

Méthodes numériques pour les processus markoviens déterministes par morceaux

Adrien Brandejsky

INRIA Bordeaux sud-ouest, équipe CQFD

2 juillet 2012

Sommaire de la présentation

- 1 Modélisation
- 2 Approximation des moments d'un temps de sortie
- 3 Arrêt optimal sous observation partielle
- 4 Conclusion

- 1 **Modélisation**
 - Definition d'un PMDM
 - Exemple : un modèle de corrosion
- 2 **Approximation des moments d'un temps de sortie**
 - Moments d'un temps de sortie
 - Quantification
 - Schéma d'approximation
 - Autres résultats de la thèse
- 3 **Arrêt optimal sous observation partielle**
 - Filtrage
 - Programmation dynamique
- 4 **Conclusion**

Processus Markoviens Déterministes par Morceaux (PMDM)

M.H.A. Davis (80's)

trajectoires déterministes entre sauts aléatoires

PMDM $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+} = (m_t, \xi_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un processus hybride.

- m_t (fini) mode, environnement
- $\xi_t \in \mathbb{R}^d$ variables physiques

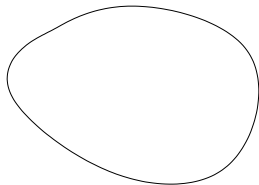
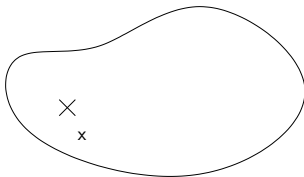
3 caractéristiques locales

- Φ trajectoire déterministe du processus
- λ taux de saut
- Q noyau de transition

2 types de sauts : aléatoires et déterministes

Exemple de trajectoire

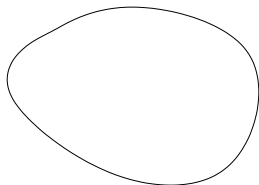
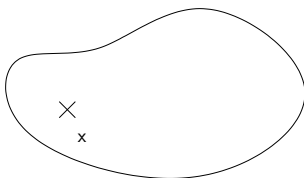
Point de départ $X_0 = x = (m, \xi)$



Exemple de trajectoire

Premier saut à l'instant $T_1 = T_0 + S_1$

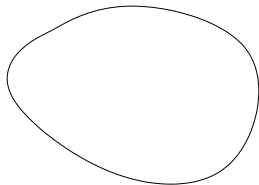
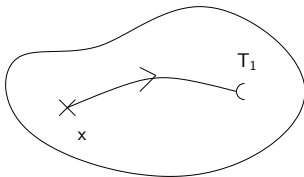
$$\mathbf{P}_x (T_1 > t) = \exp \left(- \int_0^t \lambda \circ \Phi(x, s) ds \right) \mathbb{1}_{\{t < t^*(x)\}}.$$



Exemple de trajectoire

Premier saut à l'instant $T_1 = T_0 + S_1$:

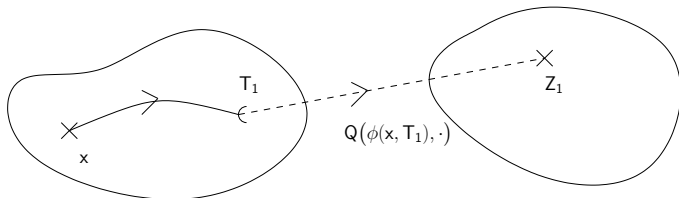
$$X_t = \Phi(x, t), \quad t < T_1$$



Exemple de trajectoire

Position après saut Z_1 , tirée selon la loi

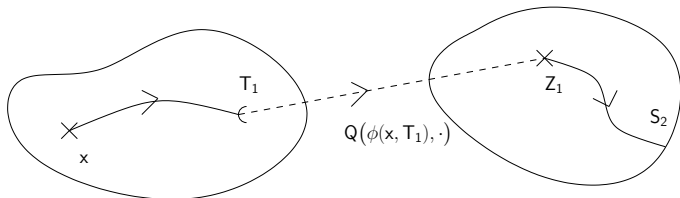
$$Q(\Phi(x, T_1), \cdot)$$



Exemple de trajectoire

Instant de saut suivant $T_2 = T_1 + S_2$:

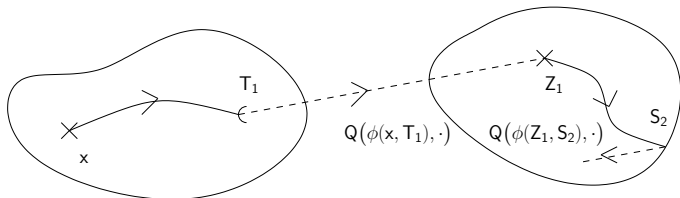
$$X_t = \Phi(Z_1, t - T_1), \quad T_1 \leq t < T_1 + S_2$$



Exemple de trajectoire

Position après saut Z_2 , tirée selon la loi

$$Q(\Phi(Z_1, S_2), \cdot) \dots$$



Une chaîne de Markov à temps discret sous-jacente

Sources d'aléa

- T_n : n -ième instant de saut
- $Z_n = X_{T_n}$: position après le n -ième saut.

$(Z_n, T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov

- 1 **Modélisation**
 - Definition d'un PMDM
 - Exemple : un modèle de corrosion
- 2 **Approximation des moments d'un temps de sortie**
 - Moments d'un temps de sortie
 - Quantification
 - Schéma d'approximation
 - Autres résultats de la thèse
- 3 **Arrêt optimal sous observation partielle**
 - Filtrage
 - Programmation dynamique
- 4 **Conclusion**

Un modèle de corrosion fourni par Astrium



Corrosion d'une structure en aluminium

- Missile ballistique d'un sous-marin nucléaire
- Fortes contraintes de fiabilité
- Une perte d'épaisseur supérieure à 0.2 mm augmente le risque de rupture

Un modèle de corrosion fourni par Astrium

3 environnements successifs

- 1 Atelier
- 2 Sous-marin en mer
- 3 Sous-marin en cale sèche



Un modèle de corrosion fourni par Astrium

Paramètres d'évolution

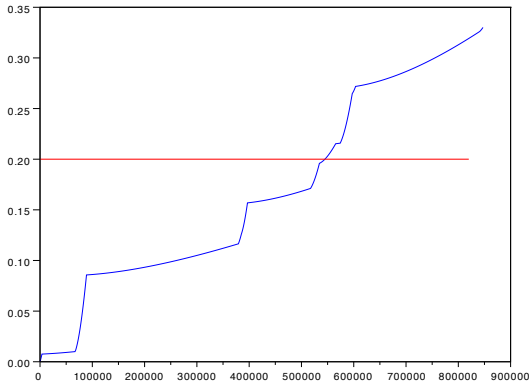
- m : **environnement** (ou mode). Temps passé dans chaque environnement, **loi exponentielle**
- d : **perte d'épaisseur**

$$d(t) = \rho \left(t + \eta \left(e^{-\frac{t}{2\eta}} - 1 \right) \right)$$

- ρ : **taux de corrosion**, tiré après chaque changement d'environnement, **loi uniforme**
- η : **période de transition**, **constant** dans chaque environnement

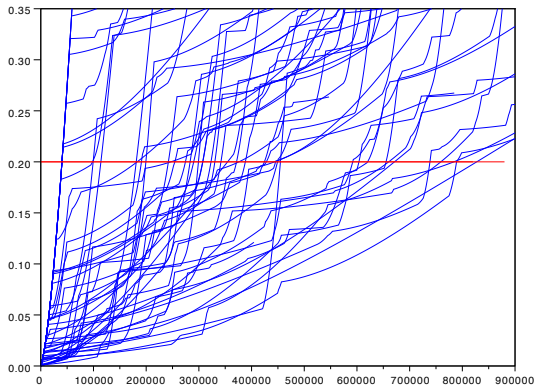
→ Processus de dimension 2.

Exemple de trajectoire - modèle de corrosion



Perte d'épaisseur en mm. Structure inutilisable au-delà de 0.2mm.

Exemple de trajectoire - modèle de corrosion



50 trajectoires.

- 1 Modélisation
 - Définition d'un PMDM
 - Exemple : un modèle de corrosion
- 2 Approximation des moments d'un temps de sortie
 - Moments d'un temps de sortie
 - Quantification
 - Schéma d'approximation
 - Autres résultats de la thèse
- 3 Arrêt optimal sous observation partielle
 - Filtrage
 - Programmation dynamique
- 4 Conclusion

- 1 **Modélisation**
 - Définition d'un PMDM
 - Exemple : un modèle de corrosion
- 2 **Approximation des moments d'un temps de sortie**
 - Moments d'un temps de sortie
 - Quantification
 - Schéma d'approximation
 - Autres résultats de la thèse
- 3 **Arrêt optimal sous observation partielle**
 - Filtrage
 - Programmation dynamique
- 4 **Conclusion**

Temps de sortie

Soit τ le temps de sortie d'un ensemble U .

Objectif

Approximation numérique du moment d'ordre j du temps de sortie τ

$$\mathbf{E}_{x_0} \left[\tau^j \right]$$

L'approche de Helmes, Röhl et Stockbridge

- $f(Y_t) - f(y_0) - \int_0^t Af(Y_s)ds$ est une martingale,

L'approche de Helmes, Röhl et Stockbridge

- $f(Y_t) - f(y_0) - \int_0^t Af(Y_s)ds$ est une martingale,
- $\int_{\partial U} f(y)\mu_1(dy) - f(y_0) - \int_U Af(y)\mu_0(dy) = 0$ (basic adjoint equation) avec

$$\mu_0(B) = \mathbf{E} \left[\int_0^\tau \mathbb{1}_{\{Y_s \in B\}} ds \right], \quad \mu_1(B) = \mathbf{P}(Y_\tau \in B).$$

- On a $\mathbf{E}[\tau] = \mu_0(\mathbb{R}^d)$.

L'approche de Helmes, Röhl et Stockbridge

- $f(Y_t) - f(y_0) - \int_0^t Af(Y_s)ds$ est une martingale,
- $\int_{\partial U} f(y)\mu_1(dy) - f(y_0) - \int_U Af(y)\mu_0(dy) = 0$ (basic adjoint equation) avec

$$\mu_0(B) = \mathbf{E} \left[\int_0^\tau \mathbb{1}_{\{Y_s \in B\}} ds \right], \quad \mu_1(B) = \mathbf{P}(Y_\tau \in B).$$

- On a $\mathbf{E}[\tau] = \mu_0(\mathbb{R}^d)$.
- Hypothèse : f polynôme $\Rightarrow Af$ polynôme.
- systèmes d'équations linéaires reliant les moments de μ_0 et de μ_1 .
- conditions de moments supplémentaires LP ou SDP (Lasserre, Prieto-Rumeau).

L'approche de Helmes, Röhl et Stockbridge et les PMDM

Générateur d'un PMDM

$$Af(x) = \mathfrak{X}f(x) + \lambda(x) \int_E (f(y) - f(x)) Q(x, dy)$$

avec condition au bord $f(x) = \int_E f(y) Q(x, dy)$.

⇒ polynômes non préservés.

L'approche de Helmes, Röhl et Stockbridge et les PMDM

Générateur d'un PMDM

$$Af(x) = \mathfrak{X}f(x) + \lambda(x) \int_E (f(y) - f(x)) Q(x, dy)$$

avec condition au bord $f(x) = \int_E f(y) Q(x, dy)$.

⇒ polynômes non préservés.

⇒ Approche différente :

exploiter la structure discrète sous-jacente des PMDM

Z_n : position après le n -ième saut,

T_n : instant du n -ième saut.

- 1 **Modélisation**
 - Définition d'un PMDM
 - Exemple : un modèle de corrosion
- 2 **Approximation des moments d'un temps de sortie**
 - Moments d'un temps de sortie
 - **Quantification**
 - Schéma d'approximation
 - Autres résultats de la thèse
- 3 **Arrêt optimal sous observation partielle**
 - Filtrage
 - Programmation dynamique
- 4 **Conclusion**

Quantification d'une variable aléatoire

Comment approcher une variable à espace d'état continu par une variable à valeurs discrètes ?

Quantification d'une variable aléatoire

Comment approcher une variable à espace d'état continu par une variable à valeurs discrètes ?

→ Bally, Pagès, Pham, Printems.

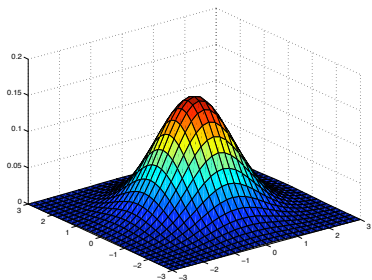
Quantification d'une variable aléatoire X

- Grille finie Γ
- Variable quantifiée $\hat{X} = \text{proj}_{\Gamma}(X)$
- Convergence de l'approximation et vitesse théorique (Théorème de Zador)

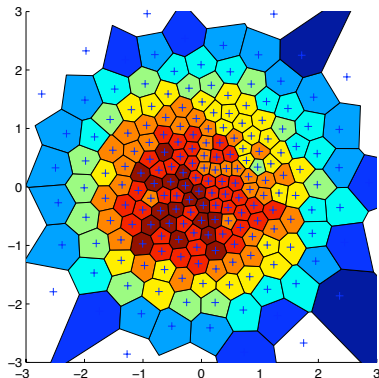
$$\|X - \hat{X}\|_p = O(\nu^{-1/d})$$

ν : nombre de points et d : dimension

Exemple : quantification d'une variable aléatoire gaussienne

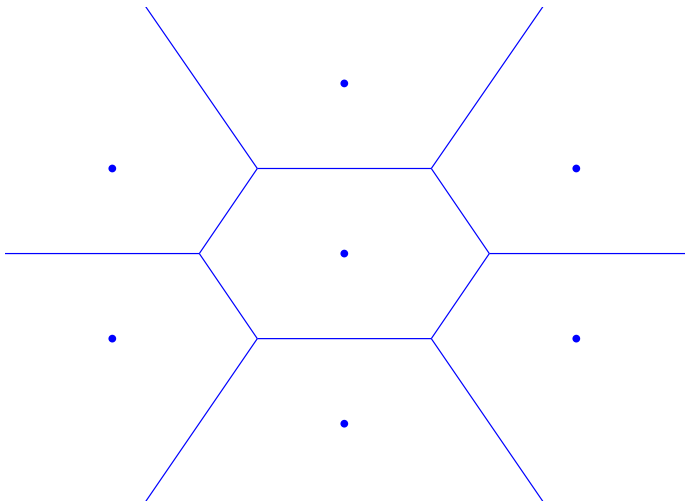


densité gaussienne

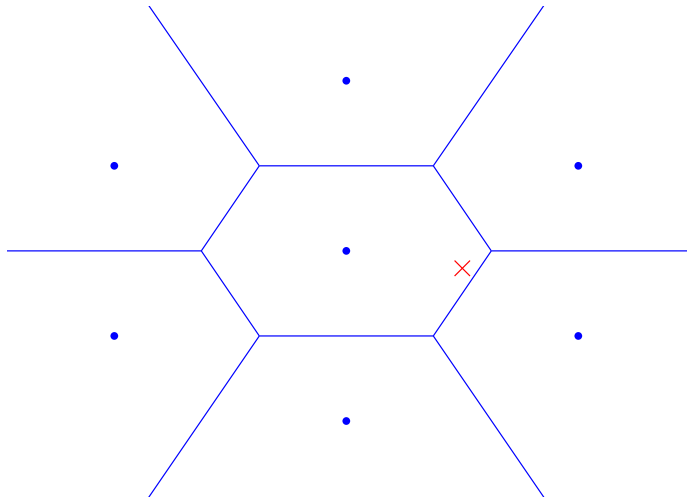


Grille de quantification

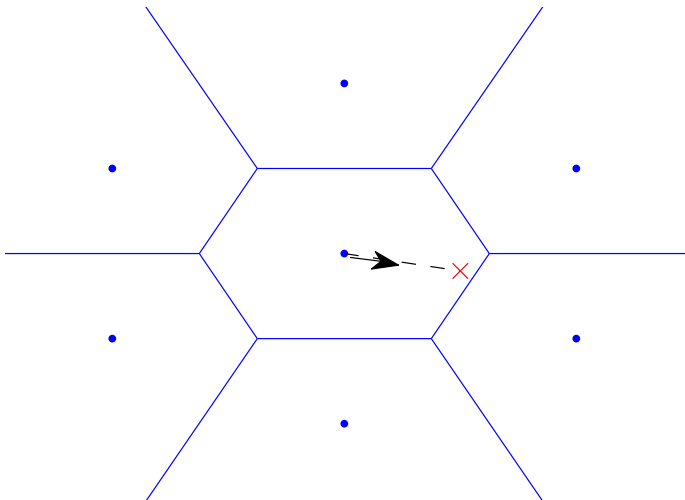
Construction des grilles de quantification



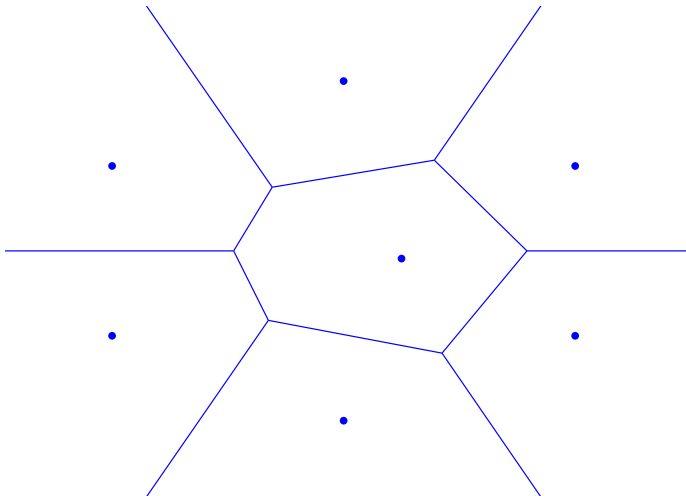
Construction des grilles de quantification



Construction des grilles de quantification



Construction des grilles de quantification



Quantification de la chaîne $(Z_k, T_k)_k$

Comment approcher la chaîne de Markov $(Z_k, T_k)_k$ par quantification ?

Quantification de la chaîne $(Z_k, T_k)_k$

Comment approcher la chaîne de Markov $(Z_k, T_k)_k$ par quantification ?

Quantification de la chaîne $(Z_k, T_k)_k$

- Suite de grilles $\Gamma_k \subset E \times \mathbb{R}^+$, nombre de points fixe
- $(\widehat{Z}_k, \widehat{T}_k) = \text{proj}_{\Gamma_k}(Z_k, T_k)$
- Probabilités de transition estimées par simulations de Monte Carlo.

- 1 **Modélisation**
 - Définition d'un PMDM
 - Exemple : un modèle de corrosion
- 2 **Approximation des moments d'un temps de sortie**
 - Moments d'un temps de sortie
 - Quantification
 - **Schéma d'approximation**
 - Autres résultats de la thèse
- 3 **Arrêt optimal sous observation partielle**
 - Filtrage
 - Programmation dynamique
- 4 **Conclusion**

Schéma d'approximation pour le moment d'ordre j

$$\text{Soit } p_{k,j} = \mathbf{E}_{x_0} \left[\tau^j | \tau \leq T_k \right].$$

Idées directrices du schéma d'approximation

- 1 Trouver une relation de récurrence satisfaite par $(p_{k,j})_{k \geq 0}$
- 2 Exprimer cette récurrence en fonction de la chaîne (Z_k, T_k)
- 3 Remplacer (Z_k, T_k) par (\hat{Z}_k, \hat{T}_k)
- 4 Obtenir une approximation $(\hat{p}_{k,j})_{k \geq 0}$ de $(p_{k,j})_{k \geq 0}$

Horizon de calcul

Horizon de calcul N

$\mathbf{P}(\tau \leq T_N)$ doit être proche de 1

Choix de N

- Liens entre τ and $(T_k)_k$ spécifiques à chaque problème
- Bornes théoriques disponibles sous certaines hypothèses
- Simulations de Monte Carlo

Dans le modèle de corrosion, on choisit $N = 14$ (Monte-Carlo).

Calcul récursif du moment

$$p_{k,j} = \mathbf{E}_{x_0}[\tau^j | \tau \leq T_k]$$

Récurrence

$j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{cases} p_{0,j} &= 0, \\ p_{k+1,j} &= \frac{\mathbf{P}_{x_0}[\tau \leq T_k] p_{k,j} + \mathbf{E}_{x_0} \left[\tau^j \mathbb{1}_{\{T_k < \tau \leq T_{k+1}\}} \right]}{\mathbf{P}_{x_0}[\tau \leq T_{k+1}]} . \end{cases}$$

Démonstration

$$\{\tau \leq T_{k+1}\} = \{\tau \leq T_k\} \cup \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\} \dots$$

Approximation quantifiée des paramètres de la récurrence

Comment obtenir une approximation quantifiée de $\mathbf{P}_{x_0}[\mathcal{T} \leq T_k]$?

Approximation quantifiée des paramètres de la récurrence

Comment obtenir une approximation quantifiée de $\mathbf{P}_{x_0}[\tau \leq T_k]$?

$$\text{On a } \mathbf{P}_{x_0}[\tau \leq T_k] = \mathbf{E}_{x_0} \left[\mathbb{1}_{\{Z_k \notin U\}} \right]$$

Approximation quantifiée des paramètres de la récurrence

Comment obtenir une approximation quantifiée de $\mathbf{P}_{x_0}[\tau \leq T_k]$?

On a $\mathbf{P}_{x_0}[\tau \leq T_k] = \mathbf{E}_{x_0} \left[\mathbb{1}_{\{Z_k \notin U\}} \right]$

\Rightarrow approché par $\mathbf{E}_{x_0} \left[\mathbb{1}_{\{\hat{Z}_k \notin U\}} \right]$

Approximation quantifiée des paramètres de la récurrence

Comment obtenir une approximation quantifiée de $\mathbf{P}_{x_0}[\tau \leq T_k]$?

On a $\mathbf{P}_{x_0}[\tau \leq T_k] = \mathbf{E}_{x_0}[\mathbb{1}_{\{Z_k \notin U\}}]$

\Rightarrow approché par $\mathbf{E}_{x_0}[\mathbb{1}_{\{\hat{Z}_k \notin U\}}]$

- Somme finie, facile à calculer

Approximation quantifiée des paramètres de la récurrence

De même pour $\mathbf{E}_{x_0} \left[\tau^j \mathbb{1}_{\{T_k < \tau \leq T_{k+1}\}} \right]$

Approximation quantifiée des paramètres de la récurrence

De même pour $\mathbf{E}_{x_0} \left[\tau^j \mathbb{1}_{\{T_k < \tau \leq T_{k+1}\}} \right]$

$$= \mathbf{E}_{x_0} \left[\left((T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1} \right)^j \mathbb{1}_{\{Z_k \in U, Z_{k+1} \notin U\}} \right]$$

Approximation quantifiée des paramètres de la récurrence

$$\begin{aligned} & \text{De même pour } \mathbf{E}_{x_0} \left[\tau^j \mathbb{1}_{\{T_k < \tau \leq T_{k+1}\}} \right] \\ &= \mathbf{E}_{x_0} \left[\left((T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1} \right)^j \mathbb{1}_{\{Z_k \in U, Z_{k+1} \notin U\}} \right] \\ &\Rightarrow \text{approché par } \mathbf{E}_{x_0} \left[\left((\hat{T}_k + u^*(\hat{Z}_k)) \wedge \hat{T}_{k+1} \right)^j \mathbb{1}_{\{\hat{Z}_k \in U, \hat{Z}_{k+1} \notin U\}} \right] \end{aligned}$$

Approximation quantifiée des paramètres de la récurrence

De même pour $\mathbf{E}_{x_0} \left[\tau^j \mathbb{1}_{\{T_k < \tau \leq T_{k+1}\}} \right]$

$$= \mathbf{E}_{x_0} \left[\left((T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1} \right)^j \mathbb{1}_{\{Z_k \in U, Z_{k+1} \notin U\}} \right]$$
$$\Rightarrow \text{approché par } \mathbf{E}_{x_0} \left[\left((\hat{T}_k + u^*(\hat{Z}_k)) \wedge \hat{T}_{k+1} \right)^j \mathbb{1}_{\{\hat{Z}_k \in U, \hat{Z}_{k+1} \notin U\}} \right]$$

- Somme finie, facile à calculer

Approximation du moment et convergence

Approximation de $(p_{k,j})_k$

$$\begin{cases} \hat{p}_{0,j} &= 0, \\ \hat{p}_{k+1,j} &= \frac{\mathbf{E}_{x_0} \left[\mathbb{1}_{\{\hat{Z}_k \notin U\}} \right] \hat{p}_{k,j} + \mathbf{E}_{x_0} \left[\left((\hat{T}_{k+U^*}(\hat{Z}_k)) \wedge \hat{T}_{k+1} \right)^j \mathbb{1}_{\{\hat{Z}_k \in U, \hat{Z}_{k+1} \notin U\}} \right]}{\mathbf{E}_{x_0} \left[\mathbb{1}_{\{\hat{Z}_{k+1} \notin U\}} \right]} \end{cases}$$

Théorème

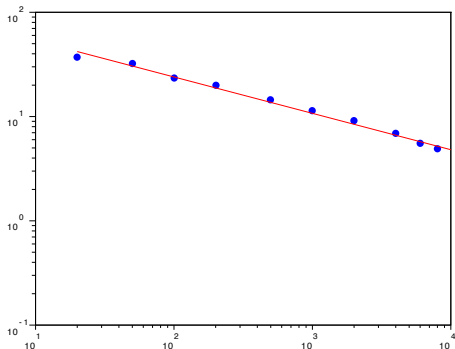
Hypothèses techniques sur U et les caractéristiques du PMDM

$$|p_{k,j} - \hat{p}_{k,j}| \leq C_{k,j} \|(Z_n, T_n)_{n \leq k} - (\hat{Z}_n, \hat{T}_n)_{n \leq k}\|_p$$

Résultats numériques - modèle de corrosion

Approximation du premier moment

Monte Carlo (10^6 simulations)	250.1×10^3 h
quantification (10000 points)	254.5×10^3 h



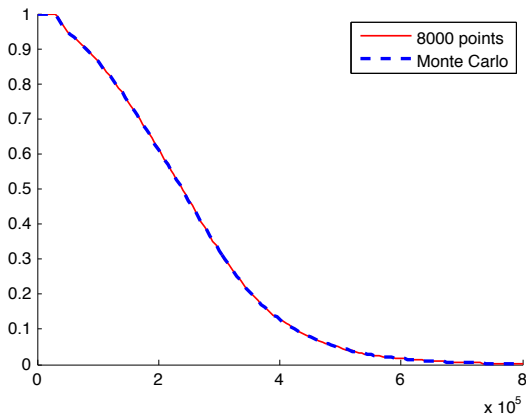
vitesse de convergence estimée
par régression linéaire -0.35.

- 1 **Modélisation**
 - Definition d'un PMDM
 - Exemple : un modèle de corrosion
- 2 **Approximation des moments d'un temps de sortie**
 - Moments d'un temps de sortie
 - Quantification
 - Schéma d'approximation
 - **Autres résultats de la thèse**
- 3 **Arrêt optimal sous observation partielle**
 - Filtrage
 - Programmation dynamique
- 4 **Conclusion**

Autres résultats de la thèse

- Calcul de la distribution d'un temps de sortie

Fonction de survie - modèle de corrosion



- Fonctions de survie obtenues par Monte-Carlo (10^6 simulations) et par quantification avec 8000 points.
- Probabilité 95% qu'aucune panne ne se produise avant 6 années.

Autres résultats de la thèse

- Calcul de la distribution d'un temps de sortie
- Espérances de fonctionnelles

$$\mathbf{E}_{x_0} \left[\int_0^{T_N} l(X_t) dt + \sum_{j=1}^N c(X_{T_j^-}) \mathbb{1}_{\{X_{T_j^-} \in \partial E\}} \right],$$

- Fonctionnelles dépendant du temps

$$\mathbf{E}_{x_0} \left[\int_0^{t_f} l(X_t, t) dt + \sum_{T_j \leq t_j} c(X_{T_j^-}, T_j) \mathbb{1}_{\{X_{T_j^-} \in \partial E\}} \right].$$

- 1 Modélisation
 - Definition d'un PMDM
 - Exemple : un modèle de corrosion
- 2 Approximation des moments d'un temps de sortie
 - Moments d'un temps de sortie
 - Quantification
 - Schéma d'approximation
 - Autres résultats de la thèse
- 3 Arrêt optimal sous observation partielle
 - Filtrage
 - Programmation dynamique
- 4 Conclusion

Définition du problème d'arrêt optimal

Processus d'observation

- Temps de sauts T_n parfaitement observés,
- Observations bruitées des positions après saut

$$Y_n = \varphi(Z_n) + W_n,$$

W_n bruit exogène.

Problème d'arrêt optimal

$$\sup_{\sigma \leq T_N} \mathbf{E} [g(X_\sigma)],$$

où σ est un temps d'arrêt par rapport à la filtration engendrée par les observations.

- 1 **Modélisation**
 - Définition d'un PMDM
 - Exemple : un modèle de corrosion
- 2 **Approximation des moments d'un temps de sortie**
 - Moments d'un temps de sortie
 - Quantification
 - Schéma d'approximation
 - Autres résultats de la thèse
- 3 **Arrêt optimal sous observation partielle**
 - Filtrage
 - Programmation dynamique
- 4 **Conclusion**

Filtre optimal

processus de filtrage

On définit Π_n : la loi de Z_n conditionnée aux observations $T_1, Y_1, \dots, T_n, Y_n$.

- Hypothèse : Z_n est à valeurs dans un ensemble fini.
- méthode de prédiction/correction

$$\Rightarrow \Pi_n = \Psi(\Pi_{n-1}, Y_n, T_{n-1}, T_n).$$

Filtre optimal

processus de filtrage

On définit Π_n : la loi de Z_n conditionnée aux observations $T_1, Y_1, \dots, T_n, Y_n$.

- Hypothèse : Z_n est à valeurs dans un ensemble fini.
- méthode de prédiction/correction

$$\Rightarrow \Pi_n = \Psi(\Pi_{n-1}, Y_n, T_{n-1}, T_n).$$

- $(\Pi_n, T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.

Structure des temps d'arrêt

Théorème (Brémaud)

Sur l'évènement $\{\sigma \geq T_n\}$, on a

$$\sigma \wedge T_{n+1} = (T_n + R_n) \wedge T_{n+1}.$$

Structure des temps d'arrêt

Théorème (Brémaud)

Sur l'évènement $\{\sigma \geq T_n\}$, on a

$$\sigma \wedge T_{n+1} = (T_n + R_n) \wedge T_{n+1}.$$

\Rightarrow expression de $\mathbf{E}[g(X_\sigma)]$ en fonction des Π_n , T_n et R_n .

\Rightarrow problème complètement observé.

- 1 **Modélisation**
 - Definition d'un PMDM
 - Exemple : un modèle de corrosion
- 2 **Approximation des moments d'un temps de sortie**
 - Moments d'un temps de sortie
 - Quantification
 - Schéma d'approximation
 - Autres résultats de la thèse
- 3 **Arrêt optimal sous observation partielle**
 - Filtrage
 - Programmation dynamique
- 4 **Conclusion**

Programmation dynamique

opérateur de maximisation jusqu'au premier temps de saut

Les temps d'arrêt sont de la forme $u \wedge T_1$

$$\sup_{u \geq 0} \left(\mathbf{E} \left[g \circ \Phi(Z_0, u) \mathbb{1}_{\{T_1 > u\}} \mid \Pi_0 = \pi \right] + \mathbf{E} \left[v(\Pi_1) \mathbb{1}_{\{T_1 \leq u\}} \mid \Pi_0 = \pi \right] \right)$$

\Rightarrow approximation par quantification de la chaîne $(\Pi_n, T_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Arrêt optimal

- 1 Filtrage
- 2 Structure des temps d'arrêt
- 3 Formulation du problème sous observation totale
- 4 Programmation dynamique
- 5 Approximation par quantification
- 6 Construction numérique d'un temps d'arrêt ϵ -optimal

Conclusion générale

Bilan

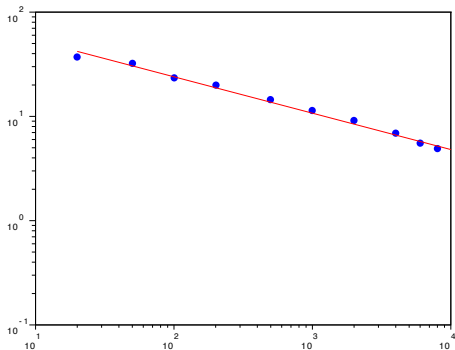
- Méthodes numériques pour trois types de problème
- Preuves de convergence avec vitesses
- Applications à des exemples concrets
- Programmation dynamique
- Méthodes numériques basées sur la quantification

Perspectives

- arrêt optimal : hypothèse sur les positions après saut
- flot non explicite
- observation bruitée des temps de saut

Résultats numériques - modèle de corrosion

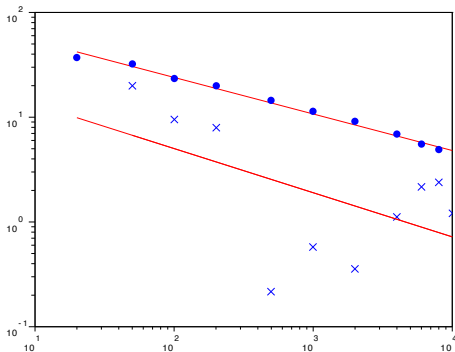
Erreur d'approximation du premier moment



- Vitesse de convergence estimée par régression linéaire est -0.35.

Résultats numériques - modèle de corrosion

Erreur d'approximation du premier moment



- Vitesse de convergence estimée par régression linéaire est -0.35.
- Vitesse de convergence par extrapolation de Romberg est -0.42

Un modèle d'assurance garantie de revenus

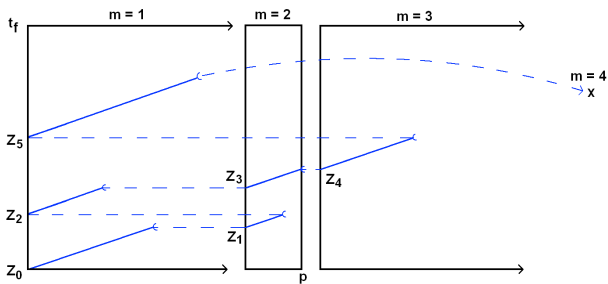
Assurance garantie de revenus

- l'assurance paie une indemnité mensuelle lorsqu'un arrêt maladie se prolonge au-delà d'une certaine durée,
- la durée du contrat est t_f .

4 modes

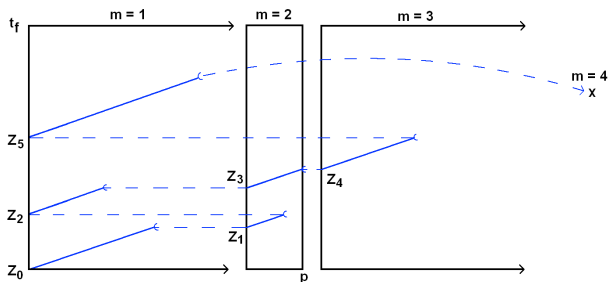
- $m = 1$ assuré en bonne santé,
- $m = 2$ assuré en arrêt maladie court,
- $m = 3$ assuré en arrêt maladie long,
- $m = 4$ assuré décédé.

Exemple de trajectoire - modèle d'assurance



L'indemnité est versée dans le mode 3

Exemple de trajectoire - modèle d'assurance



L'indemnité est versée dans le mode 3

Valeur de l'assurance

$$\mathbf{E}_{x_0} \left[\int_0^{t_f} e^{-\rho t} \mathbb{1}_{\{m_t=3\}} dt \right]$$

Espérances de fonctionnelles - modèle d'assurance

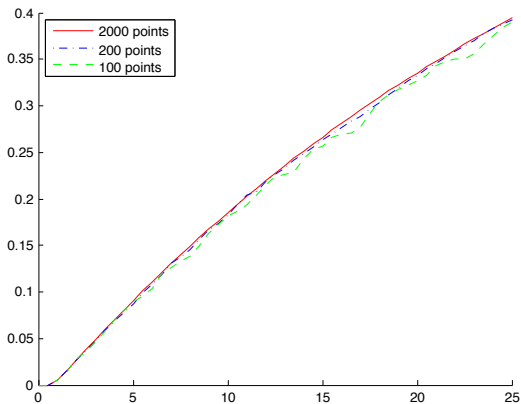
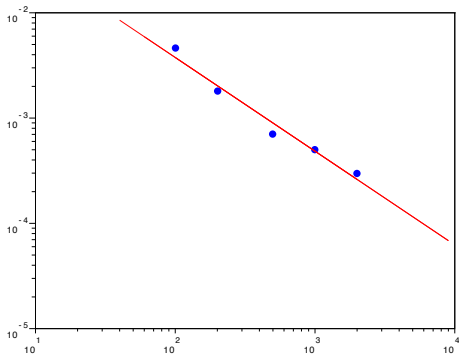


FIGURE: La fonction $t_f \rightarrow \mathbf{E}_{(1,0,0)} \left[\int_0^{t_f} e^{-\rho t} \mathbb{1}_{\{m_t=3\}} dt \right]$.

Espérances de fonctionnelles - modèle d'assurance

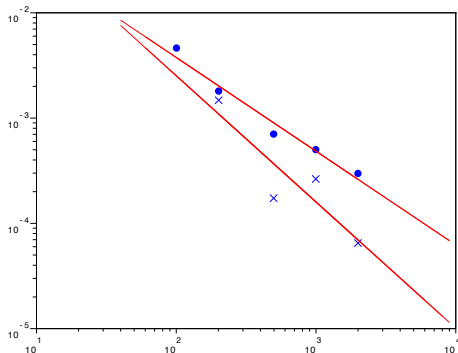
Erreur d'approximation de la valeur du contrat d'assurance



- Vitesse de convergence estimée par régression linéaire est -0.89.

Espérances de fonctionnelles - modèle d'assurance

Erreur d'approximation de la valeur du contrat d'assurance



- Vitesse de convergence estimée par régression linéaire est -0.89.
- Vitesse de convergence par extrapolation de Romberg est -1.20.