



Etude des perturbations dans les convertisseurs de l'électronique de puissance

Mohamed Melit

► To cite this version:

Mohamed Melit. Etude des perturbations dans les convertisseurs de l'électronique de puissance. Electromagnétisme. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II; UNIVERSITE DE JIJEL, 2008. Français. NNT : 2008CLF21830 . tel-00728780

HAL Id: tel-00728780

<https://theses.hal.science/tel-00728780>

Submitted on 6 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : D. U : 1830

EDSPIC : 400

UNIVERSITE BLAISE PASCAL – CLERMONT II

ECOLE DOCTORALE

SCIENCES POUR L'INGENIEUR DE CLERMONT - FERRAND

UNIVERSITE DE JIJEL

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR

Thèse

Présentée par

Mohammed MELIT

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES (Université de Jijel)

DOCTEUR D'UNIVERSITE (Université Blaise Pascal)

SPECIALITE : Electromagnétisme

ETUDE DES PERTURBATIONS

DANS LES CONVERTISSEURS DE L'ELECTRONIQUE

DE PUISSANCE

Soutenue publiquement le 19 avril 2008 devant le jury :

M. R. MEKIDECHE	Prof. à l'Université de Jijel	Président
K. ZEHAR	Prof. à l'Université Ferhat Abbas	Rapporteur
M. RIFI	Prof. à l'Université Hassan II	Rapporteur
K. KERROUM	Prof. Ass. à l'Université Blaise Pascal	Examineur
B. NEKHOUL	Prof. à l'Université de Jijel	Directeur
K. EL KHAMLIHI DRISSI	Prof. à Université Blaise Pascal	Directeur

Résumé

Dans notre travail de thèse nous nous intéressons à la caractérisation de l'environnement électromagnétique des convertisseurs de l'électronique de puissance. Pour ce faire, nous proposons d'utiliser des formalismes analytiques de calcul du champ électromagnétique émis par les dispositifs de l'électronique de puissance en domaine fréquentiel et aussi directement en domaine temporel.

Après une analyse par résolution directe des équations de Maxwell par FDTD, nous avons étendu notre travail à une approche simplifiée et plus accessible à l'ingénieur de recherche. Cette approche consiste à réaliser le travail en deux étapes. Dans une première étape, nous commençons par le calcul de la répartition des courants et tensions et en deuxième étape, nous abordons le calcul analytique du champ électromagnétique émis.

Afin de compléter notre travail, nous avons aussi abordé la question de la réduction de l'émission électromagnétique des convertisseurs de l'électronique de puissance. Pour cette problématique, nous proposons de réduire le champ magnétique rayonné en introduisant des boucles conductrices passives au sein même du dispositif.

Mots clés : Rayonnement électromagnétique, convertisseurs statiques, circuits imprimés, dipôles Hertiens, modèle de Schelkunoff, différences finies temporelles.

Summary

The goal of our thesis is the characterization of the electromagnetic environment of the power electronics converters. In this intention, by using analytical formalisms for the calculation of the electromagnetic field, we propose to model the electromagnetic radiation of the power electronics devices in frequency domain and also directly in time domain.

After an analysis by direct resolution of the Maxwell's equations by FDTD, we extended our work to a simplified approach and more accessible to the engineer of research. This approach consists in two steps. In a first step, we start with the calculation of the currents and voltages distribution. In the second phase, we treat the analytical calculation of the emitted electromagnetic field.

In order to complete our work, we have also been interested to the reduction of the electromagnetic emission of the power converters. For these problems, we propose to reduce the radiated magnetic field by introducing passive conducting loops within the device.

Keywords: electromagnetic emission, static converter, printed circuit, Hertzian dipoles, Schelkunoff model, finite difference time domain.

Remerciements

Ce travail rentre dans le cadre d'un projet de coopération de recherche Algéro-Français (projet Tassili 02/MDU/557) qui s'intitule "Analyse des Câbles de Télécommunications, d'Energie et des Dispositifs Electromagnétiques". Cette collaboration regroupe le Laboratoire d'Etude et de Modélisation en Electrotechnique (LAMEL – Université de Jijel – Algérie) et le Laboratoire des Sciences des Matériaux pour l'Electronique, et d'Automatique (LASMEA – Université Blaise Pascal – France).

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements au professeur B. Nekhoul pour avoir dirigé cette thèse avec une attention soutenue, pour ses grandes qualités scientifiques et humaines. Je le remercie pour l'aide précieuse et les conseils qu'il a su me transmettre avec beaucoup de patience et de pédagogie.

Je remercie également Monsieur K. El Khamlichi Drissi, professeur à l'Université Blaise Pascal de Clermont-ferrand, Co-Directeur de cette thèse, pour ses conseils précieux, son aide qu'il m'a prodiguée tout le long de ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à :

- Monsieur M.R. Mékidèche, professeur à l'université de Jijel, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse.
- Monsieur K. Zehar, professeur à l'université Ferhat Abbas, qui m'a fait l'honneur de participer à ce jury en qualité de rapporteur de thèse.
- Monsieur M. Rifi, professeur à l'université de Hassan II, qui m'a fait l'honneur de participer à ce jury en qualité de rapporteur de thèse.
- Monsieur K. Kerroum, professeur à l'université Blaise Pascal, qui m'a fait l'honneur de participer à ce jury en qualité d'examineur de thèse.

Mes remerciements s'adressent aussi à mes enseignants M. Lefouili et N. Boudjerda, et à mes collègues B. Harrat, S. Mezoued, et S. Kaouche et à tous mes coéquipiers au sein de l'équipe de compatibilité électromagnétique au LAMEL pour leurs encouragements durant ce travail.

Sommaire

Introduction Générale.....	2
Chapitre I Généralités	
Introduction.....	7
I. La compatibilité électromagnétique.....	8
II. Emissions des convertisseurs statiques.....	8
II.1. Contenu spectral des signaux de l'électronique de puissance.....	9
II.1.1. Onde trapézoïdale.....	9
II.1.2. Impulsion rectangulaire.....	10
III. Classification des émissions des convertisseurs.....	11
III.1. Classification selon le mode propagation.....	11
III.1.1. Perturbations conduites basses fréquences.....	12
III.1.2. Perturbations conduites hautes fréquences.....	12
III.1.3. Perturbations en mode rayonné.....	12
III.2. Exemple : Effets des perturbations électromagnétiques dans les convertisseurs statiques	13
III.3. Compromis perturbations – pertes.....	15
IV. Quelques notions sur le couplage par champ électromagnétique.....	15
IV.1. Couplage en champ proche.....	15
IV.1.1. Couplage par un champ électrique.....	16
IV.1.2. Couplage par un champ d'induction magnétique.....	16
IV.2. Couplage en champ lointain.....	16
IV.3. Mode de couplage d'une onde électromagnétique.....	16
V. Immunité des électroniques.....	17
VI. Références bibliographiques.....	20

Chapitre II Résolution des équations de Maxwell par FDTD

Introduction.....	22
I. Equations de Maxwell.....	23
I.1. Détermination des condition aux limites.....	24
I.1.1. Conditions sur les composantes tangentiellles.....	24
I.1.2. Conditions sur les composantes normales.....	25
I.2. Quelques cas particuliers.....	26
I.2.1. Conducteur parfait - Diélectrique imparfait.....	26
I.2.2. Diélectrique imparfait - Diélectrique parfait.....	27
II. Résolution des équations de Maxwell par FDTD.....	27

II.1. Discrétisation des équations de Maxwell par FDTD.....	29
II.1.1. Le cube de Yee.....	30
II.1.2. La discrétisation spatio-temporelle par FDTD.....	31
II.1.3. Critère de stabilité.....	32
II.1.4. Mise en oeuvre de la méthode FDTD.....	33
III. Les conditions de frontières.....	33
III.1. Méthode des conditions absorbantes de Mur.....	36
III.1.1. Condition absorbante de Mur du premier ordre.....	37
III.1.2. Condition absorbante de Mur du deuxième ordre.....	38
III.2. Cas d'un exemple en 3D par FDTD.....	38
IV. Application de la méthode FDTD aux convertisseurs de puissance.....	40
IV.1. Traitement des différents éléments du convertisseur.....	41
IV.1.1. Pistes du circuit imprimé et plan de masse.....	41
IV.1.2. Prise en compte du diélectrique.....	42
IV.2. Prise en compte des composants localisés du convertisseur.....	44
IV.2.1. Cas d'une charge résistive.....	45
IV.2.2. Source de tension avec sa résistance interne.....	46
IV.2.3. Prise en compte d'un condensateur.....	47
IV.2.4. Prise en compte d'une inductance.....	47
IV.2.5. Diode à fonctionnement non linéaire.....	48
IV.2.6. Transistor à jonction bipolaire.....	49
V. Références bibliographiques.....	52

Chapitre III Approche semi analytique pour l'analyse de l'environnement électromagnétique des circuits de puissance

Introduction.....	55
I. Calcul du champ électromagnétique.....	56
I.1. Dipôles Hertiens.....	56
I.1.1. Formulation du calcul du champ.....	57
I.1.2. Modèle des dipôles Hertiens en domaine fréquentiel.....	58
I.1.3. Modèle des dipôles Hertiens en domaine temporel.....	58
I.2. Modèle de Schelkunoff	59
I.3. Prise en compte du plan de masse et du diélectrique.....	61
II. Calcul de la répartition des courants dans un dispositif de l'EP.....	61
II.1. Principe de l'analyse.....	61

II.2. Modélisation en domaine fréquentiel par la matrice chaîne $[\Phi]$	62
II.2.1. Sous matrice des tubes $[A_1]$	62
II.2.2. Sous matrice des jonctions $[A_2]$	63
II.2.3. Vecteur des inconnues $[X]$	63
II.2.4. Vecteur $[B]$	63
II.3. Modélisation en domaine temporel par FDTD.....	63
II.3.1. Equations générales du couplage onde-structure filaire en domaine fréquentiel.....	63 65
II.3.2. Equations générales des lignes couplées en domaine temporel.....	66
II.3.3. Equations aux extrémités.....	
II.3.4. Sous matrice des tubes $[A_1]$	67
II.3.5. Vecteur des inconnus $[X]$	67
II.3.6. Vecteur $[B]$	67
II.3.6.1. Sous vecteur $[B_1]$	67
II.3.6.2. Sous vecteur $[B_2]$	68
II.4. Résolution du système d'équations.....	68
III. Modélisation des pistes des circuits de l'électronique de puissance.....	68
III.1. Calcul des paramètres linéiques des pistes.....	68
III.1.1. Expressions générales du potentiel électrique pour un conducteur filiforme.....	70
III.1.2. Pistes sans diélectrique.....	71
III.1.3. Pistes avec diélectrique.....	71
III.2. Coefficients de potentiels des pistes.....	73
III.2.1. Cas d'un diélectrique sans plan de masse.....	73
III.2.2. Cas d'un diélectrique avec plan de masse.....	74
III.3. Calcul des matrices capacité et inductance linéiques $[C]$ et $[L]$ pour un ensemble de pistes parallèles.....	75
IV. Prise en compte des composants localisés du convertisseur.....	77
IV.1. Cas d'une charge résistive.....	77
IV.2. Source de tension avec sa résistance interne.....	78
IV.3. Prise en compte d'un condensateur.....	78
IV.4. Prise en compte d'une inductance.....	78
IV.5. Diode à fonctionnement non linéaire.....	78
IV.6. Fonctionnement réel des interrupteurs : prise en compte des non linéarités....	79
V. Références bibliographiques	81

Chapitre IV	Applications	
Introduction		84
I. Analyse dans le domaine fréquentiel.....		85
I.1. Validation.....		85
I.1.1. Calcul en zone proche		85
I.1.2. Calcul en zone éloignée		86
I.2. Etude du rayonnement en fonction de la fréquence		86
II. Analyse dans le domaine temporel.....		88
II.1. Cas de l'interrupteur parfait.....		89
II.1.1. Circuit sans plan de masse.....		90
II.1.2. Circuit avec plan de masse.....		91
II.1.3. Etude paramétrique.....		92
II.1.3.1. Effet du temps de montée du signal d'alimentation.....		92
II.1.3.2. Effet de la charge.....		93
II.1.3.3. Effet du diélectrique.....		95
II.2. Convertisseur avec interrupteurs à fonctionnement non linéaire (hacheur série)		96
Conclusion.....		99
III. Références bibliographiques		100

Chapitre V Réduction du rayonnement électromagnétique

Introduction.....	102
I. Modes de propagation des perturbations.....	103
II. Les techniques de protection en CEM en électronique de puissance.....	103
III. Les convertisseurs de l'électronique de puissance et la pollution électromagnétique par rayonnement.....	103
III.1. Les blindages.....	104
III.2. Disposition des composants et du câblage.....	105
III.2.1. Du schéma au montage réel.....	105
III.2.2. Recherche d'une stratégie de placement.....	106
III.2.3. Utilisation de la symétrie.....	106
IV. Réduction par disposition géométrique.....	107
IV.1 Effet de la disposition des pistes.....	107
IV.2. Effet de la disposition géométrique des composants du circuit.....	111
V. Réduction du champ magnétique par boucles passives.....	112

V.1. Principe.....	113
V.2. Analyse dans le domaine fréquentiel.....	113
V.2.1. Réduction passive avec charge purement résistive.....	113
V.2.1.1. Réduction par une seule boucle.....	114
V.2.1.2. Réduction par deux boucles.....	116
V.3. Analyse dans le domaine temporel.....	117
V.3.1. Effet de la boucle passive en court-circuit.....	117
V.3.2. Effet de la taille de la boucle passive sur la réduction.....	118
V.3.3. Effet du nombre des boucles passives sur la réduction.....	120
V.3.4. Effet des charges résistives aux extrémités de la boucle de réduction...	121
Conclusion.....	124
VI. Références bibliographiques.....	125
Conclusion Générale.....	127
Annexes.....	131

Introduction Générale

Introduction Générale

La diffusion rapide et diversifiée des équipements de l'électronique de puissance tant dans le domaine professionnel et militaire (équipements embarqués, variation de vitesse, chauffage, contrôle de l'énergie,...) que grand public (domestique, automobile, ordinateurs, ...) multiplie les sources de perturbations électromagnétiques. Ces perturbations, parfois très contraignantes, ont conduit les ingénieurs de recherches vers un vaste domaine communément appelé "Compatibilité Electro-Magnétique".

Les travaux sur la CEM en électronique de puissance ont débuté au milieu des années 1980. Les mondes industriels et universitaires se montraient préoccupés par le problème des perturbations, car les performances de commutation des composants s'étaient considérablement accrues [émergence de l'IGBT (Insulated Gate Bipolar Transistor), large diffusion du MOSFET (Metal Oxide Silicon Field Effect Transistor)], de même pour les fréquences de commutation et les niveaux de pollution électromagnétique.

Le fonctionnement d'un convertisseur statique est intrinsèquement polluant, les grandeurs électriques étant fortement variables à cause de leurs commutations rapides, sur des durées très courtes ($1\ \mu\text{s}$ à $10\ \text{ns}$), avec de fortes amplitudes (de l'ordre du kiloVolt et du kilo Ampère) et des fréquences pouvant être élevées ($100\ \text{Hz}$ à $1\ \text{MHz}$) [I.1]. Plus que leur amplitude, ce sont surtout les dérivées de ces grandeurs qui sont à l'origine des perturbations électromagnétiques. En effet, tous les phénomènes de couplage s'opèrent proportionnellement à la dérivée d'une grandeur électrique.

L'analyse de la tension de sortie des convertisseurs suppose généralement les composants semi-conducteurs de puissance comme de parfaits interrupteurs. En réalité ces interrupteurs nécessitent un certain temps de commutation. Si en basses fréquences cette supposition est acceptable, en hautes fréquences, la commutation provoque certains effets dont il faut tenir compte. Parmi ces effets on peut citer : le rayonnement des convertisseurs et les courants du mode commun à travers les capacités parasites.

Ceci constitue un sérieux problème de Compatibilité Electromagnétique (CEM) où nous rencontrons :

- une perturbation conduite (les courants du mode commun) ;
- une perturbation rayonnée (le rayonnement des convertisseurs).

Au départ, l'unique souci des industriels est de palier aux perturbations conduites de natures harmoniques générées par le convertisseur et qui entraînent généralement un

dysfonctionnement réel sur la charge. Ces derniers ont été l'objet de divers travaux [I.13]-[I.15].

Aussi, la présence de boucles de courant et d'interrupteurs rapides dans ces dispositifs est à l'origine d'émissions électromagnétiques responsables d'auto-pollution des circuits de commande du convertisseur même et de pollution des dispositifs avoisinants. Vu l'utilisation grandissante des convertisseurs de l'électronique de puissance, ces problèmes sont actuellement un souci réel pour les industriels.

Concrètement, le problème de la CEM en électronique de puissance consiste à limiter l'étendue des perturbations engendrées par les convertisseurs ou à tenter de mieux contrôler et réduire leurs effets néfastes, mais également la recherche de solutions et de règles de conception applicables industriellement.

Lors d'un précédent travail [I.9]-[I.11] nous nous sommes intéressés aux perturbations conduites et leurs réductions par une commande aléatoire. Dans cette thèse de doctorat, nous abordons le deuxième volet qui consiste en l'analyse du rayonnement électromagnétique des dispositifs de l'électronique de puissance.

Dans ce travail, en utilisant des formalismes analytiques de calcul du champ électromagnétique émis par des conducteurs filiformes, nous proposons de modéliser le rayonnement électromagnétique des dispositifs de l'électronique de puissance en domaine fréquentiel et aussi directement en domaine temporel.

A l'état actuel, quelques logiciels déjà commercialisés (FEKO, NEC4, ...) permettent de modéliser en domaine fréquentiel le problème de l'émission électromagnétique des convertisseurs de l'électronique de puissance. Le formalisme théorique utilisé est celui des antennes qui consiste à résoudre numériquement par la méthode des moments une équation intégrale en champ électrique ou magnétique. Ce formalisme, certes rigoureux reste de mise en œuvre lourde et nécessite l'utilisation de la FFT pour une analyse en domaine temporel. Afin de lever cet inconvénient et permettre une modélisation directement en domaine temporel, très récemment quelques auteurs [II.13]-[II.14] proposent de résoudre directement les équations de Maxwell par FDTD (Finite Difference Time Domain).

L'approche par FDTD s'adapte bien aux dispositifs à géométries régulières et permet la prise en compte des non linéarités introduites par les interrupteurs. La confrontation des résultats obtenus par cette modélisation à ceux réalisés par la mesure [I.2] met en évidence une différence en allure. Cette différence, met en évidence l'absence de la prise en compte des pertes dans le dispositif électrique. Il est en principe possible de s'affranchir de cette limitation, et d'utiliser la méthode FDTD pour considérer des dispositifs comportant des

pertes. Cela implique également une augmentation importante des besoins et moyens informatiques qui peuvent devenir prohibitifs.

Dans notre travail de doctorat, après une analyse de la résolution directe par FDTD des équations de Maxwell, nous avons étendu notre travail à une approche simplifiée et plus accessible à l'ingénieur de recherche. Cette approche consiste à réaliser le travail en deux étapes :

1. calcul de la répartition des courants et tensions,
2. calcul analytique du champ électromagnétique émis.

Le calcul des courants et tensions est réalisé en tenant compte des réseaux localisés présents dans le circuit électrique ainsi que de la propagation sur les pistes.

Afin de compléter notre travail, nous avons aussi abordé la question de la réduction de l'émission électromagnétique des convertisseurs de l'électronique de puissance. Chez l'industriel, pour réduire le rayonnement électromagnétique des convertisseurs de puissance, la solution la plus connue et la plus utilisée consiste à placer de manière judicieuse les différents composants, connue sous l'appellation "recherche d'une stratégie de placement". Cette stratégie est à l'image du jeu d'échecs : on connaît les règles du maniement de chaque pièce, mais il n'est pas possible d'écrire la règle qui fait gagner. Tout dépend du cas que l'on doit traiter. Il y a cependant un ordre logique dans les décisions à prendre, ce qui alourdit et rend parfois difficile cette stratégie. Pour cette problématique, en partant des loi d'induction de Faraday et de Lenz qui indique que les courants induits s'opposent à l'effet qui leur donne naissance, nous proposons de réduire le rayonnement en introduisant des boucles conductrices passives au sein même du dispositif.

Afin de présenter notre travail, nous proposons cinq chapitres. Le premier consacré aux généralités, va permettre de familiariser le lecteur avec l'objet de notre travail. Dans le deuxième chapitre, nous présentons, avec quelques détails théoriques, le formalisme proposé par K. S. Yee [I.5] pour la résolution des équations de Maxwell directement en domaine temporel par FDTD. Nous avons pris le soin de compléter ce chapitre par quelques éléments de modélisation importants pour la prise en compte des frontières fermées et des frontières ouvertes et pour la représentation des composants localisés (interrupteur, résistance, ...).

Dans le troisième chapitre, nous présentons notre contribution pour la modélisation de ce problème. Nous proposons une première approche en domaine fréquentiel, où le calcul du champ est réalisé par le :

- le modèle de Schelkunoff, pour les pistes où la propagation est présente,
- le modèle des dipôles Hertiens, en absence de propagation.

En domaine fréquentiel, l'utilisation de ces deux modèles nécessite la connaissance de la répartition des courants ; ces derniers sont calculés à l'aide d'une représentation par matrice $[\Phi]$ des pistes et par les lois de Kirchhoff (KVL et KCL) des réseaux localisés.

En domaine temporel, uniquement le modèle des dipôles est utilisé ; pour la répartition nous utilisons une représentation similaire à celle par matrice $[\Phi]$, déduite après discrétisation des équations des lignes par FDTD.

Dans le quatrième chapitre, nous proposons quelques applications pour valider notre travail et conforter nos divers développements. En domaine fréquentiel, nous confrontons des résultats de calcul réalisés avec nos propres développements à ceux que nous réalisons par utilisation de logiciels commercialisés. En domaine temporel, nous consacrons l'essentiel de nos applications à la comparaison des résultats que nous obtenons directement en une seule étape par résolution des équations de Maxwell à ceux que nous obtenons par le formalisme des dipôles Hertiens

Le champ magnétique est le plus redouté en matière de perturbations par couplage électromagnétique d'une onde avec une boucle conductrice ; le cinquième chapitre nous le consacrons à la réduction du champ magnétique émis par les convertisseurs. Dans ce chapitre nous présentons notre approche de réduction par simple ajout de boucles passives conductrices sur le circuit imprimé.

Nous terminons ce travail par une conclusion générale et des perspectives.

Chapitre I

Généralités

Introduction

Dans notre travail de doctorat, nous nous intéressons à la caractérisation de l'émission électromagnétique des convertisseurs de l'électronique de puissance en haute fréquence (durant la commutation). Dans un circuit de l'électronique de puissance, les pistes traversées par les variations rapides des courants deviennent des antennes émettrices d'ondes électromagnétiques dont l'impact indirect sur d'autres dispositifs (couplage électromagnétique) peut entraîner l'apparition de perturbations conduites.

Afin de positionner notre travail, nous commençons ce chapitre intitulé généralités par un état de l'art sur la compatibilité électromagnétique ; nous présentons aussi un bref aperçu sur les perturbations électromagnétiques conduites et rayonnées par les convertisseurs de l'électronique de puissance en rappelant leurs contenus fréquentiels. Nous proposons un exemple mettant en évidence les différents effets de perturbations dans un dispositif de l'électronique de puissance et les modes de couplages possibles.

I. La compatibilité électromagnétique

Un appareil ou un système électrique ou électronique sera compatible du point de vue électromagnétique avec son environnement proche ou lointain, si son fonctionnement n'est pas altéré par les perturbations électriques et magnétiques générées par ce dernier. Réciproquement, l'environnement ne doit pas être perturbé par l'appareil ou le système. Si tout fonctionne correctement, il y a compatibilité électromagnétique (CEM).

Dans l'absolu, il existe toujours un niveau de perturbation électromagnétique émis par l'appareil ou l'environnement, il devra alors être inférieur à un certain seuil prédéfini par les normes de compatibilité électromagnétique.

De même, l'appareil ou le système devra présenter un certain seuil d'immunité intrinsèque, c'est-à-dire tolérer sans dysfonctionnement un niveau minimum de perturbation.

Les études en CEM comprennent donc [I.1]:

- la recherche des sources de perturbations et leur caractérisation ;
- l'analyse des modes de transmission (couplage) ;
- la quantification des niveaux des perturbations ;
- l'étude des techniques et stratégies de réduction des perturbations émises ;
- la recherche de techniques et de stratégies de protection contre les perturbations reçues ;

II. Emissions des convertisseurs statiques

Le principe même de l'électronique de puissance est d'assurer une transformation de l'énergie électrique par découpage à des fréquences usuellement de 100 Hz à quelques centaines de kHz.

Les temps de commutation sont classiquement supérieurs à 100 ns, alors que les circuits numériques dédiés au signal présentent des temps de transition souvent inférieurs à 5 ns. Par contre, les tensions et les courants mis en jeu, qui dictent le choix des composants de puissance, conduisent à des croissances des tensions assez voisines mais à des vitesses de croissance de courant beaucoup plus élevées [I.2].

Les « di/dt » vont créer des impulsions brèves de tensions aux bornes des inductances parasites ou de connexions et, par suite, perturber par couplage dit par impédance commune les circuits sensibles utilisant les mêmes conducteurs dénommés bus de puissance.

Les « dv/dt » vont créer des impulsions très brèves de courant dans les capacités parasites diverses (couplage carte à châssis par exemple) et occasionner, de même que précédemment, des perturbations dans les cartes de contrôle-commande.

Les convertisseurs sont donc à la fois agresseurs et victimes :

Agresseurs principalement par les phénomènes liés aux commutations de la structure de puissance.

Victimes parce que leur carte de contrôle-commande, généralement numérique ou hybride, est auto perturbée par la partie puissance, les perturbations extérieures issues de l'environnement naturel et industriel pouvant également intervenir, mais de manière moindre.

Les signaux numériques des cartes de contrôle-commande seront décomposés en séries de Fourier de manière, en appliquant des formules convenables, à évaluer le risque par rang d'harmonique afin de proposer une solution d'immunité en compatibilité électromagnétique.

II.1. Contenu spectral des signaux de l'électronique de puissance

En électronique de puissance, deux types de signaux de commandes sont généralement considérés ; il s'agit du signal trapézoïdal et du signal rectangulaire.

II.1.1. Onde trapézoïdale

L'onde à prendre en référence (figure I.1), pour les tensions et les courants est le train d'impulsions trapézoïdales dissymétriques qui correspond à des signaux en commutation de période T , avec un temps de montée t_r et un temps de descente t_f .

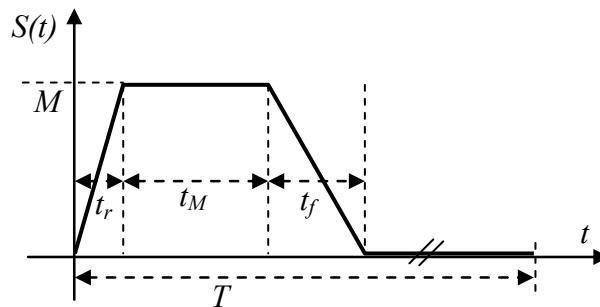


Figure I.1. Onde trapézoïdale de référence.

L'expression mathématique de l'amplitude en valeur efficace réduite de son harmonique de rang n est :

$$\frac{S_n}{M} = \sqrt{2} \alpha \left| \frac{\sin n\delta_r \pi}{n\delta_r \pi} \right| \times \left| \frac{\sin [\alpha + 0.5(\delta_r - \delta_f)] n\pi}{[\alpha + 0.5(\delta_r - \delta_f)] n\pi} \right| \times \left| \frac{\sin (\delta_f - \delta_r) n\pi}{(\delta_f - \delta_r) n\pi} \right| \quad (I.1)$$

avec :

$$\alpha = \frac{t_M}{T} + \frac{t_r + t_f}{2T} \quad \delta = \frac{t_r + t_f}{2T} \quad \delta_r = \frac{t_r}{T} \quad \delta_f = \frac{t_f}{T}$$

Dans le cas particulier de l'impulsion trapézoïdale symétrique ($t_r = t_f$), l'expression mathématique de l'harmonique de rang n s'écrit alors (I.2):

$$\frac{S_n}{M} = \sqrt{2}\alpha \left| \frac{\sin n\delta\pi}{n\delta\pi} \right| \times \left| \frac{\sin n\alpha\pi}{n\alpha\pi} \right| \quad (\text{I.2})$$

Le tracé de l'enveloppe correspondante qui est le lieu des maximums de la fonction $S(n)$ en fonction du rang d'harmoniques est donné en figure I.2.

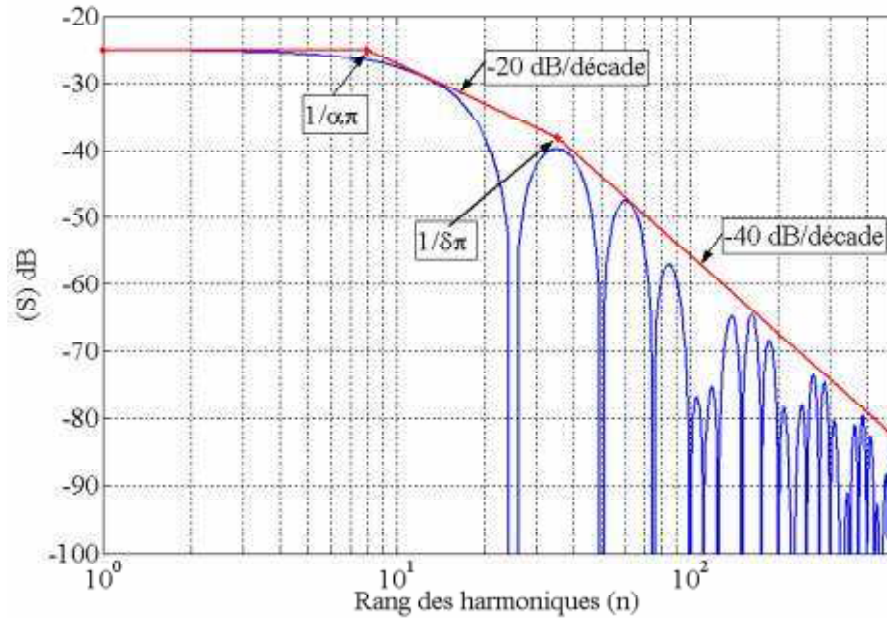


Figure I.2. Spectre d'un signal trapézoïdal symétrique.

II.1.2. Impulsion rectangulaire

C'est le signal type des cartes numériques de contrôle-commande des convertisseurs, ou de l'onde de sortie idéale d'un hacheur (figure I.3).

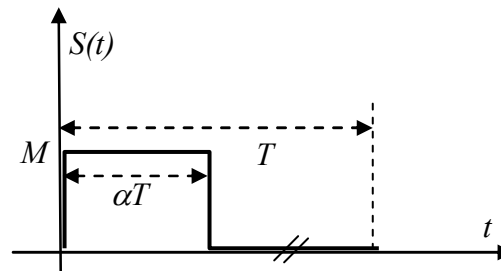


Figure I.3. Impulsion rectangulaire.

L'expression mathématique de l'amplitude en valeur efficace réduite de l'harmonique de rang n est exprimée comme suit:

$$\frac{S_n}{M} = \frac{\sqrt{2}}{n\pi} |\sin n\alpha\pi| \quad (\text{I.3})$$

L'allure de l'amplitude des harmoniques et leur enveloppe correspondante sont donnés en figure I.4.

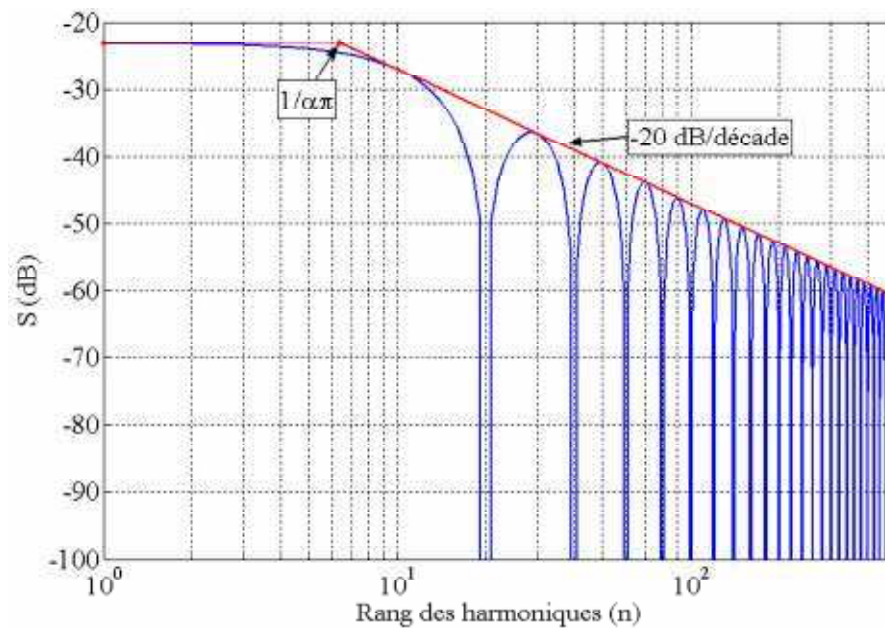


Figure I.4. Spectre d'un signal carré.

III. Classification des émissions des convertisseurs

Soit la classification en tableau I.1, selon les fréquences et leurs limites de plages correspondant aux normes en émission [I.1].

Fréquences	0 Hz à 50 Hz	50 Hz à 2 kHz	9 kHz à 150 kHz	150 kHz à 30 MHz	150 kHz à 300 MHz	30 MHz à 1 GHz
Grandeurs le plus souvent observées	Sous harmoniques des courants	Harmoniques des courants et des tensions	Courants radio fréquences Tensions perturbatrices Champ magnétique	Courants radio fréquences Champs proches	Rayonnement des câbles Puissances perturbatrice	Rayonnement avec les champs généralement couplés
Convertisseurs statiques et appareils électriques pouvant être concernés	Gradateurs en trains d'ondes Cyclo-convertisseurs	Redresseurs Gradateurs en angle de phase	Appareils électriques d'éclairage et analogues	Micro ordinateurs Alimentations à découpage	Outils électriques avec moteurs ou dispositifs thermiques Appareils électro-domestiques	Micro-ordinateurs Alimentations à découpage Tout système numérique

Tableau I.1 Classification des perturbations par les fréquences.

III.1. Classification selon le mode propagation

Les perturbations électromagnétiques créées par les convertisseurs statiques d'énergie peuvent être classées selon leur mode de propagation. On distingue des perturbations conduites et des perturbations rayonnées.

III.1.1. Perturbations conduites basses fréquences

Ces perturbations sont essentiellement liées aux harmoniques et sous harmoniques des courants appelés au réseau par les structures de puissance à diodes, thyristors, triacs, thyristors GTO, etc.

Parmi les convertisseurs émetteurs de ce type de perturbations, on peut citer [I.1]:

- les structures à alimentation monophasée et triphasée sans préjuger de leurs applications ;
- les redresseurs ;
- les gradateurs ;
- les cycloconvertisseurs.

III.1.2. Perturbations conduites hautes fréquences

Dans cette classe, on parle le plus souvent des harmoniques des courants hautes fréquences, qui viennent des structures et installations suivantes [I.1]:

- les appareils électriques d'éclairage et analogues ;
- les micros ordinateurs ;
- les alimentations à découpage.

III.1.3. Perturbations en mode rayonné

Ce mode de perturbation se caractérise par une émission électromagnétique, dont le couplage avec des dispositifs électriques induits des courants perturbateurs.

Hormis les champs proches de fréquences multiples des fréquences de fonctionnement, il y aura ceux qui correspondent aux commutations rapides, donc essentiellement celles de l'alimentation à découpage.

Les perturbations rayonnées des convertisseurs proviennent donc, principalement des circuits numériques et de leurs cartes de contrôle. Les structures de puissance rayonnent à des fréquences inférieures [I.1].

Dans le cadre de notre travail nous nous intéressons aux perturbations rayonnées par les convertisseurs de puissance ; vu leurs diversités, ces derniers trouvent leurs applications dans les équipements embarqués qui sont de plus en plus complexes et fonctionnent dans un environnement plus compacte et plus vulnérable par les équipements avoisinants. Dans le sous- paragraphe qui va suivre, nous donnons un exemple pratique qui représente un variateur de vitesse. Nous décrivons par la suite les différents types de couplage qui existent entre les différents éléments du système.

III.2. Exemple : Effets des perturbations électromagnétiques dans les convertisseurs statiques [I.3]

La compatibilité électromagnétique appliquée au cas de l'électronique de puissance concerne trois niveaux d'environnement du convertisseur. La figure I.5 précise cette hiérarchie.

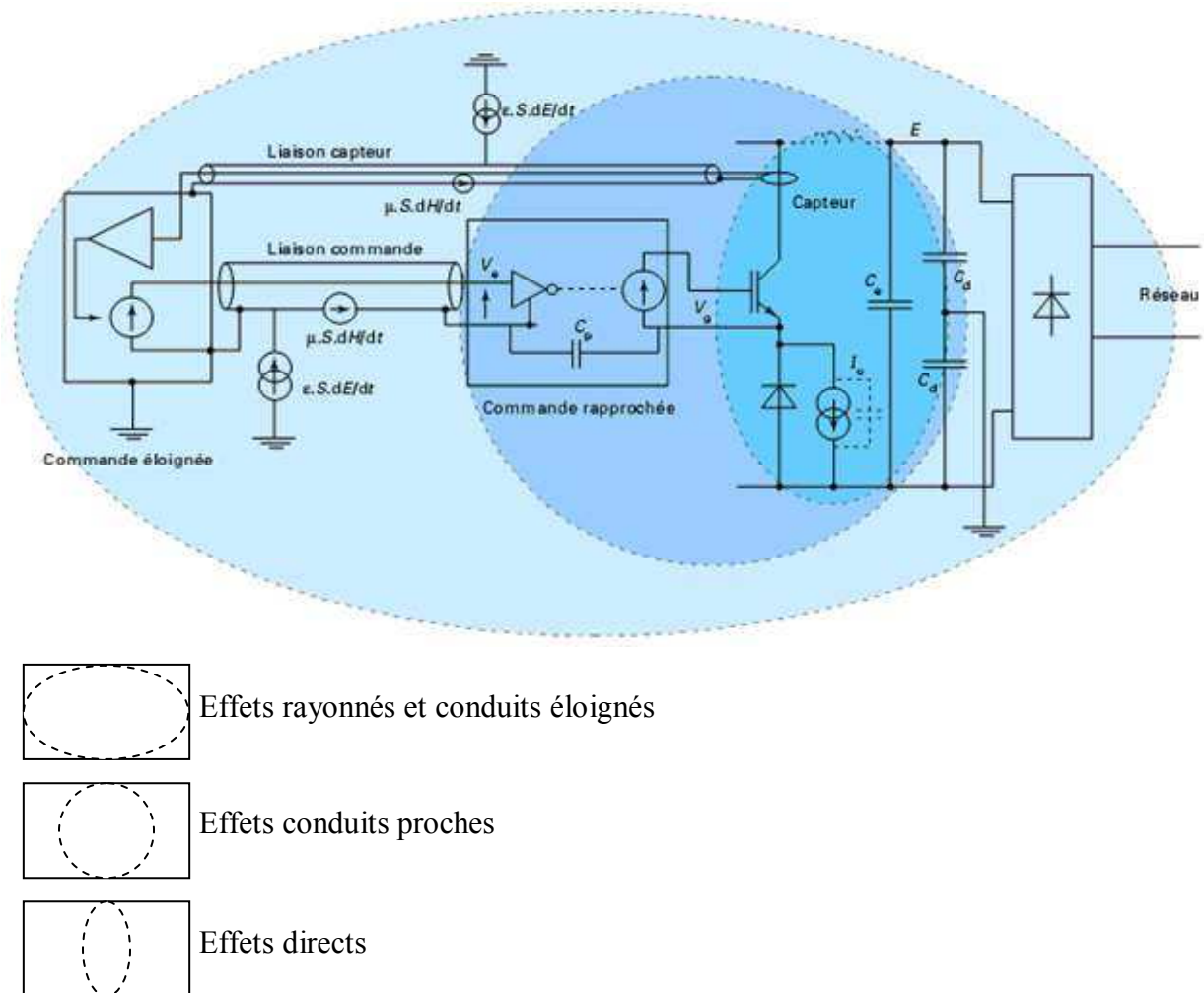


Figure I.5. Différents niveaux de la CEM en électronique de puissance.

Le premier niveau concerne les effets directs sur la structure de puissance, les semi-conducteurs et les composants passifs. Les variations rapides des courants d'interrupteurs (di/dt), associées à la présence d'inévitables effets inductifs (inductance parasite, inductance de fuite des transformateurs) dans la maille de commutation sont à l'origine de surtensions limitant les performances de la cellule de commutation. Des limitations similaires résultent des variations de tension rapides des semi-conducteurs (dv/dt) associées aux effets capacitifs (capacités réparties d'enroulement des transformateurs par exemple), et qui génèrent des surintensités. Les conséquences des surtensions sont souvent destructives car elles provoquent

des phénomènes non contrôlés d'avalanche dans les semi-conducteurs. Par contre, les conséquences des surintensités sont généralement mieux tolérées par les semi-conducteurs de par leur brièveté. Les effets thermiques peuvent rester limités.

Le deuxième niveau concerne l'environnement électrique proche qui assure les fonctions de commande du convertisseur : commande rapprochée d'interrupteur ou contrôle-commande plus éloignée.

Les effets des perturbations à ce niveau résultent d'effets de couplages proches, conduits ou induits : ($V_p = \mu_0 S \frac{dH}{dt}$ et $i_p = \epsilon_0 S \frac{dE}{dt}$).

Ce niveau est très sensible à la fiabilité et la sûreté de fonctionnement du système. Les technologies qui y sont mises en œuvre sont directement exposées aux agressions électromagnétiques les plus sévères du convertisseur. Les perturbations résultent de la circulation de courants de mode commun dans les circuits de commande mais aussi de couplages électromagnétiques proches. La figure I.6 schématise ces effets.

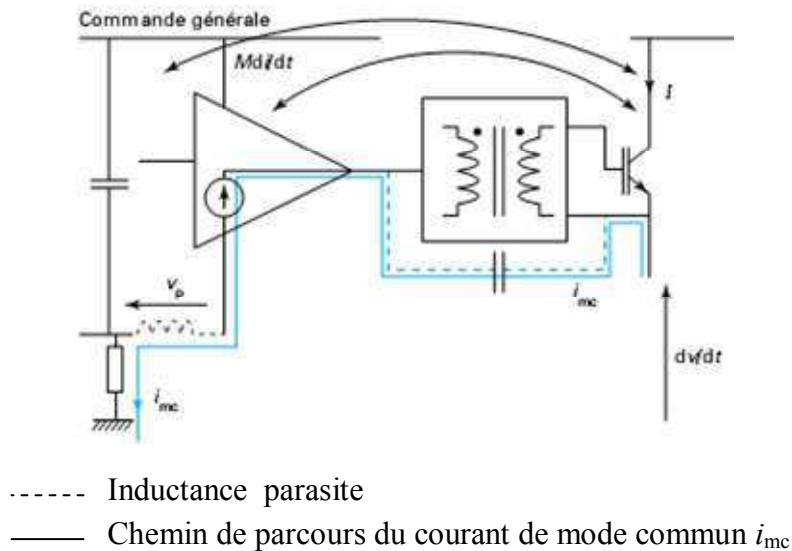


Figure I.6. Modes de perturbation des commandes rapprochées.

Notons enfin que les capteurs utilisés dans les convertisseurs statiques et leur connectique sont soumis aux mêmes types de perturbations.

Le troisième niveau concerne l'environnement plus distant du convertisseur. Les effets perturbateurs sont transmis :

- par conduction et se propagent ensuite sur le réseau où est connecté le convertisseur ou sur la charge de sortie ;

- par rayonnement direct du convertisseur ou par rayonnement des câbles issus du convertisseur soumis à des potentiels et des courants variables.

III.3. Compromis perturbations-pertes

Le concepteur d'un convertisseur statique est soumis au dilemme perturbations-pertes : la minimisation des pertes par commutation conduit à faire commuter les interrupteurs très rapidement, mais cela accroît les dv/dt et di/dt , donc les perturbations électromagnétiques.

Pour quantifier l'impact de la technologie des semi-conducteurs et des composants passifs sur la pollution conduite, une méthode consiste à mesurer l'énergie du signal de perturbation (tension fournie par le RSIL (Réseau Stabilisateur d'Impédance Ligne)). Dans le cas de signaux périodiques, l'énergie de perturbation W_{EMI} est définie par [I.3]:

$$W_{EMI} = \frac{1}{R_{RSIL}} \left(\int_0^T V_{RSIL1}^2 dt + \int_0^T V_{RSIL2}^2 dt \right) \quad (I.4)$$

Avec :

W_{EMI} : énergie de la perturbation électromagnétique,

V_{RSIL1} et V_{RSIL2} : tensions parasites mesurées sur les deux lignes d'alimentation du convertisseur,

R_{RSIL} : résistance de RSIL,

T : période de découpage.

IV. Quelques notions sur le couplage par champ électromagnétique

IV.1. Couplage en champ proche

Ainsi qu'on l'apprend en électromagnétisme, les caractéristiques du champ électromagnétique rayonné par une source de radiations varient en fonction de la distance qui sépare la source de radiation du lieu où le champ est observé. Près de la source, le champ électromagnétique rayonné dépend essentiellement des caractéristiques de la source : les termes les plus grands des composantes électriques et magnétiques du champ EM varient en fonction de $1/r^2$ et $1/r^3$. Cette région est appelée la zone de rayonnement en champ proche ou zone d'induction.

Dans cette région, les champs E et H peuvent être considérés séparément, suivant la composante du champ électromagnétique qui entraîne les effets les plus grands, on parle de couplage par induction électrique ou de couplage par induction magnétique.

IV.1.1. Couplage par un champ électrique

Il traduit l'existence de lignes de flux d'induction électrique qui partent de la source de perturbation pour aboutir sur le récepteur victime ; la cause des couplages par induction électrique (ou couplages capacitifs) est due aux capacités parasites. Les capacités parasites appartiennent à la catégorie des capacités dites mutuelles [I.4].

IV.1.2. Couplage par un champ d'induction magnétique

Il correspond à un récepteur qui est traversé par des lignes de flux d'induction magnétique générées par une source de perturbation; un tel couplage se représente par une inductance mutuelle.

Lorsqu'un courant électrique circule dans un conducteur, il engendre un champ magnétique H , dont les lignes de flux à la différence des lignes de flux électrique sont des lignes fermées entourant le conducteur. La direction des lignes de flux est donnée par la règle d'Ampère (ou par la règle de la main droite). La densité de flux magnétique ou induction magnétique est donnée par, $\vec{B} = \mu \vec{H}$. Le coefficient de propagation μ étant la perméabilité magnétique du milieu ; le courant i et le flux d'induction magnétique ϕ qu'il engendre sont reliés par l'expression $\phi = Li$, L désigne l'inductance propre [I.4].

IV.2. Couplage en champ lointain

Au-delà de la zone de rayonnement en champ proche s'étend la zone de rayonnement dite en champ lointain. Dans cette zone, les caractéristiques du champ électromagnétique rayonné ne dépendent que des propriétés du milieu dans lequel le champ se propage. Les composantes E et H du champ EM sont en phase dans le temps et leurs amplitudes varient en fonction de la distance en $1/r$;

Dans cette zone, et dans l'air, on dit que l'on a affaire à un couplage par champ électromagnétique ou par onde plane ; il faut employer les équations de Maxwell pour calculer l'amplitude des perturbations électromagnétiques [I.5], ce qui signifie que les composantes du champ électromagnétique ne peuvent y être séparées.

IV.3. Mode de couplage d'une onde électromagnétique

Après couplage du champ électromagnétique avec un dispositif électrique, dans la littérature trois types de modes sont répertoriés.

Le phénomène inverse de la génération de champ électromagnétique est communément appelé couplage électromagnétique [I.6]. Ce phénomène pour sa part est générateur de courants induits (champ magnétique) et de fluctuations de tension (champ électrique) à

l'intérieur du système considéré. Il peut être à l'origine de dysfonctionnements des systèmes électroniques.

Pour cette raison, on qualifie généralement ce phénomène parasite de "perturbation" ou "d'agression électromagnétique".

Un champ électromagnétique peut se coupler à un circuit électronique selon trois modes : les modes différentiel, commun ou antenne [I.7]. La figure I.7 illustre le principe de couplage pour chacun d'entre eux.

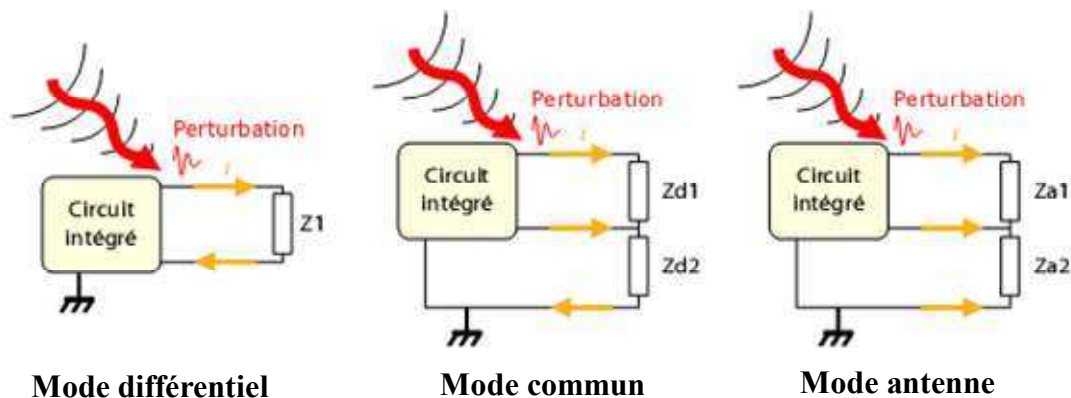


Figure I.7. Les principes des différents modes de couplage d'une onde électromagnétique avec un circuit.

Dans le cas de deux conducteurs très proches, une perturbation peut se coupler au système (figure I.7 partie de gauche) et induire un courant de mode différentiel. C'est-à-dire que le chemin de retour ne passe pas directement par la référence du système. Dans ce mode de couplage, le plan de référence ne joue aucun rôle dans le couplage.

Dans le cas d'un couplage en mode commun (figure I.7 partie centrale), l'ensemble des courants aller se propagent dans le même sens, et le courant de retour s'effectue directement par la référence de masse.

Enfin le dernier mode de couplage est le mode antenne (figure I.7 partie de droite). Ce mode de couplage est principalement rencontré dans les systèmes de transports : par exemple un avion traversant un champ radar. Dans ce mode, tous les courants circulent dans le même sens, que ce soient les courants aller ou retour. Ce mode ne génère donc pas de problèmes particuliers, excepté si ces courants sont transformés en courants de mode différentiel ou de mode commun par des variations d'impédance de différents chemins de courant [I.8].

V. Immunité des électroniques

Au-delà d'un certain niveau de perturbation, tout système est vulnérable et peut entrer en dysfonctionnement. On a alors atteint son seuil de susceptibilité. Il convient de lui conférer

une immunité suffisante en corrélation avec les seuils normalisés d'émissions de perturbations admis.

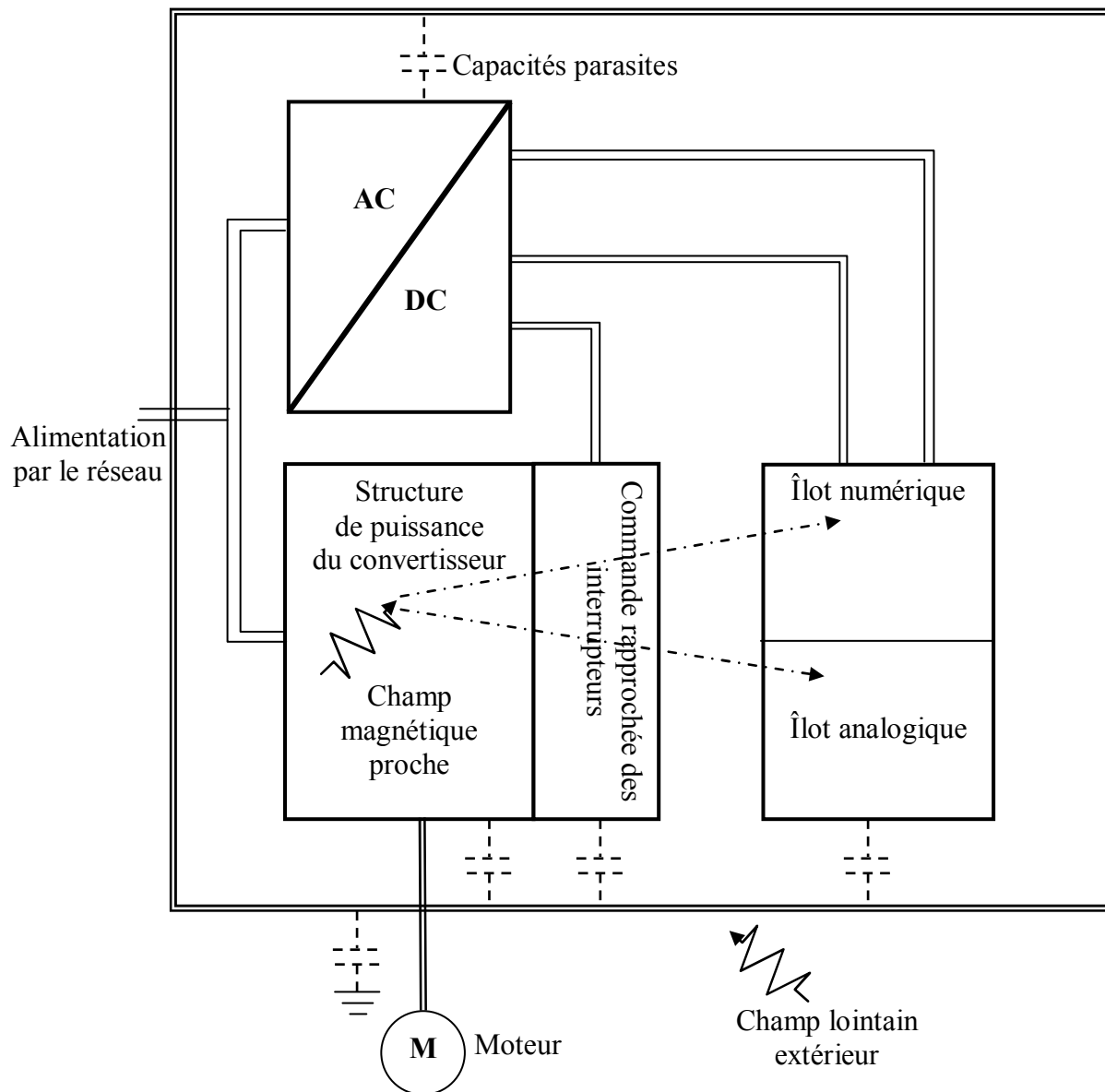


Figure I.8. Illustration d'un convertisseur et son environnement.

Dans le schéma en figure I.8, nous présentons l'exemple d'un variateur de vitesse qui comprend :

- son étage de puissance ;
- sa commande rapprochée ;
- sa carte numérique et analogique de contrôle-commande et leur alimentation propre ;
- sa charge (moteur) ;
- son réseau d'alimentation.

Le convertisseur est par ailleurs supposé être disposé dans un environnement électromagnétique perturbé.

A l'examen des différents éléments de la figure I.8, il apparaît plusieurs facteurs de vulnérabilité liés en particulier aux couplages entre une perturbation et un circuit victime auquel il faudra allouer une immunité suffisante.

VI. Références bibliographiques

- [I.1] J. L. Cocquerelle « CEM et électronique de puissance », Edition TECHNIP, ISBN 2710807645, 1990.
- [I.2] J. L. Cocquerelle, C. Pasquier, « Rayonnement Electromagnétique des Convertisseurs à Découpage, Approche Simplifiées par le Concept des Ilots Rayonnants », EDP Sciences. 2003.
- [I.3] F. Costa, G. Rojat « CEM en Electronique de Puissance, Sources de Perturbations, Couplages, SEM », Techniques de l'Ingénieur, Vol. D3 290, pp. 1-26.
- [I.4] F. Chauvet, « Compatibilité Electromagnétique, Introduction », Techniques de l'ingénieur, Vol. E3 750, pp. 1-20.
- [I.5] K. S. Yee, « Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media », IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. 14, pp. 302-307, May 1966.
- [I.6] A. Charoy, « Parasites et Perturbations des Electroniques », Tome 1, Edition Dunod, ISBN 2-10-001438-2, 1992.
- [I.7] T. Williams, « EMC for Product Designer », 2^{ème} Edition, Publitronic/Elektor, ISBN: 2-86661-106-3, Chapter 6, pp.147-153, March 1999.
- [I.8] S. Baffreau, « Susceptibilité des Microcontrôleurs aux Agressions Electromagnétique », Thèse pour l'obtention du titre de doctorat de L.I.N.S.A. de Toulouse, France, 2003.
- [I.9] **M. Melit, N. Boudjerda, B. Nekhoul, K. El Khamlichi Drissi et K. Kerroum, « Une Etude Comparative des Configurations de Commande Apériodique Appliqués aux Convertisseurs DC/DC », Colloque Télécom'2003 & JFMMA, pp. 206-209, Marrakech, Maroc, Oct. 2003.**
- [I.10] **M. Melit, N. Boudjerda, B. Nekhoul, K. El Khamlichi Drissi, K. Kerroum, « Random Modulation for Reducing Conducted Perturbations in DC/DC Converters », EMC Europe, pp. 650-655, Eindhoven, Netherlands, Sept. 6-10. 2004.**
- [I.11] **N. Boudjerda, M. Melit, B. Nekhoul, K. El Khamlichi Drissi and K. Kerroum, « Reduction of Conducted Perturbations in DC-AC Converters by a Dual Randomization of Hybrid Space Vector Modulation », International Review of Electrical Engineering, Vol. 1, N0. 1, pp. 154-161, March-April 2006.**
- [I.12] A. M. Stankovic, « Random Pulse Modulation With Application to Power Converters », Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Feb. 1993.
- [I.13] Aleksandar M. Stankovic, George C. Verghese and David J. Perreault, « Analysis and Synthesis of Randomized Modulation Schemes for Power Converters », IEEE Trans. On Power Electronics, Vol. 10, N0. 6, Nov. 1995, pp. 680-693.

Chapitre II

Résolution des équations de Maxwell par FDTD

Introduction

Beaucoup de structures utilisées en électromagnétisme ont une forme trop complexe pour qu'on puisse les analyser de façon exacte. On peut rarement faire coïncider les limites du problème avec des lignes de coordonnées, même en faisant appel aux transformations conformes.

La modélisation numérique s'est avérée depuis plus de deux décennies comme outil indispensable pour étudier avec une précision appréciable les dispositifs électriques complexes.

Avec l'aide de l'ordinateur et de moyens mathématiques adéquats, on peut réduire les erreurs introduites par les approximations et obtenir des valeurs numériques précises pour les champs, les potentiels et les grandeurs dérivées.

Dans ce chapitre en s'inspirant des travaux de D. M. Sullivan [II.1] et de K. S. Yee [II.2], nous modélisons le problème de rayonnement électromagnétique transitoire des dispositifs de l'électronique de puissance en résolvant les équations de Maxwell par la méthode numérique dite FDTD.

Nous commençons par un bref rappel d'électromagnétisme, nous abordons ensuite la discrétisation par FDTD des équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère et la résolution des ces dernières avec prise en compte des frontières ouvertes (conditions absorbantes) ou fermées. Nous détaillons ensuite la prise en compte des différents éléments localisés dans un circuit de l'électronique de puissance.

I. Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont à la base de l'électromagnétisme. Elles traduisent sous forme locale différents théorèmes (Gauss, Ampère, Faraday) qui régissaient l'électromagnétisme avant que Maxwell ne les réunisse sous forme d'équations intégrales. Ces équations montrent notamment qu'en régime stationnaire, les champs électrique et magnétique sont indépendants l'un de l'autre, alors qu'ils ne le sont pas en régime variable. Dans le cas le plus général, il faut donc parler du champ électromagnétique, la dichotomie électrique/magnétique étant une vue de l'esprit. En l'absence d'un courant d'excitation et des courants d'aimantations, les équations de Maxwell dans un milieu conducteur sous formes locale (II.1-II.4) et intégrale (II.5-II.8) sont données par les expressions suivantes [II.3]:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell-Faraday}) \quad (\text{II.1})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell-Ampère}) \quad (\text{II.2})$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{Maxwell-Gauss}) \quad (\text{II.3})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Conservation du flux}) \quad (\text{II.4})$$

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (\text{II.5})$$

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \left(\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s} \quad (\text{II.6})$$

$$\oint_{Sp} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \quad (\text{II.7})$$

$$\oint_{Sp} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\text{II.8})$$

Où : ρ et Q sont respectivement la densité volumique de charges libres et la charge libre embrassée par la surface fermée.

Les relations constitutives d'un milieu Linéaire, Homogène et Isotrope (LHI) sont :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{II.9})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{II.10})$$

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E} \quad (\text{II.11})$$

Où μ , σ et ϵ , sont respectivement la perméabilité, la conductivité et la permittivité du milieu.

I.1. Détermination des condition aux limites

Pour la résolution des équations de Maxwell, il est nécessaire d'exprimer les conditions de passage entre les différents milieux du problème considéré. Dans notre étude, les problèmes que nous traitons (convertisseurs de puissance) comportent généralement différents milieux de propriétés physiques différentes, ce qui nous impose la nécessité d'exprimer les conditions de passage aux interfaces ; on obtient ces relations en intégrant les équations aux dérivées partielles (II.1-II.4) sur une surface ou un volume et en faisant usage de relations intégrales (II.5-II.8).

Pour mettre ce problème en exergue, nous considérons deux demi milieux de propriétés physiques différentes séparés par une interface (figure II.1). Dans le cas général, on considère qu'il existe des densités surfaciques de la charge ρ_s et du courant J_s

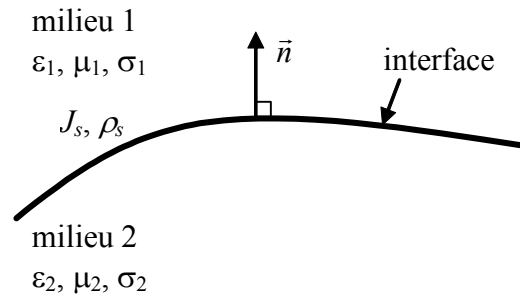


Figure II.1. Interface entre deux demi-milieux.

I.1.1. Conditions sur les composantes tangentielles

Pour l'étude de la continuité des composantes tangentielles du champ magnétique et du champ électrique à l'interface, nous considérons un contour (c) au voisinage très proche de l'interface (Δh tend vers zéro) en figure II.2.

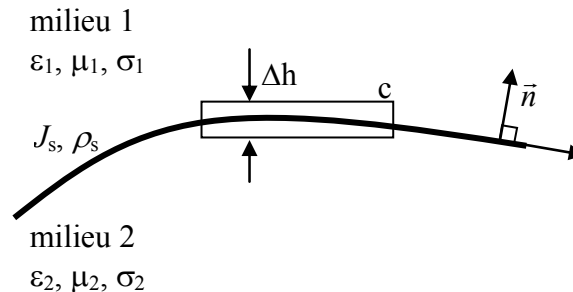


Figure II.2. Surface d'intégration entre deux demi-milieux.

Le calcul de la circulation du champ magnétique H en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère sous forme intégrale (loi d'Ampère), nous permet de déduire lorsque Δh tend vers zéro que [II.3]:

$$H_{t1} - H_{t2} = Js \quad (\text{II.12})$$

C'est la condition de passage des composantes tangentielles du champ magnétique.

Cette équation signifie que la composante tangentielle du champ magnétique H à l'interface entre les deux milieux est discontinue lorsqu'une densité surfacique du courant Js circule sur la surface de séparation.

Pour les composantes tangentielles du champ électrique E , nous utilisons l'équation de Maxwell-Faraday sous forme intégrale (loi d'induction de Faraday) pour calculer la circulation du champ électrique E sur le même contour considéré précédemment (figure II.2).

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (\text{II.13})$$

Ce qui nous donne :

$$E_{t1} - E_{t2} = 0 \quad (\text{II.14})$$

Cette équation exprime la continuité de la composante tangentielle du champ électrique lors du passage à travers l'interface entre les deux milieux.

I.1.2. Conditions sur les composantes normales

Pour l'étude de la continuité des composantes normales, nous considérons une surface fermée au voisinage très proche de l'interface (figure II.3).

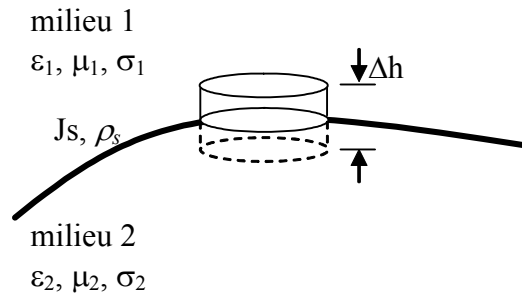


Figure II.3. Volume d'intégration entre deux milieux.

Nous commençons par le champ magnétique, en calculant le flux de ce dernier à travers la surface fermée (figure II.3) et en utilisant l'équation de Maxwell (flux conservatif) sous sa forme intégrale [II.3], on obtient:

$$\oint_{Sp} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\text{II.15})$$

Si on considère que la hauteur Δh du volume élémentaire est suffisamment petite, ce qui nous permet de négliger le flux du champ magnétique à travers la surface latérale, l'équation (II.15) peut s'écrire sous la forme:

$$B_{n1} - B_{n2} = 0 \quad (\text{II.16})$$

Cette équation indique que la composante normale du champ magnétique est continue en passant d'un milieu à l'autre à travers l'interface.

Pour obtenir une condition sur le déplacement électrique D , nous faisons appel à l'équation de Maxwell-Gauss sous sa forme globale [II.3]:

$$\oint_{Sp} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{int}} \quad (\text{II.17})$$

Avec : Q_{int} est la charge libre à l'intérieur de la surface fermée (figure II.3).

Si Δh est suffisamment petit, l'équation (II.17) peut s'écrire sous la forme :

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \quad (\text{II.18})$$

La composante normale du vecteur déplacement électrique D est discontinue lorsque il y a une densité de charge surfacique libre (ρ_s) à l'interface entre les deux milieux.

I.2. Quelques cas particuliers

A cause de la présence du diélectrique et du plan de masse, l'analyse de l'environnement électromagnétique des dispositifs de l'électronique de puissance par la résolution numérique directe des équations de Maxwell, nécessite d'assurer la continuité des différentes composantes du champ électrique et du champ magnétique lors du passage d'un milieu à l'autre. Dans ce paragraphe, nous traitons quelques cas particuliers que nous rencontrons dans les convertisseurs de l'électronique de puissance.

I.2.1. Conducteur parfait - Diélectrique imparfait

C'est le cas typique d'un conducteur parfait ($\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$, $\sigma_1 \gg \sigma_2$) qui peut être un plan de masse ou des pistes du convertisseurs en contact direct avec un diélectrique ($\epsilon_2 > \epsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$, $\sigma_2 = 0$). Les conditions de passage sont traduites comme suit :

$$H_{t1} - H_{t2} = J_s \quad (\text{II.19})$$

$$E_{t1} - E_{t2} = 0 \quad (\text{II.20})$$

$$B_{n1} - B_{n2} = 0 \quad (\text{II.21})$$

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \quad (\text{II.22})$$

I.2.2. Diélectrique imparfait - Diélectrique parfait

C'est le cas de diélectrique du convertisseur ($\epsilon_1 > \epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$, $\sigma_1=0$) en contact direct avec un l'air ($\epsilon_2 = \epsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$, $\sigma_2 = 0$). Les conditions de passage peuvent êtres écrites comme suit :

$$H_{t1} - H_{t2} = 0 \quad (\text{II.23})$$

$$E_{t1} - E_{t2} = 0 \quad (\text{II.24})$$

$$B_{n1} - B_{n2} = 0 \quad (\text{II.25})$$

$$D_{n1} - D_{n2} = 0 \quad (\text{II.26})$$

II. Résolution des équations de Maxwell par FDTD

Le traitement des problèmes électromagnétiques a débuté par la résolution des équations de Maxwell en régime quasi-statique dans le domaine fréquentiel, les solutions analytiques sont à la base des principales approches utilisées.

Dans quelques cas de dispositifs électromagnétiques, dont la géométrie est susceptible d'être simplifiée et présentant des symétries physiques, il est possible de proposer une solution analytique des équations de Maxwell. Malheureusement ce genre de situation est assez rare et une solution analytique est souvent trop laborieuse.

Pour étudier la distribution des champs dans les structures complexes, on a dû mettre au point des méthodes de résolution basées sur des approximations. L'apparition des premières générations d'ordinateurs a donné une évolution supplémentaire aux techniques utilisées, parmi ces techniques, on peut citer la méthode des moments [II.4] et la méthode des éléments finis [II.5].

Classiquement ce type d'analyse est réalisé le plus souvent en domaine fréquentiel en résolvant numériquement les équations de Maxwell ; les méthodes les plus connues et les plus utilisées sont la méthode des moments (MoM) [II.4] sur une large gamme de fréquences et la méthode des éléments finis (FEM) [II.5] à des fréquences industrielles. Le champ électromagnétique émis par une source dans un espace libre ou en présence d'une interface avec changement de milieu est calculé avec une bonne précision en introduisant des conditions sur les frontières ouvertes et d'interface bien appropriées.

Plusieurs compagnies de défenses ont relevé les limites de la méthode intégrale pour la résolution des équations de Maxwell [II.2]. Ce qui a poussé vers le développement d'une autre approche pour la résolution des équations de Maxwell directement en domaine temporel. La méthode des différences finies "Finite Differences Time Domain" (FDTD),

originellement introduite par K. S. Yee [II.6] est devenue l'objet de plusieurs travaux de développement suite à ses capacités remarquables.

Cette technique approchée, dite par différences finies, modifie les conditions aux limites, mais également les équations à résoudre : dans toutes les équations considérées (Laplace ou Maxwell), on remplace les dérivées par des différences finies – c'est-à-dire qu'on ne fait pas tendre la distance entre deux points vers zéro quand on effectue la dérivation. L'avantage de cette dernière est qu'elle permet d'étudier des champs qui varient dans le temps, en résolvant de manière approchée les équations de Maxwell. Leur traitement dans le domaine temporel par FDTD (Finite Difference Time Domain) en mono, bi et tridimensionnel permet notamment d'étudier des régimes transitoires et des systèmes non linéaires. Notant cependant que la méthode dite FDTD s'applique particulièrement pour les structures pouvant facilement être discrétisées par des cubes.

La méthode des différences finies a pris un gros avantage pour la résolution des équations de Maxwell directement en domaine temporel, cette dernière offre de nombreux avantages par rapport aux autres techniques qui travaillent dans le domaine fréquentiel. Parmi les avantages amenées par cette dernière [II.2]:

1. La méthode des différences finies échappe à l'utilisation de toute les technique d'algèbre linéaire en procédant à une résolution pas à pas dans le temps (forme explicite).
2. La robustesse et la précision fournies par cette méthode sont à l'origine d'une large utilisation pour le traitement de divers problèmes d'électromagnétisme.
3. Le traitement directement en domaine temporel des régimes transitoires en électromagnétisme.
4. La prise en compte de la non linéarité des différents éléments (diodes, transistors, ...) directement en domaine temporel.
5. La souplesse justifiable de la méthode, lors du traitement d'un nouveau problème, la question se résume à un travail au niveau du maillage plutôt qu'une reformulation complexe pour la méthode intégrale.
6. Augmentation de la vitesse et taille mémoire des calculateurs ; malgré que cet avantage est bénéfique pour toutes les autres techniques numériques, la méthode des différences finies a un intérêt particulier, du fait qu'elle est basée sur la discrétisation dans l'espace et dans le temps du problème considéré, ce qui nécessite un fort besoin de taille mémoire et vitesse des processeurs.

II.1. Discrétisation des équations de Maxwell par FDTD

Soit les deux équations de Maxwell (II.27) et (II.28) :

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{(Maxwell-Faraday)} \quad (\text{II.27})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{(Maxwell-Ampère)} \quad (\text{II.28})$$

Dans un milieu linéaire homogène et isotrope caractérisé par ε , μ et σ et en l'absence de densité de charge et de courant d'excitation, nous avons :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{II.29})$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{II.30})$$

$$\vec{J}_t = \vec{J}_c + \vec{J}_D \quad (\text{II.31})$$

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E} \quad (\text{II.32})$$

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{II.33})$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, les équations rotationnelles de Maxwell (II.27) et (II.28) fournissent six équations scalaires aux dérivées partielles, comportant les six composantes des champs électrique et magnétique [II.7].

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (\text{II.34})$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (\text{II.35})$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (\text{II.36})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad (\text{II.37})$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (\text{II.38})$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (\text{II.39})$$

Dans d'autres systèmes de coordonnées, on obtient des relations similaires, mais qui sont nettement plus complexes.

II.1.1. Le cube de Yee

Pour implémenter ces équations dans un programme de calcul par la méthode numérique dite FDTD, nous utilisons une discrétisation en carrés ou en cubes. L'espace est découpé en cubes, introduits par K. S. Yee [II.6], comme celui présenté en figure II.4.

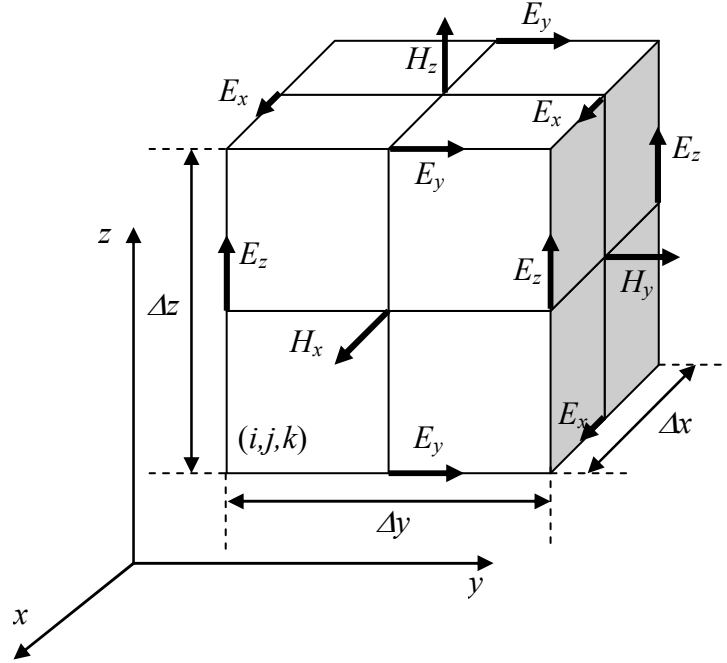


Figure II.4. Cellule de Yee.

Pour indiquer la position selon (x, y, z), K. S. Yee [II.6] propose la notation suivante :

$$(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) \quad (\text{II.40})$$

et une composante quelconque du champ peut s'écrire comme suit :

$$F^n(i, j, k) = F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) \quad (\text{II.41})$$

Avec : Δx , Δy et Δz sont les pas de discrétisation spatiale, et Δt est le pas de la discrétisation temporelle.

Dan son travail pour l'étude d'un problème d'électromagnétisme, K. S. Yee [II.6] introduit une méthode des différences finies à point centrées (FDTD) pour l'approximation des dérivées partielles par des différences finies dans les équations (II.34) à (II.39) déduites à partir des équations de Maxwell.

Remarque : Précisons que dans le volume de calcul, un noeud magnétique est toujours présent entre quatre noeuds électriques et un noeud électrique entre quatre noeuds magnétiques. Ainsi, la dérivée centrée est utilisée pour toutes les dérivées spatiales présentes dans les équations de Maxwell. Pour représenter le volume de calcul, il est nécessaire de construire un maillage.

II.1.2. La discrétisation spatio-temporelle par FDTD

Prenons l'une des six composantes des deux équations de Maxwell en rotationnel :

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (\text{II.42})$$

Elle fait apparaître dans le membre de gauche la dérivée du champ magnétique par rapport au temps, tandis que le membre de droite est considéré à l'instant t . Si on prend en considération le principe de la dérivée centrée, on en déduit que le membre de droite (le champ électrique) doit être calculé entre deux instants successifs où on calcule le membre de gauche (le champ magnétique).

En tenant compte des six équations scalaires, on arrive à la conclusion que le champ électrique et le champ magnétique ne doivent pas être calculés aux mêmes instants, mais à des instants décalés.

Pour le cas d'une discrétisation temporelle uniforme, avec un pas d'échantillonnage Δt , le champ électrique sera calculé pour des multiples pairs de $\Delta t/2$, et le champ magnétique pour les multiples impairs de $\Delta t/2$ comme le montre la figure II.5 :

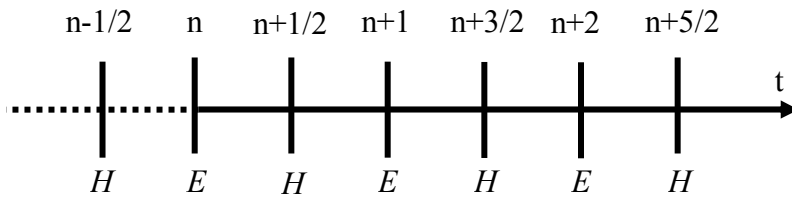


Figure II.5. Instants de calcul du champ magnétique H et du champ électrique E .

Les équations précédentes (III.34) à (III.39) sont alors traduites par FDTD comme suit [II.6]:

- pour le champ magnétique :

$$H_x^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = H_x^{n-1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\mu \Delta z} [E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k)] - \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} [E_z^n(i, j + 1, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})] \quad (\text{II.43})$$

$$H_y^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) = H_y^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} [E_z^n(i + 1, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})] - \frac{\Delta t}{\mu \Delta z} [E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k + 1) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k)] \quad (\text{II.44})$$

$$H_z^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) = H_z^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) + \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} [E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + 1, k) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k)] - \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} [E_y^n(i + 1, j + \frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k)] \quad (\text{II.45})$$

- pour le champ électrique :

$$E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) = \frac{(\varepsilon/\Delta t - \sigma/2)}{(\varepsilon/\Delta t + \sigma/2)} E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) + \frac{1}{(\varepsilon/\Delta t + \sigma/2)\Delta y} [H_z^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k)] \quad (\text{II.46})$$

$$- \frac{1}{(\varepsilon/\Delta t + \sigma/2)\Delta z} [H_y^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2})] E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k) = \frac{(\varepsilon/\Delta t - \sigma/2)}{(\varepsilon/\Delta t + \sigma/2)} E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) + \frac{1}{(\varepsilon/\Delta t + \sigma/2)\Delta z} [H_x^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})] \quad (\text{II.47})$$

$$- \frac{1}{(\varepsilon/\Delta t + \sigma/2)\Delta x} [H_z^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+1/2}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)]$$

$$E_z^{n+1}(i, j, k + \frac{1}{2}) = \frac{(\varepsilon/\Delta t - \sigma/2)}{(\varepsilon/\Delta t + \sigma/2)} E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) + \frac{1}{(\varepsilon/\Delta t + \sigma/2)\Delta x} [H_y^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+1/2}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})] \quad (\text{II.48})$$

$$- \frac{1}{(\varepsilon/\Delta t + \sigma/2)\Delta y} [H_x^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+1/2}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})]$$

Les indices (i, j, k) indiquent la position selon (x, y, z) , tandis que l'indice n spécifie l'instant temporel. Les composantes du champ électrique, définies au milieu des arêtes du cube, sont calculées aux temps $n\Delta t$, celles du champ magnétique, au milieu des faces du cube, aux instants $(n + \frac{1}{2})\Delta t$. Une composante ne dépend que des événements de la période temporelle précédente. Les trois composantes du champ électrique ont un indice spatial fractionnaire, celles du champ magnétique en ont deux.

II.1.3. Critère de stabilité

Le critère de stabilité numérique répond à deux impératifs, l'un spatial et l'autre numérique. En effet, les valeurs du champ en tout point du volume de calcul dépendent des valeurs obtenues aux instants précédents. Ce schéma fonctionne sous la contrainte d'un critère de stabilité reliant le pas temporel Δt aux pas spatiaux Δx , Δy et Δz .

En raison de la précision des résultats de calcul, la discrétisation spatiale doit respecter un certain nombre de critères vis-à-vis de la pseudo longueur d'onde λ du phénomène; un échantillonnage de l'espace entre $\lambda/10$ et $\lambda/20$ est nécessaire pour la prise en compte de la plus haute fréquence (plus petite longueur d'onde) du phénomène transitoire.

Afin de vérifier ce critère de stabilité, l'échantillonnage numérique doit être suffisamment fin pour pouvoir suivre l'évolution temporelle du champ électromagnétique.

On choisit généralement $\Delta x = \Delta y = \Delta z$, ce qui donne une grille FDTD cubique. Pour assurer la stabilité des résultats, il faut que la distance entre nœuds et les périodes satisfassent la relation [II.7]:

$$v_{\max} \cdot \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{(1/\Delta x)^2 + (1/\Delta y)^2 + (1/\Delta z)^2}} \quad (\text{II.49})$$

Où $v_{\max}$: est la vitesse de phase maximale.

II.1.4. Mise en oeuvre de la méthode FDTD

Toute la structure (3D, 2D ou 1D) à analyser est discrétisée selon une grille FDTD qui s'étend jusqu'aux bords de la structure considérée si elle est de dimensions finies et à frontières bien définies. Dans le cas contraire une modélisation par troncature est possible mais reste de précision incertaine.

La modélisation des structures à frontières ouvertes est possible moyennant quelques conditions particulières dites absorbantes que nous détaillerons dans le paragraphe qui va suivre.

A l'origine du temps, on suppose que toutes les composantes des champs dans la structure sont nulles. Une excitation est alors appliquée à certains points de la grille, le long d'une ligne ou sur un plan. On évalue la réponse de la structure, en fonction du temps, jusqu'à ce que toutes les composantes soient amorties.

Si l'on souhaite ensuite déterminer la réponse en fréquence, on prend la transformée de Fourier de la réponse temporelle.

III. Les conditions de frontières

Depuis que K. S. Yee [II.6] a proposé la méthode des différences finies à point centrées (FDTD) dans le domaine temporel, son utilisation ne cesse d'augmenter dans différentes disciplines.

Par la force des choses, une méthode qui discrétise l'espace considère un maillage de dimensions finies, afin d'effectuer les calculs en un temps fini. La méthode des différences finies s'applique donc naturellement à des structures fermées moyennant des conditions particulières sur les frontières (ex. boîte métallique).

En raison de la limite de la taille mémoire des calculateurs et dans le but de diminuer le temps de calcul autant que possible, l'intervalle de calcul doit être réduit au minimum, cela peut se faire en faisant une troncature de l'espace ouvert. Malheureusement, la troncature est à l'origine des réflexions indésirables qui se superposent aux champs incidents.

Pour pouvoir étudier des structures ouvertes comme les antennes et déterminer la diffraction produite par divers corps, on introduit une frontière absorbante qui simule un milieu infini ; cela implique que des conditions adéquates doivent être imposées sur les frontières de l'espace ouvert de simulation. En effet, les équations de Maxwell en champ électrique discrétisées par la méthode FDTD ne peuvent pas être utilisées sur la limite du domaine de calcul, cela est dû au fait que chaque composante du champ électrique (E_x par exemple) est exprimée en fonction de quatre composantes du champ magnétique, deux d'entre elles se trouvent à l'extérieur (H_{z1} et H_{y1}) du volume de calcul (figure II.6).

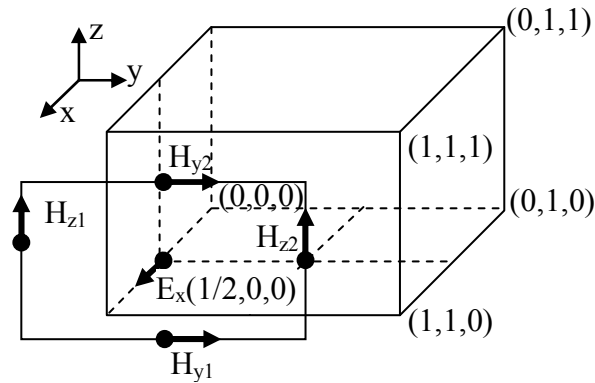


Figure II.6. Illustration d'un volume de calcul et les composantes à l'extrémité.

Cas des structures fermées :

Classiquement deux types de conditions sont utilisés en présence d'une frontière finie conductrice :

- le premier type consiste au traitement des murs électriques parfaits; la méthode est connue sous l'appellation Perfect Electric Conductor (PEC). Elle consiste à imposer sur les frontières les composantes tangentielles du champ électrique égales à zéro, ce qui donne naissance à une réflexion totale du champ électrique [II.8].
- le deuxième type considère des murs magnétiques parfaits ; la méthode est connue sous l'appellation Perfect Magnetic Conductor (PMC). Par analogie, le traitement des murs magnétiques (PMC) force les composantes tangentielles du champ magnétique à zéro. Les composantes tangentielles du champ magnétique sont situées à un demi pas à gauche et à droite de la frontière, en les forçant égales en amplitude et de signes opposés, nous obtenons une valeur moyenne nulle à la frontière [II.8].

Cas des structures ouvertes (conditions absorbantes):

Dans la littérature, le problème des structures ouvertes est résolu en plaçant sur les bords du volume de calcul des conditions absorbantes. Deux grandes méthodologies sont développées dans ce but :

- une première approche par troncature dite « hard », qui impose une condition sur les composantes du champ électrique et du champ magnétique ;
- la deuxième méthode communément appelée « soft » propose un ajustement des valeurs des propriétés physiques tel que la conductivité σ au voisinage de la troncature pour éviter les réflexions indésirables.

Les plus citées et les plus utilisées sont les suivantes :

- Condition aux limites retardée [II.7],
- Condition PML de Berenger [II.9], [II.10],
- Condition absorbante de Mur [II.11],
- Condition PML de Sullivan [II.12].

Afin de tenir compte des frontières ouvertes, la première approche est celle A. Taflové [II.7] qui propose une méthode très simple basée sur la propagation d'une onde électromagnétique dans une seule direction ; elle est connue sous le nom *retarded-time method*. Cette méthode a été développée par la suite sous deux variantes par G. Mur [II.11] qui en plus a proposé son implémentation par FDTD.

Très récemment, une méthode plus précise dite PML (Perfectly Matched Layer) [II.9], [II.10] a été proposée. Cette méthode développée par J. P. Berenger [II.9] est basée sur la mise en place d'une couche parfaitement absorbante complexe de dimensions variables autour du volume de calcul. Elle permet une très bonne absorption des ondes électromagnétiques pour toutes les fréquences et pour tous les angles d'incidences. Par contre sa mise en oeuvre nécessite un traitement numérique relativement compliqué, ce qui peut nuire à la diminution du domaine de calcul. Une autre variante de cette méthode a été proposée par D. M. Sullivan [II.12] ; cette dernière diffère de celle de J. P. Berenger en deux aspects ; en premier lieu, D. M. Sullivan propose d'utiliser une conductivité fictive associée au vecteur déplacement électrique au lieu du champ électrique, en deuxième lieu, il propose un ajustement des paramètres de la méthode FDTD au lieu de l'ajustement de la conductivité ou de la discrétisation spatiale proposée par J. P. Berenger [II.9].

Plusieurs travaux ont montré l'efficacité des différentes méthodes absorbantes [II.13], [II.14] pour la modélisation des structures à frontières ouvertes. Dans un récent travail, X. Gao [II.13] présente une comparaison des différentes méthodes, où il a montré l'erreur de chacune d'elles, et le temps de simulation nécessaire. Les méthodes de J. P. Berenger et de D. M. Sullivan nécessitent un temps de simulation 12 et 30 fois respectivement plus que la méthode de Mur mais avec une meilleure précision.

A partir de la conclusion apportée par les travaux de X. Gao [II.13], et vu la nature des dispositifs que nous allons traiter où le besoin est de quantifier l'ordre de grandeur du champ

électromagnétique, nous avons opté dans notre travail pour l'utilisation de la méthode de Mur de premier ordre dont l'implémentation est plus simple et consomme un temps de calcul moindre avec une précision acceptable. Nous décrivons dans ce qui va suivre deux variantes de la méthode de Mur pour la prise en charge des frontières ouvertes.

III.1. Méthode des conditions absorbantes de Mur

Rappelons que les composantes aux frontières ne peuvent plus être nulles pour les structures ouvertes. Donc il faut les calculer. Or si les composantes du champ magnétique normales sont obtenues directement à partir des composantes tangentielles du champ électrique en utilisant les équations de Maxwell discrétisées par la méthode des différences finies, alors le calcul des composantes tangentielles du champ électrique nécessiterait la prise en compte des valeurs du champ magnétique se trouvant à l'extérieur du volume de calcul qui est inconnu. Ceci montre que nous ne pouvons pas utiliser les équations de Maxwell discrétisées par FDTD pour calculer les composantes tangentielles du champ électrique. Par exemple, la composante E_x (figure II.6) ne peut pas être évaluée par les équations de Maxwell aux différences finies puisque la composante H est inconnue. Nous devons leur appliquer un traitement particulier : les conditions de G. Mur. Les conditions d'absorption aux frontières de G. Mur sont déduites de l'équation générale de propagation des ondes planes. Elles impliquent que la propagation d'une onde incidente vers l'un des bords du domaine de calcul se fait dans une seule direction, c'est-à-dire sans réflexion sur ce bord.

Une équation différentielle, qui permet à une onde de se propager dans certaines directions, est appelée « one way wave equation » [II.15]. L'équation de propagation pour une grandeur physique quelconque $\Phi(x, y, z, t)$, se propageant sans atténuation dans un espace libre, est donnée par [II.11] comme suit :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = L_3 \Phi = 0 \quad (\text{II.50})$$

avec :

c : la vitesse de propagation dans l'air.

On considère que le domaine de calcul est situé dans la région $x \geq 0$, pour cela, nous donnons par la suite les conditions absorbantes pour la frontière située à $x = 0$. Dans ce cas, la condition à une direction de propagation consiste à imposer la propagation d'onde dans le sens croissant de x .

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{1 - s^2} \right) \Phi \Big|_{x=0} = L^- \Phi \Big|_{x=0} = 0 \quad (\text{II.51})$$

avec :

$$s^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) / \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \quad (\text{II.52})$$

L'équation (II.51) peut être discrétisée par FDTD, cependant la racine carrée ne peut pas être prise en compte sous sa forme initiale. Pour la résolution de ce problème, un développement en série de Taylor est effectué. Selon l'ordre de développement de la série de Taylor on distingue différents types de conditions absorbantes.

III.1.1. Condition absorbante de Mur du premier ordre

Lorsque on ne garde que le premier ordre du développement en série de Taylor de la racine carrée dans l'expression (II.51), c'est-à-dire que : $\sqrt{1-s^2} \approx 1$, nous obtenons une approximation du premier ordre donnée par :

$$L^- \Phi \Big|_{x=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi \Big|_{x=0} = 0 \quad (\text{II.53})$$

On prend la composante E_z (ie : $\Phi(x, y, z) = E_z$) comme exemple, et nous appliquons la méthode FDTD pour l'approximation des dérivées spatiale et temporelle respectivement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} E_z^{n+\frac{1}{2}}(0, j, k + \frac{1}{2}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{E_z^{n+1}(0, j, k + \frac{1}{2}) + E_z^n(0, j, k + \frac{1}{2})}{2} \right] \\ &= \frac{E_z^{n+1}(1, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^{n+1}(0, j, k + \frac{1}{2})}{2\Delta x} + \frac{E_z^n(1, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(0, j, k + \frac{1}{2})}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_z^{n+\frac{1}{2}}(0, j, k + \frac{1}{2}) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(1, j, k + \frac{1}{2}) + E_z^{n+\frac{1}{2}}(0, j, k + \frac{1}{2})}{2} \right] \\ &= \frac{E_z^{n+1}(1, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(1, j, k + \frac{1}{2})}{2\Delta t} + \frac{E_z^{n+1}(0, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(0, j, k + \frac{1}{2})}{2\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{II.55})$$

En substituant (II.54) et (II.55) dans l'équation (II.53), nous obtenons la condition absorbante de Mur pour la composante E_z à $x = 0$ donnée par :

$$E_z^{n+1}(0, j, k + \frac{1}{2}) = E_z^n(1, j, k + \frac{1}{2}) + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} [E_z^{n+1}(1, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(0, j, k + \frac{1}{2})] \quad (\text{II.56})$$

Cette expression est simple pour une implémentation dans un code de calcul.

III.1.2. Condition absorbante de Mur du deuxième ordre

La condition absorbante de Mur de deuxième ordre est obtenue en faisant l'approximation de la racine carrée par une série de Taylor de deuxième ordre $\sqrt{1-s^2} \approx 1 - \frac{1}{2}s^2$. A la frontière ($x = 0$), l'expression (II.51) s'écrit comme suit :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{c \partial x \partial t} - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \Phi \Big|_{x=0} = 0 \quad (\text{II.57})$$

En appliquant cette approximation pour la composante E_z , nous obtenons l'expression suivante [II.11]:

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(0, j, k + \frac{1}{2}) = & -E_z^{n-1}(1, j, k + \frac{1}{2}) + \frac{c\Delta t - \Delta}{c\Delta t + \Delta} (E_z^{n+1}(1, j, k + \frac{1}{2}) + E_z^{n-1}(0, j, k + \frac{1}{2})) \\ & + \frac{2\Delta}{c\Delta t + \Delta} (E_z^n(0, j, k + \frac{1}{2}) + E_z^n(1, j, k + \frac{1}{2})) + \frac{(c\Delta t)^2}{2\Delta(c\Delta t + \Delta)} \\ & \left\{ (E_z^n(1, j+1, k + \frac{1}{2}) + E_z^n(0, j+1, k + \frac{1}{2})) + (E_z^n(1, j-1, k + \frac{1}{2}) + E_z^n(0, j-1, k + \frac{1}{2})) \right. \\ & - 4(E_z^n(1, j, k + \frac{1}{2}) + E_z^n(0, j, k + \frac{1}{2})) + (E_z^n(1, j, k - \frac{1}{2}) + E_z^n(0, j, k - \frac{1}{2})) \\ & \left. + (E_z^n(1, j, k + \frac{3}{2}) + E_z^n(0, j, k + \frac{3}{2})) \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

Nous notons que Δ représente le pas de discrétisation spatiale, pour cette expression nous avons choisi une discrétisation uniforme ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$).

III.2. Cas d'un exemple en 3D par FDTD

La figure II.7 illustre la propagation d'une onde sinusoïdale dans l'espace libre, pour ce faire, on considère une source en champ électrique sinusoïdal injectée au point A(Ic, Jc, Kc) située au milieu de la boîte de calcul; cette source est définie comme suit :

$$\vec{E}^i = \sin(2\pi c / \lambda \cdot t) \vec{u}_x \quad (\text{II.59})$$

Avec :

c : la vitesse de la lumière

λ : la longueur d'onde de la source

On considère une discrétisation spatiale de $\lambda/10$, le pas temporel Δt est calculé par l'expression suivante (II.60) :

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2 \cdot c} \quad (\text{II.60})$$

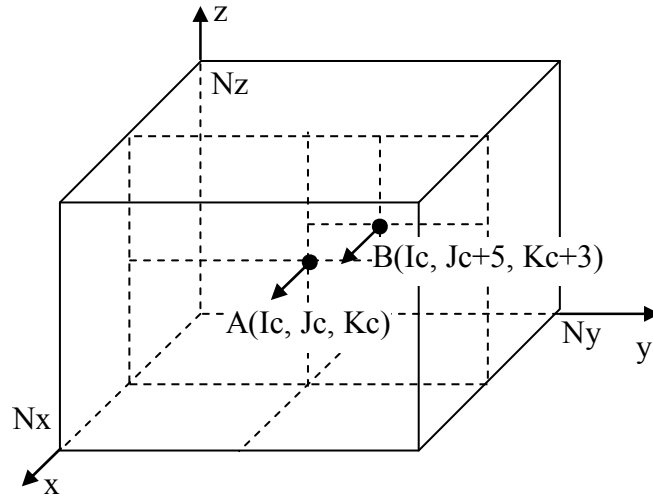


Figure II.7. Volume de calcul en espace libre.

Nous souhaitons calculer le champ électrique au point B illustré en figure II.7. Pour éviter le problème des réflexions, nous étendons le domaine de calcul à ($N_x = N_y = N_z = 100$) et le temps final de simulation à $t = 160 \cdot \Delta t$. L'onde de source prend 100 pas temporel pour aller du point source à l'extrémité de la boîte d'air, de l'autre côté, elle a besoin de 90 pas temporel pour retourner au point d'observation B. Si l'onde de source ne peut pas arriver à son retour au point d'observation B, cela veut dire que le résultat observé au point B est uniquement du au champ incident.

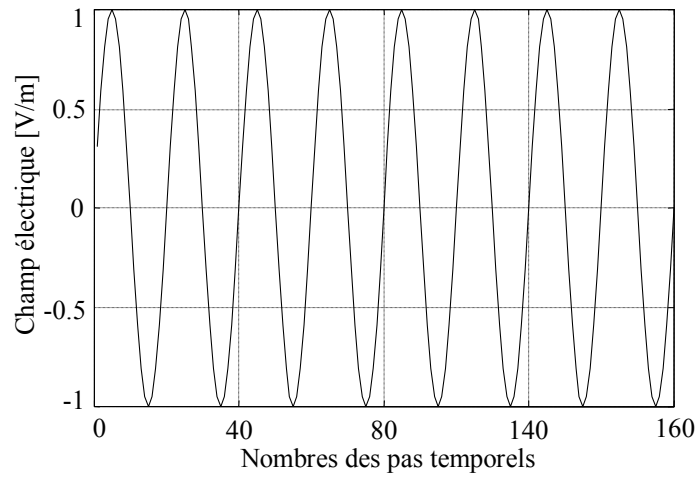


Figure II.8. Champ électrique injecté au point A(I_c, J_c, K_c).

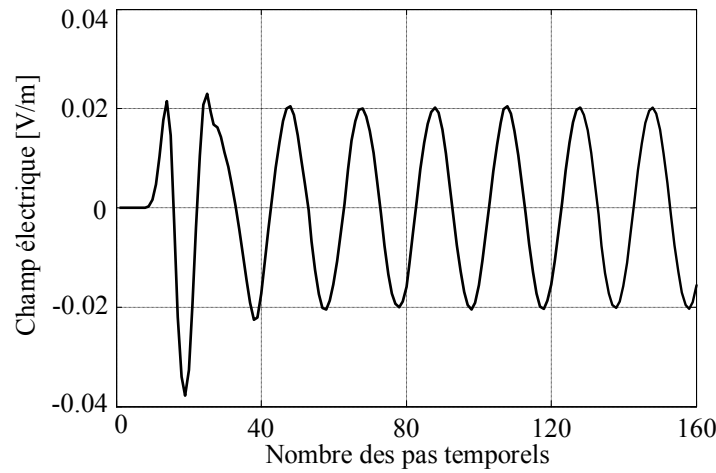


Figure II.9. Champ électrique observé au point B(Ic, Jc+5, Kc+3).

Dans la section suivante, et afin de montrer l'intérêt des conditions absorbantes, en gardant le même type de problème, nous calculons le champ électrique au point B(Ic, Jc+5, Kc+3) avec la taille de la boîte d'air suivante $N_x = N_y = N_z = 20$ avec imposition de la condition absorbante de G. Mur du premier ordre sur les frontières.

En appliquant cette dernière sur le champ électrique et le champ magnétique, et en calculant le champ électrique au point B (figure II.7), le résultat est celui donné en figure II.9.

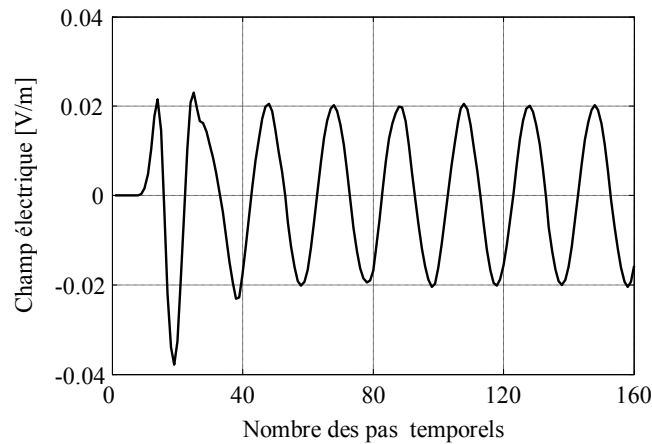


Figure II.10. Champ électrique au point B en utilisant la condition du premier ordre de Mur.

En comparant ce résultat (figure II.10) à celui en figure II.9, nous remarquons une très légère différence, ce qui confirme la validité de la méthode de Mur du premier ordre.

IV. Application de la méthode FDTD aux convertisseurs de puissance

Les dispositifs de l'électronique de puissance sont composés généralement d'éléments à comportements non linéaires (interrupteurs composés de transistors et de diodes), des pistes

de circuits imprimés, d'un diélectrique et d'un plan de masse ainsi que de charges localisées (résistance, inductance, ...).

Afin de modéliser l'environnement électromagnétique transitoire des convertisseurs de l'électronique de puissance par FDTD, plusieurs phénomènes liés à la nature même des différents composants sus cités doivent être traités soigneusement.

IV.1. Traitement des différents éléments du convertisseur

Une configuration canonique d'un convertisseur (Hacheur série) est présentée en figure II.11, où V_s est une source d'excitation et R_s sa résistance, S_w l'interrupteur, une charge R-L et D représente la diode de roue libre. Dans le cas général, la charge peut être une résistance pure, une résistance en série avec une inductance ou une résistance en parallèle avec une capacité.

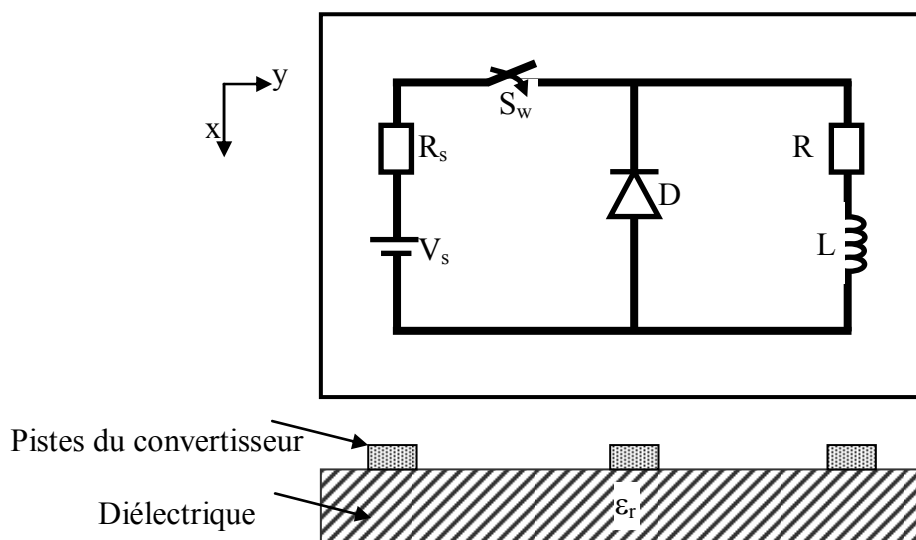


Figure II.11. Configuration du convertisseur étudié.

IV.1.1. Pistes du circuit imprimé et plan de masse

Le traitement du problème des convertisseurs de puissance avec pistes est compliqué à cause de leur forme et de leur épaisseur qui est très faible; si nous prenons cette épaisseur égale à la discrétisation spatiale, le nombre de cellules sera très important et conduirait à un temps de calcul prohibitif. Une première solution est de considérer un maillage non uniforme qui alourdit le traitement par FDTD.

Pour éviter cet inconvénient lié à la discrétisation, en 1992, Lin-Kun WU [II.16] propose une approche pour le traitement d'une plaque conductrice qui est le cas d'une piste ou d'un plan de masse.

Soit un champ électrique incident sur une piste de largeur w , parallèle à l'axe des x et de résistance R comme le montre le schéma en figure II.12. Cette piste infinitésimalement mince

est caractérisée par une discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique. En considérant que le champ électrique incident et le champ total ont une seule composante suivant la direction de l'axe oy qui est tangentielle à la surface de la piste, à l'interface de la piste, les conditions de passage sont écrites sous la forme :

$$\begin{aligned} E_y(x, y, z_{0^+}) &= E_y(x, y, z_{0^-}) \\ &= E_y(x, y, z_0) \\ &= -RJ_y(x, y, z_0) \end{aligned} \quad (\text{II.61})$$

$$J_y(x, y, z_0) = H_x(x, y, z_{0^+}) - H_x(x, y, z_{0^-}) \quad (\text{II.62})$$

J_y : la densité du courant qui circule sur la surface de la plaque du circuit imprimé.

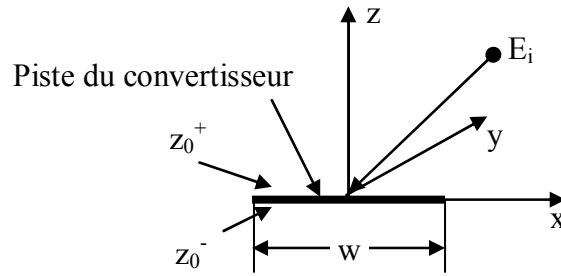


Figure II.12. Une piste de largeur w et de résistance R avec un champ électrique incident.

Dans notre cas, les pistes du circuit imprimé sont considérées parfaitement conductrices, et d'épaisseur égale à zéro. Il suffit donc d'imposer le champ électrique à la surface de la piste égal à zéro [II.17].

Pour la prise en compte d'un plan de masse parfaitement conducteur, nous retenons ces mêmes considérations.

IV.1.2. Prise en compte du diélectrique

Une coupe transversale appliquée sur le convertisseur en figure II.13 montre les différentes interfaces entre le diélectrique et les pistes du circuit, les pistes et l'air (figure II.13). Nous supposons que le diélectrique et les pistes occupent les cellules $k+1$ et $k+2$ respectivement.

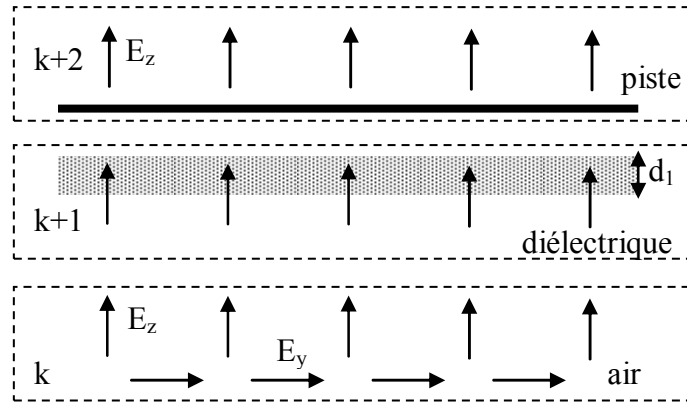


Figure II.13. Illustration d'une coupe transversale dans le circuit imprimé.

En pratique, l'épaisseur du diélectrique est comprise entre 1 mm et 3 mm ; si nous prenons une discrétisation spatiale de 3 mm par exemple pour le dispositif de l'électronique de puissance, le nombre de mailles sera exagéré et la modélisation consommerait un important temps de calcul.

Pour palier à ce problème, A. Taflove [II.18] propose une méthode dite « Contour integral approach » déduite à partir des équations de Maxwell sous forme intégrale. Dans un milieu non homogène ou pour l'utilisation d'une discrétisation spatiale non uniforme, les équations de Maxwell sous forme intégrale s'adaptent mieux [II.18].

A titre d'exemple, nous considérons la composante E_x du champ électrique pour la déduction de la condition à appliquer à l'interface entre un diélectrique et l'air. La figure II.14 montre une grille de discrétisation par FDTD sur l'interface air-diélectrique.

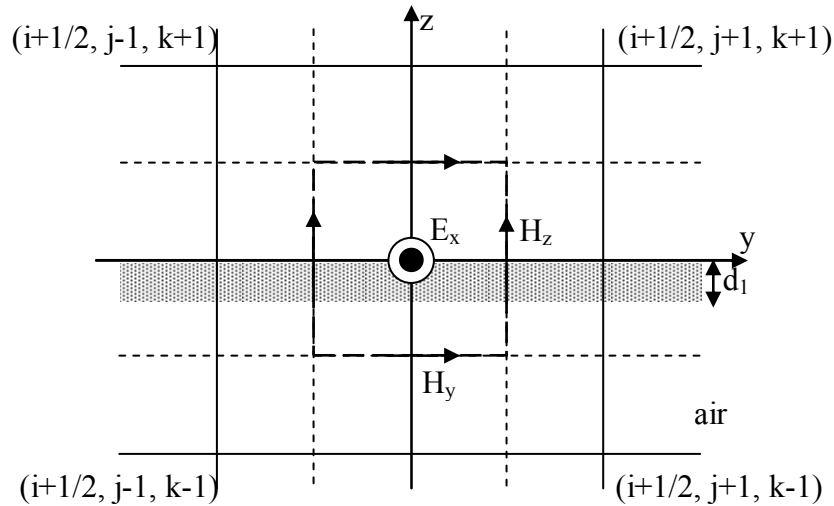


Figure II.14. Prise en compte du diélectrique par la méthode contour integral approach.

A partir de la loi d'Ampère, nous avons :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (\text{II.63})$$

où :

$$I = \iint \left(\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x \right) ds \quad (\text{II.64})$$

alors :

$$\iint \left(\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x \right) ds = \left(\Delta z \Delta y - \Delta y \frac{d_1}{2} \right) \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \Delta y \frac{d_1}{2} \left(\varepsilon_1 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_1 E_x \right) \quad (\text{II.65})$$

$$\oint H \cdot dl = \left[H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right) - H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k \right) \right] \Delta z \\ + \left[H_y^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) - H_y^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2} \right) \right] \Delta y \quad (\text{II.66})$$

En combinant ces deux équations, nous obtenons l'équation en champ électrique suivante :

$$E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j, k \right) = \frac{T_{ax2}}{T_{ax1}} E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j, k \right) \\ + \frac{1}{T_{ax1} \Delta y} \left[H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right) - H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k \right) \right] \\ - \frac{1}{T_{ax1} \Delta z} \left[H_y^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) - H_y^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (\text{II.67})$$

avec :

$$T_{ax1} = \frac{\varepsilon_0}{\Delta t} \left(1 - \frac{d_1}{2\Delta z} \right) + \frac{d_1 \cdot \varepsilon_1}{2\Delta t \cdot \Delta z} + \frac{d_1 \cdot \sigma_1}{4\Delta z} \quad \text{et} \quad T_{ax2} = \frac{\varepsilon_0}{\Delta t} \left(1 - \frac{d_1}{2\Delta z} \right) + \frac{d_1 \cdot \varepsilon_1}{2\Delta t \cdot \Delta z} - \frac{d_1 \cdot \sigma_1}{4\Delta z} \quad (\text{II.68})$$

Cette expression (II.67) montre que pour la prise en compte du diélectrique, nous devons introduire une valeur moyenne de la permittivité et de la conductivité sur les nœuds de l'interface. Les autres composantes du champ peuvent être déduites de la même manière [II.19] et [II.20].

IV.2. Prise en compte des composants localisés du convertisseur

Dans le cas général, un convertisseur comporte une charge résistive, capacitive ou inductive, il contient aussi des interrupteurs à fonctionnement non linéaire tel que une diode ou un transistor. Dans ce paragraphe, nous donnons des expressions explicites pour la prise en compte de ces différents composants par FDTD.

Si nous considérons que les éléments du convertisseur sont orientés dans la direction de l'axe des x comme le montre la figure II.15, en utilisant l'équation caractéristique pour chaque composant qui relie le courant qui y passe et la tension entre ces bornes, nous

déduisons à partir de la loi d'Ampère l'équation de récurrence qui permet le calcul de la composante E_x du champ électrique [II.21]-[II.25].

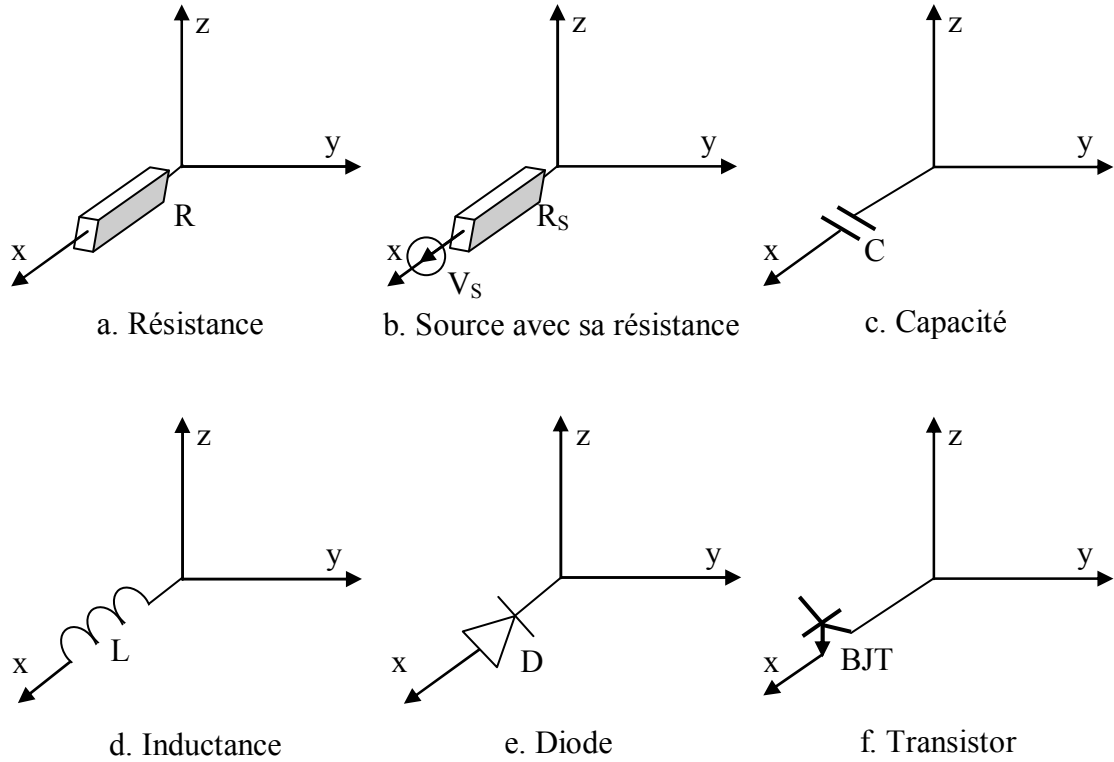


Figure II.15. Éléments localisés orientés suivant l'axe des x.

IV.2.1. Cas d'une charge résistive

Lorsqu'un convertisseur comporte une résistance, les équations de Maxwell discrétisées par FDTD doivent être modifiées afin de prendre en compte le courant qui circule dans la résistance. Le courant traversant une résistance est donné par la loi d'Ohm et la tension entre ses bornes est obtenue en intégrant le champ électrique dans la direction d'orientation de la résistance.

En figure II.15, nous avons une résistance orientée suivant l'axe des x et disposée dans l'espace libre, l'application de la loi d'Ohm donne [II.22]:

$$\begin{aligned} I_x^{n+1/2}(i, j, k) &= \frac{V}{R} \\ &= \frac{\Delta x}{2R} [E_x^{n+1}(i, j, k) + E_x^n(i, j, k)] \end{aligned} \quad (\text{II.69})$$

La densité de courant correspondante est donnée par :

$$J_L = \frac{I_x^{n+1/2}(i, j, k)}{\Delta z \Delta y} \quad (\text{II.70})$$

avec :

R : la valeur de la résistance,

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$: les pas de discrétisation spatiale.

En combinant les deux équations (II.69) et (II.70) et en remplaçant la densité de courant de conduction dans l'équation d'Ampère, nous obtenons l'équation en champ électrique suivante :

$$\begin{aligned}
 E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) &= \frac{\left(\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} - \frac{\Delta x}{2R\Delta y\Delta z}\right)}{\left(\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} + \frac{\Delta x}{2R\Delta y\Delta z}\right)} E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) \\
 &+ \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} + \frac{\Delta x}{2R\Delta y\Delta z}\right)\Delta y} \left[H_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) - H_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k\right) \right] \\
 &- \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} + \frac{\Delta x}{2R\Delta y\Delta z}\right)\Delta z} \left[H_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) - H_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}\right) \right]
 \end{aligned} \quad (II.71)$$

Cette dernière expression est similaire à l'équation (II.46) ; en effet si nous remplaçons en (II.46) la conductivité σ par :

$$\sigma = \frac{\Delta x}{R \cdot \Delta y \Delta z} \quad (II.72)$$

nous obtenons une expression de la même forme que (II.71).

Nous pouvons donc affirmer, que la prise en compte d'une résistance dans le convertisseur est réalisable en remplaçant la conductivité de la cellule correspondante à l'emplacement de cette dernière dans l'équation générale de Maxwell-Ampère par son expression équivalente (II.72).

IV.2.2. Source de tension avec sa résistance interne

Pour une source de tension V_S avec sa résistance interne R_S orientée dans la direction des x , l'équation qui relie le courant et la tension est donnée par [II.22]:

$$I_x^{n+1/2}(i, j, k) = \frac{\Delta x}{2R_S} \left[E_x^{n+1}(i, j, k) + E_x^n(i, j, k) \right] + \frac{V_S^{n+1/2}}{R_S} \quad (II.73)$$

De la même manière que précédemment, nous déduisons l'équation de récurrence pour le calcul de la composante E_x du champ électrique :

$$\begin{aligned}
E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) = & \frac{\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} - \frac{\Delta x}{2R_s\Delta y\Delta z}}{\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} + \frac{\Delta x}{2R_s\Delta y\Delta z}} E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k) + \frac{\frac{\Delta t}{R_s\varepsilon_0\Delta y\Delta z}}{1 + \frac{\Delta t \cdot \Delta x}{2R_s\varepsilon_0\Delta y\Delta z}} \\
& + \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} + \frac{\Delta x}{2R_s\Delta y\Delta z}\right)\Delta y} \left[H_z^{n+1/2}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n+1/2}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k) \right] \\
& - \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} + \frac{\Delta x}{2R_s\Delta y\Delta z}\right)\Delta z} \left[H_y^{n+1/2}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n+1/2}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}) \right]
\end{aligned} \quad (II.74)$$

IV.2.3. Prise en compte d'un condensateur

En considérant maintenant un condensateur orienté suivant l'axe ox (figure II.15), l'équation qui relie le courant et la tension qui caractérisent son comportement est donnée par :

$$I_x^{n+1/2}(i, j, k) = \frac{C\Delta x}{\Delta t} [E_x^{n+1}(i, j, k) - E_x^n(i, j, k)] \quad (II.75)$$

L'expression qui permet le calcul de la composante E_x du champ électrique est alors comme suit :

$$\begin{aligned}
E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) = & E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k) \\
& + \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_0 + \frac{C\Delta x}{\Delta y\Delta z}}}{\left(\varepsilon_0 + \frac{C\Delta x}{\Delta y\Delta z}\right)\Delta y} \left[H_z^{n+1/2}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n+1/2}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k) \right] \\
& - \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_0 + \frac{C\Delta x}{\Delta y\Delta z}}}{\left(\varepsilon_0 + \frac{C\Delta x}{\Delta y\Delta z}\right)\Delta z} \left[H_y^{n+1/2}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n+1/2}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}) \right]
\end{aligned} \quad (II.76)$$

Avec :

C : la valeur de la capacité du condensateur.

IV.2.4. Prise en compte d'une inductance

Pour une inductance dans l'espace libre orientée dans la direction de l'axe des x , l'équation qui relie le courant et la tension est exprimée en remplaçant l'intégrale par une somme discrète :

$$I_x^{n+1/2}(i, j, k) = \frac{\Delta t \cdot \Delta x}{L} \sum_{m=1}^n E_x^m(i, j, k) \quad (II.77)$$

L'équation de récurrence qui permet le calcul de la composante E_x est alors :

$$\begin{aligned}
E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) &= E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - \frac{\Delta x(\Delta t)^2}{L \varepsilon_0 \Delta y \Delta z} \sum_{m=1}^n E_x^m\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta y} \left[H_z^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) - H_z^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k\right) \right] \\
&- \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta z} \left[H_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) - H_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{II.78}$$

IV.2.5. Diode à fonctionnement non linéaire

L'expression du courant de conduction traversant une diode est donnée par [II.22] :

$$I_d = I_0 [\exp(qV_d / kT) - 1] = I_0 [\exp(V_d / V_T) - 1] \tag{II.79}$$

Avec :

q : la charge de l'électron ($1.6 \times 10^{-19} \text{C}$)

I_0 : le courant inverse de saturation ($10^{-08} \sim 10^{-16}$)

V_d : la tension aux bornes de la diode

k : la constante de Boltzmann ($1.38 \times 10^{-23} \text{J/K}$)

T : la température en degré Kelvin.

Si nous considérons que la diode est disposée dans l'espace libre comme le montre la figure II.15 ; dans ce cas, lors de l'implantation d'une diode dans un circuit à convertisseur, seule la composante E_x à l'endroit de la diode est modifiée. L'équation de récurrence pour la composante E_x est donnée par l'expression (II.80) à partir de (II.79) et de l'équation de Maxwell-Ampère [II.22]:

$$\begin{aligned}
E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) &= E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} (\nabla \times H^{n+1/2}(i, j, k)) \\
&- \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta y \Delta z} I_0 \left\{ \exp\left(\frac{E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) + E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)}{2 \times 0.026} \Delta x \right) - 1 \right\}
\end{aligned} \tag{II.80}$$

Pour la résolution de cette équation non linéaire, nous proposons d'utiliser la méthode de Newton-Raphson. Pour ce faire nous définissons :

$$K_e = \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta y \Delta z} I_0 \tag{II.81}$$

$$K_x = \frac{\Delta x}{2 \times 0.026} \tag{II.82}$$

$$E_0 = E_x^n(i, j, k) + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} (\nabla \times H^{n+1/2}(i, j, k)) \tag{II.83}$$

En substituant (II.81), (II.82) et (II.83) dans l'équation (II.80), nous obtenons l'équation non linéaire à résoudre suivante :

$$E^{n+1} = E_0 - K_e \left[\exp[k_x (E^{n+1} + E^n)] - 1 \right] \quad (\text{II.84})$$

Nous définissons la fonction suivante :

$$F(E^{n+1}) = E_0 - K_e \left[\exp[k_x (E^{n+1} + E^n)] - 1 \right] - E^{n+1} \quad (\text{II.85})$$

$$\frac{dF}{dE^{n+1}} = -1 - K_x K_e \exp[k_x (E^{n+1} + E^n)] \quad (\text{II.86})$$

En appliquant la méthode de Newton-Raphson, nous pouvons déduire l'équation itérative suivante qui nous permet de calculer la composante E_x :

$$E_{j+1}^{n+1} = E_j^{n+1} - \frac{F(E_j^{n+1})}{\left[\frac{dF}{dE_j^{n+1}} \right]} \quad (\text{II.87})$$

IV.2.6. Transistor à jonction bipolaire

Dans la littérature Picket-May et al. [II.22] proposent un modèle numériquement stable pour la simulation du fonctionnement d'un transistor à jonction bipolaire (NPN) par FDTD en 3D. Ce modèle permet l'étude du fonctionnement du transistor avec des signaux de haut niveau et avec prise en compte de son signal de commande, ce qui convient très bien pour l'étude des convertisseurs de puissance.

Ce modèle est proposé en utilisant les équations de Ebers-Moll qui décrivent le fonctionnement du transistor à jonction bipolaire (figure II.16):

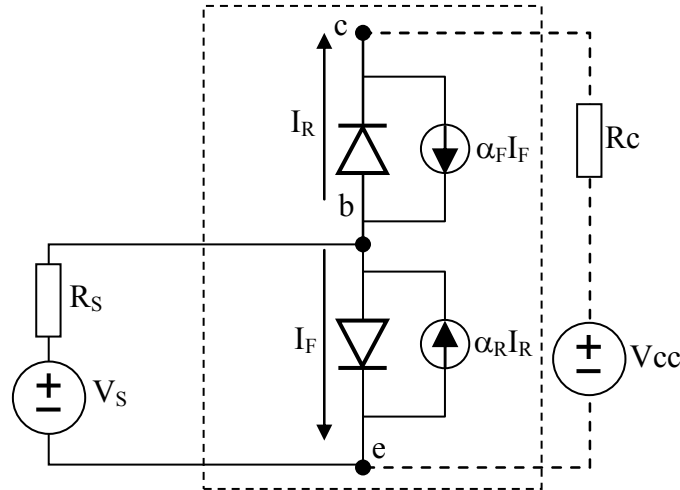


Figure II.16. Modèle de Ebers-Moll pour un transistor à jonction bipolaire.

$$I_F = I_0 [\exp(qV_{BE} / kT) - 1] \quad (\text{II.88})$$

$$I_R = I_0 [\exp(qV_{BC} / kT) - 1] \quad (\text{II.89})$$

$$I_E = -\alpha_R I_R + I_F \quad (\text{II.90})$$

$$I_C = \alpha_F I_F - I_R \quad (\text{II.91})$$

En supposant que le transistor est disposé dans l'espace libre et orienté dans la direction des y , nous pouvons utiliser une méthode semi implicite pour exprimer la tension V_{BE} aux bornes de la jonction BE en fonction de E_{yBE} :

$$V_{BE}^{n+1/2} = \frac{\Delta Y}{2} (E_{BE}^{n+1} + E_{BE}^n) \quad (\text{II.92})$$

Une autre approche similaire est utilisée pour exprimer la tension V_{BC} aux bornes de la jonction BC :

$$V_{BC}^{n+1/2} = -\frac{\Delta Y}{2} (E_{CB}^{n+1} + E_{CB}^n) \quad (\text{II.93})$$

En substituant V_{BE} et V_{BC} par leurs expressions (II.92) et (II.93) en (II.90) et (II.91) nous obtenons :

$$I_E^{n+1/2} = -\alpha_R I_0 \{ \exp[-K_1 (E_{CB}^{n+1} + E_{CB}^n)] - 1 \} + I_0 \{ \exp[K_1 (E_{BE}^{n+1} + E_{BE}^n)] - 1 \} \quad (\text{II.94})$$

$$I_C^{n+1/2} = -I_0 \{ \exp[-K_1 (E_{CB}^{n+1} + E_{CB}^n)] - 1 \} + \alpha_F I_0 \{ \exp[K_1 (E_{BE}^{n+1} + E_{BE}^n)] - 1 \} \quad (\text{II.95})$$

Avec :

$$K_1 = \frac{\Delta y \cdot q}{2kT} \quad (\text{II.96})$$

En utilisant ces différentes expressions, nous pouvons déduire les équations de récurrence par FDTD en champ électrique E_{BE} et E_{CB} :

$$E_{yBE}^{n+1} = E_{yBE}^n + \frac{\Delta t}{\epsilon_0} \nabla \times H^{n+1/2}(i, j, k) - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta x \Delta z} I_E^{n+1/2} \quad (\text{II.97})$$

$$E_{yCB}^{n+1} = E_{yCB}^n + \frac{\Delta t}{\epsilon_0} \nabla \times H^{n+1/2}(i, j, k) - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta x \Delta z} I_C^{n+1/2} \quad (\text{II.98})$$

Ces deux équations sont couplées, et peuvent être résolues par les méthodes de résolution des systèmes d'équations non linéaires de façon analogue aux cas de la diode. Pour appliquer cette méthode de résolution, nous définissons :

$$F_1 = E_{yBE}^{n+1} - E_{yBE}^n - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} \nabla \times H^{n+1/2}(i, j, k) + \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta x \Delta z} I_E^{n+1/2} \quad (\text{II.99})$$

$$F_2 = E_{yCB}^{n+1} - E_{yCB}^n - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} \nabla \times H^{n+1/2}(i, j, k) + \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta x \Delta z} I_C^{n+1/2} \quad (\text{II.100})$$

Nous calculons ensuite les dérivées (la matrice Jacobienne), comme suit :

$$F_{1BE} = \frac{\partial F_1}{\partial E_{yBE}^{n+1}} = 1 + K_2 K_1 \exp[K_1 (E_{yBE}^{n+1} + E_{yBE}^n)] \quad (\text{II.101})$$

$$F_{1CB} = \frac{\partial F_1}{\partial E_{yCB}^{n+1}} = K_2 K_1 \alpha_R \exp[-K_1 (E_{yCB}^{n+1} + E_{yCB}^n)] \quad (\text{II.102})$$

$$F_{2CB} = \frac{\partial F_2}{\partial E_{yCB}^{n+1}} = 1 + K_2 K_1 \exp[-K_1 (E_{yCB}^{n+1} + E_{yCB}^n)] \quad (\text{II.103})$$

$$F_{2BE} = \frac{\partial F_2}{\partial E_{yBE}^{n+1}} = K_2 K_1 \alpha_F \exp[K_1 (E_{yBE}^{n+1} + E_{yBE}^n)] \quad (\text{II.104})$$

Avec :

$$K_2 = \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta x \Delta z} I_0 \quad (\text{II.105})$$

En fin, nous obtenons un système d'équations itératif non linéaire en fonction de E_{BE} et E_{CB} suivant :

$$\begin{bmatrix} E_{yBE}(n+1) \\ E_{yCB}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{yBE}(n) \\ E_{yCB}(n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{1BE} & F_{1CB} \\ F_{2BE} & F_{2CB} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_1(E_{yBE}(n), E_{yCB}(n)) \\ F_2(E_{yBE}(n), E_{yCB}(n)) \end{bmatrix} \quad (\text{II.106})$$

V. Références bibliographiques

- [II.1] Dennis. M. Sullivan, « Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method », IEEE Press Series on RF and Microwave Technology. ISBN 0-7803-4747-1, 2000.
- [II.2] A. Taflove, S. C. Hagness, « Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method », Artech House, ISBN 1-58053-076-1, 2000.
- [II.3] F. Gardiol, « Electromagnétisme », Traité d'électricité, vol. III, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, ISBN 2-88074-318-4, 1996.
- [II.4] P. Degauque, J. Hamelin, « Compatibilité Electromagnétisme, Bruit et Perturbations radioélectriques », BORDAS et C.N.E.T.-E.N.S.T, ISBN 2-04-018807-X, Dunod, Paris, 1990.
- [II.5] O. Biro, K. Preis, « On the use of the Magnétic Vector Potential in the Finite Element Analysis of Three-Dimensional Eddy Currents », IEEE Trans. On Magnetics, vol. 25, N° 4, July 1989.
- [II.6] K. S. Yee, « Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media », IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. 14, pp. 302-307, May 1966.
- [II.7] A. Taflove, M. E. Brodwin, « Numerical Solution of Steady-State Electromagnetic Scattering Problems using Time-Difference Time-Dependent Maxwell's equations », IEEE Trans. On Microwave Theory Tech., vol. MTT-23, pp. 623-630, August 1975.
- [II.8] EMC Europe 2002, « Short Intensive Course on EMC Part V », Hilton Hotel Sorrento, 09th-13th, Spet. 2002.
- [II.9] J. P. Berenger, « A Perfectly Matched Layer for Absorption of Electromagnetic Waves », Journal of computational physics, vol. 114, N° 2, pp. 185-200, August 1994.
- [II.10] J. P. Berenger, « Perfectly Matched Layer for the FDTD Solution of Wave-Structure Interaction Problems », IEEE trans. Antennas and Propagation, vol. 44, N° 1, pp. 110-117, Jannury 1996.
- [II.11] G. Mur, « Absorbing Boundary Condition for the Finite-Difference Approximation of Time-Domain Electromagnetic Field Equations », IEEE Trans. Electromag. Compact., vol. EMC-23, pp. 377-382, Nov. 1981.
- [II.12] Dennis M. Sullivan, « A simplified PML for use the FDTD Method », IEEE Microwave and Guided wave Letters. vol. 6, N° 2, pp. 97-99, Feb. 1996.
- [II.13] X. Gao, « Calcul du Champ Electromagnétique Rayonné par un Convertisseur de Puissance en Utilisant la Méthode des Différences Finies en 3D », Thèse de Doctorat. Université Blaise Pascal - Clermont II, 2003.
- [II.14] A. Hafiane, « Etude du Couplage d'Antennes Imprimées par la Méthode des Différences Finies et Extraction du Modèle Electrique », Thèse de Doctorat. Université Marne-la-vallée, 2003.

- [II.15] T. G. Moore, J. G. Blaschak, A. Taflove, « Theory and Application of Radiation Boundary Operators », IEEE Trans. Antennas and Propagation, vol. 36, No. 12, pp. 1797-1812, Dec. 1988.
- [II.16] L. WU, L. Han, « Implementation and Application of Resistive Sheet Boundary Condition in the Finite-Difference Time-Domain Method (EM Scattering) », IEEE trans. Antennas and Propagation, vol. 40, N° 6, pp. 628-633, Feb. 1992.
- [II.17] D. M. Sheen, S. M. Ali, M. D. Abouzahra, J. A. Kong, « Application of the Three-Dimensional Finite-Difference Time-Domain Method to the Analysis of Planar Microstrip Circuits Sheen », IEEE Trans. On Microwave Theory and Techniques, vol. 38, N° 7, pp. 849-857, July. 1990.
- [II.18] A. Taflove, K. R. Umshankar and K. S. Yee, « Detailed FD-TD Analysis of Electromagnetic Fields Penetrating Narrow Slots and Lapped Joints in Thick Conducting Screens », IEEE trans. Antennas and Propagation, vol. 36, N° 2, pp. 247-257, Feb. 1988.
- [II.19] P. A. Tirkas, G. S. Demarest, « Modeling of the Thin Dielectric Structures using the Finite-Difference Time-Domain Technique », IEEE trans. Antennas and Propagation, vol. 39, N° 9, pp. 1338-1344, Sept. 1991.
- [II.20] J. G. Maloney, G. S. Smith, « The Efficient Modeling of Thin Material Sheets in the Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Method », IEEE trans. Antennas and Propagation, vol. 40, N° 3, pp. 323-330, March. 1992.
- [II.21] W. Sui, D. A. Christensen, and C. H. Durney, « Extending the Two-Dimensional FDTD Method to Hybrid Electromagnetic Systems with Active and Passive Lumped Elements », IEEE Trans. On microwave and techniques, Vol. 40, No. 4, pp. 724-730, April 1992.
- [II.22] M. Piket-May, A. Taflove, J. Baron, « FD-TD Modelling of Digital Signal Propagation in 3D Circuits with Passive and Active Loads », IEEE Trans. On microwave and techniques, Vol. 42, No. 8, pp. 1514-1523, Aug. 1994.
- [II.23] P. C. Paolo, L. Rosselli, R. Sorrentino, « Accurate and Efficient Circuit Simulation with Lumped-Element FDTD Technique », IEEE Trans. On microwave Theory and techniques, Vol. 44, No. 12, pp. 2207-2215, Dec. 1996.
- [II.24] A. P. Zhao and P. Alinikula, « Investigation of the Performance of the Resistive Voltage Source Used for the FDTD Analysis of Microstrip Circuits », Microwave and Optical Technology Letters, Vol. 30, No. 6, pp. 378-381, Sept. 2001.
- [II.25] W. Thiel, L. P. B. Katehi, « Some Aspects of Stability and Numerical Dissipation of the Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Technique Including Passive and Active Lumped Elements », IEEE Trans. On Microwave Theory and techniques, Vol. 50, No. 9, pp. 2159-2164, Sept. 2002.

Chapitre III

Approche semi-Analytique pour l'analyse de l'environnement électromagnétique des circuits de puissance

Introduction

Pour un dispositif de l'électronique de puissance, la résolution des équations de Maxwell par la méthode numérique dite FDTD permet le calcul direct et en une étape unique des six composantes du champ électromagnétique à chaque période en fonction de celles de la période précédente pour chaque cellule et en présence des pertes. Il faut aussi tenir compte des périodes antérieures. Une étude détaillée requiert une prise en compte des frontières ouvertes et un grand nombre de points de discrétisation, ce qui nécessite une taille mémoire importante et un temps de calcul considérable.

Afin de s'affranchir du tout numérique, et traiter aussi bien ce problème en domaine fréquentiel qu'en domaine temporel avec prise en compte des non linéarités des interrupteurs, nous proposons dans ce chapitre de calculer le champ électromagnétique émis par les circuits de l'électronique de puissance, en utilisant des concepts analytiques de mises en œuvres aisées.

Le calcul du champ électromagnétique est réalisé en deux étapes. Dans la première nous calculons la répartition des courants dans le dispositif de l'électronique de puissance, puis en utilisant un concept analytique nous calculerons le champ électromagnétique émis.

En considérant les pistes de nature filiforme, nous utiliserons le concept du potentiel vecteur à composante unique, puis nous introduisons une correction en fonction de la nature du plan de masse.

Les deux formalismes que nous utiliserons dans notre travail sont:

- le modèle de Schelkunoff [III.1] (en domaine fréquentiel) sur les pistes où la propagation est présente,
- le modèle des dipôles Hertiens en domaine fréquentiel ou en domaine temporel [III.2].

Ces formalismes nécessitent la connaissance de la répartition du courant, il est alors nécessaire de modéliser ces circuits qui sont généralement constitués d'une source d'alimentation, de pistes, d'interrupteurs et de charges.

Vu le niveau de fréquence lors de la commutation, les pistes seront modélisées par la théorie des lignes couplées, les interrupteurs et les charges par des réseaux localisés. Pour le calcul de la répartition des courants nous utilisons un formalisme topologique qui nous permet de prendre en compte l'ensemble des éléments de notre circuit. En domaine fréquentiel, ce

formalisme est basé sur la représentation par matrice $[\Phi]$ des éléments propagatifs et des lois de Kirchhoff.

En domaine temporel, en s'inspirant du formalisme fréquentiel, nous opérons par un concept similaire faisant intervenir une relation matricielle temporelle entre les courants et les tensions à l'entrée et à la sortie de la piste ; cette relation temporelle est obtenue après discrétisation des équations des lignes par FDTD.

I. Calcul du champ électromagnétique

Le phénomène d'émission d'ondes électromagnétiques est plutôt compliqué, et souvent la source de rayonnement ne permet pas une analyse simplifiée. La modélisation des milieux continus à certes permis, moyennant des outils mathématiques et des calculateurs très puissants, de dépasser certaines difficultés et proposer des solutions pour des antennes (dispositifs électromagnétiques) à géométries assez complexes. Malheureusement, l'utilisation du tout numérique est de mise en œuvre délicate et nécessite souvent des temps de calcul très élevés.

L'utilisation du tout numérique par un ingénieur n'est généralement pas une tâche aisée ; en effet la principale qualité d'un modèle utilisé par l'ingénieur n'est pas d'être le plus complet possible, il lui faut par contre être adapté au problème posé.

En matière d'étude de l'environnement électromagnétique d'un dispositif électrique, il est souvent souhaitable de procéder à une analyse des sources de rayonnement (nature, niveau de fréquence, ...) et à leurs dispositions (présence d'un plan de masse, présence d'obstacles, ...). Dans le cas des dispositifs de l'électronique de puissance, en considérant les pistes comme de simples conducteurs filiformes, il nous semble qu'il serait possible de s'affranchir du tout numérique tout en gardant une précision acceptable.

Dans notre travail, afin de quantifier analytiquement par calcul le champ électromagnétique émis par un dispositif de l'électronique de puissance, nous traiterons d'abord le dipôle électrique qui est la source de rayonnement la plus simple et reste applicable aussi bien en domaine fréquentiel qu'en domaine temporel, puis nous présentons le formalisme haute fréquence de Schelkunoff [III.1].

I.1. Dipôles Hertiens

Dans ce paragraphe, nous traiterons d'abord le dipôle Hertzien [III.2] qui est la source de rayonnement la plus simple. Cela fait, nous pourrons alors aborder le rayonnement d'une antenne filaire de longueur finie en utilisant le principe de superposition.

Pour le cas d'un plan de masse parfaitement conducteur, le formalisme dipolaire offre l'avantage d'un modèle mathématique qui peut s'écrire aussi bien en domaine fréquentiel qu'en domaine temporel.

La méthode des dipôles consiste en une subdivision du support (structure filaire) en éléments appelés dipôles dont la taille est choisie de façon à masquer la propagation.

La longueur du dipôle doit satisfaire aux deux conditions suivantes :

$$1. dz \leq \lambda/20$$

dz : la longueur d'un dipôle;

λ : la longueur d'onde en régime fréquentiel.

λ : la pseudo longueur d'onde en régime temporel.

Cette condition permet de masquer la propagation le long du dipôle, c'est-à-dire l'amplitude et la phase du courant le long du dipôle sont toutes deux indépendantes de z .

$$2. dz \leq r/10$$

r : le rayon d'observation ;

Cette condition permet de prendre en compte les petites variations du courant vues d'un point très proche de la structure filaire.

I.1.1 Formulation du calcul du champ

L'expression du potentiel vecteur magnétique pour un dipôle, dans l'espace libre «air» au point P (figure III.1), est la suivante :

$$dA_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \left(z, t - \frac{r}{c} \right)}{r(z)} dz \quad c : \text{vitesse de la lumière} \quad (\text{III.1})$$

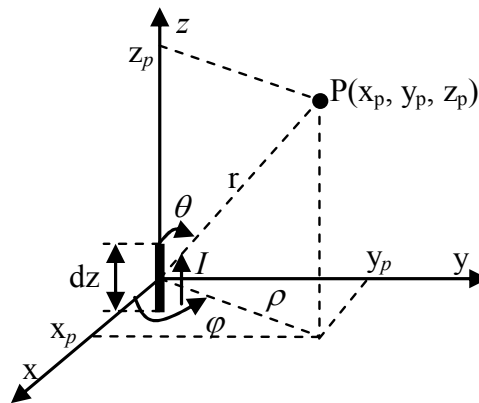


Figure III.1. Configuration de base pour l'étude de rayonnement d'un dipôle.

Sachant que :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{III.2})$$

et en utilisant les deux équations suivantes :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{III.3})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (\text{III.4})$$

I.1.2. Modèle des dipôles Hertiens en fréquentiel

A partir de l'équation (III.2) et après quelques manipulations mathématiques nous déduisons les expressions du champ magnétique (III.5) et (III.6):

$$H_x = -y_p \frac{lI}{4\pi} \left[\frac{1}{r^3} + \frac{j\gamma_0}{r^2} \right] e^{-j\gamma_0 r} \quad (\text{III.5})$$

$$H_y = x_p \frac{lI}{4\pi} \left[\frac{1}{r^3} + \frac{j\gamma_0}{r^2} \right] e^{-j\gamma_0 r} \quad (\text{III.6})$$

$$H_z = 0 \quad (\text{III.7})$$

Les composantes du champ électrique en coordonnées cartésiennes sont obtenues à partir des équations (III.3) et (III.4) :

$$E_x = x_p z_p \frac{lI}{4\pi} \left[\frac{3}{j\epsilon_0 r^5} + \frac{3\eta_0}{r^4} + \frac{j\mu_0}{r^3} \right] e^{-j\gamma_0 r} \quad (\text{III.8})$$

$$E_y = y_p z_p \frac{lI}{4\pi} \left[\frac{3}{j\epsilon_0 r^5} + \frac{3\eta_0}{r^4} + \frac{j\mu_0}{r^3} \right] e^{-j\gamma_0 r} \quad (\text{III.9})$$

$$E_z = \frac{lI}{4\pi} \left\{ \left(3z_p^2 - r^2 \right) \left[\frac{1}{j\epsilon_0 r^5} + \frac{\eta_0}{r^4} \right] + \left(z_p^2 - r^2 \right) \frac{j\mu_0}{r^3} \right\} e^{-j\gamma_0 r} \quad (\text{III.10})$$

I.1.3. Modèle des dipôles Hertiens en temporel

En opérant de la même manière que précédemment, en domaine temporel, les expressions des différents composantes champ magnétique et du champ électrique en coordonnées cartésiennes sont données par :

- Champ magnétique :

$$H_x = -\frac{l}{4\pi} \left[\frac{y_p}{r^3} I(z, \tau) + \frac{y_p}{cr^2} \frac{\partial I(z, \tau)}{\partial \tau} \right] \quad (\text{III.11})$$

$$H_y = \frac{l}{4\pi} \left[\frac{x_p}{r^3} I(z, \tau) + \frac{x_p}{cr^2} \frac{\partial I(z, \tau)}{\partial \tau} \right] \quad (\text{III.12})$$

$$H_z = 0 \quad (\text{III.13})$$

- Champ électrique :

$$E_x = \frac{l}{4\pi\epsilon_0} x_p z_p \left[\frac{3 \int_0^t I(z, \tau) d\tau}{r^5} + \frac{3I(z, \tau)}{cr^4} + \frac{1}{c^2 r^3} \frac{\partial I(z, \tau)}{\partial \tau} \right] \quad (\text{III.14})$$

$$E_y = \frac{l}{4\pi\epsilon_0} y_p z_p \left[\frac{3 \int_0^t I(z, \tau) d\tau}{r^5} + \frac{3I(z, \tau)}{cr^4} + \frac{1}{c^2 r^3} \frac{\partial I(z, \tau)}{\partial \tau} \right] \quad (\text{III.15})$$

$$E_z = \frac{l}{4\pi\epsilon_0} \left\{ (3z_p^2 - r^2) \left[\frac{\int_0^t I(z, \tau) d\tau}{r^5} + \frac{I(z, \tau)}{cr^4} \right] + \frac{(z^2 - r^2)}{c^2 r^3} \frac{\partial I(z, \tau)}{\partial \tau} \right\} \quad (\text{III.16})$$

Avec :

$\tau = t - r/c$, c : la vitesse de la lumière ;

ϵ_0 et μ_0 : la permittivité et la perméabilité du vide respectivement.

$\eta_0 \approx 377 \Omega$: l'impédance caractéristique d'onde.

En (III.14), (III.15) et (III.16), le premier terme est appelé champ électrostatique, le second, champ d'induction électrique ou champ intermédiaire, et le troisième est le champ de rayonnement électrique. En (III.11) et (III.12), le premier terme est appelé champ d'induction magnétique, le second est le champ de rayonnement magnétique.

I.2. Modèle de Schelkunoff

Soit une structure filaire de longueur l , parcourue par un courant harmonique et propagatif $I(z, \omega)$, disposée dans l'espace libre (l'air) comme illustrée en figure III.2.

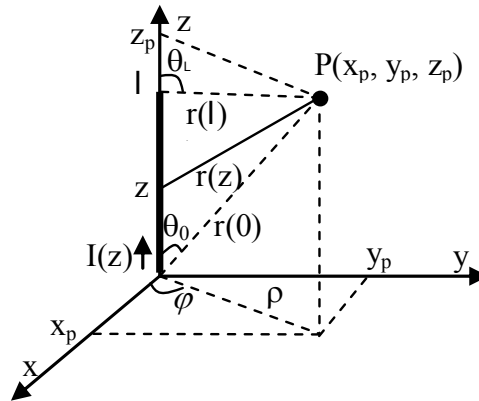


Figure III.2. Illustration des grandeurs utilisées dans les expressions du champ.

Sachant que pour une structure filaire homogène (sans discontinuité) le courant et ses dérivées spatiales sont continues dans l'intervalle $0 < z < 1$, la composante axiale du potentiel vecteur $A(z, \omega)$ s'écrit, en intégrant la contribution de tous les segments élémentaires constituant la structure filaire [III.1]:

$$A_z(z, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\ell \frac{e^{-j\gamma r(z)}}{r(z)} I(z, \omega) dz \quad (\text{III.17})$$

Les champs électrique et magnétique en tout point de l'espace associés à une quelconque structure électrique peuvent être calculés en fonction du potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ en utilisant les équations (III.18) et (III.19) :

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \frac{j}{\omega\epsilon} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (\text{III.18})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E} \quad (\text{III.19})$$

ϵ, μ, σ : les caractéristiques physiques du milieu ambiant.

Le courant est déduit par résolution de l'équation de propagation (III.20) :

$$\frac{d^2 I(z, \omega)}{dz^2} = -\beta_0^2 I(z, \omega) \quad (\text{III.20})$$

β_0 : la constante de propagation de la ligne.

Schelkunoff a montré que si on néglige σ et nous combinons les quatre expressions (III.17), (III.18), (III.19) et (III.20), les champs électromagnétiques associés à une structure filaire de longueur 1 et se trouvant dans un espace libre (l'air), s'écrivent :

$$E_z = \frac{1}{j4\pi\omega\epsilon_0} \left[I'(0) \frac{e^{-j\beta_0 r(0)}}{r(0)} - I'(\ell) \frac{e^{-j\beta_0 r(\ell)}}{r(\ell)} + I(0) \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-j\beta_0 r(z)}}{r(z)} \Big|_{z=0} - I(\ell) \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-j\beta_0 r(z)}}{r(z)} \Big|_{z=\ell} \right] \quad (\text{III.21})$$

$$E_\rho = \frac{1}{j4\pi\omega\epsilon_0} \left[I'(\ell) e^{-j\beta_0 r(\ell)} \cos\theta_\ell - I'(0) e^{-j\beta_0 r(0)} \cos\theta_0 + I(0) \left(j\beta_0 \cos^2(\theta_0) - \frac{\sin^2(\theta_0)}{r(0)} \right) e^{-j\beta_0 r(0)} - I(\ell) \left(j\beta_0 \cos^2(\theta_\ell) - \frac{\sin^2(\theta_\ell)}{r(\ell)} \right) e^{-j\beta_0 r(\ell)} \right] \quad (\text{III.22})$$

$$H_\phi = \frac{1}{4\pi\rho} \frac{1}{j\beta_0} \left[\left(I'(\ell) e^{-j\beta_0 r(\ell)} - I'(0) e^{-j\beta_0 r(0)} \right) + I_\ell(0) e^{-j\beta_0 r(0)} \cos\theta_0 - I(\ell) e^{-j\beta_0 r(\ell)} \cos\theta_\ell \right] \quad (\text{III.23})$$

$$E_\phi = H_\rho = H_z = 0 \quad (\text{III.24})$$

avec :

$$I'(0) = \left. \frac{\partial I(z)}{\partial z} \right|_{z=0} \quad \text{et} \quad I'(\ell) = \left. \frac{\partial I(z)}{\partial z} \right|_{z=\ell} \quad (\text{III.25})$$

β_0 : constante de propagation dans le vide.

I.3. Prise en compte du plan de masse et du diélectrique

Les deux modèles de calcul du champ électromagnétique que nous venons d'exposer supposent que l'antenne rayonne dans un espace libre.

En présence d'un diélectrique, le champ électromagnétique est obtenu par superposition des contributions de l'antenne réelle et de l'antenne image selon le cas, avec et sans plan de masse; les diagrammes des images sont présentés dans le paragraphe III.2 (pages 73) relatif au calcul des paramètres linéiques des pites sur circuit imprimé.

II. Calcul de la répartition des courants dans un dispositif de l'EP

Pour le calcul de la répartition des courants et tensions, nous résolvons un système d'équations, issu de la théorie des lignes couplées, du type $f([X]) = [0]$ qui peut être linéaire ou non. Notre système d'équations peut se mettre sous la forme :

$$f([X]) = [A][X] - [B] = [0] \quad (\text{III.26})$$

La partie $[A][X]$ est linéaire, par contre $[B]$ peut être une fonction $g([X])$ non linéaire.

II.1. Principe de l'analyse

Le principe de l'analyse est de mettre en équation l'ensemble des relations électriques liant les courants et les tensions aux extrémités à travers les tubes (pistes parallèles) comme le montre la figure III.3. Les lois de Kirchhoff (KCL et KVL) aux nœuds extrémités et aux jonctions nous permettent d'introduire les relations électriques pour les réseaux localisés. En domaine fréquentiel, nous utilisons une représentation dite par matrice chaîne $[\Phi]$. En domaine temporel, nous utilisons une approche [III.3] qui consiste à la discrétisation des équations des lignes par FDTD (Finite Difference Time Domain).

La figure III.3 illustre un schéma électrique qui nous servira de base pour l'étude des convertisseurs.

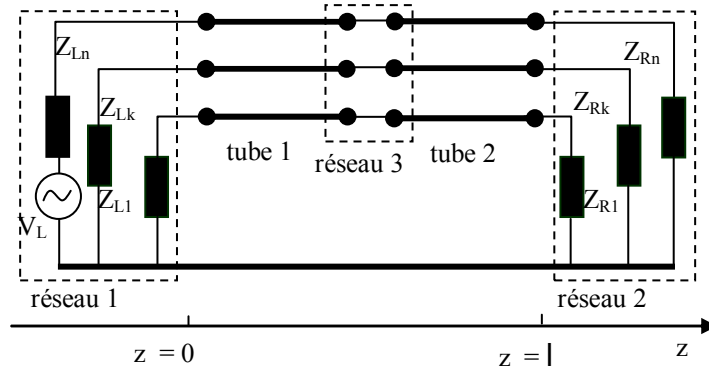


Figure III.3. Schéma électrique de base d'un convertisseur.

II.2. Modélisation en domaine fréquentiel par la matrice chaîne $[\Phi]$

En domaine fréquentiel, le système $f([X]) = [0]$ est linéaire et le vecteur $[B]$ représente l'excitation:

$$f([X]) = [A][X] - [B] = [0] \quad (\text{III.27})$$

Cette première étape va nous permettre de définir une matrice $[A]$ composée de deux sous matrices $[A_1]$ et $[A_2]$ comme suit :

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_1] \\ [A_2] \end{bmatrix} : \text{matrice de représentation topologique du convertisseur;}$$

$[A_1]$: sous matrice déduite de la représentation des tubes de propagation ;

$[A_2]$: sous matrice déduite des lois de Kirchhoff (KCL et KVL) pour les jonctions (réseaux d'extrémités et d'interconnexions);

$[X]$: vecteur des inconnues (courants et tensions aux nœuds);

$[B]$: vecteur source (source de courant et/ou de tension);

Ces deux sous matrices sont construites après numérotation des nœuds et des tubes. Elles contiennent l'ensemble des informations relatives à l'état électrique du convertisseur.

II.2.1. Sous matrice des tubes $[A_1]$

En domaine fréquentiel, la théorie des lignes couplées nous permet de définir diverses relations entre les grandeurs électriques (courants et tensions) aux deux extrémités de la ligne. La sous matrice $[A_1]$ est déduite en utilisant la représentation par matrice $[\Phi]$ d'une ligne de transmission (tube) qui permet la prise en compte des liaisons propagatives. Cette représentation relie les tensions et les courants aux deux extrémités ($z = 0$ et $z = 1$) d'un tube (figure III.3) :

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} [\cosh(\sqrt{[Z][Y]}\ell)] & -[Z_c]\sinh(\sqrt{[Y][Z]}\ell) \\ -[Z_c]^{-1}\sinh(\sqrt{[Z][Y]}\ell) & [\cosh(\sqrt{[Y][Z]}\ell)] \end{bmatrix} \quad (\text{III.28})$$

$[Z_c] = [Z][Y]^{-1}$: matrice impédance caractéristique de la ligne.

Dans la matrice $[A_1]$, la contribution d'un tube à N pistes est la suivante :

$$[A_1] = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & -[\Phi_{11}] & -[\Phi_{12}] & [1_N] & [0] & \cdots \\ \cdots & -[\Phi_{21}] & -[\Phi_{22}] & [0] & [1_N] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

$[1_N]$: matrice identité d'ordre N.

II.2.2. Sous matrice des jonctions $[A_2]$

La sous matrice $[A_2]$ représente l'ensemble des nœuds (d'extrémités et/ou d'interconnexions) du convertisseur. En chaque nœud, la combinaison des lois de Kirchhoff nous permet d'obtenir l'expression (III.30) liant les courants et les tensions [III.3] :

$$\sum_{j=1}^n ([Y_j^m][V_j^m] + [Z_j^m][I_j^m]) - [P^m(V_j^m, I_j^m)] = 0 \quad (\text{III.30})$$

Où:

$[Z_j^m]$: matrice résultante de l'application des lois de Kirchhoff (KVL et KCL) au nœud m, contenant des impédances du réseau en ce nœud ou bien des 0, 1 ou -1;

$[P^m(V_j^m, I_j^m)]$: vecteur contenant une source de tension ou de courant.

$[Y_j^m]$: matrice résultante de l'application des lois de Kirchhoff (KVL et KCL) au nœud m, contenant des admittances du réseau en ce nœud ou bien des 0, 1 ou -1;

II.2.3. Vecteur des inconnues $[X]$

Le vecteur des inconnus contient les courants et les tensions aux deux extrémités de chaque tube du convertisseur (III.31).

$$[X] = [\cdots \ V(0) \ I(0) \ V(\ell) \ I(\ell) \ \cdots]^T \quad (\text{III.31})$$

II.2.4. Vecteur $[B]$

Le vecteur $[B]$ contient des sources de courant et/ou de tension.

II.3. Modélisation en domaine temporel par FDTD

II.3.1. Equations générales du couplage onde-structure filaire en domaine fréquentiel

Il est connu qu'il est nécessaire de bâtir la théorie des lignes sur les propriétés du champ électromagnétique, c'est-à-dire sur les équations de Maxwell. En présence d'une agression électromagnétique extérieure, en utilisant les deux équations de Maxwell-Faraday et de

Maxwell-Ampère, il est possible de déduire les deux équations de couplage onde-structure filiforme.

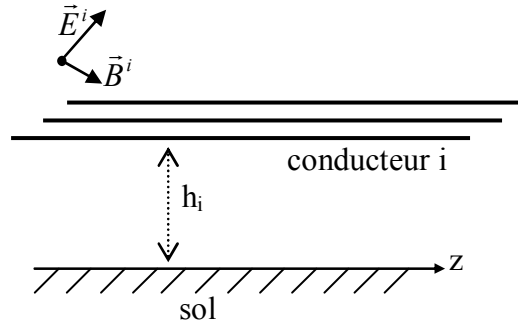


Figure III.4. Ligne aérienne illuminée par une onde électromagnétique.

Soit une ligne multifilaire illuminée par une onde électromagnétique, en restant dans les hypothèses fondamentales des lignes de transmission [III.4], les tensions et les courants induits le long de la ligne peuvent être calculés en utilisant le formalisme de couplage d'une ligne avec un champ électromagnétique, qui s'exprime en domaine fréquentiel comme suit [III.5] :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [\hat{V}(z)] + [\hat{Z}] [\hat{I}(z)] &= [\hat{V}_F(z)] \\ \frac{d}{dz} [\hat{I}(z)] + [\hat{Y}] [\hat{V}(z)] &= [\hat{I}_F(z)] \end{aligned} \quad (III.32)$$

Où :

$[\hat{I}(z)]$, $[\hat{V}(z)]$: vecteur courant et vecteur tension complexes de dimension N (N : nombre de conducteurs par ligne).

$[\hat{V}_F(z)]$, $[\hat{I}_F(z)]$: vecteurs sources exprimés en fonction du champ magnétique incident $\hat{B}^i$ et du champ électrique incident $\hat{E}^i$ [III.5].

La principale différence entre une ligne aérienne, un câble multicouche, une piste ... réside dans la définition des matrices impédances $[Z]$ et admittance $[Y]$. Nous détaillerons par la suite le calcul des paramètres linéiques d'une piste.

En l'absence d'une agression électromagnétique extérieure, les équations générales des lignes couplées deviennent comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [\hat{V}(z)] + [\hat{Z}] [\hat{I}(z)] &= [0] \\ \frac{d}{dz} [\hat{I}(z)] + [\hat{Y}] [\hat{V}(z)] &= [0] \end{aligned} \quad (III.33)$$

II.3.2. Equations générales des lignes couplées en domaine temporel

En faisant un passage fréquence-temps par la transformée de Fourier inverse, le système d'équations (III.33) devient comme suit [III.3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [u(z,t)]}{\partial z} + \int_0^t [z(t-\tau)][i(\tau)]d\tau &= [0] \\ \frac{\partial [i(z,t)]}{\partial z} + \int_0^t [y(t-\tau)][u(\tau)]d\tau &= [0] \end{aligned} \quad (III.34)$$

Dans le cas d'une analyse sans prise en compte de la variation des paramètres linéiques avec la fréquence, ce système d'équations est simplifié comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}[u(z,t)] + [R][i(z,t)] + [L]\frac{\partial}{\partial t}[i(z,t)] &= [0] \\ \frac{\partial}{\partial z}[i(z,t)] + [G][u(z,t)] + [C]\frac{\partial}{\partial t}[u(z,t)] &= [0] \end{aligned} \quad (III.35)$$

Les matrices résistance linéique $[R]$, inductance linéique $[L]$, capacité linéique $[C]$ et conductance linéique $[G]$ seront définies par la suite.

Afin de trouver une relation en domaine temporel entre les courants et tensions entre les extrémités de la ligne pour une représentation analogue à celle du domaine fréquentiel par matrice $[\Phi]$, nous procédons à la discrétisation des équations des lignes (III.35) par FDTD [III.3], [III.6], et [III.7].

En utilisant la méthode dite FDTD, nous supposons que les courants et les tensions ne coexistent ni dans l'espace ni dans le temps, figure III.5.

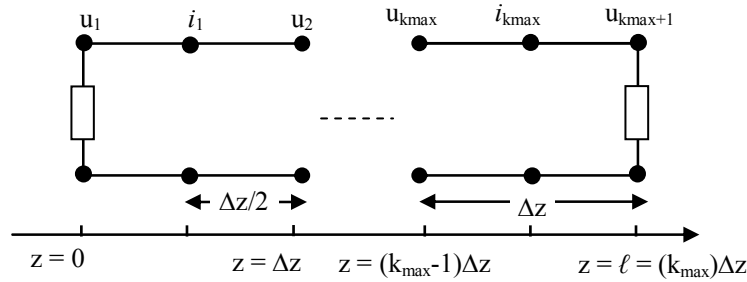


Figure III.5. Discrétisation des courants et tensions par FDTD sur une ligne.

En utilisant la notation discrète suivante :

$$u_k^n = u((k-1)\Delta z, n\Delta t) \quad (III.36)$$

$$i_k^n = i((k-1/2)\Delta z, n\Delta t) \quad (III.37)$$

Avec :

$$t_{\max} = n_{\max} \Delta t \quad (III.38)$$

$$\ell = k_{\max} \Delta x \quad (III.39)$$

et en exprimant par FDTD (Finite Difference Time Domain) les dérivées spatiales et temporelles, le système d'équations (III.35) devient [III.3]:

$$\frac{u_{k+1}^{n+1} - u_k^{n+1}}{\Delta z} + R \frac{i_k^{n+3/2} + i_k^{n+1/2}}{2} + L \frac{i_k^{n+3/2} - i_k^{n+1/2}}{\Delta t} = 0 \quad (\text{III.40})$$

$$\frac{i_k^{n+1/2} - i_{k-1}^{n+1/2}}{\Delta z} + G \frac{u_k^{n+1} + u_k^n}{2} + C \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = 0 \quad (\text{III.41})$$

En remplaçant les dérivées spatiales et temporelles par des différences finies à point centrées, nous déduisons les équations de récurrence pour la tension (III.42) et pour le courant (III.43):

$$[u_k^n] = \left[\frac{[C]}{\Delta t} + \frac{[G]}{2} \right]^{-1} \left[\left[\frac{[C]}{\Delta t} - \frac{[G]}{2} \right] [u_k^{n-1}] - \frac{[i_k^{n-1/2}] - [i_{k-1}^{n-1/2}]}{\Delta z} \right] \quad (\text{III.42})$$

avec : $k = 2, 3, \dots, k_{\max} - 1$

$$[i_k^{n+1/2}] = \left[\frac{[L]}{\Delta t} + \frac{[R]}{2} \right]^{-1} \left[\left[\frac{[L]}{\Delta t} - \frac{[R]}{2} \right] [i_k^{n-1/2}] - \frac{[u_{k+1}^n] - [u_k^n]}{\Delta z} \right] \quad (\text{III.43})$$

avec : $k = 1, 2, \dots, k_{\max} - 1$

$[R]$, $[L]$, $[C]$ et $[G]$: les matrices des paramètres linéiques.

II.3.3. Equations aux extrémités

Par analogie avec l'écriture fréquentielle, afin de déduire un système d'équations dont les inconnues sont les courants et les tensions temporels aux deux extrémités (i.e. à $z = 0$ et $z = 1$) à l'instant $t = n.\Delta t$, nous procédons comme suit :

Dans l'équation (III.42) nous remplaçons successivement k par 1 puis par $k_{\max}$ en substituant Δz par $\Delta z/2$ et en introduisant une moyenne temporelle pour le courant [III.8]:

$$[i_k^{n-1/2}] = \frac{[i_k^{n-1}] + [i_k^n]}{2} \quad (\text{III.44})$$

Nous obtenons :

- pour $k = 1$

$$\left[\frac{[C]}{\Delta t} + \frac{[G]}{2} \right] [u^n(0)] - \frac{[i^n(0)]}{\Delta z} = \left[\frac{[C]}{\Delta t} - \frac{[G]}{2} \right] [u^{n-1}(0)] + \frac{[i^{n-1}(0)]}{\Delta z} - \frac{[i_1^{n-1}]}{\Delta z/2} \quad (\text{III.45})$$

- pour $k = k_{\max}$

$$\left[\frac{[C]}{\Delta t} + \frac{[G]}{2} \right] [u^n(\ell)] - \frac{[i^n(\ell)]}{\Delta z} = \left[\frac{[C]}{\Delta t} - \frac{[G]}{2} \right] [u^{n-1}(\ell)] + \frac{[i^{n-1}(\ell)]}{\Delta z} - \frac{[i_{k_{\max}-1}^{n-1}]}{\Delta z/2} \quad (\text{III.46})$$

II.3.4. Sous matrice des tubes $[A_1]$

Par analogie avec l'écriture fréquentielle, la contribution d'un tube à N pistes s'écrit comme suit (III.47):

$$[A_1] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \left[\frac{[C]}{\Delta t} + \frac{[G]}{2} \right] & -\frac{[1_N]}{\Delta z} & [0] & [0] & \dots \\ \dots & [0] & [0] & \left[\frac{[C]}{\Delta t} + \frac{[G]}{2} \right] & +\frac{[1_N]}{\Delta z} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (III.47)$$

$[1_N]$: matrice identité d'ordre N.

A l'issue de cette mise en équation, nous obtenons un système de $(2*N)$ équations avec $(4*N)$ inconnues, le système matriciel est complété par les équations aux nœuds d'extrémités et d'interconnexions qui sont regroupées dans la sous matrice $[A_2]$.

REMARQUE. — La sous matrice $[A_2]$ est construite en adoptant la relation (III.30) précédemment utilisée.

II.3.5. Vecteur des inconnus $[X]$

Le vecteur des inconnues contient les courants et les tensions aux deux extrémités de chaque tube du convertisseur, la contribution du $i^{\text{ème}}$ tube, à l'instant $t = n.\Delta t$ est comme suit :

$$[X] = [\dots \quad [v_i^n(0)] \quad [i_i^n(0)] \quad [v_i^n(\ell)] \quad [i_i^n(\ell)] \quad \dots] \quad (III.48)$$

II.3.6. Vecteur $[B]$

En domaine temporel, le vecteur $[B]$ est constitué de deux sous vecteurs :

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_1] \\ [B_2] \end{bmatrix} \quad (III.49)$$

II.3.6.1. Le sous vecteur $[B_1]$

Le second membre de chacune des deux équations (III.45) et (III.46) contient des termes calculés à l'instant précédent et permet la construction du vecteur $[B_1]$. La contribution du tube d'indice i , dans le vecteur $[B_1]$, est la suivante :

$$[B_1] = \begin{bmatrix} \vdots \\ B_{1i} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \left[\frac{[C]}{\Delta t} - \frac{[G]}{2} \right] [V^{n-1}(0)] + \frac{[I^{n-1}(0)]}{\Delta z} - \frac{[I_1^{n-1}]}{\Delta z/2} \\ \vdots \\ \left[\frac{[C]}{\Delta t} - \frac{[G]}{2} \right] [V^{n-1}(\ell)] + \frac{[I^{n-1}(\ell)]}{\Delta z} - \frac{[I_{k_{\max}-1}^{n-1}]}{\Delta z/2} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (III.50)$$

II.3.6.2. Le sous vecteur $[B_2]$

Pour le sous vecteur $[B_2]$, en plus des sources de courant et/ou de tension, les équations de Kirchhoff (KVL et KCL), écrites pour des éléments non linéaires font apparaître des termes supplémentaires. Ces termes supplémentaires non linéaires sont introduits dans le sous vecteur $[B_2]$. Ceci nous conduit à un système non linéaire que nous expliciterons dans le chapitre IV que nous consacrons aux applications.

II.4. Résolution du système d'équations

La résolution du système d'équations non linéaires $f([X]) = [A][X] - g([X]) = [0]$ en domaine temporel nous donne les courants et les tensions en chaque nœud du réseau. Aussi les équations de récurrence (III.42) et (III.43) nous permettent de déduire les courants et tensions le long des conducteurs (points de discrétisation) de chaque tube.

En domaine fréquentiel, nous résolvons un système linéaire du type $f([X]) = [A][X] = [0]$, ce qui nous donne les courants et les tensions en chaque nœud du réseau, et la matrice de transformation $[\Phi]$ nous permet de les déduire en tout point de la piste.

III. Modélisation des pistes des circuits de l'électronique de puissance

Dans cette partie de notre travail, nous proposons une nouvelle approche pour l'analyse de l'environnement électromagnétique des convertisseurs de l'électronique de puissance ; le calcul du champ électromagnétique par des formalismes analytiques nécessite la connaissance de la répartition des courants. Pour cet objectif, nous utilisons un concept fondé sur les équations des lignes couplées. Cela nous impose une représentation des pistes par des lignes ; il devient alors nécessaire de calculer les paramètres linéiques des pistes que nous développons dans ce qui va suivre.

III.1. Calcul des paramètres linéiques des pistes

Pour calculer les paramètres linéiques des pistes, plusieurs méthodes sont proposées dans la littérature dont les plus rigoureuses sont celles utilisant la modélisation électromagnétique des milieux continus:

- modélisation numérique par la méthode des éléments finis (résolution des équations aux dérivées partielles par la MEF). Cette modélisation, permet, à partir des énergies magnétique et électrique, de déterminer les inductances $[L]$ et les capacités $[C]$.

- modélisation numérique par la méthode des moments (résolution d'une équation intégrale par MoM). Permet aussi la détermination des inductances [L] et des capacités [C] à partir des énergies magnétique et électrique.

Viennent ensuite celles qui utilisent l'approximation des fils minces où nous citons les travaux de H. A. Wheeler [III.9], H. R. Kaupp [III.10], R. Garg, [III.11] et K. C. Gupta [III.12], et plus récemment celle proposée par C. R. Paul [III.3] utilisant la méthode des moments.

Dans notre modélisation, les formalismes de calcul de la répartition des courants sont élaborés à partir de la représentation des pistes par des lignes couplées. En théorie des lignes, généralement les conducteurs filiformes sont à sections circulaires. Les pistes sont par contre à sections rectangulaires, mais le formalisme pour la détermination des paramètres linéiques R, L, C et G pour des conducteurs à section rectangulaire est identique à celui utilisé pour les conducteurs à section circulaire [III.4], [III.13] et [III.14].

En considérant les pistes comme étant parfaitement conductrices et le plan de masse de conductivité infinie, nous pouvons affirmer en premier que la matrice résistance est nulle. Il en est de même pour la matrice conductance si nous admettons que les diélectriques sont parfaits.

Dans notre travail, pour le calcul des paramètres linéiques (matrices [L] et [C]) des pistes nous utilisons le formalisme proposé par C. R. Paul [III.3].

Le calcul des matrices linéiques des inductances [L] et des capacités [C] passe en premier par la définition des coefficients de potentiels pour la détermination de la matrice capacité généralisée [III.3].

Pour les pistes des circuits imprimés, deux cas se présentent :

- présence d'un diélectrique sans plan de masse,
- présence d'un diélectrique avec plan de masse.

Dans son approche C. R. Paul [III.3], discrétise, en premier, régulièrement une piste en filaments pour la détermination des coefficients de potentiels de chacun d'eux. Pour cet objectif, il résout une équation en potentiel scalaire de Laplace ou de Poisson [III.3].

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = \rho(x, y, z) \quad (\text{III.51})$$

L'intégration de cette équation (III.51) peut se faire par différentes méthodes, dont les plus utilisées sont :

- La méthode des moments [III.15].
- La méthode de Galerkin [III.16].

Pour le calcul des paramètres linéiques des pistes, C. R. Paul [III.3] propose un concept basé sur la résolution par la méthode des moments de l'équation de Laplace en potentiel

électrique et l'utilisation de la méthode des images [III.3]. Nous présentons brièvement dans ce qui va suivre le formalisme de C. R. Paul [III.3].

III.1.1. Expressions générales du potentiel électrique pour un conducteur filiforme

Considérons un filament, conducteur filiforme dans un espace libre, portant la charge q , sa contribution au potentiel en un point situé à une distance S_p , est donnée par la résolution de l'équation de Laplace [III.3] :

$$d\phi = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(S_p) \quad (\text{III.52})$$

Pour calculer les paramètres linéiques, considérons des pistes conductrices infinitésimalement minces de largeur w et de longueur infinie qui portent une densité de charge ρ constante le long de sa largeur comme le montre la figure III.6.

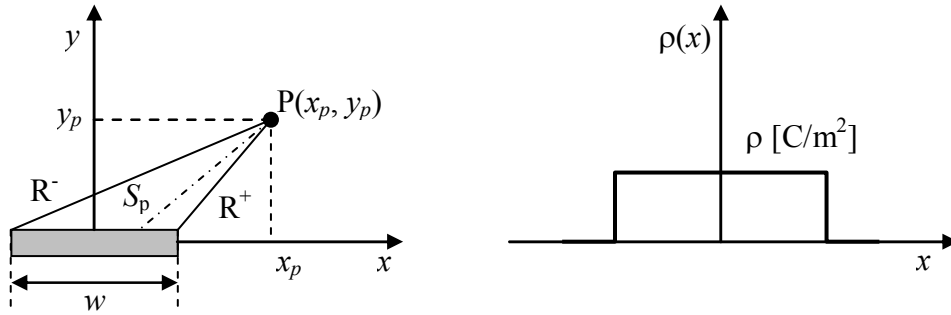


Figure III.6. Configuration pour le calcul du potentiel dû à une distribution constante de charge sur une piste.

Si nous traitons la piste comme une collection de filaments et si chacun d'eux porte une charge par unité de longueur ρdx , nous pouvons alors définir le potentiel en un point comme la somme des potentiels de ces filaments exprimé par la relation (III.53) :

$$\begin{aligned} \phi(w, x_p, y_p) &= -\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \ln \left[\sqrt{(x_p - x)^2 + y_p^2} \right] dx \\ &= -\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left(x_p + \frac{w}{2} \right) \ln \left[\left(x_p + \frac{w}{2} \right)^2 + y_p^2 \right] - \left(x_p - \frac{w}{2} \right) \ln \left[\left(x_p - \frac{w}{2} \right)^2 + y_p^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2w + 2y_p \left[\tan^{-1} \left(\frac{x_p + \frac{w}{2}}{y_p} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{x_p - \frac{w}{2}}{y_p} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.53})$$

Dans le cas où le point d'observation se trouve au milieu de la piste, l'équation (III.53) devient :

$$\phi(w) = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} w \left[1 - \ln \left(\frac{w}{2} \right) \right] \quad (\text{III.54})$$

III.1.2. Pistes sans diélectrique

Considérons le problème d'une bande de largeur w représentant une des subdivisions d'une piste comme le montre la figure III.7, pour une densité de charge égale à l'unité :

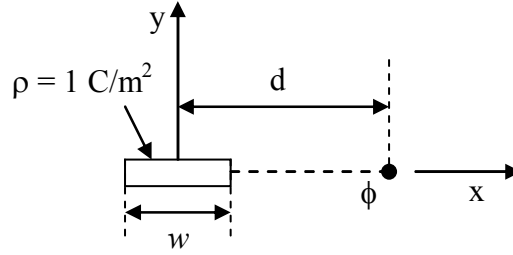


Figure III.7. Configuration pour le calcul du potentiel dû à une distribution constante de charge sur une bande plane.

En utilisant la méthode des moments, C. R. Paul [III.3], montre que le potentiel en un point situé sur la piste est comme suit :

$$\phi(w) = \frac{w}{2\pi\epsilon_0} \left[1 - \ln\left(\frac{w}{2}\right) \right] \quad (\text{III.55})$$

A une distance d de la piste à section rectangulaire, en intégrant l'équation de Laplace par la méthode des moments, le potentiel électrique a pour expression :

$$\phi(w, d) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[w + \left(d - \frac{w}{2}\right) \ln\left(d - \frac{w}{2}\right) - \left(d + \frac{w}{2}\right) \ln\left(d + \frac{w}{2}\right) \right] \quad (\text{III.56})$$

III.1.3. Pistes avec diélectrique

La figure III.8, illustre le cas d'une ligne chargée par une charge q , située entre deux diélectriques, le demi-espace supérieur à la permittivité de l'espace libre ϵ_0 et le demi-espace inférieur à la permittivité $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. Le problème posé est comment calculer le potentiel dans chaque région. La solution peut être obtenue en suivant le trajet des tubes de flux de l'induction électrique Ψ de la charge q portée par la ligne.

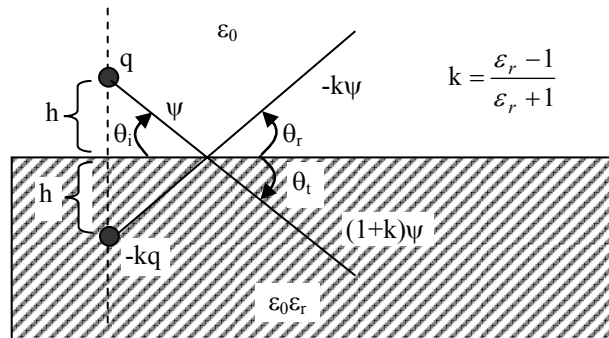


Figure III.8. Charge ponctuelle au dessus d'un diélectrique infini.

La présence du diélectrique, comme deuxième demi milieu va nous conduire vers la notion d'images [III.3].

Considérant un rayon du flux de l'induction électrique incident sur l'interface avec un angle θ_i , une partie de ce flux $(1+k)\Psi$ traverse l'interface alors qu'une autre partie $-k\Psi$ est réfléchi avec un angle θ_r , avec $\theta_i = \theta_r$ (la loi de Snell).

Les conditions aux limites sur l'interface exigent la continuité des composantes normales de l'induction électrique:

$$\Psi \sin \theta_i + k\Psi \sin \theta_r = (1+k)\Psi \sin \theta_i \quad (\text{III.57})$$

De même, les composantes tangentielles du champ électrique doivent être continues à travers l'interface:

$$\frac{1}{\epsilon_0} \Psi \cos \theta_i - \frac{k\Psi}{\epsilon_0} \cos \theta_r = \frac{(1+k)}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Psi \cos \theta_i \quad (\text{III.58})$$

Rappelons que $\theta_i = \theta_r$, ce qui donne :

$$k = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \quad (\text{III.59})$$

$$\alpha = (1+k) = \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} \quad (\text{III.60})$$

$$1 - k^2 = \frac{\alpha^2}{\epsilon_r} \quad (\text{III.61})$$

La méthode des images permet d'affirmer que le potentiel dans le demi espace supérieur est dû à la charge originale q , située à la hauteur h et une charge image $-kq$ placée à une profondeur h de l'interface :

$$\phi^+(x, y) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln[x^2 + (y-h)^2] + \frac{kq}{4\pi\epsilon_0} \ln[x^2 + (y+h)^2] \quad (\text{III.62})$$

Pour un point situé dans le diélectrique et au dessous de l'interface, le potentiel est dû à une charge $(1+k)q$ qui remplace la charge réelle, avec le diélectrique qui remplit tout l'espace :

$$\phi^-(x, y) = -\frac{\alpha q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r} \ln[x^2 + (y-h)^2] \quad (\text{III.63})$$

En utilisant les résultats précédents (avec diélectrique infini), et en considérant les réflexions multiples sur l'interface entre le diélectrique d'épaisseur fini et le plan de masse parfaitement conducteur (figure III.9), C. R. Paul [III.3] montre que le potentiel scalaire, pour un filament de largeur w et portant une charge égale à l'unité, en un point situé au dessus du diélectrique s'exprime comme suit :

$$\phi(d) = -\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \ln[(x+d)^2] dx - \frac{\alpha^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \sum_{n=1}^{\infty} k^{(2n-1)} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \ln[(x+d)^2 + (2nt)^2] dx \quad (\text{III.64})$$

III.2. Coefficients de potentiels des pistes

III.2.1. Cas d'un diélectrique sans plan de masse

En figure III.9, nous représentons deux pistes de surface rectangulaire de largeur w situées à une distance d l'une de l'autre au dessus d'un diélectrique d'épaisseur t .

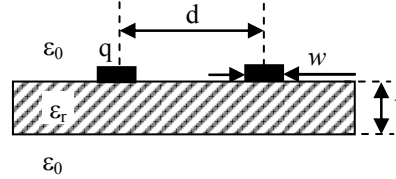


Figure III.9. Illustration d'un circuit imprimé sans plan de masse.

Pour cette configuration, chaque piste est subdivisée en N_i filaments de largeur w_i de sorte que deux filaments d'indice i et j soient séparés par une distance d_{ij} .

Sachant que la relation liant les potentiels aux coefficients de potentiels est de la forme suivante :

$$[\phi] = [P][Q] \quad (\text{III.65})$$

Où :

$[\phi]$: vecteur des potentiels des filaments de la piste,

$[P]$: matrice des coefficients de potentiels,

$[Q]$: vecteur des charges superficielles pour les filaments de la piste.

En utilisant la théorie des images multiples (figure III.10), C. R. Paul [III.3] montre que les coefficients de potentiels propres et mutuels des filaments peuvent s'exprimer comme suit :

$$P(i,i) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\alpha}{\epsilon_r} \left[w_i - w_i \ln\left(\frac{w_i}{2}\right) \right] + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\alpha^2}{\epsilon_r} \sum_{n=1}^{\infty} k^{(2n-1)} \times \left\{ w_i - \frac{w_i}{2} \ln\left[\left(\frac{w_i}{2}\right)^2 + a^2\right] - 2a \tan^{-1}\left(\frac{w_i}{2a}\right) \right\} \quad (\text{III.66})$$

$$\begin{aligned}
P(i,j) = & \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\alpha}{\epsilon_r} \left[w_i + \left(d_{ij} - \frac{w_i}{2} \right) \ln \left(d_{ij} - \frac{w_i}{2} \right) - \left(d_{ij} + \frac{w_i}{2} \right) \ln \left(d_{ij} + \frac{w_i}{2} \right) \right] \right. \\
& + \frac{\alpha^2}{\epsilon_r} \sum_{n=1}^{\infty} k^{(2n-1)} \left\{ w_i + \frac{1}{2} \left(d_{ij} - \frac{w_i}{2} \right) \ln \left[\left(d_{ij} - \frac{w_i}{2} \right)^2 + a^2 \right] - \frac{1}{2} \left(d_{ij} + \frac{w_i}{2} \right) \right. \\
& \times \ln \left[\left(d_{ij} + \frac{w_i}{2} \right)^2 + a^2 \right] + a \left[\tan^{-1} \left(\frac{d_{ij} - \frac{w_i}{2}}{a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{d_{ij} + \frac{w_i}{2}}{a} \right) \right] \left. \right\} \left. \right\} \quad (III.67)
\end{aligned}$$

avec : $a = 2nt$, $k = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}$ et $\alpha = 1 + k$

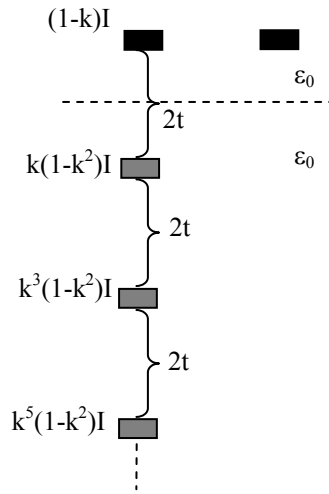


Figure III.10. Illustration du diagramme des images sans plan de masse.

III.2.2. Cas d'un diélectrique avec plan de masse

Soit la configuration en figure III.11 qui présente un circuit imprimé à deux pistes avec plan de masse parfaitement conducteur.

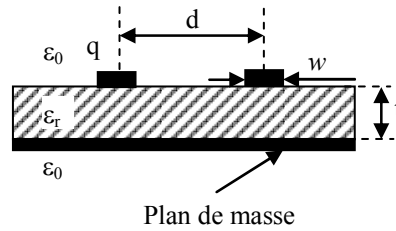


Figure III.11. Illustration d'un circuit imprimé avec plan de masse.

En procédant de la même manière que dans le cas précédent, C. R. Paul [III.3], montre que les coefficients de potentiels propres et mutuels des filaments peuvent s'exprimer comme suit :

$$P(i,i) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\alpha}{\epsilon_r} \left[w_i - w_i \ln \left(\frac{w_i}{2} \right) \right] + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\alpha^2}{\epsilon_r} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n k^{(n-1)} \times \left\{ w_i - \frac{w_i}{2} \ln \left[\left(\frac{w_i}{2} \right)^2 + a^2 \right] - 2\alpha \tan^{-1} \left(\frac{w_i}{2a} \right) \right\} \quad (\text{III.68})$$

$$P(i,j) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\alpha}{\epsilon_r} \left[w_i + \left(d_{ij} - \frac{w_i}{2} \right) \ln \left(d_{ij} - \frac{w_i}{2} \right) - \left(d_{ij} + \frac{w_i}{2} \right) \ln \left(d_{ij} + \frac{w_i}{2} \right) \right] + \frac{\alpha^2}{\epsilon_r} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n k^{(n-1)} \left\{ w_i + \frac{1}{2} \left(d_{ij} - \frac{w_i}{2} \right) \ln \left[\left(d_{ij} - \frac{w_i}{2} \right)^2 + a^2 \right] - \frac{1}{2} \left(d_{ij} + \frac{w_i}{2} \right) \times \ln \left[\left(d_{ij} + \frac{w_i}{2} \right)^2 + a^2 \right] + a \left[\tan^{-1} \left(\frac{d_{ij} - \frac{w_i}{2}}{a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{d_{ij} + \frac{w_i}{2}}{a} \right) \right] \right\} \right\} \quad (\text{III.69})$$

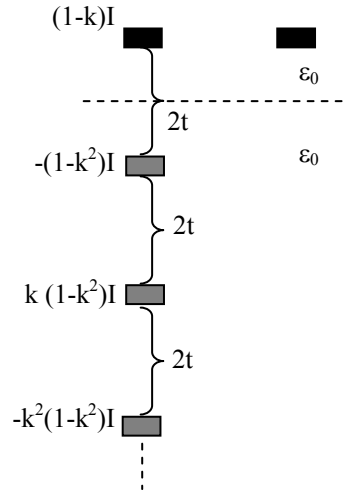


Figure III.12. Illustration du diagramme des images avec plan de masse.

III.3. Calcul des matrices capacité et inductance linéiques [C] et [L] pour un ensemble de pistes parallèles

Pour un système de conducteurs à sections rectangulaires (pistes) parallèles situés au dessus d'un diélectrique avec ou sans plan de masse, après subdivision de chaque piste en Ni filaments, la relation matricielle entre les charges superficielles et les coefficients de potentiels est décrite par le système d'équations suivant :

$$[\phi] = [P] [Q] \quad (\text{III.70})$$

Où :

[ϕ] : vecteur potentiel

[P] : matrice des coefficients de potentiel

[Q] : vecteur des charges distribuées

L'inversion du système d'équations (III.70), donne :

$$[Q] = [P]^{-1} [\phi] = [B] [\phi] \quad (\text{III.71})$$

Ce dernier peut se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{00} & \cdots & B_{0i} & \cdots & B_{0n} \\ B_{10} & \cdots & B_{1i} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{i0} & \cdots & B_{ii} & \cdots & B_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{n0} & \cdots & B_{ni} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_i \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} \quad (\text{III.72})$$

Avec :

n : la taille du système ($n = N_i \times N_p$).

N_p : le nombre des pistes parallèle.

N_i : le nombre des subdivisions de chaque piste.

En résolvant l'équation de Laplace en potentiel électrique ϕ par la méthode numérique dite point-matching (la fonction ϕ est développée sur des bases impulsionnelles), C. R. Paul [III.3] déduit la matrice des coefficients de potentiels $[P]$. Cette dernière permet la détermination de la matrice des coefficients de capacité généralisée $[c]$ pour l'ensemble des pistes, dont le terme général est le suivant [III.3] :

$$c_{ij} = w_{i1} \sum_{\text{ligne1}} B_{ij} + w_{i2} \sum_{\text{ligne2}} B_{ij} + \dots + w_{iN_i} \sum_{\text{ligne}N_i} B_{ij} \quad (\text{III.73})$$

Où : le w_{ik} est la largeur de la $k^{\text{ième}}$ subdivision du $i^{\text{ième}}$ conducteur.

Si quel que soit i et k , $w_{ik} = wd$

alors :

$$c_{ij} = wd \sum B_{ij} \quad (\text{III.74})$$

Après quelques manipulations relatives aux ddp entre les pistes, les éléments de la matrice capacité linéique pour l'ensemble des pistes (sans plan de masse), sont données par l'expression suivante [III.3] :

$$C_{ij} = c_{ij} - \frac{\left(\sum_{k=0}^n c_{ik} \right) \left(\sum_{m=0}^n c_{mj} \right)}{\sum c} \quad (\text{III.75})$$

$\sum_{k=0}^n c_{ik}$: la somme de tous les éléments de la $i^{\text{ième}}$ ligne de la matrice $[c]$,

$\sum_{m=0}^n c_{mj}$: la somme de tous les éléments dans la $j^{\text{ième}}$ colonne de $[c]$.

$\sum c$: la somme de tous les éléments de la matrice $[c]$.

A partir de la matrice des capacités linéiques dans l'espace libre $[C_0]$, obtenue en remplaçant le diélectrique par l'air ($\epsilon_0 = \epsilon_r$), et en utilisant la relation (III.76) :

$$[L][C_0] = \mu_0 \varepsilon_0 [1_n] \quad (\text{III.76})$$

nous pouvons déduire la matrice inductance linéique $[L]$ par (III.77) :

$$[L] = \mu_0 \varepsilon_0 [C_0]^{-1} \quad (\text{III.77})$$

où :

$[1_n]$: matrice identité d'ordre n .

$[C_0]$: matrice capacité linéique quand toute la matière diélectrique est remplacée par l'espace libre ($\varepsilon_r = 1$).

Remarque : En présence d'un plan de masse parfaitement conducteur, la matrice des coefficients de capacités généralisés est utilisée directement.

IV. Prise en compte des composants localisés du convertisseur

Dans le cas général, un convertisseur comporte une charge résistive, capacitive ou inductive, il contient aussi des interrupteurs à fonctionnements non linéaires tel qu'une diode ou un transistor. Dans ce paragraphe, nous donnons des expressions explicites pour la prise en compte de ces différents composants par FDTD [III.17]-[III.18].

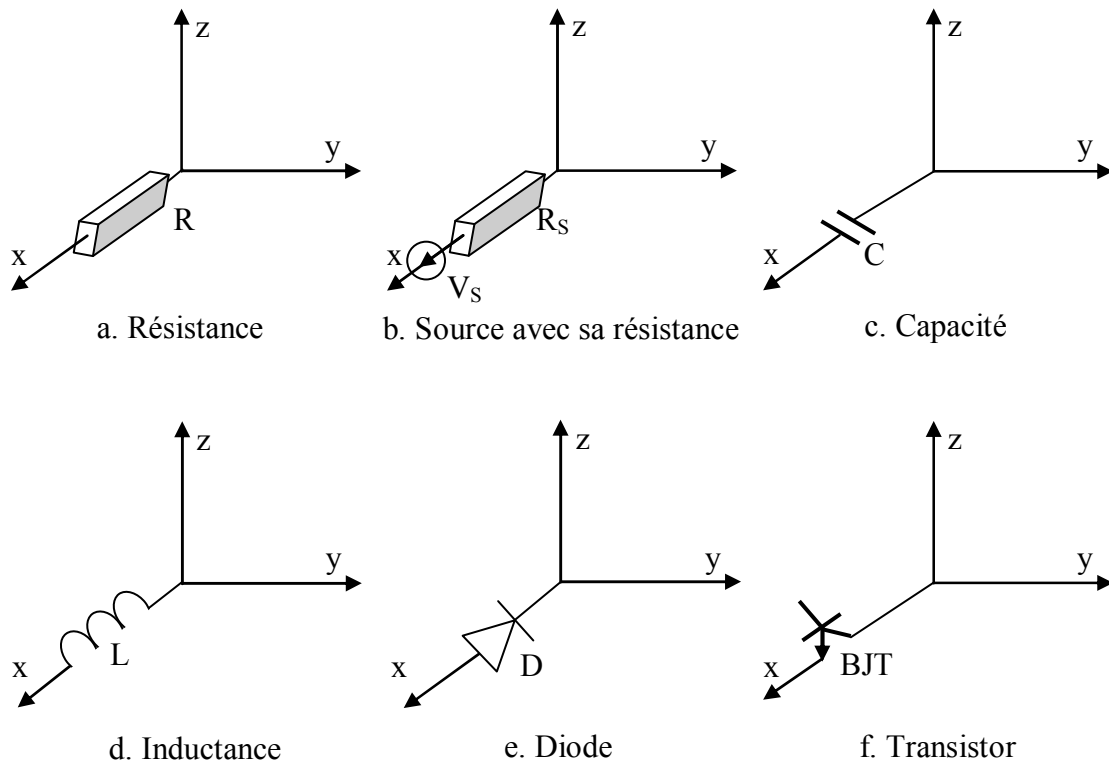


Figure III.13. Éléments localisés orientés suivant l'axe des x .

IV.1. Cas d'une charge résistive

Lorsque un convertisseur comporte une résistance, l'application de la loi d'Ohm nous donne :

$$I^{n-1/2}(i, j, k) = \frac{1}{2R} [u^n(i, j, k) + u^{n-1}(i, j, k)] \quad (\text{III.78})$$

avec :

R : la valeur de la résistance,

IV.2. Source de tension avec sa résistance interne

Pour une source de tension u_S avec sa résistance interne R_S , l'équation qui relie le courant et la tension est donnée par :

$$I^{n-1/2}(i, j, k) = \frac{1}{2R_S} [u^n(i, j, k) + u^{n-1}(i, j, k)] + \frac{u_S^{n-1}}{R_S} \quad (\text{III.79})$$

IV.3. Prise en compte d'un condensateur

En considérant maintenant un condensateur (figure III.13), l'équation exprimée par FDTD qui relie le courant et la tension et qui caractérise son comportement est donnée comme suit :

$$I^{n-1/2}(i, j, k) = \frac{C}{\Delta t} [u^n(i, j, k) - u^{n-1}(i, j, k)] \quad (\text{III.80})$$

IV.4. Prise en compte d'une inductance

Pour une inductance dans l'espace libre (figure III.13), l'équation qui relie le courant et la tension est exprimée par :

$$u^n(i, j, k) = \frac{L}{dt} [I^{n+1/2}(i, j, k) - I^{n-1/2}(i, j, k)] \quad (\text{III.81})$$

IV.5. Diode à fonctionnement non linéaire

L'expression du courant de conduction traversant une diode est donnée par [III.17] :

$$I_d = I_0 [\exp(qV_d / kT) - 1] = I_0 [\exp(V_d / V_T) - 1] \quad (\text{III.82})$$

avec :

q : la charge de l'électron ($1.6 \times 10^{-19} \text{C}$)

I_0 : le courant inverse de saturation ($10^{-08} \sim 10^{-16}$)

V_d : la tension aux bornes de la diode

k : la constante de Boltzmann ($1.38 \times 10^{-23} \text{J/K}$)

T : la température en degré Kelvin.

Par FDTD, l'équation (III.82) est discrétisée comme suit :

$$I^{n-1/2}(i, j, k) = I_0 [\exp((u^n(i, j, k) + u^{n-1}(i, j, k)) / V_T) - 1] \quad (\text{III.83})$$

IV.6. Fonctionnement réel des interrupteurs : prise en compte des non linéarités

Soit un convertisseur dont l'interrupteur est un transistor bipolaire à émetteur commun (figure III.14) commandé par un signal en créneau.

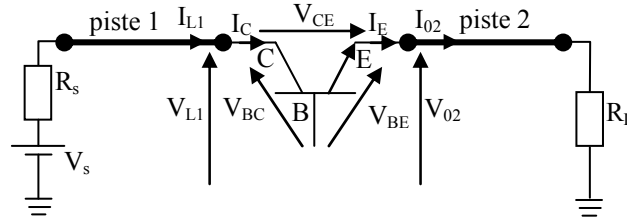


Figure III.14. Schéma électrique du convertisseur.

Le modèle de Ebers-Moll [III.17] qui résulte de la superposition des modes F (Forward) et R (Reverse) est régi par les équations suivantes :

$$I_E = \alpha_R I_R - I_F \quad (\text{III.84})$$

$$I_C = I_R - \alpha_F I_F \quad (\text{III.85})$$

avec :

$$I_R = I_0 \left(e^{(V_{BC}/V_T)} - 1 \right), \quad I_F = I_0 \left(e^{(V_{BE}/V_T)} - 1 \right) \quad \text{et} \quad V_T = q/kT \quad (\text{III.86})$$

Où :

I_E indique le courant de l'émetteur et I_C celui du collecteur.

q : la charge de l'électron ;

k : la constante de Boltzmann ;

T : la température en degré Kelvin ;

I_0 : le courant de saturation ;

α_R et α_F : gains en courant en mode R et en mode F respectivement.

Nous avons précédemment proposé de calculer la répartition des courants en résolvant un système d'équations non linéaires (paragraphe II.4). Dans notre cas, sur les nœuds 1 et 2 (figure III.14) l'application de la loi de Kirchhoff nous conduit à une équation non linéaire.

Nous avons:

$$I_{L1} = I_C \quad (\text{III.87})$$

$$I_{02} = I_E \quad (\text{III.88})$$

avec :

$$V_{BC} = V_{BE} - V_{CE} \quad \text{et} \quad V_{CE} = V_{L1} - V_{02} \quad (\text{III.89})$$

A partir de (III.84) et (III.85) et en considérant les relations données par (III.87), (III.88) et (III.89), nous construisons un système non linéaire (III.90) sous la forme :

$$f([X]) = [A][X] - g([X]) = [0] \quad (\text{III.90})$$

Où : $g([x])$ comporte les tensions inconnues aux nœuds 1 et 2 respectivement V_{L1} et V_{02} (figure III.14), ce qui traduit la non linéarité du système.

$$[g([X])] = \begin{bmatrix} \vdots \\ I_0 \left(\alpha_F \left(\exp\left(\frac{V_{BE}}{V_T}\right) - 1 \right) - \exp\left(\frac{V_{BE} + V_{02} - V_{L1}}{V_T}\right) - 1 \right) \\ I_0 \left(\left(\exp\left(\frac{V_{BE}}{V_T}\right) - 1 \right) - \alpha_R \left(\exp\left(\frac{V_{BE} + V_{02} - V_{L1}}{V_T}\right) - 1 \right) \right) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (III.91)$$

V. Références bibliographiques

- [III.1] S. A. Schelkunoff, « Electromagnetic Waves », D. Van Nostrand Inc. 1956.
- [III.2] M. A. Uman, D. K. McCain, and E. P. Krider, « The Electromagnetic Radiation from a Finite Antenna », Am. J. Phys, Vol. 43, pp33-38, 1975.
- [III.3] C. R. Paul, « Analysis of Multiconductor Transmission Lines », Wiley series in microwave and optical engineering », ISBN 0-471-02080-X, New York, 1994.
- [III.4] M. Aguet, J. J. Morf, « Energie Electrique », Traité d'électricité, vol. XII, ISBN 2-8807-052-5, 1990.
- [III.5] A. Orlandi, C. R. Paul, « FDTD Analysis of Lossy, Multiconductor Transmission Lines Terminated in Arbitrary Loads », IEEE trans. On Electromagnetic Compatibility, Vol. 38, N° 3, pp. 388-399, Aug. 1996.
- [III.6] R. Djordjevic, K. Sarkar, R. F. Harrington, « Time-domain Response of Multiconductor Transmission Lines », Proceeding of the IEEE, Vol.75, N° 6, pp.743-761, June 1987.
- [III.7] J. A. Roden, C. R. Paul, W. T. Smith, and S. D. Gedney, « Finite-Difference, Time-Domain Analysis of Lossy Transmission Lines », IEEE Trans. On Electromagnetic Compatibility, Vol. 38, No. 1, pp. , Feb. 1996.
- [III.8] S. Kaouche, « Analyse de Défaut dans un Réseau de Lignes ou de Cables », Thèse de Doctorat en Sciences, Université de Jijel, Juin 2007.
- [III.9] Wheeler H. A., « Transmission lines properties of parallel strips separated by a dielectric sheet », IEEE Tans. On Microwave Theory and Technique, MTT-13, pp. 172-185, 1965.
- [III.10] Kaupp H. R., « Characteristics of Microstrip Transmission Lines », IEEE Trans. on Computer. EC-16, pp. 185-193, 1967.
- [III.11] Garg R., Bahl I. J. « Characteristics of Coupled Microstrip », IEEE Tans. On Microwave Theory and Technique, MTT-23, pp. 700-705, 1979.
- [III.12] Gupta K. C., Garg R., Bahl I. J., « Microstrip Lines and Slotlines », Artech House, Dedham, 1979.
- [III.13] E. D. Sunde, « Earth Conduction Effects in Transmission Systems », Dover publications, New York, 1968.
- [III.14] C. Gary, « Approche Complète de la Propagation Multifilaire en Haute Fréquence par Utilisation des Matrices Complexes », EDF Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série B N° ¾, pp. 5-20, 1976.
- [III.15] P. Degauque, J. Hamelin, « Compatibilité Electromagnétisme, Bruit et Perturbations radioélectriques », BORDAS et C.N.E.T.-E.N.S.T, ISBN 2-04-018807-X, Dunod, Paris, 1990.

- [III.16] J. C. Sabonadière et J. L. Coulomb, « Eléments Finis et CAO », Traité de Nouvelles Technologies, Edition Hermès 1986.
- [III.17] M. Piket-May, A. Taflove, J. Baron, « FD-TD Modelling of Digital Signal Propagation in 3D Circuits with Passive and Active Loads », IEEE trans. On microwave and techniques, Vol. 42, No. 8, pp. 1514-1523, Aug. 1994.
- [III.18] W. Sui, D. A. Christensen, and C. H. Durney, « Extending the Two-Dimensional FDTD Method to Hybrid Electromagnetic Systems with Active and Passive Lumped Elements », IEEE trans. On microwave and techniques, Vol. 40, No. 4, pp. 724-730, April 1992.

Chapitre IV

Applications

Introduction

Dans les chapitres II et III, nous avons présenté deux concepts de modélisation du rayonnement électromagnétique émis par les convertisseurs de l'électronique de puissance. Le premier formalisme que nous avons exposé consiste en la résolution directement en domaine temporel des équations de Maxwell en 3D par FDTD. Le deuxième, l'approche que nous proposons passe d'abord par le calcul de la répartition des courants en utilisant un formalisme topologique élaboré à partir de la théorie des lignes de transmissions, puis le calcul du champ électromagnétique analytiquement (dipôles Hertiens [IV.1] et/ou le modèle de Schelkunoff [IV.2]).

Afin de valider et confronter ces deux approches, nous consacrons ce chapitre à quelques applications.

En premier, nous commençons par valider l'approche fréquentielle que nous proposons par confrontation des résultats que nous obtenons à partir de nos propres développements et ceux que nous réalisons avec les logiciels NEC4 [IV.3] et FEKO [IV.4].

En domaine temporel, nous proposons une confrontation des résultats que nous obtenons successivement par résolution des équations de Maxwell par FDTD, et par l'approche temporel que nous proposons et qui consiste au calcul des courants transitoires par FDTD puis le calcul du champ électromagnétique par la méthode des dipôles Hertiens.

Nous complétons ces applications par une analyse paramétrique qui concernera :

- la présence ou non du plan de masse,
- le temps de montée du signal source,
-

I. Analyse dans le domaine fréquentiel

I.1. Validation

Le but de cette application est de valider le concept théorique fréquentiel que nous avons proposé dans le chapitre III. Nous calculons le champ électromagnétique rayonné par une boucle rectangulaire située dans un espace libre (figure IV.1). Nos résultats de calcul seront confrontés à ceux obtenus avec le logiciel MININEC [IV.5] utilisant le formalisme des antennes [IV.6].

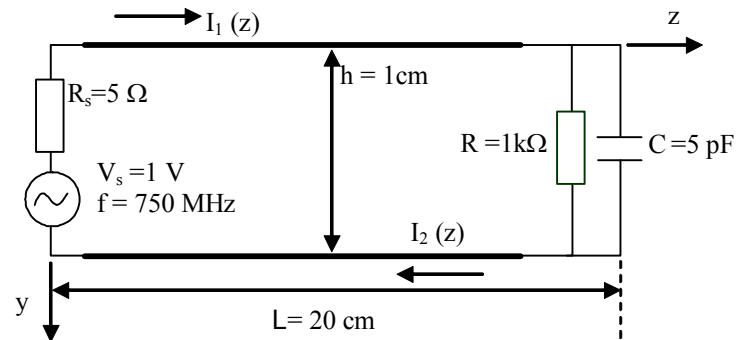


Figure IV.1. Schéma électrique de la boucle étudiée.

La modélisation par l'approche fréquentielle que nous proposons, passe en premier par la détermination des courants en utilisant le formalisme par matrice $[\Phi]$, puis le calcul du champ électromagnétique par :

- La méthode des dipôles Hertiens;
- Une méthode mixte, dans laquelle nous utilisons le modèle de Schelkunoff pour les structures longues orientées suivant l'axe des z (avec propagation) et la méthode des dipôles Hertiens pour les structures courtes orientées suivant l'axe des y (sans propagation).

I.1.1. Calcul en zone proche

Le tableau IV.1 illustre les résultats du champ électrique et du champ magnétique.

	H_x (dB μ A/m)	E_y (dB μ V/m)	E_z (dB μ V/m)
dipoles Hertiens	23.4620	78.1689	64.0136
Schelkunoff + dipoles Hertiens	23.5449	78.2178	63.3951
MININEC	24.3000	79.0000	63.4000

Tableau IV.1. Champs électrique et magnétique en zone proche [IV.7].

Pour ces résultats (tableau IV.1), les coordonnées du point de calcul sont :
 $x = 0$ m, $y = 0.1$ m et $z = 0$ m.

I.1.2. Calcul en zone éloignée

Le tableau IV.2 donne les résultats du champ électrique et du champ magnétique.

	H_x (dB μ A/m)	E_y (dB μ V/m)	E_z (dB μ V/m)
dipôles Hertiens	-4.7145	40.4218	47.2087
Schelkunoff + dipôles Hertiens	-4.6221	40.4027	47.2965
MININEC	-4.5000	41.2000	47.4000

Tableau IV.2. Champs électrique et magnétique en zone éloignée [IV.7].

Pour ces résultats (tableau IV.2), les coordonnées du point de calcul sont : $x = 0$ m, $y = 1$ m et $z = 0$ m.

Les tableaux IV.1 et IV.2, montrent bien que le calcul analytique du champ électromagnétique par les méthodes des dipôles et/ou de Schelkunoff conduit à des résultats similaires que pour une modélisation numérique réalisée avec MININEC (résolution d'une équation intégrale par la méthode numérique dite des moments).

I.2. Etude du rayonnement en fonction de la fréquence

Nous proposons dans cette application une comparaison de nos résultats de calcul avec ceux issus de la simulation avec les logiciels NEC-4 [IV.3] et FEKO [IV.4]; ces deux logiciels utilisent le formalisme des antennes [IV.6]. Les différents paramètres utilisés dans cette application sont donnés en figure IV.2. Nous réalisons un calcul pour un point champ situé au milieu de la boucle et à 10 cm de hauteur.

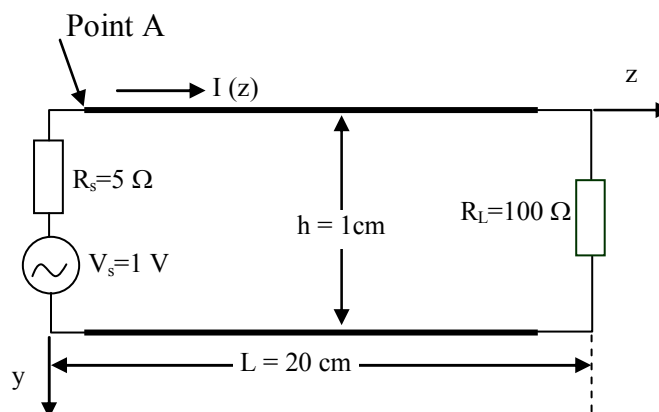


Figure IV.2. Schéma électrique du circuit utilisé pour la simulation.

La variation du courant en fonction de la fréquence figure IV.3, par les deux concepts, met en évidence la présence d'une fréquence de résonance ; le courant passe donc par un maximum au voisinage de 750 MHz.

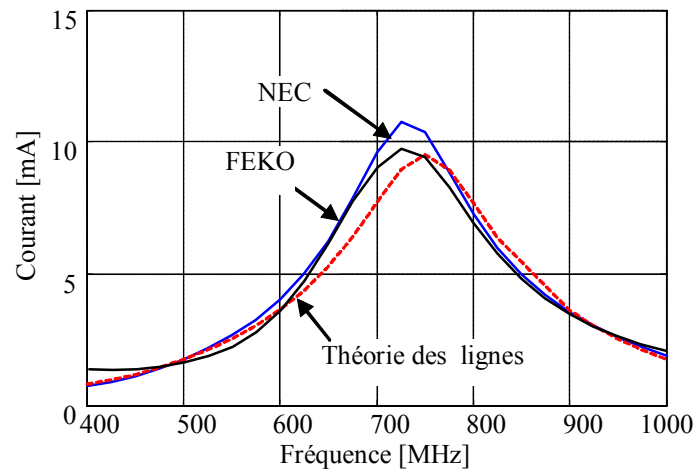


Figure IV.3. Courant à l'entrée de la piste (point A).

Les résultats de comparaison des champs électrique et magnétique sont illustrés en figures IV.4 et IV.5 respectivement.

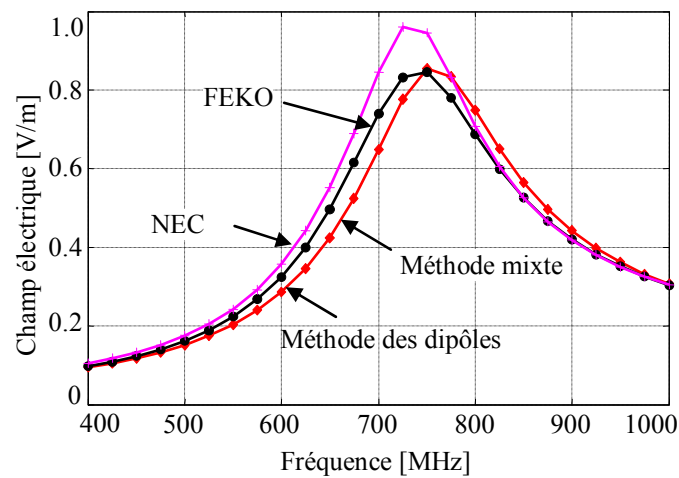


Figure IV.4. Champ électrique émis par la boucle rectangulaire en fonction de la fréquence.

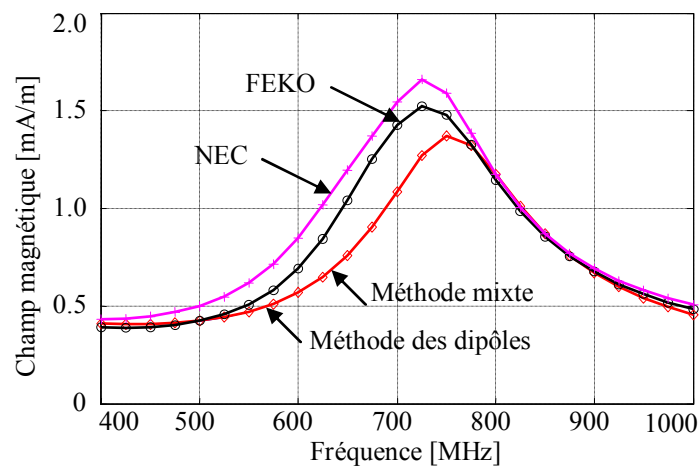


Figure IV.5. Champ magnétique émis par la boucle rectangulaire en fonction de la fréquence.

En premier, nous notons que les deux logiciels FEKO [IV.4] et NEC4 [IV.3], qui utilisent le même formalisme, ne conduisent pas exactement aux mêmes résultats ; en effet l'intégration numérique par la méthode de Galerkin [IV.6] utilise des fonctions poids, qui entraîne une différence sur le résultat final selon le choix et le degré d'approximation de ces dernières.

Nos résultats de calcul (réalisés avec nos propres développements) coïncident avec ceux que nous obtenons avec les deux logiciels aussi bien aux basses qu'aux hautes fréquences. Une différence apparaît autour de la fréquence de résonance.

II. Analyse dans le domaine temporel

Dans cette analyse du rayonnement électromagnétique des convertisseurs de l'électronique de puissance, nous proposons quelques résultats de simulations que nous réalisons directement en domaine temporel :

- par résolution des équations de Maxwell par FDTD (chapitre II),
- par la méthode des dipôles, après calcul de la répartition des courants (chapitre III).
- en domaine fréquentiel avec le logiciel FEKO [IV.4] plus une transformation dans le domaine temporel par utilisation de la FFT.

Dans le cas d'un interrupteur linéaire, nous fondons notre analyse sur quelques paramètres qui sont :

- le temps de montée du signal source,
- la résistance de la charge,
- la présence ou non du plan de masse.

Afin de compléter cette analyse, nous traiterons directement en domaine temporel le cas avec un interrupteur non linéaire (transistor commandé à fonctionnement non linéaire ou une

diode). Nous confronterons les résultats par résolution directe des équations de Maxwell [IV.8] à ceux que nous réalisons en deux étapes (calcul de la répartition des courants par FDTD, puis calcul du champ électromagnétique par le modèle des dipôles).

II.1. Cas de l'interrupteur parfait

Le circuit analysé est celui que nous présentons en figure IV.6 dans deux cas distincts (avec ou sans plan de masse).

Dans le cas d'un interrupteur parfait, la prise en compte de la fermeture de ce dernier est réalisée en appliquant à $t = 0$ un signal source de type rampe (figure IV.7).

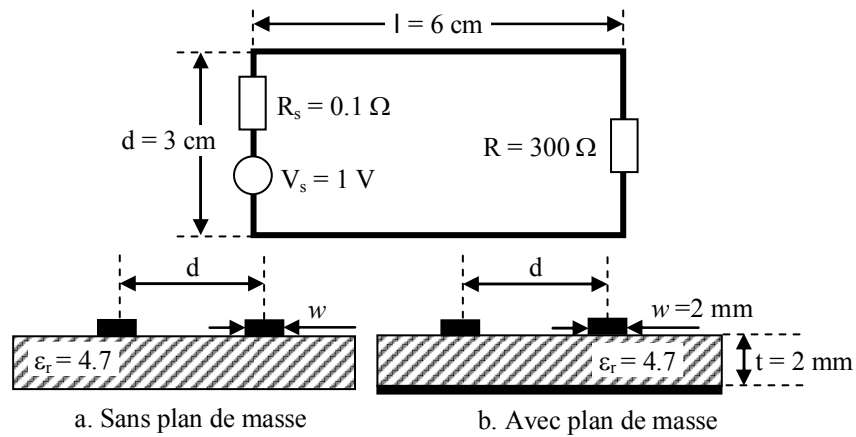


Figure IV.6. Configuration de base des circuits utilisés pour la simulation.

Le champ électromagnétique est calculé au milieu du circuit (figure IV.6) sans plan de masse (a) et à 5 cm de hauteur.

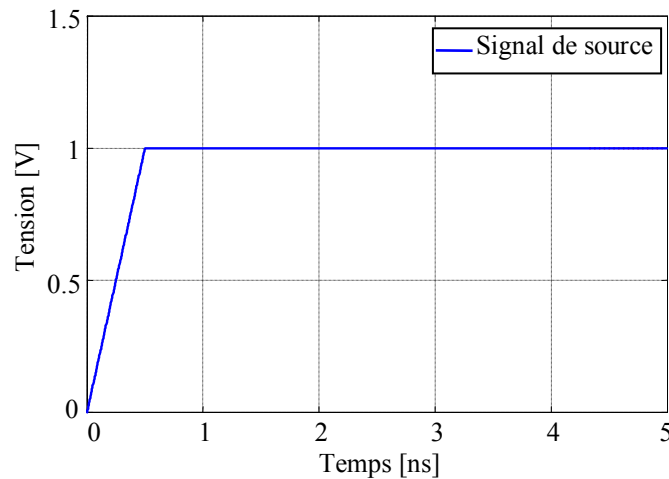


Figure IV.7. Variation temporelle du signal source.

II.1.1. Circuit sans plan de masse

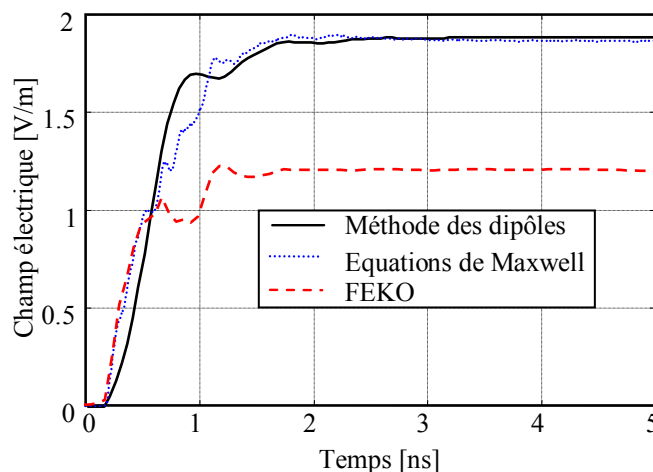


Figure IV.8. Champ électrique émis par le circuit sans plan de masse.

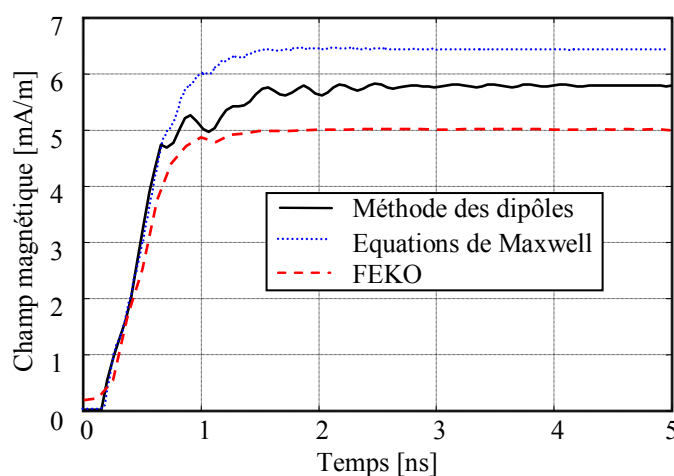


Figure IV.9. Champ magnétique émis par le circuit sans plan de masse.

Les deux approches directement en domaine temporel (nos développements) conduisent à des résultats comparables tant en allure qu'en amplitude (figures IV.8 et IV.9). Si l'allure générale est conservée dans le cas du calcul en domaine fréquentiel par FEKO [IV.4], puis utilisation de la FFT pour passer dans le domaine temporel, nous constatons quand même une perte en amplitude ; ce résultat est prévisible, car l'utilisation de la FFT pour le passage temp-fréquence et inversement nécessite la prise en compte de précautions très particulières (fréquence d'échantillonnage, nombre de points suffisants, suite décroissante, ...), qui dans le cas contraire peuvent sérieusement altérer les résultats.

Les légères différences qui apparaissent sur les résultats que nous obtenons par nos propres développements trouvent leurs origines dans la discrétisation spatio-temporelle par FDTD ainsi que l'application du principe de superposition dans le cas de l'utilisation du formalisme des dipôles Hertiens [IV.7] qui peut occasionner des erreurs liées à la discrétisation spatiale.

II.1.2. Circuit avec plan de masse

Pour cette application, nous considérons la configuration géométrique en figure IV.6 avec plan de masse (b) pour le même point de calcul pour le champ électromagnétique.

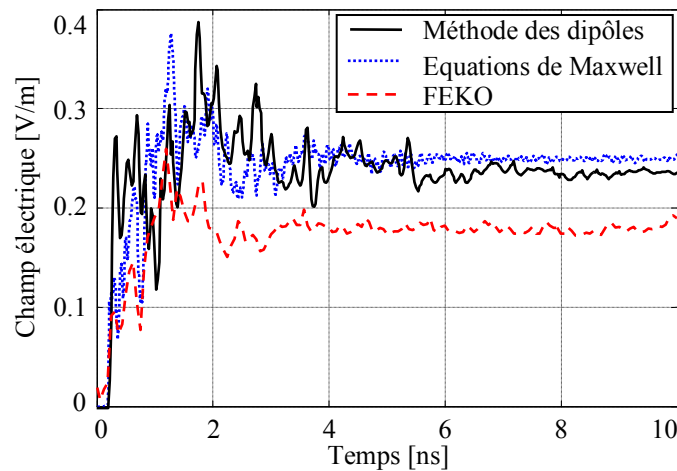


Figure IV.10. Champ électrique émis par le circuit avec plan de masse.

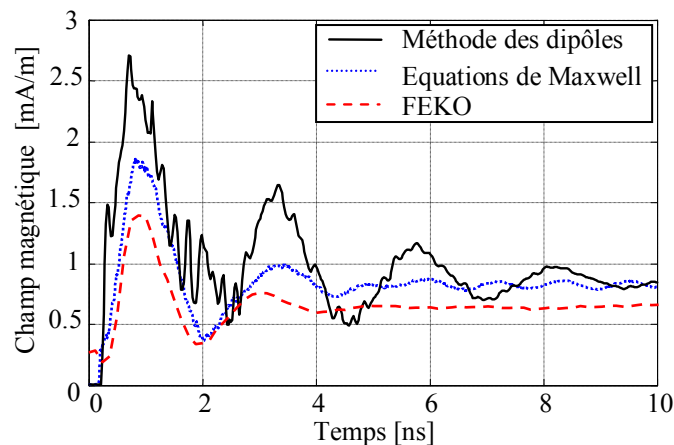


Figure IV.11. Champ magnétique émis par le circuit avec plan de masse.

L'introduction du plan de masse met en évidence, la nette différence entre les trois formalismes. En effet, la prise en compte du plan de masse est réalisée par :

- prise en compte des conditions de passage sur les composantes du champ électromagnétique sur l'interface diélectrique-plan de masse, lors de la résolution des équations de Maxwell par FDTD [IV.9], par la méthode des images multiples pour la méthode des dipôles et par le terme de Sommerfeld pour le formalisme des antennes.

La différence entre les calculs réalisés directement en domaine temporel et l'utilisation du logiciel FEKO peuvent se justifier par l'utilisation de la transformée de Fourier. Pour le champ magnétique nous constatons une légère différence entre les deux méthodes temporelles; cette différence montre bien que la méthode des images multiples s'adapte surtout pour le calcul du champ électrique dans le cas où nous avons un plan de masse parfaitement conducteur.

II.1.3. Etude paramétrique

Pour l'étude paramétrique, nous considérons pour l'ensemble de nos applications la configuration de base du circuit illustrée en figure IV.12.

Le point de calcul de champ électromagnétique est situé au centre de la boucle et à 5 cm de hauteur.

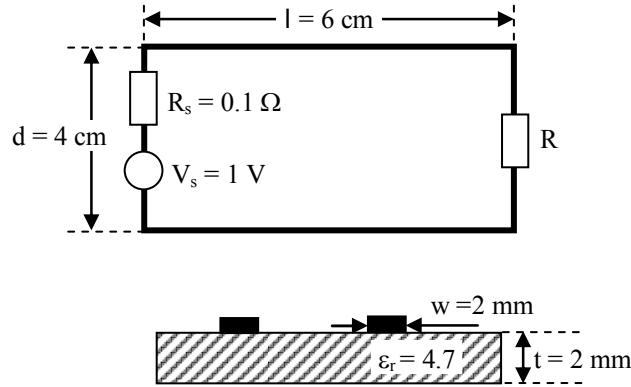


Figure IV.12. Configuration de base du circuit utilisé pour la simulation.

II.1.3.1. Effet du temps de montée du signal d'alimentation

On se propose de regarder, pour le même circuit, l'effet du temps de montée du signal source sur le champ électromagnétique émis.

En effet, le contenu spectral du signal source est fortement lié au temps de montée, ce qui normalement doit se remarquer sur les champs électrique et magnétique en considérant les équations de Maxwell.

En prenant respectivement 0.5 ns, 1 ns et 2 ns, pour le temps de montée du signal d'alimentation, nous traçons la tension aux bornes de la charge (figure IV.13) ainsi que le champ électrique (figure IV.14) et le champ magnétique (figure IV.15) que nous obtenons par résolution directe des équations de Maxwell 3D par FDTD [IV.9].

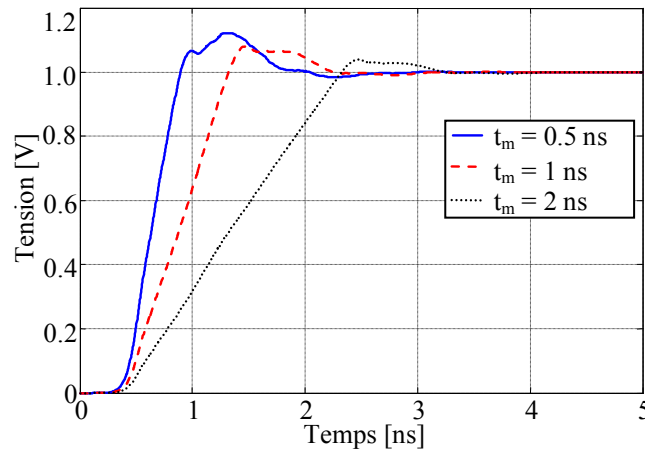


Figure IV.13. Tension aux bornes de la charge R.

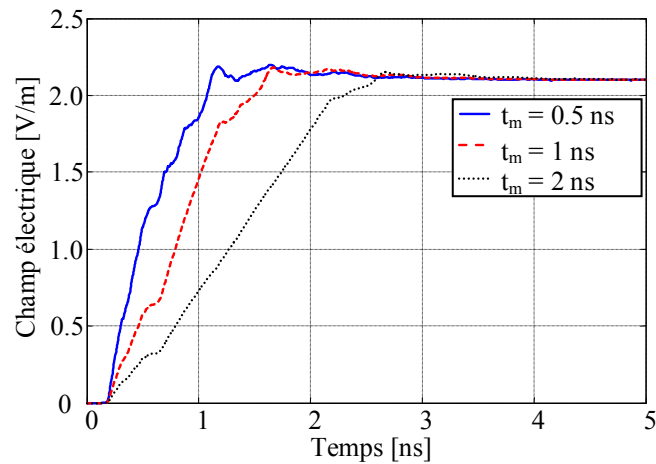


Figure IV.14. Champ électrique au centre du circuit et à 5 cm de hauteur.

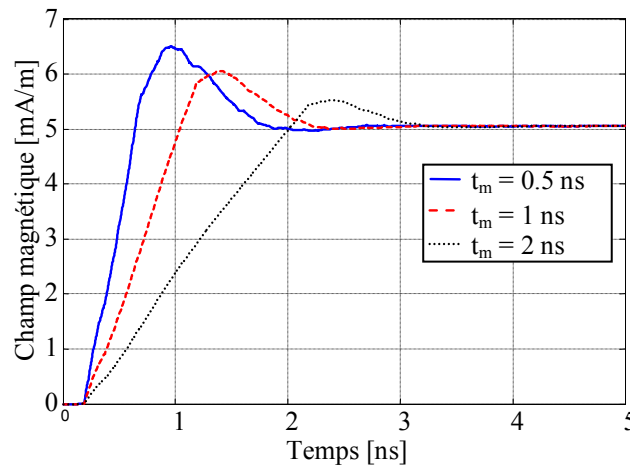


Figure IV.15. Champ magnétique au centre du circuit et à 5 cm de hauteur.

Ces résultats mettent bien en évidence l'effet du temps de montée. En effet plus la fermeture est rapide plus le signal est riche en fréquences hautes et entraîne une amplitude plus importante en émission électromagnétique. Nous constatons que le champ magnétique est plus sensible à l'effet du temps de montée.

II.1.3.2. Effet de la charge

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'effet de la charge. Une variation de la charge est à l'origine de la variation du courant traversant les pistes.

La figure IV.16 illustre la variation de la tension aux bornes de la charge ; nous présentons en figures IV.17 et IV.18 les résultats du champ électrique et du champ magnétique respectivement.

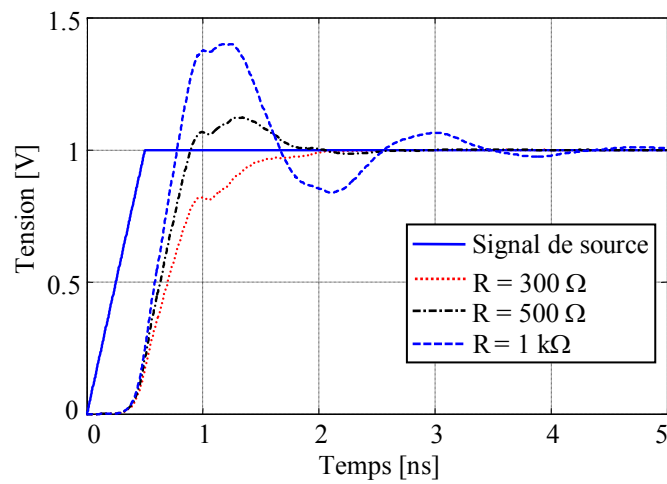


Figure IV.16. Tension aux bornes de la charge R.

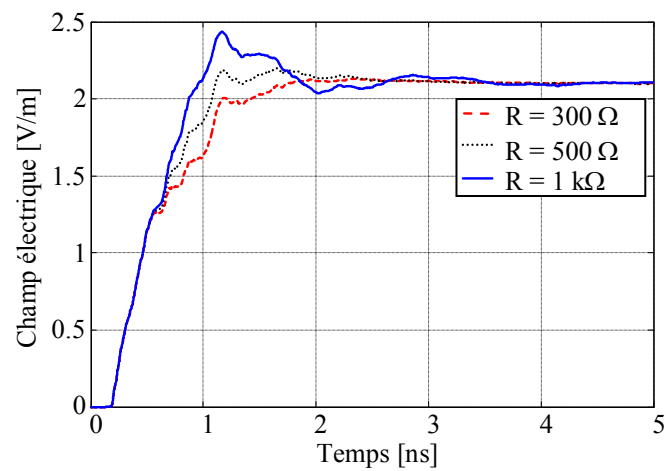


Figure IV.17. Champ électrique émis par le circuit.

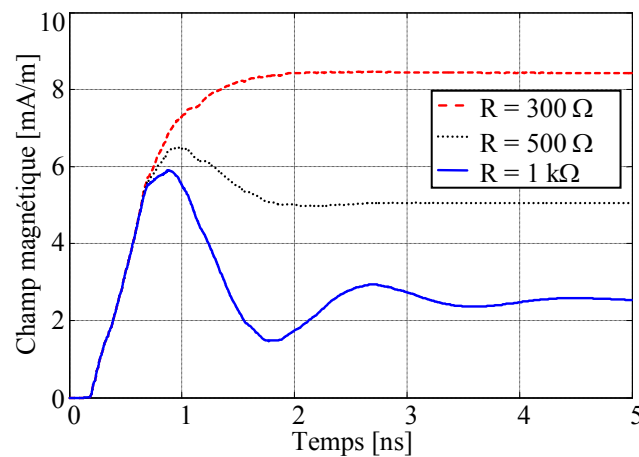


Figure IV.18. Champ magnétique émis par le circuit.

La résistance de charge la plus importante conduit à un courant moindre, qui se constate sur les amplitudes du champ électromagnétique émis.

II.1.3.3. Effet du diélectrique

Pour montrer l'impact du diélectrique sur l'émission électromagnétique des convertisseurs, nous évaluons le rayonnement de ces derniers pour différentes valeurs de la permittivité relative du diélectrique.

Nous gardons la même configuration (figure IV.12), et nous calculons les champs électrique et magnétique au centre du circuit et à 5 cm de hauteur.

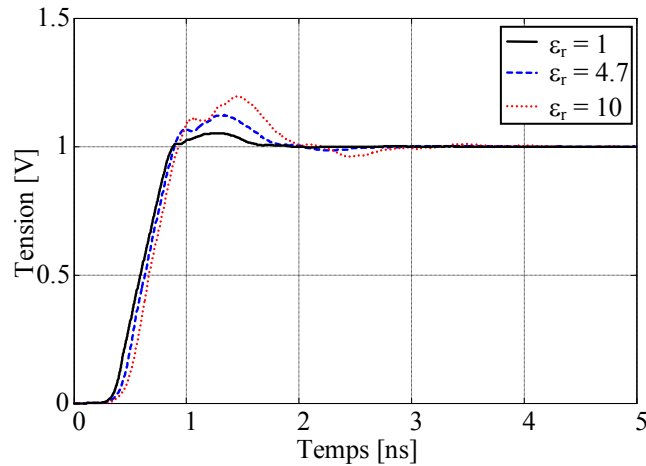


Figure IV.19. Tensions aux bornes de la charge R.

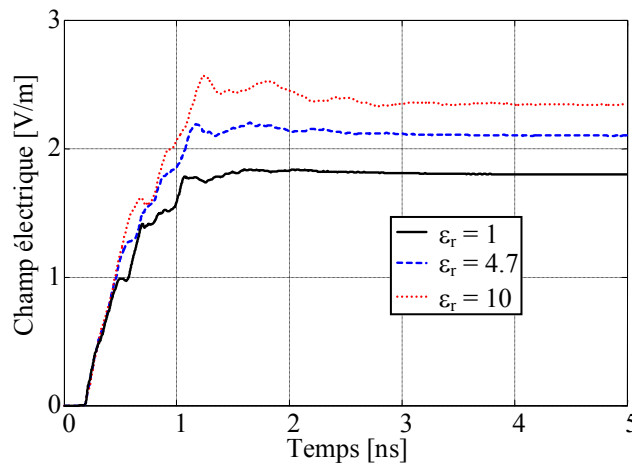


Figure IV.20. Champ électrique émis par le circuit.

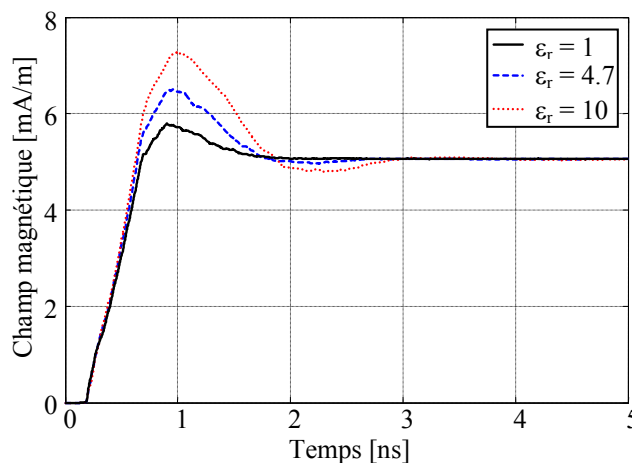


Figure IV.21. Champ magnétique émis par le circuit.

L'analyse des résultats en figures IV.19 à IV.21 montre que la présence de la matière diélectrique a un effet remarquable sur le rayonnement électromagnétique. Le changement de la matière diélectrique (ϵ_r) induit un changement sur les capacités linéiques des pistes, qui se manifeste par un changement d'amplitude du champ électrique sur toute la plage de fréquence (figure IV.20); le champ magnétique est uniquement affecté à des fréquences intermédiaires (figure IV.21). Aux hautes fréquences, l'influence du diélectrique sur le champ électromagnétique se justifie par l'équation de Maxwell-ampère qui fait intervenir les courants de déplacements dans ce cas. Aux basses fréquences le champ électromagnétique est découplé, ce qui se traduit par un effet uniquement du diélectrique sur le champ électrique (figure IV.20).

II.2. Convertisseur avec interrupteur à fonctionnement non linéaire (hacheur série)

Nous nous intéressons dans cette application à l'étude du rayonnement d'un convertisseur réel (Hacheur série) avec plan de masse parfaitement conducteur (figure IV.22). Les différents paramètres physiques et géométriques du convertisseur sont donnés en figure IV.22.

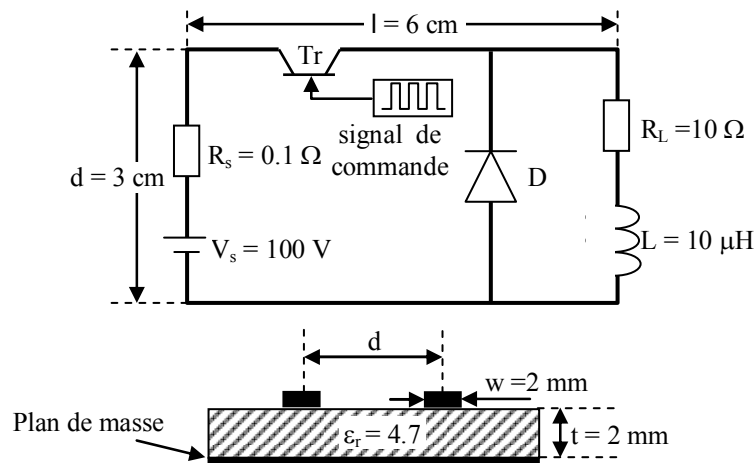


Figure IV.22. Schéma électrique d'un hacheur série (avec plan de masse).

L'interrupteur est un transistor bipolaire à émetteur commun commandé par un signal en créneau. Pour la représentation mathématique de son fonctionnement, nous utilisons le modèle de Ebers-Moll [IV.11] qui résulte de la superposition des modes F (Forward) et R (Reverse) et qui est régi par les équations (III.86).

Pour les paramètres du transistor utilisé $\alpha_f = 0.99$, $\alpha_r = 0.5$ et $I_0 = 10^{-16}\text{ A}$, la figure IV.23 illustre la variation de la tension aux bornes de la charge V_{R-L} , ainsi que le signal aux bornes de la jonction BE du transistor V_{BE} utilisé comme un signal de commande.

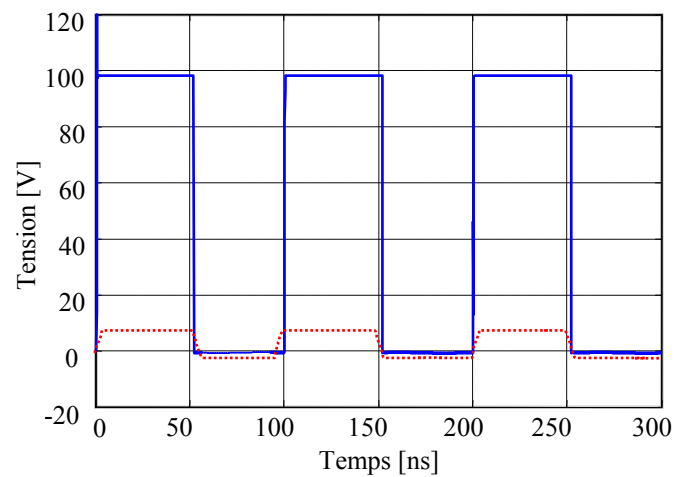


Figure IV.23. Tension aux bornes de la charge (Hacheur série avec plan de masse).

Pour un point d'observation situé au milieu du convertisseur et à 5 cm de hauteur, les figures IV.24 et IV.25 montrent respectivement les variations des champs électrique et magnétique [IV.7].

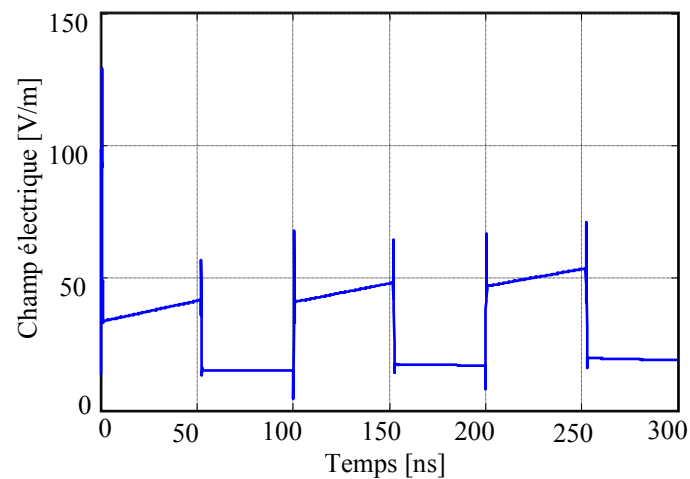


Figure IV.24. Champ électrique émis par le hacheur [IV.7].

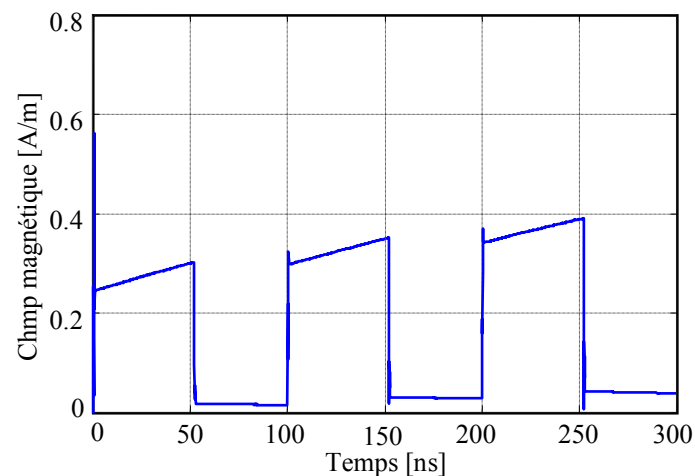


Figure IV.25. Champ magnétique émis par le hacheur [IV.7].

Les résultats en figures IV.24 et IV.25 mettent en évidence la présence d'oscillations aux instants de commutations. Nous notons par ailleurs, que le champ magnétique dans ce cas ne s'annule pas au cours de la fermeture ; en effet la présence de la diode de roue libre permet la circulation du courant dans la deuxième boucle et occasionne donc un champ magnétique.

Conclusion

Nous avons consacré notre travail à la modélisation du rayonnement électromagnétique des convertisseurs de l'électronique de puissance. Classiquement, ce problème est traité en domaine fréquentiel et divers logiciels sont déjà commercialisés (NEC, MININEC, FEKO, ...).

Durant notre thèse, afin d'éviter l'utilisation du tout numérique dont la mise en oeuvre est généralement délicate, nous avons opté pour des concepts simplifiés aussi bien en domaine fréquentiel qu'en transitoire. De ces applications, nous pouvons affirmer que :

- En domaine fréquentiel, des concepts analytiques de mise en oeuvre aisée conduisent à des résultats identiques à ceux obtenus par la théorie des antennes.

- En domaine temporel, nous avons utilisé deux concepts, le premier par résolution directe en 3D des équations de Maxwell par FDTD et le second en utilisant le formalisme des dipôles après calcul de la répartition des courants. Ces deux approches permettent la prise en compte des éléments non linéaires ; mais nous avons quand même constaté que la modélisation par la théorie des lignes pour le calcul de la répartition des courants est plus proche de la mesure. La modélisation directe par résolution des équations de Maxwell (résolution par FDTD avec discrétisation au premier ordre) ne permet pas de mettre en évidence l'effet pseudo-périodique et la présence des arrondies sur les réponses qui généralement apparaissent mieux lors d'une représentation par les circuits électriques.

La résolution des équations de Maxwell par FDTD exige le maillage d'un volume avec différents matériaux (l'air, diélectrique, conducteur...). Le choix du pas spatiale ($\Delta x = \Delta y = \Delta z$) en 3D est imposé par le critère de stabilité [10] nécessaire lors de l'utilisation de la FDTD. Vu la rapidité des interrupteurs utilisés dans les circuits de l'électronique de puissance, le choix d'un pas temporel approprié entraîne une fine discrétisation spatiale et conduit inévitablement à des temps de calcul élevée et parfois à des bruits numériques. En utilisant le concept analytique des dipôles on peut quantifier par le calcul l'ordre de grandeur du champ électromagnétique émis et conserver le contenu spectral du signal sans inconvénient majeur.

III. Références bibliographiques

- [IV.1] M. A.Uman, D. K. McCain, and E. P. Krider, « The Electromagnetic Radiation from a Finite Antenna », Am. J. Phys, Vol. 43, pp33-38, 1975.
- [IV.2] S. A. Schelkunoff, « Electromagnetic Waves », D. Van Nostrand Inc. 1956.
- [IV.3] NEC-4.1, Numerical Electromagnetic Code, January 1992.
- [IV.4] FEKO, EM Software & Systems GmbH, Otto-Lilienthal-Strasse 36, D-71034 Böblingen, Allemagne.
- [IV.5] V. Costa, S. Caniggia, L. Catello, « On the Computation of Electromagnetic Field Components from a Transmission Line: Theory and Application », Electromagnetic Compatibility. Symposium Record. pp. 651-656, 1990.
- [IV.6] P. Degauque, J. Hamelin, « Compatibilité Electromagnétisme, Bruit et Perturbations radioélectriques », BORDAS et C.N.E.T.-E.N.S.T, ISBN 2-04-018807-X, Dunod, Paris, 1990.
- [IV.7] **M. Melit, B. Nekhoul, N. Boudjerda, K. El Khamlichi Drissi, K. Kerroum, « Investigation of Electromagnetic Emission in Power Converters », International Review of Electrical Engineering - April 2007.**
- [IV.8] X. Gao, « Calcul du Champ Electromagnétique Rayonné par un Convertisseur de Puissance en Utilisant la Méthode des Différences Finies en 3D », Thèse de Doctorat. Université Blaise Pascal - Clermont II, 2003.
- [IV.9] K. S. Yee, « Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media », IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. 14, pp. 302-307, May 1966.
- [IV.10] C. R. Paul, « Analysis of Multiconductor Transmission Lines », Wiley series in microwave and optical engineering », ISBN 0-471-02080-X, New York, 1994.
- [IV.11] M. Piket-May, A. Taflove, J. Baron, « FD-TD Modelling of Digital Signal Propagation in 3D Circuits with Passive and Active Loads », IEEE Trans. On microwave and techniques, Vol. 42, No. 8, pp. 1514-1523, Aug. 1994.

Chapitre V

Réduction du rayonnement électromagnétique

Introduction

Le principe de la *compatibilité électromagnétique* (CEM) consiste à permettre le fonctionnement correct et optimal de tout dispositif électrique en présence d'autres, chacun étant en fonctionnement nominal. Autrement dit, c'est le droit pour chacun de « vivre » sans « gêner » son voisin. De cette définition découlent trois pôles d'intérêt : l'étude des sources de perturbations, l'étude des couplages et, enfin, l'étude de l'impact des perturbations sur une « victime », domaine de la susceptibilité électromagnétique.

Dans les chapitres II et III, nous nous sommes intéressés à la modélisation du rayonnement électromagnétique des convertisseurs de l'électronique de puissance. Nous consacrons ce dernier chapitre aux moyens de réduction de cette pollution électromagnétique.

Après un bref aperçu sur la nature de cette pollution, nous rappelons la technique dite par disposition géométrique qui permet une réduction de cette dernière (pollution), puis nous développons notre proposition pour réduire l'émission magnétique par utilisation de boucles de courants passives. Nous complétons ce chapitre par quelques applications.

I. Modes de propagation des perturbations

Les signaux parasites émis par la source (dans un convertisseur statique, la ou les cellules de commutations) sont propagés vers la source d'énergie, vers la charge ou vers un dispositif voisin qui est désigné par le terme de « victime », de plusieurs façons, liées à leur environnement respectif. Deux cas peuvent alors se présenter [V.1].

Si la source et la victime sont voisines avec ou sans liaison galvanique, le couplage est dit proche et il peut être de nature capacitive, inductive ou résistive. Les outils d'analyse font appel à des modèles de types réseau électrique où les couplages sont représentés par des capacités, des inductances mutuelles ou des résistances (dans le cas de liaisons galvaniques directes). Les phénomènes perturbateurs sont dans ce cas les variations rapides de courant ou de tension. Ces perturbations, appelées *perturbations conduites*, se développent dans les câbles ou conducteurs de liaisons aux réseaux, sources d'énergie ou charges.

Si la source et la victime sont éloignées et sans liaison galvanique, la perturbation est transmise par une onde électromagnétique, et l'on parle de *perturbations rayonnées*.

II. Les techniques de protection en CEM en électronique de puissance

L'amélioration de la compatibilité électromagnétique agit du côté des sources en tentant de réduire les perturbations qu'elles émettent, et du côté des victimes en les protégeant des influences extérieures. Bien qu'il s'agisse à première vue de deux approches distinctes, on met en oeuvre, dans la pratique, des techniques apparentées. Nous avons vu qu'une source de perturbation atteignait sa victime par le biais d'un couplage. C'est à ce niveau qu'il faut agir. On a recours pour cela à des dispositifs de découplage, terme qui existait bien avant que la compatibilité électromagnétique ne figure au vocabulaire.

III. Les convertisseurs de l'électronique de puissance et la pollution électromagnétique par rayonnement

Si l'on observe les *perturbations électromagnétiques émises par un convertisseur statique* sur une échelle de fréquence, comme il est représenté ci-après [V.1], on constate qu'elles s'échelonnent sur sept (07) décades (figure V.1).

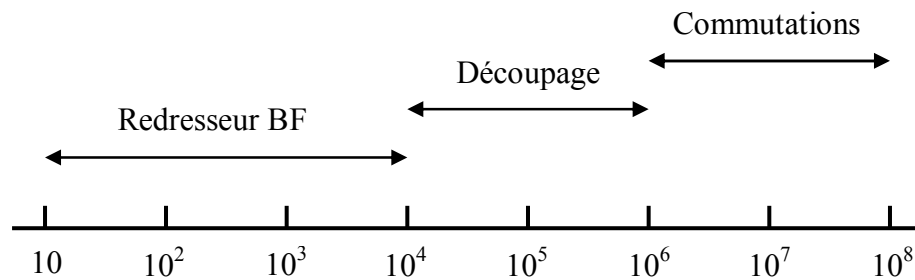


Figure V.1. Spectre des perturbations émises par un convertisseur statique.

En effet, chaque étage de conversion contribue à perturber sur une plage fréquentielle dépendant de sa fréquence de commutation, le redresseur d'entrée jusqu'à quelques 10 kHz, l'étage à commutation HF jusqu'à quelques mégahertz et les phénomènes liés aux transitions de commutation (résonances, excitation des modes propres) jusqu'à quelques dizaines de mégahertz.

Par conséquent, les normes d'émissivité ont été rendues progressivement plus sévères et ont amenés les industriels à envisager ces aspects dès la conception de leurs équipements. Des solutions essentiellement basées sur un renforcement des fonctions de filtrage et de blindage ont été adoptées. Il est apparu plus simple de filtrer globalement que de concevoir selon des critères minimisant les perturbations électromagnétiques. Ce type de solution a toutefois dégradé la compacité et le coût des systèmes.

La recherche de solutions plus adaptées pour réduire le rayonnement électromagnétique en conformité avec les normes CEM a conduit les industriels vers la solution dite de disposition géométrique des composants.

Nous rappelons brièvement dans les deux sous paragraphes qui vont suivre, la notion de protection par blindage ainsi que la réduction de l'émission électromagnétique par disposition géométrique.

III.1. Les blindages

Le blindage est constitué d'une enveloppe conductrice que l'on met en place autour de composants électriques pour constituer une barrière vis à vis des influences électrostatiques, magnétiques, ou électromagnétiques. On distingue [V.2]:

- le blindage magnétique ;
- le blindage amagnétique.

Le blindage magnétique : est constitué d'un matériau capable d'offrir un chemin de réluctance relativement faible aux "lignes de force" issues d'une source de champ magnétique (champ H), et d'en préserver les zones à protéger. Cette technique peut par exemple protéger

le tube d'un oscilloscope de l'influence d'un transformateur d'alimentation. En basse fréquence, la protection requiert parfois un matériau noble et coûteux comme le mumétal.

Le blindage amagnétique : est constitué d'un matériau bon conducteur, cuivre ou aluminium. Il agit de plusieurs manières :

- Vis à vis des champs électriques (champs E) à la manière d'une cage de Faraday. Il se comporte comme un écran électrostatique et évite le couplage capacitif entre les conducteurs situés de part et d'autre.
- Vis à vis des champs magnétiques (champs H), les lignes de force d'un champ H variable indésirable qui tentent de le franchir provoquent dans le blindage, un courant induit dont le champ s'oppose à celui qui lui a donné naissance. On blinde de cette manière des transformateurs de moyenne fréquence (quelques centaines de KHz), ou de haute fréquence (des MHz). Lorsqu'on l'utilise à l'encontre de champs en basse fréquence (50Hz par exemple), il est peu efficace vis à vis du fondamental mais le devient vis à vis des harmoniques de rangs élevés. Le blindage n'est pas nécessairement épais, sauf si l'on recherche une certaine efficacité à des fréquences de quelques KHz.
- Vis à vis des ondes électromagnétiques. Les champs E et H ne sont considérés en tant que tels qu'à proximité immédiate des composants. On parle alors de *champs proches*. Au delà d'une certaine distance, on considère la perturbation rayonnée comme une onde électromagnétique. Les blindages sont très souvent en métal, mais vis à vis des hautes fréquences, on peut aussi faire usage de peintures spéciales ou de revêtements absorbants, voir de composés multicouches.

III.2. Disposition des composants et du câblage

III.2.1. Du schéma au montage réel

C'est probablement l'élément le plus important du savoir-faire des concepteurs. Les différents modes de couplage que nous avons cités n'impliquent pas des composants physiques, mais essentiellement la position relative de conducteurs [V.2].

La première chose dont il faut avoir conscience, c'est que le schéma ne nous donne qu'une vue idéalisée et incomplète du circuit réel :

- car les lignes tracées entre les éléments représentent des conducteurs supposés parfaits, donc d'impédance nulle, sont assimilées à des équipotentiels ;
- car seuls les éléments représentés sur le schéma par leur symbole sont sensés être le siège d'un phénomène électrique ;

- car la représentation symbolisée des différents éléments est géométriquement sans rapport avec leur disposition réelle, et que les chemins électriques ne sont pas dessinés tels qu'ils seront matérialisés;
- car le schéma électrique ne concerne souvent qu'une partie d'un équipement, et ignore par conséquent la présence des éléments électriquement actifs dans l'environnement du montage.

III.2.2. Recherche d'une stratégie de placement

Aucune règle générale n'est applicable de manière formelle, tout dépend du cas que l'on doit traiter. Il y a cependant un ordre logique dans les décisions à prendre. On commence par ébaucher un plan de disposition global que l'on affinera ensuite par une démarche similaire en plusieurs étapes :

1. placer les éléments dont la position est obligatoire (nécessité fonctionnelle, contrainte mécanique ou thermique, réglementation...);
2. placer les éléments, dont la position relative est cruciale pour le bon fonctionnement et pour la CEM (il est rare qu'il y ait antinomie entre les deux aspects). On fera particulièrement attention :
 - aux parties qui doivent être éloignées : celles qui impliquent des signaux les plus incompatibles (exemple un signal de plusieurs ampères avec un fort dv/dt vis à vis d'un signal de mesure de faible niveau);
 - aux parties qui doivent être le plus rapprochées, soit parce qu'elles échangent un grand nombre de signaux, soit parce que les signaux échangés sont susceptibles de rayonner (amplitude et rapidité des variations de tension ou de courant, fréquences élevées), soit par ce que les signaux sont sensibles aux perturbations (références de tension, signaux faibles, signaux traduisant des données de précision...)
 - aux parties qui devront recevoir un blindage, en répertoriant les conduites qui devront le traverser.
3. placer les éléments de manière à simplifier le câblage en tenant compte des espaces disponibles.

III.2.3. Utilisation de la symétrie

L'usage de la symétrie peut être mise à profit dans tous les cas de figure, qu'il s'agisse de réalisations sur circuit imprimé ou de câblage sous châssis. Mais c'est particulièrement en électronique de puissance et sur des dispositifs de taille relativement importante qu'il peut être le plus profitable. Son principe est -idéalement- de réaliser des dispositifs dans lesquels

toute influence d'un signal soit égale et opposée à une autre, provenant d'un élément de même nature agissant simultanément avec un signal de signe contraire [V.2].

Remarque : dans notre travail, nous nous intéressons à la réduction de l'émission électromagnétique des convertisseurs de l'électronique de puissance. Pour ce faire, nous avons abordé cette question de deux manières différentes :

1. par la méthode classique qui consiste à regarder l'effet de la géométrie (disposition des composants et des pistes),
2. en incrustant une ou plusieurs boucles passives et conductrices de courants sur le circuit imprimé.

Nous consacrons les deux paragraphes qui vont suivre à ces deux techniques en illustrant notre travail par quelques applications.

IV. Réduction par disposition géométrique

IV.1. Effet de la disposition des pistes

Afin de regarder l'effet de la disposition géométrique des pistes du circuit de puissance sur le champ électromagnétique rayonné, nous proposons son application directement sur un exemple. Soit les trois configurations géométriques en figure V.2, qui représentent le même circuit électrique sous différentes dispositions des pistes ; notons que nous gardons le même périmètre pour conserver la même longueur pour l'ensemble des pistes.

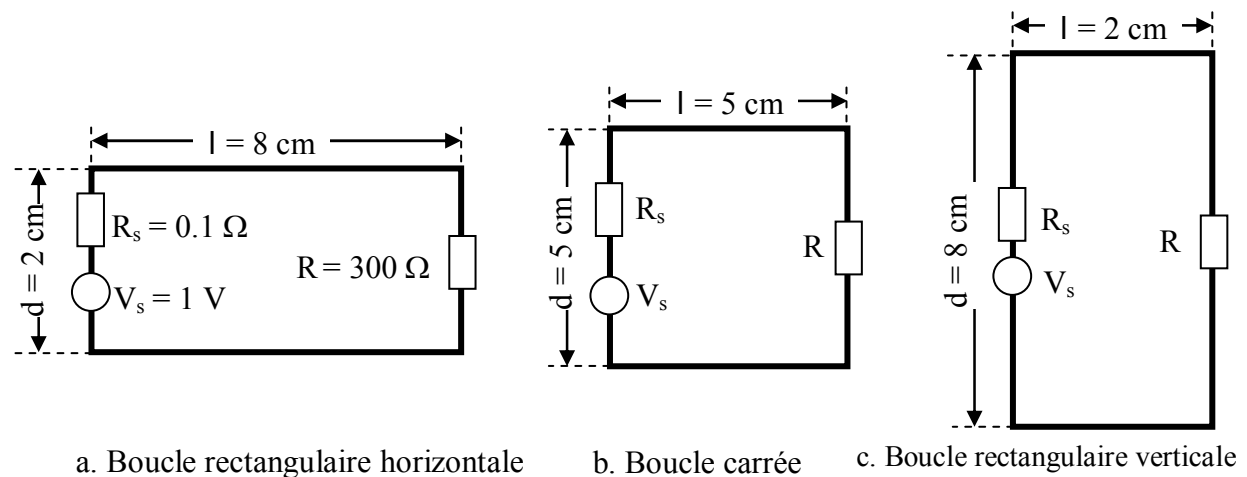


Figure V.2. Différentes configurations géométriques du circuit.

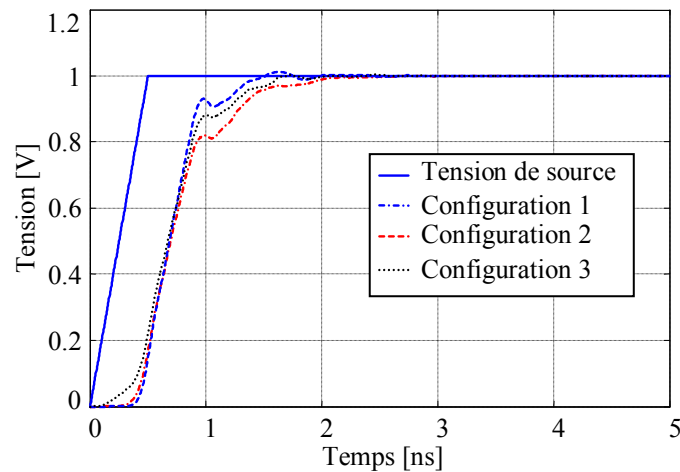


Figure V.3. Tension aux bornes de la charge.

Nous calculons les champs électrique et magnétique émis par les différentes configurations au centre du circuit et à 5 cm de hauteur par résolution des équations de Maxwell par FDTD [V.3].

Pour les trois configurations, nous pouvons constater que la tension aux bornes de la charge présente quelques différences :

- au niveau du retard temporel, car les longueurs des pistes ne sont pas les mêmes,
- au départ et puis bien après le temps du front de montée.

En régime établi, les trois configurations conduisent à la même ddp aux bornes de la charge.

Si l'allure est différente sur une certaine plage temporelle, cela implique une différence au niveau du contenu spectral.

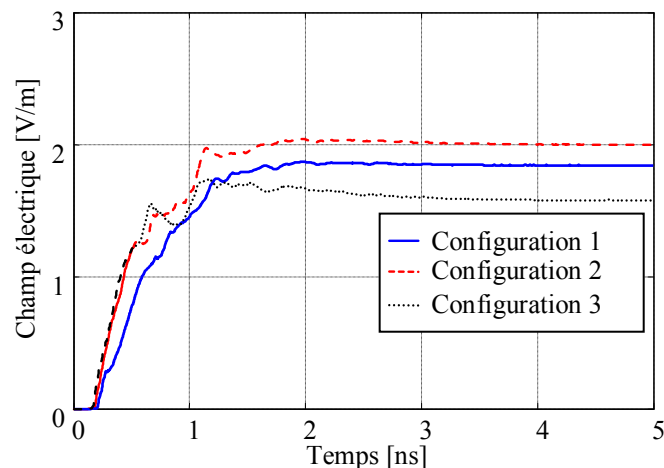


Figure V.4. Champ électrique pour différentes configurations.

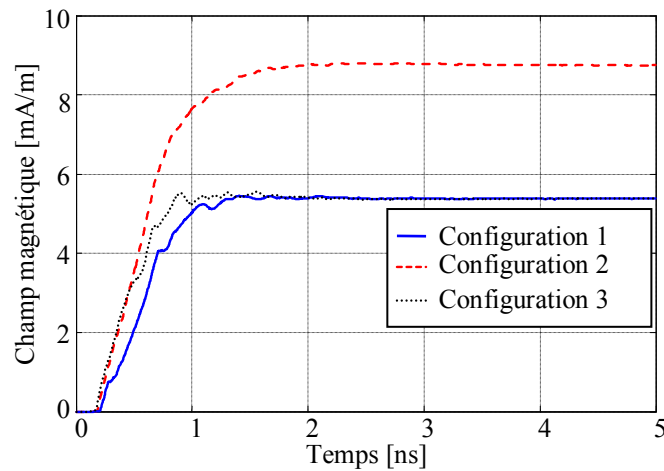
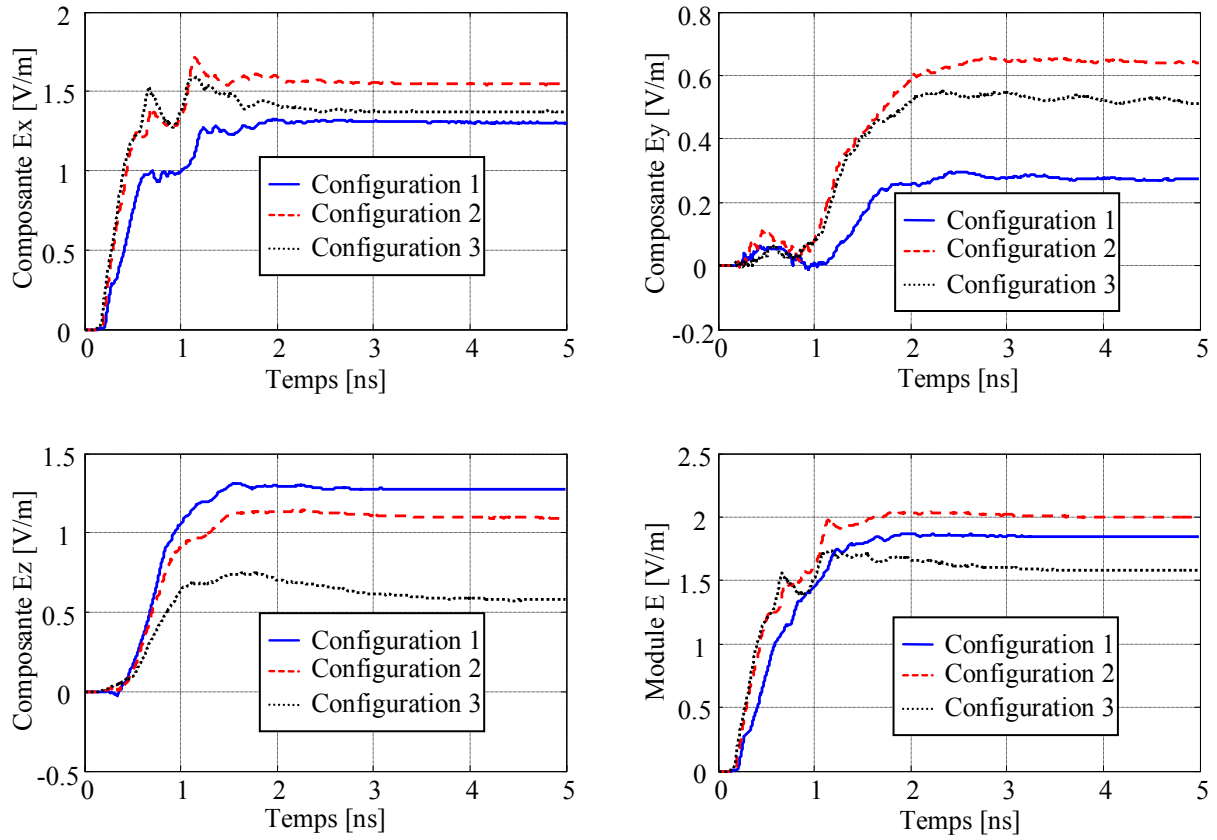
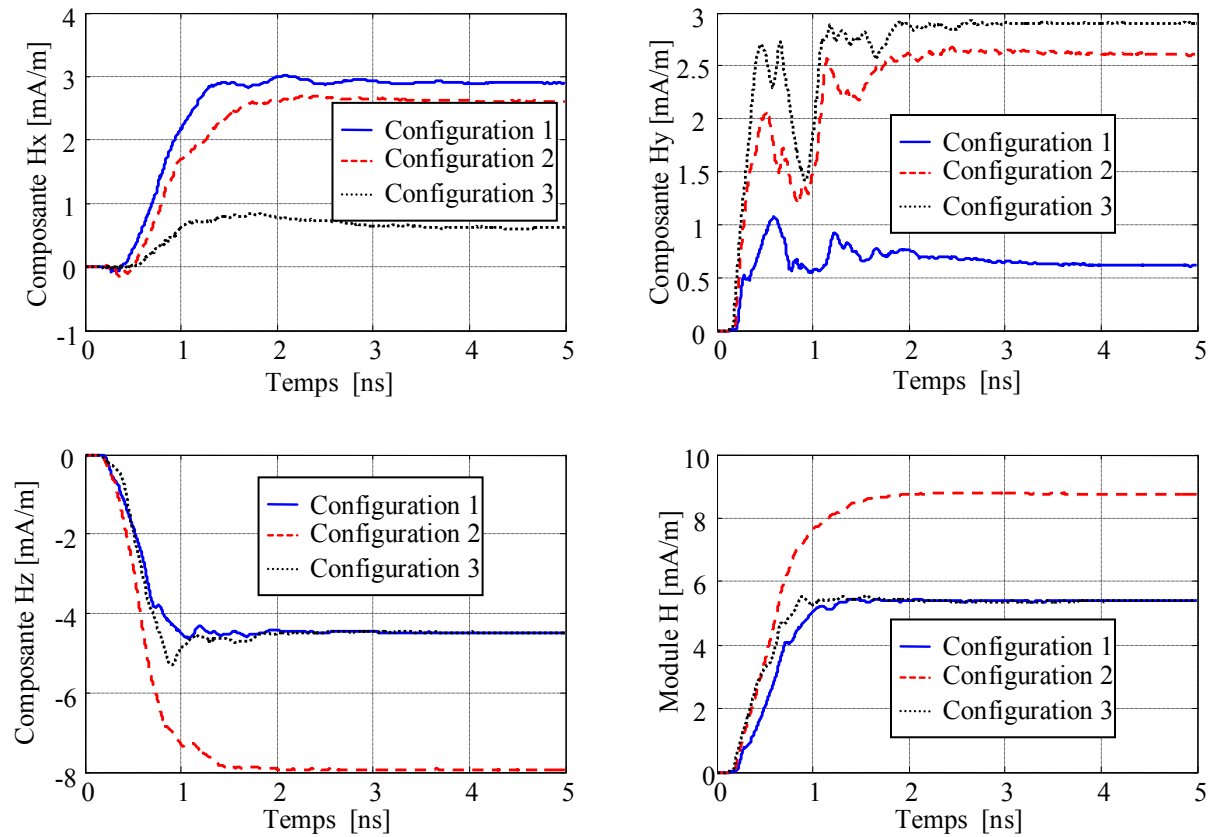


Figure V.5. Champ magnétique pour différentes configurations.

L'analyse de ces résultats (figures V.4 et V.5) montre bien que la disposition géométrique des pistes joue un rôle très important sur le rayonnement des convertisseurs. En effet, la différence du contenu spectral engendrée par les différents transitoires ainsi que le changement de la géométrie de la boucle de rayonnement peuvent conduire à une nette différence des champs électrique et magnétique. Cet effet est très remarquable sur le champ magnétique où nous constatons que la boucle magnétique la plus importante du point de vue surface (configuration 2) conduit à l'émission magnétique la plus importante (sachant que le moment magnétique est proportionnel à la surface de la boucle). Pour le champ électrique, la répartition des charges superficielles sur les pistes est à notre avis en relation directe avec leurs positions vis-à-vis de la source et de leurs longueurs respectives ; notons dans ce cas que les coefficients de potentiels ne dépendent que de la géométrie.

Afin de compléter notre analyse, nous proposons de présenter en détails (par composantes) les résultats que nous obtenons pour les trois configurations. En effet, divers modèles pour l'analyse mathématique de l'impact d'une perturbation électromagnétique sur un dispositif conducteur et filaire sont proposés dans la littérature [V.4]. Les composantes des champs électrique et magnétique n'interviennent pas de la même manière d'un modèle à un autre. En figure V.6 nous avons les résultats en champs électrique et magnétique pour un point situé au milieu du circuit et à 5 cm de hauteur.

a. Champ électriqueb. Champ magnétique**Figure V.6.** Variation des composantes du champ électromagnétique.

IV.2. Effet de la disposition géométrique des composants du circuit

Cette application portera sur l'effet de la position géométrique de la charge R dans la boucle du circuit de puissance. La figure V.7 illustre trois positions respectives (1, 2 et 3) de la charge R dans le cas de la géométrie la plus défavorable (boucle carrée) de point de vue rayonnement électromagnétique.

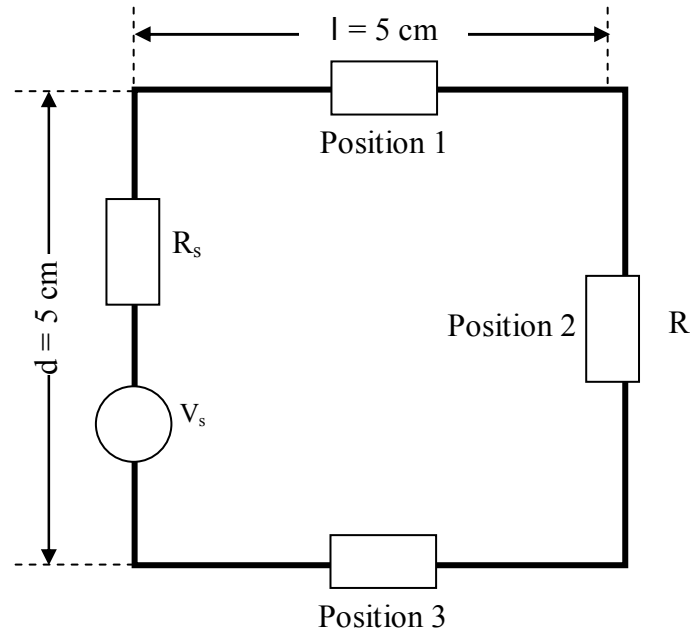


Figure V.7. Boucle carrée avec différentes positions de la charge R.

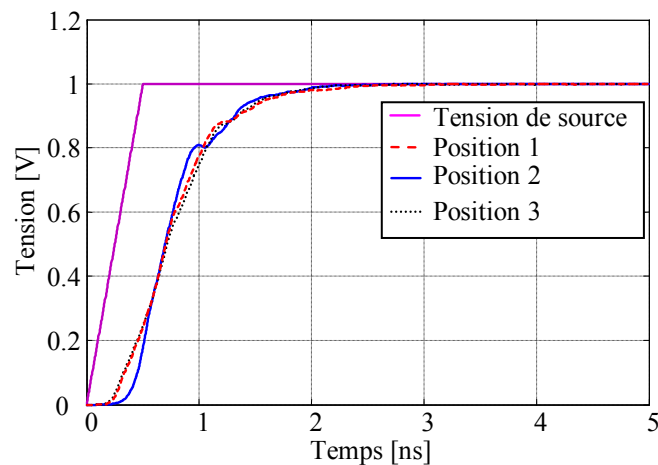


Figure V.8. Tension aux bornes de la charge pour différentes positions de R.

La tension aux bornes de la charge (figure V.8) est pratiquement la même en allure générale ; quelques légères différences apparaissent car il y a modification des instants de réflexions et du retard qui sont fonction de la position de la charge.

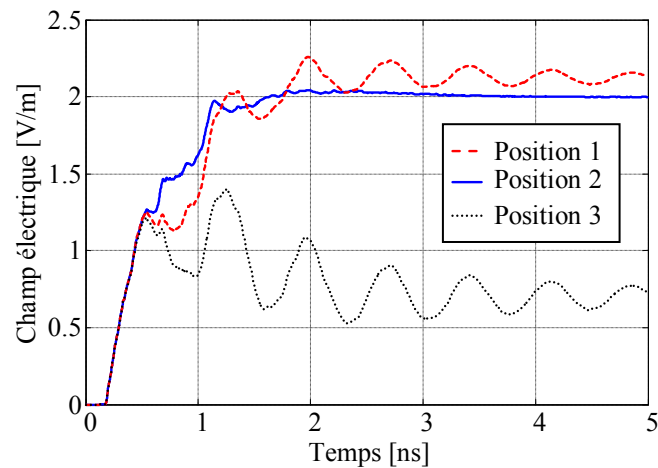


Figure V.9. Champ électrique pour différentes positions de R.

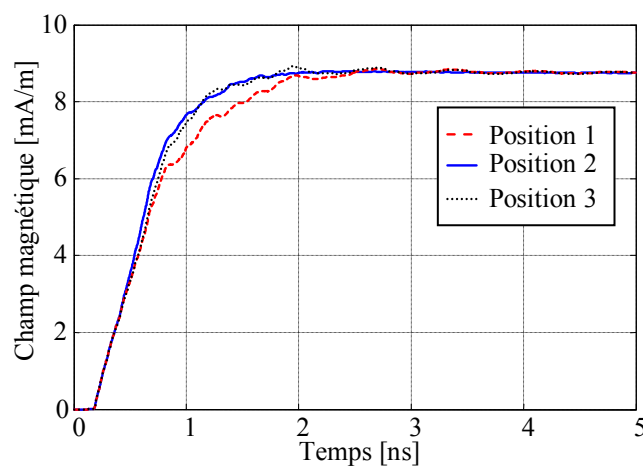


Figure V.10. Champ magnétique pour différentes positions de R.

Ces résultats montrent bien que le champ magnétique (figure V.10) est pratiquement le même car les pistes ne pas changées de longueurs et la boucle de rayonnement a gardée la même surface; par contre nous notons une nette différence au niveau du champ électrique (figure V.9) dont la variation en zone proche est de natures électrostatique et d'induction. La position de la charge entraîne une modification de la répartition de la densité de charge électrique sur les pistes.

V. Réduction du champ magnétique par boucles passives

En matière d'émission électromagnétique, le champ magnétique est le plus redouté en terme de pollution. Si, il est généralement facile de se protéger de l'induction électrique, ce n'est pas le cas pour l'induction magnétique dont la variation du flux conduit à des courants induits dans les milieux conducteurs.

V.1. Principe

La figure V.11 présente la configuration de base que nous utilisons pour la réduction du champ magnétique par boucle passive [V.5].

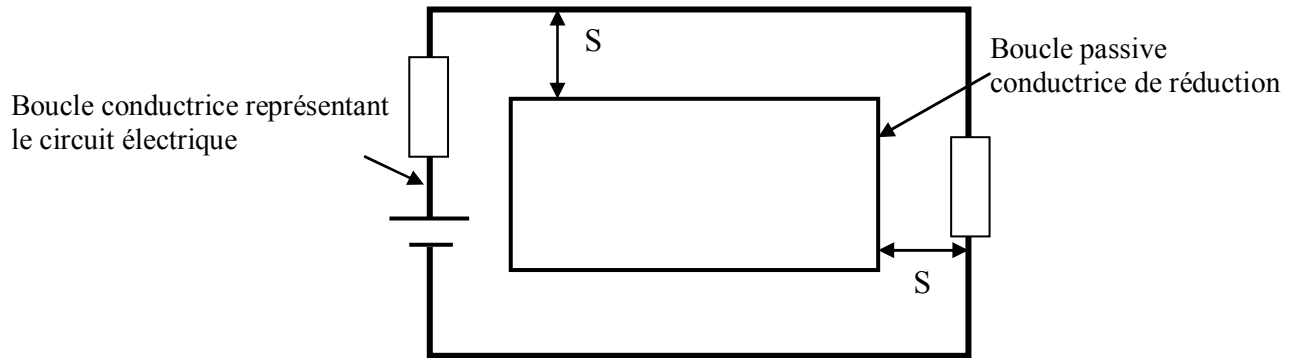


Figure V.11. Schéma de principe de réduction du champ magnétique.

Tout conducteur parcouru par un courant s'entoure d'un flux magnétique. Lorsque ce flux est variable et coupe d'autres conducteurs, il peut entraîner en ceux-ci une force électromotrice induite. On peut s'opposer à un champ H en lui présentant une spire en court-circuit. C'est ce principe que nous utiliserons pour essayer de réduire l'effet de l'induction magnétique d'un convertisseur de l'électronique de puissance.

V.2. Analyse en domaine fréquentielle

Dans une première étape nous calculons le champ magnétique émis par le circuit électrique réel du convertisseur, puis nous calculons en deuxième étape le champ magnétique émis par l'ensemble formé par les deux boucles.

Le calcul du champ magnétique réduit passe par le calcul de la répartition du courant dans le convertisseur et les courants induits dans les boucles passives de réduction en une seule étape en utilisant le formalisme fréquentiel [V.6] basé sur la matrice $[\Phi]$.

Théoriquement, le degré de réduction dépend de l'amplitude et la phase du courant induit dans la ou les boucles passives. Dans nos applications, nous analyserons :

- l'effet de la réduction par introduction d'une ou de plusieurs boucles passives de réduction,

V.2.1. Réduction passive avec charge purement résistive

Dans cette première application, nous nous intéressons à la réduction du champ magnétique en utilisant des boucles passives chargées résistivement.

V.2.1.1. Réduction par une seule boucle

La figure V.12 présente le schéma électrique de base avec une simple boucle de réduction et des charges purement résistives aux extrémités.

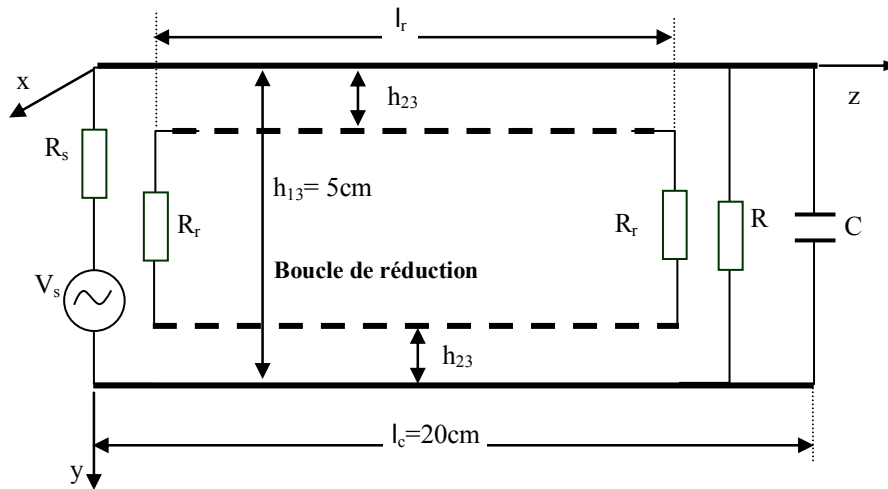


Figure V.12. Schéma électrique du circuit avec la boucle de réduction.

Les paramètres électriques du circuit sont : $V_s = 1V$, $R_s = 5 \Omega$, $R = 1 k\Omega$, $C = 5 pF$, $f = 750 MHz$.

L'évaluation du champ magnétique se fait dans le cas le plus défavorable du point de vue rayonnement (zone proche), le point d'observation est situé au centre du convertisseur et à 10 cm de hauteur.

Les résultats en figure V.13 donnent la variation de la réduction en pourcentage du champ magnétique pour différentes tailles (surfaces) des boucles ; pour chaque boucle passive nous procédons à une variation des charges aux extrémités.

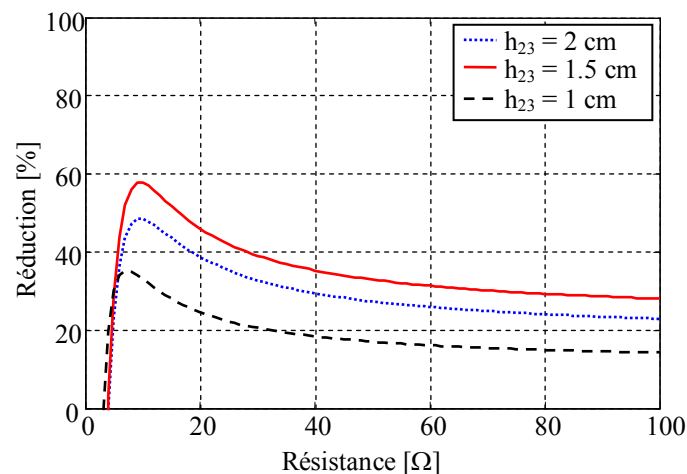


Figure V.13. Réduction du champ magnétique (en %) en fonction des charges aux deux extrémités.

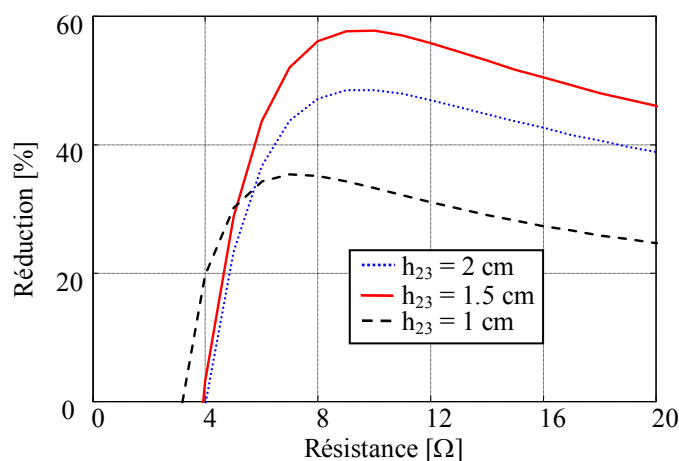


Figure V.14. Zoom sur les faibles résistances.

En figure IV.15, nous proposons des résultats dans le cas où l'extrémité gauche est en court-circuit et l'extrémité droite porte une charge résistive variable.

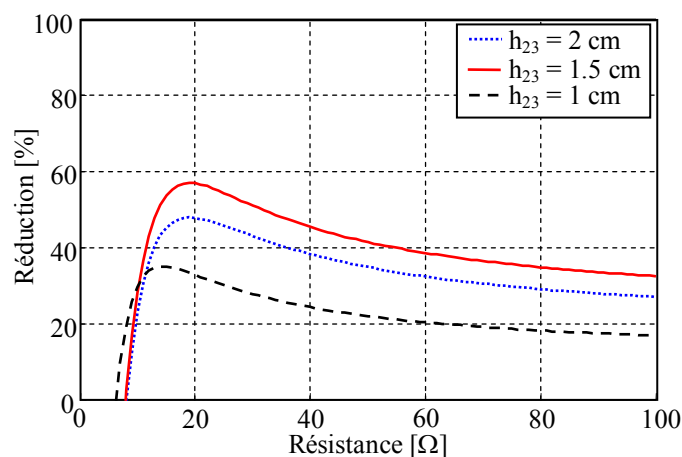


Figure V.15. Réduction du champ magnétique (en %) en fonction de la charge à l'extrémité droite (l'extrémité gauche en court circuit).

Nous remarquons en figure V.13 et figure V.15 que le degré de réduction dépend de la surface des boucles passives et de la valeur des charges aux extrémités. Nous notons que la taille de la boucle la plus importante ne conduit pas nécessairement à la meilleure réduction pour les mêmes charges aux extrémités (figure V.14).

La boucle passive de plus grande surface avec de très faibles charges à ses deux extrémités, conduit à une meilleure réduction (figure V.14).

Les boucles passives fermées sur des résistances trop importantes limitent considérablement la réduction du champ magnétique (figure V.15). En effet, dans ce cas, les courants induits dans la boucle sont réduits.

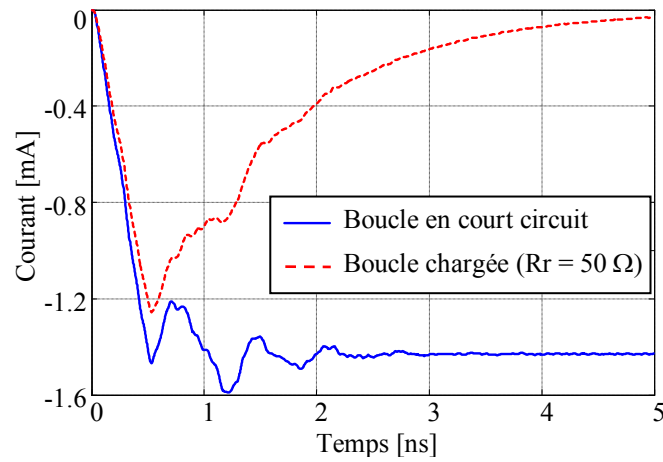


Figure V.16. Variation des courants induits en fonction des résistances aux extrémités de la boucle passive.

V.2.1.2. Réduction par deux boucles

La figure V.17 présente le schéma électrique du circuit de puissance avec deux boucles de réduction passives.

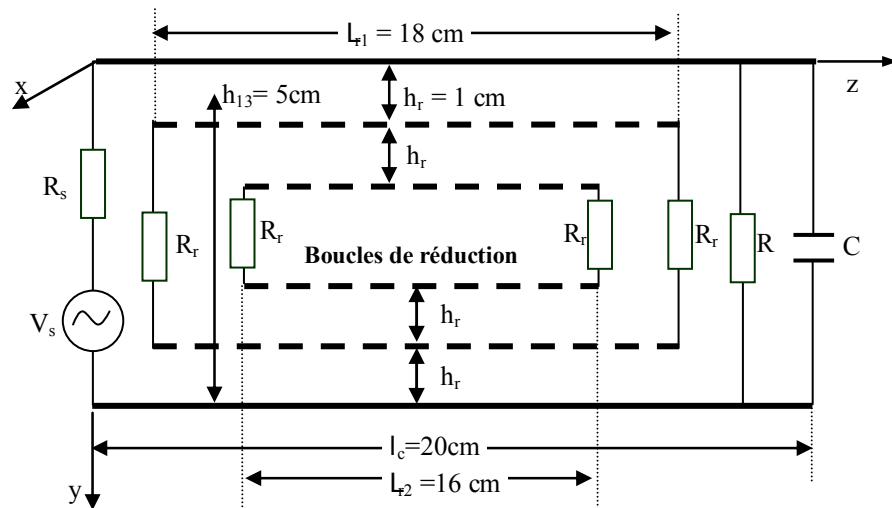


Figure V.17. Schéma électrique de base du circuit de puissance avec deux boucles passives de réduction.

En figure V.18, nous avons la réduction en pourcentage pour deux boucles chargées résistivement à leurs extrémités.

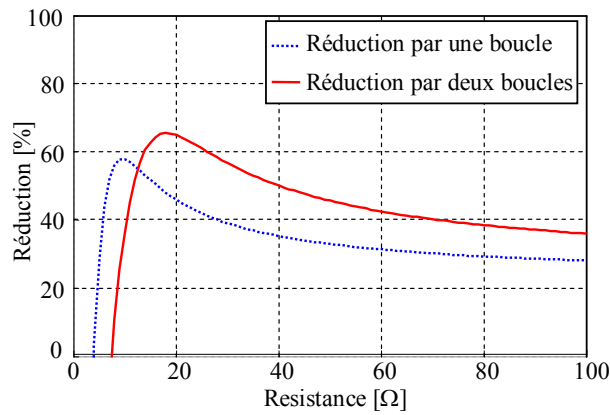


Figure V.18. Effet du nombre de boucles sur la réduction.

La figure V.18 montre bien que la réduction est nettement améliorée en utilisant deux boucles, ce qui est prévisible théoriquement. Nous constatons cependant que la réduction commence à intervenir pour des charges résistives plus importantes dans le cas de la réduction avec deux boucles passives.

V.3. Analyse en domaine temporel

V.3.1. Effet de la boucle passive en court-circuit

Nous proposons dans cette application la réduction du champ magnétique par une boucle passive, disposée à l'intérieur du convertisseur. Le champ magnétique est calculé au milieu du convertisseur et à 5 cm de hauteur, et cela pour les trois configurations illustrées en figure V.19. Nous notons que la boucle de réduction est en court-circuit pour les trois configurations.

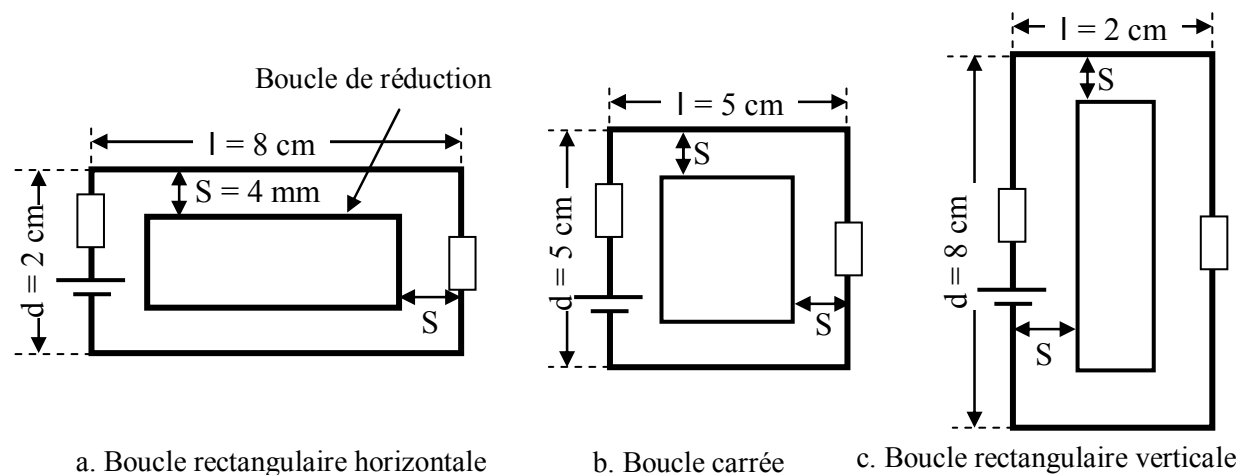


Figure V.19. Différentes configurations géométriques du circuit de puissance

avec boucle de réduction passive.

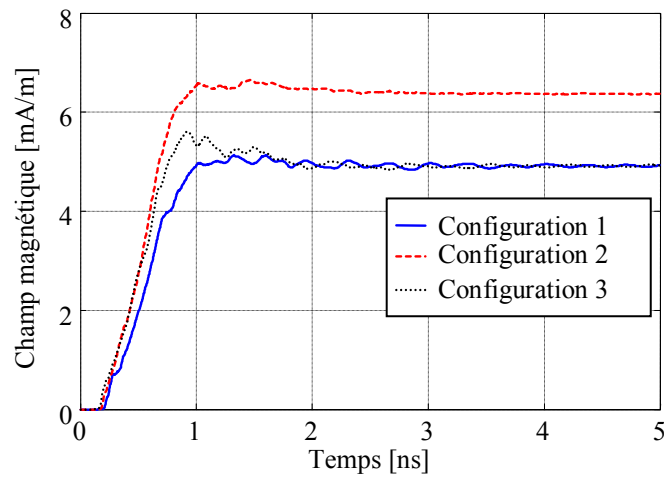


Figure V.20. Champ magnétique réduit pour différentes configurations.

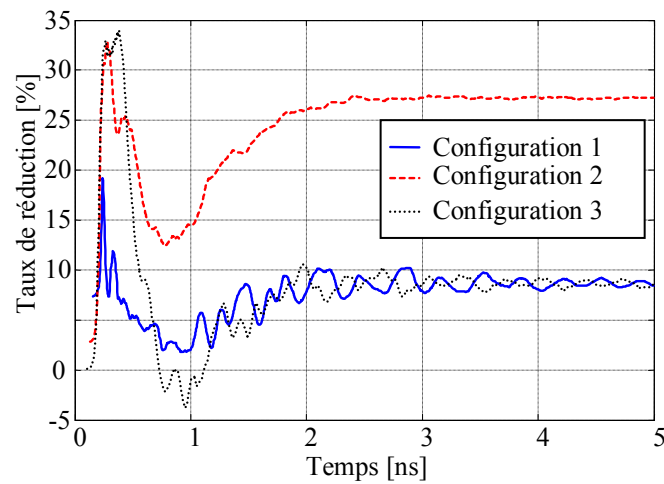


Figure V.21. Taux de réduction du champ magnétique pour différentes configurations.

En figure V.21 nous présentons le taux de réduction introduit par la boucle passive. Nous notons que l'influence de la boucle de réduction est bien plus importante sur la boucle carrée (configuration 2). De ce résultat, nous pouvons déjà affirmer que du point de vue CEM, pour le même périmètre, un circuit rectangulaire avec boucle passive de réduction est une première solution.

V.3.2. Effet de la taille de la boucle passive sur la réduction

Dans cette application, nous nous intéressons à l'effet de la taille (surface) de la boucle de réduction passive (figure V.22); notons que la boucle de réduction est en court circuit. Le point de calcul du champ électromagnétique est situé au milieu de convertisseur et à 5 cm de hauteur.

Nous réalisons nos calculs pour des valeurs de $S = 4 \text{ mm}$, 10 mm et 16 mm respectivement (figure V.22) pour le cas de la configuration la plus défavorable du point de vue rayonnement électromagnétique (circuit carré).

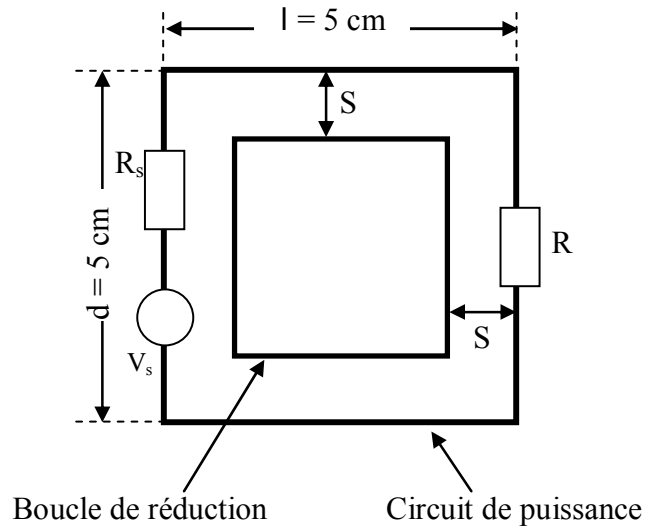


Figure V.22. Configuration du circuit de puissance avec boucle de réduction passive.

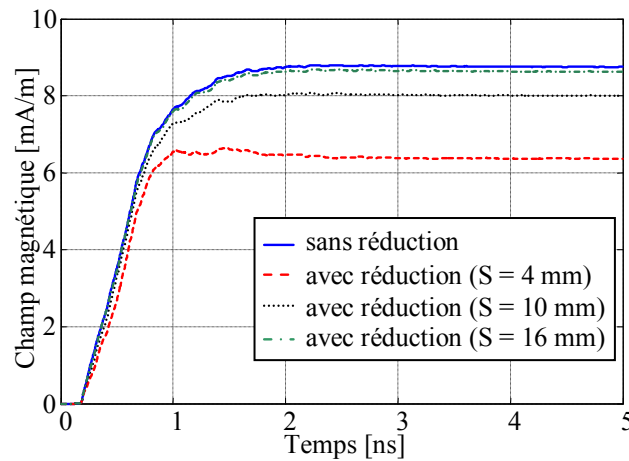


Figure V.23. Champ magnétique réduit pour différentes tailles de la boucle passive.

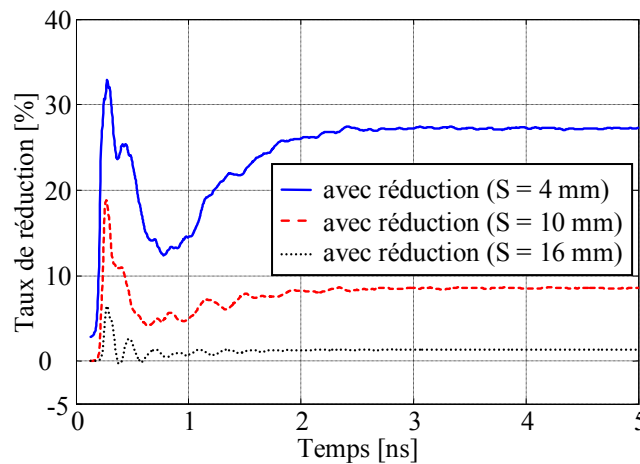


Figure V.24. Taux de réduction du champ magnétique pour différentes tailles de la boucle passive.

La figure V.24 montre clairement que la boucle passive qui conduit à la meilleure réduction est celle dont la surface de rayonnement est la plus importante. Cette remarque confirme notre observation en domaine fréquentiel (figure V.15), où la boucle passive de plus grande surface avec de très faibles charges à ses deux extrémités, conduit à une meilleure réduction (figures V.14 et V.15).

V.3.3. Effet du nombre des boucles passives sur la réduction

Nous proposons dans cette application de regarder l'effet de l'imbrication de plusieurs boucles de réduction passives, telle que le montre la figure V.25.

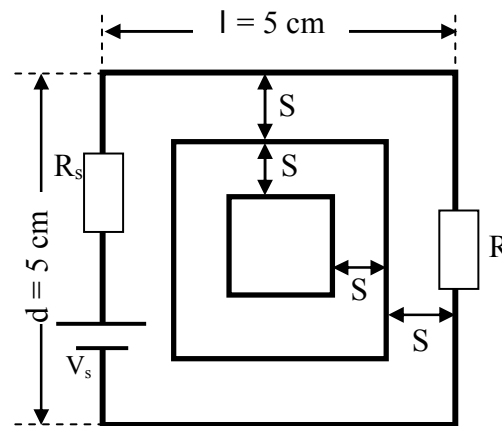


Figure V.25. Configuration d'un circuit de puissance avec deux boucles de réduction.

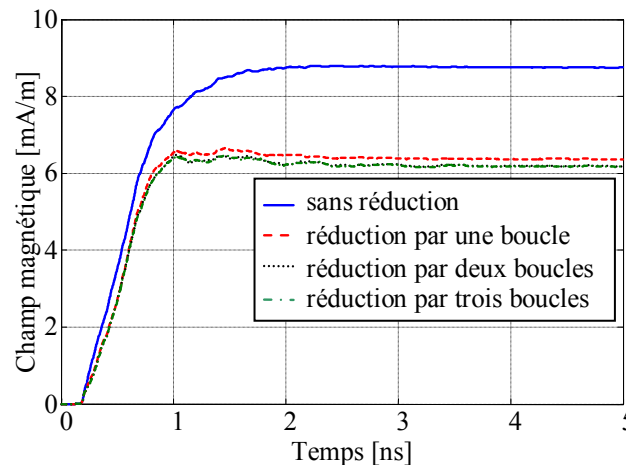


Figure V.26. Champ magnétique réduit (effet du nombre des boucles passives).

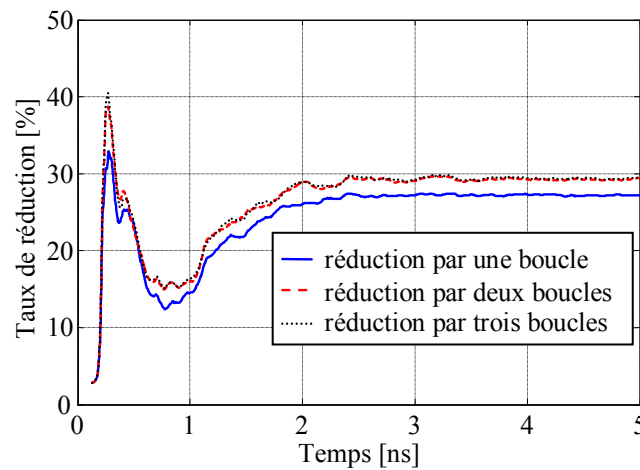


Figure V.27. Taux de réduction du champ magnétique.

Ce résultat (figure V.27), montre que plusieurs boucles passives ne permettent pas de réduire continuellement et de façon notable le champ magnétique.

V.3.4. Effet des charges résistives aux extrémités de la boucle de réduction

Pour cette application, en considérant la configuration la plus défavorable du point de vue rayonnement électromagnétique (circuit carré), nous nous intéressons à l'effet des charges aux deux extrémités de la boucle passive (figure V.28).

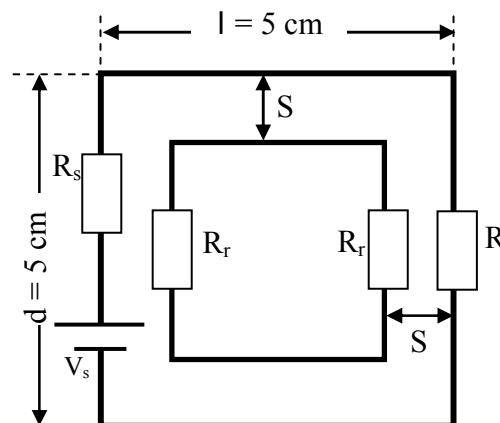


Figure V.28. Schéma électrique du circuit de puissance avec boucle de réduction chargée par des résistances à leurs extrémités.

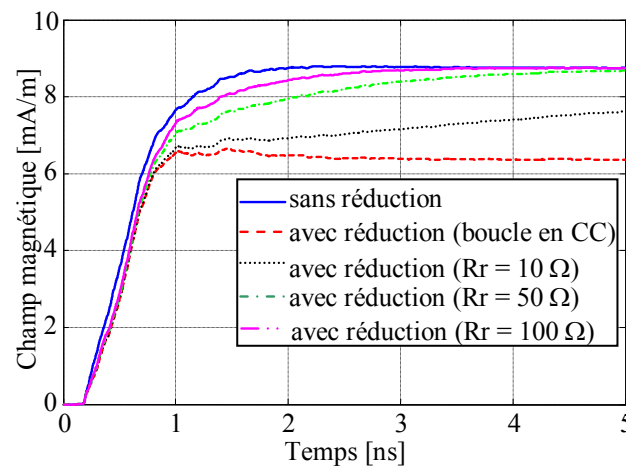


Figure V.29. Champ magnétique réduit pour différentes valeurs des charges aux extrémités de la boucle passive.

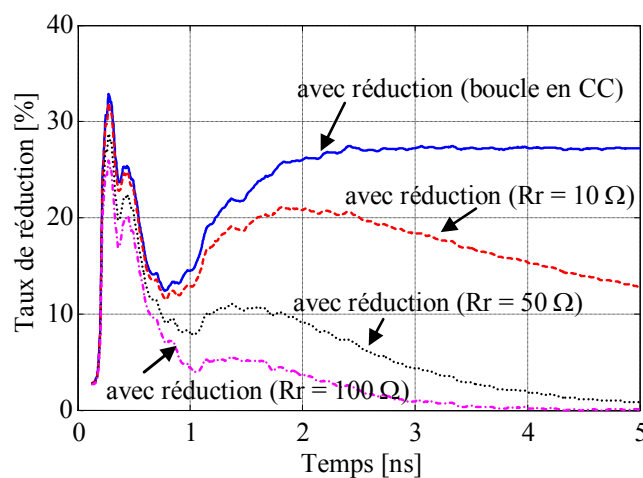


Figure V.30. Taux de réduction du champ magnétique pour différentes valeurs des charges aux extrémités de la boucle passive.

De ces résultats (figure V.30), nous pouvons affirmer que la simple boucle de réduction court-circuitée à ses deux extrémités constitue une première solution CEM. Pour la même boucle passive, la configuration où ses deux extrémités sont en court-circuit conduit à des courants induits d'amplitudes plus importantes.

Remarque :

Il serait peut être judicieux de regarder l'effet du déphasage des courants induits en prenant des charges R-C (l'amplitude et le déphasage des courants induits dépendent des charges aux extrémités des boucles de réduction). Soit le convertisseur en figure V.31 (nous gardons les mêmes paramètres que ceux en figure V.12), les résultats en figure V.32 illustrent l'effet des charges R-C introduites dans la boucle de réduction.

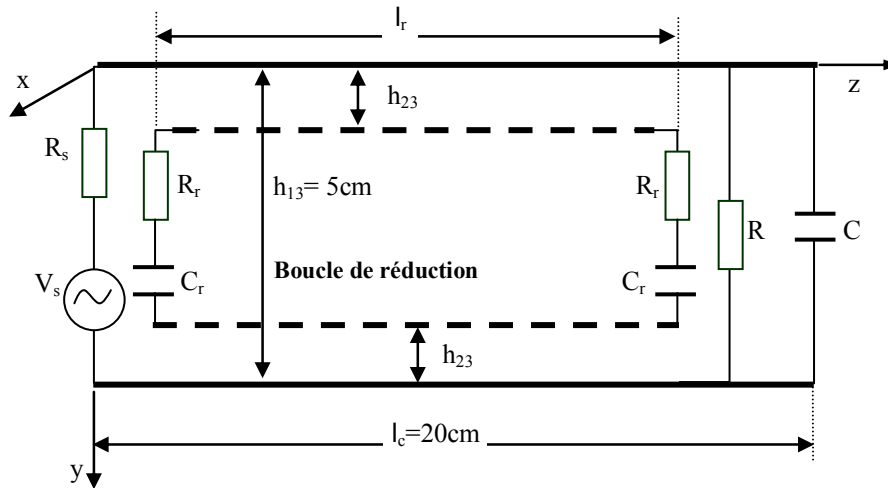


Figure V.31. Schéma électrique de base du circuit de puissance avec boucle de réduction.

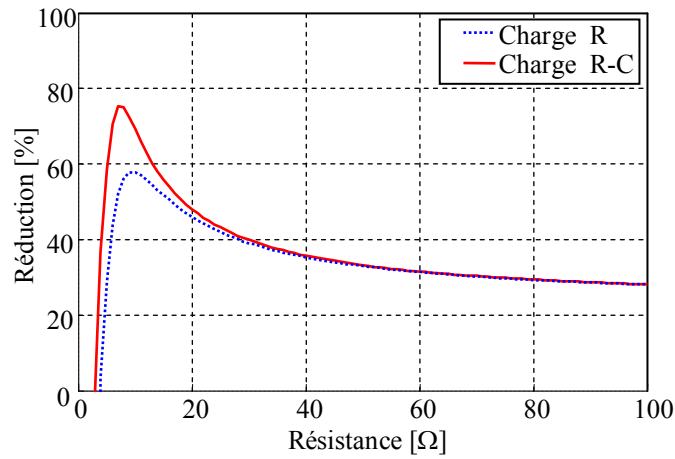


Figure V.32. Effet des charges R-C sur la réduction.

Dans cette application, nous avons utilisé une capacité qui varie entre $C = 1\text{ pF}$ et 100 pF . La figure V.32 montre l'effet des charges R-C, placées aux extrémités des boucles passives, sur la réduction. Il serait intéressant de pouvoir étendre cette stratégie à une analyse en domaine temporel.

Conclusion

Nous avons constaté que les deux approches (disposition géométrique et réduction par boucles passives) conduisent à une réduction du champ magnétique.

La première, par disposition géométrique, ne nécessite aucun supplément matériel mais demande une analyse préalable qui risque d'être laborieuse et parfois infructueuse.

La deuxième approche, nécessite par contre un supplément matériel simplement réalisable, permet une réduction appréciable de l'émission magnétique et pourrait constituer une solution CEM pour réduire l'auto-pollution des circuits de commande.

Les concepteurs des circuits de l'électronique de puissance, doivent à notre avis s'investir sur la voie qui consiste à combiner les deux stratégies pour une amélioration de la CEM de leurs dispositifs.

VI. Références bibliographiques

- [V.1] F. Costa, G. Rojat, « CEM en électronique de puissance, Sources de perturbations, couplages, SEM », Techniques de l'ingénieur, Vol. D5, N° D3290, pp. 1-26. 1999.
- [V.2] J. Cuvillier, « Cours de CEM », IUT de Nantes, 2003.
- [V.3] K. S. Yee, « Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media », IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. 14, pp. 302-307, May 1966.
- [V.4] C. A. Nucci, « Lightning-Induced Voltages on Overhead Power Lines. Part 2: Coupling Models for the Evaluation of the induced Voltages », Cigré paper prepared within the framework of task force 33.01.01 of the CIGRE working Group 33.01.1994, Electra N° 162, Oct. 1995.
- [V.5] **M. Melit , B. Nekhoul , N. Boudjerda , K. El Khamlichi Drissi and K. Kerroum, « Characterization of Electromagnetic Environment in Power Converters Using [S] Matrix » EMC Europe, Barcelona, Spain, pp. 540-545. Sept. 4-8. 2006.**
- [V.6] C. R. Paul, « Analysis of Multiconductor Transmission Lines », Wiley series in microwave and optical engineering », ISBN 0-471-02080-X, New York, 1994.
- [V.7] Matthew N. O. Sadiku, Ph. D., « Numerical Techniques in Electromagnetics », Second edition, CRC Presse LLC, 2001.
- [V.8] T. K. Sarkar, « A Note on the Choice of Weighting Functions in the Method of Moments », IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. AP-33, N°4, pp. 436-441, April 1985.
- [V.9] F. Gardiol, « Electromagnétisme », Traité d'électricité, vol. III, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, ISBN 2-88074-318-4, 1996.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Comme tout système physique en activité, les appareils électriques et électroniques interagissent avec leur environnement. Ils présentent une certaine sensibilité aux phénomènes qui les concernent, et les perturbent à leur tour. L'utilisation croissante des appareils électriques et électroniques, et l'usage de plus en plus répandu de systèmes de traitement d'information utilisant des signaux de faible énergie, et de ce fait sensibles aux perturbations, a rendu nécessaire une approche nouvelle de cette problématique. Celle-ci est fondée sur les bases suivantes :

- Les ressources technologiques nécessaires aux différentes activités humaines (activités économiques au sens large) doivent pouvoir fonctionner simultanément, dans de bonnes conditions de sécurité et de confort.
- L'objectif fondamental ne peut être atteint sans que des dispositifs techniques ne soient mis en oeuvre, tant pour limiter la gêne que provoque l'usage d'un appareil ou d'une installation, que pour protéger chaque appareil des effets néfastes des autres. Ces dispositifs présentent un coût supplémentaire pour les produits, et donc une pénalité sur le plan commercial. Il était donc nécessaire d'instaurer un régime équitable en adoptant des mesures contraignantes qui s'appliquent à tous.

Ces dernières années, nous assistons à une diffusion rapide et diversifiée des équipements intégrant de l'électronique de puissance, tant dans le domaine professionnel et militaire (variation de vitesse, chauffage, contrôle de l'énergie) que « grand public » (domestique, automobile, ordinateurs, etc.).

L'électronique de puissance utilise les semi-conducteurs de puissance en mode interrupteur. Ce fonctionnement confère au convertisseur un rendement très élevé ; par contre, il donne lieu à de nombreuses perturbations électromagnétiques dues essentiellement aux commutations rapides des semi-conducteurs. Les perturbations se propagent vers la source d'alimentation du convertisseur et vers la charge qu'il alimente et une partie de cette énergie est rayonnée.

Vu le rôle que tiennent ces dispositifs, surtout en tant qu'équipements électriques embarqués de contrôle et commande, les normes d'émissivité ont été rendues progressivement plus sévères. Ces contraintes ont amené les industriels des dispositifs de l'électronique de puissance à envisager ces aspects dès la conception de leurs équipements. Puis, l'intérêt a semblé quelque peu s'émousser, car des solutions essentiellement basées sur un renforcement des fonctions de filtrage et de blindage ont été adoptées. Il est apparu plus simple de filtrer globalement que de concevoir selon des critères minimisant les perturbations électromagnétiques.

Ce type de solution a toutefois dégradé la compacité et le coût des systèmes. Cependant, comme dans bien d'autres domaines, l'intérêt de pouvoir simuler le comportement d'un convertisseur en terme de CEM a toujours été très fort. De nos jours, l'intérêt pour la CEM est à nouveau d'actualité. En effet, de nombreux convertisseurs commutent directement sur le réseau (absorbeur sinusoïdal, convertisseurs pour éclairage, etc.). Le respect des normes requiert alors des filtres plus complexes, donc volumineux et coûteux. La conception intégrant les critères CEM s'affirme d'autant plus nécessaire. Notre travail de thèse de doctorat nous le situons à ce niveau et nous le consacrons à la modélisation du phénomène de rayonnement électromagnétique de ces dispositifs avec l'objectif de proposer des modèles mathématiques simplifiés et adaptés à la nature du problème traité.

Avec le développement des calculateurs et des techniques numériques, la modélisation du problème de rayonnement électromagnétique d'une antenne (1D, 2D et 3D) en domaine fréquentiel est maîtrisée depuis pratiquement une vingtaine d'années ; pour les spécialistes du rayonnement électromagnétique, l'élargissement du formalisme des antennes (résolution d'une équation intégrale par la méthode numérique dite des moments) à des dispositifs tel que les dispositifs de l'électronique de puissance a été réalisé sans grandes difficultés. En effet, dans ces dispositifs les pistes (ou les bus bars) sont les principales responsables de l'émission électromagnétique ; leurs natures géométriques permettent une modélisation aisée en régime fréquentiel par le formalisme des antennes. Afin de simuler l'émission électromagnétique des dispositifs de l'électronique de puissance quelques logiciels (FEKO, NEC....) sont déjà commercialisés et permettent une analyse uniquement en domaine fréquentiel.

Plus récemment l'approche temporelle qui consiste en la résolution des équations de Maxwell par la technique numérique dite FDTD a été appliquée pour la modélisation de l'émission électromagnétique des dispositifs de l'électronique de puissance. Cette approche est réalisée avec prise en compte de frontières ouvertes.

Le formalisme des antennes bien que très rigoureux, reste de mise en œuvre délicate, très prohibitif en temps de calcul et surtout dédié à une analyse en domaine fréquentiel, ce qui ne permet pas de tenir compte du fonctionnement réel des interrupteurs. La résolution des équations de Maxwell par FDTD est par contre mieux adaptée à une analyse temporelle, car elle permet la prise en compte des non linéarités. Ses résultats restent tributaires d'un choix convenable des pas de discrétisations aussi bien spatiale que temporelle, de la limite des frontières ouvertes ainsi que des conditions imposées sur ces dernières.

Dans notre travail nous avons essayé une autre voie qui est de type analytique en domaine fréquentiel et numérique-analytique en domaine temporel.

En domaine fréquentiel, nous pouvons affirmer que notre proposition conduit à des résultats très concordant avec le formalisme des antennes ; le formalisme de Schelkunoff associé à celui des dipôles Hertiens en domaine fréquentiel nous ont bien permis de calculer le champ électromagnétique émis en haute fréquence par les pistes d'un dispositif de l'électronique de puissance. En domaine temporel, nous avons confrontés les deux approches (résolution des équations de Maxwell par FDTD et calcul du champ électromagnétique par la méthode des dipôles) et nous avons bien constater une excellente concordance des résultats ainsi obtenus ; nous pouvons affirmer que l'approche de calcul de la répartition des courants par la théorie des lignes couplées conduit à des résultats plus en adéquation avec la mesure du point de vue forme car ne perdant pas de vue que le champ électromagnétique est une image du courant.

Pour la réduction du champ magnétique, qui est généralement responsable des perturbations par induction, nous avons testé deux approches. La première, classique, consiste à trouver la disposition géométrique optimale des composants qui conduit à un champ minimale. La deuxième que nous proposons, utilisant le principe de Lenz qui dit que les courants induits s'opposent à l'effet qui leurs donnent naissances, consiste en l'introduction d'une boucle conductrice et passive conduit à des résultats forts intéressants. Cette deuxième voie, sans pratiquement aucune incidence en terme de coût, est envisageable si l'encombrement le permet bien sûr. Les concepteurs des circuits de l'électronique de puissance, doivent à notre avis s'investir sur la voie qui consiste à combiner les deux stratégies pour une amélioration de la CEM de leurs dispositifs.

Actuellement, le concepteur d'un convertisseur statique est soumis au dilemme perturbations-pertes : la minimisation des pertes par commutation conduit à faire commuter les interrupteurs très rapidement, mais cela accroît les dv/dt et di/dt , donc les perturbations électromagnétiques. Il en résulte que, si le volume du dissipateur diminue, celui des filtres augmente. En perspective de ce travail, il serait intéressant de s'intéresser au compromis optimal en terme de volume du système qui doit intégrer la technologie des semi-conducteurs et des composants passifs ainsi que d'autres paramètres qui influent sur ce compromis, comme par exemple la fréquence de découpage.

Annexes

I.1. Schéma des différences finies

La technique numérique des différences finies est utilisée pour la résolution des équations différentielles. Elle consiste à approximer des dérivées par des différences finies [V.3]. En considérant une fonction $f(x)$ comme la montre la figure A1.1,

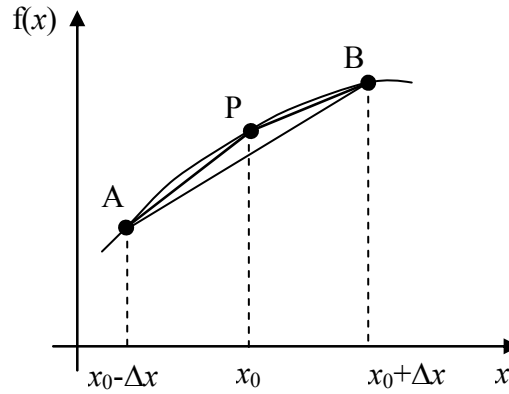


Figure A1.1. Illustration de la dérivée de $f(x)$ par des différences finies.

nous pouvons approximer la dérivée de $f(x)$ en utilisant la tangente de l'arc PB au point P par une différence finie avant (forward-difference) exprimée comme suit :

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (\text{A1.1})$$

Ou par la tangente de l'arc AP, en utilisant une différence finie arrière (Backward-difference) exprimée comme suit :

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \quad (\text{A1.2})$$

En utilisant une différence finie centrée (central-difference), on peut aussi approximer la dérivée de $f(x)$ par la tangente de l'arc AB au point P qui s'exprime comme suit :

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (\text{A1.3})$$

De la même manière on peut aussi donner une approximation de la deuxième dérivée de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x_0) &\cong \frac{f'(x_0 + \Delta x/2) - f'(x_0 - \Delta x/2)}{\Delta x} \\ &\cong \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \right] \\ &\cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (\text{A1.4})$$

Une approximation plus générale est basée sur l'utilisation de développement en séries de Taylor [II.2].

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_0) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_0) + \dots \quad (A1.5)$$

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - \Delta x f'(x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_0) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_0) + \dots \quad (A1.6)$$

A partir de ces deux expressions, les dérivées d'une fonction quelconque $f(x)$ peuvent être approximées comme suit :

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (A1.7)$$

$$f''(x_0) \cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^2 \quad (A1.8)$$

Où :

$O(\Delta x)^2$: représente le terme d'erreur d'approximation.

Nous remarquons que la première et la deuxième dérivée de $f(x)$, données par les expressions (A1.7) et (A1.8) respectivement, sont approximées avec un terme erreur du deuxième ordre. En pratique, une approximation plus exacte peut être obtenue en prenant les termes d'ordre supérieur dans le développement de Taylor. Malheureusement, la mise en oeuvre de cette solution est délicate, pour cette raison, le développement de Taylor est tronqué au deuxième ordre.

En appliquant la méthode des différences finies pour déterminer la solution d'une fonction $f(x, t)$ à deux variables indépendantes x et t , nous opérons une discrétisation du plan défini par x et t à des rectangles de cotes Δx et Δt respectivement. La figure A1.2 illustre le schéma de discrétisation.

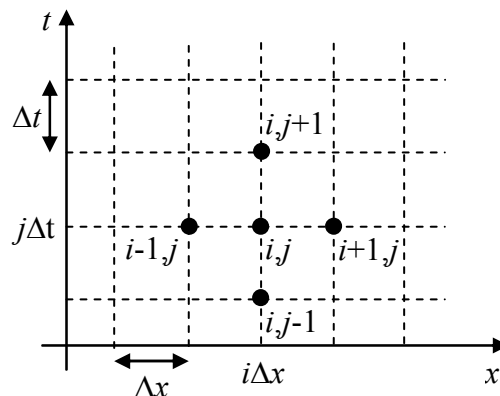


Figure A1.2. Schéma de discrétisation pour deux variables indépendantes x et t .

En utilisant ce schéma de discrétisation, nous pouvons obtenir les dérivées par rapport à x et à t respectivement :

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \cong \frac{f(i+1, j) - f(i-1, j)}{2\Delta x} \quad (\text{A1.9})$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \cong \frac{f(i, j+1) - f(i, j-1)}{2\Delta t} \quad (\text{A1.10})$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \cong \frac{f(i+1, j) - 2f(i, j) + f(i-1, j)}{\Delta x^2} \quad (\text{A1.11})$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} \cong \frac{f(i, j+1) - 2f(i, j) + f(i, j-1)}{\Delta t^2} \quad (\text{A1.12})$$

I. Formalisme des antennes

Dans ce paragraphe, nous donnons un bref aperçu sur l'équation intégral-différentielle pour une antenne filiforme et sa résolution par la méthode des moments. Soit une antenne cylindrique de rayon a et de longueur ℓ (figure A2.1) située dans l'espace libre (air).

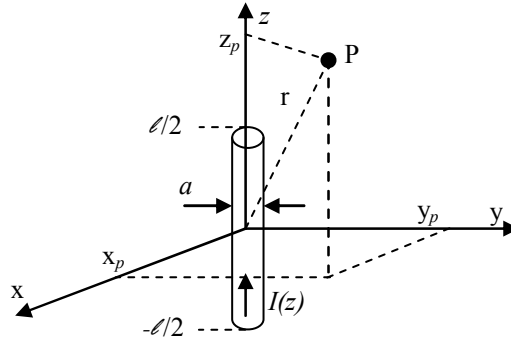


Figure A2.1. Illustration d'une antenne filiforme en espace libre.

En considérant l'approximation des fils minces, le courant à une seule direction de propagation, la composante E_z du champ électrique est donné en fonction de potentiel vecteur magnétique A_z et du potentiel scalaire V par l'expression (A2.1):

$$E_z = -j\omega A_z - \frac{\partial V}{\partial z} \quad (\text{A2.1})$$

En utilisant la jauge de Lorentz [V.9], l'expression de la composante E_z s'écrit sous la forme (A2.2):

$$E_z = -j\omega \left(1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_z \quad (\text{A2.2})$$

avec : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Pour cette antenne (figure A2.1), le potentiel vecteur magnétique est donné [V.9] par l'expression suivante (A2.3):

$$A_z = \mu \int_{-\ell/2}^{\ell/2} I(z') \cdot G(z, z') dz' \quad (\text{A2.3})$$

avec :

$G(z, z')$: la fonction de Green dans l'espace libre.

$$G(z, z') = \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} \quad (\text{A2.4})$$

r : le rayon d'observation.

En remplaçant le potentiel vecteur par son expression (A2.3), l'expression du champ électrique devient comme suit (A2.5):

$$E_z = -j\omega\mu \left(1 + \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{dz^2} \right) \int_{-\ell/2}^{\ell/2} I(z') \cdot G(z, z') dz' \quad (\text{A2.5})$$

La résolution de cette équation intégral-différentielle n'est pas aisée, car elle nécessite l'évaluation de la deuxième dérivée spatiale de l'intégrale. Pour cette raison, deux arrangements de cette équation sont proposés ; Hallen [V.7] propose une équation en potentiel vecteur magnétique et Pocklington [V.7] une écriture en champ électrique. La résolution de l'une de ces deux équations nous permet le calcul de la distribution des courant le long de l'antenne et en conséquence de déduire le champ électromagnétique.

Remarque : En présence d'une interface (exemple : sol/air), la fonction de Green doit être corrigée [V.7].

I.1. Equation intégral-différentielle de Hallen

Hallen propose d'écrire l'équation (A2.5) sous la forme [V.7]:

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F(z) = k^2 S(z) \quad \text{et} \quad -\ell/2 < z < \ell/2 \quad (\text{A2.6})$$

avec:

$$F(z) = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} I(z') \cdot G(z, z') dz' \quad (\text{A2.7})$$

$$S(z) = -\frac{E_z}{j\omega\mu} \quad (\text{A2.8})$$

L'expression (A2.6) représente une équation différentielle de deuxième ordre, sa solution générale est la somme de deux termes (la solution homogène et la solution particulière).

L'avantage majeur de l'équation intégral-différentielle de Hallen est la convergence de la solution, tandis que son inconvénient le plus retenu est le travail supplémentaire pour la détermination des constantes d'intégration de la solution homogène [V.7].

I.2. Equation intégral-différentielle de Pocklington

En introduisant le noyau (opérateur entre parenthèses de l'équation (A2.5)) à l'intérieur de l'intégrale, nous obtenons l'équation intégral-différentielle de Pocklington (A2.9) :

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} I(z') \cdot \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G(z, z') dz' = j\omega\epsilon E_z \quad (\text{A2.9})$$

avec :

E_z : représente la source d'excitation

La résolution de cette équation par une méthode numérique appropriée nous permet de déterminer la distribution du courant le long de l'antenne.

I.3. résolution numérique de l'équation intégral-différentielle

Dans ce paragraphe, nous décrivons succinctement la résolution de l'équation intégral-différentielle définie précédemment (A2.9); la technique utilisée classiquement pour ce type d'équation est la méthode des moments, qui permet de transformer cette dernière en un système d'équations linéaires. La distribution du courant le long de l'antenne représentant l'inconnue du système et approximée par un ensemble de fonctions de bases $u(z)$ et de coefficients d'amplitudes inconnues I_n comme suit :

$$I(z) = \sum_{n=1}^N I_n u_n(z) \quad (\text{A2.10})$$

avec :

N : le nombre des fonctions de bases

I_n : coefficient inconnu (représente le courant sur le segment n).

Les fonctions de bases sont linéairement indépendantes, elles se divisent en deux grandes familles:

1. les fonctions continues : sont définies sur tout le domaine de l'inconnue $(-\ell/2 < z < \ell/2)$,

les exemples couramment utilisés sont [V.8] :

a. Fonction de Fourier

$$u_n(z) = \cos(n-1) \frac{v}{2} \quad (\text{A2.11})$$

b. Fonction de Chebychev

$$u_n(z) = T_{2n-2}(v) \quad (\text{A2.12})$$

c. Fonction de Maclaurin

$$u_n(z) = v^{2n-2} \quad (\text{A2.13})$$

d. Fonction de Legendre

$$u_n(z) = P_{2n-2}(v) \quad (\text{A2.14})$$

e. Fonction de Hermite

$$u_n(z) = H_{2n-2}(v) \quad (\text{A2.15})$$

avec : $v = 2z / \ell$

2. les fonctions discontinues: sont définies seulement sur une subdivision du domaine de discrétisation, les exemples communément utilisés sont [V.8] :

a. Fonction impulsionnelle

$$u_n(z) = \begin{cases} 1, & z_{n-1/2} < z < z_{n+1/2} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{A2.16})$$

b. Fonction triangulaire

$$u_n(z) = \begin{cases} \frac{\Delta - |z - z_n|}{\Delta}, & z_{n-1} < z < z_{n+1} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{A2.17})$$

c. Fonction sinusoïdale

$$u_n(z) = \begin{cases} \frac{\sin k(z - |z - z_n|)}{\sin k\Delta}, & z_{n-1} < z < z_{n+1} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{A2.18})$$

avec : $\Delta = \ell / N$

Nous notons que l'utilisation des fonctions continues est limitée du fait qu'elles nécessitent des connaissances préalables de comportement de la fonction inconnue. Les fonctions discontinues sont les plus utilisées pour leurs simplicités de mise en œuvre. Pour cette raison, nous exposons dans le paragraphe suivant un aperçu sur la résolution de l'équation intégral-différentielle de Pocklington en utilisant des fonctions de base discontinues.

En remplaçant le courant par son approximation (A2.10), dans l'équation de Pocklington (A2.9), nous obtenons :

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \sum_{n=1}^N I_n u_n(z') \cdot K(z_m, z') dz' \cong E_z(z_m) \quad (\text{A2.19})$$

avec :

$$K(z_m, z') = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G(z_m, z') \quad (\text{A2.20})$$

le noyau pour $z = z_m$ sur le segment m du dipôle où l'équation intégral-différentielle est forcée.

L'équation (A2.19) peut s'écrire alors comme suit :

$$\sum_{n=1}^N I_n \int_{\Delta z_n} K(z_m, z') \cdot u_n(z') dz' \cong E_z(z_m) \quad (\text{A2.21})$$

Pour déterminer la distribution du courant en chaque point n ($n = 1, 2, \dots, N$), nous devons écrire N équations (intégration par la méthode de Galerkin) à partir de l'expression (A2.21). Ces équations peuvent être déduites en multipliant cette dernière (A2.21) par les

fonctions poids w_n ($n = 1, 2, \dots, N$), et nous effectuons l'intégrale sur la longueur du dipôle, ce qui nous permet de construire le système d'équation suivant :

$$\begin{bmatrix} \langle \omega_1, g_1 \rangle & \cdots & \langle \omega_1, g_N \rangle \\ \langle \omega_2, g_1 \rangle & \cdots & \langle \omega_2, g_N \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \omega_N, g_1 \rangle & \cdots & \langle \omega_N, g_N \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \omega_1, E_{z1} \rangle \\ \langle \omega_2, E_{z2} \rangle \\ \vdots \\ \langle \omega_N, E_{zN} \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{A2.22})$$

avec :

$$z_{mn} = \langle \omega_n, g_m \rangle \quad (\text{A2.23})$$

$$V_m = \langle \omega_m, E_z \rangle \quad (\text{A2.24})$$

$$g_m = \int_{\Delta z'_n} K(z_m, z') u_n(z') dz' \quad (\text{A2.25})$$

Par analogie avec les lois de l'électricité (loi d'Ohm) ce système d'équations peut être écrit sous la forme :

$$[Z][I] = [V] \quad (\text{A2.26})$$

avec :

$[Z]$: la matrice d'impédance généralisée

$[I]$: le vecteur des courants qui représente l'inconnu du système

$[V]$: le vecteur des tensions

Dans la pratique, le choix des fonctions poids n'est pas facile ; Galerkin a montré qu'il est possible de choisir des fonctions poids égales aux fonctions de bases [V.8], ce qui conduit à un système matriciel carré. Le choix des fonctions poids égales à des impulsions de Dirac est connu sous le nom de la méthode de colocation ou point matching method [V.8] et permet une nette simplification de la résolution de cette dernière.