



HAL
open science

Optimisation fiabiliste de la conception et de la maintenance des structures

Younes Aoues

► **To cite this version:**

Younes Aoues. Optimisation fiabiliste de la conception et de la maintenance des structures. Génie des procédés. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2008. Français. NNT : 2009CLF21908 . tel-00726003

HAL Id: tel-00726003

<https://theses.hal.science/tel-00726003>

Submitted on 28 Aug 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : D.U. :1908
EDSPIC : 429

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL - CLERMONT II
ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR DE CLERMONT-FERRAND

Thèse

présentée par

Younes AOUES

Ingénieur de l'Ecole Polytechnique d'Alger

pour obtenir le grade de

Docteur d'Université

Spécialité : Génie Civil

**Optimisation fiabiliste de la conception et de la maintenance
des structures**

Soutenue publiquement le 15 janvier 2008 devant le jury :

M. Jean-Louis	BATOZ	Université de Compiègne	Président
M. Alain	MILLARD	CEA Gif sur Yvette	Rapporteur
M. Abdelkhalak	EL HAMI	INSA Rouen	Rapporteur
M. Daniel	BOISSIER	Université Blaise Pascal	Examineur
M. Frédéric	DUPRAT	INSA Toulouse	Examineur
M. Alaa	CHATEAUNEUF	Université Blaise Pascal	Examineur

Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI)

*A mes grands pères qui ont sacrifié leurs jeunesses
pour que leur petit fils devienne ce qu'il est...*

*A mes parents qui ont tant souhaité
assister à la soutenance*

A ma chère femme Malha

A mon frère et mes deux soeurs

*« Au fond des ruines reconquises, la respiration de
l'Algérie suffit à chasser les mouches »*

Kateb Yacine

Remerciements

Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans le soutien et les encouragements de mon directeur de thèse **Monsieur Alaa Chateaneuf**, Professeur à Polytech'Clermont-Ferrand. Pour cela, mes premiers remerciements lui sont adressés. J'ai, en effet, réellement apprécié ces années de collaboration. Sur le plan scientifique, je le remercie de m'avoir fait profiter de sa rigueur scientifique, de ses conseils avisés et de ses connaissances qui sont une source intarissable d'enrichissements. Je tiens à souligner surtout les aspects humains de cette collaboration, son soutien permanent, sa disponibilité et la confiance qu'il m'a accordé tout au long de ce travail. Grâce à cette expérience fructueuse, il a su me faire partager sa passion pour la recherche.

Je remercie également :

- **Monsieur Jean-Louis Batoz**, Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne, de m'avoir fait le grand honneur de présider mon jury de soutenance.
- **Monsieur Alain Millard**, Ingénieur de recherche au Commissariat à l'Energie Atomique (CEA) et **Monsieur Abdelkhalak El-Hami**, Professeur à l'INSA de Rouen, pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de cette thèse en acceptant de rapporter mon mémoire.
- **Monsieur Daniel Boissier**, Professeur à Polytech'Clermont-Ferrand et **Monsieur Frédéric Duprat**, Maître de Conférences à l'INSA de Toulouse, d'avoir pris le temps d'examiner ce mémoire et de faire partie du jury de soutenance.

Au cours de ce travail, j'ai bénéficié d'une ambiance chaleureuse et agréable lors de ma première année effectuée à Phimeca et les autres années passées au LaMI et à Polytech-Clermont-Ferrand. Ainsi, je remercie tous les collègues, les thésards du LaMI et les enseignants de Polytech'Clermont-Ferrand de leur soutien moral et amical. Je tiens à exprimer ma reconnaissance pour tous les membres de l'équipe de l'ex-Laboratoire de Génie Civil, qui m'ont accueilli en 2006 comme attaché temporaire d'enseignement et de recherche (ATER) et pour la confiance qu'ils ont su me témoigner pendant ces deux années d'ATER.

Une pensée à toutes les personnes qui se sont intéressées à ma thèse et parmi elles, celles qui sont venues à la soutenance, leur présence m'a fait énormément plaisir.

J'avoue que je n'aurais jamais pu arriver jusque là sans les sacrifices consentis par mes parents, qu'ils trouvent en ces mots la profonde estime que j'ai pour eux. Ainsi, je remercie toute ma famille d'ici et de là bas pour ses encouragements et son soutien moral. Pour finir, je réserve une mention très spéciale à ma chère épouse **Malha**, sans laquelle cette thèse n'aurait jamais été ce qu'elle est aujourd'hui.

RÉSUMÉ

La conception des structures doit tenir compte de la nature inhérente des incertitudes. Traditionnellement, ces incertitudes sont considérées par l'application des coefficients partiels de sécurité recommandés par les codes de dimensionnement. Cependant, l'utilisation de ces coefficients dans une procédure d'optimisation déterministe ne garantit pas une conception optimale pour le niveau de fiabilité ciblé puisque le processus d'optimisation ne permet pas de contrôler le niveau de fiabilité.

Pour cette raison, l'optimisation fiabiliste (RBDO : *Reliability-Based Design Optimization*) est développée pour établir le meilleur compromis entre la réduction des coûts et l'assurance de la fiabilité, par la considération des incertitudes du système. Bien que l'idée de cette approche soit établie depuis une quarantaine d'années, sa mise en œuvre est une tâche délicate même pour de simples structures. La difficulté réside dans l'évaluation des limitations fiabilistes qui implique le couplage mécano-fiabiliste conduisant à un effort de calcul considérable et aux problèmes numériques de convergence et de stabilité.

Dans ce travail, une vue d'ensemble des différentes méthodes existantes de la RBDO est proposée. Une étude comparative de plusieurs méthodes est réalisée sur la base de différents critères numériques. Cela nous a permis de définir le domaine de validité des approches testées et de dégager une piste pour la suite des travaux.

La défaillance totale d'un système est souvent obtenue par la défaillance de plusieurs de ces composants. La fiabilité système consiste à tenir compte de l'interaction entre les différents modes de défaillance. Cependant, l'intégration directe de la fiabilité système dans les limitations du problème d'optimisation mène à une formulation impraticable. Pour cela, nous proposons une nouvelle approche de la RBDO considérant la fiabilité système. Cette approche baptisée SOSRA (*Sequential Optimization and System Reliability Analysis*), s'appuie sur le principe des approches découplées. Le problème de la RBDO est décomposé en plusieurs cycles d'optimisation déterministe basée sur de nouveaux coefficients de sécurité appelés OSSF (*Optimal System Safety Factors*). A chaque cycle d'optimisation déterministe, une analyse de fiabilité système est effectuée pour vérifier l'optimum obtenu. Les coefficients OSSF sont calibrés par une approche probabiliste sur la base d'une allocation optimale des indices de fiabilité cibles, ces coefficients actualisés sont ensuite utilisés dans le cycle suivant de l'optimisation déterministe. Ainsi, la conception optimale est recherchée sur la base de la satisfaction de l'exigence de la fiabilité système en optimisant les performances des composants. La méthode SOSRA est appliquée pour dimensionner différentes structures en béton armé et les résultats obtenus attestent de son efficacité et de sa robustesse.

Les structures de Génie Civil subissent souvent des dégradations dues à l'environnement extérieur. Ces dégradations réduisent les performances mécaniques et augmentent le taux de défaillance. L'objectif de l'optimisation fiabiliste dépendant du temps (TV-RBDO : *Time-Variant Reliability-Based Design Optimization*) consiste à rechercher le dimensionnement optimal vérifiant une fiabilité cible durant toute la durée de vie de l'ouvrage. La méthode SOSRA est adaptée à ce type de problème. L'optimisation du dimensionnement d'une poutre en béton armé soumise à la corrosion des armatures a montré l'intérêt et la validité de l'approche proposée.

Finalement, la meilleure solution doit être recherchée par la minimisation de la fonction du coût total contenant les coûts de maintenance. L'optimisation fiabiliste des coûts du cycle de vie (RBLCCO : *Reliability-Based Life Cycle Cost Optimization*) consiste à rechercher la conception et les stratégies de maintenance. Généralement, cette procédure est réalisée séquentiellement en séparant la conception de la maintenance. Dans ce travail, l'optimisation de la conception est couplée à celle de la maintenance. Une étude comparative entre les deux approches de la RBLCCO (couplée et séquentielle) a montré l'intérêt d'une recherche simultanée de la conception et de la maintenance, où le minimum coût total est obtenu.

ABSTRACT

The design of structural systems must fulfill several criteria, such as cost, safety and durability. The engineer must satisfy more or less the conflicting requirements related to various performance conditions. Therefore, the challenge in the design process is how to find the optimal compromise between the contradictory design requirements.

However, the structural design involves several kinds of uncertainties, which are usually considered through the partial safety factors prescribed in the codes of practice. Generally, the use of these safety factors in the deterministic design optimization leads to over-designing or under-designing structures because they are calibrated for a large class of structures. For this reason, the Reliability-Based Design Optimization (RBDO) is developed to search the best compromise between cost reduction and reliability assurance, by considering system uncertainties. Although the basic RBDO ideas have been established more than forty years ago, the solution is not yet that easy, even for simple structures. The difficulty lies in the consideration of the reliability constraints, which require a large computational effort and involve classical numerical problems, such as convergence, accuracy and stability.

In this work, an overview of the different RBDO approaches which are then tested on a benchmark constituted of different examples using mathematical and finite element models. The numerical performance and accuracy are then discussed in order to give a clear idea on the capabilities and the limitations of the considered methods.

As structural failure is rarely devoted to only one component, the system approach becomes necessary to deal with realistic applications. However, the direct integration of the system reliability in the RBDO constraints leads to an impractical formulation. In this work, a new RBDO method with including the system reliability requirement is proposed. This approach is called SOSRA (Sequential Optimization and System Reliability Analysis), which is developed on the schemes of decoupled formulation. The RBDO problem is decomposed into several cycles of deterministic design optimization (DDO) based on new safety factors called Optimal System Safety Factors (OSSF). At each cycle of the DDO, the system reliability analysis is performed to verify the reliability of the optimal design. The OSSF coefficients are calibrated by a probabilistic method on the basis of an optimal allocation of the target reliability indexes, then the updated OSSF are provided for the next cycle of the DDO. Thus, the search of the optimal design is carried out on the basis of satisfying the target system reliability and optimizing the component performance. several applications to reinforced concrete structures show the interest and the efficiency of this method.

In aggressive environment, the performance of the structures can be significantly reduced due to different deteriorations (corrosion, fatigue, cracking, ...). The design optimization should take into account the time-dependent of the probability of failure. To ensure appropriate safety level during the whole structure lifetime, the RBDO is carried out on the basis of the time-variant reliability analysis. The SOSRA method is adapted to this kind of problem, which the failure cost is integrated to the total cost function. The method is applied to find the optimal design of corroded beam, which the results show the validity and the efficiency of the proposed approach.

Finally, the best solution should be searched by minimizing the total cost function which the maintenance costs are integrated. The Reliability-Based Life Cycle Cost Optimization (RBLCCO) aims to find the best design and maintenance planning. A common procedure consists in separating the design and the maintenance. However, for some engineering systems, the sequential search of design and maintenance costs may not lead to globally optimal costs, due to interaction between the different costs. In this work, the design and maintenance optimization are coupled, which a comparative study between the two approaches of the RBLCCO (sequential and coupled) shows the interest of simultaneously search of the optimal design and maintenance policy, which the best lower cost is obtained.

Liste des notations principales

\mathbf{d}	vecteur des variables d'optimisation
\mathbf{X}	vecteur des variables aléatoires
$X(\omega, t)$	processus stochastique
x	réalisation d'une variable aléatoire X
\mathbf{x}	vecteur de réalisation du vecteur des variables aléatoires \mathbf{X}
P_f	probabilité de défaillance
$P_{f_{sys}}$	probabilité de défaillance du système
$P_{f,c}$	probabilité de défaillance cumulée
$P_{f,i}$	probabilité de défaillance instantanée
P_f^c	probabilité de défaillance admissible
ν	taux de franchissement
G	fonction de performance ou fonction d'état limite
\hat{G}	fonction de performance dans l'espace standard
\tilde{G}	hyperplan équivalent de la fonction de performance dans l'espace standard
G^p	performance minimale cible
h	fonction de limitation déterministe
$F_X(x)$	fonction de répartition de la variable aléatoire X
$T(\cdot)$	transformation iso-probabiliste
$\phi(\cdot)$	fonction de densité normale de probabilité
$\phi_m(\cdot)$	fonction de densité multivariée de probabilité
$\Phi(\cdot)$	fonction de répartition normale
$\Phi_2(\cdot)$	fonction de répartition binormale
$\Phi_m(\cdot)$	fonction de répartition multivariée
\mathbf{U}	vecteur des variables aléatoires standards
γ	vecteur des coefficients de sécurité
α	vecteur des cosinus directeurs
\mathbf{u}^*	point de défaillance le plus probable (MPFP) dans l'espace standard
\mathbf{u}^{*c} ou \mathbf{u}^{β^c}	point de performance minimale cible (MPTP) dans l'espace standard
\mathbf{x}^*	point de défaillance le plus probable (MPFP) dans l'espace physique
\mathbf{x}^{*c} ou \mathbf{x}^{β^c}	point de performance minimale cible (MPTP) dans l'espace physique
\mathbf{x}_d	vecteur des valeurs de calcul
\mathbf{x}_p	vecteur des valeurs caractéristiques associées au p fractile
$\Delta_{\mathbf{d}}$	vecteur des valeurs de décalage des variables d'optimisation \mathbf{d}
$\mathbf{X}_{\mathbf{d}}$	variables aléatoires définies par les variables d'optimisation \mathbf{d}
$Prob[\cdot]$	opérateur de probabilité
$E[\cdot]$	opérateur d'espérance mathématique
$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}$	vecteur des moyennes des variables aléatoires \mathbf{X}
$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}}$	vecteur des écarts-types des variables aléatoires \mathbf{X}
CV_X	coefficient de variation de la variable aléatoire X
\mathbf{y}	vecteur des variables de décision
β	indice de fiabilité
β^c	indice de fiabilité cible
$\boldsymbol{\beta}^c$	vecteur des indices de fiabilité cibles

β	vecteur des indices de fiabilité
β^P	vecteur des indices de fiabilité du sous-système parallèle
β_{sys}	indice de fiabilité système
β_{sys}^c	indice de fiabilité système cible
ρ	matrice de corrélation
ρ^c	matrice de corrélation cible
ρ^P	matrice de corrélation du sous-système parallèle
T_L	durée de vie cible
C_I	fonction du coût initial
C_T	fonction du coût total
C_{PM}	fonction du coût de maintenance préventive
C_F	fonction du coût de défaillance
C_f	coût de défaillance
C_c	coût du béton
C_s	coût des armatures d'acier
C_{fw}	coût de la mise en œuvre
E_s	module d'élasticité de l'acier
f_y	résistance en traction de l'acier
E_c	module d'élasticité tangent du béton
f_c	résistance en compression du béton
ρ_{ba}	masse volumique du béton armé
A_s	section des armatures longitudinales
A_{sw}	section des armatures transversales
h	hauteur d'une section rectangulaire
b	largeur d'une section rectangulaire
C_{th}	concentration seuil de chlorure
C_s	concentration de chlorure à la surface
D_{cl}	coefficient de diffusion des ions de chlorure dans le béton
i_{corr}	taux de corrosion
$erf(.)$	fonction d'erreur
τ_{ini}	temps d'initiation de la corrosion
ϕ	diamètre des barres des armatures d'acier
M_u	moment résistant ultime
N_u	effort normal ultime
V_u	effort tranchant ultime
M_a	moment de flexion appliqué
N_a	effort normal appliqué
V_a	effort tranchant appliqué

Liste des abbreviations

DDO	<i>Deterministic Design Optimization</i>
DDM	<i>Direct Differentiation Method</i>
RBDO	<i>Reliability-Based Design Optimization</i>
SRBDO	<i>System Reliability-Based Design Optimization</i>
TV-RBDO	<i>Time-Variant Reliability-Based Design Optimization</i>
RBMO	<i>Reliability-Based Maintenance Optimization</i>
RBLCCO	<i>Reliability-Based Life Cycle Cost Optimization</i>
HL-RF	<i>Hasofer Lind-Rackwitz Fiessler</i>
PSF	<i>Partial Safety factors</i>
MPFP	<i>Most Probable Failure Point</i>
MPTP	<i>Minimum Performance Target Point</i>
FORM	<i>First Order Reliability Method</i>
FOMN	<i>First-Order Multi-Normal</i>
I-FORM	<i>Inverse-First Order Reliability Method</i>
SORM	<i>Second Order Reliability Method</i>
AMV	<i>Advanced Mean value</i>
CMV	<i>Conjugate Mean Value</i>
HMV	<i>Hybrid Mean Value</i>
DLA	<i>Double-Level Approaches</i>
MLA	<i>Mono-Level Approaches</i>
SDA	<i>Sequential Decoupled Approaches</i>
PMA	<i>Performance Measure Approach</i>
RIA	<i>Reliability Index Approach</i>
AMA	<i>Approximate Moment Approach</i>
KKT	<i>Karuch-Kuhn and Tucker</i>
SFA	<i>Safety Factor Approach</i>
SLSV	<i>Single Loop and Single Variable</i>
SLA	<i>Single Loop Approach</i>
SAP	<i>Sequential Approximate Programming</i>
SORA	<i>Sequential Optimization and Reliability Assessment</i>
SOSRA	<i>Sequential Optimization and System Reliability Analysis</i>
SOTVRA	<i>Sequential Optimization and Time-Variant Reliability Analysis</i>
OSSF	<i>Optimal System Safety Factors</i>
SQP	<i>Sequential Quadratic Programming</i>
NLP	<i>NonLinear Programming</i>
SCIS	<i>Sequential Conditioned Importance Sampling</i>
FERUM	<i>Finite Element Reliability Using MATLAB</i>
SRAM	<i>Subregion Adaptative Method</i>
CMCS	<i>Crude Monte Carlo Simulation</i>
LRM	<i>Latice Rule method</i>
MEF	<i>Méthode des Éléments Finis</i>
CAO	<i>Conception Assistée par Ordinateur</i>

Table des matières

Table des Matières	x
Liste des figures	xiii
Liste des tableaux	xv
Introduction générale	2
I Optimisation de la conception des structures	5
I.1 Introduction	6
I.2 Fiabilité des structures	7
I.2.1 Modélisation des incertitudes	7
I.2.2 Analyse de fiabilité	8
I.2.3 Analyse de la fiabilité système	12
I.2.4 Fiabilité dépendant du temps	13
I.3 Optimisation des structures	14
I.3.1 Formulations de l'optimisation de la conception	15
I.3.2 Méthode de différentiation directe	16
I.3.3 Considération des incertitudes dans l'optimisation	16
I.3.4 Interprétation fiabiliste des coefficients partiels de sécurité	18
I.4 Optimisation fiabiliste de la conception	19
I.4.1 Formulation du problème de l'optimisation fiabiliste	20
I.4.2 Optimisation fiabiliste des composants	22
I.4.3 Optimisation fiabiliste système	22
I.4.4 Les limitations de l'optimisation fiabiliste	23
I.5 Comparaison de l'optimisation déterministe et fiabiliste	24
I.6 Résolution du problème d'optimisation	25
I.6.1 Algorithmes stochastiques	25
I.6.2 Algorithmes de la programmation non linéaire	26
I.6.3 Bilan et remarques sur les algorithmes d'optimisation	28
I.7 Conclusion	28

II Étude comparative des méthodes d'optimisation fiabiliste	31
II.1 Introduction	32
II.2 Etat de l'art de la RBDO	33
II.3 Formulation RBDO à deux-niveaux	37
II.3.1 Approche de l'indice de fiabilité (RIA)	38
II.3.2 Approche de la mesure de performance (PMA)	40
II.4 Formulation RBDO mono-niveau	43
II.4.1 Approche basée sur les conditions d'optimalité KKT	43
II.4.2 Méthode AMA	44
II.4.3 Méthode SLA	45
II.5 Formulation RBDO séquentielle découplée	47
II.5.1 Méthode SFA	48
II.5.2 Méthode SORA	48
II.5.3 Méthode SAP	49
II.5.4 Calcul des sensibilités dans les approches découplées	50
II.6 Étude comparative des différentes approches	51
II.6.1 Problèmes analytiques	52
II.6.2 Optimisation d'un poteau	60
II.6.3 Optimisation de treillis	62
II.6.4 Synthèse Globale	66
II.7 Conclusion	69
III Optimisation fiabiliste système	70
III.1 Introduction	71
III.2 Analyse de fiabilité système	72
III.2.1 Modélisation d'un système mécanique	72
III.2.2 Niveaux d'approximation de la fiabilité système	75
III.2.3 Méthode de l'hyperplan équivalent	76
III.2.4 Méthodes d'estimation de la fiabilité système	77
III.3 Intégration de la fiabilité système dans l'optimisation	84
III.3.1 Intégration directe	84
III.3.2 Intégration indirecte	85
III.3.3 Bilan	88
III.4 Méthode SOSRA	88
III.4.1 Principe de la méthode SOSRA	89
III.4.2 Allocation optimale des indices de fiabilité cibles	89
III.4.3 Calibration des coefficients de sécurité optimaux du système (OSSF)	97
III.4.4 Proposition d'une méthode de calibration	101
III.4.5 Implémentation de la méthode SOSRA	101
III.5 Validation et application	104
III.5.1 Choix de la méthode de calcul de la fiabilité système	104
III.5.2 Treillis à treize barres	108
III.6 Conclusion	111

IV Optimisation fiabiliste système des structures en béton armé	112
IV.1 Introduction	113
IV.2 Modèle mécanique des structures en béton armé	113
IV.2.1 Calcul du moment résistant ultime	114
IV.2.2 Calcul en flexion composée	116
IV.2.3 Calcul de l'effort tranchant ultime	118
IV.3 Poutres en béton armé	119
IV.3.1 Poutre en T soumise à la flexion	119
IV.3.2 Poutre de section rectangulaire	123
IV.4 Portiques en béton armé	126
IV.4.1 Portique à un seul étage	126
IV.4.2 Portique à cinq étages	130
IV.5 Conclusion	136
V Optimisation fiabiliste dépendant du temps	137
V.1 Introduction	138
V.2 Analyse de fiabilité dépendant du temps	139
V.2.1 Notion du taux de franchissement	139
V.2.2 Probabilité de défaillance cumulée	142
V.2.3 Méthodes de calcul	144
V.3 Optimisation fiabiliste dépendant du temps	146
V.3.1 Formulation classique de la TV-RBDO	148
V.3.2 Adaptation de la méthode SOSRA pour la TV-RBDO	148
V.4 Optimisation fiabiliste de la maintenance	151
V.4.1 Stratégies de maintenance	151
V.4.2 Coûts de maintenance	153
V.4.3 Formulation de l'optimisation fiabiliste de la maintenance	154
V.5 Optimisation fiabiliste de la conception et de la maintenance	154
V.6 Exemples et validation	155
V.6.1 Validation de la méthode Φ_2	156
V.6.2 Poutre en béton armé soumise à la corrosion des armatures	156
V.6.3 Optimisation de la conception et de la maintenance d'un pipeline	164
V.7 Conclusion	169
Conclusion Générale et Perspectives	171
Bibliographie	173
ANNEXES	
A.1 Méthode SQP	i
B.1 Organigrammes	vi
C.1 Approximation de la loi binormale Φ_2	xii

Liste des figures

I.1	Les différentes théories de modélisation des incertitudes	7
I.2	Distribution conjointe et probabilité de défaillance	8
I.3	Simulations de Monte Carlo	8
I.4	Transformation probabiliste	10
I.5	Approximation FORM	11
I.6	Approximation SORM	11
I.7	Processus stochastique et dégradation de la résistance	13
I.8	Optimisation de forme	14
I.9	Optimisation de topologie	14
I.10	Les différentes démarches de l'optimisation des structures	14
I.11	Marge de sécurité dans l'optimisation déterministe	18
I.12	Interprétation géométrique du point de conception	18
I.13	Point de conception dans l'espace normé	19
I.14	Densité de probabilité de la marge de sécurité	19
I.15	Conception optimale et le niveau optimum de fiabilité	20
I.16	Optimum déterministe	25
I.17	Optimum fiabiliste	25
I.18	Minimisation d'une fonction	26
I.19	Conditions d'optimalité de KKT	27
I.20	Problème non convexe	27
II.1	Les procédures imbriquées de la RBDO	32
II.2	Classification des différentes méthodes de la RBDO	34
II.3	Recherche du MPFP dans RIA	39
II.4	Recherche du MPTP dans PMA	42
II.5	Principe de l'approche AMA	46
II.6	Approximation du MPTP dans SLA	47
II.7	Principe de l'approche SFA	48
II.8	Concept des valeurs décalées dans SORA	48
II.9	Fonction d'état limite G_1 aux deux points initiaux	52
II.10	Évolution de la fonction objectif en fonction des itérations	54
II.11	Indice de fiabilité approché par SAP	55
II.12	Fonction d'état limite G_2 aux deux points initiaux	55
II.13	Évolution de la fonction objectif (cas 2)	56

II.14	Indice de fiabilité approché par SAP (cas 2)	56
II.15	Nombre d'évaluation de l'état limite en fonction de l'indice cible	59
II.16	Le MPTP de PMA et de SLA	59
II.17	Approximation du MPTP dans SLA	60
II.18	Structures treillis	63
II.19	Efficacité des approches en fonction du nombre de variables d'optimisation	63
II.20	Robustesse et efficacité en fonction du type de loi de probabilité	67
II.21	Performances numériques des méthodes de la RBDO	68
III.1	Système en série	73
III.2	Probabilité de défaillance d'un système en série	73
III.3	Système en parallèle	74
III.4	Probabilité de défaillance d'un système en parallèle	74
III.5	Système mixte	74
III.6	Principe de l'intégration indirecte de la fiabilité système dans la RBDO	86
III.7	Principe des méthodes découplées	90
III.8	Organigramme général de la méthode SOSRA	90
III.9	Sensibilités des états limites faiblement non linéaires	93
III.10	Sensibilités des états limites fortement non linéaires	94
III.11	Allure des fonctions d'états limites non linéaires	95
III.12	Validation de l'approximation pour différentes valeurs d'indices cibles	96
III.13	Illustration de la méthode GOM	98
III.14	Principe de la méthode d'expansion radiale	99
III.15	Analyse de fiabilité inverse pour la calibration des OSSF	102
III.16	Organigramme de l'approche SOSRA	103
III.17	Probabilité de défaillance en fonction du nombre de simulations	106
III.18	Temps de calcul CPU en fonction du nombre de simulations	107
III.19	Pont Treillis à treize barres	108
III.20	Poids et indice de fiabilité système en fonction des itérations de SOSRA	109
III.21	Indices de fiabilité cibles optimaux de SOSRA	109
III.22	Coefficients de sécurité optimaux du système (OSSF)	110
IV.1	Lois constitutives du béton et de l'acier et la règle des trois pivots	114
IV.2	Efforts ultimes d'une section de forme quelconque	115
IV.3	Diagramme d'interaction	116
IV.4	Marges de sécurité du diagramme d'interaction	118
IV.5	Linéarisation locale du diagramme d'interaction	118
IV.6	Poutre et section en béton armé	120
IV.7	Évolution de la fonction coût au cours des itérations	123
IV.8	Performances numériques des approches d'optimisation	123
IV.9	Configuration de la poutre en BA de section rectangulaire	124
IV.10	Portique en un seul étage et ces états limites	127
IV.11	Indices de fiabilité des conceptions optimales du portique à un étage	129
IV.12	Coefficients OSSF dans le cas (a)	130
IV.13	Portique à cinq étages et ses modes de défaillance dominants	131
IV.14	Indices de fiabilité des conceptions optimales du portique à cinq étages	133
IV.15	Coefficients OSSF et PSF	133

IV.16	Diagrammes d'interaction des poteaux du rez-de-chaussée	134
IV.17	Diagrammes d'interaction de la poutre du premier étage	134
IV.18	OSSF des variables aléatoires W , Q , et P	135
V.1	Premier franchissement	140
V.2	Seuil constant.	142
V.3	Seuil variable	142
V.4	Principe de l'approche système pour le taux de franchissement	143
V.5	Probabilités instantanée et cumulée	143
V.6	Principe de calcul de l'indice de fiabilité cible $\beta_{t=0}^c$	150
V.7	Organigramme de SOTVRA	152
V.8	Schéma d'un planning de maintenance	153
V.9	Influence de Δt sur le taux de franchissement $\nu(t)$	157
V.10	Probabilités de défaillance cumulée et instantanée	157
V.11	Poutre isostatique de section rectangulaire	158
V.12	Temps d'initiation à la corrosion	159
V.13	Corrosion uniforme et corrosion par piqûres	159
V.14	Agressivité de la corrosion en fonction du taux de corrosion i_{cor}	160
V.15	Profils de l'indice de fiabilité $\beta(t)$ et de la cible $\beta^c(t)$	163
V.16	Indice de fiabilité $\beta(t)$ des deux conceptions optimales	163
V.17	Évolution du coût total en fonction de l'indice cible	164
V.18	Coûts en fonction de l'épaisseur initiale	166
V.19	Niveau optimum de fiabilité	166
V.20	Probabilité de défaillance dans TV-RBDO	167
V.21	Coûts en fonction de la longueur de l'intervalle a dans RBMO	167
V.22	Profil de l'indice de fiabilité dans RBMO	169
V.23	Profil de l'indice de fiabilité dans RBLCCO	169
V.24	Coûts en fonction de la longueur de l'intervalle a dans RBLCCO	169
V.25	Coût total en fonction de l'intervalle a et de l'épaisseur initiale e	169
B.1	Organigramme de l'algorithme HMV	vi
B.2	Organigramme de la méthode SORA	vii
B.3	Organigramme de la méthode SAP	viii
B.4	Organigramme de la méthode CICS	ix
B.5	Organigramme de la méthode de <i>Genz</i> par les simulations de Monte Carlo	x

Liste des tableaux

II.1	Résultats de calcul du problème analytique (case 1)	53
II.2	Coût de calcul de l'analyse de fiabilité dans RIA et PMA	55
II.3	Résultats de calcul du problème analytique (case 2)	56
II.4	Résultats du problème analytique à plusieurs fonctions d'état limite . . .	58
II.5	Description statistique des variables aléatoires dans l'optimisation du poteau	61
II.6	Résultats d'optimisation du poteau	61
II.7	Description statistique des variables aléatoires des treillis	62
II.8	Résultats d'optimisation du treillis à cinq barres.	64
II.9	Résultats d'optimisation du treillis à dix barres	64
II.10	Résultats d'optimisation du treillis à quinze barres	65
III.1	Résultats de l'analyse de fiabilité	94
III.2	Résultats de l'approximation proposée	95
III.3	Coefficient de corrélation "cible" par les trois approches	95
III.4	Résultats de calcul de la fiabilité d'un système de dix composants	105
III.5	CPU et indice de fiabilité d'un système de 10, 20, 30, 40 et 50 composants.	106
III.6	Définition des variables d'optimisation dans l'exemple du pont treillis . .	109
III.7	Définition des variables aléatoires dans l'exemple du pont treillis	109
III.8	Poids et sections optimales du treillis.	109
IV.1	Données statistiques des caractéristiques mécaniques	114
IV.2	Données statistiques des chargements du pont	121
IV.3	Valeurs initiales et bornes sup. et inf. des variables d'optimisation	121
IV.4	Coûts unitaires de construction	121
IV.5	Performances numériques des approches d'optimisation	122
IV.6	Comparaison des solutions optimales de la poutre en T	122
IV.7	Valeurs des OSSF au dernier cycle de SOSRA	123
IV.8	Résultats de l'optimisation de la poutre de section rectangulaire	125
IV.9	Dimensionnement optimal et différents coûts de la poutre	125
IV.10	Coefficients de sécurité optimaux du système (OSSF)	126
IV.11	Dimensionnement optimal pour des armatures transversales verticales . .	126
IV.12	Données statistiques des chargements du portique	128
IV.13	Valeurs initiales des variables d'optimisation du portique	128
IV.14	Résultats d'optimisation du portique à un seul étage	128

IV.15	Conception optimale du portique à un seul étage	129
IV.16	Caractéristiques statistiques des chargements du portique à cinq étages .	131
IV.17	Conception optimale du portique à cinq étages	132
V.1	Temps de calcul CPU de la méthode Φ_2	156
V.2	Description statistique des variables aléatoires	161
V.3	Description des variables d'optimisation	161
V.4	Conceptions optimales et résultats de l'optimisation	162
V.5	Coefficients de sécurité de la SOTVRA	162
V.6	Conceptions optimales correspondantes aux indices cibles	162
V.7	Données statistiques du pipeline	165
V.8	Épaisseur optimale du pipeline	166
V.9	Comparaison entre les trois approches TV-RBDO, RBMO et RBLCCO .	168

Introduction générale

Contexte

Dans un contexte de forte compétitivité économique et de respect de l'environnement, la conception des structures implique la réduction de la matière première et des coûts impliqués. La recherche des solutions économiques et fiables nécessite la confrontation de plusieurs exigences contradictoires (i.e. coût, fiabilité, durabilité, faisabilité, disponibilité, ...), le défi de nos jours est de trouver le meilleur compromis entre ces différents critères.

La notion de fiabilité dans les structures de Génie Civil est associée à celle de la sécurité. La défaillance totale ou partielle d'un ouvrage peut conduire à des pertes économiques dues à l'effondrement de l'ouvrage ou à son indisponibilité, à la mauvaise publicité pour le fabricant, à des pertes humaines, à des dommages causés à l'environnement et à des conséquences sociales (i.e. pertes d'emploi, ...), médiatiques et politiques.

Dans le Génie Civil, l'enjeu majeur de la construction réside dans la conception des structures économiques avec une sécurité maximale et un fonctionnement satisfaisant pendant toute la durée de vie souhaitée de l'ouvrage. Toutefois, les structures subissent différentes dégradations (i.e. corrosion, fluage, vieillissement, fatigue, ...) dues à l'environnement extérieur (i.e. température, humidité, ...) et à une forte variabilité des actions, telles que les charges d'exploitation, les actions du vent, des séismes, de la houle, ... etc.

Ces dégradations engendrent la réduction des performances mécaniques exigeant une politique de maintenance afin de maintenir ces performances au niveau admissible. L'efficacité de la stratégie de maintenance dépend fortement des instants d'intervention, de la qualité de l'inspection (i.e. inspection visuelle, techniques de surveillance, ...) et du degré de réparation. Par conséquent, la recherche de la politique de maintenance optimale est devenue une préoccupation majeure des grandes entreprises (EDF, GDF, SNCF, ...) en raison du vieillissement de leurs parcs industriels.

Problématique

La modélisation du comportement mécanique et des phénomènes de dégradation repose sur la connaissance des propriétés mécaniques des matériaux, des charges appliquées et des caractéristiques physiques des dégradations. Cependant, la connaissance de ces propriétés est imparfaite puisqu'elle est entachée d'incertitudes. L'identification de ces incertitudes est indispensable pour la maîtrise de la propagation des aléas dans le com-

portement mécanique. Ainsi, la recherche de la conception optimale doit être basée sur la considération des fluctuations des chargements appliqués et des incertitudes sur les dimensions géométriques et les propriétés mécaniques.

Traditionnellement, l'optimisation des structures constitue une démarche déterministe qui s'appuie sur les coefficients partiels de sécurité recommandés dans les codes de dimensionnement, tels que les Eurocodes. Ces coefficients sont appliqués pour tenir compte des incertitudes et pour se prémunir des écarts imprévisibles des performances mécaniques. Néanmoins, l'utilisation de ces coefficients de sécurité dans le processus d'optimisation n'assure pas une solution optimale et fiable car ces coefficients sont calibrés pour de larges classes de structures et sans lien direct avec les exigences de fiabilité. Autrement dit, ces coefficients peuvent parfois mener à un manque de robustesse de la structure optimisée.

La démarche rationnelle de l'optimisation des structures consiste à considérer la propagation des incertitudes dans les performances mécaniques en s'appuyant sur une modélisation probabiliste des fluctuations des paramètres d'entrée. Cette approche datant de la fin des années soixante a pour objectif d'établir le meilleur compromis entre les coûts de la conception et la fiabilité d'un dimensionnement.

La mise en œuvre d'une approche probabiliste pour l'optimisation des structures est une tâche très délicate puisqu'elle nécessite le couplage des algorithmes d'optimisation, des méthodes fiabilistes et de la modélisation mécanique. Ce couplage mécano-fiabiliste engage des ressources de calcul considérables et pose des problèmes de convergence et de stabilité numérique. Cette situation s'aggrave avec la modélisation numérique du comportement mécanique (e.g. méthode des éléments finis), particulièrement lorsque les non linéarités géométriques et/ou matérielles sont considérées. Pour cette raison, l'emploi des méthodes d'optimisation fiabilistes dans des applications industrielles est sérieusement limité.

Objectifs de ce travail

Les travaux présentés dans ce mémoire ont deux objectifs principaux. Le premier vise à appréhender les aspects théoriques de l'optimisation fiabiliste des structures (conception et maintenance). Le second objectif consiste à développer une méthodologie d'optimisation fiabiliste en considérant la fiabilité système et l'évolution de la fiabilité au cours du temps par l'adoption des modèles de dégradation.

L'optimisation fiabiliste doit considérer la défaillance du système mécanique à travers l'interaction des modes de défaillance de ses composants. La méthode proposée est développée dans ce sens, en s'appuyant sur l'idée de découpler l'analyse de fiabilité du processus d'optimisation, avec une intégration implicite des exigences fiabilistes. L'approche proposée SOSRA (*Sequential Optimization and System Reliability Analysis*) transforme le problème classique de l'optimisation fiabiliste en plusieurs sous-problèmes d'optimisation déterministe suivis de l'analyse de fiabilité système et d'une calibration des coefficients de sécurité optimaux du système (OSSF : *Optimal system safety factors*). Ces coefficients calibrés sur la base du système tout entier sont utilisés dans le cycle suivant d'optimisation déterministe afin de satisfaire le niveau de fiabilité souhaité. Cette formulation a l'avantage d'éviter les problèmes numériques de convergence et de stabilité et peut permettre le passage à des applications industrielles.

La recherche du dimensionnement optimal des structures présentant des dégradations

doit prendre en compte l'évolution de la fiabilité en fonction du temps. L'objectif de l'optimisation fiabiliste dépendant du temps consiste à trouver la conception optimale vérifiant une fiabilité durant toute la durée de vie souhaitée. Ainsi, d'autres développements sont ajoutés à la méthode SOSRA afin de répondre à ce besoin et permettre la minimisation de la fonction du coût total définie par le coût initial et le coût de défaillance.

En général, l'optimisation de la maintenance est effectuée indépendamment de l'optimisation de la conception. Cette démarche est justifiée pour des structures existantes dont le dimensionnement est connu d'avance. Dans ce travail, l'optimisation de la conception est couplée à celle de la maintenance à travers la minimisation de la fonction du coût total en intégrant les coûts de maintenance. Cette démarche vise à rechercher la conception et la stratégie de maintenance optimales au stade de projet, c'est-à-dire avant la construction de la structure.

Ce document est scindé en cinq chapitres.

- Le premier chapitre introduit le problème classique de l'optimisation des structures. La confrontation de l'optimisation déterministe et fiabiliste est exposée.
- Le deuxième chapitre présente une étude comparative des différentes méthodes d'optimisation fiabiliste de la conception (RBDO : *Reliability-Based Design Optimization*) proposées dans la littérature. Plusieurs enseignements ont été tirés de cette étude comparative basée sur plusieurs applications et sur différents critères numériques (précision, robustesse, efficacité, ...). Ces riches enseignements nous ont permis de dégager une idée précise pour la démarche à suivre dans la suite des travaux.
- Le troisième chapitre est consacré à l'intégration de la fiabilité système dans l'optimisation des structures. Les approches de la RBDO discutées dans le deuxième chapitre sont basées sur la fiabilité des composants et ne considèrent pas la fiabilité du système tout entier, où la fiabilité du système est inférieure à celle de ces composants. L'approche SOSRA présentée dans ce chapitre est développée pour cet objectif.
- Le quatrième chapitre est dédié à l'optimisation des structures en béton armé. Les différentes applications traitées ont validé la méthode SOSRA tout en montrant son efficacité et sa robustesse.
- Le dernier chapitre présente l'optimisation fiabiliste dépendant du temps. La méthode SOSRA est adaptée à la minimisation de la fonction du coût total contenant le coût initial et le coût de défaillance. Une poutre en béton armé soumise à un environnement corrosif est optimisée pour un objectif de fiabilité cible durant toute la durée de vie. Une autre application sur l'optimisation d'un pipeline montre l'intérêt d'une approche combinant l'optimisation de la conception et de la maintenance.

Enfin, des conclusions et des perspectives sur les travaux effectués ainsi que des annexes donnant des compléments d'information sont donnés à la fin du mémoire.

Optimisation de la conception des structures

*« La succession de chercheurs est comparable à un seul homme qui apprend indéfiniment » .
Blaise Pascal (1623-1662)*

Sommaire

I.1	Introduction	6
I.2	Fiabilité des structures	7
I.2.1	Modélisation des incertitudes	7
I.2.2	Analyse de fiabilité	8
I.2.3	Analyse de la fiabilité système	12
I.2.4	Fiabilité dépendant du temps	13
I.3	Optimisation des structures	14
I.3.1	Formulations de l'optimisation de la conception	15
I.3.2	Méthode de différentiation directe	16
I.3.3	Considération des incertitudes dans l'optimisation	16
I.3.4	Interprétation fiabiliste des coefficients partiels de sécurité	18
I.4	Optimisation fiabiliste de la conception	19
I.4.1	Formulation du problème de l'optimisation fiabiliste	20
I.4.2	Optimisation fiabiliste des composants	22
I.4.3	Optimisation fiabiliste système	22
I.4.4	Les limitations de l'optimisation fiabiliste	23
I.5	Comparaison de l'optimisation déterministe et fiabiliste	24
I.6	Résolution du problème d'optimisation	25
I.6.1	Algorithmes stochastiques	25
I.6.2	Algorithmes de la programmation non linéaire	26
I.6.3	Bilan et remarques sur les algorithmes d'optimisation	28
I.7	Conclusion	28

I.1 Introduction

Le dimensionnement des structures est l'une des préoccupations majeures de l'ingénieur en génie civil et mécanique. L'objectif de l'ingénierie moderne consiste à réduire les coûts et à satisfaire les performances avec une utilisation efficace des ressources. La démarche contemporaine du dimensionnement des structures s'appuie sur des connaissances algorithmiques. La formulation de l'optimisation mono-critère vise à minimiser la fonction objectif (le poids ou le coût de construction) sous les contraintes de performance, de résistance et de faisabilité physique et géométrique [1]. D'autres formulations peuvent être utilisées comme l'optimisation multicritère où il s'agit de minimiser et/ou de maximiser les fonctions de coûts et de performance simultanément [2]. Dans ce travail, nous nous limitons aux problèmes d'optimisation mono-critère.

D'une façon générale, l'optimisation des structures est formulée mathématiquement par un problème de minimisation d'une fonction appelée « fonction objectif » sous des fonctions de contrainte appelées « limitations ». Ce problème est souvent résolu avec les algorithmes itératifs de la programmation mathématique [3]. Les algorithmes les plus efficaces et robustes exigent le calcul des gradients de la fonction objectif et des limitations.

L'avènement des ordinateurs puissants a accru l'intérêt des chercheurs et des industriels à intégrer les algorithmes d'optimisation dans les logiciels de modélisation des structures, afin d'offrir au concepteur les outils nécessaires d'aide à la décision. Toutefois, le concepteur projette des ouvrages, des structures dont les conditions de réalisation et de fonctionnement sont entachées d'aléas et d'incertitudes. Ces fluctuations peuvent conduire à des écarts imprévisibles des performances réelles et espérées. Par conséquent, la conception des structures doit être placée dans un contexte incertain. Cette tâche reste très délicate en raison de la nature inhérente des incertitudes.

La théorie des probabilités offre un cadre global pour la considération des incertitudes et des variabilités des données dans la modélisation mécanique. En effet, les méthodes de fiabilité basées sur la théorie des probabilités font bénéficier la Mécanique d'un apport considérable. Selon l'expression de *Hasofer* [4] elle « *apporte une précision supplémentaire* ».

Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement la théorie de la fiabilité des structures en nous appuyant sur l'ouvrage de M. *Lemaire* [5]. Nous présentons ensuite, la démarche de l'optimisation déterministe basée sur les coefficients partiels de sécurité et les concepts de l'optimisation fiabiliste. La confrontation entre les approches déterministe et fiabiliste de l'optimisation est effectuée dans le but de bien montrer l'apport de la considération des incertitudes dans l'optimisation.

I.2 Fiabilité des structures

Selon l'expression de *A.M. Freudenthal (1947)* la théorie de la fiabilité consiste à « *placer le concept de la sûreté des structures dans le royaume de la réalité physique où il n'y a pas d'absolu, où la connaissance n'est pas parfaite* ». Ainsi, l'approche fiabiliste permet d'introduire une mesure quantitative du risque de défaillance, au moyen d'une démarche probabiliste pour la modélisation des incertitudes et des aléas. En effet, le problème de la fiabilité des structures est basé sur deux aspects fondamentaux : une connaissance physique des phénomènes mécaniques et des différents mécanismes de défaillance, d'une part, et une connaissance statistique des paramètres du modèle mécanique, d'autre part.

I.2.1 Modélisation des incertitudes

Il existe plusieurs sources d'incertitudes qui peuvent être classées en deux catégories [6] :

- incertitudes subjectives : à titre d'exemple, nous pouvons citer les erreurs grossières, la détérioration des conditions initiales de fonctionnement, la compétence des acteurs impliqués dans le projet, les conflits d'information, ... etc. Généralement, ces incertitudes ne sont pas probabilisables, elles peuvent être modélisées par d'autres théories telles que la logique floue ou la théorie des évidences (figure I.1) ;
- incertitudes objectives : elles peuvent être scindées en deux catégories :
 - incertitudes irréductibles : elles sont principalement composées par l'aléa physique comme l'action du vent et par les caractéristiques mécaniques des matériaux ;
 - incertitudes réductibles par ajout d'information : elles sont principalement composées par les incertitudes dues aux appareils de mesure, aux procédés de fabrication, aux incertitudes de modélisation et aux données limitées.

Les incertitudes objectives sont souvent modélisées par la théorie des probabilités. Les modèles probabilistes bayésiens sont utilisés pour les incertitudes réductibles. L'étude effectuée par *M. Pendola* [6] a mis en lumière l'influence des incertitudes réductibles sur l'estimation de la fiabilité. Plusieurs approches sont proposées dans la littérature pour placer le problème de la fiabilité des structures lui-même dans un contexte incertain [7, 8].

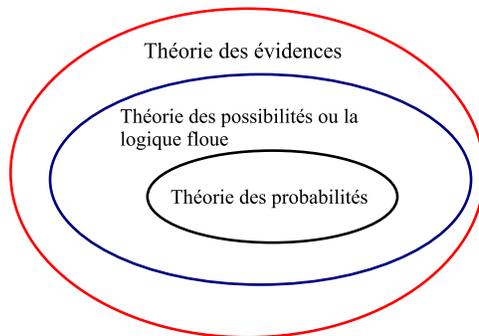


Figure I.1: Les différentes théories de modélisation des incertitudes.

I.2.2 Analyse de fiabilité

La conception des structures implique la vérification d'un certain nombre de règles qui résultent de la connaissance du comportement mécanique et de l'expérience des concepteurs et des fabricants. Ces règles traduisent la nécessité de limiter les effets du chargement, tels que les contraintes et les déplacements. Chaque règle représente un événement élémentaire associé à un certain scénario de défaillance [5]. L'analyse de fiabilité exige au moins un scénario de défaillance, séparant les situations de bon fonctionnement des situations de défaillance. La fiabilité est définie par la probabilité de satisfaire les critères de bon fonctionnement pendant toute la durée d'exploitation. En d'autres termes, selon la norme *AFNOR*¹ la définition technique du mot fiabilité est « *l'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données, pendant une durée donnée... le terme est aussi utilisé comme caractéristique désignant une probabilité de succès ou un pourcentage de succès* ». La fiabilité est complémentaire à la probabilité de défaillance.

$$P_f = 1 - F \quad (\text{I.1})$$

où F est la fiabilité et P_f est la probabilité de défaillance. En outre, l'analyse de la fiabilité se résume par l'évaluation de la probabilité de défaillance par rapport à chacun des scénarios de défaillance. Chaque scénario de défaillance peut s'écrire sous une forme mathématique explicite ou implicite, appelée *fonction de performance* ou *fonction d'état limite*. En plus des paramètres constants, cette fonction contient généralement deux types de variables :

- les variables de conception \mathbf{d} (e.g. dimensions géométriques, caractéristiques des matériaux, chargements) qui sont des paramètres déterministes définissant l'état du système mécanique et du modèle probabiliste (e.g. moyennes et écarts-types des variables aléatoires) ;
- les variables aléatoires \mathbf{X} représentant les incertitudes et les fluctuations, dont les réalisations sont notées \mathbf{x} . Elles interviennent dans la description du scénario de défaillance. Chacune des variables aléatoires est définie par sa loi de probabilité et les paramètres statistiques associés (généralement, moyenne et écart-type).

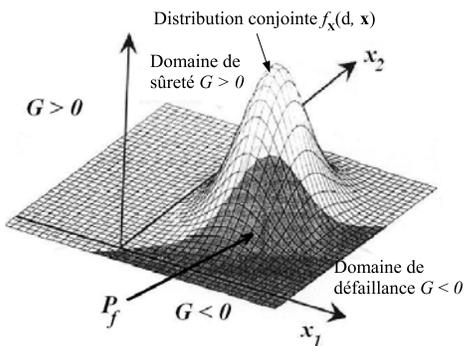


Figure I.2: Distribution conjointe et probabilité de défaillance [5].

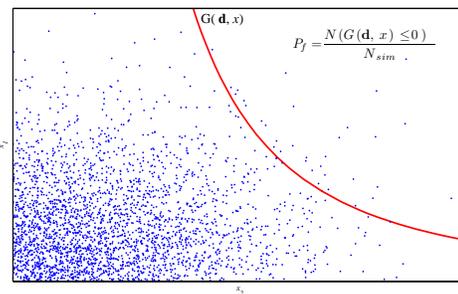


Figure I.3: Simulations de Monte Carlo.

1. AFNOR, NF X50-120, 1988.

La fonction de performance $G(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ définit le domaine de sûreté par $G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) > 0$ et le domaine de défaillance par $G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0$. La probabilité de défaillance est la probabilité que la fonction de performance $G(\mathbf{d}, \mathbf{X})$ soit inférieure ou égale à zéro. Cette probabilité n'est que l'intégration de la densité conjointe de probabilité sur le domaine de défaillance (figure I.2).

$$P_f = Prob[G(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] = \int \dots \int_{G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{d}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{I.2})$$

L'estimation de cette intégrale n'est pas une tâche facile, parce que la distribution conjointe de probabilité $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ est rarement connue, d'une part, et la fonction de performance $G(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ est généralement implicite résultant d'un modèle numérique comme la méthode des éléments finis, d'autre part. D'une façon générale, il existe plusieurs méthodes basées sur une intégration numérique ou sur des approximations. Ces méthodes de résolution peuvent être classées en trois catégories :

- méthodes de simulation ;
- méthodes d'approximation ;
- méthodes de surface de réponse.

I.2.2.1 Méthodes de simulation

Ces méthodes sont basées sur l'estimation de l'intégrale de l'équation (I.2) par des simulations de Monte Carlo (MC). Le principe de la méthode de MC repose sur la génération d'un grand nombre de tirages aléatoires. Pour chaque tirage, la fonction de performance est évaluée pour savoir si la configuration tirée se situe dans le domaine de sûreté ou de défaillance. La probabilité de défaillance n'est que le nombre de configurations défaillantes sur le nombre total de tirages (figure I.3). La méthode de Monte Carlo est très robuste et constitue le moyen le plus sûr pour l'évaluation de la probabilité de défaillance. Néanmoins, cette méthode est très coûteuse en temps de calcul, surtout pour des systèmes réels avec de faible probabilité de défaillance (i.e. pour une probabilité de défaillance de 10^{-n} , il faut réaliser entre 10^{n+2} et 10^{n+3} tirages). D'autres méthodes de simulation sont proposées dans la littérature pour économiser le temps de calcul, telles que les simulations directionnelles [9], les méthodes des tirages d'importance [10] et les méthodes de simulation stratifiée [11].

I.2.2.2 Méthodes d'approximation

Les méthodes les plus connues sont les méthodes du premier et du second ordre FORM/SORM (*First Order Reliability Method/Second Order Reliability Method*), qui sont très efficaces pour le calcul de la fiabilité. Ces méthodes sont basées sur la recherche du point de conception, appelé aussi le point de défaillance le plus probable (MPFP : *Most Probable Failure Point*), dont la connaissance est à la base des approximations de la probabilité de défaillance dans le cadre des méthodes FORM/SORM. La recherche du point de conception est menée dans l'espace normé des variables aléatoires (figure I.4), en identifiant le point le plus proche de l'origine où la fonction de performance est inférieure ou égale à zéro. Ainsi, le problème de la détermination du point de conception MPFP est

formulé en problème d'optimisation sous contrainte [12] :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} \quad & \|\mathbf{u}\| \\ \text{sous : } \quad & \hat{G}(\mathbf{u}) \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

où $\hat{G}(\mathbf{u})$ est la fonction d'état limite dans l'espace normé, \mathbf{U} est le vecteur des variables aléatoires normées, centrées et décorrélées dont les réalisations sont notées \mathbf{u} issues de la transformation iso-probabiliste T , avec $\mathbf{u} = T(\mathbf{x})$.

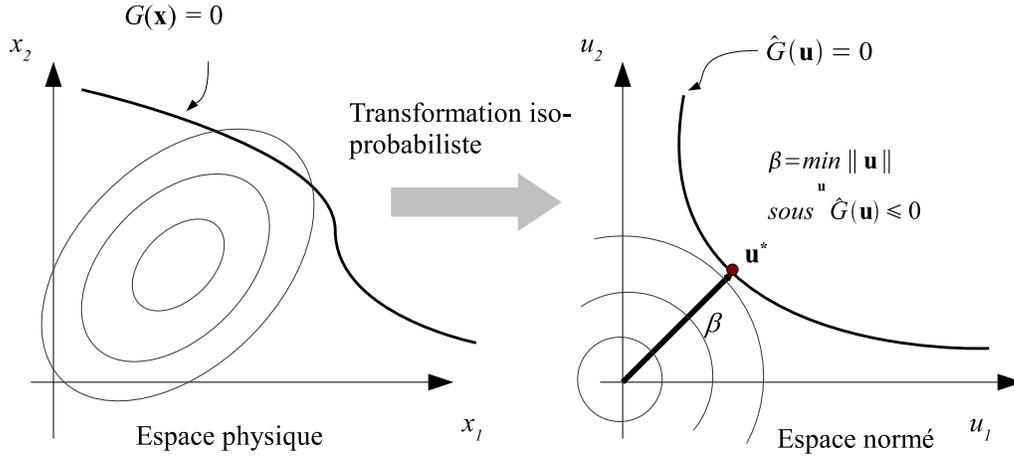


Figure I.4: Transformation probabiliste.

Ce problème d'optimisation est généralement résolu par les algorithmes de la programmation non linéaire. Les algorithmes basés sur les gradients sont souvent utilisés. A titre d'exemple :

- méthode du gradient projeté ;
- méthode du Lagrangien augmenté ;
- méthode de programmation quadratique séquentielle (SQP : *Sequential Quadratic Programming*).

Toutefois, l'algorithme de HL-RF (*Hasofer Lind-Rackwitz Fiessler*) spécialement développé pour résoudre le problème de l'équation I.3 n'est qu'une reversion de l'algorithme du gradient projeté au problème de fiabilité. Cet algorithme proposé initialement par *Hasofer et Lind* [4], et amélioré par *Rackwitz et Fiessler* [13] est très efficace mais il souffre d'un manque de robustesse. Une version modifiée plus robuste de la méthode de HL-RF a été proposée par *Abdo et Rackwitz*[14] et *Liu et Der Kiureghian*[15]. L'amélioration de la robustesse de l'algorithme de HL-RF est obtenue par l'ajout d'une fonction de mérite pour le contrôle de la longueur du pas de descente. D'ailleurs, ces derniers auteurs (*Liu et Der Kiureghian*)[15] ont réalisé une étude comparative entre différents algorithmes (méthode du gradient projeté, méthode du Lagrangien augmenté, SQP, méthode de HL-RF et sa version modifiée), conduisant à souligner l'efficacité et la robustesse de SQP et de l'algorithme modifié de HL-RF.

Le principe de l'approximation FORM est simple ; elle consiste à remplacer l'état limite G par un hyperplan tangent au point de conception MPFP. L'intégrale de l'équation

(I.2) se fait sur le demi-espace, délimité par le plan tangent (figure I.5), permettant l'approximation de la probabilité de défaillance P_f par l'expression :

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (\text{I.4})$$

où β est l'indice de fiabilité et $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition normale centrée réduite.

Une meilleure estimation de la probabilité de défaillance peut être obtenue par l'approximation SORM, qui consiste à substituer la surface de défaillance par une hypersurface quadratique tangente et ayant les mêmes courbures de la surface réelle au point de conception MPFP (figure I.6). Parmi les méthodes SORM, la probabilité de défaillance P_f peut être approchée par la formule de *Breitung* [16] :

$$P_f = \Phi(-\beta) \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta \kappa_i}} \right) \quad (\text{I.5})$$

où β est l'indice de fiabilité, calculé à partir de l'équation (I.3), et κ_i sont les courbures principales de la fonction G au point MPFP.

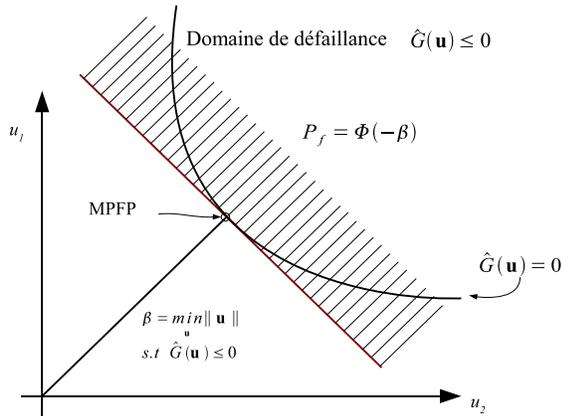


Figure I.5: Approximation FORM.

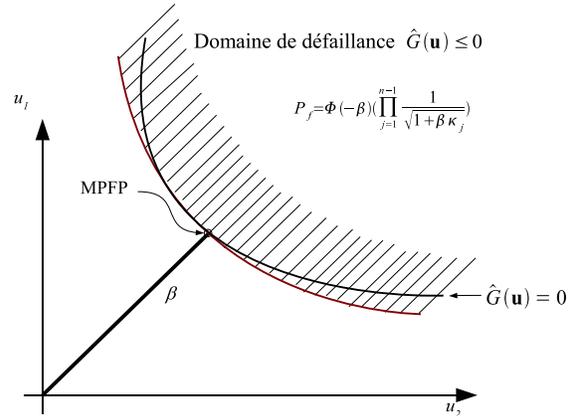


Figure I.6: Approximation SORM.

I.2.2.3 Méthodes de surface de réponse

Les méthodes de surface de réponse sont des techniques utilisées quand la fonction d'état limite G est implicite, surtout lorsque son évaluation nécessite un effort numérique considérable (i.e. MEF). Ces méthodes visent à construire un modèle mathématique \tilde{G} analytique (appelé méta-modèle) qui remplace la fonction de performance G . La fonction \tilde{G} peut être définie par régression à partir d'expériences numériques. Le méta-modèle établi se substitue à la fonction de performance G . Ainsi, les algorithmes de fiabilité ou les simulations de Monte Carlo peuvent être directement appliqués sur la surface de réponse \tilde{G} afin d'estimer la probabilité de défaillance.

Parmi les différentes approches développées pour la construction de la surface de réponse, les polynômes quadratiques sont les plus utilisés [17, 18, 19]. Toutefois, cette construction nécessite l'estimation des coefficients du polynôme à partir du plan d'expérience choisi. Cela exige un certain nombre d'évaluations du modèle mécanique réel (i.e.

MEF). Le temps de calcul requis pour l'estimation de ces coefficients augmente avec le nombre de variables aléatoires et le plan d'expérience utilisé. De plus, quand la fonction d'état limite G est fortement non linéaire, une surface de réponse locale au lieu d'une surface de réponse globale doit être calculée à chaque itération de l'algorithme de fiabilité [20].

Kim et al.[21] ont proposé une technique de projection pour construire une surface de réponse locale d'ordre 1 calculée à chaque itération de l'algorithme de HL-RF. Cette approche permet de contourner les inconvénients d'une surface de réponse d'ordre 2. D'autres auteurs [22] ont développé une surface de réponse globale d'ordre supérieur à 2 en utilisant les polynômes orthogonaux de *Chebyshev*. Cette surface de réponse globale est couplée à la méthode de Monte Carlo pour l'évaluation de la probabilité de défaillance.

D'autres méta-modèles basés sur l'apprentissage sont aussi développés, tels que les réseaux de neurones [23], les méthodes de krigeage (*Kriging Methods*) [24] ou les méthodes d'apprentissage par les machines à vecteur support [25].

I.2.3 Analyse de la fiabilité système

Les structures sont généralement constituées de l'assemblage de plusieurs éléments. Chaque élément peut posséder plusieurs modes de défaillance. La défaillance globale de la structure dépend non seulement de l'état de chaque élément mais aussi des interactions entre les différents modes de défaillance. De plus, la défaillance d'un de ses éléments entraîne un changement de l'état du système mécanique qui se traduit par une perte de rigidité ou une redistribution des efforts dans la structure. Dès lors, la défaillance globale n'est que le cumul d'un certain nombre de défaillances potentielles des composants.

L'estimation rationnelle de la fiabilité d'une structure est fondée sur l'approche système. Dans certaines situations, l'évaluation de la fiabilité à partir du mode de défaillance le plus critique ou le **maillon faible** est suffisante. Il s'agit essentiellement des structures isostatiques où la défaillance d'un composant entraîne la ruine globale du système. Cependant, la défaillance des structures hyperstatiques ne dépend pas de la ruine d'un seul de ses composants (i.e. du mode de défaillance le plus dominant); la ruine globale nécessite la défaillance d'un certain nombre de composants.

La fiabilité d'un système mécanique requiert la connaissance des modes de défaillance dominants. Les méthodes de simulation telles que la méthode de Monte Carlo permettent d'estimer directement la probabilité de défaillance système d'une structure définie par plusieurs modes de défaillance. Néanmoins, les simulations exigent un coût de calcul prohibitif, surtout lorsqu'il s'agit de structures complexes avec des comportements mécaniques non linéaires.

Étant donné, l'efficacité des méthodes d'approximation telles que FORM/SORM, de nombreux chercheurs [26, 27, 28] ont proposé l'utilisation de l'approximation FORM pour l'évaluation de la fiabilité système. L'idée fondamentale de la fiabilité système repose sur une extrapolation de l'analyse de la fiabilité des composants, au moyen des combinaisons logiques des différents scénarios de ruine. Généralement, les modèles en série, en parallèle ou mixte sont souvent utilisés. Ces modèles et les outils de calcul de la fiabilité système sont exposés dans le chapitre III.

I.2.4 Fiabilité dépendant du temps

Le vieillissement des ouvrages de génie civil est l'une des causes principales de défaillance. Ce vieillissement est dû à la dégradation du matériau, à l'environnement extérieur (e.g. humidité, température, . . . etc) et aux conditions d'exploitation de l'ouvrage. La forte variabilité de l'environnement et des conditions de service favorisent ces dégradations. De plus, la variation par rapport au temps concerne aussi les chargements appliqués. La théorie des processus stochastiques permet la modélisation de l'environnement et la variabilité du chargement en fonction du temps.

La théorie de la fiabilité exposée ci-dessus est souvent appelée fiabilité indépendante du temps (*time-invariant reliability*) puisque elle considère que le temps joue un rôle inactif dans le mécanisme de ruine. L'approche de la fiabilité dépendant du temps (*time-variant reliability*) vise à estimer l'évolution de la fiabilité structurale en fonction du temps, elle repose sur une modélisation fine des mécanismes de dégradation et de vieillissement (e.g. corrosion, endommagement, propagation de la fissure, fluage, . . .) et la théorie des processus stochastiques.

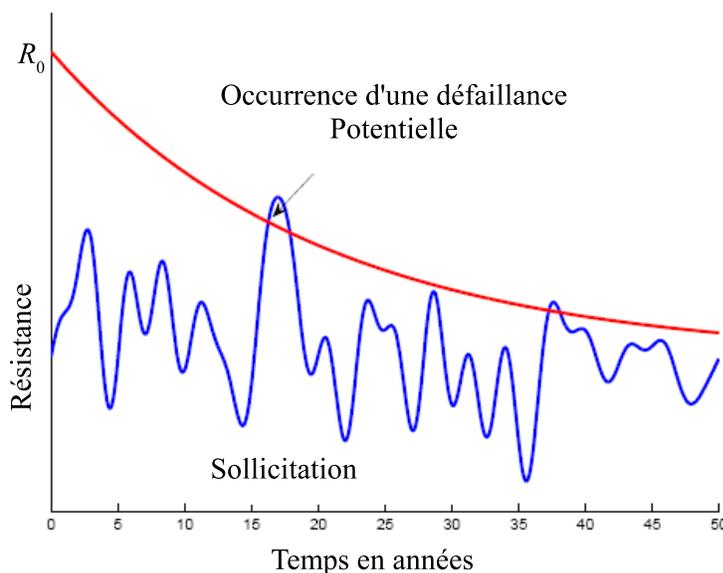


Figure I.7: Processus stochastique et dégradation de la résistance.

Dans l'approche de la fiabilité dépendant du temps, la défaillance d'une structure résulte de deux phénomènes combinés. D'une part, la réduction de la capacité portante due à la dégradation du matériau, et d'autre part, les actions aléatoires extrêmes dont la probabilité d'occurrence augmente avec la durée d'exposition (action climatique décennale, centennale, . . . etc). (figure I.7). Les outils de calcul de la fiabilité dépendant du temps sont exposés dans le chapitre V.

I.3 Optimisation des structures

La spécification de la conception appropriée d'une structure est un enjeu majeur dans l'ingénierie. Le meilleur dimensionnement doit satisfaire un certain nombre de critères, tels que le coût, la fiabilité, la performance, la durabilité et la faisabilité. En conséquence, l'optimisation des structures a pour objectif de concilier les exigences contradictoires de la conception. Elle peut être scindée en trois grandes familles [29] :

- **Optimisation de contrôle** (*Sizing Optimization*)

Elle est appelée aussi optimisation du dimensionnement. Elle vise à trouver les paramètres optimaux d'une conception définie par une forme, une géométrie et une topologie fixées à l'avance (e.g. épaisseur d'une plaque, sections d'un treillis, ... etc).

- **Optimisation de forme** (*Shape Optimization*)

Elle consiste à chercher la forme idéale d'une structure pour une topologie définie à l'avance. Cela est atteint en modifiant les frontières de la structure afin de trouver la meilleure configuration, au moyen des transformations homéomorphes de la configuration initiale (figure I.8).

- **Optimisation de topologie** (*Topology Optimization*)

Il s'agit d'une démarche récente en optimisation. Elle consiste à chercher la meilleure topologie d'une structure à partir seulement de la définition des conditions aux limites, de la géométrie initiale et des chargements appliqués (figure I.9).

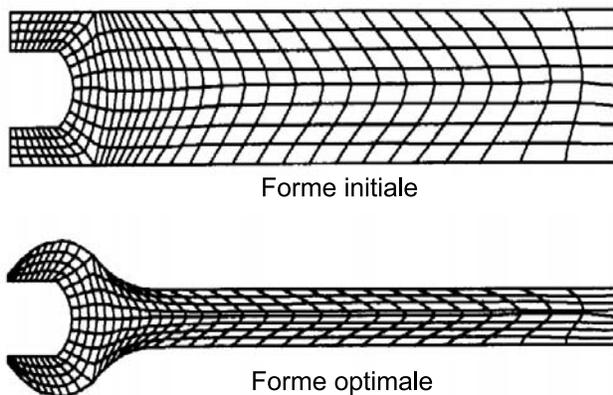


Figure I.8: Optimisation de forme.

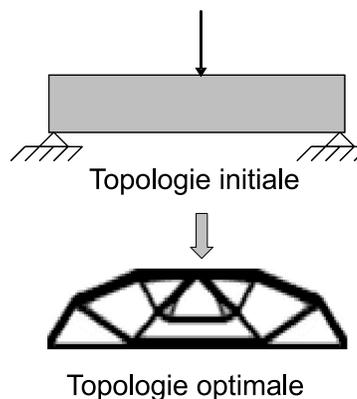


Figure I.9: Optimisation de topologie.

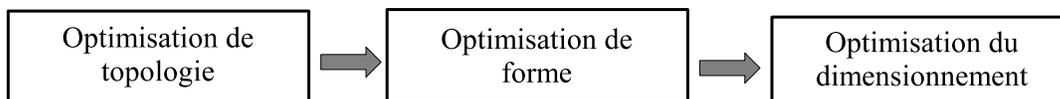


Figure I.10: Les différentes démarches de l'optimisation des structures.

Kharmanda et al. [30] ont défini une démarche originale permettant de lier les différents modules d'optimisation. Cette approche recherche, dans un premier temps, la topologie optimale, cette topologie est ensuite affinée par une optimisation de forme et de contrôle (figure I.10). Cette procédure nécessite l'utilisation de plusieurs outils, comme la conception assistée par ordinateur CAO et les modèles de calcul par éléments finis avec des techniques de maillage/remailage à chaque itération de la procédure.

Dans ce travail, nous nous intéressons particulièrement à l'optimisation du dimensionnement. La formulation mathématique de l'optimisation des structures est exposée dans la section suivante.

I.3.1 Formulations de l'optimisation de la conception

L'optimisation de la conception est formulée par la recherche des paramètres intervenant dans la conception, qui minimisent une fonction objectif (e.g. coûts initiaux, énergie potentielle, rigidité,...) et qui vérifient les contraintes de performances mécaniques, physiques et géométriques.

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{d} \text{ qui minimise } C_I(\mathbf{d}) & (I.6) \\ \text{sous : } & \begin{cases} G_i(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \geq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 & j = m + 1, \dots, n_h \end{cases} \end{aligned}$$

où \mathbf{d} est le vecteur des variables d'optimisation appelées aussi variables de décision, qui peuvent être les dimensions géométriques, des caractéristiques mécaniques et des paramètres contrôlant les propriétés de la structure, \mathbf{p} est le vecteur des paramètres déterministes (i.e. les propriétés mécaniques des matériaux, les chargements, résistances ultimes,...), G_i sont les fonctions de performances appelées aussi règles de dimensionnement (i.e. limitation des contraintes mécaniques et des flèches,...), h_j sont les fonctions de faisabilité géométrique et physique (e.g. bornes inférieures et supérieures des variables d'optimisation \mathbf{d}) et C_I est la fonction objectif ou la fonction coût, qui peut être le volume, le poids ou les coûts initiaux de la structure, elle est définie en fonction des variables d'optimisation \mathbf{d} .

Une autre formulation de l'optimisation peut être utilisée [1] en maximisant la performance (i.e. marges des contraintes mécaniques, rigidité,...) sous les limitations de volume, de coût et de faisabilité.

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{d} \text{ qui maximise } G(\mathbf{d}, \mathbf{p}) & (I.7) \\ \text{sous : } & \begin{cases} C_I(\mathbf{d}) \leq C_I^c \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 & j = 1, \dots, n_h \end{cases} \end{aligned}$$

où G est une fonction de performance globale et C_I^c est le coût ou le volume à ne pas dépasser. Cette formulation est équivalente à la formulation standard de l'optimisation des structures (équation I.6), elle est utilisée dans l'optimisation de la topologie [29], où la compliance (travail des forces extérieures) de la structure est minimisée sous la contrainte du volume. Dans l'optimisation de dimensionnement, la formulation de l'équation I.7 est peu utilisée dans la littérature. En réalité, elle est difficile à résoudre, en raison de la discontinuité de la fonction de performance G (e.g. lors de l'optimisation d'un treillis, la

localisation de la contrainte maximale change d'une barre à l'autre durant le processus itératif). Cette discontinuité pose des difficultés de convergence lorsque le problème est résolu par les algorithmes basés sur les gradients. Toutefois, elle peut être adaptée lorsque les techniques de différentiation directe sont adoptées.

I.3.2 Méthode de différentiation directe

Les algorithmes d'optimisation les plus performants utilisent les gradients de la fonction objectif et des limitations pour calculer les directions de descente. Néanmoins, lorsque des modèles numériques sont impliqués, le calcul des dérivées de la réponse par rapport aux variables d'optimisation s'effectue par différences finies. Une différentiation par différences finies est très simple à implémenter mais elle est souvent une source des problèmes de non convergence et d'instabilités numériques. De plus, elle exige un temps de calcul considérable lorsque le nombre de variables d'optimisation est élevé.

De nombreux chercheurs ont utilisé les techniques de différentiation directe afin de réduire le temps de calcul et garantir la convergence de l'algorithme utilisé [31]. En effet, un calcul précis du gradient permet à l'algorithme d'avoir une information précise sur la direction de descente. La méthode de différentiation directe consiste à fournir le gradient de la réponse mécanique (i.e. déplacements, contraintes, . . .) par rapport aux variables de conception sous une forme analytique, au moyen des opérateurs de différentiation. Cependant, cette approche exige une implémentation au niveau de la résolution du problème. De plus, elle dépend du type de problème considéré et de la méthode de résolution employée (i.e. résolution directe, incrémentale ou itérative). Par exemple, la mise en œuvre d'une telle approche dans la méthode des éléments finis nécessite de réécrire le code de calcul pour exprimer le gradient de la réponse en fonction des variables de conception. D'autres techniques de différentiation existent dans la littérature, telle que la différentiation automatique.

I.3.3 Considération des incertitudes dans l'optimisation

L'optimisation déterministe telle que formulée dans l'équation I.6 ne tient pas compte explicitement des incertitudes sur les données d'entrée. Ces incertitudes sont implicitement considérées par l'introduction des coefficients de « sécurité ». Les paramètres \mathbf{p} et les variables de décision \mathbf{d} sont considérés entièrement déterministes.

La conception optimale est généralement très sensible aux incertitudes. La procédure d'optimisation donne une solution où les marges résiduelles des contraintes de performance sont réduites à leurs bornes inférieures (e.g. la contrainte maximale dans une barre est égale à la contrainte limite). Par conséquent, les incertitudes peuvent conduire à un écart significatif entre les performances réelles et espérées.

L'utilisation des coefficients de sécurité vise à introduire une marge de sécurité suffisante afin d'augmenter la sûreté de la conception et diminuer le rôle des incertitudes sur les performances de la structure optimisée (figure I.11). Ces coefficients sont définis pour les paramètres les plus déterminants de la structure. L'emploi de ces coefficients permet l'amplification des sollicitations (i.e. chargement) et la réduction de la résistance

(i.e. propriétés mécaniques).

$$\begin{aligned} r_d &= \frac{r_k}{\gamma_R} && \text{pour les résistances} \\ s_d &= \gamma_S s_k && \text{pour les sollicitations} \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

où γ_R et γ_S sont respectivement les coefficients de sécurité pour la résistance R et la sollicitation S , $\{r_d, s_d\}$ sont appelées les “*valeurs de calcul*”, $\{r_k, s_k\}$ sont les valeurs représentatives, qui peuvent être les valeurs caractéristiques ou nominales. Il existe deux niveaux d’approches des coefficients de sécurité :

- niveau 0 : les coefficients de sécurité sont choisis à partir d’une connaissance experte et d’une façon empirique justifiée par le retour d’expérience ;
- niveau 1 : les coefficients de sécurité sont issus d’une connaissance experte et algorithmique basée sur une approche semi-probabiliste [32]. La majorité des codes de dimensionnement (e.g. Eurocodes [33], ACI, ...) recommandent l’utilisation de ces coefficients appelés “*coefficients partiels de sécurité*” (PSF : *Partial Safety Factors*). Les valeurs représentatives sont des valeurs nominales ou caractéristiques issues d’un contenu statistique plus ou moins riche.

L’introduction des coefficients partiels de sécurité dans l’optimisation déterministe de l’équation I.6 est exprimée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{d} \text{ qui minimise } C_I(\mathbf{d}) \\ \text{sous : } &\begin{cases} G_i(\mathbf{d} - \Delta_{\mathbf{d}}, \mathbf{p}_k, \boldsymbol{\gamma}) \geq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 & j = m + 1, \dots, n_h \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

Cette formulation de l’optimisation déterministe atténue l’effet des incertitudes sur les performances mécaniques par l’application des coefficients partiels de sécurité. Cela se traduit par la recherche des paramètres optimaux \mathbf{d} dans l’espace de conception réduit par les coefficients de sécurité (figure I.11). Autrement dit, la règle de dimensionnement $G(\mathbf{d}, \mathbf{p})$ est translatée vers $G(\mathbf{d} - \Delta_{\mathbf{d}}, \mathbf{p}_k, \boldsymbol{\gamma})$ afin de dégager une marge de sûreté permettant de pouvoir exploiter la structure optimisée sans risque significatif.

La règle de dimensionnement est définie par les valeurs nominales des variables de décision \mathbf{d} , par le vecteur $\Delta_{\mathbf{d}}$ contenant les valeurs de décalage des variables géométriques \mathbf{d} , par le vecteur \mathbf{p}_k contenant les valeurs caractéristiques des paramètres du modèle mécanique (i.e. chargement, limite d’élasticité, module de Young, ...) et par le vecteur $\boldsymbol{\gamma}$ contenant les coefficients partiels de sécurité recommandés dans les codes de dimensionnement, tels que les Eurocodes [33].

Les valeurs caractéristiques sont souvent des p -quantiles. En génie civil, le quantile de 95% est souvent adopté pour les sollicitations (i.e. probabilité de 0,05 de dépasser s_k), et le quantile de 5% est admis pour les résistances (i.e. probabilité de 0,05 de résistance inférieure à r_k).

Le **point de conception** \mathbf{p}_d donné par les valeurs de calcul $\{r_d, s_d\}$ n’est que la pondération des valeurs caractéristiques par les coefficients partiels de sécurité. L’utilisation du point de conception dans le calcul confère au dimensionnement une probabilité de défaillance suffisamment faible dont la conception bénéficie sans avoir à effectuer une analyse de fiabilité (figure I.12).

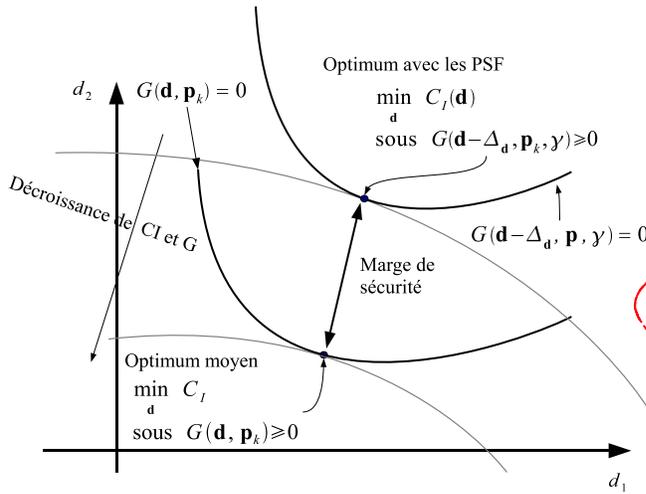


Figure I.11: Marge de sécurité dans l'optimisation déterministe.

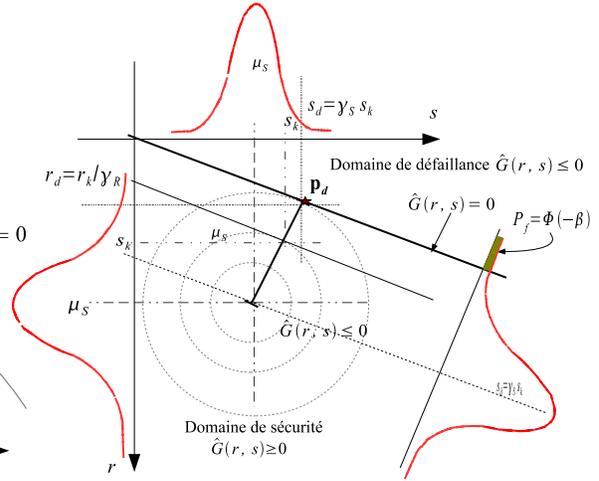


Figure I.12: Interprétation géométrique du point de conception.

I.3.4 Interprétation fiabiliste des coefficients partiels de sécurité

Considérons le cas d'état limite élémentaire $G(R, S) = R - S$, où la sollicitation S et la résistance R sont des variables aléatoires indépendentes, normales de moyennes μ_R et μ_S et d'écart-types σ_R et σ_S , respectivement. Par conséquent, la marge de sûreté G est une variable aléatoire normale de moyenne $\mu_G = \mu_R - \mu_S$ et d'écart-type $\sigma_G = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$. La fonction d'état limite peut s'écrire dans l'espace des variables aléatoires U_R et U_S sous la forme :

$$G(r, s) \equiv \hat{G}(u_R, u_S) = (u_R \sigma_R + \mu_R) - (u_S \sigma_S + \mu_S) \quad (\text{I.10})$$

L'indice de fiabilité de l'état limite linéaire G est donné par la distance entre l'origine de l'espace normé et la droite $\hat{G}(u_R, u_S) = 0$, donnée directement par :

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \quad (\text{I.11})$$

Cet indice est une mesure géométrique de l'écart entre l'état moyen de la structure et son état de défaillance (figure I.13). En utilisant l'approximation FORM, la probabilité de défaillance (figure I.14) a pour expression :

$$P_f = \text{Prob}(G \leq 0) = \Phi\left(-\frac{\mu_G}{\sigma_G}\right) = \Phi(-\beta) \quad (\text{I.12})$$

Les coordonnées du point de conception $\mathbf{p}_d = \{u_R^*, u_S^*\}$ dans l'espace normé peuvent s'exprimer en fonction de l'indice de fiabilité β et des cosinus directeurs $\{\alpha_R, \alpha_S\}$:

$$\begin{aligned} u_R^* &= -\alpha_R \beta \quad \text{avec} \quad \alpha_R = \frac{\partial \hat{G}}{\partial u_R} / \left\| \frac{\partial \hat{G}}{\partial u_R} \right\| = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \\ u_S^* &= -\alpha_S \beta \quad \text{avec} \quad \alpha_S = \frac{\partial \hat{G}}{\partial u_S} / \left\| \frac{\partial \hat{G}}{\partial u_S} \right\| = -\frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

Les coordonnées du point de conception le plus probable \mathbf{p}_d dans l'espace physique sont données par :

$$\begin{cases} r_d = \mu_R - \alpha_R \sigma_R \beta \\ s_d = \mu_S - \alpha_S \sigma_S \beta \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

Finalement, les coefficients partiels de sécurité relatifs à la sollicitation S et à la résistance R sont exprimés par :

$$\begin{aligned} \gamma_R &= \frac{r_k}{r_d} = \frac{r_k}{\mu_R - \alpha_R \sigma_R \beta} \\ \gamma_S &= \frac{s_d}{s_k} = \frac{\mu_S - \alpha_S \sigma_S \beta}{s_k} \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

Puisque l'état limite est linéaire alors α_R et α_S ne changent pas dans l'espace normé. Cela permet d'exprimer les coefficients partiels de sécurité en fonction de l'indice de fiabilité cible β_c en remplaçant β par β_c dans l'équation.I.16.

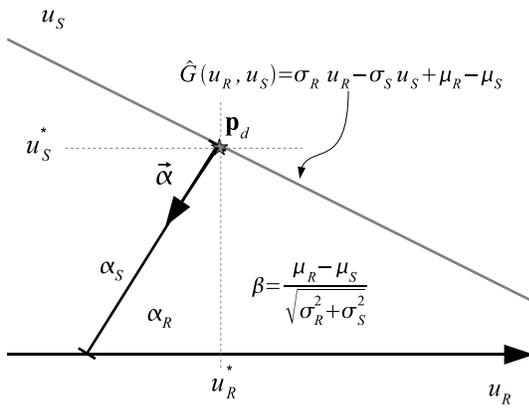


Figure I.13: Point de conception dans l'espace normé.

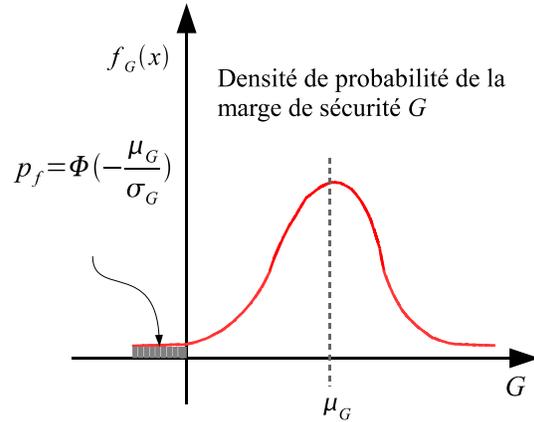


Figure I.14: Densité de probabilité de la marge de sécurité.

I.4 Optimisation fiabiliste de la conception

Les coefficients partiels de sécurités (PSF) sont calibrés pour une large classe de structures. Leur utilisation dans l'optimisation du dimensionnement ne garantit pas un optimum avec une fiabilité appropriée. En outre, la fiabilité de l'optimum obtenue est complètement ignorée car ces coefficients ne sont pas liés d'une manière directe à l'exigence de fiabilité. Cela peut mener à un manque de robustesse de la solution optimale.

La procédure d'optimisation doit permettre la redistribution des rôles des incertitudes sur la base de la sensibilité des objectifs de la conception. Pour cette raison, l'optimisation déterministe ne peut pas assurer des niveaux de fiabilité convenables. Une conception peu fiable peut conduire à des pertes économiques colossales dues à la défaillance, alors qu'une conception trop fiable présente le plus souvent un coût trop élevé.

L'optimisation fiabiliste vise l'obtention d'une conception équilibrée en réduisant l'espérance du coût total, défini en terme du coût initial (i.e. conception, fabrication, transport, . . .) et du coût de défaillance (i.e. dommages directs et indirects dus à la défaillance, pertes économiques et humaines, . . .). Cette approche a l'avantage de piloter la recherche de l'optimum par le contrôle des variables dont l'impact sur le coût total est significatif; les variables présentant de grandes incertitudes sont pénalisées indépendamment de leur rôle mécanique. Dans ce sens, la robustesse du système est atteinte car le rôle des incertitudes est réduit au cours de la procédure d'optimisation.

Du point de vue numérique, les approches de l'optimisation fiabiliste nécessitent le couplage entre la modélisation mécanique (i.e. méthode des éléments finis), les algorithmes d'optimisation et les outils de l'analyse de fiabilité des structures.

I.4.1 Formulation du problème de l'optimisation fiabiliste

D'une façon générale, l'optimisation fiabiliste consiste à minimiser l'espérance du coût total C_T exprimée en fonction du coût initial C_I (i.e. conception, fabrication, transport et installation, . . .) et du coût de défaillance C_f [34]. L'optimisation fiabiliste est formulée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{d} \text{ qui minimise } E[C_T] = E[C_I(\mathbf{d})] + E[C_F(\mathbf{d}, \mathbf{X})] & (I.16) \\ & \text{sous : } \left\{ \begin{array}{l} h_j(\mathbf{d}) \geq 0 \\ j = 1, \dots, n_h \end{array} \right. \end{aligned}$$

$E[\cdot]$ symbolise l'opérateur d'espérance mathématique, $E[C_I(\mathbf{d})] = C_I(\mathbf{d})$ est le coût initial. L'espérance des coûts de défaillance $E[C_F]$ est établie en fonction des variables de décision \mathbf{d} et des variables aléatoires \mathbf{X} , elle est approximée par :

$$E[C_F] = C_f P_f(\mathbf{d}) \quad (I.17)$$

où C_f est le coût de défaillance. Les variables \mathbf{d} peuvent être également les paramètres de distribution des variables aléatoires \mathbf{X} . P_f est la probabilité de défaillance de la structure estimée à partir de l'équation I.2.

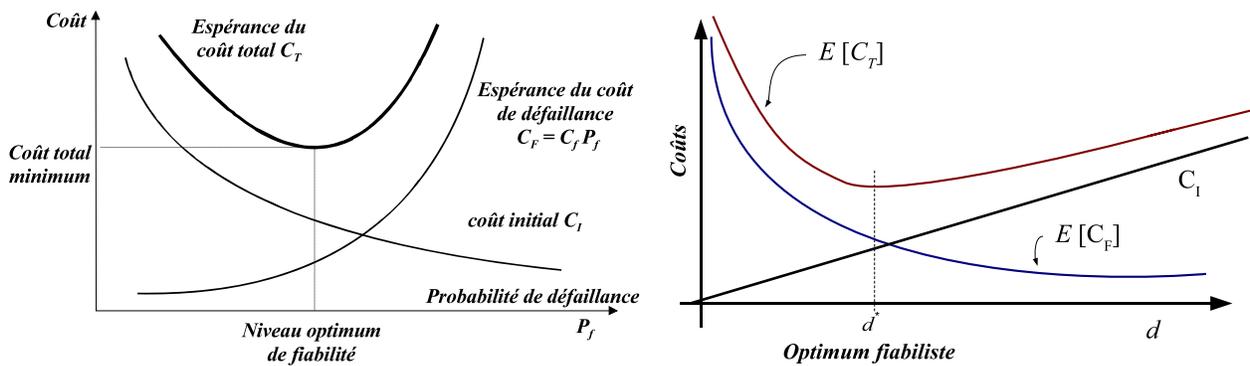


Figure I.15: Conception optimale et le niveau optimum de fiabilité.

Le problème de l'optimisation fiabiliste formulé dans l'équation I.16 cherche à trouver le meilleur équilibre entre le coût initial C_I et l'espérance du coût de défaillance C_F . La figure I.15 montre qu'une réduction possible du coût initial doit être équilibrée par

l'augmentation du risque de défaillance. La minimisation est effectuée pour les paramètres de conception intervenant dans les fonction coûts, où l'augmentation de ces paramètres diminue la probabilité de défaillance, donc l'espérance des coûts de défaillance. Ainsi, le coût total minimal correspond au point constitué par la conception optimale et le niveau optimum de fiabilité.

Cette formulation a l'avantage de maîtriser l'influence des incertitudes des paramètres sur le coût total. En outre, l'équilibre entre le coût initial C_I et l'espérance du coût de défaillance C_F est atteint au moyen de la réduction de l'effet des incertitudes sur la probabilité de défaillance P_f . La robustesse de la conception optimisée est atteinte par le fait de restreindre l'influence des incertitudes sur la performance. Une formulation équivalente de l'équation I.16 a pour objectif de maximiser l'espérance de la fonction d'utilité $U(\mathbf{d})$ [35, 36] :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{d} \text{ qui maximise } U(\mathbf{d}) = E[B(\mathbf{d})] - E[C_I(\mathbf{d})] - E[C_F(\mathbf{d}, \mathbf{X})] & (I.18) \\ & \text{sous : } \left\{ \begin{array}{l} h_j(\mathbf{d}) \geq 0 \\ j = 1, \dots, n_h \end{array} \right. \end{aligned}$$

où B représente les bénéfices réalisés par l'exploitation du système, C_I est le coût initial et C_F sont les pertes liées aux coûts de défaillance. Les coûts de défaillance ont deux composantes principales :

- une composante directe liée aux coûts de la reconstruction et aux dommages dus à la défaillance, par exemple l'inexploitation de l'ouvrage jusqu'à sa reconstruction ou sa réparation et les pertes humaines dues à la défaillance de l'ouvrage ;
- une composante indirecte liée aux conséquences de la défaillance. Il s'agit principalement des pertes économiques dues à la mauvaise publicité, de la perte de nouveaux marchés, de l'impact de la défaillance sur l'environnement et des conséquences socio-économiques et politiques.

La grande difficulté de l'évaluation des coûts de défaillance réside dans l'estimation des coûts liés à la composante indirecte et aux pertes humaines dans la composante directe (e.g. indemnisation des personnes sinistrées et des blessées). Pour cette raison, l'usage direct des équations (les équations I.16-I.17) n'est pas pratique. De plus, ces formulations supposent que la conception optimale correspond au niveau optimum de fiabilité, alors que l'existence de celui-ci n'est pas toujours garantie. Cette situation est rencontrée lorsque la fonction du coût total est composée d'un coût initial élevé avec un coût de défaillance très faible. Ce cas est souvent rencontré dans l'optimisation des composants mécaniques n'impliquant pas des dommages considérables dus à une défaillance où lorsque la probabilité de défaillance est toujours trop petite. Une alternative de la formulation de l'équation I.16 consiste à minimiser le coût initial sous la limitation de la probabilité de défaillance admissible [34, 37]

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{d} \text{ qui minimise } C_I(\mathbf{d}) & (I.19) \\ & \text{sous : } \left\{ \begin{array}{l} Prob[G(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_f^c \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 \\ j = 1, \dots, n_h \end{array} \right. \end{aligned}$$

où P_f^c est la probabilité de défaillance admissible qu'il ne faut pas atteindre. D'autres formulations sont également établies afin de tenir compte des états limites pour les systèmes structuraux constitués de plusieurs composants (voir chapitre III).

I.4.2 Optimisation fiabiliste des composants

Lorsque plusieurs fonctions d'état limite sont définies, la formulation de l'optimisation fiabiliste (RBDO : *Reliability-based design optimization*) (équation I.19) est exprimée par les probabilités de défaillance de tous les états limites. L'évaluation de ces probabilités peut se faire soit par les méthodes de simulation soit par les méthodes d'approximation FORM/SORM. L'inconvénient des méthodes de simulation réside dans le grand nombre de tirages nécessaire. Ces tirages sont effectués à chaque itération de l'algorithme d'optimisation (i.e. à chaque fois que les variables d'optimisation \mathbf{d} changent), où chaque tirage correspond à une évaluation des états limites $G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ avec $i = 1, \dots, m$. Un temps de calcul prohibitif est nécessaire lorsque le modèle mécanique est complexe. De plus, les tirages aléatoires produisent un bruit numérique provoquant des difficultés de calcul des gradients entraînant la divergence de l'algorithme d'optimisation.

En revanche, l'utilisation des méthodes d'approximation FORM/SORM est mieux adaptée au problème d'optimisation fiabiliste. Les indices de fiabilité peuvent remplacer les probabilités de défaillance des états limites G_i , ainsi le problème de la RBDO est formulé par :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{d} \text{ qui minimise } C_I(\mathbf{d}) & (I.20) \\ \text{sous : } & \begin{cases} \beta_i(\mathbf{d}; \mathbf{X}) \geq \beta^c & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 & j = 1 + m, \dots, n_h \end{cases} \end{aligned}$$

où β_i est l'indice de fiabilité relatif à l'état limite G_i , m est le nombre d'états limites (i.e. modes de défaillance), β^c est l'indice de fiabilité cible lié à la probabilité de défaillance admissible ($\beta^c = \Phi^{-1}(P_f^c)$) qui est choisie par des considérations socio-économiques.

La formulation de l'équation I.20 est plus stable numériquement que l'équation I.19 car les probabilités de défaillance sont toujours très petites (e.g. P_f est entre 10^{-2} et 10^{-8}).

I.4.3 Optimisation fiabiliste système

La formulation de l'optimisation fiabiliste dans la section I.4.2 ne tient pas compte de l'effet système et de la corrélation entre les différents modes de défaillance. La fiabilité système peut être inférieure à celle de ses composants. Par conséquent, la fiabilité système doit être prise en compte dans l'optimisation fiabiliste. Dans les structures hyperstatiques, la défaillance d'un de ses composants entraîne un changement de l'état du système mécanique qui se traduit par une perte de la rigidité ou une redistribution des efforts dans la structure. La défaillance globale n'est que le cumul d'un certain nombre de défaillances potentielles des composants. De nombreux auteurs [37, 34] ont remplacé les indices de fiabilité des composants par l'indice de fiabilité système.

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{d} \text{ qui minimise } C_I(\mathbf{d}) & (I.21) \\ \text{sous : } & \begin{cases} \beta_{sys}(\mathbf{d}; \mathbf{X}) \geq \beta_{sys}^c \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 & j = 1, \dots, n_h \end{cases} \end{aligned}$$

où β_{sys} et β_{sys}^c sont respectivement l'indice de fiabilité système et l'indice cible. La fiabilité système peut être estimée soit par les méthodes de simulation soit par des approximations. Les méthodes de simulation demandent un effort de calcul excessif. De plus, des

problèmes de convergence sont souvent rencontrés dus aux bruits numériques causés par les tirages aléatoires. L'approximation du premier ordre de la fiabilité système est souvent utilisée dans la RBDO. Cette approximation est basée sur la fonction multinormale et sur l'estimation des indices de fiabilité des modes de défaillance par FORM.

I.4.4 Les limitations de l'optimisation fiabiliste

En dépit des grands efforts fournis par les chercheurs, l'optimisation fiabiliste reste peu applicable dans le domaine de l'ingénierie. Ce n'est qu'à partir de ces dernières années (2000-2008) que les approches probabilistes de l'optimisation pénètrent dans le monde industriel. L'aérospatiale est l'un des domaines qui a propulsé la RBDO. La NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) a multiplié les efforts pour le développement de l'optimisation fiabiliste multidisciplinaire (*Reliability based Multidisciplinary optimization*) [38, 39]

A présent, les méthodes fiabilistes ont trouvé des échos favorables dans plusieurs domaines, comme dans l'industrie automobile [40], l'aéronautique [41] et aussi dans le génie civil. De plus, ces méthodes sont implémentées dans des logiciels d'optimisation tels que VisualDoc [42] et DAKOTA [43].

Néanmoins, les différentes méthodes développées pour la RBDO restent très coûteuses en temps de calcul. Elles sont impraticables pour optimiser des structures complexes avec des comportements mécaniques non linéaires. Ces limitations sont dues au couplage mécano-fiabiliste et au calcul des sensibilités.

I.4.4.1 Couplage mécano-fiabiliste

Il s'agit du couplage des méthodes de calcul des structures (e.g. méthode des éléments finis), des algorithmes fiabilistes et des algorithmes d'optimisation. Les différentes formulations de la RBDO sont composées de deux boucles itératives imbriquées. La boucle extérieure recherche les paramètres optimaux et la boucle intérieure vérifie la fiabilité des paramètres choisis. Autrement dit, à chaque itération de l'algorithme d'optimisation plusieurs analyses de fiabilité sont nécessaires pour calculer la direction de descente ; où une simple analyse de fiabilité exige plusieurs calculs du modèle mécanique. Une modélisation mécanique avec des comportements non-linéaires (non-linéarité matérielle et/ou géométrique, flambement) rend systématiquement les procédures de la RBDO impraticables.

I.4.4.2 Calcul des sensibilités

Les algorithmes basés sur les gradients sont les plus utilisés pour résoudre les problèmes d'optimisation, en raison de leur efficacité. Toutefois, dans une procédure de RBDO, le calcul des sensibilités pose toujours des problèmes de précision et d'efficacité.

La grande difficulté réside dans le calcul des sensibilités des limitations fiabilistes. Ces limitations sont implicites et évaluées par des procédures itératives (i.e. FORM). De plus, ces sensibilités sont souvent estimées par des méthodes numériques (i.e. différences finies) ou semi-analytiques. Cette situation s'empire avec l'augmentation de la taille du problème (i.e. nombre de limitations fiabilistes, de variables d'optimisation et de variables

aléatoires). Par exemple, pour s variables d'optimisation, r variables aléatoires et m limitations fiabilistes, il faut au moins $m(r + s + 1)$ calculs fiabilistes pour l'évaluation du gradient des limitations par un schéma de différences finies avant.

Une autre complexité peut s'ajouter avec la formulation de la fiabilité système. L'indice de fiabilité système dépend des indices de fiabilité des composants. En outre, le gradient de l'indice de fiabilité système par rapport aux variables d'optimisation n'est pas seulement prohibitif en temps de calcul, mais il constitue également une source d'erreur due aux différentes approximations. Cela peut compromettre la stabilité et la convergence de l'algorithme.

I.5 Comparaison de l'optimisation déterministe et fiabiliste

L'optimisation déterministe formulée dans l'équation I.9 vise à réduire le coût initial $C_I(\mathbf{d})$ sous les limitations mécaniques $G_i(\mathbf{d}, \mathbf{p}_k, \boldsymbol{\gamma}) \geq 0$. Dans ce problème, la fiabilité est supposée garantie par l'application des coefficients partiels de sécurité dans les équations des limitations. L'application de ces coefficients se traduit par une simple translation de la contrainte d'optimisation $G(\mathbf{d}, \mathbf{p})$ (i.e. \mathbf{p} étant les valeurs nominales des paramètres mécaniques) vers $G(\mathbf{d}, \mathbf{p}_k, \boldsymbol{\gamma})$, d'où la réduction de l'espace de conception (figure I.16). Ainsi, l'optimisation déterministe recherche la conception optimale dans le domaine réduit de l'espace de conception. L'optimum est souvent localisé sur la frontière de cet espace.

L'optimisation fiabiliste a pour objectif de rechercher la solution optimale, tel que l'état limite de défaillance soit maintenu suffisamment loin du point de fonctionnement. Cela dit, l'état limite de défaillance doit être maintenu au niveau de fiabilité cible (figure I.17). D'un point de vue numérique, l'optimisation fiabiliste peut être considérée comme une simple transformation des limitations déterministes de l'équation I.9 en limitations probabilistes :

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{d}} C_I(\mathbf{d}) & \min_{\mathbf{d}} C_I(\mathbf{d}) \\ \text{sous : } \left\{ \begin{array}{l} G_i(\mathbf{d}, \mathbf{p}_k, \boldsymbol{\gamma}) \geq 0 \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 \end{array} \right. & \text{sous : } \left\{ \begin{array}{l} \text{Prob}[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_f^c \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 \end{array} \right. \\ \text{Optimisation déterministe} & \text{Optimisation fiabiliste} \end{array}$$

où \mathbf{p}_k peut être considéré comme le vecteur des valeurs caractéristiques des variables aléatoires \mathbf{X} , P_f^c est la probabilité de défaillance cible. L'approche de l'optimisation fiabiliste permet de tenir compte des dispersions relatives des différentes variables du système, au lieu d'une réduction homothétique de l'espace de conception. Il est clair que même pour des cas simples, les deux solutions peuvent être très différentes. Dans ce sens, l'optimisation fiabiliste permet l'obtention du coût optimal, sans compromettre la fiabilité du système.

Lorsque plusieurs états limites sont impliqués dans le dimensionnement de la structure, l'optimisation déterministe recherche l'optimum à l'intérieur du domaine réduit par les coefficients partiels de sécurité. Ces coefficients sont généralement les mêmes pour les

différents états limites. Étant donné que les incertitudes et les conséquences de la défaillance ne sont pas identiques pour les différents critères de conception, le niveau de fiabilité de la solution optimale n'est pas garanti. L'optimum déterministe peut avoir des composants surdimensionnés (ou sous-dimensionnés) par rapport aux autres, conduisant à une solution optimale surdimensionnée et parfois moins fiable. En revanche, l'optimisation fiabiliste offre une mesure rationnelle de la marge qu'il faut prendre pour chacun des critères de conception. Cela permet d'assurer le niveau de fiabilité cible pour chacun de ces critères. En conséquence, la solution obtenue est orientée en fonction de la propagation des incertitudes dans les différents critères de conception.

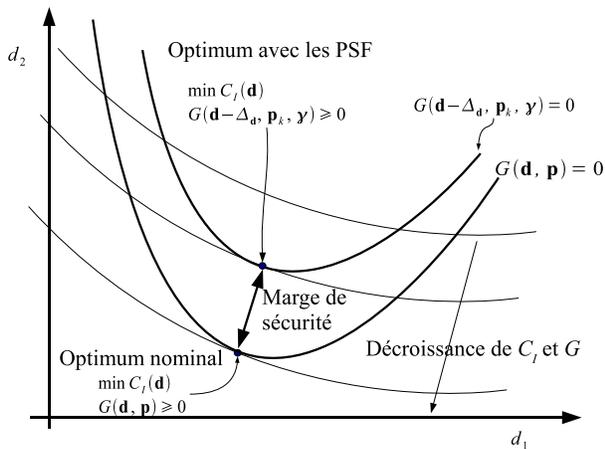


Figure I.16: Optimum déterministe

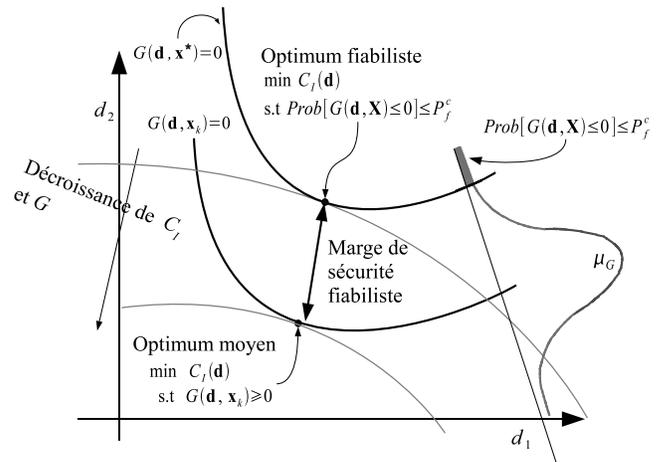


Figure I.17: Optimum fiabiliste

I.6 Résolution du problème d'optimisation

La résolution d'un problème d'optimisation dépend fortement de la nature des variables d'optimisation \mathbf{d} (discrètes ou continues) et du type de la fonction objectif C_I et des limitations G_i et h_j (linéaires ou/et non linéaires). Dans ce travail, le problème d'optimisation des structures est posé dans un cadre continu (variables continues), sous l'hypothèse de continuité et de différentiabilité des fonctions C_I , G_i et h_j . Ces fonctions sont souvent non linéaires dans les problèmes d'optimisation des structures. D'une façon générale, les méthodes de résolution sont scindées en deux grandes familles.

I.6.1 Algorithmes stochastiques

Ces approches sont basées sur le principe des simulations aléatoires, qui consiste à tirer au hasard des points dans l'espace des variables d'optimisation et à chercher l'optimum qui minimise C_I et qui vérifie les limitations sur G et h . La mise en œuvre d'une procédure de simulations pour l'optimisation est très coûteuse en temps de calcul, étant donné que ces points générés doivent couvrir tout l'espace des variables (figure I.18), (les fonctions C_I , G_i et h_j doivent être évaluées en ces points). Parmi ces méthodes stochastiques, les algorithmes génétiques (ou évolutionnistes), le recuit simulé et les colonies de fourmis sont

les plus développés dans le domaine de l'optimisation des structures. Ces algorithmes s'inspirent du principe des simulations de Monte Carlo et du principe de l'évolution naturelle [44].

I.6.2 Algorithmes de la programmation non linéaire

La programmation non linéaire (NLP : *NonLinear Programming*) est fondée sur le principe d'approximation de la solution par la construction à partir d'un point initial \mathbf{d}_0 d'une suite itérative \mathbf{d}^k qui converge vers la solution optimale \mathbf{d}^* , où aucune amélioration n'est possible. Les différentes méthodes de la NLP se distinguent entre elles par la façon de passer d'un point \mathbf{d}_k au point suivant autre \mathbf{d}_{k+1} . Autrement dit, la direction à prendre et le pas de descente pour atteindre l'optimum. Soit le problème d'optimisation non linéaire sous limitation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d}) & \quad (I.22) \\ \text{sous : } G_i(\mathbf{d}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

La résolution de ce type de problème est basée sur la minimisation de la fonction *Lagrangienne* regroupant la fonction objectif f et les limitations G

$$L(\mathbf{d}, \lambda) = f(\mathbf{d}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i(\mathbf{d}) \quad (I.23)$$

où λ_i sont les multiplicateurs de *Lagrange*. Ainsi, le problème d'optimisation avec limitations est ramené à un problème d'optimisation sans limitations.

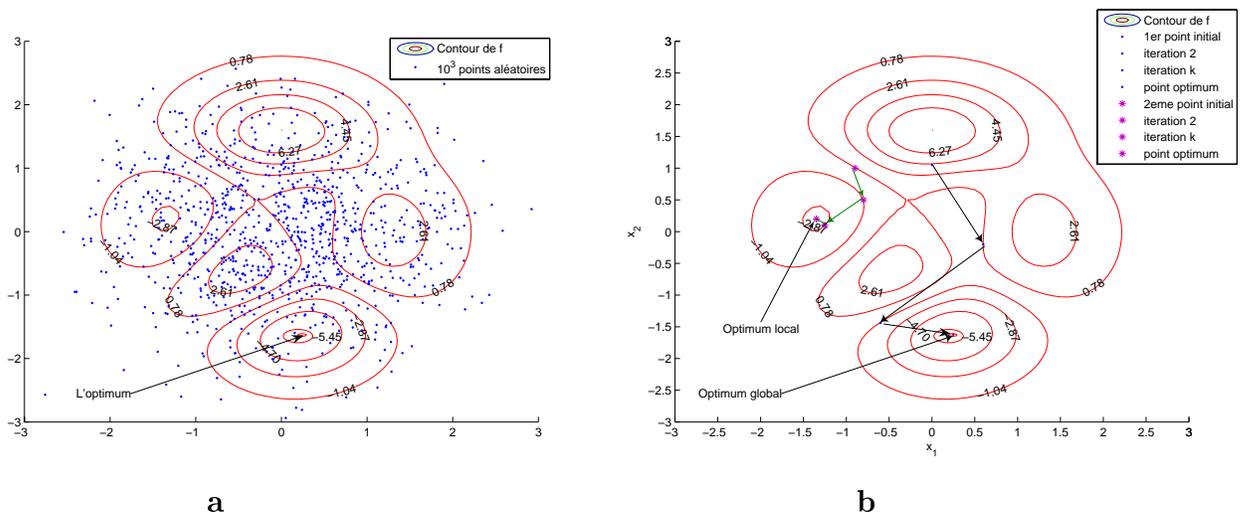


Figure I.18: Minimisation d'une fonction par : a) simulations stochastiques b) NLP

Conditions d'optimalité

Les conditions d'optimalité (KKT) énoncées par *Karush, Kuhn et Tucker* [3] permettent de vérifier si le point donné est un optimum ou non. Si \mathbf{d}^* est un optimum local

de l'équation I.22 alors il existe un vecteur $\lambda^* \in \mathfrak{R}^m$ qui vérifie les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a)} \\ \lambda_i^* \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \nabla_{\mathbf{d}} L(\mathbf{d}^*, \lambda^*) = \nabla_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d}^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla_{\mathbf{d}} G_i(\mathbf{d}^*) = 0 \\ \lambda_i^* G_i(\mathbf{d}^*) = 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \text{b)} \\ \forall s \in \mathfrak{R}^n \quad s^T \nabla_{\mathbf{d}}^2 L(\mathbf{d}^*, \lambda^*) s \geq 0 \quad \text{tel que} \quad \nabla_{\mathbf{d}} G_i^*(\mathbf{d}^*)^T s = 0 \end{array} \right.$$

La condition **a)** est appelée "condition nécessaire d'optimalité du premier ordre". Cette condition signifie qu'à l'optimum \mathbf{d}^* , le gradient de la fonction objectif est une combinaison linéaire des gradients des contraintes actives G_i^* (figure I.19). La condition **b)** qui est appelée "condition nécessaire du second ordre" signifie que le Hessian du Lagrangien L est semi-défini positif, tels que les gradients des contraintes actives G_i^* sont linéairement indépendants. D'un point de vue géométrique, aucune direction admissible n'est possible pour minimiser la fonction f .

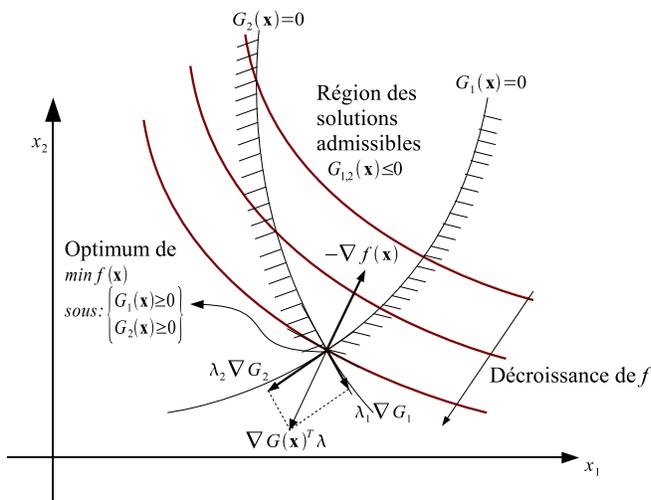


Figure I.19: Conditions d'optimalité

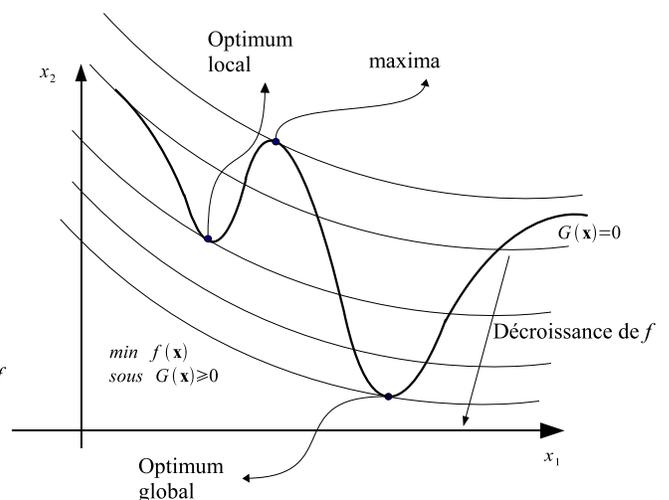


Figure I.20: Problème non convexe

Les conditions de KKT ont permis le développement de nombreux algorithmes qui sont souvent classés en trois classes différentes.

- **Les méthodes d'ordre 2** requièrent le calcul du Hessian du Lagrangien et des gradients de f et de G . Les méthodes les plus connues sont la méthode de *Newton* et la méthode de programmation quadratique séquentielle (SQP).
- **Les méthodes d'ordre 1** nécessitent uniquement le calcul des gradients de f et G , le Hessian du Lagrangien est approximé à chaque itération lorsqu'il est exigé. Nous pouvons citer les méthodes suivantes :
 - la méthode du gradient projeté ;
 - la méthode du Lagrangien augmenté ;
 - la méthode des régions de confiance (*Trust Region Method*) ;
 - les méthodes quasi-Newton (BFGS et DFP) ;

- l’algorithme SLP (*Sequential Linear Programming*);
- l’algorithme NLPQL qui combine SQP et l’approximation du Hessien par BFGS.
- **Les méthodes d’ordre 0** n’exigent ni le calcul des gradients ni du Hessien. Elles ne demandent que l’évaluation de f et de G à chaque itération. Les méthodes les plus populaires sont :
 - les méthodes des pénalités ;
 - l’algorithme du simplex adapté au problème d’optimisation non-linéaire ;
 - la méthode de *Nelder Mead*.

I.6.3 Bilan et remarques sur les algorithmes d’optimisation

Le développement des algorithmes efficaces et robustes pour la résolution des problèmes d’optimisation a été le souci majeur de la programmation mathématique. L’utilisation de ces algorithmes pour résoudre des problèmes non convexes dépend largement du point de départ donnée à l’algorithme. La figure I.20 montre que pour une fonction f non convexe, la solution obtenue dépend fortement du point initial. L’optimum global peut être trouvé si seulement si la plus forte pente au point de départ est vers la direction de l’optimum global.

Dans les problèmes non convexes, les algorithmes de la NLP ne garantissent pas la convergence vers l’optimum global. Pour ces raisons, de nombreux auteurs préfèrent l’utilisation des méthodes stochastiques telles que les algorithmes génétiques. Certes, l’avantage de ces méthodes réside dans leur robustesse car elles permettent de trouver l’optimum global. Néanmoins, ces approches sont peu efficaces car elles sont très coûteuses en temps de calcul [45].

Les méthodes de la NLP d’ordre 0 souffrent souvent des problèmes de convergence et d’efficacité. Les méthodes d’ordre 2 sont très efficaces mais le calcul du Hessien n’est pas toujours facile à obtenir, surtout lorsque les gradients de G sont calculés par différences finies. Les méthodes d’ordre 1 sont les plus utilisés car elles présentent le meilleur rapport efficacité/robustesse. Dans ce travail, nous avons utilisé l’algorithme NLPQL détaillé dans l’annexe I.

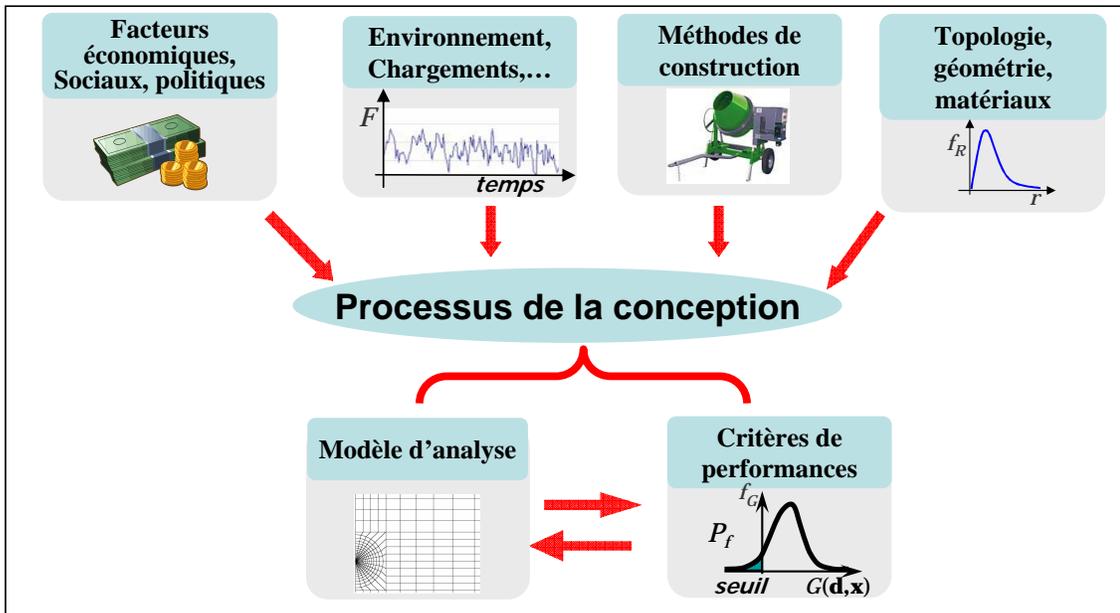
I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les principaux fondements de la théorie de la fiabilité des structures. L’analyse de fiabilité permet l’évaluation de la probabilité de défaillance et représente ainsi un outil d’aide à la décision. L’intégration de la théorie de la fiabilité dans l’optimisation des structures est une démarche rationnelle permettant de réduire les coûts sans compromettre la fiabilité et la robustesse structural.

L’utilisation des coefficients partiels de sécurité dans l’optimisation des structures ne permet pas d’assurer le niveau de fiabilité exigé, étant donné que ces coefficients ne fournissent pas une mesure explicite de la marge de sûreté et de la probabilité de défaillance. De plus, la complexité de l’analyse des incertitudes croît largement dans les problèmes industriels, impliquant des fonctions d’état limite fortement non linéaires et des variables

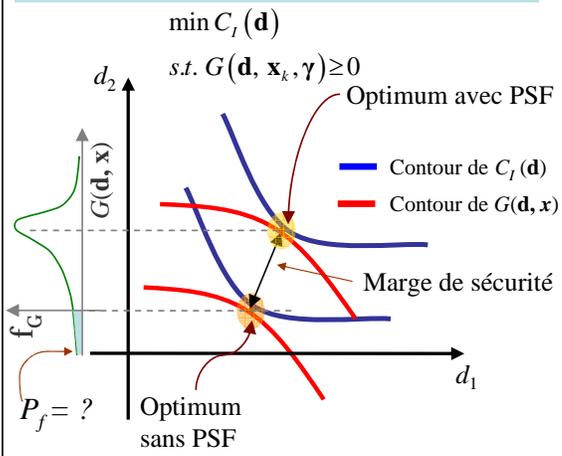
non gaussiennes et/ou corrélées. Pour cette raison, l'optimisation basée sur les coefficients partiels de sécurité n'est pas adaptée pour la prise en compte des incertitudes.

Les formulations de la RBDO, évoquées dans ce chapitre visent à rechercher la conception optimale, tout en maîtrisant la propagation des incertitudes dans les critères de performance. La considération explicite de la fiabilité offre une mesure rationnelle de la marge de sécurité nécessaire pour les critères de performance. Cela accorde à l'optimum fiabiliste une robustesse en le rendant insensible aux incertitudes, puisque le rôle des variables incertaines est réduit au cours de la procédure d'optimisation. Toutefois, la RBDO reste peu praticable pour des applications industrielles, en raison du temps de calcul exigé et aux problèmes de convergence et de stabilité dus au couplage mécano-fiabiliste. En outre, l'intégration de la fiabilité système et la fiabilité dépendant du temps dans l'optimisation est aux prémices de la recherche scientifique. Ces approches sont aujourd'hui un domaine de recherche très actif. Le grand défi des années à venir consiste à tenir compte des incertitudes tout au long de la durée de vie de la structure.



L'optimisation est un outil d'aide à la décision

Approche Déterministe basée sur les coefficients de sécurité



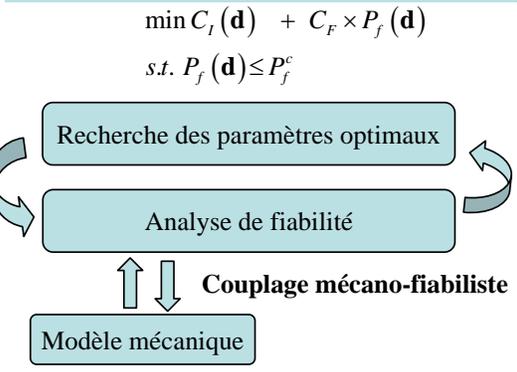
Inconvénients :

- La marge de sécurité n'est pas explicitement liée à la fiabilité.
- La fiabilité de l'optimum est inconnue.
- La propagation des incertitudes n'est pas maîtrisée.

Avantages :

- Stabilité et robustesse numériques.
- Efficacité.

Optimisation fiabiliste (RBDO)



Inconvénients :

- Problèmes numériques de convergence, de précision et d'efficacité (chapitre II)

Avantages :

- Prise en compte explicite de la fiabilité
- Maîtrise de la propagation des incertitudes dans les systèmes mécaniques (Chapitre III)
- Prise en compte de l'effet du temps et la propagation des incertitudes dans les problèmes de durabilité des structures (Chapitre V)

Étude comparative des méthodes d'optimisation fiabiliste

« Mon cœur m'a dit : "Je veux savoir, je veux connaître ! Instruis-moi, Khayyâm, toi qui as tant travaillé !". J'ai prononcé la première lettre de l'alphabet, et mon cœur m'a dit : "Maintenant, je sais. Un est le premier chiffre du nombre qui ne finit pas..." »
Omar Khayyâm (1047-1122)

Sommaire

II.1	Introduction	32
II.2	Etat de l'art de la RBDO	33
II.3	Formulation RBDO à deux-niveaux	37
II.3.1	Approche de l'indice de fiabilité (RIA)	38
II.3.2	Approche de la mesure de performance (PMA)	40
II.4	Formulation RBDO mono-niveau	43
II.4.1	Approche basée sur les conditions d'optimalité KKT	43
II.4.2	Méthode AMA	44
II.4.3	Méthode SLA	45
II.5	Formulation RBDO séquentielle découplée	47
II.5.1	Méthode SFA	48
II.5.2	Méthode SORA	48
II.5.3	Méthode SAP	49
II.5.4	Calcul des sensibilités dans les approches découplées	50
II.6	Étude comparative des différentes approches	51
II.6.1	Problèmes analytiques	52
II.6.2	Optimisation d'un poteau	60
II.6.3	Optimisation de treillis	62
II.6.4	Synthèse Globale	66
II.7	Conclusion	69

II.1 Introduction

D'une façon générale, la formulation de l'optimisation fiabiliste (RBDO) est composée de deux procédures, la première recherche les paramètres optimaux dans l'espace physique des variables d'optimisation, et la deuxième vérifie les limitations fiabilistes de la configuration choisie. Dans le cas des procédures imbriquées plusieurs calculs mécaniques sont nécessaires.

La figure II.1 montre les principaux modèles impliqués dans une approche d'optimisation fiabiliste. La complexité de la modélisation mécanique augmente avec la présence des comportements non linéaires, les modèles géométriques de la CAO (Conception Assistée par Ordinateur) et l'emploi de la méthode des éléments finis pour le calcul des structures. Les algorithmes itératifs basés sur les gradients sont souvent utilisés pour la résolution du problème d'optimisation. Le calcul des gradients des limitations fiabilistes n'est pas seulement coûteux en temps de calcul mais il peut aussi compromettre la convergence de l'algorithme, surtout lorsque ces gradients sont calculés par des méthodes numériques (i.e. différences finies). Dès lors, les problèmes de convergence, de précision, de stabilité et d'efficacité apparaissent dans les procédures de la RBDO.

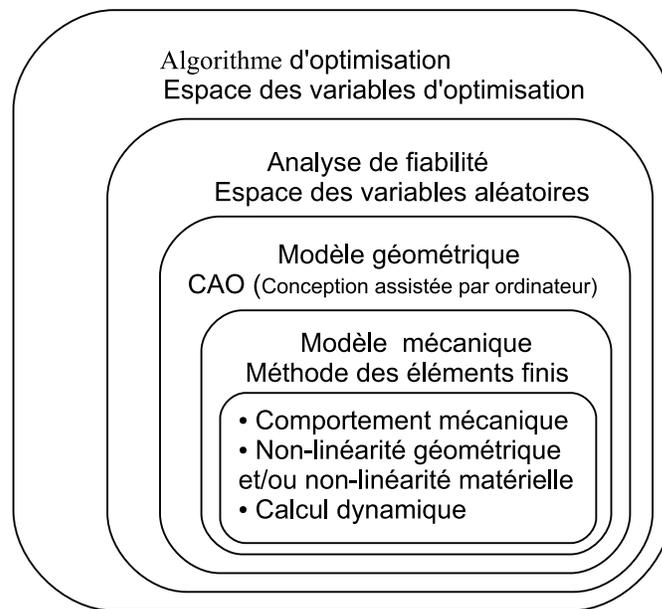


Figure II.1: Les procédures imbriquées de la RBDO.

Pour cette raison, la résolution du problème de la RBDO implique des ressources de calcul considérables, ce qui limite sérieusement les domaines d'application de cette approche. De nombreux travaux de recherche ont développé des approches intéressantes afin de réduire l'effort de calcul et assurer la convergence de la procédure d'optimisation. D'une façon générale, un bon solveur doit satisfaire les conditions d'efficacité (i.e. temps de calcul), de précision (i.e. précision du point optimal), de généralité (i.e. capacité à traiter différents types de problèmes, avec ou sans grand nombre de variables), de robustesse (i.e.

stabilité de la convergence pour n'importe quel point initial) et de convergence (trouver l'optimum en quelques itérations).

Dans ce chapitre, nous présentons l'état de l'art de l'optimisation fiabiliste, communément appelée RBDO, suivi par les applications. Une étude comparative des différentes approches sur la base des différents critères numériques (i.e. généralité, efficacité, précision, robustesse, convergence) est réalisée.

II.2 Etat de l'art de la RBDO

L'évaluation des limitations fiabilistes est la clé de résolution du problème de la RBDO. Cette évaluation implique un effort de calcul considérable, ainsi que des problèmes de convergence et de stabilité. La formulation de base de la RBDO (équation I.19) a pour objectif de rechercher la solution optimale vérifiant une probabilité de défaillance inférieure ou égale à une probabilité cible P_f^c .

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} C_I(\mathbf{d}) & \tag{II.1} \\ \text{sous : } \begin{cases} \text{Prob}[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_f^c & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 & j = m + 1, \dots, n_h \end{cases} \end{aligned}$$

où C_I est la fonction coût, G_i sont les fonctions d'état limite ou fonctions de performance, \mathbf{d} est le vecteur des variables d'optimisation, \mathbf{X} est le vecteur des variables aléatoires et h_j sont des limitations déterministes.

Cette formulation (équation II.1) est à l'origine de tous les développements en RBDO. Elle peut être résolue par différents outils, qui peuvent être classés en deux classes principales : les algorithmes stochastiques basés sur les simulations aléatoires (e.g. algorithmes génétiques, recuit simulé, colonies de fourmis, ...) et les algorithmes de la programmation non linéaire (NLP). Ces derniers sont couramment basés sur le calcul des gradients de la fonction objectif et des limitations.

Nous proposons dans cet état de l'art une classification des différentes approches de la RBDO. La figure II.2 montre les différents travaux classés dans trois catégories principales :

- méthodes à deux-niveaux (DLA : *Double-Level Approaches*);
- méthodes mono-niveau (MLA : *Mono-Level Approaches*);
- méthodes séquentielles découplées (SDA : *Sequential Decoupled Approaches*).

Les premiers travaux de recherche sur la RBDO (*Moses et al.* [46] en 1967) ont suggéré l'emploi de la NLP lorsque les limitations probabilistes sont estimées par l'approximation des moments statistiques (i.e. moyenne et écart-type) de la fonction de performance, en raison de la disponibilité des gradients des limitations probabilistes. La définition d'un indice de fiabilité invariant calculé par l'approximation FORM (*First Order Reliability Method*) [4] a conduit à un grand intérêt aux méthodes de la NLP. De nombreux auteurs [47, 48, 49, 50] ont utilisé la méthode FORM pour résoudre le problème de la RBDO, puisque l'approximation FORM est plus efficace que les méthodes de simulation (MCS). La méthode FORM vise seulement à chercher dans l'espace normé le point de défaillance le plus probable (MPFP : *Most Probable Failure Point*). L'indice de fiabilité est donné par

la distance entre ce point et l'origine de l'espace normé. Ainsi, les limitations probabilistes de l'équation II.1 (i.e. exprimées en terme de la probabilité de défaillance) sont transformées en limitations dites "fiabilistes" (i.e. exprimées en terme de l'indice de fiabilité). La formulation (équation I.20) utilisant l'approche de l'indice de fiabilité (RIA : *Reliability Index Approach*) est la plus utilisée dans la littérature pour la RBDO. En plus, elle a donnée naissance à d'autres approches de la RBDO que nous allons détailler dans la suite de ce chapitre. Cependant, le calcul de l'indice de fiabilité par l'approximation FORM est lui-même une procédure itérative. Le problème de la RBDO est formulé par deux boucles imbriquées, la première recherche les paramètres optimaux et la deuxième effectue l'analyse de fiabilité. Cette formulation est souvent appelée **approche à deux-niveaux**.

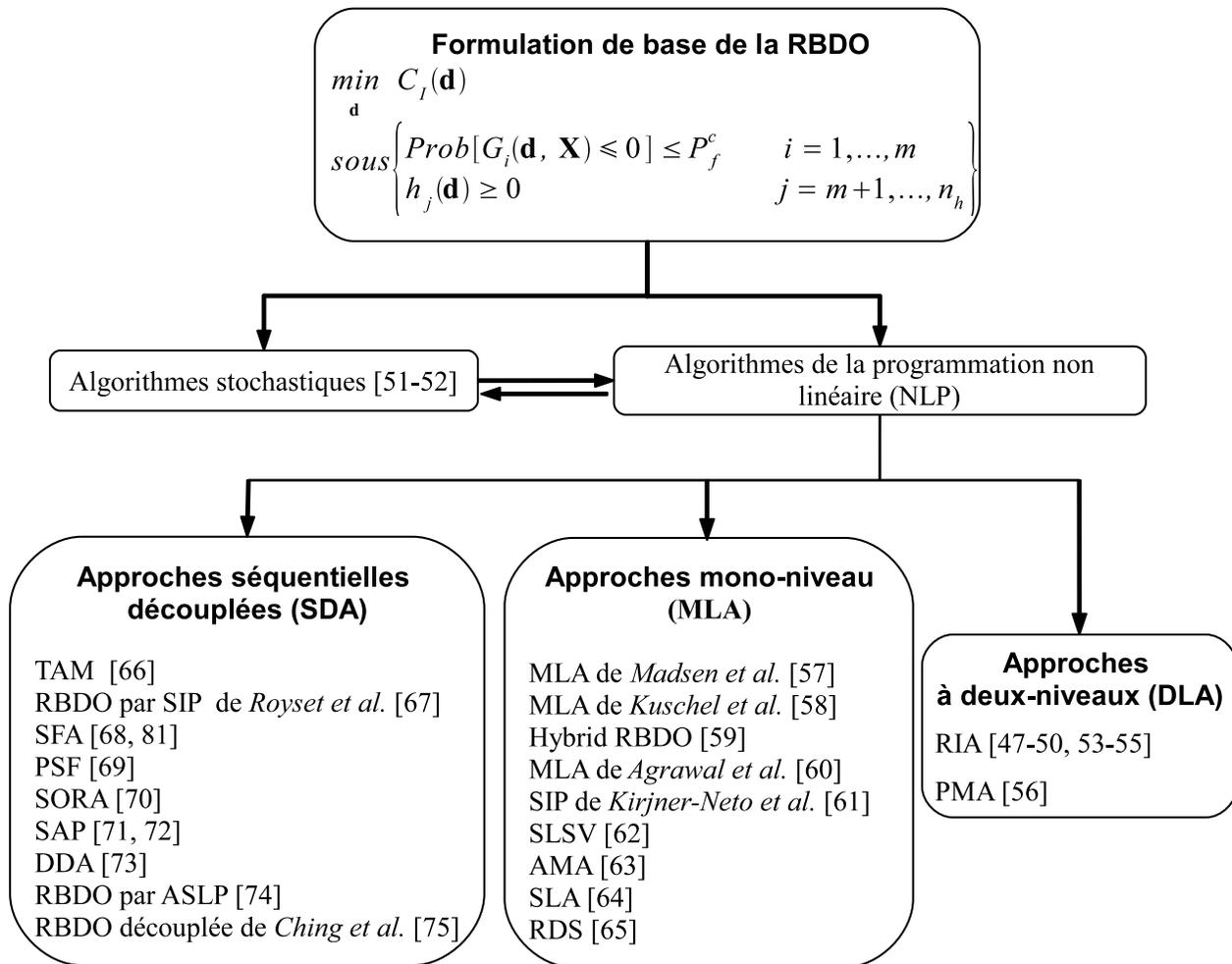


Figure II.2: Classification des différentes méthodes de la RBDO.

L'utilisation des méthodes stochastiques pour la RBDO est une nouvelle démarche motivée par la puissance des ordinateurs d'aujourd'hui. Les simulations aléatoires sont employées pour l'optimisation et l'évaluation des limitations probabilistes. Ces approches peuvent s'appuyer sur les méta-modèles (e.g. réseaux de neurones, surfaces de réponse, ...) permettant de remplacer le modèle mécanique (i.e. MEF) afin de réduire le temps de calcul souvent très important [51, 52].

Étant donné que le temps de calcul est le grand obstacle à la RBDO, plusieurs auteurs

ont développé des approches employant les surfaces de réponse avec les procédures de la RBDO. *Grandhi et al.* [53] ont utilisé une interpolation non linéaire de l'état limite. Cette approximation vise à accélérer la convergence de l'algorithme de HL-RF utilisé pour l'analyse de fiabilité. *Gasser et al.* [54] ont introduit deux approximations : la première concerne le modèle mécanique, qui est remplacé par une surface de réponse quadratique et la deuxième approxime la probabilité de défaillance par une interpolation exponentielle en fonction des variables d'optimisation. *Kaymaz et al.* [55] ont remplacé les limitations fiabilistes par un réseau de pétri. L'emploi des surfaces de réponse dans la RBDO est une démarche intéressante car elle permet de remplacer le modèle mécanique (i.e. MEF) par un modèle explicite, visant ainsi à économiser le temps du calcul, afin de passer à des applications industrielles complexes. Néanmoins, la construction de la surface de réponse peut être elle-même très coûteuse en temps de calcul.

Par ailleurs, de nombreux auteurs ont concentré leurs efforts sur le développement de nouvelles formulations de la RBDO. *Tu et al.* [56] ont introduit le concept de la mesure de performance (PMA : *Performance Measure Approach*), qui consiste à convertir les limitations fiabilistes en limitations de performances minimales, vérifiant une fiabilité cible. Dans la formulation classique de la RBDO, l'optimisation est menée sous la limitation de l'indice de fiabilité qui doit être supérieur ou égal à un niveau cible. Le calcul de cet indice se traduit par la recherche du MPFP. En revanche, dans la formulation PMA, l'optimisation est conduite sous la limitation de performance minimale qui doit satisfaire une fiabilité cible. Le calcul de cette performance minimale se traduit par la recherche dans l'espace normé du point de performance minimale cible (MPTP : *Minimum Performance Target Point*). La recherche du point MPTP est formulée par la minimisation de la fonction de performance sous la limitation de l'indice de fiabilité cible. L'approche PMA est perçue comme l'inverse de l'approximation FORM. L'estimation du MPTP est elle-même une procédure itérative ; ainsi la RBDO basée sur PMA est une approche à deux-niveaux (DLA)

De nombreux chercheurs ont mis en œuvre des formulations alternatives pour la RBDO : des formulations dites mono-niveau ou à une seule-boucle et des approches découplées. D'une manière générale, ces méthodes visent à éviter l'exécution de l'analyse de fiabilité dans la boucle principale de l'optimisation. Le problème de la RBDO est reformulé de façon à convertir les limitations fiabilistes ou probabilistes en limitations déterministes n'engageant pas beaucoup d'effort de calcul.

Madsen et al. [57] ont été les premiers à proposer une méthode mono-niveau (MLA : *Mono-Level Approach*). Ces auteurs ont remplacé les contraintes fiabilistes par les conditions d'optimalité de l'approximation FORM. De cette façon, la recherche du point de défaillance MPFP et des variables d'optimisation est simultanée. *Kuschel et al.* [58] ont amélioré la formulation en l'adoptant pour le problème de maximisation de la fiabilité sous les limitations de coût. *Kharmanda et al.* [59] ont proposé une approche similaire visant à combiner l'espace physique des variables d'optimisation et l'espace normé des variables aléatoires dans un espace "hybride". Le problème de la RBDO est résolu par la minimisation d'une fonction contenant la fonction coût et le critère de fiabilité, sous les conditions d'optimalité de l'approximation FORM. *Agrawal et al.* [60] ont utilisé le même concept pour la recherche simultanée du point optimal et du MPTP. Ces auteurs ont transformé l'approche PMA à deux-niveaux en une approche mono-niveau en s'inspirant

de l'idée proposée par *Madsen et al.* [57].

Kirjner et al. [61] ont développé une approche originale pour la RBDO, où les limitations fiabilistes sont transformées en un nombre infini de limitations déterministes. Le nouveau problème de la RBDO est résolu par les algorithmes de la programmation semi-infinie (SIP : *Semi Infinite Programmning*). Par ailleurs, *Chen et al.* [62] ont proposé l'idée de transformer les contraintes fiabilistes en contraintes déterministes ; le problème est résolu par les algorithmes classiques de la programmation non linéaire. *Putko et al.* [63] ont combiné ce concept avec l'approche de l'approximation des moments statistiques de la réponse (AMA : *Approximate Moment Approach*) pour développer une procédure mono-niveau dédiée à l'optimisation robuste. *Liang et al.* [64] ont proposé une approche appelée SLA (*Single Loop Approach*) similaire à celle proposée par *Chen et al.* [62]. Cette approche s'appuie sur une mesure du fractile de la fonction de performance et sur une approximation directe du MPTP. La différence entre PMA et SLA réside dans le calcul du MPTP, SLA utilise une approximation et PMA utilise une procédure itérative. Récemment, *Shan et al.* [65] ont proposé de convertir le problème de la RBDO en problème déterministe par la transformation de l'espace de conception en espace dit "fiable" (RDS : *Reliable Design Space*).

Par ailleurs, les approches séquentielles découplées (SDA : *Sequential Decoupled Approaches*) visent à convertir le problème de la RBDO en plusieurs sous-problèmes d'optimisation déterministe résolus séquentiellement. Le lien entre l'exigence de fiabilité et l'optimisation déterministe est assuré par des approximations ou par des analyses de fiabilité effectuées séparément. En d'autres termes, l'analyse de fiabilité est exécutée à l'extérieur de chaque sous-problème d'optimisation déterministe.

Tornng et al. [66] ont approximé les limitations fiabilistes par le développement en série de *Taylor* autour du point moyen, cette approximation est effectuée à l'extérieur de l'optimisation déterministe. *Royset et al.* [67] ont utilisé les travaux de *Kirjner et al.* [61] pour développer une méthode découplée pour la RBDO résolue par les algorithmes de la programmation semi-infinie. Ces auteurs ont remplacé les limitations fiabilistes par un ensemble de fonctions paramétrables par une analyse de fiabilité séparée du processus d'optimisation.

Wu et al.[68] ont développé une approche visant à remplacer le problème de la RBDO par un ensemble de cycles d'optimisation déterministe. Chaque cycle est résolu par les algorithmes classiques de la NLP. La conversion des contraintes fiabilistes en contraintes déterministes est assurée par des coefficients de sécurité, qui sont calculés à partir d'une analyse de fiabilité effectuée à chaque début de cycle d'optimisation déterministe. *Qu et al.* [69] ont utilisé le concept du coefficient de sécurité pour développer une approche originale de la RBDO. Un coefficient global appelé PSF (*Probabilistic Sufficiency Factor*) est évalué par des simulations de Monte Carlo combinées à une surface de réponse. Ce coefficient est le lien entre l'optimisation déterministe et l'exigence de fiabilité.

Du et al. [70] ont développé une approche similaire pour la RBDO, appelée SORA (*Sequential Optimization and Reliability Assessment*), qui transforme le problème de la RBDO en plusieurs cycles d'optimisation déterministe relié au MPTP ; ce point est calculé par une analyse de fiabilité inverse. Etant donné que l'analyse de fiabilité inverse est séparée du processus d'optimisation déterministe, elle permet d'actualiser le MPTP à

chaque convergence du cycle de l'optimisation déterministe. Le nouveau MPTP est utilisé dans le cycle suivant de l'optimisation déterministe. De ce fait, les limitations déterministes dans chaque cycle d'optimisation sont reliées au niveau de fiabilité souhaité.

Cheng et al. [71] ont utilisé les approximations basées sur le développement en série de *Taylor* pour élaborer la méthode SAP (*Sequential Approximate Programming*). Les limitations fiabilistes du problème initial de la RBDO sont approximées au voisinage du point courant (i.e. à l'itération k). En outre, l'indice de fiabilité est approximé par une relation récurrente dérivant des conditions d'optimalité de la méthode FORM. Autrement dit, le problème de la RBDO est transformé en un ensemble de sous-problèmes d'optimisation déterministe résolus séquentiellement. L'optimum est atteint au moyen des améliorations progressives de la solution de chacun des sous-problèmes approchés. Ces mêmes auteurs [72] ont adapté la technique SAP à l'approche PMA, où la mesure de performance minimale cible est approximée par une série de *Taylor* au voisinage du point courant.

Dans des travaux récents, *Zou et al.* [73] ont développé une approche découplée, appelée DDA (*Direct Decoupling Approach*) basée sur les tirages d'importance. *Chan et al.* [74] ont transformé le problème de la RBDO en séquence de sous-problèmes linéaires résolus par l'algorithme ASLP (*Adaptive Sequential Linear Programming*). *Ching et al.* [75] ont converti les contraintes fiabilistes en contraintes déterministes par l'introduction d'un facteur d'état limite et d'une fonction d'état limite nominale. Les simulations stratifiées sont utilisées pour cette transformation.

Cet état de l'art montre que le problème de la RBDO est intensivement étudié. De nombreux chercheurs ont réalisé des études comparatives entre RIA et PMA [76, 77, 78, 79, 80]. *Yang et al.* [79] ont effectué une étude comparative de plusieurs approches : SLSV (*Single Loop Single Variable*) [62], TAM (*Traditionnal Approximation Method*) [66], SORA [70] et SFA [81, 68]. Ces études comparatives sont basées uniquement sur le critère d'efficacité des méthodes. Nous estimons que les conclusions publiées dans ces travaux sont partielles, car les autres critères (i.e. précision, robustesse, convergence, généralité) ont été négligés.

La connaissance du domaine de validité des différentes approches de la RBDO est indispensable pour le choix de la méthode à utiliser. Toutefois, des études de "*benchmarking*" sur la base de plusieurs critères numériques sont peu nombreuses, voire inexistantes. Dans la suite de ce chapitre, nous proposons une étude comparative basée sur plusieurs critères de performance numériques (efficacité, convergence, précision, robustesse et généralité), qui traduisent les capacités numériques et la validité des méthodes testées dans la résolution des problèmes d'optimisation des structures.

II.3 Formulation RBDO à deux-niveaux

La formulation à deux-niveaux emploie deux boucles imbriquées, la boucle extérieure a pour objectif de chercher les paramètres optimaux et la boucle intérieure permet l'analyse de fiabilité de la configuration choisie. L'avantage des approches à deux-niveaux réside dans la simplicité d'implémentation dans les procédures d'optimisation des structures. L'analyse de la fiabilité est effectuée par l'une des approches suivantes :

- approche de l'indice de fiabilité (RIA : *Reliability Index Approach*) ;

- approche de la mesure de performance (PMA : *Performance Measure Approach*).

II.3.1 Approche de l'indice de fiabilité (RIA)

La définition d'un indice invariant, de *Hasofer et Lind* calculé par l'approximation FORM [4], a contribué à la mise en œuvre de procédures efficaces et robustes pour l'analyse de la fiabilité. L'approximation FORM est plus précise que les approximations basées sur les moments statistiques (FOSM : *First Order Second Moment*), qui sont basées sur la linéarisation de l'état limite autour du point moyen des variables aléatoires, au lieu du point de défaillance le plus probable (MPFP). L'approximation FORM est également plus efficace que les simulations de Monte Carlo. Par conséquent, l'approche de l'indice de fiabilité (RIA) basée sur FORM paraît comme le moyen le plus direct pour la RBDO. RIA a été introduite dans les procédures de la RBDO en remplaçant les limitations sur la probabilité de défaillance par celles sur les indices de fiabilité. RIA représente la formulation classique de la RBDO, donnée par :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} C_I(\mathbf{d}) & \quad (II.2) \\ \text{sous : } \begin{cases} \beta_i(\mathbf{d}; \mathbf{X}) \geq \beta^c & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 & j = m + 1, \dots, n_h \end{cases} \end{aligned}$$

où β_i est l'indice de fiabilité correspondant à l'état limite G_i et β^c est l'indice de fiabilité cible, défini au sens de l'approximation FORM par :

$$\beta^c = -\Phi^{-1}(P_f^c) \quad (II.3)$$

où $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition normale et P_f^c est la probabilité de défaillance cible. L'indice de fiabilité β_i est calculé dans l'espace normé des variables aléatoires \mathbf{X} (où leurs réalisations sont notées \mathbf{x}). Ces variables sont transformées en variables normées, centrées et décorréelées \mathbf{U} par la transformation iso-probabiliste T , où $\mathbf{u} = T(\mathbf{x})$. L'indice de fiabilité β_i représente la distance minimale entre l'origine de l'espace normé et l'état limite $\hat{G}_i(\mathbf{u})$ qui est la transformation de $G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ dans cet espace. Le calcul de β_i est formulé par la recherche du point de défaillance le plus proche par rapport à l'origine de l'espace normé, obtenu par la résolution du problème d'optimisation posé dans l'équation I.3. La solution \mathbf{u}^* de ce problème d'optimisation est souvent appelée le point de conception ou le point de défaillance le plus probable MPFP (*Most Probable Failure Point*). Par abus de langage, la terminologie MPFP est adoptée dans ce travail pour éviter la confusion avec le point optimal appelé également point de conception. L'indice de fiabilité β_i est donné par :

$$\beta_i = \|\mathbf{u}^*\| \quad (II.4)$$

II.3.1.1 Algorithme HL-RF

Le problème de fiabilité de l'équation I.3 est généralement résolu par les algorithmes de la programmation non linéaire. L'algorithme de HL-RF (*Hasofer Lind-Rackwitz Fiessler*)[13] est souvent utilisé pour l'analyse de fiabilité. La mise en œuvre de cet algorithme est très simple, car il vise à chercher itérativement le MPFP. Le principe itératif repose

sur le calcul d'une direction de descente $\boldsymbol{\eta}^{(k)}$ et la projection du nouveau point $\mathbf{u}^{(k+1)}$ sur la surface d'état limite \hat{G}_i , comme le montre la figure II.3.

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = (\mathbf{u}^{(k)} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(k)}) \boldsymbol{\eta}^{(k)} + \frac{\hat{G}_i(\mathbf{u}^{(k)})}{\|\nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^{(k)})\|} \boldsymbol{\eta}^{(k)} \quad (\text{II.5})$$

où $\boldsymbol{\eta}^{(k)}$ est la direction de descente à l'itération k au point $\mathbf{u}^{(k)}$, elle est donnée par le gradient de l'état limite dans l'espace normé :

$$\boldsymbol{\eta}^{(k)} = -\frac{\nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^{(k)})}{\|\nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^{(k)})\|} \quad (\text{II.6})$$

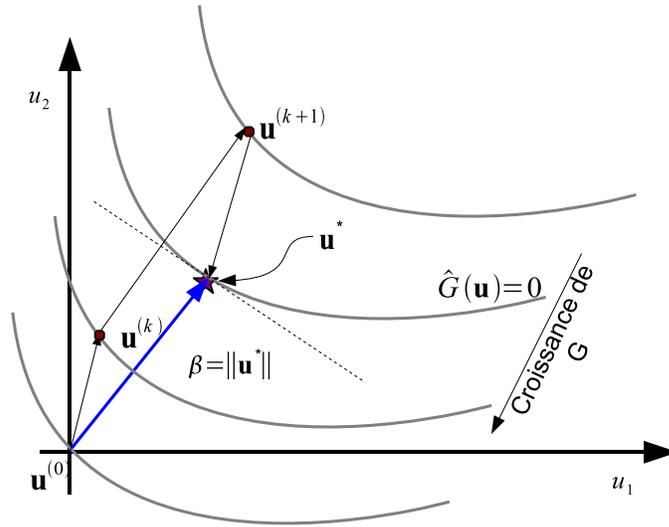


Figure II.3: Recherche du point MPFP dans RIA.

Le second terme de l'équation II.5 permet une correction du nouvel itéré $\mathbf{u}^{(k+1)}$ afin de le projeter sur la surface d'état limite \hat{G}_i . Malgré son efficacité, l'algorithme HL-RF n'est pas robuste et manque de stabilité, surtout lorsque la fonction d'état limite est fortement non linéaire. Cette instabilité est due à la longueur du pas de descente prise toujours égale à 1. Une amélioration de l'algorithme consiste à ajouter une fonction de mérite permettant de maîtriser le pas de descente et rendre ainsi l'algorithme stable [14, 15]. Toutefois, les algorithmes généraux d'optimisation peuvent être utilisés pour résoudre le problème de fiabilité.

II.3.1.2 Calcul des sensibilités

Dans notre étude, la méthode SQP utilisée pour chercher les paramètres optimaux \mathbf{d} exige le calcul des sensibilités des limitations fiabilistes. Ces sensibilités correspondent au gradient de l'indice de fiabilité par rapport aux variables d'optimisation $\partial\beta_i/\partial\mathbf{d}$. Étant donné que le calcul du gradient par différences finies nécessite au moins une analyse de

fiabilité supplémentaire par variable, plusieurs appels au modèle mécanique sont exigés. Pour un schéma de différences finies avant, le gradient est donné par :

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial d_j} = \frac{\beta_i(\mathbf{d} + \Delta d_j; \mathbf{X}) - \beta_i(\mathbf{d}; \mathbf{X})}{\Delta d_j} \quad (\text{II.7})$$

où Δd_j est une perturbation de la composante j du vecteur des variables d'optimisation \mathbf{d} de dimension p . De ce fait, pour l'évaluation du gradient d'un indice de fiabilité quelconque, il faut $p + 1$ calculs de fiabilité.

Le calcul du gradient par différences finies est surtout très coûteux en temps de calcul. Pour cela, des expressions analytiques ou semi-analytiques sont développées [82] pour éviter le calcul du gradient par des méthodes de différences finies. Ces expressions distinguent la nature des variables d'optimisation \mathbf{d} .

- **Cas 1** : les variables d'optimisation \mathbf{d} sont des paramètres déterministes. Le gradient de l'indice de fiabilité par rapport à \mathbf{d} peut être estimé par l'expression semi-analytiques.

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial d_j} = \frac{1}{\left\| \nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^*) \right\|} \frac{\partial G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial d_j} \quad (\text{II.8})$$

où $\left\| \nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^*) \right\|$ est la norme du gradient de l'état limite dans l'espace normé au MPFP. Ce gradient est calculé dans la procédure de fiabilité (i.e. l'algorithme HL-RF). L'évaluation des sensibilités $\partial \beta_i / \partial \mathbf{d}$ se ramène au calcul du gradient de l'état limite G_i par rapport aux variables déterministes \mathbf{d} dans l'espace physique. Pour cela, un schéma de différences finies peut être seulement utilisé pour G .

- **Cas 2** : les variables d'optimisation sont des paramètres de distribution (e.g. moyennes) de certaines variables aléatoires, notées $\mathbf{X}_{\mathbf{d}}$: le gradient de l'indice de fiabilité par rapport aux variables d'optimisation \mathbf{d} est directement déduit des résultats de l'analyse de fiabilité :

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial d_j} = \alpha_{i,j}^* \left(\frac{\partial T(x_{d_j})}{\partial d_j} \right) \quad (\text{II.9})$$

où $\partial T(x_{\mathbf{d}}) / \partial d_j$ est la dérivée de la transformation iso-probabiliste T par rapport aux paramètres d_j , $\alpha_{i,j}^*$ est le cosinus directeur de la variable aléatoire X_{d_j} . Les cosinus directeurs de toutes les variables aléatoires par rapport à l'état limite G_i au point \mathbf{u}^* sont calculés lors de l'analyse de fiabilité, tel que :

$$\alpha_i^* = - \frac{\nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^*)}{\left\| \nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^*) \right\|} \quad (\text{II.10})$$

II.3.2 Approche de la mesure de performance (PMA)

Cette approche a été proposée [56] pour remédier aux problèmes de convergence et de robustesse de RIA. PMA vise à convertir les limitations fiabilistes en limitations sur la

performance minimale vérifiant la fiabilité souhaitée. Autrement dit, l'optimum recherché doit satisfaire une performance minimale qui garantit la fiabilité cible.

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{d}} C_I(\mathbf{d}) & (II.11) \\ \text{sous : } & \begin{cases} G_i^p(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \geq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 & j = m + 1, \dots, n_h \end{cases} \end{aligned}$$

où G_i^p est la mesure de performance minimale qui correspond à l'indice de fiabilité cible β^c . L'idée de l'approche PMA est basée sur la recherche de cette performance minimale cible dans l'espace normé des variables aléatoires de telle sorte que l'indice de fiabilité soit égal à la cible. Pour cela, PMA est formulée en problème inverse de celui de la méthode FORM, la fonction de performance est minimisée pour satisfaire l'indice de fiabilité cible. D'ailleurs, cette méthode a été initialement appelée FORM inverse (I-FORM : *Inverse-First Order Reliability Method*) [83, 84], proposée initialement pour des problèmes d'analyse de fiabilité avec des paramètres inconnus.

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}} \hat{G}(\mathbf{u}) & (II.12) \\ \text{sous : } & \|\mathbf{u}\| = \beta^c \end{aligned}$$

PMA cherche la réalisation des variables aléatoires \mathbf{u} qui peut assurer une performance minimale en garantissant la fiabilité cible. Ce point noté \mathbf{u}^{*c} est appelé le point de performance minimale cible (MPTP : *Minimum Performance Target Point*). La performance minimale cible G_i^p est donnée par :

$$G_i^p = G_i(\mathbf{d}, T^{-1}(\mathbf{u}^{*c})) \quad (II.13)$$

où $T^{-1}(\mathbf{u}^{*c})$ est le MPTP dans l'espace physique donné par la transformation iso-probabiliste inverse T^{-1} . La figure II.4 montre que le point \mathbf{u}^{*c} peut être recherché sur la sphère de rayon égal à l'indice de fiabilité cible β^c . En ce point l'état limite \hat{G}_i est tangent à cette sphère. Des algorithmes spécifiques tels que AMV (*Advanced Mean value*), CMV (*Conjugate Mean Value*) ou HMV (*Hybrid Mean Value*) sont développés au problème de l'analyse de fiabilité inverse [85]. En plus, ces algorithmes sont très simples à implémenter, car ils n'exigent pas le calcul de la longueur du pas de descente.

II.3.2.1 Algorithme AMV (*Advanced Mean Value*)

L'origine de l'espace normé est prise comme point de départ de l'algorithme AMV. Le schéma itératif de cet algorithme vise à explorer la sphère de rayon β^c (Fig.II.4). Le nouvel itéré $\mathbf{u}^{(k+1)}$ est obtenu par la direction de descente multipliée par l'indice de fiabilité cible β^c

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \boldsymbol{\eta}^{(k)} \beta^c \quad (II.14)$$

où $\boldsymbol{\eta}^{(k)}$ est la direction de descente à l'itération k au point $\mathbf{u}^{(k)}$. Elle est calculée à partir du gradient de l'état limite dans l'espace normé, donnée dans l'équation II.6. Cet algorithme est très simple et facile à mettre en œuvre. Cependant, des problèmes de convergence surgissent quand la fonction d'état limite \hat{G}_i est non convexe [85]. Pour cela, d'autres variantes ont été développées pour palier les difficultés de convergence.

II.3.2.2 Algorithmes CMV et HMV

L'algorithme CMV (*Conjugate Mean Value*) a pour objectif de renforcer la convergence quand la fonction d'état limite est non convexe. La méthode CMV vise à calculer la direction de descente $\boldsymbol{\eta}^{(k+1)}$ à partir de trois points, à la place d'un seul point dans AMV. Le nouvel itéré $\mathbf{u}^{(k+1)}$ est donné par :

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \frac{\boldsymbol{\eta}^{(k)} + \boldsymbol{\eta}^{(k-1)} + \boldsymbol{\eta}^{(k-2)}}{\|\boldsymbol{\eta}^{(k)} + \boldsymbol{\eta}^{(k-1)} + \boldsymbol{\eta}^{(k-2)}\|} \beta^c \quad (\text{II.15})$$

où $\boldsymbol{\eta}^{(k)}$, $\boldsymbol{\eta}^{(k-1)}$ et $\boldsymbol{\eta}^{(k-2)}$ sont les directions de descente calculées respectivement aux points $\mathbf{u}^{(k)}$, $\mathbf{u}^{(k-1)}$ et $\mathbf{u}^{(k-2)}$ par l'équation II.6. Les deux premiers points $\mathbf{u}^{(1)}$ et $\mathbf{u}^{(2)}$ sont calculés par l'équation II.14. Bien que l'algorithme CMV soit robuste, il exige au moins deux calculs supplémentaires par rapport à AMV. *Youn et al.* [85] ont développé une méthode hybride qui associe les deux algorithmes AMV et CMV en fonction de la convexité de l'état limite. Cet algorithme, appelé HMV (*Hybrid Mean Value*), tente de trouver l'équilibre entre l'efficacité de l'approche AMV et la robustesse de la méthode CMV. L'organigramme de HMV est donné sur la figure B.1 de l'annexe B

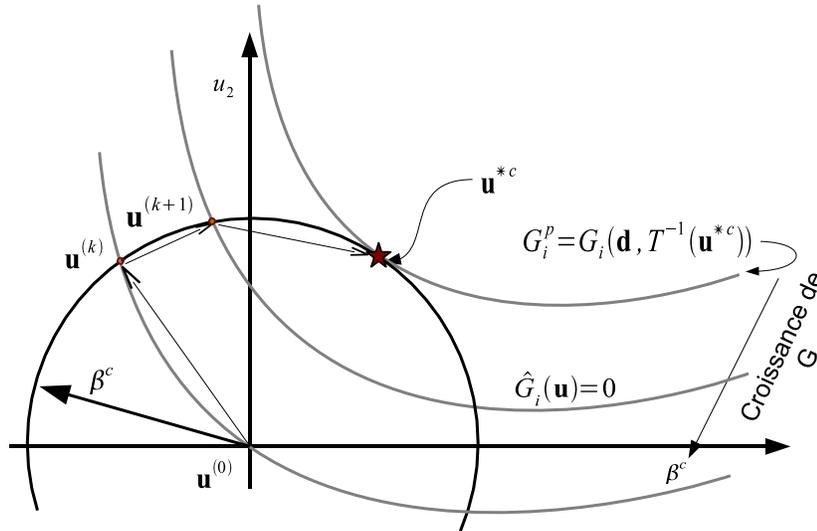


Figure II.4: Recherche du MPTP dans PMA.

II.3.2.3 Calcul des sensibilités

L'algorithme d'optimisation exige le calcul du gradient de la mesure de performance G^p par rapport aux variables d'optimisation \mathbf{d} . Le calcul des sensibilités des limitations probabilistes est plus précis dans PMA que dans RIA. De la même manière, l'évaluation de ce gradient dépend du type des variables d'optimisation \mathbf{d} .

- **cas 1** : les variables d'optimisation sont des paramètres déterministes. Le gradient de G_i^p par rapport à \mathbf{d} peut être estimé par différences finies appliquées à l'état limite G_i seulement :

$$\frac{\partial G_i^p}{\partial d_j} = \frac{\partial G_i(\mathbf{d}, T^{-1}(\mathbf{u}^{*c}))}{\partial d_j} \quad (\text{II.16})$$

où $T^{-1}(\mathbf{u}^{*c})$ est le MPTP dans l'espace physique, il est donné par la transformation iso-probabiliste inverse T^{-1} du point \mathbf{u}^{*c} calculé auparavant par l'analyse de fiabilité inverse.

- **Cas 2** : les variables d'optimisation sont des paramètres de distribution des variables aléatoires \mathbf{X}_d . Le gradient de G_i^p par rapport aux variables d'optimisation \mathbf{d} est directement déduit des résultats de l'analyse de fiabilité inverse.

$$\frac{\partial G_i^p}{\partial d_j} = \frac{\partial \hat{G}_i(u^{*c})_j}{\partial u_j} \frac{\partial T(x_{d_j})}{\partial d_j} \quad (\text{II.17})$$

où $\partial \hat{G}_i(u^{*c})_j / \partial u_j$ est le gradient de l'état limite \hat{G}_i de la composante j du point \mathbf{u}^{*c} , X_{d_j} est la variable aléatoire dont le paramètre de distribution dépend de la variable d'optimisation d_j , $\partial T(x_{d_j}) / \partial d_j$ est la dérivée de la transformation iso-probabiliste T par rapport au paramètre d_j .

II.4 Formulation RBDO mono-niveau

L'objectif des formulations mono-niveau est d'éviter une évaluation itérative des limitations fiabilistes, dans le but d'accélérer la convergence vers l'optimum. De nombreux auteurs ont développé des approches permettant de résoudre simultanément le problème d'optimisation (i.e. recherche des paramètres optimaux \mathbf{d}) et le problème de fiabilité (i.e. recherche du point MPFP ou MPTP). D'autres auteurs ont utilisé les méthodes de l'optimisation robuste souvent appelées les "six sigma" pour formuler le problème de la RBDO en une seule boucle. Ces méthodes s'appuient sur l'approximation des moments statistiques de la réponse, transformant les contraintes fiabilistes en fonctions purement déterministes.

II.4.1 Approche basée sur les conditions d'optimalité KKT

L'idée de *Madsen et al.* [57] consiste à minimiser la fonction du coût total contenant les coûts initiaux et les coûts dus à la défaillance. Les limitations fiabilistes sont remplacées par les conditions d'optimalité de *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) de la méthode FORM. Le Lagrangien du problème d'optimisation de l'approche FORM s'écrit :

$$L(\mathbf{u}, \lambda) = \|\mathbf{u}\| + \lambda \hat{G}_i(\mathbf{u}) \quad (\text{II.18})$$

Si l'optimum \mathbf{u}^* existe, alors les conditions d'optimalité de KKT du premier ordre doivent être vérifiées avec $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} &= \nabla_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}^*\| + \lambda \nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^*) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \hat{G}_i(\mathbf{u}^*) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

En remplaçant $\nabla_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}^*\| = \mathbf{u}^* / \|\mathbf{u}^*\|$ dans la première condition, nous pouvons écrire que si $\mathbf{u}^* \neq 0$ et $\lambda > 0$

$$\mathbf{u}^* = -\lambda \|\mathbf{u}^*\| \nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^*) \quad (\text{II.20})$$

Cette équation peut être transformée en passant par la norme : $\|\mathbf{u}^*\| = \lambda \|\mathbf{u}^*\| \left\| \nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^*) \right\|$, nous pouvons ainsi tirer la valeur de λ par :

$$\lambda = \frac{1}{\left\| \nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^*) \right\|} \quad (\text{II.21})$$

En remplaçant cette relation dans les conditions d'optimalité de KKT (équation II.20), nous obtenons :

$$\nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^*) + \frac{\mathbf{u}^* \left\| \nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^*) \right\|}{\|\mathbf{u}^*\|} = 0 \quad (\text{II.22})$$

On multiplie cette dernière par \mathbf{u}^* pour obtenir :

$$\mathbf{u}^{*T} \nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^*) + \|\mathbf{u}^*\| \left\| \nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^*) \right\| = 0 \quad (\text{II.23})$$

où T est le signe de la transposée d'un vecteur. Les limitations fiabilistes de la formulation classique de la RBDO (équation II.2) sont ainsi remplacées par cette équation. De cette manière, le problème de la RBDO est formulé en un seul niveau, dans lequel l'algorithme d'optimisation recherche simultanément les variables de conception \mathbf{d} et les m MPFP de chacun des états limites.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m} \quad & C_I(\mathbf{d}) & (\text{II.24}) \\ \text{sous : } \quad & \left\{ \begin{array}{ll} \hat{G}_i(\mathbf{u}_i) = 0 & i = 1, \dots, m \\ \mathbf{u}_i^T \nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}_i) + \|\mathbf{u}_i\| \cdot \left\| \nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}_i) \right\| = 0 & \\ \Phi(-\|\mathbf{u}_i\|) \leq P_f^c & \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 & j = 1 + m, \dots, n_h \\ l(\mathbf{u}_i) \geq 0 & \end{array} \right. \end{aligned}$$

où \mathbf{u}_i est le MPFP de l'état limite \hat{G}_i , h_j sont des fonctions déterministes et l sont les bornes inférieures et supérieures des variables \mathbf{u} . Dans la suite de ce mémoire nous désignons cette approche par KKT.

L'approche KKT exige le calcul du gradient des conditions d'optimalité de KKT par rapport aux variables \mathbf{d} et \mathbf{u} . Cela entraîne systématiquement le calcul du Hessien de \hat{G}_i par rapport à ces variables. Un autre inconvénient de cette approche réside dans la recherche simultanée de l'optimum \mathbf{d}^* et des m MPFP, ce qui augmente le nombre de paramètres à optimiser. Par exemple, soit un problème de la RBDO composé de p variables d'optimisation, q variables aléatoires et m fonctions d'état limite. La résolution par KKT conduit à $p + m \times q$ paramètres à rechercher (i.e. variables de conception \mathbf{d} et MPFP pour chacun des états limites)

II.4.2 Méthode AMA (*Approximate Moments Approach*)

L'approche AMA est basée sur l'approximation des moments statistiques de chaque fonction d'état limite [63]. De cette façon, les contraintes probabilistes sont transformées

en contraintes déterministes. Les moments statistiques sont approximés par un développement en série de Taylor de la fonction d'état limite au voisinage des valeurs moyennes. Cette approximation, appelée FOSM (*First Order Second Moment*) a été utilisée dans les premiers travaux de la RBDO [46]. Elle est souvent utilisée dans l'optimisation robuste [86]. Quand les variables d'optimisation correspondent aux moyennes de certaines variables aléatoires \mathbf{X} , le développement en série de Taylor de la fonction d'état limite $G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ s'écrit :

$$G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = G_i(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}) + \sum_{j=1}^q \frac{\partial G_i(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})}{\partial x_j} (x_j - \mu_{X_j}) \quad (\text{II.25})$$

où q est le nombre total de variables aléatoires dont p variables sont définies par les paramètres de distribution \mathbf{d} ($q \geq p$). Les moments statistiques de la fonction d'état limite, sous réserve que les variables soient normalement distribuées, sont approximés par :

$$\mu_{G_i} = G_i(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}) \quad (\text{II.26})$$

$$\sigma_{G_i}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [G_i(\mathbf{x}) - G_i(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})]^2 d\mathbf{x} \approx \sum_{j=1}^q \left[\frac{\partial G_i(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})}{\partial x_j} \sigma_{X_j} \right]^2 \quad (\text{II.27})$$

Le problème de la RBDO est transformé en problème déterministe de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} C_I(\mathbf{d}) & \quad (\text{II.28}) \\ \text{sous : } \begin{cases} G_i(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}) + k \sigma_{G_i} \geq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 & j = m + 1, \dots, n_h \end{cases} \end{aligned}$$

où k est un coefficient qui spécifie le niveau de fiabilité cible (e.g. $k = 3$ correspond à une fiabilité de 99,73%). La figure II.5 montre l'idée de base de l'approche AMA. La marge de sécurité est produite par l'écart-type de la réponse σ_G , qui est supposé comme une combinaison linéaire des variables aléatoires. Cette hypothèse peut mettre en défaut l'application de l'AMA pour les problèmes RBDO complexes. En effet, AMA ne fournit pas des résultats exacts de l'analyse de fiabilité, car elle est basée sur une approximation linéaire au voisinage des valeurs moyennes (des résultats peuvent être complètement erronés pour les états limites fortement non linéaires). De plus, l'hypothèse des variables aléatoires normales est restrictive dans les applications réelles, où les variables aléatoires sont modélisées par des distributions plus complexes (e.g. Weibull ou Gumbel).

II.4.3 Méthode SLA (*Single Loop Approach*)

Chen et al. [62] ont proposé une approche séduisante pour la RBDO. Ces auteurs ont repris l'idée de transformer les limitations fiabilistes en limitations déterministes pour formuler la RBDO en une seule boucle, sans augmenter le nombre de variables à optimiser. L'approche SLVS (*Single Loop Single Vector*) utilise le fractile de la fonction de performance. Ce concept est traditionnellement utilisé dans l'optimisation déterministe basée sur les coefficients partiels de sécurité. Les variables incertaines sont exprimées par une valeur fractile (e.g. 5% pour les résistances et 95% pour les actions.). Dans la SLSV le

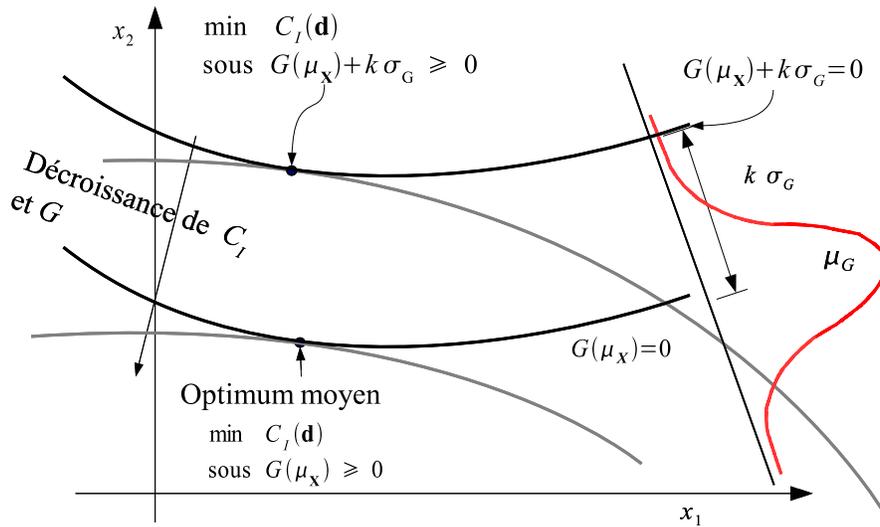


Figure II.5: Principe de l'approche AMA.

point caractéristique est directement lié au niveau de fiabilité cible. L'efficacité de cette approche a incité *Liang et al.* [64] à améliorer la robustesse de SLSV en développant l'approche SLA (*Single Loop Approach*), qui vise à remplacer le point caractéristique par le point de performance minimal cible (MPTP), estimé par une approximation qui découle des conditions d'optimalité de l'analyse de fiabilité inverse. Autrement dit, les formulations de SLSV et SLA sont similaires à PMA, la différence réside dans l'estimation du MPTP. PMA calcule ce point itérativement, par contre SLA et SLSV l'approximent par une relation directe. La différence entre SLSV et SLA réside dans l'implémentation car la formulation reste la même. SLA ajoute une technique d'identification de l'ensemble des contraintes actives pour l'intégration de la fiabilité système (ce que nous allons voir dans le chapitre III dédié à l'optimisation fiabiliste système). L'approche SLA est donnée comme suivant :

$$\min_{\mathbf{d}} C_I(\mathbf{d}) \quad (\text{II.29})$$

$$\text{sous : } \begin{cases} G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}_p) \geq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 & j = m + 1, \dots, n_h \end{cases}$$

tel que :

$$\mathbf{x}_p = \mu_{\mathbf{X}} - \sigma_{\mathbf{X}} \beta^c \boldsymbol{\alpha}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\sigma_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{x}} G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}_p)}{\|\sigma_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{x}} G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}_p)\|}$$

où $\mu_{\mathbf{X}}$ et $\sigma_{\mathbf{X}}$ sont respectivement les moyennes et les écarts-types des variables aléatoires \mathbf{X} . \mathbf{x}_p est le point caractéristique (ou le MPTP approché) lié au niveau de fiabilité cible β^c . Cette formulation est adaptée seulement aux variables aléatoires normalement distribuées et indépendantes. Dans ce travail de thèse, l'implémentation de SLA a été améliorée pour prendre en compte d'autres distributions de probabilité, en appliquant :

$$\boldsymbol{\alpha} = [J]^{-1} (\nabla_{\mathbf{x}} G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}_p))^T / \left\| [J]^{-1} (\nabla_{\mathbf{x}} G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}_p))^T \right\| \quad (\text{II.30})$$

où $[J]^{-1}$ est la matrice Jacobienne inverse de la transformation iso-probabiliste T . Le point caractéristique \mathbf{x}_p est donné par :

$$\mathbf{x}_p = T^{-1}(-\boldsymbol{\alpha}\beta^c) \quad (\text{II.31})$$

SLA approxime le MPTP par l'équation II.31 basée sur les sensibilités de l'état limite G_i par rapport aux variables aléatoires (équation II.30). Cette approximation découle des conditions d'optimalité de l'analyse de fiabilité inverse formulée dans l'équation (II.12). Ce point est directement obtenu sans calcul itératif comme le montre la Fig.II.6.

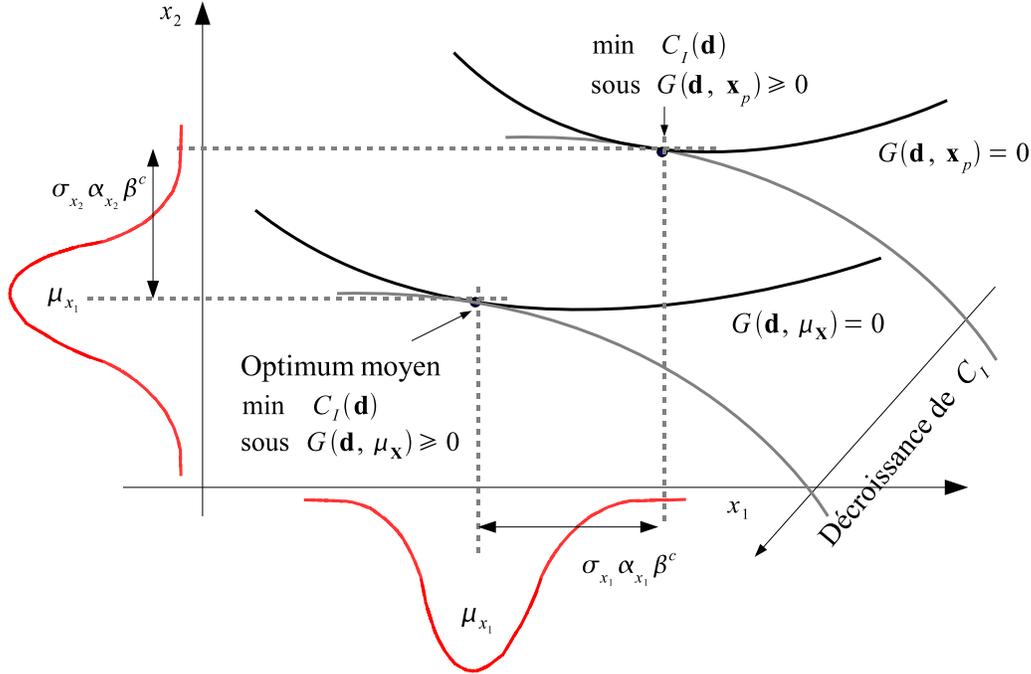


Figure II.6: Approximation du point MPTP dans SLA.

Calcul des sensibilités

Les sensibilités des contraintes par rapport aux variables d'optimisation \mathbf{d} peuvent être aisément calculées par différences finies autour du point \mathbf{x}_p .

$$\frac{\partial G_i}{\partial d_j} = \frac{\partial G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}_p)}{\partial d_j} \quad (\text{II.32})$$

II.5 Formulation RBDO séquentielle découplée

Les approches découplées de la RBDO visent à transformer le problème en plusieurs cycles d'optimisation déterministe résolus séquentiellement. Le lien entre les exigences de fiabilité et d'optimisation déterministe est assuré par des approximations ou par des analyses de fiabilité exécutées séparément. En général, la conception est améliorée de cycle en cycle jusqu'à la satisfaction des critères de convergence.

II.5.1 Méthode SFA (*Safety Factor Approach*)

L'approche SFA [68, 81] consiste à convertir les limitations fiabilistes de la RBDO en limitations déterministes. Celles-ci sont liées aux limitations fiabilistes par des coefficients de sécurité. Ainsi, le problème de la RBDO est transformé en un problème purement déterministe. Ces coefficients sont calculés et mis à jour par une analyse de fiabilité effectuée à chaque convergence du sous-problème déterministe. L'organigramme de la Fig.II.7 montre les étapes principales de l'approche SFA.

Le coefficient $s_i^{(k)}$ permet de "translater" l'état limite G_i afin de satisfaire la probabilité de défaillance cible P_f^c . Le point $\mathbf{x}^{(k)*}$ est le point de défaillance le plus probable (MPFP) correspondant à l'analyse de fiabilité effectuée pour que la $Prob[G_i(\mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{X}) + s_i^{(k)} \leq 0]$ soit égale à la cible.

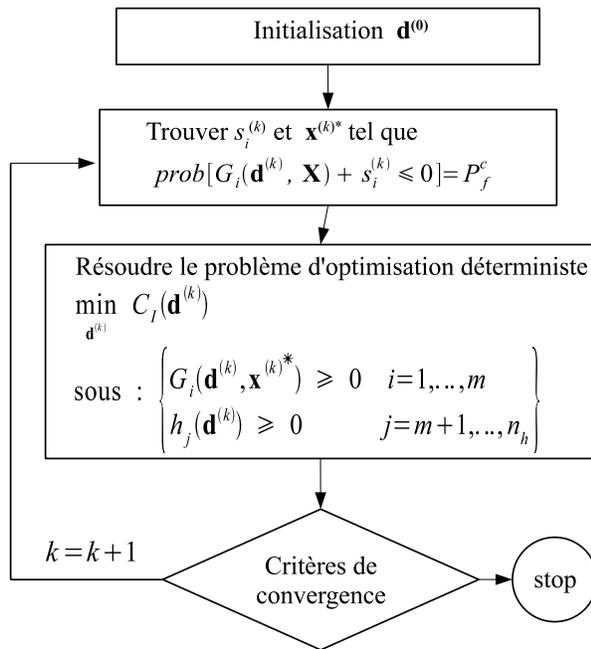


Figure II.7: Principe de l'approche SFA.

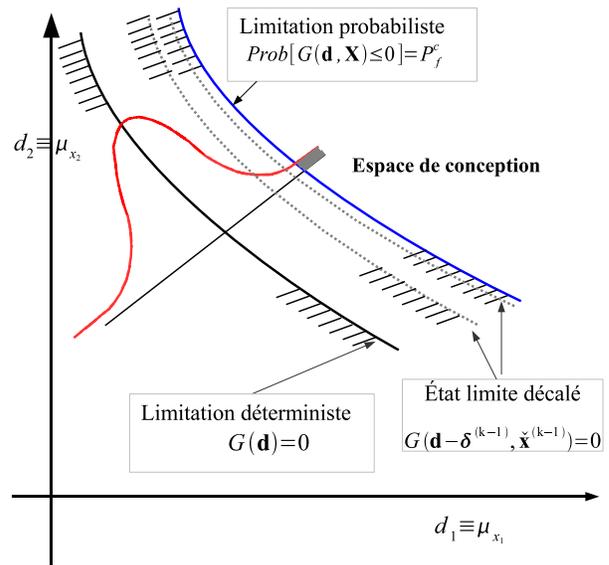


Figure II.8: Concept des valeurs décalées $\delta_i^{(k)}$ dans SORA.

II.5.2 Méthode SORA (*Sequential Optimization and Reliability Assessment*)

La méthode SORA utilise le même concept que SFA. Le problème de la RBDO est remplacé par un ensemble de cycles de sous-problèmes d'optimisation déterministe. A la convergence de chaque cycle d'optimisation déterministe, une analyse de fiabilité inverse est exécutée. L'optimisation déterministe est ainsi liée aux exigences de fiabilité par le point de performance minimale cible (MPTP) estimé par FORM inverse. Pour rappel, le MPTP signifie la réalisation des variables aléatoires qui permet d'avoir une performance minimale tout en assurant le niveau de fiabilité cible. Finalement, le MPTP actualisé est utilisé dans le cycle suivant de l'optimisation déterministe. Cette procédure est répétée jusqu'à la satisfaction des critères de convergence pour le coût et la fiabilité.

Toutefois, la différence entre les méthodes SORA et SFA réside dans le lien entre

l'optimisation déterministe et les exigences de fiabilité. D'une part, SORA utilise le MPTP calculé par une analyse de fiabilité inverse (i.e. FORM inverse), alors que la méthode SFA emploie le MPFP, et d'autre part, la méthode SFA cherche les valeurs de décalage des états limites $\mathbf{s}^{(k)}$ qui assurent une probabilité de défaillance égale à la cible. Ce qui peut être plus coûteux en temps de calcul car la procédure cherche les valeurs de décalage $\mathbf{s}^{(k)}$ et le MPFP. De son côté, SORA ne cherche pas ces valeurs de décalage car le MPTP est directement lié à la probabilité de défaillance cible. SORA n'utilise des valeurs de décalage $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ que lorsque les variables d'optimisation sont des paramètres de distribution des variables aléatoires. Dans ce cas, les valeurs $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ sont directement déduites pour permettre la réduction de l'espace de conception des variables d'optimisation. La figure.II.8 montre la technique des valeurs de décalage $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ dans la réduction de l'espace de conception. SORA est formulée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{d}^{(k)}} C_I(\mathbf{d}^{(k)}) & \text{(II.33)} \\ \text{sous : } & \begin{cases} G_i(\mathbf{d}^{(k)} - \boldsymbol{\delta}_i^{(k-1)}, \tilde{\mathbf{x}}_i^{(k-1)}) \geq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}^{(k)}) \geq 0 & j = m + 1, \dots, n_h \end{cases} \end{aligned}$$

où k indique le cycle courant d'optimisation déterministe, $\tilde{\mathbf{x}}_i^{(k-1)}$ est le MPTP dans l'espace physique, $\boldsymbol{\delta}_i^{(k-1)}$ sont les valeurs de décalage des variables d'optimisation $\mathbf{d}^{(k)}$. Le point $\tilde{\mathbf{x}}_i^{(k-1)}$ et les valeurs $\boldsymbol{\delta}_i^{(k-1)}$ sont actualisés à chaque convergence du sous-problème d'optimisation déterministe par :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_i^{(k-1)} = T^{-1}(\mathbf{u}^{*c}) \\ \boldsymbol{\delta}_i^{(k-1)} = \mathbf{d}^{(k-1)} - \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{d}_i}^{(k-1)} \end{cases} \quad \text{(II.34)}$$

où \mathbf{u}^{*c} est le MPTP calculé par FORM inverse (équation II.12), $\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{d}_i}^{(k-1)}$ sont les valeurs du point $\tilde{\mathbf{X}}_i^{(k-1)}$ dont les variables $\mathbf{d}^{(k-1)}$ sont les paramètres de distribution de probabilité (e.g. moyennes et écarts-types), où $\mathbf{d}^{(k-1)}$ est la solution optimale du cycle $k - 1$ du sous-problème d'optimisation déterministe.

L'utilisation du MPTP calculé par une analyse de fiabilité inverse mène à une meilleure efficacité et robustesse que l'emploi du MPFP estimé par une analyse de fiabilité classique. L'analyse de fiabilité inverse peut être réalisée par l'algorithme HMV. L'avantage de SORA réside dans la simplicité d'implémentation. Chaque sous-problème déterministe peut être résolu avec un algorithme classique de la programmation non linéaire tel que SQP. Le critère de convergence de SORA est exprimé par les incréments du coût, des variables d'optimisation \mathbf{d} et des réalisations des variables aléatoires $\tilde{\mathbf{x}}$ aux cycles successifs. L'organigramme de la méthode est présenté en annexe B (B.2).

$$\left[\left\| C_I(\mathbf{d}^{(k)}) - C_I(\mathbf{d}^{(k-1)}) \right\| \leq \epsilon \text{ ou } \left\| \mathbf{d}^{(k)} - \mathbf{d}^{(k-1)} \right\| \leq \epsilon \right] \text{ et } \left\| \tilde{\mathbf{x}}^{(k)} - \tilde{\mathbf{x}}^{(k-1)} \right\| \leq \epsilon \quad \text{(II.35)}$$

où ϵ dépend du problème étudié, il est généralement pris entre 10^{-3} et 10^{-6} .

II.5.3 Méthode SAP (*Sequential Approximate Programming*)

L'approche SAP [71] est basée sur le développement des limitations fiabilistes en série de *Taylor*. Cette approximation est effectuée au voisinage du point de conception courant

(i.e. \mathbf{d} à l'itération k), basée sur un indice de fiabilité approché, obtenu par une relation récurrente qui découle des conditions d'optimalité de l'approche FORM. Le problème de la RBDO est converti en plusieurs sous-problèmes déterministes approximatifs résolus séquentiellement. SAP est formulée de la manière suivante :

$$\min_{\mathbf{d}^{(k)}} C_I(\mathbf{d}^{(k)}) \quad (\text{II.36})$$

$$\text{sous : } \begin{cases} \check{\beta}_i(\mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k)}) \geq \beta^c & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}^{(k)}) \geq 0 & j = 1 + m, \dots, n_h \end{cases}$$

tel que :

$$\check{\beta}_i(\mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k)}) = \hat{\beta}_i(\mathbf{d}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k-1)}) + \left(\nabla_{\mathbf{d}} \hat{\beta}_i(\mathbf{d}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k-1)}) \right)^T \cdot (\mathbf{d}^{(k)} - \mathbf{d}^{(k-1)})$$

L'approximation de l'indice de fiabilité $\check{\beta}_i(\mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k)})$ est obtenue par les sensibilités $\nabla_{\mathbf{d}} \hat{\beta}_i(\mathbf{d}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k-1)})$ de l'indice de fiabilité approché $\hat{\beta}_i(\mathbf{d}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k-1)})$, l'optimum $\mathbf{d}^{(k-1)}$ au $(k-1)^{\text{ème}}$ sous-problème d'optimisation et au point courant $\mathbf{d}^{(k)}$, respectivement. L'indice de fiabilité approché $\hat{\beta}_i(\mathbf{d}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k-1)})$ et les sensibilités $\nabla_{\mathbf{d}} \hat{\beta}_i(\mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k-1)})$ sont estimés lors du $(k-1)^{\text{ème}}$ sous-problème au voisinage des variables aléatoires $\mathbf{X}^{(k-1)}$ et des variables d'optimisation $\mathbf{d}^{(k-1)}$ par :

$$\hat{\beta}_i(\mathbf{d}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k-1)}) = \lambda_i^{(k-1)} \left[\hat{G}_i(\mathbf{u}^{(k-1)}) - (\mathbf{u}^{(k-1)})^T \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^{(k-1)}) \right] \quad (\text{II.37})$$

$$\lambda_i^{(k-1)} = \frac{1}{\left\| \nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^{(k-1)}) \right\|} \quad (\text{II.38})$$

$$\nabla_{\mathbf{d}} \hat{\beta}_i(\mathbf{d}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k-1)}) = \frac{\nabla_{\mathbf{d}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^{(k-1)})}{\left\| \nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^{(k-1)}) \right\|} \quad (\text{II.39})$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = -\hat{\beta}_i(\mathbf{d}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k-1)}) \lambda_i^{(k-1)} \nabla_{\mathbf{u}} \hat{G}_i(\mathbf{u}^{(k-1)}) \quad (\text{II.40})$$

où \hat{G} est la fonction d'état limite dans l'espace normé et \mathbf{U} est le vecteur des variables normées. SAP n'exige pas d'analyse de fiabilité, puisque l'indice de fiabilité est approché par les équations II.37-II.40 qui découlent des conditions d'optimalité de KKT de l'approche FORM. L'optimum \mathbf{d}^* et le point de défaillance le plus probable \mathbf{u}^* sont atteints après des améliorations progressives à chaque sous-problème approximatif. Les solutions optimales du problème d'optimisation et de l'analyse de fiabilité sont obtenues simultanément, sans augmenter le nombre de variables. Le critère de convergence de SAP est exprimé par l'incrément du coût et des variables d'optimisation et par la vérification des exigences de fiabilité entre deux cycles (équation II.35). L'organigramme de cette méthode est donné en Annexe B (figure B.3)

II.5.4 Calcul des sensibilités dans les approches découplées

Dans les approches séquentielles découplées, les sensibilités des contraintes d'optimisation s'obtiennent aisément par différences finies ou analytiquement lorsqu'elles sont

disponibles. Ces approches transforment le problème de la RBDO en un problème déterministe. Par conséquent, le problème du calcul des sensibilités des contraintes ne se pose pas.

II.6 Étude comparative des différentes approches

Dans le cadre de cette étude, deux méthodes de chacune des trois familles (DLA, MLA et SDA) ont été implémentées sous **MATLAB** et testées sur diverses applications. Ces approches sont :

- approches à deux-niveaux (DLA) $\left\{ \begin{array}{l} \text{RIA} \\ \text{PMA} \end{array} \right.$
- approches mono-niveau (MLA) $\left\{ \begin{array}{l} \text{KKT} \\ \text{SLA} \end{array} \right.$
- approches séquentielles découplées (SDA) $\left\{ \begin{array}{l} \text{SORA} \\ \text{SAP} \end{array} \right.$

La comparaison entre les six approches est basée sur différents critères de performance numérique.

- **Efficacité** : mesurée par le temps CPU et/ou le nombre total d'évaluations de la fonction d'état limite pour résoudre le problème. Dans le cadre de l'optimisation des structures, chaque évaluation de la fonction d'état limite correspond à un calcul mécanique (i.e. MEF).
- **Convergence** : mesurée par le nombre d'itérations effectuées pour résoudre le problème, cette mesure reflète la vitesse à laquelle l'approche avance d'un point à l'autre.
- **Précision** : ce critère est fondamental dans la comparaison des méthodes de la RBDO, étant donné les différentes approximations. Ce critère permet de valider le domaine d'application des approches testées, il est mesuré par la précision d'atteindre l'optimum et d'assurer le niveau de fiabilité exigé.
- **Robustesse** : la qualité d'un algorithme est appréciée par sa stabilité de convergence à partir de n'importe quel point initial. Le critère de robustesse est mesuré par la stabilité de convergence pour un point de départ quelconque, et quelle que soit la non linéarité de la fonction d'état limite.
- **Généralité** : ce critère indique la capacité des méthodes à résoudre différents types de problèmes d'ingénierie (i.e. plusieurs variables aléatoires et d'optimisation, plusieurs états limites, distributions de probabilité non-normales, . . . etc).

Les critères de convergence sont exprimés par l'incrément de la fonction objectif, des variables d'optimisation et la vérification des contraintes de fiabilité. La valeur de l'erreur relative ϵ est fixée à 10^{-3} et le nombre maximale d'itération est fixé à 1000. Ces critères de convergence sont identiques pour toutes les méthodes testées. Le choix des applications pour cette étude comparative est important, puisque les différents critères de comparaison doivent être impliqués. Dans cette étude, une analyse de fiabilité est effectuée à la convergence de chacune des méthodes pour vérifier l'optimum obtenu. Les applications mises en œuvre sont :

- exemple mathématique défini par une fonction objectif et des fonctions d'état limite analytiques. Dans cet exemple, différents types de fonctions d'état limite sont considérés :
 - a) faiblement non linéaire ;
 - b) fortement non linéaire ;
 - c) plusieurs fonctions d'état limite non linéaires.
- optimisation de la section d'un poteau rectangulaire en acier soumis à un chargement bi-axial. Les dimensions de la section sont les variables d'optimisation et les moyennes des variables aléatoires. Plusieurs valeurs du coefficient de variation (CV) sont utilisées, afin d'examiner le comportement numérique des méthodes de la RBDO lorsque les variables sont marquées de fortes incertitudes ;
- trois treillis à cinq, dix et quinze barres sont optimisés. Les sections des barres sont considérées comme des variables d'optimisation. Les chargements appliqués et les caractéristiques mécaniques du matériau sont aléatoires. Les performances numériques des méthodes sont examinées vis-à-vis de l'augmentation de la complexité du problème et le nombre de variables d'optimisation. De plus, les variables aléatoires sont modélisées par différentes distributions de probabilité (normales, lognormales, Weibull et Gumbel).

II.6.1 Problèmes analytiques

Les approches de la RBDO ont été appliquées pour résoudre des problèmes analytiques dans le but d'examiner leur comportement vis-à-vis du degré de complexité. Trois différents cas sont étudiés : le premier cas considère une fonction d'état limite faiblement non linéaire (figure II.9), le deuxième concerne une fonction fortement non linéaire (figure II.12), et le dernier porte sur plusieurs fonctions non linéaires.

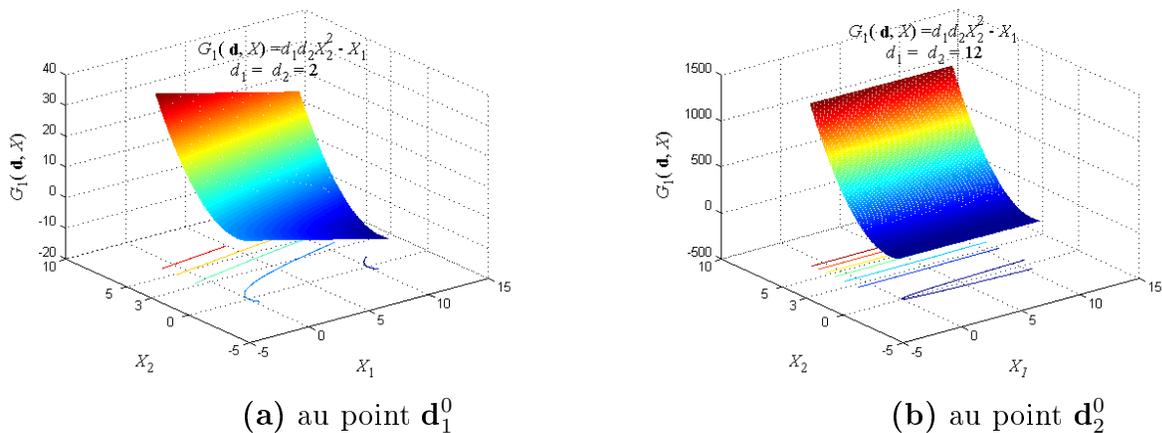


Figure II.9: Fonction d'état limite G_1 aux deux points initiaux $\mathbf{d}_1^{(0)}$ et $\mathbf{d}_2^{(0)}$.

• **Cas 1 : fonction d'état limite faiblement non linéaire**

Soit le problème d'optimisation visant à trouver les valeurs optimales de deux variables d'optimisation d_1 et d_2 supposées déterministes, qui minimisent une fonction objectif $f(\mathbf{d})$. La fonction d'état limite est définie par les variables \mathbf{d} et les paramètres x_1 et x_2 supposés incertains. Les variables aléatoires \mathbf{X} sont normales avec des moyennes respectives $\{5, 0 ; 3, 0\}$ et un coefficient de variation de 0,3. La probabilité de défaillance admissible P_f^c est fixée à 1%, elle correspond à un indice de fiabilité cible de $\beta^c = 2,32$.

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{d}} d_1^2 + d_2^2 & \text{(II.41)} \\ \text{sous } & \left\{ \begin{array}{l} Prob[G_1(\mathbf{d}, \mathbf{X}) = 0, 2 d_1 d_2 X_2^2 - X_1 \leq 0] \leq P_f^c \\ 0 \leq \mathbf{d} \leq 15 \end{array} \right. \end{aligned}$$

L'efficacité de chaque approche est mesurée par le nombre d'évaluations de l'état limite pour trouver l'optimum. D'une part, G-eval est le nombre d'évaluation de l'état limite quand le gradient est calculé analytiquement, et d'autre part, G-eval-DF est le nombre d'évaluation de l'état limite quand le gradient est calculé numériquement par différences finies. Cette situation correspond à celle d'un état limite implicite résultant d'un calcul par éléments finis. La robustesse est testée à travers le choix de deux points initiaux. Le premier \mathbf{d}_1^0 se trouve au voisinage de l'optimum recherché et le deuxième \mathbf{d}_2^0 se trouve loin de l'optimum. Les résultats des différentes approches sont donnés dans le tableau II.1

Methode	f^* β^*		$\mathbf{d}_1^0 = \{2 ; 2\}$			$\mathbf{d}_2^0 = \{12 ; 12\}$		
			iter	G-eval	G-eval-DF	iter	G-eval	G-eval-DF
RIA	63,88	2,32	6	31	279	7	40	426
PMA	63,88	2,32	3	21	189	5	22	198
KKT	63,88	2,32	8	9	135	12	13	198
SLA	63,88	2,32	5	18	30	4	15	27
SORA	63,88	2,32	14	46	138	18	50	150
SAP	63,88	2,32	13	7	35	15	8	40

Tableau II.1: Résultats de calcul du problème analytique (cas 1).

Toutes les approches ont convergé vers le même optimum $\mathbf{d}^* = \{5, 65 ; 5, 65\}$ correspondant au minimum de la fonction objectif $f^* = 63,88$. La figure II.10 montre que les processus itératifs des méthodes SLA et PMA sont similaires. En effet, ces deux méthodes sont basées sur le fractile de l'état limite alors que PMA est basée sur une évaluation exacte du MPTP par une procédure itérative. SLA est fondée sur l'approximation du MPTP à partir des sensibilités de la fonction d'état limite.

Les résultats donnés dans le tableau II.1 montre la supériorité des méthodes SAP et SLA. Lorsque le calcul du gradient est analytique SAP est plus efficace. La convergence est obtenue en 7 cycles correspondant à 7 évaluations de la fonction d'état limite. Par contre, lorsque le gradient résulte d'un calcul numérique, SLA est plus efficace car elle exige 30 évaluations seulement contre 35 évaluations pour SAP.

Les approches à deux-niveaux exigent plus d'évaluations de l'état limite. Les procédures itératives du calcul du point MPFP ou MPTP dans les méthodes RIA et PMA

respectivement, nécessitent plusieurs appels à la fonction G_1 . Cependant, PMA demande moins d'effort que RIA.

Lorsque la dérivation est analytique KKT paraît très efficace, 9 évaluations de l'état limite suffisent pour obtenir l'optimum. Toutefois, pour un calcul numérique du gradient de G_1 , les méthodes KKT et SORA présentent des performances numériques comparables aux performances des approches de la famille à deux-niveaux. De plus, KKT paraît très sensible au choix du point initial.

La figure II.10-(a) montre l'instabilité numérique de KKT au début des itérations. Lors des premières itérations, les valeurs des variables d'optimisation sont augmentées au lieu d'être diminuées. Cette instabilité est particulièrement due à une mauvaise estimation de la direction de descente. De même, SAP est aussi marquée par cette instabilité numérique au début des itérations. Nous rappelons que ces deux méthodes sont basées sur l'approximation de l'indice de fiabilité. KKT approxime l'indice de fiabilité en appliquant directement la condition d'optimalité comme contrainte d'égalité, cela peut causer une instabilité numérique quand le calcul du gradient n'est pas précis. SAP approxime l'indice de fiabilité par un développement en série de Taylor de premier ordre. Cette approximation est toujours imprécise lors des premières itérations ; elle s'améliore aux itérations suivantes. La figure II.11 montre que cette approximation dépend du choix du point initial. L'indice de fiabilité β_{FORM} calculé par FORM peut être différent de l'approximation utilisée dans SAP pour estimer cet indice. En effet, lorsque le point de départ est proche de l'optimum, l'approximation est plus au moins correcte et s'améliore rapidement au cours des itérations (figure II.11-(a)). En revanche, lorsque le point de départ est loin de l'optimum l'approximation peut être très mauvaise (figure II.11-(b)).

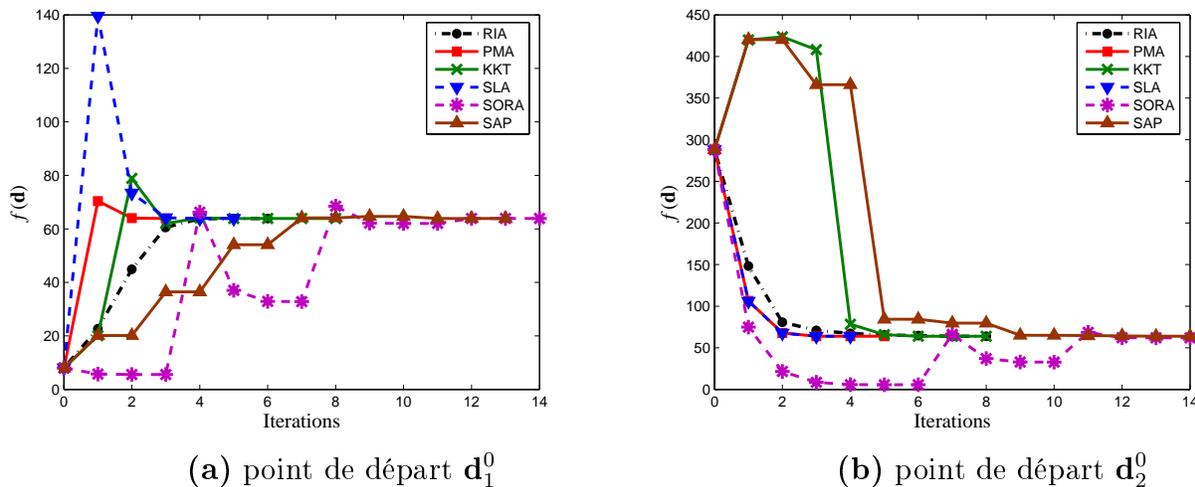


Figure II.10: Évolution de la fonction objectif en fonction des itérations.

- **Cas 2 : fonction d'état limite fortement non linéaire**

La robustesse des approches de la RBDO est étudiée au moyen d'une fonction d'état limite fortement non linéaire. Le même problème que celui de l'Eq.II.41 est analysé avec

	$\mathbf{d}_1^0 = \{2 ; 2\}$							$\mathbf{d}_2^0 = \{12 ; 12\}$							
iter. N° :	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	7
G-eval-DF de RIA	9	12	12	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
G-eval-DF de PMA	30	12	12	12				9	9	12	12	12	12		

Tableau II.2: Coût de calcul de l'analyse de fiabilité dans RIA et PMA (cas 1).

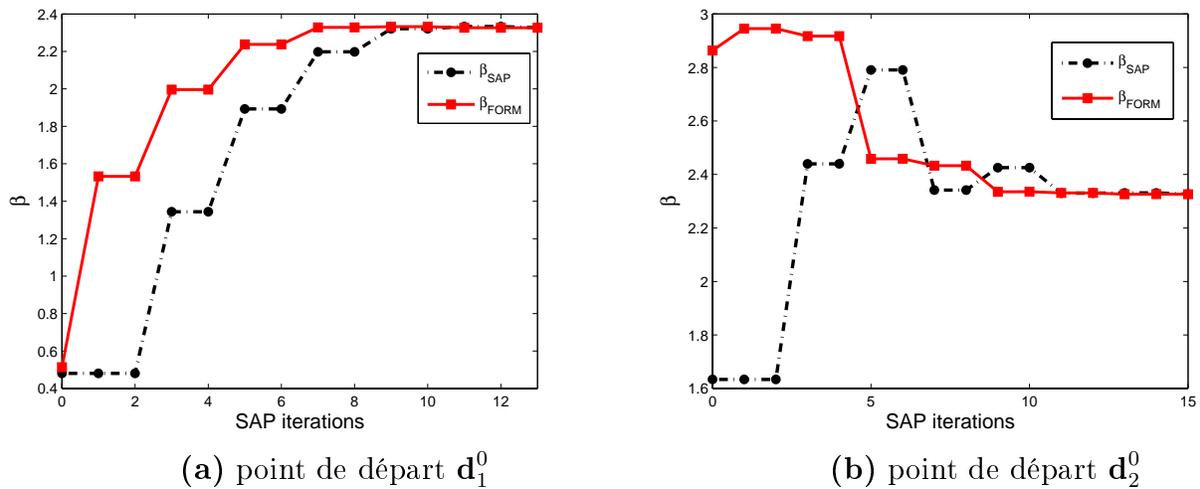


Figure II.11: Indice de fiabilité approché par SAP.

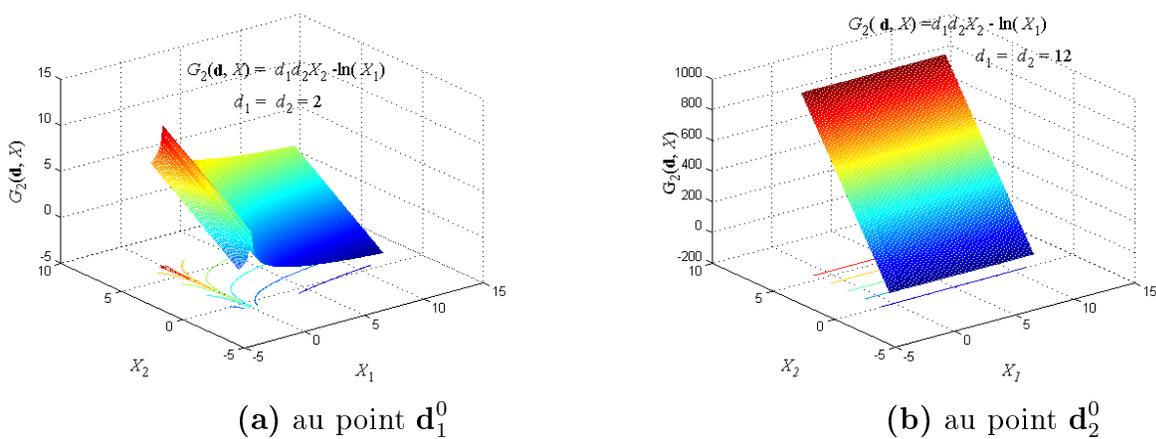


Figure II.12: Fonction d'état limite G_2 aux deux points initiaux $\mathbf{d}_1^{(0)}$ et $\mathbf{d}_2^{(0)}$.

la fonction d'état limite suivante :

$$G_2(\mathbf{d}, X) = d_1 d_2 X_2 - \ln(X_1) \quad (\text{II.42})$$

La figure II.12 montre le changement du degré de non linéarité de la fonction G_2 pour les deux points initiaux \mathbf{d}_1^0 et \mathbf{d}_2^0 . Cette fonction a de fortes courbures au voisinage de l'optimum qui se trouve au point $\mathbf{d}^* = \{1, 35 ; 1, 35\}$, cela peut perturber la convergence des algorithmes, surtout si le point de départ est loin de l'optimum.

Les résultats présentés dans le tableau II.3 confirme ces remarques car lorsque le point initial \mathbf{d}_1^0 est proche de l'optimum, toutes les approches convergent vers ce point. Toutefois, SAP semble avoir des difficultés de convergence. La figure II.13 montre l'instabilité numérique de SAP quand la fonction est fortement non linéaire, malgré que le point de départ est proche de l'optimum. Le deuxième point \mathbf{d}_2^0 montre les limites des méthodes RIA, KKT et SAP. La non convergence de RIA est due à l'algorithme HL-RF utilisé pour l'analyse de fiabilité. Bien que cet algorithme soit efficace, il n'est pas robuste, et la convergence n'est pas assurée pour n'importe quel point initial. L'algorithme SQP peut être adopté pour l'analyse de fiabilité afin d'améliorer la convergence de RIA.

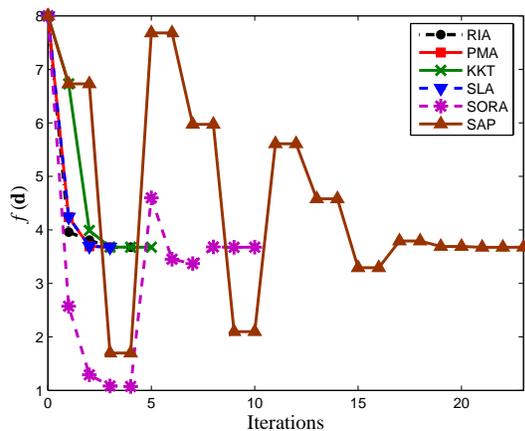


Figure II.13: Évolution de la fonction objectif pour \mathbf{d}_1^0 (cas 2).

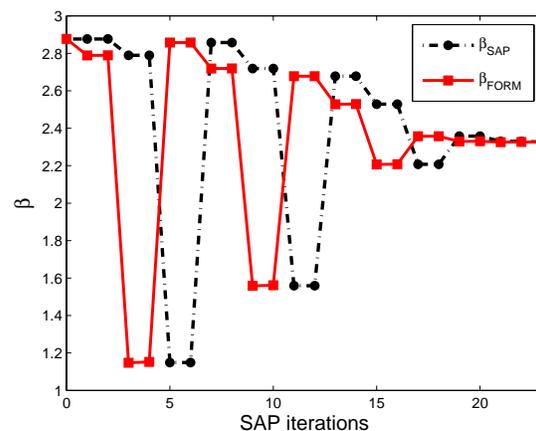


Figure II.14: Indice de fiabilité approché par SAP pour \mathbf{d}_1^0 (cas 2).

RBDO methods	f^* β^*		$\mathbf{d}_1^0 = \{2, 2\}$			$\mathbf{d}_1^0 = \{12, 12\}$		
			iter	G-eval	G-eval-DF	iter	G-eval	G-eval-DF
RIA	3,67	2,32	4	14	144	-	nc	-
PMA	3,67	2,32	3	15	135	6	21	189
KKT	3,67	2,32	5	6	90	-	nc	-
SLA	3,67	2,32	3	12	21	6	21	39
SORA	3,67	2,32	10	31	93	13	34	102
SAP	3,67	2,32	23	12	60	-	nc	-

nc : la méthode n'a pas convergé

Tableau II.3: Résultats de calcul du problème analytique (case 2).

Comme nous l'avons indiqué, la non convergence de SAP pour \mathbf{d}_2^0 est due à l'approximation de l'indice de fiabilité basée sur un développement de *Taylor* au voisinage du point courant $\mathbf{d}^{(k)}$, ce qui est seulement valable au voisinage de l'optimum \mathbf{d}^* et pour une fonction d'état limite faiblement non linéaire (e.g. cas 1). Le calcul de l'indice de fiabilité approché est basé sur les sensibilités de l'état limite dans l'espace normé. Pour une fonction d'état limite fortement non linéaire, ces sensibilités peuvent conduire à une évaluation inexacte de l'indice de fiabilité approché $\hat{\beta}$. La figure II.14 montre des écarts considérables entre l'indice de fiabilité calculé par FORM et celui approximé par SAP à chaque itération. Ces écarts s'amplifient lorsque la fonction est fortement non linéaire. De ce fait, pour un point de départ trop loin de l'optimum, ces écarts entraînent une mauvaise estimation de l'indice de fiabilité conduisant à une direction de descente erronée et par conséquent la non convergence de SAP.

Par ailleurs, cet exemple montre l'impact du choix du point initial sur la convergence de KKT. SLA paraît efficace et robuste, où l'optimum est atteint après 39 appels à l'état limite G_2 quand le point initial est loin de l'optimum. En plus, cette méthode semble être insensible à la non linéarité de la fonction d'état limite.

La robustesse de l'analyse de fiabilité inverse est approuvée, puisque les méthodes PMA et SORA restent insensibles au choix du point initial et à la non linéarité de l'état limite. De même, SLA résultant d'une formulation similaire que PMA bénéficie de la robustesse de l'analyse de fiabilité inverse sans avoir à l'effectuer.

• Cas 3 : plusieurs fonctions d'état limite

Cet exemple est repris de la littérature de la RBDO [78, 79, 87]. D'une part, il nous a permis de valider l'implémentation des différentes approches de la RBDO, et d'autre part, il présente un test de robustesse, d'efficacité et de précision. Soit le problème de la RBDO suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\mu_{\mathbf{x}}} f(\mu_{\mathbf{x}}) &= \mu_{X_1} + \mu_{X_2} & \text{(II.43)} \\ \text{sous } \left\{ \begin{array}{l} \text{Prob}[G_i(\mathbf{X}) \leq 0] \leq \Phi(-\beta^c) \quad i = 1, \dots, 3 \\ 0 \leq \mu_{\mathbf{x}} \leq 10 \end{array} \right. \end{aligned}$$

tel que :

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{x}) &= x_1^2 x_2 / 20 - 1 \\ G_2(\mathbf{x}) &= (x_1 + x_2 - 5)^2 / 30 + (x_1 - x_2 - 12)^2 / 120 - 1 \\ G_3(\mathbf{x}) &= 80 / (x_1^2 + 8x_2 + 5) - 1 \end{aligned}$$

où \mathbf{x} sont les réalisations des variables aléatoires \mathbf{X} . Les variables d'optimisation $\mathbf{d} = \{\mu_{X_1}; \mu_{X_2}\}$ sont les moyennes des variables aléatoires X_1 et X_2 , d'écart-types de $\sigma_{X_{1,2}} = 0,3$ et modélisées par deux types de distribution, à savoir une loi normale ou une loi de Gumbel. Trois valeurs de l'indice de fiabilité cible ont été testées ($\beta^T = 2, 3, 4$), afin d'examiner les performances numériques des approches par rapport au niveau de fiabilité cible.

Les résultats présentés dans le tableau II.4 montrent l'influence du type de distribution sur la convergence et sur les performances numériques des différentes approches. Les distributions non normales augmentent la non linéarité des fonctions d'état limite dans

Distribution		Normale			Gumbel		
β^c		2	3	4	2	3	4
RIA	f *	6,1923	6,7257	7,2683	6,0101	nc	nc
	β_{min}^*	2,0000	3,0001	3,9982	2,0000	nc	nc
	G-eval-DF(G-eval)	504(56)	531(59)	531(59)	4680 (199)	nc	nc
PMA	f *	6,1923	6,7251	7,2683	6,0101	6,2904	6,4340
	β_{min}^*	1,9997	2,9970	3,9978	1,9999	2,9999	3,9939
	G-eval-DF(G-eval)	540(72)	540(72)	747(83)	972(108)	1161(129)	2808(312)
KKT	f *	6,1923	8,9382	7,2683	nc	nc	nc
	β_{min}^*	2,0000	3,0003	3,9978	nc	nc	nc
	G-eval-DF(G-eval)	729(27)	972(36)	1476(54)	nc	nc	nc
SLA	f *	6,1920	6,7556	7,2680	6,0047	6,2776	6,3770
	β_{min}^*	1,9985	2,9998	3,9976	1,9674	2,9299	3,6439
	G-eval-DF(G-eval)	90(54)	90(54)	81(45)	108(63)	108(63)	216(117)
SORA	f *	6,1923	6,7251	7,2683	6,0101	6,2904	6,4341
	β_{min}^*	1,9997	2,9970	3,9978	1,9999	2,9980	3,9943
	G-eval-DF(G-eval)	255(93)	264(96)	348(116)	363(121)	396(132)	951(317)
SAP	f *	6,1926	6,7261	7,2685	6,0103	nc	nc
	β_{min}^*	2,0001	3,0003	3,9980	1,9998	nc	nc
	G-eval-DF(G-eval)	180(60)	198(66)	234(78)	198(66)	nc	nc

Les résultats en gras : RIA a convergé en utilisant SQP pour l'analyse de fiabilité
nc : pas de convergence

Tableau II.4: Résultats du problème analytique à plusieurs fonctions d'état limite.

l'espace normé. La convergence de RIA dans le cas de la distribution de Gumbel n'est obtenue qu'en utilisant l'algorithme SQP au lieu de HL-RF pour l'analyse de fiabilité. En revanche, KKT n'a pas convergé pour cette distribution de probabilité. Les auteurs [57] de cette méthode ont signalé sa difficulté de convergence avec des distributions implicites de probabilité. Cela est principalement dû aux contraintes d'égalité issues de l'application directe des conditions d'optimalité de FORM. Ces conditions sont difficiles à assurer lorsque les fonctions d'état limite sont fortement non linéaires. De plus, le gradient de ces conditions correspondent au *Hessien* de l'état limite. De ce fait, les erreurs numériques dues aux différentes approximations peuvent conduire à la divergence de l'algorithme.

De la même façon, SAP paraît très sensible aux distributions de probabilité des variables aléatoires. La forte non linéarité des fonctions d'état limite entraîne une mauvaise estimation de l'indice de fiabilité par simple linéarisation ; ce qui peut provoquer la non convergence. Toutefois, les méthodes SLA, SORA et PMA semblent être moins sensibles aux lois de probabilité des variables aléatoires.

La figure II.15 montre l'influence du niveau de fiabilité cible sur l'effort de calcul des différentes méthodes. SLA semble être indifférente au niveau de fiabilité cible. Cela est principalement dû à sa formulation. Par contre SORA et PMA nécessitent plus de calculs lorsque la cible est élevée. Ces deux méthodes utilisent une analyse de fiabilité inverse qui dépend directement de l'indice cible. La figure II.15-(b) montre que lorsque la dérivation est analytique SORA est moins efficace que les autres approches. Toutefois, cette méthode

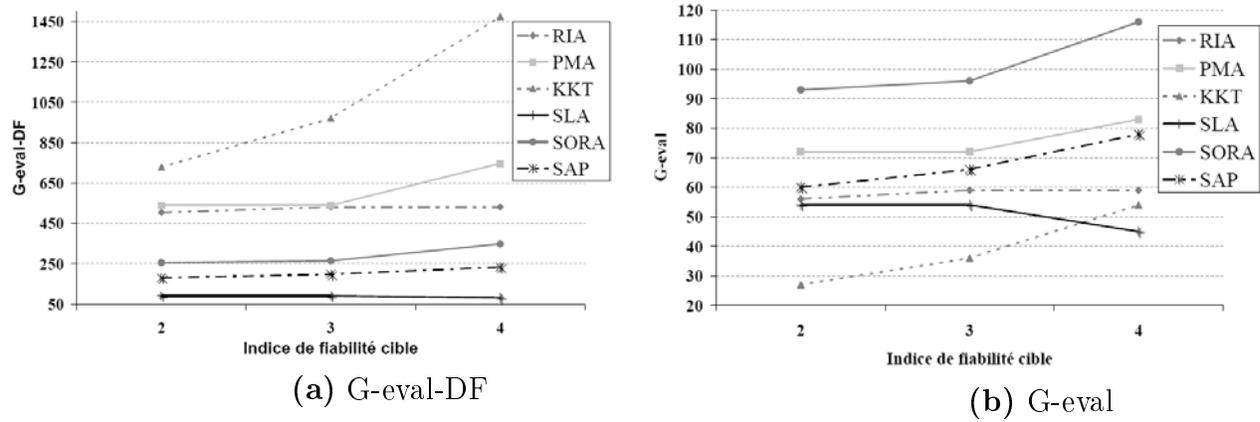


Figure II.15: Nombre d'évaluation de l'état limite en fonction de β^c (a) Le gradient est calculé par différences finies (b) le gradient est analytique.

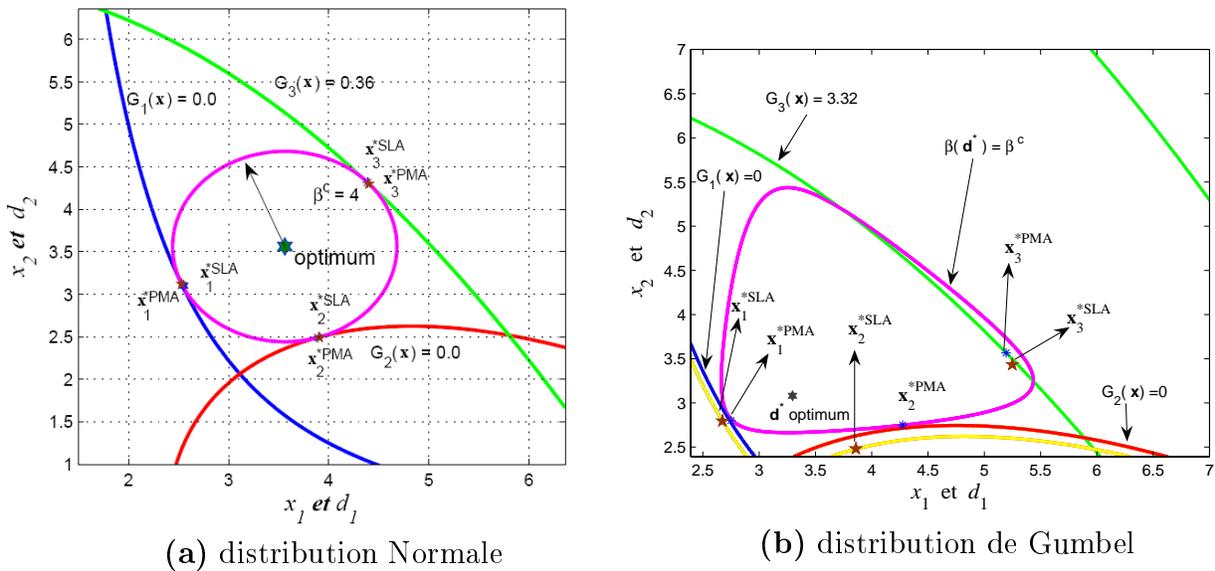


Figure II.16: Le MPTP de PMA et de SLA.

a été particulièrement développée pour l'optimisation des structures, où les dérivées des états limites sont généralement calculées numériquement. Par ailleurs, lorsque les dérivées des fonctions sont analytiques, les méthodes à deux-niveaux (PMA et RIA) sont d'une efficacité comparable aux autres méthodes.

A l'instar de l'efficacité de SLA qui paraît insensible au type de distribution des variables aléatoires, les distributions non normales conditionnent la précision de cette approche. La figure II.16-a montre que, dans le cas des variables aléatoires normales, le MPTP approché par SLA est confondu avec le MPTP calculé par PMA (considéré comme exact). Pour des fonctions faiblement non linéaires, l'approximation SLA est assez précise et s'améliore au cours des itérations. En revanche, lorsque les variables aléatoires suivent des lois de probabilité non normales (e.g. Gumbel), SLA devient moins précise. Cela est dû à la transformation probabiliste qui introduit une forte non linéarité des fonctions d'état limite et le changement de forme de l'hypersphère de rayon égal à β^c . La figure II.16-(b) montre que le MPTP calculé par SLA ne peut pas vérifier la fiabilité cible, car

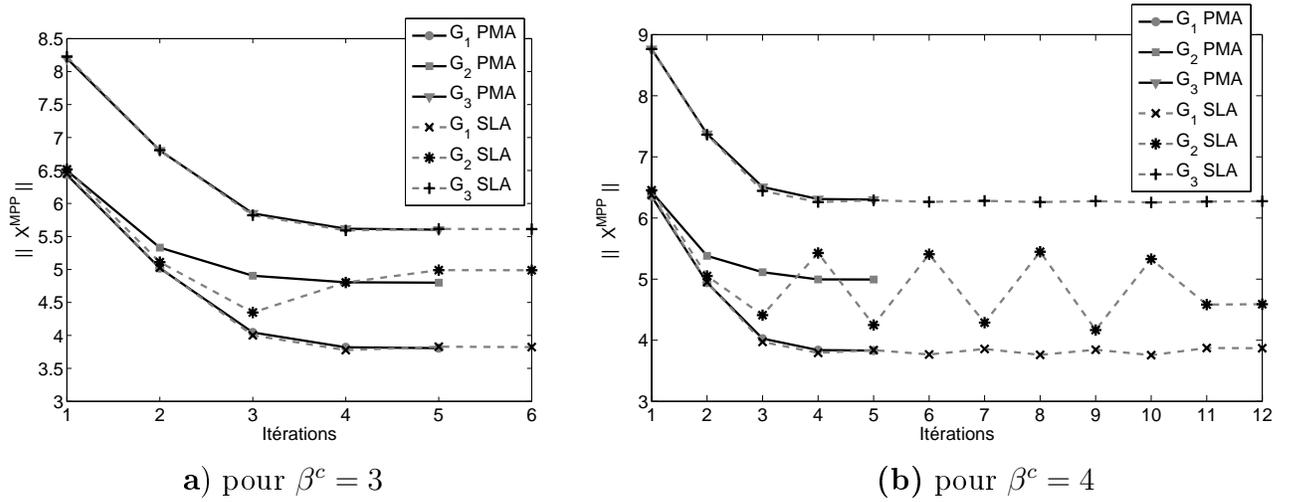


Figure II.17: Approximation du MPTP dans SLA.

ce point n'est pas exactement le point tangent à l'hypersurface de l'indice cible (qui est une hypersphère de rayon égal à β^c lorsque les variables sont normales). De plus, la figure II.17 montre que cette approximation devient de plus en plus mauvaise et moins précise lorsque l'indice cible est élevé.

II.6.2 Optimisation d'un poteau

Cet exemple, classique dans la littérature de la RBDO [67], est utilisé pour étudier l'impact de la distribution des incertitudes sur les méthodes. Soit un poteau court de section rectangulaire de dimensions b et h , soumis à un chargement F et à une flexion bi-axiale définie par les moments M_1 et M_2 . L'état limite est défini par le comportement élasto-plastique du matériau :

$$G(\mathbf{X}) = 1 - \frac{4M_1}{bh^2f_y} - \frac{4M_2}{b^2hf_y} - \frac{F^2}{(bhf_y)^2} \quad (\text{II.44})$$

Les méthodes de la RBDO sont appliqués pour minimiser la section du poteau pour un niveau de fiabilité cible de $\beta^T = 3$. Les variables d'optimisation sont les moyennes de la hauteur μ_h et de la largeur μ_b de la section. Les variables aléatoires sont la limite élastique du matériau f_y , la force appliquée F , les moments de flexion M_1 et M_2 et les dimensions de la section b et h . Plusieurs coefficients de variation de h et b sont testés : $CV_{b,h} = 0, 0,05, 0,1$ et $0,15$. En effet, lorsque les coefficients de variation de b et h sont nuls, les variables d'optimisation sont purement déterministes. Deux cas sont testés :

- **a)** toutes les variables aléatoires sont normales ;
- **b)** les variables aléatoires suivent les distributions de probabilité définies dans le tableau II.5.

Une limitation physique permet de contrôler l'aspect de la section. Celle-ci vient s'ajouter au problème RBDO qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{\mu_b, \mu_h} & : A = \mu_b \mu_h & (\text{II.45}) \\ \text{s.t.} & : \begin{cases} \Pr[G(\mathbf{X}) \leq 0] \leq \Phi(-\beta^c) \\ 0,5 \leq \mu_b/\mu_h \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

	F (kN)	M_1 (kN.m)	M_2 (kN.m)	f_y (MPa)	h	b
moyenne	2500	250	125	40	μ_h	μ_b
CV	0,2	0,3	0,3	0,10	0,05/0,1/0,15	0,05/0,1/0,15
Distribution (a)	Normale	Normale	Normale	Normale	Normale	Normale
Distribution (b)	Gumbel	Gumbel	Gumbel	Weibull	Lognormale	Lognormale

Tableau II.5: Description statistique des variables aléatoires du poteau.

		Distributions Normales (a)				Distributions non-Normales (b)			
CV		0	0,05	0,1	0,15	0	0,05	0,1	0,15
RIA	h^*	0,5615	0,6362	0,6879	0,7765	0,6344	0,6461	0,6810	0,7349
	b^*	0,3419	0,3181	0,3449	0,3882	0,3172	0,3230	0,3405	0,3700
	β^*	3,000	2,999	3,000	3,000	3,000	2,999	2,999	2,999
G-eval-FD(iter)		600(4)	525(5)	630(5)	945(5)	630(6)	735(5)	994(7)	819(5)
PMA	h^*	0,6167	0,6359	0,6886	0,7737	0,6342	0,6460	0,6790	0,7355
	b^*	0,3102	0,3181	0,3444	0,3896	0,3172	0,3230	0,3412	0,3697
	β^*	2,996	2,997	2,999	2,999	2,997	2,998	2,997	2,997
G-eval-FD(iter)		450(5)	651(5)	570(4)	684(5)	702(5)	948(5)	852(5)	684(5)
KKT	h^*	0,4210	0,4834	0,5204	0,5986	0,4578	0,5076	0,5203	0,6156
	b^*	0,4757	0,4282	0,4668	0,5140	0,4555	0,4192	0,4573	0,4469
	β^*	2,997	2,997	2,994	2,991	2,998	2,999	3,000	3,000
G-eval-FD(iter)		315(8)	504(7)	504(7)	567(8)	250(6)	567(8)	630(9)	504(7)
SLA	h^*	0,5481	0,6355	0,6833	0,7707	0,6328	0,6446	0,6772	0,7355
	b^*	0,3507	0,3177	0,3416	0,3853	0,3164	0,3223	0,3386	0,3677
	β^*	2,999	2,984	2,925	2,954	2,977	2,978	2,951	2,980
G-eval-FD(iter)		38(5)	46(5)	36(4)	46(5)	33(5)	43(4)	36(4)	54(5)
SORA	h^*	0,5955	0,6275	0,6783	0,7719	0,6054	0,6243	0,6723	0,7316
	b^*	0,3216	0,3225	0,3496	0,3904	0,3325	0,3343	0,3446	0,3715
	β^*	2,999	2,999	2,997	2,998	2,999	2,999	2,996	2,996
G-eval-FD(iter)		119(11)	196(14)	252(15)	346(19)	179(11)	309(12)	308(15)	318(18)
SAP	h^*	0,6066	0,6281	nc	nc	0,6275	0,6428	0,6809	nc
	b^*	0,3156	0,3222	nc	nc	0,3207	0,3247	0,3405	nc
	β^*	2,999	2,999	nc	nc	2,999	2,999	2,999	nc
G-eval-FD(iter)		56(12)	80(13)	nc	nc	56(13)	80(13)	130(19)	nc

Tableau II.6: Résultats d'optimisation du poteau.

Les résultats des différentes méthodes sont indiqués dans le tableau II.6. Quand les variables aléatoires sont normalement distribuées et les variables d'optimisation sont déterministes ($CV_{h,b} = 0$), toutes les méthodes conduisent à un optimum qui vérifie la fiabilité requise. Néanmoins, ce sont les méthodes PMA, SAP et SORA qui donnent des sections mieux optimisées de $0,1913m^2$ et $0,1915m^2$ respectivement. Les autres méthodes (i.e. SLA, RIA et KKT) ont convergé vers des sections un peu plus élevées, de $0,1920m^2$, $0,1922m^2$ et $0,2003m^2$, respectivement. Ces méthodes ont convergé vers des optima locaux. Lorsque h et b sont prises comme des variables aléatoires, RIA, PMA, SORA et

SAP ont convergé presque vers le même optimum. KKT aboutit toujours à un optimum local. Cette difficulté de KKT est principalement due à la formulation de cette approche. KKT cherche simultanément l'optimum et le MPFP, Cela peut engendrer des instabilités numériques conduisant à une convergence locale. Cet inconvénient est surtout observé lorsque les variables d'optimisation sont des moyennes des variables aléatoires.

Les résultats en gras dans le tableau II.6 indique que SLA n'a pas convergé en utilisant le point de départ $\mathbf{d}^0 = \{0, 5 ; 0, 5\}$, les résultats indiqués dans le tableau II.6 sont obtenus par d'autres points initiaux. La robustesse de SLA est mise en défaut dans cet exemple, puisque la précision dépend du point de départ choisi. Malgré l'efficacité de SLA et SAP, des problèmes de convergence sont observés lorsque le coefficient de variation devient élevé. SAP n'a pas convergé malgré l'utilisation de plusieurs points de départ. SORA et PMA semblent robustes, stables et moins sensibles à la distribution de probabilité en termes de type de loi de probabilité et de coefficient de variation des variables aléatoires, SORA exige moins d'effort de calcul que PMA grâce à la formulation découplée.

II.6.3 Optimisation de treillis

Les méthodes de la RBDO sont appliquées pour optimiser les trois treillis de la figure II.18. Pour chaque treillis, les variables d'optimisation sont les sections des barres A_i ; le nombre de variables d'optimisation est respectivement 5, 10 et 15. Pour les trois treillis, les variables aléatoires sont détaillées dans le tableau II.7, elles sont le module de Young, la limite élastique en traction f_{yt} et les chargements appliqués. Toutes ces variables aléatoires sont supposées suivre la même loi de probabilité, choisie parmi les lois suivantes : normale, lognormale, Weibull et Gumbel.

	E (MPa)	f_{yt} (MPa)	F (kN)	P (kN)
moyenne	68950	172	20	15
CV	0,10	0,15	0,30	0,20

Tableau II.7: Description statistique des variables aléatoires des treillis.

Pour chaque barre du treillis, une fonction d'état limite est définie par sa capacité ultime. Le nombre d'états limites est égal au nombre de barres (i.e. variables d'optimisation). Ainsi, pour les trois treillis 5, 10 et 15 états limites sont définis, respectivement. La capacité en traction est donnée par la limite élastique du matériau en traction f_{yt} et la capacité en compression f_{yc} est donnée par la contrainte d'Euler, définie par $f_{yc} = \pi^2 E / \lambda_i^2$, tel que λ_i est l'élançement de la barre i . L'analyse mécanique des structures est effectuée au moyen d'un programme éléments finis appelée CALFEM [88]. La probabilité de défaillance admissible est de $P_f^c = 10^{-4}$ correspondant à un indice cible de $\beta^c = 3,71$. Le problème de la RBDO vise à minimiser le volume du treillis en respectant la probabilité de défaillance cible.

Les résultats en gras dans les tableaux II.8-II.9-II.10 indiquent que la méthode en question n'a pas convergé en utilisant le point initial choisi $A_i^0 = 9 \text{ cm}^2$. La convergence de ces méthodes (RIA, SAP et KKT) est obtenue en utilisant un point de départ identifié par une optimisation déterministe des treillis.

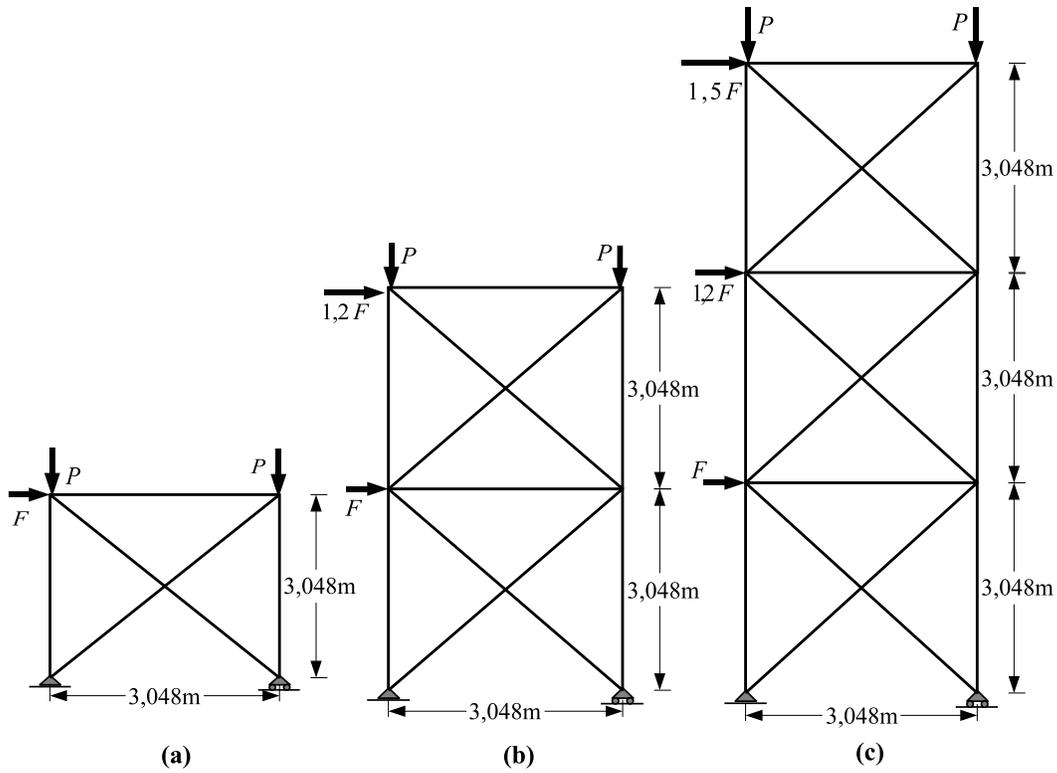


Figure II.18: (a) Treillis à cinq barres. (b) Treillis à dix barres. c) Treillis à quinze barres.

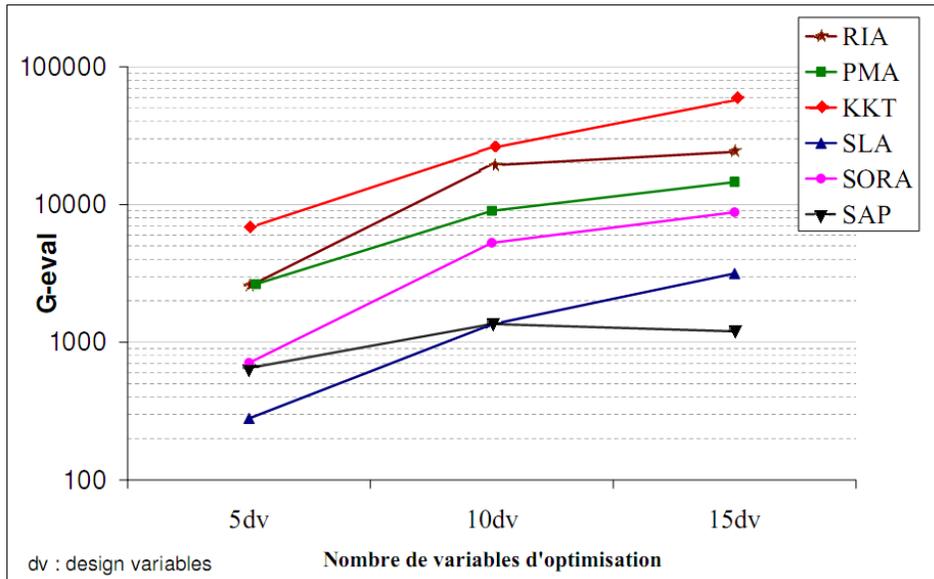


Figure II.19: Efficacité des approches en fonction du nombre de variables d'optimisation.

Distribution	Normale	Lognormale	Weibull	Gumbel
Méthodes	Iter / CPU V^* / β_{\min}^*	Iter / CPU V^* / β_{\min}^*	Iter / CPU V^* / β_{\min}^*	Iter / CPU V^* / β_{\min}^*
RIA	7 / 4,2 307,30 / 3,718	5 / 5,3 339,97 / 3,719	5 / 5,7 326,09 / 3,719	4 / 16,2 345,83 / 3,719
PMA	7 / 5,4 307,30 / 3,718	6 / 7,9 336,47 / 3,719	4 / 6,5 326,09 / 3,719	5 / 7,4 345,97 / 3,719
KKT	9 / 10,6 307,30 / 3,718	6 / 7,5 375,34 / 3,719	5 / 6,7 365,76 / 3,719	nc nc
SLA	5 / 0,5 351,29 / 3,719	5 / 0,5 375,32 / 3,719	5 / 0,7 365,76 / 3,719	5 / 0,6 389,09 / 3,719
SORA	13 / 1,3 307,28 / 3,718	22 / 2,4 336,47 / 3,719	12 / 2,2 326,09 / 3,719	21 / 2,5 345,97 / 3,719
SAP	31 / 1,9 307,30 / 3,719	21 / 1,4 336,47 / 3,719	15 / 2,1 326,09 / 3,719	22 / 1,5 345,97 / 3,719

Tableau II.8: Résultats d'optimisation du treillis à cinq barres.

RIA	15 / 44,2 758,36 / 3,719	7 / 40,1 836,19 / 3,719	nc nc	nc nc
PMA	7 / 25,3 758,36 / 3,719	10 / 64,6 836,18 / 3,719	7 / 76 809,43 / 3,719	8 / 68 856,43 / 3,719
KKT	9 / 58,1 758,91 / 3,711	6 / 40,6 837,80 / 3,719	nc nc	nc nc
SLA	7 / 3,2 758,36 / 3,719	9 / 4,4 836,19 / 3,718	7 / 3,9 809,43 / 3,718	9 / 5,0 856,43 / 3,719
SORA	36 / 12,8 758,35 / 3,718	27 / 10,2 836,18 / 3,718	33 / 14,3 809,43 / 3,719	27 / 10,7 856,43 / 3,719
SAP	22 / 4,3 758,34 / 3,717	28 / 4,5 836,19 / 3,717	20 / 6,5 809,43 / 3,716	30 / 5,2 856,41 / 3,717

Tableau II.9: Résultats d'optimisation du treillis à dix barres.

La figure II.19 montre l'aptitude des méthodes à résoudre des problèmes de complexité croissante. SAP paraît la plus capable à mener ce défi. Pour résoudre le treillis à cinq barres, SAP a exigé 650 calculs mécaniques, pour résoudre le treillis à quinze barres SAP a seulement doublé l'effort de calcul par rapport au treillis à cinq barres. Les autres méthodes ont exigé plus d'appels aux modèles mécaniques. De la même façon, SLA et SORA semblent être aussi capables de résoudre des problèmes complexes avec plusieurs variables d'optimisation et plusieurs états limites.

Cependant, les méthodes à deux-niveaux et la méthode KKT ont une capacité limitée. Elles nécessitent de nombreux calculs mécaniques même pour résoudre des structures simples avec 5 variables d'optimisation. KKT paraît impraticable pour répondre au besoin d'optimiser des structures à plusieurs états limites, en raison de la recherche simultanée de l'optimum et du MPFP pour chacun des modes de défaillance, le nombre de paramètres à optimiser augmente d'une façon astronomique. Pour le treillis à 15 barres, KKT cherche

Distribution	Normale	Lognormale	Weibull	Gumbel
Méthodes	Iter / CPU V^* / β_{\min}^*			
RIA	9 / 70,9	4 / 67	nc	nc
	1501,51 / 3,719	1621,08 / 3,719	nc	nc
PMA	5 / 50,6	4 / 77	4 / 120	4 / 98
	1462,66 / 3,719	1621,02 / 3,718	1573,09 / 3,719	1659,65 / 3,719
KKT	9 / 166	7 / 134	nc	nc
	1463,41 / 3,719	1620,83 / 3,716	nc	nc
SLA	9 / 9,6	8 / 8,9	8 / 10,1	10 / 13
	1462,66 / 3,719	1621,02 / 3,718	1574,73 / 3,719	1659,65 / 3,719
SORA	28 / 26,6	39 / 35,9	29 / 33,1	25 / 25
	1462,66 / 3,719	1621,02 / 3,718	1573,10 / 3,719	1659,64 / 3,719
SAP	7 / 4,2	22 / 7,9	20 / 12,8	24 / 8,5
	1462,66 / 3,719	1621,02 / 3,718	1573,11 / 3,719	1659,88 / 3,719

Tableau II.10: Résultats d'optimisation du treillis à quinze barres.

à optimiser 75 paramètres, ce qui pénalise la méthode.

La figure II.20 montre l'influence du type de loi sur le nombre de calculs mécaniques nécessaires. Lorsque des lois de probabilité non normales sont utilisées, RIA, KKT et PMA impliquent beaucoup plus d'effort de calcul. Malgré le choix d'un point de départ très proche de l'optimum, RIA et KKT ne convergent pas quand les lois de probabilité de Gumbel et de Weibull sont appliquées dans l'optimisation des treillis à dix et quinze barres. Ces deux méthodes sont très sensibles à la non linéarité des états limites dans l'espace normé.

SAP semble être très efficace mais elle est d'une robustesse très limitée car elle ne converge pas de n'importe quel point initial, surtout lorsque celui-ci est trop loin de l'optimum. Dans trois cas sur les douze étudiés, SAP n'a pas convergé en utilisant le point de départ choisi. Un autre point proche de l'optimum a été utilisé pour assurer la convergence (voir les résultats en caractères gras).

Pour le treillis à cinq barres, SLA semble converger vers un optimum local. Cela est principalement dû à l'approximation du MPTP. Cette approximation peut sous-estimer la fiabilité et peut conduire à un optimum n'assurant pas la fiabilité requise (ce que nous avons observé dans l'exemple précédent). De la même façon, elle peut sur-estimer la fiabilité conduisant à un optimum beaucoup plus élevé. Les sections optimales du treillis à cinq barres (obtenues par RIA, PMA, SORA et SAP) sont [1, 89 ; 23, 12 ; 8, 78 ; 0, 78 ; 46, 62 cm^2], par contre les méthodes KKT et SLA ont obtenu l'optimum suivant [18, 82 ; 23, 10 ; 4, 06 ; 0, 78 ; 48, 19 cm^2]. La barre 1 est surdimensionnée, où son indice de fiabilité est de 6, 51 au lieu de 3, 72. Les méthodes RIA et KKT ont aussi convergé vers des optima locaux pour le treillis à dix et à quinze barres.

En général, les algorithmes de la programmation non linéaire ne peuvent pas garantir la convergence vers un optimum global pour des domaines non convexes. Toutefois, PMA et SORA paraissent très robustes et précises, puisqu'elles convergent toujours vers un optimum satisfaisant la fiabilité requise. Celui-ci peut aussi être un optimum local, mais il

est toujours inférieur aux autres optima obtenus par les autres méthodes. SORA présente ainsi une meilleure efficacité par rapport aux méthodes à deux-niveaux et KKT.

II.6.4 Synthèse Globale

La figure II.21 présente une synthèse globale des performances numériques des approches à travers les différents critères choisis. En général, les méthodes à deux-niveaux (RIA et PMA) sont relativement faciles à mettre en œuvre mais elles exigent plus d'effort de calcul pour résoudre des problèmes simples. Les divers exemples prouvent que PMA est plus robuste et plus précise que RIA. Cela est dû à l'analyse de fiabilité inverse qui est généralement plus efficace qu'une analyse de fiabilité classique. De plus, elle est moins sensible à la non linéarité de la fonction d'état limite et au choix du point initial. Toutefois, PMA est limitée pour des structures avec un faible nombre de variables d'optimisation et de variables aléatoires.

Dans la famille des méthodes mono-niveau, KKT est efficace lorsque le gradient de l'état limite est analytique. Pour une dérivation numérique et dans le cas de plusieurs états limites, KKT semble être moins efficace que les méthodes à deux-niveaux. Cela est principalement dû à la formulation de cette approche, où le nombre de variables d'optimisation augmente avec le nombre d'états limites. De plus, KKT a des difficultés de convergence lorsque des distributions de probabilité non normales sont concernées. Nous estimons que cette méthode est peu adaptée à l'optimisation fiabiliste des structures, où généralement les structures possèdent plusieurs états limites.

En revanche, dans cette même catégorie SLA paraît efficace et robuste, puisqu'elle n'implique pas d'analyse fiabiliste et les limitations fiabilistes sont vérifiées par une simple approximation. Cependant, pour certains cas, un manque de précision est observé, dû à l'approximation du MPFP, ce qui peut conduire à des solutions sur- ou sous-dimensionnées.

La famille des méthodes découplées paraît très intéressante. SAP est très efficace, elle peut traiter des problèmes complexes avec plusieurs états limites, plusieurs variables d'optimisation et aléatoires. Néanmoins, cette méthode a un inconvénient majeur car elle ne converge pas pour n'importe quel point initial, le choix de ce point doit être judicieux et proche de l'optimum recherché, ce qui est souvent très difficile à savoir à l'avance. Dans certains cas, SAP échoue à converger malgré un point de départ proche de l'optimum, cela est principalement dû à la forte non linéarité des états limites dans l'espace normé due aux transformations probabilistes. De ce fait, la robustesse et la généralité de SAP sont réduites. Le nombre élevé d'itérations de SAP et de SORA est dû à la formulation de ces méthodes basées sur des cycles d'optimisation déterministes, où chaque cycle peut contenir plusieurs itérations. Dans cette même famille, SORA semble être très robuste, précise et relativement efficace.

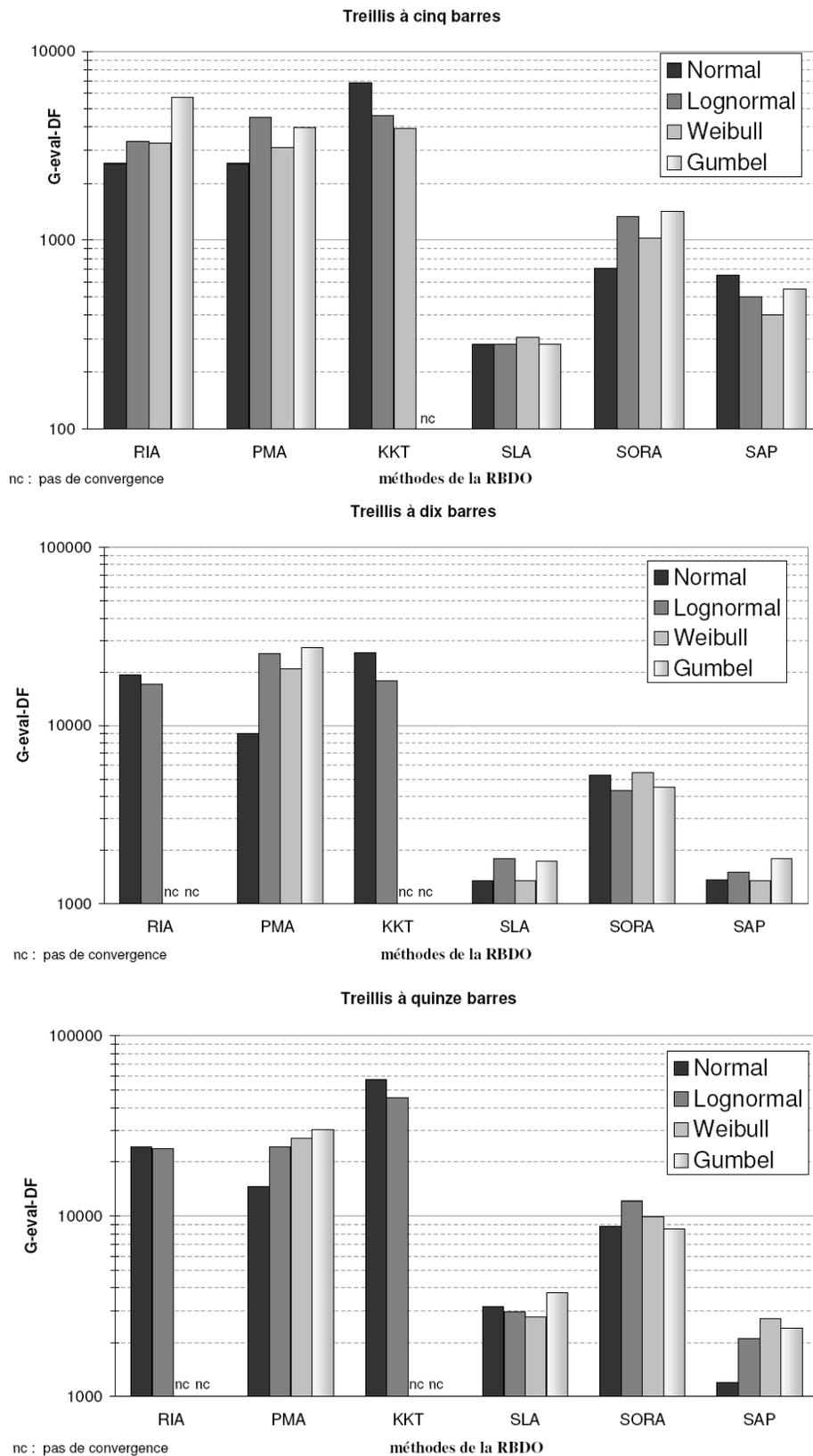


Figure II.20: Robustesse et efficacité en fonction du type de loi de probabilité (a) treillis 5 barres, (b) treillis 10 barres et (c) treillis 15 barres.

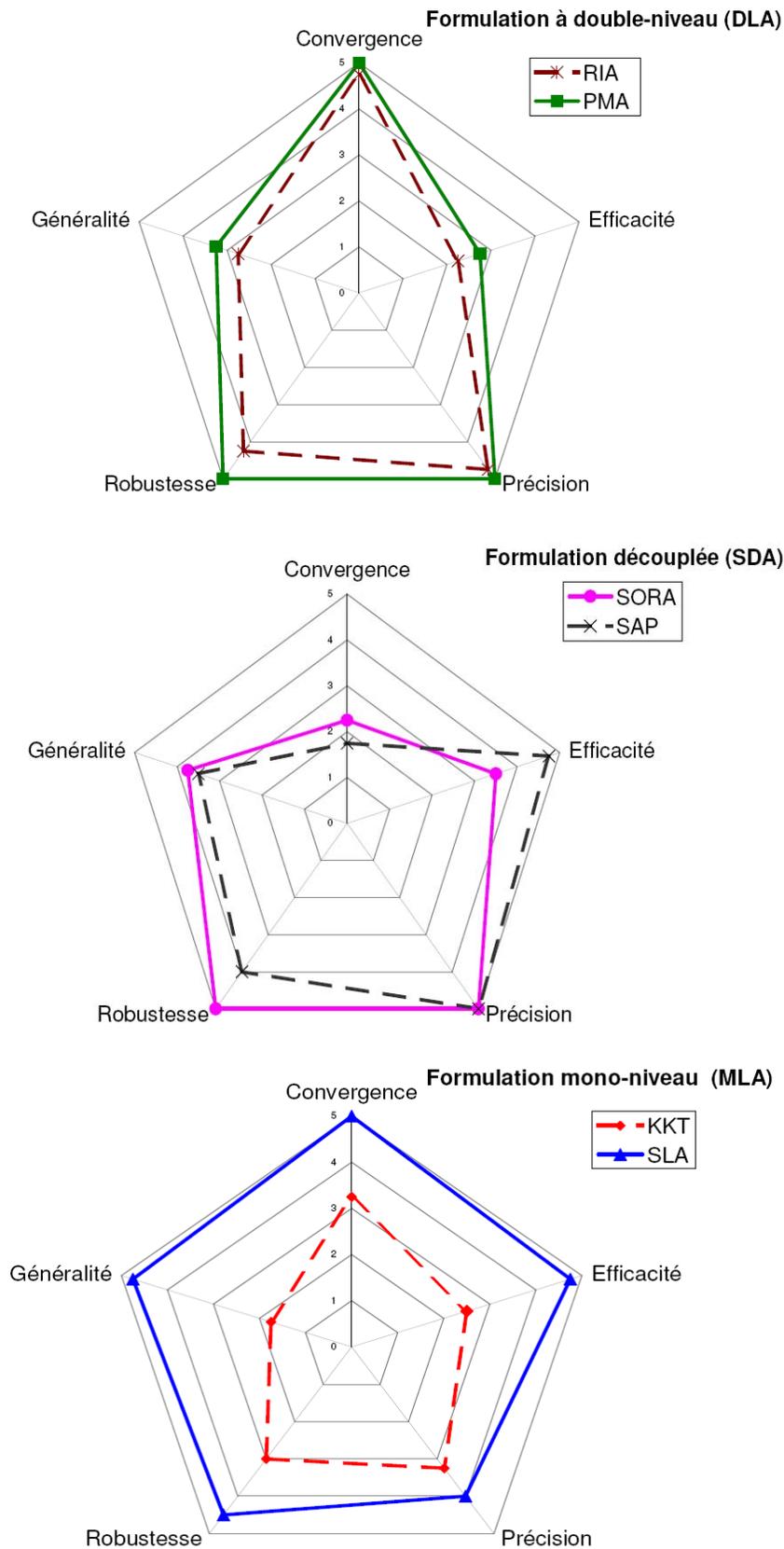


Figure II.21: Performances numériques des méthodes de la RBDO.

II.7 Conclusion

Cette étude comparative a pour objectif de confronter les performances numériques des principales méthodes de la RBDO mises en œuvre ces dernières années. Il est important de rappeler que malgré l'effort fourni pour le développement de ces méthodes, aucune étude comparative à travers plusieurs critères de performance numériques n'a été effectuée auparavant. Ainsi, ce chapitre est dédié à cette étude, afin d'offrir des informations permettant de choisir la méthode adéquate pour le type de problème à traiter. Les méthodes à deux-niveaux peuvent être utilisées pour des simples structures où le nombre de variables aléatoires et d'optimisation n'est pas trop élevé. PMA présente un schéma très robuste pour la RBDO, hormis qu'elle exige un grand effort de calcul, son domaine de validité est assez large.

Parmi les méthodes testées, SLA semble être la plus apte à conduire des applications complexes en optimisation fiabiliste des structures, car elle est efficace et robuste. Toutefois, la fiabilité de l'optimum obtenu par SLA doit être vérifiée, surtout lorsque les états limites sont fortement non linéaires et les coefficients de variation sont élevés. En effet, le domaine d'application de SLA est restreint par rapport à PMA et SORA.

De même, le domaine de validité de SAP est très réduit en raison de son manque de robustesse et malgré ses excellentes performances en termes d'efficacité. Une amélioration de SAP peut être envisagée par ajout de bornes supplémentaires aux variables d'optimisation à chaque cycle de SAP, afin d'obtenir une meilleure approximation de l'indice de fiabilité. Une stratégie judicieuse doit être mise en œuvre pour déplacer ces nouvelles bornes à chaque cycle ; de plus elles doivent être comprises entre les bornes initiales des variables d'optimisation. Cette technique peut assurer une approximation locale précise donc garantir la convergence.

Malgré l'efficacité relative de SORA, cette approche nous est apparue comme le meilleur compromis entre l'efficacité, la robustesse et la précision. Par conséquent, nous avons adopté cette méthode pour la suite des travaux de thèse.

Les méthodes présentées dans ce chapitre ne tiennent pas compte de la fiabilité système. L'intégration de la fiabilité système dans l'optimisation fiabiliste est indispensable, car la fiabilité système peut être inférieure aux indices de fiabilité de ces composants. Toutefois, des formulations adéquates ont été développées pour RIA et SLA pour tenir compte de la fiabilité système. Dans le chapitre suivant, nous proposons une procédure qui permet d'intégrer implicitement la contrainte de fiabilité système dans la méthode SORA. Cette nouvelle formulation appelée SOSRA permet de garantir le coût optimal et le niveau de fiabilité système cible.

Optimisation fiabiliste système

« Dans la mesure où les lois des mathématiques se rapportent à la réalité, elles ne sont pas sûres ; et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité » .

Albert Einstein (1879-1955)

Sommaire

III.1 Introduction	71
III.2 Analyse de fiabilité système	72
III.2.1 Modélisation d'un système mécanique	72
III.2.2 Niveaux d'approximation de la fiabilité système	75
III.2.3 Méthode de l'hyperplan équivalent	76
III.2.4 Méthodes d'estimation de la fiabilité système	77
III.3 Intégration de la fiabilité système dans l'optimisation	84
III.3.1 Intégration directe	84
III.3.2 Intégration indirecte	85
III.3.3 Bilan	88
III.4 Méthode SOSRA	88
III.4.1 Principe de la méthode SOSRA	89
III.4.2 Allocation optimale des indices de fiabilité cibles	89
III.4.3 Calibration des coefficients de sécurité optimaux du système (OSSF)	97
III.4.4 Proposition d'une méthode de calibration	101
III.4.5 Implémentation de la méthode SOSRA	101
III.5 Validation et application	104
III.5.1 Choix de la méthode de calcul de la fiabilité système	104
III.5.2 Treillis à treize barres	108
III.6 Conclusion	111

III.1 Introduction

Les structures mécaniques sont généralement formées de l'assemblage de plusieurs éléments. Chaque élément joue un rôle mécanique plus ou moins important dans la stabilité et la résistance de la structure. Chaque élément peut posséder plusieurs scénarios de défaillance. La défaillance totale de la structure peut surgir par la ruine d'un nombre suffisant d'éléments (successions de défaillances potentielles). Nous avons présenté dans le chapitre précédent les différentes formulations de l'optimisation fiabiliste de la conception (RBDO). Ces différentes approches sont basées sur l'analyse de la fiabilité des composants, où chaque composant représente un mode de défaillance défini par une fonction d'état limite. Dans ces formulations de la RBDO, la fiabilité de chaque composant est individuellement considérée. La défaillance de la structure ne tient pas compte des interactions entre les différents modes de défaillance. Toutefois, la fiabilité d'un système mécanique doit tenir compte de l'effet de ces interactions sur l'ensemble de la structure.

L'objectif de l'optimisation fiabiliste est de proposer une conception garantissant le niveau de fiabilité souhaité. Dans le cas des structures mécaniques possédant plusieurs modes de défaillance, le niveau de fiabilité cible doit être vérifié par le système tout entier et pas seulement par ses composants pris séparément. Autrement dit, une structure optimisée sans prise en compte de la fiabilité système, peut présenter un risque de défaillance élevée par rapport à la probabilité de défaillance que le concepteur souhaite en avoir.

Cependant, l'intégration de l'analyse de fiabilité système dans l'optimisation n'est pas une tâche simple car elle exige la connaissance et l'identification de tous les modes de défaillance potentiels. Dans une procédure d'optimisation de la conception, les modes de défaillance changent au cours des itérations en raison de la recherche du dimensionnement optimal. C'est l'un des inconvénients majeurs de l'insertion de la fiabilité système dans l'optimisation fiabiliste. De plus, l'analyse de fiabilité système nécessite un effort de calcul considérable, ce qui limite réellement son application dans l'optimisation fiabiliste des structures.

Dans ce chapitre, nous proposons une approche d'optimisation fiabiliste système basée sur le concept des approches séquentielles découplées étudiées dans le chapitre précédent. Nous rappelons que ces méthodes sont basées uniquement sur la fiabilité des composants. Le principe de la méthode SORA a été utilisée pour développer une approche intégrant l'exigence de la fiabilité système dans l'optimisation. En d'autres termes, l'approche proposée consiste à décomposer le problème d'optimisation fiabiliste système en plusieurs cycles d'optimisation déterministe et d'analyse de fiabilité système. Une procédure d'allocation optimale des indices cibles est proposée, afin de calibrer les coefficients de sécurité sur la base du système tout entier. Ces coefficients sont utilisés dans le cycle suivant de l'optimisation déterministe dans le but de rechercher la conception optimale vérifiant le niveau de fiabilité système cible.

III.2 Analyse de fiabilité système

L'analyse de la fiabilité d'un système est fondée sur la connaissance de la fiabilité de l'ensemble de ses composants. La notion du composant est associée au scénario de défaillance et à l'état limite. L'estimation exacte de la fiabilité système dépend de tous les modes de défaillance et de toutes les combinaisons et les interactions entre ces modes. Une telle estimation est impossible pour des structures réelles et complexes car le nombre de combinaisons est donné par le factoriel du nombre de composants. Toutefois, une modélisation approchée de la fiabilité système peut être obtenue par la prise en compte des modes de défaillance dominants.

Étant donné que la défaillance totale d'un système mécanique survient après les défaillances successives d'un certain nombre de composants, le système peut être modélisé par la combinaison des scénarios élémentaires des modes de défaillances dominants.

III.2.1 Modélisation d'un système mécanique

Un système mécanique peut être décrit sous forme d'arrangement en série et/ou en parallèle de ses composants. Ces deux types de modèles sont utilisés ou combinés (modèle mixte) pour décrire la défaillance globale d'une structure [89].

III.2.1.1 Système série

La défaillance d'un système série est obtenue par la défaillance d'au moins un de ses composants. La probabilité de défaillance est donnée par la probabilité de défaillance de l'union des composants potentiels.

$$P_{f_{sys}} = Prob \left[\bigcup_{i=1}^m (G_i \leq 0) \right] \quad (\text{III.1})$$

où m est le nombre de composants (i.e. modes de défaillance dominants) et G_i est l'état limite du composant i . L'approximation du premier ordre [26] permet d'estimer la probabilité de défaillance par la fonction de répartition multinormale Φ_m dans l'espace des variables normées :

$$P_{f_{sys}} = 1 - \Phi_m(\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\rho}) \quad (\text{III.2})$$

où $\boldsymbol{\beta}$ est le vecteur contenant les indices de fiabilité des composants et $\boldsymbol{\rho}$ est la matrice de corrélation entre les états limites G_i et G_j , elle est estimée par le produit scalaire des cosinus directeurs $\boldsymbol{\alpha}_i$ et $\boldsymbol{\alpha}_j$ des composants i et j , respectivement.

$$\rho_{ij} = \boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_j \quad (\text{III.3})$$

Ces cosinus directeurs $\boldsymbol{\alpha}$ sont estimés lors de l'analyse de la fiabilité des composants.

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \frac{\partial G_i}{\partial \mathbf{u}} / \left\| \frac{\partial G_i}{\partial \mathbf{u}} \right\| \quad (\text{III.4})$$

où \mathbf{u} est le vecteur des réalisations des variables aléatoires normales, centrées réduites et décorréllées \mathbf{U} , issues de la transformation des variables aléatoires \mathbf{X} .

A titre d'illustration, la ruine du treillis sur la figure III.1 survient si au moins une de ses barres se rompt par compression, par flambement ou par traction. La fiabilité système de la structure peut être estimée par un modèle en série de tous les modes de défaillance des barres.

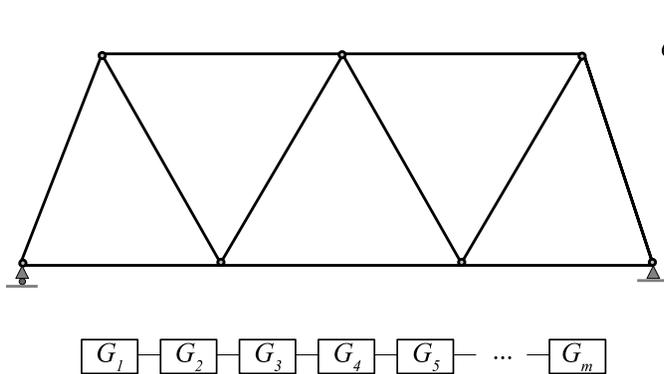


Figure III.1: Système en série.

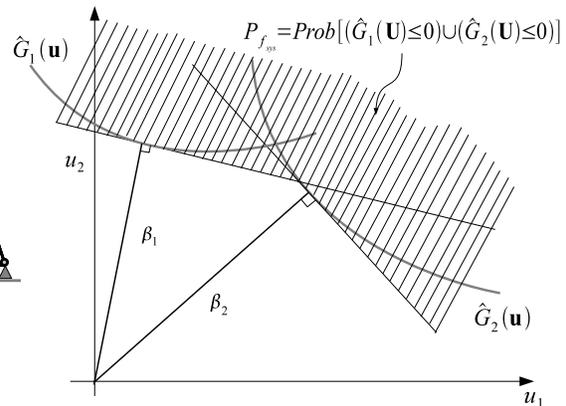


Figure III.2: Probabilité de défaillance d'un système en série.

III.2.1.2 Système parallèle

La défaillance d'un système parallèle survient par la défaillance de tous ses composants. La probabilité de défaillance de la structure est obtenue par l'intersection des composants potentiels.

$$P_{f_{sys}} = Prob \left[\bigcap_{i=1}^m (G_i \leq 0) \right] \quad (III.5)$$

L'approximation du premier ordre d'un système parallèle donne :

$$P_{f_{sys}} = \Phi_m(-\beta; \rho) \quad (III.6)$$

Par exemple, soit la structure dans la figure III.3 tenue par des câbles. La ruine de cette structure est observée lorsque tous les câbles se rompent. Ainsi, la fiabilité système de la structure peut être estimée par un modèle en parallèle des modes de défaillance des câbles.

III.2.1.3 Système mixte

Le comportement des structures mécaniques est souvent complexe et la défaillance de l'un de ses composants modifie l'état de la structure qui peut se traduire par la diminution de sa rigidité. En générale, la défaillance totale peut être considérée par la formation d'un mécanisme de ruine. Les deux modèles précédents (en parallèle et en série) ne permettent pas souvent une représentation adéquate de la défaillance. La modélisation des structures redondantes avec un système série est une hypothèse conservatrice. En effet, la défaillance d'un composant n'engendre pas la défaillance totale de la structure. Pour cela, le modèle général utilisé est représenté par la combinaison en série de sous-systèmes parallèles.

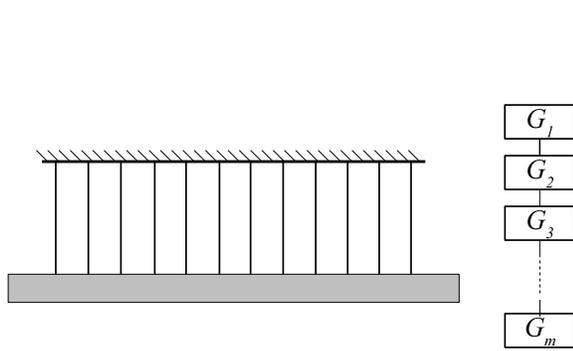


Figure III.3: Système en parallèle.

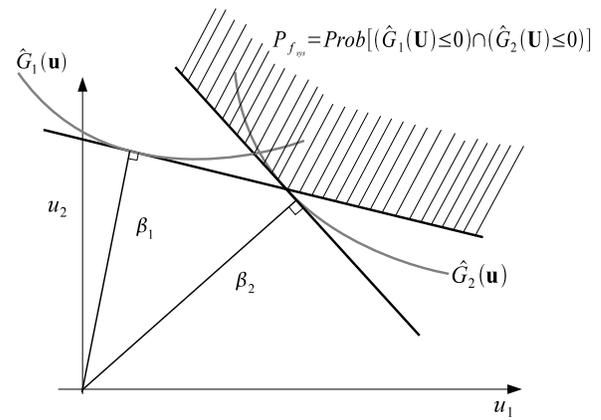


Figure III.4: Probabilité de défaillance d'un système en parallèle.

La figure III.5 montre les défaillances possibles d'un portique bi-encastré et chargé par deux forces P et H . Nous pouvons distinguer trois modes de défaillance dominants. Le premier mode est représenté par l'apparition de quatre rotules plastiques sur les extrémités des poteaux. Le deuxième mode est représenté par l'apparition des rotules plastiques dans la poutre. Le dernier mode est dû à la ruine par flambement du poteau droit et l'apparition d'une rotule plastique au pied du poteau gauche. La ruine totale du portique survient si l'un des trois modes de ruine est atteint.

$$P_{f_{sys}} = Prob \left[\bigcup_{k=1}^p \left(\bigcap_{l=1}^q (G_{kl} \leq 0) \right) \right] \quad (III.7)$$

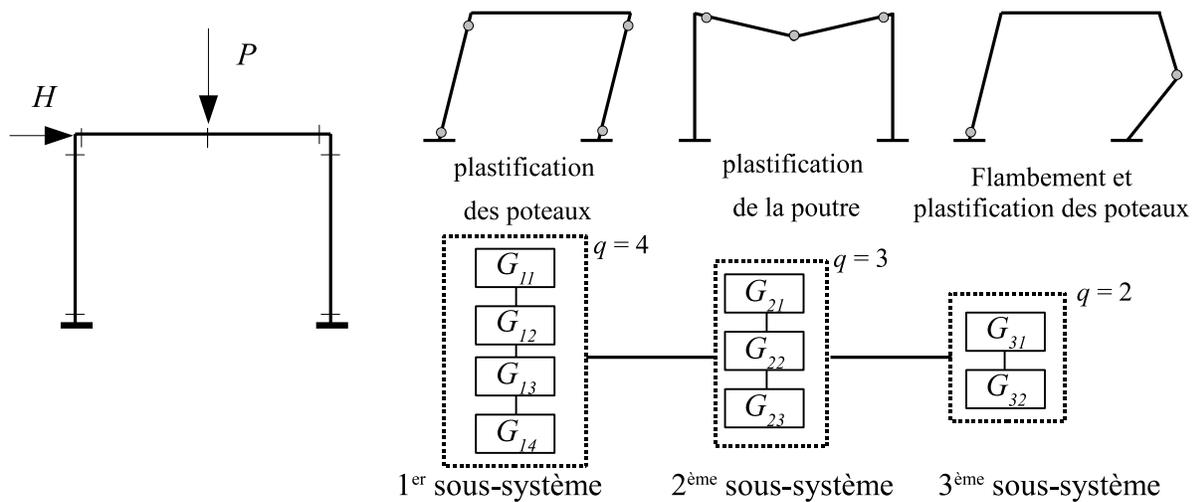


Figure III.5: Système mixte.

III.2.2 Niveaux d'approximation de la fiabilité système

La défaillance des structures isostatiques peut être correctement modélisée par un système en série, étant donné que la défaillance d'un seul des composants de la structure engendre la perte de stabilité globale. Néanmoins, pour des structures hyperstatiques, la défaillance d'un composant n'entraîne pas systématiquement la ruine globale de la structure. Elle engendre un changement de l'état de la structure qui se traduit par une perte de rigidité. La structure peut encore résister aux charges appliquées par la redistribution des efforts dans les composants survivants. L'occurrence d'un nombre suffisant de défaillances provoque la ruine globale de la structure. Cette ruine peut être identifiée par la formation d'un mécanisme ou par un déplacement excessif.

L'approximation classique de la fiabilité système est basée sur une analyse de fiabilité des modes de défaillance de la structure. Différents niveaux d'approximation de la fiabilité système peuvent être effectués. Les approximations de la fiabilité système au niveau 0 et au niveau 1 sont les plus utilisées. Une approximation au niveau supérieur à 1 exige la connaissance des modes de dégradation de la structure. Cette dégradation est due à la défaillance d'un ou de plusieurs composants.

- **Fiabilité système au niveau 0**

La probabilité de défaillance de la structure est approximée par la plus grande probabilité de défaillance des composants. L'approximation au niveau 0 n'est pas réellement une analyse de fiabilité système car l'interaction entre les modes de défaillance n'est pas prise en compte.

$$P_{f_{sys}} \approx \max_{i=1, \dots, m} (P_{f_i}) \quad (\text{III.8})$$

où P_{f_i} est la probabilité de défaillance du composant i , calculée par FORM. Toutefois, la probabilité de défaillance réelle peut être supérieure à celle obtenue par cette approximation.

- **Fiabilité système au niveau 1**

Une meilleure approximation de la fiabilité système est la modélisation en série des modes de défaillance de la structure. La probabilité de défaillance est donnée par l'équation III.2. Pour des structures redondantes avec un degré élevé d'hyperstaticité, la modélisation en série est une hypothèse conservatrice.

- **Fiabilité système au niveau supérieur à 1**

Une analyse de fiabilité système au niveau supérieur à 1 est basée sur la connaissance de l'état dégradé de la structure après la défaillance d'un ou de plusieurs composants. La probabilité de défaillance du système est estimée par une modélisation série des sous-systèmes parallèles (équation III.7). Chaque sous-système est défini par des composants disposés en parallèle. Nous devons commencer par l'estimation des probabilités de défaillance des sous-systèmes.

$$\beta_k^P = -\Phi^{-1}(\Phi_q(-\beta_k; \rho_k)) \quad k = 1, \dots, p \quad (\text{III.9})$$

où q est le nombre de composants du $k^{\text{ème}}$ sous-système, Φ_q est la fonction de répartition multinormale de dimension q , β_k et ρ_k sont respectivement le vecteur contenant les q

indices de fiabilité des composants et la matrice de corrélation du $k^{\text{ème}}$ sous-système, β_k^P est l'indice de fiabilité du $k^{\text{ème}}$ sous-système. La probabilité de défaillance du système est calculée par le modèle en série des p indices de fiabilité des sous-systèmes parallèles.

$$P_{f_{sys}} = 1 - \Phi_p(\boldsymbol{\beta}^P; \boldsymbol{\rho}^P) \quad (\text{III.10})$$

et :

$$\beta_{sys} = -\Phi^{-1}(P_{f_{sys}})$$

où β_{sys} est l'indice de fiabilité système, $\boldsymbol{\beta}^P$ est le vecteur contenant les p indices de fiabilité calculés par l'équation III.9, $\boldsymbol{\rho}^P$ est la matrice de corrélation entre les sous-systèmes parallèles. Cette matrice est estimée par la méthode de l'hyperplan équivalent développée par *Gollwitzer et al.* [90].

III.2.3 Méthode de l'hyperplan équivalent

Cette méthode s'appuie sur l'approximation FORM. Elle vise à exprimer chaque sous-système parallèle par une marge de fiabilité linéaire équivalente. Cette marge de fiabilité équivalente \tilde{G}_k^P du $k^{\text{ème}}$ sous-système est définie par :

$$\tilde{G}_k^P = \beta_k^P + \sum_{j=1}^n \alpha_{kj}^P U_j = 0 \quad k = 1, \dots, p \quad (\text{III.11})$$

où U_j ($j = 1, \dots, n$) sont des variables aléatoires normales, centrées, réduites et décorré- lées, β_k^P et α_k^P sont respectivement l'indice de fiabilité et les cosinus directeurs du $k^{\text{ème}}$ sous-système. Ces cosinus directeurs α_k^P doivent rester les mêmes par rapport à une petite perturbation des variables aléatoires. Ainsi, une petite perturbation $\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$ des variables aléatoires \mathbf{U} provoque un indice de fiabilité perturbé du $k^{\text{ème}}$ sous-système, en utilisant l'équation III.9 :

$$\beta_k^P(\boldsymbol{\epsilon}) = -\Phi^{-1}(\Phi_q(-\boldsymbol{\beta}_k - \boldsymbol{\alpha}_k \boldsymbol{\epsilon}; \boldsymbol{\rho}_k)) \quad (\text{III.12})$$

où $\boldsymbol{\beta}_k$ et $\boldsymbol{\alpha}_k$ sont respectivement les indices de fiabilité et la matrice des cosinus directeurs des composants du $k^{\text{ème}}$ sous-système. La marge équivalente par rapport à l'indice de fiabilité perturbé peut s'écrire par :

$$\tilde{G}_k^P = \beta_k^P(\boldsymbol{\epsilon}) + \sum_{j=1}^n \alpha_{kj}^P (U_j + \epsilon_j) = 0 \quad k = 1, \dots, p \quad (\text{III.13})$$

où :

$$\tilde{G}_k^P = \beta_k^P(\boldsymbol{\epsilon}) - \beta_k^P + \sum_{j=1}^n \alpha_{kj}^P \epsilon_j = 0 \quad k = 1, \dots, p \quad (\text{III.14})$$

Finalement, les cosinus directeurs $\boldsymbol{\alpha}^P$ de la marge équivalente s'obtiennent par :

$$\alpha_{kj}^P = \frac{\frac{\partial \beta_k^P}{\partial \epsilon_j} |_{\boldsymbol{\epsilon} \rightarrow 0}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \beta_k^P}{\partial \epsilon_j} |_{\boldsymbol{\epsilon} \rightarrow 0} \right)^2}} \quad k = 1, \dots, p \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{III.15})$$

III.2.4 Méthodes d'estimation de la fiabilité système

Nous avons vu, dans la section précédente, les différentes modélisations pour l'analyse de fiabilité système. La probabilité de défaillance du système peut être obtenue par l'approximation au premier ordre développée par *Hohenbichler et al.* [26]. Cette approximation est surtout basée sur la fonction de répartition multinormale Φ_m , avec m la dimension du système donnée par le nombre de composants. Toutefois, l'évaluation de la fonction de répartition multinormale Φ_m est donnée par une intégration dans l'espace des variables aléatoires centrées et normées mais corrélées par la matrice $\boldsymbol{\rho}$

$$\Phi_m(\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\rho}) = \int_{-\infty}^{\beta_1} \int_{-\infty}^{\beta_2} \dots \int_{-\infty}^{\beta_m} \phi_m(\mathbf{z}) dz_1 dz_2 \dots dz_m \quad (\text{III.16})$$

tel que :

$$\phi_m(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{|\boldsymbol{\rho}|}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \boldsymbol{\rho}^{-1} \mathbf{z}}$$

où \mathbf{Z} est un vecteur de variables aléatoires centrées et réduites mais corrélées par la matrice $\boldsymbol{\rho}$ et $\phi_m(\cdot)$ est la densité de probabilité multinormale. L'intégration numérique de cette expression n'est pas une tâche facile. Pour des dimensions supérieures à 5, une intégration par les méthodes classiques d'intégration (méthodes des quadratures de Gauss...) est impossible dû au cumul des erreurs numériques. Les probabilités de défaillance sont souvent très petites alors que ces erreurs numériques peuvent être beaucoup plus grandes. De nombreux chercheurs ont développé des méthodes permettant d'approcher l'intégrale III.16. Les méthodes d'estimation de la fiabilité système peuvent être classées en trois familles distinctes :

- les bornes de la probabilité de défaillance ;
- les méthodes d'approximation ;
- les méthodes basées sur les simulations de Monte Carlo.

III.2.4.1 Bornes de la probabilité de défaillance du système

Ces approches donnent des expressions analytiques pour l'encadrement de la probabilité de défaillance du système. Une des premières approches, appelées bornes uni-modales, fait intervenir uniquement les probabilités des composants et le signe de leur corrélation. Toutefois, ces bornes exigent que toutes les corrélations soient du même signe (ce qui n'est pas souvent le cas). De plus, l'encadrement obtenu est souvent très large. *Ditlevsen* [91] a proposé des expressions plus étroites pour la probabilité de défaillance d'un système série. Ces expressions appelées les bornes bi-modales utilisent les probabilités d'intersection des composants pris deux à deux.

Pour des raisons de simplicité de la notation, la probabilité $Prob[G_i \leq 0]$ est notée $P(G_i)$. Les probabilités de défaillance des composants sont classées par ordre croissant : $P(G_1) \leq P(G_2) \leq \dots \leq P(G_m)$

$$\begin{aligned}
 P(G_1) + \sum_{i=2}^m \max \left[0 ; P(G_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(G_i \cap G_j) \right] \leq P \left(\bigcup_{i=1}^m G_i \right) \leq \\
 \sum_{i=1}^m P(G_i) - \sum_{i=2}^m \max_{j < i} \left[P(G_i \cap G_j) \right] \quad (III.17)
 \end{aligned}$$

où $P(G_i \cap G_j)$ est la probabilité de défaillance de l'intersection des deux états limites G_i et G_j , elle peut être évaluée par les bornes suivantes :

$$\begin{aligned}
 \max [P(A) ; P(B)] \leq P(G_i \cap G_j) \leq P(A) + P(B) \quad \text{si } \rho_{ij} \geq 0 \\
 0 \leq P(G_i \cap G_j) \leq \min [P(A) ; P(B)] \quad \text{si } \rho_{ij} < 0 \quad (III.18)
 \end{aligned}$$

tel que :

$$P(A) = \Phi(-\beta_i) \Phi \left(-\frac{\beta_j - \rho_{ij} \beta_i}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} \right) \quad \text{et} \quad P(B) = \Phi(-\beta_j) \Phi \left(-\frac{\beta_i - \rho_{ij} \beta_j}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} \right) \quad (III.19)$$

où $\beta_i = -\Phi^{-1}(P(G_i))$ et $\beta_j = -\Phi^{-1}(P(G_j))$ sont respectivement les indices de fiabilité des composants i et j et ρ_{ij} est la corrélation entre ces deux composants. Cependant, pour une meilleure précision, la fonction de répartition binormale Φ_2 peut être utilisée pour l'évaluation de la probabilité de l'intersection.

$$P(G_i \cap G_j) = \Phi_2(-\beta_i, -\beta_j ; \rho_{ij})$$

Une approximation de la fonction de répartition binormale est détaillée dans l'annexe C. Pour un système parallèle, il existe aussi des bornes bi-modales proposées par *Murotsu* [89]. Soit les probabilités complémentaires des composants données par : $P(\bar{G}_i) = 1 - P(G_i)$, $i = 1, \dots, m$. Ces probabilités sont classées par ordre décroissant : $P(\bar{G}_1) \geq P(\bar{G}_2) \geq \dots \geq P(\bar{G}_m)$

$$\begin{aligned}
 1 - P(\bar{G}_1) - \sum_{i=2}^m \min_{j < i-1} P(\bar{G}_i \cap G_j) \leq P \left(\bigcap_{i=1}^m G_i \right) \leq \\
 1 - P(\bar{G}_1) - \sum_{i=2}^m \max \left[0 ; \sum_{j=1}^{i-1} P(\bar{G}_i \cap G_j) - (i-2)P(\bar{G}_i) \right] \quad (III.20)
 \end{aligned}$$

Les probabilités de l'intersection des événements \bar{G}_i et G_j peuvent être estimées par la fonction de répartition binormale Φ_2 :

$$P(\bar{G}_i \cap G_j) = \Phi_2(\beta_i, -\beta_j ; \rho_{ij}) \quad (III.21)$$

où β_i et β_j sont respectivement les indices de fiabilité des composants G_i et G_j .

D'autres chercheurs ont développé des bornes d'ordre supérieur [92] qui s'appuient sur les probabilités d'intersection entre les éléments pris deux par deux $P_{ij} = P(\bar{G}_i \cap G_j)$, puis trois par trois P_{ijk} et quatre par quatre P_{ijkl} .

III.2.4.2 Méthodes d'approximation

Hohenbichler et al. [26] ont proposé une approche récursive pour l'évaluation de l'intégrale de la fonction de répartition multinormale Φ_m . L'approche FOMN (*First-Order Multi-Normal*) est basée sur l'approximation FORM des composants du système et sur l'approximation de la fonction de répartition multinormale. Soit m composants disposés parallèlement, la fonction d'état limite de chaque composant est linéarisée au point de défaillance le plus probable (MPFP) par l'hyperplan \tilde{G}_i défini par :

$$\tilde{G}_i = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} U_j = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{III.22})$$

La probabilité de défaillance du système parallèle est approximée par :

$$\Phi_m(-\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\rho}) = Prob \left[\bigcap_{i=1}^m \tilde{G}_i \leq 0 \right] = Prob \left[\bigcap_{i=1}^m Z_i \leq -\beta_i \right] \quad (\text{III.23})$$

où Z_i ($i = 1, \dots, m$) sont des variables aléatoires normées mais corrélées par la matrice de corrélation $\boldsymbol{\rho}$. Ces variables sont décorrélées en utilisant la décomposition de *Cholesky*, tel que $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$ et $\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{u}$, où \mathbf{U} sont des variables aléatoires normées décorrélées et \mathbf{B} la matrice triangulaire inférieure issue de la décomposition de *Cholesky*. L'espace de calcul de la fonction de répartition Φ_m de dimension m est réduit en dimension $m - 1$.

$$\begin{aligned} \Phi_m(-\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\rho}) &= Prob \left[\bigcap_{i=1}^m \left\{ \sum_{k=1}^i b_{ik} U_k \leq -\beta_i \right\} \right] \\ &= Prob \left[\bigcap_{i=2}^m \left\{ \sum_{k=1}^i b_{ik} U_k \leq -\beta_i \right\} \mid (U_1 \leq -\beta_1) \right] \times \Phi(-\beta_1) \\ &= Prob \left[\bigcap_{i=2}^m \left\{ \underbrace{b_{i1} h(U_1) + \sum_{k=2}^i b_{ik} U_k}_{\tilde{G}_i} \leq -\beta_i \right\} \right] \times \Phi(-\beta_1) \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

où $h(U_1) = \Phi^{-1}(\Phi(-\beta_1)\Phi(U_1))$. La nouvelle fonction \tilde{G}_i est non linéaire par rapport à U_1 , celle-ci est linéarisée par :

$$\tilde{G}_i^{E(1)} = \sum_{j=1}^i \lambda_{ij}^{E(1)} U_j + \beta_i^{E(1)} = 0 \quad i = 2, \dots, m \quad (\text{III.25})$$

où $\boldsymbol{\lambda}_i^{E(1)}$ est le vecteur des cosinus directeurs du MPFP de la fonction non linéaire \tilde{G}_i et $\beta_i^{E(1)}$ est l'indice de fiabilité correspondant, la matrice de corrélation équivalente est définie par $\rho_{ij}^{E(1)} = \boldsymbol{\lambda}_i^{E(1)} \cdot \boldsymbol{\lambda}_j^{E(1)}$. La fonction de répartition Φ_m est approximée par :

$$\Phi_m(-\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\rho}) = \Phi_{m-1} \left(-\boldsymbol{\beta}^{E(1)}; \boldsymbol{\rho}^{E(1)} \right) \times \Phi(-\beta_1) \quad (\text{III.26})$$

D'une façon récursive, la fonction de répartition Φ_m est approximée par :

$$\Phi_m(-\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\rho}) = \Phi(-\beta_1) \times \Phi(-\beta_2^{E(1)}) \times \Phi(-\beta_3^{E(2)}) \times \dots \times \Phi(-\beta_m^{E(m)}) \quad (\text{III.27})$$

Tang et al. [93] ont amélioré l'approche FOMN par un calcul direct des probabilités conditionnelles de l'équation III.24. *Pandey* [94] a proposé une méthode d'approximation utilisant l'approche récursive basée sur le produit des probabilités marginales (PCM : *Product of Conditional Marginals*)

III.2.4.3 Méthodes de simulation

Pour des dimensions élevées, la méthode FOMN devient inefficace et imprécise. Le moyen le plus robuste pour l'évaluation de la fiabilité système est basé sur les méthodes de simulation de Monte Carlo. Ces simulations peuvent être exécutées par deux approches différentes : directe ou indirecte.

- Les simulations directes consistent à estimer la probabilité de défaillance du système par l'évaluation de l'intégrale I.2 donnée dans le chapitre I. Les fonctions d'états limites sont évaluées aux tirages aléatoires. Cela entraîne un coût de calcul exorbitant car chaque évaluation de la fonction d'état limite correspond à un appel au modèle mécanique. De nombreux chercheurs ont développé des méthodes basées sur les tirages d'importance [95, 96, 97] ou sur les simulations directionnelles [98] afin de réduire le temps de calcul sans compromettre la précision.
- Les simulations indirectes consistent à évaluer la fonction de répartition Φ_m . Dans ces approches, les indices de fiabilité des composants sont évalués par FORM et l'estimation de la probabilité de défaillance du système par les simulations de Monte Carlo. L'avantage des simulations indirectes réside dans le fait qu'elles n'exigent pas de calcul mécanique. Plusieurs approches ont été développées pour calculer l'intégrale de l'équation III.16, parmi ces méthodes nous pouvons citer :
 - l'approche basée sur les tirages d'importance [99]
 - l'algorithme séquentiel de tirages d'importance conditionnés (SCIS : *Sequential Conditioned Importance Sampling*) [100]
 - la méthode de *Genz* [101]

Dans ce travail nous nous intéressons aux approches de simulations indirectes, ainsi nous donnons deux méthodes de simulation que nous avons testées, l'algorithme SCIS disponible sur FERUM (*Finite Element Reliability Using MATLAB*)¹ et la méthode de *Genz*.

Algorithme Séquentiel de tirages d'importance (SCIS)

La méthode SCIS est basée sur les propriétés de la fonction de probabilité multinormale et les tirages d'importance conditionnés. L'intégrale de l'équation III.16 est décomposée

1. www.ce.berkeley.edu/FERUM/

en une intégration de densité de probabilité conditionnelle. Soit l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
 P &= \int_a^{\beta_1} \int_a^{\beta_2} \dots \int_a^{\beta_m} \phi_n(z_1, z_2, \dots, z_m) dz_1 dz_2 \dots dz_m \\
 &= \int_a^{\beta_1} \phi_1(z_1) dz_1 \int_a^{\beta_2} \phi_2(z_2|z_1) dz_2 \dots \int_a^{\beta_m} \phi_m(z_m|z_1, \dots, z_{m-1}) dz_m
 \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

où \mathbf{Z} est le vecteur des variables aléatoires normées et corrélées et $\phi_k(z_k|z_1, \dots, z_{k-1})$ est la densité de probabilité conditionnelle de la variable aléatoire Z_k tel que les variables aléatoires Z_1, \dots, Z_{k-1} sont fixées $Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots, Z_{k-1} = z_{k-1}$. La distribution de probabilité conditionnelle est $\Phi_k(z_k|z_1, \dots, z_{k-1})$ de paramètres \bar{m}_k et $\bar{\sigma}_k$ données par :

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_k &= - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{z_i}{d_{kk}} \\
 \bar{\sigma}_k &= \sqrt{1/d_{kk}}
 \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

où d_{ij} sont les éléments de la matrice inverse notée \mathbf{D} de la matrice de corrélation $\boldsymbol{\rho}$. Dans la première étape du premier tirage aléatoire, la variable aléatoire Z_1 est tirée en utilisant la fonction de densité de probabilité suivante :

$$\frac{\phi(z_1)}{\Phi([a, \beta_1])} I_{[a, \beta_1]}(z_1) \quad (\text{III.30})$$

tel que :

$$\begin{aligned}
 \Phi([a, \beta_1]) &= \Phi(\beta_1) - \Phi(a) \\
 \text{et :} \\
 \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad I_{[a, \beta_i]} &= \begin{cases} 1 & \text{si } z_i \in [a, \beta_i] \\ 0 & \text{si } z_i \notin [a, \beta_i] \end{cases}
 \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Au $k^{\text{ème}}$ tirage aléatoire, les variables z_1, z_2, \dots, z_{k-1} sont déjà tirées, le tirage de la variable aléatoire Z_k est effectuée avec la densité de probabilité :

$$\frac{\phi(z_k|z_1, z_2, \dots, z_{k-1})}{\Phi([a, \beta_k]|z_1, z_2, \dots, z_{k-1})} I_{[a, \beta_k]}(z_k) \quad (\text{III.32})$$

tel que :

$$\Phi([a, \beta_k]|z_1, z_2, \dots, z_{k-1}) = \Phi(\beta_k|z_1, z_2, \dots, z_{k-1}) - \Phi(a|z_1, z_2, \dots, z_{k-1}) \quad (\text{III.33})$$

A la première étape, les m tirages aléatoires sont réalisés en utilisant la densité de probabilité conditionnelle $\phi(z_k|z_1, z_2, \dots, z_{k-1})$. Soit Y une variable aléatoire définie par :

$$Y = \prod_{k=1}^m \Phi([a, \beta_k]|z_1, z_2, \dots, z_{k-1}) \quad (\text{III.34})$$

Après N_{sim} étapes correspondant au nombre maximale de simulations, la probabilité de défaillance est estimée par l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y

$$P = E[Y] \approx \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} y_i \quad (\text{III.35})$$

Le coefficient de variation de l'estimateur peut être calculé par :

$$cv = \frac{1}{N_{sim}P} \sqrt{\sum_{i=1}^{N_{sim}} (y_i - P)^2} \quad (\text{III.36})$$

L'organigramme de la méthode SCIS est présenté sur la figure B.4 de l'annexe B. Cet algorithme a été utilisé au début de notre travail de recherche. Néanmoins, la précision dépend fortement du nombre total de tirages. Pour un coefficient de variation de l'estimateur de 0,01 il faut un grand nombre de tirages (e.g. $N_{sim} \geq 10000$). De plus, le nombre des simulations N_{sim} est multiplié par la dimension de l'intégrale m (i.e. nombre de composants). Pour un grand nombre de variables (e.g. $n \geq 50$), un effort de calcul non-négligeable doit être fourni. Par conséquent, nous avons utilisé dans la suite de nos travaux la méthode de *Genz* [102] qui exige moins d'effort de calcul pour une précision équivalente.

Méthode de *Genz*

La méthode de *Genz* consiste à transformer le domaine d'intégration de l'équation III.16 en un hypercube de dimension $[0, 1]^n$. Cette transformation est basée sur plusieurs approximations. La première approximation utilise la décomposition de *Cholesky* pour décorréler les variables aléatoires \mathbf{Z} , soit :

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$$

où \mathbf{U} est le vecteur des variables aléatoires décorrélées, \mathbf{B} est la décomposition de *Cholesky* de la matrice de corrélation $\boldsymbol{\rho}$. Pour cela, $\boldsymbol{\rho}$ doit être définie positive et vérifiant les équations suivantes :

$$\mathbf{z}^T \boldsymbol{\rho}^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{u} \quad (\text{III.37})$$

Cela implique que $d\mathbf{z} = |\mathbf{B}| d\mathbf{u}$, d'où $d\mathbf{z} = |\rho|^{\frac{1}{2}} d\mathbf{u}$. Comme les variables \mathbf{Z} sont bornées par $-\infty \leq z_i \leq \beta_i$, $i = 1, \dots, m$ alors les bornes inférieures et supérieures sont aussi transformées par :

$$-\infty \leq u_i \leq \left(\beta_i - \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} u_j \right) / b_{ii} \quad (\text{III.38})$$

Le domaine d'intégration de l'équation III.16 est transformé en :

$$P = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}} \int_{-\infty}^{\beta_1} \exp^{-\frac{u_1^2}{2}} \int_{-\infty}^{\beta_2(u_1)} \exp^{-\frac{u_2^2}{2}} \dots \int_{-\infty}^{\beta_n(u_1, \dots, u_{m-1})} \exp^{-\frac{u_m^2}{2}} d\mathbf{u} \quad (\text{III.39})$$

Avec $\beta_i(u_1, \dots, u_{i-1}) = \left(\beta_i - \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} u_j \right) / b_{ii}$. A présent le domaine est toujours complexe à intégrer, une autre transformation des variables $u_i = \Phi^{-1}(y_i)$ est effectuée à l'aide de la fonction de répartition normale, telle que :

$$\Phi(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_i} \exp^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{1}{2}u_i^2} du_i = dy_i \quad (\text{III.40})$$

Le domaine d'intégration de l'équation III.39 devient alors :

$$P = \int_0^{e_1} \int_0^{e_2(y_1)} \dots \int_0^{e_m(y_1, y_2, \dots, y_{m-1})} d\mathbf{y} \quad (\text{III.41})$$

tel que : $e_i(y_1, \dots, y_{i-1}) = \Phi \left(\left(\beta_i - \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \Phi^{-1}(y_j) \right) / b_{ii} \right)$.

Une autre transformation des variables $y_i = e_i w_i$ est effectuée avec $dy_i = e_i dw_i$, le domaine d'intégration devient alors :

$$P = e_1 \int_0^1 e_2(\mathbf{w}) \dots \int_0^1 e_m(\mathbf{w}) \int_0^1 d\mathbf{w} \quad (\text{III.42})$$

avec :

$$e_i(\mathbf{w}) = \Phi \left(\left(\beta_i - \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \Phi^{-1}(e_j(\mathbf{w}) w_j) \right) / b_{ii} \right)$$

Finalement, l'intégrale devient :

$$P = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 f(w_1, w_2, \dots, w_{m-1}) d\mathbf{w} \quad (\text{III.43})$$

$$\text{tel que : } f(\mathbf{w}) = e_1 e_2(\mathbf{w}) \dots e_m(\mathbf{w})$$

Cette dernière transformation permet l'utilisation des méthodes d'intégration numériques car la variable w_i est indépendante de e_i et d_i . Initialement, *Genz* a suggéré la méthode de Monte Carlo car le nombre de variables est réduit jusqu'à une seule variable w_i . L'organigramme de la méthode de *Genz* basée sur les simulations brutes de Monte Carlo (CMCS : *Crude Monte Carlo Simulation*) est présenté dans la figure B.5 de l'annexe B.

Dans la même publication, *Genz*[101] a proposé la méthode des sous-régions adaptatives [103] à la place des simulations de Monte Carlo lorsque la dimension du problème est inférieure à 20. L'approche des sous-régions adaptatives (SRAM : *Subregion Adaptive Method*) ne nécessite pas de tirages aléatoires, elle repose sur un calcul numérique basé sur des subdivisions successives du domaine d'intégration. D'autres auteurs [104] ont suggéré d'utiliser la méthode nommée *Lattice rule* qui s'appuie sur des tirages aléatoires des paramétrés de la règle de *Korobov*. De plus, ces algorithmes ont été implémentés dans des programmes gratuits et libres écrits en Fortran². Ainsi, nous les avons testés sur des applications numériques afin de choisir la méthode qui convient au mieux au calcul de la fiabilité système.

2. <http://www.math.wsu.edu/faculty/genz/homepage>

III.3 Intégration de la fiabilité système dans l'optimisation

Le développement d'une procédure d'optimisation fiabiliste doit s'appuyer sur la fiabilité de tout le système et pas seulement sur ceux des composants, car l'indice de fiabilité système peut être inférieur à celui des composants. L'optimisation basée sur la fiabilité système est dénommée SRBDO (*System Reliability-Based Design Optimization*) afin de la distinguer de la RBDO qui est basée uniquement sur la fiabilité des composants.

Cette intégration peut se faire par différentes approches. L'intégration directe de la fiabilité système dans les limitations fiabilistes peut être facilement mise en œuvre dans l'approche RIA. Autrement dit, la limitation fiabiliste système s'ajoute à/ou remplace les limitations fiabilistes des composants. En revanche, l'intégration indirecte consiste à reformuler le problème de la SRBDO afin d'éviter la limitation fiabiliste système dans l'optimisation, l'exigence de la fiabilité système est implicitement prise en compte.

III.3.1 Intégration directe

La formulation classique de la SRBDO s'appuie sur l'approche de l'indice de fiabilité (RIA). De nombreux auteurs [37, 34] ont remplacé les indices de fiabilité des composants de la formulation II.2 par l'indice de fiabilité système.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} C_I(\mathbf{d}) & \quad \text{(III.44)} \\ \text{sous : } \left\{ \begin{array}{l} \beta_{sys}(\mathbf{d}; \mathbf{X}) \geq \beta_{sys}^c \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 \quad j = 1, \dots, n_h \end{array} \right. \end{aligned}$$

où C_I est la fonction objectif à minimiser, \mathbf{d} est le vecteur des variables d'optimisation, \mathbf{X} est le vecteur des variables aléatoires, $h_j(\mathbf{d})$ sont des contraintes déterministes, β_{sys} et β_{sys}^c sont respectivement l'indice de fiabilité système et l'indice cible.

Dans cette approche, la fiabilité système β_{sys} peut être estimée par les méthodes de simulations directes telles que Monte Carlo, les tirages aléatoires sont directement réalisés sur les différents états limites définissant les modes de défaillance. Toutefois, les simulations directes de Monte Carlo exigent un effort de calcul excessif. De plus, le bruit numérique dû aux tirages aléatoires conduit à des difficultés de calcul des gradients.

L'approximation du premier ordre de la fiabilité système est moins coûteuse que les simulations directes, cette approximation est souvent utilisée dans la littérature de la SRBDO. Elle consiste à réaliser d'abord l'analyse de fiabilité des composants par FORM. L'indice de fiabilité système est ensuite estimé soit par les bornes de *Ditlevsen* [91], soit par les méthodes approximatives (i.e. méthode de *Hohenbichler et al.* [26], approximation de *Pandey* [94]) ou encore par les méthodes de simulations indirectes.

Toutefois, la formulation de l'équation III.44 n'assure pas la convergence vers le « **bon** » optimum. En effet, la limitation de fiabilité système peut être active alors que celles des composants restent inactives. Cela peut engendrer des composants sur-dimensionnés conduisant à une mauvaise distribution de la matière dans la structure. Pour éviter les mauvaises répartitions de la fiabilité, *Enevoldsen et al.* [105] ont suggéré d'ajouter les limitations fiabilistes sur les composants, afin de mieux contrôler la recherche de l'optimum

et d'assurer la meilleure répartition de la fiabilité dans la solution optimale.

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{d}} C_I(\mathbf{d}) \\ \text{sous : } & \begin{cases} \beta_{sys}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\rho}) \geq \beta_{sys}^c & \\ \beta_i(\mathbf{d}; \mathbf{X}) \geq \beta^c & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 & j = 1 + m, \dots, n_h \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

où $\boldsymbol{\beta}$ est le vecteur des indices de fiabilité des composants et $\boldsymbol{\rho}$ est la matrice de corrélation entre les composants. La formulation III.45 n'est qu'une extension de l'approche RIA (équation II.2) pour tenir compte de la fiabilité système. Nous avons remarqué dans l'étude comparative menée dans le chapitre précédent que la RIA est globalement très coûteuse en temps de calcul et reste impraticable pour l'optimisation des structures complexes. De plus, l'intégration directe de la fiabilité système pose des problèmes numériques de convergence. Le calcul du gradient de l'indice de fiabilité système par rapport aux variables d'optimisation $\partial\beta_{sys}/\partial\mathbf{d}$ est impossible à obtenir analytiquement. Le calcul par différences finies est très coûteux et imprécis, conduisant à la divergence de l'algorithme. *Enevoldsen et al.* [49] ont proposé des expressions semi-analytiques pour le calcul du gradient $\partial\beta_{sys}/\partial\mathbf{d}$. Or, même ces auteurs ont indiqué que ces expressions semi-analytiques exigent un effort de calcul considérable, en plus de l'imprécision due aux différentes approximations au niveau des composants et du système. Par ailleurs, ces auteurs ont développé une autre approche basée sur une intégration indirecte de la fiabilité système dans la RBDO [105].

III.3.2 Intégration indirecte

Thoft-Christensen et al. [89] ont proposé une intégration indirecte de la fiabilité système dans l'approche RIA. Il s'agit d'une formulation classique de la RBDO basée sur les composants (équation II.2) avec une procédure heuristique d'ajustement des indices de fiabilité cibles.

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{d}} C_I(\mathbf{d}) \\ \text{sous : } & \begin{cases} \beta_i(\mathbf{d}; \mathbf{X}) \geq \beta_i^{c(k)} + \Delta\beta_i^{c(k)} & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 & j = 1 + m, \dots, n_h \end{cases} \\ \text{tel que :} & \\ & \Delta\beta_i^{c(k)} = (\beta_{sys}^c - \beta_{sys}^{(k)}) \delta_i \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

où k est le numéro de l'itération de la RBDO, $\Delta\beta_i^{c(k)}$ sont des petits incréments permettant d'ajuster les indices cibles $\beta_i^{c(k)}$, $\beta_{sys}^{(k)}$ est l'indice de fiabilité système à l'itération k de la RBDO et $\boldsymbol{\delta}$ est un vecteur de constante qui exprime l'activation des contraintes : si la contrainte numéro i est active alors $\delta_i \neq 0$, sinon $\delta_i = 0$.

La figure III.6 montre le principe d'ajustement des indices cibles des composants pour garantir le niveau visé de la fiabilité système. Toutefois, cette procédure peut être plus coûteuse en temps de calcul, et peut converger vers une solution moins économique, car la procédure d'ajustement n'est pas basée sur la recherche de la meilleure combinaison des β_i^c .

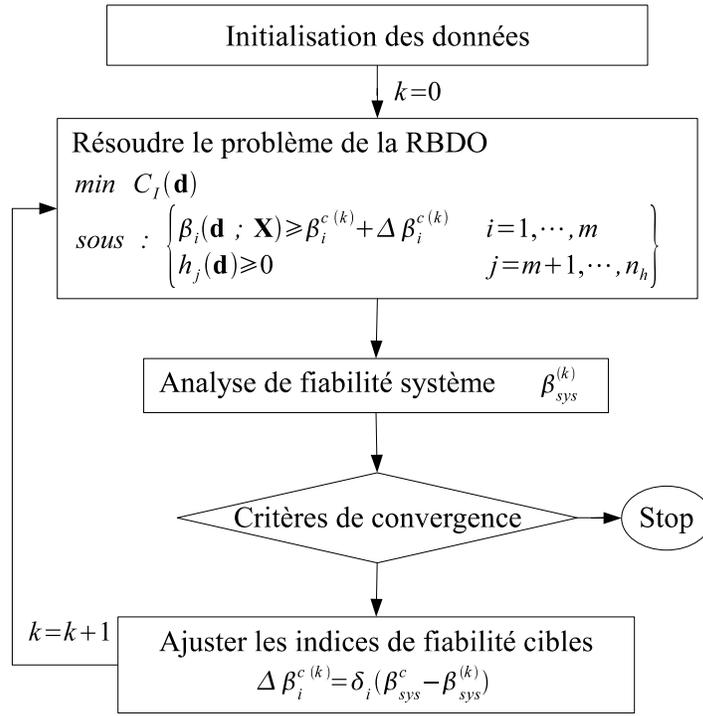


Figure III.6: Principe de l'intégration indirecte de la fiabilité système dans la RBDO.

Le niveau de fiabilité système peut être assuré par plusieurs combinaisons des indices des composants. La meilleure combinaison de ces indices est celle qui garantit une solution unique de l'optimum local ou global et satisfait la fiabilité système souhaité. Or, la procédure heuristique d'ajustement peut donner un jeu d'indices cibles des composants qui garantit la cible du système, alors que des composants structuraux peuvent être surdimensionnés en raison des indices cibles élevés de certain modes de défaillance, conduisant finalement à un solution coûteuse.

En effet, un cadre mathématique plus rigoureux est nécessaire pour trouver la meilleure combinaison des indices cibles. *Enevoldsen et al.* [49] ont suggéré une approche mathématique pour ajuster les indices cibles, fondée sur une linéarisation de la fiabilité système en fonction des indices des composants.

$$\beta_{sys} = \beta_{sys}^k + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \beta_{sys}^k}{\partial \beta_i} \Delta \beta_i = \beta_{sys}^k + \sum_{i=1}^m \alpha_i^\beta \Delta \beta_i \quad (\text{III.47})$$

où β_{sys}^k est l'indice de fiabilité système à l'itération k et $\alpha^\beta = \partial \beta_{sys}^k / \partial \beta$ est le gradient de l'indice de fiabilité système par rapport aux indices des composants. *Enevoldsen et Sørensen* proposent de calculer $\Delta \beta^c(k) = c \xi$, où ξ est un vecteur unitaire qui exprime l'activation des contraintes : si la contrainte numéro i est active alors $\xi_i = 1$, sinon $\xi_i = 0$. Le paramètre c vise à trouver le jeu de valeurs des indices cibles β^c qui assure β_{sys}^c , il s'agit donc d'annuler l'écart entre l'indice de fiabilité système $\check{\beta}_{sys}^k$ issue des indices cibles et β_{sys}^c .

$$c = \frac{\beta_{sys}^c - \check{\beta}_{sys}^k}{\boldsymbol{\alpha}^{\beta^T} \cdot \boldsymbol{\xi}} \quad (\text{III.48})$$

tel que : $\check{\beta}_{sys}^k = \Phi^{-1} \left(1 - \Phi \left(\boldsymbol{\beta}^{c(k)} + c\boldsymbol{\xi} ; \boldsymbol{\rho} \right) \right)$ pour un système série

où $\boldsymbol{\rho}$ est la matrice de corrélation calculée lors de l'analyse de fiabilité, elle est supposée constante. L'équation III.48 peut être résolue par la méthode de *Newton*. La démarche de l'approche de *Enevoldsen et Sørensen* est très séduisante mais elle imbrique une troisième boucle qui cherche à trouver le paramètre c pour ajuster les indices cibles. De plus, ce paramètre conduit à ajuster les indices cibles des contraintes actives par la même quantité c . Cela conduit à des indices cibles identiques quand $\xi = 1$, alors que certains indices devraient être augmentés et d'autres diminués.

Cette procédure n'établit pas une allocation optimale des indices cibles, vérifiant la fiabilité système sans une augmentation notable de la fonction coût. Des indices cibles identiques ne conduisent pas à l'optimum puisqu'ils peuvent conduire à des composants structuraux sur-dimensionnés.

Différents auteurs ont proposé des approches découplées ou mono-niveau pour la SRBDO. Dans la famille des méthodes mono-niveau, *Kuschel et al.* [106] ont intégré la fiabilité système dans la formulation à une seule boucle développée par *Madsen et al.* [57]. Nous le rappelons que celle-ci a été désignée par KKT dans le chapitre précédent (voir §2.4.1). *Liang et al.* [107] ont étendu l'approche SLA (voir §2.4.3) pour tenir compte de la fiabilité système des composants en série. Cette nouvelle approche SLA cherche simultanément l'optimum et les probabilités de défaillance cibles :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{d}, p_{f_1}^c, \dots, p_{f_m}^c} C_I(\mathbf{d}) & (\text{III.49}) \\ \text{sous : } & \left\{ \begin{array}{ll} G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}_{i,p}) \geq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 & j = m+1, \dots, n_h \\ P_{f_{sys}} = Prob(\bigcup_{i=1}^m G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0) \approx \sum_{i=1}^m P_{f_i}^c - \sum_{i=2}^m \max_{j < i} [P_{f_{ij}}^c] \leq P_{f_{sys}}^c \end{array} \right. \end{aligned}$$

tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i,p} &= \mu_X + \sigma_X \boldsymbol{\alpha}^T \Phi^{-1}(P_{f_i}^c) \\ \boldsymbol{\alpha} &= \frac{\sigma_X \nabla_{\mathbf{x}} G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}_{i,p})}{\|\sigma_X \nabla_{\mathbf{x}} G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}_{i,p})\|} \end{aligned}$$

où $\mathbf{x}_{i,p}$ est le point caractéristique lié au niveau de fiabilité cible β_i^c , $P_{f_i}^c$ sont les probabilités de défaillance cibles considérées comme des paramètres à optimiser, les indices de fiabilité cibles correspondant sont donnés par $\beta_i^c = -\Phi^{-1}(P_{f_i}^c)$. La probabilité de défaillance du système est approchée par les probabilités de défaillance cibles en utilisant la borne supérieure de *Ditlevsen* (équation III.17).

Malgré les bonnes performances numériques de SLA montrées dans le chapitre précédent, cette nouvelle formulation peut faillir à l'exigence de fiabilité système en raison de son manque de précision. Cela est constaté dans l'étude effectuée dans le chapitre II (voir §II.6). De plus, l'emploi de la borne supérieure exclusivement ne peut pas garantir la

fiabilité système visée car les bornes de *Ditlevsen* peuvent dans certains cas aboutir à des encadrements assez larges. La nouvelle approche de SLA est spécifique pour les systèmes série, elle n'inclut pas un critère particulier permettant de choisir la meilleure combinaison des probabilités de défaillance cible. Cela peut conduire à des $P_{f_i}^c$ qui vérifient la fiabilité système ciblée mais conduisant à une solution moins économique.

Dans la famille des méthodes découplées, *Royset et al.* [67] ont développé une méthode SRBDO, où les contraintes fiabilistes (composants et système) sont remplacées par des fonctions paramétrables au moyen d'une analyse de fiabilité séparée du processus d'optimisation. Ce nouveau problème est résolu par les algorithmes de la programmation semi-infinie. *Zou et al.* [73] ont développé une approche découplée où les limitations fiabilistes (composants et système) sont linéarisées au voisinage du point courant. Une analyse de fiabilité réalisée par les simulations de Monte Carlo ou FORM permet d'actualiser cette linéarisation. Nous précisons que cette approche est similaire à l'approche SAP, sauf que l'implémentation est différente et la fiabilité système est prise en compte. *Qu et al.* [69] ont proposé une méthode découplée de la SRBDO basée sur plusieurs cycles d'optimisation déterministe, incluant le coefficient de suffisance probabiliste (PSF : *Probabilistic Sufficiency Factor*), calculé par des simulations de Monte Carlo en s'appuyant sur une surface de réponse construite au préalable. Ce coefficient représente le rapport entre la résistance et la sollicitation. Les simulations de Monte Carlo sont découplées de l'optimisation déterministe afin d'accélérer la convergence.

III.3.3 Bilan

L'intégration directe de l'exigence de la fiabilité système dans la RBDO n'assure pas la convergence de l'algorithme d'optimisation. Cela est principalement dû au calcul des sensibilités de la fiabilité système par rapport aux variables d'optimisation $\partial\beta_{sys}/\partial\mathbf{d}$, qui est souvent imprécis et coûteux. D'un autre côté, une intégration indirecte permet d'éviter le calcul des sensibilités $\partial\beta_{sys}/\partial\mathbf{d}$ et de garantir la convergence. Toutefois, cette intégration doit être fondée sur un cadre mathématique rationnel permettant de vérifier la condition souhaitée et d'assurer l'optimum en évitant le sur-dimensionnement des composants.

L'idée d'ajuster les indices cibles pour assurer la fiabilité système est très prometteuse. Toutefois, la recherche de la meilleure combinaison des indices cibles doit répondre à deux critères principaux : **a)** satisfaire l'indice de fiabilité système ; **b)** garantir l'optimum. Dans la section suivante, nous proposons une approche associant ces deux critères pour une allocation optimale des indices cibles. Cette approche est introduite dans une méthodologie découplée de la SRBDO permettant de concilier l'efficacité et la précision.

III.4 Méthode SOSRA

Les performances numériques et la précision de la méthode SORA sont remarquables. Cependant, SORA est une approche basée sur la fiabilité des composants et ne prend pas en compte la fiabilité système. Pour cela, nous proposons une approche pour la SRBDO, qui s'appuie sur la méthodologie des méthodes découplées, nommée SOSRA (*Sequential Optimization and System Reliability Analysis*), basée sur la transformation du problème de la SRBDO en plusieurs cycles d'optimisation déterministe et d'analyse de fiabilité

système. A chaque cycle, l'optimisation déterministe est liée à l'exigence de la fiabilité système par des coefficients partiels de sécurité appelés « coefficients de sécurité optimaux du système » (OSSF : *Optimal System Safety Factors*). Ces coefficients sont calibrés sur la base d'une allocation optimale des indices cibles.

III.4.1 Principe de la méthode SOSRA

L'optimisation déterministe est plus efficace que la RBDO et présente moins de problèmes numériques de convergence. De plus, elle permet l'utilisation des techniques de différentiation directe (DDM : *Direct Differentiation Method*) pour le calcul des sensibilités de la fonction de performance par rapport au variables d'optimisation [31]. L'emploi de ce type de techniques pour l'évaluation des sensibilités à la place des méthodes par différences finies rend la procédure d'optimisation très efficace. Toutefois, l'optimisation déterministe basée sur les coefficients partiels ne peut conduire à une solution optimale vérifiant la fiabilité ciblée, que lorsque la calibration de ces coefficients est spécifique au processus d'optimisation.

L'idée fondatrice de SOSRA repose sur ce constat. Le problème de la RBDO est décomposé en plusieurs cycles d'optimisation déterministe et d'analyse de fiabilité ; nous avons vu dans le chapitre 2 plusieurs méthodes basées sur ce principe (SORA, SAP, SFA). La figure III.7 montre que l'optimum fiabiliste est approché après plusieurs cycles d'optimisation déterministe (lignes en pointillées) guidée par l'actualisation du MPTP. L'approche proposée adopte cette technique de décomposition en plusieurs cycles d'optimisation déterministe et d'analyse de fiabilité système. Nous avons opté pour une intégration indirecte de l'exigence de la fiabilité système. Une procédure d'allocation optimale des indices cibles est proposée afin de trouver la meilleure combinaison des indices cibles permettant de vérifier la fiabilité système et la solution optimale. Des coefficients de sécurité optimaux du système (OSSF) sont calibrés sur la base de l'allocation optimale des indices cibles. Ces coefficients sont utilisés dans le cycle suivant de l'optimisation déterministe. Chaque cycle d'optimisation déterministe est formulé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} C_I(\mathbf{d}) & \tag{III.50} \\ \text{sous : } \begin{cases} G_i(\mathbf{d} - \Delta_{\mathbf{d}_i}^{(k)}, \mathbf{x}_p, \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{X}}^{(k)}) \geq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 & j = m + 1, \dots, n_h \end{cases} \end{aligned}$$

où \mathbf{x}_p est le vecteur des valeurs caractéristiques des variables aléatoires \mathbf{X} , $\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{X}}^{(k)}$ est le vecteur des coefficients de sécurité optimaux du système (OSSF) de l'état limite G_i , actualisés au cycle k , $\Delta_{\mathbf{d}_i}^{(k)}$ est le vecteur des valeurs de décalage des variables d'optimisation lorsqu'elles sont considérées comme des moyennes des variables aléatoires $\mathbf{X}_{\mathbf{d}}$. La figure III.8 montre la méthodologie de la méthode SOSRA pour un état limite G_i . Nous détaillons par la suite la procédure d'allocation optimale des indices cibles, puis l'approche proposée pour la calibration des coefficients OSSF.

III.4.2 Allocation optimale des indices de fiabilité cibles

La fiabilité système dépend essentiellement des indices de fiabilité des modes de défaillance dominants. L'ajustement des indices cibles de ces modes peut permettre d'assurer

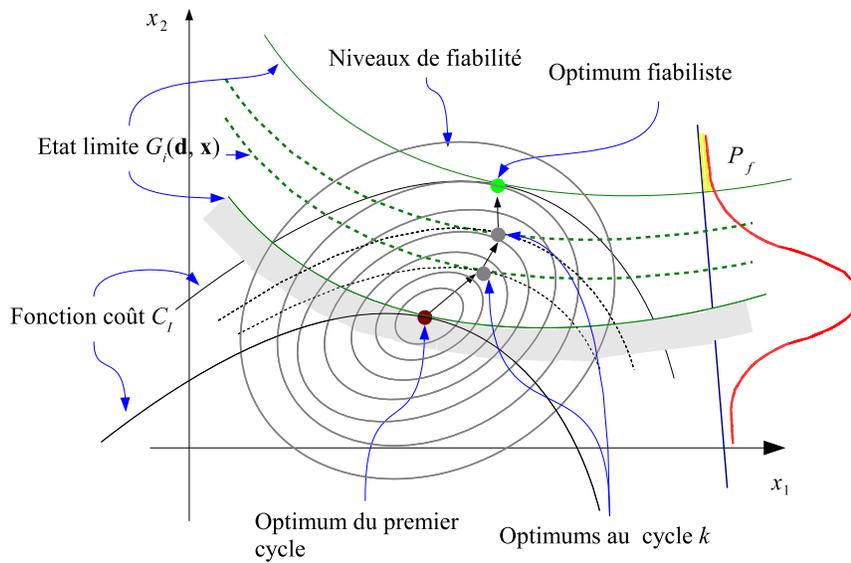


Figure III.7: Principe des méthodes découplées.

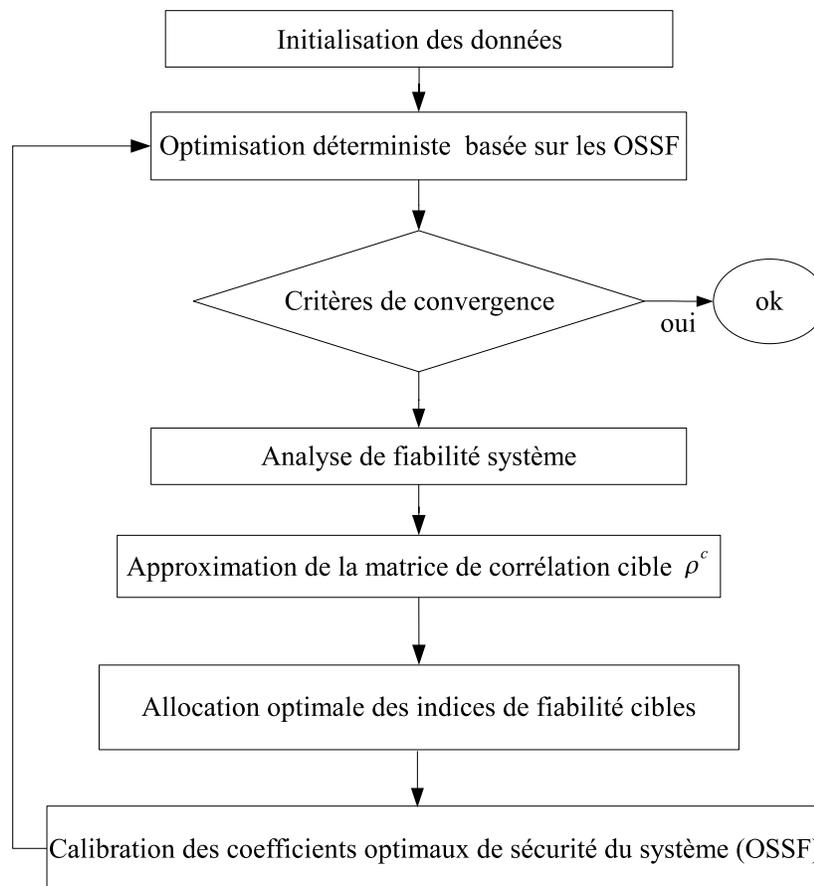


Figure III.8: Organigramme général de la méthode SOSRA.

la fiabilité système cible. Peu d'études sont consacrées à l'allocation optimale des indices de fiabilité cibles [89, 49, 108]. Cependant, la formulation de l'allocation optimale des indices cibles doit être établie d'une façon rationnelle et rigoureuse. Notre objectif est de satisfaire les deux critères cités ci-dessus : à savoir garantir la fiabilité système et assurer le meilleur optimum. Le mot « meilleur » signifie que la procédure d'allocation optimale des indices cibles évite le sur-dimensionnement des éléments structuraux dû à des indices cibles élevés. Cette procédure s'appuie sur la recherche des indices cibles qui minimisent l'écart quadratique avec les indices de fiabilité des composants. Les composants les plus sensibles dans la diminution de la fonction coût sont affectées par des pondérations, permettant ainsi d'éviter le sur-dimensionnement des éléments de la structure.

$$\begin{aligned} \min_{\beta^c} \quad & \sum_{i=1}^m \omega_i (\beta_i - \beta_i^c)^2 \\ \text{s.t.} \quad & \check{\beta}_{sys}(\beta^c, \rho^c) \geq \beta_{sys}^c \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

où β_i^c et β_i sont respectivement les indices de fiabilité cibles qui sont les paramètres à optimiser et des indices de fiabilité des composants calculés par FORM, ρ^c est la matrice de corrélation entre les états limites lorsque les indices de fiabilité sont égaux à leurs cibles : nous la désignons par la matrice de corrélation dite "cible", $\check{\beta}_{sys}$ est l'indice de fiabilité système issu des valeurs des indices cibles β^c , β_{sys}^c est l'indice de fiabilité système cible, ω_i sont les pondérations des modes de défaillance. $\check{\beta}_{sys}$ est calculé à partir du schéma de modélisation système choisi, c'est-à-dire, série, parallèle ou mixte.

$$\begin{aligned} \check{\beta}_{sys} &= \Phi^{-1}(1 - \Phi_m(\beta^c; \rho^c)) && \text{pour un système série} && (\text{III.52}) \\ \check{\beta}_{sys} &= \Phi^{-1}(\Phi_m(\beta^c; \rho^c)) && \text{pour un système parallèle} \\ \check{\beta}_{sys} &= \Phi^{-1}\left(1 - \Phi_p(\beta^{c^P}; \rho^P)\right) && \text{pour un système mixte} \\ \text{tel que} \\ \beta_k^{c^P} &= -\Phi^{-1}(\Phi_q(-\beta_j^c; \rho_j^c)) && j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

où ρ_j^c est la matrice de corrélation "cible" des composants cibles du sous-système parallèle j , β^{c^P} sont les indices cibles des sous-systèmes parallèles, calculés à partir des mêmes dispositions des composants des sous-systèmes parallèles. La matrice de corrélation ρ^P entre les sous-systèmes cibles est calculée par la méthode de l'hyper-plan équivalent (équation III.15).

La procédure formulée dans l'équation III.51 cherche à minimiser l'écart quadratique entre les indices de fiabilité des composants et leurs cibles sous la contrainte de satisfaire le niveau de fiabilité système cible. Les indices cibles élevés sont tirés vers le bas en fonction de leur rôle dans la réduction de la fonction coût. Les composants qui n'ont pas une grande contribution dans la performance du système sont pénalisés par les pondérations ω_i , qui sont définies par les sensibilités de l'état limite du composants i par rapport à la fonction coût C_I :

$$\omega_i = \sqrt{\frac{\frac{\partial C_I}{\partial G_i}}{\left\| \frac{\partial C_I}{\partial G_i} \right\|}} \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{III.53})$$

tel que :

$$\frac{\partial C_I}{\partial G_i} = \sum_{j=1}^{n_d} \frac{\frac{\partial C_I}{\partial d_j}}{\frac{\partial G_i}{\partial d_j}}$$

où C_I est la fonction coût qui peut être une fonction du coût initial, G_i est la fonction d'état limite du composant ou du mode de défaillance numéro i , n_d est le nombre de variables d'optimisation \mathbf{d} . Les quantités $\partial C/\partial \mathbf{d}$ et $\partial G_i/\partial \mathbf{d}$ sont respectivement les sensibilités de la fonction coût et l'état limite G_i par rapport aux variables d'optimisation \mathbf{d} . Ces gradients sont déjà calculés lors du cycle précédent de l'optimisation déterministe. Ainsi aucun effort de calcul supplémentaire n'est exigé pour l'estimation des pondérations ω_i .

III.4.2.1 Calcul de la matrice de corrélation "cible"

La matrice de corrélation "cible" ρ^c doit être calculée avant le déclenchement de la procédure d'allocation optimale des indices cibles formulée dans l'équation III.51. Nous supposons que cette matrice reste constante pendant toute la procédure d'optimisation des indices cibles. Deux approches sont développées en fonction du degré de non-linéarité des états limites.

- **États limites linéaires ou faiblement non linéaires**

Le terme ρ_{ij}^c représente le coefficient de corrélation entre l'état limite G_i et G_j lorsque les indices de fiabilité des composants i et j sont égaux à leurs cibles. Lorsque les fonctions d'états limites sont linéaires ou faiblement incurvées, les iso-valeurs des états limites sont soit parfaitement parallèles soit presque parallèles, respectivement. La figure III.9 montre que pour n'importe quelle valeur de l'indice de fiabilité cible, le point tangent entre l'hyper-sphère de rayon β^c et l'état limite G_i (noté \mathbf{u}^{β^c}) se trouve toujours dans la même direction que le point de défaillance le plus probable (noté \mathbf{u}^*). Ainsi, les cosinus directeurs $\boldsymbol{\alpha}$ restent inchangés pour des niveaux de fiabilité cibles différents. Par conséquent, la matrice de corrélation "cible" ρ^c peut être directement confondue avec la matrice de corrélation des composants ρ obtenue lors de l'analyse de fiabilité.

$$\rho_{ij}^c = \rho_{ij} = \boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_j \quad i = 1, \dots, m \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{III.54})$$

où $\boldsymbol{\alpha}_i$ est le vecteur des cosinus directeurs calculés par l'analyse de fiabilité des composants.

- **États limites fortement non linéaires**

Le coefficient de corrélation "cible" ρ_{ij}^c entre l'état limite G_i et G_j peut être confondu avec ρ_{ij} si les indices cibles β_i^c et β_j^c sont proches des indices de fiabilité β_i , β_j des composants i et j . Par contre, si ces indices cibles sont éloignés des indices des composants, le calcul du coefficient de corrélation "cible" ρ_{ij}^c est nécessaire. La figure III.10 montre ces deux situations, lorsque l'indice cible $\beta^c = 4$ les points tangents $\mathbf{u}_{1,2}^{\beta^c=4}$ sont proches des points notés $\tilde{\mathbf{u}}_{1,2}^{\beta^c=4}$ qui se situent sur les mêmes droites des points de défaillance les plus probables $\mathbf{u}_{1,2}^*$. Ainsi, les sensibilités aux points tangents $\mathbf{u}_{1,2}^{\beta^c=4}$ peuvent être confondues avec les sensibilités aux points $\mathbf{u}_{1,2}^*$. En revanche, lorsque le niveau de fiabilité cible est fixé à $\beta^c = 5$, les points $\tilde{\mathbf{u}}_{1,2}^{\beta^c}$ sont éloignés des points tangents $\mathbf{u}_{1,2}^{\beta^c=5}$. L'utilisation des sensibilités aux points MPFP $\mathbf{u}_{1,2}^*$ pour le calcul de ρ^c peut conduire à une mauvaise estimation

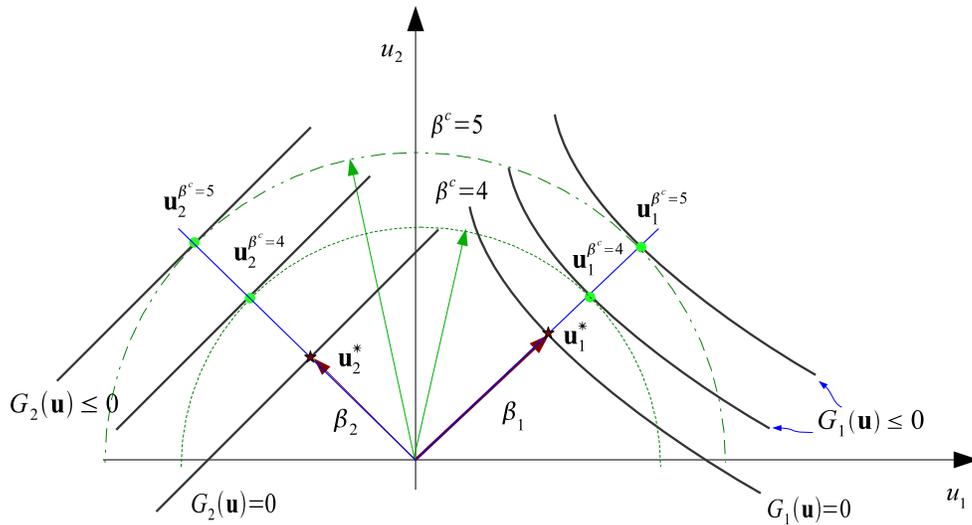


Figure III.9: Sensibilités des d'états limites faiblement non linéaire G_1 et linéaire G_2 .

de la matrice de corrélation “cible”. Pour cela, nous proposons une approximation basée sur les sensibilités aux points $\tilde{\mathbf{u}}^{\beta^c} = \boldsymbol{\alpha}\beta^c$. Cette approximation est exprimée par :

$$\rho_{ij}^c = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i^{cT} \cdot \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_j^c \quad \{i, j\} = 1, \dots, m \quad (\text{III.55})$$

tel que :

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i^c = \frac{\frac{\partial G_i(\tilde{\mathbf{u}}_i^{\beta^c})}{\partial \mathbf{u}}}{\sqrt{\sum_{k=1}^m \frac{\partial G_i(\tilde{\mathbf{u}}_k^{\beta^c})}{\partial \mathbf{u}}}} \quad \text{où} \quad \tilde{\mathbf{u}}_i^{\beta^c} = \beta_i^c \boldsymbol{\alpha}_i$$

où $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i$ et $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_j$ sont les sensibilités des états limites G_i et G_j aux points $\tilde{\mathbf{u}}^{\beta^c}$, $\boldsymbol{\alpha}_i$ sont les sensibilités aux points de défaillance les plus probables \mathbf{u}_i^* , β_i^c est l'indice de fiabilité cible du composant i . Le calcul de la matrice de corrélation “cible” $\boldsymbol{\rho}^c$ exige $m + 1$ calculs mécaniques pour l'évaluation des sensibilités des états limites aux points $\tilde{\mathbf{u}}^{\beta^c}$.

Cette approximation devient de plus en plus correcte lorsque les indices de fiabilité des composants sont proches des indices cibles. Par conséquent, la procédure d'optimisation des indices cibles vise à réduire l'écart entre les indices de fiabilité des composants et leurs cibles. Elle est exécutée à chaque convergence d'un cycle d'optimisation déterministe. Ainsi, l'écart se réduit de cycle en cycle et l'approximation s'améliore au fur à mesure des cycles.

III.4.2.2 Exemple de validité de l'approximation

Pour montrer la justesse de l'approximation de $\boldsymbol{\rho}^c$ par l'équation III.55, un exemple simple est illustré ci-dessous. Soit deux fonctions d'états limites G_1 et G_2 données par :

$$\begin{aligned} G_1(X) &= 0, 3x_1^2x_2 - x_2 + 0, 8x_1 + 1 \\ G_2(X) &= 4 - (x_1 + 0, 25)^2 + (x_1 + 0, 25)^3 - (x_1 + 0, 25)^4 + 6x_2^2 \end{aligned}$$

Soit $X = \{X_1, X_2\}$ deux variables aléatoires normales, de moyennes $\mu_X = \{2, 4\}$ et de coefficient de variation 0,15. Les deux fonctions d'états limites sont fortement non-linéaires, elles sont utilisées par *Choi et al.* [109] pour valider l'approche HMV. L'allure

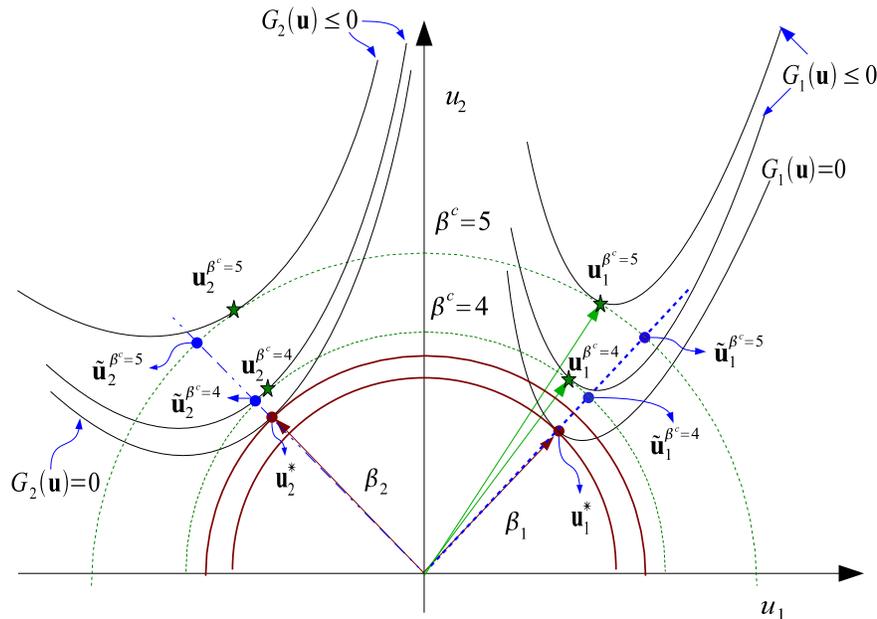


Figure III.10: Les sensibilités α de deux fonctions d'états limites fortement non-linéaires.

de ces deux fonctions dans l'espace normé est montrée sur la figure III.11. Le coefficient de corrélation "cible" ρ^c correspondant aux deux états limites est calculé pour différentes valeurs d'indices cibles $\beta^c = 3, 4$ et 5 , par trois approches différentes :

1. Équation III.54 : le coefficient de corrélation "cible" ρ^c est estimé par les sensibilités des états limites aux points \mathbf{u}^* calculés par l'analyse de fiabilité.
2. Équation III.55 : le coefficient de corrélation "cible" ρ^c est estimé par les sensibilités des états limites aux points $\tilde{\mathbf{u}}^{\beta^c} = \alpha^{\beta^c}$, α sont les sensibilités aux points \mathbf{u}^* issues de l'analyse de fiabilité précédente.
3. Le coefficient de corrélation "cible" ρ^c est calculé à partir des sensibilités des états limites aux points \mathbf{u}^{β^c} . Ces points correspondent aux points de performance minimale cible (MPTP) de l'analyse de fiabilité inverse, résolue par l'algorithme HMV (équation II.12).

β_1	β_2	α_1	α_2	U_1^*	U_2^*
2,32	2,82	$\begin{Bmatrix} -0,97 \\ 0,22 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,74 \\ -0,67 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -2,25 \\ 0,54 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2,07 \\ -1,92 \end{Bmatrix}$

Tableau III.1: Résultats de l'analyse de fiabilité.

Le tableau III.1 présente les résultats de l'analyse de fiabilité effectuée sur les deux états limites. Le tableau III.2 montre les sensibilités notées α^c aux points \mathbf{u}^{β^c} . Ces sensibilités sont différentes des sensibilités α calculées aux points \mathbf{u}^* . La figure III.12 montre que les points \mathbf{u}^{β^c} ne se situent pas sur la même droite que les points \mathbf{u}^* , par conséquent les cosinus directeurs sont différents. Les sensibilités $\tilde{\alpha}^c$ approximées par l'équation III.55 sont proches des sensibilités α^c lorsque l'indice cible n'est pas trop éloigné des indices de fiabilité des deux états limites. La figure III.12 affirme que lorsque les points $\tilde{\mathbf{u}}^{\beta^c}$ sont

assez proches des points \mathbf{u}^{β^c} l'approximation des sensibilités par l'équation III.55 est assez précise.

	$\beta^c = 3$		$\beta^c = 4$		$\beta^c = 5$	
	α_1^c	α_2^c	α_1^c	α_2^c	α_1^c	α_2^c
Eq.II.12	$\begin{Bmatrix} -0,95 \\ 0,29 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,76 \\ -0,64 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -0,91 \\ 0,40 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,86 \\ -0,49 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -0,87 \\ 0,48 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,92 \\ -0,39 \end{Bmatrix}$
	$\tilde{\alpha}_1^c$	$\tilde{\alpha}_2^c$	$\tilde{\alpha}_1^c$	$\tilde{\alpha}_2^c$	$\tilde{\alpha}_1^c$	$\tilde{\alpha}_2^c$
Eq.III.55	$\begin{Bmatrix} -0,94 \\ 0,31 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,76 \\ -0,64 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -0,88 \\ 0,46 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,86 \\ -0,49 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -0,78 \\ 0,62 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,93 \\ -0,35 \end{Bmatrix}$

Tableau III.2: Résultats de l'approximation proposée

β^c	$\alpha_1^{cT} \cdot \alpha_2^c$	$\alpha_1^T \cdot \alpha_2$	Ecart %	$\tilde{\alpha}_1^{cT} \cdot \tilde{\alpha}_2^c$	Ecart %
3	-0,9236	-0,8713	5,7	-0,9288	0,56
4	-0,9937	-0,8713	12,3	-0,9993	0,56
5	-0,9943	-0,8713	12,4	-0,9533	4,12

Tableau III.3: Coefficient de corrélation "cible" par les trois approches

Les résultats du tableau III.3 montrent que le calcul du coefficient de corrélation "cible" par l'approximation de l'équation III.55 est correcte, pourvu que les indices cibles et les indices des composants restent assez proches. Cette approximation se dégrade lorsque l'écart entre l'indice cible et l'indice de fiabilité de l'état limite est grand. Cela est principalement dû à la forte non linéarité de la fonction, une procédure itérative telle que HMV permet d'estimer correctement la matrice de corrélation "cible" ρ^c . Toutefois un effort de calcul non négligeable est exigé. L'approximation de l'équation III.3 utilise les informations issues de l'analyse de fiabilité et évite la procédure itérative pour l'estimation de ρ^c . En outre, les indices de fiabilité des composants se rapprochent des indices cibles au fur et à mesure des itérations et des cycles d'optimisation. Finalement, l'approximation de ρ^c par l'équation III.55 devient efficace et précise.

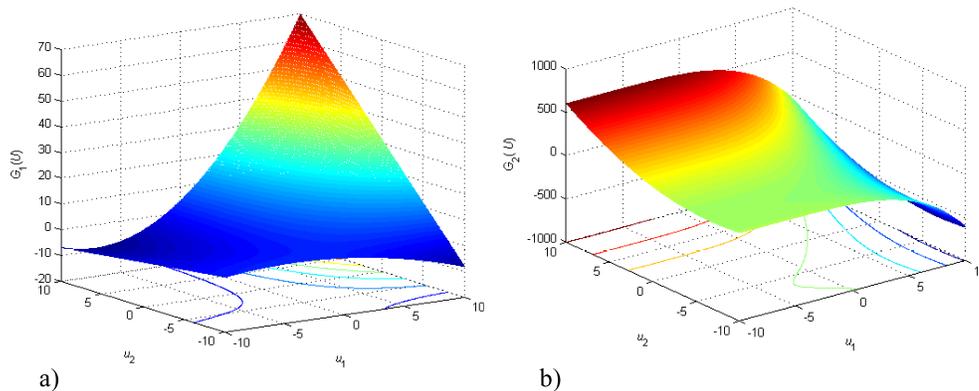
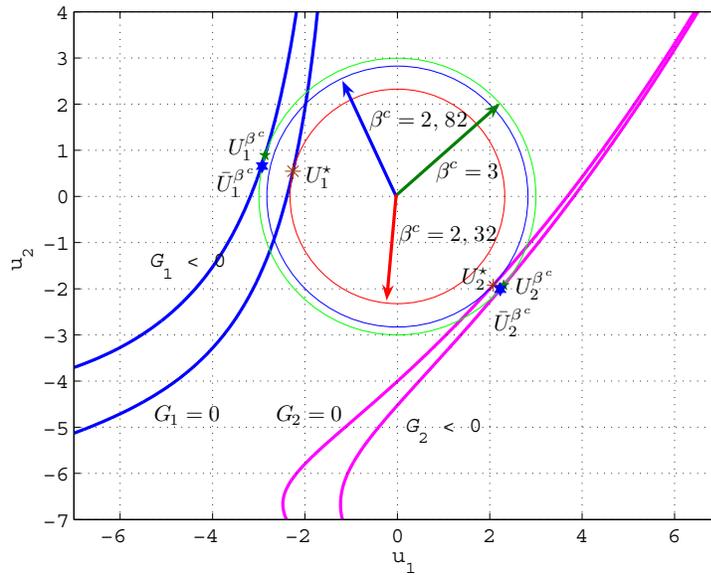
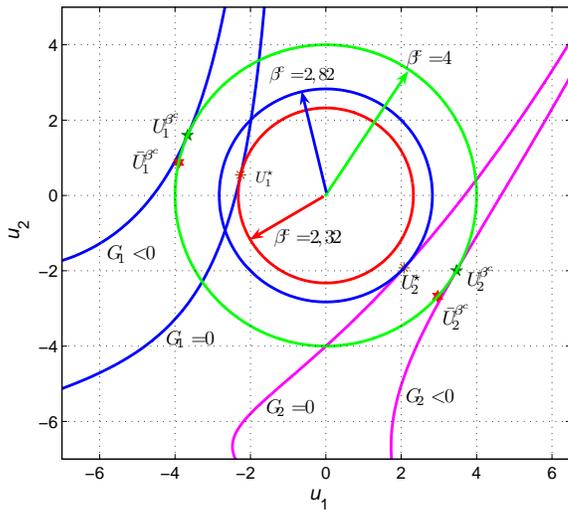


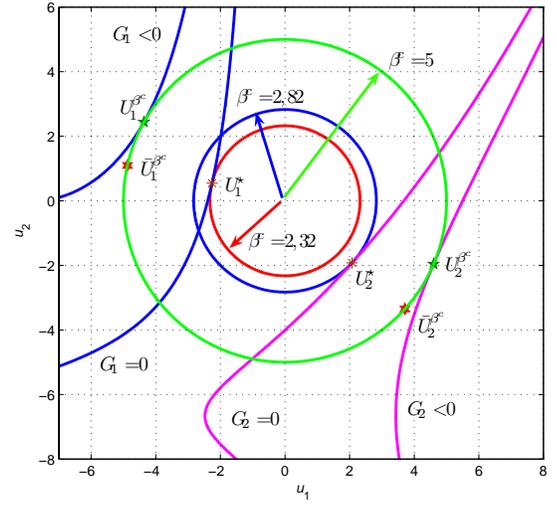
Figure III.11: Allure des fonctions d'états limites non linéaires a) G_1 b) G_2 .



a)



b)



c)

Figure III.12: Validation de l'approximation pour différentes valeurs d'indices cibles

a) $\beta^c = 3$, b) $\beta^c = 4$, c) $\beta^c = 5$

\mathbf{u}^* : points de défaillance les plus probables

\mathbf{u}^{β^c} : points tangents entre l'hyper-sphère de rayon β^c et les états limites G_1 et G_2

$\tilde{\mathbf{u}}^{\beta^c}$: points utilisés pour l'approximation des sensibilités aux points \mathbf{u}^{β^c}

III.4.2.3 Résolution du problème d'allocation optimale des indices cibles

La formulation III.51 représente un problème d'optimisation non linéaire, qui peut être résolu par n'importe quel algorithme d'optimisation ; dans ce travail nous avons utilisé la méthode SQP. Le gradient de la contrainte d'optimisation $\partial \tilde{\beta}_{sys} / \partial \beta^c$ est estimé par

différences finies :

$$\frac{\partial \check{\beta}_{sys}}{\partial \beta^c} = \frac{\check{\beta}_{sys}(\{\beta^c\} + \Delta\beta^c, [\rho^c]) - \check{\beta}_{sys}(\{\beta^c\}, [\rho^c])}{\Delta\beta^c} \quad (\text{III.56})$$

où $\Delta\beta^c$ est une petite perturbation. Cette formule suppose que la matrice ρ^c reste constante. Cette hypothèse est correcte car les cosinus directeurs sont conservés pour une petite perturbation de l'indice cible. Cette hypothèse permet d'éviter de réévaluer la matrice de corrélation cible ρ^c à chaque perturbation. La matrice de corrélation cible ρ^c est calculée avant le déclenchement de la procédure d'optimisation des indices cibles (équation III.51). De ce fait, aucun calcul mécanique n'est impliqué lors de la résolution du problème d'allocation des indices cibles et peu d'effort numérique est ainsi mobilisé. L'estimation des sensibilités de $\check{\beta}_{sys}$ par différences finies n'engendre pas d'instabilités numériques qui compromettent la convergence de l'algorithme. Cela est dû au fait que l'indice de fiabilité système est sensible aux indices de fiabilité.

Toutefois, pour résoudre le problème de l'allocation optimale des indices cibles, nous recommandons l'estimation de la fiabilité système par les méthodes d'approximation ou par les bornes de *Ditlevsen*. Les méthodes de simulation génèrent un bruit numérique qui peut entraver la convergence de l'algorithme utilisé pour résoudre l'équation III.51, sauf si un grand nombre de tirages est utilisé.

III.4.3 Calibration des coefficients de sécurité optimaux du système (OSSF)

Les coefficients partiels de sécurité (PSF) recommandés dans les codes de dimensionnement sont calibrés pour un ensemble de situations de dimensionnement. Dans l'ouvrage de *Ditlevsen et Madsen* [12], plusieurs méthodes de calibration des coefficients partiels de sécurité sont présentées. Le groupe de travail JCSS [110] (*Joint Committee on Structural Safety*) a développé un logiciel permettant la calibration basée sur la fiabilité (RBCC : *Reliability-Based Code Calibration*). Nous détaillons ensuite les deux méthodes les plus utilisées dans la calibration des PSF.

La différence entre les PSF et les OSSF réside dans le fait que les premiers correspondent à un jeu de valeurs uniques calibrées pour un ensemble de structures et de situations de dimensionnement (e.g. petit poteau en traction, grand poteau en flexion composée, ... etc). En revanche, les OSSF sont des coefficients de sécurité définis pour chacun des modes de défaillance et pour une structure donnée dans le but de l'optimiser. Les approches de calibration des PSF peuvent être utilisées pour définir les OSSF. Étant donné que ces méthodes sont, soient consommatrices de temps de calcul, soient imprécises, nous proposons une approche pour la calibration des OSSF.

III.4.3.1 Méthodes de calibration des PSF

Les méthodes de calibration peuvent être divisées en deux catégories [111]. Les méthodes globales de calibration forment directement le problème de la recherche des coefficients partiels en problème d'optimisation, et les méthodes approximatives basées sur le calcul du point de défaillance le plus probable (MPFP). Le point de calcul global permettant de donner un jeu de valeurs uniques des PSF est déduit à partir des MPFP

des différentes situations de dimensionnement. Les méthodes approximatives sont moins coûteuses en temps de calcul mais aussi moins précises.

- **Méthode globale de calibration**

La méthode globale de calibration (GOM : *Global Optimisation Method*) consiste à rechercher le meilleur jeu de valeurs des coefficients $\gamma_{\mathbf{X}}$ qui minimisent le résidu entre l'indice cible β^c et les indices de fiabilité issus des différentes situations.

$$\min_{\gamma_{\mathbf{X}}} R = \sum_{j=1}^L \kappa_j (\beta_j(\gamma_{\mathbf{X}}) - \beta^c)^2 \quad (\text{III.57})$$

où $\gamma_{\mathbf{X}}$ sont les coefficients partiels de sécurité associés aux variables aléatoires \mathbf{X} , L est le nombre de situations de dimensionnement, $\beta_j(\gamma_{\mathbf{X}})$ sont les indices de fiabilité correspondant aux coefficients $\gamma_{\mathbf{X}}$, β^c est l'indice cible et κ_j sont des pondérations spécifiques à chaque situation et à chaque classe de structures. Elles peuvent être également définies par le taux d'occurrence de chaque situation et la gravité des conséquences.

La figure III.13-a montre le schéma itératif de cette méthode, à chaque jeu de valeurs des $\gamma_{\mathbf{X}}$ une analyse de fiabilité est exécutée afin d'estimer la fiabilité de chaque situation, si les critères de convergence ne sont pas satisfaits un autre jeu de valeurs est calculé. Le principe de résolution consiste à déplacer les états limites dans l'espace normé afin de les rapprocher au maximum des tangentes du cercle centré de rayon égal à l'indice cible β^c (figure III.13-b). La minimisation du résidu R peut être effectuée par des algorithmes d'optimisation sans contrainte (e.g. gradient conjugué, BFGS,...) [112]. L'inconvénient de la méthode globale est qu'elle exige à chaque itération, L analyses de fiabilité pour l'évaluation des $\beta_j(\gamma_{\mathbf{X}})$. Par conséquent, elle nécessite un effort de calcul considérable.

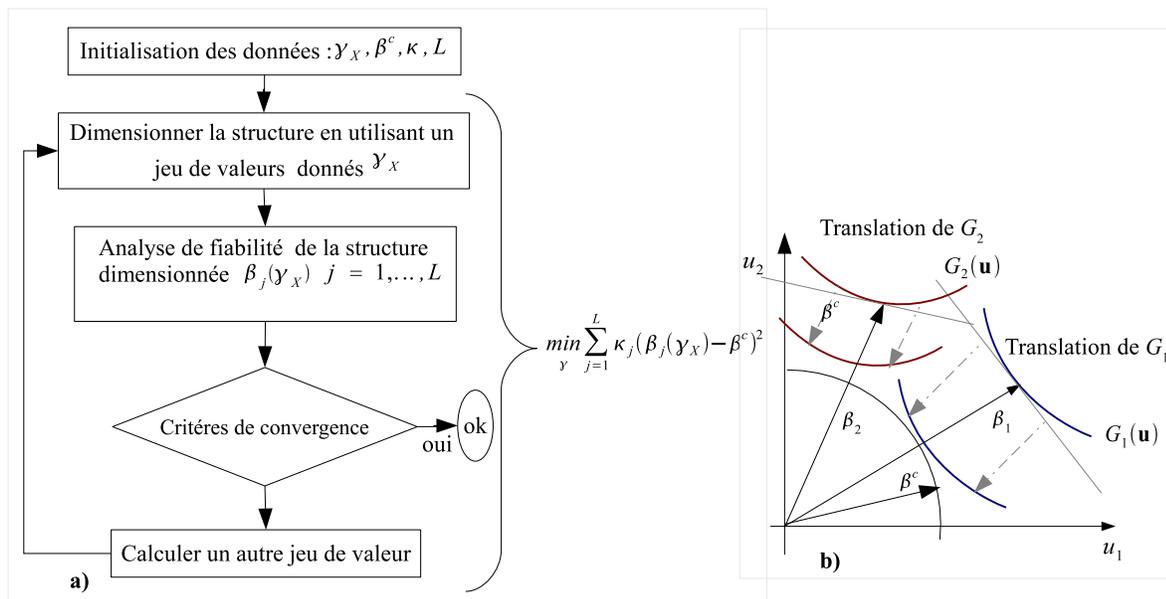


Figure III.13: a) Schéma itératif et b) Illustration de la méthode GOM.

• Méthode d'expansion radiale

Cette méthode est développée pour palier au problème de temps de calcul exigé par la méthode globale de calibration (GOM). Elle est constituée de deux étapes principales, la première vise à effectuer une seule analyse de fiabilité pour chaque situation de dimensionnement j et la deuxième consiste à chercher un jeu de valeurs unique des coefficients partiels de sécurité pour toutes les situations.

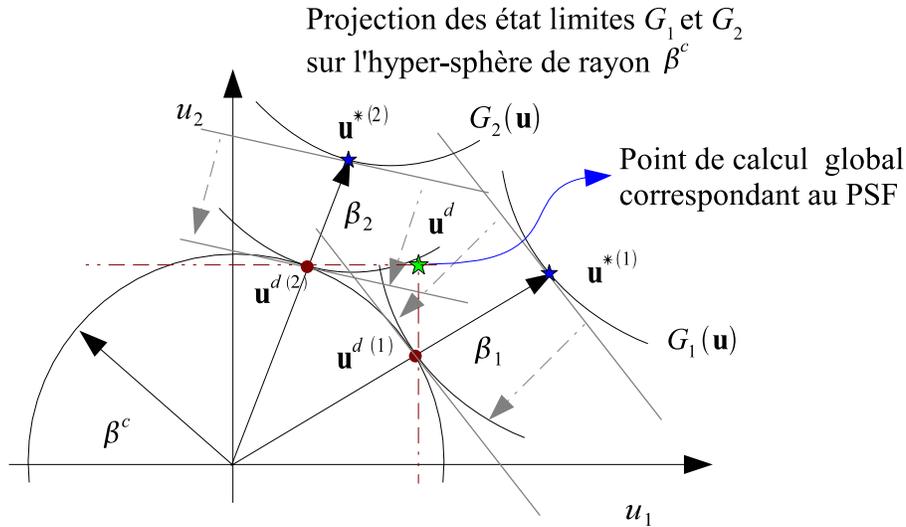


Figure III.14: Principe de la méthode d'expansion radiale.

L'analyse de fiabilité d'une situation j permet d'obtenir le point de défaillance le plus probable (MPFP) $\mathbf{u}^{*(j)}$ dans l'espace normé. La transformation de celui-ci dans l'espace physique donne le point MPFP physique $\mathbf{x}^{*(j)}$. La projection de ce point sur l'hyper-sphère de rayon β^c conduit aux coordonnées du point de calcul $\mathbf{x}_d^{(j)}$ qui correspond au point satisfaisant la fiabilité cible β^c . Cette projection suppose que les cosinus directeurs sont conservés, c'est-à-dire que les sensibilités $\boldsymbol{\alpha}^{(j)}$ de la fonction d'état limite G_j restent identiques pour n'importe quel niveau de fiabilité (faible non linéarité de l'état limite). Par conséquent, une simple translation permet d'avoir le point $\mathbf{x}_d^{(j)}$ (figure III.14).

$$\mathbf{u}_d^{(j)} = \beta^c \boldsymbol{\alpha}^{(j)} \quad (\text{III.58})$$

où $\boldsymbol{\alpha}^{(j)}$ est le vecteur des sensibilités de l'état limite de la situation j . La transformation de $\mathbf{u}_d^{(j)}$ dans l'espace physique donne le point de calcul $\mathbf{x}_d^{(j)}$ pour la situation j . Les coefficients partiels correspondants sont obtenus par :

$$\begin{aligned} \gamma_{X_i}^{(j)} &= \frac{x_{i,d}^{(j)}}{x_{i,p_i}^{(j)}} && \text{si la variable } X_i \text{ est une sollicitation} \\ \gamma_{X_i}^{(j)} &= \frac{x_{i,p_i}^{(j)}}{x_{i,d}^{(j)}} && \text{si la variable } X_i \text{ est une résistance} \end{aligned} \quad (\text{III.59})$$

où $\mathbf{x}_p^{(j)}$ est le vecteur des valeurs caractéristiques des variables aléatoires \mathbf{X} pour la situation j . Ces valeurs sont définies par :

$$x_{i, p_i} = F_{x_i}^{-1}(p_i) \quad (\text{III.60})$$

où x_{i, p_i} est le fractile associé à la variable aléatoire X_i pour un niveau de probabilité p_i et $F_{X_i}^{-1}(\cdot)$ est la fonction inverse de probabilité de la variable aléatoire X_i . Il est communément admis des valeurs de fractile de 95% lorsque X_i est une sollicitation et de 5% lorsque X_i est une résistance.

Il existe des relations analytiques dans le cas où les lois de probabilité marginales sont normales, Log-Normales, Gumbel ou Weibull [113]. Néanmoins, il faut que ces lois de probabilité soient identiques pour chaque situation j . Par exemple, lorsque les variables aléatoires sont normales, les coefficients $\gamma_{\mathbf{X}}^{(j)}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \gamma_{X_i}^{(j)} &= \frac{x_{i, p_i}}{\mu_{X_i} + \alpha_{X_i}^{(j)} \beta^c \sigma_{X_i}} \quad \text{si } X_i \text{ est de type sollicitation} \\ \gamma_{X_i}^{(j)} &= \frac{\mu_{X_i} + \alpha_{X_i}^{(j)} \beta^c \sigma_{X_i}}{x_{i, p_i}} \quad \text{si } X_i \text{ est de type résistance} \end{aligned} \quad (\text{III.61})$$

En général pour une loi de probabilité quelconque, les coefficients partiels de sécurité correspondant à la situation j sont exprimés par :

$$\begin{aligned} \gamma_{X_i}^{(j)} &= \frac{x_{i, p_i}^{(j)}}{F_{X_i}^{-1}\left(\Phi\left(\beta^c \alpha_{X_i}^{(j)}\right)\right)} \quad \text{si } X_i \text{ est de type sollicitation} \\ \gamma_{X_i}^{(j)} &= \frac{F_{X_i}^{-1}\left(\Phi\left(\beta^c \alpha_{X_i}^{(j)}\right)\right)}{x_{i, p_i}^{(j)}} \quad \text{si } X_i \text{ est de type résistance} \end{aligned} \quad (\text{III.62})$$

Nous précisons que jusque là nous avons un jeu de valeurs de PSF pour chaque situation j , pour cela la seconde étape vise à optimiser les coefficients partiels obtenus afin de définir un seul jeu de valeurs utilisable pour toutes les situations. Cette étape est généralement basée sur la définition d'un point de calcul unique à partir des L points $\mathbf{x}^d(j)$ évalués dans l'étape précédente. Plusieurs approches sont développées pour chercher ce jeu unique des coefficients partiels [12].

III.4.3.2 Bilan

La méthode globale de calibration est coûteuse en temps de calcul, sa mise en œuvre pour la calibration des OSSF (i.e. définis pour l'optimisation) n'est pas appropriée. De plus, cette approche donne un jeu de valeurs uniques des coefficients de sécurité, pouvant conduire à une solution fiable mais pas assez économique.

La première étape de la méthode d'expansion radiale est très intéressante, car elle aboutit à des coefficients de sécurité pour chaque situation. Dans notre cas, nous possédons une seule situation définie par m modes de défaillance. Ainsi, cette méthode peut être utilisée pour calculer les coefficients OSSF pour chaque mode de défaillance j caractérisé par un indice optimal cible β_j^c . Toutefois, cette approche est utilisable sous réserve des hypothèses suivantes :

- les fonctions d'états limites ne sont pas fortement non linéaires ;
- les iso-valeurs des fonctions d'états limites restent parallèles entre elles.

En effet, il s'agit des mêmes hypothèses rencontrées lors du calcul de la matrice de corrélation cible ρ^c permettant la projection du point MPFP sur l'hyper-sphère de rayon β^c pour obtenir le point de calcul de chaque mode de défaillance. Néanmoins, pour des états limites non linéaires cette procédure peut conduire à une mauvaise estimation des OSSF (figure III.15). Lors de l'implémentation de la méthode SOSRA, nous avons remarqué qu'une mauvaise estimation des OSSF peut provoquer des instabilités de convergence de l'algorithme d'optimisation. Pour cela, nous proposons une approche basée sur l'analyse de fiabilité inverse pour le calcul des OSSF.

III.4.4 Proposition d'une méthode de calibration

La méthode que nous proposons dans ce travail utilise le principe de l'analyse de fiabilité inverse. Il s'agit de rechercher le point tangent entre l'hyper-sphère de rayon β_j^c et l'état limite G_j correspondant au point de performance minimale cible (MPTP) (figure III.15). Du point de vue numérique, les coefficients de sécurité OSSF du mode j sont obtenus par la minimisation de la fonction d'état limite G_j sous la limitation d'assurer l'indice de fiabilité cible β_j^c .

$$\begin{aligned} \min_{\gamma_{\mathbf{x}}} G_j(\mathbf{d}, \mathbf{x}_p, \gamma_{\mathbf{x}}) \\ \text{sous } \|\Phi^{-1}(F_X(\gamma_{\mathbf{x}} \mathbf{x}_p))\| = \beta_j^c \end{aligned} \quad (\text{III.63})$$

où \mathbf{x}_p est le vecteur des valeurs p-fractiles (i.e. caractéristiques) des variables aléatoires, $\gamma_{\mathbf{x}}$ est un vecteur de coefficients OSSF pour chaque mode de défaillance. Pour m modes de défaillance, une matrice de coefficients OSSF de dimensions $n \times m$ est définie, avec n le nombre de variables aléatoires. La résolution du problème (III.63) peut s'appuyer sur les algorithmes AMV, CMV ou HMV présentés dans le chapitre II (§II.3.2.1).

La méthode SOSRA (équation III.50) exige le calcul des valeurs de décalage $\Delta_{\mathbf{d}}$ lorsque les variables d'optimisation \mathbf{d} sont des paramètres de distribution des variables aléatoires notées $\mathbf{X}_{\mathbf{d}}$. Nous rappelons que les valeurs $\Delta_{\mathbf{d}}$ permettent la réduction de l'espace de conception des variables d'optimisation afin de tenir compte des incertitudes dues à ces variables. Dans l'approche proposée, ces valeurs sont calculées à l'aide des coefficients OSSF associés aux variables aléatoires $\mathbf{X}_{\mathbf{d}}$ par :

$$\Delta_{\mathbf{d}} = \mathbf{d}(\gamma_{X_{\mathbf{d}}} - 1) \quad (\text{III.64})$$

Les valeurs de décalage $\Delta_{\mathbf{d}}$ sont définies pour chaque mode de défaillance j . Pour m modes de défaillance, la matrice contenant les valeurs de décalage $\Delta_{\mathbf{d}}$ est de dimensions $n_{\mathbf{d}} \times m$, où $n_{\mathbf{d}}$ est le nombre de variables d'optimisation.

III.4.5 Implémentation de la méthode SOSRA

L'organigramme détaillé de SOSRA est présenté sur la figure III.16. Le développement de SOSRA a été réalisé sous l'environnement MATLAB[®], sous lequel l'approche classique SRBDO est également implémentée, ainsi que les méthodes de la RBDO présentées dans

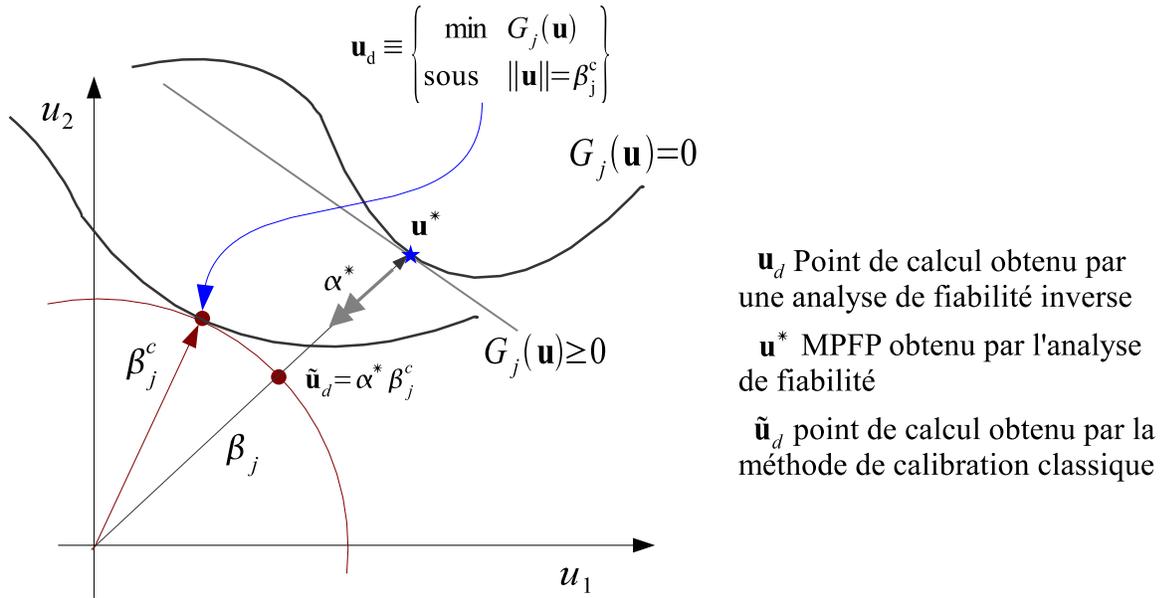


Figure III.15: Analyse de fiabilité inverse pour la calibration des OSSF.

le chapitre II. L'algorithme SQP a été utilisé pour résoudre ces différentes formulations. L'analyse de fiabilité des composants est réalisée par la méthode FORM et résolue par l'algorithme HL-RF ou SQP. Les méthodes d'estimation de la fiabilité système présentées dans la section III.2.4 ont été intégrées dans le programme SOSRA, il s'agit :

- des bornes bi-modales pour les systèmes séries et parallèles ;
- de la méthode SCIS implémentée dans le programme FERUM (*Finite Element Reliability Using MATLAB*) [114] ;
- des méthodes de *Genz* implémentées dans des programmes libres en FORTRAN [115]. Ces programmes sont utilisés et liés au programme SOSRA via des fichiers DLL (*Dynamic Link Library*).

Les critères de convergence de la méthode SOSRA sont définis par la variation relative de la fonction objectif et des variables d'optimisation et par la variation absolue de l'indice de fiabilité système.

$$\frac{|C(\mathbf{d}^{(k)}) - C_I(\mathbf{d}^{(k-1)})|}{|C_I(\mathbf{d}^{(k)})|} \leq \epsilon \quad \text{ou} \quad \frac{\|\mathbf{d}^{(k)} - \mathbf{d}^{(k-1)}\|}{\|\mathbf{d}^{(k)}\|} \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \|\beta_{sys}^{(k)} - \beta_{sys}^c\| \leq \epsilon \quad (\text{III.65})$$

où k représente le cycle d'optimisation déterministe, $\mathbf{d}^{(k)}$, $C_I(\mathbf{d}^{(k)})$ et β_{sys}^k sont respectivement l'optimum, le coût optimal et l'indice de fiabilité système de l'optimum au $k^{\text{ème}}$ cycle d'optimisation. ϵ est pris égal à 10^{-3} . Les mêmes critères de convergence sont pris en compte pour l'approche classique de la SRBDO.

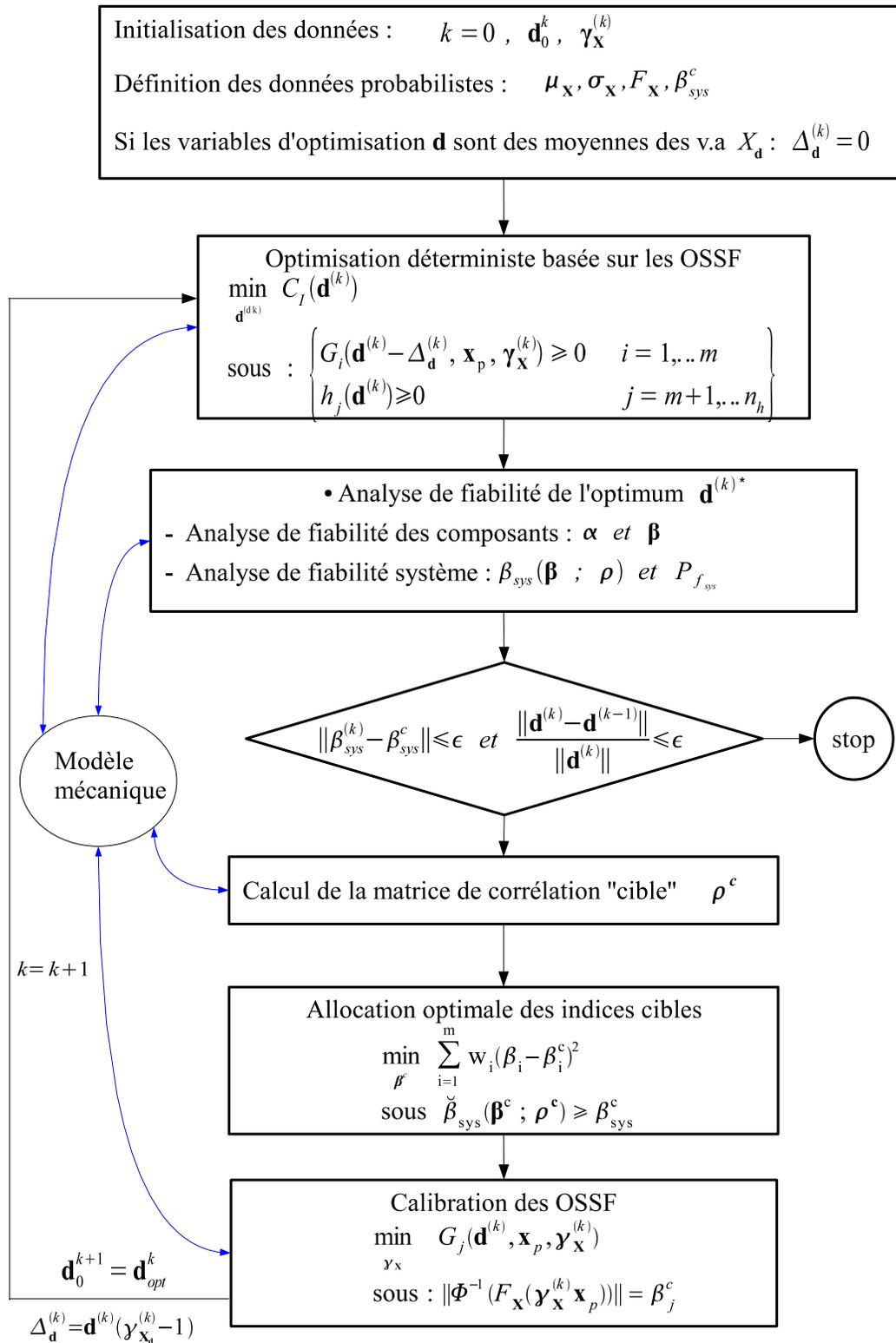


Figure III.16: Organigramme de l'approche SOSRA.

III.5 Validation et application

L'objectif de cette partie est de valider la méthode SOSRA proposée pour l'optimisation fiabiliste des systèmes mécaniques. La première application vise à tester les différentes méthodes de calcul de la fiabilité système. Le choix de la méthode adéquate à utiliser dans l'optimisation fiabiliste doit satisfaire les critères d'efficacité, de stabilité et de robustesse.

La deuxième application vise à minimiser un treillis de 13 barres en utilisant la méthode SOSRA. Cet exemple issu de la littérature nous a permis de valider la méthode SOSRA par rapport à un résultat de référence. D'autres applications numériques spécifiques aux structures en béton armé sont traitées ultérieurement dans le chapitre IV.

III.5.1 Choix de la méthode de calcul de la fiabilité système

Le problème d'allocation optimale des indices cibles formulé en problème d'optimisation exige l'estimation du gradient de l'indice système par rapport aux indices cibles ($\partial \check{\beta}_{sys} / \partial \beta^c$). Or, ce gradient est estimé par différences finies.

L'estimation de l'indice cible $\check{\beta}_{sys}$ doit être précise et ne doit pas générer de bruit numérique dû aux tirages aléatoires. De plus, l'utilisation d'un nombre élevé de tirages aléatoires peut rendre la procédure de recherche des indices optimaux inefficace.

Ce premier exemple permet la validation du choix de la méthode de calcul de la fiabilité système. Il s'agit de calculer la probabilité de défaillance d'un système série défini par 10 composants, soit l'intégrale suivant :

$$P_{f_{sys}} = 1 - \int_{-\infty}^{\beta_1} \int_{-\infty}^{\beta_2} \dots \int_{-\infty}^{\beta_{10}} \frac{1}{(2\pi)^{10/2} \sqrt{|\rho|}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \boldsymbol{\rho}^{-1} \mathbf{z}} dz_1, dz_2, \dots, dz_{10}$$

Les indices de fiabilité de ces composants sont supposés identiques de valeurs égales à 3,00 et les coefficients de corrélation ρ_{ij} entre les composants deux-à-deux sont égaux à 0,5. Les méthodes testées sont les suivantes :

- les bornes bi-modales de *Ditlevsen* (BD)[91] ;
- la méthode SCIS [100] ;
- la méthode de *Genz* par les simulations brutes de Monte Carlo (CMCS : *Crude Monte Carlo Simulation*) [101] ;
- la méthode de *Genz* par la méthode des sous-régions adaptatives (SRAM : *Subregion adaptive method*) [103] ;
- la méthode de *Genz* par la méthode de *Latice Rule* avec les paramètres optimaux de Korobov (LRM : *Latice Rule method*) [102].

Les conditions d'arrêt des méthodes SCIS, CMCS, SRAM et LRM sont :

- l'erreur relative doit être inférieure à 10^{-3} ;
- le nombre maximal de simulation ne doit pas dépasser 10^5 .

III.5.1.1 Discussion sur les résultats des différentes approches

Le tableau III.4 montre que les méthodes CMCS, LRM et SRAM utilisant les approximations de *Genz* sont très efficaces. Lorsque CMCS est employée avec uniquement

le critère d'erreur, la probabilité de défaillance du système est obtenue après 8143 tirages aléatoires. En revanche, lorsque le critère du nombre maximal des simulations est utilisée, une meilleure estimation de la probabilité de défaillance est obtenue après 10^5 tirages aléatoires.

Méthodes	$P_{f_{sys}}$	β_{sys}	err	N_{sim}	CPU (s)
B-D	[0,0110 ; 0,0130]	[2,2264 ; 2,2914]	nc	0	0,01
SCIS ⁽¹⁾	0,0111	2,2881	$9,5 \times 10^{-4}$	10^4	14,8
CMCS ⁽²⁾	0,0110	2,2919	$1,5 \times 10^{-4}$	10^5	2,6
CMCS ⁽¹⁾	0,0106	2,3032	$6,5 \times 10^{-4}$	8143	0,12
SRAM ⁽¹⁾	0,0110	2,2866	$8,1 \times 10^{-4}$	0	0,06
LRM ⁽¹⁾	0,0110	2,2871	$3,9 \times 10^{-4}$	12	0,01
	⁽¹⁾ : critère d'arrêt sur l'erreur, où $err < 10^{-3}$				
	⁽²⁾ : critère d'arrêt sur le nombre maximal de simulations, où $N_{sim} \leq 10^5$				

Tableau III.4: Résultats de calcul de la fiabilité d'un système de dix composants.

Les résultats de CMCS sont meilleurs que ceux obtenus par SCIS, même avec 8143 tirages aléatoires l'erreur de CMCS est inférieure à l'erreur de la méthode SCIS. Celle-ci a exigé 10^4 tirages aléatoires pour une erreur inférieure à 10^{-3} . L'encadrement de la probabilité de défaillance système obtenu par les bornes de *Ditlevsen* est assez précis, l'indice de fiabilité du système est compris entre 2,22 et 2,29. Les méthodes LRM et SRAM sont efficaces et précises, LRM estime la probabilité de défaillance à partir de 12 tirages aléatoires uniquement en 10 ms. L'approche SRAM n'exige pas de tirages aléatoires car elle est basée sur une approche numérique d'intégration avec des évaluations de la fonction de densité de probabilité $\phi(\cdot)$. Cette méthode donne des résultats satisfaisants et précis pour un temps de calcul très réduit.

• Stabilité numérique et efficacité

La figure III.17 montre les fluctuations de la probabilité de défaillance en fonction du nombre de simulations. Lorsque CMCS est utilisée, la valeur de $P_{f_{sys}}$ se stabilise pour un nombre de tirages supérieure à 3000, par contre la méthode SCIS exige un nombre plus élevé. La méthode LRM exige une centaine de tirages aléatoires pour une valeur stable de $P_{f_{sys}}$. Toutefois, la figure III.18-c indique que l'effort de calcul augmente exponentiellement par rapport au nombre de tirages. Le temps de calcul nécessaire pour 40 tirages aléatoires dans LRM est équivalent à une simulation de Monte Carlo à 5×10^4 tirages.

Les approches LRM et SCIS exigent un grand nombre de tirages aléatoires pour une valeur stable de $P_{f_{sys}}$ afin d'éviter le bruit numérique. La réalisation d'un grand nombre de tirages pénalise ces approches, qui deviennent inefficaces.

• Influence de la dimension

L'efficacité des approches de calcul de la fiabilité système dépend principalement de la dimension du problème étudié, donnée par le nombre de composants du système. De plus, cette dimension peut influencer la robustesse et la précision. Supposons que le système série précédent est défini par 10, 20, 30, 40 et 50 composants, respectivement. L'indice de fiabilité des composants sont égaux à 3,0 et les coefficients de corrélation entre deux composants sont pris égaux à 0,5.

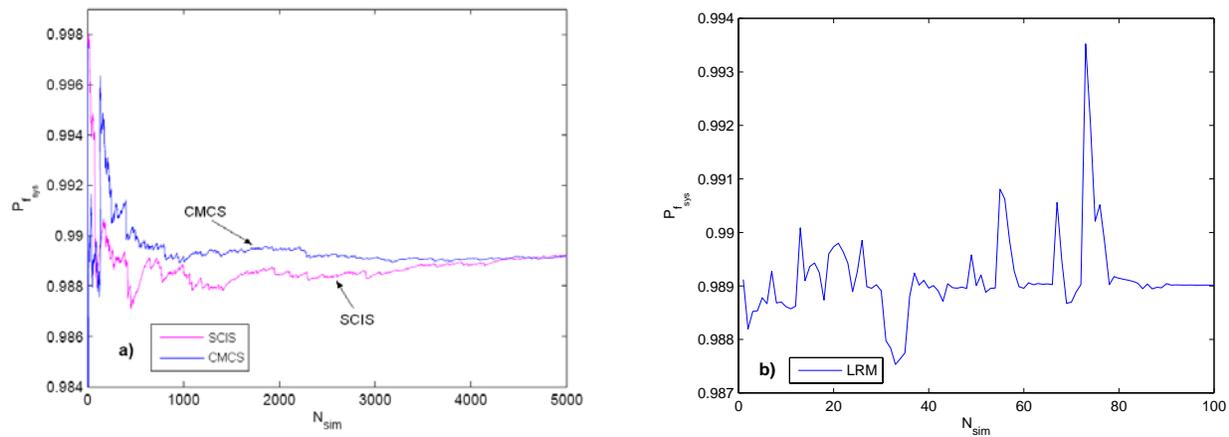


Figure III.17: $P_{f_{sys}}$ en fonction du nombre de simulations a) CMCS et SCIS b) LRM.

Les résultats du tableau III.5 montrent l'influence de la dimension dans la précision et l'efficacité des méthodes. La méthode LRM reste efficace et assez précise quelle que soit la dimension du problème, toutefois cette méthode génère un bruit numérique dû aux tirages aléatoires. La méthode SRAM est limitée pour des dimensions inférieures à 20. La méthode CMCS n'implique pas un grand effort de calcul lorsque la dimension du problème est élevée. Pour un système de 50 composants, l'approche CMCS implique un temps de calcul de 3 ms. Par contre, la méthode SCIS nécessite 100 fois plus d'effort de calcul par rapport à la méthode CMCS. L'encadrement de l'indice de fiabilité système fourni par les bornes de *Ditlevsen* devient de plus en plus large lorsque le nombre de composants est élevé. Toutefois, la moyenne des deux valeurs de l'encadrement reste une estimation correcte.

dimension		B-D	SCIS	CMCS	SRAM	LRM
10	β_{sys}	[2,22 ; 2,29]	2,28	2,29	2,28	2,28
	CPU (s)	0,01	6,3	0,06	0,03	0,01
20	β_{sys}	[1,94 ; 2,13]	2,08	2,09	2,05	2,07
	CPU (s)	0,01	11,8	0,11	0,06	0,01
30	β_{sys}	[1,76 ; 2,12]	1,95	1,96	-	1,96
	CPU (s)	0,04	17,3	0,17	-	0,01
40	β_{sys}	[1,62 ; 2,12]	1,87	1,86	-	1,84
	CPU (s)	0,07	23,1	0,23	-	0,03
50	β_{sys}	[1,51 ; 2,12]	1,80	1,79	-	1,78
	CPU (s)	0,1	28,9	0,29	-	0,03

Tableau III.5: CPU et indice de fiabilité d'un système de 10, 20, 30, 40 et 50 composants.

III.5.1.2 Bilan sur les approches de calcul de la fiabilité système

Les méthodes LRM et SCIS sont inadaptés au problème d'allocation optimale des indices cibles, car un grand nombre de tirages aléatoires est nécessaire pour éliminer le

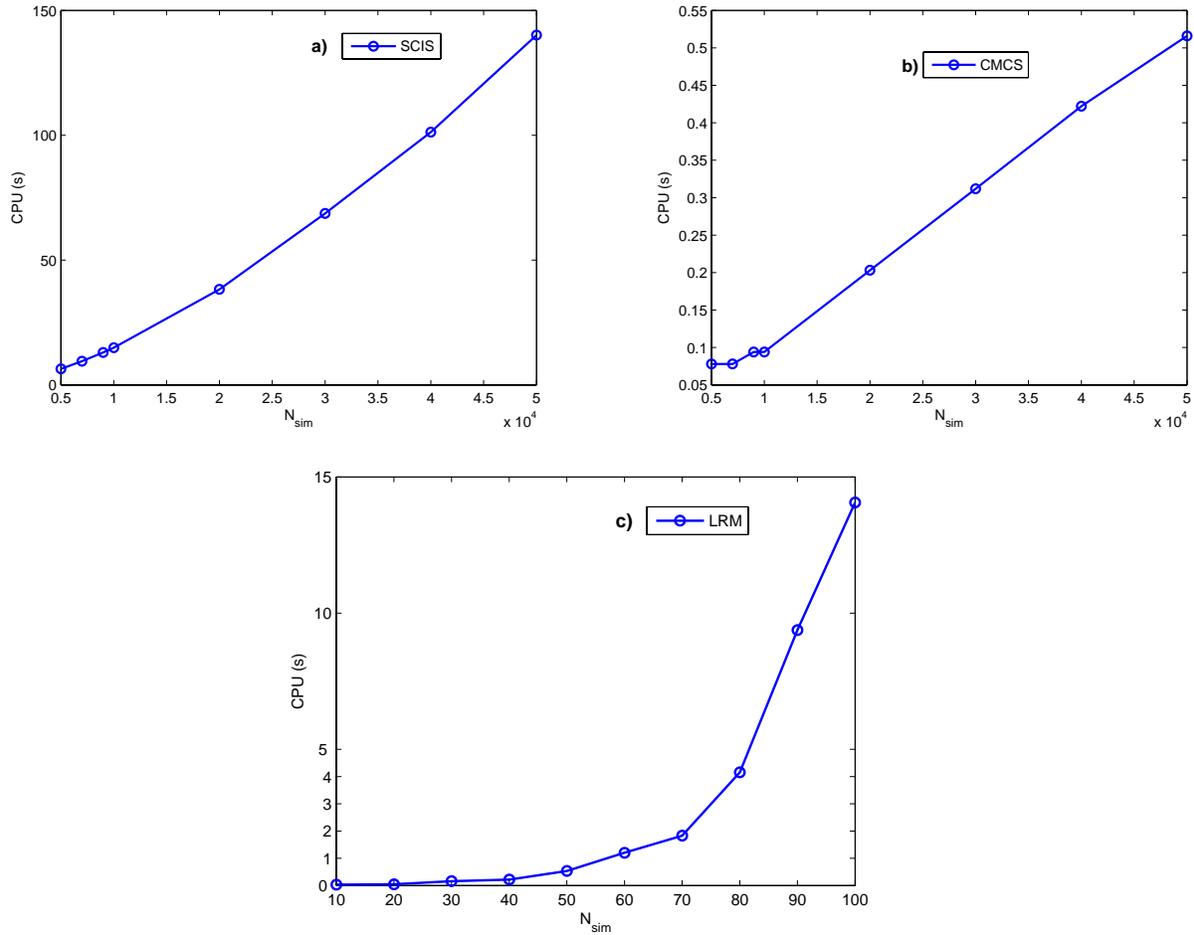


Figure III.18: Temps de calcul CPU en fonction du nombre de simulations
a) SCIS, b) CMCS, et c) LRM.

bruit numérique dû à ces tirages.

La méthode SRAM donne des résultats assez précis par rapport à celui de référence obtenu par les simulations de Monte Carlo (CMCS). De plus, cette approche est basée sur une intégration numérique n'exigeant pas de tirages aléatoires. La méthode SRAM peut être adoptée dans la procédure d'allocation optimale des indices cible. Cependant, cette méthode est limitée pour des systèmes à 20 composants.

Finalement, la méthode de simulations de Monte Carlo brute (CMCS) présente l'équilibre entre précision, efficacité et robustesse. Un nombre de tirages aléatoires de 5000 permet d'avoir une valeur stable de l'indice cible $\check{\beta}_{sys}$ et un effort de calcul négligeable (quelques millisecondes). Nous précisons que les méthodes CMCS, SCIS, LRM et SRAM exigent que la matrice de corrélation soit définie positive. Lorsque celle-ci ne l'est pas, l'encadrement par les bornes de *Ditlevsen* est la seule solution possible pour l'estimation de l'indice de fiabilité système.

III.5.2 Treillis à treize barres

Le pont treillis illustré sur la figure III.19 est utilisé pour valider l'approche proposée SOSRA. Le résultat de référence est donné par *Nakib* [116].

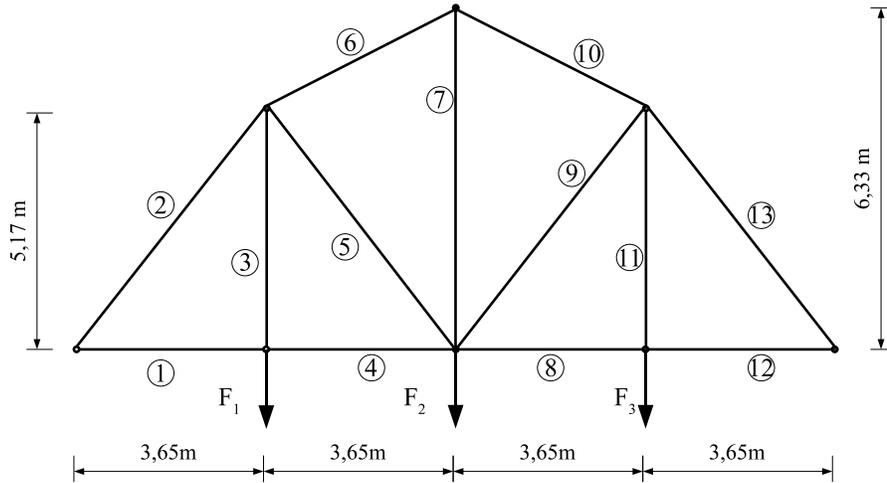


Figure III.19: Pont Treillis à treize barres.

Le poids du treillis est minimisé sous la limitation de la probabilité de défaillance à 10^{-5} (i.e. $\beta_{sys}^c = 4,26$). Les 13 sections du treillis sont les variables d'optimisation considérées déterministes. Les valeurs initiales, les bornes inférieures et supérieures sont données dans le tableau III.6. Les chargements appliqués F_i et les résistances ultimes des barres f_{y_j} sont modélisés par des variables aléatoires normales et indépendantes. Le tableau III.7 détaille les caractéristiques de ces variables aléatoires. *Nakib* [116] a utilisé la formulation classique de la SRBDO (équation III.44) pour optimiser le poids du treillis :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{A}} \quad & \sum_{i=1}^{13} \rho A_i L_i \\ \text{sous} \quad & \left\{ \begin{array}{l} P_{f_{sys}}(\mathbf{A}; \mathbf{X}) \leq 10^{-5} \\ \mathbf{A}^{LB} \leq \mathbf{A} \leq \mathbf{A}^{UB} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (\text{III.66})$$

où A_i et L_i sont respectivement la section et la longueur de la barre i , ρ est la masse volumique de l'acier prise égale à 7850 kg/m^3 et \mathbf{X} est le vecteur des variables aléatoires. La probabilité de défaillance du système $P_{f_{sys}}$ est estimée à partir des indices de fiabilité des composants, correspondant aux fonctions d'état limite :

$$G_j(\mathbf{A}, \mathbf{x}) = f_{y_j} - |\sigma_j(\mathbf{A}, F)| \quad j = 1, \dots, 7 \quad (\text{III.67})$$

où f_{y_j} et σ_j sont respectivement la résistance ultime et la contrainte mécanique de la barre j . σ_j est obtenue par un calcul éléments finis linéaire (éléments de barre à deux noeuds). La ruine d'une barre survient lorsque la limite élastique est atteinte en traction ou en compression. En raison de la symétrie du treillis, les sections des barres sont regroupées en 7 groupes distincts et la fiabilité de la structure est modélisée par un système série de 7 composants.

A_i (cm ²)	A_0	A^{LB}	A^{UB}
$i \in \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 13\}$	16,30	2	50
$i \in \{3, 11, 5, 7, 9\}$	12,90	2	50

v.a	moyenne	CV
F_i $i = 1, \dots, 3$ (kN)	66,725	0,16
f_{y_j} $j = 1, \dots, 7$ (MPa)	248,20	0,10

Tableau III.6: Définition des variables d'optimisation

Tableau III.7: Définition des variables aléatoires.

Les sections optimales du résultat de référence [116] et de la méthode proposée SOSRA sont détaillées dans le tableau III.8. Les sections optimales de SOSRA sont très proches du résultat de référence [116]. La conception optimale calculée par SOSRA est légèrement plus économique, tout en respectant la probabilité de défaillance cible de 10^{-5} . Nous précisons, que l'auteur des résultats de référence a utilisé l'algorithme des directions admissibles (*Feasible Direction Algorithm*).

A^* (cm ²)	A_1, A_{12}	A_2, A_{13}	A_3, A_{11}	A_4, A_8	A_5, A_9	A_6, A_{10}	A_7	P^* (kg)
SRBDO [116]	6,18	10,20	6,36	6,18	2,08	6,95	4,32	308,12
SOSRA	5,99	10,38	5,96	5,99	2,00	6,86	4,13	302,41

Tableau III.8: Poids et sections optimales du treillis.

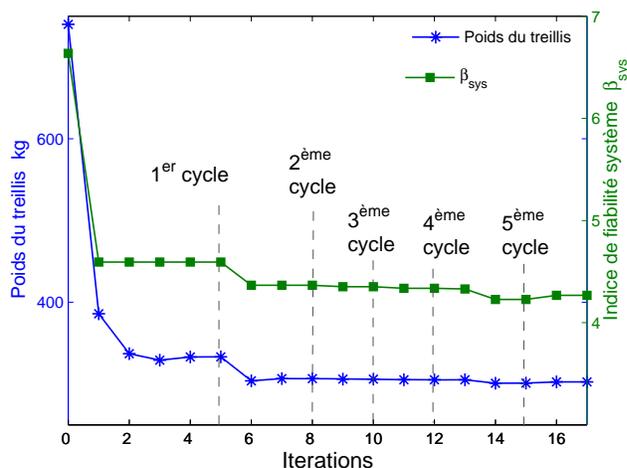


Figure III.20: Poids et β_{sys} en fonction des itérations de SOSRA.

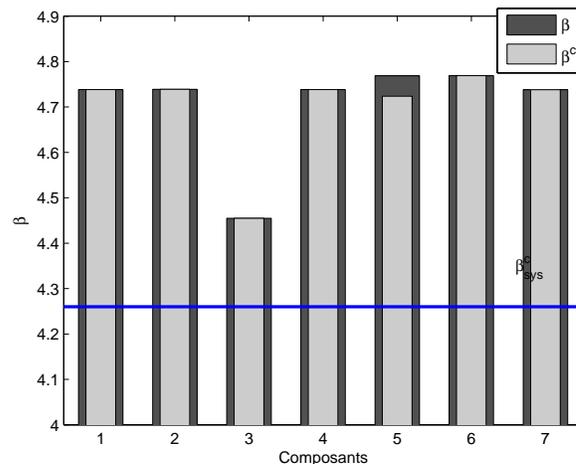


Figure III.21: Indices de fiabilité cibles optimaux de SOSRA.

Cet exemple nous a servi de validation pour la méthode SOSRA. La figure III.20 montre que l'optimum est atteint après 5 cycles d'optimisation déterministe, où chaque cycle est composé d'un certain nombre d'itérations. La fiabilité système de la conception optimale est analysée à chaque cycle de l'optimisation déterministe. Cette analyse vérifie les critères de satisfaction de l'exigence de la fiabilité système et déclenche la procédure d'allocation optimale des indices cibles et la calibration des coefficients optimaux de sécurité du système (OSSF). La figure III.20 indique les OSSF pour chaque composant ; ces coefficients sont donnés par rapport aux valeurs médianes des variables aléatoires.

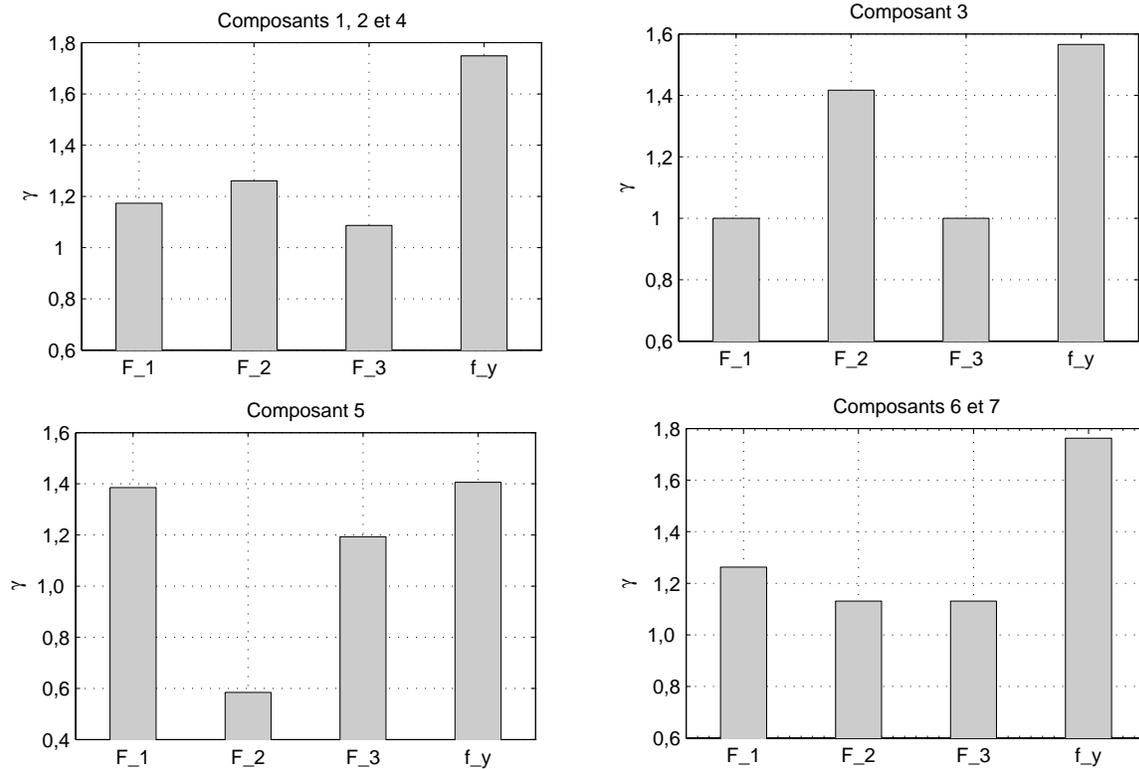


Figure III.22: Coefficients optimaux de sécurité du système (OSSF)

Les composants 1, 2 et 4 possèdent presque les mêmes coefficients, c'est aussi le cas des composants 6 et 7.

Lorsque le coefficient est inférieur à 1, la défaillance est obtenue par la diminution de la variable, c'est le cas du composant 5, où $\gamma_{F_2} = 0,6$; ce qui indique que pour atteindre la ruine de cette barre, il faut que la force F_2 soit diminuée de 40% par rapport à la valeur médiane de F_2 .

III.6 Conclusion

Un des objectifs de cette thèse consiste à développer une méthode d'optimisation fiabiliste des structures, basée sur la fiabilité système. La complexité de cette tâche réside dans l'intégration de l'exigence de la fiabilité système dans les critères d'optimisation. Cette intégration exige le couplage de différents outils : l'algorithme d'optimisation, l'analyse de fiabilité des composants, l'approximation de la fiabilité système et le modèle mécanique (e.g. méthode des éléments finis). Par conséquent, le problème de la SRBDO doit être formulé d'une façon à éviter les problèmes numériques de convergence et de stabilité dus à l'interaction entre ces différents outils.

La méthode SOSRA est développée pour répondre à cette exigence et permet l'utilisation de l'approche fiabiliste dans l'optimisation des structures complexes. Ces structures possèdent généralement plusieurs variables d'optimisation, plusieurs variables aléatoires et plusieurs modes de défaillance.

Les premiers résultats obtenus par SOSRA nous ont permis de valider cette approche. Toutefois, une étude de validation plus complète est nécessaire pour tester son efficacité, sa précision et sa robustesse. Cette étude est l'objet du chapitre suivant, où SOSRA est appliquée pour optimiser différentes structures en béton armé.

Chapitre IV

Optimisation fiabiliste système des structures en béton armé

« J'ai vu plus loin que les autres parce que je me suis juché sur les épaules de géants » .

Isaac Newton (1643-1727)

Sommaire

IV.1 Introduction	113
IV.2 Modèle mécanique des structures en béton armé	113
IV.2.1 Calcul du moment résistant ultime	114
IV.2.2 Calcul en flexion composée	116
IV.2.3 Calcul de l'effort tranchant ultime	118
IV.3 Poutres en béton armé	119
IV.3.1 Poutre en T soumise à la flexion	119
IV.3.2 Poutre de section rectangulaire	123
IV.4 Portiques en béton armé	126
IV.4.1 Portique à un seul étage	126
IV.4.2 Portique à cinq étages	130
IV.5 Conclusion	136

IV.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de montrer l'intérêt de la méthode SOSRA dans le dimensionnement des structures en béton armé, en comparant les trois approches suivantes :

- optimisation déterministe (DDO) basée sur les coefficients partiels de sécurité définis dans les Eurocodes (EC1 et EC2) ;
- optimisation fiabiliste par l'approche classique de la SRBDO basée sur la formulation III.45 ;
- optimisation fiabiliste par l'approche proposée SOSRA (équation III.50).

Cette étude nous permet d'apprécier la précision et l'efficacité de l'approche proposée sur la base des critères de validation :

- la valeur de l'optimum obtenu ;
- l'indice de fiabilité à l'optimum par rapport au niveau de fiabilité souhaité ;
- le nombre d'évaluations des fonctions d'état limite durant le processus d'optimisation. Ce critère est fondamental dans la comparaison de l'efficacité entre les méthodes SRBDO et SOSRA.

Le but principal de cette validation est de montrer que SOSRA converge vers un optimum vérifiant la fiabilité système cible. L'efficacité et la précision de la méthode sont examinées à travers le nombre d'évaluations des états limites et le temps de calcul CPU. Deux types de structures en béton armé sont considérés :

- poutres en béton armé soumises à la flexion et à l'effort tranchant.
- portiques en béton armé soumis à la flexion composée et à l'effort tranchant.

IV.2 Modèle mécanique des structures en béton armé

Le dimensionnement des structures en béton armé doit vérifier deux familles d'états limites :

- les états limites ultimes (ELU) qui sont associés à une perte de stabilité, ou à un effondrement partiel ou total de la structure, il s'agit généralement de l'atteinte de la capacité portante maximale de la structure ;
- les états limites de service (ELS) qui sont associés aux exigences d'aptitude au service et au bon fonctionnement de la structure, ils concernent l'ouverture des fissures, les limitations de flèche, ... etc.

La capacité portante des structures en béton armé dépend des dimensions géométriques des sections et des propriétés mécaniques de l'acier et du béton. Nous supposons que la résistance en traction du béton est négligeable. Les données statistiques des propriétés mécaniques sont détaillées dans le tableau IV.1 ; les valeurs entre parenthèses correspondent aux fractiles pour le calcul de \mathbf{x}_k . Les résistances ultimes sont déterminées à l'aide des diagrammes de contrainte-déformation du béton et de l'acier. La figure IV.1 montre les valeurs limites des déformations admissibles données par la règle des 3 pivots A, B et C, tel que :

- la déformation en compression du béton est limitée à $3,5 ‰$ en flexion et à $2 ‰$ en compression pure.
- la déformation des armatures est limitée à ϵ_{ud} prise égale à $0,9\epsilon_{uk}$

description de la variable et notation	x_k	moyenne	CV	distribution
Résistance en compression du béton f_c (MPa)	30 (5%)	39	0,15	Lognormale
Résistance en traction de l'acier f_y (MPa)	500 (5%)	592	0,15	Lognormale
Module d'élasticité tangent du béton E_c (GPa)	33 (50%)	33	0,10	Lognormale
Module d'élasticité de l'acier E_s (GPa)	200 (50%)	200	0,03	Lognormale
Masse volumique du béton armé ρ_{ba} (kN/m ³)	25 (50%)	25	0,10	Lognormale

Tableau IV.1: Données statistiques des caractéristiques mécaniques.

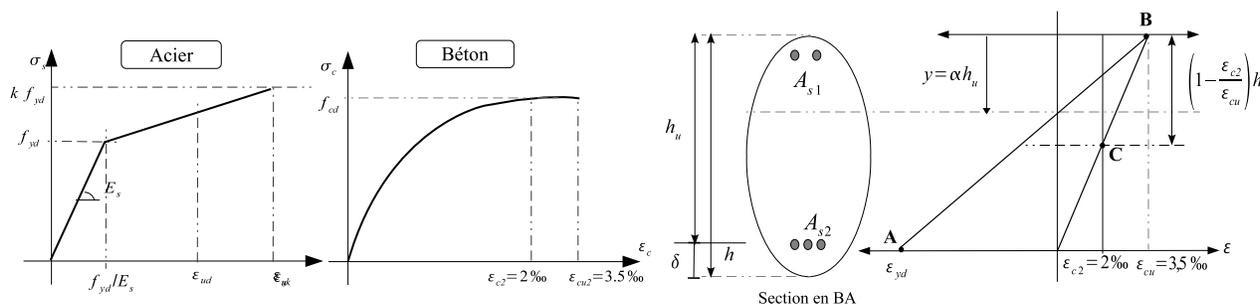


Figure IV.1: Loi constitutives du béton et de l'acier et la règle des trois pivots.

Dans la section suivante nous donnons la démarche numérique adoptée pour le calcul de la capacité portante d'une section en béton armé.

IV.2.1 Calcul du moment résistant ultime

Le calcul du moment résistant d'une section soumise à la flexion simple est basée sur les équations d'équilibre suivantes :

$$N_u = F_c(y_u) + \sum_{j=1}^{na} F_{s_j} = 0 \quad (IV.1)$$

$$M_u = F_c(y_u) z_{b_u}(y_u) \quad (IV.2)$$

où na est le nombre de lits d'armatures, F_c et F_{s_j} sont respectivement les forces résultantes dans le béton et les lits d'armatures, z_{b_u} est le bras de levier. La position de l'axe neutre y_u est obtenue par une résolution numérique de l'équation IV.1, où les forces résultantes de la compression du béton seul et des armatures sont données par :

$$F_c = \int_0^{y_u} b(\xi) \sigma_c(\xi) d\xi \quad (IV.3)$$

$$F_{s_j} = A_{s_j} \sigma_{s_j} \quad j = 1, \dots, na$$

où $\sigma_c(\xi)$ et $b(\xi)$ sont respectivement la contrainte mécanique du béton et la largeur de la section à la position de l'axe neutre ξ (figure IV.2), A_{s_j} est la section des armatures du

lit j et σ_{s_j} est la contrainte mécanique associée. Ces contraintes σ_c et σ_{s_j} sont déduites des diagrammes de contrainte-déformation (figure IV.1), les contraintes dans le béton et dans les armatures sont exprimées par :

$$\sigma_c = \begin{cases} f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^2 \right] & \text{si } 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{c2} \\ f_{cd} & \text{si } \epsilon_{c2} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu} \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

et :

$$\sigma_{s_j} = \begin{cases} \epsilon_{s_j} E_s & \text{si } 0 \leq \epsilon_{s_j} \leq f_{yd}/E_s \\ f_{yd} + \left[\frac{f_{yd}(k-1)}{\epsilon_{uk} - f_{yd}/E_s} (\epsilon_{s_j} - f_{yd}/E_s) \right] & \text{si } f_{yd}/E_s \leq \epsilon_{s_j} \leq \epsilon_{ud} \end{cases}$$

où ϵ_c et ϵ_{s_j} sont respectivement les déformations du béton et des armatures de la couche j , f_{cd} et f_{yd} sont respectivement les valeurs de calcul de la résistance du béton et de l'acier. Dans un calcul déterministe, ces valeurs sont déduites des valeurs caractéristiques f_{ck} et f_{yk} et des coefficients partiels de sécurité du béton et de l'acier. $\epsilon_{uk} = 5\%$ et $k = 1,08$ sont les valeurs recommandés dans l'Eurocode 2 (EC2) pour des armatures de classe B.

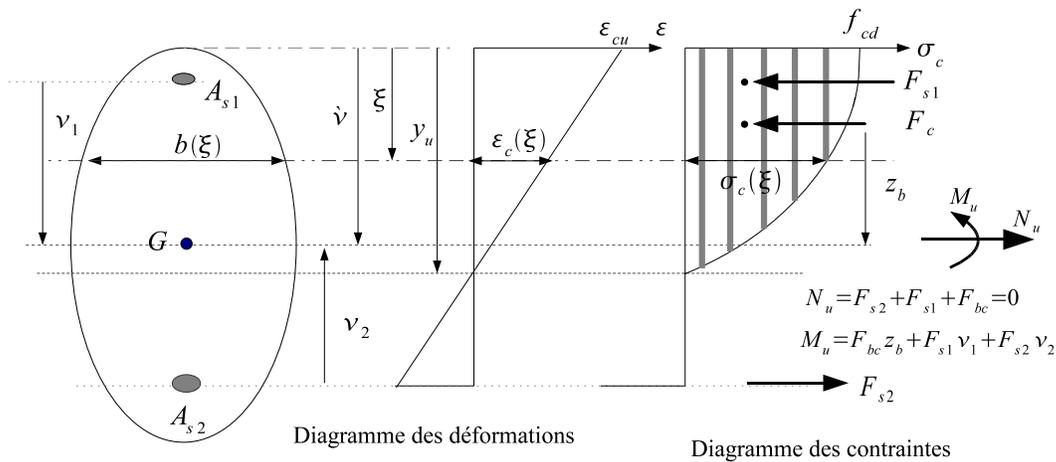


Figure IV.2: Efforts ultimes d'une section de forme quelconque.

Finalement, la détermination de la position de l'axe neutre permet d'estimer le moment résistant ultime, l'équation IV.2 peut s'écrire finalement :

$$M_u = \int_0^{y_u} b(\xi) \sigma_c(\xi) (\nu - \xi) d\xi + \sum_{j=1}^{na} F_{s_j} \nu_j \quad (\text{IV.5})$$

où ν est la distance du centre de gravité à la fibre la plus comprimée de la section et ν_j est la distance du centre de gravité des armatures de la couche j au centre de gravité de la section. Les intégrales des équations IV.4 et IV.5 sont estimées par la méthode des quadratures de *Gauss-Lobatto* implémentée dans MATLAB [117]. L'avantage de cette résolution numérique réside dans son adaptabilité pour une forme quelconque de la section du béton.

Dans le cadre d'une analyse de fiabilité la fonction d'état limite s'écrit par :

$$G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = M_u(\mathbf{d}, \mathbf{x}) - M_a(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \quad (\text{IV.6})$$

où $M_a(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ et $M_u(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ sont respectivement le moment de flexion appliqué et le moment résistant ultime, \mathbf{d} est le vecteur des variables d'optimisation contenant la géométrie de la section du béton et les sections des armatures, \mathbf{x} sont les réalisations des variables aléatoires \mathbf{X} contenant les résistances du béton et de l'acier f_c et f_y .

IV.2.2 Calcul en flexion composée

Le diagramme d'interaction permet de vérifier une section en béton armé vis-à-vis des sollicitations en flexion composée. Ce diagramme est formé par tous les points constitués du moment résistant et de l'effort normal ultime lorsque la position de l'axe neutre varie de $-\infty$ à $+\infty$. Le diagramme est construit en utilisant les équations d'équilibre (équation IV.1 et IV.5). La figure IV.3 montre que lorsque la position de l'axe neutre $\xi = -\infty$ le point P_T du diagramme décrit une traction simple. lorsque $\xi = +\infty$ le point P_C du diagramme décrit une compression simple. En revanche, les points P_{F1} et P_{F2} représentent une flexion simple selon le sens de la flexion considérée. La vérification d'une section soumise à la flexion composée consiste à s'assurer que le point des sollicitations appliquées $P_a(M_a; N_a)$ se situe à l'intérieur du diagramme d'interaction.

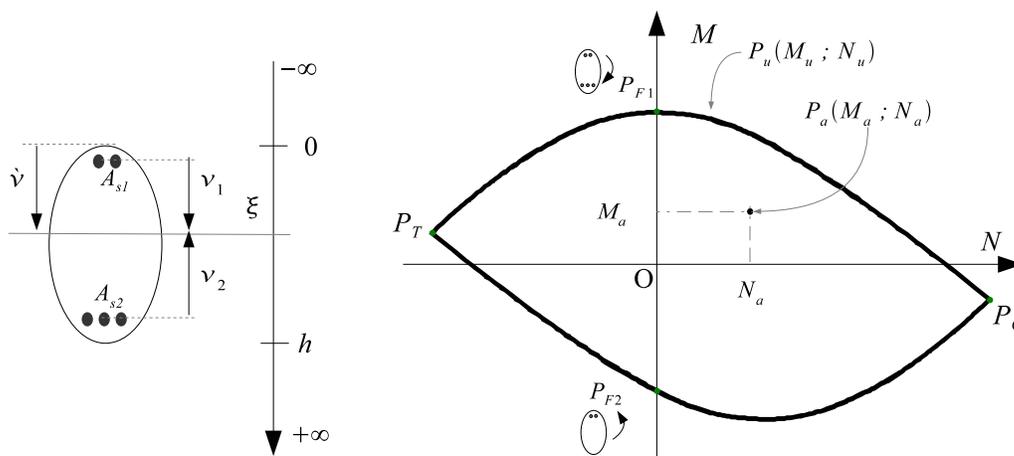


Figure IV.3: Diagramme d'interaction.

La marge de sécurité s'exprime par la distance entre le point des sollicitations appliquées $P_a(M_a; N_a)$ et le point le plus proche du diagramme. Plusieurs chercheurs ont utilisé le diagramme d'interaction dans l'analyse de fiabilité des structures en béton armé. *Li et al.* [118] ont linéarisé le diagramme d'interaction afin d'avoir des marges de sécurité linéaires. *Hong et Zhou* [119] ont utilisé le point du diagramme d'interaction situé dans la direction du chargement. La figure IV.4 montre ce point noté $\hat{P}_u(\hat{M}_u; \hat{N}_u)$ correspondant au point d'intersection de la droite OP_a avec le diagramme d'interaction. La distance notée \hat{D} n'est pas la plus petite distance entre le point d'application P_a et le diagramme d'interaction. La plus petite distance D^* entre P_a et le diagramme d'interaction est donnée par le point P_u^* .

La recherche du point P_u^* est plus délicate que la recherche du point \hat{P}_u . Pour cela, *Hong et Zhou* [119] ont justifié l'utilisation de la distance \hat{D} au lieu de la distance minimale

D^* par l'hypothèse d'une excentricité fixe due à une parfaite corrélation entre le moment et l'effort normal appliqués M_a et N_a respectivement.

L'hypothèse d'excentricité constante est employée dans notre étude pour calculer le point \hat{P}_u . Une procédure numérique est développée pour éviter la construction entière du diagramme d'interaction. Cette procédure consiste à chercher la position de l'axe neutre ξ qui permet aux efforts internes d'équilibrer les sollicitations externes. L'inconnue ξ est calculée par la résolution numérique de l'équation suivante :

$$\frac{\int_0^{y_u} b(\xi)\sigma_c(\xi)(\nu - \xi) d\xi + \sum_{j=1}^{na} \sigma_{s_j} A_{s_j} \nu_j}{\int_0^{y_u} b(\xi)\sigma_c(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^{na} \sigma_{s_j} A_{s_j}} - \frac{M_a}{N_a} = 0 \quad (\text{IV.7})$$

La racine $\xi = \xi^*$ de l'équation IV.7 correspond à la position de l'axe neutre vérifiant les équations d'équilibre de la section considérée. La distance entre les points P_a et \hat{P}_u donne la marge de sécurité :

$$\hat{D} = \sqrt{\hat{M}_u^2 + h\hat{N}_u^2} - \sqrt{M_a^2 + hN_a^2} \quad (\text{IV.8})$$

Toutefois, lorsque le point appliqué $P_a(M_a, N_a)$ est proche du diagramme, la distance minimale D^* peut être calculée par une linéarisation locale du diagramme d'interaction au voisinage du point \hat{P}_u , ensuite par la recherche du point de perpendicularité des droites $\hat{P}_u P_u^*$ et $P_u^* P_a$.

La figure IV.5 montre le principe de cette linéarisation qui est valide uniquement lorsque le point P_a est proche du diagramme. La procédure d'estimation de la plus petite distance entre le diagramme d'interaction et le point des sollicitations appliquées P_a est résumée par les étapes suivantes :

1. Calcul du point \hat{P}_u par l'équation IV.7.
2. Calcul de la distance \hat{D} par l'équation IV.8.
3. Si $\hat{D} < 1$ alors les deux points proches de \hat{P}_u sont estimés. Il suffit de prendre $\xi + \Delta\xi$ pour le premier point noté \hat{P}_{u_1} et $\xi - \Delta\xi$ pour le second point noté \hat{P}_{u_2} . $\Delta\xi$ doit être suffisamment petit (i.e. 0,05 ξ).
4. Linéarisation du diagramme au voisinage de \hat{P}_u à l'aide des points \hat{P}_{u_1} et \hat{P}_{u_2} .
5. Calcul du point P_u^* par la condition de perpendicularité des deux droites $\hat{P}_u P_u^*$ et $P_u^* P_a$ en ce point.
6. Calcul de la plus petite distance D^* par :

$$D_u^* = \sqrt{\hat{D}_u^2 - \left\| \vec{\hat{P}_u P_u^*} \right\|^2} \quad (\text{IV.9})$$

Finalement, l'état limite utilisé dans l'analyse de fiabilité s'écrit en fonction des variables d'optimisation \mathbf{d} et des variables aléatoires \mathbf{X} par :

$$G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = \sqrt{M_u^{2*} + hN_u^{2*}} - \sqrt{M_a^2 + hN_a^2} \quad (\text{IV.10})$$

où M_u^{2*} et N_u^{2*} sont respectivement le moment et l'effort normal ultimes correspondant au point P_u^* .

Dans le cas d'une section soumise à la flexion composée avec traction, le coefficient α_{cw} est définie par :

$$\alpha_{cw} = 1 + \frac{\sigma_{st}}{f_{ctm}} \quad (\text{IV.15})$$

où σ_{st} est la contrainte normale de traction (< 0) et f_{ctm} est la résistance moyenne en traction du béton. De plus, les limitations de l'angle d'inclinaison θ formulées dans l'équation IV.13 deviennent :

$$\sqrt{1 + \frac{\sigma_{st}}{f_{ctm}}} \leq \cot \theta \leq 2,5 \sqrt{1 + \frac{\sigma_{st}}{f_{ctm}}} \quad (\text{IV.16})$$

Finalement, la section effective A_{sw} doit vérifier la condition suivante :

$$\frac{A_{sw} f_{ywd}}{b_w s_w} \leq \frac{1}{2} \nu f_{cd} \frac{\sin \alpha}{(1 - \cos \alpha)} \quad (\text{IV.17})$$

La fonction d'état limite associée à la vérification des éléments possédant un ferrailage transversal s'écrit :

$$G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = V_u(\mathbf{d}, \mathbf{x}) - V_a(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \quad (\text{IV.18})$$

où V_u et V_a sont respectivement l'effort tranchant ultime et appliqué, les sections A_{sw} et les espacements s_w des armatures transversales peuvent être considérés dans le vecteur des variables d'optimisation \mathbf{d} .

IV.3 Poutres en béton armé

Le dimensionnement optimal est recherché pour deux poutres isostatiques soumises à des chargements permanents et d'exploitation. La première application est une poutre de section en T soumise à une flexion simple et la deuxième est une poutre de section rectangulaire considérée sous l'effet du moment de flexion et de l'effort tranchant.

IV.3.1 Poutre en T soumise à la flexion

Le coût de construction C_I du tablier de pont illustré sur la figure IV.6 est à minimiser. Le niveau de fiabilité cible est $\beta_{sys}^c = 3,8$, correspondant à une probabilité de défaillance de $7,23 \cdot 10^{-5}$. Les variables d'optimisation $\mathbf{d} = \{h_f, h_w, b_w, A_{s1}, A_{s2}\}$ sont composées des dimensions géométriques de la section du béton et des sections d'armature A_{s1} et A_{s2} . Les armatures A_{s2} sont disposées pour résister au moment fléchissant négatif à l'endroit des appuis. h_f est la hauteur totale de la section, b_w et h_w sont respectivement la largeur de l'âme et la hauteur de la table de compression. La largeur de la table de compression b_f est calculée selon les règles de l'EC 2 (§5.3.2.1 de l'EC2 [120]).

$$b_f = b_w + 0,2 b + 0,2 l_0$$

tel que : $b_f \leq b$

où b est la largeur totale prise égale à $3m$, l_0 est la longueur entre les points de moment nul prise égale à $0,7 L_b$, où L_b est la longueur de la travée principale. Les variables aléatoires $\mathbf{X} = \{g_1, g_2, q_1, q_2, f_c, f_y, E_s, \rho_{ba}\}$, où g_1 et g_2 sont des charges permanentes, le poids

propre de la poutre est défini par la masse volumique du béton armé ρ_{ba} , q_1 et q_2 sont des charges d'exploitation. Les caractéristiques statistiques des charges sont détaillées dans le tableau IV.2. Les variables aléatoires sont considérées indépendantes. Les valeurs initiales et les bornes supérieures et inférieures des variables d'optimisation sont données dans le tableau IV.3.

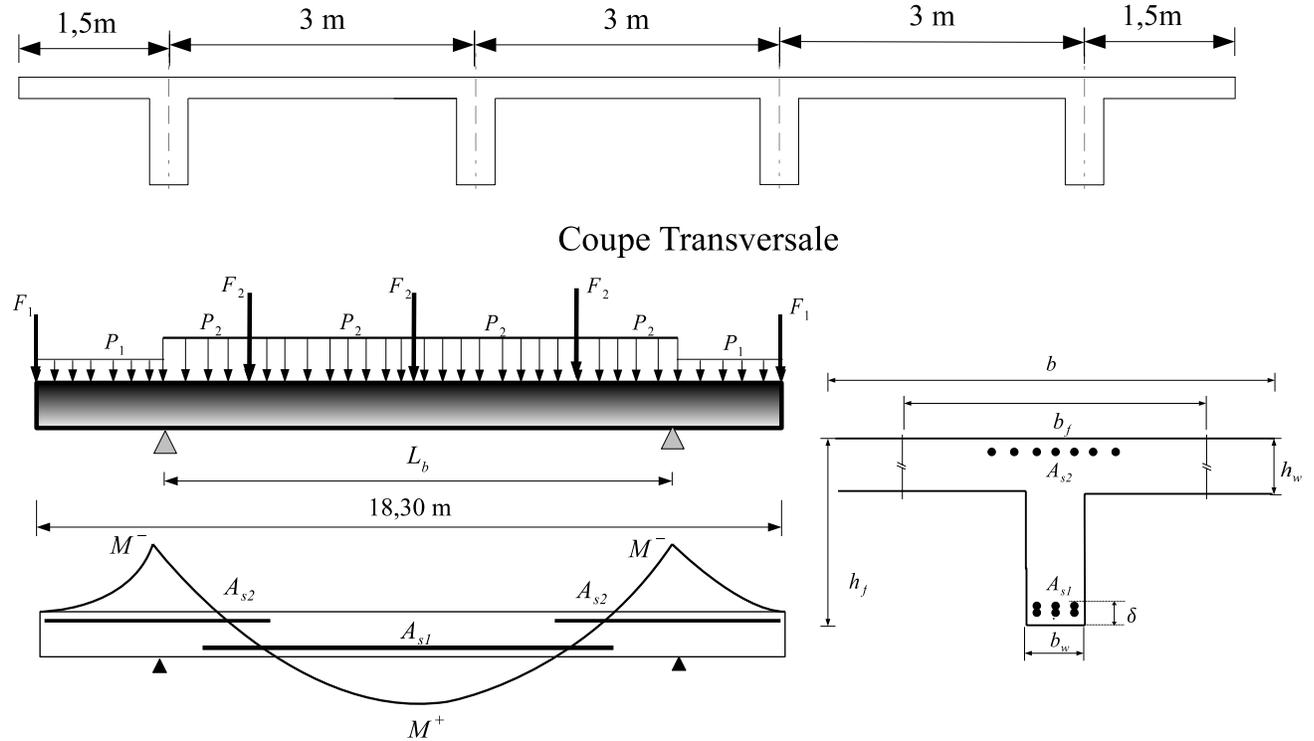


Figure IV.6: Poutre et section en béton armé.

La fonction du coût initial est exprimée par :

$$C_I = \underbrace{C_{uc} b_w L_g (h_f - h_w)}_{C_c} + \underbrace{C_{us} \rho_s (A_{s1} L_{As1} + 2A_{s2} L_{As2})}_{C_s} + \underbrace{C_{um} L_g [2(h_f - h_w) + b_w]}_{C_{fw}}$$

où L_{As1} et L_{As2} sont respectivement les longueurs des armatures A_{s1} et A_{s2} , $\rho_s = 7850 \text{ kg/m}^3$ est la masse volumique de l'acier, C_c , C_s et C_{fw} sont respectivement les coûts totaux dus au béton, aux armatures longitudinales et à la mise en œuvre. C_{uc} , C_{us} et C_{ufw} sont respectivement les prix unitaires du béton, de l'acier et de la mise en œuvre, donnés dans le tableau IV.4. Nous précisons que ces coûts unitaires sont ceux pratiqués en 2007, issus de BATIPRIX 2007 [121].

Dans cet exemple nous avons considéré uniquement les états limites ultimes dus à la flexion de la poutre. Deux fonctions d'états limites sont définies : le moment positif M^+ au milieu de la travée principale et le moment négatif M^- au droit des appuis. La fiabilité système est définie par un système série de ces deux états limites.

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{d}, \mathbf{x}) &= M_{u1}(\mathbf{d}, \mathbf{x}) - M^+(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \\ G_2(\mathbf{d}, \mathbf{x}) &= M_{u2}(\mathbf{d}, \mathbf{x}) - M^-(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

Variabes	Valeur carac.	Moyenne	CV	Distribution
Charge permanente g_1 (kN/m ²)	20,96 (95%)	18	0,10	Normale
Charge permanente g_2 (kN/m ²)	34,93 (95%)	30	0,10	Normale
Charge variable q_1 (kN)	35,28 (95%)	25	0,25	Normale
Charge variable q_2 (kN)	91,72 (95%)	65	0,25	Normale

Tableau IV.2: Données statistiques des chargements du pont.

Variabes	\mathbf{d}^0	\mathbf{d}^{LB}	\mathbf{d}^{UB}
h_f (cm)	100	30	300
h_w (cm)	40	5	50
b_w (cm)	60	20	300
A_{s1} (cm ²)	75,17 $\approx 8\phi 20$	0,2 $\approx 1\phi 5$	250 $\approx 20\phi 40$
A_{s2} (cm ²)	32,17 $\approx 4\phi 16$	0,2 $\approx 1\phi 5$	250 $\approx 20\phi 40$

Tableau IV.3: Valeurs initiales et les bornes sup. et inf. des variables d'optimisation.

Coûts	Symbole	Unité	Prix en €
Coût unitaire du béton	C_{uc}	€/m ³	150,61
Coût unitaire de l'acier	C_{us}	€/kg	1,46
Coût unitaire de la mise en œuvre	C_{ufw}	€/m ²	47

Tableau IV.4: Coûts unitaires de construction.

où M_{u1} et M_{u2} sont les moments résistants ultimes calculés à l'aide de l'équation IV.5. Les combinaisons d'actions utilisées dans l'optimisation déterministe sont :

$$G_1 : \gamma_g(W + g_{k,2}) + g_{k,1} + \gamma_q q_{k,2} + \gamma_q \psi_0 q_{k,1}$$

$$G_2 : \gamma_g(W + g_{k,1}) + g_{k,2} + \gamma_q q_{k,1} + \gamma_q \psi_0 q_{k,2}$$

où γ_g et γ_q sont les coefficients partiels de sécurité (PSF) des actions et ψ_0 est la valeur de combinaison prise égale à $\psi_0 = 0,7$, W est le poids propre de la poutre, g_k et q_k sont respectivement les valeurs caractéristiques des charges permanentes et d'exploitation associées à un fractile de 0,95. La vérification des deux états limites dans l'optimisation déterministe est effectuée par le remplacement des réalisations des variables aléatoires \mathbf{x} par les valeurs de calcul issues des valeurs caractéristiques et des coefficients partiels de sécurité. Par exemple, les résistances de calcul du béton et de l'acier sont respectivement $f_{cd} = f_{ck}/1,5$ et $f_{yd} = f_{yk}/1,15$, où f_{ck} et f_{yk} sont les valeurs caractéristiques des résistances associées au fractile de 0,05.

Nous précisons que lors de l'analyse de fiabilité, les coefficients de sécurité sont neutralisés ; les valeurs de calcul des propriétés mécaniques et des chargements sont remplacées par les réalisations des variables aléatoires. La méthode SRBDO s'appuie directement sur l'analyse de fiabilité système. En revanche, SOSRA s'appuie sur une optimisation déterministe basée sur les coefficients OSSF, actualisés à l'aide d'une analyse de fiabilité système et de la procédure d'allocation optimale des indices cibles. Au premier cycle, les coefficients OSSF sont initialisés au moyen des PSF. Ainsi, le premier cycle de SOSRA correspond à l'optimisation déterministe classique. Au-delà du premier cycle les coefficients OSSF sont actualisés pour le niveau de fiabilité cible, où une matrice des OSSF de dimensions 8×2

est définie, car un coefficient est associé pour chaque variable aléatoire de chaque état limite.

Méthodes	Coût optimal (k€)	β_{sys}	β_{G_1}	β_{G_2}	Iterations	CPU (s)	f-eval	G-eval
SOSRA	2,76	3,80	3,88	4,10	12 in 3 cycles	21	90	513
SRBDO	2,81	3,80	4,02	3,92	24	480	216	11952
DDO	3,36	6,49	6,49	7,19	8	10	77	154

Tableau IV.5: Performances numériques des approches d'optimisation.

Méthodes	h_f (cm)	h_w (cm)	b_w (cm)	A_{s1} (cm ²)	A_{s2} (cm ²)
SOSRA	62,1	17,3	28,3	$80,3 \approx 10\phi32$	$26,8 \approx 4\phi25 + 1\phi32$
SRBDO	63,7	17,8	30,3	$79,8 \approx 10\phi32$	$25,1 \approx 8\phi20$
DDO	74,7	20,8	34,1	$93,2 \approx 12\phi32$	$32,1 \approx 4\phi32$

Tableau IV.6: Comparaison des solutions optimales de la poutre en T.

Les solutions optimales de la poutre, données dans le tableau IV.6, montrent que la solution obtenue par l'optimisation déterministe (DDO) est surdimensionnée. Cela est prévisible car l'optimisation déterministe basée sur les PSF ne contrôle pas la marge de sécurité en fonction de l'objectif de fiabilité. En revanche, les approches d'optimisation fiabiliste SRBDO et SOSRA ont trouvé un optimum plus économique tout en assurant le niveau de fiabilité système cible; ces conceptions optimales sont presque identiques. SOSRA converge vers un coût légèrement plus économique. Cela est dû à la procédure d'allocation optimale des indices cibles, qui sont recherchés sur la base des sensibilités de la fonction coût.

Le tableau IV.5 montre que les solutions des deux approches ont des indices de fiabilité différents pour les composants, tandis que, les deux combinaisons conduisent à un indice de fiabilité système de 3,8. Autrement dit, SOSRA a convergé vers un optimum, où les indices de fiabilité de ces deux modes sont respectivement $\beta_{G_1} = 3,88$ et $\beta_{G_2} = 4,10$. En revanche, la SRBDO a convergé vers un optimum où les indices de fiabilité des deux états limites G_1 et G_2 sont $\beta_{G_1} = 4,02$ et $\beta_{G_2} = 3,92$ respectivement; l'optimum de la SRBDO est légèrement plus coûteux en raison d'un surdimensionnement de la quantité de béton.

En outre, l'avantage de la méthode SOSRA réside dans son efficacité, puisque elle exige moins d'effort de calcul que la SRBDO. Cette dernière a exigé 11952 évaluations des fonctions d'états limites pour optimiser la poutre, contre 513 évaluations pour SOSRA, soit un gain de 94%. La SRBDO est basée sur une formulation à double-niveau (RIA) plus une analyse de fiabilité système réalisée à l'intérieur du processus d'optimisation, ce qui explique le temps de calcul élevé.

La figure IV.8 présente les performances numériques des 3 méthodes, l'optimisation déterministe (DDO) est plus efficace et plus robuste, mais elle n'assure pas le niveau de fiabilité cible. Elle conduit à un dimensionnement fiable mais onéreux. La méthode proposée SOSRA présente l'équilibre entre efficacité, robustesse et précision.

L'efficacité de SOSRA est due à la formulation de l'approche qui décompose le problème de l'optimisation fiabiliste en plusieurs cycles d'optimisation déterministe. Ainsi, SOSRA utilise l'efficacité et la robustesse de l'optimisation déterministe et intègre les exigences fiabilistes à travers les OSSF. Le tableau IV.7 donne les valeurs des coefficients OSSF au dernier cycle d'actualisation. Ces coefficients sont calculés par rapport aux valeurs médianes des variables aléatoires ($x_d/x_{50\%}$, où x_d est la valeur de calcul).

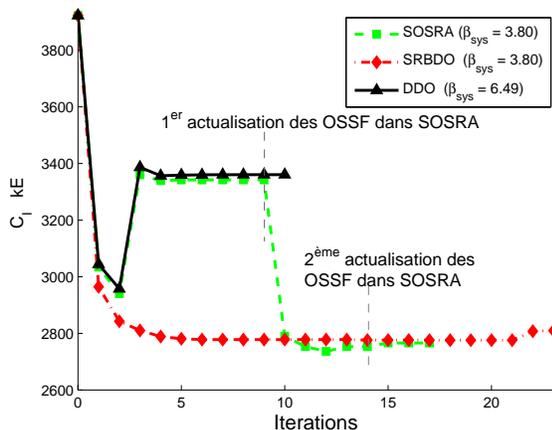


Figure IV.7: Évolution de la fonction coût au cours des itérations.

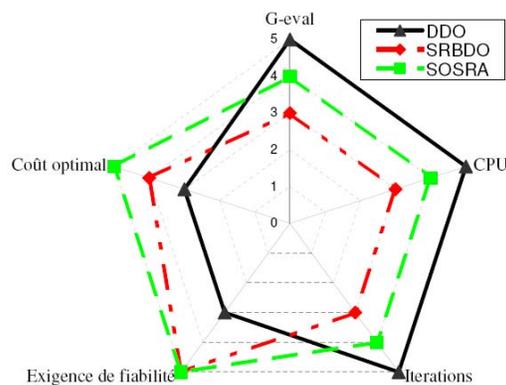


Figure IV.8: Performances numériques des approches.

$\gamma = \frac{x_d}{x_{50\%}}$	g_1	g_2	q_1	q_2	f_c	f_y	E_s	ρ_{ba}
G_1	0,99	1,20	0,97	1,25	0,97	0,73	0,99	1,03
G_2	1,16	1	1,48	1	0,92	0,72	0,99	1,04

Tableau IV.7: Valeurs des OSSF au dernier cycle de SOSRA.

IV.3.2 Poutre de section rectangulaire

La figure IV.9 montre une poutre de section rectangulaire soumise à des charges permanentes et d'exploitation. L'objectif est de chercher la conception optimale qui minimise le coût initial de la poutre en considérant les moments de flexion et les efforts tranchants. Les variables d'optimisation sont $\mathbf{d} = \{h, b, A_{s1}, A_{s2}, A_{sw}, s_1, s_2, \alpha, \theta\}$, où h et b sont respectivement la hauteur et la largeur de la section du béton, A_{s1} et A_{s2} sont les sections d'armatures nécessaire pour résister aux moments de flexion. Les armatures A_{s1} et A_{s2} sont disposées pour résister au moment de flexion maximale M_{L_b} et les armatures A_{s2} sont disposées pour résister au moment de flexion $M_{\kappa L_b}$. A_{sw} est la section des armatures d'effort tranchant, s_1 et s_2 sont les espacements des cadres dans le premier et le second quart de la poutre, α est l'angle des bielles du béton comprimé et θ est l'inclinaison des cadres.

Les propriétés mécaniques du béton et de l'acier (f_c , f_y , E_s) sont considérées comme des variables aléatoires telles que détaillées dans le tableau IV.1. La charge permanente correspond au poids propre de la poutre, où la masse volumique du béton armé ρ_{ba} est modélisée par une loi de Gumbel de moyenne $\mu_{\rho_{ba}} = 25kN/m^3$ et de coefficient de variation

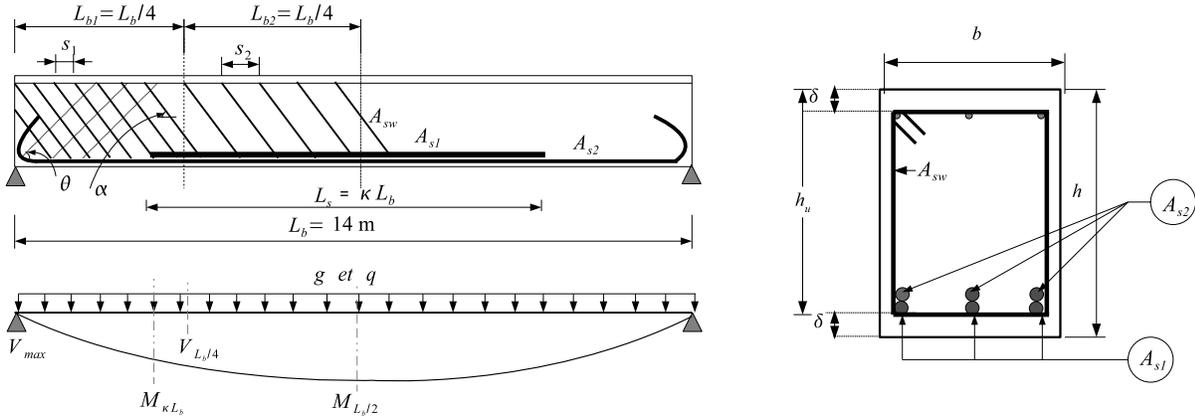


Figure IV.9: Configuration de la poutre en BA de section rectangulaire.

10%. La charge d'exploitation q est modélisée par une loi normale de moyenne $\mu_q = 16kN/m^2$ et de coefficient de variation 25%. Les variables d'optimisation sont les moyennes des variables aléatoires, avec des coefficients de variation de 5%. La fiabilité système est définie par quatre modes de défaillance donnés par les fonctions d'état limite :

$$\begin{aligned}
 G_1 &= M_{\frac{L_b}{2}}(q, \rho_{ba}, h, b) \leq M_{u1}(h, b, A_{s1} + A_{s2}, f_{cd}, f_{yd}, E_{sd}) \\
 G_2 &= M_{\kappa L_b}(q, \rho_{ba}, h, b) \leq M_{u2}(h, b, A_{s2}, f_{cd}, f_{yd}, E_{sd}) \\
 G_3 &= V_{max}(q, \rho_{ba}, h, b) \leq V_{u1}(h, b, A_{sw}, s_1, f_{cd}, f_{yd}, \alpha, \theta) \\
 G_4 &= V_{\frac{L}{4}}(q, \rho_{ba}, h, b) \leq V_{u2}(h, b, A_{sw}, s_2, f_{cd}, f_{yd}, \alpha, \theta)
 \end{aligned}$$

où G_1 et G_2 sont les états limites de flexion, $M_{\frac{L_b}{2}}$ et $M_{\kappa L_b}$ sont respectivement les moments de flexion appliqués à la moitié de la poutre et à la position κL_b , κ est un paramètre déterministe pris égal à 0,75. G_3 et G_4 sont les états limites d'effort tranchant, V_{max} est l'effort tranchant maximal appliqué et $V_{\frac{L}{4}}$ est l'effort tranchant appliqué au quart de la poutre. Les moments de flexion ultimes M_{u1} et M_{u2} sont obtenus par la résolution numérique de l'équation IV.5. V_{u1} et V_{u2} sont les efforts tranchants ultimes obtenus par l'équation IV.11. La limite d'élasticité des armatures transversales f_{yw} est supposée identique à la celle des armatures longitudinales f_y .

Le coût initial de la poutre est exprimé en terme du coût de béton, du coût des armatures longitudinales A_{s1} et A_{s2} , du coût des armatures transversales et du coût de mise en œuvre :

$$\begin{aligned}
 C_I &= \underbrace{C_{uc} b h L_b}_{C_c} + \underbrace{C_{us} L_b \rho_s (A_{s2} + \kappa A_{s1})}_{C_{sl}} \\
 &+ \underbrace{C_{us} A_{sw} \rho_s n_s 2 \left[\frac{(h - 2\delta)}{\sin \alpha} + (b - 2\delta) \right]}_{C_{sw}} + \underbrace{C_{ufw} L_b (2h + 2b)}_{C_{fw}} \quad (IV.20)
 \end{aligned}$$

où $n_s = \left(\frac{L_{b1}}{s_1} + \frac{L_{b2}}{s_2} \right)$ est le nombre total de cadres, C_{uc} , C_{uc} et C_{ufw} sont les coûts unitaires du béton, de l'acier et de la mise en œuvre, donnés dans le tableau IV.4.

Méthodes	Coût optimal (k€)	β_{sys}	β_{G_1}	β_{G_2}	β_{G_3}	β_{G_4}	G-eval	CPU (s)
SOSRA	2,79	3,80	3,98	3,97	4,02	5,17	3412	1,70
SRBDO	2,80	3,80	3,94	4,01	4,52	5,15	54555	60
DDO	3,35	4,72	6,03	5,70	4,72	6,67	240	0,2

Tableau IV.8: Résultats de l'optimisation de la poutre de section rectangulaire.

Comme dans l'exemple précédent, l'optimisation déterministe (DDO) mène à une conception surdimensionnée (tableau IV.8) avec l'indice $\beta_{sys} = 4,72$, les approches de l'optimisation fiabiliste (SRBDO et SOSRA) conduisent à une conception optimale vérifiant le niveau de fiabilité cible de 3,8.

Méthodes	h	b	s_1	s_2	A_{s1}	A_{s2}	A_{sw}	α θ		C_c	C_{sl}	C_{sw}	C_{fw}
								(°)	(°)				
SOSRA	49,7	37,3	19	30	50	34,6	0,94	22	74	390	1155	101	1144
SRBDO	49,7	37,3	8	13	50	35	0,40	22	74	389	1161	107	1142
DDO	57,9	43,4	20	29	59,7	39,8	1,05	22	73	530	1358	129	1333

Tableau IV.9: Dimensionnement optimal et différents coûts de la poutre.

Les deux conceptions optimales de l'optimisation fiabiliste (SOSRA et SRBDO) sont similaires, la SRBDO propose de réduire la section des armatures transversales et de prendre des espacements très faibles de 8 cm et de 13 cm sur L_{b1} et L_{b2} respectivement, soit un nombre de 142 cadres. La solution SOSRA consiste à augmenter la section des armatures transversales et de prendre les espacements de 19 cm et de 30 cm sur L_{b1} et L_{b2} respectivement, soit un nombre de 61 cadres. Ces deux solutions suggérées pour les armatures transversales sont différentes mais conduisent à des coûts C_{sw} équivalents. Le coût dû aux armatures transversales dans SOSRA est de 101€ alors que la SRBDO est de 107€.

Sur le plan numérique, SOSRA converge en 4 cycles d'optimisation, totalisant 37 itérations (18, 8, 9 et 2 itérations sont nécessaires du premier cycle au quatrième cycle respectivement) et 3412 calculs mécaniques exécutés en 1,7 secondes CPU. La SRBDO exige 24 itérations, avec 54555 appels au modèle mécanique exécutés en 60 secondes CPU. En effet, l'avantage de SOSRA est établi par son efficacité et sa capacité à converger vers l'optimum correspondant à la fiabilité cible.

Le tableau IV.10 montre les valeurs des coefficients OSSF pour les différents états limites. Ces coefficients ont permis d'obtenir la conception optimale vérifiant le niveau de fiabilité système cible de 3,8. Ces coefficients sont calculés par rapport à la médiane des variables aléatoires.

Si les armatures transversales sont verticales ($\theta = 90^\circ$) et l'angle des bielles de béton est fixé à 45° , le coût de construction de la poutre augmente de 5 % (tableau IV.11) par rapport au cas des armatures inclinées (tableau IV.9).

$\gamma = \frac{x_d}{x_{50\%}}$	Q	f_c	f_y	ρ_{ba}	E_s	h	b	s_1	s_2	A_{s1}	A_{s2}	A_{sw}	α	θ
G_1	1,73	0,84	0,84	1,04	0,99	0,91	0,99	1	1	0,95	1	1	1	1
G_2	1,73	0,90	0,81	1,04	0,99	0,93	0,99	1	1	1	0,94	1	1	1
G_3	1,67	0,98	0,80	1,04	0,99	0,94	1,01	1,05	1	1	1	0,94	1,05	1,01
G_3	1,81	0,98	0,75	1,04	0,99	0,93	1,01	1	1,06	1	1	0,92	1,06	1,01

Tableau IV.10: Coefficients de sécurité optimaux du système (OSSF).

Méthodes	Coût optimal k€	β_{sys}	h	b (cm)	s_1	s_2	A_{s1}	A_{s2} (cm ²)	A_{sw}
SOSRA	2,94	3,80	49,8	37,4	14	30	50,2	34,6	2
SRBDO	2,95	3,80	49,6	37,3	13	27	50,2	35,1	2
DDO	3,52	4,76	58	44	11	23	59,7	39,8	1,6

Tableau IV.11: Dimensionnement optimal pour des armatures transversales verticales.

IV.4 Portiques en béton armé

La modélisation mécanique des portiques en béton armé est plus difficile et plus complexe car elle fait intervenir l'interaction des différents efforts (l'effort normal, le moment de flexion et l'effort tranchant). Nous traitons deux portiques : avec un et cinq étages, respectivement. Les variables d'optimisation sont les sections des poteaux et des poutres, ainsi que les sections des armatures longitudinales et transversales.

IV.4.1 Portique à un seul étage

Le portique sur la figure IV.10 est composé de deux poteaux de section carrée de dimension h_c , d'armatures longitudinales $A_{s_{c1}}$ pour résister au moments de flexion des fondations et d'armatures transversales $A_{s_{wc}}$ espacées de 20 cm sur toute la longueur des poteaux. La poutre est de section rectangulaire de hauteur h_b et de largeur égale à celle du poteau ($b_b = h_c$). Les armatures longitudinales A_{s_b} sont disposées dans la poutre pour résister au moment de flexion positif. Les armatures $A_{s_{c2}}$ sont disposées pour résister aux moments de flexion négatifs aux droits des liaisons poteau-poutre. Des armatures transversales $A_{s_{wb}}$ sont prévues sur toute la longueur de la poutre avec des espacements variables fixés à 10 cm sur le quart de la poutre puis à 20 cm sur l'autre quart.

Les charges permanentes et d'exploitation sont respectivement décrites par la charge répartie V et la charge nodale H . Les données statistiques de ces chargements sont détaillées dans le tableau IV.12. Les propriétés mécaniques des matériaux (béton et acier) sont des variables aléatoires détaillées dans le tableau IV.1. Deux cas particuliers sont étudiés :

- **(a)** les variables d'optimisation h_c , h_b , $A_{s_{c1}}$, $A_{s_{c2}}$, A_{s_b} , $A_{s_{wb}}$, $A_{s_{wc}}$ sont purement déterministes ;
- **(b)** les variables d'optimisation sont des moyennes des variables aléatoires normales de coefficient de variation de 3%.

Ces deux situations conduisent respectivement à 6 et 13 variables aléatoires. La fiabilité système est calculée par 10 modes de défaillance : 7 modes de défaillance dus à la flexion

composée des éléments structuraux et 3 modes de défaillance dus à l'effort tranchant (un état limite d'effort tranchant pour chaque élément de la structure).

$$\begin{aligned} G_{i=1,\dots,7} &= [M_{u_i}^2 + (h N_{u_i})^2] - [M_{a_i}^2 + (h N_{a_i})^2] \\ G_{i=8,\dots,10} &= V_{u_i} - V_{a_i} \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

où $G_{i=1,\dots,7}$ sont les états limites dus à la flexion composée, la marge de sécurité est obtenue par le diagramme d'interaction. M_a et M_u sont respectivement les moments de flexion appliqués et ultimes et N_a et N_u sont respectivement les efforts normaux appliqués et ultimes. $G_{i=8,\dots,10}$ sont les états limites dus à l'effort tranchant, V_a est l'effort tranchant appliqué et V_u est l'effort tranchant ultime. La fonction coût du portique est composé : du coût de béton, du coût des armatures longitudinales, du coût des armatures transversales et du coût de la mise en œuvre.

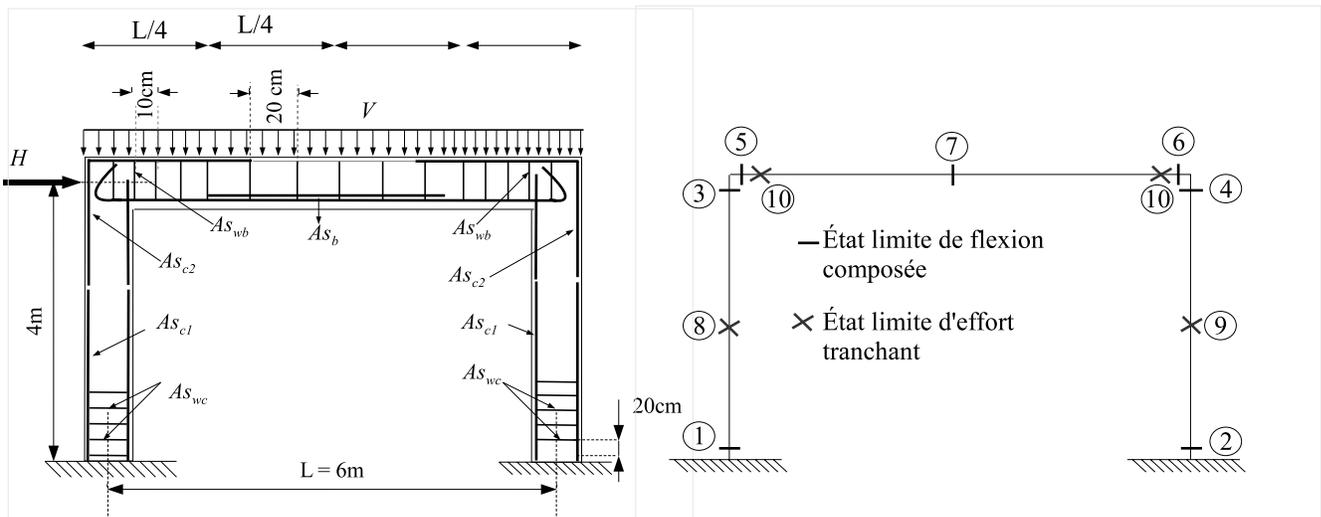


Figure IV.10: Portique en un seul étage et ces états limites.

Les trois approches d'optimisation utilisées pour optimiser le portique sont : l'optimisation déterministe (DDO), la méthode SRBDO et l'approche SOSRA. Les mêmes critères de convergence et le même point initial sont utilisés pour toutes les méthodes. Les valeurs initiales, les bornes inférieures et supérieures des variables d'optimisation sont données dans le tableau IV.13.

Les résultats du tableau IV.14 montrent que l'indice de fiabilité système obtenu par la DDO est inférieur à l'indice cible de 3,80. En plus, cette conception est plus coûteuse que celle obtenue par les approches fiabilistes. Autrement dit, la DDO ne garantit pas le meilleur rapport entre la fiabilité et le coût de la conception : $\eta = \beta_{sys}/C_I$. Alors que la DDO conduit à $\eta_{DDO} = 3,21$, et les approches fiabilistes SRBDO et SOSRA donnent respectivement $\eta_{SRBDO} = 3,45$ et $\eta_{SOSRA} = 3,44$.

Le cas (b) montre que lorsque les variables d'optimisation sont considérées comme des variables aléatoires, l'indice de fiabilité système β_{sys} de la DDO diminue, conduisant à $\eta_{DDO} = 3,07$. Cela est dû au fait que la DDO considère les variables d'optimisation comme déterministes et égales à leurs valeurs moyennes. En revanche, les approches fiabilistes permettent de tenir compte de la dispersion des variables d'optimisation, en spécifiant

Variabes	Moyenne (μ)	CV	Loi de probabilité	Valeur carac. x_k (95%)
H (kN)	20	0,30	Gumbel	$\mu_H(1 + 1,86 \times CV_H) = 31,19$
V (kN/m)	42	0,15	Normale	$\mu_V(1 + 1,64 \times CV_V) = 52,36$

Tableau IV.12: Données statistiques des chargements du portique.

Variable	h_c	h_b	As_{c1}	As_{c2}	As_b	As_{wc}	As_{wb}
\mathbf{d}^0	15	60	9,42	19,64	1,57	1,57	1,57
\mathbf{d}^{LB}	10	10	1,01	1,01	0,39	0,39	0,39
\mathbf{d}^{UB}	300	300	251,3	251,3	12,06	12,06	12,06

Tableau IV.13: Valeurs initiales des variables d'optimisation du portique.

une conception optimale plus coûteuse que celle du cas **(a)** de 1% seulement. Ainsi, le rapport η est conservé.

Le tableau IV.15 montre que les solutions fiabilistes des cas **(a)** et **(b)** sont légèrement différentes. Le choix de SOSRA consiste à augmenter la quantité d'acier dans les armatures et à diminuer la section du béton. La figure IV.11 présente les indices de fiabilité des différentes conceptions optimales obtenues respectivement par SOSRA, SRBDO et DDO. L'utilisation des coefficients partiels de sécurité dans l'optimisation ne garantit pas toujours une fiabilité élevée. Les modes de défaillance numéros 3 et 5 représentent l'apparition d'une rotule plastique au niveau de l'assemblage poteau-poutre. L'indice de fiabilité de ces modes dans la conception optimale de la DDO est de 3,71. Une comparaison par rapport à la conception obtenue par les approches fiabilistes conduit à dire que la section du poteau a été sous-dimensionnée dans la DDO. Alors que la section des armatures à la liaison poteau-poutre est supérieure pour la DDO que celle de SOSRA ou SRBDO, la section du poteau est de 243,36 cm^2 pour la DDO, contre 292.41 cm^2 pour les deux autres méthodes, où $\beta_i = 3,98$ pour les modes 3 et 5.

Méthodes	Cas a)				Cas b)			
	C_I (k€)	β_{sys}	CPU (s)	G-eval	C_I (k€)	β_{sys}	CPU (s)	G-eval
SOSRA	1,10	3,79	29	4868	1,11	3,80	70	11302
SRBDO	1,10	3,80	463	108330	1,11	3,80	1487	229852
DDO	1,133	3,64	5	176	idem	3,48	idem	idem

Tableau IV.14: Résultats d'optimisation du portique à un seul étage.

Les coefficients OSSF représentés sur la figure IV.12 donnent une autre information expliquant la raison pour laquelle la DDO peut converger vers des solutions moins fiables. Les coefficients partiels de sécurité (PSF) appliqués aux chargements sont respectivement de $\gamma_V = 2,11$ et $\gamma_H = 1,57$. En revanche, les coefficients OSSF des charges V et H correspondant aux modes de défaillance 3 et 5 sont respectivement $\gamma_H = 3,11$ et $\gamma_V = 1,06$. Nous rappelons que ces valeurs de PSF et de OSSF sont données par rapport aux valeurs médianes des variables V et H .

Méthodes	Cas a)			Cas b)	
	SOSRA	SRBDO	DDO	SOSRA	SRBDO
h_c (cm)	17,0	17,1	15,6	17,5	17,0
h_b (cm)	41,8	41,5	50,2	41,8	47,5
As_{c1} (cm ²)	10,06	11,38	11,04	10,98	10,20
As_{c2} (cm ²)	12,64	12,27	13,00	12,18	11,78
As_b (cm ²)	16,55	15,97	18,08	16,90	14,43
As_{wc} (cm ²)	0,62	0,63	0,58	0,62	0,63
As_{wb} (cm ²)	1,28	1,27	1,23	1,32	1,13

Tableau IV.15: Conception optimale du portique à un seul étage.

Les coefficients OSSF traduisent les sensibilités des variables aléatoires par rapport au modèle mécanique. Lorsque le coefficient d'une variable est proche de l'unité, les incertitudes sur cette variable ne jouent pas de rôle significatif dans le modèle mécanique, ce qui est le cas des modules d'élasticité du béton et de l'acier.

Les performances numériques de SOSRA prouvent son efficacité par rapport à la SRBDO classique. Le temps de calcul de SOSRA représente 6% à celui de la SRBDO. Cette dernière nécessite un temps de calcul très considérable dans le cas où les variables d'optimisation sont aléatoires. Dans le cas d'étude **(b)** la solution est obtenue après le nombre astronomique de 229852 calculs éléments finis.

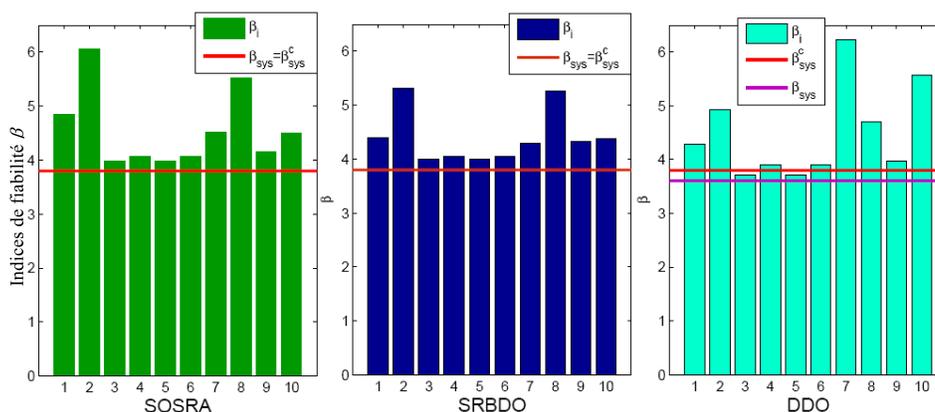


Figure IV.11: Indices de fiabilité des conceptions optimales du portique à un étage.

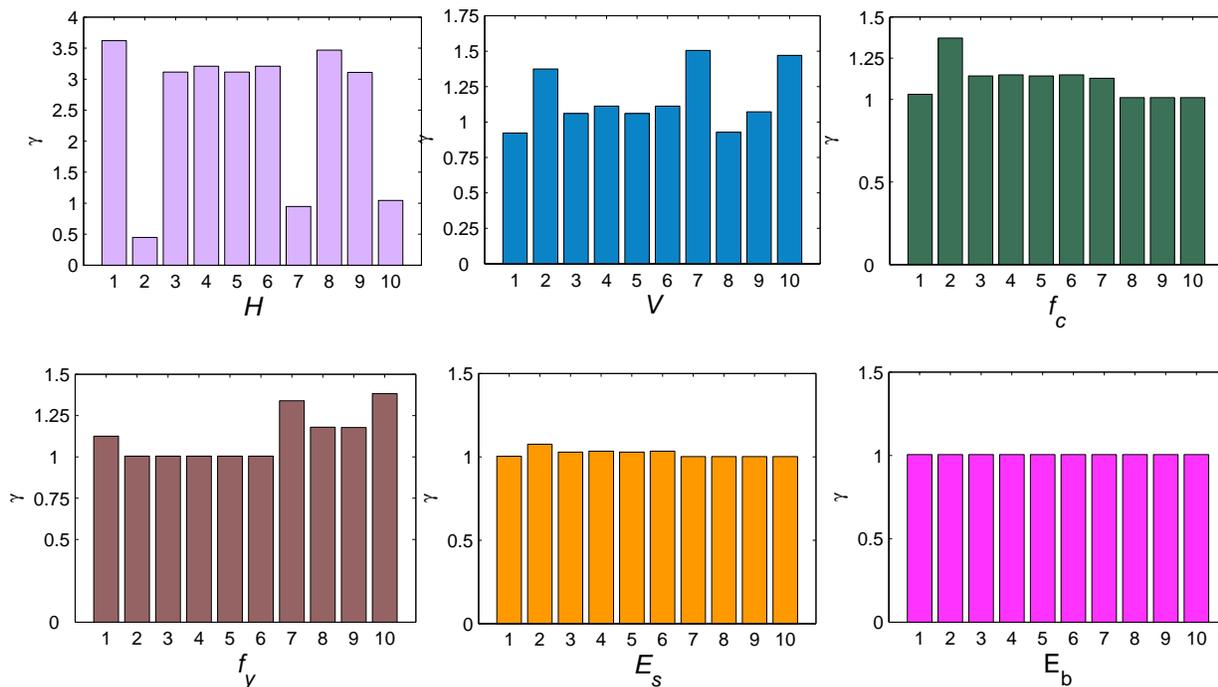


Figure IV.12: Coefficients OSSF dans le cas (a).

IV.4.2 Portique à cinq étages

Le portique à cinq étages illustré sur la figure IV.13-(a) est soumis à une charge permanente P , à une charge d'exploitation Q et aux actions du vent W . Les poteaux sont de section carrée et les poutres sont de section rectangulaire. Les poteaux sont divisés en 3 groupes distincts (C_1, C_2 et C_3), où les poteaux du même groupe ont les mêmes sections : la hauteur h_{c_i} , la section des armatures longitudinales As_{c_i} et la section des armatures transversales As_{cw_i} , avec $i = 1, \dots, 3$. Les poutres sont également divisées en 3 groupes (B_1, B_2 et B_3), où celles du même groupe ont les mêmes dimensions géométriques h_{b_i} et b_{b_i} et les mêmes armatures longitudinales As_{b_i} et transversales As_{bw_i} . La largeur de la section des poutres b_{b_i} est prise égale à celle du poteau correspondant h_{c_i} .

La structure est dimensionnée par les méthodes d'optimisation déterministe (DDO) et fiabiliste (SOSRA). Selon les Eurocodes, les combinaisons d'action utilisées dans la DDO du portique sont :

$$\begin{aligned}
 & \gamma_p P_k + \gamma_q Q_k + \gamma_w \psi_w W_k \\
 & \gamma_p P_k + \gamma_w W_k + \gamma_q \psi_q Q_k \\
 & P_k + \gamma_q Q_k
 \end{aligned} \tag{IV.22}$$

où γ_p , γ_q et γ_w sont les PSF des charges, prenant respectivement les valeurs de 1,35 et 1,5. ψ_q et ψ_w sont les coefficients définissant la valeur de la combinaison de l'action variable, les valeurs prises sont respectivement 0,7 et 0,6.

L'analyse de fiabilité est réalisée à travers 35 modes de défaillance correspondant à la flexion composée des sections critiques (figure IV.13b) et 6 modes de défaillance correspondant à l'effort tranchant. Pour les états limites d'effort tranchant, nous n'avons

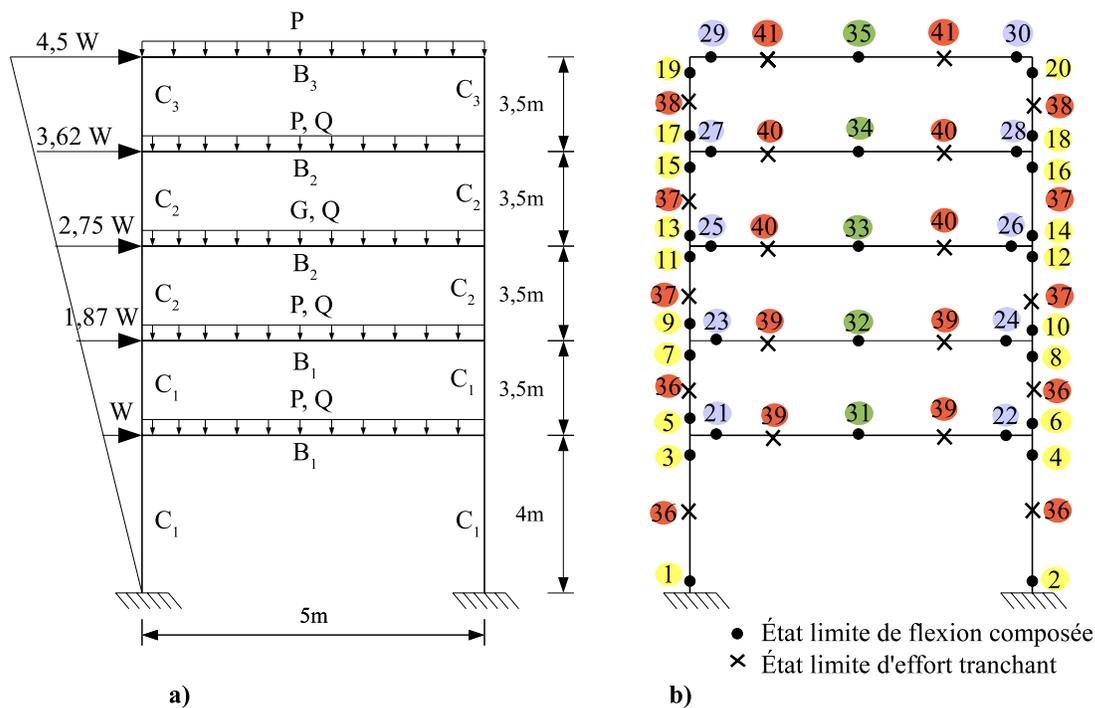


Figure IV.13: a) Portique à cinq étages. b) Les modes de défaillance dominants.

Variables	Moyenne	CV	Loi de probabilité	valeur carac. x_k (95%)
P (kN/m)	15	0,15	Normale	18,69
Q (kN/m)	21	0,25	Gumbel	29,61
W (kN)	3,02	0,30	Gumbel	4,51

Tableau IV.16: Caractéristiques statistiques des chargements du portique à cinq étages.

considéré que les sections critiques de chaque groupe d'éléments. Les variables aléatoires considérées dans cet exemple sont les charges (W , Q et P), la résistance en traction de l'acier f_y et la résistance en compression du béton f_c . Les caractéristiques statistiques des charges sont détaillées dans le tableau IV.16.

Les résultats obtenus dans le tableau IV.17 correspondent aux deux conceptions optimales calculées respectivement par la DDO et la SOSRA. Nous précisons que l'approche classique SRBDO n'a pas convergé dans cet exemple. L'indice de fiabilité de la conception obtenue par la DDO est proche de la cible, cela est le fruit du hasard car le processus de la DDO ne contrôle pas la fiabilité de la structure. SOSRA propose un dimensionnement fiable et moins coûteux, où le coût du portique est inférieur de 4,5% par rapport à celui de la DDO.

Alors que les deux indices de fiabilité sont similaires, les deux dimensionnements sont différents. SOSRA permet une meilleure distribution de la matière que la DDO. Ce constat est encore mieux observé sur les figures IV.16-IV.17 présentant les diagrammes d'interaction des sections critiques du rez-de-chaussée (section 1 à 4) et de la poutre du premier étage (sections 21, 23 et 31). Ces diagrammes sont tracés en utilisant les valeurs moyennes des variables aléatoires et les dimensions géométriques données par DDO et SOSRA.

	SOSRA						DDO					
	C1	C2	C3	B1	B2	B3	C1	C2	C3	B1	B2	B3
h	22,7	20,1	16,8	41,4	39,2	19,1	25,9	21,6	13,7	51,9	42,3	33,9
As	14,89	11,78	9,53	9,23	10,13	6,74	10,98	11,32	10,13	9,03	10,65	5,75
Asw	0,85	0,83	0,55	1,34	1,34	1,04	0,74	0,74	0,51	1,25	1,42	0,61
C_I	5,65 k€						5,90 k€					
β_{sys}	3,81						3,82					
CPU	937,8 s \approx 15 mn						185,3 s \approx 3 mn					
Nota : h est en cm, As et Asw en cm^2												

Tableau IV.17: Conception optimale du portique à cinq étages.

Les diagrammes d'interaction de SOSRA des modes de défaillance 1 et 2 sont plus réduits que ceux de la DDO ; avec des indices de fiabilité supérieurs à ceux de la DDO. La même remarque peut être faite pour le mode de défaillance numéro 22. Etant donné que le diagramme d'interaction reflète la quantité de matières (béton et acier), les matériaux sont mieux distribués avec SOSRA, où les proportions optimales du béton et d'acier sont recherchées en fonction de l'objectif de fiabilité. Cette distribution de la matière est également effectuée en fonction des autres éléments de la structure.

La figure IV.14 montre que les indices de fiabilité à l'optimum de SOSRA sont différents de ceux de la DDO. SOSRA réduit le surdimensionnement des éléments de la structure par un rééquilibrage des indices de fiabilité des composants, au moyen de la procédure de l'allocation optimale des indices cibles. En d'autres termes, les indices de fiabilité des modes de défaillance les moins influents sur la fiabilité système sont réduits à leurs bornes inférieures. Les modes qui ont une grande influence sont augmentés en fonction du niveau de fiabilité visé. Cependant, il peut y avoir des indices de fiabilité élevés (par exemple les modes de défaillance numéro 17, 18, 27 et 29) dus à des variables d'optimisation liées aussi à d'autres modes qui ont un rôle important dans la stabilité globale de la structure.

L'étape de calcul des indices de fiabilité cibles optimaux est essentielle dans SOSRA car les coefficients OSSF sont calibrés sur la base de ces indices cibles. La figure IV.15 présente une comparaison entre les coefficients OSSF et les coefficients partiels de sécurité (PSF) utilisés dans la DDO. Les OSSF définis pour chaque mode de défaillance tiennent compte de la sensibilité de la variable aléatoire dans le modèle mécanique et dans la fiabilité structurale. La charge P a moins d'influence que la charge Q dans la flexion des poutres, ainsi elle est moins pondérée. Dans d'autres situations, les OSSF peuvent être inférieurs à l'unité. Par exemple, dans le cas du mode de défaillance numéro 17 du poteau gauche du dernier étage, la figure IV.18 montre que les coefficients OSSF des charges W , Q et P sont respectivement $\gamma_W = 0,54$, $\gamma_Q = 2,01$ et $\gamma_P = 1,15$. En outre, la ruine de ce mode survient lorsque les charges W , Q et P atteignent les valeurs respectives de 1,63 kN, 42,24 kN/m et 17,25 kN/m.

L'optimum de SOSRA est obtenu après 4 cycles d'optimisation et d'analyse de fiabilité système, le temps de calcul exigé représente 5 fois seulement celui de la DDO.

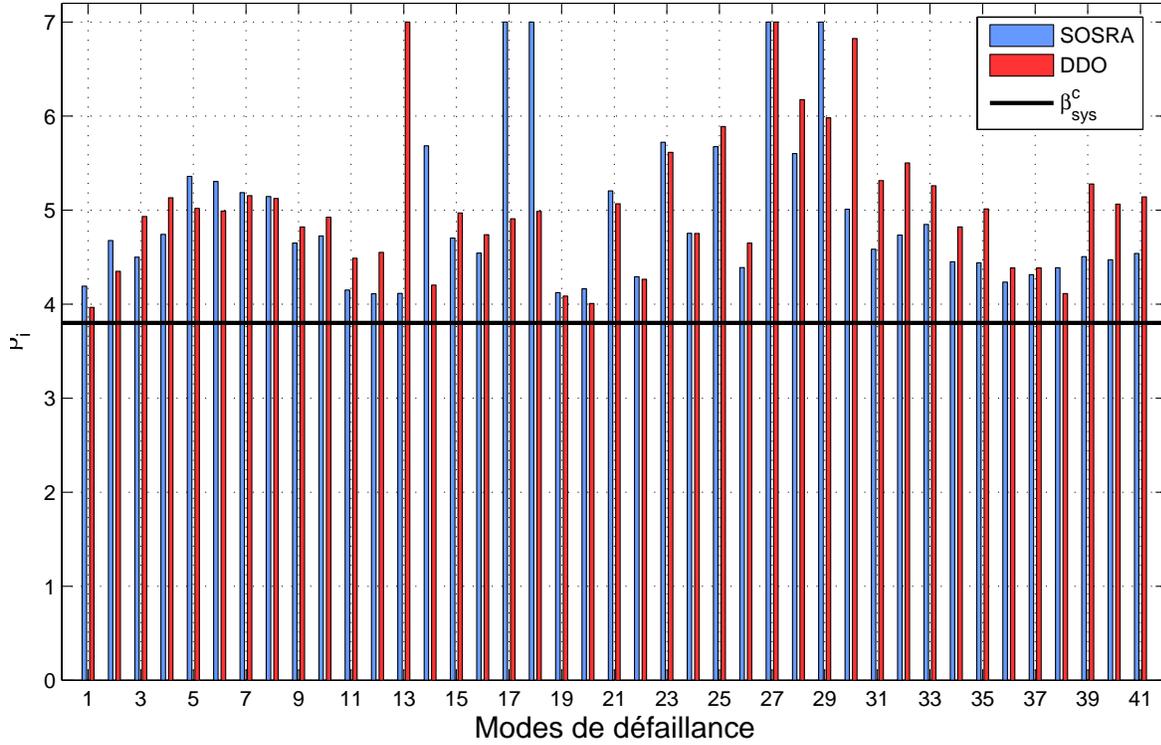


Figure IV.14: Indices de fiabilité des conceptions optimales du portique à cinq étages.

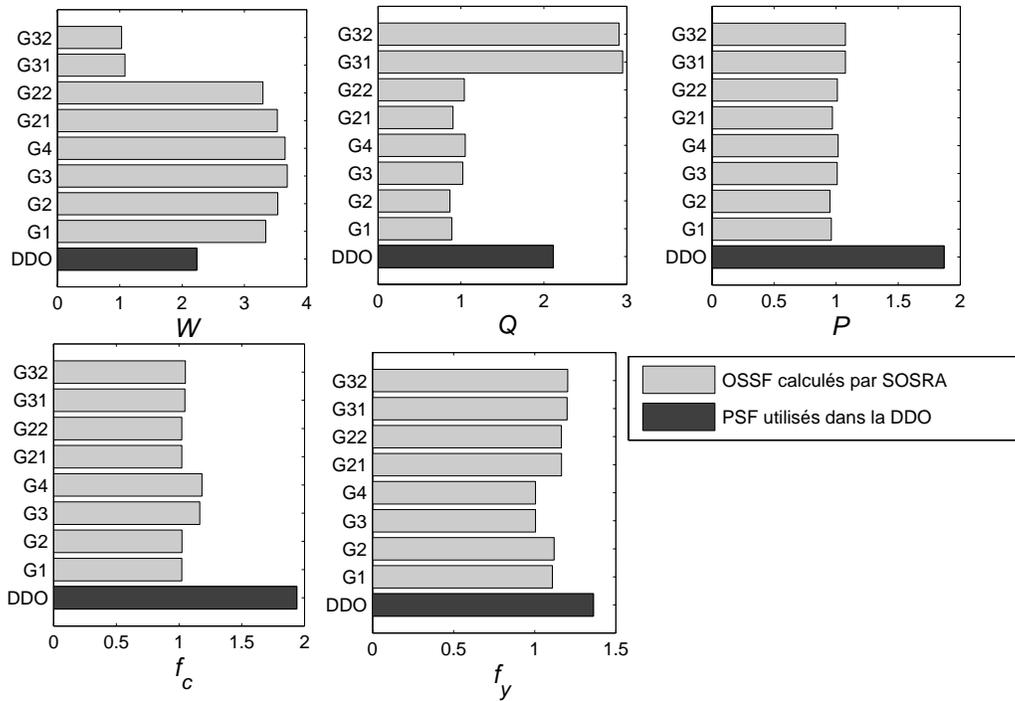


Figure IV.15: Coefficients OSSF et PSF.

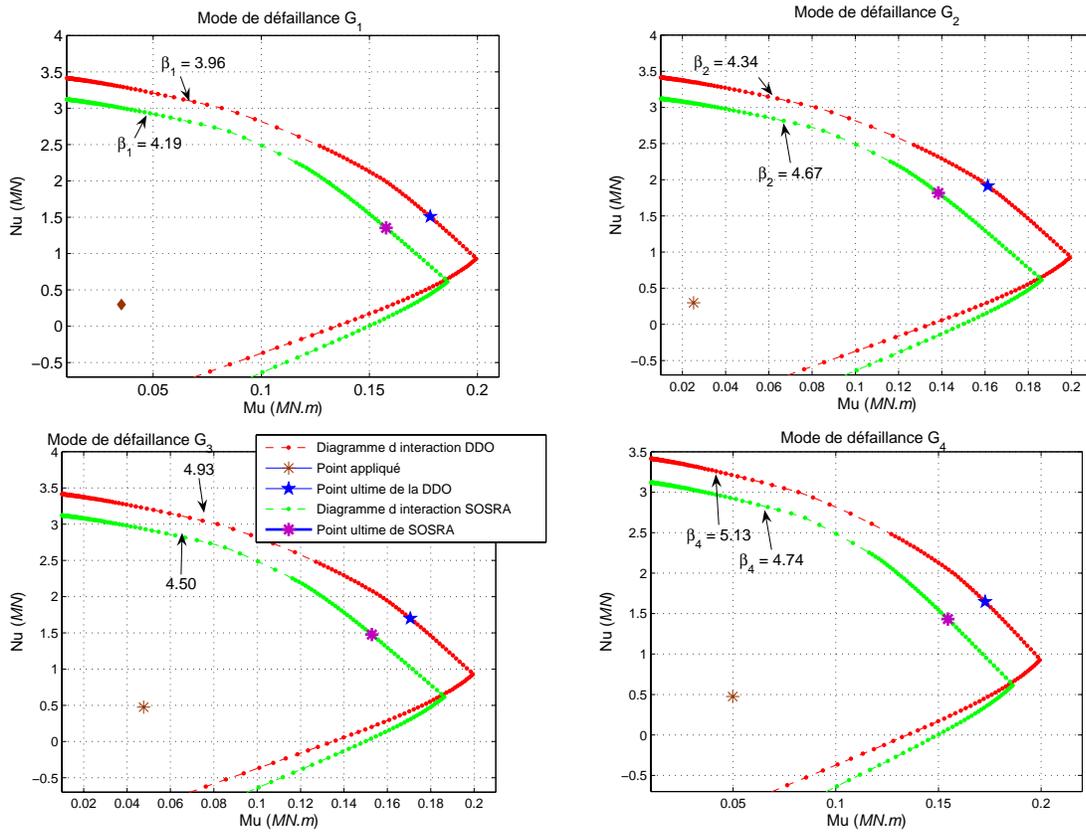


Figure IV.16: Diagrammes d'interaction des sections critiques des poteaux du rez-de-chaussée.

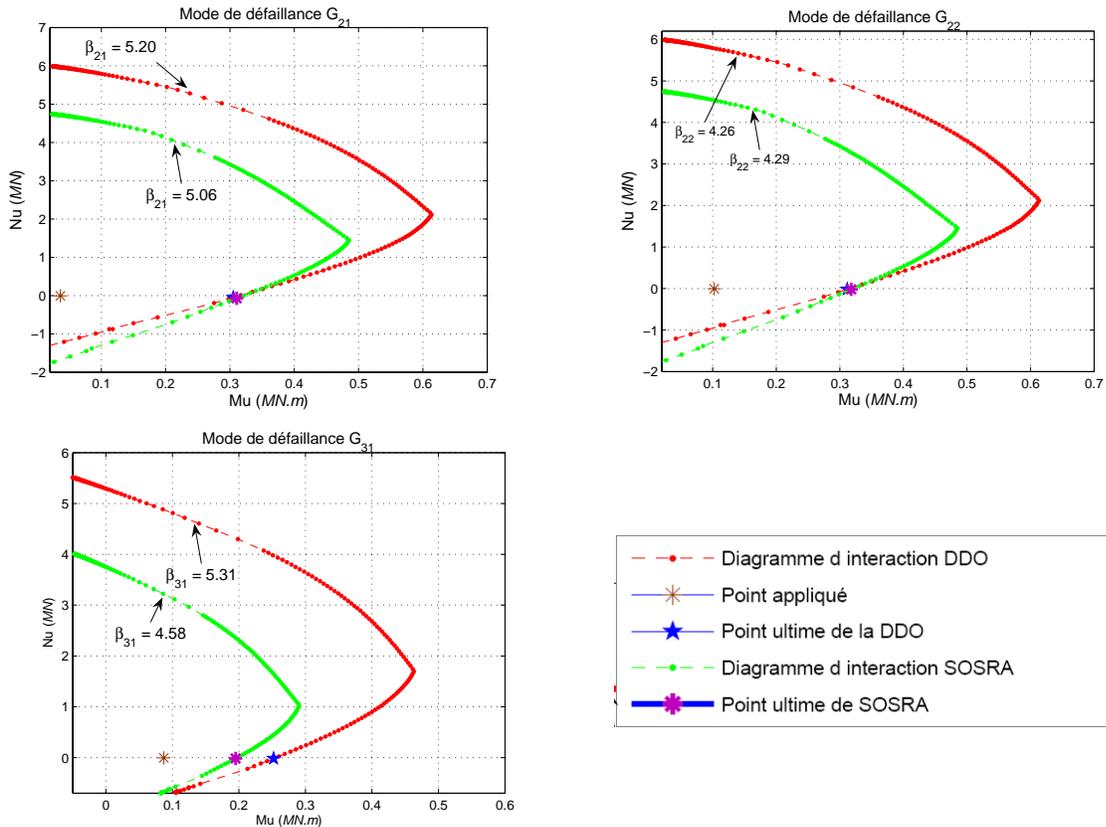
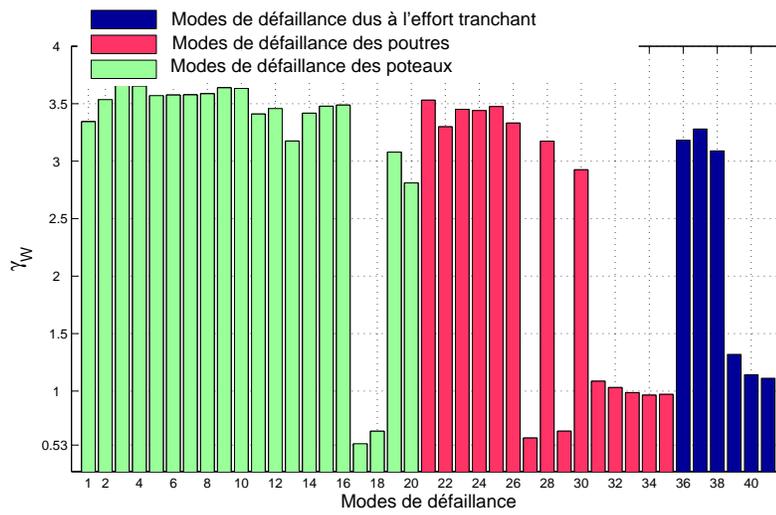
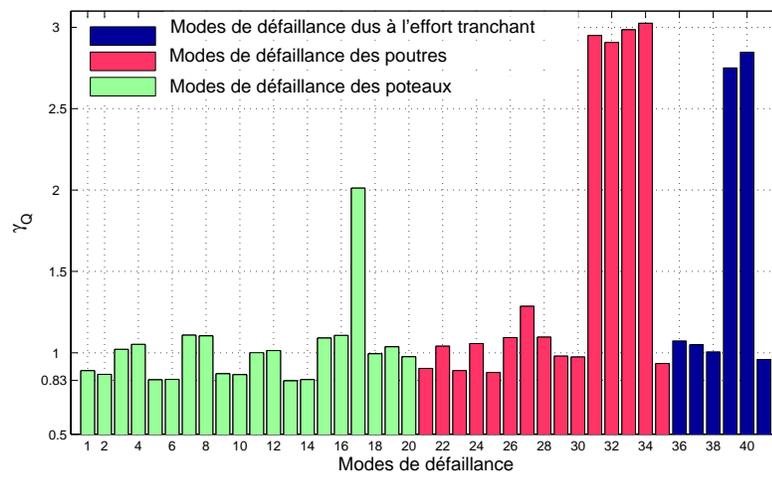


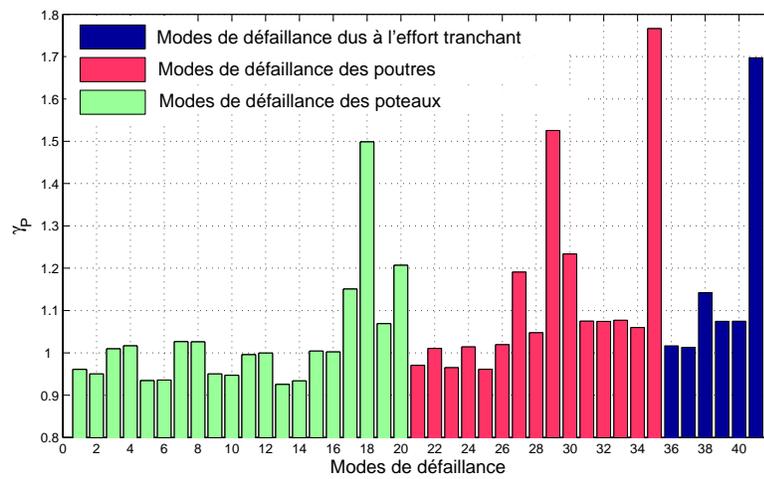
Figure IV.17: Diagrammes d'interaction des sections critiques de la poutre du premier étage.



a)



b)



c)

Figure IV.18: OSSF des variables aléatoires a) P , b) Q , et c) P

IV.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les applications traitées ont montré l'intérêt de l'optimisation fiabiliste par rapport à l'optimisation déterministe. Les approches d'optimisation fiabiliste (SOSRA et SRBDO) conduisent à des solutions mieux équilibrées en assurant le meilleur rapport entre la fiabilité de la structure optimisée et son coût. La dernière application a montré que la méthode SOSRA assure une meilleure distribution de la matière dans les différents composants de la structure en fonction de l'objectif de fiabilité. Cela conduit à une robustesse fiabiliste globale de la structure.

Ces applications ont prouvé l'importance de la fiabilité système dans l'optimisation fiabiliste, où nous avons remarqué que l'indice de fiabilité système est souvent inférieur à ceux des composants. L'effort de calcul exigé par l'approche classique SRBDO est considérable. Cette approche souffre des problèmes de convergence et de stabilité numérique dus au calcul des sensibilités de l'indice de fiabilité système par rapport aux variables d'optimisation. Un autre inconvénient de cette approche réside dans le choix du point initial, des points trop éloignés de l'optimum ne garantissent pas la convergence. Ainsi, nous pouvons dire que cette approche n'est ni efficace ni robuste.

Les différents exemples examinés montrent la validité de la méthode proposée SOSRA. La précision des résultats de la SOSRA est satisfaisante car elle converge vers les mêmes solutions de la SRBDO, lorsque celle-ci converge. L'efficacité et la robustesse de SOSRA sont approuvées à travers ces exemples. Le faible coût de calcul qu'elle exige lui accorde une capacité remarquable à conduire l'optimisation fiabiliste des structures complexes avec plusieurs variables d'optimisation et plusieurs modes de défaillance.

Toutefois, l'optimisation des structures en béton armé doit tenir compte de la dégradation des performances mécaniques lorsque ces structures sont soumises à des environnements agressifs (corrosion, endommagement, ...). Le chapitre suivant introduit l'optimisation fiabiliste dépendant du temps qui permet de considérer l'évolution de la fiabilité structurale en fonction du temps.

Optimisation fiabiliste dépendant du temps

« Quand on travaille pour demain et pour l'incertain, on agit avec raison... »

Blaise Pascal (1623-1662)

Sommaire

V.1 Introduction	138
V.2 Analyse de fiabilité dépendant du temps	139
V.2.1 Notion du taux de franchissement	139
V.2.2 Probabilité de défaillance cumulée	142
V.2.3 Méthodes de calcul	144
V.3 Optimisation fiabiliste dépendant du temps	146
V.3.1 Formulation classique de la TV-RBDO	148
V.3.2 Adaptation de la méthode SOSRA pour la TV-RBDO	148
V.4 Optimisation fiabiliste de la maintenance	151
V.4.1 Stratégies de maintenance	151
V.4.2 Coûts de maintenance	153
V.4.3 Formulation de l'optimisation fiabiliste de la maintenance	154
V.5 Optimisation fiabiliste de la conception et de la maintenance	154
V.6 Exemples et validation	155
V.6.1 Validation de la méthode Φ_2	156
V.6.2 Poutre en béton armé soumise à la corrosion des armatures	156
V.6.3 Optimisation de la conception et de la maintenance d'un pipeline	164
V.7 Conclusion	169

V.1 Introduction

Les ouvrages de Génie Civil (e.g. ouvrages d'art, bâtiments, aéroréfrigérants,...) subissent des détériorations en fonction de l'âge de la structure. L'altération de la capacité portante est essentiellement due à la dégradation du matériau, favorisée par la forte variabilité de l'environnement extérieur (e.g. humidité, température,...) et les conditions d'exploitation de l'ouvrage. La variation de la marge de sécurité concerne également les chargements appliqués, qui sont aléatoires dans le temps.

Ainsi, la conception des structures doit intégrer l'ensemble des phénomènes physiques qui altèrent la capacité portante durant la durée de vie souhaitée. Ces phénomènes nécessitent la description du comportement des matériaux sous les différentes sollicitations d'une part et une modélisation fine des mécanismes des dégradations, d'autre part. Autrement dit, la phase de conception doit tenir compte des modèles de prédiction du comportement vieillissant des structures.

L'utilisation de ces modèles prédictifs dans une approche d'optimisation purement déterministe limite la qualité de la solution fournie aux concepteurs. Pour cela, les approches probabilistes sont souvent proposées pour l'analyse des différentes problématiques liées au vieillissement et à la dégradation des structures.

Toutefois, les outils de la théorie de la fiabilité exposée dans la section I.2 du chapitre I ne considèrent pas l'effet du temps sur la défaillance. Cette démarche est appelée l'analyse de fiabilité indépendante du temps (*Time-Invariant Reliability*). L'évolution de la probabilité de défaillance d'une structure en raison de sa dégradation est souvent réduite à une série d'analyses de fiabilité indépendante du temps. Ces analyses sont effectuées pour des caractéristiques du matériau, des conditions environnementales et des chargements correspondant aux différents âges de la structure. L'obtention d'une information plus précise et plus réaliste sur la fiabilité de la structure durant sa durée de vie repose sur la théorie de la fiabilité dépendant du temps (*Time-Variant Reliability*), qui s'appuie sur la description par processus stochastiques.

L'objectif de ce chapitre est d'introduire l'exigence de fiabilité pour une durée de vie donnée dans l'optimisation de la conception. Cette démarche est appelée ici : optimisation fiabiliste dépendant du temps (TV-RBDO : *Time-Variant Reliability-based Design Optimization*). Par ailleurs, les opérations de maintenance visent à limiter les dégradations à un niveau acceptable pour garantir l'aptitude au service. Les coûts de la maintenance sont assez élevés puisqu'elle nécessite beaucoup d'efforts et de moyens technologiques (inspections et réparations, techniques de surveillance,...). Par conséquent, ces opérations doivent être planifiées afin de réduire les coûts impliqués. Dans la pratique, l'optimisation de la maintenance est souvent effectuée indépendamment de l'optimisation de la conception. Cette démarche est justifiée par le fait que les plannings de maintenance sont définis pour des structures existantes, où la conception est déjà réalisée.

La démarche rationnelle consiste à définir la conception et la maintenance dans le stade d'avant-projet, c'est-à-dire avant la construction de la structure. Cette démarche peut être effectuée par le biais de la minimisation du coût total contenant le coût initial dû à la construction, les coûts de la maintenance et les coûts dus aux conséquences d'une éventuelle défaillance. Dans ce chapitre, nous allons coupler l'optimisation de la

conception et l'optimisation de la maintenance afin de trouver la conception et la stratégie de maintenance optimales, qui garantissent un coût total minimal et assurent le bon fonctionnement de l'ouvrage pendant toute la durée de vie envisagée.

V.2 Analyse de fiabilité dépendant du temps

La théorie de la fiabilité dépendant du temps détermine l'évolution de la probabilité de défaillance en fonction de l'âge de la structure. Cette approche nécessite la modélisation des mécanismes de dégradation et de vieillissement (e.g. corrosion, endommagement, propagation de la fissure, fluage, ...) combinée aux processus stochastiques qui permet la modélisation de l'environnement (e.g. humidité, température, ...) et de la variabilité du chargement en fonction du temps.

La défaillance d'une structure résulte de deux phénomènes combinés : la dégradation progressive des caractéristiques de résistance des matériaux, d'une part, et les actions aléatoires extrêmes dont la probabilité d'occurrence augmente avec la durée de vie (action climatique décennale, centennale, ...), d'autre part.

Considérons la fonction de performance notée $G(\mathbf{X}(\omega, t), t)$ dépendant du temps t et de l'aléa ω . Cette notation implique que le vecteur $\mathbf{X}(\omega, t)$ représente des variables aléatoires $X_j(\omega)$, $j = 1, \dots, p$ et des processus stochastiques scalaires $X_k(\omega, t)$, $k = p + 1, \dots, p + q$. La figure V.1 montre un exemple simple de l'état limite de résistance et de sollicitation, notée souvent par :

$$G(\mathbf{X}(\omega, t), t) = R(\omega, t) - S(\omega, t) \quad (\text{V.1})$$

Cette fonction de performance est définie par la sollicitation $S(\omega, t)$ modélisée par un processus stochastique et la résistance $R(\omega, t)$ composée de la variable aléatoire $R(\omega)$ et du processus de dégradation $\delta(t, \omega)$. La probabilité de défaillance dans l'intervalle de temps $[0, T_L]$ est définie par :

$$Prob[\exists \tau \in [0, T_L], \text{ t.q } G(\mathbf{X}(\omega, \tau), \tau) \leq 0] \quad (\text{V.2})$$

Il s'agit de la probabilité qu'il existe une date τ appartenant à l'intervalle de la durée de vie $[0, T_L]$ pour laquelle la structure est défaillante. L'analyse de fiabilité dépendant du temps s'appuie sur les notions de taux de franchissement et des probabilités de défaillance instantanées et cumulées.

V.2.1 Notion du taux de franchissement

Le taux de franchissement (*out-crossing rate*) [12] traduit le nombre de franchissements de l'état limite $G(\mathbf{X}(\omega, t), t) \leq 0$ par unité de temps (figure V.1). Le taux de franchissement est la probabilité que dans un intervalle très petit Δt , il y aurait au plus un seul franchissement de l'état limite. Cela s'écrit mathématiquement par :

$$\nu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Prob[N(t, t + \Delta t) = 1]}{\Delta t} \quad (\text{V.3})$$

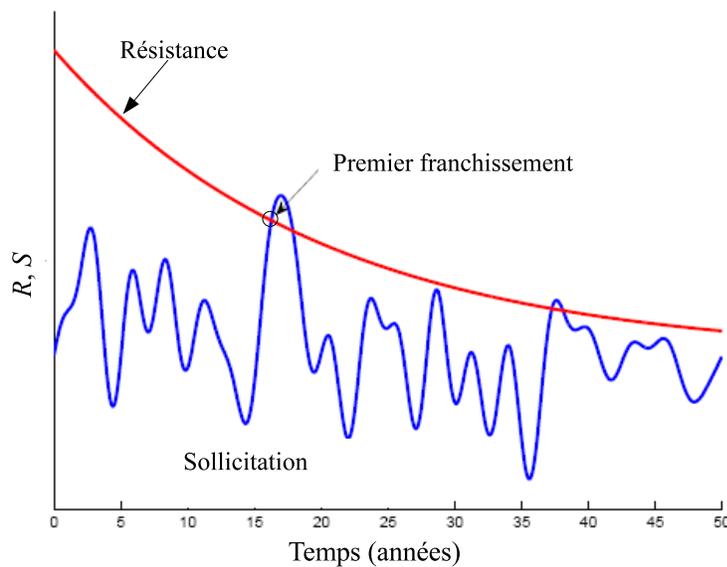


Figure V.1: Premier franchissement.

où $N(t, t + \Delta t)$ est le nombre de franchissements sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$. Le nombre moyen de franchissements sur l'intervalle du temps $[0, T_L]$ est alors :

$$E [N (0, T_L)] = \int_0^{T_L} \nu (t) dt \quad (\text{V.4})$$

La première expression permettant de calculer le taux de franchissement a été proposée par *Rice* en 1944 [122].

V.2.1.1 Formule de *Rice*

Elle est basée sur l'hypothèse que le processus est scalaire, différentiable et que les trajectoires du processus sont continument différentiables. La formule de *Rice* a été généralisée pour les processus vectoriels par *Belyaev*[123]. La relation donnée par *Rice* est basée sur le dépassement d'un seuil $z(t)$ par le processus $X(\omega, t)$.

$$\nu = \int_{\dot{z}(t)}^{\infty} \left(\dot{X} - \dot{z}(t) \right) f_{X\dot{X}} \left(z(t), \dot{X} \right) d\dot{x} \quad (\text{V.5})$$

où $z(t)$ est la fonction du seuil et $\dot{z}(t)$ sa dérivée par rapport au temps, $X(\omega, t)$ et $\dot{X}(\omega, t)$ sont respectivement le processus stochastique et sa dérivée par rapport au temps, $f_{X\dot{X}}$ est la distribution conjointe de probabilité. Deux cas particuliers nous intéressent dans cette étude.

• a) **Seuil constant**

La figure V.2 montre deux trajectoires d'un processus stochastique stationnaire dépassant un seuil constant. Ce cas peut être interprété dans le cas d'une fonction d'état limite $R(\omega) - S(\omega, t)$ par :

- la résistance R , représentant le seuil constant (z) est modélisée par une variable aléatoire de moyenne μ_R et d'écart-type σ_R
- le processus stochastique $S(\omega, t)$ est Gaussien de moyenne μ_S et d'écart-type σ_S .

Le taux de franchissement $\nu(t)$ est constant sur l'intervalle $[0, T_L]$ car le processus $S(\omega, t)$ est stationnaire.

$$\nu = \omega_0 \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \varphi \left(\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right) \quad (\text{V.6})$$

où ω_0 et la pulsation du processus (*cycle rate*) définie par :

$$\omega_0^2 = \left. \frac{\partial^2 \rho_{SS}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=t_2} \quad (\text{V.7})$$

où $\rho_{SS}(t_1, t_2)$ est la fonction d'autocorrélation du processus stochastique $S(\omega, t)$. Nous donnerons à titre d'exemple deux fonctions d'autocorrélation de type exponentiel, qui sont souvent utilisées pour les processus Gaussiens :

$$\rho_{SS}(t_1, t_2) = \exp \left[-\frac{|t_1 - t_2|}{L_c} \right] \longrightarrow \omega_0 = \frac{1}{L_c} \quad (\text{V.8})$$

$$\rho_{SS}(t_1, t_2) = \exp \left[-\left(\frac{t_1 - t_2}{L_c} \right)^2 \right] \longrightarrow \omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{L_c} \quad (\text{V.9})$$

où L_c est la longueur de corrélation du processus Gaussien.

• b) **Seuil variable**

La figure V.3 montre deux trajectoires d'un processus Gaussien dépassant un seuil variable par rapport au temps. Ce cas se présente principalement lorsque la résistance se dégrade avec l'âge de la structure. La fonction d'état limite peut être formulée par :

$$G(\mathbf{X}(\omega, t), t) = R(\omega) - \delta t - S(\omega, t) \quad (\text{V.10})$$

où δ est un paramètre déterministe. Le taux de franchissement n'est pas constant car même si le processus stochastique est stationnaire, $G(\mathbf{X}(\omega, t), t)$ ne l'est pas. $\nu(t)$ est donnée par l'expression suivante [124] :

$$\nu(t) = \omega_0 \Psi \left(\frac{-\delta}{\sigma_S \omega_0} \right) \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \varphi \left(\frac{\mu_R - \delta t - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right) \quad (\text{V.11})$$

avec $\Psi(x) = \varphi(x) - x\Phi(-x)$. Cette expression découle de la formule de *Rice*. Toutefois, elle reste difficile à appliquer pour des situations complexes, comme le cas d'une fonction

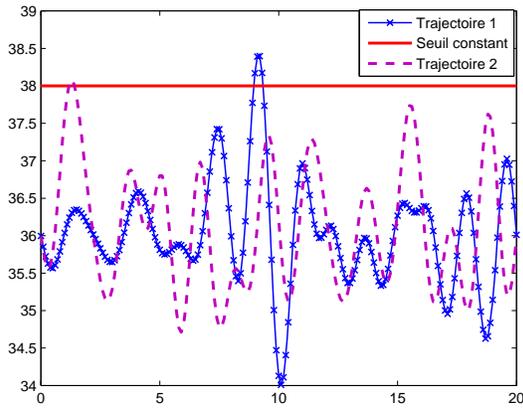


Figure V.2: Seuil constant

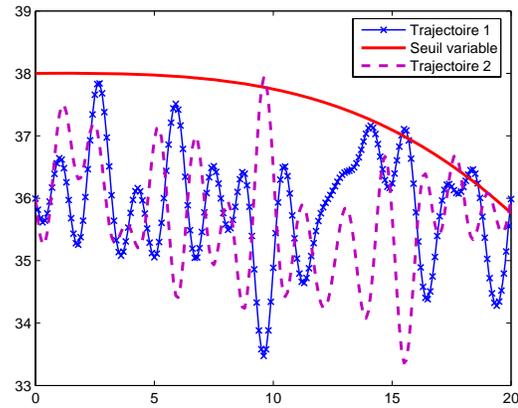


Figure V.3: Seuil variable.

d'état limite définie par un processus de dégradation contenant des variables aléatoires. Une intégration numérique de l'équation V.5 s'avère nécessaire.

Hagen et Tvedt [125] ont proposé une approche originale initiée par *Madsen* pour l'estimation du taux de franchissement à l'aide des outils de la fiabilité indépendante du temps et de la fiabilité système. De plus, cette approche numérique est basée sur des hypothèses moins restrictives.

V.2.1.2 Approche système

Le taux de franchissement $\nu(t)$ est donné par la probabilité de l'évènement E défini par l'intersection des évènements A et B :

$$\nu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Prob[A \cap B]}{\Delta t} \quad (V.12)$$

- $A : \{G(\mathbf{X}(\omega, t), t) \in D_s\}$ représente l'évènement : la structure est dans le domaine de sûreté à l'instant t
- $B : \{G(\mathbf{X}(\omega, t + \Delta t), t + \Delta t) \in D_f\}$ représente l'évènement : la structure est dans le domaine de défaillance à l'instant $t + \Delta t$.

L'équation V.12 peut s'écrire :

$$\nu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Prob[\{G(\mathbf{X}(\omega, t), t) > 0\} \cap \{G(\mathbf{X}(\omega, t + \Delta t), t + \Delta t) \leq 0\}]}{\Delta t} \quad (V.13)$$

Le taux de franchissement $\nu(t)$ représente l'aire hachurée sur la figure V.4, il est estimé à travers la fiabilité du système parallèle défini par les deux évènements A et B . La méthode Φ_2 [126] est basée sur ce principe.

V.2.2 Probabilité de défaillance cumulée

A un instant donné t_{fixe} , l'analyse de fiabilité devient indépendante du temps. La probabilité instantanée de défaillance à t_{fixe} est alors :

$$P_{f,i} = Prob[G(\mathbf{X}(\omega, t = t_{fixe}), t = t_{fixe}) \leq 0] \quad (V.14)$$

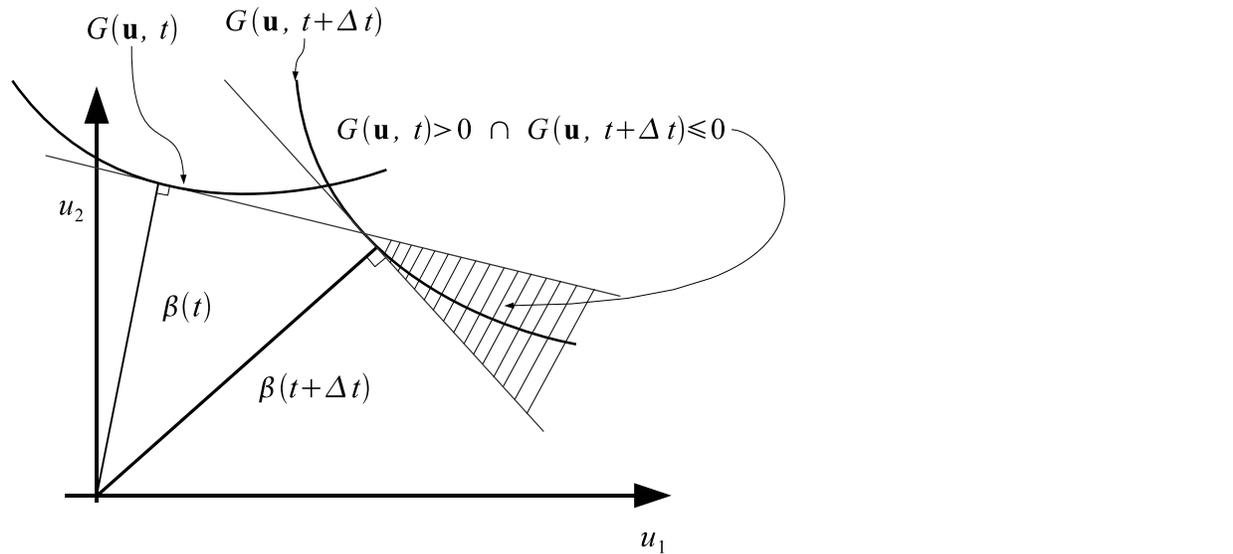


Figure V.4: Principe de l'approche système pour le taux de franchissement.

La probabilité de défaillance entre deux instants t_1 et t_2 dans l'intervalle $[0, T_L]$ est généralement différente des probabilités instantanées obtenues en fixant le temps t en t_1 puis en t_2 (figure V.5). Ces probabilités instantanées $P_{f,i}(t_1)$ et $P_{f,i}(t_2)$ ne tiennent pas compte de la corrélation entre les deux instants t_1 et t_2 . La notion de probabilité cumulée est introduite pour considérer cette corrélation et le taux de franchissement $\nu(t)$, avec l'hypothèse qu'il existe un seul franchissement dans un intervalle $[t, t + \Delta t]$ pour $\Delta t \rightarrow 0$ (équation V.6). La probabilité cumulée de défaillance sur l'intervalle $[0, T_L]$ est encadrée par :

$$\text{Max}_{0 \leq t \leq T_L} [P_{f,i}(t)] \leq P_{f,c}(0, T_L) \leq P_{f,i}(0) + E[N(0, T_L)] \tag{V.15}$$

où $P_{f,i}(t)$ représente la probabilité instantanée à chaque instant t compris entre $t = 0$ et $t = T_L$, $E[N(0, T_L)]$ est le nombre moyen de franchissements de l'état limite sur l'intervalle de temps $[0, T_L]$. En rapportant l'équation V.4 dans V.15, on obtient une borne supérieure de la probabilité de défaillance cumulée :

$$P_{f,c}(0, T) \leq P_{f,i}(0) + \int_0^{T_L} \nu(t) dt \tag{V.16}$$

où $P_{f,i}(0)$ est la probabilité de défaillance instantanée à $t = 0$.

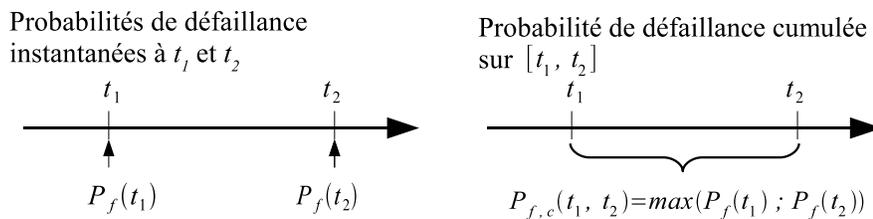


Figure V.5: Probabilités instantanée et cumulée.

V.2.3 Méthodes de calcul

Plusieurs méthodes ont été mises en œuvre pour l'estimation de la fiabilité dépendant du temps. Ces méthodes s'appuient sur les mêmes notions cités ci-dessus, le taux de franchissement et la probabilité de défaillance cumulée. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer :

- La méthode asymptotique développée par *Schall, Faber* et *Rackwitz* [127] basée sur les intégrations asymptotiques dans le cadre des processus Gaussiens différentiables et des processus de renouvellement à saut rectangulaire.
- La méthode Φ_2 proposée par *Andrieu et al.* [126].
- Les simulations de Monte Carlo.

Nous donnons dans ce qui suit les principes de la méthode Φ_2 et des simulations de Monte-Carlo.

V.2.3.1 La méthode Φ_2

Cette approche s'appuie sur l'idée proposée par *Hagen* et *Tvedt* [125] qui consiste à utiliser les outils de l'analyse de fiabilité indépendante du temps et la loi binormale pour l'estimation du taux de franchissement. La démarche est résumée en trois étapes principales :

- **étape 1**

À l'instant $t = \tau$, l'indice de fiabilité $\beta(\tau)$ associé à l'état limite $G(\mathbf{X}(\omega, \tau), \tau) \leq 0$ est calculé. Le temps devient un simple paramètre dans la fonction de performance G . Le processus stochastique $S(\omega, \tau)$ est remplacé par la variable aléatoire correspondante notée $S^{(1)}(\omega)$. La méthode FORM approxime la surface d'état limite $G(\tau)$ par un hyperplan tangent au point de conception $u^*(\tau)$:

$$\alpha(\tau).u^*(\tau) + \beta(\tau)$$

Par conséquent, l'évènement A défini par $G(X(\omega, t), t) > 0$ est associé à l'hyperplan :

$$-\alpha(\tau).u^*(\tau) - \beta(\tau)$$

La probabilité instantanée de l'évènement A est $P_f(\tau) = \Phi(\beta(\tau))$, où $-\beta(\tau)$ est l'indice de fiabilité correspondant à $G(\mathbf{X}(\omega, \tau), \tau) > 0$.

- **étape 2**

L'indice de fiabilité $\beta(\tau + \Delta\tau)$ associé à l'évènement B défini par la fonction d'état limite $G(\mathbf{X}(\omega, \tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau) \leq 0$ est calculé par une seconde analyse de fiabilité indépendante du temps, en fixant le temps à $\tau + \Delta\tau$. Le processus stochastique $S(\omega, \tau + \Delta\tau)$ est remplacé par la variable aléatoire $S^{(2)}(\omega)$, celle-ci est corrélée à $S^{(1)}(\omega)$ par le coefficient ρ donné par la fonction d'autocorrélation du processus :

$$\rho((S^{(1)}(\omega), S^{(2)}(\omega)) = \rho_{SS}(\tau, \tau + \Delta\tau)$$

L'hyperplan associé à l'évènement B s'écrit comme suit :

$$\alpha(\tau + \Delta\tau).u^*(\tau + \Delta\tau) + \beta(\tau + \Delta\tau)$$

- **étape 3**

Le taux de franchissement est calculé par la fiabilité du système parallèle composé des deux états limites $G(\mathbf{X}(\omega, \tau), \tau) > 0$ et $G(\mathbf{X}(\omega, \tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau) \leq 0$ associés respectivement aux indices de fiabilité $-\beta(\tau)$ et $\beta(\tau + \Delta\tau)$. La corrélation entre les deux états limites est fournie par le produit scalaire des deux vecteurs des cosinus directeurs respectifs :

$$\rho_{GG}(\tau, \tau + \Delta\tau) = -\alpha(\tau) \cdot \alpha(\tau + \Delta\tau)$$

Finalement, le taux de franchissement est directement estimé par la loi binormale :

$$\nu_{\Phi_2}(\tau) = \frac{\Phi_2(\beta(\tau), -\beta(\tau + \Delta\tau); \rho_{GG}(\tau, \tau + \Delta\tau))}{\Delta\tau} \quad (\text{V.17})$$

La méthode Φ_2 exige un choix délicat du pas de discrétisation $\Delta\tau$. Ce pas peut être à l'origine des problèmes numériques d'instabilité et de convergence. Récemment, *Sudret* [128] a amélioré l'approche en proposant une forme analytique à la place de la loi binormale. Celle-ci s'appuie sur les développements de la formule de *Rice* de l'équation V.11. Le taux de franchissement est estimé par la formule suivante :

$$\nu_{\Phi_{2,new}}(\tau) = \frac{\alpha(\tau + \Delta\tau) - \alpha(\tau)}{\Delta\tau} \varphi(\beta(\tau)) \Psi\left(\frac{\beta(\tau + \Delta\tau) - \beta(\tau)}{\alpha(\tau + \Delta\tau) - \alpha(\tau)}\right) \quad (\text{V.18})$$

où $\Psi(x) = \varphi(x) - x\Phi(-x)$. La précision des résultats de la nouvelle approche $\Phi_{2,new}$ (équations V.18) dépend aussi fortement du pas de discrétisation $\Delta\tau$ et de la longueur de corrélation. Toutefois, cette nouvelle version de l'approche $\Phi_{2,new}$ (équation V.18) est numériquement plus stable que l'ancienne version utilisant directement la loi binormale (équation V.17) [128]. Pour des résultats satisfaisants, cette approximation doit être valide :

$$\sqrt{2 - 2\rho_{SS}(\tau, \tau + \Delta\tau)} \approx \omega_0 \Delta\tau \quad (\text{V.19})$$

où ω_0 est la pulsation du processus stochastique $S(\omega, t)$ et $\rho_{SS}(\tau, \tau + \Delta\tau)$ est le coefficient de corrélation entre deux instants très proches.

V.2.3.2 Méthode des simulations de Monte Carlo

La méthode des simulations de Monte Carlo peut être appliquée sous des hypothèses moins restrictives. De plus, sa mise en œuvre est plus aisée que les autres méthodes. Toutefois, elle exige un temps de calcul prohibitif. Pour des probabilités très faibles, la méthode de Monte Carlo reste inapplicable.

L'estimation du taux de franchissement et de la probabilité de défaillance cumulée par les simulations de Monte Carlo est basée sur une multitude de simulations sur chaque intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$. En d'autres termes, l'intervalle de la durée de vie $[0, T_L]$ est discrétisé en plusieurs sous-intervalles. Sur chacun de ces intervalles, des tirages aléatoires sont effectués afin d'évaluer la fonction d'état limite et de déterminer le nombre de franchissements (le premier ou tous les franchissements).

$$\nu(t) = \frac{\text{Nombre des premiers franchissements dans l'intervalle } [t, t + \Delta t]}{\Delta t \cdot \text{Nombre total de tirages effectués}} \quad (\text{V.20})$$

La probabilité de défaillance cumulée peut être directement déterminée par :

$$P_{f_c}(t_1, t_2) = \frac{\text{Nombre des premiers franchissements dans l'intervalle } [t_1, t_2]}{\text{Nombre total de tirages effectués}} \quad (\text{V.21})$$

Le nombre total de tous les franchissements peut être obtenu par la même démarche en comptabilisant tous les franchissements de l'état limite sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$. Cependant, l'application de la méthode de Monte Carlo pour les problèmes de fiabilité dépendant du temps exige la discrétisation du processus stochastique $S(\omega, t)$. Cette discrétisation vise à décomposer le processus $S(\omega, t)$ en un nombre fini de variables aléatoires $\xi(\omega)$ et de fonctions déterministes $f(t)$. Dans ce travail, nous avons utilisé l'expansion de Karhunen-Loève [129]. Le processus stochastique $S(\omega, t)$ est écrit sous la forme :

$$S(\omega, t) \approx \mu_S + \sigma_S \sum_{i=1}^{N_t} \sqrt{\lambda_i} f_i(t) \xi_i(\omega) \quad (\text{V.22})$$

où N_t est le nombre de troncature de la discrétisation, μ_S et σ_S sont respectivement la moyenne et l'écart-type du processus $S(\omega, t)$, $\xi_i(\omega)$ sont des variables Gaussiennes centrées, réduites et indépendantes. λ_i et f_i sont respectivement les valeurs propres et les fonctions propres de la matrice de covariance $R_{SS}(t_1, t_2)$, elles sont définies par l'intégrale de *Fredholm* :

$$\forall i = 1, \dots, N : \int_0^{T_L} R_{SS}(t_1, t_2) f_i(t_2) dt_2 = \lambda_i f_i(t_1) ; (t_1, t_2) \in [0, T_L] \quad (\text{V.23})$$

La matrice de covariance $R_{SS}(t_1, t_2)$ est définie par la fonction d'autocorrélation $\rho_{SS}(t_1, t_2)$, cette matrice doit être symétrique et définie positive. Les fonctions propres f_i sont orthogonales entre elles et forment une base recouvrant complètement l'espace des fonctions auquel appartient le processus $S(\omega, t)$. La solution du problème V.23 peut être explicitement obtenue pour des fonctions d'autocorrélation de type exponentiel et triangulaire [129]. Une résolution numérique s'avère nécessaire pour d'autres types de fonctions d'autocorrélation.

D'autres approches sont également développées pour la discrétisation des processus stochastiques. Nous citons à titre d'exemple, EOLE (*Expansion Optimal Linear Estimation*) [130], OSE (*Orthogonal Series Expansions*) [131] et la méthode du Chaos polynomial [132].

V.3 Optimisation fiabiliste dépendant du temps

Les formulations de l'optimisation fiabiliste exposées dans les chapitres II et III ne tiennent pas compte de l'effet du temps sur la fiabilité structurale. Ces formulations sont basées sur la fiabilité indépendante du temps (*Time-Invariant Reliability*) en minimisant seulement le coût initial.

Les ouvrages de Génie Civil nécessitent des investissements considérables rentabilisés à long terme. Les coûts dus aux conséquences d'une éventuelle défaillance ne peuvent pas être négligés car ils évoluent avec le temps et en fonction de la probabilité de défaillance.

L'optimisation fiabiliste doit ainsi minimiser la fonction du coût total comprenant le coût initial et les coûts de défaillance.

L'approche rationnelle de l'optimisation fiabiliste consiste à tenir compte de l'évolution de la probabilité de défaillance durant la durée de vie de la structure. Toutefois, l'estimation des coûts dépend principalement des fluctuations des marchés financiers, de l'évolution des actions de l'entreprise et de l'inflation monétaire. De plus, l'estimation des coûts de défaillance est une tâche très complexe et délicate car ils sont composés des coûts directs et indirects. Les coûts directs sont dus à la destruction totale ou partielle de l'ouvrage provoquant des victimes humaines et son indisponibilité jusqu'à sa reconstruction ou sa réparation. Les coûts indirects sont dus aux conséquences indirectes de la défaillance. Par exemple, les dommages causés à l'environnement, la mauvaise publicité et la perte de nouveaux marchés pour l'entreprise, sont considérés comme coûts indirects.

Le problème de l'optimisation fiabiliste dans un cadre dépendant du temps peut être formulé sous deux hypothèses : systèmes réparables ou non-réparables. Nous nous intéressons particulièrement à ce dernier cas, la formulation de la TV-RBDO s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} E [C_T(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t)] &= E [C_I(\mathbf{d})] + E [C_F(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t)] & (V.24) \\ \text{sous : } h_j(\mathbf{d}) &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n_h \end{aligned}$$

où $h_j(\mathbf{d})$ sont des fonctions déterministes, $E[\cdot]$ symbolise l'opérateur d'espérance, $C_I(\mathbf{d})$ est le coût initial, $C_F(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t)$ est le coût de défaillance. L'espérance du coût de défaillance est établie en fonction des variables de décision \mathbf{d} , des paramètres aléatoires \mathbf{X} (i.e. résistances, sollicitations, ...) et du temps t , elle est estimée pour toute la durée de vie envisagée T_L . Mathématiquement l'espérance des coûts de défaillance est donnée par :

$$E [C_F] = \int_0^{T_L} f(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t) C_f \delta(t) dt \quad (V.25)$$

où $f(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t)$ est la densité de probabilité du temps à la défaillance, C_f est le coût annuel de défaillance, $\delta(t)$ est la fonction de capitalisation ou d'actualisation (*discount or capitalization function*) décrite en terme du taux d'actualisation r (*discount rate*). *Kuschel et al.* [133] ont utilisé la théorie du renouvellement (*renewal theory*) et les transformations de Laplace pour maximiser la fonction d'utilité durant toute la durée de vie T_L . Cette fonction est donnée par les bénéfices moins les coûts initiaux et les coûts de défaillance :

$$E[U(\mathbf{d}, X, t)] = E[B(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t)] - E[C_I(\mathbf{d})] - E [C_F(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t)] \quad (V.26)$$

De nombreux auteurs [134, 105] ont directement utilisé l'approximation ci-dessous à la place d'une intégration numérique de l'équation V.25 :

$$E[C_F] \approx C_f P_f(\mathbf{d}, \mathbf{X}, T_L) \quad (V.27)$$

où $P_f(\mathbf{d}, \mathbf{X}, T_L)$ est la probabilité de défaillance instantanée à $t = T_L$. *Sørensen et al.* [135] ont proposé une meilleure approximation permettant de tenir compte de la probabilité de défaillance annuelle, en utilisant les probabilités de défaillance instantanées. Dans

ce travail, cette approximation est développée en terme des probabilités de défaillance cumulées :

$$E[C_F] \approx \sum_{i=1}^{n+1} \frac{C_f [P_{f,c}(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t_{i-1}) - P_{f,c}(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t_i)]}{(1+r)^{t_i}} \quad (\text{V.28})$$

où n est le nombre de discrétisations de la durée de vie, tel que $t_{n+1} = T_L$, $P_{f,c}(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t_i)$ est la probabilité de défaillance cumulée de l'intervalle $[t_i, t_{i-1}]$, $1/(1+r)^{t_i}$ est la fonction d'actualisation et C_f est le coût annuel de défaillance qui peut être supposé constant et indépendant de la probabilité de défaillance.

V.3.1 Formulation classique de la TV-RBDO

La formulation classique de la TV-RBDO est basée sur l'approche RIA (voir section II.3.1). La limitation de fiabilité dépendant du temps est simplement intégrée dans les contraintes d'optimisation.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} E[C_T] &= C_I(\mathbf{d}) + C_f \sum_{i=1}^{n+1} \frac{[P_{f,c}(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t_i) - P_{f,c}(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t_{i-1})]}{(1+r)^{t_i}} \\ \text{sous : } &\begin{cases} P_{f,c}(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t) \leq P_{f_{T_L}}^a ; \forall t \in [0, T_L] \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 \quad j = 1, \dots, n_h \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{V.29})$$

où $P_{f,c}(\mathbf{d}, \mathbf{X}, t)$ est la probabilité de défaillance cumulée pour $t \in [0, T_L]$, $P_{f_{T_L}}^a$ est la probabilité de défaillance admissible pour la période $[0, T_L]$, elle correspond à l'indice de fiabilité cible $\beta_{t=T_L}^c$, où T_L est la durée de vie souhaitée. Cette formulation exige une analyse de fiabilité dépendant du temps à chaque itération de la procédure d'optimisation pour l'évaluation des contraintes fiabilistes et de la fonction objectif.

V.3.2 Adaptation de la méthode SOSRA pour la TV-RBDO

La méthode SOSRA proposée dans le chapitre précédent est adaptée au problème d'optimisation fiabiliste dépendant du temps, étant donné qu'elle est basée sur le calcul des coefficients de sécurité calibrés sur des indices cibles indépendants du temps.

Dans ce contexte, l'approche SOTVRA (*Sequential Optimization and Time-Variant Reliability Analysis*) est développée pour tenir compte de l'évolution de la fiabilité durant le temps et en recherchant une conception qui respecte l'indice de fiabilité cible β_T^c . L'approche SOTVRA s'appuie sur le même principe que SOSRA. Le problème de l'optimisation fiabiliste dépendant du temps (TV-RBDO) est découpé en plusieurs cycles d'optimisation déterministe et d'analyse de fiabilité dépendant du temps. Les coefficients de sécurité sont calibrés sur la base de l'indice de fiabilité cible $\beta_{t=0}^c$ qui tient compte de l'évolution de la fiabilité au cours du temps. Par rapport à SOSRA, la méthode "SOTVRA" consiste à développer les deux points suivants :

- approximation de la fonction du coût total $E[C_T]$
- calcul de l'indice de fiabilité cible à la conception $\beta_{t=0}^c$

Le premier point considère les coûts de défaillance dans la fonction objectif par une approximation de la probabilité de défaillance dans l'équation V.28. Le deuxième point vise à calculer l'indice de fiabilité cible à la conception qui permet de calibrer les coefficients de sécurité en tenant compte de l'évolution de la fiabilité au cours du temps.

V.3.2.1 Approximation de la fonction du coût total

La fonction objectif de la TV-RBDO est composée du coût initial C_I et du coût de défaillance C_F . L'espérance du coût de défaillance C_F exige le calcul de la probabilité de défaillance cumulée $P_{f,c}(t)$. Dans l'approche découplée SOTVRA, l'analyse de fiabilité n'est pas réalisée à l'intérieur de la procédure d'optimisation. Ainsi, un développement de *Taylor* du premier ordre est utilisé pour approcher la probabilité de défaillance au voisinage du point courant des variables d'optimisation.

$$P_{f,c}(t) = P_{f,c}(t)^{(k)} + \frac{\partial P_{f,c}(t)}{\partial \mathbf{d}} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^{(k)}) \quad (\text{V.30})$$

où $P_{f,c}(t)^k$ est la probabilité de défaillance cumulée obtenue par une analyse de fiabilité effectuée au $k^{\text{ème}}$ cycle, $\mathbf{d}^{(k)}$ est l'optimum déterministe au $k^{\text{ème}}$ cycle. La fonction du coût total est alors approximée par :

$$E[C_T] \approx C_I + C_f \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\left[\left(P_{f,c}^{(k)}(t_i) - P_{f,c}^{(k)}(t_{i-1}) \right) + \left(\frac{\partial P_{f,c}^{(k)}(t_i)}{\partial \mathbf{d}} - \frac{\partial P_{f,c}^{(k)}(t_{i-1})}{\partial \mathbf{d}} \right)^T \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{d}^{(k)}) \right]}{(1+r)^{t_i}} \quad (\text{V.31})$$

l'exposant T symbolise la transposée du vecteur gradient, $P_{f,c}^{(k)}(t_{i-1})$ et $P_{f,c}^{(k)}(t_i)$ sont respectivement les probabilités de défaillance cumulées à l'instant t_{i-1} et t_i obtenues par l'analyse de fiabilité effectuée au $k^{\text{ème}}$ cycle, $\partial P_{f,c}^{(k)}(t_{i-1})/\partial \mathbf{d}$ et $\partial P_{f,c}^{(k)}(t_i)/\partial \mathbf{d}$ sont respectivement les gradients des probabilités de défaillance par rapport aux variables d'optimisation aux instants t_{i-1} et t_i . Ces gradients sont calculés en utilisant les résultats de l'analyse de fiabilité du $k^{\text{ème}}$ cycle. La probabilité de défaillance cumulée à l'instant $t = \tau$ est approchée par l'équation V.16, c'est-à-dire :

$$P_{f,c}(\tau) \approx P_{f_i}(\tau) + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \nu(\tau) dt \quad (\text{V.32})$$

où $\nu(\tau)$ est le taux de franchissement entre τ et $\tau + \Delta\tau$ estimé par Φ_2 , $P_{f_i}(\tau)$ est la probabilité de défaillance instantanée à l'instant τ , elle est obtenue par FORM tel que : $P_{f_i}(\tau) = \Phi(-\beta(\tau))$, où $\beta(\tau)$ est l'indice de fiabilité à l'instant τ . Nous supposons que le taux de franchissement $\nu(\tau)$ est constant sur l'intervalle $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ car le pas $\Delta\tau$ est très petit. Ainsi, l'équation V.32 devient facilement dérivable par rapport aux variables d'optimisation \mathbf{d} .

$$\frac{\partial P_{f,c}(\tau)}{\partial \mathbf{d}} = \underbrace{\frac{\partial P_{f_i}(\tau)}{\partial \beta(\tau)}}_{A_1} \cdot \underbrace{\frac{\partial \beta(\tau)}{\partial \mathbf{d}}}_{A_2} + \underbrace{\frac{\partial \Phi_2(\beta(\tau), -\beta(\tau + \Delta\tau); \rho)}{\partial \mathbf{d}}}_{A_3} \quad (\text{V.33})$$

où $\beta(\tau + \Delta\tau)$ est l'indice de fiabilité à l'instant $\tau + \Delta\tau$ et ρ est la corrélation entre les deux états limites $G(\tau) > 0$ et $G(\tau + \Delta\tau) \leq 0$. Le terme A_3 représente la dérivée partielle

du taux de franchissement par rapport aux variables d'optimisation \mathbf{d} , elle est obtenue par :

$$A_3 = \frac{\partial \Phi_2(\beta(\tau), -\beta(\tau + \Delta\tau); \rho)}{\partial \beta(\tau)} \cdot \frac{\partial \beta(\tau)}{\partial \mathbf{d}} + \frac{\partial \Phi_2(\beta(\tau), -\beta(\tau + \Delta\tau); \rho)}{\partial \beta(\tau + \Delta\tau)} \cdot \frac{\partial \beta(\tau + \Delta\tau)}{\partial \mathbf{d}} \quad (\text{V.34})$$

Nous supposons que le coefficient de corrélation ρ est constant et par conséquent sa variation par rapport à \mathbf{d} est négligeable. La dérivée $\partial \Phi_2(\cdot)/\partial \beta$ peut être estimée par différences finies. Les termes A_1 et A_2 sont donnés par :

$$A_1 = -\varphi(-\beta(\tau)) \quad (\text{V.35})$$

$$A_2 = \begin{cases} -\frac{1}{\|\nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{u}^*, \tau)\|} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x}, \tau)}{\partial d_i} & \text{si } d_i \text{ est déterministe} \\ \alpha_i(\tau) \left(\frac{\partial T(\mathbf{x}_{d_i})}{\partial d_i} \right) & \text{si } d_i \text{ est une moyenne d'une variable aléatoire} \end{cases}$$

où $\|\nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{u}^*, \tau)\|$ est la norme du gradient de l'état limite $G(\tau)$ dans l'espace standard au point de défaillance le plus probable \mathbf{u}^* , $\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x}, \tau)/\partial d_i$ est la dérivée de la fonction d'état limite $G(\tau)$ dans l'espace physique par rapport à la variable d_i , celle-ci est calculée à chaque itération de la procédure d'optimisation, $T(\mathbf{x}_{d_i})$ est la transformation iso-probabiliste de la variable aléatoire X_{d_i} de moyenne d_i (dans le cas d'une variable aléatoire normale : $\partial T(x_{d_i})/\partial d_i = -1/\sigma_i$, où σ_i est l'écart-type).

V.3.2.2 Calcul de l'indice de fiabilité cible à la conception $\beta_{t=0}^c$

Cette étape consiste à rechercher l'indice cible $\beta_{t=0}^c$ qui permet de calibrer les coefficients de sécurité pour que la fiabilité de la structure à chaque instant t soit supérieure ou égale à $\beta_{t=T_L}^c$, ce dernier correspond à l'indice cible à ne pas atteindre pendant toute la durée de vie de la structure. $\beta_{t=T_L}^c$ est fixé selon la nature de l'ouvrage et par des considérations sociales et économiques. En admettant l'hypothèse que le taux de dégradation est indépendant du niveau de fiabilité à l'état initial.

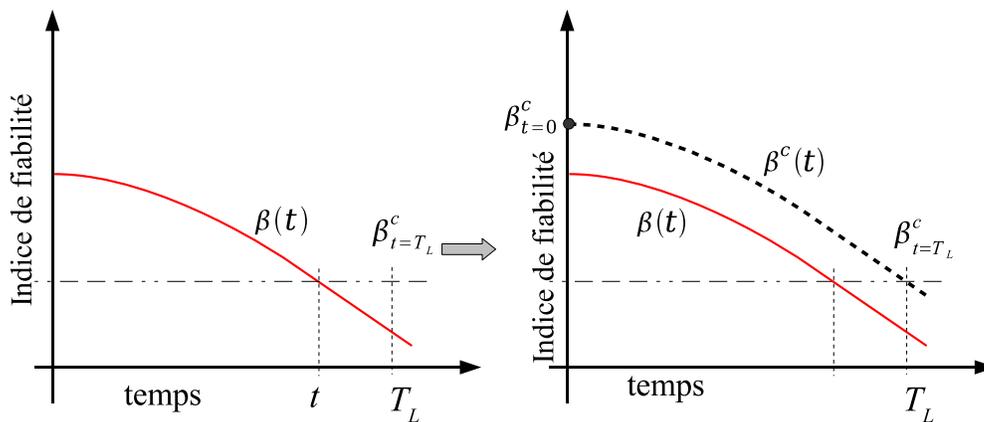


Figure V.6: Principe de calcul de l'indice de fiabilité cible $\beta_{t=0}^c$

Dans ce travail, nous supposons que l'indice de fiabilité cible β^c est aussi fonction du temps. La figure V.6 montre que la courbe de $\beta^c(t)$ peut être déduite directement de la

courbe de $\beta(t)$. Par conséquent, pour avoir un indice de fiabilité $\beta(t)$ qui ne dépasse pas $\beta_{t=T_L}^c$, il faut calibrer les coefficients de sécurité sur la base de $\beta_{t=0}^c$ donnée par la relation suivante :

$$\beta_{t=0}^c = \beta_{t=T_L}^c + \sum_{i=1}^{n+1} (\Phi^{-1}(P_{f,c}(t_{i-1})) - \Phi^{-1}(P_{f,c}(t_i))) \quad (\text{V.36})$$

où n est le nombre de discrétisations de l'espace temporel nécessaire pour effectuer l'analyse de fiabilité dépendant du temps.

La calibration des coefficients de sécurité est effectuée sur la base de $\beta_{t=0}^c$. La procédure proposée dans la section III.4.4 est utilisée. L'organigramme de la figure V.7 présente les étapes principales de la méthode SOTVRA pour le cas d'une seule fonction d'état limite. Toutefois, plusieurs modes de défaillance peuvent être considérés par l'estimation de la fiabilité système dépendant du temps. L'ajout de la procédure proposée pour l'allocation optimale des indices cibles permet d'obtenir l'organigramme complet de SOTVRA

V.4 Optimisation fiabiliste de la maintenance

En raison des différentes dégradations subies par les ouvrages, une stratégie de maintenance est impérative pour le maintien des performances structurales à un niveau acceptable. Cela permet de garantir l'aptitude au service et l'exploitation de la structure pendant toute la durée de vie. Compte tenu des coûts de maintenance, la rentabilité économique des ouvrages dépend fortement de la politique de maintenance choisie.

V.4.1 Stratégies de maintenance

La maintenance des systèmes est composée de maintenance préventive et de maintenance corrective. La maintenance préventive regroupe l'ensemble des actions destinées à ralentir le processus de dégradation et à réduire la probabilité de défaillance. Par exemple, dans le cas des ponts en béton armé, la maintenance préventive peut inclure le renforcement en béton projeté des parties dégradées, la réparation des fissures visibles, les traitements électro-chimiques pour retarder la corrosion et le nettoyage ou la peinture des parties exposées aux dégradations.

Par ailleurs, la maintenance corrective est appliquée lorsque la dégradation atteint un niveau intolérable. Il s'agit de remettre le système en état de fonctionnement. La maintenance corrective peut inclure des réparations plus importantes (e.g. remplacement des éléments structuraux, modification du tablier, ...). Généralement, la maintenance corrective nécessite des inspections avant la réparation. Ces inspections peuvent être visuelles ou effectuées à l'aide des technologies d'auscultation, tels que les techniques de contrôle non-destructif (NDE), des essais dynamiques et les systèmes de télésurveillance.

En effet, une maintenance préventive excessive peut être très coûteuse. En revanche, une maintenance préventive inexistante peut engendrer la défaillance totale du système ou nécessiter une maintenance corrective à son tour très coûteuse.

Le choix des opérations de maintenance est une tâche très complexe, car elle dépend des instants de la maintenance, de sa qualité (i.e. peinture ou nettoyage, inspection vi-

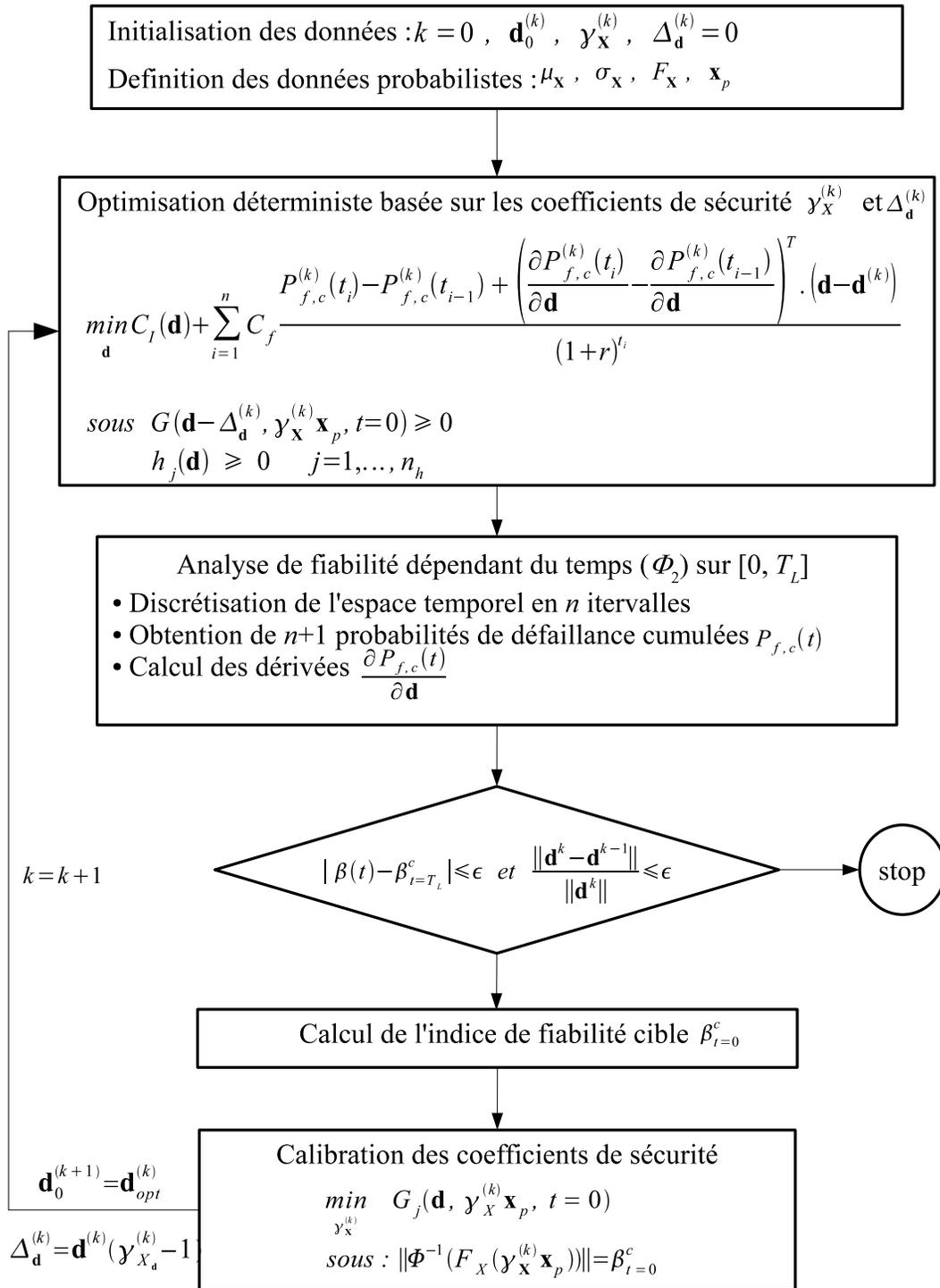


Figure V.7: Organigramme de SOTVRA.

suelle, techniques de surveillance,...) et du degré de réparation du composant dégradé. Généralement, l'hypothèse de la maintenance parfaite est utilisée ; celle-ci considère que chaque maintenance remet le système à l'état neuf. Le système après maintenance est aussi bon que neuf (AGAN : *As Good As new*).

Les variables de décision dans l'optimisation de la maintenance sont souvent :

- les instants de maintenance t_i ou la longueur des intervalles si les instants de maintenance sont réguliers ;
- le nombre d'intervention de maintenance N ;
- la qualité de la maintenance q_i .

La figure V.8 montre un schéma de planning de maintenance, où à chaque instant de maintenance t_i correspond à une qualité de maintenance q_i [136].

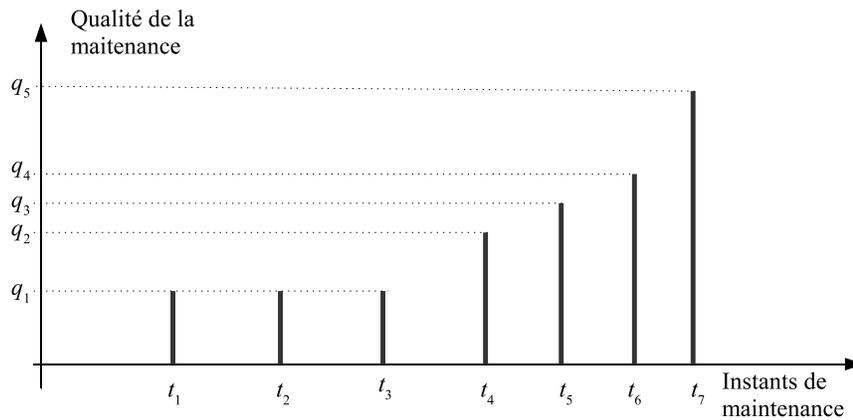


Figure V.8: Schéma d'un planning de maintenance.

V.4.2 Coûts de maintenance

L'espérance des coûts de maintenance est exprimée en fonction des variables de décision $\mathbf{y} = \{t_i, q_i, N\}$ et des variables aléatoires ou/et des processus stochastiques \mathbf{X} . Généralement, les coûts de maintenance sont composés de :

- coût de la maintenance préventive :

$$E[C_{PM}(\mathbf{y}, \mathbf{X})] = \sum_{i=1}^N C_{pm_i}(q_i) \frac{1 - P_{f,c}(t_i)}{(1+r)^{t_i}} \quad (\text{V.37})$$

où C_{PM} est le coût total de la maintenance préventive, C_{pm_i} est le coût de référence de la $i^{\text{ème}}$ maintenance, $P_{f,c}(t_i)$ est la probabilité de défaillance cumulée à l'instant de maintenance t_i , r est le taux d'actualisation. $(1 - P_{f,c}(t_i))$ représente la probabilité qu'à l'instant t_i la structure ne soit pas défaillante.

- coût des inspections :

$$E[C_{IN}(\mathbf{y}, \mathbf{X})] = \sum_{i=1}^N C_{in_i}(q_i) \frac{1 - P_{f,c}(t_i)}{(1+r)^{t_i}} \quad (\text{V.38})$$

où C_{IN} est le coût total des inspections, $C_{in_i}(q_i)$ est le coût de référence de la $i^{\text{ème}}$ inspection

- coût des réparations :

$$E[C_R(\mathbf{y}, \mathbf{X})] = \sum_N^{i=1} C_{r_i}(q_i) \frac{P_{R_i}}{(1+r)^{t_i}} \quad (\text{V.39})$$

où C_R est le coût total des réparations, C_{r_i} est le coût de référence de la réparation suite à la $i^{\text{ème}}$ inspection et P_{R_i} est la probabilité d'effectuer la réparation juste après la $i^{\text{ème}}$ inspection.

V.4.3 Formulation de l'optimisation fiabiliste de la maintenance

La formulation de l'optimisation fiabiliste de la maintenance (RBMO : *Reliability-Based Maintenance Optimization*) vise à minimiser les coûts de maintenance en cherchant la stratégie optimale de maintenance/inspections/ réparations. De nombreux auteurs [137, 138, 136, 134] ont considéré la formulation suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y}} E[C_M] &= E[C_{PM}(\mathbf{y}, \mathbf{X})] + E[C_{IN}(\mathbf{y}, \mathbf{X})] + E[C_R(\mathbf{y}, \mathbf{X})] + E[C_F(\mathbf{y}, \mathbf{X})] \\ \text{sous} &: \begin{cases} \beta(t) \geq \beta_{T_L}^c ; \forall t \in [0, T_L] \\ \dot{h}_j(\mathbf{y}) \geq 0 \quad j = 1, \dots, n_{hp} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{V.40})$$

où $E[C_{PM}]$, $E[C_{IN}]$, $E[C_R]$ et $E[C_F]$ sont respectivement les espérances des coûts de maintenance préventive, d'inspection, de réparation et de défaillance (équations V.37-V.39). L'espérance du coût de défaillance est donnée par l'équation V.28. \dot{h}_j sont des contraintes déterministes ; elles peuvent définir les longueurs maximales et/ou minimales des intervalles de maintenance, tel que : $t_i - t_{i-1} \leq T_{min}$.

La limitation fiabiliste $\beta(t) \geq \beta_{T_L}^c$ du problème de minimisation de l'équation V.40 n'est pas nécessaire car l'estimation de $E[C_F]$ contient la probabilité de défaillance. Toutefois, cette contrainte garantit le niveau minimum de fiabilité et peut accélérer la convergence de la procédure d'optimisation. Le vecteur des variables d'optimisation \mathbf{y} contient les instants de maintenance t_i , la qualité de la maintenance q_i et le nombre d'intervention. La procédure d'optimisation doit être capable de traiter des variables continues et discrètes. Les algorithmes de programmation non linéaire sont inadéquats pour ce problème de minimisation. Pour cela, il souvent utile de fixer au préalable le nombre d'instantants d'intervention N .

V.5 Optimisation fiabiliste de la conception et de la maintenance

Généralement, la procédure d'optimisation de la maintenance exposée ci-dessus est appliquée à des ouvrages existants ou dont le dimensionnement est connu d'avance. Autrement dit, l'optimisation de la conception et de la maintenance est souvent pratiquée séquentiellement en deux étapes distinctes. La première étape utilise l'optimisation fiabiliste de la conception (RBDO) pour définir le dimensionnement optimal de la structure et la deuxième étape vise à trouver la stratégie optimale de maintenance par la RBMO.

La démarche séquentielle ne peut pas assurer l'optimum de la conception et de la maintenance, car les coûts de défaillance sont intégrés dans les deux formulations. En d'autres termes, les coûts de défaillance sont équilibrés par le coût initial dans la première étape, puis par les coûts de la maintenance dans la deuxième étape. Cela est contradictoire car le poids des coûts de défaillance doit être le même pour la conception et pour la maintenance. De plus, l'influence de la conception sur la maintenance ne peut pas être négligée.

L'approche rationnelle consiste à coupler les deux étapes pour trouver simultanément la conception et la stratégie de maintenance optimales. Il existe peu de travaux qui ont couplé l'optimisation de la conception et de la maintenance. *Santander* et *Sanchez-Silva* [139] ont combiné les deux étapes en intégrant directement le coût de maintenance dans la formulation proposée par *Rackwitz* [140] pour la TV-RBDO. Ces auteurs ont modélisé le taux de franchissement $\nu(t)$ par un processus de Poisson. Le coût total est défini en fonction des différents coûts et de l'intensité du processus directement liée au taux de franchissement. Cette formulation maximise la fonction d'utilité sur la base de la théorie de renouvellement (*renewal theory*). L'hypothèse de la reconstruction systématique de la structure après la défaillance (i.e. systèmes réparables) justifie l'utilisation de cette théorie.

La formulation du problème couplé est définie par la minimisation de l'espérance du coût total. L'expression générale de la fonction du coût total est :

$$E[C_T] = E[C_I] + E[C_{PM}] + E[C_{IN}] + E[C_R] + E[C_D] + E[C_U] + E[C_F] \quad (\text{V.41})$$

où $E[C_U]$ et $E[C_D]$ sont respectivement les coûts d'utilisation et le coût de démantèlement et de recyclage de l'ouvrage en fin de vie. Dans notre travail, nous nous limitons aux coûts de construction, de maintenance préventive et de défaillance. La formulation classique de minimisation du coût total (RBLCCO : *Reliability-Based Life Cycle Cost Optimization*) est donnée par :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \mathbf{y}} E[C_T] &= C_I(\mathbf{d}) + E[C_{PM}(\mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{X})] + E[C_F(\mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{X})] & (\text{V.42}) \\ \text{sous} \quad &: \begin{cases} \beta(t) \geq \beta_{TL}^c ; \forall t \in [0, T_L] \\ h_i(\mathbf{d}) \geq 0 \quad i = 1, \dots, n_h \\ \dot{h}_j(\mathbf{y}) \geq 0 \quad j = 1 + n_h, \dots, n_h + n_{hp} \end{cases} \end{aligned}$$

Cette formulation est utilisée pour coupler l'optimisation de la conception et de la maintenance. Dans ce qui suit nous présentons quelques applications pour la validation de la méthode SOTVRA. L'intérêt d'une procédure couplée pour l'optimisation de la conception et de maintenance est mis en évidence à travers l'application sur un pipeline.

V.6 Exemples et validation

La première application concerne la validation de la méthode Φ_2 pour l'optimisation fiabiliste dépendant du temps. Le modèle analytique nous a permis de comparer les résultats de la méthode Φ_2 à ceux obtenus par la formule de *Rice*.

La deuxième application concerne la validation de la méthode proposée SOTVRA sur une application Génie Civil. Une poutre en béton armé est optimisée en considérant la dégradation de sa capacité portante due à la corrosion des armatures.

Finale­ment, la dernière partie concerne l'opti­misation de la conception et de la main­tenance (RBLCCO), au moyen de l'opti­misation du coût total d'un pipeline. L'inté­rêt de cet exemple réside dans le fait que le problème contient deux variables d'opti­misation, l'épaisseur initiale du pipeline et l'intervalle entre les interventions de main­tenance. Ainsi, les fonctions des différents coûts peuvent être tracées et interprétées.

V.6.1 Validation de la méthode Φ_2

L'analyse de fiabilité dépendant du temps est réalisée sur la fonction d'état limite suivante :

$$G(\mathbf{X}(\omega, t), t) = R(\omega) - \delta t - S(\omega, t) \quad (\text{V.43})$$

où $R(\omega)$ est une variable normale de moyenne $\mu_R = 24$ et de coefficient de variation 0,2, $S(\omega, t)$ est un processus stochastique Gaussien de moyenne $\mu_S = 18$ et de coefficient de variation 0,25. Le paramètre de dégradation δ est déterministe pris égal à 0,15. La fonction d'autocorrélation du processus est : $\exp[-(t_1 - t_2/L_c)^2]$. Trois valeurs de la longueur d'autocorrélation L_c sont testées : 1, 0,1 et 0,01. Le taux de franchissement calculé par la méthode Φ_2 (équation V.18) est comparé à celui obtenu par la formule de *Rice* (équation V.11).

Les figures V.9 montre l'influence du pas de discrétisation Δt sur les résultats de la méthode Φ_2 . Un pas de $0,1L_c$ permet d'obtenir des résultats satisfaisants. Toutefois, la méthode Φ_2 exige un pas très petit lorsque la longueur de corrélation est inférieure à 0,01, cela se fait au détriment de l'efficacité. Le tableau V.1 montre que lorsque le pas de discrétisation est de 10^{-3} un temps de calcul considérable est nécessaire.

L'utilisation de la méthode Φ_2 dans une formulation à deux-niveaux de la TV-RBDO peut rendre la procédure d'optimisation impraticable, surtout lorsque $L_c \leq 1$ et l'intervalle de la durée de vie est assez large (e.g. $T_L = 100$ ans). Toutefois, l'approche Φ_2 peut être adoptée dans une procédure découpée telle que l'approche SOTVRA.

Δt	$L_c = 1$	$L_c = 0,1$	$L_c = 0,01$
Δt^a	0,6 s	6,4 s	97 s
Δt^b	0,2 s	2,2 s	14 s
Δt^c	0,1 s	1,2 s	6,4 s

$\Delta t^a < \Delta t^b < \Delta t^c$

Tableau V.1: Temps de calcul CPU de la méthode Φ_2 .

V.6.2 Poutre en béton armé soumise à la corrosion des armatures

La corrosion des armatures provoquée par la pénétration de chlorure est l'un des mécanismes de dégradation les plus importants pour les structures en béton armé. La détérioration peut affecter le béton armé sur deux plans : au niveau de la surface du béton et au niveau de la réduction de la capacité portante de l'ouvrage et de l'altération des caractéristiques mécaniques de l'acier.

Au niveau de la surface du béton, les produits de corrosion (la rouille) provoquent des pressions internes car la masse volumique de la rouille est inférieure à celle de l'acier.

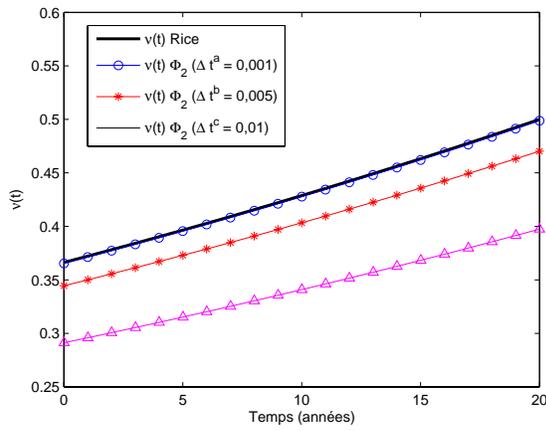
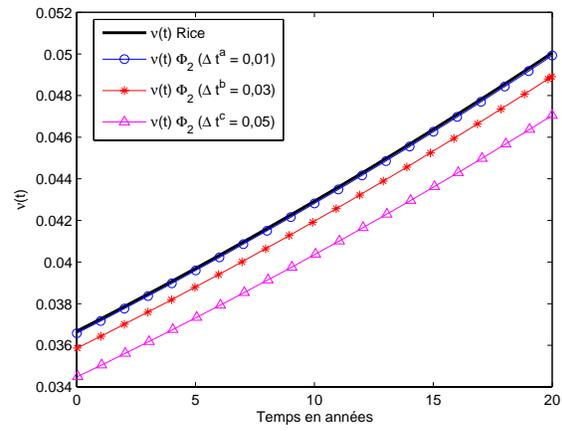
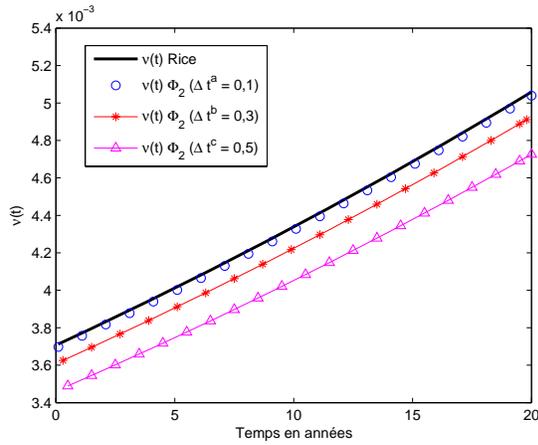
a) $L_c = 0,01$ b) $L_c = 0,1$ c) $L_c = 1$

Figure V.9: a), b) et c) Influence de Δt sur le taux de franchissements $\nu(t)$.

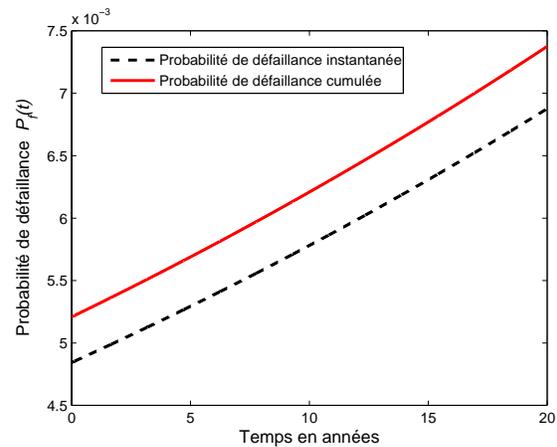


Figure V.10: Probabilités de défaillance cumulée et instantanée.

Ces pressions internes provoquent la formation de fissures au niveau des armatures qui se propagent jusqu'à la surface. L'augmentation de la rouille mène vers l'éclatement du béton et la mise à nu des armatures.

Au niveau structural, la perte de section de l'acier provoque la réduction de la capacité portante de l'ouvrage. De plus, la ductilité de l'acier semble être réduite lorsque celui-ci est fortement corrodé [141].

L'objectif de cette application est de proposer un dimensionnement optimal d'une poutre en béton armé (figure V.11) en considérant la corrosion des armatures longitudinales. En d'autres termes, ce dimensionnement doit vérifier le niveau de fiabilité cible durant toute la durée de vie souhaitée de 50 ans. Pour cela, l'approche classique de la TV-RBDO et la méthode proposée SOTVRA sont utilisées.

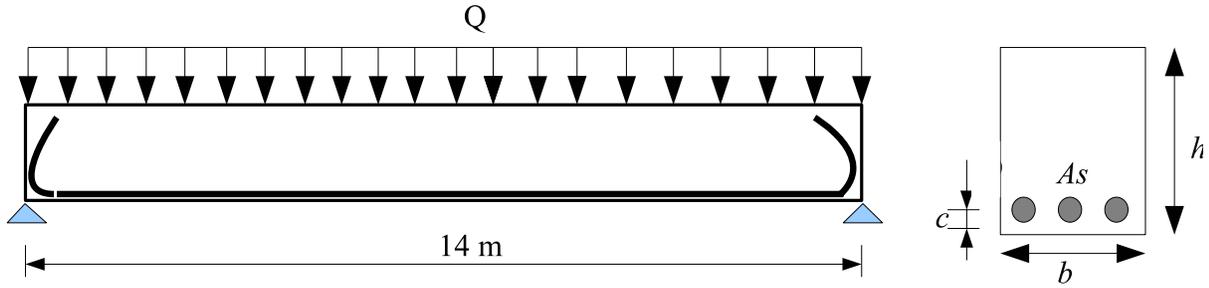


Figure V.11: Poutre isostatique de section rectangulaire.

V.6.2.1 Modèle mécanique de la corrosion des armatures

Le modèle de la corrosion des armatures proposé par *Stewart et al* [142] est adopté dans cette étude. Ce modèle repose sur la deuxième loi de *Fick*, qui permet de décrire la diffusion de chlorure dans le liquide interstitiel.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_{cl} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (\text{V.44})$$

où C est la concentration de chlorure et D_{cl} est le coefficient de diffusion des ions de chlorure dans le matériau. Les hypothèses suivantes sont utilisées pour résoudre cette équation différentielle : **a)** le milieu est isotrope et semi-infini ; **b)** le coefficient de diffusion est indépendant du temps et de l'espace **c)** la concentration de chlorure à la surface est constante et la concentration de chlorure dans le béton à l'instant $t = 0$ est nulle. La solution de l'équation V.44 sous ces hypothèses est :

$$C(x, t) = C_s \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{D_{cl}t}} \right) \right] \quad (\text{V.45})$$

où C_s et $C(x, t)$ sont respectivement la concentration de chlorure à la surface et à une profondeur x à un instant t , $\operatorname{erf}(\cdot)$ est la fonction d'erreur. La corrosion est initiée lorsque la concentration de chlorure atteint la concentration seuil C_{th} provoquant la dépassement des armatures. Le temps d'initiation à la corrosion est donné par :

$$\tau_{ini} = \frac{c^2 \left[\operatorname{erf}^{-1} \left(1 - \frac{C_{th}}{C_s} \right) \right]^2}{4D_{cl}} \quad (\text{V.46})$$

où c est l'enrobage en mm . D'une façon générale, le mécanisme de corrosion est décomposé en deux phases distinctes. La première est l'initiation de la corrosion (le chlorure entre dans le béton et la teneur de cet agent dépasse un seuil critique). La deuxième étape concerne la croissance de la corrosion des armatures. La figure V.12 montre ces deux étapes. D'après ce modèle, la réduction de la section des armatures commence juste après le temps d'initiation de la corrosion τ_{ini} . Cette réduction peut être estimée en considérant une corrosion uniforme ou une corrosion par piqûres (figure V.13). En réalité, la corrosion par pénétration de chlorure est mieux représentée par une corrosion par piqûres. Pour les deux modélisations, la réduction du diamètre de la barre d'acier est donnée par les expressions suivantes [143] :

- Corrosion uniforme

$$\phi_u(\tau) = \begin{cases} \phi_0 & \text{si } \tau < \tau_{ini} \\ \phi_0 - 0,0232 \int_{\tau_{ini}}^{\tau} i_{corr} d\tau & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{V.47})$$

où ϕ_0 est le diamètre initial de la barre et i_{corr} est le taux de corrosion (supposé constant) appelé aussi intensité du courant de corrosion.

- Corrosion par piqûres

$$\phi_u(\tau) = \begin{cases} \phi_0 & \text{si } \tau < \tau_{ini} \\ \phi_0 - 0,0116 \alpha \int_{\tau_{ini}}^{\tau} i_{corr} d\tau & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{V.48})$$

où α correspond au rapport de profondeur d'acier corrodé par piqûres et par corrosion uniforme.

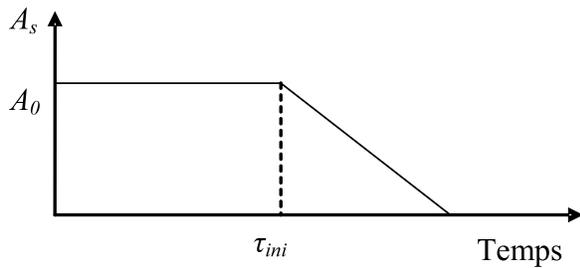


Figure V.12: Temps d'initiation à la corrosion.

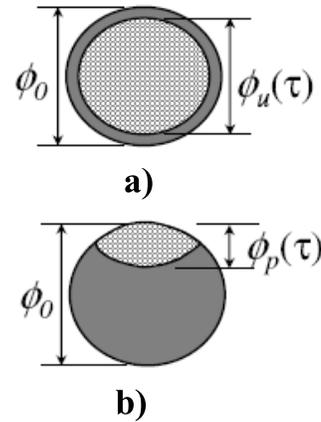


Figure V.13: a) Corrosion uniforme et b) corrosion par piqûres.

L'intensité du courant de corrosion est liée à la vitesse de corrosion qui représente la quantité du métal dissoute pendant un temps unitaire, sur une aire unitaire, à la frontière entre l'acier et le béton. La loi de *Faraday* montre qu'une vitesse de corrosion de $1\mu m/an$ correspond à une intensité de courant de corrosion égale à $0,1 \mu.A/cm^2$. L'expression $0,0116 \alpha \int_{\tau_{ini}}^{\tau} i_{corr} d\tau$ traduit le taux de corrosion en mm/an . La figure V.14 présente une classification de l'agressivité de la corrosion en fonction du courant de corrosion i_{coor} [144].

V.6.2.2 Modèle probabiliste

Le modèle probabiliste est couplé avec le modèle mécanique de corrosion afin de prédire la fiabilité structurale pendant la durée de vie. La fonction d'état limite est définie par la résistance à la flexion de la poutre. Le moment ultime en fonction du temps est donné par :

$$M_u(t) = A_s(t) f_y (h - c) \left(1 - \frac{0,59 A_s(t) f_y}{b (h - c) f_c} \right) \quad (\text{V.49})$$

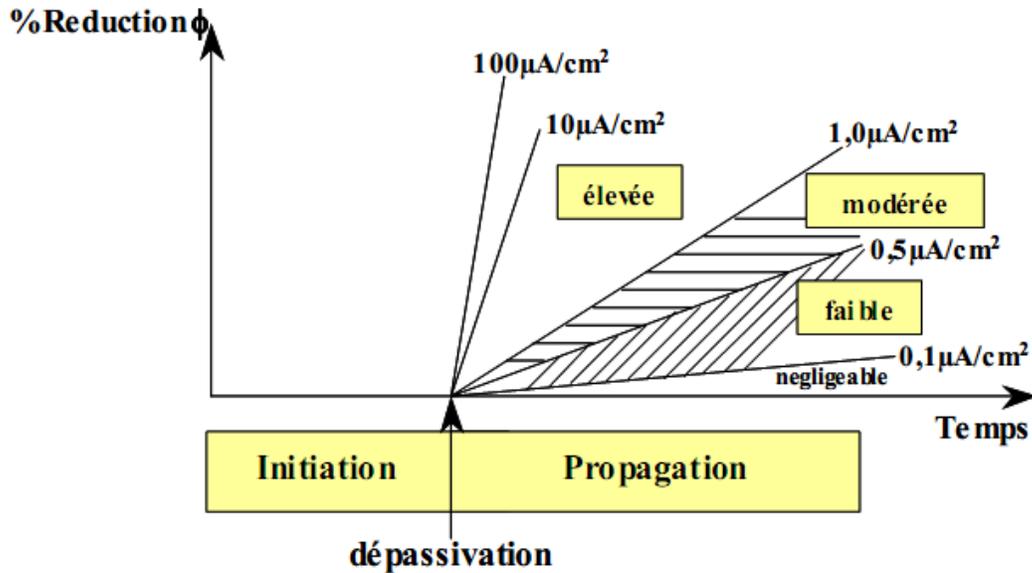


Figure V.14: Agressivité de la corrosion en fonction du taux de corrosion i_{cor} [144].

où h est la hauteur de la section de la poutre, c est l'enrobage, f_y et f_c sont respectivement la résistance en traction de l'acier et la résistance en compression du béton, $A_s(t)$ est la section des armatures longitudinales, elle est déterminée en utilisant le modèle de corrosion exposé ci-dessus. La fonction d'état limite peut s'écrire par :

$$G(\mathbf{d}, \mathbf{x}, t) = M_u(\mathbf{d}, \mathbf{x}, t) - M_a(\omega, t) \quad (\text{V.50})$$

où \mathbf{d} est le vecteur des variables d'optimisation et \mathbf{X} le vecteur des variables aléatoires et $M_a(\omega, t)$ est le moment appliqué. Le tableau V.2 présente les caractéristiques statistiques des variables aléatoires du modèle de corrosion et des propriétés mécaniques des matériaux.

Les moyennes des dimensions géométriques μ_h , μ_b , μ_{A_s} et μ_c sont des variables d'optimisation. Le moment appliqué est un processus Gaussien de moyenne $\mu_{M_a} = 441$ kN.m et de coefficient de variation de 0,25. La fonction d'autocorrélation de ce processus stochastique est définie par l'équation V.9 et la longueur de corrélation est d'une année $L_c = 1$.

V.6.2.3 Dimensionnement optimal de la poutre

Les approches d'optimisation fiabiliste TV-RBDO et SOTVRA sont appliquées pour définir les dimensions optimales de la section : hauteur h , largeur b , section des armatures A_s et enrobage c . Les valeurs initiales $\mu_{\mathbf{d}}^0$ et les bornes supérieures $\mu_{\mathbf{d}}^{UB}$ et inférieures $\mu_{\mathbf{d}}^{LB}$ des variables d'optimisation sont détaillées dans le tableau V.3. La conception recherchée doit satisfaire l'exigence de fiabilité définie par l'indice de fiabilité cible à 50 ans $\beta_{t=50 \text{ ans}}^c = 3,80$. L'analyse de fiabilité dépendant du temps est effectuée par un pas de temps de 0,1 L_c ; cette valeur permet de garantir une bonne précision. Le taux d'actualisation r est fixé à 1% et le coût de défaillance est pris égal à $100 \times C_I$, où C_I est le coût initial de la poutre estimé à partir du coût d'acier, de béton et de la mise en œuvre.

Les résultats du tableau V.4 montrent la validité des approximations utilisées dans SOTVRA. L'approximation proposée dans l'équation V.31 pour l'espérance des coûts

Variable et l'unité	Moyenne	CV	Distribution
Propriétés mécaniques des matériaux			
f_c (MPa)	30	0,15	Lognormale
f_y (MPa)	500	0,10	Lognormale
Paramètres du modèle de corrosion [143]			
C_{th}	0,37	0,04	Lognormale
C_s	2	0,60	Lognormale
D_{cl} (cm ² /s)	$1,62 \cdot 10^{-8}$	0,30	Lognormale
i_{cor} (μ A/cm ²)	2	0,30	Lognormale
α	5,65	0,22	Gumbel
Paramètres géométriques			
h (cm)	μ_h	0,03	Normale
b (cm)	μ_b	0,03	Normale
A_s (cm ²)	μ_{A_s}	0,03	Normale
c (cm)	μ_c	0,03	Normale

Tableau V.2: Description statistique des variables aléatoires

de défaillance donne presque le même résultat que le calcul exact effectué par la TV-RBDO. Cette approximation s'appuie sur les résultats de l'analyse de fiabilité dépendant du temps réalisée à chaque cycle d'optimisation. De plus, elle devient de plus en plus précise au voisinage de l'optimum. L'approche SOTVRA converge vers une solution voisine de l'optimum de l'approche classique TV-RBDO.

La figure V.16 présente les profils de l'indice de fiabilité en fonction du temps. La solution de la SOTVRA est plus robuste que celle de la TV-RBDO, elle est légèrement plus coûteuse de 0,36%. Cependant, la pente de l'indice de fiabilité $\beta(t)$ dans la solution de la SOTVRA est plus prononcée que celle de la TV-RBDO. Cela s'explique par le fait que le choix de dimensionnement de la SOTVRA consiste à augmenter la section du béton seul et de réduire la section des armatures.

μ_d	μ_d^0	μ_d^{LB}	μ_d^{UB}
μ_h (cm)	80	20	120
μ_b (cm)	60	20	120
μ_{A_s} (cm ²)	48	8	160
	$6\phi32$	$1\phi32$	$20\phi32$
c (cm)	4	3	5

Tableau V.3: Description des variables d'optimisation

Un autre aspect important qui a fait l'objet du développement de l'approche SOTVRA est le gain en temps de calcul. Cette application montre l'efficacité de l'approche SOTVRA et l'intérêt de découpler l'analyse de fiabilité dépendant du temps de la procédure d'optimisation. La méthode TV-RBDO est très consommatrice en temps de calcul car elle est basée sur une formulation à deux niveaux. De plus, la fonction objectif nécessite une analyse de fiabilité dépendant du temps pour l'estimation des coûts de défaillance. Le calcul des gradients exige un temps de calcul considérable pour chaque analyse de fiabilité,

surtout lorsque le pas de temps est très petit ($\leq 0,1L_c$).

L'avantage de la méthode proposée réside ainsi dans l'utilisation de l'optimisation déterministe, où le calcul des sensibilités est plus aisé. L'optimum est obtenu après 4 cycles d'optimisation et d'analyse de fiabilité. De plus, cette méthode permet d'obtenir une précision satisfaisante pour un coût de calcul qui l'est également. L'effort de calcul économisé par SOTVRA représente 96% par rapport à celui exigé par la TV-RBDO.

	h (cm)	b (cm)	As (cm ²)	c (cm)	$E[C_T]$ (k€)	$E[C_f]$ (€)	C_I (k€)	$\beta(t = 50)$	CPU (s)
TV-RBDO	66,1	49,5	91,34	3	3,69	16,57	3,67	3,80	603
SOTVRA	68,4	51,3	85,82	3	3,70	16,82	3,68	3,80	21

Tableau V.4: Conceptions optimales et résultats de l'optimisation.

Le tableau V.5 indique les valeurs des coefficients de sécurité calibrés pour l'optimisation de la poutre par SOTVRA. Ces coefficients sont appliqués aux valeurs médianes des variables aléatoires M_a , f_c et f_y . Ces coefficients sont calibrés à l'instant $t = 0$ sur la base de l'indice de fiabilité cible $\beta_{t=0}^c = 4,4$, qui peut être déduit de la figure V.15. Les valeurs nominales des variables d'optimisation peuvent être considérées comme des valeurs de tolérance des dimensions géométriques. L'enrobage c est pris à sa valeur limite de 3 cm. La sensibilité de l'enrobage c joue un rôle moins prépondérant dans la fiabilité que les sensibilités des autres variables.

$\gamma = X_d/X_{50\%}$	M_a	f_c	f_y	Δ_h (cm)	Δ_b (cm)	Δ_{As} (cm ²)	Δ_c (cm)
	1,91	0,84	0,81	2,37	0,34	1,62	-0,004

Tableau V.5: Coefficients de sécurité de la SOTVRA

$\beta^c(t = 50 \text{ ans})$	h	b	As	c	$E[C_T]$ (k€)	$E[C_f]$ (€)	C_I (k€)	$\beta^c(t = 0)$
3,8	68,4	51,3	85,82	3	5,39	1707,71	3,68	4,40
4,0	69,2	51,8	87,52	3	4,51	765,90	3,75	4,61
4,2	70,0	52,5	89,35	3	4,14	329,81	3,81	4,83
4,4	70,8	53,1	91,12	3	4,02	139,88	3,88	5,04
4,6	71,6	53,7	93,00	3	4,00	56,03	3,94	5,25
4,8	72,4	54,3	94,89	3	4,03	21,68	4,01	5,47
5,0	73,2	54,9	96,89	3	4,09	8,02	4,08	5,69
5,2	74	55,5	98,91	3	4,16	2,88	4,15	5,92
5,5	75,9	57	104,59	3	4,33	0,57	4,33	6,47
6,0	80,4	60,3	116,62	3	4,74	0,03	4,74	7,65

Tableau V.6: Conceptions optimales correspondantes aux indices cibles lorsque $C_f = 10^4 \cdot C_I$

Pour étudier l'influence des conséquences de défaillance sur la solution optimale, nous avons utilisé la méthode SOTVRA pour dimensionner la même poutre lorsque le rapport entre le coût de défaillance est le coût initial est égal à 10^4 . Pour cela, plusieurs indices cibles à l'âge de 50 ans sont étudiés, à savoir de 3,8 jusqu'à 6 par pas de 0,1. La figure V.17 montre que l'optimum minimal de la fonction du coût total est obtenu pour un indice cible

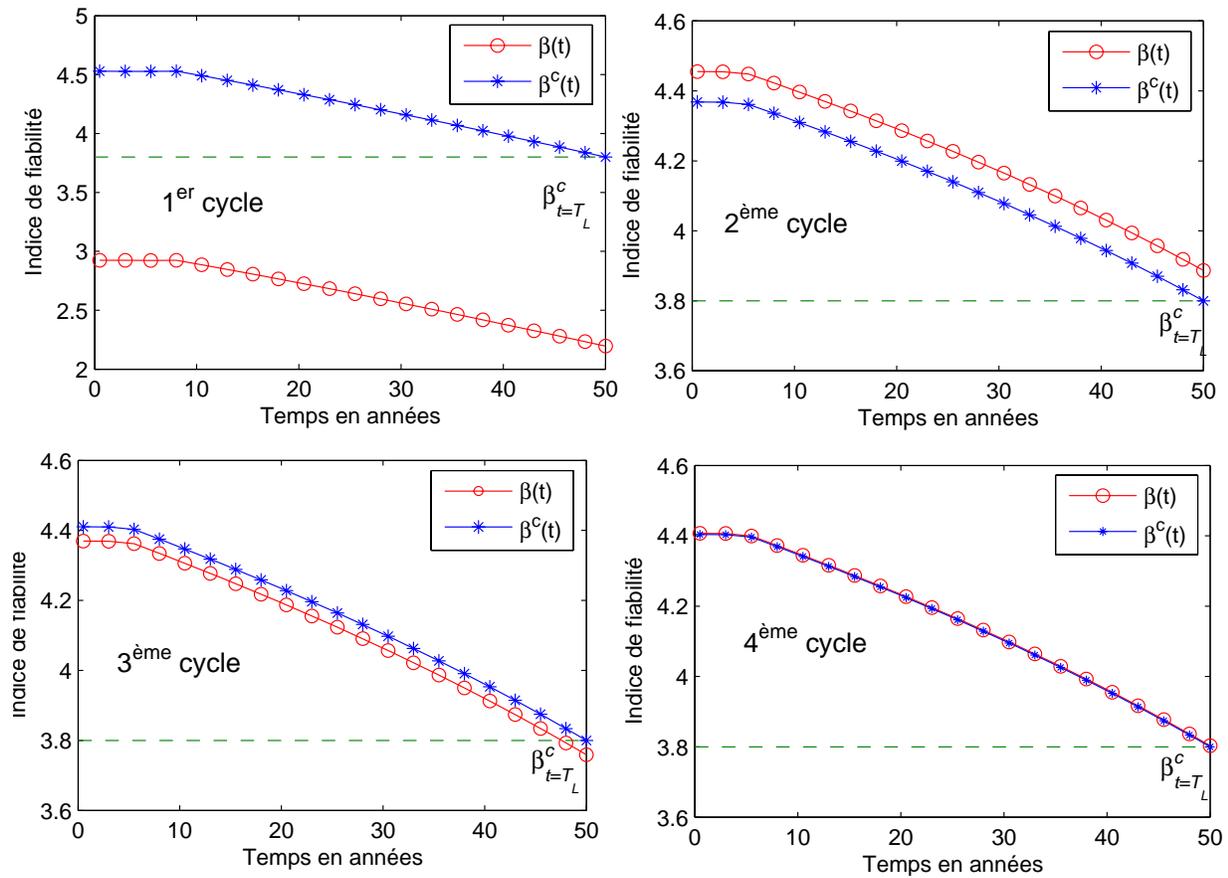


Figure V.15: Profils de l'indice de fiabilité $\beta(t)$ et de la cible $\beta^c(t)$.

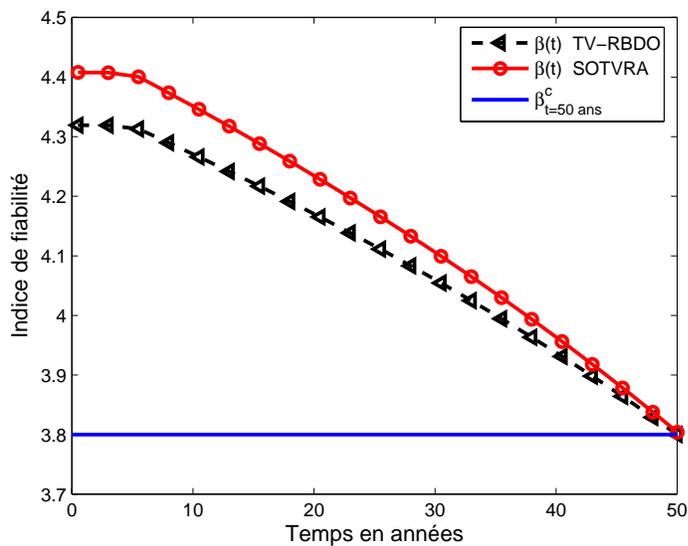


Figure V.16: Indice de fiabilité $\beta(t)$ des deux conceptions optimales.

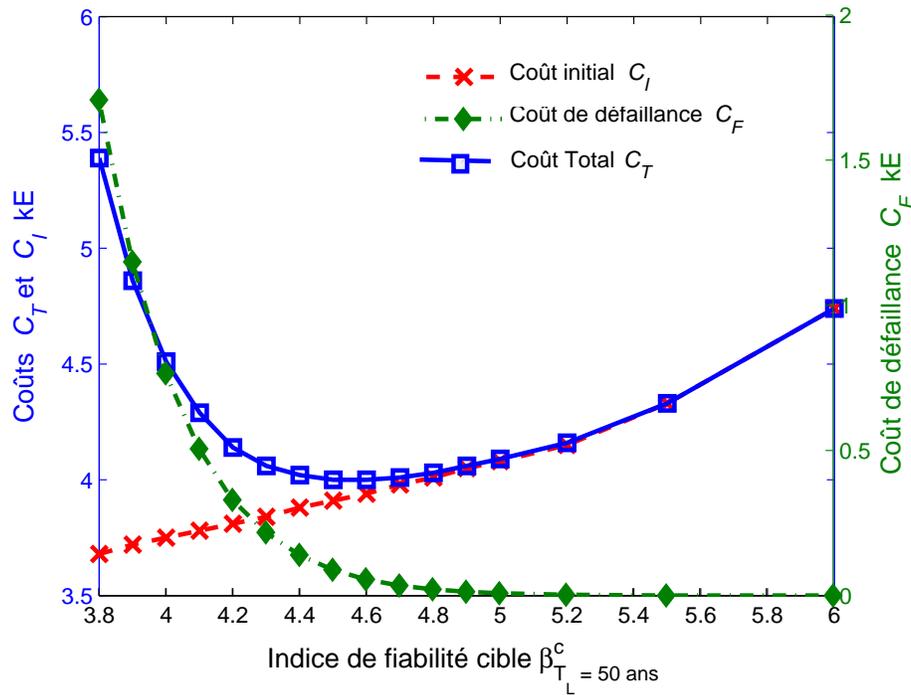


Figure V.17: Évolution du coût total en fonction de l'indice cible.

compris entre 4,5 et 4,6. Cet indice représente le niveau optimum de fiabilité vérifiant l'équilibre entre le coût initial et le coût de défaillance. Le tableau V.6 donne les conceptions optimales correspondantes aux différents indices cibles. La conception optimale (en gras dans le tableau V.6) est celle qui minimise la fonction du coût total. Finalement, le choix de l'indice cible doit être judicieux, car un indice cible élevé correspondant à une très petite probabilité de défaillance conduit à un coût initial important, toutefois un indice cible bas conduit à un coût de défaillance élevé. La recherche du niveau optimum de fiabilité peut être facilement automatisée dans l'approche SOTVRA.

V.6.3 Optimisation de la conception et de la maintenance d'un pipeline

Cette application vise à montrer l'intérêt d'intégrer l'optimisation de la maintenance dans le processus de conception. Le pipeline est optimisé par trois approches différentes :

- **a)** optimisation fiabiliste dépendant du temps (TV-RBDO) sans maintenance ;
- **b)** optimisation fiabiliste indépendante du temps (RBDO) suivie par l'optimisation de la maintenance (approche séquentielle) ;
- **c)** optimisation de la conception et de la maintenance (approche couplée).

Le modèle de dégradation est celui d'une corrosion uniforme du pipeline [145] modélisée par :

$$e_c = k t^n \quad (\text{V.51})$$

où k et n sont les coefficients du modèle de corrosion, e_c est la couche corrodée du pipeline à l'instant t , où t est en années. Le modèle mécanique est simplifié en ne considérant que des contraintes circonférentielles σ_c et longitudinales σ_l , la fonction d'état limite s'écrit :

$$G(\mathbf{x}, t) = f_y - \sqrt{\sigma_c^2 + \sigma_l^2 - \sigma_c \sigma_l} \quad (\text{V.52})$$

tel que :

$$\sigma_c = \frac{PR_i}{e - k t^n}$$

$$\sigma_l = \frac{\nu PR_i}{e - k t^n}$$

où f_y est la limite d'élasticité de l'acier, e est l'épaisseur initiale du pipeline, P est la pression interne de service, ν est le coefficient de poisson et R_i est le rayon intérieur du pipeline. Les caractéristiques statistiques sont détaillées dans le tableau V.7

Description de la variable et notation	Moyenne	CV	Distribution
Pression interne P (MPa)	20	0,20	Normale
Limite d'élasticité f_y (MPa)	475	0,10	Lognormale
Rayon intérieur du pipeline R_i (mm)	97,3	0,01	Normale
Coefficient de poisson μ	0,2	0,05	Normale
Coefficient k	0,066	0,53	Normale
Coefficient n	0,53	0,26	Normale

Tableau V.7: Données statistiques du pipeline.

V.6.3.1 Optimisation de la conception par TV-RBDO

Les approches fiabilistes SOTVRA et TV-RBDO sont utilisées pour trouver l'épaisseur optimale du pipeline. Dans cette étude, nous avons utilisé la formulation TV-RBDO sans limitation fiabiliste.

$$\min_e E[C_T(e, \mathbf{X}, t)] = C_I(e) + E[C_F(e, \mathbf{X}, t)] \quad (\text{V.53})$$

Dans SOTVRA une probabilité de défaillance admissible doit être fixée, cette probabilité est définie par 10^{-5} après 50 ans de service. La fonction du coût initial est donnée par :

$$C_I = \rho\pi ((R_i + e)^2 - R_i^2) L c_i \quad (\text{V.54})$$

où L est la longueur du pipeline prise égale à l'unité (1m) et c_i est le coût unitaire du pipeline pris égal à 1000 €/m³ (en 1999 le coût de fabrication d'un pipeline de gaz au USA est estimé à 746 000 \$/km, incluant la fabrication, le transport, la mise en œuvre, les études d'ingénieries,...)¹. Le coût de défaillance est proportionnel au coût de référence : $10^4 \times C_R$, où $C_R = 48,74 \text{ k€}/m$ est le coût de référence correspondant à une épaisseur initiale du pipeline de 10 mm. Tous les coûts sont exprimés en unité monétaire par unité de longueur (€/m). Le taux d'actualisation (*discount rate*) est pris égal à 1%.

1. <http://www.corrosioncost.com>

Approches	e mm	C_T k€/m	C_I k€/m	C_F k€/m	$\beta(t = 50 \text{ ans})$
TV-RBDO ^{SL}	12,18	65,85	5,76	60,05	4,126
SOTVRA $\beta^c = 4,27$	12,86	66,79	3,15	63,64	4,262
SOTVRA $\beta^{c^*} = 4,13$	12,20	65,94	5,65	60,17	4,131

TV-RBDO^{SL} : sans limitation fiabiliste

Tableau V.8: Épaisseur optimale du pipeline.

La figure V.19 montre qu'il existe un niveau optimum de fiabilité permettant de minimiser la fonction du coût total avec l'approche TV-RBDO sans limitation fiabiliste, correspondant à une probabilité de défaillance à 50 ans de $P_f(t = 50 \text{ ans}) = 1,84 \cdot 10^{-5}$ ($\beta(t = 50 \text{ ans}) = 4,13$). Ce niveau optimum de fiabilité produit l'équilibre entre le coût initial et le coût de défaillance conduisant à une épaisseur initiale de 12,18 mm (figure V.18). La méthode SOTVRA exige la valeur cible de la probabilité de défaillance. L'épaisseur initiale de 12,86 mm obtenu par SOTVRA correspond au niveau de fiabilité cible défini par une probabilité de défaillance admissible de 10^{-5} . Toutefois, la dernière ligne du tableau V.8 montre que pour un indice de fiabilité cible de 4,13 correspondant au niveau optimum de fiabilité, SOTVRA donne une l'épaisseur optimale de 12,20 mm proche de celle de la TV-RBDO^{SL}.

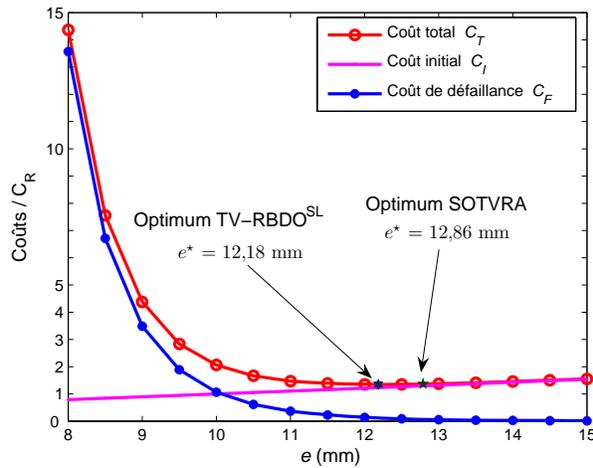
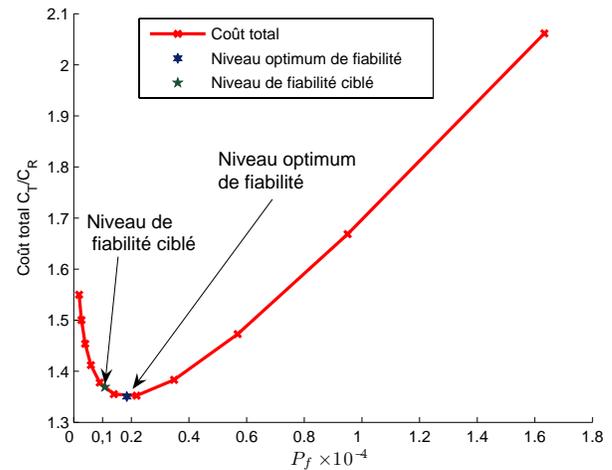
Figure V.18: Coûts en fonction de l'épaisseur initiale e .

Figure V.19: Niveau optimum de fiabilité.

Cependant, l'existence du niveau optimum de fiabilité n'est pas trivial, c'est pour cette raison que les limitations fiabilistes sont souvent nécessaires dans la formulation classique de la TV-RBDO. La figure V.20 présente les profils de la probabilité de défaillance des solutions optimales. Les approches de la TV-RBDO (SOTVRA et TV-RBDO^{SL}) proposent des épaisseurs initiales permettant à la structure de résister jusqu'à 50 ans sans intervention de maintenance.

V.6.3.2 Approche séquentielle (RBMO)

L'approche séquentielle consiste à séparer l'optimisation de la maintenance de celle de la conception. L'épaisseur optimale du pipeline est calculée par une approche de la RBDO indépendante du temps. Ensuite l'optimisation de la maintenance est appliquée pour trouver la meilleure stratégie de maintenance. Dans notre étude, nous considérons que la maintenance préventive, la technique de maintenance consiste à mettre une couche de revêtement sur le pipeline, cette couche est destinée à retarder la corrosion. Les segments endommagés du pipeline sont remplacés. Ainsi, les performances structurales sont rétablies à leur niveau initial sous l'hypothèse d'une maintenance parfaite (AGAN). La seule variable de décision est la longueur de l'intervalle des interventions de maintenance, notée a (en années). Le coût de référence d'une intervention de maintenance est fixé à $0,1 \times C_R$ correspondant à un coût de 4875 €/m par opération. Le coût de défaillance est fixé à $10^4 \times C_R$. Nous supposons que les coûts dus à la mise en arrêt de l'ouvrage ou à la réduction de la production, tel que la diminution de la pression interne du pipeline sont inclus dans le coût de défaillance. L'équation V.40 est minimisée sans limitation fiabiliste.

L'épaisseur optimale obtenue par la RBDO est 8,48 mm correspondant à une probabilité de défaillance instantanée de $2,11 \cdot 10^{-6}$ à $t = 0$, où à un indice de fiabilité de 4,6. Le coût de construction correspondant est 41,64 k€/m. La figure V.21 montre que la fonction du coût total de maintenance admet un optimum pour une longueur d'intervalle $a = 15,5$ ans. La figure V.22 présente l'évolution de l'indice de fiabilité en fonction du temps en tenant compte des interventions de maintenance. Nous remarquons à travers la figure V.22 que la limitation fiabiliste est inutile dans ce problème car l'indice de fiabilité est toujours supérieur à 4,20.

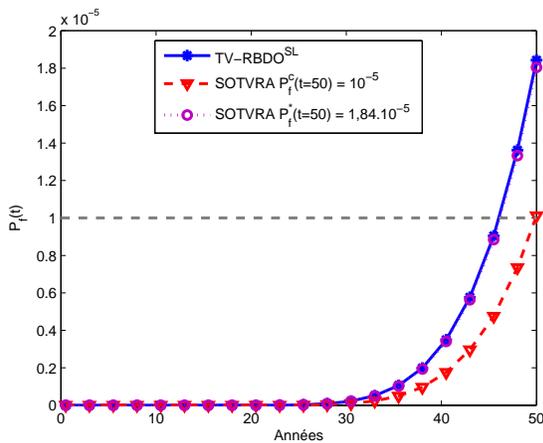


Figure V.20: $P_f(t)$ des conceptions optimales de TV-RBDO.

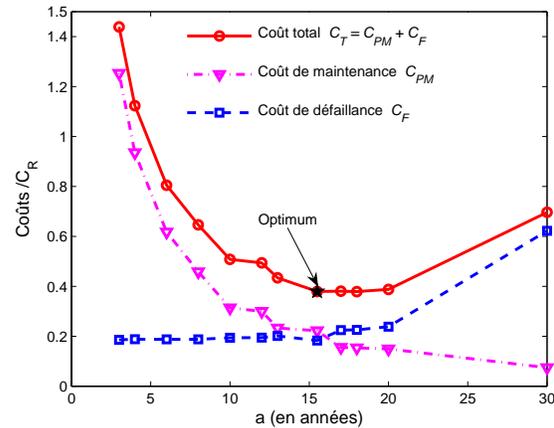


Figure V.21: Coûts en fonction de la longueur de l'intervalle a dans RBMO.

V.6.3.3 Approche couplée (RBLCCO)

L'approche couplée consiste à rechercher simultanément l'épaisseur initiale du pipeline et la longueur de l'intervalle a . La fonction du coût total inclu le coût initial, le coût de

maintenance et le coût de défaillance, elle est minimisée sans limitation fiabiliste (équation V.42). Les mêmes coûts de référence sont utilisés.

Les figures V.24-V.25 montrent que l'optimum est situé pour un intervalle de temps de 25 ans et une épaisseur initiale de 9,18 mm. En outre, cette conception exige une seule intervention de maintenance à $t = 25$ ans. Le profil de l'indice de fiabilité de la structure optimisée (figure V.23) montre que l'indice de fiabilité est toujours supérieur à 4,4.

V.6.3.4 Discussion

Le tableau V.9 montre les résultats des différentes approches. La conception obtenue par TV-RBDO est robuste et ne nécessite pas d'intervention de maintenance car la probabilité de défaillance est toujours inférieure à la valeurs admissible de 10^{-5} tout au long de l'intervalle de la durée de vie fixé à 50 ans. Toutefois, cette solution est très coûteuse.

	TV-RBDO	RBMO	RBLCCO
Coût total $k\text{€}/m$	65,85	59,53	50,75
Coût initial $k\text{€}/m$	60,05	41,64	44,60
Coût de maintenance $k\text{€}/m$	-	8,90	3,80
Coût de défaillance $k\text{€}/m$	5,76	9,58	2,35
Épaisseur initiale e mm	12,18	8,48	9,18
Longueur a en années	-	15,5	25
$\beta(t)_{min}$	4,12	4,20	4,44

Tableau V.9: Comparaison entre les trois approches TV-RBDO, RBMO et RBLCCO.

L'approche couplée de l'optimisation de la conception et de la maintenance (RBLCCO) converge vers une solution plus optimale que celle de l'approche séquentielle. L'approche couplée propose une solution conduisant à augmenter l'épaisseur initiale pour réduire le coût de défaillance et le coût dû aux opérations de maintenance. Ainsi, le coût initial augmenté est équilibré par la réduction des coûts de maintenance et de défaillance. Cette solution exige une seule intervention de maintenance sur l'intervalle $[0, 50]$ qui doit être effectuée à l'âge de 25 ans de la structure, alors que l'approche séquentielle propose l'intervalle $a = 15,5$ ans correspondant à l'épaisseur initiale de 8,48 mm.

Finalement, cet exemple montre l'intérêt de l'approche couplée de l'optimisation de la conception et de la maintenance. La solution proposée par la RBLCCO est la plus robuste par rapport aux deux autres solutions car l'indice de fiabilité est supérieure à 4,4 tout au long de la durée de vie.

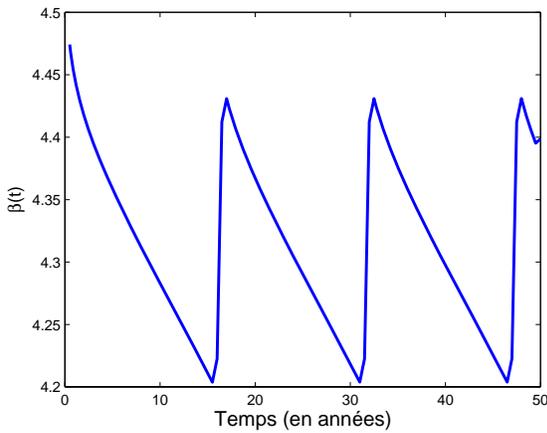


Figure V.22: Profil de l'indice de fiabilité dans RBMO.

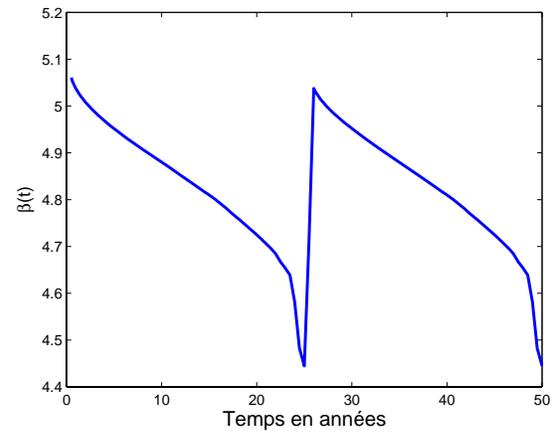
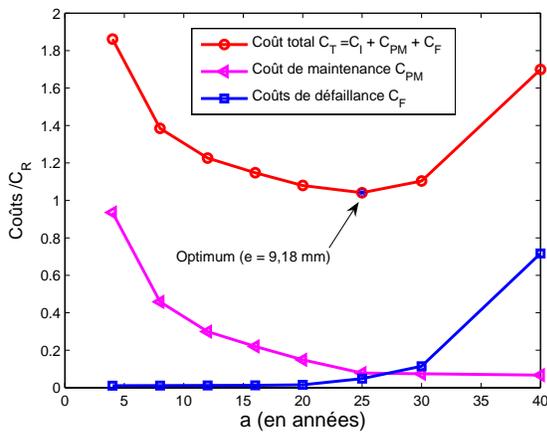
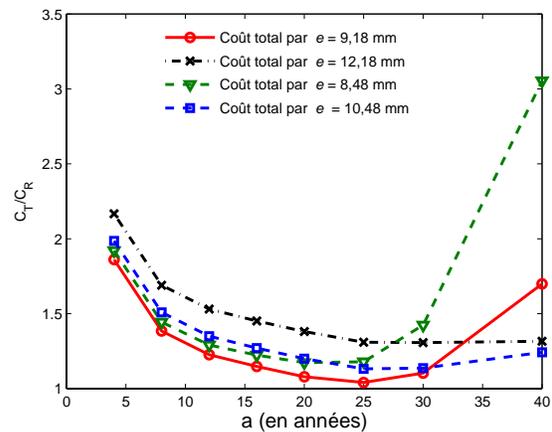


Figure V.23: Profil de l'indice de fiabilité dans RBLCCO.

Figure V.24: Coûts en fonction de la longueur de l'intervalle a dans RBLCCO.Figure V.25: Coûts total en fonction de a et l'épaisseur e .

V.7 Conclusion

Ce Dernier chapitre consacré à l'optimisation fiabiliste dépendant du temps a montré l'intérêt de cette méthodologie pour dimensionner les structures subissant des dégradations. En effet, la recherche de la conception optimale sans tenir compte de ces dégradations peut augmenter le taux de défaillance entraînant un coût supérieur aux économies escomptées.

La fiabilité dépendant du temps par la méthode Φ_2 peut être vue comme plusieurs analyses de fiabilité indépendantes du temps effectuées successivement sur un pas de temps très petit. Ainsi, l'intégration de l'analyse de fiabilité dépendant du temps dans une procédure d'optimisation fiabiliste peut poser de sérieux problèmes d'efficacité et de convergence, surtout lorsque cette procédure est formulée en approche à deux niveaux. Une simple application comme la poutre en béton armé peut exiger un temps de calcul considérable. Toutefois, cette application a montré que la méthode Φ_2 peut être adoptée dans l'approche SOTVRA qui a été développée pour éviter les problèmes de convergence

et de temps de calcul.

A travers les applications de ce chapitre, les différentes approximations introduites dans SOTVRA pour approcher le coût de défaillance sont validées. Ces approximations locales au voisinage de l'optimum du cycle précédent sont actualisées à chaque cycle par le nouvel optimum et par l'analyse de fiabilité dépendant du temps.

L'étude de l'optimisation du pipeline nous a permis de tracer les différentes fonctions de coûts et de vérifier les résultats obtenus. Cette étude a montré tout l'intérêt de coupler l'optimisation de la conception et de la maintenance. Le coût total impliqué est inférieur à celui d'une conception sans maintenance ou une conception et une maintenance obtenues par une approche séquentielle.

Conclusion générale et perspectives

La prise en compte des incertitudes dans la recherche de la conception optimale a été l'un des objectifs principaux de cette thèse. Les différentes applications traitées dans le chapitre IV ont montré l'intérêt de l'optimisation fiabiliste par rapport à l'optimisation déterministe basée sur les coefficients partiels de sécurité. Malgré son efficacité, cette dernière ne garantit pas le meilleur compromis entre le coût et la fiabilité de la conception optimisée.

La faiblesse de l'optimisation déterministe réside dans le choix des coefficients partiels de sécurité qui sont calibrés pour une large classe de structures. Leur application dans l'optimisation n'assure pas une conception optimale pour le niveau de fiabilité visé puisque la solution obtenue peut être trop ou pas assez fiable.

L'optimisation fiabiliste (RBDO) demeure la démarche rigoureuse à retenir. Toutefois, la RBDO s'appuie sur des aspects théoriques complexes. Un de ces aspects est la considération de la fiabilité système, qui investit la fiabilité structurale globale et non seulement les composants fiabilistes de la structure. Par conséquent, son intégration dans la RBDO est incontournable car elle offre le critère par excellence permettant de concilier la sûreté et l'économie.

L'étude comparative réalisée dans le chapitre II sur les méthodes de la RBDO nous a permis de dégager une piste pour introduire la fiabilité système, et ce sans engager des efforts de calcul considérables. Les approches découplées offrent une meilleure précision et une efficacité remarquable. Cette voie paraît la plus efficace pour l'optimisation des structures complexes avec plusieurs variables d'optimisation et modes de défaillance.

La méthode SOSRA est proposée pour tenir compte de la fiabilité système en s'appuyant sur le principe des approches découplées. L'efficacité et la robustesse de l'optimisation déterministe sont utilisées pour développer une méthodologie d'optimisation fiabiliste système. L'originalité de SOSRA réside dans l'association de l'optimisation déterministe et de l'analyse de fiabilité système. Cette association est fondée sur l'allocation optimale des indices cibles et la calibration des coefficients OSSF par une approche probabiliste afin d'assurer le niveau de fiabilité système cible. Les résultats obtenus à travers les différentes applications confirment la validité, l'efficacité et la robustesse de SOSRA.

L'avantage de SOSRA réside dans le fait qu'elle n'augmente pas le nombre de variables et n'exige pas d'autres outils de résolution. Les modèles mécaniques comportant des non linéarités géométriques ou matérielles peuvent être utilisés car le processus d'optimisa-

tion reste déterministe. En outre, le principe des coefficients de sécurité très familier aux ingénieurs peut permettre son utilisation d'une façon simple pour des cas industriels.

Dans ce travail, la recherche du dimensionnement optimal dans le cadre de la fiabilité dépendant du temps a été exploré. A l'inverse de la RBDO, peu de travaux de recherche sont consacrés à l'optimisation fiabiliste dépendant du temps (TV-RBDO). Le problème de la TV-RBDO présente la difficulté du couplage des méthodes fiabilistes et des modèles de dégradation et de vieillissement. De plus, l'analyse de fiabilité dépendant du temps nécessite un temps de calcul considérable, et son intégration directe dans des procédures itératives d'optimisation pose les problèmes de convergence et de stabilité numérique.

Comme la méthode SOSRA est basée sur le principe de la séparation de l'analyse de fiabilité du processus d'optimisation, elle a été adaptée au problème de la TV-RBDO. Les différentes applications ont montré l'efficacité de l'approche SOTVRA et la validité des approximations proposées pour tenir compte du coût de défaillance dans la fonction du coût total.

La recherche simultanée de la conception et de la stratégie de maintenance optimales offre la meilleure réduction du coût total pour les structures optimisées par l'approche classique de la TV-RBDO et SOTVRA. Ces deux approches sont basées sur la minimisation du coût total composé du coût initial et de défaillance. La recherche de la stratégie de maintenance indépendamment de la conception n'offre pas le coût optimal car l'interaction entre la conception et la maintenance n'est pas considérée. La solution la plus équilibrée consiste à réduire le coût initial dû à la conception et à le compenser par le coût de la maintenance préventive. Cette solution est obtenue par la minimisation du coût total et la considération de l'interaction entre les différents coûts.

Ce travail ouvre des pistes de recherche et des perspectives sur plusieurs points.

- L'adaptation de la méthode SOSRA aux problèmes d'optimisation de forme et de la topologie.
- La validation de l'approche SOSRA pour les systèmes série-parallèle. Les difficultés résident dans le couplage des modèles mécaniques non linéaires tenant compte de la plastification des sections et de la perte de rigidité de la structure.
- La substitution de la fonction d'état limite par une surface de réponse peut permettre de réduire les efforts de calcul d'une manière très significative ainsi que le passage à des structures complexes avec des comportements mécaniques non linéaires.
- La fonction de répartition multinormale Φ_m est résolue par des approches (méthode de Genz, SCIS, FOMN) exigeant que la matrice de corrélation soit définie positive. Le développement d'une méthode ou l'amélioration des méthodes existantes est nécessaire lorsque cette condition n'est pas vérifiée.
- Utilisation des approches asymptotiques pour l'analyse de fiabilité dépendant du temps dans la méthode SOTVRA. L'intérêt des approches asymptotiques réside dans le fait qu'elles n'exigent pas la discrétisation de l'intervalle de la durée de vie, de plus elles permettent la modélisation des processus à saut.
- La considération des champs stochastiques et l'adoption de la méthode des éléments finis stochastiques peut être une nouvelle piste de recherche dans l'optimisation

fiabiliste.

- La théorie des possibilités est souvent utilisée pour la modélisation des incertitudes non probabilisables. Il existe peu de travaux sur l'intégration des approches possibilistes dans l'optimisation. Cette nouvelle démarche peut être complémentaire à l'optimisation fiabiliste.
- Le développement d'une approche découplée pour l'optimisation du coût du cycle de vie (RBLCCO : *Reliability-Based Life Cycle Cost Optimization*) comprenant les coûts de conception, de maintenance, d'inspection, de réparation et de défaillance, ainsi que l'adoption des approches bayésiennes pour l'actualisation de la probabilité de l'inspection. Le développement d'une méthodologie robuste et efficace dédiée à la RBLCCO reste un défi, au regard de l'intérêt suscité auprès des industries.

Bibliographie

- [1] Haftka R.T and Gürdal Z. *Elements of Structural Optimization*. Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [2] Adeli H. *Advances in Design Optimization*. Chapman and Hall, Ltd., New York, N.Y, 1994.
- [3] Fletcher R. *Practical Methods of Optimization*. second edition, John Wiley and Sons, Chichester, 1987.
- [4] Hasofer A.M and Lind N.C. Exact and invariant second moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 100(1) :111–121, 1974.
- [5] Lemaire M. *Fiabilité des structures - Couplage mécano-fiabiliste statique*. Hermes Science, 2005.
- [6] Pendola M. *Fiabilité des structures en contexte d'incertitudes statistiques et d'écarts de modélisation*. PhD thesis, Université Blaise Pascal/LARAMA-IFMA, Clermont-Ferrand, 2000.
- [7] Ditlevsen O and Nielsen T.A. Model-correction-factor method in structural reliability. *Journal of Engineering Mechanics*, 120(1) :1–10, 1994.
- [8] Mahadevan S and Rebba R. Validation of reliability computational models using bayes networks. *Reliability Engineering and System Safety*, 87(2) :223–232, 2005.
- [9] Nie J and Ellingwood B.R. Directional methods for structural reliability analysis. *Structural Safety*, 22(3) :233–249, 2000.
- [10] Au S.K and Beck J.L. A new adaptive importance sampling scheme for reliability calculations. *Structural Safety*, 21(2) :135–138, 1999.
- [11] Au S.K, Ching J, and Beck J.L. Application of subset simulation methods to reliability benchmark problems. *Structural Safety*, 29(3) :183–193, 2007.
- [12] Ditlevsen O and Madsen H.O. *Structural Reliability Method*. New York : John Wiley and Sons, 1996.
- [13] Rackwitz R and Fiessler B. Structural reliability under combined random load sequences. *Computer Structures*, 9(5) :489–494, 1978.
- [14] Abdo T and Rackwitz R. A new beta point algorithm for large time invariant and time variant reliability problems. In *A. Der Kiureghian, P. Thoft Christensen, eds. Reliability and Optimization of Structures Systems '90, Proc. 3rd WG IFIP WG 7.5 Working Conference. Berkely*, 1990.

- [15] Liu P.L and Der Kiureghian A. Optimization algorithms for structural reliability. *Structural Safety*, 9(3) :161–177, 1991.
- [16] Breitung K. Asymptotic approximations for multinormal integrals. *Journal of Engineering Mechanics*, 110(3) :357–366, 1984.
- [17] Bucher C.G and Bourgund U. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems. *Structural Safety*, 7(1) :57–66, 1990.
- [18] Rajashekhar M.R and Ellingwood B.R. A new look at the response surface approach for reliability analysis. *Structural Safety*, 12(3) :205–220, 1993.
- [19] Kaymaz I and McMahon C.A. A response surface method based on weighted regression for structural reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 20(1) :11–17, 2005.
- [20] Gayton N, Bourinet J.M, and Lemaire M. CQ2RS : a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis. *Structural Safety*, 25(1) :99–121, 2003.
- [21] S.H Kim and Na S.W. Response surface method using vector projected sampling points. *Structural Safety*, 19(1) :3–19, 1997.
- [22] Gavin H.P and Yau S.C. High-order limit state functions in the response surface method for structural reliability analysis. *Structural Safety*, 30(2) :162–179, 2008.
- [23] Hurtado J.E and Alvarez D.A. Neural-network-based reliability analysis : a comparative study. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(1-2) :113–132, 2001.
- [24] Kaymaz I. Application of kriging method to structural reliability problems. *Structural Safety*, 27(2) :133–151, 2005.
- [25] Hurtado J.E. An examination of methods for approximating implicit limit state functions from the viewpoint of statistical learning theory. *Structural Safety*, 26(3) :271–293, 2004.
- [26] Hohenbichler M and Rackwitz R. First-order concepts in system reliability. *Structural Safety*, 1(3) :177–188, 1982.
- [27] Gollwitzer S and Rackwitz R. An efficient numerical solution to the multinormal integral. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 3(2) :98–101, 1988.
- [28] Madsen H.O, Krenl S, and Lind N.C. *Methods of Structural Safety*. Englewood Cliffs (NJ) : Prentice-Hall, 1986.
- [29] Kharmanda G.M. *Optimisation et CAO des structures faibles*. PhD thesis, Université Blaise Pascal/LaRAMA-IFMA, Clermont-Ferrand, 2003.
- [30] Kharmanda G, Mohamed A, and Lemaire M. Carod : Computer-aided reliable and optimal design as a concurrent system for real structures. *International Journal of CAD/CAM*, 2(1) :1–12, 2002.
- [31] Choi K.K and Duan W. Design sensitivity analysis and shape optimization of structural components with hyperelastic material. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 187(1-2) :2000, 219–243.
- [32] Calgaro J.A. *Introduction aux Eurocodes-Sécurité des constructions et bases de la théorie de la fiabilité*. Presses de l'ENPC, Paris, 1996.

- [33] Eurocode 1. Env 1991-1, bases de calcul et actions sur les structures. Technical report, CEN, 1996.
- [34] Moses F. Problems and prospects of reliability-based optimization. *Engineering Structures*, 19(4) :293–301, 1997.
- [35] Rosenblueth E. Optimum reliabilities and optimum design. *Structural Safety*, 3(2) :69–83, 1986.
- [36] Rackwitz R. Optimization - the basis of code-making and reliability verification. *Structural Safety*, 22(1) :27–60, 2000.
- [37] Frangopol D.M and Moses F. *Reliability-based structural optimization*. Adeli H, editor. Advances in design optimization. London :Chapman Hall, 1994.
- [38] Kodiyalam S. Evaluation of Methods for Multidisciplinary Design Optimization (MDO) Phase I. Technical report, NASA/CR-1998-2087716, 1998.
- [39] Grandhi R.V and Wang L. Structural Reliability Analysis and Optimization : Use of approximation. Technical report, NASA/CR-1999-209154, 1999.
- [40] Youn B.D, Choi K.K, Yang R.-j, and Gu L. Reliability-based design optimization for crashworthiness of vehicle side impact. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 26(3) :272–283, 2004.
- [41] Pettit C.L and Grandhi R.V. Multidisciplinary optimization of aerospace structures with high reliability. In *Kareem, Haldar, Spencer, and Johnson, eds. Proceedings of the 8th ASCE Joint Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*. University of Notre Dame, Notre Dame, Indiana, 2000.
- [42] *VisualDOC : Design Optimization Software, Version 4.0*, 2004. Vanderplaats Research and Development, Inc. <http://www.vrand.com>.
- [43] *DAKOTA, Version 4.1 User's Manual*, 2004. Sandia National Laboratories, <http://www.cs.sandia.gov/DAKOTA/>.
- [44] Goldberg D.E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Adison-Wesley, New-York, 1989.
- [45] Vanderplaats G.N. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. McGraw-Hill, New York, 2001.
- [46] Moses F and Kinser D.E. Optimum structural design with failure probability constraints. *AIAA Journal*, 5(6) :1152–1158, 1967.
- [47] Feng Y.S and Moses F. A method of structural optimization based on structural system reliability. *Journal of structural Mechanics*, 14(4) :437–453, 1986.
- [48] Nikolaidis E and Burdisso R. Reliability-based optimization : a safety index approach. *Computer Structures*, 28(6) :781–788, 1988.
- [49] Enevoldsen I and Sørensen J.D. Reliability based optimization of series systems of parallel systems. *Journal of Structural Engineering*, 119(4) :1069–1084, 1992.
- [50] Thanedar P.B and Kodiyalam S. Structural optimization using probabilistic constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 4(3) :236–240, 1992.
- [51] Martin J.D and Simpson T.W. A Monte Carlo Method for Reliability-Based Design Optimization. In *47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, pages 1–13, 2006.

- [52] Papadrakakis M and Lagaros N.D. Reliability-based structural optimization using neural networks and monte carlo simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(32) :3491–3507, 2002.
- [53] Grandhi R.V and Wang L. Reliability-based structural optimization using improved two point adaptive nonlinear approximations. *Finite Elements in Analysis and Design*, 29(1) :35–48, 1998.
- [54] Gasser M and Schueller G.I. Reliability-based optimization of structural systems. *Mathematical Methods of Operations Research*, 46(3) :287–307, 1997.
- [55] Kaymaz I and McMahon C.A. A probabilistic design system for reliability-based design optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 28(6) :416–426, 2004.
- [56] Tu J and Choi K.K. A new study on reliability-based design optimization. *Journal of Mechanical Design, ASME*, 121(4) :557–564, 1999.
- [57] Madsen H.O and Friis Hensen F. A comparison of some algorithms fo reliability-based structural optimization and sensitivity analysis. In *R. Rackwitz, P Thoft-Christensen, eds. Proceedings of the 4th IFIP WG 7.5 Conference. Munich*, pages 443–451, 1992.
- [58] Kuschel N and Rackwitz R. Two basic problems in reliability-based structural optimization. *Mathematical Methods of Operations Research*, 46(3) :309–333, 1997.
- [59] Kharmanda G, Mohammed A, and Lemaire M. Efficient reliability-based design optimization using a hybrid space with application to finite element analysis. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 24(3) :233–245, 2002.
- [60] Agarwal H and Renaud J. A unilevel method for reliability based design optimization. In *45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. Palm Springs, California, USA*, 2004.
- [61] Kirjner-Neto C, Polak E, and Der Kiureghian A. An outer approximation approach to reliability-based optimal design of structures. *Journal of Optimization Theory & Application*, 98(1) :1–16, 1998.
- [62] Chen D, Hasselman T.K, and Neill D.J. Reliability-based structural design optimization for practical applications. In *Proceedings of the 38th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures, structural dynamics, and material Conference. Kissimmee, Florida*, 1997.
- [63] Putko M.M, Newman P.A, Taylor A.C, and L.L Green. Approach for uncertainty propagation and robust design in cfd using sensitivity derivatives. *Journal of Fluids Engineering*, 124(1) :60–69, 2002.
- [64] Liang J, Mourelatos Z.P, and Tu J. A Single-Loop Method for Reliability-Based Design Optimization. In *Proceedings of ASME Design Engineering Technical Conferences*, 2004.
- [65] Shan S and Wang G.G. Reliable design space and complete single-loop reliability-based design optimization. *Reliability Engineering and System Safety*, 93(8) :1218–1230, 2008.
- [66] Torng T.Y and Yang R.J. An advanced reliability-based optimization method for robust design optimization method. In *P.D. Spanos and Y.T. Wu, eds. Probabilistic*

- Structural Mechanics : Advances in Structural Reliability Methods*, pages 534–549, 1993.
- [67] Royset J.O, Der Kiureghian A, and Polak E. Reliability-based optimal structural design by the decoupling approach. *Reliability Engineering and System Safety*, 73(3) :213–221, 2001.
- [68] Wu Y.T and Wang W. Efficient probabilistic design by converting reliability constraints to approximately equivalent deterministic constraints. *Journal of Integrated Design and Process Sciences*, 2(4) :13–21, 1998.
- [69] Qu X and Haftka R.T. Reliability-based design optimization using probabilistic sufficiency factor. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 27(5) :314–325, 2004.
- [70] Du X and Chen W. Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design. *Journal of Mechanical Design, ASME*, 126(2) :225–233, 2004.
- [71] Cheng G, Xu L, and Jiang L. A sequential approximate programming strategy for reliability-based structural optimization. *Computer Structures*, 84(21) :1353–1367, 2006.
- [72] Li P, Cheng G, and Jiang L. A sequential approximate programming strategy for performance-measure-based probabilistic structural design optimization. *Structural Safety*, 30(2) :91–109, 2006.
- [73] Zou T and Mahadevan S. A direct decoupling approach for efficient reliability-based design optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 31(3) :190–200, 2006.
- [74] Chan K.Y, Skerlos S.J, and Papalambros P. An adaptive sequential linear programming algorithm for optimal design problems with probabilistic constraints. *Journal of Mechanical Design*, 129(2) :140–149, 2007.
- [75] Ching J and Hsu W.C. Transforming reliability limit-state constraints into deterministic limit-state constraints. *Structural Safety*, 30(1) :11–33, 2008.
- [76] Lee J.O, Yang Y.S, and Ruy W.S. comparative study on reliability-index and target performance based probabilistic structural design optimization. *Computer Structures*, 80(3-4) :257–269, 1999.
- [77] Choi K and Youn B. On probabilistic approaches for reliability-based design optimization. In *9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. Atlanta, Georgia, USA, 2002.
- [78] Youn B.D and Choi K.K. An investigation of nonlinearity of reliability based design optimization approaches. *Journal of Mechanical Design, ASME*, 126(3) :403–411, 2004.
- [79] Yang R.J and Gu L. Experience with approximate reliability-based optimization methods. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 26(1-2) :152–159, 2004.
- [80] Eldred M.S, Agarwal H, Perez V.M, Wojtkiewicz S.F, and Renaud J.E. Investigation of reliability method formulations in DAKOTA/UQ. *Structure & Infrastructure Engineering*, 3(3) :199–213, 2007.

- [81] Wu Y-T, Shin Y, Sues R.H, and Cesare M.A. Safety-factor based approach for probability-based design optimization. In *42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference. Seattle, Washington, 2001*.
- [82] Bjerager P. Plastic systems reliability by lp and form. *Computer Structures*, 31(2) :187–196, 1989.
- [83] Winterstein S.R, Ude T.C, Cornell C.A, Bjerager P, and Haver S. Environmental Parameters for Extreme Response : Inverse FORM with Omission Factors. In *6th International Conference on Structural Safety and Reliability, ICOSSAR'93. Innsbruck, Austria, 1993*.
- [84] Der Kiureghian A, Zhang Y, and Li C-C. Inverse reliability problem. *Journal of Engineering Mechanics*, 120(5) :1154–1159, 1994.
- [85] Youn B.D, Choi K.K, and Park Y.H. Hybrid analysis method for reliability-based design optimization. *Journal of Mechanical Design*, 125(2) :221–232, 2003.
- [86] Koch P.N, Yang R-J, and Gu L. Design for six sigma through robust optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 26(3-4) :235–248, 2004.
- [87] Yi P and Cheng G. Further study on efficiency of sequential approximate programming for probabilistic structural design optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, page In Press, 2007.
- [88] *CALFEM : A finite Element toolbox to MATLAB, version 3.4*, 2006. Division of Structural Mechanics and Division of Solid Mechanics, Lund University, Sweden, <http://www.gorkon.byggmek.lth.se>.
- [89] Thoft-Christensen P and Murotsu Y. *Application of Structural System Reliability Theory*. Springer, Berlin, 1986.
- [90] Gollwitzer S and Rackwitz R. Equivalent components in first-order system reliability. *Reliability Engineering*, 5(2) :99–115, 1983.
- [91] Ditlevsen O. Narrow reliability bounds for structural systems. *Journal of structural Mechanics*, 77(4) :452–472, 1979.
- [92] Zhang Y.C. High-order reliability bounds for series systems and application to structural systems. *Computers & Structures*, 46(2) :381–386, 1993.
- [93] Tang L.K and Melchers R.E. Improved approximation for multinormal integral. *Structural Safety*, 4(2) :81–93, 1986.
- [94] Pandey M.D. An effective approximation to evaluate multinormal integrals. *Structural Safety*, 20(1) :51–67, 1998.
- [95] Fu G, Verma D, and Moses F. Advanced simulation methods in system reliability. In *W.K. Liu and T. Belytschko, eds. Computational mechanics of probabilistic and reliability analysis. Switzerland, 1989*.
- [96] Fu G and Moses F. Multimodal simulation method for system reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 119(6) :1173–1179, 1993.
- [97] Mahadevan S and Prakash R. Adaptive simulation for system reliability analysis of large structures. *Computer Structures*, 77(6) :725–734, 2000.

- [98] Nie J and Ellingwood B.R. A new directional simulation method for system reliability. part i : application of deterministic point sets. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 19(4) :425–436, 2004.
- [99] Mori Y and Kato T. Multinormal integrals by importance sampling for series system reliability. *Structural Safety*, 25(4) :363–378, 2003.
- [100] Ambartzumian R, Der Kiureghian A, Ohaniana V, and Sukiasiana H. Multinormal probability by sequential conditioned importance sampling : theory and application. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 13(4) :299–308, 1998.
- [101] Genz A. Numerical computation of multivariate normal probabilities. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 1(2) :141–149, 1992.
- [102] Genz A. Comparison of methods for the computation of multivariate normal probabilities. *Computing Science and Statistics*, 25 :400–405, 1993.
- [103] Genz A and Kass R. Subregion adaptive integration of functions having a dominant peak. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 6(1) :92–111, 1997.
- [104] Beckers M and Haegemans A. A comparison of numerical integration techniques for multivariate normal integrals. Technical report, Computer Science Departement of Catholic University of Leuven, Belgium., 1992.
- [105] Enevoldsen I and Sørensen J.D. Reliability-based optimization in structural engineering. *Structural Safety*, 15(3) :169–196, 1994.
- [106] Kuschel N and Rackwitz R. A new approach for structural optimization of series systems. In *In R.E. Melchers and M.G. Stewart, eds. Proceedings of the 8th ICASP Conference. Sydney*, 1999.
- [107] Liang J, Mourelatos Z.P, and Nikolaidis E. A single-loop approach for system reliability-based design optimization. *Journal of Mechanical Design*, 129(12) :1215–1224, 2007.
- [108] Pu Y, Das D.K, and Faulkner D. A strategy for reliability-based optimization. *Engineering Structures*, 19(3) :276–282, 1997.
- [109] Youn B.D, Choi K.K, and Du L. Adaptive probability analysis using an enhanced hybrid mean value method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 29(2) :134–148, 2005.
- [110] Faber M.H, Kübler O, and Köhler J. *Tutorial for the JCSS code calibration program CodeCal 03*. Joint Committee on Structural Safety, 2003. <http://www.jcss.ethz.ch>.
- [111] Gayton N. *Dimensionnement semi-probabiliste des coques minces de révolution susceptibles d'instabilités géométriques*. PhD thesis, Université Blaise Pascal LaRAMA-IFMA, Clermont-Ferrand, 2002.
- [112] Mohamed A. Méthode de résolution du problème de la calibration des coefficients partiels et extension au contexte d'écart de modèle. Technical report, Note personnelle, 2000.
- [113] Elishakoff I. Interrelation between safety factors and reliability. Technical report, NASA/CR-2001-211309, 2001.
- [114] *FERUM User's Guide, Version 3.0*, 2001. Pacific Earthquake Engineering (PEER) Center, <http://www.ce.berkeley.edu/FERUM/>.

- [115] WAFO-group. *WAFO - A Matlab Toolbox for Analysis of Random Waves and Loads - A Tutorial*. Mathematical Statistics, Centre for Mathematical Sciences, Lund University, Lund, Sweden, 2000.
- [116] Nakib R. Deterministic and reliability-based optimization of truss bridges. *Computers Structures*, 65(5) :767–775, 1997.
- [117] Gander W and Gautschi W. Adaptive quadrature - revisited. *BIT*, 40 :84–101, 2000. disponible sur : <http://www.inf.ethz.ch/personal/gander>.
- [118] Li C.Q and Melchers R.E. Failure probability of reinforced concrete columns under stochastic loads. *Engineering Structures*, 17(6) :419–424, 1995.
- [119] H. P. Hong and W. Zhou. Reliability evaluation of rc columns. *Journal of Structural Engineering*, 125(7) :784–790, 1999.
- [120] Eurocode 2. Env 1992-1-1, calcul des structures en béton. Technical report, CEN, 2004.
- [121] BATIPRIX 2007. *Le bordereau de prix du bâtiment tous corps d'état. Volume 1 :Gros oeuvre*. Groupe Moniteur, 2007, 24 Edition. www.batiprix.com.
- [122] Rice S. Mathematical analysis of random noise part I and II. *Bell System Technical Journal*, 32 :282–332, 1944.
- [123] Belyaev Y.K. On the number of exits across the boundary of a region by a vector stochastic process. *Theory of Probability and its Applications*, 13(2) :320–324, 1968.
- [124] Andrieu C. *Fiabilité mécanique des structures soumises à des phénomènes physiques dépendant du temps*. PhD thesis, Université Blaise Pascal/LaRAMA-IFMA, Clermont-Ferrand, 2002.
- [125] Hagen Ø and Tvedt L. Vector process out-crossing as parallel system sensitivity measure. *Journal of Engineering Mechanics*, 117(10) :2201–2220, 1991.
- [126] Andrieu-Renaud C, Sudret B, and Lemaire M. The PHI2 method : a way to compute time-variant reliability. *Reliability Engineering and System Safety*, 84(1) :75–86, 2004.
- [127] Schall G, M Faber, and Rackwitz R. The ergodicity assumption for sea states in the reliability assessment of offshore structures. *J offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 113(3) :241–246, 1991.
- [128] Sudret B. Analytical derivation of the outcrossing rate in time-variant reliability problems. *Structure and Infrastructure Engineering*, 4(5) :353–362, 2008.
- [129] Ghanem R and Spanos P. *Stochastic Finite Elements, A spectral Approach*. Springer Verlag, 2003.
- [130] Li C-C and Der Kiureghian A. Optimal discretization of random fields. *Journal of Engineering Mechanics*, 119(6) :1136–1154, 1993.
- [131] Zhang J and Ellingwood B.R. Orthogonal series expansions of random fields in reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 120(12) :2660–2677, 1994.
- [132] Puig B and Akian J-L. Non-gaussian simulation using hermite polynomials expansion and maximum entropy principle. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 19(4) :293–305, 2004.

- [133] Kuschel N and Rackwitz R. Optimal design under time-variant reliability constraints. *Structural Safety*, 22(2) :113–127, 2000.
- [134] Frangopol D.M, Lin K.Y, and Estes A.C. Life-cycle cost design of deteriorating structures. *Journal of Structural Engineering*, 123(10) :1390–1401, 1997.
- [135] Sorensen J.D and Tarp-Johansen N.J. Optimal structural reliability of offshore wind turbines. In *G. Augusti, G.I. Schuëller, M. Ciampoli, eds. 9th International Conference on Structural Safety and Reliability, ICOSAR'2005. Rome, Italy, 2005.*
- [136] Faber M.H, Kroon B, and Sørensen J.D. Sensitivities in structural maintenance planning. *Reliability Engineering and System Safety*, 51(1) :317–329, 1996.
- [137] Sommer A.M, Nowak S.A, and Thoft-Christensen P. Probability-based bridge inspection strategy. *Journal of Structural Engineering*, 119(12) :3520–3536, 1993.
- [138] Yasuhiro Mori and Bruce R. Ellingwood. Maintaining reliability of concrete structures. II : Optimum inspection/repair. *Journal of Structural Engineering*, 120(3) :846–862, 1994.
- [139] Santander C.F and Sanchez-Silva M. Design and maintenance programme optimization for large infrastructure systems. *Structure and Infrastructure Engineering*, 4(6) :1–13, 2006.
- [140] Rackwitz R. Optimizing systematically renewed structures. *Reliability Engineering and System Safety*, 73(3) :269–279, 2001.
- [141] Castel A. *Couplage mécanique et corrosion dans les éléments de béton armé.* PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2000.
- [142] Stewart M.G and Rosowsky D.V. Time-dependent reliability of deteriorating reinforced concrete bridge decks. *Structural Safety*, 20 :91–109, 1998.
- [143] Bastidas-Arteaga E, Sanchez-Silva M, and Chateauneuf A. Structural reliability of rc structures subject to biodeterioration, corrosion and concrete cracking. In *Kanda, Takada, Furuta, eds. Proceedings of the 10th ICASP Conference. Tokyo,* pages 183–190, 2007.
- [144] Silva R-C. *Contribution à l'analyse probabiliste de la performance des ponts en béton armé.* PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 2004.
- [145] Amirat A, Chateauneuf A, and Chaoui K. Reliability assessment of underground pipelines under the combined effect of active corrosion and residual stress. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 83(2) :107–117, 2006.
- [146] Aoues Y and Chateauneuf A. Reliability-based optimization of structural systems by adaptive target safety - application to reinforced concrete frames. *Structural Safety*, 30(2) :144–161, 2007.
- [147] Chateauneuf A and Aoues Y. Advances in solution methods for reliability-based design optimization. In *Y. sompanakis, N.D. Lagaros, M. Papadrakakis, eds. Structural design optimization considering uncertainties. Taylor & Francis. Chapter 9, pp. 217-246,* 2008.
- [148] Aoues Y and Chateauneuf A. Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Accepted for publication, 2008.

- [149] Chaplain M, Valentin G, Aoues Y, and Chateauneuf A. Simulation des variations climatiques par une approche stochastique : application à la détermination de la durée de vie de poutres entaillées en LVL. In *25èmes Rencontres Universitaires de Génie Civil, conception et vie des ouvrages*. Bordeaux, 2007.
- [150] Aoues Y and Chateauneuf A. Optimisation basée sur la fiabilité dépendant du temps des structures en bois. In *25èmes Rencontres Universitaires de Génie Civil, atelier sur les approches probabilistes et fiabilistes appliquées à la durée de vie des structures*. Bordeaux, 2007.
- [151] Aoues Y and Chateauneuf A. Une approche efficace et robuste pour l'optimisation mécano-fiabiliste des systèmes mécaniques. In *Colloque Lambda-Mu 15, Maîtrise des Risques et Sécurité de Fonctionnement*. Lille, 2006.
- [152] Aoues Y and Chateauneuf A. An efficient approach for system reliability-based design optimization. In *P.K. Das. ed. Integrating Structural Analysis, Risk & Reliability, 3rd International ASRANet colloquium*. Glasgow, UK, 2006.
- [153] Aoues Y and Chateauneuf A. Efficiency and robustness in the approaches of reliability-based design optimization. In *CIFMA01, 1^{er} Congrès International Francophone de Mécanique Avancée*. Alep, Syrie, 2006.

Annexe A

A.1 Méthode SQP

La méthode de programmation quadratique séquentielle SQP (*Sequential Quadratic Programming*) est l'une des méthodes les plus sophistiquées, elle est très robuste et efficace [Flec87]. Historiquement, cette méthode est une extension de la méthode de Newton. Pour cela nous donnons une description de cette dernière, ensuite l'algorithme SQP. Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d}) \\ \text{sous : } G_i(\mathbf{d}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

La méthode de Newton vise à résoudre les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre (conditions de KKT) par une linéarisation du gradient du Lagrangien au voisinage du point courant $p_k = (\mathbf{d}_k, \lambda_k)$. Les conditions de KKT s'écrivent de la façon suivante :

$$\nabla L(\mathbf{d}, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{d}} L(\mathbf{d}, \lambda) \\ \nabla_{\lambda} L(\mathbf{d}, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d}) + \nabla_{\mathbf{d}} G(\mathbf{d}) \lambda \\ G(\mathbf{d}) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.2})$$

La linéarisation du gradient du Lagrangien autour du point $p_k = (\mathbf{d}^k, \lambda^k)$ se ramène à la résolution d'un système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{d}} L(\mathbf{d}_k, \lambda_k) + \nabla_{\mathbf{d}}^2 L(\mathbf{d}_k, \lambda_k) (\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k) + \nabla_{\lambda}^2 L(\mathbf{d}_k, \lambda_k) (\lambda_{k+1} - \lambda_k) = 0 \\ G(\mathbf{d}_k) + \nabla_{\mathbf{d}} G(\mathbf{d}_k)^T (\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

posant $H_k = \nabla_{\mathbf{d}}^2 L(\mathbf{d}_k, \lambda_k)$, $J_k = \nabla_{\lambda}^2 L(\mathbf{d}_k, \lambda_k) = \nabla_{\mathbf{d}} G(\mathbf{d}_k)$ et comme $\nabla_{\mathbf{d}} L(\mathbf{d}_k, \lambda_k) = \nabla_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d}_k) + \nabla_{\mathbf{d}} G(\mathbf{d}_k) \lambda_k$. Le problème peut alors s'écrire sous une forme matricielle où λ_{k+1} et $\delta_k = \mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k$ sont les inconnues du problème :

$$\begin{pmatrix} H_k & J_k \\ J_k^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d}_k) \\ -G(\mathbf{d}_k) \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Le nouvel itéré \mathbf{d}_{k+1} est calculé à partir de la direction de descente δ_k ou $\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{d}_k + \delta_k$. La méthode de *Newton* a l'avantage d'avoir une convergence quadratique, ce qui lui confère une efficacité remarquable. Néanmoins, cette méthode possède plusieurs inconvénients.

- La résolution directe des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre ne donne aucune garantie de la solution identifiée. Ces conditions peuvent être vérifiées par des minima mais aussi par des maxima et des points selles (i.e. points ayant un gradient nul).
- La convergence est locale c'est-à-dire que la méthode diverge si le point de départ est trop éloigné de la solution.
- Le calcul du Hessien est nécessaire, ce qui peut être très coûteux surtout lorsque les fonctions f et G sont implicites.

Pour cela, l'algorithme SQP a été développé pour combler les carences de la méthode de *Newton* car elle s'inspire du même principe [Bier06]. L'algorithme *SQP* vise à transformer le problème de l'équation A.1 en un ensemble de sous-problèmes quadratiques, qui sont résolus séquentiellement à chaque itération. Chaque sous-problème consiste à rechercher

la direction de descente en minimisant l'approximation quadratique du Lagrangien sous des contraintes linéarisées. Le problème quadratique suivant est obtenu :

$$\begin{aligned} \min_{\delta_k} \quad & \frac{1}{2} \delta_k^T H_k \delta_k + \nabla_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d}_k)^T \delta_k \\ \text{sous :} \quad & \nabla_{\mathbf{d}} G_i(\mathbf{d}_k)^T \delta_k + G(\mathbf{d}_k) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

où δ_k est la direction de descente recherchée et H_k est le Hessien du Lagrangien à l'itération k . Le sous-problème quadratique posé peut être résolu aisément en utilisant le Lagrangien du sous-problème quadratique, c'est-à-dire :

$$L^{QP} = \frac{1}{2} \delta_k^T H_k \delta_k + \nabla_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d}_k)^T \delta_k + (\nabla_{\mathbf{d}} G(\mathbf{d}_k)^T \delta_k + G(\mathbf{d}_k)) \mu_k \quad (\text{A.6})$$

où μ_k sont les multiplicateurs de Lagrange du Lagrangien du sous-problème quadratique. Les conditions de KKT de ce nouveau problème sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial L^{QP}}{\partial \delta_k} = H_k \delta_k + \nabla_{\mathbf{d}} G(\mathbf{d}_k)^T \mu_k + \nabla_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d}_k) = 0 \\ \frac{\partial L^{QP}}{\partial \mu_k} = \nabla_{\mathbf{d}} G(\mathbf{d}_k)^T \delta_k + G(\mathbf{d}_k) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

ce qui peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} H_k & \nabla_{\mathbf{d}} G(\mathbf{d}_k)^T \\ \nabla_{\mathbf{d}} G(\mathbf{d}_k) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_k \\ \mu_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d}_k) \\ -G(\mathbf{d}_k) \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Nous remarquons que ces équations linéaires, où δ_k et μ_k sont les inconnues du problème, sont similaires à celles de la méthode de Newton (équation A.4) avec $J_k = \nabla_{\mathbf{d}} G(\mathbf{d}_k)$, sauf que μ_k sont les multiplicateurs de Lagrange du sous-problème quadratique (dans la méthode de Newton, λ_k sont les multiplicateurs de Lagrange du problème initial). Pour ces raisons, de nombreux auteurs considèrent la méthode SQP comme une méthode quasi-newtonienne. Les multiplicateurs de Lagrange du problème initial λ_{k+1} et le nouvel itéré \mathbf{d}_{k+1} sont approximés par le schéma itératif suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}^{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}^k \\ \lambda_k \end{pmatrix} + \alpha_k \begin{pmatrix} \delta_k \\ \mu_k - \lambda_k \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

où $\alpha^k \in [0, 1]$ est la longueur du pas de descente qui assure une convergence globale de l'algorithme. Le calcul de α^k est effectué par une minimisation unidimensionnelle d'une fonction de mérite ϕ [Schi83].

L'avantage de la méthode SQP réside dans son efficacité, étant donné sa convergence quadratique. De plus, l'algorithme SQP bénéficie d'une convergence globale, si les problèmes sont convexes (i.e quelque soit le point de départ de l'algorithme, l'optimum global est garanti). Le seul inconvénient de la méthode SQP est qu'elle nécessite le calcul du Hessien qui peut être très coûteux en temps de calcul. Cependant, l'algorithme NLPQL développé par *Schittkowski* [Schi85] est une version de SQP qui emploie une approximation du Hessien par la méthode BFGS. Cela réduit la méthode SQP à une méthode de premier ordre.

Méthode BFGS

La méthode BFGS développée par (*Broyden*[Broy67], *Fletcher*[Flec70], *Goldfarb*[Gold70] et *Shanno*[Shan70]) est un algorithme pour la minimisation sans contraintes. Cette approche quasi-Newtonienne utilise une procédure d'approximation du Hessien H_k en B_k . La matrice B_k est toujours semi-définie positive ce qui assure la convergence de l'algorithme [Powe78]. Cela est un avantage non négligeable de la méthode.

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k y_k y_k^T B_k}{y_k^T B_k y_k} + \frac{z_k z_k^T}{z_k^T y_k} \quad (\text{A.10})$$

avec :

$$z_k = d_{k+1} - d_k \quad (\text{A.11})$$

$$y_k = \nabla_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d}_{k+1}) + \nabla_{\mathbf{d}} G(\mathbf{d}_{k+1}) \lambda_{k+1} - (\nabla_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d}_k) + \nabla_{\mathbf{d}} G(\mathbf{d}_k) \lambda_k) \quad (\text{A.12})$$

Bibliographie

- [Schi94] K. Schittkowski, C. Zillober, R. Zotemantel. Numerical comparison of nonlinear programming algorithms for structural optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 7(1) : 1-19, 1994.
- [Schi85] K. Schittkowski. NLPQL : a FORTRAN subroutine solving constrained nonlinear programming problems. *Annals of Operations Research* , 5(1) : 485-500, 1985.
- [Schi83] K. Schittkowski. On the convergence of a sequential quadratic programming method with an augmented lagrangian line search function. *Optimization*, 14(2) : 197-216, 1983.
- [Flec87] R. Fletcher. Practical Methods of Optimization. Second Edition, John Wiley and Sons, Chichester, 1987.
- [Bier06] M. Bierlaire. Introduction à l'Optimisation Différentiable. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR), 2006
- [Kell99] C.T. Kelley. Iterative Methods for Optimization. Frontiers in Applied Mathematics, SIAM, 1999.
- [Powe78] M.J.D. Powell. A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations. Proceeding in Numerical Analysis, G.A.Watson ed., Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Vol. 630, 1978.
- [Flec70] R. Fletcher. A new approach to variable metric methods. *Computer Journal*, 13(3) : 317-322, 1970.
- [Gold70] D. Goldfarb. A family of variable metric methods derived by variational means. *Mathematics of Computation*, 24(109) : 23-26, 1970.
- [Broy67] C.G., Broyden. Quasi-Newton Methods and their Application to Function Minimization. *Mathematics of Computation*, 21(99) : 368-381, 1967.
- [Shan70] D.F. Shanno. Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization. *Mathematics of Computation*, 24(111) : 647-656, 1970.

Annexe B

B.1 Organigrammes

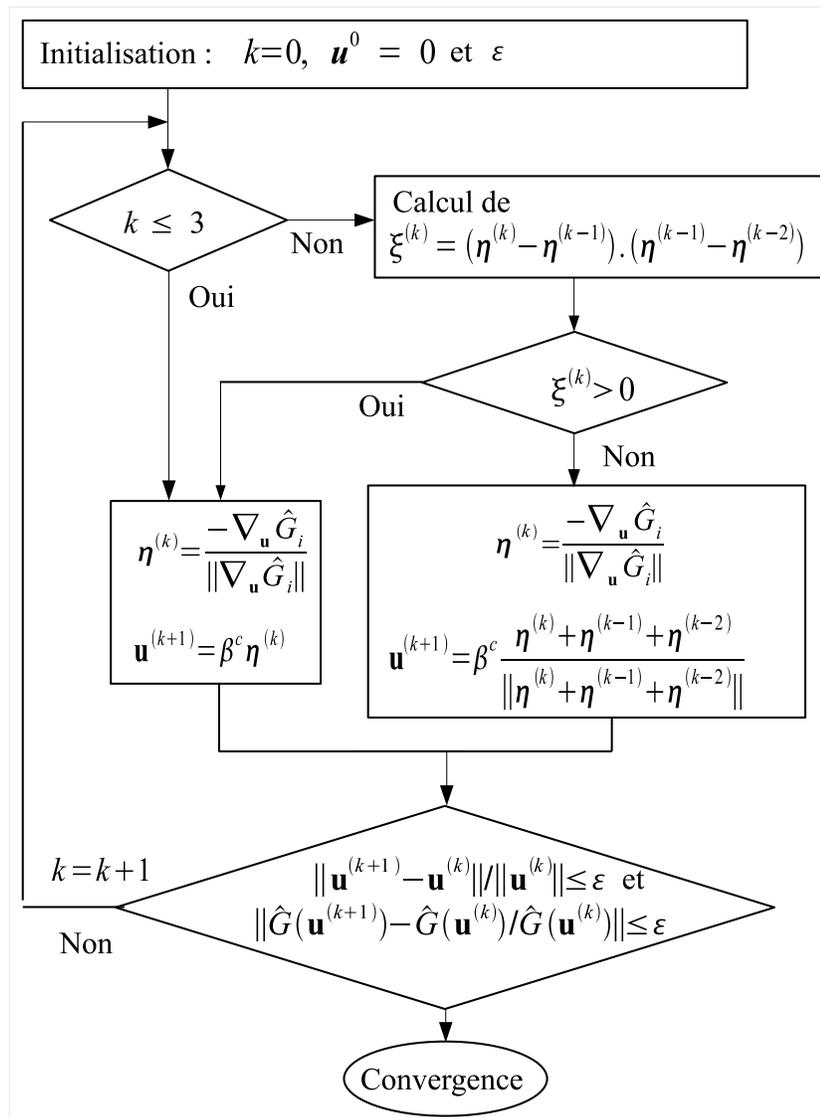


Figure B.1: Organigramme de l'algorithme HMV.

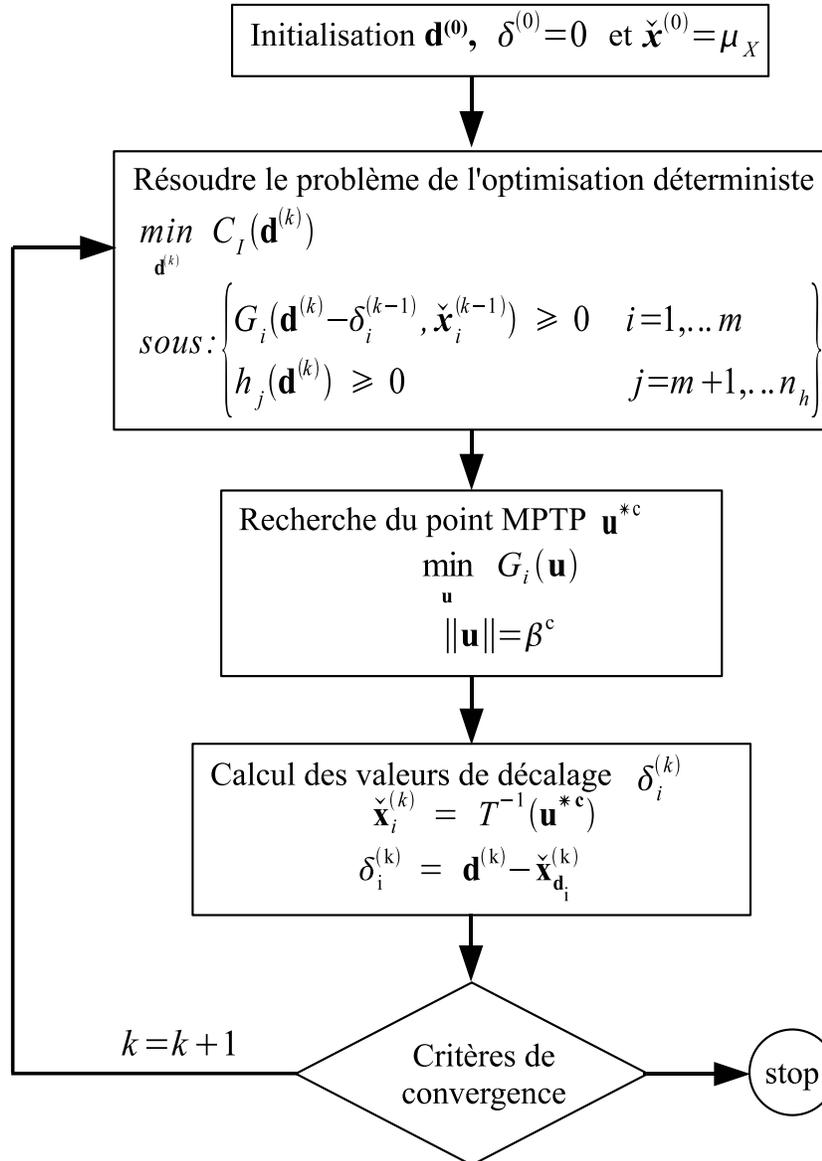


Figure B.2: Organigramme de la méthode SORA.

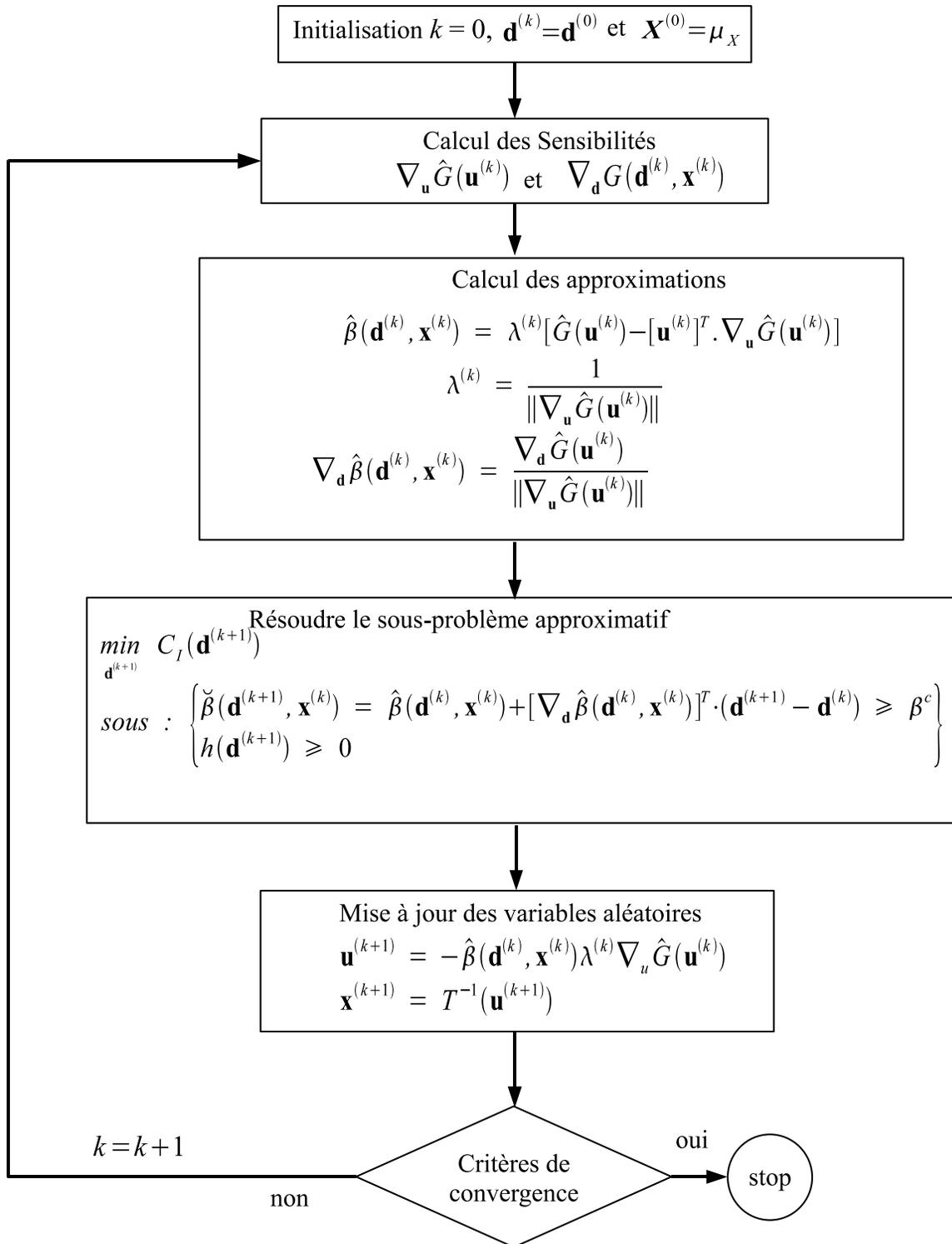


Figure B.3: Organigramme de la méthode SAP.

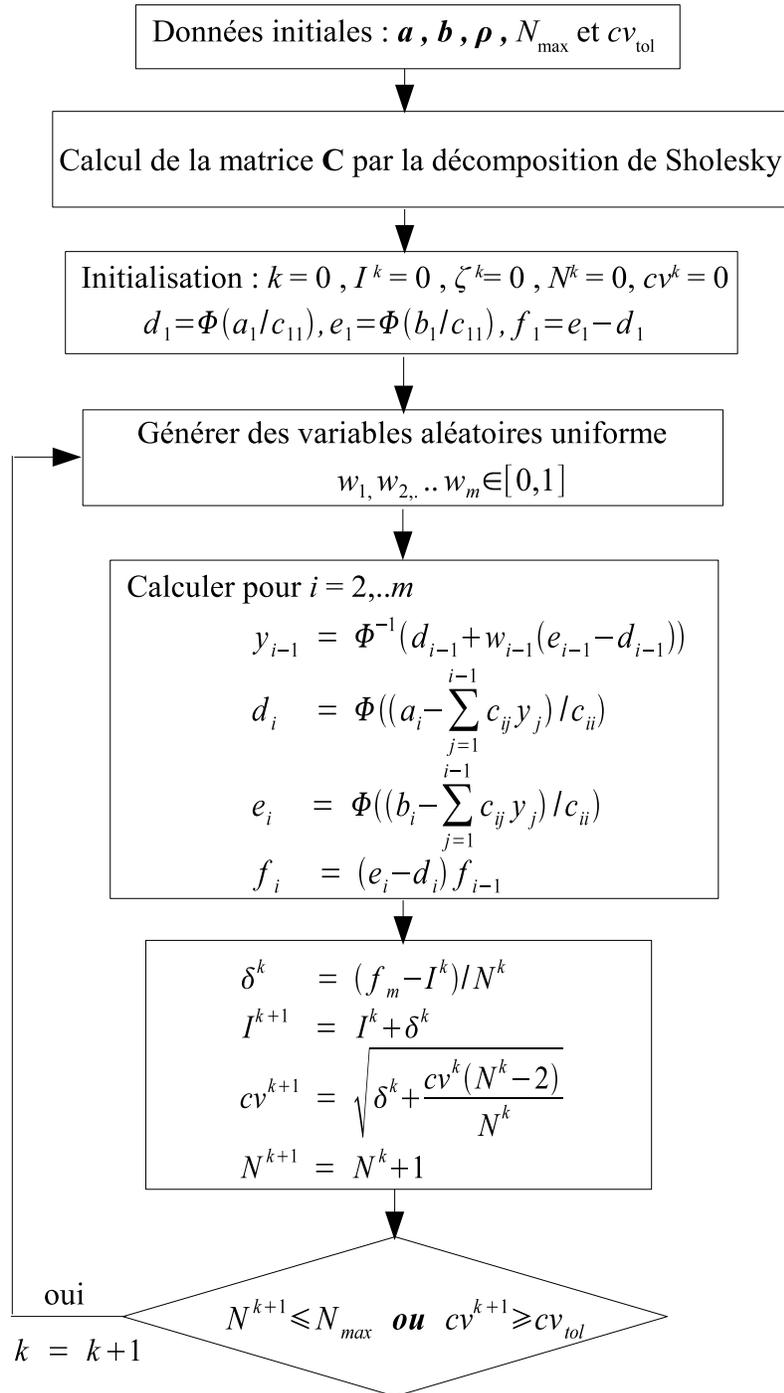


Figure B.4: Organigramme de la méthode CICS

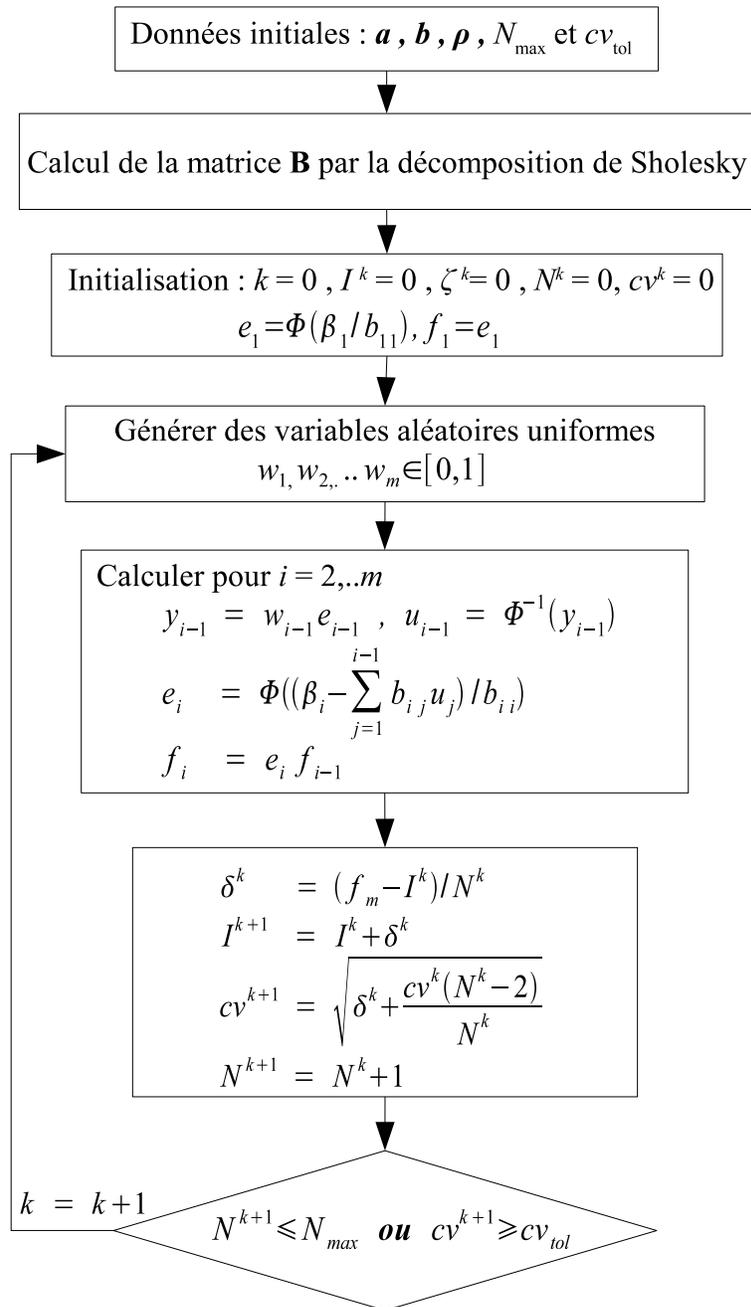


Figure B.5: Organigramme de la méthode de Genz par les simulations de Monte Carlo

Annexe C

C.1 Approximation de la loi binormale Φ_2

La fonction de répartition de la loi binormale Φ_2 peut être calculée par :

$$\begin{aligned}\Phi_2(x, y, \rho) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \varphi_2(x, y; \rho) dx dy && (C.1) \\ &= \Phi(x)\Phi(y) + \int_0^\rho \frac{1}{2\pi\sqrt{1-z^2}} \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2 - 2xy z)}{2(1-z^2)}\right] dz\end{aligned}$$

OPTIMISATION FIABILISTE DE LA CONCEPTION ET DE LA MAINTENANCE DES STRUCTURES

RESUME

L'optimisation vise à trouver le meilleur compromis entre les différentes exigences contradictoire, telles que les performances, le coût et la durabilité. Toutefois, la conception des structures doit être placée dans un contexte incertain. Traditionnellement, les incertitudes sont considérées par l'application des coefficients partiels de sécurité. Cependant, l'utilisation de ces coefficients ne garantit pas une conception optimale pour le niveau de fiabilité souhaité. L'optimisation fiabiliste est développée pour établir le meilleur compromis entre la réduction des coûts et l'assurance de la fiabilité, par la considération des incertitudes. Dans ce mémoire, une nouvelle approche de l'optimisation fiabiliste est proposée afin de tenir compte de l'interaction des différents modes de défaillance et de l'évolution de la fiabilité en fonction de l'âge de la structure. La meilleure solution est recherchée par la minimisation de la fonction du coût total contenant les coûts de maintenance.

RELIABILITY-BASED DESIGN AND MAINTENANCE OPTIMIZATION OF STRUCTURES.

ABSTRACT

The design of structural systems must fulfil several criteria, such as cost, safety and durability. The challenge of the optimization is how to find the optimal compromise between the conflicting design requirements. However, the structural design involves several kinds of uncertainties, which are usually considered through the partial safety factors. Generally, the use of these safety factors leads to over-designing or under-designing structures. The Reliability-Based Design Optimization (RBDO) is developed to search the best compromise between cost reduction and reliability assurance, by considering system uncertainties. In this work, a new RBDO method with including the system reliability requirement and considering the failure mode interactions is proposed. Besides, this formulation leads to ensure appropriate safety level during the whole structure lifetime. Finally, the best solution is searched by minimizing the total cost function which the maintenance costs are integrated.