



**HAL**  
open science

# Monodromy of non-selfadjoint operators

Quang Sang Phan

► **To cite this version:**

Quang Sang Phan. Monodromy of non-selfadjoint operators. Spectral Theory [math.SP]. Université Rennes 1, 2012. English. NNT : 2012REN1S021 . tel-00730517

**HAL Id: tel-00730517**

**<https://theses.hal.science/tel-00730517>**

Submitted on 10 Sep 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

pour le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

*Mention : Mathématiques et Applications*

**Ecole doctorale MATISSE**

présentée par

**Quang Sang PHAN**

préparée à l'UMR 6625- IRMAR  
Institut de Recherche Mathématique de Rennes  
U.F.R. Mathématiques

---

**Monodromie spectrale  
d'opérateurs  
non auto-adjoints**

**Thèse soutenue à Rennes**

**le 28 juin 2012**

devant le jury composé de :

**San VU NGOC**

Professeur, Université de Rennes 1/  
directeur de thèse

**Hendrik BROER**

Professeur, Université de Groningen (Pays-Bas) /  
rapporteur

**Stéphane NONNENMACHER**

Ingénieur-chercheur, CEA Saclay/rapporteur

**Francis NIER**

Professeur, Université de Rennes 1/examineur

**Gueorgui POPOV**

Professeur, Université de Nantes/examineur

## REMERCIEMENTS

En préambule à ma thèse, je souhaiterais adresser mes remerciements les plus sincères et ma grande reconnaissance aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de cette thèse.

En premier lieu, je voudrais remercier sincèrement San Vu Ngoc, qui a dirigé et corrigé mon travail. J'ai eu l'occasion de profiter de ses nombreuses idées et de ses techniques mathématiques pendant la durée de ma thèse.

J'aimerais exprimer mes remerciements sincères à Hendrik Broer et Stéphane Nonnenmacher, pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse.

Mes remerciements s'adressent également à Gueorgui Popov, Francis Nier et Christophe Cherverry pour avoir bien voulu participer à mon jury.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements ma famille et à tous mes amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de cette thèse.

Merci à toutes et à tous.



**Quang Sang PHAN**

---

**MONODROMIE SPECTRALE  
D'OPÉRATEURS NON AUTO-ADJOINTS**

---

*Quang Sang PHAN*

*28 juin 2012*

# MONODROMIE SPECTRALE D'OPÉRATEURS NON AUTO-ADJOINTS

Quang Sang PHAN

**Résumé.** — Nous proposons de construire dans cette thèse un invariant combinatoire, appelée la "monodromie spectrale" à partir du spectre d'un seul opérateur  $h$ -pseudo-différentiel (non auto-adjoint) à deux degrés de liberté dans la limite semi-classique.

Notre inspiration est issue de la monodromie quantique qui est définie pour le spectre conjoint d'un système intégrable de  $n$  opérateurs  $h$ -pseudo-différentiels auto-adjoints qui commutent, donnée par S. Vu Ngoc.

Le premier cas simple traité dans ce travail est celui d'un opérateur normal. Dans ce cas, son spectre discret peut être identifié au spectre conjoint d'un système quantique intégrable.

Le deuxième cas plus complexe que nous proposons est une petite perturbation d'un opérateur auto-adjoint en supposant une propriété d'intégrabilité classique. Nous montrons que son spectre discret (dans une petite bande autour de l'axe réel) possède également une monodromie combinatoire. La difficulté ici est qu'on ne connaît pas la description du spectre partout, mais seulement dans un ensemble de type Cantor. De plus, nous montrons aussi que cette monodromie peut être identifiée à la monodromie classique (qui est définie par J. Duistermaat). Ce sont les résultats principaux de cette thèse.

## **Abstract**

We propose to build in this thesis a combinatorial invariant, called the "spectral monodromy" from the spectrum of a single (non-selfadjoint)  $h$ -pseudodifferential operator with two degrees of freedom in the semi-classical limit.

Our inspiration comes from the quantum monodromy defined for the joint spectrum of an integrable system of  $n$  commuting self-adjoint  $h$ -pseudodifferential operators, given by S. Vu Ngoc.

The first simple case that we treat in this work is a normal operator. In this case, the discrete spectrum can be identified with the joint spectrum of an integrable quantum system.

The second more complex case we propose is a small perturbation of a selfadjoint operator with a classical integrability property. We show that the discrete spectrum (in a small band around the real axis) also has a combinatorial monodromy. The difficulty here is that we do not know the description of the spectrum everywhere, but only in a Cantor type set. In addition, we also show that the monodromy can be identified with the classical monodromy (which is defined by J. Duistermaat). These are the main results of this thesis.





## TABLE DES MATIÈRES

<b>1. Introduction</b> .....	1
1.1. Mécanique classique et mécanique quantique .....	1
1.2. La limite semi-classique .....	2
1.3. Cadre général .....	3
1.4. Monodromie d'un opérateur $h$ -pseudo différentiel non auto-adjoint .....	3
1.5. Pourquoi étudier des opérateurs non auto-adjoints ? .....	6
<b>2. Géométrie symplectique et Monodromie classique</b> .....	9
2.1. Introduction .....	9
2.2. Géométrie symplectique. ....	9
2.3. Mécanique classique .....	11
2.4. Système intégrable .....	12
2.5. Monodromie classique .....	14
<b>3. Monodromie quantique et Monodromie spectrale affine</b> .....	23
3.1. Introduction .....	23
3.2. Opérateur pseudo-différentiel .....	23
3.3. Monodromie quantique .....	25
3.4. Théorie spectrale .....	31
3.5. Monodromie d'un opérateur pseudo-différentiel normal .....	37
<b>4. Monodromie spectrale linéaire : le cas classiquement intégrable</b> .....	43
4.1. Introduction .....	43
4.2. Asymptotique Spectrale .....	44
4.3. Forme normale de Birkhoff .....	53
4.4. Opérateur $P_\varepsilon = P + i\varepsilon Q$ , le cas $\{p, q\} = 0$ .....	60
4.5. Construction de la monodromie d'un pseudo-réseau asymptotique .....	65
4.6. Monodromie spectrale linéaire .....	72
<b>Bibliographie</b> .....	73



# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

### 1.1. Mécanique classique et mécanique quantique

Sur la voie du développement historique de la physique, à partir du début du XX-ième siècle, les physiciens ont reconnu deux propriétés fondamentales de la matière et de la lumière. Ce sont la nature corpusculaire et la nature ondulatoire. Il est souvent résumé par le terme de "dualité onde-corpuscule" pour la matière et la lumière. Tandis que la nature corpusculaire est étudiée par la mécanique classique (la dynamique des corpuscules), la nature ondulatoire fut l'origine de la naissance de la mécanique quantique (la dynamique des ondes).

La mécanique newtonienne est une branche de la physique qui a une longue histoire avec des grands noms tels que Euler, Cauchy, Lagrange, Newton, Einstein, Hamilton... Depuis les travaux d'Albert Einstein au début du XX-ième siècle, elle est souvent qualifiée de mécanique classique. Dans la mécanique classique, les objets se déplacent selon une vitesse donnée, avec une position et une masse connues.

La mécanique classique ou mécanique newtonienne est comprise comme le domaine de la physique qui a pour objet l'étude du mouvement des objets macroscopiques lorsque leur vitesse est très inférieure à celle de la lumière.

Un autre formalisme de la mécanique classique a été donné d'abord par Lagrange et puis par Hamilton, Poisson... C'est une approche différente de la mécanique classique "de façon analytique" qui est en général équivalente à celle de Newton.

Dans la formulation hamiltonienne de la mécanique classique, chaque particule (un point matériel) est décrite par des relations (des équations) entre sa position et sa vitesse. L'espace des positions et des vitesses ou l'espace des phases, sous la forme moderne, mathématiquement est une variété symplectique  $M$ . C'est à dire une variété différentielle munie d'une forme symplectique  $\omega$  ( $\omega$  est une 2- forme différentielle fermée et non-dégénérée). Pour une introduction à la géométrie symplectique, on peut consulter [105], [106], [44], [7].

Chaque point de l'espace des phases  $m \in M$  représente un état du système et une observable est une fonction  $f$  à valeurs réelles, définie sur l'espace des phases. Dans cet espace, la dynamique d'une particule est donnée par l'équation de Hamilton. Soit une fonction numérique  $H \in C^\infty(M)$  (un hamiltonien), on définit le champs hamiltonien associé  $\chi_H$  par

$$\omega(\chi_H, \cdot) = -dH.$$

Ce champ de vitesse définit un système dynamique  $t \mapsto m(t)$  sur  $M$  par l'équation hamiltonienne

$$\frac{dm(t)}{dt} = \chi_H(m(t)).$$

Par exemple, si on prend : l'espace des phases est l'espace cotangent  $T^*\mathbb{R}^n$ , l'hamiltonien  $H(x, \xi) = \frac{\xi^2}{2m} + V(x)$  est une fonction numérique, alors l'équation hamiltonienne devient :

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_j}, \quad \frac{d\xi_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}. \quad (1)$$

Pour plus de détails de la mécanique classique, nous vous conseillons les références [5], [6], [1], [68], [4].

La mécanique quantique est née au début du XX-ième siècle et s'est développée pour résoudre des problèmes que la mécanique classique ne pouvait pas expliquer comme l'effet photo-électrique, les fentes de Young, ou le rayonnement du corps noir... Plusieurs noms lui sont associés, les premiers furent Max Planck et Albert Einstein et ensuite Arnold Sommerfeld, Niels Bohr, Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger...

Elle permet notamment de comprendre le comportement des particules élémentaires et d'élucider le mystère de la structure des atomes et des molécules.

La mécanique quantique devient une branche de la physique qui a pour but d'étudier et de décrire les phénomènes fondamentaux dans les systèmes physiques, plus particulièrement à l'échelle atomique et subatomique. C'est aussi la partie de la physique où apparaît la petite constante de Planck. Pour plus de détail sur le développement de mécanique quantique, voir [73], [103].

Le fait radical ici est la reconnaissance de nature ondulatoire de la matière. Les particules (atomes...) sont associées à des ondes ou fonctions d'ondes.

Dans la formulation mathématique actuelle de la mécanique quantique, l'espace des ondes est un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  (par exemple  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ ) dont chaque vecteur est une fonction d'onde. Une telle fonction d'onde non nulle engendre un sous-espace vectoriel de dimension 1 qui représente un état du système.

L'équation fondamentale de la mécanique quantique qui remplace l'équation de Newton est l'équation de Schrödinger.

Par exemple, sur l'espace des ondes  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ , nous notons l'opérateur laplacien  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ .

Lorsque la particule de masse  $m$  subit l'action d'un potentiel  $V(x)$ , sa fonction d'onde  $\psi(x, t)$  vérifie l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \widehat{H} \psi(x, t), \quad (2)$$

où  $\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V$  et  $\hbar$  est la constante de Planck.

Une observable (l'observation de l'état du système) est un opérateur auto-adjoint, pas nécessairement borné sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Ainsi la mécanique quantique (non-relativiste) revient à l'étude d'opérateurs sur des espaces de Hilbert qui est le centre de la théorie spectrale.

Pour des généralités sur la mécanique quantique, nous vous conseillons [67], [43], [69], [12]. En particulier, le livre de S. Vu Ngoc [103] donne un bon panorama complet sur la mécanique classique, la mécanique quantique ainsi que l'analyse semi-classique.

## 1.2. La limite semi-classique

La mécanique classique et la mécanique quantique, malgré leur différence radicale, ne sont pas séparées. La quantification est une méthode mathématique qui nous permet d'associer, à chaque système classique, un système quantique. Par exemple :  $(M, \omega)$  une variété symplectique, un point  $x \in M$ , l'algèbre  $C^\infty(M)$ , le crochet de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}$ , l'équation de Hamilton (1)...en mécanique

classique sont respectivement associés à un espace de Hilbert  $\mathcal{H} \subset L^2(X)$  (avec  $X$  est une variété), un vecteur  $\psi \in \mathcal{H}$ , l'algèbre d'opérateurs sur  $\mathcal{H}$ , le commutateur  $[\cdot, \cdot]$ , l'équation de Schrödinger (2)...en mécanique quantique.

Une telle théorie mathématique doit naturellement accepter la mécanique classique comme la limite de la mécanique quantique lorsque un petit paramètre  $h$  tend vers 0 (la constante de Planck  $h$  est considérée comme très petite). L'idée est que les développements asymptotiques lorsque  $h \rightarrow 0$  donnent une approximation réaliste des systèmes quantiques. On parle ainsi de la limite semi-classique de la mécanique quantique. C'est le principe de l'analyse semi-classique. Grâce à l'analyse semi-classique, on peut récupérer des résultats quantiques (qui sont souvent difficile à comprendre) à partir des résultats classiques. C'est une théorie mathématique très utile et puissante. L'analyse semi-classique actuelle utilise principalement les outils d'analyse asymptotique, la théorie des opérateurs pseudo-différentiels et opérateurs intégraux de Fourier.

Pour l'histoire de l'analyse semi-classique, voir [53], [103]. Pour la généralité, nous vous conseillons les livres très intéressants [70], [41], [95], [97] et pour un peu plus fond sur l'analyse semi-classique, on peut lire les bons livres [83],[86], [49], [50], [32].

### 1.3. Cadre général

Le travail de cette thèse s'inscrit dans le cadre de la théorie spectrale en limite semi-classique. Il a pour objectif de comprendre la structure du spectre de certaines classes d'opérateurs non auto-adjoints. C'est vraiment un problème quantique que nous traiterons avec l'aide des techniques semi-classiques en combinant avec la théorie spectrale générale et la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. La théorie spectrale des opérateurs pseudo-différentiels (en particulier non auto-adjoints) est actuellement beaucoup étudiée avec les travaux de J.Sjöstrand, M.Hitrik, F. Hérau, S. Vu Ngoc, N. Anantharaman... (voir par exemple [60], [56], [58], [92], [31]...).

Bien sûr, dans ce travail, comme une "nécessité philosophique" de l'analyse semi-classique (voir [103]), nous ferons le lien avec des résultats classiques qui éclairent le problème quantique initial.

***Théorème 1.3.1 (Théorème 4.6.2).*** — *La monodromie spectrale linéaire est l'adjoint de la monodromie classique linéaire*

$$[\mathcal{M}_{sp}] = {}^t[\mathcal{M}_{cl}]^{-1}.$$

Pour plus de détails de cette idée dans ma thèse, voir la section 4.6.1.

### 1.4. Monodromie d'un opérateur $h$ -pseudo différentiel non auto-adjoint

Plus explicitement, dans cette thèse, nous proposons de construire un nouvel objet caractéristique de la structure du spectre d'un opérateur  $h$ -pseudo différentiel non auto-adjoint dans la limite semi-classique.

Notre inspiration est issue de la monodromie quantique qui est définie pour le spectre conjoint (voir la section 3.3.3 pour plus de détails) d'un système de  $n$  opérateurs pseudo-différentiels qui commutent (i.e. un système quantique complètement intégrable). C'est un invariant quantique donné par S. Vu Ngoc [99]([102]).

**Définition 1.4.1.** — Le spectre conjoint du système quantique intégrable de  $n$  degrés de liberté  $(P_1(h), \dots, P_n(h))$  dans  $K \subset \mathbb{R}^n$  est l'ensemble, noté  $\sigma_{conj}(P_1, \dots, P_n)$  :

$$\sigma_{conj}(P_1(h), \dots, P_n(h)) = \{(E_1(h), \dots, E_n(h)) \in K \mid \bigcap_{j=1}^n Ker(P_j(h) - E_j(h)) \neq \emptyset\}$$

Sous certaine condition, ce spectre conjoint sur un domaine  $U$  ( $K := \overline{U}$ ) de valeurs régulières de l'application des symboles principaux est un réseau asymptotique affine dans le sens qu'il existe un symbole inversible, noté  $f_\alpha$  de toute petite boule  $B_\alpha \subset U$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui envoie le spectre conjoint sur une partie de  $\mathbb{Z}^n$ . Ces  $(f_\alpha, B_\alpha)$  sont considérés comme des cartes locales de  $U$  dont les fonctions de transition (modulo  $\mathcal{O}(h^\infty)$ ), notées  $A_{\alpha\beta}$  sont dans le groupe affine  $GA(n, \mathbb{Z})$  (voir le théorème 3.3.2). La monodromie quantique est définie comme le 1-cocycle  $\{A_{\alpha\beta}\}$  modulo-cobord dans la cohomologie de Čech  $\check{H}^1(U, GA(n, \mathbb{Z}))$ .

Pour plus de détails de cette monodromie, on peut consulter l'article [99] ou la section (3.3) de cette thèse.

Depuis ces travaux, une question mystérieuse reste ouverte : Peut-on définir (et détecter) un tel invariant pour un seul opérateur  $h$ -pseudo-différentiel ? Si c'est le cas, nous l'appellerons "la monodromie spectrale".

D'un point de vue géométrique, puisque le spectre conjoint d'un système quantique intégrable est un réseau asymptotique affine (un résultat de Charbonnel [20]), si on réalise le transport parallèle sur le réseau d'un rectangle de base avec un sommet  $c$  le long d'un certain chemin fermé  $\gamma_c$  (de base  $c$ ) et revient au point de départ, alors le rectangle initial peut devenir un rectangle différent. Dans la figure ci-dessous, on observe un réseau qui est localement identifiable mais globalement non trivial. C'est l'existence de monodromie quantique. Par contre le spectre d'un opérateur auto-adjoint étant contenu dans une droite (l'axe réel), il paraît impossible de définir un tel transport parallèle. Nous ne savons pas définir une monodromie dans ce cas -là. Alors il nous semble que la question n'est pas connue dans le cas auto-adjoint.

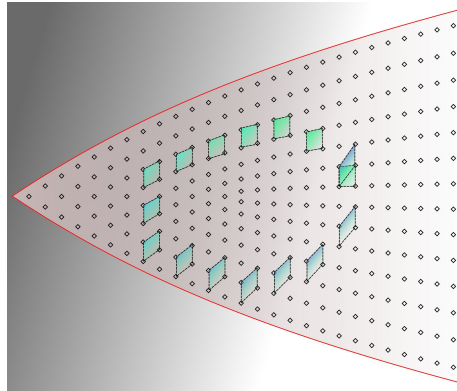


Figure 1. Spectre conjoint du pendule sphérique avec monodromie  
(Image de S. Vu Ngoc)

Cependant, si on perturbe un opérateur auto-adjoint par un terme non-symétrique, le spectre devient bidimensionnel, et on peut espérer retrouver une structure géométrique (réseau, monodromie...). Nous proposerons dans cette thèse d'appliquer cette idée à certaines classes d'opérateurs  $h$ -pseudo différentiels à deux degrés de liberté.

**1.4.1. Le premier cas.** — Le premier cas simple que nous proposons dans le chapitre 3 est un opérateur  $h$ -pseudo différentiel de la forme  $P_1 + iP_2$  avec deux opérateurs autoadjoints  $P_1, P_2$  qui commutent. C'est la forme d'un opérateur normal. Grâce à un résultat spectral montré dans la

chapitre 3 : le spectre discret de  $P_1 + iP_2$  est identifié au spectre conjoint du système quantique intégrable  $(P_1, P_2)$  (voir les théorèmes 3.5.12 et 3.5.11).

**Théorème 1.4.2 (Théorème 3.5.12).** — Soient  $A$  un opérateur normal et  $I_1, I_2$  deux intervalles quelconques de  $\mathbb{R}$  tels que le spectre de  $A$  dans  $I_1 \times I_2$  est discret. On appelle la partie réelle et la partie imaginaire de  $A$  par  $A_1$  et  $A_2$ . Alors on a :

$$\sigma(A) \cap (I_1 + iI_2) \cong \sigma_{conj}(A_1, A_2) \cap (I_1 \times I_2).$$

On peut simplement définir la monodromie de l'opérateur  $P_1 + iP_2$  comme la monodromie quantique du spectre conjoint. Pour plus de détails, voir la section (3.5.3).

**1.4.2. Le deuxième cas.** — Le deuxième cas que nous étudions est plus complexe. Comme nous le savons par l'article [99], la monodromie quantique est parfaitement déterminée par la monodromie classique (qui est donné par Duistermaat [33]) du système classique intégrable  $(p_1, p_2)$ , où  $p_1, p_2$  sont les symboles principaux correspondants de  $P_1, P_2$ . Si on ne garde au niveau quantique que la propriété d'intégrabilité classique, nous proposerons de considérer une petite perturbation d'un opérateur auto-adjoint de la forme  $P_\varepsilon := P_1 + i\varepsilon P_2$  en supposant que les symboles principaux  $p_1, p_2$  commutent,  $\varepsilon \rightarrow 0$  et dans le régime  $h \ll \varepsilon = \mathcal{O}(h^\delta)$  pour  $0 < \delta < 1$ . Le problème devient plus compliqué car il n'y a plus de spectre conjoint. On ne peut donc pas appliquer la construction de la monodromie quantique [99]. Cependant avec l'aide des résultats de la théorie spectrale asymptotiques de M.Hitrik, J.Sjöstrand, S. Vu Ngoc ([56], [57], [58] et surtout [60]) (sous des conditions détaillées dans le chapitre 4) en revisitant la procédure de forme normale de Birkhoff (la section (4.3)), le spectre de  $P_\varepsilon$  est situé dans une bande horizontale de hauteur  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  et dans certains petits "bons rectangles"  $R(\chi_a, \varepsilon, h)$  (voir la définition 4.2.5) de taille  $\mathcal{O}(h^\delta) \times \mathcal{O}(\varepsilon h^\delta)$  de cette bande qui sont associés à des tores diophantiens  $\Lambda_a$ , toutes les valeurs propres de  $P_\varepsilon$  sont données par développement asymptotique d'une fonction lisse  $P(\xi, \varepsilon; h)$  de la forme :

$$\sigma(P_\varepsilon) \cap R(\chi_a, \varepsilon, h) \ni \lambda = P\left(\xi_a + h\left(k - \frac{k_1}{4}\right) - \frac{S_1}{2\pi}, \varepsilon; h\right) + \mathcal{O}(h^\infty), \quad k \in \mathbb{Z}^2, \quad (3)$$

uniformément pour  $h, \varepsilon$  petits, où  $\xi_a$  sont coordonnées action,  $S_1 \in \mathbb{R}^2$  est l'action et  $k_1 \in \mathbb{Z}^2$  est l'indice de Maslov des cycles fondamentaux de  $\Lambda_a$ .

Il y a une correspondance bijective entre  $\lambda \in \sigma(P_\varepsilon) \cap R(\chi_a, \varepsilon, h)$  et  $hk$  dans une partie de  $h\mathbb{Z}^2$  par un difféomorphisme (une micro-carte) de la forme (voir la formule (100)) :

$$\begin{aligned} f : R(\chi_a, \varepsilon, h) &\rightarrow E(a, \varepsilon, h) \\ \sigma(P_\varepsilon) \cap R(\chi_a, \varepsilon, h) \ni \lambda &\mapsto f(\lambda, \varepsilon; h) \in h\mathbb{Z}^2 + \mathcal{O}(h^\infty). \end{aligned} \quad (4)$$

Pour plus de détail de cette idée, voir la section 4.4.

Néanmoins l'ensemble des tores diophantiens ne remplit pas tout l'espace des phases (voir [60], [80]) et malgré sa densité, on ne connaît pas encore un tel développement défini globalement sur n'importe quel petit domaine de la bande spectrale.

Toutefois, on va montrer l'existence globale (pour des tels rectangles) du premier terme de ce développement sur n'importe quel petit domaine dans l'ensemble des valeurs régulières de l'application  $(p, \varepsilon q)$ .

Le spectre de  $P_\varepsilon$  est le modèle d'un ensemble discret particulier  $\Sigma(\varepsilon, h)$  sur un domaine  $U(\varepsilon)$  que nous définirons dans le chapitre 4 et appellerons "pseudo-réseau asymptotique" (voir la définition 4.5.1) dont la différentielle des fonctions de transition entre des "pseudo-cartes locales" adjacentes sont dans le groupe  $GL(2, \mathbb{Z})$  modulo  $\mathcal{O}(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon})$ . Cela nous permet de traiter le problème

inverse : définir un invariant combinatoire (la monodromie spectrale) à partir du spectre de  $P_\varepsilon$ .

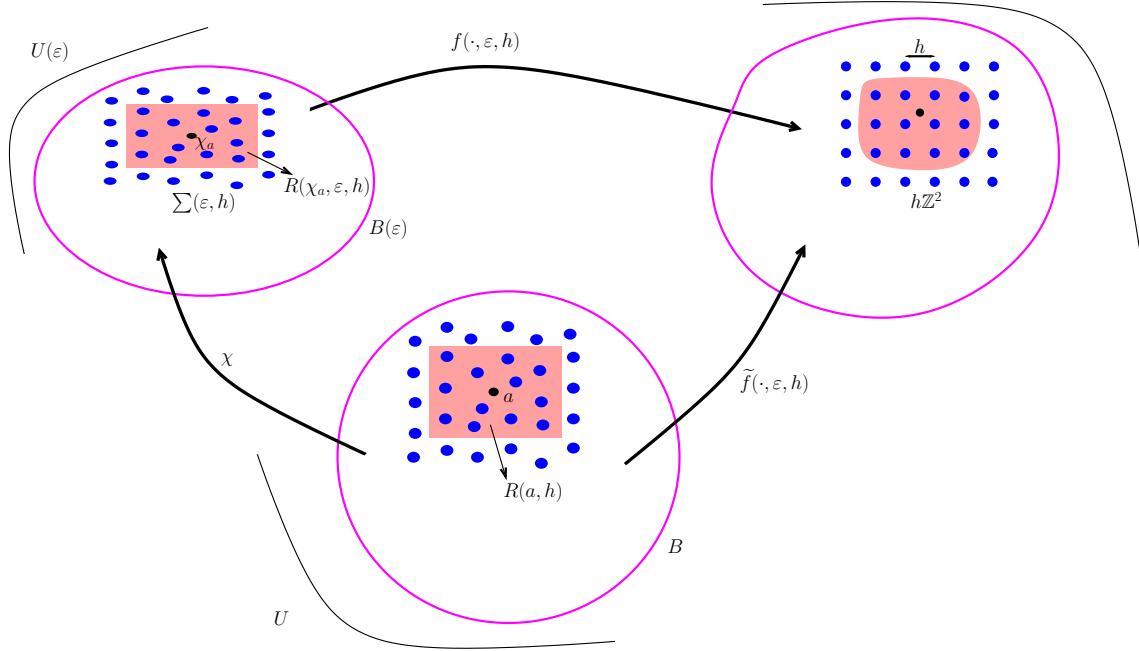


Figure 2. Pseudo- réseau asymptotique

**Théorème 1.4.3 (théorème 4.5.6).** — Pour  $h \ll \varepsilon$ , soient  $(f_\alpha, B_\alpha(\varepsilon))$  et  $(f_\beta, B_\beta(\varepsilon))$  deux pseudo-cartes d'un pseudo-réseau asymptotique telles que  $B_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$ . Posons  $\tilde{f}_\alpha = f_\alpha \circ \chi$  et  $\tilde{f}_\beta = f_\beta \circ \chi$  où  $\chi$  est la fonction  $(u_1, u_2) \mapsto (u_1, \varepsilon u_2)$ . Alors il existe une unique matrice constante  $M_{\alpha\beta} \in GL(2, \mathbb{Z})$  telle que

$$d(\tilde{f}_\alpha) = M_{\alpha\beta} d(\tilde{f}_\beta) + \mathcal{O}\left(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon}\right),$$

sur  $B_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$ .

La monodromie spectrale linéaire de  $P_\varepsilon$  est définie comme 1-cocycle  $\{M_{\alpha\beta}\}$  modulo-cobord dans la cohomologie de Čech  $\check{H}^1(U, GL(2, \mathbb{Z}))$ .

C'est le résultat principal de cette thèse, présenté dans le chapitre 4.

Il serait très intéressant d'étendre ces résultats au cas où  $p$  est une perturbation d'un système intégrable, en utilisant les travaux de Broer, Cushman, Fassò et Takens [17].

## 1.5. Pourquoi étudier des opérateurs non auto-adjoints ?

**1.5.1. Dissipation.** — Pourquoi étudier des opérateurs non auto-adjoints ? C'est une question naturelle mais la réponse n'est pas du tout évidente.

Nous avons déjà discuté qu'un système physique quantique est donné par l'équation de Schrödinger (2). Théoriquement, l'énergie du système est conservée et la dynamique quantique du système associé à l'opérateur de Schrödinger (auto-adjoint)  $\hat{H}$  est formellement donnée par un groupe unitaire  $e^{-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}}$  (voir [66], [32], [82]). Plus précisément, la dynamique au cours du temps  $t$  d'une onde initiale  $\psi_0$  (en temps  $t = 0$ ) est donnée par

$$\psi(x, t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}}\psi_0.$$



Cependant, en réalité, on n'a pas souvent un tel système idéal : l'énergie du système n'est pas conservée à cause par exemple des phénomènes dissipatifs, des amortissements... Il y a une dissipation dans la propagation d'ondes au cours de l'espace et du temps ( $|x| \rightarrow +\infty, t \rightarrow \infty$ ) ou un amortissement par des milieux. C'est l'absorption d'énergie par des milieux impliquant la diminution d'énergie du système.

Ces phénomènes, en regardant l'énergie locale ou en tenant compte des milieux, mathématiquement sont modélisés par des opérateurs non auto-adjoints. La compréhension du spectre et d'autres aspects de ces opérateurs est essentielle en mécanique quantique. C'est pourquoi, il est nécessaire d'étudier des opérateurs non-auto adjoints.

Nous donnons ici un exemple de l'équation des ondes amorties étudié par beaucoup d'auteurs (par exemple B. Helffer J.Sjöstrand, S.Nonnenmacher...).

Soient  $M$  une variété riemannienne compacte et une fonction d'amortissement  $a \in C^\infty(X, \mathbb{R}_+)$ . L'équation des ondes amorties est

$$(\partial_t^2 - \Delta + 2a(x)\partial_t)v(x, t) = 0, \quad v(x, 0) = v_0, \partial_t v(x, 0) = v_1. \quad (5)$$

Contrairement au cas auto-adjoint de l'équation de Schrödinger, ici en raison de la présence du terme amorti positif  $a$ , nous allons perdre le comportement unitaire de la dynamique générée par (5). De plus, l'énergie totale de l'onde au temps  $t$  qui est définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_M ((\partial_t v)^2 + |\partial_x v|^2) dx,$$

va décroître au cours du temps vers zéro lorsque  $t \rightarrow \infty$  sous certaines conditions (par exemple  $a(x) \geq \gamma > 0$ ) par une estimation de forme exponentielle [77], [41] :

$$E(t) \leq C e^{-\beta t} (\|v_0\|_{H^1(M)}^2 + \|v_1\|_{L^2(M)}^2),$$

pour certaines constantes  $C, \beta > 0$ .

Pour l'étude du spectre de l'opérateur associé à l'équation (5), on peut consulter les articles [88], [89], [77].

Durant ces dernières années, l'intérêt pour la théorie spectrale de ces opérateurs s'est accru. Malgré l'aide des outils de l'analyse numérique, de l'analyse fonctionnelle, de la géométrie symplectique, de l'analyse microlocale et semi-classique, des systèmes dynamiques...de nombreux problèmes demeurent ouverts.

**1.5.2. Résonance d'opérateur auto-adjoint.** — La distribution asymptotique des valeurs propres d'un opérateur non auto-adjoint et celle des résonances d'un opérateur auto-adjoint ont des caractéristiques similaires. De plus, la résonance et l'estimation de l'énergie locale sont étroitement liées : la distance de résonance à l'axe réel détermine la taux de décroissance de l'énergie locale dans des nombreuses situations [52], [111]. L'étude des résonances devient donc importante pour comprendre l'évolution temporelle de ces systèmes.

Il existe dans histoire plusieurs approches différentes de la notion de résonance. Les résonances peuvent être définies comme les pôles de la résolvante ou de la matrice de diffusion, mais aussi comme les valeurs propres complexes d'un opérateur non auto-adjoint. Les travaux de Helffer-Sjöstrand [52] ont essayé de donner une définition des résonances plus générale que celle antérieure (comme l'approche de Sjöstrand, J. Aguilar- J.M. Combes, M. Zworski et beaucoup d'autres auteurs) mais il reste encore des complexités.

Par exemple, pour opérateur de Schrödinger en dimension impaire, les résonances sont les pôles de la résolvante étendue à partir du demi-plan supérieur en une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$  :

$$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto R_V(\lambda) := (-\Delta + V - \lambda^2)^{-1}.$$

Pour plus de détails, on peut aussi consulter d'autres références comme [111], [2], [71].

## CHAPITRE 2

# GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE ET MONODROMIE CLASSIQUE

### 2.1. Introduction

Le but de ce chapitre est de rappeler la monodromie classique : monodromie affine et monodromie linéaire d'un système complètement intégrable. Un système complètement intégrable, c'est la donnée sur une variété symplectique  $(M, \omega)$  de  $n$  fonctions  $f_1, \dots, f_n$  en involution par le crochet de Poisson qui est défini par la structure symplectique  $\omega$ .

Ce problème a une longue histoire et il est étudié par plusieurs auteurs, par exemple J. Duistermaat [33], N.T. Zung [110], S. Vu Ngoc [102], M. Audin [8]...

Au début de ce chapitre, nous donnons quelques notations fondamentales de géométrie symplectique qui peuvent être trouvées dans beaucoup d'ouvrages de géométrie symplectique comme [87], [12], [72], [106]...

Ensuite, nous donnons le théorème de Liouville- Arnold- Mineur qui affirme l'existence locale des coordonnées actions-angles [33], [8]...

Ce qui empêche l'existence globale des coordonnées actions est appelé monodromie classique et se compose de deux types : monodromie affine et monodromie linéaire. Nous donnerons aussi la relation entre ces deux types de monodromies.

### 2.2. Géométrie symplectique.

Nous rappelons ici quelques notations fondamentales de géométrie symplectique que on peut aussi consulter dans [5],[105], [44], [7], [95].

**Notations** : Nous donnons d'abord quelques notations que nous allons utiliser dans ce chapitre.

Dans ce chapitre, toute variété considérée est lisse et de dimension finie.

Soit  $M$  une telle variété, le fibré tangent est noté par  $TM$  et le fibré cotangent par  $T^*M$ .

L'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur  $M$  (section de  $TM$ ) est notée par  $\chi(M)$ .

On note  $\Omega^k(M)$  les formes différentielles de degré  $k$  sur  $M$ .

Soient  $X$  un champ de vecteur de  $M$  et une  $k$ -forme  $\omega \in \Omega^k(M)$ , on définit  $\iota_X \omega$  la forme différentielle extérieure d'ordre  $k - 1$  par

$$(\iota_X \omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1})$$

pour tous champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_{k-1}$  sur  $M$ .

Si  $m_0$  un point fixé de  $M$ , alors l'équation différentielle (un système dynamique) :

$$\frac{dm(t)}{dt} = X(m), m|_{t=0} = m_0$$

a localement une solution  $m(t) = \varphi_t(m_0)$ .

L'application

$$(M, m_0) \rightarrow (M, m(t)), m_0 \mapsto m(t) = \varphi_t(m_0)$$

est appelée le flot engendré de  $X$  au temps  $t$ . On le note aussi  $\varphi_t = \exp(tX)$ .

Pour  $\omega \in \Omega^k(M)$ , la dérivée de Lie  $\mathcal{L}_X\omega$  dans  $\Omega^k(M)$  est définie par

$$\mathcal{L}_X\omega = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_t^*\omega$$

On rappelle aussi la formule de Cartan

$$\mathcal{L}_X\omega = \iota_X d\omega + d(\iota_X\omega) \quad (6)$$

**Définition 2.2.1.** — Un espace vectoriel symplectique est la donnée d'un couple  $(E, \omega)$  où  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{R}$  et  $\omega$  une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée sur  $E$ .

**Définition 2.2.2.** — Une variété réelle  $M$  est symplectique si elle est munie d'une 2-forme différentielle  $\omega$  fermée, i.e.  $d\omega = 0$ , et non dégénérée.

On l'écrit  $(M, \omega)$ .

Donc pour chaque point  $m$  dans  $M$ , l'espace tangent  $T_m M$  muni de la structure symplectique linéaire  $\omega(m)$  est un espace vectoriel symplectique. On remarque qu'un espace vectoriel symplectique est toujours de dimension paire. Par conséquent, la dimension de  $M$  doit être paire.

Un cas particulier, le fibré cotangent  $M = T^*X$  d'une variété  $X$  a une structure symplectique canonique  $\omega = d\alpha$  dans laquelle  $\alpha$  est la 1-forme de Liouville, définie géométriquement par

$$\alpha(x, \xi) = \xi \circ d\pi(x, \xi),$$

où  $\pi$  est la projection canonique de  $T^*X$  sur  $X$ ,  $x \in X$  et  $\xi \in T_x^*X$ .

En coordonnées locales  $x = (x_1, \dots, x_n)$  pour  $X$ , on note  $\xi_1, \dots, \xi_n$  les coordonnées associées dans les fibres du cotangent. On a donc les **coordonnées locales canoniques**  $(x, \xi) = (x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$  sur  $T^*X$ , alors on a  $\alpha = \xi dx = \sum \xi_i dx_i$  et donc  $\omega = \sum d\xi_i \wedge dx_i$ .

Par le théorème de Darboux, toute variété symplectique est localement difféomorphe au modèle précédent.

**Définition 2.2.3 (Symplectomorphisme).** — Un difféomorphisme (global)

$$\varphi : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$$

entre deux variétés symplectiques est appelé symplectomorphisme (ou symplectique) si

$$\varphi^*\omega_2 = \omega_1.$$

**Définition 2.2.4.** — Soit  $(E, \omega)$  un espace symplectique de dimension  $2n$  et  $L$  un sous-espace linéaire de  $E$ . L'orthogonal symplectique  $L^\perp$  de  $L$  est défini comme

$$L^\perp := \{u \in E : \omega(u, v) = 0, \forall v \in L\}.$$

$L$  est appelé sous-espace lagrangien si  $L = L^\perp$ .

On remarque que un sous-espace lagrangien doit être de dimension  $n$  et la forme symplectique  $\omega$  s'annule sur  $L$ .

**Définition 2.2.5.** — Soient  $(M, \omega)$  une variété symplectique de dimension  $2n$  et  $N$  une variété. S'il existe une immersion de rang  $n$   $j : N \rightarrow M$ , alors  $j$  (ou  $N$ ) est dit lagrangien si  $j^*\omega = 0$ . En d'autre terme,  $\omega$  s'annule sur tout espace tangent de  $N$ .

En particulier, si  $N$  est sous variété de  $M$  et  $j$  est l'inclusion, alors pour tout  $m \in N$ ,  $T_m N$  est sous-espace lagrangien de  $T_m M$ .

**Lemme 2.2.6.** — Soit  $N \subset M$  une sous-variété lagrangien. Alors, pour tout  $m \in N$ , il existe une coordonnée locale canonique  $(x, \xi)$  au voisinage de  $m$  dans laquelle  $(N, m) = \{\xi = 0\}$ .

Le lemme précédent peut être généralisé par le lemme suivant, voir [95], [103]...

**Lemme 2.2.7 (Théorème de Weinstein).** — Soit  $N \subset M$  une sous-variété lagrangienne. Alors, il existe un voisinage de  $N$  qui est symplectiquement équivalent à un voisinage de la section nulle du cotangent  $T^*N$ .

### 2.3. Mécanique classique

Pour la base de mécanique classique, on peut consulter [4], [6], [61], [1], [68].

En mécanique classique, on dit *l'espace des phases* ou l'espace des positions et des vitesses, c'est une variété symplectique  $(M, \omega)$  de dimension  $2n$ .

**Un hamiltonien** (ou **observable classique**) est une fonction  $f \in C^\infty(M)$  à valeur réelle.

Comme la forme symplectique  $\omega$  est non-dégénérée, on a une dualité entre 1-forme (un vecteur cotangent) et champs de vecteur (un vecteur tangent) sur  $M$ .

On note  $\chi_f$  le **champs hamiltonien** correspondant donné par :

$$\omega(\chi_f, \cdot) = -df(\cdot) \Leftrightarrow \iota_{\chi_f} \omega = -df.$$

Le flot  $\varphi_t$  engendré par  $\chi_f$  est appelé **flot hamiltonien** associé à l'hamiltonien  $f$  au temps  $t$  (ou simplement le flot engendré par  $f$ ). On le note quelque fois par  $\varphi_f^t$ .

**Crochet de Poisson** : soient  $f, g \in C^\infty(M)$ , le crochet de Poisson de  $f$  et  $g$  est une fonction notée  $\{f, g\} \in C^\infty(M)$  définie par

$$\{f, g\} = \omega(\chi_f, \chi_g) = -\{g, f\} = dg(\chi_f) = -df(\chi_g) = \chi_f(g). \quad (7)$$

**Remarque 2.3.1.** — La formule de Cartan (6) nous donne  $\mathcal{L}_{\chi_f} \omega = 0$ , donc pour  $t$  petit le flot hamiltonien de  $f$  préserve la forme symplectique  $\omega$  i.e. le flot hamiltonien au petit temps est symplectique.

**Remarque 2.3.2.** — Si  $\varphi$  est symplectique, on a :

$$\{f, g\} \circ \varphi = \{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}$$

et

$$\chi_{\varphi^* f} = \varphi^* \chi_f = d\varphi^{-1} \chi_f \circ \varphi.$$

Alors, le flot hamiltonien de  $\varphi^* f := f \circ \varphi$  est envoyé par  $\varphi$  au flot hamiltonien de  $f$ . C'est une caractérisation importante de l'application symplectique.

**Remarque 2.3.3.** — Si la fonction  $g$  est transportée le long du flot hamiltonien  $\varphi(t)$  de  $f$ , elle vérifie donc l'équation

$$\frac{dg(\varphi(t))}{dt} = \{f, g\}(\varphi(t)).$$

En particulier, le hamiltonien  $f$  est toujours constant le long son flot hamiltonien associé.

De plus, si un hamiltonien  $f$  admet un autre hamiltonien  $g$  tel que  $f$  est invariante le long du flot engendré par  $g$ , alors  $g$  est aussi invariante le long du flot engendré par  $f$ .

Dans ce cas, on dit que  $g$  est une *intégrale du mouvement*.

**Remarque 2.3.4.** — En des coordonnées locales canoniques  $(x, \xi) = (x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ , on obtient explicitement

$$\chi_f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j}$$

et

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j}$$

## 2.4. Système intégrable

Soient  $(M, \omega)$  une variété symplectique de dimension  $2n$ .

Avec les notations comme dans la dernière section, l'algèbre commutative  $C^\infty(M)$  munie du crochet de Poisson (7) peut admettre une structure naturelle d'algèbre de Lie. On l'appelle l'algèbre de Poisson des hamiltoniens. Pour la référence, nous conseillons [8], [103].

**2.4.1. Système complètement intégrable.** — Soit un hamiltonien  $H$  dans  $C^\infty(M)$ . On appelle une *intégrale (première)* de  $H$ , une fonction  $f$  dans  $C^\infty(M)$  qui est invariante le long du flot de  $H$ . C'est une fonction  $f$  telle que  $\{H, f\} = 0$ . On dit aussi que  $H$  et  $f$  sont *en involution* ou *commutent*.

L'hamiltonien  $H$  est appelé *complètement intégrable* s'il existe  $n - 1$  intégrales indépendantes  $f_2, \dots, f_n$  de  $H$  (c'est à dire  $\{H, f_j\} = 0$ ) et de plus  $\{f_i, f_j\} = 0$  pour tout  $i, j = 2, \dots, n$ .

**Définition 2.4.1.** — Un système complètement intégrable sur  $M$  est la donnée  $n$  fonctions  $f_1, \dots, f_n$  dans  $C^\infty(M)$  à valeur réelle en involution dont les différentielles sont presque partout indépendantes au sens que  $df_1(m), \dots, df_n(m)$  sont linéairement indépendants pour presque tout  $m \in M$ .

Dans ce cas, on appelle l'application  $F = (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  *l'application moment*.

La proposition suivante implique qu'un système complètement intégrable définit un feuilletage lagrangien.

**Proposition 2.4.2.** — Soit  $F = (f_1, \dots, f_n) : M \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application lisse telle que  $df_1, \dots, df_n$  sont linéairement indépendants en chaque point de  $U$ .

Alors les ensembles de niveau  $F^{-1}(c)$  avec  $c \in \mathbb{R}^n$  définissent un feuilletage lagrangien si et seulement si les  $f_i$  se commutent deux à deux (i.e. les crochets de Poissons  $\{f_i, f_j\} = 0$ ).

Dans ce cas, les champs hamiltoniens  $\chi_{f_1}, \dots, \chi_{f_n}$  forme une base du tangent à  $F^{-1}(c)$ .

**2.4.2. Point régulier.** — Soit  $F = (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'application moment.

**Définition 2.4.3.** — Un point  $m \in M$  est dit régulier pour  $F$  si sa différentielle  $dF(m)$  est de rang maximal. C'est à dire,  $df_1(m) \wedge \dots \wedge df_n(m) \neq 0$ .

Si  $m$  régulier pour  $F$ , nous savons qu'il existe un feuilletage lagrangien par  $F^{-1}(c)$  pour  $c$  proche de  $F(m)$ . Deplus, grâce au théorème de Darboux-Carathéodory suivant, il existe des coordonnées symplectiques locales  $(x, \xi)$  près de  $m$  dans laquelle ce feuilletage est très simple et donné par  $\xi = c - F(m)$ .

**Théorème 2.4.4 (Darboux-Carathéodory [103], [95]).** — Au voisinage d'un point régulier  $m$ ,  $F$  est symplectiquement conjuguée au système linéaire  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  sur l'espace symplectique linéaire  $\mathbb{R}^{2n}$  muni des coordonnées canoniques  $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ .

Autrement dit, il existe des applications  $x_1, \dots, x_n$  sur  $M$  telles que  $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$  soit un système de coordonnées canoniques au voisinage de  $m$ .

Par ailleurs, on peut choisir exactement ici  $\xi_i = f_i$  (ou  $\xi_i = f_i - f_i(m)$ ),  $i = 1, \dots, n$ .

**2.4.3. Flot conjoint.** — Soit  $F = (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'application moment. On note  $\varphi_{f_i}^{t_i}$  le flot hamiltonien associé à  $f_i$ ,  $t_i$  assez petit dans  $\mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Comme les  $f_i$  sont commutents, donc ses champs hamiltoniens  $\chi_{f_i}$  commutent,

$$[\chi_{f_i}, \chi_{f_j}] = \chi_{\{f_i, f_j\}} = 0$$

pour tout  $i, j = 1, \dots, n$ .

Par conséquence, ces flots hamiltoniens  $\varphi_{f_i}^{t_i}$  commutent deux à deux :

$$\varphi_{f_i}^{t_i} \circ \varphi_{f_j}^{t_j} = \varphi_{f_j}^{t_j} \circ \varphi_{f_i}^{t_i}.$$

Alors, on peut définir une application appelée **flot conjoint** de  $F$ , noté  $\varphi_F^t$  :

$$U \times M \ni ((t_1, \dots, t_n), m) \mapsto \varphi_F^t(m) = \varphi_{f_1}^{t_1} \circ \dots \circ \varphi_{f_n}^{t_n}(m) \in M,$$

$t = (t_1, \dots, t_n)$  dans un petit voisinage  $U$  de  $0 \in \mathbb{R}^n$ .

En terme de l'action du groupe de Lie hamiltonien, on vient d'obtenir une action abélienne (locale) de  $\mathbb{R}^n$  sur  $M$ . Par la construction, cette action est une action hamiltonienne.

Pour un vecteur donné  $x \in \mathbb{R}^n$ , la trajectoire

$$(\mathbb{R}, 0) \ni t \mapsto \varphi_F^{tx}(m) \in M$$

est engendrée par le champ hamiltonien du hamiltonien

$$\langle F, x \rangle := \sum x_i f_i.$$

**Remarque 2.4.5.** — On note que pour le petit temps  $t \in \mathbb{R}^n$ , par la remarque (2.3.1), le flot conjoint définit un difféomorphisme symplectique :

$$m \mapsto \varphi_F^t(m).$$

**Remarque 2.4.6.** — Si  $m$  un point régulier de  $F$ , en coordonnées locales au voisinage de  $m$  comme dans le théorème de Darboux-Carathéodory (2.4.4), on a

$$\chi_{f_i} = \chi_{\xi_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et le flot de  $f_i$  est donc linéaire

$$\varphi_{f_i}^{t_i}(x, \xi) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t_i, x_{i+1}, \xi).$$

C'est justement une translation par  $t_i$ . Alors, le flot conjoint est une translation par  $t$ ,

$$\varphi_F^t(x, \xi) = (x + t, \xi).$$

**Remarque 2.4.7.** — Comme un corollaire important du théorème de Darboux- Carathéodory (2.4.4), on obtient le résultat : si  $m$  est un point régulier de l'application moment  $F$  et si  $H$  un hamiltonien invariant par le flot de  $f_i$  (ou  $\{H, f_i\} = 0, i = 1, \dots, n$ ). Alors, près de  $m$ ,  $H$  est de la forme  $H = g(f_1, \dots, f_n)$ , où  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Dans ce cas, on remarque que l'hamiltonien  $H$  est localement invariant par le flot conjoint de  $F$  car chaque  $f_i$  l'est.

De plus, on intègre facilement que le flot de  $H$  près de  $m$  est encore linéaire sur chaque fibre.

## 2.5. Monodromie classique

**2.5.1. Théorème Action-Angle.** — Soit  $F = (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  un système complètement intégrable sur une variété symplectique  $(M, \omega)$  de dimension  $2n$ .

On dira que  $\Lambda_c$  est une feuille de  $F$  si elle est une composante connexe de  $F^{-1}(c)$  pour  $c \in \mathbb{R}^n$ .

On dira que la feuille est régulière si tous ses points sont des points réguliers pour  $F$ .

Un théorème très connu qui s'appelle "théorème Action- Angle" de Liouville- Mineur-Arnold affirme qu'au voisinage d'une feuille régulière compacte dans  $M$ , il existe (localement) des coordonnées canoniques  $(x, \xi)$  (i.e.  $(x, \xi)$  est un symplectomorphisme de ce voisinage) dans l'espace symplectique  $T^*\mathbb{T}^n$  telles que toute feuille dans ce voisinage est symplectiquement un tore lagrangien invariant de rang  $n$  de la forme  $\mathbb{T}^n \times \{\xi = \text{constante}\}$  et que les  $f_i$  deviennent uniquement des fonctions de  $\xi$ . On appelle ces tores "tore de Liouville".

Il existe des démonstrations différentes qui peuvent trouver dans [74], [33],[61], [8],[27]. Pour la topologie algébrique, on peut consulter le bon livre de M. J. Greenberg [45].

Ici, nous allons donner une courte description de ce résultat selon une procédure de S. Vu Ngoc.

Soit  $\Lambda_c$  une feuille régulière compacte de  $F^{-1}(c)$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ . Comme le flot de chaque  $f_i$  reste sur  $\Lambda_c$  et  $\Lambda_c$  est compacte, les flots  $\varphi_{f_i}^{t_i}$  sont donc complets (ils sont définis pour tout temps  $t_i \in \mathbb{R}$ ).

Par conséquence, le flot conjoint définit une action localement libre du groupe  $(\mathbb{R}^n, +)$  sur  $\Lambda_c$  :

$$\varphi_F^t : \mathbb{R}^n \times \Lambda_c \rightarrow \Lambda_c.$$

Soit  $m$  un arbitraire point de  $\Lambda_c$ . Notons  $\mathcal{O}(m)$  l'orbite de  $m$  par l'action :

$$\mathcal{O}(m) = \{\varphi_F^t(m) : t \in \mathbb{R}^n\}.$$

La connexité de  $\Lambda_c$  implique que

$$\Lambda_c = \mathcal{O}(m). \tag{8}$$

L'action est transitive et libre.

On note  $S_c$ , le stabilisateur ( ou sous-groupe d'isotropie ) qui est défini indépendamment du choix de  $m$  dans  $\Lambda_c$  :

$$S_c = \{\tau \in \mathbb{R}^n : \varphi_F^\tau(m) = m\}. \tag{9}$$

Alors  $S_c$  est un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^n$ .

D'autre part, on a un difféomorphisme entre  $\mathcal{O}(m)$  et le quotient  $\mathbb{R}^n/S_c$ . Le dernier et la formule (8) nous donne

$$\Lambda_c = \mathcal{O}(m) \cong \mathbb{R}^n/S_c.$$



Comme  $\Lambda_c$  est compacte de dimension  $n$ , la dernière formule implique que  $S_c$  doit être un  $\mathbb{Z}$ -réseau de rang  $n$  et donc isomorphe à  $\mathbb{Z}^n$ .

Alors,  $\Lambda_c$  isomorphe à  $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  i.e.  $\Lambda_c$  est un  $n$ -tore.

Soient  $(\tau_1(c), \dots, \tau_n(c))$  une base de  $S_c$ .

On peut introduire un nouveau système intégrable  $\tilde{F} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$  qui au voisinage de  $\Lambda_c$  a le même feuilletage que celui de  $F$ . Plus exactement, il existe un difféomorphisme local  $g : (\mathbb{R}^n, c) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tel que, avec  $\tilde{F} = g \circ F$ , le flot au temps 1 de chaque  $\tilde{f}_i$  est l'identité au voisinage de  $m$ . Alors, on peut maintenant supposer en remplaçant  $F$  par  $\tilde{F}$  que le flot de chaque  $f_i$  est l'identité au voisinage de  $m$  et par combinaison linéaire avec des coefficients entiers que  $(\tau_1(c), \dots, \tau_n(c))$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Par ailleurs, on peut supposer aussi que  $F(m) = c = 0$ .

Ensuite, en utilisant les coordonnées de Darboux-Carathéodory  $(x, \xi)$  proche de  $m$ . Pour un point  $b$  proche  $c = 0$  dans  $\mathbb{R}^n$ , notons  $\xi(b)$  le point dans la transversale  $\sum_m = \{x = 0\}$  avec la coordonnée  $(x = 0, \xi = b)$ .

Pour un petit disque ouvert  $D$  autour de  $c$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on peut définir l'application

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times D \rightarrow M, (t, b) \mapsto \varphi_F^t(\xi(b)). \quad (10)$$

De plus,  $\Phi$  est localement symplectomorphisme (ici sur  $\mathbb{R}^n \times D$  la forme symplectique est  $db \wedge dt$ ) et satisfait la condition  $\Phi(t + \tau_i, b) = \Phi(t, b)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $b \in D$ .

Pour tout  $b \in D$ , l'image de  $\mathbb{R}^n \times \{b\}$  est  $\varphi_F^t$ -orbite de  $\xi(b)$  et le groupe d'isotropie  $S_b$  est  $\mathbb{Z}^n$ .

En fin, en passant  $\Phi$  au quotient

$$\bar{\Phi} : (\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n) \times D \rightarrow \Omega \subset M$$

est un symplectomorphisme sur l'image.

On a bien sûr que  $\bar{\Phi}(\mathbb{R}^n \times \{b\})$  est le  $n$ -tore  $\Lambda_{\varphi(b)}$  pour tout  $b \in D$  (proche de  $c$ ) et que  $F \circ \bar{\Phi}$  dépend que de  $b \in D$ .

Nous allons maintenant énoncer le théorème Action-Angle.

**Théorème 2.5.1 (Théorème Action-Angle).** — Soit  $F = (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  un système complètement intégrable sur une variété symplectique  $(M, \omega)$  de dimension  $2n$ . Si  $\Lambda_c$  dans  $F^{-1}(c)$  ( $c \in \mathbb{R}^n$ ) est une feuille régulière compacte de  $F$ , alors il existe un voisinage  $\Omega$  de  $\Lambda_c$  dans  $M$ , un petit disque ouvert  $D$  de centre  $c$  dans  $\mathbb{R}^n$  et un symplectomorphisme  $\Psi : \mathbb{T}^n \times D \rightarrow \Omega$  tels que :

(i)  $\Psi(\mathbb{T}^n \times \{c\}) = \Lambda_c$ .

(ii)  $\Omega$  est saturé, c'est à dire toutes feuilles qui passent par un point de  $\Omega$  sont des tores inclus dans  $\Omega$ .

(iii) On a

$$F \circ \Psi(x, \xi) = \varphi(\xi)$$

pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^n$ , tout  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in D$  et  $\varphi : D \rightarrow \varphi(D)$  est un difféomorphisme (local),  $\varphi(c) = c$ .

En particulier tous les flots de  $f_i$  dans  $\Omega$  sont complets.

Sur  $\Omega$  on a

$$(x, \xi) = \Psi^{-1}.$$

On dira que sur  $\Omega$  (localement),  $x \in \mathbb{T}^n$  sont variables angles et  $\xi \in D \subset \mathbb{R}^n$  sont variables actions.

**Remarque 2.5.2.** — Posons  $\tilde{F} := \varphi^{-1} \circ F = \xi \circ \Psi^{-1}$ . Les variables actions sont fonctions lisses des  $f_i$  et le flot de chaque composante  $\tilde{f}_i$  de  $\tilde{F}$  est donc périodique de période 1 sur  $\Omega$ .

Par conséquence, il existe une action hamiltonienne du groupe  $\mathbb{T}^n$  sur  $\Omega$  qui est définie par le flot

conjoint de  $\tilde{F}$ . C'est à dire, l'application moment de cette action hamiltonienne est formée par les variables actions  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . De plus, l'action préserve évidemment le système complètement intégrable initial  $F$ .

En d'autre terme,  $\Omega$  a la structure d'un fibré principal en tores

$$\Omega \ni \Lambda_c \rightarrow c$$

(ou  $\tilde{F} : \Omega \rightarrow D$ ) avec le groupe structural  $\mathbb{T}^n$ , les fibres lagrangiennes et l'action de structure groupe est hamiltonienne et son application moment est localement la projection du fibré.

**2.5.2. Monodromie classique affine.** — Soit  $F = (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  un système complètement intégrable sur une variété symplectique  $(M, \omega)$  de dimension  $2n$ .

On rappelle que  $c \in \mathbb{R}^n$  est une valeur régulière de  $F$  si tous les points de la fibre  $F^{-1}(c)$  sont des points réguliers de  $F$ .

Notons  $B_r \subseteq \mathbb{R}^n$  l'ensemble de valeurs régulières de  $F$  et  $N := F^{-1}(B_r) \subseteq M$  l'union des fibres régulières.

Supposons que  $F$  est propre ( pour que les fibres soient compactes ) et que  $B_r$  et les fibres  $F^{-1}(c)$  sont connexes.

Dans ce cas on peut appliquer le théorème Action-Angle en chaque point de  $N$  et  $\Lambda_c := F^{-1}(c)$ ,  $c \in B_r$  sont des tores lagrangiens.

Alors  $F$  restreint à  $N$  devient une fibré lagrangien avec la base  $B_r$ , voir [10] :

$$F : N \ni \Lambda_c \rightarrow c \in B_r.$$

Comme la remarque précédente, on sait bien que la fibration est localement triviale mais en général elle peut être globalement non-triviale. Dans le cas si elle est globalement triviale, on obtient des coordonnées actions globales sur  $N$ . Une obstruction à la trivialisaton globale de ce fibré est un phénomène appelé "monodromie" que nous allons étudier.

En fait, il existe en général une structure affine sur l'espace des feuilles régulières.

Dans l'article [33], nous savons que la monodromie en même temps avec la classe de Chern sont des éléments obstruant la trivialisaton globale du fibré.

*2.5.2.1. Structure affine sur la base.* — Supposons que  $U_\alpha, U_\beta$  deux ouverts quelconques choisis assez petits dans  $B_r$  avec l'intersection non-vide tels que sur  $F^{-1}(U_\alpha) \subset M$  et  $F^{-1}(U_\beta) \subset M$ , il existe des coordonnées action-angle associées : il existe deux disques ouverts de centre 0 associés avec l'intersection non-vide  $D_\alpha, D_\beta$  dans  $\mathbb{R}^n$  et deux symplectomorphismes :

$$\Psi_\alpha : \mathbb{T}^n \times D_\alpha \rightarrow \Omega_\alpha$$

$$\Psi_\beta : \mathbb{T}^n \times D_\beta \rightarrow \Omega_\beta$$

tels que  $F \circ \Psi_\alpha(x, \xi) = \varphi_\alpha(\xi)$  et  $F \circ \Psi_\beta(x, \xi) = \varphi_\beta(\xi)$  pour  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$  deux difféomorphismes locales de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\varphi_\alpha : D_\alpha \rightarrow U_\alpha = \varphi_\alpha(D_\alpha)$$

$$\varphi_\beta : D_\beta \rightarrow U_\beta = \varphi_\beta(D_\beta).$$

Sur  $D_\alpha \cap D_\beta \neq \emptyset$ , la fonction de transition  $\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$  satisfait la relation

$$\varphi_{\alpha\beta} \circ \xi = \xi \circ \Psi_{\alpha\beta} \tag{11}$$

avec  $\Psi_{\alpha\beta} := \Psi_\alpha^{-1} \circ \Psi_\beta$  est un symplectomorphisme de  $\mathbb{T}^n \times (D_\alpha \cap D_\beta)$ .

Comme le flots hamiltonien de toute fonction composante de la partie à droite de (11) est périodique de période 1, il faut donc que la matrice  $M_{\alpha\beta} := [d\varphi_{\alpha\beta}(\xi)]$  soit dans  $GL(n, \mathbb{Z})$  pour tout  $\xi \in D_\alpha \cap D_\beta$ . D'autre part  $D_\alpha, D_\beta$  étaient choisis assez petits et puisque  $GL(n, \mathbb{Z})$  est discret,

$M_{\alpha\beta}$  dépend de façon lisse de  $\xi \in D_\alpha \cap D_\beta$ , ça implique que  $M_{\alpha\beta}$  est une matrice constante de  $GL(n, \mathbb{Z})$ .

Par conséquence, la fonction de transition est de la forme :

$$\varphi_{\alpha\beta}(\xi) = A_{\alpha\beta}(\xi) = M_{\alpha\beta} \cdot \xi + C_{\alpha\beta},$$

avec une constante  $C_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^n$  ( $A_{\alpha\beta} := M_{\alpha\beta}(\cdot) + C_{\alpha\beta}$ ).

C'est à dire,  $\varphi_{\alpha\beta}$  est un élément du groupe affine  $GA_{\mathbb{R}}(n, \mathbb{Z})$  qui est produit semi-direct du groupe linéaire entier  $GL(n, \mathbb{Z})$  et  $\mathbb{R}^n$  ( $GA_{\mathbb{R}}(n, \mathbb{Z}) = GL(n, \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{R}^n$ ).

On dit que la base  $B_r$  a structure d'une variété affine dont ici les cartes locales sont  $\varphi_\alpha^{-1} : U_\alpha \rightarrow D_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ , voir [33], [8], [110], [103].

**Proposition 2.5.3 ([103]).** — *Soit  $F$  un système complètement intégrable. L'espace des feuilles régulières du feuilletage lagrangien est muni d'une structure affine unique dont les cartes sont les variables actions.*

2.5.2.2. *Monodromie classique affine.* — Maintenant, soit  $c$  un point arbitraire dans  $B_r$ . On considère un chemin fermé  $\gamma$  de base  $c$  contenu dans  $B_r$ . Supposons que  $\{U_1, \dots, U_N, U_{N+1} = U_1\}$  un recouvrement fini de petits ouverts (au sens de Leray) de  $\gamma$  dans  $B_r$  tels que sur chaque  $\Omega_i := F^{-1}(U_i)$  on peut appliquer le théorème action-angle.

La structure affine entière de la base  $B_r$  nous donne sur chaque intersection non-vide  $U_i \cap U_{i+1}$  une fonction de transition affine  $A_{i(i+1)}$  dans le groupe  $GA_{\mathbb{R}}(n, \mathbb{Z})$ .

Posons

$$\tilde{\mu}(\gamma) = A_{12}A_{23} \dots A_{N(N+1)} \in GA_{\mathbb{R}}(n, \mathbb{Z})$$

et

$$\mu(\gamma) = \tilde{\mu}(\gamma) / \{\sim\}$$

où " $\sim$ " est la relation d'équivalence définie par la conjugaison dans  $GA_{\mathbb{R}}(n, \mathbb{Z})$ .

Alors  $\mu$  satisfait des propriétés suivantes :

(i)  $\mu$  est invariant par changement de cartes sur  $U_i$ .

(ii)  $\mu$  ne dépend pas du choix de recouvrement fini  $\{U_1, \dots, U_N, U_{N+1} = U_1\}$  et de cartes associées.

(iii)  $\mu$  est invariant par petite perturbation de  $\gamma$  donc par homotopie.

(iv) Pour deux lacets de base  $c$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , on a :

$$\mu(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \mu(\gamma_1) \cdot \mu(\gamma_2).$$

(v)  $\mu(\gamma)$  ne dépend pas de point basé  $c \in \gamma$ .

En résumé,  $\mu(\gamma)$  (à conjugaison près) est bien défini par un élément  $[\gamma]$  du premier groupe d'homotopie (groupe fondamental) de  $B_r$ .

On obtient donc la définition suivante :

**Définition 2.5.4.** — Il existe un homomorphisme de groupe

$$\mu : \pi_1(B_r) \rightarrow GA_{\mathbb{R}}(n, \mathbb{Z}) / \{\sim\}, \quad (12)$$

$$\gamma \mapsto \mu(\gamma)$$

ici " $\sim$ " est la relation d'équivalence définie par la conjugaison.

Il est appelé monodromie affine du système.

Le système complètement intégrable  $F$  sera dit "avoir monodromie" si  $\mu$  n'est pas triviale.

Comme on a vu dans la remarque (2.5.2), il existe une action hamiltonienne du groupe  $\mathbb{T}^n$  sur un voisinage d'une feuille compacte régulière qui préserve  $F$ . Mais ce n'est pas généralement le cas sur  $N$  – les fibres régulières de  $F$ . En effet, on a le théorème :

**Théorème 2.5.5.** — *Soit  $F$  une application moment avec les hypothèses comme au début de cette subsection. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe une action hamiltonienne du groupe  $\mathbb{T}^n$  sur  $N$  qui préserve  $F$ .*
- (ii) *Il existe globalement des coordonnées actions sur  $N$ .*
- (iii) *La monodromie associée du système est triviale.*

Dans le cas du théorème, il existe globalement des coordonnées actions sur  $N$ .

**2.5.3. Monodromie classique linéaire.** — Soit  $F$  application moment avec les hypothèses comme dans la dernière section. Dans cette subsection, on utilise les mêmes notations que précédemment.

**2.5.3.1. Fibré des Stabilisateurs.** — On rappelle que si  $c \in B_r$ , le stabilisateur associé  $S_c$  du tore  $\Lambda_c \subset M$  est défini comme dans (9) par

$$S_c = \{ \tau \in \mathbb{R}^n : \varphi_F^\tau(m) = m \} \quad (13)$$

pour n'importe quel point  $m$  dans  $\Lambda_c$ .  $S_c$  est un  $\mathbb{Z}$ -réseau de rang  $n$  et isomorphe à  $\mathbb{Z}^n$ . Chaque élément  $\tau$  de  $S_c$  est appelé période du tore  $\Lambda_c$ .

**Remarque 2.5.6.** — Un  $n$ -uplet  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$  est tel que l'hamiltonien  $\tau_1 f_1 + \dots + \tau_n f_n$  admette sur le tore  $\Lambda_c$  un flot 1-périodique si et seulement si  $\tau \in S_c$ .

En utilisant des coordonnées actions-angles locales sur un voisinage  $\Omega$  de  $\Lambda_c$  comme dans le théorème Action-Angle, pour tout  $b \in \varphi(D) \subseteq B_r$  proche de  $c$ , une base de l'ensemble des périodes  $S_b$  du tore  $\Lambda_b \subset \Omega$  dépend de façon lisse de  $b$ , notée  $(\tau)(b)$  et peut être donnée par la formule

$$(\mathcal{T})(b) = \left\{ \tau^{(i)}(b) := \left( \frac{\partial(\varphi^{-1})_i(b)}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial(\varphi^{-1})_i(b)}{\partial b_n} \right), i = 1, \dots, n \right\},$$

ou  $\tau^{(i)}(b) = [d(\varphi^{-1})_i(b)]$  et  $(\mathcal{T})(b) = (\tau^{(1)}(b), \dots, \tau^{(n)}(b)) = [d(\varphi^{-1})(b)]$ .

Par conséquence, l'union distincte des stabilisateurs  $\mathcal{S} := \bigcup_{c \in B_r} S_c$  est un fibré lisse sur  $B_r$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S} &\rightarrow B_r \\ S_c &\rightarrow c \end{aligned}$$

Il est trivialement local mais en général, ce fibré est globalement non-trivial.

Maintenant, soient  $U_\alpha, U_\beta$  deux petits ouverts quelconques de  $B_r$  comme dans la section 2.5.2.1,  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ .

Pour tout  $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ , il existe deux bases de  $S_b$  associées à deux coordonnées actions-angles locales au voisinage de  $\Lambda_b$  :  $(\mathcal{T}_\alpha)(b) = [d(\varphi_\alpha^{-1})(b)]$  et  $(\mathcal{T}_\beta)(b) = [d(\varphi_\beta^{-1})(b)]$ .

On a une matrice inversible de changement de base  $M_{\alpha\beta}(b)$  telle que

$$(\mathcal{T}_\alpha)(b) = M_{\alpha\beta}(b)(\mathcal{T}_\beta)(b)$$

et donc

$$[d(\varphi_\alpha^{-1})(b)] = M_{\alpha\beta}(b)[d(\varphi_\beta^{-1})(b)].$$

Cela implique

$$M_{\alpha\beta}(b) = [d(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta)(\xi_b)],$$

avec  $\xi_b := \varphi_\beta^{-1}(b)$ .

En revoyant la subsection (2.5.2.1), on obtient

$$M_{\alpha\beta}(b) = [d(\varphi_{\alpha\beta})(\xi_b)] = d(A_{\alpha\beta}) := M_{\alpha\beta} \quad (14)$$

et donc matrice constante de  $GL(n, \mathbb{Z})$ .

En résumé, les fonctions transitives du fibré des stabilisateurs  $\mathcal{F} : S_c \mapsto c \in B_r$  sont les  $\{ {}^t M_{\alpha\beta}^{-1} \}$  dans  $GL(n, \mathbb{Z})$  et elles sont la partie linéaire des fonctions transitives du fibré des tores

$$F : \Lambda_c \mapsto c \in B_r.$$

**2.5.3.2. Monodromie classique linéaire.** — Pour cette monodromie, on peut consulter dans les articles voir [33], [101], [102], [100].

Soit  $c$  un point arbitraire dans  $B_r$ . On considère un chemin fermé  $\gamma$  de base  $c$  contenu dans  $B_r$ .

Supposons que  $(\mathcal{T})(c) = (\tau^{(1)}(c), \dots, \tau^{(n)}(c))$  est une base du stabilisateur de  $S_c$  qui dépend de façon lisse de  $c$ .

On sait que par la dernière partie, le changement de base lorsque  $c$  varie est un élément de  $GL(n, \mathbb{Z})$ . Donc quand  $c$  se déplace sur  $\gamma$  et revient au point initial  $c$ , la base initiale de  $S_c$  est peut-être changée à une nouvelle base  $(\mathcal{T}')(c) = (\tau'_1(c), \dots, \tau'_n(c))$  avec  $(\mathcal{T}')(c) = M(\gamma)(c)(\mathcal{T})(c)$ ,  $M(\gamma)(c) \in GL(n, \mathbb{Z})$ .

De plus, à conjugaison près,  $M(\gamma)(c)$  ne dépend pas du choix de point basé  $c \in \gamma \subset B_r$  et dépend que de classe homotopie de  $\gamma \subset B_r$  dont on notera sa classe par  $M(\gamma)$ .

On obtient alors un homéomorphisme

$$\begin{aligned} M : \pi_1(B_r) &\rightarrow GL(n, \mathbb{Z}) / \{\text{conjugaison}\} \\ \gamma &\mapsto M(\gamma) \end{aligned}$$

qui est appelé monodromie linéaire du système.

On dira que "avoir monodromie linéaire (ou holonomie)" si  $M$  n'est pas triviale.

**Remarque 2.5.7.** — Pour  $c \in B_r$ , on a un isomorphisme entre des périodes de  $\Lambda_c$  et des classes homologie du groupes d'homologie  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z})$  :

$$S_c \simeq H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z})$$

En effet : si  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in S_c$ , le champ de vecteur hamiltonien  $\tau_1 \chi_{f_1} + \dots + \tau_n \chi_{f_n}$  a un flot périodique de période 1 sur  $\Lambda_c$ . L'orbite  $\mathcal{O}(m)$  de n'importe quel point  $m \in \Lambda_c$  par ce flot définit un élément du groupe d'homologie  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z})$ . Une base  $(\tau^{(1)}(c), \dots, \tau^{(n)}(c))$  de  $S_c$  associe donc à une base de  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z})$ .

Inversement, si  $\gamma_c$  est un cycle sur  $\Lambda_c$  dépend lisse de  $c$ , par l'existante une primitive  $\alpha$  de la forme symplectique  $\omega$  au voisinage de  $\Lambda_c$ , l'intégrale de  $\alpha$  sur  $\gamma_c$  est bien définie une variable d'action dont le gradient en  $c$  soit une période de  $S_c$ , voir [103]. En cette manière, une base de  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z})$  associe donc à une base de  $S_c$ .

Alors on obtient le fibré en homologie  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z}) \rightarrow c \in B_r$  dont les fonctions de transition sont les  $\{ {}^t M_{\alpha\beta}^{-1} \}$  dans  $GL(n, \mathbb{Z})$ . (voir [33], [101]).

En résumé, on a la proposition suivante :

**Proposition 2.5.8.** — *Les proposition suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La monodromie linéaire  $M$  définie au dessus est triviale.*
- (ii) *Le fibré des stabilisateurs  $\mathcal{F} : S_c \rightarrow c \in B_r$  est trivial.*
- (iii) *Le fibré en homologie  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z}) \rightarrow c \in B_r$  est trivial.*

**2.5.4. Relation entre Monodromie affine et Monodromie linéaire.** — Par la relation (14), on a donc toute de suite que l'holonomie (monodromie classique linéaire) est la partie linéaire de la monodromie classique linéaire :

$$M(\gamma) = d\mu(\gamma)$$

pour tout  $\gamma \in \pi_1(B_r)$ .

Par conséquence, si  $M$  est non-triviale, alors  $\mu$  l'est et donc :

**Proposition 2.5.9.** — *Le fibré de  $n$ -tore  $F : \Lambda_c \rightarrow c \in B_r$  est non-trivial si le fibré des stabilisateurs associé  $\mathcal{F} : S_c \rightarrow c \in B_r$  est non-trivial.*

**2.5.5. Intégrale d'action.** — On a vu que par le théorème d'Action-Angle, au voisinage d'un tore régulière du système intégrable  $F$ , les variables actions  $\xi_1, \dots, \xi_n$  admettent un flot 1-périodique qui préserve  $F$ . On pose une question : est ce qu'il y a une autre méthode déterminant les variables actions.

La construction de Mineur nous donne la réponse.

**Définition 2.5.10.** — On appelle une variable action pour le système intégrable  $F$ , un hamiltonien  $A \in C^\infty(M)$  dont son flot préserve  $F$  et est périodique de période 1.

Un système de  $n$  variables actions  $A_1, \dots, A_n$  dont les différentielles sont indépendantes est appelé une famille complète des variables actions.

On remarque que si  $c$  une valeur régulière pour  $F$ , le tore  $\Lambda_c$  est lagrangien, le lemme de Poincaré pour une sous-variété affirme l'existence d'une primitive  $\alpha$  de la forme symplectique  $\omega$  au voisinage de  $\Lambda_c : d\alpha = \omega$ .

**Proposition 2.5.11** ([103], page 87). — *Si  $\alpha$  est une primitive de  $\omega$  au voisinage d'un tore régulier et si  $\gamma(c)$  est un cycle sur  $\Lambda_c$  dépendant de façon  $C^\infty$  de  $c$ , alors l'intégrale d'action*

$$\int_{\gamma(c)} \alpha$$

(vue comme une fonction sur  $M$ ) est une variable action pour  $F$ .

Par conséquence, soient  $\gamma_1(c), \dots, \gamma_n(c)$  des cycles sur  $\Lambda_c$ , dépendant de façon lisse de  $c$  tels que leurs classe d'homologie forment une base de  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z})$ .

Posons

$$g_i(c) = \int_{\gamma_i(c)} \alpha$$

et

$$A_i = g_i \circ F.$$

Alors la famille  $(A_1, \dots, A_n)$  est une famille complète des variables actions au voisinage de  $\Lambda_c$ , voir [33].

**Remarque 2.5.12.** — Pour tout  $\gamma_i(c)$  donné sur  $\Lambda_c$ , si on choisit une autre primitive  $\alpha'$  de  $\omega$ , alors l'action d'intégrale diffère une constante :

$$\int_{\gamma_i(c)} \alpha' = \int_{\gamma_i(c)} \alpha + C.$$

Si  $\gamma'_1(c), \dots, \gamma'_n(c)$  est une autre base de  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z})$  et  $\alpha$  la primitive choisie de la forme symplectique  $\omega$  au voisinage de  $\Lambda_c$ , par l'existence de la monodromie linéaire, il existe une matrice constante  $M \in GL(n, \mathbb{Z})$  telle que

$$\left( \int_{\gamma'_1(c)} \alpha, \dots, \int_{\gamma'_n(c)} \alpha \right) = M \cdot \left( \int_{\gamma_1(c)} \alpha, \dots, \int_{\gamma_n(c)} \alpha \right).$$





## CHAPITRE 3

# MONODROMIE QUANTIQUE ET MONODROMIE SPECTRALE AFFINE

### 3.1. Introduction

La monodromie quantique qui est définie pour le spectre conjoint discret d'un système quantique complètement intégrable de  $n$  opérateurs pseudo-différentiels qui commutent (voir la section 3.3.3) est parfaitement donnée par S. Vu Ngoc [99]. Nous proposons de définir la monodromie pour un seul opérateur pseudo-différentiel et dans ce chapitre, nous allons traiter un cas particulier simple d'un opérateur normal. Pour le réaliser, nous donnerons une identification entre le spectre d'un opérateur normal et le spectre conjoint d'un système quantique intégrale par des résultats de la théorie spectrale (les théorèmes 3.5.12 et 3.5.11).

Nous allons d'abord rappeler brièvement les opérateurs pseudo-différentiels (de Weyl) et la monodromie quantique présentée dans l'article [99]. Ensuite, nous donnerons quelques notations fondamentaux mais nécessaires de la théorie spectrale en insistant sur les critères de spectre discret d'un opérateur. Enfin, des résultats de la théorie spectrale nous permettent de définir la monodromie d'un opérateur pseudo différentiel normal.

### 3.2. Opérateur pseudo-différentiel

Dans cette section, nous allons donner une description brève des opérateurs  $h$ -pseudo-différentiels qui sont obtenus par la quantification de Weyl.

Pour un aperçu général, nous vous conseillons les livres très intéressants [70], [41], [95], [97] et pour davantage de détails, on peut lire les livres [83],[86], [49], [50], [32].

Remarque dans la littérature de la théorie d'opérateur pseudo-différentiel (depuis les années 1970), il existe une théorie sans petit paramètre, développée par Nirenberg, Hörmander [63], Duistermaat (voir [35], [36]), Taylor ([94]) et une théorie avec petit paramètre  $h$ , développée par Maslov, Leray, Helffer, Robert...que nous utilisons ici. On utilisera dans cette thèse la quantification de Weyl (avec petit paramètre  $h$ ) a plusieurs propriétés très utiles (par exemple : la formule de Moyal, l'opérateur adjoint...).

**3.2.1. Symbole.** — Il y a une association entre un opérateur  $h$ -pseudo-différentiel et un symbole (nous utilisons ici le symbole de Weyl).

Dans la littérature, il existe plusieurs classes de symboles différents, néanmoins il doit assurer que la classe des opérateurs pseudo-différentiels associée est stable par la composition et par

l'adjoint... Nous utilisons dans cette thèse une classe des symboles très utile et générale, définie ci-dessous.

**Définition 3.2.1.** — Une fonction  $m : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow (0, +\infty)$  est appelée fonction d'ordre (ou poids tempéré dans le livre de D. Robert [83]) s'il existe des constantes  $C, N > 0$  telles que

$$m(X) \leq C \langle X - Y \rangle^N m(Y), \forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n},$$

avec notation  $\langle Z \rangle = (1 + |Z|^2)^{1/2}$  pour  $Z \in \mathbb{R}^{2n}$ .

**Exemple 3.2.2.** — On utilise souvent des fonction d'ordre standards  $m(Z) \equiv 1$  ou

$$m(Z) = \langle Z \rangle^{m/2} = (1 + |Z|^2)^{l/2},$$

avec une constante donnée  $l \in \mathbb{R}$ .

Nous allons donner la définition des classes de symboles  $a = a(x, \xi; h)$  dépendant d'un petit paramètre  $h$ ,  $(x, \xi) \in M = T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_{(x, \xi)}^{2n}$ .

**Définition 3.2.3.** — Soit  $m$  une fonction d'ordre sur  $\mathbb{R}^{2n}$  et  $k \in \mathbb{R}$ , on définit des classes de symboles (des familles de fonctions)  $(a(x, \xi; h))_{h \in (0, 1]}$  :

$$S(m) = \{a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, \quad |\partial^\alpha a| \leq C_\alpha m\}, \quad (15)$$

pour certaine constante  $C_\alpha > 0$ .

$$S^k(m) = \{a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, \quad |\partial^\alpha a| \leq C_\alpha h^k m\}, \quad (16)$$

pour certaine constante  $C_\alpha > 0$ , uniformément pour  $h \in (0, 1]$ .

On écrit aussi

$$S^\infty(m) = \{a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, \forall N \in \mathbb{R} \quad |\partial^\alpha a| \leq C_{\alpha, N} h^N m\}, \quad (17)$$

pour certaine constante  $C_\alpha > 0$ , uniformément pour  $h \in (0, 1]$ .

C'est clair que nous avons  $S^\infty(m) = \bigcap_{k \in \mathbb{R}} S^k(m)$ .

Un symbole  $a$  est dit  $\mathcal{O}(h^\infty)$  s'il est dans  $S^\infty(m)$ .

**Remarque 3.2.4.** — Quand la fonction d'ordre est la fonction constante  $m \equiv 1$ , nous allons noter

$$S^k := S^k(1)$$

et remarquer en particulier que ( $k = 0$ )

$$S := S(1) = \{a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, \quad |\partial^\alpha a| \leq C_\alpha\}$$

est l'espace des fonctions lisses bornées avec ses dérivées de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**3.2.2. Quantification de Weyl.** — À chaque symbole  $a = a(x, \xi; h) \in S^k(m)$ , la quantification de Weyl associe un opérateur  $h$ -pseudo-différentiel  $A_h = Op_h^w(a)$  sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (en général non-borné) par l'intégrale :

$$(A_h u)(x) = (Op_h^w(a)u)(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi; h\right) u(y) dy d\xi. \quad (18)$$

L'opérateur  $A_h$  est dit le quantifié de Weyl de  $a$  et  $a$  est dit le symbole de Weyl de  $A_h$ . L'ensemble de tels opérateurs est noté par  $\Psi^k(m)$  et  $\Psi^k(1) := \Psi^k$ .

**Remarque 3.2.5.** — Par la méthode des intégrales oscillantes, on sait que si  $a \in S^0(m)$ , alors  $A_h$  est bien défini de  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  et si  $a \in S^k(m)$ ,  $A_h$  est défini au moins de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  dans  $D'(\mathbb{R}^n)$ .

**Définition 3.2.6.** — Un symbole  $a \in S^{k_0}(m)$  est dit classique (d'ordre  $k_0$ ) lorsqu'il admet un développement asymptotique  $\sum h^{k_0+j} a_j$  avec  $a_j = a_j(x, \xi) \in S^{k_j}(m)$  et est écrit

$$a \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^{k_0+j} a_j.$$

Le premier terme dans le développement ci-dessus est appelé le symbole principal de  $a$  ou de l'opérateur  $A_h$ .

A partir de maintenant, on ne considère que la quantification des symboles classiques.

**Exemple 3.2.7.** — Soit un opérateur différentiel  $A_h = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ , avec  $a_\alpha \in C^\infty(X)$  et  $D^\alpha := (\frac{h}{i})^\alpha \partial^\alpha$ . Alors son symbole principal est  $a_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$

**Remarque 3.2.8.** — Pour le calcul symbolique de ces opérateurs, on peut consulter les références comme au début de cette section (voir aussi l'article [13], [62]).

En particulier, si  $a \in S^{k_1}(m_1)$  et  $b \in S^{k_2}(m_2)$ , alors

$$Op_h^w(a) \circ Op_h^w(b) = Op_h^w(a \sharp b),$$

avec  $a \sharp b \in S^{k_1+k_2}(m_1 m_2)$ .

Si  $a \in S$ ,  $Op_h^w(a)^* = Op_h^w(\bar{a})$  et en particulier  $Op_h^w(a)$  est formellement auto-adjoint si et seulement si  $a$  est réel.

Si on suppose  $a, b$  d'ordre 0, alors l'opérateur  $\frac{i}{h}[Op_h^w(a), Op_h^w(b)]$  est encore d'ordre 0 et son symbole principal est  $\{a, b\}$ .

**Théorème 3.2.9 (Calderon-Vaillancourt, [83]).** — Si  $a \in S^0(m)$  avec  $m$  une fonction d'ordre borné (en particulier si  $a \in S$ ), alors l'opérateur  $Op_h^w(a)$  est linéaire continu de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . De plus, il existe des constantes  $C > 0$  et  $M \in \mathbb{N}$  tels que

$$\|Op_h^w(a)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C \sum_{|\alpha| \leq M} \sup |\partial^\alpha a| < \infty.$$

### 3.3. Monodromie quantique

**3.3.1. Introduction.** — Soit un système quantique intégrable  $(P_1(h), \dots, P_n(h))$  de  $n$  opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints qui commutent sur une variété de dimension  $n$  :

$$[P_i(h), P_j(h)] = 0.$$

Si son symbole conjoint principal  $p$  est propre, alors il est bien connu par les travaux de Charbonnel [20] qu'au voisinage d'une valeur régulière de  $p$ , le spectre conjoint du système a la structure d'un réseau asymptotique affine. Cela permet de définir un invariant- la monodromie quantique de ce réseau. Cet invariant qui obstrue l'existence globale de la structure en réseau du spectre conjoint a une relation familière avec un autre invariant qui empêche l'existence globale de coordonnées action-angle.

Nous rappelons ici la construction de cette monodromie selon l'article [99] de S. Vu Ngoc.

**3.3.2. Construction de la Monodromie quantique.** — Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $H$  un ensemble des réels positifs ayant 0 comme un point d'accumulation et pour tout  $h \in H$ ,  $\Sigma(h)$  un sous-ensemble discret dans  $U$ .

Pour un petit ouvert  $B$  de  $U$ , soit  $(f(h))_{h \in H} \in S^0(B)$  un symbole (local) classique d'ordre 0 sur  $B$  au sens de la section précédente :

$$f(h) = f_0 + hf_1 + h^2f_2 + \dots,$$

avec des fonctions lisses  $f_i : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

On dit que le symbole  $f(h)$  est elliptique si son symbole principal  $f_0$  est un difféomorphisme (local) de  $B$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On note la valeur de  $f(h)$  en un point  $c \in B$  par  $f(c; h)$ .

Par convention (ou par définition), une famille  $(r(h))_{h \in H}$  d'éléments d'un espace vectoriel de dimension finie est dite  $\mathcal{O}(h^\infty)$  si pour tout  $N$  entier positif, il existe une constante  $C > 0$  tel que  $\|r(h)\| \leq Ch^N$ , uniformément pour tout  $h \in H$ . De plus, si  $S(h)$  une famille d'ensembles dépendants de  $h \in H$ , alors on note  $f(\cdot; h) \in S(h) + \mathcal{O}(h^\infty)$  si  $\text{dist}(f(\cdot; h), S(h)) = \mathcal{O}(h^\infty)$ .

L'ensemble discret  $\Sigma(h)$  est un réseau asymptotique affine sur  $U$  s'il existe des symboles locaux elliptiques sur  $U$  qui envoient  $\Sigma(h)$  dans  $h\mathbb{Z}^n$  modulo  $\mathcal{O}(h^\infty)$ . Plus exactement :

**Définition 3.3.1.** — On dit que  $(\Sigma(h), U)$  est un réseau asymptotique affine si pour tout  $c \in U$ , il existe une petite boule ouverte  $B$  contenant  $c$  et un symbole elliptique  $f(h) : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  d'ordre 0 tel que pour toute famille  $\lambda(h) \in B$  :

$$\lambda(h) \in \Sigma(h) \cap B + \mathcal{O}(h^\infty) \Leftrightarrow f(\lambda(h); h) \in h\mathbb{Z}^n + \mathcal{O}(h^\infty)$$

Si  $\lambda(h)$  et  $\lambda'(h)$  sont dans  $\Sigma(h) \cap B$ , alors  $\lambda'(h) - \lambda(h) = \mathcal{O}(h^\infty)$  si et seulement si pour  $h$  petit,  $\lambda(h) = \lambda'(h)$ .

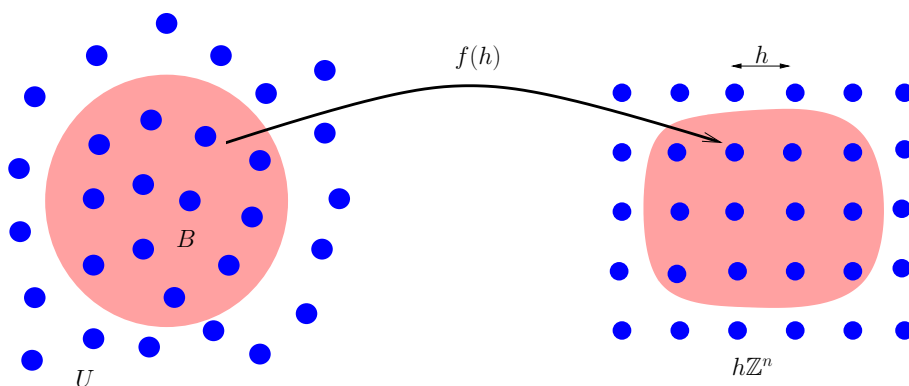


Figure 3. Réseau asymptotique affine

On peut voir  $(f(h), B)$  comme une carte locale de  $\Sigma(h)$  sur  $U$ . Le fait important pour la "variété"-réseau asymptotique affine qui nous permet de définir un invariant naturel est que les fonctions de transitions sont dans le groupe affine  $GA(n, \mathbb{Z})$ .

Ici, on note  $GA(n, \mathbb{Z})$  le groupe des transformations inversibles affines de  $\mathbb{R}^n$  qui est le produit semi-direct du groupe linéaire  $GL(n, \mathbb{Z})$  par le sous-groupe normal des translations de  $\mathbb{Z}^n$ . On remarque si  $A \in GA(n, \mathbb{Z})$ , alors  $A \in GA(n, \mathbb{R})$  tel que  $A$  et  $A^{-1}$  laissent globalement invariant  $\mathbb{Z}^n$ .

**Proposition 3.3.2 ([99]).** — Soient  $(f_\alpha(h), B_\alpha)$  et  $(f_\beta(h), B_\beta)$  deux cartes locales de  $\Sigma(h)$  sur  $U$  telles que  $B_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$ . Alors il existe unique une application affine  $A_{\alpha\beta} \in GA(n, \mathbb{Z})$  telle que

$$\left(\frac{f_\alpha(h)}{h}\right) \circ \left(\frac{f_\beta(h)}{h}\right)^{-1} = A_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Supposons que  $U$  est couvert par recouvrement localement fini des cartes locales  $\{(f_\alpha(h), B_\alpha)\}$ . Alors sur chaque intersection non vide  $B_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$ , par la proposition précédente, il existe une

application affine  $A_{\alpha\beta} \in GA(n, \mathbb{Z})$ . La famille  $\{A_{\alpha\beta}\}$  définit un 1-cocycle dans la cohomologie de Čech avec valeur dans le groupe non-abélien  $GA(n, \mathbb{Z})$ .

**Définition 3.3.3.** — La classe  $[\mathcal{M}] \in \check{H}^1(U, GA(n, \mathbb{Z}))$  est appelée la monodromie quantique de  $(\Sigma(h), U)$ .

**Remarque 3.3.4.** — Nous rappelons ici la définition de la cohomologie de Čech : soient une variété  $M$  et un groupe  $(G, \cdot)$ . Supposons que  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  soit un recouvrement localement fini des ouverts de  $M$  tel que l'intersection d'un nombre fini des  $U_\alpha$  est soit contractile, soit vide. On note  $\mathcal{C}^0(M, G)$  l'ensemble de 0-cochaînes et  $\mathcal{C}^1(M, G)$  l'ensemble de 1-cochaînes avec valeur dans  $G$  par :

$$\mathcal{C}^0(M, G) = \{(c_\alpha)_{\alpha \in I} \mid c_\alpha \in G\},$$

$$\mathcal{C}^1(M, G) = \{(c_{\alpha,\beta}) \mid U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, c_{\alpha,\beta} \in G\}.$$

On note  $\check{Z}^1(M, G)$  l'ensemble de 1-cochaînes qui satisfont la condition de cocycle :

$$c_{\alpha,\beta} \cdot c_{\beta,\gamma} = c_{\alpha,\gamma}$$

si  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ .

On définit une relation d'équivalence, notée "  $\sim$  " sur  $\check{Z}^1(M, G)$  : deux cocycles  $(c_{\alpha,\beta})$  et  $(c'_{\alpha,\beta})$  sont équivalentes  $(c_{\alpha,\beta}) \sim (c'_{\alpha,\beta})$  s'il existe une 0-cochaîne  $(d_\alpha) \in \mathcal{C}^0(M, G)$  telle que  $c'_{\alpha,\beta} = d_\alpha \cdot c_{\alpha,\beta} \cdot d_\beta^{-1}$  pour tout  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ .

Alors la cohomologie de Čech de  $M$  avec valeurs dans  $G$  est le quotient :

$$\check{H}^1(M, G) = \check{Z}^1(M, G) / \sim.$$

Notons que elle ne dépend pas du choix de recouvrement  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ .

La théorie de la géométrie algébrique affirme (voir par exemple [54], [45], [47], [48]) qu'il existe une correspondance bijective entre les éléments de  $\check{H}^1(U, GA(n, \mathbb{Z}))$  et les classes d'isomorphisme de fibrés (fibré à isomorphisme près) sur  $U$  avec groupe de structure  $GA(n, \mathbb{Z})$  et fibre  $\mathbb{Z}^n$ .

Alors on obtient un tel fibré de réseau associé à un 1-cocycle  $\mathcal{M}$ , noté  $\mathfrak{L} : \mathfrak{L}_c \rightarrow c \in U$  dont les fonctions de transition entre deux trivialisations adjacentes de  $\mathfrak{L}$  sont les  $\{A_{\alpha\beta}\}$ .

On remarque que on peut voir ce fibré comme un revêtement car les fibres sont discrètes. Alors l'holonomie de  $\mathfrak{L}$  donc est bien définie : soient  $c$  un point fixé dans  $U$  et un certain lacet fermé  $\gamma$  de base  $c$  contenue dans  $U$ .

Si on fait tourner  $c$  le long de  $\gamma$  et revenir au point de départ, qu'est ce qui se passera intrinsèquement sur la fibre  $\mathfrak{L}_c$  ?

En fait, comme les fonctions de transitions sont des applications affines localement constantes, ce mouvement de  $c$  cause un transport parallèle noté  $\gamma.p$  d'un certain point  $p \in \mathfrak{L}_c$ , c'est à dire il définit une application affine de  $\mathfrak{L}_c$ . De cette façon, l'holonomie de  $\mathfrak{L}$  est bien défini comme une un morphisme de groupe :

$$\mu_c : \pi_1(U, c) \rightarrow GA(\mathfrak{L}_c).$$

D'autre part, on remarque que on peut toujours s'identifier  $GA(\mathfrak{L}_c)$  avec  $GA(n, \mathbb{Z})$  en choisissant une base de  $\mathfrak{L}_c$ .

Le choix d'une telle base est équivalent à celui d'une trivialisations  $f$  de  $\mathfrak{L}$  au-dessus de  $c$  qui envoie

cette base à la base canonique de  $\mathbb{Z}^n$ . Alors, l'holonomie  $\mu_f \in GA(n, \mathbb{Z})$  est donc encore définie par :

$$f(\gamma \cdot p) = \mu_f(\gamma)(f(p))$$

et on peut identifier

$$\mu_c(\gamma) = \mu_f(\gamma).$$

De plus, il est aussi équivalent au choix d'une carte affine  $f(h)$  de  $\Sigma(h)$  autour de  $c$ . Si  $\mathcal{M}$  est un cocycle associé à cette trivialisaton (i.e.  $(f(h), B_c) \in \{(f_\alpha(h), B_\alpha)\}$ ), alors on a

$$\mu_f(\gamma) = A_{1,l} \circ A_{l,l-1} \circ \cdots \circ A_{3,2} \circ A_{2,1},$$

où  $A_{i,j}$  dénote des fonctions de transition correspondantes à chaque couple d'intersection non-vide  $(B_i, B_j)$ , avec  $(B_1, \dots, B_l)$  un recouvrement numéroté dans  $U$  de  $\gamma$ ,  $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ .

**Remarque 3.3.5.** — La non-trivialité de  $[\mathcal{M}]$  est équivalente à celle du fibré  $\mathcal{L}$  ou celle de l'holonomie  $\{\mu_c\}$  de  $\mathcal{L}$ . Dans ce cas, la fonction  $f(h)$  ne peut pas être définie globalement sur  $U$ .

**3.3.3. Le spectre conjoint.** — Soit  $X$  une variété compacte de dimension  $n$  ou  $X = \mathbb{R}^n$  et posons  $M := T^*X$  le fibré cotangent de  $X$ .

On appelle un système quantique intégrable se compose de  $n$  opérateurs  $(P_1(h), \dots, P_n(h))$   $h$ -pseudo-différentiels auto-adjoints, d'ordre 0 et qui commutent sur  $L^2(X) : [P_i(h), P_j(h)] = 0$ .

Pour simplifier, on peut travailler avec des quantifications de Weyl  $P_j(h) \in \Psi^0(M)$  au sens de la section précédente 3.2.2.

Il y a plusieurs façons de définir le spectre conjoint d'un système quantique intégrable. Cependant, nous présentons ici la définition donnée dans [103] qui convient bien à notre travail.

Notons  $p_0^j$  le symbole principal de  $P_j(h)$ ,  $j = 1, \dots, n$  et supposons qu'ils soient indépendants.

On suppose toujours que l'application moment des symboles principaux  $p := (p_0^1, \dots, p_0^n)$  est propre, au moins dans la zone spectrale qui nous intéresse : pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ ,  $p^{-1}(K)$  est compact dans  $T^*X$ .

Le calcul symbolique affirme que l'opérateur  $P^2 := P_1^2 + \dots + P_n^2$  est encore un opérateur pseudo-différentiel de Weyl d'ordre 0, à symbole principal propre dans un certain compact. Il est connu, par exemple [51] (ou chapitre 3 du livre [83]) que dans ce compact le spectre de  $P^2$  est discret. Soit  $\lambda$  une des ses valeur propres. Par la commutativité des  $P_j$ , l'espace propre associé à  $\lambda$  qui est de dimension finie est stable par les opérateurs  $P_j$  sur lequel on peut donc diagonaliser simultanément les  $P_j$ . Alors on obtient un certain nombre de  $n$ -uplets  $(E_1, \dots, E_n) \in K$  qui sont les valeurs propres des  $P_j$  pour la même fonction propre. On appelle spectre conjoint de  $(P_1, \dots, P_n)$  l'ensemble de tels  $n$ -uplets.

De même façon, on a :

**Définition 3.3.6.** — Le spectre conjoint du système quantique intégrable  $(P_1(h), \dots, P_n(h))$  dans  $K$  est l'ensemble, noté  $\sigma_{conj}(P_1, \dots, P_n)$  :

$$\sigma_{conj}(P_1(h), \dots, P_n(h)) = \{(E_1(h), \dots, E_n(h)) \in K \mid \bigcap_{j=1}^n \text{Ker}(P_j(h) - E_j(h)) \neq \emptyset\} \quad (19)$$

Alors il existe certaine fonction propre  $u(h) \in L^2(X)$  normalisée vérifiant

$$P_j(h)u(h) = E_j(h)u(h), j = 1, \dots, n.$$

**Proposition 3.3.7 ([20]).** — Avec les hypothèses au-dessus, le spectre conjoint  $\sigma_{conj}(P_1(h), \dots, P_n(h))$  est un ensemble discret dans  $K$ .

**Remarque 3.3.8.** — Il existe aussi une autre façon plus général de définir le spectre conjoint, qui n'est pas nécessairement discret. Elle est donnée par Charbonnel [20], réexpliquée également dans ([99], page 115) en construisant sur  $\mathbb{R}^n$  une mesure dite "mesure spectrale conjointe". Le spectre conjoint est donc défini à l'aide des projecteurs spectraux, de façon habituelle :

$$E(h) = (E_1(h), \dots, E_n(h)) \in \sigma_{conj}(P_1(h), \dots, P_n(h))$$

si le projecteur spectral sur tout cube ouvert contenant  $E(h)$  est non nul.

Et en particulier, le spectre conjoint discret est l'ensemble de tel  $E(h)$  pour lequel il existe un cube ouvert contenant  $E(h)$  dont le projecteur spectral est de rang fini.

Notons que les points du spectre conjoint discret sont isolés et que les espaces propres conjoints correspondants  $\cap_{j=1}^n \text{Ker}(P_j(h) - E_j(h))$  sont de dimension finie.

De plus, on peut montrer que les valeurs propres conjointes  $E(h) \in \sigma_{conj}(P_1(h), \dots, P_n(h)) \cap K$ , pour  $h$  assez petit sont simples lorsque  $K$  ne croise pas les valeurs critiques de  $p$ .

**3.3.4. Monodromie quantique du système quantique intégrable.** — Soit  $X$  une variété compacte de dimension  $n$  ou  $X = \mathbb{R}^n$  et posons  $M := T^*X$  le fibré cotangent de  $X$ .

Soit  $(P_1(h), \dots, P_n(h))$  un système quantique intégrable de  $n$  opérateurs  $h$ -pseudo-différentiels auto-adjoints qui commutent sur  $L^2(X) : [P_i(h), P_j(h)] = 0$ .

On suppose qu'ils sont classiques et d'ordre 0 et leurs symboles principaux  $p_j$  sont indépendants. Cette construction suivante peut être validée pour plusieurs classes différentes d'opérateurs pseudo-différentiels. Cependant, pour simplifier, on peut travailler ici avec  $P_j(h) \in \Psi^0(M)$  au sens de la section précédente 3.2.2.

Alors dans des coordonnées, leurs symboles de Weyl  $p_j(h)$  admettent des développements asymptotiques de la forme :

$$p_j(x, \xi; h) = p_0^j(x, \xi) + hp_1^j(x, \xi) + h^2p_2^j(x, \xi) + \dots$$

Par le calcul symbolique des opérateurs pseudo-différentiels, la commutativité des  $P_j$  induit la commutativité des symboles principaux  $p_0^1, \dots, p_0^n$  par rapport au crochet de Poisson symplectique sur  $T^*X : \{p_0^i, p_0^j\} = 0$ . L'application des symboles principaux est donc une application moment, notée par  $p$  :

$$p : T^*X \ni (x, \xi) \rightarrow (p_0^1(x, \xi), \dots, p_0^n(x, \xi)) \in \mathbb{R}^n. \quad (20)$$

Nous supposons que  $p$  soit propre .

Notons  $U_r$  un sous-ensemble ouvert de valeurs régulières de  $p$  et soit  $U$  un certain sous-ensemble ouvert avec l'adhérence  $K := \bar{U}$  est compact dans de  $U_r$ .

Posons  $\Sigma(h)$  l'intersection avec  $U$  du spectre conjoint  $\sigma_{conj}(P_1(h), \dots, P_n(h))$  :

$$\Sigma(h) = \sigma_{conj}(P_1(h), \dots, P_n(h)) \cap U.$$

Comme on l'a rappelé, ce spectre est discret et pour  $h$  assez petit se compose des valeurs propres conjointes simples.

De plus, on a le résultat suivant :

**Proposition 3.3.9 ([20]).** —  $\Sigma(h)$  est un réseau asymptotique affine sur  $U$ .

Alors cette proposition nous permet de définir un invariant du système comme la monodromie quantique de  $(\Sigma(h), U)$  donnée par la définition 3.3.3. On a donc :

**Définition 3.3.10.** — On appelle la monodromie quantique d'un système quantique intégrable  $(P_1(h), \dots, P_n(h))$  sur  $U$  est la monodromie quantique de son spectre conjoint sur  $U$ . On la note par  $[\mathcal{M}_{qu}] \in \check{H}^1(U, GA(n, \mathbb{Z}))$ .

**3.3.5. Relation entre monodromie quantique et monodromie classique.** — On rappelle que l'on a supposé que l'application moment des symboles principaux  $p$  dans (20) est propre.

Alors l'ensemble de niveau  $\Lambda_c = p^{-1}(c)$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  est compact. De plus on suppose que cette application est de fibre connexe i.e.  $\Lambda_c$  est connexe. Alors, comme nous avons présenté dans la section 2.5.2.1 du chapitre 2,  $p|_{p^{-1}(U)}$  réalise un feuilletage lagrangien avec une structure affine entière. On peut également donner la monodromie classique (linéaire) définie par un fibré plat en homologie  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z}) \rightarrow c \in U$ . Ses fibres sont  $\mathbb{Z}^n$  et les fonctions de transition entre deux trivialisations adjacentes sont dans le groupe  $GL(n, \mathbb{Z})$ . On sait que ce fibré est localement trivial. L'existence de la monodromie empêche la construction de variables d'action globales sur  $p^{-1}(U)$ .

On notera  $[\mathcal{M}_{cl}]$  la cocycle (monodromie classique) dans  $\check{H}^1(U, GL(n, \mathbb{Z}))$  associé au fibre précédent.

On remarque que la monodromie classique est donné de l'application moment  $p$  des symboles principaux du système quantique intégrable  $(P_1(h), \dots, P_n(h))$ , ce qui nous incite à chercher des liens entre la monodromie classique et la monodromie quantique.

Il est bien connu des articles [20], [96] que l'on peut trouver une carte affine  $f(h)$  pour le spectre conjoint  $\Sigma(h)$  autour d'un point  $c \in U$  telle que sa partie principale  $f_0$  est définie par les intégrales d'action associées à une base  $(\gamma_1(c), \dots, \gamma_n(c))$  de  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z})$  : pour  $c$  varie dans une petite boule dans  $U$ ,

$$f_0(c) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1(c)} \alpha, \dots, \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_n(c)} \alpha \right),$$

où  $\alpha$  est la 1-forme de Liouville sur  $T^*X$ .

Soit  $\iota$  l'inclusion de  $GL(n, \mathbb{Z})$  dans  $GA(n, \mathbb{Z})$  telle que pour tout  $M \in GL(n, \mathbb{Z})$ ,  $\iota(M)$  laisse invariant l'origine  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Ce résultat nous mène bien à la relation entre les deux monodromies comme suivant :

**Théorème 3.3.11** ([99]). — *La monodromie quantique est le "dual" de la monodromie classique au sens suivant :*

$$[\mathcal{M}_{qu}] = \iota_*({}^t[\mathcal{M}_{cl}]^{-1}).$$

*En d'autre terme, pour tout  $c \in U$ , il existe les choix de base de  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z})$  et de carte affine de  $\Sigma(h)$  proche de  $c$  tels que ces monodromies sont représentées par :*

$$\mu_{cl} : \pi_1(U, c) \rightarrow GL(n, \mathbb{Z}),$$

$$\mu_{qu} : \pi_1(U, c) \rightarrow GA(n, \mathbb{Z})$$

*et que on a la relation*

$$\mu_{qu} = \iota \circ ({}^t\mu_{cl}^{-1}).$$

**Remarque 3.3.12.** — La monodromie classique du système est donc caractérisée par la structure géométrique du feuilletage lagrangien dans l'espace des phares  $T^*X$  donné par l'application moment. Le rangement des tores lagrangiens de Liouville est lié directement à la structure de l'image de l'application moment (régulières et singulières). Alors comme une conséquence du dernier théorème, on peut espérer que la monodromie quantique du système quantique intégrable  $(P_1(h), \dots, P_n(h))$  soit bien caractérisée par les singularités de symbole principal conjoint  $p = (p_0^1, \dots, p_0^n)$ .



Voici une image du spectre conjoint du pendule sphérique avec monodromie (une singularité de type foyer-foyer) :

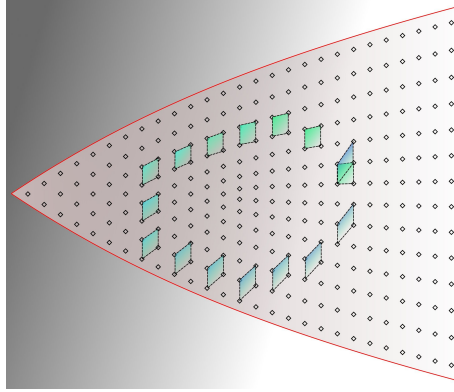


Figure 4. Spectre conjoint du pendule sphérique

Pour des singularités non-dégénérées (au sens de Williamson), on peut consulter [39], [40], ([103], page 75), [98] et [109], [110] pour la classification des singularités.

En particulier, un résultat très remarquable est que tout système quantique intégrable à deux degrés de liberté avec singularité de type foyer-foyer [76] a la même monodromie non-triviale, voir [99], [108],[102], [100], [25]. Des exemples classiques connus typiques de ce cas sont le pendule sphérique ([103], page 45), [24], [46], [34], la bouteille de Champagne [22], [11].

De plus, on peut consulter plus d'exemples typiques de singularités dans le livret de S. Vu Ngoc [103] ou des autres articles [23], [85], [26], [84]...

### 3.4. Théorie spectrale

Dans cette partie, nous allons donner des connaissances nécessaires de la théorie spectrale, en particulier concernant le spectre discret (le spectre essentiel) d'un opérateur normal (opérateur auto-adjoint). Le but est donner la relation entre le spectre discret d'un opérateur normal et le spectre conjoint d'un système quantique intégrable.

Nous vous conseillons les livres [28], [66], [29], [32],[14], [78], [81], [82].

**3.4.1. Opérateur non borné et son spectre.** — Dans toute cette section,  $H$  désigne un espace de Hilbert complexe dont le produit scalaire est noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On suppose toujours que  $\dim(H) = \infty$ .

Un opérateur linéaire (non-borné)  $A$  sur  $H$  est dit être densément défini ou à domaine dense si son domaine, noté  $D(A)$  est dense dans  $H$  :  $\overline{D(A)} = H$ . On écrit souvent un opérateur avec son domaine par  $(A, D(A))$ .

Par convention, on travaille dans cette section avec des opérateurs à domaine dense.

L'opérateur adjoint  $(A^*, D(A^*))$  est donné par :

$$D(A^*) = \{v \in H : \exists f \in H \text{ tel que } \langle v, Au \rangle = \langle f, u \rangle, \forall u \in D(A)\},$$

et pour tout  $v \in D(A^*)$ , on pose  $A^*v = f$ , où  $f$  est le vecteur vérifiant l'égalité précédente.

En résumé :

$$\forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*), \langle A^*v, u \rangle = \langle v, Au \rangle$$

et la densité de  $D(A)$  assure l'unicité de  $A^*v = f$ .

Notons que  $v \in D(A^*)$  si et seulement si  $\exists C > 0$  tel que  $|\langle Au, v \rangle| \leq C \|v\|$  pour tout  $u \in D(A)$ .

L'opérateur  $(A, D(A))$  est dit fermé si son graphe  $\Gamma(A) := \{(u, Au) \in H \times H : u \in D(A)\}$  est fermé dans  $H \times H$ . C'est équivalent à dire que : pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $D(A)$  telle que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $u$  et que  $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $v$  dans  $H$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , lors on a  $u \in D(A)$  et  $v = Au$ .

On dit que  $(A, D(A))$  est fermable s'il admet une extension fermée. Cela se passera si et seulement si  $A^*$  est densément défini :  $\overline{D(A^*)} = H$ .

En particulier, si l'opérateur  $A$  est fermé, son adjoint  $A^*$  est à domaine dense.

Remarquons que l'opérateur adjoint  $(A^*, D(A^*))$  est toujours fermé.

**Définition 3.4.1.** — Soit un opérateur  $(A, D(A))$ , on définit l'ensemble résolvant de  $A$  par :

$$\varrho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } A - \lambda : D(A) \rightarrow H \text{ est une bijection avec un inverse borné}\}$$

et son complémentaire dans  $\mathbb{C}$ , le spectre  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$ .

Pour  $z \in \varrho(A)$ , on appelle résolvante en  $z$ , l'opérateur  $(A - z)^{-1}$  qui est un opérateur borné de  $\mathcal{B}(H)$  et noté  $R(z, A)$ .

Notons que si  $\sigma(A) \neq \mathbb{C}$ , alors  $A$  doit être fermé. La proposition inverse peut ne pas être vraie.

Pour un opérateur fermé, l'ensemble résolvant  $\varrho(A)$  est un ouvert et donc le spectre  $\sigma(A)$  est fermé de  $\mathbb{C}$ . De plus  $\varrho(A) \ni z \mapsto R(z, A) = (A - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$  est une application holomorphe. Néanmoins, comme  $\|R(z, A)\| \geq 1/d(z, \sigma(A))$  pour  $z \in \varrho(A)$ , cette application ne peut se prolonger continûment holomorphe en dehors de  $\varrho(A)$  et nous mènera à une notion méromorphe dans la partie plus loin.

Dans le cas où  $A$  est un opérateur borné,  $\sigma(A)$  est toujours non-vide.

On appelle aussi l'ensemble des valeurs propres de  $A$  par spectre ponctuel de  $A$  et noté  $\sigma_p(A)$  ( $\subseteq \sigma(A)$ ).

**Lemme 3.4.2** ([78], page 66), ([29], page 216)). — Soit un opérateur  $A$  tel que les deux  $\varrho(A)$  et  $\sigma(A)$  sont non-vides, alors  $\lambda \in \sigma(A)$  s'il existe une suite de Weyl pour  $A$  en  $\lambda$  : c'est à dire une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $D(A)$  telle que  $\|u_n\| = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda)u_n\| = 0$ .

**Remarque 3.4.3.** — On note que pour appliquer ce lemme, d'abord  $A$  doit être fermé.

Si de plus, une telle suite  $(u_n)$  comme dans ce lemme est de Cauchy (ou en particulier fortement convergente), alors  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ .

Ce lemme est valide dans le cas  $A$  auto-adjoint, unitaire ou normal.

De plus, la proposition réciproque est vrai si  $A$  est normal, en particulier si  $A$  est auto-adjoint, voir [78].

**Remarque 3.4.4.** — Si  $A$  est fermé, alors  $\lambda \in \sigma(A)$  ssi  $\bar{\lambda} \in \sigma(A^*)$  et donc  $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$  et  $(A^* - \bar{z})^{-1} = [(A - z)^{-1}]^*$  pour  $z \in \varrho(A)$ .

**Remarque 3.4.5.** — Si on suppose que  $A$  soit fermé et que  $A - \lambda$  soit une bijection de  $D(A)$  dans  $H$ , alors les deux conditions  $(A - \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$  et  $\text{Ran}(A - \lambda) = H$  sont équivalentes par le théorème du graphe fermé. On peut donc définir le spectre de d'un opérateur fermé  $A$  comme l'ensemble des nombres complexes  $\lambda$  dans deux cas suivant (mutuellement exclusifs) :

- (i)  $A - \lambda$  n'est pas injectif, i.e  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ .
- (ii)  $A - \lambda$  est injectif mais  $\text{Ran}(A - \lambda) \neq H$ .

La partie du spectre qui correspond au cas (ii) se répartit comme suit : le spectre continu  $\sigma_c(A)$  est constitué de ces  $\lambda$  tel que  $\overline{\text{Ran}(A - \lambda)} = H$ , tandis que le spectre résiduel  $\sigma_r(A)$  se compose des

$\lambda$  tels que  $\overline{\text{Ran}(A - \lambda)} \neq H$ . De cette façon, le spectre se décompose en trois ensembles disjoints (voir par exemple [14], page 26)

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Pour tout opérateur à domaine dense sur  $H$ , on peut associer à chaque ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  une projection  $P_\Omega$  de  $H$  de façon suivante :

Soit  $(A, D(A))$  un opérateur fermé à domaine dense dans  $H$ . Supposons que  $\sigma_1$  soit une partie non-vide bornée de  $\sigma(A)$  et que  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{C}$  contenant  $\sigma_1$  et d'intersection vide avec  $\sigma_2 := \sigma(A) \setminus \sigma_1$ .

Pour un certain chemin orienté  $\Gamma \subset \Omega$  qui entoure  $\sigma_1$  ( $\Gamma \subset \rho(A)$ ) et  $f \in H(\Omega)$  une fonction holomorphe sur  $\Omega$ , on peut définir un opérateur de  $\mathcal{B}(H)$  donné par l'intégrale suivante qui ne dépend pas du choix de  $\Gamma$  (voir [82]) :

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(z - A)^{-1}. \quad (21)$$

En particulier avec  $f = 1_\Omega$ , alors  $P_\Omega(A) := 1_\Omega(A)$  définit une projection non nulle de  $H$  qui commute avec  $A$ .

Ensuite, nous allons donner la définition de spectre discret et spectre essentiel de  $A$ .

**Définition 3.4.6** ([82]). — Pour un opérateur fermé  $(A, D(A))$  et  $\lambda$  un point isolé de  $\sigma(A)$  : il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\{\mu \in \mathbb{C}, |z - \lambda| < \varepsilon\} \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$ .

Pour tout  $0 < r < \varepsilon$ , comme au-dessus, on peut définir la projection  $P_\lambda$  (pas nécessairement orthogonale) par

$$P_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\lambda|=r} (z - A)^{-1}. \quad (22)$$

On dit que  $\lambda \in \sigma(A)$  est dans le spectre discret de  $A$ , noté  $\sigma_{disc}(A)$  si  $\lambda$  est isolé de  $\sigma(A)$  et  $P_\lambda$  est de rang fini. On définit le spectre essentiel de  $A$ , noté  $\sigma_{ess}(A)$  par

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_{disc}(A)$$

**Remarque 3.4.7.** — Dans littérature, il existe des définitions alternatives de spectre essentiel  $\sigma_{ess}(A)$  (voir aussi chapitre 4 de [28], [32], [78] page 285, [14], page 99...), néanmoins elles coïncident si  $A$  est auto-adjoint.

**Remarque 3.4.8.** — Pour plus propriétés des projections  $P_\Omega$  et  $P_\lambda$ , le lecteur peut consulter les livres [82], [66], [32].

De plus, on a toujours  $\text{Ker}(A - \lambda) \subseteq \text{Ran}(P_\lambda)$ .

D'autre part, par le théorème XII du livre [82] si  $\lambda \in \sigma_{disc}(A)$  et si  $u \in \text{Ran}(P_\lambda) \subset D(A)$ , alors il existe  $n$  entier tel que  $(A - \lambda)^n u = 0$ . C'est pourquoi, nous avons

$$\text{Ker}(A - \lambda) \subseteq \text{Ran}(P_\lambda) \subseteq \text{Ker}(A - \lambda)^n,$$

pour certain  $n$  entier.

On en déduit que si  $\lambda$  est dans spectre discret de  $A$ , alors  $\lambda$  doit être une valeur propre de multiplicité finie de  $A$ .

**Remarque 3.4.9.** — L'appartenance ( $\lambda \in \sigma_{disc}(A)$ ) équivaut à ( $\bar{\lambda} \in \sigma_{disc}(A^*)$ ).

On note qu'une valeur propre de multiplicité infinie est bien dans le spectre essentiel de  $A$ .

Le spectre essentiel  $\sigma_{ess}(A)$  est un ensemble fermé de  $\mathbb{C}$ .

**Théorème 3.4.10.** — Si l'opérateur fermé  $(A, D(A))$  a une résolvante compacte  $(A - z_0)^{-1}$  pour un certain  $z_0 \in \rho(A)$ , alors le spectre de  $A$  est discret (multiplicité finie),  $\sigma_{ess}(A) = \emptyset$  et  $\sigma(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = +\infty$ .

On a un résultat plus concret que le lemme (3.4.2) :

**Proposition 3.4.11.** — Une condition suffisante pour que  $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$  est l'existence d'une suite de Weyl  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $D(A)$  pour  $A$  en  $\lambda$  ( $\|u_n\| = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda)u_n\| = 0$ ) qui  $(u_n)$  converge faiblement vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ .

### 3.4.2. Opérateur auto-adjoint et son spectre. —

**Définition 3.4.12.** — On dit qu'un opérateur (en général non borné) à domaine dense  $(A, D(A))$  est symétrique (ou hermitien) si  $A \subset A^*$ , i.e.  $D(A) \subseteq D(A^*)$  et  $Au = A^*u$  pour tout  $u \in D(A)$ . Il est équivalent à  $\langle u, Av \rangle = \langle Au, v \rangle$  pour tous  $u, v \in D(A)$ .

**Définition 3.4.13.** — On dit que  $(A, D(A))$  est auto-adjoint si  $A = A^*$ , i.e.  $A$  symétrique et  $D(A) = D(A^*)$ .

Un opérateur symétrique  $A$  est dit essentiellement auto-adjoint si sa fermeture  $\overline{A}$  est auto-adjointe. Un théorème spectral dit qu'un opérateur symétrique est essentiellement auto-adjoint ssi il a une unique extension auto-adjoint (sa fermeture).

Pour un opérateur fermé  $A$ , un certain sous-espace  $D \subset D(A)$  tel que  $\overline{A|_D} = A$  est appelé un cœur de  $A$ . En particulier,  $D$  est cœur d'un opérateur auto-adjoint  $A$  ssi  $A|_D$  est essentiellement auto-adjoint.

**Remarque 3.4.14.** — Un opérateur symétrique  $A$  est toujours fermable et sa fermeture  $\overline{A}$  est encore symétrique. Si de plus, le domaine  $D(A) = H$  alors,  $A$  est nécessairement auto-adjoint et  $A$  est donc borné par le théorème de Hellinger- Toeplitz.

Il existe aussi des opérateur fermés symétriques mais pas essentiellement auto-adjoint.

Il est bien connu que le spectre d'un opérateur auto-adjoint est non-vide et réel. Inversement, un opérateur fermé symétrique devient auto-adjoint ssi son spectre est réel.

Pour un opérateur auto-adjoint, on peut définir (uniquement) une mesure correspondante noté  $P_A$  à valeur projection sur  $\mathbb{R}$ , avec support  $\sigma(A)$  (voir par exemple [78], [28], [14]) :

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}) \ni U \mapsto P_A(U) = 1_U(A) \in \mathcal{B}(H),$$

où  $\mathcal{A}(\mathbb{R})$  noté  $\sigma$ -algèbre de Borel de  $\mathbb{R}$ .

Elle est un cas particulier de la projection définie par (21).

On note que pour tout  $U \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$  borné,  $\text{Ran}(P_A(U)) \subset D(A)$ .

**Théorème 3.4.15** ([78], page 285), ([78], page 171)). — Soit  $A$  un opérateur auto-adjoint et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors,

1.  $\lambda \in \sigma(A)$  ssi  $P_A(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \neq 0$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .
2.  $\lambda \in \sigma_p(A)$  ssi  $P_A(\{\lambda\}) \neq 0$  et  $\text{Ker}(A - \lambda) = \text{Ran}(P_A(\{\lambda\}))$  est l'espace propre correspondant à  $\lambda$  de  $A$ .
3.  $P_A(\mathbb{R} \setminus \sigma(A)) = 0$ ,  $P_A(\sigma(A)) = \text{Id}$  et l'opérateur  $A$  est borné ssi son spectre est borné.

Une conséquence intéressante est :

**Corollaire 3.4.16.** — *Soit  $A$  auto-adjoint. Si  $\lambda$  est un point isolé du spectre  $\sigma(A)$ , alors  $\lambda$  doit être une valeur propre de  $A$ .*

A partir du théorème ci-dessus, nous obtenons un critère important pour qu'un point soit dans le spectre discret d'un opérateur auto-adjoint.

**Théorème 3.4.17** ([28], [32], [82]...). — *Pour un opérateur auto-adjoint  $A$ ,  $\lambda \in \sigma_{disc}(A)$  si et seulement si  $\lambda$  est une valeur propre isolée de  $\sigma(A)$  et de multiplicité finie.*

Concernant le spectre essentiel, nous avons :

**Théorème 3.4.18.** — *Pour un opérateur auto-adjoint  $A$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ .
2. *Il existe une suite de Weyl  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $D(A)$  pour  $A$  en  $\lambda$  ( $\|u_n\| = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda)u_n\| = 0$ ) qui  $(u_n)$  converge faiblement vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ .*
3.  $\dim \text{Ran}(1_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}(A)) = +\infty$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .
4.  $\lambda$  est un point d'accumulation de  $\sigma(A)$  ou une valeur propre de multiplicité infinie.

Dans ce théorème, on peut remplacer la condition : la suite  $(u_n)$  converge faiblement vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$  par la suite  $(u_n)$  est orthogonale.

Pour une démonstration du théorème ci-dessus, on peut lire [32], [78] page 287), [14], page 173, [28]...

**Corollaire 3.4.19.** — *Soient un opérateur auto-adjoint  $A$  et un intervalle  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ . On a :*

1. *Si  $0 < \dim(\text{Ran}P_A(a, b)) < \infty$ , alors le spectre de  $A$  dans  $(a, b)$  est discret :  $\sigma(A) \cap (a, b) \subset \sigma_{disc}(A)$ .*
2. *Si  $0 < \dim(\text{Ran}P_A(a, b)) = \infty$ , alors  $\sigma_{ess}(A) \cap [a, b] \neq \emptyset$ .*

Le théorème (3.4.10) en combinant avec le théorème ci-dessus et théorème 4.1.5 page 74 du livre [28], on obtient :

**Théorème 3.4.20.** — *Supposons que  $H$  soit séparable. Pour un opérateur auto-adjoint  $A$ , les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le spectre de  $A$  est discret,  $\sigma_{ess}(A) = \emptyset$ .*
2. *La résolvante  $(A - z)^{-1}$  est compacte pour un certain  $z \in \rho(A)$  (dans ce cas, la résolvante est compacte pour tout  $z \in \rho(A)$ ).*
3. *Il existe dans  $H$  un ensemble orthonormal complet (une base orthonormée) de vecteurs propres  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  tel que les valeurs propres correspondantes  $\lambda_n$  convergent en valeur absolue vers  $\infty$  quand  $n$  tend vers  $\infty$ .*

**3.4.3. Opérateur normal et son spectre.** — Pour définir un opérateur normal, nous donnons le théorème suivant (théorème 3.24 de [66])

**Théorème 3.4.21.** — Soient  $H, H'$  deux espaces de Hilbert et  $(A, D(A))$  un opérateur fermé à domaine dense,  $\overline{D(A)} = H$ ,  $A : H \supseteq D(A) \rightarrow H'$ . Alors, l'opérateur  $A^*A$  est densément défini et auto-adjoint sur  $H$  et son domaine  $D(A^*A)$  est un cœur de  $A$ .

**Définition 3.4.22.** — Un opérateur (non-borné)  $(A, D(A))$  sur  $H$  est appelé normal s'il est densément défini, fermé et satisfait  $A^*A = AA^*$ .

L'ensemble de tous les opérateurs normaux sur  $H$  est noté  $\mathcal{L}_n(H)$ .

Dans cette définition, le rôle de  $A$  et  $A^*$  sont pareils, si  $A$  est normal, alors  $A^*$  l'est aussi. On note que la définition inclut l'exigence d'égalité des domaines  $D(A^*A) = D(AA^*)$  qui n'est pas toujours facile à vérifier.

Notons que pour deux opérateurs fermés  $A$  et  $B$  de même cœur  $D$  et  $\|Ax\| = \|Bx\|$  pour tout  $x \in D$ , alors  $D(A) = D(B)$  et  $\|Ax\| = \|Bx\|$  pour tout  $x \in D(A)$ . D'autre part, nous savons que  $D := D(A^*A) = D(AA^*)$  est un cœur commun de  $A$  et  $A^*$ . On a donc une autre critère utile suivante :

**Lemme 3.4.23 ([14]).** — Un opérateur fermé, densément défini  $A$  est normal si et seulement si  $D(A) = D(A^*)$  et  $\|Ax\| = \|A^*x\|$  pour tout  $x \in D(A)$ .

**Remarque 3.4.24.** — En fait, la condition :  $D(A) = D(A^*)$  et  $\|Ax\| = \|A^*x\|$  pour tout  $x \in D(A)$  suffit pour montrer que  $A$  est fermé. On ne peut donc supposer la fermeture de  $A$ . Quelques livres utilisent cette condition comme la définition d'un opérateur normal.

Tout opérateur normal est maximal dans le sens que il n'a pas d'extension normale non-triviale.

**Théorème 3.4.25 ([14]).** — Le spectre d'un opérateur normal  $A$  est non-vidé,  $\sigma(A) \neq \emptyset$ .

**Remarque 3.4.26.** — Pour un opérateur normal, par le lemme (3.4.23),  $\lambda \in \sigma_p(A)$  ssi  $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$  et les espaces propres correspondants coïncident :

$$\text{Ker}(A - \lambda) = \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}). \quad (23)$$

Par ailleurs, le spectre résiduel est vide  $\sigma_r(A) = \emptyset$  et donc

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \\ \sigma_c(A) &= \sigma_{ess}(A) \setminus \sigma_p(A). \end{aligned}$$

On a bien aussi que  $\lambda \in \sigma_p(A)$  ssi  $\overline{\text{Ran}(A - \lambda)} \neq H$ . L'ensemble résolvant  $\rho(A)$  coïncide avec son domaine régulier et l'opérateur résolvant  $R(z, A)$ ,  $z \in \rho(A)$  est encore normal, voir [66], [14].

**Théorème 3.4.27 ([14], page 102)).** — Pour un opérateur normal, les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\lambda \in \sigma(A)$ .
2. Il existe une suite de Weyl pour  $A$  en  $\lambda$  : une suite unitaire  $u_n \in D(A)$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda)u_n\| = 0$ .
3.  $\inf\{\|(A - \lambda)u\| : u \in D(A), \|u\| = 1\} = 0$ .
4.  $\text{Ran}(A - \lambda) \neq H$ .

Notons que ce théorème est bien valide pour un opérateur auto-adjoint.

### 3.5. Monodromie d'un opérateur pseudo-différentiel normal

#### 3.5.1. Deux opérateurs qui commutent. —

**Définition 3.5.1.** — On dit que deux opérateurs (en général non-bornés)  $(A, D(A))$  et  $(B, D(B))$  sur un espace de Hilbert  $H$  commutent si  $AB = BA$  (c'est à dire, leur commutateur  $[A, B] := AB - BA = 0$ ).

**Remarque 3.5.2.** — Cette définition inclut déjà la condition de domaine :

$$\text{Ran}(B) \subseteq D(A), \text{Ran}(A) \subseteq D(B), D(AB) = D(BA).$$

Dans le cas auto-adjoint, il existe d'autres façons équivalentes de définir la commutativité : deux opérateurs auto-adjoints  $A$  et  $B$  commutent si les mesures spectrales correspondantes  $P_A$  et  $P_B$  commutent :  $1_I(A)$  et  $1_J(B)$  commutent pour  $I, J$  boréliens quelconques de  $\mathbb{R}$  (voir [14]).

Deux opérateurs auto-adjoints  $A, B$  commutent si et seulement si leurs résolvantes commutent [66] :  $R(\lambda, A)R(\mu, B) = R(\mu, B)R(\lambda, A)$  pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . De plus, on a  $[f(A), f(B)] = 0$  pour tout  $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ .

D'autre part, si un des deux opérateurs est borné, par exemple  $A$ , la commutativité est équivalente à  $AB \subset BA$ .

**Remarque 3.5.3.** — On note que pour un opérateur (borné) auto-adjoint et compact  $A$ ,  $H$  admet une base hilbertienne de vecteurs propres de  $A$  et  $H$  est écrit comme une somme directe orthogonale des espaces propres de  $A$  :  $H = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(A)} N(A_\lambda)$ , avec  $N(A_\lambda) := \text{Ker}(A - \lambda)$ .

Ce résultat nous donne le lemme suivant concernant deux opérateurs auto-adjoints compacts qui commutent :

**Lemme 3.5.4.** — Si deux opérateurs auto-adjoints compacts  $A, B$  commutent,  $H$  a une base orthonormée de vecteurs propres simultanées de  $A$  et  $B$ .

*Preuve.* — Pour chaque valeur propre  $\lambda$  de  $A$ , grâce la commutativité de  $A, B$ , l'espace propre correspondant  $N(A_\lambda) = \text{Ker}(A - \lambda)$  et son complément orthogonal sont invariants par  $B$ . La restriction de  $B$  sur  $N(A_\lambda)$  est encore auto-adjoint et compact et nous donne, par la remarque ci-dessus, une base orthonormée de  $N(A_\lambda)$  de vecteurs propres de  $B$ . Ces vecteurs sont bien sur vecteurs propres de  $A$ . Cette procédure est valide sur tout espace propre de  $N(A_\lambda)$  de  $A$  et la représentation de  $H$  dans la remarque précédente nous donne une base orthonormée de vecteurs propres simultanées de  $A$  et  $B$  pour  $H$ .  $\square$

Notons que ce lemme est vrai aussi si la dimension de  $H$  est finie.

**Remarque 3.5.5.** — Pour un opérateur normal et compact  $A$ , en écrivant  $A$  comme la somme de sa partie réelle et sa partie imaginaire :  $A = A_1 + iA_2$  où les opérateurs  $A_1 := (A + A^*)/2$ ,  $A_2 := (A - A^*)/(2i)$  sont encore auto-adjoints et compacts (car  $A^*$  compact).

Avec la relation (23), on note que si  $Au = \lambda u$ , alors  $A_1 u = (\text{Re}\lambda)u$  et  $A_2 u = (\text{Im}\lambda)u$ . Le lemme précédent nous donne donc une base orthonormée  $\{u_\alpha\}$  de  $H$  telle que :  $A_1 u_\alpha = (\text{Re}\lambda_\alpha)u_\alpha$  et  $A_2 u_\alpha = (\text{Im}\lambda_\alpha)u_\alpha$ . Les  $u_\alpha$  sont bien valeurs propres de  $A$ . On a donc un corollaire suivant :

**Corollaire 3.5.6.** — Si  $A$  est un opérateur normal et compact, alors  $H$  admet une base hilbertienne de vecteurs propres de  $A$  : c'est à dire  $A$  a le spectre purement ponctuel et donc  $\sigma(A) = \overline{\sigma_p(A)}$ . De plus,  $H$  est écrit comme une somme directe orthogonale des espaces propres de  $A$ .

A partir du théorème (3.4.20) et avec une démonstration similaire du lemme (3.5.4), on obtient un résultat plus général (pour des opérateurs non-bornés) :

**Lemme 3.5.7.** — *Supposons que  $H$  soit séparable. Soient  $A, B$  deux opérateurs auto-adjoints dont l'un est à résolvante compacte. Si  $A, B$  commutent, alors  $H$  admet une base orthonormée de vecteurs propres simultanées de  $A$  et  $B$ .*

**3.5.2. Spectre discret d'un opérateur normal et Spectre conjoint.** — Considérons un opérateur normal (en général non-borné)  $A$  avec le domaine dense  $D(A) = D$  sur un espace de Hilbert  $H$ . Par le lemme (3.4.23), l'opérateur adjoint  $A^*$  a le même domaine  $D(A^*) = D(A) = D$ .

On rappelle la partie réelle imaginaire de  $A$  par :  $A = A_1 + iA_2$  avec

$$A_1 = \frac{A + A^*}{2}, A_2 = \frac{A - A^*}{2i}, D(A_1) = D(A_2) = D \quad (24)$$

C'est vrai que  $A_1$  et  $A_2$  définis par la formule (24) sont auto-adjoints. De plus, la commutativité de  $A$  et  $A^*$  est équivalente à celle de  $A_1, A_2$  et donc  $A_1A_2 = A_2A_1$ .

Inversement, soient deux opérateurs auto-adjoints  $A_1, A_2, D(A_1) = D(A_2) = D$  dense dans  $H$ . Si  $A_1, A_2$  commutent, alors l'opérateur défini par  $A := A_1 + iA_2, D(A) = D$  est bien défini un opérateur normal (et donc fermé) sur  $H$ .

Nous rappelons le définition de spectre conjoint (en particulier ici pour deux opérateurs auto-adjoints qui commutent) que nous avons donnée au deuxième chapitre.

**Définition 3.5.8.** — Soient  $A_1, A_2$  deux opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert  $H$  avec domaine  $D(A) = D(B) = D$  dense dans  $H$  tel qu'ils commutent,  $A_1A_2 = A_2A_1$ . Le spectre conjoint du système (intégrable)  $(A_1, A_2)$  est défini par :

$$\sigma_{conj}(A_1, A_2) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists u \in D, \|u\| = 1, A_1u = \lambda_1u, A_2u = \lambda_2u\}$$

**Remarque 3.5.9.** — Pour un opérateur normal compact  $A$ , comme dans la remarque 3.5.5 et le corollaire 3.5.6, nous avons

$$\sigma_{conj}(A_1, A_2) = \{(Re(\lambda), Im(\lambda)) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \in \sigma_p(A)\}.$$

En résumé, si on s'identifie  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}$ , on obtient :

$$\sigma_p(A) = \sigma_p(A_1 + iA_2) \cong \sigma_{conj}(A_1, A_2).$$

On note que avec le lemme 3.5.7, ce résultat est encore vrai pour deux opérateurs (en général non-bornés) auto-adjoints  $A_1, A_2$  dont l'un est à résolvante compacte.

On va montrer que ce résultat peut généraliser dans des cas plus généraux.

**Proposition 3.5.10.** — *Soient  $A_1, A_2$  deux opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert  $H$  avec domaine  $D(A) = D(B) = D$  dense dans  $H$  tels qu'ils commutent,  $A_1A_2 = A_2A_1$ .*

*Alors, on a :*

1. Si  $\lambda \in \sigma(A_1 + iA_2)$ , alors  $Re(\lambda) \in \sigma(A_1)$  et  $Im(\lambda) \in \sigma(A_2)$ .
2. Si  $\lambda \in \sigma_p(A_1 + iA_2)$ , alors  $Re(\lambda) \in \sigma_p(A_1)$  et  $Im(\lambda) \in \sigma_p(A_2)$ .  
De plus si  $\lambda$  est une valeur propre de multiplicité infinie de  $A_1 + iA_2$ , alors  $Re(\lambda), Im(\lambda)$  sont aussi les valeurs propres de multiplicité infinie correspondantes de  $A_1, A_2$ .
3. Si  $\lambda \in \sigma_{ess}(A_1 + iA_2)$ , alors  $Re(\lambda) \in \sigma_{ess}(A_1)$  et  $Im(\lambda) \in \sigma_{ess}(A_2)$ .



*Preuve.* — Posons  $A = A_1 + iA_2$ ,  $D(A) = D$ . Comme nous avons expliqué au début de cette section,  $A$  est un opérateur normal d'adjoint  $A^* = A_1 - iA_2$ . Pour tout nombre complexe  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $A - \lambda$  est encore un opérateur normal. Alors, pour tout  $u \in D$ , l'égalité  $\|(A - \lambda)u\| = \|(A^* - \bar{\lambda})u\|$  nous donne :

$$\|(A_1 + iA_2 - \lambda)u\|^2 = \|(A_1 - \operatorname{Re}(\lambda))u\|^2 + \|(A_2 - \operatorname{Im}(\lambda))u\|^2 \quad (25)$$

Cette équation implique que :

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda) = \operatorname{Ker}(A_1 - \operatorname{Re}(\lambda)) \cap \operatorname{Ker}(A_2 - \operatorname{Im}(\lambda)). \quad (26)$$

Si  $\lambda \in \sigma(A_1 + iA_2)$ , par le théorème 3.4.27, il existe une suite de Weyl pour  $A$  en  $\lambda$  : une suite  $u_n \in D$ ,  $\|u_n\| = 1$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda)u_n\| = 0$ .

Par l'équation (25), elle est aussi une suite de Weyl pour  $A_1$  en  $\operatorname{Re}(\lambda)$  et pour  $A_2$  en  $\operatorname{Im}(\lambda)$ . Encore par le théorème 3.4.27, on a  $\operatorname{Re}(\lambda) \in \sigma(A_1)$  et  $\operatorname{Im}(\lambda) \in \sigma(A_2)$ .

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $(A_1 + iA_2)$ , par l'équation (26) on a  $\operatorname{Re}(\lambda) \in \sigma_p(A_1)$  et  $\operatorname{Im}(\lambda) \in \sigma_p(A_2)$ . De plus, c'est évident que si  $\lambda$  est une valeur propre de multiplicité infinie de  $A_1 + iA_2$ , alors  $\operatorname{Re}(\lambda), \operatorname{Im}(\lambda)$  sont aussi les valeurs propres de multiplicité infinie correspondantes de  $A_1, A_2$ .

On note aussi que si  $u$  est un vecteur propre correspondant à  $\lambda$  de  $(A_1 + iA_2)$ , alors  $u$  est aussi vecteur propre simultané de  $A_1, A_2$ .

Si  $\lambda \in \sigma_{ess}(A_1 + iA_2)$ , alors il existe une suite de Weyl orthogonale pour  $(A_1 + iA_2)$  en  $\lambda$  :  $u_n \in D$ ,  $\|u_n\| = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda)u_n\| = 0$ . Par l'équation (25) et par le théorème 3.4.18, on obtient  $\operatorname{Re}(\lambda) \in \sigma_{ess}(A_1)$  et  $\operatorname{Im}(\lambda) \in \sigma_{ess}(A_2)$ .

La proposition est montrée.  $\square$

À partir de cette proposition, on peut avoir un résultat plus général que celui dans la remarque 3.5.9 :

**Théorème 3.5.11.** — Soient  $A_1, A_2$  deux opérateurs auto-adjoints qui commutent sur un espace de Hilbert  $H$  avec domaine  $D(A_1) = D(A_2) = D$  dense dans  $H$ . Soient  $I_1, I_2$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  tels que les spectres correspondants de  $A_1, A_2$  dans  $I_1, I_2$  sont discrets.

Alors le spectre de  $A_1 + iA_2$  dans  $(I_1 + iI_2) \cong I_1 \times I_2$  est discret et

$$\sigma(A_1 + iA_2) \cap (I_1 + iI_2) \cong \sigma_{conj}(A_1, A_2) \cap (I_1 \times I_2).$$

*Démonstration.* — On a toujours l'inclusion :

$$\sigma_{conj}(A_1, A_2) \cap I_1 \times I_2 \subseteq \sigma_p(A_1 + iA_2) \cap (I_1 + iI_2) \subseteq \sigma(A_1 + iA_2) \cap (I_1 + iI_2).$$

Pour l'inclusion inverse. Pour tout  $\lambda \in \sigma(A_1 + iA_2) \cap (I_1 + iI_2)$ , la proposition précédente affirme que :  $\operatorname{Re}(\lambda) \in \sigma(A_1) \cap I_1$  et  $\operatorname{Im}(\lambda) \in \sigma(A_2) \cap I_2$ .

Comme les spectres correspondants de  $A_1, A_2$  dans  $I_1, I_2$  sont discrets,  $\operatorname{Re}(\lambda)$  et  $\operatorname{Im}(\lambda)$  sont des valeurs propres isolés de multiplicité finie correspondantes de  $A_1, A_2$ .

De l'équation (26),  $\lambda$  doit être une valeur propre de multiplicité finie de  $A_1 + iA_2$  et il existe un vecteur propre commun pour  $A_1, A_2$  :  $u \in D$ ,  $\|u\| = 1$ ,  $A_1 u = \operatorname{Re}(\lambda)u$ ,  $A_2 u = \operatorname{Im}(\lambda)u$ . C'est à dire

$$\lambda = (\operatorname{Re}(\lambda), \operatorname{Im}(\lambda)) \in \sigma_{conj}(A_1, A_2) \cap I_1 \times I_2.$$

$\square$

On va donner une version du ce théorème pour un opérateur normal avec le spectre discret dans un domaine rectangle de  $\mathbb{C}$ .

**Théorème 3.5.12.** — Soient  $A$  un opérateur normal et  $I_1, I_2$  deux intervalles quelconques de  $\mathbb{R}$  tels que le spectre de  $A$  dans  $I_1 \times I_2$  est discret. On appelle la partie réelle et la partie imaginaire de  $A$  par  $A_1$  et  $A_2$ . Alors on a :

$$\sigma(A) \cap (I_1 + iI_2) \cong \sigma_{conj}(A_1, A_2) \cap (I_1 \times I_2).$$

*Démonstration.* — C'est évident que

$$\sigma_{conj}(A_1, A_2) \cap (I_1 \times I_2) \subseteq \sigma(A) \cap (I_1 + iI_2).$$

Pour l'inclusion inverse : si  $\lambda \in \sigma(A) \cap (I_1 + iI_2)$ , alors  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  car  $\sigma(A) \cap (I_1 + iI_2)$  est discret. La proposition 3.5.10 implique que  $Re(\lambda) \in \sigma_p(A_1) \cap I_1$  et  $Im(\lambda) \in \sigma_p(A_2) \cap I_2$  avec un vecteur propre non-nul commun (par l'équation (26)) et nous obtenons l'inclusion inverse.  $\square$

Ce théorème nous permet de définir la monodromie d'un opérateur pseudo-différentiel normal en revenant la monodromie quantique du spectre conjoint comme au-dessous.

**3.5.3. Monodromie d'opérateur pseudo-différentiel normal.** — Soit  $X$  une variété compacte de dimension 2 ou  $X = \mathbb{R}^2$  et posons  $M := T^*X$  la variété cotangente de  $X$ .

On considère un opérateur  $h$ -pseudo-différentiel  $P(h)$  sur  $L^2(X)$  obtenu par la quantification de Weyl d'une certaine classe comme dans la section précédente.

On suppose que  $P(h)$  est normal. Comme la partie précédente, on écrit  $P(h) = P_1(h) + iP_2(h)$  où  $P_1(h), P_2(h)$  sont respectivement la partie réelle et imaginaire de  $P(h)$ . La commutativité de  $P_1(h), P_2(h)$  nous donne un système quantique intégrable  $(P_1(h), P_2(h))$  et on peut définir sa monodromie quantique que nous rappelons rapidement ici :

Supposons que  $P(h)$  est classique de symbole de Weyl  $p(h)$  d'ordre 0.

Dans une certaine coordonnée,  $p(h)$  admettent un développement asymptotique de la forme :

$$p(x, \xi; h) = p_0(x, \xi) + hp_1(x, \xi) + h^2p_2(x, \xi) + \dots$$

Les opérateurs  $(P_1(h), P_2(h))$  sont aussi classiques d'ordre 0, leurs symboles :

$$p^{(j)}(x, \xi; h) = p_0^{(j)}(x, \xi) + hp_1^{(j)}(x, \xi) + h^2p_2^{(j)}(x, \xi) + \dots, j = 1, 2,$$

avec  $p^{(1)} = Re(p)$  et  $p^{(2)} = Im(p)$ .

Assume que l'application moment des symboles principaux, notée aussi par  $p_0$  est propre et de fibre connexe :

$$p_0 : T^*X \ni (x, \xi) \mapsto (p_0^{(1)}(x, \xi), p_0^{(2)}(x, \xi)) \in \mathbb{R}^2, \quad (27)$$

ici  $p_0^{(1)} = Re(p_0), p_0^{(2)} = Im(p_0)$ .

Soit  $U$  un ouvert avec adhérence compacte de valeurs régulières de  $p_0$ .

Posons  $\Sigma(h) = \sigma_{conj}(P_1(h), P_2(h)) \cap U$  qui est un réseau asymptotique affine.

Maintenant, on suppose que le spectre de l'opérateur normal  $P(h)$  dans  $U$  est discret. Alors, le théorème 3.5.12 nous donne un lien entre le spectre de  $P(h)$  et le spectre conjoint associé de  $(P_1(h), P_2(h))$  :

$$\sigma(P(h)) \cap U = \Sigma(h).$$

Cette relation nous permet de définir la notion de monodromie de  $P(h)$  comme celle du spectre conjoint  $\Sigma(h)$ . On a donc :

**Définition 3.5.13.** — Monodromie d'un opérateur  $h$ -pseudo-différentiel normal  $P(h)$  sur  $U$  est la monodromie quantique du système quantique intégrable  $(P_1(h), P_2(h))$  sur  $U$ . On l'appelle monodromie spectrale affine.



## CHAPITRE 4

# MONODROMIE SPECTRALE LINÉAIRE : LE CAS CLASSIQUEMENT INTÉGRABLE

### 4.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous proposerons de définir la monodromie d'un opérateur  $h$ -pseudo-différentiel de deux degrés de liberté non-auto-adjoint particulier qui est une petite perturbation d'un opérateur auto-adjoint, de la forme  $P_\varepsilon := P + i\varepsilon Q$  ( $P$  est auto-adjoint) avec les symboles principaux  $p, q$  qui commutent pour le crochet de Poisson et en régime  $h \ll \varepsilon = \mathcal{O}(h^\delta)$  pour certain  $0 < \delta < 1$ . Ici, nous n'avons que la propriété d'intégrabilité classique des symboles principaux. C'est un cas plus faible que celui du chapitre 3 où il y a la commutativité des opérateurs. C'est pourquoi, la construction de la monodromie quantique [99] ne peut pas s'appliquer.

Cependant avec l'aide des résultats de la théorie spectrale asymptotique de M.Hitrik-J.Sjöstrand-S. Vu Ngoc ([56], [57], [58] et surtout [60]) en revisitant la procédure de forme normale de Birkhoff, nous pouvons donner concrètement le développement asymptotique des valeurs propres de  $P_\varepsilon$  dans une fenêtre complexe adaptée de la bande spectrale. De plus, nous allons montrer l'existence globale (pour des telles fenêtres) du terme principal de ce développement sur n'importe quel petit domaine dans l'ensemble des valeurs régulières de l'application  $(p, \varepsilon q)$ .

Le spectre de  $P_\varepsilon$  est le modèle d'un ensemble discret particulier que nous définirons dans ce chapitre et appellerons "pseudo-réseau asymptotique" (voir la définition 4.5.1). En calculant les fonctions de transition entre des "pseudo-cartes locales" qui sont dans le groupe  $GL(2, \mathbb{Z})$ , on peut définir un invariant combinatoire (la monodromie) de ce réseau.

Cela nous permet donc de traiter le problème inverse : définir la monodromie à partir du spectre de  $P_\varepsilon$  que l'on appelle monodromie spectrale.

Nous allons d'abord rappeler et analyser des résultats importants de la théorie spectrale asymptotique générale ([60], [56], [57]...). Et après, nous détaillerons ces résultats dans notre cas particulier en retraçant la procédure de forme normale de Birkhoff. En suite, nous donnerons des démarches nécessaires pour la construction de monodromie d'un pseudo-réseau asymptotique et puis l'appliquerons pour le spectre de  $P_\varepsilon$ .

Enfin, en remarquant qu'avec la propriété d'intégrabilité, la monodromie classique (donnée par J.Duistermaat, [33]) est bien définie, nous donnerons aussi la relation entre deux types monodromies.

## 4.2. Asymptotique Spectrale

**4.2.1. Hypothèses.** — Nous allons donner d'abord des hypothèses générales sur notre opérateur comme dans les articles [60], [55], [56], [57], [58] et des hypothèses sur le flot classique du symbole principal de l'opérateur perturbé, ainsi que quelques résultats spectrales associés : le spectre discret, la localisation du spectre, le développement asymptotique des valeurs propres...

$M$  désigne  $\mathbb{R}^2$  ou une variété (riemannienne) réelle analytique compacte connexe de dimension 2 et on note  $\widetilde{M}$  la complexification canonique de  $M$ , qui est soit  $\mathbb{C}^2$  dans le cas euclidien, soit un tube de Grauert dans le cas variété (voir [18], [65]).

Nous considérons un opérateur  $h$ -pseudo-différentiel non-auto-adjoint  $P_\varepsilon$  sur  $M$  et supposons que

$$P_{\varepsilon=0} := P \quad \text{est formellement auto-adjoint.} \quad (28)$$

On note que dans le cas  $M = \mathbb{R}^2$ , la forme de volume  $\mu(dx)$  est naturellement induite par la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$ , par contre dans le cas  $M$  variété compacte, la forme de volume riemannienne  $\mu(dx)$  est induite par la structure riemannienne donnée de  $M$ . Alors, dans tous les cas, l'opérateur  $P_\varepsilon$  est vu comme un opérateur (non-borné) sur  $L^2(M, \mu(dx))$ .

On désigne toujours le symbole principal de  $P_\varepsilon$  par  $p_\varepsilon$  qui est défini sur  $T^*M$  comme nous avons discuté dans le chapitre 2.

On va faire la condition d'ellipticité à l'infini pour  $P_\varepsilon$  comme suivant :

Quand  $M = \mathbb{R}^2$ , soit

$$P_\varepsilon = P(x, hD_x, \varepsilon; h) \quad (29)$$

la quantification de Weyl d'un symbole total  $P(x, \xi, \varepsilon; h)$  dépendant de façon lisse de  $\varepsilon$  dans un voisinage de  $(0, \mathbb{R})$  et prenant des valeurs dans l'espace des fonctions holomorphes de  $(x, \xi)$  dans un voisinage tubulaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{C}^4$  sur lequel on suppose que :

$$|P(x, \xi, \varepsilon; h)| \leq \mathcal{O}(1)m(\text{Re}(x, \xi)). \quad (30)$$

Ici  $m$  est une fonction d'ordre dans le sens de la définition 3.2.1.

On suppose que de plus  $m > 1$  et que  $P_\varepsilon$  est classique

$$P(x, \xi, \varepsilon; h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{j,\varepsilon}(x, \xi) h^j, \quad h \rightarrow 0, \quad (31)$$

dans l'espace des symboles choisi.

Dans ce cas, le symbole principal est le premier terme du développement ci-dessus,  $p_\varepsilon = p_{0,\varepsilon}$  et la condition elliptique à l'infini est

$$|p_{0,\varepsilon}(x, \xi)| \geq \frac{1}{C} m(\text{Re}(x, \xi)), \quad |(x, \xi)| \geq C, \quad (32)$$

pour certain  $C > 0$  assez grand.

Quand  $M$  est une variété, nous considérons  $P_\varepsilon$  un opérateur différentiel sur  $M$  tel que dans des coordonnées locales  $x$  de  $M$ , il est de la forme

$$P_\varepsilon = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha,\varepsilon}(x; h) (hD_x)^\alpha, \quad (33)$$

où  $D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$  et  $a_{\alpha,\varepsilon}$  sont des fonctions lisses de  $\varepsilon$  dans un voisinage de 0 à valeurs dans l'espace des fonctions holomorphes sur un voisinage complexe de  $x \in M$ .

Nous supposons que les  $a_{\alpha,\varepsilon}$  soient classiques

$$a_{\alpha,\varepsilon}(x;h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{\alpha,\varepsilon,j}(x)h^j, h \rightarrow 0, \quad (34)$$

dans l'espace des symboles choisi.

Dans ce cas, le symbole principal  $p_\varepsilon$  dans les coordonnées canoniques locales associés  $(x, \xi)$  sur  $T^*M$  est

$$p_\varepsilon(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha,\varepsilon,0}(x) \xi^\alpha \quad (35)$$

et la condition d'ellipticité à l'infini est

$$|p_\varepsilon(x, \xi)| \geq \frac{1}{C} \langle \xi \rangle^m, (x, \xi) \in T^*M, |\xi| \geq C, \quad (36)$$

pour certain  $C > 0$  assez grand. On remarque ici que  $M$  est muni d'une métrique riemannienne, donc  $|\xi|$  et  $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$  sont bien définis.

Il est connu des articles [60], [56] avec les conditions précédentes, le spectre de  $P_\varepsilon$  dans un voisinage petit mais fixé de  $0 \in \mathbb{C}$  est discret, quand  $h > 0, \varepsilon \geq 0$  sont assez petits. De plus, ce spectre est contenu dans une bande de taille  $\varepsilon$  :

$$|Im(z)| \leq \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (37)$$

Ceci donne la première localisation du spectre de  $P_\varepsilon$ . Néanmoins, la distribution de spectre n'est pas encore explicite.

Posons  $p = p_{\varepsilon=0}$ , il est symbole principal de l'opérateur non perturbé auto-adjoint  $P$  et donc réel.

On suppose que

$$p^{-1}(0) \cap T^*M \quad \text{est connexe} \quad (38)$$

et le niveau d'énergie  $E = 0$  est régulier pour  $p$ , i.e.  $dp \neq 0$  le long de  $p^{-1}(0) \cap T^*M$ .

Posons  $q = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} p_\varepsilon$ , donc

$$p_\varepsilon = p + i\varepsilon q + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (39)$$

au voisinage de  $p^{-1}(0) \cap T^*M$ .

Pour  $T > 0$ , on introduit la moyenne du temps  $T$  symétrique de  $q$  le long du flot de  $p$ , définie au voisinage de  $p^{-1}(0) \cap T^*M$  :

$$\langle q \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q \circ \exp(tH_p) dt, \quad (40)$$

où  $H_p = \frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}$  est le champ hamiltonien de  $p$ .

Notons que  $H_p(\langle q \rangle_T) = \{p, \langle q \rangle_T\} = \mathcal{O}(1/T)$ .

Comme expliqué dans [60], en introduisant un opérateur intégrale de Fourier (qui est défini microlocalement proche de  $p^{-1}(0) \cap T^*M$ ), on peut réduire notre opérateur à un nouvel opérateur, noté encore par  $P_\varepsilon$ , avec symbole principal  $p + i\varepsilon \langle q \rangle_T + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  et  $P_{\varepsilon=0}$  est encore l'opérateur imperturbé original. Alors on peut supposer que notre opérateur  $P_\varepsilon$  est microlocalement défini au voisinage de  $p^{-1}(0) \cap T^*M$  avec le  $h$ -symbole principal

$$p + i\varepsilon \langle q \rangle_T + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (41)$$

Par conséquence, avec l'aide de l'inégalité de Garding forte le spectre de  $P_\varepsilon$  dans le domaine  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \delta\}$ , quand  $\varepsilon, h, \delta \rightarrow 0$  est confiné dans la bande (voir [90], [91]) :

$$]-\delta, \delta[ + i\varepsilon \left[ \liminf_{T \rightarrow \infty} \liminf_{p^{-1}(0)} Re \langle q \rangle_T - o(1), \limsup_{T \rightarrow \infty} \limsup_{p^{-1}(0)} Re \langle q \rangle_T + o(1) \right]. \quad (42)$$

Or, avec plus d'hypothèses sur la dynamique de flot classique du premier terme du symbole non perturbé (en un certain niveau d'énergie), on peut obtenir les résultats plus détaillés sur la distribution asymptotique des valeurs propres individuelles dans une telle bande.

Soit une valeur donnée  $F_0 \in [\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{p^{-1}(0)} \operatorname{Re}\langle q \rangle_T, \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{p^{-1}(0)} \operatorname{Re}\langle q \rangle_T]$ , on veut déterminer toutes les valeurs propres de  $P_\varepsilon$  dans un rectangle de centre  $(0, \varepsilon F_0)$  et de taille  $\mathcal{O}(h^\delta) \times \mathcal{O}(\varepsilon h^\delta)$  (qui est incluse dans la bande précédente) pour

$$h \ll \varepsilon \leq \mathcal{O}(h^\delta),$$

où  $\delta > 0$  est certain numéro assez petit mais fixé.

**Remarque 4.2.1.** — Le problème de déterminer asymptotiquement les valeurs propres de  $P_\varepsilon$  dans un tel rectangle de domaine spectral est proposé avec des hypothèses différentes sur le flot hamiltonien de  $p$  : ce flot est périodique sur une énergie  $E$  proche de 0, en particulier complètement intégrable ou encore presque intégrable.

La force de la perturbation  $\varepsilon$  est traitée avec plusieurs régimes :  $h^M \leq \varepsilon \leq \mathcal{O}(h^\delta)$ , pour  $M$  fixé assez grand,  $h \ll \varepsilon \leq \mathcal{O}(h^\delta)$ ,  $h^{1/3-\delta} < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \dots$  ainsi que la taille du rectangle : dépend de  $h$  ou ne dépend pas de  $h$ .

On peut consulter les articles [56], [57], [60], [58], [59], [93].

Ici, nous allons présenter le cas complètement intégrable et  $h \ll \varepsilon \leq \mathcal{O}(h^\delta)$ .

Maintenant, on suppose que  $p$  est complètement intégrable dans un voisinage de  $p^{-1}(0) \cap T^*M$ , i.e. il existe une fonction réelle lisse  $f$  sur ce voisinage telle que  $\{p, f\} = 0$  et  $df, dp$  sont linéairement indépendants presque partout. Comme expliqué dans ([60], page 21-22 et 55), l'espace d'énergie  $p^{-1}(0)$  se décompose par feuilletage singulier :

$$p^{-1}(0) \cap T^*M = \bigcup_{a \in J} \Lambda_a, \quad (43)$$

où  $J$  est en général supposé un graphe connexe avec un nombre fini de sommets et d'arêtes, noté  $S$  l'ensemble de ces sommets. Pour chaque  $a \in J$ ,  $\Lambda_a$  est un ensemble compact connexe invariant par rapport à  $H_p$ . De plus, si  $a \in J \setminus S$ ,  $\Lambda_a$  est un tore lagrangien invariant, dépendant analytiquement de  $a$ .

Remarque chaque arête de  $J$  peut s'identifier avec un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ .

Ensuite, on suppose la continuité des tores : soit  $\Lambda_{a_0}, a_0 \in J \setminus S$ , pour tout  $\mu > 0, \exists \gamma > 0$ , tels que si  $\operatorname{dist}(a, a_0) < \gamma$ , alors  $\Lambda_a \subset \{\rho \in p^{-1}(0) \cap T^*M : \operatorname{dist}(\rho, \Lambda_{a_0}) < \mu\}$ . On remarque que cette hypothèse est vérifiée pour des systèmes intégrables avec singularités non-dégénérées (analytiques).

Pour chaque tore  $\Lambda_a, a \in J \setminus S$ , comme dans le chapitre 2, il existe des coordonnées action-angle locales  $(x, \xi)$  au voisinage de  $\Lambda_a$  telle que  $\Lambda_a \simeq \{\xi = 0\}$  et que  $p$  devient une fonction que de  $\xi$ ,  $p = p(\xi) = p(\xi_1, \xi_2)$ . La fréquence de  $\Lambda_a$  est définie comme un élément de la ligne projective réelle par

$$\omega(a) = [p'_{\xi_1}(0) : p'_{\xi_2}(0)]. \quad (44)$$

Nous notons aussi que

$$\mathbb{R}^2 \ni (p'_{\xi_1}(0), p'_{\xi_2}(0)) := \tilde{\omega}(a). \quad (45)$$

Par le théorème action-angle, on sait que  $\omega(a)$  dépend analytiquement de  $a \in J \setminus S$  et on suppose



de plus que la fonction  $a \mapsto \omega(a)$  n'est pas identiquement constante sur toute composante connexe de  $J \setminus S$ .

Pour chaque  $a \in J$ , on définit un intervalle compact de  $\mathbb{R}$

$$Q_\infty(a) = \left[ \liminf_{T \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_a} Re \langle q \rangle_T, \limsup_{T \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_a} Re \langle q \rangle_T \right]. \quad (46)$$

Alors, la localisation (42) devient

$$Im(\sigma(P_\varepsilon) \cap \{z \in \mathbb{C} : |Rez| \leq \delta\}) \subset \varepsilon \left[ \inf_{a \in J} Q_\infty(a) - o(1), \sup_{a \in J} Q_\infty(a) + o(1) \right], \quad (47)$$

quand  $\varepsilon, h, \delta \rightarrow 0$ .

À partir de maintenant, pour simplifier, on va supposer que  $q$  est réel, sinon il suffit de remplacer  $q$  par  $Re(q)$ .

Pour chaque tore  $\Lambda_a, a \in J \setminus S$ , on définit  $\langle q \rangle_{\Lambda_a}$  la moyenne de  $q$  par rapport à la mesure lisse naturelle sur  $\Lambda_a$

$$\langle q \rangle_{\Lambda_a} = \int_{\Lambda_a} q. \quad (48)$$

**Remarque 4.2.2.** — Dans des coordonnées action-angle  $(x, \xi)$  au voisinage de  $\Lambda_a$  telle que  $\Lambda_a \simeq \{\xi = 0\}$ , nous avons

$$\langle q \rangle(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} q(x, \xi) dx. \quad (49)$$

En particulier  $\langle q \rangle_{\Lambda_a} = \langle q \rangle(0)$ .

**Remarque 4.2.3** ([60], page 56-57). — Pour  $a \in J \setminus S$  :

- si  $\omega(a) \notin \mathbb{Q}$ , alors  $Q_\infty(a) = \{\langle q \rangle_{\Lambda_a}\}$ .
- si  $\omega(a) = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$ , alors

$$Q_\infty(a) = \langle q \rangle_{\Lambda_a} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k(\omega(a))^\infty}\right)[-1, 1], \quad k(\omega(a)) := |m| + |n|.$$

En particulier

$$\sum_{a: \omega(a) \in \mathbb{Q}} |Q_\infty(a)| < \infty.$$

On sait que  $\langle q \rangle_{\Lambda_a}$  dépend analytiquement de  $a \in J \setminus S$  et on suppose qu'il peut s'étendre continûment sur  $J$ . De plus nous supposons que la fonction  $a \mapsto \langle q \rangle(a) = \langle q \rangle_{\Lambda_a}$  n'est pas identiquement constante sur toute composante connexe de  $J \setminus S$ .

Notons bien que  $p$  et  $\langle q \rangle$  commutent au voisinage de  $p^{-1}(0) \cap T^*M$ .

#### 4.2.2. Asymptotique des valeurs propres. —

**Définition 4.2.4.** — Pour un tore  $\Lambda_a, a \in J \setminus S$  et  $\omega(a)$  défini comme (44) et soient  $\alpha > 0$  et  $d > 0$ , on dit que  $\Lambda_a$  est  $(\alpha, d)$ -diophantien si :

$$\left| \omega(a) - \frac{m}{n} \right| \geq \frac{\alpha}{n^{1+d}}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, \quad (50)$$

ici  $\omega(a)$  est vu comme un élément de  $\mathbb{R}$ .

Notons aussi que l'inégalité ci-dessus est indépendante du choix de coordonnées action-angle.

**Définition 4.2.5.** — Pour  $\alpha > 0$  et  $d > 0$ , on définit l'ensemble de "bonnes valeurs"  $\mathcal{G}(\alpha, d)$  obtenu de  $\cup_{a \in J} Q_\infty(a)$  en enlevant l'ensemble de "mauvaises valeurs"  $\mathcal{B}(\alpha, d)$  suivant

$$\mathcal{B}(\alpha, d) = \left( \bigcup_{\text{dist}(a, S) < \alpha} Q_\infty(a) \right) \cup \left( \bigcup_{a \in J \setminus S: |\omega'(a)| < \alpha} Q_\infty(a) \right) \cup \left( \bigcup_{a \in J \setminus S: |d\langle q \rangle_{\Lambda_a}| < \alpha} Q_\infty(a) \right) \\ \cup \left( \bigcup_{a \in J \setminus S: \omega(a) \text{ n'est pas } (\alpha, d)\text{-diophantien}} Q_\infty(a) \right).$$

**Remarque 4.2.6.** — — La mesure de l'ensemble de mauvaises valeurs  $\mathcal{B}(\alpha, d)$  dans  $\cup_{a \in J} Q_\infty(a)$  est petite ( $\mathcal{O}(\alpha)$ ) quand  $\alpha > 0$  est petit et  $d > 0$  est fixé, à condition que la mesure de

$$\left( \bigcup_{a \in J \setminus S: \omega(a) \in \mathbb{Q}} Q_\infty(a) \right) \cup \left( \bigcup_{a \in S} Q_\infty(a) \right) \quad (51)$$

soit suffisamment petite (voir [60]).

- Si  $F_0 \in \mathcal{G}(\alpha, d)$  est une bonne valeur, alors par la définition de  $\mathcal{B}(\alpha, d)$  et la remarque 4.2.3, le pré-image  $\langle q \rangle^{-1}(F_0)$  est un ensemble fini

$$\langle q \rangle^{-1}(F_0) = \{a_1, \dots, a_L\} \subset J \setminus S.$$

Les tores correspondants  $\Lambda_{a_1}, \dots, \Lambda_{a_L}$  sont des tores  $(\alpha, d)$ -diophantiens de  $p^{-1}(0) \cap T^*M$ . De cette manière, quand  $F_0$  varie dans  $\mathcal{B}(\alpha, d)$ , nous obtiendrons une famille de Cantor de tores invariants  $(\alpha, d)$ -diophantiens dans l'espace d'énergie  $p^{-1}(0) \cap T^*M$ .

**Définition 4.2.7** ([95], page 16, 42), [5], [19]). — Soit  $E$  un espace symplectique et sa grassmannienne  $\Lambda(E)$  (qui est l'ensemble des sous-espaces lagrangiens de  $E$ ). On considère un fibré  $B$  en  $E$  au dessus du cercle ou d'un intervalle compact muni d'un sous fibré lagrangien appelé vertical. Soit  $\lambda(t)$  une section de  $\Lambda(B)$  qui est transverse à la verticale aux bords de l'intervalle dans le cas où la base est un intervalle. L'indice de Maslov de  $\lambda(t)$  est le nombre d'intersection de cette courbe avec le cycle singulier des lagrangiens qui ne coupent pas transversalement le sous fibré vertical.

**Théorème 4.2.8** ([60]). — Supposons que  $P_\varepsilon$  est un opérateur avec symbole principal (39) et satisfaisant les conditions précédentes.

Soit  $F_0 \in \mathcal{B}(\alpha, d)$  une bonne valeur. Comme dans la remarque 4.2.6, on écrit  $\langle q \rangle^{-1}(F_0) = \{a_1, \dots, a_L\} \subset J \setminus S$  et les tores correspondants  $\Lambda_{a_1}, \dots, \Lambda_{a_L}$  dans  $p^{-1}(0) \cap T^*M$ .

Pour chaque  $j = 1, \dots, L$ , notons  $S_j \in \mathbb{R}^2$  l'action (revoir la section 2.5.5) et  $k_j \in \mathbb{Z}^2$  l'indice de Maslov des cycles fondamentaux  $(\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j})$  de  $\Lambda_{a_j}$  qui sont définis par

$$\kappa_j(\gamma_{l,j}) = \{x \in \mathbb{T}^2 : x_l = 0\}, l = 1, 2,$$

où  $\kappa_j$  est une coordonnée action-angle au voisinage du tore  $\Lambda_{a_j}$ ,

$$\kappa_j : (\Lambda_{a_j}, T^*M) \rightarrow (\xi = 0, T^*\mathbb{T}^2). \quad (52)$$

On suppose que  $h \ll \varepsilon = \mathcal{O}(h^\delta)$  pour  $0 < \delta < 1$ .

Alors les valeurs propres de  $P_\varepsilon$  dans un rectangle de la forme

$$R(\varepsilon, h) = \left[ -\frac{h^\delta}{\mathcal{O}(1)}, \frac{h^\delta}{\mathcal{O}(1)} \right] + i\varepsilon \left[ F_0 - \frac{h^\delta}{\mathcal{O}(1)}, F_0 + \frac{h^\delta}{\mathcal{O}(1)} \right] \quad (53)$$

sont données avec leurs multiplicités par

$$P_j^{(\infty)} \left( h \left( k - \frac{k_j}{4} \right) - \frac{S_j}{2\pi}, \varepsilon; h \right) + \mathcal{O}(h^\infty), k \in \mathbb{Z}^2, 1 \leq j \leq L. \quad (54)$$

Avec  $P_j^{(\infty)}(\xi, \varepsilon; h)$  est une fonction lisse pour  $\xi$  dans un voisinage de  $(0, \mathbb{R}^2)$  et  $\varepsilon$  dans un voisinage de  $(0, \mathbb{R})$ , à valeur réelle pour  $\varepsilon = 0$  et admet un développement asymptotique dans l'espace de symboles choisis

$$1 \leq j \leq L, \quad P_j^{(\infty)}(\xi, \varepsilon; h) \sim \sum_{k=0}^{\infty} h^k p_{j,k}^{(\infty)}(\xi, \varepsilon) \quad (55)$$

dont le symbole principal est

$$p_{j,0}^{(\infty)}(\xi, \varepsilon) = p_j(\xi) + i\varepsilon \langle q_j \rangle(\xi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (56)$$

Ici  $p_j, q_j$  sont les expressions de  $p, q$  en variables action-angle proches de  $\Lambda_j$  données par (52) et  $\langle q_j \rangle$  est la moyenne de  $q_j$  sur les tores, définie dans (49).

**Remarque 4.2.9.** — Les différentielles de  $p_j, q_j$  en  $\xi = 0$  dans le théorème ci-dessus sont linéairement indépendants.

On sait bien dans le cas du théorème au dessus que pour chaque  $j = 1, \dots, L$ , on obtient un réseau déformé de spectre dans le rectangle (53) de taille  $(h^\delta \times \varepsilon h^\delta)$ . Alors le spectre de  $P_\varepsilon$  dans ce rectangle est donc l'union de  $L$  ces réseaux.

Notons bien que ce n'est pas valide pour tout rectangle. Or, il est valable seulement pour un "bon rectangle" dont le centre  $(0, \varepsilon F_0)$  avec  $F_0$  est une bonne valeur (le tore associé à  $F_0$  dans  $p^{-1}(0) \cap T^*M$  est  $(\alpha, d)$ -diophantien). Cependant, comme nous avons dit dans la remarque 4.2.6, avec la condition (51), le complémentaire de l'ensemble des bonnes valeurs a une petite mesure, donc il existe beaucoup de tels bons rectangles dans la bande (47). Ce la signifie qu' on peut donner asymptotiquement presque toutes les valeurs propres de  $P_\varepsilon$  dans cette bande.

**Remarque 4.2.10.** — Dans le cas où  $p$  est presque intégrable, le résultat du théorème est encore vrai grâce à l'existence des tores invariants de KAM qui nous permet de réaliser microlocalement la construction la forme normale quantique de  $P_\varepsilon$  (voir section 7.3 de [60]).

Pour la théorie de KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser), on pourra consulter les références [80], [17], [15], [16], [30].

*Idée principale de la démonstration du théorème 4.2.8.* — Pour une preuve détaillée du théorème, on peut consulter [60], [55].

Nous allons donner ici quelques idées principales de la démonstration du théorème.

Le principe est la construction formelle de forme normale quantique de Birkhoff pour  $P_\varepsilon$ , microlocalement près d'un tore diophantien fixé dans  $p^{-1}(0) \cap T^*M$ , disons  $\Lambda_1 \in \{\Lambda_{a_1}, \dots, \Lambda_{a_L}\}$ . La condition diophantienne est indispensable pour cette construction. Pour cette méthode, on peut aussi consulter [104], [3], [79], [9], [37].

C'est la procédure dans laquelle on utilise (formellement) une transformation canonique (symplectique) de variable pour que le symbole total de  $P_\varepsilon$  soit réduit à la forme normale (55),(56) modulo  $\mathcal{O}(h^\infty)$  qui est indépendante de  $x$  et homogène en  $(h, \xi, \varepsilon)$  à tous ordres. L'opérateur  $P_\varepsilon$  est conjugué à un nouvel opérateur par un opérateur intégral de Fourier à phase complexe avec un tel symbole total.

En effet, en introduisant des coordonnées action-angle près de  $\Lambda_1$ ,  $P_\varepsilon$  est microlocalement défini près la section  $\xi = 0$  dans  $T^*\mathbb{T}^2$  et on suppose que son symbole principal (39) est de la forme

$$p_\varepsilon(x, \xi) = p(\xi) + i\varepsilon q(x, \xi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (57)$$

avec  $p(\xi) = \tilde{\omega} \cdot \xi + \mathcal{O}(\xi^2)$ , où  $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) \in \mathbb{R}^2$ , défini dans (45) et la fréquence  $\omega(a) = [\tilde{\omega}_1 : \tilde{\omega}_2]$ , définie dans (44) satisfait la condition (50).

En suite, par le changement canonique de variables et la procédure de forme normale de Birkhoff, pour tout  $N$  arbitraire fixé assez grand, on peut construire une transformation canonique holomorphe  $\kappa_\varepsilon^{(N)}$  définie dans un voisinage complexe de  $\xi = 0$  dans  $T^*\mathbb{T}^2$  telle que le symbole total  $P$  de  $P_\varepsilon$  se réduise à un nouveau symbole :

$$P \circ \kappa_\varepsilon^{(N)}(x, \xi, \varepsilon; h) = p_0 + hp_1 + h^2p_2 + \dots, \quad (58)$$

où tous les  $p_j = p_j(x, \xi, \varepsilon)$ ,  $j \geq 1$  holomorphe près de  $\xi = 0$  dans  $T^*\mathbb{T}^2$ , dépendant de façon lisse de  $\varepsilon \in (0, \mathbb{R})$ , indépendant de  $x$  d'ordre  $N$  et il est important que le symbole principal  $p_0$  satisfait

$$p_0 = p_\varepsilon \circ \kappa_\varepsilon^{(N)}(x, \xi) = p^{(N)}(\xi, \varepsilon) + r_{N+1}(x, \xi, \varepsilon), \quad (59)$$

où  $p^{(N)}(\xi, \varepsilon) = p(\xi) + i\varepsilon \langle q \rangle(\xi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ,  $\langle q \rangle(\xi)$  donné par (49),  $r_{N+1}(x, \xi, \varepsilon) = \mathcal{O}((\xi, \varepsilon)^{N+1})$ .

Ainsi en passant à la limite  $N \rightarrow \infty$ ,  $p_0$  a la même forme que (56).

Au niveau opérateur,  $P_\varepsilon$  est conjugué à un nouvel opérateur de la forme

$$P^{(N)}(hD_x, \varepsilon; h) + R_{N+1}(x, hD_x, \varepsilon; h), \quad (60)$$

où  $P^{(N)}(hD_x, \varepsilon; h)$  a un symbole total indépendant de  $x$  dont le symbole principal est  $p^{(N)}$  et  $R_{N+1}(x, \xi, \varepsilon; h) = \mathcal{O}((h, \xi, \varepsilon)^{N+1})$ . L'opérateur (60) agit sur l'espace  $L^2_\theta(\mathbb{T}^2)$  des fonctions périodiques de Floquet microlocalement définies sur  $\mathbb{T}^2$  dont un élément  $u$  satisfait

$$u(x - \nu) = e^{i\theta \cdot \nu} u(x), \quad \theta = \frac{S_1}{2\pi h} + \frac{k_1}{4}, \quad \nu \in 2\pi\mathbb{Z}^2.$$

Une base orthonormale de cet espace est

$$\left\{ x \in \mathbb{T}^2, e_k(x) = e^{ix(k-\theta)} = e^{\frac{i}{h}x \cdot (h(k - \frac{k_1}{4}) - \frac{S_1}{2\pi})}, k \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

Par conséquence, les valeurs propres de  $P_\varepsilon$  modulo  $\mathcal{O}(h^\infty)$  sont données par (54).  $\square$

**Remarque 4.2.11.** — Pour tout  $j = 1, \dots, L$ , de (56), en  $\xi = 0$  on a  $p_{j,0}^{(\infty)}(0, \varepsilon) = i\varepsilon F_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  et donc  $P_j^{(\infty)}(0, \varepsilon; h) = i\varepsilon F_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \mathcal{O}(h)$ . Par conséquence,  $p_{j,0}^{(\infty)}(0, \varepsilon) \sim i\varepsilon F_0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $P_j^{(\infty)}(0, \varepsilon; h) \sim i\varepsilon F_0$  quand  $\varepsilon, h \rightarrow 0, h \ll \varepsilon$ .

De plus, nous avons aussi  $d(p_j)|_{\xi=0} := a_j = (a_{1,j}, a_{2,j}) \in \mathbb{R}^2$  et  $d(\langle q_j \rangle)|_{\xi=0} := b_j = (b_{1,j}, b_{2,j}) \in \mathbb{R}^2$  sont  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants. On peut récrire le symbole principal (56) sous la forme

$$p_{j,0}^{(\infty)}(\xi, \varepsilon) = i\varepsilon F_0 + (a_j + i\varepsilon b_j) \cdot \xi + \mathcal{O}(\xi^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (61)$$

**Proposition 4.2.12.** — Soit  $\lambda = P(\xi; \varepsilon, h)$  une fonction lisse à valeur complexe de  $\xi$  au voisinage  $0 \in \mathbb{R}^2$  et de petits paramètres  $h, \varepsilon$  au voisinage de  $0 \in \mathbb{R}$ . Supposons que on peut écrire  $P$  sous la forme

$$P(\xi; \varepsilon, h) = P_0 + \mathcal{O}(h)$$

avec

$$P_0 = P_0(\xi; \varepsilon) = g_1(\xi) + i\varepsilon g_2(\xi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

telle que  $dg_1(0) \wedge dg_2(0) \neq 0$ .

De plus si on suppose que  $h \ll \varepsilon$ , alors pour  $h$  et  $\varepsilon$  assez petits, il existe  $\rho, r > 0$  assez petits tels que  $P$  est un difféomorphisme local en  $\xi = 0$  de  $B(0, \rho)$  dans son image, noté  $B(\varepsilon)$ .

Pour le difféomorphisme inverse  $P^{-1}$ , on peut prendre son domaine

$$B(\varepsilon) = \chi(B(P_0(0), r)),$$

ici  $\chi$  est la fonction  $(u_1, u_2) \mapsto (u_1, \varepsilon u_2)$ .

*Démonstration.* — D'abord, en voyant  $P$  comme une fonction de  $\mathbb{R}^2$ , nous posons  $\widehat{P} := \chi^{-1} \circ P$ . Alors on peut écrire

$$\widehat{P} = g_1(\xi) + ig_2(\xi) + \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}\left(\frac{h}{\varepsilon}\right).$$

Notons  $a = (a_1, a_2) = dg_1(0)$ ,  $b = (b_1, b_2) = dg_2(0)$  et  $M = |a_1b_2 - a_2b_1| > 0$ . La différentielle de  $\widehat{P}$  en  $\xi = 0$  est

$$\frac{\partial \widehat{P}}{\partial \xi}(0) = a + i\varepsilon b + \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}\left(\frac{h}{\varepsilon}\right) = \begin{pmatrix} a_1 + \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}\left(\frac{h}{\varepsilon}\right) & a_2 + \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}\left(\frac{h}{\varepsilon}\right) \\ b_1 + \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}\left(\frac{h}{\varepsilon}\right) & b_2 + \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}\left(\frac{h}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}$$

et donc

$$|\det\left(\frac{\partial \widehat{P}}{\partial \xi}(0)\right)| = M + \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}\left(\frac{h}{\varepsilon}\right).$$

Alors pour  $h, \varepsilon$  assez petits et  $h \ll \varepsilon$ , c'est clair que  $|\det\left(\frac{\partial \widehat{P}}{\partial \xi}(0)\right)| \simeq M$  est non-nul. Or, le théorème d'inversion locale assure que  $\widehat{P}$  est difféomorphisme local en  $\xi = 0$ . D'où on arrive au résultat voulu pour  $P$ .  $\square$

Revenons au problème spectral de  $P_\varepsilon$  discuté dans le cadre du théorème (4.2.8). Pour chaque  $j = 1, \dots, L$ , comme une application de la proposition précédente avec  $P = P_j^{(\infty)}$ , alors  $P_j^{(\infty)}$  est un difféomorphisme local lisse en  $\xi = 0 \in \mathbb{R}^2$  d'un voisinage de 0 dans son image, noté  $B_j(\varepsilon)$ . On note que pour  $h$  assez petit, le bon rectangle  $R(\varepsilon, h)$  est toujours inclus dans  $B_j(\varepsilon)$ .

On note  $\Sigma_j(\varepsilon, h) \subset R(\varepsilon, h)$  les quasi-valeurs propres de  $P_\varepsilon$  dans  $R(\varepsilon, h)$  données par l'image par  $P_j^{(\infty)}$  de  $\xi = h(k - \frac{k_j}{4}) - \frac{S_j}{2\pi}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^2$ .

En écrivant  $hk = \xi + h\frac{k_j}{4} + \frac{S_j}{2\pi}$  et posant

$$f_j := (P_j^{(\infty)})^{-1} + h\frac{k_j}{4} + \frac{S_j}{2\pi}, \quad (62)$$

alors  $f_j = f_j(\lambda, \varepsilon; h)$  est un difféomorphisme lisse local de  $B_j(\varepsilon)$  dans son image.

Notons  $E_j(\varepsilon, h) = f_j(R(\varepsilon, h))$  qui est proche de  $\frac{S_j}{2\pi}$  et  $\Gamma_j(\varepsilon, h) := f_j(\Sigma_j(\varepsilon, h))$ , nous avons alors  $\Gamma_j(\varepsilon, h) = h\mathbb{Z}^2 \cap E_j(\varepsilon, h)$ .

En résumé, nous avons :

$$f_j : R(\varepsilon, h) \rightarrow E_j(\varepsilon, h) \quad (63)$$

$$f_j|_{\Sigma_j(\varepsilon, h)} : \Sigma_j(\varepsilon, h) \rightarrow \Gamma_j(\varepsilon, h) \subset h\mathbb{Z}^2 \quad (64)$$

**Remarque 4.2.13.** — D'autre part, si on suppose que  $L = 1$ , le théorème (4.2.8) affirme que dans  $R(\varepsilon, h)$ , les quasi-valeurs propres sont égales aux vraies valeurs propres de  $P_\varepsilon$  modulo  $\mathcal{O}(h^\infty)$  :

$$\sigma(P_\varepsilon) \cap R(\varepsilon, h) = \Sigma_1(\varepsilon, h) + \mathcal{O}(h^\infty), \quad (65)$$

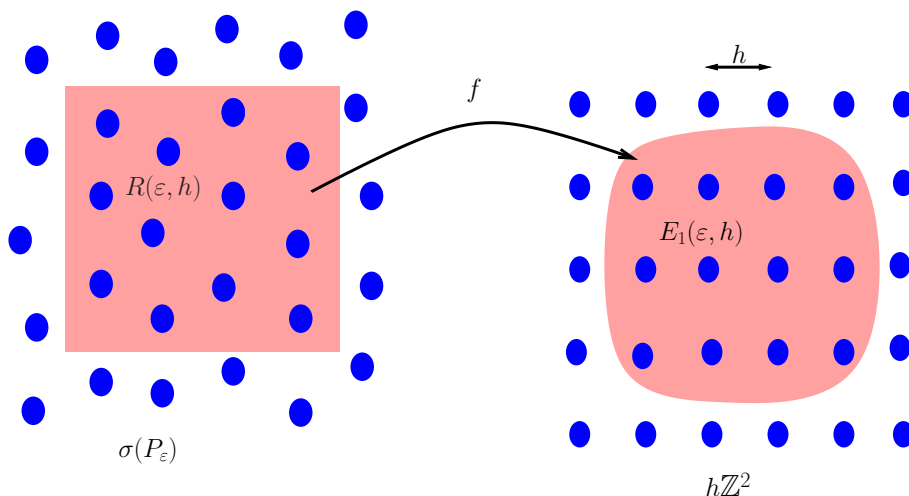
dans le sens qu'il existe une bijection

$$\chi : \Sigma_1(\varepsilon, h) \rightarrow \sigma(P_\varepsilon) \cap R(\varepsilon, h) \quad (66)$$

telle que  $\chi = Id + \mathcal{O}(h^\infty)$ .

Le difféomorphisme  $f := f_1$  dans (63) satisfait donc

$$\begin{aligned} f : R(\varepsilon, h) &\rightarrow E_1(\varepsilon, h) \\ \sigma(P_\varepsilon) \cap R(\varepsilon, h) \ni \lambda &\mapsto f(\lambda, \varepsilon; h) \in h\mathbb{Z}^2 + \mathcal{O}(h^\infty). \end{aligned} \quad (67)$$

Figure 5. Une "micro-carte" du spectre de  $P_\varepsilon$ 

En particulier, nous avons des bijections entre les ensembles

$$\sigma(P_\varepsilon) \cap R(\varepsilon, h) \simeq \Sigma_1(\varepsilon, h) \simeq \Gamma_1(\varepsilon, h) \subset h\mathbb{Z}^2 \quad (68)$$

**4.2.3. Quelle est la taille de  $E(\varepsilon, h)$  ?**— Comme nous savons, la taille de  $R(\varepsilon, h)$  est  $\mathcal{O}(h^\delta) \cdot \mathcal{O}(\varepsilon h^\delta)$ , nous nous intéressons maintenant la taille de  $E := E_j(\varepsilon, h)$  qui est l'image de  $R(\varepsilon, h)$  par le difféomorphisme (63). Est ce que  $E(\varepsilon, h)$  est de taille  $\mathcal{O}(h^\delta)$  ?

La réponse est non ! Il est en fait de taille  $\mathcal{O}(\frac{h^\delta}{\varepsilon})$ .

En fait, soit encore  $P$  un des  $P_j^{(\infty)}$ . Par la proposition (4.2.12), en régime  $h \ll \varepsilon$ , la différentielle de  $\lambda = P(\xi, \varepsilon; h)$  en  $\xi = 0$  est de déterminant de taille  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  :

$$| \det(\frac{\partial P}{\partial \xi}(0, \varepsilon; h)) | = M\varepsilon,$$

avec  $M > 0$ .

En écrivant le développement de Taylor de  $\xi = P^{-1} = g(\lambda, \varepsilon; h)$  en  $\lambda_0 = P(0, \varepsilon; h)$ , on a :

$$|\xi| \leq \frac{1}{M\varepsilon} |\lambda - \lambda_0| + \mathcal{O}(|\lambda - \lambda_0|^2).$$

D'où, si  $\lambda \in R(\varepsilon, h)$ , alors  $|\lambda - \lambda_0| \leq \mathcal{O}(h^\delta)$  et donc

$$|\xi| \leq \frac{1}{M\varepsilon} \mathcal{O}(h^\delta) + (\mathcal{O}(h^\delta))^2 \leq \mathcal{O}(\frac{h^\delta}{\varepsilon}).$$

Par conséquence, à partir de la formule (62), nous avons que  $E := E_j(\varepsilon, h)$  est de taille  $\mathcal{O}(\frac{h^\delta}{\varepsilon})$ .

**4.2.4. Réseau de quasi-valeurs propres et réseau de spectre ?**— Pour tout  $j = 1, \dots, L$ , de la remarque 4.2.11 on peut exprimer  $P_j^{(\infty)}$  sous la forme

$$\lambda = P_j^{(\infty)}(\xi, \varepsilon; h) = i\varepsilon F_0 + (a_j + i\varepsilon b_j) \cdot \xi + \mathcal{O}(\xi^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \mathcal{O}(h)$$

et donc

$$\lambda_1 = a_j \cdot \xi + \mathcal{O}(\xi^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \mathcal{O}(h),$$

$$\lambda_2 = i\varepsilon F_0 + \varepsilon b_j \cdot \xi + \mathcal{O}(\xi^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \mathcal{O}(h).$$

Notons que nous travaillons en régime  $h \ll \varepsilon$  et que

$$d(\lambda_1)|_{\xi=0} = a_j + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \mathcal{O}(h) \sim a_j$$

et

$$d(\lambda_2)|_{\xi=0} = \varepsilon b_j + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \mathcal{O}(h) \sim b_j \varepsilon.$$

Nous avons alors

$$|\Delta \lambda_1| = |a_j| |\Delta \xi| + \mathcal{O}(|\Delta \xi|^2)$$

et

$$|\Delta \lambda_2| = \varepsilon |b_j| |\Delta \xi| + \mathcal{O}(|\Delta \xi|^2).$$

D'où, si  $|\Delta \xi| = \mathcal{O}(h)$ , alors

$$|\Delta \lambda_1| = |a_j| \cdot \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(h)$$

et

$$|\Delta \lambda_2| = \varepsilon |b_j| \cdot \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(\varepsilon h) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)\right) = \mathcal{O}(\varepsilon h).$$

Remarque que avec  $\xi = h(k - \frac{k_j}{4}) - \frac{S_j}{2\pi}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^2$ , alors  $|\Delta \xi| = h|\Delta k|$  et nous pouvons affirmer que le spectre de  $P_\varepsilon$  dans un bon rectangle  $R(\varepsilon, h)$  de la forme (53) est l'union de  $L$  réseaux déformés, avec l'espacement horizontal  $h$  et l'espacement vertical  $\varepsilon h$ .

Bien sur, les réseaux  $\Sigma_j(\varepsilon, h)$  se décrivent tous de la même façon.

Comme un corollaire, nous avons :

**Remarque 4.2.14.** — Le cardinal d'un tel réseau spectral dans  $R(\varepsilon, h)$  est  $\mathcal{O}\left(\frac{h^\delta \cdot \varepsilon h^\delta}{h \cdot \varepsilon h}\right) = \mathcal{O}(h^{2(\delta-1)})$  qui converge vers  $\infty$  quand  $h \rightarrow 0$ . Cela signifie que le développement asymptotique est appliqué pour un grand nombre de valeurs propres de  $P_\varepsilon$ .

### 4.3. Forme normale de Birkhoff

**4.3.1. Motivation.** — Dans cette section, nous allons discuter de la procédure de forme normale de Birkhoff d'un opérateur pseudo différentiel perturbé  $P_\varepsilon$  qui dépend de petits paramètres positifs  $h, \varepsilon$  près d'un tore diophantien  $\Lambda$  et la traiter explicitement dans un cas particulier (mais important pour notre travail).

Pour la forme normale de Birkhoff, on peut consulter [104], [21], [3], [79].

Nous supposons que  $\Lambda$  est égal à la section  $\{\xi = 0\}$  dans  $\mathbb{T}^n$  et que  $P_\varepsilon$  soit défini microlocalement près de  $\{\xi = 0\} \in \mathbb{T}^n$ , avec un  $h$ -symbole de Weyl (total)  $P = P(x, \xi, \varepsilon, h)$  qui est holomorphe en  $(x, \xi)$  près d'un voisinage complexe de  $\xi = 0 \in T^*\mathbb{T}^n$  et  $C^\infty$  en  $(h, \varepsilon)$  proche de 0.

Dans l'article [60] (section 3) on a réalisé la construction de la forme normale de Birkhoff de  $P_\varepsilon$  dont le  $h$ -symbole principal de  $P_\varepsilon$  (au niveau du développement formel de Taylor en  $\varepsilon$ ) est de la forme (57)

$$p_\varepsilon(x, \xi) = p(\xi) + i\varepsilon q(x, \xi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

et le symbole principal de la forme normale obtenue est de la forme (comme 56))

$$P_0^{(\infty)} = P_0^{(\infty)}(\xi, \varepsilon) = p(\xi) + i\varepsilon \langle q \rangle(\xi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Notre travail exige de traiter un cas plus précis quand le symbole principal de  $P_\varepsilon$  ne dépendant déjà pas de  $x$  et n'ayant pas de terme  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  :

$$p_\varepsilon = P_0(\xi, \varepsilon) = p(\xi) + i\varepsilon q(\xi).$$

Est-ce que dans la formule de  $P_0^{(\infty)}$  au-dessus, on peut enlever le terme  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  et que  $P_0^{(\infty)}$  est encore  $P_0$ ? C'est un résultat important que nous souhaitons. Cependant, cela n'est pas évident : la

démonstration dans [60] ne suffit pas pour l'expliquer parce qu'elle a utilisé des transformations dépendant aussi de  $\varepsilon$ . C'est pourquoi, nous allons reprendre dans cette section la partie formelle de la forme normale de Birkhoff dans la quelle nous proposerons de normaliser le symbole total  $P(x, \xi, \varepsilon, h)$  en l'ensemble de trois variables  $(\xi, \varepsilon, h)$ . D'autre part, l'approche que nous proposons est différente de celle [60].

**4.3.2. Série formelle et opérateur.** — Notons  $\mathcal{E} = \text{Hol}(\mathbb{T}_x^n)[[\xi, \varepsilon, h]]$  espace des séries formelles en  $(\xi, \varepsilon, h)$  à coefficients holomorphes en  $x \in \mathbb{T}^n$ ,

$$\mathcal{E} = \left\{ a^{(\mathcal{E})} = \sum_{k,m,l=0}^{\infty} a_{k,m,l}(x) \xi^k \varepsilon^m h^l \quad \text{tel que } a_{k,m,l}(x) \text{ sont analytiques en } x \right\}.$$

Comme il y a une correspondance entre un opérateur  $h$ -pseudo différentiel de Weyl et un élément de  $\mathcal{E}$  : si on note  $A$  opérateur  $h$ -pseudo différentiel,  $a := \sigma_w(A)$  son symbole total de Weyl et  $\sigma^{(\mathcal{E})}(A) \in \mathcal{E}$  la série formelle de Taylor de  $a$  en  $(\xi, \varepsilon, h)$ , alors cette correspondance est donnée par une application, notée  $\sigma^{(\mathcal{E})}$  de l'algèbre des opérateurs pseudo différentiels (de Weyl)  $\Psi$  dans l'espace des séries formelles  $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \sigma^{(\mathcal{E})} : \Psi &\rightarrow \mathcal{E} \\ A &\mapsto \sigma^{(\mathcal{E})}(A), \end{aligned} \tag{69}$$

$$\sigma^{(\mathcal{E})}(A) = \sum_{|\alpha|,j,l=0}^{\infty} \frac{1}{(|\alpha| + j + l)!} (\partial_\xi^\alpha \partial_\varepsilon^j \partial_h^l a(x, \xi, \varepsilon, h)|_{\xi=\varepsilon=h=0}) \xi^\alpha \varepsilon^j h^l.$$

La formule de Moyal (voir [75], [42], [107]) pour la composition de deux opérateurs du calcul semi classique de Weyl dit que si  $a := \sigma_w(A)$ ,  $b := \sigma_w(B)$ , alors  $A \circ B$  est encore un opérateur  $h$ -pseudo différentiel dont le symbole de Weyl satisfait

$$\begin{aligned} \sigma_w(A \circ B) &= (a \sharp^w b)(x, \xi, \varepsilon, h) \\ &= e^{ih[D_\eta D_x - D_y D_\xi]} a(x, \xi, \varepsilon, h) b(x, \xi, \varepsilon, h)|_{y=x, \eta=\xi} \\ &\sim \sum_{\alpha, \beta} \frac{h^{|\alpha|+|\beta|} (-1)^{|\alpha|}}{(2i)^{|\alpha|+|\beta|} \alpha! \beta!} (\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi, \varepsilon, h)) (\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta b(x, \xi, \varepsilon, h)) \\ &= a(x, \xi, \varepsilon, h) b(x, \xi, \varepsilon, h) + \frac{h}{2i} \{a(x, \xi, \varepsilon, h), b(x, \xi, \varepsilon, h)\} + \dots \end{aligned} \tag{70}$$

D'autre part, par le théorème de Borel toute série formelle  $a \in \mathcal{E}$  peut voir comme la série de Taylor d'une fonction lisse  $a = a(x, \xi, \varepsilon, h)$  (qui n'est pas unique) et on peut lui associer un opérateur  $h$ -pseudo différentiel en posant  $A = \text{Op}_h^w(a)$ . On a alors  $a^{(\mathcal{E})} = \sigma^{(\mathcal{E})}(A)$ . De cette façon et de la formule de Moyal (70), on peut définir un produit sur  $\mathcal{E}$ , noté  $\star$  : soient  $a^{(\mathcal{E})}, b^{(\mathcal{E})} \in \mathcal{E}$ , alors

$$a^{(\mathcal{E})} \star b^{(\mathcal{E})} = \sigma^{(\mathcal{E})}(A \circ B)$$

est la série de Taylor de  $a \sharp^w b$ .  $\mathcal{E}$  devient une algèbre avec ce produit. Le crochet associatif est donc bien défini et est nommé le crochet de Moyal :

$$[a^{(\mathcal{E})}, b^{(\mathcal{E})}] = a^{(\mathcal{E})} \star b^{(\mathcal{E})} - b^{(\mathcal{E})} \star a^{(\mathcal{E})}.$$

Par conséquence, soit  $a^{(\mathcal{E})} \in \mathcal{E}$ , on peut définir sur  $\mathcal{E}$  l'opérateur adjoint

$$\text{ad}_{a^{(\mathcal{E})}} := [a^{(\mathcal{E})}, \cdot].$$



Pour tout  $p^{(\mathcal{E})} \in \mathcal{E}$ , la série formelle

$$e^{\text{ad}_{a^{(\mathcal{E})}}} p^{(\mathcal{E})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\text{ad}_{a^{(\mathcal{E})}})^k p^{(\mathcal{E})}$$

est bien définie dans  $\mathcal{E}$  car elle ne comporte qu'un nombre fini de termes de degré fixé. C'est à dire l'opérateur exponentiel  $\exp(\text{ad}_{a^{(\mathcal{E})}})$  est bien défini sur  $\mathcal{E}$ .

De plus, pour deux opérateurs  $h$ -pseudo différentiels  $A$  et  $P$ , on a

$$\sigma^{(\mathcal{E})}([A, P]) = [\sigma^{(\mathcal{E})}(A), \sigma^{(\mathcal{E})}(P)]$$

et que  $\sigma^{(\mathcal{E})}$  devient un morphisme d'algèbre (associative).

De même, nous avons aussi

$$\exp(\text{ad}_{\sigma^{(\mathcal{E})}(A)})(\sigma^{(\mathcal{E})}(P)) = \sigma^{(\mathcal{E})}(\exp(\text{ad}_A)P),$$

où l'opérateur exponentiel  $\exp(\text{ad}_A)$  est définie comme dans la section prochaine.

**4.3.3. Action par conjugaison.** — Soit  $A$  un opérateur borné sur un espace de Hilbert  $H$ . On définit dans  $\mathcal{B}(H)$  l'opérateur exponentiel  $e^A \in \mathcal{B}(H)$  par la série absolument convergente

$$e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k. \quad (71)$$

En suite, on associe à  $A$  un opérateur borné  $\text{ad}_A := [A, \cdot] \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(H))$  et par (71) l'opérateur  $\exp(\text{ad}_A)$  (ou  $e^{\text{ad}_A}$ ) est bien défini dans  $\mathcal{B}(\mathcal{B}(H))$ . De plus, nous avons le résultat suivant :

**Lemme 4.3.1.** — Soient  $A$  et  $P$  deux opérateurs bornés de  $\mathcal{B}(H)$ , nous avons

$$e^A P e^{-A} = \exp(\text{ad}_A)P. \quad (72)$$

*Démonstration.* — Pour  $t \in \mathbb{R}$ , posons  $f(t) = e^{tA} P e^{-tA}$  et  $g(t) = \exp(\text{ad}_{tA})P$  qui sont des fonctions analytiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{B}(H)$ . On va calculer ses dérivées. D'abord notant que  $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = A e^{tA} = e^{tA} A$  et donc

$$\frac{d}{dt}(e^{tA})P = A e^{tA} P = e^{tA} A P,$$

nous avons

$$f'(t) = A e^{tA} P e^{-tA} - e^{tA} P e^{-tA} A = A f(t) - f(t) A = [A, f(t)]$$

et

$$g'(t) = \frac{d}{dt}(e^{t \cdot \text{ad}_A} P) = \text{ad}_A \circ e^{t \cdot \text{ad}_A} P = \text{ad}_A g(t) = [A, g(t)].$$

Alors,  $f(t), g(t)$  vérifient la même équation différentielle linéaire du premier d'ordre

$$u' = [A, u].$$

Or la valeur initiale en  $t = 0$ ,  $f(0) = g(0) = P$  et par conséquence nous avons  $f(t) = g(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . En particulier pour  $t = 1$ , nous avons bien  $e^A P e^{-A} = \exp(\text{ad}_A)P$ .  $\square$

Comme une application, nous avons :

**4.3.4. Idée de la construction de forme normale de Birkhoff.** — L'idée principal de cette construction est de chercher un opérateur pseudo différentiel  $A$  tel que l'opérateur intégral de Fourier associé  $U(h) := e^{\frac{i}{h}A}$  réduise l'opérateur initial  $P_\varepsilon$  à son opérateur conjugué

$$e^{\frac{i}{h}A}P_\varepsilon e^{-\frac{i}{h}A} = e^{\frac{i}{h}\text{ad}_A}(P_\varepsilon) := \widetilde{P}_\varepsilon \quad (73)$$

dont la série formelle du symbole total  $\sigma^{(\mathcal{E})}(\widetilde{P}_\varepsilon)$  dans  $\mathcal{E}$  ne dépend pas de  $x$ . En remarquant que  $\sigma^{(\mathcal{E})}(\widetilde{P}_\varepsilon) = \exp(\text{ad}_{\sigma^{(\mathcal{E})}(A)})(\sigma^{(\mathcal{E})}(P_\varepsilon))$  comme dans la section précédente, le travail est donc concentré à chercher  $\sigma_\mathcal{E}$  comme une série des termes homogènes en  $(\xi, \varepsilon, h)$ . Dans la recherche de cette série, la condition diophantienne est essentielle, voir (84).

**Remarque 4.3.2.** —

1. L'opérateur  $\widetilde{P}_\varepsilon$  ci-dessus est encore un opérateur pseudo différentiel par le théorème d'Egorov (voir par exemple [38], [103], [64]). Le cas particulier quand  $\widehat{A} = h\widehat{B}$ , alors l'opérateur  $U(h) := e^{\frac{i}{h}\widehat{A}} = e^{i\widehat{B}}$  est vraiment un opérateur pseudo différentiel et  $\widetilde{P}_\varepsilon$  est simplement la composition des opérateurs pseudo différentiels.
2. La conjugaison au niveau opérateur est remplacée par l'action adjointe sur l'espace des séries formelles.

**4.3.5. La construction de la forme normale.** — Dans cette partie, par convention, pour un opérateur  $h$ -pseudo différentiel  $P$ , on l'identifie à son symbole total (de Weyl)  $P = P(x, \xi, \varepsilon, h)$  et sa série formelle  $\sigma_\mathcal{E}(P)$ .

Nous utilisons un classement particulier pour  $(\xi, \varepsilon, h)$  en comptant le degré en  $\xi$  plus deux fois ceux en  $\varepsilon$  et  $h$ . La filtration associée est notée par le symbole  $\mathcal{O}(j)$ .

Notons aussi  $\mathcal{D}(j)$  le sous-espace de  $\mathcal{E}$  des polynômes homogènes de degré  $j$  par rapport à  $(\xi, \varepsilon, h)$  dans ce classement. Ainsi, nous avons

$$\mathcal{D}(j) = \text{Vect}\{\xi^k \varepsilon^m h^l \mid k + 2(m + l) = j\} \otimes \text{Hol}(\mathbb{T}_x^n)$$

et

$$\mathcal{O}(j) = \bigoplus_{n \geq j} \mathcal{D}(j).$$

Nous avons bien sûr  $\mathcal{D}(j) \subset \mathcal{O}(j)$  et  $\mathcal{O}(j+1) \subset \mathcal{O}(j)$ . Comme d'habitude, on s'autorise à noter  $A = B + \mathcal{O}(j)$  pour dire  $A - B \in \mathcal{O}(j)$ .

Si  $K_j = K_j(x, \xi, \varepsilon, h) \in \mathcal{O}(j)$ , alors c'est évident que le crochet de Poisson satisfait  $\{K_j, K_l\} = \mathcal{O}(j+l-1)$ . Pour le crochet de Moyal  $i[K_j, K_l]$ , de (70), il peut s'exprimer comme une série en  $(\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial x})$  et est bien d'ordre  $j+l+1$  puisque chaque fois que nous perdons un degré en  $\xi$  nous gagnons un en  $h$ . De plus, nous avons

$$i[K_j, K_l] = h\{K_j, K_l\} + h\mathcal{O}(j+l) \quad (74)$$

$$= h\mathcal{O}(j+l-1) = \mathcal{O}(j+l+1). \quad (75)$$

Par conséquence, nous avons aussi

$$\begin{aligned} [\mathcal{O}(j_1), [\mathcal{O}(j_2), \dots, \mathcal{O}(j_n)] \dots] &= h^{n-1} \mathcal{O}(j_1 + \dots + j_n - (n-1)) \\ &= \mathcal{O}(j_1 + \dots + j_n + n - 1) \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \text{et } [\dots [\mathcal{O}(j_1), [\mathcal{O}(j_2)], \dots, \mathcal{O}(j_n)] &= h^{n-1} \mathcal{O}(j_1 + \dots + j_n - (n-1)) \\ &= \mathcal{O}(j_1 + \dots + j_n + n - 1). \end{aligned} \quad (77)$$

**Théorème 4.3.3.** — Supposons que  $P = P(x, \xi, \varepsilon, h)$  l'opérateur analytique  $h$ -pseudo différentiel de Weyl sur  $\mathbb{T}^n$  (défini microlocalement près de  $\xi = 0$ ) avec  $h$ -symbole principal  $P_0 = p(\xi) + i\varepsilon q(\xi)$  tel que  $p(\xi) = \langle a, \xi \rangle + \mathcal{O}(\xi^2)$  et  $a$  est diophantien comme dans la définition 4.2.4. Alors pour tout entier  $N \geq 1$ , il existe une fonction  $G^{(N)} = \sum_{j=2}^N G_j$  ( $G^{(1)} = 0$ ) où  $G_j = G_j(x, \xi, \varepsilon, h) \in \mathcal{D}(j-2)$  (pour  $j \geq 2$ ) est analytique en  $x$ , homogène en  $(\xi, \varepsilon, h)$  telle que

$$\exp(iad_{G^{(N)}})P = P_0 + hP_1^{(N)} + hR_{N-1}, \quad (78)$$

où  $P_1^{(N)} = P_1^{(N)}(\xi, \varepsilon, h) \in \mathcal{E}$  est indépendant de  $x$  et  $R_{N-1} = \mathcal{O}(N-1)$ .

*Démonstration.* — Nous pouvons écrire  $P$  sous le forme

$$P = P(x, \xi, \varepsilon, h) = P_0 + hP_1,$$

avec  $P_1 = P_1(x, \xi, \varepsilon, h)$  holomorphe en  $(x, \xi)$  et analytique en  $(h, \varepsilon)$  proche de 0.

On va montrer la propriété (78) par récurrence sur  $N$ .

Pour  $N = 1$ , on prend  $G^{(1)} = P_1^{(1)} = 0$ ,  $R_0 = P_1(x, \xi, \varepsilon, h)$  et la propriété (78) est valide.

On suppose qu'elle est valide pour  $N$  avec une fonction trouvée  $G^{(N)}$ . Il faut maintenant chercher une fonction  $G_{N+1} \in \mathcal{D}(N)$  telle que  $G^{(N+1)} = G^{(N)} + G_{N+1}$  vérifie bien l'équation (78). En développant l'exponentielle et en utilisant (74) avec l'attention que  $P = \mathcal{O}(1)$  et  $G^{(N)} \in \mathcal{O}(0)$ , nous pouvons écrire

$$\exp(iad_{G^{(N+1)}})P = \exp(iad_{G^{(N)}})P + iad_{G_{N+1}}P + h\mathcal{O}(N). \quad (79)$$

En effet, en notant  $A_j := iad_{G_j}$  et  $A^{(N)} = \sum_{j=2}^N A_j$  nous avons le développement

$$\begin{aligned} \exp(iad_{G^{(N+1)}})P &= \exp(A^{(N)} + A_{N+1})P \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (A^{(N)} + A_{N+1})^k P \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k (A^{(N)})^{k-l} * (A_{N+1})^l P \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (A^{(N)})^k P + \underbrace{\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{l=1}^k (A^{(N)})^{k-l} * (A_{N+1})^l P}_{B_k} \\ &= \exp(A^{(N)})P + \sum_{k \geq 1} B_k. \end{aligned} \quad (80)$$

Dans les formules ci-dessus, nous avons utilisé le symbole " \* " qui signifie que  $A^m * B^n$  est la somme de toutes les compositions comportant de  $m$  fois l'opérateur  $A$  et  $n$  fois l'opérateur  $B$ .

En particulier, pour  $k = 1$  nous avons

$$B_1 = A_{N+1}P = iad_{G_{N+1}}P = iad_{G^{(N+1)}}P.$$

Pour tout  $k \geq 2$ , en utilisant la formule (76) avec remarque  $P = \mathcal{O}(1)$ ,  $G^{(N)} = \mathcal{O}(0)$ ,  $G_{(N+1)} = \mathcal{O}(N-1)$ , nous obtenons que

$$B_k = \mathcal{O}(N+k) = h\mathcal{O}(N+k-2)$$

car pour  $l = 1, \dots, k$  tous ses termes  $(A^{(N)})^{k-l} * (A_{N+1})^l P = \mathcal{O}((k-l) \times 0 + l(N-1) + 1 + k) = \mathcal{O}(l(N-1) + 1 + k) = \mathcal{O}(h)$  et l'inégalité  $l(N-1) + 1 + k \geq N+k$  est toujours vrai.

D'où la formule (79) est démontrée.

De (79), de l'hypothèse de récurrence (78) et des formules (74) en remarquant que l'on peut écrire

$$P = \langle a, \xi \rangle + \mathcal{O}(\xi^2) + i\varepsilon q(\xi) + \mathcal{O}(h) = \langle a, \xi \rangle + \mathcal{O}(2),$$

On a donc

$$\begin{aligned} \exp(i\text{ad}_{G_{N+1}})P &= P_0 + hP_1^{(N)} + hR_{N-1} + i\text{ad}_{G_{N+1}}P + h\mathcal{O}(N) \\ &= P_0 + hP_1^{(N)} + hR_{N-1} + i[G_{N+1}, \langle a, \xi \rangle + \mathcal{O}(2)] \\ &= P_0 + hP_1^{(N)} + hR_{N-1} + i[G_{N+1}, \langle a, \xi \rangle] + i[G_{N+1}, \mathcal{O}(2)] \\ &= P_0 + hP_1^{(N)} + hR_{N-1} + h\{G_{N+1}, \langle a, \xi \rangle\} + h\mathcal{O}(N-1+1) \\ &\quad + h\mathcal{O}(N-1+2-1) \\ &= P_0 + h\{G_{N+1}, \langle a, \xi \rangle\} + hR_{N-1} + hP_1^{(N)} + h\mathcal{O}(N) \end{aligned} \quad (81)$$

Alors, l'équation pour  $G_{N+1}$  devient

$$P_0 + h\{G_{N+1}, \langle a, \xi \rangle\} + hR_{N-1} + hP_1^{(N)} + h\mathcal{O}(N) = P_0 + hP_1^{(N+1)} + h\mathcal{O}(N)$$

et elle est équivalente à l'équation cohomologique suivante

$$\{G_{N+1}, \langle a, \xi \rangle\} + R_N = K_N + \mathcal{O}(N), \quad (82)$$

où  $K_N := P_1^{(N+1)} - P_1^{(N)}$  ne devrait pas dépendre de  $x$ .

Or, cette équation est bien solvable.

En effet : dans l'équation ci-dessus, comme le reste est d'ordre  $N$ , nous pouvons remplacer  $R_{N-1}$  par sa partie homogène d'ordre  $N-1$ , notée  $\bar{R}_{N-1}$  et nous allons résoudre l'équation :

$$\{G_{N+1}, \langle a, \xi \rangle\} + \bar{R}_{N-1} = K_N. \quad (83)$$

Développons  $G_{N+1}$  et  $\bar{R}_{N-1}$  en série de Fourier de  $x \in \mathbb{T}^n$

$$\begin{aligned} G_{N+1} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{G}_{N+1}(k) e^{ik \cdot x} \\ \bar{R}_{N-1} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{\bar{R}}_{N-1}(k) e^{ik \cdot x}, \end{aligned}$$

où  $\widehat{G}_{N+1}(k), \widehat{\bar{R}}_{N-1}(k)$  sont des polynômes dans  $\mathbb{R}[\xi, \varepsilon, h]$ .

En notant que le crochet  $\{G_{N+1}, \langle a, \xi \rangle\} = -(a \cdot \partial x)G_{N+1}$  on peut écrire l'équation (83) sous la forme

$$-\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} i(a \cdot k) \widehat{G}_{N+1}(k) e^{ik \cdot x} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{\bar{R}}_{N-1}(k) e^{ik \cdot x} = K_N$$

ou

$$\widehat{\bar{R}}_{N-1}(0) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} (\widehat{\bar{R}}_{N-1}(k) - i(a \cdot k) \widehat{G}_{N+1}(k)) e^{ik \cdot x} = K_N.$$

Cette équation est bien résolue en posant

$$K_N = \widehat{\bar{R}}_{N-1}(0)$$

(c'est aussi égal à la  $x$ -moyenne  $\langle \bar{R}_{N-1} \rangle$ ) et pour  $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ ,

$$\widehat{G}_{N+1}(k) = -i \frac{\widehat{\bar{R}}_{N-1}(k)}{(a \cdot k)},$$

(ici  $(a \cdot k) \neq 0$  par la condition diophantienne de  $a$ ).

De plus, de la condition diophantienne de  $a$  (voir (50)), il existe deux constantes  $C_0, N_0 > 0$  telles que pour tout  $k \neq 0$  nous avons l'estimation

$$|\widehat{G}_{N+1}(k)| = \frac{|\widehat{R}_{N-1}(k)|}{|(a \cdot k)|} \leq C_0 |k|^{N_0} |\widehat{R}_{N-1}(k)| \quad (84)$$

qui assure la convergence et l'analyticité de  $G_{N+1}$  en  $x$  car  $\overline{R}_{N-1}$  l'est.  $\square$

**Remarque 4.3.4.** —

1. Dans le théorème ci-dessus, en prenant  $N$  converge à l'infini et en posant  $[A] := G_1 + G_2 + \dots$ , alors  $[A]$  est la série formelle voulue discutée dans la subsection dernière et la forme normale de Birkhoff de  $P = P(x, \xi, \varepsilon, h)$  est la limite dans  $\mathcal{E}$  de  $P_0 + hP_1^{(N)}$  quand  $N \rightarrow \infty$ . D'autre part, il existe une fonction  $C^\infty$ , notée souvent par  $P^{(\infty)}$  qui admet cette limite comme son développement asymptotique.
2. Nous voyons une chose importante que dans le cas du théorème, le premier terme (ou encore le terme  $h$ -principal) le long de la procédure de forme normale de Birkhoff de  $P$  est toujours

$$P_0 = p(\xi) + i\varepsilon q(\xi).$$

**Proposition 4.3.5.** — Soit  $\widehat{P} = \widehat{P}(\xi; X)$  une fonction lisse à valeurs complexes de  $\xi$  au voisinage  $0 \in \mathbb{R}^2$  et de  $X$  au voisinage de  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Supposons que  $\widehat{P}$  admet un développement asymptotique en  $X$  proche de 0 de la forme

$$\widehat{P}(\xi; X) \sim \sum_{\alpha} C_{\alpha}(\xi) X^{\alpha}$$

avec  $C_{\alpha}(\xi)$  sont des fonctions lisses et  $C_0(\xi) := \widehat{P}_0(\xi)$  est un difféomorphisme local en  $\xi = 0$ . Alors, pour  $|X|$  assez petit,  $\widehat{P}$  est aussi un difféomorphisme local en  $\xi = 0$  et son inverse admet un développement asymptotique en  $X$  près de 0 dont le premier terme est  $(\widehat{P}_0)^{-1}$ .

*Démonstration.* — On peut écrire  $\widehat{P}$  sous la forme

$$\widehat{P}(\xi; X) = \widehat{P}_0(\xi) + \mathcal{O}(X).$$

Le déterminant

$$|\det(\frac{\partial \widehat{P}}{\partial \xi}(0))| = |\det(\frac{\partial \widehat{P}_0}{\partial \xi}(0)) + \mathcal{O}(|X|)|$$

est non-nul pour  $|X|$  assez petit et il assure que  $\widehat{P}$  est un difféomorphisme local en  $\xi = 0$ .

Ensuite, par récurrence, on peut montrer que  $\widehat{P}^{-1}$  admet un développement asymptotique en  $X$  près de  $0 \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

#### 4.4. Opérateur $P_\varepsilon = P + i\varepsilon Q$ , le cas $\{p, q\} = 0$

Dans cette section, nous allons travailler sur un cas particulier de l'opérateur  $P_\varepsilon$  considéré dans la section précédente quand les symboles principaux  $p, q$  commutent. C'est un cas simple mais très intéressant. Plus explicitement :

Nous supposons maintenant que  $P_\varepsilon$  est de la forme

$$P_\varepsilon = P + i\varepsilon Q, \quad (85)$$

avec  $P, Q$  deux opérateurs  $h$ -pseudo-différentiels et  $P = P_{\varepsilon=0}$  est auto-adjoint ( $Q$  n'est pas nécessairement auto-adjoint).

Supposons que  $p, q$  sont les symboles principaux associés de  $P, Q$ . Notons que  $p$  est à valeurs réelles,  $q$  n'est pas nécessairement à valeurs réelles mais pour plus simple, on va supposer aussi que  $q$  est à valeurs réelles (sinon il suffit remplacer  $q$  par  $Re(q)$ ).

Alors le symbole principal de  $P_\varepsilon$  est

$$p_\varepsilon = p + i\varepsilon q.$$

Notons bien que le symbole principal dans (39) devient la même forme que celle dernière mais sans terme  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ .

Nous supposons encore plus que  $p, q$  commutent i.e.  $\{p, q\} = H_p(q) = 0$  par rapport au crochet de Poisson sur  $T^*M$  et que  $dp, dq$  sont linéairement indépendants presque par tout.

**Remarque 4.4.1.** — Au niveau opérateur, dans ce cas,  $P, Q$  ne sont pas nécessaires en involution, par contre leur commutant est en puissance d'ordre 2 de  $h$ ,

$$[P, Q] = \mathcal{O}(h^2).$$

**4.4.1. Spectre asymptotique de  $P_\varepsilon = P + i\varepsilon Q$ , le cas  $\{p, q\} = 0$ .** — On sait bien que par la commutativité,  $q$  est invariant sous le flot de  $p$ , la fonction  $\langle q \rangle_T$  (pour tout  $T > 0$ ) dans (40) est donc encore  $q$  et par le théorème Action-Angle,  $q$  est constante sur tout tore invariant  $\Lambda_a$ , la moyenne de  $q$  sur  $\Lambda_a$  (définition en (48)) est encore  $q$ .

Par conséquent, nous remplacerons  $\langle q \rangle_T$  et  $\langle q \rangle$  dans tous les définitions, les hypothèses et les affirmations de la section dernière par  $q$ .

En particulier, pour chaque  $a \in J$ , l'intervalle compact de  $Q_\infty(a)$  défini dans (46) devient un seul point :

$$Q_\infty(a) = \{q|_{\Lambda_a}\} \quad (86)$$

et les localisations du spectre de  $P_\varepsilon$  données dans (42), (47) deviennent :

$$\begin{aligned} \text{Im}(\sigma(P_\varepsilon) \cap \{z \in \mathbb{C} : |Re z| \leq \delta\}) &\subset \varepsilon [\inf_{p^{-1}(0)} q - o(1), \sup_{p^{-1}(0)} q + o(1)] \\ &\subset \varepsilon [\inf \bigcup_{a \in J} q|_{\Lambda_a} - o(1), \sup \bigcup_{a \in J} q|_{\Lambda_a} + o(1)], \end{aligned} \quad (87)$$

quand  $\varepsilon, h, \delta \rightarrow 0$ .

Dans des coordonnées action-angle  $(x, \xi)$  au voisinage de  $\Lambda_a$  telles que  $\Lambda_a \simeq \{\xi = 0\}$ , on a  $p = p(\xi)$  et la formule (49) devient  $\langle q \rangle(\xi) = q(\xi)$ . Alors microlocalement, le symbole principal devient

$$p_\varepsilon = p(\xi) + i\varepsilon q(\xi). \quad (88)$$

Comme une application importante de la section 4.3.2 (le théorème 4.3.3), la construction microlocale de la forme normale quantique de Birkhoff de  $P_\varepsilon$  au voisinage d'un tore diophantien ne fait pas changer ce symbole principal. C'est à dire dans des coordonnées  $(x, \xi)$  près de la section

$\xi = 0$  dans  $T^*\mathbb{T}^2$  telle que  $P_\varepsilon$  a la forme normale, son  $h$ -symbole principal est encore de la forme  $p(\xi) + i\varepsilon q(\xi)$ .

Alors, dans ce cas, concernant le théorème 4.2.8, les valeurs propres de  $P_\varepsilon$  dans le rectangle  $R(\varepsilon, h)$  (53) modulo  $\mathcal{O}(h^\infty)$  sont données par développement asymptotique d'une fonction lisse  $P_j^{(\infty)}$ ,  $j = 1, \dots, L$  en  $(\varepsilon, h)$  et en

$$\xi = h\left(k - \frac{k_j}{4}\right) - \frac{S_j}{2\pi}, k \in \mathbb{Z}^2$$

dont le premier terme (le symbole principal (56) dans le cas du théorème 4.2.8) est

$$p_{j,0}(\xi, \varepsilon) = p_j(\xi) + i\varepsilon q_j(\xi), \quad (89)$$

où  $p_j, q_j$  sont les expressions de  $p, q$  en variables action-angle proche de  $\Lambda_j$  de  $p, q$ . Sous la forme réduite, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sigma(P_\varepsilon) \cap R(\varepsilon, h) \ni \lambda &= P_j^{(\infty)}\left(h\left(k - \frac{k_j}{4}\right) - \frac{S_j}{2\pi}, \varepsilon; h\right) + \mathcal{O}(h^\infty) \\ &= p_j\left(h\left(k - \frac{k_j}{4}\right) - \frac{S_j}{2\pi}\right) + i\varepsilon q_j\left(h\left(k - \frac{k_j}{4}\right) - \frac{S_j}{2\pi}\right) \\ &\quad + \mathcal{O}(h), \quad k \in \mathbb{Z}^2, \end{aligned} \quad (90)$$

uniformément pour  $h, \varepsilon$  petits.

**Remarque 4.4.2.** — On vient de donner le développement asymptotique des valeurs propres de  $P_\varepsilon$  dans un bon rectangle au voisinage de  $0 \in \mathbb{C}$ .

Cependant, si on suppose les mêmes hypothèses sur l'espace d'énergie  $p^{-1}(E) \cap T^*M$  ( $E \in \mathbb{R}$ ) que  $p^{-1}(0) \cap T^*M$  et en introduisant de même façon la définition de l'ensemble de bonnes valeurs, nous pouvons aussi construire le même pour des valeurs propres de  $P_\varepsilon$  dans un importe quel bon rectangle de centre de la forme  $E + iF_0$ .

**4.4.2. La formule spectrale détaillée.** — Dans ce paragraphe, nous considérons l'opérateur  $P_\varepsilon$  comme dans le paragraphe précédent et de plus on va supposer toutes les mêmes hypothèses sur l'espace d'énergie  $p^{-1}(E) \cap T^*M$  que  $p^{-1}(0) \cap T^*M$  et introduire la définition de l'ensemble de bonnes valeurs de même manière de la définition 4.2.5. Ici, nous prenons  $E$  dans un intervalle borné de  $\mathbb{R}$  car nous voulons des estimations uniformes par rapport à  $E$ .

Comme nous avons dit dans la remarque précédente et avec l'aide des coordonnées action-angle, nous allons donner explicitement le développement asymptotique des valeurs propres de  $P_\varepsilon$  dans un bon rectangle arbitraire de taille  $\mathcal{O}(h^\delta) \times \mathcal{O}(\varepsilon h^\delta)$  avec un bon centre  $E + i\varepsilon F$ .

De plus, il est intéressant que l'on peut construire d'un tel développement dont le symbole principal est bien défini globalement pour tout bon rectangle proche d'une valeur régulière de  $(p, \varepsilon q)$ .

En effet, pour plus simple, on suppose que l'application moment  $\Phi := (p, q)$  est propre et de fibre connexe (chaque fibre régulière compacte est donc un tore invariant lagrangien de Liouville). **Dans ce cas**  $L = 1$ .

Notons  $U_r$  l'ensemble de valeurs régulières de  $\Phi = (p, q)$  et soit un point  $c \in U_r$ .

Nous rappelons que par le théorème Action-Angle 2.5.1 nous avons des coordonnées action-angle au voisinage du tore  $\Lambda_c := \Phi^{-1}(c)$  dans  $M$  : il existe  $r > 0$ , un voisinage  $\Omega := \Phi^{-1}(B(c, r))$  de  $\Lambda_c$ , un petit ouvert  $D \subset \mathbb{R}^2$  de centre 0, un symplectomorphisme  $\kappa : \Omega \rightarrow \mathbb{T}^2 \times D$  et un difféomorphisme  $\varphi : D \rightarrow \varphi(D) = B(c, r)$  tels que :  $\kappa(\Lambda_c) = \{\xi = 0\}$ ,  $\Phi \circ \kappa^{-1}(x, \xi) = \varphi(\xi)$ , pour tout  $x \in \mathbb{T}^2, \xi \in D$  et  $\varphi(0) = c$ .

Nous introduisons la fonction

$$\chi : \mathbb{R}^2 \ni u = (u_1, u_2) \mapsto \chi u = (u_1, \varepsilon u_2) \cong u_1 + i\varepsilon u_2 \quad (91)$$

et notons

$$B(\chi u, r, \varepsilon) := \chi(B(u, r))$$

pour une certaine boule  $B(u, r)$  ( $r > 0$ ),  $U_r(\varepsilon) := \chi(U_r)$ .

Pour tout point  $\chi_a \in B(\chi_c, r, \varepsilon)$  telle que  $F := a_2$  est une bonne valeur,  $E := a_1$  et  $p^{-1}(E) \cap T^*M$  satisfait les mêmes hypothèses que celles de  $p^{-1}(0) \cap T^*M$  dans la section 4.2.1. Nous allons construire le développement asymptotique des valeurs propres de  $P_\varepsilon$  dans un "bon rectangle" de "bon centre"  $\chi_a$  (qui est justement une translation du rectangle  $R(\varepsilon, h)$  dans (53)) :

$$R(\chi_a, \varepsilon, h) = \chi_a + R(0, \varepsilon, h), \quad (92)$$

où

$$R(0, \varepsilon, h) = \left[ -\frac{h^\delta}{\mathcal{O}(1)}, \frac{h^\delta}{\mathcal{O}(1)} \right] + i\varepsilon \left[ -\frac{h^\delta}{\mathcal{O}(1)}, +\frac{h^\delta}{\mathcal{O}(1)} \right] = R(\varepsilon, h) - i\varepsilon a_2. \quad (93)$$

Posons  $\Lambda_1 = \Phi^{-1}(a)$ , c'est un tore invariant de type  $(\alpha, d)$ -diophantien, défini dans (50) et supposons que ses coordonnées action-angle sont  $\xi_a$ , c'est à dire  $\{\xi = \xi_a\} = \kappa(\Lambda_1)$  dans  $T^*\mathbb{T}^2$  ou  $\xi_a = \varphi^{-1}(a) \in D$ .

En suite, posons  $\tilde{P}_\varepsilon := P_\varepsilon - \chi_a$  pour ramener le spectre de  $P_\varepsilon$  proche de  $\chi_a$  au spectre de  $\tilde{P}_\varepsilon$  proche de 0 en remarquant que

$$\sigma(P_\varepsilon) = \sigma(\tilde{P}_\varepsilon) + \chi_a. \quad (94)$$

Le symbole principal de  $\tilde{P}_\varepsilon$  est  $\tilde{p} + i\varepsilon\tilde{q}$ , avec  $\tilde{p} := p - a_1$ ,  $\tilde{q} := q - a_2$ . Notons que on a encore un système intégrable  $(\tilde{p}, \tilde{q})$  et si posons  $\tilde{\xi} = \xi - \xi_a$ , alors  $\tilde{\xi}$  est la nouvelle variable d'action pour ce système dans laquelle  $\Lambda_a \simeq \{\tilde{\xi} = 0\}$ , comme le cas standard du théorème 4.2.8.

Le symbole principal de  $\tilde{P}_\varepsilon$  est microlocalement réduit à

$$\varphi_1(\tilde{\xi}) + i\varepsilon\varphi_2(\tilde{\xi}) - \chi_a = \varphi_1(\xi_a + \tilde{\xi}) + i\varepsilon\varphi_2(\xi_a + \tilde{\xi}) - \chi_a.$$

En appliquant le théorème 4.2.8 dans le cas de la subsection dernière pour  $\tilde{P}_\varepsilon$  et de la formule (94), nous avons : toutes les valeurs propres de  $P_\varepsilon$  dans le bon rectangle  $R(\chi_a, \varepsilon, h)$  défini par (92) modulo  $\mathcal{O}(h^\infty)$  sont données par développement asymptotique d'une fonction lisse  $P(\xi, \varepsilon; h)$  en  $(\varepsilon, h)$  et en  $\xi$  au voisinage de  $\xi_a$  telle que sous la forme réduite ( c'est pareil que (90)),

$$\begin{aligned} \sigma(P_\varepsilon) \cap R(\chi_a, \varepsilon, h) \ni \lambda &= P\left(\xi_a + h\left(k - \frac{k_1}{4}\right) - \frac{S_1}{2\pi}, \varepsilon; h\right) + \mathcal{O}(h^\infty) \\ &= \varphi_1\left(\xi_a + h\left(k - \frac{k_1}{4}\right) - \frac{S_1}{2\pi}\right) + i\varepsilon\varphi_2\left(\xi_a + h\left(k - \frac{k_1}{4}\right) - \frac{S_1}{2\pi}\right) \\ &\quad + \mathcal{O}(h), \quad k \in \mathbb{Z}^2, \end{aligned} \quad (95)$$

uniformément pour  $h, \varepsilon$  petits, où  $S_1 \in \mathbb{R}^2$  est l'action et  $k_1 \in \mathbb{Z}^2$  est l'indice de Maslov des cycles fondamentaux de  $\Lambda_1$ .

Avec la remarque 4.4.6 au-dessous, il existe une fonction  $c \mapsto \tau_c \in \mathbb{R}^2$ , localement constante en  $c \in U_r$  (dépendant du choix de coordonnées action-angle locales au voisinage de  $c \in U$ ) telle que  $\frac{S_1}{2\pi} = \xi_a + \tau_c$ . Alors la formule de  $\lambda$  devient :

$$\lambda = \varphi_1\left(-\tau_c + h\left(k - \frac{k_1}{4}\right)\right) + i\varepsilon\varphi_2\left(-\tau_c + h\left(k - \frac{k_1}{4}\right)\right) + \mathcal{O}(h). \quad (96)$$



Il y a une correspondance bijective entre  $\lambda \in \sigma(P_\varepsilon) \cap R(\chi_a, \varepsilon, h)$  et  $hk$  dans une partie de  $h\mathbb{Z}^2$  (par la proposition 4.2.12). De plus, comme en (62) et (67), il existe un difféomorphisme local lisse  $f = f(\lambda, \varepsilon; h)$  qui envoie  $R(\chi_a, \varepsilon, h)$  sur son image, noté  $E(a, \varepsilon, h)$  qui est proche de  $\frac{S_1}{2\pi}$  telle qu'elle envoie  $\sigma(P_\varepsilon) \cap R(\chi_a, \varepsilon, h)$  sur  $h\mathbb{Z}^2$  modulo  $\mathcal{O}(h^\infty)$  :

$$f = f(\lambda, \varepsilon; h) = \tau_c + h\frac{k_1}{4} + P^{-1}(\lambda).$$

Posons  $\tilde{f} = f \circ \chi$ ,

$$\tilde{f} = \tau_c + h\frac{k_1}{4} + P^{-1} \circ \chi.$$

**Remarque 4.4.3.** — Posons  $\widehat{P} := \chi^{-1} \circ P$ . Comme  $P$  admet un développement asymptotique en  $(\xi, \varepsilon, h)$ , alors c'est évident que  $\widehat{P}$  admet un développement asymptotique en  $(\xi, \varepsilon, \frac{h}{\varepsilon})$  (avec  $h \ll \varepsilon$ ) :

$$\begin{aligned} \widehat{P}(\xi, \varepsilon, h) &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} C_{\alpha\beta\gamma} \xi^\alpha \varepsilon^\beta \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^\gamma \\ &= \widehat{P}_0(\xi) + \mathcal{O}\left(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (97)$$

avec

$$\widehat{P}_0(\xi) = \varphi_1(\xi) + i\varphi_2(\xi)$$

est un difféomorphisme local.

De plus, en regardant la forme normale de Birkhoff par l'équation (78), on peut le réécrire sous la forme :

$$\widehat{P}(\xi, \varepsilon, h) = \widehat{P}_0(\xi) + \mathcal{O}\left(\frac{h}{\varepsilon}\right).$$

D'après la proposition 4.3.5,  $\widehat{P}^{-1} = P^{-1} \circ \chi$  admet aussi un développement asymptotique en  $(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon})$  dont le premier terme est

$$\widehat{P}_0^{-1} = \varphi^{-1}.$$

Par conséquent,  $\tilde{f}$  admet un développement asymptotique en  $(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon})$  et de plus on peut l'écrire sous la forme

$$\tilde{f} = \tilde{f}_0 + \mathcal{O}\left(\frac{h}{\varepsilon}\right) \quad (98)$$

dont le premier terme est

$$\tilde{f}_0 = \tau_c + \varphi^{-1}. \quad (99)$$

Nous avons une remarque importante que le premier terme  $\tilde{f}_0$  est bien définie globalement sur  $B(c, r)$  dans le sens qu'il ne dépend pas de bon rectangle choisi  $R(\chi_a, \varepsilon, h)$ .

En résumé, pour toute valeur régulière  $c \in U_r$ , il existe un petit domaine  $B(\chi_c, r, \varepsilon) = \chi(B(c, r))$  et pour toute bonne valeur  $a \in B(c, r)$  (qui est en dehors d'un ensemble de petite mesure), on a un bon rectangle  $R(\chi_a, \varepsilon, h)$  de bon centre  $\chi_a$  et un difféomorphisme local lisse  $f$  qui envoie  $R(\chi_a, \varepsilon, h)$  sur son image, noté  $E(a, \varepsilon, h)$  de la forme :

$$\begin{aligned} f : R(\chi_a, \varepsilon, h) &\rightarrow E(a, \varepsilon, h) \\ \sigma(P_\varepsilon) \cap R(\chi_a, \varepsilon, h) \ni \lambda &\mapsto f(\lambda, \varepsilon; h) \in h\mathbb{Z}^2 + \mathcal{O}(h^\infty). \end{aligned} \quad (100)$$

tels que  $\tilde{f} = f \circ \chi$  admet un développement asymptotique en  $(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon})$  de la forme (98) avec le premier terme (99) est un difféomorphisme, défini globalement sur  $B(c, r)$ .

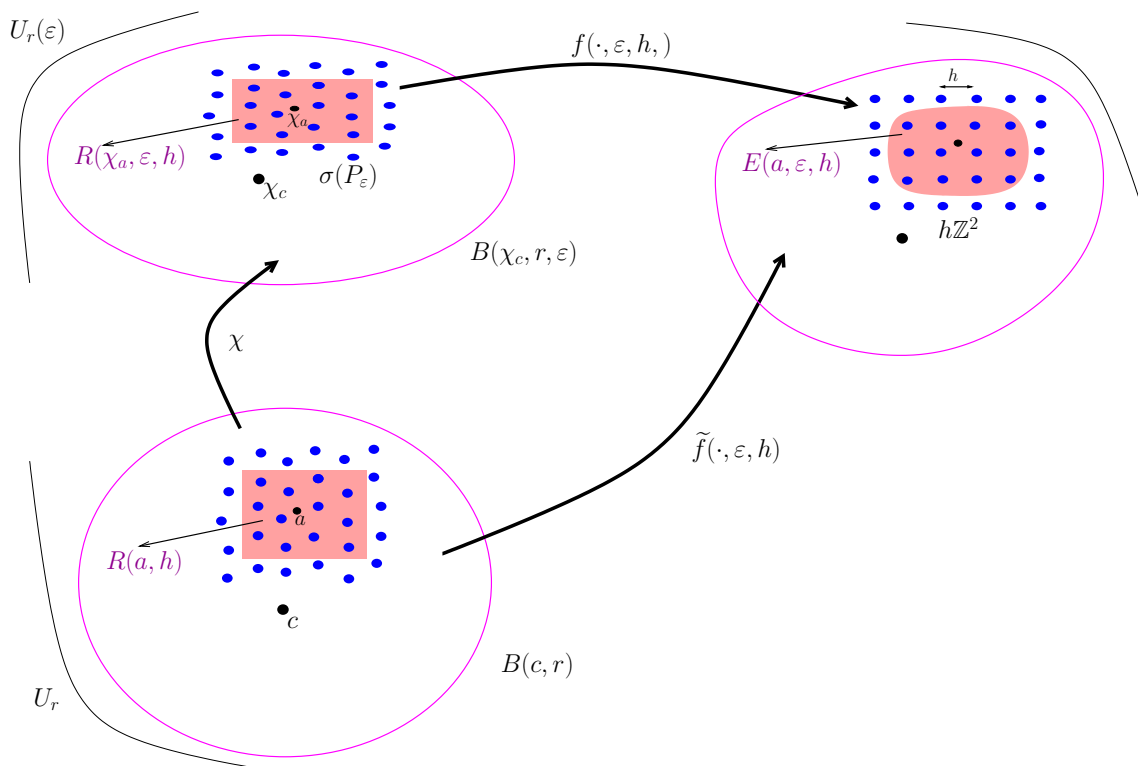


Figure 6. Pseudo-réseau asymptotique du spectre de  $P_\varepsilon$

**Remarque 4.4.4.** — On ne sait pas si  $f$  admet un développement asymptotique en  $(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon})$  mais on peut exprimer  $f$  sous la forme :

$$f(\lambda, \varepsilon, h) = \sum_{\alpha, \beta} C_{\alpha\beta}(\lambda_1, \frac{\lambda_2}{\varepsilon}) \varepsilon^\alpha (\frac{h}{\varepsilon})^\beta$$

avec

$$C_{00}(\lambda_1, \frac{\lambda_2}{\varepsilon}) = \tau_c + \varphi^{-1} \circ \chi^{-1}(\lambda) := f_0 \quad (101)$$

qui est bien définie pour tout  $\lambda \in B(\chi_c, r, \varepsilon)$ .

De plus, on peut aussi écrire  $f = f_0 + \mathcal{O}(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon})$ .

**Remarque 4.4.5.** — En terme de la définition 4.5.1, nous disons que des couples  $(f(\varepsilon; h), R(\chi_a, \varepsilon, h))$  comme au-dessus forment une pseudo-carte de  $\sigma(P_\varepsilon)$  sur le domaine  $U_r(\varepsilon)$ .

**Remarque 4.4.6 (Intégrale d'action).** — Si  $c \in U_r$  une valeur régulière de  $\Phi$  et  $(x, \xi)$  des coordonnées action-angle données par  $\kappa$  comme précédent. Il existe une 1-forme primitive de Liouville  $\alpha$  de  $\omega$  sur  $\Omega := \Phi^{-1}(B(c, r)) \subset M$  telle que  $d\alpha = \omega$ .

Notons  $\tilde{\omega}$  la forme symplectique canonique et  $\tilde{\alpha} = \sum \xi_i dx_i$  une forme canonique sur  $T^*\mathbb{T}^2$  :  $d\tilde{\alpha} = \tilde{\omega}$ .

Comme  $\kappa$  est symplectique, nous avons  $\kappa^*\omega = \tilde{\omega}$ . C'est équivalent à  $d(\kappa^*\alpha - \tilde{\alpha}) = 0$ . C'est à dire qu'il existe une 1-forme fermée  $\beta$  sur  $T^*\mathbb{T}^2$  telle que

$$\kappa^*\alpha = \tilde{\alpha} + \beta.$$

Pour tout tore invariant  $\Lambda_a \subset \Omega$ , notons  $(\gamma_1, \gamma_2)$  deux cycles fondamentaux sur  $\Lambda_a$  qui sont envoyés sur les cotés du tore  $\kappa(\Lambda_a) = \{\xi = \xi_a\}$  par  $\kappa$  dans  $T^*\mathbb{T}^2$ .

Alors, l'action de  $(\gamma_1, \gamma_2)$  est  $S_1 = (S_{1,1}, S_{1,2})$  calculé par : pour  $j = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} S_{1,j} &= \int_{\gamma_j} \alpha = \int_{\kappa(\gamma_j)} \kappa^* \alpha = \int_{\kappa(\gamma_j)} (\tilde{\alpha} + \beta) \\ &= \int_{\{x \in \mathbb{T}^2 : x_j = 0\}} \left( \sum \xi_i dx_i + \beta \right) = 2\pi(\xi_a + \tau_{c,j}), \end{aligned}$$

où

$$\tau_{c,j} := \int_{\{x \in \mathbb{T}^2 : x_j = 0\}} \beta$$

est une constante indépendante de  $\Lambda_a \subset \Omega$  par la fermeture de  $\beta$ .

Alors, il existe une fonction  $c \mapsto \tau_c \in \mathbb{R}^2$ , localement constante en  $c \in U_r$  telle que

$$\frac{S_1}{2\pi} = \xi_a + \tau_c. \quad (102)$$

#### 4.5. Construction de la monodromie d'un pseudo-réseau asymptotique

Le spectre de l'opérateur  $P_\varepsilon$  considéré dans la section précédente est un modèle d'un réseau plus général que nous définissons et traitons ci-dessous.

Soit  $U$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  avec fermeture compacte et notons  $U(\varepsilon) = \chi(U)$  où  $\chi$  est la fonction définie comme dans la section précédente. Soit  $\Sigma(\varepsilon, h)$  (dépend de petits  $h$  et  $\varepsilon$ ) un ensemble discret de  $U(\varepsilon)$ .

**Définition 4.5.1.** — Pour  $h, \varepsilon$  assez petits et en régime  $h \ll \varepsilon$ , on dit que  $(\Sigma(\varepsilon, h), U(\varepsilon))$  est un pseudo-réseau asymptotique si : pour tout petit paramètre  $\alpha > 0$ , il existe un ensemble de "bonnes valeurs" dans  $\mathbb{R}^2$ , noté  $BV$  dont le complémentaire est de petite mesure dans le sens :

$$|{}^C BV \cap I| \leq C\alpha |I|$$

pour tout domaine  $I \subset \mathbb{R}^2$  et  $C > 0$  est une constante. Pour tout  $c \in U$ , il existe une boule  $B(c, r) \subset U$  autour de  $c$  ( $r > 0$ ) telle que pour toute "bonne valeur"  $a = (a_1, a_2) \in B(c, r)$  dans le sens  $a \in BV$ , il existe un bon rectangle  $R(\chi_a, \varepsilon, h) \subset \chi(B(c, r))$  de bon centre  $\chi_a$  :

$$R(\chi_a, \varepsilon, h) = \chi(R(a, h))$$

où  $R(a, h)$  est un rectangle de taille  $\mathcal{O}(h^\delta) \times \mathcal{O}(h^\delta)$ ,  $0 < \delta < 1$  et un difféomorphisme local (en  $\chi_a$ ) lisse  $f = f(\cdot; \varepsilon, h)$  qui envoie  $R(\chi_a, \varepsilon, h)$  sur son image, noté  $E(a, \varepsilon, h)$  satisfaisant

$$\begin{aligned} f : R(\chi_a, \varepsilon, h) &\rightarrow E(a, \varepsilon, h) \\ \Sigma(\varepsilon, h) \cap R(\chi_a, \varepsilon, h) \ni \lambda &\mapsto f(\lambda; \varepsilon, h) \in h\mathbb{Z}^2 + \mathcal{O}(h^\infty) \end{aligned} \quad (103)$$

tel que  $\tilde{f} := f \circ \chi$  admet un développement asymptotique en  $(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon})$  pour la topologie  $C^\infty$  pour la variable  $u$  dans un voisinage de  $a$  et sous la forme réduite,

$$\tilde{f}(u) = \tilde{f}_0(u) + \mathcal{O}\left(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon}\right), \quad (104)$$

où le premier terme  $\tilde{f}_0$  est un difféomorphisme, indépendant de  $\alpha$ , défini globalement sur  $B(c, r)$  et indépendant de la bonne valeur choisie  $a \in B(c, r)$ .

On dit aussi que la famille des  $(f(\cdot; \varepsilon, h), R(\chi_a, \varepsilon, h))$  est une pseudo-carte locale sur  $B(\chi_c, r, \varepsilon) := \chi(B(c, r))$  et qu'un couple  $(f(\cdot; \varepsilon, h), R(\chi_a, \varepsilon, h))$  est une micro-carte de  $(\Sigma(\varepsilon, h), U(\varepsilon))$ .

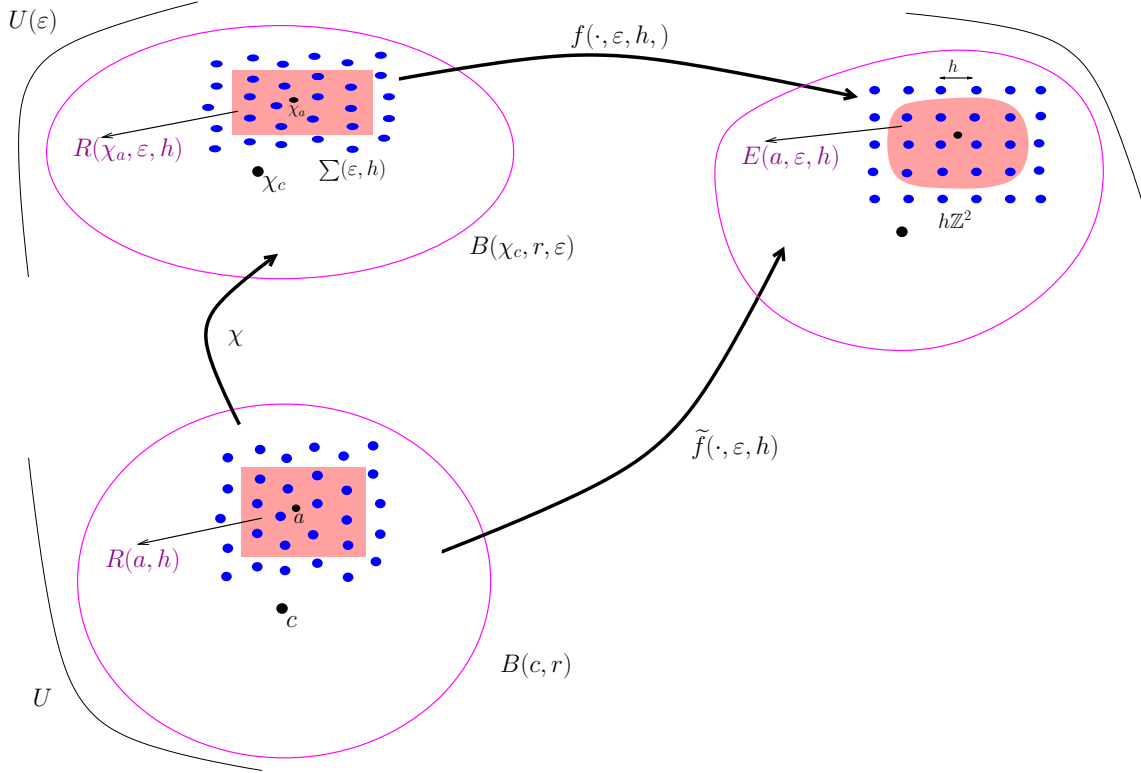


Figure 7. Pseudo-réseau asymptotique

**Remarque 4.5.2.** — C'est clair que le spectre d'un opérateur  $P_\varepsilon = P + i\varepsilon Q$  considéré dans la section précédente est un bon exemple de cette définition. Dans ce cas,  $\tilde{f}_0$  est égal aux coordonnées actions.

Nous voulons donner un invariant combinatoire (la monodromie spectrale) de  $\Sigma(\varepsilon, h) = \sigma(P_\varepsilon)$ . Comme nous savons, dans ce cas  $P, Q$  ne commutent pas nécessairement, il ne peut donc pas y avoir de spectre conjoint comme le cas intégrable que nous avons traité dans le chapitre 3. C'est pourquoi, nous ne savons pas encore définir la monodromie pour le spectre de  $P_\varepsilon$ .

D'autre part, on fait bien attention que l'application  $f$  dans (100) n'est pas une carte affine de  $U(\varepsilon)$  définie au chapitre 3 car elle n'est définie que sur un domaine dépendant de  $h$  qui va se réduire à un seul point quand  $h \rightarrow 0$ . C'est pourquoi, on ne peut pas s'appliquer la construction de la monodromie quantique pour un réseau asymptotique affine comme l'article [99].

Cependant, nous pouvons réussir à construire cet invariant du spectre discret de  $P_\varepsilon$  grâce au fait que le premier terme  $\tilde{f}_0$  est défini globalement sur une petite boule  $B(c, r)$ .

**Lemme 4.5.3.** — Soient  $(\Sigma(\varepsilon, h), U(\varepsilon))$  un pseudo-réseau asymptotique comme dans la définition 4.5.1 et un point  $\chi_a \in B(\chi_c, r, \varepsilon)$  avec  $a$  une bonne valeur. Alors, il existe une famille  $\lambda(\varepsilon, h) \in \Sigma(\varepsilon, h) \cap R(\chi_a, \varepsilon, h)$  telle que

$$|\lambda_1(\varepsilon, h) - a_1| = \mathcal{O}(h) \quad (105)$$

$$|\lambda_2(\varepsilon, h) - \varepsilon a_2| = \mathcal{O}(\varepsilon \cdot h), \quad (106)$$

uniformément pour  $h, \varepsilon \rightarrow 0$ .

*Démonstration.* — Par la proposition 4.3.5,  $u := \tilde{f}^{-1}$  est aussi un difféomorphisme local en un point fixé  $\xi_a$  admettant un développement asymptotique en  $(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon})$  et pour sa partie principale, si  $\xi$  proche de  $\xi_a$  on a :

$$u(\xi) = \tilde{f}^{-1}(\xi; \varepsilon, h) = (\tilde{f}_0)^{-1}(\xi) + \mathcal{O}(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon}). \quad (107)$$

En calculant la différentielle de  $u$  en  $\xi_a$  (c'est pareil que la démonstration de la proposition 4.3.5), on peut affirmer que : si  $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$  proches de  $\xi_a$  tels que  $|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}| = \mathcal{O}(h)$ , alors

$$|u(\xi^{(1)}) - u(\xi^{(2)})| = \mathcal{O}(h)$$

uniformément pour  $h, \varepsilon \rightarrow 0$ .

Posons

$$\xi^{(1)} := \tilde{f}(a, \varepsilon; h) \in E(a, \varepsilon, h).$$

D'autre part, on peut trouver

$$\xi^{(2)} := hk = h.k(\varepsilon, h) \in h\mathbb{Z}^2 \cap E(a, \varepsilon, h)$$

tel que  $|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}| \leq h$  en posant  $k = k(\varepsilon, h)$  la partie entière de  $\frac{\xi^{(1)}}{h}$ .

En fin, avec la remarque  $\chi(u(\xi^{(1)})) = \chi_a$  et il existe  $\lambda(\varepsilon, h) \in \Sigma(\varepsilon, h) \cap R(\chi_a, \varepsilon, h)$  tel que  $\lambda(\varepsilon, h) = \chi(u(\xi^{(2)})) + \mathcal{O}(h^\infty)$ , nous obtenons le résultat du lemme.  $\square$

**Remarque 4.5.4.** — Le résultat du lemme est encore valide pour le spectre d'un opérateur dans le cas général comme dans le théorème 4.2.8.

Dans la preuve précédente, on peut aussi choisir  $k$  la partie entière de  $\frac{\tilde{f}_0(a)}{h}$  et donc  $k = k(h)$ .

**4.5.1. Fonction de transition.** — Soit  $(\Sigma(\varepsilon, h), U(\varepsilon))$  un pseudo-réseau asymptotique.

Supposons  $B_\alpha := B(c, r)$  et  $B_\beta := B(c', r')$  deux petites boules dans  $U$  avec l'intersection non-vide,  $B_{\alpha\beta} := B_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$  telles qu'il existe deux pseudo-cartes locales sur  $B_\alpha(\varepsilon) := B(\chi_c, r, \varepsilon)$  et  $B_\beta(\varepsilon) = B(\chi_{c'}, r', \varepsilon)$  de  $(\Sigma(\varepsilon, h), U(\varepsilon))$ .

Notons  $B_{\alpha\beta}(\varepsilon) = B_\alpha(\varepsilon) \cap B_\beta(\varepsilon)$ .

Comme les bonnes valeurs dans chaque  $B_\alpha, B_\beta$  sont en dehors des ensembles de petites mesure  $\mathcal{O}(\alpha)$ , alors le complémentaire des bonnes valeurs dans  $B_{\alpha\beta}$  est encore de petite mesure  $\mathcal{O}(\alpha)$ .

Soit  $a \in B_{\alpha\beta}$  une bonne valeur. C'est pourquoi, il existe un bon rectangle associé  $R(\chi_a, \varepsilon, h) \subset B_{\alpha\beta}(\varepsilon)$  sur lequel nous avons deux micro-cartes de  $\Sigma(\varepsilon, h)$  en  $\chi_a$  comme dans (103) de la définition précédente :

$$\begin{aligned} f_\alpha(\varepsilon; h) &: R(\chi_a, \varepsilon, h) \rightarrow E_\alpha(a, \varepsilon, h) \\ f_\beta(\varepsilon; h) &: R(\chi_a, \varepsilon, h) \rightarrow E_\beta(a, \varepsilon, h). \end{aligned} \quad (108)$$

**Théorème 4.5.5.** — Il existe une unique matrice constante  $M_{\alpha\beta} \in GL(2, \mathbb{Z})$  telle que

$$d\tilde{f}_{\alpha,0} = M_{\alpha\beta} d\tilde{f}_{\beta,0}$$

en toute bonne valeur  $a \in B_{\alpha\beta}$ .

*Démonstration.* — Dans cette démonstration, on garde la même notation que celle du lemme 4.5.3. Par ce lemme 4.5.3 et la remarque 4.5.4, soit

$$\lambda(\varepsilon, h) = f_\alpha^{-1}(hk(h)) + \mathcal{O}(h^\infty) \quad (109)$$

(avec  $hk(h) \in h\mathbb{Z}^2 \cap E_\alpha(a, \varepsilon, h)$ ) la famille dans  $\Sigma(\varepsilon, h) \cap R(\chi_a, \varepsilon, h)$  telle que

$$\begin{aligned} |\lambda_1(\varepsilon, h) - a_1| &= \mathcal{O}(h) \\ |\lambda_2(\varepsilon, h) - \varepsilon a_2| &= \mathcal{O}(\varepsilon.h), \end{aligned}$$

uniformément pour  $h, \varepsilon \rightarrow 0$ .

Soit  $k_0 \in \mathbb{Z}^2$  arbitraire donné, pour  $h$  assez petit, on peut définir

$$hk'(h) := hk(h) - hk_0 \in h\mathbb{Z}^2 \cap E_\alpha(a, \varepsilon, h). \quad (110)$$

Alors il existe une famille  $\lambda'(\varepsilon, h) \in \Sigma(\varepsilon, h) \cap R(\chi_a, \varepsilon, h)$  telle que

$$hk'(h) = f_\alpha(\lambda'(\varepsilon, h)) + \mathcal{O}(h^\infty), \quad (111)$$

uniformément pour  $\varepsilon, h$  petits.

On a aussi

$$hk(h) = f_\alpha(\lambda(\varepsilon, h)) + \mathcal{O}(h^\infty), \quad (112)$$

uniformément pour  $\varepsilon, h$  petits.

En remplaçant (111) et (112) dans (110) nous avons

$$f_\alpha(\lambda(\varepsilon, h)) - f_\alpha(\lambda'(\varepsilon, h)) = hk_0 + \mathcal{O}(h^\infty), \quad (113)$$

uniformément pour  $\varepsilon, h$  petits.

On note aussi que comme  $|hk'(h) - hk(h)| = hk_0 = \mathcal{O}(h)$ , alors  $|hk'(h) - \xi^{(1)}| = \mathcal{O}(h)$  et donc la famille  $\lambda'(\varepsilon, h)$  a la même propriété que celle de  $\lambda(\varepsilon, h)$ . C'est à dire

$$|\lambda'_1(\varepsilon, h) - a_1| = \mathcal{O}(h)$$

et

$$|\lambda'_2(\varepsilon, h) - \varepsilon a_2| = \mathcal{O}(\varepsilon h),$$

uniformément pour  $h, \varepsilon \rightarrow 0$ . Nous rappelons la fonction

$$\begin{aligned} \chi : B_{\alpha\beta} &\rightarrow B_{\alpha\beta}(\varepsilon) \\ u = (u_1, u_2) &\mapsto \chi_u = (u_1, \varepsilon u_2) \end{aligned} \quad (114)$$

Posons  $u(\varepsilon, h) = \chi^{-1}(\lambda(\varepsilon, h))$  (i.e.  $u_1 = \lambda_1, u_2 = \frac{\lambda_2}{\varepsilon}$ ) et de même façon  $u'(\varepsilon, h) = \chi^{-1}(\lambda'(\varepsilon, h))$ .

Nous avons

$$\begin{aligned} |u_i(\varepsilon, h) - a_i| &= \mathcal{O}(h), \\ |u'_i(\varepsilon, h) - a_i| &= \mathcal{O}(h), \end{aligned} \quad (115)$$

pour  $i = 1, 2$ .

L'équation (113) devient donc

$$\tilde{f}_\alpha(u(\varepsilon, h)) - \tilde{f}_\alpha(u'(\varepsilon, h)) = hk_0 + \mathcal{O}(h^\infty),$$

ou

$$\frac{\tilde{f}_\alpha(u(\varepsilon, h)) - \tilde{f}_\alpha(u'(\varepsilon, h))}{h} = k_0 + \mathcal{O}(h^\infty), \quad (116)$$

uniformément pour  $\varepsilon, h$  petits.

Comme on peut exprimer

$$\tilde{f}_\alpha(u(\varepsilon, h)) = \tilde{f}_{\alpha,0}(u(\varepsilon, h)) + \mathcal{O}\left(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon}\right)$$

et en écrivant le développement de Taylor de  $\tilde{f}_{\alpha,0}(u(\varepsilon, h))$  en  $a$  avec le reste intégrale, en refaisant le même travail pour  $\tilde{f}_{\alpha}(u'(\varepsilon, h))$  et de plus la remarque si  $R(u, \varepsilon, h) = \mathcal{O}(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon})$ , alors

$$|R(u(\varepsilon, h), \varepsilon, h) - R(u'(\varepsilon, h), \varepsilon, h)| = \mathcal{O}(h) \times \mathcal{O}(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon}),$$

uniformément pour  $h, \varepsilon$  petits et  $h \ll \varepsilon$  car  $|u(\varepsilon, h) - u'(\varepsilon, h)| = \mathcal{O}(h)$ , l'équation (116) nous donne

$$(d\tilde{f}_{\alpha,0})(a) \frac{u(\varepsilon, h) - u'(\varepsilon, h)}{h} = k_0 + \mathcal{O}(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon})$$

Par conséquence, nous avons

$$\frac{u(\varepsilon, h) - u'(\varepsilon, h)}{h} = ((d\tilde{f}_{\alpha,0})(a))^{-1}(k_0) + ((d\tilde{f}_{\alpha,0})(a))^{-1}(\mathcal{O}(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon})). \quad (117)$$

D'autre part, comme la norme de la différentielle  $((d\tilde{f}_{\alpha,0})(a))^{-1}$  est une constante indépendante de  $\varepsilon, h$ , l'équation (117) nous permet d'écrire

$$\frac{u(\varepsilon, h) - u'(\varepsilon, h)}{h} = ((d\tilde{f}_{\alpha,0})(a))^{-1}(k_0) + \mathcal{O}(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon}), \quad (118)$$

uniformément pour  $h, \varepsilon$  petits et  $h \ll \varepsilon$ .

Maintenant on va travailler avec  $f_{\beta}(\varepsilon; h)$ . Posons aussi  $\tilde{f}_{\beta} = f_{\beta} \circ \chi$ .

Comme  $\lambda(\varepsilon, h), \lambda'(\varepsilon, h)$  est dans  $\sigma(P_{\varepsilon}) \cap R(\chi_{\alpha}, \varepsilon, h)$ , alors il existe une famille notée  $k'(\varepsilon, h) \in \mathbb{Z}^2$  telle que

$$\frac{\tilde{f}_{\beta}(u(\varepsilon, h)) - \tilde{f}_{\beta}(u'(\varepsilon, h))}{h} = k'(\varepsilon, h) + \mathcal{O}(h^{\infty}),$$

uniformément pour  $\varepsilon, h$  petits.

De même façon ce qui précédant, on obtient aussi

$$\frac{u(\varepsilon, h) - u'(\varepsilon, h)}{h} = ((d\tilde{f}_{\beta,0})(a))^{-1}(k'(\varepsilon, h)) + \mathcal{O}(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon}), \quad (119)$$

uniformément pour  $\varepsilon, h$  petits et  $h \ll \varepsilon$ .

Alors, l'équation (118) et l'équation (119) nous donnent

$$((d\tilde{f}_{\alpha,0})(a))^{-1}(k_0) = ((d\tilde{f}_{\beta,0})(a))^{-1}(k'(\varepsilon, h)) + \mathcal{O}(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon}),$$

uniformément pour  $\varepsilon, h$  petits,  $h \ll \varepsilon$  et donc

$$(d\tilde{f}_{\beta,0})(a)((d\tilde{f}_{\alpha,0})(a))^{-1}(k_0) = k'(\varepsilon, h) + \mathcal{O}(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon}), \quad (120)$$

uniformément pour  $\varepsilon, h$  petits et  $h \ll \varepsilon$ .

Comme la partie à gauche de la dernière équation est une constante,  $\mathcal{O}(\varepsilon, \frac{h}{\varepsilon})$  est petit pour  $\varepsilon, h$  petits,  $h \ll \varepsilon$  et  $k'(\varepsilon, h) \in \mathbb{Z}^2$ , il faut donc que  $k'(\varepsilon, h) \in \mathbb{Z}^2$  soit une constante  $k' \in \mathbb{Z}^2$  et que l'on ait

$$(d\tilde{f}_{\beta,0})(a)((d\tilde{f}_{\alpha,0})(a))^{-1}(k_0) = k' \in \mathbb{Z}^2 \quad (121)$$

pour tout  $k_0 \in \mathbb{Z}^2$  donné.

Cela signifie que  $(d\tilde{f}_{\beta,0})(a)((d\tilde{f}_{\alpha,0})(a))^{-1} \in GL(2, \mathbb{Z})$ .

D'autre part,  $d\tilde{f}_{\beta,0} \circ (d\tilde{f}_{\alpha,0})^{-1}$  est uniformément continue sur  $B_{\alpha\beta}$  et la mesure du complémentaire de bonnes valeurs dans  $B_{\alpha\beta}$  est  $\mathcal{O}(\alpha)$ . En prenant  $\alpha$  assez petit et avec le fait que le groupe

$GL(2, \mathbb{Z})$  est discret, la continuité uniforme implique qu'il existe donc une matrice constante  $M_{\beta\alpha} \in GL(2, \mathbb{Z})$  telle que

$$(d\tilde{f}_{\beta,0})(a) = M_{\beta\alpha}(d\tilde{f}_{\alpha,0})(a),$$

pour toute bonne valeur  $a \in B_{\alpha\beta}$ . □

Comme sur l'intersection, la fonction  $\tilde{f}_{\alpha,0} \circ (\tilde{f}_{\beta,0})^{-1}$  est bien définie, lisse. En dehors d'un ensemble de mesure  $\mathcal{O}(\alpha)$ , la valeur de  $d(\tilde{f}_{\alpha,0} \circ (\tilde{f}_{\beta,0})^{-1})$  est une matrice constante  $M_{\alpha\beta} \in GL(2, \mathbb{Z})$ . Notons aussi que  $d(\tilde{f}_{\alpha,0} \circ (\tilde{f}_{\beta,0})^{-1})$  est indépendant de  $\alpha$ . En prenant  $\alpha \rightarrow 0$ , on arrive que  $d(\tilde{f}_{\alpha,0} \circ (\tilde{f}_{\beta,0})^{-1})$  est égal à la matrice constante  $M_{\alpha\beta}$  en dehors d'un ensemble de mesure 0. Par la continuité, il faut avoir  $d(\tilde{f}_{\alpha,0} \circ (\tilde{f}_{\beta,0})^{-1}) = M_{\alpha\beta}$  partout.

Nous avons alors :

**Théorème 4.5.6.** — *Il existe une unique matrice constante  $M_{\alpha\beta} \in GL(2, \mathbb{Z})$  telle que*

$$d\tilde{f}_{\alpha,0} = M_{\alpha\beta}d\tilde{f}_{\beta,0}$$

sur  $B_{\alpha\beta}$ .

**Remarque 4.5.7.** — Pour le spectre d'un opérateur  $P_\varepsilon = P + i\varepsilon Q$  considéré dans la section précédente, on peut voir que le résultat du théorème peut être retrouvé indépendamment à partir des résultats classiques. En effet :

On se rappelle de (99) que les premiers termes sont

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\alpha,0} &= \tau_c + \varphi_\alpha^{-1} \\ \tilde{f}_{\beta,0} &= \tau_{c'} + \varphi_\beta^{-1}. \end{aligned} \quad (122)$$

D'autre part, comme une application du théorème d'action-angle (revoir la section 2.5.2.1), on se rappelle que sur  $B_{\alpha\beta}$  non-vidé, il existe une application affine  $A_{\alpha\beta} \in GA_{\mathbb{R}}(2, \mathbb{Z})$  de la forme

$$A_{\alpha\beta} := M_{\alpha\beta}^{cl}(\cdot) + C_{\alpha\beta},$$

avec une matrice  $M_{\alpha\beta}^{cl} \in GL(2, \mathbb{Z})$ ,  $C_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^2$  telle que

$$\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta = A_{\alpha\beta}. \quad (123)$$

Les coordonnées action de  $\Lambda_a$  dans deux coordonnées d'action-angle associées à  $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$  sont  $\xi_a$  et  $\xi'_a$  telles que

$$\xi_a = A_{\alpha\beta}\xi'_a.$$

On a aussi les intégrales d'action sur  $\Lambda_a$  correspondantes satisfaisant la relation

$$S_1 = M_{\alpha\beta}^{cl}S'_1.$$

Deux dernières équations et l'équation (102) nous donnent

$$\tau_c = M_{\alpha\beta}^{cl}\tau'_{c'} - C_{\alpha\beta}. \quad (124)$$

Par conséquence, nous obtenons

$$\tilde{f}_{\alpha,0} = (M_{\alpha\beta}^{cl})\tilde{f}_{\beta,0}. \quad (125)$$

C'est à dire nous retrouvons bien le résultat du théorème avec l'aide du théorème action-angle.

De plus, si on note  $M_{\alpha\beta}^{sp}$  la matrice  $M_{\alpha\beta}$  définie par le théorème 4.5.6, on a donc :

$$M_{\alpha\beta}^{sp} = (M_{\alpha\beta}^{cl}). \quad (126)$$



**Remarque 4.5.8 (Perspectives).** — Pour un pseudo-réseau asymptotique, nous souhaitons montrer un résultat plus fort : il existe une unique matrice constante  $M_{\alpha\beta} \in GL(2, \mathbb{Z})$  telle que

$$\tilde{f}_{\alpha,0} = M_{\alpha\beta} \tilde{f}_{\beta,0},$$

sur  $B_{\alpha\beta}$ .

Par la remarque 4.5.7, on vient de voir que ce résultat est vrai pour le spectre de l'opérateur discuté  $P_\varepsilon$ . Cependant, nous n'avons pas réussi à le montrer pour un pseudo-réseau asymptotique.

**4.5.2. Définition de la monodromie d'un pseudo-réseau.** — Soit  $(\Sigma(\varepsilon, h), U(\varepsilon))$  un pseudo-réseau asymptotique comme la définition 4.5.1. Supposons que  $U$  est couvert par un recouvrement localement fini  $\{B_\alpha\}$  et que  $(\Sigma(\varepsilon, h), U(\varepsilon))$  est couvert par des pseudo-cartes locales associées sur  $B_\alpha(\varepsilon) := \chi(B_\alpha)$  :

$$\{(f(\cdot; \varepsilon, h), R(\chi_a, \varepsilon, h)) \quad a \in B_\alpha \quad \text{est une bonne valeur}\}.$$

On peut voir  $\{(\tilde{f}_{\alpha,0}(\varepsilon, h), B_\alpha)\}$  comme des cartes de  $U$  dont les fonctions de transition sont dans le groupe linéaire  $GL(2, \mathbb{Z})$ .

En effet, sur chaque intersection non vide  $B_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$ , le théorème 4.5.6 affirme qu'il existe une unique application linéaire  $M_{\alpha\beta} \in GL(2, \mathbb{Z})$  vérifiant

$$d(\tilde{f}_{\alpha,0}) = M_{\alpha\beta} d(\tilde{f}_{\beta,0}) \quad \text{ou} \quad d(\tilde{f}_{\alpha,0} \circ (\tilde{f}_{\beta,0})^{-1}) = M_{\alpha\beta}. \quad (127)$$

La famille  $\{M_{\alpha\beta}\}$  définit un 1-cocycle, noté  $\mathcal{M}$  dans la cohomologie de Čech avec valeur dans le groupe linéaire  $GL(2, \mathbb{Z})$ . Nous avons donc

**Définition 4.5.9.** — La classe  $[\mathcal{M}] \in \check{H}^1(U(\varepsilon), GL(2, \mathbb{Z}))$  est appelée la monodromie du pseudo-réseau asymptotique  $(\Sigma(\varepsilon, h), U(\varepsilon))$ .

Comme avec la monodromie quantique, on peut bien sûr associer cette classe cocycle avec une classe d'isomorphisme de fibrés (fibré à isomorphisme près) sur  $U(\varepsilon)$  avec la structure du groupe  $GL(2, \mathbb{Z})$  et la fibre  $\mathbb{Z}^2$ . Les fonctions de transition entre deux trivialisations adjacentes du fibré sont les  $\{M_{\alpha\beta}\}$ .

Si  $\mathcal{M}$  est un certain cocycle associé à une trivialisations du fibré et soit  $\gamma(\varepsilon)$  un lacet fermé contenu dans  $U(\varepsilon)$ .

On définit

$$\mu(\gamma(\varepsilon)) = M_{1,N} \circ M_{N,N-1} \circ \cdots \circ M_{3,2} \circ M_{2,1},$$

où  $M_{i,j}$  dénote la fonction de transition correspondante à chaque couple d'intersection non-vidé  $(B_i(\varepsilon), B_j(\varepsilon))$ , définie comme dans le théorème 4.5.6, ici  $(B_1(\varepsilon), \dots, B_N(\varepsilon))$  un recouvrement fini numéroté de  $\gamma(\varepsilon)$  dans  $U(\varepsilon)$  avec  $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ .

La non-trivialité de  $[\mathcal{M}]$  est équivalente à celle d'un morphisme de groupe, noté aussi  $\mu$ , défini comme suivant

$$\begin{aligned} \mu : \pi_1(U(\varepsilon)) &\rightarrow GL(2, \mathbb{Z}) / \{\sim\} \\ \gamma(\varepsilon) &\mapsto \mu(\gamma(\varepsilon)), \end{aligned} \quad (128)$$

où  $\{\sim\}$  noté modulo à conjugaison près.

On appelle  $\mu$  la représentation de la monodromie  $[\mathcal{M}]$ .

#### 4.6. Monodromie spectrale linéaire

On reconsidère l'opérateur  $P_\varepsilon = P + i\varepsilon Q$ , le cas  $\{p, q\} = 0$  que nous avons discuté dans la section 4.4.

Soit  $U$  un sous-ensemble ouvert avec fermeture compacte dans l'ensemble de valeurs régulières  $U_r$  de l'application  $(p, q)$  et notons  $U(\varepsilon) = \chi(U)$ . Nous supposons de plus que le spectre de  $P_\varepsilon$  est discret dans  $U(\varepsilon)$ . Alors c'est clair que  $(\sigma(P_\varepsilon), U(\varepsilon))$  est un pseudo-réseau asymptotique adapté à la définition 4.5.1. On peut donc définir la monodromie de  $P_\varepsilon$  comme la monodromie du pseudo-réseau asymptotique  $(\sigma(P_\varepsilon), U(\varepsilon))$  d'après la définition 4.5.9. On l'appelle la monodromie spectrale linéaire, notée  $[\mathcal{M}_{sp}] \in \check{H}^1(U(\varepsilon), GL(2, \mathbb{Z}))$ .

**Définition 4.6.1.** — Pour  $\varepsilon, h > 0$  petits tels que  $h \ll \varepsilon \leq h^\delta, 0 < \delta < 1$ , la classe  $[\mathcal{M}_{sp}] \in \check{H}^1(U(\varepsilon), GL(2, \mathbb{Z}))$  est appelée la monodromie spectrale de l'opérateur  $P_\varepsilon$  sur le domaine  $U(\varepsilon)$ . On dit que  $P_\varepsilon$  a la monodromie spectrale si la classe  $[\mathcal{M}_{sp}] \in \check{H}^1(U(\varepsilon), GL(2, \mathbb{Z}))$  est non-triviale.

**4.6.1. Relation entre la monodromie spectrale et la monodromie classique.** — Nous rappelons que la monodromie classique (linéaire) qui est donnée par J.Duistermaat [33] (présentée dans la section 2.5.3) est définie comme un fibré  $H_1(\Lambda_c, \mathbb{Z}) \rightarrow c \in U$ , associé à un cocycle, noté  $[\mathcal{M}_{cl}]$  dans  $\check{H}^1(U, GL(2, \mathbb{Z}))$  des fonctions de transition :

$$\{ {}^t(M_{\alpha\beta}^{cl})^{-1} = {}^t(d(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta))^{-1} \}.$$

La remarque 4.5.7 nous donne donc la relation suivante entre deux types monodromies :

**Théorème 4.6.2.** — *La monodromie spectrale linéaire est l'adjoint de la monodromie classique linéaire*

$$[\mathcal{M}_{sp}] = {}^t[\mathcal{M}_{cl}]^{-1}.$$

En d'autres termes, si les représentations de monodromie correspondantes de  $[\mathcal{M}_{sp}]$  et  $[\mathcal{M}_{cl}]$  sont

$$\begin{aligned} \mu^{sp} : \pi_1(U(\varepsilon)) &\rightarrow GL(2, \mathbb{Z})/\{\sim\} \\ \mu^{cl} : \pi_1(U) &\rightarrow GL(2, \mathbb{Z})/\{\sim\}, \end{aligned} \quad (129)$$

alors  $\mu^{sp} = {}^t(\mu^{cl})^{-1}$ .

**Remarque 4.6.3.** — Un cas particulier si  $[P, Q] = 0$ , ça implique  $\{p, q\} = 0$ , on peut donc avoir deux types monodromies spectrales : la monodromie spectrale affine définie au chapitre 3 et la monodromie spectrale linéaire définie dans ce chapitre. C'est évident que la monodromie spectrale linéaire est la partie linéaire de monodromie spectrale affine.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. ABRAHAM, J. E. MARSDEN, A. KELLEY & A. N. KOLMOGOROV – *Foundations of mechanics. A mathematical exposition of classical mechanics with an introduction to the qualitative theory of dynamical systems and applications to the three-body problem*, With the assistance of Jerrold E. Marsden. Four appendices, one by the author, two by Al Kelley, the fourth, a translation of an article by A. N. Kolmogorov, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.
- [2] J. AGUILAR & J. M. COMBES – « A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians », *Comm. Math. Phys.* **22** (1971), p. 269–279.
- [3] M. K. ALI – « The quantum normal form and its equivalents », *J. Math. Phys.* **26** (1985), no. 10, p. 2565–2572.
- [4] V. I. ARNOLD – *Mathematical methods of classical mechanics*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 60, Springer-Verlag, New York, 1989, Translated from the 1974 Russian original by K. Vogtmann and A. Weinstein, Corrected reprint of the second (1989) edition.
- [5] V. I. ARNOLD – « On a characteristic class entering into conditions of quantization », *Funkcional. Anal. i Priložen.* **1** (1967), p. 1–14.
- [6] V. I. ARNOLD, V. V. KOZLOV & A. I. NEISHTADT – *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, third éd., Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 3, Springer-Verlag, Berlin, 2006, [Dynamical systems. III], Translated from the Russian original by E. Khukhro.
- [7] M. AUDIN – *The topology of torus actions on symplectic manifolds*, Progress in Mathematics, vol. 93, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991, Translated from the French by the author.
- [8] ———, *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 8, Société Mathématique de France, Paris, 2001.
- [9] D. BAMBUSI, S. GRAFFI & T. PAUL – « Normal forms and quantization formulae », *Comm. Math. Phys.* **207** (1999), no. 1, p. 173–195.
- [10] L. BATES & F. FASSÒ – « An affine model for the actions in an integrable system with monodromy », *Regul. Chaotic Dyn.* **12** (2007), no. 6, p. 675–679.

- [11] L. M. BATES – « Monodromy in the champagne bottle », *Z. Angew. Math. Phys.* **42** (1991), no. 6, p. 837–847.
- [12] S. BATES & A. WEINSTEIN – *Lectures on the geometry of quantization*, Berkeley Mathematics Lecture Notes, vol. 8, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [13] R. BEALS – « A general calculus of pseudodifferential operators », *Duke Math. J.* **42** (1975), p. 1–42.
- [14] J. BLANK, P. EXNER & M. HAVLÍČEK – *Hilbert space operators in quantum physics*, second éd., Theoretical and Mathematical Physics, Springer, New York, 2008.
- [15] J.-B. BOST – « Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens (d’après Kolmogorov, Arnol’d, Moser, Rüssmann, Zehnder, Herman, Pöschel, ...) », *Astérisque* (1986), no. 133-134, p. 113–157, Seminar Bourbaki, Vol. 1984/85.
- [16] H. W. BROER & G. B. HUITEMA – « A proof of the isoenergetic KAM-theorem from the “ordinary” one », *J. Differential Equations* **90** (1991), no. 1, p. 52–60.
- [17] H. BROER, R. CUSHMAN, F. FASSÒ & F. TAKENS – « Geometry of KAM tori for nearly integrable Hamiltonian systems », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **27** (2007), no. 3, p. 725–741.
- [18] D. BURNS & R. HIND – « Symplectic geometry and the uniqueness of Grauert tubes », *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001), no. 1, p. 1–10.
- [19] S. E. CAPPELL, R. LEE & E. Y. MILLER – « On the Maslov index », *Comm. Pure Appl. Math.* **47** (1994), no. 2, p. 121–186.
- [20] A.-M. CHARBONNEL – « Comportement semi-classique du spectre conjoint d’opérateurs pseudodifférentiels qui commutent », *Asymptotic Anal.* **1** (1988), no. 3, p. 227–261.
- [21] L. CHARLES & S. VŨ NGỌC – « Spectral asymptotics via the semiclassical Birkhoff normal form », *Duke Math. J.* **143** (2008), no. 3, p. 463–511.
- [22] M. S. CHILD – « Quantum states in a champagne bottle », *J. Phys. A* **31** (1998), no. 2, p. 657–670.
- [23] M. S. CHILD, T. WESTON & J. TENNYSON – « Quantum monodromy in the spectrum of  $h_2O$  and other systems : new insight into the level structure of quasi-linear molecules », *Molecular physics* **96** (1999), no. 3, p. 371–379.
- [24] R. CUSHMAN & J. J. DUISTERMAAT – « The quantum mechanical spherical pendulum », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **19** (1988), no. 2, p. 475–479.
- [25] R. CUSHMAN & V. N. SAN – « Sign of the monodromy for Liouville integrable systems », *Ann. Henri Poincaré* **3** (2002), no. 5, p. 883–894.
- [26] R. H. CUSHMAN & D. A. SADOVSKIÍ – « Monodromy in the hydrogen atom in crossed fields », *Phys. D* **142** (2000), no. 1-2, p. 166–196.

- [27] R. H. CUSHMAN & L. M. BATES – *Global aspects of classical integrable systems*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
- [28] E. B. DAVIES – *Spectral theory and differential operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [29] E. B. DAVIES – *Linear operators and their spectra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 106, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [30] A. DELSHAMS & P. GUTIÉRREZ – « Effective stability and KAM theory », *J. Differential Equations* **128** (1996), no. 2, p. 415–490.
- [31] N. DENCKER, J. SJÖSTRAND & M. ZWORSKI – « Pseudospectra of semiclassical (pseudo-) differential operators », *Comm. Pure Appl. Math.* **57** (2004), no. 3, p. 384–415.
- [32] M. DIMASSI & J. SJÖSTRAND – *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 268, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [33] J. J. DUISTERMAAT – « On global action-angle coordinates », *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), no. 6, p. 687–706.
- [34] ———, « The quantum spherical pendulum », *Quantum theories and geometry* (Les Treilles, 1987), *Math. Phys. Stud.*, vol. 10, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988, p. 53–64.
- [35] ———, *Fourier integral operators*, Progress in Mathematics, vol. 130, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [36] J. J. DUISTERMAAT & L. HÖRMANDER – « Fourier integral operators. II », *Acta Math.* **128** (1972), no. 3-4, p. 183–269.
- [37] B. ECKHARDT – « Birkhoff-Gustavson normal form in classical and quantum mechanics », *J. Phys. A* **19** (1986), no. 15, p. 2961–2972.
- [38] J. V. EGOROV – « The canonical transformations of pseudodifferential operators », *Uspehi Mat. Nauk* **24** (1969), no. 5 (149), p. 235–236.
- [39] L. H. ELIASSON – *Hamiltonian systems with poisson commuting integrals*, Thèse, University of Stockholm, 1984.
- [40] ———, « Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals—elliptic case », *Comment. Math. Helv.* **65** (1990), no. 1, p. 4–35.
- [41] L. EVANS & M. ZWORSKI – « Lecture on semiclassical analysis ».
- [42] B. FEDOSOV – *Deformation quantization and index theory*, Mathematical Topics, vol. 9, Akademie Verlag, Berlin, 1996.
- [43] R. P. FEYNMAN & A. R. HIBBS – *Quantum mechanics and path integrals*, emended éd., Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2010, Emended and with a preface by Daniel F. Styer.

- [44] M. J. GOTAY (éd.) – *Symplectic geometry*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1998, Differential Geom. Appl. **9** (1998), no. 1-2.
- [45] M. J. GREENBERG – *Lectures on algebraic topology*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.
- [46] V. GUILLEMIN & A. URIBE – « Monodromy in the quantum spherical pendulum », *Comm. Math. Phys.* **122** (1989), no. 4, p. 563–574.
- [47] G. HARDER – *Lectures on algebraic geometry. I*, Aspects of Mathematics, E35, Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 2008, Sheaves, cohomology of sheaves, and applications to Riemann surfaces.
- [48] ———, *Lectures on algebraic geometry II*, Aspects of Mathematics, E39, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2011, Basic concepts, coherent cohomology, curves and their Jacobians.
- [49] B. HELFFER & D. ROBERT – « Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **31** (1981), no. 3, p. xi, 169–223.
- [50] ———, « Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques hypoelliptiques », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **9** (1982), no. 3, p. 405–431.
- [51] ———, « Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles », *J. Funct. Anal.* **53** (1983), no. 3, p. 246–268.
- [52] B. HELFFER & J. SJÖSTRAND – « Résonances en limite semi-classique », *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* (1986), no. 24-25, p. iv+228.
- [53] B. HELFFER – « 30 ans d’analyse semi classique : bibliographie commentée », Notes d’exposé, Nantes, 2003.
- [54] F. HIRZEBRUCH – *Topological methods in algebraic geometry*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Translated from the German and Appendix One by R. L. E. Schwarzenberger, With a preface to the third English edition by the author and Schwarzenberger, Appendix Two by A. Borel, Reprint of the 1978 edition.
- [55] M. HITRIK – « Lagrangian tori and spectra for non-selfadjoint operators », Séminaire : Équations aux Dérivées Partielles. 2005–2006, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, École Polytech., Palaiseau, 2006, Based on joint works with J. Sjöstrand and S. Vũ Ngọc, p. Exp. No. XXIV, 16.
- [56] M. HITRIK & J. SJÖSTRAND – « Non-selfadjoint perturbations of selfadjoint operators in 2 dimensions. I », *Ann. Henri Poincaré* **5** (2004), no. 1, p. 1–73.
- [57] ———, « Nonselfadjoint perturbations of selfadjoint operators in two dimensions. II. Vanishing averages », *Comm. Partial Differential Equations* **30** (2005), no. 7-9, p. 1065–1106.
- [58] ———, « Non-selfadjoint perturbations of selfadjoint operators in two dimensions. IIIa. One branching point », *Canad. J. Math.* **60** (2008), no. 3, p. 572–657.

- [59] ———, « Rational invariant tori, phase space tunneling, and spectra for non-selfadjoint operators in dimension 2 », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **41** (2008), no. 4, p. 511–571.
- [60] M. HITRIK, J. SJÖSTRAND & S. V. NGỌC – « Diophantine tori and spectral asymptotics for nonselfadjoint operators », *Amer. J. Math.* **129** (2007), no. 1, p. 105–182.
- [61] H. HOFER & E. ZEHNDER – « Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics », The Floer memorial volume, *Progr. Math.*, vol. 133, Birkhäuser, Basel, 1995, p. 525–544.
- [62] L. HÖRMANDER – « The Weyl calculus of pseudodifferential operators », *Comm. Pure Appl. Math.* **32** (1979), no. 3, p. 360–444.
- [63] L. HÖRMANDER – « Fourier integral operators. I », *Acta Math.* **127** (1971), no. 1-2, p. 79–183.
- [64] ———, *The analysis of linear partial differential operators. I-IV*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1983-1990, Fourier integral operators, Reprint of the 1994 edition.
- [65] S.-J. KAN – « Erratum to the paper : “On rigidity of Grauert tubes over homogeneous Riemannian manifolds” [J. Reine Angew. Math. **577** (2004), 213–233 ; mr2108219] », *J. Reine Angew. Math.* **596** (2006), p. 235.
- [66] T. KATO – *Perturbation theory for linear operators*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the 1980 edition.
- [67] L. LANDAU & E. LIFSCHITZ – *Physique théorique (“Landau-Lifschitz”). Tome III : Mécanique quantique. Théorie non relativiste*, Éditions Mir, Moscow, 1967, Deuxième édition, Traduit du russe par Édouard Gloukhian.
- [68] P. LOCHAK & C. MEUNIER – *Multiphase averaging for classical systems*, Applied Mathematical Sciences, vol. 72, Springer-Verlag, New York, 1988, With applications to adiabatic theorems, Translated from the French by H. S. Dumas.
- [69] G. W. MACKEY – *The mathematical foundations of quantum mechanics*, Mathematical Physics Monograph Series, Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass., 1980, A lecture-note volume, Reprint of the 1963 original.
- [70] A. MARTINEZ – *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [71] A. MARTINEZ, T. RAMOND & J. SJÖSTRAND – « Resonances for nonanalytic potentials », *Anal. PDE* **2** (2009), no. 1, p. 29–60.
- [72] D. MCDUFF & D. SALAMON – *Introduction to symplectic topology*, second éd., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998.
- [73] A. MESSIAH – *Mécanique quantique*, 2 vols, Dunod, Paris, 1959.
- [74] H. MINEUR – « Quelques propriétés générales des équations de la mécanique », *Bull. Astr.* (2) **13** (1948), p. 309–328.

- [75] J. E. MOYAL – « Quantum mechanics as a statistical theory », *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **45** (1949), p. 99–124.
- [76] T. Z. NGUYEN – « A note on focus-focus singularities », *Differential Geom. Appl.* **7** (1997), no. 2, p. 123–130.
- [77] S. NONNENMACHER – « Spectral theory of damped chaotic systems », Journées semiclassiques 2011 Biarritz, 2011, Univ. Nantes, Biarrit, 2011, p. Exp. No. XVI, 8.
- [78] C. R. DE OLIVEIRA – *Intermediate spectral theory and quantum dynamics*, Progress in Mathematical Physics, vol. 54, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [79] G. POPOV – « Invariant tori, effective stability, and quasimodes with exponentially small error terms. I-II. Birkhoff normal forms », *Ann. Henri Poincaré* **1** (2000), no. 2, p. 223–279.
- [80] J. PÖSCHEL – « Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets », *Comm. Pure Appl. Math.* **35** (1982), no. 5, p. 653–696.
- [81] M. REED & B. SIMON – *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975.
- [82] \_\_\_\_\_, *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
- [83] D. ROBERT – *Autour de l'approximation semi-classique*, Progress in Mathematics, vol. 68, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1987.
- [84] D. A. SADOVSKIÍ & B. I. ZHILINSKIÍ – « Monodromy, diabolic points, and angular momentum coupling », *Phys. Lett. A* **256** (1999), no. 4, p. 235–244.
- [85] D. SADOVSKIÍ & B. ZHILINSKIÍ – « Quantum monodromy, its generalizations and molecular manifestations », *Molecular Physics* **104** (2006), no. 16-17, p. 2595–2615.
- [86] M. A. SHUBIN – *Pseudodifferential operators and spectral theory*, second éd., Springer-Verlag, Berlin, 2001, Translated from the 1978 Russian original by Stig I. Andersson.
- [87] A. CANNAS DA SILVA – *Lectures on symplectic geometry*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1764, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [88] J. SJÖSTRAND – « Asymptotic distribution of eigenfrequencies for damped wave equations », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **36** (2000), no. 5, p. 573–611.
- [89] \_\_\_\_\_, « Asymptotic distribution of eigenfrequencies for damped wave equations », Journées “Équations aux Dérivées Partielles” (La Chapelle sur Erdre, 2000), Univ. Nantes, Nantes, 2000, p. Exp. No. XVI, 8.
- [90] \_\_\_\_\_, « Asymptotic distribution of eigenfrequencies for damped wave equations », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **36** (2000), no. 5, p. 573–611.
- [91] \_\_\_\_\_, « Asymptotic distribution of eigenfrequencies for damped wave equations », Journées “Équations aux Dérivées Partielles” (La Chapelle sur Erdre, 2000), Univ. Nantes, Nantes, 2000, p. Exp. No. XVI, 8.



- [92] ———, « Pseudospectrum for differential operators », *Seminaire : Équations aux Dérivées Partielles, 2002–2003*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, École Polytech., Palaiseau, 2003, p. Exp. No. XVI, 9.
- [93] ———, « Eigenvalue distribution for non-self-adjoint operators with small multiplicative random perturbations », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **18** (2009), no. 4, p. 739–795.
- [94] M. E. TAYLOR – *Pseudodifferential operators*, Princeton Mathematical Series, vol. 34, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981.
- [95] Y. COLIN DE VERDIÈRE – « Méthodes semi-classiques et théorie spectrale », 2006.
- [96] Y. COLIN DE VERDIÈRE – « Spectre conjoint d’opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. II. Le cas intégrable », *Math. Z.* **171** (1980), no. 1, p. 51–73.
- [97] ———, « Une introduction à la mécanique semi-classique », *Enseign. Math. (2)* **44** (1998), no. 1-2, p. 23–51.
- [98] J. VEY – « Sur certains systèmes dynamiques séparables », *Amer. J. Math.* **100** (1978), no. 3, p. 591–614.
- [99] S. VŪ NGỌC – « Quantum monodromy in integrable systems », *Comm. Math. Phys.* **203** (1999), no. 2, p. 465–479.
- [100] ———, « Bohr-Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type », *Comm. Pure Appl. Math.* **53** (2000), no. 2, p. 143–217.
- [101] ———, « Invariants symplectiques et semi-classiques des systèmes intégrables avec singularités », *Séminaire : Équations aux Dérivées Partielles, 2000–2001*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, École Polytech., Palaiseau, 2001, p. Exp. No. XII, 16.
- [102] ———, « Quantum monodromy and Bohr-Sommerfeld rules », *Lett. Math. Phys.* **55** (2001), no. 3, p. 205–217, *Topological and geometrical methods* (Dijon, 2000).
- [103] ———, *Systèmes intégrables semi-classiques : du local au global*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 22, Société Mathématique de France, Paris, 2006.
- [104] ———, « Quantum Birkhoff normal forms and semiclassical analysis », *Noncommutativity and singularities*, *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 55, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2009, p. 99–116.
- [105] A. WEINSTEIN – *Lectures on symplectic manifolds*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1979, Corrected reprint.
- [106] ———, « Poisson geometry », *Differential Geom. Appl.* **9** (1998), no. 1-2, p. 213–238, *Symplectic geometry*.
- [107] H. WEYL – *The theory of groups and quantum mechanics*, Library of Theoretical Physics, Dover, 1950, Translated from the german edition.

- [108] M. ZOU – « Monodromy in two degrees of freedom integrable systems », *J. Geom. Phys.* **10** (1992), no. 1, p. 37–45.
- [109] N. T. ZUNG – « A topological classification of integrable Hamiltonian systems », Séminaire Gaston Darboux de Géométrie et Topologie Différentielle, 1994–1995 (Montpellier), Univ. Montpellier II, Montpellier, 1995, p. iv, 43–54.
- [110] ———, « Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. II. Topological classification », *Compositio Math.* **138** (2003), no. 2, p. 125–156.
- [111] M. ZWORSKI – « Lecture on scattering resonances », 2011.