de la collision de deux amas de galaxies.

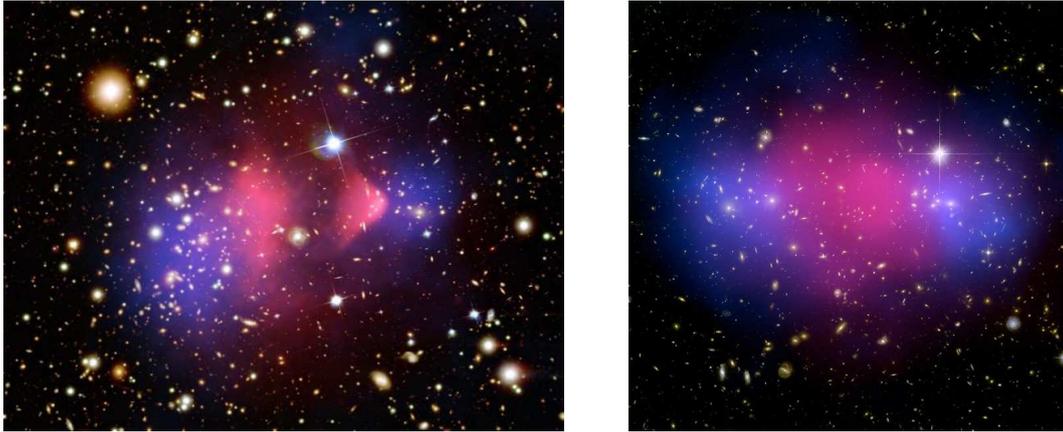


FIG. 2.3: *Combinaison des observations des galaxies en optique, de la matière noire par lentillage gravitationnel (en bleu), et du gaz X d'électrons relativistes (en rouge). Amas 1E 0657-56 dit "bullet cluster" ( $z=0.296$ ) à gauche, amas MACS J0025.4-1222 dit "baby bullet" ( $z=0.59$ ) à droite.*

Les principales composantes de ces amas, que sont les étoiles, les gaz chaud d'électrons relativistes et la matière noire, se comportent différemment durant la collision. La matière lumineuse des galaxies (observée en optique), tout comme les halos de matière noire (observés par lentillage gravitationnel) ne sont que faiblement affectées par la collision (ils ne sont que faiblement ralentis gravitationnellement). Les gaz chauds d'électrons (observés en rayon X) qui constituent l'essentiel de la masse baryonique de l'amas, interagissent par contre fortement, ce qui résulte en un ralentissement bien plus important de leurs vitesses globales. MOND – dans sa version standard – ne prédit qu'un effet de lentille principalement dû au gaz d'électrons relativistes : autrement dit, on devrait observer un lentillage autour du gaz X et non autour de la matière lumineuse peu massive. Selon les défenseurs de MOND, ce problème serait toutefois résolu par ajout d'une certaine quantité de matière noire sous forme de neutrino [77] (des problèmes relatifs aux scénarios de formation des structures se posent alors sans doute).

De manière étrange, il est rarement mentionné que les observations d'ordre cosmologique permettent, bien mieux que les manifestations astrophysiques, de falsifier cette classe de théorie de la gravité modifiée. La figure 2.4 compare les prédictions sur les spectres de puissance du CMB du modèle  $\Lambda$ CDM et de deux modèles de MOND. Elle est issue d'un travail réalisé en 2006 par [93], si bien que les données CMB de WMAP-3 représentées ne permettaient pas alors de trancher clairement. L'origine des différences des spectres est qualitativement compréhensible : nous verrons au chapitre 3 que la masse des baryons a tendance à amplifier l'amplitude des pics de compressions impairs par rapport à celle des pics pairs de dilatation du plasma primordial ; ceci est une prédiction très spécifique du modèle standard, ne pouvant résulter que d'un plasma primordial de

composition mixte baryons / matière noire non-baryonique. Il me semble que les données actuelles (figure 3.8) permettent de trancher clairement en faveur du modèle standard.

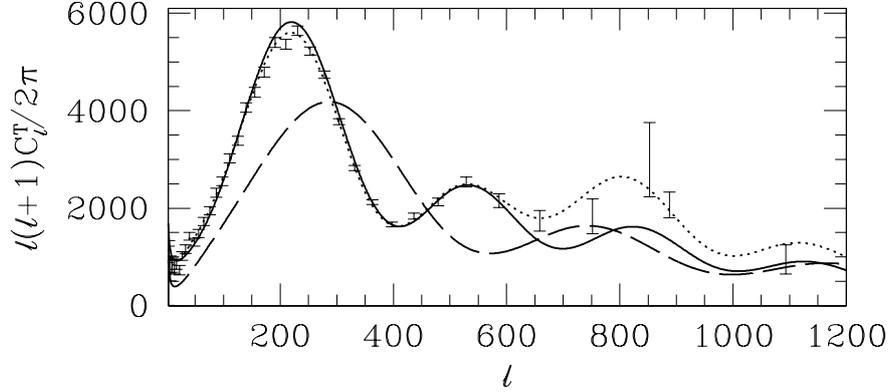


FIG. 2.4: Spectres de puissance des anisotropies de température du CMB prédits par un modèle de MOND avec neutrinos ( $\Omega_\Lambda = 0.78$ ,  $\Omega_\nu = 0.17$ ,  $\Omega_b = 0.05$ , ligne continue), sans neutrinos ( $\Omega_\Lambda = 0.95$ ,  $\Omega_b = 0.05$ , ligne tiretée) et par  $\Lambda$ CDM (ligne pointillée). Les points expérimentaux superposés sont ceux de WMAP-3. Graphe tiré de [93].

L'observation du pic des BAO constitue probablement une autre falsification des théories de gravitation modifiée. Cela peut être compris qualitativement si l'on se représente, comme sur la figure 2.5, le plasma primordial à la recombinaison comme une superposition d'ondes acoustiques se propageant autour de chaque sur-densité sous la forme d'une coquille sphérique ; dans le cas du modèle standard, la fonction de corrélation est piquée à l'échelle comobile correspondant à la distance entre le centre de la sur-densité de matière noire et la sur-densité relative de baryons sur la coquille acoustique à la recombinaison (voir figure 2.5, gauche). Dans le cas l'une théorie modifiée de la gravitation sans matière noire comme TeVes, il n'y aurait pas de puit de potentiel au centre de la coquille, et toutes les échelles données par les cordes de la coquille acoustique seraient amplifiées : ceci provoquerait une cassure dans la fonction de corrélation à l'échelle du diamètre de la coquille (voir figure 2.5, droite). Cette description qualitative donnée par Eisenstein dans [94] est à considérer avec précaution ; il n'existe pas à notre connaissance d'étude publiée des prédictions de MOND en terme de BAO.

## 2.3 Accélération de l'expansion et remise en cause du Principe Cosmologique

L'équation d'Einstein est le fondement de notre modèle cosmologique ; elle exprime la manière dont la géométrie de l'Univers (décrite par le tenseur d'Einstein  $\mathbf{G}_{\mu\nu}$ ) est couplée à son contenu énergétique (décrite par le tenseur énergie-impulsion  $\mathbf{T}_{\mu\nu}$ ),

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = 8\pi G \mathbf{T}_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

où  $G$  est la constante de gravitation universelle. L'expansion accélérée de l'univers peut être expliquée en ajoutant un terme  $-\Lambda g_{\mu\nu}$  dans la partie gauche de l'équation, on parle alors de constante

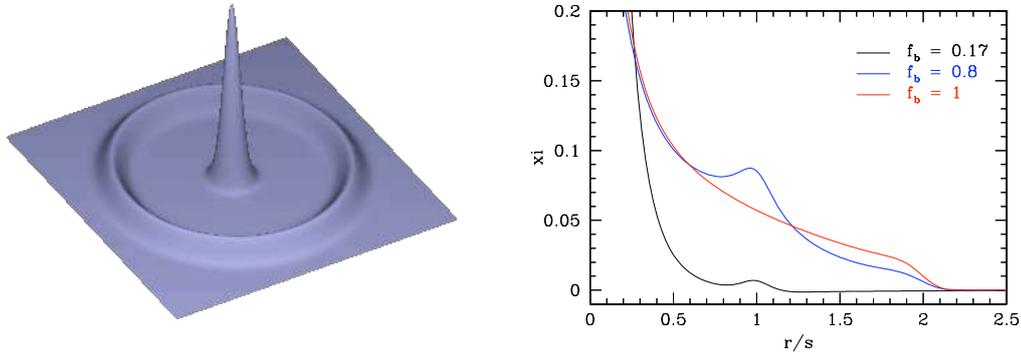


FIG. 2.5: *Gauche* : représentation de l'onde acoustique se propageant sous forme de coquille sphérique à partir d'un puits de potentiel gravitationnel dans le plasma primordial (crédit D. Eisenstein). *Droite* : fonction de corrélation attendue dans le régime linéaire pour trois valeurs différentes de la fraction de baryon du modèle,  $f_b = \Omega_b/\Omega_m$  en fonction du rapport de la distance comobile  $r$  sur le rayon de la coquille acoustique sphérique ( $s \simeq 150\text{Mpc}$ ); pour une fraction de baryon  $f_b = 0.17$ , on observe un pic à  $r = s$  (courbe bleue), alors qu'on observe une cassure à  $r = 2s$  pour un modèle sans matière noire  $f_b = 1$  (courbe rouge); graphe tiré de [94].

cosmologique, ou en ajoutant un nouveau champ fondamental dans la partie droite, on parle alors d'énergie noire, caractérisée par son équation d'état  $w = P/\rho$  (dans le cas d'une constante cosmologique,  $w = -1$  à toute époque).

Il existe en fait une troisième éventualité qui consiste à changer de métrique; la métrique du modèle standard est obtenue en simplifiant l'équation d'Einstein grâce au principe cosmologique (homogénéité et isotropie de l'Univers à grande échelle). Une violation du principe cosmologique dans un univers inhomogène conduirait ainsi à une nouvelle métrique, qui dans certaines conditions permettrait de mimer une expansion accélérée. Si la mesure du rayonnement de fond cosmique prouve que l'Univers est isotrope, l'homogénéité du cosmos reste en effet assez hypothétique aux échelles plus grandes que celles des meilleurs relevés actuels tels que 2dFGR et SDSS. Pour être plus spécifique, une apparente accélération de l'expansion de l'univers serait observée si nous nous trouvions très près du centre d'un grand vide (dont la taille plus petite que le rayon de Hubble, serait comprise entre 1 et 3 Gpc) : dans ce cas nous verrions les structures, s'effondrant vers les bords du vide, s'éloigner de nous de manière accélérée.

On peut acquérir l'intuition de la faculté qu'a ce genre de modèle à reproduire les observations cosmologiques en considérant la figure 2.6, représentant la dégénérescence entre la constante de Hubble et la courbure de l'univers dans la mesure du spectre des anisotropies de température du CMB; dans le cas d'un univers fermé où nous aurions estimé à la hausse  $H_0$  (parce que nous serions au centre de la sous-densité), nous aurions par exemple eu tort d'introduire une constante cosmologique.

La métrique Lemaître-Tolman-Bondi (imaginée dès 1933 par Lemaître puis reprise par Tolman et Bondi respectivement en 1934 et 1947), qui décrit un univers inhomogène en couches, est un des modèles simples de la cosmologie inhomogène. Dans un tel univers, les éléments du tenseur métrique dépendent non seulement du temps  $t$ , comme dans le cas d'un univers homogène, mais

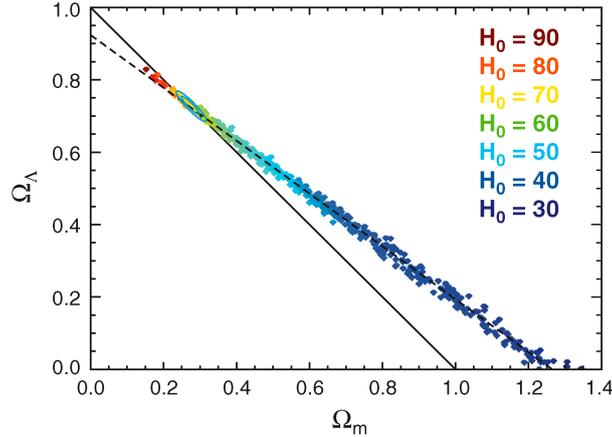


FIG. 2.6: Modèles compatibles avec les données de WMAP-7 dans le plan  $\Omega_\Lambda - \Omega_m$  (en supposant  $w = -1$ ), pour différentes valeurs de la constante de Hubble (le code de couleur est indiqué à droite du graphe). La ligne pour un univers plat,  $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$ , représentée en noir, coupe le jeu de points pour  $H_0 \simeq 71 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ . Graphe tiré de [164].

également de la coordonnée radiale  $r$ ,

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{[\partial R(t, r)/\partial r]^2}{1 + \beta(r)} dr^2 + R^2(t, r) d\Omega \quad (2.2)$$

La question de savoir si le modèle LTB (ou tout autre modèle d'univers inhomogène) est en mesure de mimer exactement l'accélération de l'expansion occupe à elle seule tout un champ de recherche de la cosmologie théorique contemporaine (les calculs sont autrement plus techniques que dans le cas de la métrique FLRW). Nous nous bornerons ici à considérer la crédibilité observationnelle d'une telle alternative, en la supposant théoriquement possible.

Remarquons d'abord que le rayon  $r_v$  du vide ne doit être ni trop petit ni trop grand ( $1 \text{ Gpc} < r_v < 3 \text{ Gpc}$ ). La limite inférieure est donnée par les observations des grands relevés, ainsi que par l'amplitude requise de l'effet. Caldwell et Stebbins [78] ont montré qu'un rayon supérieur conduirait à une distorsion de la distribution spectrale de corps noir du CMB (voir figure 2.7).

L'isotropie de la distribution des supernovae impose par ailleurs aux observateurs (i.e. nous, pauvres Terriens) d'être situés à moins de  $\sim 0.15r_v$  du centre du vide ! L'isotropie du CMB place une contrainte encore plus forte de  $\sim 0.02r_v$  (cette mesure étant toutefois dégénérée avec notre vitesse particulière), voir [80].

Nous constatons ainsi que pour le moment, les modèles d'inhomogénéité reposent sur ce que nous pourrions appeler l'hypothèse du « complot cosmique » :

1. Nous nous trouverions par hasard extrêmement près du centre d'une sous-densité parfaitement sphérique, dont le rayon serait justement compris entre la profondeur de nos grands relevés et la surface de dernière diffusion.
2. L'homogénéité et l'isotropie du fond diffus serait une malheureuse coïncidence : les inhomogénéités à grandes échelles auraient malencontreusement épargné notre coquille de CMB, comme représenté sur la figure 2.7.

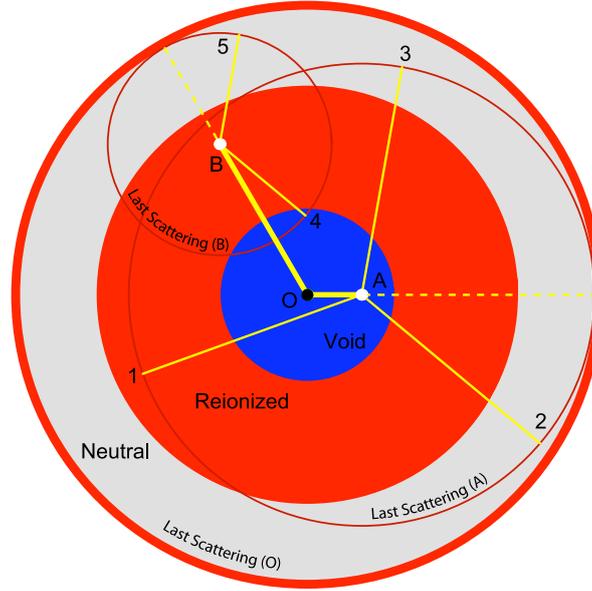


FIG. 2.7: *L'univers sans constante cosmologique dans lequel nous serions situé au centre d'un immense vide (en bleu). Les photons du CMB (lignes jaunes) diffusent sur les points A et B. A, situé à l'intérieur du vide et s'effondrant vers son bord, est en mouvement relatif par rapport au référentiel du CMB, alors que B, situé à l'extérieur est immobile dans ce même référentiel. Caldwell et Stebbins ont montré que que l'anisotropie engendrée par effet Doppler dû au mouvement de A résulterait en une distorsion spectrale du corps noir du CMB. Notons au passage le "complot cosmique" : non seulement nous sommes au centre du vide, mais par miracle, aucun vide similaire au nôtre ne croise la surface de dernière diffusion ! Schéma tiré de [78].*

Le premier point est souvent souligné, et désigné comme une remise en cause du *principe copernicien* ; le second point – porté récemment à mon attention par Ted Bunn – me semble en fait encore plus difficile à admettre !

Le dernier mot sur ces questions pourraient être apporté par des observations de variations des redshifts au cours du temps (cet effet fut prédit par Sandage en 1962 [79]). On peut en effet montrer que le redshift d'une source  $z_s$  varie durant une petite période  $\Delta t_0$ , d'une manière qui dépend exclusivement de la métrique :

$$\Delta z_s = H_0 \Delta t_0 \left( 1 + z_s - \frac{H(z_s)}{H_0} \right). \quad (2.3)$$

Un télescope pharaonique comme le E-ELT pourrait ainsi suivre pendant au moins une dizaine d'année la variation des redshifts, avec la précision suffisante pour trancher définitivement entre les modèles de vides et le modèle  $\Lambda$ CDM [80].

## 2.4 Anomalies du CMB

Les articles "officiels" de WMAP ont exploité de manière remarquable les mesures effectuées par le satellite ; à vrai dire, la plupart des implications cosmologiques intéressantes ont été étudiées dans ces publications. Elles concluent à la parfaite confirmation du modèle standard (autrement dit à l'absence d'un écart, autre que statistique, entre données et prédictions du modèle, après ajustement des paramètres cosmologiques). Ces données étant toutefois libre d'accès, des centaines d'analyses parallèles ont été publiées, en particulier en ce qui concerne la détection d'éventuels écarts au modèle standard, souvent par le biais d'une détection d'un motif irrégulier dans les cartes ou les spectres de puissance. Ceux-ci ont ainsi été scrutés et analysés sous toutes les coutures, sans qu'aucun résultat probant ne soit obtenu. Il me semble *a contrario* que si un enseignement doit être tiré de toute cette agitation, c'est justement la stupéfiante adéquation entre données du CMB et modèle standard.

Ce genre de recherche est en fait confrontée à un certain nombre d'écueils d'analyse statistique que nous allons discuter brièvement ; nous aborderons également plus en détail le cas particulier de la recherche de non-gaussianités.

### 2.4.1 Méthodologie statistique et science expérimentale

Des problèmes statistiques assez subtils apparaissent dès lors qu'on entreprend de montrer que des données soumises à une certaine variance d'échantillonnage favorisent tel modèle (ou théorie<sup>7</sup>) plutôt qu'un autre. Dans le cas de l'étude des données CMB, l'échantillon est l'univers observable (on parle généralement de *variance cosmique*), et le modèle que l'on cherche à falsifier au profit d'un autre est le modèle standard  $\Lambda$ CDM.

Un premier écueil bien connu est celui lié à l'introduction de nouveaux degrés de liberté. Lorsque l'on souhaite départager deux théories concurrentes, il ne suffit pas de comparer leurs efficacités respectives à reproduire les données (en comparant les  $\chi^2$  calculés par la méthode des moindres carrés par exemple) ; il faut également tenir compte de leurs nombres respectifs de degrés de liberté internes. Une des méthodes bien connues qui permet de résoudre ce problème est celle de la preuve bayésienne ("Bayesian evidence"). Le lecteur trouvera en [97] une bonne introduction aux approches bayésiennes. La fonction de vraisemblance d'un modèle est obtenue par intégration de la fonction de vraisemblance dans l'espace des paramètres – vu à travers la probabilité *a priori* bayésienne (le "prior"). Le rapport des fonctions de vraisemblance de deux modèles (que l'on désigne comme le *facteur de Bayes*) permet d'estimer si le nouveau modèle apporte une amélioration significative par rapport au modèle à falsifier. Si l'on oublie les subtilités du débat entre bayésiens et fréquentistes, cela revient dans les cas simples (de variances gaussiennes identiques et non corrélées) à étudier l'évolution des  $\chi^2$  réduits (rapports des  $\chi^2$  sur le nombre de degrés de liberté de chaque modèle) : un  $\chi^2$  réduit inférieur à 1 indique un modèle qui surconditionne les données.

Considérons l'exemple trivial suivant : nous générons un jeu de données de N points satisfaisant à l'équation d'une droite dans un plan cartésien, chaque point étant affecté d'une variance

<sup>7</sup>Nous emploierons ici indifféremment l'un ou l'autre terme ; en disciple de Quine et à rebours des vues de nombreux physiciens, nous pensons que la différence entre les deux termes, si elle a un sens pratique, est particulièrement artificielle d'un point de vue épistémologique.

d'échantillonnage gaussienne ; le modèle à falsifier est constitué par l'équation d'une droite, le modèle concurrent par un polynôme de degré  $n$ . Le modèle concurrent reproduira d'autant mieux les données que  $n$  est grand. On peut par contre vérifier que la procédure de la preuve bayésienne ne favorisera pas les modèles concurrents par rapport au modèle standard de la droite.

L'application de ce genre de procédure n'est pourtant pas toujours aussi aisée ; prendre en compte tous les degrés de libertés peut se révéler plus difficile qu'il n'y paraît, ceux-ci pouvant par exemple se dissimuler derrière certains principes ou postulats implicites de la théorie.

Un deuxième écueil, plus retors, est celui lié à l'analyse *a posteriori* des données. Une distribution aléatoire suivant une certaine loi de probabilité présentera toujours nombre de particularités, dont le degré de probabilité était *a priori* (i.e. avant que le tirage soit effectué ou avant que l'observateur n'en prenne connaissance<sup>8</sup>) extrêmement faible. Un observateur dont l'objectif est de déterminer la loi sous-jacente à la distribution observée est ainsi bien en peine de distinguer les particularités du signal induites par la loi fondamentale de celles induites par le simple hasard. Les données WMAP ayant été examinées *ad libitum*, les exemples de particularités prétendument troublantes abondent : faible amplitude du quadrupôle, alignement des bas multipôles, asymétrie nord-sud ou encore initiales de Stephen Hawking (voir figure 2.8). Nous renvoyons le lecteur à l'excellent article WMAP-7 de Bennett et al. [162] pour une revue critique.

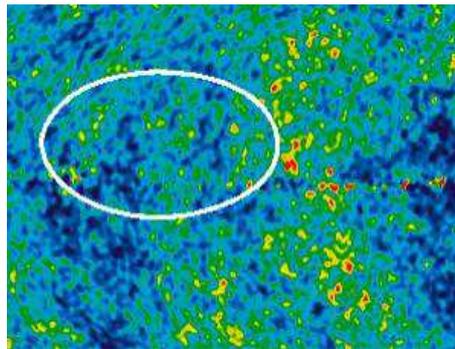


FIG. 2.8: *Les initiales de Stephen Hawking dans la carte ILC de WMAP. La probabilité a priori qu'un tel motif apparaisse dans les anisotropies de température du fond diffus est quasiment nulle. Une analyse a posteriori des données pourrait ainsi conclure à une falsification à  $8\sigma$  (au moins...) du modèle standard si un malicieux théoricien bâtissait également a posteriori un modèle alternatif capable de les prédire.*

Il n'existe pas à ma connaissance de solution universelle à ce problème, mais plutôt une liste de recettes plus ou moins efficaces adaptées au cas par cas. Les physiciens de l'expérience Auger, qui observent un très petit nombre de rayons cosmiques d'ultra-haute énergie (soumis à une variance poissonnienne), utilisent par exemple des techniques dites de "prescriptions". Ils analysent l'ensemble de leurs données sans aucune contrainte, et lorsqu'ils pensent avoir trouver un modèle sous-jacent (récemment l'anisotropie du fond de rayons cosmiques UHE), ils l'utilisent pour prédire le comportement des données qui seront acquises dans le futur. La "prescription" s'énonce à peu près sous cette forme : "à partir de la date xx/xx/xx, le modèle prédit que les données auront telles caractéristiques" ; il n'y a alors plus qu'à attendre patiemment une confirmation ou une infirmation du modèle par les données.

<sup>8</sup>La question de savoir si ces deux éventualités sont équivalentes dépasse le cadre de cette discussion...

Les physiciens engagés dans les expériences de détection directe de matière noire (comme CDMS [81]) utilisent quant à eux une technique dite d'"analyse aveugle". L'analyse des données est mise en place à partir de données générées par simulations Monte-Carlo, avant qu'une campagne d'acquisition de données ne débute. Durant la phase d'acquisition, la partie du jeu de données incluant le signal recherché (les interactions des particules de matière noire) est masquée, et l'analyse des données effectuée par les physiciens (les "coupures d'événements" pour utiliser le langage des "particulistes") n'est ainsi pas biaisée : ceux-ci ne sont par exemple pas tentés (inconsciemment bien sûr...) de favoriser une analyse qui indiquerait une détection.

Nous l'avons compris, ces considérations statistiques dépassent largement le cadre des données CMB ou même de la cosmologie ; elles sont en fait pertinentes pour toute science expérimentale dont les données sont irréductiblement soumises à une certaine variance d'échantillonnage (mais ne commencent à occuper une place prépondérante dans un domaine scientifique que lorsque celui-ci atteint un certain degré de maturité). La situation des physiciens contemporains confrontés à cette problématique ne manque ainsi pas d'une certaine ironie : ceux-ci doivent parfois volontairement renoncer à connaître les données des expériences lorsqu'ils élaborent leurs nouveaux modèles, en vue de renforcer leur future crédibilité !

Pour en revenir aux études des anomalies du CMB, on comprend que les techniques décrites ci-dessus ne soient pas applicables (surtout à présent que les mesures aux grandes et moyennes échelles des spectres de puissance sont limitées par la variance cosmique). Rappelons à ce propos ce fait capital sur lequel nous avons déjà insisté : ces spectres ont été prédits par le modèle standard à la fin des années 1980 (voir figure 3.4) – même si les paramètres cosmologiques ont ensuite été ajustés sur les spectres expérimentaux. Autrement dit, le modèle standard n'a pas été conçu *a posteriori* des mesures CMB. Les études qui visent à détecter des écarts au modèle par analyse *a posteriori* des cartes et des spectres se heurtent ainsi d'autant plus aux difficultés évoquées. Toute annonce d'une falsification à  $3\sigma$  ou même  $4\sigma$  du modèle standard, fondée sur la détection d'un motif très particulier de la distribution des anisotropies (et sur un modèle – ou plus raisonnablement sur une extension du modèle standard – spécialement bâti *a posteriori* afin de prédire ce motif) doit donc être examinée avec la plus grande prudence. Remarquons d'ailleurs qu'il était statistiquement prévisible que quelques unes des centaines d'analyses publiées ou mises en ligne sur *arXiv* annonceraient des détections à  $3\sigma$  d'un motif non prédit par le modèle standard dans les données du CMB : c'est en réalité le cas contraire qui aurait été troublant ! Ce genre de détections pourraient néanmoins s'avérer intéressantes dans le cas où le modèle exotique sous-jacent permettrait de prédire une déviation attendue dans un autre canal d'observation.

### 2.4.2 Non-gaussianités

Bien que les mesures des anisotropies du CMB aient confirmé de manière stupéfiante la gaussianité des fluctuations primordiales, la détection de non-gaussianités est actuellement un champ de recherche important (surtout si on utilise comme estimateur de cette importance, le nombre de preprints *arXiv* consacrés au sujet).

Les calculs concernant l'Univers primordial utilisent en général des approximations linéaires, ce qui conduit à une statistique parfaitement gaussienne des perturbations de densité primordiales et de la métrique. L'écart faible à la gaussianité d'un champ de perturbations peut être modélisé par l'ajout d'un terme quadratique à l'approximation linéaire :

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi_L(\vec{x}) + f_{NL} [\Phi_L^2(\vec{x}) - \langle \Phi_L^2(\vec{x}) \rangle]. \quad (2.4)$$

Les perturbations du second ordre générées dans le cadre de modèles d'inflation à un seul champ induisent déjà des non-gaussianités, mais à un niveau indétectable, de l'ordre de grandeur des paramètres du *slow-roll*  $f_{NL} \sim \mathcal{O}(\epsilon, \eta) \sim 10^{-2}$  (cf. chapitre 3).

La détection d'un niveau plus élevé de non-gaussianités  $f_{NL} \sim 1$  éliminerait ainsi les modèles d'inflation les plus simples au profit de modèles plus complexes tels que les modèles dit hybrides (combinant plusieurs champs [63]), les modèles hors approximation de *slow-roll*, les modèles de *reheating* inhomogène, ou encore les modèles de *curvaton* (dans lesquels les fluctuations sont isocourbes).

Des limites supérieures sont aujourd'hui placées sur le paramètre  $f_{NL}$  grâce aux relevés de structures aux grandes échelles [84] ( $-31 < f_{NL} < +70$ ) et à l'analyse des données WMAP [135] ( $-9 < f_{NL} < +111$ ). Planck devrait permettre d'améliorer la précision de ces mesures par un ordre de grandeur.

Un nombre relativement important d'études ont annoncé une détection de non-gaussianités primordiales, la plupart se basant sur les données publiques WMAP. Ces résultats doivent, je crois, être considérés avec la plus grande prudence, étant donné la faiblesse du signal recherché et la propension des avants-plans galactiques à être hautement non-gaussiens. Certaines des études procèdent à une série de tests afin de confirmer ou d'infirmer le caractère primordial de ces non-gaussianités ; on peut par exemple répéter l'analyse en utilisant un masque galactique variable, afin de déterminer si le signal est constant sur la carte ou concentré dans le plan galactique ; on peut également répéter l'analyse en supprimant certaines gammes de multipôles, afin de déterminer les échelles auxquelles ces non-gaussianités sont dominantes (on sait par exemple qu'un signal détecté aux grands multipôles où le bruit de WMAP devient important sera peu crédible). Il faut malheureusement constater que toutes les études mises en ligne sur *arXiv* ne s'embarrassent pas de tels tests. Disons pour conclure – sur un ton plus politiquement correct – qu'aucune détection de non-gaussianités primordiales ne fait aujourd'hui l'objet d'un consensus au sein de la communauté.

## 2.5 Futur proche de la cosmologie observationnelle

Le modèle standard de la cosmologie est ainsi fondé sur des bases observationnelles particulièrement robustes, si bien qu'il semble difficile d'imaginer une révolution future aboutissant à un changement complet de paradigme. Disons que la description de l'énergie noire est la seule partie du modèle qui semble susceptible d'évoluer radicalement.

Les prochaines décennies pourraient toutefois être porteuses de découvertes majeures qui étoufferaient le paradigme de manière significative. En voici une liste, bien sûr non-exhaustive :

1. **Détection directe de matière noire.** Les expériences engagées dans cette quête commencent à atteindre les régions intéressantes en terme de masses et de sections efficaces des particules candidates prédites par les extensions du modèle standard de la physique des particules ; une telle détection marquerait un triomphe sans précédent de la cosmologie en ce qu'une de ses découvertes bouleverserait définitivement la physique des particules. Ajoutons que les expériences CDMS [81] et Edelweiss [82] ont récemment observé pour la première fois des événements "candidats" : il est cependant trop tôt pour dire si ceux-ci sont la signature de particules de matière noire ou s'ils résultent de simples fluctuations statistiques du bruit de fond. Cette question devrait être tranchée dans les mois à venir, notamment grâce aux futurs

résultats de l'expérience XENON100 [83].

2. **Détection des modes B de polarisation du CMB.** Nous développerons évidemment ce point au chapitre 3.
3. **Falsification de la constante cosmologique,  $w(z) \neq -1$ .** Une telle découverte serait bien entendu plus excitante qu'une confirmation à la quatrième décimale de  $w(z) = -1$ .
4. **Détection de non-gaussianités primordiales.** Cette détection marquerait la présence de processus non-linéaires lors de la génération des perturbations et placerait des contraintes fortes sur les modèles inflationnaires. Comme nous l'avons vu, une telle détection est extrêmement délicate d'un point de vue expérimental.
5. **Modification de la relativité générale à petite ou grande échelle.** Il est remarquable qu'après un siècle si riche en observations de toute sorte, la relativité générale constitue toujours le socle théorique de la cosmologie. En plus des expériences dédiées à la "tester" à toutes les échelles, de nombreuses études sont constamment effectuées à partir du jeu de données cosmologiques en vue de sa falsification au profit d'extensions minimales paramétrisées post-newtoniennes. Une récente agitation sur *arXiv* a mis en relief la subtilité de ce genre d'étude (un article [98] annonçant une falsification a finalement été retiré).

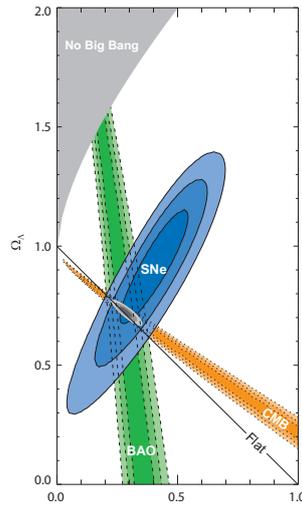


FIG. 2.9: Régions compatibles à 68,3%, 95,4% et 99,7% dans le plan  $\Omega_\Lambda - \Omega_m$  avec les données du CMB, des BAO et du jeu de données Union SNe Ia, ainsi que leur combinaison (en supposant  $w = -1$ ), en 2010. Figure extraite de [69].

La tendance est à la mise en place d'expériences de plus en plus coûteuses car de plus en plus complexes aussi bien du point de vue instrumental que de celui de l'analyse des données. Les efforts se portent d'un côté sur les mesures de polarisation du CMB (voir section 3.4.4), et de l'autre sur la détermination de l'équation d'état de l'énergie noire et de son éventuelle évolution (les sondes privilégiées étant supernovae, oscillations acoustiques des baryons et lentillage faible). Certaines voix discordantes s'élèvent pour dénoncer cette tendance "particuliste" de la communauté à concentrer tous ses efforts sur des objectifs trop ciblés ; il faut en effet admettre que les retombées scientifiques des missions labellisées "modes B" ou "énergie noire", seraient, en cas d'échec (i.e. en cas de non détection des modes B ou de non falsification de la constante cosmologique), assez faibles, pour user d'un euphémisme. C'est d'ailleurs pour ce genre de raison qu'un satellite post-Planck uniquement dédié à la polarisation ne sera probablement pas financé

par l'ESA ou la NASA tant qu'un signal n'aura pas été détecté par une mission sonde pionnière de coût raisonnable (du type de QUBIC par exemple...).

Un autre domaine sans doute amené à prendre une place considérable dans le paysage de la cosmologie observationnelle des trente prochaines années est celui des grands sondages radio de la ligne à 21 cm de l'hydrogène neutre. En raison de l'étroitesse de cette ligne, les interféromètres radios d'une extraordinaire sensibilité tel le SKA, pourront sonder les époques de réionisation par fines tranches de redshift, potentiellement jusqu'à  $z \sim 20$ . Les retombées aussi bien astrophysiques que cosmologiques (la distinction étant d'ailleurs un peu artificielle ici) sont potentiellement gigantesques. De nombreux problèmes expérimentaux devront d'abord être résolus, comme ceux liés au coût computationnel de telles expériences ou ceux liés à la synthèse d'image (nous discuterons aux chapitres 4 et 10 des liens conceptuels existants entre l'interférométrie bolométrique dédiée au CMB et la radio-interférométrie).

Ajoutons, pour être complet, que des projets pharaoniques tels que le JWST, LISA ou le E-ELT pourraient apporter, en supplément de la moisson astrophysique pour laquelle ils auront été conçus, leurs lots de surprises cosmologiques.



## Chapitre 3

# Le Fond Diffus Cosmologique et sa polarisation

La description moderne de la théorie du fond diffus cosmologique est basée sur la résolution de l'équation de Boltzmann relativiste dans un espace-temps en expansion. Il ne sera pas question ici de traiter de ce vaste problème aussi complexe d'un point de vue mathématique que d'un point de vue numérique. Nous aborderons plutôt la science du fond diffus par la face réservée aux expérimentateurs : ceux-ci estiment, à partir des cartes du fond, les spectres de puissance angulaire des anisotropies de température ou de polarisation (toute l'information physique y est contenue, en raison de la parfaite gaussianité des fluctuations). Ces spectres ont été théoriquement prédits dans les années 1980, par intégration numérique de l'équation de Boltzmann relativiste (cf. figure 3.4 et [112]). Un remarquable travail analytique [108, 109] a été effectué par Hu et Sugiyama au milieu des années 1990, permettant de séparer et d'appréhender intuitivement les empreintes laissées dans les spectres par chacun des processus affectant les photons du fond, de la génération des perturbations primordiales aux perturbations secondaires sur la ligne de visée, en passant par la physique du plasma primordial.

Nous essaierons ici de suivre cette approche qualitative et de décrire (dans les grandes lignes et sans équation) la physique sous-jacente à la forme des spectres de puissance de température et de polarisation, véritables codex de la cosmologie moderne.

### 3.1 Le plasma primordial

Le modèle standard de la cosmologie décrit l'univers, au sortir de la nucléosynthèse primordiale des trois premières secondes, comme un plasma très fortement homogène en équilibre thermique, composé d'un bain couplé de noyaux d'hydrogène et d'hélium, d'électrons, de neutrinos, de photons et de matière noire.

Les infimes et pourtant si importantes graines d'inhomogénéité ( $\Delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$  à la recombinaison) auraient été imprimées par les fluctuations quantiques du champ inflationnaire. Nous verrons que l'étude du fond diffus cosmologique nous apprend que ces petites fluctuations sont adiabatiques, i.e. en proportion identique pour chacun des composants (baryons, photons, matière noire).

Leur amplitude reste constante tant que le rayonnement domine l'expansion de l'Univers. Lorsque est atteint l'égalité matière-rayonnement, l'expansion devient gouvernée par la matière et les zones sur-denses en deçà du rayon de Hubble commencent à s'effondrer sous l'action de la gravité. Les électrons et les photons sont alors très fortement couplés par diffusion Compton (le libre parcours moyen d'un photon étant tout de même de quelques kpc...). La pression de radiation des photons s'opposant à l'effondrement gravitationnel des baryons dans les puits de potentiel gravitationnels, des oscillations acoustiques naissent au sein du fluide ; nous y reviendrons.

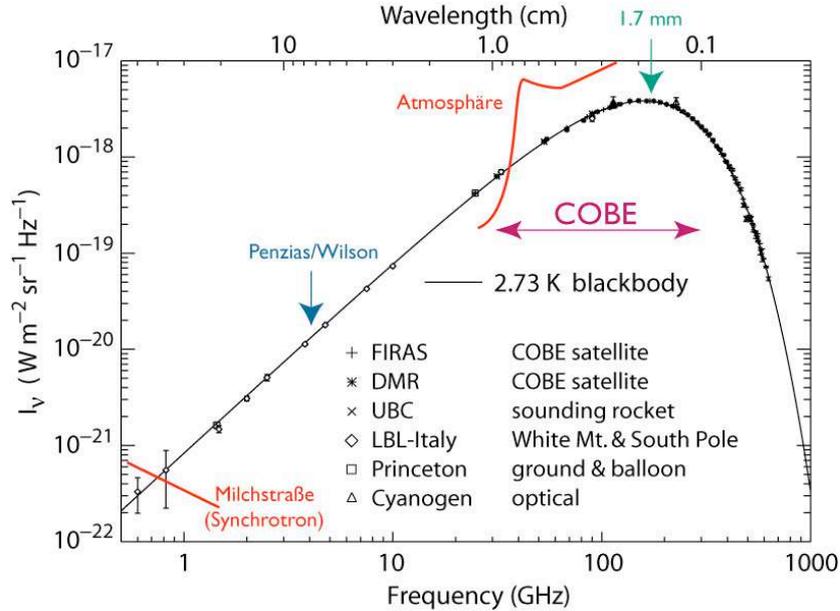


FIG. 3.1: Spectre en fréquence du fond diffus cosmologique, compilation des mesures existantes.

L'expansion continue de causer le refroidissement de l'univers, et vers  $z = 1100$ , la température a suffisamment diminué pour que les électrons puissent se lier aux noyaux d'hydrogène et d'hélium : on nomme cette phase *la recombinaison*<sup>1</sup>. L'univers devient alors soudainement neutre ; le couplage baryon-photon devenu négligeable, les baryons sont libres de s'effondrer dans les puits de potentiel de matière noire : on nomme cette phase *le découplage* (ces effondrements gravitationnels donneront par la suite naissance aux grandes structures de l'univers). Les photons s'échappent quant à eux des puits de potentiels et se propageront dès lors jusqu'à nous, sans plus subir d'interactions pour la plupart. L'image d'un univers en équilibre thermique, traversé par des oscillations acoustiques, est ainsi figée dans ce fond diffus de photons, véritable fossile cosmique dont la signature spectrale doit respecter la loi du corps noir de Planck. La distribution spectrale d'un fond de photons étant conservée au cours du temps dans un univers en expansion, on s'attend à ce que la température de corps noir évolue en fonction du redshift comme

$$T(z) = T_0(1 + z). \quad (3.1)$$

La signature spectrale du CMB a été mesurée en 1992 avec une extrême précision par l'instrument FIRAS embarqué sur COBE (figure 3.1). Elle suit parfaitement la forme d'un spectre de corps noir à la température,

$$T_0 = 2,725 \pm 0,003 \text{ K} \quad (3.2)$$

<sup>1</sup>Ce terme historique est mal choisi, puisque les électrons et les noyaux n'ont jamais été "combinés" plus tôt dans l'histoire de l'univers.

Redisons que ceci constitue une observation très forte en faveur du modèle de Big Bang puisqu'il est extrêmement difficile d'imaginer un processus astrophysique local aboutissant à ce genre de spectre. Notons enfin que des observations de nuages absorbants à  $z = 2.34$  et  $z = 2.41$  ont permis en 2000 et en 2008 à Srianand et al. [85, 86] de mesurer l'évolution de la température du fond en fonction du redshift (figure 3.2) en bon accord avec l'équation 3.1. Les photons de la queue de distribution du fond sont en effet susceptibles d'exciter les deux premiers niveaux hyperfins d'un nuage de carbone neutre : la mesure des raies spectrales associées donne ainsi accès à la température du CMB au redshift du nuage. La principale difficulté de ce genre d'étude réside dans la nécessaire soustraction des contributions astrophysiques engendrant la même excitation (collision avec électrons ou atomes d'hydrogène, rayonnement ultra-violet).

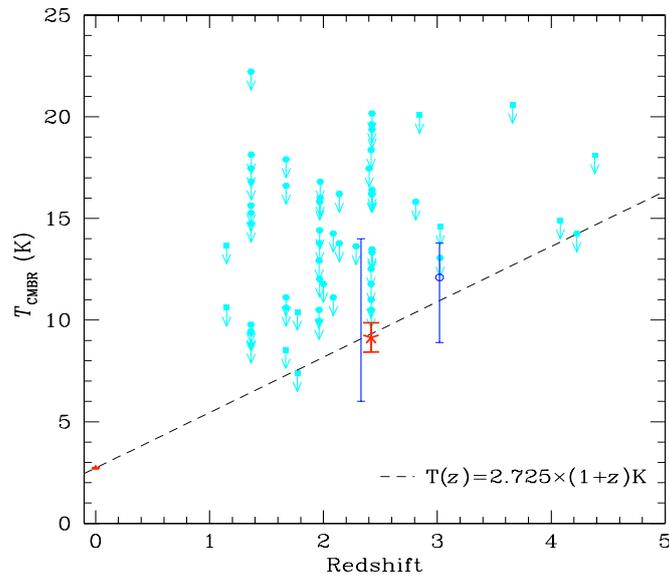


FIG. 3.2: Mesures de la température du fond diffus cosmologique à différents redshifts ; en particulier à  $z = 2.41$ , [86] obtiennent  $T = 9.15 \pm 0.72$  K (point rouge), en bon accord avec le modèle standard (ligne pointillée) qui prédit  $T = 9.31$  K.

## 3.2 Anisotropies de température

### 3.2.1 Le spectre de puissance angulaire des fluctuations

Les expériences CMB mesurent, depuis COBE, les fluctuations de température  $\Delta T(\vec{n})$  par rapport à la température moyenne du fond<sup>2</sup>,  $T_0$ . Les fluctuations de température observées s'avèrent suivre de façon absolument remarquable une loi de distribution aléatoire gaussienne (voir section 2.4.2 pour une discussion sur les non-gaussianités). Dans le cadre du modèle standard, nous verrons que cela découle naturellement de leur origine, les fluctuations quantiques du champ de

<sup>2</sup>Il est d'ailleurs beaucoup plus aisé d'un point de vue expérimental de procéder à une mesure différentielle qu'à une mesure absolue de la température. Il n'y a eu que très peu d'expériences de mesure de température absolue post-FIRAS ; ce qui est dommage, car il y aurait sans doute une science intéressante à en tirer, spécialement à basse fréquence (voir par exemple [87]).

l'inflation. La totalité de l'information statistique d'une distribution aléatoire gaussienne est contenue dans la fonction de corrélation à deux points définie par,

$$C(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \langle \Delta T(\vec{n}_1) \Delta T(\vec{n}_2) \rangle, \quad (3.3)$$

où  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont deux vecteurs unitaires pointant sur la sphère céleste, et où la moyenne porte sur l'ensemble des réalisations d'Univers. Le principe cosmologique (et plus particulièrement le principe d'isotropie) implique que la corrélation ne dépend en fait que de l'écart angulaire entre les deux directions d'observation, c'est-à-dire de  $\cos \theta = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$  : on la note alors  $C(\theta)$ . Il est donc naturel de décomposer le champ scalaire des anisotropies de température sur la sphère dans la base des harmoniques sphériques,

$$\frac{\Delta T}{T}(\vec{n}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^T Y_{\ell m}(\vec{n}), \quad (3.4)$$

où le multipôle  $\ell$  est le conjugué de l'échelle angulaire (on a approximativement  $\ell \sim \pi/\theta$  pour  $\ell \gg 1$ ) et où les coefficients  $a_{\ell m}^T$  s'écrivent, par orthogonalité des  $Y_{\ell m}$ ,

$$a_{\ell m}^T = \int \frac{\Delta T}{T}(\vec{n}) Y_{\ell m}^*(\vec{n}) d\vec{n}. \quad (3.5)$$

Notons qu'il est possible d'envisager d'autres décompositions (en particulier dans le cas où les cartes du ciel sont incomplètes et où les fonctions harmoniques ne sont plus exactement orthogonales); des décompositions du type "ondelettes" peuvent potentiellement être intéressantes dans le cadre de recherche de non-gaussianités par exemple. La décomposition en harmonique sphérique s'est néanmoins jusqu'à présent révélée suffisante dans la plupart des études du CMB. La variance des coefficients s'exprime comme

$$\langle a_{\ell m}^T a_{\ell' m'}^{T*} \rangle = \left\langle \int \frac{\Delta T}{T}(\vec{n}_1) Y_{\ell m}^*(\vec{n}_1) d\vec{n}_1 \int \frac{\Delta T}{T}(\vec{n}_2) Y_{\ell' m'}(\vec{n}_2) d\vec{n}_2 \right\rangle \quad (3.6)$$

$$= \int \int C(\theta) Y_{\ell m}^*(\vec{n}_1) Y_{\ell' m'}(\vec{n}_2) d\vec{n}_1 d\vec{n}_2. \quad (3.7)$$

Si nous décomposons  $C(\theta)$  sur la base des polynômes de Legendre et notons  $(2\ell + 1)C_\ell/(4\pi)$  les coefficients de la décomposition,

$$\langle a_{\ell m}^T a_{\ell' m'}^{T*} \rangle = \iint \sum_{\ell''=0}^{\infty} \frac{2\ell'' + 1}{4\pi} C_{\ell''} P_{\ell''}(\cos \theta) Y_{\ell m}(\vec{n}_1) Y_{\ell' m'}^*(\vec{n}_2) d\vec{n}_1 d\vec{n}_2. \quad (3.8)$$

Le théorème d'addition des harmoniques sphériques,

$$P_\ell(\cos \theta) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\vec{n}_1) Y_{\ell m}^*(\vec{n}_2), \quad (3.9)$$

nous permet alors d'écrire

$$\langle a_{\ell m}^T a_{\ell' m'}^{T*} \rangle = C_\ell^{TT} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (3.10)$$

Ce coefficient  $C_\ell^{TT}$  est le spectre de puissance angulaire des anisotropies de température. Le monopôle ( $\ell = 0$ ) correspond à la moyenne de la température sur le ciel,  $T_0$ . Le dipôle ( $\ell = 1$ )

résulte de l'effet Doppler consécutif à la vitesse relative de l'observateur par rapport à la surface de dernière diffusion ; COBE a mesuré pour ce dipôle une direction

$$(l, b) = (264, 31^\circ \pm 0, 04^\circ \pm 0, 16^\circ, +48, 05^\circ \pm 0, 02^\circ \pm 0, 09^\circ) \quad (3.11)$$

et une amplitude [130]

$$T_1 = 3, 358 \pm 0, 001 \pm 0, 023 \text{ mK.} \quad (3.12)$$

Celui-ci peut ainsi être modélisé en fonction de l'angle  $\theta$  que fait la direction d'observation avec l'axe du dipôle :

$$\Delta T(\theta) = 3, 358 \times 10^{-3} \cos \theta \text{ K.} \quad (3.13)$$

Les multipôles d'ordre supérieur du spectre de puissance ( $\ell \geq 2$ ) encodent toute la physique du plasma primordial. Le principe d'isotropie implique, nous l'avons vu, l'indépendance des modes méridiens  $m$ . Le caractère réel (au sens de non complexe) du champ de température sur le ciel permet d'écrire la relation

$$a_{\ell m}^T = (-1)^m a_{\ell -m}^{T*}, \quad (3.14)$$

qui implique que le nombre de coefficients indépendants pour chaque  $\ell$  est  $2\ell + 1$ . L'estimateur non-biaisé le plus simple, pour des données non bruitées, du spectre de puissance angulaire est ainsi donné par la variance de ces  $2\ell + 1$  coefficients indépendants :

$$\hat{C}_\ell^T = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}^T|^2. \quad (3.15)$$

L'incertitude statistique liée au nombre limité de modes méridiens observés est appelée variance cosmique :

$$\Delta \hat{C}_\ell^T = \sqrt{\frac{1}{2\ell + 1}} C_\ell. \quad (3.16)$$

Nous avons évoqué en section 2.4 les difficultés d'interprétation statistique qu'engendre l'importance de cette variance cosmique aux bas multipôles. Notons qu'il est n'est pas inenvisageable d'être un jour en mesure de "batter" cette variance ; au delà de la solution la plus simple qui consisterait à attendre quelques milliards d'années afin d'observer une autre surface de dernière diffusion, il sera peut-être bientôt possible de mesurer des quadrupôles distants. La diffusion du quadrupôle "vu" par le gaz d'électrons d'un amas lointain entraîne en effet une sorte d'effet SZ polarisé (cf. section 3.2.3) qui serait potentiellement détectable (voir par exemple [11]).

### 3.2.2 Anisotropies primaires

La forme du spectre de puissance angulaire des anisotropies s'explique principalement par la physique du plasma primordial, par la géométrie de l'univers et par la nature des fluctuations de densités primordiales. Nous essayons de décrire ici qualitativement la manière dont ces processus physiques engendrent ces *anisotropies primaires*.

### Oscillations acoustiques du fluide photons-électrons-baryons

Le mécanisme des oscillations acoustiques s'examine plus facilement dans l'espace de Fourier. Remarquons d'abord ce point crucial : tous les modes spatiaux d'une même taille passent simultanément en dessous du rayon de Hubble, et commencent à osciller simultanément ; si bien que lors

de la recombinaison, la phase de l'oscillation atteinte par un certain mode est proportionnelle à sa longueur d'onde. Autrement dit, on s'attend à observer des oscillations dans le spectre de puissance des anisotropies. Les pics impairs correspondent aux modes figés par la recombinaison en phase de compression, les pics pairs correspondent aux modes figés en phase de dilatation.

La masse des baryons déséquilibre l'oscillateur en changeant le rapport entre pression et gravité au sein du fluide ; l'amplitude des sur-densités est ainsi plus importante que celle des sous-densités. Ceci explique pourquoi les pics pairs du spectre de puissance sont moins élevés que les pics impairs (si on fait abstraction de l'amortissement de Silk bien-sûr), et pourquoi le rapport  $\Omega_b/\Omega_m$  est intimement lié à l'amplitude relative des pics pairs et impairs (voir figure 3.3). Nous avons en particulier vu au chapitre 2 qu'il est très difficile pour les modèles sans matière noire d'expliquer la hauteur importante du troisième pic par rapport au second.

### Effet Sachs-Wolfe

L'effet Sachs-Wolfe est le mécanisme par lequel les fluctuations de densité du fluide photon-baryon laissent une empreinte sur la température des photons du fond diffus. Il résulte de la combinaison de deux processus opposés. La température moyenne des photons tombés à l'intérieur d'un puit de potentiel gravitationnel est plus élevée d'un facteur

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{3} \frac{\delta\Phi}{c^2}, \quad (3.17)$$

où  $\delta\Phi$  est la variation relative du potentiel gravitationnel. Il faut cependant prendre en compte le fait que ces photons subissent un redshift gravitationnel en s'échappant du puit,

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\delta\Phi}{c^2}. \quad (3.18)$$

La somme de ces deux effets voit la perte d'énergie l'emporter sur le gain,

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{3} \frac{\delta\Phi}{c^2}. \quad (3.19)$$

Ainsi, les points froids (de température inférieure à la température moyenne) du fond diffus cosmologique correspondent en réalité à des sur-densités au sein du plasma primordial.

### Effet Doppler

Les électrons diffuseurs ont une vitesse propre, induisant un effet Doppler sur les photons. L'effet Doppler est ainsi minimal pour une fluctuation ayant atteint un extremum de densité, et maximal pour une fluctuation de densité moyenne (la fluctuation est dans ce cas "en train" de s'effondrer ou de se dilater), ce qui explique l'anti-corrélation de cet effet avec l'effet Sachs-Wolfe, comme on le voit sur la figure 3.3. Notons par ailleurs que cet effet est sous-dominant (ce ne serait pas le cas si la masse des baryons était négligeable).

### Amortissement de Silk

Les échelles plus petites que le libre parcours moyen des photons à la recombinaison sont progressivement gommées dans le spectre de puissance, comme on le voit sur la figure 3.3. Ce pro-

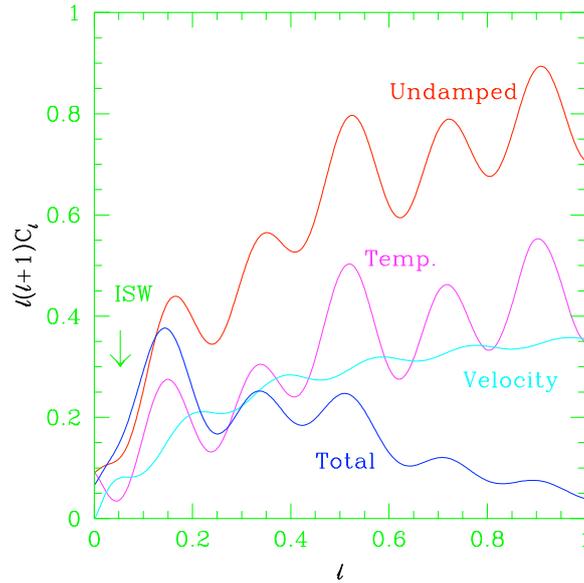


FIG. 3.3: Contributions au spectre de puissance de l'effet Sachs-Wolfe (courbe violette) et de l'effet Doppler (courbe bleu claire). On note l'anti-corrélation des crêtes. La somme des deux contributions est représentée avant (courbe rouge) et après (courbe bleu foncée) prise en compte de l'amortissement de Silk. Graphe tiré de [111].

cessus a été prédit par Silk en 1968 [105]. L'épaisseur de la surface de dernière diffusion (la recombinaison n'est pas instantanée) accroît cet amortissement.

### Perturbations adiabatiques

L'observation des anisotropies aux moyennes échelles a permis de trancher entre deux scénarios distincts qui prévalaient à la fin des années 1980, pour la génération des fluctuations primordiales : les perturbations isocourbes, signature des modèles de défauts topologiques et les perturbations adiabatiques, signature des modèles d'inflation.

Dans le cas des modèles d'inflation à un champ scalaire, on peut en effet montrer l'existence d'une relation particulière entre les contrastes de densité des différentes espèces. A une sur-densité de matière noire, correspond ainsi une sur-densité de photons, et donc de température, de manière originelle. Autrement dit l'inflation génère en tout point des fluctuations de densité proportionnellement identiques pour tous les composants du fluide primordial : ce sont les fluctuations adiabatique. Les fluctuations isocourbes seraient telles que la somme des fluctuations de densité de toutes les espèces soient nulles. La figure 3.4 montre la différence de prédiction des deux modèles.

### Echelles au delà de l'horizon

Les échelles plus grandes que le degré sur la carte 3.6 n'étaient pas liées causalement à la recombinaison et les anisotropies observées sont directement les fluctuations primordiales de densité ; l'homogénéité constatée est ainsi particulièrement intrigante (voir section 3.4.1). Le fait que le

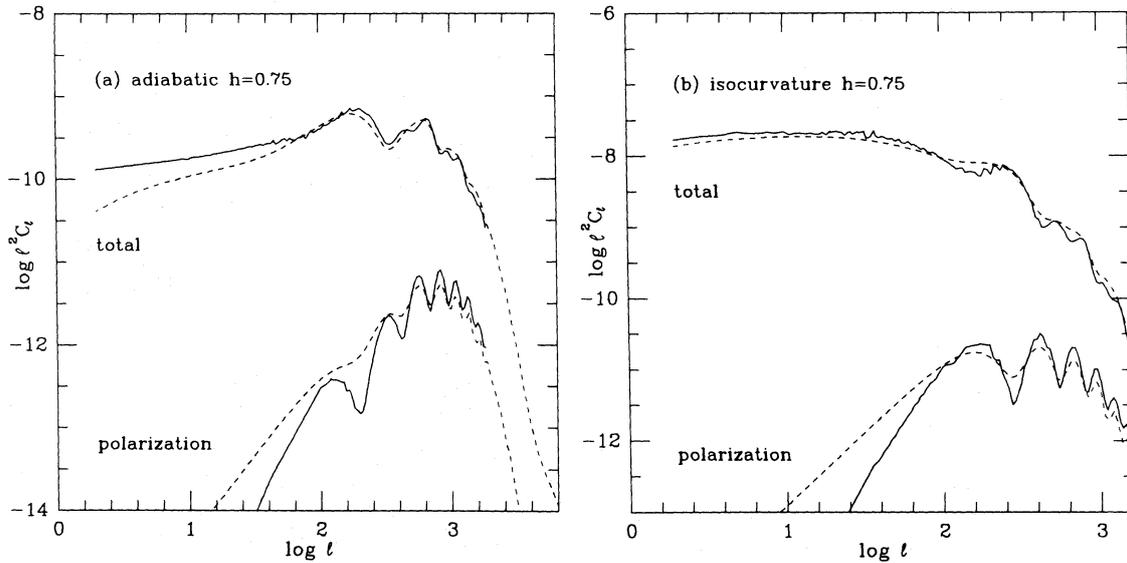


FIG. 3.4: Spectres de puissance de température et de polarisation prédits (par intégration numérique) par Bond et Efstathiou [112] dans un célèbre article en 1987, i.e. sept ans avant la première détection des anisotropies de température ! Pour un modèle cosmologique SCDM, avec  $h=0.75$ , un spectre primordial invariant d'échelle, dans le cas de fluctuations adiabatiques (à gauche), dans le cas de fluctuations isocourbes (à droite). Remarquons l'absence de pic de réionisation à bas  $l$  dans le spectre de polarisation (Zaldarriaga n'a pas encore soutenu sa thèse...), ainsi que l'amplitude trop importante du troisième pic dans le spectre de température, provenant de la valeur trop élevée de  $\Omega_m$  ( $\Omega_m = 1$  dans le modèle SCDM alors considéré) !

spectre de puissance angulaire des anisotropies soit plat aux grandes échelles indique la (presque) invariance d'échelle du spectre des fluctuations primordiales ; comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre, ceci constitue le plus fort argument en faveur des modèles inflationnaires.

### 3.2.3 Anisotropies secondaires

Une minorité de photons du fond diffus interagissent à nouveau durant leur trajet entre la surface de dernière diffusion et les observateurs que nous sommes. Les anisotropies en résultant, d'amplitudes globalement plus faibles que celles précédemment décrites, sont dites *secondaires*. Nous en donnons ici une liste succincte.

#### Effet Sachs-Wolfe intégré

L'énergie des photons du fond diffus est modifiée lorsqu'ils traversent le puit gravitationnel des structures soumises à une expansion accélérée (soulignons que cet effet est nul dans un univers soumis à une expansion constante). Compte-tenu de la vitesse de propagation d'un photon comparée aux échelles caractéristiques de la variation du potentiel gravitationnel local, cet effet n'est significatif qu'aux grandes échelles angulaires où il peut atteindre  $\Delta T/T \simeq 10^{-6}$ . Quoique large-

ment dégénéré avec la variance cosmique dans le spectre de température, cet effet peut être détecté statistiquement par corrélation de la carte 3.6 avec des catalogues de galaxies proches ; il a été mesuré à plus de  $4\sigma$  par plusieurs études indépendantes [70][71] : c'est une preuve très importante – et trop rarement citée – en faveur de l'expansion accélérée de l'Univers.

### Lentillage gravitationnel

La trajectoire des photons du fond est courbée par les puits de potentiels gravitationnels induits par les structures massives ; ceci résulte en des distorsions de l'image du fond. Le spectre de puissance s'en trouve légèrement lissé aux petites échelles (l'amplitude des pics est abaissée par rapport à celle des creux), voir par exemple [132].

### L'effet Sunyaev-Zel'dovich

Certains photons du fond interagissent par effet Compton inverse avec les électrons libres du gaz chaud des amas de galaxies rencontrés sur la ligne de visée. La collision étant élastique, le nombre de photons est conservé mais le spectre de corps noir est légèrement déformé. La signature spectrale très caractéristique de cet effet thermique en fait une des techniques actuelles de détection d'amas les plus efficaces, car on peut montrer que l'amplitude de l'empreinte SZ dans le fond diffus ne dépend pas de la distance à l'amas. Planck devrait ainsi produire un catalogue important d'amas lointains. Aux très petites échelles ( $\ell \sim 2500$ ), cet effet devient une des contributions dominantes au spectre de puissance. Notons que lorsque l'amas est en mouvement, un effet Doppler secondaire, dit cinétique, s'ajoute à l'effet thermique.

### La réionisation

Voir ci dessous, section 3.3.5.

### 3.2.4 Avants-plans

La mesure du fond diffus cosmologique est également contaminée par des émissions dites d'avants-plans, induites par des sources astrophysiques dans l'Univers local : la Voie Lactée, les sources ponctuelles extra-galactiques ou le système solaire. La figure 3.5 montre l'amplitude relative des spectres des principaux avant-plans. La fenêtre de mesure pour le CMB est comprise entre 20 et 300 GHz, mais les mesures à plus basse et plus haute fréquences permettent de mieux caractériser les niveaux de contamination dus aux différents types d'avant-plans. Nous allons donner de ceux-ci une description succincte.

### Le synchrotron

Des électrons relativistes accélérés par un champ magnétique produisent un rayonnement synchrotron. Le champ magnétique d'une galaxie (quelques nG) est suffisant pour produire une émission de photons par cet effet. Le spectre d'énergie des électrons susceptibles de produire un tel

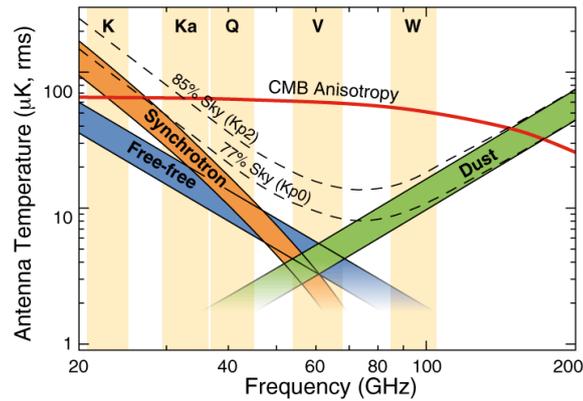


FIG. 3.5: *Superposition des contributions spectrales du fond diffus et des principaux avants-plans astrophysique. Graphe tiré de [162].*

rayonnement est décrit par une loi de puissance en  $\nu^{-\beta}$  avec  $\beta = 3$  [88]. L'émission synchrotron domine ainsi à basse fréquence.

### Rayonnement de freinage (free-free)

Les ions positifs du gaz chaud galactique (on en trouve jusqu'à  $10^8$  K) freinent les électrons libres. L'énergie libérée par les électrons ralentis est transformée en rayonnement thermique, dit free-free, d'indice spectral  $\beta \simeq 2.1$  (cet effet n'est donc important qu'aux basses fréquences).

### Poussière galactique

L'espace intra-galactique présente des poussières froides provenant des restes de collisions ou d'explosions. Ces poussières émettent par rayonnement thermique et par excitation de rotation du moment dipolaire électrique. Le rayonnement thermique a la forme d'un corps gris à la température d'environ 17 K et se situe dans l'infra-rouge lointain. Dans le domaine radio-millimétrique, son spectre peut être approximé par une loi de puissance en  $\nu^2$ , voir par exemple [89]. L'émission par rotation, présente entre 10 et 100 GHz, pique vers 20 GHz [150].

### Les sources ponctuelles

Certaines sources ponctuelles comme les quasars ou les galaxies radios émettent dans les fréquences du CMB. Les pixels contaminés par les sources ponctuelles résolues peuvent être masqués avant l'estimation du spectre de puissance. Le cas des sources non résolues est plus délicat et peut résulter en un excès de puissance aux petites échelles (on essaye généralement d'estimer leur contribution à l'aide de catalogues).

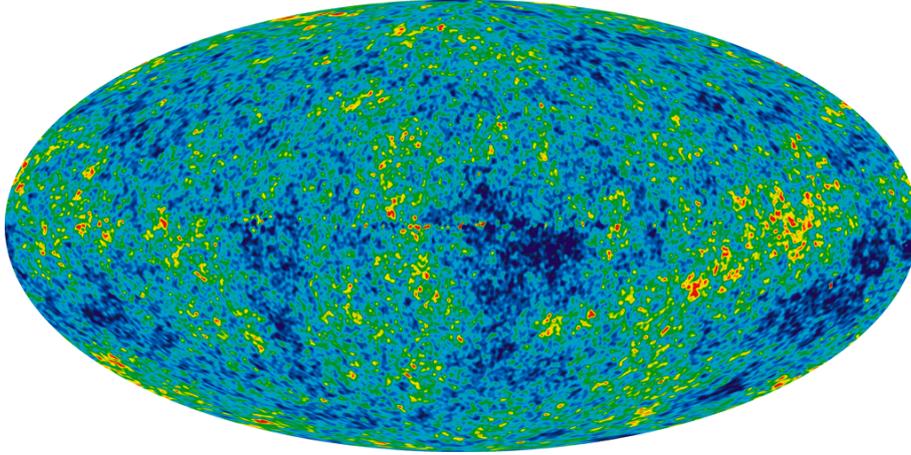


FIG. 3.6: Carte des fluctuations de température du fond diffus cosmologique obtenue par WMAP [163], après soustraction du dipôle, de la Galaxie et des autres avant-plans astrophysiques.

### 3.2.5 Contraintes sur les paramètres cosmologiques

Nous venons de décrire comment le spectre de puissance des anisotropies de température est une conséquence de la cosmologie, de la physique du plasma primordial et des processus astrophysiques se déroulant sur la ligne de visée. Les paramètres du modèle cosmologique peuvent ainsi être estimés par ajustement des spectres de température et de polarisation. Ces spectres seuls présentent toutefois un certain nombre de dégénérescences qui peuvent être levées en les combinant aux données d'autres sondes cosmologiques (telles que la mesure de la constante de Hubble, les relevés de galaxies, les supernovae, etc.). Nous allons à présent décrire qualitativement les dépendances en forme du spectre aux principaux paramètres cosmologiques.

**constante de Hubble,  $H_0$  et densité totale de l'Univers,  $\Omega_T = \Omega_m + \Omega_\Lambda$**

Le paramètre de Hubble est au premier ordre inversement proportionnel à la distance entre l'observateur et la surface de dernière diffusion. Une variation de  $H_0$  se traduit ainsi par une variation de l'angle sous lequel l'observateur voit les fluctuations d'une certaine échelle spatiale (ce qui se traduit par un décalage horizontal du spectre). La valeur de cet angle dépend malheureusement également de la courbure spatiale de l'Univers ; considérons par exemple le premier pic, dont la position horizontale correspond à l'angle sous lequel nous apparaît le rayon sonore à la recombinaison. Dans un univers ouvert ( $\Omega_T < 1$ ), cet angle nous apparaîtrait plus grand (le pic serait décalé vers la droite), alors qu'il apparaîtrait plus petit (le pic serait décalé vers la gauche) dans un univers fermé ( $\Omega_T > 1$ ), comme on le voit sur la figure 3.7. Dans ces conditions, on conçoit que les mesures des deux paramètres  $H_0$  et  $\Omega_T$  soient dégénérées (figure 2.6) ; cette dégénérescence est bien sûr levée en utilisant la mesure de  $H_0$  fournie par le diagramme de Hubble à bas redshift.

### densité de baryons, $\Omega_b$ et densité de matière, $\Omega_m$

Nous avons dit que la densité de baryons déséquilibre l'équilibre entre effondrement gravitationnel et pression de radiation (autrement dit il déplace le point zéro de l'oscillateur) ; l'amplitude relative des pics pairs (dilatations) et impairs (compressions) permet ainsi de déterminer le rapport  $\Omega_b/\Omega_m$ . Nous avons vu dans la section 2.2 que les modèles de gravitation modifiée sans matière noire ne parviennent par exemple pas à expliquer ce rapport des pics et des creux (en particulier la hauteur relative du troisième pic).

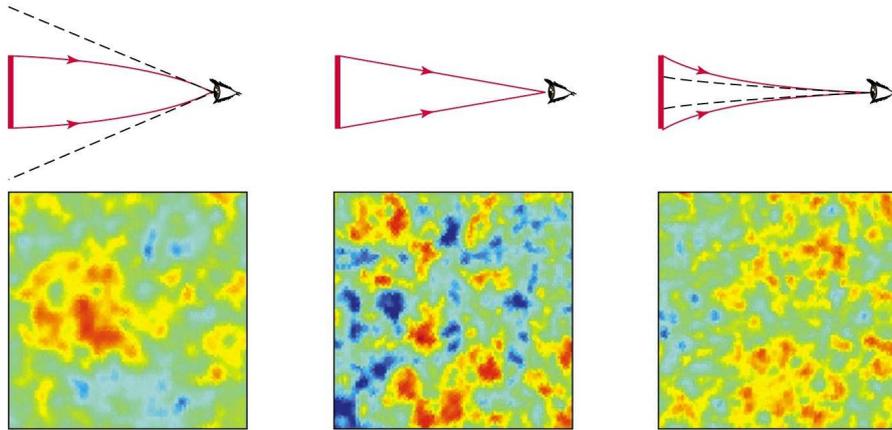


FIG. 3.7: Les fluctuations du fond diffus observées dans le cas d'un univers fermé (gauche), plat (milieu) et ouvert (droite). Schéma tiré de [114].

### densité d'énergie noire, $\Omega_\Lambda$

Les données du CMB seules ne permettent pas de contraindre  $\Omega_\Lambda$ . Mais il suffit de les combiner avec celles d'une seule autre sonde cosmologique (diagramme de Hubble, supernovae, distribution des galaxies, ou même abondance des éléments légers) pour obtenir une mesure de très bonne précision (figure 2.9). Notons par exemple que dans leur dernière analyse, WMAP-7 n'utilisent pas les données des supernovae pour obtenir la table 3.1 des paramètres cosmologiques. Rajoutons que la mesure de l'effet Sachs-Wolfe intégré permet également d'obtenir une contrainte sur  $\Omega_\Lambda$  (voir plus haut).

### indice spectral scalaire, $n_s$

La forme globale du spectre (en particulier les bas multipôles) permet de contraindre le spectre initial des fluctuations primordiales. Celui-ci peut être modélisé par une loi de puissance (équation 3.73). La détection d'un indice spectral légèrement inférieur à 1 est aujourd'hui la plus forte preuve en faveur des modèles inflationnaires.

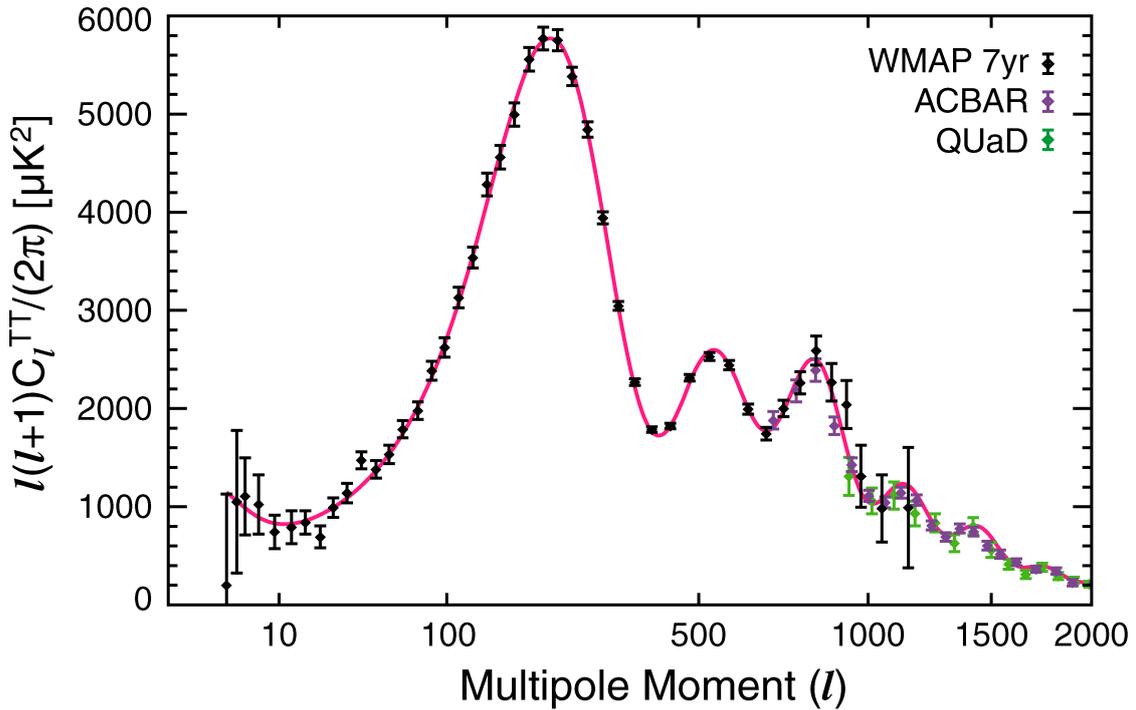


FIG. 3.8: Spectre de puissance angulaire des anisotropies de température du fond diffus cosmologique (superposition des données WMAP, ACBAR et QUAD), et modèle théorique donnant le meilleur ajustement (courbe rouge). Graphe tiré de [165].

### 3.2.6 Contexte expérimental

Les cartes de WMAP (après 7 ans de prise de données) sont aujourd'hui les plus précises sur l'ensemble de la sphère céleste ; la publication des données du satellite Planck devrait bien sûr les rendre prochainement obsolètes. La carte représentée sur la figure 3.6, montrant les fluctuations de température du fond diffus cosmologique, a été obtenue en combinant les cartes mesurées à différentes fréquences par WMAP afin de soustraire les contributions des avant-plans. Ce genre de carte permet d'estimer le spectre de puissance de température représentée sur la figure 3.8 ; aux grands multipoles ( $\ell \geq 800$ ), le spectre est obtenu grâce à des observations de meilleures résolutions angulaires sur des champs plus restreints (expériences ACBAR et QUAD). La courbe rouge correspond au modèle théorique dont les paramètres ajustent le mieux les données. L'accord absolument stupéfiant entre théorie et données – au regard de la forme si caractéristique du spectre, résultant de la combinaison d'un ensemble de processus physiques si complexes – ne peut que nous rendre confiant sur la validité du modèle standard. Mentionnons d'ailleurs encore une fois le fait, si incroyable, que la forme de ce spectre a été théoriquement *prédit* à la fin des années 1980 : la comparaison des figures 3.4 et 3.8 est édifiante à cet égard.

L'ajout de contraintes fournies par d'autres sondes cosmologiques permet de mesurer les paramètres cosmologiques avec une précision dont n'aurait pas osé rêver le plus optimiste des cosmologistes de la première moitié du XX<sup>e</sup> siècle. La compilation de ces mesures, pour un jeu de données WMAP-7 +  $H_0$  + BAO, est présentée dans la table 3.1.

Constante de Hubble réduite ( $H_0/100 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ )	$h$	$0.715 \pm 0.025$
Densité d'énergie (réduite) de matière	$\Omega_m$	$0.270 \pm 0.017$
Densité d'énergie (réduite) de baryons	$\Omega_b$	$0.0442 \pm 0.0035$
Densité d'énergie (réduite) du vide	$\Omega_\Lambda$	$0.730 \pm 0.017$
Redshift réionisation	$z_{reion}$	$10.4 \pm 1.2$
Normalisation du spectre de puissance à $8h^{-1} \text{ Mpc}$	$\sigma_8$	$0.841 \pm 0.060$
Indice spectral scalaire	$1 - n_s$	$0.041 \pm 0.014$
Rapport tenseur sur scalaire	$r$	$< 0.24$ (95% C.L.)
Indice spectral tensoriel	$n_t$	–
Equation d'état de l'énergie noire	$w = P/\rho$	$-1.08 \pm 0.13$

TAB. 3.1: *Mesure des paramètres cosmologiques par ajustement du modèle cosmologique standard  $w$ CDM ( $w$  n'est pas fixé) sur un jeu de données combinées WMAP-7+BAO+ $H_0$ +Lentillage fort [164] (la sélection présentée ici forme un jeu de paramètres indépendants).*

### 3.3 Anisotropies de polarisation

Nous avons décrit dans ce qui précède l'origine des fluctuations en intensité du rayonnement, sans aborder la question de sa polarisation éventuelle. La diffusion Thomson des photons par les électrons est en fait susceptible de polariser partiellement un rayonnement initialement non polarisé, si le rayonnement incident sur l'électron diffuseur est anisotrope. Nous introduirons, comme dans la section précédente, les outils d'analyse statistique de la polarisation du CMB, avant de donner une description qualitative des processus physiques qui la génèrent et des contraintes sur le modèle cosmologique qui en découlent.

#### 3.3.1 Les paramètres de Stokes

Le champ électrique d'une onde plane quasi monochromatique de vecteur d'onde  $\vec{k}$  se décompose sur les deux axes transverses à la direction de propagation comme

$$\mathbf{E} = \text{Re} [E_{\parallel}(t)\vec{e}_{\parallel} + E_{\perp}(t)\vec{e}_{\perp}] \quad (3.20)$$

où  $\vec{e}_{\parallel}$  et  $\vec{e}_{\perp}$  sont des vecteurs unitaires tels que  $(\vec{e}_{\parallel}, \vec{e}_{\perp}, \vec{k})$  forme un trièdre direct et où  $E_{\parallel}(t)$ ,  $E_{\perp}(t)$  sont les valeurs complexes des champs électriques suivant les deux axes transverses orthogonaux.

En toute généralité, un champ de rayonnement polarisé de manière transverse est complètement décrit dans la base des quatres paramètres de Stokes définis par :

$$I = \langle |E_{\parallel}|^2 \rangle + \langle |E_{\perp}|^2 \rangle \quad (3.21)$$

$$Q = \langle |E_{\parallel}|^2 \rangle - \langle |E_{\perp}|^2 \rangle \quad (3.22)$$

$$U = \langle E_{\parallel}E_{\perp}^* \rangle + \langle E_{\perp}^*E_{\parallel} \rangle = 2\text{Re} \langle E_{\parallel}E_{\perp}^* \rangle \quad (3.23)$$

$$V = i \left( \langle E_{\parallel}E_{\perp}^* \rangle - \langle E_{\perp}^*E_{\parallel} \rangle \right) = -2\text{Im} \langle E_{\parallel}E_{\perp}^* \rangle \quad (3.24)$$

Dans le cas d'un rayonnement non polarisé, le paramètre d'intensité  $I$  est le seul non nul. Il se mesure expérimentalement, soit directement à l'aide d'un détecteur non polarisé (tel un bolomètre), soit par somme des mesures de puissance des deux polarisations dans le cas d'un détecteur polarisé (tel un radiomètre).

$Q$  et  $U$  décrivent la polarisation linéaire.  $Q$  peut être facilement mesuré par différenciation de deux détecteurs polarisés. Le paramètre  $U$  étant défini comme une corrélation de deux champs orthogonaux, celui-ci ne peut être mesuré "directement" par des détecteurs de puissance ; mais le fait qu'il soit équivalent au paramètre  $Q'$  mesuré dans un référentiel tourné de  $45^\circ$  permet de le mesurer par une telle rotation de l'instrument (ou des polariseurs). Dans le nouveau référentiel, les champs  $E'_{\parallel}$  et  $E'_{\perp}$  s'écrivent en effet,

$$E'_{\parallel} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{\parallel} + E_{\perp}), \quad (3.25)$$

$$E'_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{\perp} - E_{\parallel}). \quad (3.26)$$

$$(3.27)$$

D'où il suit que

$$Q' = \langle |E'_{\parallel}|^2 \rangle - \langle |E'_{\perp}|^2 \rangle = \langle E_{\parallel} E_{\perp}^* \rangle + \langle E_{\perp}^* E_{\parallel} \rangle = U. \quad (3.28)$$

Ce petit calcul nous a montré qu'à la différence de  $I$  (et de  $V$ ),  $Q$  et  $U$  sont des quantités locales dont la définition dépend du référentiel de l'observateur. Plus généralement, lors d'une rotation d'angle  $\psi$  du repère (i.e. de l'instrument de mesure), ces paramètres se transforment selon

$$Q'(\vec{n}) \pm iU'(\vec{n}) = e^{i2\psi} [Q(\vec{n}) \pm iU(\vec{n})], \quad (3.29)$$

où l'on a noté  $Q'$  et  $U'$  les paramètres de Stokes dans le nouveau repère. Nous reviendrons sur cette propriété capitale dans la section 3.3.3 ; mais on peut déjà entrevoir que ces deux observables dépendantes du référentiel d'observation ne sont pas adaptées à l'étude de la physique du fond diffus cosmologique.

Enfin,  $V$  est la polarisation circulaire, généralement laissée de côté dans les études CMB ; à notre connaissance, la dernière limite supérieure placée sur le niveau de polarisation circulaire date de 1983 [120] ! Ceci est peut-être regrettable car certains processus tels que des champs magnétiques primordiaux [121] ou une violation de l'invariance de Lorentz [122] pourraient générer une telle polarisation, respectivement au sein du plasma primordial ou sur la ligne de visée des photons.

### 3.3.2 Génération de polarisation par anisotropie quadrupolaire

La diffusion Thomson est définie comme la diffusion élastique d'un photon sur un électron à faible énergie. Pour des directions d'incidence et de diffusion  $\vec{\epsilon}$  et  $\vec{\epsilon}'$ , la section efficace différentielle d'un flux de photons non polarisé incident sur un électron (supposé au repos) s'exprime comme

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} |\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}'|^2, \quad (3.30)$$

où l'on a noté  $\sigma_T$  la section efficace de diffusion Thomson. Si le rayonnement incident sur l'électron est isotrope et non-polarisé, le faisceau diffusé ne sera pas non plus polarisé ; une anisotropie

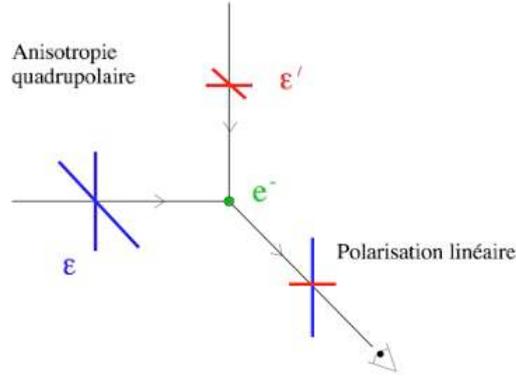


FIG. 3.9: *Diffusion Thomson : si le flux de photons incident n'est pas polarisé mais présente une anisotropie quadrupolaire dans le référentiel de l'électron, le flux diffusé sera polarisé linéairement.*

dans le rayonnement incident peut par contre engendrer une polarisation rectiligne partielle du faisceau diffusé, comme on le voit sur la figure 3.9. Nous allons maintenant démontrer la propriété cruciale selon laquelle seule les anisotropies quadrupolaires dans le référentiel de l'électron peuvent engendrer de la polarisation dans le fond diffus. Considérons pour cela un rayonnement incident non polarisé, et donc complètement caractérisé par son intensité  $I$ , et un rayonnement diffusé caractérisé par  $I'$ ,  $Q'$ ,  $U'$  et  $V'$ . A partir de l'équation 3.30, on peut calculer les intensités diffusées selon les deux axes orthogonaux  $I'_{\parallel} = (I' + Q')/2$  et  $I'_{\perp} = (I' - Q')/2$ ,

$$I'_{\parallel} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} \left[ I_{\parallel}(\epsilon_{\parallel} \cdot \epsilon'_{\parallel})^2 + I_{\perp}(\epsilon_{\perp} \cdot \epsilon'_{\parallel})^2 \right] = \frac{3\sigma_T}{16\pi} I, \quad (3.31)$$

$$I'_{\perp} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} \left[ I_{\parallel}(\epsilon_{\parallel} \cdot \epsilon'_{\perp})^2 + I_{\perp}(\epsilon_{\perp} \cdot \epsilon'_{\perp})^2 \right] = \frac{3\sigma_T}{16\pi} I \cos^2 \theta, \quad (3.32)$$

d'où il découle que

$$I' = \frac{3\sigma_T}{16\pi} I (1 + \cos^2 \theta), \quad (3.33)$$

$$Q' = \frac{3\sigma_T}{16\pi} I \sin^2 \theta. \quad (3.34)$$

En effectuant le calcul dans un repère pivoté de  $45^\circ$  on peut de même obtenir  $U'$ . Notons au passage qu'il est possible de montrer que la diffusion Thomson ne génère pas de polarisation circulaire. Nous pouvons à présent calculer la polarisation du signal diffusé en direction d'une certaine ligne de visée (en l'occurrence celle de l'observateur mesurant le CMB) en intégrant sur toutes les directions incidentes :

$$I'_{obs} = \frac{3\sigma_T}{16\pi} \int I(\theta, \phi) (1 + \cos^2 \theta) d\Omega, \quad (3.35)$$

$$Q'_{obs} = \frac{3\sigma_T}{16\pi} \int I(\theta, \phi) \sin^2 \theta d\Omega, \quad (3.36)$$

$$U'_{obs} = -\frac{3\sigma_T}{16\pi} \int I(\theta, \phi) \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\Omega. \quad (3.37)$$

Nous pouvons alors décomposer le signal incident sur la base des harmoniques sphériques, et utiliser les expressions de  $Y_{00}$ ,  $Y_{20}$  et  $Y_{22}$  pour écrire :

$$I'_{obs} = \frac{3\sigma_T}{16\pi} \left[ \frac{8}{3} \sqrt{\pi} a_{00} + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} a_{20} \right], \quad (3.38)$$

$$Q'_{obs} = \frac{3\sigma_T}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \text{Re}(a_{22}), \quad (3.39)$$

$$U'_{obs} = -\frac{3\sigma_T}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \text{Im}(a_{22}). \quad (3.40)$$

Nous venons de démontrer que seule une anisotropie quadrupolaire ( $a_{22}$ ) de température est susceptible de générer de la polarisation linéaire à partir d'un fond de photons non-polarisé ! Nous décrirons dans la section 3.3.4 les processus susceptibles d'engendrer de tels quadrupôles dans le plasma primordial à la recombinaison.

### 3.3.3 Les champs $E$ et $B$

Comme nous l'avons vu, les paramètres  $Q$  et  $U$  présentent la fâcheuse propriété d'être dépendants du choix de repère. De manière indépendante, Zaldarriaga et Seljak [115], ainsi que Kamionkowski, Kosowsky et Stebbins [116] ont introduit en 1997 une nouvelle décomposition du champ de polarisation du CMB, dite de mode  $E$  et  $B$ , qui en plus de ne pas être locale, est particulièrement bien adaptée à l'étude de la physique du CMB. Il faut pour la décrire introduire les harmoniques sphériques de spin 2 (ce qui semble "naturel" par considération de l'équation 3.29) :

$$Q(\vec{n}) \pm iU(\vec{n}) = \sum_{\ell m} a_{\pm 2\ell m} \pm 2Y_{\ell m}(\vec{n}). \quad (3.41)$$

A partir des coefficients de ce développement, on peut alors former les quantités scalaires,

$$a_{\ell m}^E = -\frac{a_{2\ell m} + a_{-2\ell m}}{2}, \quad (3.42)$$

$$a_{\ell m}^B = i\frac{a_{2\ell m} - a_{-2\ell m}}{2}, \quad (3.43)$$

qui correspondent aux modes des champs scalaires  $E$  et  $B$ , définis sur la sphère,

$$E(\vec{n}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^E Y_{\ell m}(\vec{n}), \quad (3.44)$$

$$B(\vec{n}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^B Y_{\ell m}(\vec{n}). \quad (3.45)$$

Ces champs sont non-locaux, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas être reconstruits à partir de la mesure en un seul point de  $Q$  et  $U$ . Les vecteurs de la base des harmoniques sphériques ne sont plus orthogonaux entre eux dès lors que l'on observe seulement une fraction de la sphère céleste, et le champ de polarisation ne peut plus être complètement décrit par des cartes de modes  $E$  et  $B$  (des modes dits "ambigus" apparaissent) ; ceci est à l'origine d'une difficulté spécifique à l'étude de la polarisation CMB sur une fraction du ciel, connue sous le nom de "problème de séparation  $E/B$ ".

Les champs  $E$  et  $B$  se distinguent par leur comportement vis-à-vis d'une réflexion :  $E$  est invariant (c'est un champ scalaire) alors que  $B$  change de signe (c'est un pseudo-scalaire), comme on le voit sur la figure 3.10. C'est de là que vient l'originale notation  $E$  et  $B$ , par référence aux champs électriques et magnétiques (respectivement vectoriels et pseudo-vectoriels).

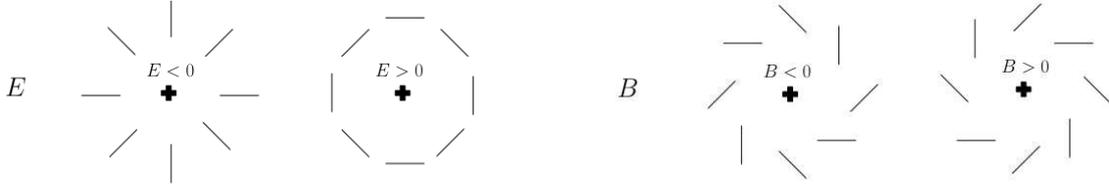


FIG. 3.10: Figures de polarisation pour les champs  $E$  et  $B$  autour d'une perturbation de polarisation indiquée par la croix.

Il est ainsi possible de définir, à partir des coefficients de développement des champs  $T$ ,  $E$  et  $B$ , les spectres de puissance angulaire suivants :

$$C_{\ell}^{TT} = \langle |a_{\ell m}^T|^2 \rangle, \quad (3.46)$$

$$C_{\ell}^{EE} = \langle |a_{\ell m}^E|^2 \rangle, \quad (3.47)$$

$$C_{\ell}^{BB} = \langle |a_{\ell m}^B|^2 \rangle, \quad (3.48)$$

$$C_{\ell}^{TE} = \langle a_{\ell m}^T a_{\ell m}^{E*} \rangle, \quad (3.49)$$

$$C_{\ell}^{TB} = \langle a_{\ell m}^T a_{\ell m}^{B*} \rangle, \quad (3.50)$$

$$C_{\ell}^{EB} = \langle a_{\ell m}^E a_{\ell m}^{B*} \rangle. \quad (3.51)$$

Les deux derniers spectres sont nuls en raison des propriétés de symétrie des champs. Les quatre premiers spectres théoriques prédits par le modèle standard sont représentés sur la figure 3.11 ; nous voyons que l'amplitude des anisotropies de polarisation est faible par rapport à celle des anisotropies de température (le CMB est polarisé à 10% environ).

### 3.3.4 Origine de la polarisation du fond diffus cosmologique

Nous décrivons maintenant les trois types de perturbations de densité du fluide photons-baryons qui sont susceptibles de produire des anisotropies quadrupolaires dans le plasma primordial à la recombinaison.

#### Perturbations scalaires

Les fluctuations de densité génèrent naturellement des anisotropies quadrupolaires par le mécanisme suivant. Un électron tombant dans un puit de potentiel gravitationnel voit d'une part le fluide cosmique environnant s'éloigner dans la direction radiale (car le mouvement de chute est accéléré) et d'autre part le fluide cosmique se rapprocher dans la direction tangentielle. Comme on le voit sur la figure 3.12, une anisotropie quadrupolaire apparaît ainsi dans le référentiel de l'électron diffuseur, induisant une polarisation linéaire radiale du flux de photons diffusés. Par symétrie

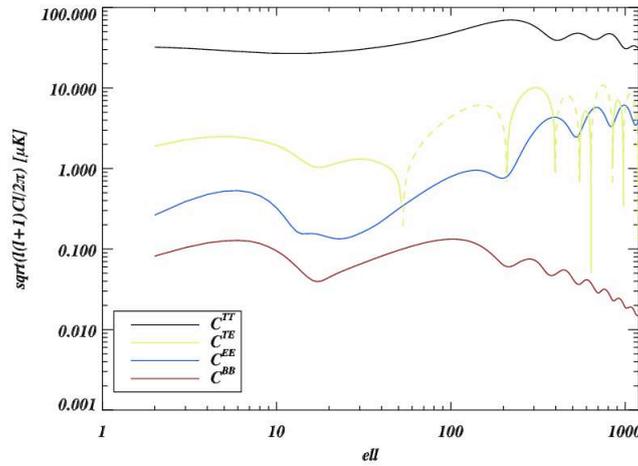


FIG. 3.11: Spectres de puissance angulaires attendus dans le cadre du modèle standard  $\Lambda$ CDM, pour un rapport tenseur sur scalaire  $r = 0.1$ .

centrale, des motifs de polarisation  $E$  apparaissent dans le fond diffus autour des fluctuations de densité. Il est possible de montrer rigoureusement que ces perturbations scalaires ne génèrent pas de modes  $B$ .

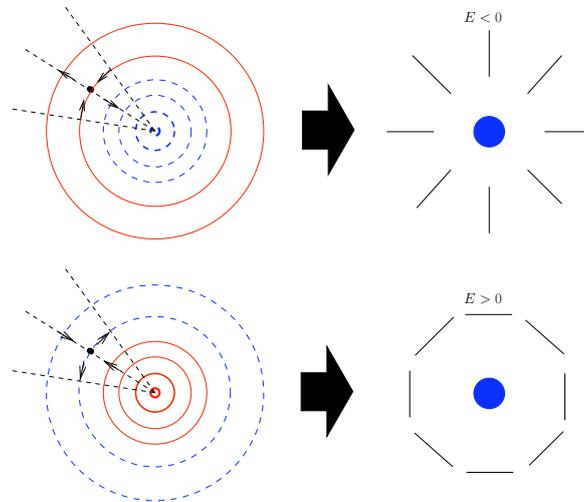


FIG. 3.12: Une perturbation scalaire (sur-densité ou sous-densité de matière) génère des motifs de polarisation  $E$  dans le fond diffus de photons. Schéma tiré de [157].

### Perturbations vectorielles

La vorticité de fluide photons-baryons peut engendrer des anisotropies quadrupolaires, mais celles-ci sont généralement négligeables dans les modèles inflationnaires.

## Perturbations tensorielles

Des ondes gravitationnelles primordiales générées durant l'inflation déformeraient la métrique de l'espace-temps ; les isocontours de densité circulaires autour des puits de potentiel gravitationnels deviendraient alors elliptiques. Ceci induirait ainsi des anisotropies quadrupolaires dans le référentiel des électrons diffuseurs. Les perturbations tensorielles ne présentant pas de symétrie centrale, il est possible de montrer qu'elles génèrent en quantité égale des modes de polarisation  $E$  et  $B$ .

### 3.3.5 Contraintes cosmologiques

#### Confirmation du modèle cosmologique

Avant d'aborder leurs apports spécifiques, il faut préciser que les spectres TE et EE donnent à eux seuls des contraintes à peu près équivalentes à celles données par le spectre TT sur les paramètres cosmologiques évoqués en section 3.2.5 ; ils ne permettent que marginalement de lever les dégénérescences précédemment décrites. La mesure détaillée récente du spectre EE n'a ainsi pas suscité autant d'excitation que celle qu'avait suscitée en son temps la mesure du spectre de température. Nous voulons pourtant ici insister sur le triomphe que représente pour le modèle cosmologique standard l'accord si complet entre les mesures réalisées du spectre EE et les prédictions faites à partir du jeu de paramètres obtenu par ajustement sur le spectre TT ; en particulier, on observe bien les anti-corrélations attendues entre les pics et les creux des deux spectres : ceux-ci s'expliquent aisément dans le cadre du modèle standard par le fait que les maximums ou minimums du champ de densité correspondent aux valeurs moyennes du champ de vitesse engendrant la polarisation ! Si la mesure des paramètres cosmologiques n'est ainsi pas significativement améliorée, le paradigme cosmologique se voit lui renforcé d'une manière incroyable par ces nouvelles mesures.

#### Rapport tenseur sur scalaire, $r$

Nous reviendrons sur la définition de cet observable en section 3.4.2. Sa mesure est l'objectif principal de QUBIC ainsi que de l'ensemble des expériences labellisées "modes B".  $r$  est défini comme le rapport des spectres générés par les perturbations tensorielles et scalaires, à  $\ell = 2$ . Or, nous avons vu que si les modes de polarisation  $E$  peuvent être générés à la fois par les perturbations scalaires et tensorielles, les modes  $B$  peuvent quant à eux seulement être générés par les perturbations tensorielles. Une détection des modes  $B$  signerait ainsi de manière directe la présence d'ondes gravitationnelles primordiales générées durant la phase d'inflation. Tant que les modes  $B$  n'auront pas été détectés, il ne sera possible que de placer des limites supérieures sur la valeur de  $r$ . Il faut préciser ici que la meilleure contrainte est pour le moment toujours donnée par la mesure du spectre de température : la contribution des perturbations tensorielles au spectre TT, très faible aux grands multipôles devient significative aux petits. La précision de mesure à ces échelles étant déjà limitée par la variance cosmique, la limite supérieure donnée par le spectre de température ne pourra pas être améliorée dans le futur.

## Réionisation

Les grandes structures de l'univers se forment, après la recombinaison, par effondrement des baryons dans les puits de potentiels de matière noire. Dans le modèle standard, les premières étoiles s'allument après quelques centaines de millions d'années ; leurs émissions ultra-violet réionisent alors les nuages d'hydrogène neutre. L'observation récente de l'effet Gunn-Peterson (figure 3.13) appuie ce scénario : la forêt Lyman- $\alpha$  caractéristique des spectres des quasars lointains, résultante de l'absorption des photons par les nuages d'hydrogène neutre rencontrés sur la ligne de visée, est remplacée pour les quasars lointains ( $z > 6$ ) par un large creux, signature du fait que l'univers est complètement neutre à ces époques.

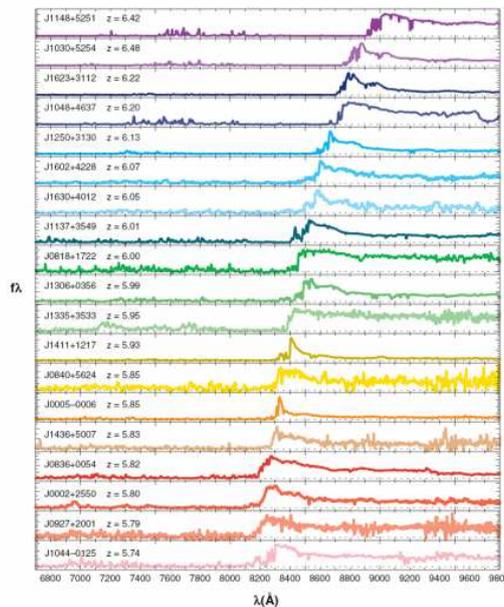


FIG. 3.13: *Effet Gunn-Peterson. Compilation de 19 spectres de quasars mesurés par SDSS par redshifts croissants (de bas en haut), tiré de [96]; la forêt d'absorption Lyman- $\alpha$ , à gauche du pic d'émission Lyman- $\alpha$  est progressivement remplacée par un large creux.*

Une partie des photons du fond diffus interagissent de nouveau avec les électrons diffuseurs de la surface de réionisation. Cette diffusion Thomson n'aurait aucun effet si la distribution du fond était parfaitement isotrope, comme nous l'avons vu en 3.3.2 : la probabilité pour un photon d'être diffusé en-dehors de la ligne de visée est identique à la probabilité qu'un photon venant d'une autre direction soit diffusé vers la ligne de visée. L'anisotropie du fond de photons diffusant sur les électrons de la surface de réionisation imprime en fait deux effets notoires dans les spectres.

Le premier est un amortissement de la puissance aux petites échelles. Considérons une ligne de visée dans laquelle la température serait  $T_0 + \Delta T$  en l'absence de réionisation. Après diffusion sur la surface de réionisation, la température observée est égale à la température initiale, à laquelle on soustrait la température de la fraction de photon diffusée dans une autre direction, et à laquelle on ajoute la température moyenne de la fraction des photons diffusés provenant d'autres directions

(i.e.  $T_0$ ),

$$T_0 + \Delta T \rightarrow (T_0 + \Delta T) - (T_0 + \Delta T)(1 - e^{-\tau}) + T_0(1 - e^{-\tau}) \quad (3.52)$$

$$\rightarrow T_0 + \Delta T e^{-\tau}, \quad (3.53)$$

où  $\tau$  est l'épaisseur optique de la réionisation et  $(1 - e^{-\tau})$  est la probabilité pour un photon d'être diffusé. La réionisation a ainsi tendance à gommer les petites échelles des spectres de puissance, d'une manière très similaire à l'amortissement de Silk.

Zaldarriaga a montré en 1997 [117] qu'un motif très caractéristique (un pic élargi) devait également être imprimé dans le spectre de polarisation EE aux grandes échelles. Celui-ci provient du fait que les électrons diffuseurs voient un quadrupole de température de fond diffus, exactement de la même manière que nous, observateurs du présent, en voyons un (toutefois, les échelles comobiles responsables du quadrupole observé dépendent de la distance séparant la surface de dernière diffusion de l'observateur). Ce quadrupole engendre, par le mécanisme décrit en 3.3.2, un signal de polarisation additionnel durant l'époque de réionisation. Insistons sur le fait que ce processus de génération de la polarisation est très différent de celui de la recombinaison, puisque les quadrupôles ne sont alors pas induits par des perturbations scalaires (c'est à dire par les gradients de vitesse des flux d'électrons tombant dans les puits de potentiels), mais sont littéralement ceux des anisotropies du fond diffus cosmologique "observés" à l'époque de la recombinaison.

La position centrale du pic imprimé aux grandes échelles dans les spectres de polarisation, est approximativement donnée par [117] :

$$l_p \simeq 2(\sqrt{z_r + 1} - 1) \quad (3.54)$$

où  $z_r$  est le redshift de la réionisation. Ce pic a bien été observé par WMAP, et après quelques fluctuations, l'estimation du redshift de réionisation est en bon accord avec celle obtenue grâce à l'observation de l'effet Gunn-Peterson.

### 3.3.6 Contexte expérimental

Le principe des expériences dédiées à la polarisation est très similaire à celui des expériences dédiées à la température. L'objectif est de mesurer les cartes des paramètres de Stokes  $Q$  et  $U$ , puis d'en déduire les cartes de champs  $E$  et  $B$ , afin d'estimer les spectres de puissance polarisés. La difficulté supplémentaire réside évidemment dans la faiblesse relative de la puissance des spectres polarisés par rapport à celle du spectre de température.

L'interféromètre hétérodyne DASI fut la première expérience à détecter en 2002 la polarisation de mode E [146]. Le satellite WMAP, et les expériences au sol BICEP [95] et QUAD [138] donnent actuellement les meilleures estimations de EE et TE à respectivement grandes, moyennes et petites échelles (voir figure 3.14). Le satellite Planck devrait permettre d'obtenir très prochainement un spectre EE limité par la variance cosmique au moins jusqu'à  $\ell \sim 800$ .

Nous voyons sur la figure 3.14, les limites supérieures placées par les mêmes expériences sur le spectre des modes B. Soulignons qu'à la différence des spectres EE et TE dont le niveau et la forme étaient complètement prédits par le modèle standard et la mesure du spectre TT, l'existence d'éventuels modes B, qui plus est à un niveau détectable expérimentalement, n'est absolument pas

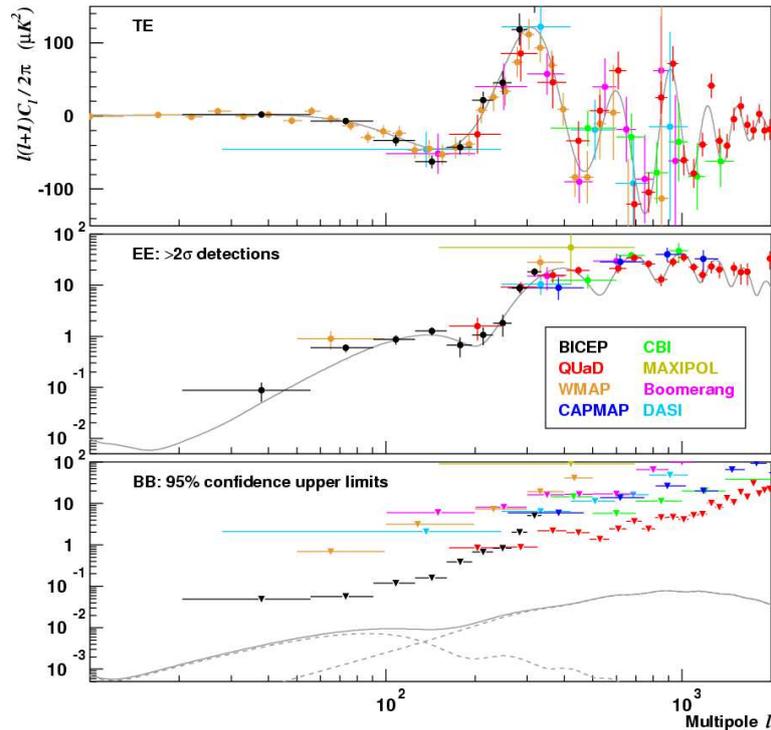


FIG. 3.14: Combinaisons des mesures des spectres de polarisation (les meilleures contraintes sont notamment données par BICEP, WMAP, et QUAD). Les spectres théoriques pour un modèle  $\Lambda$ CDM avec  $r = 0.1$  sont superposés. Graphe tiré de [95].

garantie par le paradigme actuel<sup>3</sup>. Un important effort expérimental est actuellement consacré à la détection des modes B ; nous y revenons dans la section 3.4.4.

## 3.4 Inflation et modes B de polarisation

Nous donnons dans cette section une brève introduction aux modèles d'inflation ; nous essaierons plus particulièrement de faire ressortir les enjeux théoriques et expérimentaux de la "course aux modes B".

### 3.4.1 Limitations du modèle standard sans inflation

Nous avons jusqu'à présent utilisé le terme de modèle standard de la cosmologie sans explicitement notifier si nous incluons ou non sous cette appellation les modèles d'inflation ; nous allons à présent tâcher de lever cette ambiguïté.

L'idée d'une phase d'inflation régissant les premiers instants de l'univers ( $\sim 10^{-34}$  s) a originellement été introduite au début des années 1980 pour résoudre le problème des "défauts topologiques", par Guth et Linde entre autres [60, 61, 62]. Il a progressivement été réalisé que celle-ci

<sup>3</sup>Les figures 3.11 et 3.14 sont particulièrement trompeuses à cet égard puisqu'elles donnent le sentiment que les trois spectres de polarisation sont prédits avec la même assurance théorique.

permettait de résoudre par la même occasion un certain nombre de problèmes théoriques que rencontre le modèle standard du Big Bang sans inflation et que nous décrivons brièvement ici.

### Le problème de l'homogénéité

Nous avons vu que les structures de l'univers résultent de l'effondrement de la matière autour des très légères fluctuations de densité du plasma primordial. Le modèle du Big Bang simple ne contient pas de mécanisme de génération de ces si importantes inhomogénéités ; une alternative peut alors être envisagée. Nous pouvons soit poser que ces fluctuations sont simplement les conditions initiales de l'univers (la physique n'aurait ainsi qu'à constater cet état de fait qu'il ne serait pas de son ressort d'expliquer...), soit être un peu plus téméraires, et chercher un mécanisme physique qui aurait pu les générer.

Les anisotropies du fond diffus cosmologique nous apprennent que le spectre de ces fluctuations primordiales est presque invariant d'échelle (autrement dit  $P(k) = k^{n_s-1}$ , avec  $n_s \simeq 1 - \epsilon$ ). Cette propriété hautement non triviale renforce la seconde voie de notre alternative. La plupart des modèles d'inflation, s'ils n'ont pas été introduits dans cette optique, prédisent naturellement un tel spectre : les fluctuations quantiques générées aux très petites échelles durant l'inflation sont instantanément figées en étant envoyées au delà de l'horizon. Cette prédiction non triviale explique en grande partie le succès "sociologique" des modèles d'inflation lors des deux dernières décennies, et constitue indiscutablement le plus fort argument en leur faveur.

### Le problème de la platitude

La combinaison des mesures du fond diffus cosmologique et de la constante de Hubble, permet de contraindre, nous l'avons vu, la courbure spatiale de l'Univers : celle-ci serait très faible,  $\Omega_k = 0.0023^{+0.0084}_{-0.0133}$  95% CL, pour un jeu de données WMAP-7+BA0+ $H_0$  [165]. Dans l'univers dominé par la matière,  $\Omega_k = \frac{k}{H_c}$ , où  $H_c = (aH)^{-1}$  est le rayon de Hubble comobile. Lorsque l'univers était dominé par la radiation,  $a(t) \propto t^{1/2}$ , le rayon de Hubble comobile croissait en  $\propto t^{1/2}$  et on avait ainsi  $\Omega_k \propto kt$ . Autrement dit, la courbure de l'univers ne fait qu'augmenter avec le temps ; il est en fait possible de montrer qu'afin que l'Univers soit aussi plat qu'on l'observe, il faudrait que  $\Omega_k < 10^{-60}$  au temps de Planck ( $10^{-43}$  s) ; ceci est généralement considéré comme un problème d'*ajustement fin* ("fine tuning").

A première vue, l'inflation résout cette difficulté en faisant en sorte que l'univers observable soit plat, quelle que soit la courbure initiale. Certains théoriciens remettent cependant en cause cet argument ; le problème d'ajustement fin ne serait que déplacé, les conditions initiales nécessaires au démarrage de l'inflation étant hautement improbables (voir par exemple [90]).

### Le problème de l'horizon

La fraction de l'espace comobile causalement liée est approximativement donnée par le rayon de Hubble comobile  $(aH)^{-1}$ . Le calcul de la taille de l'horizon au moment du découplage matière-rayonnement montre que des zones séparées de plus de quelques degrés sur la sphère céleste n'étaient pas causalement liées dans un univers dont le facteur d'échelle aurait toujours suivi une évolution temporelle en loi de puissance. Or, nous l'avons vu, le fond diffus est remarquablement

homogène jusqu'à la dizaine de  $\mu\text{K}$  ; ceci est parfaitement inexplicable dans un modèle de Big Bang sans phase d'inflation, dans lequel les zones non causalement liées n'ont pas de raison d'être en équilibre thermique.

### 3.4.2 Une brève histoire de l'inflation

Nous allons à présent décrire succinctement un modèle simple d'inflation. Il s'agirait d'une phase primordiale d'expansion exponentielle de l'univers ayant eu lieu typiquement  $10^{-34}$  s après le Big Bang ; les fluctuations quantiques de l'inflaton (le champ scalaire responsable de l'inflation) sont alors envoyées à toutes les échelles, et par là même figées (parce qu'elles sortent immédiatement de l'horizon causal).

Le spectre primordial généré est ainsi naturellement invariant d'échelle ; les problèmes de la platitude et de l'horizon semblent également résolus. L'inflation se terminerait durant une phase dite de *reheating* durant laquelle l'inflaton se désintégrerait dans les particules du modèle standard de la physique des particules. Une ère dominée par la radiation débiterait et la suite du modèle "classique" de Big Bang suivrait son cours.

Afin de résoudre le problème de l'horizon, il suffit que le rayon de Hubble comobile ait été plus grand que celui de l'univers observable par le passé. Celui-ci étant toujours croissant lors des phases d'expansions dominées par le rayonnement ou la matière, il faut donc imaginer une phase primordiale antérieure durant laquelle celui-ci aurait décréu avec le temps (voir figure 3.15) ; une telle phase est possible, selon la seconde équation de Friedmann, si l'équation d'état de l'espèce dominante est telle que

$$w = P/\rho < -1/3. \quad (3.55)$$

C'est ainsi une caractéristique très particulière d'un tel champ de pression négative.

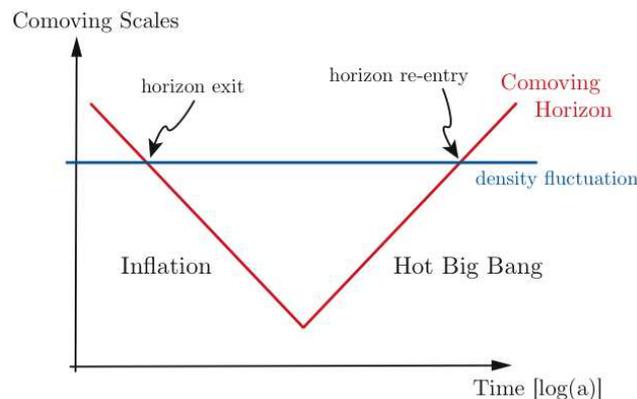


FIG. 3.15: Résolution du problème de l'horizon : le rayon de Hubble comobile diminue durant la phase d'inflation, puis réaugmente durant la phase d'expansion classique ; des échelles causalement liées sortent du rayon de Hubble comobile durant l'inflation, puis y réentrent durant la phase d'expansion classique. Des échelles plus grandes que le rayon de Hubble à la recombinaison apparaissent ainsi thermalisées. Graphe tiré de [63]).

### Conditions de slow-roll

Comme nous allons le voir, une telle pression négative peut être obtenue pour un champ scalaire dont le potentiel satisfait à une certaine condition. La pression et la densité d'un champ scalaire  $\phi$  dont le potentiel est  $V(\phi)$  peuvent être obtenues à partir du Lagrangien correspondant [59] :

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.56)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.57)$$

Lorsque le terme cinétique  $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$  est petit devant le potentiel de l'inflaton, l'équation d'état du champ satisfait la condition 3.55. La durée de l'inflation sera gouvernée par la dérivée du terme cinétique : plus celle-ci sera faible, plus la durée de l'inflation sera importante. Nous pouvons alors écrire les équations du mouvement pour le champ scalaire, i.e. la première équation de Friedmann (qui décrit l'évolution de l'Univers dominé par l'inflaton) et l'équation de Klein-Gordon (qui décrit l'évolution du champ scalaire lui-même) :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right), \quad (3.58)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi} = -V'. \quad (3.59)$$

L'approximation dite de *slow-roll* consiste à négliger le terme cinétique devant le potentiel ainsi que la dérivée seconde du champ dans l'équation de Klein-Gordon :

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V \quad \text{et} \quad \ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}. \quad (3.60)$$

Les équations du mouvement se trouvent alors simplifiées :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} V, \quad (3.61)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{V'}{3H}. \quad (3.62)$$

Il est possible d'écrire l'approximation de *slow-roll* en fonction du potentiel :

$$\epsilon \equiv \frac{m_P^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \quad \text{et} \quad \eta \equiv m_P^2 \frac{V''}{V} \ll 1, \quad (3.63)$$

où  $m_P = 1/\sqrt{8\pi G}$  est la masse de Planck réduite. Tout potentiel de champ scalaire satisfaisant à cette condition (i.e. dont la pente et la courbure sont faibles en unités de la masse de Planck), conduira à une phase d'inflation ; on comprend qu'une multitude de modèles d'inflation puissent ainsi être envisagés. Un exemple simple de potentiel inflationnaire est celui d'un champ scalaire massif sans interaction,

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (3.64)$$

pour lequel les paramètres du *slow-roll* sont donnés par

$$\epsilon = \eta = \frac{m_P^2}{4\pi\phi^2}. \quad (3.65)$$

La phase d'inflation dure ainsi tant que  $|\dot{\phi}| > \frac{m_p}{\sqrt{4\pi}}$ , de sorte que l'équation de Klein-Gordon simplifiée donne  $H \sim \text{Cte}$  et nous obtenons

$$a(t) \propto \exp(Ht). \quad (3.66)$$

La figure 3.16 montre des formes typiques de potentiels inflationnaires. Le champ descend ainsi lentement sa cuvette de potentiel ; lorsque celui-ci s'approche du minimum, la courbure devient trop importante, les conditions de *slow-roll* ne sont plus satisfaites et l'inflation se termine par le mécanisme de *reheating*. Les modèles de champ fort (à droite de la figure), constitués par exemple par le potentiel de champ scalaire massif  $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$  ou par celui d'un champ en auto-interaction  $V(\phi) = \lambda\phi^4$ , sont analytiquement aisés à traiter mais ne semblent pas très bien motivés du point de vue de la physique des particules. Les modèles de champ faible (à gauche de la figure), constitués par exemple par le potentiel de Higgs  $V(\phi) = \lambda(\phi^2 - M^2)^2$ , semblent mieux motivés en raison de leurs formes typiques de mécanismes de brisure de symétrie. L'amplitude relative des modes tenseurs générateurs de modes B est cependant beaucoup plus faible dans ce genre de modèles ! De nombreux autres modèles inflationnaires existent ; citons par exemple les modèles hybrides dans lesquels deux champs scalaires différents sont en charge de débiter et de terminer la phase d'inflation.

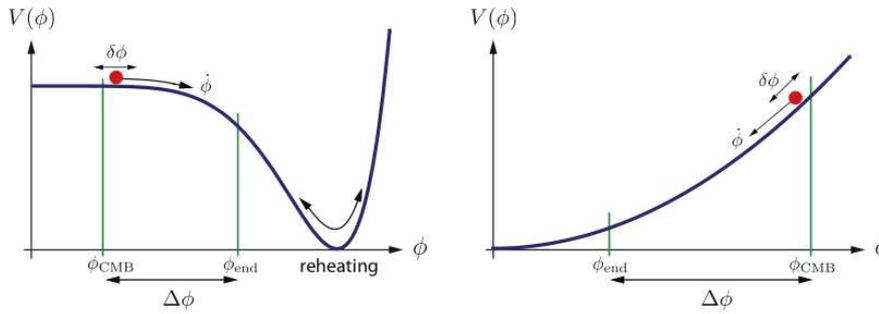


FIG. 3.16: Formes typiques des potentiels d'inflation.  $\phi_{\text{CMB}}$  indique la zone (située à  $\Delta\phi \sim 60$  e-foldings avant la fin de l'inflation) où les perturbations quantiques de l'inflaton deviennent macroscopiques. Modèle de champ fort à gauche, modèle de champ faible à droite (voir texte). Schéma tiré de [63].

Afin de résoudre les problèmes du Big Bang standard, l'inflation doit durer suffisamment longtemps. On définit généralement le nombre de *e-foldings* comme

$$N_e = \ln \frac{a(t_{\text{end}})}{a(t_{\text{start}})}. \quad (3.67)$$

Dans le cas des conditions de *slow-roll*, cette quantité s'exprime simplement en fonction du potentiel de l'inflaton,

$$N_e = \int_{\phi_{\text{start}}}^{\phi_{\text{end}}} \frac{V}{m_P^2 V'} d\phi, \quad (3.68)$$

où on a utilisé le fait que  $dN_e = -d \ln a = -H dt = -(H/\dot{\phi}) d\phi$ . Nous pouvons estimer le nombre de *e-foldings* typiquement nécessaires pour résoudre le problème de l'horizon : l'augmentation du rayon de Hubble comobile durant la phase classique doit être équivalente à sa diminution durant l'inflation. Durant la phase d'expansion dominée par le rayonnement, on a  $\rho \propto a^{-1}$ ,

$H^2 \propto a^{-4}$ , et donc  $(aH)^{-1} \propto a$ . Durant la phase d'inflation, on a en revanche  $H^2 = \text{Cte}$ , et donc  $(aH)^{-1} \propto a^{-1}$ . Le nombre minimum de *e-foldings* est ainsi, pour une échelle d'énergie typique de  $10^{16}$  GeV,

$$\ln \frac{a_{\text{today}}}{a_{\text{end}}} = \ln \frac{T_{\text{end}}}{T_{\text{today}}} \simeq \ln 10^{29} \simeq 67. \quad (3.69)$$

### Génération des perturbations primordiales

L'inflation est ainsi un mécanisme simple permettant d'engendrer les perturbations de la métrique à partir des fluctuations quantiques ; son plus grand succès reste d'avoir prédit naturellement un spectre presque invariant d'échelle dès les années 1980, et donc avant la mesure de ce spectre par COBE. Nous allons voir à présent que les perturbations engendrées sont de deux types, scalaires et tensorielles, induites respectivement par les fluctuations de densité primordiales et par les ondes gravitationnelles primordiales.

Le spectre des perturbations engendrées par l'inflation peut être calculé [58] en perturbant le champ scalaire  $\phi = \phi(t) + \delta\phi(\vec{x}, t)$  et en développant la perturbation en série de Fourier. L'action du champ perturbée contient alors les termes de fluctuations de la métrique  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(t) + \delta g_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$  (en raison du couplage du champ scalaire et de la gravitation via l'équation d'Einstein). Ces fluctuations peuvent s'écrire comme la somme de trois termes respectivement de type scalaire, vectoriel et tensoriel. Le terme vectoriel, n'augmentant pas avec l'expansion, est généralement négligé. Les perturbations du champ et de la métrique doivent ensuite être quantifiées ; les spectres de puissance des perturbations scalaires  $P_s(k)$  et tensorielles  $P_t(k)$  peuvent ainsi être calculés [58, 63] au moment où la perturbation de taille  $k = aH$  sort de l'horizon,

$$P_s(k) = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{H^2}{\dot{\phi}} \right)^2 \Big|_{k=aH}, \quad (3.70)$$

$$P_t(k) = \frac{2}{\pi^2} \left( \frac{H}{m_P} \right)^2 \Big|_{k=aH}. \quad (3.71)$$

Trois observables intéressantes peuvent être définies :

1. **Le rapport tenseur sur scalaire** est l'amplitude relative des perturbations scalaires et tensorielles (et donc approximativement le niveau des modes  $B$  de polarisation du fond diffus cosmologique par rapport aux modes  $E$ ),

$$r = \frac{P_t}{P_s}. \quad (3.72)$$

2. **L'indice spectral scalaire** est la pente (en terme de loi de puissance) du spectre des perturbations scalaires,

$$n_s - 1 = \frac{d \ln P_s(k)}{d \ln k}. \quad (3.73)$$

3. **L'indice spectral tensoriel** est la pente (en terme de loi de puissance) du spectre des perturbations tensorielles,

$$n_t = \frac{d \ln P_t(k)}{d \ln k}. \quad (3.74)$$

Les spectres de puissance peuvent être réécrits dans l'approximation de *slow-roll*, tels que :

$$P_s(k) = \frac{1}{24\pi^2 m_P^4} \frac{V}{\epsilon} \Big|_{k=aH}, \quad n_s - 1 = 2\eta - 6\epsilon, \quad (3.75)$$

$$P_t(k) = \frac{2}{3\pi^2} \frac{V}{m_P^4} \Big|_{k=aH}, \quad n_t = -2\epsilon, \quad r = 16\epsilon = \frac{8}{m_P^2} \left( \frac{\dot{\phi}}{H} \right)^2. \quad (3.76)$$

### Enjeux expérimentaux

On comprend ainsi pourquoi un tel effort expérimental a été mis en place en vue de la détection des modes B de polarisation. La simple mesure de  $r$  aux échelles du CMB permettrait d'avoir accès à l'échelle d'énergie  $V^{1/4}$  de l'inflation, par la relation suivante [63] :

$$V^{1/4} = 1.06 \times 10^{16} \text{ GeV} \left( \frac{r}{0.01} \right)^{1/4}. \quad (3.77)$$

Une détection des modes B à  $r \sim 10^{-2}$  tracerait par exemple une énergie de l'inflation de l'ordre de  $10^{16}$  GeV, typique des théories de grande unification ; on devine l'importance qu'aurait une telle découverte pour la physique des particules. Par ailleurs, les équations 3.75 et 3.76 font apparaître une relation de consistance entre l'indice spectral des modes tenseurs et le rapport tenseur sur scalaire,

$$r = -8n_t. \quad (3.78)$$

Il me semble que la mesure de cette relation de consistance non triviale renforcerait de manière tout à fait extraordinaire le paradigme de l'inflation (bien plus que la simple détection d'un spectre non nul de modes B).

La mesure de l'amplitude des spectres de puissance et des indices spectraux permettrait finalement de reconstruire le potentiel de l'inflaton [63], puisque  $P_t$  contraint  $V|_{\phi_{\text{CMB}}}$ ,  $P_s$  contraint  $V'|_{\phi_{\text{CMB}}}$ ,  $n_s$  contraint  $V''|_{\phi_{\text{CMB}}}$  et le paramètre de *running*  $\alpha_s = \frac{dn_s}{d \ln k}$  contraint  $V'''|_{\phi_{\text{CMB}}}$ . Le développement de Taylor du potentiel peut ainsi être reconstruit :

$$V(\phi) \simeq V|_{\phi_{\text{CMB}}} + V'|_{\phi_{\text{CMB}}} (\phi - \phi_{\text{CMB}}) + \frac{1}{2} V''|_{\phi_{\text{CMB}}} (\phi - \phi_{\text{CMB}})^2 + \frac{1}{3!} V'''|_{\phi_{\text{CMB}}} (\phi - \phi_{\text{CMB}})^3. \quad (3.79)$$

La forme du potentiel pourrait même être directement obtenue par ajustement sur les mesures des spectres des anisotropies du fond diffus. En attendant une éventuelle détection des modes B, les limites supérieures sur la valeur du rapport tenseur sur scalaire permettent déjà de placer des contraintes intéressantes sur toute une classe de modèles (voir par exemple [123]). La figure 3.17 indique notamment que les modèles en  $\lambda\phi^4$  sont *déjà* falsifiés par les mesures de WMAP-7.

### 3.4.3 Contraintes observationnelles sur $r$ en 2010

Il existe des arguments théoriques privilégiant certaines valeurs de  $r$  ; toutefois, ils ne semblent pas faire l'objet d'un consensus au sein de la communauté (et nous ne les maîtrisons de toute façon pas suffisamment pour les aborder ici).

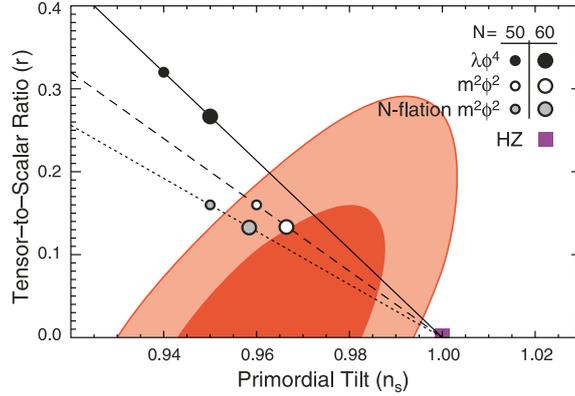


FIG. 3.17: *Contraintes après marginalisation (contours à 68% et 95% de niveau de confiance) sur l'indice spectral scalaire  $n_s$  et le rapport tenseur sur scalaire  $r$ , obtenues par combinaison des données WMAP-7 + BAO +  $H_0$ . Les trajectoires correspondent à des modèles d'inflation génériques :  $\lambda\phi^4$  en ligne continue,  $m^2\phi^2$  en ligne tiretée, et modèle hybride en pointillés. Les cercles délimitent les segments pour un nombre de  $e$ -foldings compris entre  $N_e = 50$  et  $N_e = 60$ . Graphe tiré de [165].*

Les meilleures contraintes disponibles à ce jour sur la valeur du rapport entre les modes de perturbations tensorielles et scalaires proviennent de l'observation des spectres  $TT$ ,  $TE$  et  $EE$ . La figure 3.18 montre la contribution sous-dominante des perturbations tensorielles à ces spectres. Celle-ci n'est par ailleurs significative qu'aux grandes échelles où la variance cosmique est importante ; les contraintes actuelles sur  $r$  sont ainsi déjà presque limitées par cette variance cosmique. Concernant les spectres de polarisations, le pic imprimé par la réionisation à ces mêmes échelles entraîne de plus une forte dégénérescence entre les paramètres  $r$  et  $\tau$  (l'épaisseur optique de la réionisation). Il existe enfin une forte dégénérescence entre les paramètres  $r$  et  $n_s$  (ajouter ou retirer de la puissance aux modes tenseurs dans les spectres  $TT$ ,  $EE$  et  $TE$  a tendance à "pencher" le spectre des perturbations scalaires et à modifier la valeur de  $n_s$ ). Ces dégénérescences sont visibles sur la figure 3.17. La limite actuelle sur  $r$  pour une combinaison de données WMAP-7+BAO+ $H_0$  est donnée par [165] :

$$r < 0.24 \text{ (95\% CL)}. \quad (3.80)$$

Une limite légèrement meilleure peut être obtenue si on prend en compte les données des Supernovae Ia, mais cette dernière n'est pas mise en avant par les articles WMAP-7 ; la raison évoquée en est la divergence des résultats récemment obtenus par différentes études sur le même jeu de données Supernovae (nous nous garderons bien d'émettre un avis à ce sujet).

Les limites actuelles de détection des modes  $B$  sont représentées sur la figure 3.14, où l'on voit qu'un ordre de grandeur devra être gagné avant d'obtenir des contraintes sur  $r$  significativement meilleures que celles issues de la mesure des autres spectres. Notons par ailleurs qu'un spectre BB issu d'un lentillage des modes  $E$  par les puits de potentiels traversés par les photons du fond, dominant aux grands multipôles, commencerait à dominer le spectre des modes  $B$  primordiaux pour un rapport tenseur sur scalaire inférieur à  $10^{-2}$ . La soustraction de ce signal semble délicate et nécessitera quoi qu'il en soit des mesures des modes  $B$  aux petites échelles.

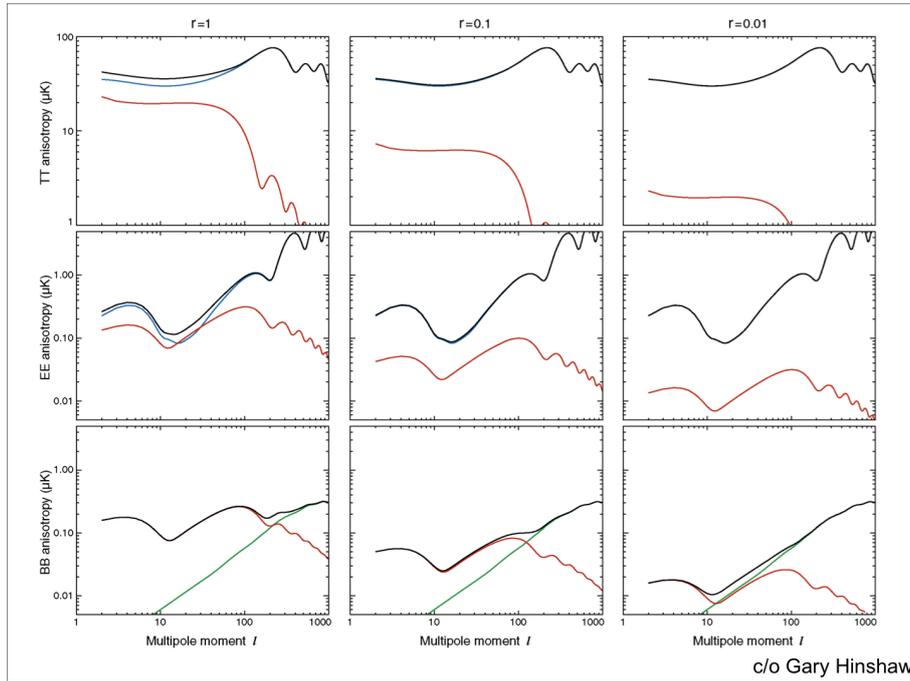


FIG. 3.18: Les spectres de puissance angulaire  $TT$ ,  $EE$  et  $BB$  sont représentés pour trois valeurs du rapport tenseur sur scalaire. La contribution tensorielle est en rouge, celle des modes scalaires en bleu et la somme des deux contributions en noir. La courbe verte représente les modes  $B$  résultants du lentillage des modes  $E$  par les potentiels gravitationnels rencontrés sur la ligne de visée. Graphe tiré d'une présentation de G. Hinshaw.

### 3.4.4 La course expérimentale aux modes $B$

Un important effort expérimental en vue de la détection des modes  $B$  est en cours au sein de la communauté des cosmologistes. L'objectif scientifique des différentes expériences labellisées "modes  $B$ " n'est pas toujours le même (modes  $B$  de lentillage ou modes  $B$  primordiaux). La communauté a identifié trois difficultés majeures auxquelles celles-ci devront faire face :

1. **L'augmentation de la sensibilité statistique.** Les détecteurs (bolomètres pour la grande majorité des expériences) ayant déjà atteint la limite fondamentale du bruit de photons, le seul moyen d'augmenter la sensibilité statistique est d'augmenter le nombre de canaux de détection. Dans l'hypothèse la plus optimiste, des gains d'un facteur 10 et d'un facteur 100 seront nécessaires respectivement pour détecter un signal et pour en tirer toute la science. Les canaux de détections (typiquement une chaîne cornets-filtres-bolomètres) étaient jusqu'à récemment fabriqués à l'unité. Les instrumentalistes tentent de développer des procédures moins coûteuses de production en série (matrice d'antennes, de cornets, de bolomètres, etc.).
2. **La contamination des avants-plans.** Les avants-plans n'ont jusqu'à présent pas constitué un problème insurmontable pour les expériences dédiées aux anisotropies de température ou aux modes  $E$ , car le CMB restait, aux fréquences d'observation, le signal dominant. Le niveau de polarisation des avants-plans est très mal connu, mais nous pourrions bien nous approcher de la zone critique où ceux-ci domineraient le signal à toutes les fréquences. Il

conviendra alors de les soustraire par des techniques de séparation de composantes ; il y aurait peut-être ainsi une limite minimale du rapport tenseur sur scalaire mesurable, estimée à  $r \simeq 0.003$  par [159]. Les expériences visant la détection d'un signal aux moyennes échelles – comme QUBIC – ont l'avantage de pouvoir se concentrer sur une zone du ciel où le signal des avants-plans est connu pour être plus faible qu'ailleurs.

3. **Le contrôle des effets systématiques.** Ce vaste sujet pourrait être à lui seul l'objet d'une thèse. Nous l'aborderons au chapitre 10, où nous proposerons une méthode prometteuse de contrôle/réduction des effets systématiques, très spécifique à l'interférométrie.

Nous donnons à présent une liste non exhaustive des expériences dédiées aux modes B ; certaines sont au stade de projets, d'autres sont déjà financées, d'autres encore sont en phase de prise de données.

### Projets au sol

**BICEP [160]** BICEP utilise 96 bolomètres PSB<sup>4</sup> à 100 et 150 GHz avec un design optique constitué de lentille sur axe. L'instrument est installé à la station américaine du Pôle Sud. Il est dédié à la recherche des modes B primordiaux avec une résolution angulaire de 45 arcminutes ( $30 < \ell < 300$ ). Il donne actuellement les meilleurs contraintes à ces échelles. Une mise à jour de l'instrument dénommée BICEP2 est en train d'être mise en place. Cette nouvelle version disposera d'une matrice de 512 bolomètres à 150 GHz, basés sur la nouvelle technologie des matrices d'antennes couplées aux TES<sup>5</sup> développée par Caltech. Chacun de ces 512 bolomètres est constitué d'une paire de deux réseaux d'antennes phasées (un pour chaque polarisation). Le bon lobe synthétique formé par ces réseaux permettrait d'éviter l'utilisation de cornets.

**C<sub>ℓ</sub>OVER [145]** Les fonds de ce projet britannique ont malheureusement été récemment coupés, alors que la construction de l'instrument était presque achevée. Il devait observer en trois bandes de fréquence (97, 150 et 225 GHz) depuis le désert d'Atacama au Chili et utilisait en tout 576 TES avec une résolution angulaire de 5.5 arcminutes (à 150 GHz) permettant de couvrir la gamme  $25 < \ell < 2000$ . Une modulation de la polarisation devait être obtenue avec une lame demi-onde rotative.

**QUIET [143]** Il s'agit d'un instrument original puisque sa technologie de détection n'est pas bolométrique mais cohérente, basée sur les HEMTs (*High Electron Mobility Transistors*). Ces composants électroniques très rapides permettent une amplification à des fréquences allant jusqu'à quelques dizaines de GHz, et ont été utilisés dans de nombreuses expériences CMB durant les années 1990 (en particulier COBE et WMAP), avant d'être progressivement supplantés par les bolomètres, dont les performances sont intrinsèquement meilleurs à des fréquences supérieures à la centaine de GHz. Au sol toutefois, la différence ne s'avère pas si importante, et la très bonne efficacité optique des systèmes à détection cohérente pourrait compenser la perte de sensibilité

<sup>4</sup>Les *Polarisation Sensitive Bolometers* (PSB) sont des bolomètres dont la grille n'est métallisée que dans une seule direction. Une paire de PSB orientés à 90° l'un de l'autre permet ainsi de mesurer le paramètre de Stokes  $Q$  par différence. Ils sont (ou furent) utilisés pour des expériences comme BOOMERANG, QUAD et Planck entre autres.

<sup>5</sup>Les *Transition-Edge-Sensors* (TES) sont des bolomètres dont la température est mesurée via la variation de la résistance dans la zone de la transition Normal-Supraconducteur (la pente  $y$  est très raide, ce qui conduit à une grande sensibilité en température).

des HEMTs (en tout cas pour des HEMTs poussés à leur limite de sensibilité théorique). Pour en revenir à QUIET, un pseudo-corrélateur rend possible la reconstruction simultanée des paramètres de Stokes  $Q$  et  $U$  dans chaque voie. QUIET utilisera la monture de CBI au Chili et sera composé de 1000 récepteurs observant à 40 et 90 GHz. La sensibilité visée est  $r = 0.01$ .

**Polar Bear** L'instrument installé sur la White Mountain en Californie sera constitué au total de 600 TES, observant dans trois bandes de fréquences (90, 150 et 220 GHz). Une modulation de la polarisation est prévue via une lame demi-onde rotative. La résolution de 4 arcminutes permettra de couvrir une large gamme de multipôles. L'objectif visé est de contraindre un rapport tenseur sur scalaire de  $r = 0.015$ .

## QUBIC, voir chapitre 4

### Projets en ballon

**EBEX [142]** L'instrument embarqué sur un ballon sera constitué au total de 1320 TES, observant dans quatre bandes de fréquences (150, 220, 350 et 450 GHz). Une modulation de la polarisation est prévue via une lame demi-onde rotative. La résolution de 2 à 8 arcminutes permettra à EBEX de couvrir les multipôles  $20 < \ell < 2000$ . Grâce à sa large couverture en fréquence et en multipôles, EBEX devrait être bien placé pour la soustraction des avants-plans et la détection des modes  $B$  de lentillage. L'objectif est de contraindre un rapport tenseur sur scalaire de  $r = 0.02$ .

**SPIDER [144]** L'instrument embarqué sur un ballon sera constitué au total de 3000 TES observant dans quatre bandes de fréquences (96, 145, 225 et 275 GHz). Une modulation de la polarisation est également prévue via une lame demi-onde rotative. La résolution de 40 arcmin environ permettra de couvrir les multipôles  $20 < \ell < 300$ . Le vol prévu en 2010 visera une contrainte du rapport tenseur sur scalaire de  $r = 0.01$ .

### Projets satellites

**Planck** Le satellite de l'ESA a été lancé en avril 2009. Il devrait fournir une nouvelle mesure des spectres de puissance angulaire TT, TE, et EE limités par la variance cosmique au moins jusqu'à  $\ell \sim 2000$  dans le cas de TT, et  $\ell \sim 800$  dans le cas de EE. La durée de la mission nominale est de 14 mois, soit deux couvertures totales du ciel. Planck devrait par ailleurs fournir un catalogue intéressant d'amas lointains détectés par effet Sunyaev-Zeldovitch. Les cartes obtenues devraient enfin permettre d'améliorer d'un facteur 10 les contraintes sur les écarts à la gaussianité des fluctuations du fond. Le plan focal du télescope contient deux instruments : LFI (Low Frequency Instrument) couvrant 3 bandes de fréquence de 30 à 70 GHz et HFI (High Frequency Instrument) couvrant 6 bandes de 100 à 857 GHz. Les détecteurs de HFI sont des bolomètres semi-conducteurs (pour certains des PSB) refroidis à 100 mK par un cryostat à dilution  $^3\text{He} - ^4\text{He}$ .

En ce qui concerne les modes  $B$ , Planck ne devrait pas être compétitif avec les expériences sol dédiées aux moyennes et petites échelles. Aux grandes échelles, cependant, il atteindra une sensibilité sans équivalent et pourrait ainsi détecter le pic imprimé par la réionisation dans le

spectre des modes B (situé autour de  $\ell \sim 7$ ). Insistons sur le fait que ce pic aurait été imprimé suite à la diffusion des quadripôles du spectre B dans le référentiel des électrons diffuseurs de la réionisation, et qu'il correspondrait donc bien à un signal de mode B primordial. Dans l'hypothèse optimiste d'une mission étendue de 28 mois permettant quatre couvertures totales du ciel et non limitée par un quelconque effet systématique, un niveau de signal en mode  $B$  correspondant à  $r = 0.03$  pourrait être ainsi exclu à 95% de niveau de confiance [149].

**CMBPol [63] et BPol [161]** Il s'agit d'études préliminaires menées des deux côtés de l'Atlantique, sur la faisabilité de lancer un satellite dédié aux modes B (CMBPol a été soumis à la NASA, BPol à l'ESA). Dans les deux cas, les agences spatiales se sont montrées réticentes à la mise en oeuvre de tels projets dans un futur immédiat. Le risque d'échec est la principale critique formulée à leur égard ; il faut honnêtement reconnaître que les retombées scientifiques en cas de non détection des modes B seraient particulièrement faibles. Cela laisse donc de la place aux expériences sondes plus modestes (sol ou ballon) dédiées à la détection du signal. Une fois ce signal détecté, il ne fait guère de doute que les agences spatiales donneront un caractère prioritaire à l'envoi d'un satellite dédié à une mesure extrêmement précise du spectre BB.

## Discussion

La similitude de tous ces instruments sondes dédiés aux modes B (nous n'incluons pas Planck sous cette bannière) est ainsi particulièrement frappante : à l'exception de QUIET, ce sont tous des imageurs s'appuyant sur des matrices de TES, et se reposant, pour le contrôle des effets systématiques, sur une astucieuse stratégie de balayage et une modulation de la polarisation par lame demi-onde en rotation. Il nous semble ainsi qu'une architecture de détection alternative comme celle de QUBIC a toute sa place dans ce paysage expérimental : l'approche originale de contrôle des effets systématiques que nous proposerons au chapitre 10 nous paraît par exemple déjà justifier l'effort de recherche nécessaire au développement d'un tel instrument. Remarquons, pour finir sur une note plus politique, que depuis l'arrêt de  $C_\ell$ OVER, QUBIC reste le seul projet post-Planck engageant fortement des instituts européens.

## Chapitre 4

# Vers l'interférométrie bolométrique

---

Nous voulons dans ce chapitre reconstituer le cheminement historique qui mène de l'expérience de Young au concept d'interférométrie bolométrique et mettre en évidence les liens existants entre les différents types d'interférométrie (optique, radio, hétérodyne et bolométrique dédiée au CMB); ces liens, qui ne nous apparaissaient pas si clairement au commencement de cette thèse, jettent un éclairage complémentaire sur l'approche plus formelle qui sera suivie dans les chapitres suivants.

---

### 4.1 Interférométrie et astronomie

Le principal intérêt de l'interférométrie en astronomie, que ce soit dans le domaine optique ou radio, est de permettre une résolution équivalente à celle d'un miroir (ou radio-télescope) de diamètre équivalent à l'écart entre les instruments combinés. Nous verrons que de ce point de vue, le cas de l'interférométrie dédiée au CMB est particulier, puisque son objectif n'est pas d'obtenir de meilleures résolutions angulaires que celles permises par les techniques d'imagerie, mais plutôt de profiter de modulations supplémentaires en vue d'obtenir un meilleur contrôle des effets systématiques.

#### 4.1.1 Interférométrie optique

Nous nous proposons de donner dans cette section un bref aperçu historique des techniques d'interférométrie optique en astronomie (en nous inspirant notamment de [184]). Il s'agit d'un champ de recherche actif dont les potentielles retombées astronomiques sont gigantesques. La turbulence atmosphérique, qui dégrade fortement la résolution angulaire théorique, est la principale source de difficultés à laquelle sont confrontés les interféromètres optiques au sol. Si de nombreuses techniques ont été développées durant les quarante dernières années pour y faire face, beaucoup reste à faire. Les problèmes sur lesquels travaillent les spécialistes actuels du domaine sont ainsi assez

éloignés de ceux rencontrés durant cette thèse ; une filiation évidente existe cependant puisque nous verrons par exemple qu'un interféromètre bolométrique peut être conçu comme une version millimétrique de l'interféromètre de Fizeau.

Au début du XIX<sup>e</sup> siècle, Thomas Young réalisa sa fameuse expérience mettant en évidence la nature ondulatoire de la lumière. Il observa, à travers un écran percé de deux petits trous, une source lumineuse ponctuelle, et vit alors une image zébrée de rayures perpendiculaires à la direction des deux trous : les célèbres franges d'interférence.

Mais l'histoire de l'interférométrie astronomique ne débute qu'en 1867. Le Français Hippolyte Fizeau fut le premier astronome à saisir conceptuellement le lien existant entre le contraste de franges d'interférence imagées au foyer d'un télescope et la dimension angulaire de la source qui les produit. Il proposa d'apposer sur la pupille d'entrée d'un télescope un masque d'ouvertures permettant de réaliser des mesures interférométriques de diamètres stellaires [170]. Edouard Stephan expérimenta l'idée de Fizeau en 1873 sur le télescope de 80 cm de diamètre de l'Observatoire de Marseille, à l'aide d'un masque dont les ouvertures étaient espacées de 50 cm. Cela fut insuffisant pour résoudre angulairement la plupart des étoiles observées (à l'exception notable de Sirius), et Stephan dut conclure « à l'extrême petitesse du diamètre apparent des étoiles fixes » [171].

Ce n'est qu'en 1890 qu'Albert Michelson reprit l'idée de Fizeau à son compte, en jetant les bases du formalisme interférométrique et en établissant clairement le lien existant entre la visibilité des franges d'interférence et le diamètre d'un disque de brillance uniforme [172]. Il réalisa pour la première fois en 1921 avec Francis Pease une mesure de diamètre stellaire à l'aide d'un interféromètre construit pour l'occasion sur le télescope Hooke de 2.5 mètre de l'observatoire du Mont Wilson [173]. L'apport technologique majeur fut de procéder par recombinaison de faisceaux issus de miroirs individuels montés sur une poutrelle métallique, cette dernière étant arrimée à une monture de télescope classique, plutôt que par apposition d'un masque d'ouverture sur une pupille unique. Ce procédé lui permit d'atteindre une ligne de base entre pupilles de 20 pieds (6,1 m). Pease fait également état d'un système permettant d'atteindre une longueur de base de 50 pieds (15,24 m). Mais des limitations d'ordre mécanique survinrent alors (mauvais contrôle des vibrations des structures porteuses), et rendirent le système peu exploitable [174]. L'expérience n'eut malheureusement pas de suite immédiate.

La turbulence atmosphérique, qui dégrade fortement la résolution angulaire, est la principale difficulté à laquelle sont confrontés les interféromètres optiques au sol. La phase varie de manière aléatoire sur chacune des sous-pupilles constitutives du réseau interférométrique, dans un temps de cohérence qui est typiquement de l'ordre de la dizaine de milliseconde dans l'infrarouge. Ces variations de phase dégradent le contraste des franges d'interférences et le rapport signal sur bruit sur la visibilité.

Antoine Labeyrie développa dans les années 70 la méthode dite « d'interférométrie des tavelures » ou « speckle interferometry » [175], qu'il exploita sur de grands télescopes pour retrouver la résolution théorique dont les prive l'atmosphère. Une caméra très sensible est utilisée pour filmer l'image avec des poses suffisamment courtes, quelques millisecondes, pour figer les tavelures. Par analyse de Fourier, il est ensuite possible de filtrer les tavelures et de reconstruire une image à haute résolution de la source observée. Son utilisation a mené à nombre de découvertes, dont la lune de Pluton, Charon, la qualité binaire de certaines étoiles autrement perçues comme singulières, et la détection de taches solaires à la surface d'étoiles géantes comme Bételgeuse (voir figure 4.1). Labeyrie et son équipe, construisirent à l'Observatoire de Nice un premier « Interféromètre à 2 Télescopes » (I2T), avec lequel ils obtinrent en 1974, des franges d'interférence sur Véga [176].

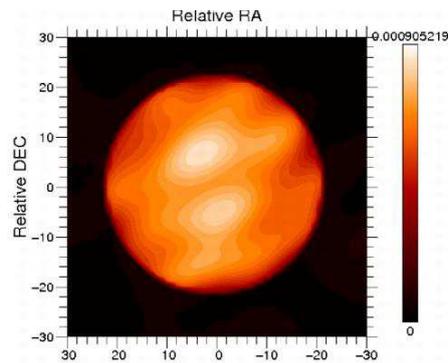


FIG. 4.1: *La surface de Bételgeuse en proche infra-rouge à 1,64 micron, obtenue par l'interféromètre IOTA. Le diamètre de l'étoile avoisine les 40 mas (milliarcseconde), la taille des détails reconstruits 9 mas.*

L'interférométrie astronomique s'est depuis largement internationalisée, et un grand nombre d'interféromètres à deux voies ont vu le jour (PTI, IOTA/FLUOR [177]). Le passage d'une recombinaison interférométrique à plus de deux télescopes est aujourd'hui crucial pour l'imagerie par synthèse d'ouverture, rendue possible via la technique dite de clôture de phase (voir chapitre 10). Les premières mesures du terme de clôture avec plus de deux ouvertures ont été obtenues grâce à des masques pupillaires [178]. La transposition de cette technique à trois télescopes réellement indépendants n'a été réalisée que récemment par deux interféromètres astronomiques COAST (Cambridge Optical Aperture Synthesis Telescope) [179] et NPOI (Navy Prototype Optical Interferometer [180]). Le VLTI (Very Large Telescope Interferometer), lancé par l'ESO en 1993, forme un ensemble de 4 télescopes optiques et infra-rouges de 8,20 m et de 4 télescopes auxiliaires de 1.80 m. Ces petits télescopes sont capables de se déplacer le long de voies ferrées de façon à former, en couplage avec les grands, un interféromètre équivalant à un télescope optique de 200 m.

#### 4.1.2 Interférométrie et radio-astronomie

Si l'interférométrie optique moderne ne débute que dans les années 70, le développement des technologies radio d'après guerre a permis l'essor de la radio-interférométrie dès les années 50. A ces grandes longueurs d'onde, il est en effet beaucoup plus facile de transporter par câble les signaux sans perdre leurs phases, et de compenser les différences de marche par des lignes à retard. Le groupe de Cambridge mené par Ryle et Vonberg observa le soleil à 175 MHz pour la première fois en Juillet 1946 grâce à un interféromètre de Michelson constitué de deux antennes dipolaires séparées d'une distance pouvant varier entre 17 et 240 mètres [181]. Cet instrument leur permit également de détecter des sources radio telles que Cygnus A et Cassiope A. A la fin des années 60, Ryle et son groupe [182] développèrent les techniques dites de synthèse d'ouverture (cf. section 4.2.3) grâce aux nouveaux ordinateurs capables d'effectuer les transformées de Fourier requises.

Au début des années 70, l'amélioration de la stabilité des récepteurs a permis le développement de l'interférométrie dite "à très longue ligne de base". Les antennes ne sont plus connectées physiquement, mais les données mesurées par chaque antenne sont stockées et datées (à l'aide d'horloges atomiques). Les signaux peuvent ainsi être corrélés par paire numériquement. Aux plus hautes fréquences, il est possible de synthétiser des lobes d'une taille inférieure à la mil-

liarcseconde (voir figure 4.2). Les interféromètres à très longue ligne de base actuellement en fonctionnement sont le VLBA (dont les télescopes sont situés en Amérique du Nord), le VLBI (dont les télescopes sont situés en Europe, en Chine, en Afrique du Sud et à Porto Rico), et le LBA (dont les télescopes sont situés en Australie). Le réseau mondial de fibre optique rend aujourd'hui possible la réalisation de cette interférométrie en temps réel.

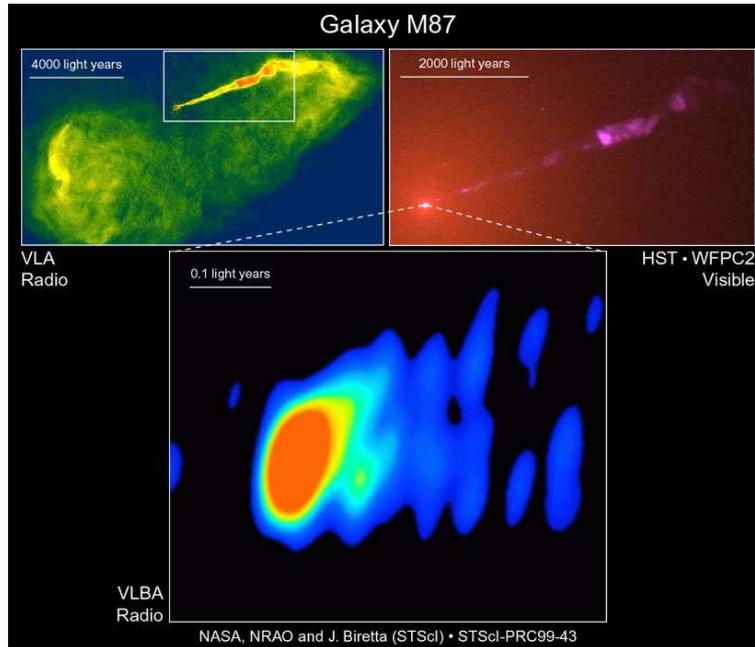


FIG. 4.2: La galaxie M87 observée par imagerie optique (HST) et par les interféromètres radio VLA et VLBA. Le jet est probablement émis par le trou noir central super-massif de la galaxie.

## 4.2 Interférométrie hétérodyne dédiée au fond diffus cosmologique

L'interférométrie hétérodyne dédiée au CMB, si elle repose sur les concepts de l'interférométrie radio classique et lui emprunte nombre de ses outils d'analyse de données, s'en différencie sous de nombreux aspects. Les composants instrumentaux nécessaires sont d'abord moins faciles à réaliser dans les longueurs d'ondes millimétriques. Mais surtout, alors que, comme nous l'avons vu, la radio-interférométrie est principalement dédiée à l'étude de sources de tailles angulaires extrêmement faibles et très émettrices, le CMB est une source étendue sur toute la sphère céleste dont la mesure des anisotropies nécessite des détecteurs d'une sensibilité exceptionnelle.

### 4.2.1 Historique

Des travaux pionniers utilisant des radio-interféromètres comme le Green Bank Interferometer (Martin et al., 1980 [187]), puis les instruments VLA (Knöke et al., 1984 [188]), ATCA (Subrahmanyam et al., 1993 [189]) ou IRAM (Radford, 1993 [190]) permirent l'établissement de limites supérieures sur les anisotropies du CMB aux petites échelles angulaires. Il était cependant clair

à la fin des années 80 que seuls des instruments de petites ouvertures opérant à plus haute fréquence permettraient la détection des fluctuations du CMB. Grâce à un interféromètre basé sur un corrélateur SIS à 43 GHz, Peter Timbie et David Wilkinson placèrent par exemple en 1990 la limite supérieure des fluctuations de température à  $\Delta T/T < 10^{-4}$  pour les échelles angulaires comprises entre 0.5 et 5 degrés [191].

L'essor de l'interférométrie hétérodyne dédiée au CMB eut véritablement lieu dans les années 1990, suite au développement d'amplificateurs large bande à faible bruit dans le domaine millimétrique [186]. Ce sont ces mêmes amplificateurs (High Electron Mobility Transistors ou HEMTs) qui furent utilisés pour les satellites COBE ou WMAP avant d'être peu à peu supplantés par les techniques bolométriques<sup>1</sup>.

L'expérience CAT (O'Sullivan et al. 1995 [192]) opérant à 15 GHz, fut la première à obtenir une détection des anisotropies de température à une échelle inférieure au degré. Ce résultat encouragea différents groupes (en particulier au Royaume-Uni et aux Etats-Unis) à développer des interféromètres hétérodynes munis d'un plus grand nombre de récepteurs. Ces instruments se sont illustrés par leurs excellentes performances. Des détections SZ furent obtenus par les interféromètres OVRO et BIMA en 1999 et 2002 [193]. Le VSA a obtenu au début des années 2000 d'excellentes mesures aux grands multipôles des anisotropies de température [196]; DASI fut la première expérience à détecter les anisotropies de mode E de polarisation en 2002 [195]; CBI obtint à la même époque une mesure des modes E aux plus petites échelles [194].

#### 4.2.2 Intérêt de l'interférométrie dédiée à la mesure CMB

L'objectif de l'interférométrie dédiée au CMB n'est ainsi pas d'atteindre de meilleures résolutions angulaires que celles permises par les techniques d'imagerie, mais plutôt de tirer parti de modulations supplémentaires en vue d'obtenir un meilleur contrôle des effets systématiques. Nous en décrivons ici brièvement quelques unes. Nous verrons au chapitre 10, que nous avons mis à jour, dans le cadre de cette thèse, une méthode novatrice de contrôle des effets systématiques, unique aux techniques d'interférométrie, qui pourrait devenir un argument majeur en faveur de l'interférométrie bolométrique.

Un interféromètre mesure intrinsèquement des différences sur le ciel, ce qui le rend parfaitement adapté à la mesure des anisotropies du CMB. A la différence d'un imageur qui observe dans l'espace direct en déplaçant son lobe sur le ciel, un interféromètre mesure directement les modes de la transformée de Fourier des champs de température ou de polarisation du ciel observé. L'observable d'intérêt étant le spectre de puissance et non la carte du champ de CMB observé, l'analyse des données est à priori plus aisée en interférométrie. Toute composante constante du signal sur le ciel étant par ailleurs automatiquement filtrée, un interféromètre n'est pas affecté par les variations temporelles de l'atmosphère à grande échelle (dans le cas d'un imageur, une stratégie d'observation astucieuse est requise pour contrer ce type d'effet systématique).

Un deuxième avantage des interféromètres réside dans le fait que leur résolution angulaire dépende de la distribution des récepteurs (antennes ou cornets) plutôt que de leurs propriétés optiques; cela assure par exemple une grande stabilité des lobes sur de longues échelles temporelles.

Enfin, comme nous allons le voir dans la section 4.2.4, il est possible, dans le cas de l'interféro-

---

<sup>1</sup>Notons toutefois qu'à basse fréquence (en dessous de 90 GHz) ces détecteurs restent meilleurs que les bolomètres et qu'une expérience comme QUIET espère démontrer qu'au sol leurs performances restent compétitives.

métrie hétérodyne, d'introduire des modulations supplémentaires à différents niveaux de la chaîne de détection.

### 4.2.3 Principe théorique

Nous introduisons ici les rudiments de formalisme, communs aux interféromètres hétérodyne et bolométrique, permettant la compréhension des liens entre les observables mesurées par ces instruments et la science du CMB.

#### Les visibilité, observables standard de l'interférométrie

Le principe de l'interférométrie est d'utiliser la différence de marche entre deux ondes électromagnétiques émises par la même source mais collectées par deux récepteurs différents (antennes ou cornets), afin d'obtenir une figure d'interférence en les recombinant (voir figure 4.3). On appelle *ligne de base* le vecteur  $\vec{u}$ , défini comme la séparation entre les récepteurs en unités de longueur d'onde  $\lambda$  :

$$\vec{u} = \frac{\vec{d}_2 - \vec{d}_1}{\lambda}, \quad (4.1)$$

où  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$  sont les vecteurs positions des deux récepteurs. Ceux-ci observent dans la même

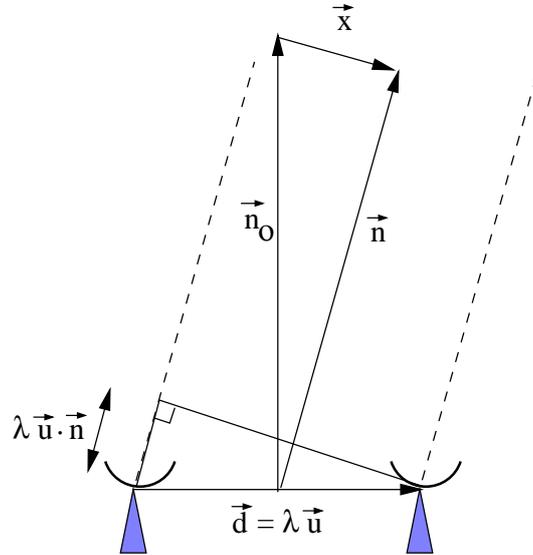


FIG. 4.3: Schéma de principe de l'interférométrie.

direction  $\vec{n}_0$  sur le ciel (perpendiculaire à leur séparation) avec un lobe en terme de champ électromagnétique  $A(\vec{n} - \vec{n}_0)$ ; le lobe en terme de puissance est alors  $B(\vec{n} - \vec{n}_0) = |A(\vec{n} - \vec{n}_0)|^2$ . On suppose les lobes identiques pour les deux récepteurs. Le rayonnement  $E_0(\vec{n})$  provenant de la direction  $\vec{n}$  est collecté par les deux récepteurs avec une différence de phase  $\delta = 2\pi\nu\tau = 2\pi\vec{u} \cdot \vec{n}$ . Si nous introduisons le vecteur  $\vec{x}$  tel que  $\vec{n} = \vec{n}_0 + \vec{x}$ , alors  $\delta = 2\pi\vec{u} \cdot \vec{x}$ . Nous noterons  $E_1(\vec{x}, t)$  et  $E_2(\vec{x}, t)$  les rayonnements collectés par les deux récepteurs à un instant  $t$ , provenant de la direction  $\vec{n}$  sur le ciel,

$$E_1(\vec{x}, t) = E_0(\vec{x}) \sin(2\pi\nu t) \quad \text{et} \quad E_2(\vec{x}, t) = E_1(\vec{x}, t - \tau). \quad (4.2)$$

Un interféromètre (qu'il soit hétérodyne ou bolométrique) est un instrument capable d'effectuer la corrélation entre ces deux signaux. Les interféromètres hétérodynes possèdent généralement un corrélateur dit "complexe", assemblage de deux corrélateurs "réels", l'un mesurant le produit des deux voies moyenné sur un temps grand devant la période de l'onde électromagnétique, l'autre mesurant ce même produit après que la première voie ait été déphasée de 90 degrés. Le premier corrélateur mesure la quantité :

$$V_a = \left\langle \int \int A(\vec{x}) E_1(\vec{x}, t) \times A(\vec{x}') E_2(\vec{x}', t) d\vec{x} d\vec{x}' \right\rangle. \quad (4.3)$$

Les signaux provenant de directions différentes ne sont pas cohérents de sorte que la moyenne temporelle de leur produit est nulle :

$$V_a = \left\langle \int A(\vec{x}) E_1(\vec{x}, t) \times A(\vec{x}) E_2(\vec{x}, t) d\vec{x} \right\rangle \quad (4.4)$$

$$= \int d\vec{x} A^2(\vec{x}) E_0^2(\vec{x}) \times \langle \sin(2\pi\nu t) \sin(2\pi\nu(t - \tau)) \rangle \quad (4.5)$$

$$= \int d\vec{x} B(\vec{x}) E_0^2(\vec{x}) \times \frac{1}{2} \langle \cos(2\pi\nu\tau) - \cos(2\pi\nu(2t - \tau)) \rangle. \quad (4.6)$$

Le second terme a une moyenne temporelle nulle et nous pouvons donc écrire :

$$V_a = \frac{1}{2} \int d\vec{x} B(\vec{x}) E_0^2(\vec{x}) \cos(2\pi\vec{u} \cdot \vec{x}). \quad (4.7)$$

Le second corrélateur mesure de même la quantité :

$$V_b = \frac{1}{2} \int d\vec{x} B(\vec{x}) E_0^2(\vec{x}) \sin(2\pi\vec{u} \cdot \vec{x}). \quad (4.8)$$

On définit alors l'observable standard en interférométrie, la *visibilité complexe* comme

$$V(\vec{u}) = 2(V_a + iV_b) = \int B(\vec{x}) E_0^2(\vec{x}) \exp(2i\pi\vec{u} \cdot \vec{x}) d\vec{x}, \quad (4.9)$$

qui n'est rien d'autre que la transformée de Fourier de la puissance provenant du champ observé. Cette relation est connue sous le nom de théorème de Van Cittert-Zernicke [185]. Un interféromètre mesure donc directement les modes de Fourier du ciel observé, la fréquence spatiale du mode étant donné par la séparation entre deux récepteurs. Le ciel observé est défini ici comme le ciel réel multiplié par le lobe décrivant le champ de vue des récepteurs.

Dans le cas d'un interféromètre de Fizeau ou de Michelson, le module de cette visibilité complexe correspond donc à l'amplitude, i.e. à la "visibilité" du contraste des franges imagées au plan focal ; de là l'origine du terme (on comprend également que, pour une source de brillance uniforme comme une étoile, cette visibilité soit fonction du diamètre de la source).

### Théorème de convolution

Si le champ observé est suffisamment petit (typiquement moins d'une dizaine de degrés carrés), l'*approximation de ciel plat* s'applique et les visibilités peuvent être réécrites comme le produit de

convolution des transformées de Fourier du champ  $I(\vec{n}) = E(\vec{n})E^*(\vec{n})$  et du lobe  $B(\vec{n})$ ,

$$V_I(\vec{u}) = \int B(\vec{n})I(\vec{n}) \exp(2i\pi\vec{u} \cdot \vec{n})d\vec{n} \quad (4.10)$$

$$= \int \tilde{B}(\vec{u} - \vec{v})\tilde{I}(\vec{v})d\vec{v} \quad (4.11)$$

où  $\tilde{I}$  désigne la transformée de Fourier du champ et  $\tilde{B}$  celle du lobe.

Le lobe primaire régit donc la couverture sur le ciel dans l'espace direct et la résolution de l'instrument dans l'espace des visibilitées (cf. chapitre 8).

### Visibilités polarisées

Si les récepteurs permettent de différencier les deux polarisations transverses, un interféromètre peut naturellement mesurer la polarisation du champ observé en terme de paramètres de Stokes. Le corrélateur requis dans le cas de l'interférométrie hétérodyne est alors un peu plus complexe d'un point de vue instrumental. On définit les quatre *visibilités de Stokes* comme :

$$V_X(\vec{u}) = \int B(\vec{n})X(\vec{n}) \exp(2i\pi\vec{u} \cdot \vec{n})d\vec{n} \quad (4.12)$$

$$= \int \tilde{B}(\vec{u} - \vec{v})\tilde{X}(\vec{v})d\vec{v} \quad (4.13)$$

où  $X = \{I, Q, U, V\}$  indexe le paramètre de Stokes.

### Lignes de base et plan uv

Dans un instrument possédant  $N$  récepteurs (antennes ou cornets dans le domaine millimétrique), toutes les corrélations possibles sont généralement formées. Les  $N_b = N(N-1)/2$  lignes de base, définissent  $N_b$  visibilitées ; autrement dit, l'instrument mesure à chaque instant  $N_b$  modes de la transformée de Fourier du ciel observé. Si les récepteurs sont coplanaires, on peut définir un plan vectoriel dit *plan uv*, auxquels appartiennent les lignes de base définies, rappelons le, comme la séparation entre les récepteurs en unités de longueur d'onde,

$$\vec{u}_{ij} = \frac{\vec{d}_j - \vec{d}_i}{\lambda} \quad (4.14)$$

où  $\vec{d}_i$  et  $\vec{d}_j$  donnent la position des cornets  $i$  et  $j$ , et  $\lambda$  est la longueur d'onde à laquelle opère l'instrument. La figure 5.4 montre par exemple la distribution des lignes de base pour une configuration de récepteurs en grille carrée.

### La synthèse d'ouverture

Lorsqu'un interféromètre a mesuré suffisamment de points dans le plan uv, la transformée de Fourier "spatiale" inverse des visibilitées permet de reconstruire une image du ciel : ce procédé est connu sous le nom de *synthèse d'ouverture*. Dans de nombreux cas, il est possible d'obtenir de très

bonnes images, même à partir d'un recouvrement incomplet du plan uv, grâce à des algorithmes de déconvolution non-linéaires (voir chapitre 10).

Notons au passage que Martin Ryle et Antony Hewish ont conjointement obtenu le prix Nobel de physique en 1974, « pour leurs recherches novatrices en radio-astronomie physique », et plus particulièrement dans le cas de Ryle, « pour ses observations et inventions, en particulier dans la technique de synthèse d'ouverture ».

Les techniques de synthèse d'ouverture constituent à elles seules un vaste champ de recherche actif. Nous n'avons pas eu l'occasion d'approfondir ce sujet durant cette thèse, pour deux raisons, la première étant que notre problème prioritaire était l'étude conceptuelle de l'instrument, la mise en place de son architecture et l'estimation de sa sensibilité, la seconde étant que le principal objectif d'une expérience dédiée au mode B de polarisation du CMB est l'estimation des spectres de puissance angulaire (et non des cartes donc, même s'il est possible, si l'on cherche à reconstruire celles-ci, de s'appuyer sur toutes les techniques existantes de synthèse d'ouverture).

### Estimation des spectres de puissance angulaire

Ces spectres de puissance angulaire peuvent en effet être directement estimés à partir des visibilités sans passer par une étape de création de carte, puisque comme nous l'avons vu, les visibilités ne sont rien d'autre que les modes de Fourier du champ observé. Il est possible de montrer, que dans l'approximation plane, les multipôles sont reliés à la norme des lignes de base par

$$\ell = 2\pi|\vec{u}|. \quad (4.15)$$

Nous verrons au chapitre 8 qu'un estimateur non biaisé simple du spectre de puissance est donné, à chaque multipôle, par la variance des visibilités définies pour les lignes de base correspondantes,

$$C_\ell = \frac{2}{\Omega} \times \frac{1}{N_{\neq}(\ell)} \sum_{i=0}^{N_{\neq}(\ell)-1} (\mathcal{V}(\vec{u}_i)\mathcal{V}^*(\vec{u}_i) - \mathcal{N}_{ii}), \quad (4.16)$$

où  $N_{\neq}(\ell)$  est le nombre de visibilités de différentes directions mais de même norme  $|\vec{u}| = \ell/(2\pi)$ , où  $\Omega$  est l'intégrale du lobe primaire des récepteurs, et où  $\mathcal{N}_{ii}$  sont les termes diagonaux de la matrice de covariance de bruit des visibilités mesurées. Des méthodes de maximum de vraisemblance standards permettent d'obtenir aisément la meilleure estimation des spectres de puissance à partir du jeu de visibilités complexes mesurées, comme nous le verrons au chapitre 9.

#### 4.2.4 Concept instrumental

Nous allons maintenant décrire, de manière schématique, la chaîne de détection d'un interféromètre hétérodyne dédié à la mesure du CMB tel que VSA, CBI ou DASIS. Bien que ce concept instrumental soit très différent de celui d'un interféromètre bolométrique, la compréhension que nous en avons progressivement acquise durant cette thèse nous a bien des fois éclairé sur des problèmes que nous rencontrons dans le cadre de l'interférométrie bolométrique. La chaîne de détection d'un interféromètre hétérodyne, représentée sur la figure 4.4, est constituée de trois modules :

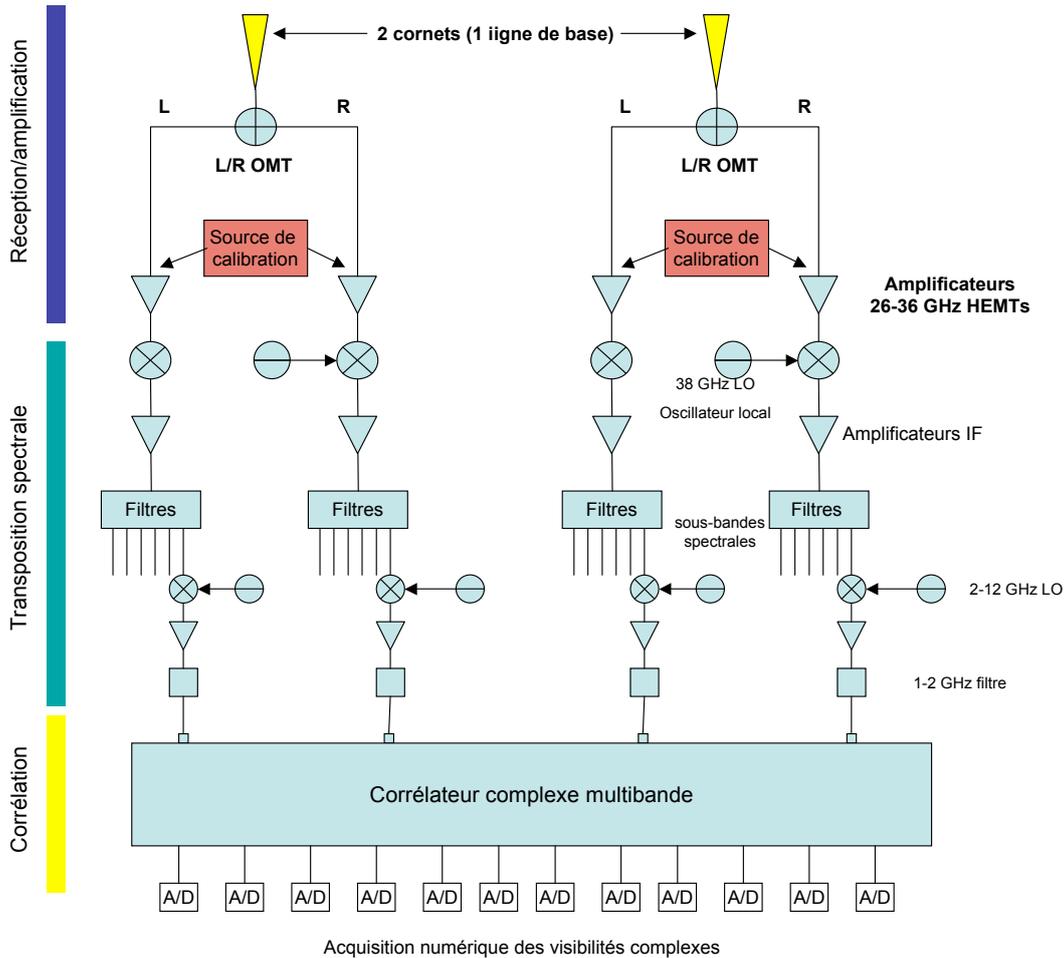


FIG. 4.4: Vue schématique de la chaîne de détection d'un interféromètre hétérodyne type DASI ou CBI, pour une seule ligne de base.

1. **Amplification.** Les récepteurs peuvent être constitués de  $N_h$  cornets corrugués ( $N_h = 13$  dans le cas de DASI), et éventuellement munis de lentilles individuelles. Les deux polarisations circulaires, gauche et droite, sont séparées, puis chacun des  $2 \times N_h$  canaux est couplé à un amplificateur de type HEMT. C'est de cette première amplification que provient la majeure partie du bruit de mesure, lorsque l'instrument est bien conçu.
2. **Transposition en fréquence.** Les signaux aux fréquences CMB, 26-36 GHz dans le cas de DASI (appelés, par convention, signaux radio-fréquence, RF), sont transposés à de plus basses fréquences, 2-12 GHz (appelés par convention, fréquences intermédiaires, IF), à l'aide d'un ensemble d'oscillateurs locaux synchronisés. C'est de cette transposition spectrale que provient le qualificatif "hétérodyne". Les signaux sont à nouveau amplifiés puis divisés en  $n_{sb}$  sous-bandes spectrales ( $n_{sb} = 10$  pour DASI). Chacun de ces canaux  $n_{sb} \times 2 \times N_h$  est lui-même transposé dans une gamme de fréquence où la corrélation analogique sera possible (1-2 GHz pour DASI), puis amplifié une dernière fois.
3. **Corrélation.** Les  $n_{sb} \times N_h(2N_h - 1)$  corrélations entre les  $2N_h$  signaux sont alors effectuées pour les  $n_{sb}$  sous-bandes spectrales, par un corrélateur analogique, moyennées temporellement, puis numérisées. Ce corrélateur doit être complexe, au sens où il doit pouvoir, mesurer

les parties réelles et imaginaires des visibilitées polarisées.

On trouvera une présentation moins succincte de ce type d'instrument et de ses composants dans [197, 198]. Un dernier point important à mentionner est la possibilité d'introduire des modulations à chaque étage de cette chaîne de détection. Le signal à 38 GHz des oscillateurs locaux de DASI est par exemple modulé à l'aide de séquences de Walsh [185], ce qui permet d'éliminer les termes constants du corrélateur.

## 4.3 Naissance de l'interférométrie bolométrique

### 4.3.1 Historique

La détection des modes B de polarisation du CMB nécessitera, nous l'avons vu au chapitre 3, un gain d'au moins un ordre de grandeur en sensibilité statistique par rapport aux expériences de la génération précédente (autrement dit il s'agit de passer d'instruments munis d'une ou plusieurs dizaines de détecteurs à des instruments en possédant au moins plusieurs centaines). Les groupes instrumentaux impliqués dans les techniques interférométriques ont décidé, au milieu des années 2000, d'abandonner la voie de l'interférométrie hétérodyne ; la principale raison en est que la construction d'un corrélateur large bande permettant d'effectuer les  $N(N - 1)/2$  corrélations requises, apparaît très délicate dès lors que  $N \sim O(10^2)$ . Notons toutefois que la collaboration CHIP, très récemment mise en place par Sarah Church, a décidé de relever ce défi (technologique et financier), et envisage de développer un tel corrélateur.

Pour en revenir au contexte du début des années 2000, les techniques bolométriques étaient par ailleurs en train de prendre le pas sur les détecteurs cohérents. Les bolomètres ont l'avantage d'être opérationnels sur la gamme entière des longueurs d'ondes millimétriques intéressantes pour l'étude du CMB. Leur sensibilité est équivalente à celle des détecteurs cohérents à 90 GHz et bien meilleure aux fréquences supérieures (en particulier dans l'espace où il n'y a plus de discussions possibles sur leur supériorité). Lucio Piccirillo et Peter Timbie, à l'origine des projets BRAIN et MBI, cherchèrent alors une manière de combiner les avantages des techniques bolométriques et interférométriques. La difficulté principale de cette approche réside dans la nécessaire combinaison de tous les signaux collectés par les cornets. Un instrument, de type Michelson, dans lequel les signaux de chaque cornet seraient divisés en  $N - 1$  voies, afin que  $N(N - 1)/2$  bolomètres mesurent les  $N(N - 1)/2$  corrélations, aurait une sensibilité déplorable (dans ce cas où il est impossible d'avoir recours à une quelconque amplification, on peut montrer que la sensibilité est à peu près celle d'un imageur composé d'un seul détecteur, et ce, quelle que soit la valeur de  $N$ ). La solution qu'ils imaginèrent est celle du "combineur de faisceaux" quasi-optique : l'interférométrie bolométrique était née... Ce combineur consiste en un télescope à l'ouverture duquel est placée une matrice de couples de cornets primaires/secondaires et dans le plan focal duquel est placée une matrice de détecteurs (voir figure 4.5). Les cornets primaires observent directement le ciel, alors que les cornets secondaires réémettent les radiations collectées vers le télescope, chaque couple de cornet jouant ainsi le rôle d'une pupille diffractive. Cet instrument n'est en fait rien d'autre qu'une transposition dans le domaine millimétrique du premier interféromètre astronomique jamais réalisé, celui de Fizeau ! Evidemment, il recèle quelques subtilités supplémentaires puisque le nombre de "pupilles", i.e. le nombre de cornets est ici bien supérieur à deux, et que cet instrument ambitionne aussi d'être sensible à la polarisation...

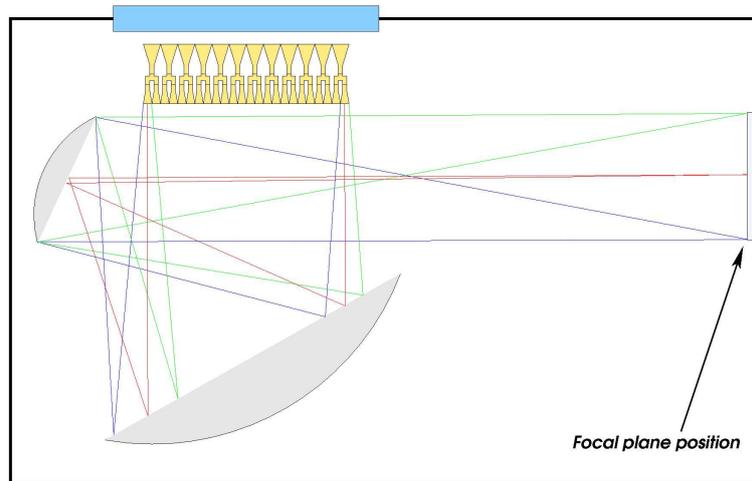


FIG. 4.5: *Combineur de faisceaux quasi-optique. Les cornets (en jaune) jouent le rôle de pupilles diffractives. Les franges d'interférences se forment sur le plan focal du télescope.*

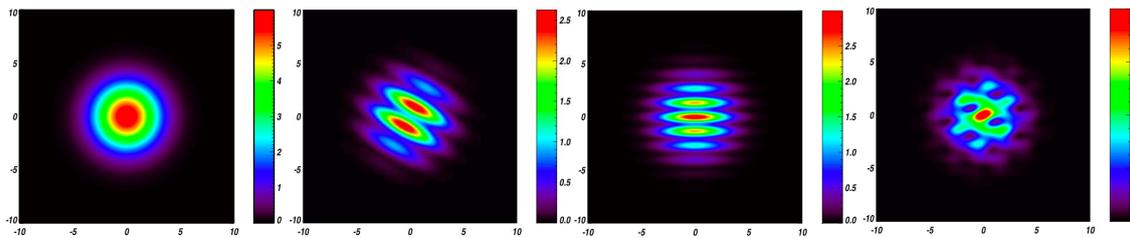


FIG. 4.6: *Images observées dans le plan focal du combineur quasi-optique (ou de l'interféromètre de Fizeau). De gauche à droite : un seul cornet/pupille (pas d'interférence); une ligne de base; une autre ligne de base; somme de toutes les lignes de base où les franges d'interférence sont superposées.*

### 4.3.2 Concept instrumental

Nous voulons donner ici une première idée qualitative du fonctionnement d'un interféromètre bolométrique (nous rentrerons dans les détails à partir du chapitre 5). Nous l'avons décrit, dans la section précédente, comme l'analogie millimétrique d'un interféromètre de Fizeau. Nous allons voir que la combinaison des signaux peut également être réalisée par un composant issu des techniques radio, la *matrice de Butler*.

L'idée de base de l'interférométrie bolométrique est de remplacer les corrélateurs par des bolomètres. La mesure, avec un bolomètre, de la somme des signaux  $E_1$  et  $E_2$  provenant de deux cornets différents, s'écrit comme la puissance totale (moyennée sur une échelle de temps bien plus longue que la période de l'onde électromagnétique) des deux voies d'entrée à laquelle s'ajoute la corrélation des deux signaux,

$$S = \langle |E_1 + E_2|^2 \rangle = \langle |E_1|^2 \rangle + \langle |E_2|^2 \rangle + 2\text{Re} [\langle E_1 E_2^* \rangle]. \quad (4.17)$$

Ainsi, si l'on s'arrange pour que chaque détecteur mesure la puissance d'une combinaison linéaire des rayonnements collectés par tous les cornets, on obtiendra une combinaison linéaire de

toutes les corrélations recherchées. C'est exactement ce que réalise en guide d'onde la matrice de Butler (voir [183] et figure 5.6) : chaque canal de sortie  $E_k^{out}(t)$  s'écrit comme une combinaison linéaire (aux coefficients  $\alpha_{ik}$  complexes) de l'ensemble des canaux d'entrées  $E_i(t)$ ,

$$E_k^{out}(t) = \sum_{i=0}^{N_h-1} \alpha_{ik} E_i(t). \quad (4.18)$$

La puissance  $S_k$  mesurée par un bolomètre  $k$  s'écrit donc bien comme une combinaison linéaire de toutes les corrélations (i.e. les visibilités) auquel s'ajoute un terme constant,

$$S_k = \sum_{i=0}^{N_h-1} |\alpha_{ik}|^2 \langle |E_i|^2 \rangle + 2\text{Re} \left[ \sum_{i<j} \alpha_{ik} \alpha_{jk}^* \langle E_i E_j^* \rangle \right] \quad (4.19)$$

$$S_k = C + 2\text{Re} \left[ \sum_{i<j} \alpha_{ik} \alpha_{jk}^* V(\vec{u}_{ij}) \right] \quad (4.20)$$

où  $V(\vec{u}_{ij})$  est la visibilité définie pour la ligne de base formée par la paire de cornets  $\{i, j\}$ . Le combineur quasi-optique de Fizeau est effectivement un équivalent optique du combineur de Butler, puisque les détecteurs situés au plan focal mesurent les franges d'interférences formées par la superposition des lobes de tous les cornets secondaires.

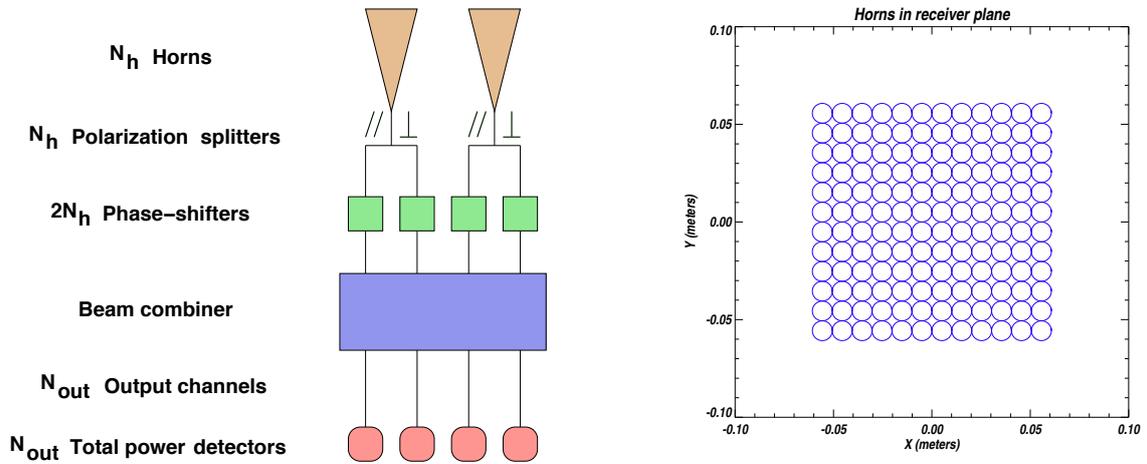


FIG. 4.7: Schéma de principe de l'interférométrie bolométrique et configuration des cornets d'entrée en forme de grille carrée ( $12 \times 12 = 144$  cornets).

Notons pour l'histoire, que si tout cela paraît assez clair au lecteur – du moins nous l'espérons –, cela ne le fut pas immédiatement pour nous au commencement de cette thèse, puisque la compréhension de l'équivalence des deux systèmes, et plus particulièrement du combineur quasi-optique nous a nécessité, au sein de la collaboration BRAIN, quelques mois de réflexion...

Un interféromètre bolométrique est schématiquement représenté sur la figure 4.7 : les cornets primaires observent directement le ciel (sans l'intermédiaire d'un système optique). Les deux polarisations orthogonales sont ensuite séparées, puis déphasées. Ces déphaseurs, dont nous étudierons en détail le rôle au chapitre 5, permettent de modifier les coefficients  $\alpha_{ik}$  en vue de la combinaison

des faisceaux. Le combineur, de type Butler ou Fizeau, permet enfin de coupler chaque bolomètre à une combinaison linéaire de l'ensemble des voies d'entrées.

## 4.4 La collaboration QUBIC

La collaboration QUBIC<sup>2</sup> résulte de la fusion des deux collaborations BRAIN et MBI, qui avaient toutes deux vocation à développer un interféromètre bolométrique dédié à la détection des modes B.

La collaboration MBI<sup>3</sup> (Etats-Unis, Royaume-Uni et Irlande) avait déjà mis au point le prototype MBI-4 [4, 5], un interféromètre bolométrique de 4 cornets à combineur de faisceaux quasi-optique. Nous avons eu la chance de participer à l'analyse des données de la dernière campagne de test, comme nous le verrons au chapitre 11 où nous décrirons plus longuement l'instrument.

La collaboration BRAIN<sup>4</sup> regroupait des équipes françaises, italiennes et britanniques [6] ; c'est donc au sein de celle-ci que l'auteur a commencé cette thèse. Le site de Dôme C en Antarctique avait été choisi pour installer l'instrument final en raison de ses excellentes caractéristiques pour l'observation astronomique (en particulier dans les longueurs d'ondes millimétriques). Ce choix est conservé pour l'instrument QUBIC. Trois campagnes de test du site ont eu lieu avec l'instrument *Brain Pathfinder*. Durant l'été austral 2006-2007, trois semaines d'observation du ciel avec deux bolomètres refroidis à 170 mK ont pu être réalisées (Eric Bréelle de l'APC a courageusement fait le déplacement). L'exploitation complète de ces données est délicate du fait d'un problème de synchronisation entre le pointage du télescope et l'acquisition des bolomètres. Une analyse préliminaire permet cependant de conclure que le site a effectivement des caractéristiques tout à fait satisfaisantes avec une profondeur optique de l'atmosphère inférieure à 0.05 à 95% de niveau de confiance. Les problèmes de synchronisation ont été réglés, et une nouvelle campagne a eu lieu durant l'été austral 2009-2010 (pour laquelle Eric a une nouvelle fois fait le déplacement). Tout semble s'être bien passé ; les données collectées sont en cours d'analyse.



FIG. 4.8: *La collaboration QUBIC.*

<sup>2</sup>Q & U Bolometric Interferometer for Cosmology

<sup>3</sup>Millimeter-wave Bolometric Interferometer

<sup>4</sup>Background RADIation INterferometer

Certains membres de l'APC impliqués dans BRAIN (Michel Piat, Eric Bréelle et Adnan Ghribi) ont par ailleurs développé un démonstrateur d'interférométrie bolométrique, baptisé DIBO [8]. Il est basé sur des composants commerciaux et une technologie guide d'onde. Les signaux collectés par deux cornets récepteurs sont déphasés et sommés avant d'être réémis vers un bolomètre refroidi à 4 K. DIBO a effectivement permis de démontrer le principe de l'interférométrie bolométrique : en faisant varier les phases appliquées par les déphaseurs, on observe la modulation sinusoïdale attendue correspondant aux franges d'interférence.

A l'occasion du *workshop* sur l'interférométrie bolométrique que Jean-Christophe Hamilton a organisé en juin 2008 à l'APC, les deux collaborations ont fusionné ; chacun, conscient de l'ampleur de la tâche et de la forte compétition internationale existante dans la course aux modes B, avait compris que seule une mise en commun des forces en présence pourrait nous permettre d'espérer des résultats scientifiques significatifs dans les prochaines années. Une liste des universités et laboratoires membres de la collaboration QUBIC est donnée sur la figure 4.8.

Les travaux menés au cours de cette thèse conditionnent, nous le verrons, à la fois l'architecture globale de l'instrument et les choix technologiques de ses composants. Ils résultent de nombreuses interactions avec tous les membres de la collaboration ; c'est au fil de nombreuses "oscillations" – successions riches en émotions d'erreurs et d'"illuminations" –, de va-et-vient entre considérations "théoriques" et technologiques, que se sont peu à peu fixés les concepts qui traversent cette thèse, et avec eux, le design actuel de l'instrument QUBIC, que nous récapitulerons au chapitre 12.



## Chapitre 5

# Sommation cohérente des lignes de base équivalentes et reconstruction des visibilitées

---

Nous introduisons dans ce chapitre un formalisme général permettant de décrire le processus, spécifique à l'interférométrie bolométrique, de reconstruction des visibilitées, et d'appréhender le concept crucial en terme de sensibilité de "sommation cohérente des lignes de base équivalentes". Ces travaux, effectués en collaboration avec Jean-Christophe Hamilton, Jean Kaplan, Michel Piat, Eric Bréelle, Damien Prêle, Yannick Giraud-Héraud et Adnan Ghribi, ont donné lieu à une publication [1], reproduite en annexe.

---

Nous commencerons, dans ce chapitre, par introduire un formalisme permettant de déterminer analytiquement les puissances mesurées par les détecteurs d'un interféromètre bolométrique. Ce calcul fera apparaître une importante spécificité du concept : les visibilitées – observables standards de l'interférométrie – ne sont pas *directement* mesurées par les détecteurs. Ceux-ci mesurent plutôt une combinaison linéaire de ces visibilitées ; dans le cas où aucun déphasage supplémentaire n'est introduit entre les récepteurs et le combineur de faisceaux, nous verrons au chapitre 7 que cette combinaison linéaire est exactement l'*image synthétique*, traditionnellement définie en interférométrie comme la transformée de Fourier spatiale des visibilitées.

Les visibilitées peuvent ainsi être obtenues après résolution d'un problème linéaire, comme nous allons le montrer ; nous appelons ce processus *la reconstruction des visibilitées* (les spectres de puissance du CMB peuvent ensuite être estimés à partir du jeu de visibilitées complexes, par des méthodes standards, comme nous le verrons au chapitre 8).

Nous verrons cependant qu'une reconstruction "individuelle" des  $N(N-1)/2$  visibilitées conduirait à un instrument de mauvaise sensibilité. La solution originale que nous avons imaginée consiste à reconstruire les  $N_{\neq}$  sommes de classes de visibilitées équivalentes ; dans le cas où les visibilitées d'une même classe d'équivalence sont toutes modulées identiquement, cela permet une augmen-

tation du rapport signal à bruit, rendant finalement l'instrument compétitif en terme de sensibilité : c'est ce que nous appelons "la sommation cohérente des lignes de base équivalente". Nous verrons enfin comment les déphaseurs contrôlés peuvent respecter une telle contrainte.

## 5.1 Formalisme théorique

Nous considérons dans un premier temps l'architecture schématiquement représentée sur la figure 4.7 ; le formalisme introduit se généralise toutefois facilement aux architectures alternatives présentées au chapitre 7. Nous supposons par ailleurs un interféromètre opérant dans une bande spectrale mince, centrée sur la fréquence  $\nu_0 = c/\lambda$  (le cas d'un instrument large bande sera traité au chapitre 6). Ses différents composants sont considérés idéaux (le traitement des effets systématiques est abordé au chapitre 10).



FIG. 5.1: *Cornets corrugués développés pour CLOVER par nos collaborateurs de l'université de Manchester.*

### 5.1.1 Cornets

L'instrument observe le ciel par l'intermédiaire de  $N_h$  cornets, indexés par  $i = 0, \dots, N_h - 1$  et dont les positions sont notés  $\vec{d}_i$ . Ces cornets sont supposés coplanaires et pointent tous dans la même direction. Constitués d'un matériau conducteur, ils permettent de coupler le rayonnement observé à l'instrument. Ils possèdent un lobe sur le ciel  $B_i(\vec{n}) = |A_i(\vec{n})|^2$  représentant la fraction de puissance du signal du ciel transmise pour chaque direction  $\vec{n}$  (vecteur unitaire pointant sur la sphère céleste). Le signal collecté par un cornet  $i$  observant un champ électromagnétique  $E_i(\vec{n})$  est ainsi donné par l'intégrale du champ à travers le lobe,

$$\epsilon_i = \int A_i(\vec{n}) E_i(\vec{n}) d\vec{n}. \quad (5.1)$$

Nous supposons dans ce cas idéal que les lobes des cornets sont tous identiquement donnés par  $B(\vec{n}) = |A(\vec{n})|^2$ . Les cornets ont typiquement une forme conique mais peuvent être profilés de manière plus complexe et corrugués en vue d'améliorer leurs caractéristiques de transmission et la forme du lobe sur le ciel. Celui-ci est donné par le module au carré de la transformée de Fourier inverse de la fonction d'éclairement sur la surface de la pupille  $G(\vec{r})$  :

$$B(\theta) = |\mathcal{FT}^{-1}[G(\vec{r})]|^2. \quad (5.2)$$

Une fonction d'éclairage Gaussienne conduit donc à un lobe Gaussien. La fonction d'éclairage s'annule cependant inévitablement sur les bords où le champ devient nul. Cette coupure induit des lobes dit "secondaires" sur le ciel comme on peut le voir sur la figure 5.2. D'une manière

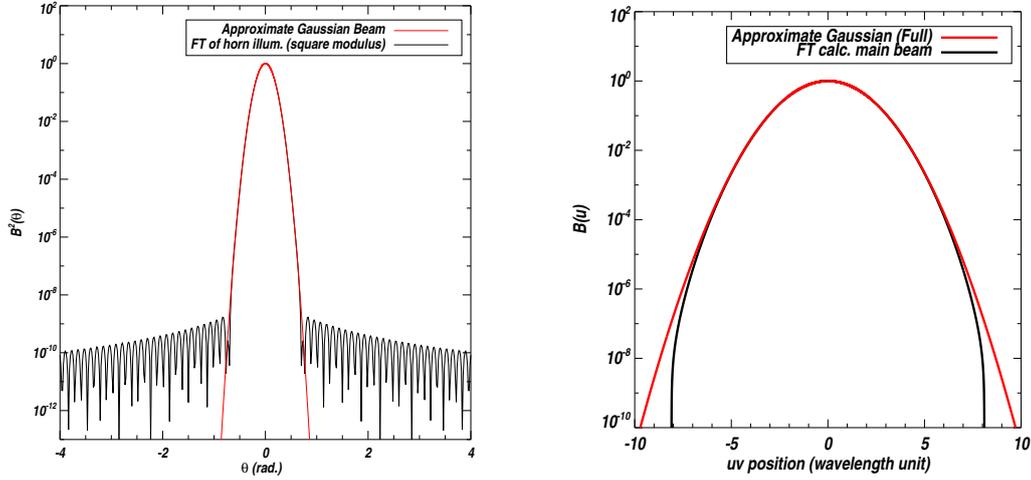


FIG. 5.2: *Gauche : Lobe sur le ciel correspondant à une fonction d'éclairage gaussienne tronquée au bord du cornet (en noir), comparé à un lobe parfaitement Gaussien (en rouge). Droite : Lobe dans l'espace de Fourier obtenu par transformée de Fourier des lobes de la figure de droite.*

générale, un cornet agit comme une pupille diffractive de surface  $S$  et couvre un angle solide sur le ciel  $\Omega$  donné par

$$S\Omega = \kappa^2 \lambda^2, \quad (5.3)$$

où  $\kappa$  est un paramètre dépendant du cornet (plus spécifiquement de son profil et de sa corrugation). Dans le cadre d'un premier module de QUBIC, nous pourrions utiliser des cornets similaires à ceux conçus pour l'instrument CLOVER, ayant un lobe de 14 degrés FWHM, un diamètre de 18 mm, et opérant à une fréquence centrale de 97 GHz, soit  $\kappa = 1.344$  (figure 5.1).

### 5.1.2 Lignes de base équivalentes/redondantes

Nous allons maintenant introduire la notion si simple et pourtant si cruciale en interférométrie bolométrique de lignes de base équivalentes ou redondantes<sup>1</sup>. L'ensemble des paires de cornets forme un jeu de  $N_b = N_h(N_h - 1)/2$  lignes de base que nous indexerons par  $b = 0, \dots, N_b - 1$ , avec  $b = \{i, j\}$ . La différence de phase entre deux radiations provenant de la même direction mais collectées par deux cornets  $i$  et  $j$  est telle que

$$E_j(\vec{n}) = E_i(\vec{n}) \exp(2i\pi \vec{u}_b \cdot \vec{n}), \quad \text{où } \vec{u}_b = (\vec{d}_j - \vec{d}_i)/\lambda. \quad (5.4)$$

Deux ligne de base  $b$  et  $b'$  sont dites équivalentes si elles sont telles que  $\vec{u}_b = \vec{u}_{b'}$  et différentes si  $\vec{u}_b \neq \vec{u}_{b'}$ , comme indiqué sur la figure 5.3. Il est clair que l'ensemble des lignes de base peut être

<sup>1</sup>Nous utiliserons indifféremment dans cette thèse un adjectif ou l'autre. Il semble que "redondante" soit la dénomination standard en interférométrie radio, mais nous avons utilisé "équivalente" dans plusieurs de nos articles...

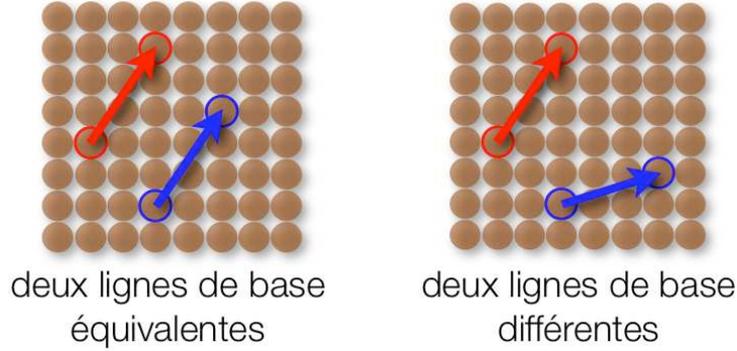


FIG. 5.3: *Distribution de cornets selon une matrice carrée. Gauche : deux lignes de base équivalentes. Droite : deux lignes de base différentes.*

décrit comme un ensemble de classes de lignes de base équivalentes indexées par  $\beta$ , tel que

$$\forall b, b' \in \beta, \vec{u}_b = \vec{u}_{b'} \equiv \vec{u}_\beta \quad (5.5)$$

$$\text{et } \beta \neq \beta' \Rightarrow \vec{u}_\beta \neq \vec{u}_{\beta'}. \quad (5.6)$$

Soulignons ce fait capital pour la suite de ce chapitre : la différence de phase introduite est la même pour deux lignes de base équivalentes, et les deux visibilitées associées sont donc exactement égales pour un instrument idéal.

Nous noterons  $N_\neq$  le nombre de lignes de base différentes pour une distribution donnée de cornets ; dit de manière plus rigoureuse,  $N_\neq$  est le nombre de classes de lignes de base équivalentes. Chaque classe  $\beta$  contient un certain nombre de lignes de base équivalentes que nous noterons  $N_{eq}(\beta)$ , de sorte que

$$N_b = \sum_{\beta=0}^{N_\neq-1} N_{eq}(\beta). \quad (5.7)$$

Si on considère une matrice carrée de cornets se touchant deux-à-deux comme sur la figure 4.7 (nous choisirons fréquemment cette configuration pour évaluer quantitativement nos résultats), la distribution des lignes de base dans le plan  $uv$  est telle que sur la figure 5.4, et on peut facilement montrer que

$$N_\neq = 2\sqrt{N_h}(\sqrt{N_h} - 1). \quad (5.8)$$

Nous voyons que pour  $N_h \gg 1$ ,  $N_\neq \simeq 2N_h$ . Il est également facile de montrer, toujours pour une matrice carrée, que le nombre de lignes de base équivalentes s'écrit, pour une ligne de base  $\beta$ ,

$$N_{eq}(\beta) = \left( \sqrt{N_h} - \left| \frac{\vec{u}_\beta \cdot \vec{e}_x}{d_0} \right| \right) \left( \sqrt{N_h} - \left| \frac{\vec{u}_\beta \cdot \vec{e}_y}{d_0} \right| \right), \quad (5.9)$$

où nous avons introduit le repère  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  dont les axes sont alignés avec ceux de la grille de la distribution de cornets, et où  $d_0$  est la distance entre deux cornets adjacents. Si l'on définit le nombre moyen de lignes de base équivalentes comme  $\langle N_{eq} \rangle = N_b/N_\neq$ , alors on a pour  $N_h \gg 1$ ,  $\langle N_{eq} \rangle \sim N_h/4$ .

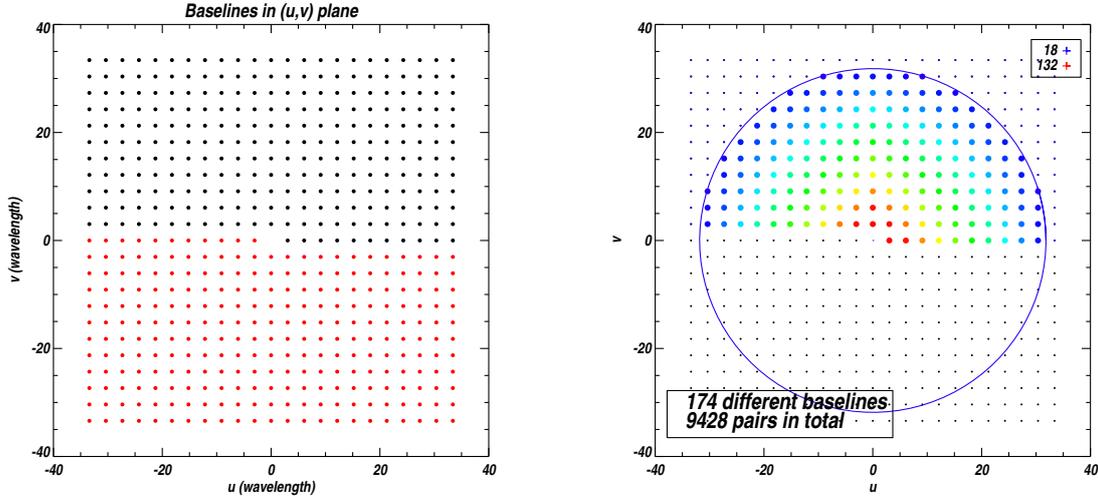


FIG. 5.4: Position (gauche) et redondance (droite) des lignes de base dans le plan  $uv$  pour la configuration carrée représentée sur la figure 4.7 ( $N_h = 144$ ,  $\nu_0 = 90$  GHz).

### 5.1.3 Séparation des polarisations transverses

Dans l'architecture "basique" considérée ici, les polarisations transverses du rayonnement incident sont séparées après que celui-ci ait été collecté par les cornets. La polarisation transverse peut être exprimée dans deux bases intéressantes : la première est dite linéaire ( $e_x, e_y$ ), la seconde est dite circulaire ( $e_R, e_L$ ). Ces deux bases sont reliées par la transformation unitaire,

$$\begin{pmatrix} e_R \\ e_L \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Des composants tels que les Ortho-Modes Transducers (OMT) réalisables en guide d'onde ou en technologie planaire peuvent jouer ce rôle de séparateurs de polarisation linéaire ; s'ils sont suivis d'une jonction hybride, ils deviennent des séparateurs de polarisation circulaire.

Nous noterons désormais  $E_{i,\eta}(\vec{n})$  la composante  $\eta$  de polarisation du rayonnement provenant de la direction  $\vec{n}$  et collectée par le cornet  $i$ , avec  $\eta = \{\parallel, \perp\}$  ou  $\eta = \{L, R\}$  selon que l'on considère un instrument muni de séparateurs de polarisation linéaire ou circulaire. Le signal, à la sortie de la branche polarisée  $\eta$  associée au cornet  $i$  s'écrit,

$$\epsilon_{i,\eta} = \int A(\vec{n}) E_{i,\eta}(\vec{n}) d\vec{n} \quad (5.11)$$

$$= \int A(\vec{n}) E_\eta(\vec{n}) \exp(i2\pi \frac{\vec{d}_i \cdot \vec{n}}{\lambda}) d\vec{n}, \quad (5.12)$$

où nous notons désormais  $E_\eta(\vec{n})$  le champ de polarisation  $\eta$  observé sur le ciel.

### 5.1.4 Déphaseurs contrôlés

Dans cette architecture basique, les déphaseurs contrôlés, intercalés avant les cornets secondaires réémetteurs, sont des composants clés, en charge de la modulation des visibilitées. Ils permettent

d'ajouter une phase  $\phi_i^\eta(t)$  au signal, différente à chaque instant, pour chaque cornet et polarisation. Le signal provenant de la direction  $\vec{n}$  après déphasage, s'exprime donc

$$\epsilon'_{i,\eta} = \exp [i\phi_i^\eta(t)] \epsilon_{i,\eta}. \quad (5.13)$$

Un des principaux enjeux de ce chapitre est de montrer que certains schémas de phases particuliers doivent être respectés afin de pouvoir mesurer l'ensemble des visibilitées avec une sensibilité optimale. Deux types de déphaseurs contrôlés peuvent être envisagés, les uns conduisant à une modulation dite temporelle des visibilitées, les autres à une modulation dite fréquentielle.

### Modulation temporelle

Les déphaseurs délivrent dans ce cas, durant une période  $\Delta t$ , une phase sélectionnée parmi un ensemble discret de valeurs possibles. De tels déphaseurs pourraient par exemple être réalisés en technologie planaire à l'aide de séries de lignes à retard et d'interrupteurs (figure 5.5). Chacun de ces déphaseurs délivre, lors d'une session de mesure, une séquence temporelle de  $N_s$  phases (débutant au temps  $t_0$ ),

$$\Xi_{i,\eta} = \{\phi_{i,\eta}^0, \phi_{i,\eta}^1, \dots, \phi_{i,\eta}^m, \dots, \phi_{i,\eta}^{N_s}\}, \quad (5.14)$$

où  $\phi_{i,\eta}^m = \phi_{i,\eta}(t_0 + m\Delta t)$ .

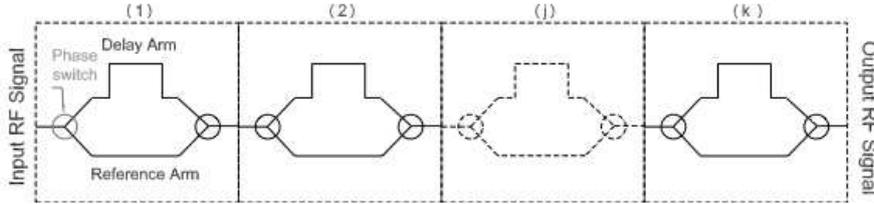


FIG. 5.5: Principe possible d'un déphaseur à lignes à retard en technologie planaire : le déphaseur comporte  $N$  étages induisant chacun, selon l'état de l'interrupteur, soit un déphasage nul, soit un déphasage de  $\pi/2^k$  ( $k$  étant le numéro de l'étage). Cela permet d'obtenir  $2^N$  valeurs d'angles de déphasage différentes régulièrement réparties entre 0 et  $2\pi$ . Schéma réalisé par A. Ghribi.

### Modulation fréquentielle

Les déphaseurs délivrent dans ce cas une phase variant continuellement selon une fréquence de rotation  $f_{i,\eta}$  propre à chacun d'entre eux. Des déphaseurs mécaniques en guide d'onde mis en rotation par de petits moteurs, déphaseraient par exemple le signal, par

$$\phi_{i,\eta}(t) = 2\pi f_{i,\eta} t. \quad (5.15)$$

#### 5.1.5 Combineur de faisceaux

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, le combineur de faisceaux peut être réalisé en guide d'onde par une matrice de Butler ou optiquement par un combineur de Fizeau : il s'agit en fait

alors d'un simple télescope dont le rôle est de superposer les lobes de tous les cornets secondaires afin que les franges d'interférences se forment au plan focal. Dans les deux cas, chaque bolomètre mesure le module au carré d'une combinaison linéaire des signaux d'entrée (les radiations collectées par les cornets primaires). Ajoutons que dans le cadre de l'architecture basique considérée dans ce chapitre, les deux polarisations orthogonales sont alignées avant d'être combinées (une des deux polarisations est tournée à l'aide d'un "twist" en guide d'onde); autrement dit, les signaux qui se propagent dans le combineur sont entièrement polarisés selon un des deux axes de polarisation (nous verrons que cela permet de former les quatre visibilités de Stokes).

### Matrice de Butler

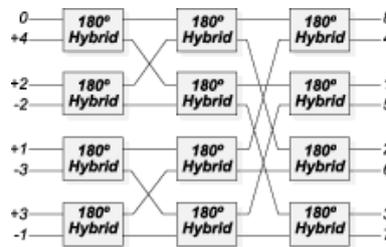


FIG. 5.6: Vue schématique d'une matrice de Butler 8x8.

Une matrice de Butler [183] peut être réalisée par une série de coupleurs hybrides<sup>2</sup> 180° comme nous le voyons sur la figure 5.6. La réalisation technologique de ce composant si simple conceptuellement est loin d'être évidente dès lors que le nombre de voies devient important. Afin que l'intégralité de la puissance entrante soit transmise par la matrice de Butler, le nombre de canaux de sortie  $N_{\text{out}}$  doit être supérieur ou égal au nombre de canaux d'entrée,  $2N_h$  (nous reviendrons sur cette remarque cruciale au chapitre 8). Le champ électromagnétique  $z_k(t)$  couplé au détecteur  $k$ , à l'instant  $t$  s'écrit alors

$$z_k(t) = \frac{1}{\sqrt{N_{\text{out}}}} \sum_{i=0}^{N_h-1} \sum_{\eta} \epsilon_{i,\eta} \exp \left[ i\phi_{i,\eta}(t) + \psi_{i,\eta}^k \right], \quad (5.16)$$

où  $\psi_{i,\eta}^k$  est une phase constante introduite par la matrice de Butler,

$$\psi_{i,\eta}^k = 2\pi \frac{i k}{N_{\text{out}}}. \quad (5.17)$$

### Combineur de Fizeau

Nous étudierons plus particulièrement dans la suite de ce chapitre l'option du combineur quasi-optique de Fizeau (option retenue, rappelons le, pour l'instrument QUBIC). Des déphasages géométriques sont induits par les différences de chemins des rayonnements réémis par les cornets secondaires et traversant le télescope,

$$\psi_{i,\eta}(\vec{r}) = 2\pi \frac{\vec{d}_i \cdot \vec{r}}{\lambda f_D}, \quad (5.18)$$

<sup>2</sup>Un coupleur hybride 180° est un composant dont la matrice de Jones est donnée par  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ .

où  $f_D$  est la distance focale du télescope et où  $\vec{r}$  repère la position dans le plan focal. Le champ électromagnétique au point  $\vec{r}$  du plan focal, à l'instant  $t$  s'écrit alors

$$z(\vec{r}, t) = \sum_{i=0}^{N_h-1} \sum_{\eta} A_s(\vec{r}) \epsilon_{i,\eta} \exp [i\phi_{i,\eta}(t) + i\psi_{i,\eta}(\vec{r})], \quad (5.19)$$

où  $A_s(\vec{r})$  décrit les lobes (supposés tous identiques) des cornets secondaires réémetteurs. Le champ couplé au détecteur  $k$ , situé en  $\vec{r}_k$  et dont la géométrie est décrite par la fonction fenêtre  $\Theta(\vec{r})$  s'écrit

$$z_k(t) = \int z(\vec{r}, t) \Theta(\vec{r} - \vec{r}_k) d\vec{r} \quad (5.20)$$

$$= \sum_{i=0}^{N_h-1} \sum_{\eta} \left| \alpha_{i,\eta}^k \right| \epsilon_{i,\eta} \exp [i\Phi_{i,\eta}^k(t)], \quad (5.21)$$

où nous avons introduit les coefficients complexes  $\alpha_{i,\eta}^k$ ,

$$\alpha_{i,\eta}^k = \int \Theta(\vec{r} - \vec{r}_k) A_s(\vec{r}) \exp [i\psi_{i,\eta}(\vec{r})] d\vec{r}, \quad (5.22)$$

ainsi que  $\Phi_{i,\eta}^k(t)$  le déphasage global induit par l'instrument, pour un rayonnement de polarisation  $\eta$ , collecté par un cornet  $i$  et détecté par un détecteur  $k$  à l'instant  $t$ ,

$$\Phi_{i,\eta}^k(t) = \phi_{i,\eta}(t) + \arg \left[ \alpha_{i,\eta}^k \right]. \quad (5.23)$$

Dans le cas simplifié (et non réaliste) où le lobe des cornets secondaires serait décrit par une fonction rectangulaire illuminant de manière égale  $N_{out}$  détecteurs, on aurait  $\left| \alpha_{i,\eta}^k \right| = \frac{1}{\sqrt{N_{out}}}$  et on retrouverait une expression proche de celle de l'équation 5.16,

$$z_k(t) \simeq \frac{1}{\sqrt{N_{out}}} \sum_{i=0}^{N_h-1} \sum_{\eta} \epsilon_{i,\eta} \exp [i\Phi_{i,\eta}^k(t)]. \quad (5.24)$$

### 5.1.6 Puissance mesurée par un détecteur

Nous introduisons, pour la commodité des calculs, la quantité  $z_k(\vec{n}, t)$  définie par

$$z_k(t) = \int z_k(\vec{n}, t) d\vec{n}. \quad (5.25)$$

Chaque détecteur dans le plan focal du combineur mesure la puissance du signal décrit par l'équation 5.21 moyennée sur la constante de temps du détecteur (qui est toujours largement supérieure à la période de l'onde électromagnétique) :

$$\mathcal{S}_k(t) = \left\langle \left| \int z_k(\vec{n}, t) d\vec{n} \right|^2 \right\rangle_{\text{time}} \quad (5.26)$$

$$= \int \langle z_k(\vec{n}, t) z_k^*(\vec{n}', t) \rangle_{\text{time}} d\vec{n} d\vec{n}'. \quad (5.27)$$

Cette expression peut être simplifiée car les signaux provenant de directions différentes du ciel sont incohérents :

$$\langle z_k(\vec{n}, t) z_k^*(\vec{n}', t) \rangle_{\text{time}} = \langle |z_k(\vec{n}, t)|^2 \rangle_{\text{time}} \delta(\vec{n} - \vec{n}'). \quad (5.28)$$

Nous pouvons ainsi développer l'équation 5.26 et l'écrire comme une somme des termes d'auto-corrélation de tous les canaux et une somme de termes de corrélations entre toutes les paires de canaux,

$$\mathcal{S}_k(t) = \mathcal{S}_k^{ac}(t) + \mathcal{S}_k^{cc}(t) \quad (5.29)$$

où la somme des termes d'autocorrélation s'écrit,

$$\mathcal{S}_k^{ac}(t) = \frac{1}{N_{\text{out}}} \sum_{i=0}^{N_h-1} \left\langle \left| \sum_{\eta=0}^1 \epsilon_{i,\eta}(t) \exp(i\Phi_{i,\eta}^k(t)) \right|^2 \right\rangle, \quad (5.30)$$

et la somme des termes de corrélations croisées,

$$\mathcal{S}_k^{cc}(t) = \frac{2}{N_{\text{out}}} \text{Re} \left[ \sum_{i < j} \sum_{\eta_1, \eta_2} \langle \epsilon_{i,\eta_1}(t) \epsilon_{j,\eta_2}^*(t) \rangle \exp(i[\Phi_{i,\eta_1}^k(t) - \Phi_{j,\eta_2}^k(t)]) \right]. \quad (5.31)$$

## 5.2 Reconstruction des visibilités

### 5.2.1 Problème linéaire

Comme nous allons le voir, le terme des corrélations s'exprime comme une combinaison linéaire des visibilités de Stokes. Nous introduisons les différences de phases associées à la modulation des lignes de base :

$$\Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\parallel}(t) = \Phi_{i,\parallel}^k(t) - \Phi_{j,\parallel}^k(t), \quad (5.32)$$

$$\Delta\Phi_{k,b}^{\perp\perp}(t) = \Phi_{i,\perp}^k(t) - \Phi_{j,\perp}^k(t), \quad (5.33)$$

$$\Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\perp}(t) = \Phi_{i,\parallel}^k(t) - \Phi_{j,\perp}^k(t), \quad (5.34)$$

$$\Delta\Phi_{k,b}^{\perp\parallel}(t) = \Phi_{i,\perp}^k(t) - \Phi_{j,\parallel}^k(t). \quad (5.35)$$

Nous omettrons par la suite d'indiquer explicitement la dépendance en temps pour des raisons de lisibilité. Nous nous plaçons ici dans le cas de la séparation des polarisations linéaires,  $\eta = \{\parallel, \perp\}$ , et dans l'approximation de l'équation 5.24. L'équation 5.29 peut être réécrite en fonction des  $N_b = N_h(N_h - 1)/2$  visibilités polarisées,

$$\mathcal{S}_k(t) = \vec{\Lambda}_k \cdot \vec{Y} + \sum_{b=0}^{N_b-1} \vec{\Gamma}_{k,b} \cdot \vec{\mathcal{V}}_b, \quad (5.36)$$

où nous avons défini,

$$\vec{\Lambda}_k = \frac{1}{N_{\text{out}}} \sum_{i=0}^{N_h-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cos(\Phi_{k,i}^{\parallel} - \Phi_{k,i}^{\perp}) \\ \sin(\Phi_{k,i}^{\parallel} - \Phi_{k,i}^{\perp}) \end{pmatrix}, \quad \vec{Y}^t = \begin{pmatrix} \int I(\vec{n})B^2(\vec{n})d\vec{n} \\ \int Q(\vec{n})B^2(\vec{n})d\vec{n} \\ \int U(\vec{n})B^2(\vec{n})d\vec{n} \\ \int V(\vec{n})B^2(\vec{n})d\vec{n} \end{pmatrix}, \quad (5.37)$$

$$\vec{\Gamma}_{k,b} = \frac{1}{N_{\text{out}}} \begin{pmatrix} \cos \Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\parallel} + \cos \Delta\Phi_{k,b}^{\perp\perp} \\ -(\sin \Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\parallel} + \sin \Delta\Phi_{k,b}^{\perp\perp}) \\ \cos \Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\perp} - \cos \Delta\Phi_{k,b}^{\perp\parallel} \\ -(\sin \Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\perp} - \sin \Delta\Phi_{k,b}^{\perp\parallel}) \\ \cos \Delta\Phi_{k,b}^{\perp\perp} + \cos \Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\parallel} \\ -(\sin \Delta\Phi_{k,b}^{\perp\perp} + \sin \Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\parallel}) \\ -(\sin \Delta\Phi_{k,b}^{\perp\parallel} - \sin \Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\perp}) \\ -(\cos \Delta\Phi_{k,b}^{\perp\parallel} - \cos \Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\perp}) \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{V}}_b^t = \begin{pmatrix} \text{Re} [V_I(\vec{u}_b)] \\ \text{Im} [V_I(\vec{u}_b)] \\ \text{Re} [V_Q(\vec{u}_b)] \\ \text{Im} [V_Q(\vec{u}_b)] \\ \text{Re} [V_U(\vec{u}_b)] \\ \text{Im} [V_U(\vec{u}_b)] \\ \text{Re} [V_V(\vec{u}_b)] \\ \text{Im} [V_V(\vec{u}_b)] \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

Nous avons en particulier introduit le vecteur  $\vec{\mathcal{V}}_b$  des visibilitées de Stokes définies au chapitre 4. L'équation 5.36 peut encore être réécrite sous une forme plus compacte, si on regroupe dans le même vecteur  $\vec{X}$  les observables  $\vec{Y}$  et  $\vec{\mathcal{V}}_b$ , et dans la matrice  $\vec{A}_k(t)$  les matrices de modulations :

$$\mathcal{S}_k(t) = \vec{A}_k(t) \cdot \vec{X} + n_k(t), \quad (5.39)$$

où nous avons explicitement ajouté un bruit de mesure  $n_k(t)$  sur chaque détecteur.

## 5.2.2 Reconstruction simultanée ou indépendante sur les détecteurs

Une alternative apparaît alors : afin d'obtenir un problème linéaire permettant la reconstruction des visibilitées, nous pouvons soit regrouper ensemble les mesures de différents détecteurs à un instant  $t$  donné, soit regrouper ensemble des séries de mesures du même détecteur  $k$  à des temps différents (il est en réalité possible d'envisager un troisième schéma, mixte, dans lequel on utiliserait les mesures de différents détecteurs à différents instants).

### Reconstruction simultanée sur tous les détecteurs

Dans ce premier cas, on forme le vecteur des  $N_{\text{out}}$  mesures des détecteurs à l'instant  $t$ , ce qui permet d'obtenir le système linéaire :

$$\vec{\mathcal{S}} = A \cdot \vec{X} + \vec{n}, \quad (5.40)$$

où  $A$ ,  $\vec{X}$  et  $\vec{\mathcal{S}}$  sont facilement exprimés en fonction des quantités précédemment définies,

$$\vec{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0(t) \\ \mathcal{S}_1(t) \\ \vdots \\ \mathcal{S}_{N_{\text{out}}-1}(t) \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \vec{\Lambda}_0 & \vec{\Lambda}_1 & \cdots & \vec{\Lambda}_{N_{\text{out}}-1} \\ \vec{\Gamma}_{0,0} & \vec{\Gamma}_{1,0} & \cdots & \vec{\Gamma}_{N_{\text{out}}-1,0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{\Gamma}_{0,N_b-1} & \vec{\Gamma}_{1,N_b-1} & \cdots & \vec{\Gamma}_{N_{\text{out}}-1,N_b-1} \end{pmatrix} \vec{X}^t = \begin{pmatrix} \vec{Y}^t \\ \vec{\mathcal{V}}_0^t \\ \vec{\mathcal{V}}_1^t \\ \vdots \\ \vec{\mathcal{V}}_{N_b-1}^t \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

La modulation est ici assurée par les déphasages géométriques induits par le combineur. Cette reconstruction "simultanée" sur tous les détecteurs permet donc d'éviter le recours à des déphaseurs

contrôlés. Dans le cadre de QUBIC, nous avons pourtant initialement rejeté cette option en raison des problèmes d'intercalibration qui apparaissent : une des principales sources d'erreur systématique à laquelle ont à faire face les expériences labellisées "modes B" est en effet l'intercalibration des détecteurs polarisés (l'expérience BICEP l'a par exemple identifiée comme sa source d'erreur dominante [95]). La plupart des futures expériences prévoient ainsi un système de modulation de la polarisation pour pallier à cet effet (voir section 3.4.4).

Nous verrons en fait au chapitre 7 que cette option de reconstruction "simultanée" est parfaitement viable si on introduit... un dispositif de modulation de la polarisation. Le lecteur malicieux pourra dès lors trouver étonnant que nous ayons mis tant de temps à envisager cette possibilité ; celui-ci conviendra, à notre décharge, que le concept d'un interféromètre bolométrique est très différent de celui d'un imageur et que le fonctionnement des architectures décrites au chapitre 7 n'apparaît pas "évident".

### Reconstruction indépendante sur chaque détecteur

Dans ce second cas, on forme le vecteur des  $N_t$  mesures d'un même détecteur  $k$ , tel que

$$\vec{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_k(t_0) \\ \mathcal{S}_k(t_0 + \Delta t) \\ \vdots \\ \mathcal{S}_k(t_0 + N_t \Delta t) \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

ce qui permet également d'obtenir un problème linéaire du type,

$$\vec{\mathcal{S}} = A \cdot \vec{X} + \vec{n}. \quad (5.43)$$

Cette reconstruction "indépendante" sur chaque détecteur permet d'éviter le problème de l'intercalibration, mais requiert des déphaseurs contrôlés, insérés entre les cornets primaires et secondaires. C'est ainsi cette option qui fut pendant longtemps envisagée pour l'architecture standard de QUBIC ; nous l'étudierons plus en détail dans la suite de ce chapitre. Nous verrons que les contraintes sur ces déphaseurs contrôlés sont particulièrement fortes si l'on souhaite respecter "la sommeation cohérente des lignes de base équivalentes".

### 5.2.3 Inversion naïve du problème

Quelle que soit l'option de reconstruction envisagée, le problème linéaire peut naïvement être inversé par des méthodes classiques, afin de reconstruire les  $4N_b = 2N(N - 1)$  visibilités de Stokes complexes. Nous noterons dans ce qui suit de manière générique  $N_d = \{N_{out}, N_t\}$  la dimension du vecteur  $\vec{\mathcal{S}}$ . Nous introduisons la matrice de covariance du bruit :

$$N = \langle \vec{n} \cdot \vec{n}^t \rangle. \quad (5.44)$$

L'estimateur optimal est, selon le théorème de Gauss-Markov, dans le cas d'un problème linéaire, celui donné par la méthode des moindres carrés,

$$\vec{X} = (A^t \cdot N^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot N^{-1} \cdot \vec{\mathcal{S}}. \quad (5.45)$$

La matrice de covariance de cet estimateur s'écrit :

$$\mathcal{N} = \left\langle \left( \vec{X} - \langle \vec{X} \rangle \right) \cdot \left( \vec{X} - \langle \vec{X} \rangle \right)^t \right\rangle = (A^t \cdot N^{-1} \cdot A)^{-1}. \quad (5.46)$$

Cet estimateur permet donc théoriquement de reconstruire l'ensemble des  $N_u = 3 + 8 \times N_b$  inconnues du problème, mais possède deux inconvénients majeurs. Premièrement, le nombre total de lignes de base étant proportionnel au carré du nombre de cornets,  $N_b \sim N_h^2/2$ , le nombre d'échantillons temporels (ou de canaux de détection à la sortie du combineur) requis pour résoudre le problème devient rapidement trop élevé. Le second de ces "inconvénients" est bien plus dramatique, cependant : la sensibilité d'une expérience utilisant cette méthode de reconstruction serait extrêmement mauvaise comme nous allons le montrer dans ce qui suit.

#### 5.2.4 Bruit d'un détecteur

Nous reviendrons au chapitre 8 sur la difficile question du bruit de mesure des détecteurs, où nous discuterons la validité de l'approximation faite ici. Nous noterons pour le moment  $\sigma_0$  le bruit de mesure auquel serait soumis un détecteur illuminé par toute la radiation collectée par un cornet, durant un échantillon temporel  $\Delta t$  ; si les puissances et les visibilitées mesurées sont converties en unités de température, alors celui-ci s'exprime comme

$$\sigma_0^2 = \frac{\text{NET}^2 \Omega^2}{\Delta t}. \quad (5.47)$$

La température équivalente de bruit d'un bolomètre (NET) sera définie rigoureusement au chapitre 8. Nous nous contenterons de supposer ici que la matrice de covariance du bruit est scalaire (i.e. que les bruits des bolomètres sont à peu près au même niveau et qu'ils ne sont pas corrélés entre eux) et que ses éléments diagonaux sont bornés par

$$N \leq \frac{\sigma_0^2 N_h}{N_{\text{out}}} \times 1, \quad (5.48)$$

où 1 est la matrice identité de taille  $N_d \times N_d$ .

#### 5.2.5 Matrice de covariance de l'estimateur

La matrice de covariance de l'estimateur des visibilitées s'écrit alors

$$\mathcal{N} = \frac{\sigma_0^2 N_h}{N_{\text{out}}} \times \langle (A^t \cdot A)^{-1} \rangle. \quad (5.49)$$

Chaque élément de la matrice  $A$  contient une somme de sinus et cosinus des angles de déphasages (équation 5.57). Si les séquences de phases associées à chaque déphaseur sont choisies par tirage aléatoire (nous supposons par exemple que les déphasages sont distribués uniformément entre 0 et  $2\pi$ ), les déphasages associés aux lignes de base prendront eux aussi des valeurs aléatoires, et cette somme de cosinus et sinus aura pour valeur moyenne 0 et pour variance 1 ; la variance des éléments de  $A$  s'écrit ainsi  $1/N_{\text{out}}^2$ . Les termes non diagonaux de  $A^t \cdot A$  s'annulent

car les séquences d'angles aléatoires ne sont pas corrélées entre deux canaux, et les termes diagonaux sont obtenus par sommation des  $N_d$  éléments de  $A$ . La matrice de covariance de l'estimateur s'écrit finalement,

$$\mathcal{N} = \frac{\sigma_0^2 N_h}{N_{out}} \frac{N_{out}^2}{N_d} \times 1. \quad (5.50)$$

Dans le cas où l'on a procédé à une reconstruction simultanée sur tous les détecteurs,  $N_d = N_{out}$ , et on moyenne ensuite sur les  $N_t$  échantillons temporels de mesure ; dans le cas où l'on procède à une reconstruction indépendante sur chacun des détecteurs,  $N_d = N_t$ , et on moyenne ensuite les visibilités reconstruites indépendamment sur les  $N_{out}$  détecteurs ; de sorte que dans les deux cas, la variance sur la visibilité reconstruite pour la ligne de base  $\vec{u}_b$  est donnée par

$$\sigma_{V(b)}^2 = N_h \frac{\sigma_0^2}{N_t}. \quad (5.51)$$

Nous pouvons alors moyennner *a posteriori* de la reconstruction les  $N_{eq}(\beta)$  visibilités de chaque classe d'équivalence, si bien que

$$\sigma_{V(\beta)}^2 = \frac{N_h}{N_{eq}(\beta)} \frac{\sigma_0^2}{N_t} \sim 4 \frac{\sigma_0^2}{N_t}, \quad (5.52)$$

où la dernière approximation est obtenue dans le cas d'une distribution des cornets de type matrice carrée, pour laquelle nous avons vu que  $\langle N_{eq}(\beta) \rangle \sim N_h/4$ . Cette expression peut être comparée avec celle obtenue dans le cas d'un interféromètre hétérodyne [201],

$$\sigma_{V(\beta)}^2 = \frac{\sigma_0^2}{N_{eq}(\beta) N_t}. \quad (5.53)$$

En examinant la formule analytique 8.25 – équivalent de la formule de Knox [119] en imagerie – donnant la sensibilité d'un interféromètre au spectre de puissance des anisotropies du CMB en fonction du bruit de mesure sur les visibilités, le lecteur se convaincra que la méthode de reconstruction "individuelle" des visibilités envisagée ici fait d'un interféromètre bolométrique un instrument dont la sensibilité est très mauvaise puisque ne dépendant pas du nombre de cornets et de détecteurs considérés (c'est à peu près celle d'un imageur constitué d'un seul canal cornet-détecteur) !

Devant cette constatation, notre première réaction fut de conclure à l'inefficience du concept d'interférométrie bolométrique ; à l'issue de nombreuses discussions que nous avons eues à l'époque au sein du groupe QUBIC (alors BRAIN) de l'APC, et notamment suite à une intuition de Michel Piat, nous avons finalement trouvé une manière astucieuse de résoudre ce problème, que nous désignons sous le nom de "sommation cohérente des lignes des base équivalentes".

### 5.3 La sommation cohérente des lignes de base équivalentes

L'idée centrale est de reconstruire non pas l'ensemble des  $N_b$  visibilités, mais seulement l'ensemble des  $N_{\neq}$  visibilités différentes, où chaque visibilité "différente" est maintenant définie comme la moyenne d'une classe de visibilités équivalentes. Dans le cas d'un instrument idéal, deux visibilités équivalentes sont exactement égales, et on peut ainsi définir la nouvelle observable

$$\widehat{V}(\vec{u}_\beta) = \frac{1}{N_{eq}(\beta)} \sum_{b \in \beta} V(\vec{u}_b) \quad (5.54)$$

telle que

$$\langle \widehat{V}(\vec{u}_\beta) \rangle = V(\vec{u}_\beta). \quad (5.55)$$

Le fait de mesurer uniquement la moyenne des visibilitées équivalentes n'engendre ainsi pas de perte d'informations physiques. Cela permet bien sûr de réduire la dimension du problème ; mais il est alors surtout possible, si les séquences de phases sont choisies intelligemment (ce sera l'objet de la section suivante), de rendre la sensibilité d'un interféromètre bolométrique compétitive avec celle d'un imageur de même dimensionnement (nombres de cornets et de détecteurs équivalents).

L'équation 5.36 peut être réécrite comme deux sommes imbriquées, la première sur l'ensemble des classes de lignes de base équivalentes (i.e. l'ensemble des lignes de base différentes), la seconde sur l'ensemble des lignes de base équivalentes (i.e. appartenant à la même classe).

$$\mathcal{S}_k(t) = \vec{\Lambda}_k \cdot \vec{S} + \sum_{\beta=0}^{N_{\neq}-1} \vec{\Gamma}_{k,\beta} \cdot \vec{V}_\beta + n_k(t), \quad (5.56)$$

où le vecteur  $\vec{\Gamma}_{k,\beta}$  est maintenant défini comme

$$\vec{\Gamma}_{k,\beta} = \frac{1}{N_{\text{out}}} \sum_{b_\beta=0}^{N_{\text{eq}}(\beta)-1} \begin{pmatrix} \cos \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\parallel\parallel} + \cos \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\perp\perp} \\ -(\sin \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\parallel\parallel} + \sin \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\perp\perp}) \\ \cos \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\parallel\parallel} - \cos \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\perp\perp} \\ -(\sin \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\parallel\parallel} - \sin \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\perp\perp}) \\ \cos \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\perp\perp} + \cos \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\parallel\parallel} \\ -(\sin \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\perp\perp} + \sin \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\parallel\parallel}) \\ -(\sin \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\perp\perp} - \sin \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\parallel\parallel}) \\ -(\cos \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\perp\perp} - \cos \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\parallel\parallel}) \end{pmatrix}. \quad (5.57)$$

Le système linéaire peut être écrit, de même que précédemment, comme

$$\vec{\mathcal{S}}_{SC} = A_{SC} \cdot \vec{X}_{SC} + \vec{n} \quad (5.58)$$

où la matrice  $A_{SC}$  et les vecteurs  $\vec{X}_{SC}$  et  $\vec{\mathcal{S}}_{SC}$  sont construits de tel sorte que le vecteur  $\vec{X}_{SC}$  contient maintenant les visibilitées "moyennes" définies par l'équation 5.54.

Nous pouvons à présent introduire un nouvel estimateur, formellement identique à celui de l'équation 5.45, et estimer analytiquement sa matrice de covariance  $\mathcal{N}_{SC}$ .

### 5.3.1 Matrice de covariance du nouvel estimateur

Celle-ci s'écrit ainsi :

$$\mathcal{N}_{SC} = \frac{\sigma_0^2 N_h}{N_{\text{out}}} \times (A_{SC}^t \cdot A_{SC})^{-1}. \quad (5.59)$$

Nous avons regroupé les classes de lignes de base équivalentes dans la matrice  $A_{SC}$  ; chacun de ses éléments est donc une somme de  $N_{\text{eq}}(\beta)$  sinus et cosinus des angles de déphasages (comme exprimé dans l'équation 5.57).

Si les séquences de phases associées à chaque déphaseur sont choisies par tirage aléatoire (nous supposons par exemple que les déphasages sont distribués uniformément entre 0 et  $2\pi$ ), les déphasages associés aux lignes de base prendront eux aussi des valeurs aléatoires, et deux visibilitées équivalentes seront modulées par des coefficients à priori différents,

$$\forall b, b' \in \beta, \quad \Delta\Phi_b(t) \neq \Delta\Phi_{b'}(t). \quad (5.60)$$

Nous dirons que ce cas correspond à une *sommaton incohérente des lignes de base équivalentes*. Comme nous le montrerons dans la section suivante, il est possible de choisir intelligemment les séquences de phases, de sorte que toutes les lignes de base appartenant à une même classe d'équivalence soient modulées de manière identique,

$$\forall b, b' \in \beta, \quad \Delta\Phi_b(t) = \Delta\Phi_{b'}(t) \equiv \Delta\Phi_\beta. \quad (5.61)$$

Nous dirons qu'il y a dans ce cas *sommaton cohérente des lignes de base équivalentes*.

Le calcul de la quantité  $(A_{SC}^t \cdot A_{SC})^{-1}$  diffère selon le cas considéré,

- *Sommaton incohérente des lignes de base équivalentes* : chacune des sommes des cosinus et sinus a pour valeur moyenne 0 pour variance 1. Chaque élément de  $\vec{\Gamma}_{k,\beta}$  est la somme de  $N_{eq}(\beta)$  de ces coefficients, et le théorème de la limite centrale établit qu'il a pour valeur moyenne 0 et pour variance  $\left(\frac{1}{N_{out}}\right)^2 N_{eq}(\beta)$ .
- *Sommaton cohérente des lignes de base équivalentes* : chaque élément de  $\vec{\Gamma}_{k,\beta}$  vaut  $\frac{1}{N_{out}} N_{eq}(\beta)$  multiplié par la même contribution angulaire de variance 1 ; la variance de chacun s'écrit donc  $\left(\frac{1}{N_{out}}\right)^2 N_{eq}^2(\beta)$ .

Pour en revenir à  $A_{SC}^t \cdot A_{SC}$ , la multiplication par la transposée ajoute les  $N_d$  différents éléments de mesure. Les termes non-diagonaux s'annulent car les angles ne sont pas corrélés entre deux canaux. La moyenne des éléments diagonaux s'écrit donc comme la variance des éléments de  $A_{SC}$  multipliée par  $N_d$ . La matrice de covariance des visibilitées s'écrit finalement,

$$\mathcal{N}_{SC} = \begin{cases} \frac{\sigma_0^2 N_h}{N_{out}} \frac{1}{N_d} \frac{N_{out}^2}{N_{eq}(\beta)} = \frac{\sigma_0^2 N_h}{N_t} \frac{1}{N_{eq}(\beta)} & \text{dans le cas d'une sommaton incohérente,} \\ \frac{\sigma_0^2 N_h}{N_{out}} \frac{1}{N_d} \frac{N_{out}^2}{N_{eq}^2(\beta)} = \frac{\sigma_0^2 N_h}{N_t} \frac{1}{N_{eq}^2(\beta)} & \text{dans le cas d'une sommaton cohérente.} \end{cases} \quad (5.62)$$

Nous constatons ainsi que la sensibilité de l'instrument est réduite d'un facteur  $\langle N_{eq}(\beta) \rangle$  si la sommaton cohérente des lignes de base équivalentes n'est pas respectée. Dans ce cas, la sensibilité de l'instrument est exactement aussi mauvaise que dans le cas de la reconstruction "individuelle" des visibilitées. En revanche, dans le cas où la sommaton cohérente des lignes de base équivalentes est respectée, la variance sur les mesures de visibilitées obtenues grâce au nouvel estimateur s'écrit

$$\sigma_{V(\beta)}^2 = \frac{N_h}{N_{eq}(\beta)} \frac{\sigma_0^2}{N_t N_{eq}(\beta)}. \quad (5.63)$$

Cette dernière formule se compare très bien avec celle de l'interféromètre hétérodyne (équation 5.53). La comparaison rigoureuse des sensibilités des différents types d'instrument est une question délicate que nous examinerons en détail dans le chapitre 8, mais nous pouvons d'ores et déjà constater que ces deux sensibilités sont du même ordre de grandeur.

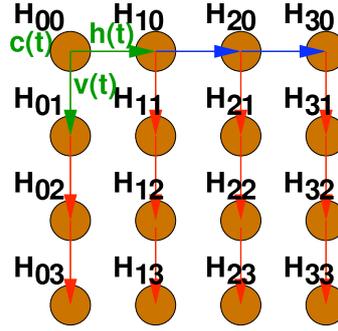


FIG. 5.7: Les séquences de phases ou les fréquences de rotations respectant la "sommation cohérente des lignes de base équivalentes" sont entièrement déterminées par la donnée d'une séquence de phase (resp. fréquence de rotation)  $c(t)$ , et de deux différences de séquences de phases (resp. différences de fréquences de rotation),  $h(t)$  et  $v(t)$ .

## 5.4 Séquences de phases et fréquences de rotation respectant la sommation cohérente des lignes de base équivalentes

Nous allons à présent voir qu'il est possible de choisir des séquences de phases (dans le cas d'une modulation temporelle) ou des fréquences de rotations des déphaseurs (dans le cas d'une modulation fréquentielle) telles que la sommation cohérente des lignes de base équivalentes soit respectée, c'est à dire telles que les lignes de base équivalentes soient modulées de manière identique.

### 5.4.1 Différences de phases (cas non polarisé)

Nous considérons d'abord par simplicité le cas d'un instrument non polarisé, et nous nous placerons dans le cas où les cornets sont distribués sur une grille carré de côté  $N_{\text{side}} = \sqrt{N_h}$  comme représenté sur la figure 5.7. La position des cornets peut alors être paramétrisée en fonction du vecteur de distance minimale  $\vec{d}_0 = d_0\vec{e}_x + d_0\vec{e}_y$ ,

$$\vec{d}_i = \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \end{pmatrix} \vec{d}_0, \quad (5.64)$$

où  $l_i$  et  $m_i$  sont des entiers compris entre 0 et  $N_{\text{side}} - 1$ , tels que  $i = l_i + N_{\text{side}}m_i$ . Rappelons que pour cette distribution, le nombre de classes de lignes de base équivalentes (i.e. le nombre de lignes de base différentes) est donné par  $N_{\neq} = 2(N_h - \sqrt{N_h})$ . Nous introduisons  $h(t)$ ,  $v(t)$ , et  $c(t)$  qui désigneront soit des séquences de  $N_s$  phases aléatoires dans le cas d'une modulation temporelle, soit des variations d'angles en rotation à des fréquences différentes dans le cas d'une modulation fréquentielle (voir section 5.1.4). Plus spécifiquement, dans le cas d'une modulation temporelle,

$$h(t) = \{h^0, h^1, \dots, h^m, \dots, h^{N_s}\}, \quad (5.65)$$

$$v(t) = \{v^0, v^1, \dots, v^m, \dots, v^{N_s}\}, \quad (5.66)$$

$$c(t) = \{c^0, c^1, \dots, c^m, \dots, c^{N_s}\}, \quad (5.67)$$

où les  $h^m$ ,  $v^m$ ,  $c^m$  sont des valeurs aléatoires de phases discrètes.

Dans le cas d'une modulation fréquentielle,

$$h(t) = 2\pi\omega_h t, \quad (5.68)$$

$$v(t) = 2\pi\omega_v t, \quad (5.69)$$

$$c(t) = 2\pi\omega_c t, \quad (5.70)$$

où  $\omega_h$ ,  $\omega_v$  et  $\omega_c$  sont des fréquences de rotations.

Nous introduisons alors le schéma de phase suivant (chaque déphaseur contrôlé est associé à un cornet  $i$ ),

$$\phi_i(t) \equiv \frac{\vec{d}_i}{\vec{d}_0} \cdot \vec{s}(t) + c(t) \text{ avec } \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} h(t) \\ v(t) \end{pmatrix}. \quad (5.71)$$

La différence de phase associée à la ligne de base définie par la paire de cornets  $\{i, j\}$  est donnée par

$$\phi_i(t) - \phi_j(t) = \frac{\vec{d}_i - \vec{d}_j}{\vec{d}_0} \cdot \vec{s}(t), \quad (5.72)$$

Nous voyons que les différences de phases associées seront nécessairement les mêmes pour toutes les lignes de base appartenant à la classe d'équivalence  $\beta$  définie pour  $\vec{u}_\beta = \vec{d}_i - \vec{d}_j$ . Il s'en suit également que deux lignes de base différentes  $\beta \neq \beta'$  seront modulées différemment.

Pour exprimer les choses de manière formelle, nous venons de créer une bijection entre l'espace vectoriel des positions de cornets et le groupe des séquences de phases (ou fréquences de rotation) ; ces deux ensembles étant des groupes munis de la loi d'addition, il s'en suit que nous avons par la même défini une bijection entre les deux nouveaux ensembles (obtenus par différenciation des précédents) que sont le groupe des différences de phases et l'espace vectoriel des lignes de base.

### 5.4.2 Séparation des polarisations

Dans le cadre de l'architecture basique étudiée ici, les déphaseurs contrôlés peuvent également être utilisés pour séparer les polarisations (dans le cas des architectures alternatives décrites au chapitre 7, cette séparation est assurée par un dispositif de modulation dédié). Deux cas se présentent alors selon la nature des séparateurs de polarisation.

#### Séparateurs de polarisation linéaire

Dans ce cas, l'équation 5.38 indique qu'afin de séparer les visibilitées de Stokes  $V_I$  et  $V_Q$ , il est nécessaire d'utiliser des séquences de phases indépendantes pour les deux polarisations,  $\vec{s}_{\parallel}(t) \neq \vec{s}_{\perp}(t)$ . Mais alors, la sommeation cohérente des lignes de base équivalentes ne sera pas respectée pour la modulation de  $V_U$  et  $V_V$  puisque

$$\phi_{i\parallel}(t) - \phi_{j\perp}(t) = \vec{s}_{\parallel}(t) \cdot \frac{\vec{d}_i}{\vec{d}_0} - \vec{s}_{\perp}(t) \cdot \frac{\vec{d}_j}{\vec{d}_0}. \quad (5.73)$$

Il est cependant possible de définir deux schémas alternants, l'un permettant de mesurer  $V_I$  et  $V_Q$  avec une sensibilité acceptable, l'autre  $V_I$ ,  $V_U$  et  $V_V$  :

1. Le premier schéma est tel que  $\vec{s}_{\parallel}(t) \neq \vec{s}_{\perp}(t)$ , et les différences de phases s'écrivent

$$\phi_{i\eta}(t) - \phi_{j\eta}(t) = \vec{s}_{\eta}(t) \cdot \frac{\vec{d}_i - \vec{d}_j}{\vec{d}_0}. \quad (5.74)$$

$V_I$  et  $V_Q$  sont alors mesurées avec une sensibilité optimale (le bruit évolue selon  $\propto 1/N_{\text{eq}}^2$ ),  $V_U$  et  $V_V$  sont seulement mesurées avec une sensibilité médiocre (le bruit évolue selon  $\propto 1/N_{\text{eq}}$ ).

2. Le second schéma est tel que  $\vec{s}_{\parallel}(t) = \vec{s}_{\perp}(t) = \vec{s}(t)$ . Afin de séparer  $V_U$  et  $V_V$ , il est nécessaire d'introduire deux séquences de phases supplémentaires,  $c_{\parallel}(t) \neq c_{\perp}(t)$  (l'une peut être nulle) telles que  $\phi_{i\eta}(t) = \vec{s}(t) \cdot \frac{\vec{d}_i}{\vec{d}_0} + c_{\eta}(t)$ . Les différences de phases sont alors données par

$$\phi_{i\parallel}(t) - \phi_{j\perp}(t) = \vec{s}(t) \cdot \frac{\vec{u}_i - \vec{u}_j}{\vec{d}_0} + c_{\parallel}(t) - c_{\perp}(t) \quad (5.75)$$

$$\text{et} \quad (5.76)$$

$$\phi_{i\perp}(t) - \phi_{j\parallel}(t) = \vec{s}(t) \cdot \frac{\vec{u}_i - \vec{u}_j}{\vec{d}_0} + c_{\perp}(t) - c_{\parallel}(t) \quad (5.77)$$

$$\text{mais} \quad (5.78)$$

$$\phi_{i\parallel}(t) - \phi_{j\parallel}(t) = \phi_{i\perp} - \phi_{j\perp} = \vec{s}(t) \cdot \frac{\vec{u}_i - \vec{u}_j}{\vec{d}_0}. \quad (5.79)$$

Nous voyons ainsi que la sommation cohérente des lignes de base équivalentes est respectée pour  $V_I$ ,  $V_U$  et  $V_V$  mais que  $V_Q$  n'est pas mesurée du tout.

### Séparateurs de polarisation circulaire

Les deux schémas de phases décrits dans le paragraphe précédent peuvent être repris à l'identique dans le cas de séparateurs de polarisation circulaire. Le premier schéma permettra alors de moduler avec la sensibilité optimale  $V_I$ ,  $V_Q$  et  $V_U$  et le second  $V_I$  et  $V_V$ . Dans le cadre d'une expérience CMB dédiée aux modes B, il est évidemment plus intéressant d'utiliser de tels séparateurs de polarisation circulaire : on peut ainsi abandonner  $V_V$  en n'effectuant que le premier schéma, ce qui permet d'éviter une perte de facteur 2 sur la sensibilité (voir chapitre 8).

### 5.4.3 Modulations temporelle et fréquentielle

Dans le cas d'une modulation temporelle, les déphaseurs doivent être tous identiques et capables de prendre les mêmes  $n_{\phi}$  valeurs discrètes. Nous avons montré dans [Charlassier et al., 2009] que ces  $n_{\phi}$  valeurs doivent être régulièrement espacées entre 0 et  $2\pi$ ,

$$\phi_s = s \frac{2\pi}{n_{\phi}} \quad (s = 0, \dots, n_{\phi} - 1). \quad (5.80)$$

Nous considérerons dans la section 5.5 des séquences de phases élémentaires aléatoires,  $h_{\eta}(t)$ ,  $v_{\eta}(t)$  et  $c_{\eta}(t)$ .

Dans le cas d'une modulation fréquentielle, une propriété intéressante apparaît : les fréquences de rotations  $\omega_{c_{\parallel}}$  et  $\omega_{c_{\perp}}$  peuvent être choisies de manière à bien isoler les fréquences auxquelles

sont modulées les visibilités polarisés des fréquences auxquelles sont modulées les visibilités d'intensité (cela pourrait permettre d'éviter certaines sources d'effets systématiques).

#### 5.4.4 Déphasages géométriques

Les déphasages géométriques respectent naturellement la sommation cohérente des lignes de base équivalentes puisque ceux-ci sont proportionnels à la position des cornets. Cette constatation est importante quelle que soit l'architecture envisagée (que ces déphasages soient utilisés ou non dans la modulation, ils ne doivent pas "détruire" la sommation cohérente des lignes de base équivalentes).

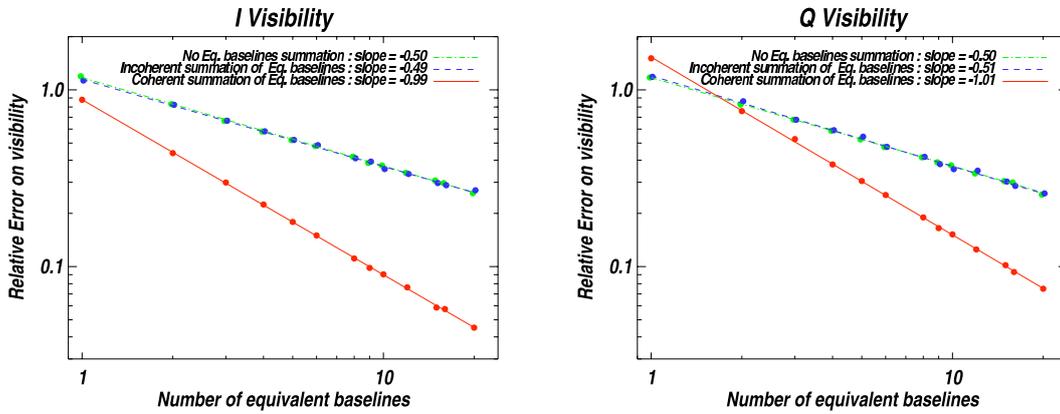


FIG. 5.8: Evolution des écarts-type des résidus (entre les visibilités théoriques et reconstruites) divisés par la quantité  $\sigma_0 \times \sqrt{\frac{N_h}{N_t}}$ , en fonction du nombre de visibilités équivalentes, pour  $V_I$  (gauche) et  $V_Q$  (droite). Le comportement de  $V_U$  et  $V_V$  serait le même que celui de  $V_Q$ . Les données simulées (points) sont ajustées par régression linéaire. On observe, comme attendu, une pente en  $\propto \frac{1}{N_{\text{eq}}}$  dans le cas où la sommation cohérente des lignes de base équivalentes est respectée, et une pente  $\propto \frac{1}{\sqrt{N_{\text{eq}}}}$  dans les deux autres cas.

## 5.5 Etude numérique

### 5.5.1 Description de la simulation

Les résultats précédents ont été testés à l'aide d'une modeste simulation numérique, dont la structure globale, pour une réalisation, est la suivante :

1. Tirage des valeurs de visibilités de Stokes aléatoires (avec pour seule contrainte un rapport cent des amplitudes entre  $V_I$  et les visibilités polarisés  $V_Q, V_U, V_V$ , comme approximativement attendu pour des visibilités CMB).
2. Définition des séquences de phases.
3. Calcul des mesures ordonnées en temps des bolomètres, et ajout d'un bruit de photon (variance gaussienne,  $\sigma_{\text{MC}}^2 = \sigma_0^2 N_h / N_t$ ).

4. Reconstruction des visibilitées par inversion du problème linéaire.
5. Calcul des résidus (différence entre visibilitées générées et reconstruites).

Un grand nombre de réalisations sont effectuées, pour différents tirages de bruits et différents tirages de séquences de phases aléatoires ; la variance des résidus est ensuite calculée.

### 5.5.2 Evolution de la sensibilité en fonction du nombre de ligne de base équivalentes

Nous avons ainsi pu comparer les sensibilités obtenues pour les trois approches suivantes :

- Reconstruction "individuelle" des  $N(N - 1)/2$  visibilitées (pas de regroupement des lignes de base équivalentes). Nous attendons une sensibilité sur la reconstruction évoluant en  $1/\sqrt{N_{\text{eq}}}$ .
- Reconstruction par moyenne des classes de lignes de base équivalentes, et déphasages contrôlés aléatoires (ne respectant pas la sommation cohérente des lignes de base équivalentes). Nous attendons la même sensibilité que dans le cas précédent.
- Reconstruction par moyenne des classes de lignes de base équivalentes, et déphasages contrôlés définis par les schémas introduits dans la section précédente (respectant la sommation cohérente des lignes de base équivalentes). Nous attendons une sensibilité sur la reconstruction des visibilitées évoluant en  $1/N_{\text{eq}}$ .

Les évolutions des sensibilités obtenues en fonction du nombre de ligne de base équivalentes, dans les trois cas, sont superposés sur la figure 5.8, où nous avons divisé les écart-types des résidus par  $\sigma_0\sqrt{N_h/N_t}$ . Nous obtenons ainsi clairement l'évolution attendue en  $\propto 1/\sqrt{N_{\text{eq}}}$  pour les deux premières approches, et l'évolution en  $1/N_{\text{eq}}$  pour la troisième.

### 5.5.3 Evolution de la sensibilité en fonction de la longueur des séquences et du nombre de valeurs discrètes de phases

Nous avons également pu étudier, dans le troisième cas (où la sommation cohérente des lignes de base équivalente est respectée), l'évolution de la sensibilité en fonction de deux paramètres intéressants : la longueur de la séquence de phase utilisée pour inverser le problème et le nombre de valeurs de phases accessibles  $n_\phi$  pour chaque déphaseur contrôlé (ces valeurs étant régulièrement espacées entre 0 et  $2\pi$ ).

Les résultats sont représentés sur la figure 5.9, où les résidus ont été divisés par  $\frac{\sigma_0}{N_{\text{eq}}}\sqrt{\frac{N_h}{N_t}}$ . Nous voyons qu'un nombre critique de valeurs de phases discrètes est requis, en dessous duquel le problème ne peut être inversé : celui-ci est à peu près égal à  $\simeq 2\sqrt{N_h}$ .

Nous voyons par ailleurs que le nombre d'échantillons (la longueur de la séquence) requis pour inverser le problème avec une sensibilité optimale est à peu près trois à quatre fois supérieur au nombre d'inconnues ( $N_u = 3 + 8 \times N_\neq$ ). Cela vient du fait que les séquences de phases générées conduisent à des séquences de modulation qui ne sont pas parfaitement orthogonales. Suite à nos travaux, certains de nos collaborateurs du projet QUBIC ont montré qu'il était possible de générer des séquences de phases engendrant des séquences de modulation (séquences de différences de phases) parfaitement orthogonales et respectant la sommation cohérente des lignes de base équivalentes : le problème peut ainsi être inversé avec un nombre minimal d'échantillons temporels [12].

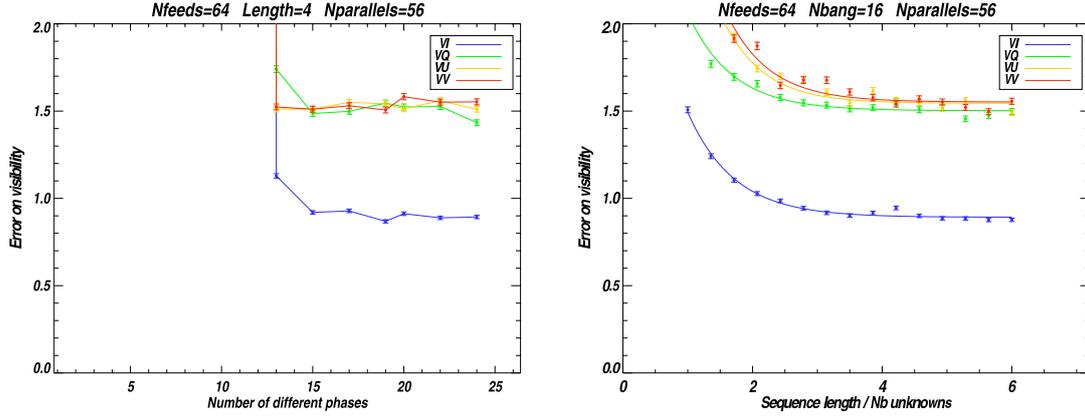


FIG. 5.9: Evolution des écarts-type des résidus (entre visibilités générées et reconstruites) divisés par  $\frac{\sigma_0}{N_{\text{eq}}} \sqrt{\frac{N_h}{N_t}}$ , en fonction du nombre de valeurs de phases discrètes par déphaseurs (à gauche) et du rapport longueur de séquence / nombre d'inconnues (à droite).

## 5.6 Contraintes instrumentales sur les déphaseurs

L'obligation de respecter la sommation cohérente des lignes de base équivalentes entraîne ainsi de fortes contraintes instrumentales sur les déphaseurs contrôlés, que nous récapitulons brièvement ici.

### 5.6.1 Modulation temporelle

#### Valeurs de phases

Dans le cas d'une modulation temporelle des visibilités, les déphaseurs doivent pouvoir délivrer, nous l'avons compris à l'aide de notre simulation, un nombre important de valeurs de phases discrètes, environ  $2\sqrt{N_h}$ .

#### Rapidité

Le nombre d'échantillons temporels requis pour inverser le problème est de l'ordre de grandeur du nombre d'inconnues,  $N_d \sim 8 \times N_{\neq}$  (on souhaite reconstruire la partie réelle et imaginaire des visibilités de Stokes  $V_I$ ,  $V_Q$  et  $V_U$ ). Pour un module de  $10^2$  cornets disposés selon une matrice carrée, on a ainsi  $N_d \sim 1200$ . La durée d'une séquence de phases est par ailleurs limitée par les constantes de temps des détecteurs bolométriques qui ne sont pas stables sur des durées supérieures à la minute ; ceci impose aux déphaseurs d'être capables de passer d'une valeur de phase à une autre en moins de 10 ms.

## Précision

Le fait de moduler simultanément les visibilitées d'intensité et les visibilitées polarisées impose aux déphaseurs un haut degré de précision : toute erreur de phase résulterait en une corruption du problème linéaire qui entraînerait une fuite des visibilitées  $V_I$  dans les visibilitées  $V_Q$  et  $V_U$ . Si l'on prend en compte le rapport typique des amplitudes entre les visibilitées d'intensité et les visibilitées polarisées ( $\sim 10^2$ ), on peut approximativement en déduire qu'une précision de  $10^{-4}$  radians sur les valeurs de phase est nécessaire en vue d'atteindre 1% de précision sur la mesure des visibilitées polarisées (cela nécessiterait bien sûr une étude plus détaillée).

### 5.6.2 Modulation fréquentielle

#### Moteurs cryogéniques

Les déphaseurs mécaniques en guide d'onde, entraînés par de petits moteurs, semblent être les seuls composants technologiquement disponibles aux longueurs d'onde millimétriques en vue d'une modulation fréquentielle. La contrainte de stabilité que nous allons décrire dans ce qui suit se reporterait ainsi sur ces moteurs qui devraient par ailleurs être capables d'opérer aux températures cryogéniques (4 K), et de taille particulièrement faible : typiquement ils devraient tenir dans l'empreinte d'un cornet pour une matrice de cornets collés deux-à-deux (à peu près 18 mm à 90 GHz et encore moins à plus haute fréquence).

#### Stabilité de rotation

D'un point de vue technologique, les fréquences de rotation envisageables pour ces moteurs, sont comprises entre quelques dixièmes et quelques dizaines de Hz. Nous avons vu que pour un schéma respectant la sommation cohérente des lignes de base équivalentes, chacun des  $2N_h$  déphaseurs doit tourner à une fréquence différente, ce qui conduit à un nombre  $6 \times N_{\neq} \sim 12N_h$  de fréquences de modulation différentes. Nous pouvons alors placer une contrainte sur la stabilité de la fréquence de rotation des moteurs en considérant que les fréquences de modulation doivent être bien isolées les unes des autres, c'est à dire qu'elles ne doivent pas varier de manière plus importante que l'écart qui les sépare. Nous voyons que pour un domaine de modulation large d'une dizaine de Hz, et pour  $\sim 10^2$  cornets, les fréquences ne seront espacées que de quelques centièmes de Hz, ce qui place une contrainte drastique sur la stabilité de rotation des moteurs.

## 5.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une architecture d'interféromètre bolométrique, et introduit un formalisme analytique permettant de la décrire. Nous avons vu que les visibilitées ne sont pas mesurées directement par les détecteurs de l'instrument, mais peuvent être reconstruites par inversion d'un problème linéaire ; insistons sur le fait qu'il s'agit là d'une caractéristique hautement spécifique au concept.

Nous avons montré qu'une reconstruction "individuelle" des  $N(N - 1)/2$  visibilitées condui-

sait à une mauvaise sensibilité de l'instrument. La solution imaginée par notre groupe de travail QUBIC à l'APC consiste à reconstruire uniquement les moyennes des visibilitées équivalentes. Le rapport signal à bruit sur les visibilitées mesurées augmente et redonne à l'instrument une sensibilité compétitive, dans le cas où les déphaseurs utilisés pour la modulation des visibilitées respectent la propriété dite de "sommeation cohérente des lignes de base équivalentes".

Nous avons ainsi défini des schémas qui permettent, quel que soit le type de la modulation (temporelle ou fréquentielle), de respecter une telle propriété. Si les quatre visibilitées de Stokes peuvent être mesurées par l'instrument, nous avons toutefois vu, qu'elles ne peuvent pas l'être simultanément avec une sensibilité optimale ; pour une expérience dédiée à l'étude de la polarisation linéaire du CMB, il conviendrait ainsi, dans le cadre de l'architecture "basique" considérée dans ce chapitre, d'utiliser des séparateurs de polarisation circulaire afin de pouvoir mesurer simultanément  $V_I$ ,  $V_Q$  et  $V_U$ .

La validité de nos travaux analytiques a été confirmée par une simulation numérique. Celle-ci nous a en particulier permis de placer des contraintes instrumentales importantes sur les déphaseurs contrôlés. Dans le cadre d'une modulation temporelle, ceux-ci doivent être rapides, précis, et capables de prendre un grand nombre de valeurs de phases discrètes ; dans le cadre d'une modulation fréquentielle, les fréquences de rotation doivent être extrêmement stables. Les études effectuées au sein de la collaboration QUBIC ont abouti à la conclusion selon laquelle la réalisation de ce genre de composants dans le domaine millimétrique nécessiterait plusieurs années de R&D. C'est suite à ce constat que nous avons proposé les architectures alternatives décrites au chapitre 7.

Le lecteur verra ainsi se dessiner, dans la suite de cette thèse, une interférométrie bolométrique sans déphaseurs (chapitre 7) et peut-être même sans visibilitées (chapitre 13). La mise en évidence du lien entre distribution des cornets et sensibilité apparaîtra alors rétrospectivement comme l'enseignement le plus important de ce chapitre ; ce que nous apprend en effet l'équation 5.63, c'est que seule une distribution de cornets hautement redondante (i.e. pour laquelle  $\langle N_{\text{eq}} \rangle \propto N_h$ ) est susceptible de conférer à un interféromètre bolométrique une sensibilité compétitive. La disposition des cornets sur une matrice carrée permet d'atteindre ce degré de redondance, puisqu'alors  $\langle N_{\text{eq}} \rangle \sim N_h/4$  (dans le cas extrême d'une distribution aléatoire, on aurait à l'opposé  $\langle N_{\text{eq}} \rangle \sim 1$ ).



## Chapitre 6

# Le problème de la largeur de bande

---

Nous étudions ici le problème de la largeur de bande en interférométrie bolométrique (au chapitre 5, nous avons implicitement fait l'hypothèse d'un instrument monochromatique). Ce travail, mené en collaboration avec Jean-Christophe Hamilton, Jean Kaplan, Ted Bunn et Siddharth Malu a donné lieu à une publication [3], reproduite en annexe, dont ce chapitre s'inspire largement.

---

La largeur de bande spectrale d'un instrument est généralement considérée comme un problème en radio-interférométrie. Si la sensibilité brute des détecteurs est proportionnelle à la racine carrée de leur largeur de bande, il existe un effet secondaire, connu sous le nom de *lissage par largeur de bande* ("bandwidth smearing" en anglais) qui peut dégrader la sensibilité d'un interféromètre de manière conséquente. Cet effet s'explique simplement : si deux signaux monochromatiques provenant de la même source forment des franges d'interférences parfaites, deux signaux large bande forment quant à eux une superposition de franges d'interférences de périodes légèrement différentes ; ceci résulte en un lissage des franges observées (l'amplitude des franges monochromatiques est multipliée par une enveloppe de type sinus cardinal). Ce lissage, dont l'amplitude dépend évidemment de la largeur de bande, aura pour conséquence une dégradation du rapport signal à bruit.

Un des points forts des bolomètres étant leur largeur de bande, le terme "interférométrie bolométrique" pourrait paraître oxymoral à un spécialiste en radio-interférométrie. L'étude détaillée menée dans ce chapitre montrera toutefois que la dégradation du rapport signal à bruit due au lissage n'est pas si considérable dans le cas de l'interférométrie bolométrique dédiée au CMB (ceci s'explique principalement par le fait que l'amplitude de l'effet dépend également des échelles angulaires sondées). Nous commencerons par introduire les observables mesurées par un interféromètre de large bande spectrale et de large lobe primaire, avant de montrer comment les spectres de puissance du CMB peuvent être estimés à partir de celles-ci. Nous calculerons alors la dégradation de sensibilité induite par l'effet de lissage. Ces travaux seront validés par une simulation numérique.

Nous verrons par ailleurs que la largeur de bande engendre un autre type de problème dans le cas de l'interférométrie bolométrique. Nous avons en effet montré au chapitre 5 que les visibilités ne sont pas directement mesurées mais obtenues après inversion d'un système linéaire dont les coefficients de modulation sont donnés, soit par des déphasages contrôlés, soit par des déphasages géométriques (induits par le combineur de faisceaux). Dans le cas où ces déphasages ont une dépendance spectrale, ce système linéaire est modifié (les visibilités sont modulées différemment selon la fréquence). Cet effet pourrait potentiellement altérer la sensibilité de l'instrument. Nous proposerons une solution partielle à ce problème – permettant d'éviter la plus importante source d'erreur (une fuite de I dans Q/U) – ainsi que des pistes en vue de sa résolution globale.

## 6.1 Visibilités large bande et effets de lissage

### 6.1.1 Visibilités monochromatiques

La définition des visibilités donnée au chapitre 5 n'est correcte que pour un instrument opérant dans une fine bande spectrale<sup>1</sup>. De manière plus rigoureuse, nous appellerons désormais *visibilités monochromatiques* les observables mesurées par un tel instrument opérant à la fréquence  $\nu_0$  et observant un champ de rayonnement d'intensité  $I_\nu(\vec{n})$ , en unités [W.Hz<sup>-1</sup>.sr<sup>-1</sup>]. Chacune de ces visibilités est définie pour une ligne de base  $\vec{u}_0$ ,

$$V_I^{\nu_0}(\vec{u}_0) = \int I_{\nu_0}(\vec{n}) B_{\nu_0}(\vec{n}) \exp(i2\pi\vec{u}_0 \cdot \vec{n}) d\vec{n}, \quad (6.1)$$

où  $B_\nu(\vec{n}) = |A_\nu(\vec{n})|^2$  exprime les lobes des récepteurs, en unité de puissance, supposés tous égaux et normalisés par convention de telle sorte que  $B_\nu(\vec{0}) = 1$ . Nous pouvons ainsi exprimer – à notre manière – ce qui est parfois appelé le "théorème d'équivalence" de l'interférométrie : une visibilité monochromatique définie pour une fréquence d'observation  $\nu_0$  et une paire de récepteurs séparés par une distance  $\vec{d}$  est la même observable qu'une autre visibilité monochromatique définie pour une fréquence d'observation  $\nu_1$  et une paire de récepteurs séparés par une distance  $\vec{d}_{\nu_1}^{\nu_0}$  (les deux visibilités correspondent en effet à la même ligne de base  $\vec{u}_0 = \vec{d}_{\nu_1}^{\nu_0}/c$ ). Cette proposition n'est en réalité valide que si les deux paires de cornets observent le ciel à travers le même lobe (ce qui signifie que leurs tailles seront différentes en raison de la relation 5.3) et si le rayonnement observé suit les mêmes variations spatiales aux deux fréquences  $\nu_0$  et  $\nu_1$  (ce qui est vrai dans le cas des observations du CMB).

### 6.1.2 Visibilités large bande

Nous considérons à présent le cas d'un interféromètre bolométrique plus réaliste, opérant sur une large bande de fréquences ; sa réponse spectrale est donnée par la fonction  $J(\nu - \nu_0)$ , centrée<sup>2</sup> sur la fréquence  $\nu_0$ . Nous définissons arbitrairement la *largeur de bande* de l'instrument  $\Delta\nu$  comme

$$\Delta\nu = \frac{1}{J(0)} \int J(\nu - \nu_0) d\nu. \quad (6.2)$$

<sup>1</sup>Ce que nous entendons quantitativement par "fine bande spectrale" deviendra clair dans la suite de ce chapitre.

<sup>2</sup>La définition du centre est en fait arbitraire ; le barycentre de  $J$  peut être choisi par convention.

Nous définissons les *visibilités large bande*, comme les observables mesurées par un tel instrument. L'expression d'une telle visibilité, en unité de puissance, pour une ligne de base  $\vec{u}_0 = \vec{d} \frac{\nu_0}{c}$  est donnée par

$$V_I^{\Delta\nu}(\vec{u}_0) = \iint I_\nu(\vec{n}) B_\nu(\vec{n}) \exp(i2\pi \vec{d} \cdot \vec{n} \frac{\nu}{c}) J(\nu - \nu_0) d\nu d\vec{n}. \quad (6.3)$$

Nous avons vu au chapitre 4 que dans le cas où les récepteurs sont coplanaires, les visibilités sont définies dans un espace dit plan-uv. Il est plus aisé de comprendre l'effet de lissage en réécrivant les visibilités large bande dans cet espace,

$$V_I^{\Delta\nu}(\vec{u}_0) = \iiint \tilde{I}_\nu(\vec{w}) \tilde{B}_\nu(\vec{w}') J(\nu - \nu_0) e^{i2\pi(\frac{\nu}{\nu_0} \vec{u}_0 - \vec{w} - \vec{w}') \cdot \vec{n}} d\vec{w} d\vec{w}' d\vec{n} d\nu, \quad (6.4)$$

où nous avons respectivement introduit les transformées de Fourier du signal et du lobe ( $\vec{w}$  est la variable transformée associée),

$$I_\nu(\vec{n}) = \int \tilde{I}_\nu(\vec{w}) \exp(-i2\pi \vec{w} \cdot \vec{n}) d\vec{w}, \quad (6.5)$$

$$B_\nu(\vec{n}) = \int \tilde{B}_\nu(\vec{w}') \exp(-i2\pi \vec{w}' \cdot \vec{n}) d\vec{w}' \quad (6.6)$$

Dans l'approximation de ciel plat<sup>3</sup>, l'intégrale sur le champ  $\vec{n}$  s'écrit comme une fonction delta de Dirac, et l'expression de la visibilité large bande devient

$$V_I^{\Delta\nu}(\vec{u}_0) = J(0) \Delta\nu \int \tilde{I}_{\nu_0}(\vec{w}) \tilde{\beta}(\vec{u}_0, \vec{w}) d\vec{w}, \quad (6.7)$$

où nous avons définis le *noyau de convolution* dans le plan-uv,

$$\tilde{\beta}(\vec{u}_0, \vec{w}) = \int \frac{\tilde{I}_\nu(\vec{w})}{\tilde{I}_{\nu_0}(\vec{w})} \tilde{B}_\nu(\vec{u}_0 \frac{\nu}{\nu_0} - \vec{w}) J_N(\nu - \nu_0) d\nu, \quad (6.8)$$

expression dans laquelle nous avons introduit la réponse spectrale normalisée,  $J_N(\nu - \nu_0) = J(\nu - \nu_0) / \Delta\nu$ . Ce noyau de convolution (qui dépend de la ligne de base  $\vec{u}_0$ ) décrit complètement l'effet de lissage par largeur de bande. Pour une visibilité monochromatique, celui-ci se réduit en effet à la transformée de Fourier du lobe  $\tilde{B}(\vec{w})$ . Dans ce qui suit et afin de poursuivre analytiquement les calculs, nous commençons par ignorer les dépendances spectrales du signal et du lobe :

$$\tilde{\beta}(\vec{w}) = \tilde{B}_{\nu_0}(\vec{w}) \approx \tilde{B}_\nu(\vec{w}) \quad \text{et} \quad \tilde{I}(\vec{w}) = \tilde{I}_{\nu_0}(\vec{w}) \approx \tilde{I}_\nu(\vec{w}). \quad (6.9)$$

Nous obtenons alors la forme approchée suivante du noyau de convolution :

$$\tilde{\beta}_{ap}(\vec{u}_0, \vec{w}) = \int \tilde{B}(\vec{u}_0 \frac{\nu}{\nu_0} - \vec{w}) J_N(\nu - \nu_0) d\nu. \quad (6.10)$$

Nous calculerons, numériquement et sans procéder à ces approximations, une valeur plus exacte de ce noyau de convolution dans la section 6.1.5. On constatera sur la figure 6.2 que la différence entre les deux expressions (avec ou sans approximations) est plutôt minime.

<sup>3</sup>Nous nous restreindrons, par simplicité, dans le cadre de cette approche analytique, à l'approximation de ciel plat, que nous savons être incorrecte dans le cas de QUBIC ; une approche numérique permet de l'éviter.

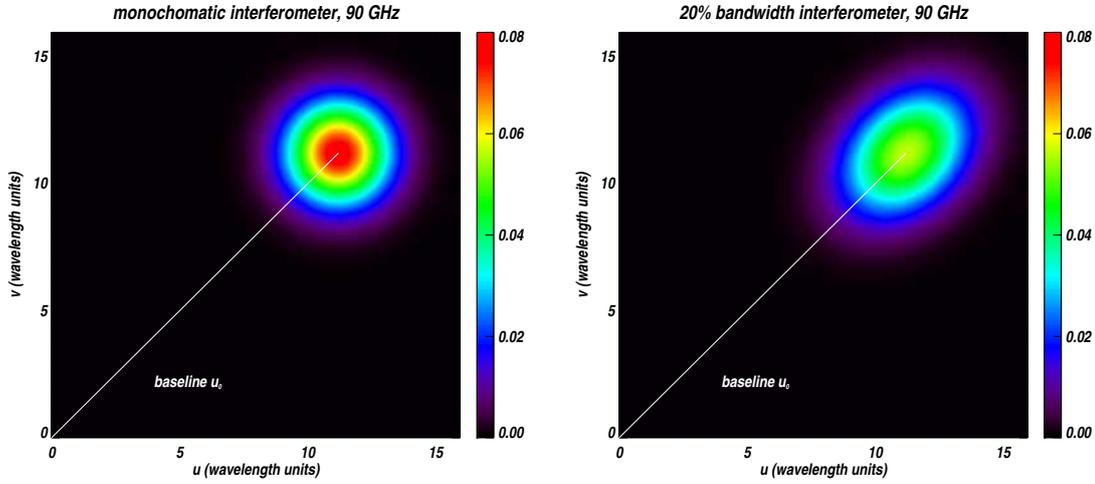


FIG. 6.1: *Gauche* : noyau de convolution dans le plan- $uv$  pour un interféromètre monochromatique opérant à 90 GHz (il s'agit simplement de la transformée de Fourier du lobe) ; les cornets ont des lobes gaussiens de  $15^\circ$  FWHM. *Droite* : noyau de convolution pour une ligne de base  $\vec{u}_0$  (correspondant au multipôle  $l \sim 100$ ), pour un interféromètre opérant dans une bande spectrale de 20% de largeur centrée sur 90 GHz ; les cornets ont des lobes gaussiens de  $15^\circ$  FWHM.

### 6.1.3 Forme analytique approchée du noyau de convolution

Toujours afin de pouvoir poursuivre analytiquement les calculs, nous ferons l'hypothèse – peu réaliste – d'une fonction de réponse spectrale gaussienne (et normalisée) :

$$J_N(\nu - \nu_0) = \frac{1}{\sigma_\nu \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{2\sigma_\nu^2}\right). \quad (6.11)$$

La largeur de bande est reliée au sigma de la gaussienne par  $\Delta\nu = \sigma_\nu \sqrt{2\pi}$ . Nous faisons également comme de coutume l'hypothèse de lobes gaussiens, que nous normalisons par  $B(\vec{0}) = 1$  ; leur transformée de Fourier s'écrit ainsi

$$\tilde{B}(\vec{w}) = \Omega \exp(-\pi\Omega \vec{w}^2). \quad (6.12)$$

L'intégrale sur le lobe est définie pour la fréquence centrale<sup>4</sup> :  $\Omega = \Omega_{\nu_0}$ . Le noyau de convolution s'exprime alors :

$$\tilde{\beta}_{ap}(\vec{u}_0, \vec{w}) = \frac{\Omega}{\sigma_\nu \sqrt{2\pi}} \int \exp\left[-\pi\Omega \left(\vec{u}_0 \frac{\nu}{\nu_0} - \vec{w}\right)^2 - \frac{(\nu - \nu_0)^2}{2\sigma_\nu^2}\right] d\nu. \quad (6.13)$$

Cette expression peut être intégrée analytiquement (le calcul est explicitement effectué dans [3]) et mise sous la forme

$$\tilde{\beta}_{ap}(\vec{u}_0, \vec{w}') = \tilde{B}(\vec{w}') \frac{\exp\left[\frac{2\pi^2\Omega^2 \left(\frac{\sigma_\nu}{\nu_0}\right)^2 (\vec{u}_0 \cdot \vec{w}')^2}{1 + 2\pi\Omega \left(\frac{\sigma_\nu}{\nu_0}\right)^2 \vec{u}_0^2}\right]}{\sqrt{1 + 2\pi\Omega \left(\frac{\sigma_\nu}{\nu_0}\right)^2 \vec{u}_0^2}}, \quad (6.14)$$

<sup>4</sup>L'angle solide est alors reliée au sigma du lobe gaussien par  $\Omega = 2\pi\sigma^2$ .

où nous avons effectué le changement de variable

$$\vec{w}' = \vec{u}_0 - \vec{w}. \quad (6.15)$$

Nous pouvons à présent définir le *lobe effectif* dans l'espace réel pour un interféromètre large bande  $\Omega_s$ , comme la valeur au point  $\vec{w}' = \vec{0}$  du noyau de convolution :

$$\Omega_s = \tilde{\beta}_{ap}(\vec{u}_0, \vec{0}) = \frac{\Omega}{\kappa_1}. \quad (6.16)$$

Nous venons d'introduire une importante quantité que nous nommerons le *paramètre de lissage*,

$$\kappa_1 = \sqrt{1 + 2\pi\Omega \left(\frac{\sigma_\nu}{\nu_0}\right)^2 u_0^2}, \quad (\kappa_1 \geq 1). \quad (6.17)$$

Le noyau de convolution s'exprime finalement comme

$$\tilde{\beta}_{ap}(\vec{u}_0, \vec{w}') = \tilde{B}(\vec{w}') \times \frac{1}{\kappa_1} \times \exp \left[ 2\pi^2 \left(\frac{\sigma_\nu}{\nu_0}\right)^2 \Omega_s^2 (\vec{u}_0 \cdot \vec{w}')^2 \right] \quad (6.18)$$

$$= \tilde{B}(\vec{w}') \times \frac{1}{\kappa_1} \times \exp \left[ \pi\Omega \left(1 - \frac{1}{\kappa_1^2}\right) \frac{(\vec{u}_0 \cdot \vec{w}')^2}{u_0^2} \right]. \quad (6.19)$$

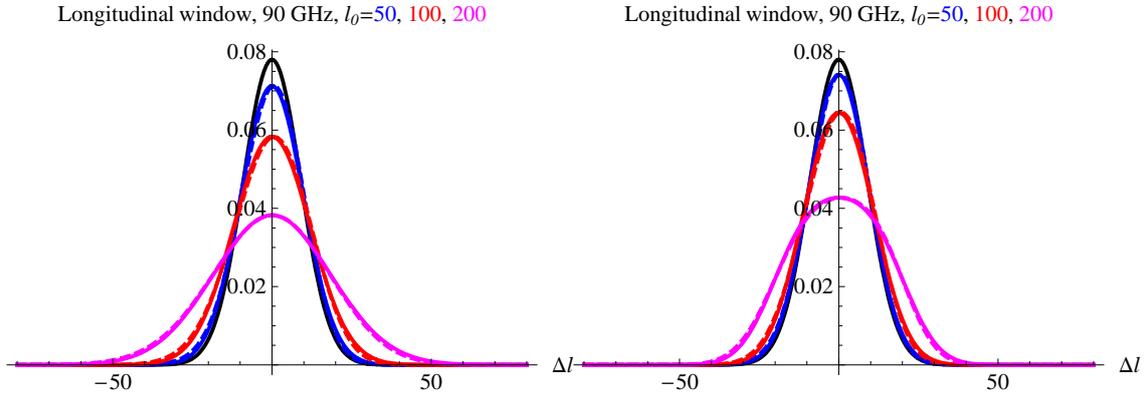


FIG. 6.2: Gauche : la ligne noire pleine montre le profil longitudinal du noyau de convolution monochromatique, alors que les lignes colorées montrent le profil longitudinal du noyau de convolution pour 20% de largeur de bande, des lignes de base correspondantes à  $l_0 = 50, 100, 200$  (fréquence centrale 90 GHz, lobes gaussiens de  $15^\circ$  FWHM). Les lignes pointillées donnent le calcul numérique, les lignes pleines le calcul analytique approché. Droite : graphe identique à celui de gauche, mais avec une réponse spectrale plate plutôt que gaussienne.

Ce paramètre  $\kappa_1$  indique l'importance du lissage par largeur de bande et prend sa valeur minimale de 1 pour un instrument monochromatique. Nous verrons dans la section 6.4 que la dégradation de la sensibilité sur le spectre de puissance angulaire des anisotropies du CMB est proportionnelle à  $\kappa_1^{3/2}$ . On constate que des interféromètres munis de "petites" lignes de base (i.e. sondant de "grandes" échelles angulaires) ou de "petits" lobes sont moins affectés par le lissage (voir figure 6.4). La figure 6.1 compare les noyaux de convolution des interféromètres monochromatique et large bande : le lissage peut ainsi être vu comme un étirement du noyau par lequel la

transformée de Fourier du signal est convoluée, dans la direction de la ligne de base. Dans l'espace réel, le lissage correspond de façon équivalente à un rétrécissement du lobe par un facteur  $\kappa_1$  qui dépend de la longueur de la ligne de base : pour un multipole  $l$ , la fraction de ciel observé par un interféromètre large bande est en fait  $f_{sky}^{\Delta\nu}(l) = f_{sky}/\kappa_1$  – cf. section 6.4.

L'origine de la formule 6.17 est finalement éclairée par le raisonnement qualitatif suivant : l'effet du lissage reste faible tant que la largeur de la gaussienne du lobe dans le plan-uv  $\frac{1}{2\pi\Omega}$ , reste faible devant l'étirement de la ligne de base donnée par  $\left(\frac{\sigma_\nu}{\nu_0}\right)^2 u_0^2$  dans le cas d'une fonction spectrale gaussienne.

### 6.1.4 Visibilités large bande en unité de température

Il est plus pratique de travailler avec des visibilités en unité de température dans le cadre de l'étude des anisotropies du CMB (même si en pratique, les visibilités mesurées par un interféromètre bolométrique sont celles en unités de puissance définies par l'équation 6.3) ; lorsque nous définirons un estimateur du spectre de puissance angulaire des anisotropies du CMB dans la section 6.4, celui-ci s'exprimera par exemple plus aisément en fonction des visibilités en unité de température. Nous montrons ici comment passer d'une observable à l'autre.

Si  $L_\nu$  est la luminance spectrale du champ observé, en unité de  $[\text{W} \cdot \text{Hz}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}]$ , l'intensité spectrale collectée par un récepteur (cornet par exemple) de surface  $S$  est donnée par

$$I_\nu = SL_\nu. \quad (6.20)$$

Les expériences CMB observent de légères fluctuations spatiales du signal, de sorte que

$$I_\nu(\vec{n}) = I_\nu + \Delta I_\nu(\vec{n}). \quad (6.21)$$

Le terme oscillant des visibilités annule la partie constante, si bien que celles-ci peuvent être réécrites

$$V_I^{\Delta\nu}(\vec{u}_0) = \iint \Delta I_\nu(\vec{n}) B_\nu(\vec{n}) \exp(i2\pi\vec{d}_0 \cdot \vec{n} \frac{\nu}{c}) J(\nu - \nu_0) d\nu d\vec{n}. \quad (6.22)$$

Les fluctuations de température sont reliées aux fluctuations de puissance par

$$\Delta I_\nu(\vec{n}) = \frac{\partial I_\nu}{\partial T} \Delta T(\vec{n}) = S \frac{\partial L_\nu}{\partial T} \Delta T(\vec{n}). \quad (6.23)$$

Nous pouvons ainsi définir les visibilités large bande en unité de température,

$$V_T^{\Delta\nu}(\vec{u}_0)[\text{en K}] = \frac{V_I^{\Delta\nu}(\vec{u}_0)[\text{en W}]}{S (\partial L_\nu / \partial T)|_{\nu_0}}. \quad (6.24)$$

De la même manière, elles peuvent s'exprimer comme une convolution dans le plan-uv,

$$V_T^{\Delta\nu}(\vec{u}_0) = \Delta\nu \int \tilde{\Delta T}(\vec{w}) \tilde{\beta}^T(\vec{u}_0, \vec{w}) d\vec{w}, \quad (6.25)$$

où nous avons introduit la transformée de Fourier du champ de température

$$\Delta T(\vec{n}) = \int \tilde{\Delta T}(\vec{w}) \exp(-i2\pi\vec{w} \cdot \vec{n}) d\vec{w}, \quad (6.26)$$

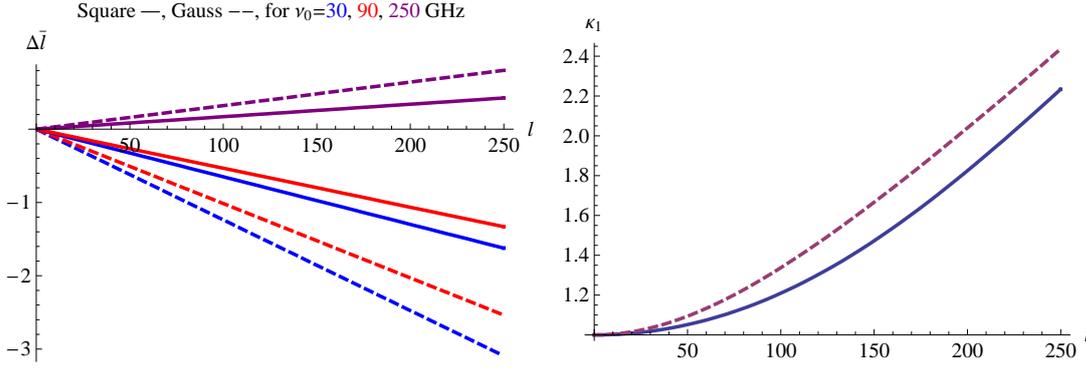


FIG. 6.3: Gauche : Déplacement de la fenêtre effective en  $l$  en fonction de  $l_0$  ; pointillés pour une réponse spectrale gaussienne, ligne continue pour une réponse spectrale plate. Droite : Variation de  $\kappa_1$  en fonction de  $l_0$  ; pointillés pour une réponse spectrale gaussienne, ligne continue pour une réponse spectrale plate.

et un nouveau noyau de convolution

$$\tilde{\beta}^T(\vec{u}_0, \vec{w}) = \int \left( \frac{\partial L_\nu / \partial T}{(\partial L_\nu / \partial T)|_{\nu_0}} \right) \tilde{B}_\nu(\vec{u}_0 \frac{\nu}{\nu_0} - \vec{w}) J_N(\nu - \nu_0) d\nu. \quad (6.27)$$

Si nous négligeons la dépendance spectrale du signal et du lobe, ce noyau devient exactement celui défini par l'équation 6.10 :

$$\tilde{\beta}_{ap}^T(\vec{u}_0, \vec{w}) \rightarrow \tilde{\beta}_{ap}(\vec{u}_0, \vec{w}) \quad (6.28)$$

### 6.1.5 Un calcul plus correct du noyau de convolution

Nous examinons à présent dans quelle mesure la prise en compte des dépendances spectrales du lobe et du signal affecte la valeur du noyau de convolution. La luminance spectrale  $L_\nu$  du champ observé est celle d'un corps noir à la température  $T$  :

$$L_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}. \quad (6.29)$$

A l'intérieur de la largeur de bande, cette dépendance spectrale est bien approximée par une loi de puissance :

$$\frac{\partial L_\nu}{\partial T} \simeq \frac{\partial L_\nu}{\partial T} \Big|_{\nu_0} \left( \frac{\nu_0}{\nu} \right)^\alpha \text{ avec } \alpha = \frac{h\nu_0}{k_B T} \frac{e^{h\nu_0/k_B T} + 1}{e^{h\nu_0/k_B T} - 1}. \quad (6.30)$$

Pour un lobe gaussien, la dépendance spectrale des cornets peut par ailleurs être modélisée (en utilisant l'équation 5.3) par :

$$\tilde{B}_\nu(\vec{w}) = \Omega \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \exp(-\pi \Omega \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \vec{w}^2). \quad (6.31)$$

La figure 6.2 montre la légère différence entre le noyau de convolution obtenu numériquement en utilisant les relations précédentes et sa valeur approchée donnée par l'équation 6.19. Les dépendances spectrales du lobe et du signal ont tendance à se compenser. La différence la plus notable

est un déplacement de la fonction fenêtre en  $l$ , comme on le voit sur la figure 6.3. Pour l'analyse des données d'une expérience, le noyau de convolution devra bien sûr être calculé numériquement ; mais la formule analytique approchée est suffisante pour estimer la perte de sensibilité résultant du lissage. Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons la formule approchée mais noterons  $\tilde{\beta}$  en place de  $\tilde{\beta}_{ap}$  (par souci d'allègement de formules déjà chargées).

## 6.2 L'interféromètre bolométrique large bande

Nous avons décrit dans la section précédente l'effet du lissage des visibilitées par largeur de bande ; cette description est valable pour tout type d'interféromètre (hétérodyne ou bolométrique) dédié à l'observation du CMB. La largeur de bande entraîne une complication supplémentaire en interférométrie bolométrique en raison du fait que dans ce cas, les visibilitées ne sont pas mesurées *directement*, mais obtenues par inversion d'un système linéaire ; nous avons en effet vu au chapitre 5 que celui-ci s'exprimait comme  $S = A \cdot X$ , où  $X$  est le vecteur des visibilitées,  $S$  est le vecteur de la séquence de mesures, et  $A$  la matrice de modulation dépendant des déphasages (contrôlés ou géométriques). Dans cette section nous reprenons le calcul du chapitre 5, en vue d'obtenir l'expression de la puissance mesurée par les détecteurs, mais en prenant cette fois en compte leur largeur de bande. Nous supposons, comme précédemment, que l'instrument est caractérisé par sa réponse spectrale  $J(\nu - \nu_0)$  centrée sur  $\nu_0$ .

### 6.2.1 Puissances mesurées par les bolomètres large bande

Nous reprenons toutes les hypothèses faites au chapitre 5 et considérons similairement un interféromètre bolométrique muni de  $N_h$  cornets dont les lobes, supposés identiques, sont donnés par  $B(\vec{n}) = |A(\vec{n})|^2$ . Nous nous placerons dans le cas simple où les  $N_{out}$  détecteurs sont uniformément illuminés. La composante  $\eta$  de polarisation du rayonnement provenant de la direction  $\vec{n}$  et collecté par le cornet  $i$  s'écrit

$$\epsilon_{i,\eta}(\vec{n}, t) = A(\vec{n})E_{i,\eta}(\vec{n}, t). \quad (6.32)$$

A la sortie du combineur de faisceaux, le champ électromagnétique, induit par le rayonnement provenant de la direction  $\vec{n}$ , et couplé au détecteur  $k$ , à l'instant  $t$ , s'exprime ainsi comme :

$$z_k(\vec{n}, t) = \int z_k^\nu(\vec{n}, t) J(\nu - \nu_0) d\nu, \quad (6.33)$$

où

$$z_k^\nu(\vec{n}, t) = \frac{1}{\sqrt{N_{out}}} \sum_{i=0}^{N_h-1} \sum_{\eta=0}^1 \epsilon_{i,\eta}(\vec{n}, t) \exp[i\Phi_{i,\eta}^k(\nu, t)], \quad (6.34)$$

et où nous avons noté  $\Phi_{i,\eta}^k(\nu, t)$  la somme des déphasages contrôlés et géométriques. La puissance mesurée, intégrée sur une échelle de temps donnée par la constante de temps des détecteurs (bien plus grande que la période de l'onde électromagnétique), s'écrit alors :

$$S_k(t) = \left\langle \left| \iint z_k^\nu(\vec{n}, t) J(\nu - \nu_0) d\nu d\vec{n} \right|^2 \right\rangle. \quad (6.35)$$

Des signaux provenant de directions différentes du ciel sont incohérents, tout comme des signaux de fréquences distinctes ; autrement dit, la moyenne temporelle de leur corrélation est nulle :

$$\left\langle z_k^\nu(\vec{n}) z_k^{\nu'}(\vec{n}') \right\rangle = |z_k^\nu(\vec{n})|^2 \delta(\vec{n} - \vec{n}') \delta(\nu - \nu'). \quad (6.36)$$

La puissance mesurée par le détecteur  $k$  s'écrit donc

$$S_k(t) = \iint |z_k^\nu(\vec{n}, t)|^2 J(\nu - \nu_0) d\nu d\vec{n}. \quad (6.37)$$

Cette expression peut être développée, de la même manière qu'au chapitre 5, comme une somme de termes d'auto-corrélation et une somme de termes de corrélations croisées,

$$S_k(t) = S_k^{ac}(t) + S_k^{cc}(t). \quad (6.38)$$

Le terme des corrélations croisées s'exprime comme une somme de convolutions dans le plan-uv (nous définissons  $b = \{i, j\}$  et  $p = \{\eta_1, \eta_2\}$ ) :

$$S_k^{cc}(t) = \frac{2J(0) \Delta\nu}{N_{out}} \text{Re} \left[ \sum_{i < j} \sum_{\eta_1, \eta_2} \int \tilde{I}_{b,p}(\vec{w}) \tilde{\eta}_{b,p}^{BI}(\vec{u}_b, \vec{w}) d\vec{w} \right] \quad (6.39)$$

où nous avons introduit la transformée de Fourier du signal

$$\tilde{I}_{b,p}(\vec{w}) = \int E_{i,\eta_1}(\vec{n}) E_{j,\eta_2}^*(\vec{n}) \exp(i2\pi\vec{n} \cdot \vec{w}) d\vec{n}, \quad (6.40)$$

et le noyau  $\tilde{\eta}_{b,p}^{BI}(\vec{u}_b, \vec{w})$  qui contient la modulation de phase des visibilités,

$$\tilde{\eta}_{b,p}^{BI}(\vec{u}_b, \vec{w}) = \int \tilde{B}\left(\frac{\nu}{\nu_0} \vec{u}_b - \vec{w}\right) J_N(\nu - \nu_0) \exp[i\Delta\Phi_{b,p}^k(\nu)] d\nu \quad (6.41)$$

$$\Delta\Phi_{b,p}^k(\nu) = \Phi_{i,\eta_1}^k(\nu, t) - \Phi_{j,\eta_2}^k(\nu, t). \quad (6.42)$$

## 6.2.2 Déphasages sans dépendance spectrale

Considérons d'abord le cas le plus simple où les déphasages n'ont pas de dépendance spectrale, i.e.

$$\forall \nu, \Delta\Phi_{b,p}^k(\nu, t) = \Delta\Phi_{b,p}^k(\nu_0, t). \quad (6.43)$$

Le noyau peut alors être réécrit :

$$\tilde{\eta}_{b,p}^{BI}(\vec{u}_b, \vec{w}) = \tilde{\beta}(\vec{u}_b, \vec{w}) \exp[i\Delta\Phi_{b,p}^k(\nu_0)]. \quad (6.44)$$

L'expression du terme des corrélations croisées est alors formellement similaire à celle de l'équation 5.36, les visibilités large bande de l'équation 6.24 se substituant aux visibilités monochromatiques,

$$S_k^{cc}(t) = \frac{2}{N_{out}} \text{Re} \left[ \sum_{i < j} \sum_{\eta_1, \eta_2} e^{i\Delta\Phi_{b,p}^k(\nu_0, t)} V_{b,p}^{\Delta\nu}(\vec{u}_b) \right]. \quad (6.45)$$

Nous pouvons introduire les *visibilités de Stokes large bande*,

$$V_{\vec{X}}^{\Delta\nu}(\vec{u}_b) = J(0) \Delta\nu \int \tilde{X}(\vec{w}) \tilde{\beta}(\vec{u}_b, \vec{w}) d\vec{w}, \quad (6.46)$$

où  $X = \{I, Q, U, V\}$  et  $\tilde{X}$  est la transformée de Fourier associée ; l'équation 6.45 peut alors être réécrite comme une combinaison linéaire de ces observables,

$$S_k^{cc}(t) = \sum_{\beta=0}^{N_{\neq}-1} \Gamma_{k,\beta} \cdot V_{\beta}^{\Delta\nu}, \quad (6.47)$$

où  $\Gamma_{k,\beta}$  est le vecteur défini dans l'équation 5.57, et  $V_{\beta}^{\Delta\nu}$  est le vecteur incluant les parties réelles et imaginaires des visibilités de Stokes large bande. Tout ce qui a été démontré au chapitre 5 concernant la reconstruction des visibilités est alors valable (en particulier tout ce qui concerne la sommation cohérente des lignes de base équivalentes). Dans le cas où les déphasages sont constants sur l'ensemble de la bande spectrale considérée, un interféromètre bolométrique large bande fonctionne donc de manière parfaitement identique à un interféromètre bolométrique monochromatique ; l'unique différence tient à ce que les visibilités reconstruites sont les visibilités large bande introduites dans ce chapitre, au lieu des visibilités monochromatiques.

### 6.2.3 Déphasages avec dépendance spectrale linéaire

Considérons maintenant le cas plus problématique où les déphasages utilisés pour la modulation des visibilités ont une dépendance spectrale. Le cas le plus réaliste est celui d'une dépendance linéaire,

$$\Delta\Phi_{b,p}^k(\nu, t) = \Delta\Phi_{b,p}^k(\nu_0, t) \times \frac{\nu}{\nu_0}. \quad (6.48)$$

Les déphasages géométriques induits par le combineur de Fizeau ont cette propriété, tout comme des déphaseurs contrôlés qui seraient réalisés à partir de lignes à retard (voir figure 5.5).

Afin d'alléger les notations, nous noterons dans ce qui suit  $\Delta\Phi_{b,p}^k$  en lieu de  $\Delta\Phi_{b,p}^k(\nu_0, t)$ . Nous avons montré dans [3] que dans ce cas le noyau  $\tilde{\eta}_{b,p}^{BI}$  s'écrit :

$$\tilde{\eta}_{b,p}^{BI}(\vec{u}_b, \vec{w}) = \tilde{\beta}(\vec{u}_b, \vec{w}) \exp \left[ -(\Delta\Phi_{b,p}^k)^2 G + i\Delta\Phi_{b,p}^k (1 - H(\vec{w})) \right], \quad (6.49)$$

où nous avons défini

$$G = \left( \frac{\sigma_{\nu}}{\nu_0} \right)^2 \times \frac{1}{2\kappa_1^2}, \quad (6.50)$$

$$H(\vec{w}) = \left( 1 - \frac{1}{\kappa_1^2} \right) \times \frac{\vec{u}_b \cdot (\vec{u}_b - \vec{w})}{u_b^2}. \quad (6.51)$$

Le terme des corrélations croisés s'exprime alors comme

$$S_k^{cc}(t) = \frac{2}{N_{out}} \text{Re} \left[ \sum_{i < j} \sum_{\eta_1, \eta_2} e^{-(\Delta\Phi_{b,p}^k)^2 G + i\Delta\Phi_{b,p}^k} V_{b,p}^{LD,k,\Delta\nu}(\vec{u}_b) \right] \quad (6.52)$$

où nous avons introduits les "visibilités corrompues",

$$V_{b,p}^{LD,k,\Delta\nu}(\vec{u}_b) = J(0) \Delta\nu \int \tilde{I}_{b,p}(\vec{w}) \tilde{\beta}_{b,p}^{LD,k}(\vec{u}_b, \vec{w}) d\vec{w}. \quad (6.53)$$

Ce nouveau noyau est relié à celui étudié dans la section précédente par

$$\tilde{\beta}_{b,p}^{LD,k}(\vec{u}_b, \vec{w}) = \tilde{\beta}(\vec{u}_b, \vec{w}) \exp \left[ -i\Delta\Phi_{b,p}^k H(\vec{w}) \right]. \quad (6.54)$$

Ce facteur complexe dépend malheureusement du déphasage : cela signifie que la définition des visibilités change légèrement entre deux échantillons temporels d'une même séquence de modulation. Autrement dit, le problème linéaire tel qu'il était posé dans le cas monochromatique est corrompu, et ceci résultera en une source d'erreur lors de la reconstruction des visibilités (tout du moins si on utilise la matrice de modulation monochromatique pour inverser le problème). Estimer analytiquement le niveau de cette erreur ne semble pas évident ; la simulation numérique que nous avons mise en place (section 6.5) nous donnera des indications à ce sujet.

Cet effet peut être compris intuitivement si on considère le cas où les déphasages géométriques sont utilisés pour reconstruire simultanément les visibilités à partir de l'image synthétique formée au plan focal (cf. chapitre 7) : pour un instrument large bande, les franges d'interférences se superposent au plan focal avec des périodes légèrement différentes, ce qui se traduit par une dégradation de l'image synthétique. Vu sous cet angle, cet effet apparaît ainsi très proche de celui de lissage ; il existe probablement une manière de reconstruire les visibilités, plus complexe qu'une simple résolution d'un problème linéaire (un ajustement par méthode des moindres carrés non linéaire ?), qui permettrait de prendre en compte cette dégradation de l'image ; l'effet ne résulterait alors peut-être qu'en une simple et légère perte de sensibilité statistique. Nous ne possédons malheureusement pas encore ce genre de solution définitive.

La section suivante décrit cependant une piste intéressante, qui permet, nous allons le voir, de contenir le niveau de l'erreur engendrée.

### 6.3 La division en sous bandes virtuelles

Nous développons dans cette section une idée originellement proposée par Siddharth Malu dans sa thèse [10] : la possibilité d'utiliser la dépendance spectrale des déphasages pour reconstruire les visibilités en sous bandes de fréquence. Nous pensions en commençant cette étude que cette méthode permettrait de contrecarrer les effets de lissage ; nous montrerons en fait que son application entraîne parallèlement une dégradation du rapport signal à bruit, qui se révèle plus importante que le gain apporté. Nous verrons cependant que cette méthode représente une piste intéressante pour la résolution du problème évoqué en 6.2.3.

#### 6.3.1 Principe

Nous allons montrer qu'il est possible de reconstruire les visibilités par sous-bandes spectrales, en réécrivant le problème linéaire de l'équation 6.39. Nous nommerons  $n_{vsb}$  le nombre de sous-bandes spectrales de largeur  $\delta\nu = \Delta\nu/n_{vsb}$ . Cette division est purement *virtuelle* dans le sens où elle intervient uniquement au niveau de l'analyse des données et n'a aucun lien avec l'architecture réelle de l'instrument. Le noyau  $\tilde{\eta}_{b,p}^{BI}$  se réécrit alors

$$\tilde{\eta}_{b,p}^{BI}(\vec{u}_b, \vec{w}) = \sum_{m=1}^{n_{vsb}} \tilde{\eta}_{b,p}^{BI,\delta\nu}[\vec{u}_b, \vec{w}, \nu_m], \quad (6.55)$$

où les  $\tilde{\eta}_{b,p}^{BI,\delta\nu}$  sont définis comme

$$\tilde{\eta}_{b,p}^{BI,\delta\nu}[\vec{u}_b, \vec{w}, \nu_m] = \int \tilde{B}\left(\frac{\nu}{\nu_0} \vec{u}_b - \vec{w}\right) J_N^{\delta\nu}(\nu - \nu_m) \exp\left[i\Delta\Phi_{b,p}^k(\nu, t)\right] d\nu. \quad (6.56)$$

Les  $J_N^{\delta\nu}(\nu - \nu_m)$  sont les fonctions de réponse spectrale, de largeur  $\delta\nu$  et centrées sur  $\nu_m$ . Le terme des corrélations croisées de l'équation 6.39 s'exprime alors comme

$$S_k^{cc}(t) = \frac{2}{N_{out}} \operatorname{Re} \left[ \sum_{m=1}^{n_{vsb}} \sum_{\substack{i < j \\ \eta_1, \eta_2}} \exp \left[ i \Delta \Phi_{b,p}^k \right] V_{b,p,m}^{\delta\nu}(\vec{u}_{b,m}) \right], \quad (6.57)$$

où nous avons défini

$$\Delta \Phi_{b,p,m} = \Delta \Phi_{b,p}(\nu_0, t) \times \frac{\nu_m}{\nu_0} \text{ et } \vec{u}_{b,m} = \vec{u}_b \times \frac{\nu_m}{\nu_0}. \quad (6.58)$$

Les *visibilités de sous-bandes*  $V_{b,p}^{\delta\nu}(\vec{u}_{b,m})$  sont définies comme les visibilités large bande, mais pour une largeur de bande  $\delta\nu$ . Chaque paire de cornets définit ainsi  $n_{vsb}$  visibilités de sous-bandes associées aux lignes de base  $\{\vec{u}_{b,m}\}_{m=1, \dots, n_{vsb}}$ . L'équation 6.57 s'écrit finalement comme un système linéaire de dimension  $n_{vsb}$  fois plus grande que celui de l'équation 6.52 :

$$S_k^{cc}(t) = \sum_{\beta=1}^{n_{vsb} \times N_{\neq}} \Gamma_{k,\beta}^{\delta\nu} \cdot V_{\beta}^{\delta\nu}. \quad (6.59)$$

Le problème peut alors être inversé exactement comme au chapitre 5 afin de reconstruire les  $n_{vsb} \times N_{\neq}$  visibilités de sous-bande.

### 6.3.2 Perte de rapport signal à bruit

Dans chaque échantillon de mesure, le signal des visibilités de sous-bandes est réduit d'un facteur  $n_{vsb}$ , et chaque terme diagonal de la matrice de covariance de l'estimateur de ces visibilités s'écrit donc (cf. chapitres 5 et 8) :

$$\sigma_{V_{\beta}}^{\delta\nu} [\text{en K}] = \frac{\sqrt{N_h} \times n_{vsb}}{N_{eq}(\beta)} \frac{\text{NET } \Omega}{\sqrt{t}}. \quad (6.60)$$

Il est bien sûr possible de sommer les visibilités de sous-bande reconstruites pour la même paire de cornets (ligne de base  $\vec{u}_b$ ) afin d'obtenir à nouveau des visibilités large bande,

$$V_{\beta}^{\Delta\nu}(\vec{u}_b) = \sum_{m=1}^{n_{vsb}} V_{\beta}^{\delta\nu}(\vec{u}_{b,m}). \quad (6.61)$$

Ces visibilités large bande sont équivalentes à celles qui auraient été reconstruites sans séparation en sous-bandes, à ceci près que l'effet de lissage qui les affecte est réduit (le paramètre  $\kappa_1$  est alors celui d'un instrument de largeur de bande  $\delta\nu$  au lieu de  $\Delta\nu$ ). L'erreur sur la mesure des visibilités large bande ainsi obtenues est donnée par

$$\sigma_{V_{\beta}}^{\Delta\nu} [\text{en K}] = \frac{\sqrt{N_h} \times \sqrt{n_{vsb}}}{N_{eq}(\beta)} \frac{\text{NET } \Omega}{\sqrt{t}}. \quad (6.62)$$

La comparaison avec l'équation 5.63 montre que l'application de cette méthode résulte en une dégradation du rapport signal à bruit d'un facteur  $\sqrt{n_{vsb}}$ . Malheureusement, nous verrons dans la section 6.4 que cette perte de sensibilité est toujours plus importante que le gain en sensibilité dû à la réduction de l'effet de lissage.

### 6.3.3 Une piste pour la résolution du problème des déphasages à dépendance spectrale

La méthode de séparation en sous-bandes virtuelles, si elle ne semble pas efficace pour lutter contre la perte de sensibilité résultant des effets de lissage, semble par contre une piste à suivre en vue de la résolution du problème évoqué dans la section 6.2.3. Dans le cas où, toutes les visibilitées sont reconstruites simultanément, la corruption du problème linéaire provoque une fuite de I dans Q et U. Ceci peut être évité si l'on reconstruit simultanément les visibilitées I en  $n_{vsb}$  sous-bandes (afin d'éviter la fuite) et les visibilitées Q et U en une seule bande (afin d'éviter la perte de rapport signal à bruit). Il s'agit alors de réécrire le problème linéaire sous la forme suivante,

$$S_k^{cc} = \sum_{\beta=1}^{n_{vsb} \times N_{\neq}} \Gamma_{k,\beta}^{\delta\nu} \cdot V_{I,\beta}^{\delta\nu} + \sum_{X=Q,U,V} \sum_{\beta'=1}^{N_{\neq}} \Gamma_{k,\beta'} \cdot V_{X,\beta'}^{\Delta\nu}. \quad (6.63)$$

Cela signifie que la sous-matrice de modulation encodant les visibilitées Q et U est identique à celle utilisée dans le cas monochromatique, alors que la dimension de la sous-matrice encodant les visibilitées I est  $n_{vsb}$  fois plus grande. La matrice de modulation finale possède alors  $(2 \times n_{vsb} + 6) \times N_{\neq}$  lignes. La corruption du problème linéaire (et donc la fuite résultante de I dans Q et U) peut alors être réduite autant que nécessaire en augmentant le nombre de sous-bandes, sans perte de sensibilité sur la mesure des visibilitées polarisées. L'efficacité de cette méthode a été testée par simulation numérique comme nous le verrons dans la section 6.5, et peut être constatée par comparaison des figures 6.6 et 6.7. Le fait que le nombre d'échantillons de mesures requis pour inverser le problème soit accru pourrait se révéler problématique. Notons par contre que cette méthode est théoriquement applicable quelle que soit la dépendance spectrale des déphasages (nous nous sommes restreints au cas linéaire par simplicité ici).

Insistons enfin sur le fait que tout ceci ne résout pas fondamentalement le problème évoqué en section 6.2.3 : si la plus grave source d'erreur est évitée (fuite de I dans Q ou U), la corruption du problème linéaire demeure (fuite de Q/U dans Q/U en quelque sorte). La reconstruction en sous-bandes virtuelles des visibilitées polarisées permettrait certes également d'éviter cet effet, mais au prix comme on l'a dit d'une perte de sensibilité statistique.

## 6.4 Dégradation de la sensibilité pour une expérience CMB

Afin d'estimer la perte en sensibilité, résultant de l'effet de lissage, d'un instrument dédié à l'observation du CMB, il est important de comprendre que comparer "directement" les visibilitées monochromatiques et large bande n'a pas plus de sens que de comparer "directement" deux signaux qui ont été convolués par des fenêtres de tailles ou formes différentes. Ce que nous comparerons plutôt, ce sont les variances des estimateurs de l'observable d'intérêt physique, ici le spectre de puissance angulaire du CMB (ces estimateurs étant obtenus à partir des jeux de visibilitées monochromatiques ou large bande).

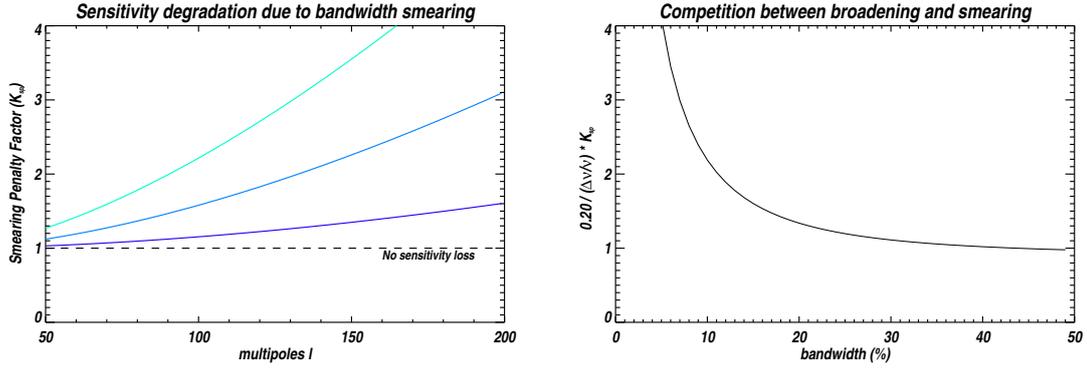


FIG. 6.4: Gauche : Dégradation de la sensibilité sur les  $C_l$  reconstruits due à l'effet de lissage par largeur de bande pour des multipôles compris entre 50 et 200; la quantité  $K_{sp}(l)$  est représentée pour un interféromètre bolométrique muni de cornets aux lobes gaussiens ( $15^\circ$  FWHM), pour une largeur de bande de respectivement  $\Delta\nu/\nu_0 = 10, 20$  et  $30\%$ . Droite : la quantité  $(0.20/\Delta\nu) \times K_{sp}(l)$ , montrant la compétition entre le gain de sensibilité dû à l'élargissement de la bande et la perte due au lissage, est représentée en fonction de la largeur de bande à  $l = 100$ , pour le même interféromètre bolométrique.

#### 6.4.1 Généralisation de l'estimateur de pseudo-spectre

Nous montrerons de manière détaillée au chapitre 8, qu'une estimation non biaisée du spectre de puissance à partir du jeu de visibilités large bande bruitées est donné par,

$$\widehat{C}_l = \frac{2}{\Omega_s} \times \frac{1}{N_{\neq}(l)} \sum_{\beta=0}^{N_{\neq}(l)-1} [V(\vec{u}_\beta)V^*(\vec{u}_\beta) - N(\vec{u}_\beta, \vec{u}_\beta)]. \quad (6.64)$$

où nous avons supposé que la matrice de covariance  $N$  des visibilités reconstruites est diagonale, et où le lobe effectif  $\Omega_s$  est défini par l'équation 6.16. Nous avons montré dans [3], la relation suivante qui justifie la définition de notre estimateur,

$$\int |\tilde{\beta}(\vec{u}, \vec{w})|^2 d\vec{w} = \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\Omega}{2\kappa_1}. \quad (6.65)$$

Ceci est en parfaite cohérence avec le cas de l'interféromètre monochromatique où  $\kappa_1 = 1$  et

$$\frac{\Omega}{2} = \int |\tilde{B}(\vec{w})|^2 d\vec{w}. \quad (6.66)$$

$N_{\neq}(l)$  correspond au nombre de modes observés à un  $l$  donné; il s'agit donc du rapport entre la surface  $\pi\vec{u}\Delta\vec{u}$  et la surface effective  $\Omega_s/2$  du noyau dans le plan-uv :

$$N_{\neq}(l) = \frac{2\pi\vec{u}\Delta\vec{u}}{\Omega_s} = 2l\Delta l \frac{f_{sky}}{\kappa_1}. \quad (6.67)$$

La variance de l'estimateur peut être calculée comme au chapitre 8,

$$\Delta C_l^{BI} = \sqrt{\frac{2\kappa_1}{2l\Delta l f_{sky}}} \left( C_l + \frac{2\sigma_V^2 \kappa_1}{\Omega} \right). \quad (6.68)$$

Dans le cas d'un instrument de bande étroite, les facteurs  $\kappa_1$  tendent vers 1. En utilisant l'expression de  $\sigma_V$  donnée par l'équation 5.63, nous pouvons finalement écrire

$$\Delta C_l^{BI} = \sqrt{\frac{2\kappa_1}{2l\Delta l f_{sky}}} \left( C_l + \frac{2N_h \text{NET}_{BI}^2 \Omega}{N_{eq}^2 t} \kappa_1 \right). \quad (6.69)$$

La température équivalente de bruit  $\text{NET}_{BI}$  d'un bolomètre est proportionnelle à la largeur de bande,  $\text{NET}_{BI} \propto 1/\sqrt{\Delta\nu}$  (voir section 8.2.1); nous faisons apparaître explicitement cette dépendance en écrivant

$$\text{NET}_{BI}^2 = \text{NET}_{BI,20\%}^2 \frac{0.20}{(\Delta\nu/\nu_0)}, \quad (6.70)$$

où  $\text{NET}_{BI,20\%}^2$  est la température équivalente de bruit d'un bolomètre opérant sur 20% de largeur de bande. L'équation 6.69 devient :

$$\Delta C_l^{BI} = \sqrt{\frac{2}{2l\Delta l f_{sky}}} \left( \sqrt{\kappa_1} C_l + \frac{2N_h \text{NET}_{BI,20\%}^2 \Omega}{N_{eq}^2 t} \times \frac{0.20}{(\Delta\nu/\nu_0)} K_{sp}(l) \right), \quad (6.71)$$

où le facteur de pénalité de lissage est défini comme

$$K_{sp}(l) = \kappa_1^{3/2} = \left( 1 + \frac{\Omega (\sigma_\nu/\nu_0)^2 l^2}{2\pi} \right)^{3/4}. \quad (6.72)$$

Si l'on néglige le facteur  $\sqrt{\kappa_1}$  sur la variance d'échantillonnage, la dégradation de la sensibilité due au lissage pour un interféromètre bolométrique large bande est bien donnée par  $K_{sp}(l)$ . L'interprétation physique de l'équation 6.71 est évidente : le gain en sensibilité dû à l'élargissement de la bande (plus de photons sont collectés) est contrecarré par la dégradation en sensibilité due au lissage (le contraste des franges est moins important). La figure 6.4 (droite) montre l'évolution de la quantité  $(0.20/\Delta\nu) \times K_{sp}(l)$  en fonction de la largeur de bande. Nous voyons que pour un instrument typiquement dédié à la mesure des modes B, la dégradation due au lissage commence à annuler le gain dû à l'élargissement pour des largeurs de bande supérieures à 20% – ce qui correspond justement à la largeur de bande typique des instruments CMB au sol<sup>5</sup>. La figure 6.4 (gauche) montre que la perte totale de sensibilité par effet de lissage correspond approximativement à un facteur 2 pour  $l = 150$ , pour une expérience CMB typique avec une largeur de bande de 20%. Ce résultat, qui peut paraître surprenant si l'on se réfère à la "mauvaise réputation" des bandes larges en radio-interférométrie, s'explique principalement par le fait que les échelles angulaires sondées dans notre cas sont bien plus grandes que celles visées par les interféromètres radios.

#### 6.4.2 Inefficacité de la méthode de reconstruction en sous-bandes virtuelles

Lorsque les visibilitées sont reconstruites en  $n_{vsb}$  sous-bandes, le lissage est réduit mais le rapport signal à bruit est également réduit comme nous l'avons vu dans la section 6.3. Le facteur de pénalité en sensibilité s'écrit alors

$$K_{sp}^{SB}(l) = n_{vsb} \kappa_1^{3/2} = n_{vsb} \left( 1 + \frac{\Omega (\sigma_\nu/\nu_0)^2 l^2}{2\pi n_{vsb}^2} \right)^{3/4}. \quad (6.73)$$

Il est facile de vérifier que  $K_{sp}^{SB}(l)$  est toujours plus important que  $K_{sp}(l)$ , quel que soit le nombre de sous-bandes; autrement dit, la perte de rapport signal à bruit engendrée par la méthode est toujours plus pénalisante que le gain résultant de la réduction de l'effet de lissage.

<sup>5</sup>Les lignes d'émission atmosphérique ne permettent pas d'envisager des bandes spectrales plus larges que 30%.

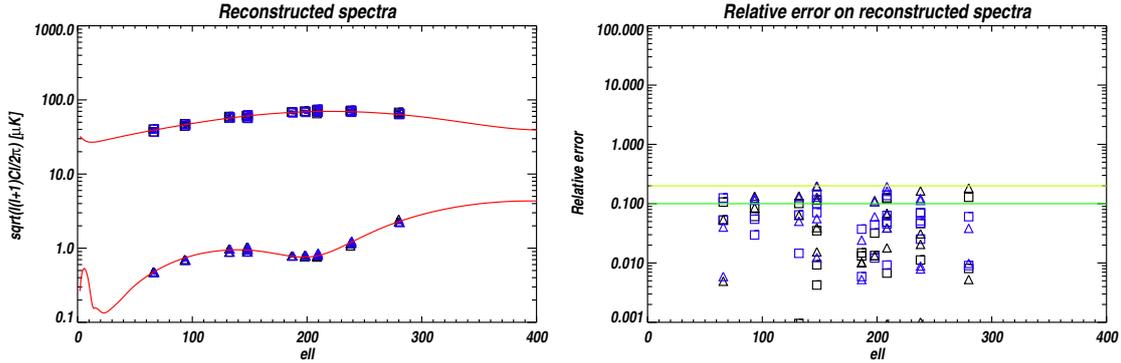


FIG. 6.5: *Gauche* : Spectres de puissance de température et de polarisation reconstruits pour un interféromètre monochromatique (carrés et triangles noirs) et pour un interféromètre bolométrique de 20% de largeur de bande spectrale (carrés et triangles bleus) : 16 cornets ayant un lobe gaussien (15 degrés FWHM), des déphaseurs sans dépendance spectrale prenant 12 valeurs de phases discrètes, et  $N_{maps} = 100$  dans chaque cas. La ligne rouge montre le spectre théorique utilisé en entrée de la simulation. *Droite* : Erreur relative sur la reconstruction  $(\hat{C}_l^{MC} - C_l)/C_l$  (carrés pour la température, triangles pour la polarisation, noirs pour l'interféromètre monochromatique, bleus pour l'interféromètre large bande). Les lignes verte et jaune montrent les niveaux d'erreurs attendus  $1/\sqrt{N_{maps}}$  à un et deux sigmas.

## 6.5 Simulation numérique

Nous avons développé une simulation numérique de type Monte-Carlo afin de tester une partie des résultats analytiques obtenus dans ce chapitre. L'objectif est de simuler les séquences de mesures effectuées par les bolomètres (l'entrée de la simulation étant un jeu de spectres théoriques du CMB), de reconstruire les visibilitées et d'estimer les spectres de puissance en utilisant l'estimateur introduit dans la section précédente (nous pouvons alors les comparer aux spectres d'entrée).

### 6.5.1 Architecture de la simulation

Nous considérons un interféromètre bolométrique standard (comme défini en section 6.2), constitué d'une matrice carrée de  $N_h$  cornets associés à  $N_h$  séparateurs de polarisation, de  $2N_h$  déphaseurs contrôlés, d'un combineur de faisceaux quasi-optique et de  $N_{out}$  bolomètres. Nous ne simulerons que la puissance mesurée en fonction du temps par un seul des bolomètres. Nous décrivons les lobes des cornets par la fonction gaussienne de l'équation 6.12. Nous supposons que les déphaseurs contrôlés prennent des valeurs régulièrement espacées entre 0 et  $2\pi$ . Les paramètres d'entrée physiques de la simulation sont le nombre de cornets  $N_h$ , le rayon des cornets, la distance entre deux cornets adjacents, la largeur à mi-hauteur des lobes gaussiens, le nombre de valeurs de phases possibles pour les déphaseurs  $N_\phi$ , la fréquence centrale à laquelle opère l'instrument  $\nu_0$ , la largeur de bande spectrale sur laquelle il est sensible  $\Delta\nu$ , la forme de la réponse spectrale (gaussienne ou plate)  $J$ , et le nombre d'échantillons temporels  $N_d$  dans une séquence de mesure.

Les cartes de CMB sont générées à partir de spectres prédits par le jeu de paramètres cosmolo-

giques contraints par WMAP-7<sup>6</sup>. La question de la séparation des modes E et B en interférométrie n'étant pas l'objet de cette simulation (nous aborderons celle-ci au chapitre 9), nous considérons uniquement les spectres TT et EE, que nous appellerons désormais spectres de température et de polarisation. Le calcul numérique des noyaux de convolution ( $\beta$  et  $\eta$ ) nécessite une intégration sur la bande spectrale ; le calcul des puissances mesurées par le bolomètre nécessite quant à lui une intégration dans le plan-uv. Les paramètres d'entrée numériques de la simulation sont ainsi la résolution dans le plan uv, la résolution spectrale, et le nombre  $N_{maps}$  de réalisations de cartes CMB.

La structure de la simulation est la suivante :

1. Les positions des cornets primaires et le jeu de lignes de base associées sont générés.
2. Les noyaux de convolution  $\beta$  et  $\eta$  sont calculés – soit à partir des formulations analytiques (données par les équations 6.19 et 6.44), soit par intégration numérique (suivant les équations 6.10 et 6.41), pour chaque ligne de base et pour chaque valeur de déphasage dans le cas de  $\eta$  ; ceci permet d'ailleurs de tester la validité des formules analytiques.
3. Boucle sur les réalisations de cartes. Les cartes de température et de polarisation du CMB sont générées à partir des spectres théoriques d'entrée.
4. Les visibilité monochromatiques et large bande sont calculées par convolution des transformée de Fourier des cartes et des noyaux  $\beta$  pour chaque ligne de base. Les convolutions des transformées de Fourier des cartes par les noyaux  $\eta$  sont également calculées pour chaque ligne de base et chaque différence de phase.
5. Des séquences de phases aléatoires sont générées pour chaque déphaseur contrôlé, suivant la méthode décrite au chapitre 5, de manière à respecter la sommation cohérente des lignes de base équivalentes. Les différences de phases encodant la matrice de modulation sont alors calculées pour toutes les lignes de base.
6. Une séquence de  $N_d$  échantillons temporels de mesure  $S_k(t)$  est simulée suivant l'équation 6.39, en sommant les convolutions des cartes par les noyaux  $\eta$  et en respectant les séquences de phase.
7. La matrice de modulation est générée.
8. Les visibilité sont reconstruites par résolution du problème linéaire. Fin de la boucle sur les réalisations de cartes.
9. Les spectres sont estimés à partir du jeu de visibilité reconstruites, en utilisant l'estimateur introduit dans la section 6.4. Les erreurs relatives entre spectres estimés et théoriques sont alors calculées.

Dans l'étape 9, nous n'effectuons pas en réalité, comme dans l'équation 6.64, la moyenne des visibilité reconstruites pour différentes lignes de base dont la norme correspond au même multipôle, mais nous prenons plutôt la moyenne des visibilité reconstruites pour les  $N_{maps}$  réalisations. Par ailleurs,  $C_l$  n'étant pas constant sur un intervalle  $\Delta l$ , il ne peut pas directement être sorti de l'intégrale de l'équation 8.17, mais nous pouvons utiliser le fait que  $l^2 C_l$  est presque constant pour définir un estimateur non biaisé (en absence de bruit instrumental) :

$$\widehat{C}_l^{MC} = \frac{2}{\Omega_s^{MC}} \times \frac{1}{N_{maps}} \sum_{m=0}^{N_{maps}-1} V_m(\vec{u}_\beta) V_m^*(\vec{u}_\beta), \quad (6.74)$$

<sup>6</sup>Notons que la forme des spectres n'a pas vraiment d'importance ici, le seul point déterminant étant le rapport des amplitudes entre spectre de température et spectres de polarisation.

où  $V_m(\vec{u}_\beta)$  est la visibilité large bande définie pour la ligne de base  $\vec{u}_\beta$  ( $l = 2\pi|\vec{u}_\beta|$ ) et la carte  $m$ , et où

$$\Omega_s^{MC} = \int \frac{|\vec{w}|^2}{|\vec{u}_\beta|^2} |\tilde{\beta}(\vec{u}_\beta, \vec{w})|^2 d\vec{w} \sim \frac{\Omega}{2\kappa_1}. \quad (6.75)$$

La variance du spectre estimé doit être ainsi égale à la variance d'échantillonnage,

$$\Delta C_l^{MC} = C_l / \sqrt{N_{maps}}. \quad (6.76)$$

### 6.5.2 Test de l'estimateur large bande

Nous effectuons  $N_{maps} = 100$  réalisations avec les paramètres d'entrée suivants : 16 cornets munis de lobes gaussiens ( $15^\circ$  FWHM), 12 valeurs de phases discrètes possibles pour les déphaseurs, fréquence centrale 90 GHz, largeur de bande spectrale de 20%.

Dans un premier temps, nous avons simulé le cas de déphaseurs sans dépendance spectrale (les noyaux  $\eta$  sont calculés suivant les équations 6.41 et 6.44) et nous utilisons une matrice de modulation monochromatique pour reconstruire les visibilités. Les résultats sont représentés sur la figure 6.5 ; ils démontrent que notre estimateur de pseudo-spectre large bande prenant en compte les effets de lissage reconstruit parfaitement le spectre théorique : un interféromètre bolométrique large bande muni de déphaseurs contrôlés sans dépendance spectrale fonctionne ainsi exactement comme la version monochromatique de l'instrument, à ceci-près que les visibilités reconstruites sont large bande et soumises aux effets de lissage.

### 6.5.3 Effet lié à la dépendance spectrale des déphasages

Nous avons ensuite simulé le cas de déphaseurs ayant une dépendance spectrale linéaire (les noyaux sont calculés suivant les équations 6.41 et 6.49) ; la figure 6.6 montre l'effet catastrophique de fuite de I and Q/U décrit dans la section 6.2.3 lorsque la matrice de modulation monochromatique est utilisée pour reconstruire les visibilités. La figure 6.7 montre l'efficacité de la méthode décrite en 6.3.3 : les visibilités I sont reconstruites en 5 sous-bandes, ce qui permet d'éviter la fuite (au niveau de variance d'échantillonnage et dans la configuration considérés bien sûr).

## 6.6 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre examiné le problème de la largeur de bande spectrale en interférométrie bolométrique (nous avons implicitement supposé au chapitre 5 un instrument opérant en bande étroite).

Nous avons introduit de nouvelles observables, les visibilités large bande, et montré qu'elles pouvaient s'écrire comme une convolution dans le plan-uv, le noyau de convolution étant une version étirée dans la direction de la ligne de base de la transformée de Fourier du lobe. L'effet de lissage se résume ainsi une dégradation de la résolution dans le plan-uv (ou, ce qui est équivalent, à une réduction du lobe primaire effectif). Nous avons ensuite estimé la dégradation de sensibilité au spectre de puissance due à cet effet de lissage et conclu que celle-ci était très acceptable pour un instrument large bande dédié à l'observation du CMB (à peu près un facteur 1.6 sur les  $C_\ell$  pour

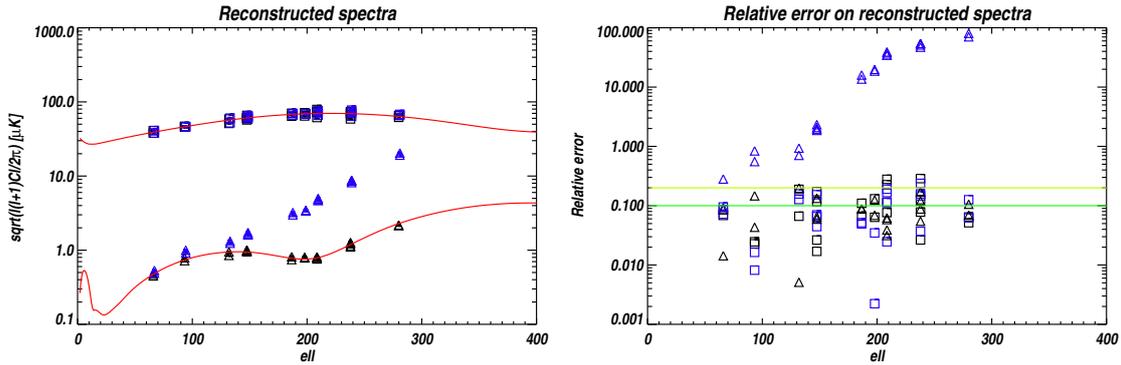


FIG. 6.6: Gauche : Déphaseurs avec dépendance spectrale linéaire, et reconstruction des visibilités à l'aide d'une matrice de modulation monochromatique. Spectres de puissance de température et de polarisation reconstruits pour un interféromètre monochromatique (carrés et triangles noirs) et pour un interféromètre bolométrique de 20% de largeur de bande spectrale (carrés et triangles bleus) : 16 cornets ayant un lobe gaussien (15 degrés FWHM), des déphaseurs prenant 12 valeurs de phases discrètes, et  $N_{maps} = 100$  dans chaque cas. La ligne rouge montre le spectre théorique utilisé en entrée de la simulation. Droite : Erreur relative sur la reconstruction  $(\hat{C}_l^{MC} - C_l)/C_l$  (carrés pour la température, triangles pour la polarisation, noirs pour l'interféromètre monochromatique, bleus pour l'interféromètre large bande). Les lignes verte et jaune montrent les niveaux d'erreurs attendus  $1/\sqrt{N_{maps}}$  à un et deux sigmas.

un instrument du type de QUBIC, à  $\ell = 100$ , 25% de largeur de bande et une réponse spectrale plate).

Nous avons enfin vu que la largeur de bande entraînait une subtile conséquence supplémentaire en interférométrie bolométrique : dans le cas où les déphasages de modulation ont une dépendance spectrale, les visibilités sont modulées différemment en fonction de la fréquence, ce qui peut résulter en une source d'erreur durant le processus de reconstruction, si l'on se contente de l'approche décrite au chapitre 5. Une méthode a été proposée permettant d'éviter la source d'erreur principale engendrée par cet effet (la fuite de I dans Q et U), mais aucune solution définitive n'a toutefois été obtenue. Comme nous l'avons expliqué, nous sommes relativement confiants sur le fait qu'il existe une telle méthode – plus complexe que la simple inversion d'un système linéaire – permettant de prendre en compte cet effet durant la reconstruction des visibilités (et ainsi d'éviter tout problème de fuite) ; mais ceci reste à prouver et devrait faire l'objet d'une étude supplémentaire. L'interférométrie bolométrique "sans visibilités" que nous esquisserons au chapitre 13 apparaîtra finalement comme une manière naturelle d'esquiver cet épineux problème.

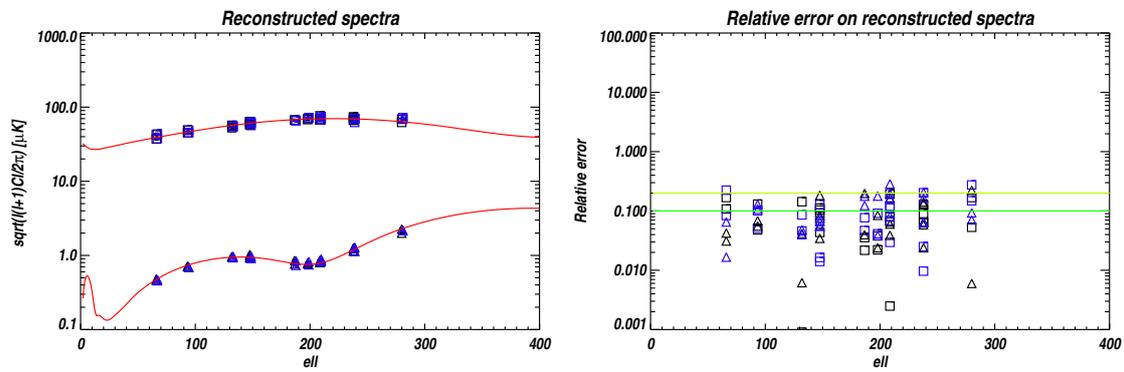


FIG. 6.7: Gauche : Déphaseurs avec dépendance spectrale linéaire, et reconstruction des visibilitées à l'aide d'une matrice de modulation étendue (5 sous-bandes virtuelles pour les visibilitées I). Spectres de puissance de température et de polarisation reconstruits pour un interféromètre monochromatique (carrés et triangles noirs) et pour un interféromètre bolométrique de 20% de largeur de bande spectrale (carrés et triangles bleus) : 16 cornets ayant un lobe gaussien (15 degrés FWHM), des déphaseurs prenant 12 valeurs de phases discrètes, et  $N_{\text{maps}} = 100$  dans chaque cas. La ligne rouge montre le spectre théorique utilisé en entrée de la simulation. Droite : Erreur relative sur la reconstruction  $(\hat{C}_1^{MC} - C_1)/C_1$  (carrés pour la température, triangles pour la polarisation, noirs pour l'interféromètre monochromatique, bleus pour l'interféromètre large bande). Les lignes verte et jaune montrent les niveaux d'erreurs attendus  $1/\sqrt{N_{\text{maps}}}$  à un et deux sigmas.

## Chapitre 7

# Deux nouvelles architectures utilisant les phases géométriques

---

Ces architectures alternatives ont été élaborées dans le cadre de cette thèse, en collaboration avec Jean-Christophe Hamilton, Michel Piat, Joseph Martino, et Jean Kaplan. La première d'entre elle, avec lame demi-onde en rotation, a depuis été choisie comme architecture standard de l'instrument par la collaboration QUBIC.

---

L'architecture "basique" étudiée au chapitre 5 requiert, comme nous l'avons vu, des déphaseurs satisfaisants un ensemble d'exigeantes caractéristiques instrumentales (nombre de valeurs de phases, rapidité, précision, etc.). Les études menées au sein de la collaboration QUBIC ont abouti à la conclusion selon laquelle la réalisation de tels composants nécessiterait plusieurs années de recherche et développement. Ce constat m'a amené à réfléchir à la possibilité des architectures alternatives présentées dans ce chapitre.

## 7.1 Description

### 7.1.1 Architecture alternative avec lame demi-onde rotative

Cette architecture est représentée sur la figure 7.1. Le module des récepteurs consiste uniquement en deux matrices de cornets primaires et secondaires dos à dos. Une lame demi-onde en rotation est positionnée devant les cornets secondaires<sup>1</sup>. Des filtres et des interrupteurs peuvent être insérés entre les cornets primaires et secondaires, mais ni séparateurs de polarisation, ni déphaseurs contrôlés ne sont requis dans ce cas. Nous verrons que les interrupteurs, s'ils ne sont pas nécessaires lorsque l'instrument est en phase d'acquisition des données, sont des éléments

---

<sup>1</sup>La question de la localisation de cette lame demi-onde est actuellement à l'étude au sein de la collaboration QUBIC.

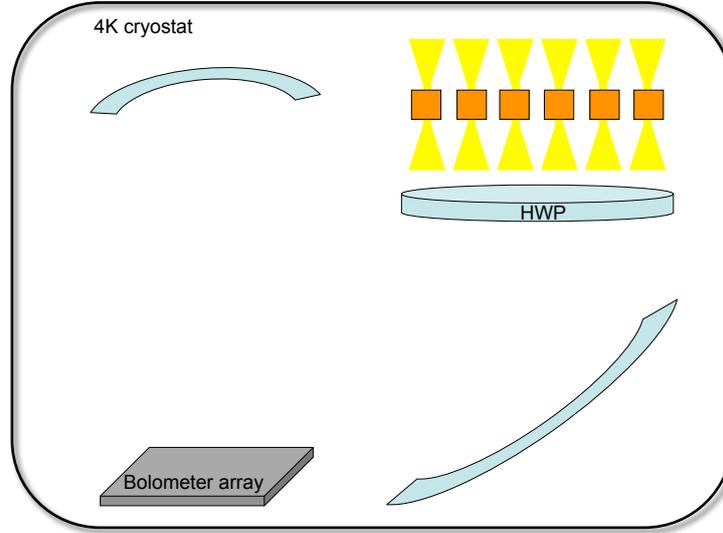


FIG. 7.1: Représentation schématique de l'architecture alternative avec lame demi-onde en rotation.

indispensables à la procédure de calibration présentée au chapitre 10. Les cornets secondaires ré-émettent, exactement comme dans l'architecture basique, vers le combineur de faisceaux, dans le plan focal duquel se trouve une matrice de détecteurs sensibles à la polarisation.

### 7.1.2 Architecture alternative avec pseudo-corrélateur

Dans cette seconde architecture alternative représentée sur la figure 7.2, la lame demi-onde rotative est remplacée par une combinaison de séparateurs de polarisation, de jonctions hybrides et de déphaseurs contrôlés, nommée pseudo-corrélateur. Ce pseudo-corrélateur agit sur le signal de manière équivalente à la lame demi-onde en rotation : son rôle est de séparer les deux polarisations gauche et droite, de les déphaser puis de les recombinaer. Nous verrons que les contraintes imposées sur les déphaseurs du pseudo-corrélateur sont ici beaucoup plus faibles que celles imposées aux déphaseurs contrôlés de l'architecture basique.

## 7.2 Signal mesuré par les détecteurs

Nous considérons un instrument large bande caractérisé par sa fonction de réponse spectrale  $J(\nu)$ . Nous faisons les mêmes hypothèses que dans le chapitre 5 concernant les cornets primaires. Ils observent le champ polarisé  $E_\eta(\vec{n}, t)$  à travers le lobe  $B_{lp}(\vec{n}) = |A_{lp}(\vec{n})|^2$ . Le signal de polarisation transverse  $\eta = \{x, y\}$  collecté par un cornet  $i$  positionné en  $\vec{x}_i$  s'exprime comme

$$\epsilon_{i,\eta} = \int \int E'_\eta(\vec{n}, t) A_{lp}(\vec{n}) \exp \left[ i 2\pi \vec{x}_i \cdot \vec{n} \frac{\nu}{c} \right] d\vec{n} J(\nu) d\nu. \quad (7.1)$$

Dans la première alternative, la lame demi-onde tourne à la vitesse angulaire  $\omega$  et module donc

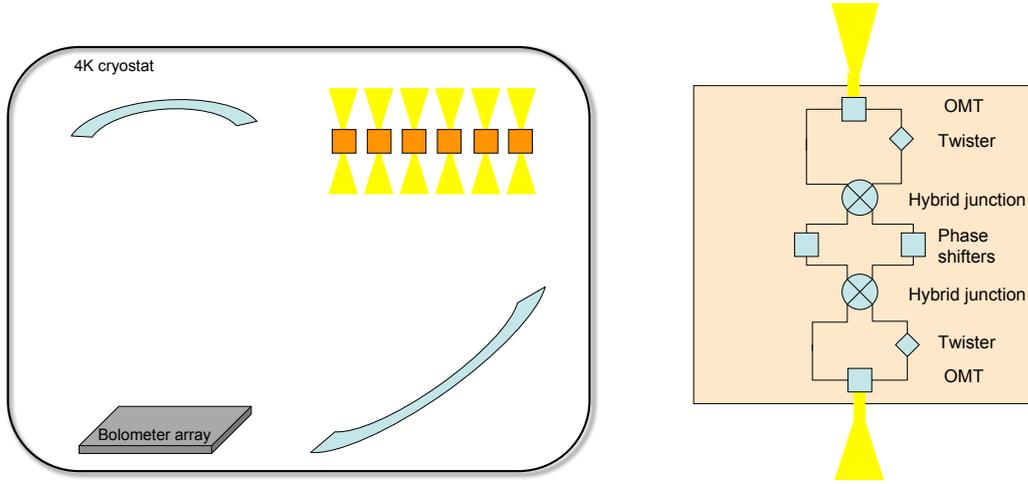


FIG. 7.2: Représentation schématique de l'architecture alternative avec pseudo-corrélateur.

les deux polarisations transverses orthogonales comme :

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\omega t & \sin 2\omega t \\ \sin 2\omega t & -\cos 2\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

ou de manière équivalente, en terme de puissance et de paramètres de Stokes,

$$\begin{pmatrix} |E'_x|^2 \\ |E'_y|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 4\omega t & \sin 4\omega t \\ 1 & -\cos 4\omega t & -\sin 4\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Dans la seconde alternative, les deux polarisations orthogonales sont séparées, mélangées par une jonction hybride, déphasées et recombinaées de sorte que :

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp[i\phi_x] & 0 \\ 0 & \exp[i\phi_y] \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

En terme de puissance et de paramètres de Stokes, cela donne donc :

$$\begin{pmatrix} |E'_x|^2 \\ |E'_y|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos [\phi_x(t) - \phi_y(t)] & \sin [\phi_x(t) - \phi_y(t)] \\ 1 & -\cos [\phi_x(t) - \phi_y(t)] & -\sin [\phi_x(t) - \phi_y(t)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Les détecteurs situés dans le plan focal du combineur de faisceaux collectent une fraction des photons réémis par les cornets secondaires, et de la même manière que dans l'architecture basique, des déphasages géométriques sont induits par les différences de chemins des rayons :

$$\Psi(\vec{r}) = 2\pi \frac{\vec{x}_i \cdot \vec{r}}{\lambda f_D}, \quad (7.6)$$

où le vecteur  $\vec{r}$  donne la position dans le plan focal et où  $f_D$  est la longueur focale du combineur quasi-optique. La puissance mesurée par le détecteur polarisé  $k$  (dont la position dans le plan focal est donnée par  $\vec{r}_k$ ) s'écrit alors (nous utilisons les mêmes notations qu'au chapitre 5) :

$$S_{k,\eta}(t) = \int \left\langle \left| \iint E'_\eta(\vec{n}, t) A_{lp}(\vec{n}) A_{ls}(\vec{r}) \sum_i \exp \left[ i2\pi \frac{\vec{x}_i}{\lambda} \cdot \left( \frac{\vec{r}}{f_D} - \vec{n} \right) \right] J(\nu) d\vec{n} d\nu \right|^2 \right\rangle \Theta(\vec{r} - \vec{r}_k) d\vec{r}, \quad (7.7)$$

où  $\Theta(\vec{r}-\vec{r}_k)$  est une fonction fenêtre décrivant la géométrie du détecteur et où  $B_{ls}(\vec{r}) = |A_{ls}(\vec{r})|^2$  est le lobe des cornets secondaires réémetteurs. Insistons sur le fait qu'il est absolument crucial, dans le cadre de ces architectures alternatives, de supposer des détecteurs sensibles à la polarisation :  $S_{k,x}(t)$  et  $S_{k,y}(t)$  sont ainsi les puissances mesurées pour chacune des polarisations transverses<sup>2</sup>. L'expression précédente se simplifie lorsque l'on considère que des signaux provenant de directions différentes du ciel, comme des signaux de fréquences distinctes, sont incohérents :

$$S_{k,\eta}(t) = \int \langle |E'_\eta(\vec{n}, t)|^2 \rangle B_{syn}^k(\vec{n}) d\vec{n}, \quad (7.8)$$

où nous avons introduit le *lobe synthétique* associé à chaque détecteur,

$$B_{syn}^k(\vec{n}) = B_{lp}(\vec{n}) \iint B_{ls}(\vec{r}) \left| \sum_i \exp \left[ i2\pi \frac{\vec{x}_i}{\lambda} \cdot \left( \frac{\vec{r}}{f_D} - \vec{n} \right) \right] \right|^2 J(\nu) \Theta(\vec{r} - \vec{r}_k) d\nu d\vec{r}. \quad (7.9)$$

Nous pouvons faire apparaître explicitement la modulation de la polarisation induite par la lame demi-onde en rotation, dans l'équation 7.8,

$$S_{k,\eta}(t) = S_k^I + \epsilon_\eta \cos(4\pi\omega t) S_k^Q + \epsilon_\eta \sin(4\pi\omega t) S_k^U, \quad (7.10)$$

où  $\epsilon_x = 1$ ,  $\epsilon_y = -1$  et où  $S_k^X$  est l'observable nommée *image synthétique* en interférométrie, définie par

$$S_k^X = \int X(\vec{n}) B_{syn}^k(\vec{n}) d\vec{n}. \quad (7.11)$$

$X = \{I, Q, U\}$  dénote le paramètre de Stokes considéré. L'équation 7.10 peut être obtenue de manière équivalente pour la seconde architecture :

$$S_{k,\eta}(t) = S_k^I + \epsilon_\eta \cos(\phi_x - \phi_y) S_k^Q + \epsilon_\eta \sin(\phi_x - \phi_y) S_k^U, \quad (7.12)$$

où  $\phi_x(t)$  et  $\phi_y(t)$  sont les phases délivrées par les déphaseurs contrôlés du pseudo-corrélateur. Cette équation n'est en fait valide que si ces phases sont à chaque instant les mêmes pour tous les canaux :

$$\forall i, j, \phi_x^i(t) = \phi_x^j(t) \equiv \phi_x(t) \text{ et } \phi_y^i(t) = \phi_y^j(t) \equiv \phi_y(t). \quad (7.13)$$

L'*image synthétique* est l'image du ciel vue à travers le lobe synthétique  $B_{syn}^k(\vec{n})$ . Cette observable est usuellement obtenue en radio-interférométrie par des techniques de synthèse d'ouverture (i.e. en effectuant la transformée de Fourier spatiale du jeu de visibilité mesurées par l'interféromètre, cf. chapitres 4 et 10). Elle peut de manière équivalente être considérée comme une combinaison linéaire des visibilité dont les coefficients sont complètement déterminés par les déphasages géométriques introduits par le combineur de faisceaux,

$$S_k^X = C_k + 2\text{Re} \left[ \sum_{b=0}^{N(N-1)/2-1} \alpha_{k,b} V_X(\vec{u}_b) \right]. \quad (7.14)$$

Comme nous l'avons vu au chapitre 5, la "sommation cohérente des lignes de base équivalentes" est automatiquement respectée par les déphasages géométriques ; nous pouvons ainsi écrire cette

<sup>2</sup>La collaboration QUBIC envisage actuellement de placer une grille polarisante à l'intérieur du cryostat, envoyant les polarisations transverses vers deux matrices de TES non polarisés (similairement à ce qui est prévu pour l'expérience EBEX [142]).

équation comme une combinaison linéaire des visibilitées différentes,

$$S_k^X = C_k + 2\text{Re} \left[ \sum_{\beta=0}^{N_{\neq}-1} N_{eq}(\beta) \alpha_{k,\beta} V_X(\vec{u}_\beta) \right], \quad (7.15)$$

où  $N_{eq}(\beta)$  est le nombre de lignes de base équivalentes de la classe  $\beta$ , où  $V_X(\vec{u}_\beta)$  sont les visibilitées polarisées large bande, et où les coefficients de la modulation sont approximativement<sup>3</sup> donnés par

$$\alpha_{k,\beta} = \int B_{ls}(\vec{r}) \exp \left[ i2\pi \frac{\vec{r}}{f_D} \cdot \vec{u}_\beta \right] \Theta(\vec{r} - \vec{r}_k) d\vec{r}. \quad (7.16)$$

### 7.3 Reconstruction des visibilitées

La reconstruction des visibilitées peut alors être effectuée en deux étapes

1. Démodulation des images synthétiques : on reconstruit séparément les images synthétiques  $S_k^I$ ,  $S_k^Q$  et  $S_k^U$  grâce à la modulation induite par la lame demi-onde en rotation ou par le pseudo-corrélateur. Notons que dans le cas où on observerait un champ fixe, l'absence de modulation empêcherait en réalité de reconstruire  $S_k^I$  ; l'approche proposée au chapitre 13, et par le balayage continu du ciel qu'elle autorise, permet toutefois d'éviter cette difficulté.
2. Reconstruction simultanée des visibilitées par inversion du problème linéaire indépendamment pour chacune des trois images synthétiques, i.e. indépendamment pour chaque paramètre de Stokes.

La nouveauté par rapport à l'architecture basique réside dans la possibilité de reconstruire "instantanément" les visibilitées en utilisant les puissances mesurées par tous les détecteurs à un instant donné. Dans le cas précédent, on reconstruisait les visibilitées indépendamment sur chaque détecteur en utilisant des séquences de mesures ordonnées en temps, afin d'éviter des problèmes d'intercalibration (cf. chapitre 5). L'inversion du problème linéaire permettant de reconstruire les visibilitées est dans le cas présent très proche d'une transformée de Fourier spatiale. Les problèmes d'intercalibration entre les détecteurs n'ont plus pour conséquence une fuite de I dans Q/U puisque les images synthétiques correspondantes à chaque paramètre de Stokes sont séparées préalablement grâce à la modulation induite par la lame demi-onde en rotation ou par le pseudo-corrélateur.

### 7.4 Comparaison des architectures

La principale différence conceptuelle entre les architectures réside dans la manière dont sont modulées les visibilitées. Dans l'architecture basique présentée au chapitre 5, les déphaseurs contrôlés sont utilisés à la fois pour moduler les polarisations et pour moduler les différentes lignes de base. Dans les deux architectures présentées ici, ces deux tâches sont séparées : la lame demi-onde rotative ou le pseudo-corrélateur modulent les polarisations, les phases géométriques induites par le combineur de faisceaux modulent les différentes lignes de base.

<sup>3</sup>Comme nous l'avons vu au chapitre 6, le problème n'est en réalité pas exactement linéaire en raison de la largeur de bande.

Ceci permet d'ailleurs de mesurer "simultanément" (i.e. à la fréquence de rotation de la lame demi-onde ou des déphaseurs du pseudo-corrélateur) toutes les visibilitées, alors que dans l'architecture basique les visibilitées ne peuvent être reconstruites que lorsqu'une séquence de phases est terminée. On évite probablement ainsi un grand nombre de problèmes potentiels liés à la stabilité du système (constante de temps des bolomètres, stabilité du pointage, etc.).

Mais l'argument le plus fort en faveur de ces nouvelles architectures reste bien sûr l'abandon des déphaseurs contrôlés décrits au chapitre 5 ; la collaboration QUBIC a ainsi décidé d'adopter la première d'entre elle (avec lame demi-onde en rotation) en substitution de l'architecture basique préalablement envisagée. Le fait de disposer d'un design dans lequel tous les composants requis *existent* déjà, renforce, à mon sens, très fortement la crédibilité du projet.

Nous verrons au chapitre 8 que la sensibilité de ces architectures alternatives est la même que celle de l'architecture basique (dans le cas où des séparateurs de polarisation circulaire sont utilisés). Il faut cependant mentionner un avantage instrumental très important lié à l'abandon des déphaseurs : la possibilité de réaliser l'instrument à toutes les fréquences intéressantes au sol (90, 150 ou 220 GHz). Nous envisagions en effet, dans une première version de l'instrument QUBIC, d'utiliser des déphaseurs mécaniques en guides d'onde ; la dimension minimale des moteurs requis pour faire fonctionner ces déphaseurs était telle qu'il semblait difficile d'imaginer un module de l'instrument à plus haute fréquence que 90 GHz. Il faut se rappeler que pour un lobe primaire constant, la surface d'un cornet est d'autant plus petite que l'on monte en fréquence, et que pour atteindre les objectifs scientifiques de QUBIC ( $\ell \sim 100$ ), les cornets doivent être collés les uns aux autres en réseau carré compact : à 150 GHz, l'empreinte d'un cornet semblait ainsi trop petite pour contenir les moteurs des deux déphaseurs associés.

## 7.5 Vers une meilleure compréhension de l'interférométrie bolométrique

Il me semble rétrospectivement que le principal mérite du travail exposé dans ce chapitre est d'avoir bouleversé la vision que nous avons de l'interférométrie bolométrique : à la différence d'un radio-interféromètre où les images synthétiques sont obtenues par traitement numérique des données acquises, i.e. par transformée de Fourier spatiale du jeu de visibilitées, le combineur de faisceaux effectue, dans notre cas, "optiquement" cette transformée de Fourier. Les matrices de cornets peuvent être vues comme des sélectionneurs de modes spatiaux ; dans le cas limite où on "enlèverait" ces cornets, l'instrument serait un simple imageur, et l'image obtenue sur le plan focal serait exactement l'image du ciel (incluant tous les modes de Fourier).

L'intérêt d'une telle sélection des modes apparaîtra plus clairement au chapitre 10 : nous verrons que l'insertion d'interrupteurs entre cornets primaires et secondaires rend possible une puissante procédure d'auto-calibration. Celle-ci, intrinsèquement liée à la nature interférométrique de notre instrument, permet de caractériser très "proprement" la manière dont les détecteurs mesure chaque mode.

Notons finalement que c'est parce que nous avons compris que chaque détecteur ne mesurait rien d'autre qu'une image synthétique du ciel (du moins dans les nouvelles architectures), que nous avons finalement pu lever ce postulat implicite selon lequel il était nécessaire de reconstruire les visibilitées, et envisager l'approche très prometteuse exposée au chapitre 13.

## Chapitre 8

# Sensibilité d'un interféromètre bolométrique dédié à l'observation du CMB

---

Nous étudions dans ce chapitre la sensibilité d'un interféromètre bolométrique aux spectres de puissance angulaire des anisotropies de température et de polarisation du CMB, puis nous la comparons à celles d'un imageur et d'un interféromètre hétérodyne de même dimensionnement instrumental (même nombre de cornets). Ce travail, effectué en collaboration avec Jean-Christophe Hamilton, Jean Kaplan, Michel Piat, Cyrille Rosset et Clément Cressiot, a donné lieu à une publication [2], reproduite en annexe. Si les résultats obtenus étaient qualitativement corrects (la sensibilité d'un interféromètre bolométrique est compétitive), nous nous sommes aperçus que cette question recelait de nombreuses subtilités qui nous avaient alors échappé ; leurs effets – qui se résument principalement à une amélioration ou une réduction des sensibilités des différents types d'instruments par une série de facteurs  $\sqrt{2}$  – sont discutés ici en détail. Ce travail "correctif", qui résulte de fructueuses discussions avec Jean-Christophe Hamilton, Jean Kaplan, Ted Bunn, Sarah Church et Michel Piat, devrait sans doute donner lieu à une future publication.

---

Nous commencerons par introduire un estimateur non-biaisé de pseudo-spectre de puissance angulaire à partir du jeu de visibilités bruitées mesurés par un interféromètre. Le calcul de la variance d'un tel estimateur permet d'obtenir une formule analytique de la sensibilité d'un interféromètre bolométrique en fonction des paramètres instrumentaux (nombre et disposition des cornets, lobe primaire, temps d'observation, largeur de bande, etc.). Nous comparerons alors la sensibilité de l'instrument avec celles d'un imageur et d'un interféromètre hétérodyne de dimensionnement instrumental similaire (i.e. même nombre de cornets, même temps d'observation, même largeur de bande et donc par extension même ordre de coût). Nous discuterons enfin point par point les différences spécifiques des trois instruments afin de déterminer l'origine des écarts de sensibilités constatés.

## 8.1 Définition d'un estimateur du spectre de puissance à partir du jeu de visibilités

### 8.1.1 Couverture du plan-uv

Discutons d'abord la question de la couverture des visibilités dans le plan-uv. Nous utilisons les mêmes définitions qu'aux chapitres 4 et 5, et considérons un interféromètre bolométrique muni de  $N_h$  cornets observant le ciel à travers le même lobe  $B(\vec{n})$ , normalisé par convention de telle sorte que  $B(\vec{0}) = 1$ . Dans l'approximation de ciel plat, nous avons vu que les visibilités monochromatiques s'écrivent comme une convolution de la transformée de Fourier du champ observé par la transformée de Fourier du lobe (centrée sur la ligne de base correspondante),

$$V_X(\vec{u}) = \int \tilde{X}(\vec{u})\tilde{B}(\vec{u} - \vec{v})d\vec{v} = \tilde{X}(\vec{u}) \otimes \tilde{B}(\vec{u}). \quad (8.1)$$

Il est possible de montrer que la correspondance entre la ligne de base et le multipôle de la décomposition en harmoniques sphériques est donné, dans l'approximation de ciel plat, par

$$\ell \simeq 2\pi|\vec{u}|. \quad (8.2)$$

L'angle solide couvert par le lobe de chaque cornet est défini comme

$$\Omega = \int B(\vec{n})d\vec{n}. \quad (8.3)$$

Il est relié à la fraction de ciel observé par

$$f_{\text{sky}} = \Omega/4\pi. \quad (8.4)$$

Lorsque nous considérons un lobe gaussien caractérisé par une variance  $\sigma^2$  (et donc de largeur à mi-hauteur  $\sigma \times 2\sqrt{2\ln 2} \simeq 2.35\sigma$ ), cet angle solide est donné par  $\Omega = 2\pi\sigma^2$ . Si nous faisons l'hypothèse d'une matrice carrée de cornets (figure 5.3), les lignes de base sont elles mêmes disposées sur une grille carrée. La séparation minimale entre deux cornets, obtenue en les collant deux à deux, est donnée par leur diamètre. Dans la limite de diffraction, nous pouvons écrire la relation suivante entre la surface des cornets, l'angle solide et la longueur d'onde considéré (cf. chapitre 5) :

$$S\Omega = \kappa^2\lambda^2, \quad (8.5)$$

avec  $\kappa \sim 1$ . La séparation minimale est ainsi donnée par  $2\lambda/\sqrt{\pi\Omega}$ . L'espace entre les visibilités dans le plan-uv s'écrit alors

$$u_{\text{min}} = \frac{2}{\sqrt{\pi\Omega}} = \frac{1}{\pi\sqrt{f_{\text{sky}}}}. \quad (8.6)$$

Dans le cas considéré d'un lobe gaussien, la transformée de Fourier du lobe est elle-même une gaussienne,

$$\tilde{B}(\vec{u}) = \Omega \exp(-\pi\Omega\vec{u}^2), \quad (8.7)$$

de sorte que la résolution dans l'espace ce Fourier est donnée par

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Omega}}. \quad (8.8)$$

Le rapport entre la résolution dans le plan-uv et la séparation des lignes de base vaut alors

$$\frac{u_{\min}}{\sigma_u} = 2\sqrt{2} \simeq 3. \quad (8.9)$$

Nous pouvons en conclure que des lignes de base différentes sont quasiment indépendantes (nous utiliserons cette approximation dans la suite de ce chapitre). En réalité, la distribution du champ électromagnétique s'annule aux bords des cornets et le lobe primaire n'est jamais exactement gaussien. Le lobe dans l'espace de Fourier est tronqué au delà d'un rayon de  $u_{\min}$  (figure 5.2). Cela renforce la validité de notre approximation.

### 8.1.2 Effets de largeur de bande

Nous avons vu au chapitre 6 que l'effet de la largeur de bande est d'élargir le noyau de convolution dans le plan-uv, et donc de diminuer la fraction de ciel observée. Nous avons ainsi montré que les visibilité large bande s'écrivent,

$$V_X(\vec{u}) = \tilde{X}(\vec{u}) \otimes \tilde{\beta}(\vec{u}), \quad (8.10)$$

où  $\tilde{\beta}(\vec{u})$  est le noyau de convolution défini par l'équation 6.8. Le lobe primaire effectif s'écrit alors simplement

$$\Omega_s = \beta(\vec{0}) = \frac{\Omega}{\kappa_1}, \quad (8.11)$$

où  $\kappa_1$  est le paramètre de lissage, donné par l'équation 6.17. La fraction de ciel effectivement observée est donc donnée par

$$\tilde{f}_{\text{sky}} = \Omega_s / 4\pi. \quad (8.12)$$

La valeur de  $\kappa_1$  restant raisonnable (1.6 pour 25% de largeur de bande et une réponse spectrale uniforme), la validité de l'approximation faite en 8.1.1 n'est pas remise en cause.

### 8.1.3 Des visibilité de Stokes aux modes E et B

Dans l'approximation de ciel plat, les champs  $E$  et  $B$  de polarisation sont reliés aux paramètres de Stokes par une simple rotation de l'angle  $\phi$  formé par la ligne de base  $\vec{u}$  et le référentiel local dans lequel la polarisation est décomposée (cf. par exemple [118]). En terme de visibilité large bande, on peut écrire :

$$\begin{cases} V_Q(\vec{u}) &= \int \left[ \cos 2\phi \tilde{E}(\vec{v}) - \sin 2\phi \tilde{B}(\vec{v}) \right] \tilde{\beta}(\vec{u} - \vec{v}) d\vec{v} \\ V_U(\vec{u}) &= \int \left[ \sin 2\phi \tilde{E}(\vec{v}) + \cos 2\phi \tilde{B}(\vec{v}) \right] \tilde{\beta}(\vec{u} - \vec{v}) d\vec{v} \end{cases} \quad (8.13)$$

La question de la séparation des modes E et B sera abordée au chapitre 9. Pour des raisons de simplicité, nous ferons ici l'hypothèse qu'il est possible d'obtenir un jeu pur de visibilité  $E$  et  $B$  à partir des visibilité de Stokes :

$$\begin{cases} V_E(\vec{u}) &= \int \tilde{E}(\vec{v}) \tilde{\beta}(\vec{u} - \vec{v}) d\vec{v} \\ V_B(\vec{u}) &= \int \tilde{B}(\vec{v}) \tilde{\beta}(\vec{u} - \vec{v}) d\vec{v} \end{cases} \quad (8.14)$$

La matrice de covariance des visibilitées  $B$  s'exprime donc en fonction du spectre de puissance angulaire  $BB$ ,

$$\langle \mathbf{V}_B(\vec{u}) \mathbf{V}_B^*(\vec{u}') \rangle = \int \langle \tilde{B}(\vec{v}) \tilde{B}^*(\vec{v}') \rangle \tilde{\beta}(\vec{u} - \vec{v}) \tilde{\beta}^*(\vec{u}' - \vec{v}') d\vec{v} d\vec{v}' \quad (8.15)$$

$$= \int C_\ell^{BB}(\vec{v}) \tilde{\beta}(\vec{u} - \vec{v}) \tilde{\beta}^*(\vec{u}' - \vec{v}) d\vec{v} \quad (8.16)$$

$$= \delta(\vec{u} - \vec{u}') \times \int C_\ell^{BB}(\vec{v}) \left| \tilde{\beta}(\vec{u} - \vec{v}) \right|^2 d\vec{v}, \quad (8.17)$$

où nous avons utilisé l'approximation de l'indépendance des lignes de base différentes pour établir la dernière équation. Les visibilitées réellement mesurées sont nécessairement bruitées ; si nous faisons l'hypothèse d'une puissance suffisamment stable dans l'intervalle de  $l$  considéré<sup>1</sup>,

$$\langle \mathbf{V}_B(\vec{u}) \mathbf{V}_B^*(\vec{u}') \rangle = \delta(\vec{u} - \vec{u}') \times \left[ \underbrace{C_\ell^{BB} \int \left| \tilde{\beta}(\vec{v}) \right|^2 d\vec{v}}_{=\Omega_s/2} + \mathcal{N}(\vec{u}, \vec{u}') \right], \quad (8.18)$$

où nous avons fait l'hypothèse raisonnable d'un bruit de mesure non corrélé entre les visibilitées<sup>2</sup>.

#### 8.1.4 Un estimateur de pseudo-spectre non-biaisé et sa variance

L'estimateur non biaisé le plus simple du pseudo-spectre de puissance s'écrit alors (quel que soit le champ considéré  $T$ ,  $E$  ou  $B$ ) :

$$\hat{C}_\ell = \frac{2}{\Omega_s} \times \frac{1}{N_{\neq}(\ell)} \sum_{\beta} \left( \mathbf{V}(\vec{u}_\beta) \mathbf{V}^*(\vec{u}_\beta) - \sigma_{\mathbf{V}(\beta)}^2 \right), \quad (8.19)$$

où la somme porte sur les  $N_{\neq}(\ell)$  lignes de base différentes correspondant à un multipôle  $\ell$  et où les  $\sigma_{\mathbf{V}(\beta)}^2$  sont les éléments diagonaux de la matrice de covariance des visibilitées mesurées, donnés par l'équation 5.63 dans le cas d'un interféromètre bolométrique. La variance de cet estimateur vaut alors :

$$\text{Var}(\hat{C}_\ell) = \langle \hat{C}_\ell^2 \rangle - C_\ell^2 \quad (8.20)$$

$$= \left( \frac{2}{\Omega_s N_{\neq}(\ell)} \right)^2 \left\langle \left[ \sum_{\beta} \left( \mathbf{V}(\vec{u}_\beta) \mathbf{V}^*(\vec{u}_\beta) - \sigma_{\mathbf{V}(\beta)}^2 \right) \right]^2 \right\rangle - C_\ell^2 \quad (8.21)$$

$$= \frac{1}{N_{\neq}^2(\ell)} \sum_{\beta} \left( C_\ell + \frac{2\sigma_{\mathbf{V}(\beta)}^2}{\Omega_s} \right)^2, \quad (8.22)$$

où nous avons utilisé le développement de corrélations gaussiennes à 4 points en terme de corrélations à 2 points, ainsi que l'approximation des lignes de base indépendantes (les variances des  $N_{\neq}(\ell)$  lignes de base s'ajoutent linéairement). Si l'on suppose pour simplifier que les visibilitées

<sup>1</sup>En pratique, c'est la quantité  $\ell(\ell + 1)C_\ell$  qui est stable sur de larges intervalles : ce qui suit peut aisément être modifié en conséquence.

<sup>2</sup>Les visibilitées étant obtenues après inversion d'un système linéaire (chapitre 5), la validité de cette hypothèse pourrait être mise en cause par tout effet systématique qui "corromprait" le système.

différentes associées au même  $\ell$  sont mesurées avec la même variance  $\sigma_{V(\beta)}^2$ , l'erreur (i.e l'écart type) faite sur l'estimation du spectre de puissance s'écrit simplement

$$\Delta C_\ell = \sqrt{\frac{1}{N_{\neq}(\ell)}} \left( C_\ell + \frac{2\sigma_{V(\beta)}^2}{\Omega_s} \right). \quad (8.23)$$

Si l'on considère un intervalle dans le plan-uv de largeur  $\Delta u = \Delta\ell/2\pi$  centré sur  $\vec{u}$ , le nombre de modes  $N_{\neq}(\ell)$  est le rapport entre la surface de la demi-couronne dans le plan-uv  $\pi|\vec{u}|\Delta u$  et la surface effective du lobe dans l'espace de Fourier  $2\pi\sigma_u^2\kappa_1$  (le paramètre de lissage  $\kappa_1$  nous permet de tenir compte de la largeur de bande) :

$$N_{\neq}(\ell) = \frac{\pi|\vec{u}|\Delta u}{2\pi\sigma_u^2\kappa_1} = \ell\Delta\ell \frac{f_{\text{sky}}}{\kappa_1}. \quad (8.24)$$

Nous obtenons alors la formule analytique simple

$$\Delta C_\ell = \sqrt{\frac{2\kappa_1}{2\ell f_{\text{sky}}\Delta\ell}} \left( C_\ell + \frac{2\sigma_{V(\beta)}^2}{\Omega_s} \right). \quad (8.25)$$

Nous avons vu au chapitre 5 que si la sommation cohérente des lignes de base équivalentes est respectée, la matrice de covariance des visibilitées reconstruites par un interféromètre bolométrique s'écrit :

$$\sigma_{V(\beta)}^2 = \frac{2\text{NET}^2\Omega_s^2 N_h}{N_{\text{eq}}^2(\beta) t}. \quad (8.26)$$

Nous définirons la température équivalente de bruit (NET) dans ce qui suit. L'équation 5.63 donne la variance sur la mesure des parties réelles ou imaginaires des visibilitées de Stokes : de là l'origine du facteur 2 supplémentaire dans la variance sur les visibilitées complexes que nous venons d'écrire (cf. section 8.2.2).

## 8.2 Comparaison des sensibilités en imagerie, interférométries hétérodyne et bolométrique

L'équation 8.25 est équivalente à la formule de Knox [119] décrivant la sensibilité des imageurs :

$$\Delta C_\ell^{\text{Im}} = \sqrt{\frac{2}{(2\ell+1)f_{\text{sky}}\Delta\ell}} \left( C_\ell + \frac{2\text{NET}^2\Omega}{N_h B_\ell^2 t} \right), \quad (8.27)$$

où  $f_{\text{sky}}$  est la fraction de ciel observée par l'instrument, où  $\Omega$  est l'angle solide du lobe et où  $B_\ell^2$  est la transformée de Legendre du lobe, donnée pour un lobe gaussien par  $B_\ell^2 \simeq \exp(-\ell^2\sigma^2/2)$ . Le premier terme est lié à la variance d'échantillonnage (qui devient la *variance cosmique* dans le cas d'une observation complète de la sphère céleste), le second terme est lié au bruit statistique de mesure.

Une formule équivalente peut être obtenue pour un interféromètre hétérodyne : il suffit d'estimer l'erreur commise par l'instrument sur la mesure des visibilitées  $\sigma_{V(\beta)}$ , puis d'utiliser la formule 8.25.

Lorsque ces formules analytiques de sensibilité au spectre de puissance sont obtenues de manière indépendante, il n'est pas aisé de discerner l'origine des différences (ou de déceler d'éventuels oublis ou erreurs commises !). C'est pourquoi nous avons entrepris l'étude comparative exposée dans cette section, en partant de la remarque que quel que soit l'instrument, la sensibilité au spectre de puissance est décrite par une formule de la forme

$$\Delta C_\ell = \sqrt{\frac{2}{(2\ell + 1)f_{\text{sky}}\Delta\ell}} (C_\ell + \alpha \text{NEP}_p^2), \quad (8.28)$$

où  $\text{NEP}_p$  est la puissance équivalente de bruit polarisée. Les  $C_\ell$  sont habituellement écrits en unité de température plutôt qu'en unité de puissance, mais nous montrons dans ce qui suit comment passer d'une expression à l'autre

L'objet de cette section est l'estimation comparative du terme  $\alpha$  (cf. table 8.1). Celui-ci s'avère résulter d'une combinaison d'effets très différents, que nous discuterons un à un. Soulignons que nous n'examinerons que les différences de sensibilité statistique des instruments (la comparaison des effets systématiques, plus délicate encore, dépasse largement le cadre de ce travail).

### 8.2.1 Puissance et température équivalentes de bruit (NEP et NET)

Avant de commencer notre discussion du facteur  $\alpha$ , il nous faut revenir sur les notions cruciales de puissance équivalente de bruit ("Noise Equivalent Power", NEP) et de température équivalente de bruit ("Noise Equivalent Temperature", NET) qui caractérisent le bruit des détecteurs des expériences CMB.

#### Cas non polarisé

La NEP d'un détecteur non polarisé (par exemple un simple bolomètre) est définie comme le niveau d'un signal qui donnerait un rapport signal sur bruit de 1 dans une largeur de bande passante de 1 Hz, où de manière équivalente pour un temps d'intégration de 1/2 seconde. Autrement dit, il s'agit de l'écart-type des fluctuations statistiques de puissance mesurées par le détecteur, intégrées sur 1/2 seconde. Le nombre d'états quantiques  $g$  mesurés par un détecteur de surface  $S$  observant un corps noir à travers un angle solide  $\Omega$  durant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , dans la bande spectrale  $\Delta\nu$  centrée sur  $\nu$ , est donné par

$$g = S\Omega \frac{\nu^2}{c^2} \Delta\nu \Delta t \simeq \Delta\nu \Delta t. \quad (8.29)$$

Le nombre d'occupation  $n$  de ces états quantiques suit une statistique de Bose-Einstein (nous observons des photons...). Sa variance s'écrit donc

$$\Delta n^2 = n(1 + n). \quad (8.30)$$

D'où il suit que la variance du nombre de photons détectés  $N = gn$  est donnée par

$$\Delta N^2 = gn(1 + n). \quad (8.31)$$

La puissance mesurée par le détecteur s'écrit

$$P = \frac{h\nu N}{\Delta t}, \quad (8.32)$$

et la variance de cette mesure

$$\Delta P^2 = \frac{1}{\Delta t} \left( h\nu P + \frac{P^2}{\Delta\nu} \right). \quad (8.33)$$

La NEP étant définie pour  $\Delta t = 1/2$  s, on a

$$\text{NEP}^2 = 2h\nu P + \frac{2P^2}{\Delta\nu}. \quad (8.34)$$

Le premier terme, purement Poissonien, est généralement appelé *shot-noise* alors qu'on réfère souvent au deuxième comme au terme de *bunching*.

Les observables d'intérêts – les cartes des anisotropies ou les visibilitées – s'exprimant en unité de température, on peut convertir une puissance équivalente de bruit en une température équivalente de bruit, traditionnellement exprimée dans le domaine temporel, c'est à dire en  $\text{K.s}^{1/2}$ , par

$$\text{NET} = \frac{\text{NEP}}{c^2 \frac{\Delta\nu}{\nu^2} \times \frac{\partial L_\nu}{\partial T}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (8.35)$$

où  $L_\nu$  est la luminance spectrale définie par l'équation 6.29. Le facteur  $\sqrt{2}$  correspond la conversion des  $\text{K.Hz}^{-1/2}$  en  $\text{K.s}^{1/2}$  puisque l'on considère à présent des échantillons temporels  $\Delta t = 1$  s ; autrement dit, la NET exprime l'écart à la température de corps noir du CMB qui résulterait en un rapport signal sur bruit de 1 pour une seconde d'intégration du détecteur. En utilisant l'équation 6.24 qui permet de passer des visibilitées en unité de puissance aux visibilitées en unité de température, il est alors aisé de montrer qu'il suffit de substituer  $\text{NET}^2\Omega$  à  $\text{NEP}^2$  pour obtenir l'équation 8.28 en unité de température :

$$\Delta C_\ell = \sqrt{\frac{2}{(2\ell + 1)f_{\text{sky}}\Delta\ell}} \left( C_\ell + \alpha \frac{\text{NET}^2\Omega}{2} \right). \quad (8.36)$$

### Cas polarisé

Nous travaillerons en fait, pour plus de clarté, avec les puissances et températures équivalentes de bruit polarisées, c'est à dire définies pour un détecteur polarisé ; nous les noterons  $\text{NEP}_p$  et  $\text{NET}_p$ . La puissance mesurée par un élément d'une paire de détecteurs polarisés (un PSB par exemple) est deux fois moindre que celle du détecteur équivalent non polarisé, et on a ainsi,

$$\text{NEP}_p^2 = \frac{\text{NEP}^2}{2} \quad (8.37)$$

et

$$\text{NET}_p^2 = 2\text{NET}^2. \quad (8.38)$$

## 8.2.2 Mesure d'un paramètre de Stokes

### a) Mesure de puissance

Dans le cas d'un imageur dédié à la mesure de la polarisation, chaque détecteur polarisé caractérisé par sa  $\text{NEP}_p$  (par exemple un PSB) mesure une puissance directement égale à la valeur

Etape	Imageur	Interféromètre bolométrique	Interféromètre hétérodyne
<b>1) Mesure d'un paramètre de Stokes</b>			
a) Mesure de puissance	1	1/2	1/2
b) Formation du paramètre	2	2	2
c) Pénalité de modulation	1	1 (2 si OMTs x/y)	1
d) Mesure complexe	1	2	2
<b>Sous-total</b>	2	2	2
<b>2) Mesure simultanée de <math>Q</math> et <math>U</math></b>	$2/t$	$2/t$	$1/t$
<b>3) Filtre dans l'espace des <math>C_l</math> (<math>\ell = 100</math>)</b>	$\frac{1}{N_h B_\ell^2} \simeq \frac{1.6}{N_h}$	$\frac{N_h}{N_{\text{eq}}^2(\ell)} \simeq \frac{2.5}{N_h}$	$\frac{1}{N_{\text{eq}}(\ell)} \simeq \frac{1.6}{N_h}$
<b>4) Largeur de bande</b> Effet de lissage ( $\ell = 100$ )	1	$\sim 1.6$	1
<b>5) Uniformité couverture du ciel</b>	$\sim 1.5$	2	2
<b>6) Détecteurs</b>			
a) Efficacité optique	$\sim 3$	$\sim 3$	$\sim 1.3$
b) NET détecteurs	1	1	$\sim 3$
<b>Sous-total</b>	$\sim 3$	$\sim 3$	$\sim 4$
<b>Coefficient <math>\alpha</math></b>	$\sim 29 \times \frac{1}{N_h t}$	$\sim 96 \times \frac{1}{N_h t}$	$\sim 25 \times \frac{1}{N_h t}$
<b>Rapport à l'imageur à <math>\ell = 100</math></b>	1	$\sim 3.3$	$\sim 0.9$

TAB. 8.1: Table comparative des trois types d'instruments. Les nombres donnés ici sont les facteurs multiplicatifs qui composent le terme  $\alpha$  dans l'équation 8.28. Chaque ligne est explicitée dans la sous-section correspondante.

moyennée du module du champ électromagnétique collecté par un canal (cornet ou antenne) :  $\langle |E_x|^2 \rangle$  pour le premier et  $\langle |E_y|^2 \rangle$  pour le deuxième.

Dans le cas d'un interféromètre (hétérodyne ou bolométrique), c'est la corrélation des champs collectés par deux canaux différents qui est mesurée ; Cette corrélation est *in fine* obtenue par une mesure de puissance après sommation des deux canaux,

$$\langle |E_{x_1} + E_{x_2}|^2 \rangle = \langle |E_{x_1}|^2 \rangle + \langle |E_{x_2}|^2 \rangle + 2\langle E_{x_1} E_{x_2}^* \rangle \quad (8.39)$$

Ceci résulte en un facteur 1/2 sur la variance du bruit à la sortie du corrélateur, puisque :

$$\text{Var}[\langle E_{x_1} E_{x_2}^* \rangle] = \langle (E_{x_1} \Delta E_{x_2})^2 \rangle + \langle (E_{x_2} \Delta E_{x_1})^2 \rangle \quad (8.40)$$

$$\simeq 2\langle (E_x \Delta E_x)^2 \rangle \quad (8.41)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Var} [\langle |E_x|^2 \rangle] \quad (8.42)$$

Pour cette raison, nous faisons apparaître, dans la ligne correspondante de la table 8.1, un facteur 1 pour l'imageur, et un facteur 1/2 pour les interféromètres.

Nous verrons que cet avantage apparent des interféromètres est en réalité annulé par le point d) : un interféromètre doit mesurer deux quantités (la partie réelle et la partie imaginaire des visibilités complexes), quand un imageur n'en mesure qu'une (la puissance réelle sur le ciel) ; ceci résulte dans la perte du facteur 2 ici gagné (remarquons d'ailleurs que c'est parce que les champs de température et de polarisation du ciel sont des quantités réelles que l'on a l'égalité  $\langle E_{x_1} E_{x_2}^* \rangle = \langle E_{x_2} E_{x_1}^* \rangle$ , responsable du facteur 1/2).

## b) Formation d'un paramètre de Stokes

Dans le cas d'un imageur, les paramètres de Stokes sont formés par addition ou soustraction des puissances mesurées pour les deux polarisations :  $I = \langle |E_x|^2 \rangle + \langle |E_y|^2 \rangle$ ,  $Q = \langle |E_x|^2 \rangle - \langle |E_y|^2 \rangle$  et  $U$  est obtenu par mesure de  $Q$  après rotation de l'instrument de  $45^\circ$ . La variance sur ces paramètres de Stokes est donc deux fois plus élevée que la variance sur la puissance mesurée,

$$\text{Var} [I] = \text{Var} [Q] = \text{Var} [U] = \text{Var} [\langle |E_x|^2 \rangle] + \text{Var} [\langle |E_y|^2 \rangle] \quad (8.43)$$

Dans le cas d'un imageur muni d'un dispositif modulant la polarisation (tel une lame demi-onde en rotation), ce facteur est également présent, mais les choses sont un peu plus subtiles. Dans le cas d'une lame demi-onde en rotation à la fréquence  $\omega$ , chaque détecteur polarisé mesure (cf. chapitre 7) :

$$\langle |E_x|^2 \rangle(t) = \frac{1}{2} [I + \cos(4\pi\omega t)Q + \sin(4\pi\omega t)U], \quad (8.44)$$

$$\langle |E_y|^2 \rangle(t) = \frac{1}{2} [I - \cos(4\pi\omega t)Q - \sin(4\pi\omega t)U]. \quad (8.45)$$

La somme des deux puissances donne  $I$  tandis que la différence permet d'accéder à une combinaison linéaire de  $Q$  et  $U$ . Nous décrirons l'effet de la démodulation par la suite ; quoi qu'il en soit, la variance sur les paramètres de Stokes est également deux fois plus élevée que la variance sur la puissance mesurée par un détecteur polarisé.

De manière similaire, dans le cas d'un interféromètre hétérodyne, les visibilités mesurées à la sortie du corrélateur complexe sont les visibilités polarisées  $V_{xx}$ ,  $V_{yy}$ ,  $V_{xy}$ ,  $V_{yx}$  ; les visibilités de

Stokes sont de même obtenues, par sommation et différenciation des visibilitées polarisées, et la variance sur les visibilitées de Stokes est donc également deux fois plus élevée que la variance sur la puissance mesurée.

Enfin, dans le cas d'un interféromètre bolométrique, ces combinaisons sont directement effectuées par l'instrument, mais les visibilitées de Stokes sont bien mesurées par combinaison des voies polarisées. Les trois types d'instruments se voient ainsi attribués un facteur 2 dans la ligne correspondante de la table 8.1.

### c) Pénalité de modulation

Ce facteur de pénalité est spécifique au cas de l'interféromètre bolométrique ; plus précisément dans le cas de l'architecture basique examinée au chapitre 5 et dans le cas où les polarisations linéaires sont séparées, nous avons vu qu'il était impossible de mesurer simultanément  $Q$  et  $U$  dès lors que l'on respecte la sommation cohérente des lignes de base équivalentes, ce qui résulte en une perte d'un facteur 2 de sensibilité. Dans le cas de l'architecture basique avec séparateurs de polarisation circulaire, ou dans le cas des architectures alternatives présentées au chapitre 7,  $Q$  et  $U$  peuvent être mesurés simultanément et cette pénalité disparaît.

### d) Formation des visibilitées complexes

A la différence d'un imageur qui mesure des quantités réelles, les interféromètres doivent mesurer un jeu de quantités complexes, les visibilitées, afin d'obtenir la même information physique. Ils mesurent ainsi la partie réelle et la partie imaginaire des visibilitées complexes, ce qui résulte en une perte d'un facteur 2 sur la variance :

$$\text{Var} [VV^*] = \text{Var} [|\text{Re}[V]|^2] + \text{Var} [|\text{Im}[V]|^2] . \quad (8.46)$$

Cette perte apparente est en fait la contrepartie du gain décrit en a).

### Sous-total pour la mesure d'un paramètre de Stokes

Nous voyons qu'à ce stade, un interféromètre bolométrique n'est pas pénalisé par rapport aux deux autres instruments.

### 8.2.3 Mesure simultanée de $Q$ et $U$

Dans le cas d'un imageur simple (i.e. dépourvu de modulateur de polarisation), le paramètre de Stokes  $Q$  est mesuré par différenciation de la puissance des deux détecteurs polarisés, tandis que le paramètre  $U$  est mesuré par la même différenciation après rotation de l'instrument (ou des polariseurs) d'un angle de  $45^\circ$ .  $Q$  et  $U$  ne peuvent ainsi pas être mesurés simultanément par la même paire de détecteurs. Dans le cas d'un imageur avec modulation de la polarisation, la différenciation des puissances mesurées par une paire de détecteurs donne accès à une combinaison linéaire de  $Q$  et  $U$  ; mais tout se passe comme si  $Q$  et  $U$  étaient mesurés chacun durant un temps effectif deux fois

plus court (autrement dit, la variance des fonctions sinusoïdale est  $1/2$ ). Un facteur 2 de pénalité apparaît donc dans les deux cas.

Les architectures alternatives d'interféromètre bolométrique, avec modulation de la polarisation, se voient identiquement infliger un facteur 2 de pénalité. Dans le cas de l'architecture basique, les visibilités sont modulées par des fonctions sinusoïdales (cf. chapitre 5), et on retrouve également le facteur 2.

La situation est différente en interférométrie hétérodyne puisque l'amplification cohérente du signal permet d'effectuer toutes les corrélations possibles sans perte de rapport signal à bruit (tant que le bruit de l'amplificateur reste dominant par rapport au bruit de photons, le signal amplifié peut être divisé en autant de sous-canaux que nécessaires, sans perte de rapport signal à bruit) ; les visibilités de Stokes  $V_Q$  et  $V_U$  peuvent ainsi être mesurées simultanément.

### 8.2.4 Filtre dans l'espace des $C_\ell$

En imagerie, on effectue la moyenne des  $N_h$  cartes de  $Q$  et  $U$  obtenues avec les  $N_h$  paires de détecteurs polarisés. La résolution angulaire de ces cartes est définie par le lobe des cornets ou antennes observant le ciel à travers un télescope, dont la transformée de Legendre est  $B_\ell \simeq \exp(-\ell^2 \sigma^2/2)$ . Ce lobe agit comme une fonction de transfert dans l'espace des harmoniques sphériques, et réduit le rapport signal à bruit sur le spectre de puissance. Ces deux processus (moyenne des détecteurs et résolution angulaire) résultent en un facteur  $1/(N_h B_\ell^2)$  sur la sensibilité. Pour un imageur ayant les caractéristiques de BICEP (0.9 degrés FWHM), on trouve typiquement  $1/(N_h B_\ell^2) \simeq 1.6/N_h$  à  $\ell = 100$ .

En interférométrie, on effectue la moyenne des visibilités pour chaque classe de lignes de base redondantes. Dans le cas d'un interféromètre hétérodyne, cela résulte simplement en une réduction en  $1/N_{\text{eq}}(\ell)$  de la variance du bruit. Dans le cas d'un interféromètre bolométrique, nous avons vu que cette moyenne doit être implicitement effectuée durant la reconstruction par le biais de la sommation cohérente des lignes de base équivalentes, et que cela résulte en une réduction de la variance d'un facteur  $N_h/N_{\text{eq}}^2(\ell)$  (le facteur  $N_h$  provient de ce que chaque détecteur mesure une fraction de la puissance sommée des signaux collectés par les  $N_h$  cornets).

Notons que le nombre de lignes de base redondantes, déterminé par la distribution géométrique du réseau de récepteurs (antennes ou cornets), varie en fonction de la ligne de base considérée (donc en fonction  $\ell$ ). Pour une matrice carrée compacte de  $N_h$  récepteurs, une bonne approximation de  $N_{\text{eq}}(\ell)$  est donnée par (figure 8.1) :

$$\frac{N_{\text{eq}}(\ell)}{N_h} \simeq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{N_h}} - \frac{\ell}{\ell_0} \quad \text{où} \quad \ell_0 = \frac{2\sqrt{N_h}}{\sqrt{f_{\text{sky}}}}. \quad (8.47)$$

Ainsi, pour un interféromètre bolométrique de 144 cornets de lobes gaussiens (14 degrés FWHM),  $N_h/N_{\text{eq}}^2(\ell) \simeq 2.5/N_h$  à  $\ell = 100$ . Pour un interféromètre hétérodyne dans la même configuration, nous obtenons  $N_h/N_{\text{eq}}(\ell) \simeq 1.6/N_h$  à  $\ell = 100$ . L'interféromètre bolométrique est ainsi pénalisé dans ce cas d'un facteur  $2.5/1.6 \simeq 1.6$  à  $\ell = 100$  par rapport à l'imageur et à l'interféromètre hétérodyne.

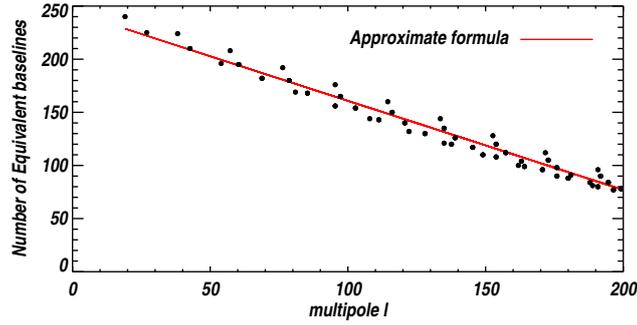


FIG. 8.1: Formule approchée (ligne rouge) donnée par l'équation 8.47 et valeur réelle (points noirs) du nombre de lignes de base équivalentes en fonction de  $\ell = 2\pi|\vec{u}|$  pour 256 cornets disposés selon une matrice carrée compacte.

### 8.2.5 Effets de largeur de bande

En imagerie, la largeur de bande n'engendre pas d'effets secondaires (du moins dans le cas d'une expérience "idéale") ; le rapport signal à bruit évolue comme la racine carrée de la largeur de bande. Au sol, les lignes d'émissions atmosphériques imposent cependant une largeur de bande maximale de l'ordre de 30% (des fenêtres de cette taille existent à 90, 150 ou 220 GHz) aux expériences CMB. Le gain relié à la largeur de bande est inclus dans la valeur de la  $NEP_p$  et nous donnerons ainsi un facteur 1 aux imageurs pour la ligne correspondante dans la table récapitulative 8.1.

Le problème de la largeur de bande en interférométrie bolométrique a été étudié au chapitre 6. Nous avons en particulier vu que l'effet de lissage des visibilitées par largeur de bande résulte en une dégradation de la sensibilité des instruments large bande. Cet effet dépend du multipôle considéré ; pour une expérience telle que QUBIC, la sensibilité est dégradée d'un facteur 1.6 à  $\ell = 100$  (pour une largeur de bande de 25 % et une fonction de réponse spectrale uniforme).

En interférométrie hétérodyne, chaque canal est divisé, après amplification, en sous-bandes spectrales (typiquement de 1 GHz de largeur) ; les canaux sont ensuite transposés à basse fréquence (typiquement 1-2 GHz) afin de pouvoir être corrélés (cf. chapitre 4). L'effet de lissage est ainsi extrêmement réduit dans chaque sous-bande (le prix à payer est bien sûr la complexité instrumentale qui s'en suit), et nous donnerons un facteur 1 aux interféromètres hétérodynes dans la table 8.1.

### 8.2.6 Uniformité du bruit sur la carte

La répartition du bruit de mesure sur la fraction de ciel observée a un impact important sur la sensibilité statistique au spectre de puissance. La matrice de covariance des données s'écrit en toute généralité

$$\langle d_i d_j^* \rangle = \langle w_i s_i w_j^* s_j^* \rangle + \langle n_i n_j^* \rangle \quad (8.48)$$

$$= w_i w_j^* \langle s_i s_j^* \rangle + \langle n_i n_j^* \rangle, \quad (8.49)$$

où  $\vec{d}$  est le vecteur des données,  $\vec{w}$  est la forme de la couverture du ciel pour un imageur (donnée par le lobe primaire des cornets dans le cas d'un interféromètre),  $\vec{s}$  est le vecteur du champ réel dont

on veut mesurer le spectre de puissance et  $\vec{n}$  est le vecteur de bruit statistique. Si la couverture du ciel est uniforme, le rapport signal à bruit n'est pas modifié (toutes les échelles sont équitablement affectées et la normalisation globale est donnée par la sensibilité des détecteurs pour le temps d'observation considéré). Une non uniformité du vecteur  $\vec{w}$  engendre en revanche une perte de rapport signal à bruit.

En imagerie, l'objectif est ainsi d'effectuer une couverture du ciel aussi uniforme que possible. Il est délicat d'estimer a priori le degré de non-uniformité moyen d'une expérience CMB : nous affecterons aux imageur un facteur 1.5 dans la table 8.1, ce nombre étant une estimation faite à partir de la couverture finale de l'expérience QUAD<sup>3</sup>.

En interférométrie (hétérodyne ou bolométrique), le lobe primaire est très proche d'une gaussienne ; cette non uniformité résulte donc en une perte d'un facteur 2. Cet effet est à l'origine du facteur  $2/\Omega_s$  qui apparaît dans l'équation 8.25 (si le lobe était donné par une fonction fenêtre plate, celui-ci serait remplacé par  $1/\Omega$ ).

Il semble que ceci défavorise légèrement les interféromètres par rapport aux imageurs (tant que les lobes des cornets resteront gaussiens bien sûr, mais d'un point de vue instrumental, il semble délicat d'envisager des lobes "plats"). Cette perte pourrait être réduite par l'observation de plusieurs champs légèrement décalés (techniques de *mosaicking*, voir [199]). Nous verrons que l'approche proposée au chapitre 13 permet très probablement d'éviter ce problème.

## 8.2.7 Détecteurs

### a) Efficacité optique

L'efficacité optique n'a pas de raison d'être différente dans le cas d'un imageur ou d'un interféromètre bolométrique basé sur un combineur de faisceaux quasi-optique. Celle-ci est généralement estimée autour de  $\sim 30\%$ . Les variances sont ainsi pénalisées d'un facteur  $\sim 3$ . L'efficacité optique est excellente dans le cas de l'interférométrie hétérodyne car la plupart des composants engendrant des pertes sont placés après l'amplification cohérente. L'efficacité optique des HEMTs est typiquement<sup>4</sup> de  $\sim 80\%$ . La variance est donc dans ce cas seulement affectée d'un facteur  $\sim 1.3$ .

### b) Température équivalente de bruit des détecteurs

Les amplificateurs cohérents de type HEMTs ajoutent intrinsèquement un bruit quantique de mesure, conduisant à des valeurs de NET<sup>2</sup> au moins trois fois plus grandes que celles atteignables par des bolomètres au sol (à 90 GHz). Notons que ce facteur 3 est peut-être un peu optimiste (il se base sur les annonces faites par les groupes instrumentaux engagés dans le développement des HEMTs de nouvelle génération).

<sup>3</sup>M. L. Brown, communication privée.

<sup>4</sup>Valeur annoncée lors d'une présentation de CHIP par Sarah Church.

### 8.3 Conséquences pour QUBIC

Le calcul final du facteur  $\alpha$ , explicité dans la table 8.1 montre qu'au sol, un imageur et un interféromètre hétérodyne ont des sensibilités plus ou moins équivalentes : les mauvaises performances des amplificateurs cohérents sont en effet pratiquement compensées par l'excellente efficacité optique des interféromètres hétérodynes. Un interféromètre bolométrique de même dimensionnement instrumental apparaît en revanche moins sensible que les deux autres instruments (d'un facteur 2-4 typiquement) ; ce mauvais comportement résulte principalement de l'effet de lissage par largeur de bande et de ce que nous avons appelé la fonction de transfert de l'instrument (le fait que la sensibilité évolue en  $N_h/N_{\text{eq}}^2(\ell)$  et non en  $1/N_{\text{eq}}(\ell)$  est intrinsèquement lié au concept).

Les résultats de cette étude doivent être considérés avec précaution. D'une part, nous avons comparé ces trois types d'instruments à nombre de cornets égaux ; or le coût final de l'instrument dépendra de bien d'autres paramètres, aussi important que soit celui-là. D'autre part – et nous avons une longue expérience à ce propos –, certains aspects du problème pourraient encore nous avoir échappé : une discussion – dans les détails de laquelle je ne souhaite pas entrer ici – est par exemple en cours avec notre collaborateur Ted Bunn. Celui-ci pense qu'un effet de diminution du bruit de "bunching", dû à la valeur élevée du rapport entre nombre de bolomètres et nombre de cornets dans le cas d'un interféromètre bolométrique, pourrait résulter en une amélioration de la sensibilité de l'instrument.

Quoi qu'il en soit, nous pensons qu'un interféromètre bolométrique a toutes les chances d'être *légèrement* moins sensible qu'un imageur ; cette "intuition" – *a posteriori* de cette étude ! – nous semble justifiée par le fait que la simplicité des imageurs leur assure d'utiliser optimalement l'information des photons qu'ils collectent, alors que la complexité d'un interféromètre bolométrique peut occasionner certaines pertes d'information fondamentales (comme celle due à l'effet de lissage par exemple). Ce léger handicap de sensibilité statistique pourrait cependant être largement compensé par des gains en terme de contrôle des effets systématiques : c'est en tout cas l'audacieux pari du projet QUBIC. Nous devons toutefois préciser, pour être honnêtes, que ces gains potentiels ne nous apparaissaient pas très clairement, jusqu'à récemment. Il ne faudrait pas à ce propos se faire piéger par le mot "interféromètre" : celui-ci n'a pas de vertus magiques... Les interféromètres hétérodynes et bolométriques sont des instruments extrêmement différents, et les nombreuses procédures de modulation post-amplification qui font la force des premiers ne se retrouvent par exemple pas dans les seconds ; la méthode d'auto-calibration mise à jour au chapitre 10 nous semble en revanche constituer un argument particulièrement convaincant en faveur de l'interférométrie bolométrique.

## Chapitre 9

# Estimation des spectres de puissance à partir des visibilités

---

Nous décrivons ici une étape plus classique de l'analyse de données : l'estimation des spectres de puissance angulaire des anisotropies de température et de polarisation du CMB à partir du jeu de visibilités mesurées par un interféromètre (hétérodyne ou bolométrique). Ce travail a été effectué en collaboration avec Jean-Christophe Hamilton, Jean Kaplan et Ted Bunn.

---

Nous avons montré au chapitre 5 comment il était possible de "reconstruire", par résolution d'un système linéaire, le jeu de visibilités de Stokes à partir des mesures ordonnées en temps d'un interféromètre bolométrique. L'étape suivante – décrite dans ce chapitre – consiste naturellement à estimer les spectres de puissance par bandes de multipôles, à partir de ce jeu de visibilités reconstruites. Des méthodes de maximum de vraisemblance *brute-force* peuvent à cette fin être envisagées : leur coût computationnel reste très acceptable en interférométrie, où le nombre de visibilités est bien moins important que le nombre de pixels requis pour une expérience d'imagerie visant aux mêmes objectifs scientifiques (pour QUBIC, l'ordre de grandeur du nombre de lignes de base "utiles" pour un champ de ciel fixe, correspondant à des multipôles  $50 < l < 150$ , est par exemple en  $O(10^2)$ ). Cette approche a déjà été suivie dans le cadre de l'analyse des données des interféromètres hétérodynes VSA, DASI ou CBI [200, 201]. Notons que la séparation des avant-plans et la soustraction des points-sources, que nous n'aborderons pas ici, peuvent être effectuées simultanément dans le cadre de données multi-fréquentielles [201].

Nous verrons cependant que deux spécificités apparaissent dans le cas d'un interféromètre dédié à la mesure des modes B primordiaux : l'invalidation de l'approximation de ciel plat et le problème de la séparation E/B.

## 9.1 Méthodes de maximum de vraisemblance

Les méthodes d'estimation des spectres par maximum de vraisemblance développées en imagerie [153] sont aisément transposables à l'interférométrie : les données ne sont alors plus les pixels mais les visibilitées. Nous nous restreindrons ici à expliciter le formalisme permettant l'estimation des spectres de puissance polarisés  $EE$  et  $BB$  à partir du jeu de visibilitées de Stokes  $Q$  et  $U$  (le cas de l'estimation du spectre de température étant une version simplifiée de celui-ci).

### 9.1.1 Position du problème

Nous pouvons regrouper les  $N_b = N_h(N_h - 1)/2$  visibilitées (complexes) de Stokes  $Q$  et  $U$  (reconstruites grâce aux méthodes présentées au chapitre 5) en un seul vecteur

$$\vec{V} = (V_Q^0, V_Q^1, \dots, V_Q^{N_b-1}, V_U^0, V_U^1, \dots, V_U^{N_b-1}) \quad (9.1)$$

et écrire sa matrice de covariance comme

$$C = S + N, \quad (9.2)$$

où  $S$  est la matrice de covariance du signal à mesurer (le CMB) et  $N$  celle du bruit de mesure. Nous avons vérifié au chapitre 5 que cette dernière était fortement diagonale<sup>1</sup> et décrivait une distribution aléatoire gaussienne (en l'absence d'erreurs systématiques) :

$$N = \text{diag}(\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{N_b-1}^2, \sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{N_b-1}^2). \quad (9.3)$$

L'expression des  $\sigma_i^2$  est donnée par l'équation 5.63. La matrice de covariance du signal peut quant à elle être mise sous la forme

$$S = \begin{pmatrix} S_{QQ} & S_{QU} \\ S_{UQ} & S_{UU} \end{pmatrix}. \quad (9.4)$$

Nous calculerons ses coefficients  $S_{QQ}$ ,  $S_{UU}$  et  $S_{QU} = S_{UQ}$  dans la section suivante et montrerons qu'ils s'expriment en fonction des valeurs, en  $n_b$  intervalles de multipôles (de largeur  $\Delta\ell$ ), des spectres de puissance  $EE$  et  $BB$  que nous cherchons à estimer,

$$\vec{C} = (C_0^{EE}, C_1^{EE}, \dots, C_{n_b-1}^{EE}, C_0^{BB}, C_1^{BB}, \dots, C_{n_b-1}^{BB}). \quad (9.5)$$

### 9.1.2 Maximisation de la vraisemblance

La fonction de vraisemblance, i.e. la probabilité d'obtenir un jeu de visibilitées  $\vec{V}$  en supposant que le spectre de puissance réel est donné par  $\vec{C}$  s'écrit alors (nous utilisons la gaussianité du bruit de mesure) :

$$P(\vec{V} | \vec{C}) = \frac{1}{(2\pi)^{n_v}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \vec{V}^* \cdot C^{-1} \cdot \vec{V} + \text{Tr}(\ln C) \right) \right]. \quad (9.6)$$

<sup>1</sup>Si, pour des raisons de simplicité, nous nous restreindrons par la suite à examiner le cas d'une matrice de covariance parfaitement diagonale, le traitement du cas plus général d'une matrice non-diagonale ne présente pas de difficulté fondamentale.

Cette fonction de vraisemblance peut être identifiée à la probabilité postérieure du spectre de puissance  $\vec{C}$  en utilisant le théorème de Bayes et une probabilité à priori  $P(\vec{C})$  uniforme ("flat prior"). Le logarithme de cette fonction de vraisemblance est alors donné par

$$\mathcal{L}(\vec{C}) = -\frac{1}{2} \left[ \vec{V}^* \cdot C^{-1} \cdot \vec{V} + \text{Tr}(\ln C) \right]. \quad (9.7)$$

Le meilleur estimateur non biaisé du spectre de puissance (atteignant la borne de Cramer-Rao) est obtenu par recherche du maximum de cette fonction (théorème de Gauss-Markov),

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{C}} \right|_{\vec{C}=\vec{C}_{true}} = 0. \quad (9.8)$$

La solution de cette équation peut être calculée à l'aide de méthodes itératives standards (cf. par exemple [154]), où chaque itération est accomplie selon

$$\vec{C}_{i+1} = \vec{C}_i + \delta \vec{C}_i, \quad (9.9)$$

avec

$$\delta \vec{C}_i = \left[ -\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \vec{C}^2} \right|_{\vec{C}=\vec{C}_i} \right]^{-1} \cdot \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{C}} \right|_{\vec{C}=\vec{C}_i}. \quad (9.10)$$

Les dérivées première et seconde du logarithme de la fonction de vraisemblance s'expriment en fonction des valeurs des spectres de puissance :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{C}_b} = \frac{1}{2} \left( \vec{V}^* \cdot C^{-1} \cdot \frac{\partial S}{\partial \vec{C}_b} \cdot C^{-1} \cdot \vec{V} - \text{Tr} \left[ C^{-1} \cdot \frac{\partial S}{\partial \vec{C}_b} \right] \right), \quad (9.11)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \vec{C}_b \partial \vec{C}_{b'}} = -\vec{V}^* \cdot C^{-1} \cdot \frac{\partial S}{\partial \vec{C}_b} \cdot C^{-1} \cdot \frac{\partial S}{\partial \vec{C}_{b'}} \cdot C^{-1} \cdot \vec{V} + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ C^{-1} \cdot \frac{\partial S}{\partial \vec{C}_b} \cdot C^{-1} \cdot \frac{\partial S}{\partial \vec{C}_{b'}} \right]. \quad (9.12)$$

Le calcul numérique de ces termes peut constituer une difficulté inextricable lorsque le vecteur des données devient plus grand que  $O(10^3)$  (dans le cas d'expériences d'imagerie, le recours à des super-calculateurs est alors obligatoire) : dans notre cas, le nombre de visibilitées pour quelques champs fixes du ciel est typiquement en  $O(10^2)$ , ce qui permet l'application d'une telle méthode sur un ordinateur de bureau.

La matrice de covariance sur les spectres de puissance estimés est alors donnée par l'inverse de la matrice de Fisher

$$Q_{bb'} = [F_{bb'}]^{-1}, \quad (9.13)$$

où

$$F_{bb'} = \left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \vec{C}_b \partial \vec{C}_{b'}} \right\rangle = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ C^{-1} \cdot \frac{\partial S}{\partial \vec{C}_b} \cdot C^{-1} \cdot \frac{\partial S}{\partial \vec{C}_{b'}} \right]. \quad (9.14)$$

Dans notre cas, les dérivées de la matrice de covariance du signal s'expriment en fonction de fonctions fenêtres dont le calcul sera l'objet de la prochaine section :

$$\frac{\partial S}{\partial \vec{C}_b^{EE}} = \begin{pmatrix} W_b^{CC} & W_b^{SC} \\ W_b^{SC} & W_b^{SS} \end{pmatrix}, \quad (9.15)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \vec{C}_b^{BB}} = \begin{pmatrix} W_b^{SS} & -W_b^{SC} \\ -W_b^{SC} & W_b^{CC} \end{pmatrix}. \quad (9.16)$$

Le calcul numérique de la matrice de Fisher nous permettra ainsi d'examiner en section 9.3 le niveau d'erreur attendu sur l'estimation des spectres de puissance par méthode de maximum de vraisemblance à partir des données d'un interféromètre bolométrique (nous vérifierons la compatibilité de ces résultats avec ceux du chapitre 8).

## 9.2 Calcul des fonctions fenêtres

### 9.2.1 Matrice de covariance des visibilitées dans l'approximation de ciel plat

Nous commençons par examiner le cas (plus simple) où le faible diamètre angulaire du champ observé permet d'appliquer l'approximation de ciel plat. Nous avons vu que les visibilitées de Stokes peuvent dans ce cas être exprimées comme les convolutions des transformées de Fourier des paramètres de Stokes et de celles du lobe primaire (équation 4.11). Il s'en suit que ces visibilitées peuvent aussi bien s'écrire en fonction des transformées de Fourier des champs scalaires  $I(\vec{n})$ ,  $E(\vec{n})$  et  $B(\vec{n})$ ,

$$V_I(\vec{u}) = \int \tilde{I}(\vec{v}) \tilde{B}(\vec{u} - \vec{v}) d\vec{v}, \quad (9.17)$$

$$V_Q(\vec{u}) = \int \left[ \tilde{E}(\vec{v}) \cos 2\phi_v - \tilde{B}(\vec{v}) \sin 2\phi_v \right] \tilde{B}(\vec{u} - \vec{v}) d\vec{v}, \quad (9.18)$$

$$V_U(\vec{u}) = \int \left[ \tilde{E}(\vec{v}) \sin 2\phi_v + \tilde{B}(\vec{v}) \cos 2\phi_v \right] \tilde{B}(\vec{u} - \vec{v}) d\vec{v}, \quad (9.19)$$

où  $\phi_v$  est l'angle du vecteur  $\vec{v}$  dans le référentiel, où les polarisations orthogonales sont séparées, et où  $\tilde{B}(\vec{u})$  représente la transformée de Fourier du lobe<sup>2</sup> dans le cas d'un interféromètre opérant en bande spectrale étroite ; le cas d'un interféromètre large bande se généralise facilement en substituant dans ces équations et dans toutes celles qui suivent le noyau de convolution introduit au chapitre 6.

Nous pouvons alors utiliser la série d'équations 3.46 à 3.51 afin d'obtenir l'expression de la matrice de covariance des visibilitées de Stokes en fonction des spectres de puissance angulaire :

$$\langle V_I(\vec{u}_i) V_I^*(\vec{u}_{i'}) \rangle = \int C^{TT}(w) \tilde{B}(\vec{u}_i - \vec{w}) \tilde{B}^*(\vec{u}_{i'} - \vec{w}) d\vec{w}, \quad (9.20)$$

$$\langle V_I(\vec{u}_i) V_Q^*(\vec{u}_{i'}) \rangle = \int C^{TE}(w) \cos(2\phi_w) \tilde{B}(\vec{u}_i - \vec{w}) \tilde{B}^*(\vec{u}_{i'} - \vec{w}) d\vec{w}, \quad (9.21)$$

$$\langle V_I(\vec{u}_i) V_U^*(\vec{u}_{i'}) \rangle = \int C^{TE}(w) \sin(2\phi_w) \tilde{B}(\vec{u}_i - \vec{w}) \tilde{B}^*(\vec{u}_{i'} - \vec{w}) d\vec{w}, \quad (9.22)$$

$$\langle V_Q(\vec{u}_i) V_Q^*(\vec{u}_{i'}) \rangle = \int [C^{EE}(w) \cos^2(2\phi_w) + C^{BB}(w) \sin^2(2\phi_w)] \tilde{B}(\vec{u}_i - \vec{w}) \tilde{B}^*(\vec{u}_{i'} - \vec{w}) d\vec{w} \quad (9.23)$$

$$\langle V_U(\vec{u}_i) V_U^*(\vec{u}_{i'}) \rangle = \int [C^{EE}(w) \sin^2(2\phi_w) + C^{BB}(w) \cos^2(2\phi_w)] \tilde{B}(\vec{u}_i - \vec{w}) \tilde{B}^*(\vec{u}_{i'} - \vec{w}) d\vec{w} \quad (9.24)$$

$$\langle V_Q(\vec{u}_i) V_U^*(\vec{u}_{i'}) \rangle = \int [C^{EE}(w) - C^{BB}(w)] \cos(2\phi_w) \sin(2\phi_w) \tilde{B}(\vec{u}_i - \vec{w}) \tilde{B}^*(\vec{u}_{i'} - \vec{w}) d\vec{w}, \quad (9.25)$$

$$= \langle V_U(\vec{u}_i) V_Q^*(\vec{u}_{i'}) \rangle. \quad (9.26)$$

### 9.2.2 Expressions analytiques des fonctions fenêtres

Si nous supposons les spectres de puissance constants sur des intervalles de largeur  $\Delta w$ , i.e.  $l(l+1)C^{XX}(w) \simeq l(l+1)C_p^{XX}$  pour  $w \in [w_p - \frac{\Delta w}{2}, w_p + \frac{\Delta w}{2}]$ , alors nous pouvons écrire

<sup>2</sup>Le lecteur excusera le télescopage des notations de lobe et de champ  $B(\vec{n})$ .

la matrice de covariance du signal comme une combinaison linéaire des valeurs des spectres de puissance angulaire à estimer dans chaque intervalle<sup>3</sup> :

$$\langle V_I(\vec{u}_i) V_I^*(\vec{u}_{i'}) \rangle = \sum_p C_p^{TT} W_{ii',p}, \quad (9.27)$$

$$\langle V_I(\vec{u}_i) V_Q^*(\vec{u}_{i'}) \rangle = \sum_p C_p^{TE} W_{ii',p}^C, \quad (9.28)$$

$$\langle V_I(\vec{u}_i) V_U^*(\vec{u}_{i'}) \rangle = \sum_p C_p^{TE} W_{ii',p}^S, \quad (9.29)$$

$$\langle V_Q(\vec{u}_i) V_Q^*(\vec{u}_{i'}) \rangle = \sum_p [C_p^{EE} W_{ii',p}^{CC} + C_p^{BB} W_{ii',p}^{SS}], \quad (9.30)$$

$$\langle V_U(\vec{u}_i) V_U^*(\vec{u}_{i'}) \rangle = \sum_p [C_p^{EE} W_{ii',p}^{SS} + C_p^{BB} W_{ii',p}^{CC}], \quad (9.31)$$

$$\langle V_Q(\vec{u}_i) V_U^*(\vec{u}_{i'}) \rangle = \sum_p [C_p^{EE} - C_p^{BB}] W_{ii',p}^{CS}, \quad (9.32)$$

$$= \langle V_U(\vec{u}_i) V_Q^*(\vec{u}_{i'}) \rangle. \quad (9.33)$$

Les coefficients de ces combinaisons linéaires sont les *fonctions fenêtres* que nous cherchons à calculer :

$$W_{ii',p} = \int_{w_p - \frac{\Delta w}{2} \leq \|\vec{w}\| \leq w_p + \frac{\Delta w}{2}} \tilde{B}(\vec{u}_i - \vec{w}) \tilde{B}^*(\vec{u}_{i'} - \vec{w}) d\vec{w}, \quad (9.34)$$

$$W_{ii',p}^C = \int_{w_p - \frac{\Delta w}{2} \leq \|\vec{w}\| \leq w_p + \frac{\Delta w}{2}} \cos(2\phi_w) \tilde{B}(\vec{u}_i - \vec{w}) \tilde{B}^*(\vec{u}_{i'} - \vec{w}) d\vec{w}, \quad (9.35)$$

$$W_{ii',p}^S = \int_{w_p - \frac{\Delta w}{2} \leq \|\vec{w}\| \leq w_p + \frac{\Delta w}{2}} \sin(2\phi_w) \tilde{B}(\vec{u}_i - \vec{w}) \tilde{B}^*(\vec{u}_{i'} - \vec{w}) d\vec{w}, \quad (9.36)$$

$$W_{ii',p}^{CC} = \int_{w_p - \frac{\Delta w}{2} \leq \|\vec{w}\| \leq w_p + \frac{\Delta w}{2}} \cos^2(2\phi_w) \tilde{B}(\vec{u}_i - \vec{w}) \tilde{B}^*(\vec{u}_{i'} - \vec{w}) d\vec{w}, \quad (9.37)$$

$$W_{ii',p}^{SS} = \int_{w_p - \frac{\Delta w}{2} \leq \|\vec{w}\| \leq w_p + \frac{\Delta w}{2}} \sin^2(2\phi_w) \tilde{B}(\vec{u}_i - \vec{w}) \tilde{B}^*(\vec{u}_{i'} - \vec{w}) d\vec{w}, \quad (9.38)$$

$$W_{ii',p}^{CS} = \int_{w_p - \frac{\Delta w}{2} \leq \|\vec{w}\| \leq w_p + \frac{\Delta w}{2}} \cos(2\phi_w) \sin(2\phi_w) \tilde{B}(\vec{u}_i - \vec{w}) \tilde{B}^*(\vec{u}_{i'} - \vec{w}) d\vec{w}. \quad (9.39)$$

### 9.2.3 Intégration numérique

Ces fonctions fenêtres, dans l'approximation de ciel plat, ne sont ainsi rien d'autre que l'intégrale sur des couronnes du produit des transformées de Fourier des lobes effectifs centrés sur les deux lignes de base considérées ; rappelons que ces lobes effectifs sont simplement le lobe primaire des cornets dans le cas d'un instrument de bande spectrale mince, et sont donnés par l'équation 6.8 dans le cas d'un instrument large bande.

Dans le cadre de cette étude, nous n'avons pas considéré l'effet de largeur de bande pour des raisons de simplicité (le coût computationnel de leur calcul numérique est considérablement accru

<sup>3</sup> Afin de simplifier les notations nous omettons d'écrire les facteurs  $l(l+1)$  dans tout ce qui suit.

puisque la déformation du lobe par effet de lissage dépend de la ligne de base considérée...). Nous avons suivi la procédure d'intégration numérique suivante :

1. Nous calculons la transformée de Fourier d'une carte de lobe (gaussien) sur-échantillonnée
2. La carte obtenue est alors centrée sur l'ensemble des points du plan-uv considérés (i.e. l'ensemble des lignes de base).
3. Nous choisissons un nombre d'intervalles pour l'estimation des spectres et effectuons alors l'intégration des fonctions fenêtres dans chaque couronne (par simple sommation des pixels).

Il n'est en réalité pas nécessaire de calculer les  $N_b^2$  fonctions fenêtres car celles mettant en jeu des lignes de base éloignées de plus de quelques  $\sigma_u$  dans le plan-uv sont nulles (pour un lobe gaussien de 15 degrés FWHM,  $\sigma_u = \frac{1}{2\pi\sigma} \simeq 1.43$ ).

### 9.2.4 Lobe primaire gaussien et intégration semi-analytique

Dans le cas d'une étude simplifiée comme celle-ci – dont l'objectif n'est pas l'estimation à partir de vraies données des spectres de puissance, mais bien l'étude de la sensibilité potentielle de l'instrument – une méthode d'intégration semi-analytique permet un calcul plus rapide de ces fonctions fenêtres. La partie radiale de l'intégrale peut en effet être effectuée analytiquement dans le cas d'un lobe primaire parfaitement gaussien ; il est possible de montrer que :

$$\int \tilde{B}(\vec{u} - \vec{w}) \tilde{B}^*(\vec{u}' - \vec{w}) d\vec{w} = \Omega^2 \int_0^{2\pi} K(\theta) d\theta, \quad (9.40)$$

où  $K(\theta)$  est donné par

$$K(\theta) = J(\theta) \exp \left[ -2\pi\Omega \left( \frac{\alpha_0^2 + \alpha_1^2}{2} - g(\theta)^2 \right) \right], \quad (9.41)$$

$$J(\theta) = \frac{1}{4\pi\Omega} \left[ \exp \left( -2\pi\Omega (a - g(\theta))^2 \right) - \exp \left( -2\pi\Omega (b - g(\theta))^2 \right) \right] \quad (9.42)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2\Omega}} g(\theta) \left[ \operatorname{erf} \left( \sqrt{2\pi\Omega} (b - g(\theta)) \right) - \operatorname{erf} \left( \sqrt{2\pi\Omega} (a - g(\theta)) \right) \right], \quad (9.43)$$

$$g(\theta) = \frac{\alpha_0 \cos(\theta - \theta_0) + \alpha_1 \cos(\theta - \theta_1)}{2}, \quad (9.44)$$

où  $(\alpha_0, \theta_0)$  et  $(\alpha_1, \theta_1)$  sont respectivement les coordonnées radiales de  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$ , et où  $a = w_p - \frac{\Delta w}{2}$  et  $b = w_p + \frac{\Delta w}{2}$ . Les fonctions fenêtres peuvent alors être obtenues grâce aux intégrales angulaires suivantes :

$$W_{ii',p} = \Omega^2 \int_0^{2\pi} K(\theta) d\theta, \quad (9.45)$$

$$W_{ii',p}^C = \Omega^2 \int_0^{2\pi} K(\theta) \cos(2\theta) d\theta, \quad (9.46)$$

$$W_{ii',p}^S = \Omega^2 \int_0^{2\pi} K(\theta) \sin(2\theta) d\theta, \quad (9.47)$$

$$W_{ii',p}^{CC} = \Omega^2 \int_0^{2\pi} K(\theta) \cos^2(2\theta) d\theta, \quad (9.48)$$

$$W_{ii',p}^{SS} = \Omega^2 \int_0^{2\pi} K(\theta) \sin^2(2\theta) d\theta, \quad (9.49)$$

$$W_{ii',p}^{CS} = \Omega^2 \int_0^{2\pi} K(\theta) \cos(2\theta) \sin(2\theta) d\theta. \quad (9.50)$$

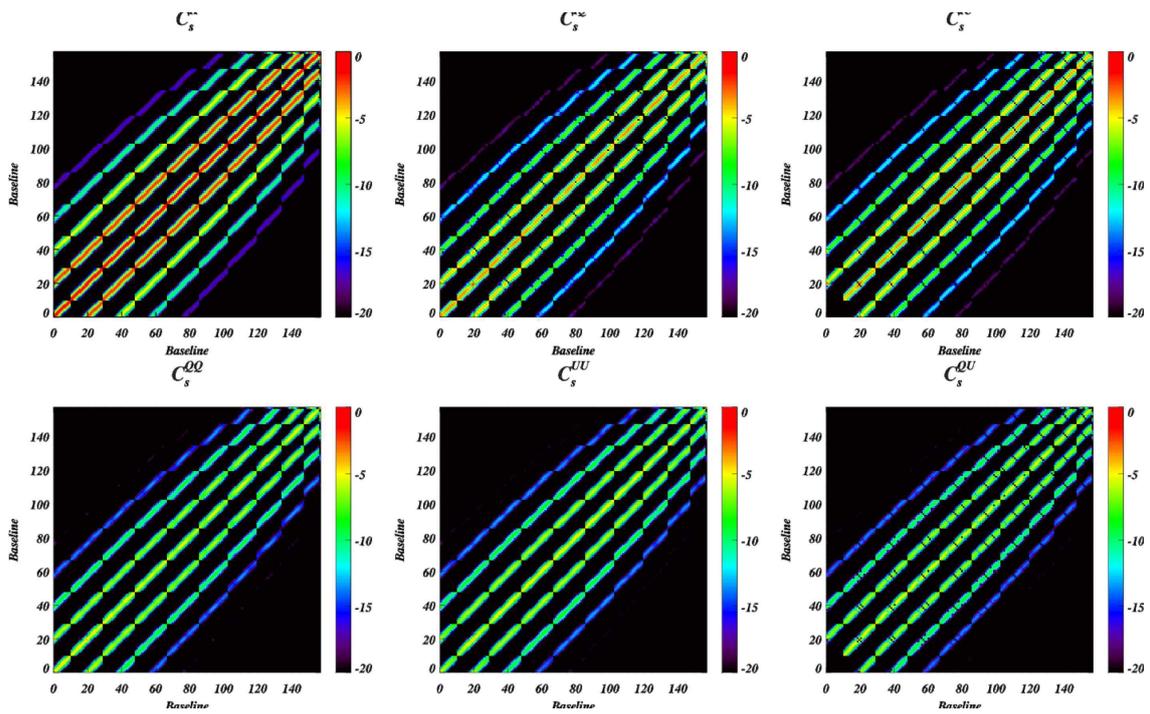


FIG. 9.1: Matrices de covariance du signal ( $S_{TT}$ ,  $S_{TQ}$ ,  $S_{TU}$ ,  $S_{QQ}$ ,  $S_{UU}$ ,  $S_{QU}$ ) calculées par intégration numérique des fonctions fenêtres.

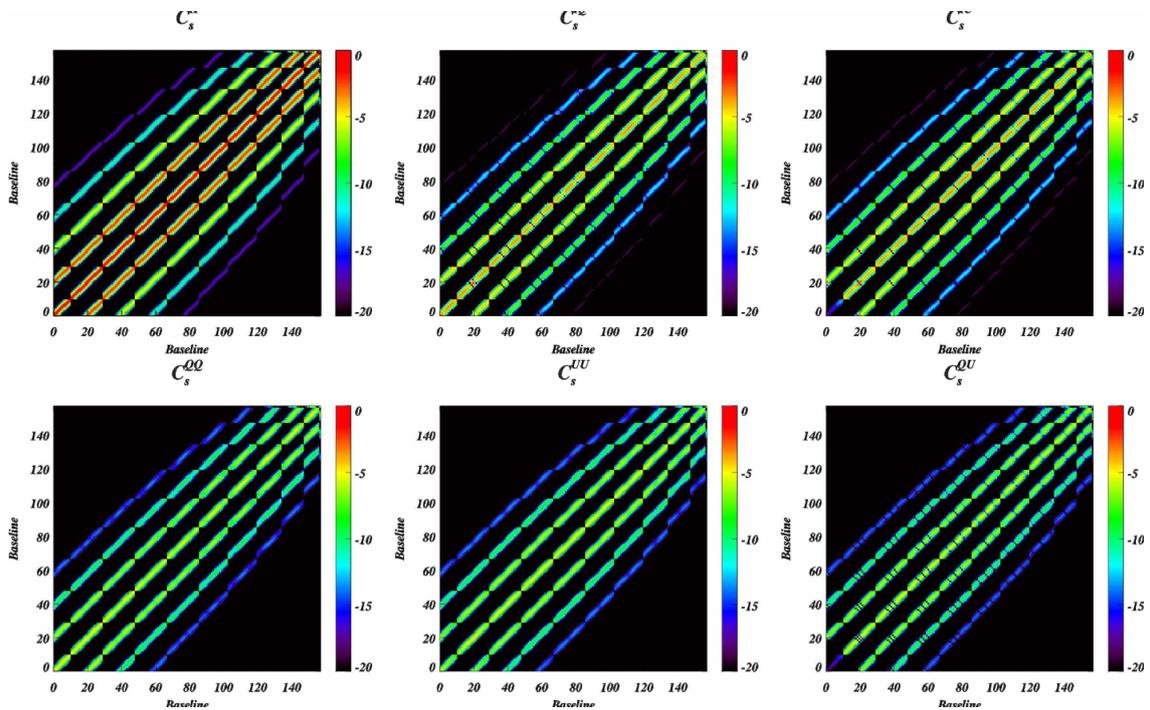


FIG. 9.2: Matrices de covariance du signal ( $S_{TT}$ ,  $S_{TQ}$ ,  $S_{TU}$ ,  $S_{QQ}$ ,  $S_{UU}$ ,  $S_{QU}$ ) calculées par intégration semi-analytique des fonctions fenêtres.

Les figures 9.1 et 9.2 représentent les matrices de covariance du signal obtenues respectivement après calcul numérique et calcul semi-analytique des fonctions fenêtres : leur comparaison

démontre la validité de l'approche semi-analytique.

### 9.2.5 Au-delà de l'approximation de ciel plat...

La taille du lobe primaire permettant à un interféromètre d'observer les modes B primordiaux invalide partiellement l'approximation de ciel plat effectuée dans ce qui précède : un lobe de  $\sim 14^\circ$  est typiquement requis pour sonder des multipôles  $\ell \sim 100$ . Nous dérivons dans ce qui suit les expressions exactes (i.e. en dehors de cette approximation) des fonctions fenêtres qui devraient être calculées pour l'analyse des données d'un interféromètre muni d'un tel lobe primaire.

La décomposition en harmonique sphérique du champ de température (équation 3.4) conduit à l'expression suivante des visibilitées d'intensité :

$$V_I(\vec{u}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}^T \int e^{i2\pi\vec{u}\cdot\vec{n}} B(\vec{n}) Y_{lm}(\vec{n}) d\vec{n}. \quad (9.51)$$

Les relations de fermeture des coefficients  $a_{lm}^T$  nous permettent alors d'écrire la matrice de covariance du signal non polarisé sous la forme désirée,

$$(S_{TT})_{ii'} = \langle V_I(\vec{u}_i) V_I^*(\vec{u}_{i'}) \rangle = \sum_p C_p^{TT} \overline{W}_{ii',p}, \quad (9.52)$$

où l'expression des fonctions fenêtres est donnée par

$$\overline{W}_{ii',p} = \sum_{l=l_p-\Delta l/2}^{l_p+\Delta l/2} \sum_{m=-l}^l \iint e^{i2\pi\vec{u}_i\cdot\vec{n}} e^{-i2\pi\vec{u}_{i'}\cdot\vec{n}'} B(\vec{n}) B^*(\vec{n}') Y_{lm}(\vec{n}) Y_{lm}^*(\vec{n}') d\vec{n} d\vec{n}'. \quad (9.53)$$

Les fonctions sinusoïdales peuvent être décomposées sur la base des harmoniques sphériques,

$$e^{i2\pi\vec{u}_i\cdot\vec{n}} = 4\pi \sum_{L,M} i^L j_L(2\pi u_i) Y_{LM}(\vec{u}_i) Y_{LM}^*(\vec{n}), \quad (9.54)$$

où les  $j_L(2\pi u_i)$  sont les fonctions de Bessel sphériques. Ceci permet d'obtenir l'expression suivante des fonctions fenêtres, peut-être plus intéressante en vue d'une intégration numérique :

$$\overline{W}_{ii',p} = \omega_{ii'} \sum_{l=l_p-\Delta l/2}^{l_p+\Delta l/2} \sum_{m=-l}^l \int B(\vec{n}) Y_{LM}^*(\vec{n}) Y_{lm}(\vec{n}) d\vec{n} \int B^*(\vec{n}') Y_{L'M'}(\vec{n}') Y_{lm}^*(\vec{n}') d\vec{n}', \quad (9.55)$$

où nous avons introduit

$$\omega_{ii'} = (4\pi)^2 \sum_{L,M} \sum_{L',M'} i^{L-L'} j_L(2\pi u_i) j_{L'}(2\pi u_{i'}) Y_{LM}(\vec{u}_i) Y_{L'M'}^*(\vec{u}_{i'}). \quad (9.56)$$

Les fonctions de Bessel sphériques possèdent l'intéressante propriété de s'éteindre rapidement quand  $L > 2\pi|\vec{u}|$  : le coût computationnel du calcul des sommes sur  $L$  et  $L'$  s'en trouve ainsi réduit.

Le cas polarisé est un peu plus subtil, puisqu'il implique des harmoniques sphériques de spin 2. Nous commençons par définir les visibilitées polarisées associées  $V_+(\vec{u})$  et  $V_-(\vec{u})$ , telles que ( $\epsilon = \pm 1$ ) :

$$V_\epsilon(\vec{u}) = V_Q(\vec{u}) + i\epsilon V_U(\vec{u}) = \int e^{i2\pi\vec{u}\cdot\vec{n}} B(\vec{n}) [Q(\vec{n}) + i\epsilon U(\vec{n})] d\vec{n}. \quad (9.57)$$

La décomposition en harmonique sphérique de spin 2 de la quantité tensorielle  $Q(\vec{n}) + i\epsilon U(\vec{n})$  (équation 3.41) conduit alors à l'expression suivante

$$V_\epsilon(\vec{u}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}^{\epsilon 2} \int e^{i2\pi\vec{u}\cdot\vec{n}} B(\vec{n}) {}_{\epsilon 2}Y_{lm}(\vec{n}) d\vec{n}. \quad (9.58)$$

Les relations de fermetures des coefficients  $a_{lm}^E$  et  $a_{lm}^B$  nous permettent d'écrire

$$\langle [Q(\vec{n}) + i\epsilon U(\vec{n})] [Q(\vec{n}') + i\epsilon' U(\vec{n}')] \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (C_l^{EE} + \epsilon\epsilon' C_l^{BB}) {}_{\epsilon 2}Y_{lm}(\vec{n}) {}_{\epsilon' 2}Y_{lm}^*(\vec{n}'). \quad (9.59)$$

Nous pouvons ainsi exprimer la matrice de covariance du signal polarisé sous la forme désirée,

$$\langle V_\epsilon(\vec{u}_i) V_{\epsilon'}^*(\vec{u}_{i'}) \rangle = \sum_p (C_p^{EE} + \epsilon\epsilon' C_p^{BB}), \overline{W}_{ii',p}^{\epsilon\epsilon'} \quad (9.60)$$

où l'expression des fonction fenêtres est donnée par (comme précédemment, nous développons les fonctions sinusoidales sur la base des harmoniques sphériques) :

$$\overline{W}_{ii',p}^{\epsilon\epsilon'} = \omega_{ii'} \sum_{l=l_p-\Delta l/2}^{l_p+\Delta l/2} \sum_{m=-l}^l \int B(\vec{n}) Y_{LM}^*(\vec{n}) {}_{\epsilon 2}Y_{lm}(\vec{n}) d\vec{n} \int B^*(\vec{n}') Y_{L'M'}(\vec{n}') {}_{\epsilon' 2}Y_{lm}^*(\vec{n}') d\vec{n}' \quad (9.61)$$

avec

$$\omega_{ii'} = (4\pi)^2 \sum_{L,M} \sum_{L',M'} i^{L-L'} j_L(2\pi u_i) j_{L'}(2\pi u_{i'}) Y_{LM}(\vec{u}_i) Y_{L'M'}^*(\vec{u}_{i'}). \quad (9.62)$$

S'il est ainsi aisé d'écrire les expressions des fonctions fenêtres en dehors de l'approximation de ciel plat, le coût computationnel de l'intégration numérique de l'équation 9.61 rend difficile leur calcul avec des ordinateurs de bureau (celui-ci étant par ailleurs envisageable avec des supercalculateurs). La mise à jour d'approximations ou simplifications mathématiques conduisant à la réduction de ce coût se révélerait donc d'une grande utilité.

### 9.3 Erreurs obtenues sur les spectres de puissance

Nous nous replaçons dans ce qui suit dans le cadre de l'approximation de ciel plat – pour les raisons de coût computationnel évoquées ci-dessus. Nous estimons le niveau d'erreur sur les spectres de puissance reconstruits, en suivant la procédure suivante :

1. Génération des spectres théoriques pour différentes valeurs du rapport tenseur sur scalaire.
2. Calcul des fonctions fenêtres (numérique ou semi-analytique).
3. Calcul des matrices de covariance du signal à partir des équations 9.27 à 9.32.

4. Calcul et inversion de la matrice de Fisher ; les barres d'erreurs sur les spectres de puissance sont obtenues à partir des éléments diagonaux (nous pouvons vérifier que les éléments non diagonaux sont largement sous-dominants).

Nous choisissons d'estimer les erreurs de reconstruction en 6 intervalles de largeur  $\Delta\ell = 25$  compris entre  $\ell_{min} = 50$  et  $\ell_{max} = 200$ .

La figure 9.3 montre les résultats obtenus avec un interféromètre (144 cornets) observant un champ fixe (durant un temps infini), pour un rapport tenseur sur scalaire  $r = 0.01$ . L'erreur obtenue par inversion de la matrice de Fisher est bien supérieure à la variance d'échantillonnage prédite en utilisant la formule analytique équivalente à celle de Knox donnée au chapitre 8 ; un certain temps nous a été nécessaire pour comprendre que ce niveau trop élevé provenait d'une fuite de la variance d'échantillonnage des modes E vers les modes B (si l'estimation des spectres à partir d'une technique de maximum de vraisemblance garantit *fondamentalement* la meilleure séparation E/B, encore faut-il que cette séparation soit intrinsèquement possible à partir des données examinées...). Ce problème est ainsi résolu par un meilleur échantillonnage du plan-uv. La figure 9.4 montre les résultats obtenus pour le même instrument observant le même champ selon 4 orientations différentes ; la variance donnée par l'inverse de la matrice de Fisher est alors très proche de la variance nominale prédite au chapitre 8. Cet enseignement capital devra bien sûr être pris en compte lors de la définition de la stratégie d'observation de l'instrument QUBIC.

Le travail effectué dans ce chapitre démontre ainsi la possibilité d'estimer les spectres de puissances avec la sensibilité nominale dérivée au chapitre 8 ; ajoutons qu'il est cependant probablement rendu obsolète par le nouveau programme que nous proposerons au chapitre 13 (selon lequel nous envisageons d'estimer les spectres de puissance directement à partir des images synthétiques sans passer par l'étape de reconstruction des visibilités).

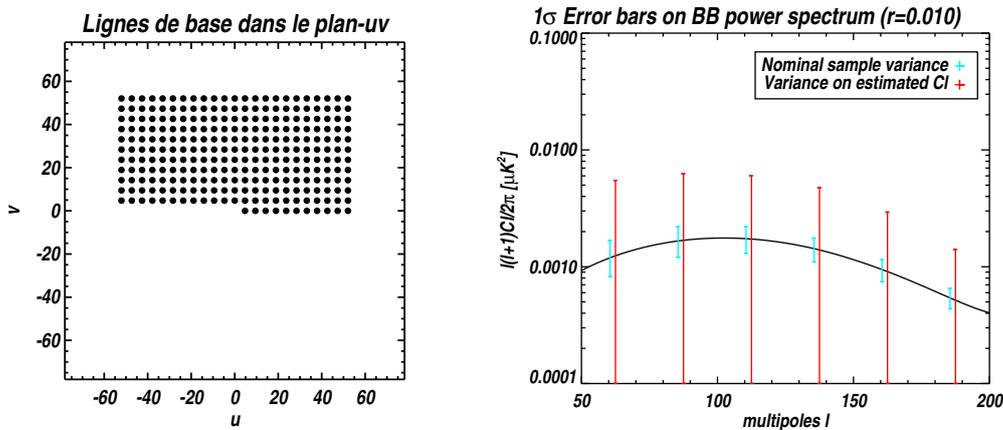


FIG. 9.3: Sensibilité au spectre de puissance  $C_l^{BB}$  (rapport tenseur sur scalaire  $r = 0.01$ ) d'un interféromètre observant un champ fixe avec 144 cornets de lobe gaussien (14 degrés FWHM) durant un temps infini : la distribution des lignes de base dans le plan-uv est représentée à gauche. Les barres d'erreurs bleues donnent la sensibilité nominale attendue selon la formule analytique du chapitre 8 (le bruit statistique de mesure étant nul, l'erreur est uniquement dûe à la variance d'échantillonnage); les barres d'erreurs rouges indiquent la variance obtenue par estimation des spectres selon la méthode de maximum de vraisemblance explicitée dans ce chapitre.

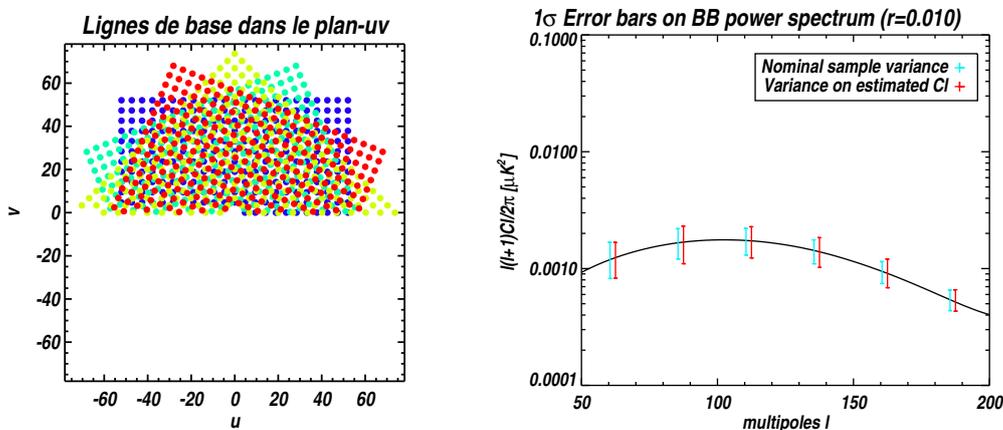


FIG. 9.4: Sensibilité au spectre de puissance  $C_l^{BB}$  (rapport tenseur sur scalaire  $r = 0.01$ ) d'un interféromètre observant le même champ selon 4 orientations différentes avec 144 cornets de lobe gaussien (14 degrés FWHM) durant un temps infini : la distribution des lignes de base dans le plan-uv est représentée à gauche. Les barres d'erreurs bleues donnent la sensibilité nominale attendue selon la formule analytique du chapitre 8 (le bruit statistique de mesure étant nul, l'erreur est uniquement dûe à la variance d'échantillonnage); les barres d'erreurs rouges indiquent la variance obtenue par estimation des spectres selon la méthode de maximum de vraisemblance explicitée dans ce chapitre.



## Chapitre 10

# Auto-calibration grâce aux lignes de base redondantes et contrôle des effets systématiques

---

Nous introduisons dans ce chapitre une procédure d'auto-calibration, s'appuyant sur le haut degré de redondance de la distribution de cornets en interférométrie bolométrique. Cette technique, très spécifique aux interféromètres, permet un contrôle sans équivalent des effets systématiques instrumentaux (erreurs de gain, de phase ou de couplage entre les polarisations). Nous décrivons analytiquement le problème et démontrons l'efficacité de notre méthode à l'aide d'une simulation numérique. Nous pensons que celle-ci est amenée à devenir un argument majeur en faveur de l'interférométrie bolométrique. Ce travail, effectué en collaboration avec Jean-Christophe Hamilton, Georges Zahariade et Jean Kaplan fera certainement l'objet d'une future publication.

---

D'un point de vue expérimental, la procédure que nous proposons nécessiterait une *phase d'auto-calibration* – indépendante de la *phase d'acquisition* scientifique des données – durant laquelle nous mesurerions indépendamment les  $N_h(N_h - 1)/2$  visibilités de Stokes; rappelons qu'en phase d'acquisition des données, nous ne mesurons que  $N_{\neq} \simeq 2N_h$  visibilités, afin d'atteindre une sensibilité compétitive, comme expliqué au chapitre 5. Dans l'architecture actuelle de QUBIC avec lame demi-onde en rotation (cf. chapitre 7), cela serait rendu possible par l'insertion d'interrupteurs entre chaque couple de cornets primaire-secondaire. Notre méthode s'appuie sur cette propriété cruciale selon laquelle dans un instrument idéal, les visibilités définies pour des lignes de base redondantes<sup>1</sup> seraient exactement égales entre elles; comme nous allons le voir, les légères différences mesurées permettent de caractériser complètement aussi bien les gains complexes que les couplages entre canaux polarisés. Les sources instrumentales d'erreurs systématiques pourraient ainsi en principe être contenues à un niveau arbitrairement bas.

---

<sup>1</sup>Rappelons que nous accordons exactement la même signification aux expressions "lignes de base équivalentes" et "lignes de base redondantes"; dans le reste de cette thèse, nous avons majoritairement utilisé la première; la deuxième étant plus courante en radio-interférométrie, nous la rétablissons dans ce chapitre.

## 10.1 Les procédures d'auto-calibration en interférométrie

Nous pensons utile de mettre en perspective la méthode que nous allons proposer ; elle s'inscrit dans une longue tradition de techniques dites d'auto-calibration en interférométrie optique et radio<sup>2</sup>, qui ont émergé dans les années 1970, afin de résoudre les problèmes liés aux erreurs de gain et de phase. Celles-ci sont induites soit par des effets instrumentaux, soit par des phénomènes de réfraction et de distorsion atmosphériques ; elles deviennent ainsi particulièrement importantes pour les longues lignes de base ou les hautes fréquences. Il existe bien sûr en interférométrie, des procédures de calibration standard, proches de celles utilisées en imagerie, basées sur l'observation de sources non résolues dont le flux est supposé connu. Le terme d'*auto-calibration*<sup>3</sup> fait par opposition référence à une procédure dans laquelle aucune connaissance de la source observée n'est requise (dans la plupart des cas, on utilise d'ailleurs l'objet étudié lui-même comme source pour la calibration). Insistons sur le fait que ces techniques sont très spécifiques à l'interférométrie où, comme nous allons le voir, certaines relations existent entre les différentes observables mesurées (autrement dit, toutes les observables mesurées par un interféromètre ne sont pas indépendantes).

Il faut ajouter que ces techniques sont la plupart du temps utilisées conjointement aux méthodes de déconvolution au cours de la synthèse d'image (on parle alors de *synthèse d'image hybride*). Nous donnons dans la section suivante une brève introduction à ces concepts, qui constituent un champ de recherche actif en interférométrie radio (une bonne revue est donnée par [202]). Nous verrons cependant que dans notre cas, la redondance du réseau de récepteurs simplifie particulièrement le problème.

### 10.1.1 Termes de clotûre et synthèse d'image hybride

Les techniques d'auto-calibration en radio-interférométrie se sont historiquement développées autour de l'estimation de quantités dites de clotûre de phase et d'amplitude ; celles-ci sont toujours au coeur des algorithmes de synthèse d'image hybride.

Considérons trois antennes indexées par  $i = 1, 2, 3$ . Nous associerons à chacune une erreur de phase propre  $\epsilon_i$ , si bien que la visibilité complexe mesurée par la paire de cornet  $\{i, j\}$  est donnée par

$$\tilde{V}_{ij} = V_{ij} \exp(\epsilon_j - \epsilon_i), \quad (10.1)$$

où  $V_{ij}$  est la visibilité complexe idéale que l'on mesurerait en l'absence d'erreurs de phases. La phase du produit des trois visibilités mesurées, dite *phase de clotûre* est une observable non affectée par ces erreurs, puisque

$$\tilde{V}_{12} \tilde{V}_{23} \tilde{V}_{31} = V_{12} V_{23} V_{31}. \quad (10.2)$$

Pour un jeu de quatre antennes, il est de même possible de définir une *amplitude de clotûre*, telle que

$$A_{1234} = \frac{|\tilde{V}_{12}| |\tilde{V}_{34}|}{|\tilde{V}_{13}| |\tilde{V}_{24}|} = \frac{|V_{12}| |V_{34}|}{|V_{13}| |V_{24}|}. \quad (10.3)$$

<sup>2</sup>Il pourra alors sembler étonnant au lecteur que nous ayons mis tant de temps à envisager une telle méthode ; encore une fois, il lui faudra considérer à notre décharge que les liens entre interférométrie radio et bolométrie ne nous sont pas toujours apparus aussi clairs...

<sup>3</sup>Dans la littérature, le diminutif anglais *selfcal* est souvent employé.

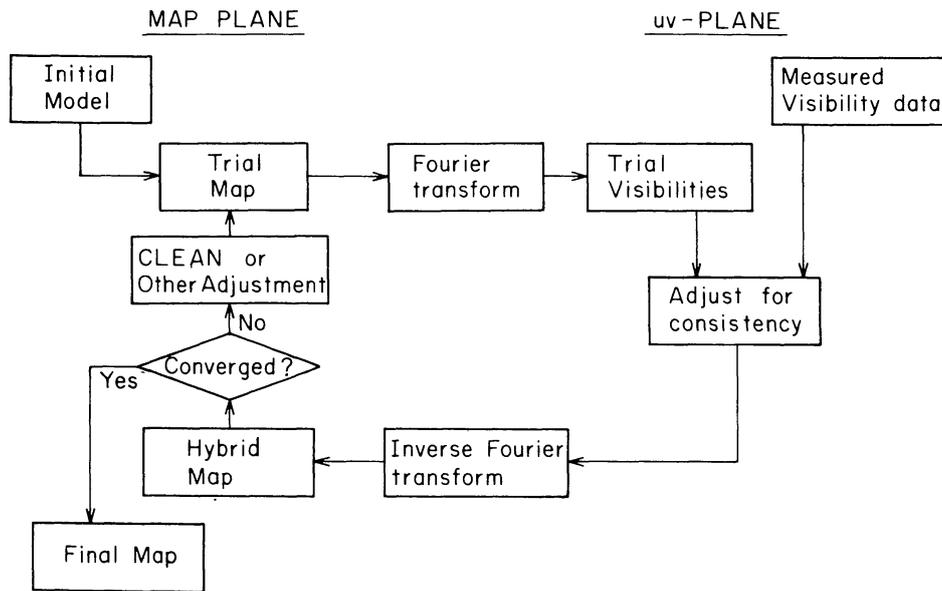


FIG. 10.1: *Algorithme itératif d'une synthèse d'image hybride. Schéma tiré de [202].*

On peut former trois amplitudes de clotûre à partir du jeu des six visibilitées définies par ces quatre antennes, mais seulement deux sont indépendantes.

Pour une distribution de  $N$  antennes affectées individuellement par des erreurs de gain et de phase, il y a  $(N - 1)(N - 2)/2$  termes de clotûre de phase et  $N(N - 3)/2$  termes de clotûre d'amplitude ; ceci nous donne  $N^2 - 3N + 1$  contraintes. Le nombre d'inconnues étant bien sûr le nombre de visibilitées idéales du champ observé  $2 \times N(N - 1)/2 = N^2 - N$ , le problème – non linéaire – est sous-déterminé (il manque  $2N - 1$  contraintes). Il peut tout de même être résolu à l'aide d'une procédure itérative de *synthèse d'image hybride* ; il en existe plusieurs versions, qui peuvent toutes plus ou moins être décrites par le schéma général de la figure 10.1 : chaque itération consiste typiquement en la série d'étapes suivantes :

1. Des visibilitées d'essai sont calculées à partir d'un modèle *supposé* du champ observé (la carte d'essai).
2. Les contraintes (données par les termes de clotûres) sont "combinées" avec les visibilitées d'essai dans le plan  $uv$ .
3. Une carte hybride est obtenue par transformée de Fourier du nouveau jeu de visibilitées.
4. Celle-ci est comparée à la carte d'essai, éventuellement modifiée par un algorithme de déconvolution, et utilisée pour générer une nouvelle carte d'essai.

Les itérations cessent dès lors que la carte hybride et la carte d'essai ne sont plus différentiables. Les variétés de techniques hybrides se différencient selon la manière dont sont effectuées les étapes 2 et 4. Une version couramment utilisée est celle développée par Readhead et Wilkinson [204] : elle consiste à générer  $2N - 1$  visibilitées à partir de la carte d'essai dans l'étape 1, et à calculer les autres en utilisant les termes de clotûres de phase et d'amplitudes mesurés dans l'étape 2. Il est montré dans [204] que ce genre d'algorithme converge assez rapidement vers la bonne solution.

### 10.1.2 Utilisation de la redondance

La redondance d'un réseau d'antenne simplifie énormément les techniques d'auto-calibration, en apportant des contraintes supplémentaires ; lorsque le nombre de lignes de base redondantes est suffisamment élevé, le nombre de contraintes devient supérieur au nombre d'inconnues (c'est typiquement le cas pour un réseau carré de plus de 10 antennes !). Il est alors possible de reconstruire l'ensemble du jeu de visibilité et de gains complexes des antennes, comme nous le verrons en 10.2.4. Les techniques d'auto-calibration tirant parti de la redondance sont ainsi reconnues comme supérieures [205] [203] [206] à celles utilisant uniquement les termes de clotures<sup>4</sup>. Elles sont toutefois très peu répandues en raison du très faible niveau de redondance de la plupart des interféromètres radios. L'objectif de ces instruments étant d'atteindre la meilleure résolution angulaire possible, la distribution d'un réseau d'antennes est conçue de sorte à obtenir le meilleur échantillonnage possible du plan-uv. Autrement dit, la redondance est avant tout synonyme de perte d'information en interférométrie radio.

### 10.1.3 L'omniscopie

Avant d'en venir au cas de l'interférométrie bolométrique, nous abordons brièvement le cas d'un nouveau type d'interféromètre, pour lequel l'utilisation potentielle de la redondance à des fins de contrôle des effets systématiques a récemment été mise en avant. Tegmark et Zaldarriaga ont proposé en 2009 le concept d'*omniscopie*, un interféromètre radio tout numérique [207, 208], qui serait dédié aux observations de la raie à 21 cm de l'hydrogène neutre<sup>5</sup>. Le traitement des signaux y serait réalisé en quatre étapes :

1. Les signaux collectés par les antennes sont acquis numériquement immédiatement après amplification.
2. La transformée de Fourier spatiale de tous les signaux est effectuée.
3. Le module au carré de cette transformée de Fourier est calculé : on obtient ainsi l'image synthétique instantanée
4. Une transformée de Fourier spatiale inverse de cette image est effectuée : on obtient ainsi le jeu de visibilité mesurées.

De notre point de vue, cet instrument peut être considéré comme une sorte d'équivalent numérique d'un interféromètre bolométrique : dans ce cas, l'étape 2 est réalisée optiquement par le combineur de faisceaux, tandis que l'étape 3 est réalisée par la mesure de puissance des bolomètres. L'objectif premier du concept d'omniscopie est de réduire le coût computationnel d'un interféromètre numérique ; dans un instrument radio traditionnel constitué de  $N$  antennes, il faut en effet effectuer toutes les corrélations entre les  $N(N - 1)/2 \sim N^2$  paires d'antennes, alors que dans le cas de l'omniscopie, le recours aux algorithmes de transformées de Fourier rapides (FFTs) permet de passer à un coût computationnel en  $N \log N$ . Seules certaines configurations bien particulières du réseau d'antennes permettent toutefois l'utilisation de FFTs (les antennes doivent être placées sur une grille) : ceci impose un haut degré de redondance à l'omniscopie, redondance qui peut être utilisée à des fins d'auto-calibration de l'instrument [209].

<sup>4</sup>Il n'y a en réalité pas d'opposition entre les deux techniques ; toute l'information des termes de cloture est implicitement utilisée dans les techniques de calibration utilisant la redondance.

<sup>5</sup>A ces fréquences (autour de 1.4 GHz), la numérisation et le traitement des signaux numérisés en temps réel est rendu possible par les progrès de l'informatique.

Dans le cas de l'interférométrie radio traditionnelle ou de l'omniscopie, où l'objectif est de calibrer les gains complexes, nous verrons en 10.2.4 qu'une astuce mathématique permet de linéariser le problème obtenu à partir des  $N(N - 1)/2$  mesures des visibilités : l'inversion de ce problème conduit alors à l'estimation simultanée des  $N$  gains complexes et des  $N_{\neq} \sim 2N$  valeurs de visibilités différentes.

## 10.2 Auto-calibration en interférométrie bolométrique

La distribution de cornets primaires d'un interféromètre bolométrique possède un haut degré de redondance ; comme nous l'avons démontré au chapitre 5, il s'agit là d'une condition absolument nécessaire à l'obtention d'une sensibilité statistique compétitive. Nous nous proposons donc de généraliser l'approche d'auto-calibration basée sur la redondance dans le cas d'un instrument sensible à la polarisation ; nous allons montrer qu'il est possible de reconstruire simultanément les coefficients des matrices de Jones décrivant les erreurs systématiques qui affectent la transmission de chaque canal polarisé (erreurs de gains complexes et de couplages) ainsi que les  $N_{\neq}$  visibilités différentes.

Nous supposons dans un premier temps que les erreurs ne proviennent pas de l'étape de reconstruction des visibilités : des aberrations optiques induites par le combineur peuvent par exemple résulter en une fuite entre des visibilités définies par des lignes de base différentes. Nous verrons en section 10.4 que notre approche peut être généralisée de manière à prendre en compte l'intégralité des erreurs systématiques de source instrumentale.

### 10.2.1 Matrice de Jones

Nous suivons [167, 168] et nous supposons qu'au premier ordre, les erreurs systématiques instrumentales peuvent être décrites par des matrices de Jones, telle que le champ électromagnétique collecté par le récepteur  $i$ , s'écrit, en raison d'erreurs instrumentales, en fonction du champ idéal

$$E_i = \begin{pmatrix} E_i^x \\ E_i^y \end{pmatrix} :$$

$$E_i' = J_i E_i. \quad (10.4)$$

Chaque matrice de Jones  $J_i$  peut être décrites sans perte de généralité en introduisant les erreurs de gains complexes et les erreurs de couplages des deux polarisations orthogonales pour chaque canal  $i$  :

$$J_i = \begin{pmatrix} 1 + g_{x,i} & \epsilon_{x,i} \\ \epsilon_{y,i} & 1 + g_{y,i} \end{pmatrix}. \quad (10.5)$$

### 10.2.2 Principe expérimental

La procédure que nous proposons nécessiterait la mise en place d'une *phase de calibration*, durant laquelle l'instrument observerait une source de calibration quelconque (la seule contrainte étant l'importance du rapport signal à bruit), et mesurerait individuellement les  $N_h(N_h - 1)/2$  visibilités définies par toutes les paires de cornets. Dans l'architecture actuelle de QUBIC avec lame demi-onde en rotation (cf. chapitre 7), cela est rendu possible par l'insertion d'interrupteurs

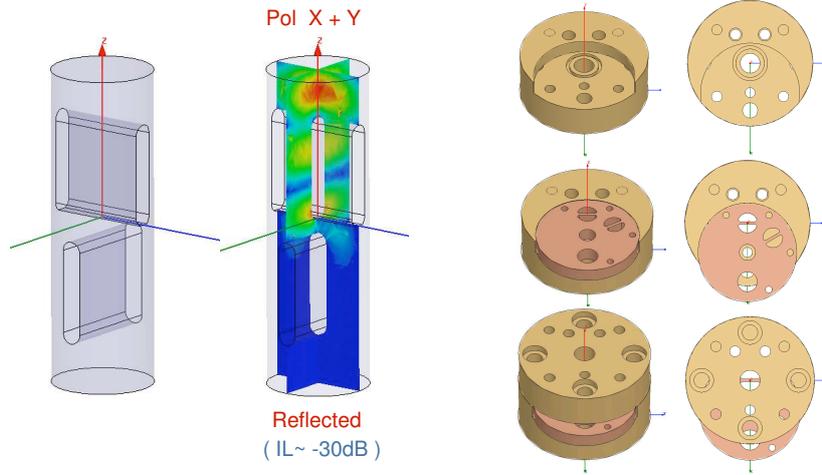


FIG. 10.2: Deux modèles d'interrupteurs polarisés réalisables en guides d'onde. Dans le premier (à gauche), deux lames métalliques orthogonales viennent couper le guide d'onde circulaire ; dans le second (à droite), le disque pivotant peut prendre quatre positions différentes : ouvert, fermé, polarisation x fermée, polarisation y fermée. Modélisations réalisées par G. Pisano pour la collaboration QUBIC.

entre chaque couple de cornets primaires et secondaires ; selon nos collaborateurs de l'Université de Manchester, de tels composants pourraient être réalisés en technologie guide d'onde par de simples lames perpendiculaires, actionnées mécaniquement, qui viendraient couper individuellement les deux polarisations. Des prototypes sont en cours de fabrication et seront bientôt testés (figure 10.2).

En phase d'acquisition des données scientifiques, tous les interrupteurs seraient ouverts, et l'instrument mesurerait uniquement les  $N_{\neq}$  visibilité différentes, afin comme nous l'avons vu au chapitre 5 d'atteindre une sensibilité statistique compétitive. Chaque visibilité différente  $V_{\beta}$  est en réalité la somme des  $N_{eq}(\beta)$  visibilité de sa classe d'équivalence,

$$V_{\beta}^X = \frac{1}{N_{eq}(\beta)} \sum_{\{i,j\} \in s_{\beta}} V_{ij}^X, \quad (10.6)$$

où nous avons introduit le vecteur des visibilité de Stokes que mesure un instrument sensible à la polarisation,

$$V_{\beta}^X = \begin{pmatrix} V_{\beta}^I \\ V_{\beta}^Q \\ V_{\beta}^U \\ V_{\beta}^V \end{pmatrix}. \quad (10.7)$$

Notons que ce vecteur peut être réduit à 2 ou 3 de ses éléments selon l'architecture envisagée.

### 10.2.3 Sur-détermination du problème

En l'absence d'erreurs systematiques, des visibilitées définies pour des lignes de base appartenant à une même classe d'équivalence  $s_\beta$  ont exactement la même valeur :

$$\forall \{i, j\} \in s_\beta, \quad V_{ij}^X = V_\beta^X. \quad (10.8)$$

Pour un instrument non-idéal en revanche, les visibilitées redondantes mesurées  $\tilde{V}_{ij}^X$  ne seront pas parfaitement identiques, en raison des erreurs de gain ou de couplage. Ainsi, les mesures effectuées en phase de calibration peuvent s'écrire comme un système de  $a \times N_h(N_h - 1)/2$  équations complexes ( $a = 2, 3, 4$  est le nombre de paramètres de Stokes mesurés par l'instrument) :

$$\tilde{V}_{ij}^X = M_{ij} \cdot V_\beta^X + n_{ij}, \quad (10.9)$$

où  $n_{ij}$  est le bruit de mesure et où les  $M_{ij}$  sont un genre de matrices de Muller complexes,

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} M_{ij}^{II} & M_{ij}^{IQ} & M_{ij}^{IU} & M_{ij}^{IV} \\ M_{ij}^{QI} & M_{ij}^{QQ} & M_{ij}^{QU} & M_{ij}^{QV} \\ M_{ij}^{UI} & M_{ij}^{UQ} & M_{ij}^{UU} & M_{ij}^{UV} \\ M_{ij}^{VI} & M_{ij}^{VQ} & M_{ij}^{VU} & M_{ij}^{VV} \end{pmatrix}. \quad (10.10)$$

Dans le cas d'un instrument idéal,  $M_{ij}$  est simplement la matrice identité.

### 10.2.4 Radio-interférométrie traditionnelle et omniscopie

Dans leurs versions standards, le radio-interféromètre et l'omniscopie ne sont pas des instruments sensibles à la polarisation. La matrice de Muller se réduit ainsi à son premier élément :

$$M_{ij} \rightarrow M_{ij}^{II} = G_i G_j, \quad (10.11)$$

où  $G_i, G_j$  sont les gains complexes associés aux antennes  $i$  et  $j$ . L'équation 10.9 peut alors facilement être ramenée à un problème linéaire par passage au logarithme,

$$v_{ij} = v_\beta + g_i + g_j, \quad (10.12)$$

où nous avons définis,

$$v_{ij} = \log |V_{ij}^I|, \quad (10.13)$$

$$v_\beta = \log |V_\beta^I|, \quad (10.14)$$

$$g_i = \log |G_i|, \quad (10.15)$$

$$g_j = \log |G_j|. \quad (10.16)$$

Pour un réseau en grille carrée de  $N \geq 8$  antennes, le problème devient sur-déterminé, puisque le nombre d'équations est donné par  $2 \times N(N - 1)/2 \sim N^2$  tandis que le nombre d'inconnues est donné par  $2N_{\neq} + 2N \sim 8N$ . Afin d'obtenir un système inversible, une contrainte de normalisation globale doit être spécifiée (la méthode ne permet naturellement qu'une calibration relative des gains) :

$$\sum_{i=0}^{N-1} g_i = 0. \quad (10.17)$$

Le passage au logarithme d'une quantité complexe complique légèrement le problème (voir [209] pour les détails).

### 10.2.5 Matrice de Muller pour un interféromètre sensible à la polarisation

Dans le cas d'un interféromètre sensible à la polarisation, les coefficients de ces matrices de Muller peuvent être écrits en fonction des paramètres des matrices de Jones ; si l'on adopte la modélisation de l'équation 10.5, l'expression au premier ordre de la matrice  $M_{ij}$  est donnée par :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 + g_{x,j}^* + g_{y,j}^* + g_{x,i} + g_{y,i} & g_{x,j}^* - g_{y,j}^* + g_{x,i} - g_{y,i} & \epsilon_{x,j}^* + \epsilon_{y,j}^* + \epsilon_{x,i} + \epsilon_{y,i} & -i \left( \epsilon_{x,j}^* - \epsilon_{y,j}^* - \epsilon_{x,i} + \epsilon_{y,i} \right) \\ g_{x,j}^* - g_{y,j}^* + g_{x,i} - g_{y,i} & 2 + g_{x,j}^* + g_{y,j}^* + g_{x,i} + g_{y,i} & \epsilon_{x,j}^* - \epsilon_{y,j}^* + \epsilon_{x,i} - \epsilon_{y,i} & -i \left( \epsilon_{x,j}^* + \epsilon_{y,j}^* - \epsilon_{x,i} - \epsilon_{y,i} \right) \\ \epsilon_{x,j}^* + \epsilon_{y,j}^* + \epsilon_{x,i} + \epsilon_{y,i} & -\epsilon_{x,j}^* + \epsilon_{y,j}^* - \epsilon_{x,i} + \epsilon_{y,i} & 2 + g_{x,j}^* + g_{y,j}^* + g_{x,i} + g_{y,i} & i \left( g_{x,j}^* - g_{y,j}^* - g_{x,i} + g_{y,i} \right) \\ -i \left( \epsilon_{x,j}^* - \epsilon_{y,j}^* - \epsilon_{x,i} + \epsilon_{y,i} \right) & i \left( \epsilon_{x,j}^* + \epsilon_{y,j}^* - \epsilon_{x,i} - \epsilon_{y,i} \right) & -i \left( g_{x,j}^* - g_{y,j}^* - g_{x,i} + g_{y,i} \right) & 2 + g_{x,j}^* + g_{y,j}^* + g_{x,i} + g_{y,i} \end{pmatrix} \quad (10.18)$$

Nous voyons que l'équation 10.9 ne peut plus être ramenée facilement à un système linéaire<sup>6</sup>. Le nombre d'inconnues est  $a \times 2N_{\neq} + 8N_h$  (nous supposons  $a = 3$  dans la suite), alors que le nombre d'équations est  $\sim N_h^2$ . Pour un réseau en grille carrée, le système est ainsi sur-déterminé pour  $N_h \geq 20$ ; les mesures effectuées en phase de calibration peuvent être utilisées pour ajuster ce modèle et estimer les inconnues (i.e. les visibilité différentes et les paramètres des matrices de Jones). De la même manière que dans le cas précédent, une contrainte de normalisation globale des gains doit être spécifiée afin que le problème n'accepte qu'une unique solution (la calibration des gains est seulement relative).

## 10.3 Résolution numérique

Nous démontrons numériquement dans cette section l'efficacité de la méthode. Le problème non linéaire est résolu à l'aide d'une méthode des moindres carrés non linéaire basée sur un algorithme de Levenberg-Marquardt (bibliothèque "MPFIT" [210]).

Nous réalisons la simulation suivante :

1. La distribution de cornets et le jeu de lignes de base associées sont générés.
2. Les cartes de température et de polarisation du CMB sont générées à partir des spectres théoriques ; les  $N_{\neq}$  visibilité idéales sont calculées à partir de ces cartes.
3. Les paramètres d'erreurs systématiques (coefficients de la matrice de Jones de l'équation 10.5) sont générés aléatoirement (distribution normale dont la variance est un paramètre fixé en entrée de la simulation).
4. Les  $N_h(N_h - 1)/2$  visibilité de Stokes corrompues sont calculées à partir de l'équation 10.9.
5. L'algorithme des moindres carrés non linéaire est utilisé pour estimer, à partir du jeu de visibilité corrompues, les  $\sim 20N_h$  paramètres du modèle ( $\sim 12N_h$  parties réelles et imaginaires des visibilité différentes +  $8N_h$  coefficients des matrices de Jones). Des valeurs initiales doivent être spécifiées pour ce genre d'algorithme itératif : nous prenons la moyenne de chaque classe d'équivalence des visibilité corrompues et nous accordons des valeurs nulles aux coefficients des matrices de Jones.

<sup>6</sup>Au premier ordre, il s'agit là d'un système bilinéaire d'équations, pour lequel il pourrait exister des méthodes de résolutions analytiques ou semi-analytiques ; le gain qu'engendrerait l'utilisation de telles méthodes par rapport à la méthode numérique que nous proposons n'est pas évident a priori.

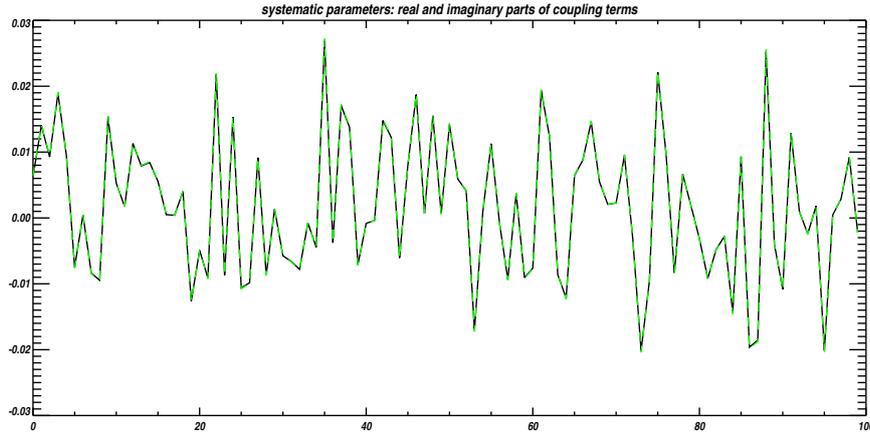


FIG. 10.3: Comparaison des termes de couplage des matrices de Jones générés (ligne noire) et reconstruits (pointillés verts). Chaque valeur correspond à la partie réelle ou imaginaire d'un coefficient  $\epsilon_{x,i}$  ou  $\epsilon_{y,i}$  ( $2 \times 2 \times N_h$  paramètres).

Nous considérons un réseau de 25 cornets primaires distribués sur une grille carrée. Nous générons des erreurs d'un niveau moyen de 1% (-20 dB) pour les paramètres de gain et de couplage. L'algorithme converge après quelques itérations (quelques minutes sur un ordinateur portable). La figure 10.3 montre que les paramètres systématiques sont parfaitement reconstruits, à un niveau de précision qui n'est limité a priori que par le rapport signal à bruit de la source observée (ici, nous avons utilisé le CMB lui-même comme source de calibration, mais nous n'avons pas bruité les données). La figure 10.4 compare les visibilités idéales, corrompues et reconstruites grâce à notre méthode : l'efficacité de celle-ci semble indiscutable.

Pour des instrument avec  $N_h$  particulièrement grand, le coût computationnel de la méthode pourrait devenir important ; mais on peut toujours envisager des applications successives de la méthode sur des sous-réseaux de cornets.

## 10.4 Prise en compte des erreurs induites par le combineur

La situation est en réalité plus complexe en interférométrie bolométrique du fait que les visibilités ne soient pas mesurées directement mais obtenues après inversion d'un système linéaire. Des aberrations optiques au plan focal du combineur pourraient par exemple constituer une source d'erreurs systématiques, non prise en compte par la méthode décrite précédemment. Nous montrons ici qu'il est possible d'étendre la procédure, de manière à déterminer une matrice de Jones par récepteur et par détecteur.

Dans l'architecture d'interféromètre bolométrique avec lame demi-onde rotative actuellement envisagée pour QUBIC, nous avons montré au chapitre 7 que la puissance mesurée par chaque détecteur polarisé s'écrivait

$$S_k(t) = S_k^I \pm \cos(4\omega t) S_k^Q \pm \sin(4\omega t) S_k^U, \quad (10.19)$$

où  $S_k^X$  sont les images synthétiques pour chaque paramètre de Stokes (images du ciel filtrées

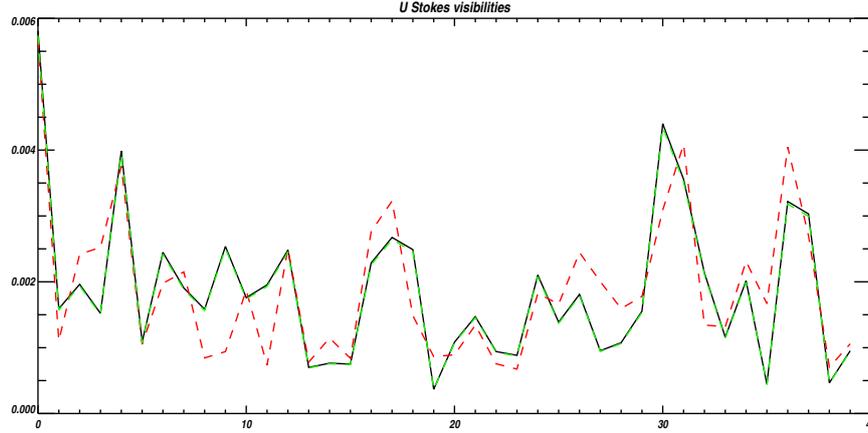


FIG. 10.4: Comparaison entre les visibilités de Stokes  $V_U$ , idéales (ligne noire), corrompues (ligne pointillée rouge) et corrigées grâce à notre méthode d'auto-calibration (ligne pointillée verte)

par les modes spatiaux définis par les lignes de base) et où les fonctions sinusoïdales modulantes sont induites par la lame demi-onde en rotation à la fréquence  $\omega$ . Après démodulation, en phase d'acquisition des données, nous avons vu que ces images synthétiques s'écrivaient comme une combinaison linéaire des visibilités :

$$S_k^X = C_k + 2\text{Re} \left[ \sum_{i,j} \alpha_{ik} \alpha_{jk}^* V_{ij}^X \right], \quad (10.20)$$

où les  $\alpha_{ik}$  sont les *coefficients de modulation*. Ils incluent les phases géométriques induites par le combineur intégrées sur la surface du bolomètre  $k$  considéré dans le plan focal, les lobes des cornets secondaires  $A_{ls}(\vec{r})$ , ainsi que le gain  $g_k^B$  du bolomètre (dont la position est repérée par  $\vec{r}_k$ ),

$$\alpha_{ik} = g_k^B \int A_{ls}(\vec{r}) \exp \left[ i2\pi \frac{\vec{r}}{f_D} \cdot \vec{x}_i \right] \Theta(\vec{r} - \vec{r}_k) d\vec{r}. \quad (10.21)$$

Des erreurs systématiques induites à n'importe quel niveau dans l'instrument peuvent être modélisées par l'attribution d'une matrice de Jones par canal et par détecteur  $J_{ik}$ , de telle sorte que les coefficients de modulation dans un instrument non idéal s'écrivent

$$\tilde{\alpha}_{ik} = J_{ik} \alpha_{ik}. \quad (10.22)$$

La puissance mesurée en phase d'auto-calibration par le bolomètre  $k$ , lorsqu'une seule ligne de base  $\{i, j\}$  est ouverte (i.e. seuls les interrupteurs  $i$  et  $j$  sont ouverts), s'écrit

$$S_{ijk}^X = C_{ik} + C_{jk} + 2\text{Re} [J_{ik} J_{jk}^* \alpha_{ik} \alpha_{jk}^* V_{ij}^X(t)], \quad (10.23)$$

où  $C_{ik}$ ,  $C_{jk}$  sont les puissances mesurées dans le cas où seul l'interrupteur  $i$  ou  $j$  est ouvert. Les nombres d'inconnues et d'équations sont ainsi  $N_{out}$  fois<sup>7</sup> plus élevés que dans le cas considéré en section 10.2, mais le problème reste sur-déterminé. La phase d'auto-calibration permet ainsi de caractériser intégralement un interféromètre bolométrique par la mesure des  $N_{out} \times N_{\neq}$  coefficients de modulations non idéaux !

<sup>7</sup>Rappelons que  $N_{out}$  est le nombre de détecteurs de l'instrument.

## 10.5 Discussion

Nous avons expliqué au chapitre 4 que l'interférométrie bolométrique se distinguait fortement de l'interférométrie radio, dans la mesure où son objectif n'est pas la résolution angulaire mais la sensibilité et le contrôle des systématiques. Nous avons montré aux chapitres 5 et 8 que cet objectif de sensibilité ne pouvait être atteint que si la distribution des cornets primaires possédait un haut degré de redondance.

Nous venons de montrer dans ce chapitre que cette redondance rend possible une procédure d'auto-calibration particulièrement puissante ; celle-ci permet en principe un contrôle des sources instrumentales d'erreurs systématiques à un niveau de précision arbitrairement élevé. En pratique, celui-ci sera ultimement limité par les performances instrumentales des interrupteurs et le temps consacré à la phase d'auto-calibration ; une prochaine étape de cette étude sera d'établir une relation directe entre ces quantités expérimentales et le niveau de précision atteint par la calibration.

Ajoutons qu'une telle procédure d'auto-calibration est envisageable pour tout interféromètre futur – hétérodyne ou bolométrique – dédié à la mesure de la polarisation du CMB à partir du moment où celui-ci posséderait un haut degré de redondance (ce n'était pas le cas des précédents interféromètres hétérodynes CMB).



# Chapitre 11

## Participation à l'analyse de données MBI-4

---

La collaboration MBI (cf. chapitre 4) a développé un prototype d'interféromètre bolométrique à combineur de faisceaux quasi-optique. Dans le cadre du rapprochement des collaborations BRAIN et MBI, Jean-Christophe Hamilton, Michel Piat et moi-même avons pu participer à l'analyse des données de la dernière campagne d'observations réalisées avec l'instrument MBI-4. La collaboration MBI a gracieusement accepté que nous présentions dans cette thèse quelques résultats préliminaires.

---

### 11.1 Le prototype MBI-4

L'instrument MBI-4 est un interféromètre bolométrique constitué de 4 couples de cornets primaires-secondaires (cf. [4, 5] et figure 11.1). Ces cornets ont un lobe gaussien de largeur à mi-hauteur  $\sim 7^\circ$ . Des polariseurs et des déphaseurs basés sur la rotation Faraday (capables de déphaser le signal à  $\pm 90^\circ$ ) sont insérés entre chaque couple de cornets. Le combineur quasi-optique est constitué par un télescope sur axe de type Cassegrain, au plan focal duquel se trouve une matrice de 16 bolomètres *spiderweb* (Germanium et senseur thermique NTD). Lors d'une session de prise de données, ces bolomètres sont refroidis à 330 mK par un cryostat à dilution  $^3\text{He} - ^4\text{He}$ . L'instrument est fixé sur une monture mécanique altazimuthale. Celle-ci possède un troisième axe qui permet une rotation de l'instrument autour de son axe optique.

### 11.2 Analyse de la campagne de données 2009

Durant la campagne du printemps 2009, l'instrument a principalement observé une source Gunn (dont l'émission était modulée par un signal créneau). La stratégie d'observation consistait en un

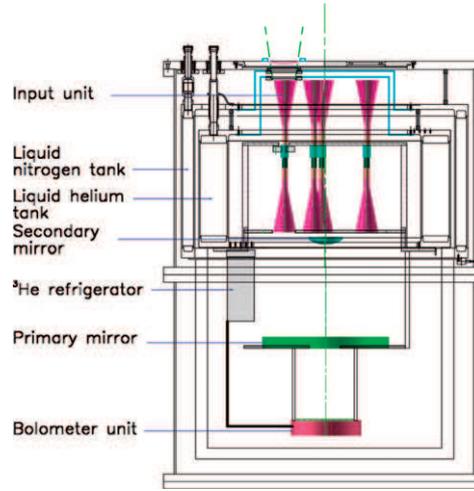


FIG. 11.1: Le cryostat et l'optique du prototype MBI-4. Schéma tiré de [4].

balayage en azimuth et élévation. Des séquences de mesures ont été effectuées successivement dans plusieurs configurations d'ouvertures possibles des cornets primaires (un seul cornet  $i$  ouvert ou une seule ligne de base  $\{i, j\}$ ). Lorsque les cornets  $i$  et  $j$  sont ouverts simultanément, chaque bolomètre  $k$  observe un défilement des franges d'interférences de la source :

$$S_k^X = C_{ij}^k + 2\text{Re} \left[ \alpha_{ij}^k V_{ij}(t) \right], \quad (11.1)$$

où  $\alpha_{ij}^k$  est le coefficient de modulation incluant les phases géométriques induites par le combineur intégrées sur la surface du bolomètre considéré dans le plan focal, les lobes des cornets secondaires  $B_{ls}(\vec{r})$  ainsi que le gain  $g_k^B$  du bolomètre  $k$  (dont la position est repérée par  $\vec{r}_k$ ),

$$\alpha_{k,\beta} = g_k^B \int B_{ls}(\vec{r}) \exp \left[ i2\pi \frac{\vec{r}}{f_D} \cdot \vec{u}_{ij} \right] \Theta(\vec{r} - \vec{r}_k) d\vec{r}. \quad (11.2)$$

La visibilité  $V_{ij}(t)$  s'écrit simplement dans le cas d'un point source,

$$V_{ij}(t) = I_0 A_i[\vec{n}(t)] A_j^*[\vec{n}(t)] \exp [i2\pi \vec{u}_{ij} \cdot (\vec{n}(t) - \vec{n}_0)], \quad (11.3)$$

où  $\vec{n}_0$  et  $I_0$  sont la position et l'intensité de la source, où  $\vec{u}_{ij}$  est la ligne de base définie par la paire de cornets  $\{i, j\}$ , où  $\vec{n}(t)$  est le vecteur de pointage de l'instrument et où  $A_i[\vec{n}(t)]$  et  $A_j[\vec{n}(t)]$  sont les lobes primaires des cornets  $i$  et  $j$ .

Nous avons effectué une analyse sommaire des données selon la procédure suivante :

1. Les mesures ordonnées en temps des bolomètres sont démodulées du signal créneau de la source Gunn.
2. Les fréquences plus basses que celle associée à la constante de temps estimée des bolomètres sont filtrées.
3. Les données de chaque bolomètre sont projetées sur une carte azimuth-élévation.
4. Les cartes obtenues sont éventuellement interpolées.

5. Les franges d'interférences sont ajustées par la fonction analytique de l'équation 11.3, à l'aide d'une méthode des moindres carrés non-linéaire (bibliothèque "MPFIT" basée sur un algorithme de Levenberg-Marquardt [210]).

L'ajustement permet ainsi de retrouver la norme et l'orientation de la ligne de base, ainsi que la largeur à mi-hauteur moyenne du lobe formé par le produit des lobes primaires (voir figure 11.2).

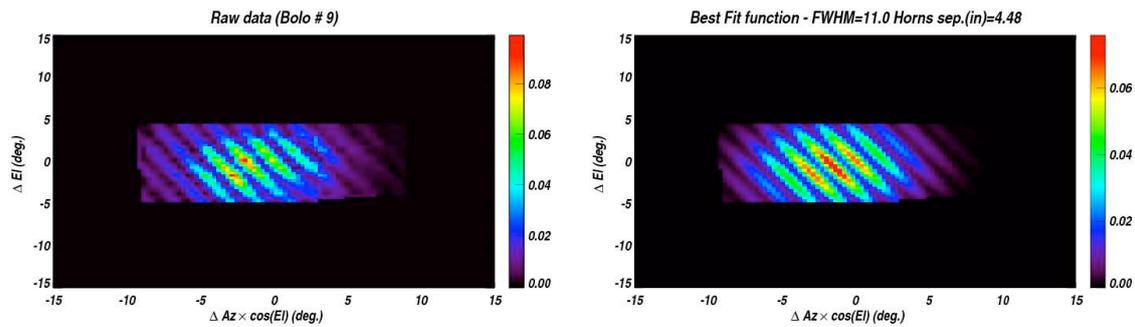


FIG. 11.2: Gauche : carte des franges obtenues après traitement des données (voir texte) sur le bolomètre 9 lorsque les cornets 2 et 3 sont ouverts. Droite : ajustement des franges avec une gaussienne multipliée par une sinusoïde (équation 11.3).

### 11.3 Simulation de l'instrument

Nous avons réalisé une modeste simulation de l'instrument afin de vérifier la cohérence des mesures, dont le script est le suivant :

1. Les positions des cornets primaires, et le jeu de lignes de base associées sont générées.
2. Les valeurs ordonnées en temps du vecteur de pointage  $\vec{n}(t)$  sont générées selon la stratégie d'observation choisie.
3. Les visibilitées et les termes d'auto-corrélation sont calculés analytiquement dans le cas où le détecteur observe un point source situé en  $\vec{n}_0$ .
4. Les mesures ordonnées en temps des bolomètres (TOD) sont calculées ; celles-ci sont ensuite bruitées par ajout d'un bruit blanc gaussien et d'un bruit basse fréquence en  $1/f$ .
5. Ces données simulées (TOD des bolomètres et vecteur de pointage) sont converties dans un format de lecture identique à celui des données mesurées.
6. L'algorithme de traitement des données décrit précédemment est appliqué identiquement.

Les figures 11.4 et 11.5 montrent le bon accord entre notre simulation et les données mesurées. En particulier, le lecteur pourra vérifier que les franges mesurées sont bien perpendiculaires aux lignes de base "vues" par les bolomètres (figure 11.3) : comme nous l'avons expliqué au chapitre 4, l'interféromètre bolométrique à combineur de Fizeau est une « simple » transposition millimétrique de l'expérience des trous d'Young !

## 11.4 Limite de l'analyse

La concordance des données et de la simulation valide le principe de fonctionnement de l'interférométrie bolométrique à combineur de faisceaux quasi-optique. Dans l'analyse effectuée, nous n'avons cependant pas mesuré les visibilité ; afin de pouvoir reconstruire celles-ci comme nous l'avons expliqué au chapitre 5, et ainsi pouvoir observer un champ de radiation quelconque, il faudrait :

- soit disposer d'une modulation induite par les déphaseurs (certains problèmes instrumentaux ont malheureusement été rencontrés avec les déphaseurs de MBI-4).
- soit obtenir une intercalibration des bolomètres (un travail est en cours au sein de la collaboration MBI en vue d'obtenir une telle intercalibration à partir des données de la dernière campagne).

Une analyse plus approfondie de ces données sera prochainement publiée par la collaboration MBI. Quoi qu'il en soit, les résultats présentés ici démontrent clairement la validité expérimentale du concept d'interférométrie bolométrique avec combineur de faisceaux.

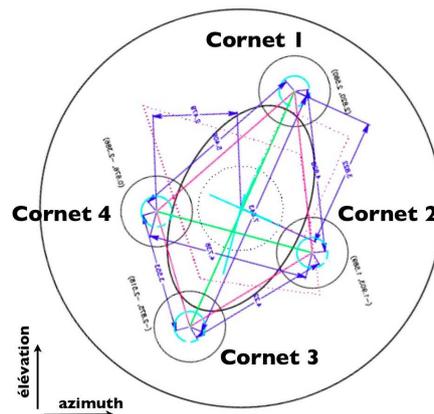


FIG. 11.3: La disposition des cornets "vue" par les bolomètres de MBI-4, dans le référentiel de balayage altazimuthal de la prise de donnée étudiée dans ce chapitre.

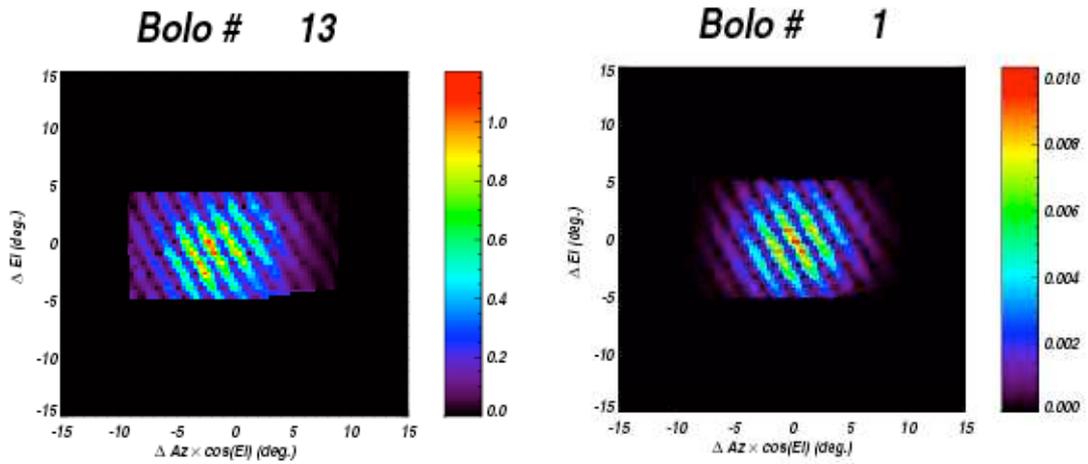


FIG. 11.4: Gauche : carte des franges obtenues après traitement des données (voir texte) mesurées sur le bolomètre 13 lorsque les cornets 2 et 3 sont ouverts. Droite : carte des franges obtenues après traitement des données générées par notre simulation pour une même configuration instrumentale (voir texte).

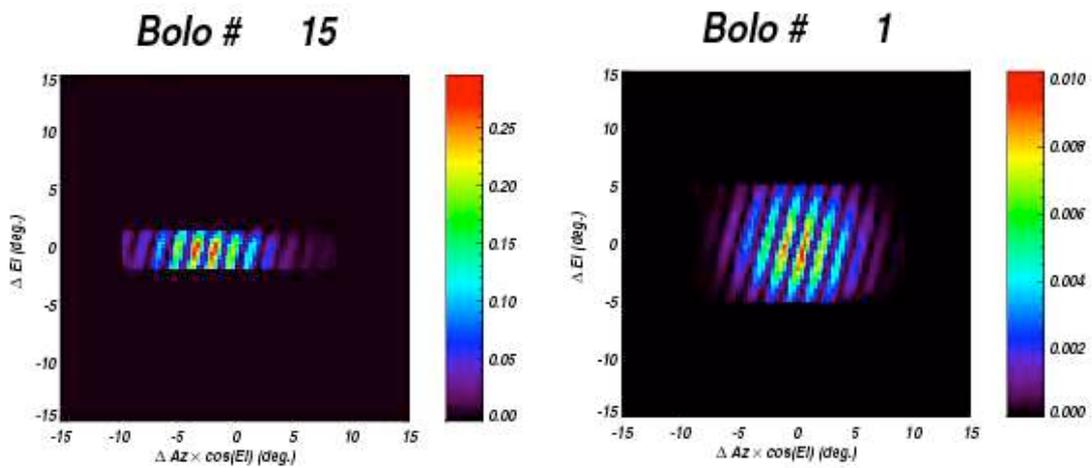


FIG. 11.5: Gauche : carte des franges obtenues après traitement des données (voir texte) mesurées sur le bolomètre 15 lorsque les cornets 2 et 4 sont ouverts. Droite : carte des franges obtenues après traitement des données générées par notre simulation pour une même configuration instrumentale (voir texte).



## Chapitre 12

# Contraintes instrumentales pour QUBIC

---

Nous récapitulons ici les conséquences des études conceptuelles menées dans cette thèse, en terme de contraintes sur l'architecture et sur les composants de l'instrument QUBIC. Le contenu de ce chapitre est, plus encore que celui du reste de cette thèse, amené à évoluer dans un avenir proche, en fonction des futures avancées conceptuelles et des choix technologiques que la collaboration sera amenée à faire.

---

Le travail "théorique" présenté dans cette thèse a bien sûr nécessité de très fréquentes interactions avec les instrumentalistes du projet QUBIC. Au fil de l'évolution de nos travaux, la collaboration a été amenée à explorer de nombreuses pistes technologiques pour chacun des composants de l'instrument ; certains choix se sont progressivement imposés et l'architecture actuelle s'est peu à peu esquissée.

Nous commencerons ici par récapituler les diverses contraintes sur l'architecture d'un interféromètre bolométrique, égrainées au fil des chapitres de cette thèse. Nous montrerons par ailleurs comment, en tenant compte de ces contraintes, il est possible d'optimiser la sensibilité de l'expérience en fonction des caractéristiques instrumentales. Nous donnerons pour finir un instantané – en l'état de nos réflexions – du design qui permettrait demain à QUBIC d'être compétitif dans la course aux modes B.

Si beaucoup reste à faire – nous y reviendrons dans la conclusion de cette thèse –, nous pensons que la collaboration QUBIC dispose désormais de la maturité nécessaire, aussi bien en terme de maîtrise conceptuelle de l'interférométrie bolométrique qu'en terme de développements instrumentaux, à la réalisation, dans un futur proche, d'un instrument aux objectifs scientifiques ambitieux <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Une telle réalisation sera bien sûr également conditionnée par des questions financières.

## 12.1 Conséquences de notre étude au regard des possibilités technologiques

### 12.1.1 Architecture générale

Les déphaseurs requis dans le cadre de l'architecture introduite au chapitre 5 nécessitaient, nous l'avons vu, plusieurs années de R&D. Pour cette raison, nous avons introduit au chapitre 7 une nouvelle architecture, à présent considérée comme l'architecture standard de l'instrument QUBIC, dans laquelle ceux-ci sont "remplacés" par une lame-demi onde en rotation. Les composants requis dans cette nouvelle architecture sont, à l'exception notable des interrupteurs polarisés, les mêmes que ceux développés pour les expériences d'imagerie bolométrique : ceci nous rend évidemment confiants quant à la faisabilité technologique de l'instrument.

### 12.1.2 Distribution des cornets

Afin d'atteindre les échelles angulaires visées par QUBIC ( $\ell \sim 100$ ), la largeur à mi-hauteur du lobe gaussien des cornets doit être supérieure à la dizaine de degrés (en interférométrie la fraction du ciel observée est donnée par le lobe primaire des cornets). Nous avons montré au chapitre 5 que la distribution des cornets primaires doit posséder un haut degré de redondance. Comme nous l'avons vu au chapitre 8, une configuration en grille carrée compacte maximise la redondance pour les échelles angulaires visées, conférant ainsi à l'instrument une sensibilité compétitive.

### 12.1.3 Largeur de bande

Nous avons vu au chapitre 6 que la dégradation de la sensibilité induite par l'effet de lissage est sous-dominante par rapport au gain dû à l'élargissement de la bande pour  $\Delta\nu < 30\%$  ; l'instrument QUBIC aura ainsi tout intérêt à utiliser l'intégralité des fenêtres spectrales permises au sol par les lignes d'émissions atmosphériques (typiquement 25 – 30% à 90, 150 et 220 GHz).

### 12.1.4 Interrupteurs polarisés

Ces composants sont absolument indispensables à la procédure d'auto-calibration introduite au chapitre 10. Nous envisageons actuellement de les réaliser de manière mécanique en guide d'onde (voir figure 10.2). Une étude approfondie reste à effectuer en vue d'obtenir une relation directe entre le degré de calibration souhaité et les contraintes instrumentales sur la transmission et la réflexion de tels interrupteurs.

### 12.1.5 Lame demi-onde en rotation

La modulation de la polarisation est prise en charge par la lame demi-onde en rotation dans la nouvelle architecture ; cela rapproche l'instrument de ce point de vue de la plupart des expériences de modes B. La question du positionnement de cette lame fait actuellement l'objet d'une étude au

sein de la collaboration (quoi qu'il en soit, il semble préférable de la placer à froid à l'intérieur du cryostat).

### 12.1.6 Combineur optique

Cette problématique fait également l'objet d'une étude au sein de la collaboration. Nous verrons dans la section suivante qu'un télescope "rapide" (i.e. à courte distance focale) semble être nécessaire ; les aberrations optiques au plan focal pourraient alors être relativement importantes. Les coefficients géométriques modulant les visibilitées seraient bien sûr affectés par ces aberrations ; une procédure de calibration de ces coefficients (comme celle exposée au chapitre 10) permettrait néanmoins de contrôler cette source d'effets systématiques.

### 12.1.7 Détecteurs au plan focal

Dans la nouvelle architecture, les détecteurs doivent être sensibles à la polarisation (cf. chapitre 7) ; plusieurs possibilités instrumentales s'offrent à l'équipe en charge du développement de la matrice de bolomètres. Pour des raisons de simplicité, celle-ci privilégie pour le moment la combinaison d'une matrice de TES non polarisés et d'une grille polarisante (l'instrument EBEX [142] suit une approche similaire). Nous verrons dans la section suivante quelles sont les contraintes sur le nombre de bolomètres requis par module (en interférométrie bolométrique, celui-ci n'est pas nécessairement égal au nombre de cornets primaires, comme nous l'avons vu au chapitre 5).

## 12.2 Optimisation de l'instrument

Nous pouvons utiliser les formules analytiques de sensibilité obtenues au chapitre 8 afin d'optimiser les caractéristiques de l'instrument QUBIC. Ce qui suit reprend largement le travail réalisé par Jean-Christophe Hamilton dans [9].

Pour une valeur donnée du rapport tenseur sur scalaire  $r$ , il est possible de calculer le niveau de signficance qu'aurait une détection du signal par l'instrument, à partir des barres d'erreurs attendues sur la mesure en  $n_{bins}$  intervalles du spectre théorique  $C_\ell$  correspondant,

$$n_\sigma(r) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n_{bins}-1} \left( \frac{C_\ell}{\Delta C_\ell} \right)^2}. \quad (12.1)$$

Nous définissons arbitrairement le niveau  $r$  minimum auquel un instrument est sensible comme celui pour lequel  $n_\sigma = 2$  (ce qui correspond donc à une détection à 95% de niveau de confiance). En utilisant les équations 8.25 et 12.1, il est alors possible de rechercher la valeur minimale de cette quantité dans l'espace multidimensionnel des paramètres instrumentaux (nombre de cornets, lobe primaire, nombre de modules, largeur de bande, etc.). Avant d'effectuer cette optimisation, nous introduisons dans ce qui suit trois contraintes expérimentales supplémentaires, qui viennent restreindre cet espace des paramètres.

### 12.2.1 Nombre de cornets et fenêtre du cryostat

Nous considérons le cas d'une distribution de  $N_h$  cornets sur une grille carrée compact (matrice  $\sqrt{N_h} \times \sqrt{N_h}$ ). Les cornets, refroidis à 4K, observent le ciel à travers la fenêtre du cryostat. La taille  $D_{\text{window}}$  de cette fenêtre est limitée par une combinaison de facteurs expérimentaux :

- La charge à refroidir augmente avec la taille de la fenêtre (la quantité de rayonnement entrant devenant plus importante).
- La fenêtre doit pouvoir résister à la pression atmosphérique (le vide règne à l'intérieur du cryostat).
- La taille des filtres interceptant le rayonnement infra-rouge est limitée (leur mauvaise conduction thermique entraîne un mauvais refroidissement au centre des filtres au-delà d'une certaine taille).

Une fenêtre plus importante que 40 cm ne semble ainsi pas actuellement envisageable, d'un point de vue technologique. Nos collaborateurs de l'Université de Manchester estiment l'épaisseur des

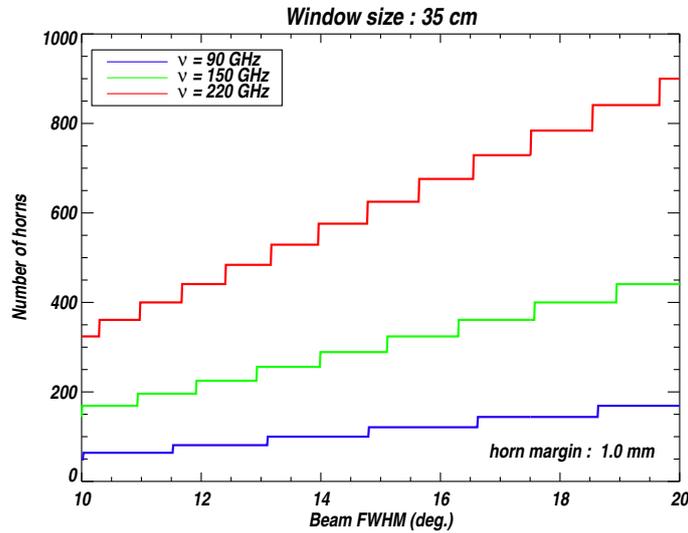


FIG. 12.1: Evolution du nombre maximal de cornets d'un module de QU-BIC en fonction de la largeur à mi-hauteur de leur lobe, pour trois fréquences centrales intéressantes au sol, et une fenêtre de cryostat de 35 cm.

filtres placés entre les cornets et la fenêtre à  $H = 6$  cm. Nous devons tenir compte de cette distance pour relier le nombre de cornets correspondants à un diamètre de fenêtre du cryostat, de manière à ce que, compte tenu de leur lobe, les cornets du bord ne subissent pas de vignettage. En prenant comme marge 3 FWHM, le diamètre maximal de la matrice de cornets est ainsi donné par

$$\sqrt{N_h}d_h = D_{\text{window}} - 2H \tan(3\text{FWHM}/2). \quad (12.2)$$

où  $d_h$  est le diamètre d'un cornet. Celui-ci peut être estimé en utilisant la relation introduite au chapitre 5,

$$S\Omega = \kappa\lambda^2 \quad (12.3)$$

et en prenant en compte une marge additionnelle due à l'épaisseur du métal ( $\sim 1$  mm). Les cornets développés par nos collaborateurs de l'Université de Manchester sont tels que  $\kappa = 1.344$  pour un lobe de 14 degrés FWHM à 90 GHz.

Ainsi une taille de fenêtre du cryostat impose, pour une fréquence et un lobe donné, le nombre maximal de cornets que peut contenir un module (dans le cadre d'une distribution en grille carrée compacte). La figure 12.1 montre en particulier que les modules de QUBIC contiendront d'autant plus de cornets qu'ils opèreront à plus haute fréquence, pour une même fenêtre de cryostat et des échelles angulaires sondées équivalentes.

## 12.2.2 Distance focale et taille des bolomètres

Nous avons vu au chapitre 5 que les franges d'interférences formées au plan focal du combineur de faisceau quasi-optique sont telles que le signal réémis par un cornet secondaire localisé en  $\vec{x}_i$  et collecté en un point  $\vec{r}$  du plan focal est déphasé par

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\vec{r} \cdot \vec{x}_i}{\lambda f_D}, \quad (12.4)$$

où  $f_D$  est la distance focale du combineur. La ligne de base la plus longue que pourra échantillonner un instrument est donnée par une sorte de critère de Nyquist :  $n_s = 2$  ou 3 bolomètres doivent couvrir une période de la frange associée. La taille des bolomètres  $d_{\text{bol}}$ , la distance focale et la ligne de base maximale  $u_{\text{max}}$  échantillonnée par  $n_s$  valeurs sont alors reliés par la relation suivante :

$$\frac{f_D}{d_{\text{bol}}} = n_s \times u_{\text{max}}. \quad (12.5)$$

Ainsi, pour échantillonner  $\ell_{\text{max}} = 200 = 2\pi \times u_{\text{max}}$  avec  $n_s = 3$  et une taille de bolomètres de 5 mm, la distance focale minimale requise est  $\sim 48$  cm (voir figure 12.2).

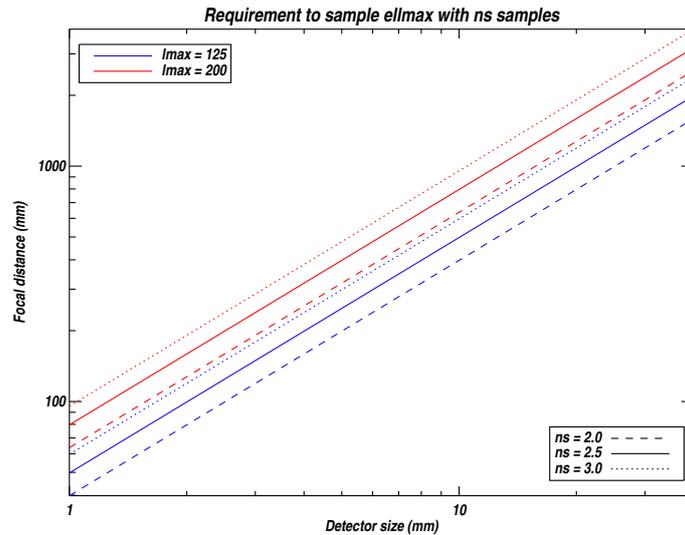


FIG. 12.2: Evolution de la distance focale en fonction du diamètre des bolomètres, pour deux valeurs maximales des multipôles échantillonnés :  $\ell_{\text{max}} = 125$  en bleu,  $\ell_{\text{max}} = 200$  en rouge.

### 12.2.3 Nombre de bolomètres

A distance focale fixée, nous pouvons également contraindre le nombre  $N_{out}$  de bolomètres requis pour échantillonner correctement la plus courte ligne de base et intégrer une fraction significative de la puissance réémise par les cornets secondaires.

Afin que la plus courte ligne de base (dont la période sur le plan focal est la plus longue) soit échantillonnée sur un nombre  $n_p$  de périodes complètes (au minimum,  $n_p = 1$ ), la relation suivante doit être vérifiée :

$$\sqrt{N_{out}} = \frac{n_p f_D}{d_{bol} u_{min}} \quad (12.6)$$

$$= n_p n_s \frac{\ell_{max}}{\ell_{min}}. \quad (12.7)$$

Cette relation nous apprend que le nombre de bolomètres requis est indépendant de leur taille. Ceci correspond par exemple à  $17 \times 17 = 289$  bolomètres pour  $n_s = 3$ ,  $n_p = 1$ ,  $\ell_{max} = 200$  et  $\ell_{min} = 36$  (cette dernière contrainte est donnée par la distance entre deux cornets  $u_{min} = \frac{\sqrt{2}\kappa}{\pi\sigma} + \frac{2e}{\lambda}$  où  $e$  est l'épaisseur métallique des cornets).

Si le lobe des cornets<sup>2</sup> est une gaussienne de largeur  $\sigma$ , alors l'enveloppe des franges d'interférence sur le plan focal est une gaussienne de largeur  $f_D \tan(\sigma) \simeq f_D \sigma$ . En supposant un facteur de remplissage du plan focal de 100%, la fraction de puissance intégrée dans une matrice carrée de bolomètres de côté  $\Delta x = \sqrt{N_{out}} d_{bol} = n_p n_s d_{bol} \frac{u_{max}}{u_{min}}$  est donnée par :

$$f(n_p) = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \frac{1}{2\pi\sigma_{fp}^2} \int \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_{fp}^2}\right) dx dy \quad (12.8)$$

$$= \left[ \text{Erf}\left(\frac{\Delta x}{2\sqrt{2}\sigma_{fp}}\right) \right]^2 \quad (12.9)$$

$$= \left[ \text{Erf}\left(\frac{n_p}{2\sqrt{2}u_{min}\sigma}\right) \right]^2. \quad (12.10)$$

Nous pouvons faire l'approximation suivante :

$$u_{min}\sigma = \frac{\sqrt{2}\kappa}{\pi} + \frac{2e\sigma}{\lambda} \simeq \frac{\sqrt{2}\kappa}{\pi}, \quad (12.11)$$

de sorte que

$$f(n_p) \simeq \left[ \text{Erf}\left(\frac{\pi n_p}{4\sqrt{2}\kappa}\right) \right]^2 \simeq 0.25 \quad (12.12)$$

pour  $n_p = 1$  et  $\kappa = 1.344$ . Ce qui signifie que l'on intégrerait que 25% de la puissance si l'on se contentait de la contrainte de l'équation 12.7. Autrement dit, le nombre de bolomètres minimal est plus fortement contraint par la nécessité d'intégrer une bonne partie de la puissance que par celle d'échantillonner la plus petite ligne de base.

Si l'on veut intégrer une fraction  $f$  de la puissance totale, le nombre de bolomètres requis s'écrit finalement

$$\sqrt{N_{out}} = n_p(f) n_s \frac{\ell_{max}}{\ell_{min}} \quad (12.13)$$

<sup>2</sup>Les cornets primaires et secondaires ont le même lobe dans la nouvelle architecture envisagée pour QUBIC (voir chapitre 7), ce qui n'était pas le cas dans l'architecture du chapitre 5.

où  $n_p(f)$  est la fonction réciproque de celle de l'équation 12.10.

Un compromis instrumental apparaît ainsi : afin que le nombre de bolomètres requis soit raisonnable, il faut envisager un télescope "rapide", à courte distance focale, pour lequel le niveau des diverses aberrations risque d'être relativement important.

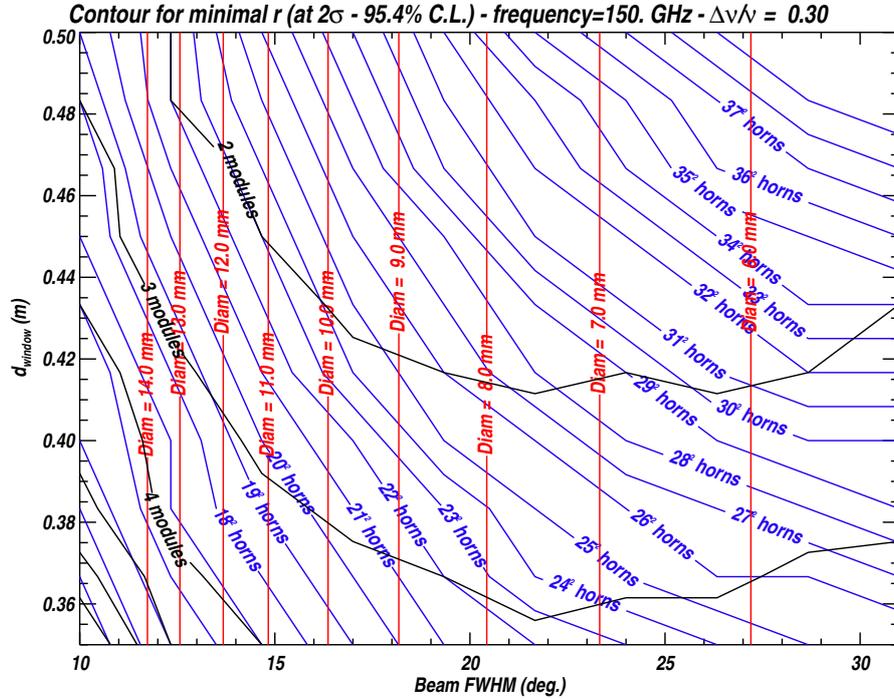


FIG. 12.3: Contours pour lesquels un instrument QUBIC à 150 GHz et 30% de largeur de bande obtient une détection à 95.4% du rapport tenseur-sur-scalaire  $r = 0.01$ , en fonction de la taille de la fenêtre du cryostat et du lobe des cornets. Les lignes bleues indiquent la racine carré du nombre de cornets nécessaires  $\sqrt{N_h}$ , les lignes noires le nombre de modules associés.

#### 12.2.4 Résultat

Nous pouvons alors reprendre les équations 8.25, 12.1, 12.2, et 12.13 pour obtenir, comme sur la figure 12.3, les lignes de contours dans l'espace des paramètres pour lesquelles un instrument atteindrait une détection à 95.4% du rapport tenseur-sur-scalaire  $r = 0.01$ .

### 12.3 Récapitulatif

Nous donnons ici à titre indicatif, le design typique d'un premier module de l'instrument QUBIC. Précisons que ce qui suit n'engage en rien la collaboration (les caractéristiques de l'instrument devraient être précisées dans un futur *White Paper*) :

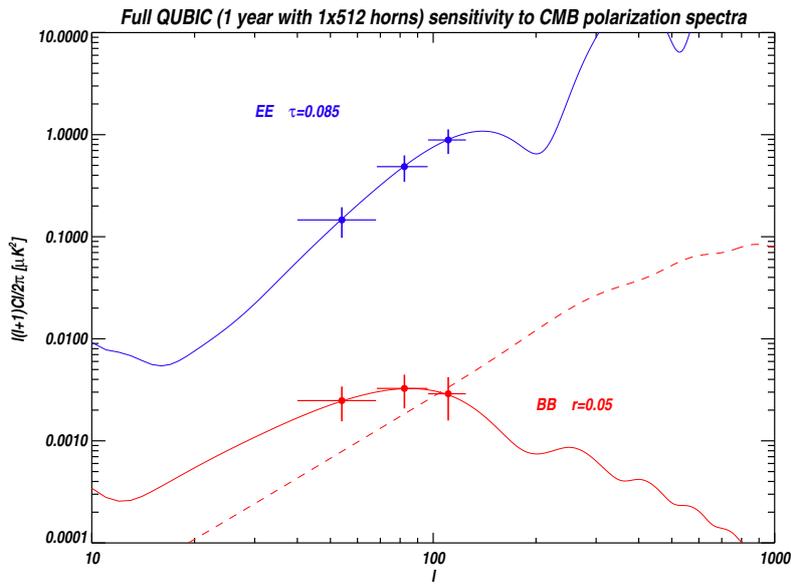


FIG. 12.4: Mesures des spectres de puissance  $EE$  et  $BB$  du fond diffus cosmologique, avec un premier module de QUBIC et un an de données effectives (voir texte), en supposant  $r = 0.05$ .

- 512 couples de cornets primaires-secondaires (conception Université de Manchester); lobes gaussiens avec 14 degrés de largeur à mi-hauteur; distribués selon une grille carrée à haut degré de redondance.
- Fréquence centrale 150 GHz, 25 % de largeur de bande.
- Lame demi-onde en rotation basée sur une technologie saphir ou réseau métallique (conception et réalisation Université de Manchester).
- Interrupteurs polarisés intercalés entre les couples de cornets, technologie mécanique en guide d'onde (conception Université de Manchester).
- Cryostat de 90 cm de diamètre, 1.8m de hauteur; fenêtre de 40 cm; 4K pour l'optique et 100 mK pour les détecteurs (conception et réalisation Université de Rome-La Sapienza).
- Combineur optique hors axe, à courte distance focale (conception et réalisation Université de Maynooth et Université Milan-Bicocca).
- Grille polarisante (conception et réalisation Université de Manchester).
- Matrice de  $\sim 1000$  TES non polarisés avec électronique de lecture froide (conception et réalisation APC, CSNSM, IAS).
- Monture mécanique et intégration prise en charge par l'Université Brown de Providence.

Un tel premier module de l'instrument pourrait raisonnablement voir le jour d'ici fin 2011. L'étape suivante serait bien sûr la réalisation de modules équivalents aux deux autres fréquences CMB intéressantes au sol pour les bolomètres (90 et 220 GHz), en vue de la séparation des avant-plans potentiels. L'instrument final sonderait alors des échelles angulaires comprises entre  $50 < \ell < 150$  et aurait la possibilité de contraindre une valeur du rapport tenseur sur scalaire de  $r \simeq 0.01$ , en un an d'acquisition effective de données (la figure 12.4 montre le niveau d'erreur attendu sur la mesure des spectres de puissance angulaire de polarisation pour  $r = 0.05$ ).

## Chapitre 13

# Epilogue : vers une interférométrie sans visibilités ?

---

Une ultime percée conceptuelle a été réalisée alors que ce manuscrit était presque achevé : l'idée peut sembler assez révolutionnaire puisque il s'agirait d'abandonner l'étape de reconstruction des visibilités. L'interféromètre bolométrique serait utilisé comme un « imageur synthétique », i.e. comme un instrument qui observerait le ciel à la manière d'un imageur, au travers de ses lobes synthétiques. Nous verrons que, si cela ne modifie ni la validité de ce qui est présenté dans cette thèse, ni l'architecture de l'instrument, cela augmenterait les potentialités de celui-ci et résoudrait les derniers problèmes que nous nous posions en terme d'analyse des données. Ce chapitre – qui se veut avant tout un programme de recherche – est en quelque sorte l'aboutissement de la réflexion sur l'interférométrie bolométrique, entreprise au commencement de cette thèse, avec Jean-Christophe Hamilton, Jean Kaplan et Michel Piat.

---

### 13.1 Un « imageur synthétique »

Dans le cadre de l'architecture avec lame demi-onde en rotation, nous avons montré au chapitre 7 que chaque détecteur  $k$  mesurait les images synthétiques des paramètres de Stokes  $I$ ,  $Q$  et  $U$  (modulées par la rotation de la lame, cf. équation 7.10) :

$$S_k^I = \int I(\vec{n}) B_{syn}^k(\vec{n}) d\vec{n}, \quad (13.1)$$

$$S_k^Q = \int Q(\vec{n}) B_{syn}^k(\vec{n}) d\vec{n}, \quad (13.2)$$

$$S_k^U = \int U(\vec{n}) B_{syn}^k(\vec{n}) d\vec{n}, \quad (13.3)$$

où nous avons introduit les *lobes synthétiques*, qui dans le cas de l'instrument idéal s'écrivent

$$B_{syn}^k(\vec{n}) = B_{lp}(\vec{n}) \iint B_{ls}(\vec{r}) \left| \sum_i \exp \left[ i2\pi \frac{\vec{x}_i}{\lambda} \cdot \left( \frac{\vec{r}}{f_D} - \vec{n} \right) \right] \right|^2 J(\nu) \Theta(\vec{r} - \vec{r}_k) d\nu d\vec{r}, \quad (13.4)$$

où  $f_D$  est la longueur focale du combineur optique,  $B_{lp}(\vec{n})$  et  $B_{ls}(\vec{r})$  sont les lobes primaires et secondaires et où  $\vec{x}_i$  est la position de chaque cornet ; la première intégrale est effectuée dans le plan focal (le vecteur  $\vec{r}_k$  repère la position du détecteur, la fonction  $\Theta(\vec{r})$  donne sa géométrie) ; la seconde intégrale porte sur la largeur de bande ( $J(\nu)$  est la fonction de réponse spectrale). Ces lobes synthétiques dépendent ainsi de l'ensemble des caractéristiques instrumentales d'un interféromètre bolométrique (et réciproquement la donnée de ceux-ci caractérise complètement un instrument).

Un interféromètre bolométrique peut ainsi être vu comme un « imageur synthétique », dont chaque détecteur observe le ciel à travers un lobe synthétique  $B_{syn}^k(\vec{n})$ . Rappelons que l'*image synthétique* est traditionnellement obtenue en interférométrie par transformée de Fourier du jeu de visibilités (cf. chapitres 4 et 10) : le combineur de Fizeau effectuée dans notre cas optiquement cette transformée de Fourier. L'expression d'« image sale » est parfois employée de manière équivalente (reflétant le fait que cette image ne contient que les modes de Fourier définis par les lignes de base de l'interféromètre).

### 13.1.1 Observation de champs fixes et estimation des spectres sans reconstruction des visibilités

Dans le cas envisagé au chapitre 9 de l'observation de quelques champ fixes, il est alors possible d'estimer les spectres de puissance directement à partir des images synthétiques. Commençons par introduire la décomposition du champ  $I(\vec{n})$  et des lobes synthétiques sur la base des harmoniques sphériques :

$$I(\vec{n}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\vec{n}), \quad (13.5)$$

$$B_{syn}^k(\vec{n}) = \sum_{\ell m} \beta_{\ell m}^k Y_{\ell m}^*(\vec{n}). \quad (13.6)$$

Les relations d'orthogonalité des harmoniques sphériques permettent alors d'exprimer l'image synthétique comme

$$S_k^I = \sum_{\ell m} a_{\ell m} \beta_{\ell m}^k. \quad (13.7)$$

Supposons que l'instrument ait mesuré une série d'images synthétiques  $S_k^I(\vec{n}_0, \theta)$  (pointage de l'instrument  $\vec{n}_0$ , angle de rotation autour de l'axe optique  $\theta$ ). Nous pourrions alors calculer les éléments de la matrice de covariance des images synthétiques, et les écrire comme une combinaison linéaire des spectres de puissance à estimer :

$$\langle S_k^I(\vec{n}_0, \theta) \cdot S_{k'}^{I*}(\vec{n}_0', \theta') \rangle = \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \underbrace{\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'} \rangle}_{C_{\ell} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}} \beta_{\ell m}^k(\vec{n}_0, \theta) \beta_{\ell' m'}^{k'*}(\vec{n}_0', \theta') \quad (13.8)$$

$$= \sum_{\ell} C_{\ell} W_{\ell}^{k k'}(\vec{n}_0, \vec{n}_0', \theta, \theta'), \quad (13.9)$$

où nous avons introduit les fonctions fenêtres définies par

$$W_{\ell}^{kk'}(\vec{n}_0, \vec{n}_0', \theta, \theta') = \sum_m \beta_{\ell m}^k(\vec{n}_0, \theta) \beta_{\ell m}^{k'*}(\vec{n}_0', \theta'). \quad (13.10)$$

Les fonctions fenêtres polarisées seraient obtenues similairement. Les spectres de puissance pourraient alors être estimés en suivant les approches standards de maximisation de la vraisemblance décrites au chapitre 9, sans passer par l'étape de « reconstruction des visibilitées » !

### 13.1.2 Balayage altazimuthal du ciel

Rien ne nous empêche *a priori* d'aller plus loin en utilisant l'instrument à la manière d'un véritable imageur. Nous pouvons par exemple envisager une stratégie d'observation de balayage altazimuthal du ciel, et une analyse des données ordonnées en temps constituée des étapes suivantes : déconvolution des constantes de temps des bolomètres, réalisation de cartes du ciel ("map-making") et estimation des spectres à l'aide des méthodes standards développées en imagerie.

Les lobes synthétiques (voir figure 13.1) sont évidemment très éloignés des lobes traditionnels gaussiens à travers lesquels un véritable imageur observe le ciel : les lobes gaussiens sont en quelque sorte localisés dans l'espace réel alors que nos lobes synthétiques sont localisés dans l'espace de Fourier (ils ne sélectionnent que certains modes). Ces derniers, dont la forme est définie par l'équation 13.4 dans le cas d'un instrument idéal, pourront être calibrés grâce à des méthodes standards (observations d'une source ponctuelle) et grâce à la procédure d'auto-calibration introduite au chapitre 10.

## 13.2 Equivalence des descriptions

Certains des effets mis à jour dans le cadre de cette thèse, et donc envisagés à travers le formalisme de reconstruction des visibilitées introduit au chapitre 5, peuvent être décrits de façon équivalente par la manière dont ils altèrent les lobes synthétiques. Les dégradations de sensibilités engendrées par la diminution de la redondance ou résultant d'un effet de lissage par largeur de bande peuvent être interprétées comme des "lissages" du lobe synthétique : celui-ci est moins "piqué", plus "dispersé", ce qui entraîne une perte de résolution angulaire et/ou une perte de rapport signal à bruit (figure 13.1). La question de l'échantillonnage dans le plan focal – décrite au chapitre 12 – est de même automatiquement prise en compte : l'intégration du lobe synthétique sur la surface des bolomètres résulte aussi en un genre d'effet de lissage qui gomme les plus fines échelles angulaires (figure 13.1).

Ces raisonnements qualitatifs pourront, je le crois, être quantifiés selon le programme de recherche suivant. Dans un premier temps, l'utilisation de la formule de Knox, qui exprime analytiquement la sensibilité d'un imageur notamment en fonction de son lobe (cf. chapitre 8), devrait permettre d'estimer les modifications de sensibilités engendrées par ces altérations du lobes. Notons que la formule originale fait intervenir la décomposition en polynôme de Legendre  $B_l$  du lobe (ce qui implique un lobe symétrique, i.e. ne dépendant pas de  $m$ ) : il faudra ainsi soit trouver une procédure de symétrisation factice du lobe synthétique (en supposant par exemple que chaque détecteur voit le même ciel suivant une série d'angles différents), soit dériver une version un peu plus sophistiquée d'une telle formule. Dans un second temps, une simulation simple de l'analyse

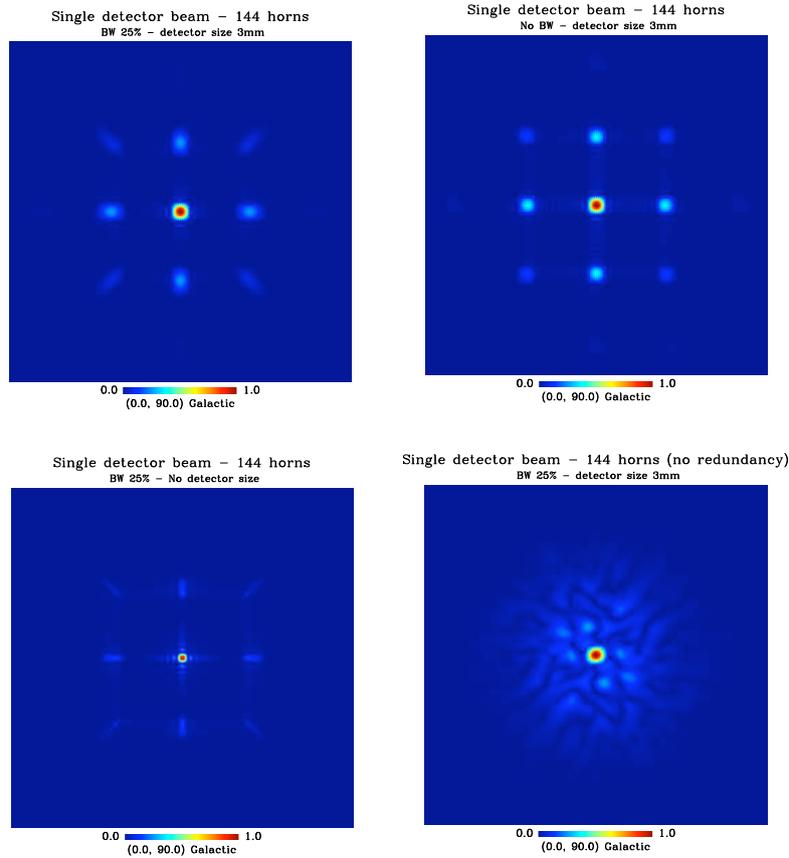


FIG. 13.1: *Lobe synthétique calculé pour une grille carrée de 144 cornets à 150 GHz, de lobes primaire et secondaire gaussiens, 25% de largeur de bande (fonction spectrale plate), une distance focale  $f_D = 20$  mm et un pixel carré situé au centre du plan focal de taille 3 mm (en haut, à gauche). Le même lobe synthétique dans le cas où l'on ne prend pas en compte la largeur de bande (en haut, à droite), dans le cas où l'on ne prend pas en compte la taille du bolomètre (en bas à gauche), et dans le cas où la distribution spatiale des cornets est aléatoire, i.e où la redondance est perdue (en bas, à droite).*

des données – version imageur – devra être réalisée : à partir des mesures ordonnées en temps simulées pour un détecteur, on pourra obtenir des cartes du ciel et estimer les spectres de puissance grâce aux procédures standards de l'imagerie.

Nous devrions alors retrouver les variations de la sensibilité en fonction des paramètres tels que la distribution des cornets, leurs lobes, la largeur de bande, etc., dérivées dans cette thèse en considérant l'approche par « reconstruction des visibilités ».

### 13.3 Intérêt de la nouvelle approche

Si les difficultés liées à cette nouvelle approche d'« imageur synthétique » ne nous apparaîtront sans doute qu'après le genre d'étude plus approfondie que nous venons de décrire, les multiples avantages qu'elle présente nous semblent d'ors et déjà conséquents :

- L'analyse des données s'en trouve sinon simplifiée, du moins standardisée puisque l'étape complexe de reconstruction des visibilités disparaît, et avec elle les problèmes potentiels qui en découlent. La question de l'altération du système linéaire engendrée par la dépendance spectrale des phases modulant les visibilités (celles du combineur optique dans l'architecture avec lame demi-onde en rotation) explicitée au chapitre 6 est ainsi évitée, tout comme celle du calcul numérique des fonctions fenêtres hors de l'approximation plane décrite au chapitre 9.
- La stratégie de balayage du ciel introduit une modulation supplémentaire (c'est d'ailleurs la modulation la plus fréquemment utilisée en imagerie) : celle-ci permettrait la reconstruction de l'image synthétique d'intensité (dans le cas de l'observation d'un champ fixe, aucune modulation ne permettait une telle reconstruction, et  $I$  était "perdu", cf. chapitre 7). Cette modulation semble de surcroît indispensable afin d'éviter un bruit harmonique d'origine mal-définie, situé justement à la fréquence de modulation  $4\omega$ , qui a été constaté lors de l'utilisation des lames demi-onde en rotation (voir par exemple l'expérience MAXIPOL [166]).
- Le léger handicap de sensibilité engendré par une couverture de ciel non uniforme résultant de l'observation d'un champ fixe (cf. chapitre 8) disparaîtrait : autrement dit, il serait possible d'obtenir une couverture de ciel similaire à celle d'un imageur.
- La réalisation de carte est enfin plus adaptée au sondage des grandes échelles (les techniques de "mosaïcking" qui permettent de combiner les visibilités de plusieurs champs recèlent en effet bien des difficultés [199]). Cette remarque est particulièrement importante dans l'optique d'une mission satellite d'interférométrie bolométrique dédiée aux modes B.

Je voudrais, avant de terminer ce chapitre, rappeler brièvement le cheminement conceptuel qui nous a conduit à notre compréhension actuelle de l'interférométrie bolométrique ; je crois qu'il justifie en partie le temps – que le lecteur malicieux pourrait trouver relativement important – qui nous aura été nécessaire à la mise à jour de cette nouvelle approche. Au commencement de cette thèse, nous considérions l'interférométrie bolométrique comme une généralisation à multiples canaux de l'interférométrie additive (équation 4.20) : l'observable d'intérêt étant la visibilité dans le cas simple à deux récepteurs, il était naturel de chercher à reconstruire les multiples visibilités modulées dans notre cas. La compréhension du fonctionnement et de l'intérêt du combineur optique ne nous fut par ailleurs pas immédiate et nécessita quelques mois de travail (l'approche avec matrice de Butler était à l'origine privilégiée au sein de la collaboration BRAIN). Le formalisme du chapitre 5, en particulier l'expression de la puissance mesurée par les détecteurs comme une combinaison linéaire des visibilités, découlait en outre naturellement de l'usage des déphaseurs contrôlés. Ce n'est que plus tard, alors que nous réfléchissions aux architectures alternatives sans déphaseurs du chapitre 7, que la formulation d'« imageur synthétique » s'est progressivement dégagée. Pourtant, même à ce stade de notre réflexion, l'intérêt de cette nouvelle approche ne nous apparût pas immédiatement. C'est sans doute que nous conférions, plus ou moins inconsciemment, aux visibilités une valeur d'« observables supérieures » : leur abandon nous semblait signifier l'abandon de l'interférométrie – idée absurde une fois formulée explicitement.

Ajoutons cependant, que si nous étions ainsi amenés à abandonner l'étape de reconstruction des visibilités et donc une partie conséquente du formalisme analytique développé aux chapitres 5, 6,

et 9, il n'en resterait pas moins que c'est celui-ci qui nous a permis de mettre à jour certains concepts cruciaux. Pour ne prendre qu'un exemple, nous n'aurions peut-être pas compris l'importance de la redondance de la distribution de cornets (et du respect de la "sommation cohérente des lignes de base équivalentes"), si nous n'avions considéré l'interféromètre bolométrique qu'au travers de la description en imageur synthétique : le fait que l'altération des lobes synthétiques engendrée par différentes distributions de cornets ou différents déphasages ait un impact si décisif en terme de sensibilité n'était en effet pas évident *a priori*... Je suis d'ailleurs convaincu que la comparaison de ces deux descriptions complémentaires nous apprendra encore beaucoup sur cet étrange instrument qu'est l'interféromètre bolométrique.

# Conclusion

Au fil de ces trois ans j'ai eu la chance de participer, avec Jean-Christophe Hamilton, Jean Kaplan et bien d'autres, à la mise en place de l'architecture de l'instrument QUBIC. Le concept d'interférométrie bolométrique s'est révélé extrêmement particulier, même si des passerelles éclairantes existent avec les autres types d'interférométries, comme j'ai essayé de le montrer. Dans un premier temps, nous avons développé une méthode de reconstruction des observables d'intérêt – les visibilités. A cette occasion, le concept crucial de "sommation cohérente des lignes de base équivalentes" a émergé ; nous avons ainsi montré que seul un interféromètre bolométrique possédant une distribution de cornets hautement redondante et modulant identiquement ses lignes de base équivalentes était susceptible d'atteindre une sensibilité compétitive.

Nous avons alors obtenu une formule analytique donnant une estimation de la sensibilité d'un tel instrument, et permettant la comparaison avec un imageur ou un interféromètre hétérodyne de même complexité instrumentale. Ce travail de comparaison s'est révélé dissimuler de nombreuses subtilités, mais nous sommes finalement assez confiants sur le bon comportement d'un interféromètre bolométrique en terme de sensibilité statistique.

Nous avons ensuite examiné le problème de la largeur de bande spectrale (les études que nous avons précédemment réalisées supposaient implicitement un instrument opérant en bande étroite). En particulier, nous avons estimé la dégradation de sensibilité par effet de lissage et conclu que celle-ci était très acceptable pour un instrument large bande dédié à l'observation du CMB.

En raison des grandes difficultés que représentait le développement instrumental des déphaseurs contrôlés nécessaires à l'architecture standard initialement envisagée pour QUBIC, nous avons proposé deux architectures alternatives, dans lesquelles les déphaseurs contrôlés sont remplacés par une lame demi-onde en rotation ou des pseudo-corrélateurs. La première, qui possède bien d'autres avantages, a ainsi été adoptée comme nouvelle architecture standard de l'instrument QUBIC.

J'ai par ailleurs proposé une méthode prometteuse d'auto-calibration de l'instrument qui tire parti du haut degré de redondance des lignes de base et permet un contrôle sans équivalent des effets systématiques d'origine instrumentale (erreurs de gain, de phase, couplage entre polarisations, etc.). Il me semble que celle-ci pourrait bien devenir un argument majeur en faveur de l'interférométrie bolométrique.

Si des avancées cruciales ont donc été réalisées concernant la compréhension des concepts de l'interférométrie bolométrique, je suis absolument convaincu que l'effort de « théorie instrumentale » entrepris dans cette thèse doit être poursuivi ; les deux axes prioritaires me semblent être d'une part le développement d'une simulation complète de la procédure d'auto-calibration (avec reconstruction des coefficients de modulation corrompus par ligne de base et par détecteur), et

d'autre part le développement d'une simulation complète mettant en application l'idée si prometteuse exposée au dernier chapitre : l'utilisation de l'instrument comme un « imageur synthétique » (ces deux simulations devant même ultimement en constituer une seule).

D'un point de vue instrumental, la disparition des déphaseurs contrôlés constitue un énorme pas en avant en vue de la réalisation d'un premier module de QUBIC. Les travaux menés au cours de cette thèse permettent nous l'avons vu, de définir une sorte de cahier des charges à respecter lors des développements instrumentaux ; ceux-ci sont en cours au sein de la collaboration pour chacun des composants critiques : cornets, interrupteurs polarisés, lame demi-onde, matrice de détecteurs, combineur quasi-optique, cryostat.

Au cours de ces trois années, j'ai eu l'occasion de douter, à de nombreuses reprises, de l'intérêt du concept d'interférométrie bolométrique : il fut des époques où la situation se présentait sous un angle franchement défavorable. Pour résumer, nous nous trouvions en présence d'un instrument dont certains composants semblaient difficiles à réaliser technologiquement (les déphaseurs), dont la sensibilité était incertaine, dont le concept pouvait potentiellement être anéanti par l'exploration de certaines zones d'ombres (largeur de bande, imperfections du combineur, etc.), et dont les avantages en terme de contrôle des effets systématiques n'étaient pas évident...

C'est justement en regard de ces doutes passés, et des travaux qui ont permis de les lever, que ma confiance actuelle dans la pertinence du concept d'interférométrie bolométrique me semble légitime. J'espère avoir convaincu le lecteur que la collaboration QUBIC dispose désormais de la maturité nécessaire, aussi bien en termes de maîtrise conceptuelle qu'en termes de développements instrumentaux, à la réalisation, dans un futur proche, d'un instrument aussi compétitif qu'original dans la quête des modes B.

Pour terminer sur une note plus personnelle, je voudrais redire ici combien j'ai apprécié évoluer au sein de l'environnement privilégié que constitue le groupe Cosmologie & Gravitation de l'APC ; ma situation me permettait par exemple de discuter des enjeux d'interprétation statistique des anomalies du CMB le matin, de me faire expliquer le fonctionnement des TES en fin d'après-midi, et de participer entre-temps à une de ces phases d'effervescence avec Jean-Christophe, Jean et bien d'autres, durant lesquelles se sont peu à peu forgées les idées exposées dans cette thèse. Ces phases riches en rebondissements, sont, je le crois, une caractéristique commune à tout travail de recherche, et constituent, plus que l'achèvement du travail même, la véritable joie du créateur – chercheur ou artiste ; cette joie qui, selon Proust, « ne l'abandonne jamais » !

## **Annexe A**

# **Publications**

Nous reproduisons ici les articles publiés dans le cadre de cette thèse.

A&A 497, 963–971 (2009)  
 DOI: 10.1051/0004-6361/200810306  
 © ESO 2009

**Astronomy  
&  
Astrophysics**

## An efficient phase-shifting scheme for bolometric additive interferometry

R. Charlassier, J.-Ch. Hamilton, É. Bréelle, A. Ghribi, Y. Giraud-Héraud, J. Kaplan, M. Piat, and D. Prêle

APC, Université Denis Diderot-Paris 7, CNRS/IN2P3, CEA, Observatoire de Paris, 10 rue A. Domon & L. Duquet,  
 75205 Paris Cedex 13, France  
 e-mail: rcharlas@apc.univ-paris7.fr

Received 2 June 2008 / Accepted 30 January 2009

### ABSTRACT

**Context.** Most upcoming CMB polarization experiments will use direct imaging to search for primordial gravitational waves through the B-modes. Bolometric interferometry is an appealing alternative to direct imaging that combines the advantages of interferometry in terms of systematic effects handling and those of bolometric detectors in terms of sensitivity.

**Aims.** We calculate the signal from a bolometric interferometer in order to investigate its sensitivity to the Stokes parameters paying particular attention to the choice of the phase shifting scheme applied to the input channels in order to modulate the signal.

**Methods.** The signal is expressed as a linear combination of the Stokes parameter visibilities whose coefficients are functions of the phase shifts.

**Results.** We show that the signal to noise ratio on the reconstructed visibilities can be maximized provided the fact that the phase shifting scheme is chosen in a particular way called “coherent summation of equivalent baselines”. As a result, a bolometric interferometer is competitive with an imager having the same number of horns, but only if the coherent summation of equivalent baselines is performed. We confirm our calculations using a Monte-Carlo simulation. We also discuss the impact of the uncertainties on the relative calibration between bolometers and propose a way to avoid this systematic effect.

**Key words.** cosmology: cosmic microwave background – techniques: interferometric – methods: data analysis

### 1. Introduction

Measuring precisely the polarization of the Cosmic Microwave Background (CMB) is one of the major challenges of contemporary observational cosmology. It has already led to spectacular results concerning the cosmological model (Kovac et al. 2002; Readhead et al. 2004; Dunkley et al. 2009; Nolte et al. 2009; Ade et al. 2008) describing our Universe. Even more challenging is the detection of the so-called B-modes in the CMB polarization, associated with pure tensor modes originating from primordial gravitational waves enhanced by inflation. Discovering these modes would give direct information on inflation as the amplitude of the B-modes is proportional to the tensor to scalar ratio for the amplitude of the primordial density perturbations which is a direct product of inflationary scenarios (Liddle & Lyth 2000). Furthermore, it seems that most of the inflationary models arising in the context of string theory (brane inflation, ...) predict an undetectably small scalar to tensor ratio (Kallosch & Linde 2007). The discovery of B-modes in the CMB may therefore be one of the few present ways to falsify numerous string theories. Cosmic strings and other topological defects are also sources of density perturbations of both scalar and tensor nature. They are however largely dominated by the adiabatic inflationary perturbations in TT, TE and EE power spectra and therefore are hard to detect. It is only in the B-mode sector (BB power spectrum) that the tensor topological defect perturbation could be large (Bevis et al. 2007) and have a different shape (Urrestilla et al. 2008) from those originating from inflation and hence be detectable (Pogosian & Wyman 2008).

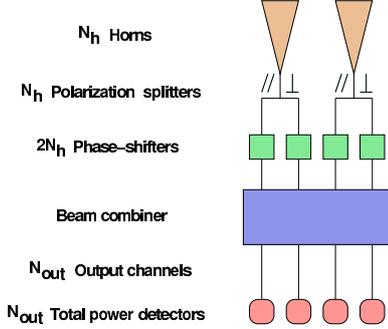
Unfortunately, the inflationary tensor to scalar ratio seems to be rather small so that the B-modes are expected at a low

level as compared to the E-modes. The quest for the B-modes is a therefore tremendous experimental challenge: one requires exquisitely sensitive detectors with an unprecedented control of the instrumental systematics, observing at a number of different frequencies to be able to remove foreground contamination. Various teams have decided to join the quest, most of them with instrumental designs based on the imager concept (BICEP Takahashi et al. 2008, EBEX Oxley et al. 2004, QUIET Samtleben et al. 2008, SPIDER Crill et al. 2008, CLOVER North et al. 2008). Another possible instrumental concept is a pairwise heterodyne interferometer that has many advantages from the point of view of systematic effects (no optics for instance) and that directly measures the Fourier modes of the sky. Let us recall that the first detections of polarization of the CMB were performed with interferometers (Kovac et al. 2002; Readhead et al. 2004). Pairwise heterodyne interferometers are however often considered as less sensitive than imagers mainly because of the additional noise induced by the amplifiers required whereas imagers use background limited bolometers. Another drawback of pairwise heterodyne interferometry is that it requires a number of correlators that scales as the square of the number of input channels, limiting the number of channels actually achievable (CMB Task Force report 2006).

A new concept of an instrument called a “bolometric interferometer” is currently under development (MBI Timbie et al. 2006, BRAIN Polenta et al. 2003; Charlassier et al. 2008). In such an instrument, the interference fringes are “imaged” using bolometers. We believe that such an instrument could combine the advantages of interferometry in terms of systematic effects and data analysis and those of bolometers in terms of sensitivity. Sensitivity issues concerning imagers and

964

R. Charlassier et al.: An efficient phase-shifting scheme for bolometric additive interferometry



**Fig. 1.** Schematic view of the bolometric interferometer design considered in this article.

interferometers (including bolometric) have been investigated by various authors including (Zmuidzinas 2003; Withington et al. 2008; Saklatvala et al. 2008). The goal of this article is to investigate ways to reconstruct the Fourier modes on the sky (the so-called *visibilities*) of the Stokes parameters with a bolometric interferometer. In particular, we focus our attention on the necessary phase shifting schemes required to modulate the fringe patterns observed with the bolometer array. We show that one can construct phase sequences that allow one to achieve an excellent sensitivity on the visibilities: scaling as  $\sqrt{N_h}/N_{eq}$  (where  $N_h$  is the number of horns and  $N_{eq}$  is the number of pairs of horns separated by identical vectors, hereafter called *equivalent baselines*), whereas it would scale as  $\sqrt{N_h}/\sqrt{N_{eq}}$  for a non optimal phase shifting sequence.

This article is organised as follows: in Sect. 2 we describe the assumptions that we make on the hardware design and on the properties of the various parts of the detector. In Sect. 3 we describe how the signal measured by such an instrument can be expressed in terms of the Stokes parameter visibilities. We show how to invert the problem in an optimal way in Sect. 4 and show how the phase shifting scheme can be chosen so that the reconstruction is indeed optimal in Sect. 5. We have validated the method we propose using a Monte-Carlo simulation described in Sect. 6. We end with some considerations about systematic effects induced by cross-calibration errors and propose a way to avoid them in Sect. 7.

## 2. Bolometric interferometer design

In this section we will describe the basic design we assume for the bolometric interferometer and how the incoming radiation is transmitted through all of its elements. This will lead us to a model of the signal that is actually detected at the output of the interferometer. A schematic view of the bolometric interferometer is shown in Fig. 1

### 2.1. Horns

We assume that we are dealing with an instrument which is observing the sky through  $N_h$  input horns placed on an array at positions  $\mathbf{d}_i$ . All horns are supposed to be coplanar and looking towards the same direction on the sky. They are characterized by their beam pattern on the sky denoted  $B_{in}(\mathbf{n})$  where  $\mathbf{n}$  is the unit vector on the sphere. Two horns  $i$  and  $j$  form a baseline which we label with  $0 \leq b \leq N_h(N_h - 1)/2 - 1$ . The phase difference

between the electric field  $E$  reaching the two horns from the same direction  $\mathbf{n}$  of the sky is such that:

$$E_j(\mathbf{n}) = E_i(\mathbf{n}) \exp(2i\pi \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}), \quad \text{where } \mathbf{u}_b = (\mathbf{d}_j - \mathbf{d}_i)/\lambda, \quad (1)$$

where  $\lambda$  is the central observing wavelength.

### 2.2. Equivalent baselines

It is clear that if two baselines  $b$  and  $b'$  are such that  $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_{b'}$ , then the phase shifts associated with the two baselines are equal, a fact that we shall extensively use in the following. All baselines  $b$  such that  $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_\beta$  form a class of equivalent baselines associated with mode  $\mathbf{u}_\beta$  in visibility space. For all baselines  $b$  belonging to the same class  $\beta$ , the phase difference between the two horns  $i$  and  $j$  is the same:

$$E_j(\mathbf{n}) = E_i(\mathbf{n}) \exp(2i\pi \mathbf{u}_\beta \cdot \mathbf{n}). \quad (2)$$

The number  $N_\beta$  of different classes of equivalent baselines depends on the array, and the number of different baselines in an equivalence class also depends on the particular class. For instance, if we consider a square array with  $N_h = N_{side}^2$  horns, there are  $N_\beta = 2N_{side}(N_{side} - 1)$  classes, and the number of equivalent baselines in the class associated with<sup>1</sup>

$$\mathbf{u}_\beta = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \quad \text{with } 1 \leq l \leq N_{side} - 1 \text{ for } m = 0$$

$$\text{and } -|N_{side} - 1| \leq l \leq N_{side} - 1 \text{ for } 1 \leq m \leq N_{side} - 1,$$

$$\text{is } N_{eq}(\beta) = (N_{side} - |l|)(N_{side} - m).$$

### 2.3. Polarization splitters

In order to be sensitive to the polarization of the incoming radiation, we also assume that at the output of each horn there is a device which separates the radiation into two orthogonal components denoted  $\parallel$  and  $\perp$ . Such a separation can be achieved with an orthomode transducer (OMT) in waveguide (Pisano et al. 2007), finline (Chattopadhyay et al. 1999) or planar (Engargiola et al. 1999; Grimes et al. 2007) technologies. Each horn therefore has two outputs measuring the electric field integrated through the beam in the two orthogonal directions. The electric field at the output of the polarization splitter corresponding to horn  $i$  coming from direction  $\mathbf{n}$  for polarization  $\eta$  ( $\parallel$  or  $\perp$ ) is defined by  $e_i^\eta(\mathbf{n})$  as:

$$e_i^\eta(\mathbf{n}) = B_{in}(\mathbf{n}) E_i^\eta(\mathbf{n}). \quad (3)$$

### 2.4. Phase shifters

Important components of the required setup are the *phase shifters* placed on each of the outputs that allow the phase of the electric field to be shifted by a given angle that can be chosen and controlled externally. As will be shown later in this article, modulating the phases of the input channels is necessary to reconstruct the polarized visibilities (that can be related to cosmological information) from the signal on the detectors. For now we do not make any assumptions on the possible values of the angles but we will see that they have to be chosen carefully in order to optimize the signal to noise ratio. The signal after phase shifting coming from direction  $\mathbf{n}$  with polarization  $\eta$  is:

$$e_i^{\prime\eta}(\mathbf{n}) = \exp(i\phi_i^\eta) e_i^\eta(\mathbf{n}). \quad (4)$$

For obvious hardware reasons, all phase shifters in the setup have to be identical and deliver the same possible phase shifts.

<sup>1</sup> In units of the smallest baseline in the array.

### 2.5. Beam combiner

In order to be able to perform interferometry, the beam of each horn has to be combined with all the others so that all possible baselines are formed. The realization of a beam combiner is an issue in itself that will not be assessed in the present article. As an example, this can be achieved using a Butler combiner (Butler 1961, Dall'Orno 2003) or with a quasi-optical Fizeau combiner such as the one used for the MBI instrument (Timbie et al. 2006). All of these devices are such that the  $2N_h$  input channels result after passing through the beam combiner in  $N_{\text{out}}$  output channels that are linear combinations of the input ones. To be able to conserve the input power in an ideal lossless device, the number of output channels  $N_{\text{out}}$  has to be at least equal to the number of input channels  $2N_h$ . In the output channel  $k$ , the electric field coming from direction  $\mathbf{n}$  is  $z_k(\mathbf{n})$ :

$$z_k(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{N_{\text{out}}}} \sum_{i=0}^{N_h-1} \sum_{\eta=0}^1 \gamma_{k,i}^\eta \epsilon_i^\eta(\mathbf{n}) \exp(i\phi_i^\eta), \quad (5)$$

where the  $\gamma_{k,i}^\eta$  coefficients model the beam combiner,  $\eta = 1$  or  $0$  respectively corresponds to  $\parallel$  and  $\perp$  polarizations. We choose to deal with configurations where the incoming power is equally distributed among all output channels: the coefficients  $\gamma_{k,i}^\eta / \sqrt{N_{\text{out}}}$  have unit modulus:  $|\gamma_{k,i}^\eta(k) / \sqrt{N_{\text{out}}}| = 1$ . Conservation of the total input power  $\sum_{i,\eta} \int |e_i^\eta(\mathbf{n})|^2 d\mathbf{n} = \sum_k \int |z_k(\mathbf{n})|^2 d\mathbf{n}$  (see Eqs. (7)–(11)) can be easily checked by requiring unitarity of the matrix whose elements are given by  $\gamma_{k,i}^\eta$  (one dimension is  $k$  and the other is  $i, \eta$ ).

In order to simplify the notation, we include the  $\gamma_{k,i}^\eta$  phases in the phase shifting terms as  $\Phi_{k,i}^\eta = \phi_i^\eta + \text{Arg}(\gamma_{k,i}^\eta)$  so that:

$$z_k(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{N_{\text{out}}}} \sum_{i=0}^{N_h-1} \sum_{\eta=0}^1 \epsilon_i^\eta(\mathbf{n}) \exp(i\Phi_{k,i}^\eta). \quad (6)$$

### 2.6. Total power detector

The signal from each of the outputs of the combiner is not detected in a coherent way as in a pairwise heterodyne interferometer but with a bolometer through its total power averaged on time scales given by the time constant of the detector (larger than the EM wave period). The power on a given bolometer is:

$$S_k = \left\langle \left| \int z_k(\mathbf{n}) d\mathbf{n} \right|^2 \right\rangle_{\text{time}} \quad (7)$$

$$= \int \langle z_k(\mathbf{n}) z_k^*(\mathbf{n}') \rangle_{\text{time}} d\mathbf{n} d\mathbf{n}'. \quad (8)$$

The signal coming from different directions in the sky are incoherent so that their time averaged correlation vanishes:

$$\langle z_k(\mathbf{n}) z_k^*(\mathbf{n}') \rangle_{\text{time}} = \langle |z_k(\mathbf{n})|^2 \rangle_{\text{time}} \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}') \quad (9)$$

$$\equiv |z_k(\mathbf{n})|^2 \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}'). \quad (10)$$

From now on,  $z$  is implicitly replaced by its time-averaged value. The signal on the bolometers is finally:

$$S_k = \int |z_k(\mathbf{n})|^2 d\mathbf{n}. \quad (11)$$

### 3. Stokes parameter visibilities

Developing the signal on the bolometers in terms of the incoming electric fields easily shows autocorrelation terms for each channel as well as cross-correlation terms between all the possible pairs of channels:

$$S_k = \frac{1}{N_{\text{out}}} \int \left\langle \left| \sum_{i=0}^{N_h-1} \sum_{\eta=0}^1 \epsilon_i^\eta(\mathbf{n}) \exp(i\Phi_{k,i}^\eta) \right|^2 + 2\text{Re} \left[ \sum_{i < j} \sum_{\eta_1, \eta_2} \epsilon_i^{\eta_1}(\mathbf{n}) \epsilon_j^{\eta_2*}(\mathbf{n}) \exp(i(\Phi_{k,i}^{\eta_1} - \Phi_{k,j}^{\eta_2})) \right] \right\rangle d\mathbf{n}. \quad (12)$$

The electric fields from different horns are related through Eq. (2) and introduce the Stokes parameters that are generally used to describe a polarized radiation:

$$I = \langle |E_\parallel|^2 \rangle + \langle |E_\perp|^2 \rangle, \quad (13)$$

$$Q = \langle |E_\parallel|^2 \rangle - \langle |E_\perp|^2 \rangle, \quad (14)$$

$$U = \langle E_\parallel E_\perp^* \rangle + \langle E_\perp^* E_\parallel \rangle = 2\text{Re} \langle E_\parallel E_\perp^* \rangle, \quad (15)$$

$$V = i \langle (E_\parallel E_\perp^*) - (E_\perp^* E_\parallel) \rangle = -2\text{Im} \langle E_\parallel E_\perp^* \rangle. \quad (16)$$

The Stokes parameter visibilities are defined as ( $S$  stands for  $I$ ,  $Q$ ,  $U$  or  $V$ ):

$$V_S(\mathbf{u}_\beta) = \int S(\mathbf{n}) B_{\text{in}}^2(\mathbf{n}) \exp(2i\pi \mathbf{u}_\beta \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{n}. \quad (17)$$

The phase shift differences for a baseline  $b$  formed by horns  $i$  and  $j$  measured in the channel  $k$  are:

$$\Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\parallel} = \Phi_{k,i}^\parallel - \Phi_{k,j}^\parallel, \quad (18)$$

$$\Delta\Phi_{k,b}^{\perp\perp} = \Phi_{k,i}^\perp - \Phi_{k,j}^\perp, \quad (19)$$

$$\Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\perp} = \Phi_{k,i}^\parallel - \Phi_{k,j}^\perp, \quad (20)$$

$$\Delta\Phi_{k,b}^{\perp\parallel} = \Phi_{k,i}^\perp - \Phi_{k,j}^\parallel. \quad (21)$$

Putting all these definitions into Eq. (12) and after some calculations one finds that the signal on the bolometer  $k$  can be expressed purely in terms of the Stokes parameter visibilities and the phase shifting values (the subscript  $b$  stands for all the  $N_h(N_h - 1)/2$  available baselines and  $n_k$  is the noise):

$$S_k = \Lambda_k \cdot \mathbf{S} + \sum_{b=0}^{N_h(N_h-1)/2-1} \Gamma_{k,b} \cdot \mathcal{V}_b + n_k, \quad (22)$$

where the first term is the autocorrelations of all horns and the second one contains the cross-correlations, hence the interference patterns. We have used the following definitions:

$$\Lambda_k = \frac{1}{N_{\text{out}}} \sum_{i=0}^{N_h-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cos(\Phi_{k,i}^\parallel - \Phi_{k,i}^\perp) \\ \sin(\Phi_{k,i}^\parallel - \Phi_{k,i}^\perp) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^i = \begin{pmatrix} \int I(\mathbf{n}) B^2(\mathbf{n}) d\mathbf{n} \\ \int Q(\mathbf{n}) B^2(\mathbf{n}) d\mathbf{n} \\ \int U(\mathbf{n}) B^2(\mathbf{n}) d\mathbf{n} \\ \int V(\mathbf{n}) B^2(\mathbf{n}) d\mathbf{n} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\Gamma_{k,b} = \frac{1}{N_{\text{out}}} \begin{pmatrix} \cos \Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\parallel} + \cos \Delta\Phi_{k,b}^{\perp\perp} \\ -(\sin \Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\parallel} + \sin \Delta\Phi_{k,b}^{\perp\perp}) \\ \cos \Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\perp} - \cos \Delta\Phi_{k,b}^{\perp\parallel} \\ -(\sin \Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\parallel} - \sin \Delta\Phi_{k,b}^{\perp\perp}) \\ \cos \Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\perp} + \cos \Delta\Phi_{k,b}^{\perp\parallel} \\ -(\sin \Delta\Phi_{k,b}^{\perp\perp} + \sin \Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\parallel}) \\ -(\sin \Delta\Phi_{k,b}^{\perp\perp} - \sin \Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\parallel}) \\ -(\cos \Delta\Phi_{k,b}^{\perp\perp} - \cos \Delta\Phi_{k,b}^{\parallel\parallel}) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_b^i = \begin{pmatrix} \text{Re}[V_I(\mathbf{u}_b)] \\ \text{Im}[V_I(\mathbf{u}_b)] \\ \text{Re}[V_Q(\mathbf{u}_b)] \\ \text{Re}[V_U(\mathbf{u}_b)] \\ \text{Im}[V_Q(\mathbf{u}_b)] \\ \text{Re}[V_U(\mathbf{u}_b)] \\ \text{Im}[V_U(\mathbf{u}_b)] \\ \text{Re}[V_V(\mathbf{u}_b)] \\ \text{Im}[V_V(\mathbf{u}_b)] \end{pmatrix} \quad (24)$$

All of this can be regrouped as a simple linear expression involving a vector with all the sky information (Stokes parameter autocorrelations  $\mathbf{S}$  and all visibilities  $\mathcal{V}_b$ ) labelled  $\mathbf{X}$  and another involving the phase shifting informations ( $\mathbf{A}_k$  and  $\mathbf{\Gamma}_{k,b}$ ) labelled  $\mathbf{A}_k$ :

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{X} + n_k. \quad (25)$$

Finally, various measurements of the signal coming from the  $N_{\text{out}}$  different channels and/or from different  $N_t$  time samples with different phase shifting configurations can be regrouped together (the index  $k$  now goes from 0 to  $N_d = N_t \times N_{\text{out}}$ ) by adding columns to  $\mathbf{A}$  which then becomes a matrix  $\mathbf{A}$  and transforming the individual measurement  $\mathbf{S}_k$  into a vector  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{n} \quad (26)$$

where  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{X}$  and  $\mathbf{S}$  are easily expressed as a function of the quantities defined above (the total number of baselines is  $N_b = N_h(N_h - 1)/2$ ):

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_0 \\ \mathbf{S}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{N_d-1} \end{pmatrix} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_0 & \mathbf{\Lambda}_1 & \cdots & \mathbf{\Lambda}_{N_d-1} \\ \mathbf{\Gamma}_{0,0} & \mathbf{\Gamma}_{1,0} & \cdots & \mathbf{\Gamma}_{N_d-1,0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{\Gamma}_{0,N_b-1} & \mathbf{\Gamma}_{1,N_b-1} & \cdots & \mathbf{\Gamma}_{N_d-1,N_b-1} \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}' \\ \mathcal{V}'_0 \\ \mathcal{V}'_1 \\ \vdots \\ \mathcal{V}'_{N_b-1} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

#### 4. Reconstruction of the visibilities

Once one has recorded enough data samples to invert the above linear problem (we will call such a period a *sequence* in the following), the solution is the usual one assuming that the measurement noise covariance matrix is  $N = \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' \rangle$ :

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{A}' \cdot N^{-1} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}' \cdot N^{-1} \cdot \mathbf{S}, \quad (28)$$

with covariance matrix:

$$N = \left( \langle \hat{\mathbf{X}} - \langle \hat{\mathbf{X}} \rangle \cdot \langle \hat{\mathbf{X}} \rangle' \right) = (\mathbf{A}' \cdot N^{-1} \cdot \mathbf{A})^{-1}. \quad (29)$$

##### 4.1. Regrouping equivalent baselines

One sees that the dimension  $N_u$  of the  $\mathbf{X}$  vector of unknowns is rather large:  $N_u = 3 + 8 \times N_b$  where  $N_b = N_h(N_h - 1)/2$  is the number of baselines formed by the input horn array. For a large horn array this number can become very large. A  $10 \times 10$  array has for instance  $N_b = 4950$  baselines and  $N_u = 39\,603$  unknowns. One needs at least as many data samples as unknowns (and in many cases more than that) so this would involve manipulations of very large matrices. In fact as we said before, depending on the relative positions of the input horns, there may be a lot of *equivalent* baselines: different pairs of horns separated by the same vector  $\mathbf{u}_\beta$  hence measuring exactly the same visibilities. It is clearly advantageous to regroup these equivalent baselines together in order to reduce the dimension of the system. As we will see below there is a huge added-advantage in doing it this way in terms of signal-to-noise ratio if one chooses the phase shifter angles wisely.

In the case where the input horn array is a square grid with size  $N_{\text{side}} = \sqrt{N_h}$ , the number of different classes of equivalent baselines is  $N_x = 2N_{\text{side}}(N_{\text{side}} - 1) = 2(N_h - \sqrt{N_h}) = 180$  for a  $10 \times 10$  horn array, hence reducing the number of unknowns to 1443 which is a very large improvement. It is obvious that all equivalent baselines measure the same visibilities and can therefore be regrouped in the linear problem leading to the same

solution as considering the equivalent baselines separately. One just has to reorder the terms in Eq. (22) as first a sum over all different baselines  $\beta$  and then a sum over each of the baselines  $b_\beta$  equivalent to  $\beta$  on the output line  $k$ :

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{S} + \sum_{\beta=0}^{N_x-1} \mathbf{\Gamma}_{k,\beta} \cdot \mathcal{V}_\beta + n_k, \quad (30)$$

changing the  $\mathbf{\Gamma}$  vector to:

$$\mathbf{\Gamma}_{k,\beta} = \frac{1}{N_{\text{out}}} \sum_{b_\beta=0}^{N_{\text{eq}}(\beta)-1} \begin{pmatrix} \cos \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\parallel\parallel} + \cos \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\perp\perp} \\ -(\sin \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\parallel\parallel} + \sin \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\perp\perp}) \\ \cos \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\parallel\parallel} - \cos \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\perp\perp} \\ -(\sin \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\parallel\parallel} - \sin \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\perp\perp}) \\ \cos \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\parallel\perp} + \cos \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\perp\parallel} \\ -(\sin \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\parallel\perp} + \sin \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\perp\parallel}) \\ -(\sin \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\parallel\perp} - \sin \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\perp\parallel}) \\ -(\cos \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\perp\perp} - \cos \Delta\Phi_{k,b_\beta}^{\parallel\parallel}) \end{pmatrix}. \quad (31)$$

The global system to be solved is written in the same way as before  $\mathbf{S} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{n}$ , where the matrix  $\mathbf{A}$  and the vectors  $\mathbf{X}$  and  $\mathbf{S}$  are constructed as defined in Eq. (27). Each column of the matrix  $\mathbf{A}$  corresponds to phase shifter configurations encoded in  $\mathbf{\Gamma}_{k,\beta}$  (for all different baselines  $\beta$ ) and  $\mathbf{A}_k$ .

##### 4.2. Coherent summation of equivalent baselines

We now investigate the noise covariance matrix for the reconstructed visibilities and how one could optimize it. The noise coming from one horn illuminating one bolometer with the power  $P_0$  during one time sample is (Bowden et al. 2004; Lamarre 1986):

$$\sigma_0^2 = a_s P_0 + a_b P_0^2, \quad (32)$$

where  $a_s P_0$  is called the ‘‘shot noise’’ term and  $a_b P_0^2$  the ‘‘photon bunching’’ term<sup>2</sup>. Now in the case considered here,  $N_h$  horns illuminate  $N_{\text{out}}$  bolometers, so the total power on one bolometer is  $P = N_h/N_{\text{out}} \times P_0$ . Thus the noise on one of our detectors is:

$$\sigma^2 = a_s P + a_b P^2 = a_s P_0 \frac{N_h}{N_{\text{out}}} + a_b P_0^2 \times \left( \frac{N_h}{N_{\text{out}}} \right)^2 \quad (33)$$

$$\leq \frac{N_h}{N_{\text{out}}} \sigma_0^2, \quad (34)$$

because  $N_{\text{out}} \geq 2N_h$ . We shall therefore use this upper limit to express the noise covariance matrix of the measured data samples. We assume for simplicity that the noise is stationary and uncorrelated from one data sample to another and that the combiner is lossless (for a Butler combiner this is true if  $N_{\text{out}} = 2N_h$ ). The noise covariance matrix is then diagonal and is written:

$$N = \frac{\sigma_0^2 N_h}{N_{\text{out}}} \times \mathbb{I}, \quad (35)$$

where  $\mathbb{I}$  is the  $N_d \times N_d$  identity matrix ( $N_d = N_{\text{out}} \times N_t$  is the number of data samples taken during  $N_t$  time samples with  $N_{\text{out}}$

<sup>2</sup> At 90 GHz with 30% bandwidth, the second term is not negligible if one observes from the ground. From space however, still at 90 GHz, the second term becomes negligible as the input power is significantly reduced.

output channel). The visibilities covariance matrix (see Eq. (29)) is written:

$$\mathcal{N} = \frac{\sigma_0^2 N_h}{N_{\text{out}}} \times (A^t \cdot A)^{-1}. \quad (36)$$

We have regrouped all equivalent baselines together in  $A$ ; each of its elements is therefore the sum on  $N_{\text{eq}}$  sines and cosines of the phase shifting angles (as expressed in Eq. (31)). We will assume here that the angles are chosen randomly and uniformly from a set of possible values between 0 and  $2\pi$ . Now there are two possibilities depending on the choice of the phase shifting angles for all baselines equivalent to a given one: they can all be different or they can all be equal. We refer to this choice as *incoherent* or *coherent* summation of equivalent baselines:

- *Incoherent summation of equivalent baselines*: each of the sum of the two sine/cosine functions of the uniformly distributed angles has zero average and a variance 1. Each element of  $\mathbf{\Gamma}_{k,\beta}$  is the sum of  $N_{\text{eq}}$  of these and the *Central Limit Theorem* states that it will have zero average and a variance  $\left(\frac{1}{N_{\text{out}}}\right)^2 N_{\text{eq}}(\beta)$ .
- *Coherent summation of equivalent baselines*: then each element of  $\mathbf{\Gamma}_{k,\beta}$  is  $\frac{1}{N_{\text{out}}} N_{\text{eq}}(\beta)$  times the same angle contribution with variance 1. The matrix elements ends up having a variance  $\left(\frac{1}{N_{\text{out}}}\right)^2 N_{\text{eq}}^2(\beta)$ .

Coming back to  $A^t \cdot A$ , the multiplication by the transpose will add all the  $N_d$  different data samples. The off-diagonal elements will cancel out because the angles are uncorrelated from one channel to another. The average of the diagonal elements will be the variance of the elements in  $A$  multiplied by  $N_d$ . So finally, depending on the choice between incoherent or coherent summation of equivalent baselines, the visibility covariance matrix will scale in a different manner:

$$\mathcal{N} = \begin{cases} \frac{\sigma_0^2 N_h}{N_{\text{out}}} \frac{1}{N_d} \frac{N_{\text{out}}^2}{N_{\text{eq}}(\beta)} = \frac{\sigma_0^2 N_h}{N_t} \frac{1}{N_{\text{eq}}(\beta)} & \text{for incoherent summation,} \\ \frac{\sigma_0^2 N_h}{N_{\text{out}}} \frac{1}{N_d} \frac{N_{\text{out}}^2}{N_{\text{eq}}^2(\beta)} = \frac{\sigma_0^2 N_h}{N_t} \frac{1}{N_{\text{eq}}^2(\beta)} & \text{for coherent summation.} \end{cases} \quad (37)$$

Of course the evaluation above is only valid in a statistical sense, insofar as the phase shifts are really randomly chosen. If this the case, Eq. (37) are true up to random corrections of relative order  $1/\sqrt{N_d}$ . The latter scaling in Eq. (37) is clearly more advantageous and optimises the reconstruction of the visibilities. In fact this result is quite obvious: if the phase shifting angles for equivalent baselines are all different, the coefficients of the linear problem that one wants to invert will always be smaller than if the summation of equivalent baselines is performed coherently. The signal to noise ratio on the visibilities will therefore be optimal if one maximises the coefficients, which is obtained by choosing the coherent summation.

#### 4.3. Comparison with classical interferometers and imagers

The variance on the visibilities obtained above in the case of a coherent summation of equivalent baselines can be rewritten:

$$\sigma_{V(\beta)}^2 = \frac{N_h}{N_{\text{eq}}(\beta)} \frac{\sigma_0^2}{N_t N_{\text{eq}}(\beta)}, \quad (38)$$

that can be compared<sup>3</sup> to formula (28) in Hobson & Magueijo (1996) which is the equivalent for pairwise heterodyne

<sup>3</sup> The notations are different:  $t_{\text{vis}}$  in (Hobson & Magueijo 1996) has to be replaced by our  $N_t$ ; their  $n_{\text{vis}}$  is the number of equivalent baselines

interferometry  $\sigma_0^2/N_t N_{\text{eq}}(\beta)$ . We see that the only difference introduced by bolometric interferometry is the factor  $N_h/N_{\text{eq}}(\beta)$ . On average, the number of equivalent baselines is  $\langle N_{\text{eq}} \rangle = (N_h(N_h - 1)/2)/N_{\neq} \simeq N_h/4$ , but is much larger for small baselines. The design of the instrument has to be such that the “interesting” baselines are very redundant leading to a  $N_h/N_{\text{eq}}$  closer to one. The resulting expression of the variance on visibilities for bolometric interferometry therefore only differs by this slightly larger than one factor with respect to pairwise heterodyne interferometry. The important point is that the value of  $\sigma_0$  for bolometric interferometry is typical of a bolometer (photon noise dominated) hence smaller than what can be achieved with HEMT amplifiers in a pairwise heterodyne interferometer.

This result can be summarized as follows: a bolometric interferometer using coherent summation of equivalent baselines can achieve the sensitivity that would be obtained with a pairwise heterodyne interferometer with the noise of a bolometric instrument (and without the complexity issues related to the large number of channels). Such an instrument would therefore also be competitive with an imager that would have the same number of bolometers as we have input channels in our bolometric interferometer. This is shown in Hamilton et al. (2008) where a detailed study comparing a bolometric interferometer, a pairwise heterodyne interferometer and an imager from the sensitivity point of view is done. On the other hand, if the equivalent baselines are summed incoherently, it is obvious that the sensitivity would be very poor due to the absence of the  $1/N_{\text{eq}}$  additional factor. However, bandwidth is usually an additional difficulty in interferometry, limiting the sensitivity at small scales as signals at different frequencies do not interfere coherently. The problem of bandwidth is now under detailed study.

The next section shows how it is possible to choose the phase shifting sequences in such a way that the prescription of *coherent summation of equivalent baselines* is enforced.

## 5. Choice of the optimal phase sequences

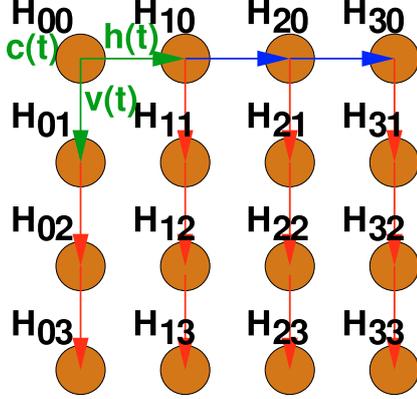
One wants the phase shifting scheme to be such that *equivalent baselines* have exactly the same sequence but that *different baselines* have different phase shifts so that they can be disentangled by the linear inversion corresponding to Eq. (30). Now let's see how to comply with this constraint of having *equivalent* baselines correspond to identical phase differences. As can be seen in Eq. (6), the phase shifts have two different origins: the phase shifters themselves whose angles can be chosen to follow a given sequence and are the same for all output channels and the phase shifts coming from the beam combiner. Each input is labelled by the horn number  $0 \leq i \leq N_h - 1$  and the polarization direction  $\eta$ . Each output is labelled by its number  $1 \leq k \leq N_{\text{out}}$ . The phase shift differences are therefore

$$\Delta\Phi_{k,i\eta,j\eta'} = \underbrace{(\phi_{i\eta} - \phi_{j\eta'})}_{\text{phaseshifters}} + \underbrace{(\text{Arg}(\gamma_{k,i}^\eta) - \text{Arg}(\gamma_{k,j}^{\eta'}))}_{\text{beam combiner}}. \quad (39)$$

#### a) Phase shifter phase differences (unpolarized case):

We assume that the horns are placed on a square array with size  $N_{\text{side}} = \sqrt{N_h}$  as in Fig. 2. In this case, the position of all horns can

$N_{\text{eq}}$ . In our paper  $\sigma_0$  corresponds to  $s\Omega_s$  in their article as a noise equivalent power NEP has to be replaced by  $\text{NET} \times \Omega$  when treating noise in temperature units rather than in power units.



**Fig. 2.** Choosing all the phase sequences from that of one horn and two phase sequence differences (represented in green).

be parametrized, in units of the minimum horn separation, as a vector  $\mathbf{d}_i = \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \end{pmatrix}$  where  $l_i$  and  $m_i$  are integers running from 0 to  $N_{\text{side}} - 1$  such that  $i = l_i + N_{\text{side}}m_i$ . In this case, we have seen that there are  $N_{\beta} = 2(N_h - \sqrt{N_h})$  different classes of equivalent baselines labelled  $\mathbf{u}_{\beta}$ . Forgetting about polarization, the phase sequences can be constructed from a vector of two independent random phase sequences  $h(t)$  and  $v(t)$  which separate the horizontal and vertical directions in the horn array:

$$\phi_i(t) = \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{s}(t) \text{ where } \mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} h(t) \\ v(t) \end{pmatrix}. \quad (40)$$

The phase shift difference associated with the baseline between horns  $i$  and  $j$  is

$$\phi_i - \phi_j = (\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_j) \cdot \mathbf{s}(t), \quad (41)$$

and it is clear that the phase shift difference sequences will be the same for all baselines such that  $\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_j = \mathbf{u}_{\beta}$ , where  $\beta$  is one of the classes of equivalent baselines. Because the two random sequences  $h(t)$  and  $v(t)$  have been chosen independently, the phase sequences associated with two different baseline classes  $\beta \neq \beta'$  will be different.

#### b) Separating polarizations:

Looking at formula (24), it is clear that one will not be able to separate  $V_I$  and  $V_Q$  visibilities, unless one uses two independent vectors of sequences  $\mathbf{s}_{\parallel}(t) \neq \mathbf{s}_{\perp}(t)$ . However, in this case  $V_U$  and  $V_V$  are not measured with maximum accuracy because the phase shift differences

$$\phi_{i\parallel} - \phi_{j\perp} = \mathbf{s}_{\parallel}(t) \cdot \mathbf{d}_i - \mathbf{s}_{\perp}(t) \cdot \mathbf{d}_j$$

are not equal for two different but equivalent baselines, so that they do not add coherently. One is therefore led to use alternately two measuring modes:

1. One mode where  $\mathbf{s}_{\parallel}(t) \neq \mathbf{s}_{\perp}(t)$ , where phase shifts differences read:

$$\phi_{i\parallel} - \phi_{j\parallel} = \mathbf{s}_{\parallel}(t) \cdot (\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_j).$$

In this mode,  $V_I$  and  $V_Q$  are measured with maximum accuracy (noise reduction  $\propto N_{\text{eq}}^2$ ), but  $V_U$  and  $V_V$  are only measured with noise a reduction  $\propto N_{\text{eq}}$ .

2. One mode with  $\mathbf{s}_{\parallel}(t) = \mathbf{s}_{\perp}(t) = \mathbf{s}(t)$ . Then however, one cannot measure  $V_V$  because

$$\phi_{i\parallel} - \phi_{j\perp} = \mathbf{s}(t) \cdot (\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_j) = \phi_{i\perp} - \phi_{j\parallel},$$

therefore one must introduce two more sequences  $c_{\parallel}(t) \neq c_{\perp}(t)$  (one of them may be zero) independent from one another and from  $\mathbf{s}(t)$ , such that  $\phi_{i\parallel} = \mathbf{s}(t) \cdot \mathbf{d}_i + c_{\parallel}(t)$ . Then:

$$\phi_{i\parallel} - \phi_{j\perp} = \mathbf{s}(t) \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) + c_{\parallel}(t) - c_{\perp}(t)$$

whereas

$$\phi_{i\perp} - \phi_{j\parallel} = \mathbf{s}(t) \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) + c_{\perp}(t) - c_{\parallel}(t)$$

but

$$\phi_{i\parallel} - \phi_{j\parallel} = \phi_{i\perp} - \phi_{j\perp} = \mathbf{s}(t) \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j),$$

which means that  $V_I$ ,  $V_U$  and  $V_V$  are measured with maximum accuracy (noise reduction  $\propto N_{\text{eq}}^2$ ), but  $V_Q$  is not measured at all.

We mentioned before that we need all phase shifters to be identical: they all have to be able to produce the same  $n_{\phi}$  phase shifts (let us call this ensemble  $\Psi$ ) but in different order. If  $h_{\eta}(t)$ ,  $v_{\eta}(t)$  and  $c_{\eta}(t)$  are sequences of elements belonging to  $\Psi$ , then the phase for any horn also has to belong to  $\Psi$ , meaning that  $\phi_{i\parallel}(t) = l_i h_{\eta}(t) + m_i v_{\eta}(t) + c_{\eta}(t)$  has to belong to  $\Psi$ . As shown in Appendix A, this requires us to choose the  $n_{\phi}$  values of the phase shifts regularly spaced between 0 and  $2\pi$  as:

$$\phi_n = n \frac{2\pi}{n_{\phi}} \quad (n = 0, \dots, n_{\phi} - 1). \quad (42)$$

The elementary sequences  $h_{\eta}(t)$ ,  $v_{\eta}(t)$  and  $c_{\eta}(t)$  are uniform random samples of  $N_s$  values taken among the  $n_{\phi}$  elements of  $\Psi$ . They must be chosen independent from one another to make sure that unequivalent baselines do not share the same sequence of phase differences.

#### c) Beam combiner phase difference:

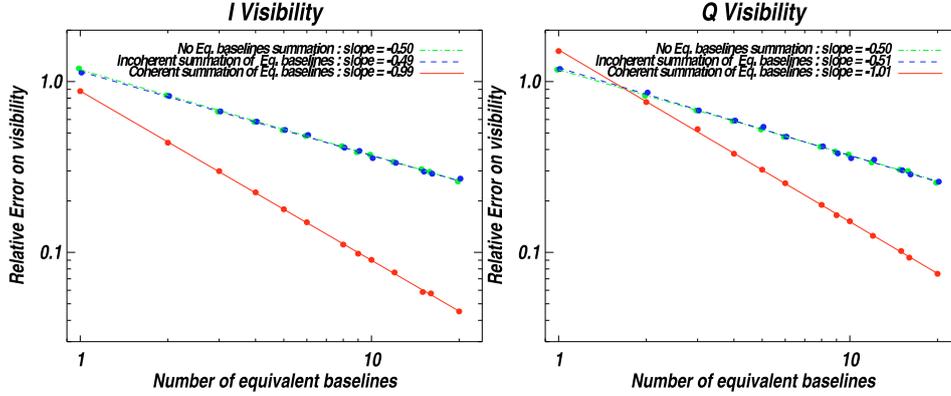
As was said before there are two main designs for the beam combiner: Butler combiner (Dall'Omo 2003) or quasi optical combiner (Timbie et al. 2006). Without going into details, let us say that identical phase shifts for equivalent baselines are naturally obtained for the quasi optical combiner, and are achieved through an adequate wiring for the Butler combiner.

#### d) Summary and expected accuracy:

Finally, in order to recover the visibilities keeping to the ‘‘coherent summation of equivalent baselines’’ criterion, one has to build phase sequences that successively follow modes 1 and 2 on an equal footing, build the corresponding  $A$  matrix and solve the system. There is a price to pay: during the first half sequence,  $V_I$  and  $V_Q$  are measured with optimal accuracy but  $V_U$  and  $V_V$  are not, during the second half sequence,  $V_I$ ,  $V_U$  and  $V_V$  are measured with optimal accuracy but  $V_Q$  is not measured at all. We therefore expect the sensitivity on  $V_Q$ ,  $V_U$  and  $V_V$  to decrease by roughly a factor of  $\sqrt{2}$  with respect to the sensitivity on  $V_I$ , although the sensitivity on  $V_U$  and  $V_V$  will be slightly better constrained than on  $V_Q$ .

## 6. Monte-Carlo simulations

We have investigated what was discussed above using Monte-Carlo simulations. There are three approaches that have to be



**Fig. 3.** Relative rms on visibility residuals for  $V_I$  (left) and  $V_Q$  (right). The behaviour for  $V_U$  and  $V_V$  would be exactly the same as for  $V_Q$ . The rms on the residuals has been divided by the expected  $\sigma_0 \times \sqrt{\frac{N_h}{N_t}}$  scaling for each strategy to exhibit only the dependence with the number of equivalent baselines. The data points were fitted with linear slopes in log-log scale to measure the power of the scaling. One sees that the strategy where equivalent baselines are summed in a coherent way leads to a much better scaling  $\propto \frac{1}{N_{eq}}$  than the other strategies that both scale as  $\propto \frac{1}{\sqrt{N_{eq}}}$ .

compared for the reconstruction of the Stokes parameter visibilities:

- considering all baselines independently without regrouping the equivalent ones. We expect this method to have error bars scaling as  $1/\sqrt{N_{eq}}$ . The system to solve is large in that case;
- regrouping the equivalent baselines without any choice of the phase shifts so that they do not add in a coherent way. We expect this method to be exactly equivalent to the previous one but with a reduced size of the matrices;
- following the strategy to regroup equivalent baselines and choosing the phases so that they are coherently added. We expect the error bars to scale as  $1/N_{eq}$  and therefore be the most efficient.

In each case, we have simulated random visibilities with  $V_Q$ ,  $V_U$  and  $V_V$  a hundred times lower than  $V_I$  as expected from the CMB and calculated the signal expected on the bolometers using the phase shift values for the three above strategies. We then added Gaussian noise with a variance  $\sigma_{MC}^2 = \sigma_0^2 N_h / N_t$  to the bolometer signal. In each case we have performed a large number of noise and phase shift sequence realisations. For each realisation, we have stored the reconstructed and input visibilities and analysed the residual distributions. We have investigated the three above strategies and also the behaviour of the third one (coherent summation of equivalent baselines) with respect to the two free parameters: the length of the phase shift sequence before inverting the linear problem and the number of different phase shift angles (regularly spaced between 0 and  $2\pi$  as shown in Appendix A).

#### 6.1. Scaling with the number of equivalent baselines

We show in Fig. 3 the scaling of the rms residuals on the visibilities as a function of the number of equivalent baselines. We have divided the rms by  $\sigma_0 \sqrt{N_h/N_t}$  in order to isolate the effects that are specific to bolometric interferometry and depend on the way equivalent baselines are summed (see Eq. (37)). We see that as expected the scaling is  $\propto 1/N_{eq}$  if one solves the problem by maximizing the signal to noise ratio using our coherent summation of equivalent baselines. The poor  $1/\sqrt{N_{eq}}$  scaling is also observed when all baselines are considered separately or when the phase shift angles are not chosen optimally.

#### 6.2. Scaling with the number of samples and number of different phases

Let's now concentrate on the optimized strategy described above: coherent summation of equivalent baselines. We show in Fig. 4 the scaling of the rms residuals on the visibilities with respect to the length of the sequence and the number of different phases achieved by the phase shifters (as shown in Appendix A, these have to be regularly spaced between 0 and  $2\pi$ ). The rms values have been divided by  $\frac{\sigma_0}{N_{eq}} \sqrt{\frac{N_h}{N_t}}$ .

One observes (Fig. 4 left) that the linear problem is singular when the number of different phases is not sufficient. Varying the number of horns in the array led us to derive the general scaling  $\approx 2\sqrt{N_h}$  for the minimum number of phases. Increasing the number of possible angles does not improve the residuals. Concerning the length of the sequence (Fig. 4 right), one observes that when it is slightly larger than the number of unknowns ( $N_u = 3 + 8 \times N_\#$  where  $N_\#$  is the number of different baselines,  $N_\# = 2(N_h - \sqrt{N_h})$  for a square array) then the reconstruction of the visibilities is not optimal due to the lack of constraints. Optimality is progressively reached when integrating a larger number of samples before inverting the problem. A reasonable result is obtained when  $N_d \approx 4 \times N_u$ . The expected  $\approx \sqrt{2}$  difference between the accuracy on  $V_I$  and that on  $V_Q$ ,  $V_U$  and  $V_V$  (due to the fact that we have to perform two successive phase shifting schemes in order to measure all three polarized visibilities) is also confirmed by the simulation.

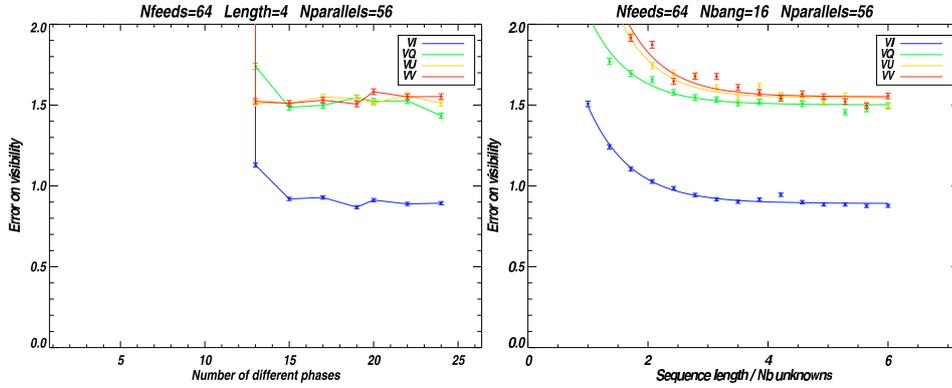
### 7. How to proceed with a realistic instrument?

When dealing with a realistic instrument one has to account for systematic errors and uncertainty to choose the precise data analysis strategy. We do not want to address the broad topic of systematic effects with bolometric interferometry in this article (we refer the interested reader to (Bunn 2007) where systematic issues for interferometry are treated in a general way) but stress one point that is specific to the method we propose here, related to intercalibration of the bolometers in the detector array.

Inverting the linear problem in Eq. (30) is expressing the Stokes parameter visibilities as linear combinations of the  $N_d$

970

R. Charlassier et al.: An efficient phase-shifting scheme for bolometric additive interferometry



**Fig. 4.** Scaling of the rms residuals (divided by  $\frac{\sigma_n}{N_{\text{eq}}} \sqrt{\frac{N_h}{N_t}}$ ) on the Stokes parameter visibilities with respect to the number of different phases achieved by the phase shifters and the number of different phase configurations used for the analysis (length of the sequence). One sees on the left that for a number of horns of 64 one needs at least 12 or 13 different angles to be able to solve the linear problem. It is clear from the plot on the right that the longer the sequence, the better the residuals, but a plateau is rapidly reached when the number of samples is around 4 times the number of unknowns in the linear problem. One can also see the factor  $\approx \sqrt{2}$  between the accuracy on the intensity and the polarized Stokes parameters due to the two-step phase shifting scheme that we have to perform to be able to reconstruct them all.

signal measurements performed with different phase shifting configurations. These measurements can be those of the  $N_{\text{out}}$  bolometers each in  $N_t$  time samples. This is where intercalibration issues have to be considered. Linear combinations of signals measured by different bolometers are extremely sensitive to errors in intercalibration and will induce leakage of intensity into the polarized Stokes parameters if it is not controlled with exquisite accuracy. So we claim that combining different bolometers in the reconstruction of the visibilities in a bolometric interferometer such as the one we describe here is not a wise choice unless the bolometer array is very well intercalibrated (through precise flat-fielding). The solution we propose is to treat all the bolometers independently, inverting the linear problem separately for each of them. This requires many time samples for the phase shift sequences but is safer from the point of view of systematics. As a realistic example, for a  $10 \times 10$  elements square input array, the number of different baselines is 180 and the number of unknowns is 1443. An optimal reconstruction of the visibilities can therefore be achieved with  $\sim 6000$  time samples. The duration of the time samples is driven by both the time constant of the bolometers (very short with TES) and the speed achieved by the phase shifter to switch from one phase to the other. A reasonable duration for the time samples is about 10 ms which would correspond to sequences lasting about one minute. It is likely that the cryogenic system of such a bolometric interferometer would ensure a stable bath on the minute time scale so that the knee frequency of the bolometric signal would be smaller than  $1 \text{ min}^{-1}$ . In such a case, the noise can be considered as white (diagonal covariance matrix) during each sequence and the inversion is easily tractable even with 6000 samples vectors. We are currently performing fully realistic simulations including systematic effects; the results will be presented in a future publication.

## Conclusions

We have investigated ways to reconstruct the Stokes parameter visibilities from a bolometric interferometer. It turns out that all three complex Stokes parameter visibilities can be

reconstructed with an accuracy that scales as the inverse of the number of equivalent baselines if one follows a simple prescription: all equivalent baselines have to be factorized together in a coherent way, meaning that the phase shift differences have to be equal for equivalent baselines. We have proposed a simple way to construct such phase shift sequences and tested it on a Monte-Carlo simulation. The simulation confirms that the scaling of the errors on the visibilities is  $\propto \sqrt{N_h}/N_{\text{eq}}$  if one follows our prescription but  $\sqrt{N_h}/N_{\text{eq}}$  otherwise.

The main conclusion of this article is therefore that a bolometric interferometer can achieve a good sensitivity only with an appropriate choice of the phase shift sequences (coherent summation of equivalent baselines). A detailed study of the sensitivity of a bolometric interferometer (Hamilton et al. 2008) shows that they are competitive with imagers and pairwise heterodyne interferometers.

We also discussed the data analysis strategy and proposed a solution for the possible cross-calibration issues between the different bolometers. Even though one has simultaneously  $N_{\text{out}}$  measurements of the signal with different phase configurations, it might be preferable not to combine these measurements but rather to reconstruct the visibilities on each bolometer separately and combine the visibilities afterwards. Such a strategy would increase the length of the phase shifting sequences, but in a reasonable (and tractable) way thanks to the intrinsic shortness of our proposed phase shifting scheme.

*Acknowledgements.* The authors are grateful to the whole BRAIN collaboration for fruitful discussions.

## Appendix A: Proof of the necessity of having regularly spaced phase shift values

When we use the phase shift configurations of Eq. (40), the antenna with coordinates  $(i, j)$  will be phase shifted by:

$$\phi_{i,j}(t) = ih(t) + jv(t) + c(t). \quad (\text{A.1})$$

In practice we are only able to construct a limited number of different phase shifters, and the phase shift sequences  $h(t)$ ,  $v(t)$

and  $c(t)$  will be independent random sequences of phase shifts taken from the same set  $\Phi$  of  $n$  phase shifts  $\phi_p$ . For all phase shifts in Eq. (A.1) to belong to  $\Phi$ , it is necessary that  $l \times \phi_p$  (modulo  $2\pi$ ) also belongs to  $\Phi$ . Let us write the smallest non-zero element of  $\Phi$  as:

$$\phi_{\min} = \frac{2\pi}{n + \epsilon}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \epsilon < 1. \quad (\text{A.2})$$

$(n + 1)\phi_{\min}$  (modulo  $2\pi$ ) should also belong to  $\Phi$ , but

$$(n + 1)\phi_{\min} = 2\pi + \frac{2\pi(1 - \epsilon)}{n + \epsilon} = \frac{2\pi(1 - \epsilon)}{n + \epsilon} \pmod{2\pi}. \quad (\text{A.3})$$

Therefore  $(n + 1)\phi_{\min} < \phi_{\min}$  (modulo  $2\pi$ ), and cannot belong to  $\Phi$  unless  $\epsilon = 0$ . One concludes that the set  $\Phi_n$  of  $n$  phase shifts has to be of the form:

$$\Phi_n = \left\{ \phi_{n,p} = \frac{2\pi p}{n} \mid n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, 0 \leq p < n \right\}, \quad (\text{A.4})$$

which finally is a quite obvious choice.

## References

- Ade, P., Bock, J., Bowden, M., et al. 2008, *ApJ*, 674, 22  
 Bevis, N., Hindmarsh, M., Kunz, M., et al. 2007, *Phys. Rev. D*, 76, 1722  
 Bock, J., Church, S., Devlin, M., et al., CMB Task Force report 2006 [arXiv:astro-ph/0604101]  
 Bunn, E. F. 2007, *Phys. Rev. D*, 75, 3084  
 Bowden, M., Taylor, A. N., Ganga, K. M., et al. 2004, *MNRAS*, 349, 321  
 Butler, J., & Lowe, R. 1961, *Electron. Des.* 9, 170  
 Charlassier, R., for the BRAIN Collaboration 2008 [arXiv:0805.4527v1]  
 Chattopadhyay, G., & Carlstrom, J. E. 1999, *IEEE Microwave and Guided wave letters*, 9(9)  
 Crill, B., Ade, P. A. R., Battistelli, E. S., et al. 2008, *Proc. SPIE*, 7010 [arXiv:0807.1548]  
 Dall'Omo, Ch. 2003, Ph.D. Thesis, Université de Limoges, France  
 Dunkley, J., Komatsu, E., Nolta, M. R., et al. 2009, *ApJS*, 180, 306  
 Engargiola, G., & Plambeck, R. L. 2003, *Rev. Sci. Inst.*, 74, 1380  
 Grimes, P. K., King, O. G., Yassin, G., & Jones, M. E. 2007, *Electronics Letters*, 43, 1146  
 Hamilton, J.-Ch., Charlassier, R., Cressiot, C., et al. 2008, *A&A*, 491, 923  
 Hobson, M. P., & Magueijo, J. 1996, *MNRAS*, 283, 1133  
 Kallosh, R., & Linde, A. 2007, *JCAP*, 04, 017  
 Kovac, J., Leitch, E. M., Pryke, C., et al. 2002, *Nature*, 420 772  
 Lamare, J.-M. 1986, *Appl. Opt.*, 25, 870  
 Liddle, A. R., & Lyth, D. H., 2000, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge University Press)  
 Nolta, M. R., Dunkley, J., Hill, R. S., et al. 2009, *ApJS*, 180, 296  
 North, C. E., Johnson, B. R., Ade, P. A. R., et al. 2008, *Proc. Rencontres Moriond* [arXiv:0805.3690]  
 Oxley, P., Ade, P., Baccigalupi, C., et al. 2004, *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, 5543, 320  
 Polenta, G., Ade, P. A. R., Bartlett, J., et al. 2007, *New Ast. Rev.*, 51, 256  
 Pogossian, L., & Wyman, M. 2008, *Phys. Rev. D*, 77, 083509  
 Pisano, G., Pietranera, L., Isaak, K., et al. 2007, *IEEE Microwave and wireless components letters*, 17, 286  
 Readhead, A. C. S., Myers, S. T., Pearson, T. J., et al. 2004, *Science*, 306, 836  
 Samtleben, D., et al. 2008, *Proc. Renc. Moriond* [arXiv:0806.4334]  
 Saklatvala, G., Withington, S., Hobson, M. P., et al. 2008, *J. Opt. Soc. Am. A*, 25(4), 958  
 Takahashi, Y. D., Barkats, D., Battle, J. O., et al. 2008, *Proc. SPIE*, 7020, 70201  
 Timbie, P. T., Tucker, G. S., Ade, P. A. R., et al. 2006, *New Astron. Rev.*, 50, 999  
 Urrestilla, J., Mukherjee, P., Liddle, A. R., et al. 2008, *Phys. Rev. D*, 77, 123005  
 Withington, S., Hobson, M. P., & Campbell, E. S. 2008, *J. Opt. Soc. Am. A*, 21, 1988  
 Zmuidzinas, J. 2003, *J. Opt. Soc. Am. A*, 20, 218

A&A 491, 923–927 (2008)  
 DOI: 10.1051/0004-6361:200810504  
 © ESO 2008

**Astronomy  
&  
Astrophysics**

## Sensitivity of a bolometric interferometer to the cosmic microwave background power spectrum

J.-Ch. Hamilton<sup>1</sup>, R. Charlassier<sup>1</sup>, C. Cressiot<sup>1</sup>, J. Kaplan<sup>1</sup>, M. Piat<sup>1</sup>, and C. Rosset<sup>2</sup>

<sup>1</sup> APC, Université Denis Diderot-Paris 7, CNRS/IN2P3, CEA, Observatoire de Paris; 10 rue A. Domon & L. Duquet, Paris, France  
 e-mail: hamilton@apc.univ-paris7.fr

<sup>2</sup> LAL, Laboratoire de l'accélérateur Linéaire, Université Paris-Sud 11, CNRS/IN2P3; Bâtiment 200, 91898 Orsay Cedex, France

Received 2 July 2008 / Accepted 27 August 2008

### ABSTRACT

**Context.** The search for B-mode polarization fluctuations in the Cosmic Microwave Background is one of the main challenges of modern cosmology. The expected level of the B-mode signal is very low and therefore requires the development of highly sensitive instruments with low systematic errors. An appealing possibility is bolometric interferometry.

**Aims.** We compare in this article the sensitivity on the CMB angular power spectrum achieved with direct imaging, heterodyne and bolometric interferometry.

**Methods.** Using a simple power spectrum estimator, we calculate its variance leading to the counterpart for bolometric interferometry of the well known Knox formula for direct imaging.

**Results.** We find that bolometric interferometry is less sensitive than direct imaging. However, as expected, it is finally more sensitive than heterodyne interferometry due to the low noise of the bolometers. It therefore appears as an alternative to direct imagers with different and possibly lower systematic errors, mainly due to the absence of an optical setup in front of the horns.

**Key words.** cosmology: cosmic microwave background – cosmology: early Universe – methods: data analysis

### Introduction

The detection of primordial gravity waves through B-mode polarization anisotropies in the Cosmic Microwave Background is one of the most exciting challenges of modern cosmology. It could provide direct information on the energy scale of inflation, possibly associated with GUT (Liddle & Lyth 2000). It would also allow one to investigate the standard cosmological model in detail through consistency tests involving the spectral indices of scalar and tensor perturbations and their amplitude ratio (Langlois 2004).

Despite the weakness of the expected signal, many teams have decided to join the quest for the B-modes and to construct dedicated instruments that must combine exquisite sensitivity and precise control of systematic effects. Most of the projects proposed up to now use direct imagers, a concept that has proven to be very sensitive. However they might be affected by significant systematic effects such as ground-pickup and beam differences that would less affect an interferometer having no optics before the entry horns. Thus, we investigate the possibility of developing a high sensitivity interferometer dedicated to B-mode searches. A bolometric interferometer would combine the high sensitivity of bolometers with the clean optics of an interferometer and could complement the ongoing imaging projects.

In this article we investigate the sensitivity achieved by such an instrument and compare it with direct imagers and heterodyne interferometers. In Sect. 1 we review useful quantities regarding interferometry in general and the reconstruction of visibilities with a bolometric interferometer. We define in Sect. 2 a simple power spectrum estimator under the assumption that  $E$  and  $B$  visibilities can be extracted from  $Q$  and  $U$  Stokes parameter visibilities (this is in itself an important issue and is beyond the

scope of this article). From this estimator we derive a formula for the  $C_\ell$  uncertainty with a bolometric interferometer equivalent to the famous one derived in Knox (1997) for imagers. We compare the sensitivities achieved with imagers and bolometric and heterodyne interferometers in Sect. 3. We discuss our results in Sect. 4.

### 1. Definitions and assumptions

#### 1.1. Useful interferometric quantities

Here, we discuss basic definitions regarding interferometry in general and bolometric interferometry in particular. An interferometer observes the visibilities of an incoming radiation field  $S(\mathbf{n})$  that are defined as:

$$v_S(\mathbf{u}) = \int S(\mathbf{n})A(\mathbf{n}) \exp(2i\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{n} \quad (1)$$

where  $\mathbf{u}$  is the baseline defined as the vector separation between the horns  $\mathbf{D}$  in units of the electromagnetic wavelength of the radiation  $\mathbf{u} = \mathbf{D}/\lambda$ . The way visibilities are actually reconstructed in a bolometric interferometer is described in Sect. 1.2. The beam of the input horns  $A(\mathbf{n})$  is normalized to one at maximum. In the flat-sky approximation, one can write the visibility as a convolution of the Fourier modes of the incoming radiation with the Fourier transform of the input beam:

$$v_S(\mathbf{u}) = \int \tilde{S}(\mathbf{u})\tilde{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v})d\mathbf{v} = \tilde{S}(\mathbf{u}) \otimes \tilde{A}(\mathbf{u}) \quad (2)$$

where the  $\tilde{\phantom{x}}$  denotes the Fourier transform. Note that outside the flat-sky approximation, a similar formula is to be expected, although more complicated (Bunn & White 2007). This convolution expression states that the sky cut in real space performed by

the input beam is expressed as a convolution in Fourier space. The correspondance with multipoles is  $\ell = 2\pi u$ . Each horn covers a solid angle  $\Omega$  defined as:

$$\Omega = \int A(\mathbf{n})d\mathbf{n}. \quad (3)$$

If we approximate the beam by a Gaussian defined by its rms  $\sigma$ , its FWHM is  $\sigma \times 2\sqrt{2\ln 2} \approx 2.35\sigma$  and in that case the solid angle subtended by the horn is  $\Omega = 2\pi\sigma^2$  which can be related to the fraction of the sky observed with the horn  $f_{\text{sky}} = \Omega/4\pi$ . We assume that the horns are placed on a square grid so that the baselines are also located on a square grid. The minimum spacing between two horns is obtained by packing at a distance equal to their diameter. As they are diffraction limited, their section, solid angle and wavelength are such that<sup>1</sup>  $S\Omega \approx \lambda^2$  so that their distance is  $D_h = 2\lambda/\sqrt{\pi\Omega}$ . The spacing between visibilities in Fourier space is therefore:

$$u_{\min} = \frac{2}{\sqrt{\pi\Omega}} = \frac{1}{\pi\sqrt{f_{\text{sky}}}}. \quad (4)$$

In our Gaussian approximation, the Fourier transform of the primary beam is:

$$\tilde{A}(\mathbf{u}) = \Omega \exp(-\pi\Omega\mathbf{u}^2) \quad (5)$$

so that in terms of a Gaussian in Fourier space, the resolution is:

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Omega}}. \quad (6)$$

The baselines are separated by  $u_{\min}$  and each point in baseline space has a resolution  $\sigma_u$ , therefore:

$$\frac{u_{\min}}{\sigma_u} = 2\sqrt{2} \approx 3. \quad (7)$$

We can conclude that the different baselines are almost independent. In reality, the distribution of the electric field vanishes outside the horn aperture so that the primary beam is not an exact Gaussian and the beam in Fourier space is also truncated at a radius of  $u_{\min}$  (White et al. 1999). This does not change the fact that different baselines are almost independent.

### 1.2. Visibility reconstruction in bolometric interferometry

In a heterodyne interferometer, the visibilities are directly obtained using a correlator that gives as an output the correlated signal  $E_1 E_2^*$  coming from two antennae in a coherent way. Bolometers are incoherent detectors that measure the time averaged incoming power. Bolometric interferometers are therefore additive interferometers where the visibilities are obtained from squaring the sum of the signal coming from two horns:  $P = \langle |E_1 + E_2|^2 \rangle = \langle |E_1|^2 \rangle + \langle |E_2|^2 \rangle + 2\langle E_1 E_2^* \rangle$ . When a large number of horns are used, the signal detected by the bolometers is a linear combination of all available visibilities. The use of phase shifters on each of the input channels allows one to reconstruct the complex visibilities of the four Stokes parameters  $V_I$ ,  $V_Q$ ,  $V_U$  and  $V_V$ . We have shown (Charlassier et al. 2008) that this reconstruction is done optimally when the phase-shifting scheme

<sup>1</sup> Actually, for a Gaussian beam, the illumination function on the entry of the horn is not flat (but is Gaussian) and the size of the horn has to be larger than what is quoted here by a factor of about 2.

is such that equivalent baselines<sup>2</sup> are summed coherently – they correspond to the same phase difference. In this case, the noise covariance matrix on the complex reconstructed visibilities is diagonal and has the form:

$$N_{ij} = \delta_{ij} \frac{4 \text{NET}^2 \Omega^2 N_h}{N_t} \frac{1}{N_{\text{eq}}^2(i)}. \quad (8)$$

The first factor 2 comes from the fact that when measuring polarized visibilities, one cannot have access to both  $Q$  and  $U$  Stokes parameters at the same time (Charlassier et al. 2008). The second is due to the fact that here we are dealing with the covariance matrix of the complex visibilities instead of their real or imaginary parts as in Charlassier et al. (2008).  $N_h$  is the number of entry horns,  $N_t$  is the number of time samples,  $N_{\text{eq}}(i)$  is the number of equivalent baselines corresponding to baseline  $i$  and NET is the noise equivalent temperature expressed in  $\mu\text{K}/\sqrt{\text{Hz}}$ . An extensive analytical and Monte-Carlo based study of the reconstruction of the visibilities in bolometric interferometry can be found in Charlassier et al. (2008).

## 2. Power spectrum estimator

### 2.1. E and B fields from the Stokes parameters

In the flat-sky approximation, the  $E$  and  $B$  polarization fields are related to the Stokes parameters by a simple rotation of angle  $\phi$ , the angle between  $\mathbf{u}$  and the  $u_x$  axis (Zaldarriaga 2001). In terms of visibilities, this can be written:

$$\begin{cases} V_Q(\mathbf{u}) = \int [\cos 2\phi \tilde{E}(\mathbf{v}) - \sin 2\phi \tilde{B}(\mathbf{v})] \tilde{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) d\mathbf{v} \\ V_U(\mathbf{u}) = \int [\sin 2\phi \tilde{E}(\mathbf{v}) + \cos 2\phi \tilde{B}(\mathbf{v})] \tilde{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \end{cases} \quad (9)$$

For the simplicity, we do not discuss the  $E/B$  separation here and assume that one can obtain a set of pure  $E$  and  $B$  visibilities from the Stokes parameter visibilities defined as<sup>3</sup>:

$$\begin{cases} V_E(\mathbf{u}) = \int \tilde{E}(\mathbf{v}) \tilde{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) d\mathbf{v} \\ V_B(\mathbf{u}) = \int \tilde{B}(\mathbf{v}) \tilde{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) d\mathbf{v} \end{cases} \quad (10)$$

and the covariance matrix of the  $B$  visibilities contains the  $BB$  angular power spectrum:

$$\langle V_B(\mathbf{u}) V_B^*(\mathbf{u}') \rangle = \int \langle \tilde{B}(\mathbf{v}) \tilde{B}^*(\mathbf{v}') \rangle \tilde{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \tilde{A}^*(\mathbf{u}' - \mathbf{v}') d\mathbf{v} d\mathbf{v}' \quad (11)$$

$$= \int C_\ell^{BB}(\mathbf{v}) \tilde{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \tilde{A}^*(\mathbf{u}' - \mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (12)$$

$$= \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}') \times \int C_\ell^{BB}(\mathbf{v}) |\tilde{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v})|^2 d\mathbf{v} \quad (13)$$

the last equation comes from the fact that the different baselines we measure are independent from the beam point of view.

In the presence of noise and assuming the power to be flat enough to be taken out of the integral (recall that  $\ell = 2\pi u$ ):

$$\langle V_B(\mathbf{u}) V_B^*(\mathbf{u}') \rangle = \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}') \times C_\ell^{BB} \underbrace{\int |\tilde{A}(\mathbf{v})|^2 d\mathbf{v}}_{=\Omega/2} + \mathcal{N}(\mathbf{u}, \mathbf{u}'). \quad (14)$$

<sup>2</sup> Equivalent baselines are sometimes called *redundant baselines* in the literature. They correspond to different pairs of horns separated by the same vector and therefore corresponding to the same point in  $(u, v)$  space.

<sup>3</sup> Obtaining such pure  $E$  and  $B$  modes is a complex issue in itself and deserves a full study.

As said before, the noise covariance matrix of the Stokes parameter visibilities is diagonal and we assume that it is still the case for that of  $V_E$  and  $V_B$ . Labeling  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{u}'$  with indices  $i$  and  $j$  and  $V_B(\mathbf{u})$  and  $V_B(\mathbf{u}')$  by  $V_i$  and  $V_j$ , one gets:

$$\langle V_i V_j^* \rangle = C_\ell \frac{\Omega}{2} \delta_{ij} + N_{ij} \delta_{ij}. \quad (15)$$

### 2.2. A simple pseudo-power spectrum estimator and its variance

From the above equation, it is obvious that the simplest unbiased estimator of the power spectrum is:

$$C_\ell = \frac{2}{\Omega} \times \frac{1}{N_\#(\ell)} \sum_{i=0}^{N_\#(\ell)-1} (V_i V_i^* - N_{ii}) \quad (16)$$

where  $N_\#(\ell)$  is the number of different baselines corresponding to multipole  $\ell$ . The variance of this estimator is ( $C_\ell$  is the true power spectrum):

$$\text{Var}(C_\ell) = \langle C_\ell^2 \rangle - C_\ell^2 \quad (17)$$

$$= \left( \frac{2}{\Omega N_\#(\ell)} \right)^2 \left\langle \left[ \sum_i (V_i V_i^* - N_{ii}) \right]^2 \right\rangle - C_\ell^2 \quad (18)$$

$$= \frac{1}{N_\#^2(\ell)} \sum_i \left( C_\ell + \frac{2}{\Omega} N_{ij} \right)^2 \quad (19)$$

where we used Wick's theorem to calculate the fourth order moments and the fact that each of the  $N_\#(\ell)$  different baselines contributing to  $C_\ell$  is measured independently so that their variances add linearly. If one makes the additional assumption that all of these different baselines have the same noise variance  $N_{ij} = \sigma_V^2 \delta_{ij}$ , the error on the power spectrum reads:

$$\Delta C_\ell = \sqrt{\frac{1}{N_\#(\ell)}} \left( C_\ell + \frac{2\sigma_V^2}{\Omega} \right) \quad (20)$$

which is the equivalent for interferometry of the well known imaging-oriented Knox formula (Knox 1997). The expression for  $N_\#(\ell)$  is the number of different modes one can have access to at a given  $\ell$ . We assume that we are considering a bin in visibility space  $\Delta u = \Delta \ell / 2\pi$  centered at  $u$ ; the number of modes is the ratio between the available surface of the bin  $\pi u \Delta u$  (we only consider the top part of the Fourier plane as the modes in the bottom part are the same) to the effective surface of the beam in Fourier space  $2\pi\sigma_u^2$ :

$$N_\#(\ell) = \frac{\pi u \Delta u}{2\pi\sigma_u^2} = \ell \Delta \ell f_{\text{sky}} \quad (21)$$

we therefore find the same formula as for an imager, except for the noise part of course:

$$\Delta C_\ell^{\text{BI}} = \sqrt{\frac{2}{2\ell f_{\text{sky}} \Delta \ell}} \left( C_\ell + \frac{2\sigma_V^2}{\Omega} \right) \quad (22)$$

where the noise on the visibilities is taken from Charlassier et al. (2008).

$$\sigma_V^{\text{BI}} = \sqrt{\frac{N_h}{N_{\text{eq}}}} \times \frac{2 \text{NET}_{\text{BI}} \Omega}{\sqrt{N_{\text{eq}}} \sqrt{N_t}}. \quad (23)$$

## 3. Comparison with an imager and a heterodyne interferometer

### 3.1. Analytical formulae

The above expression is the same for both heterodyne interferometry and direct imaging, only the expression of  $\sigma_V$  changes. For heterodyne interferometry, if the noise equivalent temperature of one of the two input channels of the correlator is  $\text{NET}_{\text{HI}}$ , the noise on the reconstructed Stokes parameter visibility calculated with  $N_t$  time samples and averaged over  $N_{\text{eq}}$  equivalent baselines is given by:

$$\sigma_V^{\text{HI}} = \frac{2\sqrt{2} \text{NET}_{\text{HI}} \Omega}{\sqrt{N_{\text{eq}}} \sqrt{N_t}}. \quad (24)$$

The first factor 2 comes from the multiplication of the two sine waves, a factor  $\sqrt{2}$  from the fact that two correlators are involved when calculating Stokes parameters visibilities, another factor  $\sqrt{2}$  appears because we are talking about the noise on the complex visibility instead of its real or imaginary part. Finally a factor  $1/\sqrt{2}$  is regained because two sets of independent measurements of the Stokes parameters visibilities can be simultaneously obtained if one forms all the possible complex correlations. The expression we find is in agreement with Hobson & Magueijo (1996) and White et al. (1999). In the direct imaging case, the error on the power spectrum is taken from Knox (1997) and adapted to partial sky polarized measurements:

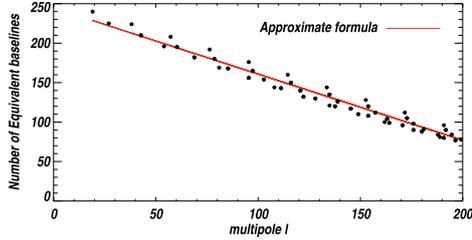
$$\Delta C_\ell^{\text{Im}} = \sqrt{\frac{2}{(2\ell+1)f_{\text{sky}}\Delta\ell}} \left( C_\ell + \frac{4\text{NET}_{\text{Im}}^2 \Omega}{N_h B_\ell^2 N_t} \right) \quad (25)$$

where  $B_\ell = \exp(-\ell^2 \sigma_{\text{beam}}^2 / 2)$  is the imager's beam transfer function. In the imaging case  $\Omega$  is of course defined as the solid angle covered on the sky  $\Omega = 4\pi f_{\text{sky}}$  (the fact that the integral of the primary beam is the total solid angle covered on the sky is specific to interferometry). Note that the factor of 4 is obtained by a factor of 2 on the polarized NET for polarization sensitive bolometers and another factor of 2 due, as before, to the fact that  $Q$  and  $U$  cannot be obtained at the same time.

As the sample variance term is exactly the same whatever technique is used (as expected), we are only interested in comparing the noise terms. We assume in the following that we are comparing three instruments observing the same fraction of the sky  $f_{\text{sky}}$  from the ground for the same duration:

- a direct imager with  $N_h$  horns, an angular resolution given by  $\sigma_{\text{beam}}$  and a  $\text{NET}_{\text{Im}} \simeq 150 \mu\text{K}/\sqrt{\text{Hz}}$ , as stated for Clover in North et al. (2007) at 97 GHz in Chile;
- a heterodyne interferometer with a primary beam covering  $f_{\text{sky}}$ , using a square array of  $N_h$  input channels each with  $\text{NET}_{\text{HI}} \simeq 250 \mu\text{K}/\sqrt{\text{Hz}}$ , as stated for QUIET in Samtleben et al. (2007) at 90 GHz in Chile;
- a bolometric interferometer with the same characteristics as the heterodyne one but with a NET identical to that of a bolometric imager  $\text{NET}_{\text{BI}} \simeq 150 \mu\text{K}/\sqrt{\text{Hz}}$ .

The choice of 90 GHz is motivated by the fact that a packed array of 20 degrees FWHM primary horns interferometer operating at these frequencies would cover the multipole range relevant for primordial B-mode signals ( $25 < \ell < 200$ ). It is also at these frequencies that coherent and bolometric detectors can operate simultaneously. We will use the direct imager as a reference and calculate the ratio of the direct imager's noise error to that of the



**Fig. 1.** Approximate formula (red line) from Eq. (30) and actual values (black dots) for the number of equivalent baselines as a function of  $\ell = 2\pi u$  for 256 entry horns on a square compact grid.

interferometers. This ratio therefore should be less than one if the direct imager is more sensitive from the strict noise point of view.

For the bolometric interferometer, one gets:

$$\left. \frac{\Delta C_{\ell}^{\text{Im}}}{\Delta C_{\ell}^{\text{BI}}}\right|_{\text{noise}} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{N_{\text{eq}}}{N_{\text{h}}}\right)^2 \times \frac{1}{B_{\ell}^2} \times \left(\frac{\text{NET}_{\text{Im}}}{\text{NET}_{\text{BI}}}\right)^2 \quad (26)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{N_{\text{eq}}}{N_{\text{h}}}\right)^2 \times \frac{1}{B_{\ell}^2} \quad (27)$$

as the NET are the same for the bolometers used for imaging or for bolometric interferometry.

For heterodyne interferometry, one gets:

$$\left. \frac{\Delta C_{\ell}^{\text{Im}}}{\Delta C_{\ell}^{\text{HI}}}\right|_{\text{noise}} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{N_{\text{eq}}}{N_{\text{h}}}\right) \times \frac{1}{B_{\ell}^2} \times \left(\frac{\text{NET}_{\text{Im}}}{\text{NET}_{\text{HI}}}\right)^2. \quad (28)$$

We can see that the ratio  $N_{\text{eq}}/N_{\text{h}}$  is always less than one, which gives a clear advantage to direct imaging from the strict point of view of the noise. This ratio appears squared in the ratio of imaging to bolometric interferometry and without power in the ratio of imaging to heterodyne interferometry but in the latter case, the NET ratio is also less than one, penalising heterodyne interferometry.

### 3.2. Approximate expressions and simulations

The number of equivalent baselines for a square horn array is:

$$N_{\text{eq}} = \left(\sqrt{N_{\text{h}}} - \left|\frac{u_x}{u_{\text{min}}}\right|\right) \left(\sqrt{N_{\text{h}}} - \left|\frac{u_y}{u_{\text{min}}}\right|\right). \quad (29)$$

If one averages over directions in the baseline plane at a given  $|u|$ , a good approximation of  $N_{\text{eq}}$  as a function of  $\ell$  is given by (see Fig. 1):

$$\frac{N_{\text{eq}}}{N_{\text{h}}} \approx 1 - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{N_{\text{h}}}} - \frac{\ell}{\ell_0} \quad \text{where} \quad \ell_0 = \frac{2\sqrt{N_{\text{h}}}}{\sqrt{f_{\text{sky}}}}. \quad (30)$$

One finally finds that a good approximation of the sensitivity ratio is:

$$\left. \frac{\Delta C_{\ell}^{\text{Im}}}{\Delta C_{\ell}^{\text{BI}}}\right|_{\text{noise}} \approx \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{N_{\text{h}}}} - \frac{\ell}{\ell_0}\right)^2 \times \frac{1}{2B_{\ell}^2} \quad (31)$$

and:

$$\left. \frac{\Delta C_{\ell}^{\text{Im}}}{\Delta C_{\ell}^{\text{HI}}}\right|_{\text{noise}} \approx \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{N_{\text{h}}}} - \frac{\ell}{\ell_0}\right) \times \frac{1}{4B_{\ell}^2} \times \left(\frac{\text{NET}_{\text{Im}}}{\text{NET}_{\text{HI}}}\right)^2. \quad (32)$$

These approximate formulae have been compared with actual calculations of the number of equivalent baselines for square arrays. We have chosen 256 horns for the comparison and we compare bolometric and heterodyne interferometers with imagers having a low angular resolution of one degree, BICEP-like (Yoon et al. 2006) and a high one of 10 arcmin, Clover-like (North et al. 2008). The results are shown in Fig. 2. We have chosen to only consider the multipole region between 0 and 200 as for higher multipoles, interferometers are less sensitive due the loss of coherence between largely separated horns. Note that the effect of coherence loss for the long baselines and the bandwidth smearing have not been taken into account here and might have a significant effect.

## 4. Discussion

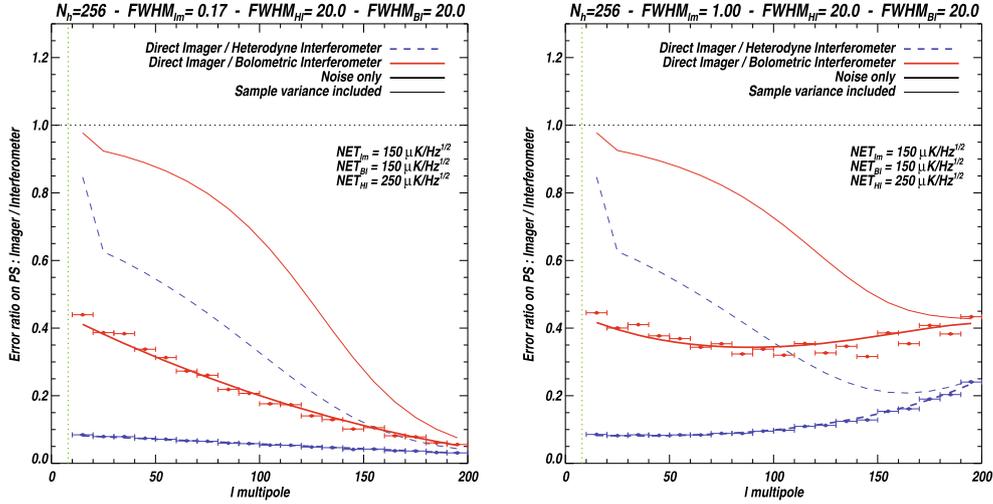
The sensitivities of the three different techniques only differ in the way the instrument filters the multipoles observed in the sky. An imager is affected by its resolution on the sky while an interferometer is affected by the ratio between the number of equivalent baselines and the number of horns as a function of multipoles. All of these filtering factors are less than one. However, imagers are usually operated in such a way that they are not limited by their angular resolution in the multipole region of interest, in that case  $B_{\ell} \approx 1$ , and the imager is always more sensitive than an interferometer (bolometric or heterodyne). From the strict point of view of sensitivity, interferometers can therefore only compete with low angular resolution imagers.

There is a large difference in sensitivity between bolometric and heterodyne interferometers compared to an imager: the ratio  $N_{\text{eq}}/N_{\text{h}}$  acts quadratically on the variance for a bolometric interferometer while it acts linearly for a heterodyne instrument. This is due to the fact that with a heterodyne interferometer, equivalent baselines are averaged after their measurement, resulting in a  $1/N_{\text{eq}}$  factor on the variances. In a bolometric interferometer, the signals from all  $N_{\text{h}}$  horns are added together multiplying the noise variance by  $N_{\text{h}}$  while the coherent summation of equivalent baselines performs an efficient  $1/N_{\text{eq}}^2$  reduction of the noise. This finally results in a factor  $N_{\text{h}}/2N_{\text{eq}}$  for the variance of a bolometric interferometer relative to a heterodyne one. This is largely compensated by the difference in NET between bolometric instruments and coherent ones. When comparing them, the ratio of their NET also appears quadratically and favours bolometric instruments that are dominated by the photon noise rather than by that of the amplifiers. This situation may change in the future with the improvements of the HEMT technologies but at frequencies around and above 100 GHz we are unlikely to face photon noise limited HEMTs in the near future. The difference between the NET would be even greater in space where the bolometers NET would drop as the background temperature while that of the coherent instruments would remain roughly constant.

With the present technologies of bolometers and coherent amplifiers, the hierarchy in terms of sensitivity between the three techniques (and layout) studied here is very clear for the multipole range  $25 < \ell < 200$  where the primordial B-mode signal is expected to be maximal. Imagers are the most sensitive, bolometric interferometers have a lower sensitivity, the ratio dropping quadratically with the multipole considered. Heterodyne interferometers have an even lower sensitivity but the ratio with an imager drops less rapidly. They remain however less sensitive than bolometric interferometers in the range of multipoles considered here, where the largest primordial B-mode signal is expected and where the lensing of the E-modes into B-modes

J.-Ch. Hamilton et al.: Sensitivity of a bolometric interferometer to the cosmic microwave background power spectrum

927



**Fig. 2.** Power spectrum error bar ratio between an imager and a bolometric interferometer (red solid) and between an imager and a heterodyne interferometer (blue dashed). The thick lines only include the noise contribution while the thin lines also include sample variance (with a tensor to scalar ratio of 0.1). In each case we have assumed 256 horns, a sky fraction defined by the 20 degrees FWHM primary beam of the interferometers. The left panel corresponds to a 10 arcmin resolution imager and the right one to a one degree imager. The points are obtained with a precise measurement of the number of equivalent baselines and the lines are from the approximate expression given above. The green dotted line shows the region where the relative sample variance  $\Delta C_l / C_l = \sqrt{2 / (2\ell f_{\text{sky}} \Delta \ell)}$  is greater than one. The ratio of the heterodyne interferometer to the imager depends on the square of the NET ratio; we have assumed 250 and 150 mK/ $\sqrt{\text{Hz}}$  taken from (Samtleben et al. 2007) and Clover (North et al. 2007) at  $\sim 90$  GHz for Chile. It is straightforward to scale the curves for different values of the NET.

is still low. At higher multipoles however, the bandwidth smearing effect and loss of coherence would be a real issue for bolometric interferometers while in a heterodyne interferometer, the separation into small bands would prevent the sensitivity from dropping.

The main remaining question is whether the gain in terms of systematic effects is worth the price of this sensitivity reduction if one builds an interferometer instead of an imager. In terms of optics for instance, an interferometer directly observes the sky. The primary beam is therefore only set by that of the horns, while in an imager, the telescope (mirror or lenses) produces sidelobes inducing poorly predictable ground pickup that often prevent one from reaching the nominal sensitivity. An interferometer is also completely insensitive to spatially uniform polarized signals that vary with time such as polarized atmospheric contamination. These could also prevent an imager from reaching its nominal sensitivity by adding some spread in the noise. These examples mitigate the statistical sensitivity loss of an interferometer with respect to an imager. The differences in terms of systematic effects between imagers and bolometric and heterodyne interferometers are not obvious and deserve a detailed quantitative study in continuation of the work done by Bunn (2007).

*Acknowledgements.* The authors thank Ken Ganga for fruitful discussions and all the participants of the “Bolometric Interferometry for the B-mode search” workshop held in Paris in June 2008 for the many stimulating discussions that took place. We also thank Sarah Church, Keith Grainge and Mike Jones for their explanations concerning heterodyne interferometry.

## References

- Bunn, E. F. 2007, Phys. Rev. D, 75, 83517
- Bunn, E. F., & White, M. 2007, ApJ, 665, 21
- Charlassier, R., et al. 2008, A&A, submitted [arXiv:0806.0380]
- Hobson, M. P., & Magueijo, J. 1996, MNRAS, 283, 1133
- Knox, L. 1997, ApJ, 480, 72
- Liddle, A. R., & Lyth, D. H. 2000, Cosmological Inflation and Large-Scale Structure (Cambridge University Press)
- Langlois, D. 2004, [hep-th/0405053v1]
- North, C. E., et al. 2007, Proceedings of the 18th International Symposium on Space Terahertz Technology, Caltech
- North, C. E., Johnson, B. R., Ade, P. A. R., et al. 2008, Proceedings of the XXXIIIrd Rencontres de Moriond “Cosmology” [arXiv:0805.3690]
- Samtleben, D., et al. 2007, Proceedings of A Century of Cosmology, San Servolo, Venezia, Italy [arXiv:0802.2657]
- Yoon, K. W., Ade, P. A. R., Barkats, D., et al. 2006, Proc. SPIE, 6275 [arXiv:astro-ph/0606278]
- Zaldarriaga, M. 2001, PRD, 64, 3001
- White, M., Carlstrom, J. E., Dragovan, M., & Holzzapfel, W. L. 1999, ApJ, 514, 12

A&A 514, A37 (2010)  
 DOI: 10.1051/0004-6361/200913446  
 © ESO 2010

**Astronomy  
&  
Astrophysics**

## Bandwidth in bolometric interferometry

R. Charlassier<sup>1</sup>, E. F. Bunn<sup>2</sup>, J.-Ch. Hamilton<sup>1</sup>, J. Kaplan<sup>1</sup>, and S. Malu<sup>3</sup>

<sup>1</sup> APC, Université Denis Diderot-Paris 7, CNRS/IN2P3, CEA, Observatoire de Paris, 10 rue A. Domon and L. Duquet, Paris, France  
 e-mail: rcharlas@apc.univ-paris7.fr

<sup>2</sup> Physics Department, University of Richmond, Richmond, VA 23173, USA

<sup>3</sup> Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCAA), Pune 411 007, India

Received 9 October 2009 / Accepted 13 January 2010

### ABSTRACT

**Context.** Bolometric interferometry is a promising new technology with potential applications to the detection of B-mode polarization fluctuations of the cosmic microwave background (CMB). A bolometric interferometer will have to take advantage of the wide spectral detection band of its bolometers to be competitive with imaging experiments. A crucial concern is that interferometers are assumed to be significantly affected by a spoiling effect known as bandwidth smearing.

**Aims.** We investigate how the bandwidth modifies the work principle of a bolometric interferometer and affects its sensitivity to the CMB angular power spectra.

**Methods.** We obtain analytical expressions for the broadband visibilities measured by broadband heterodyne and bolometric interferometers. We investigate how the visibilities must be reconstructed in a broadband bolometric interferometer and show that this critically depends on hardware properties of the modulation phase shifters. If the phase shifters produce shifts that are constant with respect to frequency, the instrument works like its monochromatic version (the modulation matrix is not modified), while if they vary (linearly or otherwise) with respect to frequency, one has to perform a special reconstruction scheme, which allows the visibilities to be reconstructed in frequency subbands. Using an angular power spectrum estimator that accounts for the bandwidth, we finally calculate the sensitivity of a broadband bolometric interferometer. A numerical simulation is performed that confirms the analytical results.

**Results.** We conclude that (i) broadband bolometric interferometers allow broadband visibilities to be reconstructed regardless of the type of phase shifters used and (ii) for dedicated B-mode bolometric interferometers, the sensitivity loss caused by bandwidth smearing is quite acceptable, even for wideband instruments (a factor of 2 loss for a typical 20% bandwidth experiment).

**Key words.** instrumentation: interferometers – polarization – cosmic microwave background – submillimeter: diffuse background – cosmology: observations

### 1. Introduction

The detection of B-mode polarization anisotropies in the cosmic microwave background (CMB) is one of the most exciting challenges of modern cosmology. The weakness of the expected signal requires the development of highly sensitive experiments with an exquisite control of systematic errors. Most experiments or projects dedicated to this quest are based on well-known direct imaging technology. An appealing alternative called bolometric interferometry has been proposed (Tucker et al. 2003). This technology combines the advantages of interferometry in handling systematic effects and those of bolometric detectors in enhancing sensitivity. The two teams that accepted the challenge (Timbie et al. 2006; Charlassier & the BRAIN coll. 2008) have combined their efforts to form the QUBIC collaboration (Kaplan & the QUBIC coll. 2009).

In (Charlassier et al. 2009), hereafter (C09), we introduced a simple formalism for the general design of a bolometric interferometer operating at a monochromatic frequency and showed that its phase shifting scheme must respect a property which we called “coherent summation of equivalent baselines”. This scheme was optimized further in (Hyland et al. 2009). In (Hamilton et al. 2008), hereafter (H08), we calculated the sensitivity of a bolometric interferometer and showed that this technology can be competitive with imaging experiments

and heterodyne interferometers for the measurement of CMB B-mode. For the sake of simplicity, we did not deal with the question of bandwidth in (C09) and (H08).

We know that a dedicated B-mode bolometric interferometer will have to use the wide spectral detection band of its bolometers to be competitive with imaging experiments. On the other hand, the bandwidth is often considered as a crucial issue in radio-interferometry; if the raw sensitivity of radio interferometer detectors increases as the square root of the bandwidth, there is a secondary effect, well known as *bandwidth smearing*, which can largely degrade the global sensitivity. When the signals originating in a point source interfere after being collected by two broadband receivers, the resulting fringe pattern is smeared by an envelope whose amplitude depends on the bandwidth, consequently leading to a degradation in the signal-to-noise ratio – see for instance (Thompson et al. 2001). We later see that these two main characteristics remain in bolometric interferometry: the bolometers’ sensitivity also increases as the square root of the bandwidth, and a bandwidth smearing of the observables, the visibilities, degrades the global sensitivity of the instrument (however, because the observation of CMB angular correlations requires a poorer spatial resolution than the observation of point sources to which classical radio-interferometers are mostly dedicated, this smearing will lead to a less critical sensitivity loss).

A&amp;A 514, A37 (2010)

But we also see that an additional kind of bandwidth issue occurs, because in bolometric interferometry, visibilities are not measured *directly* but by solving a linear problem.

We investigate how the visibilities are smeared in heterodyne and bolometric interferometers with wide spectral bands and large primary beams in Sect. 2. We investigate how the work principle of bolometric interferometry is affected by bandwidth in Sect. 3. We show in particular that the visibilities can be reconstructed exactly as in the monochromatic case detailed in (C09) if the modulation phase shifts are constant with respect to frequency, while one has to perform the special reconstruction scheme described in Sect. 4 when the modulation phase shifts vary with respect to frequency. In Sect. 5, we introduce an angular power spectrum estimator that accounts for the bandwidth and estimate how the bandwidth smearing results in a degradation of the sensitivity for B-mode experiments. A numerical simulation that confirms our analytical results is presented in Sect. 6.

## 2. Visibilities measured by generic interferometers with wide spectral bands and large primary beams

### 2.1. Monochromatic visibilities

The observables measured by a monochromatic interferometer working at a frequency  $\nu_0$  and looking at a radiation field of spectral power  $I_\nu(\mathbf{n})$ , in units of  $[\text{W Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}]$ , are called the visibilities. A *monochromatic visibility* is defined for one baseline  $\mathbf{u}_0$ , which is the vector separation between two horns in units of the electromagnetic wavelength of the radiation. Its expression is given by

$$V_I^{\nu_0}(\mathbf{u}_0) = \int I_{\nu_0}(\mathbf{n}) A_{\nu_0}(\mathbf{n}) \exp(i2\pi\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{n}, \quad (1)$$

where  $A_\nu(\mathbf{n}) = B_\nu^2(\mathbf{n})$  is the square of the beam of the input horns (assumed to be identical), conventionally normalized to one at its maximum. Here we can make a first important observation about the understanding of bandwidth in interferometry: a monochromatic visibility defined by a pair of horns separated by a distance  $\mathbf{d}_0$  and working at frequency  $\nu_0$  is the same observable as a monochromatic visibility defined by another pair of horns separated by a distance  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \frac{\nu_0}{\nu}$  and working at frequency  $\nu$ . The two visibilities indeed match the baseline  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{d}_0 \frac{\nu_0}{\nu}$ . This property, sometimes called *the equivalence theorem* of interferometry, is actually true only if the two pairs of horns have the same beam (meaning that their surfaces are necessarily different) and if the observed radiation field  $S(\mathbf{n})$  has the same spatial variations at both frequencies (this is of course true in the case of CMB observations).

### 2.2. Broadband visibilities for a generic interferometer

We consider now an interferometer that is sensitive to a finite spectral band through a bandpass function  $J(\nu - \nu_0)$ , centered<sup>1</sup> at frequency  $\nu_0$ . We arbitrarily define the *bandwidth*  $\Delta\nu$  of the instrument as<sup>2</sup>

$$\Delta\nu = \frac{1}{J(0)} \int J(\nu - \nu_0) d\nu. \quad (2)$$

<sup>1</sup> The definition of the center is somewhat arbitrary. A convenient definition is the barycenter of  $J$ .

<sup>2</sup> This definition is very close to the *FWHM* for a Gaussian bandwidth.

We define a *generic interferometer* to be an instrument in which visibilities are directly given by the outputs of the detectors (this is the case in heterodyne interferometry, but not in bolometric interferometry). The expression for a *broadband visibility* measured by a generic interferometer – in power units, for a baseline  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{d}_0 \frac{\nu_0}{\nu}$  – is then

$$V_I^{\Delta\nu}(\mathbf{u}_0) = \iint I_\nu(\mathbf{n}) A_\nu(\mathbf{n}) \exp\left(i2\pi\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{n} \frac{\nu}{\nu_0}\right) J(\nu - \nu_0) d\nu d\mathbf{n}. \quad (3)$$

The baselines define a plane usually called the *uv-plane*. It is better to write the visibility as a convolution in the uv-plane to understand the bandwidth effect,

$$V_I^{\Delta\nu}(\mathbf{u}_0) = \iiint \tilde{I}_\nu(\mathbf{w}) \tilde{A}_\nu(\mathbf{w}') J(\nu - \nu_0) \times e^{i2\pi\left(\frac{\nu_0}{\nu}\mathbf{u}_0 - \mathbf{w} - \mathbf{w}'\right) \cdot \mathbf{n}} d\mathbf{w} d\mathbf{w}' d\nu, \quad (4)$$

where we have introduced the Fourier transform of the signal and that of the beam ( $\mathbf{w}$  is the associated transform variable), i.e.,

$$I_\nu(\mathbf{n}) = \int \tilde{I}_\nu(\mathbf{w}) \exp(-i2\pi\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{w} \quad (5)$$

$$A_\nu(\mathbf{n}) = \int \tilde{A}_\nu(\mathbf{w}') \exp(-i2\pi\mathbf{w}' \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{w}'. \quad (6)$$

In the flat-sky approximation, the integral over the field  $\mathbf{n}$  gives a delta function, and the expression of the broadband visibility is finally

$$V_I^{\Delta\nu}(\mathbf{u}_0) = J(0) \Delta\nu \int \tilde{I}_{\nu_0}(\mathbf{w}) \tilde{\beta}(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) d\mathbf{w}, \quad (7)$$

where we have defined the *convolution kernel* in the uv-plane

$$\tilde{\beta}(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) = \int \frac{\tilde{I}_\nu(\mathbf{w})}{\tilde{I}_{\nu_0}(\mathbf{w})} \tilde{A}_\nu\left(\mathbf{u}_0 \frac{\nu}{\nu_0} - \mathbf{w}\right) J_N(\nu - \nu_0) d\nu, \quad (8)$$

in which we have introduced the normalized bandpass function  $J_N(\nu - \nu_0) = J(\nu - \nu_0)/\Delta\nu$ . The convolution kernel (which depends on  $\mathbf{u}_0$ ) contains the entire effect of the bandwidth smearing. For a monochromatic visibility, the convolution kernel in the uv-plane is just the Fourier transform of the beam  $\tilde{A}(\mathbf{w})$ .

In the following, to allow for complete analytic calculation, we first ignore the frequency dependence of both the signal and the beam. We write

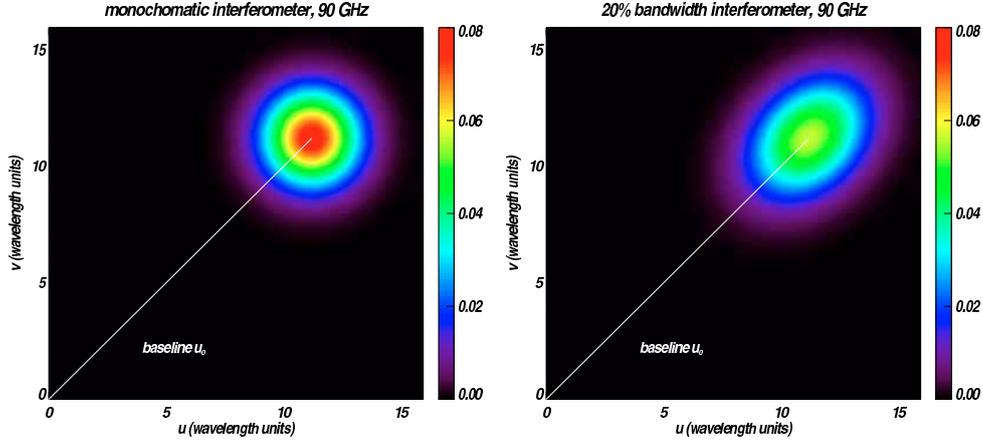
$$\tilde{A}(\mathbf{w}) = \tilde{A}_{\nu_0}(\mathbf{w}) \approx \tilde{A}_\nu(\mathbf{w}) \quad \text{and} \quad \tilde{I}(\mathbf{w}) = \tilde{I}_{\nu_0}(\mathbf{w}) \approx \tilde{I}_\nu(\mathbf{w}). \quad (9)$$

This defines the approximate form of the convolution kernel

$$\tilde{\beta}_{\text{ap}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) = \int \tilde{A}\left(\mathbf{u}_0 \frac{\nu}{\nu_0} - \mathbf{w}\right) J_N(\nu - \nu_0) d\nu. \quad (10)$$

This approximation allows us to obtain an intuitive idea of how the bandwidth smearing acts with good enough accuracy to estimate the sensitivity loss. We discuss in Sect. 2.5 a refined form of the kernel that takes into account the frequency dependence of the beam and the intensity. As shown in Fig. 2, the difference between the approximate kernel, derived in Sect. 2.3, and the refined kernel is small.

R. Charlassier et al.: Bandwidth in bolometric interferometry



**Fig. 1.** *Left:* convolution kernel in the  $uv$ -plane for a monochromatic interferometer, which is actually just the Fourier transform of the primary beam, for a 90 GHz central frequency and a Gaussian beam with  $15^\circ$  FWHM. *Right:* approximate convolution kernel in the  $uv$ -plane for a baseline  $u_0$  (matching  $l \sim 100$ ), for a 20% bandwidth interferometer, for a Gaussian bandpass function centered at 90 GHz and a Gaussian beam with  $15^\circ$  FWHM.

### 2.3. Approximate analytical form of the kernel

In order to perform the analytical calculation, we also assume a Gaussian normalized bandpass function

$$J_N(\nu - \nu_0) = \frac{1}{\sigma_\nu \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{2\sigma_\nu^2}\right). \quad (11)$$

The instrument bandwidth is related to the standard deviation of the Gaussian distribution by  $\Delta\nu = \sigma_\nu \sqrt{2\pi}$ . We assume a Gaussian beam for the horns, with the usual convention  $A(0) = 1$ , leading to the following beam in the  $uv$ -plane

$$\tilde{A}(\mathbf{w}) = \Omega \exp(-\pi\Omega\mathbf{w}^2). \quad (12)$$

As previously explained, we ignore the frequency dependence of the beam. The integral of the beam over the sky is defined for the central frequency,  $\Omega = \Omega_{\nu_0}$ <sup>3</sup>. The expression of the kernel is then

$$\tilde{\beta}_{\text{ap}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) = \frac{\Omega}{\sigma_\nu \sqrt{2\pi}} \times \int \exp\left[-\pi\Omega\left(\mathbf{u}_0 \frac{\nu}{\nu_0} - \mathbf{w}\right)^2 - \frac{(\nu - \nu_0)^2}{2\sigma_\nu^2}\right] d\nu. \quad (13)$$

This can be analytically integrated (details are given in Appendix A) and written in the form

$$\tilde{\beta}_{\text{ap}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}') = \tilde{A}(\mathbf{w}') \frac{\exp\left[\frac{2\pi^2\Omega^2\left(\frac{\sigma_\nu}{\nu_0}\right)^2(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{w}')^2}{1+2\pi\Omega\left(\frac{\sigma_\nu}{\nu_0}\right)^2\mathbf{u}_0^2}\right]}{\sqrt{1+2\pi\Omega\left(\frac{\sigma_\nu}{\nu_0}\right)^2\mathbf{u}_0^2}}, \quad (14)$$

where we have made the variable substitution

$$\mathbf{w}' = \mathbf{u}_0 - \mathbf{w}. \quad (15)$$

<sup>3</sup> This solid angle is then related to the rms of the Gaussian beam  $\sigma$  by  $\Omega = 2\pi\sigma^2$ .

We can define the *effective beam* in real space for a broadband interferometer  $\Omega_s$  as the value at  $\mathbf{w}' = 0$  of the Fourier transform of the kernel<sup>4</sup>

$$\Omega_s = \tilde{\beta}_{\text{ap}}(\mathbf{u}_0, 0) = \frac{\Omega}{\kappa_1}, \quad (16)$$

with

$$\kappa_1 = \sqrt{1 + 2\pi\Omega\left(\frac{\sigma_\nu}{\nu_0}\right)^2\mathbf{u}_0^2}, \quad (\kappa_1 \geq 1). \quad (17)$$

We can finally rewrite the kernel as

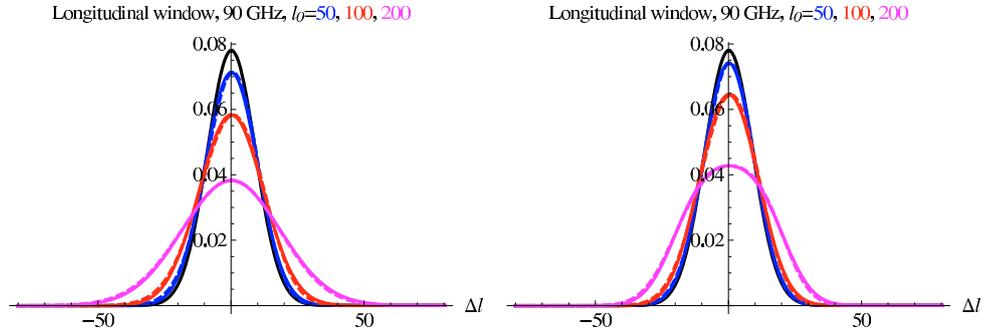
$$\tilde{\beta}_{\text{ap}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}') = \tilde{A}(\mathbf{w}') \times \frac{1}{\kappa_1} \times \exp\left[2\pi^2\left(\frac{\sigma_\nu}{\nu_0}\right)^2\Omega_s^2(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{w}')^2\right] \quad (18)$$

$$= \tilde{A}(\mathbf{w}') \times \frac{1}{\kappa_1} \times \exp\left[\pi\Omega\left(1 - \frac{1}{\kappa_1^2}\right)\frac{(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{w}')^2}{\mathbf{u}_0^2}\right]. \quad (19)$$

This  $\kappa_1$  factor is an indicator of the importance of bandwidth smearing. It reaches its minimal value 1 for a monochromatic interferometer. One immediately sees that interferometers with “small” primary beams and/or “small” baselines are less affected by the bandwidth smearing (see Fig. 4). We compare the convolution kernels of monochromatic and broadband interferometers in Fig. 1. One can clearly see that the effect of the bandwidth smearing is to stretch the kernel, in the baseline direction only, by which the Fourier transform of the signal is convolved. When  $\kappa_1$  is close to 1 (i.e.,  $\left(\frac{\sigma_\nu}{\nu_0}\right)^2\mathbf{u}_0^2 \ll \frac{1}{2\pi\Omega}$ ), the size of the “bandwidth part” of the kernel is smaller than the “beam part” and thus the signal is not degraded by the bandwidth: this is quite intuitive since a signal already convolved by a kernel of width  $\sigma_a$  is not significantly degraded if it is convolved again by a kernel of width  $\sigma_b$  such as  $\sigma_b < \sigma_a$ . The physical interpretation in *real space* is that the bandwidth smearing makes the beam narrower, by a factor  $\kappa_1$  that depends on the baseline length: for a given multipole  $l$ , the fraction of sky observed by a broadband interferometer is actually  $f_{\text{sky}}^{\Delta\nu}(l) = f_{\text{sky}}(l)/\kappa_1$  (cf. Sect. 5).

<sup>4</sup> Because  $J_N$  is normalized to 1, the inverse transform of  $\tilde{\beta}_{\text{ap}}$  equals 1 at the top of the beam.

A&amp;A 514, A37 (2010)



**Fig. 2.** *Left:* the black full line shows longitudinal profile of the kernel for monochromatic visibilities, while the color lines show the longitudinal profile of the convolution kernel for baselines corresponding to  $l_0 = 50, 100, 200$ , for an instrument with a 20% Gaussian bandwidth centered at 90 GHz and  $15^\circ$  FWHM horns. Approximate kernel: full coloured line. Refined kernel numerically computed: dotted coloured line. Kernel for monochromatic visibilities: black full line. *Right:* same but with a top hat shaped bandwidth.

#### 2.4. Broadband visibilities in temperature units for CMB experiments

It is more convenient to work with visibilities in temperature units when studying CMB temperature and polarization anisotropies<sup>5</sup>. If  $B_\nu$  is the intensity of the observed field, in units of  $[\text{W Hz}^{-1} \text{m}^{-2} \text{sr}^{-1}]$ , the spectral power collected by a horn of surface  $S$  is

$$I_\nu = S B_\nu. \quad (20)$$

CMB experiments observe small spatial fluctuations over the sky

$$I_\nu(\mathbf{n}) = I_\nu + \Delta I_\nu(\mathbf{n}). \quad (21)$$

The oscillating term of the visibilities washes out the constant part of the spectral power, so the visibilities can be rewritten

$$V_l^{\Delta\nu}(\mathbf{u}_0) = \iint \Delta I_\nu(\mathbf{n}) A_\nu(\mathbf{n}) \exp(i2\pi \mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{n} \frac{\nu}{c}) J(\nu - \nu_0) d\nu d\mathbf{n}. \quad (22)$$

The temperature fluctuations over the sky are linked to the power fluctuations by

$$\Delta I_\nu(\mathbf{n}) = \frac{\partial I_\nu}{\partial T} \Delta T(\mathbf{n}) = S \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \Delta T(\mathbf{n}). \quad (23)$$

We can then define the broadband visibilities in temperature units as

$$V_T^{\Delta\nu}(\mathbf{u}_0) [\text{in K}] = \frac{V_l^{\Delta\nu}(\mathbf{u}_0) [\text{in W}]}{S (\partial B_\nu / \partial T)_{\nu_0}}. \quad (24)$$

Following the same arguments as previously, one can show that

$$V_T^{\Delta\nu}(\mathbf{u}_0) = \Delta\nu \int \tilde{\Delta T}(\mathbf{w}) \tilde{\beta}^T(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) d\mathbf{w}, \quad (25)$$

where we have introduced the Fourier transform of the temperature field,

$$\Delta T(\mathbf{n}) = \int \tilde{\Delta T}(\mathbf{w}) \exp(-i2\pi \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{w}, \quad (26)$$

and a *temperature convolution kernel*,

$$\tilde{\beta}^T(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) = \int \left( \frac{\partial B_\nu / \partial T}{(\partial B_\nu / \partial T)_{\nu_0}} \right) \tilde{A}_\nu \left( \mathbf{u}_0 \frac{\nu}{\nu_0} - \mathbf{w} \right) J_N(\nu - \nu_0) d\nu. \quad (27)$$

<sup>5</sup> Practically, the visibilities measured by a bolometric interferometer will be in power units as defined in Eq. (3).

If we neglect the dependence of both the signal and the beam on frequency, this kernel actually becomes the one defined in Eq. (10),

$$\tilde{\beta}_{\text{ap}}^T(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) \rightarrow \tilde{\beta}_{\text{ap}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}). \quad (28)$$

#### 2.5. A refined kernel

The intensity  $B_\nu$  of the observed field actually depends on frequency for a black body source at temperature  $T$  such that

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}. \quad (29)$$

Inside the bandwidth, the frequency dependence of the  $T$  derivative of  $B_\nu$  is approximated well by a power law

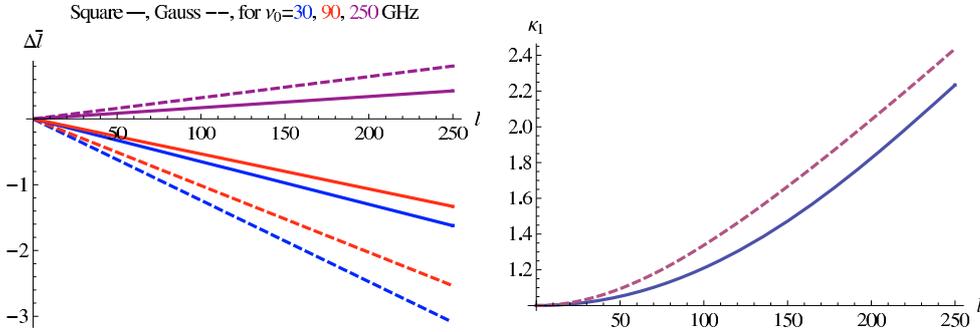
$$\frac{\partial B_\nu}{\partial T} \simeq \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \Big|_{\nu_0} \left( \frac{\nu_0}{\nu} \right)^\alpha \quad \text{with } \alpha = \frac{h\nu_0}{k_B T} \frac{e^{h\nu_0/k_B T} + 1}{e^{h\nu_0/k_B T} - 1}. \quad (30)$$

The beam of the horns also depends on frequency. The surface of the horns  $S$ , the solid angle covered  $\Omega$ , and the frequency of observation  $\nu$  are related by  $S\Omega = \kappa \frac{c^2}{\nu^2}$ , leading to  $\Omega_\nu = \Omega_{\nu_0} \frac{\nu_0^2}{\nu^2}$ . This frequency dependence of a Gaussian beam can be modeled by modifying its Fourier transform as

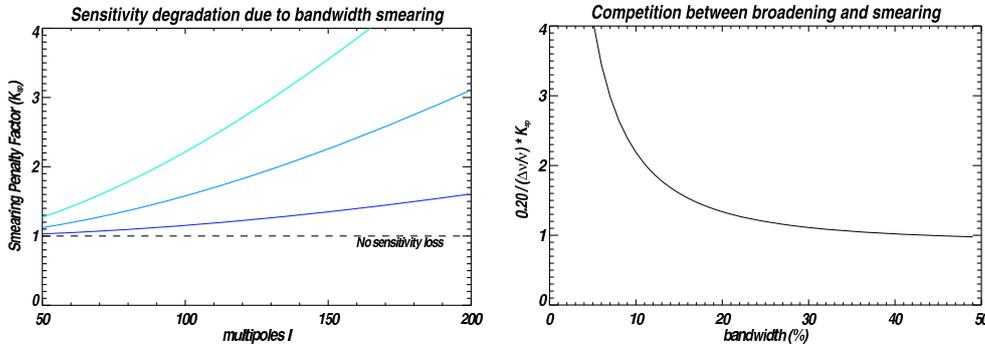
$$\tilde{A}_\nu(\mathbf{w}) = \Omega \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \exp\left(-\pi \Omega \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \mathbf{w}^2\right). \quad (31)$$

Figure 2 shows for several values of  $l$  how the approximate kernel of Eq. (19) is refined when one takes into account the above frequency dependences of the beam and the intensity. The signal and the beam dependencies largely compensate each other, and the difference between the two kernels turns out to be negligible considering the accuracy level required for the sensitivity loss estimation. The main difference is a shift in the centroid of the window function shown in the left panel of Fig. 3, which is absent in the approximate kernel. This will introduce systematics that have to be corrected for. We also show what happens for a more realistic top-hat-shaped bandwidth (right panel of Fig. 2, solid lines in Fig. 3). For the data extraction of a given instrument, the convolution kernel has to be computed numerically; however, the approximate Gaussian kernel provides a good enough accuracy to estimate the sensitivity loss. In the remainder of this paper, we use the approximate analytical form of the kernel, and

R. Charlassier et al.: Bandwidth in bolometric interferometry



**Fig. 3.** *Left:* shift of the effective  $l$  window function as a function of  $l_0$ , dashed lines for a Gaussian bandwidth, solid lines for a top hat one. *Right:* the variation in  $\kappa_1$  as a function of  $l_0$ , dashed lines for a Gaussian bandwidth, solid lines for a top hat one.



**Fig. 4.** *Left:* sensitivity degradation on  $C_l$  extraction due to bandwidth smearing for multipoles between 50 and 200; the quantity  $K_{sp}$  is plotted for a dedicated B-mode bolometric interferometer with a 15-degree  $FWHM$  primary beam, for, respectively  $\Delta\nu/\nu_0 = 10, 20$ , and 30% bandwidth. *Right:* the quantity  $(0.20/\Delta\nu) \times K_{sp}(l)$ , showing the competition between smearing and broadening, is plotted as a function of bandwidth for  $l = 100$ , for the same B-mode bolometric interferometer.

write  $\tilde{\beta}$  instead of  $\tilde{\beta}_{ap}$ . Finally, the right panel of Fig. 3 shows the variation in  $\kappa_1$  with  $l_0$  for a Gaussian (dashed line) and a top hat (solid line) bandwidth.

### 3. Visibilities measured by broadband bolometric interferometers

The effect of the bandwidth is more subtle in a bolometric interferometer than in a generic interferometer, because the visibilities are not measured *directly*. As described in (C09), a time-domain modulation of the visibilities is performed by controlled phase shifters – located behind each polarization channel (twice the number of horns) – which take some well-chosen time-sequences of discrete phase values. The corresponding time-sequences of bolometers' measurements will allow us to recover, independently for each bolometer, all the different visibilities, by solving a linear problem of the form  $S = A \cdot X$ , where  $X$  is a vector including the visibilities,  $S$  is a vector including a time-sequence of one bolometer's measurements, and  $A$  is a coefficient matrix depending on the phase shift sequences. In the following, we generalize the (C09) formalism, taking the bandwidth into account. As in the generic case, we assume in this section that the detectors (here the bolometers) are sensitive to a spectral bandwidth  $\Delta\nu$ , by means of a bandpass function  $J(\nu - \nu_0)$  centered on the frequency  $\nu_0$ .

#### 3.1. Signal in broadband bolometers

We consider a bolometric interferometer consisting of  $N_h$  horns, whose beams are defined by the same function  $B(\mathbf{n})$  and  $N_{out}$  bolometers. The electric field at the output of polarization splitters, corresponding to horn  $i$  coming from direction  $\mathbf{n}$  for polarization  $\eta$  ( $\parallel$  or  $\perp$ ) is

$$\epsilon_{i,\eta}(\mathbf{n}) = B(\mathbf{n})E_{i,\eta}(\mathbf{n}). \quad (32)$$

During a time sample  $k$ , each controlled phase shifter adds to its associated input channel the phase  $\Phi_{i,\eta}^k(\nu)$ . After combining, the electric field in one output channel is then

$$z_k(\mathbf{n}) = \int z_k^{\nu}(\mathbf{n})J(\nu - \nu_0)d\nu, \quad (33)$$

where

$$z_k^{\nu}(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{N_{out}}} \sum_{i=0}^{N_h-1} \sum_{\eta=0}^1 \epsilon_{i,\eta}(\mathbf{n}) \exp[i\Phi_{i,\eta}^k(\nu)]. \quad (34)$$

The power originating in each of the combiner outputs is averaged on timescales given by the time constant of the detector,

A&amp;A 514, A37 (2010)

which is much larger than the EM wave period. The power collected by a given bolometer during a time sample  $k^6$  is then

$$S_k = \left\langle \left| \iint z_k^y(\mathbf{n}) J(\nu - \nu_0) d\nu d\mathbf{n} \right|^2 \right\rangle_{\text{time}}. \quad (35)$$

Signals coming from different directions of the sky are incoherent, as are signals at different frequencies, so their time-averaged correlations vanish to produce

$$\langle z_k^y(\mathbf{n}) z_k^{y'}(\mathbf{n}') \rangle_{\text{time}} = |z_k^y(\mathbf{n})|^2 \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}') \delta(\nu - \nu'). \quad (36)$$

The signal on the bolometer is finally

$$S_k = \iint |z_k^y(\mathbf{n})|^2 J(\nu - \nu_0) d\nu d\mathbf{n}. \quad (37)$$

Developing this expression leads to autocorrelation terms for each input channel and cross-correlation terms between all the possible pairs

$$S_k = S_k^{\text{auto}} + S_k^{\text{cross}}. \quad (38)$$

As in the general case, one can write the visibilities as a convolution in the  $uv$ -plane, where we define  $b = \{i, j\}$ ,  $p = \{\eta_1, \eta_2\}$ , and

$$S_k^{\text{cross}} = \frac{2J(0) \Delta\nu}{N_{\text{out}}} \text{Re} \left[ \sum_{i < j} \sum_{\eta_1, \eta_2} \int \tilde{I}_{b,p}(\mathbf{w}) \tilde{\eta}_{b,p}^{\text{BI}}(\mathbf{u}_b, \mathbf{w}) d\mathbf{w} \right]. \quad (39)$$

We have defined the Fourier transform of the physical signal to be

$$\tilde{I}_{b,p}(\mathbf{w}) = \int E_{i,\eta_1}(\mathbf{n}) E_{j,\eta_2}^*(\mathbf{n}) \exp(i2\pi\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}) d\mathbf{n}, \quad (40)$$

and the kernel  $\tilde{\eta}_{b,p}^{\text{BI}}(\mathbf{u}_b, \mathbf{w})$  containing the phase modulation used to recover the visibilities to be

$$\tilde{\eta}_{b,p}^{\text{BI}}(\mathbf{u}_b, \mathbf{w}) = \int \tilde{A} \left( \frac{\nu}{\nu_0} \mathbf{u}_b - \mathbf{w} \right) J_N(\nu - \nu_0) \exp[i\Delta\Phi_{b,p}^k(\nu)] d\nu, \quad (41)$$

$$\Delta\Phi_{b,p}^k(\nu) = \Phi_{i,\eta_1}^k(\nu) - \Phi_{j,\eta_2}^k(\nu), \quad (42)$$

where  $A(\mathbf{n}) = B^2(\mathbf{n})$  defined the square of the beam of the input horns.

### 3.2. Phase shifters constant with respect to frequency

We first consider the simplest case where the phase shift values do not depend on the frequency  $\nu$ . When  $\Delta\Phi_{b,p}^k(\nu) = \Delta\Phi_{b,p}^k(\nu_0)$ , the phase shift term comes outside the integral over  $\nu$

$$\tilde{\eta}_{b,p}^{\text{BI}}(\mathbf{u}_b, \mathbf{w}) = \tilde{\beta}(\mathbf{u}_b, \mathbf{w}) \exp[i\Delta\Phi_{b,p}^k(\nu_0)]. \quad (43)$$

The signal of the cross-correlations on the bolometer is thus the one expressed in (C09), with the broadband visibilities defined in Eq. (24) instead of the monochromatic ones

$$S_k^{\text{cross}} = \frac{2}{N_{\text{out}}} \text{Re} \left[ \sum_{i < j} \sum_{\eta_1, \eta_2} e^{i\Delta\Phi_{b,p}^k(\nu_0)} V_{b,p}^{\Delta\nu}(\mathbf{u}_b) \right]. \quad (44)$$

Following (C09), we can introduce the *broadband Stokes visibilities*

$$V_S^{\Delta\nu}(\mathbf{u}_b) = J(0) \Delta\nu \int \tilde{S}(\mathbf{w}) \tilde{\beta}(\mathbf{u}_b, \mathbf{w}) d\mathbf{w}, \quad (45)$$

<sup>6</sup> Recall that this is a sequence of such time samples that will be used to invert the problem and recover the visibilities.

where  $S$  stands for the Stokes parameters  $I$ ,  $Q$ ,  $U$  or  $V$  and  $\tilde{S}$  represents their Fourier transform, and rewrite Eq. (44) as a linear combination of the Stokes visibilities defined for different baselines

$$S_k^{\text{cross}} = \sum_{\beta=0}^{N_s-1} \Gamma_{k,\beta} \cdot V_{\beta}^{\Delta\nu} \quad (46)$$

where  $\Gamma_{k,\beta}$  is the vector, defined in (C09), encoding the phase shifting values, and  $V_{\beta}^{\Delta\nu}$  is a vector including the real and imaginary parts of the broadband Stokes visibilities. If the phase shift values of a broadband bolometric interferometer are constant with respect to frequency, the visibilities should thus be reconstructed exactly as explained in (C09), by solving a linear problem. In this case, a broadband bolometric interferometer therefore works exactly as a monochromatic one, except that the output observables will be broadband visibilities instead of monochromatic ones.

### 3.3. Phase shifters linear with respect to frequency

We now consider the more complicated case where the modulation phase shifters vary linearly with respect to frequency,

$$\Delta\Phi_{b,p}^k(\nu) = \Delta\Phi_{b,p}^k(\nu_0) \times \frac{\nu}{\nu_0}. \quad (47)$$

From a technological point of view, this may seem more natural, since it is automatically respected if for instance the phase shifters are just constituted by delay-lines.

For the sake of simplicity, we write  $\Delta\Phi_{b,p}^k$  instead of  $\Delta\Phi_{b,p}^k(\nu_0)$  in the following. As in Sect. 2, to carry out the analytical calculation, we assume both the beam and the intensity to be independent of frequency, and we assume a normalized Gaussian bandpass function  $J_N$ . We show in Appendix B that  $\tilde{\eta}_{b,p}^{\text{BI}}$  is then

$$\tilde{\eta}_{b,p}^{\text{BI}}(\mathbf{u}_b, \mathbf{w}) = \tilde{\beta}(\mathbf{u}_b, \mathbf{w}) \times \exp[-(\Delta\Phi_{b,p}^k)^2 G + i\Delta\Phi_{b,p}^k (1 - H(\mathbf{w}))], \quad (48)$$

where we have defined<sup>7</sup>

$$G = \left( \frac{\sigma_\nu}{\nu_0} \right)^2 \times \frac{1}{2\kappa_1^2}, \quad (49)$$

$$H(\mathbf{w}) = \left( 1 - \frac{1}{\kappa_1} \right) \times \frac{\mathbf{u}_b \cdot (\mathbf{u}_b - \mathbf{w})}{\mathbf{u}_b^2}. \quad (50)$$

Thus the cross-correlation part of the bolometer signal can be written

$$S_k^{\text{cross}} = \frac{2}{N_{\text{out}}} \text{Re} \left[ \sum_{i < j} \sum_{\eta_1, \eta_2} e^{-(\Delta\Phi_{b,p}^k)^2 G + i\Delta\Phi_{b,p}^k} V_{b,p}^{\text{LD},k,\Delta\nu}(\mathbf{u}_b) \right] \quad (51)$$

where we have introduced some “phase-dependent” broadband visibilities

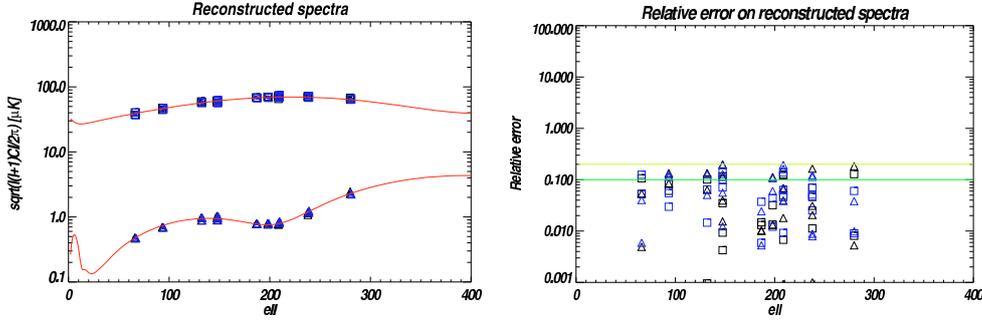
$$V_{b,p}^{\text{LD},k,\Delta\nu}(\mathbf{u}_b) = J(0) \Delta\nu \int \tilde{I}_{b,p}(\mathbf{w}) \tilde{\beta}_{b,p}^{\text{LD},k}(\mathbf{u}_b, \mathbf{w}) d\mathbf{w}. \quad (52)$$

The new kernel is linked to the generic one by a rotation in the complex plane

$$\tilde{\beta}_{b,p}^{\text{LD},k}(\mathbf{u}_b, \mathbf{w}) = \tilde{\beta}(\mathbf{u}_b, \mathbf{w}) \exp[-i\Delta\Phi_{b,p}^k H(\mathbf{w})]. \quad (53)$$

<sup>7</sup>  $\kappa_1$  is defined in Eq. (17).

R. Charlassier et al.: Bandwidth in bolometric interferometry



**Fig. 5.** *Left:* reconstructed temperature and polarization power spectra for a monochromatic (black squares) and a 20% broadband (blue squares) bolometric interferometer (16 horns with 15 degrees  $FWHM$  primary beam, phase shifters constant with respect to frequency, 12 modulation phase shift values, no instrumental noise and  $N_{\text{maps}} = 100$  in each case). Red lines show the input theoretical spectra. *Right:* relative error in the reconstruction  $(\hat{C}_l^{\text{MC}} - C_l)/C_l$  (squares for temperature spectra, triangles for polarization ones, black for monochromatic, blue for broadband). The green and yellow lines shows the expected error levels  $1/\sqrt{N_{\text{maps}}}$  at one and two standard deviations.

This complex factor unfortunately depends on the phase differences: this means that the definition of every visibility will slightly change between two different samples  $k$  and  $k'$ ! This is of course a defect that will corrupt the linear problem.

We will show in a paper in preparation that an error varying with the modulation will lead to a dramatic leakage from the intensity visibilities into the polarization ones (which are at least two orders of magnitudes smaller in CMB observations). This prediction (which is not trivial and is not proven analytically in this article) is supported by our Monte-Carlo simulation (cf. Sect. 6): introduction of the  $\eta$ -kernel of Eq. (48) in the simulation leads to a huge error on the reconstructed polarization spectrum (typically two orders of magnitude bigger than the one on temperature spectrum), as shown in Fig. 5, when the modulation matrix used to solve the problem is the monochromatic one defined in (C09). Fortunately, there is a way to get rid of this leakage, as described in Sect. 4, by reconstructing the  $I$  visibilities in sub-bands. Using the extended modulation matrix introduced in Sect. 4.3, this dramatic error source can be put under control, and the broadband polarization visibilities can be reconstructed without loss of sensitivity.

### 3.4. Geometrical phase shifts

In the quasi-optical combiner design considered for the QUBIC experiment (Kaplan & the QUBIC coll. 2009), some geometrical phase shifts  $\Psi_{b,p}^k(\nu)$  are automatically introduced by the combiner<sup>8</sup>. These phase shifts, stemming from path differences between rays in the optical combiner, vary linearly with respect to frequency:

$$\Delta\Psi_{b,p}^k(\nu) = \Delta\Psi_{b,p}^k(\nu_0) \times \frac{\nu}{\nu_0}. \quad (54)$$

But as explained in (C09), these geometrical phase shifts ought not to be used to modulate the visibilities<sup>9</sup>. This means that

<sup>8</sup> As mentioned in (C09), these phase shifters naturally respect the ‘‘coherent summation of equivalent baselines’’ scheme.

<sup>9</sup> As geometrical phase shifts depend on the spatial positions of bolometers in the quasi-optical combiner focal plane, using them to invert the problem requires the use of different bolometers; this must be avoided because of intercalibration issues.

they will not vary between the different time samples used in a reconstruction:

$$\forall k, k', \quad \Delta\Psi_{b,p}^k(\nu) = \Delta\Psi_{b,p}^{k'}(\nu) \equiv \Delta\Psi_{b,p}(\nu). \quad (55)$$

Hence they do not cause any error during the reconstruction: the  $\beta$ -kernels of each different visibility are rotated in the complex plane by the same factor independent of the sample. The visibilities are then measured by applying a rotation

$$V_{b,p}^{\text{GLD},\Delta\nu}(\mathbf{u}_b) = J(0) \Delta\nu \int \tilde{I}_{b,p}(\mathbf{w}) \tilde{\beta}(\mathbf{u}_b, \mathbf{w}) \times \exp[-i\Delta\Psi_{b,p}H(\mathbf{w})] d\mathbf{w}. \quad (56)$$

### 3.5. Photon noise error in reconstructed visibilities

We assume here that the modulation matrix used to reconstruct the visibilities is the monochromatic one defined in (C09); this is completely true in the case of frequency-independent phase shifters, and true for the rows concerning the polarization visibilities in the case of frequency-dependent phase shifters (see Sect. 4.3). We have shown in (C09) that the visibility covariance matrix is, where the factor  $1/[J(0) \Delta\nu]^2$  is caused by the difference in the definitions of the monochromatic and broadband visibilities,

$$N = \frac{\sigma_0^2 N_h}{[J(0) \Delta\nu]^2 N_{\text{out}}} \times (A^t \cdot A)^{-1}, \quad (57)$$

where  $A$  is a matrix including the  $\Gamma_{k,\beta}$  vectors and  $\sigma_0$  represents the photon noise (in watts) that would be seen by one bolometer illuminated by one horn during the time of one sample of the phase sequence. The off-diagonal elements become zero because the angles are uncorrelated from one channel to another, while the diagonal elements average to the variance in the elements in  $A$ , which equals  $1^{10}$  multiplied by the number of different data samples  $N_d$ . If the coherent summation of equivalent baselines scheme is adopted, the variance in the reconstructed visibilities is

$$\sigma_V[\ln W] = \frac{\sqrt{N_h} \sigma_0}{N_{\text{eq}} \sqrt{N_t}} \times \frac{1}{J(0) \Delta\nu}, \quad (58)$$

<sup>10</sup>  $A$  is filled with elements of the form  $\cos(\phi_1) + \sin(\phi_2)$  and because we assume that the angles are uniformly distributed, they have an average of zero and a variance of 1.

A&amp;A 514, A37 (2010)

where  $N_t = N_d \times N_{\text{out}}$  is the total number of time samples. We derive from Eq. (58) in Appendix E the noise in a visibility measured during a time  $t$  by a bolometric interferometer experiment, knowing the noise equivalent temperature (NET<sup>11</sup>) of its bolometers, in Kelvin units,

$$\sigma_V [\text{in K}] = \frac{\sqrt{N_t} \text{NET } \Omega}{N_{\text{eq}} \sqrt{t}}. \quad (59)$$

#### 4. Virtual reconstruction sub-bands in bolometric interferometry

We show that the linear dependence in frequency of the modulation phase shifts  $\Phi_{b,p}^k(v)$  enables independent reconstruction of the visibilities in narrower frequency subbands. This idea was first proposed by (Malu 2007). We initially interpreted this method as a way of reducing the smearing because the sub-band visibilities that are reconstructed are less smeared than the broadband ones. However we now demonstrate that its application produces a loss in signal-to-noise ratio that thwarts the gain in sensitivity, and thus makes this method inefficient for decreasing bandwidth smearing. However, as we see, this method can be successfully set up to remove the dramatic effect described in Sect. 3.3, and thus saves the frequency-dependent option for the modulation phase shifters.

##### 4.1. Principle

Before doing the visibility reconstruction, one can choose a number  $n_{\text{vsub}}$  of *virtual reconstruction sub-bands* of width  $\delta v = \Delta v / n_{\text{vsub}}$ . We emphasize that this division into subbands is purely virtual in that the hardware design does not depend on it. The  $\tilde{\eta}$ -kernel becomes

$$\tilde{\eta}_{b,p}^{\text{BL},\Delta v}(\mathbf{u}_b, \mathbf{w}) = \sum_{m=1}^{n_{\text{vsub}}} \tilde{\eta}_{b,p}^{\text{BL},\delta v}(\mathbf{u}_b, \mathbf{w}, \nu_m), \quad (60)$$

where  $\tilde{\eta}_{b,p}^{\text{BL},\delta v}$  are defined as the *sub-bands kernels*

$$\tilde{\eta}_{b,p}^{\text{BL},\delta v}(\mathbf{u}_b, \mathbf{w}, \nu_m) = \int \tilde{A} \left( \frac{\nu}{\nu_0} \mathbf{u}_b - \mathbf{w} \right) J_N^{\delta v}(\nu - \nu_m) \times \exp \left[ i \Delta \Phi_{b,p}^k(\nu) \right] d\nu, \quad (61)$$

where  $J_N^{\delta v}(\nu - \nu_m)$  is a bandpass function of width  $\delta v$  centered on  $\nu_m$ . The cross-correlation term is then<sup>12</sup>

$$S_k^{\text{cross}} = \frac{2}{N_{\text{out}}} \text{Re} \left[ \sum_{m=1}^{n_{\text{vsub}}} \sum_{\substack{i < j \\ \eta_1, \eta_2}} \exp \left[ i \Delta \Phi_{b,p}^k \right] V_{b,p}^{\delta v}(\mathbf{u}_{b,m}) \right], \quad (62)$$

where we have defined

$$\Delta \Phi_{b,p,m} = \Delta \Phi_{b,p}(\nu_0) \times \frac{\nu_m}{\nu_0} \quad \text{and} \quad \mathbf{u}_{b,m} = \mathbf{u}_b \times \frac{\nu_m}{\nu_0}. \quad (63)$$

The sub-band visibilities  $V_{b,p}^{\delta v}(\mathbf{u}_{b,m})$  are the broadband visibilities defined in the previous sections but for a  $\delta v$  bandwidth. For each pair of horns, the  $n_{\text{vsub}}$  sub-bands visibilities are defined for  $n_{\text{vsub}}$

different baselines  $\{\mathbf{u}_{b,m}\}_{m=1,\dots,n_{\text{vsub}}}$ . Finally, Eq. (62) can be written as a linear system  $n_{\text{vsub}}$  times greater than that of Eq. (51),

$$S_k^{\text{cross}} = \sum_{\beta=1}^{n_{\text{vsub}} \times N_{\neq}} \Gamma_{k,\beta}^{\delta v} \cdot V_{\beta}^{\delta v}. \quad (64)$$

The problem can thus be inverted exactly as in (C09) to recover the  $n_{\text{vsub}} \times N_{\neq}$  sub-bands visibilities.

##### 4.2. Sensitivity issue

In every time sample  $k$ , the signal of the sub-band visibilities is  $n_{\text{vsub}}$  times weaker than the signal of the broadband visibilities, and consequently their reconstruction variance is

$$\sigma_V^{\delta v} [\text{in K}] = \frac{\sqrt{N_t} \times n_{\text{vsub}} \text{NET } \Omega}{N_{\text{eq}} \sqrt{t}}. \quad (65)$$

One can average *offline* (i.e., after the reconstruction) the sub-band visibilities derived from the same baseline  $\mathbf{u}_b$ , to recover the broadband visibilities:

$$V_{b,p}^{\Delta v}(\mathbf{u}_b) = \sum_{m=1}^{n_{\text{vsub}}} V_{b,p}^{\delta v}(\mathbf{u}_{b,m}). \quad (66)$$

These broadband visibilities are equivalent to those that would have been reconstructed without subband division but are affected less by bandwidth smearing ( $\kappa_1$  is that of an instrument whose bandwidth is  $n_{\text{vsub}}$  times smaller). However, the variance in these broadband visibilities is

$$\sigma_V^{\Delta v} [\text{in K}] = \frac{\sqrt{N_t} \times \sqrt{n_{\text{vsub}}} \text{NET } \Omega}{N_{\text{eq}} \sqrt{t}}. \quad (67)$$

A comparison with Eq. (59) shows that the reconstruction into virtual sub-bands comes along with a loss by a factor  $\sqrt{n_{\text{vsub}}}$  in sensitivity of reconstructed visibilities. Unfortunately, we find in Sect. 5 that this loss in sensitivity is always greater than the gain provided by smearing reduction. This ensures that this method is inefficient in reducing bandwidth smearing.

##### 4.3. Reconstruction scheme for instruments with frequency-dependent phase shifters

This method, however, provides a solution for a crucial issue described in Sect. 3.3. The idea is to estimate at the same time the intensity visibilities in subbands (Stokes  $I$ ), and the polarization visibilities in one single broad band (Stokes  $Q$ ,  $U$ , and  $V$ ). This can easily be achieved by writing an extended coefficient matrix based on the decomposition

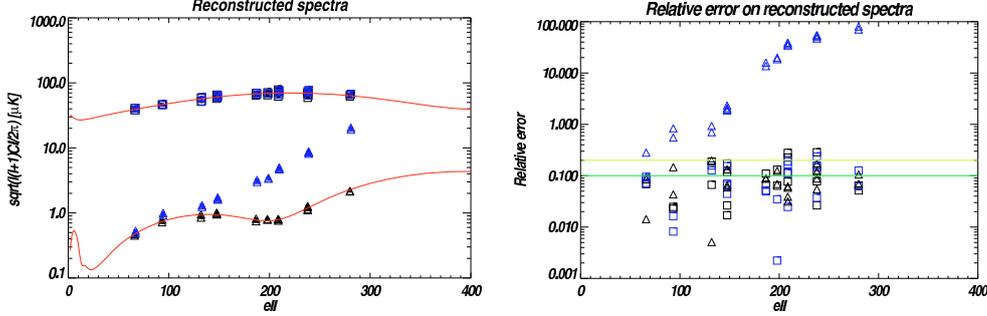
$$S_k^{\text{cross}} = \sum_{\beta=1}^{n_{\text{vsub}} \times N_{\neq}} \Gamma_{k,\beta}^{\delta v} \cdot V_{I,\beta}^{\delta v} + \sum_{X=Q,U,V} \sum_{\beta'=1}^{N_{\neq}} \Gamma_{k,\beta'} \cdot V_{X,\beta'}^{\Delta v}. \quad (68)$$

Practically, this means that the part of the matrix encoding the polarization visibilities is identical to that of the monochromatic matrix, while the part encoding the intensity visibilities contains a factor of  $n_{\text{vsub}}$  more rows. The matrix thus has a total of  $(2 \times n_{\text{vsub}} + 6) \times N_{\neq}$  rows. The corruption of the linear problem (and then the leakage of the error in the intensity visibilities into the polarization ones) can thus be reduced as much as necessary by increasing the number of subbands, without loss of signal-to-noise ratio for the polarization visibilities. This reconstruction was performed with our numerical simulation, as described in

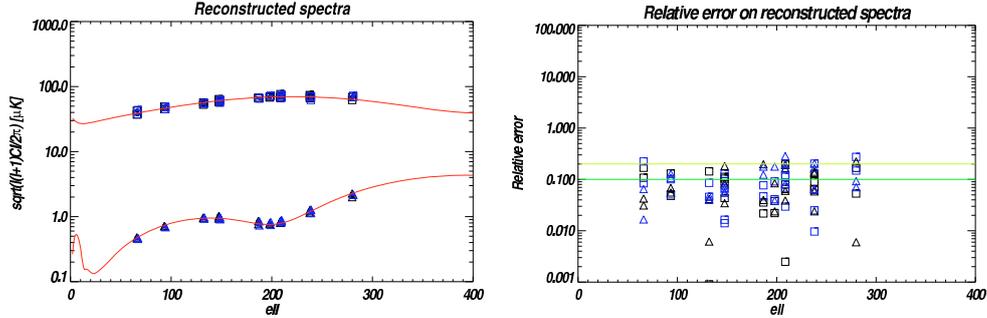
<sup>11</sup> See Appendix D for definition.

<sup>12</sup> We omit here the correction terms involving  $G$  and  $H$  to simplify the expression in the case of frequency-dependent phase shifters.

R. Charlassier et al.: Bandwidth in bolometric interferometry



**Fig. 6.** *Left:* phase shifters linear with respect to frequency and reconstruction with monochromatic modulation matrix. Reconstructed temperature and polarization power spectra for a monochromatic (black squares and triangles) and a 20% broadband (blue squares and triangles) bolometric interferometer (16 horns with 15 degrees  $FWHM$  primary beam, 12 modulation phase shift values, no instrumental noise and  $N_{\text{maps}} = 100$  in each case). Red lines show the input theoretical spectra. *Right:* relative error on the reconstruction  $(\hat{C}_i^{\text{MC}} - C_i)/C_i$  (squares for temperature spectra, triangles for polarization ones, black for monochromatic, blue for broadband). The green and yellow lines shows the expected error levels  $1/\sqrt{N_{\text{maps}}}$  at one and two sigmas.



**Fig. 7.** *Left:* phase shifters linear with respect to frequency and reconstruction with the extended modulation matrix (5 virtual sub-bands for  $l$  visibilities only). Reconstructed temperature and polarization power spectra for a monochromatic (black squares and triangles) and a 20% broadband (blue squares and triangles) bolometric interferometer (16 horns with 15 degrees  $FWHM$  primary beam, 15 modulation phase shift values, no instrumental noise and  $N_{\text{maps}} = 100$  in each case). Red lines show the input theoretical spectra. *Right:* relative error on the reconstruction  $(\hat{C}_i^{\text{MC}} - C_i)/C_i$  (squares for temperature spectra, triangles for polarization ones, black for monochromatic, blue for broadband). The green and yellow lines shows the expected error levels  $1/\sqrt{N_{\text{maps}}}$  at one and two sigmas.

Sect. 6; a comparison of Figs. 6 and 7 shows its efficiency. One drawback of this method is of course that it increases the minimal sequence length required to invert the problem. Finally, we notice that this method could in principle apply just as well to phase shifters with any arbitrary (but known) frequency dependence.

## 5. Loss in sensitivity of CMB experiments

We have shown in Sects. 3 and 4 how the broadband visibilities defined in Sect. 2 can be reconstructed, independently of the frequency dependence of modulation phase shifters, from the bolometer sequences measured by a broadband bolometric interferometer. To evaluate the resulting loss in sensitivity for a dedicated CMB experiment, it is important to understand that it is meaningless to compare *directly* monochromatic visibilities and broadband ones, because they are not the same observables because it is meaningless to directly compare two signals that have been convolved with kernels of different shape and/or size. A correct way to deal with this problem is to compare the sensitivities achieved for the observable of physical interest, here the

CMB power spectra. In this section, we generalize the estimator introduced in (H08) and derive new formulae for the sensitivity of the CMB BB power spectrum.

### 5.1. Generalization of the pseudo-power spectrum estimator

We make the same assumptions and follow exactly the same arguments as in (H08), substituting the kernel  $\tilde{\beta}(\mathbf{u}, \mathbf{w})$  for the Fourier transform of the beam  $\tilde{A}(\mathbf{w})$ . Assuming perfect E/B separation, one can show that

$$\langle V_B(\mathbf{u})V_B^*(\mathbf{u}') \rangle = \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}') \times \int C_l^{BB}(\mathbf{w}) |\tilde{\beta}(\mathbf{u}, \mathbf{w})|^2 d\mathbf{w}. \quad (69)$$

We recall that in the flat-sky approximation,  $l \simeq 2\pi|\mathbf{u}|$  – see e.g., (White et al. 1999). Assuming the power to be flat enough to be taken out of the integral (we assume that  $l^2 C_l$  is flat in the simulation, see Sect. 6), in the presence of noise,

$$\langle V_B(\mathbf{u})V_B^*(\mathbf{u}') \rangle = \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}') C_l^{BB} \int |\tilde{\beta}(\mathbf{u}, \mathbf{w})|^2 d\mathbf{w} + N(\mathbf{u}, \mathbf{u}'). \quad (70)$$

A&amp;A 514, A37 (2010)

In Appendix C, we show that the integral of the square modulus of the convolution kernel in the  $uv$ -plane actually equals half of the effective beam defined in Eq. (16)

$$\int |\tilde{\beta}(\mathbf{u}, \mathbf{w})|^2 d\mathbf{w} = \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\Omega}{2\kappa_1}. \quad (71)$$

There is a perfect analogy with the monochromatic case where  $\frac{\Omega}{2} = \int |\tilde{A}(\mathbf{w})|^2 d\mathbf{w}$ . The simplest unbiased estimator of the power spectrum for a broadband interferometer, in presence of noise, is thus

$$\widehat{C}_l = \frac{2}{\Omega_s} \times \frac{1}{N_\#(l)} \sum_{\beta=0}^{N_\#(l)-1} [V(\mathbf{u}_\beta)V^*(\mathbf{u}_\beta) - N(\mathbf{u}_\beta, \mathbf{u}_\beta)], \quad (72)$$

where  $N_\#(l)$  is the number of different modes probing a given  $l$ . It is thus the ratio of the available surface of a bin  $\pi\mathbf{u}\Delta\mathbf{u}$  to the effective surface of the kernel in the  $uv$ -plane  $\Omega_s/2$ ,

$$N_\#(l) = \frac{2\pi\mathbf{u}\Delta\mathbf{u}}{\Omega_s} = 2l\Delta l \frac{f_{\text{sky}}}{\kappa_1}. \quad (73)$$

The variance in the estimator for a broadband interferometer can be derived as in (H08), leading to the error in the power spectrum

$$\Delta C_l^{\text{BI,HI}} = \sqrt{\frac{2\kappa_1}{2l\Delta l f_{\text{sky}}}} \left( C_l + \frac{2\sigma_v^2 \kappa_1}{\Omega} \right). \quad (74)$$

The only differences from the monochromatic interferometer formula concerns the  $\kappa_1$  factors.

Using the expression for  $\sigma_v$  given by Eq. (59), the error in the angular power spectrum measured by a broadband bolometric interferometer during a time  $t$  can finally be written

$$\Delta C_l^{\text{BI}} = \sqrt{\frac{2\kappa_1}{2l\Delta l f_{\text{sky}}}} \left( C_l + \frac{2N_h \text{NET}_{\text{BI}}^2 \Omega}{N_{\text{eq}}^2 t} \kappa_1 \right). \quad (75)$$

The  $\text{NET}_{\text{BI}}$  of bolometers scales as the inverse square root of the bandwidth,  $\text{NET}_{\text{BI}} \propto 1/\sqrt{\Delta\nu}$ , cf. Appendix D, which we illustrate clearly by writing

$$\text{NET}_{\text{BI}}^2 = \text{NET}_{\text{BI},20\%}^2 \frac{0.20}{(\Delta\nu/\nu_0)}, \quad (76)$$

where  $\text{NET}_{\text{BI},20\%}^2$  is the noise equivalent temperature of 20%-bandwidth bolometers. Equation (75) becomes

$$\Delta C_l^{\text{BI}} = \sqrt{\frac{2}{2l\Delta l f_{\text{sky}}}} \times \left( \sqrt{\kappa_1} C_l + \frac{2N_h \text{NET}_{\text{BI},20\%}^2 \Omega}{N_{\text{eq}}^2 t} \times \frac{0.20}{(\Delta\nu/\nu_0)} K_{\text{sp}}(l) \right), \quad (77)$$

where the *smearing penalty factor* is defined by

$$K_{\text{sp}}(l) = \kappa_1^{3/2} = \left( 1 + \frac{\Omega(\sigma_v/\nu_0)^2 l^2}{2\pi} \right)^{3/4}. \quad (78)$$

If we neglect the  $\sqrt{\kappa_1}$  penalty on the sample variance, the factor of sensitivity degradation due to bandwidth smearing for a bolometric interferometer is indeed given by  $K_{\text{sp}}(l)$ . The physical interpretation of Eq. (77) is straightforward: the sensitivity improvement provided by bandwidth broadening (more photons are collected) is in competition with the sensitivity degradation caused by bandwidth smearing (the fringes are degraded).

Figure 4 (right) shows the evolution of  $(0.20/\Delta\nu) \times K_{\text{sp}}(l)$  as a function of bandwidth. We see that, for the typical B-mode experiment considered, the smearing begins to cancel the broadening for bandwidths larger than 20% – which is fortunately the typical bandwidth of bolometers used in CMB experiments<sup>13</sup>. Figure 4 (left) shows that the total loss in sensitivity on power spectra due to bandwidth smearing is about 2 for  $l = 150$ , for a typical dedicated B-mode experiment with 20% bandwidth. This result, which may seem unexpected considering the poor reputation of radio-interferometers in terms of bandwidth, is mainly caused by the spatial resolution required for the observation of CMB angular correlations being poorer than that required for the observation of point sources.

### 5.2. Inefficiency of the reconstruction in sub-bands in preventing bandwidth smearing

If the visibilities were reconstructed into  $n_{\text{vsub}}$  sub-bands, the smearing would be reduced but the signal-to-noise ratio in each  $l$  band would decrease, leading to a  $\sqrt{n_{\text{vsub}}}$  additional factor in  $\sigma_v$  as explained in Sect. 4. The smearing penalty factor would be

$$K_{\text{sp}}^{\text{SB}}(l) = n_{\text{vsub}} \kappa_1^{3/2} = n_{\text{vsub}} \left( 1 + \frac{\Omega(\sigma_v/\nu_0)^2 l^2}{2\pi n_{\text{vsub}}^2} \right)^{3/4}. \quad (79)$$

However, it can be shown that  $K_{\text{sp}}^{\text{SB}}(l)$  is always greater than  $K_{\text{sp}}(l)$ , whatever the number of sub-bands, meaning that the loss in signal-to-noise ratio is always more penalizing than the smearing reduction.

### 5.3. Comparison with an imager and a heterodyne interferometer

We now correct the ratio formulae derived in (H08). The comparison between the sensitivities of a heterodyne and a bolometric interferometer is not straightforward since there is an important difference in hardware design between the two kind of interferometry in terms of bandwidth. In a radio heterodyne interferometer such as DASI (Kovac et al. 2002) or CBI (Readhead et al. 2004), the analog correlators only work at low frequencies (typically below 2 GHz), so the broadband signal collected by each horn is divided into different channels of typically 1 GHz bandwidth each and then downconverted before being correlated. This forced division has prevented past interferometer CMB experiments from any important bandwidth smearing effects, but the price to pay was of course the hardware complexity of these systems. On the other hand, bolometers are naturally broadband, and we have shown how the monochromatic bolometric interferometer described in (C09) generalizes almost naturally into a broadband bolometric interferometer: a broadband instrument only needs broadband components, e.g., horns, filters. To correct the ratio formula obtained in (H08), one can neglect the bandwidth smearing for heterodyne interferometers (for a 1% bandwidth,  $\kappa_1$  is always very close to 1); the formula is then only corrected by the smearing penalty factor

$$\frac{\Delta C_l^{\text{HI}}}{\Delta C_l^{\text{BI}}} = \left( \frac{N_{\text{eq}}}{N_h} \right) \times \frac{\text{NET}_{\text{HI}}}{\text{NET}_{\text{BI}}} \times K_{\text{sp}}^{-1}. \quad (80)$$

To be completely fair, one must keep in mind that in the true state of the technological art, it seems difficult to design heterodyne interferometers with bandwidths larger than 10%.

<sup>13</sup> For ground-based experiments, atmospheric emission lines exclude the possibility of wider bandwidth.

R. Charlassier et al.: Bandwidth in bolometric interferometry

The comparison between a bolometric interferometer and an imager is also only modified by the smearing penalty factor. If the experiment is dominated by instrumental noise, the ratio of the variances becomes

$$\frac{\Delta C_l^{\text{Im}}}{\Delta C_l^{\text{BI}}} = \left(\frac{N_{\text{eq}}}{N_h}\right)^2 \times \frac{1}{B_l^2} \times K_{\text{sp}}^{-1}. \quad (81)$$

## 6. Monte Carlo simulations

We performed a Monte Carlo simulation to check the results obtained in this article. Starting from CMB maps generated from theoretical spectra, the basic principle is to compute the sequences of data measured by a broadband bolometric interferometer, to reconstruct visibilities from these sequences, and to estimate power spectra from these visibilities. The comparison between input and output spectra then allows us to check the analytical calculations (and the associated assumptions) of this article. The code is available upon request; questions or comments can be addressed by e-mail to the authors.

### 6.1. Simulation overview

We consider a “standard” bolometric interferometer (as defined in Sect. 3) constituted by a square array of  $N_h$  horns, the associated  $N_h$  polarization splitters, the  $2N_h$  modulation phase shifters, a beam combiner and  $N_{\text{out}}$  bolometers. In this simulation, we only compute the power measured by one of the bolometers. We assume that the beams of the horns are all described by the same perfect Gaussian function of Eq. (12). We assume that the phase shift values taken by the modulation phase shifters are equally spaced. The physical input parameters are then the number of horns  $N_h$ , the horns radius, the distance between two adjacent horns, the *FWHM* of the Gaussian beam, the number of phase shift values taken by the modulation phase shifters  $N_\phi$ , the central observation frequency  $\nu_0$ , the bandwidth  $\Delta\nu$ , the form of the bandpass function (either Gaussian or top hat)  $J$ , and the number of data samples in one sequence  $N_d$ .

The CMB maps are generated from spectra given by the standard WMAP-5 cosmological model (although the spectra shapes are not really important to this simulation, the only crucial feature being the ratio of the amplitude of temperature to polarization spectra). The question of the E and B mode separation in interferometry is beyond the scope of both this article and simulation. So we consider only the TT and EE spectra, which we refer to from now, respectively, as the temperature and polarization spectra. Computation of the  $\beta$  and  $\eta$  kernels involves a numerical integration over the frequency band, while computation of the samples measured by the bolometer involves one over the uv-plane. The numerical input parameters are then the resolution in the uv-plane, the resolution in the frequency band, and the number of CMB map realisations  $N_{\text{maps}}$ .

The simulation pipeline is the following:

1. the position of primary horns and the associated set of baselines are generated;
2. the  $\beta$  and  $\eta$  kernels are computed – either from analytical formulas (given by Eqs. (19) and (43) or numerical integrations (following Eqs. (10) and (41)), which enables us to check the analytical formulae – for every different baseline and, in the case of  $\eta$ , for every phase difference;
3. beginning of MAPS loop. CMB temperature and polarization maps are generated from theoretical spectra;

4. monochromatic and broadband visibilities are computed by convolving the maps Fourier transforms and the  $\beta$  kernels for every baseline. “Generalized” broadband visibilities (i.e., the convolution of maps Fourier transforms with  $\eta$  kernels) are computed for every baseline and every phase difference;
5. random phase sequences are generated for every horn and both polarizations, respecting the coherent summation of equivalent baselines scheme described in (C09). Phase differences are then computed for every baseline;
6. a sequence of  $N_d$  data sets  $S_k$  measured by the bolometer is computed (Eq. (39)) by summing “generalized” broadband visibilities, following the phase sequences;
7. the modulation matrix is generated (see (C09) for its explicit expression in the monochromatic case);
8. the visibilities are reconstructed by solving the linear problem of Eq. (46). End of MAPS loop;
9. measured spectra are computed from the reconstructed visibilities using the estimators defined in Sect. 5. Relative errors are obtained by comparing with the input theoretical spectra.

### 6.2. Validation of the work principle of a broadband bolometric interferometer and test of the broadband estimator

In step 9, we do not average the modulus of the reconstructed visibilities over the different baselines matching the same multipole as in Eq. (72), but for each different baseline, we average over all the  $N_{\text{maps}}$  maps realisations. Moreover, the power is actually not flat over the  $\Delta l$  of integration, so it cannot be taken out of the integral in Eq. (69). Since  $l^2 C_l$  is nearly flat, we can however define an unbiased estimator (assuming no instrumental noise) for the broadband interferometer

$$\widehat{C}_l^{\text{MC}} = \frac{2}{\Omega_s^{\text{MC}}} \times \frac{1}{N_{\text{maps}}} \sum_{m=0}^{N_{\text{maps}}-1} V_m(\mathbf{u}_\beta) V_m^*(\mathbf{u}_\beta), \quad (82)$$

where  $V_m(\mathbf{u}_\beta)$  is the broadband visibility defined for the baseline  $\mathbf{u}_\beta$  ( $l = 2\pi|\mathbf{u}_\beta|$ ) and the map  $m$  and where

$$\Omega_s^{\text{MC}} = \int \frac{|w|^2}{|\mathbf{u}_\beta|^2} |\tilde{\beta}(\mathbf{u}_\beta, w)|^2 d\mathbf{w} \sim \frac{\Omega}{2\kappa_1}. \quad (83)$$

We thus expect the spectra reconstruction to only be affected by the “sample” variance

$$\Delta C_l^{\text{MC}} = C_l / \sqrt{N_{\text{maps}}}. \quad (84)$$

We execute the simulations for the following input parameters: 16 horns, 15 degrees *FWHM* primary beam, 12 modulation phase shift values, a 90 GHz central frequency, 20% bandwidth,  $N_{\text{maps}} = 100$ . We first simulate the case of phase shifters constant with respect to frequency (the  $\eta$ -kernels are computed following Eqs. (41) and (43)) and use the monochromatic modulation matrix defined in (C09) to reconstruct the visibilities. The results, shown in Fig. 5, validate our study since our broadband estimator, taking the smearing into account, reconstructs the generated power spectra well: a broadband bolometric interferometer with phase shifters that are constant with respect to frequency operates exactly like a monochromatic interferometer, but the reconstructed visibilities are the predicted smeared ones. We then simulate the case of frequency-dependent modulation phase shifters, with kernels computed following Eqs. (41) and (48). Figure 6 shows the dramatic effect described in Sect. 3.3 on the reconstructed polarization spectrum when the monochromatic modulation matrix is used to reconstruct the visibilities. Figure 7

A&amp;A 514, A37 (2010)

shows the efficiency of using the extended modulation matrix described in Sect. 4.3 to reconstruct the polarization visibilities: the intensity visibilities have been reconstructed into 5 sub-bands, completely removing the error in the polarization visibilities reconstruction in the configuration considered (at the level of sample variance considered of course).

## 7. Conclusion

We have analytically and numerically studied the work principle of a broadband bolometric interferometer. We have defined its (indirect) observables – the broadband visibilities – and introduced numerical methods to reconstruct them. We have finally calculated the sensitivity of such an instrument dedicated to the B-mode.

Bolometers are naturally broadband, and consequently the design of a broadband bolometric interferometer is identical to the design of the monochromatic one described in (C09), a broadband bolometric interferometer only requiring broadband components, e.g., horns, filters. Nevertheless, we have seen that the modulation matrix that should be used to reconstruct the broadband visibilities depends on some hardware properties of the modulation phase shifters. If these are constant with respect to frequency, the modulation matrix should be that defined in (C09) for a monochromatic instrument. If they are dependent on frequency (this dependence should be known of course), a more complicated scheme involving a reconstruction in sub-bands of the intensity visibilities should be performed. We have verified by using a numerical simulation that in both cases the visibilities can be reconstructed without any additional loss in sensitivity to that caused by the smearing.

Visibilities are defined as the convolution of the Fourier transform of the signal with a kernel, which in the monochromatic case is defined as the Fourier transform of the primary beam. We have shown that the effect of the smearing is to stretch this kernel, in the baseline direction only, and that the amplitude of the smearing depends only on three quantities: the bandwidth, the baseline length, and the size of the primary beam. We have finally defined, as a function of broadband visibilities, a new power spectrum estimator and from this derived a generalized uncertainty formula.

The main conclusion of this article is that for a bolometric interferometer dedicated to CMB B-mode, the sensitivity loss, due to bandwidth smearing, is quite acceptable (a factor of 2 loss for a typical 20% bandwidth experiment).

*Acknowledgements.* The authors are grateful to the entire QUBIC collaboration for fruitful discussions.

## Appendix A: Analytical derivation of the $\tilde{\beta}$ -kernel

The kernel of Eq. (13) can be written as a Gaussian integral:

$$\tilde{\beta}_{\text{ap}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) = \frac{\Omega}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} e^{\frac{B^2}{4A} - C} \int e^{-A(y - \frac{B}{A})^2} dy \quad (\text{A.1})$$

$$= \frac{\Omega}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{B^2}{4A} - C\right] \sqrt{\frac{\pi}{A}}, \quad (\text{A.2})$$

where we have defined the quantities

$$A = \frac{1}{2\sigma_v^2} + \pi\Omega \frac{u_0^2}{v_0^2}, \quad (\text{A.3})$$

$$B = \frac{v_0}{\sigma_v^2} + 2\pi\Omega \frac{\mathbf{u}_0 \cdot (\mathbf{u}_0 - \mathbf{w}')}{v_0}, \quad (\text{A.4})$$

$$C = \frac{v_0^2}{2\sigma_v^2} + \pi\Omega(\mathbf{u}_0 - \mathbf{w}')^2, \quad (\text{A.5})$$

and have made the variable substitution

$$\mathbf{w}' = \mathbf{u}_0 - \mathbf{w}. \quad (\text{A.6})$$

It is straightforward to show that

$$\frac{\Omega}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{A}} = \frac{\Omega}{\sqrt{1 + 2\pi\Omega \left(\frac{\sigma_v}{v_0}\right)^2 u_0^2}}, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{B^2}{4A} - C = -\pi\Omega \mathbf{w}'^2 + \frac{2\pi^2\Omega^2 \left(\frac{\sigma_v}{v_0}\right)^2}{1 + 2\pi\Omega \left(\frac{\sigma_v}{v_0}\right)^2 u_0^2} (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{w}')^2. \quad (\text{A.8})$$

Thus, we can write the kernel as a function of the Fourier transform of the beam as in Eq. (14).

## Appendix B: Analytical derivation of the $\tilde{\eta}$ -kernel

The kernel of Eq. (41) can be written as the Fourier transform of a Gaussian:

$$\tilde{\eta}_{b,p}^{\text{BI}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) = \Omega e^{-\frac{B^2}{4A} + C} \int e^{-A(y - \frac{B}{A})^2} e^{i\Delta\Phi_{b,p} \frac{y}{v_0}} dy \quad (\text{B.1})$$

$$= \Omega e^{-\frac{B^2}{4A} + C} \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{\Delta\Phi_{b,p}^2}{4v_0^2 A}} e^{i\Delta\Phi_{b,p} \frac{B}{2v_0 A}}, \quad (\text{B.2})$$

where  $A$ ,  $B$ , and  $C$  are the quantities defined in Appendix A. It is straightforward to show that

$$G = \frac{1}{4v_0^2 A} = \left(\frac{\sigma_v}{v_0}\right)^2 \times \frac{1}{2\kappa_1^2}, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{B}{2v_0 A} = 1 - \frac{2\pi\Omega \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{w}' \left(\frac{\sigma_v}{v_0}\right)^2}{1 + 2\pi\Omega \mathbf{u}_0^2 \left(\frac{\sigma_v}{v_0}\right)^2} = 1 - H(\mathbf{w}'), \quad (\text{B.4})$$

where

$$H(\mathbf{w}') = \left(1 - \frac{1}{\kappa_1^2}\right) \times \frac{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{w}'}{u_0^2}. \quad (\text{B.5})$$

We can finally write the kernel as in Eq. (48).

## Appendix C: Integration of the $\tilde{\beta}$ -kernel square modulus in the uv-plane

We calculate this integral using the approximate kernel of Eq. (18). The variable substitution  $\mathbf{w}' = \mathbf{u}_0 - \mathbf{w}$  does not change the integral

$$\int |\tilde{\beta}_{\text{ap}}(\mathbf{u}, \mathbf{w})|^2 d\mathbf{w} = \int |\tilde{\beta}_{\text{ap}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}')|^2 d\mathbf{w}'. \quad (\text{C.1})$$

Using Parseval's theorem, one obtains

$$\int |\tilde{\beta}_{\text{ap}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}')|^2 d\mathbf{w}' = \int |\beta_{\text{ap}}(\mathbf{u}, \mathbf{n})|^2 d\mathbf{n}, \quad (\text{C.2})$$

where  $\beta_{\text{ap}}$  is the inverse Fourier transform of  $\tilde{\beta}_{\text{ap}}$ . Because  $\tilde{\beta}_{\text{ap}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}')$  is a positive Gaussian function of  $\mathbf{w}'$ ,

$$\int |\beta_{\text{ap}}(\mathbf{u}, \mathbf{n})|^2 d\mathbf{n} = \frac{1}{2} \int |\beta_{\text{ap}}(\mathbf{u}, \mathbf{n})| d\mathbf{n} = \frac{1}{2} \tilde{\beta}_{\text{ap}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}' = \mathbf{0}). \quad (\text{C.3})$$

By definition  $\Omega_s = \tilde{\beta}_{\text{ap}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}' = \mathbf{0})$ , so finally

$$\int |\tilde{\beta}_{\text{ap}}(\mathbf{u}, \mathbf{w})|^2 d\mathbf{w} = \frac{\Omega_s}{2}. \quad (\text{C.4})$$

R. Charlassier et al.: Bandwidth in bolometric interferometry

#### Appendix D: Noise equivalent power and noise equivalent temperature

The spectral power  $I_\nu$  collected by a horn of surface  $S$  is defined in Eq. (20). We assume for simplicity that the number of bolometers equals the number of horns. The total power measured by a bolometer is then

$$P_{\text{tot}} = \iint I_\nu(\mathbf{n}) J(\nu - \nu_0) A_\nu(\mathbf{n}) d\mathbf{n} d\nu \quad (\text{D.1})$$

$$\simeq S \Omega J(0) \Delta\nu \int \frac{\nu_0^2}{\nu^2} B_\nu J_N(\nu - \nu_0) d\nu. \quad (\text{D.2})$$

The noise equivalent power (NEP) caused by photon noise in a bolometer, in units of  $[\text{W Hz}^{-1/2}]$ , is given by (Lamarre 1986)

$$\text{NEP}^2 = 2J(0) \Delta\nu \Omega \int h\nu \frac{\nu_0^2}{\nu^2} I_\nu J_N(\nu - \nu_0) d\nu + \dots$$

$$2J(0) \Delta\nu \Omega \int \frac{c^2}{2\nu^2} \frac{\nu_0^2}{\nu^2} I_\nu^2 J_N(\nu - \nu_0) d\nu. \quad (\text{D.3})$$

For CMB work, bolometer sensitivity is usually quoted as a noise equivalent temperature in units of  $[\text{K s}^{1/2}]$ , firstly to simplify the comparison with the sensitivity of coherent receivers and secondly to simplify the calculation of the sensitivity to  $C_l$  since they are defined in temperature units. The conversion is given by

$$\text{NET} = \frac{\text{NEP}}{\sqrt{2}(\partial P_{\text{tot}}/\partial T)}. \quad (\text{D.4})$$

It is straightforward to show that

$$\frac{\partial P_{\text{tot}}}{\partial T} = S \Omega J(0) \Delta\nu \int \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} J_N(\nu - \nu_0) d\nu. \quad (\text{D.5})$$

The NET thus scales as the inverse square root of the bandwidth

$$\text{NET} \propto \frac{1}{\sqrt{\Delta\nu}}. \quad (\text{D.6})$$

#### Appendix E: Noise in visibility measurement in Kelvin

We can write the relation between  $\sigma_0$  in units of  $[\text{W s}^{1/2}]$  and the NEP in units of  $[\text{W Hz}^{-1/2}]$  as

$$\frac{\sigma_0}{\sqrt{N_i}} = \frac{\text{NEP}}{\sqrt{2} \sqrt{t_S}}, \quad (\text{E.1})$$

where  $t_S$  is the duration of one phase sequence. Starting from Eq. (58), the noise in Watt on a broadband visibility measured during a time  $t$  by an experiment is then

$$\sigma_V[\text{in W}] = \alpha \frac{\text{NEP}}{\sqrt{2} \sqrt{t} J(0) \Delta\nu}. \quad (\text{E.2})$$

**Table E.1.** Values of  $\kappa_2$  for a 20% bandwidth, for different central frequencies  $\nu_0$ .<sup>1</sup>

30 GHz	90 GHz	250 GHz
$\sim 1-10^{-3}$	$\sim 1-10^{-2}$	$\sim 1+10^{-2}$

**Notes.** <sup>(1)</sup> We assume that the instrument is observing, through the Gaussian bandpass function defined in Eq. (11), a 3 K black body source whose intensity is given by Eq. (29).

The quantity  $\alpha$  varies depending on whether one is considering an heterodyne or a bolometric interferometer. In the latter case, (C09) found that  $\alpha = \frac{\sqrt{N_b}}{N_{\text{eq}}}$ . We have defined the visibilities in temperature units in Eq. (24). The noise in a visibility measurement in Kelvin is thus given by

$$\sigma_V[\text{in K}] = \sigma_V[\text{in W}] \times \frac{1}{S (\partial B_\nu/\partial T)_{\nu_0}}. \quad (\text{E.3})$$

Using the definition of the NET given in D.4, the noise in a visibility measurement in Kelvin finally becomes

$$\sigma_V[\text{in K}] = \alpha \frac{\text{NET} \Omega}{\sqrt{t}} \kappa_2, \quad (\text{E.4})$$

where we have introduced the substitution

$$\kappa_2 = \int \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \left( \frac{\partial B_\nu/\partial T}{(\partial B_\nu/\partial T)_{\nu_0}} \right) J_N(\nu - \nu_0) d\nu. \quad (\text{E.5})$$

We see in Table E.1 that  $\kappa_2 \simeq 1$  is a good approximation.

#### References

- Charlassier, R., Hamilton, J., Bréelle,  ., et al. 2009, A&A, 497, 963  
 Charlassier, R., & the BRAIN coll. 2008, Proc. 43rd Rencontres de Moriond on Cosmology  
 Hamilton, J., Charlassier, R., Cressiot, C., et al. 2008, A&A, 491, 923  
 Hyland, P., Follin, B., & Bunn, E. F. 2009, MNRAS, 393, 531  
 Kaplan, J., & the QUBIC coll. 2009, Proc. of the June 2009 Blois conf. Windows on the Universe  
 Kovac, J. M., Leitch, E. M., Pryke, C., et al. 2002, Nature, 420, 772  
 Lamarre, J. M. 1986, Appl. Opt., 25, 870  
 Malu, S. S. 2007, Ph.D. Thesis, The University of Wisconsin – Madison  
 Readhead, A. C. S., Myers, S. T., Pearson, T. J., et al. 2004, Science, 306, 836  
 Thompson, A. R., Moran, J. M., & Swenson, Jr., G. W. 2001, Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy, 2nd edn., ed. A. R. Thompson, J. M. Moran, & G. W., Jr. Swenson.  
 Timbie, P. T., Tucker, G. S., Ade, P. A. R., et al. 2006, New Astron. Rev., 50, 999  
 Tucker, G. S., Kim, J., Timbie, P., et al. 2003, New Astron. Rev., 47, 1173  
 White, M., Carlstrom, J. E., Dragovan, M., & Holzzapfel, W. L. 1999, ApJ, 514, 12

# Bibliographie

## Interférométrie bolométrique

- [1] R. Charlassier, J.-Ch. Hamilton, E. Bréelle, A. Ghribi, Y. Giraud-Héraud, J. Kaplan, M. Piat et D. Prêle, *A&A* v497, p963 (2009).
- [2] J.-Ch. Hamilton, R. Charlassier, C. Cressiot, J. Kaplan, M. Piat et C. Rosset, *A&A* v491, p923 (2008)
- [3] R. Charlassier, E. F. Bunn, J.-Ch. Hamilton, J. Kaplan et S. Malu, *A&A* v514, id.A37 (2010)
- [4] P.T. Timbie et al., The EPIC and MBI experiments, *New Ast. Rev.*, v50, p999 (2006)
- [5] G. S. Tucker et al., The millimeter-wave bolometric interferometer (MBI), *Proceedings of the SPIE*, Volume 7020, pp. 70201M-70201M-10 (2008)
- [6] Charlassier, R. et al., The BRAIN experiment, *Proceed. 43rd "Rencontres de Moriond" on Cosmology*, *arXiv* :0805.4527v1 (2008)
- [7] Kaplan, J. et al., The QUBIC experiment, *Proceed. of the June 2009 Blois conf. "Windows on the Universe"*, *arXiv* :910.0391 (2009)
- [8] A. Ghribi et al., *Int. J. Mill. Wave and THz*, *arXiv* :0902.0385 (2009).
- [9] J.-Ch. Hamilton, *Habilitation à diriger des recherches* (2009).
- [10] S. Malu, *PhD Thesis* (2007).
- [11] E. Bunn, *Phys.Rev.* D73 123517 (2006)
- [12] Hyland P. et al. *MNRAS* v393, pp531-537 (2008)

## Histoire de la cosmologie scientifique

- [13] H. Kragh, *Cosmology and Controversy*, Princeton University Press (1996)
- [14] J. Gribbin, *In Search of the Big Bang*, Bantam. ISBN 0-5533-4617-2. (1984)
- [15] J.-P. Luminet, *L'Invention du Big Bang*. Le Seuil/Points Sciences, 2004 -ISBN 2020611481 (2004)
- [16] T. Khun, *La structure des révolutions scientifiques*, Champs Flammarion, 1983 [1970, 1962], ISBN 2-08-081115-0.
- [17] A. Penzias et R. Wilson, *ApJ lett.*, **142**, p. 419 (1965).
- [18] E. Hubble, *Astrophys. J.*, 79, 8 (1934)
- [19] E. Hubble, *Publ. Nat. Acad. Sci.*, 15, 168, (1929)
- [20] Zwicky, F., 1933, *Helv. Phys. Acta*, 6, 110

- [21] Zwicky, F., 1937, ApJ, 86, 217
- [22] Virginia Trimble, How much is there of what ?, Carnegie Observatories Astrophysics Series Vol. 2 : Measuring and modeling the universe, Cambridge University Press, 2004
- [23] Philipp Frank, Einstein : His Life and Times, 1947, (Champs-Flammarion pour la version française)
- [24] Banesh Hoffmann and Helen Dukas, Albert Einstein, Creator and Rebel, 1972, (Edition du Seuil pour la version française)
- [25] Albert Einstein, La relativité, première publication 1916 (Petite Bibliothèque Payot pour la version française)
- [26] Steven Weinberg, Les trois premières minutes de l'univers, 1977
- [27] Press, W.H. & Schechter, P., 1974, Astrophys.J. 187, 425-438
- [28] Bahcall, N.A., & Cen, R., 1992, ApJ, 398, L81
- [29] W. J. Percival *et al.*, arXiv :astro-ph/0608635.
- [30] R. G. Carlberg, H. K. C. Yee, & E. Ellingson, Astrophys. J. 478, 462 (1997)
- [31] G. Efstathiou, W. J. Sutherland, & S. J. Maddox, Nature 348, 705 (1990)
- [32] Lemaître, G., 1934, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 20, 12.
- [33] Gamow, G., 1970, My World Line (Viking, New York).
- [34] Tegmark M., et al., 2004, ApJ, 606, 702
- [35] Gott, J. R. & M. J. Rees. A&A, 45 :365-376, 1975.
- [36] A. H. Guth & P. J. Steinhardt. Scientific American, 250 :116-128, 1984.
- [37] J. Rich, Principes de la cosmologie, éd. de l'Ecole Polytechnique, ISBN : 2-7302-0925-5 (2002)
- [38] J. E. Carlstrom *et al.*, arXiv :astro-ph/0103480.
- [39] S. van den Bergh, "The Early History of Dark Matter," arXiv :astro-ph/9904251.
- [40] S. van den Bergh, arXiv :astro-ph/0005314.
- [41] S. Burles & D. Tytler, "Measurements of the deuterium abundance in quasar absorption systems," arXiv :astro-ph/9803071.
- [42] A. Dekel, D. Burstein & S. D. M. White, arXiv :astro-ph/9611108.
- [43] W. L. Freedman, Int. J. Mod. Phys. A **17S1** (2002) 58 [arXiv :astro-ph/0202006].
- [44] W. L. Freedman, Phys. Scripta **T85** (2000) 37 [arXiv :astro-ph/9905222].
- [45] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys., 61, 1, 1989.
- [46] K. A. Olive, G. Steigman & T. P. Walker, "Primordial nucleosynthesis : Theory and observations," Phys. Rept. **333** (2000) 389 [arXiv :astro-ph/9905320].
- [47] C. J. Copi, D. N. Schramm & M. S. Turner, "Big Bang Nucleosynthesis And The Baryon Density Of The Universe," Science **267** (1995) 192 [arXiv :astro-ph/9407006].
- [48] N. A. Bahcall & X. Fan, "A Lightweight Universe ?," arXiv :astro-ph/9804082.
- [49] N. A. Bahcall, arXiv :astro-ph/9611148.
- [50] N. A. Bahcall, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **138** (2005) 16 [arXiv :astro-ph/9503111].
- [51] T. Padmanabhan, "Cosmological constant : The weight of the vacuum," Phys. Rept. **380** (2003) 235 [arXiv :hep-th/0212290].

- [52] Smith, S. 1936, ApJ, 83, 23
- [53] Babcock, H.W. 1939, Lick Obs. Bull., 19, 41 (No. 498)
- [54] G. Gamow, Phys. Rev. 70, 527 (1946) ; R. A. Alpher, H. Bethe, & G. Gamow, Phys. Rev. 73, 803 (1948).
- [55] Felten, J.E., Gould, R.J., Stein, W.A., & Woolf, N.J. 1966, ApJ, 146, 955
- [56] J. P. Ostriker, P. J. E. Peebles & A. Yahil Astrophys. J. Lett., 193, L1, 1974.
- [57] V. Petrosian, E. Salpeter & P. Szekeres, Astrophys. J., 147, 1222, 1967.

### **Modèle standard de la cosmologie : théorie et observations contemporaines**

- [58] D. Langlois, arXiv :hep-th/0405053 (2004).
- [59] A.R. Liddle et D.H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press (2000).
- [60] A. H. Guth, *Phys. Rev.*, **D23**, p. 347 (1981).
- [61] A. Linde, *Phys. Lett.*, **B108**, p. 389 (1982).
- [62] A. Albrecht & P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.*, **48**, p. 1220 (1982).
- [63] D. Baumann et al., *CMBPol concept study*, arXiv :0811.3919, (2008).
- [64] G. Wilson, N. Kaiser & G. A. Luppino , (2001), astro-ph/0102396.
- [65] A. Aguirre, Z. Haiman, Cosmological Constant or Intergalactic Dust? *Astrophys. J.* **532** (2000) 28.
- [66] A. Albrecht et al., Report of the Dark Energy Task Force, eprint arXiv :astro-ph/0609591 (2006)
- [67] L. M. Krauss & B. Chaboyer 2003 *Science* 299, 65
- [68] P. Molaro, et al., *Astron. Astrophys.*, 381, L64 (2002).
- [69] M. Kowalski et al., *Astrophys. J.* 686, 749 (2008).
- [70] S.P. Boughn & R.G. Crittenden, *Nature* 427, 45 (2004) ;
- [71] T. Giannantonio et al., *Phys. Rev. D* 77, 123520 (2008).
- [72] B. R. Granett, M. C. Neyrinck & I. Szapudi, *The Astrophysical Journal*, Volume 683, Issue 2, pp. L99-L102 (2008)
- [73] W. L. Freedman et al., *ApJ*, 553, 47 (2001)
- [74] A. Vikhlinin et al., *Astrophys. J.* 692, 1060 (2009).
- [75] S.W. Allen et al., *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 383, 879 (2008).
- [76] D. Clowe et al., *Astrophys.J.* 648 :L109-L113, (2006)
- [77] G. Angus et al., *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.* 371 :138, (2006)
- [78] R. R. Caldwell, A. Stebbins, *Phys.Rev.Lett.* 100 :191302, (2008)
- [79] A. Sandage, *ApJ* 136,319 (1962)
- [80] Miguel Quartin, Luca Amendola, *Phys.Rev.D* 81 :043522, (2010)
- [81] The CDMS collaboration, *Science*, Vol. 327. no. 5973, pp. 1619 - 162 (2010)

- [82] E. Armengaud & the EDELWEISS collaboration, Phys. Lett. B687 :294-298 (2010)
- [83] The XENON100 collaboration, eprint arXiv :1005.0380 (2010)
- [84] A. Slozar et al., arXiv :0805.3580v2 (2008).
- [85] Srianand, R., Petitjean, & P. Ledoux, C., Nature, Volume 408, Issue 6815, pp. 931-935 (2000)
- [86] Srianand, P. Noterdaeme, C. Ledoux2, & P. Petitjean, Astronomy and Astrophysics, Volume 482, Issue 3, (2008)
- [87] A. Kogut et al., The ARCADE 2 experiment, New Astronomy Reviews, Volume 50, Issue 11-12, p. 925-931. (2006)
- [88] de Zotti G. et al., AIP Conf. Proc., 476, 204 (1999)
- [89] Schlegel D., Finkbeiner D., Davis M., ApJ, 500, 525 (1998)
- [90] S. Carroll & J. Chen, Gen.Rel.Grav. 37 (2005) 1671-1674 ;
- [91] M. Milgrom, Astroph. J. 270, 365 (1983) ; 270, 371(1983) ; 270, 384 (1983).
- [92] J.D. Bekenstein, Phys. Rev. D 70, 083509 (2004).
- [93] Skordis, C. ; Mota, D. ; F. Ferreira, P. G. ; Boehm, C ; Physical Review Letters, vol. 96, Issue 1 (2006)
- [94] D. Eisenstein, "The acoustic peak primer" (<http://cmb.as.arizona.edu/eisenstein/acousticpeak/>) (2005)
- [95] H. C. Chiang et al., Astrophys.J.711 :1123-1140 (2010)
- [96] X. Fan et al., Astron.J.132 :117-136 (2006)
- [97] R. Trotta, Contemp.Phys.49 :71-104, arxiv :0803.4089 (2008)
- [98] R. Bean, article retiré, arxiv :0909.3853 (2009)
- [99] G. Hütsi, Power spectrum of the maxBCG sample : detection of acoustic oscillations using galaxy clusters, MNRAS, Volume 401, Issue 4, pp. 2477-2489 (2010)
- [100] D. Coe & A.L. Moustakas, Cosmological Constraints from Gravitational Lens Time Delays, The Astrophysical Journal, Volume 706, Issue 1, pp. 45-59 (2009)
- [101] S. H. Suyu et al., Dissecting the Gravitational lens B1608+656. II. Precision Measurements of the Hubble Constant, Spatial Curvature, and the Dark Energy Equation of State, The Astrophysical Journal, Volume 711, Issue 1, pp. 201-221 (2010)

### **CMB : Théorie, observations et analyse de données**

- [102] PJE. Peebles, Ap. J. 153 :1-11 (1968)
- [103] Peebles PJE, Yu JT. Ap. J. 162 :815-836 (1970)
- [104] Sachs RK, Wolfe AM. Ap. J. 147 :73-90 (1967)
- [105] Silk J. Ap. J. 151 :459-471 (1968)
- [106] Bond JR, Efstathiou G. Ap. J. Lett. 285 :L45-L48 (1984)
- [107] Sunyaev R, Zel'dovich Y. Comm. Astrophys. Sp. Phys. 4 :173 (1972)
- [108] Hu W, Sugiyama N., Ap. J. 444 :489-506 (1995)
- [109] Hu W, Sugiyama N., Ap. J. 471 :542-570 (1996)
- [110] W. Hu & M. White, Astrophys.J.471 :30-51 (1996)

- [111] W. Hu & M. White, *Astrophys. J.* 479 :568 (1997).
- [112] J. R. Bond & G. Efstathiou, *MNRAS* 226, 655-687 (1987)
- [113] U. Seljak & M. Zaldarriaga, *Astrophysical Journal* v.469, p.437 (1996)
- [114] Universe, Fifth Edition, by William J. Kaufmann III & Roger A. Freedman, ISBN 0-7167-3824-4
- [115] Zaldarriaga, M. et Seljak, U., An All-Sky Analysis of Polarization in the Microwave Background, *Phys. Rev. D* 55, 1830 (1997)
- [116] M. Kamionkowski, A. Kosowsky, A. Stebbins, *Phys. Rev. D* 55 (1997), 7368.
- [117] Zaldarriaga, M. *Phys. Rev. D.* 55, 1822-1929 (1997)
- [118] M. Zaldarriaga, *PRD*, v64, p3001z, *astro-ph/0106174v1* (2001).
- [119] L. Knox, *ApJ*, v480, p72, *arXiv :astro-ph/9606066* (1997)
- [120] P. Lubin, P. Melese, G. Smoot, *Astrophysical Journal*, Part 2 - Letters to the Editor (ISSN 0004-637X), vol. 273 (1983)
- [121] M. Giovannini, *Physical Review D*, vol. 80, Issue 12 (2009)
- [122] V. Kostelecky, M. Mewes, *Physical Review D*, vol. 80, Issue 1 (2009)
- [123] H. Peiris et R. Easther, *JCAP*, **7**, p. 24, *arXiv :0805.2154* (2008).
- [124] L. A. Boyle, P. J. Steinhardt et N. Turok, *Phys. Rev. Lett.*, **96** 111301, *astro-ph/0507455v3* (2006).
- [125] S. Hotchkiss et al. , *JCAP*, **10** 015, *arXiv :0804.2634v2* (2008).
- [126] Kallosh, R. & Linde, A., *JCAP*, **v04**, p017 (2007).
- [127] Bevis, N. et al., *Phys. Rev. D*, **v76**, p1722 (2007).
- [128] Urrestilla, J. et al., *astro-ph/0803.2059* (2008).
- [129] Pogosian, L. & Wyman, M., *astro-ph/0711.0747* (2007).
- [130] Lineweaver, C. H., Tenorio, L., Smoot, G. F., Keegstra, P., Banday, A. J., et Lubin, P., The Dipole Observed in the COBE DMR Four-Year Data, 470, 38, *astro-ph/9601151* (1996)
- [131] C. Lineweaver, *PASP*, **126**, p. 85 (1997).
- [132] Seljak U. & Zaldarriaga M., *ApJ*, 538, 57 (2000)
- [133] A. Benoit et al., *A&A*, v.399, p.L19-L23 (2003)
- [134] G. Hinshaw et al., *ApJ Supp.*, *arXiv :0803.0732* (2008).
- [135] E. Komatsu et al., *ApJ Supp.*, *arXiv :0803.0547* (2008).
- [136] Ch. Reichardt et al., *ApJ*, *arXiv :0801.1491* (2008).
- [137] W.C. Jones et al., *Astrophys.J.*, **647**, p. 823, *arXiv :astro-ph/0507494* (2005).
- [138] C. Prycke et al., *ApJ*, *arXiv :0805.1944* (2008).
- [139] The CAPMAP collaboration, *ApJ*, **648**, p. 771 *arXiv :0802.0888* (2008).
- [140] E.M. Leitch et al., *ApJ*, **624**, p. 20 *arXiv :astro-ph/0409357* (2004).
- [141] Readhead, A.C.S. et al. (2004), *Science*, v306, pp 836-844.
- [142] Oxley, P. et al., *Proc.SPIE Int.Soc.Opt.Eng.*, **5543**, 320-331, *arXiv :astro-ph/0501111* (2005).
- [143] Samtleben, D. et al., *Proc. Renc. Moriond*, *arXiv :0806.4334* (2008).

- [144] Crill, B. et al., *Proc. SPIE*, **Vol. 7010**, arXiv :0807.1548 (2008).
- [145] North, C.E. et al., *Proc. Renc. Moriond*, arXiv :0805.3690 (2008).
- [146] J. Kovac et al., *Nature*, **420**, p. 772, astro-ph/0209478v1 (2002).
- [147] M. Brown et al., *Submitted to MNRAS*, arXiv :0809.4032v1 (2008).
- [148] G.F. Smoot, *ApJ*, **396** L1 (1992).
- [149] G. Efstathiou et S. Gratton, arXiv :0903.0345v1 (2009).
- [150] Watson R.A. et al., *ApJ*, 624, L89 (2005)
- [151] A. Lange et al., astro-ph/0005004 (2000).
- [152] S. Hanany et al., *ApJ*, **545**, L5 (2000).
- [153] J.R. Bond, A.H. Jaffe & L. Knox, *Phys. Rev.*, **D57**, 2117 (1998).
- [154] J. Borrill, astro-ph/991389.
- [155] A. Amblard et J.-Ch. Hamilton, *A&A*, **417**, p. 1189 (2004).
- [156] M. Douspis et al., *A&A*, **405**, p. 409, astro-ph/0212097 (2003).
- [157] Cyrille Rosset, Thèse de doctorat (2003)
- [158] D. Spergel et al., astro-ph/0302209 (2003).
- [159] A. Amblard et al., *PhysRev*, **D75**, 083508, astro-ph/0805.4207 (2007).
- [160] Takahashi, Y.D. et al., *Proc. SPIE*, **Vol. 7020**, 70201D (2008), arXiv :0808.1763 (2008).
- [161] P. De Bernardis et al., arXiv :0808.1881 (2008).
- [162] C. L. Bennett et al., WMAP-7 : Are There Cosmic Microwave Background Anomalies ? submitted to *ApJ* supplements, arxiv :1001.4758 (2010)
- [163] N. Jarosik et al., WMAP-7 : Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results, submitted to *ApJ* supplements, arXiv :1001.4744 (2010)
- [164] Larson, D., et.al., WMAP-7, Power Spectra and WMAP-Derived Parameters (2010)
- [165] Komatsu, E., et.al., WMAP-7, Cosmological Interpretations (2010)
- [166] Johnson B. R. et al., MAXIPOL : Cosmic Microwave Background Polarimetry Using a Rotating Half-Wave Plate, *ApJ*, Vol. 665, Issue 1, pp. 42-54 (2007)
- [167] W. Hu, M. M. Hedman, & M. Zaldarriaga. Benchmark parameters for CMB polarization experiments. *Phys. Rev. D*, 67(4) :043004, February (2003)
- [168] E. F. Bunn. Systematic errors in cosmic microwave background interferometry. *Phys. Rev. D*, 75(8) :083517, April (2007)
- [169] D. O’Dea, A. Challinor, & B. R. Johnson. Systematic errors in cosmic microwave background polarization measurements. *MNRAS*, 376 :1767–1783, April (2007)

### **Interferométrie optique et radio**

- [170] Fizeau H., Prix Bordin : rapport sur le concours de l’année 1867, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 66, pp 932-934 (1868)
- [171] Stephan E., Extrait d’une lettre de M. Stephan à M. Fizeau, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1873, 76, pp. 1008-1010. (1873)

- [172] Michelson A. A. 1890, On the application of interference methods to astronomical measurements, London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 30, series 5, pp.1-21.
- [173] Michelson A. A. & Pease, F. G., Measurement of the diameter of alpha Orionis with the interferometer., ApJ 53, pp. 249-259 (1921)
- [174] Pease F. 1931, Interferometer methods in astronomy, Ergebnisse de Exakten Naturwissenschaften, 10, pp. 84-96.
- [175] Labeyrie, A. Attainment of Diffraction Limited Resolution in Large Telescopes by Fourier Analysing Speckle Patterns in Star Images, A&A, 6, 85. (1970)
- [176] Labeyrie, A., Interference fringes obtained on VEGA with two optical telescopes, ApJ, 1975, 196, pp. L71L75. (1975)
- [177] Coudé du Foresto V., et al. The FLUOR/IOTA Fiber Stellar Interferometer. Kern P., Malbet F. (eds) Proc. AstroFib'96, Integrated Optics for Astronomical Interferometry. Bastianelli-Guirimand, Grenoble, p. 115 (1996)
- [178] Baldwin J. E., Haniff C. A., Mackay C. D., Warner, P. J., Closure phase in high-resolution optical imaging, Nature, 320, pp595-597. (1986)
- [179] Baldwin J. E., et al. , The first images from an optical aperture synthesis array : mapping of Capella with COAST at 1s two epochs, A& Ap, 306, pp. L13. (1996)
- [180] Benson J. A. et al., Multichannel optical aperture synthesis imaging of  $\mu$ 1 URSAE majoris with the Navy prototype optical interferometer, ApJ, 114, 1221-1226. (1997)
- [181] Ryle M. & D. D. Vonberg, Solar radiation at 175 Mc/s, Nature, 158, 339-340, (1946)
- [182] Ryle, M. & A. Hewish, The Synthesis of Large Radio Telescope, MNRAS, 67, 97-105, (1955)
- [183] Butler, J. & Lowe, R. (1961), Electron. Des. Vol. 9, pp 170-173.
- [184] Pierre Mège, Thèse, "Interférométrie avec des guides d'ondes optiques. Théorie et applications." (2002)
- [185] Thomson, A. R., Moran, J. M. & Swenson, G.W., ISBN 0-471-25492-4.

## **Interférométrie hétérodyne CMB**

- [186] Popieszalski, M.W., Proc. of 23rd European Microwave Conference, Madrid (1993)
- [187] H.M. Martin, R.B. Partridge & R.T. Rood, ApJ L 240 (1980)
- [188] J.E. Knoke et al., ApJ 284 (1984)
- [189] R. Subrahmanyan, R.D. Ekers, M. Sinclair & J. Silk, MNRAS 263 (1993)
- [190] S.J.E. Radford, ApJ 404 (1993)
- [191] P.T. Timbie & D.T. Wilkinson, ApJ 353 (1990)
- [192] C. O'Sullivan et al., MNRAS 274 (1995)
- [193] Carlstrom, J.E., Holder, G.P., Reese, E.D., Cosmology with the Sunyaev-Zel'dovich Effect. Ann. Rev. Ast. Astrop. 40, 643-680 (2002)
- [194] Padin et al., PASP 114 (2002)
- [195] M. Leitch et al., ApJ 568 (2002)

- [196] R.A. Watson et al., MNRAS 341 (2003)
- [197] J. M. Kovac, PhD thesis (2003)
- [198] J. K. Cartwright, PhD thesis (2002)
- [199] E.F. Bunn & M. White, et al., ApJ v665, p21, astro-ph/0606454v1 (2007).
- [200] M. White et al., ApJ, v514, p12, arXiv :astro-ph/9712195 (1999).
- [201] Hobson, M. P. & Maisinger, Klaus, MNRAS, volume 334, Issue 3, pp. 569-588 (2002)

### **Techniques d'auto-calibration en interférométrie**

- [202] Pearson T. J. & Readhead A. C. S., Ann. Rev. A& A, 22 :97-130 (1984)
- [203] Yang Yi-Pei, A & A 189, 361-364 (1988)
- [204] Readhead A. C. S, Wilkinson P. N., Ap. J. 223 :25-36 (1978)
- [205] M. Wieringa. The use of redundancy interferometry - A comparison of redundancy and self-cal. In T. J. Cornwell & R. A. Perley, editor, IAU Col loq. 131 : Radio Interferometry. Theory, Techniques, and Applications, volume 19 of Astronomical Society of the Pacific Conference Series, pages 192-196, (1991).
- [206] J. E. Noordam & A. G. de Bruyn. High dynamic range mapping of strong radio sources, with application to 3C84. Nature, 299 :597+, (1982).
- [207] M. Tegmark & M. Zaldarriaga. Fast Fourier transform telescope. Phys. Rev. D, 79(8) :083530, April (2009)
- [208] M. Tegmark & M. Zaldarriaga. Omniscope : Large Area Telescope Arrays with only  $N \log N$  Computational Cost. ArXiv e-prints, August (2009)
- [209] A. Liu, M. Tegmark, S. Morrison, A. Lutomirski, & M. Zaldarriaga. Precision Calibration of Radio Interferometers Using Redundant Baselines. ArXiv e-prints, January (2010)

### **Divers**

- [210] C. B. Markwardt. Non-linear Least-squares Fitting in IDL with MPFIT. In D. A. Bohlender, D. Durand, & P. Dowler, editor, Astronomical Society of the Pacific Conference Series, volume 411 of Astronomical Society of the Pacific Conference Series, pages 251+, September (2009)



## **Titre**

Mesure des anisotropies de polarisation du fond diffus cosmologique avec l'interféromètre bolométrique QUBIC.

## **Résumé**

La détection des modes B primordiaux de polarisation du fond diffus cosmologique est un des défis majeurs de la cosmologie contemporaine. Leur mesure permettrait de contraindre les modèles d'inflation, cette phase d'expansion accélérée qui aurait eu lieu aux tout premiers instants de l'Univers. Le projet QUBIC, une des nombreuses expériences en compétition, s'appuie sur une technologie particulièrement innovante, l'interférométrie bolométrique. Cette thèse expose les travaux qui ont permis d'établir l'architecture de cet instrument. Nous introduisons un formalisme permettant d'étudier comment les observables d'intérêt peuvent être mesurées et obtenons une formule analytique donnant la sensibilité de l'instrument. Nous déterminons les caractéristiques instrumentales devant être satisfaites par chacun de ses composants en vue de le rendre compétitif. Nous démontrons en particulier que seule une distribution hautement redondante des récepteurs (cornets) permet d'atteindre une sensibilité optimale. Nous étudions l'effet de lissage engendré par la largeur de bande spectrale des détecteurs et estimons la dégradation de sensibilité en résultant. Nous proposons par ailleurs des architectures alternatives d'interféromètre bolométrique ; l'une d'entre elles (avec lame demi-onde en rotation et sans déphaseurs contrôlés) est devenue l'architecture standard de l'instrument QUBIC. Nous mettons enfin à jour une méthode prometteuse d'auto-calibration de l'instrument qui est selon nous amenée à devenir un argument majeur en faveur de l'interférométrie bolométrique. Nos travaux ont donné lieu à plusieurs publications, reproduites en annexe de cette thèse.

---

## **Title**

Measuring the polarisation anisotropy of the Cosmic Microwave Background with the QUBIC bolometric interferometer.

## **Abstract**

Detecting the Cosmic Microwave Background B-mode polarisation is one of the major challenges of nowadays cosmology. This measurement indeed appears as the most powerful way to place constraints on inflation, this process of extreme accelerated expansion that would have occurred during the first few moments of the Universe. The QUBIC project, one of the many experiments dedicated to this purpose, is based on a novel instrumental technique we call bolometric interferometry. The work described in this thesis attempts to establish the instrument design. We introduce a mathematical formalism that shows how the observables of interest can be measured. We then obtain an analytical formula giving the instrument sensitivity and derive the requirements that its components must satisfy. We show in particular that the receivers (horns) distribution must be highly redundant in order for the instrument to achieve an optimal sensitivity. We study the bandwidth smearing effect due to bolometers' wide spectral band and estimate the resulting sensitivity loss. We also introduce alternative designs of bolometric interferometers ; one of them (with rotating half-wave plate and no controlled phase-shifters) has become the standard design of the QUBIC instrument. We finally present a promising self-calibration procedure that, we think, may be regarded in the future as one of the main arguments in favor of bolometric interferometry.