



Identification de l'état d'un milieu et représentation de sa variabilité par une approche stochastique

Sébastien Recek

► To cite this version:

Sébastien Recek. Identification de l'état d'un milieu et représentation de sa variabilité par une approche stochastique. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2008. Français. NNT : 2008CLF21852 . tel-00730548

HAL Id: tel-00730548

<https://theses.hal.science/tel-00730548>

Submitted on 10 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre D.U. : 1852
EDSPIC : 407

Université Blaise Pascal – Clermont II
Ecole Doctorale
Sciences pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand

Thèse

Présentée par

Sébastien Recek

Pour obtenir le grade de

Docteur d'Université

Spécialité : Génie Mécanique Génie Civil

**Identification de l'état d'un milieu et représentation de sa variabilité
par une approche stochastique.**

Soutenue publiquement le 3 Septembre 2008 Devant le jury :

M. Maurice Lemaire
M. Ahmed Mebakri
M. Stéphane Andrieux
M. Alain Millard

Président
Rapporteur et examinateur
Rapporteur et examinateur
Directeur de thèse

Table des matières

Chapitre I	Introduction	4
1	Contexte	5
1.1	Motivation de l'étude	5
1.2	Position de l'étude	5
2	Objectif	6
3	Plan	6
Chapitre II	Méthodes inverses déterministes	7
1	Introduction	9
2	Définitions	9
2.1	Position du problème	9
2.2	Définition des différents problèmes	10
2.3	Problèmes inverses	10
2.4	Problèmes mal posés	11
3	Résolution des problèmes inverses	12
3.1	Régularisation	12
3.2	Méthodes analytiques et méthodes numériques	13
3.3	Méthode des champs virtuels	13
3.4	Méthodes numériques	14
3.5	Test des méthodes de résolution	20
4	Exemple d'application	20
4.1	Définition de l'exemple d'application	20
4.2	Problème direct	21
4.3	Problème inverse	28
4.4	Conclusion sur la mise en oeuvre	58
5	Conclusion	58
	Bibliographie du chapitre II	59
Chapitre III	Représentation de Champs Aléatoires	60
1	Introduction	61
2	Champs aléatoires	61
2.1	Variables aléatoires	61
2.2	Processus et champs aléatoires	61
2.3	Discrétisation des champs aléatoires	62
3	Chaos polynomial de Wiener	62
3.1	Définition	62
3.2	Expansion sur le chaos homogène	63
3.3	Construction du chaos polynomial de Wiener	65
3.4	Chaos polynomial de dimension finie	67
3.5	Liaison avec les polynômes orthogonaux classiques	69
3.6	Exemple de décomposition d'une variable log-normale sur le chaos polynomial	71
3.7	Extension aux champs aléatoires	76
4	Utilité du chaos polynomial	77
4.1	Problème typique	77
4.2	Discrétisation des données	78
4.3	Projection du résultat	78

4.4	Exploitation des résultats	79
5	Exemple de calcul	79
5.1	Présentation	79
5.2	Mise en équation	80
5.3	Méthode de résolution	85
5.4	Application	85
6	Conclusion.....	87
	Bibliographie du chapitre III	88
Chapitre IV	Méthodes de Calcul Stochastiques Directes	89
1	Introduction	90
2	Décomposition en série de Karhunen-Loève	90
2.1	Définition	90
2.2	Détermination analytique des valeurs et fonctions propres.....	94
2.3	Décomposition numérique	104
2.4	Analyse paramétrique de l'effet de la longueur de corrélation sur la décomposition de Karhunen-Loève	108
2.5	Conclusion sur la décomposition KL	116
3	Eléments Finis Stochastiques	117
3.1	EF déterministes	117
3.2	EF stochastiques	117
4	EF stochastiques non intrusifs.....	120
4.1	Méthode non intrusive par régression avec une variable aléatoire en entrée	120
4.2	Méthode non intrusive par régression pour des champs aléatoires	130
4.3	Méthode non intrusive par projection	136
5	Conclusion.....	137
	Bibliographie du chapitre IV	139
Chapitre V	Le Variogramme.....	140
1	Introduction	141
2	Krigeage et Variogramme	141
2.1	Contexte d'utilisation	141
2.2	Krigeage	141
2.3	Variogramme.....	142
3	Mise en oeuvre	146
3.1	Préliminaire : simulation de données	146
3.2	Exemple discret	148
3.3	Exemple continu.....	156
4	Conclusion.....	163
	Bibliographie du chapitre V	165
Chapitre VI	Proposition de Méthode Inverse Stochastique	166
1	Introduction	167
2	Caractérisation des données	167
2.1	Détermination de la fonction de covariance des données	168
2.2	Discrétisation des données	168
3	Paramétrisation du résultat	169
3.1	Valeurs aux nœuds	170
3.2	Décomposition sur une base de l'espace des fonctions.....	171
4	Couplage méthodes inverses et méthodes non intrusives	171
4.1	Méthodes inverses déterministes.....	171
4.2	Problème direct stochastique.....	172

4.3	Problème inverse stochastique	173
4.4	Première méthode : deux minimisations	174
4.5	Deuxième méthode : une seule minimisation	177
4.6	Limitation	177
5	Exemple Simple	178
5.1	Définition de l'exemple.....	178
5.2	Préliminaires aux calculs.....	179
5.3	Mise en œuvre	181
5.4	Résultats	187
6	Exemple complet.....	198
6.1	Données	198
6.2	Génération des mesures.....	198
6.3	Détermination de la fonction de covariance de la flèche (variogramme)	199
6.4	Décomposition KL du champ de sortie.....	201
6.5	Paramétrisation du résultat	202
6.6	Minimisation	203
6.7	Résultats	204
7	Conclusion.....	206
	Bibliographie du chapitre VI.....	207
	Chapitre VII Conclusion et Perspectives	208
1	Conclusion.....	209
2	Perspectives	210
	Liste des tableaux	211
	Liste des figures	213

Chapitre I

Introduction

1	<i>Contexte</i>	5
1.1	Motivation de l'étude	5
1.2	Position de l'étude	5
2	<i>Objectif</i>	6
3	<i>Plan</i>	6

1 Contexte

1.1 Motivation de l'étude

Le stockage des déchets radioactifs de haute activité et à vie longue est un problème à traiter dans un futur proche qui intéresse le C.E.A. La solution à long terme la plus probable est un stockage en site géologique profond, ce qui implique une connaissance approfondie du comportement du site géologique et de son évolution sur des milliers d'années.

Outre la difficulté de modéliser le comportement thermo-hydro-mécanique non linéaire du massif, se pose la simple question d'obtenir les données nécessaires aux calculs (état de fissuration, modules de rigidité, densités,...) à partir de mesures indirectes en nombre limité. En effet, cette identification de paramètres est un problème mal posé –comme la plupart des problèmes inverses– ce qui indique des soucis d'existence, d'unicité et de stabilité de la solution. Les méthodes existantes de résolution de ce type de problèmes (dites « méthodes inverses ») sont relativement récentes (bases jetées dans les années 1960 par Tikhonov), et principalement déterministes.

Or l'amélioration des prédictions déterministes de comportement du massif nécessite d'utiliser une approche stochastique, en tenant compte de la variabilité (due au faible nombre de mesures, à l'imprécision des instruments,...) des paramètres (donc d'identifier moyenne, écart-type, corrélation, lois de probabilité...). Ces paramètres peuvent ensuite être utilisés comme données de calculs stochastiques.

Le but de cette étude est donc le développement de méthodes d'identification des données et de représentation de ces données sous une forme utilisable dans des calculs stochastiques postérieurs.

1.2 Position de l'étude

Le développement de la science se fait dans le sens d'une élaboration de modèles, dans la recherche de lois immuables qui expliquent le monde. Au cours des siècles les modèles se font plus précis, les lois plus pertinentes. Cependant aussi poussés qu'ils soient, ils ne pouvaient retranscrire qu'imparfaitement la réalité, ou plutôt ils sont trop simples et parfaits pour notre monde complexe et frustré.

Le pouvoir de prédiction de la science ne peut donc être qu'approximatif (parfois insensiblement, parfois visiblement). Les utilisateurs des modèles se sont entourés de marges de sécurité qui permettaient de cacher ces incertitudes et surtout d'éviter d'avoir à y penser. Mais dans tout calcul physique se nichent des incertitudes qui font différer son résultat de la réalité :

- incertitude des mesures tout d'abord : les outils de mesure, plus ou moins précis, plus ou moins justes ne permettent qu'une approximation des données réelles ;
- incertitude du modèle ensuite : afin de se prêter au calcul prédictif les modèles doivent simplifier la réalité, et par là même s'écarter du comportement réel du système ;
- incertitude liée au calcul enfin : nombre limité de décimales en informatique, arrondis.

Une nouvelle étape fut franchie quand la science chercha à prévoir l'effet des incertitudes dans un système. Les calculs probabilistes, ou stochastiques, permettent une telle prédiction, et se sont révélés particulièrement utiles pour évaluer la fiabilité d'un système (pont, moteur, circuit électrique,...). Les outils de base pour modéliser les incertitudes sont les variables aléatoires et les champs aléatoires, caractérisés par des outils statistiques.

Un problème se pose quand les données statistiques ne peuvent être mesurées directement, comme dans le cas cité au §1.1. Le développement de méthodes inverses stochastiques s'impose alors.

2 Objectif

L'objectif de cette étude se trouve dans son sujet :

Identification de l'état d'un milieu et représentation de sa variabilité par une approche stochastique.

Cet objectif se compose de deux points complémentaires : l'élaboration d'une méthode inverse permettant d'identifier un champ aléatoire et la représentation de ce champ aléatoire sous une forme qui autorise son utilisation ultérieure dans des calculs stochastiques.

En outre cette méthode devait pouvoir être intégrée dans le code de calcul par éléments finis CAST3M afin de permettre sa capitalisation dans le savoir-faire du laboratoire.

3 Plan

Un **premier chapitre** est tout naturellement consacré aux **méthodes inverses déterministes**. Nous y examinons les caractéristiques des problèmes inverses et les différentes méthodes existantes pour les résoudre.

Ensuite dans un **deuxième chapitre** nous nous penchons une manière très répandue de représenter et manipuler les champs aléatoires : le **chaos polynomial** qui constitue une discrétisation des champs aléatoires en variables aléatoires. Les **éléments finis stochastiques**, qui constituent la principale méthode de calcul sont également étudiés, en particulier les **approches non intrusives**.

Un **troisième chapitre** est consacré à la **décomposition en série de Karhunen-Loève**, l'une des méthodes permettant la discrétisation de champs aléatoires (c'est à dire leur expression sous la forme de variables aléatoires).

Un **quatrième chapitre** est consacré au **variogramme**, qui est un outil statistique permettant la caractérisation des paramètres statistiques des champs aléatoires. Allié par exemple à la décomposition en série de Karhunen-Loève il permet d'alimenter en données les méthodes de calcul stochastiques.

Enfin le **dernier chapitre** fera naturellement le lien entre les chapitres précédents, en détaillant une **méthode inverse stochastique** utilisant chacun des points vus précédemment pour tenter d'identifier un champ aléatoire.

Chapitre II

Méthodes inverses déterministes

2	Objectif.....	6
3	Plan	6
1	Introduction	9
2	Définitions	9
2.1	Position du problème.....	9
2.2	Définition des différents problèmes	10
2.3	Problèmes inverses	10
2.3.1	Données y.....	10
2.3.2	Inconnues x et p.....	10
2.3.3	Modèle A(p)	10
2.3.4	Formulation du problème inverse	11
2.4	Problèmes mal posés	11
3	Résolution des problèmes inverses.....	12
3.1	Régularisation.....	12
3.2	Méthodes analytiques et méthodes numériques	13
3.3	Méthode des champs virtuels	13
3.4	Méthodes numériques	14
3.4.1	Minimisation	14
3.4.2	Méthode de Tikhonov-Philips	15
3.4.3	Méthode de Levenberg-Marquardt.....	17
3.4.4	Algorithme de résolution.....	18
3.5	Test des méthodes de résolution.....	20
4	Exemple d'application.....	20
4.1	Définition de l'exemple d'application.....	20
4.2	Problème direct	21
4.2.1	Formulation	22
4.2.2	EI constant.....	22
4.2.3	EI variable	24
4.2.4	Conclusion sur le problème direct déterministe	27
4.3	Problème inverse	28
4.3.1	Inversion directe	28
4.3.2	Minimisation	37
4.3.3	Méthode des champs virtuels	51
4.4	Conclusion sur la mise en oeuvre.....	58
5	Conclusion.....	58
	Bibliographie du chapitre II	59

1 Introduction

A partir d'expériences et de raisonnements mathématiques les scientifiques ont identifié des lois de comportement et des modèles permettant l'élaboration d'une physique déductive et prédictive. Il est alors possible, connaissant les paramètres internes d'un système physique (par exemple la rigidité) et les sollicitations qui lui sont appliquées (par ex. le chargement) de prévoir le comportement du système (par ex. le déplacement) : c'est la résolution du *problème direct*.

A contrario un *problème inverse* est un problème qui nécessite d'inverser ces modèles et lois physiques, pour accéder de manière indirecte à une quantité non directement accessible à la mesure (par exemple connaissant la force et le déplacement déterminer la rigidité).

Ces problèmes inverses peuvent être simples à résoudre, principalement quand le problème direct est mathématiquement inversible : dans notre exemple, si on considère un modèle très simple, il est évident de déduire le module d'Young d'un échantillon d'acier lors d'un essai de traction à partir des mesures du déplacement appliqué et de la force résultante. Ils peuvent être très complexes, voire être impossibles à résoudre, par exemple si on considère que la rigidité varie spatialement dans notre échantillon.

Dans ce chapitre nous définirons les problèmes inverses. Nous verrons qu'il s'agit souvent de problèmes mal posés. Nous examinerons quelques méthodes de résolution et les mettrons en œuvre sur un exemple simple.

2 Définitions

2.1 Position du problème

Un système physique peut se schématiser comme indiqué dans la figure 1 :

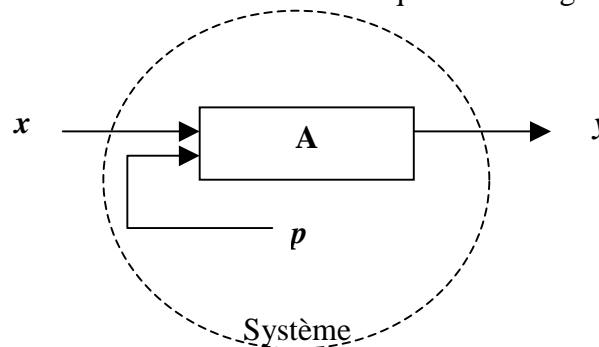


Figure 1 : schématisation d'un système physique

avec

x : quantités en entrée du système (connues ou inconnues),

y : quantités en sortie du système (connues ou inconnues),

p : paramètres internes du système (connus ou inconnus),

$A(p)$: opérateur reliant la sortie à l'entrée associée par la formule $y = A(p)x$. Cet opérateur est connu *a priori* suivant le modèle utilisé.

Remarques

Nous nous intéresserons ici seulement aux cas où x , y et p sont des fonctions appartenant aux espaces de Hilbert respectivement X , Y et P (une restriction courante est de prendre $X=Y=P$).

Le produit scalaire y est $(f, g) = \int_{\Omega} \bar{f} g \, ds$, la norme est $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Ce sont des fonctions de carré intégrable ($\int_{\Omega} f^2(s) \, ds$ possède une valeur finie). Quant à A , il appartient à l'espace des opérateurs de X dans Y .

2.2 Définition des différents problèmes

On peut définir trois problèmes différents associés à un système régi par la relation $A(p)x = y$:

		<i>Données</i>		<i>Inconnue</i>	<i>Traduction</i>
Problème direct		x	p	y	connaissant les causes et les paramètres, trouver les effets en accord avec le modèle
Problème inverse	de reconstruction	y	p	x	connaissant les effets et les paramètres, trouver les causes en accord avec le modèle
	d'identification	x	y	p	connaissant les causes et les effets, retrouver les paramètres en accord avec le modèle

2.3 Problèmes inverses

2.3.1 Données y

Dans un problème inverse les données sont constituées de mesures d'un signal de sortie du système (déplacement, effort, température, pression,...). Comme pour toute mesure, les données recueillies sont entachées d'une erreur inévitable. On note y^ε ces données recueillies et y^0 les données parfaites. Typiquement dans les problèmes inverses on définit une borne supérieure ε de l'erreur (estimée *a priori*) lors de la mesure des données :

$$(1) \quad \|y^0 - y^\varepsilon\| \leq \varepsilon$$

2.3.2 Inconnues x et p

Les inconnues d'un problème inverse peuvent être soit des paramètres p internes au système à identifier, soit un signal d'entrée x à reconstituer. Cependant il faut noter que souvent dans la littérature on ne distingue pas ces deux problèmes. Dans la suite nous notons x les données inconnues, même quand il s'agit de paramètres de A n'ayant rien à voir avec le signal d'entrée.

2.3.3 Modèle $A(p)$

Les problèmes inverses reposent tous sur le choix d'un modèle liant un signal d'entrée x à un signal de sortie y , utilisant des paramètres internes p , par la relation

$$(2) \quad y = A(p)x$$

Dans les systèmes réels $A(p)x$ est souvent de la forme :

$$(3) \quad (Ax)(t) = \int_{\Omega} k(t, s) x(s) \, ds$$

Il faut noter que cette formulation explicite n'est pas forcément accessible : la relation entre y et x peut être implicite (système d'équations aux dérivées partielles par exemple). La résolution du simple problème direct (i.e. trouver y connaissant x) peut alors être elle-même très complexe.

Comme nous l'avons indiqué précédemment souvent on ne fait pas la distinction entre x et p . Pour simplifier l'écriture, on trouve généralement le modèle physique sous la forme.

$$(4) \quad y = Ax$$

2.3.4 Formulation du problème inverse

En tenant compte des simplifications d'écriture précédentes, on peut formuler un problème inverse de la façon suivante : connaissant les mesures entachées d'erreur y^ε et un modèle physique A , déterminer le signal d'entrée ou les paramètres inconnus x^ε tels que

$$(5) \quad y^\varepsilon = Ax^\varepsilon$$

2.4 Problèmes mal posés

Au début du XX^{ième} siècle, Hadamard (1902,1932) introduisit la notion de problème *bien posé* (*well-posed*) et, par opposition, celle de problème *mal posé* (*ill-posed*).

Un problème est dit *bien posé* si et seulement si :

- pour tout $y \in Y$, il existe une solution (existence);
- cette solution est unique dans X (unicité) ;
- cette solution est stable vis à vis des données (stabilité).

Par opposition les problèmes mal posés possèdent au moins un des défauts suivants, le troisième étant le plus gênant dans le cadre des problèmes inverses :

- **existence de solution non assurée** (i.e. pour un y donné il peut ne correspondre aucun x) ;
- **multiples solutions possibles** (i.e. pour un y donné une multitude de x peuvent correspondre, sans possibilité de discrimination) ;
- **grande sensibilité des solutions aux données initiales** (i.e. d'un changement relativement petit de y résulte un changement relativement important de x : il n'y a pas de continuité de la solution par rapport aux données).

On voit que le troisième point est crucial dans la résolution de n'importe quel problème physique : les données expérimentales sont bruitées, il est donc important que la solution ne leur soit pas trop sensible (soit robuste pour reprendre un terme utilisé en traitement du signal), sous peine de perdre sa validité.

Au delà de la définition mathématique, ce concept possède un sens physique très fort (voir [II-2] dans bibliographie en fin de chapitre). La plupart des problèmes de l'ingénieur consistent à déterminer un champ x dans un domaine Ω (pouvant avoir une composante temporelle), connaissant l'équation de comportement $Ax = y$ et les conditions sur le bord $\partial\Omega$. Il peut sembler que n'importe quelles conditions de bord permettent la résolution du problème, pourvu qu'elles ne soient pas surabondantes. Il n'en est rien, et les conditions « convenables » dépendent directement de l'opérateur A . Un problème bien posé est donc un problème pour lequel les conditions et données initiales conviennent pour l'opérateur A . Contrairement à l'intuition de l'ingénieur, il ne s'agit donc pas de disposer de la bonne *quantité* de données, mais bien de disposer du bon *type* de données.

Presque tous les problèmes directs de la physique sont bien posés. Ce n'est pas une heureuse coïncidence : en fait les chercheurs ont défini très tôt les problèmes bien posés des différentes disciplines, et ne se sont pas intéressés aux autres (on a donc restreint le jeu de problèmes sur lesquels travailler). Cependant il est tout à fait possible de mal poser un problème direct.

Par contre la plupart des problèmes inverses sont mal posés, car on ne peut pas trouver de conditions initiales convenables. La difficulté de résolution vient donc d'une **caractéristique intrinsèque propre au problème inverse**, et pas d'une simple insuffisance de données. En particulier il est important de préciser que ce caractère mal posé n'est pas lié comme certains peuvent le penser au fait que ces problèmes sont résolus pour des données discrètes en nombre fini [II-1]. En effet même si nous disposions de la fonction y de manière complète et continue (mais sujette à des incertitudes), les difficultés persisteraient. Dans l'exemple de la poutre traité en annexe, nous voyons que la solution du problème inverse avec une donnée continûment connue est très instable. La discrétisation inévitable du problème amène cependant un autre souci : le *mauvais conditionnement* du problème. Il faut donc séparer le caractère *mal posé* du problème d'un éventuel caractère *mal conditionné*.

Des méthodes existent pour atténuer ou supprimer ces défauts et principalement restaurer la stabilité de la solution. Dans les années 60 le mathématicien russe Tikhonov jette les bases théoriques des méthodes modernes d'inversion en introduisant le concept de *solution régularisée*, formalisant un compromis entre fidélité aux données et stabilité. Transformer un problème mal posé en problème bien posé *proche* est appelé *régularisation* du problème.

Il est intéressant de noter qu'il existe un type de problèmes systématiquement mal posés : ceux formulés à partir d'une équation de Fredholm de première espèce, qui est de la forme :

$$(6) \quad \int k(x, y) f(x) dx = g(y)$$

Trouver la fonction f connaissant g et k à partir d'une telle équation est un problème mal posé. Or les systèmes physiques obéissent souvent à ce genre de relation intégrale (voir l'équation (3)).

3 Résolution des problèmes inverses

3.1 Régularisation

Nous avons vu précédemment qu'une caractéristique générale des problèmes inverses était qu'ils étaient en général mal posés, ce qui compromet l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution. Régulariser un problème inverse consiste à le transformer en un *problème bien posé proche*. Les méthodes de régularisation utilisent souvent pour nourrir leurs algorithmes une augmentation la quantité d'information disponible par l'ajout au problème des données, soit provenant de sources annexes (résultats d'expériences réelles ou numériques), soit d'hypothèses considérées comme vraies *a priori* (forme de résultat attendue, contraintes d'évolution).

La résolution de problèmes inverses peut donc amener à utiliser de l'information totalement subjective et hypothétique, mais considérée comme « *plausible* », et à formaliser des caractéristiques parfois qualitatives. La validité de ce jeu de données additionnelles conditionne évidemment la validité du résultat. La régularisation n'est donc pas une démarche purement abstraite, mais bien la prise en compte du caractère réel et physique d'un problème.

3.2 Méthodes analytiques et méthodes numériques

Dans le cadre des problèmes inverses, il existe clairement deux sortes de méthodes que l'on pourrait qualifier d'analytiques d'une part et de numériques de l'autre. Il est bien sûr délicat de vouloir les classer ainsi. En effet les méthodes analytiques s'appuient sur des calculs (d'intégrales, résolutions de systèmes d'équations,...) ne pouvant être réalisés que numériquement, et les méthodes numériques nécessitent une formulation analytique.

Avant les années 80, le seul moyen de traiter un problème inverse était de manipuler les équations de manière analytique pour régulariser le problème et le résoudre (certains nostalgiques s'y réfèrent encore parfois comme à l'époque de "l'âge d'or" de la résolution des problèmes inverses). Les méthodes analytiques, si elles possèdent une pureté intrinsèque (elles s'appuient sur un raisonnement mathématique), comportent deux gros inconvénients :

- chaque type de problème amène une stratégie de résolution qui lui est propre ;
- une forte dose de mathématiques est requise pour trouver la solution et prouver son unicité et sa stabilité (en particulier la connaissance des propriétés de fonctions, d'équations, d'espaces,...).

Du fait de ces inconvénients et avec le développement de la puissance de calcul des ordinateurs, des méthodes numériques ont été développées, basées sur la minimisation de l'écart entre les données d'observation et de simulation. Elles possèdent comme avantage certain d'être très faciles à mettre en œuvre, quel que soit le problème, et comme gros inconvénient de nécessiter un coût de calcul conséquent, et elles ne sont souvent utilisables que pour des problèmes avec un nombre de variables réduit.

Les méthodes analytiques conservent comme avantage de ne nécessiter qu'un coût de calcul réduit (parfois il n'est même pas nécessaire de résoudre le problème direct). De plus l'augmentation de la puissance de calcul sert aussi les méthodes analytiques : les moyens informatiques permettent de calculer rapidement des quantités difficilement accessibles auparavant (calcul des intégrales, des dérivées, des systèmes d'équations, des valeurs propres,...), et surtout d'appliquer des méthodes analytiques à des modèles calculés par éléments finis. Ainsi des méthodes analytiques peuvent être beaucoup plus adaptées pour résoudre des problèmes inverses, mais nécessitent un travail spécifique. Notons aussi qu'au cours des années passées de nombreux problèmes inverses ont été résolus de manière analytique. Il est donc toujours avantageux de vérifier si une telle solution ne peut pas être réutilisée pour le problème auquel on est confronté.

3.3 Méthode des champs virtuels

Un des schémas les plus utilisés pour résoudre analytiquement les problèmes inverses consiste à utiliser la formulation faible du problème direct. Si le comportement de notre modèle est défini par l'équation locale :

$$(7) \quad Ax(t) = y(t) \quad \forall t \in \Omega$$

Alors on a la formulation faible suivante sur la totalité du domaine Ω :

$$(8) \quad \int_{\Omega} Ax(t) \varphi(t) dt = \int_{\Omega} y(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi$$

En jouant sur la fonction φ et en manipulant les équations, on peut réussir à résoudre le problème inverse sans jamais résoudre le problème direct.

La méthode la plus connue s'appuyant sur cette idée est la méthode des champs auxiliaires, qui s'applique lorsque :

- le problème direct est solvable (même par une boîte noire) ;
- la quantité recherchée est une perturbation d'un paramètre connu, petite devant ce paramètre (Par exemple si l'on cherche le module d'Young $E(x)$ dans une structure, on ne peut l'appliquer que si ce module se décompose en $E(x) = E_c(x) + \varepsilon(x)$, avec $E_c(x)$ connu et $E_c(x) \gg \varepsilon(x)$) ;
- nous disposons d'un couple de résultats expérimentaux entrées/sorties.

La méthode des champs auxiliaires (sur laquelle nous reviendrons au §3.3) consiste alors à utiliser des résolutions du problèmes avec un paramètre non perturbé afin d'extraire l'information sur la perturbation par le biais de manipulations mathématiques de la formulation faible (appelée aussi intégrale) du problème.

3.4 Méthodes numériques

3.4.1 Minimisation

Cette méthode consiste à utiliser une procédure d'optimisation qui dans sa forme la plus simple s'énonce comme suit : trouver les paramètres ou entrées x^ε tel que l'écart entre les données recueillies y^ε et les résultats calculés $y = Ax^\varepsilon$ soit minimal en utilisant le critère des moindres carrés. On cherche donc x^ε qui minimise la fonctionnelle J suivante

$$(9) \quad J(x) = \|Ax - y^\varepsilon\|$$

Nous pouvons ajouter dès à présent un critère d'arrêt de la procédure de minimisation : comme il est sans objet de chercher un résultat plus précis que ne le sont les données recueillies, nous pouvons arrêter la procédure dès que x^ε vérifie

$$(10) \quad \|Ax^\varepsilon - y^\varepsilon\| \leq \varepsilon$$

Cette méthode de résolution de problème inverse est contemporaine de l'invention du principe des moindres carrés à la fin du XVIII^{ème} siècle : lors d'une des premières utilisations de ce principe, Gauss a estimé le coefficient d'ellipsité de la Terre à partir de mesures de longueur d'arc, en modélisant le profil de la terre sous la forme d'une ellipse.

L'avantage de cette méthode est que le problème inverse se réduit à deux problèmes "classiques" :

1. un problème direct $y = Ax$ pouvant être résolu numériquement (éventuellement par des éléments finis ou autre code de calcul "boite noire"),
2. un problème d'optimisation typique.

Le résultat de la résolution du problème inverse va donc dépendre en partie des caractéristiques liées au problème direct (modèle choisi, précision, etc...) , mais surtout de celle de la méthode d'optimisation retenue :

- choix de l'algorithme de recherche du minimum,
- choix du point de départ,
- prise en compte des contraintes,
- etc...

Un inconvénient de cette approche est que les algorithmes d'optimisation peuvent nécessiter un nombre conséquent d'appels au code de calcul donc, dans notre cas, plusieurs résolutions du problème direct. Lorsque l'on sait que chaque résolution peut être un calcul par éléments finis, on comprend que le temps de calcul puisse être critique. La science de l'optimisation est heureusement maintenant assez développée et il est possible d'utiliser des méthodes éprouvées pour limiter le coût informatique.

Il faut noter que sous la forme (9), le problème n'est pas régularisé, nous sommes juste passés d'un problème analytique particulier à un problème numérique général : la solution obtenue est potentiellement instable et non unique. Nous allons maintenant voir comment il est possible de régulariser ce problème d'optimisation.

3.4.2 Méthode de Tikhonov-Philips

[II-1]

Cette méthode consiste à utiliser la fonction de performance précédente, mais en y ajoutant un terme régularisateur. On recherche par une procédure d'optimisation $x^{\alpha, \varepsilon}$ qui minimise la fonctionnelle

$$(11) \quad J(x) = \|Ax - y^\varepsilon\|^2 + \alpha \|Bx\|^2$$

avec :

$\alpha > 0$ le paramètre de régularisation (appelé parfois "paramètre de Lagrange") ;
B un opérateur de contrainte.

L'opérateur B peut avoir plusieurs formes. Ainsi, si l'on souhaite que la fonction solution soit lisse, on peut choisir la dérivée $\|Bx\| = \|x'\|$. Si l'on souhaite que la fonction trouvée soit proche d'une valeur connue à priori, on peut prendre $\|Bx\| = \|x - x_0\|$. Cependant le plus souvent cette méthode est utilisée avec $B=I$, l'opérateur identité dans l'espace X. Dans ce cas la fonctionnelle devient :

$$(12) \quad J(x) = \|Ax - y^\varepsilon\|^2 + \alpha \|x\|^2$$

La solution théorique obtenue par cette méthode (au minimum global) dépend de la valeur choisie pour α . En fait α doit être le plus petit possible (car $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (x^{\alpha, \varepsilon}) = x^\varepsilon$), mais avec une valeur suffisante pour régulariser effectivement le problème (rappelons qu'aux alentours de la limite $\alpha = 0$ la solution obtenue n'est pas stable). Cette solution théorique est :

$$(13) \quad x^{\alpha, \varepsilon} = (A^*A + \alpha I)^{-1} A^* y^\varepsilon$$

où A^* est l'adjoint¹ de A. On peut voir dans l'expression de la solution théorique un effet pratique de cette méthode sur le conditionnement du système : on ajoute αI à A^*A pour remplacer les valeurs singulières trop faibles par une valeur plancher, ce qui diminue la sensibilité de la solution.

L'erreur maximale sur le résultat est donnée par [II-1] :

¹ i.e. $(Ax, y) = (x, A^*y)$, et pour une matrice $[A^*] = [(-1)^{-i+j} \det([M_{ij}])]$ où $M_{pq} = A_{ij, i \neq p, j \neq q}$

$$(14) \quad \|x_0 - x^{\alpha, \varepsilon}\|^2 \leq \|x^{\alpha, \varepsilon}\|^2 - \frac{2}{\alpha} (y^\varepsilon - Ax^{\alpha, \varepsilon}, y^\varepsilon) + \frac{2\varepsilon}{\alpha} \|y^\varepsilon - Ax^{\alpha, \varepsilon}\| + \|x_0\|^2$$

Les résultats obtenus par cette méthode dépendent du choix du paramètre α : la stabilité et l'erreur croissent toutes deux avec lui. Le choix de α est donc déterminant pour le succès de la méthode. Il existe plusieurs principes pour déterminer un α optimal.

Le principe de sélection de Morozov [II-1] repose sur l'idée de chercher une solution compatible avec l'erreur sur les données. Ainsi on choisit α tel qu'il soit solution de :

$$(15) \quad \|y^\varepsilon - Ax^{\alpha, \varepsilon}\| = \varepsilon$$

Le principe de sélection d'Arcangeli [II-1] repose sur une idée similaire, et consiste à choisir α tel qu'il soit solution de :

$$(16) \quad \|y^\varepsilon - Ax^{\alpha, \varepsilon}\| = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha}}$$

La modification du second membre est motivée par un résultat de convergence $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x^{\alpha, \varepsilon}) = x^*$ où x^* est la solution exacte du problème inverse.

Sur le plan pratique, ces principes de sélections sont très coûteux à mettre en œuvre, car ils imposent de résoudre plusieurs fois le problème de minimisation jusqu'à trouver le α idéal par itérations successives. Il existe cependant un autre principe de sélection plus simple mais moins rigoureux, proposé par Tikhonov :

$$(17) \quad \alpha = \frac{\varepsilon^2}{\|x^*\|^2}$$

avec ε l'erreur maximale commise sur les données et x^* la solution du problème inverse. Bien sûr en réalité ces deux valeurs sont inconnues, elles doivent donc être estimées *a priori* pour déterminer une approximation de la valeur optimale de α . Bien que cette expression doive être utilisée avec prudence, elle est intéressante parce que l'erreur maximale ε peut être remplacée par un paramètre probabiliste, en particulier une valeur dérivée d'un intervalle de confiance sur les mesures.

Au minimum de la fonctionnelle (12) nous avons :

$$(18) \quad \|Ax^{\alpha, \varepsilon} - y^\varepsilon\|^2 - \alpha \|x^{\alpha, \varepsilon}\|^2 = \varepsilon_y'^2 \quad \text{avec } \varepsilon_y' \ll y^\varepsilon \text{ le critère d'arrêt}$$

D'où en remplaçant α par sa valeur :

$$(19) \quad \|Ax^{\alpha, \varepsilon} - y^\varepsilon\|^2 = \varepsilon_y'^2 - \frac{\varepsilon_y'^2}{\|x^*\|^2} \|x^{\alpha, \varepsilon}\|^2 \quad \varepsilon_y \ll y^\varepsilon$$

Si $x^{\alpha, \varepsilon}$ est proche de x^* , alors

$$(20) \quad \frac{\|x^{\alpha, \varepsilon}\|}{\|x^*\|} = 1 + \varepsilon_x'' \quad \varepsilon_x'' \ll 1$$

Soit

$$(21) \quad \|Ax^{\alpha,\varepsilon} - y^\varepsilon\|^2 = \varepsilon_y'^2 - \varepsilon_y'^2 (1 + \varepsilon_x'')^2$$

D'où

$$(22) \quad \|Ax^{\alpha,\varepsilon} - y^\varepsilon\|^2 = \varepsilon_y'^2 - \varepsilon_y'^2 - 2\varepsilon_y'^2 \varepsilon_x'' + \varepsilon_y'^2 \varepsilon_x''^2$$

En utilisant ε_y comme critère d'arrêt (donc en posant $\varepsilon_y = \varepsilon_y'$), nous avons :

$$(23) \quad \|Ax^{\alpha,\varepsilon} - y^\varepsilon\|^2 = -2\varepsilon_y'^2 \varepsilon_x'' + \varepsilon_y'^2 \varepsilon_x''^2$$

Donc si $x^{\alpha,\varepsilon}$ est suffisamment proche de x^* , alors $\|Ax^{\alpha,\varepsilon} - y^\varepsilon\|^2$ est d'un ordre de grandeur inférieur à l'erreur de mesure ε .

3.4.3 Méthode de Levenberg-Marquardt

Les méthodes de régularisation classiques (comme la méthode de Tikhonov) remplacent le problème de minimisation mal-posé initial par un problème proche bien-posé, qui est ensuite résolu par minimisation. Cependant depuis peu (1995) des méthodes de régularisation itératives ont été développées comme la méthode de Levenberg-Marquardt (LM). Ces méthodes diffèrent des méthodes précédentes en ce que la régularisation est obtenue par des itérations successives plutôt qu'une fois pour toute au début.

La méthode de Levenberg-Marquardt [II-4] est une méthode de régularisation itérative qui est une variante de la méthode de Gauss-Newton pour la minimisation de (9). Etant donné une approximation x_k de x^* , Ax est remplacé par sa linéarisation autour de x_k avant le processus de minimisation qui doit déterminer un minimum de (9) dans une région relativement proche de x_k (dite "région de confiance"). Une itération de la méthode de Levenberg-Marquardt est donnée par

$$(24) \quad x_{k+1} = x_k + h_k$$

où h_k minimise la fonctionnelle

$$(25) \quad J(h) = \left\| y^\varepsilon - Ax_k - \left(\frac{\partial Ax}{\partial x} \right)_{x=x_k} h \right\|^2 + \alpha_k \|h\|^2$$

avec la contrainte que $x_k + h$ appartienne à la région de confiance (ce qui fait appel à un jugement *à priori* et correspond à un h "petit").

Dans la fonctionnelle J :

α_k est le paramètre de Lagrange adapté au problème,

Ax_k est la valeur de Ax au point x_k ,

$\left(\frac{\partial Ax}{\partial x} \right)_{x=x_k}$ représente la dérivée première de Ax par rapport à x au point x_k .

Nous avons donc à réaliser une minimisation de la fonction linéarisée pour chaque itération. La régularisation est obtenue par le choix de la région de confiance et par le terme de pénalisation $\alpha_k \|h\|^2$ (analogue à celui de la méthode de Tikhonov).

D'autres méthodes de régularisation itérative sont en développement, en utilisant par exemple les dérivées secondes de Ax [II-5].

3.4.4 Algorithme de résolution

La plupart du temps les mesures effectuées donnent un jeu de n valeurs discrètes y_i . Une résolution numérique nous impose de rechercher un résultat également sous la forme discrète de m valeurs x_i (soit discret d'emblée, soit discrétisé au court de la résolution). Or dans les modèles physiques définis par l'équation (5) x et y sont la plupart du temps des fonctions. Dans l'algorithme présenté on donc a supposé que A est modifié pour que la relation entre x et y soit de la forme

$$(26) \quad A\{x\} = \{y\}$$

où $\{x\}$ et $\{y\}$ sont des vecteurs de valeurs numériques.

La modification du modèle peut consister en une construction de la fonction x à partir des valeurs $\{x\}$ (par exemple des coefficients polynomiaux) pour définir un champ de valeurs x , puis après calcul en une discrétisation de y pour retourner $\{y\}$.

Après avoir précisé ce point nous pouvons donner une forme générale d'un algorithme de résolution numérique de problèmes inverses (Figure 1).

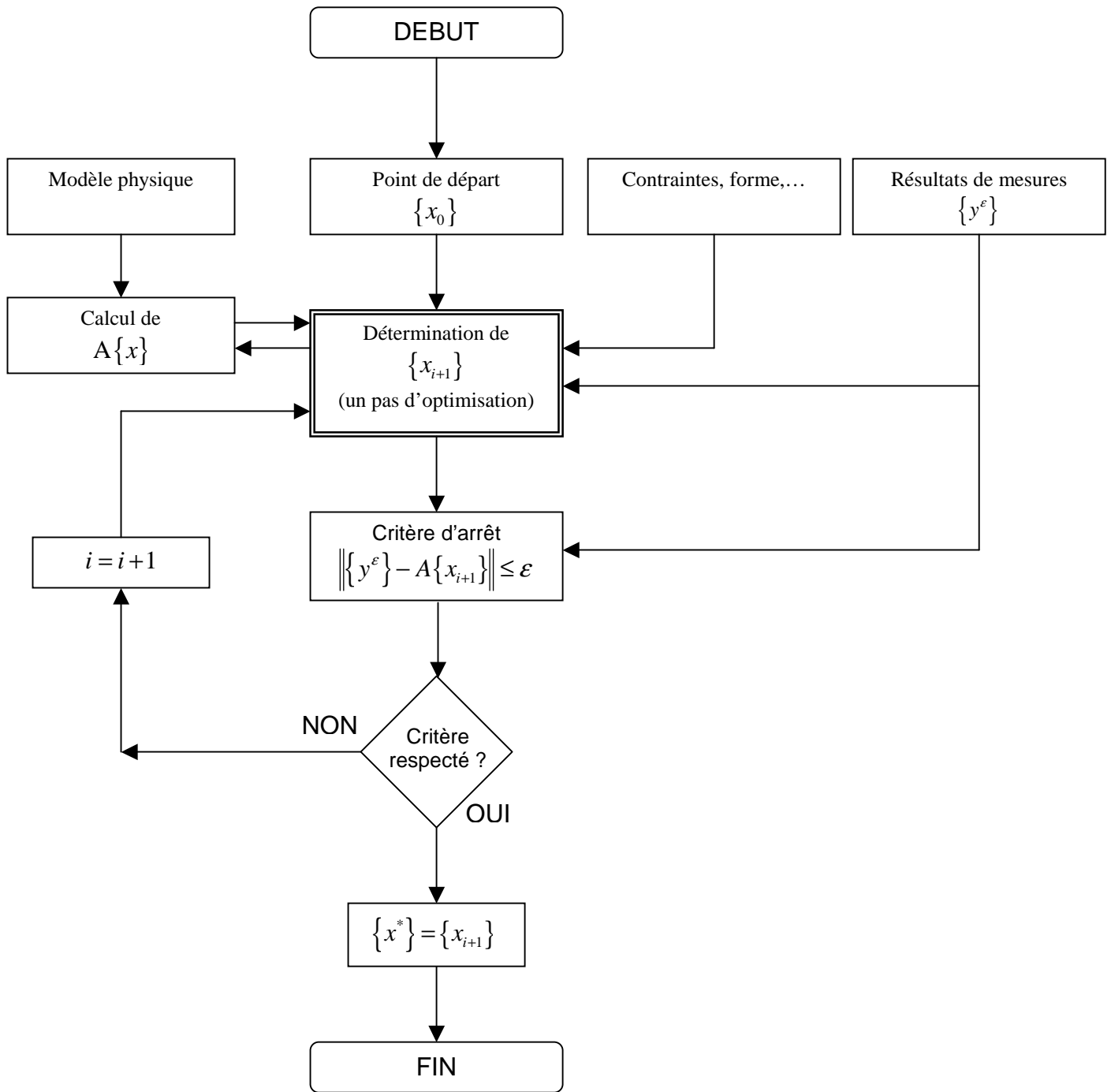


Figure 1. Algorithme de résolution numérique générale de problèmes inverses.

La détermination de x_{i+1} en fonction des x_i, \dots, x_0 et des informations fournies est le nœud du problème. L'algorithme de minimisation choisi doit permettre de réduire au maximum le nombre de résolutions du problème direct, tout en donnant une solution stable et précise.

3.5 Test des méthodes de résolution

Lors du test d'une méthode inverse, il est important de tester non seulement la résolution en tant que telle, mais aussi la régularisation du problème. Pour cela on simule des données y en résolvant le problème direct pour une entrée x choisie. Puis on ajoute à la sortie y simulée un bruit pseudo-aléatoire. Le résultat de la méthode inverse pour ce y simulé et bruité est comparé au x choisi au départ. Tester une méthode inverse uniquement avec des données exactes est parfois qualifié de *crime inverse*.

4 Exemple d'application

4.1 Définition de l'exemple d'application

Afin de mieux appréhender le concept de problèmes inverses, nous avons essayé dans la suite d'illustrer sur un même exemple quelques méthodes de résolution. Pour cela nous considérons un problème relativement simple : déterminer la rigidité en flexion d'une poutre de Navier–Bernoulli sollicitée en « flexion trois points », connaissant la force appliquée, à partir de quelques mesures de sa flèche.

Afin de situer le problème, nous commencerons par traiter brièvement le problème direct déterministe. Puis nous nous intéresserons au problème inverse déterministe en utilisant trois méthodes différentes :

- l'inversion directe du problème ;
- la minimisation ;
- les champs virtuels.

Les calculs sont réalisés avec le logiciel de calcul *Mathematica 4.1* de Wolfram Research, Inc. Le système d'unités est supposé cohérent lorsqu'il n'est pas précisé sur certains graphiques.

Le système étudié est une poutre sur deux appuis soumise à une force ponctuelle, représentée sur la Figure 2.

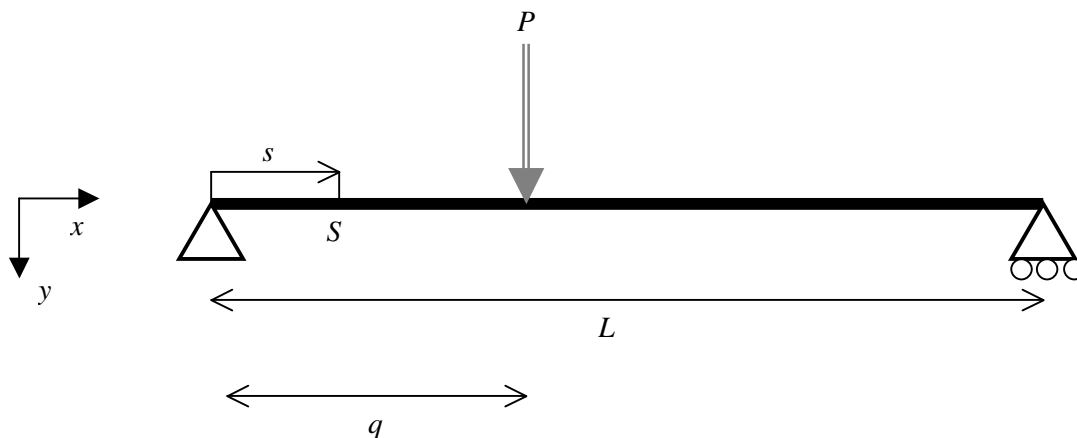


Figure 2. poutre en flexion trois points.

Soit un point S sur cette poutre. On note :

- s l'abscisse du point S ;
- P la charge appliquée ;
- q l'abscisse du point d'application de la charge P ;
- L la longueur de la poutre ;
- $v(s)$ la flèche de la poutre en S ;
- $M_z(s)$ le moment fléchissant en S ;
- $EI(s)$ le module de rigidité en flexion en S .

En hypothèse de Navier-Bernoulli (pas de déformation en cisaillement) le comportement en flexion d'une poutre obéit à l'équation locale suivante :

$$(27) \quad EI(s) v''(s) + M_z(s) = 0$$

Trois types de problèmes peuvent être posés [II-1] :

	Connaissant ...	Trouver...
Problème direct	M_z et EI	v
Problème inverse de reconstruction	v et EI	M_z
Problème inverse d'identification	v et M_z	EI

Table 1. Désignation des différents problèmes associés à l'exemple

Dans la suite nous nous intéresserons au problème direct et au problème inverse d'identification. Dans les deux cas la valeur et le point d'application du chargement (respectivement P et q) sont supposés totalement connus, ainsi que la longueur L . La structure étant isostatique nous connaissons donc le moment en tout point :

$$M_z(s) = \begin{cases} \frac{P}{L}(L-q) s & , s \leq q \\ \frac{P}{L}(L-s) q & , s > q \end{cases}$$

(28)

P, L et q étant connus.

4.2 Problème direct

Afin de mettre en valeur le caractère particulier de ce problème inverse, nous commençons par résoudre le problème direct : déterminer la flèche de la poutre connaissant sa rigidité en flexion sous un chargement connu. Nous serons amenés à examiner trois propriétés des solutions obtenues au problème :

- **la stabilité** : un résultat est considéré stable (ou robuste) si une modification légère des données (ici la rigidité donnée) n'entraîne qu'une modification légère du résultat (ici la flèche) ;
- **l'existence**, qui signifie ici que nous pouvons trouver une flèche correspondant à la rigidité donnée ;
- **l'unicité**, qui signifie ici que pour une rigidité donnée une seule flèche peut correspondre sans équivoque.

4.2.1 Formulation

La résolution du problème direct consiste à déterminer la flèche de la poutre connaissant son module de rigidité en flexion. Pour cela de l'équation (27) on tire la relation :

$$(29) \quad v''(s) = -\frac{M_z(s)}{EI(s)}$$

d'où dans notre exemple :

$$(30) \quad v''(s) = \begin{cases} -\frac{P}{EI(s)L}(L-q)s & , \quad s \leq q \\ -\frac{P}{EI(s)L}(L-s)q & , \quad s > q \end{cases}$$

Résoudre le problème direct consiste à intégrer (30) pour obtenir $v(s)$. Les quatre conditions aux limites que doit vérifier la solution sont :

$$(31) \quad v'(q^-) = v'(q^+)$$

$$(32) \quad v(0) = 0$$

$$(33) \quad v(L) = 0$$

$$(34) \quad v(q^-) = v(q^+)$$

Nous pouvons considérer deux cas : EI constant sur toute la poutre, puis EI variable.

4.2.2 EI constant

❖ Résolution

Si EI est constant dans la poutre, l'intégration donne :

$$(35) \quad v(s) = \begin{cases} -\frac{P}{6EIL}(L-q)s^3 + As + C & , \quad s \leq q \\ -\frac{P}{6EIL}(L-s)^3 q + Bs + D & , \quad s > q \end{cases}$$

avec

$$(36) \quad A = -\frac{P}{EIL} \left(\frac{1}{L} \left[-\frac{1}{3}(L-q)q^3 - \frac{1}{2}(L-q)^2 q^2 + \frac{1}{6}(L-q)^3 q \right] + \frac{1}{2} \left[(L-q)q^2 + (L-q)^2 q \right] \right)$$

$$(37) \quad B = -\frac{P}{EIL^2} \left[\frac{1}{3}(L-q)q^3 + \frac{1}{2}(L-q)^2 q^2 + \frac{1}{6}(L-q)^3 q \right]$$

$$(38) \quad D = -\frac{P}{EIL} \left[-\frac{1}{3}(L-q)q^3 - \frac{1}{2}(L-q)^2 q^2 + \frac{1}{6}(L-q)^3 q \right]$$

❖ Propriétés de la solution

□ Existence et unicité

Si EI est connu et constant tout le long de la poutre, l'équation (35) nous permet de calculer la flèche en tout point de la poutre de manière unique.

❖ Stabilité

L'équation (35) montre qu'il y a proportionnalité inverse entre la valeur de EI et celle de v . Nous pouvons donc écrire :

$$(39) \quad v(s) = \frac{K(s)}{EI}$$

Si EI varie de la quantité ΔEI , alors v varie de la quantité Δv suivant la relation :

$$(40) \quad v(s) + \Delta v(s) = \frac{K(s)}{EI + \Delta EI}$$

soit

$$(41) \quad 1 + \frac{\Delta v(s)}{v(s)} = \frac{\frac{1}{v(s)} \frac{K(s)}{EI}}{1 + \frac{\Delta EI}{EI}}$$

D'où en utilisant (39) :

$$(42) \quad \frac{\Delta v(s)}{v(s)} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta EI}{EI}} - 1$$

Ainsi, si lors de la mesure de EI une erreur relative de +50% est commise, alors la flèche calculée accusera une erreur relative de $-1/3$, si l'erreur sur EI est de -50%, alors l'erreur relative sur la flèche sera de +100%. La Figure 3 donne la forme de la variation relative de v pour une variation relative de EI entre -50% et +100%

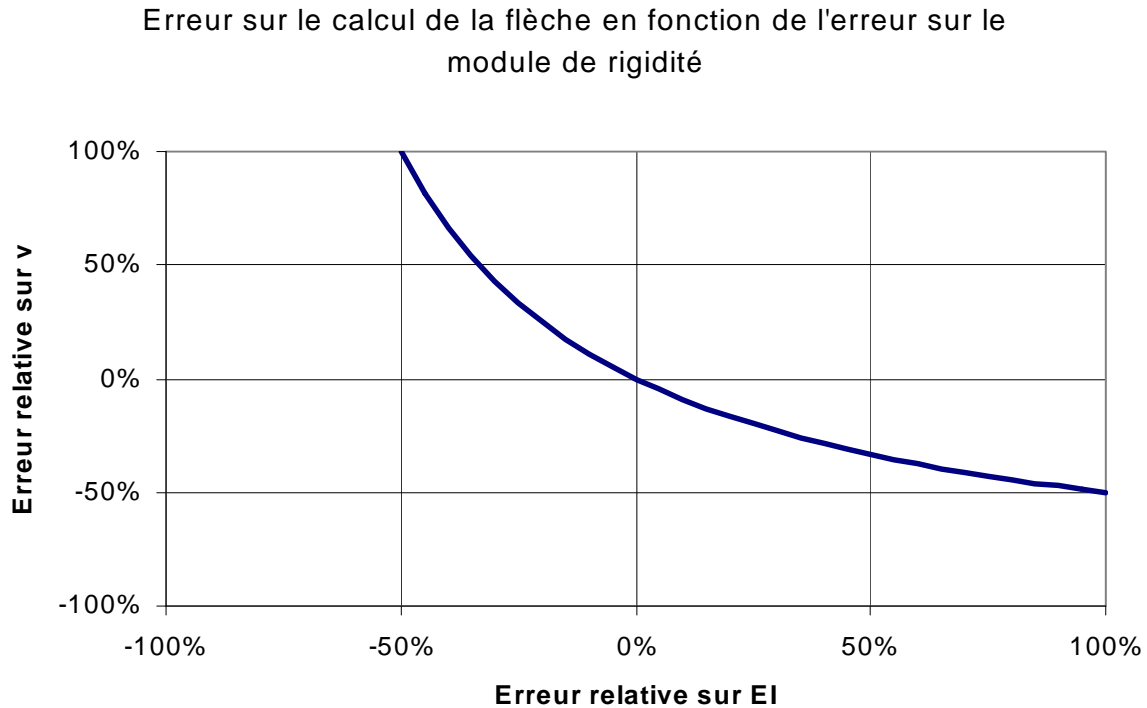


Figure 3. Relation entre les erreurs relatives.

Nous pouvons conclure que la solution trouvée est stable autour de la solution exacte : une petite variation de EI autour de sa valeur entraîne une petite variation de v autour de sa valeur.

Pour un ΔEI négligeable devant EI , nous pouvons écrire l'approximation $\frac{\Delta v}{v} \approx -\frac{\Delta EI}{EI}$.

4.2.3 EI variable

❖ Résolution

Prendre EI variable ne nous permet pas de réaliser l'intégration de $v''(s)$ aussi facilement. Afin de simplifier l'écriture et pour se rapprocher de la procédure de calcul utilisée dans *Mathematica*, nous pouvons noter $v_1''(s)$ l'expression de $v''(s)$ pour $s \leq q$ et $v_2''(s)$ pour $s > q$. C'est à dire que nous réécrivons (30) en :

$$(43) \quad v''(s) = \begin{cases} v_1''(s) & , \quad s \leq q \\ v_2''(s) & , \quad s > q \end{cases}$$

avec

$$(44) \quad v_1''(s) = -\frac{P}{EI(s)L}(L-q)s$$

$$(45) \quad v_2''(s) = -\frac{P}{EI(s)L}(L-s)q$$

L'intégration de (43) nous donne :

$$(46) \quad v'(s) = \begin{cases} \int_0^s v_1'' dx + A & , \quad s \leq q \\ \int_q^s v_2'' dx + B & , \quad s > q \end{cases}$$

La condition (31) nous donne :

$$(47) \quad B = v_1'(q)$$

En intégrant une seconde fois :

$$(48) \quad v(s) = \begin{cases} \int_0^s \int_0^y v_1''(x) dx dy + A s + C & , \quad s \leq q \\ \int_q^s \int_q^y v_2''(x) dx dy + s v_1'(q) + D & , \quad s > q \end{cases}$$

La condition (32) nous donne

$$(49) \quad C = 0$$

La condition (34) nous donne

$$(50) \quad D = v_1(q)$$

Soit :

$$(51) \quad v(s) = \begin{cases} \int_0^s \int_0^y v_1''(x) dx dy + A s & , \quad s \leq q \\ \int_q^s \int_q^y v_2''(x) dx dy + s v_1'(q) + v_1(q) & , \quad s > q \end{cases}$$

A peut être calculée en résolvant l'équation (33), soit :

$$(52) \quad \int_q^L \int_q^y v_2''(x) dx dy + L v_1'(q) + v_1(q) = 0$$

Soit en substituant :

$$(53) \quad \int_q^L \left[\int_0^q v_1''(x) dx + A + \int_q^y v_2''(x) dx \right] dy + \int_0^q \left[\int_0^y v_1''(x) dx + A \right] dy = 0$$

D'où :

$$(54) \quad A = -\frac{1}{L} \int_q^L \left[\int_0^q v_1''(x) dx + \int_q^y v_2''(x) dx \right] dy - \frac{1}{L} \int_0^q \left[\int_0^y v_1''(x) dx \right] dy = 0$$

❖ Propriétés de la solution

□ Existence et unicité

Une solution n'existe que si $\frac{1}{EI(s)}$ et $\frac{s}{EI(s)}$ sont intégrables sur $[0, L]$. Dans ce cas la solution est unique.

□ Stabilité

La solution reste stable face à un changement relatif de $EI(s)$. En effet si on considère deux rigidités proportionnelles, $EI_\lambda(s) = \lambda EI(s)$, avec λ un scalaire, alors

$$\int_0^L \frac{1}{EI_\lambda(s)} ds = \frac{1}{\lambda} \int_0^L \frac{1}{EI(s)} ds. \text{ Donc si } v_\lambda \text{ est la flèche correspondant à la rigidité } EI_\lambda, \text{ alors}$$

$$v_\lambda(s) = \frac{1}{\lambda} v(s).$$

En outre comme l'intégration gomme les singularités, la solution du problème direct reste stable vis à vis de la forme de EI : un changement minime de forme de EI n'entraîne pas de modification radicale de v (voir Figure 4).

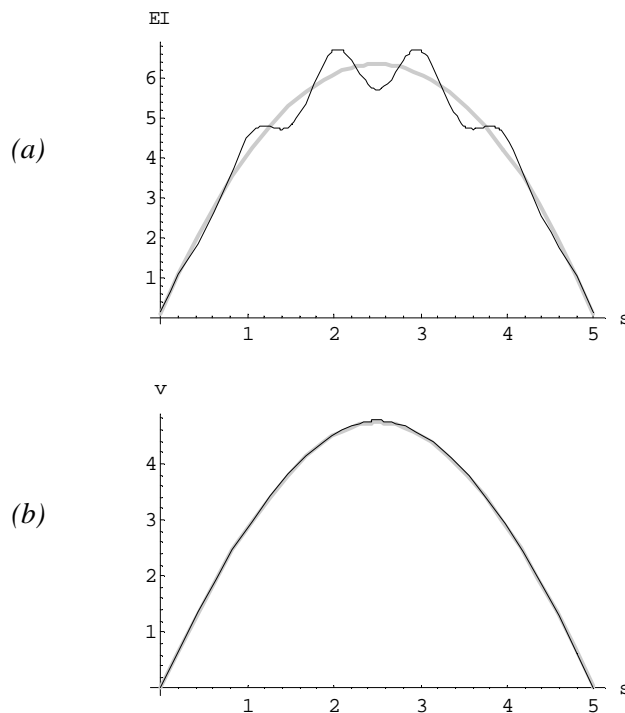


Figure 4. Résolution du problème direct pour deux rigidités différentes (courbes grise et noire) ; (a) : rigidités ; (b) : flèches.

□ Exemple de résolution

La Figure 5 montre deux résolutions du problème direct pour des rigidités différentes.

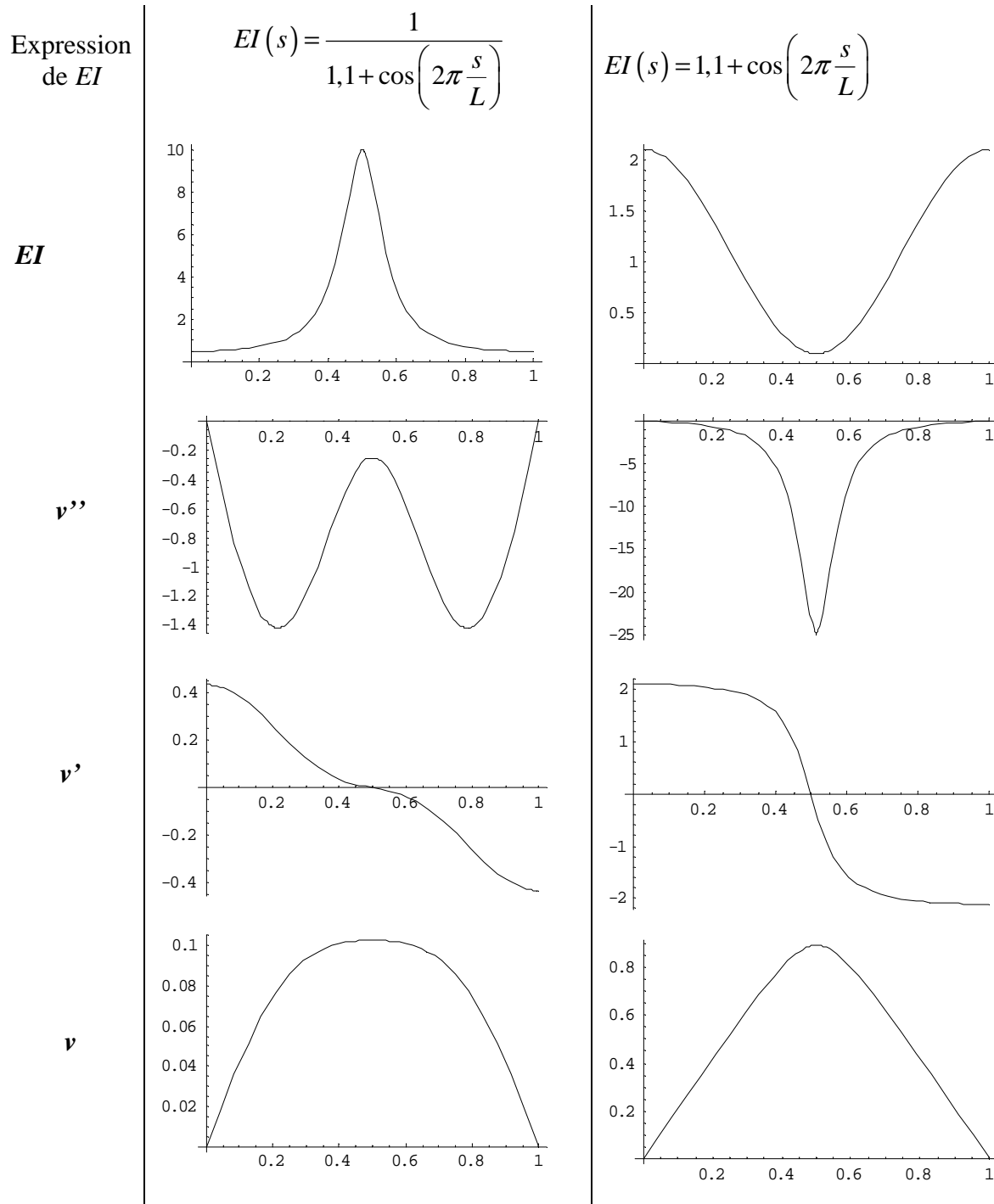


Figure 5. Deux résolutions du problème direct pour deux fonctions EI de forme différentes ($P=10N, q=0.5m, L=1m$).

4.2.4 Conclusion sur le problème direct déterministe

Comme nous venons de le voir, la résolution du problème direct ne pose pas de difficultés particulières : nous avons seulement besoin de pouvoir calculer numériquement des intégrales. Intéressons-nous maintenant au problème inverse, où les choses seront bien différentes.

4.3 Problème inverse

Le problème inverse que nous nous sommes posé est de déterminer la rigidité en flexion de la poutre connaissant sa flèche sous un chargement donné. Nous tenterons de résoudre ce problème en utilisant trois méthodes différentes : l'inversion directe, la minimisation et les champs virtuels.

Avec chacune de ces méthodes nous examinerons les propriétés de stabilité, existence et unicité de la solution trouvée. Nous comparerons également les résultats obtenus pour des données bruitées ou non aux résultats exacts, la rigidité exacte étant ici la rigidité utilisée pour simuler les données utilisées.

4.3.1 Inversion directe

Une idée naturelle est d'inverser l'équation du problème direct (29) pour calculer $EI(s)$ en fonction de $v''(s)$:

$$(55) \quad EI(s) = -\frac{M_z(s)}{v''(s)}$$

Contrairement au problème direct, nous avons donc besoin de dériver une fonction et non pas d'en intégrer une. Nous verrons que cette différence va considérablement compliquer la résolution.

❖ Flèche connue en tout point

Nous supposons ici que nous connaissons une mesure $v(s)$ de la flèche en tout point (par des mesures optiques par exemple).

□ Existence et unicité

La solution existe si v est au moins C^2 et si $v''(s)$ ne s'annule pas sur $]0,L[$ (avec le chargement considéré, sinon il faudrait tenir compte des cas où M_z s'annule lui aussi). Cette solution est unique : si $v(s)$ est fixé, alors il y a un et un seul $EI(s)$ correspondant.

Ainsi supposons que la mesure de la flèche soit erronée dans une zone autour du point d'application de la force, mais en restant dans le domaine de la variation de quelques pour-cent, par exemple en remplaçant le sommet du graphe par un arc de parabole (Figure 6). Cette flèche n'est pas C^2 (physiquement la rotation v' n'est pas continue) mais la différence en valeur avec la flèche exacte est des plus minimes.

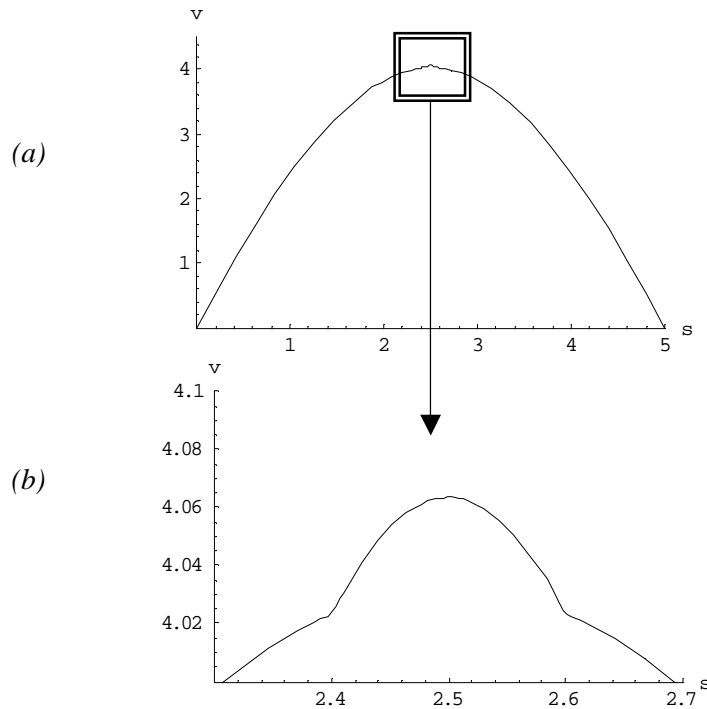


Figure 6. Flèche mesurée ; poutre entière (a) et zone erronée (b).

La résolution du problème inverse pour cette fonction v donne un EI discontinu et même non défini aux points de raccordement, fortement différent dans la zone modifiée, mais identique à la solution par inversion directe pour la flèche non perturbée ailleurs (Figure 7).

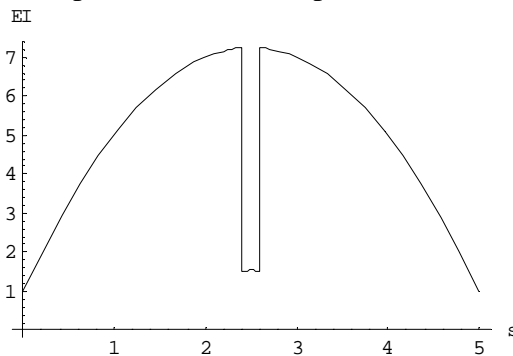


Figure 7. Rigidité de flexion correspondant à la flèche de la Figure 6.

Cette discontinuité est explicable : dans la zone erronée la poutre apparaît soudainement moins rigide, sans transition, non pas à cause de la *valeur* de la flèche, mais bien à cause de sa *forme*. Les dérivées de v ont un sens physique (rotation, courbure), ne pas respecter la condition C^2 revient à se placer hors du champ d'application de la théorie des poutres. Pour une modification minime en valeur de la flèche, la rigidité calculée est donc totalement différente.

□ Stabilité

La solution reste **stable face à un changement relatif de $v(s)$** . En effet si on considère deux flèches proportionnelles, $v_\lambda(s) = \lambda v(s)$, avec λ un scalaire, alors $v''_\lambda = \lambda v''(s)$. Donc si

EI_λ est la rigidité correspondant à v_λ , alors $EI_\lambda(s) = \frac{1}{\lambda} EI(s)$.

Cependant, et contrairement au problème direct, **la solution est instable vis à vis de la forme de la flèche** : la dérivation seconde fait qu'un infime changement de forme peut donner un résultat très différent.

Ainsi par exemple supposons que nous modifions de manière infime la forme de la flèche sur toute la poutre. Pour cela :

1. nous nous donnons une rigidité $EI_{ex}(s)$ que nous considérerons comme **exacte** que nous recherchons par la résolution du problème inverse ;
2. nous calculons une flèche $v_{ex}(s)$ correspondant à cette rigidité ;
3. nous ajoutons à cette flèche exacte un terme oscillant, mais avec une différence relative de 1% maximum :

$$(56) \quad v_{mes}(s) = v_{ex}(s) + \frac{v_{ex}(s) \cos\left(\frac{s}{L} 10\pi\right)}{100} ;$$

4. puis nous utilisons cette fonction $v_{mes}(s)$ pour déterminer le module de rigidité correspondant $EI_{mes}(s)$, que nous comparerons à la fonction initiale $EI_{ex}(s)$.

Sur la Figure 8, on voit que la modification de la flèche est indécélable à cette échelle, mais que par contre le module de rigidité calculé est totalement erroné (valeurs négatives et infinies). Ce graphique est illisible mais la représentation de l'inverse de la rigidité (Figure 9) permet de constater que la légère oscillation de la flèche produit une importante oscillation de l'inverse du module de rigidité qui, en prenant des valeurs nulles, donne ces valeurs de rigidité infinies. Cette amplification des oscillations des données est une des manifestations typiques des problèmes mal posés.

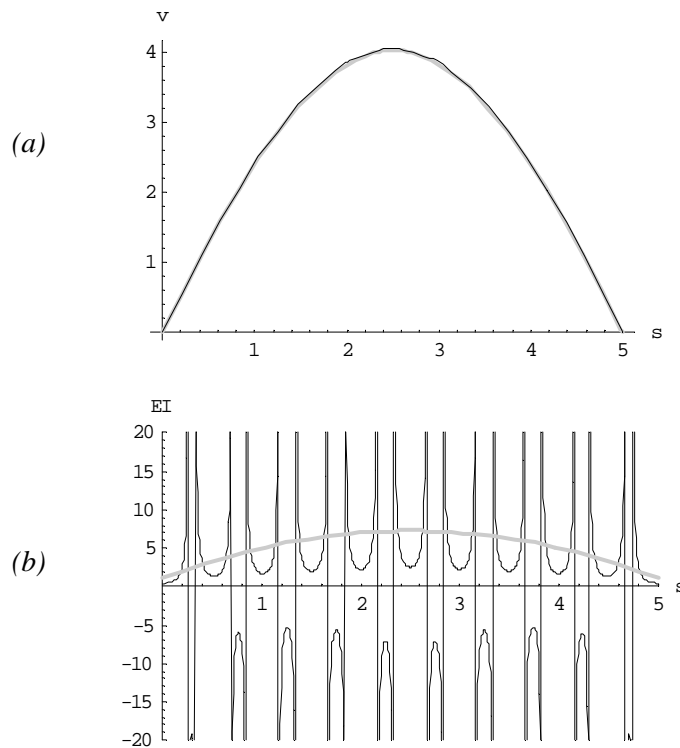


Figure 8. Résolution du problème inverse pour deux flèches légèrement différentes (courbes grise et noire) ; (a) : flèches ; (b) : rigidités.

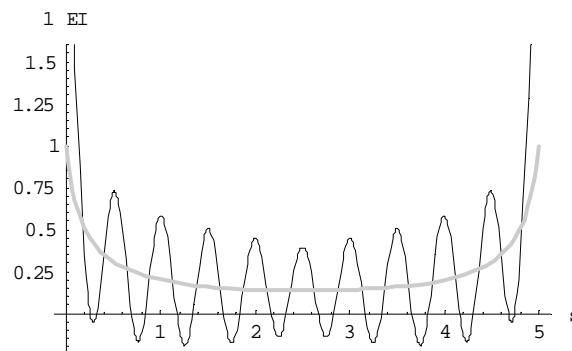


Figure 9. Représentation de l'inverse de la rigidité présentée Figure 8b.

Ce calcul nous a permis de nous rendre compte que la solution du problème inverse était extrêmement sensible à la *forme* de la flèche, contrairement au problème direct, et que **cette instabilité n'était pas liée à un caractère fini, discret ou insuffisant des mesures**, puisque ici nous considérons un continuum de données.

❖ Flèche connue en un nombre fini de points de mesure

Nous supposons maintenant que nous disposons d'un jeu de 11 mesures discrètes de la flèche (en comptant deux valeurs nulles aux extrémités).

□ Méthode de résolution

La méthode d'inversion suppose qu'à partir des points de mesure nous construisons une fonction d'approximation de la flèche au moins C^2 :

1. A partir des n points de mesure v_i simulés nous construisons une fonction $\bar{v}(s)$ représentant une approximation de la flèche par régression. Pour cela nous utilisons comme approximation un polynôme de degré m défini par $m+1$ coefficients a_j regroupés pour les notations dans le vecteur $\{a\} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_m]^T$.

$$(57) \quad \bar{v}(s, \{a\}) = \sum_{j=0}^m a_j s^j$$

2. Puis la fonction d'approximation est obtenue en ajustant les coefficients a_i pour minimiser l'écart au sens des moindres carrés entre $\bar{v}(s, \{a\})$ et les mesures v_i .

$$(58) \quad \{a^*\} = \min_{\{a\}} \sum_{i=1}^n (\bar{v}(s_i, \{a\}) - v_i)^2$$

3. La fonction $\bar{v}(s, \{a^*\})$ d'approximation de la flèche est ensuite dérivée deux fois et nous obtenons une approximation de EI par la formule (55).

$$(59) \quad \overline{EI}(s, \{a^*\}) = -\frac{M_z}{\bar{v}''(s, \{a^*\})}$$

Pour simplifier l'écriture dans la suite, on note $\bar{v}(s, \{a^*\}) = \bar{v}(s)$, de même que $\overline{EI}(s, \{a^*\}) = \overline{EI}(s)$.

Nous avons choisi de tester cette méthode de résolution à partir de différents jeux de 9 mesures non nulles de la flèche :

- mesures exactes ;
- mesures modifiées en un seul point ;
- mesures bruitées

Nous examinerons les résultats pour des fonctions d'approximation $\bar{v}(s)$ de degré 4 et 6.

□ Mesures exactes

Une première phase consiste à simuler des mesures exactes de la flèche :

1. nous nous donnons une expression de $EI_{ex}(s)$, considérée être la **valeur exacte** que nous recherchons par la résolution du problème inverse ; dans notre cas nous choisissons une forme analogue à celle utilisée dans [II-8] :

$$(60) \quad EI_{ex}(s) = 1 + 5s - s^2$$

2. nous calculons la flèche correspondante $v(s)$;
3. en n points de mesure s_1, s_2, \dots, s_n nous prenons la valeur de la flèche $v_i = v(s_i)$.

Nous obtenons les 11 points de la Figure 10.

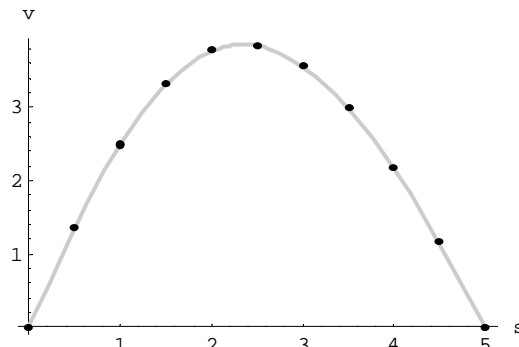


Figure 10. Données non bruitées. $L=5m$, $q=2m$, $P=10N$

La 0 montre le résultat de l'inversion. On constate que même en l'absence de bruit les résultats de l'inversion peuvent être mauvais : les très légères différences entre la fonction exacte et son approximation d'après les mesures sont amplifiées.

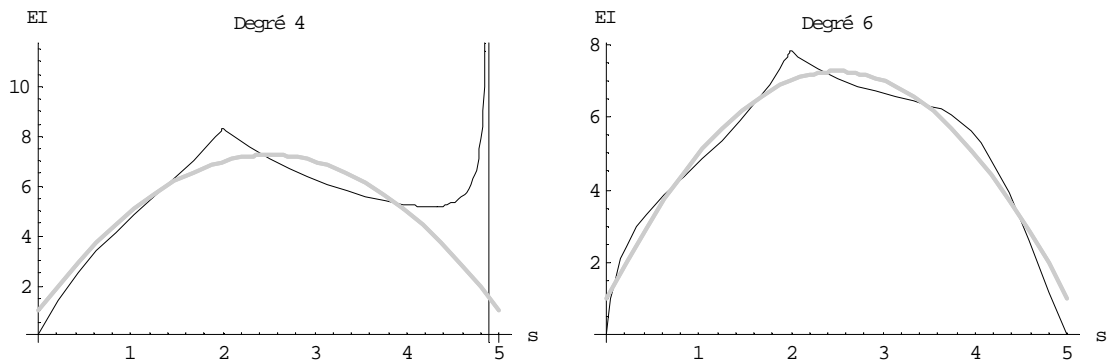


Figure 11. Rigidités résultats de l' inversion directe ; mesures non bruitées ; interpolation des mesures par des polynômes de degré 4 et 6 ; valeur exacte en gris

□ Mesures modifiées en un point

Nous pouvons maintenant ajouter un bruit aux mesures exactes. Nous commencerons par les modifier très légèrement, en supposant que la troisième mesure est 10% trop élevée (Figure 12)

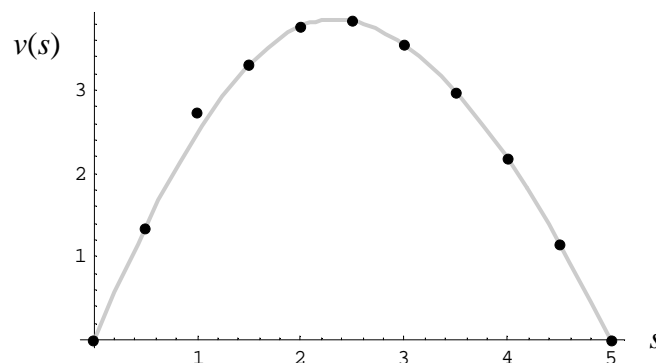


Figure 12. Données légèrement modifiées. $L=5m$, $q=2m$, $P=10N$

La Figure 13 montre bien que cette légère modification des données change sensiblement la forme des résultats par rapport à ceux obtenus à partir des mesures exactes.

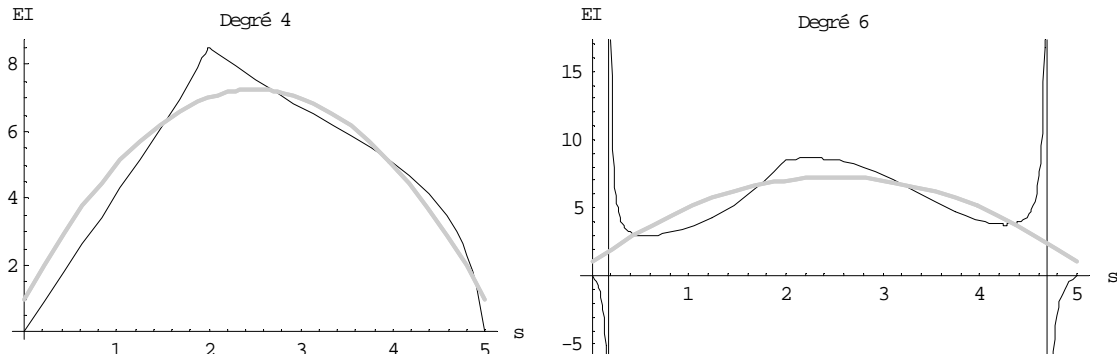


Figure 13. Rigidités résultats de l' inversion directe ; données légèrement modifiées ; interpolation des mesures par des polynômes de degré 4 et 6 ; valeur exacte en gris

□ Mesures bruitées

Enfin nous considérons des mesures bruitées, en ajoutant aux mesures exactes de la Figure 10 un bruit blanc gaussien d'écart-type égal à 10% de la valeur exacte. Ainsi la $i^{ème}$ mesure bruitée est obtenue par :

$$(61) \quad v_i^{bruit} = v_i^{exact} + \pi \left(\frac{v_i^{exact}}{10} \right)$$

où :

v_i^{bruit} est la mesure bruitée simulée ;

v_i^{ex} est la mesure exacte de la flèche ;

$\pi(\sigma)$ est une réalisation d'une variable aléatoire normale de moyenne nulle et d'écart-type σ ; les différentes réalisations sont indépendantes les unes des autres.

Nous nous situons cependant toujours dans un cadre déterministe en considérant que cette variation par rapport aux valeurs exactes n'est due qu'aux erreurs de mesure et pas à une variabilité du modèle que nous chercherions à caractériser.

Nous avons réalisé 4 simulations de 11 mesures avec un coefficient de variation de 10%, présentées dans la Figure 14. Le premier jeu de mesures peut paraître singulier puisque par hasard les quatre mesures centrales sont toutes inférieures à la valeur exacte. Nous avons néanmoins décidé de le conserver.

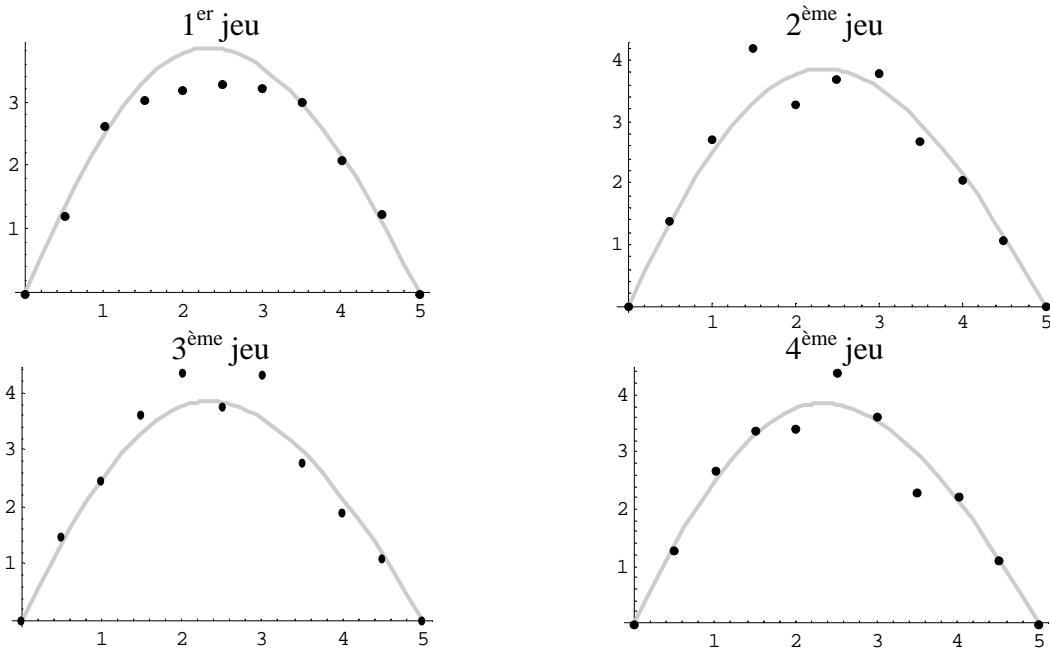


Figure 14. Données bruitées ($c_v=10\%$); $L=5m$, $q=2m$, $P=10N$

Les résultats de l'inversion sont présentés dans la Figure 15. Nous voyons que la rigidité trouvée diffère considérablement selon le jeu de mesures considéré. En outre nous pouvons remarquer que lorsque la fonction d'approximation est de degré 4, le résultat est encore relativement proche de la rigidité exacte, sans doute parce qu'elle est justement elle-même de degré 4. Par contre, pour une fonction d'approximation de degré 6 (donc à peine supérieur), les résultats sont totalement erronés.

Ces résultats sont explicables : même si $\bar{v}(s)$ est une bonne approximation de la *valeur* de $v(s)$, elle peut être une très mauvaise approximation de sa *forme* et donc $\bar{v}''(s)$ peut être considérablement différent de $v''(s)$ sur la totalité de la poutre. Plus le degré du polynôme d'approximation des mesures est élevé, plus la courbe d'approximation est chahutée (même de manière non visible) et le résultat instable : la modification d'un point, même sans changer beaucoup l'approximation de la flèche, change totalement le résultat.

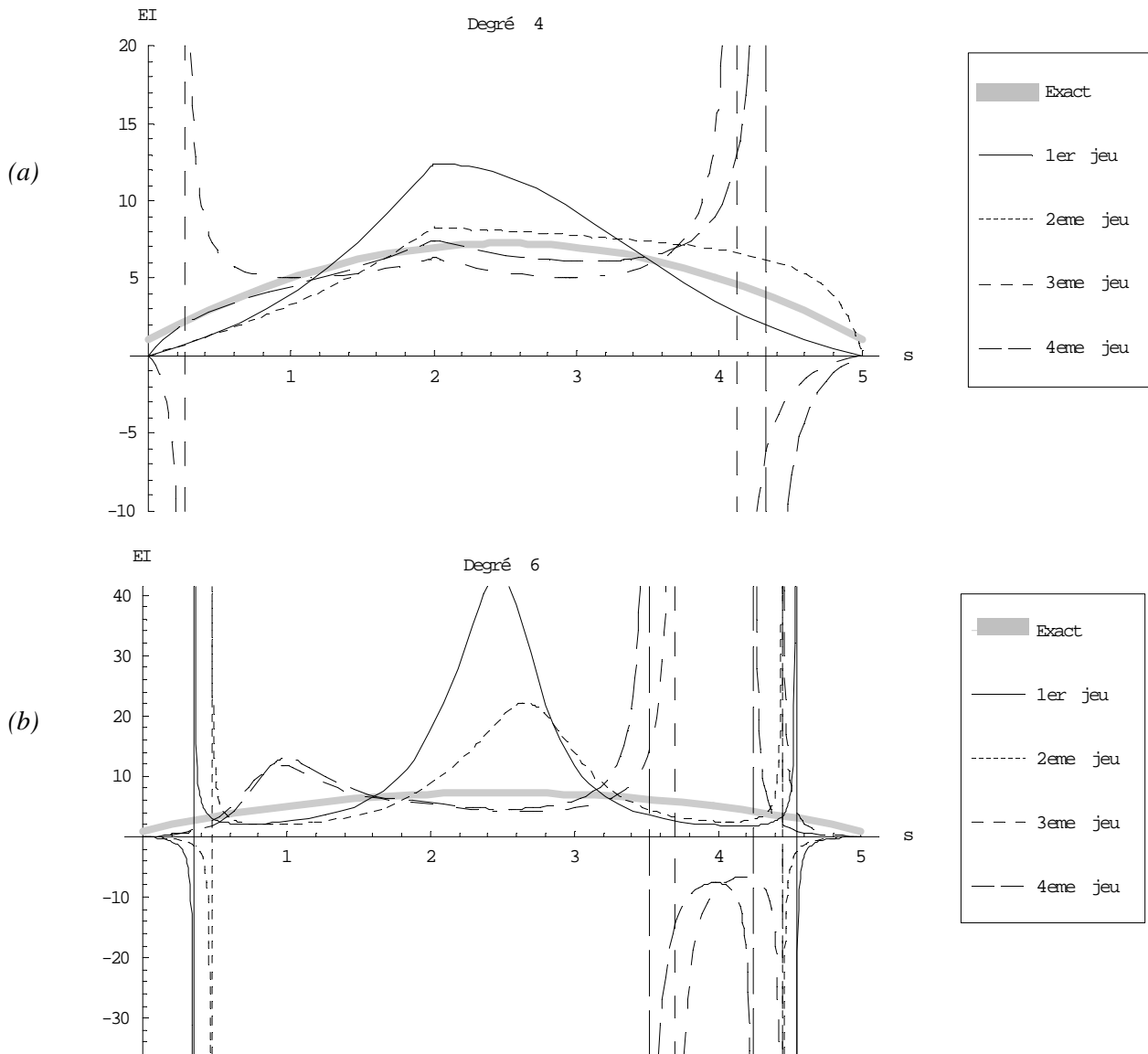


Figure 15. *Rigidités résultats de l'inversion directe ; données bruitées ; interpolation des mesures par des polynômes de degré 4 (a) et 6 (b)*

❖ Conclusion sur l'inversion directe

Une inversion directe du problème basée l'approximation de la flèche par un polynôme n'est pas une méthode satisfaisante : même des mesures exactes donnent des résultats erronés.

Ces résultats montrent bien les effets du caractère mal posé du problème, qui se manifeste ici concrètement par le fait que les dérivées de courbes obtenues par expérimentation sont instables vis à vis des mesures. Etant donné que cette instabilité se produit même pour des données en nombre infini (§□), les résultats ne peuvent pas être améliorés par des mesures supplémentaires. Nous observons donc que le caractère mal posé du problème est indépendant de la quantité de mesures disponibles, comme indiqué dans [II-7]. Ainsi même des mesures additionnelles de la rotation $v'(s)$ ne permettraient pas de supprimer l'instabilité. .

Il serait cependant possible d'améliorer cette méthode en ajoutant des contraintes, par exemple en imposant que la dérivée seconde de la flèche soit régulière et du même signe sur toute la longueur de la poutre. Un prolongement de cette idée consiste à contrôler la forme de la rigidité et à la faire varier pour se rapprocher de la flèche mesurée. C'est l'idée de base des méthodes de minimisation que nous allons voir maintenant.

4.3.2 Minimisation

[II-1], [II-6], [II-8], [II-9]

Une méthode générale de résolution de ce problème inverse est de faire varier le module de rigidité pour minimiser la différence entre la flèche mesurée et la flèche simulée par le biais de résolutions du problème direct. Il s'agit d'une méthode de *recalage* : on fait varier un modèle théorique pour retrouver des résultats expérimentaux. Dans la suite nous commencerons par présenter l'approche, puis nous l'appliquerons aux jeux de mesures définis précédemment (exactes, ponctuellement modifiées, bruitées).

❖ Reformulation du problème inverse

Nous allons reformuler le problème inverse pour en faire un problème de minimisation. Nous devons alors définir :

- des variables d'optimisation ;
- une fonction de performance ;
- éventuellement des contraintes.

□ Variables d'optimisation

L'optimisation porte sur la fonction $EI(s)$. Nous devons donc passer par une discrétisation de la rigidité, par exemple en cherchant un polynôme de degré n , une série de Fourier, ou tout autre développement permettant la paramétrisation par $n+1$ scalaires. Dans tous les cas nous définissons notre rigidité comme une fonction de l'abscisse s et de $n+1$ scalaires λ_i , qui seront nos variables d'optimisation :

$$(62) \quad EI(s) = \overline{EI}(s, \{\lambda\})$$

avec :

$$(63) \quad \{\lambda\} = \begin{Bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{Bmatrix}$$

A partir de cette rigidité nous pouvons calculer une flèche $\bar{v}(s, \{\lambda\})$ correspondante en utilisant la résolution du problème direct.

On notera $\{\lambda^*\}$ le jeu de variables d'optimisation solution du problème de minimisation.

□ Fonction de performance

Nous avons utilisé une fonction de performance qui mesure l'écart, au sens des moindres carrés, entre les valeurs de la flèche v_i mesurées aux m points d'abscisses s_i et les valeurs simulées $\bar{v}(s_i, \{\lambda\})$:

$$(64) \quad J(\{\lambda\}) = \sum_{i=1}^m (\bar{v}(s_i, \{\lambda\}) - v_i)^2$$

On peut toutefois imaginer d'autres expressions de la fonction de performance. Nous pouvons par exemple construire une fonction $v_{mes}(s)$ d'approximation de la flèche par régression des points de mesure, puis mesurer l'écart quadratique entre cette fonction et la fonction $\bar{v}(s, \{\lambda\})$. Dans ce cas la fonction de performance serait :

$$(65) \quad J(\{\lambda\}) = \int_0^L \left[\bar{v}(s, \{\lambda\}) - v_{mes}(s) \right]^2 ds$$

Cette formulation est beaucoup plus coûteuse que (64), et aurait comme avantage –relatif– de clairement séparer l’aspect construction d’une flèche à partir des mesures et l’aspect résolution du problème inverse pour cette flèche.

□ *Contraintes*

Les contraintes consistent en un certain nombre d’égalités ou d’inégalités que les variables d’optimisation solution doivent respecter. Du fait des limites de l’algorithme de minimisation de *Mathematica*, nous n’avons pas pu définir de contrainte. Mais il serait possible d’imposer que la rigidité soit toujours positive ou toujours supérieure à une valeur minimale.

□ *Formulation du problème inverse*

Notre problème inverse se formule maintenant sous la forme du problème de minimisation suivant : trouver le jeu de paramètres $\{\lambda^*\}$ qui minimise la fonction $J(\{\lambda\})$.

❖ Propriétés de la solution

□ *Existence et unicité*

L’existence et l’unicité de la solution du problème de minimisation dépendent fortement de la forme de la fonction de performance dans l’espace des variables λ , du point de départ de la minimisation, et de l’algorithme de recherche employé. Si la convergence est trop lente, il peut n’être trouvé aucune solution. Si des minima locaux existent, plusieurs solutions différentes peuvent être trouvées. D’un point de vue pratique on ne peut être à priori sûr ni de l’existence, ni de l’unicité de la solution, comme dans la plupart des problèmes de minimisation complexes.

□ *Stabilité*

Nous n’avons fait que reformuler le problème sous une autre forme, il est donc toujours instable : pour modifier un peu la forme de la flèche, il faut modifier beaucoup la rigidité, ce qui rend la solution sensible aux données. Toutefois une méthode de régularisation existe pour la stabiliser, comme nous allons le voir plus loin.

❖ Exemple de minimisation sans régularisation

□ *Mesures non bruitées*

Commençons par tester la minimisation avec des données non bruitées définies précédemment dans la Figure 10. Nous considérons donc une poutre de paramètres $L=5m$, $q=2m$, $P=10N$ avec une rigidité réelle définie par l’expression (60), soit $EI_{ex}(s) = 1 + 5s - s^2$, et nous calculons la valeur exacte de la flèche en 11 points régulièrement répartis.

Il nous reste à définir la forme de rigidité que nous cherchons. Nous devons donc formuler une hypothèse forte, qui dans la réalité serait basée sur des connaissances à priori. Supposons que nous sachions que la rigidité peut être exprimée comme un polynôme de degré 2. Nous posons donc $\overline{EI}(s, \{\lambda\}) = a + bs + cs^2$. Le vecteur des variables d’optimisation est ici $\{\lambda\} = [a \ b \ c]^T$.

Nous pouvons alors lancer la procédure de minimisation à partir d'un point de départ choisi arbitrairement, par exemple ici $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$. Les résultats obtenus sont présentés dans la Table 2 et la Figure 16

Variables d'optimisation →	a	b	c
Exact	1	5	-1
Calculé	0,999985	5,00002	-1,00001

Table 2. Résolution du problème inverse par minimisation pour des données non bruitées pour le point de départ (1 ; 1 ; 1).

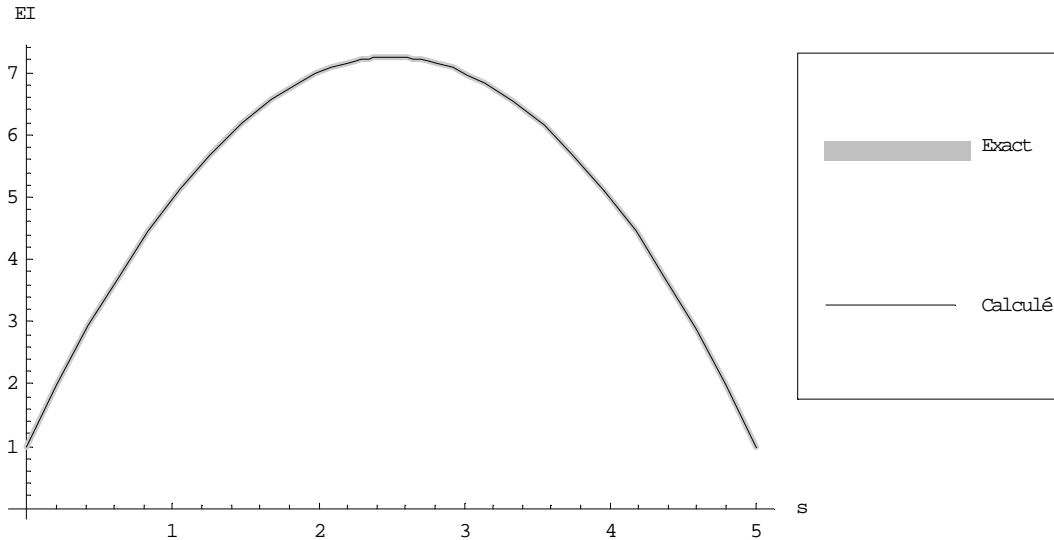


Figure 16. Rigidités exacte et calculée par minimisation pour des mesures exactes.

Nous voyons que dans notre exemple la minimisation nous donne un résultat excellent en l'absence de bruit, même si nous ne disposons que de mesures discrètes en nombre limité. Il faut rappeler que la méthode précédente d'inversion et de régression des mesures ne permettait pas ce résultat et que même sans bruit le résultat pouvait être erroné. Cependant le coût de calcul est beaucoup plus conséquent, mais peut sans doute être réduit soit en simplifiant la résolution du problème direct (en utilisant des éléments finis par exemple), soit en se tournant vers des techniques d'optimisation déjà développées (approche par état adjoint par exemple).

□ Mesures ponctuellement modifiées sans régularisation

Considérons maintenant le même jeu de données, mais en considérant que la troisième mesure est 10% trop élevée (Figure 12), les autres étant exactes. Nous obtenons les résultats présentés dans la Figure 17. Nous voyons que cette légère modification des données change le résultat de manière non négligeable (en particulier le coefficient a est totalement erroné, ce qui fausse le résultat à l'extrémité gauche de la poutre), mais que l'erreur reste cependant limitée.

Variables d'optimisation →	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
Exact	1	5	-1
Calculé	-0,00841	5,64199	-1,07565

Table 3. Résolution du problème inverse par minimisation pour des mesures ponctuellement modifiées pour le point de départ (1 ; 1 ; 1)

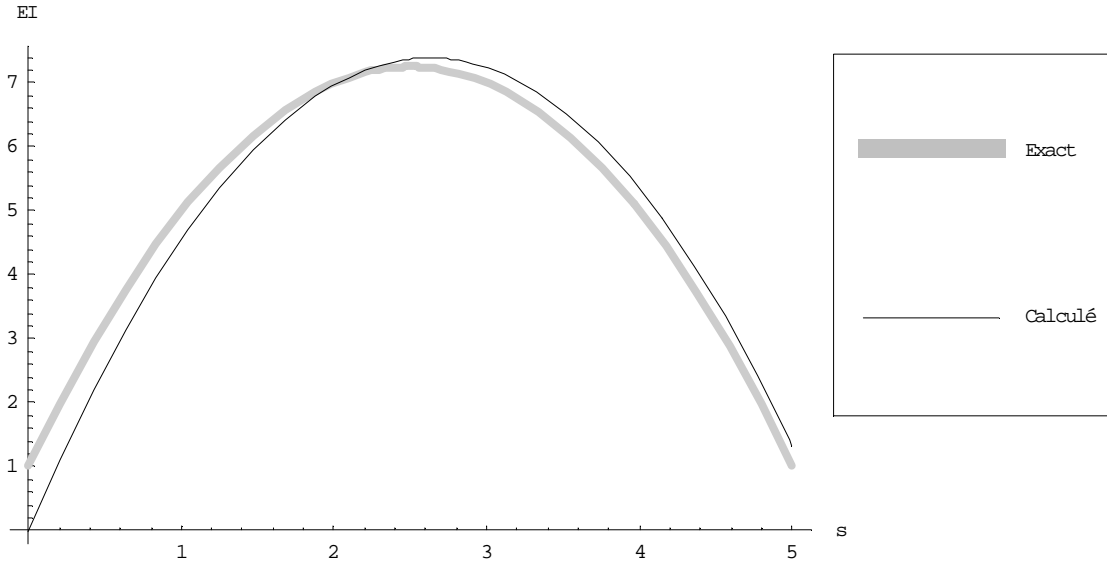


Figure 17. Rigidités exacte et calculée par minimisation pour les mesures ponctuellement modifiées

□ Données bruitées sans régularisation

Nous nous intéressons maintenant aux jeux de mesures bruitées présentés dans la Figure 14. Ce bruitage est obtenu en ajoutant aux mesures exactes un bruit blanc gaussien d'écart-type égal à 10% de la valeur exacte.

Une tentative de résolution par minimisation sans régularisation avec ces données donne les rigidités présentées dans la Figure 18.

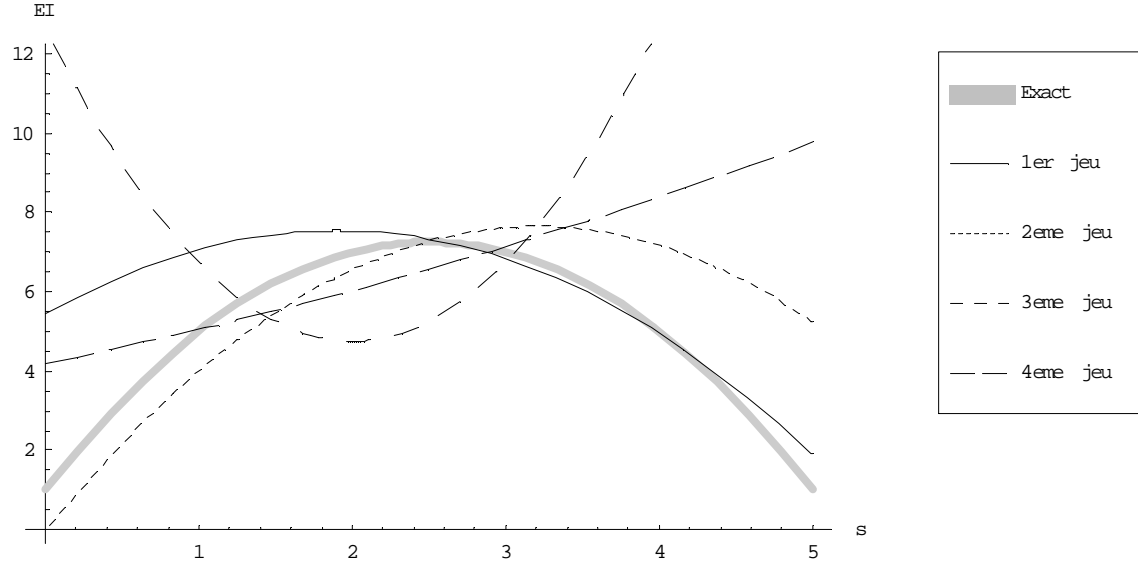


Figure 18. Rigidités calculées par minimisation sans régularisation pour les 4 jeux de mesures bruitées

Nous pouvons constater au vu de ces résultats que la solution trouvée par minimisation est très instable : des jeux de données relativement proches donnent des résultats très différents. Cette sensibilité au bruit peut être réduite par la méthode de régularisation que nous allons voir maintenant.

❖ Présentation de la méthode de régularisation

Nous avons vu que la solution $\overline{EI}(s, \{\lambda^*\})$ obtenue par minimisation est sensible au bruit.

Cela vient de ce que le problème inverse considéré est *mal posé*. Régulariser un tel problème consiste à le transformer en un problème *proche* bien posé (i.e. avec une solution stable). La principale difficulté est alors de réaliser un compromis entre fidélité aux données et stabilité. La méthode de régularisation la plus largement répandue est celle introduite par Tikhonov [II-10] en 1963. Elle consiste à ajouter à la fonction de performance un terme régularisateur.

D'une manière générale, si notre problème inverse est écrit sous la forme du problème de minimisation suivant :

« connaissant l'observation o et la fonctionnelle F , trouver la fonction u tel que $\|F(u) - o\|^2$ soit minimal »,

alors le problème régularisé sera de la forme :

« connaissant l'observation o , la fonctionnelle F , le réel $\alpha > 0$ et l'opérateur B , trouver la fonction u tel que $\|F(u) - o\|^2 + \alpha \|B(u)\|^2$ soit minimal ».

Typiquement, on utilise par défaut $B(u) = u$, mais on peut également poser $B(u) = u - u_0$ (u_0 étant une valeur *a priori* de la solution recherchée), ou bien utiliser pour B un opérateur différentiel (par exemple Tikhonov utilise dans [II-10] une somme pondérée des n premières dérivées de u en posant $B(u)(s) = \sum_{i=0}^{n+1} K_i(s) u^{(i)}(s)$).

Dans notre cas la fonction de performance du problème régularisé peut être :

$$(66) \quad J_{reg}(\{\lambda\}, \alpha) = \sum_{i=1}^m \left(\bar{v}(s_i, \{\lambda\}) - v_i \right)^2 + \alpha \left\| \overline{EI}(s, \{\lambda\}) \right\|^2$$

avec $\alpha \in \mathbf{R}$ le paramètre de régularisation et :

$$(67) \quad \left\| \overline{EI}(s, \{\lambda\}) \right\|^2 = \int_0^L \overline{EI}(s, \{\lambda\})^2 ds$$

Cette intégration supplémentaire (67) ajoute un coût de calcul non négligeable à chaque évaluation de la fonctionnelle, en contrepartie d'une amélioration espérée de la stabilité des résultats. Le jeu de paramètres solution du nouveau problème de minimisation dépend de α , nous notons donc dans la suite $\{\lambda_\alpha^*\}$ cette solution, appelée *quasisolution* du problème.

Toute la difficulté est maintenant de choisir le paramètre α optimal. Ce paramètre doit être tel que des jeux de données proches donnent des résultats proches et justes, ce qui revient à assurer un *compromis* entre fidélité à l'équation initiale (α petit) et robustesse du résultat (α grand).

D'après Morozov, la valeur optimale de α est celle qui vérifie [II-9] :

$$(68) \quad \max_{\{s_1, \dots, s_m\}} \left\| \bar{v}(s_i, \{\lambda_\alpha^*\}) - v_i \right\| = \varepsilon$$

où ε est l'erreur maximale sur la mesure de la flèche : $\varepsilon = \max_{\{s_1, \dots, s_m\}} \left(\|v_{exact}(s_i) - v_i\| \right)$.

Cela nous oblige à trouver la racine de la fonction implicite suivante :

$$(69) \quad K(\alpha) = \left\| \bar{v}(s_i, \{\lambda_\alpha^*\}) - v_i \right\| - \varepsilon$$

La détermination du α optimal supposerait donc l'imbrication de deux procédures : les valeurs de la fonction K pour un α donné étant obtenues par minimisation de la fonction de performance J_{reg} . Cette procédure est très coûteuse et est rarement employée en pratique.

Heureusement il est possible d'utiliser une valeur approximative du α optimal. Ainsi, d'après Tikhonov, elle peut être calculée comme suit [II-1] :

$$(70) \quad \alpha = \frac{\varepsilon^2}{\left\| EI \right\|^2}$$

avec :

ε l'erreur maximale sur la mesure de la flèche ;

$\left\| EI \right\|^2 = \int_0^L EI(s)^2 ds$, la norme de la rigidité exacte.

Dans le cadre de notre exemple ces deux quantités sont connues, mais il est intéressant de noter que dans un cas réel elles sont difficilement accessibles, ce qui fait que même le α utilisé ne peut être qu'une approximation de la valeur déjà approximative recommandée par Tikhonov.

En outre il existe d'autres méthodes de choix du paramètre de régularisation que nous n'avons pas encore étudiées. La science de l'optimisation pourrait nous fournir quelques méthodes intéressantes, car elle connaît un problème similaire pour choisir le paramètre de Lagrange dans les algorithmes de programmation quadratique séquentielle.

❖ Mise en œuvre de la régularisation

□ Remarques sur le choix du paramètre de régularisation

L'efficacité de la régularisation dépend de la valeur du paramètre α . A partir des valeurs exacte nous pouvons calculer l'approximation de la valeur optimale de ce paramètre d'après Tikhonov par la formule (70). Dans un cas réel cette valeur devrait être estimée (à partir de données à priori, d'un problème simplifié,...), mais ici nous disposons de ε et EI , nous pouvons donc en calculer la valeur précise. La Table 4 présente les valeurs du paramètre de régularisation recommandé obtenues par cette méthode. Nous voyons qu'elles varient entre $2 \cdot 10^{-3}$ et $5 \cdot 10^{-3}$ selon le jeu de données.

Jeux de données (voir Figure 10)	α_{Tik}
1 ^{er}	$2,2 \cdot 10^{-3}$
2 ^{ème}	$5,3 \cdot 10^{-3}$
3 ^{ème}	$3,9 \cdot 10^{-3}$
4 ^{ème}	$3,1 \cdot 10^{-3}$

Table 4. Valeurs du paramètre de régularisation obtenues par la formule de Tikhonov pour les 4 jeux de données.

La Figure 19 montre l'évolution de la rigidité trouvée par minimisation pour le deuxième jeu de mesures bruitées de la Figure 14 quand le paramètre de régularisation varie entre 0 et 1 : nous voyons que la rigidité solution varie fortement avec α , mais qu'il existe une valeur optimale (ici autour de 10^{-2} , voir Figure 20) donnant un résultat acceptable, c'est à dire dans une zone proche de l'approximation donnée par la formule de Tikhonov.

Les autres jeux de données donnent des résultats équivalents (non représentés ici) : les rigidités varient fortement avec α . Nous allons donc maintenant réaliser une étude paramétrique de l'influence du paramètre de régularisation.

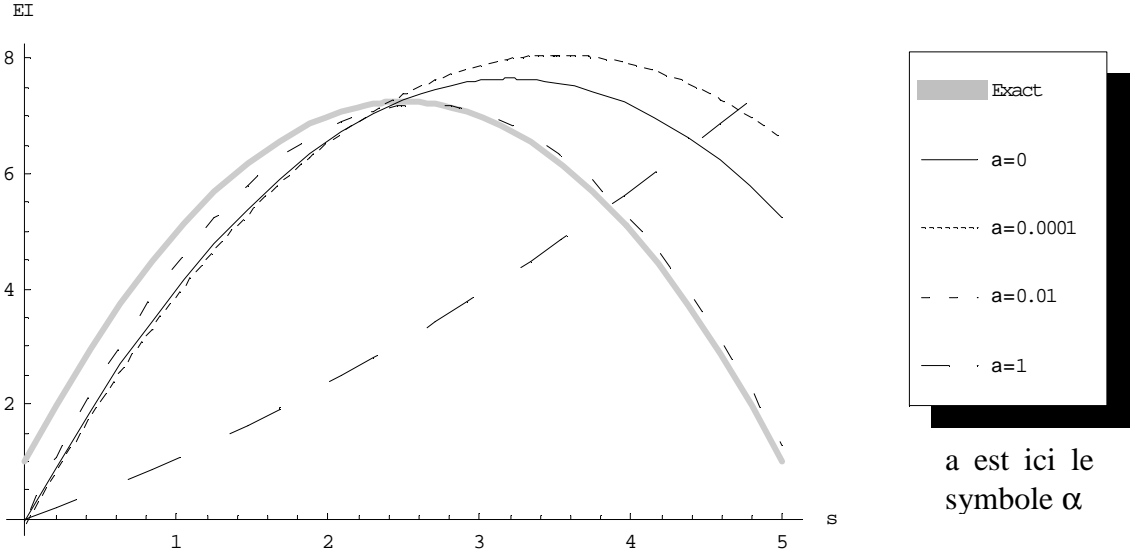


Figure 19. Rigidité trouvée par minimisation avec régularisation pour le 2^{ème} jeu de mesures bruitées avec différentes valeurs du paramètre de régularisation.

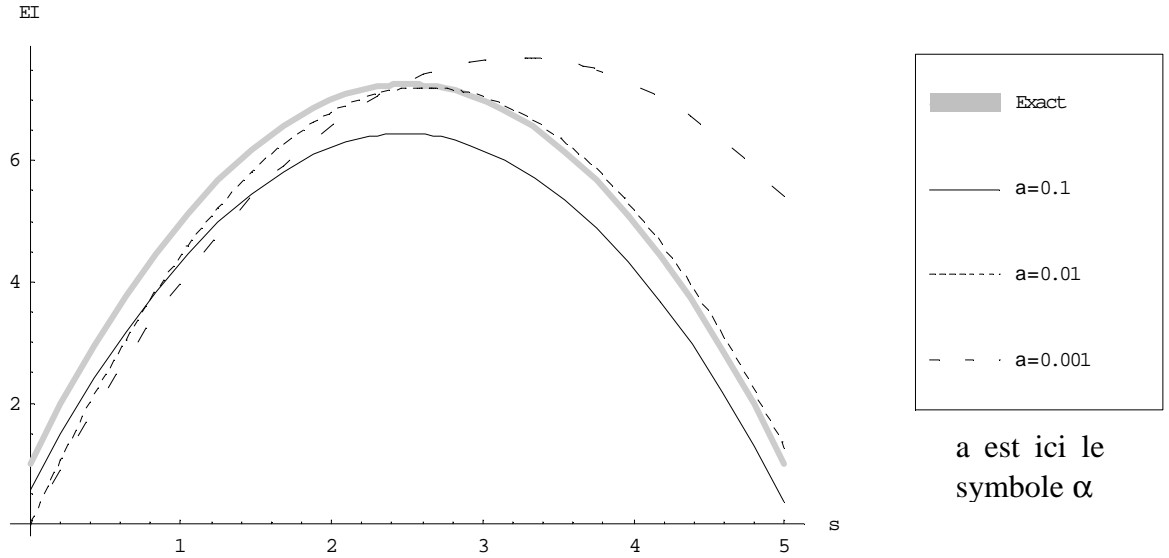


Figure 20. Rigidité trouvée par minimisation avec régularisation pour le 2^{ème} jeu de mesures bruitées avec un paramètre de régularisation autour de 0,01.

Chapitre 1 Etude paramétrique de l'effet du paramètre de régularisation

Nous avons réalisé une étude paramétrique pour chacun des jeux de mesures bruitées de la Figure 14, en faisant varier α pour déterminer la valeur donnant le meilleur résultat. Afin de pouvoir comparer les rigidités obtenues en forme et valeur, nous avons utilisé un critère d'erreur quadratique Err mesurant l'écart entre la fonction solution et la fonction exacte :

$$(71) \quad Err(\{\lambda_\alpha\}) = \sqrt{\int_0^L (EI(s) - \overline{EI}(s, \{\lambda_\alpha\}))^2 ds}$$

avec :

$EI(s)$ la rigidité exacte ;

$\overline{EI}(s, \{\lambda_\alpha^*\})$ la rigidité trouvée par minimisation pour le paramètre de régularisation α .

La Table 5 donne l'erreur quadratique pour différentes valeurs de α testées. Dans notre cas on considérera arbitrairement qu'une erreur quadratique inférieure à 1,5 indique un résultat acceptable avec un coefficient de variation des mesures de 10%.

α	1 ^{er}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}
1	7,95	7,95	9,72	9,22
0,5	8,33	18,42	8,72	9,62
0,2	1,91	2,33	2,60	2,28
0,15	1,56	2,02	2,31	1,95
0,1	1,14	1,61	1,95	1,54
$2 \cdot 10^{-2}$	0,93	0,86	1,09	0,53
$1 \cdot 10^{-2}$	1,18	0,92	1,06	0,42
$5 \cdot 10^{-3}$	1,39	1,20	1,56	0,78
$1 \cdot 10^{-3}$	1,65	3,89	4,91	2,37
$1 \cdot 10^{-4}$	3,11	4,92	11,35	6,41
$1 \cdot 10^{-5}$	2,22	5,11	15,82	6,64
0	3,55	3,77	16,82	6,67

Table 5. Erreur quadratique (arrondie à la deuxième décimale) en fonction du paramètre de régularisation pour les quatre jeux de mesures bruitées de la Figure 14.

Le tracé de ces données en utilisant une échelle logarithmique pour α (Figure 21) montre clairement l'existence d'une zone de minimum commune aux 4 jeux de données dans l'intervalle $5 \cdot 10^{-3} < \alpha < 5 \cdot 10^{-2}$. Le point commun entre ces jeux de données étant la moyenne et l'écart-type, nous pouvons supposer qu'un paramètre statistique peut guider le choix du paramètre de régularisation optimal. On notera également que les paramètres de régularisation amenant un minimum d'erreur sont 2 et 5 fois supérieures à ceux obtenus par la formule de Tikhonov (70) indiqués dans la Table 4.

Au vu de ces résultats, il semble que la valeur $\alpha=10^{-2}$ conviendrait pour notre exemple. Les rigidités obtenues pour chaque jeu de données avec cette valeur montrent bien une bonne correspondance avec la rigidité exacte (Figure 22). Même le premier jeu de données, qui est singulier, donne un résultat tout à fait acceptable.

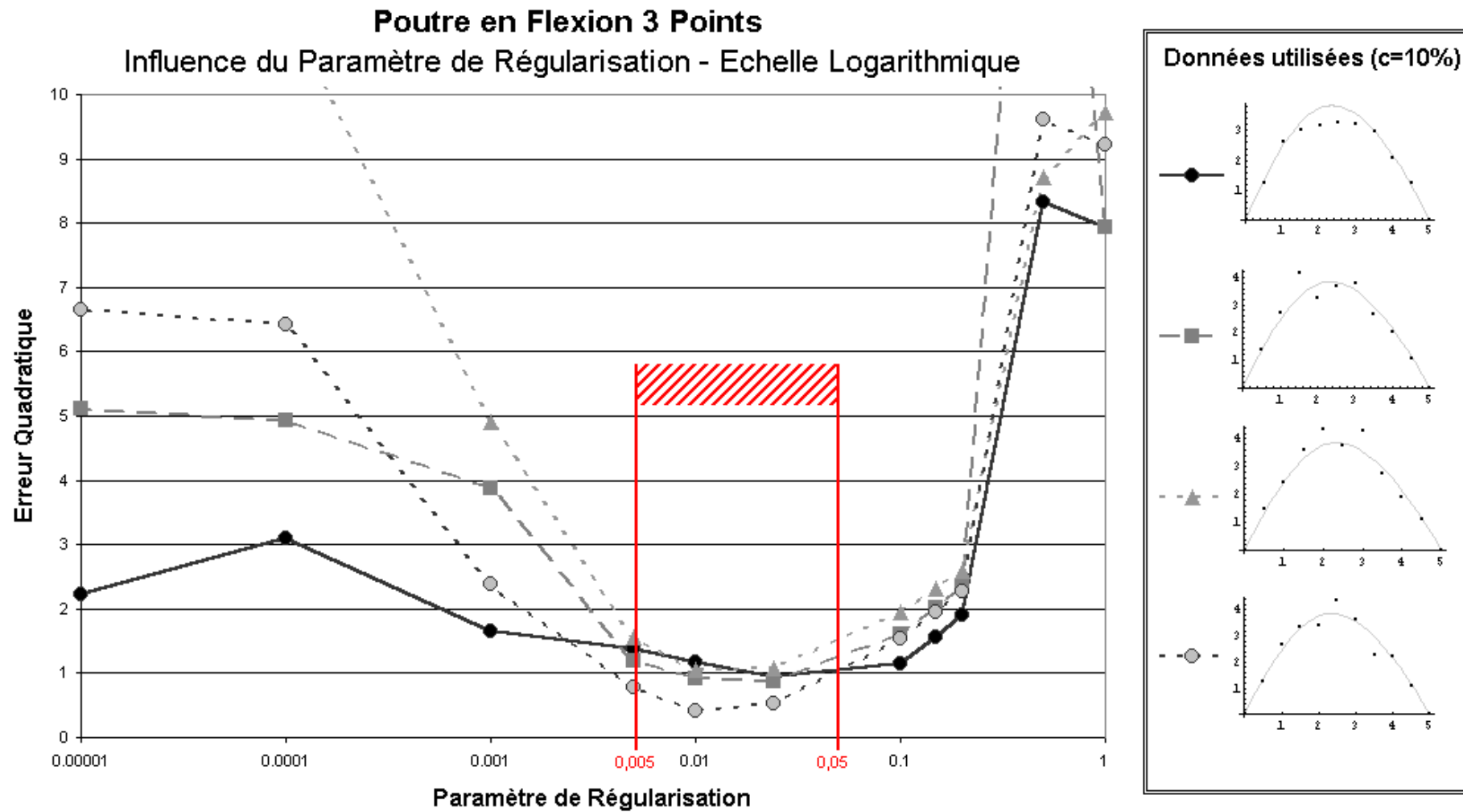


Figure 21. Erreur quadratique en fonction du paramètre de régularisation pour quatre jeux de données simulés avec un coefficient de variation de 10%.

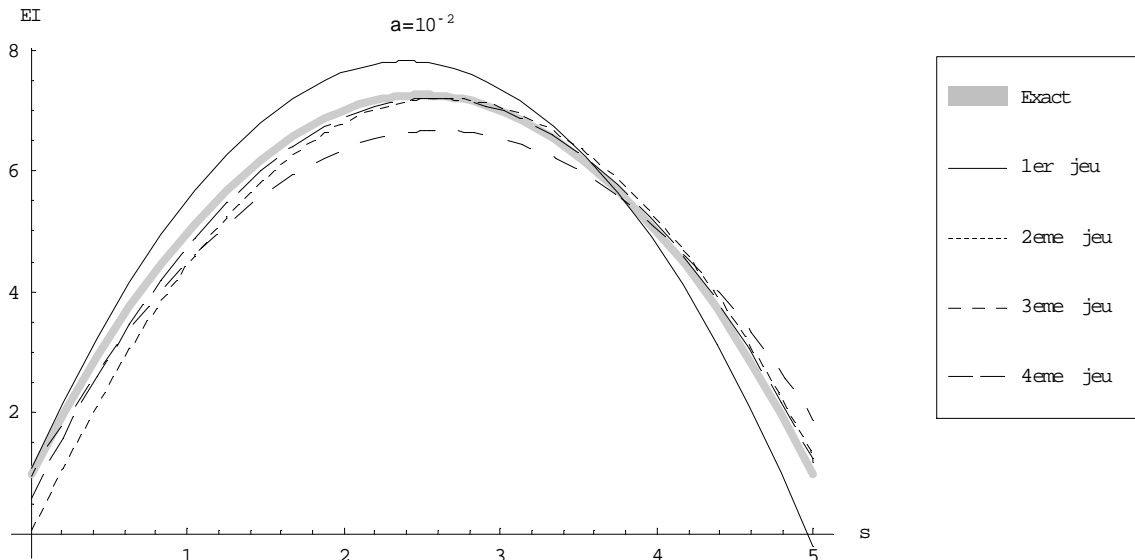


Figure 22. Rigidités calculées par minimisation avec régularisation $\alpha=10^{-2}$ pour les 4 jeux de mesures bruitées

La comparaison de la Figure 18 et de la Figure 22 montre nettement le caractère stabilisateur de la régularisation : si le paramètre de régularisation est adapté, deux jeux de données différents mais proches donnent un résultat similaire, certes un peu différent de la rigidité exacte mais compatible avec les erreurs de mesure introduites.

□ Comparaison de séries de mesures à niveau de bruit différent

Nous avons ensuite réalisé le même test paramétrique pour 3 jeux de données avec cette fois un coefficient de variation des mesures de 5%, c'est à dire moins bruitées. Les résultats sont similaires (Figure 23) : il existe une plage du paramètre de régularisation commune aux trois jeux de données dans lequel l'erreur quadratique admet un minimum.

Bien qu'il soit délicat de réaliser un traitement statistique avec aussi peu de données, nous avons tenté de synthétiser les informations de ces deux études paramétriques en représentant sur la Figure 24 la moyenne de l'erreur quadratique de chaque étude (en excluant toutefois les résultats du premier jeu à 10% qui est trop singulier). Les résultats confirment l'existence de minimum de la moyenne d'erreur différents pour chaque coefficient de variation des mesures :

- pour $c_v = 10\%$, il se situe autour de 0,02 ;
- pour $c_v = 5\%$, il se situe autour de 0,005.

En outre plus la variation est faible, plus la cuvette de minimum est aplatie (une plus grande plage de valeurs du paramètre de régularisation convient).

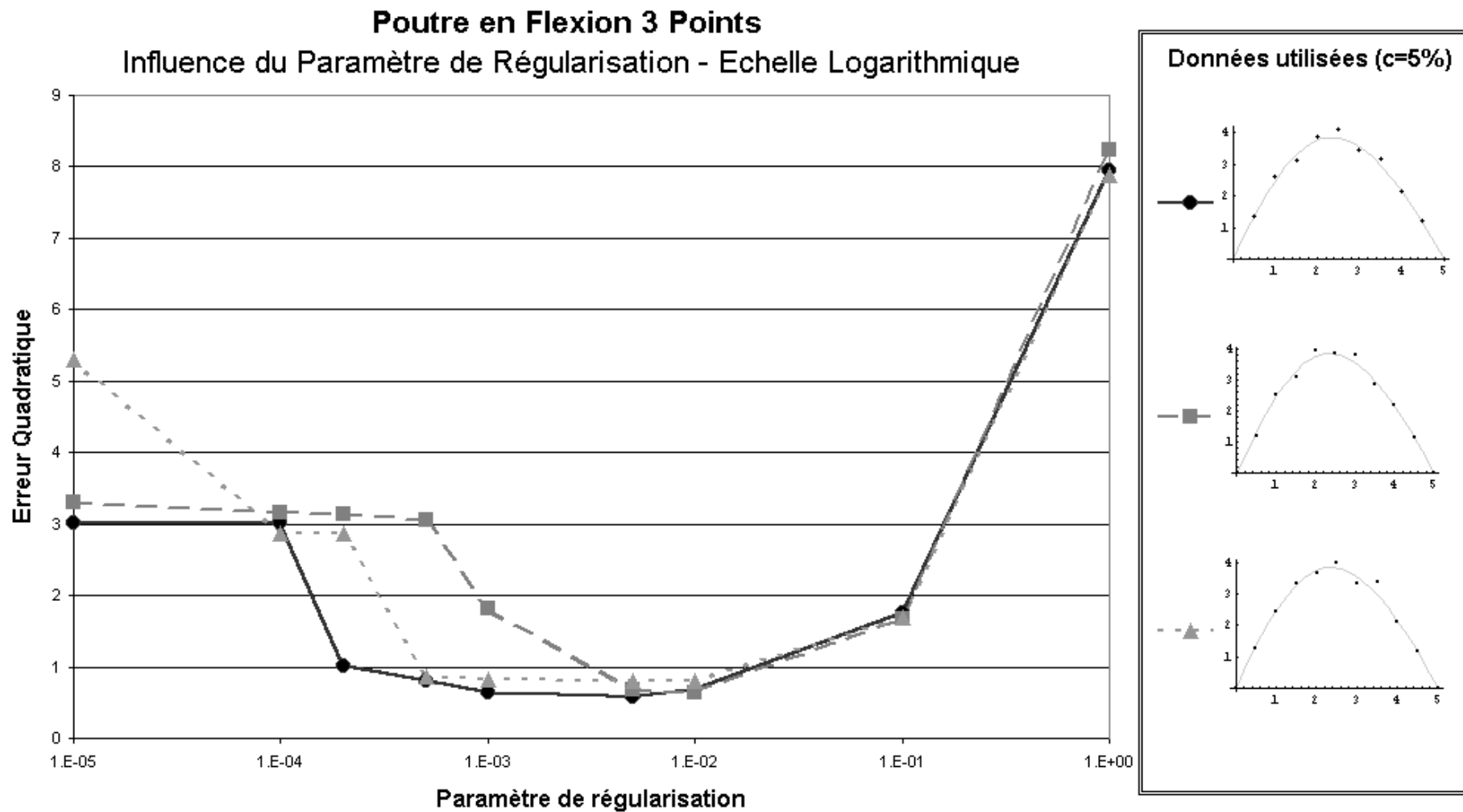


Figure 23. Erreur quadratique en fonction du paramètre de régularisation pour trois jeux de données simulés avec un coefficient de variation de 5%

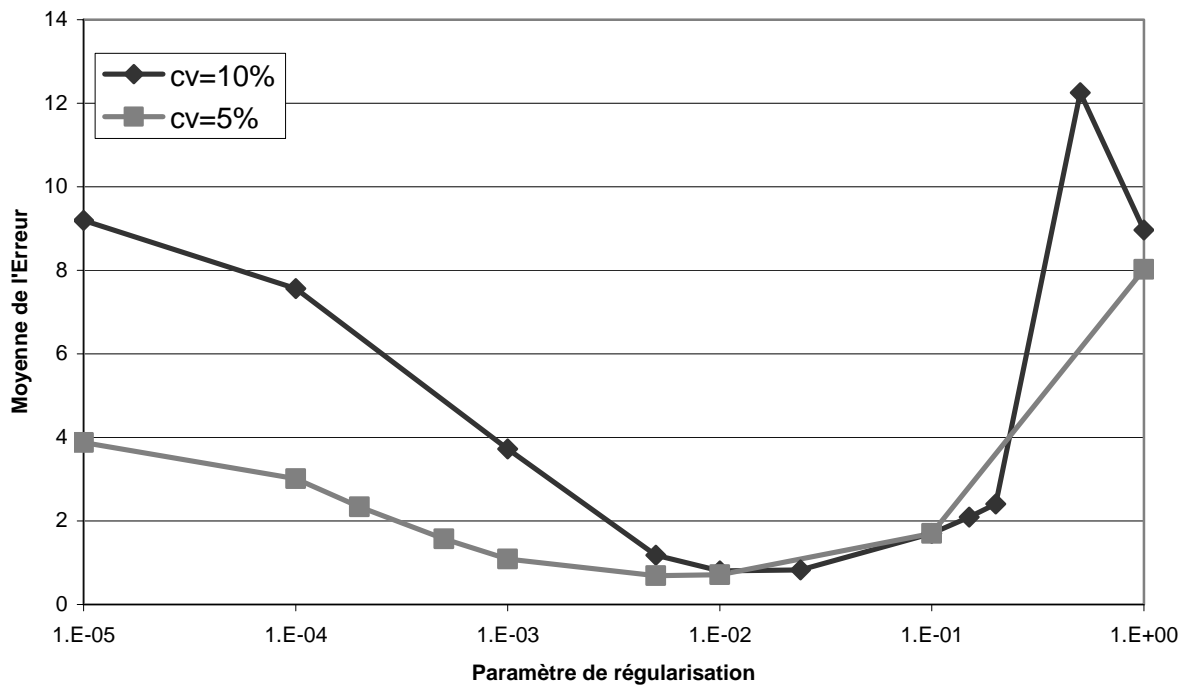


Figure 24. Erreur quadratique moyenne sur 2 séries de 3 jeux de données pour un coefficient de variation des mesures de 5% et 10%

Chapitre 2 Exemple avec degré supérieur

Dans les simulations précédentes, nous cherchions une rigidité de degré 2. On peut se demander dans quelle mesure les résultats obtenus peuvent être liés au fait que la rigidité exacte est effectivement de degré 2. Nous allons donc examiner un cas où nous cherchons une rigidité de degré 4, i.e. :

$$(72) \quad \overline{EI}(s, \{\lambda\}) = \lambda_0 + \lambda_1 s + \lambda_2 s^2 + \lambda_3 s^3 + \lambda_4 s^4$$

L'introduction de ces deux variables d'optimisation supplémentaires induit un coût de calcul bien supérieur, aussi nous sommes nous limités à résoudre le problème pour le deuxième jeu de données présenté Figure 14, d'abord sans régularisation ($\alpha=0$) puis avec le paramètre qui convenait le mieux précédemment ($\alpha=0,01$). Les résultats obtenus sont présentés dans la Figure 25.

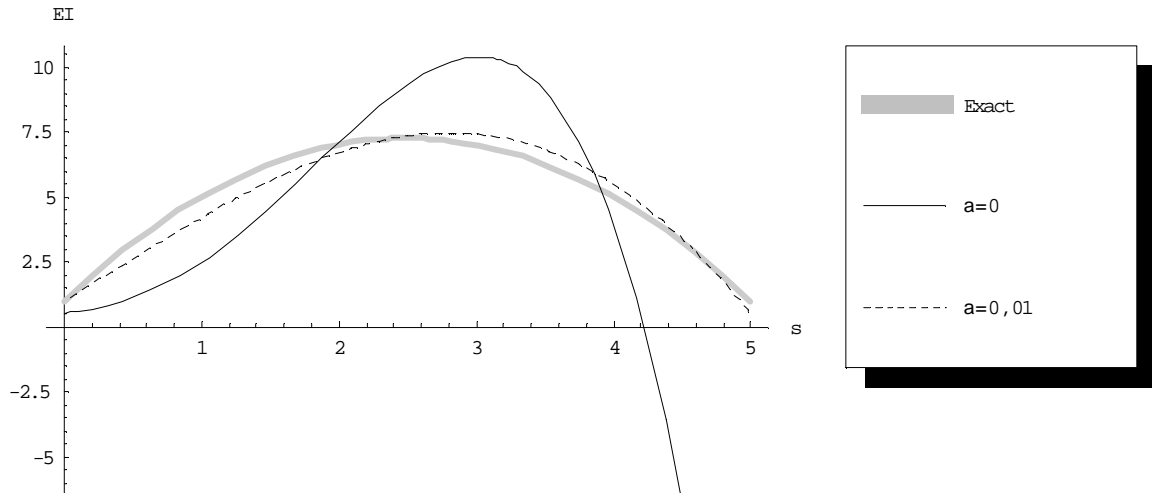


Figure 25. Rigidités obtenues par minimisation en cherchant une rigidité de degré 4, avec et sans régularisation pour le deuxième jeu de mesures bruitées.

Nous constatons que dans le cas d'une minimisation sans régularisation le résultat est totalement erroné en forme et en valeur (erreur quadratique de 26,8). Cela n'en rend que plus frappant l'effet de la régularisation qui permet d'obtenir un résultat presque aussi bon que pour une rigidité de degré 2 (erreur quadratique de 1,1 contre 0,9 précédemment).

❖ Conclusion sur la minimisation

Dans l'exemple testé, et dans la limite des paramètres et hypothèses choisis, la méthode de minimisation a fourni des résultats excellents pour des données sans bruits, et des résultats tout à fait convenables pour des données bruitées, à condition d'utiliser le bon paramètre de régularisation (sinon l'erreur peut empirer).

L'inconvénient majeur de cette méthode est néanmoins clair : le coût de calcul est très important. Cependant il faut signaler que nous n'avons utilisé qu'un simple algorithme de recherche de minimum déjà intégré sous *Mathematica*, qui n'est sans doute pas particulièrement efficace pour un travail de ce type. Il existe par ailleurs des méthodes pour réduire le coût de minimisation (comme la méthode de l'état adjoint qui permet de calculer un gradient à moindre coût). Nous pourrions également envisager de modifier la méthode de résolution du problème direct (en utilisant des éléments finis par exemple) afin de réduire le coût d'évaluation de la fonction de performance.

Un autre inconvénient –qui serait critique dans un cas réel– est le choix du paramètre de régularisation utilisé : **nous avons en quelque sorte reporté l'instabilité du problème sur le choix de ce paramètre** : le résultat obtenu varie énormément en fonction de la valeur choisie. Celle recommandée par Tikhonov est relativement adaptée, mais n'est pas calculable telle quelle dans un cas réel.

4.3.3 Méthode des champs virtuels

[II-9]

La méthode des champs virtuels consiste à utiliser la formulation faible (ou variationnelle) du système pour réussir à formuler explicitement le problème inverse.

❖ Formulation faible

En utilisant l'équation d'état (27) nous obtenons la formulation faible du système :

$$(73) \quad \boxed{\int_0^L EI(s) v''(s) \varphi(s) ds = - \int_0^L M_z(s) \varphi(s) ds} \quad \forall \varphi \in L^2$$

Cette expression est inutilisable en l'état puisque nous disposons uniquement de mesures de $v(s)$ et pas de ses dérivées. Nous pouvons cependant utiliser une intégration par partie pour réécrire le membre de gauche :

$$(74) \quad \int_0^L v''(s) EI(s) \varphi(s) ds = \left[v'(s) EI(s) \varphi(s) \right]_0^L - \int_0^L v'(s) (EI(s) \varphi(s))' ds$$

Puis une autre intégration par parties nous donne :

$$(75) \quad \int_0^L v''(s) EI(s) \varphi(s) ds = \left[v'(s) EI(s) \varphi(s) \right]_0^L - \left[v(s) (EI(s) \varphi(s))' \right]_0^L + \int_0^L v(s) (EI(s) \varphi(s))'' ds$$

Pour annuler $\left[v'(s) EI(s) \varphi(s) \right]_0^L$, nous pouvons choisir φ telle que :

$$(76) \quad \begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi(L) = 0 \end{cases}$$

De plus nous savons que $v(L) = v(0) = 0$, ce qui implique $\left[v(s) (EI(s) \varphi(s))' \right]_0^L = 0$. Nous obtenons donc la relation suivante :

$$(77) \quad \boxed{\int_0^L v(s) \frac{d^2 (EI(s) \varphi(s))}{ds^2} ds = - \int_0^L M_z(s) \varphi(s) ds}$$

Mise à part la condition (76), les fonctions φ doivent être choisies de telle manière que $v(s) (EI(s) \varphi(s))''$ et $M_z(s) \varphi(s)$ soient intégrables sur $[0, L]$.

❖ Détermination de la rigidité

Le terme de droite de l'expression (77) est un scalaire ne dépendant que du chargement et de la fonction φ utilisée, car la poutre est isostatique – dans le cas hyperstatique le moment dépendrait de la rigidité. Considérons que nous utilisons une famille de m fonctions φ_j , et notons :

$$(78) \quad - \int_0^L M_z(s) \varphi_j(s) ds = \beta_j \quad j=1 \dots m$$

Ensuite, à partir des mesures ponctuelles de la flèche, nous pouvons construire par régression une fonction $v_{mes}(s)$ d'approximation de la flèche. De plus afin de simplifier la résolution,

nous pouvons chercher $EI(s)$ sous la forme d'un polynôme de degré n : $\overline{EI}(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$, mais

il est également envisageable de la chercher sous la forme d'une suite de polynômes simples sur différents intervalles (ce qui nous approche des éléments finis).

Résoudre le problème inverse revient donc à déterminer les coefficients a_i grâce aux m équations suivantes :

$$(79) \quad \int_0^L v_{mes}(s) \left(\sum_{i=0}^n [a_i s^i] \varphi_j(s) \right)'' ds = \beta_j \quad j=1 \dots m$$

Soit :

$$(80) \quad \sum_{i=0}^n \left[\int_0^L v_{mes}(s) (a_i s^i \varphi_j(s))'' ds \right] = \beta_j \quad j=1 \dots m$$

D'où

$$(81) \quad \sum_{i=1}^n \left[\int_0^L v_{mes}(s) (a_i s^{i-1} \varphi_j(s) + a_i s^i \varphi_j'(s))' ds \right] + \int_0^L v_{mes}(s) a_0 \varphi_j''(s) ds = \beta_j$$

Soit

$$(82) \quad \begin{aligned} & \sum_{i=2}^n \left[a_i \int_0^L v_{mes}(s) (s^{i-2} \varphi_j(s) + 2s^{i-1} \varphi_j'(s) + s^i \varphi_j''(s)) ds \right] \\ & + a_1 \int_0^L v_{mes}(s) (2\varphi_j'(s) + s \varphi_j''(s)) ds \\ & + a_0 \int_0^L v_{mes}(s) \varphi_j''(s) ds \end{aligned} = \beta_j \quad j=1 \dots m$$

Sous réserve que l'intégration soit possible, nous obtenons une expression linéaire en a_i :

$$(83) \quad \int_0^L v_{mes}(s) (\overline{EI}(s) \varphi_j(s))'' ds = \sum_{i=0}^n \lambda_{ij} a_i \quad j=1 \dots m$$

les coefficients λ_{ij} sont des scalaires dépendant uniquement de v_{mes} et de φ_j .

Ce qui nous amène au système de m équations à n inconnues suivant :

$$(84) \quad \sum_{i=0}^n \lambda_{ij} a_i = \beta_j \quad j=1 \dots m$$

Si $m=n$ nous obtenons un système linéaire de n équations à n inconnues pouvant se mettre sous la forme :

$$(85) \quad [\Lambda] \{a\} = \{\beta\}$$

$$\text{où } [\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{10} & \dots & \lambda_{n0} \\ \lambda_{01} & \lambda_{11} & \dots & \lambda_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{0n} & \lambda_{1n} & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}, \quad \{a\} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \{\beta\} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Toute la difficulté de la démarche consiste maintenant à choisir les fonctions φ_j . Une condition nécessaire est que la matrice $[\Lambda]$ soit bien conditionnée, mais ce n'est pas une condition suffisante : même pour un système bien conditionné le résultat peut être aberrant si les fonctions ne conviennent pas.

Il est important de rappeler que nous aboutissons au système linéaire (85) parce que la poutre est isostatique et a un comportement linéaire. Dans le cas contraire, le moment dépendrait de la rigidité et le terme de droite de l'équation (77) ne serait plus un scalaire mais une fonction de la rigidité.

❖ Propriétés de la solution

□ *Existence*

Nous sommes en face d'un système linéaire. La solution existe si $|\Lambda| \neq 0$.

□ *Unicité*

La solution obtenue dépend du jeu de n fonctions φ_j choisies. Pour deux jeux différents la solution sera différente. Il est difficile de déterminer à priori quelles fonctions permettent d'obtenir la meilleure solution.

□ *Stabilité*

A l'instabilité propre au caractère mal posé du problème inverse s'ajoute celle éventuellement engendrée par un mauvais conditionnement du système (85), résultant de jeux de fonctions φ_j mal choisis. Le rapport de la plus grande sur la plus petite valeur propre de $[\Lambda]$ ne doit pas être trop important (inférieur à 30).

Il est par ailleurs difficile de se prononcer sur la robustesse de cette méthode, nous pouvons seulement la tester lors de la mise en œuvre.

❖ Mise en œuvre

Nous utilisons trois jeux de données déjà utilisés précédemment :

- un jeu de mesures exactes (Figure 10) ;
- un jeu de mesures ponctuellement modifié en ajoutant une erreur de 10% à la troisième mesure (Figure 12) ;
- quatre jeux de mesures bruitées (Figure 14).

La fonction $v_{mes}(s)$ d'approximation de la flèche est obtenue par régression de ces mesures avec un polynôme de degré 6 en utilisant la méthode des moindres carrés présentée au §4.3.2. Nous utiliserons deux jeux différents de fonctions d'inspection φ_j .

□ *Premier jeu de fonctions d'inspection*

Le premier jeu de fonctions d'inspection choisi est le suivant :

$$(86) \quad \begin{cases} \varphi_1(s) = 1 - \cos\left(2\pi \frac{s}{L}\right) \\ \varphi_2(s) = s \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{s}{L}\right) \right] \\ \varphi_3(s) = 1 - \cos\left(10\pi \frac{s}{L}\right) \end{cases}$$

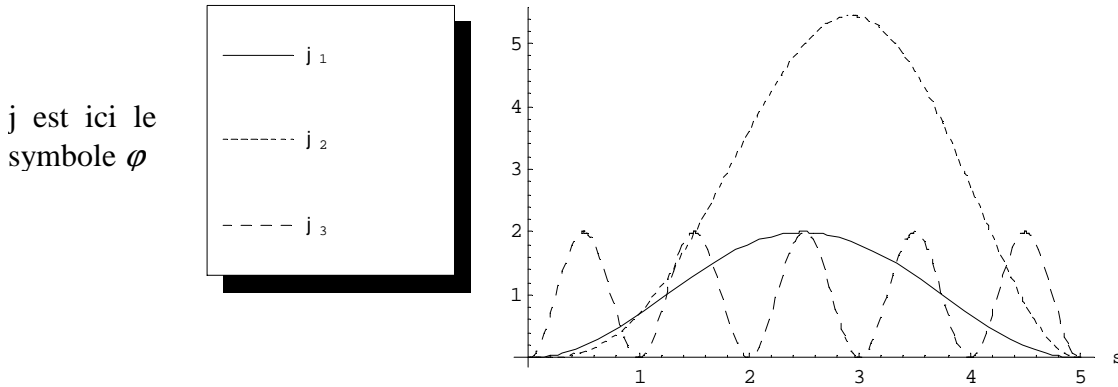


Figure 26. Premier jeu de fonctions d'inspection.

Sur la Figure 27, nous voyons que pour les données non bruitées, les résultats obtenus sont excellents, semblables à ceux obtenus par une procédure de minimisation sans régularisation, mais pour un temps de calcul inférieur d'un facteur 20 ou plus.

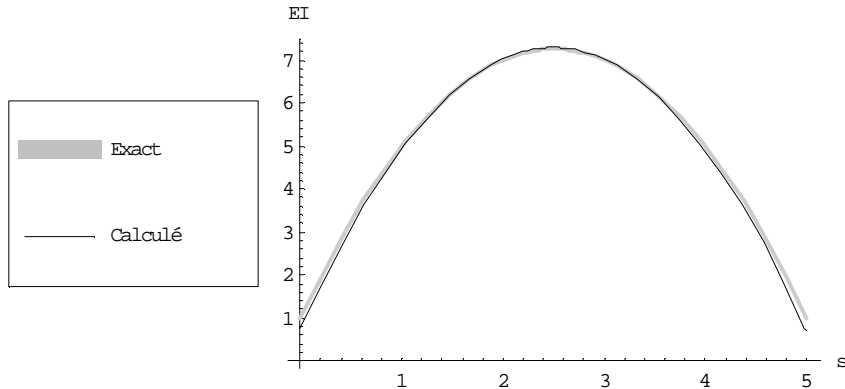


Figure 27. Rigidités exacte et calculée par la méthode des champs virtuels avec le premier jeu de fonctions d'inspection pour des mesures exactes

Cependant dès que l'on ajoute une erreur même ponctuelle dans les mesures le résultat s'écarte de la rigidité exacte (Figure 28) : le problème reste mal posé et le résultat est donc très sensible aux données. Ainsi les quatre jeux de mesures bruités donnent des résultats très différents et largement erronés (Figure 29), surtout pour le premier jeu qui est très singulier. Cependant il faut remarquer que ces résultats sont équivalents à ceux obtenus par une procédure de minimisation sans régularisation (Figure 18), tout en demandant un temps de calcul très inférieur. Si nous pouvions trouver comment régulariser le problème pour une résolution par champs virtuels, nous pourrions obtenir une méthode très performante.

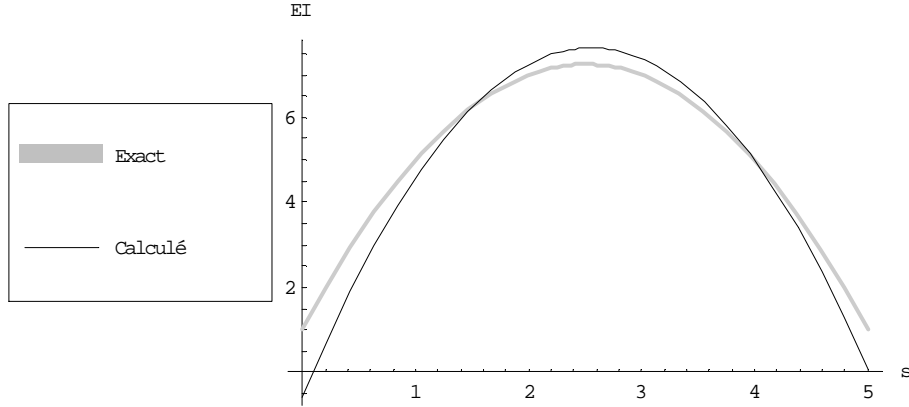


Figure 28. Rigidités exacte et calculée par la méthode des champs virtuels avec le premier jeu de fonctions d'inspection pour des mesures ponctuellement modifiées

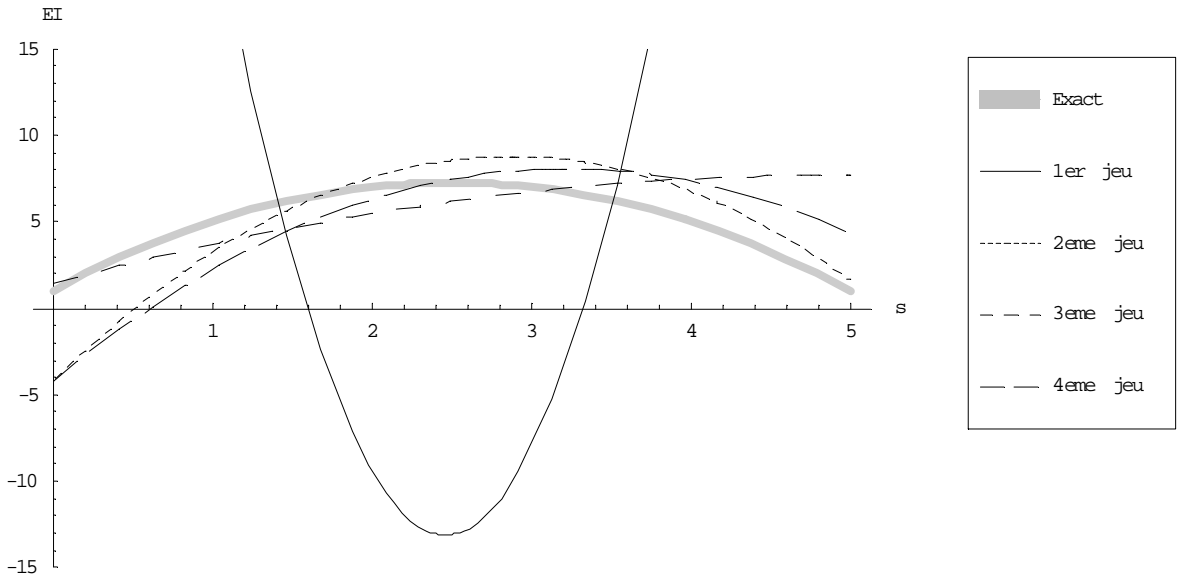


Figure 29. Rigidités calculées par la méthode des champs virtuels avec le premier jeu de fonctions d'inspection pour les 4 jeux de mesures bruitées

Chapitre 3 Deuxième jeu de fonctions d'inspection

Afin de se rendre compte de l'effet du choix des fonctions d'inspection, réalisons les mêmes calculs avec les fonctions suivantes, très proches des précédentes (cosinus déphasés au lieu d'être décalés) :

$$(87) \quad \begin{cases} \varphi_1(s) = \cos\left(2\pi \frac{s}{L} + \frac{\pi}{2}\right) \\ \varphi_2(s) = s \cos\left(2\pi \frac{s}{L} + \frac{\pi}{2}\right) \\ \varphi_3(s) = \cos\left(10\pi \frac{s}{L} + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

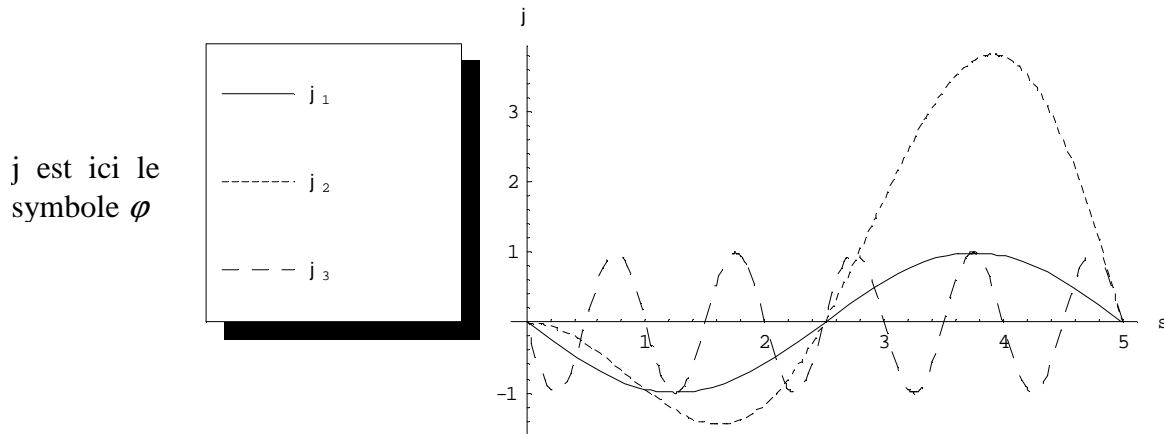


Figure 30. Deuxième jeu de fonctions d'inspections

Les résultats sont totalement différents de ceux obtenus avec le premier jeu de fonctions d'inspection. Tout d'abord le résultat pour des mesures non bruitées est largement erroné (Figure 31). Anecdotiquement le résultat est meilleur pour les mesures modifiées en un point (Figure 32), peut-être parce que cette modification introduit une dissymétrie des données. Ensuite le résultat obtenu pour des mesures bruitées est totalement erroné (Figure 33), plus qu'avec le premier jeu de fonctions d'inspection et ceci **bien que le système d'équations linéaires soit bien conditionné**. Ce qui prouve que le choix des fonctions d'inspection n'est pas neutre, mais doit obéir à des critères à déterminer, autres que le simple bon conditionnement du système d'équations linéaires. A titre de piste, on peut noter que φ_1 et φ_2 sont à moyenne nulle sur la longueur de la poutre –alors que les fonctions précédentes restaient toujours positives– et que les données sont globalement symétriques. La combinaison de ces deux propriétés peut amener la nullité de certaines intégrales, et donc une perte potentielle d'information.

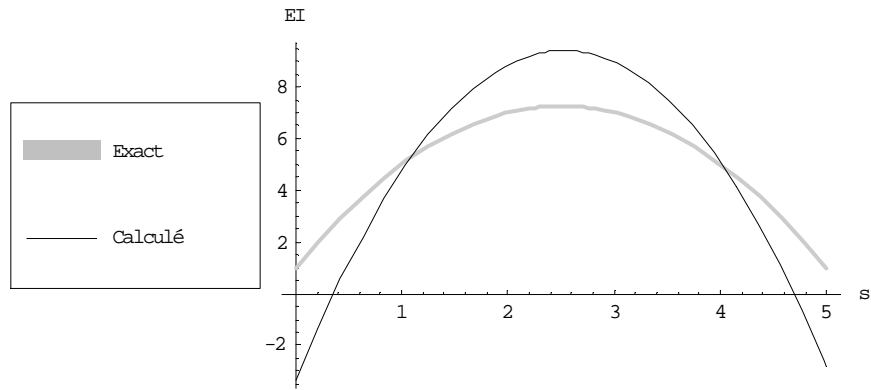


Figure 31. Rigidités exacte et calculée par la méthode des champs virtuels avec le deuxième jeu de fonctions d'inspection pour des mesures exactes

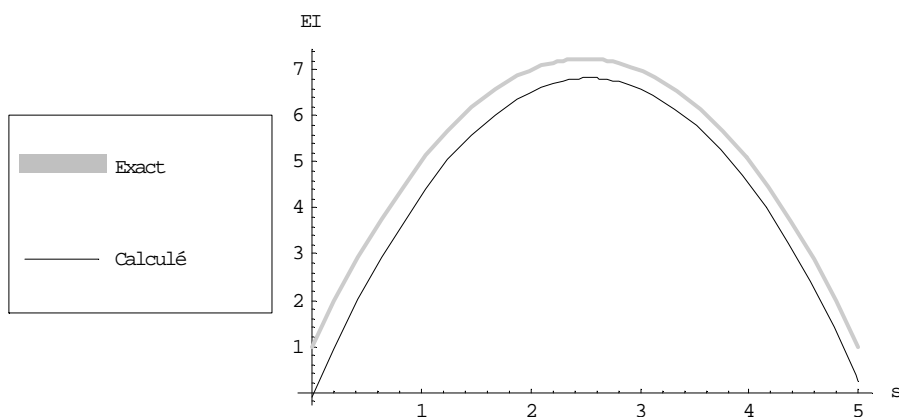


Figure 32. Rigidités exacte et calculée par la méthode des champs virtuels avec le deuxième jeu de fonctions d'inspection pour des mesures ponctuellement modifiées

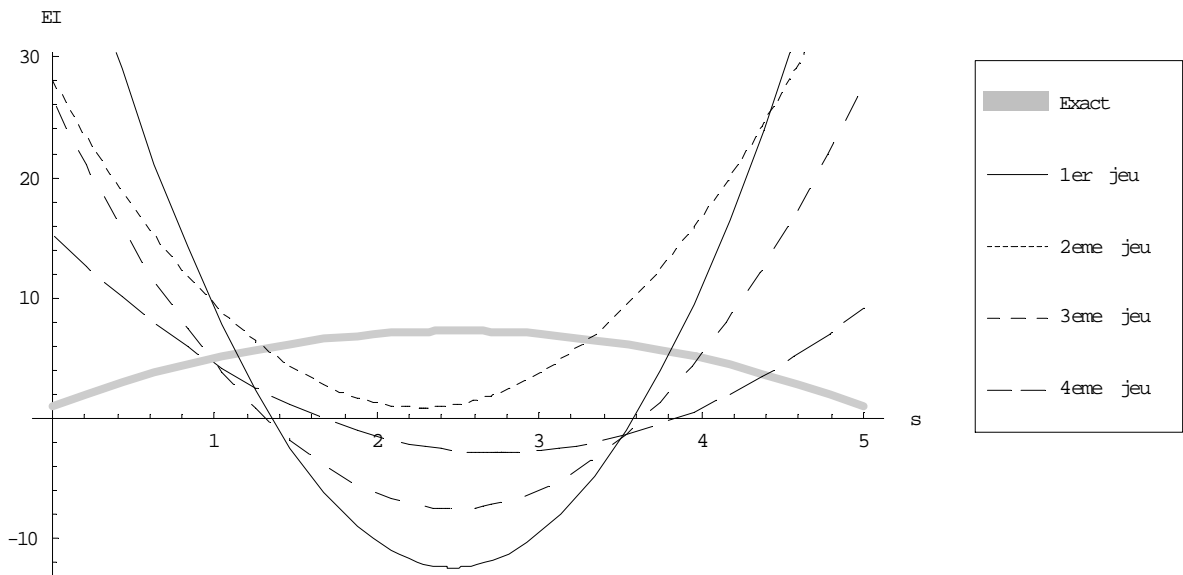


Figure 33. Rigidités calculées par la méthode des champs virtuels avec le deuxième jeu de fonctions d'inspection pour les 4 jeux de mesures bruitées

❖ Conclusion sur les champs virtuels

La méthode des champs virtuels présentée ici est peu coûteuse (énormément moins que la minimisation), et peut se révéler intéressante dans le cadre des éléments finis (les fonctions d'inspections pouvant alors être limitées à chaque élément). Toutefois cette méthode souffre de deux handicaps :

- le résultat est toujours instable, une régularisation reste nécessaire ;
- le choix du jeu de fonctions d'inspection est primordial pour obtenir un bon résultat (l'utilisation des fonctions de forme des modèles éléments finis pourrait être une piste).

4.4 Conclusion sur la mise en oeuvre

Nous avons tenté de résoudre par différentes méthodes un problème inverse simple à titre d'exemple. Nous avons pu nous rendre compte que cette résolution était beaucoup plus complexe que celle du problème direct : cela provient du caractère *mal posé* des problèmes inverses, dont nous avons pu constater les effets : l'incertitude inévitable des mesures entraîne ici des soucis de stabilité et d'existence de la solution, inhabituels pour les problèmes directs.

Trois méthodes différentes de résolution ont été mises en oeuvre sur cet exemple :

- **l'inversion directe**, très simple mais totalement inadaptée à ce problème et sans doute à beaucoup d'autres, du fait de la difficulté de construire, à partir de mesures, des fonctions fidèles à la réalité jusqu'aux dérivées $n^{\text{ièmes}}$;
- **la minimisation avec régularisation**, coûteuse mais efficace à condition de choisir le bon paramètre de régularisation ;
- **les champs virtuels**, peu coûteuse, adaptée à des calculs par éléments finis, mais instable et nécessitant des critères de choix des fonctions d'inspection.

La minimisation avec régularisation, méthode à la fois robuste et simple à mettre en oeuvre, sera utilisée par la suite.

5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de détailler la nature d'un problème inverse : un problème dans lequel données et résultats sont inversés par rapport au problème classique. Cette définition subjective cache en fait une véritable différence objective : les équations qui gouvernent la physique possèdent effectivement un sens préférentiel de résolution (celui correspondant au problème direct). En effet essayer de résoudre ces équations dans le sens inverse donne souvent naissance à des problèmes mal posés, c'est à dire des problèmes pour lesquels il manque l'existence, l'unicité ou la stabilité de la solution.

Des méthodes de résolution de ces problèmes inverses existent. La plus connue est basée sur une minimisation de la différence entre les mesures et une sortie simulée du système. Un terme régularisateur peut être utilisé afin de limiter l'instabilité des résultats. Nous avons mis en oeuvre ces méthodes sur un exemple simple afin de constater leur intérêt.

Bibliographie du chapitre II

- [II-1] J. BAUMEISTER, *Stable solution of inverse Problems*, Vieweg Advanced Lectures, 1987.
- [II-2] S. ANDRIEUX, *Méthodes et techniques de résolution de quelques problèmes inverses*, Notes de cours du D.E.A. T.A.C.S., Ecole Polytechnique, 2003
- [II-3] P. MATHÈ, S. PEREVERZEV, *Optimal Discretization of Inverse Problems in Hilbert Scales. Regularization and Self-Regularization of Projection Methods*, SIAM J. Numer. Anal, vol. 38 (2001), pp.1999-2021.
- [II-4] M. HANKE, *A Regularizing Levenberg-Marquart Scheme with Applications to Inverse Groundwater Filtration Problems*, Inverse Problems, vol 13 (1997), pp. 79-95
- [II-5] M. BURGER, W. MUHLHUBER, *Iterative Regularization of Parameter Identification Problems by Sequential Quadratic Programming*, Inverse Problems, vol. 18 (2002), pp. 943-969
- [II-6] H. D. BUI, *Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux*, Eyrolles, 1993.
- [II-7] J. IDIER, G. DEMONENT, Y.GOUSSARD, *Approche Bayésienne pour les Problèmes Inverses*, Hermès Science Publications, 2001.
- [II-8] LUCCHINETTI E., STÜSSI E., *Measuring the flexural rigidity in non-uniform beams using an inverse problem approach*, Inverse Problems, vol. 18 (2002), pp. 837-857
- [II-9] S. ANDRIEUX, *Méthodes et techniques de résolution de quelques problèmes inverses*, Notes de cours du D.E.A. T.A.C.S., Ecole Polytechnique, 2003
- [II-10] A. N. TIKHONOV, *Regularization of incorrectly posed problems*, Soviet. Math. Dokl., vol. 4 (1963), pp. 1624-1627

Chapitre III

Représentation de Champs Aléatoires

1	<i>Introduction</i>	61
2	<i>Champs aléatoires</i>	61
2.1	Variables aléatoires	61
2.2	Processus et champs aléatoires	61
2.3	Discrétisation des champs aléatoires	62
3	<i>Chaos polynomial de Wiener</i>	62
3.1	Définition	62
3.2	Expansion sur le chaos homogène	63
3.3	Construction du chaos polynomial de Wiener	65
3.4	Chaos polynomial de dimension finie	67
3.5	Liaison avec les polynômes orthogonaux classiques	69
3.5.1	Polynômes orthogonaux	69
3.5.2	Polynômes de Hermite	70
3.5.3	Correspondances	71
3.6	Exemple de décomposition d'une variable log-normale sur le chaos polynomial... 71	
3.6.1	Calcul de la décomposition	71
3.6.2	Application numérique et vérification	73
3.7	Extension aux champs aléatoires	76
4	<i>Utilité du chaos polynomial</i>	77
4.1	Problème typique	77
4.2	Discrétisation des données	78
4.3	Projection du résultat	78
4.4	Exploitation des résultats	79
4.4.1	calcul de moments	79
4.4.2	Analyse de fiabilité	79
5	<i>Exemple de calcul</i>	79
5.1	Présentation	79
5.2	Mise en équation	80
5.3	Méthode de résolution	85
5.4	Application	85
5.4.1	Paramètres utilisés	85
5.4.2	Résultats	86
6	<i>Conclusion</i>	87
	<i>Bibliographie du chapitre III</i>	88

1 Introduction

L'une des difficultés principales associées aux calculs stochastiques est la manipulation de champs aléatoires, utilisés par exemple pour représenter la variabilité spatiale de données (densité, module d'Young,...). Le plus souvent il est nécessaire de les discrétiser, c'est à dire les approximer sous une forme comprenant un nombre fini de variables aléatoires. Dans ce chapitre nous verrons que cette discrétisation peut s'opérer en projetant le champ aléatoire sur un espace nommé chaos polynomial, constitué de polynômes de variables aléatoires.

2 Champs aléatoires

Afin de replacer le problème dans son contexte, nous allons rappeler succinctement les concepts de variables aléatoires et de processus aléatoires comme présenté entre autres dans [III-1].

2.1 Variables aléatoires

Une variable aléatoire réelle X est définie comme une application de l'espace de probabilité (Ω, Ψ, P) vers le corps des réels \mathbb{R} . Ω est l'univers des possibles, c'est à dire tous les résultats ω (appelés aléas) possibles du phénomène considéré, un événement est une partie de Ω et contient des aléas ω . P est la mesure de probabilité. Ψ est la σ -algèbre associée à Ω , la collection d'événements de Ω ayant une probabilité d'occurrence définie. Afin de simplifier les notations nous écrivons que la variable aléatoire est définie sur l'univers des possibles Ω , afin d'associer à chaque aléa ω une valeur de réalisation de $X(\omega)$. Les variables aléatoires sont définies par une loi de probabilité, qui donne la probabilité d'occurrence de chaque valeur réelle. Elles peuvent posséder des moments dont les deux premiers sont la moyenne ($\bar{X} = \mathbf{E}[X(\omega)]$) et la variance ($\sigma_x^2 = \mathbf{E}[(X(\omega) - m_x)^2]$).

2.2 Processus et champs aléatoires

Soit H l'espace de Hilbert des fonctions définies sur un domaine D à valeurs dans E (E peut être le corps des réels par exemple). Soit Θ l'espace des variables aléatoires associant à un aléa ω de l'univers des possibles Ω une valeur (de réalisation) dans E .

Un processus aléatoire peut être défini comme une fonction appartenant à l'espace $H \times \Theta$, défini sur le domaine $D \times \Omega$ à valeur dans E . En d'autres termes à chaque élément $d \in D$ est associée une variable aléatoire de Θ donnant une réalisation dans E , et à chaque aléa $\omega \in \Omega$ est associée une fonction de H à valeurs dans E . Par exemple si la densité d'une poutre est un processus aléatoire $\rho(s, \omega)$ dépendant de l'abscisse s et de l'aléa ω , il est possible de concevoir cela de deux façons : pour un s donné, la densité en ce point est une variable aléatoire, ou bien pour un aléa donné, la densité est une fonction (que l'on appelle trajectoire) de s .

Tout comme les variables aléatoires, les processus aléatoires peuvent posséder des moments. Un processus $F(d, \omega)$ est dit du second ordre lorsque ses deux premiers moments au moins existent. Ces moments sont :

- la moyenne $\bar{F}(d) = \mathbf{E}[F(d, \omega)]$;

- la covariance

$$C_F(\{x_1\}, \{x_2\}) = \mathbf{E} \left[(F(d_1, \omega) - \bar{F}(d_1))(F(d_2, \omega) - \bar{F}(d_2)) \right].$$

La covariance lie les réalisations du processus aléatoire en deux points d_1 et d_2 de D . Si le processus est continu, alors les réalisations en deux points infiniment proches sont également infiniment proches. Lorsque les deux points sont confondus la covariance mesure la variance du processus : $\sigma_F^2(d) = C_F(d, d)$. On définit en outre la fonction d'autocorrélation par

$$(88) \quad R_F(d_1, d_2) = E[F(d_1, \omega)F(d_2, \omega)] = C_F(d_1, d_2) + \bar{F}(d_1)\bar{F}(d_2)$$

On distingue les processus stationnaires, dont les propriétés sont invariantes par translation, et les processus d'évolution où elles ne le sont pas. La stationnarité d'ordre 2 (ou faible) ne porte que sur le deuxième moment. Un processus du second ordre sera stationnaire du second ordre si sa fonction de covariance ne dépend que de la distance entre les points d_1 et d_2 (par exemple $C_F(d_1, d_2) = |d_1 - d_2|$ ou $C_F(d_1, d_2) = \exp(|d_1 - d_2|)$).

Typiquement on appelle champ aléatoire un processus aléatoire dont le domaine de définition D est une partie de l'espace et/ou du temps, à une ou plusieurs dimensions (i.e. une partie de \square , \square^2 ou \square^3 ou \square^4). Par exemple la densité d'un corps peut être vue comme un champ aléatoire fonction des coordonnées spatiales, sa température comme un champ aléatoire fonction des coordonnées spatiales et temporelles. On notera $d = \{x\}$ un élément de D .

2.3 Discrétisation des champs aléatoires

Les champs aléatoires sont des entités délicates à appréhender et à manipuler, car nous avons vu qu'un champ aléatoire peut se voir comme une infinité de variables aléatoires corrélées associées à chaque point de l'espace. Une tendance naturelle pour les utiliser est de tenter de d'en construire une approximation utilisant un nombre fini de variables aléatoires (permettant plus facilement le calcul ou la simulation). Pour ce faire plusieurs approches peuvent être envisagées :

- une discrétisation spatiale du champ, semblable aux éléments finis, avec des variables aléatoires égales à la valeur du champ en des points déterminés (nœuds, centres d'éléments, points de Gauss,...) en utilisant ou non des fonctions de formes pour assurer la continuité du champ ;
- une discrétisation moyenne, où les variables aléatoires sont des intégrales pondérées du champ aléatoire ;
- une décomposition spectrale, où le champ aléatoire est approximé par la troncature d'une série de produits de variables aléatoires et par des fonctions déterministes.

Le chaos polynomial, qui fait l'objet de ce chapitre, fait partie de cette dernière classe de méthodes.

3 Chaos polynomial de Wiener

3.1 Définition

Wiener [III-2] a le premier défini le *chaos homogène* (homogeneous chaos) comme l'espace engendré par l'ensemble de tous les polynômes de Hermite de variables aléatoires

gaussiennes orthonormales. Un de ces polynômes est appelé *chaos polynomial* (polynomial chaos). Ghanem et Spanos [III-3] en ont donné la définition suivante :

Soit $\{\zeta_i(\omega)\}_{i=1,\dots,\infty}$ un ensemble infini de variables aléatoires **gaussiennes orthonormales**, c'est à dire qui possèdent la propriété :

$$(89) \quad \mathbf{E}[\zeta_i(\omega)\zeta_j(\omega)] = \delta_{ij}$$

en d'autres termes ces variables aléatoires sont gaussiennes centrées normées indépendantes.

Soit $\hat{\Gamma}_p$ l'espace de tous les polynômes de $\{\zeta_i(\omega)\}_{i=1,\dots,\infty}$ de degré inférieur à p . Soit $\{\Gamma_p\}$ le jeu de tous les polynômes de $\hat{\Gamma}_p$ orthogonaux à $\hat{\Gamma}_{p-1}$. Enfin soit $\bar{\Gamma}_p$ l'espace engendré par $\{\Gamma_p\}$. Alors le sous-espace $\bar{\Gamma}_p$ de Ω est appelé le $p^{\text{ième}}$ chaos homogène, et un polynôme de $\{\Gamma_p\}$ est appelé chaos polynomial d'ordre p .

Le chaos homogène d'ordre p regroupe donc tous les polynômes orthogonaux de degré p impliquant toute combinaison linéaire de tous les produits de p variables aléatoires $\zeta_i(\omega)$ orthogonaux à tous les chaos polynomiaux d'ordre inférieur strictement à p . Cette propriété implique que les polynômes des chaos polynomiaux d'ordre supérieur ou égal à 1 sont centrés (de moyenne nulle) car orthogonaux aux chaos polynomiaux d'ordre 0 (constant)

On note $\Gamma_p(\zeta_1(\omega), \dots, \zeta_{i_p}(\omega))$ un chaos polynomial d'ordre p , par exemple $\Gamma_1(\zeta_1(\omega)) = \zeta_1(\omega)$.

Tous les polynômes de même degré seront pris tels que la permutation des variables aléatoires les laisse inchangés. Par exemple pour les polynômes de second degré :

$$(90) \quad \Gamma_2(\zeta_i(\omega), \zeta_j(\omega)) = \Gamma_2(\zeta_j(\omega), \zeta_i(\omega)) \quad \forall (i,j) \in \square^2$$

De même pour le troisième degré :

$$(91) \quad \begin{aligned} \Gamma_3(\zeta_i(\omega), \zeta_j(\omega), \zeta_k(\omega)) &= \Gamma_3(\zeta_i(\omega), \zeta_k(\omega), \zeta_j(\omega)) = \Gamma_3(\zeta_k(\omega), \zeta_i(\omega), \zeta_j(\omega)) \\ &= \Gamma_3(\zeta_j(\omega), \zeta_i(\omega), \zeta_k(\omega)) = \Gamma_3(\zeta_j(\omega), \zeta_k(\omega), \zeta_i(\omega)) \\ &= \Gamma_3(\zeta_k(\omega), \zeta_j(\omega), \zeta_i(\omega)) \\ &\quad \forall (i,j,k) \in \square^3 \end{aligned}$$

3.2 Expansion sur le chaos homogène

En utilisant le théorème de Cameron et Martin [III-4], il a été démontré que toute variable aléatoire $\mu(\omega)$ possédant un second moment fini admet la décomposition en série suivante :

$$\begin{aligned}
 \mu(\omega) = & \hat{a}_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} \hat{a}_{i_1} \Gamma_1(\zeta_{i_1}(\omega)) \\
 & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \hat{a}_{i_1 i_2} \Gamma_2(\zeta_{i_1}(\omega), \zeta_{i_2}(\omega)) \\
 & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \hat{a}_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(\zeta_{i_1}(\omega), \zeta_{i_2}(\omega), \zeta_{i_3}(\omega)) \\
 & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \sum_{i_4=1}^{i_3} \hat{a}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Gamma_4(\zeta_{i_1}(\omega), \zeta_{i_2}(\omega), \zeta_{i_3}(\omega), \zeta_{i_4}(\omega)) \\
 & + \dots
 \end{aligned}
 \tag{92}$$

où :

- les Γ_i sont les polynômes du chaos polynomial de Wiener d'ordre i ;
- les $\zeta_i(\omega)$ des variables gaussiennes orthonormales ;
- les $\hat{a}_{i_1 \dots i_n}$ sont des coefficients réels.

Par soucis de simplification, on peut réorganiser les indices pour noter :

$$\tag{93} \quad \mu(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \psi_j(\omega)$$

où les coefficients a_j et les $\psi_j(\omega)$ correspondent directement respectivement aux coefficients et aux chaos polynomiaux apparaissant successivement dans la série. C'est à dire $a_0 = \hat{a}_0$ et $\psi_0(\omega) = \Gamma_0$, $a_1 = \hat{a}_1$ et $\psi_1(\omega) = \Gamma_1(\zeta_1(\omega))$, $a_2 = \hat{a}_2$ et $\psi_2(\omega) = \Gamma_1(\zeta_2(\omega))$, ... Il s'agit uniquement d'une réécriture de la série permettant de se défaire des indices et sommations multiples. Ces polynômes $\psi_j(\omega)$ ont deux propriétés remarquables. Les polynômes de degré supérieur à 0 possèdent une moyenne nulle :

$$\tag{94} \quad \mathbf{E}[\psi_j(\omega)] = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}^*$$

Les polynômes sont tous orthogonaux entre eux (non seulement les polynômes de degré différents, mais aussi les polynômes de variables aléatoires différentes). Ils ne sont cependant pas orthonormés, leur variance n'est pas forcément unitaire :

$$\tag{95} \quad \mathbf{E}[\psi_i(\omega) \psi_j(\omega)] = \delta_{ij} \mathbf{E}[\psi_j(\omega)^2] \quad \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$$

N'importe quelle variable aléatoire $\mu(\omega)$ possédant un second moment fini peut en théorie être décomposé selon la série (92) : le théorème de Cameron et Martin indique que cette série converge. Cependant le taux de convergence est optimal (exponentiel) pour une variable $\mu(\omega)$ gaussienne. Dans le cas contraire ce taux peut être sérieusement détérioré, et il faut alors envisager d'utiliser un jeu de variables aléatoires de lois différentes (ce qui peut impliquer des polynômes de forme différente).

3.3 Construction du chaos polynomial de Wiener

Une approche directe, mais fastidieuse pour construire les chaos polynomiaux successifs de manière unique consiste à commencer avec le jeu de polynômes homogènes dans $\{\zeta_i(\omega)\}_{i=1,\dots,\infty}$ et d'utiliser une procédure d'orthogonalisation séquentielle. Les chaos polynomiaux de degré 0 sont des constantes et peuvent être normalisés :

$$(96) \quad \boxed{\Gamma_0 = 1}$$

Les chaos polynomiaux de degré 1 ont comme forme générale :

$$(97) \quad \Gamma_1(\zeta_i(\omega)) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \zeta_i(\omega)$$

L'orthogonalité avec les polynômes d'ordre 0 implique que :

$$(98) \quad E[\Gamma_0 \Gamma_1(\zeta_i(\omega))] = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$$

Ce qui implique :

$$(99) \quad E[\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \zeta_i(\omega)] = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 E[\zeta_i(\omega)] = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$$

Comme les variables aléatoires sont centrées, cela implique que $\hat{a}_0 = 0$. L'expression est ensuite normalisée en imposant $\hat{a}_1 = 1$. l'expression des polynômes de premier ordre est alors :

$$(100) \quad \boxed{\Gamma_1(\zeta_i(\omega)) = \zeta_i(\omega)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$$

Les chaos polynomiaux de second ordre ont comme forme générale :

$$(101) \quad \Gamma_2(\zeta_i(\omega), \zeta_j(\omega)) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \zeta_i(\omega) + \hat{a}_2 \zeta_j(\omega) + \hat{a}_3 \zeta_i(\omega) \zeta_j(\omega), \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \mathbb{N}^*$$

L'orthogonalité avec les polynômes d'ordre 1 implique que :

$$(102) \quad E[\Gamma_1(\zeta_k(\omega)) \Gamma_2(\zeta_i(\omega), \zeta_j(\omega))] = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Soit

$$(103) \quad E[\hat{a}_0 \zeta_k(\omega) + \hat{a}_1 \zeta_i(\omega) \zeta_k(\omega) + \hat{a}_2 \zeta_j(\omega) \zeta_k(\omega) + \hat{a}_3 \zeta_i(\omega) \zeta_j(\omega) \zeta_k(\omega)] = 0$$

En utilisant la linéarité de l'espérance :

$$(104) \quad \hat{a}_0 E[\zeta_k(\omega)] + \hat{a}_1 E[\zeta_i(\omega) \zeta_k(\omega)] + \hat{a}_2 E[\zeta_j(\omega) \zeta_k(\omega)] + \hat{a}_3 E[\zeta_i(\omega) \zeta_j(\omega) \zeta_k(\omega)] = 0$$

Soit, en utilisant la relation (89) :

$$(105) \quad \hat{a}_1 \delta_{ik} + \hat{a}_2 \delta_{jk} + \hat{a}_3 d_{ijk} = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

avec

$$(106) \quad c_{ijk} = E[\zeta_i(\omega) \zeta_j(\omega) \zeta_k(\omega)]$$

Pour calculer c_{ijk} , il est nécessaire revenir à la définition de l'espérance d'une variable aléatoire :

$$(107) \quad E[X(\omega)] = \int_a^b x f_X(x) dx$$

où a et b sont les limites du domaine de définition de la fonction de densité de probabilité $f_X(x)$ de $X(\omega)$. Dans le cas qui nous intéresse (loi Normale) :

$$(108) \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Dans le cas d'un produit de deux ou trois variables aléatoires, on utilise la fonction de densité conjointe $f_{X,Y}(x,y)$ ou $f_{X,Y,Z}(x,y,z)$:

$$(109) \quad E[X(\omega)Y(\omega)] = \int_a^b \int_a^b x y f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

$$(110) \quad E[X(\omega)Y(\omega)Z(\omega)] = \int_a^b \int_a^b \int_a^b x y z f_{X,Y,Z}(x,y,z) dx dy dz$$

Dans notre cas les variables sont indépendantes, les fonctions de densité conjointe de probabilité s'obtiennent facilement pour deux et trois variables aléatoires :

$$(111) \quad f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

$$(112) \quad f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}$$

Nous trouvons ainsi que le coefficient c_{ijk} est nul dans tous les cas, l'équation (105) se simplifie donc en :

$$(113) \quad \hat{a}_1 \delta_{ik} + \hat{a}_2 \delta_{jk} = 0, \quad \forall i \in \square^*, \forall j \in \square^*, \forall k \in \square^*$$

Puis en donnant à k successivement la valeur de i puis de j , nous obtenons :

$$(114) \quad \hat{a}_1 = 0 \quad \hat{a}_2 = 0$$

D'autre part l'orthogonalité des polynômes de second degré avec les polynômes de degré 0 implique que :

$$(115) \quad E[\Gamma_2(\zeta_i(\omega), \zeta_j(\omega))] = 0, \quad \forall i \in \square^*, \forall j \in \square^*$$

Soit :

$$(116) \quad \hat{a}_0 + \hat{a}_3 \delta_{ij} = 0, \quad \forall i \in \square^*, \forall j \in \square^*$$

En outre \hat{a}_3 ne peut être nul (sinon le polynôme ne serait plus de degré 2), donc :

$$(117) \quad \hat{a}_0 = -\hat{a}_3 \delta_{ij}, \quad \forall i \in \square^*, \forall j \in \square^*$$

Une infinité de couples de coefficients \hat{a}_0 et \hat{a}_3 vérifient cette équation et tous sont valables par rapport aux propriétés d'orthogonalité que doit vérifier le polynôme de second ordre. Afin de normaliser l'écriture nous imposons arbitrairement que $\hat{a}_3 = 1$, ce qui nous donne :

$$(118) \quad \hat{a}_0 = -\delta_{ij}, \quad \forall i \in \square^*, \forall j \in \square^*$$

L'expression des chaos polynomiaux de second ordre est donc :

$$(119) \quad \boxed{\Gamma_2(\zeta_i(\omega), \zeta_j(\omega)) = \zeta_i(\omega) \zeta_j(\omega) - \delta_{ij}}, \quad \forall i \in \square^*, \forall j \in \square^*$$

On remarque que $\mathbf{E}[\Gamma_2(\zeta_i(\omega), \zeta_j(\omega))] = 2\delta_{ij}$: ces polynômes n'ont pas une norme unitaire.

La forme générale des polynômes de troisième ordre est :

$$(120) \quad \Gamma_3(\zeta_i(\omega), \zeta_j(\omega), \zeta_k(\omega)) = \hat{a}_0 + \hat{a}_i \zeta_i(\omega) + \hat{a}_j \zeta_j(\omega) + \hat{a}_k \zeta_k(\omega) + \hat{a}_{ij} \zeta_i(\omega) \zeta_j(\omega) + \hat{a}_{ik} \zeta_i(\omega) \zeta_k(\omega) + \hat{a}_{kj} \zeta_k(\omega) \zeta_j(\omega) + \hat{a}_{ijk} \zeta_i(\omega) \zeta_j(\omega) \zeta_k(\omega)$$

De la même manière que précédemment, on détermine les coefficients en imposant l'orthogonalité avec les polynômes d'ordre 0, 1 et 2, puis en normalisant le polynôme résultant pour lever l'ambiguïté sur le dernier coefficient. Après quelques calculs, on trouve que l'expression des chaos polynomiaux d'ordre 3 est :

$$(121) \quad \Gamma_3(\zeta_i(\omega), \zeta_j(\omega), \zeta_k(\omega)) = \zeta_i(\omega) \zeta_j(\omega) \zeta_k(\omega) - \delta_{kj} \zeta_i(\omega) - \delta_{ik} \zeta_j(\omega) - \delta_{ij} \zeta_k(\omega)$$

Pareillement, l'expression des chaos polynomiaux d'ordre 4 est :

$$(122) \quad \Gamma_4(\zeta_{i1}(\omega), \zeta_{i2}(\omega), \zeta_{i3}(\omega), \zeta_{i4}(\omega)) = \zeta_{i1}(\omega) \zeta_{i2}(\omega) \zeta_{i3}(\omega) \zeta_{i4}(\omega) - \delta_{i3i4} \zeta_{i1}(\omega) \zeta_{i2}(\omega) - \delta_{i2i4} \zeta_{i1}(\omega) \zeta_{i3}(\omega) - \delta_{i2i3} \zeta_{i1}(\omega) \zeta_{i4}(\omega) - \delta_{i1i4} \zeta_{i2}(\omega) \zeta_{i3}(\omega) - \delta_{i1i3} \zeta_{i2}(\omega) \zeta_{i4}(\omega) - \delta_{i1i2} \zeta_{i3}(\omega) \zeta_{i4}(\omega) + \delta_{i1i2} \delta_{i3i4} + \delta_{i1i3} \delta_{i2i4} + \delta_{i1i4} \delta_{i2i3}$$

On voit se dessiner un schéma directeur de création des chaos polynomiaux dans le cas gaussien. Sa formulation extensive est donnée dans [III-3], mais est lourde et peu intéressante puisque nous allons voir qu'en se restreignant à un jeu fini de variables aléatoires gaussiennes, les chaos polynomiaux sont des polynômes de Hermite.

3.4 Chaos polynomial de dimension finie

Nous avons indiqué précédemment que le jeu de variables aléatoires $\{\zeta_i(\omega)\}_{i=1.. \infty}$ était infini.

Afin de pouvoir utiliser les chaos polynomiaux dans des calculs, il est légitime de remplacer ce jeu par un jeu contenant un nombre fini de variables aléatoires. On introduit ainsi le vecteur $\{\zeta(\omega)\}$ contenant n variables aléatoires gaussiennes orthonormales :

$$(123) \quad \{\zeta(\omega)\} = \begin{Bmatrix} \zeta_1(\omega) \\ \vdots \\ \zeta_n(\omega) \end{Bmatrix}$$

Le jeu de variables aléatoires étant fini, le chaos n'est plus homogène. La relation (92) devient :

$$\begin{aligned}
 \mu(\omega) = & \hat{a}_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^n \hat{a}_{i_1} \Gamma_1(\zeta_{i_1}(\omega)) \\
 & + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1} \hat{a}_{i_1 i_2} \Gamma_2(\zeta_{i_1}(\omega), \zeta_{i_2}(\omega)) \\
 & + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \hat{a}_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(\zeta_{i_1}(\omega), \zeta_{i_2}(\omega), \zeta_{i_3}(\omega)) \\
 & + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \sum_{i_4=1}^{i_3} \hat{a}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Gamma_4(\zeta_{i_1}(\omega), \zeta_{i_2}(\omega), \zeta_{i_3}(\omega), \zeta_{i_4}(\omega)) \\
 & + \dots
 \end{aligned}
 \tag{124}$$

Par contre cette limitation seule ne rend pas la série (92) finie, puisque le degré des chaos polynomiaux est toujours illimité. Il nous faut donc nous imposer une nouvelle contrainte de degré maximal de chaos polynomial, afin de disposer d'une série tronquée. Par exemple pour une troncature au troisième degré du chaos polynomial avec deux variables aléatoires orthonormales gaussiennes $\zeta_1(\omega)$ et $\zeta_2(\omega)$, la relation (92) devient :

$$\begin{aligned}
 \mu(\omega) = & \hat{a}_0 \Gamma_0 + \hat{a}_1 \Gamma_1(\zeta_1(\omega)) + \hat{a}_2 \Gamma_1(\zeta_2(\omega)) \\
 & + \hat{a}_{11} \Gamma_2(\zeta_1(\omega), \zeta_1(\omega)) + \hat{a}_{12} \Gamma_2(\zeta_1(\omega), \zeta_2(\omega)) + \hat{a}_{22} \Gamma_2(\zeta_2(\omega), \zeta_2(\omega)) \\
 & + \hat{a}_{111} \Gamma_3(\zeta_1(\omega), \zeta_1(\omega), \zeta_1(\omega)) + \hat{a}_{112} \Gamma_3(\zeta_1(\omega), \zeta_1(\omega), \zeta_2(\omega)) + \hat{a}_{122} \Gamma_3(\zeta_1(\omega), \zeta_2(\omega), \zeta_2(\omega)) \\
 & + \hat{a}_{222} \Gamma_3(\zeta_2(\omega), \zeta_2(\omega), \zeta_2(\omega)) \\
 & + \varepsilon(\omega)
 \end{aligned}
 \tag{125}$$

avec $\varepsilon(\omega)$ une variable aléatoire correspondant à l'erreur d'expansion. Cette expression peut s'écrire sous la forme analogue à (93) :

$$\tag{126} \quad \boxed{\mu(\omega) = \sum_{j=0}^m a_j \psi_j(\{\zeta(\omega)\})}$$

où m est le nombre de chaos polynomiaux utilisés dans l'expansion (y compris celui de degré 0), qui est directement lié au nombre n de variables aléatoires $\zeta_i(\omega)$ et au degré maximal d des chaos polynomiaux :

$$\tag{127} \quad m = \frac{(n+d)!}{n!d!} - 1$$

Ecrire $\psi_j(\{\zeta(\omega)\})$ plutôt que $\psi_j(\omega)$ permet d'insister sur le jeu de variables aléatoires $\{\zeta(\omega)\}$ utilisé. Toutefois les deux notations sont valables et interchangeables.

La Table 6 donne le nombre de termes dans la série (126) pour n et d entre 1 et 6. Nous voyons que la taille de la série augmente très vite, et qu'en pratique il est difficile de concilier jeu de variables aléatoires conséquent et degré de chaos polynomial élevé.

$\begin{smallmatrix} \text{d} \\ \text{n} \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	6	10	15	21	28
3	4	10	20	35	56	84
4	5	15	35	70	126	210
5	6	21	56	126	252	464
6	7	28	84	210	464	928

Table 6. Nombre de termes dans la série (126) en fonction du degré d des polynômes et du nombre n de variables aléatoires ; on remarque le schéma de remplissage du tableau : l'élément (i,j) est la somme de l'élément $(i-1,j)$ et $(i,j-1)$

Il est à noter que si le chaos polynomial est utilisé pour exprimer le résultat d'un calcul stochastique, nous retrouvons les mêmes variables aléatoires en entrée et en sortie, le choix du nombre de variables est alors imposé par la représentation du champ d'entrée.

La rapidité de convergence de la série (92) est cruciale pour disposer d'une bonne approximation (i.e. $\mathcal{E}(\omega) < \mu(\omega) \forall \omega$). Or nous avons précisé que pour le chaos homogène considéré (i.e. correspondant à un jeu de variables aléatoires $\{\zeta_i(\omega)\}$ gaussiennes) la vitesse de cette convergence dépendait de la loi de la variable aléatoire décomposée $\mu(\omega)$: elle est optimale si cette variable aléatoire est gaussienne. Si $\mu(\omega)$ n'est pas gaussienne, il faut trouver la meilleure expansion. Pour cela nous pouvons nous tourner vers la théorie des polynômes orthogonaux.

3.5 Liaison avec les polynômes orthogonaux classiques

3.5.1 Polynômes orthogonaux

Soit $\{Q_p(\{x\})\}$ un système de polynômes des n variables regroupées dans le vecteur $\{x\}$ dont le membre $Q_p(\{x\})$ est de degré p . Ce système est un système de polynômes orthogonaux par rapport à une mesure réelle positive ϕ si la relation d'orthogonalité suivante est satisfaite :

$$(128) \quad \int_D Q_i(\{x\}) Q_j(\{x\}) d\phi(\{x\}) = h_i^2 \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

où h_n est une constante (égale à 1 si orthonormalité). La mesure ϕ peut avoir une densité $\eta(x)$, alors :

$$(129) \quad \int_D Q_i(\{x\}) Q_j(\{x\}) \eta(\{x\}) d\{x\} = h_i^2 \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \mathbb{N} \subseteq$$

Cette densité $\eta(\{x\})$ est appelée fonction de pondération dans la théorie des polynômes orthogonaux. Il se trouve que certains polynômes possèdent pour fonction de pondérations des fonctions de densité de probabilité de lois usuelles, ce qui permet d'obtenir facilement l'expression du chaos polynomial, comme nous allons le voir pour les polynômes de Hermite et les variables gaussiennes. Notons tout d'abord que le vecteur $\{x\}$ peut être un vecteur de

fonctions, les polynômes devenant ainsi des fonctionnelles. En particulier ces fonctions peuvent être des variables aléatoires.

3.5.2 Polynômes de Hermite

Les polynômes de Hermite ont pour fonction de pondération :

$$(130) \quad \eta(\{x\}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2}\{x\}^T \{x\}\right)$$

Ce qui nous donne donc la condition d'orthonormalité entre deux polynômes de Hermite :

$$(131) \quad \int_D Q_i(\{x\}) Q_j(\{x\}) \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2}\{x\}^T \{x\}\right) d\{x\} = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \square$$

Or si nous reprenons la relation (89) d'orthonormalité dans l'espace Ω , elle s'écrit :

$$(132) \quad \int_D \zeta_i(\omega) \zeta_j(\omega) dP = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \square$$

Si les variables sont gaussiennes, alors dP est la mesure gaussienne qui, pour le vecteur $\{\zeta(\omega)\}$, s'écrit :

$$(133) \quad dP = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(\frac{1}{2}\{\zeta(\omega)\}^T \{\zeta(\omega)\}\right) d\{\zeta(\omega)\} \quad \forall i, j \in \square$$

Soit pour deux chaos polynomiaux :

$$(134) \quad \int_D \Gamma_i(\{\zeta(\omega)\}) \Gamma_j(\{\zeta(\omega)\}) dP = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \square$$

Soit

$$(135) \quad \int_D \Gamma_i(\{\zeta(\omega)\}) \Gamma_j(\{\zeta(\omega)\}) \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(\frac{1}{2}\{\zeta(\omega)\}^T \{\zeta(\omega)\}\right) d\{\zeta(\omega)\} = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \square \subseteq$$

Nous retrouvons exactement la relation d'orthonormalité (131) entre deux polynômes de Hermite, *les polynômes de chaos polynomiaux de variables gaussiennes sont donc des polynômes de Hermite de ces mêmes variables.*

En utilisant les formules de calcul de ces polynômes, nous pouvons donc dire que le chaos polynomial d'ordre p peut être obtenu par :

$$(136) \quad \Gamma_p(\zeta_{i_1}(\omega), \dots, \zeta_{i_p}(\omega)) = (-1)^n \exp\left(\frac{1}{2}\{\zeta(\omega)\}^T \{\zeta(\omega)\}\right) \left[\frac{\partial^p}{\partial \zeta_{i_1} \dots \partial \zeta_{i_p}} \exp\left(-\frac{1}{2}\{\zeta(\omega)\}^T \{\zeta(\omega)\}\right) \right]$$

où $\{i_1, \dots, i_p\}$ sont toutes les combinaisons de p entiers de l'intervalle $[1, n]$.

3.5.3 Correspondances

Il existe d'autres correspondances entre des fonctions de pondération de polynômes typiques et des densités de probabilité usuelles, la plus remarquable étant celle entre les polynômes de Legendre et la loi uniforme. La Table 7 reprend les équivalences connues.

Loi	Polynômes
Gauss	Hermite
Uniforme	Legendre
Gamma	Laguerre
Bêta	Jacobi

Table 7. Correspondance entre les polynômes et les lois de variables aléatoires

L'utilité de ces correspondances est à lier avec la remarque du §3.2 : lorsque le processus aléatoire est de loi Uniforme, alors l'expansion qui convergera le plus vite sera celle utilisant des polynômes de Legendre pour les chaos polynomiaux successifs.

Il existe également des correspondances avec des variables aléatoires discrètes. La relation d'orthogonalité (129) est dans ce cas :

$$(137) \quad \sum_{k=0}^M Q_i(\{x_k\}) Q_j(\{x_k\}) \eta_k = h_i^2 \delta_{ij}$$

Les valeurs η_k sont alors identiques aux densités de probabilité de certaines lois discontinues. La Table 8 récapitule les équivalences pour les lois discontinues.

Loi	Polynômes
Poisson	Charlier
Binomiale	Krawtchouk
Binomiale négative	Meixner
Hypergéométrique	Hahn

Table 8. Correspondance entre les polynômes et les lois de variables aléatoires

3.6 Exemple de décomposition d'une variable log-normale sur le chaos polynomial

3.6.1 Calcul de la décomposition

Soit $\xi(\omega)$ une variable aléatoire suivant une loi log-normale de moyenne m_ξ et d'écart-type σ_ξ . Cette variable aléatoire $\xi(\omega)$ peut s'exprimer en utilisant une variable aléatoire gaussienne centrée réduite $u(\omega)$:

$$(138) \quad \xi(\omega) = \xi(u(\omega)) = \exp(\lambda u(\omega) + \mu)$$

avec λ, μ des paramètres dépendant de la moyenne de la loi log-normale :

$$(139) \quad \lambda = \sqrt{\ln \left(1 + \left(\frac{\sigma_\xi}{m_\xi} \right)^2 \right)}$$

$$(140) \quad \mu = \ln(m_\xi) - \frac{1}{2}\lambda^2$$

Nous utiliserons la variable aléatoire normale $u(\omega)$ comme unique variable du chaos polynomial :

$$(141) \quad \psi_i(\omega) = \psi_i(u(\omega))$$

Le chaos polynomial sera donc de dimension 1. La décomposition de la variable aléatoire $\xi(\omega)$ sur le chaos polynomial consiste à déterminer les coefficients réels a_i tels que :

$$(142) \quad \xi(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \psi_i(\omega)$$

Pour cela nous projetons $\xi(\omega)$ sur chaque polynôme $\psi_i(u(\omega))$ du chaos polynomial. Dans l'espace des variables aléatoires, cela revient à calculer

$$(143) \quad a_i = \mathbf{E}[\xi(\omega)\psi_i(\omega)]$$

pour chaque i .

Pour $i=0$, nous avons $\psi_0(\omega) = 1$. La projection donne :

$$(144) \quad \boxed{\mathbf{E}[\xi(\omega)\psi_0(\omega)] = \mathbf{E}[\xi(\omega)] = m_\xi}$$

Pour $i=1$, nous avons $\psi_1(\omega) = u(\omega)$. La projection donne :

$$(145) \quad \mathbf{E}[\xi(\omega)\psi_1(\omega)] = \mathbf{E}[\xi(\omega)u(\omega)]$$

L'espérance du produit d'une variable aléatoire normale et d'une variable aléatoire log-normale qui en découle via la formule (138) peut être évaluée en revenant à la définition de l'espérance :

$$(146) \quad \mathbf{E}[\xi(\omega)u(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(\lambda x + \mu) \phi(x) dx$$

où $\phi(x)$ est la fonction de densité de probabilité de la loi normale. Après calcul (et vérification par une simulation de Monte-Carlo) nous trouvons :

$$(147) \quad \boxed{\mathbf{E}[\xi(\omega)\psi_1(\omega)] = \lambda \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} + \mu\right)}$$

Pour $i=2$, nous avons $\psi_2(\omega) = u(\omega)^2 - 1$. La projection donne après intégration :

$$(148) \quad \boxed{\mathbf{E}[\xi(\omega)\psi_2(\omega)] = \frac{\lambda^2}{2} \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} + \mu\right)}$$

Pour $i=3$, nous avons $\psi_3(\omega) = u(\omega)^3 - 3u(\omega)$. La projection donne après intégration :

$$(149) \quad \boxed{\mathbf{E}[\xi(\omega)\psi_3(\omega)] = \frac{\lambda^3}{6} \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} + \mu\right)}$$

Pour $i=4$, nous avons $\psi_4(\omega) = u(\omega)^4 - 6u(\omega)^2 + 3$. La projection donne après intégration :

$$(150) \quad \mathbf{E}[\xi(\omega)\psi_3(\omega)] = \frac{\lambda^4}{24} \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} + \mu\right)$$

Les différents calculs font apparaître un système récursif qui s'avère être :

$$(151) \quad \mathbf{E}[\xi(\omega)\psi_i(\omega)] = \frac{\lambda^i}{i!} \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} + \mu\right)$$

Nous ne pouvons pas prouver cette formule (151), cependant nous l'avons vérifié jusqu'à $i=4$, ce qui est suffisant pour construire une approximation de la variable aléatoire $\xi(\omega)$, par exemple en montant jusqu'à l'ordre 3 du chaos polynomial :

$$(152) \quad \xi(\omega) \approx m_\xi + \lambda \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} + \mu\right) \psi_1(\omega) + \frac{\lambda^2}{2} \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} + \mu\right) \psi_2(\omega) + \frac{\lambda^3}{6} \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} + \mu\right) \psi_3(\omega)$$

que l'on note :

$$(153) \quad \xi(\omega) \approx \sum_{i=0}^3 a_i \psi_i(\omega)$$

3.6.2 Application numérique et vérification

Prenons un exemple concret :

$$m_\xi = 1$$

$$\sigma_\xi = 0,1$$

alors :

$$\mu \approx -0.00497517$$

$$\lambda \approx 0,0997513$$

Les différents coefficients du chaos polynomial sont :

Polynôme $\psi_i(\omega)$	Coefficient a_i
$\psi_0(\omega)$	1
$\psi_1(\omega)$	$9,975.10^{-2}$
$\psi_2(\omega)$	$9,950.10^{-3}$
$\psi_3(\omega)$	$9,920.10^{-4}$
$\psi_4(\omega)$	$9,901.10^{-5}$

Table 9. Quatre premiers Coefficients du chaos polynomial pour une variable log-normale de moyenne 1 et d'écart-type 0,1,.

Pour les premiers termes le paramètre λ est si faible que $\frac{\lambda^i}{i!} \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} + \mu\right) \approx \frac{\lambda^i}{i!}$.

Afin de tester la validité de la décomposition sur le chaos polynomial, nous pouvons réaliser une simulation de Monte-Carlo en comparant les valeurs théoriques aux valeurs obtenues par le chaos polynomial et par la formule (138). Le test du Khi-deux nous permettra de valider la distribution log-normale de l'approximation (153).

Nous avons donc réalisé 50000 tirages d'une variable aléatoire normale puis calculé les valeurs correspondantes de l'approximation en utilisant la formule (152). Les résultats sont présentés dans la Figure 34 et la Figure 35.

En y traçant également la distribution d'une variable gaussienne de même moyenne et écart-type nous pouvons voir le décalage opéré par le chaos (Figure 36) : la distribution s'écarte d'une distribution normale pour se rapprocher d'une distribution log-normale.

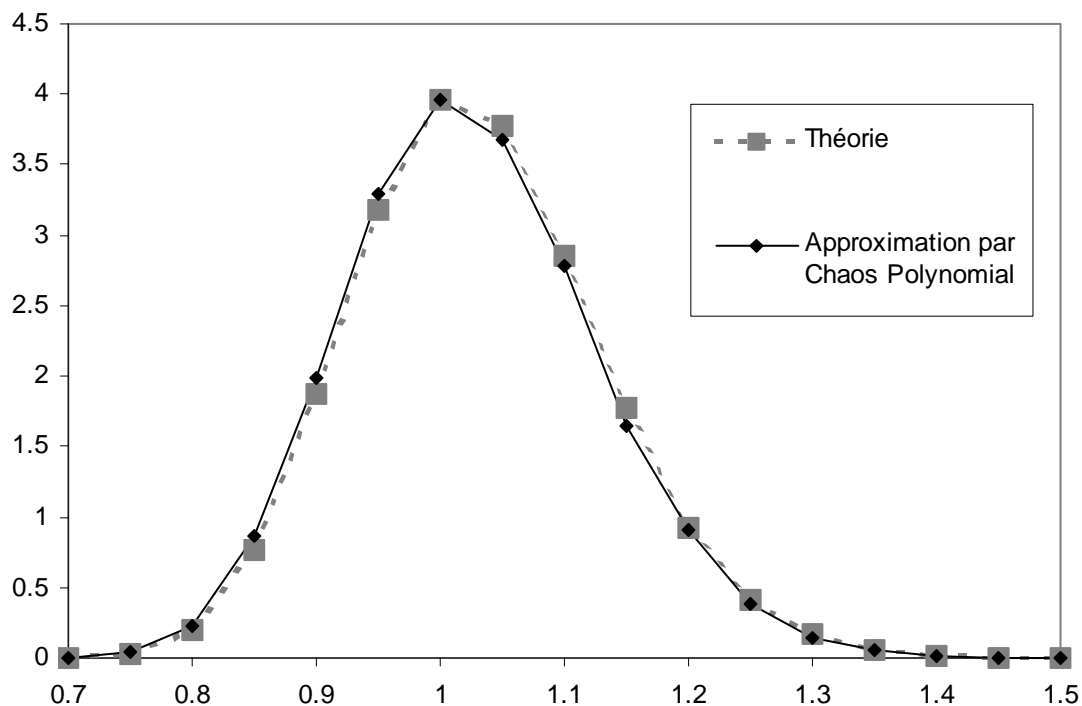


Figure 34. Fonction de densité de probabilité de l'approximation par un chaos polynomial d'ordre 3 et de degré 1 d'une variable aléatoire log-normale issue de 50000 tirages répartis en 17 classes et comparaison avec la fonction de densité de probabilité théorique.

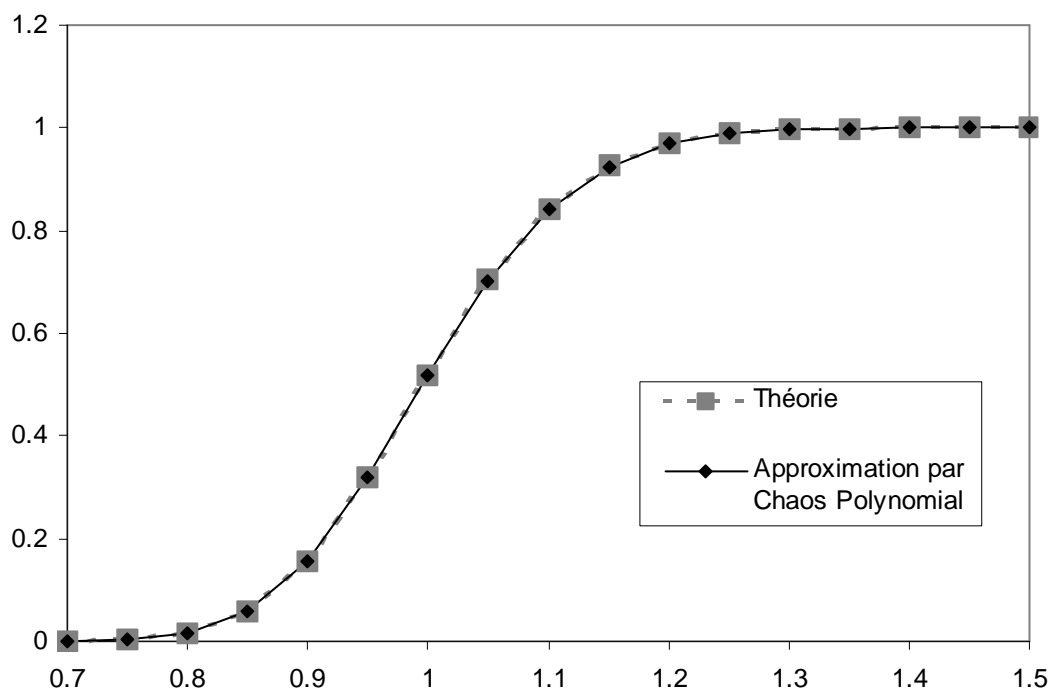


Figure 35. Fonction de répartition de l'approximation par un chaos polynomial d'ordre 3 et de degré 1 d'une variable aléatoire log-normale issue de 50000 tirages répartis en 17 classes et comparaison avec la fonction de répartition théorique.

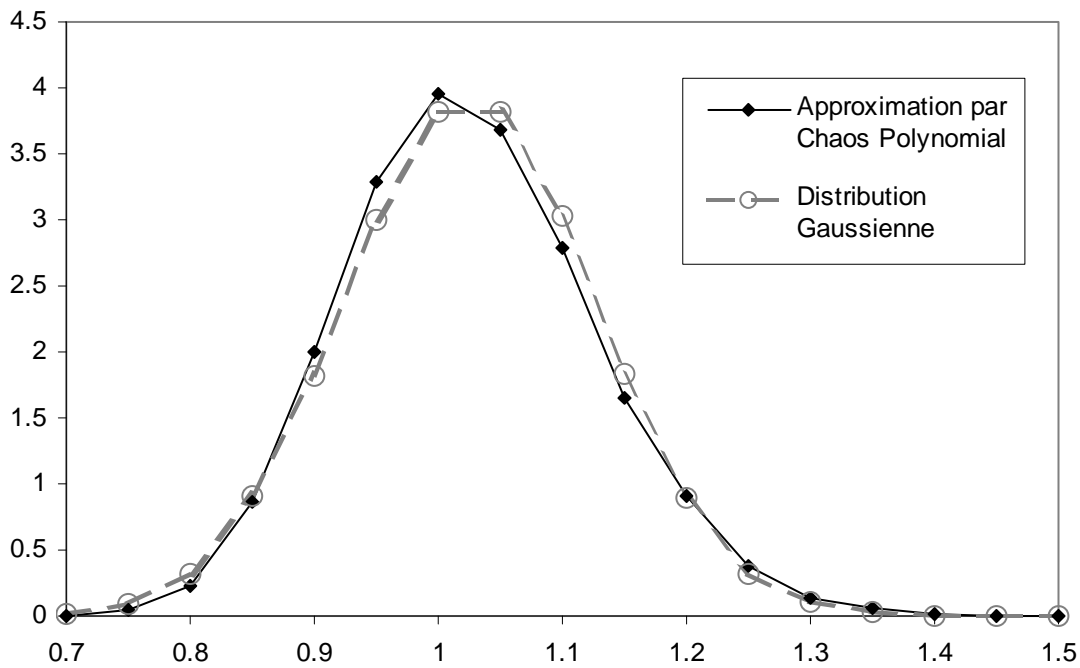


Figure 36. A partir du même tirage de 50000 d'une variable aléatoire normale, comparaison entre la fonction de densité de probabilité obtenue à partir du chaos polynomial et celle d'une variable gaussienne de même moyenne et écart-type.

Le test du Khi-deux nous permet de déterminer si une hypothèse de distribution d'un ensemble de valeurs est acceptable. Il consiste à mesurer l'écart entre la théorie et les mesures sur n classes, et de comparer cette valeur avec le χ^2 à $n-1$ degrés de liberté pour un risque déterminé de considérer comme fausse une hypothèse vraie. Si la somme du carré des écarts est inférieure à la valeur du χ^2 , alors l'hypothèse peut être acceptée, sinon elle doit être rejetée.

Dans notre exemple, nous trouvons un écart mesuré sur 17 classes de 0,057. Or la valeur du Khi-deux avec un risque de 1% pour 16 degrés de liberté est de 3,9. L'hypothèse d'une distribution log-normale est donc acceptable pour le jeu de valeurs.

3.7 Extension aux champs aléatoires

Nous avons vu que le chaos homogène permettait de décomposer une variable aléatoire sur une base de polynômes de variables aléatoires. Dans [III-3], l'extension à la décomposition de processus aléatoires stationnaires du second ordre est introduite par le biais de la décomposition en série de Karhunen-Loève (que nous verrons au chapitre suivant).

En effet, si le processus aléatoire $\mu(\{x\}, \omega)$ est stationnaire du second ordre, il peut être décomposé sous la forme

$$(154) \quad \mu(\{x\}, \omega) = \bar{\mu}(\{x\}) + \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \zeta_i(\omega) \phi_i(\{x\})$$

où les λ_i et ϕ_i sont issus de la décomposition en série de la fonction de covariance de $\mu(\{x\}, \omega)$. La distribution des variables aléatoires $\zeta_i(\omega)$ dépend de la loi du champ aléatoire, mais si leurs deux premiers moments sont finis elles peuvent être décomposées sur le chaos polynomial via l'équation (93) :

$$(155) \quad \zeta_i(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \psi_j(\omega)$$

Ce qui nous donne donc la décomposition suivante pour le processus aléatoire $\mu(\{x\}, \omega)$:

$$(156) \quad \mu(\{x\}, \omega) = \bar{\mu}(\{x\}) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \phi_i(\{x\}) a_{ij} \psi_j(\omega)$$

Soit, en tronquant la décomposition de Karhunen-Loève à l'ordre n et la décomposition sur le chaos polynomial à l'ordre m l'approximation suivante du champ aléatoire :

$$(157) \quad \mu(\{x\}, \omega) \approx \bar{\mu}(\{x\}) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sqrt{\lambda_i} \phi_i(\{x\}) a_{ij} \psi_j(\omega)$$

Si la fonction de covariance du champ aléatoire est inconnue, il ne nous sert à rien de séparer les termes λ_i , ϕ_i et a_{ij} , nous pouvons poser :

$$(158) \quad d_{ij}(\{x\}) = \sqrt{\lambda_i} \phi_i(\{x\}) a_{ij}$$

Dès lors :

$$(159) \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sqrt{\lambda_i} \phi_i(\{x\}) a_{ij} \psi_j(\omega) = \sum_{j=0}^m \left(\psi_j(\omega) \sum_{i=0}^n d_{ij}(\{x\}) \right)$$

de même nous pouvons poser

$$(160) \quad \sum_{i=0}^n d_{ij}(\{x\}) = d_j(\{x\})$$

Ce qui nous donne la formulation suivante pour la décomposition sur le chaos polynomial du champ aléatoire $\mu(\{x\}, \omega)$:

$$(161) \quad \mu(\{x\}, \omega) \approx \bar{\mu}(\{x\}) + \sum_{j=0}^m d_j(\{x\}) \psi_j(\omega)$$

Ainsi le chaos polynomial permet de séparer la variation stochastique de la variation physique (espace, temps, température, etc...) d'un champ aléatoire.

Cette partie n'a pour but que de justifier l'utilisation de la décomposition (161), il faut bien noter que la détermination des coefficients $d_j(\{x\})$ ne passe pas nécessairement par l'utilisation de (154).

4 Utilité du chaos polynomial

L'utilité principale du chaos polynomial est de servir de base de projection pour les données ou les solutions de calculs stochastiques [III-6].

4.1 Problème typique

Soit le système décrit par l'équation de comportement suivante :

$$(162) \quad F(\{x\}; u(\{x\}, \omega)) = e(\{x\}, \omega)$$

où :

- $u(\{x\}, \omega)$ et $e(\{x\}, \omega)$ sont des champs aléatoires ;

- F est opérateur déterministe, impliquant typiquement des dérivations par rapport au temps ou à l'espace ;
- $\{x\}$ est le vecteur regroupant l'ensemble des variables déterministes utilisées par le modèle (espace, temps, température,...).

Par exemple, l'équation de la flèche $v(s, \omega)$ d'une poutre dont la rigidité en flexion est un champ aléatoire $EI(s, \omega)$ est, en l'absence de déformation en cisaillement :

$$(163) \quad \frac{\partial^2 v(s, \omega)}{\partial^2 s} = -\frac{M_z(s)}{EI(s, \omega)}$$

dans l'équation (162) u est la flèche v , e est le terme de droite de l'équation et F est la dérivation par rapport à l'abscisse s .

Typiquement deux problèmes peuvent se poser :

- dans le cas d'un **problème direct**, $e(\{x\}, \omega)$ est connu et l'on cherche $u(\{x\}, \omega)$;
- dans le cas d'un **problème inverse** $u(\{x\}, \omega)$ est connu et l'on cherche $e(\{x\}, \omega)$.

4.2 Discrétisation des données

Dans les deux cas, la première phase consiste à discrétiser le champ aléatoire constituant les données afin d'en obtenir une formulation identique à (161). Cela revient à projeter le champ sur un chaos polynomial comme nous l'avons fait à titre d'exemple §3.6.

4.3 Projection du résultat

La deuxième phase consiste à projeter la solution sur un chaos polynomial utilisant les **mêmes variables aléatoires que les données**. En effet le champ aléatoire résultat est dépendant, au sens probabiliste du terme, du champ aléatoire d'entrée : ils sont liés via l'opérateur déterministe F . Les variables aléatoires d'entrée et celles servant à la projection du résultat étant dépendantes, le plus simple est d'utiliser le même jeu dans les deux cas (mais il est théoriquement possible d'utiliser des jeux différents mais dépendants).

Le champ recherché $\mu(\{x\}, \omega)$ (que ce soit le champ u ou le champ e) peut être décomposé via la formulation (161) :

$$(164) \quad \mu(\{x\}, \omega) = \bar{\mu}(\{x\}) + \sum_{j=0}^m d_j(\{x\}) \psi_j(\omega)$$

Pour résoudre le problème il nous faut déterminer les fonctions $d_j(\{x\})$. Une phase de paramétrisation de ces fonctions est donc nécessaire.

La détermination de ces fonctions peut donc se ramener à la détermination de quelques paramètres. Pour cela on peut utiliser une projection de Galerkin de l'équation (162) sur chaque polynôme $\psi_j(\omega)$ utilisé, puis requérir que l'erreur soit orthogonale à ces polynômes :

$$(165) \quad \left\langle F(\{x\}; u(\{x\}, \omega)), \psi_j(\omega) \right\rangle = \left\langle e(\{x\}, \omega), \psi_j(\omega) \right\rangle \quad j=0, 1, \dots, m$$

Ce qui dans l'espace Ω s'écrit :

$$(166) \quad \mathbf{E} \left[F(\{x\}; u(\{x\}, \omega)) \psi_j(\omega) \right] = \mathbf{E} \left[e(\{x\}, \omega) \psi_j(\omega) \right] \quad j=0,1,\dots,m$$

L'utilisation de l'orthogonalité des polynômes nous permet d'obtenir un système de $m+1$ équations **déterministes** couplées.

La faisabilité des projections dépend bien évidemment de la forme de l'opérateur F . Un opérateur linéaire simplifie ainsi énormément les choses.

4.4 Exploitation des résultats

La projection du résultat d'un calcul stochastique sur le chaos polynomial forme une expression analytique qui peut se prêter à plusieurs traitements, en particulier le calcul de moments de la réponse et la mise en œuvre d'analyses de fiabilité.

4.4.1 calcul de moments

L'un des traitements les plus simples des résultats consiste à en calculer les moments (moyenne, écart-type,...). La formulation du chaos polynomial permet un calcul aisé de ces quantités. La moyenne est ainsi donnée par la formule (167), la variance par la formule (168) :

$$(167) \quad m_\mu(\{x\}) = d_0(\{x\})$$

$$(168) \quad \sigma_\mu^2(\{x\}) = \sum_{j=1}^m \mathbf{E} \left[\psi_j(\omega)^2 \right] d_j(\{x\})^2$$

4.4.2 Analyse de fiabilité

L'analyse de fiabilité consiste à déterminer la probabilité de défaillance d'un système connaissant son comportement et la variabilité de certains paramètres (géométrie, chargement, matériau). Le calcul revient à estimer la probabilité de voir le critère de défaillance (contrainte, déplacement,...) dépassé. Le chaos polynomial permet ici un traitement analytique du problème et évite de coûteuses simulations.

5 Exemple de calcul

Nous donnons ici un exemple de calcul analytique, en précisant que le chapitre suivant traite de méthodes de calcul numériques.

5.1 Présentation

Considérons une poutre en flexion dont l'équation de comportement, en l'absence de déformation en cisaillement est :

$$(169) \quad EI(s) \frac{\partial^2 v(s)}{\partial s^2} = -M_z(s)$$

où :

s est l'abscisse d'un point ;

$v(s)$ est la flèche ;

$EI(s)$ est la rigidité ;

$M_z(s)$ est le moment fléchissant en s .

Si nous considérons que la rigidité est un processus aléatoire $EI(s, \omega)$ dont nous connaissons les premiers termes de la décomposition en série et que la flèche $v(s, \omega)$ est un champ aléatoire que l'on cherche à déterminer, le moment restant déterministe et connu, alors l'équation devient :

$$(170) \quad EI(s, \omega) \frac{\partial^2 v(s, \omega)}{\partial s^2} = -M_Z(s)$$

On considère que le processus aléatoire de la rigidité est projeté sur un chaos polynomial de degré 1. La mise en oeuvre de cette projection particulière sera vue au chapitre suivant. On obtient :

$$(171) \quad EI(s, \omega) = EI_0 \left(1 + \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \zeta_i(\omega) \phi_i(s) \right)$$

où les λ_i sont des scalaires et les $\phi_i(s)$ des fonctions.

Tous les polynômes du chaos polynomial seront des polynômes de Hermite.

5.2 Mise en équation

En remplaçant dans (170) $EI(s, \omega)$ et $v(s, \omega)$ par leurs décompositions sur le chaos polynomial de mêmes n variables $\zeta_i(\omega)$ (soit $\psi_i(\omega) = \psi_j(\{\zeta(\omega)\})$) :

$$(172) \quad \left(1 + \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \zeta_i(\omega) \phi_i(s) \right) \frac{d^2 \sum_{j=0}^m \alpha_j(\{s\}) \psi_j(\{\zeta(\omega)\})}{ds^2} = -\frac{M_Z(s)}{EI_0(s)}$$

Soit

$$(173) \quad \left(1 + \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \zeta_i(\omega) \phi_i(s) \right) \left(\sum_{j=0}^m \frac{d^2 \alpha_j(\{s\})}{ds^2} \psi_j(\{\zeta(\omega)\}) \right) = -\frac{M_Z(s)}{EI_0(s)}$$

Pour des raisons d'homogénéité du calcul, nous allons poser que :

$$(174) \quad 1 + \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \zeta_i(\omega) \phi_i(s) = \sum_{i=0}^n \sqrt{\lambda_i} \zeta_i(\omega) \phi_i(s)$$

C'est à dire que $\sqrt{\lambda_0} \zeta_0(\omega) \phi_0(s) = 1$. La variable aléatoire $\zeta_0(\omega)$ est donc déterministe et égale à 1, comme l'est le premier terme du chaos polynomial $\zeta_0(\omega) = \psi_0(\{\zeta(\omega)\})$.

$$(175) \quad \left(\sum_{i=0}^n \sqrt{\lambda_i} \phi_i(s) \zeta_i(\omega) \right) \left(\sum_{j=0}^m \frac{d^2 \alpha_j(s)}{ds^2} \psi_j(\{\zeta(\omega)\}) \right) = -\frac{M_Z(s)}{EI_0(s)}$$

Or les variables aléatoires $\zeta_i(\omega)$ de la décomposition en série de Karhunen-Loève de la rigidité sont les mêmes que celles du chaos polynomial. Les n premiers polynômes correspondant aux n variables aléatoires de la décomposition sont de degré 1, donc pour ces n premiers polynômes :

$$(176) \quad \psi_i(\{\zeta_i(\omega)\}) = \zeta_i(\omega), i = 1 \dots n$$

On peut donc réécrire (175) sous la forme :

$$(177) \quad \left(\sum_{i=0}^n \sqrt{\lambda_i} \phi_i(s) \psi_i(\{\zeta(\omega)\}) \right) \left(\sum_{j=0}^m \frac{d^2 \alpha_j(s)}{ds^2} \psi_j(\{\zeta(\omega)\}) \right) = -\frac{M_z(s)}{EI_0(s)}$$

Afin de mieux comprendre, prenons un chaos polynomial d'ordre 2 avec 4 variables aléatoires gaussiennes ($n=4, m=15$) :

$$(178) \quad \{\zeta(\omega)\} = \begin{Bmatrix} \zeta_1(\omega) \\ \zeta_2(\omega) \\ \zeta_3(\omega) \\ \zeta_4(\omega) \end{Bmatrix}$$

Pour simplifier dans la suite nous écrirons $\psi_i(\omega)$ au lieu de $\psi_i(\{\zeta(\omega)\})$, toutefois il faut se rappeler que seules ces quatre variables aléatoires se retrouvent dans les différents polynômes.

$\psi_0(\omega) = 1$
$\psi_1(\omega) = \zeta_1(\omega)$
$\psi_2(\omega) = \zeta_2(\omega)$
$\psi_3(\omega) = \zeta_3(\omega)$
$\psi_4(\omega) = \zeta_4(\omega)$
$\psi_5(\omega) = \zeta_1(\omega) \zeta_1(\omega) - 1$
$\psi_6(\omega) = \zeta_1(\omega) \zeta_2(\omega)$
$\psi_7(\omega) = \zeta_1(\omega) \zeta_3(\omega)$
$\psi_8(\omega) = \zeta_1(\omega) \zeta_4(\omega)$
$\psi_9(\omega) = \zeta_2(\omega) \zeta_2(\omega) - 1$
$\psi_{10}(\omega) = \zeta_2(\omega) \zeta_3(\omega)$
$\psi_{11}(\omega) = \zeta_2(\omega) \zeta_4(\omega)$
$\psi_{12}(\omega) = \zeta_3(\omega) \zeta_3(\omega) - 1$
$\psi_{13}(\omega) = \zeta_3(\omega) \zeta_4(\omega)$
$\psi_{14}(\omega) = \zeta_4(\omega) \zeta_4(\omega) - 1$

Table 10. Polynômes du chaos

On rappelle que $\mathbf{E}[\psi_i(\omega)] = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$, que $\mathbf{E}[\psi_0(\omega)] = 1$ et que $\mathbf{E}[\psi_i(\omega)\psi_j(\omega)] = 0$ pour $i \neq j$

Une première application de l'opérateur d'espérance à l'équation (177) nous permet d'écrire :

$$(179) \quad \mathbf{E} \left[\left(\sum_{i=0}^n \sqrt{\lambda_i} \phi_i(s) \psi_i(\omega) \right) \left(\sum_{j=0}^m \frac{d^2 \alpha_j(s)}{ds^2} \psi_j(\omega) \right) \right] = - \frac{M_Z(s)}{EI_0(s)}$$

En utilisant l'orthogonalité des polynômes du chaos nous obtenons :

$$(180) \quad \sum_{i=0}^n \sqrt{\lambda_i} \phi_i(s) \frac{d^2 \alpha_i(s)}{ds^2} \mathbf{E}[\psi_i(\omega)\psi_i(\omega)] = - \frac{M_Z(s)}{EI_0(s)}$$

Réalisons des projections sur les chaos polynomiaux successifs

$$(181) \quad \mathbf{E} \left[\left(\sum_{i=0}^n \sqrt{\lambda_i} \phi_i(s) \psi_i(\omega) \right) \left(\sum_{j=0}^m \frac{d^2 \alpha_j(s)}{ds^2} \psi_j(\omega) \right) \psi_k(\omega) \right] = \mathbf{E} \left[- \frac{M_Z(s)}{EI_0(s)} \psi_k(\omega) \right] \quad k=0, \dots, m$$

Soit en simplifiant :

$$(182) \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sqrt{\lambda_i} \phi_i(s) \frac{d^2 \alpha_j(s)}{ds^2} \mathbf{E}[\psi_i(\omega)\psi_j(\omega)\psi_k(\omega)] = - \frac{M_Z(s)}{EI_0(s)} \mathbf{E}[\psi_k(\omega)]$$

Les $(m+1) \times n$ équations s'obtiennent en calculant le coefficient c_{ijk} suivant (on note que $c_{ijk} = c_{ikj}$) :

$$(183) \quad c_{ijk} = \mathbf{E}[\psi_i(\omega)\psi_j(\omega)\psi_k(\omega)] \quad \text{pour } i=0, \dots, n, j=0, \dots, m, k=0, \dots, m$$

L'équation (182) se réécrit alors :

$$(184) \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sqrt{\lambda_i} \phi_i(s) \frac{d^2 \alpha_j(s)}{ds^2} c_{ijk} = - \frac{M_Z(s)}{EI_0(s)} \delta_{k0} \quad k=0, \dots, m$$

Or il est facile de calculer ces coefficients c_{ijk} , des tables sont d'ailleurs données dans [III-3]. Il suffit de revenir à la définition de l'espérance d'une variable aléatoire que nous avons donnée p. 65. Nous trouvons ainsi que le coefficient c_{ijk} est non nul dans 31 cas (voir Table 11).

i	j	k	c_{ijk}
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
0	2	2	1
2	0	2	1
0	3	3	1
3	0	3	1
0	4	4	1
4	0	4	1
0	5	5	2
1	1	5	1
0	6	6	1
1	2	6	1
2	1	6	1
0	7	7	1
1	3	7	1
3	1	7	1
0	8	8	1
1	4	8	1
4	1	8	1
0	9	9	2
2	2	9	2
0	10	10	1
2	3	10	1
3	2	10	1
0	11	11	1
2	4	11	1
4	2	11	1
0	12	12	2
3	3	12	2
0	13	13	1
3	4	13	1
4	3	13	1
0	14	14	2
4	4	14	2

Table 11. Coefficients c_{ijk} non nuls, triés par k croissant (pour toutes les autres combinaisons d'indices les coefficients c_{ijk} sont nuls)

On remarque qu'il existe au moins un coefficient c_{ijk} non nul pour chaque valeur de k , ce qui nous assure de disposer de $m+1$ équations (m étant le nombre de polynômes dans le chaos polynomial).

Ces 31 coefficients non nuls nous permettent d'écrire les $m+1$ équations suivantes :

k	Equations
0	$\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s) \frac{d^2 \alpha_0(s)}{ds^2} = -\frac{M_Z(s)}{EI_0(s)}$
1	$\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s) \frac{d^2 \alpha_1(s)}{ds^2} + \sqrt{\lambda_1} \phi_1(s) \frac{d^2 \alpha_0(s)}{ds^2} = 0$
2	$\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s) \frac{d^2 \alpha_2(s)}{ds^2} + \sqrt{\lambda_2} \phi_2(s) \frac{d^2 \alpha_0(s)}{ds^2} = 0$
3	$\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s) \frac{d^2 \alpha_3(s)}{ds^2} + \sqrt{\lambda_3} \phi_3(s) \frac{d^2 \alpha_0(s)}{ds^2} = 0$
4	$\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s) \frac{d^2 \alpha_4(s)}{ds^2} + \sqrt{\lambda_4} \phi_4(s) \frac{d^2 \alpha_0(s)}{ds^2} = 0$
5	$2\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s) \frac{d^2 \alpha_5(s)}{ds^2} + \sqrt{\lambda_1} \phi_1(s) \frac{d^2 \alpha_1(s)}{ds^2} = 0$
6	$\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s) \frac{d^2 \alpha_6(s)}{ds^2} + \sqrt{\lambda_1} \phi_1(s) \frac{d^2 \alpha_2(s)}{ds^2} + \sqrt{\lambda_2} \phi_2(s) \frac{d^2 \alpha_1(s)}{ds^2} = 0$
7	$\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s) \frac{d^2 \alpha_7(s)}{ds^2} + \sqrt{\lambda_1} \phi_1(s) \frac{d^2 \alpha_3(s)}{ds^2} + \sqrt{\lambda_3} \phi_3(s) \frac{d^2 \alpha_1(s)}{ds^2} = 0$
8	$\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s) \frac{d^2 \alpha_8(s)}{ds^2} + \sqrt{\lambda_1} \phi_1(s) \frac{d^2 \alpha_4(s)}{ds^2} + \sqrt{\lambda_4} \phi_4(s) \frac{d^2 \alpha_1(s)}{ds^2} = 0$
9	$2\sqrt{\lambda_2} \phi_2(s) \frac{d^2 \alpha_2(s)}{ds^2} + 2\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s) \frac{d^2 \alpha_9(s)}{ds^2} = 0$
10	$\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s) \frac{d^2 \alpha_{10}(s)}{ds^2} + \sqrt{\lambda_2} \phi_2(s) \frac{d^2 \alpha_3(s)}{ds^2} + \sqrt{\lambda_3} \phi_3(s) \frac{d^2 \alpha_2(s)}{ds^2} = 0$
11	$\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s) \frac{d^2 \alpha_{11}(s)}{ds^2} + \sqrt{\lambda_3} \phi_3(s) \frac{d^2 \alpha_4(s)}{ds^2} + \sqrt{\lambda_4} \phi_4(s) \frac{d^2 \alpha_3(s)}{ds^2} = 0$
12	$2\sqrt{\lambda_3} \phi_3(s) \frac{d^2 \alpha_3(s)}{ds^2} + 2\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s) \frac{d^2 \alpha_{12}(s)}{ds^2} = 0$
13	$\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s) \frac{d^2 \alpha_{13}(s)}{ds^2} + \sqrt{\lambda_3} \phi_3(s) \frac{d^2 \alpha_4(s)}{ds^2} + \sqrt{\lambda_4} \phi_4(s) \frac{d^2 \alpha_3(s)}{ds^2} = 0$
14	$2\sqrt{\lambda_4} \phi_4(s) \frac{d^2 \alpha_4(s)}{ds^2} + 2\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s) \frac{d^2 \alpha_{14}(s)}{ds^2} = 0$

Table 12. Les 14 équations pour les coefficients c_{ijk} non nuls

Nous disposons donc d'un système de m équations différentielles couplées dont les inconnues sont les m fonctions $\alpha_i(s)$. Etant donné que la flèche aux extrémités est nulle quelle que soit la

réalisation des variables aléatoires du chaos polynomial, chacune de ces fonctions a comme conditions aux limites :

$$(185) \quad \begin{cases} \alpha_i(0) = 0 \\ \alpha_i(L) = 0 \end{cases} \quad i=0 \dots m$$

5.3 Méthode de résolution

La première équation nous permet de calculer α_0 facilement : c'est la flèche de la poutre pour une rigidité égale à $\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s) EI_0(s)$. Or nous avons posé que $\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s) = 1$ (voir (174)), cette première fonction est donc la flèche obtenue pour la rigidité moyenne.

Connaissant α_0 , les équations numérotées 1 à 5 nous permettent de déterminer α_1 à α_5 de manière simple :

$$(186) \quad \frac{d^2 \alpha_1(s)}{ds^2} = - \frac{\sqrt{\lambda_1} \phi_1(s)}{\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s)} \frac{d^2 \alpha_0(s)}{ds^2}$$

Soit

$$(187) \quad \frac{d^2 \alpha_1(s)}{ds^2} = \frac{\sqrt{\lambda_1} \phi_1(s)}{\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s)} \frac{M_z(s)}{EI_0(s)}$$

Ce qui, compte tenu des conditions aux limites (185), représente la flèche d'une poutre pour une rigidité de $\frac{\sqrt{\lambda_0} \phi_0(s)}{\sqrt{\lambda_1} \phi_1(s)} EI_0(s)$. Il est à noter que les fonctions se trouvant au dénominateur peuvent s'annuler localement ou changer de signe, ce qui équivaut à une rigidité infinie ou négative respectivement. Même si ce fait peut poser des problèmes philosophiques, cela ne pose pas de problèmes calculatoires (en excluant la singularité lors de l'intégration), au contraire d'une rigidité nulle (qui correspond à une rotule dans la poutre).

Enfin les équations suivantes permettent de déterminer les α_i restants, le calcul se ramenant toujours à celui de la flèche d'une poutre sur deux appuis dont la rigidité est variable.

Nous pouvons voir ces différentes fonctions comme des perturbations de différentes formes et amplitudes autour de la flèche moyenne. Chacune est associée à une variable aléatoire ou à un produit de variables aléatoires.

5.4 Application

5.4.1 Paramètres utilisés

Nous avons résolu le système pour une poutre sur deux appuis soumise à une charge répartie obéissant à la loi (170). La fonction de covariance de la rigidité est de type exponentielle :

$$(188) \quad C_{EI}(h) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{h}{2l}\right)$$

où h est la distance entre deux points. La décomposition (171) limitée à 4 variables aléatoires de la rigidité est obtenue en utilisant les formules de [III-3].

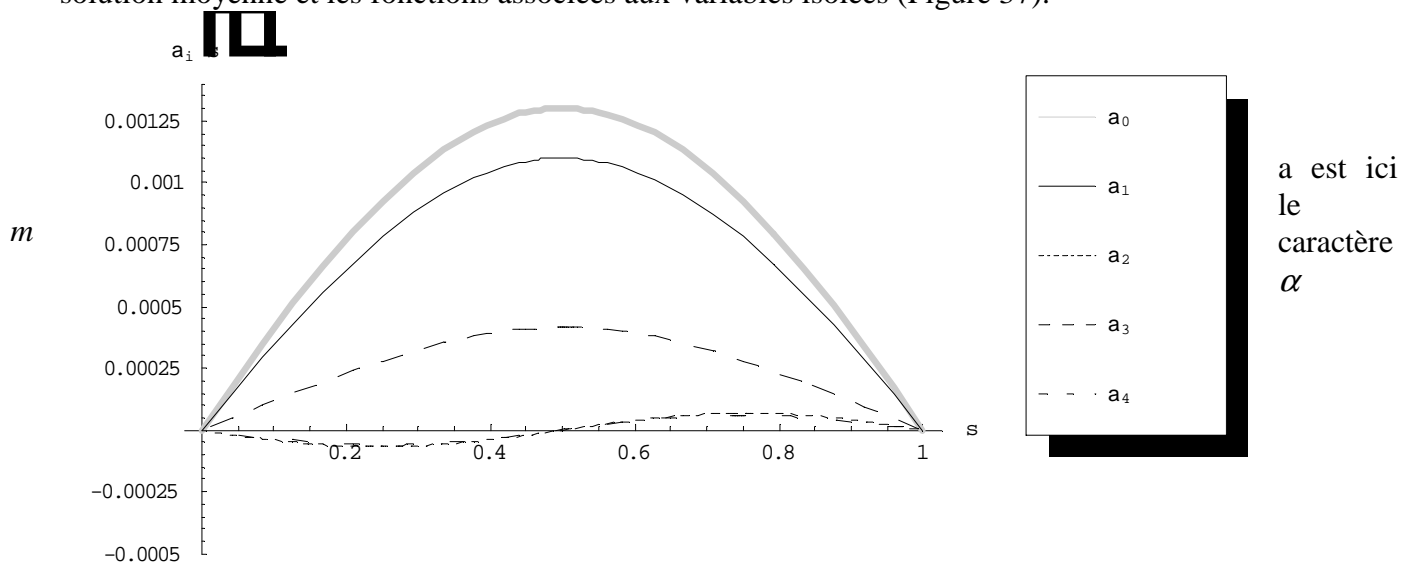
Les valeurs numériques utilisées sont indiquées Table 13.

Désignation	Symbole	Valeur
Longueur	L	1m
Charge répartie	q	1000N/m
Rigidité moyenne	EI_0	10^{10}N.m^{-4}
Longueur de corrélation	l	1m
Ecart-type	σ	1

Table 13. Valeurs numériques utilisées pour l'exemple

5.4.2 Résultats

Après résolution nous obtenons 14 fonctions, chacune étant associée au polynôme correspondant de la Table 10. Nous avons donc tout d'abord la fonction correspondant à la solution moyenne et les fonctions associées aux variables isolées (Figure 37).



Nous obtenons ensuite les fonctions associées aux produits de variables aléatoires, que nous avons séparés en carrés (Figure 38) et en produits croisés (Figure 39).

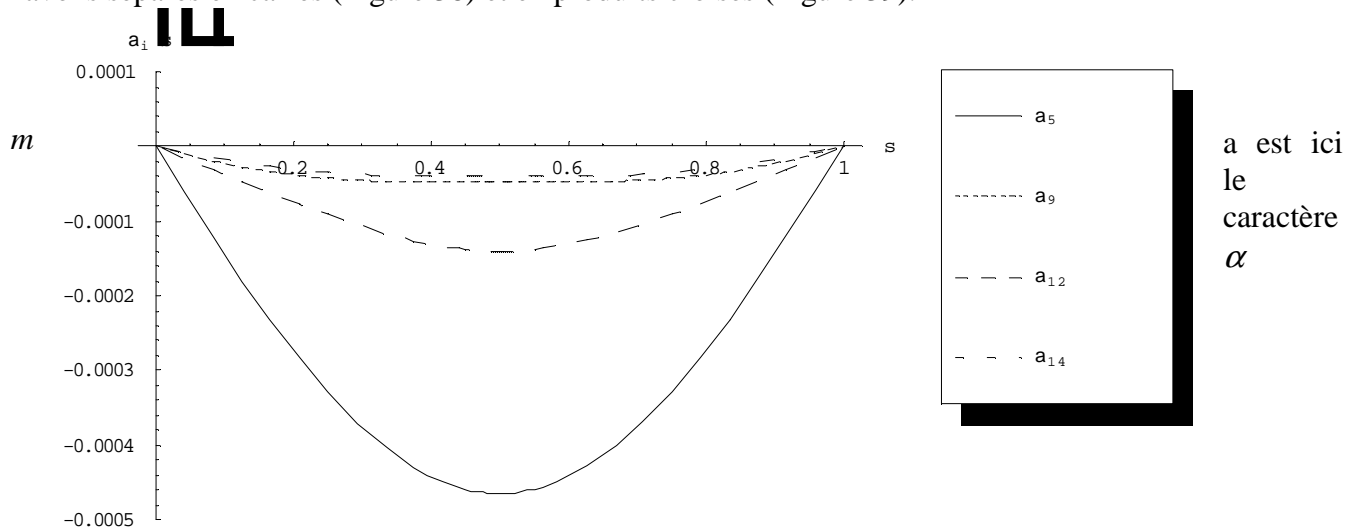


Figure 38. Fonctions du chaos polynomial associées aux carrés des variables aléatoires $\psi_5(\omega)$, $\psi_9(\omega)$, $\psi_{12}(\omega)$ et $\psi_{14}(\omega)$

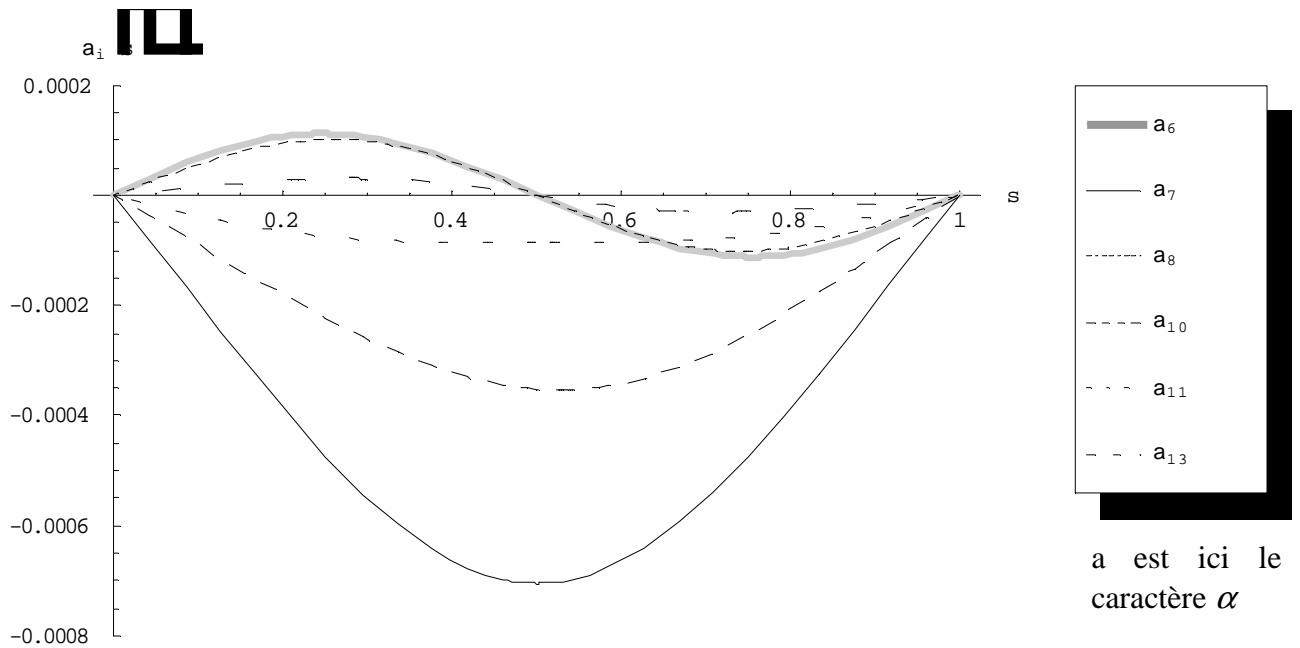


Figure 39. Fonctions du chaos polynomial associées aux produits croisés de variables aléatoires $\psi_6(\omega)$, $\psi_7(\omega)$, $\psi_8(\omega)$, $\psi_{10}(\omega)$, $\psi_{11}(\omega)$ et $\psi_{13}(\omega)$

6 Conclusion

Le chaos polynomial est un outil très puissant permettant la discrétisation de variables ou de champs aléatoires, aussi bien pour des données que des résultats de calculs stochastiques. La projection repose principalement sur des espérances de produits de polynômes de variables aléatoires gaussiennes (voir équation (182)), qui sont calculables une fois pour toutes et peuvent être conservées pour des calculs ultérieurs.

Le principal frein à l'utilisation de cette méthode est la complexité qu'elle atteint dès que l'on augmente le nombre de variables aléatoires ou le degré des polynômes, comme le montre la Table 6. Or cette complexité est requise pour représenter fidèlement un champ aléatoire.

Bibliographie du chapitre III

- [III-1] B. SUDRET, A. DER KIUREGHIAN, *Stochastic Finite Element Methods and Reliability A State-of-the-Art Report*, Report No. UCB/SEMM-2000/08, Structural Engineering Mechanics and Materials, Department of Civil & Environmental Engineering, University of California, Berkeley, 2000.
- [III-2] N. WIENER, *The homogeneous chaos*, Amer. J. Math., 60 (1938), pp. 837-936.
- [III-3] R. GHANEM, P. SPANOS, *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Springer-Verlag, 1991.
- [III-4] R.H. CAMERON, W.T. MARTIN, *The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier- Hermite functionals*, Ann. Math., Vol. 48 (1947) pp.385.
- [III-5] HUANG SP, QUEK ST, PHOON KK. Convergence Study of the Truncated Karhunen-Loève Expansion for simulation of Stochastic Processes. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2001; 52:1029-1043.
- [III-6] GHANEM R. Ingredients for a General Purpose Stochastic Finite Elements Implementation. *Comp. Methods Appl. Engrg.* 1999; 168:19-34.
- [III-7] D. XIU, G. EM KARNIADAKIS, *The Wiener-Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations*, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 24 (2002), pp.619-644.
- [III-8] D. XIU, G. EM KARNIADAKIS, *Modeling Uncertainty in Steady State Diffusion Problems via Generalized Polynomial Chaos*, Comput. Methods Appl. Engrg., Vol. 191 (2002), pp.4927-4948.
- [III-9] D. XIU, G. EM KARNIADAKIS, *Modeling Uncertainty in Flow Simulations via Generalized Polynomial Chaos*, Journal of Computational Physics, Vol. 187 (2003), pp.137-167.
- [III-10] D. XIU, D. LUCOR, C.-H. SU, G. EM KARNIADAKIS, *Stochastic Modeling of Flow-Strucure Interactions Using Generalized Polynomial Chaos*, Journal of Fluids Engineering, Vol. 124 (2002), pp.51-59.
- [III-11] M. BERVEILLER, *Eléments finis stochastiques : approches intrusives et non intrusives pour des analyses de fiabilité*, Thèse, Université Blaise Pascal – Clermont II, 2005

Chapitre IV

Méthodes de Calcul Stochastiques Directes

1	<i>Introduction</i>	90
2	<i>Décomposition en série de Karhunen-Loève</i>	90
2.1	Définition	90
2.1.1	Propriétés des variables aléatoires	91
2.1.2	Problème aux valeurs propres	93
2.2	Détermination analytique des valeurs et fonctions propres	94
2.2.1	Expression sous forme d'équation différentielle	94
2.2.2	Résolution	95
2.2.3	Application	99
2.2.4	Conclusion sur la méthode analytique	103
2.3	Décomposition numérique	104
2.3.1	Théorie	104
2.3.2	Analogie avec un problème mécanique discrétisé (éléments finis)	104
2.3.3	Calcul des matrices [C] et [B] en utilisant un modèle éléments finis	105
2.3.4	Implémentation	106
2.3.5	Test de la méthode numérique	106
2.3.6	Conclusion sur la méthode numérique	108
2.4	Analyse paramétrique de l'effet de la longueur de corrélation sur la décomposition de Karhunen-Loève	108
2.4.1	Présentation de l'analyse paramétrique	108
2.4.2	Résultats	110
2.4.3	Conclusion sur l'analyse paramétrique	116
2.5	Conclusion sur la décomposition KL	116
3	<i>Eléments Finis Stochastiques</i>	117
3.1	EF déterministes	117
3.2	EF stochastiques	117
4	<i>EF stochastiques non intrusifs</i>	120
4.1	Méthode non intrusive par régression avec une variable aléatoire en entrée	120
4.1.1	Théorie	120
4.1.2	Résolution explicite du problème de minimisation	121
4.1.3	Remarque	122
4.1.4	Exemple	122
4.2	Méthode non intrusive par régression pour des champs aléatoires	130
4.2.1	Théorie	130
4.2.2	Remarques	131
4.2.3	Exemple	131
4.3	Méthode non intrusive par projection	136

5 Conclusion.....	137
Bibliographie du chapitre IV.....	139

1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons vu qu'il était possible de discrétiser un champ aléatoire en le projetant sur le chaos polynomial. Cependant cette projection s'applique principalement au résultat d'un calcul stochastique. Les données de tels calculs ont comme caractéristique d'être issues de mesures auxquelles on fait subir un traitement statistique. Pour un champ aléatoire cela revient à identifier ses moments, au moins les deux premiers (moyenne et fonction de covariance) et la loi de probabilité auquel il obéit. A partir de ces données caractéristiques, la méthode de la décomposition en série de Karhunen-Loève permet de discrétiser ce champ, s'il est stationnaire. Nous commencerons donc par détailler cette méthode dans ce chapitre.

Ensuite nous verrons quels outils existent pour projeter le résultat du calcul sur le chaos polynomial. La première méthode est la méthode historique : les éléments finis stochastiques. Devant ses inconvénients une seconde méthode a été développée : les éléments finis stochastiques non intrusifs, que nous verrons dans la suite.

Nous nous limiterons aux méthodes de calcul paramétriques : le modèle de comportement est déterministe, seuls les paramètres (et les entrées et sorties) peuvent être stochastiques. Il faut savoir que des méthodes non paramétriques existent [IV-1], où le modèle lui même est modifié pour se prêter au calcul stochastique.

2 Décomposition en série de Karhunen-Loève

2.1 Définition

La décomposition en série de Karhunen-Loève consiste à écrire un champ aléatoire stationnaire du second ordre $\mu(\{x\}, \omega)$ sous la forme :

$$(189) \quad \mu(\{x\}, \omega) = \bar{\mu}(\{x\}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \zeta_n(\omega) \phi_n(\{x\})$$

où :

- λ_n et $\phi_n(\{x\})$ sont respectivement les valeurs propres et les fonctions propres de la fonction de covariance $C_\mu(\{x_1\}, \{x_2\})$ du processus $\mu(\{x\}, \omega)$;
- les $\zeta_n(\omega)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

On note $\alpha(\{x\}, \omega)$ la partie de (189) correspondant à la perturbation du champ déterministe $\bar{\mu}(\{x\})$:

$$(190) \quad \alpha(\{x\}, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \zeta_n(\omega) \phi_n(\{x\})$$

Ce champ aléatoire possède une moyenne nulle : $\mathbf{E}[\alpha(\{x\}, \omega)] = 0$

On remarquera que cette méthode permet en fait la projection d'un champ aléatoire sur un chaos polynomial de degré 1 (c'est à dire composé de polynômes de Hermite de variables aléatoires de degré unitaire).

Par soucis de simplification dans la suite les points ou paramètres $\{x_1\}$ et $\{x_2\}$ seront notés x_1 et x_2 (sans accolade).

2.1.1 Propriétés des variables aléatoires

Le jeu de variables aléatoires $\{\zeta_i(\omega)\}$ est obtenu en multipliant chaque membre de (190) par la fonction propre $\phi_i(x)$:

$$(191) \quad \alpha(x, \omega) \phi_i(x) = \phi_i(x) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \zeta_n(\omega) \phi_n(x)$$

Soit, en intégrant sur le domaine de définition :

$$(192) \quad \int_D \alpha(x, \omega) \phi_i(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\lambda_n} \zeta_n(\omega) \int_D \phi_n(x) \phi_i(x) dx \right)$$

L'orthogonalité des fonctions propres nous donne :

$$(193) \quad \boxed{\zeta_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_D \alpha(x, \omega) \phi_i(x) dx}$$

Afin de définir et d'étudier les propriétés des variables aléatoires $\zeta_n(\omega)$, exprimons l'intégrale (193) sous forme d'un passage à la limite d'une somme finie :

$$(194) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_D \alpha(x, \omega) \phi_i(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \sum_{k=1}^n \Delta x_k \alpha(x_k, \omega) \phi_i(x_k) \right)$$

où les $x_i, i=0 \dots n$ sont les points d'évaluation des fonctions, et Δx_k est l'intervalle élémentaire (par exemple dans le cas unidimensionnel $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$). Alors :

$$(195) \quad \zeta_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \sum_{k=1}^n \Delta x_k \alpha(x_k, \omega) \phi_i(x_k) \right)$$

Or $\alpha(x_k, \omega)$ est une variable aléatoire, $\phi_i(x_k)$ est un réel, donc $\frac{\Delta x_k}{\sqrt{\lambda_i}} \alpha(x_k, \omega) \phi_i(x_k)$ est une variable aléatoire qui possède le même type de loi de répartition que le champ aléatoire $\alpha(x, \omega)$ au point x_k . Notons :

$$(196) \quad \theta_{ki}(\omega) = \frac{\Delta x_k}{\sqrt{\lambda_i}} \alpha(x_k, \omega) \phi_i(x_k)$$

Nous pouvons calculer les moments de ces variables aléatoires, à condition que le champ aléatoire possède des moments d'ordre 1 et 2 en tout point, ce qui n'est pas obligatoire (loi de Cauchy par exemple) :

$$(197) \quad \mathbf{E}[\theta_{ki}(\omega)] = \frac{\Delta x_k \phi_i(x_k)}{\sqrt{\lambda_i}} \mathbf{E}[\alpha(x_k, \omega)] = 0$$

$$(198) \quad \mathbf{E}[\theta_{ki}(\omega)^2] = \frac{\Delta x_k^2 \phi_i(x_k)^2}{\lambda_i} \mathbf{E}[\alpha(x_k, \omega)^2] = \frac{\Delta x_k^2 \phi_i(x_k)^2}{\lambda_i} C_\mu(x_k, x_k)$$

Les variables aléatoires $\theta_{ki}(\omega)$ ne sont pas à priori indépendantes, mais sont liées via la fonction de covariance du champ aléatoire :

$$(199) \quad \mathbf{E}[\theta_{ki} \theta_{hj}] = \mathbf{E}\left[\frac{\Delta x_k \Delta x_h}{\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j}} \alpha(x_k, \omega) \alpha(x_h, \omega) \phi_i(x_k) \phi_j(x_h)\right] = \frac{\Delta x_k \Delta x_h \phi_i(x_k) \phi_j(x_h)}{\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j}} C_\mu(x_k, x_h)$$

Ainsi nous voyons que la variable aléatoire $\xi_i(\omega)$ s'exprime comme une série de variables aléatoires déterminées :

$$(200) \quad \xi_i(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \theta_{ki}(\omega) \right)$$

La moyenne de la variable aléatoire $\xi_i(\omega)$ est alors :

$$(201) \quad \mathbf{E}[\xi_i(\omega)] = \mathbf{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \theta_{ki}(\omega) \right)\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{E}[\theta_{ki}(\omega)] \right)$$

Soit

$$(202) \quad \boxed{\mathbf{E}[\xi_i(\omega)] = 0}$$

La covariance entre deux variables $\xi_i(\omega)$ et $\xi_j(\omega)$ est :

$$(203) \quad \mathbf{E}[\xi_i(\omega) \xi_j(\omega)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbf{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n \theta_{ki}(\omega)\right) \left(\sum_{h=1}^n \theta_{hj}(\omega)\right)\right] \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n \mathbf{E}[\theta_{ki}(\omega) \theta_{hj}(\omega)] \right)$$

Soit :

$$(204) \quad \mathbf{E}[\xi_i(\omega) \xi_j(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \Delta x_k \phi_i(x_k) \sum_{j=1}^n \Delta x_h \phi_j(x_h) C_\mu(x_k, x_h) \right)$$

Or d'après la définition que nous avons utilisée en (194) :

$$(205) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{h=1}^n \Delta x_h \phi_j(x_h) C_\mu(x_k, x_h) \right) = \int_D \phi_j(x) C_\mu(x_k, x) dx$$

Donc (204) équivaut à :

$$(206) \quad \mathbf{E}[\xi_i(\omega) \xi_j(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j}} \int_D \phi_i(x_2) \left(\int_D \phi_j(x_1) C_\mu(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2$$

De plus la définition des fonctions propres (214) nous indique que :

$$(207) \quad \int_D \phi_j(x_1) C_\mu(x_1, x_2) dx_1 = \lambda_j \phi_j(x_2)$$

Soit

$$(208) \quad \mathbf{E}[\zeta_i(\omega)\zeta_j(\omega)] = \frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}} \int_D \phi_i(x)\phi_j(x)dx$$

Les fonctions propres étant orthonormales comme requis en (212), cette relation se simplifie en :

$$(209) \quad \boxed{\mathbf{E}[\zeta_i(\omega)\zeta_j(\omega)] = \delta_{ij}}$$

Les variables aléatoires $\zeta_i(\omega)$ sont donc orthonormales.

Les relations (202) et (209) nous informent que si les fonctions propres sont bien orthonormales, alors les variables aléatoires $\zeta_n(\omega)$ de la décomposition spectrale du champ aléatoire (189) sont **centrées normées et indépendantes**, et ce quelle que soit la loi du champ aléatoire, du moment que l'on puisse calculer sa fonction de covariance. De plus, la relation (200) nous informe que ces variables aléatoires résultent de la combinaison linéaire de variables aléatoires issues du champ aléatoire en des points déterminés, donc de même loi que ce dernier. Il en résulte que **si le champ $\mu(x, \omega)$ est gaussien alors les variables aléatoires $\zeta_n(\omega)$ sont gaussiennes**.

2.1.2 Problème aux valeurs propres

Les valeurs et fonctions propres λ_n et $\phi_n(x)$ proviennent de la décomposition spectrale de la fonction de covariance du champ aléatoire :

$$(210) \quad C_\mu(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(x_1)\phi_n(x_2)$$

En multipliant chaque membre par $\phi_m(x)$ et en intégrant sur le domaine de définition :

$$(211) \quad \begin{aligned} \int_D C_\mu(x_1, x_2)\phi_m(x_1)dx_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_D \lambda_n \phi_n(x_1)\phi_m(x_1)\phi_n(x_2)dx_1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(x_2) \int_D \phi_n(x_1)\phi_m(x_1)dx_1 \end{aligned}$$

où dx_1 est l'élément de volume (ou de surface dans le cas 2D, etc...) associé à x_1

La covariance est symétrique et définie positive. Ses fonctions propres existent, sont orthogonales, et peuvent être normalisées pour que :

$$(212) \quad \int_D \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \delta_{mn} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

Dans ce cas l'équation (211) se simplifie en :

$$(213) \quad \int_D C_\mu(x, y)\phi_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(y)\delta_{mn}$$

Soit finalement :

$$(214) \quad \int_D C_\mu(x_1, x_2)\phi_m(x_1)dx = \lambda_m \phi_m(x_2)$$

La détermination des jeux de valeurs propres et vecteurs propres $\{\lambda_i\}$ et $\{\phi_i(x)\}$ de l'expression (189) nécessite donc la résolution de l'équation de Fredholm de seconde espèce

(214). Cette équation peut être résolue numériquement ou analytiquement. Dans [III-3] des solutions analytiques sont données pour quelques fonctions de covariance dans le cas unidimensionnel.

2.2 Détermination analytique des valeurs et fonctions propres

La détermination analytique des valeurs et fonctions propres ne peut se faire que dans certains cas précis. Dans [III-3] on donne ainsi la décomposition en série des fonctions de covariance exponentielle et triangulaire.

2.2.1 Expression sous forme d'équation différentielle

Afin d'expliquer la démarche de la résolution analytique prenons l'exemple d'une fonction de covariance triangulaire et d'un domaine unidimensionnel de longueur L .

$$(215) \quad C_{\mu}(x_1, x_2) = \chi_{\mu}^2 \left(1 - \left| \frac{x_1 - x_2}{L} \right| \right)$$

En substituant (215) dans (214), il vient :

$$(216) \quad \int_0^L \chi_F^2 \left(1 - \left| \frac{x-y}{L} \right| \right) \phi_m(x) dx = \lambda_m \phi_m(y)$$

Soit en séparant le domaine d'intégration en deux intervalles $x < y$ et $x \geq y$:

$$(217) \quad \underbrace{\int_0^y \left(1 + \frac{x-y}{L} \right) \phi_m(x) dx}_{x < y} + \underbrace{\int_y^L \left(1 - \frac{x-y}{L} \right) \phi_m(x) dx}_{x \geq y} = \frac{\lambda_m}{\chi_F^2} \phi_m(y)$$

Nous allons dériver cette expression par rapport à y . Il est nécessaire de rappeler ici comment dériver une intégrale :

$$(218) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{a(y)}^{b(y)} K(x, y) dx \right) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} dx + b'(y) K(b(y), y) - a'(y) K(a(y), y)$$

Dans notre cas en dérivant par rapport à y nous obtenons :

$$(219) \quad \underbrace{\int_0^y \frac{\phi_m(x)}{L} dx + \phi_m(y)}_{x < y} + \underbrace{\int_y^L -\frac{\phi_m(x)}{L} dx - \phi_m(y)}_{x \geq y} = \frac{\lambda_m}{\chi_F^2} \phi'_m(y)$$

En dérivant une nouvelle fois par rapport à y nous obtenons :

$$(220) \quad \underbrace{\frac{-\phi_m(y)}{L} + \phi'_m(y)}_{x < y} + \underbrace{\frac{-\phi_m(y)}{L} - \phi'_m(y)}_{x \geq y} = \frac{\lambda_m}{\chi_F^2} \phi''_m(y)$$

Soit finalement :

$$(221) \quad -\frac{2}{L} \phi_m(y) = \frac{\lambda_m}{\chi_F^2} \phi''_m(y)$$

Nous obtenons donc l'équation différentielle suivante :

$$(222) \quad \boxed{\phi''_m(y) + \omega_m^2 \phi_m(y) = 0}$$

avec

$$(223) \quad \omega_m = \sqrt{\frac{2\chi_F^2}{L\lambda_m}}, \text{ soit } \lambda_m = \frac{2\chi_F^2}{L\omega_m^2}$$

En évaluant l'équation (219) en $y=0$ et $y=L$ nous obtenons :

$$(224) \quad \int_0^L \frac{\phi_m(x)}{L} dx = \frac{2}{L\omega_m^2} \phi'_m(L)$$

$$(225) \quad -\int_0^L \frac{\phi_m(x)}{L} dx = \frac{2}{L\omega_m^2} \phi'_m(0)$$

Ce qui nous donne une première condition :

$$(226) \quad \boxed{\phi'_m(0) = -\phi'_m(L)}$$

Ensuite, en évaluant l'équation (216) en $y=0$ et $y=L$, nous obtenons :

$$(227) \quad \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \phi_m(x) dx = \frac{2}{L\omega_m^2} \phi_m(0)$$

$$(228) \quad \int_0^L \left(1 - \frac{L-x}{L}\right) \phi_m(x) dx = \frac{2}{L\omega_m^2} \phi_m(L)$$

En additionnant ces deux expressions, nous avons :

$$(229) \quad \int_0^L \left(1 - \frac{L-x}{L} + 1 - \frac{x}{L}\right) \phi_m(x) dx = 2 \frac{\phi_m(L) + \phi_m(0)}{L\omega_m^2}$$

Soit :

$$(230) \quad \int_0^L \phi_m(x) dx = 2 \frac{\phi_m(L) + \phi_m(0)}{L^2 \omega_m^2}$$

Nous pouvons simplifier cette expression en utilisant la relation (225), ce qui nous donne la deuxième condition aux limites :

$$(231) \quad \boxed{-\phi'_m(0) = \frac{\phi_m(L) + \phi_m(0)}{L}}$$

2.2.2 Résolution

Maintenant que l'équation différentielle est posée, nous pouvons tenter de la résoudre.

La solution de l'équation (222) est de la forme :

$$(232) \quad \phi_m(x) = A \cos(\omega_m x) + B \sin(\omega_m x)$$

Les deux conditions aux limites (226) et (231) donnent le système suivant :

$$(233) \quad \begin{cases} -A \omega_m \sin(L \omega_m) + B \omega_m (1 + \cos(L \omega_m)) = 0 \\ A(1 + \cos(L \omega_m)) + B(L \omega_m + \sin(L \omega_m)) = 0 \end{cases}$$

Afin d'obtenir une infinité de solutions ω_m non triviales, le déterminant du système linéaire d'inconnues A et B doit être nul :

$$(234) \quad \omega_m (1 + \cos(L \omega_m))^2 + \omega_m \sin(L \omega_m) (L \omega_m + \sin(L \omega_m)) = 0$$

D'où en développant

$$(235) \quad 1 + 2 \cos(L\omega_m) + \cos^2(L\omega_m) + \sin^2(L\omega_m) + L\omega_m \sin(L\omega_m) = 0$$

$$(236) \quad 2 \cos(L\omega_m) + L\omega_m \sin(L\omega_m) = -2$$

Une première infinité de solutions est :

$$(237) \quad \omega_m = (2m+1) \frac{\pi}{L}, \quad m \geq 0$$

Une deuxième infinité de solutions est donnée par la résolution de l'équation :

$$(238) \quad \sin(L\omega_m) = -\frac{2}{L\omega_m} (1 + \cos(L\omega_m))$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$(239) \quad \frac{\sin(L\omega_m)}{1 + \cos(L\omega_m)} = \frac{2}{L\omega_m}$$

Or $\frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$; la deuxième infinité de solutions consiste donc en les racines de l'équation :

$$(240) \quad \tan\left(\frac{L\omega_m}{2}\right) = \frac{2}{L\omega_m}$$

Dans [III-3] Ghanem et Spanos classent ainsi cette double infinité de solutions :

- pour n impair : ω_n est la $\frac{n+1}{2}$ ième solution positive (i.e pour $n=1$, c'est la 1^{ière} solution, pour $n=3$ c'est la 2^{ième}, etc...) de l'équation suivante :

$$(241) \quad \tan\left(\omega_n \frac{L}{2}\right) = \frac{2}{L\omega_n}$$

- pour $n \geq 2$ pair :

$$(242) \quad \omega_n = (n-1) \frac{\pi}{L}$$

Déterminons maintenant les fonctions propres. Commençons par le cas $n \geq 2$ pair. Les valeurs ω_n associées permettent de simplifier la deuxième équation du système (233) en :

$$(243) \quad B L \omega_n = 0$$

Ce qui implique que $B = 0$.

La détermination du coefficient A se fait en imposant que $\|\phi_n\| = 1$, ce qui dans l'espace des fonctions se traduit en :

$$(244) \quad \int_0^L \phi_n^2(x) dx = 1$$

Soit

$$(245) \quad A^2 \int_0^L \cos^2(\omega_n s) ds = 1$$

Or $\sin(2\omega_n s) = 0$ en $s=0$ et $s=L$, donc :

$$(246) \quad A^2 \frac{L}{2} = 1$$

Soit finalement

$$(247) \quad A = \pm \sqrt{\frac{2}{L}}$$

La question du signe de A se pose ici. En effet étant donné l'expression (242) de ω_n , si A est positif, alors la fonction propre $\phi_n(s) = A \cos(\omega_n s)$ sera positive à l'origine ($s = 0$) et négative à l'extrémité de la poutre ($s = L$), et vice versa. Les deux fonctions propres sont tout aussi valables l'une que l'autre et donnent la même covariance, du fait du produit $\phi_i(x)\phi_i(y)$ de (210). Le signe n'a d'influence que dans l'expression spectrale du champ (190) où $\alpha(s, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\omega) \phi_n(s)$. Cependant les variables aléatoires $\xi_i(\omega)$ sont obtenues en utilisant les fonctions propres, par la formule (193), où nous voyons que si nous inversons le signe de $\phi_i(s)$ en posant $\phi_{i,2}(s) = -\phi_{i,1}(s)$, nous avons la variable aléatoire correspondante :

$$(248) \quad \xi_{i,2}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_D \alpha(s, \omega) \phi_{i,2}(s) ds = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_D \alpha(s, \omega) (-\phi_{i,1}(s)) ds = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_D \alpha(s, \omega) \phi_{i,1}(s) ds = -\xi_{i,1}(\omega)$$

Donc $\xi_{n,1}(\omega) \phi_{n,1}(s) = \xi_{n,2}(\omega) \phi_{n,2}(s)$, le signe des fonctions propres est donc quelconque.

Arbitrairement, nous posons comme dans [III-3] que A est positif. D'où les fonctions propres pour les modes $n \geq 2$ pair :

$$(249) \quad \boxed{\phi_n(s) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\omega_n s)}$$

Les fonctions propres pour n impair ne sont pas aussi simples. La première équation du système (233) nous permet d'écrire :

$$(250) \quad A = B \frac{(1 + \cos(L\omega_m))}{\sin(L\omega_m)} = \frac{B}{\tan\left(L\frac{\omega_m}{2}\right)}$$

Soit, en utilisant la relation (241) :

$$(251) \quad B = \frac{2A}{L\omega_n}$$

Comme précédemment nous allons déterminer A en imposant que $\int_0^L \phi_n(s)^2 ds = 1$, qui s'écrit ici :

$$(252) \quad A^2 \int_0^L \left(\cos(\omega_n s) + \frac{2}{L\omega_n} \sin(\omega_n s) \right)^2 ds = 1$$

Après intégration nous obtenons la relation :

$$(253) \quad \frac{A^2}{4L^2\omega_n^3} \left[2L\omega_n (6 + L^2\omega_n^2) - 4L\omega_n \cos(2L\omega_n) + (L^2\omega_n^2 - 4) \sin(2L\omega_n) \right] = 1$$

Soit :

$$(254) \quad A = \pm \frac{2L\omega_n}{\sqrt{2L(6 + L^2\omega_n^2) - 4L\cos(2L\omega_n) + \left(L^2\omega_n - \frac{4}{\omega_n}\right)\sin(2L\omega_n)}}$$

De la même manière que précédemment nous choisissons A positif. Et donc :

$$(255) \quad A = \frac{2L\omega_n}{\sqrt{2L(6 + L^2\omega_n^2) - 4L\cos(2L\omega_n) + \left(L^2\omega_n - \frac{4}{\omega_n}\right)\sin(2L\omega_n)}}$$

et

$$(256) \quad B = \frac{4}{\sqrt{2L(6 + L^2\omega_n^2) - 4L\cos(2L\omega_n) + \left(L^2\omega_n - \frac{4}{\omega_n}\right)\sin(2L\omega_n)}}$$

Ce qui nous donne pour les fonctions propres pour n impair :

$$(257) \quad \phi_n(s) = \frac{2L\omega_n \cos(\omega_n s) + 4\sin(\omega_n s)}{\sqrt{2L(6 + L^2\omega_n^2) - 4L\cos(2L\omega_n) + \left(L^2\omega_n - \frac{4}{\omega_n}\right)\sin(2L\omega_n)}}$$

Le point faible de cette solution est que l'équation (241) doit être résolue numériquement, ce qui impose d'entrer une valeur approchée de la racine cherchée, et donc à première vue limite l'automatisation de la procédure de décomposition. Cependant il est très intéressant de constater que les racines ω_n de l'équation (241) sont d'autant plus proches de $n\frac{\pi}{L}$ que n est grand. Il est donc possible d'automatiser la résolution numérique de cette équation en utilisant cette approximation pour la $n^{\text{ième}}$ racine.

On remarquera que cette décomposition, propre à une covariance triangulaire, ne préjuge en rien du système considéré : nous n'avons utilisé ni l'équation, ni les conditions aux limites de la poutre, mais seulement la fonction de covariance du champ d'entrée.

En résumé, nous avons les fonctions propres suivantes :

- pour n impair :

$$\phi_n(s) = \frac{2L\omega_n \cos(\omega_n s) + 4 \sin(\omega_n s)}{\sqrt{2L(6 + L^2\omega_n) - 4L \cos(2L\omega_n) + \left(L^2\omega_n - \frac{4}{\omega_n}\right) \sin(2L\omega_n)}}$$

où ω_n est la $\frac{n+1}{2}$ ième solution positive (i.e pour $n=1$, c'est la 1^{ière} solution, pour $n=3$ c'est la 2^{ième}, etc...) de l'équation suivante :

$$\tan\left(\omega_n \frac{L}{2}\right) = \frac{2}{L\omega_n}$$

- pour $n \geq 2$ pair :

$$\phi_n(s) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\omega_n s)$$

où

$$\omega_n = (n-1) \frac{\pi}{L}$$

2.2.3 Application

Pour n pair, une représentation graphique de la fonction $f(\omega_n) = \tan\left(\omega_n \frac{L}{2}\right) - \frac{2}{\omega_n L}$ nous donne le graphique de la Figure 40. Les racines de cette fonction sont les valeurs de ω_n pour $n \geq 2$ pair.

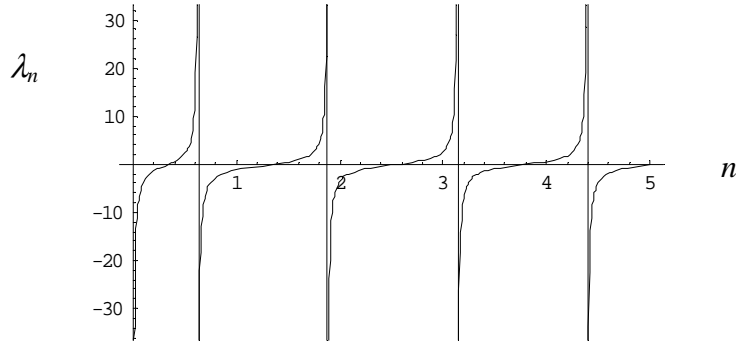


Figure 40. $f(\omega_n) = \tan\left(\omega_n \frac{L}{2}\right) - \frac{2}{\omega_n L}$ pour $L=5m$

Une résolution numérique sous *Mathematica* nous donne les valeurs suivantes pour ω_n :

n	ω_n (m ⁻¹)	λ_n (m)
1	0,344133	0,0337758
2	0,628319	0,0101321
3	1,37025	0,0021304
4	1,88496	0,00112579
5	2,57492	0,000603299
6	3,14159	0,000405285
7	4,39823	0,000275305
8	5,65487	0,000206778
9	5,05811	0,000156344
10	5.65487	0,000125088

Table 14. Valeurs numériques de ω_n et λ_n pour $L=5m$

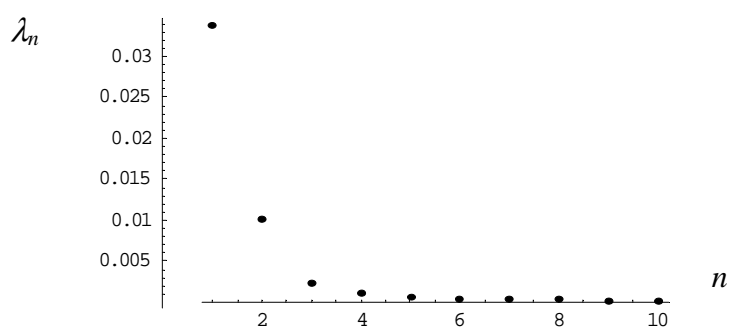


Figure 41. Valeurs propres λ_n (en m) de la covariance de la flexibilité pour $L=5m$

Avec les expressions (249) et (257) nous obtenons les fonctions propres tracées dans la Figure 42.

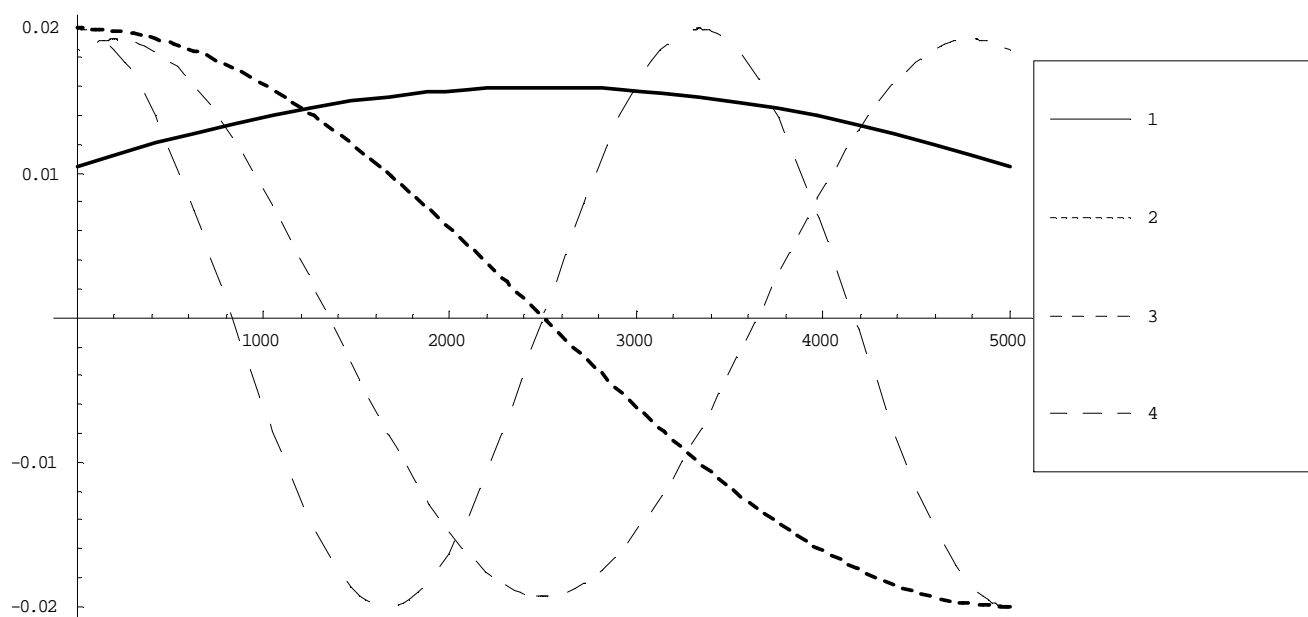


Figure 42. Quatre premières fonctions propres de la covariance de la perturbation de la flexibilité

En utilisant ces fonctions propres et valeurs propres nous pouvons construire une approximation de la fonction de covariance en tronquant la série (Figure 43). En calculant l'erreur relative par rapport à l'expression exacte de cette covariance, nous constatons la convergence de la série (Figure 44).

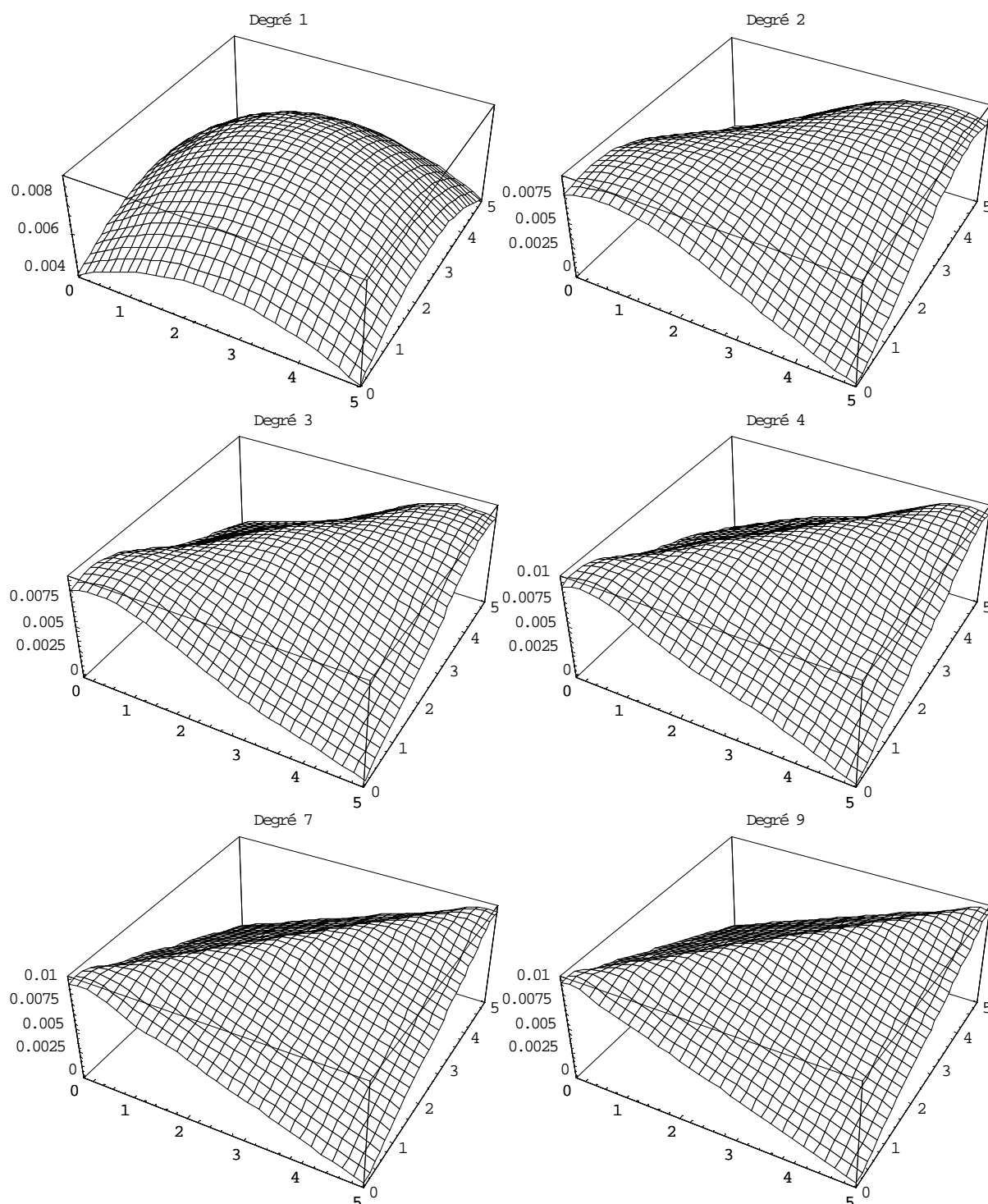


Figure 43. Approximation de la covariance de la perturbation de la flexibilité de la poutre par des décompositions spectrales tronquées ; $L=5m$, $\chi_F=10\%$. Le degré indique le nombre de termes dans la série.

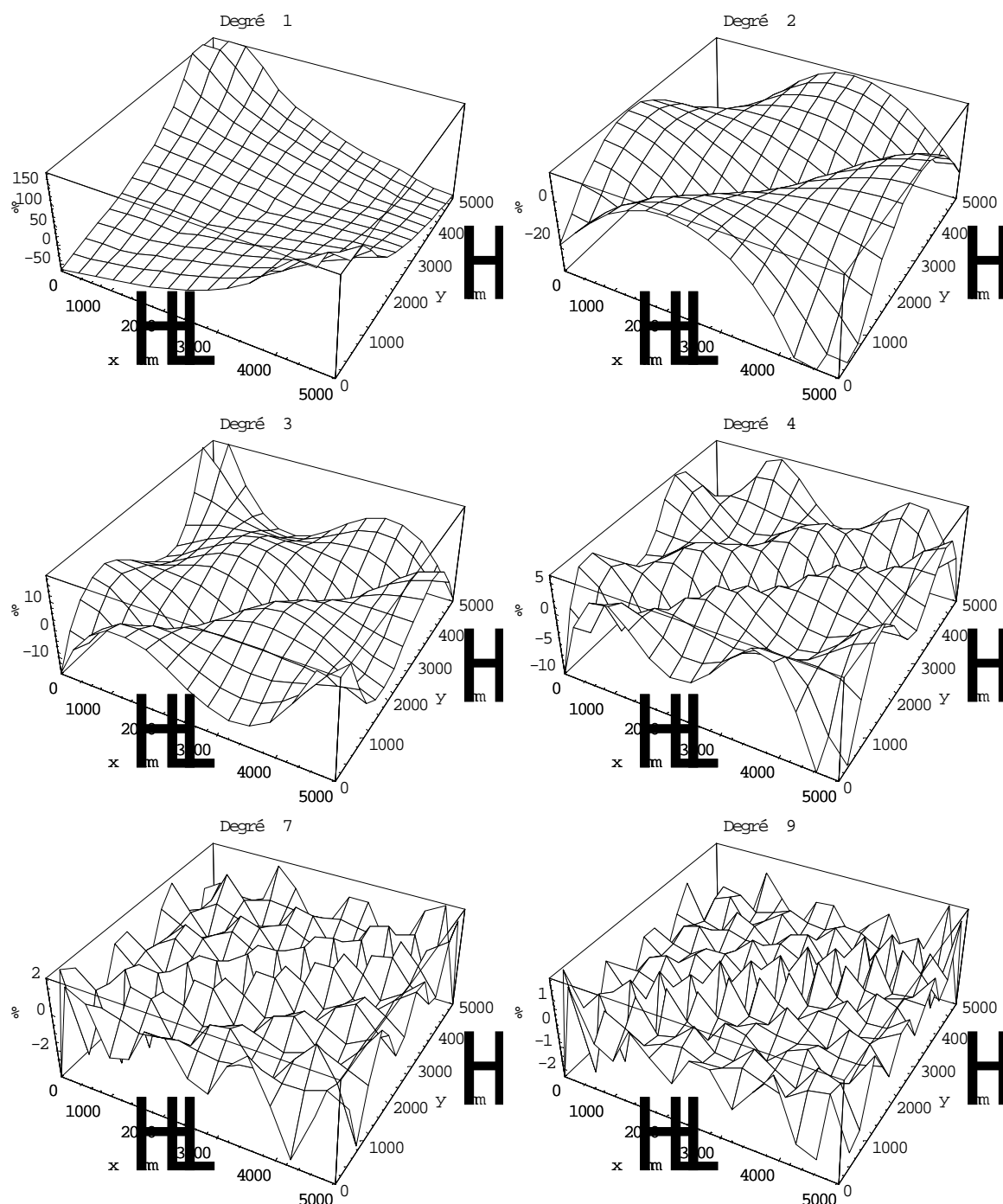


Figure 44. Erreur relative lors de la décomposition de la covariance de la perturbation de la flexibilité de la poutre ; $L=5m$, $\chi_F=10\%$

2.2.4 Conclusion sur la méthode analytique

Les méthodes analytiques de décomposition spectrale de la covariance sont propres à chaque type de covariance et nécessitent des développements mathématiques. Cependant on trouvera dans la littérature les décompositions de fonctions de covariance classiques (ainsi dans [III-3] les décompositions des covariances exponentielles et triangulaires sont indiquées).

2.3 Décomposition numérique

Nous avons vu que la décomposition analytique exigeait un effort mathématique important (résolution d'une équation de Fredholm) et était propre au domaine d'étude. Il existe une méthode de décomposition numérique, basée sur une minimisation d'erreur, permettant d'obtenir les valeurs et fonctions propres de n'importe quelle fonction de covariance admissible sur des domaines quelconques [III-3].

2.3.1 Théorie

Soit $\{h_i(\{x\})\}$ un jeu complet de fonctions dans l'espace de Hilbert H . Chaque fonction propre $\phi_k(\{x\})$ de la covariance $C_\mu(\{x\}, \{y\})$ peut être décomposée en :

$$(258) \quad \phi_k(\{x\}) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i^{(k)} h_i(\{x\})$$

La différence ε_k entre les deux membres de l'égalité (214) obtenue lors de la troncature de cette série au $N^{\text{ième}}$ terme pour le $k^{\text{ième}}$ mode propre est :

$$(259) \quad \varepsilon_k(\{x\}) = \sum_{i=1}^N d_i^{(k)} \left[\int_D C(\{x\}, \{y\}) h_i(\{y\}) dy - \lambda_k h_i(\{x\}) \right]$$

Requérir que l'erreur pour le $k^{\text{ième}}$ mode propre soit orthogonale aux fonctions d'approximation conduit à :

$$(260) \quad \langle \varepsilon_k(\{x\}), h_j(\{x\}) \rangle = 0 \quad j=1, \dots, N$$

Soit :

$$(261) \quad \sum_{i=1}^N d_i^{(k)} \left[\int_D \left(\int_D C(\{x\}, \{y\}) h_i(\{y\}) dy \right) h_j(\{x\}) dx - \lambda_k \int_D h_i(\{x\}) h_j(\{x\}) dx \right] = 0$$

Cette équation permet de déterminer la $k^{\text{ième}}$ fonction propre et valeur propre. Etant donné qu'il s'agit d'une équation à $N+1$ inconnues (les coefficients $d_i^{(k)}$ et la valeur propre λ_k), introduisons une notation matricielle :

$$(262) \quad \mathbf{C}_{ij} = \int_D \left[\int_D C_\mu(\{x\}, \{y\}) h_i(\{y\}) dy \right] h_j(\{x\}) dx$$

$$(263) \quad \mathbf{B}_{ij} = \int_D h_i(\{x\}) h_j(\{x\}) dx$$

Les matrices $[\mathbf{C}]$ et $[\mathbf{B}]$ sont symétriques et définies positives. L'équation (261) peut alors s'écrire pour le mode k :

$$(264) \quad [\mathbf{C}] \{d^{(k)}\} = \lambda_k [\mathbf{B}] \{d^{(k)}\}$$

2.3.2 Analogie avec un problème mécanique discrétisé (éléments finis)

Il est intéressant de constater que la formulation (264) est identique aux notations près à celle d'un problème de détermination de fréquence propre d'une structure mécanique :

$$(265) \quad [\mathbf{M}] \{q^{(k)}\} = \frac{1}{\omega_k^2} [\mathbf{K}] \{q^{(k)}\}$$

Soit

$$(266) \quad [\mathbf{K}] \{q^{(k)}\} = \omega_k^2 [\mathbf{M}] \{q^{(k)}\}$$

Cette équation est similaire à celle définissant un problème de vibrations propres dans le cadre d'une méthode de calcul par éléments finis. En effet, pour un système possédant une matrice de rigidité $[\mathbf{K}]$ et de masse $[\mathbf{M}]$, les $k^{\text{ième}}$ pulsation et vecteur propres sont obtenus en résolvant l'équation :

$$(267) \quad [\mathbf{K}] \{q^{(k)}\} - \omega_k^2 [\mathbf{M}] \{q^{(k)}\} = 0$$

Par conséquent il suffit d'ajouter au code le calcul des matrices $[\mathbf{C}]$ et $[\mathbf{B}]$ pour disposer d'un outil de résolution de l'équation (264). Par commodité l'équation (265) a été inversée en (266) car la plupart des codes de calcul sont conçus pour retourner les plus petites fréquences propres en premier, alors que pour notre développement nous avons besoin des plus grandes valeurs propres. Par conséquent notre procédure de calcul conduit aux correspondances suivantes dans le modèle :

Données :

- la matrice $[\mathbf{K}]$ est remplacée par la matrice $[\mathbf{B}]$;
- la matrice $[\mathbf{M}]$ est remplacée par la matrice $[\mathbf{C}]$;
- Aucune condition aux limites n'est imposée au système.

Résultats :

- la $k^{\text{ième}}$ pulsation ω_k retournée nous donne la valeur propre λ_k selon la relation :

$$(268) \quad \lambda_k = \frac{1}{\omega_k^2}$$

- le vecteur propre $\{q^{(k)}\}$ retourné suite au calcul nous donne les valeurs nodales de la fonction propre $\phi_k(\{x\})$ qui peut ensuite être interpolée en utilisant les n fonctions de forme $N_i(\{x\})$ (n étant le nombre de nœuds du modèle) :

$$(269) \quad \phi_k(\{x\}) = \sum_{i=1}^n N_i(\{x\}) q_i^{(k)}$$

2.3.3 Calcul des matrices $[\mathbf{C}]$ et $[\mathbf{B}]$ en utilisant un modèle éléments finis

L'utilisation des fonctions de forme $N_i(\{x\})$ comme base de fonctions dans l'expression (262) conduit à :

$$(270) \quad \mathbf{C}_{ij} = \int_D \left[\int_D C_\mu(\{x_1\}, \{x_2\}) N_i(\{x_2\}) d\{x_2\} \right] N_j(\{x_1\}) d\{x_1\}$$

Considérons d'abord le premier niveau d'intégration de l'équation (270) :

$$(271) \quad f_i(\{x_1\}) = \int_D C_\mu(\{x_1\}, \{x_2\}) N_i(\{x_2\}) d\{x_2\}$$

Les fonctions de forme possédant un support compact, le domaine d'intégration peut être limité aux éléments entourant directement le nœud i . Noter Di ce domaine et De_k le domaine de l'élément k nous permet d'écrire :

$$(272) \quad f_i(\{x_1\}) = \sum_{k_1 \in Di} \left(\int_{De_{k_1}} C(\{x_1\}, \{x_2\}) N_i(\{x_2\}) d\{x_2\} \right)$$

Puis, en utilisant une intégration par points de Gauss :

$$(273) \quad f_i(\{x_1\}) = \sum_{k_1 \in Di} \sum_{ig=1}^{n_{Gauss}} C_\mu(\{x_1\}, \{x_{ig}^{k_1}\}) N_i(\{x_{ig}^{k_1}\}) w_{ig} \det([\mathbf{J}_{k_1}])$$

De même, pour la variable $\{x_1\}$:

$$(274) \quad \mathbf{C}_{ij} = \int_{D_j} f_i(\{x_1\}) N_j(\{x_1\}) d\{x_1\}$$

$$(275) \quad \mathbf{C}_{ij} = \sum_{k_2 \in Dj} \sum_{jg=1}^{n_{Gauss}} f(\{x_{jg}^{k_2}\}) N_j(\{x_{jg}^{k_2}\}) w_{jg} \det([\mathbf{J}_{k_2}])$$

Finalement, en substituant f par son expression (273), nous obtenons :

$$(276) \quad \mathbf{C}_{ij} = \sum_{k_2 \in Dj} \sum_{jg=1}^{n_{Gauss}} \left[\sum_{k_1 \in Di} \sum_{ig=1}^{n_{Gauss}} C(\{x_{jg}^{k_2}\}, \{x_{ig}^{k_1}\}) N_i(\{x_{ig}^{k_1}\}) w_{ig} \det([\mathbf{J}_{k_1}]) \right] N_j(\{x_{jg}^{k_2}\}) w_{jg} \det([\mathbf{J}_{k_2}])$$

Où :

- Di est le jeu d'éléments entourant le nœud i ;
- N_i est la fonction de forme associée au nœud i ;
- n_{Gauss} est le nombre de points de Gauss dans chaque élément ;
- $\{x_{ig}^{k_1}\}$ est le vecteur des coordonnées du $ig^{ème}$ point de Gauss de l'élément k_1 ;
- w_{ig} est le poids associé au $ig^{ème}$ point de Gauss ;
- $[\mathbf{J}_{k_1}]$ est la matrice Jacobienne de l'élément k_1 .

Pour la matrice $[\mathbf{B}]$ le calcul est plus simple : l'expression (263) correspond à la matrice de masse du système pour une densité unitaire et un seul degré de liberté par nœud.

2.3.4 Implémentation

La procédure décrite précédemment a été implémentée dans le code de calcul par éléments finis CAST3M. Les principales difficultés dans cette implémentation proviennent de l'impossibilité d'utiliser des matrices élémentaires pour le calcul de $[\mathbf{C}]$, à cause du double niveau d'intégration dans l'expression (262). Classiquement dans les éléments finis les intégrations sont réalisées dans chaque élément puis additionnées pour donner le résultat sur le domaine entier. Cette méthode ne peut être utilisée ici car une intégration globale doit être réalisée (expression (272)) avant une deuxième intégration (expression (274)). Cependant, de par le support compact des fonctions de forme ces intégrations peuvent être limitées aux éléments possédant le nœud inspecté (le jeu noté Di dans l'expression (272)). Un autre souci plus pratique concerne la manipulation de données internes : un superélément incluant tous les nœuds du modèle doit être utilisé pour stocker la matrice $[\mathbf{C}]$ (pleine et non décomposable en matrices élémentaires).

2.3.5 Test de la méthode numérique

Nous allons maintenant tester la méthode dans le cas d'un domaine unidimensionnel pour lequel les solutions théoriques sont connues. Cependant comme la méthode n'a été implémentée que pour des éléments tridimensionnels sous CAST3M, nous allons la tester pour une fonction de covariance unidimensionnelle (expression (286)) sur un domaine tridimensionnel : une poutre maillée avec des éléments parallélépipédiques (Figure 45). La fonction de covariance choisie est donc :

$$(277) \quad C_{\alpha}(\{x_1\}, \{x_2\}) = \exp(-|x_{11} - x_{21}|)$$

où x_{11} et x_{21} sont les premières coordonnées des vecteurs $\{x_1\}$ et $\{x_2\}$ respectivement.

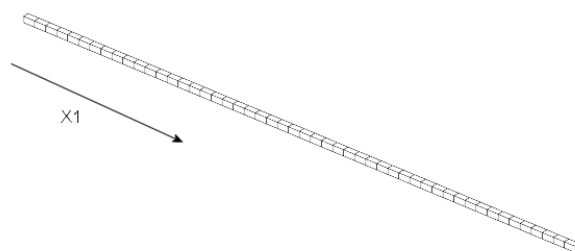


Figure 45. Domaine maillé avec 50 éléments

Les résultats numériques convergent vers les valeurs analytiques quand la densité de maillage augmente (Figure 46).

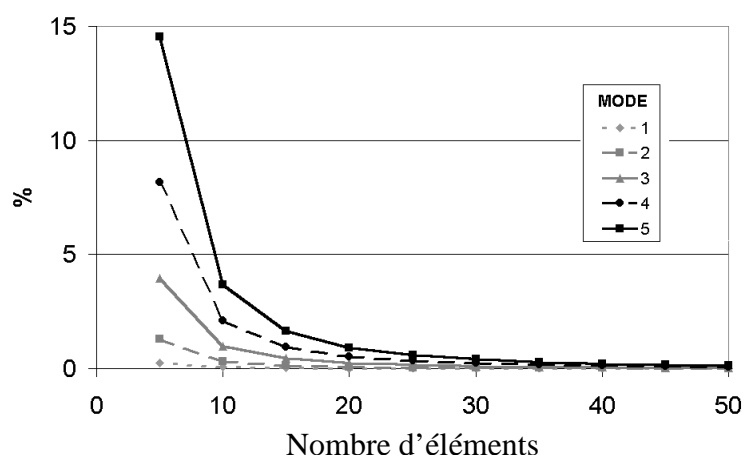


Figure 46. Différence relative entre les valeurs propres numériques et analytiques en fonction du nombre d'éléments utilisés pour mailler la poutre

Pour les densités testées les plus élevées, les valeurs (Table 15) et fonctions propres (Figure 47) sont très proches de celles prévues par la théorie.

	Numérique	Analytique	Différence relative
1^{er} Mode	7.388324E-01	7.388110E-01	0.0029%
2^{ème} Mode	1.380217E-01	1.380040E-01	0.0128%
3^{ème} Mode	4.510630E-02	4.508800E-02	0.0406%
4^{ème} Mode	2.134663E-02	2.132900E-02	0.0827%
5^{ème} Mode	1.229677E-02	1.227900E-02	0.1448%
6^{ème} Mode	7.963228E-03	7.945371E-03	0.2248%

Table 15. Valeurs propres numériques et analytiques pour 50 éléments

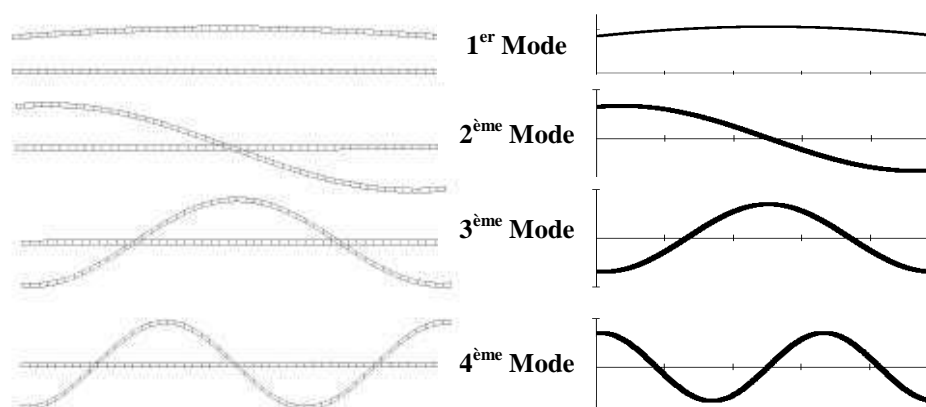


Figure 47. Modes propres numériques (gauche) et analytiques (droites)

2.3.6 Conclusion sur la méthode numérique

La méthode numérique présentée ici permet de disposer, sous forme de valeurs nodale, des fonctions propres de la covariance d'un champ aléatoire sur un domaine défini. Ces données peuvent ensuite être utilisées dans un calcul stochastique.

2.4 Analyse paramétrique de l'effet de la longueur de corrélation sur la décomposition de Karhunen-Loève

La décomposition en série de Karhunen-Loève pose le problème de la longueur de corrélation. Pour une longueur de corrélation nulle, le processus aléatoire est un bruit blanc (chaque point du domaine est une variable aléatoire indépendante) et ne peut plus être simulé. Avec la méthode des fonctions de forme, si la longueur de corrélation diminue, il faut diminuer la taille des mailles du domaine pour continuer à simuler le champ. De la même manière peut-on simuler des processus aléatoires de n'importe quelle longueur de corrélation avec la décomposition KL même en augmentant le niveau de troncature ?

2.4.1 Présentation de l'analyse paramétrique

❖ Modèle

Nous considérons ici une covariance exponentielle :

$$(278) \quad C_{\mu}(x, y) = \sigma_F^2 \exp \left[-\frac{|x - y|}{l} \right]$$

où :

- σ_F^2 est l'écart-type du processus aléatoire μ en un point x ;
- l est la longueur de corrélation (c'est ce paramètre que nous allons faire varier).

Afin de pouvoir représenter facilement les fonctions de covariance, l'espace est mono-dimensionnel (comme l'abscisse le long d'une poutre) : $x, y \in [0, L]$.

Afin de simplifier l'étude l'écart-type du processus aléatoire sera pris constant.

❖ Solution analytique

Les valeurs et fonctions propres λ_i et $\phi_i(x)$ de cette fonction de covariance sont données dans [III-3], en distinguant les cas n pair et n impair :

Pour n impair

Les ω_n sont les solutions successives de l'équation

$$(279) \quad \frac{1}{l} - \omega \tan \left(\frac{L}{2} \omega \right) = 0$$

Les valeurs propres sont alors données par :

$$(280) \quad \lambda_n = \frac{2\sigma^2 L}{1 + L^2 \omega_n^2}$$

Les vecteurs propres sont :

$$(281) \quad \phi_n(x) = \frac{\cos \left(\omega_n \left(x - \frac{L}{2} \right) \right)}{\sqrt{\frac{L}{2} + \frac{\sin(\omega_n L)}{2\omega_n}}}$$

Pour n pair

Les ω_n sont les solutions successives de l'équation

$$(282) \quad \omega + \frac{1}{l} \tan \left(\frac{L}{2} \omega \right) = 0$$

Les valeurs propres sont données comme précédemment par :

$$(283) \quad \lambda_n = \frac{2\sigma^2 L}{1 + L^2 \omega_n^2}$$

Les vecteurs propres sont cette fois :

$$(284) \quad \phi_n(x) = \frac{\sin \left(\omega_n \left(x - \frac{L}{2} \right) \right)}{\sqrt{\frac{L}{2} - \frac{\sin(\omega_n L)}{2\omega_n}}}$$

Ces solutions numériques présentent l'inconvénient de nécessiter la détermination numérique des racines de deux fonctions, cette détermination étant rendue complexe par le caractère très variable de ces fonctions qui possèdent des discontinuités multiples proches des racines, surtout pour les n pairs (Figure 48).

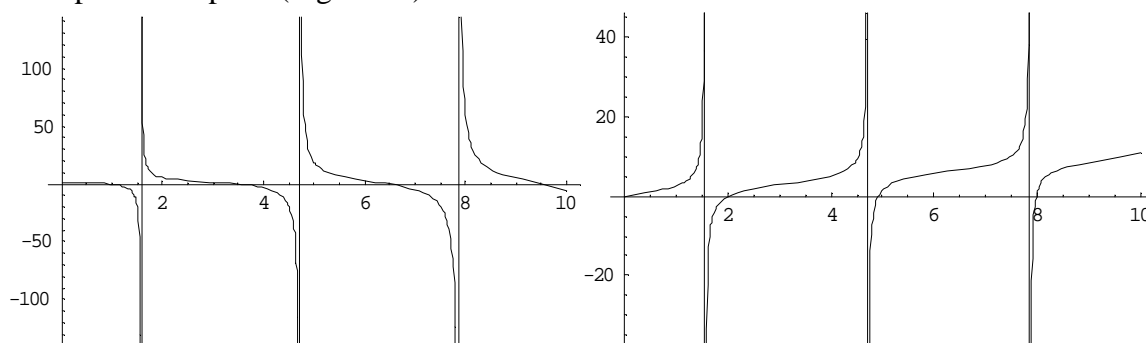


Figure 48. Exemple de deux fonctions dont les racines donnent les valeurs propres de la fonction de covariance (pour n impair à gauche et n pair à droite) ; $L=1$, $l=1$, $\sigma=1$

❖ Données

L'écart-type du processus aléatoire sera pris arbitrairement égal à 1.

Nous ferons varier la longueur de corrélation de $\frac{L}{50}$ à L . La représentation de ces deux covariances extrêmes est donnée Figure 49 ; nous voyons l'effet de la longueur de corrélation sur la forme de la fonction de covariance : plus elle diminue, plus la crête se resserre.

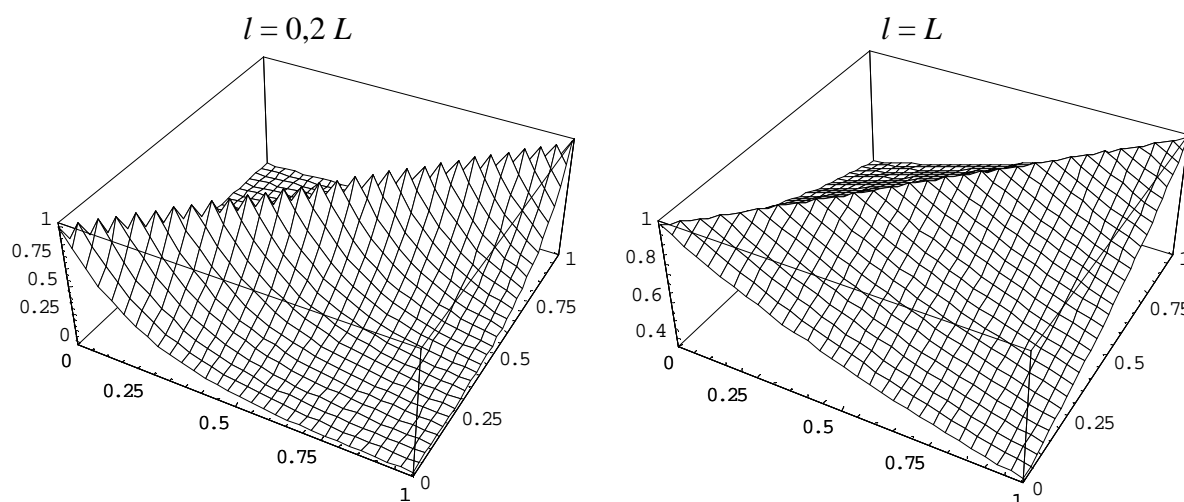


Figure 49. Covariances extrêmes utilisées, $L=1$. L'effet « dents de scie » est due au logiciel de traçage.

2.4.2 Résultats

❖ Spectres obtenus

Intéressons-nous d'abord aux spectres obtenus, c'est à dire aux premières valeurs propres λ_i de l'équation (190). Sur la Figure 50 nous voyons que les spectres sont relativement proches les uns des autres. En fait pour des longueurs de corrélation importantes la covariance peut être approximée par une troncature aux tous premiers termes de la décomposition spectrale, ce n'est plus le cas pour des longueurs faibles : le nombre de termes utilisés est insuffisant pour

représenter de telles variations (Figure 51). Ce n'est donc pas dans le spectre qu'il faut chercher les effets de la longueur de corrélation, mais dans l'erreur de troncature au $n^{\text{ième}}$ terme.

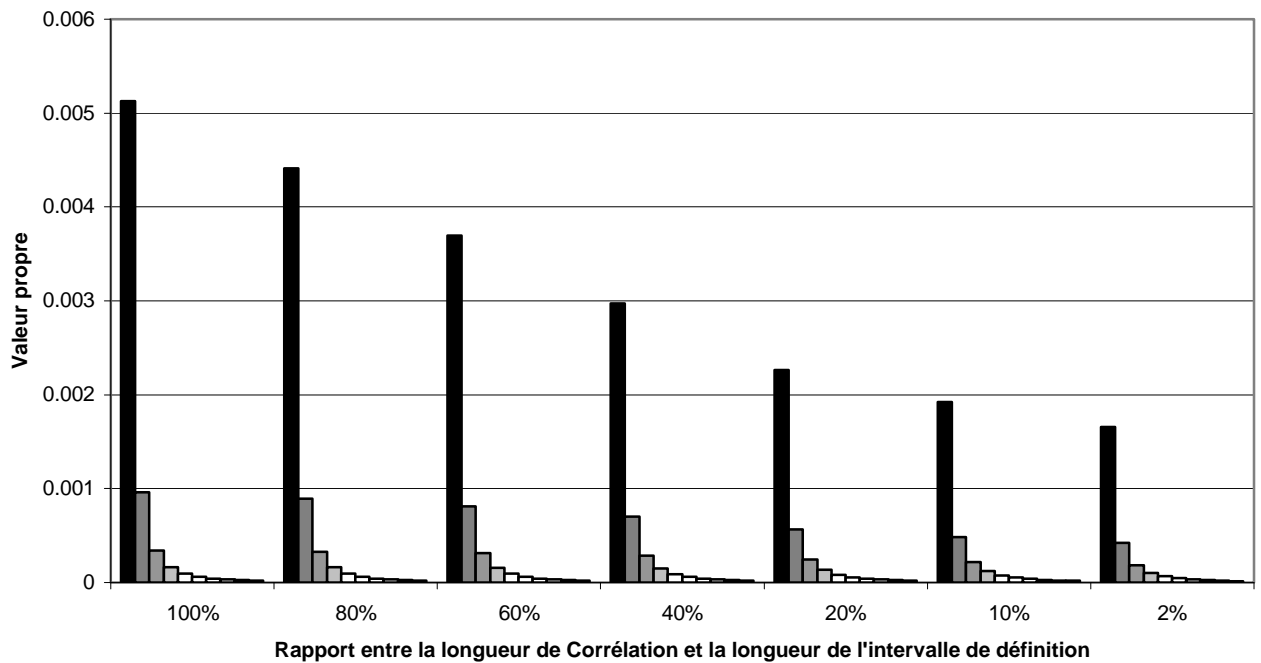


Figure 50. Spectre pour différentes longueurs de corrélation

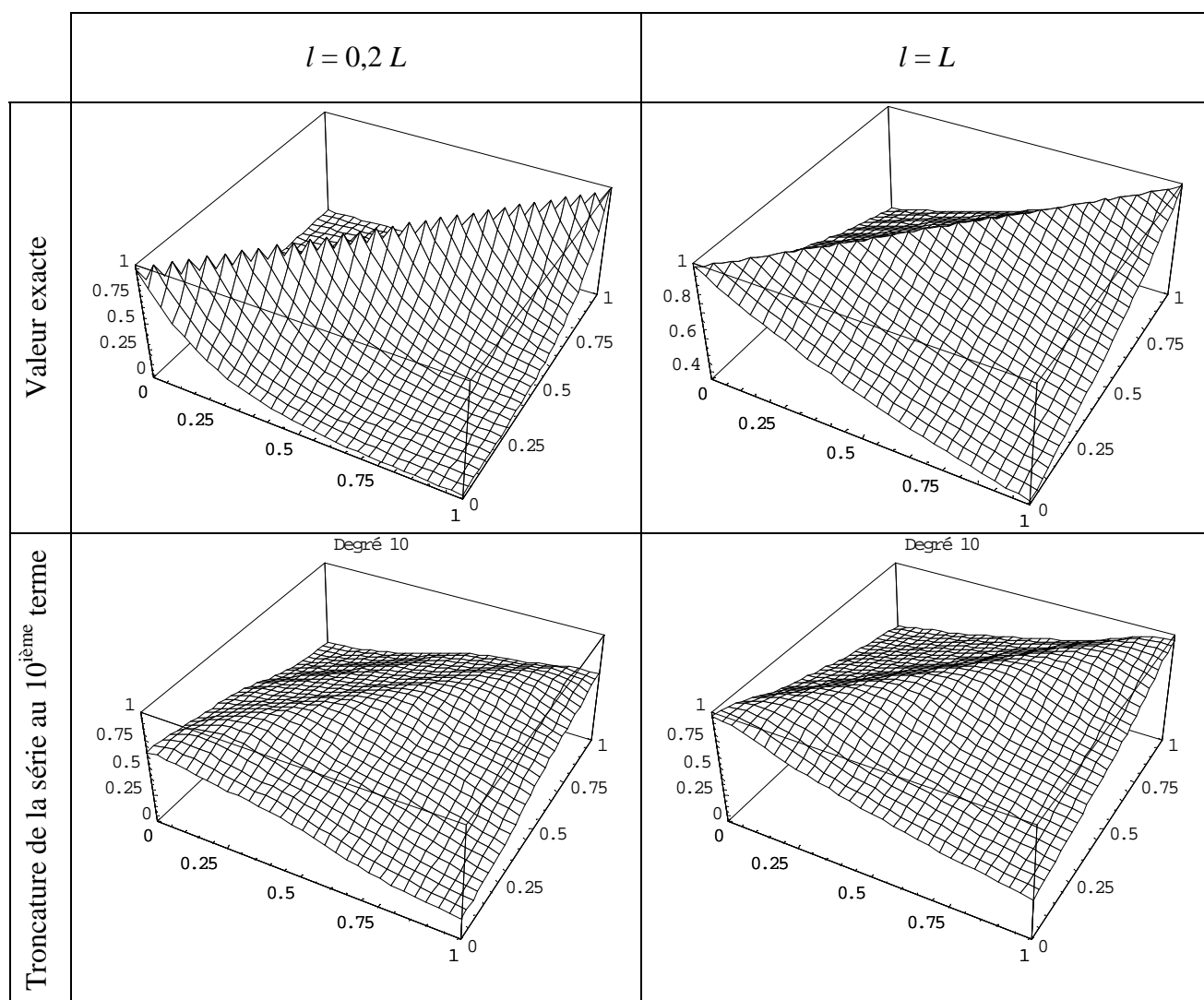


Figure 51. Valeurs exactes et recomposées à partir de la troncature au 10^{ème} terme de la décomposition spectrale des covariances extrêmes de la Figure 49

❖ Erreur de troncature

Une étude de la convergence des séries de Karhunen-Loève pour différentes fonctions de covariance a été réalisée dans [IV-4], avec la conclusion que plus la fonction de covariance était régulière, plus la convergence était rapide, et donc qu'une fonction de covariance triangulaire convergerait plus lentement qu'une fonction de covariance exponentielle, qui elle-même convergerait plus lentement qu'une fonction de covariance de type sinusoïdale ($\sin(x-y)/(x-y)$).

On peut se poser la question de la relation entre l'erreur de troncature et la longueur de corrélation. On peut constater que plus la longueur de corrélation est faible, plus la fonction de covariance varie rapidement et donc, selon les conclusions de [IV-4] l'erreur de troncature doit augmenter. Cela se vérifie dans le tracé de l'erreur absolue entre la covariance exacte et celle obtenue par troncature au dixième terme de sa décomposition en série pour différentes longueurs de corrélation (Figure 52).

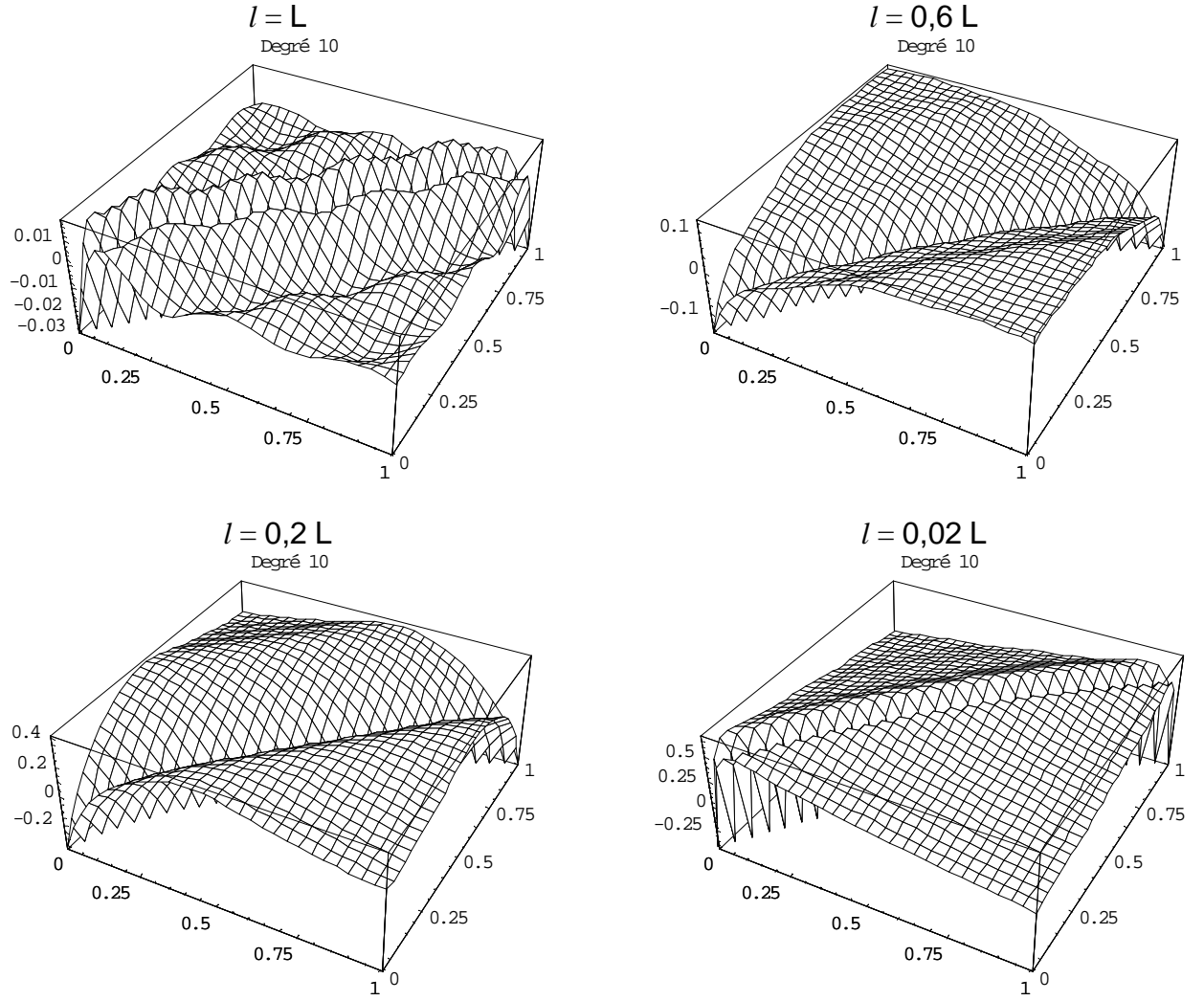


Figure 52. Différence entre la fonction de covariance et sa recomposition à partir de la série tronquée pour différentes longueurs de corrélation, $L=1$. L'échelle des ordonnées est différente pour chaque dessin.

Afin de pouvoir comparer les erreurs sur toute l'étendue du domaine de définition, nous relevons les valeurs en 2500 points selon une grille régulière 50×50 suivant x et y (représentée Figure 53) et nous calculons la sommes des carrés de la différence entre la covariance exacte et la covariance reconstituée à partir de la troncature au $10^{\text{ième}}$ terme de la décomposition spectrale. L'erreur est calculée avec la formule :

$$(285) \quad err = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \left(C_{ex} \left(i \frac{L}{m+1}, j \frac{L}{p+1} \right) - C_{spec} \left(i \frac{L}{m+1}, j \frac{L}{p+1} \right) \right)^2$$

avec

$C_{ex}(x,y)$ la covariance exacte ;

$C_{spec}(x,y)$ la covariance reconstituée à partir sa décomposition spectrale ;

m le nombre de points de mesure suivant x ;

p le nombre de points de mesure suivant y ;

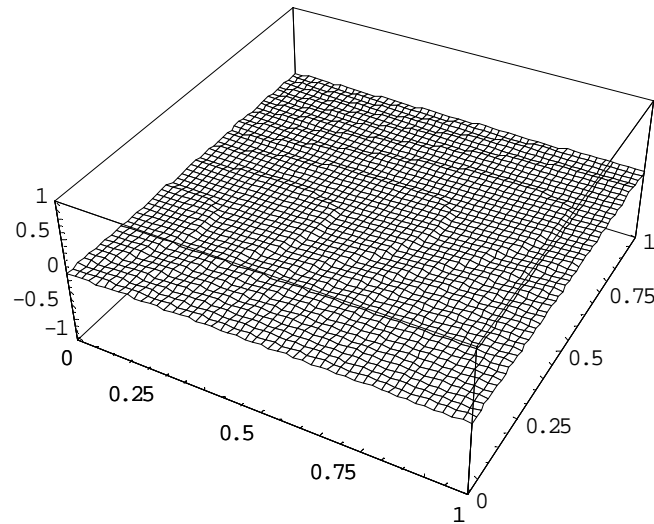


Figure 53. Grille de mesure de l'erreur

Le résultat, présenté Figure 54 montre une décroissance exponentielle de l'erreur avec la longueur de corrélation, bien mise en évidence par l'utilisation d'une échelle logarithmique.

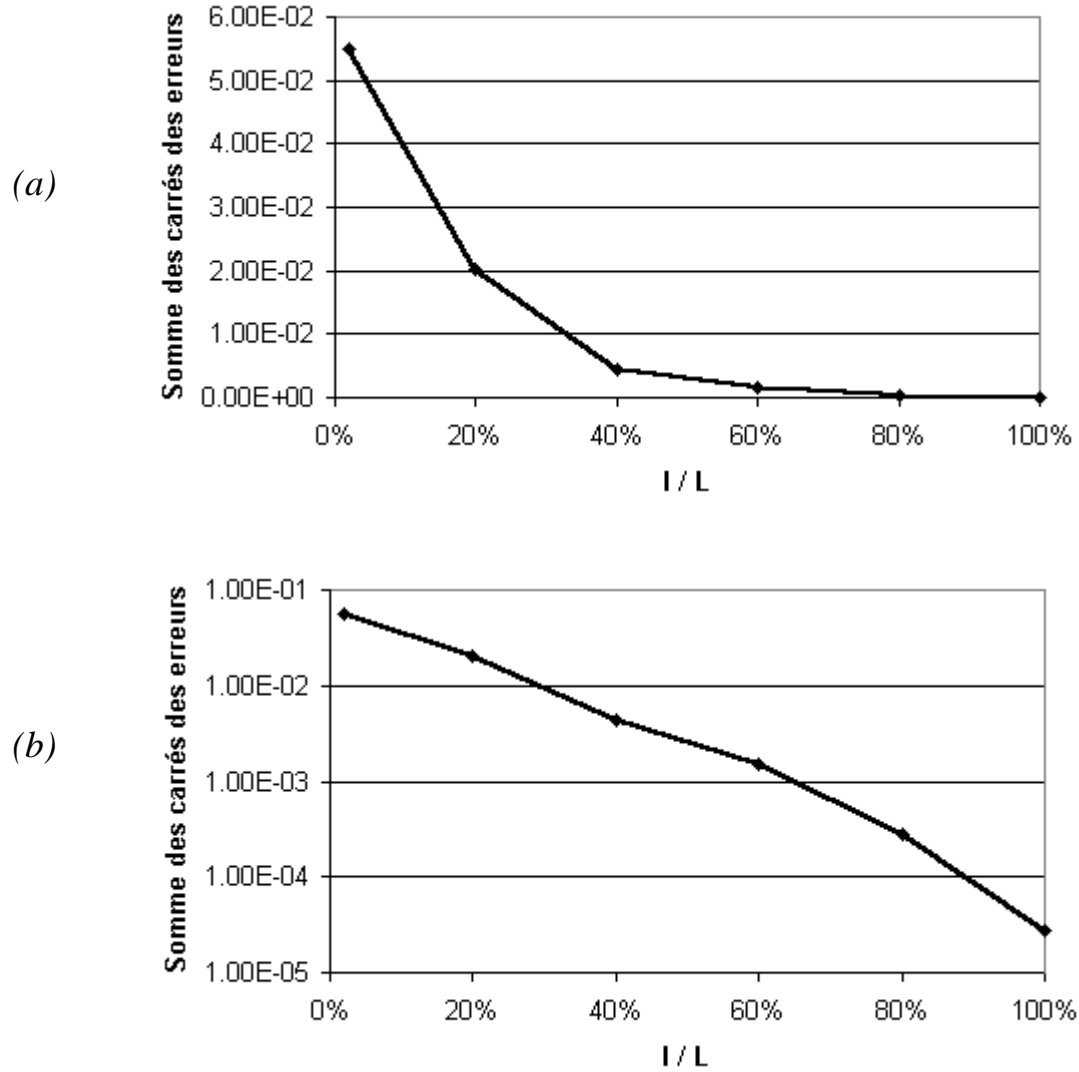


Figure 54. Erreur au sens des moindres carrés en fonction de la longueur de corrélation entre la covariance exacte et la covariance recomposée à partir de la troncature au $10^{\text{ième}}$ terme de la décomposition spectrale en utilisant une grille de 2500 points de mesure ; échelle linéaire (a) et logarithmique (b)

Nous voyons qu'une longueur de corrélation faible (par rapport à la taille du domaine de définition) entraîne rapidement des erreurs importantes. On peut se demander à quel point cette erreur peut être réduite par l'augmentation du nombre de termes utilisé dans la décomposition spectrale (le niveau de la troncature de la série). En fait la Figure 55 montre que la covariance recomposée à partir de sa décomposition spectrale pour une longueur de corrélation de 40% de L converge rapidement vers une valeur non nulle qui varie ensuite très peu avec le nombre de termes (insensible même en utilisant une échelle logarithmique), même si théoriquement pour un nombre infini de termes cette erreur est nulle. Il faudrait donc utiliser un nombre important de termes pour réduire l'erreur de manière négligeable.

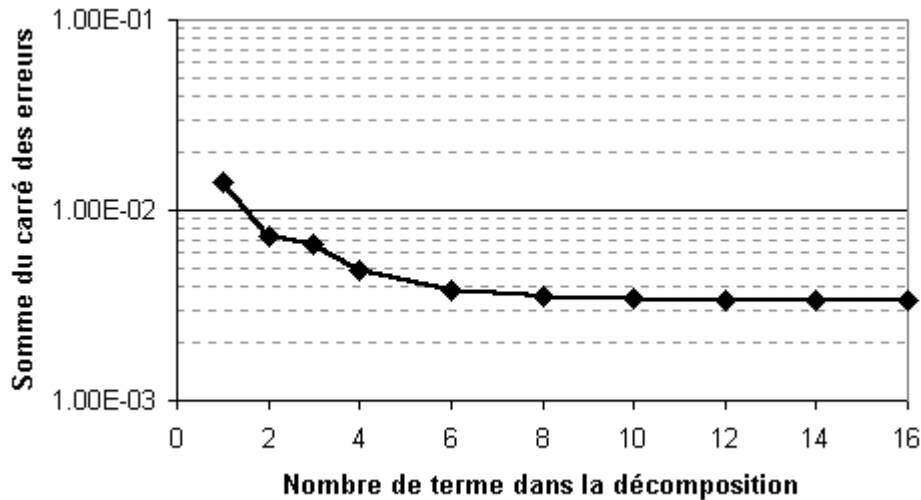


Figure 55. Erreur au sens des moindres carrés entre la covariance exacte et la covariance recomposée en fonction du nombre de termes dans la décomposition spectrale en utilisant une grille de 2500 points de mesure ; longueur de corrélation $l=0,4 L$; échelle logarithmique

2.4.3 Conclusion sur l'analyse paramétrique

Dans le cas général la décomposition spectrale d'une fonction de covariance n'est exacte qu'à la limite. Lorsque la série obtenue est tronquée, elle reste proche de la covariance exacte pour des longueurs de corrélation suffisamment grandes, mais l'erreur augmente exponentiellement quand cette longueur diminue. La seule façon de réduire cette erreur consiste alors à augmenter de manière extrême le nombre de termes de la troncature, car si l'erreur croît exponentiellement avec la diminution de la longueur de corrélation, elle décroît « logarithmiquement » avec le nombre de terme. Cette décomposition en série ne peut donc s'appliquer qu'à des processus aléatoires montrant une corrélation suffisante, c'est à dire une longueur de corrélation suffisamment grande par rapport à l'intervalle de définition de la fonction de covariance. Dans notre cas (covariance exponentielle), au vu des résultats de la Figure 52, la longueur de corrélation doit être de l'ordre de grandeur de l'intervalle d'étude.

2.5 Conclusion sur la décomposition KL

La décomposition en série présentée n'est applicable que pour des champs aléatoires stationnaires du second ordre, c'est à dire des champs aléatoires pour lesquels les deux premiers moments (moyenne et fonction de covariance) sont connus et pour lesquels la valeur de la fonction de covariance pour un couple de points ne dépend que de la distance entre ces deux points.

Une deuxième limitation découle de la partie §2.1.1 : si le champ aléatoire n'est pas gaussien, la décomposition en série de Karhunen-Loève permet toujours de discrétiser le champ aléatoire, mais alors la loi suivie par les variables aléatoires (193) de la décomposition est en général inconnue.

Enfin un dernier inconvénient provient de la lenteur de convergence de la série, qui peut nécessiter beaucoup de termes pour approximer convenablement le champ aléatoire.

Cependant au delà de ces inconvénients la possibilité d'utiliser un modèle élément fini pour calculer une décomposition d'un champ aléatoire en fait un outil intéressant dans le cadre d'un calcul stochastique. Il faut noter que d'autres méthodes de discrétisation existent et sont présentées comme plus adaptées que la décomposition KL ([IV-5]). Cependant leur usage est

bien moins répandu que celui de cette dernière, mais peut-être est-ce simplement dû à sa présence centrale dans le livre fondateur [III-3].

3 Eléments Finis Stochastiques

Nous allons présenter ici brièvement la méthode des éléments finis stochastiques qui représente la méthode historique de projection de résultats sur le chaos polynomial [III-3].

3.1 EF déterministes

Avant de parler d'éléments finis stochastiques, nous allons rapidement rappeler la base des éléments finis déterministes.

Soit un solide \mathbf{S} n'admettant qu'un champ de déplacement mono-dimensionnel $u(\{x\})$. Nous approximations le champ de déplacement en interpolant n déplacements nodaux $q_i(t)$ grâce à n fonctions de forme $N_i(\{x\})$ par la formule :

$$(286) \quad \tilde{u}(\{x\}, t) = \sum_{i=1}^n N_i(\{x\}) q_i(t)$$

Le champ de déformation correspondant à ce champ de déplacement discrétisé est

$$(287) \quad \tilde{\varepsilon}(\{x\}, t) = D \langle N(\{x\}) \rangle \{q(t)\}$$

où D est un opérateur de différentiation. On note :

$$(288) \quad \langle B \rangle = D \langle N(\{x\}) \rangle$$

Le champ de contraintes correspondant s'obtient via la matrice de comportement $[\mathbf{H}]$, dépendant du type d'élément (poutre, solide,...) :

$$(289) \quad \{\tilde{\sigma}\} = [\mathbf{H}] \{\tilde{\varepsilon}\}$$

Nous aboutissons à une matrice de rigidité $[\mathbf{K}]$ définie par

$$(290) \quad \mathbf{K}_{ij} = \int_S B_i(\{x\}) \mathbf{H}_{ij} B_j(\{x\}) dv$$

Le système à résoudre pour trouver les déplacements nodaux est :

$$(291) \quad [\mathbf{K}] \{q\} = \{F\}$$

où $\{F\}$ est le vecteur des forces équivalentes appliquées sur les nœuds.

Les conditions aux limites s'obtiennent par exemple en imposant une rigidité très grande dans $[\mathbf{K}]$ face aux déplacements nodaux devant rester nuls, ou bien en annulant lignes et colonnes relatifs à ces déplacements sauf la diagonale prise égale à 1.

3.2 EF stochastiques

Dans le cas de paramètres stochastiques, la matrice $[\mathbf{H}]$ possède une partie stochastique, par exemple due à une projection sur un chaos polynomial :

$$(292) \quad [\mathbf{H}(x, \omega)] = [\mathbf{H}^{(0)}(x)] \left(1 + \sum_{i=0}^n \psi_i(\omega) \phi_i(x) \right)$$

La matrice de rigidité stochastique $[\mathbf{K}(\omega)]$ s'obtient facilement :

$$(293) \quad \mathbf{K}_{ij}(\omega) = \int_0^L B_i(x) \mathbf{H}_{ij}(x, \omega) B_j(x) dx$$

$$(294) \quad \mathbf{K}_{ij}(\omega) = \int_0^L B_i(x) \mathbf{H}_{ij}^{(0)}(x) B_j(x) dx + \sum_{i=0}^n \left(\psi_i(\omega) \int_0^L B_i(x) \mathbf{H}_{ij}^{(0)}(x) \phi_i(x) B_j(x) ds \right)$$

On reconnaît une matrice de rigidité moyenne et des matrices de rigidité dues à la perturbation :

$$(295) \quad [\mathbf{K}(\omega)] = [\mathbf{K}^{(0)}] + \sum_{i=0}^n \psi_i(\omega) [\mathbf{K}^{(i)}]$$

où

$$(296) \quad \mathbf{K}_{ij}^{(0)} = \int_0^L B_i(x) \mathbf{H}_{ij}^{(0)}(x) B_j(x) dx$$

et

$$(297) \quad \mathbf{K}_{ij}^{(i)} = \int_0^L B_i(x) \mathbf{H}_{ij}^{(0)}(x) \phi_i(x) B_j(x) dx$$

De même le vecteur des déplacements nodaux $\{q\}$ sera différent du cas déterministe : il sera composée de variables aléatoires $q_i(\omega)$, décomposées sur le chaos polynomial de mêmes variables que l'entrée (mais de degré éventuellement différent) :

$$(298) \quad q_i(\omega) = \sum_{j=0}^m \alpha_{ij} \psi_j(\omega)$$

où α_{ji} sont des coefficients réels. On peut écrire :

$$(299) \quad \{q(\omega)\} = [\alpha] \{\psi(\omega)\}$$

où $[\alpha] = [\{\alpha_0\} \{\alpha_1\} \dots \{\alpha_m\}]$ si on note :

$$(300) \quad \{\alpha_k\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{k0} \\ \alpha_{k1} \\ \vdots \\ \alpha_{km} \end{Bmatrix}$$

Ces vecteurs $\{\alpha_k\}$ sont les amplitudes des déplacements nodaux associés à chaque polynôme aléatoire $\psi_k(\omega)$.

Les conditions aux limites, pour tous les vecteurs $\{\alpha_k\}$ correspondant aux déplacements nodaux $q_k(\omega)$ bloqués, sont prises en compte de manière classique.

En considérant un chargement déterministe le système à résoudre est alors :

$$(301) \quad [K(\omega)] \{q(\omega)\} = \{F\}$$

soit

$$(302) \quad \left(\left[K^{(0)} \right] + \sum_{i=0}^n \psi_i(\omega) \left[K^{(i)} \right] \right) \{q(\omega)\} = \{F\}$$

Des projections, via l'opérateur d'espérance, sur les m polynômes du chaos polynomial nous donnent $m+1$ équations :

$$(303) \quad \mathbf{E} \left[\left(\left[K^{(0)} \right] + \sum_{i=0}^n \psi_i(\omega) \left[K^{(i)} \right] \right) \{q(\omega)\} \psi_k(\omega) \right] = \mathbf{E} \left[\{F\} \psi_k(\omega) \right], k=0..m$$

Ce qui se réduit à :

$$(304) \quad \mathbf{E}[\{F\} \psi_k(\omega)] = \begin{cases} \{F\} & \text{pour } k = 0, \\ \{0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(305) \quad \mathbf{E} \left[\sum_{i=0}^n \left[K^{(i)} \right] \{q(\omega)\} \psi_i(\omega) \psi_k(\omega) \right] = \mathbf{E} \left[\sum_{i=0}^n \left[K^{(i)} \right] [\alpha] \{ \psi(\omega) \} \psi_i(\omega) \psi_k(\omega) \right]$$

En notant

$$(306) \quad c_{i,j,k} = \mathbf{E}[\psi_i(\omega) \psi_j(\omega) \psi_k(\omega)]$$

il est alors possible de réécrire le système (301) sous la forme :

$$(307) \quad \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n c_{i,0,0} [\mathbf{K}^{(i)}] & \sum_{i=0}^n c_{i,1,0} [\mathbf{K}^{(i)}] & \dots & \dots & \dots & \dots & \sum_{i=0}^n c_{i,m,0} [\mathbf{K}^{(i)}] \\ \sum_{i=0}^n c_{i,0,1} [\mathbf{K}^{(i)}] & \sum_{i=0}^n c_{i,1,1} [\mathbf{K}^{(i)}] & \dots & \dots & \dots & \dots & \sum_{i=0}^n c_{i,m,1} [\mathbf{K}^{(i)}] \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ \sum_{i=0}^n c_{i,0,n} [\mathbf{K}^{(i)}] & \sum_{i=0}^n c_{i,1,n} [\mathbf{K}^{(i)}] & \dots & \dots & \dots & \dots & \sum_{i=0}^n c_{i,m,n} [\mathbf{K}^{(i)}] \\ \sum_{i=0}^n c_{i,0,n+1} [\mathbf{K}^{(i)}] & \sum_{i=0}^n c_{i,1,n+1} [\mathbf{K}^{(i)}] & \dots & \dots & \dots & \dots & \sum_{i=0}^n c_{i,m,n+1} [\mathbf{K}^{(i)}] \\ \sum_{i=0}^n c_{i,0,n+2} [\mathbf{K}^{(i)}] & \sum_{i=0}^n c_{i,1,n+2} [\mathbf{K}^{(i)}] & \dots & \dots & \dots & \dots & \sum_{i=0}^n c_{i,m,n+2} [\mathbf{K}^{(i)}] \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ \sum_{i=0}^n c_{i,0,m} [\mathbf{K}^{(i)}] & \sum_{i=0}^n c_{i,1,m} [\mathbf{K}^{(i)}] & \dots & \dots & \dots & \dots & \sum_{i=0}^n c_{i,m,m} [\mathbf{K}^{(i)}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\alpha_0\} \\ \{\alpha_1\} \\ \vdots \\ \{\alpha_m\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Que l'on peut mettre sous la forme :

$$(308) \quad [\mathcal{K}] \{ \mathcal{U} \} = \{ \mathcal{F} \}$$

La matrice $[\mathcal{K}]$ est une matrice symétrique (car $c_{i,j,k} = c_{i,k,j}$) de dimensions $(m+1)l \times (m+1)l$ où m est le nombre de polynômes du chaos polynomial et l est le nombre de degrés de liberté de la discrétisation par éléments finis. La taille de cette matrice est donc un multiple (plus ou moins grand) de celle de la matrice de rigidité du système déterministe correspondant. Pour une poutre en flexion avec 10 nœuds de 2 degrés de liberté et un chaos polynomial de 5

variables et d'ordre 2, nous obtenons une matrice 420x420, soit 176400 termes (à comparer aux 400 termes de la matrice déterministe). Cependant de nombreux termes de la matrice sont nuls, l'utilisation d'algorithmes permettant la manipulation de matrices creuses est donc possible.

Il est à noter que cette méthode requiert une modification du code de calcul et débouche sur la résolution d'un système linéaire très grand, qui peut toutefois être simplifié via l'emploi de pré-conditionneurs. La complexité de l'implémentation de cette méthode (propre à chaque type de problème) a conduit à rechercher des méthodes alternatives.

4 EF stochastiques non intrusifs

Parallèlement à la méthode spectrale présentée précédemment il existe une autre classe de méthodes intéressantes à considérer : les méthodes dites non intrusives [VI-3]. Comme ce nom l'indique elles utilisent une approche externe au code de calcul considéré. Parmi ces méthodes on remarquera la méthode non intrusive par régression qui vient faire écho à la méthode inverse déterministe. C'est cette méthode que nous détaillerons dans cette partie.

4.1 Méthode non intrusive par régression avec une variable aléatoire en entrée

4.1.1 Théorie

Soit un problème classique :

$$(309) \quad q = F[u, p]$$

où

u est une entrée que l'on singularise (par exemple la rigidité du système)

q est la sortie (par exemple le déplacement)

p contient les autres paramètres (conditions aux limites, propriétés non contenues dans u)

F est un opérateur représentant le comportement du système (défini entre autres par des équations de comportement)

En passant dans un cadre stochastique on obtient :

$$(310) \quad q(\omega) = F(u(\omega), p)$$

Supposons que l'on connaisse $u(\omega)$, que l'on peut exprimer via une variable aléatoire normale $\zeta(\omega)$ et une fonction g .

$$(311) \quad u(\omega) = g(\zeta(\omega))$$

La méthode non intrusive présentée ici repose sur le choix d'un jeu de N valeurs $\{\zeta^{(1)} \dots \zeta^{(N)}\}$ fixées de la variable aléatoire $\zeta(\omega)$, analogue à un plan d'expériences. Pour chacune de ces réalisations les valeurs de u et q sont connues :

$$(312) \quad u^{(k)} = g(\zeta^{(k)})$$

$$(313) \quad q^{(k)} = F[g(\zeta^{(k)}), p]$$

Afin de caractériser $q(\omega)$, on cherche sa décomposition sur le chaos polynomial :

$$(314) \quad q_c(\{a\}, \omega) = \sum_{i=1}^m a_i \psi_i(\zeta(\omega))$$

Il faut donc identifier les m coefficients a_i regroupés ici dans le vecteur $\{a\}$. Pour chacune des N réalisations $\zeta^{(k)}$ nous disposons d'une valeur de flèche dépendant des coefficients a_i .

$$(315) \quad q_c(\{a\})^{(k)} = \sum_{i=0}^m a_i \psi_i(\zeta^{(k)})$$

Les coefficients solutions $\{a^*\}$ peuvent être obtenus par une minimisation de l'écart au sens des moindres carrés entre la solution et le chaos polynomial

$$(316) \quad \{a^*\} = \min_{\{a\}} \sum_{k=1}^N \left\| q^{(k)} - q_c(\{a\})^{(k)} \right\|^2$$

soit :

$$(317) \quad \{a^*\} = \min_{\{a\}} \sum_{k=1}^N \left\| F \left[g(\zeta^{(k)}), p \right] - \sum_{i=0}^m a_i \psi_i(\zeta^{(k)}) \right\|^2$$

4.1.2 Résolution explicite du problème de minimisation

Ce problème d'optimisation peut se résoudre grâce à un algorithme de recherche de minimum. Cependant comme nous sommes dans un cas linéaire il est possible d'obtenir directement la solution :

$$(318) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left(q^{(k)} - \sum_{i=0}^m a_i \psi_i(\zeta^{(k)}) \right)^2 &= \sum_{k=1}^N \left(q^{(k)} - \sum_{i=0}^m a_i \psi_i(\zeta^{(k)}) \right) \left(q^{(k)} - \sum_{i=0}^m a_i \psi_i(\zeta^{(k)}) \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \left((q^{(k)})^2 - 2 q^{(k)} \sum_{i=0}^m a_i \psi_i(\zeta^{(k)}) + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m a_i a_j \psi_i(\zeta^{(k)}) \psi_j(\zeta^{(k)}) \right) \end{aligned}$$

En définissant les matrices et vecteurs suivants :

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q^{(1)} \\ \vdots \\ q^{(N)} \end{Bmatrix}$$

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix}$$

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \psi_0(\zeta^{(0)}) & \cdots & \psi_0(\zeta^{(N)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_m(\zeta^{(0)}) & \cdots & \psi_m(\zeta^{(N)}) \end{bmatrix}$$

Alors

$$(319) \quad \sum_{k=1}^N (q^{(k)})^2 = \{q\}^T \{q\}$$

$$(320) \quad -2 \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^m q^{(k)} a_i \psi_i(\xi^{(k)}) = -2 \{a_i\}^T [\Psi] \{q_i\}$$

$$(321) \quad \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m a_i a_j \psi_i(\xi^{(k)}) \psi_j(\xi^{(k)}) = \{a\}^T [\Psi] [\Psi]^T \{a\}$$

D'où l'expression de l'erreur au sens des moindres carrés :

$$(322) \quad \Delta q = \{q\}^T \{q\} - 2 \{a\}^T [\Psi] \{q\} + \{a\}^T [\Psi] [\Psi]^T \{a\}$$

En dérivant par rapport à $\{a_i\}$ pour trouver l'extremum :

$$(323) \quad \frac{d\Delta q}{d\{a\}} = -2 [\Psi] \{q\} + 2 [\Psi] [\Psi]^T \{a\}$$

Soit pour $\frac{d\Delta q}{d\{a\}} = 0$

$$(324) \quad [\Psi] [\Psi]^T \{a\} = [\Psi] \{q\}$$

Il s'agit d'un système linéaire qui se résout par les méthodes habituelles, dont la solution $\{a\}$ nous permet d'obtenir les coefficients du chaos polynomial de la solution.

4.1.3 Remarque

Cette méthode repose sur le choix du plan d'expérience S de N valeurs $\{\xi^{(1)} \dots \xi^{(N)}\}$. Elles doivent être suffisamment nombreuses pour obtenir un résultat précis et un système (324) bien conditionné, tout en gardant à l'esprit que pour chaque point un calcul déterministe est réalisé, potentiellement coûteux.

Le choix de ces points est encore empirique. Il est conseillé de choisir comme point les racines du polynôme de chaos de degré immédiatement supérieur à celui utilisé pour la décomposition, mais un échantillon de valeurs uniformément réparties fonctionne aussi.

Le nombre de points optimal est également empirique des études récentes suggèrent que $(Z-1)P$ calculs sont nécessaires pour déterminer les coefficients d'un chaos polynomial de degré P de Z variables.

4.1.4 Exemple

❖ Définition

Considérons une poutre sur deux appuis en flexion soumise à une force répartie $q=100\text{N/m}$ dont l'équation de comportement, en l'absence de déformation en cisaillement est :

$$(325) \quad EI(s) \frac{\partial^2 v(s)}{\partial s^2} = -M_z(s)$$

où :

s est l'abscisse d'un point ;

$v(s)$ est la flèche ;

$EI(s)$ est la rigidité ;

$M_z(s)$ est le moment fléchissant en s du à la charge répartie.

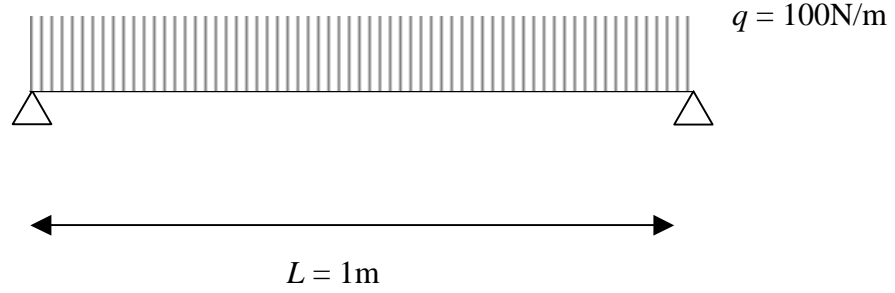


Figure 56. Poutre utilisée dans l'exemple

La résolution de cette équation pour une rigidité constante donne l'équation de la flèche suivante :

$$(326) \quad \frac{q x}{24 EI} (L^3 - Lx^2 - x^3)$$

Considérons maintenant que la rigidité de la poutre est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne m_{EI} et d'écart-type σ_{EI} :

$$(327) \quad EI(\omega) = m_{EI} \left(1 + \frac{\sigma_{EI}}{m_{EI}} \zeta(\omega) \right)$$

où $\zeta(\omega)$ est une variable aléatoire normale. Les valeurs utilisées sont définies dans la Table 16

Nom	Symbole	Valeur
Moyenne	m_{EI}	10^{10} N.m^2
Ecart-type	σ_{EI}	10^9 N.m^2

Table 16. Paramètres de la rigidité

La flèche $v(s, \omega)$ est un champ aléatoire qui vérifie l'équation suivante pour tout aléa ω :

$$(328) \quad EI(\omega) \frac{\partial^2 v(s, \omega)}{\partial s^2} = -M_z(s)$$

Le problème est alors de déterminer la projection $\tilde{v}(s, \omega)$ de $v(s, \omega)$ sur le chaos polynomial de la variable aléatoire $\zeta(\omega)$:

$$(329) \quad \tilde{v}(s, \omega) = \sum_{j=0}^m a_j(s) \psi_j(\zeta(\omega))$$

Nous nous limitons à un chaos de degré 4, donc ici $m=4$.

❖ Solution théorique

En remplaçant dans (328) $EI(\omega)$ par son expression et $v(s, \omega)$ par sa décomposition sur le chaos polynomial (329) nous obtenons :

$$(330) \quad \left(1 + \frac{\sigma_{EI}}{m_{EI}} \zeta(\omega)\right) \frac{d^2 \sum_{j=0}^m a_j(s) \psi_j(\zeta(\omega))}{ds^2} = -\frac{M_Z(s)}{m_{EI}}$$

Soit

$$(331) \quad \left(1 + \frac{\sigma_{EI}}{m_{EI}} \zeta(\omega)\right) \left(\sum_{j=0}^m \frac{d^2 a_j(s)}{ds^2} \psi_j(\zeta(\omega)) \right) = -\frac{M_Z(s)}{m_{EI}}$$

On souhaite réaliser la décomposition de la flèche sur un chaos polynomial d'ordre 4 présenté Table 17.

$\psi_0(\zeta(\omega)) = 1$
$\psi_1(\zeta(\omega)) = \zeta(\omega)$
$\psi_2(\zeta(\omega)) = \zeta(\omega)^2 - 1$
$\psi_3(\zeta(\omega)) = \zeta(\omega)^3 - 3\zeta(\omega)$
$\psi_4(\zeta(\omega)) = \zeta(\omega)^4 - 6\zeta(\omega)^2 + 3$

Table 17. Premiers polynômes du chaos d'une variable aléatoire Gaussienne

Réalisons des projections sur les chaos polynomiaux successifs

$$(332) \quad \mathbf{E} \left[\left(1 + \frac{\sigma_{EI}}{m_{EI}} \zeta(\omega)\right) \left(\sum_{j=0}^m \frac{d^2 a_j(s)}{ds^2} \psi_j(\zeta(\omega)) \right) \psi_k(\zeta(\omega)) \right] = \mathbf{E} \left[-\frac{M_Z(s)}{m_{EI}} \psi_k(\zeta(\omega)) \right] \quad k = 0, \dots, m$$

Soit :

$$(333) \quad \sum_{j=0}^m \frac{d^2 a_j(s)}{ds^2} \left(\frac{\sigma_{EI}}{m_{EI}} \mathbf{E} [\zeta(\omega) \psi_j(\zeta(\omega)) \psi_k(\zeta(\omega))] + \mathbf{E} [\psi_j(\zeta(\omega)) \psi_k(\zeta(\omega))] \right) = -\frac{M_Z(s)}{m_{EI}} \mathbf{E} [\psi_k(\zeta(\omega))] \quad k = 0, \dots, m$$

Or :

$$(334) \quad \mathbf{E} [\psi_k(\zeta(\omega))] = \delta_{k0}$$

$$(335) \quad \mathbf{E} [\psi_j(\zeta(\omega)) \psi_k(\zeta(\omega))] = \delta_{jk} k!$$

Les $(m+1) n$ équations s'obtiennent en calculant le coefficient c_{jk} :

$$(336) \quad c_{jk} = \mathbf{E} [\zeta(\omega) \psi_j(\zeta(\omega)) \psi_k(\zeta(\omega))] \quad \text{pour } j = 0, \dots, m, k = 0, \dots, m$$

En utilisant la formule indiquée dans [III-1] nous trouvons :

$$(337) \quad c_{jk} = j! \delta_{j-1,k} + k! \delta_{j,k-1}$$

Les coefficients sont réunis dans la Table 18.

k	j	c_{jk}
0	1	1
1	0	1
1	2	2
2	1	2
2	3	6
3	2	6
3	4	24
4	3	24

Table 18. Coefficients c_{jk} non nuls triés par k croissants

L'équation (333) se réécrit alors :

$$(338) \quad \frac{\sigma_{EI}}{m_{EI}} \sum_{j=0}^m \frac{d^2 a_j(s)}{ds^2} c_{jk} + k! \frac{d^2 a_k(s)}{ds^2} = - \frac{M_Z(s)}{m_{EI}} \delta_{k0} \quad k=0, \dots, m$$

Ces coefficients non nuls nous permettent d'écrire les équations suivantes :

k	Equations
0	$\frac{\sigma_{EI}}{m_{EI}} \frac{d^2 a_1(s)}{ds^2} + \frac{d^2 a_0(\{s\})}{ds^2} = - \frac{M_Z(s)}{m_{EI}}$
1	$\frac{\sigma_{EI}}{m_{EI}} \left(\frac{d^2 a_0(s)}{ds^2} + 2 \frac{d^2 a_2(\{s\})}{ds^2} \right) + \frac{d^2 a_1(s)}{ds^2} = 0$
2	$\frac{\sigma_{EI}}{m_{EI}} \left(2 \frac{d^2 a_1(s)}{ds^2} + 6 \frac{d^2 a_3(\{s\})}{ds^2} \right) + 2 \frac{d^2 a_2(s)}{ds^2} = 0$
3	$\frac{\sigma_{EI}}{m_{EI}} \left(6 \frac{d^2 a_2(s)}{ds^2} + 24 \frac{d^2 a_4(\{s\})}{ds^2} \right) + 6 \frac{d^2 a_3(s)}{ds^2} = 0$
4	$24 \frac{\sigma_{EI}}{m_{EI}} \frac{d^2 a_3(s)}{ds^2} + 24 \frac{d^2 a_4(s)}{ds^2} = 0$

Table 19. Les 5 équations pour les coefficients c_{jk} non nuls

Nous disposons donc d'un système de m équations différentielles couplées dont les inconnues sont les m fonctions $a_i(s)$. Etant donné que la flèche aux extrémités est nulle quelle que soit la

réalisation des variables aléatoires du chaos polynomial, chacune de ces fonctions a comme conditions aux limites :

$$(339) \quad \begin{cases} a_i(0) = 0 \\ a_i(L) = 0 \end{cases} \quad i = 0 \dots m$$

Après réduction et simplification nous obtenons le système suivant :

$$(340) \quad \begin{cases} \frac{d^2 a_0(s)}{ds^2} = \frac{d^2 a_4(s)}{ds^2} \left[\left(\frac{m_{EI}}{\sigma_{EI}} \right)^4 - 9 \left(\frac{m_{EI}}{\sigma_{EI}} \right)^2 + 8 \right] \\ \frac{d^2 a_1(s)}{ds^2} = \frac{d^2 a_4(s)}{ds^2} \left[- \left(\frac{m_{EI}}{\sigma_{EI}} \right)^3 + 7 \frac{m_{EI}}{\sigma_{EI}} \right] \\ \frac{d^2 a_2(s)}{ds^2} = \frac{d^2 a_4(s)}{ds^2} \left[\left(\frac{m_{EI}}{\sigma_{EI}} \right)^2 - 4 \right] \\ \frac{d^2 a_3(s)}{ds^2} = - \frac{m_{EI}}{\sigma_{EI}} \frac{d^2 a_4(s)}{ds^2} \\ \frac{d^2 a_4(s)}{ds^2} = - \frac{M_Z(s)}{m_{EI} \left[\left(\frac{m_{EI}}{\sigma_{EI}} \right)^4 - 10 \left(\frac{m_{EI}}{\sigma_{EI}} \right)^2 + 15 \right]} \end{cases}$$

Dans ce système la dernière équation $a_4(s)$ est l'équation de la flèche de la poutre du problème pour une rigidité EI_4 déterministe égale à :

$$(341) \quad EI_4 = m_{EI} \left[\left(\frac{m_{EI}}{\sigma_{EI}} \right)^4 - 10 \left(\frac{m_{EI}}{\sigma_{EI}} \right)^2 + 15 \right]$$

Une fois ce coefficient connu, les suivants s'obtiennent facilement. Cependant cette solution n'est pas acceptable : pour certaines valeurs du coefficient de variation aucune solution

n'existe pour certains coefficients. Par exemple pour $\left(\frac{m_{EI}}{\sigma_{EI}} \right)^2 = 4$ le deuxième coefficient est

nul pour tout s . Cet effet est sans doute dû au fait que la distribution Gaussienne utilisée possède des valeurs négatives ou nulles sans signification physique et hors du champ d'application du modèle déterministe utilisé. Or la résolution analytique de ce problème prend en compte l'influence de ces valeurs.

❖ Résolution par la méthode non intrusive

Les coefficients du chaos polynomial de la solution seront déterminés en 11 points d'abscisses $\{s_j\}_{j=0 \dots 10}$, on note :

$$(342) \quad a_i^j = a_i(s_j)$$

Deux plans d'expériences sont testés, un plan d'expériences uniforme :

$$(343) \quad \xi^{(k)} = \frac{k+1}{N} - \frac{1}{2}$$

et un plan basé sur un cube latin de la loi normale

$$(344) \quad \xi^{(k)} = \Phi\left(\frac{k+1}{N} - \frac{1}{2}\right)$$

où $k = 0 \dots (N-1)$ et Φ est la fonction de répartition de probabilité normale.

N prendra différentes valeurs afin d'examiner la convergence de la solution en fonction de la taille du plan d'expérience.

❖ Résultats

Les résultats suivants sont obtenus avec une poutre de longueur 1m soumise à une force répartie de 100N/m. Un plan d'expériences uniforme est utilisé. La Figure 57 donne les coefficients du chaos polynomial de la flèche pour un plan d'expériences uniforme de 1000 calculs qui servira de référence. Chaque coefficient est inférieur d'un facteur 10 au précédent.

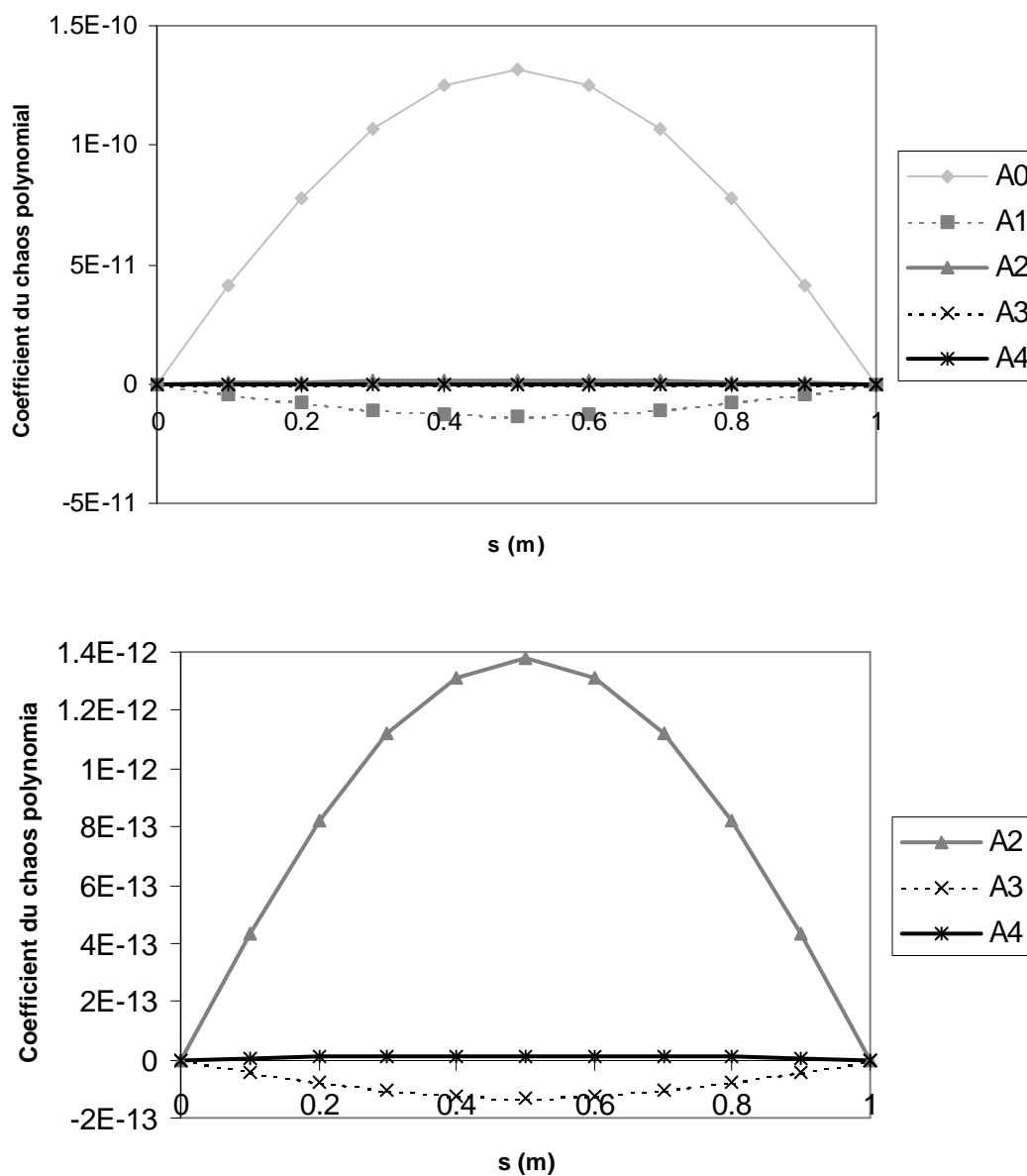


Figure 57. Coefficient du chaos polynomial pour un plan d'expériences uniforme de 1000 calculs.

La Figure 58 montre quant à elle la convergence des coefficients par rapport à la valeur obtenue pour $N=1000$.

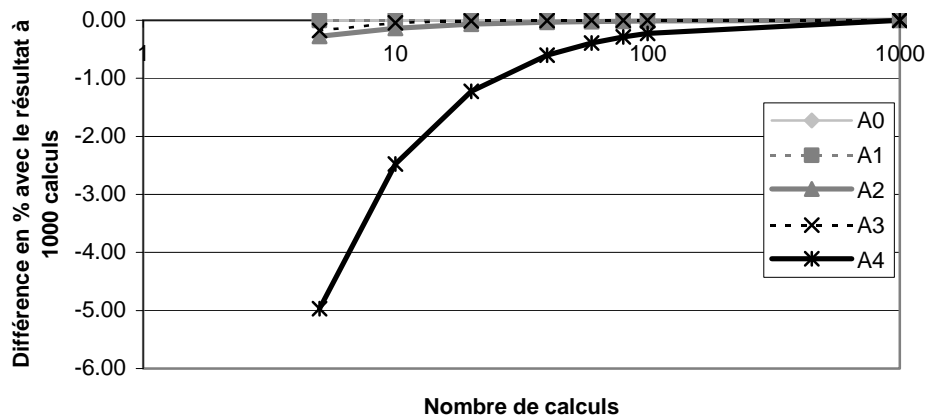


Figure 58. Convergence des coefficients du chaos polynomial en fonction du nombre de calculs réalisé pour un plan d'expériences uniforme

Nous voyons sur ce graphique que la différence entre 5 calculs et 1000 calculs est négligeable ($< 1\%$) pour les trois premiers coefficients, et acceptable (5%) pour les autres. Pour 40 calculs même le quatrième coefficient rentre dans cet intervalle.

❖ Importance du plan d'expériences

Le même type d'expérience réalisé avec un plan d'expériences de type hypercube latin suivant la fonction de distribution de probabilité de la loi normale donne le résultat montré dans la Figure 59.

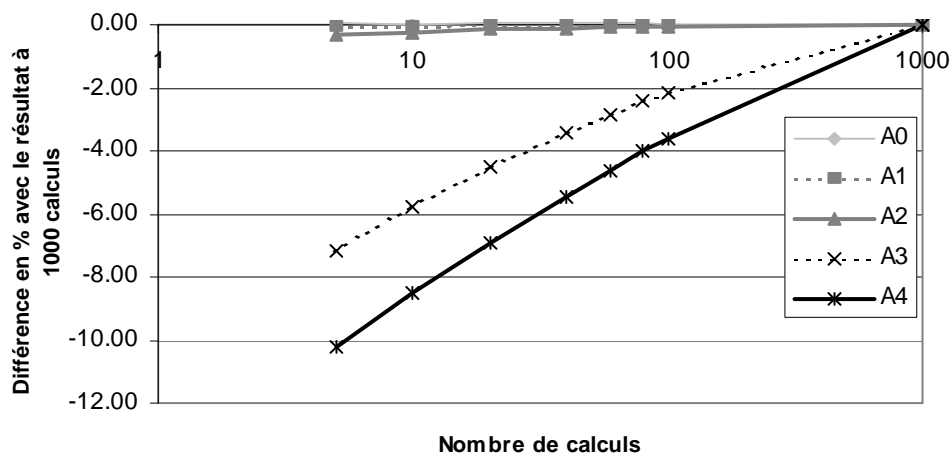


Figure 59. Convergence des coefficients du chaos polynomial en fonction du nombre de calculs réalisé pour un plan d'expériences suivant une loi normale

Comme nous pouvons le voir avec ce plan d'expériences la convergence des coefficients avec le nombre de calcul est beaucoup plus lente. Au bout de 1000 calculs les deux derniers coefficients n'ont toujours pas fini de converger. Cela s'explique par le fait que les réalisations du plan d'expériences sont concentrées autour de la moyenne et que l'information manque dans les queues de distribution. Les deux plans d'expériences convergent vers des

valeurs identiques mais à des vitesses différentes, le plan d'expériences a donc une importance cruciale.

Le meilleur plan d'expériences semble être celui constitué des racines du polynôme du chaos de degré immédiatement supérieur au degré utilisé dans le calcul.

4.2 Méthode non intrusive par régression pour des champs aléatoires

Après avoir traité le cas d'une variable aléatoire $u(\omega)$ en entrée, nous allons maintenant examiner le cas d'un champ aléatoire $u(\{x\}, \omega)$ stationnaire de second ordre en entrée. Pour simplifier le processus ce champ est considéré comme Gaussien.

4.2.1 Théorie

Réécrivons l'équation (310) mais en utilisant un champ aléatoire en entrée, et donc un champ aléatoire en sortie :

$$(345) \quad q(x, \omega) = F[u(x, \omega), p(x)]$$

Le champ aléatoire d'entrée $u(x, \omega)$, connu, doit être discrétisé pour pouvoir être utilisé dans la méthode. Par exemple cela peut être réalisé via la décomposition de Karhunen-Loève (mais éventuellement d'une autre manière) :

$$(346) \quad u(x, \omega) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \zeta_i(\omega) \phi_i(x)$$

les valeurs λ_i et les fonctions $\phi_i(x)$ sont connues, les variables aléatoires $\zeta_i(\omega)$ sont indépendantes, de loi fixée (en particulier normales si le champ est Gaussien).

De la même manière que précédemment un plan d'expériences de N valeurs $\{\{\zeta^{(1)}\} \dots \{\zeta^{(N)}\}\}$ du vecteur des variables aléatoires $\{\zeta(\omega)\}$, est choisi, ce qui nous permet de calculer les valeurs de u et q :

$$(347) \quad u(x)^{(k)} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \zeta_i^{(k)} \phi_i(x)$$

$$(348) \quad q(x)^{(k)} = F\left[\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \zeta_i^{(k)} \phi_i(x)\right), p(x)\right]$$

q étant à présent un champ aléatoire, sa décomposition sur le chaos polynomial peut s'écrire :

$$(349) \quad q_c(\{d(x)\})^{(k)} = \sum_{i=1}^m d_i(x) \psi_i(\{\zeta^{(k)}\})$$

Où les m fonctions $d_i(x)$ sont les coefficients du chaos polynomial à déterminer. Afin de permettre cette détermination une première étape consiste à paramétriser ces fonctions, c'est à dire les faire dépendre d'un jeu de paramètres $\{\lambda\}$ réduits (par exemple les coefficients d'une série de Fourier, ou les valeurs nodales dans le cadre d'un modèle éléments finis) :

$$(350) \quad d_i(x) = d_i(x, \{\lambda\})$$

De la même manière que précédemment une procédure de minimisation peut être utilisée pour trouver le jeu de variables $\{\lambda\}$

$$(351) \quad \{\lambda^*\} = \min \sum_{k=1}^N \left\| q(x)^{(k)} - q_c(x, \{\lambda\})^{(k)} \right\|^2$$

Soit :

$$(352) \quad \{\lambda^*\} = \min \sum_{k=1}^N \left\| F \left[\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \xi_i^{(k)} \phi_i(x) \right), p(x) \right] - \sum_{i=1}^m d_i(x, \{\lambda\}) \psi_i(\{\xi^{(k)}\}) \right\|^2$$

Dans le cas d'un espace discrétisée ($x = x_l$ avec $l=1 \dots n_{dis}$), par exemple un maillage éléments finis, résoudre le problème consiste à déterminer chaque scalaire $d_i(x_l)$ (correspondant aux valeurs aux nœuds en EF). Du fait de la linéarité du problème, cela revient à considérer n_{dis} problèmes de minimisation indépendants :

$$(353) \quad d_i(x_l)^* = \min \sum_{k=1}^N \left\| q(x_l)^{(k)} - q_c(x_l, d_i(x_l))^{(k)} \right\|^2$$

Dans le cas où le code de calcul utilisé est un code EF, il est donc possible d'utiliser cette méthode pour déterminer les valeurs aux nœuds de chacun des coefficients du chaos polynomial, chacune de ces valeurs pouvant être obtenue indépendamment. On se retrouve donc avec n_{dis} problèmes analogues à ceux rencontrés lorsque c'est une variable aléatoire qui est en entrée (§4.1). Les mêmes méthodes de résolutions (moindres carrés explicites, voir §4.1.2) peuvent alors être utilisés.

4.2.2 Remarques

L'usage de la méthode non intrusive avec un champ aléatoire discrétisé en entrée se heurte surtout au nombre de variables impliquées. En effet avec 10 variables aléatoires en entrée le chaos polynomial de degré 3 contient déjà 285 termes, donc autant de coefficients à calculer. Il faut alors disposer de suffisamment de réalisations du vecteur des variables aléatoires pour déterminer tous ces coefficients, ce qui entraîne un grand nombre de calculs directs. Cependant si ce coût de calcul peut empêcher l'utilisation de cette méthode sur des cas complexes (modèles éléments finis), elle ne l'empêche pas sur des cas simples où le temps calcul déterministe est réduit.

En outre il est possible en recourant à un modèle simplifié de déterminer à priori les coefficients influents pour réduire le chaos polynomial aux polynômes prépondérants dans la réponse (ce qui réduit le nombre d'inconnues).

4.2.3 Exemple

❖ Définition

Nous reprenons ici l'exemple précédent d'une poutre sur deux appuis en flexion (§4.1.4). Cependant cette fois la rigidité n'est plus une variable aléatoire, mais un champ aléatoire Gaussien de moyenne m_{EI} et de fonction de covariance :

$$(354) \quad C_{EI}(x, y) = \sigma_{EI}^2 \exp\left(-\frac{|x-y|}{l}\right)$$

Les valeurs utilisées dans l'exemple sont définies Table 20.

Nom	Symbole	Valeur
Moyenne	m_{EI}	10^{10} N.m^2
Ecart-type	σ_{EI}	10^9 N.m^2
Longueur de corrélation	l	1 m

Table 20. Paramètres de la rigidité

La flèche $v(s, \omega)$ est un champ aléatoire qui vérifie l'équation suivante pour tout aléa ω et toute abscisse :

$$(355) \quad EI(s, \omega) \frac{\partial^2 v(s, \omega)}{\partial s^2} = -M_z(s)$$

❖ Discrétisation de l'entrée

Une première étape consiste à réaliser la décomposition de Karhunen-Loève du champ aléatoire de la rigidité, c'est à dire à déterminer une approximation du champ aléatoire $EI(s, \omega)$ en utilisant valeurs propres λ_i et fonctions propres $\phi_i(\{x\})$ de la fonction de covariance de ce champ :

$$(356) \quad EI(s, \omega) = m_{EI} + \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \zeta_i(\omega) \phi_i(\{x\})$$

Nous nous limitons à une décomposition à l'ordre $n=3$. Les fonctions de covariance exponentielle possèdent une décomposition analytique indiquée dans [III-3], qui nous permet d'obtenir les résultats présentés Table 21 et Figure 60. La comparaison entre la fonction de covariance réelle et son approximation par sa décomposition spectrale (210) tronquée à l'ordre 3 est présentée Figure 61, ce qui nous permet de constater qu'une approximation à l'ordre 3 permet d'approcher convenablement la fonction de covariance réelle.

Valeur propre	Valeur
λ_1	$7,39 \cdot 10^{17}$
λ_2	$1,38 \cdot 10^{17}$
λ_3	$4,51 \cdot 10^{16}$

Table 21. Trois premières valeurs propres de la décomposition en série de Karhunen-Loève de la rigidité

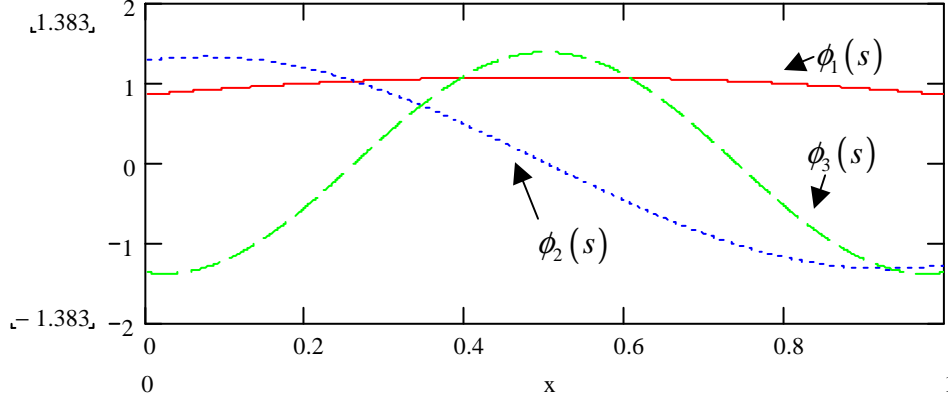


Figure 60. Trois premières fonctions propres de la décomposition en série de Karhunen-Loève de la rigidité

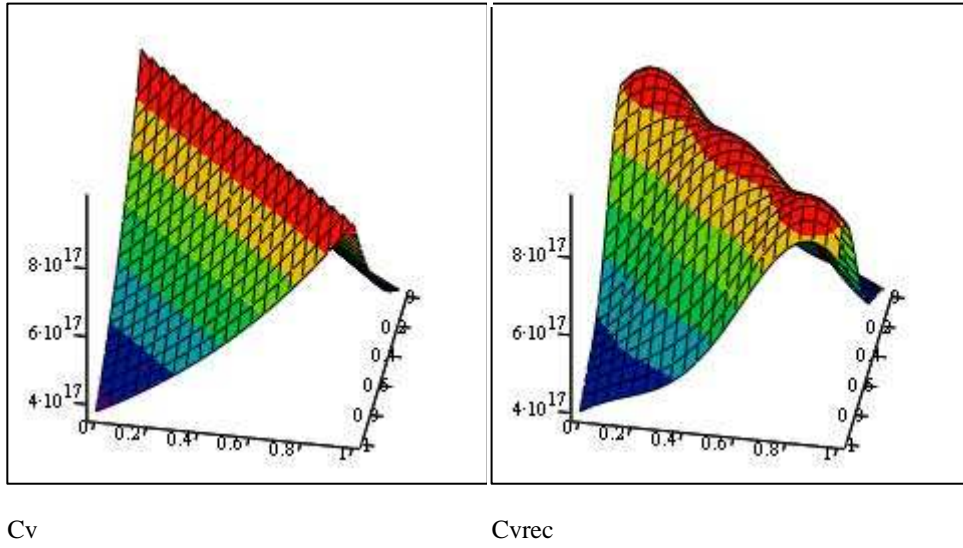


Figure 61. Fonction de covariance réelle (gauche) et reconstituée à partir des trois premiers termes de sa décomposition spectrale (droite)

❖ Projection de la sortie

Le problème est maintenant de déterminer la projection $\tilde{v}(s, \omega)$ de $v(s, \omega)$ sur le chaos polynomial des trois variables aléatoires $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$, $\xi_3(\omega)$ groupées dans le vecteur $\{\xi(\omega)\}$:

$$(357) \quad \{\xi(\omega)\} = \begin{Bmatrix} \xi_1(\omega) \\ \xi_2(\omega) \\ \xi_3(\omega) \end{Bmatrix}$$

$$(358) \quad \tilde{v}(s, \omega) = \sum_{j=0}^m d_j(s) \psi_j(\{\xi(\omega)\})$$

Nous nous limitons à un chaos de degré $m=3$, ce qui représente déjà 20 polynômes.

❖ Plan d'expériences

Comme nous avons 3 variables aléatoires dans notre problème, la question du plan d'expériences se pose ici avec plus de force que précédemment. En effet avec une seule variable aléatoire nous pouvions prendre un nombre de points d'expériences très grand sans problème : doubler le nombre de points pour augmenter la précision multipliait le nombre de calculs par deux.

Ici il nous faut balayer l'espace des variables aléatoires dans trois directions différentes, afin de varier les valeurs de $\zeta_1(\omega)$, $\zeta_2(\omega)$, et $\zeta_3(\omega)$. Il ne s'agit plus de choisir des points sur une droite mais dans un volume. Doubler la densité dans chaque direction revient à multiplier le nombre de calculs par 2^3 . Plusieurs solutions sont envisageables :

- diviser un intervalle de manière uniforme, puis construire toutes les combinaisons possibles de triplets de valeurs ;
- faire de même, mais supprimer les triplets extrêmes (augmenter la densité au centre du domaine) ;
- générer aléatoirement les triplets de valeurs, au risque d'obtenir un plan d'expériences insuffisant.

Notre modèle étant très simple et demandant peu de calculs, nous avons pu nous permettre d'utiliser un plan d'expériences complet. Cependant dans des cas plus compliqués la question de la réduction du plan d'expériences se pose : quels points peut-on supprimer sans enlever trop d'information ?

❖ Résultats

Les résultats obtenus sont les 20 coefficients $d_j(s)$ du chaos polynomial utilisé. Ces résultats ont peu d'intérêt en eux même, et prennent leur sens lorsqu'une expression du champ aléatoire de la flèche est nécessaire, pour des analyses de fiabilité par exemple.

La Figure 62 montre le premier coefficient du chaos polynomial, qui n'est lié à aucune variable aléatoire. Il s'agit donc de la partie constante de la solution.

La Figure 63 montre les trois premiers coefficients. Liés directement aux variables aléatoires seules (polynômes de degré un), ils représentent la partie Gaussienne de la solution.

Les seize autres coefficients, associés à des polynômes de trois variables aléatoires de degré supérieur à deux, représentent la partie non Gaussienne de la solution. Il serait fastidieux de tous les représenter en détail (un aperçu sommaire est toutefois visible sur la Figure 64), on indiquera juste qu'ils ne sont pas forcément de niveau décroissant : $d_9(s)$ est ainsi supérieur à $d_5(s)$ sur toute la longueur de la poutre (Figure 65).

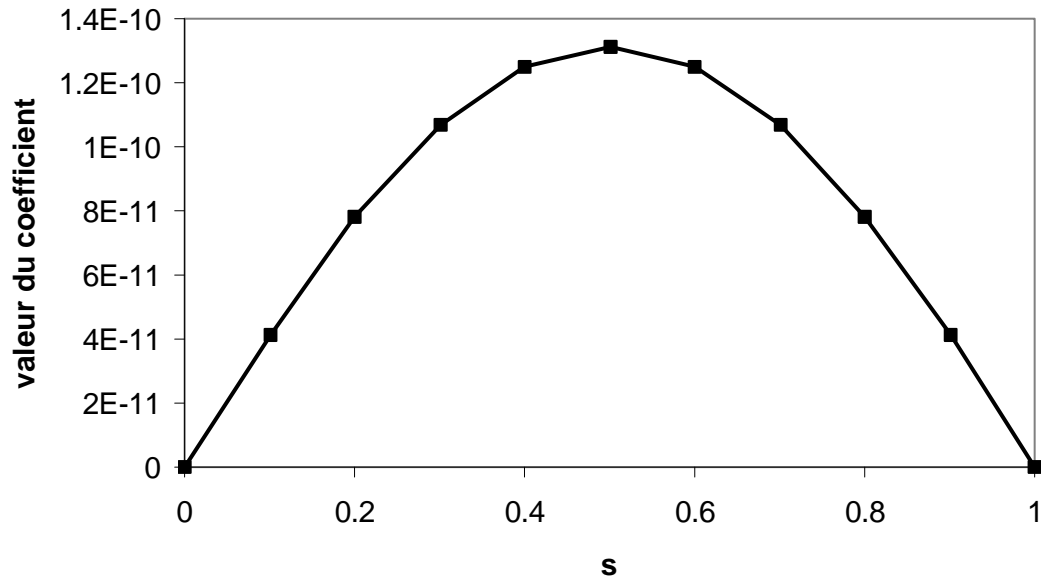


Figure 62. Partie constante $d_0(s)$ de la solution

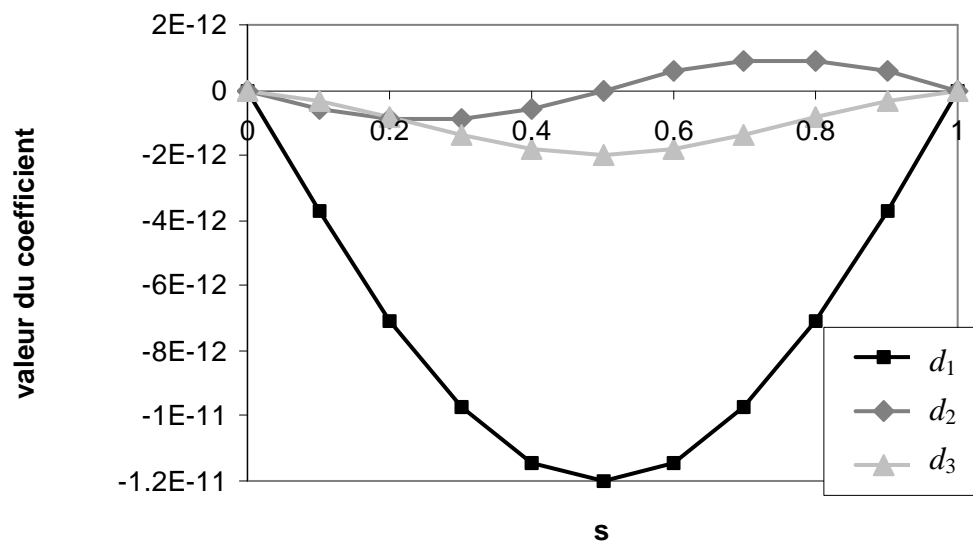


Figure 63. Trois premiers coefficients $d_1(s)$ à $d_3(s)$ du chaos polynomial de la solution, représentant la partie gaussienne de la solution

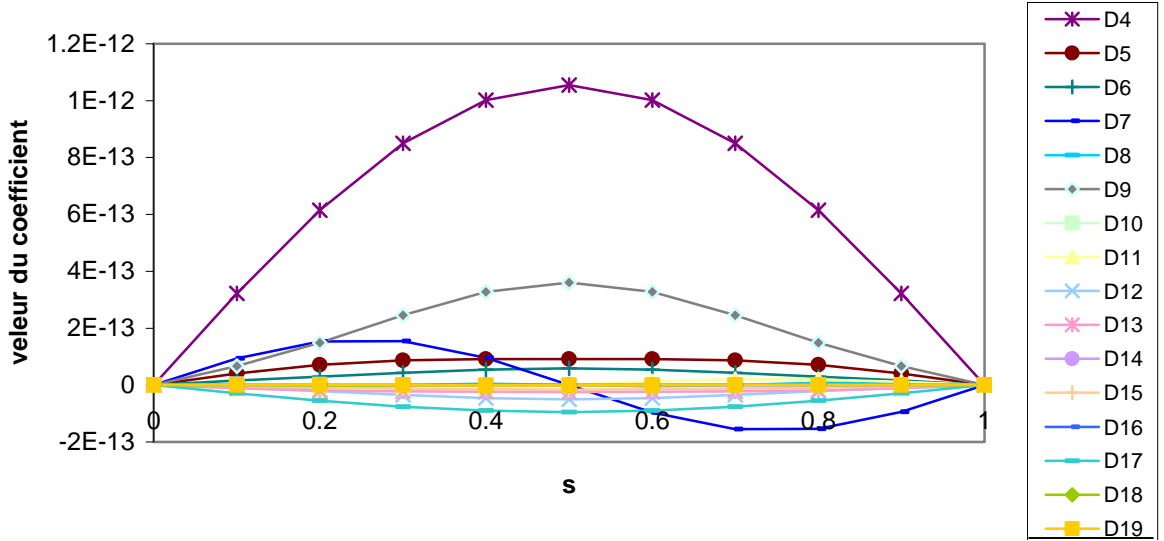


Figure 64. Aperçu des coefficients $d_4(s)$ à $d_{19}(s)$ représentant la partie non gaussienne de la solution

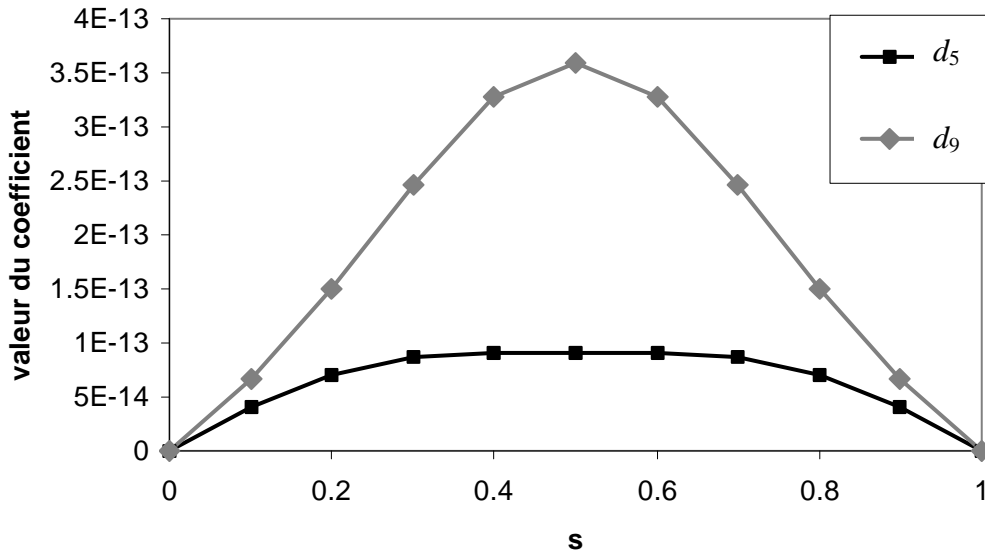


Figure 65. Coefficients $d_5(s)$ et $d_9(s)$

4.3 Méthode non intrusive par projection

Parallèlement à ces méthodes par régression existe une classe de méthodes par projection. En effet déterminer les coefficients $d_i(x)$ dans l'équation (349) revient à évaluer :

$$(359) \quad d_i(x) = \frac{E[q_c(x, \omega) \psi_i(\omega)]}{E[\psi_i(\omega)^2]}$$

Le dénominateur étant connu, résoudre cette équation revient à calculer $E[q(x, \omega) \psi_i(\omega)]$, qui peut s'exprimer sous la forme d'une intégrale :

$$(360) \quad E[q(x, \{\zeta(\omega)\}) \psi_i(\{\zeta(\omega)\})] = \int_D q(x, \{z\}) \psi_i(\{z\}) f_{\{\zeta\}}(\{z\}) dz$$

$f_{\{\zeta\}}(\{z\})$ étant la fonction de densité de probabilité conjointe des variables aléatoires du chaos polynomial définie sur le domaine D .

Il est possible de calculer cette intégrale par plusieurs méthodes. Toutefois la plus intéressante consiste à utiliser des quadratures. La quadratures de Gauss permet d'approcher la valeur d'une intégrale par une somme finie :

$$(361) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) W(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

les points x_k et les coefficients w_k étant fixés.

Dans le cas de l'intégrale (360), cela revient à écrire :

$$(362) \quad E[q(x, \{\zeta(\omega)\}) \psi_i(\{\zeta(\omega)\})] \approx \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_M=1}^{n_M} w_{k_1} \cdots w_{k_M} q(x, \{\zeta(z_{k_1})\}) \psi_i(\{\zeta(z_{k_1})\}) f_{\{\zeta\}}(\{z_{k_1}\}) \cdots q(x, \{\zeta(z_{k_M})\}) \psi_i(\{\zeta(z_{k_M})\}) f_{\{\zeta\}}(\{z_{k_M}\})$$

Le calcul de l'intégrale est réalisé alors via le calcul de M réponses $q(x, \{\zeta(z_{k_j})\})$ du système, $\{\zeta(z_{k_j})\}$ étant une valeur fixée du jeu de variables aléatoires utilisées dans le calcul.

Nous retrouvons donc un plan d'expériences analogue à celui utilisé dans la méthode par régression, avec la différence qu'il n'est plus librement choisi mais fixé.

L'utilisation des schémas de Gauss nécessite K^N appel au code de calcul (K étant le nombre de points d'intégration et N le nombre de variables aléatoires), ce qui conduit en général à un nombre de calculs plus important que pour la régression. Cependant certains schémas permettent de réduire considérablement ce nombre, en particulier les schémas de cubature de Smolyak [IV-7].

5 Conclusion

La méthode historique permettant de résoudre les problèmes stochastiques est la méthode des éléments finis stochastiques spectraux [III-3]. Elle requiert une modification du code de calcul et débouche sur la résolution d'un système linéaire très grand, qui peut toutefois être simplifié via l'emploi de pré-conditionneurs.

Parallèlement à cette méthode spectrale il existe une autre classe de méthodes intéressantes à considérer : les méthodes dites non intrusives [VI-3]. Elles permettent de traiter tout problème stochastique paramétrique à partir du moment où sa résolution déterministe est possible. L'inconvénient principal de ces méthodes est qu'elles reposent sur un plan d'expérience de N valeurs dont le nombre et le choix reposent encore sur des critères empiriques. Cependant leur simplicité d'utilisation et leur coût de calcul inférieur à celui de la méthode historique en font des outils très utiles.

En outre nous avons aussi examiné un préliminaire indispensable aux calculs stochastiques impliquant des champs aléatoires : leur projection sur un nombre limité de variables aléatoires permettant leur traitement. La décomposition en série de Karhunen-Loève constitue la méthode la plus connue pour atteindre cet objectif.

Bibliographie du chapitre IV

- [IV-1] C. SOIZE, *A Nonparametric Model of Random Uncertainties for Reduced Matrix Models in Structural Dynamics*, Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 15, pp. 277-294
- [IV-2] B. SUDRET, A. DER KIUREGHIAN, *Stochastic Finite Element Methods and Reliability A State-of-the-Art Report*, Report No. UCB/SEMM-2000/08, Structural Engineering Mechanics and Materials, Department of Civil & Environmental Engineering, University of California, Berkley, 2000
- [IV-3] R. GHANEM, P. SPANOS, *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Springer-Verlag, 1991
- [IV-4] S. P.. HUANG, S. T. QUEK, K. K. PHOON, *Convergence Study of the Truncated Karhunen-Loève Expansion for Simulations of Stochastic Processes*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 52 (2001), pp. 1029-1043
- [IV-5] M. SHINOZUKA, G. DEODATIS, *Simulation of Multi-Dimensional Gaussian Stochastic Fields by Spectral Representation*, Appl Mech Rev, Vol. 39 (1996), pp.29-53.
- [IV-6] M. BERVEILLER, *Eléments finis stochastiques : approches intrusives et non intrusives pour des analyses de fiabilité*, Thèse, Université Blaise Pascal – Clermont II, 2005
- [IV-7] S. A. SMOLYAK, *Quadrature and Interpolation Formulas for Tensor Products of certain Classes of Functions*, Soviet. Math. Dock., Vol 4 (1963), pp. 240-243

Chapitre V

Le Variogramme

1	<i>Introduction.....</i>	<i>141</i>
2	<i>Krigeage et Variogramme</i>	<i>141</i>
2.1	Contexte d'utilisation	141
2.2	Krigeage	141
2.3	Variogramme.....	142
2.3.1	Variogramme expérimental.....	142
2.3.2	Intervalle de confiance du variogramme expérimental	143
2.3.3	Variogramme théorique.....	144
2.3.4	Utilisation du variogramme.....	145
2.3.5	Extension aux fonctions continues	145
3	<i>Mise en oeuvre.....</i>	<i>146</i>
3.1	Préliminaire : simulation de données	146
3.1.1	Simulation de variables aléatoires	146
3.1.2	Simulation de champs aléatoires	147
3.2	Exemple discret	148
3.2.1	Présentation de l'exemple	148
3.2.2	Simulation	149
3.2.3	Calcul du variogramme expérimental	150
3.2.4	Intervalle de confiance	150
3.2.5	Détermination des paramètres de la fonction de covariance	153
3.2.6	Conclusion sur l'exemple discret	156
3.3	Exemple continu.....	156
3.3.1	Présentation de l'exemple	156
3.3.2	Simulation	157
3.3.3	Résultats après simulation par la méthode des fonctions de forme.....	158
3.3.4	Résultats après simulation par la méthode de la décomposition en série de Karhunen-Loève.....	161
4	<i>Conclusion.....</i>	<i>163</i>
	<i>Bibliographie du chapitre V.....</i>	<i>165</i>

1 Introduction

Les méthodes de calcul que nous avons vues au chapitre précédent nécessitent de connaître des caractéristiques statistiques du champ aléatoire utilisé comme donnée : la moyenne et la fonction de covariance. Cette dernière est en particulier requise pour réaliser une décomposition en série de Karhunen-Loève d'un champ aléatoire. Dans ce chapitre nous allons voir l'outil permettant d'obtenir cette information : le variogramme. Afin de replacer cet outil dans son contexte historique nous commencerons cependant par parler du krigeage. Nous testerons ensuite cet outil sur des exemples simples afin d'examiner son intérêt.

2 Krigeage et Variogramme

2.1 Contexte d'utilisation

A la fin des années 50 Georges Matheron développa la Théorie des Variables Régionalisées, en se basant sur l'énorme travail empirique de Danie Krige, un ingénieur sud-africain travaillant dans les mines qui avait proposé des concepts innovants pour l'estimation de ressources minières. Matheron donna un cadre unique à ces concepts ([V-6],[V-7]) et l'appela kriging (soit krigeage en français) en hommage à Krige. L'application de cette théorie à la géologie et à la prospection minière a donné naissance à la géostatistique.

Matheron désigne par *variable régionalisée* une réalisation unique d'un processus aléatoire déterminé (par exemple la teneur en minerai du sol). C'est une fonction de l'espace ou du temps dont on connaît seulement quelques valeurs ponctuelles via des mesures. L'étude de cette variable régionalisée (sa cartographie) implique donc l'étude du processus aléatoire sous-jacent. Le variogramme est l'outil qui permet d'évaluer la covariance de ce champ aléatoire (sans avoir besoin d'en connaître sa moyenne) à partir des mesures de la variable régionalisée. Une fois la covariance du processus aléatoire caractérisée, le krigeage permet d'évaluer la valeur de la variable régionalisée en des points non mesurés, sous la forme d'une combinaison linéaire des autres valeurs mesurées.

2.2 Krigeage

Soit $F(\{x\}, \omega)$ un processus aléatoire et $f(\{x\})$ une trajectoire de ce processus. Le krigeage permet d'estimer la valeur $f(\{x_v\})$ du champ en un point $\{x_v\}$ à partir d'un ensemble de mesures $\{f(\{x_i\})\}$ de ce champ en différents points $\{x_i\}$. Il s'agit d'une méthode d'estimation linéaire optimale sans biais :

- *linéaire* en ce sens qu'elle exprime la valeur recherchée sous forme d'une combinaison linéaire des valeurs mesurées :

$$(363) \quad \tilde{f}(\{x_v\}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i f(\{x_i\})$$

- *sans biais* car la somme des coefficients est 1 :

$$(364) \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$$

- *optimale* car il minimise la variance d'estimation, qui s'exprime sous la forme :

$$(365) \quad \sigma_e^2 = \text{Var} \left[f(\{x_v\}) - \tilde{f}(\{x_v\}) \right] = \text{Var} \left[f(\{x_v\}) - \sum_{i=1}^N \lambda_i f(\{x_i\}) \right]$$

Soit :

$$(366) \quad \sigma_e^2 = \text{Var}\left[f(\{x_v\})\right] + \text{Var}\left[\sum_{i=1}^N \lambda_i f(\{x_i\})\right] - 2 \text{Cov}\left[f(\{x_v\}), \sum_{i=1}^N \lambda_i f(\{x_i\})\right]$$

D'où

$$\sigma_e^2 = \text{Var}\left[f(\{x_v\})\right] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \text{Cov}\left[f(\{x_i\}), f(\{x_j\})\right] - 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i \text{Cov}\left[f(\{x_v\}), f(\{x_i\})\right]$$

Soit finalement, en revenant aux paramètres du champ aléatoire :

$$(367) \quad \sigma_e^2 = \sigma_F^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j C_F(\{x_i\}, \{x_j\}) - 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i C_F(\{x_v\}, \{x_i\})$$

Les coefficients λ_i sont déterminés en minimisant la variance d'estimation (367) sous la contrainte (364). La valeur recherchée est alors obtenue par la formule (363). Le krigeage peut se voir comme une méthode d'interpolation tenant compte de la corrélation entre les points.

Nous voyons que pour pouvoir utiliser cette méthode, il nous est nécessaire de connaître la covariance entre chacun des points de mesure, et entre le point d'estimation et les points de mesure, afin d'obtenir la fonction de performance (367). Ces valeurs sont obtenues en établissant le variogramme des mesures.

2.3 Variogramme

Le variogramme est un outil utilisé en géostatistique, comme préliminaire au krigeage [V-8].

2.3.1 Variogramme expérimental

Soit $F(\{x\}, \omega)$ un processus aléatoire stationnaire du second ordre de moyenne nulle, $f(\{x\})$ une trajectoire de ce processus. On dispose d'un ensemble P_M de N points de mesures $\{x_i\}$ de cette trajectoire $f(\{x\})$ suivant une grille *régulière* (à une ou plusieurs dimensions), où nous recueillons donc les N mesures $f(\{x_i\})$.

Soit $\Omega(h)$ l'ensemble des différences de valeur entre des couples de points situés à la même distance h les uns des autres :

$$(368) \quad \Omega(h) = \left\{ f(\{x_i\}) - f(\{x_j\}) \mid \{x_i\}, \{x_j\} \in P_M \quad \text{et} \quad \|\{x_j\} - \{x_i\}\| = h \right\}$$

Le variogramme expérimental $\gamma^*(h)$ est la variance de l'ensemble de données $\Omega(h)$ pour toutes les distances h que permet la grille de mesure.

$$(369) \quad \begin{aligned} \gamma^*(h) &= \frac{1}{2} \text{Var}[\Omega(h)] \\ &= \frac{1}{2} E[(\Omega(h))^2] - \frac{1}{2} E[\Omega(h)]^2 \end{aligned}$$

D'un point de vue pratique, le variogramme mesure à quel point des observations situées à une certaine distance se ressemblent en moyenne. Par soucis de simplification on considère que dans le domaine d'observation, le processus aléatoire $F(\{x\}, \omega)$ étant stationnaire, la moyenne des différences des mesures est nulle [V-8] :

$$(370) \quad \mathbf{E}[\Omega(h)] = 0$$

Donc

$$(371) \quad \gamma^*(h) = \frac{1}{2} \mathbf{E}[(\Omega(h))^2]$$

La simplification (370) peut paraître abusive, car si nous disposons de l'ensemble de mesures $\Omega(h)$ nous pouvons en calculer la moyenne, qui a peu de chances d'être nulle. Cependant, dans les exemples que nous avons traités (détaillés plus loin) nous avons pu constater que $\mathbf{E}[\Omega(h)]^2 \ll \mathbf{E}[(\Omega(h))^2]$ lorsque nous disposons de suffisamment de points de mesure. Cela nous amène en pratique à la même formule (371).

En revenant aux N points de mesure $\{x_i\}$, le variogramme expérimental s'écrit donc :

$$(372) \quad \gamma^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} \left(\begin{cases} \left(f(\{x_i\}) - f(\{x_j\}) \right)^2 & , \text{ si } \exists \{x_j\} \left\| \{x_j\} - \{x_i\} \right\|^2 = h^2 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \right)$$

Où $N(h)$ est le nombre de couples de points $(\{x_i\}, \{x_j\})$ séparés de la distance h . On note qu'on ne trouve pas de terme $N(h) - 1$ au numérateur car il ne s'agit pas d'un estimateur de la variance à partir d'un échantillon, mais d'une valeur statistique portant sur la totalité d'un jeu fini de données.

En pratique on admet une tolérance dans la localisation des points de mesure (dans la direction et la distance). Il est en effet difficile de réaliser des mesures suivant une grille exacte. En outre la grille n'a pas besoin d'être complète pour pouvoir dresser le variogramme des mesures : des valeurs peuvent manquer à partir du moment où l'on dispose de suffisamment de points pour chaque paramètre h . Empiriquement, on essaie d'avoir au moins 30 mesures de différence pour chaque point du variogramme, et on ne calcule pas le variogramme pour les h pour lesquels on dispose de moins de 10 mesures. Cela revient souvent à ne calculer que la première partie du variogramme expérimental. En effet nous pouvons constater dans la formule (372) que dans le cas général plus h augmente, moins nous trouvons de couples de points situés à cette distance.

Réciproquement, pour des h faibles nous disposons généralement de plus de données, et la toute première partie du variogramme sera statistiquement plus juste (i.e. plus proche du variogramme théorique que nous allons voir dans la suite). Cependant ce principe est légèrement écorné dans le cas de mesures réelles par ce qu'on appelle « l'effet pépité », qui rend incorrect le début du variogramme. En théorie deux points infiniment proches varient dans le même sens et donc on s'attend à ce que le variogramme s'annule à l'origine, mais en fait deux mesures très proches sont *en pratique* sensiblement différentes (du fait de l'imprécision des mesures notamment), et donc en pratique :

$$(373) \quad \gamma^*(0^+) > 0$$

2.3.2 Intervalle de confiance du variogramme expérimental

Il est possible de calculer l'écart-type des mesures, et d'en déduire un intervalle de confiance pour les points du variogramme :

$$\begin{aligned}
\sigma_\gamma^2 &= \text{Var} \left[\frac{1}{2} \text{Var} [\Omega(h)] \right] \\
&= \mathbf{E} \left[\left(\frac{1}{2} \mathbf{E} [(\Omega(h))^2] \right)^2 \right] - \mathbf{E} \left[\frac{1}{2} \mathbf{E} [(\Omega(h))^2] \right]^2 \\
(374) \quad &= \frac{1}{4} \mathbf{E} \left[\mathbf{E} [(\Omega(h))^2]^2 \right] - \gamma^*(h)^2 \\
&= \frac{1}{4} \mathbf{E} [(\Omega(h))^4] - \gamma^*(h)^2
\end{aligned}$$

Ce qui s'exprime :

$$(375) \quad \sigma_\gamma(h) = \sqrt{\frac{1}{4N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} \left(\begin{cases} (f(\{x_i\}) - f(\{x_j\}))^4, & \text{si } \exists \{x_j\} \text{ tel que } \|\{x_j\} - \{x_i\}\|^2 = h^2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \right) - \gamma^*(h)^2}$$

Une fois la variance du variogramme déterminée, nous pouvons en calculer un intervalle de confiance à $\alpha\%$, c'est à dire l'intervalle dans lequel la valeur "réelle" du variogramme a $\alpha\%$ de chances de se trouver. Lorsque pour une variable aléatoire $X(\omega)$ on dispose d'une moyenne \bar{x} et d'un écart-type σ_X estimée à partir d'un échantillon n mesures, la vraie moyenne m_X a $\alpha\%$ de chances de se trouver dans l'intervalle :

$$(376) \quad \bar{x} - \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \leq m_X \leq \bar{x} + \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

où Φ^{-1} est la loi normale inverse.

2.3.3 Variogramme théorique

Nous avons vu que le variogramme expérimental porte sur les mesures d'une trajectoire du champ aléatoire. Le variogramme théorique dépend lui du champ aléatoire car il est directement lié à la covariance. Contrairement au variogramme expérimental, il s'agit d'une fonction continue. Il y a le même type de relation entre le variogramme expérimental et théorique qu'entre un histogramme et une fonction de densité de probabilité.

En notant $\{x+h\}$ les points situés à la distance h du point $\{x\}$, le variogramme théorique s'écrit :

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= \frac{1}{2} \text{Var} [F(\{x\}, \omega) - F(\{x+h\}, \omega)] \\
(377) \quad &= \frac{1}{2} (\text{Var} [F(\{x\}, \omega)] + \text{Var} [F(\{x+h\}, \omega)] - 2 \text{Cov} [F(\{x\}, \omega), F(\{x+h\}, \omega)])
\end{aligned}$$

Le processus aléatoire étant stationnaire du second ordre, la fonction de covariance ne dépend que de la distance h entre les points, et la variance est constante. Alors, si la variance existe :

$$(378) \quad \gamma(h) = \sigma_F^2 - C_F(h)$$

Le variogramme est donc directement lié à la fonction de covariance.

On voit que lorsque h tend vers l'infini les deux réalisations du processus aléatoire $F(x, \omega)$ et $F(x+h, \omega)$ seront décorrélées et donc que, si la variance existe, alors :

$$(379) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = \sigma_F^2$$

De plus, pour un processus corrélé, deux points infiniment proches varient dans le même sens et donc le variogramme théorique s'annule à l'origine :

$$(380) \quad \gamma(0) = 0$$

Afin de tenir compte de l'effet pépité lié au bruit des mesures, on ajoute un coefficient C_0 au variogramme théorique, alors les formules (378) à (381) deviennent :

$$(381) \quad \gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var} [F(\{x\}, \omega) - F(\{x+h\}, \omega)] + C_0$$

$$(382) \quad \gamma(h) = \sigma_F^2 - C_F(h) + C_0$$

$$(383) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = \sigma_F^2 + C_0$$

$$(384) \quad \gamma(0) = C_0$$

2.3.4 Utilisation du variogramme

En pratique l'utilisation du variogramme se fait en deux phases :

- une première étape consiste à établir le variogramme expérimental des mesures ;
- la deuxième étape consiste à utiliser ce variogramme expérimental pour caler un variogramme théorique, qui nous donnera les paramètres recherchés.

Si le premier point est purement calculatoire, le second utilise une bonne partie d'expérience empirique. En effet à partir des points du variogramme expérimental et du contexte (type de minerai par exemple), l'utilisateur doit choisir une fonction de covariance typique (exponentielle, sphérique, triangulaire,...) et déterminer ses paramètres (longueur de corrélation, écart-type,...) pour que le variogramme théorique associé à cette fonction de covariance s'approche au mieux des points du variogramme expérimental (en utilisant une méthode type moindre carré, ou visuellement).

La méthode des moindres carrés consiste à minimiser la somme du carré de l'écart entre les données observées et les données calculées. Dans notre cas nous cherchons à minimiser l'écart sur n points h_i entre le variogramme expérimental $\gamma^*(h)$ et le variogramme théorique interpolé $\gamma_{\text{int}}(h, \{p\})$, avec comme variable de minimisation les paramètres $\{p\}$ de la fonction de covariance choisie préalablement. Ce qui revient à minimiser la fonction de performance $G(\{p\})$ suivante :

$$(385) \quad G(\{p\}) = \sum_{i=1}^n (\gamma^*(h_i) - \gamma_{\text{int}}(h_i, \{p\}))^2$$

2.3.5 Extension aux fonctions continues

Nous avons vu que le variogramme expérimental était calculé à partir de mesures ponctuelles, cependant on peut étendre la formule (372) au cas de mesures continues. Cela a déjà été réalisé dans [V-9] pour un cas unidimensionnel.

Soit $F(x, \omega)$ un processus aléatoire stationnaire du second ordre de moyenne nulle défini sur l'intervalle $[a, b]$, $f(x)$ une trajectoire de ce processus entièrement connue. Le variogramme expérimental de la trajectoire $f(x)$ est :

$$(386) \quad \gamma^*(h) = \frac{1}{2(b-h-a)} \int_a^{b-h} (f(x) - f(x+h))^2 dx$$

Dans le cas multidimensionnel (i.e. un champ fonction de plusieurs variables) les choses se compliquent un peu, car nous nous trouvons devant une infinité de directions possibles pour les intervalles. La solution la plus simple est peut-être de prendre un échantillon de mesures suivant une grille aussi petite que possible, et de calculer un variogramme expérimental discret qui servira à caler un variogramme théorique.

3 Mise en oeuvre

3.1 Préliminaire : simulation de données

Un préliminaire au test de l'utilisation du variogramme est la simulation de données sur lesquelles utiliser cette méthode. Pour cela il nous faut simuler des réalisations de champs aléatoires. Nous allons brièvement présenter les manières de générer des réalisations de variables aléatoires, et comment ces réalisations peuvent être utilisées pour simuler des champs aléatoires.

3.1.1 Simulation de variables aléatoires

❖ Variables aléatoires indépendantes

La génération de valeurs pseudo-aléatoires est intensément utilisée dans de nombreux domaines : informatique, fiabilité, finance,... Les simulations de Monte-Carlo servent souvent de référence pour des méthodes probabilistes, et peuvent requérir le tirage de millions de valeurs. Le schéma de génération des valeurs est relativement simple :

1. génération de valeurs pseudo-aléatoires uniformément réparties ;
2. transformation des valeurs pour l'adéquation à une loi de distribution désirée (normale, log-normale, etc...).

Dans le passé l'un des soucis dans la génération de valeurs pseudo-aléatoires était la période relativement courte des générateurs (i.e. au bout d'un certain nombre de tirages, la même suite de valeurs réapparaissait). Aujourd'hui il existe des générateurs de valeurs pseudo-aléatoires aux périodes quasi-infinies (2^{19000} pour Mersenne-Twister par exemple), nettement suffisantes pour toutes les utilisations imaginables. Cependant les algorithmes à période courte sont encore largement répandus (typiquement les générateurs implantés dans les langages de programmation), il convient donc d'être prudent.

❖ Variables aléatoires corrélées

Les générateurs de valeurs pseudo-aléatoires fournissent des variables aléatoires indépendantes. Dans le cas Gaussien, il est possible de les corrélérer. Pour cela il faut tout d'abord générer un vecteur de variables aléatoires Gaussiennes $\{a(\omega)\}$ avec un générateur classique, puis construire la matrice de corrélation $[C]$. Cette matrice peut être connue, mais si les variables aléatoires proviennent de points d'un champ aléatoire il faut la calculer. Ainsi si la variable aléatoire $a_i(\omega)$ est associée au point $\{x_i\}$ et $a_j(\omega)$ au point $\{x_j\}$, alors les éléments de la matrice de covariance se calculent à partir de la fonction de covariance :

$$(387) \quad C_{ij} = C_F(\{x_i\}, \{x_j\})$$

Ensuite il faut réaliser une décomposition de Cholesky, c'est à dire déterminer la matrice $[L]$ triangulaire inférieure telle que :

$$(388) \quad [C] = [L][L]^T$$

On obtient alors le vecteur de variables aléatoires corrélées $\{b(\omega)\}$ par la formule :

$$(389) \quad \{b(\omega)\} = [L]\{a(\omega)\}$$

3.1.2 Simulation de champs aléatoires

❖ Discrétisation

Les champs aléatoires sont des entités délicates à appréhender et à manipuler, car nous avons vu qu'un champ aléatoire peut se voir comme une infinité de variables aléatoires corrélées associées à chaque point de l'espace. Une tendance naturelle pour les utiliser est de tenter de d'en construire une approximation utilisant un nombre fini de variables aléatoires (permettant plus facilement le calcul ou la simulation). Pour ce faire plusieurs approches peuvent être envisagées :

- une discrétisation spatiale du champ, semblable aux éléments finis, avec des variables aléatoires égales à la valeur du champ en des points déterminés (nœuds, centres d'éléments, points de Gauss,...) en utilisant ou non des fonctions de formes pour assurer la continuité du champ ;
- une discrétisation moyenne, où les variables aléatoires sont des intégrales pondérées du champ aléatoire ;
- une décomposition spectrale, où le champ aléatoire est approximé par la troncature d'une série de produits de variables aléatoires et de fonctions déterministes.

Une fois le champ discrétisé, il ne reste plus qu'à tirer le nombre de valeurs pseudo-aléatoires requis pour disposer d'une « pseudo-trajectoire » du processus aléatoire. Il faut noter que la discrétisation ne permet qu'une approximation –plus ou moins exacte– du champ aléatoire (puisque nous passons d'une infinité à un nombre limité de variables aléatoires), et donc que les trajectoires obtenues peuvent être très différentes des trajectoires « réelles ».

❖ Discrétisation en série de Karhunen-Loève

Une fois la discrétisation présentée au chapitre 2 réalisée, il est possible d'obtenir une pseudo-trajectoire du champ aléatoire en tirant les valeurs. En effet si un champ aléatoire $\mu(x, \omega)$ est décomposé sous la forme

$$(390) \quad \tilde{\mu}(x, \omega) = \mu_0(x) + \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i} \zeta_i(\omega) \phi_i(x)$$

Alors une réalisation de ce champ est obtenue en réalisant les variables aléatoires $\zeta_i(\omega)$:

$$(391) \quad \tilde{\mu}(x, \omega_0) = \mu_0(x) + \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i} \zeta_i(\omega_0) \phi_i(x)$$

Par soucis d'abréviation, cette méthode sera notée *méthode KL* dans la suite du chapitre.

❖ Méthode des fonctions de forme (SF)

La méthode des fonctions de forme est une méthode relativement simple de simulation des champs aléatoires basée sur une discrétisation de type éléments finis du domaine : des variables aléatoires corrélées sont associées à chaque point du maillage et des fonctions de forme interpolent leurs valeurs sur le reste du domaine [III-1]. Le champ simulé est alors :

$$(392) \quad \tilde{\mu}(x, \omega) = \sum_{i=1}^N N_i(x) \mu(x_i, \omega)$$

où :

- $\tilde{\mu}(x, \omega)$ est le champ aléatoire continu interpolé ;
- x_i est la coordonnée du nœud i ;
- $N_i(x)$ est la fonction de forme associée au nœud i ;
- $\mu(x_i, \omega)$ est la valeur du champ aléatoire au nœud i , chacune de ces variables aléatoires nodales est corrélée avec les autres suivant la fonction de corrélation du champ aléatoire ;

Une réalisation du champ aléatoire est alors obtenue en réalisant chacune des variables aléatoires nodales.

Une première étape dans l'utilisation de cette méthode est de choisir le maillage et les fonctions de forme. Ensuite il faut tirer N variables aléatoires corrélées. La formule (392) nous permet alors d'obtenir une trajectoire du processus aléatoire.

Les fonctions de forme étant à support compact, chaque variable aléatoire n'intervient que dans les éléments immédiatement voisins du nœud, au contraire de la méthode de Karhunen-Loève où chaque variable aléatoire possède une influence globale. La corrélation globale du processus aléatoire découle de la corrélation des variables aléatoires nodales entre elles. Le nombre de variables aléatoires utilisé dépend de la densité du maillage, qui doit être adaptée à la longueur de corrélation : moins le champ est corrélé, plus les mailles doivent être resserrées. Il en découle que pour un maillage donné, plus la longueur de corrélation est grande, plus la simulation est fidèle.

Par soucis d'abréviation, la méthode des fonctions de forme sera notée *méthode SF* dans la suite du chapitre.

3.2 Exemple discret

3.2.1 Présentation de l'exemple

Soit $F(x, y, \omega)$ un champ aléatoire stationnaire Gaussien bidimensionnel défini sur l'intervalle $[0, 10] \times [0, 10]$ de moyenne nulle dont la fonction de covariance entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est :

$$(393) \quad C_F(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sigma_F^2 \exp \left(-\frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{l} \right)$$

soit en notant h la distance entre le point 1 et le point 2 :

$$(394) \quad C_F(h) = \sigma_F^2 \exp \left(-\frac{h}{l} \right)$$

On utilise les paramètres de la Table 22.

On considère que des mesures non bruitées de ce champ sont réalisées suivant une grille 10×10 points, ce qui nous donne 9 intervalles dans chaque sens (Figure 66).

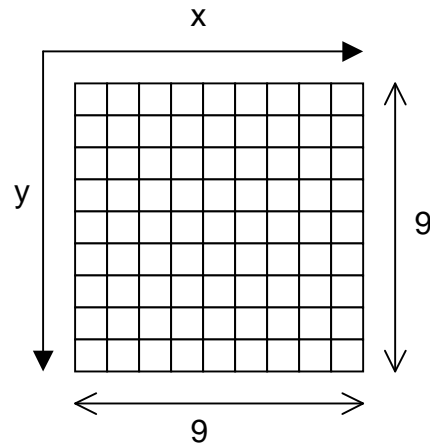


Figure 66. Grille de mesure

Paramètre	Symbole	Valeur
Longueur de corrélation	l	2,5
Variance du champ	σ_F^2	1
Dimension du domaine	-	10
Pas de la grille	-	1

Table 22. Paramètres utilisés

3.2.2 Simulation

On simule les valeurs du champ (100 variables aléatoires corrélées) par la méthode des fonctions de forme du §3.1.1. Le résultat d'une simulation est présenté dans la Table 23, et Figure 67.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.46	0.46	-0.09	1.45	0.18	-0.04	-0.70	-0.03	1.24	-0.03
2	-0.11	0.21	0.13	-0.26	-0.11	-0.19	0.16	0.84	0.71	0.83
3	-1.17	-1.09	-0.01	-0.93	-1.44	-0.72	-1.05	-0.35	0.73	0.61
4	-0.55	-0.28	0.11	-0.24	-0.96	-1.20	-1.75	0.13	0.37	0.78
5	-0.15	0.51	1.50	0.31	-0.95	-1.62	-0.89	0.12	1.36	1.72
6	-0.51	-0.11	1.16	1.00	-0.47	-0.67	0.07	0.53	1.31	-0.72
7	-0.67	-0.63	-0.99	-0.26	-0.38	-0.24	-1.71	-0.71	0.13	-0.98
8	-1.53	-0.40	-0.92	-1.47	-0.73	-1.27	-2.93	-2.62	-1.53	-0.78
9	-2.09	-1.64	-1.62	-1.60	-0.84	-1.74	-1.71	-1.73	-1.97	-1.06
10	-2.20	-1.91	-2.24	-2.78	-1.25	-0.66	-0.58	-1.15	-1.53	-0.67

Table 23. Mesures du champ pour $\sigma_F^2 = 1$ et $l = 2,5$; valeurs tronquées à la 2^{ème} décimale

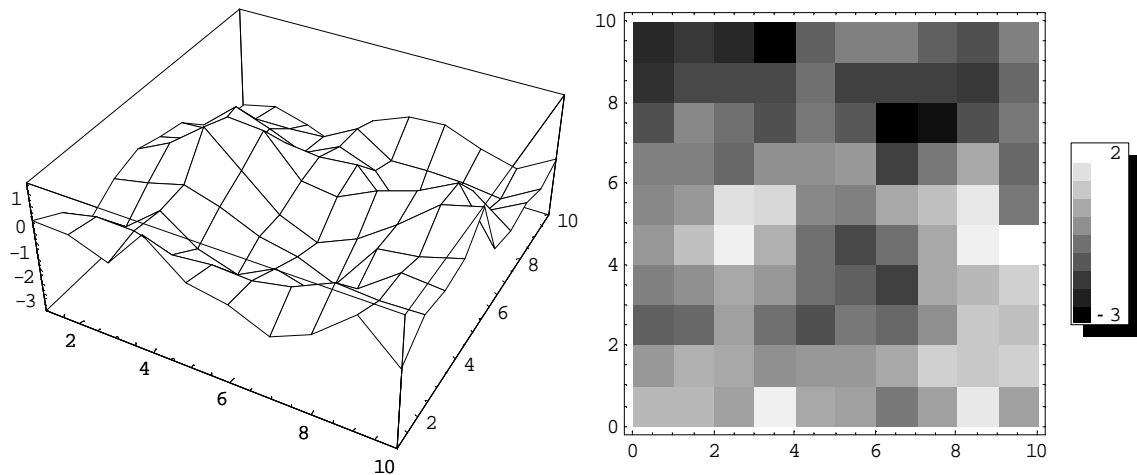


Figure 67. Représentation des valeurs simulées du champ de la Table 23

3.2.3 Calcul du variogramme expérimental

En utilisant les deux directions horizontale et verticale, et les deux diagonales à 45° , la formule (372) nous donne le variogramme expérimental de la Figure 68. Pour chaque valeur h nous avons reporté les points du variogramme expérimental pour chaque direction (verticale et horizontale, ou les deux diagonales perpendiculaires), ce qui donne deux points par valeur h multiple de 1 pour les directions verticales et horizontales, et deux points par valeur h multiple de $\sqrt{2}$ pour les diagonales. Prendre d'autres directions compatibles avec la grille nous donnerait des points pour d'autres intervalles h .

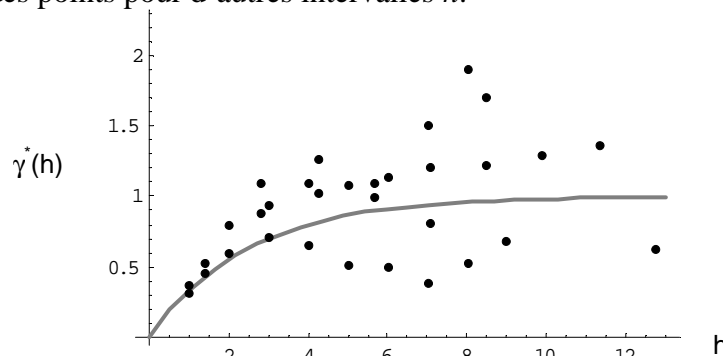


Figure 68. Variogramme théorique (gris) et expérimental (points noirs)

On constate que le nuage de points est proche de la valeur théorique jusqu'à un intervalle h valant $1/3$ de la largeur du domaine, après quoi les points divergent de la théorie et se dispersent.

3.2.4 Intervalle de confiance

Une première étape dans la détermination de l'intervalle de confiance consiste à calculer l'écart-type des mesures pour différentes longueurs h en utilisant la formule (375). Le résultat est présenté Figure 69, pour les directions horizontales et verticales uniquement pour des raisons de facilité de calcul. Nous constatons que l'écart-type est supérieur à la moyenne, ce qui témoigne de données très dispersées, et donc que l'intervalle de confiance sera large. La grande dispersion des données risque d'amener une instabilité des résultats entre différents tirages du champ.

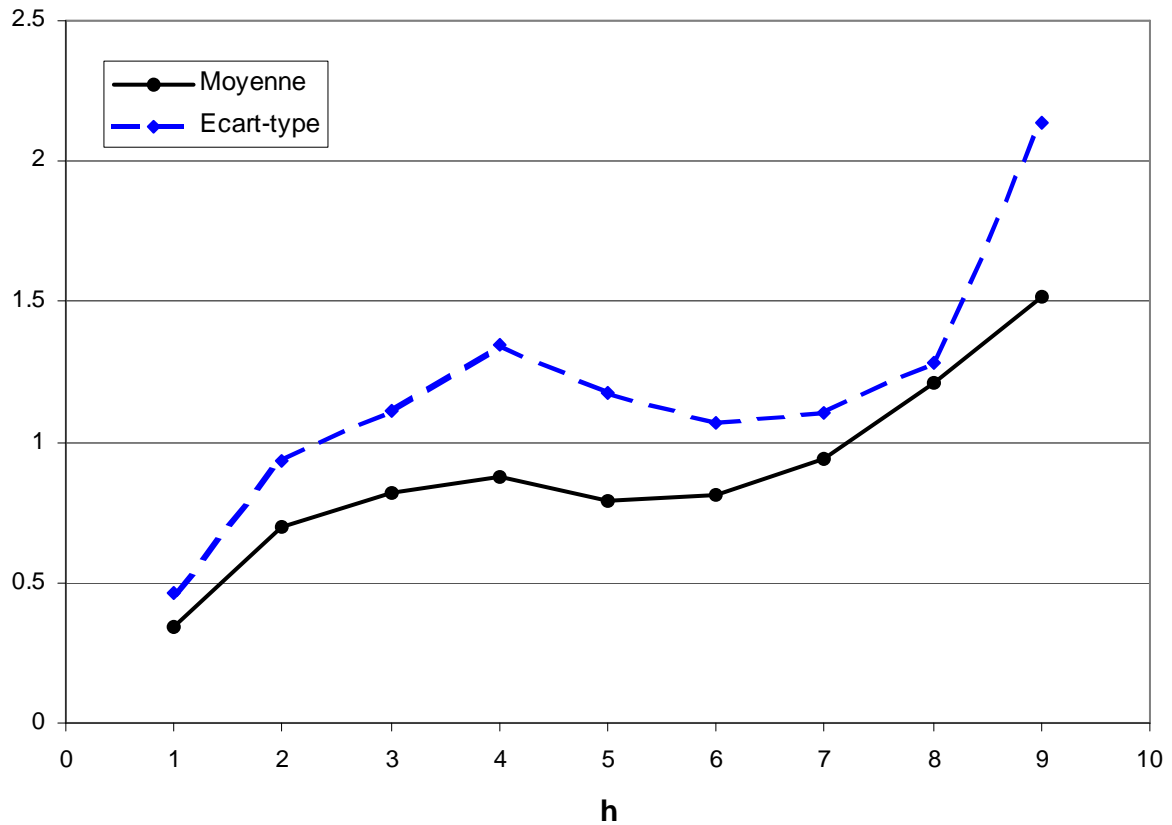


Figure 69. Moyenne et écart-type du variogramme expérimental pour les directions horizontales et verticales

En utilisant les formules (375) et (376) nous avons représenté sur la Figure 70 les intervalles de confiance à 95% et 99%. On constate que le variogramme théorique se trouve toujours dans l'intervalle de confiance à 95%, mais parfois sur sa limite. Le tracé de l'intervalle de confiance à 95% pour d'autres tirages du champ (Figure 71) montre que parfois le variogramme théorique se trouve hors de cet intervalle.

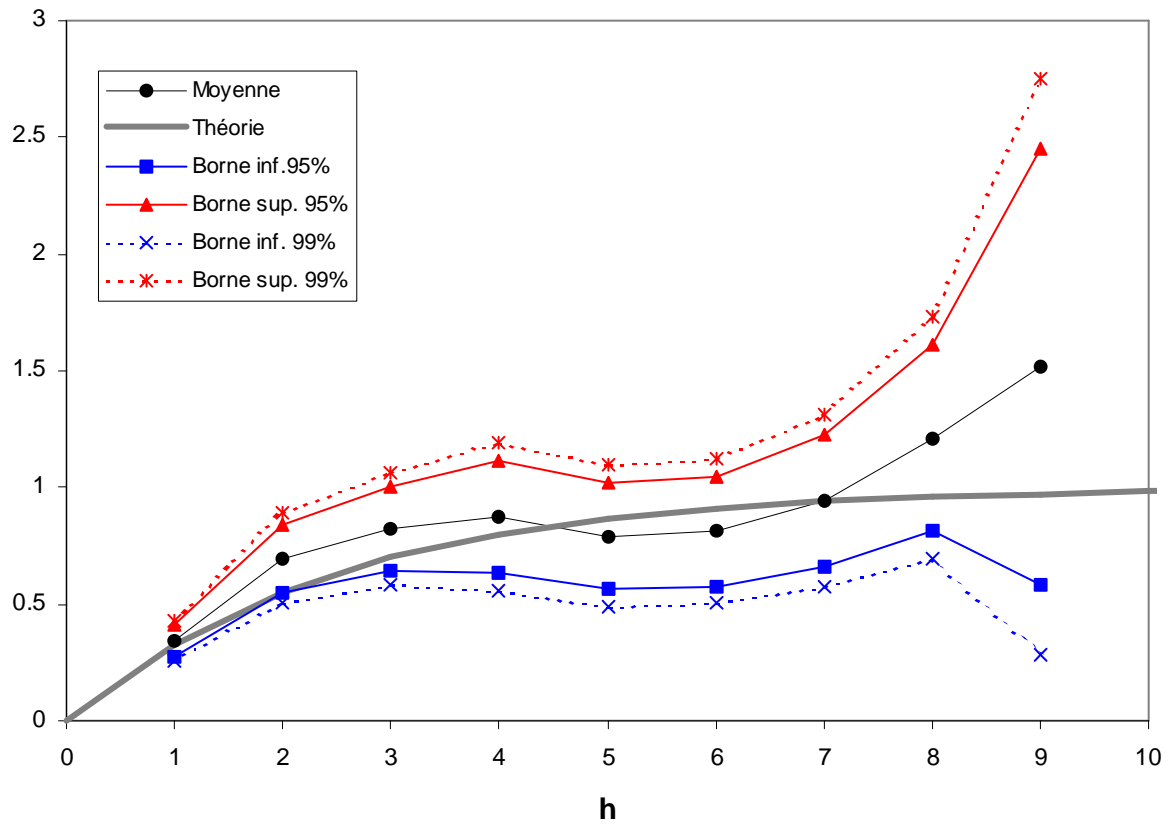


Figure 70. Variogramme expérimental pour les dimensions verticales et horizontales et intervalle de confiance à 95% et 99%

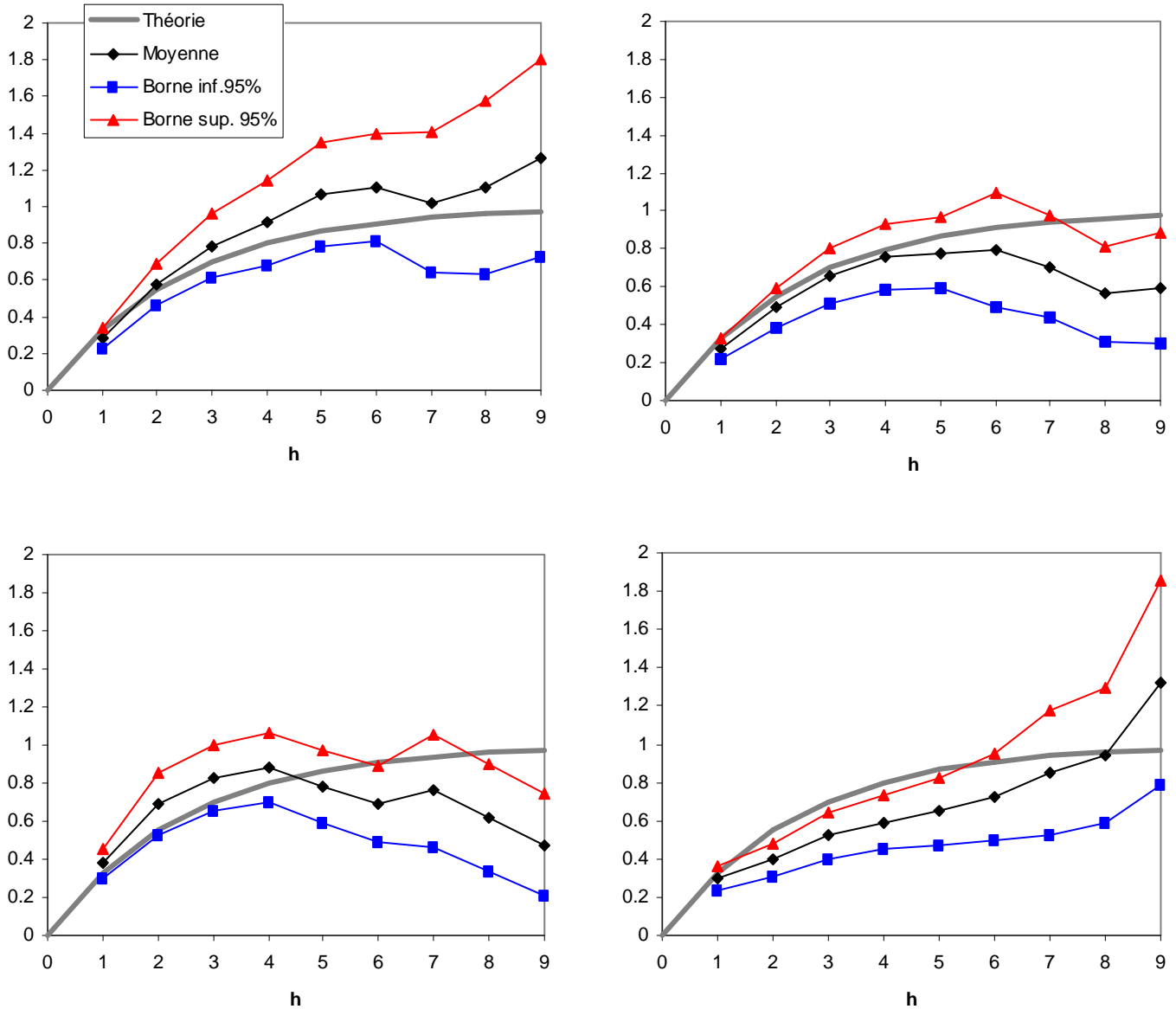


Figure 71. Intervalles de confiance à 95% du variogramme expérimental pour quelques tirages du champ

3.2.5 Détermination des paramètres de la fonction de covariance

Pour retrouver la fonction de covariance, nous devons d'abord en choisir le type, puis calculer ses paramètres à partir du variogramme en utilisant une méthode de régression comme la méthode des moindres carrés. Ici nous considérons que nous recherchons une covariance exponentielle. En pratique le choix du type de fonction de covariance est issu du contexte (type de gisement en particulier) et de l'expérience. En outre nous n'utilisons que le nuage de points resserré du début (valeurs jusqu'à $h=3$), qui est le plus juste.

Le variogramme théorique correspondant à une fonction de covariance exponentielle est :

$$(395) \quad \gamma_{sol}(h) = \sigma_F^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{h}{l}\right) \right)$$

Il nous faut donc déterminer deux paramètres (la variance σ_F^2 et la longueur de corrélation l) qui seront nos variables d'optimisation. Si les mesures étaient bruitées, il nous faudrait en plus déterminer l'effet pépite C_0 . La fonction de performance à minimiser est :

$$F(\sigma_F, l) = \sum_{i=1}^N (\gamma_{sol}(h_i) - \gamma^*(h_i))^2$$

L'algorithme de minimisation de *Mathematica* nous permet de trouver comme solution $\sigma_F^2 \approx 2,04$ et $l \approx 4,98$, ce qui est très loin des valeurs exactes (1 et 2,5), mais est finalement cohérent avec les mesures, comme on le voit en traçant le variogramme correspondant à ces paramètres (voir Figure 72). On rappelle que nous n'avons utilisé que les points avec $h \leq 3$ pour construire le variogramme interpolé, même si le graphique laisse penser que les points suivants sont utilisés.

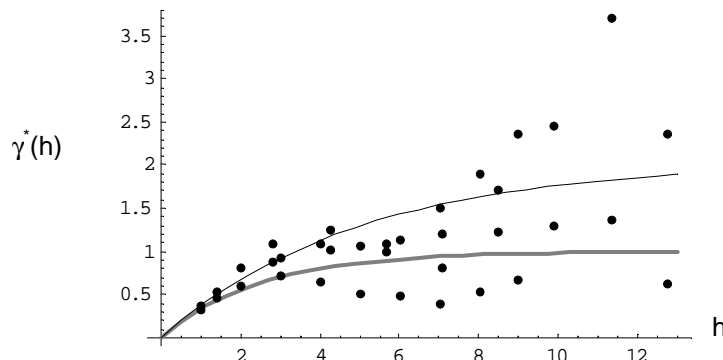


Figure 72. Variogramme expérimental (points), théorique exact (gris) et interpolé (noir).

Retrouver les paramètres de la fonction de covariance à partir d'un variogramme est donc délicat, même quand les mesures sont correctes. Afin de vérifier ce fait nous avons réalisé d'autres simulations de mesures (Figure 73).

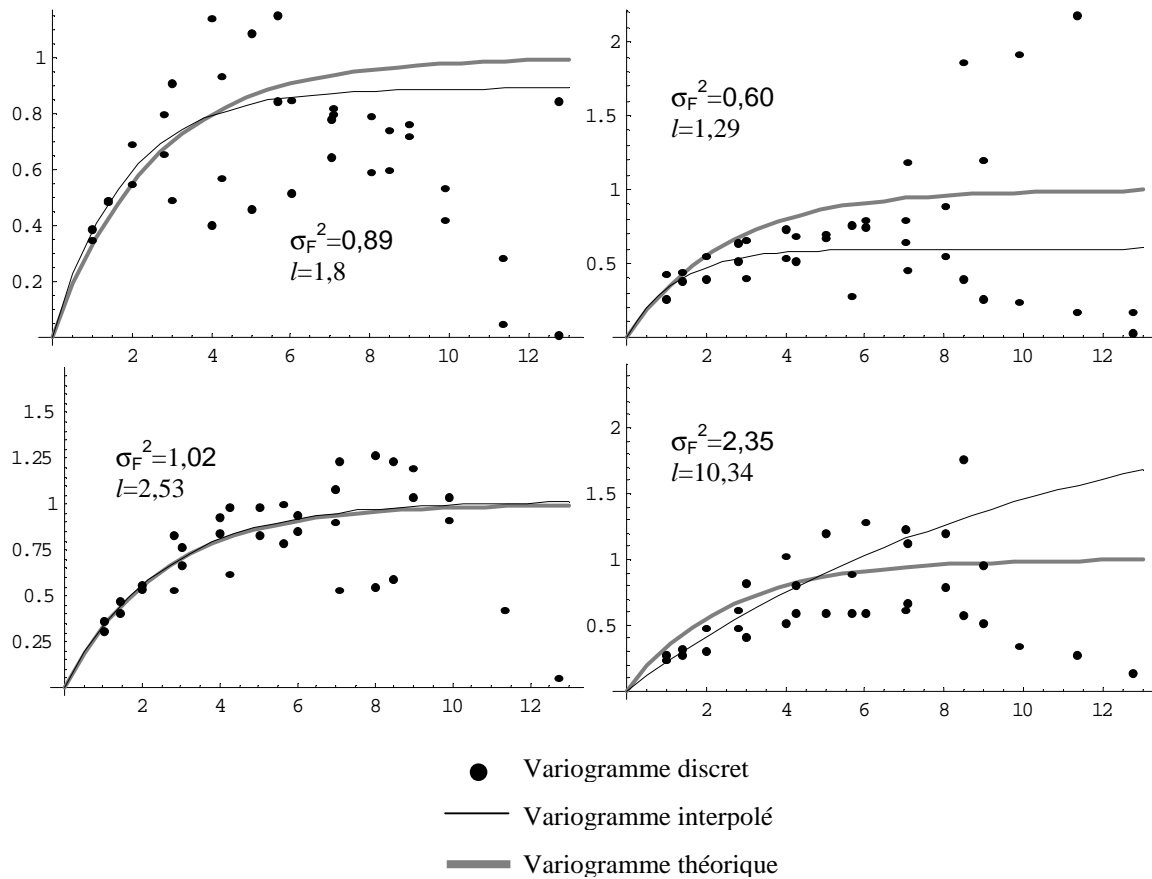


Figure 73. Exemples de variogrammes issus de quatre simulations différentes du champ aléatoire et paramètres de la fonction de covariance déduits ; valeurs exactes $\sigma_F^2=1$ et $l=2,5$

Ces exemples permettent de constater que la méthode du variogramme donne des résultats instables. Deux variogrammes d'un même processus aléatoire (mais de trajectoires différentes) peuvent donner des résultats très différents.

Cela se vérifie si on calcule les paramètres de la fonction de covariance à partir des variogrammes issus de dix simulations (Table 24). Même si la moyenne des résultats est conforme à la théorie, leur écart-type est énorme (plus de 50% de la moyenne), ce qui prouve leur très grande dispersion.

Simulation	σ_F^2	l
1	0,60	1,29
2	0,78	1,97
3	1,60	4,17
4	1,63	3,21
5	1,43	3,32
6	1,28	3,45
7	1,02	2,53
8	1,85	4,45
9	0,44	1,34
10	0,64	1,39
Moyenne	1,13	2,71
Ecart-type	0,47	1,12

Table 24. Résumé des résultats de dix simulations du même processus aléatoire ; moyenne et écart-type des résultats ; valeurs exactes $\sigma_F^2=1$ et $l=2,5$

3.2.6 Conclusion sur l'exemple discret

Avec cet exemple, nous avons constaté la grande instabilité de la méthode du variogramme comme outil pour déterminer la fonction de covariance d'un processus aléatoire. Un moyen de compenser cette instabilité est sans doute de multiplier les points de mesure. On peut alors se demander quelle est la précision d'un variogramme établi sur un processus continu. C'est ce que nous allons voir tout de suite.

3.3 Exemple continu

3.3.1 Présentation de l'exemple

Nous souhaitons déterminer la covariance de la rigidité de flexion de la poutre présentée Figure 74, à partir d'une mesure continue d'une trajectoire du processus aléatoire.



Figure 74. Poutre

On note :

s l'abscisse ;

L la longueur de la poutre ;

$EI(s, \omega)$ le module de rigidité en flexion, est un processus aléatoire choisi :

$$(397) \quad EI(s, \omega) = EI_0(s)(1 + \alpha(s, \omega))$$

avec :

- $EI_0(s)$ une fonction déterministe, représentant la valeur moyenne de la rigidité ;

- $\alpha(s, \omega)$ un champ aléatoire **Gaussien** de moyenne nulle et de fonction de covariance exponentielle :

$$(398) \quad \bar{\alpha}(s) = 0$$

$$(399) \quad C_{\alpha}(x, y) = \sigma_{\alpha}^2 \exp\left(-\left|\frac{x-y}{l}\right|\right)$$

La longueur de corrélation influence directement la forme du variogramme (Figure 75) : plus la longueur de corrélation est faible, plus la montée vers le palier correspondant à la variance est rapide.

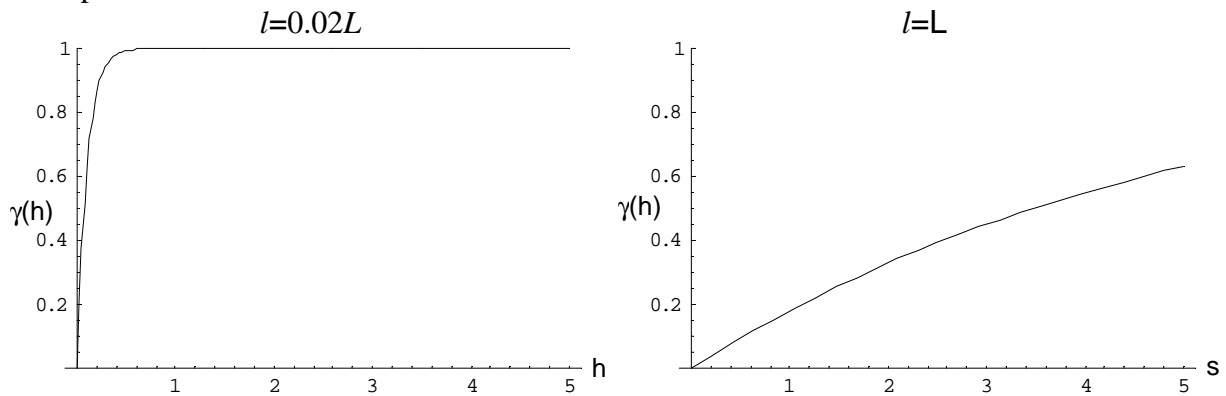


Figure 75. Variogrammes théoriques du processus aléatoire $\alpha(s, \omega)$ pour deux longueurs de corrélation ; covariance exponentielle ; $\sigma_{\alpha}^2=1$, $L=5$

Dans la suite nous allons simuler des trajectoires de la perturbation $\alpha(s, \omega)$ et tenter de retrouver les paramètres de la fonction de covariance utilisés. Ces paramètres de simulation sont indiqués dans la Table 25. Une grande longueur de corrélation est utilisée afin de réduire l'erreur de simulation.

Paramètre	Symbole	Valeur
Longueur de la poutre	L	5
Longueur de corrélation	l	5
Variance de la perturbation	σ_{α}^2	1

Table 25. Paramètres utilisés

3.3.2 Simulation

La Figure 76 montre deux exemples de trajectoire du processus $\alpha(s, \omega)$ simulées par les deux méthodes dont nous avons parlé au §3.1.2. La différence est nette : la décomposition en série de Karhunen-Loève donne une fonction plus lisse, car la continuité C^{∞} est assurée, alors que la méthode des fonctions de forme ne donne qu'une fonction C^0 montrant de brusques variations.

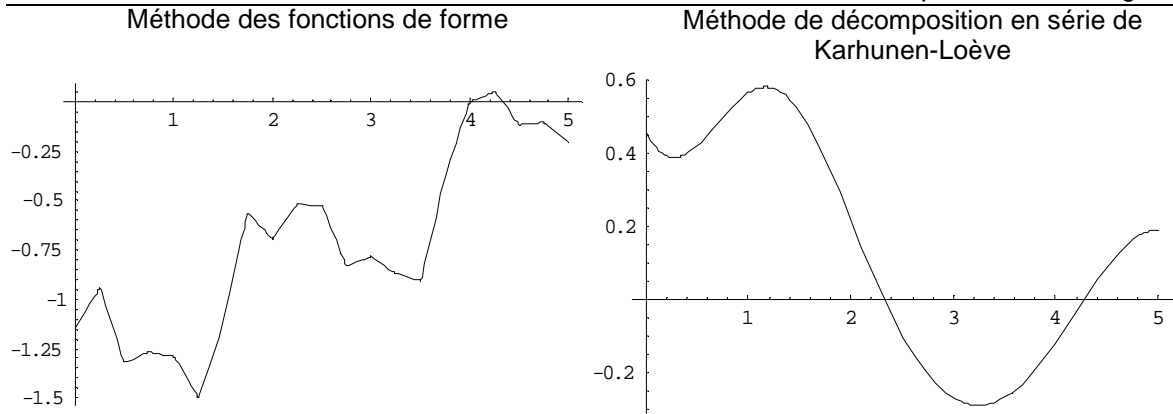


Figure 76. Exemples de trajectoires $\alpha(s)$ simulées par deux méthodes différentes ; $l=L=5$

3.3.3 Résultats après simulation par la méthode des fonctions de forme

La méthode des fonctions de forme a ceci d'intéressant qu'elle nous permet une approche ponctuelle ou continue. On peut en effet soit réaliser un variogramme en utilisant les variables aléatoires nodales en utilisant la formule (372), soit se servir du champ interpolé en utilisant la formule (386). Les deux approches donnent un résultat très proche (Figure 77), car les valeurs entre les points nodaux n'apportent pas d'information supplémentaire sur le processus.

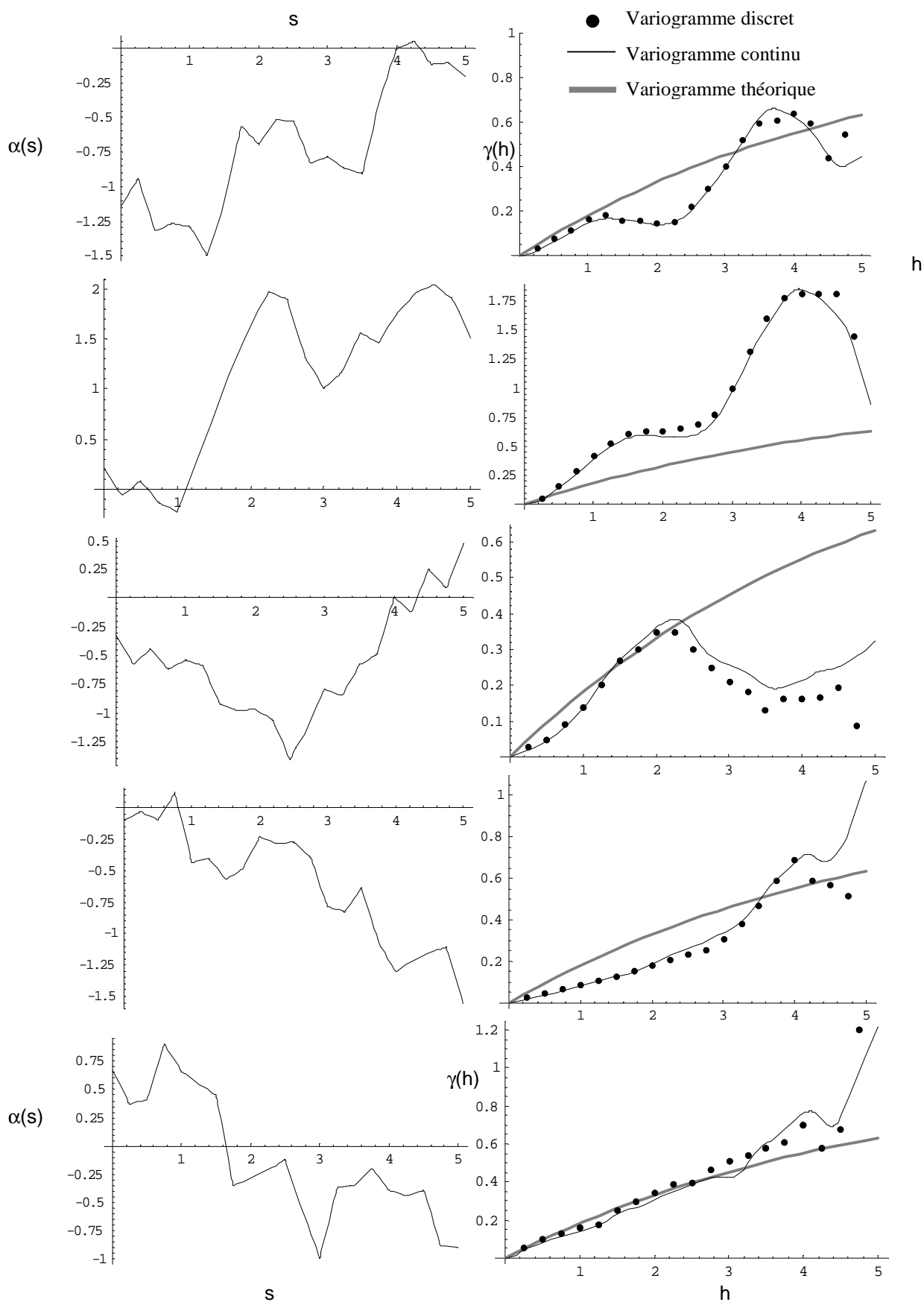


Figure 77. Exemples de trajectoires du processus aléatoire et variogrammes expérimentaux continus et discrets correspondants ; $\sigma_\alpha^2=1$, $l=L=5$

Etant donné que le variogramme discret est, pour la première partie du domaine, aussi juste que le variogramme continu, nous utilisons les points du variogramme discret pour déterminer, par la méthode des moindres carrés le variogramme théorique correspondant le mieux aux mesures. Les résultats de cette approche présentés Figure 78 montrent une grande instabilité de la méthode, qui nous donne des paramètres erronés, parfois aberrants.

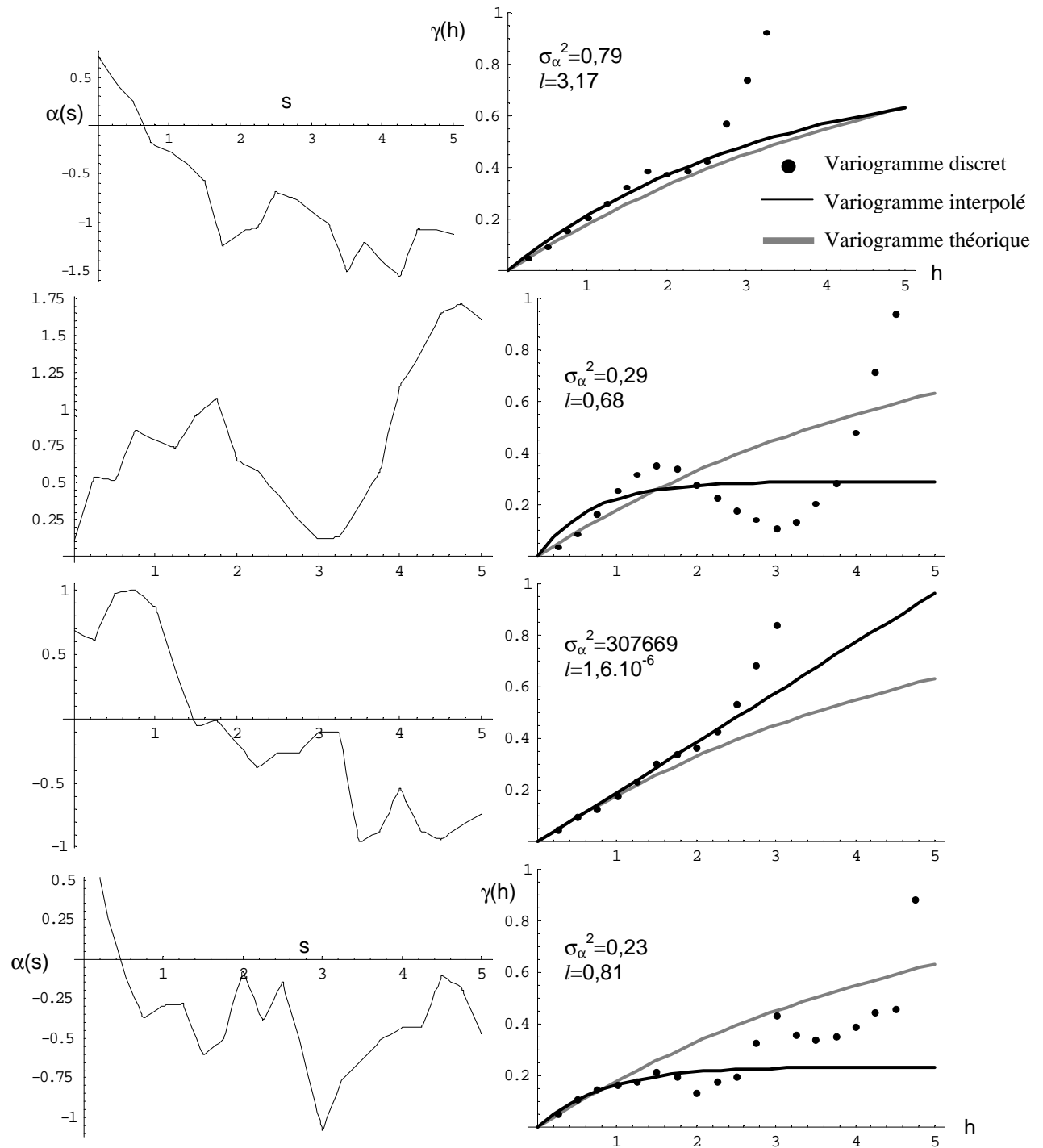


Figure 78. Trajectoires et variogrammes théorique, expérimental et interpolé correspondants ; paramètres déterminés par interpolation ; paramètres théoriques : $\sigma_\alpha^2 = 1$, $l = L = 5$

3.3.4 Résultats après simulation par la méthode de la décomposition en série de Karhunen-Loève

Tout d'abord, contrairement à la méthode des fonctions de forme, le variogramme expérimental discret donne un résultat très différent de celui continu (Figure 79), car les points de mesure ne sont pas explicitement corrélés comme précédemment.

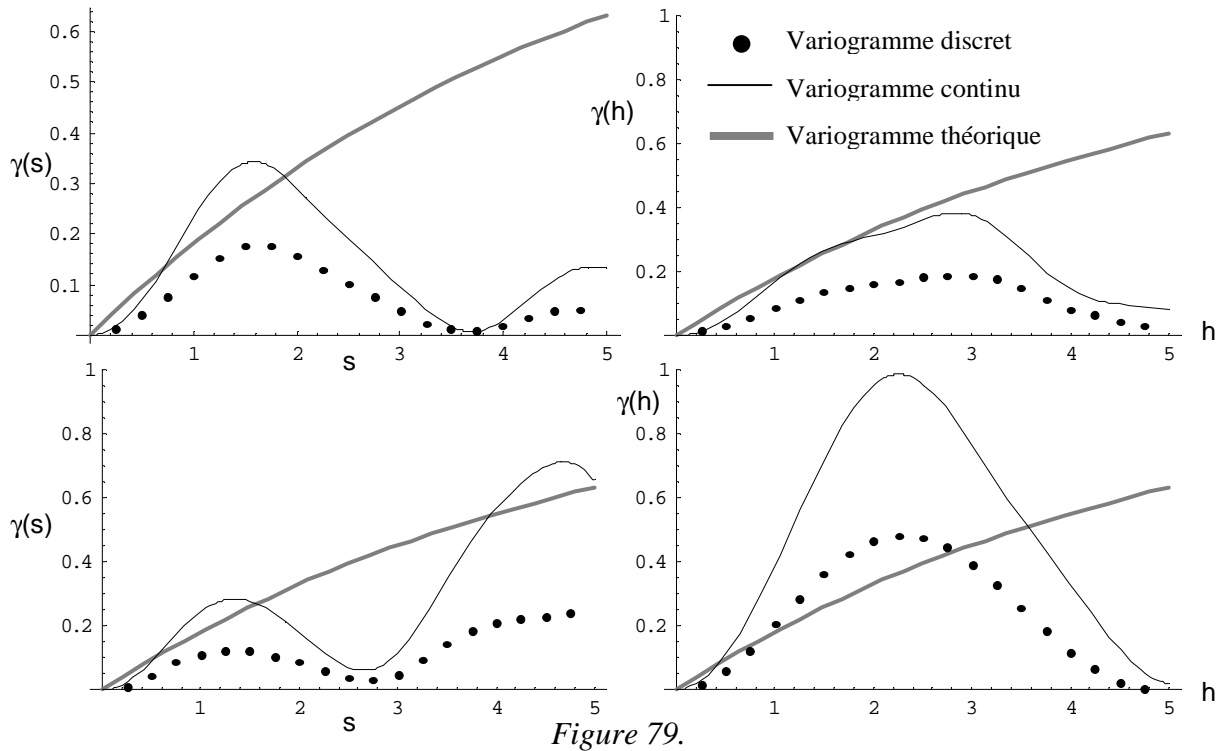


Figure 79.

Figure 80. Exemples de variogrammes expérimentaux continus et discrets ; $\sigma_\alpha^2=1$, $l=L$

Nous voyons aussi que la tangente à l'origine du variogramme expérimental continu est nulle. Cela vient de ce que la méthode KL peine à simuler la variabilité locale, contrairement à la méthode SF. La continuité est à ce prix.

L'interpolation du premier tiers du variogramme expérimental par un variogramme exponentiel par la méthode des moindres carrés donne des résultats très mauvais (Figure 81) : la régression est juste (les mesures sont respectées), mais les paramètres de la fonction de covariance déduits sont totalement erronés. La tangente nulle à l'origine est en partie responsable de ce fait : les points erronés du début faussent la régression, ce qui entraîne une interpolation linéaire (la courbure du variogramme n'est pas rendue). Les résultats incorrects sont alors plus dus à la méthode de simulation (KL) qu'à un problème avec la méthode du variogramme lui-même.

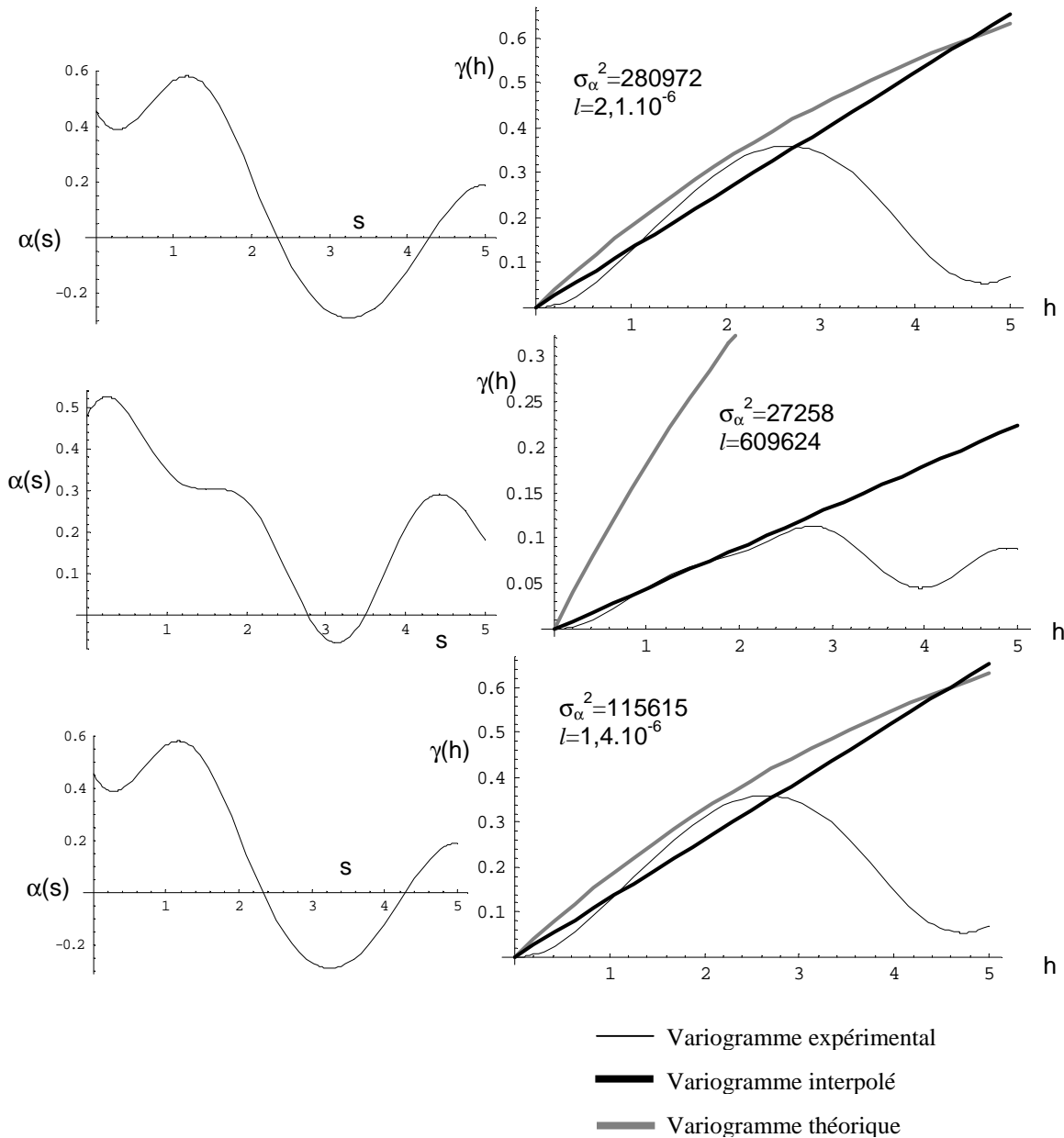


Figure 81. Trajectoires et variogrammes correspondants ; variogramme théorique, expérimental et interpolé ; paramètres théoriques : $\sigma_\alpha^2 = 1$, $l = L = 5$

4 Conclusion

Les résultats obtenus par la méthode du variogramme se sont révélés trop instables pour être utilisés de manière automatique dans une optique de résolution de problème inverse, où les trajectoires solutions sont déjà instables. Le variogramme a été conçu pour être employé dans un domaine précis (la géostatistique), où une forte part d'expérience peut être injectée.

Le principal problème provenait de la trop grande longueur de corrélation utilisée lors des simulations. Une longueur de corrélation de grandeur égale à celle du domaine d'étude permet des simulations moins coûteuses (que ce soit avec la méthode des fonctions de forme ou la méthode KL), c'est pourquoi nous l'avons choisie.

Une longueur de corrélation plus faible aurait permis l'apparition d'un « palier » permettant d'estimer directement la variance et par là même réduisant les inconnues à la seule longueur

de corrélation. Cependant une faible longueur de corrélation induit un coût de calcul plus important pour conserver la précision de la simulation. La prudence s'impose donc dans l'utilisation du variogramme, et une procédure automatique semble exclue.

Bibliographie du chapitre V

- [V-1] B. SUDRET, A. DER KIUREGHIAN, *Stochastic Finite Element Methods and Reliability A State-of-the-Art Report*, Report No. UCB/SEMM-2000/08, Structural Engineering Mechanics and Materials, Department of Civil & Environmental Engineering, University of California, Berkley, 2000
- [V-2] R. GHANEM, P. SPANOS, *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Springer-Verlag, 1991
- [V-3] S. P. HUANG, S. T. QUEK, K. K. PHOON, *Convergence Study of the Truncated Karhunen-Loève Expansion for Simulations of Stochastic Processes*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 52 (2001), pp. 1029-1043
- [V-4] B. VAN DEN NIEUWENHOF, *Stochastic Finite Elements for Elastodynamics : Random field and shape uncertainty modelling using direct and modal perturbation-based approaches*, Thèse de Doctorat en Sciences Appliquées, Université catholique de Louvain, 2003
- [V-5] J. E. CASTRILLON-CANDAS, K. AMARATUNGA, *Fast Estimation of Continuous Karhunen-Loève Eigenfunctions Using Wavelets*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 50 (2002), pp.78-85
- [V-6] G. MATHERON, *Traité de géostatistique appliquée*, Editions Technip, 1962-1963
- [V-7] G. MATHERON, *Les variables régionalisées et leur estimation*, Masson, 1965
- [V-8] I. CLARK, *Practical Geostatistics*, Elsevier Applied Science, 1979
- [V-9] S. MAUS, *Variogram Analysis of Magnetic and Gravity Data*, Geophysics, vol. 64 (1999), pp.776-784

Chapitre VI

Proposition de Méthode Inverse Stochastique

1	<i>Introduction</i>	167
2	<i>Caractérisation des données</i>	167
2.1	Détermination de la fonction de covariance des données	168
2.2	Discretisation des données	168
3	<i>Paramétrisation du résultat</i>	169
3.1	Valeurs aux nœuds	170
3.2	Décomposition sur une base de l'espace des fonctions.....	171
4	<i>Couplage méthodes inverses et méthodes non intrusives</i>	171
4.1	Méthodes inverses déterministes.....	171
4.2	Problème direct stochastique.....	172
4.3	Problème inverse stochastique	173
4.4	Première méthode : deux minimisations	174
4.5	Deuxième méthode : une seule minimisation	177
4.6	Limitation	177
5	<i>Exemple Simple</i>	178
5.1	Définition de l'exemple.....	178
5.1.1	Problème inverse stochastique	178
5.1.2	Simulation des données	178
5.2	Préliminaires aux calculs.....	179
5.2.1	Modèle mécanique déterministe.....	179
5.2.2	Paramétrisation du résultat	179
5.2.3	Plan d'expériences.....	180
5.2.4	Fonctions de performance	180
5.2.5	Logiciel de minimisation.....	181
5.3	Mise en œuvre	181
5.3.1	Calcul préliminaire	181
5.3.2	Calcul déterministe.....	182
5.3.3	Pilotage du code	183
5.3.4	Remarques	184
5.4	Résultats	187
5.4.1	Influence de la fonction de performance	187
5.4.2	Influence du plan d'expériences.....	192
5.4.3	Stabilité des résultats	196
6	<i>Exemple complet</i>	198
6.1	Données	198
6.2	Génération des mesures.....	198

6.3	Détermination de la fonction de covariance de la flèche (variogramme)	199
6.3.1	Etablissement du variogramme des mesures	199
6.3.2	Recalage du variogramme théorique	200
6.4	Décomposition KL du champ de sortie	201
6.5	Paramétrisation du résultat	202
6.6	Minimisation	203
6.7	Résultats	204
7	Conclusion	206
	Bibliographie du chapitre VI	207

1 Introduction

Le but d'une méthode inverse stochastique est de déterminer les paramètres d'une variable ou d'un champ aléatoire « d'entrée », à partir de mesures de « sortie », sachant que les équations gouvernant le système nous permettent de calculer la sortie à partir de l'entrée (via, par exemple, un code de calcul), mais pas l'inverse.

En effet nous avons vu dans le chapitre 1 que, même si les équations de comportement d'un système physique sont neutres, les calculs qu'elles permettent ne le sont pas : on distingue ainsi les *problèmes directs*, solvables de manière classique, et les *problèmes inverses*, dont la résolution pose des soucis. Les données nécessaires aux problèmes directs (les propriétés des matériaux, les conditions aux limites,...), accessibles à la mesure, sont donc traditionnellement les « entrées » des calculs, tandis que les résultats attendus en sont les « sorties ». Dans un problème inverse les rôles sont inversés, et ce qui était un résultat auparavant devient une donnée, et vice versa.

Dans ce chapitre nous proposons une méthode de résolution de problèmes inverses stochastiques. Son cœur est constitué des méthodes stochastiques non intrusives et utilise une procédure de minimisation pour faire coïncider une sortie mesurée et une sortie simulée.

La mise en œuvre de cette méthode est présentée dans le cas d'un exemple simple : l'identification du champ aléatoire de la rigidité d'une poutre à partir du champ aléatoire de sa flèche préalablement projeté sur le chaos polynomial. L'influence de différents paramètres est étudiée et la stabilité des résultats est examinée.

2 Caractérisation des données

La méthode inverse stochastique proposée ici repose sur l'utilisation d'un jeu de variables aléatoires. Une étape préliminaire consiste donc à exploiter les mesures de la sortie pour déterminer ce jeu de variables aléatoires. Dans la plupart des cas la sortie est un champ, elle est alors modélisable sous la forme d'un champ aléatoire, qui peut ensuite être discrétisé pour obtenir un jeu de variables aléatoires.

Une première phase consiste à déterminer les paramètres de ce champ aléatoire (moyenne et fonction de covariance). Ces paramètres permettent ensuite d'utiliser une des méthodes de discrétisation de champs aléatoires, comme la décomposition en série de Karhunen-Loève. Cette caractérisation est schématisée dans la Figure 82.

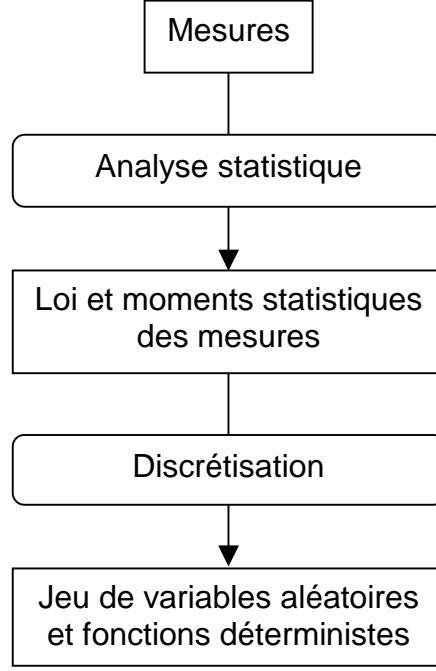


Figure 82. Caractérisation des données

2.1 Détermination de la fonction de covariance des données

Un outil statistique permettant la détermination de la fonction de covariance des mesures est le variogramme, que nous avons présenté au chapitre 4.

2.2 Discrétisation des données

Une fois la fonction de covariance d'un champ déterminée, de nombreuses méthodes existent pour discrétiser ce champ. La plus connue, la décomposition en série de Karhunen-Loève, a été présentée au chapitre 3. Elle consiste, rappelons-le, à écrire un champ aléatoire stationnaire du second ordre $\mu(\{x\}, \omega)$ sous la forme :

$$(400) \quad \mu(\{x\}, \omega) = \bar{\mu}(\{x\}) + \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \zeta_n(\omega) \phi_n(\{x\})$$

où :

- λ_n et $\phi_n(\{x\})$ sont respectivement les valeurs propres et les fonctions propres de la fonction de covariance $C_\mu(\{x_1\}, \{x_2\})$ du processus $\mu(\{x\}, \omega)$;
- les $\zeta_n(\omega)$ sont des variables aléatoires indépendantes Gaussiennes si le champ est Gaussien.

La décomposition (400) est exacte pour une somme infinie. Son utilisation pratique implique sa troncature à un niveau N permettant une erreur compatible avec l'étude. Le champ interpolé $\tilde{\mu}(\{x\}, \omega)$ est alors :

$$(401) \quad \tilde{\mu}(\{x\}, \omega) = \bar{\mu}(\{x\}) + \sum_{n=0}^N \sqrt{\lambda_n} \zeta_n(\omega) \phi_n(\{x\})$$

La précision de cette méthode dépend du rapport entre la longueur de corrélation de la fonction de covariance et la taille du domaine : pour un même niveau de troncature, plus ce rapport est grand, plus la simulation sera fidèle.

3 Paramétrisation du résultat

L'analyse des données a permis de caractériser un jeu de variables aléatoires. Le résultat recherché peut s'exprimer sur un chaos polynomial de ces variables aléatoires.

Un raccourci à éviter est de chercher la décomposition de Karhunen-Loève du résultat : cela reviendrait à se limiter à un chaos polynomial de degré 1 et supprimerait toute partie du résultat qui s'éloignerait de la loi du champ de données (par exemple la partie non gaussienne du résultat dans le cas d'un champ gaussien).

Dans le cas où la solution recherchée est un champ aléatoire $q(\{x\}, \omega)$ projeté sur un chaos polynomial, les coefficients de ce chaos sont des fonctions et il est donc nécessaire de ramener ces fonctions à un jeu limité de paramètres $\{\lambda\}$ à déterminer lors des calculs, ce qui revient à limiter l'espace des solutions possibles :

$$(402) \quad q(\{x\}, \{\lambda\}, \omega) \approx \bar{q}(\{x\}) + \sum_{j=0}^m \alpha_j(\{x\}, \{\lambda\}) \psi_j(\omega)$$

La Figure 83 schématise cette opération de paramétrisation.

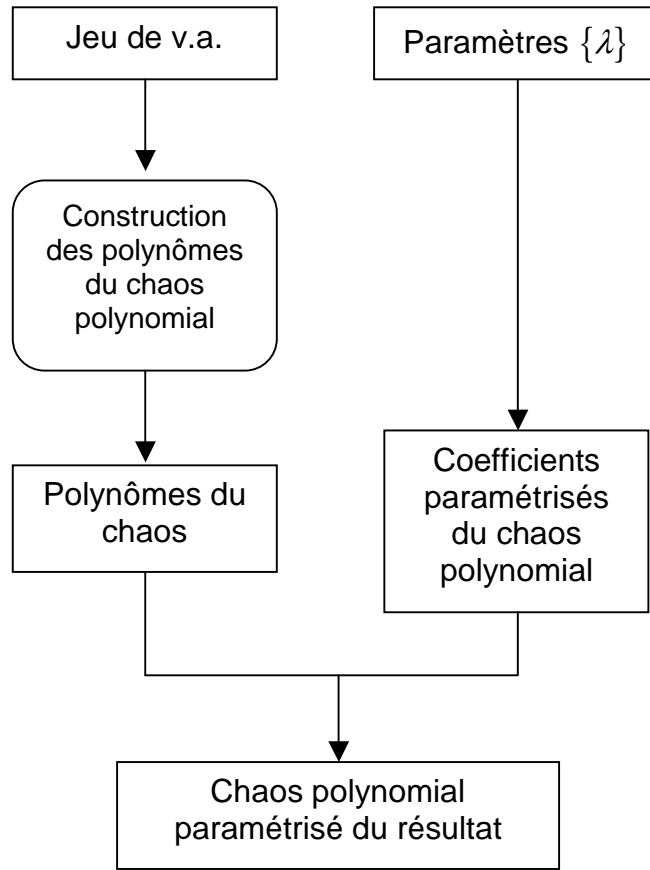


Figure 83. Paramétrisation du résultat

3.1 Valeurs aux nœuds

Il est possible d'adopter une démarche similaire à celle des éléments finis : les valeurs des coefficients du chaos polynomial sont recherchés en des points précis (les nœuds d'un maillage), et interpolés sur l'ensemble du domaine via des fonctions de forme. Cela revient à écrire :

$$(403) \quad \alpha_j(\{x\}, \{\lambda\}) = \{N(\{x\})\}^T \{\lambda\}$$

où

$\{N(\{x\})\}$ est le vecteur des fonctions de forme ;

$\{\lambda\}$ est le vecteur des valeurs nodales.

Cette méthode a comme avantage de permettre de représenter des fonctions de forme quelconques, dans les limites que permet la densité du maillage. L'inconvénient est que des fonctions très torturées nécessitent de nombreux nœuds pour être approximées convenablement, ce qui augmente le nombre de paramètres à déterminer.

3.2 Décomposition sur une base de l'espace des fonctions

Une deuxième approche consiste à rechercher la projection des coefficients sur une base incomplète de l'espace des fonctions (polynômes, série de Fourier, etc...). Il est possible d'utiliser comme base les fonctions déterminées lors de la décomposition de Karhunen-Loève. Comme précédemment une fonction peut nécessiter un nombre de termes important de la base choisie pour être correctement représentée.

4 Couplage méthodes inverses et méthodes non intrusives

Après avoir rappelé les moyens de caractériser les données (§2), de paramétrer la solution (§3), nous allons maintenant proposer une méthode de résolution des problèmes inverses stochastiques. Au chapitre 3 nous avons discuté d'une méthode de résolution de problèmes stochastiques très intéressante : les éléments finis stochastiques non intrusifs par régression. Celle-ci vient faire écho à la méthode inverse déterministe par minimisation présentée chapitre II. L'idée est de coupler ces deux minimisations.

4.1 Méthodes inverses déterministes

Il est nécessaire de rappeler brièvement ici ce que l'on entend par *problèmes inverses*. Reprenons l'équation définissant le comportement d'un système :

$$(404) \quad q(x) = F[u(x), p(x)]$$

q étant la sortie et u l'entrée. Généralement les équations de comportement sont telles qu'il est possible de déterminer q connaissant u mais pas l'inverse. Souvent ce phénomène provient de ce que F est un opérateur d'intégration, or déterminer l'intégrande d'une équation intégrale est un problème mal posé, ce qui signifie que l'existence, l'unicité et/ou la stabilité de la solution n'est pas assurée. Parfois également la modélisation même du comportement inverse du système est impossible, seul le calcul direct nous est accessible (typiquement c'est le cas des codes de calcul).

Une méthode générale pour résoudre le problème inverse consiste à déterminer l'entrée u minimisant la différence entre les mesures $q(x)^\varepsilon$ et une sortie simulée, soit :

$$(405) \quad u^*(x) = \min_u \|q(x)^\varepsilon - F[u(x), p(x)]\|^2$$

Cette minimisation est généralement instable (des modifications mineures des données $q(x)^\varepsilon$ entraînent des modifications majeures du résultat), car le problème même reformulé est toujours mal posé. Il est cependant possible de le régulariser, généralement en ajoutant un terme dans la fonction de performance (voir le Chapitre II)

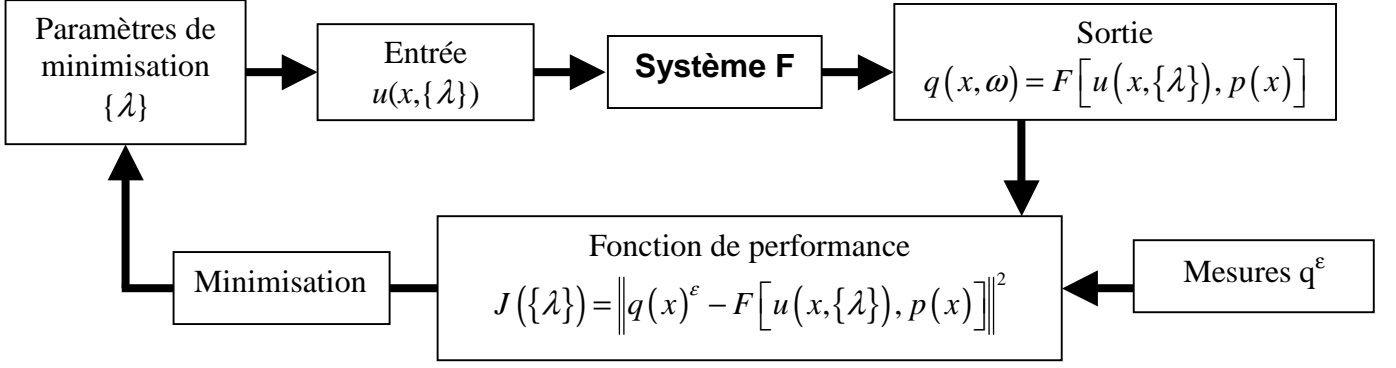


Figure 84. Procédure de résolution d'un problème inverse par minimisation

4.2 Problème direct stochastique

Nous avons vu au chapitre III la méthode des éléments finis stochastiques non intrusif que nous allons utiliser ici pour résoudre le problème direct.

Dans le cadre de cette méthode, l'entrée stochastique $u(x, \omega)$ engendre la sortie stochastique $q(x, \omega)$:

$$(406) \quad q(x, \omega) = F[u(x, \omega), p(x)]$$

Le champ aléatoire d'entrée $u(x, \omega)$, connu, doit être discrétisé pour pouvoir être utilisé dans la méthode. Par exemple cela peut être réalisé via la décomposition de Karhunen-Loève (mais éventuellement d'une autre manière) :

$$(407) \quad u(x, \omega) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \zeta_i(\omega) \phi_i(x)$$

les valeurs λ_i et les fonctions $\phi_i(x)$ sont connues, les variables aléatoires $\zeta_i(\omega)$ sont indépendantes, de loi fixée (en particulier normales si le champ est gaussien).

Un plan d'expérience de N valeurs $\{\{\zeta^{(1)}\} \dots \{\zeta^{(N)}\}\}$ du vecteur des variables aléatoires $\{\zeta(\omega)\}$, est choisi, ce qui nous permet de calculer les valeurs de u et q :

$$(408) \quad u(x)^{(k)} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \zeta_i^{(k)} \phi_i(x)$$

$$(409) \quad q(x)^{(k)} = F\left[\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \zeta_i^{(k)} \phi_i(x)\right), p(x)\right]$$

q étant un champ aléatoire, sa décomposition sur le chaos polynomial peut s'écrire:

$$(410) \quad q_c(\{d(x)\})^{(k)} = \sum_{i=1}^m d_i(x) \psi_i(\{\zeta^{(k)}\})$$

Où les m fonctions $d_i(x)$ sont les coefficients du chaos polynomial à déterminer. Afin de permettre cette détermination une première étape consiste à paramétriser ces fonctions, c'est à dire les faire dépendre d'un jeu de paramètres $\{\lambda\}$ réduits :

$$(411) \quad d_i(x) = d_i(x, \{\lambda\})$$

Une procédure de minimisation peut être utilisée pour trouver le jeu de variables $\{\lambda\}$

$$(412) \quad \{\lambda^*\} = \min \sum_{k=1}^N \left\| q(x)^{(k)} - q_c(x, \{\lambda\})^{(k)} \right\|^2$$

Soit :

$$(413) \quad \{\lambda^*\} = \min \sum_{k=1}^N \left\| F \left[\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \xi_i^{(k)} \phi_i(x) \right), p(x) \right] - \sum_{i=1}^m d_i(x, \{\lambda\}) \psi_i(\{\xi^{(k)}\}) \right\|^2$$

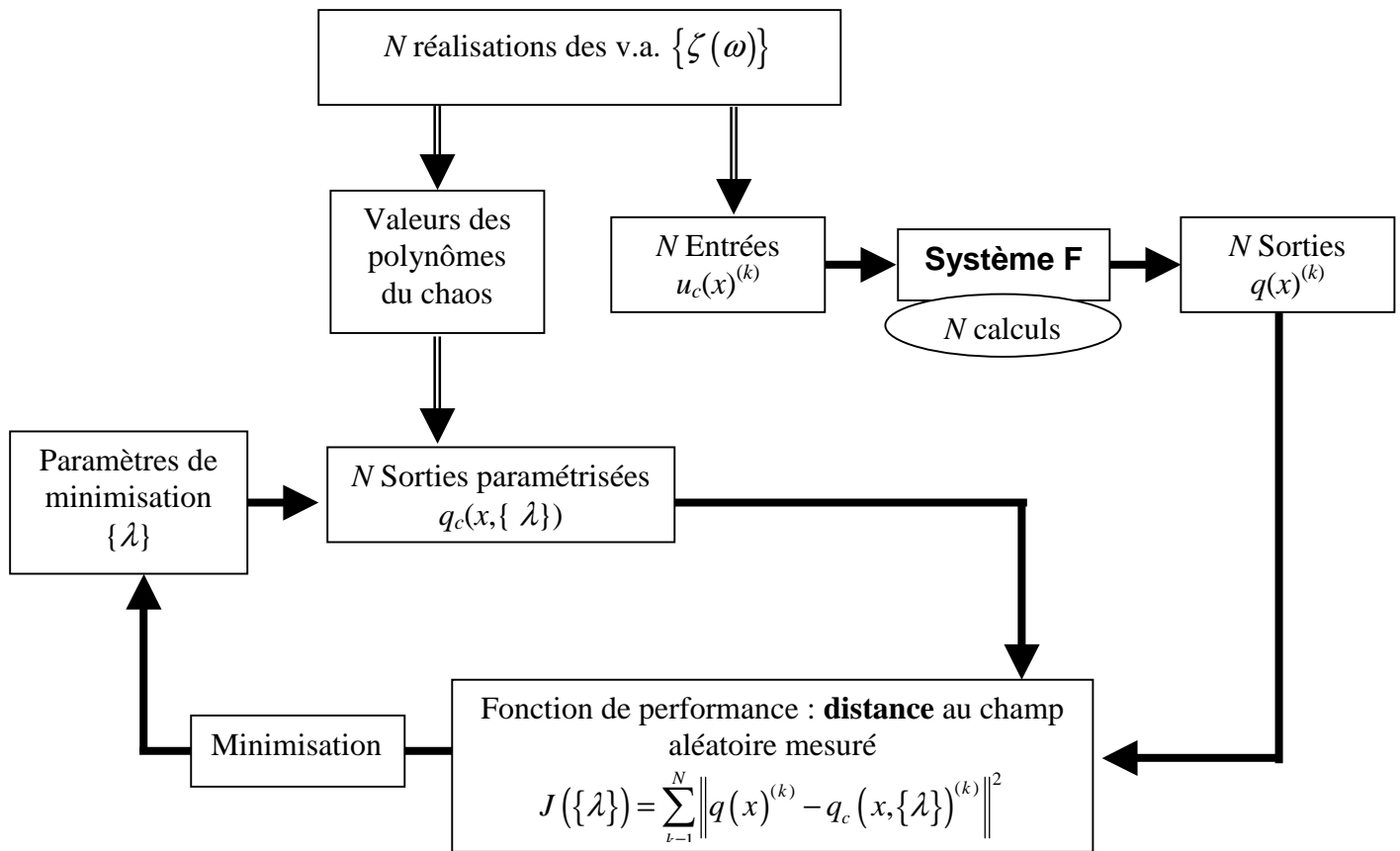


Figure 85. Procédure de résolution d'un problème stochastique direct par minimisation

4.3 Problème inverse stochastique

La similitude entre la méthode inverse et la méthode non intrusive est intéressante. Dans les deux cas nous effectuons une minimisation. Comment s'écrirait un problème inverse dans le cadre de la méthode non intrusive présentée au chapitre 3 ?

Tout d'abord notre donnée n'est plus u (l'entrée) mais q (la sortie). C'est donc q que l'on discrétise, par exemple via une analyse statistique et une décomposition de Karhunen-Loève

(mais éventuellement d'une autre manière). **C'est ce que nous avons vu §2.** On obtient alors la sortie mesurée $q_\varepsilon(x, \omega)$:

$$(414) \quad q_\varepsilon(x, \omega) = \sum_{i=0}^n \sqrt{\lambda_i} \zeta_i(\omega) \phi_i(x)$$

u par contre est inconnu, on cherche donc les coefficients $d(x)$ de sa décomposition sur un chaos polynomial. Pour cela on paramétrise ces coefficients via des variables d'optimisation $\{\lambda\}$. **C'est ce que nous avons vu §3.** On obtient l'entrée simulée $u_c(x, \{\lambda\}, \omega)$:

$$(415) \quad u_c(x, \{\lambda\}, \omega) = \sum_{i=0}^m d_i(x, \{\lambda\}) \psi_i(\{\zeta(\omega)\})$$

En outre à cette entrée $u_c(x, \{\lambda\}, \omega)$ il est possible d'associer une sortie simulée.

$$(416) \quad q_c(x, \{\lambda\}, \omega) = F[u_c(x, \{\lambda\}, \omega), p(x)]$$

Suivant la méthode non intrusive présentée on se donne N réalisations du vecteur des variables aléatoires $\{\zeta\}$. Nous obtenons alors :

$$(417) \quad q_\varepsilon(x)^{(k)} = \sum_{i=0}^n \sqrt{\lambda_i} \zeta_i^{(k)} \phi_i(x) \quad k = 1 \dots N$$

et

$$(418) \quad u_c(x, \{\lambda\})^{(k)} = \sum_{i=0}^m d_i(x, \{\lambda\}) \psi_i(\{\zeta^{(k)}\}) \quad k = 1 \dots N$$

En outre pour chacune des N réalisations du vecteur des variables aléatoires, nous pouvons calculer une sortie $q_c(x, \{\lambda\})^{(k)}$ correspondant à l'entrée $u_c(x, \{\lambda\})^{(k)}$:

$$(419) \quad \tilde{q}_c(x, \{\lambda\})^{(k)} = F[u_c(x, \{\lambda\})^{(k)}, p(x)]$$

Le problème est maintenant de déterminer le jeu de variables d'optimisation $\{\lambda\}$ permettant à $q_c(x, \{\lambda\})^{(k)}$ de s'approcher au mieux de $q_\varepsilon(x)^{(k)}$ pour les N réalisations $\{\{\zeta^{(1)}\} \dots \{\zeta^{(N)}\}\}$ du vecteur de variables aléatoires $\{\zeta(\omega)\}$. Pour cela deux méthodes relativement différentes s'offrent à nous.

4.4 Première méthode : deux minimisations

Une première méthode peut consister à utiliser en série la méthode inverse déterministe avec les méthodes non intrusives.

La sortie $q_c(x, \{\lambda\}, \omega)$ peut être décomposée sur un chaos polynomial en utilisant les méthodes de résolution de problèmes directs stochastiques, en particulier les méthodes non intrusives. **C'est que nous avons vu au chapitre 3.** La projection $\tilde{q}_c(x, \{\lambda\}, \omega)$ de la sortie simulée $q_c(x, \{\lambda\}, \omega)$ sur le chaos polynomial s'écrit alors :

$$(420) \quad \tilde{q}_c(x, \{\lambda\}, \omega) = \sum_{i=0}^{m'} d'_i(x, \{\lambda\}) \psi_i(\{\xi(\omega)\})$$

en gardant à l'esprit que la notation $d'_i(x, \{\lambda\})$ signifie que les fonctions d'_i dépendent **implicitement** des paramètres $\{\lambda\}$, et qu'en aucun cas il ne s'agit d'une paramétrisation directe de la fonction.

L'idée est de calculer explicitement pour un jeu de paramètres d'optimisation $\{\lambda\}$ les m' fonctions $d'_i(x, \{\lambda\})$ provenant de la projection sur le chaos polynomial (420) de la réponse $q_c(x, \{\lambda\}, \omega)$ à l'entrée connue $u_c(x, \{\lambda\}, \omega)$ (ce qui revient à résoudre le problème direct pour cette entrée). Les coefficients $d'_i(x, \{\lambda\})$ dépendant *implicitement* de $\{\lambda\}$, il nous faut introduire un jeu de paramètres *explicités* $\{\beta\}$ qui définissent les coefficients. On introduit donc un champ $\tilde{q}_c(x, \{\lambda\}, \{\beta\}, \omega)$:

$$(421) \quad \tilde{q}_c(x, \{\lambda\}, \{\beta\}, \omega) = \sum_{i=1}^{m'} d'_i(x, \{\beta\}) \psi_i(\{\xi(\omega)\})$$

L'objectif du calcul direct est de déterminer le jeu de paramètres $\{\beta^*\}$ tel que $\tilde{q}_c(x, \{\lambda\}, \{\beta^*\}, \omega)$ s'approche autant que possible de $q_c(x, \{\lambda\}, \omega)$. Etant donné qu'une paramétrisation a été réalisée, une erreur d'approximation se produit, et les deux sorties peuvent ne pas coïncider.

Après avoir calculé les N sorties $q_c(x, \{\lambda\})^{(k)}$ pour un jeu de variables d'optimisation, nous pouvons utiliser la méthode non intrusive par régression présentée au chapitre 3 pour déterminer le jeu de variables $\{\beta^*\}$ solution du problème d'optimisation :

$$(422) \quad \{\beta^*\} = \min \sum_{k=1}^N \left\| q_c(x, \{\lambda\})^{(k)} - \tilde{q}_c(x, \{\lambda\}, \{\beta\})^{(k)} \right\|^2$$

Cette minimisation peut se faire de manière explicite comme expliqué au chapitre 3.

Il est ensuite possible de construire une fonction de performance $J(\{\lambda\})$ mesurant une distance entre cette sortie simulée et la sortie mesurée (qui est, rappelons-le, discrétisé avec les mêmes variables aléatoires):

$$(423) \quad J(\{\alpha\}) = \left\| q_e(\{x\}, \omega) - \tilde{q}_c(x, \{\lambda\}, \{\beta\}, \omega) \right\|^2$$

Dans le cas général une mesure de distance dans l'espace stochastique peut être réalisée via l'espérance :

$$(424) \quad \left\| q_e(x, \omega) - q_c(x, \{\alpha\}, \omega) \right\| = E \left[q_e(x, \omega) - q_c(x, \{\alpha\}, \omega) \right]$$

Les deux champs aléatoires étant explicitement discrétisés avec les mêmes variables aléatoires, cette mesure est simple à évaluer de manière analytique.

Cette procédure est réitérée jusqu'à l'obtention d'un minimum de la fonction $J(\{\lambda\})$. La Figure 86 montre la procédure dans son ensemble.

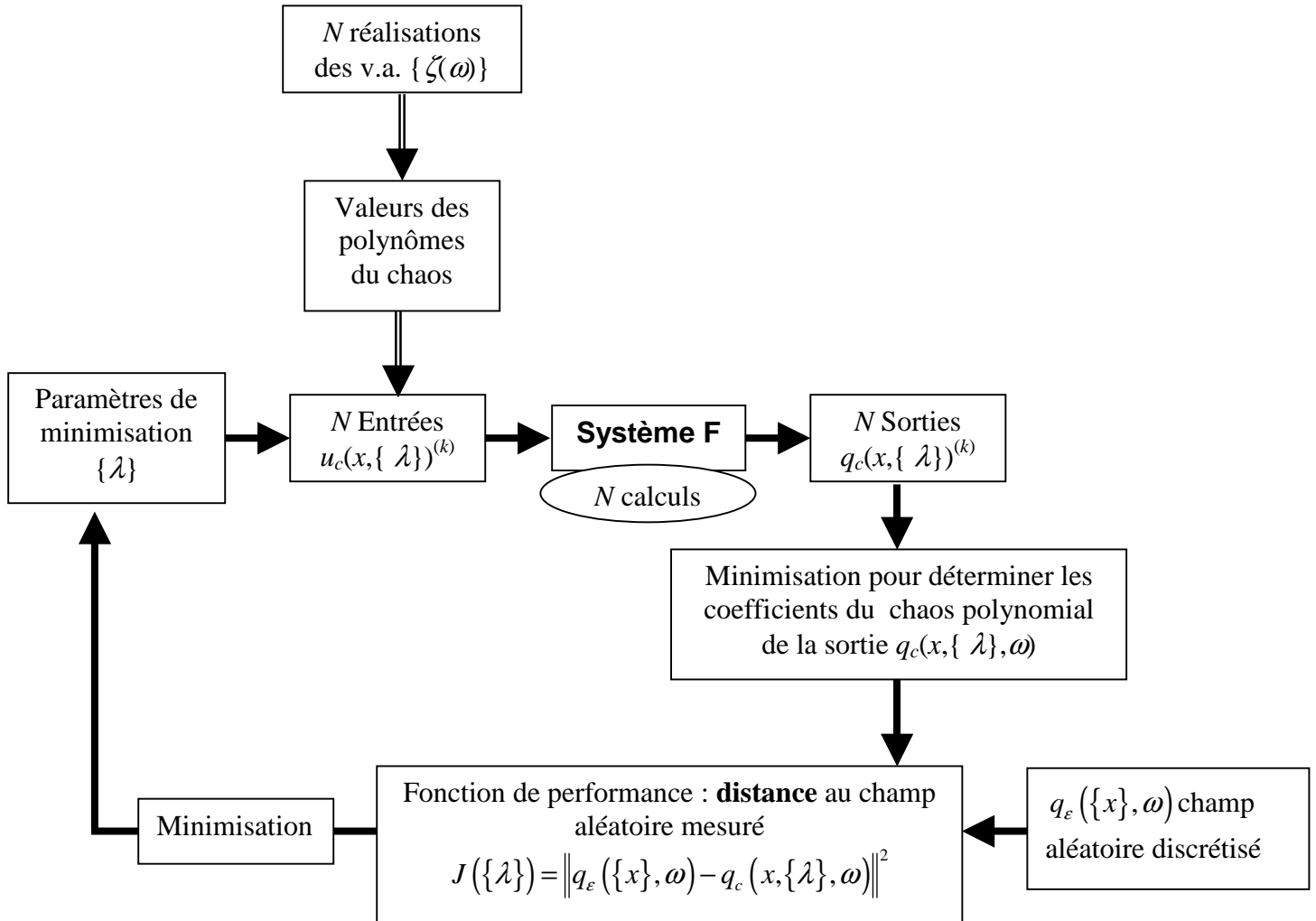


Figure 86. Méthode inverse stochastique

Cette méthode utilisant deux minimisations est la stricte transposition dans un cadre stochastique de la méthode inverse déterministe, à la différence que le système fournit une réponse stochastique, et que la fonction de performance mesure une distance dans l'espace des probabilités. L'inconvénient principal est qu'elle oblige à paramétriser la sortie, ce qui engendre des erreurs d'approximation.

On remarquera que la minimisation pour déterminer les coefficients du chaos polynomial de la sortie peut se faire de manière explicite via un système d'équations linéaires comme il a été détaillé au chapitre 3 seule la deuxième minimisation en $\{\lambda\}$ nécessiterait alors un algorithme de recherche de minimum.

4.5 Deuxième méthode : une seule minimisation

Plutôt que d'emboîter les deux minimisations, peut-être est-il plus judicieux de les regrouper en une seule. Pour ce faire nous allons introduire l'écart avec les mesures directement dans la fonction de performance de la méthode non intrusive. Connaissant les paramètres $\{\lambda\}$, les N réalisations $\{\{\zeta^{(1)}\} \dots \{\zeta^{(N)}\}\}$ du vecteur de variables aléatoires $\{\zeta(\omega)\}$ nous donnent N sorties simulées $q_c(x, \{\lambda\})^{(k)}$ mais aussi N réalisations $q_\varepsilon(\{x\})^{(k)}$ des mesures. La fonction de performance à minimiser devient alors :

$$(425) \quad J(\{\lambda\}) = \sum_{k=1}^N \left\| q_\varepsilon(\{x\})^{(k)} - q_c(x, \{\lambda\})^{(k)} \right\|^2$$

La procédure est détaillée dans la Figure 87.

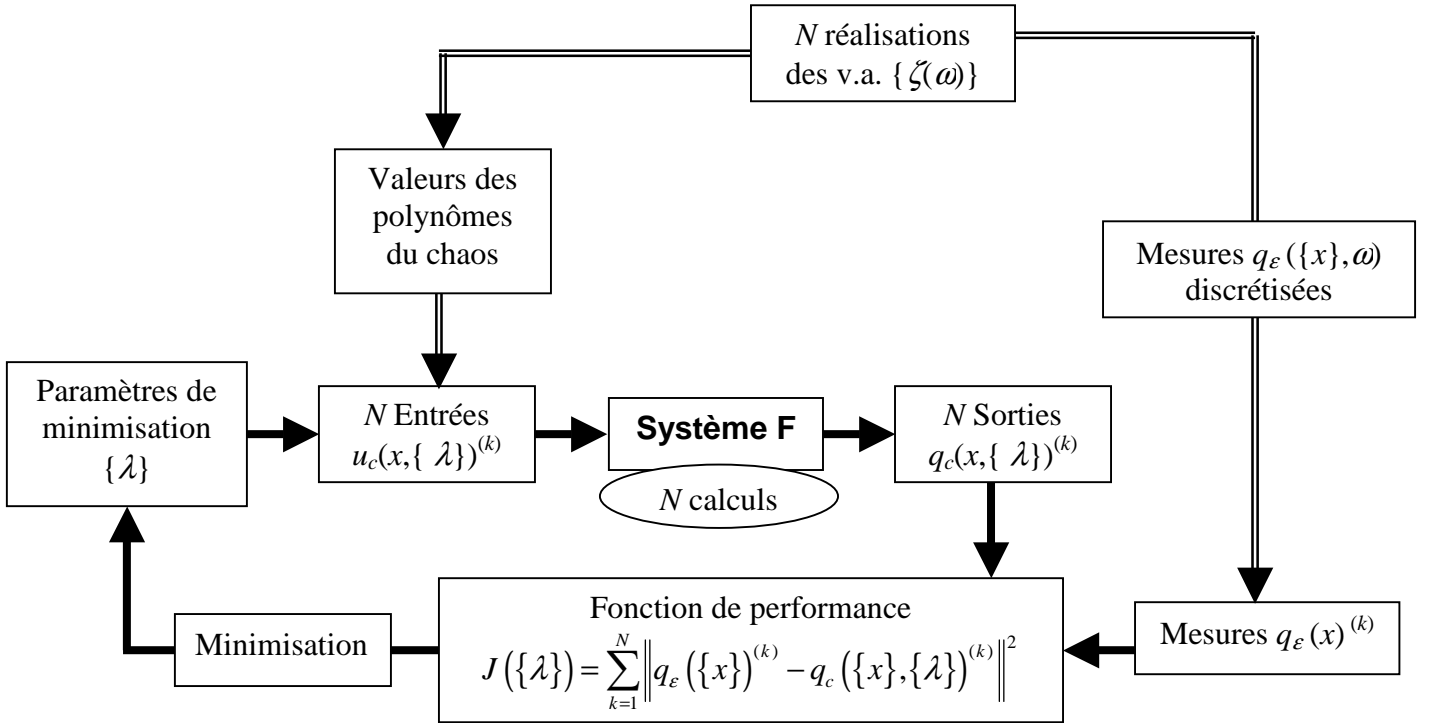


Figure 87. Méthode inverse stochastique

Cette méthode a comme avantage sur la précédente de ne nécessiter que la paramétrisation de l'entrée $u_c(x, \{\lambda\}, \omega)$ via le jeu de paramètres de minimisation $\{\lambda\}$, les éventuelles erreurs d'approximation engendrées au niveau d'une paramétrisation de la sortie sont donc évitées. En contrepartie il n'est plus possible ici de contrôler la projection de la sortie sur le chaos polynomial.

4.6 Limitation

La principale limitation des méthodes proposées est le nombre de calculs nécessaires. En effet à chaque appel de la fonction de performance N calculs directs doivent être réalisés. Plus le nombre de variables aléatoires est grand, plus ce nombre de calculs est grand (une étude

empirique des plans d'expérience indique que $N=(n-1)P$ calculs sont nécessaires pour déterminer les coefficients d'un chaos polynomial de degré P de n variables).

Cependant la résolution de ce type de problème suppose d'accepter d'en payer le prix : considérés isolements méthodes inverses et méthodes stochastiques sont chacune coûteuses, leur combinaison ne peut donc être que coûteuse. Cela ne veut pas dire que cette démarche est inapplicable, il faut seulement simplement évaluer le prix que l'utilisateur est prêt à mettre pour obtenir l'information recherchée : ce calcul en vaut-il la peine ou bien est-ce un gaspillage de ressources ?

5 Exemple Simple

La méthode stochastique inverse non intrusive par régression avec une seule minimisation est mise en oeuvre en utilisant CAST3M [VI-5] comme code de calcul et KALIF comme outil d'optimisation. Seule la méthode utilisant une seule minimisation est appliquée car elle est moins coûteuse et répond plus strictement au problème posé.

5.1 Définition de l'exemple

5.1.1 Problème inverse stochastique

L'exemple choisi est la poutre sur deux appuis en flexion utilisée précédemment. Considérons cette fois que la décomposition de la flèche sur le chaos polynomial est connue, et que le champ aléatoire de la rigidité est à déterminer.

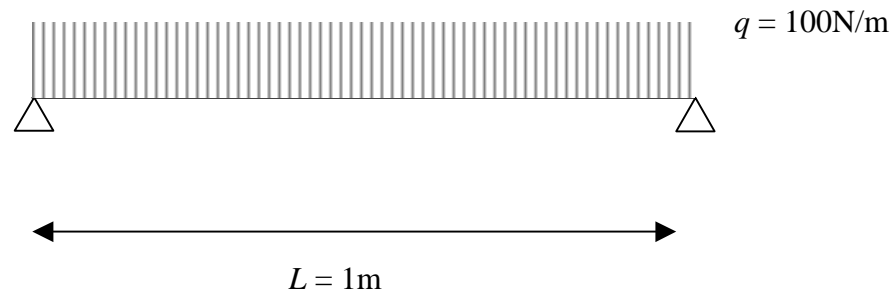


Figure 88. Poutre utilisée dans l'exemple

5.1.2 Simulation des données

La simulation des données (ici la flèche en tout point) est réalisée en se donnant une rigidité et en résolvant le problème direct. Pour simplifier le problème nous ne simulons pas des mesures de la flèche, mais directement le chaos polynomial de son champ aléatoire.

A partir d'une moyenne et d'une fonction de covariance connue (voir paramètres Table 26), nous réalisons le développement en série de Karhunen-Loève du champ aléatoire de la rigidité (les données « d'entrée »). Nous utilisons ensuite cette décomposition pour obtenir la projection sur le chaos polynomial du champ aléatoire de la flèche en utilisant la méthode non intrusive par régression (les données de « sortie »). Nous nous limitons à trois variables aléatoires dans la décomposition en série de Karhunen-Loève de la rigidité.

Nom	Symbole	Valeur
Moyenne	m_{EI}	10^{10} N.m^2
Ecart-type	σ_{EI}	10^9 N.m^2
Fonction de covariance	$C_{EI}(x, y)$	$C_{EI}(x, y) = \sigma_{EI}^2 \exp\left(-\frac{ x-y }{l}\right)$
Longueur de corrélation	l	1 m

Table 26. Paramètres de la rigidité

Le but de la méthode inverse est alors de déterminer les données d'entrée à partir des données de sortie, c'est à dire déterminer la décomposition de Karhunen-Loève de la rigidité en utilisant la décomposition sur le chaos polynomial de la flèche.

5.2 Préliminaires aux calculs

Plusieurs points doivent être examinés avant tout calcul : le modèle mécanique déterministe utilisé, la paramétrisation du résultat, le choix du plan d'expériences et de la fonction de performance et enfin le choix du logiciel et des algorithmes de minimisation.

5.2.1 Modèle mécanique déterministe

Le modèle mécanique est réalisé sous CAST3M. La poutre est maillée avec 10 éléments de poutre. Le chargement consiste en une force répartie de 100N/m.

5.2.2 Paramétrisation du résultat

Le résultat recherché est la projection de la rigidité sur le chaos polynomial des variables aléatoires de la flèche. Deux solutions s'offrent à nous. La première consiste à rechercher les valeurs nodales des coefficients du chaos polynomial aux nœuds du maillage du modèle mécanique, soit 11 valeurs par coefficient pour le maillage à dix éléments utilisé. La Table 27, indique le nombre de paramètres à déterminer suivant le degré du chaos polynomial recherché et le nombre de variables aléatoires. Nous voyons que même pour 3 variables aléatoires le nombre de paramètres de minimisation est important.

$d \backslash n$	1	2	3	4	5	6
1	22	33	44	55	66	77
2	33	66	110	165	231	308
3	44	110	220	385	616	924
4	55	165	385	770	1386	2310
5	66	231	616	1386	2772	5104
6	77	308	924	2310	5104	10208

Table 27. Pour l'exemple à 11 nœuds, nombre de paramètres à déterminer lors de la minimisation pour un degré d du chaos polynomial et un nombre n de variables aléatoires

La deuxième possibilité est de paramétrer les coefficients du chaos polynomial. Nous choisissons de rechercher les coefficients de leur décomposition sur une base sinusoïdale (par analogie avec les fonctions propres sinusoïdales de la décomposition en série de Karhunen-Loève) :

$$(426) \quad EI_C(\{\lambda\}, s, \omega) = \lambda_{00} + \sum_{i=1}^3 \zeta_i(\omega) [\lambda_{i0} \cos(\lambda_{i2} s + \lambda_{i3}) + \lambda_{i1} \sin(\lambda_{i2} s + \lambda_{i3})]$$

Les paramètres à déterminer étant les 13 réels λ_{ij} . Du fait de la symétrie du problème, nous imposons que $\lambda_{i3} = -\frac{\lambda_{i2}}{2}$, ce qui réduit le nombre de paramètres à 9. Leurs valeurs cibles sont données dans la Table 28.

Paramètre λ_{ij}		
i	j	Valeur théorique
0	0	10^{10}
1	0	$9,22 \cdot 10^8$
1	1	0
1	2	1,31
2	0	0
2	1	$-4,93 \cdot 10^8$
2	2	3,67
2	0	$2,94 \cdot 10^8$
2	1	0
2	2	6,58

Table 28. Valeurs théoriques des paramètres

5.2.3 Plan d'expériences

Le plan d'expérience choisi est un hypercube latin uniforme sur un domaine de largeur déterminé. Chaque variable aléatoire prend un nombre déterminé de valeurs uniformément réparties sur un intervalle donné et toutes les combinaisons de valeurs de toutes les variables aléatoires sont utilisées pour construire le plan d'expérience. Par exemple pour 3 variables aléatoires et 5 valeurs pour chaque variable, le plan d'expérience contiendra $5^3 = 125$ triplets de valeurs.

Un second plan d'expérience a été testé dans la suite : les racine des polynômes de Hermite de degré immédiatement supérieur à celui utilisé. Ce plan est supposé donner de bons résultats [VI-3].

5.2.4 Fonctions de performance

Plusieurs fonctions de performance seront testées. La plus classique mesure la somme des carrés des écarts absolus entre la mesure et la simulation de la flèche pour tous les nœuds :

$$(427) \quad J(\{\lambda\}) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m \left(v_\varepsilon(s_i)^{(k)} - v_c(s_i, \{\lambda\})^{(k)} \right)^2$$

où

$v_\varepsilon(s)$ est la décomposition sur le chaos polynomial de la flèche mesurée ;

$v_c(s, \{\lambda\})$ est la projection sur le chaos polynomial de la flèche calculée à partir des paramètres $\{\lambda\}$;
 s_i est la coordonnée du $i^{\text{ème}}$ nœud du modèle ;
 m est le nombre de nœuds du modèle ;
l'indice (k) indique que le calcul se fait au $k^{\text{ème}}$ point du plan d'expérience ;
 N est le nombre de points du plan d'expérience.

La seconde fonction de performance mesure le carré de l'écart en un seul point :

$$(428) \quad J(\{\lambda\}) = \sum_{k=1}^N \left(v_\varepsilon(s_I)^{(k)} - v_c(s_I, \{\lambda\})^{(k)} \right)^2$$

I étant un numéro de nœud fixé.

La dernière fonction de performance mesure la somme des carrés des écarts relatifs entre la mesure et la simulation de la flèche pour tous les nœuds :

$$(429) \quad J(\{\lambda\}) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m \left(\frac{v_\varepsilon(s_i)^{(k)} - v_c(s_i, \{\lambda\})^{(k)}}{v_\varepsilon(s_i)^{(k)}} \right)^2$$

5.2.5 Logiciel de minimisation

La minimisation est réalisée en utilisant le logiciel Kalif. Ce programme permet de piloter un code de calcul et possède cinq algorithmes d'optimisation :

- simplexe ;
- Powell ;
- Gradients conjugués
- Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (Bfgs) ;
- Bfgs avec recherche linéaire par la méthode d'Armijo.

Sans détailler les algorithmes, on peut signaler que les méthodes du simplexe et de Powell n'utilisent pas le gradient pour déterminer le minimum, et se sont avérées les plus efficaces dans la mise en œuvre de la méthode.

5.3 Mise en œuvre

5.3.1 Calcul préliminaire

Un premier fichier sous CAST3M permet de créer la base de données des sorties « réelles » (c'est à dire la flèche de la poutre). Pour cela le modèle probabiliste de la sortie est défini (un chaos polynomial dans notre cas) et le plan d'expériences des valeurs de variables aléatoires est créé. La valeur de la sortie pour chacune des valeurs de variables aléatoires est calculée et sauvegardée.

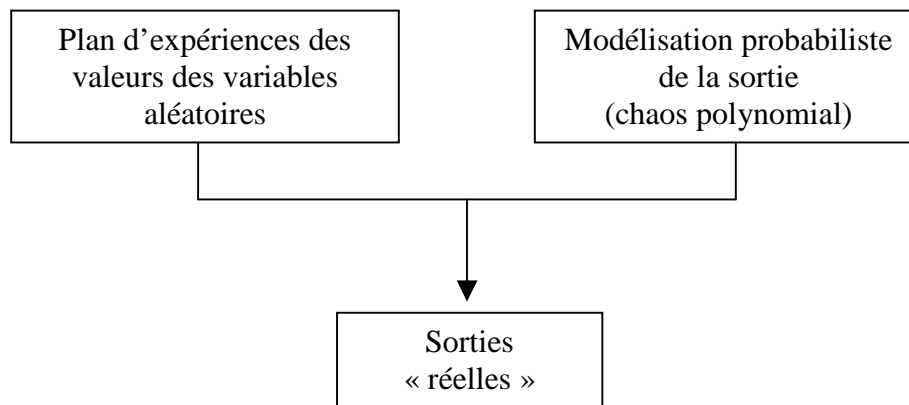


Figure 89. Calcul préliminaire

5.3.2 Calcul déterministe

Un deuxième fichier de calcul simule le résultat. Pour cela le modèle mécanique est défini dans ce fichier. Le chaos polynomial de l'entrée (la rigidité de la poutre) est paramétrisée. Pour chaque valeur des variables aléatoires du plan d'expérience un calcul mécanique est réalisé. Une fonction de performance compare ensuite ces valeurs aux sorties « réelles » obtenues dans la phase préliminaire.

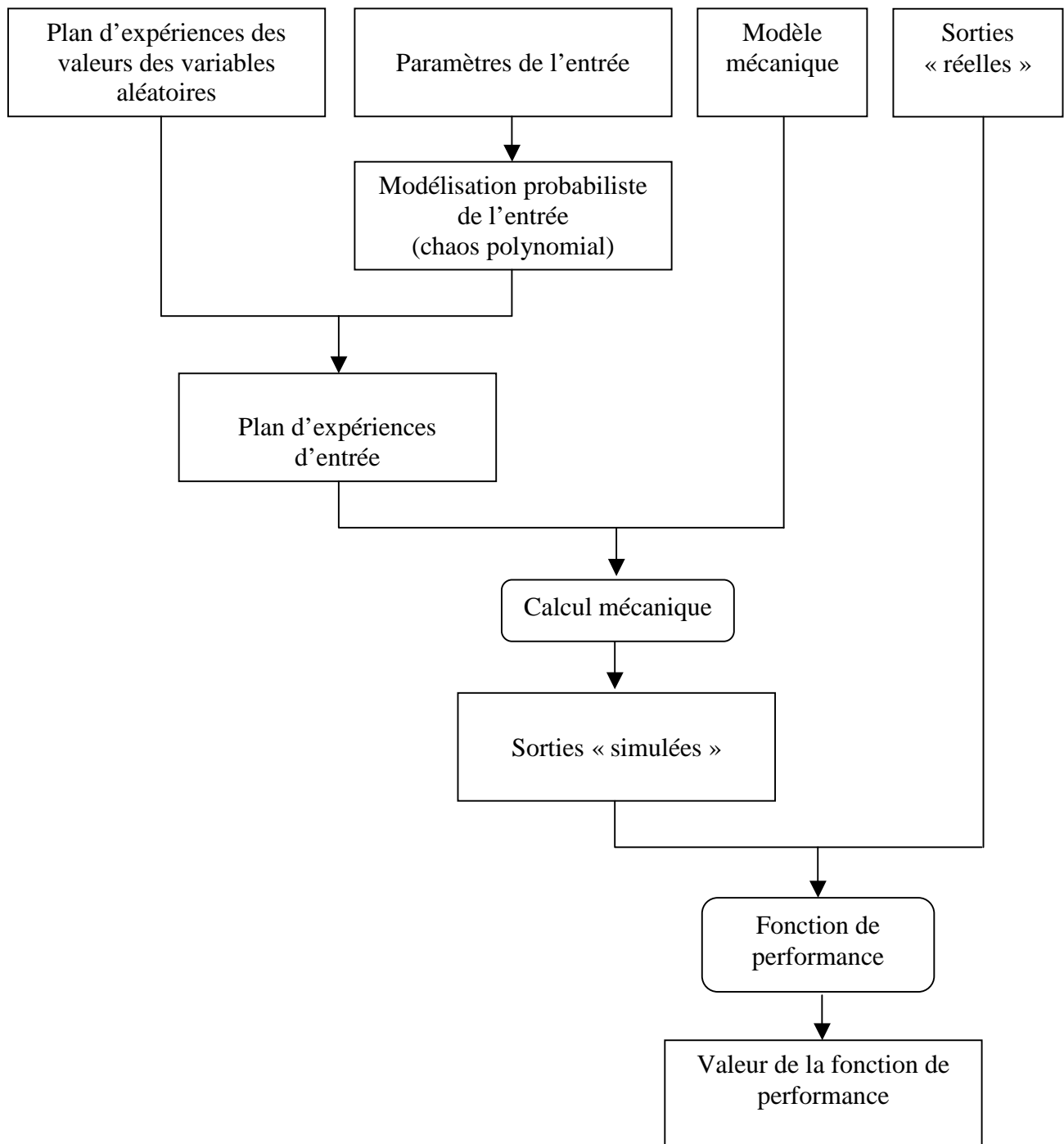


Figure 90. Calcul déterministe

5.3.3 Pilotage du code

A partir d'un jeu de valeurs de départ des paramètres de minimisation, le logiciel de minimisation Kalif lance CAST3M avec le second fichier et récupère la valeur de la fonction de performance. Il modifie ensuite la valeur des paramètres de l'entrée dans ce fichier selon les instructions de son algorithme de minimisation. Le processus est répété jusqu'à ce que le critère d'arrêt typique des minimisations soit atteint (modification relative de la fonction de performance sur les dernières itérations inférieure à une valeur limite fixée par l'utilisateur).

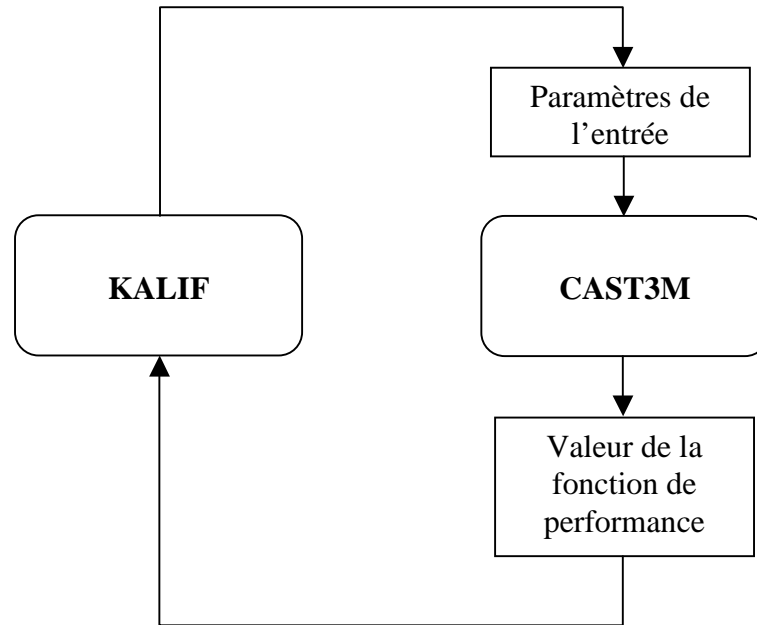


Figure 91. Processus de minimisation

Le point de départ et les intervalles utilisés lors de la minimisation sont précisés dans la Table 29. On utilise des points de départ de l'ordre de grandeur des paramètres à déterminer (10^8 pour les amplitudes, 1 pour les pulsations), et un intervalle très lâche (de 0 à 100 fois le point de départ pour les coefficients, 10 fois pour les pulsations)

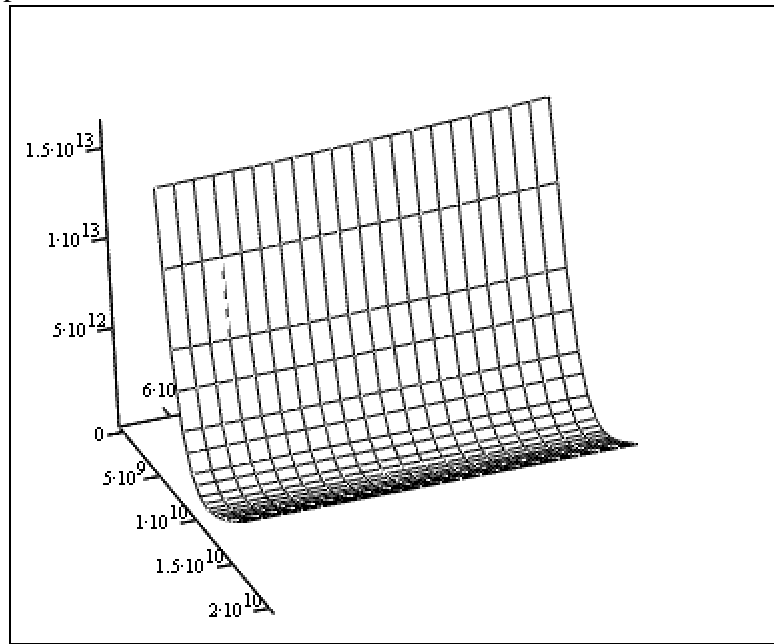
i	j	Valeur théorique	Point de départ	Intervalle
0	0	10^{10}	10^{10}	$[0, 10^{12}]$
1	0	$9,22 \cdot 10^8$	10^8	$[0, 10^{10}]$
1	1	0	10^8	$[0, 10^{10}]$
1	2	1,31	1	$[0, 10]$
2	0	0	-10^8	$[-10^{10}, 0]$
2	1	$-4,93 \cdot 10^8$	-10^8	$[-10^{10}, 0]$
2	2	3,67	1	$[0, 10]$
2	0	$2,94 \cdot 10^8$	10^8	$[0, 10^{10}]$
2	1	0	10^8	$[0, 10^{10}]$
2	2	6,58	1	$[0, 10]$

Table 29. Points de départ de la minimisation

5.3.4 Remarques

La mise en œuvre de la minimisation nous a permis de constater que les différents coefficients du chaos polynomial de l'entrée avaient des poids extrêmement éloignés dans la fonction de performance (Figure 92) : le gradient dans certaines directions est très supérieur à ce qu'il est dans les autres directions. Il est facile de déterminer le premier terme du chaos polynomial (la moyenne), mais l'échelle de variation de la fonction de performance qu'il induit rend négligeable les variations dues au second terme (qui a lui-même plus de poids que le troisième, etc...). Face à cette situation l'algorithme de minimisation se comporte comme si

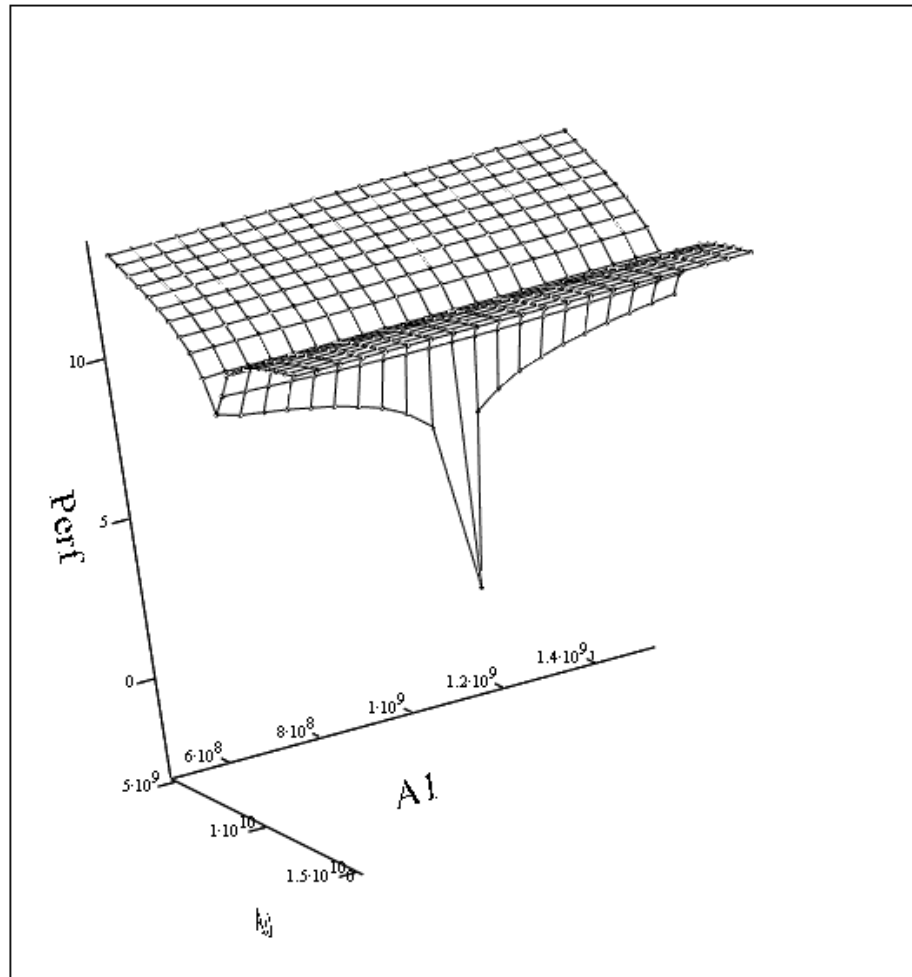
seul le premier terme avait de l'influence sur la fonction de performance et laisse les autres à leur valeur de départ.



(xx,yy,zz)

Figure 92. Exemple de fonction de performance ; coefficients du chaos polynomial sur les axes horizontaux, valeur de la fonction de performance sur l'axe vertical

Pour corriger ce problème il a été nécessaire de modifier la fonction de performance : plutôt que de représenter la somme des carrés des différences, nous avons pris le logarithme de cette somme. Cette modification tend à réduire la différence de valeur du gradient selon les directions *dans le cas qui nous intéresse*, et permet d'amplifier le gradient autour du minimum (Figure 93). Il est probable que d'autres problèmes demanderaient d'autres traitements. Le développement d'algorithmes de minimisation spécifiques tenant compte de cet écart de poids des coefficients pourrait s'avérer nécessaire.



(xx,yy,zln)

Figure 93. Exemple de fonction de performance utilisant une correction logarithmique ; coefficients du chaos polynomial sur les axes horizontaux, valeur de la fonction de performance sur l'axe vertical

Au niveau des algorithmes, la méthode du simplexe s'est révélée la plus efficace (en terme de convergence) pour atteindre le minimum, mais également la plus gourmande en appels à la fonction de performance. Les autres méthodes n'ont souvent pas réussi à converger, sans doute du fait de la forme particulière du gradient de la fonction de performance (même corrigée).

Un autre point est à noter : au départ nous avons choisi le plan d'expériences de valeurs des variables aléatoires pour que toutes les valeurs donnent une rigidité positive pour les paramètres de minimisation optimaux (étant donné la moyenne et l'écart type). Or au cours de la recherche du minimum l'algorithme peut faire prendre à ces paramètres des valeurs qui, pour certains points du plan d'expérience, donnent une rigidité négative. Il s'agit d'un problème de contraintes d'optimisation : les bornes des paramètres de minimisation doivent être choisies en fonction du plan d'expériences (ou vice versa) de telle manière que ces situations ne se présentent pas.

5.4 Résultats

5.4.1 Influence de la fonction de performance

Les trois fonctions de performance présentées §5.2.4 ont été testées avec un plan d'expérience de 125 points dans l'intervalle $[-0,1 ; 0,1]$ (ce nombre de point est le nombre maximum autorisant un temps de calcul convenable et cet intervalle est celui qui donnait les meilleurs résultats après une brève étude paramétrique).

Une première minimisation en utilisant la fonction de performance mesurant le carré des erreurs donne la solution présentée Table 30 et Figure 94.

i	j	Valeur théorique	Arrivée	Erreur%
0	0	10^{10}	10^{10}	0
1	0	$9,22 \cdot 10^8$	$9,01 \cdot 10^8$	- 2 %
1	1	0	0	0
1	2	1,31	0,49	- 62 %
2	0	0	$-7,97 \cdot 10^7$	
2	1	$-4,93 \cdot 10^8$	$-8,01 \cdot 10^8$	63 %
2	2	3,7	1,98	- 46 %
2	0	$2,94 \cdot 10^8$	$1,34 \cdot 10^8$	- 55 %
2	1	0	0	0
2	2	6,58	1,01	- 85 %

Table 30. Résultats pour un plan d'expérience de 125 points dans l'intervalle $[-0,1 ; 0,1]$; comparaison entre les valeurs théoriques des paramètres et celles obtenues par minimisation

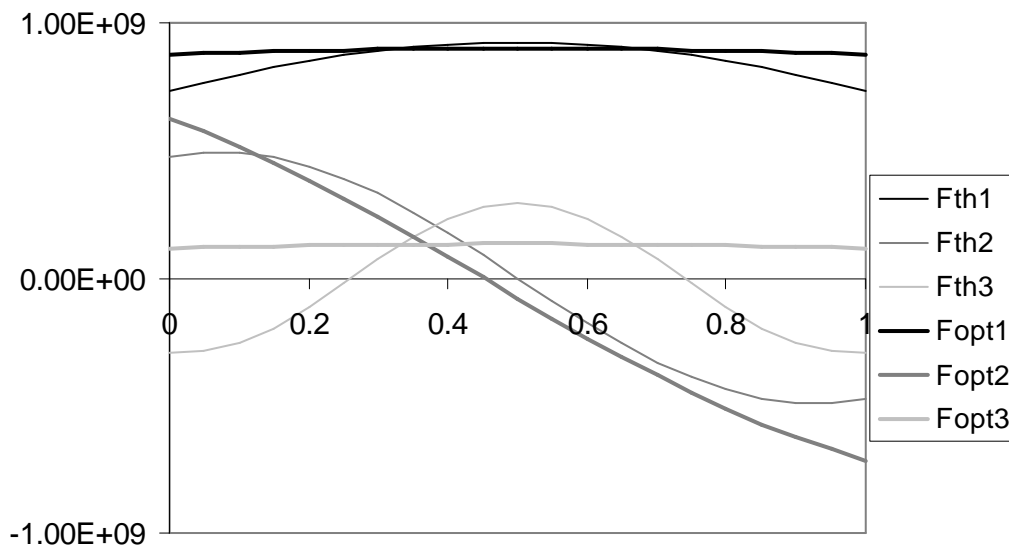


Figure 94. Fonction de performance de la somme des carrés des écarts absolus ; résultats pour un plan d'expérience de 125 points dans l'intervalle $[-0,1 ; 0,1]$; comparaison pour les trois premiers modes KL entre fonctions théoriques (*Fth*, en trait fin) et fonctions obtenues après minimisation (*Fopt* en gras).

Ce premier résultat appelle plusieurs remarques :

- La partie déterministe du champ (ici λ_{00}) est atteinte sans problème lors de la minimisation. S'il s'agissait d'un champ cela serait sans doute plus délicat et on retrouverait les soucis rencontrés dans les problèmes inverses déterministes.
- Les deux coefficients suivants sont approximativement obtenus : le niveau de valeur est correct, mais la courbure originelle n'est pas restituée.
- Le dernier coefficient est très mal retrouvé : il représente les plus petites variations modélisées et il n'y a pas assez d'information pour obtenir toutes ses variations. Cela peut être dû à un manque de points dans le plan d'expérience ou à un critère d'arrêt trop sévère dans l'algorithme d'optimisation.

Afin d'examiner les effets dus à la prise en compte de tous les points dans la fonction de performance, nous avons ensuite utilisé une fonction de performance mesurant uniquement l'écart sur un point de la poutre.

Deux nœuds de mesure ont été choisis : le premier nœud libre de la poutre (Table 31 et Figure 95) et le nœud central (Table 32 et Figure 96).

<i>i</i>	<i>j</i>	Valeur théorique	Arrivée	Erreur%
0	0	10^{10}	10^{10}	0
1	0	$9,22 \cdot 10^8$	$9,73 \cdot 10^8$	6 %
1	1	0	$2 \cdot 10^8$	
1	2	1,31	1,32	2 %
2	0	0	$-1,23 \cdot 10^8$	
2	1	$-4,93 \cdot 10^8$	$-6,01 \cdot 10^8$	23 %
2	2	3,7	3,2	-13 %
2	0	$2,94 \cdot 10^8$	$2,20 \cdot 10^8$	-24 %
2	1	0	$2,66 \cdot 10^8$	
2	2	6,58	2,76	-58 %

Table 31. Fonction de performance mesurant seulement l'écart sur le nœud le plus à gauche ; résultats pour un plan d'expérience de 125 points dans l'intervalle $[-0,1 ; 0,1]$; comparaison entre les valeurs théoriques des paramètres et celles obtenues par minimisation

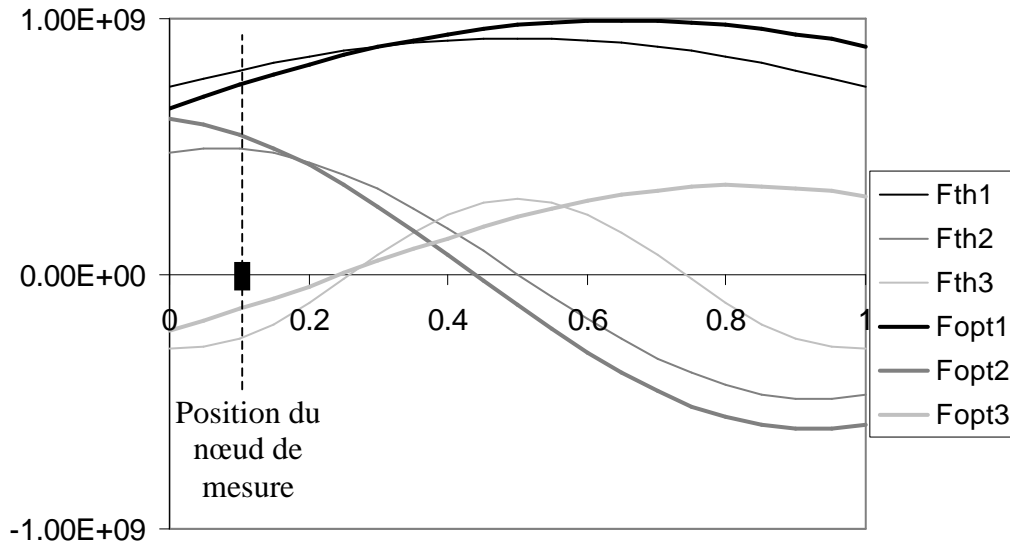


Figure 95. Fonction de performance mesurant seulement l'écart sur le nœud le plus à gauche ; résultats pour un plan d'expérience de 125 points dans l'intervalle $[-0,1 ; 0,1]$; comparaison pour les trois premiers modes KL entre fonctions théoriques (Fth, en trait fin) et fonctions obtenues après minimisation (Fopt en gras).

i	j	Valeur théorique	Arrivée	Erreur%
0	0	10^{10}	10^{10}	0
1	0	$9,22 \cdot 10^8$	$9,32 \cdot 10^8$	1 %
1	1	0	$2 \cdot 10^8$	
1	2	1,31	1,40	7 %
2	0	0	$-2,96 \cdot 10^7$	
2	1	$-4,93 \cdot 10^8$	$-1,11 \cdot 10^9$	124 %
2	2	3,7	8,6	134 %
2	0	$2,94 \cdot 10^8$	$2,73 \cdot 10^8$	- 7 %
2	1	0	$9,61 \cdot 10^8$	
2	2	6,58	1,64	- 73 %

Table 32. Fonction de performance mesurant seulement l'écart sur le nœud médian ; résultats pour un plan d'expérience de 125 points dans l'intervalle $[-0,1 ; 0,1]$; comparaison entre les valeurs théoriques des paramètres et celles obtenues par minimisation

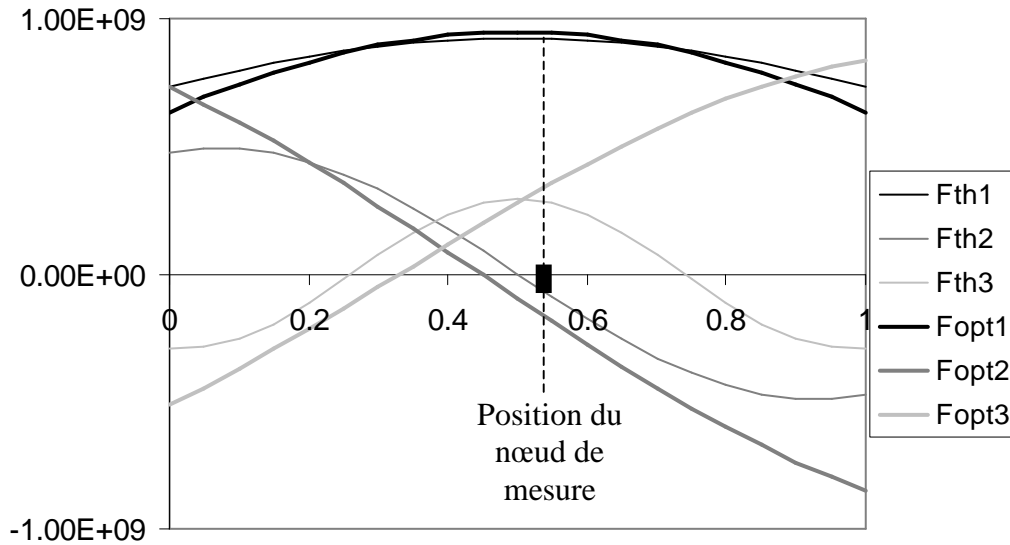


Figure 96. Fonction de performance mesurant seulement l'écart sur le nœud médian ; résultats pour un plan d'expérience de 125 points dans l'intervalle $[-0,1 ; 0,1]$; comparaison pour les trois premiers modes KL entre fonctions théoriques (Fth, en trait fin) et fonctions obtenues après minimisation (Fopt en gras).

Ces résultats nous permettent plusieurs remarques :

- La partie déterministe du champ (ici λ_{00}) est toujours atteinte sans problème lors de la minimisation
- Bien que seul un nœud soit utilisé pour évaluer l'écart entre le modèle et la mesure, les valeurs obtenues ne sont pas déraisonnablement éloignées de la théorie, et peuvent même être considérées comme meilleures pour les deux premiers modes que pour la somme des carrés des erreurs.
- Les deux nœuds de mesure donnent des résultats différents : le nœud extrême permet une meilleure approximation de tous les coefficients alors que le nœud médian donne un très bon résultat pour le premier mode, mais des résultats très éloignés de la théorie pour les modes suivants.
- Une fonction de performance utilisant seulement un point de mesure n'entraîne pas nécessairement des résultats médiocres, car l'information apportée par ce point de mesure est à multiplier par le nombre de calculs du plan d'expériences. Toutefois un seul nœud peut être insuffisant pour lever des ambiguïtés propres aux problèmes inverses : plusieurs configurations des paramètres d'entrée peuvent produire le même résultat pour chacun des calculs du plan d'expériences aux points de mesure. En outre l'information contenue en ce point peut être insuffisante pour obtenir un résultat de la précision souhaitée.

Un dernier type de fonction de performance découle des deux exemples précédents : la somme du carré des erreurs produit un résultat trop lisse, tandis que la prise en compte d'un seul point produit un résultat qui s'éloigne facilement de la théorie. Une troisième fonction de performance peut alors être testée : la somme des carrés des erreurs relatives, qui permet de donner à chaque point le même poids dans la fonction de performance. Ainsi les petits écarts

aux extrémités, qui apportent autant d'information que les grands écarts au milieu de la poutre, sont pris en compte au même niveau.
Les résultats sont présentés Table 33 et Figure 97.

i	j	Valeur théorique	Arrivée	Erreur%
0	0	10^{10}	10^{10}	0
1	0	$9,22 \cdot 10^8$	$9,13 \cdot 10^8$	1 %
1	1	0	0	0
1	2	1,31	1,04	7 %
2	0	0	$-7,98 \cdot 10^7$	
2	1	$-4,93 \cdot 10^8$	$-8,87 \cdot 10^9$	80 %
2	2	3,7	1,76	- 52 %
2	0	$2,94 \cdot 10^8$	$1,35 \cdot 10^8$	- 54 %
2	1	0	0	0
2	2	6,58	2,55	- 61 %

Table 33. Fonction de performance de la somme des carrés des écarts relatifs ; résultats pour un plan d'expérience de 125 points dans l'intervalle $[-0,1 ; 0,1]$; comparaison entre les valeurs théoriques des paramètres et celles obtenues par minimisation

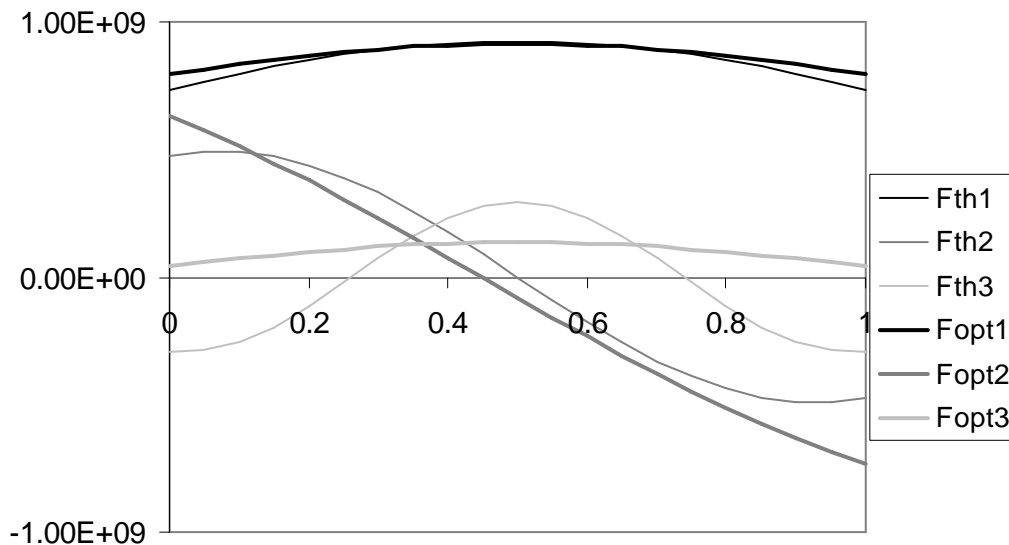


Figure 97. Fonction de performance de la somme des carrés des écarts relatifs ; résultats pour un plan d'expérience de 125 points dans l'intervalle $[-0,1 ; 0,1]$; comparaison pour les trois premiers modes KL entre fonctions théoriques (Fth, en trait fin) et fonctions obtenues après minimisation (Fopt en gras).

Ces résultats montrent que le premier mode est trouvé avec une très bonne précision. Le second est convenablement approximé. Le troisième n'est pas convenablement retrouvé, mais la valeur trouvée en est une approximation lointaine.

En conclusion nous pouvons estimer que la fonction de performance mesurant la somme des carrés des erreurs relatives semble un critère intéressant à utiliser comme fonction de performance.

5.4.2 Influence du plan d'expériences

Deux points peuvent être examinés dans l'influence du plan d'expériences : le nombre de points et la largeur de l'intervalle dans lequel ils sont choisis. On rappelle que ces points du plan d'expériences sont des valeurs que l'on donne aux variables aléatoires qui définissent le champ aléatoire de la rigidité de la poutre.

❖ Influence de la répartition des points dans le plan d'expérience

Les résultats obtenus dépendent beaucoup de la répartition des valeurs du plan d'expérience utilisé : d'une manière générale les plans contenant des points rapprochés donnent de meilleurs résultats que ceux répartissant les points sur un grand intervalle. Cependant un plan d'expérience trop resserré donne également de mauvais résultats : un optimum est à trouver (ici il se situe autour de l'intervalle $[-2,5 ; 2,5]$).

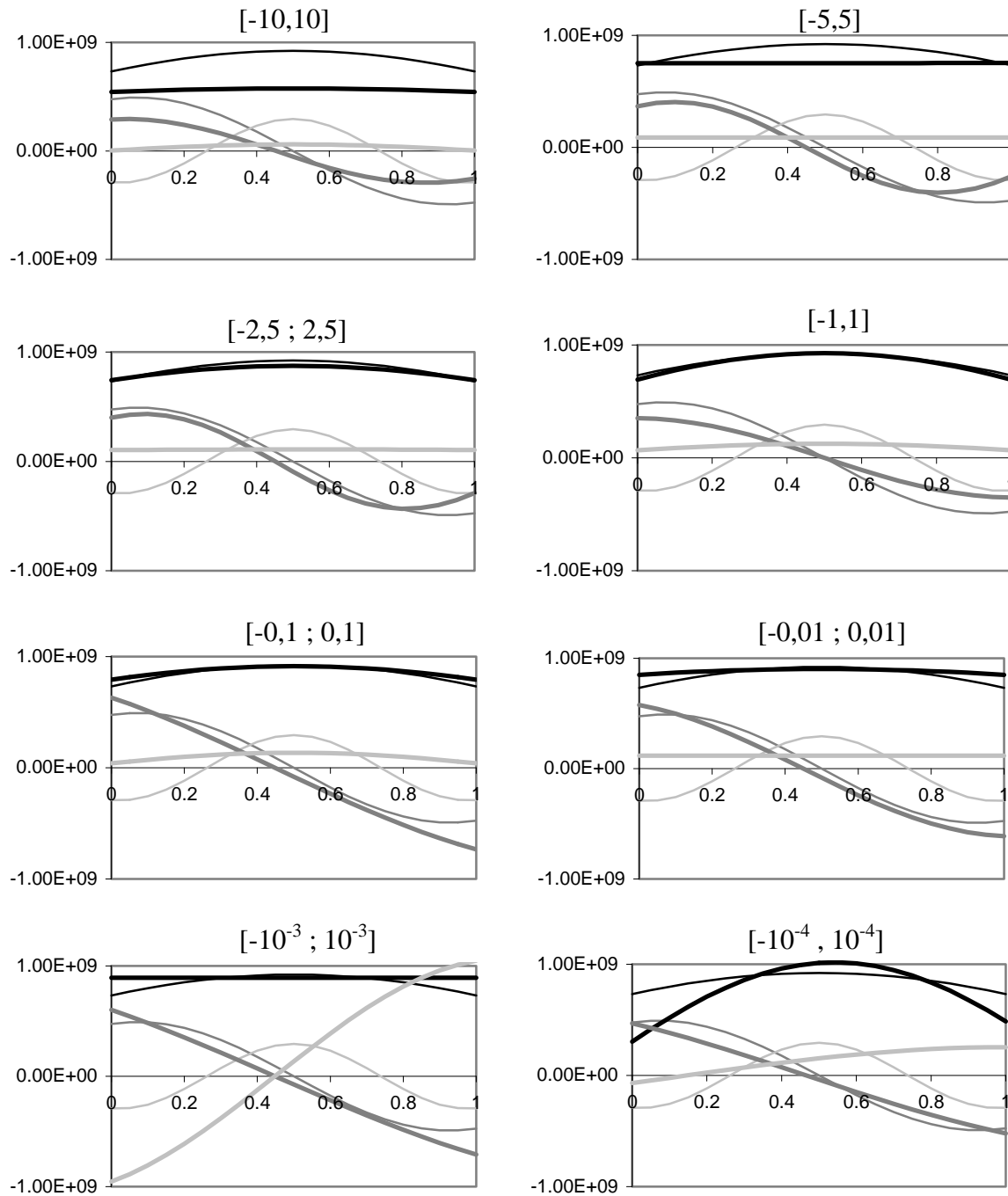


Figure 98. Résultats en fonction de la largeur d'un plan d'expérience de 125 points ; valeurs théoriques en trait fin, valeurs expérimentales en trait gras.

❖ Influence du nombre de points dans le plan d'expériences

Afin d'examiner l'influence du nombre de points dans le plan d'expérience sur les résultats, nous avons traité le problème pour un plan d'expériences où chaque variable aléatoire prend n valeurs régulièrement réparties dans l'intervalle $[-2,5 ; 2,5]$, le plan d'expériences étant constitué de toutes les combinaisons de ces n valeurs. Les résultats (Figure 99) montrent que même un plan d'expérience réduit (3 points par v.a. soit 27 points au total) donne de bons résultats. Des plans plus fournis donnent de meilleurs résultats, mais sans gain extraordinaire

au vu du nombre de calculs supplémentaires consentis. Une dégradation des résultats est même possible : nous n'avons pas ajouté de points en dehors de l'intervalle, nous l'avons seulement divisé d'une autre manière. Le plan d'expérience est alors modifié et peut donner des résultats moins bons. Par exemple ici pour 6 points nous perdons la courbure du premier coefficient.

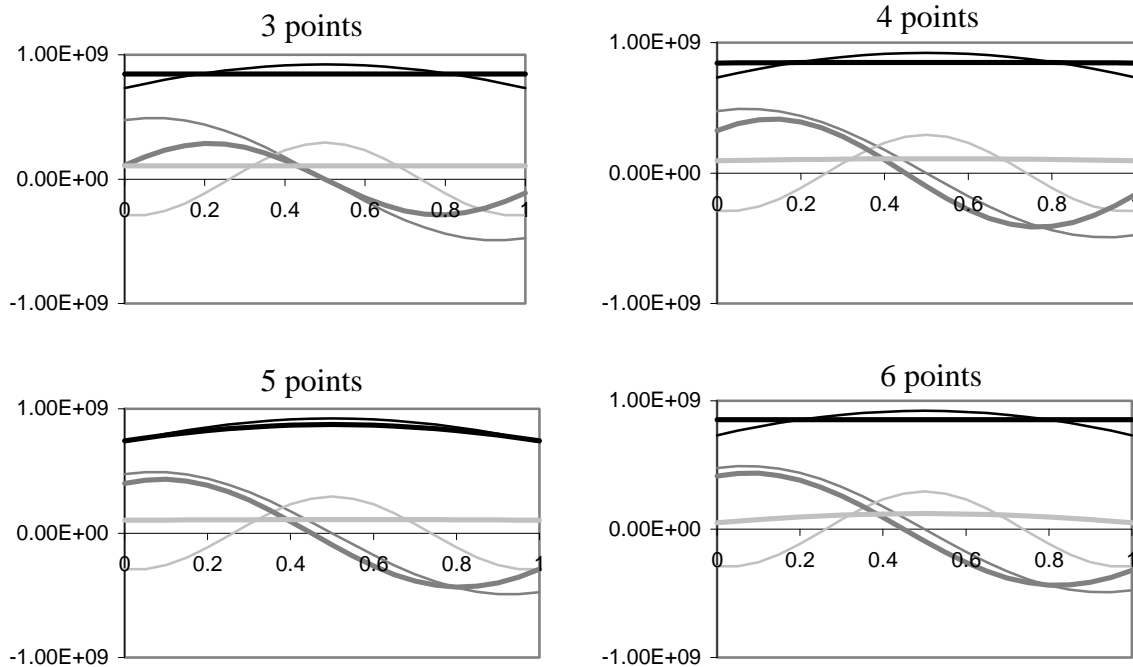


Figure 99. Résultats pour différents nombres de points par v.a. dans le plan d'expérience ; résultats théoriques en trait fin, résultats expérimentaux en gras

Ces graphiques montrent en outre qu'il est difficile d'augmenter la qualité des résultats de la méthode en augmentant le nombre de points dans le plan d'expériences.

❖ Plan d'expériences aux racines du polynôme

Il nous reste à examiner la pertinence d'un plan d'expériences situé aux racines du polynôme de degré immédiatement supérieur à celui utilisé. Ici nous utilisons le second degré au maximum (dans la décomposition de la flèche), il nous faut donc prendre les racines d'un polynôme de Hermite de degré 3, c'est à dire de :

$$(430) \quad H(x) = x^3 - 3x$$

Ses racines, arrondies à la troisième décimale, sont : $-1,732$; 0 ; $1,732$. Toutes les combinaisons de ces trois valeurs sont utilisées pour former le plan d'expériences, soit 27 points au total ce qui est égal au plus petit plan d'expérience uniforme utilisé. La Figure 100 montre qu'un tel plan donne des résultats comparables à ceux obtenus pour un plan d'expériences comptant huit fois plus de points.

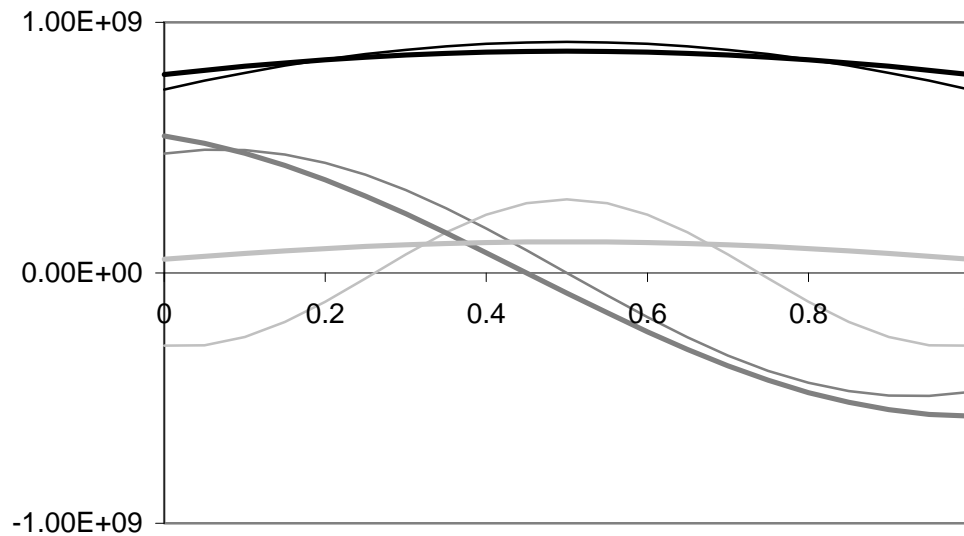


Figure 100. Résultats pour un plan d'expérience aux racines du polynôme de Hermite ; résultats théoriques en trait fin, résultats expérimentaux en gras

En outre il faut noter qu'ici l'ajout de points supplémentaire dans le plan d'expériences peut encore améliorer les résultats (au prix d'une multiplication du nombre de calculs) : par exemple la Figure 101 montre les résultats quand les valeurs $-2,5$ et $2,5$ sont ajoutées. Cependant cette amélioration ne se produit que pour certaines valeurs, ainsi quand les valeurs -1 et 1 sont ajoutées au plan d'expériences les résultats ne changent que marginalement (Figure 102).

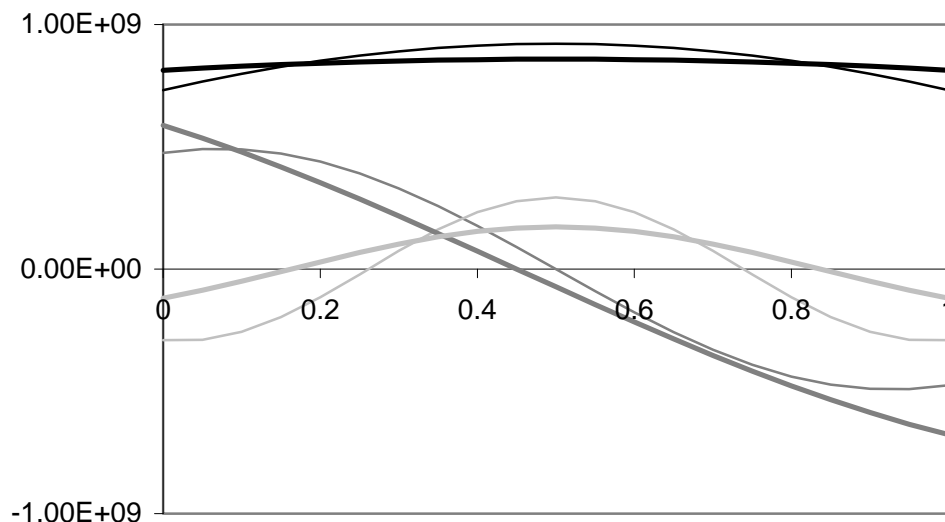


Figure 101. Résultats pour un plan d'expérience aux racines du polynôme de Hermite enrichi des deux valeurs $-2,5$ et $2,5$; résultats théoriques en trait fin, résultats expérimentaux en gras

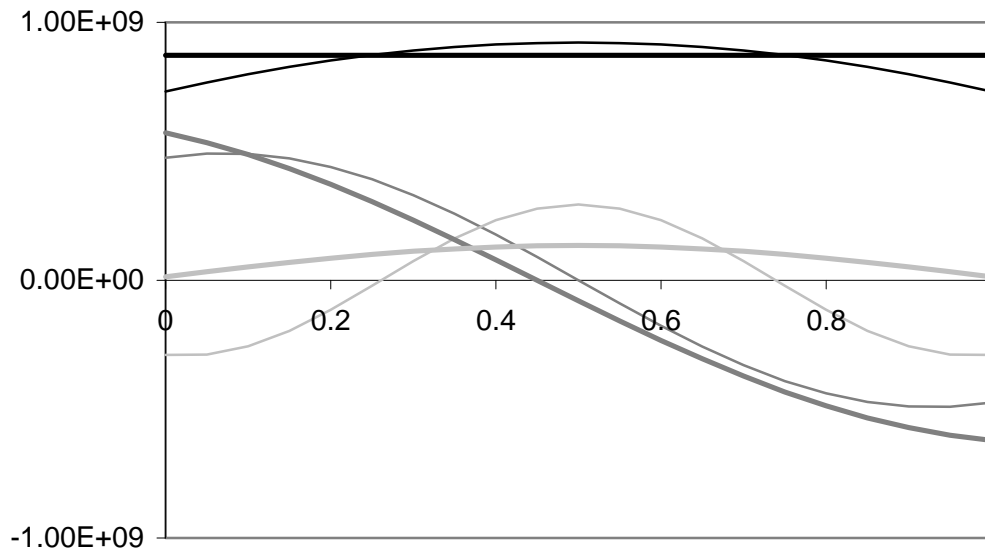


Figure 102. Résultats pour un plan d'expérience aux racines du polynôme de Hermite enrichi des deux valeurs -1 et 1 ; résultats théoriques en trait fin, résultats expérimentaux en gras

Ces résultats montrent que plus que la quantité de points dans le plan d'expériences c'est leur position qui influence la qualité des résultats. Dans cette optique il semble que le plan d'expérience constitué des racines du polynôme de degré immédiatement supérieur à celui utilisé dans les calculs constitue un choix intéressant.

5.4.3 Stabilité des résultats

Un point important à examiner dans les problèmes inverses est la stabilité des résultats. Les procédures de minimisation donnent la fausse impression que le problème inverse, auparavant insoluble, devient un problème classique. Il n'en est rien : si cette méthode permet de corriger l'absence d'existence et –si la minimisation est convenablement utilisée– d'unicité de la solution, elle ne modifie pas sa stabilité : si les points sont trop dispersés autour de leurs valeurs exactes, le modèle physique se révèle incapable de faire coïncider les mesures simulées et les mesures réelles lors de la minimisation sans modifier profondément les paramètres de l'entrée.

Cependant dans le cas de cette méthode stochastique une question se pose : quelle donnée sera perturbée en pratique ? Contrairement à un problème inverse déterministe type, ici les mesures ne sont pas utilisées telles quelles mais sont transformées en utilisant des méthodes statistiques et probabilistes (variogramme et décomposition en série de Karhunen-Loève par exemple). Dès lors le bruit des données est pris en compte lors de cette caractérisation (c'est « l'effet pépite » du variogramme par exemple). La décomposition sous forme de chaos polynomial permet de hiérarchiser l'aléatoire et donc de s'affranchir à priori du bruit blanc (en représentant d'abord les corrélations entre les points). Une instabilité analogue à celle rencontrée dans les problèmes inverses déterministes est à priori exclue.

Dès lors ce que l'on peut considérer comme du bruit dans les données est une sous- ou sur-estimation des coefficients du chaos polynomial de la flèche. Une sous-estimation des coefficients de 10% donne les résultats présentés Figure 103. La modification du résultat reste de l'ordre du raisonnable pour le premier coefficient. Si la sous-estimation atteint

20%, l'erreur sur le premier coefficient reste encore raisonnable (Figure 104). Le deuxième coefficient est par contre très affecté par l'erreur sur les données, sans que cela ne sorte des limites du raisonnable (il n'y a pas de divergence nette comme dans un problème inverse déterministe).

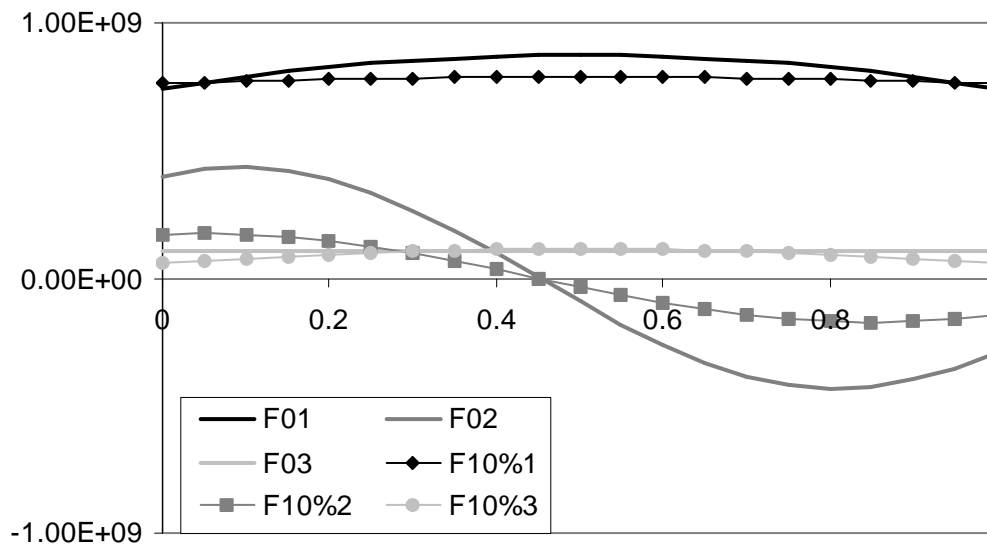


Figure 103. Comparaison des résultats pour des coefficients de la flèche sous-estimés de 10% (courbes F10%n) et les coefficients trouvés pour des données exactes; plan d'expérience de 5 points par v.a. dans l'intervalle $[-2,5 ; 2,5]$

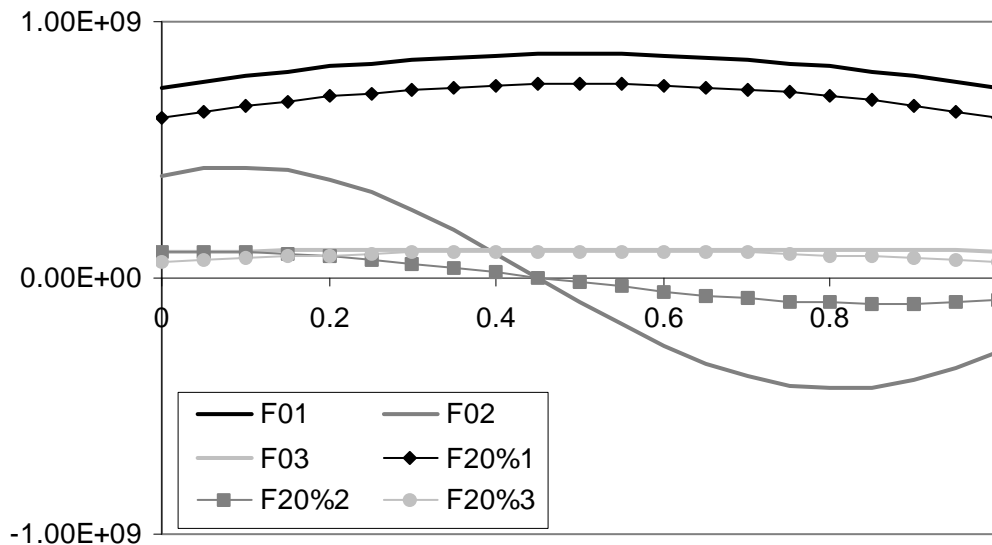


Figure 104. Comparaison des résultats pour des coefficients de la flèche sous-estimés de 20% (courbes F20%n) et les coefficients trouvés pour des données exactes; plan d'expérience de 5 points par v.a. dans l'intervalle $[-2,5 ; 2,5]$

6 Exemple complet

Cet exemple reprend le cas de la poutre déjà étudié au paragraphe 5, mais en utilisant la totalité de la méthode proposée. C'est à dire que cette fois le champ aléatoire de la flèche sera simulé et des mesures de ce champ serviront de données pour retrouver la rigidité.

6.1 Données

La rigidité de la poutre est modélisée par un champ aléatoire gaussien de moyenne EI_0 et de fonction de covariance exponentielle. Les données numériques, identique à celles de l'exemple précédent, sont rappelées dans la Table 34.

Nom	Symbole	Valeur
Moyenne	m_{EI}	$1,667 \cdot 10^6 \text{ N.m}^2$
Ecart-type	σ_{EI}	$1,667 \cdot 10^5 \text{ N.m}^2$
Fonction de covariance	$C_{EI}(x, y)$	$C_{EI}(x, y) = \sigma_{EI}^2 \exp\left(-\frac{ x-y }{l}\right)$
Longueur de corrélation	l	1 m
Longueur de la poutre	L	1 m
Chargement	q	100 N/m

Table 34. Paramètres de la rigidité

6.2 Génération des mesures

Les mesures sont générées en réalisant une décomposition en série de Karhunen-Loève de la rigidité, en se limitant à trois variables aléatoires :

$$(431) \quad EI(s, \omega) = EI_0 + \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} \zeta_i(\omega) \phi_i(s)$$

Ensuite une réalisation des variables aléatoires nous donne une trajectoire de la rigidité :

$$(432) \quad EI(s, \omega_0) = EI_0 + \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} \zeta_i(\omega_0) \phi_i(s)$$

La flèche correspondant au champ aléatoire de la rigidité est alors obtenue par un simple calcul déterministe en $M=1000$ points s_i régulièrement espacés sur la longueur de la poutre.

$$(433) \quad v_i = v(EI(s, \omega_0), s_i) \quad i=1 \dots M$$

Les mesures générées par cette méthode sont présentées dans la Figure 105.

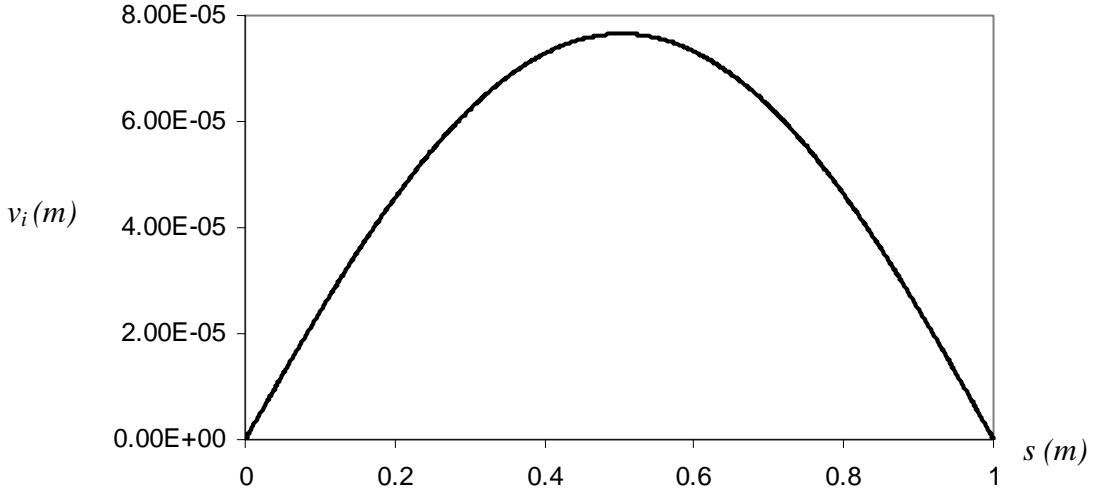


Figure 105. Mesures de la flèche générées pour l'exemple

6.3 Détermination de la fonction de covariance de la flèche (variogramme)

6.3.1 Etablissement du variogramme des mesures

Le variogramme mesure la covariance d'un champ de moyenne nulle. Une première étape consiste donc à soustraire aux mesures une flèche moyenne. Cette flèche moyenne est obtenue en minimisant l'écart au sens des moindres carrés entre les mesures et une flèche simulée par une rigidité EI_0 (variable de minimisation) constante sur toute la poutre :

$$(434) \quad EI_0^* = \min_{EI} \left(\sum_{i=1}^M (v(EI_0, s_i) - v_i)^2 \right)$$

$v(EI_0^*, s)$ est alors considéré comme la flèche moyenne $v_0(s)$. Si la variance du champ est faible alors cette valeur peut être considérée comme la moyenne du champ à déterminer. Il s'agit d'une linéarisation du problème, la moyenne ne pouvant pas en théorie être séparée des autres coefficients du chaos polynomial de cette façon.

Dans notre cas la valeur déterminée est $EI_0^* = 1,701 \cdot 10^6$, soit une différence de seulement 2% avec la vraie moyenne.

Il ne reste plus ensuite qu'à soustraire la valeur de la flèche moyenne aux mesures

$$(435) \quad v'_i = v_i - v_0(s_i) \quad i=1 \dots M$$

Il est ensuite possible de tracer le variogramme des points v'_i , tout d'abord en calculant $\Omega(h)$ l'ensemble des différences de valeur de flèche entre des points à la même distance h :

$$(436) \quad \Omega(h) = \left\{ v'_i - v'_j \mid \|s_i - s_j\|^2 = h^2 \right\}$$

Le variogramme expérimental des mesures est alors la variance de cet ensemble :

$$(437) \quad \gamma^*(h) = \frac{1}{2} \text{Var}[\Omega(h)]$$

Dans notre exemple nous déterminons ainsi le variogramme présenté Figure 106.

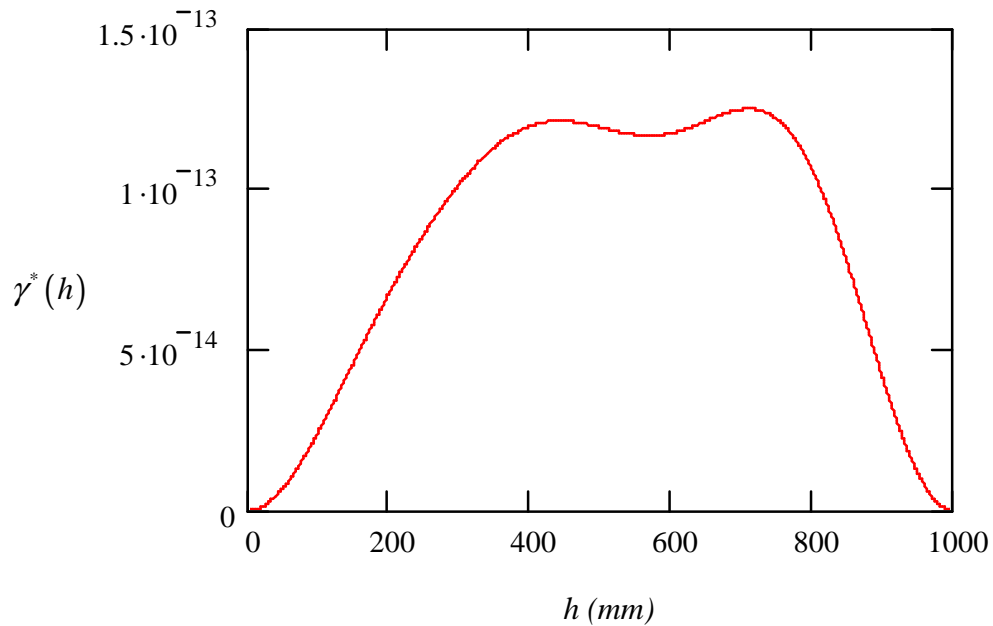


Figure 106. Variogramme expérimental des mesures

6.3.2 Recalage du variogramme théorique

Cette phase consiste à déterminer les paramètres de la fonction de covariance choisie en minimisant l'écart entre le variogramme théorique associé à cette fonction et le variogramme expérimental des mesures.

Nous choisissons ici d'attribuer une fonction de covariance exponentielle (438) à la flèche.

$$(438) \quad C_v(x, y) = \sigma_v^2 \exp\left(-\frac{|v(x) - v(y)|}{l_v}\right)$$

Les deux paramètres à déterminer sont donc la longueur de corrélation l_v et l'écart-type σ_v du champ aléatoire. Nous avons vu dans le Chapitre 4 que la détermination brute de ces valeurs par une procédure de minimisation de l'écart au sens des moindres carrés donne des résultats décevants. Nous allons donc dans ce cas essayer de déterminer ces paramètres de manière plus « manuelle ».

Les dernières valeurs d'un variogramme sont erronées du fait de la réduction du nombre de couples de points à la même distance h . En théorie la courbe devrait converger vers un palier identifiant la variance du champ. Cette limite semble se situer ici vers $h=500$: un palier semble vouloir se dessiner. Nous forçons son apparition en effaçant donc les dernières valeurs

de ce variogramme pour les remplacer par une valeur que l'on considère être la valeur palier moyenne. Ensuite nous pouvons lancer une procédure de minimisation pour déterminer les deux paramètres du variogramme théorique.

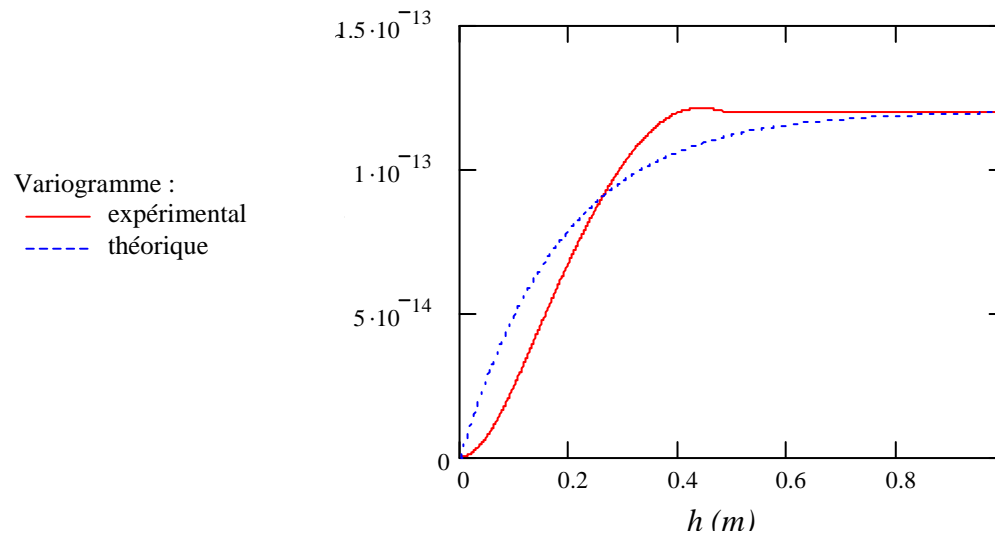


Figure 107. Variogrammes expérimental et théorique

Les paramètres déterminés via cette procédure sont présentés dans la Table 35.

Nom	Symbole	Valeur déterminée
Longueur de corrélation	l_v	0,232 m
Ecart-type	σ_v	$3,584 \cdot 10^{-7}$ m

Table 35. Paramètres du champ aléatoire de la flèche déterminés en utilisant le variogramme

6.4 Décomposition KL du champ de sortie

Une fois la fonction de covariance du champ aléatoire de la flèche déterminée, il est possible de réaliser une décomposition en série de Karhunen-Loève de ce champ. Nous utilisons les formules analytiques présentées dans le Chapitre 3 pour réaliser cette décomposition. La Figure 108 montre les fonctions propres trouvées et la Figure 109 montre la fonction de covariance théorique et celle obtenue après décomposition.

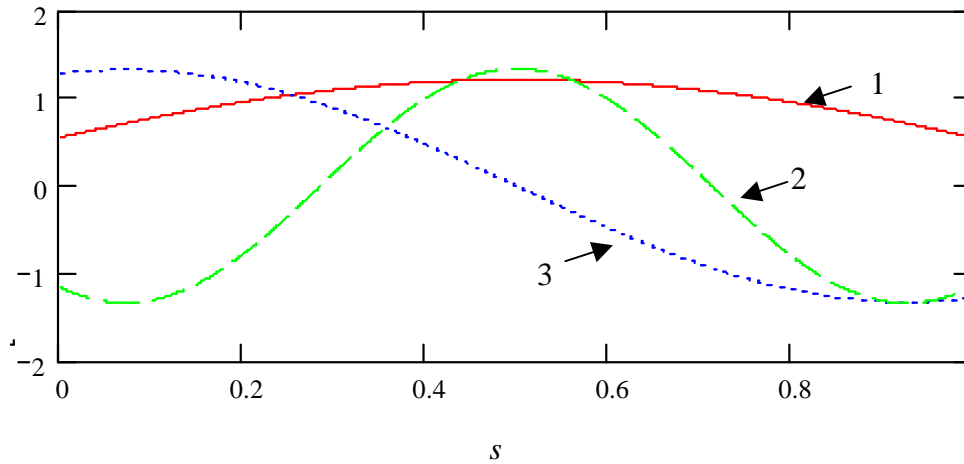


Figure 108. Trois premières fonctions propres de la covariance de la flèche

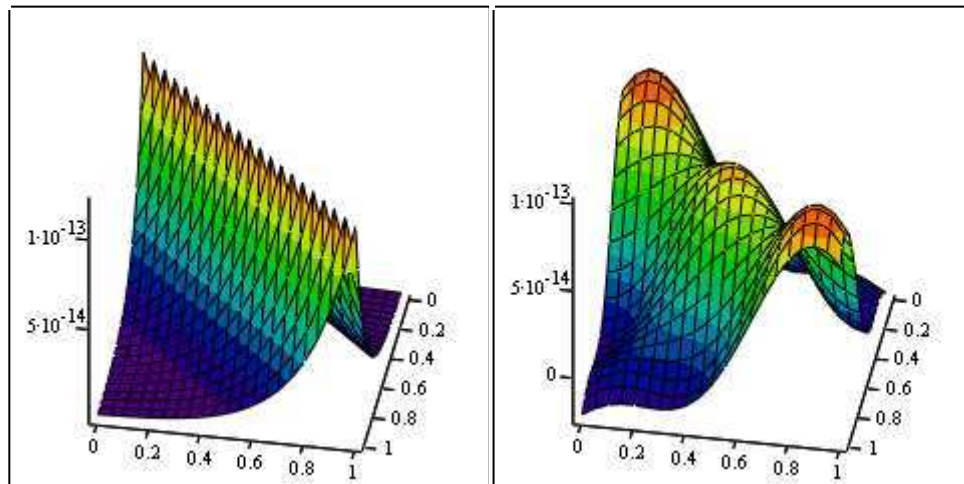


Figure 109. Fonction de covariance de la flèche théorique (gauche) et reconstituée à partir de la décomposition KL (droite)

6.5 Paramétrisation du résultat

A partir de ce point nous disposons d'une décomposition de la flèche similaire à ce que nous possédions dans l'exemple du §5. La même méthode peut alors être déroulée.

Le champ aléatoire de la rigidité étant l'inconnue à déterminer, nous cherchons sa décomposition sur un chaos polynomial des variables aléatoires de la décomposition expérimentale de la flèche. Ce chaos polynomial sera limité aux 3 variables aléatoires de la décomposition de la flèche et nous arrêtons le degré maximal des polynômes à 2, ce qui représente 10 polynômes indiqués dans la Table 36.

$\psi_0(\omega) = 1$
$\psi_1(\omega) = \zeta_1(\omega)$
$\psi_2(\omega) = \zeta_2(\omega)$
$\psi_3(\omega) = \zeta_3(\omega)$
$\psi_4(\omega) = \zeta_1(\omega)\zeta_1(\omega) - 1$
$\psi_5(\omega) = \zeta_2(\omega)\zeta_2(\omega) - 1$
$\psi_6(\omega) = \zeta_3(\omega)\zeta_3(\omega) - 1$
$\psi_7(\omega) = \zeta_1(\omega)\zeta_2(\omega)$
$\psi_8(\omega) = \zeta_2(\omega)\zeta_3(\omega)$
$\psi_9(\omega) = \zeta_1(\omega)\zeta_3(\omega)$

Table 36. Polynômes du chaos polynomial de la rigidité

La rigidité se décompose comme suit sur le chaos polynomial :

$$(439) \quad EI_C(\{\lambda\}, s, \omega) = \sum_{j=1}^m \psi_j(\{\zeta(\omega)\}) d_j(s, \{\lambda\})$$

La paramétrisation retenue pour les fonctions $d_j(s, \{\lambda\})$ est un polynôme de degré 2 :

$$(440) \quad EI_C(\{\lambda\}, s, \omega) = \sum_{j=1}^m \psi_j(\{\zeta(\omega)\}) \left(\lambda_{j0} + \lambda_{j1} \left(s - \frac{L}{2} \right) + \lambda_{j2} \left(s - \frac{L}{2} \right)^2 \right)$$

6.6 Minimisation

La fonction de performance choisie mesure la somme des carrés des écarts relatifs entre la mesure et la simulation de la flèche pour tous les 11 points de mesure :

$$(441) \quad J(\{\lambda\}) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m \left(\frac{v_e(s_i)^{(k)} - v_c(s_i, \{\lambda\})^{(k)}}{v_e(s_i)^{(k)}} \right)^2$$

Le plan d'expériences choisi est constitué des racines des polynômes du chaos polynomial de la flèche, c'est à dire : -2,5 ; -1,732 ; 0 ; 1,732 ; 2,5.

L'algorithme d'optimisation retenu est le simplexe, qui a donné de bons résultats dans l'exemple précédent.

6.7 Résultats

Les coefficients trouvés via la méthode inverse sont présentés dans la Figure 110.

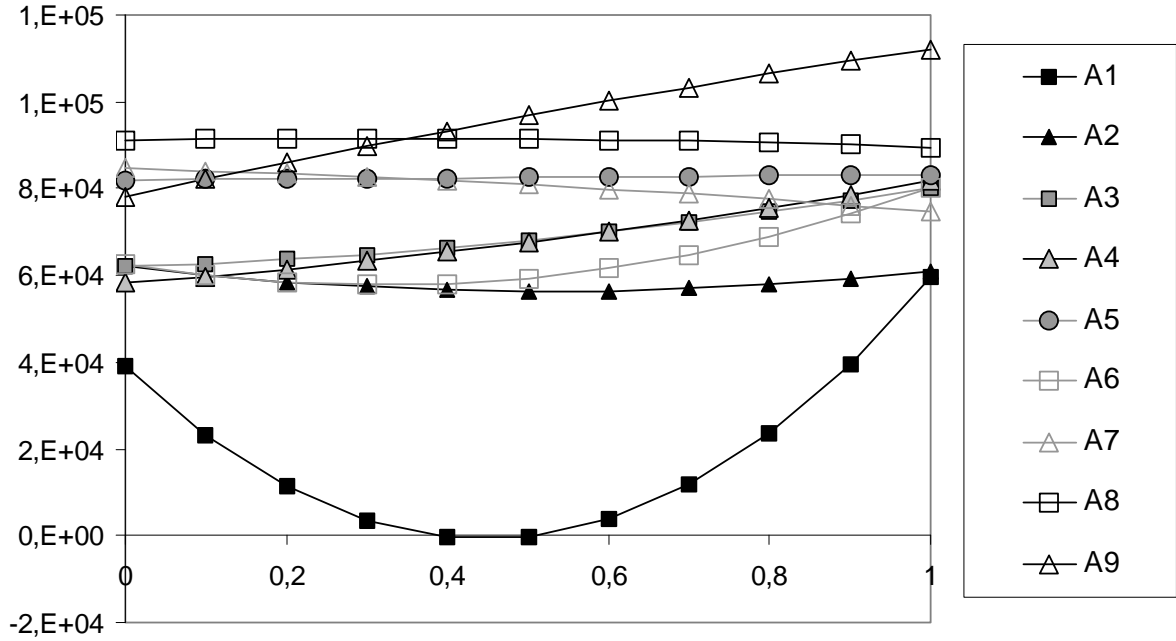


Figure 110. Coefficients du chaos polynomial

Il est difficile de se prononcer à priori sur la forme et la valeur de chacun des coefficients. Toutefois un test simple peut être effectué : le calcul de la variance du champ aléatoire décrit par ce chaos polynomial. En effet au chapitre 2 nous avons vu que la variance de la projection d'un champ aléatoire sur le chaos polynomial s'obtient à partir des coefficients via la formule :

$$(442) \quad \sigma^2(s) = \sum_{j=1}^m \mathbf{E}[\psi_j(\omega)^2] d_j(s)^2$$

L'écart-type obtenu de cette manière de ce calcul est présenté Figure 111 et comparé à l'écart-type théorique.

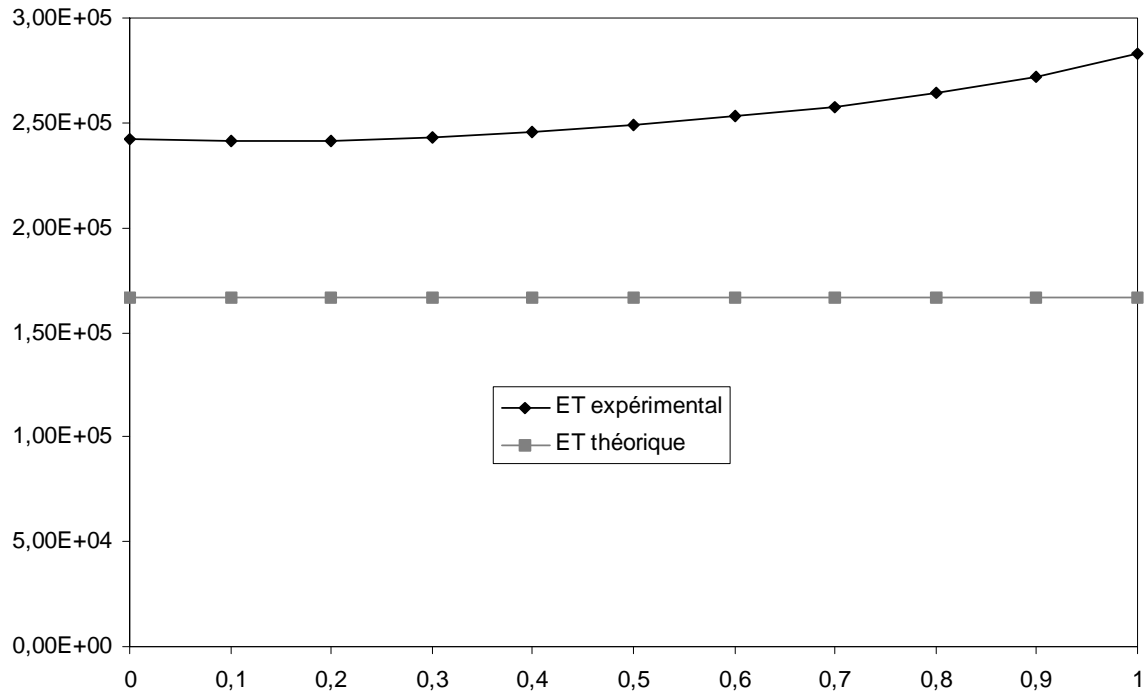


Figure 111. Ecart-type expérimental et théorique

Nous pouvons observer que l'écart-type est de 45% à 70% supérieur à la valeur théorique, cependant de nombreuses approximations ont été réalisées, en particulier l'ordre de la décomposition en série de Karhunen-Loève des données et le degré du chaos polynomial du résultat (deux paramètres influençant le nombre de calculs de manière non linéaire). L'utilisation de plus de variables aléatoires, et d'un degré plus élevé du chaos polynomial permettrait de réduire ces approximations, mais pour un coût de calcul plus important..

7 Conclusion

Les méthodes stochastiques non intrusives sont un outil permettant d'envisager la résolution de problèmes inverses stochastiques. La méthode retenue, basée sur un plan d'expériences et une minimisation, nécessite :

- un code de calcul résolvant le problème direct ;
- une décomposition des données (la sortie) sur le chaos polynomial ;
- une paramétrisation des coefficients du chaos polynomial du résultat (l'entrée) ;
- un outil de minimisation pouvant appeler le code de calcul.

La méthode consiste alors à faire coïncider pour un certain nombre de points une sortie simulée à partir d'une entrée paramétrisée et la sortie mesurée projetée sur le chaos polynomial. Le nombre de calculs nécessaires dans une telle méthode est important (pour chacun des points du plan d'expériences un calcul est réalisé, et ce à chaque appel à la fonction de performance), mais est inévitable car les problèmes inverses et les problèmes stochastiques sont chacun très gourmands en calculs. La réduction du nombre de calculs nécessaire passe par

- l'utilisation du plan d'expériences le plus restreint possible ;
- l'utilisation d'un algorithme de minimisation adapté au problème (de nombreux types d'algorithmes existent, permettant peut-être de réduire le nombre d'appels à la fonction de performance).

La mise en œuvre de la méthode sur un exemple complet (à partir de mesures simulées) nous a permis de constater la somme d'approximations que requerrait cette méthode : choix à priori d'une fonction de covariance pour les données et discrétisation de celles-ci, projection du résultat sur un chaos polynomial tronqué (nombre de variables aléatoires et degré des polynômes limités) via une paramétrisation de coefficients et un algorithme de minimisation. Les sources de perte d'information sont nombreuses, cette méthode doit donc être utilisée avec précaution.

Nous n'avons testé ici qu'une des voies possibles. Une autre méthode consiste à découpler les deux minimisations du problèmes inverses et à les imbriquer (§4.4) : la première minimisation permet de trouver la sortie simulée et la deuxième la fait coïncider avec la sortie mesurée.

Un autre choix peut consister à utiliser les schémas de quadrature (chapitre 3) pour résoudre de manière non intrusive le problème stochastique direct, ce qui ne laisse alors plus qu'une procédure de minimisation.

Bibliographie du chapitre VI

- [VI-1] B. SUDRET, A. DER KIUREGHIAN, *Stochastic Finite Element Methods and Reliability A State-of-the-Art Report*, Report No. UCB/SEMM-2000/08, Structural Engineering Mechanics and Materials, Department of Civil & Environmental Engineering, University of California, Berkley, 2000
- [VI-2] R. GHANEM, P. SPANOS, *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Springer-Verlag, 1991
- [VI-3] M. BERVEILLER, *Eléments finis stochastiques : approches intrusives et non intrusives pour des analyses de fiabilité*, Thèse, Université Blaise Pascal – Clermont II, 2005
- [VI-4] C. SOIZE, *A Nonparametric Model of Random Uncertainties for Reduced Matrix Models in Structural Dynamics*, Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 15, pp. 277-294
- [VI-5] P. VERPEAUX, A. MILLARD, T. CHARRAS, A. COMBESCURE, *A Modern Approach of Large Computer Codes for Structural Analysis*, Proc. SMIRT 10, Los Angeles, 1984

Chapitre VII

Conclusion et Perspectives

<i>1</i>	<i>Conclusion.....</i>	<i>209</i>
<i>2</i>	<i>Perspectives.....</i>	<i>210</i>

1 Conclusion

Le but de cette thèse était de développer une méthode permettant l'identification et la représentation d'un champ aléatoire. Deux domaines étaient concernés : les méthodes inverses et les méthodes probabilistes, chacun portant son lot de difficultés. La méthode détaillée dans le chapitre 5 propose de résoudre ce problème d'identification en couplant une méthode inverse par régression avec la méthode de calcul stochastique non intrusive basée elle aussi sur la régression.

Une première phase consiste à modéliser les mesures sous une forme stochastique. Typiquement on cherchera à modéliser les mesures sous la forme d'un jeu de variables aléatoires. Pour cela plusieurs méthodes existent : on citera en priorité la possibilité d'utiliser des méthodes de géostatisticiens pour déterminer la fonction de covariance du champ sous-jacent, puis d'utiliser la décomposition en série de Karhunen-Loève pour obtenir le développement spectral du champ aléatoire d'entrée sur un jeu de variables aléatoires.

Une fois les données exprimées sous forme de champs aléatoires, une deuxième phase consiste à paramétriser le champ aléatoire que l'on cherche à déterminer. Une base de l'espace aléatoire est le chaos polynomial. Il est donc naturel de chercher la décomposition de l'entrée sur un chaos polynomial tronqué à un degré compatible avec la puissance de calcul disponible. Pour simplifier considérablement le problème le jeu de variables aléatoires utilisé est le même que celui de la sortie. La paramétrisation de l'entrée porte alors sur les coefficients du chaos polynomial, qui sont des fonctions (de l'espace, du temps ou d'autres paramètres) dans le cas d'un champ aléatoire ou des réels dans le cas d'une variable aléatoire.

L'entrée étant discrétisée et paramétrisée, il ne reste plus qu'à la faire coïncider avec la sortie, elle aussi modélisée et discrétisée à partir des mesures. Une méthode de calcul attirante pour réaliser la correspondance est la méthode non intrusive par régression. Cette méthode est basée sur un plan d'expériences de réalisations des variables aléatoires : à chacun des membres du jeu de variables aléatoires sont attribuées plusieurs valeurs déterminées. Le calcul déterministe est alors lancé pour chacun des n points de ce plan d'expériences. Ces n résultats de calcul (un résultat pouvant être par exemple les déplacements nodaux dans le cas d'un calcul éléments finis, mais aussi un champ de température, une durée de vie, etc...) seront les n sorties « simulées ».

Les variables aléatoires de sortie étant les mêmes que celles d'entrée, nous obtenons aussi n sorties « réelles ».

C'est alors qu'intervient la régression : un algorithme d'optimisation est utilisé pour minimiser la différence entre la sortie réelle et la sortie simulée. Pour cela il modifie les paramètres de l'entrée et relance les n calculs du plan d'expériences autant de fois qu'il le faut. Quand le critère d'arrêt est atteint nous obtenons une solution du problème inverse stochastique.

Cette méthode souffre de plusieurs limitations :

- le coût de calcul nécessaire pour obtenir les n résultats à chaque itération de l'algorithme de minimisation ;
- les approximations successives qu'elle nécessite, en particulier lors de la projection des données et du résultat sur le chaos polynomial ;
- la quantité d'information (mesures) nécessaire pour la mettre en œuvre.

Cependant elle possède l'avantage d'être particulièrement simple à mettre en œuvre :

- aucune modification du code de calcul n'est nécessaire ;
- seul un logiciel d'optimisation permettant de piloter ce code est requis ;
- les résultats obtenus, les coefficients du chaos polynomial, sont directement exploitables.

2 Perspectives

La méthode présentée combine deux minimisations en une, principalement pour des raisons de simplicité (elle fonctionne ainsi avec un code de calcul et un logiciel de minimisation sans qu'il soit besoin de leur apporter de modification). Il serait intéressant d'examiner l'intérêt de découpler ces deux minimisations : peut-être la forme de la fonction de performance serait-elle alors différente, et la minimisation plus aisée (ce qui se traduirait par un coût de calcul moindre).

De plus il est également possible de calculer la sortie simulée en utilisant la méthode non intrusive par quadrature, ce qui ne laisserait plus alors qu'une seule minimisation. Cette méthode de calcul enregistre un regain d'intérêt en raison de la possibilité d'utiliser des schémas de cubature réduisant le nombre de calculs.

En outre l'influence du type de paramétrisation choisie pour le résultat (polynômes, série de Fourier,...) reste à examiner.

Enfin il apparaît nécessaire d'examiner plus attentivement la nécessité ou non de régulariser ce genre de problème. Bien que les exemples traités n'ont pas montré d'instabilité, cependant il n'est pas possible d'en déduire une propriété générale. De nombreuses méthodes de régularisation existent pour les problèmes inverses déterministes, qui peuvent être transposées dans le domaine stochastique si besoin était.

Liste des tableaux

<i>Table 1. Désignation des différents problèmes associés à l'exemple</i>	<i>21</i>
<i>Table 2. Résolution du problème inverse par minimisation pour des données non bruitées pour le point de départ (1 ;1 ;1).</i>	<i>39</i>
<i>Table 3. Résolution du problème inverse par minimisation pour des mesures ponctuellement modifiées pour le point de départ (1 ;1 ;1)</i>	<i>40</i>
<i>Table 4. Valeurs du paramètre de régularisation obtenues par la formule de Tikhonov pour les 4 jeux de données.</i>	<i>43</i>
<i>Table 5. Erreur quadratique (arrondie à la deuxième décimale) en fonction du paramètre de régularisation pour les quatre jeux de mesures bruitées de la Figure 14.</i>	<i>45</i>
<i>Table 6. Nombre de terme dans la série (40) en fonction du degré d des polynômes et du nombre n de variables aléatoires ; on remarque le schéma de remplissage du tableau : l'élément (i,j) est la somme de l'élément (i-1,j) et (i,j-1)</i>	<i>69</i>
<i>Table 7. Correspondance entre les polynômes et les lois de variables aléatoires</i>	<i>71</i>
<i>Table 8. Correspondance entre les polynômes et les lois de variables aléatoires</i>	<i>71</i>
<i>Table 9. Quatre premiers Coefficients du chaos polynomial pour une variable log-normale de moyenne 1 et d'écart-type 0,.....</i>	<i>73</i>
<i>Table 10. Polynômes du chaos.....</i>	<i>81</i>
<i>Table 11. Coefficients c_{ijk} non nuls, triés par k croissant (pour toutes les autres combinaisons d' indices les coefficients c_{ijk} sont nuls)</i>	<i>83</i>
<i>Table 12. Les 14 équations pour les coefficients c_{ijk} non nuls.....</i>	<i>84</i>
<i>Table 13. Valeurs numériques utilisées pour l'exemple</i>	<i>86</i>
<i>Table 14. Valeurs numériques de ω_n et λ_n pour $L=5m$</i>	<i>100</i>
<i>Table 15. Valeurs propres numériques et analytiques pour 50 éléments.....</i>	<i>108</i>
<i>Table 16. Paramètres de la rigidité</i>	<i>123</i>
<i>Table 17. Premiers polynômes du chaos d'une variable aléatoire gaussienne.....</i>	<i>124</i>
<i>Table 18. Coefficients c_{jk} non nuls triés par k croissants</i>	<i>125</i>
<i>Table 19. Les 14 équations pour les coefficients c_{jk} non nuls</i>	<i>125</i>
<i>Table 20. Paramètres de la rigidité</i>	<i>132</i>
<i>Table 21. Trois premières valeurs propres de la décomposition en série de Karhunen-Loève de la rigidité</i>	<i>132</i>
<i>Table 22. Paramètres utilisés</i>	<i>149</i>
<i>Table 23. Mesures du champ pour $\sigma_F^2 = 1$ et $l = 2,5$; valeurs tronquées à la 2^{ème} décimale</i>	<i>149</i>

<i>Table 24. Résumé des résultats de dix simulations du même processus aléatoire ; moyenne et écart-type des résultats ; valeurs exactes $\sigma_F^2=1$ et $l=2,5$</i>	<i>156</i>
<i>Table 25. Paramètres utilisés</i>	<i>157</i>
<i>Table 26. Paramètres de la rigidité.....</i>	<i>179</i>
<i>Table 27. Pour l'exemple à 11 nœuds, nombre de paramètres à déterminer lors de la minimisation pour un degré d du chaos polynomial et un nombre n de variables aléatoires</i>	<i>179</i>
<i>Table 28. Valeurs théoriques des paramètres.....</i>	<i>180</i>
<i>Table 29. Points de départ de la minimisation</i>	<i>184</i>
<i>Table 30. Résultats pour un plan d'expérience de 125 points dans l'intervalle [-0,1 ; 0,1] ; comparaison entre les valeurs théoriques des paramètres et celles obtenues par minimisation</i>	<i>187</i>
<i>Table 31. Fonction de performance mesurant seulement l'écart sur le nœud le plus à gauche ; résultats pour un plan d'expérience de 125 points dans l'intervalle [-0,1 ; 0,1] ; comparaison entre les valeurs théoriques des paramètres et celles obtenues par minimisation</i>	<i>188</i>
<i>Table 32. Fonction de performance mesurant seulement l'écart sur le nœud médian ; résultats pour un plan d'expérience de 125 points dans l'intervalle [-0,1 ; 0,1] ; comparaison entre les valeurs théoriques des paramètres et celles obtenues par minimisation</i>	<i>189</i>
<i>Table 33. Fonction de performance de la somme des carrés des écarts relatifs ; résultats pour un plan d'expérience de 125 points dans l'intervalle [-0,1 ; 0,1] ; comparaison entre les valeurs théoriques des paramètres et celles obtenues par minimisation</i>	<i>191</i>
<i>Table 34. Paramètres de la rigidité.....</i>	<i>198</i>
<i>Table 35. Paramètres du champ aléatoire de la flèche déterminés en utilisant le variogramme.....</i>	<i>201</i>
<i>Table 36. Polynômes du chaos polynomial de la rigidité.....</i>	<i>203</i>

Liste des figures

<i>Figure 1. Algorithme de résolution numérique générale de problèmes inverses.</i>	<i>19</i>
<i>Figure 2. poutre en flexion trois points.</i>	<i>20</i>
<i>Figure 3. Relation entre les erreurs relatives.</i>	<i>24</i>
<i>Figure 4. Résolution du problème direct pour deux rigidités différentes (courbes grise et noire) ; (a) : rigidités ; (b) : flèches.</i>	<i>26</i>
<i>Figure 5. Deux résolutions du problème direct pour deux fonctions EI de forme différentes (P=10N, q=0.5m, L=1m).</i>	<i>27</i>
<i>Figure 6. Flèche mesurée ; poutre entière (a) et zone erronée (b).</i>	<i>29</i>
<i>Figure 7. Rigidité de flexion correspondant à la flèche de la Figure 6.</i>	<i>29</i>
<i>Figure 8. Résolution du problème inverse pour deux flèches légèrement différentes (courbes grise et noire) ; (a) : flèches ; (b) : rigidités.</i>	<i>31</i>
<i>Figure 9. Représentation de l'inverse de la rigidité présentée Figure 8b.</i>	<i>31</i>
<i>Figure 10. Données non bruitées. L=5m, q=2m, P=10N.</i>	<i>33</i>
<i>Figure 11. Rigidités résultats de l' inversion directe ; mesures non bruitées ; interpolation des mesures par des polynômes de degré 4 et 6 ; valeur exacte en gris</i>	<i>33</i>
<i>Figure 12. Données légèrement modifiées. L=5m, q=2m, P=10N</i>	<i>33</i>
<i>Figure 13. Rigidités résultats de l' inversion directe ; données légèrement modifiées ; interpolation des mesures par des polynômes de degré 4 et 6 ; valeur exacte en gris</i>	<i>34</i>
<i>Figure 14. Données bruitées (c_v=10%); L=5m, q=2m, P=10N.</i>	<i>35</i>
<i>Figure 15. Rigidités résultats de l' inversion directe ; données bruitées ; interpolation des mesures par des polynômes de degré 4 (a) et 6 (b).</i>	<i>36</i>
<i>Figure 16. Rigidités exacte et calculée par minimisation pour des mesures exactes.</i>	<i>39</i>
<i>Figure 17. Rigidités exacte et calculée par minimisation pour les mesures ponctuellement modifiées</i>	<i>40</i>
<i>Figure 18. Rigidités calculées par minimisation sans régularisation pour les 4 jeux de mesures bruitées</i>	<i>41</i>
<i>Figure 19. Rigidité trouvée par minimisation avec régularisation pour le 2^{ème} jeu de mesures bruitées avec différentes valeurs du paramètre de régularisation.</i>	<i>44</i>
<i>Figure 20. Rigidité trouvée par minimisation avec régularisation pour le 2^{ème} jeu de mesures bruitées avec un paramètre de régularisation autour de 0,01.</i>	<i>44</i>
<i>Figure 21. Erreur quadratique en fonction du paramètre de régularisation pour quatre jeux de données simulés avec un coefficient de variation de 10%.</i>	<i>46</i>
<i>Figure 22. Rigidités calculées par minimisation avec régularisation $\alpha=10^{-2}$ pour les 4 jeux de mesures bruitées</i>	<i>47</i>

<i>Figure 23. Erreur quadratique en fonction du paramètre de régularisation pour trois jeux de données simulés avec un coefficient de variation de 5%.....</i>	<i>48</i>
<i>Figure 24. Erreur quadratique moyenne sur 2 séries de 3 jeux de données pour un coefficient de variation des mesures de 5% et 10%.....</i>	<i>49</i>
<i>Figure 25. Rigidités obtenues par minimisation en cherchant une rigidité de degré 4, avec et sans régularisation pour le deuxième jeu de mesures bruitées.</i>	<i>50</i>
<i>Figure 26. Premier jeu de fonctions d'inspection.....</i>	<i>54</i>
<i>Figure 27. Rigidités exacte et calculée par la méthode des champs virtuels avec le premier jeu de fonctions d'inspection pour des mesures exactes.....</i>	<i>54</i>
<i>Figure 28. Rigidités exacte et calculée par la méthode des champs virtuels avec le premier jeu de fonctions d'inspection pour des mesures ponctuellement modifiées.....</i>	<i>55</i>
<i>Figure 29. Rigidités calculées par la méthode des champs virtuels avec le premier jeu de fonctions d'inspection pour les 4 jeux de mesures bruitées.....</i>	<i>55</i>
<i>Figure 30. Deuxième jeu de fonctions d'inspections.....</i>	<i>56</i>
<i>Figure 31. Rigidités exacte et calculée par la méthode des champs virtuels avec le deuxième jeu de fonctions d'inspection pour des mesures exactes.....</i>	<i>57</i>
<i>Figure 32. Rigidités exacte et calculée par la méthode des champs virtuels avec le deuxième jeu de fonctions d'inspection pour des mesures ponctuellement modifiées.....</i>	<i>57</i>
<i>Figure 33. Rigidités calculées par la méthode des champs virtuels avec le deuxième jeu de fonctions d'inspection pour les 4 jeux de mesures bruitées.....</i>	<i>57</i>
<i>Figure 34. Fonction de densité de probabilité de l'approximation par un chaos polynomial d'ordre 3 et de degré 1 d'une variable aléatoire log-normale issue de 50000 tirages répartis en 17 classes et comparaison avec la fonction de densité de probabilité théorique.</i>	<i>75</i>
<i>Figure 35. Fonction répartition de l'approximation par un chaos polynomial d'ordre 3 et de degré 1 d'une variable aléatoire log-normale issue de 50000 tirages répartis en 17 classes et comparaison avec la fonction de répartition théorique.....</i>	<i>75</i>
<i>Figure 36. A partir du même tirage de 50000 variables normale, comparaison entre la fonction de répartition obtenue à partir du chaos polynomial et celle d'une variable gaussienne de même moyenne et écart-type.....</i>	<i>76</i>
<i>Figure 37. Fonctions du chaos polynomial pour les variables aléatoires isolées $\psi_0(\omega)$ à $\psi_4(\omega)$</i>	<i>86</i>
<i>Figure 38. Fonctions du chaos polynomial associées aux carrés des variables aléatoires $\psi_5(\omega)$, $\psi_6(\omega)$, $\psi_{12}(\omega)$ et $\psi_{14}(\omega)$</i>	<i>87</i>
<i>Figure 39. Fonctions du chaos polynomial associées aux produits croisés de variables aléatoires $\psi_6(\omega)$, $\psi_7(\omega)$, $\psi_8(\omega)$, $\psi_{10}(\omega)$, $\psi_{11}(\omega)$ et $\psi_{13}(\omega)$</i>	<i>87</i>
<i>Figure 40. $f(\omega_n) = \tan\left(\omega_n \frac{L}{2}\right) - \frac{2}{\omega_n L}$ pour $L=5m$</i>	<i>99</i>
<i>Figure 41. Valeurs propres λ_n (en m) de la covariance de la flexibilité pour $L=5m$.....</i>	<i>100</i>
<i>Figure 42. Quatre premières fonctions propres de la covariance de la perturbation de la flexibilité</i>	<i>101</i>

<i>Figure 43. Approximation de la covariance de la perturbation de la flexibilité de la poutre par des décompositions spectrale tronquées ; $L=5m$, $\chi_F=10\%$.....</i>	<i>102</i>
<i>Figure 44. Erreur relative lors de la décomposition de la covariance de la perturbation de la flexibilité de la poutre ; $L=5m$, $\chi_F=10\%$.....</i>	<i>103</i>
<i>Figure 45. Domaine maillé avec 50 éléments</i>	<i>107</i>
<i>Figure 46. Différence relative entre les valeurs propres numériques et analytiques en fonction du nombre d'éléments utilisés pour mailler la poutre.....</i>	<i>107</i>
<i>Figure 47. Modes propres numériques (gauche) et analytiques (droites)</i>	<i>108</i>
<i>Figure 48. Exemple de deux fonctions dont les racines donnent les valeurs propres de la fonction de covariance (pour n impair à gauche et n pair à droite) ; $L=1$, $l=1$, $\sigma=1$</i>	<i>110</i>
<i>Figure 49. Covariances extrêmes utilisées , $L=1$</i>	<i>110</i>
<i>Figure 50. Spectre pour différentes longueurs de corrélation</i>	<i>111</i>
<i>Figure 51. Valeurs exactes et recomposées à partir de la troncature au 10^{ième} terme de la décomposition spectrale des covariances extrêmes de la Figure 49.....</i>	<i>112</i>
<i>Figure 52. Différence entre la fonction de covariance et sa recomposition à partir de la série tronquée pour différentes longueurs de corrélation, $L=1$.....</i>	<i>113</i>
<i>Figure 53. Grille de mesure de l'erreur.....</i>	<i>114</i>
<i>Figure 54. Erreur au sens des moindres carrés en fonction de la longueur de corrélation entre la covariance exacte et la covariance recomposée à partir de la troncature au 10^{ième} terme de la décomposition spectrale en utilisant une grille de 2500 points de mesure ; échelle linéaire (a) et logarithmique (b).....</i>	<i>115</i>
<i>Figure 55. Erreur au sens des moindres carré entre la covariance exacte et la covariance recomposée en fonction du nombre de termes dans la décomposition spectrale en utilisant une grille de 2500 points de mesure ; longueur de corrélation $l=0,4 L$; échelle logarithmique.....</i>	<i>116</i>
<i>Figure 56. Poutre utilisée dans l'exemple</i>	<i>123</i>
<i>Figure 57. Coefficient du chaos polynomial pour un plan d'expérience uniforme de 1000 calculs.</i>	<i>128</i>
<i>Figure 58. Convergence des coefficients du chaos polynomial en fonction du nombre de calculs réalisé pour un plan d'expériences uniforme</i>	<i>129</i>
<i>Figure 59. Convergence des coefficient du chaos polynomial en fonction du nombre de calculs réalisé pour un plan d'expériences suivant une loi normale</i>	<i>129</i>
<i>Figure 60. Trois premières fonctions propres de la décomposition en série de Karhunen-Loève de la rigidité</i>	<i>133</i>
<i>Figure 61. Fonction de covariance réelle (gauche) et reconstituée à partir des trois premiers termes de sa décomposition spectrale (droite).....</i>	<i>133</i>
<i>Figure 62. Partie constante $d_0(s)$ de la solution</i>	<i>135</i>
<i>Figure 63. Trois premiers coefficients $d_1(s)$ à $d_3(s)$ du chaos polynomial de la solution, représentant la partie gaussienne de la solution.....</i>	<i>135</i>

<i>Figure 64. Aperçu des coefficients $d_4(s)$ à $d_{19}(s)$ représentant la partie non gaussienne de la solution.....</i>	<i>136</i>
<i>Figure 65. Coefficients $d_5(s)$ et $d_9(s)$</i>	<i>136</i>
<i>Figure 66. Grille de mesure</i>	<i>149</i>
<i>Figure 67. Représentation des valeurs simulées du champ de la Table 23.....</i>	<i>150</i>
<i>Figure 68. Variogramme théorique (gris) et expérimental (points noirs)</i>	<i>150</i>
<i>Figure 69. Moyenne et écart-type du variogramme expérimental pour les directions horizontales et verticales</i>	<i>151</i>
<i>Figure 70. Variogramme expérimental pour les dimensions verticales et horizontales et intervalle de confiance à 95% et 99%.....</i>	<i>152</i>
<i>Figure 71. Intervalles de confiances du variogramme expérimental pour quelques tirages du champ.....</i>	<i>153</i>
<i>Figure 72. Variogramme expérimental (points), théorique exact (gris) et interpolé (noir).</i>	<i>154</i>
<i>Figure 73. Exemples de variogrammes issus de quatre simulations différentes du champ aléatoire et paramètres de la fonction de covariance déduits ; valeurs exactes $\sigma_F^2=1$ et $l=2,5$</i>	<i>155</i>
<i>Figure 74. Poutre.....</i>	<i>156</i>
<i>Figure 75. Variogrammes théoriques du processus aléatoire $\alpha(\mathbf{s}, \omega)$ pour deux longueurs de corrélation ; covariance exponentielle ; $\sigma_\alpha^2=1$, $L=5$.....</i>	<i>157</i>
<i>Figure 76. Exemples de trajectoires $\alpha(\mathbf{s})$ simulées par deux méthodes différentes ; $l=L=5$</i>	<i>158</i>
<i>Figure 77. Processus aléatoire et variogrammes expérimentaux continus et discrets correspondants ; $\sigma_\alpha^2=1$, $l=L=5$</i>	<i>159</i>
<i>Figure 78. Trajectoires et variogramme théorique, expérimental et interpolé correspondants ; paramètres déterminés par interpolation ; paramètres théoriques : $\sigma_\alpha^2=1$, $l=L=5$.....</i>	<i>161</i>
<i>Figure 79. Exemples de variogrammes expérimentaux continus et discrets ; $\sigma_\alpha^2=1$, $l=L$.</i>	<i>162</i>
<i>Figure 80. Trajectoires et variogrammes correspondants ; variogramme théorique, expérimental et interpolé ; paramètres théoriques : $\sigma_\alpha^2=1$, $l=L=5$.....</i>	<i>163</i>
<i>Figure 81. Caractérisation des données</i>	<i>168</i>
<i>Figure 82. Paramétrisation du résultat</i>	<i>170</i>
<i>Figure 83. Procédure de résolution d'un problème inverse par minimisation.....</i>	<i>172</i>
<i>Figure 84. Procédure de résolution d'un problème stochastique direct par minimisation... ..</i>	<i>173</i>
<i>Figure 85. Méthode inverse stochastique</i>	<i>176</i>
<i>Figure 86. Méthode inverse stochastique</i>	<i>177</i>
<i>Figure 87. Poutre utilisée dans l'exemple.....</i>	<i>178</i>
<i>Figure 88. Calcul préliminaire</i>	<i>182</i>

<i>Figure 89. Calcul déterministe</i>	<i>183</i>
<i>Figure 90. Processus de minimisation.....</i>	<i>184</i>
<i>Figure 91. Exemple de fonction de performance ; coefficients du chaos polynomial sur les axes horizontaux, valeur de la fonction de performance sur l'axe vertical.....</i>	<i>185</i>
<i>Figure 92. Exemple de fonction de performance utilisant une correction logarithmique ; coefficients du chaos polynomial sur les axes horizontaux, valeur de la fonction de performance sur l'axe vertical.....</i>	<i>186</i>
<i>Figure 93. Fonction de performance de la somme des carrés des écarts absolus ; résultats pour un plan d'expérience de 125 points dans l'intervalle $[-0,1 ; 0,1]$; comparaison pour les trois premiers modes KL entre fonctions théoriques (Fth, en trait fin) et fonctions obtenues après minimisation (Fopt en gras).....</i>	<i>188</i>
<i>Figure 94. Fonction de performance mesurant seulement l'écart sur le nœud le plus à gauche ; résultats pour un plan d'expérience de 125 points dans l'intervalle $[-0,1 ; 0,1]$; comparaison pour les trois premiers modes KL entre fonctions théoriques (Fth, en trait fin) et fonctions obtenues après minimisation (Fopt en gras).....</i>	<i>189</i>
<i>Figure 95. Fonction de performance mesurant seulement l'écart sur le nœud médian ; résultats pour un plan d'expérience de 125 points dans l'intervalle $[-0,1 ; 0,1]$; comparaison pour les trois premiers modes KL entre fonctions théoriques (Fth, en trait fin) et fonctions obtenues après minimisation (Fopt en gras).....</i>	<i>190</i>
<i>Figure 96. Fonction de performance de la somme des carrés des écarts relatifs ; résultats pour un plan d'expérience de 125 points dans l'intervalle $[-0,1 ; 0,1]$; comparaison pour les trois premiers modes KL entre fonctions théoriques (Fth, en trait fin) et fonctions obtenues après minimisation (Fopt en gras).....</i>	<i>191</i>
<i>Figure 97. Résultats en fonction de la largeur d'un plan d'expérience de 125 points ; valeurs théoriques en trait fin, valeurs expérimentales en trait gras.....</i>	<i>193</i>
<i>Figure 98. Résultats pour différents nombres de point par v.a. dans le plan d'expérience ; résultats théoriques en trait fin, résultats expérimentaux en gras</i>	<i>194</i>
<i>Figure 99. Résultats pour un plan d'expérience aux racine du polynôme de Hermite ; résultats théoriques en trait fin, résultats expérimentaux en gras</i>	<i>195</i>
<i>Figure 100. Résultats pour un plan d'expérience aux racine du polynôme de Hermite enrichi des deux valeurs $-2,5$ et $2,5$; résultats théoriques en trait fin, résultats expérimentaux en gras</i>	<i>195</i>
<i>Figure 101. Résultats pour un plan d'expérience aux racine du polynôme de Hermite enrichi des deux valeurs -1 et 1 ; résultats théoriques en trait fin, résultats expérimentaux en gras.....</i>	<i>196</i>
<i>Figure 102. Comparaison des résultats</i>	<i>Erreur ! Signet non défini.</i>
<i>Figure 103. Comparaison des résultats pour des coefficients de la flèche sous-estimés de 10% (courbes F10%n) et les coefficients trouvés pour des données exactes; plan d'expérience de 5 points par v.a. dans l'intervalle $[-2,5 ; 2,5]$.....</i>	<i>197</i>
<i>Figure 104. Comparaison des résultats pour des coefficients de la flèche sous-estimés de 20% (courbes F20%n) et les coefficients trouvés pour des données exactes; plan d'expérience de 5 points par v.a. dans l'intervalle $[-2,5 ; 2,5]$.....</i>	<i>198</i>
<i>Figure 105. Mesures de la flèche générées pour l'exemple</i>	<i>199</i>

<i>Figure 106. Variogramme expérimental des mesures</i>	<i>200</i>
<i>Figure 107. Variogrammes expérimental et théorique.....</i>	<i>201</i>
<i>Figure 108. Trois premières fonctions propres de la covariance de la flèche.....</i>	<i>202</i>
<i>Figure 109. Fonction de covariance de la flèche théorique (gauche) et reconstituée à partir de la décomposition KL (droite).....</i>	<i>202</i>
<i>Figure 110. Coefficients du chaos polynomial.....</i>	<i>204</i>
<i>Figure 111. Ecart-type expérimental et théorique</i>	<i>205</i>