Paramétrisation et reconstruction des surfaces développables à partir d'images

Mathieu Perriollat

▶ **To cite this version:**

Mathieu Perriollat. Paramétrisation et reconstruction des surfaces développables à partir d'images. Automatique / Robotique. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2008. Français. NNT : 2008CLF21876 . tel-00731113

HAL Id: tel-00731113
https://theses.hal.science/tel-00731113

Submitted on 12 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre DU : 1876
EDSPIC : 416

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL – CLERMONT II

Ecole Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur

THÈSE DE DOCTORAT

Préparée au LASMEA, UMR 6602 CNRS / Université Blaise Pascal
(Laboratoire des Sciences des Matériaux pour l'Electronique, et d'Automatique)

Spécialité : Vision pour la Robotique

Présentée par

Mathieu Perriollat

le 14 novembre 2008

Paramétrisation et reconstruction des surfaces développables à partir d'images

Devant le jury composé de

Rapporteurs :	Jean-Denis Durou	IRIT (Institut de Recherche en Informatique de Toulouse)
	Marc Pollefeys	ETHZ (Eldgenössische Technische Hochschule Zürich) et UNC
Examinateurs :	Michel Dhome	CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique) – LASMEA
	Roger Mohr	INPG (Institut National Polytechnique de Grenoble)
	Luc Robert	Realviz (Autodesk)
Co-encadrant :	Adrien Bartoli	CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique) – LASMEA
Directeur :	Jean-Marc Lavest	UdA (Université d'Auvergne) – LASMEA

Avant-propos

J'ai effectué ma thèse au *Laboratoire des Sciences et Matériaux pour l'Électronique et d'Automatique*, l'Unité Mixte de Recherche 6602 du Centre Nationale de Recherche Scientifique et de l'Université Blaise Pascal, située à Clermont-ferrand. Plus précisément, je l'ai préparée au sein de l'équipe *Computers that See* qui fait partie du *Groupe d'Automatique et de Vision pour la Robotique*. Durant ces trois années, j'ai également eu l'occasion de faire des stages dans des laboratoires étrangers. J'ai ainsi travaillé un mois à l'Université de Copenhague avec le professeur Søren Olsen sur les modèles de faible rang pour les scènes déformables. Par la suite, j'ai passé deux semaines à l'Université Technique de Munich dans la "Chair for Computer Aided Medical Procedures & Augmented Reality" du professeur Nassir Navab. Le sujet de cette collaboration franco-allemande portait sur les techniques d'apprentissage artificiel dans le cadre de la modélisation des objets déformables. Enfin, j'ai effectué un séjour de deux mois à l'Université Nationale d'Australie, à Canberra, pour travailler avec le professeur Richard Hartley. Nous avons étudié ensemble les possibilités de localisation des surfaces inextensibles et des surfaces développables.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Adrien Bartoli pour son encadrement et sa disponibilité tout au long de ces trois années, pour toutes les conférences auxquelles j'ai pu participer et pour mes différents stages à l'étranger. Mes remerciements vont également à Jean-Marc Lavest qui m'a permis de réaliser cette thèse dans de bonnes conditions. Durant mes séjours à l'étranger, j'ai été chaleureusement accueilli dans les différents laboratoires. Je salue leurs membres ici, en particulier le professeur Søren Olsen et l'équipe du DIKU, le professeur Nassir Navab et tous ses étudiants et l'équipe du RSISE de Canberra. Je remercie également Richard Hartley, pour tous ces bons moments scientifiques et sportifs, partagés en Australie, puis en France. Enfin, je souhaite remercier toute l'équipe COMSEE et plus globalement le personnel du LASMEA pour une ambiance de travail très agréable.

Merci aussi à Julie B., Julie T., Vincent, François C., François R. et tous les autres ! Je finirais en remerciant tous les membres de mon arbre généalogique ramifié, et Anne-Line.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Éléments de base **5**
2.1 Introduction . . . 6
2.2 Notations . . . 6
2.3 Courbes gauches . . . 6
2.3.1 Définition . . . 6
2.3.2 Propriétés . . . 7
2.4 Surfaces . . . 9
2.4.1 Définitions . . . 9
2.4.2 Propriétés . . . 9
2.5 Optimisation des fonctions de coût au sens des moindres carrés . . . 11
2.5.1 Moindres carrés linéaires non-homogènes . . . 12
2.5.2 Moindres carrés non-linéaires non-homogènes . . . 12
2.6 Conclusion . . . 14

3 Surfaces développables **15**
3.1 Aspects mathématiques . . . 16
3.1.1 Généralités . . . 16
3.1.2 Paramétrisation directe . . . 18
3.1.3 Paramétrisation duale . . . 19
3.1.4 Propriétés . . . 19
3.1.5 Discrétisation . . . 21
3.2 Modélisation des surfaces . . . 22
3.2.1 Portion de surface . . . 23
3.2.2 Assemblage de portions de surfaces développables . . . 23
3.3 Conclusion . . . 25

4 Un modèle génératif de surfaces développables **27**
4.1 Introduction . . . 28
4.2 État de l'art . . . 28
4.2.1 Modèles dédiés à la simulation . . . 29
4.2.2 Modèles géométriques . . . 30
4.2.3 Résumé . . . 34
4.3 Un modèle génératif de surfaces développables . . . 34
4.3.1 Principe général du modèle . . . 34
4.3.2 Paramétrisation et génération de la surface . . . 36
4.3.3 Propriétés . . . 44
4.4 Perspectives . . . 51
4.4.1 Extensions du modèle . . . 51
4.4.2 Modèle et surface continue . . . 53

4.4.3 Apprentissage artificiel des surfaces développables . . . 58
4.5 Conclusion . . . 59

5 Reconstruction 3D multi-caméras 61
5.1 Introduction . . . 62
5.2 État de l'art . . . 62
5.2.1 Primitives 2D . . . 63
5.2.2 Primitives 3D . . . 64
5.2.3 Objectifs de l'algorithme proposé . . . 65
5.3 Reconstruction initiale . . . 66
5.3.1 Reconstruction 3D d'un nuage de points . . . 66
5.3.2 Interpolation de la surface . . . 67
5.4 Initialisation du modèle . . . 72
5.4.1 Détection de génératrices . . . 72
5.4.2 Extraction de la courbe des positions . . . 77
5.4.3 Calcul des angles de plis . . . 80
5.4.4 Sélection des paramètres du modèle . . . 80
5.4.5 Transformation rigide . . . 84
5.4.6 Discussion . . . 84
5.5 Raffinement du modèle . . . 84
5.5.1 Ajustement de faisceaux d'une fonction de coût 2D . . . 84
5.5.2 Ajustement de faisceaux d'une fonction de coût 3D . . . 85
5.5.3 Reparamétrisation du modèle . . . 86
5.5.4 Discussion . . . 86
5.6 Résultats . . . 88
5.6.1 Validation du modèle et de l'algorithme . . . 89
5.6.2 Reconstruction 3D à partir de vidéos . . . 90
5.7 Conclusion . . . 94

6 Reconstruction 3D monoculaire de surfaces inextensibles 97
6.1 Introduction . . . 98
6.2 État de l'art . . . 99
6.3 Méthode de reconstruction 3D . . . 100
6.3.1 Principe . . . 100
6.3.2 Mise en équation . . . 101
6.4 Détermination de bornes supérieures sur la profondeur de la surface . . . 102
6.4.1 Initialisation des bornes . . . 102
6.4.2 Raffinement des bornes . . . 103
6.5 Reconstruction de la surface . . . 105
6.5.1 Reconstruction d'un ensemble épars de points 3D . . . 105
6.5.2 Reconstruction d'une surface continue . . . 106
6.6 Analyse de l'erreur . . . 106
6.6.1 Influence du nombre de points . . . 107
6.6.2 Influence du bruit . . . 107
6.7 Résultats expérimentaux sur des données réelles . . . 109
6.7.1 Reconstruction à partir d'une seule image . . . 109
6.7.2 Reconstruction de séquences vidéos . . . 111
6.8 Conclusion . . . 112

7 Conclusion 115

A Annexes **119**
A.1 Intersection de segments sur les formes convexes . . . 120
A.1.1 Démonstration avec 4 points . . . 120
A.1.2 Généralisation à un nombre fini de points . . . 121
A.2 Vers la localisation des surfaces développables . . . 123
A.2.1 Problématique et propriétés . . . 123
A.2.2 Mise en équation . . . 124
A.3 Algorithmes pour la réalité augmentée . . . 127
A.3.1 Principes de base . . . 127
A.3.2 Algorithmes . . . 128
A.4 Autres travaux . . . 129
A.4.1 Suivi de surfaces déformables par apprentissage . . . 129
A.4.2 Les fonctions de déformation plaques minces généralisées . . . 129
A.4.3 Calcul d'incertitude . . . 130

Bibliographie **132**

CHAPITRE

1

INTRODUCTION

Les travaux réalisés au cours de cette thèse s'inscrivent dans le domaine de la *vision par ordinateur*. Plus précisément, ils portent sur l'analyse des *scènes déformables* à partir d'images. Ce domaine d'étude est très général car les déformations considérées peuvent être de nature très différente, tout comme les objectifs de l'analyse. Dans le domaine de l'imagerie médicale par exemple, il est possible d'avoir une série d'images représentant la contraction d'un muscle. Le système de vision peut être conçu dans ce cadre pour suivre les déformations entre les images. Les données et les éléments recherchés sont alors *2D*. Dans un tout autre contexte, l'analyse des déformations peut également être utilisée à des fins de segmentation : la scène est composée de plusieurs objets en mouvement relatif les uns par rapport aux autres. L'objectif est d'identifier les différents objets. Parmi toutes les possibilités offertes par le domaine, cette thèse s'intéresse plus particulièrement à la reconstruction *3D*. L'objectif est d'utiliser une image ou une vidéo, pour évaluer la géométrie *3D* de la scène.

De manière classique, les méthodes de reconstruction *3D* utilisant la vision par ordinateur sont basées sur des propriétés des *scènes rigides*. Dans ce cadre, les éléments de la scène sont supposés immobiles les uns par rapport aux autres. Les algorithmes exploitent le mouvement relatif entre la scène et la caméra pour déterminer par triangulation les informations *3D* recherchées. Dans le contexte de scènes déformables, la contrainte de rigidité n'est pas satisfaite. Les méthodes classiques ne permettent donc pas d'obtenir directement la solution au problème.

Problématique générale. L'objectif idéal d'un système de reconstruction *3D* de scènes déformables est de déterminer la géométrie de la scène en se basant sur une ou plusieurs images. La difficulté principale est due aux nombreuses ambiguïtés qui existent sur l'interprétation des scènes déformables dans ce contexte. En effet, les possibilités de déformation introduisent des degrés de liberté supplémentaires par rapport aux scènes rigides. Par exemple, un objet qui apparaît plus gros dans une image s'est vraisemblablement rapproché de la caméra (à longueur focale équivalente) si la scène est rigide. Une telle conclusion n'est pas possible pour une scène déformable, l'objet pouvant par exemple avoir grossi en s'éloignant de la caméra. En fait, le problème se ramène à l'estimation de la géométrie de la scène à partir d'observations incomplètes, au sens où ces dernières ne permettent pas de lever les ambiguïtés. Ce phénomène est lié à la nature des observations disponibles : il ne dépend pas uniquement de leur quantité. Il est par conséquent nécessaire d'introduire des connaissances supplémentaires pour déterminer une solution. Pour cela, il peut être utile de s'appuyer sur des propriétés

physiques de la scène. En effet, il existe dans ce domaine de nombreuses lois permettant de décrire les objets, leurs comportements et leurs interactions. Ces lois sont trop complexes pour permettre de résoudre le problème de la reconstruction *3D* dans le cas général. En revanche, elles permettent de formuler des contraintes réelles sur les objets de la scène. Ainsi notre approche pour la reconstruction *3D* de scènes déformables consiste à se focaliser sur une catégorie spécifique d'objets. Nous élaborons ensuite un algorithme de reconstruction autour des propriétés associées à cette catégorie.

Problématique étudiée dans la thèse. Nous nous intéressons à l'analyse *3D* des scènes déformables. Plus précisément, nous cherchons à déterminer la surface *3D* des objets de la scène. L'idée directrice de nos méthodes est d'exploiter des contraintes *3D* exprimées sur la surface. Ce choix est guidé par l'expression plus naturelle des propriétés des surfaces en *3D*. Concernant les déformations, nous avons envisagé deux cas de figure. Ils se distinguent par la nature des observations disponibles :

- ▷ **primitives *3D* :** des informations *3D* sur la surface déformée sont disponibles. En revanche, aucune information concernant la surface avant la déformation n'est donnée. L'objectif est de définir les surfaces avant et après déformation. Pour cela des hypothèses sur la nature de la déformation sont exploitées,
- ▷ **primitives *2D* :** l'information se présente sous la forme de plusieurs images. La scène s'est déformée entre les prises de vue. Le but est d'obtenir une reconstruction *3D* de la scène pour chaque image. Des connaissances supplémentaires sont éventuellement disponibles, par exemple une image de référence pour laquelle la forme *3D* de l'objet est connue.

Nos méthodes s'articulent autour d'un schéma commun. Plus précisément, les éléments intervenant dans nos algorithmes sont les données extraites des images, un modèle permettant d'expliquer ces données et une méthode pour déterminer les paramètres du modèle. Le problème de la reconstruction *3D* est donc traité du point de vue de l'estimation des paramètres d'un modèle à partir de mesures. Des connaissances sur la scène sont nécessaires pour concevoir le modèle et la méthode d'estimation. Par exemple, les scènes déformables traitées ne sont composées que d'un seul objet pouvant être modélisé par une surface. Dans ce cadre, nous avons proposé plusieurs approches de reconstruction *3D*.

Méthodes de reconstruction *3D* proposées. Nous avons étudié quatre cas de figure, se distinguant par le traitement des hypothèses faites sur les surfaces. Celles-ci peuvent être intégrées au niveau de la modélisation ou apparaître dans le processus d'estimation des paramètres. Ce choix sur la stratégie de reconstruction *3D* est largement influencé par l'environnement de la scène et les applications envisagées de l'algorithme. Lorsque les contraintes sont intégrées au modèle, ce dernier devient spécifique à une catégorie de surface. En revanche, le modèle reste plus général si ces mêmes contraintes sont exploitées au niveau du processus d'estimation. La spécificité du modèle est donc un critère permettant de distinguer les algorithmes.

Ainsi, le modèle le plus spécifique que nous avons proposé permet de représenter les surfaces développables. Ces surfaces sont les surfaces régulières isométriques au plan. L'exemple classique de ce type de surface est une feuille de papier déformée sans être froissée. Ces surfaces sont complexes et les contraintes associées sont non-linéaires. Elles ont été largement étudiées en mathématique, un ensemble d'outils pour les manipuler est donc disponible. De plus, ces surfaces sont intéressantes car elles sont omniprésentes dans la vie courante, ce qui les rend attractives d'un point de vue applicatif. Nous avons proposé d'une part un modèle génératif de surfaces développables adapté aux problématiques de vision, et d'autre part un algorithme de reconstruction *3D* multi-caméras. Cet algorithme est un exemple de reconstruction de déformations *3D* utilisant des primitives *3D*. En effet, le fait de disposer de plusieurs caméras nous permet d'utiliser les techniques de reconstruction *3D* rigide. La déformation est estimée entre une surface plane et la surface déformée. La méthode n'étant basée que sur des points vus dans les images de la surface déformée, les inconnues de ce problème sont les surfaces planes et déformées passant par les points, ainsi que la transformation liant ces deux surfaces. Outre les aspects d'estimation de déformation, cet algorithme permet de valider expérimentalement notre modèle. De plus, il constitue une première étape vers la reconstruction *3D* monoculaire des surfaces développables. Cette étude reflète la complémentarité entre les communautés de recherche sur les aspects de modélisation et d'application. En effet, des problématiques similaires interviennent dans la communauté de synthèse d'images à travers la

conception et l'estimation de surfaces développables. Elles sont également très présentes en traitement des documents, à cause notamment de la propriété de surface développable du papier.

Les autres méthodes que nous avons proposées utilisent des primitives *2D*. En particulier, la deuxième méthode proposée est basée sur des correspondances de point entre une image de l'objet déformé et un patron, c'est-à-dire un modèle *3D* de référence de l'objet. La méthode fonctionne avec des objets inextensibles de forme quelconque. La seule hypothèse utilisée est donc le caractère isométrique des déformations. La méthode permet de déterminer la surface de l'objet vu dans l'image. Les contraintes sont intégrées au niveau du processus d'estimation.

Les deux dernières méthodes s'appuient sur des modèles très généraux de surface. Ainsi, nous avons étudié les possibilités offertes par les modèles génériques dans le cadre de la reconstruction d'objets déformables basée sur un apprentissage préliminaire de déformations de synthèse. Nous nous sommes également intéressé aux fonctions de déformation entre des images représentant une surface régulière, rigide ou déformée. Ces fonctions associent les points de la première image à leurs correspondants dans la seconde.

Plan de la thèse. Après cette introduction, le deuxième et le troisième chapitre contiennent des éléments mathématiques. Le deuxième expose des notions de base sur les courbes et surfaces ainsi que sur les méthodes d'optimisation de moindres carrés. Les aspects mathématiques des surfaces développables sont présentés au troisième chapitre. Cette étude conduit à l'élaboration d'un modèle génératif de surfaces développables, présenté au quatrième chapitre. Ce modèle a été conçu spécifiquement pour les applications en vision par ordinateur ; l'estimation de ses paramètres à partir d'images est étudiée dans le cinquième chapitre. Enfin, nous nous intéressons au problème de la reconstruction de surfaces inextensibles au sixième chapitre. À la suite de la conclusion, des annexes apportent quelques précisions et présentent les autres travaux réalisés au cours de la thèse.

CHAPITRE

2

ÉLÉMENTS DE BASE

Résumé.

Ce premier chapitre rassemble les notations et les notions mathématiques utilisées dans le reste de la thèse. Ces éléments concernent plus particulièrement les courbes *3D* et les surfaces. Des méthodes d'optimisation de fonctions de coût par les techniques de moindres carrés sont également présentées.

2.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre les différents éléments mathématiques utilisés dans la suite de ce document. La problématique générale est la reconstruction de surfaces déformables à partir de séquences d'images. Plus particulièrement, nous considérons les surfaces développables et les surfaces issues de déformations inextensibles. Afin de définir ces surfaces, quelques notions mathématiques sont nécessaires sur les courbes gauches et les surfaces. Celles-ci sont rappelées dans les deux premières parties du chapitre.

Les algorithmes présentés dans les différentes étapes de reconstruction font souvent intervenir la problématique d'estimation d'un modèle à partir de données mesurées. Dans la plupart des cas, cette estimation se ramène à un problème d'optimisation au sens des moindres carrés. Nous présentons des méthodes classiques pour résoudre ce type de problème.

2.2 Notations

De manière générale, les scalaires sont écrits en italique (k), les vecteurs sont en gras ($\mathbf{u}$) et les matrices sont en majuscule (A). Les notations suivantes sont utilisées pour les opérations matricielles : A^T est la transposée de A, A^{-1} est l'inverse de A et $A^\dagger$ est la pseudo-inverse de A. Le tableau 2.1 rassemble les notations importantes utilisées dans cette thèse.

$\times$	produit vectoriel
$\frac{\mathbf{u}}{\|\cdot\|}$	vecteur $\mathbf{u}$ normé
f_x	dérivée première de f par rapport à la variable x
f_{xy}	dérivée seconde de f par rapport aux variables x et y
f'	dérivée première d'une fonction réelle f
f''	dérivée seconde d'une fonction réelle f
$\cdot$	produit scalaire
γ	paramétrisation d'une courbe gauche
Γ	courbe gauche
Γ_{ar}	arête de rebroussement d'une surface développable
Σ	surface
σ	paramétrisation d'une surface
$\sim$	égalité à un facteur d'échelle près
I	matrice identité

TABLE 2.1 – **Notations générales.**

2.3 Courbes gauches

Cette partie définit les courbes gauches et présente quelques propriétés géométriques nécessaires à l'étude des surfaces.

2.3.1 Définition

Une *courbe gauche* peut être définie comme le parcours d'un point se déplaçant dans l'espace. Une paramétrisation naturelle décrit la position de ce point en fonction d'un paramètre. On définit alors une *courbe paramétrée* comme une fonction γ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^3$. La courbe Γ est l'image de I par γ :

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) \end{array}$$

$$\Gamma = \gamma(I)$$

Dans la suite, une *courbe* désigne généralement une courbe gauche.

Remarque 2.1. *La paramétrisation d'une courbe n'est pas unique.*

Une courbe est dite *régulière* s'il en existe une paramétrisation γ telle que :

- ▷ γ est de classe C^1,
- ▷ quelque soit t dans I, $\gamma'(t)$ est non nul.

Elle est *birégulière* s'il en existe une paramétrisation γ telle que :

- ▷ γ est de classe C^2,
- ▷ quelque soit t dans I, $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ ne sont pas colinéaires.

2.3.2 Propriétés

2.3.2.1 Abscisse curviligne et paramétrisation normale

La longueur L d'une portion de courbe régulière définie par les points $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t_1)$ est donnée par :

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(u)\| \, du$$

L'*abscisse curviligne* $s(t)$ représente la distance signée de la courbe entre le point $\gamma(t)$ et un point de référence, par exemple $\gamma(t_0)$:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| \, du$$

Elle permet notamment de paramétrer des points *3D* le long d'une courbe en donnant leurs abscisses curvilignes à partir d'un point de référence.

Remarque 2.2. *La longueur signée de l'arc de courbe entre deux points $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t_1)$ est égale à la différence de leurs abscisses curvilignes $s(t_1) - s(t_0)$.*

Une paramétrisation γ d'une courbe Γ telle que $\gamma'(t)$ est un vecteur unitaire pour tout t est appelée *paramétrisation normale*.

2.3.2.2 Tangente, normale et binormale

Les définitions de la *tangente*, de la *normale* et de la *binormale* d'une courbe birégulière $\mathcal{C}$ associée à une paramétrisation normale f sont données dans le tableau 2.2 et illustrées sur la figure 2.1.

2.3.2.3 Plans osculateur, normal et rectifiant

Ces plans associés à tout point d'une courbe birégulière sont définis de la manière suivante :

- ▷ **plan osculateur :** plan engendré localement par les vecteurs $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$. Le vecteur $\mathbf{b}$ est normal à ce plan. C'est le plan qui "contient" au mieux la courbe,
- ▷ **plan normal :** plan engendré localement par les vecteurs $\mathbf{n}$ et $\mathbf{b}$. Le vecteur $\mathbf{t}$ est normal à ce plan,
- ▷ **plan rectifiant :** plan engendré localement par les vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{t}$. Le vecteur $\mathbf{n}$ est normal à ce plan.

tangente $\mathbf{t}$	$\frac{\gamma'(t)}{\|.\|}$
normale $\mathbf{n}$	$\frac{\gamma''(t)}{\|.\|}$
binormale $\mathbf{b}$	$\mathbf{t} \times \mathbf{n}$

TABLE 2.2 – **Définition de la tangente, de la normale et de la binormale d'une courbe birégulière Γ.**

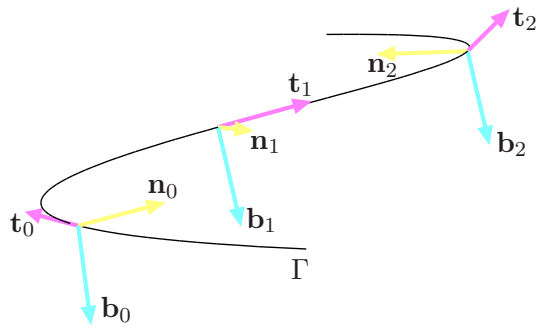


FIGURE 2.1 – **Tangentes $\mathbf{t}_i$, normales $\mathbf{n}_i$ et binormales $\mathbf{b}_i$ en trois points d'une courbe birégulière Γ.**

2.3.2.4 Courbure, torsion et repère de Frenet

La *courbure* κ est une notion géométrique qui représente la déformation d'une courbe dans le plan osculateur. Elle est définie en tout point d'une courbe Γ et sa valeur est indépendante de la paramétrisation choisie. Lorsque la paramétrisation γ est normale, sa valeur est donnée par :

$$\kappa(t) = \|\gamma''(t)\|$$

Le *rayon de courbure* $r(t)$ est le rayon du cercle osculateur de la courbe au point $\gamma(t)$ dans le plan osculateur. Il est égal à l'inverse de la courbure.

Remarque 2.3. *La courbure d'une droite est nulle.*

La *torsion* τ quantifie le déplacement du plan osculateur lors du parcours de la courbe. La torsion est donc définie à partir de la variation de la binormale (normale au plan osculateur) :

$$\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n} \tag{2.1}$$

Le *repère de Frenet* est un repère mobile associé à tout point d'une courbe dont la paramétrisation est de classe C^3 et composé des vecteurs $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ et $\mathbf{b}$. L'équation (2.1) et les deux équations suivantes montrent les relations entre les éléments de ce repère :

$$\begin{cases} \mathbf{t}' &= \kappa\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \end{cases}$$

Interprétation géométrique. Des définitions géométriques de la courbure et de la torsion sont données dans (Sturm, 1857). Elles permettent de définir la courbure et la torsion d'une courbe discrète (polyligne) et sont utilisées pour déterminer la surface limite du modèle proposé (voir chapitre 4 et plus particulièrement la section 4.4.2). Elles s'appuient sur la définition de deux angles : l'*angle de contingence* et l'*angle de torsion*, illustrés sur la figure 2.2.

Soient $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t_1)$, deux points d'une courbe birégulière de paramétrisation γ :

▷ l'angle de contingence α_c est l'angle entre les tangentes $\mathbf{t}(t_0)$ et $\mathbf{t}(t_1)$. La courbure est égale à la limite du rapport entre l'angle de contingence et la longueur de l'arc entre les deux points, lorsque t_1 tend vers t_0 :

$$\kappa = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\alpha_c}{s(t_1) - s(t_0)} \tag{2.2}$$

▷ l'angle de torsion α_t est l'angle entre les binormales $\mathbf{b}(t_0)$ et $\mathbf{b}(t_1)$ (ou angle entre les plans osculateurs). La torsion est égale à la limite du rapport entre l'angle de torsion et la longueur de l'arc entre les deux points, lorsque t_1 tend vers t_0 :

$$\tau = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\alpha_t}{s(t_1) - s(t_0)} \tag{2.3}$$

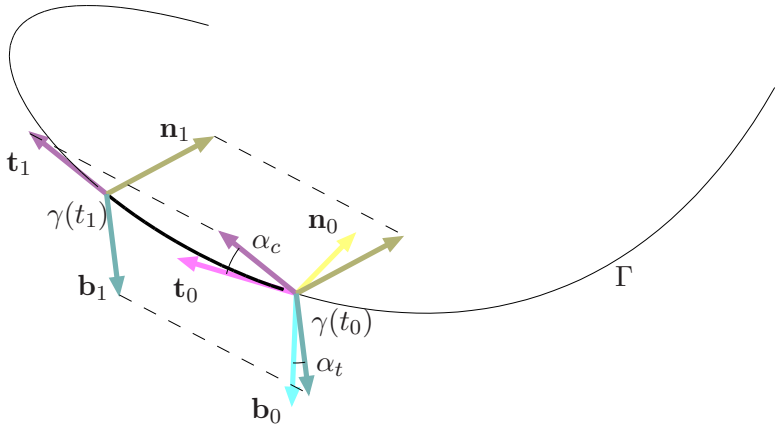


FIGURE 2.2 – **Angle de contingence α_c et angle de torsion α_t.** En gras la longueur de l'arc.

2.4 Surfaces

Nous rappelons dans cette partie quelques propriétés des surfaces permettant de définir les surfaces développables et les transformations isométriques. Des explications plus détaillées se trouvent par exemple dans (Pressley, 2005).

2.4.1 Définitions

La définition d'une surface que nous utilisons est basée sur les notions d'*ouvert* et d'*homéomorphisme* :

ouvert : un sous-espace U de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si pour tout point a de U, il existe un réel strictement positif ϵ tel que tous les points situés à une distance ϵ de a appartiennent à U :

$$U \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall a \in U, \quad \exists\, \epsilon > 0 \text{ tel que } \{u \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \|u - a\| < \epsilon\} \subset U$$

homéomorphisme : une application f d'un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ dans un ouvert Y de $\mathbb{R}^m$ est un homéomorphisme si et seulement si f est continue et bijective et son inverse f^{-1} est continue. X et Y sont alors dits homéomorphes.

Un sous-ensemble Σ de $\mathbb{R}^3$ est une surface si pour tout point P de Σ, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et un ouvert W de $\mathbb{R}^3$ contenant P tel que U et $\Sigma \cap W$ sont homéomorphes.

Les homéomorphismes de U vers $\Sigma \cap W$ constituent une *paramétrisation* de la surface, les éléments $\Sigma \cap W$ forment l'*atlas* de la surface.

2.4.2 Propriétés

Dans la suite, on considère la surface Σ définie comme l'image d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ par l'homéomorphisme σ :

$$\begin{array}{rccl} f & : & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (u,v)^\mathsf{T} & \longmapsto & \sigma(u,v) = (\sigma_x(u,v), \quad \sigma_y(u,v), \quad \sigma_z(u,v))^\mathsf{T} \end{array} \tag{2.4}$$

2.4.2.1 Régularité d'une surface

Un point $\sigma(u,v)$ de Σ est dit *régulier* si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites pour tout (u,v) appartenant à U :

- ▷ les dérivées partielles premières de σ au point (u,v) sont définies,
- ▷ les dérivées partielles premières de σ au point (u,v) ne sont pas colinéaires.

Un point non régulier est appelé *point singulier* de la surface. Une surface est dite *régulière* si tous les points de U sont réguliers.

2.4.2.2 Normale et plan tangent

La normale $\mathbf{n}$ au point $\sigma(u,v)$ d'une surface définie par l'équation (2.4) est donnée par :

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|.\|}$$

Le plan tangent à la surface régulière Σ au point $\sigma(u,v)$ est le plan passant par $\sigma(u,v)$ et engendré par les vecteurs σ_u et σ_v.

2.4.2.3 Courbures

Courbure géodésique et courbure normale. On considère une surface Σ et une courbe Γ tracée sur cette surface. Soit A un point de la courbe. On définit alors deux plans passant par A :

- ▷ le plan tangent $\mathcal{P}_t$ orthogonal à la normale à la surface en A (représenté à gauche sur la figure 2.3),
- ▷ le plan normal $\mathcal{P}_n$ engendré par le vecteur tangent à Γ en A et le vecteur normal à la surface (représenté à droite sur la figure 2.3).

La courbure de la projection de Γ sur $\mathcal{P}_t$ (courbe Γ_t sur la figure 2.3, à gauche) est appelée *courbure géodésique*. La courbure de la projection de Γ sur $\mathcal{P}_n$ (courbe Γ_n sur la figure 2.3, à droite) est appelée *courbure normale*. Les expressions mathématiques de ces deux courbures sont données dans (Laville, 2004) par exemple. La courbure géodésique permet de définir les géodésiques d'une surface : ce sont les courbes tracées sur la surface dont la courbure géodésique est nulle en tout point.

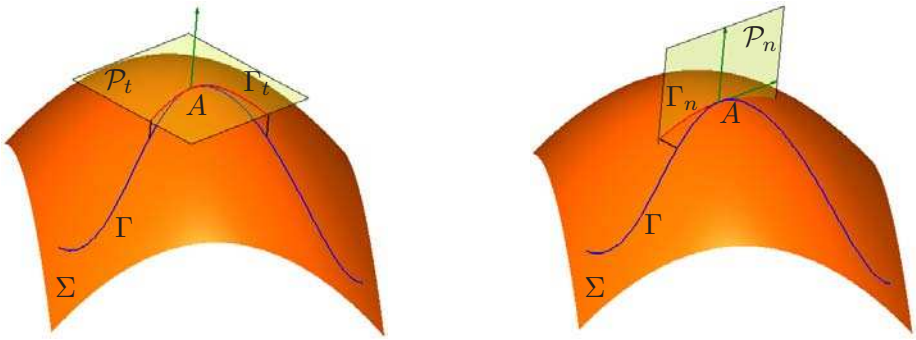


FIGURE 2.3 – **Courbures géodésique et normale.**

Courbures principales. Les deux *courbures principales* d'un point sur une surface régulière Σ sont définies comme les courbures normales minimale et maximale de l'ensemble des géodésiques incluses dans la surface et passant par le point. Les *directions principales* sont les vecteurs tangents aux courbes associées aux courbures principales. Ces définitions sont illustrées sur la figure 2.4.

Les courbures et directions principales sont les valeurs et vecteurs propres de la matrice de Weingarten, calculée à partir des première et seconde formes fondamentales de la fonction σ :

- ▷ la première forme fondamentale $\mathcal{F}_I$ d'une surface régulière paramétrée par σ est :

$$\mathcal{F}_I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$E = \|\sigma_u\|^2 \quad F = {\sigma_u}^\mathsf{T}\sigma_v \quad G = \|\sigma_v\|^2$$

- ▷ la seconde forme fondamentale $\mathcal{F}_{II}$ est :

$$\mathcal{F}_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$L = {\sigma_{uu}}^\mathsf{T}\mathbf{n} \quad M = {\sigma_{uv}}^\mathsf{T}\mathbf{n} \quad N = {\sigma_{vv}}^\mathsf{T}\mathbf{n}$$

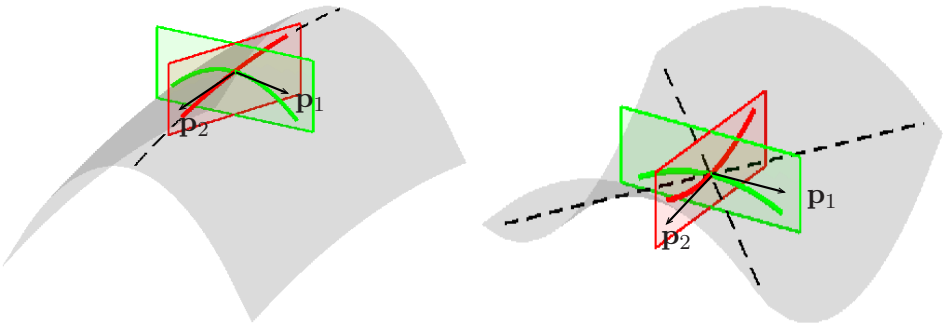


FIGURE 2.4 – **Courbures principales.** Les courbes rouge (foncée) et verte (claire) sont les courbes géodésiques ayant les courbures normales extrémales. (à gauche) Les courbures principales sont de même signe. (à droite) Les courbures principales sont de signes opposés. Les courbes en pointillés sont les courbes pour lesquelles la courbure est la plus proche de zéro. Les directions principales sont dirigées par les vecteurs $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$.

▷ la matrice de Weingarten $\mathcal{W}$ est donnée par :

$$\mathcal{W} = -\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II}$$

Les directions principales p_1 et p_2 et les courbures principales κ_1 et κ_2 sont alors données par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{W}p_1 &= \kappa_1 p_1 \\ \mathcal{W}p_2 &= \kappa_2 p_2 \end{cases}$$

Courbure moyenne et courbure gaussienne . La *courbure moyenne* κ_m est définie comme la moyenne des courbures principales :

$$\kappa_m = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$

La *courbure gaussienne* est le produit des courbures principales :

$$\kappa_g = \kappa_1 \kappa_2$$

Remarque 2.4. *la courbure gaussienne d'un plan est nulle.*

2.4.2.4 Isométrie

Un *difféomorphisme* est un homéomorphisme différentiable dont l'inverse est également différentiable. Une *isométrie* est un difféomorphisme d'une surface Σ_1 vers une surface Σ_2 tel que toute courbe incluse dans Σ_1 est transformée en une courbe de même longueur sur Σ_2, voir par exemple (Pressley, 2005). Deux surfaces sont dites *isométriques* s'il existe une isométrie entre elles.

2.5 Optimisation des fonctions de coût au sens des moindres carrés

Parmi les problèmes rencontré en vision par ordinateur, certains se ramènent à l'estimation des paramètres d'un modèle à partir de données mesurées. Par exemple, cela peut être l'estimation d'une homographie liant deux images d'un même plan prises à partir de point de vue différents. Le modèle à estimer est l'homographie, représentée en coordonnées homogènes par une matrice 3×3 et les données mesurées sont des points en correspondance entre les deux images. D'après (Hartley and Zisserman, 2004), les différents éléments intervenant dans cette estimation sont :

▷ **la paramétrisation :** c'est l'ensemble des paramètres gouvernant le modèle. Elle est notée $\mathbf{p}$,

▷ **la fonction de prédiction $\mathcal{F}$:** elle prédit les observations (notées $\mathbf{x}$) à partir des paramètres du modèle,

- ▷ **la fonction de coût $\mathcal{E}$:** elle traduit la qualité du modèle estimé : plus sa valeur est faible, plus le modèle explique correctement les observations,
- ▷ **la méthode de résolution :** c'est le processus utilisé pour déterminer la solution au problème. Il existe de nombreuses méthodes, selon les types de fonction de coût et de prédiction. Elles doivent réaliser la minimisation suivante :

$$\arg\min_{\mathbf{p}} \mathcal{E}\left(\mathcal{F}\left(\mathbf{p}\right), \mathbf{x}\right)$$

Les méthodes d'optimisation dépendent du type de la fonction à minimiser. En vision par ordinateur, les problèmes sont écrits de préférence sous forme de *moindres carrés* pour utiliser les processus d'optimisation associés. Les problèmes de *moindres carrés* se caractérisent par la forme de la fonction de coût. Il en existe plusieurs sortes. Dans le contexte de cette thèse, nous utilisons les moindres carrés non-homogènes. Dans ce cas, la fonction de coût est égale à la différence élevée au carré entre les données prédites par le modèle et les données mesurées :

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}\left(\mathbf{p}\right), \mathbf{x}) = \left\|\mathcal{F}\left(\mathbf{p}\right) - \mathbf{x}\right\|^2$$

Il existe deux approches principales pour la résolution de ces problèmes aux moindres carrés. Lorsque la fonction de prédiction est une fonction linéaire des paramètres du modèles, la méthode utilisée est appelée *moindres carrés linéaires non-homogènes*. En revanche, les moindres carrés non-linéaires non-homogènes sont dédiés aux fonctions de prédiction non-linéaires.

2.5.1 Moindres carrés linéaires non-homogènes

Le problème de minimisation suivant est de type moindres carrés linéaires non-homogène :

$$\arg\min_{\mathbf{p}} \left\|A\mathbf{p} - \mathbf{x}\right\|^2$$

La fonction de prédiction $\mathcal{F}$ est linéaire par rapport au vecteur de paramètres $\mathbf{p}$. Lorsque le bruit de mesure est supposé gaussien et centré, la solution maximisant la vraisemblance est donnée par l'égalité suivante :

$$\mathbf{p} = A^{\dagger}\mathbf{x}$$

où $A^{\dagger}$ est la pseudo-inverse de A définie par : $A^{\dagger} = (A^{\mathsf{T}}A)^{-1}A^{\mathsf{T}}$.

2.5.2 Moindres carrés non-linéaires non-homogènes

Dans un problème de moindres carrés non-linéaires non-homogènes, la fonction de prédiction $\mathcal{F}$ est une fonction non-linéaire du vecteur de paramètres $\mathbf{p}$. La minimisation s'écrit donc de la façon suivante :

$$\arg\min_{\mathbf{p}} \left\|\mathcal{F}\left(\mathbf{p}\right) - \mathbf{x}\right\|^2$$

La solution d'une telle minimisation est généralement déterminée de manière itérative en partant d'une solution initiale. À chaque itération, les paramètres sont mis à jour de manière à diminuer la fonction de coût. Trois algorithmes sont présentés pour trouver la solution : la méthode de descente du gradient, l'algorithme de Gauss-Newton et l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

Dans le contexte de la minimisation, la fonction de prédiction $\mathcal{F}$ et les données mesurées $\mathbf{x}$ sont connues. La fonction de coût $\mathcal{E}$ ne dépend donc que des paramètres $\mathbf{p}$:

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}\left(\mathbf{p}\right), \mathbf{x}) = \mathcal{E}(\mathbf{p})$$

La fonction ϵ est définie comme la différence entre les mesures et les prédictions :

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \mathcal{F}\left(\mathbf{p}\right) - \mathbf{x}$$

par conséquent :

$$\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p})^{\mathsf{T}}\varepsilon(\mathbf{p})$$

La mise à jour des paramètres au cours des itérations est effectuée de manière classique par une loi additive :

$$\mathbf{p} \longleftarrow \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}$$

Les algorithmes suivant se distinguent par la méthode utilisée pour calculer l'incrément $\delta\mathbf{p}$ sur les paramètres.

2.5.2.1 Descente de gradient

La descente de gradient est une méthode permettant de minimiser une fonction. Le principe est de calculer un incrément sur le vecteur de paramètres dans la direction opposée de celle donnée par le gradient. La valeur de la fonction est alors minimisée à chaque itération.

La fonction à minimiser est $\mathcal{E}(\mathbf{p})$. La condition de minimisation s'écrit :

$$\mathcal{E}(\mathbf{p}) < \mathcal{E}(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}) \tag{2.5}$$

En supposant $\mathcal{E}$ dérivable et la valeur initiale des paramètres suffisamment proche de la solution, le développement limité de $\mathcal{E}$ en $\mathbf{p}$ est :

$$\mathcal{E}(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}) = \mathcal{E}(\mathbf{p}) + \left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mathbf{p}}\right)^{\mathsf{T}} \delta\mathbf{p} + o(\|\delta\mathbf{p}\|) \tag{2.6}$$

L'incrément $\delta\mathbf{p}$ est calculé à partir des équations (2.5) et (2.6) :

$$\delta\mathbf{p} = -\eta\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mathbf{p}}\,, \quad \eta > 0$$

Le paramètre η permet d'ajuster l'amplitude de l'itération. Cette méthode du premier ordre garantit la minimisation de la fonction à chaque itération. La convergence est linéaire, cet algorithme n'est donc pas optimal en terme de rapidité.

2.5.2.2 Algorithme de Gauss-Newton

Comme dans le cas de la descente de gradient, la méthode se base sur le développement limité de $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}) = \mathcal{E}(\mathbf{p}) + \mathcal{E}_{\mathbf{p}}(\mathbf{p})\delta\mathbf{p} + o(\|\delta\mathbf{p}\|) \tag{2.7}$$

où $\mathcal{E}_{\mathbf{p}}$ désigne la matrice jacobienne de $\mathcal{E}$.

Les extrema de $\mathcal{E}$ sont donnés par l'annulation de sa dérivée par rapport à $\mathbf{p}$ (l'extremum trouvé est un minimum car l'état initial est supposé proche de la solution). En appliquant ce critère à l'équation (2.7), l'équation d'évolution devient :

$$0 = \mathcal{E}_{\mathbf{pp}}(\mathbf{p})\delta\mathbf{p} + \mathcal{E}_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) \tag{2.8}$$

avec $\mathcal{E}_{\mathbf{pp}}$ la matrice hessienne de $\mathcal{E}$.

Pour des moindres carrés, $\mathcal{E}$ est de la forme suivante :

$$\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p})^{\mathsf{T}}\varepsilon(\mathbf{p})$$

avec

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \mathcal{F}(\mathbf{p}) - \mathbf{x}$$

Les matrices jacobienne et hessienne sont alors égales à :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathbf{p}} &= 2\varepsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{p})^{\mathsf{T}}\varepsilon(\mathbf{p}) \\ \mathcal{E}_{\mathbf{pp}} &= 2\varepsilon_{\mathbf{pp}}(\mathbf{p})^{\mathsf{T}} \cdot \varepsilon(\mathbf{p}) + 2\varepsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{p})^{\mathsf{T}}\varepsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

La matrice jacobienne de $\mathcal{F}$ est notée J. Elle est égale à la matrice jacobienne de ε :

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = J$$

Les hypothèses de la méthode de Gauss-Newton sont les suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon(\mathbf{p}) \text{ est petit} \\ \varepsilon_{\mathbf{pp}}(\mathbf{p}) \text{ est borné} \end{cases}$$

Dans ces conditions, la matrice hessienne de l'équation (2.8) peut être approchée par :

$$\mathcal{E}_{\mathbf{pp}} \simeq 2J^{\mathsf{T}}J$$

cette approximation est connue sous le nom d'*approximation de Gauss-Newton*. Le pas d'itération $\delta\mathbf{p}$ est alors déterminé en résolvant l'équation d'évolution suivante :

$$J^{\mathsf{T}}J\delta\mathbf{p} = -J^{\mathsf{T}}\varepsilon(\mathbf{p})$$

La connaissance de $\delta\mathbf{p}$ permet d'actualiser la valeur de $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p} \longleftarrow \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}$$

L'algorithme de Gauss-Newton est plus rapide que la descente de gradient car la convergence est superlinéaire. Suivant la configuration du problème, la fonction de coût peut ne pas diminuer à chaque itération.

2.5.2.3 Algorithme de Levenberg-Marquardt

Cet algorithme combine les avantages d'une descente de gradient (minimisation de la fonction garantie) et de la méthode de Gauss-Newton (rapidité de convergence) grâce à un paramètre sélectionnant dynamiquement un compromis entre les deux méthodes. En pratique, l'équation d'évolution est :

$$(J^{\mathsf{T}}J + \lambda I)\delta\mathbf{p} = -J^{\mathsf{T}}\varepsilon(\mathbf{p}) \tag{2.9}$$

A chaque itération, l'incrément $\delta\mathbf{p}$ sur le vecteur de paramètre $\mathbf{p}$ est déterminé en résolvant l'équation (2.9). Si le nouveau vecteur de paramètres fait diminuer la fonction de coût, alors ce nouveau vecteur de paramètre est accepté et λ est divisé par 10. Sinon le nouveau vecteur de paramètre n'est pas accepté et λ est multiplié par 10.

Remarque 2.5. *Lorsque λ est grand, l'algorithme est équivalent à une descente de gradient, lorsque λ est petit, il est équivalent à la méthode de Gauss-Newton.*

La convergence de l'algorithme de Levenberg-Marquardt est superlinéaire. Grâce à ses bonnes performances, il est retenu pour résoudre les problèmes aux moindres carrés non-linéaires. Une description plus détaillée de l'algorithme est présentée dans (Hartley and Zisserman, 2004; Triggs et al., 2000).

2.6 Conclusion

Ce chapitre rassemble les éléments mathématiques de base utilisés dans la suite de cette thèse. Les éléments concernant les surfaces permettent de définir les surfaces développables décrites au chapitre suivant. Les notions de distance géodésique et d'isométrie sont utilisées dans le chapitre 6 dans lequel un algorithme de reconstruction pour les surfaces inextensibles est présenté.

Les méthodes de minimisation sont utilisées fréquemment pour résoudre différents problèmes. Elles interviennent notamment dans la reconstruction *3D* des surfaces développables et des surfaces inextensibles présentée aux chapitres 5 et 6.

CHAPITRE

3

SURFACES DÉVELOPPABLES

Résumé.

Les surfaces développables sont très communes. Elles décrivent par exemple les déformations sans pli franc d'une feuille de papier dont l'épaisseur est négligée. Grâce à leurs propriétés, elles représentent une primitive de base dans les outils de conception assistée par ordinateur. Ce chapitre propose une présentation générale de ces surfaces. En particulier, les différentes paramétrisations sont détaillées, et les problématiques de modélisation d'objets à partir de ces surfaces sont abordées.

3.1 Aspects mathématiques

Dans ce chapitre, nous introduisons les surfaces développables, c'est-à-dire les surfaces régulières [1] isométriques au plan. Après quelques généralités, les paramétrisations directe et duale des surfaces développables sont présentées. Des propriétés de ces surfaces sont ensuite énoncées. Enfin, nous nous intéressons à la modélisation d'objets à partir de surfaces développables et plus particulièrement aux différentes possibilités permettant de raccorder des surfaces développables.

3.1.1 Généralités

Les surfaces développables sont les surfaces qui peuvent être mises à plat sans être étirées. On les obtient par exemple en pliant une feuille de papier. Cependant, les papiers déformés présentant des plis francs ne sont pas représentés par des surfaces développables, celles-ci étant des surfaces régulières. Les exemples les plus courants sont les cônes et les cylindres. Un contre exemple classique est la sphère pour laquelle la mise à plat a fait l'objet de nombreuses études, notamment en cartographie.

Un historique assez complet sur les surfaces développables est présenté dans (Cajori, 1929) ; nous donnons ici quelques éléments clefs. L'étude mathématique des surfaces développables commence réellement à la fin du 18ème siècle. Auparavant, Aristote avait introduit dès l'antiquité le concept de surface réglée avec la constatation suivante : le déplacement d'une droite dans l'espace génère une surface. Par la suite, quelques travaux s'intéressent à la mise à plat de cylindres et de cônes principalement pour des problèmes d'architecture, mais la notion de surface développable n'est pas établie avant les travaux d'Euler en 1772. Selon (Bell, 1999), c'est dans le cadre de ses travaux sur la cartographie qu'il a étudié les surfaces développables. Partant de la constation qu'une sphère ne peut être mise à plat sans être étirée, il cherche à définir les surfaces satisfaisant cette propriété. A la même époque, Monge propose deux méthodes pour générer des surfaces développables à partir d'une courbe gauche.

Les applications des surfaces développables dans le milieu industriel sont variées. En effet, les pièces dont la surface est développable sont fabriquées simplement par pliage de leur forme développée découpée dans une feuille du matériau. Ce procédé est utilisé par exemple dans la construction navale pour la fabrication des coques de bateau (Chu and Chen, 2007), une illustration est donnée sur la figure 3.1. L'industrie vestimentaire s'intéresse également aux surfaces développables, puisque les vêtements sont réalisés par assemblage de pièces de tissu planes, voir par exemple (Decaudin et al., 2006). Dans le domaine de l'architecture, les surfaces développables sont généralement considérées comme un procédé de réalisation technique de formes complexes. Cependant l'étude proposée dans (Glaeser and Gruber, 2007) montre qu'elles peuvent être utilisées comme un outil esthétique à part entière. Les auteurs citent par exemple l'opéra de Ténérife réalisé par Santiago Calatrava, ou encore le musée Guggenheim de Bilbao dessiné par Gehry montrés sur la figure 3.2. Des designers ont également proposé des meubles réalisés par pliage et donc utilisant des surfaces développables. La figure 3.3 montre deux exemples de chaises ainsi fabriquées.

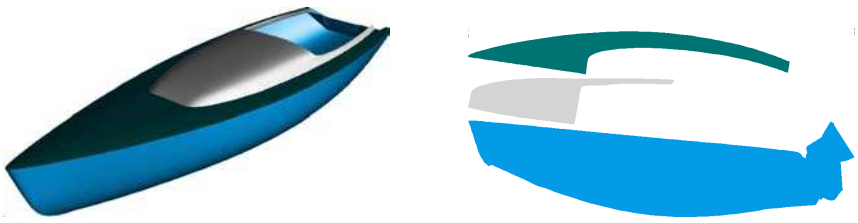


FIGURE 3.1 – **Utilisation des surfaces développables en construction navale.** (à gauche) Modèle 3D de la coque. (à droite) Développement plan des différentes parties. Images réalisées avec le logiciel libre *Free !Ship*.

La diversité des applications impliquant des surfaces développables les rend attractives pour la communauté de synthèse d'images. Ainsi, des outils informatiques ont été développés pour dessiner ces surfaces, ou les estimer à partir d'objets existants. Certaines de ces méthodes sont présentées aux chapitres 4 et 5. En vision par

1. Les surfaces régulières sont les surfaces ne présentant pas de singularité. Elles sont présentées à la section 2.4.2.1.

FIGURE 3.2 – **Bâtiments réalisés à partir de surfaces développables.** (à gauche) l'opéra de Ténérife par l'architecte Santiago Calatrava. (à droite) le musée Guggenheim de Bilbao par l'architecte Frank Gehry.

FIGURE 3.3 – **Design de chaises développables.** Designers : Grete Jalk (à gauche) et Poul Kjærholm (à droite).

ordinateur, les surfaces développables sont principalement étudiées dans les travaux concernant les déformations du papier. En effet, les algorithmes permettant de redresser les images d'un texte sur une feuille de papier sont généralement basés sur une hypothèse de développabilité de la surface. Une étude plus complète de ces méthodes est donnée au chapitre 5.

3.1.2 Paramétrisation directe

Les surfaces développables sont les surfaces régulières qui peuvent être mises à plat sans être étirées. Autrement dit, ce sont les surfaces isométriques au plan. Le théorème de Minding énonce que deux surfaces ayant la même courbure gaussienne constante sont isométriques. Par conséquent les surfaces développables sont les surfaces pour lesquelles la courbure gaussienne est nulle en tout point. Une démonstration plus rigoureuse est donnée dans (Struik, 1961).

La courbure gaussienne est définie comme le produit des courbures principales. Elle s'annule donc lorsque l'une d'elles est égale à zéro. D'après (Pottmann and Wallner, 2001), cela est satisfait lorsque :

(i) en chaque point passe une droite incluse dans la surface,

(ii) le plan tangent à la surface est constant le long de cette droite.

La première contrainte *(i)* définit une surface réglée : ce sont les surfaces engendrées par le déplacement d'une ligne droite dans l'espace. La figure 3.4 illustre ce principe de génération de surface. Une surface réglée Σ_r peut être paramétrée par une courbe gauche Γ appelée *directrice* et un champ vectoriel $\mathbf{v}$:

$$\sigma_r(t,k) = \gamma(t) + k \cdot \mathbf{v}(t)$$

Ainsi, pour chaque valeur du paramètre t, on obtient la droite passant par $\gamma(t)$ et orientée par le vecteur $\mathbf{v}(t)$. Cette droite est appelée une *génératrice* (ou *règle*). Bien que la courbure le long des génératrices soit nulle, une surface réglée n'est pas systématiquement développable. En effet, une surface reglée peut avoir des courbures principales de signes opposés et par conséquent une courbure gaussienne non-nulle.

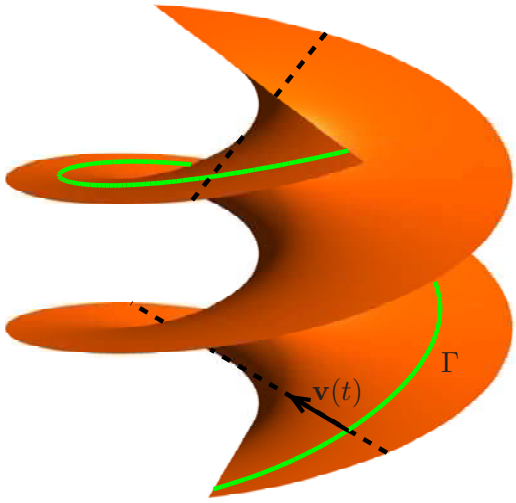


FIGURE 3.4 – **Exemple de surface réglée : l'hélice.** La surface est générée par la rotation d'une droite associée à un mouvement vertical.

La contrainte *(ii)* impose au champ vectoriel de diriger en tout point de la surface l'une des deux directions principales. La courbure d'une droite étant égale à zéro, la courbure gaussienne est alors nulle partout : la surface réglée devient une surface développable. Cette contrainte est exprimée mathématiquement de la manière suivante :

$$\det(\gamma', \mathbf{v}, \mathbf{v}') = 0$$

La figure 3.5 montre une surface générée par ces équations.

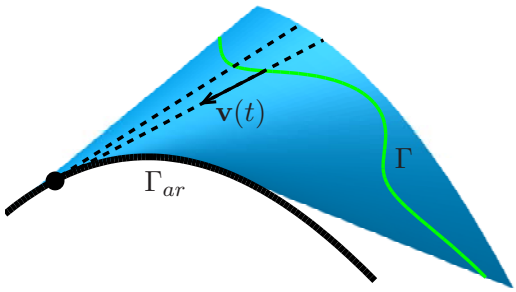


FIGURE 3.5 – **Paramétrisation directe d'une surface développable et son arête de rebroussement.**

3.1.3 Paramétrisation duale

La définition précédente des surfaces développables fait apparaître que le plan tangent à la surface ne dépend pas du paramètre k. En effet le plan tangent passe par le point $\gamma(t)$ et sa normale est dirigée par $\gamma'(t) \times \mathbf{v}(t)$. L'ensemble des plans tangents d'une surface développable forme donc une famille de plans à un paramètre. La réciproque est vraie moyennant quelques hypothèses sur le faisceau de plans : l'enveloppe d'une famille de plans à un paramètre est une surface développable. Les hypothèses sont les suivantes (Struik, 1961) :

- ▷ les plans ne sont pas tous parallèles,
- ▷ la famille ne forme pas un faisceau [2] (il n'existe pas une droite commune à tous les plans).

La famille de plans peut s'écrire :

$$a(t)x + b(t)y + c(t)z + d(t) = 0$$

Elle est représentée par une courbe dans l'espace projectif $\mathbb{P}^4$ (les coefficients a, b, c et d sont supposés suffisamment différentiables). Cette représentation des surfaces développables est appelée *paramétrisation duale*. Elle est utilisée entre autres dans des algorithmes de reconstruction à partir de points *3D*, voir par exemple (Peternell, 2004; Pottmann and Wallner, 1999). À titre d'exemple, quelques plans de la paramétrisation duale d'un cylindre sont représentés sur la figure 3.6.

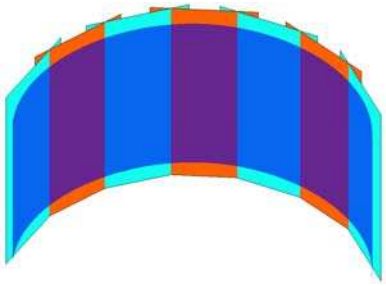


FIGURE 3.6 – **Surface développable définie par l'enveloppe de ses plans tangents.**

3.1.4 Propriétés

3.1.4.1 Points caractéristiques et arête de rebroussement

Dans la paramétrisation duale, l'intersection des plans définis par les paramètres $t_1 < t_2 < t_3$ est un point. Le point limite obtenu lorsque t_1 et t_3 tendent vers t_2 est le *point caractéristique* du plan paramétré par t_2. On peut également le définir comme l'intersection entre deux génératrices infiniment proches à partir de la paramétrisation directe. Le lieu des points caractéristiques est appelé *arête de rebroussement* ; elle est notée Γ_{ar}. Dans le cas général, c'est une courbe gauche. Elle se réduit à un point lorsque la surface est un cône et

2. Un faisceau est une famille de dimension 1.

elle est renvoyée à l'infini pour les cylindres. La figure 3.5 fait apparaître un point caractéristique et l'arête de rebroussement d'une surface développable. Les deux propriétés accompagnant la notion de point caractéristique sont :

(i) les points caractéristiques sont les points singuliers d'une surface développable,

(ii) les génératrices sont tangentes à l'arête de rebroussement.

La première propriété implique qu'une portion de surface développable contenant une partie de son arête de rebroussement ne peut pas être intégralement développée. Par conséquent, lors de l'utilisation de surfaces développables pour représenter des objets réels il faut s'assurer que l'arête de rebroussement est située à l'extérieur de la frontière de l'objet, voir par exemple (Bo and Wang, 2007).

La seconde propriété conduit à une autre paramétrisation des surfaces développables par réciprocité. Ainsi les surfaces réglées dont les génératrices sont les tangentes d'une courbe gauche sont développables. En construisant une surface développable de cette manière, la surface générée apparaît en deux parties situées de part et d'autre de l'arête de rebroussement. Elles sont respectivement générées par les demi-tangentes de l'arête de rebroussement, comme l'illustre la figure 3.7.

Dans la représentation duale, cela revient à considérer la famille des plans osculateurs d'une courbe gauche, (Struik, 1961). Les surfaces développables représentées de cette manière sont appelées *surfaces développables tangentes*.

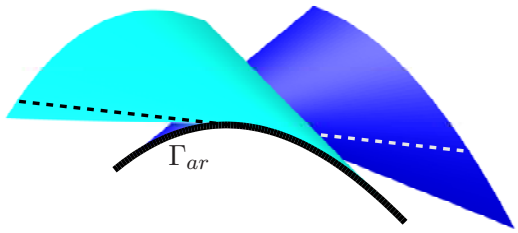


FIGURE 3.7 – **Surface développable tangente.** Les tangentes d'une courbe gauche génèrent une surface développable, dont la courbe gauche est l'arête de rebroussement.

3.1.4.2 Géodésique

Une *géodésique* est une courbe tracée sur une surface dont la courbure géodésique est nulle en tout point. Elle est parfois définie de manière intuitive comme la courbe de longueur minimale tracée sur une surface joignant deux points de cette surface. La première définition établit une propriété sur les courbes, alors que la seconde s'appuie sur des points, cette dernière n'est pas toujours satisfaisante. Par exemple, les géodésiques d'un cylindre de révolution sont les génératrices et les hélices régulières. Par deux points du cylindre, il passe donc une infinité de géodésiques. Une discussion plus complète sur ces différences est présentée dans (Struik, 1961). Il existe néanmoins une relation entre ces deux définitions : lorsque le minimum des longueurs des courbes tracées entre deux points d'une surface existe, la courbe associée emprunte une géodésique. Cette longueur minimale est appelée *distance géodésique*.

Remarque 3.1. *Toute portion de droite appartenant à une surface est une géodésique, et les géodésiques du plan sont les droites.*

Cette notion de géodésique est importante dans le cadre de la modélisation d'objets déformables car elle donne un cadre mathématique à la propriété d'inextensibilité des objets. Une approximation habituellement choisie est de considérer un objet inextensible si les distances géodésiques mesurées entre un ensemble épars de points appartenant à la surface restent constantes quelle que soit la déformation (Gan et al., 1996). Ces propriétés sont utilisées pour la reconstruction des objets inextensibles présentée dans le chapitre 6.

Le lien entre les géodésiques d'une surface et les surfaces développables vient d'une définition équivalente à celle basée sur la courbure : une courbe est une géodésique si, pour les points où sa courbure est non nulle,

le plan rectifiant de la courbe est tangent à la surface, voir (Laville, 2004). Par conséquent, si on définit une surface Σ comme l'enveloppe des plans rectifiants d'une courbe gauche Γ_g, alors :

(i) Σ est une surface développable (paramétrisation duale),

(ii) les plans rectifiants sont tangents à la surface (propriété des enveloppes).

La courbe gauche Γ_g est donc une géodésique de Σ. Cette méthode de construction est à l'origine du modèle proposé par (Bo and Wang, 2007). Par ailleurs, elle permet de calculer facilement la mise à plat de la surface (son développement) en utilisant le fait que la géodésique développée est une droite. Ce problème est traité dans (Bo and Wang, 2007) et dans un cas plus général en se basant sur la courbure géodésique dans (Pottmann and Wallner, 2001).

3.1.4.3 Quadrique osculatrice

En tout point d'une surface développable, il existe une quadrique ayant un contact d'ordre 2 avec la surface. Cette quadrique est un cône de révolution dans le cas général (ou un cylindre de révolution). La démonstration de cette propriété est faite dans (Pottmann and Wallner, 2001). L'axe et une génératrice de ce cône peuvent être déterminés à partir de l'arête de rebroussement de la surface Γ_{ar} dont le repère de Frenet est noté $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, la courbure κ et la torsion τ (voir par exemple (Leopoldseder and Pottmann, 1998)) :

- ▷ axe : $\Gamma_{ar}(t) + \lambda \cdot (\tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b})$,
- ▷ génératrice : $\Gamma_{ar}(t) + \lambda\mathbf{t}$.

3.1.5 Discrétisation

Les surfaces développables sont définies comme les surfaces ayant une courbure gaussienne nulle. Cependant il n'existe pas d'équivalent discret de la courbure gaussienne, plusieurs expressions ont d'ailleurs été proposées (Sullivan, 2007; Wang and Tang, 2004; Yamauchi et al., 2005). Par conséquent, il n'existe pas de solution unique pour discrétiser une surface développable.

La méthode décrite dans (Pottmann and Wallner, 2001) se base sur la représentation des surfaces développables tangentes. L'arête de rebroussement est discrétisée et devient un polygône. Les tangentes consécutives de la polyligne définissent des secteurs de plans conduisant à une surface développable plane par morceaux. Ce processus est illustré par la figure 3.8. Il est facile de vérifier que la limite de ce processus de discrétisation tend vers une surface développable. Lorsque le nombre de points formant la polyligne augmente, cette dernière tend vers une courbe continue, et chaque plan tend vers une génératrice de la surface. À la limite, on obtient une surface développable tangente.

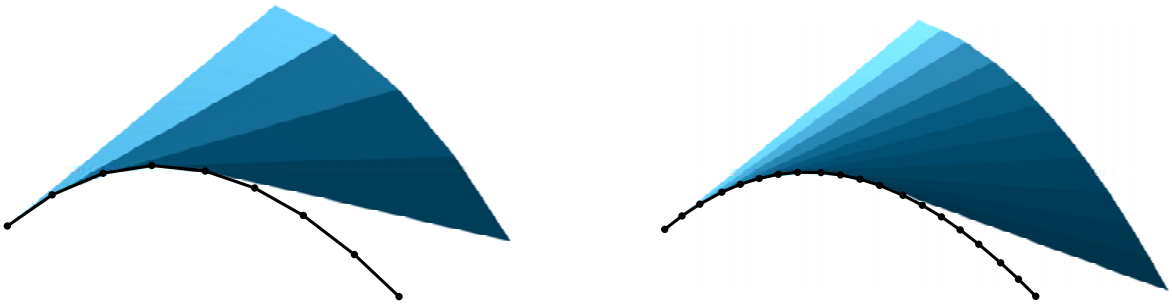


FIGURE 3.8 – **Discrétisation d'une surface développable par la discrétisation de son arête de rebroussement.** La surface limite de cet exemple est la surface de la figure 3.5. (à gauche) discrétisation grossière. (à droite) discrétisation plus fine.

Une autre solution consiste à définir une surface développable comme une surface pouvant être mise à plat sans être étirée. En suivant cette démarche, des modèles de type "bande" ont été proposés. Ils sont constitués d'un assemblage articulé de formes élémentaires planes formant une bande. Dans (Wang and Tang, 2005), les

formes élémentaires sont des triangles. Il est alors possible d'obtenir des approximations développables de surface qui ne le sont pas. La figure 3.9 donne un exemple d'une telle approximation en montrant la discrétisation d'une demi-hélice expliquée en détail dans la suite. La forme continue d'une hélice Σ_h est donnée par :

$$\sigma_h(t,k) = (k\cos(t),\ k\sin(t),\ t)$$

Le paramètre k appartient à un intervalle du type $[0, k_{max}]$ pour n'obtenir qu'une partie de la demi-hélice. Une des discrétisations de l'hélice consiste à échantillonner le paramètre t, ce qui permet de définir les points A_i et B_i de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A_i &= (0,\ 0,\ t_i)^{\mathsf{T}} \\ B_i &= (k_{max}\cos(t_i),\ k_{max}\sin(t_i),\ t_i)^{\mathsf{T}} \end{aligned}$$

la succession de triangles se définit alors par :

$$(A_i\ B_i\ B_{i+1}) \quad (B_{i+1}\ A_i\ A_{i+1}) \quad (A_{i+1}\ B_{i+1}\ B_{i+2}) \quad \cdots$$

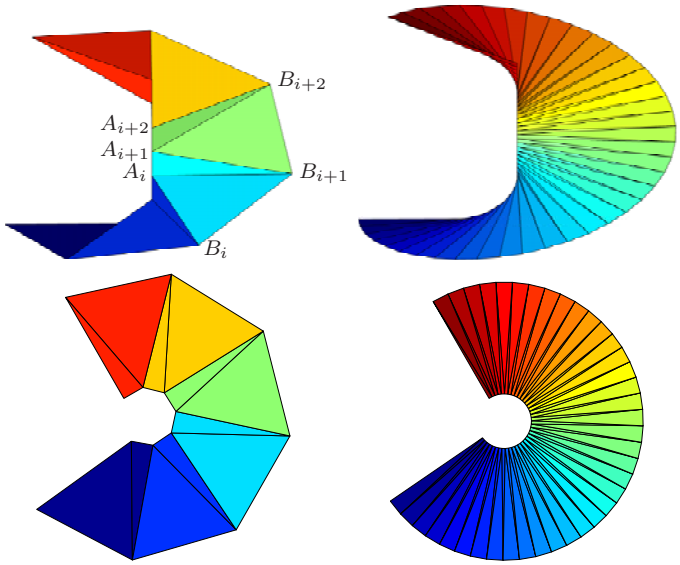


FIGURE 3.9 – **Discrétisation développable d'une hélice.** L'hélice ainsi discrétisée (en haut) peut être mise à plat (en bas), mais la limite du processus n'est pas développable. (à gauche) Discrétisation avec 12 triangles. (à droite) Discrétisation avec 78 triangles.

Un critère supplémentaire est proposé par les auteurs pour détecter les triangulations dont les limites tendent vers des surfaces développables. Il est également possible de choisir des quadrilatères plans pour composer la bande. Ce procédé est utilisé par exemple dans (Liu et al., 2006). La surface limite obtenue est alors développable.

3.2 Modélisation des surfaces

Les surfaces ont été présentées jusqu'ici en faisant abstraction de tout contexte physique. Elles ont été étudiées car elles apportent des outils pour la modélisation d'objets réels et de leurs déformations. Elles font donc partie des éléments constituant le modèle d'un objet. Généralement, on associe aux surfaces une notion de frontière pour définir le contour de l'objet et un ensemble de règles permettant d'assembler plusieurs portions de surface, afin de réaliser des objets plus complexes. Ces deux aspects sont étudiés ici dans le cadre des surfaces développables.

3.2.1 Portion de surface

Une surface mathématique n'est pas explicitement bornée dans le cas général, contrairement à tout objet physique qui est délimité par une frontière (ou bord). Par exemple, les surfaces mathématiques représentant une feuille de papier déformée sont les surfaces développables. Mais les définitions des surfaces développables ne font pas apparaître directement de frontière permettant de délimiter la feuille. Il est par conséquent nécessaire d'inclure dans la représentation de l'objet, la courbe *3D* dessinée sur la surface qui définit le contour de l'objet.

Dans le cadre des surfaces développables, cette courbe peut être dessinée sur la développée plane de la surface puis transférée en *3D* en utilisant les équations de la surface. Une solution pour la paramétrisation de la courbe est alors de la définir par des bornes sur les génératrices, voir par exemple (Bo and Wang, 2007).

Par ailleurs, la forme de l'objet est généralement supposée *simplement connexe*, c'est-à-dire en une seule partie et sans trou. Dans la suite, une *portion de surface* désigne un couple surface-contour.

3.2.2 Assemblage de portions de surfaces développables

Il est généralement plus simple de représenter un objet par un assemblage de parties élémentaires plutôt que par une surface unique associée à une frontière complexe. Les figures 3.10 et 3.12 illustrent ces deux solutions pour des formes similaires. Bien qu'il soit possible de faire passer une surface unique par toutes les parties de la feuille, cela ne semble pas intéressant en pratique :

- ▷ la frontière de l'objet n'est plus simplement connexe,
- ▷ le raccordement entre les parties impose de nombreuses contraintes de continuité,
- ▷ la surface hors des zones d'intérêt est très peu contrainte.

Cette solution n'est pas envisagée dans la suite. Les formes complexes sont donc réalisées par assemblage de surfaces développables. Il existe trois possibilités pour raccorder des portions de surface développable :

1. le regroupement sous une surface développable unique,
2. l'assemblage par l'intermédiaire d'une région plane,
3. le raccordement par un pli franc.

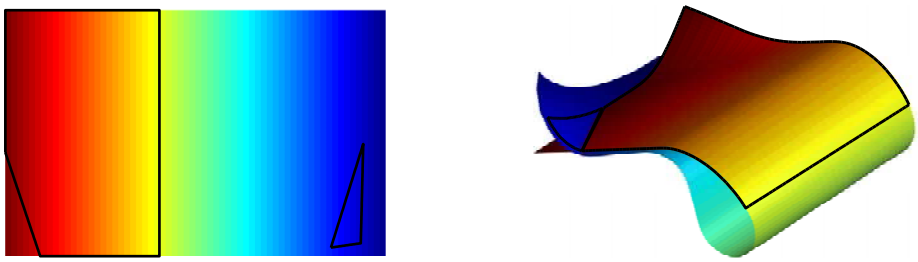


FIGURE 3.10 – **Découpage complexe d'une surface.** (à gauche) la surface mise à plat et les frontières de l'objet. (à droite) la surface déformée et l'objet ainsi constitué. La forme complexe de l'objet ne peut pas être représentée par une surface développable unique associée à une frontière connexe à cause d'une incompatibilité dans les génératrices. Par conséquent l'objet est obtenu par l'association de deux parties distinctes de la même surface.

3.2.2.1 Regroupement

Le regroupement de deux portions de surfaces développables en une nouvelle portion de surface développable est possible lorsque l'assemblage est réalisé le long de génératrices des deux portions. Le raccordement est continu et l'angle entre les portions peut être ajusté de manière à faire correspondre les plans tangents de part et d'autre du raccord. La figure 3.11 illustre ce type d'assemblage. Cette méthode est par exemple utilisée dans (Sun and Fiume, 1996) pour raccorder des cônes généralisés afin d'obtenir une surface complexe.

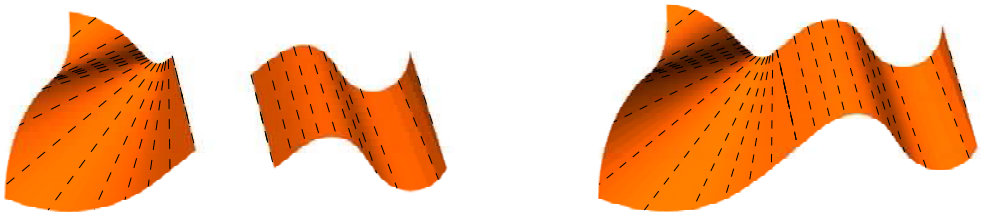


FIGURE 3.11 – **Raccordement simple le long de génératrices.**

3.2.2.2 Assemblage par l'intermédiaire d'une portion plate

Une autre solution pour réaliser une surface globalement développable à partir de plusieurs portions est de les relier par une zone plate. Dans ce cas, les raccords s'effectuent également le long de génératrices des différentes portions. De cette façon, la continuité de la surface (et si nécessaire de sa dérivée) est assurée. La surface plate est alors bordée par les génératrices des portions, comme illustré par la figure 3.12. Une démonstration que l'assemblage ainsi réalisé est développable est présenté dans (Do Carmo, 1976).

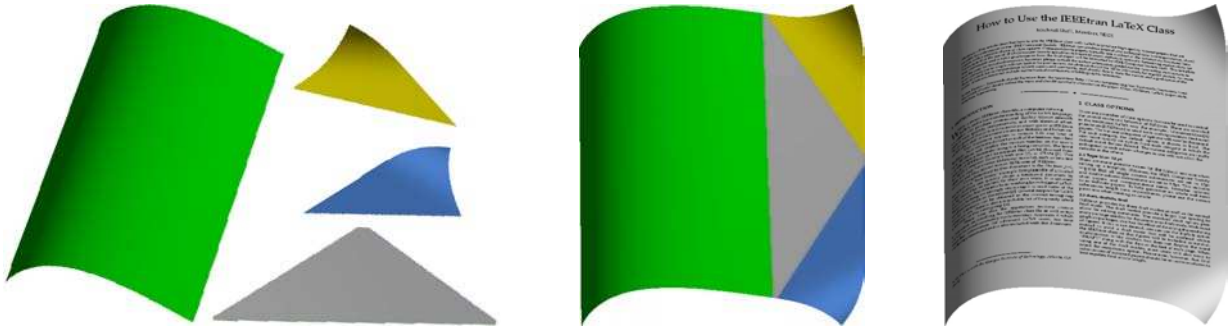


FIGURE 3.12 – **Raccordement de plusieurs portions de surfaces développables.** Le triangle gris est la région plate permettant le raccord, les parties colorées sont des portions de surfaces développables. Les éléments se raccordent le long des génératrices. La surface ainsi générée représente par exemple la page d'un livre dont les coins sont cornés.

3.2.2.3 Raccordement le long d'un pli franc

Cette dernière catégorie permet d'expliquer les déformations obtenues par exemple en froissant une feuille de papier : des plis francs apparaissent sur la surface mais celle-ci peut toujours être mise à plat. En considérant la surface dans sa globalité, les plis francs sont des points singuliers car la surface n'est pas régulière le long des plis. En revanche, les portions de surface entre les plis sont développables et par conséquent le papier froissé est un assemblage de portions développables.

D'après (Pottmann and Wallner, 2001), la relation entre les surfaces développables de part et d'autre d'un pli est la suivante : le plan osculateur du pli est en tout point le plan bissecteur des plans tangents des surfaces développables. Un exemple de surface développable pliée est présenté sur la figure 3.13. Cette méthode est utilisée dans l'étude (Frey, 2004) sur la fabrication de pièces par emboutissage.

Cette méthode d'assemblage garantit que la surface obtenue est globalement développable, au sens où elle peut être mise à plat. Par ailleurs, il est toujours possible d'assembler deux surfaces développables sans tenir compte de la contrainte, en faisant l'intersection des deux surfaces. Mais l'ensemble n'est alors plus globalement développable.

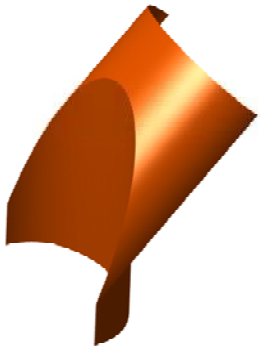


FIGURE 3.13 – **Pli franc pour le raccord de surfaces développables.**

3.3 Conclusion

Les surfaces développables sont les surfaces pouvant être mises à plat sans étirement. Elles permettent de représenter la surface d'une feuille de papier par exemple. Plusieurs paramétrisations de ces surfaces ont été présentées, la paramétrisation directe, duale, et des modèles discrets. Afin de réaliser des objets complexes, les différentes possibilités de raccord de ces surfaces ont été décrites. Cette étude permet de comprendre les différents aspects mathématiques intervenant dans les surfaces développables. Pour intégrer ces éléments dans notre processus de reconstruction *3D* de surfaces développables à partir d'images, nous avons choisi d'utiliser un modèle de surface. Ce dernier peut être vu comme une mise en forme pratique des concepts mathématiques introduits. Notre contribution sur la modélisation d'objets à partir de surfaces développables est détaillée dans le chapitre suivant.

CHAPITRE

4

UN MODÈLE GÉNÉRATIF DE SURFACES DÉVELOPPABLES

Résumé.

Dans la méthode adoptée pour la reconstruction *3D* d'objets déformables, la modélisation de la surface est une étape essentielle. Cette modélisation peut être plus ou moins spécifique suivant les hypothèses faites sur l'objet. Dans ce cadre, nous étudions maintenant la modélisation des objets dont la surface est développable. Ce cas de figure correspond à des hypothèses fortes sur l'objet. Nous les avons traduites en proposant un modèle génératif de surfaces développables. Cette approche permet également d'identifier d'autres propriétés des surfaces développables.

Contributions.

- ▷ Notre premier modèle permettant de représenter des portions uniques de surfaces développables est présenté dans (Perriollat and Bartoli, 2006).
- ▷ Notre modèle plus complet, avec la gestion de l'assemblage de plusieurs portions développables est décrit dans (Perriollat and Bartoli, 2007a,b; Perriollat et al., à paraître).

4.1 Introduction

Le traitement informatique des objets réels fait généralement intervenir un *modèle* de ces objets. Le modèle désigne dans ce contexte un processus permettant de générer des objets de la classe de manière synthétique. Il est constitué d'un ensemble d'équations ou de relations représentant au mieux des propriétés identifiées de l'objet. La plupart du temps, le modèle utilisé est incomplet, il ne représente pas toutes les caractéristiques de l'objet, et n'est valide que dans un domaine d'étude restreint. Le modèle est donc par nature adapté à l'utilisation pour laquelle il a été conçu.

Dans le chapitre précédent, les surfaces développables ont été introduites. Plus exactement, elles ont été étudiées d'un point de vue mathématique. Les formulations de ces surfaces ne constituent pas directement des modèles puisqu'elles ne sont pas liées à des objets physiques. En revanche, elles constituent des outils mathématiques utiles, par exemple pour la modélisation des objets dont la surface est développable. Ce ne sont pas les seuls outils à avoir été employés pour la modélisation de ces objets : des méthodes de simulation physique et des équations dérivées de la géométrie discrète ont notamment été utilisées.

La première partie de ce chapitre est un état de l'art des modèles représentant des objets dont la surface est développable. Le modèle que nous avons développé est ensuite introduit. Des propriétés de la paramétrisation du modèle sont également présentées. Enfin des possibilités d'extension sont considérées.

Notre modèle a été conçu spécifiquement pour les applications envisagées en vision par ordinateur, voire en synthèse d'image :

- ▷ **reconstruction *3D* :** estimation des paramètres du modèle à partir d'observations, par exemple des images,
- ▷ **estimation de caractéristiques :** les caractéristiques de l'objet qui ne sont pas directement données par les observations peuvent être estimées à partir du modèle. Par exemple, la frontière d'un objet estimé à partir de points *3D* peut être prédite par le modèle,
- ▷ **conception de surfaces développables :** déformation intuitive de l'objet, mise à plat d'un objet déformé,

Il s'agit d'un modèle génératif discret, couplé à un processus d'interpolation permettant de lisser la surface générée.

Remarque 4.1. *La distinction faite dans ce chapitre entre objet et surface réside dans la présence ou non d'une frontière. Ainsi un objet est une partie de surface délimitée par une frontière. Il peut être constitué d'un ensemble de portions* [1] *de surface.*

4.2 État de l'art

Dans la suite, nous désignons par *objet développable* un objet dont la surface est développable. L'intérêt est porté sur la surface de l'objet. Nous distinguons deux composantes dans le modèle :

- ▷ **la partie géométrique :** elle contient les éléments permettant de définir la surface de l'objet. Par exemple dans le cas d'un modèle articulé, elle caractérise la forme des différents éléments et leurs liaisons,
- ▷ **la partie physique :** elle traduit la relation entre une perturbation appliquée sur l'objet et la variation des paramètres de déformation de la partie géométrique. Elle est par exemple utilisée pour calculer les déformations d'un objet soumis à des forces externes.

Le choix des méthodes utilisées pour définir ces deux parties est guidé par le cadre d'application du modèle. Il est possible d'identifier d'autres composantes d'un modèle. Par exemple, la texture de l'objet et son modèle de réflectance [2] sont nécessaires pour réaliser un rendu réaliste.

Parmi les modèles proposés pour les objets développables, deux catégories peuvent être identifiées : les modèles dédiés à la *simulation* et les modèles *géométriques*. Les premiers sont généralement composés d'une

1. Les portions ont été introduites à la section 3.2.1.
2. Appelé BRDF en anglais ("Bidirectional Reflectance Distribution Function"), il décrit comment la surface réfléchit la lumière incidente.

partie géométrique simple et d'une partie physique complexe, garantissant des déformations réalistes conservant la propriété de développabilité. Les seconds sont plutôt une mise en forme facilement manipulable des équations mathématiques et adaptée à des problématiques réelles de reconstruction *3D*. La partie physique est généralement très limitée voire inexistante.

Les modèles présentés dans notre état de l'art sont évalués suivant trois critères :

- ▷ **surface développable :** la surface générée par le modèle est développable,
- ▷ **modèle d'un objet :** le modèle intègre une frontière sur la surface,
- ▷ **assemblages complexes :** le modèle gère automatiquement les assemblages complexes de portions développables décrits à la section 3.2.2.2.

Ces critères rassemblent les propriétés essentielles d'un modèle permettant de réaliser les applications présentées dans l'introduction.

4.2.1 Modèles dédiés à la simulation

La partie géométrique des modèles destinés à la simulation est généralement très simple. Il s'agit la plupart du temps de maillages discrets dont les sommets sont liés par des relations physiques. Ces relations sont généralement basées sur de simples systèmes masse-ressort. L'utilisation de travaux récents traitant par exemple de la compression des feuilles de papier d'un point de vue de l'énergie (Cerda et al., 1999; Matan et al., 2007) ou acoustique (Houle and Sethna, 1996) pourrait conduire à des relations plus complexes.

Système masse-ressort. Chaque sommet est assimilé à une masse ponctuelle et est relié à ses voisins par des ressorts (Brown and Seales, 2004; Provot, 1995). Une force physique appliquée en un point du maillage se propage sur toute la surface à travers les interactions entre les sommets. La raideur des ressorts et leurs coefficients d'amortissement permet d'ajuster le comportement du matériau. Des simulations sont réalisées dans (Provot, 1995) en soumettant le système à la gravité et à des forces représentant le vent. Ce modèle a également été utilisé en restauration de document dans (Brown and Seales, 2004), pour simuler la mise à plat d'une page déformée.

Il est possible avec cette méthode de représenter des objets développables se déformant, mais aucune contrainte ne garantit que la surface ainsi générée est développable au sens strict. En d'autres termes, il est possible d'observer localement des étirements de la surface.

Contrainte spécifique de développabilité. Afin de simuler de manière plus réaliste les déformations des objets développables, des contraintes sur le modèle géométrique ou sur les méthodes de déformation ont été proposées (Bergou et al., 2006; Decaudin et al., 2006; Liu et al., 2007). Les surfaces développables sont les surfaces isométriques au plan. Cette propriété est utilisée dans (Bergou et al., 2006) sous la forme d'une énergie de torsion contraignant l'évolution d'un maillage soumis à des forces physiques.

La conception et la simulation de vêtements est étudiée dans (Decaudin et al., 2006). La partie simulation s'appuie sur des déformations types en compression et en torsion appliquées sur des éléments de maillage. La déformation globale est obtenue par composition de déformations locales et par une méthode d'interpolation pour obtenir un maillage plus fin et plus lisse. Les paramètres des déformations dépendent des propriétés physiques de l'objet, et peuvent être ajustés pour simuler différents matériaux. De la même façon que pour les autres modèles, les déformations sont obtenues en appliquant des forces externes sur le maillage.

La conservation de la longueur des arêtes d'un maillage triangulaire est la contrainte utilisée dans (Liu et al., 2007). Un maillage ainsi défini ne peut être déformé que par pliage le long des arêtes, limitant considérablement les possibilités de déformation. L'évolution du maillage est basée sur le principe d'Hamilton [3], assurant une déformation continue du modèle.

3. C'est un principe physique régissant l'évolution d'un système.

Modèle développable. Une autre approche consiste à utiliser un modèle géométrique générant des surfaces développables et à le contrôler par des paramètres physiques. C'est la démarche proposée dans (Kergosien et al., 1994). Le modèle géométrique est un modèle discret basé sur l'approximation par bande. Les génératrices sont paramétrées par leurs abscisses curvilignes le long du contour. Ce principe est repris dans le modèle proposé, il est illustré par les figures 4.1 et 4.3. Les contraintes physiques appliquées à la surface sont ensuite traduites en terme d'angles de plis autour des directrices, permettant la déformation du modèle.

	systèmes masse-ressort	contrainte développable	modèle développable
surface développable	✘	✘	✔
modèle d'un objet	✔	✔	✔
assemblages complexes	✔	✔	✘

TABLE 4.1 – **Évaluation des modèles dédiés à la simulation suivant les trois critères expliqués à la section 4.2.**

Ces modélisations des objets développables sont principalement destinées à des applications de simulation. Les déformations sont obtenues par application de forces externes sur l'objet, par exemple la gravité pour un vêtement, ou l'action du vent sur un drapeau. On peut également imaginer des modèles physiques plus complexes, basés sur des analyses énergétiques du papier (Cerda et al., 1999; Matan et al., 2007).

L'utilisation directe de ces modèles n'est pas envisagée dans le cadre de la reconstruction *3D* d'objets déformables à partir d'images. En effet, aucun des modèles présentés ne satisfait les trois critères souhaités, comme le montre le tableau 4.1. Par ailleurs, l'objectif premier de la reconstruction *3D* est d'estimer la surface de l'objet, et non les forces appliquées sur l'objet. De plus, cela rend nécessaire un deuxième modèle pour représenter les forces externes. En revanche, les principes de génération de surfaces développables sont intéressants et servent de base pour constituer un modèle plus adapté.

4.2.2 Modèles géométriques

Cette deuxième catégorie de modèles provient des applications de conception de surface assistée par ordinateur (étude d'outils intuitifs permettant de dessiner des surfaces développables) et des problématiques d'ingénierie inverse (estimation de surface à partir de mesures réalisées sur des objets existants).

Pour répondre à ces besoins, la première solution consiste à élaborer un *modèle génératif* de surface, contrôlé par un ensemble de paramètres. Ce modèle est un processus générant une surface à partir des paramètres. Suivant l'application visée, ces paramètres sont ajustés par l'utilisateur pour obtenir la forme souhaitée ou sont automatiquement estimés à partir de mesures faites sur l'objet réel.

La deuxième approche se base sur une surface quelconque. Cette dernière est déformée par un processus visant à minimiser un critère de développabilité. On appelle ces modèles des *modèles contraints*.

4.2.2.1 Modèles génératifs

Des modèles génératifs ont été proposés pour toutes les paramétrisations possibles des surfaces développables. Ils se différencient également par leur capacité à représenter la frontière de l'objet et à permettre l'assemblage de plusieurs portions de surfaces développables.

Primitives élémentaires. Pour certaines applications, il n'est pas indispensable de pouvoir représenter toutes les surfaces développables. Des modélisations de cylindres généralisés ont ainsi été proposées, par exemple pour la reconstruction de pages de livres (Cao et al., 2003; Courteille et al., 2004; Tsoi and Brown, 2007). Ces représentations sont composées de la définition de la section du cylindre, associée à la direction des génératrices.

Les cônes de révolution sont les quadriques osculatrices des surfaces développables, voir la section 3.1.4.3. Le modèle utilisé dans (Leopoldseder and Pottmann, 1998) utilise cette propriété. Les surfaces développables sont représentées par la juxtaposition de portions de cônes de révolution. Le raccordement est tel que les plans

tangents coïncident le long des génératrices communes. Par conséquent, les sections de cône consécutives sont des biarcs représentés par des courbes de Bézier. Le modèle est utilisé pour l'approximation de surfaces développables, le nombre de cônes permet d'ajuster la précision et la complexité du modèle.

Une idée similaire est présentée dans (Sun and Fiume, 1996). À la différence de (Leopoldseder and Pottmann, 1998), des cônes généralisés sont utilisés. Les portions de cône sont définies par les sommets des cônes, les sections des cônes représentées par des courbes de Bézier et les frontières des portions sur les cônes. La mise à plat de ce modèle est également présentée.

Ces modèles utilisant des primitives élémentaires sont principalement utilisés pour simplifier l'expression d'une surface développable connue. Par ailleurs, il est toujours possible de trouver une approximation d'une surface développable d'une précision arbitraire avec ces représentations. Cependant, cela peut conduire à un nombre conséquent de paramètres, puisque le nombre de cônes doit être augmenté pour obtenir un modèle plus précis. Ces modèles ne proposent pas de représentation simple des assemblages complexes de portions développables : ils sont limités au regroupement sous une directrice commune, voir la section 3.2.2.1. Par conséquent, ils ne satisfont pas l'ensemble des critères requis de modélisation, comme le montre le tableau 4.2.

Paramétrisation directe. Les patchs de Bézier et les surfaces B-spline figurent parmis les outils classiques utilisés en conception assistée par ordinateur. De nombreux travaux se sont intéressés à la définition de surfaces développables à partir de ces représentations (Aumann, 2003, 2004, 1991; Chu and Chen, 2007; Chu and Séquin, 2002; Fernández-Jambrina, 2007; Lang and Röschel, 1992). La méthode consiste à définir deux courbes, $\Gamma_1(t)$ et $\Gamma_2(t)$ sous forme de courbes de Bézier ou de splines (de Boor, 2001). La surface est ensuite générée par les segments $(\Gamma_1(t), \Gamma_2(t))$ joignant les deux courbes. Dans le cas général, la surface est réglée et non-développable. Les études réalisées cherchent à établir les contraintes minimales à appliquer sur les courbes pour rendre la surface développable. Ainsi un critère est déterminé dans (Aumann, 1991) pour les courbes de Bézier dessinées sur des plans parallèles. Il est démontré dans (Chu and Séquin, 2002) que la première courbe de Bézier peut être librement choisie, et qu'il reste 5 degrés de liberté pour définir la deuxième. Divers algorithmes utilisent cette propriété (Aumann, 2003, 2004; Chu and Chen, 2007; Chu and Séquin, 2002). La méthode est étendue à des courbes de type B-spline dans (Fernández-Jambrina, 2007).

Le même problème est traité sous un angle différent dans (Chu et al., 2007; Rose et al., 2007). L'objectif est de déterminer une surface développable, ou une surface la plus développable possible, étant données deux courbes. Ceci est appliqué à la conception de vêtements à partir d'esquisses dans (Rose et al., 2007).

Ces représentations sont facilement accessibles car elles utilisent des outils courants pour définir les courbes et les surfaces. Cependant, même si la première courbe peut facilement être définie de telle sorte qu'elle appartienne à un contour de l'objet, cela n'est pas possible pour la seconde courbe qui n'a pas suffisamment de degrés de liberté. Il n'y a donc pas d'expression directe de la frontière de l'objet. Cela est d'autant plus problématique que l'on ne sait pas dans le cas général quelle partie du contour est pertinente pour décrire la forme de l'objet. Tout choix arbitraire s'accompagne de restrictions sur la diversité des surfaces représentées. Ces modèles ne permettent pas non plus de représenter des assemblages complexes de surfaces développables.

D'autres modèles génératifs s'appuient sur la définition de courbes *3D* particulières. Dans (Gumerov et al., 2004), des relations liant la surface et son contour sont établies. Le contour plat est supposé connu, la résolution d'équations différentielles permet soit de générer la surface à partir d'une partie de son contour *3D* déformé, soit d'estimer la surface à partir de la projection de son contour dans une image.

Les propriétés des géodésiques sur les surfaces développables (voir la section 3.1.4.2) sont utilisées dans (Bo and Wang, 2007) pour réaliser un modèle génératif facilement manipulable. La forme plane de l'objet est préalablement définie. Des géodésiques sont ensuite dessinées sur cette surface plane sous forme de courbes de Bézier. La surface est obtenue par déformation de ces géodésiques en modifiant les positions de leurs points de contrôle. Les déformations sont contraintes de manière à éviter l'apparition de singularités sur la surface. L'assemblage de différentes surfaces développables est possible en définissant plusieurs géodésiques sur la surface plane.

Ces modèles génératifs à paramétrisation directe font apparaître les contraintes des surfaces développables. De plus, ils donnent des méthodes pour définir des surfaces à partir de courbes *3D*. Celles-ci peuvent être facilement modélisées par des courbes de Bézier ou des splines. En revanche la composition de plusieurs surfaces développables est largement supervisée par l'utilisateur car le cas général est source d'incompatibilités entre les différentes courbes. Ils ne peuvent donc pas être retenus directement pour les utilisations envisagées. Le tableau 4.2 résume les problèmes rencontrés.

Paramétrisation duale. Une surface développable peut être décrite comme l'enveloppe d'une famille monodimensionnelle de plans, voir la section 3.1.3. Il est alors possible, pour modéliser la surface, de paramétrer ses plans tangents. Un plan $U(t)$ est représenté par un vecteur homogène de dimension 4 :

$$U(t) \sim \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & u_3(t) & u_4(t) \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

L'équation du plan est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} U(t) = 0$$

Les courbes NURBS ("Non-Uniform Rational Basis Splines" en anglais, voir (de Boor, 2001)) généralisent les B-splines à des coordonnées homogènes. Elles sont utilisées pour paramétrer la famille monodimensionnelle de plans dans (Pottmann and Farin, 1995). Les points de contrôle de la courbe NURBS sont alors considérés comme des plans tangents de contrôle de la surface. Les propriétés de ces courbes sont utilisées pour transformer cette paramétrisation duale en forme directe, par exemple sous forme de patchs de Bézier. Cette représentation est également utilisée dans (Pottmann and Wallner, 1999), avec des hypothèses restrictives sur la paramétrisation des plans :

$$U(t) \sim \begin{pmatrix} u_1(t) & t & -1 & u_4(t) \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

Cela conduit à des expressions plus simples, au détriment de la généralité : certaines surfaces ne sont plus représentables.

Une représentation basée sur l'application de Gauss est présentée dans (Peternell, 2004). L'application de Gauss $\mathcal{G}$ est définie en tous points d'une surface régulière Σ :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{G} : & \Sigma & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ & P & \longmapsto & \frac{\mathbf{n}(P)}{\|.\|} \end{array}$$

avec $\mathbb{S}^2$ la sphère unité en dimension 3 et $\mathbf{n}(P)$ la normale à la surface Σ au point P. Les plans tangents sont paramétrés tels que :

$$u_1(t)^2 + u_2(t)^2 + u_3(t)^2 = 1 \tag{4.1}$$

De cette manière, les trois premières coordonnées des vecteurs homogènes de la famille de plans représentent les normales à la surface. Comme les normales sont constantes le long des génératrices d'une surface développable (voir la section 3.1.2), l'image de la surface développable par l'application de Gauss est une courbe sur la sphère unité. Une autre conséquence de cette représentation est que chaque plan est représenté par un point sur le cylindre de Blaschke (cylindre en dimension 4, toute intersection du cylindre avec un plan orthogonal à la quatrième dimension est une sphère de $\mathbb{R}^3$). Finalement, la famille de plans est une courbe sur le cylindre de Blaschke. Cette courbe est paramétrée de manière classique, par exemple avec une B-spline. Pour garantir la contrainte de l'équation (4.1), une projection sur la sphère unité est associée à la représentation par B-spline.

Les modèles basés sur la représentation duale permettent de contrôler la surface par la position de ses plans tangents. La famille monodimensionnelle de plans est facilement représentée par une courbe, définie par des points (ou plans) de contrôle. En revanche cette représentation ne semble pas adaptée à la modélisation d'objets car la notion de frontière n'apparaît pas directement dans les expressions et l'assemblage de portions de surfaces développables reste complexe à modéliser dans l'espace dual, voir le tableau 4.2. L'évaluation de ce type de modèle suivant les critères établis à la section 4.2 est présentée par le tableau 4.2.

Représentation discrète. Les surfaces développables peuvent être représentées de manière discrète par une succession d'éléments plans formant une bande. Cette représentation intervient dans deux problématiques distinctes, d'une part pour la réalisation de modèles génératifs et d'autre part comme un moyen de déterminer la "meilleure" surface développable passant par deux courbes données.

Lorsque les formes élémentaires utilisées dans l'approximation par bande sont des quadrilatères, la surface sous-jacente est développable (voir la section 3.1.5). Les paramètres du modèle adopté par (Liang et al., 2005) décrivent les formes planes et leurs orientations. Une énergie est associée au modèle pour contraindre les éléments à se raccorder correctement. Cette représentation appartient aux maillages dont chaque élément est un quadrilatère plan. Le raffinement de ce type de maillage, appelé *PQ mesh*, est traité dans (Liu et al., 2006). Le cas particulier des bandes représentant les surfaces développables est abordé, le processus garantit la conservation de la propriété de développabilité de la bande. La surface obtenue à la limite du processus n'est pas étudiée explicitement par ses auteurs.

Dans un contexte différent, ce modèle peut être vu comme une application associant les points de deux courbes. Ceci permet de générer une surface réglée. Lorsque l'application se présente sous la forme d'une triangulation, la surface peut être mise à plat (Mitani and Suzuki, 2004). La surface limite d'un tel processus n'est pas forcément développable. Le problème est traité dans (Wang and Tang, 2005) par la minimisation d'une énergie dans un graphe. Les courbes sont discrétisées et les correspondances possibles entre les deux ensembles de points sont représentées par un graphe. L'application cherchée est celle qui minimise un critère de développabilité.

Ces modèles sont intéressants car leurs paramétrisations sont simples et intuitives. En revanche, ils ne permettent pas de générer facilement des surfaces développables complexes par assemblage. Ces éléments apparaissent sur le tableau 4.2. Par ailleurs, les surfaces limites ne sont généralement pas étudiées.

	primitives élémentaires	paramétrisation directe	paramétrisation duale	représentation discrète
surface développable	✔	✔	✔	✔
modèle d'un objet	✔	∼	✘	✔
assemblages complexes	✘	∼	✘	✘

TABLE 4.2 – **Évaluation des modèles génératifs suivant les trois critères expliqués à la section 4.2.**

4.2.2.2 Modèles contraints

La discrétisation d'une surface conduit à un maillage. La surface est facilement déformée par le déplacement des points constituant le maillage. Sans contraintes supplémentaires, le maillage est très flexible, il possède $3n$ degrés de liberté, avec n le nombre de points du maillage. Cette représentation est généralement associée à des fonctions caractérisant les propriétés physiques de l'objet. Par exemple, la régularité de la surface est contrôlée par un terme qui tend à minimiser les variations importantes entre les points proches. L'inextensibilité peut être modélisée sur ces surfaces en contraignant les longueurs des arêtes du maillage à être de longueur constante (Gan et al., 1996). Ces différentes expressions ont été utilisées pour suivre et reconstruire des objets déformables à partir de séquences d'images dans (Salzmann et al., 2007a).

Des critères pour représenter les surfaces développables ont également été proposés, ils permettent soit de modifier le maillage pour le rendre plus "développable", soit de le segmenter en régions développables. L'approche de (Wang and Tang, 2004) consiste à améliorer la développabilité d'un maillage. Le critère utilisé est basé sur une propriété des angles : sur le maillage plat, la somme des angles adjacents à un sommet interne est égale à 2π. Le maillage *3D* se déforme pour conserver au mieux cette propriété à travers un processus d'optimisation. Une méthode similaire est proposée pour les surfaces NURBS dans (Wang et al., 2004), avec la minimisation de la courbure gaussienne.

Les méthodes par segmentation permettent de générer des cartes de texture planes pour des objets *3D* représentés par des maillages. Plusieurs stratégies ont été étudiées, par exemple le raffinement du maillage dans

les zones non développables est traité dans (Zouh et al., 2004) ou encore la croissance de régions développables sur le maillage conduisant à la segmentation de l'objet dans (Julius et al., 2005). Ces méthodes s'appuient sur une quantification de la développabilité de la surface. Dans le cas des maillages, diverses expressions ont été proposées : l'utilisation de l'énergie élastique dans (Pilu, 2001), la conservation des longueurs des arêtes d'un maillage triangulaire dans (Gan et al., 1996) ou encore le fait que la somme des angles adjacents à un sommet doit être proche de 2π dans (Wang and Tang, 2004). Une méthode pour discrétiser les courbures est également présentée dans (Sullivan, 2007)

Toutes ces méthodes s'appuient sur des expressions représentant le caractère développable des surfaces. Le tableau 4.3 les évalue par rapport aux propriétés attendues du modèle. Des processus d'optimisation basés sur ces critères ont également été élaborés pour rendre des maillages développables. Ces formulations gèrent naturellement les combinaisons complexes de portions développables. Elles sont par ailleurs facilement manipulables car paramétrées par les coordonnées des points *3D* du maillage. Cependant, leur utilisation à des fins de reconstruction *3D* à partir de séquences d'images pose principalement deux problèmes :

- ▷ la développabilité de la surface n'est pas le seul critère en jeu, il y a également l'inextensibilité et un terme d'attache aux données (terme qui décrit si le modèle de surface explique correctement la scène dans les images). Lors de l'optimisation, il n'est pas évident de trouver un bon compromis entre ces différents critères.
- ▷ la surface solution n'est généralement pas exactement développable puisqu'elle est le résultat du compromis entre les différents critères. Si la surface observée est développable, l'estimation réalisée risque d'être peu précise en dehors des points de mesure.

	modèles contraints
surface développable	✘
modèle d'un objet	✔
assemblages complexes	✔

TABLE 4.3 – **Évaluation des modèles contraints suivant les trois critères expliqués à la section 4.2.**

4.2.3 Résumé

Les tableaux 4.1, 4.2 et 4.3 permettent d'évaluer les modèles proposés dans la littérature par rapport aux trois critères essentiels pour les applications envisagées : la garantie de générer une surface développable, la prise en compte de la frontière de l'objet et la complexité des surfaces représentées. Aucun modèle ne satisfait simultanément ces trois critères et c'est pourquoi nous avons développé un modèle spécifique. La suite du chapitre est consacrée à notre modèle. Il s'agit d'un modèle discret, générant des surfaces développables continues de type "bande". Les paramètres sont intuitifs et gèrent facilement des combinaisons complexes de surfaces développables. Il satisfait les trois critères que nous avons identifiés. Cela ne le rend pas plus général que les autres modèles, car en contrepartie certaines possibilités offertes par les autres modélisations ne sont pas compatibles avec notre représentation. En particulier, les applications de simulation par l'action de forces physiques ne peuvent pas être traitées directement.

4.3 Un modèle génératif de surfaces développables

4.3.1 Principe général du modèle

Un principe intuitif permettant de générer une surface développable a été introduit par Euler, et est rapporté par exemple dans (Cajori, 1929) :

> « Euler takes a sheet of paper and draws non-intersecting straight lines upon it which are not parallel nor all directed to a common point. He considers the possibility of folding the sheet along

> these straight lines so as to form a surface. He says: “In this sheet it is possible to draw straight lines Aa, Bb, Cc, etc. at pleasure, such that none of them are parallel nor all converging to a fixed point, provided that they nowhere intersect each other [...].However that sheet is bent along the straight lines, it is always possible to conceive a solid which fits that bent sheet. [...] Let us now increase to infinity [the number of] those lines Aa, Bb, Cc, etc. so that our solid acquires a surface everywhere curved, as our problem demands according to the law of continuity”. »

La première partie de cet extrait explique la génération d'une surface développable avec un modèle de type “bande”. La seconde partie introduit la surface continue et régulière limite lorsque le nombre de plis tend vers l'infini. De telles descriptions des surfaces développables sont également proposées dans (Struik, 1961) et (Pottmann and Wallner, 2001).

Notre modèle génératif de surfaces développables est construit en suivant ce principe. Un ensemble discret de génératrices est défini sur la forme plane de l'objet. L'objet déformé est ensuite obtenu par pliage le long des génératrices. La figure 4.1 illustre ce principe.

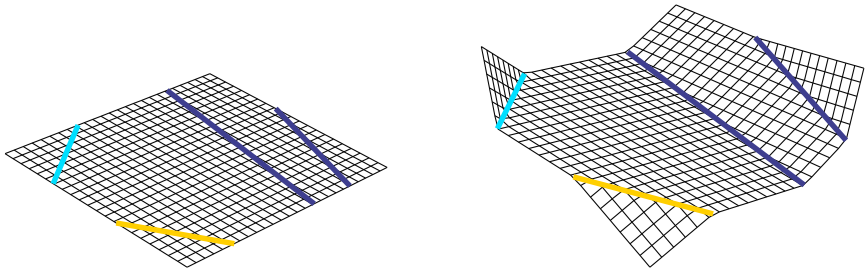


FIGURE 4.1 – **Principe de déformation.** (à gauche) Les génératrices sont définies sur la surface plane. (à droite) La surface plane est pliée le long des génératrices, produisant la surface déformée.

Le nombre de génératrices définies sur la surface agit à la fois sur sa régularité et sur son nombre de degrés de liberté. Plus ce nombre est important, plus la surface est potentiellement régulière et complexe. Ces deux éléments ne sont pas réellement compatibles dans leurs fonctions. En raisonnant en terme de degrés de liberté, chaque génératrice supplémentaire apporte de nouvelles possibilités de déformation indépendantes des génératrices déjà placées. Au contraire, une génératrice ajoutée dans le but de régulariser la surface est liée aux génératrices existantes puisqu'elle doit participer à la même déformation. De manière générale, pour obtenir une surface régulière, le nombre de génératrices dédiées à la définition de la forme doit être inférieur à celui des génératrices participant à la régularisation.

La solution apportée à ce problème par notre modèle consiste à ne paramétrer que les génératrices intervenant dans la définition de la forme (donc les génératrices associées aux degrés de liberté). Elles sont appelées *génératrices principales*. La régularisation de la surface est assurée par des *génératrices auxiliaires* dont les paramètres sont interpolés à partir des génératrices principales. Cette formulation permet de générer des surfaces régulières avec un jeu restreint de paramètres.

La figure 4.2 illustre le rôle respectif des génératrices principales et auxiliaires. Dans cet exemple, une surface de référence est estimée avec un nombre discret de paramètres en utilisant l'algorithme de reconstruction *3D* présenté au chapitre 5. L'étude porte sur le nombre de génératrices principales et auxiliaires. Afin de capturer la forme générale de la surface de référence, au minimum 6 génératrices principales sont nécessaires. Les surfaces générées sans génératrices auxiliaires ne sont pas suffisamment régulières pour rendre l'aspect de la surface de référence. Un résultat satisfaisant est obtenu par la combinaison de 6 génératrices principales avec 12 génératrices auxiliaires. Cette étude montre la complémentarité des génératrices principales et auxiliaires : un nombre restreint de génératrices principales est suffisant pour modéliser une surface lorsqu'elles sont associées à des génératrices auxiliaires.

L'idée principale retenue pour générer des surfaces développables consiste donc à plier une forme plane autour d'un ensemble restreint de génératrices. Le modèle proposé est composé d'un ensemble de paramètres définissant la surface et d'un processus générant la surface à partir de ces paramètres. Dans un premier temps,

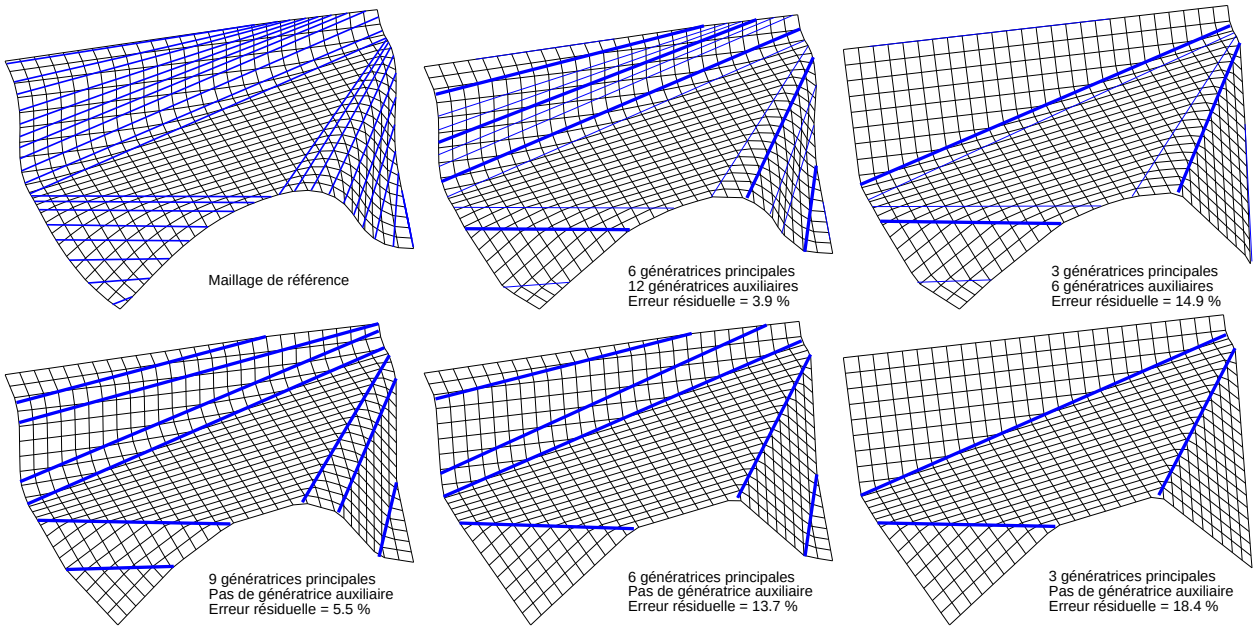


FIGURE 4.2 – **Degrés de liberté et régularité de la surface générée par le modèle.** Une surface de référence est présentée en haut à gauche. Le maillage de référence est estimé avec notre modèle par un nombre variable de paramètres. L'erreur résiduelle représente la distance moyenne au maillage de référence, elle est donnée en pourcentage de la longueur d'une maille. Sur le maillage de référence, quelques génératrices sont représentées. Sur les autres figures, les lignes larges représentent les génératrices principales et les lignes fines sont les génératrices auxiliaires.

l'élaboration de la surface à partir des paramètres est présentée. Les deux étapes principales de ce processus sont l'interpolation des génératrices principales pour obtenir automatiquement les génératrices auxiliaires, et la génération de la surface une fois l'ensemble des génératrices défini. Des propriétés liées au modèle sont ensuite énoncées, avant de présenter quelques perspectives de travail.

Le modèle présenté est assez général par rapport aux autres modèles proposés dans la littérature. Il gère notamment les assemblages complexes de portions de surfaces développables. Les explications de cette partie ne s'appliquent (sauf mention contraire) qu'aux surfaces présentant les propriétés suivantes :

- ▷ la surface est régulière, il n'y a ni pli franc ni singularité,
- ▷ la forme plane est simplement connexe, c'est-à-dire qu'elle est en une seule partie et n'est pas trouée,
- ▷ la frontière de la forme plane est convexe.

Ce type de surface est souvent rencontré en pratique, et permet de simplifier la présentation du modèle. Cependant le modèle peut être étendu pour s'affranchir d'une partie de ces limitations. Ces solutions sont présentées à la section 4.4.1.

4.3.2 Paramétrisation et génération de la surface

4.3.2.1 Paramétrisation

L'objet déformé est défini par sa forme plane et ses génératrices principales. La forme plane doit être conforme aux contraintes citées dans le paragraphe précédent. Sa description est libre, tant que l'abscisse curviligne le long de sa frontière peut être calculée. Par simplicité, les objets utilisés dans les illustrations sont rectangulaires.

Pour les génératrices, il est nécessaire de définir leurs positions sur la forme plane ainsi que leurs angles de pli. Chaque génératrice coupe la frontière de la forme plane en exactement deux points. La forme plane étant

préalablement définie, une paramétrisation minimale de ces points est leurs abscisses curvilignes le long de la courbe frontière de la forme plane. Une génératrice est donc caractérisée par 3 paramètres : deux abscisses curvilignes et un angle de pli. Cette paramétrisation est représentée sur la figure 4.3 et les notations associées sont résumées par le tableau de la figure 4.6.

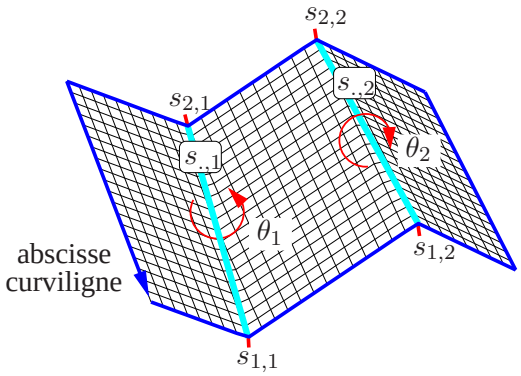


FIGURE 4.3 – **Paramétrisation du modèle.** La courbe frontière apparaît en bleu foncé, les génératrices principales (en bleu clair) $s_{.,1}$ et $s_{.,2}$ sont paramétrées par leurs positions (couples d'abscisses curvilignes $(s_{1,1}, s_{2,1})$ et $(s_{1,2}, s_{2,2})$) et les angles de plis θ_1 et θ_2.

Avec cette paramétrisation des positions des génératrices, la fonction périodique associant l'abscisse curviligne aux points du contour doit être connue. Cette fonction est représentée pour une forme rectangulaire sur la figure 4.4.

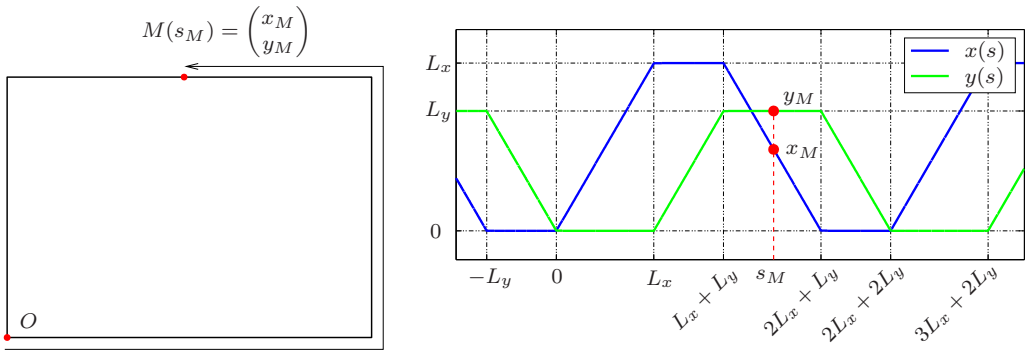


FIGURE 4.4 – **Position d'un point le long du contour en fonction de son abscisse curviligne.** Le rectangle est de taille $L_x \times L_y$.

Le modèle est conçu pour représenter des objets dont les surfaces sont développables et régulières. Par conséquent, les génératrices ne doivent pas se couper sur la surface de l'objet (cette propriété est étudiée à la section 3.1.4.1). Cette condition intervient à différents niveaux dans le modèle et dans son utilisation :

- ▷ vérification de la validité d'un jeu de paramètres,
- ▷ non-intersection des génératrices auxiliaires générées par le processus d'interpolation,
- ▷ validité du domaine de recherche des paramètres lors de l'estimation du modèle.

Une solution pour tester la validité des paramètres est décrite au paragraphe 4.3.3.1. Elle s'appuie sur des propriétés des abscisses curvilignes. L'interpolation des génératrices principales décrite à la section 4.3.2.2 garantit la non-intersection des génératrices. Enfin, lors de la reconstruction automatique du modèle à partir d'images ou de points *3D*, nous utilisons une autre paramétrisation de la position des génératrices, elle est présentée à la section 5.5.3.

Les paramètres du modèle étant définis, il reste à déterminer les génératrices auxiliaires avant de générer la surface.

4.3.2.2 Interpolation des génératrices

L'interpolation des génératrices est effectuée en trois étapes :

1. regroupement des génératrices en régions,
2. interpolation des positions des génératrices,
3. interpolation des angles de pli.

La première étape est une étape préliminaire ; elle concerne l'organisation des génératrices sur la surface plane de l'objet.

La détermination de la position des génératrices auxiliaires est délicate, au sens où les génératrices ainsi définies ne doivent pas se couper sur l'objet. En effet, le modèle représente des objets dont la surface est régulière, les points singuliers doivent donc se situer à l'extérieur de la frontière de l'objet. Les points singuliers des surfaces développables sont les points d'intersection entre les génératrices consécutives. Par conséquent, il ne doit pas y avoir d'intersection entre les génératrices sur la surface de l'objet. Notre processus d'interpolation servant à déterminer la position des génératrices auxiliaires garantit que cette contrainte forte est satisfaite. Enfin durant l'interpolation des angles de pli, les angles associés aux génératrices principales doivent être réévalués pour prendre en compte le nombre plus élevé de plis.

Regroupement des génératrices. Les assemblages complexes de portions développables ont été présentés à la section 3.2.2. La plupart des modèles existants ne permettent pas de manipuler directement ces compositions de surfaces. Afin de les gérer, une identification des différentes portions constituant la surface est nécessaire. Elle est réalisée par le groupement des génératrices en portions. Ces portions sont définies par les ensembles de génératrices consécutives sur la surface plane. Deux génératrices sont dites consécutives si leurs extrémités le sont deux à deux. Pour une forme plane rectangulaire, il existe quatre combinaisons significatives de portions de surfaces développables, elles sont représentées sur la figure 4.5.

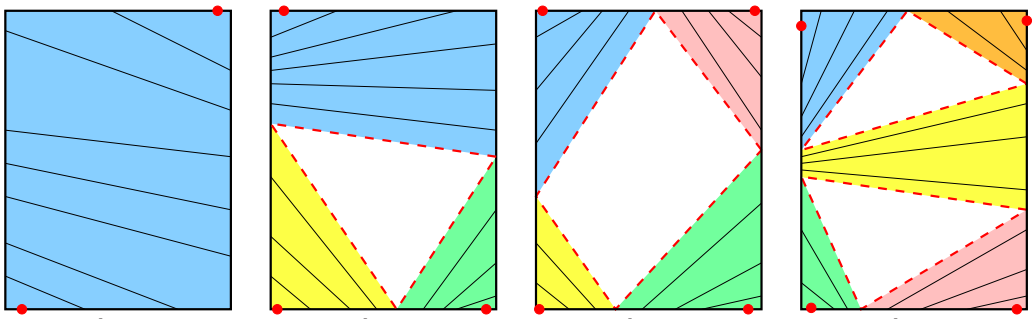


FIGURE 4.5 – **Les quatre configurations principales d'assemblage de portions d'une surface rectangulaire.** Les zones colorées (grisées) sont les régions. Les lignes noires sont les génératrices. Les lignes pointillées rouges sont les limites des portions. Les points rouges sont les extrémités des portions.

D'après la section 3.2.2.2, ces différentes portions sont reliées entre elles par des zones plates. Nous appelons les lignes frontières entre les zones plates et les portions développables *limites des portions*. Elles sont représentées en pointillé rouge sur la figure 4.5.

Dans chaque portion, les abscisses curvilignes des génératrices peuvent être classées en deux catégories : celles correspondant aux "premiers" points d'intersection (notées $s_{1,.}$), et celles des "deuxièmes" points d'intersection (notées $s_{2,.}$). Ces deux ensembles apparaissent sur la figure 4.6. Ils sont séparés par des points que nous appelons *extrémités des portions*, représentées par des points rouges sur la figure 4.5. Ces différentes limites sont calculées lors de l'interpolation des positions de génératrices. Elles permettent d'inclure dans l'interpolation des angles de pli les contraintes de raccordement des portions développables aux zones plates.

Remarque 4.2. *Lorsque la frontière de l'objet est donnée par un polygône, le nombre de portions pouvant être définies est une fonction du nombre de sommets du polygône.*

$i\star$	portion i de la surface
$s_{1,.}$	abscisses curvilignes des premiers points d'intersection
$s_{2,.}$	abscisses curvilignes des deuxièmes points d'intersection
$s_{1,i\star}$	abscisses curvilignes des premiers points d'intersection de la portion i
$s_{2,i\star}$	abscisses curvilignes des deuxièmes points d'intersection de la portion i
$s_{1,i}$	abscisses curvilignes du premier point d'intersection de la génératrice i
$s_{2,i}$	abscisses curvilignes du deuxième point d'intersection de la génératrice i
$s_{.,i}$	génératrice i

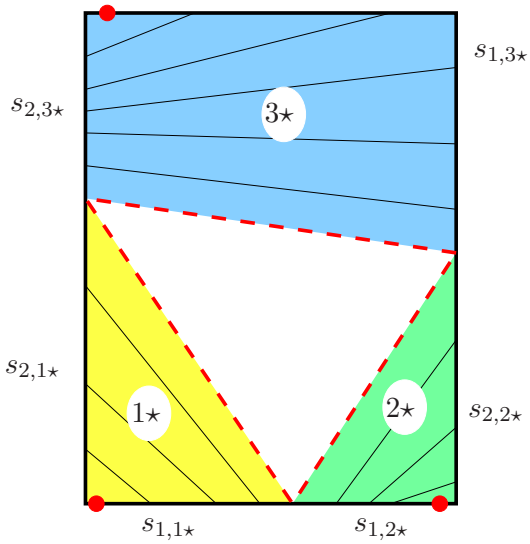


FIGURE 4.6 – **Notations utilisées pour les portions définies sur la surface.**

Interpolation des positions. L'objectif de l'interpolation des positions est de placer des génératrices auxiliaires régulièrement entre les génératrices principales. Les deux contraintes à respecter sont la non-intersection des génératrices et le respect des portions. Les intersections de génératrices sont facilement évitées en raisonnant sur les abscisses curvilignes plutôt que directement sur les positions. Le principe est illustré sur la figure 4.7. Pour éviter toute intersection, les abscisses curvilignes définissant les génératrices auxiliaires doivent être choisies dans les intervalles d'abscisses curvilignes entre deux génératrices consécutives et dans le même ordre :

$$\begin{cases} s_{1,1} \leq s_{1,i} \leq s_{1,j} \leq s_{1,2} \\ s_{2,1} \geq s_{2,i} \geq s_{2,j} \geq s_{2,2} \end{cases}$$

Cette propriété est due à la convexité de la forme plane de l'objet. Elle est démontrée dans l'annexe A.1.

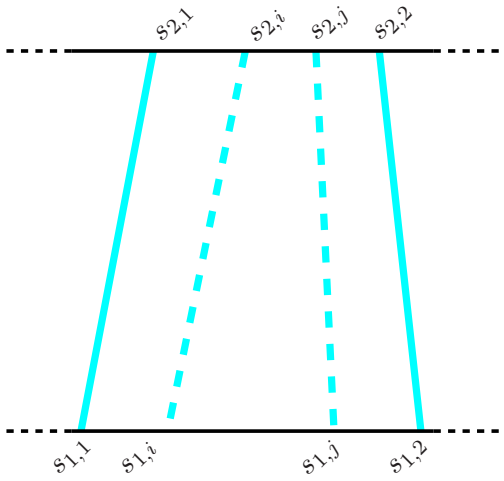


FIGURE 4.7 – **Contrainte sur le positionnement des génératrices auxiliaires.** Les intersections de génératrices sont évitées en plaçant les deuxièmes points d'intersection dans le même ordre que les premiers points d'intersection.

Afin de garantir une répartition équilibrée des génératrices auxiliaires dans les portions, un nombre pair constant de génératrices auxiliaires est ajouté à chaque génératrice principale. Ces génératrices auxiliaires sont réparties équitablement de part et d'autre des génératrices principales. De cette manière, les portions telles que définies au paragraphe 4.3.2.2 sont préservées lors de l'ajout des génératrices auxiliaires.

Le calcul des abscisses curvilignes des génératrices auxiliaires est réalisé en trois étapes :

Étape 1.
Un point du contour est choisi comme origine des abscisses curvilignes. En parcourant le contour dans le sens des abscisses curvilignes croissantes, les points d'intersection des génératrices principales avec le contour sont numérotés. Un graphique est alors construit, en reportant en abscisse les numéros des intersections et en ordonnée leurs abscisses curvilignes. La série de points ainsi obtenue est par construction croissante. Elle est représentée par les marqueurs larges en bas à gauche de la figure 4.8.

Étape 2.
Une fonction interpolante croissante passant par ces points est alors calculée. La monotonicité de la fonction est essentielle car elle garantit que les génératrices auxiliaires ne se coupent pas sur la surface (par le respect de l'ordre des points le long de la courbe frontière, voir la figure 4.7). Afin de garantir cette propriété, l'interpolation est réalisée avec des polynômes de Hermite d'ordre 3. En effet, cette fonction polynomiale préserve le sens de variation entre les points interpolés. Elle apparaît en noir en bas à gauche de la figure 4.8.

Étape 3.
La fonction d'interpolation est rééchantillonnée pour obtenir les positions des génératrices auxiliaires, les limites et les extrémités des portions.

Un rééchantillonnage régulier permet de définir la position des génératrices auxiliaires. Ces positions sont données par les marqueurs fins en bas à gauche de la figure 4.8 et par des traits fin en haut à gauche.

Les limites des portions sont définies entre deux génératrices principales consécutives n'appartenant pas à la même région. Leurs abscisses curvilignes sont données par l'image du point milieu entre ces génératrices principales. Par exemple sur la figure 4.8, l'abscisse curviligne de la limite entre les points d'intersection 6 et 7 est donnée par l'image de 6,5. Ces limites apparaissent en pointillés rouges en bas à gauche et en haut à droite de la figure 4.8.

Pour localiser les extrémités des portions, il faut détecter les génératrices dont les points d'intersection sont consécutifs sur le graphique des abscisses curvilignes. Par exemple, pour la position des génératrices de la figure 4.8, les 3 extrémités des portions sont situées entre les points 3 et 4, entre les points 5 et 6 et entre les points 8 et 1. Comme pour les extrémités des portions, leur abscisse curviligne est déterminée par l'image des milieux des points d'intersection. Dans l'exemple, ils sont donnés par l'image des points 3,5, 5,5 et 8,5. Ils sont représentés par des points rouges en bas à gauche et en haut à droite de la figure 4.8.

La continuité de la fonction d'interpolation des abscisses curvilignes à l'origine est assurée en utilisant le fait que la position d'un point défini par son abscisse curviligne est périodique. Cela apparaît sur la figure 4.8 en remarquant que le point d'abscisse 1 apparaît deux fois.

Le processus d'interpolation précédent permet de calculer les abscisses curvilignes des génératrices auxiliaires. Chaque génératrice est constituée d'un couple d'abscisses curvilignes. Ces couples sont formés de manière à respecter les portions et la non-intersection.

Les génératrices auxiliaires étant positionnées, il reste à définir leurs angles de pli.

Interpolation des angles de pli. L'interpolation des génératrices principales en génératrices auxiliaires a pour objectif de régulariser la surface. Intuitivement, il faut augmenter le nombre de plis et diminuer l'amplitude respective de chaque pli. Ces éléments constituent les deux aspects de l'interpolation des angles de pli.

La première composante est réalisée sur chaque portion. Elle s'appuie sur les limites et les extrémités des régions pour déterminer des conditions aux limites. Elle est réalisée grâce à trois étapes :

Étape 1.
D'une façon similaire à celle utilisée pour les positions, les angles de pli des génératrices principales d'une même portion sont représentées sur un graphique. Un exemple est présenté en bas à droite de la figure 4.8.

Étape 2.
Une fonction d'interpolation passant par les angles de pli est évaluée avec les conditions aux limites

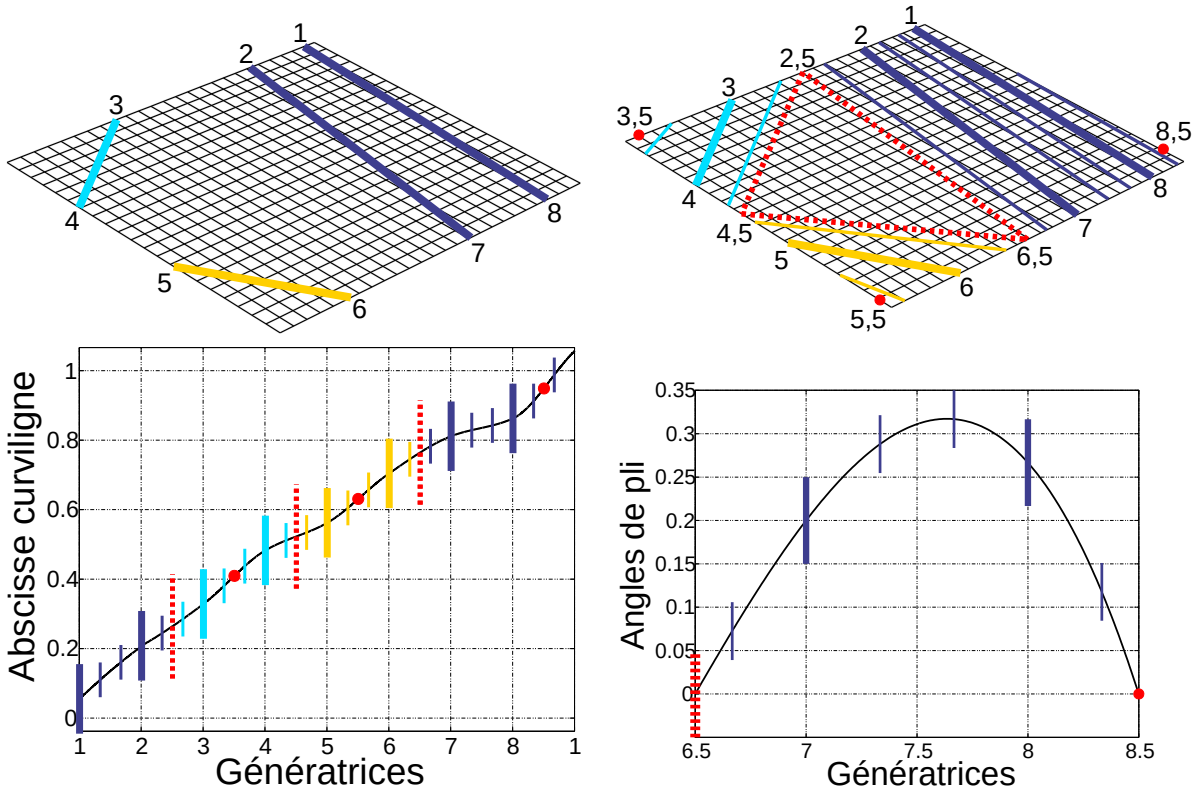


FIGURE 4.8 – **Processus d'interpolation.** (en haut à gauche) Surface plane avec les génératrices principales et les trois régions. (en bas à gauche) Processus d'interpolation de la position des génératrices. La courbe noire représente une fonction d'interpolation croissante. (en haut à droite) Surface plane avec toutes les génératrices. (en bas à droite) Processus d'interpolation des angles de pli pour la région bleue (foncé). La courbe noire représente la fonction d'interpolation. Les lignes larges symbolisent les génératrices principales. Les lignes fines sont les génératrices auxiliaires. Les pointillés rouges représentent les limites des portions. Les points rouges sont les extrémités des portions.

suivantes : les angles de pli sont nuls aux limites et aux extrémités des portions. La première condition permet d'obtenir des raccordements lisses entre les portions, la seconde permet d'éviter d'avoir des extrémités repliées sur elles-mêmes.

Le choix de la fonction interpolante est moins critique pour les angles de pli car il n'y a pas de contraintes strictes à respecter contrairement à l'interpolation des positions des génératrices. En pratique, les splines et les polynômes de Hermite d'ordre 3 donnent des résultats très similaires.

Étape 3.
Les angles de pli des génératrices auxiliaires sont obtenus en rééchantillonnant cette courbe.

Les angles de pli ainsi générés sont trop importants puisque l'augmentation du nombre de plis n'a pas été prise en compte. Parmi les possibilités pour mettre à l'échelle les angles de pli, il y a :

- ▷ la mise à l'échelle directe : les angles sont divisés par le nombre de génératrices auxiliaires ajoutées par génératrice principale. C'est la méthode implémentée dans notre modèle,
- ▷ la formulation en terme de courbure : une géodésique est choisie par portion. Les angles de pli sont déterminés à partir de la courbure de cette géodésique. Cette solution permet d'évaluer les paramètres du modèle approchant une surface régulière, des détails sont donnés à la section 4.4.2.2.

4.3.2.3 Pliage de la forme plane

Les éléments permettant de construire la surface à partir des génératrices sont :

1. l'organisation en cellules ordonnées,
2. le calcul de transformations rigides élémentaires,
3. la composition des transformations pour obtenir la forme globale.

Définition des cellules. La déformation de la forme plane est obtenue par pliage le long des génératrices. La surface ainsi formée est plane par morceaux. Elle peut être décrite en utilisant la notion de *cellule*. Une cellule est une partie de surface élémentaire bordée par des génératrices et (ou) des parties de frontière. Par exemple, la surface présentée à la figure 4.8 comporte 13 cellules, numérotées sur la figure 4.9. L'expression globale de la surface est déterminée par la composition des transformations élémentaires de chaque génératrice. Cette composition reflète la dépendance des transformations entre les cellules. Par exemple, sur la figure 4.9, le pliage autour de la génératrice liant les cellules C_0 et C_1 se répercute sur les cellules $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$. Au contraire, le pliage autour de la génératrice entre les cellules C_5 et C_6 n'affecte que la cellule C_6. Par conséquent l'ordre de composition des transformations élémentaires est important et dépend d'une cellule de référence choisie et de l'ordre des compositions. La cellule de référence peut être choisie arbitrairement, par exemple la cellule C_0 sur la figure 4.9. Il existe deux choix possibles pour ordonner les cellules, suivant la méthode de composition des transformations élémentaires retenue :

- ▷ la composition commence à la cellule de référence, par exemple sur la figure 4.9 : $C_0 \rightarrow C_7 \rightarrow C_8 \rightarrow C_9$,
- ▷ la composition s'achève sur la cellule de référence, par exemple sur la figure 4.9 : $C_9 \rightarrow C_8 \rightarrow C_7 \rightarrow C_0$.

La deuxième solution permet d'évaluer les transformations par composition directe des transformations élémentaires, elle est donc choisie. Les cellules sont alors ordonnées. Ainsi, dans l'exemple de la figure 4.9, les cellules sont organisées dans chaque portion de la manière suivante :

- ▷ $C_6 \rightarrow C_5 \rightarrow C_4 \rightarrow C_3 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0$,
- ▷ $C_9 \rightarrow C_8 \rightarrow C_7 \rightarrow C_0$,
- ▷ $C_{12} \rightarrow C_{11} \rightarrow C_{10} \rightarrow C_0$.

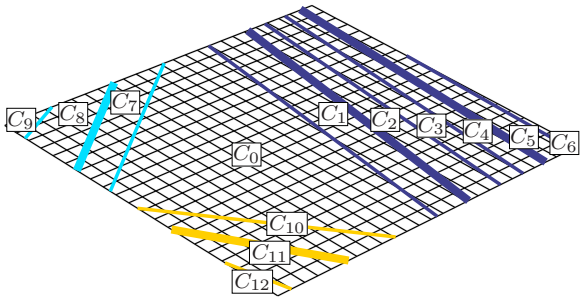


FIGURE 4.9 – **Définition des cellules sur la forme plane.**

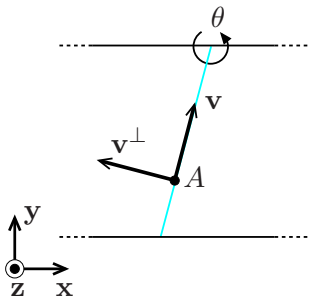


FIGURE 4.10 – **Paramétrisation pour le calcul des transformations élémentaires.**

Transformations élémentaires. Ces transformations correspondent aux rotations autour des génératrices sur la forme plane, calculées indépendamment des transformations induites par les autres génératrices.

L'expression d'une telle transformation est notée G. Elle est paramétrée par un angle de rotation θ, un point de la génératrice A et la direction unitaire de la génératrice $\mathbf{v}$, la figure 4.10 illustre ces éléments :

$$\begin{aligned} G(M) &= \begin{pmatrix}\mathbf{v} & \mathbf{v}^\perp & \mathbf{z}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathbf{v} & \mathbf{v}^\perp & \mathbf{z}\end{pmatrix}^\mathsf{T} (M-A)+A \\ &= RM+T \end{aligned}$$

avec :

- ▷ $\mathbf{v}^\perp$ le vecteur orthogonal à $\mathbf{v}$ dans le plan $(\mathbf{xy})$ ($\mathbf{v}$ appartient par construction au plan $(\mathbf{xy})$),
- ▷ $R = \begin{pmatrix}\mathbf{v} & \mathbf{v}^\perp & \mathbf{z}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathbf{v} & \mathbf{v}^\perp & \mathbf{z}\end{pmatrix}^\mathsf{T}$,
- ▷ $T = A - RA$.

Les transformations élémentaires sont donc formées par une rotation R suivie d'une translation T.

Calcul de la surface. Les transformations élémentaires sont composées pour associer à chaque cellule C_i, la transformation G_i entre la cellule plane et la cellule sur la forme déformée. La composition de deux transformations élémentaires est :

$$\begin{aligned}(G_j \circ G_i)(M) &= R_j R_i M + R_j T_i + T_j \\ &= R_{ji} M + T_{ji}\end{aligned}$$

La forme des transformations reste identique : une rotation suivie d'une translation (de par la structure de groupe de $SE(3)$). L'algorithme 4.1 présente les étapes du calcul de la surface. La fonction associant les points du plan aux points de la surface est :

$$S(M) = \begin{cases} G_i(M) = R_i M + T_i & \text{si } x \in C_i \\ \emptyset & \text{sinon}\end{cases} \tag{4.2}$$

Un exemple de surface générée par la méthode est représenté sur la figure 4.11.

Remarque 4.3. *Sur les différentes figures, la surface générée par le modèle est représentée sous la forme d'un maillage. Il s'agit d'un choix de représentation, le modèle générant une surface continue plane par morceaux.*

Algorithme 4.1 Calcul de la surface.

Choisir une cellule de référence C_0
pour $j = 1$ à nombre de portions **faire**
  Ordonner les cellules C_i de la portion : $C_i^j \rightarrow C_{i-1}^j \rightarrow \cdots \rightarrow C_0$.
  pour i =nombre de cellules dans la portion j à 1 **faire**
    Calculer la transformation élémentaire $G_i = (R_i, T_i)$
    pour k =nombre de cellules dans la portion j à $i + 1$ **faire**
      Mettre à jour les transformations dépendantes : $G_k \longleftarrow (R_i R_k, R_i T_k + T_i)$
    fin pour
  fin pour
fin pour

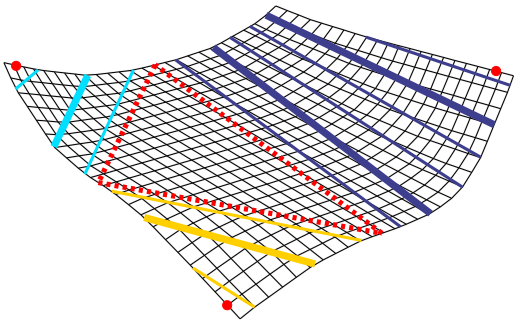


FIGURE 4.11 – **Surface définie par l'équation (4.2).** Les lignes larges symbolisent les génératrices principales. Les lignes fines sont les génératrices auxiliaires. Les pointillés rouges représentent les limites des portions. Les points rouges sont les extrémités des portions.

4.3.3 Propriétés

4.3.3.1 Graphique des positions

De nombreuses propriétés de la surface peuvent être observées sur un graphique que nous appelons *graphique des positions* représentant les abscisses curvilignes des génératrices. Ce graphique fait apparaître en abscisse les abscisses curvilignes des premiers points d'intersection ($s_{1,.}$) et en ordonnée les abscisses curvilignes des deuxièmes points d'intersection ($s_{2,.}$). Nous appelons cette représentation *courbe des positions des génératrices* ou plus simplement *courbe des positions*. Un ensemble discret de génératrices est représenté sur le graphique des positions par un nuage de points, la courbe des positions correspondante est celle calculée par le processus d'interpolation du modèle.

L'origine des abscisses curvilignes est choisie de telle sorte que les premiers points d'intersection aient des abscisses curvilignes inférieures à leurs deuxièmes points d'intersection :

$$\forall i,\ s_{1,i} < s_{2,i}$$

Ce choix impose de placer l'origine sur l'une des extrémités de portion de la surface. Sur la figure 4.14, les origines choisies sont représentées par des cercles noirs.

Les propriétés énoncées dans la suite sont uniquement basées sur l'observation. Elles découlent des propriétés des formes convexes.

Contrainte d'intersection. La première propriété pouvant être lue sur le graphique des positions concerne les intersections des génératrices. Elle est notamment importante pour vérifier la validité d'un jeu de paramètres du modèle. En raisonnant sur les abscisses curvilignes, les deux cas d'intersection d'une génératrice i avec une génératrice j sont donnés par les conditions suivantes :

$$\text{cas a : } \begin{cases} s_{1,j} < s_{1,i} \\ s_{1,i} < s_{2,j} < s_{2,i} \end{cases} \qquad \text{cas b : } \begin{cases} s_{1,i} < s_{1,j} < s_{2,i} \\ s_{2,i} < s_{2,j} \end{cases}$$

Ces deux cas se traduisent sous forme de *régions interdites* sur la courbe des positions. Ces régions sont celles qui contiennent l'ensemble des génératrices coupant une génératrice donnée. Ces différentes propriétés sont illustrées sur la figure 4.12.

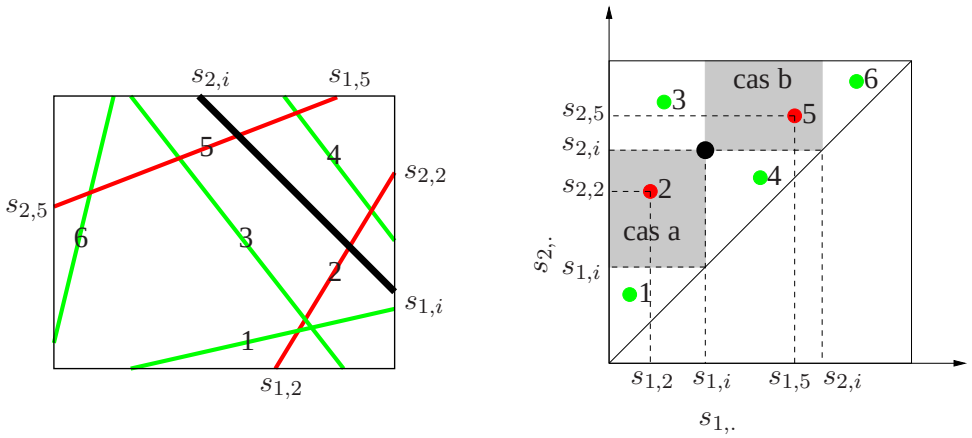


FIGURE 4.12 – **Contraintes sur les positions des génératrices sur la courbe des positions.** (à gauche) La forme plane avec les génératrices. (à droite) Le graphique des positions, les parties grisées sont les régions interdites : ce sont les parties contenant les génératrices croisant la génératrice i. La génératrice 2 correspond au cas a d'intersection : $s_{1,2} < s_{1,i}$ et $s_{1,i} < s_{2,2} < s_{2,i}$. La génératrice 5 illustre le cas b : $s_{1,i} < s_{1,5} < s_{2,i}$ et $s_{2,5} > s_{2,i}$.

D'après la propriété sur l'ordre des points d'intersection avec la frontière convexe de l'objet (voir annexe A.1) et la définition des premiers et deuxièmes points d'intersection, la courbe des positions d'une portion de surface développable est décroissante. Les régions interdites d'une portion contiennent l'ensemble des génératrices coupant au moins une génératrice de la portion. Par conséquent, elles sont égales à l'union des régions interdites des génératrices de la portion. Ce principe est illustré par la figure 4.13.

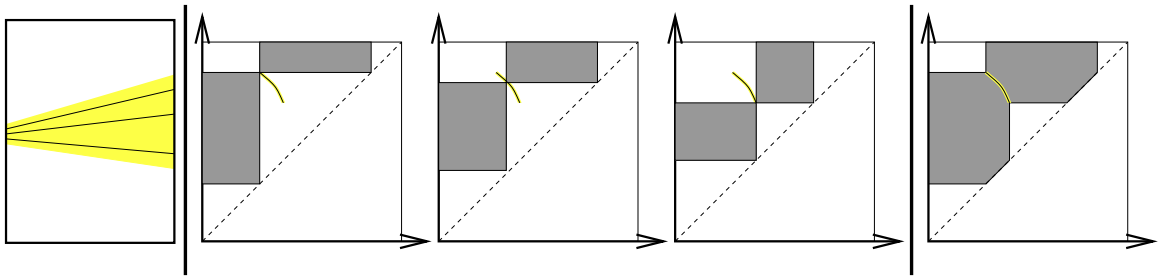


FIGURE 4.13 – **Région interdite d'une portion.** (à gauche) La forme plane et la portion développable en jaune (ou en gris clair), trois génératrices de la portions sont représentées. (au milieu et à droite) Le graphique des positions, la courbe noire et jaune est la courbe des positions de la portion développable. (au milieu) Les régions interdites (ou en gris foncé) pour trois génératrices. (à droite) La région interdite (ou en gris foncé) de la portion est l'union des régions interdites des génératrices.

Plusieurs régions sur un même graphique. Le modèle présenté permet de gérer les assemblages complexes de surfaces développables. Pour cela il est nécessaire de regrouper les génératrices en portions (paragraphe 4.3.2.2). Ceci peut être réalisé en observant la répartition des génératrices sur le graphique des positions. En effet, la composition de portions développables implique des discontinuités de la fonction liant les abscisses curvilignes. Ces discontinuités sont dues au fait que les deuxièmes points d'intersection des portions ne sont pas répartis dans le même ordre que les premiers points d'intersection des portions. La figure 4.14 montre les courbes des positions pour les différents cas rencontrés sur une surface rectangulaire.

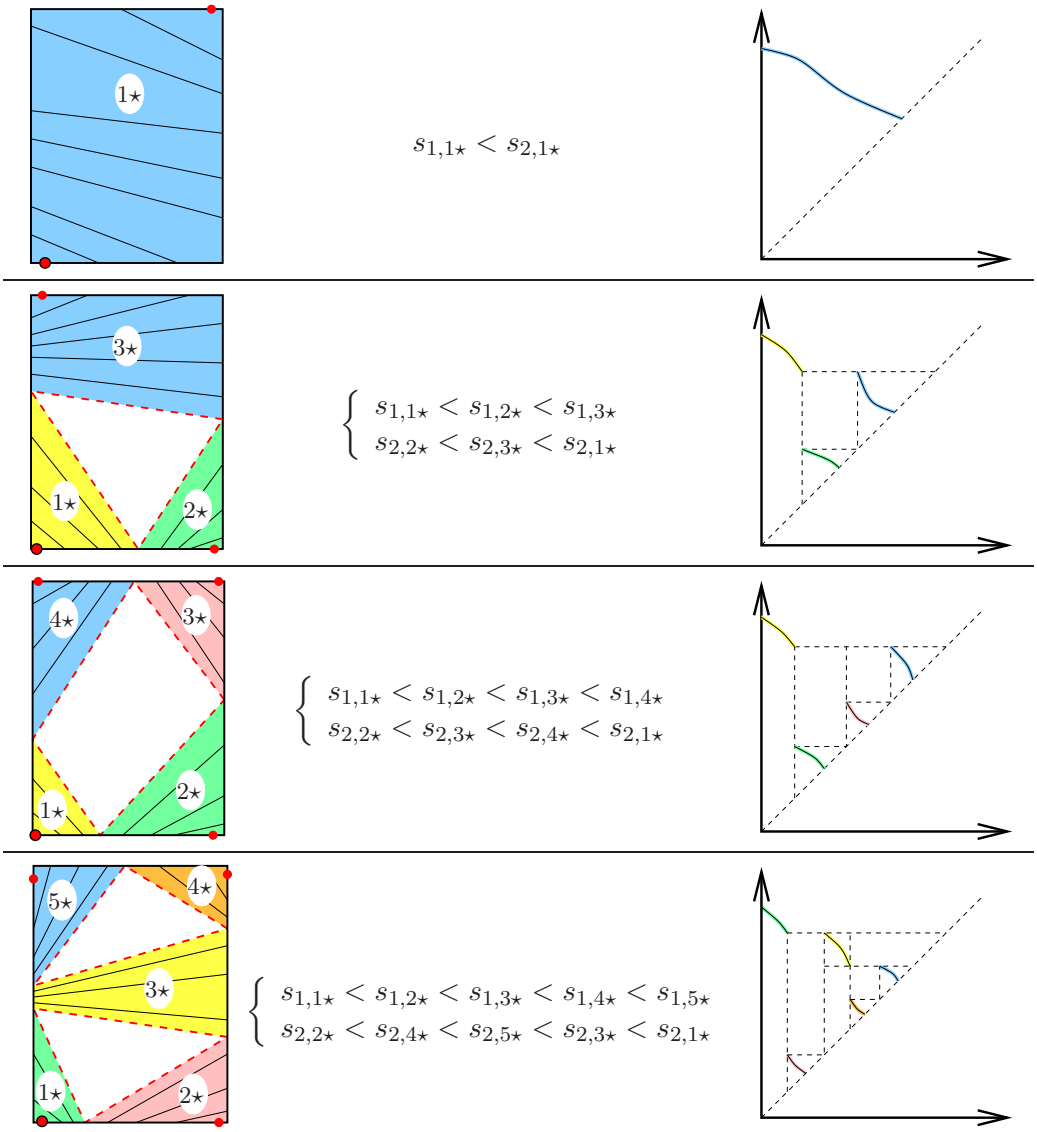


FIGURE 4.14 – **Identification des portions sur la courbe des positions.** (à gauche) Les formes planes avec les portions, les points rouges cerclés de noir sont les origines des abscisses curvilignes. (au milieu) Les relations sur les premiers et deuxièmes points d'intersection. (à droite) Les courbes des positions, les traits pointillés sont les limites importantes des régions interdites, des discontinuités sur la courbe des positions apparaissent à chaque limite de portion.

Remarque 4.4. *Il est possible de reconnaître certains types de surfaces développables sur le graphique des positions. Ces surfaces doivent se caractériser par des relations sur la position des génératrices. Par exemple les génératrices d'un cylindre généralisé sont parallèles, celles d'un cône généralisé sont concourantes en un point. Ces relations se traduisent par une forme particulière de la courbe des positions, dépendante de la frontière de l'objet. D'autres méthodes (Aumann, 2003; Peternell et al.) permettent de réaliser ce type de reconnaissance.*

Représentation des points. Sur la courbe des positions, un point représente une génératrice de la forme plane. Réciproquement, un point sur la forme plane est représenté par une courbe sur le graphique des positions. Cette courbe est constituée de l'ensemble des génératrices passant par le point. Elle est l'image de la fonction qui associe l'abscisse curviligne de la première intersection d'une génératrice à l'abscisse curviligne de sa deuxième intersection telle que la génératrice ainsi définie passe par le point considéré.

Il n'existe pas de formulation générale de cette fonction car celle-ci dépend de la frontière de l'objet. En revanche, elle peut être exprimée par morceaux de manière analytique lorsque la courbe frontière est un polygone convexe. La figure 4.15 illustre la paramétrisation utilisée pour déterminer cette expression.

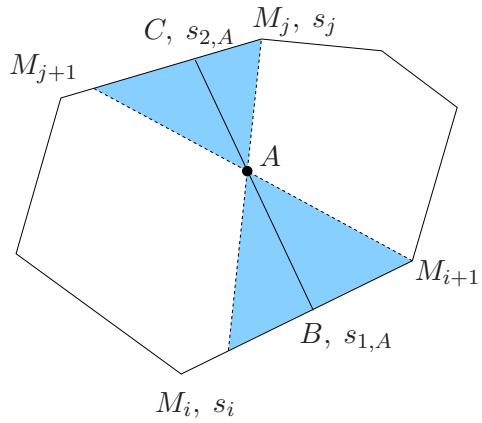


FIGURE 4.15 – **Paramétrisation pour la représentation des points dans le graphique des positions.** La forme plane de l'objet est un polygone convexe dont les sommets sont notés M_i, et leur abscisse curviligne s_i. Les génératrices passant par le point A coupent la frontière aux points B et C, paramétrés par les abscisses curvilignes $s_{1,A}$ et $s_{2,A}$. La zone bleue représente le domaine de validité de la relation 4.3.

Sur la figure 4.15, les points B et C sont définis par l'intersection entre une droite passant par le point A et la frontière du polygone. Ils sont paramétrés par leurs abscisses curvilignes $s_{1,A}$ et $s_{2,A}$. Ainsi, les positions de ces points sont données par les relations suivantes (valides uniquement pour la zone bleue de la figure 4.15) :

$$\begin{aligned} B &= M_i + (s_{1,A} - s_i)\frac{M_{i+1} - M_i}{\|.\|} \\ C &= M_j + (s_{2,A} - s_j)\frac{M_{j+1} - M_j}{\|.\|} \end{aligned}$$

Or les points A, B et C sont alignés :

$$\begin{aligned} & \det(B - A, C - A) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \det\left(M_i - A + (s_{1,A} - s_i)\tfrac{M_{i+1}-M_i}{\|.\|}, M_j - A + (s_{2,A} - s_j)\tfrac{M_{j+1}-M_j}{\|.\|}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & s_{2,A} - s_j = \frac{\det\left(M_i - A + (s_{1,A} - s_i)\tfrac{M_{i+1}-M_i}{\|.\|}, A - M_j\right)}{\det\left(M_i - A + (s_{1,A} - s_i)\tfrac{M_{i+1}-M_i}{\|.\|}, \tfrac{M_{j+1}-M_j}{\|.\|}\right)} \end{aligned}$$

La fonction reliant les abscisses curvilignes de la génératrice passant par le point A est donc la suivante (valide

uniquement pour la zone bleue de la figure 4.15) :

$$s_{2,A} = s_j + \frac{\det\left(M_i - A + (s_{1,A} - s_i)\frac{M_{i+1}-M_i}{\|.\|}, A - M_j\right)}{\det\left(M_i - A + (s_{1,A} - s_i)\frac{M_{i+1}-M_i}{\|.\|}, \frac{M_{j+1}-M_j}{\|.\|}\right)} \tag{4.3}$$

Remarque 4.5. *La fonction représentant un point dans le graphique des positions est croissante.*

Cette représentation des points est utile dans le cas des surfaces développables car elle permet de trouver facilement la génératrice passant par un point de la forme plane. En effet, sur le graphique des positions, l'intersection de la courbe représentant un point avec la courbe des positions est une génératrice qui passe par le point sur la forme plane et qui appartient à l'ensemble des génératrices de la surface développable. C'est donc la génératrice recherchée. La figure 4.16 illustre cette utilisation du graphique.

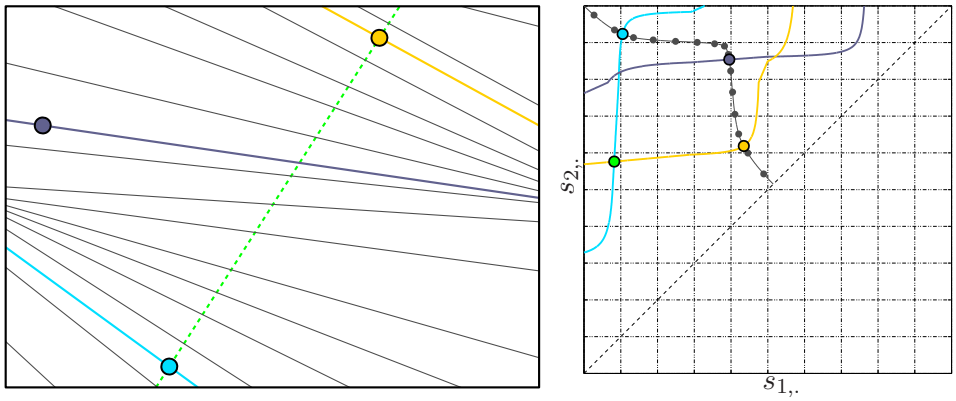


FIGURE 4.16 – **Représentation des points et détermination des génératrices.** Les trois points sur la figure de gauche correspondent aux courbes sur la figure de droite. Inversement, les points sur la figure de droite sont des lignes sur la figure de gauche. La courbe grise sur la figure de droite est la courbe des positions. Les abscisses curvilignes de la génératrice passant par le point jaune (clair) sur la forme plane sont données par l'intersection entre les courbes grise et jaune (claire) sur le graphique des positions.

Dans le cadre du modèle présenté, une paramétrisation polynomiale par morceaux de la courbe des positions est connue. Elle provient de l'interpolation de Hermite des génératrices principales, elle est notée :

$$\begin{cases} s_{1,.} &= \mathcal{P}_1^s(t) \\ s_{2,.} &= \mathcal{P}_2^s(t) \end{cases}$$

Lorsque la forme de la frontière est un polygone convexe, la représentation d'un point sur le graphique des positions est un rapport de polynômes défini par l'équation (4.3) :

$$s_{2,A} = \frac{\mathcal{P}_1^M(s_{1,A})}{\mathcal{P}_2^M(s_{1,A})}$$

L'intersection est alors donnée par la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} s_{1,.} &= s_{1,A} \\ s_{2,.} &= s_{2,A} \end{cases}$$

La résolution se ramène à la détermination des zéros du polynôme $\mathcal{P}_i$:

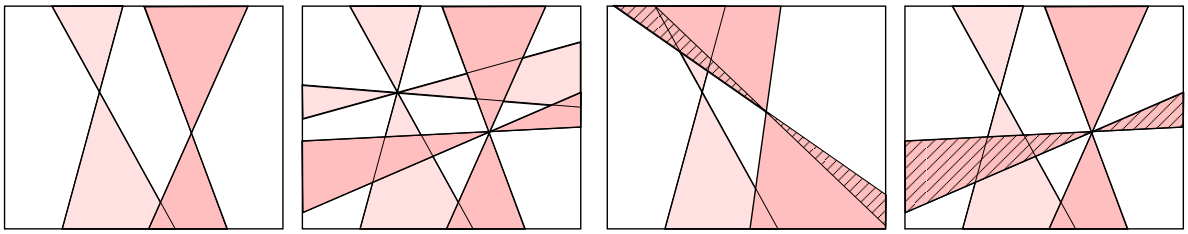
$$\mathcal{P}_i(t) = \mathcal{P}_2^s(t)\mathcal{P}_2^M\left(\mathcal{P}_1^s(t)\right) - \mathcal{P}_1^M\left(\mathcal{P}_1^s(t)\right)$$

Intervalle de génératrices. L'une des hypothèses du modèle concerne la régularité de la surface. Celle-ci est traduite par la non-intersection des génératrices sur la surface de l'objet. Pour garantir cette propriété, une méthode spécifique d'interpolation des génératrices a été proposée. La détermination des régions interdites associées à une génératrice seule ou à une portion de surface développable a également été présentée.

L'objet de ce paragraphe est d'étudier comment traduire cette propriété lorsque la position des génératrices est connue à une incertitude près. Cette situation se rencontre par exemple dans un processus de détection de génératrice retournant, pour un point donné, les zones pouvant contenir une génératrice. Cette application est utilisée dans l'annexe A.2 portant sur la localisation de surfaces développables. Les deux problématiques de cette situation illustrées sur la figure 4.17 sont :

- ▷ quelles sont les régions interdites lorsque la position d'une génératrice est incertaine ?
- ▷ comment rendre des positions incertaines compatibles entre elles ?

Dans la suite, une *génératrice incertaine* désigne une génératrice passant par un point connu mais dont l'orientation est incertaine : il existe un ou plusieurs intervalles d'orientation pouvant contenir la génératrice. Une génératrice incertaine G_i^I est dite *compatible* avec une génératrice incertaine G_j^I si quelque soit une génératrice dans G_i^I, il existe une génératrice appartenant à G_j^I qui ne la coupe pas. La figure 4.17 illustre ces deux notions.



(a) (b)

FIGURE 4.17 – **Incertitudes sur la position des génératrices.** Les zones colorées sont les génératrices incertaines pour deux points. (a) Les génératrices incertaines sont totalement compatibles entre elles. (b) Les parties hachurées ne sont pas compatibles avec les autres génératrices incertaines : toute les génératrices des parties hachurées coupent toutes les génératrices de la génératrice incertaine en rose clair.

Le graphique des positions permet de définir simplement les régions interdites d'une génératrice incertaine et donc d'étudier la compatibilité entre les génératrices incertaines. Des résultats similaires peuvent être établis directement sur la forme plane de l'objet, mais le choix de la paramétrisation à adopter n'est pas trivial.

Une génératrice incertaine est liée à un point sur la forme plane. Par conséquent, elle est décrite par une partie de la courbe croissante représentant le point dans le graphique des positions. Les régions interdites d'une génératrice incertaine contiennent l'ensemble des génératrices incompatibles avec la génératrice incertaine. Ce sont les génératrices qui coupent toutes les génératrices d'une génératrice incertaine. Elles sont obtenues par l'intersection des régions interdites de la génératrice incertaine. L'évaluation de ces régions interdites est illustrée par la figure 4.18.

Lorsque les régions interdites liées aux génératrices incertaines sont évaluées, elles peuvent être utilisées pour détecter les régions non compatibles. Il est ainsi possible de réduire l'amplitude des génératrices incertaines. Le processus est illustré par la figure 4.19. Les régions interdites de la génératrice incertaine G_A^I passant par le point A sont reportées sur le graphique des positions. La génératrice incertaine G_B^I passant par le point B est également tracée sur ce graphique. Les parties de la génératrice G_B^I situées à l'intérieur des régions interdites de la génératrice G_A^I sont incompatibles avec cette dernière.

Remarque 4.6. *La notion de compatibilité n'est pas symétrique : la compatibilité de la génératrice G_B^I avec la génératrice G_A^I n'implique pas la compatibilité de la génératrice G_A^I avec la génératrice G_B^I. Par exemple, sur la figure 4.19, la partie jaune de la génératrice G_A^I n'est pas compatible avec la génératrice G_B^I.*

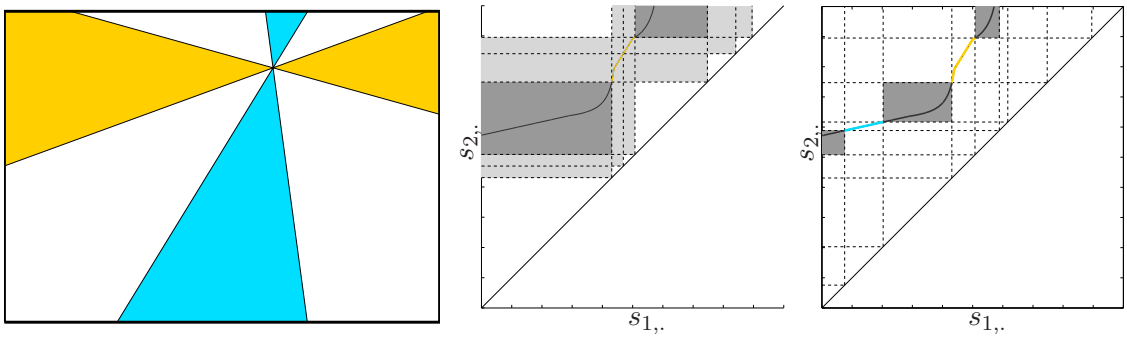


FIGURE 4.18 – **Régions interdites correspondant à une génératrice incertaine.** (à gauche) La forme plane avec une génératrice incertaine. (au milieu) Les régions interdites (gris foncé) correspondant à la partie jaune (claire) de la génératrice incertaine : ces régions sont obtenues par l'intersection des régions interdites des génératrices de la partie jaune (claire). La courbe noire représente le point de la génératrice incertaine. (à droite) L'ensemble des régions interdites de la génératrice incertaine (gris foncé) : ces régions sont obtenues par l'intersection des régions interdites associées aux génératrices jaunes (claires) et bleues (foncées).

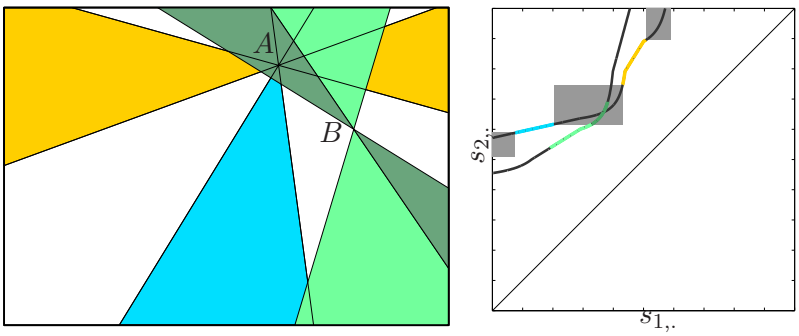


FIGURE 4.19 – **Compatibilité entre des génératrices incertaines.** (à gauche) Deux génératrices incertaines G_A^I et G_B^I passant respectivement par les points A et B. (à droite) Le graphique des positions avec en gris les régions interdites de la génératrice G_A^I. La partie verte foncée de la génératrice G_B^I est située dans une région interdite et est donc incompatible avec la génératrice G_A^I. En revanche, la partie verte claire des la génératrice G_B^I est compatible avec la génératrice G_A^I.

4.3.3.2 Mise à plat

Les surfaces développables sont les surfaces isométriques au plan. Par conséquent, il existe une isométrie liant les points de la surface développable et les points du plan. Des solutions analytiques sont proposées pour calculer le développement des cylindres, des cônes et des surfaces développables tangentes dans (Pottmann and Wallner, 2001). Une méthode basée sur la courbure géodésique est également présentée.

Avec l'expression discrète utilisée dans le modèle, la mise à plat est directe. Il suffit en effet d'appliquer les rotations d'angles opposés autour des génératrices pour obtenir la forme plane. Cette propriété est importante d'un point de vue applicatif. Par exemple, si le modèle est utilisé pour estimer la forme d'une page de livre déformée, alors la texture redressée de la page est très facilement déterminée. Cette application est détaillée dans la section 5.6.2.

4.3.3.3 Transfert de points

La représentation du modèle sous forme de cellules permet d'obtenir une expression par morceaux de la surface générée par le modèle. L'image d'un point de la forme plane sur la surface est donc déterminée en appliquant la transformation associée à la cellule à laquelle le point appartient.

La détermination de la cellule contenant le point peut être faite directement sur la forme plane en testant la position du point par rapport aux frontières des cellules, ou sur le graphique des positions, en trouvant l'intersection entre la courbe représentative du point et la courbe des positions. Cette deuxième méthode est notamment utile dans le cas où une représentation continue des génératrices est disponible car elle permet de déterminer exactement la génératrice passant par le point.

4.4 Perspectives

4.4.1 Extensions du modèle

Nous présentons ici des idées permettant de réduire les limitations du modèle tel que présenté précédemment. Ces améliorations n'ont pas été implémentées, car elles correspondent à des situations rarement rencontrées dans les problèmes classiques de vision. Par ailleurs elles augmentent la complexité du modèle et ne sont donc à prendre en compte que si cela est nécessaire.

4.4.1.1 Forme non convexe

La première hypothèse faite sur le modèle concerne la forme de la frontière. Celle-ci a été supposée convexe. Avec ce type de frontière, la seule contrainte sur les génératrices concerne leurs positions : elle doivent être placées de telle sorte qu'il n'y ait pas d'intersection entre elles. Pour traiter le cas de frontières non convexes, une deuxième contrainte est ajoutée : les génératrices doivent être intégralement incluses sur la surface de l'objet. Ces deux contraintes sont illustrées par la figure 4.20.

La différence introduite par les formes non convexes sur le modèle intervient au niveau de l'interpolation. En effet, la contrainte utilisée dans le processus décrit pour éviter que les génératrices auxiliaires ne se coupent est basée sur la monotonicité de l'abscisse curviligne. Cette propriété n'est plus suffisante dans le cas des formes non-convexes pour garantir la non-intersection et le fait qu'une génératrice doit être intégralement incluse dans la forme. La figure 4.21 (à gauche) illustre ces deux problèmes.

Remarque 4.7. *La solution consistant à découper la forme non-convexe en plusieurs parties convexes ne permet pas de résoudre le problème car la notion de génératrices est une notion globale s'appliquant à l'ensemble de la surface.*

Pour utiliser des méthodes similaires, il est possible d'introduire une *carte de visibilité*. Cette carte définit des sous-ensembles sur la forme non-convexe se comportant comme des formes convexes. Elle est dessinée sur le graphique des positions et est un indicateur binaire de validité des génératrices. Elle est construite en reportant

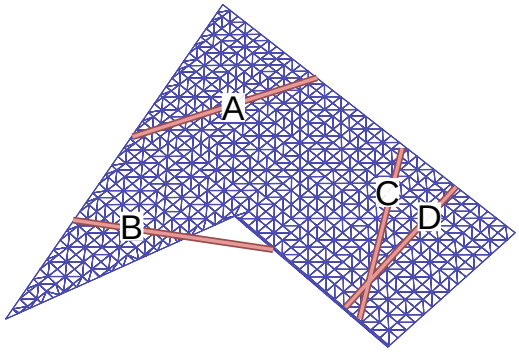


FIGURE 4.20 – **Exemples de génératrices valides et de génératrices non-valides.** La génératrice A est valide. La génératrice B n'est pas valide puisqu'elle est en partie à l'extérieur de la surface. Les génératrices C et D ne sont pas valides car elles se coupent sur la surface.

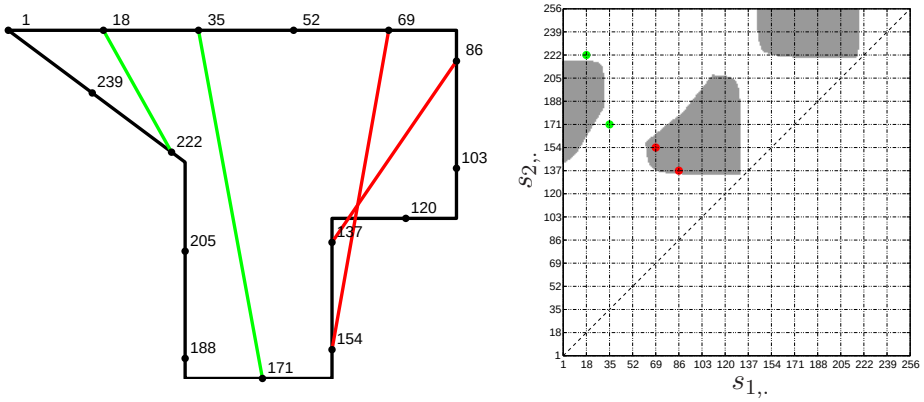


FIGURE 4.21 – **Carte de visibilité pour une forme plane non-convexe.** (à gauche) Quelques génératrices tracées sur une forme non-convexe. Sur une forme non convexe, les génératrices peuvent être en partie à l'extérieur de la forme. De plus la relation sur l'ordre des abscisses curvilignes n'est pas suffisante pour éviter les intersections entre génératrices : les génératrices rouges (foncées) se coupent alors que leurs abscisses curvilignes sont ordonnées correctement. (à droite) La carte de visibilité montre quelles abscisses curvilignes peuvent être reliées par des génératrices tout en restant à l'intérieur de l'objet. Les zones grisées représentent les génératrices incompatibles avec la forme de l'objet.

sur le graphique des positions toutes les génératrices incompatibles avec la forme de l'objet, c'est-à-dire dont une partie se situe à l'extérieur de l'objet. Un exemple de carte de visibilité est montré sur la figure 4.21.

Les différentes étapes du modèle peuvent alors être directement appliquées en tenant compte de cette carte de visibilité. La méthode pour les formes convexes peut être utilisée sans changement, et les génératrices ne satisfaisant pas les conditions sont supprimées à la fin du processus grâce à la carte de visibilité. Le problème de cette solution est que l'interpolation ainsi réalisée n'est plus régulière. Pour éviter ce phénomène, il faut faire intervenir la carte de visibilité plus tôt dans le processus, par exemple en divisant la courbe des positions dans les parties non-convexes. Ces solutions sont illustrées sur la figure 4.22.

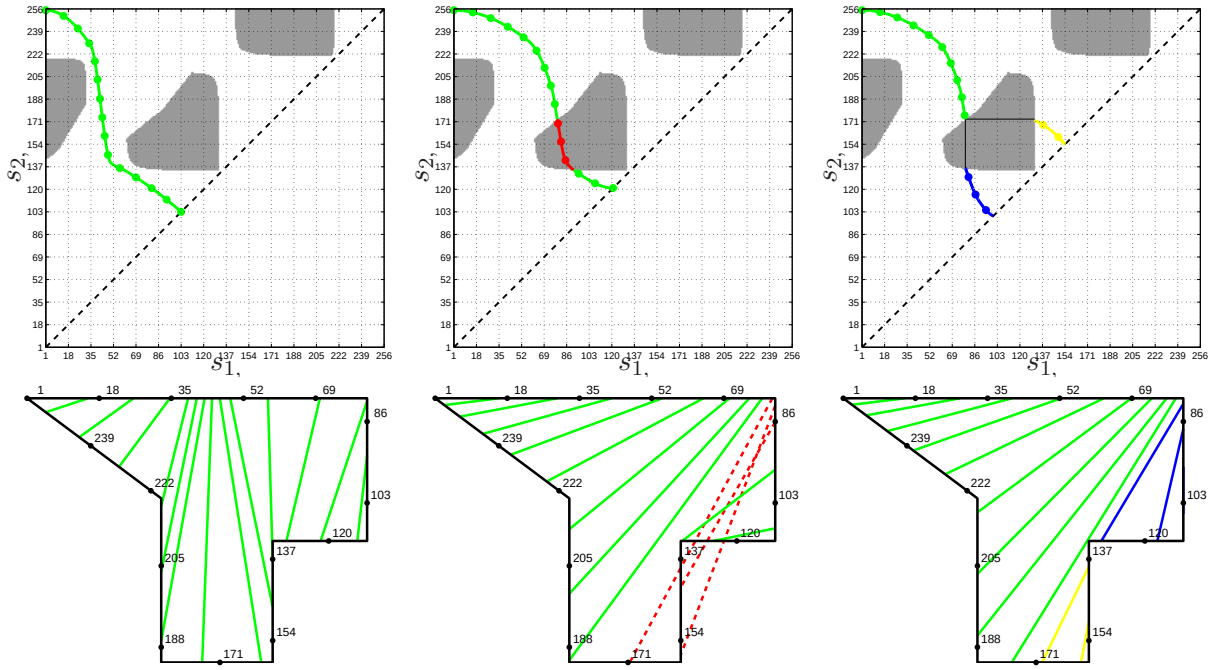


FIGURE 4.22 – **Utilisation de la carte de visibilité.** (à gauche) La courbe des positions évite les zones où la forme pose problème. (au milieu) Les génératrices coupant la forme sont détectées grâce à la carte de visibilité et sont automatiquement supprimées. Cela entraîne un manque de génératrice dans la zone située entre les abscisses curvilignes 137 et 171. (à droite) La courbe des positions est divisée en deux pour propager les génératrices dans les parties non-convexes.

4.4.1.2 Plis francs

Les relations apparaissant entre les génératrices de part et d'autre d'un pli sur une surface développable sont détaillées à la section 3.2.2.3. Pour que le modèle prenne en compte ce type de déformation, il faut lui ajouter :

- ▷ une description de la forme du pli franc,
- ▷ un équivalent de la relation de part et d'autre du pli franc exprimé avec des génératrices discrètes.

Une autre solution consiste à segmenter la surface en portions régulières, puis à ajouter des contraintes sur les bords, pour que les portions se raccordent par continuité ou au contraire le long de plis francs.

4.4.2 Modèle et surface continue

Le modèle présenté est décrit de manière discrète. La représentation adoptée est de type "bande", par conséquent le modèle est plan par morceaux. Le processus d'interpolation permet de réduire arbitrairement la taille des portions planes de manière à lisser la surface générée. À la limite, le modèle tend vers une surface continue.

Les deux questions qui se posent alors sont les suivantes :

- ▷ est-il possible d'exprimer la surface régulière limite du modèle ?
- ▷ quels sont les paramètres du modèle approchant une surface régulière donnée ?

4.4.2.1 Surface limite

Une solution pour déterminer la surface limite utilise la représentation d'une surface développable par une géodésique, voir la section 3.1.4.2. Le problème revient alors à trouver la limite continue d'une géodésique sur la surface générée par le modèle. Pour cela, le théorème fondamental est utilisé : il établit qu'une courbe est déterminée, à un mouvement rigide près, par la donnée en tout point de sa courbure et de sa torsion (Struik, 1961). Il faut pour cela résoudre un système d'équations appellées *équations naturelles*. Ainsi les différentes étapes du calcul sont :

1. définir une ou plusieurs géodésiques sur la surface plane,
2. évaluer la courbure et la torsion limites en tout point des géodésiques,
3. résoudre les équations naturelles pour déterminer les géodésiques *3D*,
4. déduire la surface des géodésiques *3D*.

Nous proposons dans la suite des éléments pour réaliser les différentes étapes. Néanmoins nous n'obtenons pas une solution analytique pour l'expression de la surface limite.

Définition des géodésiques. Le nombre minimum de géodésiques à définir sur la surface est tel que toutes les génératrices de la surface coupent au moins une géodésique. Pour les formes convexes, le nombre de géodésiques est égal au nombre de portions (sauf cas particuliers). Elles peuvent alors être définies suivant la situation (différentes possibilités sont représentées sur la figure 4.5 pour une forme rectangulaire), comme reliant deux extrémités de portions si la surface n'est formée que d'une seule portion, une extrémité de portion et le milieu d'une limite de portion ou encore deux milieux de limites de portions. Ces différentes possibilités sont illustrées sur la figure 4.23.

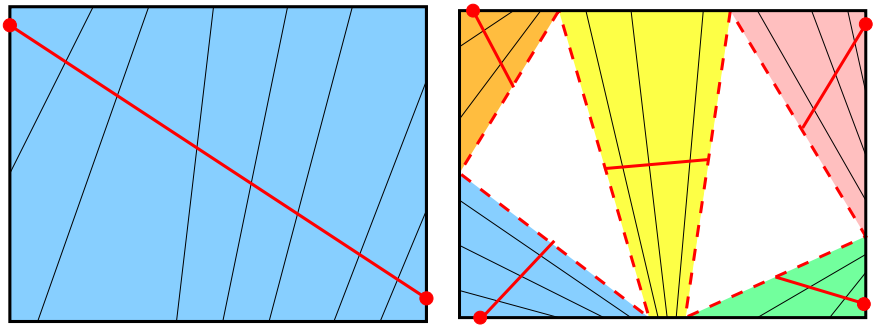


FIGURE 4.23 – **Définition des géodésiques (segments rouges, gris) sur la surface plane pour le calcul de la surface limite.** (à gauche) La surface est composée d'une seule portion, une seule géodésique est donc définie. (à droite) Cinq portions sont présentes sur la surface plane, par conséquent cinq géodésiques ont été définies.

Courbure et torsion des géodésiques. Dans le paragraphe 2.3.2.4, des interprétations géométriques de la courbure et de la torsion ont été données. Elles sont utilisées ici pour évaluer ces deux quantités de manière discrète, en terme de génératrices et d'angles de pli. La figure 4.24 illustre la paramétrisation utilisée pour réaliser le calcul. Le repère est choisi de telle sorte que la géodésique sur la forme plane soit dirigée par le vecteur $\mathbf{x}$. Il est centré sur le point O où sont évaluées la courbure et la torsion.

Pour évaluer la courbure et la torsion, il est nécessaire de calculer dans un premier temps les angles de contingence et de torsion. Le calcul de ces angles le long d'une géodésique fait intervenir les rotations autour

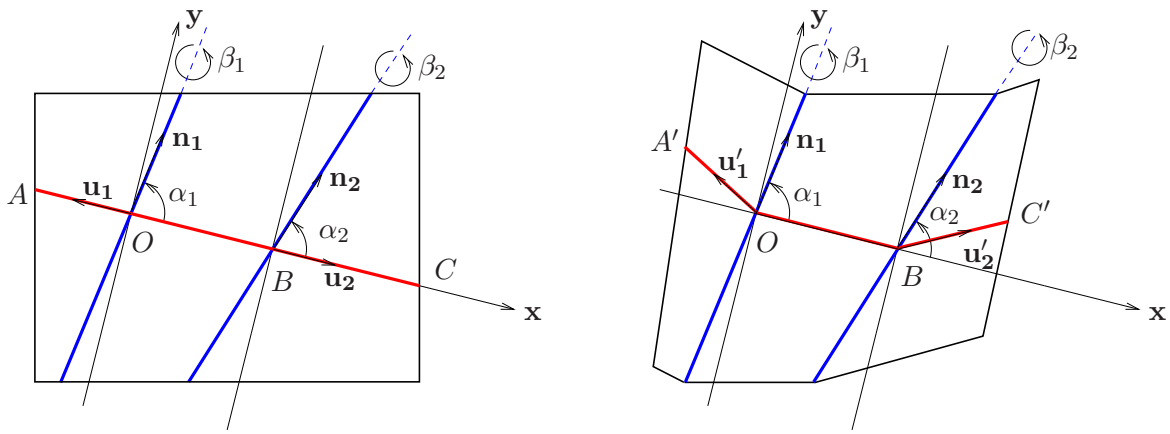


FIGURE 4.24 – **Paramétrisation pour le calcul de la courbure et de la torsion.** (à gauche) Définition des éléments géométriques sur la forme plane. (à droite) La paramétrisation utilisée après avoir effectué le pliage le long des génératrices.

des génératrices. Elles sont exprimées en utilisant la formule de Rodrigues qui établit la rotation d'un vecteur $\mathbf{u}$ autour d'un vecteur $\mathbf{n}$ et d'un angle ϕ :

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}) = \cos(\phi)\mathbf{u} + (1-\cos(\phi))(\mathbf{u}.\mathbf{n})\mathbf{n} + \sin(\phi)(\mathbf{n}\times\mathbf{u})$$

Les vecteurs $\mathbf{u}'_1$ et $\mathbf{u}'_2$ tangents à la géodésique de part et d'autre des génératrices sont alors égaux à :

$$\mathbf{u}'_1 = \begin{pmatrix} -\cos(\beta_1)\sin^2(\alpha_1) - \cos^2(\alpha_1) \\ -(1-\cos(\beta_1))\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_1) \\ -\sin(\beta_1)\sin(\alpha_1) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u}'_2 = \begin{pmatrix} \cos(\beta_2)\sin^2(\alpha_2) - \cos^2(\alpha_2) \\ (1-\cos(\beta_2))\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_2) \\ -\sin(\beta_2)\sin(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

Les angles peuvent alors être calculés :

▷ l'angle de contingence α_c est défini comme l'angle entre les tangentes consécutives :

$$\alpha_c = \widehat{(-\mathbf{u}'_1, \mathbf{x})}$$

▷ l'angle de torsion α_t est l'angle entre les binormales consécutives :

$$\alpha_t = \widehat{(\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2})}$$

avec $\mathbf{b}_1 = -\mathbf{u}'_1 \times \mathbf{x}$ et $\mathbf{b}_2 = \mathbf{x} \times \mathbf{u}'_2$:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\beta_1)\sin(\alpha_1) \\ (1-\cos(\beta_1))\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_1) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\beta_2)\sin(\alpha_2) \\ (1-\cos(\beta_2))\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

La courbure discrète κ_d et la torsion discrète τ_d sont alors obtenues en divisant les angles par la longueur de la géodésique entre les points O et B :

$$\begin{aligned} \kappa_d &= \frac{\alpha_c}{s_B} \\ \tau_d &= \frac{\alpha_t}{s_B} \end{aligned}$$

Les distances entre les génératrices consécutives ainsi que les angles de plis dépendent du nombre n de génératrices interpolées. La courbure et la torsion en tout point de la géodésique sont donc obtenues en prenant la limite de la courbure et de la torsion discrètes :

$$\begin{aligned} \kappa &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_c(n)}{s_B(n)} \\ \tau &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_t(n)}{s_B(n)} \end{aligned}$$

Ces limites dépendent du processus d'interpolation et de la forme plane de l'objet. Il n'existe pas de forme analytique simple pour les exprimer.

Résolution des équations naturelles. Le théorème fondamental énonce qu'une courbe gauche est déterminée à une transformation rigide près par sa courbure et sa torsion. L'expression de la courbe requiert alors la résolution des équations naturelles. Une méthode pour déterminer la solution est présentée dans (Goursat, 1887; Struik, 1961).

Surface développable. La connaissance de la géodésique déformée permet de déduire la surface développable, voir la section 3.1.4.2 ou le modèle proposé par (Bo and Wang, 2007). La méthode présentée ici permet de définir les surfaces développables de chaque portion de l'objet. Il suffit ensuite de les raccorder par continuité le long des portions planes.

4.4.2.2 Approximation d'une surface régulière

Le modèle est paramétré par la position des génératrices et leurs angles de pli. L'approximation d'une surface développable consiste à placer les génératrices et à leur associer des angles de pli tel que le modèle discret soit semblable à cette surface développable.

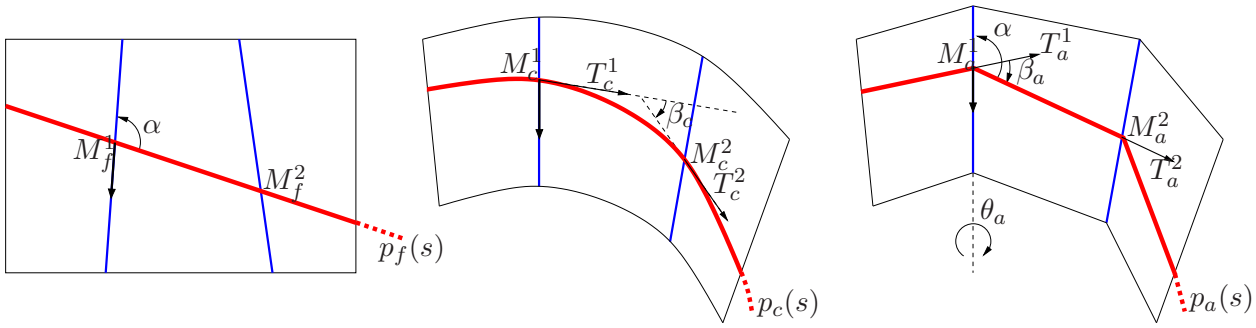


FIGURE 4.25 – **Approximation d'une surface développable régulière.** Les courbes rouges (claires) sont des géodésiques, les segments bleus (foncés) sont des génératrices. (à gauche) La forme plane : la géodésique est une ligne droite. (au milieu) La géodésique est une courbe sur la surface régulière. (à droite) Sur la surface générée par le modèle, la géodésique est une ligne brisée.

Les positions des génératrices sont obtenues par rééchantillonnage des génératrices de la surface régulière. Les angles de plis peuvent être déterminés en préservant la courbure d'une géodésique de la surface régulière. Le principe est illustré sur la figure 4.25.

Avec la paramétrisation proposée, la courbure de la géodésique sur la surface régulière est :

$$\kappa = \lim_{s_2 \to s_1} \frac{\beta_c}{s_2 - s_1}$$

L'équivalent de cette expression sur le modèle discret est :

$$\frac{\beta_a}{\|M_a^2 - M_a^1\|} = \kappa \tag{4.4}$$

Du fait de la discrétisation, la courbure est remplacée par des rotations autour des génératrices. Pour représenter au mieux la surface, il peut être intéressant d'utiliser la valeur moyenne de la courbure $\bar{\kappa}$ entre deux génératrices :

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \kappa \, \mathrm{d}s$$

l'équation (4.4) devient :

$$\frac{\beta_a}{\|M_a^2 - M_a^1\|} = \bar{\kappa} \tag{4.5}$$

La relation liant l'angle de pli θ_a, l'angle α entre la géodésique et la génératrice et l'angle de contingence β_a est la suivante :

$$\theta_a = \text{sign}(\beta_a) \arccos\left(\frac{\cos(\beta_a) - \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}\right) \tag{4.6}$$

Finalement l'angle de pli est trouvé en remplaçant β_a dans l'équation (4.6) par son expression donnée par l'équation (4.5) :

$$\theta_a = \text{sign}(\bar{\kappa}) \arccos\left(\frac{\cos(\|M_a^2 - M_a^1\|\bar{\kappa}) - \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}\right) \tag{4.7}$$

En calculant les angles de pli de cette manière, la surface générée par le modèle peut être arbitrairement proche de la surface développable régulière, il suffit pour cela d'augmenter autant que nécessaire le nombre de génératrices.

La figure 4.26 montre un exemple *2D* de cette méthode. Une courbe plane est définie, tracée en bleu sur la figure 4.26 à gauche. Le modèle utilisé pour représenter cette courbe est une ligne brisée dont les éléments sont de longueurs identiques, et dont la longueur totale est égale à la longueur de la courbe. Les seules inconnues du modèle sont donc les angles entre les segments de la ligne brisée. Ces angles sont évalués en utilisant l'équation 4.7. La courbe à droite sur la figure 4.26 montre l'évolution de la distance de Hausdorff [4] entre le modèle et la courbe de référence lorsque le nombre de points de contrôle du modèle augmente. Cette courbe est obtenue de manière expérimentale, elle illustre le fait que la limite du modèle est vraisemblablement la courbe de référence.

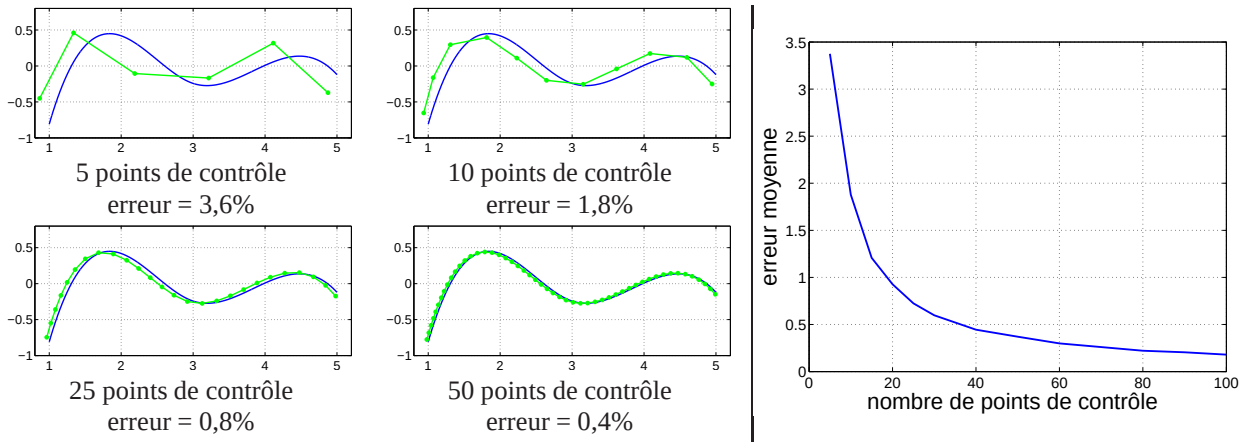


FIGURE 4.26 – **Illustration *2D* de l'approximation d'une surface régulière**. L'erreur est la distance de Hausdorff moyenne entre le modèle et la courbe. Elle est exprimée en pourcentage de la longueur de la courbe. (à gauche) La courbe bleue (foncée) est estimée avec un nombre variable de points de contrôle. (à droite) Courbe montrant l'erreur d'estimation en fonction du nombre de points de contrôle.

Remarque 4.8. *Le placement des 5 points de contrôle en haut à gauche de la figure 4.26 ne semble pas optimal : il existe certainement une configuration pour laquelle la distance de Hausdorff est plus petite. En fait, les points de contrôle sont déterminés par une analyse de la courbure et non par une minimisation de la distance de Hausdorff. Par conséquent, leurs placements n'a pas de raison d'être optimal par rapport à la distance de Hausdorff.*

4. C'est une mesure de la distance entre deux sous-ensembles. Elle est définie de manière intuitive comme la distance maximale entre un point du premier ensemble et le point le plus proche du deuxième ensemble.

4.4.3 Apprentissage artificiel des surfaces développables

La paramétrisation du modèle est non-linéaire et l'espace des paramètres comporte de nombreuses singularités, à cause notamment de la contrainte de non-intersection des génératrices. Pour ces raisons, il peut être intéressant de chercher une nouvelle paramétrisation plus simple à utiliser. Pour cela, diverses méthodes d'apprentissages linéaires et non-linéaires ont été essayées. Le principe est d'utiliser le modèle décrit pour générer une base d'exemples de surfaces développables, et de chercher une nouvelle paramétrisation à partir de ces exemples. Cette méthode appartient aux techniques d'apprentissage non-supervisées ou encore de réduction des dimensions. En effet, les paramètres du modèle ayant généré les exemples de la base ne sont pas réutilisés dans le processus d'apprentissage.

Génération des exemples. La base d'apprentissage est constituée d'exemples de surfaces développables générées par le modèle. Chaque surface est définie par un jeu de paramètres tiré aléatoirement. Les surfaces sont représentées sous forme de maillages de dimension constante $n \times m$. Chaque maillage peut être mis sous la forme d'un vecteur $\mathbf{v_M}$ regroupant les coordonnées des sommets.

Ainsi un point de $\mathbb{R}^{3nm}$ représente un maillage et donc une surface. L'ensemble des exemples d'apprentissage forme un nuage de points dans $\mathbb{R}^{3nm}$. La structure de ce nuage n'a pas $3nm$ degrés de liberté car les points du maillage ne sont pas indépendants les uns des autres : ils appartiennent à une surface développable régulière. Les exemples sont regroupés dans une matrice d'apprentissage notée $\mathcal{A}$, formée par la concaténation des maillages.

L'utilisation de méthodes d'apprentissage vise à décrire la structure du nuage de points avec un nombre restreint de paramètres.

Méthode linéaire. Les données sont représentées par la somme d'une forme moyenne et d'une combinaison linéaire de formes de base. La forme moyenne $\bar{\mathcal{A}}$ est égale à la moyenne des maillages de la base d'apprentissage. Les formes de base $\mathcal{E}_i$ sont obtenues par décomposition en valeurs singulières de la matrice formée par la concaténation des vecteurs $\mathbf{v_M} - \bar{\mathcal{A}}$. Elles constituent une base orthonormale de $\mathbb{R}^{3nm}$. Ainsi, un vecteur d'apprentissage peut s'écrire :

$$\mathbf{v_M}_{3nm\times 1} = \bar{\mathcal{A}}_{3nm\times 1} + \mathcal{E}_{3nm\times 3nm} \cdot \mathbf{C}_{3nm\times 1}$$

avec $\mathbf{C}$ le vecteur des coefficients.

La décomposition en valeurs singulières minimise l'erreur quadratique de la reconstruction n'utilisant que les q premières formes de base. La nouvelle paramétrisation est alors donnée par les coefficients des q premières formes de base. Dans cette paramétrisation, un maillage $\mathbf{v}$ est :

$$\mathbf{v} = \bar{\mathcal{A}} + \sum_{i=1}^{q} c(i) \cdot \mathcal{E}_i$$

La figure 4.27 montre l'action des premières formes de base sur le maillage moyen.

L'idée de cette méthode est proposée dans (Salzmann et al., 2005). Nous l'avons utilisée dans (Gay-Bellile et al., 2006) pour générer un modèle d'objets déformables comme expliqué dans l'annexe A.4.1. Elle est linéaire, par conséquent elle ne permet pas de représenter des relations complexes. Par exemple, l'extensibilité n'est pas préservée par cette méthode. Pour résoudre ce problème, les contraintes non-linéaires peuvent être réinjectées par l'intermédiaire d'une pénalité sur les coefficients, une autre solution consiste à utiliser des méthodes d'apprentissage non-linéaires.

Méthodes non-linéaires. Les non-linéarités de l'espace des maillages développables sont dues au caractère inextensible de ces surfaces, et au fait qu'elles peuvent être mises à plat sans étirement. Plusieurs méthodes ont été testées, les résultats obtenus n'ont pas donné satisfaction. D'une part la matrice d'apprentissage doit contenir beaucoup d'exemples pour être représentative, mais cela n'est généralement pas compatible avec les méthodes non-linéaires. Par ailleurs la détermination de la méthode et de ses paramètres sont délicats car la structure des

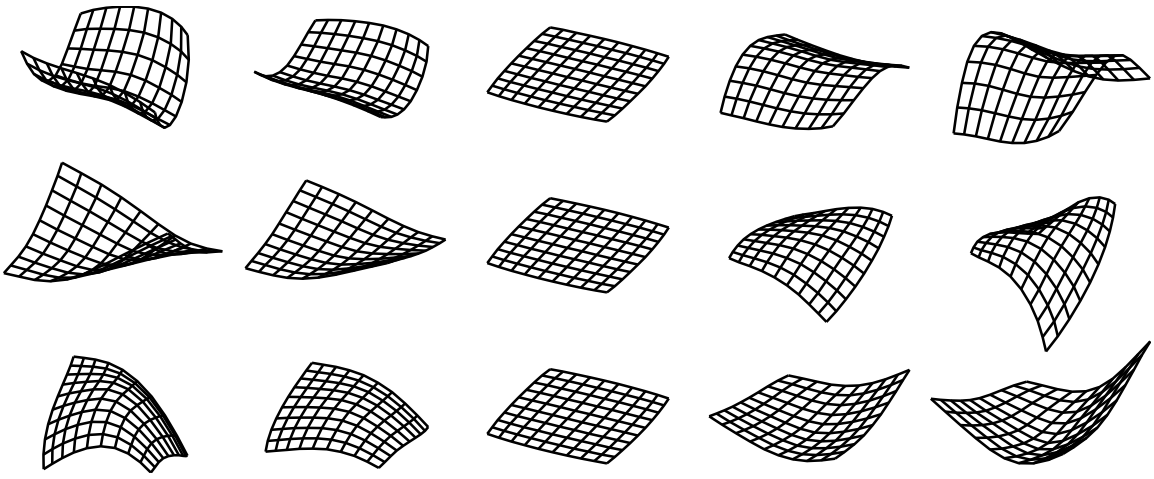


FIGURE 4.27 – **Influence des premières formes de base générées par l'apprentissage linéaire.** Chaque ligne correspond à la variation du coefficient affecté à une forme de base. La forme moyenne $\bar{A}$ apparaît dans la colonne du milieu.

données est complexe. Ainsi le choix du noyau d'une analyse en composantes principales à noyau, ou le choix des critères d'un algorithme de réduction des dimensions ne sont pas triviaux.

L'apprentissage de maillages développables reste un problème non résolu. La solution linéaire permet d'obtenir des résultats, mais la propriété de développabilité est perdue. L'utilisation de méthodes plus complexes requiert une analyse plus approfondie de la structure de l'espace des maillages développables.

4.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre notre modèle génératif de surfaces développables. Nous l'avons conçu pour répondre à des besoins identifiés en vision par ordinateur mais il peut également servir pour des applications en synthèse d'images, en conception assistée par ordinateur, en réalité augmentée ou encore en interface homme-machine. Le modèle est dédié à la représentation des objets car il intègre la définition de la frontière de l'objet sur la surface. Il est contrôlé par un ensemble quasi-minimal de paramètres grâce à la distinction faite entre les aspects de forme générale et de régularité d'une surface. Ainsi, seule la forme générale de la surface est paramétrée. La surface est régularisée par l'intermédiaire d'un processus automatique d'interpolation. Pour pouvoir utiliser notre modèle, nous l'avons implanté sous Matlab. Une interface graphique a également été réalisée par des étudiants en école d'ingénieur.

Les applications de notre modèle sont diverses. Nous l'utilisons dans le chapitre suivant pour faire de la reconstruction de surfaces développables à partir d'images. Dans un autre contexte, il permet de générer aléatoirement des surfaces développables. Cela rend possible des applications en apprentissage artificiel, mais également de tester des algorithmes utilisant ce type de surfaces. Ainsi, le modèle générique utilisé pour l'algorithme de reconstruction d'objets déformables présenté à l'annexe A.4.1 peut être appris à partir de ce modèle. Par ailleurs, les surfaces de synthèse utilisées dans le chapitre 6 sont générées de cette manière. Les paramètres de déformation de notre modèle ont une interprétation géométrique simple. Le modèle peut donc être utilisé comme un outil de conception de surfaces développables.

Pour certaines applications, il peut être intéressant de contraindre l'espace de déformation pour tenir compte de connaissances a priori. La modélisation des pages d'un livre rentre dans ce cadre car les déformations sont contraintes par la présence de la reliure (les génératrices ne peuvent pas la croiser). Ce type de spécificités peut être intégré au modèle par une simple restriction sur les paramètres.

Les surfaces développables ont été étudiées dans ce chapitre par l'intermédiaire d'un modèle génératif. Cette approche a permis de mettre en évidence de nombreuses propriétés de ces surfaces lorsqu'elles sont

délimitées par une frontière (ce sont alors des objets développables). Certaines de ces propriétés dépassent le cadre du modèle, et traitent par exemple de la localisation des génératrices de la surface. Elles sont utilisées dans l'annexe A.2 qui présente une mise en équation visant à localiser des surfaces développables.

CHAPITRE

5

RECONSTRUCTION *3D* MULTI-CAMÉRAS

Résumé.

Ce chapitre constitue la deuxième partie de notre méthode spécifique de reconstruction d'objets déformables. Il traite de la reconstruction *3D* des objets dont la surface est développable. Il se base sur notre modèle génératif de surfaces développables et permet d'estimer la déformation entre la forme plane de l'objet et sa surface déformée. La reconstruction utilise plusieurs images de la surface. Plus précisement, elle se base sur des correspondances de points entre les images. La méthode permet donc d'évaluer une surface passant par des points définis dans les images. Elle est évaluée grâce à des données *3D* et sur des séquences réelles d'images. Cette démarche illustre l'utilisation d'un modèle très spécifique associé à un algorithme dédié.

Contributions.

- ▷ Une version initiale de l'algorithme est présentée dans (Perriollat and Bartoli, 2006, 2007a,b). La détection des génératrices est réalisée par une méthode globale et la sélection des paramètres est directement effectuée sur les génératrices détectées.
- ▷ Le critère local de détection de génératrice est décrit dans (Perriollat et al., à paraître). La sélection des paramètres du modèle est obtenue par la méthode de suppression itérative des génératrices incohérentes.

5.1 Introduction

La reconstruction de scènes *3D* à partir d'images est une composante importante de la recherche en vision par ordinateur. Lorsque les éléments de la scène sont rigides durant la prise de vue, la scène est dite *rigide*. Dans le cas contraire, la scène est qualifiée de *déformable* ; le chapitre 6 leur est consacré. La reconstruction *3D* de scènes rigides a été un domaine de recherche très actif. En particulier, la détection de points d'intérêt puis leurs reconstructions par triangulation sont des problématiques maintenant maîtrisées (Faugeras and Luong, 2001; Hartley and Zisserman, 2004; Pollefeys et al., 2004). Les problématiques actuelles concernant les scènes rigides se concentrent par exemple sur l'extraction d'informations plus denses à partir des images comme par exemple la recherche de surfaces ou l'estimation de modèles d'éclairage (Brown et al., 2007).

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'estimation d'une déformation en se basant sur les techniques développées pour les scènes rigides. Les déformations considérées sont les isométries régulières du plan. Autrement dit, ce sont les transformations qui génèrent des surfaces développables à partir d'un plan. La méthode que nous proposons permet à la fois d'estimer les paramètres du plan et ceux de la surface développable. Elle n'a donc pas besoin d'un patron (modèle *3D* de référence), contrairement à la méthode proposée au chapitre 6. Elle se base sur une série d'images de la surface prise à partir de points de vue différents. Ce cadre de scènes rigides peut être étendu aux scènes déformables en considérant plusieurs caméras synchronisées.

Les deux aspects principaux de ce type de reconstruction *3D* sont :

- ▷ la reconnaissance et la segmentation des zones des images contenant une surface développable,
- ▷ la reconstruction de la surface.

Seul le deuxième aspect est abordé ici. La problématique sous-jacente est l'interpolation de points par une surface. Une hypothèse couramment utilisée dans ce cas repose sur la régularité de la surface. Cela conduit par exemple à reconstruire la surface la moins déformée passant par les points. La méthode que nous proposons se base sur des propriétés géométriques plus fortes : la surface est considérée développable.

La méthode proposée s'appuie sur notre modèle génératif d'objets développables présenté au chapitre 4. L'algorithme permet à la fois de manipuler le modèle par le biais de l'estimation de ses paramètres à partir d'images ou de points *3D* mais également de démontrer expérimentalement la capacité du modèle à représenter des objets réels.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. La première partie constitue un état de l'art des méthodes proposées pour la reconstruction de surfaces développables. Les trois étapes principales de notre méthode de reconstruction sont ensuite présentées. Il s'agit d'une reconstruction *3D* initiale à partir des images, suivie de l'initialisation puis du raffinement par un ajustement de faisceau des paramètres du modèle. Enfin nous rapportons deux types de résultats. Les premiers sont réalisés sur des données *3D* de référence et permettent de valider le modèle et la méthode de reconstruction. Des résultats sur des séquence réelles d'images illustrent ensuite l'utilisation et les applications de la reconstruction *3D*.

5.2 État de l'art

L'utilisation des surfaces développables apparaît dans la littérature dans trois domaines principaux : la numérisation des documents imprimés, et les problématiques d'ingénierie inverse et de conception assistée par ordinateur.

Les problèmes liés aux documents sont généralement induits par le processus de numérisation. En effet, les méthodes de numérisation font apparaître des défauts sur l'image du document. Par exemple, des déformations photométriques et géométriques sont visibles près de la reliure d'un livre numérisé par un scanner à plat. Ces problèmes sont encore plus prononcés lorsqu'un appareil photo est utilisé : l'ensemble de la page est bombée dans l'image et les défaut photométriques peuvent concerner l'intégralité de l'image. Ces problèmes peuvent être évités en utilisant des systèmes complexes [1], mais ceux-ci sont réservés à des utilisations intensives. Les

1. Ils sont basés sur des scanners à plat ou des caméras, et combinés à un sytème pour tourner automatiquement les pages. Les défauts photométriques sont évités soit par des contraintes physiques sur la page (compression du livre sur une vitre) soit par des dispositifs mécaniques (le bras du scanner suit la déformation de la page).

solutions qui nous intéressent dans le cadre des surfaces développables consistent à traiter les images a posteriori en calculant les transformations géométriques et photométriques inverses permettant de rectifier l'image.

En ingénierie inverse, la problématique est l'estimation de surfaces développables à partir de mesures. Généralement, il s'agit d'estimer une surface développable passant par des points *3D*. Concernant la conception assistée par ordinateur, l'intérêt est porté sur la conversion de surfaces. L'objectif est de déterminer une surface développable approchant une surface représentée par un modèle ne garantissant pas les propriétés de développabilité.

Les différentes méthodes se différencient par les primitives utilisées (une image, un nuage de points *3D*) et par les entités évaluées (une image rectifiée, une surface).

5.2.1 Primitives *2D*

Les primitives *2D* sont généralement utilisées dans les applications de rectification de documents. La notion de surface développable peut n'apparaître qu'implicitement, en particulier lorsque la méthode produit une image rectifiée car la surface *3D* ne présente alors pas d'intérêt. Des solutions ont également été proposées pour estimer la surface *3D* à partir des images.

5.2.1.1 Rectification

Les données utilisées pour réaliser la rectification sont des images. Plus précisément, une information pertinente est extraite de l'image et permet d'appliquer des corrections géométriques et photométriques. Des méthodes spécifiques ont ainsi été proposées dans le cas d'images représentant des textes imprimés (Cao et al., 2003; Liang et al., 2006). Elles se basent sur la détection des lignes du texte et calculent la transformation rendant ces lignes horizontales. Le modèle de surface utilisé par (Cao et al., 2003) est un cylindre généralisé. Les génératrices sont supposées parallèles dans les images. La détection des lignes de texte est utilisée pour définir des directrices sur la surface. La rectification est alors calculée en se basant sur la longueur des génératrices entre les directrices. La portion de surface à rectifier doit être rectangulaire. Le modèle de surface utilisé et les hypothèses sur les conditions de prise de vue restreignent l'utilisation de la méthode à des cas très particuliers. Un processus plus général est proposé dans (Liang et al., 2006). Les génératrices sont détectées dans l'image en utilisant les lignes de texte. La méthode se base sur le modèle discret des surfaces développables mais ne reconstruit pas explicitement le modèle *3D*.

Les propriétés *3D* des surfaces développables sont utilisées dans (Tsoi and Brown, 2007) pour réaliser la rectification géométrique et photométrique d'images déformées. Plusieurs images de la surface sont combinées pour améliorer la résolution de l'image déformée.

Ces méthodes sont dédiées à la rectification d'images dans des conditions très spécifiques. En effet, les hypothèses sur le contenu de l'image, les conditions de prises de vue, ou encore les déformations des pages sont restrictives. Les algorithmes qui en découlent sont basés sur des heuristiques complexes. Elles mettent en évidence les objectifs de la rectification et les données nécessaires à leurs calculs.

5.2.1.2 Reconstruction *3D*

Dans le cas général, il n'est pas possible de reconstruire une surface à partir d'une image unique puisqu'il manque l'information de profondeur. En revanche, dans le cas des surfaces développables, (Gumerov et al., 2004) ont montré que la connaissance de la courbe frontière dans l'image est suffisante pour déterminer la forme *3D*. La surface est donnée par la résolution d'équations différentielles. Il est nécessaire, pour utiliser cette méthode, de voir l'intégralité du contour dans l'image.

Dans un contexte similaire, (Taddei and Bartoli, 2008) proposent une méthode pour estimer un cylindre généralisé à partir de correspondances entre une image de référence dans laquelle la surface est plane et une image projective de la surface déformée. Ils montrent que le problème se ramène à l'estimation d'une courbe dont deux projections monodimensionnelles sont connues. La solution est déterminée par une approche variationnelle.

Deux solutions pour la reconstruction des pages d'un livre sont proposées par (Courteille, 2006). La première méthode utilise les contours. Les pages sont représentées par des cylindres généralisés et la reliure est une génératrice orthogonale à l'axe optique de la caméra. La deuxième méthode est basée sur une analyse photométrique. En utilisant des conditions d'éclairage particulières, il est possible de lier l'intensité à l'orientation des normales à la surface.

Ces techniques permettent de retrouver des surfaces développables à partir d'une seule image. Elles utilisent pour cela des modèles très contraints, ou des conditions de prise de vue spécifiques. Par conséquent, elles ne permettent pas de résoudre le problème de la reconstruction *3D* d'une surface développable dans le cas général.

5.2.2 Primitives *3D*

5.2.2.1 Mise à plat

La mise à plat se distingue de la rectification par le type des données initiales. La rectification s'applique à une image, tandis que la mise à plat désigne l'opération calculant une structure *2D* à partir d'une structure *3D*. Les données *3D* utilisées dans les méthodes présentées dans la suite sont des nuages de points, éventuellement couplés à des images de la surface. Dans ce cadre, la mise à plat revient à estimer une paramétrisation plane des points telle que la transformation entre les points du plan et les points *3D* soit une isométrie.

Les techniques présentées ne traitent pas le problème de l'organisation des données *3D*. La structure du nuage de points est donc supposée connue, soit par une triangulation des points, soit par une représentation sous forme d'un maillage.

La conservation des géodésiques est la propriété des isométries utilisée dans (Gan et al., 1996) pour réaliser la mise à plat d'une surface développable. Une triangulation est définie sur la surface développable. Les longueurs des géodésiques entre les sommets de la triangulation sont calculées. La triangulation plane est cherchée, telle que les longueurs des arêtes soient égales aux longueurs des géodésiques précédemment évaluées. Le principe de la méthode est simple, mais le résultat n'est pas garanti, des déformations locales pouvant apparaître dans les zones où les arêtes ne sont pas rigoureusement égales aux géodésiques. Des algorithmes similaires sont présentés par (Lampert et al., 2005; Ulges et al., 2004). Des points *3D* de la surface sont reconstruits par triangulation en utilisant les techniques de vision stéréoscopique. Un maillage régulier interpolant les points est ensuite calculé. La mise à plat est alors réalisée par préservation des distances entre les sommets du maillage.

Les systèmes masse-ressort ont également été utilisés pour réaliser la mise à plat (Brown and Seales, 2004; Pilu, 2001). Un tel système est construit sur la surface, puis il est déformé pour que les sommets appartiennent à un même plan. Les positions relatives des sommets sur le plan sont obtenues par un processus de relaxation. La contrainte de coplanarité se répercute entre les sommets par l'intermédiaire des ressorts. La dynamique du système permet de faire évoluer les sommets vers un état d'équilibre. La méthode ne garantit pas de trouver une isométrie, le résultat dépend entre autres de la qualité de la surface *3D* initiale.

En constatant que les données *3D* n'appartiennent jamais parfaitement à une surface développable, à cause notamment de la précision de l'appareil et du bruit, (Brown et al., 2007) proposent une solution basée sur les transformations conformes (ce sont les transformations qui préservent les angles sur la surface). L'isométrie est une transformation conforme, la réciproque est fausse. Les contraintes engendrées par la méthode sont donc moins fortes que celles provenant d'une isométrie. D'après les auteurs, ces transformations sont moins sensibles à la qualité des données *3D*. La transformation conforme est déterminée par la résolution d'un système linéaire. Le processus est couplé à une image haute résolution de la surface, ce qui permet de générer la texture plane de l'objet. Une correction photométrique est également proposée, grâce à la connaissance de la surface *3D*.

5.2.2.2 Reconstruction *3D*

Les primitives *3D* utilisées pour définir des surfaces développables dans les méthodes présentées ci-dessous sont des surfaces quelconques ou des nuages de points *3D*. Dans le cas de points *3D*, les données sont organisées, et la plupart des méthodes requièrent l'évaluation de plans tangents ou de normales à la surface. Ces différentes méthodes ne s'appliquent donc pas directement à des points *3D* donc la structure n'est pas connue.

La conversion de surfaces NURBS en surfaces développables est traitée dans (Subag and Elber, 2006). Une solution est apportée aux problèmes de segmentation de la surface en portions de surfaces développables et à l'estimation de ces portions développables. Les deux étapes sont réalisées simultanément. Le principe consiste à définir des directrices sur la surface puis à faire grossir des portions développables autour de ses génératrices. La propagation des portions développables est contrôlée par un seuil sur la distance de Hausdorff entre la surface quelconque et la portion développable. La méthode est très sensible au choix des directrices, celui-ci est donc confié à l'utilisateur. Une version automatique est présentée, mais elle conduit à un grand nombre de petites portions développables.

Les propriétés duales des surfaces développables sont à l'origine de nombreux algorithmes d'estimation (Chen et al., 1999; Peternell, 2004; Peternell et al.; Pottmann and Wallner, 1999). Ainsi (Chen et al., 1999) proposent de représenter un nuage de points ou une surface par des combinaisons de cylindres de révolution et de cônes de révolution. Le processus est itératif, des cônes ou des cylindres sont ajustés à la surface (ou au nuage de points), en partant de la zone la plus favorable de la surface. Cette zone est déterminée par une analyse de l'application de Gauss de la surface. Les éléments de base (cônes et cylindres) sont raccordés entre eux par continuité des plans tangents. Le nombre d'éléments est déterminé par la précision souhaitée de l'estimation. Une solution pour estimer une surface développable NURBS est également décrite, les plans de contrôle de la surface sont alors des plans tangents détectés. Une méthode similaire est présentée par (Pottmann and Wallner, 1999). La position de la courbe de régression de la surface générée est prise en compte dans le processus. Une analyse de l'espace dual à des fins de reconstruction est exposée par (Peternell, 2004; Peternell et al.). Elle permet d'une part de déterminer si la surface est développable, mais également de qualifier le type de surface (cône, cylindre ou surface développable tangente). Le modèle est ajusté dans l'espace dual. Ces différentes méthodes utilisent une représentation performante des surfaces développables. En pratique, elles ne sont utilisables que lorsque la densité des données est importante. En effet, les résultats dépendent de la précision sur l'estimation des normales. Lorsque le nombre de points n'est pas suffisant, l'organisation du nuage de points dans l'espace dual n'est pas facile à percevoir. Ce constat est encore plus significatif si la surface est constituée d'un assemblage de portions développables.

5.2.3 Objectifs de l'algorithme proposé

Les méthodes présentées utilisent ou reconstruisent des surfaces développables en se basant sur des données variées. De manière générale, elles ont été réalisées pour des applications spécifiques telles que la rectification ou la mise à plat de documents et la reconstruction *3D* de surfaces. Notre objectif, en proposant une nouvelle méthode, est de montrer comment ces diverses applications peuvent être réalisées par un processus unique. Celui ci doit donc être aussi général que possible, et s'affranchir des limitations inhérentes aux diverses méthodes précédentes.

Au niveau du type de données, il nous paraît nécessaire d'utiliser des informations *3D*. En effet, même si les méthodes *2D* peuvent s'appuyer sur des concepts *3D*, il nous semble plus naturel des les exprimer explicitement. Les données *3D* sont générées par triangulation à partir de plusieurs images. Cette technique est simple à mettre en œuvre et les conditions de prise de vue sont peu restrictives. De plus, le fait d'avoir plusieurs images rend possible la mise en œuvre de techniques de super-résolution. En fait, l'inconvénient majeur de cette méthode est la nécessité d'avoir un objet texturé pour pouvoir mettre en correspondances des points entre les images. Cela semble peu limitant en pratique puisque la numérisation d'une page uniforme ne présente pas beaucoup d'intérêt.

Les deux applications envisagées sont la reconstruction d'une surface développable et la rectification des images de la surface déformée. La surface est supposée développable et régulière, les aspects d'identification ou de segmentation ne sont donc pas étudiés. Par ailleurs, l'estimation d'une surface développable *3D* permet de résoudre directement le problème de la rectification puisque l'isométrie entre la surface et le plan peut être calculée de manière exacte. Pour gagner en généralité par rapport aux méthodes existantes, la surface développable est représentée par notre modèle génératif introduit au chapitre 4.

L'algorithme que nous proposons permet donc d'estimer les paramètres du modèle génératif de surfaces développables à partir de plusieurs images. Ces paramètres définissent la surface (forme du contour et nombre,

positions et angles de pli des génératrices) et la positionnent dans l'espace (rotation, translation et facteur d'échelle). Les interactions avec l'utilisateur sont réduites au maximum. Les différentes étapes du processus de reconstruction suivant sont détaillées dans la suite :

1. reconstruction des points par triangulation,
2. interpolation des points *3D* par une surface régulière quelconque,
3. initialisation du modèle de surface développable sur la surface interpolée,
4. raffinement des paramètres du modèle en se basant sur les images.

Remarque 5.1. *Ces étapes supposent que les données initiales sont des images. Il est également possible d'utiliser directement des points 3D dans notre algorithme. Dans ce cas, les parties concernant la reconstruction des points (section 5.3) et le raffinement des paramètres du modèle (section 5.5) sont différentes. En revanche, l'interpolation des points (section 5.3.2) et l'initialisation du modèle (section 5.4) sont identiques. La version 3D permet de comparer les résultats obtenus avec des données 3D dont la précision est connue.*

5.3 Reconstruction initiale

Cette première étape est destinée à extraire et mettre en forme de l'information *3D* à partir des images.

5.3.1 Reconstruction *3D* d'un nuage de points

Notre objectif est d'estimer une surface développable vue dans plusieurs images. La méthode que nous proposons se base sur des points *3D* de la surface, obtenus par des techniques classiques de vision par ordinateur. Nous introduisons brièvement les deux méthodes utilisées : le "Structure-from-Motion" et la lumière structurée.

5.3.1.1 Structure-from-Motion

La figure 5.1 présente le cadre général du Structure-from-Motion. Les hypothèses de cette technique sont :

- ▷ la scène est rigide : il n'y a pas de déformation *3D* entre les images,
- ▷ plusieurs images, prises de points de vue différents sont disponibles : cela suppose un mouvement relatif entre la caméra et l'objet de la scène,
- ▷ des correspondances de points peuvent être établies entre les images.

La première étape consiste à établir des correspondances de points entre les images. Pour cela des points d'intérêt (Lowe, 2004; Milkolajczyk and Schmid, 2004; Slesareva et al., 2005) sont détectés dans les images puis appariés. Le Structure-from-Motion (Hartley and Zisserman, 2004; Pollefeys et al., 2004) propose alors une solution pour :

- ▷ reconstruire les points *3D*,
- ▷ estimer les paramètres des caméras (paramètres internes et poses).

Une étape délicate du Structure-from-Motion est la mise en correspondance des points entre les images. En effet, la qualité de la reconstruction peut-être dégradée par la présence de mauvaises correspondances. Des solutions pratiques ont été proposées pour rendre l'estimation robuste. Un exemple de reconstruction est montré sur la figure 5.3.

5.3.1.2 Lumière structurée

L'utilisation de la lumière structurée permet de résoudre le problème de la mise en correspondance. Cette méthode se rapproche d'une reconstruction stéréoscopique pour laquelle deux caméras calibrées (paramètres internes et externes) sont utilisées. Les points *3D* sont obtenus par triangulation de correspondances entre les deux images. Avec la lumière structurée, une des deux caméras est remplacée par une source lumineuse. Cette dernière projette un motif de référence sur la scène. Une étude de ces motifs est présentée dans (Salvi et al.,

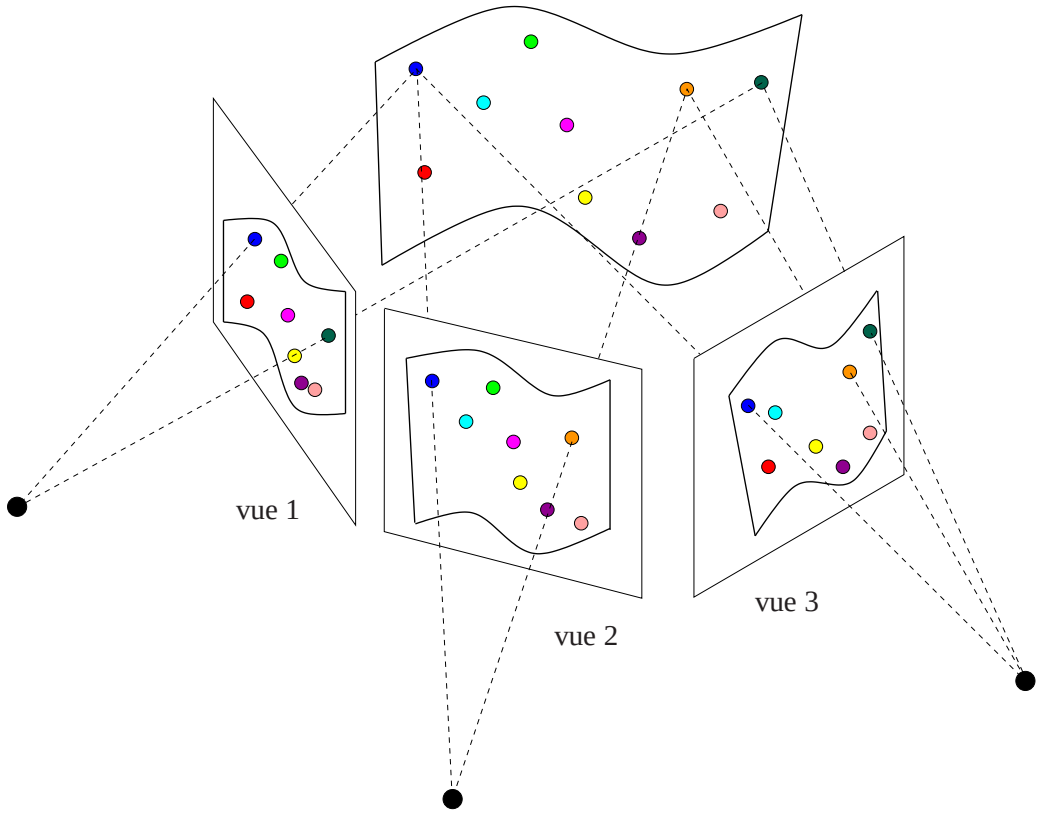


FIGURE 5.1 – **Principe du "Structure-from-Motion".** Des points sont mis en correspondance entre les images. La méthode permet de reconstruire simultanément les caméras et les points *3D*.

2004). Le motif est facilement détecté dans l'image, la triangulation peut être réalisée directement, sans problème de mise en correspondance (Park and Kak, 2004). La méthode est illustrée par la figure 5.2. Elle permet d'obtenir des points *3D* denses et localisés avec une grande précision, comme celle montrée sur la figure 5.4.

5.3.2 Interpolation de la surface

L'objectif de l'algorithme est de reconstruire la surface d'un objet développable. Les données disponibles pour estimer cette surface sont les points *3D* obtenus grâce aux méthodes décrites précédemment. Une première difficulté pour l'estimation de la surface provient de la différence de nature entre les données mesurées et l'entité cherchée, c'est-à-dire la surface. En effet il n'est pas possible d'évaluer directement les caractéristiques de la surface à partir du nuage de points *3D*. Ceci est notamment dû à l'absence d'organisation des points dans le nuage. Par exemple, le calcul de distances sur la surface ne peut pas être fait puisque cela nécessite au minimum une notion de voisinage entre les points. Par ailleurs, les surfaces développables ont des propriétés géométriques fortes, pouvant être utilisées pour détecter les caractéristiques de la surface. Ces notions géométriques, par exemple la présence des génératrices ou la courbure gaussienne nulle en tout point, n'ont de sens qu'avec des surfaces.

Par conséquent, une étape essentielle dans l'estimation de la surface développable passant par les points consiste à déterminer une surface qui transcrit les informations contenues dans les points *3D* sous la forme d'une surface initiale. L'approche retenue est une interpolation des points *3D*. La surface interpolée est représentée par une équation paramétrique du plan *2D* vers l'espace *3D*, évaluée de la manière suivante :

1. détermination d'une paramétrisation plane,
2. évaluation de l'équation paramétrique.

Les explications suivantes supposent que les points caractéristiques de la frontière de l'objet sont connus en *3D*. Des solutions pour s'affranchir de cette hypothèse sont ensuite proposées.

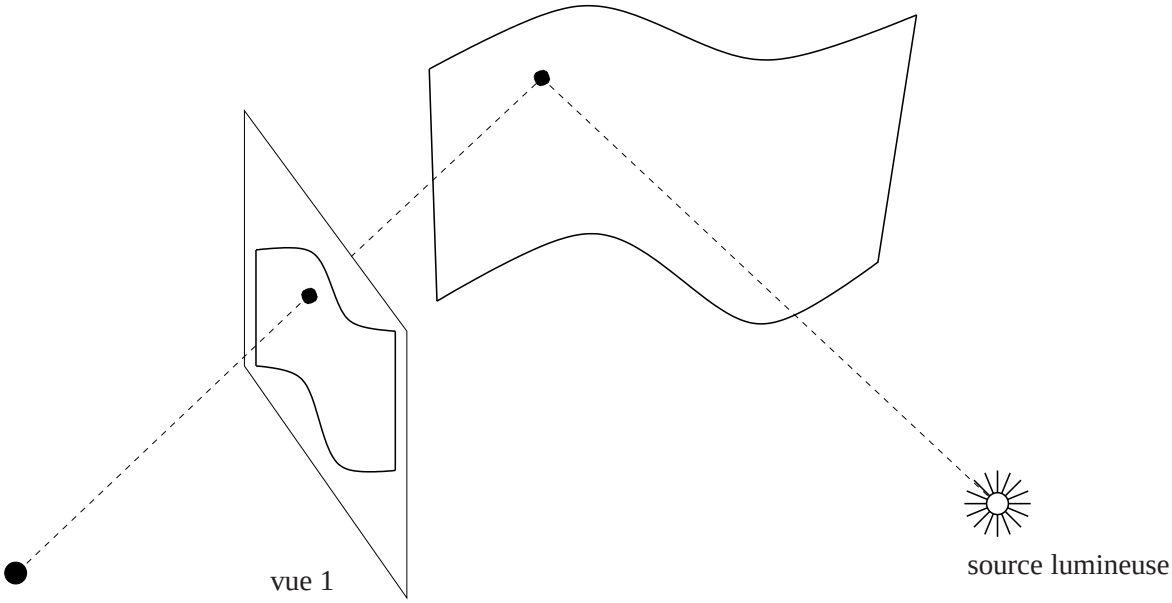


FIGURE 5.2 – **Principe de la lumière structurée.** Une source lumineuse projette un motif sur l'objet. Le motif est détecté dans l'image de la caméra. Les points *3D* sont alors reconstruits par triangulation.

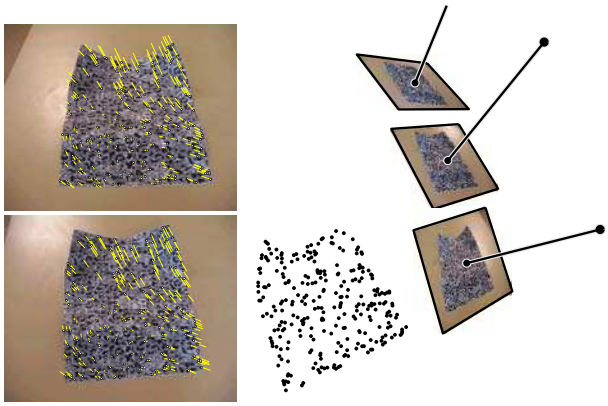


FIGURE 5.3 – **Exemple de reconstruction par Structure-from-Motion.** (à gauche) Deux images de la séquence avec les correspondances de points. (à droite) La scène reconstruite en *3D* avec le nuage de points et quelques caméras.

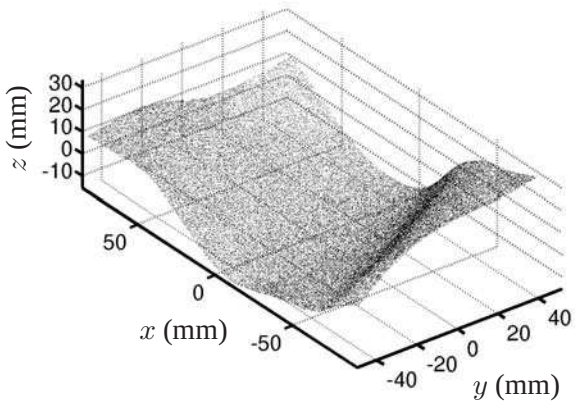


FIGURE 5.4 – **Exemple de reconstruction par projection de lumière structurée.** Seulement un tiers des points reconstruits est représenté.

5.3.2.1 Détermination d'une paramétrisation plane

Une surface dans l'espace *3D* peut être considérée comme une variété de dimension 2 plongée dans $\mathbb{R}^3$. La paramétrisation plane décrit les relations de voisinage entre les points de la surface et reflète les propriétés de la transformation entre le plan et la surface. Dans le cas des surfaces développables, la transformation sous-jacente entre les points du plan et les points de la surface est une isométrie.

Les techniques de réduction des dimensions exploitent les corrélations entre les données pour les décrire dans un espace de dimension inférieure. Elles répondent aux besoins du problème car elles permettent à la fois de structurer les points en créant une connexité et d'en donner une paramétrisation plane. Il existe des méthodes *2,5D* qui n'analysent qu'une partie de la structure *3D* et des méthodes *3D* non-linéaires.

Méthode *2,5D*. La paramétrisation plane est obtenue par projection des points *3D* sur un plan. L'expression paramétrique de la surface se ramène alors à une expression explicite de la forme $z = f(x, y)$. En pratique, le plan moyen du nuage de points est utilisé. Bien que cette méthode soit facile à mettre en œuvre, elle présente deux inconvénients majeurs : la fonction explicite obtenue n'est pas une isométrie et la méthode échoue pour des déformations complexes, par exemple si la surface est repliée sur elle-même.

Méthodes *3D* non-linéaires Les méthodes *3D* non-linéaires de réduction des dimensions cherchent une organisation des données dans un espace de dimension inférieure par la minimisation d'un certain critère. Celui-ci traduit les connaissances a priori sur les données. Les algorithmes que nous avons testés sont les suivants :

- ▷ "Locally Linear Embedding" (LLE) (Roweis and Saul., 2000) : projection linéaire par morceaux sur des espaces de dimensions inférieures,
- ▷ "Curvilinear Component Analysis" (CCA) (Demartines and Hérault, 1997; Lee et al., 2000) et "Isometric feature Mapping" (Isomap) (Tenenbaum et al., 2000) : conservation des distances euclidiennes entre les points et des notions de voisinage,
- ▷ "Maximum Variance Unfolding" (MVU) (Weinberger and Saul, 2005) : maximisation de la variance des données dans l'espace de plus petite dimension.

Nous ne donnons pas de description détaillée de ces différentes méthodes car celles-ci ne rentrent pas directement dans le cadre des travaux réalisés dans la thèse.

Les performances des algorithmes sont relatives car elles dépendent fortement des applications. Nous avons donc déterminé expérimentalement l'algorithme le plus adapté à notre problématique. Afin de comparer les différentes méthodes, les surfaces calculées à partir des paramétrisations sont projetées dans les images. En effet, cela permet de vérifier la qualité de la surface interpolée à travers deux critères : les contours de l'objet dans l'image coïncident avec ceux de la surface projetée et l'inextensibilité du maillage. Les étapes nécessaires à la visualisation des résultats sont les suivantes :

1. détermination de la paramétrisation plane,
2. superposition d'une grille régulière sur ces points *2D*,
3. transfert de cette grille en *3D* (le paragraphe suivant détaille cette étape),
4. reprojection du maillage *3D* dans les images.

Les résultats obtenus pour l'un des exemples traités sont montrés sur la figure 5.5.

Les algorithmes les plus performants sont le CCA et Isomap. En effet, ces algorithmes sont ceux qui préservent le mieux la dimensions des mailles, et la surface générée prédit correctement les frontières de l'objet. Ce résultat est logique puisque ces méthodes sont basées sur des critères qui correspondent à la recherche d'une paramétrisation plane d'une surface isométrique au plan : la notion de voisinage décrit l'appartenance des points à une surface et la conservation des distances entre les points proches assure l'inextensibilité. Les deux autres méthodes sont moins précises, particulièrement MVU qui ne conserve pas la distance entre les points.

Finalement, l'algorithme retenu est CCA (Demartines and Hérault, 1997) car il donne une bonne approximation de la surface, facilitant les étapes suivantes de reconstruction du modèle.

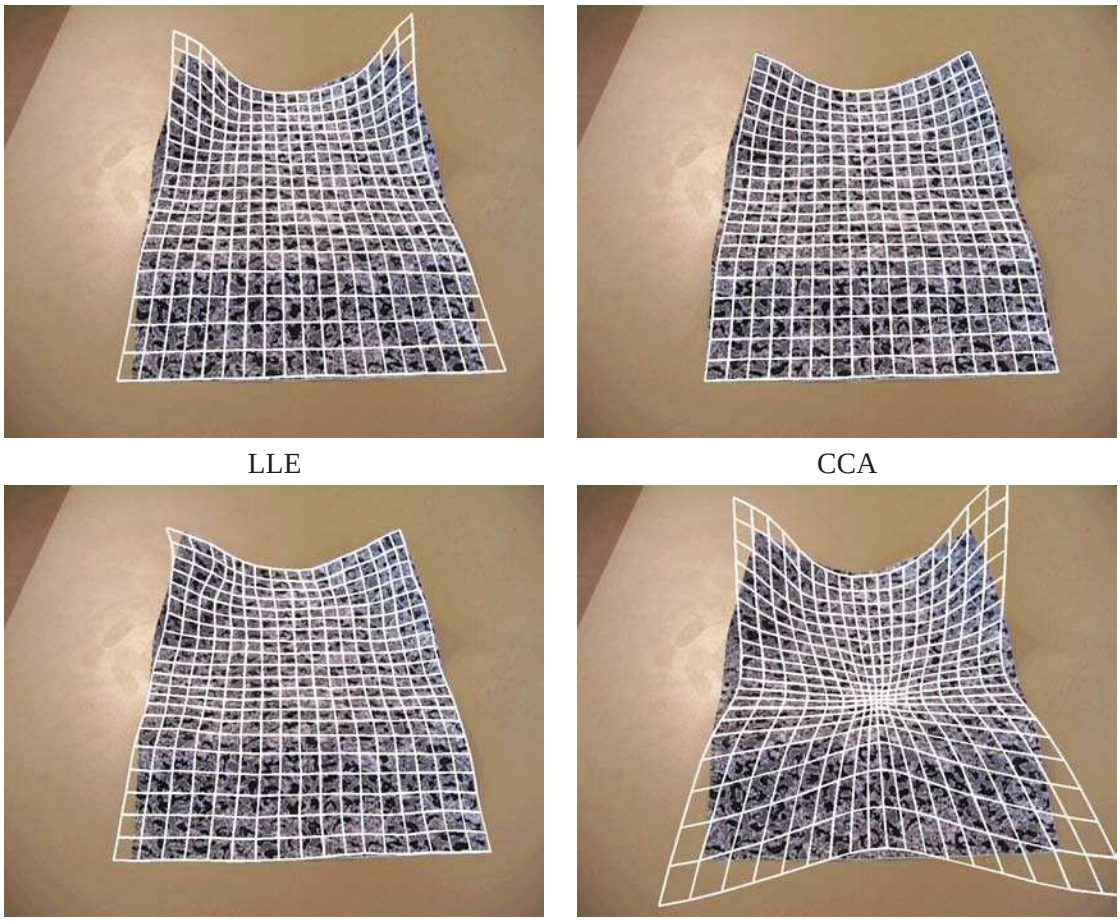


FIGURE 5.5 – **Comparatif des méthodes non-linéaires de réduction des dimensions**. (en haut à gauche) LLE : la paramétrisation plane est peu précise, entraînant une mauvaise estimation des bords ; la surface générée est peu extensible. (en haut à droite) CCA : les bords de la feuille sont correctement estimés et la surface résultante est peu extensible. (en bas à gauche) Isomap : la surface générée est moins régulière qu'avec CCA car la paramétrisation plane est moins précise. (en bas à droite) MVU : la surface s'étire à cause d'une mauvaise paramétrisation plane.

Il est possible d'intégrer des connaissances sur la forme de l'objet dans le calcul de la paramétrisation plane pour en améliorer la précision. En particulier lorsque la frontière plane de l'objet et ses points caractéristiques sont connus, il est possible d'appliquer une transformation sur la paramétrisation pour déplacer les points caractéristiques sur la frontière plane. Par exemple, dans le cadre d'une forme rectangulaire de dimension connue et lorsque les quatre coins de l'objet ont été reconstruits, une homographie peut être appliquée pour corriger la paramétrisation plane.

La paramétrisation plane peut également être utilisée pour détecter et supprimer les points hors de la zone d'intérêt dans les images lorsque la frontière de l'objet est connue. La figure 5.6 illustre ce principe : la paramétrisation plane est effectuée sur l'ensemble des points de la scène, la connaissance des quatre coins de la feuille permet alors de sélectionner précisément les points appartenant au papier.

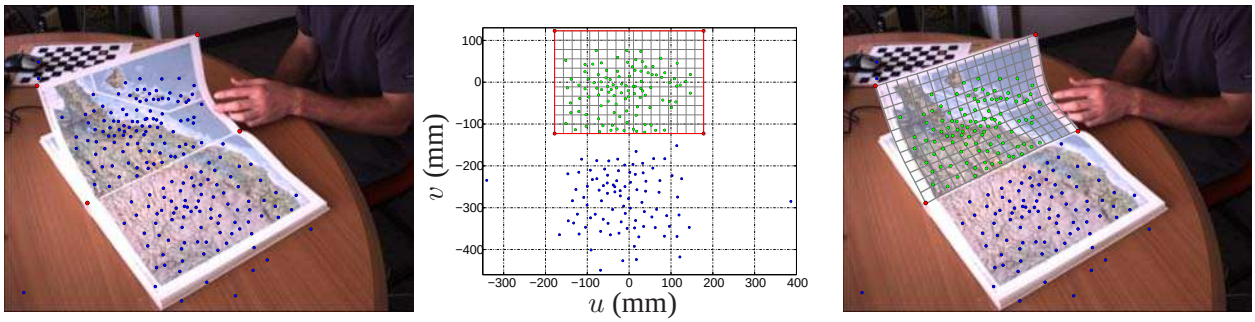


FIGURE 5.6 – **Interpolation initiale et sélection des points d'intérêt.** (à gauche) Reprojection de l'ensemble des points d'intérêt reconstruits dans une image de la séquence, les points rouges sont les quatre coins du papier sélectionnés manuellement. (au milieu) Résultat de la méthode de réduction des dimensions : deux ensembles de points apparaissent, les quatre coins forment un rectangle à l'intérieur duquel se trouvent les points sur le papier. (à droite) Reprojection de la surface initiale.

5.3.2.2 Équation paramétrique de la surface

Une fois la paramétrisation plane connue, il reste à évaluer la fonction f d'interpolation paramétrique des points *3D*. Il existe de nombreuses possibilités dans le choix de cette fonction d'interpolation. Les fonctions de type "plaque mince" (Duchon, 1976) sont les fonctions à base radiale minimisant l'énergie de torsion. Elles ont montré de bonne capacité à représenter les surfaces dans des environnements déformables, c'est pourquoi la fonction d'interpolation que nous utilisons est constituée de trois fonctions *2D* vers *1D* de ce type :

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} f_x(u,v) \\ f_y(u,v) \\ f_z(u,v) \end{pmatrix}$$

Elles sont paramétrées par un ensemble de coefficients (w_k^τ, a^τ, b^τ, c^τ) calculés à partir de correspondances entre des centres et leur image ($\tau \in \{x,y,z\}$). Les centres sont notés c_k. L'expression d'une fonction "plaque mince" est :

$$f_\tau(u,v) = \left(\sum_{k=1}^{l} w_k^\tau \, \rho\left(d_k^2(u,v)\right) \right) + a^\tau u + b^\tau v + c^\tau \tag{5.1}$$

$$\text{où} \quad d_k(u,v) = \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - c_k \right\| \quad \text{et} \quad \rho(d) = d\ln(d)$$

Des détails concernant l'estimation de ces paramètres sont présentés dans (Bartoli et al., 2007).

Les points du plan déterminés grâce à l'algorithme de réduction des dimensions sont choisis comme centres pour les trois fonctions "plaque mince", leurs images étant les points *3D* correspondants. Pour visualiser la surface, il suffit alors de transférer une grille plane, les figures 5.5 et 5.6 montrent des exemples des maillages ainsi générés.

5.3.2.3 Discussion

La méthode décrite permet de structurer le nuage de points et d'interpoler une surface passant par ces points. Elle s'est avérée efficace sur des exemples réels. D'autre travaux traitent également de ce problème (Floater, 2000; Hoppe, 1994). Cette partie peut être plus approfondie. En particulier, les images contiennent des informations sur la surface qui ne sont pas exploitées. Par exemple les auto-occultations de la surface dans une séquence révèle en partie la structure des points. Une possibilité d'étude supplémentaire concerne donc la définition d'heuristiques à partir des informations issues des images pour guider la découverte de la structure des points *3D*.

Dans la suite, la frontière de la surface initiale est supposée connue. Trois cas de figure se présentent :

- ▷ les éléments caractéristiques de la frontière ont été reconstruits : la frontière est connue dans la paramétrisation plane et peut être transférée sur la surface interpolée,
- ▷ les éléments caractéristiques de la surface ne sont visibles que dans une seule image : la frontière n'est donc pas connue car les points caractéristiques n'ont pas pu être triangulés. En revanche ces points peuvent être rétro-projetés sur la surface en utilisant le modèle de caméra. Par conséquent le contour *3D* peut être évalué,
- ▷ aucune information n'est disponible concernant le contour : un contour convexe minimum est défini sur la paramétrisation plane (un rectangle ou l'enveloppe convexe des points par exemple). Le contour est transféré en *3D* pour limiter la surface.

5.4 Initialisation du modèle

Le modèle génératif de surfaces développables que nous avons proposé est défini par la forme plane de l'objet et contrôlé par un ensemble de génératrices principales. Lors de l'initialisation du modèle, il faut donc estimer les paramètres de forme de l'objet, les génératrices principales et la pose de la surface. La forme de l'objet est simplement évaluée par des mesures sur la surface interpolée. Par exemple, les dimensions d'un rectangle sont données par la largeur moyenne et la longueur moyenne de la surface *3D*.

Le modèle n'a pas un nombre fixe de paramètres. En effet, le nombre de génératrices principales dépend de la complexité de la forme à représenter. L'une des problématiques de l'initialisation du modèle est donc la détermination d'un nombre pertinent de génératrices principales en fonction de la surface à reconstruire. L'initialisation du modèle se fait en cinq étapes :

1. détection d'un maximum de génératrices potentielles sur la surface interpolée,
2. traitement pour assurer la cohérence des génératrices par l'évaluation d'une courbe des positions,
3. calcul des angles de plis,
4. sélection des paramètres du modèle, c'est-à-dire l'identification des génératrices principales parmi les génératrices détectées,
5. évaluation de la transformation rigide entre la surface générée par notre modèle et la surface interpolée.

5.4.1 Détection de génératrices

La surface initiale n'est pas développable puisque la fonction d'interpolation utilisée n'a pas les propriétés des surfaces développables. Par conséquent, détecter des génératrices sur la surface au sens strict n'est pas possible. Cette détection de génératrices consiste en fait à associer aux points de la surface la direction probable des génératrices appartenant à la surface développable sous-jacente. Deux propriétés des surfaces développables peuvent être utilisées pour déterminer la direction des génératrices. La première s'appuie sur un critère local, et utilise le fait que la courbure gaussienne est nulle en tout point d'une surface développable. La deuxième est globale, et basée sur les propriétés des génératrices.

5.4.1.1 Critère local

Les surfaces développables sont les surfaces isométriques au plan. Une des conséquence est que la courbure gaussienne est nulle en tout point d'une surface développable (voir la section 3.1.2). La courbure gaussienne étant définie comme le produit des courbures principales, cela implique que l'une des deux courbures principales est nulle.

La surface ini tiale n'étant pas développable, cette condition n'est pas vérifiée en pratique. En revanche, lorsque les courbures principales sont de même signe, la direction principale associée à la courbure principale la plus faible peut être vu comme indiquant la direction la plus probable de la génératrice passant par le point. Lorsque les courbures principales sont de signe opposé, il n'est pas possible de conclure car deux directions ont

Algorithme 5.1 Détection de génératrices – critère local.

1: Définir un maillage régulier sur la surface initiale
2: **pour** $i = 1$ à nombre de points du maillage **faire**
3: Calculer les directions et courbures principales au point i.
4: **si** courbures principales de même signe **alors**
5: La génératrice passant par le point i est dirigée par la direction associée à la courbure principale la plus faible.
6: **fin si**
7: **fin pour**

une courbure nulle. Ces propriétés des courbures principales sont illustrées par la figure 2.4. L'algorithme 5.1 permet de détecter les génératrices en utilisant ce critère local.

La surface interpolée utilisée est formée de trois fonctions de type "plaque mince". Le calcul des directions et courbures principales peut être réalisé de manière analytique. Il suffit pour cela de connaître les dérivées premières et secondes de la surface pour les évaluer en utilisant la matrice de Weingarten, présentée à la section 2.4.2.3. Les expressions des dérivées des fonctions de types "plaque mince" sont les suivantes :

$$\frac{\partial f_\tau}{\partial u} = 2\left(\sum_{k=1}^{l} w_k^\tau \left(u-u_k\right)\left(\ln\left(d_k^2\right)+1\right)\right) + a^\tau \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial^2 f_\tau}{\partial u^2} = \sum_{k=1}^{l} 2w_k^\tau \left(\ln\left(d_k^2\right)+1+\frac{2\left(u-u_k\right)^2}{d_k^2}\right) \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial^2 f_\tau}{\partial u \partial v} = \sum_{k=1}^{l} 4w_k^\tau \frac{(u-u_k)(v-v_k)}{d_k^2} \tag{5.4}$$

avec $c_k = (u_k\ v_k)^\mathsf{T}$ et $\tau \in \{x, y, z\}$

Cette méthode locale a l'avantage d'être rapide. En revanche, elle fournit des directions principales pour tous les points du maillage. Cela peut poser problème, notamment dans le cas où l'objet est composé de plusieurs portions de surfaces développables reliées par une portion plane. En effet, la méthode détecte des génératrices non représentatives dans la zone plane, ce qui peut perturber la cohérence globale de la détection. Par ailleurs, les directions détectées sont très bruitées de par le caractère local de la méthode. L'utilisation d'un critère individuel global permet de pallier ces inconvénients.

5.4.1.2 Critère individuel global

Notre critère individuel global est basé sur les notions liées aux génératrices d'une surface développable. Il est possible d'identifier deux composantes du critère. La première concerne l'entité sur laquelle le critère est évalué. Dans le cas de la détection de génératrices, les génératrices potentielles sont des courbes tracées sur la surface. La deuxième quantifie les propriétés recherchées. Elle permet de comparer deux génératrices potentielles en terme de "probabilité d'être une génératrice".

Entités de base du critère. Dans le cas général, la surface recherchée est constituée d'un assemblage de plusieurs portions de surfaces développables, éventuellement reliées par des portions planes. Par conséquent, en tout point de la surface n'appartenant pas à une portion plane, il existe une génératrice incluse dans la surface qui commence et s'arrête sur la frontière de l'objet.

Les entités naturelles pour détecter les génératrices sont donc des courbes, dessinées sur la surface et reliant deux points de la frontière. Des mesures effectuées le long de la courbe doivent permettre de savoir si celle-ci est une génératrice potentielle.

Pour définir les courbes candidates sur la surface initiale, la paramétrisation plane est utilisée. En effet, les génératrices de la surface développable sont des droites dans la paramétrisation plane. Les courbes candidates sont donc obtenues par le transfert de segments dessinés sur la paramétrisation plane par la fonction d'interpolation de la surface initiale.

Les segments sont définis sur la forme plane par les abscisses curvilignes de leurs points d'intersection avec la frontière de l'objet. Ainsi une génératrice candidate g est paramétrée par le couple $(s_{1,g}, s_{2,g})$, les détails de cette paramétrisation ont été donnés lors de la présentation du modèle de surface développable à la section 4.3.2. La détection de génératrices peut alors être formulée comme la recherche d'une fonction m associant le premier point d'intersection $s_{1,g}$ d'un segment à son deuxième point d'intersection $s_{2,g}$:

$$\begin{array}{rccc} m & : & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & & s_{1,g} & \longmapsto & s_{2,g} \end{array}$$

la longueur de la courbe frontière de l'objet étant normalisée à 1.

Une expression discrète de cette fonction est évaluée à partir de la surface initiale. Pour cela, un ensemble de points est défini par un échantillonnage régulier de la courbe frontière. Ces points sont paramétrés par leurs abscisses curvilignes s_i. La détermination de la fonction m revient alors à associer à chaque point de la courbe frontière, un autre point de la courbe frontière tel que le segment formé par ces deux points minimise un critère sc de détection de génératrices :

$$s_{2,g} = \arg\min_{s_i} sc(s_{1,g}, s_i)$$

Cette recherche de la fonction m est illustrée par la figure 5.7. Le paragraphe suivant est consacré à la définition du critère de sélection. Les notations utilisées dans cette partie sont détaillées dans le tableau 5.1.

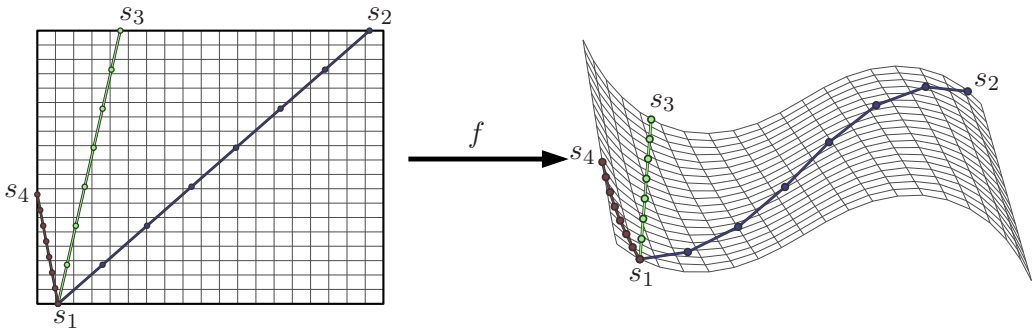


FIGURE 5.7 – **Principe de la détection globale des génératrices**. (à gauche) Paramétrisation plane des points. (à droite) Surface initiale interpolée sur les points *3D* reconstruits. La génératrice passant par le point d'abscisse curviligne s_1 est cherchée. Trois génératrices potentielles sont considérées. Elles sont paramétrées par les points d'abscisses curvilignes s_2, s_3 et s_4. Elles sont transférées sur la surface *3D* par la fonction d'interpolation. Un critère analyse les courbes *3D* obtenues pour sélectionner celle qui a la plus grande probabilité d'être une génératrice de la surface développable. La longueur des courbes doit être prise en compte pour départager les courbes (s_1, s_3) et (s_1, s_4) car elles sont proches en termes de propriétés géométriques.

s_i	abscisse curviligne du point i
$s_{1,i}$	abscisse curviligne de la première intersection de la génératrice i
$s_{2,i}$	abscisse curviligne de la deuxième intersection de la génératrice i
$s_{.,i}$	génératrice i, notation condensée
$(s_{1,i}, s_{2,i})$	génératrice i, notation par le couple d'abscisses curvilignes
$P_d(s_i, s_j)$	score associé au couple (s_i, s_j) pour la détection des génératrice
$P_g(s_{.,i})$	score d'existence de la génératrice i

TABLE 5.1 – **Notations utilisées pour la détection de génératrices.**

Détermination du critère. Les génératrices d'une surface développable sont des droites incluses dans la surface et le long desquelles le plan tangent à la surface est constant. Dans le contexte de la reconstruction *3D* d'objets, les génératrices ne sont pas des droites mais des segments, bornés par la frontière de l'objet. Nous proposons le score suivant pour détecter les génératrices :

$$P_d(s_i, s_j) = \frac{A(s_i, s_j)^\delta T(s_i, s_j)^\eta}{L(s_i, s_j)^\nu}$$

où A est un terme décrivant la forme de la courbe, T représente la variation du plan tangent et L est la longueur de la courbe. Les paramètres δ, η et ν permettent d'ajuster les contributions respectives des différents éléments dans le score de détection. Les génératrices sont les couples d'abscisses curvilignes qui minimisent le score P_d.

Les termes A, T et L sont évalués de manière discrète sur les segments candidats. Pour cela le segment candidat défini sur la paramétrisation plane est échantillonné, les n points *3D* M_i sont obtenus en appliquant la fonction d'interpolation de la surface initiale f. La figure 5.8 illustre le calcul du score et les notations. Les termes sont évalués de la manière suivante :

Terme d'alignement A. La courbe correspondant à une génératrice est une ligne droite. Par conséquent, le terme doit être minimum lorsque les points sont alignés. Ce comportement peut être décrit par la variance des directions $\mathbf{v}_i$ des éléments de la courbe discrète :

$$A(s_A, s_B) = \mathrm{var}(\{\arccos(\frac{\mathbf{v}_i^\mathsf{T}}{\|.\|} \frac{\bar{\mathbf{v}}}{\|.\|})\}_{i=1,\dots,l})$$

où $\bar{\mathbf{v}}$ est le vecteur moyen des vecteurs $\mathbf{v}_i$.

Variation du plan tangent T. Les plans tangents de la surface aux points M_i sont égaux s'ils sont orthogonaux au même vecteur et que les points M_i sont alignés. L'alignement des points étant déjà représenté par la fonction A, il reste à évaluer la direction des vecteurs normaux $\mathbf{n}_i$. La fonction utilisée est similaire à celle pour la forme de la courbe :

$$T(s_A, s_B) = \mathrm{var}(\{\arccos(\frac{\mathbf{n}_i^\mathsf{T}}{\|.\|} \frac{\bar{\mathbf{n}}}{\|.\|})\}_{i=1,\dots,l})$$

où $\bar{\mathbf{n}}$ est la moyenne des vecteurs normaux à la surface $\mathbf{n}_i$. Les vecteurs normaux sont évalués analytiquement à partir de la surface interpolée :

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$$

Longueur de la courbe L. Les termes représentant l'alignement des points et la variation du plan tangent sont minimum pour des courbes de longueurs faibles. En effet, la surface est a priori peu déformée le long d'un segment court sur la surface. Ce phénomène est illustré par la figure 5.7. Pour cette raison, il est nécessaire de prendre en compte la longueur des courbes candidates dans la détection. La longueur de la polyligne entre les points *3D* M_i est utilisée :

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} \|M_{i+1} - M_i\|$$

Remarque 5.2. *Il est possible d'utiliser une mesure robuste de la variance (par exemple la "median absolute deviation") dans le calcul du score de détection des génératrices.*

La détection n'est pas très sensible aux paramètres δ, η et ν. Elle fonctionne correctement lorsqu'ils sont tous les trois égaux à 1. Des études supplémentaires pourraient être menées pour déterminer une fonction de coût optimale. Pour cela, il est possible de générer des exemples avec notre modèle génératif afin de comparer les résultats des fonctions de coût avec les positions exactes des génératrices.

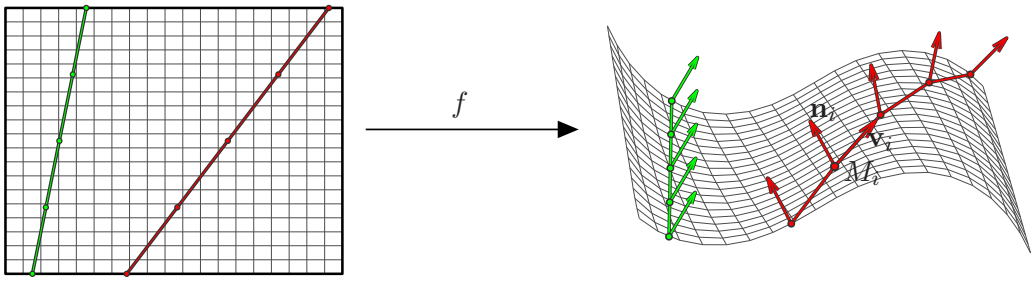


FIGURE 5.8 – **Évaluation du score de détection de génératrices**. (à gauche) Les segments candidats sur la forme plane et les points échantillonnés. (à droite) Les courbes candidates sont obtenues par application de la fonction d'interpolation de la surface. Pour toutes les paires possibles de points du contour, le score de détection des génératrices est évalué. Les vecteurs $\mathbf{v}_i$ sont utilisés pour évaluer la forme de la courbe, les vecteurs $\mathbf{n}_i$ sont les vecteurs normaux de la surface intervenant dans le critère concernant le plan tangent. La courbe verte (claire) est plus probablement une génératrice car les vecteurs $\mathbf{v}_i$ et $\mathbf{n}_i$ sont alignés, contrairement à ceux de la courbe rouge (foncée).

Remarque 5.3. *Le score de détection P_d est symétrique : les segments (s_i, s_j) et (s_j, s_i) ont le même score. Une implantation efficace tient compte de cette propriété.*

L'algorithme 5.2 résume la méthode de détection globale. Celle-ci est plus performante que la détection avec un critère local. En effet, les propriétés des génératrices sont mieux prises en compte, et la méthode permet de gérer directement les zones planes reliant plusieurs portions développables. En revanche, la complexité de l'algorithme est plus importante. Cette méthode est également dépendante de la paramétrisation plane calculée lors de l'initialisation de la surface puisque la courbe candidate est obtenue par transfert d'un segment défini sur la forme plane. Une détection de génératrices uniquement basée sur la surface initiale permettrait de s'affranchir de cette dépendance. En pratique, la paramétrisation plane et la fonction d'interpolation sont suffisamment précises pour obtenir des résultats satisfaisants.

Algorithme 5.2 Détection de génératrices – critère individuel global.

Initialiser les scores de détection sd_i à $+\infty$
Échantillonner régulièrement la frontière de la surface plane
pour $i = 1$ à nombre de points sur la frontière - 1 **faire**
  pour $j = i + 1$ à nombre de points sur la frontière **faire**
    Échantillonner le segment reliant le point i au point j.
    Transférer les points en *3D* en utilisant la fonction d'interpolation initiale f.
    Évaluer le score $P_d(s_i, s_j)$.

    # teste si le score courant est meilleur que le score sauvegardé
    si $P_d(s_i, s_j) < sd_i$ **alors**
      $s_{.,i} \longleftarrow (s_i, s_j)$ *# mise à jour de la génératrice détectée*
      $sd_i \longleftarrow sc(s_i, s_j)$ *# mise à jour du score de détection*
    fin si

    # le score est symétrique, la détection est faite pour le point j également
    si $P_d(s_i, s_j) < sd_j$ **alors**
      $s_{.,j} \longleftarrow (s_i, s_j)$
      $sd_j \longleftarrow sc(s_i, s_j)$
    fin si
  fin pour
fin pour

5.4.1.3 Représentation des génératrices détectées

Sur le graphique des positions, les génératrices détectées apparaissent comme un nuage de points. Un exemple de détection et de représentation sur le graphique des positions est présenté à la figure 5.12.

5.4.2 Extraction de la courbe des positions

Les méthodes précédentes permettent la détection de nombreuses génératrices sur la surface initiale. Lors de cette détection la cohérence globale des génératrices n'est pas prise en compte. Par conséquent, les génératrices potentielles détectées peuvent se croiser. Par ailleurs, des détections erronées peuvent également être obtenues. Nous avons proposé trois méthodes pour obtenir un ensemble de génératrices cohérent à partir des génératrices détectées.

5.4.2.1 Méthode directe

La courbe des positions est directement recherchée sur le nuage de points sous la forme d'une courbe paramétrée, dont la position est déterminée par des points de contrôle. Les points de contrôle sont automatiquement placés pour minimiser la distance entre les génératrices détectées et la courbe des positions. Le nombre de points de contrôle est soit donné par l'utilisateur, soit automatiquement déterminé, par exemple avec un seuil sur l'erreur résiduelle entre les génératrices détectées et la courbe. Les résultats dépendent largement du placement des points de contrôle. Cette étape est formulée comme une minimisation non-linéaire. Cela requiert une initialisation des points de contrôle, une fonction de coût pertinente et un algorithme de minimisation. Le principal problème est le placement initial des points de contrôle.

5.4.2.2 Méthode itérative

Cette solution consiste à sélectionner les génératrices principales parmi les génératrices détectées par élimination itérative. Le processus s'arrête automatiquement lorsque les génératrices sont toutes compatibles entre elles. A chaque itération, la génératrice supprimée est celle qui est la "moins compatible" avec les autres. Autrement dit, celle qui a le plus grand nombre d'intersections à l'intérieur de la surface plane avec les autres génératrices détectées.

Cette méthode est simple et rapide et permet d'estimer automatiquement le nombre de portions développables composant la surface. Son inconvénient majeur est que les génératrices retenues ne sont pas forcément les plus représentatives.

5.4.2.3 Méthode probabiliste

Les méthodes précédentes ne sélectionnent pas de manière optimale la courbe des positions car elles traitent les génératrices détectées de manière indépendante. Une solution plus performante consiste à intégrer l'information contenue dans les génératrices détectées sous la forme d'une carte de probabilité de la position des génératrices. La courbe des positions est ensuite obtenue en maximisant cette probabilité.

Construction de la carte de score. La carte de score associe à chaque point du graphique des positions, un score d'être une génératrice de la surface. Les données disponibles pour évaluer cette probabilité sont les génératrices potentielles détectées.

Trois critères sont utilisés pour construire la carte de score sur la position des génératrices. Ces critères reflètent les propriétés des génératrices dans le graphique des positions. Ils s'appuient sur des notions de proximité et de position relative entre les génératrices détectées, illustrées par la figure 5.9 :

Proximité. Elle est définie entre deux génératrices $s_{.,i}$ et $s_{.,j}$ par un seuil t :

$$\mathcal{N}(s_{.,i}, s_{.,j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } d(s_{.,i}, s_{.,j}) < t \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $d(s_{.,i}, s_{.,j})$ la distance entre deux génératrices dans le graphique des positions :

$$d(s_{.,i}, s_{.,j}) = \sqrt{(s_{1,j} - s_{1,i})^2 + (s_{2,j} - s_{2,i})^2}$$

Position relative. La surface observée étant supposée régulière, les génératrices ne se coupent pas sur la surface de l'objet. Cette propriété se traduit par des contraintes sur les positions relatives entre les génératrices. L'indicateur binaire suivant permet de déterminer les intersections entre les génératrices :

$$\mathcal{D}(s_{.,i}, s_{.,j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } s_{.,i} \text{ et } s_{.,i} \text{ se coupent sur la surface de l'objet} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Le signe de la variable suivante permet d'ordonner les génératrices qui se croisent :

$$\mathcal{P}(s_{.,i}, s_{.,j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } s_{.,j} \text{ est situé dans la partie incompatible supérieure} \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$$

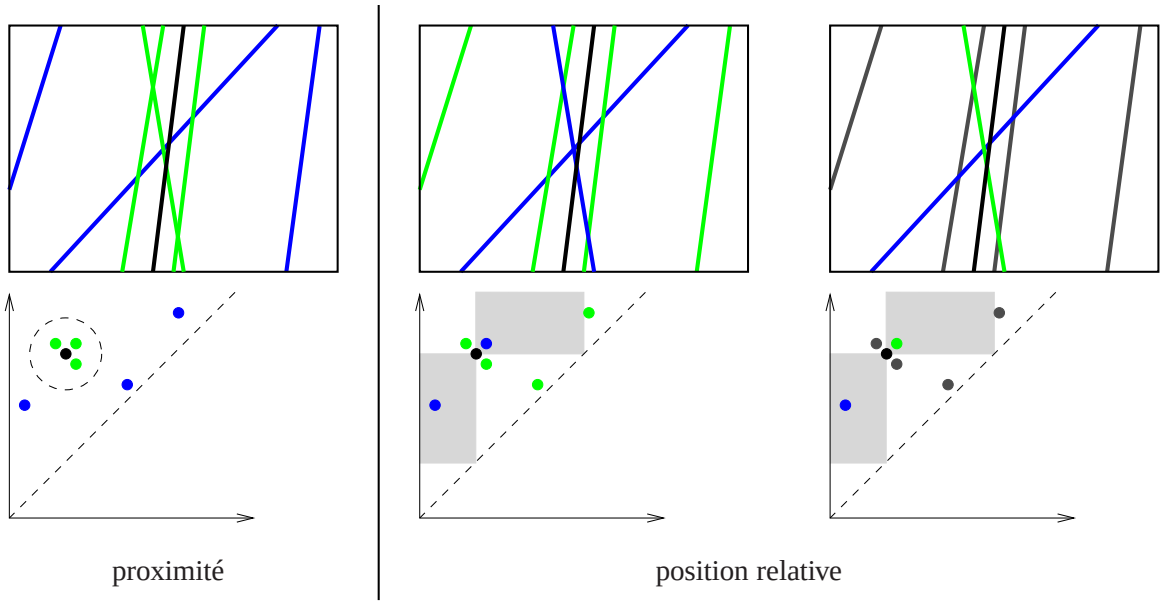


FIGURE 5.9 – **Propriétés définies sur les génératrices – exemple de la génératrice noire.** (en haut) Illustration sur la forme plane. (en bas) Illustration sur le graphique des positions. (à gauche) La proximité est définie par un seuil sur le graphique des positions représenté par un cercle pointillé : les génératrices vertes (claires) sont proches, les bleues (foncées) sont éloignées. (au milieu) Les intersections entre génératrices : les génératrices bleues (foncées) coupent la génératrice noire, les vertes (claires) ne la coupe pas. (à droite) Positions respectives des génératrices dans les zones incompatibles de la génératrice noire : la génératrice bleue (foncée) est située dans la région interdite inférieure, la génératrice verte (claire) est située dans la région interdite supérieure.

Étant donné les n génératrices potentielles détectées, les critères permettant d'évaluer le score d'une génératrice $s_{.,i}$ sont les suivants et sont illustrés sur la figure 5.10 :

1. la génératrice (s_i, s_j) n'est pas isolée, la variable sc_1 indique le nombre de génératrices proches :

$$sc_1(s_i, s_j) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{N}((s_i, s_j), s_{.,k})$$

2. le nombre de génératrices éloignées qui la coupent n'est pas important, la variable sc_2 comptabilise ce type d'intersection :

$$sc_2(s_i, s_j) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{D}((s_i, s_j), s_{.,k}) \left(1 - \mathcal{N}((s_i, s_j), s_{.,k})\right)$$

3. les génératrices proches qui la coupent sont correctement réparties, la variable sc_3 révèle l'organisation relative des génératrices proches :

$$sc_3(s_i, s_j) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{D}((s_i, s_j), s_{.,k}) \mathcal{N}((s_i, s_j), s_{.,k}) \mathcal{P}((s_i, s_j), s_{.,k})$$

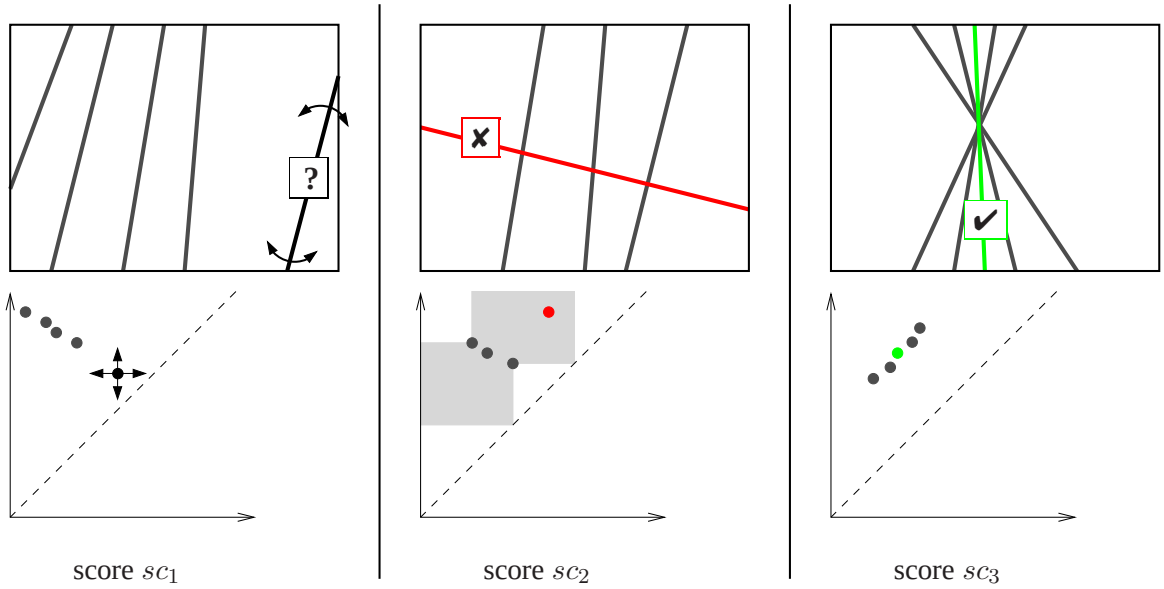


FIGURE 5.10 – **Critères intervenant dans la définition des probabilités.** (en haut) Illustrations sur la forme plane. (en bas) Illustrations sur le graphique des positions. (à gauche) Une génératrice solitaire n'est pas bien localisée. (au milieu) Une génératrice ayant beaucoup d'intersections avec des génératrices éloignées est peu probable. (à droite) Lorsque des génératrices proches se coupent, la plus probable est celle "du milieu".

La carte de score des positions des génératrices est alors donnée par la relation suivante :

$$P_c(s_i, s_j) = -\frac{sc_2(s_i, s_j) + |sc_3(s_i, s_j)|}{sc_1(s_i, s_j)}$$

La carte ainsi définie ne représente pas directement des probabilités. En effet, le score peut être négatif, ce qui n'a pas de sens en terme de probabilité. Cette carte représente donc une image des probabilités : plus le score est important, plus la génératrice est probable.

La figure 5.12 montre un exemple de carte de score définie par cette méthode. Il faut maintenant en extraire la courbe des positions.

Extraction des courbes des positions. La courbe des positions est une représentation de la fonction m recherchée, qui associe le premier point d'intersection d'une génératrice avec le contour de l'objet au deuxième point d'intersection de cette génératrice. Elle est décroissante par morceaux sur le graphique des positions. Pour obtenir une courbe des positions $\mathcal{C}$ significative, la probabilité des génératrices composant la courbe doit être maximisée :

$$\mathcal{C}_i = \arg\max_{m} \int P_c(u, m(u)) \, \mathrm{d}u$$

avec m la fonction associant la première abscisse curviligne d'une génératrice à la deuxième. En pratique, la courbe des positions est formée par les "crêtes" de la carte de score. Cette propriété est utilisée pour déterminer la courbe des positions.

Ces dernières sont obtenues par des méthodes classiques de traitement d'image. Les différentes étapes sont illustrées par la figure 5.13 et les résultats apparaissent sur la figure 5.12. La surface *3D* correspondant à ces illustrations est celle de la figure 5.11. Le procédé est le suivant :

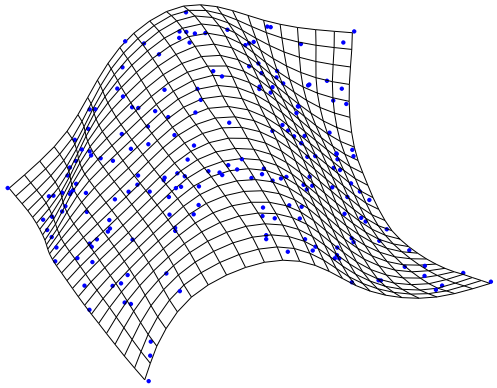


FIGURE 5.11 – **Surface développable *3D*.** La surface représentée par un maillage et les 200 points *3D* utilisés pour illustrer l'algorithme d'initialisation.

1. sélection par seuillage des régions importantes sur la carte de score : seules les régions contenant des scores supérieurs à un seuil prédéfini sont conservées,
2. élaboration d'une carte permettant la détection des crêtes sur la carte de score : les discontinuités du signe du score sc_3 permettent de localiser les crêtes. Les zones selectionnées à l'étape 1. sont donc affectées du signe du score sc_3,
3. détection des crêtes sur la carte de score : une méthode de détection de contour permet d'obtenir les crêtes recherchées,
4. traitement des crêtes détectées pour obtenir la courbe des positions : les crêtes non-significatives (de longueur insuffisante) sont supprimées, les autres sont traitées pour éviter les intersections de génératrices (décroissance des courbes et compatibilité entre les régions).

Les positions des génératrices étant connues, il reste à évaluer les angles de plis associés.

Remarque 5.4. *La courbe des positions obtenue se présente sous la forme d'un ensemble dense de points. Il est donc possible d'associer à chaque génératrice un angle de pli.*

5.4.3 Calcul des angles de plis

Les méthodes précédentes ont permis d'identifier des génératrices. Celles-ci peuvent être tracées sur la surface initiale. Les angles de plis sont alors évalués en utilisant les génératrices adjacentes. En général, les génératrices consécutives ne sont pas coplanaires. Par conséquent, il n'est pas possible d'évaluer directement l'angle de plis. En revanche, un angle de pli moyen peut être calculé. La figure 5.14 illustre le principe. L'angle de pli θ_i de la génératrice $s_{.,i}$ est donné par la formule suivante :

$$\theta_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \theta_j$$

5.4.4 Sélection des paramètres du modèle

Trois méthodes ont été proposées pour obtenir un ensemble cohérent de génératrices : l'estimation de la courbe des positions à l'aide d'une courbe paramétrées par des génératrices de contrôle, la méthode itérative supprimant les génératrices "les plus incompatibles" et une méthode globale probabiliste. Les génératrices obtenues à l'issue des deux premières méthodes sont directement conservées comme génératrices principales. En revanche, la troisième méthode permet de sélectionner de manière optimale les génératrices principales de la surface.

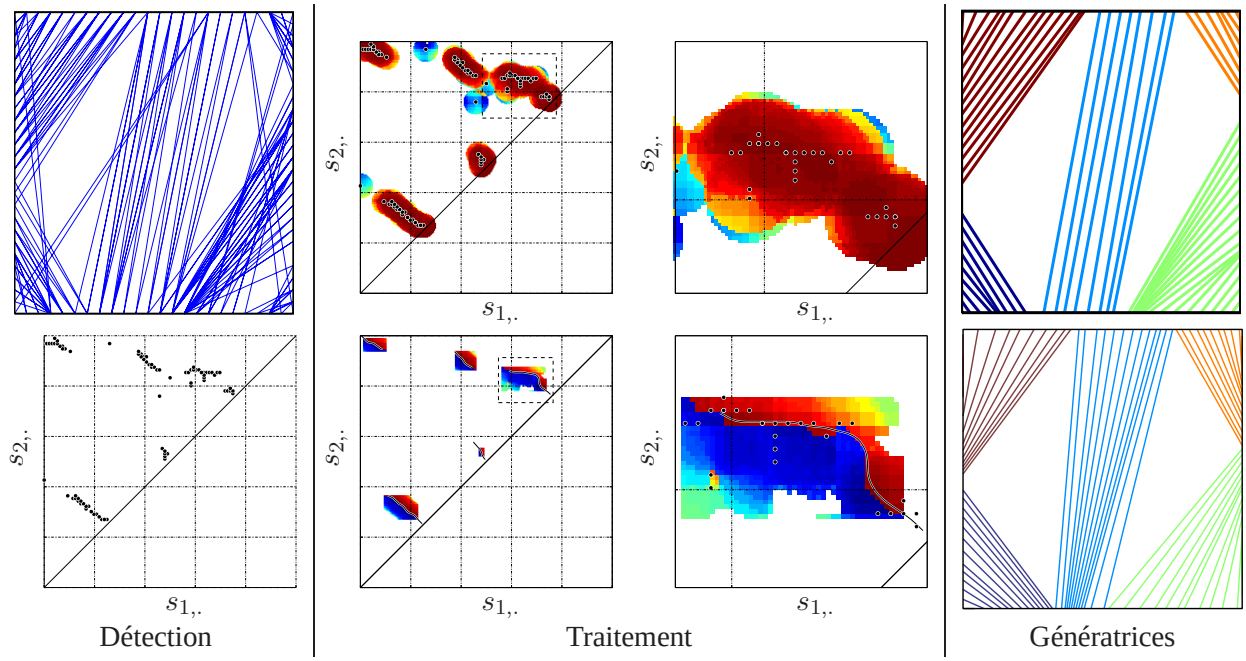


FIGURE 5.12 – **Extraction de la courbe des positions pour la surface représentée sur la figure 5.11.** (à gauche) Les génératrices détectées sur la forme plane (en haut) et sur le graphique des positions (en bas). (au milieu) La carte représentant les probabilités (en haut) et la même carte après traitement pour l'extraction de la courbe des positions (en bas). (à droite) Les génératrices sur la forme plane, issues de la détection (en haut) et les génératrices réelles (en bas) : le nombre de portions développables détecté par la méthode est correct, de plus les positions des génératrices dans les portions sont semblables à celles de la surface initiale.

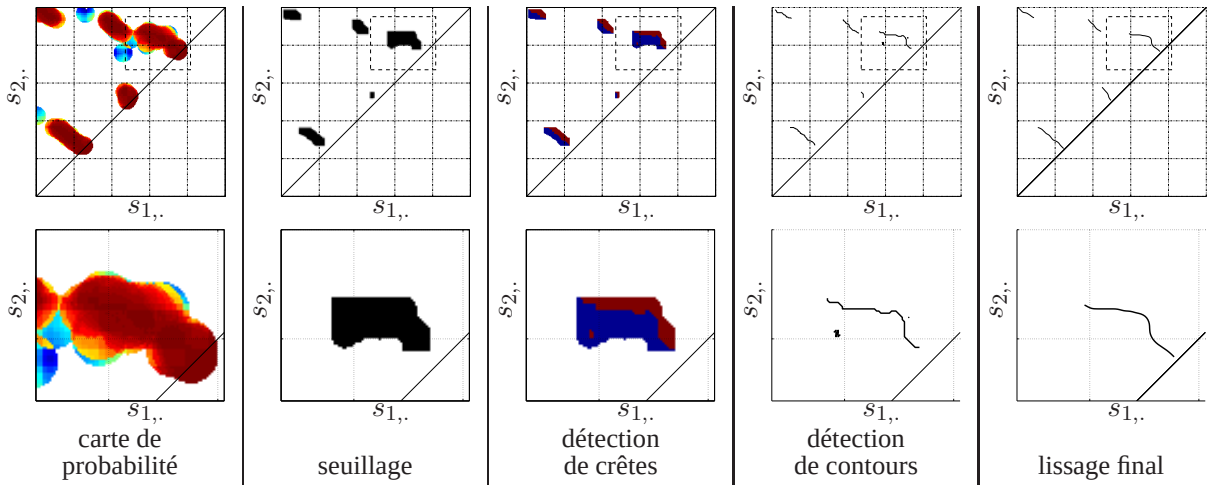


FIGURE 5.13 – **Extraction de la courbe des positions.** (en haut) Vue générale. (en bas) Zoom sur la partie encadrée en pointillé. Le processus nécessite 5 étapes : l'élaboration de la carte de score ; la sélection par seuillage des zones significatives de la carte de score ; la détermination des génératrices les plus problables par la détection des score les plus forts ; l'extraction des génératrices par extraction de contours ; le traitement de la courbe des positions pour assurer sa décroissance et la rendre plus lisse.

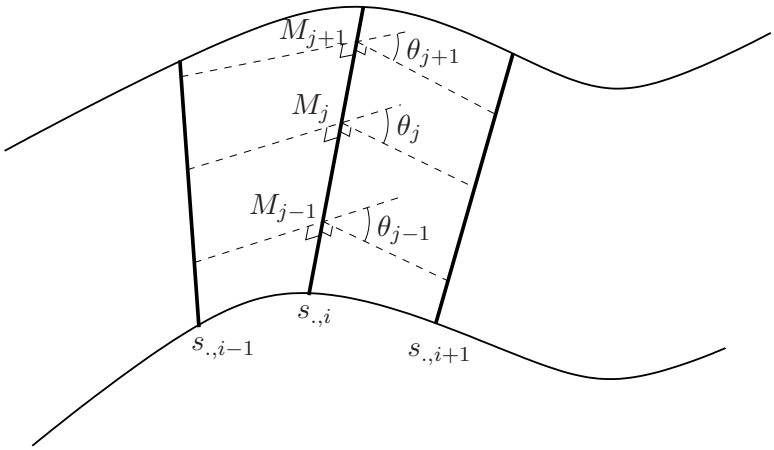


FIGURE 5.14 – **Calcul des angles de pli.** La génératrice $s_{.,i}$ est échantillonnée. L'angle de pli est égal à la moyenne des angles de plis calculés en chaque point M_j.

La méthode probabiliste de détection des génératrices permet d'évaluer la courbe discrète des positions. Cette courbe des positions est dense. Dans le modèle génératif que nous avons proposé, deux types de génératrices ont été définies : les génératrices principales définissant la forme de l'objet et les génératrices auxiliaires participant à la régularité de la surface. Parmis ces deux sortes de génératrices, seules les génératrices principales sont paramétrées dans le modèle. La sélection des génératrices principales consiste à déterminer les génératrices les plus significatives dans la définition de la surface.

La forme de la surface dépend de la courbe des positions et des angles de pli. Ces deux éléments sont donc à prendre en compte lors de l'estimation des génératrices principales. Pour traiter en même temps ces éléments, une courbe *3D* est définie de la manière suivante : ses deux premières coordonnées sont données par la courbe des positions et la dernière par les angles de plis. Cette courbe est définie par morceaux, chaque morceau définit une portion de surface développable. Nous appelons cette courbe la *courbe de forme*.

Le problème de l'estimation optimale des génératrices principales se ramène à l'estimation de la courbe de forme avec un nombre optimal de points de contrôle. Les points de contrôle sont les génératrices principales de la surface développable. Le modèle de courbe utilisé découle du processus d'interpolation du modèle de surface développable que nous avons proposé. C'est-à-dire que les deux premières coordonnées de la courbe sont interpolées à partir des points de contrôle par des polynômes de Hermite et la troisième coordonnée est interpolée par une spline cubique. Pour déterminer le nombre et la position des points de contrôle, un algorithme est nécessaire.

De nombreux travaux traitent de l'estimation optimale d'une courbe par un modèle paramétré donné. Par exemple, l'estimation avec des splines est traité dans (Lu and Milios, 1994; Mamic and Bennamoun, 2001; Pottmann et al., 2002; Yang et al., 2004). Dans notre cas, ces méthodes ne sont pas directement utilisables car notre modèle de courbe est spécifique au problème. Nous avons donc proposé un algorithme simple dédié à ce cas de figure. Il est basé sur l'idée de la méthode de (Lu and Milios, 1994).

Il s'agit d'une méthode itérative, la courbe est initialisée avec deux points de contrôles placés à ses extrémités. De nouveaux points de contrôles sont ensuite insérés tant que la distance de Haussdorff entre les deux courbes est supérieure à un seuil défini par l'utilisateur. Les nouveaux points de contrôle sont placés aux points d'erreur maximale.

Grâce à ce processus, la complexité du modèle est liée à la déformation de la surface. L'algorithme 5.3 résume la méthode de sélection des paramètres. Quelques étapes de la sélection sont montrées sur la figure 5.15.

Remarque 5.5. *Il est nécessaire de normaliser la courbe de forme pour que les abscisses curvilignes et les angles de plis aient des valeurs comparables.*

Algorithme 5.3 Sélection des génératrices principales.

1: Définir la distance maximale d_{max} entre les courbes.
2: Normaliser la courbe de forme.
3: **pour** $i = 1$ à nombre de portions développables de la surface **faire**
4: Sélectionner le morceau de la courbe de forme correspondant à la portion.
5: Placer deux points de contrôle aux extrémités du morceau
6: **tant que** distance de Haussdorff entre la courbe de forme et la courbe paramétrée > d_{max} **faire**
7: Ajouter un point de contrôle à l'endroit où la distance entre les deux courbes est maximale.
8: **fin tant que**
9: **fin pour**
10: Les génératrices principales sont les points de contrôle des courbes.

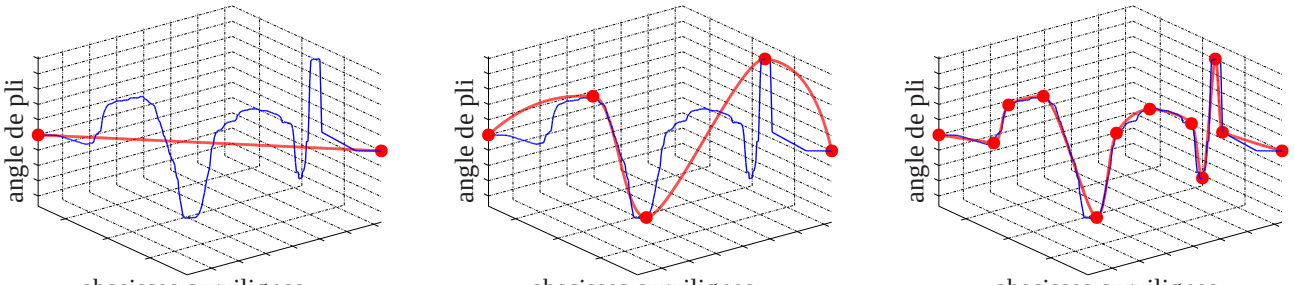


FIGURE 5.15 – **Sélection des génératrices principales.** La courbe de forme apparaît en bleue (foncé). La courbe paramétrée est rouge (claire). Les points de contrôle (génératrices principales) sont les points rouges. (à gauche) Les deux points de contrôle initiaux. (au milieu) Une étape intermédiaire avec 5 points de contrôle, la distance entre les deux courbes est encore importante. (à droite) La courbe de forme estimée avec 12 points de contrôle, ces points sont les génératrices principales du modèle.

5.4.5 Transformation rigide

Enfin, la pose de la surface et son facteur d'échelle sont déterminés en minimisant la distance entre la surface générée par le modèle et la surface interpolée. La translation est donnée par la différence entre les centres de gravité des deux surfaces. La rotation est évaluée grâce à la méthode des quaternions (Horn, 1987). Enfin, le facteur d'échelle est déterminé par le rapport entre les dimensions moyennes des surfaces.

5.4.6 Discussion

L'initialisation de notre modèle de surface développable à partir d'une surface *3D* nécessite plusieurs étapes. Celles-ci ont été détaillées, et pour certaines, plusieurs solutions ont été proposées. Nous donnons ici quelques éléments permettant éventuellement d'améliorer la méthode.

La détection de génératrices sur la surface interpolée est basée sur les propriétés des génératrices des surfaces développables. Le fait que les cônes de révolution sont les quadriques osculatrices des surface développables n'a pas été exploité dans la détection. Cette propriété pourait amener une régularisation dans la détection car elle prend en compte le voisinage d'une génératrice candidate.

Par ailleurs, pour obtenir une détection optimale, deux étapes ont été présentées indépendamment : la détection de génératrices puis la détermination de la courbe des positions permettant de prendre en compte la régularité de la surface (en interdisant les intersections de génératrices sur la forme). Ces deux étapes sont complémentaires, il serait donc plus judicieux d'intégrer les contraintes de régularité au niveau de la détection. Cela peut être fait par exemple en construisant une carte de probabilité au niveau de la détection.

La méthode de sélection des génératrices principales s'appuie sur la courbe de forme. L'algorithme d'estimation gagnerait à être amélioré en ajoutant une étape d'optimisation de la position des points de contrôle.

5.5 Raffinement du modèle

L'objectif de l'algorithme de reconstruction est d'estimer une surface développable à partir de correspondances de points établies entre des images de la surface. Les données de base de l'algorithme sont donc des points *2D*. Ceux-ci ont été utilisés lors de la première étape, pour reconstruire par triangulation une structure éparse de la surface. En revanche l'initialisation des paramètres du modèle n'est pas directement basée sur ces points mais sur une surface les interpolant. Par conséquent l'initialisation du modèle dépend également de l'interpolation utilisée pour la surface. En général, elle n'est donc pas optimale par rapport aux données du problème.

L'objectif de notre dernière étape de l'estimation de la surface est d'affiner le modèle initial pour minimiser un critère sur les points d'intérêt détectés dans les images. Par ce biais, l'estimation du modèle est directement liée aux informations extraites des images. Le critère que nous utilisons est l'erreur de reprojection. Afin de l'évaluer nous introduisons des variables latentes représentant la position de chaque point d'intérêt sur la surface générée par notre modèle.

L'erreur de reprojection est non-linéaire, elle est minimisée automatiquement par une méthode d'ajustement de faisceaux. Une méthode similaire est également présentée lorsque les points *3D* sont connus, par exemple par une méthode de lumière structurée. La principale contrainte sur les paramètres du modèle est due à l'hypothèse de surface lisse entraînant la non-intersection des génératrices. Pour traiter cette contrainte dans l'ajustement de faisceaux, nous proposons une paramétrisation adaptée des génératrices.

5.5.1 Ajustement de faisceaux d'une fonction de coût *2D*

L'erreur de reprojection indique la précision avec laquelle le modèle décrit les points d'intérêt dans les images. En appelant L le nombre d'images et N le nombre de points, l'erreur de reprojection est :

$$e = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{L} \delta_i^j \left(m_{j,i} - \Pi \left(C_j, M(S, x_i, y_i) \right) \right)^2 \tag{5.5}$$

Dans cette équation, $m_{j,i}$ est le point i dans l'image j, $\Pi(C, M)$ projette le point *3D* M avec la caméra C et $M(S, x_i, y_i)$ est une paramétrisation bidimensionnelle des points *3D* de la surface, avec S les paramètres de notre modèle de surface développable. Les points sur la surface sont initialisés en calculant chaque (x_i, y_i) tel que l'erreur de reprojection soit minimale, la surface utilisée étant celle générée par le modèle initial. δ_i^j est un indicateur binaire de visibilité permettant de gérer les occultations externes, les auto-occultations ou encore les défauts de mise en correspondance.

Pour minimiser l'erreur de reprojection, nous ajustons les paramètres suivants : les paramètres de la surface (le nombre de génératrices principales et de génératrices auxiliaires est fixé), la pose de la surface (rotation et translation) et les paramètres des points *3D*.

L'erreur de reprojection est du type moindres carrés non-linéaires. Pour la minimiser, nous utilisons l'algorithme de Levenberg-Marquardt présenté à la section 2.5.2.3. Cet algorithme est en effet spécifique à la minimisation de ce type de fonctions de coût. De plus, il combine les avantages d'une descente de gradient (minimisation de la fonction garantie) et de la méthode de Gauss-Newton (rapidité de convergence) grâce à un paramètre sélectionnant dynamiquement un compromis entre les deux méthodes. À la convergence, la solution correspond à l'estimation au maximum de vraisemblance, sous l'hypothèse d'un bruit additif gaussien centré distribué uniformément et indépendamment sur les points d'intérêt dans les images.

L'implantation de l'algorithme de minimisation peut être optimisée en tenant compte de la structure creuse de la matrice jacobienne associée aux termes élevés au carré dans l'erreur de reprojection. La figure 5.16 montre la structure de la matrice jacobienne J et celle de la matrice hessienne H (approximation de Gauss-Newton : $H = J^\mathsf{T} J$). Il s'agit d'une structure classique en ajustement de faisceaux. La résolution est réalisé efficacement en profitant de la structure par blocs (Hartley and Zisserman, 2004).

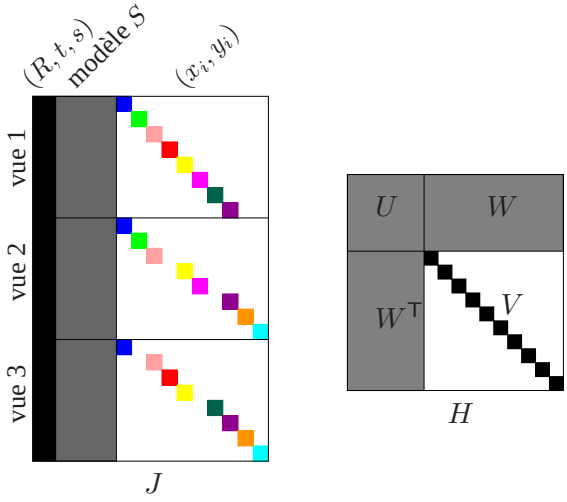


FIGURE 5.16 – **Structure des matrices jacobienne et hessienne.** (à gauche) Structure de la matrice jacobienne de l'ajustement de faisceaux. (R, t, s) désigne la transformation rigide et le facteur d'échelle à appliquer sur le modèle. La partie concernant le modèle est partiellement creuse car les règles n'ont pas une influence globale. Les couleurs pour les points correspondent à la figure 5.1. (à droite) Structure de la matrice hessienne.

Remarque 5.6. *Pour faire converger la frontière du modèle vers le contours de l'objet, des informations sur le contours sont nécessaire. Pour les formes rectangulaires, il est possible d'utiliser les quatre coins de la feuille.*

5.5.2 Ajustement de faisceaux d'une fonction de coût *3D*

Dans le cas d'un raffinement des paramètres du modèle sur des données *3D*, le critère utilisé est la distance euclidienne entre les points *3D* M_i et leurs estimations $M(S, x_i, y_i)$ sur la surface S. Le critère à minimiser s'écrit alors :

$$e = \sum_{i=1}^{N} \left(M_i - M(S, x_i, y_i)\right)^2 \tag{5.6}$$

Il se présente également sous la forme de moindres carrés non-linéaires. La même méthode de minimisation est utilisée, c'est-à-dire une minimisation itérative avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Les matrices jacobienne et hessienne ont des structures par blocs similaires à celle du cas *2D*. L'implantation peut donc tenir compte de ces propriétés dans la résolution des équations normales.

5.5.3 Reparamétrisation du modèle

Les fonctions de coût à minimiser pour raffiner le modèle sont non-linéaires. Elles ajustent automatiquement les paramètres du modèle pour diminuer l'erreur de reconstruction. Comme cela a été présenté à la section 2.5.2, l'algorithme évalue à chaque itération une variation des paramètres. La loi de mise à jour utilisée est additive : les nouveaux paramètres sont donnés par la somme entre cette variation et leur valeur courante.

Dans la paramétrisation du modèle génératif de surfaces développables présenté à la section 4.3.2, les paramètres déterminant la position des génératrices ne peuvent pas être choisis arbitrairement. En effet, ils sont contraints par le fait que les génératrices ne doivent pas se couper sur la surface de l'objet. Cette contrainte a été traduite par des notions d'ordre sur les abscisses curvilignes des génératrices, comme montré à la section 4.3.2.2. Par conséquent, les abscisses curvilignes des génératrices ne sont pas indépendantes les unes des autres dans cette représentation puisqu'elles sont ordonnées. En pratique, il faut donc vérifier la cohérence entre les paramètres à chaque itération de Levenberg-Marquardt.

Pour s'affranchir de cette vérification, une nouvelle paramétrisation de la position des génératrices est utilisée. Dans le modèle, les positions des génératrices sont définies par les abscisses curvilignes de leurs points d'intersection avec la frontière de l'objet. L'initialisation du modèle fournit un jeu cohérent de génératrices principales, c'est-à-dire qu'elles ne se coupent pas sur la surface de l'objet. Les abscisses curvilignes peuvent donc être ordonnées le long du contour. Cet ordre ne peut pas être modifié par l'algorithme de minimisation (car une modification de l'ordre entraîne systématiquement des intersections de génératrices sur la surface de l'objet). Pour préserver cet ordre, la différence entre les abscisses curvilignes des génératrices consécutives ne doit pas changer de signe.

Nous proposons donc de paramétrer les génératrices par la mesure des différences d'abscisses curvilignes entre les génératrices consécutives. Ces différences doivent rester positives pour éviter toute intersection de génératrice. Le respect de cette contrainte est garanti par l'utilisation d'une sigmoïde S réalisant une bijection de $\mathbb{R}$ avec l'intervalle $[0,1]$:

$$\begin{array}{rcccl} S & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & & p & \longmapsto & d = S(p) = \frac{1}{\pi}\arctan(p) + \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} S^{-1} & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & d & \longmapsto & p = S^{-1}(d) = \tan\left(\pi d - \frac{\pi}{2}\right) \end{array}$$

La paramétrisation utilisée dans le modèle est appelée *paramétrisation modèle*, la nouvelle paramétrisation introduite pour l'optimisation est appelée *paramétrisation optimisation*.

La fonction donnant la position des points le long du contour étant périodique, il est nécessaire de normaliser les différences d'abscisse curviligne pour éviter que les intersections puissent faire plusieurs tours le long du contour. Il faut également fixer une origine pour les abscisses curvilignes. La figure 5.17 illustre les deux paramétrisations avec l'exemple de trois génératrices. Les algorithmes 5.4 et 5.5 permettent d'effectuer les conversions entre les deux paramétrisations.

5.5.4 Discussion

L'algorithme de minimisation peut être implanté en utilisant les structures creuses des matrices jacobienne et hessienne de la fonction de coût. La structure de ces matrices a été déterminée par l'influence des paramètres de la fonction de coût sur les valeurs des résidus de la fonction de coût. Les paramètres du modèle n'ont pas une influence globale sur tous les points de la surface. Ce phénomène, représenté sur la figure 5.16, s'explique par deux constatations :

Algorithme 5.4 Conversion de la paramétrisation modèle vers la paramétrisation optimisation.

ENTRÉES: La paramétrisation modèle des génératrices :

$$s_{.,1} = (s_{1,1}, s_{2,1}) \qquad s_{.,2} = (s_{1,2}, s_{2,2}) \qquad s_{.,3} = (s_{1,3}, s_{2,3})$$

1: Ordonner les points le long du contours :

$$s_{1,1} < s_{1,2} < s_{1,3} < s_{2,3} < s_{2,2} < s_{2,1}$$

2: Calculer les différences d'abscisses curvilignes entre les points consécutifs :

$$d_1 = s_{1,2} - s_{1,1} > 0 \qquad d_2 = s_{1,3} - s_{1,2} > 0 \qquad \dots$$

3: Mesurer le périmètre l de la forme :

$$\sum_{i=1}^{6} d_i = l$$

4: Appliquer l'inverse S^{-1} de la sigmoïde S sur les différences d_i normalisées :

$$p_i \longleftarrow S^{-1}\left(\frac{d_i}{l}\right)$$

5: Choisir une abscisse de référence :

$$s_0 = s_{1,1}$$

SORTIES: La paramétrisation optimisation des génératrices $\{l, s_0, p_1, \dots, p_6\}$.

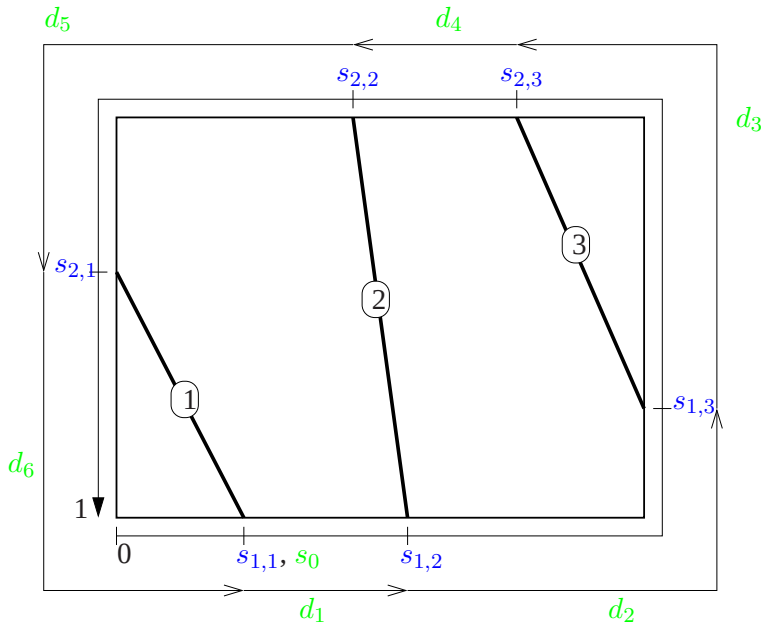


FIGURE 5.17 – **Paramétrisation de la position des génératrices pour le raffinement du modèle.** Les éléments bleus (foncés) appartiennent à la paramétrisation modèle. Les éléments verts (clairs) sont ceux de la paramétrisation optimisation.

Algorithme 5.5 Conversion de la paramétrisation optimisation vers la paramétrisation modèle.

ENTRÉES: La paramétrisation optimisation des génératrices $\{l, s_0, p_1, \ldots, p_6\}$

1: Appliquer la sigmoïde S :

$$d_i \longleftarrow S(p_i)$$

2: Calculer le coefficient k de normalisation :

$$k = \frac{l}{\sum d_i}$$

3: Appliquer le coefficient k de normalisation pour obtenir les différences :

$$d_i \longleftarrow k d_i$$

4: Calculer les abscisses curvilignes entre les points consécutifs :

$$s_{1,1} = s_0 \qquad s_{1,2} = s_{1,1} + d_1 \qquad s_{1,3} = s_{1,2} + d_2 \qquad \ldots$$

5: Former les couples d'abscisses curvilignes :

$$s_{.,1} = (s_{1,1}, s_{2,1}) \qquad s_{.,2} = (s_{1,2}, s_{2,2}) \qquad s_{.,3} = (s_{1,3}, s_{2,3})$$

SORTIES: La paramétrisation modèle des génératrices $\{s_{.,1}, s_{.,2}, s_{.,3}\}$.

- ▷ les fonctions d'interpolation pour la détermination des génératrices auxiliaires sont locales,
- ▷ la surface est formée progressivement par rotations successives le long des génératrices.

Le premier point indique que les génératrices auxiliaires ne dépendent que d'un nombre restreint de génératrices principales. La seconde propriété révèle que l'expression de la surface développable en un point est déterminée par un sous-ensemble des génératrices. Par conséquent, l'influence des paramètres du modèle dépend de la position des points. Une implantation optimale pourait tenir compte de cette propriété pour l'évaluation de la jacobienne.

En pratique, la convergence est assez lente. Il semble qu'avec le processus d'interpolation, la position des génératrices ne soit pas très significative. Ce phénomène pourrait être étudié en fixant partiellement la position des génératrices (par exemple un des deux points d'intersection). Cette problématique semble analogue à celle concernant le placement optimal des points de contrôle pour la sélection des paramètres du modèle rencontrée à la section 5.4.6.

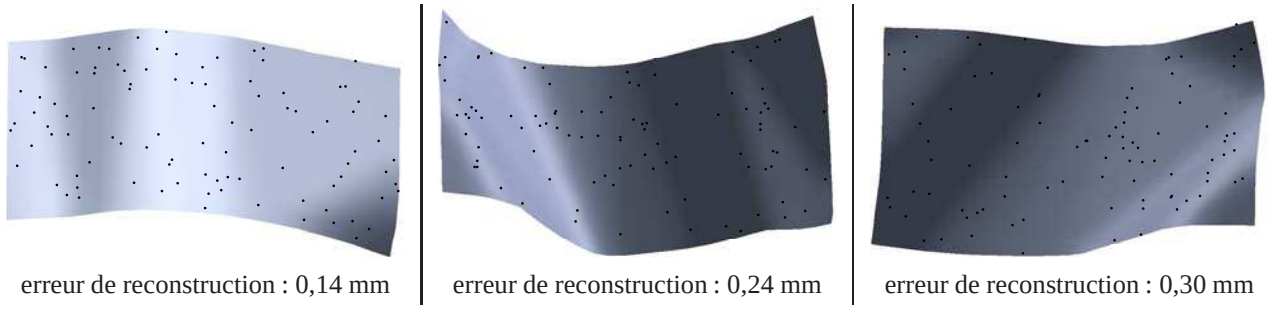
5.6 Résultats

Les résultats présentés sont organisés en deux parties disctinctes. Dans la première partie, l'algorithme est testé sur des données *3D* obtenues par lumière structurée. L'objectif est de valider le modèle utilisé et l'algorithme de reconstruction grâce à ces données *3D* précises.

La deuxième partie est consacrée aux résultats établis à partir de séquences d'images. Elle permet d'illustrer les applications potentielles de cette étude.

5.6.1 Validation du modèle et de l'algorithme

Les données sont issues de l'acquisition de 7 déformations d'une feuille de papier en utilisant une méthode de reconstruction par lumière structurée (Park and Kak, 2004) [2]. Trois déformations sont montrées sur la figure 5.18. Elles se présentent sous la forme de nuages de points *3D* non-organisés d'environ 162000 points. La précision des points est de l'ordre de 0,3 mm, la dimension des feuilles étant approximativement de 100mm par 180mm.



erreur de reconstruction : 0,14 mm | erreur de reconstruction : 0,24 mm | erreur de reconstruction : 0,30 mm

FIGURE 5.18 – **Déformations d'une feuille de papier.** Les surfaces montrées sont les surfaces estimées par notre méthode. Les points *3D* noirs sont les 100 points utilisés pour l'estimation.

Pour évaluer la précision de notre modèle et de notre algorithme nous procédons de la manière suivante :

1. sélection aléatoire d'un sous-ensemble de points,
2. estimation du modèle sur le sous-ensemble de points,
3. sélection aléatoire d'un autre sous-ensemble de points parmis les points non sélectionnés à l'étape 1,
4. mesure de l'erreur de reconstruction sur ce deuxième ensemble de points.

Cette méthode étant basée sur des tirages aléatoires des points, elle est effectuée plusieurs fois pour chaque déformation. L'erreur mesurée est l'erreur RMS, de l'anglais "root mean square", qui est égale à la racine carrée de la moyenne des carrés des résidus de la fonction de coût. Elle est exprimée en millimètres. Les résultats sont présentés à la figure 5.19.

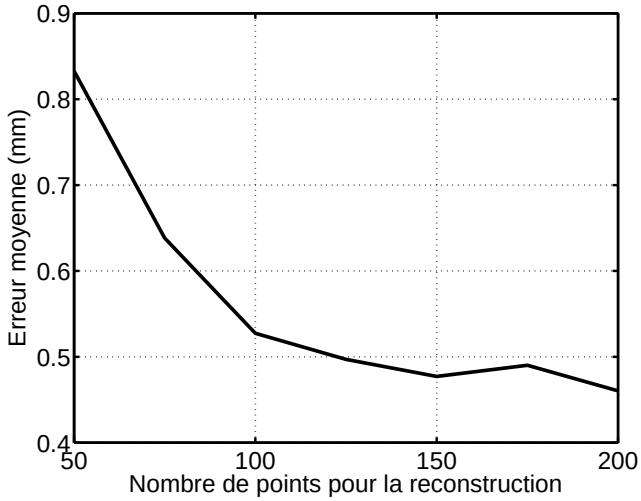


FIGURE 5.19 – **Erreur résiduelle de l'estimation de surfaces développables.** Les données utilisées sont des données *3D*.

Ces résultats valident le modèle génératif de surfaces développables que nous avons proposé ainsi que l'algorithme de reconstruction. En effet, l'erreur moyenne est très faible comparée à la dimension de l'objet,

2. Nous remercions Johnny Park d'avoir réalisé ces reconstructions spécialement pour nous.

ce qui signifie que le modèle permet de représenter ce type de surface avec précision, et que l'algorithme de reconstruction évalue correctement les paramètres du modèle. Par ailleurs, l'erreur de reconstruction décroît avec le nombre de points utilisés pour la reconstruction. Le phénomène de surestimation des paramètres n'est donc pas observé dans cette situation.

5.6.2 Reconstruction *3D* à partir de vidéos

Nous avons testé notre modèle et l'algorithme de reconstruction sur plusieurs jeux d'images. Nous présentons ici les résultats obtenus pour quatre d'entre eux. Les séquences utilisées sont montrées sur les figures 5.20 et 5.26. Le nuage de points *3D* est généré par une méthode de "Structure-from-Motion", voir la section 5.3.1.1.

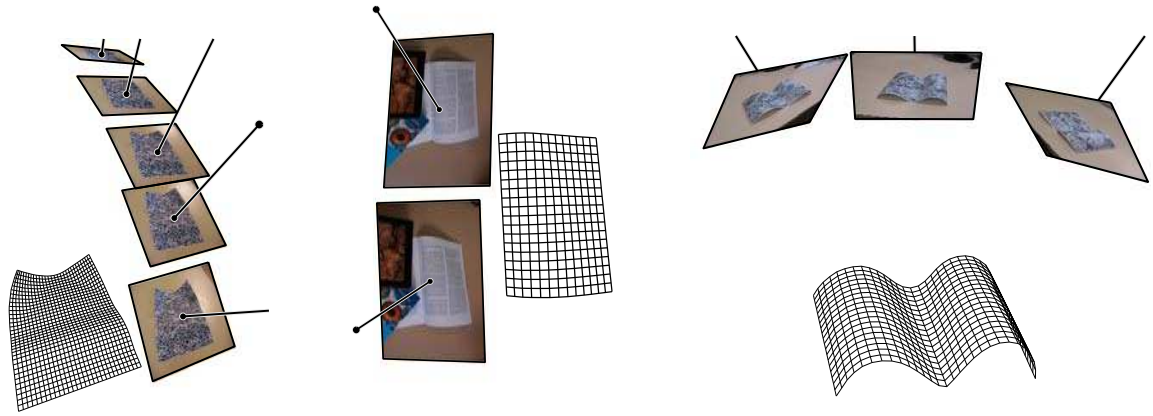


FIGURE 5.20 – **Caméras et surfaces reconstruites.** (à gauche) Séquence de la feuille de papier. (au milieu) Séquence de la page du livre. (à droite) Séquence de la carte.

Séquence de la feuille de papier. Les résultats suivants ont été obtenus à partir de 5 vues. Le modèle utilisé possède 8 génératrices principales et 16 génératrices auxiliaires. La figure 5.21 montre les reprojections des surfaces *3D* dans la première image de la séquence et la distribution des erreurs de reprojection sur toute la séquence pour les trois étapes principales de l'algorithme : la reconstruction du nuage de points *3D*, l'initialisation et l'ajustement de faisceaux. Bien que le nuage de points *3D* ait la plus petite erreur de reprojection, la surface interpolée correspondante n'est pas satisfaisante car elle n'est pas régulière et ne suit pas les bords de la feuille. L'utilisation de notre modèle permet de régulariser la surface mais l'étape d'initialisation ne suffit pas car la surface ne se reprojette toujours pas sur les bords de la feuille dans les images. Enfin, le modèle ajusté est satisfaisant puisqu'il se superpose correctement sur les bords de la feuille et que l'erreur de reprojection associée est très proche de celle du nuage de points *3D*. Cela montre que notre modèle représente correctement les points d'intérêt, bien qu'ils dépendent d'un nombre de paramètres moins important que le nuage de points *3D*. Enfin, l'erreur de reprojection a significativement diminué lors de l'ajustement de faisceaux, ce qui prouve l'intérêt de cette étape.

Puisque nous disposons d'un modèle *3D* de la feuille et de sa reprojection dans les images, il est possible d'ajouter des éléments sur le papier ou d'en changer la texture. Nous utilisons le processus d'augmentation décrit en annexe A.3 pour remplacer la texture de la feuille et générer de nouvelles vues du papier avec une autre texture. Quelques résultats sont montrés sur la figure 5.22.

Séquence du livre. Le deuxième exemple que nous proposons est une paire d'images d'un livre. Nous avons estimé la surface de la page avec deux règles de guidage et huit règles de lissage. La figure 5.23 montre la reprojection de notre modèle dans une image et le maillage *3D* correspondant. La reconstruction avec notre modèle est satisfaisante : le nuage de points *3D* a une erreur de reprojection de 0,26 pixels et celle de notre modèle après ajustement de faisceaux vaut 0,69 pixels.

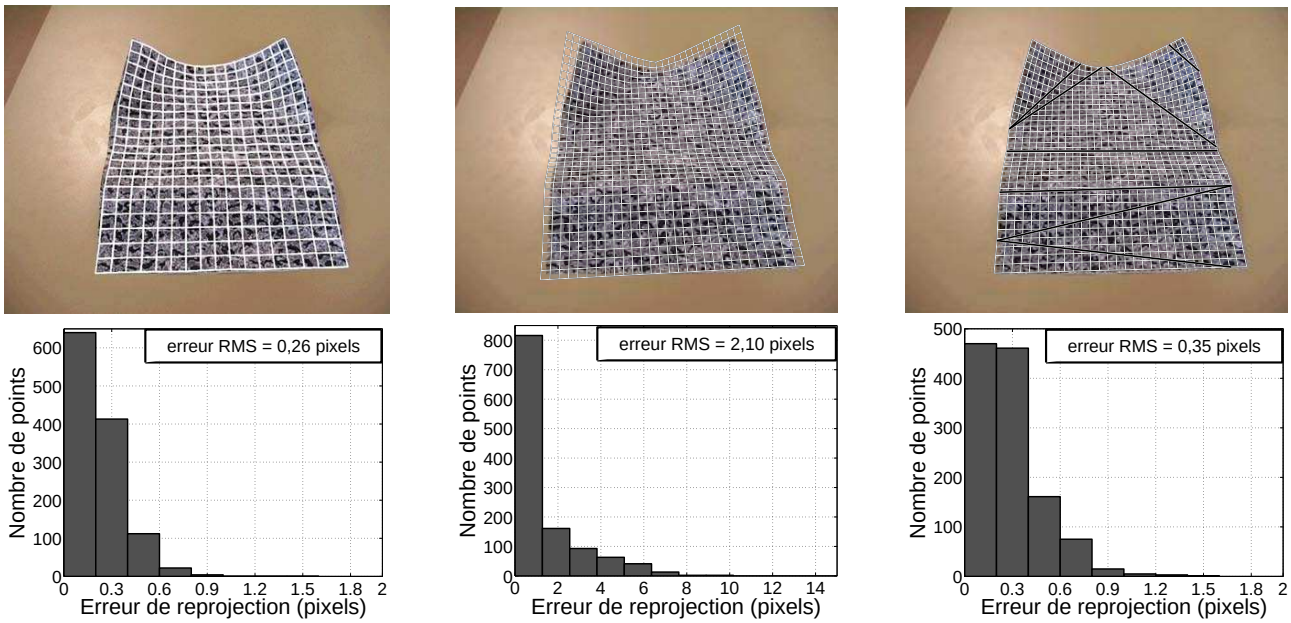


FIGURE 5.21 – **Reprojection des surfaces et distribution des erreurs de reprojection.** (à gauche) Nuage de points *3D*. (au centre) Modèle initial. (à droite) Modèle après ajustement de faisceaux.

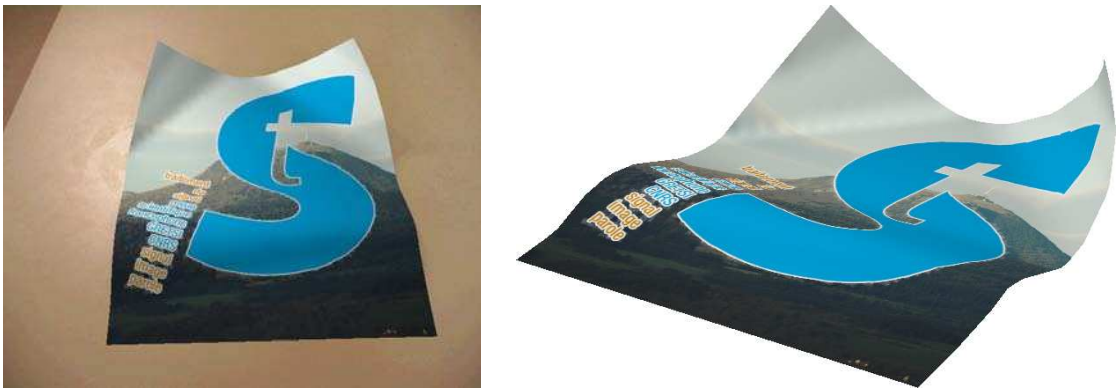
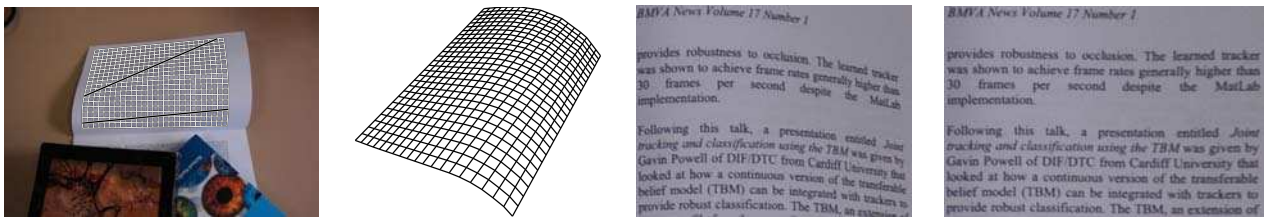


FIGURE 5.22 – **Exemples de réalité augmentée.** (à gauche) Remplacement de la texture de la feuille et surimpression du logo “TS”. (à droite) Génération synthétique d’une nouvelle vue avec la nouvelle texture.



(a) (b) (c) (d)

FIGURE 5.23 – **Reconstruction et mise à plat d’une page de livre.** (a) Reprojection du modèle dans une image. (b) Maillage *3D* estimé. (c) Image originale. (d) Image rectifiée.

Une application potentielle de ce travail dans le cas d'une page manuscrite est présentée en figure 5.23. Nous utilisons notre estimation de surface pour mettre à plat la texture du livre et obtenir ainsi une image rectifiée du texte. De nombreux travaux proposent des méthodes pour la mise à plat de documents (Courteille, 2006; Gumerov et al., 2004; Liang et al., 2005; Pilu, 2001). Une étude comparative peut s'avérer intéressante. Le critère d'évaluation peut par exemple s'appuyer sur les résultats d'un logiciel de reconnaissance de caractères.

Séquence de la carte. Le troisième exemple est une séquence d'images d'une carte ondulée montrée sur la figure 5.20. La séquence comporte 457 vues. La totalité des vues a été utilisée pour calculer la structure *3D* éparse initiale. L'estimation de la surface a ensuite été réalisée avec 50 vues réparties sur toute la séquence. Bien que le papier ne soit jamais intégralement visible dans une seule vue, la séquence est telle que chaque partie du papier est visible dans au moins deux images. L'algorithme de reconstruction gère naturellement ce type d'occultations. En effet, l'initialisation est toujours possible car elle est basée sur la reconstruction d'un nuage de points *3D*. Les différentes parties du papier étant chacune visible dans plusieurs vues, des points sont reconstruits sur l'intégralité de la surface. L'ajustement de faisceaux est également possible car la fonction de coût gère les données manquantes. La reprojection du modèle dans l'une des images de la séquence est montrée sur la figure 5.24. Puisqu'un modèle *3D* de la surface a été estimé, et que la position des caméras est connue, il est possible de calculer une carte d'occultation pour chaque image. Cela permet d'extraire une partie de la texture de chaque image, puis de les assembler pour obtenir la texture complète de la feuille, voir la figure 5.24. L'erreur de reprojection du modèle est de 0,45 pixels, très proche de l'erreur initiale de triangulation (0,31 pixels) ; dans le repère *3D*, cela correspond à une erreur de 0,7 mm pour une feuille de 28 cm par 19 cm. Un exemple d'utilisation de la méthode à des fins de réalité augmentée est également présenté à la figure 5.25. La connaissance du modèle *3D* permet d'incruster un objet de manière réaliste dans la séquence, notamment grâce à la prise en compte des occultations.

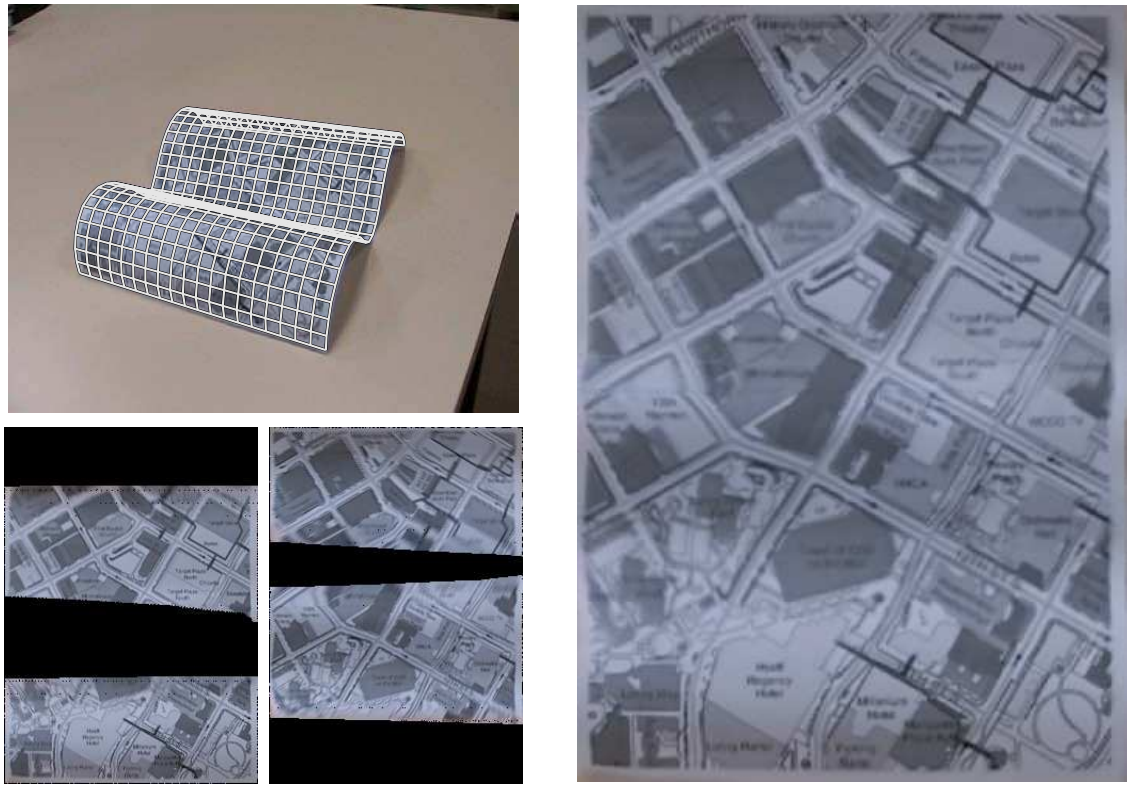


FIGURE 5.24 – **Résultats pour la séquence de la carte.** (en haut à gauche) Reprojection dans l'une des images de la séquence. (en bas à gauche) Exemples de textures partielles obtenues par redressement des images. (à droite) Texture globale de la feuille obtenue par assemblage des textures partielles.

FIGURE 5.25 – **Exemple de réalité augmentée.** Le surface estimée de la feuille est utilisée pour incruster une théière évoluant sur la feuille.

Les Nympheas de Monet. La séquence est composée de 14 photos de la peinture “Soleil couchant” de Claude Monet visible au musée de l’Orangerie à Paris. L’œuvre est exposée sur un mur elliptique (cylindre de révolution à section elliptique). Cette peinture n’est donc pas plane mais sa surface est développable. Notre algorithme de reconstruction de surfaces développables a été utilisé pour estimer la surface et générer la mise à plat de l’œuvre.

La dimension de la toile est de 200×600cm. Le rapport des dimensions calculé par l’algorithme est de 3,002. L’erreur sur l’évaluation des dimensions est donc inférieure à 3 mm. Pour cette reconstruction, 331 points ont été utilisés. L’erreur RMS des points reconstruits par la méthode de “Structure from Motion” est de 0,62 pixels. L’erreur RMS obtenue en estimant la surface vaut 0,66 pixels, elle est donc très proche de l’erreur initiale, ce qui illustre la précision de la reconstruction. La figure 5.26 montre quelques images de la séquence, le modèle estimé et la mise à plat de la peinture.

FIGURE 5.26 – **Reconstruction du tableau “Soleil couchant” de Monet.** (en haut) Deux images de la séquence et la reprojection du modèle dans une des images. (en bas) La mise à plat du tableau réalisée automatiquement.

5.7 Conclusion

Après avoir proposé un modèle génératif de surfaces développables, nous avons présenté dans ce chapitre une méthode permettant d'estimer les paramètres du modèle à partir d'images ou de nuages de points *3D*. L'information utilisée dans les images se présente sous la forme de correspondances de points. Notre algorithme est constitué de trois grandes étapes :

1. interpolation initiale des points *3D*,
2. initialisation des paramètres du modèle,
3. raffinement des paramètres du modèle.

La première étape permet de transcrire l'information contenue dans les points *3D* sous la forme d'une surface. Cela permet d'évaluer les caractéristiques géométriques de la surface nécessaires à l'initialisation du modèle. L'élément clef de cette étape est l'organisation des points *3D* réalisée par l'estimation d'une paramétrisation plane des points.

Au cours de la deuxième étape, les caractéristiques d'une surface développable sont estimées par l'analyse de la surface initiale. Plusieurs algorithmes ont ainsi été présentés pour la détection de génératrices sur la surface initiale. En se basant sur le principe de génératrices principales et auxiliaires, les génératrices les plus représentatives sont conservées pour définir les paramètres du modèle.

La dernière étape consiste à ajuster automatiquement les paramètres du modèle pour améliorer l'estimation de la surface. Pour cela, une erreur d'estimation a été définie, elle est exprimé directement sur les données initiales. L'utilisation d'un algorithme d'optimisation permet de minimiser cette erreur par l'ajustement des paramètres du modèle.

La méthode proposée est générale, dans le sens où la plupart des surfaces développables peuvent être reconstruites, et les hypothèses sur la scène sont minimales. Cette généralité est apportée par la combinaison du modèle génératif de surfaces développables qui permet de gérer les contraintes liées à ces surfaces et par l'utilisation des techniques de vision par ordinateur notamment pour la reconstruction de points *3D*. Les résultats obtenus sur les données *3D* ont permis de quantifier les performances du modèle et de l'algorithme. De cette manière, il apparaît clairement que notre modèle est capable de représenter des surfaces réelles et que l'algorithme que nous proposons permet de déterminer efficacement les paramètres du modèle. Les exemples sur les séquences réelles confirment ce constat. Ils ont également permis d'illustrer les applications potentielles des reconstructions.

Des éléments visant à améliorer la méthode proposée ont été présentés dans le chapitre. Ils concernent notamment l'interpolation des points *3D* par une surface et l'initialisation des paramètres du modèle. Un problème généralement rencontré en vision par ordinateur n'a pas été abordé ici, il s'agit de la gestion des points aberrants. Ils sont par exemple obtenus lorsque des mauvaises correspondances sont établies entre les images. La méthode proposée n'est pas robuste à de telles données erronées. En pratique, ces mauvaises correspondances sont éliminées automatiquement lors de la reconstruction par Structure-from-Motion. Cependant, des études supplémentaires serait nécessaires pour étudier le comportement de la méthode dans ces situations. Une des solutions consiste à analyser la surface interpolée initiale pour détecter ces points.

Lorsque plusieurs caméras sont synchronisées, il est possible d'utiliser la méthode pour reconstruire des séquences de déformation. Il serait probablement intéressant dans ce cadre de profiter de la régularité temporelle de la surface pour simplifier l'initialisation. Par ailleurs, la surface peut être estimée en se basant sur des images montrant les deux cotés de la feuille grâce à la faible épaisseur du papier.

La précision de la méthode a été évaluée en mesurant l'erreur résiduelle après l'optimisation des paramètres du modèle. Une étude plus poussée peut être envisagée pour déterminer l'influence du bruit dans les données sur la reconstruction. Une piste pour cette évaluation est l'extension des travaux similaires réalisés dans le cas du "Structure-from-Motion" et dont un exemple est présenté dans l'annexe A.4.3.

Les deux familles d'applications de l'algorithme sont la mise à plat et la réalité augmentée. Pour ces applications, il peut être intéressant d'estimer la lumière ambiante. Cela permet de réaliser la correction photométrique

de la texture obtenue par la mise à plat, ou d'appliquer un effet de lumière réaliste sur les objets incrustés. Des méthodes ont été proposées, voir par exemple (Brown et al., 2007).

De nombreuses perspectives de recherche existent dans le domaine applicatif. Ainsi, pour la numérisation de document, les possibilités concernent les techniques de super-résolution, ou l'élaboration d'un scanner multicaméras (Ulges et al., 2004).

En réalité augmentée, une application a déjà été proposée dans le domaine du livre : le livre magique (Billinghurst et al., 2001). Ces travaux, conçus pour un usage didactique, permettent d'associer des objets virtuels aux pages d'un livre. Le modèle utilisé pour représenter les pages est plan, l'utilisation de notre méthode pourrait permettre d'en étendre les possibilités.

CHAPITRE

6

RECONSTRUCTION *3D* MONOCULAIRE DE SURFACES INEXTENSIBLES

Résumé.

Après l'étude sur les surfaces développables, nous nous intéressons à une contrainte moins forte sur l'objet observé : l'inextensibilité. La méthode étudiée pour réaliser la reconstruction est également différente car elle se base sur des correspondances de points entre une image de l'objet déformé et un patron. L'algorithme permet de déterminer la profondeur des points de l'image puis d'obtenir la surface par interpolation. Le lien entre cette méthode et les surfaces développables est étudié dans l'annexe A.2.

Contributions.

- ▷ La méthode a été élaborée en collaboration avec Richard Hartley. Elle est publiée dans (Perriollat et al., 2008).

6.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la reconstruction d'objets déformables à partir d'images dans le cadre des scènes déformables. Nous avons défini ce type de scènes par la présence de déformations entre les images. Dans ce contexte, les techniques classiques de reconstruction *3D* par triangulation dédiées aux scènes rigides ne s'appliquent pas. Une approche telle que celle présentée dans le cadre de la reconstruction des surfaces développables n'est donc pas envisageable.

Par ailleurs, ce problème est mal posé car il existe des ambiguïtés sur la profondeur des points (Salzmann et al., 2007b). Les différentes solutions proposées utilisent donc des contraintes de cohérence supplémentaires. La plupart du temps, ces contraintes sont spécifiques au problème étudié. Par exemple, elles peuvent correspondre à des régularisations spatiales ou temporelles, à des hypothèses sur la déformation initiale de l'objet, ou encore le recours aux modèles de faible rang (Bregler et al., 2000; Del Bue, 2008; Yan and Pollefeys, 2005). Les contraintes exploitées par notre algorithme sont les suivantes :

1. l'objet peut être représenté par une surface,
2. l'objet est inextensible,
3. les images proviennent d'une caméra perspective dont les paramètres internes sont connus,
4. un modèle *3D* texturé de référence est disponible.

Les éléments 1. et 2. sont liés à la nature de l'objet à reconstruire. La figure 6.1 montre des exemples d'objets déformables satisfaisant ces propriétés. Certains tissus peuvent également rentrer dans ce cadre, cela dépend d'une part de l'extensibilité intrinsèque du tissu et des déformations appliquées. Les hypothèses 3. et 4. sont plus spécifiques à notre méthode de reconstruction.

FIGURE 6.1 – **Exemples d'objets reconstruits par l'algorithme.** Exemples de feuilles de papier : le patron (a) et deux feuilles déformées, l'une est régulière (b), l'autre est froissée (c). Exemple d'une canette : l'image de référence du patron (d), la surface *3D* du patron (e) et l'image de la canette déformée (f).

Notre algorithme permet d'estimer les déformations isométriques de l'objet (les déformations sont isométriques car l'objet est supposé inextensible). La reconstruction est effectuée à partir de correspondances de points entre l'image de l'objet déformé et le modèle de référence appelé *patron*. Le principe est illustré par la figure 6.2. La caméra étant calibrée, l'inconnue restante concerne les profondeurs des points car la pose de la caméra n'est pas évaluée. Nous montrons comment les évaluer grâce à l'hypothèse d'inextensibilité. La reconstruction est possible à partir d'une seule image de l'objet déformé. Des contraintes supplémentaires sont néanmoins intégrables pour prendre en compte par exemple la régularité temporelle d'une séquence d'images montrant une déformation.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. La première partie est un état de l'art présentant les différentes techniques traitant de la reconstruction d'objet déformables à partir de séquences vidéos monoculaires. La méthode générale de reconstruction est ensuite expliquée. Elle débouche sur une implantation consistant à calculer les profondeurs maximales des points et à reconstruire la surface. Une étude expérimentale de l'erreur de reconstruction induite par l'algorithme est rapportée. Enfin des résultats sur des données de synthèse et sur des séquences réelles sont montrés.

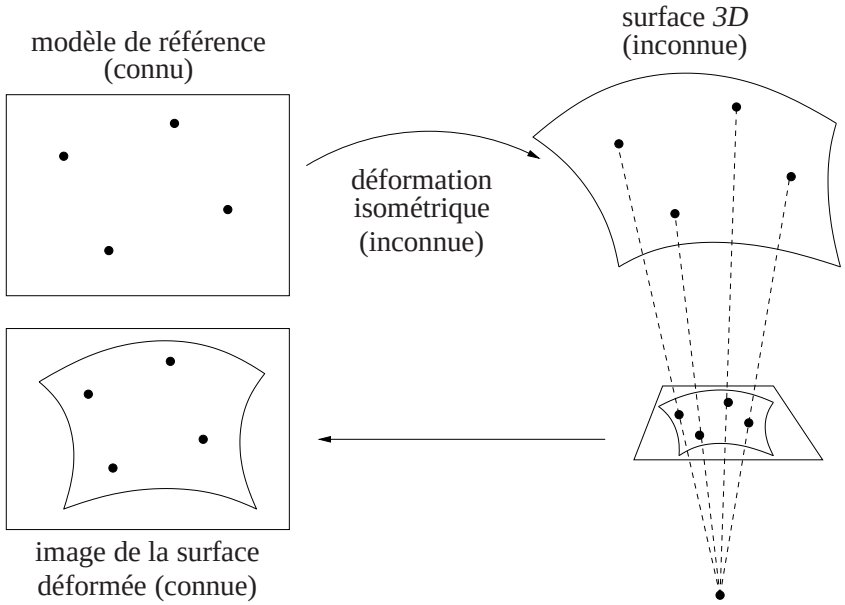


FIGURE 6.2 – **Reconstruction monoculaire d'une surface déformable.** Configuration du problème.

6.2 État de l'art

Dans les méthodes de reconstruction monoculaire de scènes déformables, il est possible de distinguer trois composantes principales :

1. le modèle général de faible rang,
2. l'hypothèse de surface,
3. la connaissance d'une surface de référence.

Ces différents éléments peuvent être utilisés de manière indépendante ou combinés pour lever les ambiguïtés de reconstruction. Nous présentons dans la suite quelques unes de ces possibilités.

Composantes 1. et 2. La solution basée sur le modèle de faible rang dans le cadre de la reconstruction de scènes déformables a été introduite par (Bregler et al., 2000). La scène est représentée par une combinaison de formes de base inconnues. L'algorithme détermine à la fois les formes de base et leurs coefficients dans toutes les images de la séquence. L'hypothèse de surface a récemment été introduite dans cette méthode sous forme d'a priori sur la forme (Olsen and Bartoli, 2008). L'algorithme traite la totalité de la vidéo pour calculer la solution et par conséquent il n'est pas adapté à la reconstruction à la volée.

Composante 2. Des méthodes utilisant uniquement l'hypothèse de surface ont également été proposées. Elles nécessitent des connaissances importantes sur la surface. L'une des applications de ces méthodes est la numérisation de feuilles de papier à partir d'images dans lesquelles la feuille apparaît déformée. Pour ce type d'applications, aucune image de référence n'est disponible. Avec des hypothèses de régularité, (Gumerov et al., 2004) résolvent un système d'équations différentielles sur le bord de la page pour obtenir la forme *3D*. D'autres approches, comme celle de (Liang et al., 2006) utilisent des informations extraites du texte pour évaluer les paramètres de la surface. Ces méthodes fonctionnent bien sur des feuilles de papier déformées sans plis francs mais elles ne peuvent pas être appliquées ou étendues à n'importe quel objet inextensible.

Composantes 2. et 3. Les approches par apprentissage ont été utilisées efficacement pour modéliser les objets déformables (Salzmann et al., 2007c, 2008b). Le principal inconvénient réside dans la perte de généralité lorsque le modèle appris est trop spécifique. Dans le cadre de la reconstruction monoculaire, la cohérence temporelle est utilisée pour régulariser les déformations (Salzmann et al., 2007a). Pour cela, il est nécessaire de connaître la forme *3D* initiale. Pour ces méthodes, une surface de référence est généralement requise, et la

séquence d'images est telle que la déformation de l'objet dans la première image est proche de la surface de référence.

Les hypothèses que nous utilisons sont également à la base de la méthode proposée par (Penna, 1992). L'auteur suppose également des correspondances entre les voisinages des points. Cela lui permet d'utiliser des propriétés de géométrie différentielle et de proposer une résolution analytique.

Notre méthode est dédiée aux surfaces et utilise une surface de référence (composantes 2. et 3.). Elle suppose également que l'objet déformable est inextensible. Cette hypothèse supplémentaire la rend plus spécifique par la nature des objets reconstruits, mais permet d'un autre côté de concevoir un algorithme de reconstruction *3D* plus général. Des travaux récents exploitant le même type de contraintes sont présentés dans (Salzmann et al., 2008a). Notre approche se différencie des méthodes proposées précédemment par les deux aspects suivants :

- ▷ la méthode de reconstruction se base sur l'hypothèse d'inextensibilité. Cette contrainte n'est donc pas prise en compte d'une manière classique au niveau de la régularisation de la solution. En effet, les autres méthodes traitent généralement les a priori sur la surface par des pénalités de régularisation différentes. Des compromis doivent alors être faits entre les différentes pénalités pour obtenir des résultats convaincants. Par conséquent, les résultats que nous obtenons sont moins empiriques vis-à-vis de l'inextensibilité. Notre méthode demeure compatible avec la régularisation par pénalité,
- ▷ notre algorithme est capable de reconstruire un objet déformé à partir d'une seule image de celui-ci. Il permet également de traiter des séquences d'images de déformation. Dans ce cas, il n'est pas utile de faire des hypothèses sur la déformation initiale de la surface. Il se distingue donc des autres approches (Salzmann et al., 2007a, 2008b), pour lesquelles la première image de la séquence doit être similaire à l'image de référence.

Nous expliquons dans la suite notre algorithme en détail. Une première partie pose la méthode d'une manière théorique, une solution pratique et rapide est ensuite proposée pour la résolution.

6.3 Méthode de reconstruction *3D*

6.3.1 Principe

La méthode que nous proposons est basée sur un modèle de référence et sur une image de l'objet déformé obtenue grâce à une caméra perspective calibrée. Des points d'intérêt sont tout d'abord mis en correspondance entre le modèle de référence et l'image de l'objet déformé. Notre algorithme reconstruit ces points en *3D*. La surface de l'objet est ensuite obtenue par une interpolation de ces points *3D*.

La reconstruction utilise le fait que la caméra perspective est calibrée et que les déformations sont isométriques. En connaissant les paramètres de la caméra, les points d'intérêt détectés peuvent être rétro-projetés en lignes de vue. Par conséquent, les seules inconnues restantes pour les situer dans l'espace sont leurs distances par rapport au centre de la caméra. Par simplicité nous appelons ces distances les *profondeurs des points*. Celles-ci sont évaluées en ajoutant l'hypothèse d'inextensibilité.

Comme la caméra est perspective, les lignes de vue ne sont pas toutes parallèles et sont concourantes au centre de la caméra. En considérant deux points d'intérêt le long de leurs lignes de vue respectives, la distance euclidienne entre les points augmente lorsqu'ils s'éloignent de la caméra. Or les déformations sont isométriques. Il existe donc une distance maximale entre les deux points d'intérêt. Elle peut être évaluée sur le modèle de référence (car l'objet ne s'étire pas). Les points ne peuvent donc pas s'éloigner arbitrairement de la caméra à cause de cette contrainte sur la distance. Ce phénomène peut être traduit par des bornes sur la profondeur des points d'intérêt. Par conséquent les points (et donc la surface) appartiennent à une région bornée de l'espace. Cette propriété ne permet que d'obtenir la région de l'espace contenant l'objet déformé. Cependant, nous avons constaté expérimentalement que les points les plus éloignés satisfaisant la contrainte sur les distances sont très proches de la surface réelle.

6.3.2 Mise en équation

Les notations utilisées dans ce chapitre sont résumées dans le tableau 6.1.

Notation	Signification
$\mathbf{T}$	modèle de référence
$q_i^{\mathbf{T}}$	point i sur le modèle de référence
$\mathbf{I}$	image de l'objet déformé
P	matrice de la caméra de $\mathbf{I}$
C	centre de la caméra de $\mathbf{I}$
$q_i^{\mathbf{I}}$	point i dans l'image
S_i	ligne de vue du point $q_i^{\mathbf{I}}$
$\mathbf{v}_i$	direction de la ligne de vue S_i
α_{ij}	l'angle entre S_i et S_j
$\bar{q}_i$	point i en coordonnées homogènes

$d_{ij} = d_{géo}(q_i^{\mathbf{T}},\ q_j^{\mathbf{T}})$	distance géodésique entre $q_i^{\mathbf{T}}$ et $q_j^{\mathbf{T}}$
μ_i	profondeur du point i
$Q_i = Q_i(\mu_i)$	point *3D* i
$\hat{\mu}_i$	profondeur réelle du point i
$\hat{Q}_i$	point *3D* réel i
$\tilde{\mu}_i$	profondeur reconstruite du point i
$\tilde{Q}_i$	point *3D* i reconstruit
$i^\star$	indice du point contraignant la profondeur du point i
$\breve{\mu}_i = \breve{\mu}_{ii^\star}$	profondeur maximale du point i
$\breve{Q}_i$	point *3D* i le plus éloigné

TABLE 6.1 – **Notations pour la reconstruction d'objets inextensibles.**

6.3.2.1 Paramétrisation des points

La première étape consiste à détecter les points d'intérêt et à établir les correspondances. En pratique, cela peut être réalisé en utilisant par exemple SIFT (Lowe, 2004) ou une méthode de détection dédiée aux objets déformables (Pilet et al., 2007). Nous supposons qu'il n'y a pas de mauvaise correspondance.

Les lignes de vues sont ensuite calculées dans l'image de l'objet déformé $\mathbf{I}$ (des explications détaillées peuvent être trouvées dans (Hartley and Zisserman, 2004)). La matrice de la caméra $P = [M|\mathbf{p}_4]$ est composée d'une matrice (3×3) M et d'un vecteur (3×1) $\mathbf{p}_4$. Le centre de la caméra est $C = -M^{-1}\mathbf{p}_4$. Le vecteur v_i orientant la ligne de vue passant par le point $q_i^{\mathbf{I}}$ est :

$$\mathbf{v}_i = \frac{M^{-1}\bar{q}_i^{\mathbf{I}}}{\|.\|}$$

Un point *3D* Q_i sur la ligne de vue S_i peut être exprimé par :

$$Q_i(\mu_i) = \mu_i\ \mathbf{v}_i + C \tag{6.1}$$

La profondeur μ_i est la distance entre le point Q_i et le centre de la caméra. Ce scalaire doit être positif pour satisfaire les contraintes de chiralité comme montré dans (Hartley, 1997).

6.3.2.2 Contrainte d'inextensibilité

Comme l'illustre la figure 6.3, l'inextensibilité d'un objet donne la contrainte suivante entre deux points : quelque soit la déformation, la distance euclidienne entre les deux points *3D* est inférieure ou égale à la distance géodésique entre ces deux points mesurée sur le modèle de référence (cette propriété dérive des isométries introduites à la section 2.4.2.4) :

$$\|\hat{Q}_i\ - \hat{Q}_j\| \leq d_{géo}(q_i^{\mathbf{T}},\ q_j^{\mathbf{T}}) = d_{ij} \tag{6.2}$$

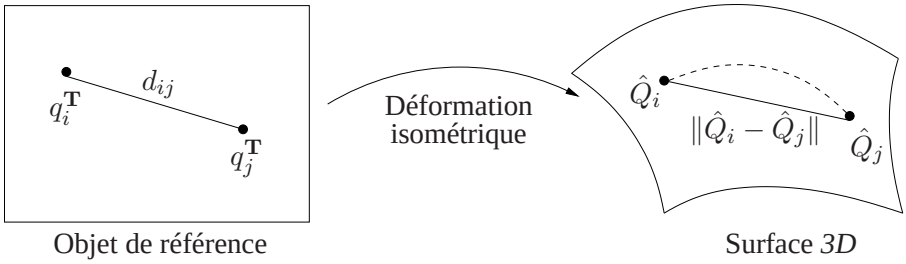


FIGURE 6.3 – **Déformation isométrique d'un objet.** Le modèle de référence est déformé par une transformation isométrique. La ligne pointillée est la plus courte géodésique entre $\hat{Q}_i$ et $\hat{Q}_j$, elle a la même longueur d_{ij} que la distance géodésique mesurée sur le modèle de référence. La distance euclidienne entre les points *3D* est inférieure ou égale à d_{ij} car la déformation est isométrique.

6.3.2.3 Résolution

Les points *3D* étant paramétrés par leurs profondeurs (équation (6.1)), la relation entre les distances (6.2) s'écrit :

$$\begin{aligned} \|\mu_i\,\mathbf{v}_i - \mu_j\,\mathbf{v}_j\| &\leq d_{ij} \\ \Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i & -\mathbf{v}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_i \\ \mu_j \end{pmatrix} \right\| &\leq d_{ij} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Les points *3D* sont ensuite obtenus en maximisant les profondeurs :

$$\tilde{\mu} = \arg\max_{\mu} \sum_{i=1}^{n} \mu_i \qquad \text{tel que } \forall (i,j) \in [1,n]^2 \quad \begin{cases} \mu_i \geq 0 \\ \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i & -\mathbf{v}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_i \\ \mu_j \end{pmatrix} \right\| \leq d_{ij} \end{cases} \tag{6.4}$$

avec μ le vecteur rassemblant les profondeurs. Ce problème est du type "Second Order Cone Programming", il peut être résolu en utilisant par exemple la bibliothèque SeDuMi (Sturm, 1999). Il peut être intéressant de considérer des contraintes supplémentaires sur le placement des points. Par exemple une régularisation temporelle est généralement intégrée pour la reconstruction d'une séquence vidéo. Ces contraintes ne modifient pas fondamentalement la nature du problème et il peut être résolu avec des méthodes similaires.

Cette méthode pour déterminer les points *3D* est satisfaisante d'un point de vue mathématique car elle est bien posée, et fournit une solution unique. Cependant, elle ne permet pas de calculer les bornes maximales sur les profondeurs des points et les connaissances sur la surface ne peuvent pas être prises en compte. Dans les parties suivantes, le calcul des profondeurs maximales est présenté, ainsi que la reconstruction de surfaces.

6.4 Détermination de bornes supérieures sur la profondeur de la surface

L'évaluation des bornes est réalisée en deux étapes :

- ▷ **Initialisation.** (section 6.4.1) Une solution sous-optimale est calculée en utilisant des contraintes sur les paires de points.
- ▷ **Raffinement.** (section 6.4.2) Un processus itératif améliore les bornes en considérant l'ensemble des contraintes et en le rendant pleinement compatible.

6.4.1 Initialisation des bornes

Les bornes sont initialisées en utilisant les contraintes sur les paires de points. En effet, deux points et la contrainte d'inextensibilité suffisent pour évaluer les profondeurs maximales de ces deux points. Avec ce principe, pour n correspondances, le processus retourne $n-1$ profondeurs maximales pour chaque point (chaque paire différente conduit à une profondeur maximale). Les bornes initiales sont alors données par les profondeurs minimales (ce qui correspond aux configurations les plus restrictives).

Calcul de la profondeur maximale induite par une paire de points. En reprenant l'équation (6.3), la distance entre les points Q_i et Q_j est :

$$\begin{aligned} \|Q_i - Q_j\|^2 &= \|\mu_i \, \mathbf{v}_i - \mu_j \, \mathbf{v}_j\|^2 \\ &= \mu_i^2 + \mu_j^2 - 2\mu_i\mu_j \cos^2(\alpha_{ij}) \\ &= (\mu_j - \mu_i \cos(\alpha_{ij}))^2 + \mu_i^2 \sin^2(\alpha_{ij}) \end{aligned} \tag{6.5}$$

La contrainte d'inégalité sur les distances s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & (\mu_j - \mu_i \cos(\alpha_{ij}))^2 + \mu_i^2 \sin^2(\alpha_{ij}) \leq d_{ij}^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (\mu_j - \mu_i \cos(\alpha_{ij}))^2 \leq d_{ij}^2 - \mu_i^2 \sin^2(\alpha_{ij}) \end{aligned}$$

Comme $(\mu_j - \mu_i \cos(\alpha_{ij}))^2 \geq 0$, la condition nécessaire et suffisante pour que la distance entre les points i et j soit inférieure à la distance de référence est :

$$\begin{aligned} d_{ij}^2 - \mu_i^2 \sin^2(\alpha_{ij}) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad \mu_i &\leq \sqrt{\frac{d_{ij}^2}{sin^2(\alpha_{ij})}} \end{aligned}$$

Pour les objectifs conventionnels, l'angle de champ est inférieur à 180°. Nous pouvons donc supposer sans perte de généralité que $0 \leq \alpha_{ij} \leq \pi$. Cela conduit à l'expression suivante :

$$\mu_i \leq \frac{d_{ij}}{sin(\alpha_{ij})}$$

Sélection de la borne initiale. La borne intiale μ_i est la plus restrictive des bornes calculées à partir de l'ensemble des correspondances :

$$\breve{\mu}_i = \breve{\mu}_{ii^\star} = \min_{\substack{j=1..n \\ j \neq i}} \left(\frac{d_{ij}}{sin(\alpha_{ij})} \right)$$

L'indice du point impliquant la borne initiale du point i est noté $i^\star$. Nous appelons le point $i^\star$ le *point d'attache du point* i. La notation $i \rightarrow i^\star$ signifie : le point $i^\star$ contraint la profondeur du point i. Cette propriété n'est pas symétrique : $i \rightarrow j$ n'implique pas $j \rightarrow i$. C'est l'une des raisons expliquant que l'initialisation n'est pas optimale. Ce problème est traité au paragraphe suivant.

Un exemple d'initialisation avec trois points est présenté à la figure 6.4. Il y a deux possibilités de bornes initiales par point. Les bornes les plus restrictives sont conservées, c'est-à-dire les bornes issues du points Q_i pour Q_j et Q_k et celle calculée à partir de Q_j pour le point Q_i.

6.4.2 Raffinement des bornes

Dans certaines configurations, les bornes initiales ne sont pas optimales. Une borne optimale est une borne telle qu'il existe une déformation isométrique plaçant le point sur sa borne. Au contraire, une borne non-optimale est une borne qui ne peut jamais être atteinte par le point, quelque soit la déformation isométrique.

L'initialisation produit des bornes non-optimales car les profondeurs ne sont pas considérées dans leur ensemble. Dans l'exemple de la figure 6.4, la borne pour le point Q_k n'est pas optimale. En effet, elle a été évaluée sans tenir compte de la restriction existante sur le point Q_i apportée par le point Q_j. En prenant en compte cette contrainte, le point Q_k ne peut pas atteindre la borne $\breve{\mu}_{ik}$. Cela conduit à une profondeur maximale plus petite pour le point Q_k, notée $\breve{\mu}'_{ik}$.

Pour détecter et corriger les situations non-optimales, nous avons proposé un algorithme itératif. Pendant une itération, pour chaque point, les profondeurs maximales des autres points induites par le point courant sont

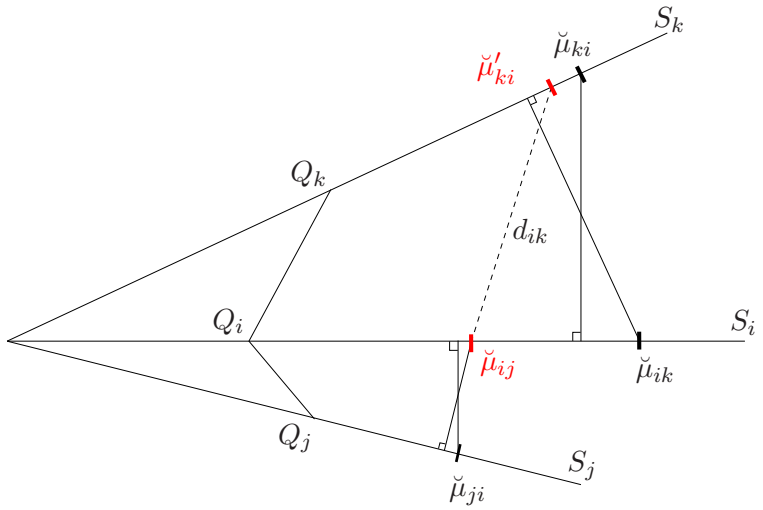


FIGURE 6.4 – **Raffinement des bornes.** La borne initiale $\breve{\mu}_{ki}$ sur le point k devient $\breve{\mu}'_{ki}$ grâce au processus.

évaluées. Celles qui sont plus petites que leurs valeurs précédentes sont mises à jour. Les itérations s'arrêtent lorsqu'il n'y a pas de changement pendant une itération, ce qui signifie que l'ensemble des bornes est cohérent.

Les profondeurs maximales sont calculées lorsque la distance euclidienne entre les points *3D* est égale à la distance géodésique entre les points mesurée sur le modèle de référence. La relation liant les profondeurs des points permettant de satisfaire cette condition est donnée par l'équation (6.5) :

$$\begin{aligned} d_{ij}^2 &= (\mu_j - \mu_i \cos(\alpha_{ij}))^2 + \mu_i^2 \sin^2(\alpha_{ij}) \\ \Leftrightarrow\ \mu_j - \mu_i \cos(\alpha_{ij}) &= \pm\sqrt{d_{ij}^2 - \mu_i^2 \sin^2(\alpha_{ij})} \\ \Leftrightarrow\ \mu_j &= \mu_i \cos(\alpha_{ij}) \pm \sqrt{d_{ij}^2 - \mu_i^2 \sin^2(\alpha_{ij})} \end{aligned}$$

L'équation liant la plus grande profondeur du point j en fonction de la profondeur du point i est :

$$\mu_j\,(\mu_i) = \mu_i\, cos(\alpha_{ij}) + \sqrt{d_{ij}^2 - \mu_i^2\, sin^2(\alpha_{ij})} \tag{6.6}$$

Comme l'illustre la figure 6.5, cette fonction a un maximum global :

$$\mu_i^{max} = \frac{d_{ij}}{\tan(\alpha_{ij})} \qquad \mu_j(\mu_i^{max}) = \frac{d_{ij}}{\sin(\alpha_{ij})} \tag{6.7}$$

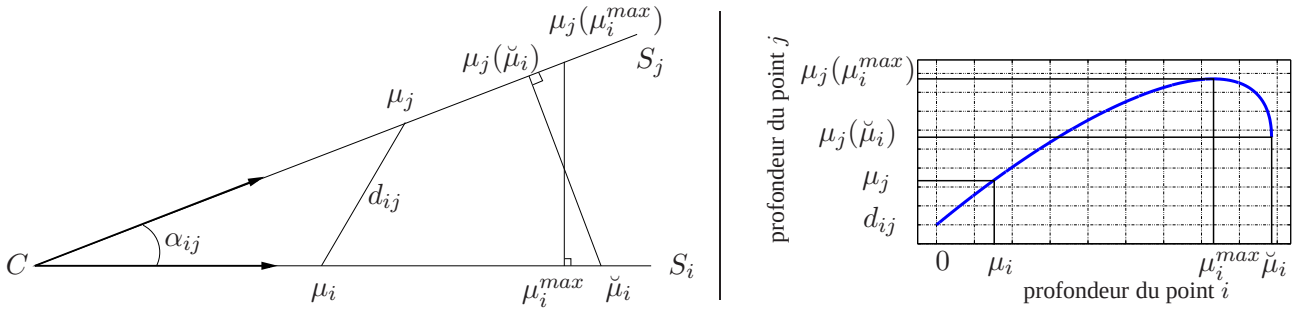


FIGURE 6.5 – **Relation entre les profondeurs des points et la contrainte d'inextensibilité.** (à gauche) La paramétrisation. (à droite) La représentation de la fonction donnant la profondeur maximale du point j par rapport à la profondeur du point i quand la distance entre les points i et j est égale à d_{ij}.

La borne supérieure pour le point j par rapport au point i est donc :

$$\breve{\mu}_{ji} = \begin{cases} \mu_i\, cos(\alpha_{ij}) + \sqrt{d_{ij}^2 - \mu_i^2\, sin^2(\alpha_{ij})} & \text{si} \quad \breve{\mu}_i \leq \frac{d_{ij}}{tan(\alpha_{ij})} \\ \frac{d_{ij}}{sin(\alpha_{ij})} & \text{sinon} \end{cases} \tag{6.8}$$

et la formule pour mettre à jour les bornes est la suivante :

$$\breve{\mu}_j = \min\ (\breve{\mu}_{jj^\star}, \breve{\mu}_{ji})$$

L'algorithme 6.1 résume les étapes du raffinement des bornes. Dans nos expériences, le processus converge en 3 ou 4 itérations. Les données de sortie de l'algorithme sont les bornes sur la profondeur et les points d'attache. Ces deux éléments sont utilisés pour déterminer la surface, comme expliqué dans le paragraphe suivant.

Algorithme 6.1 Raffinement des bornes.

ENTRÉES: Les bornes initiales : $\breve{\mu}_{jj^\star}$.

$c \leftarrow vrai$
tant que c **faire**
  $c \leftarrow faux$
  pour $j = 1$ à nombre de points **faire**
    pour $i = 1$ à nombre de points, $i \neq j$ **faire**
      Calculer $\breve{\mu}_{ji}$ en utilisant l'équation (6.8).
      si $\breve{\mu}_{ji} < \breve{\mu}_{jj^\star}$ **alors**
        $c \leftarrow vrai$
        $\breve{\mu}_{jj^\star} \leftarrow \breve{\mu}_{ji}$
        $j^\star \leftarrow i$
      fin si
    fin pour
  fin pour
fin tant que

SORTIES: Les bornes optimales : $\breve{\mu}_j$.

6.5 Reconstruction de la surface

La reconstruction de la surface est réalisée par une interpolation des points mis en correspondance. Pour cela, il est nécessaire de connaître leurs profondeurs. Pour l'instant, seules les profondeurs maximales sont connues. La détermination de la surface s'effectue donc en deux étapes :

- ▷ **reconstruction d'un ensemble épars de points *3D*.** (section 6.5.1) Les points *3D* sont calculés en utilisant les bornes et les distance entre les points et leurs "attaches".
- ▷ **reconstruction d'une surface continue.** (section 6.5.2) La surface est obtenue par une interpolation des points *3D*, prenant en compte les connaissances a priori sur la surface.

6.5.1 Reconstruction d'un ensemble épars de points *3D*

L'ensemble des bornes donne les profondeurs maximales des points. Pour un algorithme rapide de reconstruction de surface, il est possible d'utiliser directement ces bornes comme les points sur la surface :

$$\tilde{\mu}_i = \breve{\mu}_i \tag{6.9}$$

En pratique, l'erreur due à cette approximation est petite, comme montré par les figures 6.6, 6.7 et 6.8.

Cependant, cette solution n'est pas satisfaisante du point de vue de l'inextensibilité. En effet, la distance entre deux bornes supérieures $\|Q(\breve{\mu}_i) - Q(\breve{\mu}_{i^\star})\|$ peut être supérieure à la distance d_{ij} entre les deux points mesurée sur le modèle de référence. Cela se produit lorsqu'il y a une symétrie entre un point et son point d'attache : $i \rightarrow i^\star$ et $i^\star \rightarrow i$. La distance entre les bornes est alors égale à :

$$\|Q(\breve{\mu}_i) - Q(\breve{\mu}_{i^\star})\| = \frac{d_{ii^\star}}{\cos\left(\frac{\alpha_{ii^\star}}{2}\right)} \geq d_{ii^\star}$$

Pour obtenir une surface plus cohérente, les profondeurs sont optimisées de manière à forcer l'égalité des distances entre les points et leurs attaches. Puisque les bornes initiales ne sont pas éloignés des points *3D* réels, les profondeurs des points satisfaisant l'égalité des distances sont cherchées près des bornes. Le processus d'optimisation peut également traiter d'autres connaissances sur les points. Par exemple, avec une régularisation temporelle du premier ordre, la fonction de coût optimisée est la suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \arg\min_{\mu} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\breve{\mu}_i - \mu_i \right)^2 \right) + \gamma \left\| \mu - \nu \right\| \\ &\text{avec les contraintes} \quad \left\| Q_i - Q_{i^\star} \right\| = d_{ii^\star} \quad \text{pour } i = 1..n \end{aligned} \tag{6.10}$$

avec μ le vecteur des profondeurs, ν le vecteur des profondeurs à l'instant $t-1$ et γ la pondération. C'est un problème de moindres carrés avec des contraintes non linéaires quadratiques. Il est résolu par l'algorithme de Levenberg-Marquardt présenté à la section 2.5.2.3, la solution initiale est donnée par l'équation (6.9).

Le tableau 6.2 montre le temps de reconstruction avec et sans ce processus d'optimisation. Les valeurs sont données à titre indicatif car elles ont été mesurées avec une implantation non optimisée sous Matlab.

nombre de points	50	100	250
temps de reconstruction sans optimisation (ms)	13	35	176
temps de reconstruction avec optimisation (ms)	82	143	444

TABLE 6.2 – **Temps de reconstruction en fonction du nombre de points.**

6.5.2 Reconstruction d'une surface continue

L'interpolation des points *3D* pour déterminer la surface est très similaire à la méthode utilisée à la section 5.3.2.2 sur l'interpolation d'une surface dans le cadre de la reconstruction des surfaces développables.

Les points *3D* reconstruits sont utilisés comme les points de contrôle d'une fonction liant le modèle de référence à l'objet déformé. Cela permet de représenter la surface en transférant un grille régulière tracée sur le modèle de référence. En pratique, la fonction est composée de trois fonctions de type "plaque mince" *2D* vers *1D*. En effet, ces fonctions ont montré de bonnes capacités pour représenter les objets déformables (Bookstein, 1989).

La possibilité de reconstruire une surface continue permet d'intégrer des connaissances sur la surface. Pour cela, un autre processus d'optimisation est utilisé. La fonction de coût est composée de différentes pénalités décrivant les connaissances. Elle dépend de la profondeur des points de contrôle, c'est-à-dire des points mis en correspondance. Par exemple, la fonction de coût suivante décrit la régularité temporelle et géométrique de la surface :

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \arg\min_{\mu} \sum_{i=1}^{n} \left(\breve{\mu}_i - \mu_i \right)^2 + \lambda \sum_{i=1}^{m} \left\| \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial q^2}(q_i) \right\|^2 + \gamma \left\| q_i(t) - q_i(t-1) \right\|^2 \\ &\text{avec les contraintes} \quad \left\| Q_i - Q_{i^\star} \right\| = d_{ii^\star} \quad \text{pour } i = 1..n \end{aligned} \tag{6.11}$$

avec q un sommet de la grille, m le nombre de sommets de la grille et λ, γ les pondérations contrôlant le compromis entre la distance aux bornes, la régularité géométrique et la régularité temporelle. Lorsque les centres sont fixés sur le modèle de référence, le problème (6.11) est un problème de moindres carrés non-linéaires sous contraintes quadratiques non-linéaires. Il est résolu d'une façon similaire au problème (6.10).

6.6 Analyse de l'erreur

La qualité de la reconstruction dépend du nombre de correspondances et du bruit dans les images. Bien que ce dernier ait été ignoré pendant les explications de l'algorithme, nous montrons comment le prendre en compte

en pratique. Les expériences pour déterminer l'erreur de reconstruction par rapport au nombre de points et à l'amplitude du bruit ont été réalisées sur des données de synthèse. Les surfaces utilisées sont modélisées par des surfaces développables car celles-ci sont isométriques au plan. En pratique les surfaces sont des carrés dont le côté mesure 200 mm. Les points sont tirés aléatoirement sur la surface. L'erreur de reconstruction pour le $i$ème point d'intérêt est définie par :

$$e(i) = \|\tilde{Q}_i - \hat{Q}_i\| \tag{6.12}$$

6.6.1 Influence du nombre de points

La figure 6.6 montre l'erreur moyenne de reconstruction par rapport au nombre de correspondances. La courbe pointillée représente l'erreur pour l'implantation rapide (équation (6.9)) et la courbe continue est celle des points optimisés pour tenir compte de l'inextensibilité (équation (6.10)). Comme prévu, l'erreur décroît grâce au processus d'optimisation. Les courbes sont décroissantes : plus le nombre de correspondances est important, plus l'erreur de reconstruction est faible. Cette constatation peut être expliquée par deux phénomènes :

- ▷ **amplitude des déformations.** Avec les déformations, la distance euclidienne entre les points *3D* diminue. D'un certain point de vue, notre algorithme est basé sur la préservation de la distance euclidienne entre un point et son point d'attache. Par conséquent, moins la surface se déforme entre deux points, plus l'erreur de reconstruction est faible.
- ▷ **orientation des points.** L'orientation *3D* d'un point et de son point d'attache change la position relative des points dans l'image. Il existe une configuration dans laquelle l'angle entre un point et son point d'attache est maximum. Cette situation est l'orientation optimale car elle conduit à la borne la plus proche et donc minimise l'erreur de reconstruction.

La probabilité d'avoir des cas optimaux pour la reconstruction augmente avec le nombre de points, c'est pourquoi l'erreur de reconstruction diminue lorsque le nombre de correspondances augmente.

Remarque 6.1. *Il serait intéressant de mener une étude plus détaillée pour interpréter les parts respectives et les corrélations entre ces deux phénomènes dans l'erreur de reconstruction. Il est pour cela possible d'introduire des mesures locales entre les points et leurs points d'attache pour décrire l'amplitude et l'orientation des déformations. La partie délicate de cette caractérisation est due à l'algorithme de raffinement des bornes car il ne fournit pas de solution analytique à la reconstruction.*

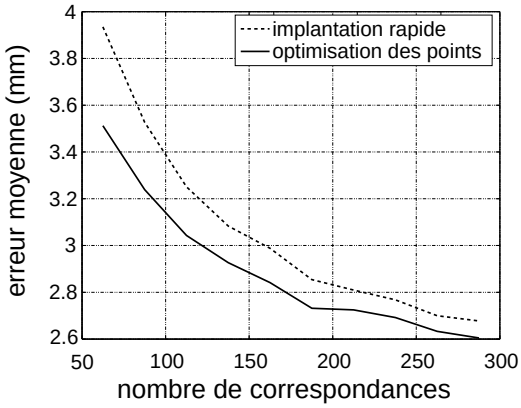


FIGURE 6.6 – **Erreur de reconstruction en fonction du nombre de correspondances.**

6.6.2 Influence du bruit

Dans la présentation de l'algorithme de reconstruction, le bruit dans les correspondances de points n'a pas été pris en compte. Il y a deux façons de le considérer car on peut choisir arbitrairement dans quelle image les

points sont bruités et dans quelle autre leurs positions sont exactes. En effet, il est possible de considérer que les positions des points sont exactes sur l'image de référence et par conséquent bruitées dans l'image de l'objet déformé ou au contraire que les positions exactes sont celles de l'image de l'objet déformé et que le bruit est dans l'image de référence. Ce choix influence les éléments de l'algorithme :

- ▷ le bruit dans l'image de l'objet déformé change l'orientation des lignes de vues,
- ▷ le bruit dans l'image du modèle de référence modifie les distances de référence d_{ij} entre les points.

Comme les points *3D* sont paramétrés le long de leurs lignes de vue, la première possibilité a des repercussions plus complexes sur notre algorithme que la deuxième. Nous choisissons par conséquent d'exprimer le bruit dans l'image de référence.

Les distances bruitées mesurées sur le patron conduisent à des profondeurs maximales plus importantes si elles sont sur-évaluées. Au contraire, une sous-évaluation des distances induit des profondeurs maximales plus faibles, qui se répercutent sur les autres points par l'intermédiaire du processus de raffinement. Ce deuxième cas de figure est plus problématique car il peut conduire à des profondeurs maximales inférieures aux profondeurs réelles des points.

Pour éviter ce phénomène, nous ajoutons un terme correctif constant k aux distances calculées dans l'image de référence :

$$d_{ij} \longleftarrow d_{ij} + k \tag{6.13}$$

Ce terme traduit la fiabilité sur les distances. Son efficacité est liée à l'amplitude du bruit, comme montré sur la figure 6.7. La courbe présente un minimum bien localisé à environ 55% de l'amplitude moyenne du bruit, ce qui donne une méthode empirique pour choisir la valeur de ce terme correctif. Cette courbe expérimentale montre également qu'il est préférable de sur-estimer ce paramètre plutôt que de le sous-estimer. Dans la plupart des expériences sur des séquences réelles, ce terme est fixé à un pixel. Ce dernier pourait également être déterminé en prenant en compte l'imprécision de la détection.

Le bruit dans les correspondances de points étant pris en compte dans l'algorithme, il est possible d'étudier l'influence du bruit sur la qualité de la reconstruction. La précision de la reconstruction se dégrade progressivement avec l'amplitude du bruit, comme montré sur la figure 6.8. Pour une amplitude du bruit de 5 pixels, l'erreur moyenne est inférieure à 5,5 mm.

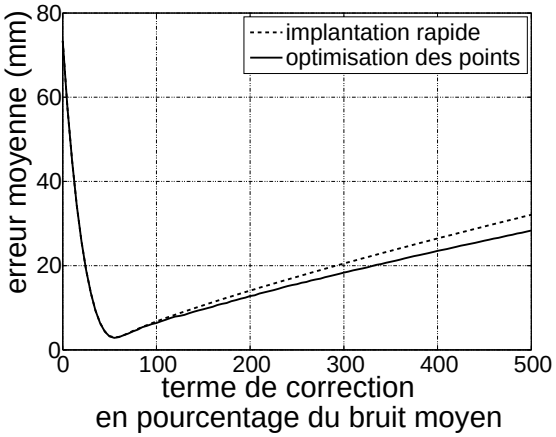


FIGURE 6.7 – **Influence du terme de correction sur l'erreur de reconstruction.**

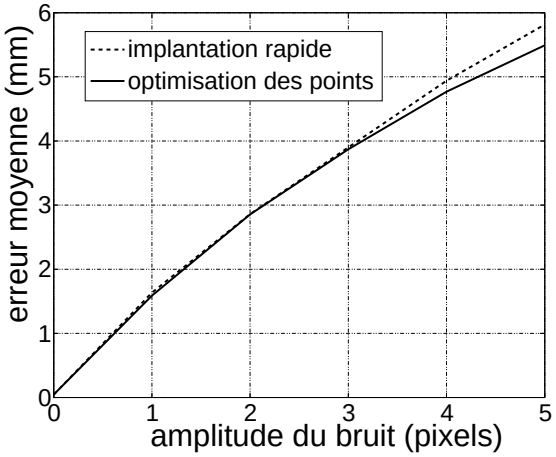


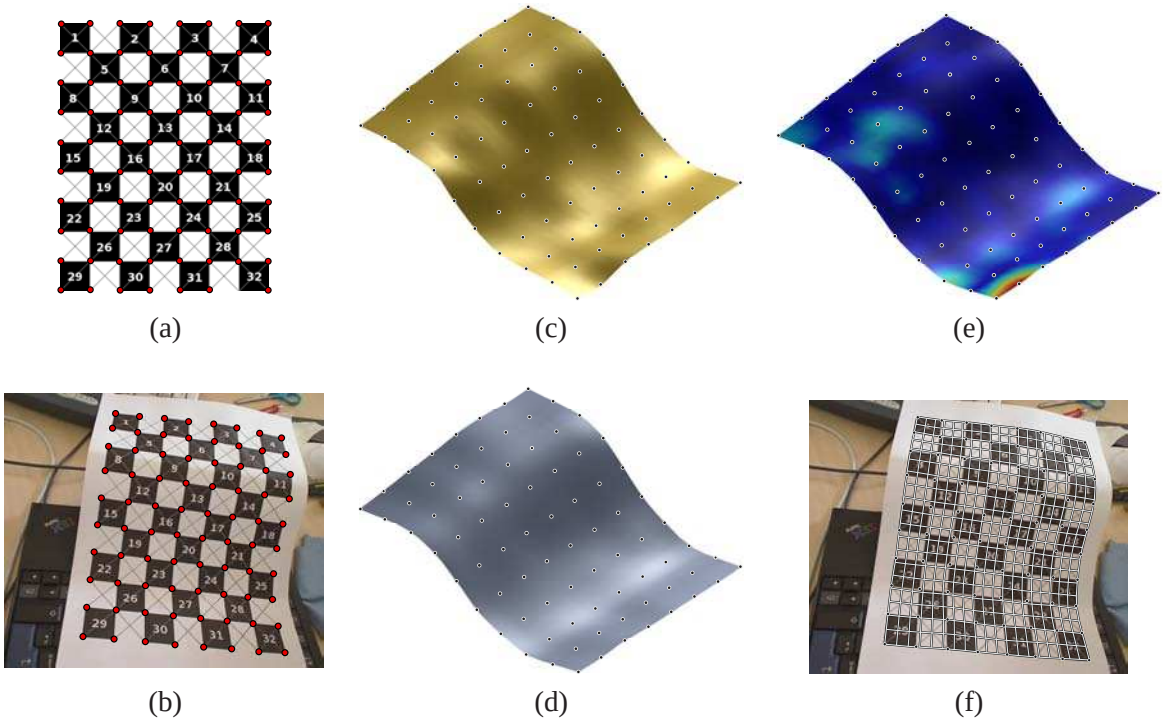
FIGURE 6.8 – **Erreur de reconstruction en fonction de l'amplitude du bruit dans l'image.**

6.7 Résultats expérimentaux sur des données réelles

6.7.1 Reconstruction à partir d'une seule image

Les résultats de cette partie ont été obtenus à partir d'une seule image de l'objet déformé. Les modèles de référence sont ceux montrés sur la figure 6.1. Pour évaluer la qualité des reconstructions, elles sont comparées à des reconstructions *3D* réalisées par vision stéréoscopique. Les surfaces que nous obtenons avec notre algorithme sont alignées sur les reconstructions stéréoscopiques par une transformation rigide et un facteur d'échelle avant d'évaluer les différences.

Reconstruction d'une feuille de papier régulièrement déformée. La forme de la feuille est bien évaluée par notre algorithme et ressemble à celle obtenue par vision stéréoscopique, comme montré par la figure 6.9. La reconstruction est réalisée à partir de 80 points en correspondance. L'erreur RMS est égale à 1,2 mm, ce qui signifie que notre reconstruction est très proche de la reconstruction de référence (l'erreur est exprimée en millimètre car le repère de reconstruction a été mis à l'échelle).



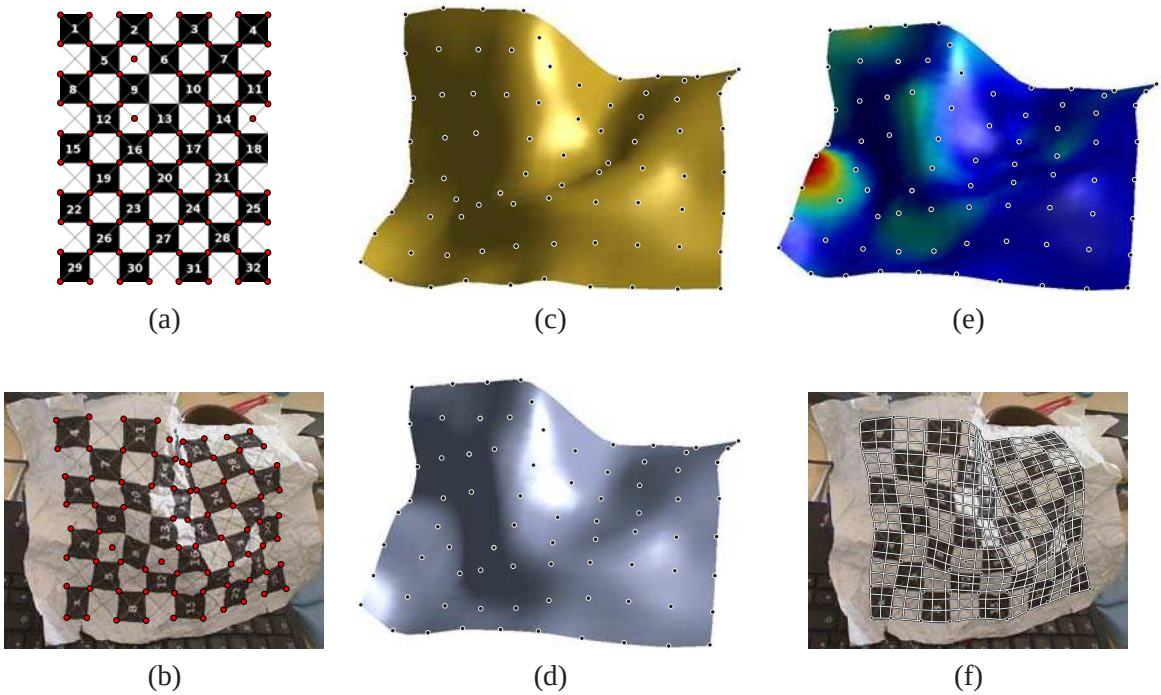
(a) (c) (e)

(b) (d) (f)

FIGURE 6.9 – **Reconstructions de la feuille de papier régulièrement déformée.** (a) Points mis en correspondance sur le patron. (b) Points mis en correspondance sur l'image de la feuille déformée. (c) Reconstruction utilisant notre algorithme. (d) Reconstruction de référence stéréoscopique. (e) Cartes des différences entre les reconstructions. (f) Reprojection de la surface estimée dans l'image.

Reconstruction d'une feuille de papier froissée. Les résultats obtenus pour le papier froissé sont montrés sur la figure 6.10. La reconstruction a été faite avec 78 points. La forme estimée par notre algorithme est similaire à celle obtenue par la méthode stéréoscopique. L'erreur RMS est plus importante que celle pour la déformation régulière, elle est égale à 3,3 mm. Cette légère dégradation de la précision est due aux plis qui rendent les déformations plus difficiles à reconstruire.

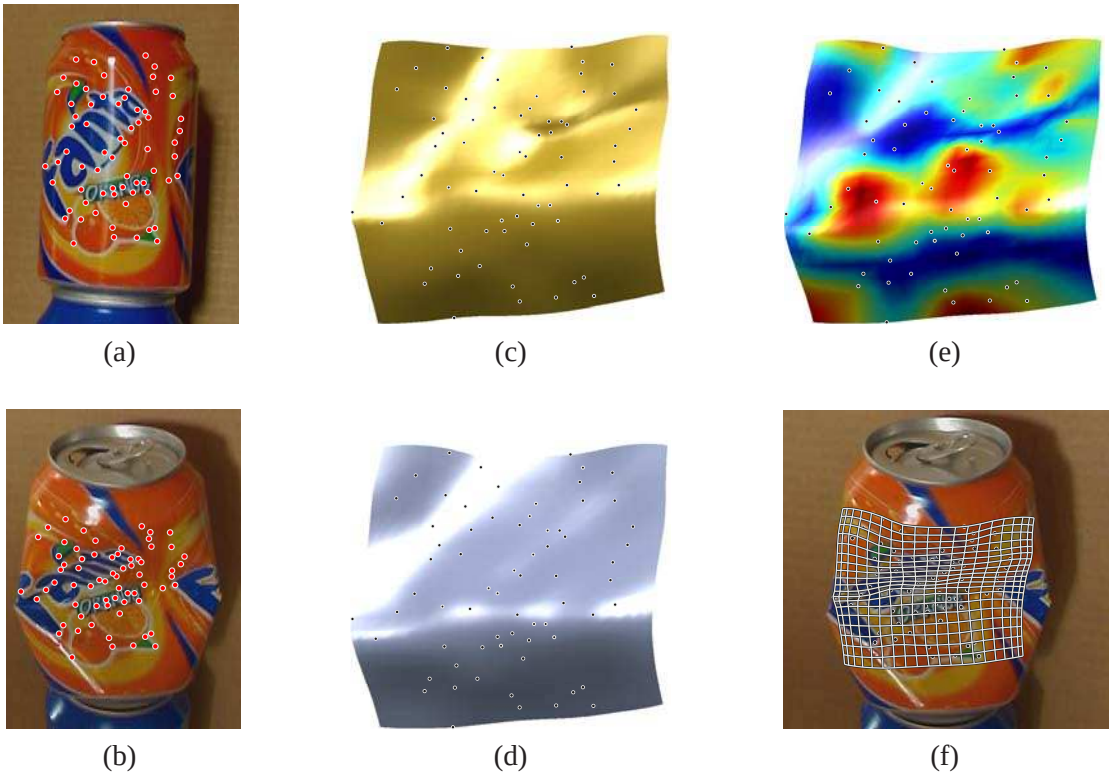
Reconstruction d'une canette pliée. Le modèle de référence pour la canette est un cylindre, il se distingue donc des autres exemples pour lesquels les modèles de référence sont des plans. La forme globale de la surface a été correctement estimée à partir de 72 correspondances, l'erreur RMS étant de 1,6 mm. Les résultats sont montrés sur la figure 6.11.



(a) (c) (e)

(b) (d) (f)

FIGURE 6.10 – **Reconstructions de la feuille de papier froissée.** (a) Points mis en correspondance sur le patron. (b) Points mis en correspondance sur l'image de la feuille froissée. (c) Reconstruction utilisant notre algorithme. (d) Reconstruction de référence stéréoscopique. (e) Cartes des différences entre les reconstructions. (f) Reprojection de la surface estimée dans l'image.



(a) (c) (e)

(b) (d) (f)

FIGURE 6.11 – **Reconstructions de la canette.** (a) Points mis en correspondance sur le patron. (b) Points mis en correspondance sur l'image de la canette déformée. (c) Reconstruction utilisant notre algorithme. (d) Reconstruction de référence stéréoscopique. (e) Cartes des différences entre les reconstructions. (f) Reprojection de la surface estimée dans l'image.

6.7.2 Reconstruction de séquences vidéos

Pour traiter les séquences vidéo de déformations, des pénalités sont introduites dans la régularisation de la surface pour améliorer la cohérence temporelle. La figure 6.12 montre quelques reconstructions et l'utilisation des surfaces *3D* pour ajouter des objets virtuels de manière réaliste dans une séquence de déformation d'une feuille de papier. Les correspondances de points ont été établies par la méthode décrite dans (Gay-Bellile et al., 2007) [1].

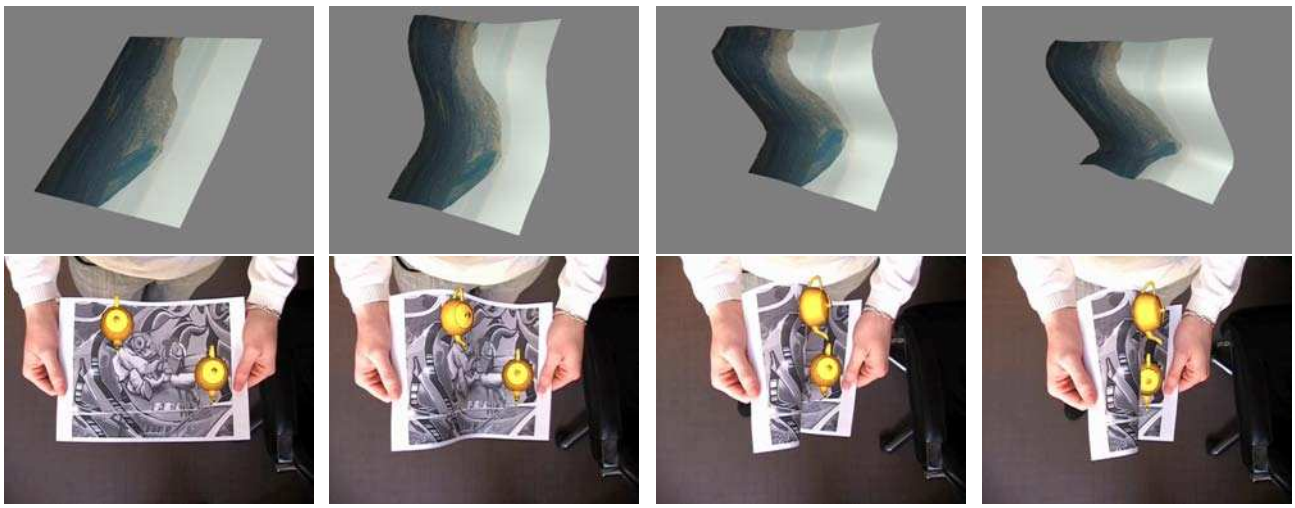


FIGURE 6.12 – **Reconstruction d'une séquence vidéo d'une feuille de papier.** (en haut) Surfaces reconstruites vues sous un angle différent et avec une nouvelle texture. (en bas) Images de la séquence augmentées avec des objets virtuels. La connaissance de la surface *3D* permet d'orienter correctement la théière et de prendre en compte les occultations dues à la feuille de papier.

Le dernier exemple montre les déformations d'un tee-shirt. Les surfaces reconstruites et des exemples d'augmentation sont présentés à la figure 6.13.

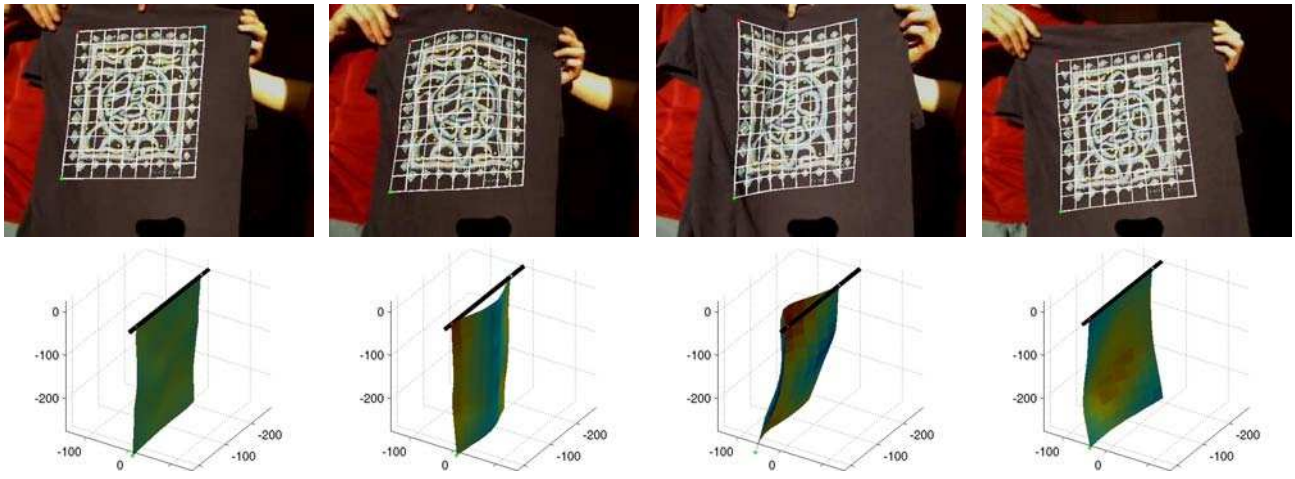


FIGURE 6.13 – **Reconstruction de séquences vidéos d'un tee-shirt.** (en haut) Images de la séquence avec les points en correspondances et la reprojection du maillage représentant la surface. (en bas) Surfaces reconstruites.

1. Nous remercions Vincent Gay-Bellile de nous avoir fourni la séquence et les correspondances de points.

6.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode dédiée à la reconstruction d'objets déformables inextensibles. Notre algorithme utilise un modèle de référence et une image de l'objet déformé obtenue par une caméra perspective. Il permet dans un premier temps de localiser la région de l'espace contenant les points *3D* appartenant à la surface de l'objet. Une procédure permet ensuite d'évaluer la surface. Plusieurs schémas de résolution ont été proposés. La méthode adoptée pour les expériences fait intervenir un processus d'optimisation dans lequel il est possible d'intégrer des connaissances a priori sur la surface. Par exemple, pour traiter les séquences vidéos, des termes de régularisation temporels et spatiaux ont été utilisés.

Les résultats que nous obtenons sont convaincants et montrent que notre algorithme propose une solution simple et efficace au problème de la reconstruction monoculaire *3D* d'objets déformables. Pour évaluer la qualité de nos reconstructions, une partie des exemples a été comparée à des reconstructions de référence obtenues par vision stéréoscopique. Les formes issues de notre méthode sont légèrement plus bruitées que les surfaces de référence. Ce phénomène peut s'expliquer par les hypothèses plus générales utilisées dans notre méthode. Les résultats sont suffisamment pertinents pour permettre l'insertion d'objets virtuels dans des séquences vidéo.

Les études complémentaires et les perspectives concernant la thématique abordée dans ce chapitre sont nombreuses. Elles concernent d'une part l'algorithme et les méthodes de résolution utilisées et d'autre part les extensions pour obtenir un système plus complet.

Une première analyse de l'erreur de reconstruction a été présentée. Elle a permis d'étudier les influences du nombre de correspondances et du bruit sur les points dans la reconstruction. Une autre approche pour évaluer l'erreur de reconstruction consiste à considérer les corrélations entre la précision de reconstruction, la densité et la répartition des points et la complexité des déformations. Dans ce cas il est peut-être possible de se ramener à des problèmes d'échantillonnage largement étudiés en traitement du signal. Par ailleurs, notre algorithme suppose que la caméra est calibrée. L'influence de la précision des paramètres internes de la caméra n'a pas été étudiée, elle permettrait de connaître l'importance respective de l'étape de calibration par rapport aux autres éléments de la méthode. Enfin, notre méthode s'appuie sur la divergence des lignes de vue. Par conséquent, elle devient certainement imprécise pour des grandes focales car celles-ci ont tendance à rendre les lignes de vue parallèles. Il serait donc utile d'étudier l'impact de la distance focale sur la qualité de la reconstruction.

Dans notre algorithme, chaque point est associé à un point d'attache. Par défaut, toutes les correspondances sont des points d'attache potentiels. En pratique, le point d'attache se situe vraisemblablement dans le voisinage du point. Une étude plus spécifique sur les points d'attache devrait permettre de définir un sous-ensemble restreint de correspondances contenant le point d'attache et améliorer ainsi le temps de calcul.

La surface de l'objet est représentée par des fonctions à base radiale. Elles n'ont pas de propriété d'isométrie et par conséquent ne sont pas parfaitement adaptées au problème. La reconstruction pourrait être améliorée en utilisant ou en définissant des fonctions plus adaptées.

L'implantation proposée se base sur un calcul des profondeurs maximales. Ces bornes sont ensuite utilisées comme la solution initiale d'un processus d'optimisation visant à localiser les points *3D*. Cependant d'autres approches sont possibles, certaines ont été présentées dans la section 6.3.2. Afin d'optimiser la précision de reconstruction et les temps de calcul, il paraît nécessaire de comparer les différentes méthodes.

Les étapes restantes pour obtenir un système complet de reconstruction d'objets inextensibles sont la mise en correspondance des points et la détection et suppression des mauvaises correspondances. Pour la mise en correspondance, des méthodes rapides et spécifiques aux environnements déformables ont été proposées, par exemple celle de (Pilet et al., 2007). Il reste à traiter le problème des correspondances erronées. Une solution consiste à analyser a posteriori la cohérence de la reconstruction. En effet, les mauvaises correspondances induisent des zones fortement déformées et pour lesquelles la transformation avec le modèle de référence n'est pas isométrique. Le problème se ramène alors à déterminer les correspondances incriminées dans ces déformations. Une méthode globale ainsi réalisée permettrait par exemple d'estimer les paramètres physiques d'un modèle par une analyse dynamique des surfaces obtenues dans chaque image.

Étant donné que la méthode donne des résultats très satisfaisants, on peut s'interroger sur les possibilités de reconstruction sans utiliser le modèle de référence. Un tel problème est sous-contraint car les distances de

références ne sont pas connues. La solution pourrait être apportée par une régularisation spécifique ou des hypothèses plus contraignantes sur la surface.

CHAPITRE

7

CONCLUSION

La problématique générale de cette thèse a porté sur la reconstruction *3D* d'objets déformables par vision par ordinateur. Ce type de reconstruction étant ambigu dans le cas général, nous avons utilisé des contraintes sur les surfaces pour résoudre le problème. Cela nous a conduit à introduire trois éléments principaux : un modèle de surface développable et deux algorithmes de reconstruction *3D* dédiés respectivement aux surfaces développables et inextensibles. Nous revenons tout d'abord sur ces différentes contributions avant de présenter des perspectives plus générales.

Contributions de la thèse. Notre modèle de surface développable s'appuie sur une étude de leurs propriétés mathématiques. Il est contrôlé par des paramètres ayant une signification physique simple rendant leurs valeurs facilement interprétables. Le nombre de paramètres est variable et s'adapte à la complexité de la forme à représenter. La particularité du modèle provient de la séparation de deux phénomènes intervenant dans la définition d'une surface : la forme générale et la régularité. Ainsi, seule la forme générale est paramétrée, la régularité de la surface étant gérée automatiquement. Notre modèle contribue à la problématique de la reconstruction *3D* de scènes déformables par deux aspects : la génération d'exemples de synthèse et la reconstruction *3D* de surfaces développables.

De manière générale, l'évaluation des performances des algorithmes élaborés dans le cadre des scènes déformables est réalisée expérimentalement : les résultats de l'algorithme sont comparés à des données de référence sur la scène. Ces dernières proviennent soit d'un autre algorithme jugé suffisamment fiable, soit de données de synthèse. Cette deuxième solution est intéressante car tous les paramètres de la scène peuvent être contrôlés. Il faut cependant être capable de générer des scènes réalistes. Notre modèle permet de telles applications. En particulier, nous l'avons utilisé pour évaluer la qualité des reconstructions *3D* calculées par notre algorithme dédié aux objets inextensibles. Il a également permis de tester des algorithmes *2D* pour les scènes déformables, par exemple le calcul de fonctions de déformation.

Notre modèle peut également être considéré comme un nouvel outil pour la reconstruction *3D* de surfaces développables. En effet, il garantit que la solution trouvée est développable. Cette propriété rend les applications plus simples, en particulier la mise à plat.

Plusieurs pistes d'amélioration ont été proposées. Elles concernent principalement les limitations actuelles du modèle. L'élément le plus important en pratique, mais également le plus complexe, est l'extension du

modèle aux surfaces développables singulières. Les tissus déformés ou les feuilles de papier froissées sont des exemples de ces surfaces. Cette extension permettrait de générer des scènes de synthèse plus variées et plus adaptées à la caractérisation des algorithmes pour les scènes déformables.

L'algorithme de reconstruction *3D* de surfaces développables que nous avons proposé fonctionne en deux étapes. Les paramètres du modèle sont tout d'abord initialisés puis ils sont ajustés automatiquement. L'utilisation du modèle rend l'étape d'initialisation complexe car il est nécessaire de traduire l'information incluse dans les images en terme de paramètres du modèle. Plus précisément, l'étape clef du processus est la détection des génératrices de la surface. En se basant sur des propriétés mathématiques, nous avons proposé deux critères de détection. Ceux-ci sont complétés par une analyse globale de la cohérence de la surface. Cette étape constitue la contribution essentielle de l'algorithme.

Les applications principales des surfaces développables se situent au niveau de la numérisation des documents. L'objectif dans ce cadre est de proposer des méthodes permettant de rectifier des images représentant des documents. Ces méthodes se basent sur le fait que la surface des documents est développable et donc isométrique au plan. La problématique revient donc à estimer la transformation entre l'image et le plan. En estimant une surface *3D* développable, ce problème est directement résolu et la rectification est immédiate.

Les perspectives de travail concernent principalement la numérisation des documents. En particulier, les problématiques de super-résolution apparaissent naturellement dans ce contexte. En effet, les différentes images utilisées par l'algorithme actuel peuvent certainement être combinées lors de la rectification pour améliorer la qualité de l'image mise à plat. À plus long terme, il est probablement possible d'étendre la méthode au cas monoculaire. L'objectif dans ce cas serait de pouvoir reconstruire la surface à partir d'une série d'images représentant différentes déformations. Cela permettrait d'associer la simplicité du cas monoculaire aux possibilités de super-résolution offertes par plusieurs images.

La deuxième méthode de reconstruction présentée est dédiée aux surfaces inextensibles. Le cadre de la reconstruction est relativement classique puisqu'il est consitué d'un patron et d'une image de l'objet déformé. Notre méthode se base sur des correspondances de points établies entre ces deux entités. L'élément nouveau par rapport aux méthodes existantes réside dans le traitement de l'inextensibilité. En effet, nous avons montré comment traduire directement cette propriété sur la profondeur de ces points. La surface de l'objet est ensuite représentée sous la forme d'une interpolation de ces points, calculée grâce à un processus optimisant les propriétés de la surface.

Notre méthode pourrait être complétée par des aspects pratiques et théoriques. Par exemple, un problème que nous n'avons pas abordé est la prise en compte des mauvaises correspondances de points entre le patron et l'image. Celles-ci peuvent vraisemblablement être détectées a posteriori par une analyse de la cohérence de la surface. Sur un plan théorique, l'analyse de la qualité de reconstruction en fonction du nombre de points semble être proche des problématiques d'échantillonnage rencontrées en traitement du signal. Il serait donc intéressant d'étudier dans quelle mesure les résultats de ce domaine s'appliquent à notre problématique.

Perspectives générales. Nous avons proposé différentes méthodes de reconstruction *3D* d'objets déformables utilisant des techniques de vision par ordinateur. L'objectif est de calculer la géométrie *3D* de la scène à partir d'images. Ce domaine de recherche est actuellement très actif et de nombreux algorithmes sont proposés. Il paraît nécessaire, pour comparer les méthodes, d'évaluer la qualité des reconstructions *3D*. Une première approche consiste à utiliser les différentes méthodes sur des scènes déformables communes pour lesquelles la géométrie *3D* est connue. D'un point de vue théorique, il est peut être possible d'avoir une approche probabiliste pour déterminer la qualité des reconstructions. En effet, de telles études ont été réalisées dans le cas rigide, des raisonnements similaires peuvent probablement être faits dans le cas déformable.

Dans cette thèse, nous avons abordé la reconstruction des surfaces développables en vision par ordinateur. Ces surfaces possèdent de nombreuses propriétés mathématiques qui s'expriment par des éléments couramment utilisés en géométrie visuelle rigide. Par exemple, les images d'un même plan *3D* sont liées par des homographies et les surfaces développables peuvent être paramétrées par une famille monodimensionnelle de plans. Les résultats établis en géométrie visuelle rigide permettent de savoir dans quelles configurations il est pos-

sible de reconstruire les scènes en *3D*. Cette question reste ouverte dans le cas des surfaces développables : étant données plusieurs images d'une telle surface se déformant, est-il possible de reconstruire la surface. En d'autres termes, la problématique est de savoir si l'hypothèse de surface développable apporte suffisament de contraintes pour que la reconstruction *3D* soit bien posée. Une des dificultés majeures de cette analyse réside dans le traitement de la propriété développable : nous avons montré qu'un critère local (annulation de la courbure gaussienne) n'est pas satisfaisant et qu'un critère global (détection de génératrices) est complexe à mettre en œuvre. La solution est éventuellement de considérer ces surfaces dans l'espace dual, en élaborant par exemple une représentation qui tient compte du caractère projectif de la géométrie visuelle.

Différentes communautés de recherche s'intéressent aux scènes déformables. Ces dernières interviennent notamment en synthèse d'image ou en simulation. Dans ce cadre, des modèles déformables variés sont développés. Ils permettent de représenter par exemple des objets et des phénomènes physiques. Par conséquent, il existe probablement des interactions intéressantes possibles entre ces communautés. Par exemple, en reconstruction *3D* de scènes déformables à partir d'images, le besoin de modèle est important car le problème général est sous-contraint. D'un autre côté, les modèles de simulation sont généralement contrôlés par de nombreux paramètres physiques. Ces derniers permettent notamment de modifier les propriétés des matériaux. Il est certainement possible d'utiliser des reconstructions *3D* de scènes réelles par des procédés de vision pour estimer ces paramètres physiques.

ANNEXE

A

ANNEXES

Résumé.

Ces annexes rassemblent différents travaux réalisés avant et pendant la thèse. Elles viennent compléter l'étude sur la reconstruction *3D* d'objets déformables. Tout d'abord, une démonstration complète les explications concernant notre modèle de surface développable. Une étude sur la localisation des surfaces développables est ensuite présentée. Elle s'appuie sur notre modèle de surface développable et sur notre algorithme de reconstruction de surfaces inextensibles. Nous décrivons également trois autres méthodes traitant de la reconstruction *3D* de scènes déformables, des fonctions de déformation et de l'évaluation de la précision des reconstructions *3D* par les méthodes de Structure-from-Motion.

Contributions.

- ▷ La méthode de reconstruction d'objets déformables par apprentissage à partir d'un modèle *3D* et de sa texture est décrite dans (Gay-Bellile et al., 2006).
- ▷ Les travaux sur l'estimation des fonctions entre les images d'un même objet possiblement déformé sont présentés dans (Bartoli et al., 2007).
- ▷ L'étude sur l'influence de contraintes de jauges sur la reconstruction en "Structure-from-Motion" est publiée dans (Lhuillier and Perriollat, 2006).

A.1 Intersection de segments sur les formes convexes

Une des conditions nécessaires pour que la surface d'un objet développable (objet dont la surface est développable) soit régulière concerne la position de la courbe de régression. Cette dernière doit être située à l'extérieur de la frontière de l'objet (la frontière de l'objet est une courbe fermée). La ligne de régression est le lieu des points d'intersection des génératrices d'une surface développable, voir la section 3.1.4.1.

Dans le modèle génératif des surfaces développables que nous avons proposé au chapitre 4, un ensemble discret de génératrices est considéré. Pour garantir la régularité de la surface générée, les génératrices ne doivent pas se couper sur la surface de l'objet. Dans le cas d'une frontière plane convexe, nous avons traduit cette propriété par une contrainte portant sur l'ordre des abscisses curvilignes des intersections des génératrices avec la frontière de l'objet, voir la section 4.3.3.1.

Nous démontrons ici que la contrainte utilisée implique la non intersection des génératrices sur la surface de l'objet. Cela revient à démontrer la propriété suivante, illustrée par la figure A.1 :

Propriété A.1. *Si* $\{M_1, \cdots, M_{2n}\}$ *est un ensemble de points ordonnés sur le contour d'une forme convexe plane, alors les intersections entre les segments* $[M_1, M_{2n}], [M_2, M_{2n-1}], \cdots, [M_n, M_{n+1}]$ *ne sont pas situées à l'intérieur de la forme convexe.*

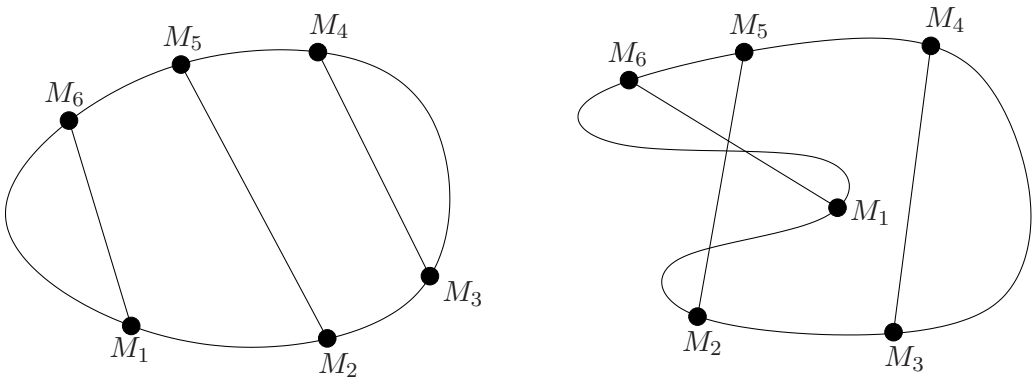


FIGURE A.1 – **Illustration de la propriété.** (à gauche) Sur une forme convexe, l'ordre des points est un critère suffisant pour éviter que les intersections entre les segments soient à l'intérieur de la forme convexe. (à droite) Contre exemple pour une forme non convexe.

La démonstration proposée de la propriété est une preuve par récurrence. Dans un premier temps, la propriété est démontrée pour 4 points, puis elle est généralisée à $2n$ points. Cette démonstration a été réalisée avec la participation de Richard Hartley.

A.1.1 Démonstration avec 4 points

On considère 4 points, notés M_1, M_2, M_3, M_4. Les segments associés sont $[M_1M_4]$ et $[M_2M_3]$, ce sont les génératrices de la surface développable de la forme convexe. Le point singulier de cette surface développable est le point d'intersection des deux segments. Il faut démontrer que ce point ne peut pas être situé à l'intérieur de la forme convexe avec les hypothèses du problème. Nous montrons que les deux cas pour lesquels le point singulier est à l'intérieur de la forme de l'objet ne sont pas compatibles avec les hypothèses du problème (la forme est convexe et les points sont ordonnés sur la frontière).

Les génératrices de la forme convexe sont les segments $[M_1M_4]$ et $[M_2M_3]$. Pour être situé à l'intérieur de la forme convexe, le point singulier doit appartenir à au moins l'un des deux segments. Cela conduit à deux cas de figure, représentés respectivement à gauche et à droite de la figure A.2.

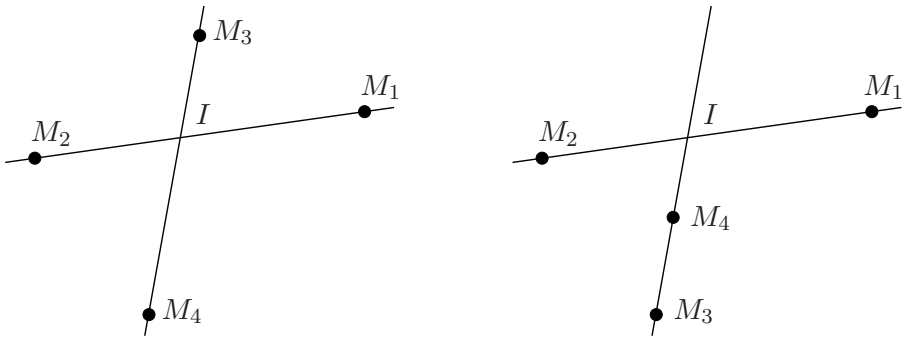


FIGURE A.2 – **Cas possibles d'intersection**. (à gauche) Cas a : le point appartient aux deux segments. (à droite) Cas b : le point singulier appartient à l'un des deux segments.

Remarque A.1. *Le cas limite où le point singulier appartient à la courbe frontière est considéré comme valide. Par conséquent, la notion d'*intérieur *d'un espace réfère à un espace ouvert égal à l'espace retranché de sa courbe frontière.*

Cas a. Les points sont ordonnés le long de la courbe plane fermée constituant la frontière de la forme convexe. Les points M_1 et M_2 définissent deux portions de frontière dont l'intersection est nulle et dont l'union est l'intégralité de la frontière. Les points étant ordonnés le long de la frontière, les points M_3 et M_4 sont situés sur la même portion de frontière.

La droite M_1M_2 définit deux demi-plans. Elle sépare donc la forme convexe en deux sous-espaces convexes (l'intersection de convexes est convexe et les demi-plans sont convexes). Ces deux sous-espaces sont bordés par le segment $[M_1M_2]$ et par les deux portions de frontière. Les points M_3 et M_4 appartenant à la même portion de frontière, ils sont donc dans le même sous-espace convexe. En particulier, ils sont situés du même coté de la droite M_1M_2. Par conséquent le cas a d'intersection ne peut pas se produire.

Cas b. Le raisonnement suivant est un raisonnement par l'absurde. Le point singulier est supposé exister, nous montrons que cela n'est pas compatible avec les hypothèses du problème.

Le point singulier I appartient au segment $]M_1M_2[$. Sans perte de généralité, on suppose que le point M_4 est plus proche de I que le point M_3. Le point I appartient au segment $[M_1M_2]$ si et seulement si le point M_4 est à l'intérieur du triangle $M_1M_2M_3$. Par conséquent, le point M_4 n'appartient pas à la frontière du triangle. Or les points M_1, M_2 et M_3 sont sur la courbe frontière de l'espace convexe. Donc l'intérieur du triangle est inclus dans l'intérieur de l'espace convexe. Le point M_4 est à l'intérieur de ce triangle, il n'appartient donc pas à sa frontière. Cette conclusion est contradictoire avec l'hypothèse que les points sont ordonnés le long du contour.

Conclusion. Les deux cas pour lesquels le point singulier est situé à l'intérieur de la forme convexe ne sont pas compatibles avec les hypothèses du problème. Par conséquent, la propriété est vraie pour quatre points.

A.1.2 Généralisation à un nombre fini de points

La propriété est supposée vraie pour $2n$ points $\{M_1, \cdots, M_{2n}\}$ ordonnés le long du contour. Nous montrons que ce résultat implique que la propriété est vraie pour $2n+2$ points.

Les deux points supplémentaires sont ajoutés en respectant l'ordre. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'ils sont insérés au début et à la fin des points existants. Ainsi l'ensemble de points $\{M_0, M_1, \cdots, M_{2n}, M_{2n+1}\}$ est ordonné le long de la forme convexe. Pour que la propriété soit vraie, il faut que le segment ajouté $[M_0M_{2n+1}]$ n'ait pas d'intersection à l'intérieur de l'espace convexe avec les autres segments.

Or $\forall i \in [1, n]$, les points $\{M_0, M_i, M_{2n+1-i}, M_{2n+1}\}$ sont ordonnés le long de la frontière d'un espace convexe. L'intersection entre les segments $[M_0 M_{2n+1}]$ et $[M_i M_{2n+1-i}]$ est donc située à l'extérieur de l'espace convexe. La propriété est donc vraie pour $2n + 2$ points, ce qui termine la démonstration.

A.2 Vers la localisation des surfaces développables

Dans le chapitre 6, une méthode est présentée pour calculer les profondeurs maximales de points (appelées bornes) appartenant à un objet inextensible à partir d'une image de l'objet déformé et d'un modèle de référence. La seule contrainte utilisée dans la méthode est l'inextensibilité. Les bornes permettent de définir la région de l'espace contenant la surface : celle-ci est située entre le centre de la caméra et les bornes sur la profondeur. Une surface solution "plausible" est ensuite déterminée automatiquement dans cette région par un processus d'optimisation. La méthode proposée fonctionne en pratique mais les résultats ne sont pas garantis : il existe des configurations pour lesquelles la surface reconstruite est très différente de la surface de l'objet.

Pour pallier à ce genre de problèmes, des solutions ont été proposées. Parmi elles, l'analyse par intervalle permet de déterminer non pas la solution au problème mais un intervalle de "petite dimension" encadrant la solution. Bien que nous n'utilisons pas directement cette méthode, nous en retenons le principe général. Plus précisément, dans le cadre de notre algorithme de reconstruction, l'intervalle est une région de l'espace entourant la surface réelle. La région de l'espace bornée par la profondeur maximale des points constitue donc un premier intervalle. Ce dernier est "grand" et ne permet donc pas de localiser correctement la surface. L'étude suivante présente une possibilité pour obtenir un intervalle plus petit.

Parmi les hypothèses que nous avons faites pour l'algorithme, il n'existe pas de contrainte permettant d'évaluer une borne inférieure sur les profondeurs des points. Dans le cadre de cette étude, nous supposons de plus que la surface observée est développable et ne contient qu'une portion (absence de portion plane de raccordement du type de celle apparaissant sur la figure 3.11). Avec cette nouvelle hypothèse, nous présentons une méthode pour mettre en équation le problème de la localisation.

A.2.1 Problématique et propriétés

Les surfaces considérées étant développables, le modèle de référence est un plan. La figure A.3 résume les hypothèses et l'objectif de la méthode : déterminer des bornes sur les profondeurs de points appartenant à une surface développable en utilisant des correspondances de points entre le plan de référence et une image de la surface développable obtenue par une caméra perspective calibrée.

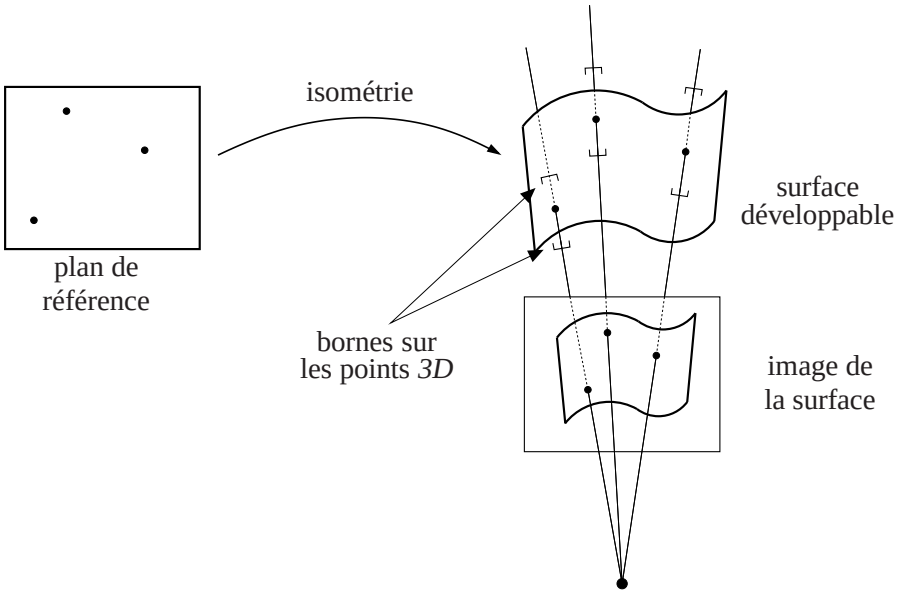


FIGURE A.3 – **Principe de la localisation.** À partir des correspondances de points, l'objectif est de borner la profondeur des points *3D* appartenant à la surface développable.

Comme cela a été expliqué au chapitre 3, les surfaces développables sont les surfaces régulières isométriques au plan. Elles sont constituées d'un ensemble dense de génératrices. Par conséquent, en tout point de la

surface, il passe une génératrice.

L'objectif de la méthode est de localiser un objet dont la surface est développable. Il existe donc une frontière dessinée sur la surface et délimitant l'objet. Nous supposons de plus que la surface de l'objet ne présente pas de singularité. Les intersections entre les génératrices ne sont donc pas situées à l'intérieur de la frontière de l'objet.

Ces différentes propriétés permettent d'établir des contraintes sur les distances entre les points d'une surface développable :

1. les distances euclidiennes entre les points d'une même génératrice mesurées sur le plan de référence et sur la surface développable sont égales,
2. la distance euclidienne entre deux points n'appartenant pas à la même génératrice mesurée sur la surface développable est inférieure ou égale à la distance euclidienne entre ces deux points mesurée sur le plan de référence,
3. la borne inférieure sur la distance euclidienne entre deux points n'appartenant pas à la même génératrice mesurée sur la surface développable n'est pas systématiquement nulle [1].

Les deux premières contraintes sont illustrées par la figure A.4. La troisième contrainte est donnée à titre indicatif et n'est pas considérée ici.

La surface développable étant inconnue, aucune indication concernant les positions des génératrices passant par les points n'est disponible. Or les contraintes identifiées s'appliquent sur les génératrices dans le plan de référence. La méthode que nous proposons se base donc sur une succession d'hypothèses et de tests. Les étapes principales sont les suivantes :

1. hypothèse sur la position de la génératrice passant par un des points mis en correspondance,
2. écriture des contraintes associées,
3. détermination des bornes sur le point.

Ces différents éléments sont expliqués plus en détail dans la suite.

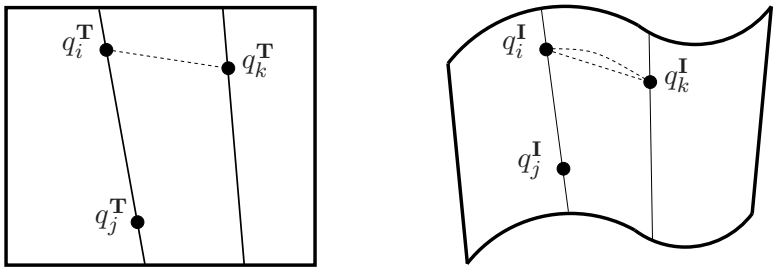


FIGURE A.4 – **Contraintes sur les distances entre les points d'une surface développable.** Les distances $\|q_i^{\mathbf{T}} - q_j^{\mathbf{T}}\|$ et $\|q_i^{\mathbf{I}} - q_j^{\mathbf{I}}\|$ sont égales car les points q_i et q_j appartiennent à la même génératrice. La distance $\|q_i^{\mathbf{I}} - q_k^{\mathbf{I}}\|$ est inférieure à la distance $\|q_i^{\mathbf{T}} - q_k^{\mathbf{T}}\|$ car les points q_i et q_j n'appartiennent pas à la même génératrice.

A.2.2 Mise en équation

La première étape consiste à faire une hypothèse sur la position d'une génératrice $G_r^{\mathbf{T}}$ dans le plan de référence. Cette génératrice passe par un des points mis en correspondance, il est noté $q_r^{\mathbf{T}}$. Il est alors possible de projeter les points du plan de référence sur la génératrice pour définir des nouveaux points, notés $\dot{q}_i^{\mathbf{T}}$. Deux distances sont ensuite associées à chaque point :

$$\begin{aligned} d_i^{\perp} &= \|q_i^{\mathbf{T}} - \dot{q}_i^{\mathbf{T}}\| \\ d_i^{\parallel} &= \|q_r^{\mathbf{T}} - \dot{q}_i^{\mathbf{T}}\| \end{aligned}$$

1. La déformation qui annule la distance entre deux points est équivalente à un pli de 180°le long de la médiatrice des deux points. Cette déformation n'est pas toujours possible car elle peut être incompatible avec des génératrices déja définies sur la surface. Par conséquent, la distance minimale entre les deux points n'est pas nulle.

Ces éléments sont représentés sur la figure A.5. Il est alors possible d'expliciter les deux contraintes :

▷ **Contrainte 1.** Les distances entre les points d'une même génératrice n'étant pas modifiées par l'isométrie, les points $\dot{Q}_i$ sont positionnés sur la génératrice *3D* par rapport au point de référence Q_r.

▷ **Contrainte 2.** Les distances entre les points Q_i et les points $\dot{Q}_i$ de la génératrice sont inférieures ou égales à $d_i^{\perp}$.

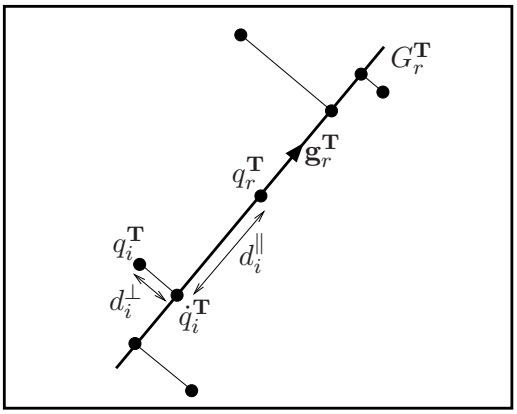


FIGURE A.5 – **Hypothèse sur le placement d'une génératrice dans le plan de référence.** La génératrice passant par le point $q_r^{\mathbf{T}}$ est dirigée par le vecteur $\mathbf{g}_r^{\mathbf{T}}$. Les distances $d^{\perp}$ et $d^{\parallel}$ peuvent alors être définies.

La caméra utilisée pour obtenir l'image de la surface développable étant calibrée, il est possible d'évaluer les lignes de vues dans un repère métrique. Les points *3D* Q_i sont paramétrés dans cette représentation par leurs profondeurs μ_i :

$$Q_i(\mu_i) = \mu_i \, \mathbf{v}_i + C \tag{A.1}$$

La contrainte sur la profondeur $\mu_r(\mathbf{g}_r^{\mathbf{T}})$ du point Q_r sous l'hypothèse de l'orientation de la génératrice $\mathbf{g}_r^{\mathbf{T}}$ peut alors s'écrire :

$$\mu_r(\mathbf{g}_r^{\mathbf{T}}) \in [\mu_r^{\min}(\mathbf{g}_r^{\mathbf{T}}) \; \mu_r^{\max}(\mathbf{g}_r^{\mathbf{T}})] \quad \Leftrightarrow \quad \exists \, \mathbf{g}_r^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^3, \; \{\mu_i\} \in \mathbb{R}^{n-1} \quad / \quad \begin{array}{l} \|Q_i(\mu_i) - \dot{Q}_i\| \leq d_i^{\perp} \\ \text{avec} \quad \dot{Q}_i = d_i^{\parallel} \mathbf{g}_r \end{array} \tag{A.2}$$

les profondeurs $\mu_r^{\min}(\mathbf{g}_r^{\mathbf{T}})$ et $\mu_r^{\max}(\mathbf{g}_r^{\mathbf{T}})$ sont les profondeurs minimale et maximale du point Q_r sous l'hypothèse d'orientation de la génératrice. Une interprétation géométrique de l'équation (A.2) est la suivante :

▷ la génératrice *3D* G_r est un segment coupant la ligne de vue du point $q_r^{\mathcal{I}}$ au point Q_r de profondeur μ_r,

▷ les points $\dot{Q}_i$ sont définis sur ce segment par leurs distances $d_i^{\parallel}$ au point Q_r,

▷ les distances $d_i^{\perp}$ définissent des cylindres $\mathcal{C}_i$ ayant pour axes les lignes de vue des points $q_i^{\mathbf{I}}$ et de rayon $d_i^{\perp}$,

▷ les positions possibles des génératrices sont telles que chaque point $\dot{Q}_i$ appartient à son cylindre $\mathcal{C}_i$.

Les bornes sur la profondeur du point Q_r sont finalement données par :

$$\begin{aligned} \mu_r^{\min} &= \arg\min_{\mathbf{g}_r^{\mathbf{T}}}(\mu_r(\mathbf{g}_r^{\mathbf{T}})) \\ \mu_r^{\max} &= \arg\max_{\mathbf{g}_r^{\mathbf{T}}}(\mu_r(\mathbf{g}_r^{\mathbf{T}})) \end{aligned}$$

Illustration. Il est difficile de présenter une figure *3D* claire du problème, en revanche une illustration *2D* est possible. Pour définir le plan de représentation, nous considérons une orientation possible de la génératrice $\mathbf{g}_r^{\mathbf{I}}$ dans l'image de la surface développable. Le plan de représentation est le plan obtenu par rétro-projection de cette génératrice. Il passe par le centre de la caméra et contient la ligne de vue du point q_r. Il est noté Π.

Les intersections entre le plan Π et les cylindre $\mathcal{C}_i$ sont des ellipses, notées $\mathcal{E}_i$. La figure A.6 montre quelques unes de ces ellipses pour un exemple de synthèse.

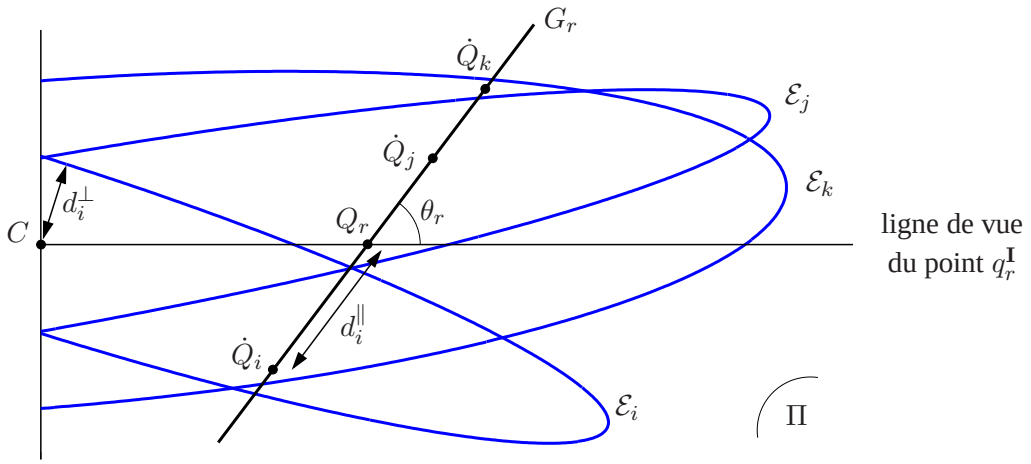


FIGURE A.6 – **Quelques ellipses dans le plan Π.** Les points Q_i, Q_j et Q_k doivent appartenir respectivement aux ellipses $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_j$ et $\mathcal{E}_k$ pour que la solution soit valide.

Remarques diverses. La mise en équation du problème fait intervenir une hypothèse sur l'orientation des génératrices dans le plan de référence. Afin de couvrir toutes les orientations possibles, il est possible de remplacer cette orientation par un secteur angulaire. Il faut alors prendre en compte cette modification dans la définition des distances $d_i^{\perp}$ et $d_i^{\parallel}$.

Avec l'hypothèse de surface développable régulière, les génératrices ne doivent pas se couper à l'intérieur de la frontière de l'objet. Cette contrainte peut être vérifiée sur le plan de référence. À chaque nouveau point considéré, il faut imposer la compatibilité entre les génératrices en utilisant par exemple la méthode présentée à la section 4.3.3.1. Cette réduction du domaine de validité des génératrices doit s'accompagner d'une mise à jour des bornes sur les profondeurs des points.

Nous n'avons pas trouvé de méthode satisfaisante pour la résolution du problème. Il est possible de le formuler comme une minimisation sous contraintes quadratiques. En pratique, la résolution n'est pas simple à cause de la dimension du problème. En suivant la démarche de l'illustration *2D*, il est possible d'obtenir un problème de type "Second Order Cone Programming" (Sturm, 1999). Cependant, cela nécessite trois discrétisations d'angles, il se pose le problème du pas de discrétisation.

A.3 Algorithmes pour la réalité augmentée

Pour illustrer les résultats que nous avons obtenus avec nos différents algorithmes, nous avons montré des applications en réalité augmentée. Celles-ci permettent d'évaluer visuellement la qualité des reconstructions. En particulier nous avons réalisé des mises à plat de document, des remplacements de texture ou encore des insertions d'objets virtuels dans des vidéos. Nous présentons dans cette partie les points essentiels à mettre en œuvre pour ces applications.

La première partie est consacrée aux deux méthodes de base pour la synthèse d'images : le z-buffer et le modèle de réflectance. Elles sont décrites en détails dans (Foley et al., 1995). La deuxième partie présente les algorithmes utilisés.

A.3.1 Principes de base

A.3.1.1 Z-buffer

Le z-buffer est la méthode qui permet d'effectuer le rendu d'une scène *3D* de synthèse. Le problème est de prendre en compte la profondeur des objets pour déterminer quelles parties des objets sont visibles et quelles sont les parties cachées.

La méthode associe une profondeur à chaque pixel de l'image. Lors de l'ajout d'un objet dans la scène, les profondeurs des pixels sur lesquel l'objet se projette sont comparées aux valeurs courantes des profondeurs. Si l'objet est plus proche, les profondeurs sont mises à jour et les pixels prennent la couleur de l'objet. Dans le cas contraire, aucune modification n'est apportée à l'image. Il peut être nécessaire de considérer l'objet par parties pour tenir compte des différentes faces. La figure A.7 montre un exemple de carte des profondeurs.

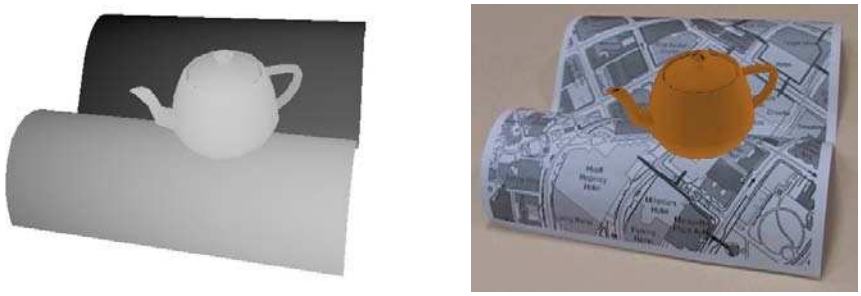


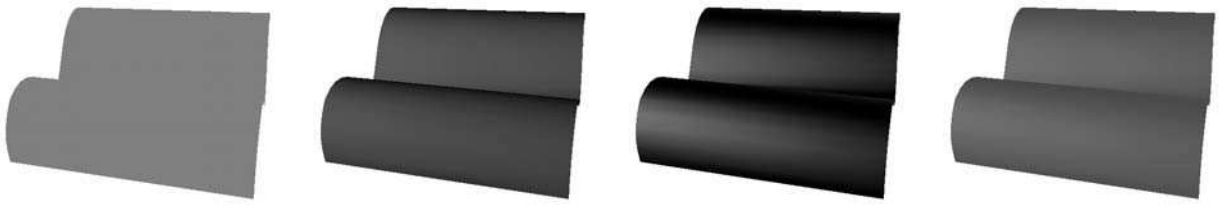
FIGURE A.7 – **Carte de profondeur.** (à gauche) La carte des profondeurs retournée par l'algorithme du z-buffer. (à droite) L'image de la séquence avec l'objet inséré.

A.3.1.2 Modèle de réflectance

Le modèle d'illumination permet de déterminer l'intensité de la surface d'un objet dans le rendu d'une scène. Il joue un rôle prépondérant dans la perception des formes et des perspectives. Le modèle que nous utilisons dans nos différentes illustrations est le modèle de Phong. Il s'applique sur des sources lumineuses ponctuelles. Il met en œuvre trois phénomènes dans le calcul de l'intensité :

- ▷ la composante diffuse : elle traduit la quantité de lumière réfléchie par l'objet en fonction de l'orientation de la surface par rapport aux sources lumineuses,
- ▷ la composante spéculaire : elle dépend de la position relative de l'observateur par rapport à la surface et aux sources lumineuses,
- ▷ la lumière ambiante : elle s'applique uniformément à la surface de l'objet, elle est donc indépendante de la surface, de la direction d'observation et de la position des sources lumineuses.

La figure A.8 montre les contributions respectives des ces différents éléments.



(a) (b) (c) (d)

FIGURE A.8 – **Composantes du modèle d'illumination de Phong.** (a) Éclairage ambiant. (b) Composante diffuse. (c) Composante spéculaire. (d) Résultat de la combinaison des différents termes.

A.3.2 Algorithmes

Les deux méthodes présentées nécessitent de connaître la surface *3D* de l'objet. Cette dernière peut être estimée à partir des méthodes présentées aux chapitres 5 et 6.

A.3.2.1 Mise à plat

La mise à plat est l'opération consistant à estimer une image plane de la texture d'un objet à partir d'une image de cet objet déformé. La procédure nécessite deux étapes, une fois la surface estimée :

1. les parties cachées de l'objet sont détectées en utilisant un z-buffer,
2. dans les zones visibles, l'intensité des pixels sur la carte de texture est interpolée à partir de l'image de l'objet déformé. La fonction de transfert entre les deux images est donnée par l'intermédiaire de la surface *3D* et de la caméra.

Des exemples de mise à plat utilisant cette méthode sont présentés aux figures 5.24, 5.23 et 5.26. Une étape supplémentaire consiste à corriger l'image de texture pour supprimer les effets de l'éclairage (par exemple une illumination non uniforme, ou des effets d'ombre). Cette amélioration n'est possible que si les paramètres d'un modèle d'illumination ont pu être estimés.

A.3.2.2 Remplacement de texture et insertion d'objets virtuels

Les méthodes pour changer une texture ou insérer des objets virtuels sont identiques. Les étapes principales sont les suivantes :

1. composer la scène *3D* en plaçant les nouveaux objets par rapport à la surface estimée,
2. choisir le modèle et les paramètres permettant de contrôler l'illumination de la scène,
3. déterminer les objets visibles dans la scène à l'aide d'un z-buffer,
4. effectuer le rendu des objets visibles en tenant compte de l'illumination,
5. superposer ces différents éléments à l'image de la scène.

Une attention particulière doit être portée sur le modèle d'illumination. En effet, il joue un rôle important dans le réalisme de la scène obtenue. Les figures 5.22, 5.25 ou encore 6.12 ont été réalisées par ce processus.

A.4 Autres travaux

Nous présentons succinctement dans cette section les autres travaux étudiés avant ou pendant la thèse. Des explications plus détaillées sont données dans les publications associées.

A.4.1 Suivi de surfaces déformables par apprentissage

▷ La méthode est publiée dans (Gay-Bellile et al., 2006).

Cette méthode constitue la première étude réalisée au cours de ma thèse sur le thème de la reconstruction d'objets déformables. L'approche est monoculaire et fonctionne avec une caméra calibrée. Le principe général est d'associer des informations *3D* avec une méthode *2D* d'alignement d'images. La partie *3D* intègre un modèle de référence et les paramètres d'une caméra. L'alignement entre les images est réalisé par le calcul d'une *fonction de déformation*. Cette fonction met en correspondance les points entre les images.

En pratique, la fonction de déformation est une fonction à base radiale de type "plaque-mince". Ses paramètres sont estimés à partir de correspondances de points entre les images. Ces correspondances sont données par la projection des points *3D* appartenant à la surface reconstruite. Dans notre algorithme de reconstruction, l'erreur est évaluée par la différence d'intensité entre les images (cette dernière peut être évaluée grâce à la fonction de déformation). La minimisation de la différence d'intensité fait donc directement intervenir les positions des points *3D* sur la surface déformée.

Cette minimisation est réalisée de manière itérative par un processus basé sur un apprentissage préalable des déformations. Pour cela des images de synthèse de l'objet déformé sont réalisées par tirage aléatoire des paramètres d'un modèle *3D* générique. Ce modèle est issu d'un apprentissage linéaire non-supervisé similaire à celui présenté à la section 4.4.3. Les images de synthèse associées à leurs vecteurs de paramètres constituent la base d'apprentissage. Une relation linéaire entre les variations d'intensité et les paramètres est alors estimée. Elle est exploitée dans la détermination des variations à appliquer sur les paramètres pour faire diminuer l'erreur de reconstruction.

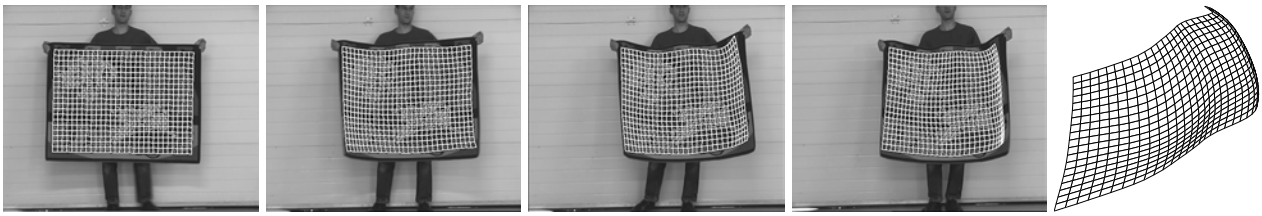


FIGURE A.9 – **Résultat d'un suivi déformable par apprentissage.** Reprojections du modèles *3D* estimé dans quelques images de la séquence. (à droite) Le modèle *3D* pour la dernière image de la séquence.

Les deux contributions de notre méthode sont l'association de la fonction de déformation *2D* avec les paramètres *3D* permettant de reconstruire directement une surface *3D* et la méthode d'estimation des paramètres basée sur un apprentissage. Le fait de disposer d'un modèle *3D* permet d'intégrer des connaissances sur la surface. La méthode permet de suivre correctement les déformations dans les images comme le montre la figure A.9. En revanche, la surface *3D* manque parfois de réalisme. Pour améliorer cette partie, il nous a semblé nécessaire de travailler avec un modèle *3D* plus contraint. Cette étude a abouti sur le modèle de surface développable présenté au chapitre 4.

A.4.2 Les fonctions de déformation plaques minces généralisées

▷ Ces travaux sont publiés dans (Bartoli et al., 2007).

Les fonctions de déformation mettent en correspondance des points entre des images. D'une manière générale, elles sont suffisamment flexibles pour prendre en compte les différents types de déformation. Cependant, elles

ne permettent pas de représenter correctement des géométries rigides ni les effets de perspective. L'étude proposée étudie les fonctions de déformation de type "plaques minces" pour des scènes rigides ou déformables imagées par des caméras affines ou perspectives. Nous avons établi des fonctions de déformation spécifiques pour les quatre combinaisons possibles de ces différents paramètres, deux d'entre elles sont illustrées sur la figure A.10.

Les formulations établies s'accompagnent d'une nouvelle paramétrisation des plaques minces adaptée à la problématique. L'estimation des fonctions de déformation se ramène à des problèmes de moindres-carrés linéaires ou non-linéaires suivant les propriétés de la scène.

Dans les environnements rigides, nos fonctions de déformation sont conformes aux contraintes imposées par la géométrie épipolaire. Nous avons également déterminé expérimentalement les distances focales séparant les scènes imagées par des caméras affines de celles obtenues grâce à des caméras perspectives.

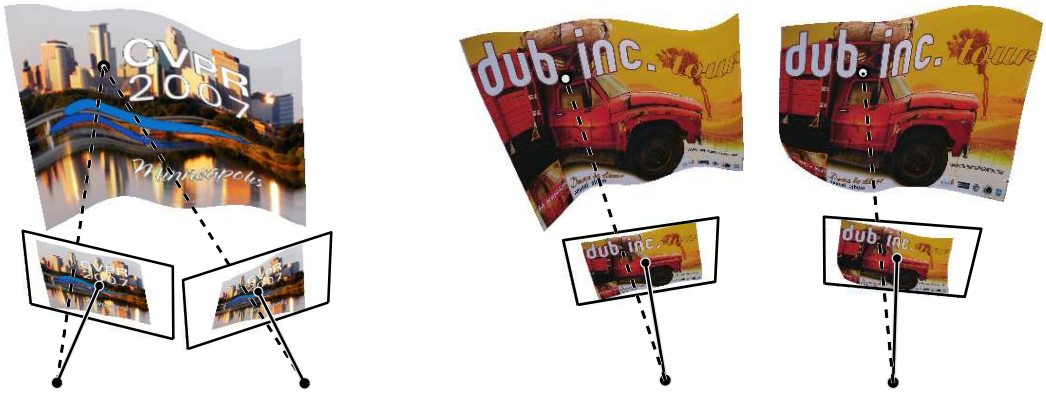


FIGURE A.10 – **Exemples de scènes traitées par les fonctions de déformation plaques minces généralisées.** (à gauche) La scène est rigide et perspective. (à droite) La scène est déformable et perspective. Les fonctions de déformation sont calculées entre les deux images.

A.4.3 Calcul d'incertitude

▷ Cette étude est publiée dans (Lhuillier and Perriollat, 2006).

L'évaluation de la précision de reconstruction en fonction du bruit de mesure est une caractéristique importante des algorithmes de reconstruction. Cette propriété peut être évaluée expérimentalement ou théoriquement. La détermination expérimentale est plus simple et par conséquent plus courante. Elle consiste à utiliser l'algorithme sur des données de synthèse. De cette manière, les résultats peuvent être comparés aux valeurs réelles, notamment en fonction du bruit sur les données. L'approche théorique se base sur l'étude de l'influence du bruit de mesure sur les éléments de l'algorithme afin d'établir la relation entre le bruit de mesure et la qualité des résultats. Elle se distingue de la méthode expérimentale par la possibilité d'évaluer la qualité d'un résultat sans pour autant connaître les valeurs réelles.

La détermination que nous avons proposée s'applique aux reconstructions par triangulation. La problématique intègre en plus le choix des éléments servant à définir le repère de reconstruction. Plus précisément, nous avons montré comment prendre en compte ce choix dans le calcul de la précision. La méthode décrite permet de localiser de manière probabiliste les positions réelles des caméras et des points. La figure A.11 montre les différences sur la probabilité des positions induites par les éléments définissant le repère de reconstruction.

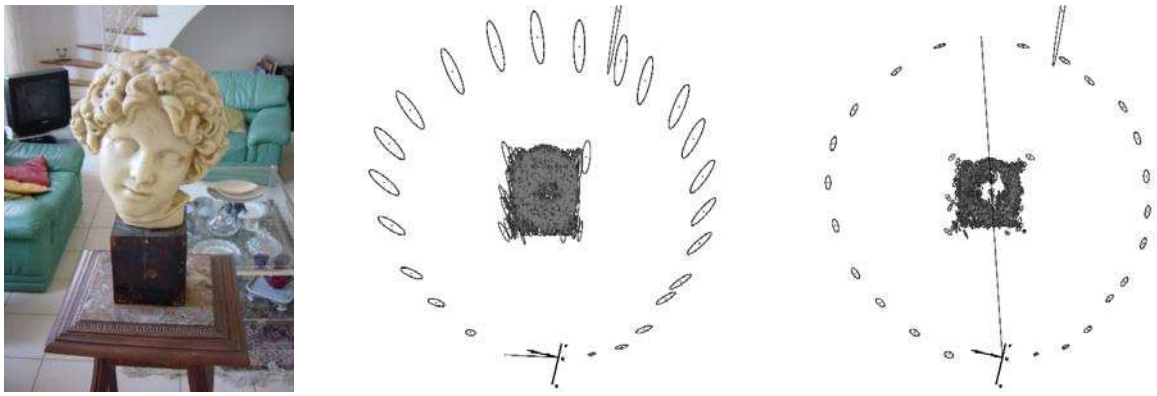


FIGURE A.11 – **Précision des éléments reconstruits par Structure from Motion.** (à gauche) Une image de la séquence. (au milieu et à droite) La scène est vue du dessus, les centres des caméras forment un cercle autour du buste. Les ellipses représentent les probabilités des éléments reconstruits : ce sont les zones dans lesquelles les éléments ont 90% de chance d'appartenir (les ellipses sont zoomées d'un facteur 5). Le repère est fixé en utilisant deux caméras. Elles sont proches pour l'image du milieu et éloignées pour l'image de droite ce qui conduit à une meilleur précision globale.

Bibliographie

G. Aumann. A simple algorithm for designing developable Bézier surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 20, 601-619, 2003.

G. Aumann. Degree elevation and developable Bézier surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 21, 661-670, 2004.

G. Aumann. Interpolation with developable Bézier patches. *Computer Aided Geometric Design*, 8, 409-420, 1991.

A. Bartoli, M. Perriollat, and S. Chambon. Generalized thin-plate spline warps. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2007.

J. L. Bell. *The Art of the Intelligible : An Elementary Survey of Mathematics in its Conceptual Development*. Kluwer, 1999. URL http://publish.uwo.ca/~jbell/.

M. Bergou, M. Wardetzky, D. Harmon, D. Zorin, and E. Grinspun. A quadratic bending model for inextensible surfaces. In *Proceedings of the Eurographics symposium on Geometry Processing*, 2006. URL http://www.cs.columbia.edu/cg/quadratic/.

M. Billinghurst, H. Kato, and I. Poupyrev. The magicbook : A transitional ar interface. *Computers & Graphics*, 25, 745-753, 2001.

P. Bo and W. Wang. Geodesic-controlled developable surfaces for modeling paper bending. In *Proceedings of the Eurographics*, 2007.

F. L. Bookstein. Principal warps : Thin-plate splines and the decomposition of deformations. IEEE *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11, 567-585, 1989.

C. Bregler, A. Hertzmann, and H. Biermann. Recovering non-rigid 3D shape from image streams. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2000.

M. S. Brown and W. B. Seales. Image restoration of arbitrarily warped documents. IEEE *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25, 1295-1306, 2004.

M. S. Brown, M. Sun, R. Yang, L. Yun, and W. B. Seales. Restoring *2D* content from distorted documents. IEEE *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29, 1904-1916, 2007.

F. Cajori. Generalizations in geometry as seen in the history of developable surfaces. *The American Mathematical Monthly*, 36, 431-437, 1929.

H. Cao, X. Ding, and C. Liu. Rectifying the bound document image captured by the camera : A model based approach. In *Proceedings of the International Conference on Document Analysis and Recognition*, 2003.

E. Cerda, S. Chaieb, F. Melo, and L. Mahadevan. Conical dislocations in crumpling. *Nature*, 401, 46-49, 1999.

H.-Y. Chen, I.-K. Lee, S. Leopoldseder, H. Pottmann, T. Randrup, and J. Wallner. On surface approximation using developable surfaces. *Graphical Models and Image Processing*, 61, 110-124, 1999.

C.-H. Chu and J.-T. Chen. Characterizing degrees of freedom for geometric design of developable composite Bézier surfaces. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 23, 116-125, 2007.

C.-H. Chu and C. H. Séquin. Developable Bézier patches : Properties and design. *Computer-Aided Design*, 34, 511-522, 2002.

C.-H. Chu, C. Wang, and C.-R. Tsai. Strip approximation using developable Bézier patches : A local optimization approach. *Computer-Aided Design & Applications*, 4, 807-816, 2007.

F. Courteille. *Vision monoculaire : contributions théoriques et application à la numérisation des documents*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier - Toulouse, 2006.

F. Courteille, A. Crouzil, J.-D. Durou, and P. Gurdjos. Towards shape from shading under realistic photographic conditions. In *Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition*, 2004.

C. de Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer, 2001.

P. Decaudin, D. Julius, J. Wither, L. Boissieux, A. Sheffer, and M.-P. Cani. Virtual garments : A fully geometric approach for clothing design. In *Computer Graphics Forum*, 2006.

A. Del Bue. A factorization approach to structure from motion with shape priors. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2008.

P. Demartines and J. Hérault. Curvilinear component analysis : A self-organizing neural network for nonlinear mapping of data sets. IEEE *Transactions on Neural Networks*, 8, 148-154, 1997.

M. Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, 1976.

J. Duchon. Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces. In *RAIRO Analyse numérique*, volume 10, pages 5-12, 1976.

O. Faugeras and Q.-T. Luong. *The geometry of multiple images*. MIT Press, 2001.

L. Fernández-Jambrina. B-spline control nets for developable surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 24, 189-199, 2007.

M. S. Floater. Meshless parameterization and B-spline surface approximation. In *cms*, 2000. URL http://heim.ifi.uio.no/~michaelf/papers/papers.html.

J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner, and J. F. Hughes. *Computer Graphics*. Addison Wesley, 2nd edition, 1995.

W. H. Frey. Modeling buckled developable surfaces by triangulation. *Computer-Aided Design*, 36, 299-313, 2004.

M. C. Gan, S. T. Tan, and K. W. Chan. Flattening developable bi-parametric surfaces. *Computers & Structures*, 58, 703-708, 1996.

V. Gay-Bellile, M. Perriollat, A. Bartoli, and P. Sayd. Image registration by combining thin-plate splines with a 3d morphable model. In *Proceedings of the* IEEE *International Conference on Image Processing*, 2006.

V. Gay-Bellile, A. Bartoli, and P. Sayd. Direct estimation of non-rigid registrations with image-based self-occlusion reasoning. In *ICCV'07 - Proceedings of the Eleventh IEEE International Conference on Computer Vision*, 2007.

G. . Glaeser and F. Gruber. Developable surfaces in contemporary architecture. *Journal of Mathematics and the Arts*, 01, 59-71, 2007.

E. Goursat. Sur un problème relatif aux courbes à double courbure. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 1, 1-26, 1887.

N. A. Gumerov, A. Zandifar, R. Duraiswami, and L. S. Davis. Structure of applicable surfaces from single views. In *Proceedings of the European Conference on Computer Vision*, volume III, pages 482-496, 2004.

R. Hartley. Cheirality. *International Journal of Computer Vision*, 26, 41-61, 1997.

R. Hartley and A. Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, 2004.

H. Hoppe. *Surface Reconstruction from Unorganized Points*. PhD thesis, University of Washington, 1994.

B. K. P. Horn. Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions. *Journal of the Optical Society of America A*, 4, 629-642, 1987.

P. A. Houle and J. P. Sethna. Acoustic emission from crumpling paper. *Physical Review E*, 54, 278-283, 1996.

D. Julius, V. Kraevoy, and A. Sheffer. D-charts : Quasi-developable mesh segmentation. In *Proceedings of the Eurographics*, 2005.

Y. Kergosien, H. Gotoda, and T. Kunii. Bending and creasing virtual paper. IEEE *Computer Graphics & Applications*, 14, 40-48, 1994.

C. H. Lampert, T. Braun, A. Ulges, D. Keysers, and T. M. Breuel. Oblivious document capture and real-time retrieval. In *International Workshop on Camera Based Document Analysis and Recognition*, 2005.

J. Lang and O. Röschel. Developable (1, n)-Bézier surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 9, 291-298, 1992.

G. Laville. *Courbes et surfaces*. Ellipses, 2004.

J. A. Lee, A. Lendasse, N. Donckers, and M. Verleysen. A robust nonlinear projection method. In *European Symposium on Artificial Neural Networks*, 2000.

S. Leopoldseder and H. Pottmann. Approximation of developable surfaces with cone spline surfaces. *Computer-Aided Design*, 30, 571-582, 1998.

M. Lhuillier and M. Perriollat. Uncertainty ellipsoids calculations for complex *3D* reconstructions. In *Proceedings of the* IEEE *International Conference on Robotics and Automation*, 2006.

J. Liang, D. DeMenthon, and D. Doermann. Flattening curved documents in images. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, volume 2, pages 338-345, 2005.

J. Liang, D. DeMenthon, and D. Doermann. Geometric rectification of camera-captured document images. IEEE *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 30, 591-605, 2006.

Y. Liu, H. Pottmann, J. Wallner, Y.-L. Yang, and W. Wang. Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces. In *Proceedings of* SIGGRAPH, 2006.

Y.-J. Liu, K. Tang, and A. Joneja. Modeling dynamic developable meshes by Hamilton principle. *Computer-Aided Design*, 39, 719-731, 2007.

D. G. Lowe. Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International Journal of Computer Vision*, 60, 91-110, 2004.

F. Lu and E. Milios. Optimal spline fitting to planar shape. *Signal Process*, 37, 129-140, 1994.

G. Mamic and M. Bennamoun. Automatic Bayesian knot placement for spline fitting. In *Proceedings of the* IEEE *International Conference on Image Processing*, 2001.

K. Matan, R. Williams, T. A. Witten, and S. R. Nagel. Crumpling a thin sheet. *Physical Review Letters*, 88, 2007.

K. Milkolajczyk and C. Schmid. Sacale & affine invariant interest point detectors. *International Journal of Computer Vision*, 60, 63-86, 2004.

J. Mitani and H. Suzuki. Making papercraft toys from meshes using strip-based approximate unfolding. In *ACM Transactions on Graphics*, 2004.

S. I. Olsen and A. Bartoli. Implicit non-rigid structure-from-motion with priors. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2008.

J. Park and A. C. Kak. Specularity elimination in range sensing for accurate *3D* modeling of specular objects. In *The Second International Synopsium on 3D Data Processing, Visualization, and Transmission (3DPVT)*, 2004.

M. A. Penna. Non-rigid motion analysis : Isometric motion. *CVGIP : Image Understanding*, 56, 366-380, 1992.

M. Perriollat and A. Bartoli. A single directrix quasi-minimal model for paper-like surfaces. In *DEFORM 2006 - Workshop on Image Registration in Deformable Environments at BMVC'06*, 2006.

M. Perriollat and A. Bartoli. A quasi-minimal model for paper-like surfaces. In IEEE *Towards Benchmarking Automated Calibration, Orientation and Surface Reconstruction from Images*, 2007a.

M. Perriollat and A. Bartoli. Modélisation et reconstruction de papier à partir de plusieurs images. In *ORASIS 2007 - congrès francophone des jeunes chercheurs en vision par ordinateur*, 2007b.

M. Perriollat, R. Hartley, and A. Bartoli. Monocular template-based reconstruction of inextensible surfaces. In *Proceedings of the British Machine Vision Conference*, 2008.

M. Perriollat, A. Bartoli, and L. Reveret. Reconstruction tridimensionnelle multi-vues de papier. *Traitement du signal*, à paraître.

M. Peternell. Developable surface fitting to point clouds. *Computer Aided Geometric Design*, 21, 785-803, 2004.

M. Peternell, H. Pottmann, and T. Steiner. Hough transform and Laguerre geometry for the recognition and reconstruction of special *3D* shapes.

J. Pilet, V. Lepetit, and P. Fua. Fast non-rigid surface detection, registration and realistic augmentation. *International Journal of Computer Vision*, 76, 109-122, 2007.

M. Pilu. Undoing page curl distortion using applicable surfaces. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1, 237-240, 2001.

M. Pollefeys, L. V. Gool, M. Vergauwen, F. Verbiest, K. Cornelis, J. Tops, and R. Koch. Visual modeling with a hand-held camera. *International Journal of Computer Vision*, 59, 207-232, 2004.

H. Pottmann and G. Farin. Developable rational Bézier and B-spline surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 12, 513-531, 1995.

H. Pottmann and J. Wallner. *Computational Line Geometry*. Springer, 2001.

H. Pottmann and J. Wallner. Approximation algorithms for developable surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 16, 539-556, 1999.

H. Pottmann, S. Leopoldseder, and M. Hofer. Approximation with active B-spline curves and surfaces. In *Proceedings of the 10th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*, 2002.

A. Pressley. *Elementary Differential Geometry*. Springer, 2005.

X. Provot. Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior. *Graphics Interface*, pages 147-154, 1995.

K. Rose, A. Sheffer, J. Wither, M.-P. Cani, and B. Thibert. Developable surfaces from arbitrary sketched boundaries. In *Proceedings of the Eurographics symposium on Geometry Processing*, 2007.

S. Roweis and L. Saul. Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding. *Science*, 290(5500), 2323-2326, 2000. URL http://www.cs.toronto.edu/~roweis/lle/.

J. Salvi, J. Pagès, and J. Battle. Pattern codification strategies in structured light systems. *Pattern Recognition*, 37, 827-849, 2004.

M. Salzmann, S. Ilic, and P. Fua. Physically valid shape parameterization for monocular 3D deformable surface tracking. In *Proceedings of the British Machine Vision Conference*, 2005.

M. Salzmann, R. Hartley, and P. Fua. Convex optimization for deformable surface 3D tracking. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision*, 2007a.

M. Salzmann, V. Lepetit, and P. Fua. Deformable surface tracking ambiguities. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2007b.

M. Salzmann, J. Pilet, S. Ilic, and P. Fua. Surface deformation models for nonrigid 3D shape recovery. IEEE *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29, 1481-1487, 2007c.

M. Salzmann, F. Moreno-Noguer, V. Lepetit, and P. Fua. Closed-form solution to non-rigid *3D* surface registration. In *Proceedings of the European Conference on Computer Vision*, 2008a.

M. Salzmann, R. Urtasun, and P. Fua. Local deformation models for monocular 3D shape recovery. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2008b.

N. Slesareva, A. Bruhn, and J. Weickert. Optic flow goes stereo : A variational method for estimating discontinuity-preserving dense disparity maps. In *Symposium of the German Association for Pattern Recognition*, 2005.

D. Struik. *Lectures on classical differential geometry*. Addison-Wesley Press, 1961.

C.-F. Sturm. *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. Mallet-Bachelier, 1857.

J. Sturm. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11-12, 625-653, 1999.

J. Subag and G. Elber. Piecewise developable surface approximation of general Nurbs surfaces, with global error bounds. *Geometric Modeling and Processing*, pages 143-156, 2006.

J. M. Sullivan. Curvatures of smooth and discrete surfaces. *Discrete Differential Geometry*, 2007.

M. Sun and E. Fiume. A technique for constructing developable surfaces. In *Proceedings of Graphics Interface*, pages 176-185, May 1996.

P. Taddei and A. Bartoli. Template based paper reconstruction from a single image with parallel rulers is a well posed problem. In *NORDIA Workshop at CVPR'08*, 2008.

J. B. Tenenbaum, V. D. Silva, and J. C. Langford. A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction. *Science*, 290, 2319-2323, 2000.

B. Triggs, P. McLauchlan, R. Hartley, and A. Fitzgibbon. Bundle adjustment - A modern synthesis. In W. Triggs, A. Zisserman, and R. Szeliski, editors, *Vision Algorithms : Theory and Practice*, LNCS, pages 298-375. Springer Verlag, 2000. URL citeseer.ist.psu.edu/triggs00bundle.html.

Y.-C. Tsoi and M. S. Brown. Multi-view document rectification using boundary. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2007.

A. Ulges, C. H. Lampert, and T. M. Breuel. Document capture using stereo vision. In *ACM Symposium on Document Engineering*, 2004.

C. Wang and K. Tang. Achieving developability of a polygonal surface by minimum deformation : a study of global and local optimization approaches. *The Visual Computer : International Journal of Computer Graphics*, 20, 521 - 539, 2004.

C. Wang and K. Tang. Developable triangulations of a strip. *Computer-Aided Design & Applications*, 2, 233-242, 2005.

C. C. Wang, Y. Wang, and M. M. Yuen. On increasing the developability of a trimmed Nurbs surface. *Engineering with Computers*, 20, 54-64, 2004.

K. Q. Weinberger and L. K. Saul. Unsupervised learning of image manifolds by semidefinite programming. *International Journal of Computer Vision*, 70, 77-90, 2005.

H. Yamauchi, S. Gumhold, R. Zayer, and H.-P. Seidel. Mesh segmentation driven by Gaussian curvature. *Visual Computer*, 2005.

J. Yan and M. Pollefeys. A factorization approach to articulated motion recovery. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2005.

H. Yang, W. Wang, and J. Sun. Control point adjustment for B-spline curve aproximation. *Computer-Aided Design*, 36, 639-652, 2004.

K. Zouh, J. Snyder, B. Guo, and H.-Y. Shum. Iso-charts : Stretch-driven mesh parameterization using spectral analysis. In *Proceedings of the Eurographics symposium on Geometry Processing*, 2004.

Résumé

Cette thèse traite de la reconstruction 3D de scènes déformables à partir d'images. Nos méthodes s'appuient sur un modèle mathématique de la scène. La reconstruction consiste à estimer les paramètres du modèle grâce aux images. Plus particulièrement, nous nous intéressons aux objets déformables pouvant être représentés par des surfaces développables ou inextensibles.

Les surfaces développables sont les surfaces régulières isométriques au plan. Notre première contribution est un modèle génératif de ces surfaces. Il se distingue des modèles existants par sa généralité et par l'expression explicite de la frontière de l'objet. Notre deuxième contribution est un algorithme permettant de reconstruire notre modèle à partir de plusieurs images synchronisées.

Notre troisième contribution est une méthode de reconstruction des surfaces inextensibles. Elle exploite les contraintes liant les points de la surface pour trouver la surface 3D à partir d'une seule image et d'une déformation de référence.

Mots-clefs : vision par ordinateur, reconstruction 3D déformable, surfaces inextensibles, surfaces développables.

Abstract

This thesis deals with the 3D reconstruction of deformable scenes from images. Our methods are based on a mathematical modeling of the scene. The reconstruction is expressed as a parameter estimation problem from images. More precisely, we focus on deformable objects that can be modeled by a developable or an inextensible surface.

The developable surfaces are those surfaces are differentiable and isometric to the plane. Our first contribution is a generative model dedicated to those surfaces. The main differences with previous models are its generality and the explicit expression of the object boundary. Our second contribution is an algorithm to reconstruct our model from several synchronized images.

Our third contribution is a method to reconstruct inextensible surfaces. It uses the constraints between the points of the surface to recover the 3D surface from a single image and a reference deformation.

Keywords : computer vision, 3D deformable reconstruction, inextensible surfaces, developable surfaces.