Analyse des évènements aérodynamiques à l'origine des émissions sonores à partir de simulations numériques

Abbas Hekmati

▶ **To cite this version:**

Abbas Hekmati. Analyse des évènements aérodynamiques à l'origine des émissions sonores à partir de simulations numériques. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2011. Français. NNT : . tel-00734572

HAL Id: tel-00734572

https://theses.hal.science/tel-00734572

Submitted on 23 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat de
l'université Pierre et Marie Curie

Spécisalité
Mecanique des fluides

Présentée par

Abbas Hekmati

Analyse des évènements aérodynamiques à l'origine des émissions sonores à partir de simulations numériques

Soutenue le 7 avril 2011 devant le jury composé de :

M. C. Bailly	Rapporteur
M. Ph. Druault	Directeur de thèse
M. A. Iollo	Rapporteur
M. Ph. Lafon	Examinateur
M. P. Sagaut	Examinateur
M. K. Schneider	Président du jury
M. D. Ricot	Directeur de thèse

Institut Jean Le Rond D'Alembert, 4 place Jussieu, case 161-162, Tour 55-65,
75252 Paris Cedex 05.

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à Denis Ricot mon encadrant de thèse chez Renault pour sa patience et la passion de son métier qu'il m'a transmise. Sa présence, son écoute et sa disponibilité n'ont pas été qu'un soutien scientifique très efficace, elles ont été un point d'appui rassurant pendant les moments difficiles.
Je tiens à remercier Philippe Druault mon directeur de thèse pour ses encouragements et sa participation active à mettre en valeur mes travaux et leur donner plus de rayonnement.
J'adresse ensuite mes plus vifs remerciements à tous les membres du Jury. Je remercie d'abord les professeurs C. Bailly et A. Iollo pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Je remercie le professeur K. Schneider pour avoir accepté d'être le Président du Jury et pour ses remarques avisées et très instructives. Je voudrais ensuite remercier M. Ph. Lafon pour sa lecture attentive et ses questions pertinentes, c'est un réel plaisir pour moi qu'il ait accepté de faire partie de mon jury. Enfin, je remercie le Pr. P. Sagaut pour sa présence ainsi que pour ses remarques et ses questions enrichissantes.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au bon déroulement de cette thèse au sein du groupe acoustique de Renault : V. Maillard et G. Baudet successivement responsables du groupe qui m'ont accueilli dans leur équipe, Delphine pour son voisinage agréable, Aurélie pour son rire et sa franchise, Nathalie pour sa gentillesse et son intérêt à mon égard, Mathias pour son voisinage et son accompagnement dans le lancement et le bon déroulement des réunions de thésards de Renault, Franck pour son aide en Latex et sa bonne humeur, Gaël, Claire, Jean-Marc, Bertrand, Guillaume et toutes les autres personnes que j'ai pu connaitre et qui m'ont fait profiter de leur compagnie et de leur soutien.

Je remercie Kim et Daniel pour les moments agréables que nous avons partagé dans le bureau 410 au début de cette thèse et pour l'amitié qui s'en est suivi.

Je salue Hervé et Jean-Luc pour leur amitié, leurs encouragements et pour les moments très agréables que nous avons partagé, surtout ceux pendant les promenades digestives autour du Technocentre. Je remercie encore Jean-Luc pour son aide informatique très précieuse.

Je salue Mehdi pour son amitié sans faille et pour ses encouragements avisés.

Je remercie mon frère Amir qui a été un ami proche de loin et de près. Je n'oublie pas son soutien exemplaire et permanent. Je salue mes frères Mohammadreza et Reza ainsi que mes sœurs Ashraf et Zahra qui m'ont beaucoup manqué pendant ces années loin de la maison. Leur soutien, même de si loin, a été une grande source d'énergie pour moi.

Je remercie Adelina pour tout ce qu'elle m'a offert, elle m'était le printemps dans ce chapitre de ma vie.

Enfin, je souhaite remercier mes parents qui m'ont permis d'arriver jusqu'à là. Je les remercie pour leur amour sans condition.

Résumé

Cette étude porte sur le développement d'outils d'analyse pour l'identification des évènements aérodynamiques à l'origine des émissions sonores dans les écoulements turbulents. Une application aux écoulements autour d'un véhicule automobile et à l'intérieur d'un habitacle automobile est proposée dans ces travaux. Ces écoulements permettent d'aborder aussi bien le rayonnement direct que le rayonnement des panneaux soumis à une excitation aéroacoustique.

Pour ces analyses, des simulations numériques directes basées sur la méthode Boltzmann sur réseau ont été mises en œuvre pour analyser les phénomènes aéroacoustiques présents dans ces configurations d'écoulements tels que l'aérateur d'une voiture, l'écoulement autour d'un rétroviseur, l'écoulement autour d'une voiture (vitrages).
Des premières investigations à partir de ces bases de données ont été menées en utilisant des méthodes de causalité permettant de relier les évènements aérodynamiques aux émissions sonores. Ainsi, pour l'analyse du rayonnement direct, la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres Etendue (EPOD) est retenue. L'utilisation de cette méthode a nécessité dans un premier temps de s'assurer de la fiabilité des grandeurs numériques disponibles en terme de convergence statistique. On a ainsi pu mettre en évidence l'importance d'une telle étude préliminaire de faisabilité pour de telles analyses aéroacoustiques. Ensuite, la procédure initiale de l'EPOD est améliorée par la prise en compte d'un temps de retard entre le bruit rayonné et le champ aérodynamique. Différentes variables (champ de vitesse, tenseur de Lighthill, pression) dans la région aérodynamique pour représenter les évènements "sources", ont également été testées. Il a ainsi été montré l'intérêt d'utiliser le champ de pression pour de telles analyses. Des évènements aérodynamiques à l'origine des émissions sonores émises à certaines fréquences ont ainsi pu être caractérisés.

L'étude du rayonnement acoustique des panneaux est tout d'abord effectuée par un modèle éléments finis d'une plaque sous une excitation déterministe. Cette description déterministe est obtenue à l'aide d'une démarche de synthèse partant d'un modèle statistique décrivant les composantes turbulente et acoustique du champ d'excitation aéroacoustique. La réponse vibroacoustique de la plaque vis-à-vis des champs homogènes d'excitation est étudiée et comparée favorablement aux prédictions théoriques. L'application à un champ d'excitation inhomogène a également été effectuée avec succès. Ensuite, une analyse de contribution des différentes composantes (aérodynamique et acoustique) du champ d'excitation au champ acoustique rayonné est effectuée à l'aide de la fonction de cohérence. Les limitations de cette méthode de causalité qui sont dues à la nature étendue et incohérente des sources ont été démontrées. Enfin, une démarche basée sur la décomposition du champ de pression pariétale par la POD est développée afin de séparer les composantes acoustique et turbulente du champ total d'excitation. Une première application de cette méthode à des données synthétiques a montré l'efficacité de cette nouvelle approche. Cette méthode est finalement appliquée avec succès à un champ de pression pariétale issu de la simulation numérique de l'écoulement autour d'un véhicule réel. Cette dernière étape de ce travail offre de nombreuses perspectives relatives aussi bien à la modélisation des champs de pression pariétale qu'à des analyses des couplages aéroacoustiques de ces champs de pression.

Abstract

In this study, based on Direct Noise Calculations, several post-processing tools are developed to investigate the aerodynamic events involved in noise generation in turbulent flows. These tools are employed in external flows around ground vehicles and flows within air conditioning systems. These two configurations allow to address both the direct noise propagation and the wall-pressure induced noise emission of walls.

For such analyses, Direct Noise Calculations based on the lattice Boltzmann method are performed in order to analyze the aeroacoustic phenomena present in different flow configurations such as the ventilation outlet flow, the flow around a side mirror and the flow around a side window.

The first analyses are carried out on these numerical data sets by using the causality methods that provide the possibility of relating the aerodynamic events to the noise emission. The Extended Proper Orthogonal Decomposition (EPOD) is therefore employed for direct propagation configurations. Ensuring the reliability of the numerical values available in terms of statistical convergence is a requirement for the use of this method. The importance of this preliminary study of feasibility for such aeroacoustic analyses is highlighted. Then, the initial EPOD procedure is improved by integrating a time delay between the radiated noise and the aerodynamic field. Different variables (velocity field, Lighthill's source tensor, pressure) in the source region to represent the aerodynamic events were also tested using the EPOD. It is thus shown the benefits of using the pressure field for such analyses. The aerodynamic events causing the radiated noise at certain frequencies could thus be characterized.

The study of the acoustic radiation of panels is first performed by a Finite Element Model of a plate under deterministic excitation. This deterministic description is obtained using a synthesis approach starting from a statistical model describing the turbulent and acoustic components of the aeroacoustic excitation field. The vibroacoustic response of the plate to homogenous excitation fields is studied and is shown to be in good agreement with theoretical predictions. The application to in inhomogeneous excitation fields has also been successfully completed. Then, an analysis of contribution of different components (aerodynamic and acoustic) of the excitation field to the radiated acoustic field is performed using the coherence function. The limitations of this causality analysis which are due to the extended and incoherent nature of sources have been demonstrated. Finally, an approach based on the decomposition of the wall pressure field by POD is developed to separate the acoustic and the turbulent components of the total excitation field. The application of this method to synthetic data showed the effectiveness of this new approach. This method is finally successfully applied to a wall pressure field provided by numerical simulation of the flow around a real ground vehicle. This last stage of the present work offers many opportunities for both the modeling wall pressure field and the coupling analyses in such configuration.

Table des matières

1 Introduction **11**

2 Simulations aéroacoustiques par la LBM **20**
2.1 La méthode Boltzmann sur Réseau 21

3 Les outils d'analyse **30**
3.1 Signaux aléatoires et convergence statistique 30
3.1.1 Signaux aléatoires, notion de réalisation et d'ergodicité 30
3.1.2 Intercorrélation, transformée de Fourier, cohérence 31
3.1.3 Passage dans le domaine nombre d'onde 33
3.1.4 Signaux finis, problème de convergence 34
3.1.4.1 Domaine temporel, effet de la durée 34
3.1.4.2 Propriété du signal issu de la simulation numérique 35
3.1.5 Ergodicité et bloc FFT, erreur aléatoire, erreur de biais 36
3.2 Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres 38
3.2.1 Idée de base, équation de Fredholm 39
3.2.2 Propriétés des fonctions de base POD 40
3.2.3 POD classique et Snapshot-POD 41
3.2.4 Equivalence des formulations classique et Snapshot 43
3.3 POD Etendue (Extended POD) 48
3.4 POD spectrale 51
3.4.1 POD spectrale, cas général 52
3.4.2 POD spectrale, temps/fréquence 53

4 Méthodologie POD/EPOD **57**
4.1 Bruit du système de ventilation : Aérateur 57
4.1.1 Présentation de la configuration considérée et des paramètres de simulation 60
4.2 Mise au point POD/EPOD 64
4.2.1 Application de la POD 64
4.2.2 Application de l'EPOD 68
4.2.3 Limitations de l'EPOD appliquée à des domaines finis 69
4.2.4 Convergence des modes étendus 71
4.2.4.1 Critère de convergence basé sur le coefficient de corrélation 71
4.2.4.2 Critère de convergence basé sur la fonction de cohérence 77
4.2.4.3 Reconstruction de la partie corrélée 81
4.2.5 Convergence des modes POD 84
4.2.5.1 Influence de la résolution spatiale 85
4.2.5.2 Influence de la durée temporelle 95
4.3 Choix de la variable source 98

4.3.1 Calcul des termes sources de Lighthill, T_{ij} . . . 98
4.3.2 Corrélation pression acoustique - T_{ij} . . . 99
4.3.3 Comparaison entre le tenseur de Lighthill et la pression . . . 101
4.3.4 Utilisation de la pression pour les corrélations . . . 104
4.4 Analyse de source aérateur par l'outil EPOD . . . 109
4.5 Rayonnement aéroacoustique d'un retroviseur . . . 115
4.5.1 Présentation de la simulation numérique et objectifs de l'analyse . . . 115
4.5.2 Zones d'étude, caractéristiques des signaux enregistrés . . . 117
4.5.3 Détection des fluctuations de pression acoustique . . . 118
4.5.4 Comparaison pression / tenseur de Lighthill . . . 118
4.6 Analyse des sources "retroviseur" par l'outil EPOD . . . 122

5 Sources rayonnées à l'intérieur du véhicule 127
5.1 Définition des champs d'excitation . . . 128
5.1.1 Hypothèses sur le champ de pression d'excitation . . . 129
5.1.2 Représentation de l'excitation dans le domaine des nombres d'onde . . . 129
5.2 Différents exemples de champs d'excitation . . . 130
5.2.1 Le champ diffus acoustique . . . 130
5.2.2 L'onde plane acoustique . . . 130
5.2.3 Excitation générée par une couche limite homogène : modèle de Corcos . . . 131
5.3 Vibration d'une plaque sous chargement aléatoire . . . 131
5.3.1 Rayonnement acoustique de plaques vibrantes . . . 134
5.3.2 Expression finale de la puissance acoustique rayonnée . . . 134
5.4 Calcul de bruit rayonné, méthode éléments finis FEM . . . 136
5.4.1 Synthèse d'un champ déterministe via l'expression de la DISP . . . 137
5.4.2 Validation de la procédure de synthèse . . . 139
5.4.3 Modèle éléments finis de la plaque . . . 139
5.5 Efficacité des excitations à faire rayonner la plaque . . . 141
5.5.1 Champ d'excitation homogène . . . 141
5.5.2 Champ d'excitation inhomogène . . . 145
5.5.2.1 Génération d'un champ d'excitation inhomogène . . . 145
5.5.2.2 Efficacité du champ d'excitation inhomogène . . . 147
5.5.3 Conclusion . . . 149
5.6 Analyse des contributions au rayonnement . . . 150
5.6.1 Contribution des différentes composantes du champ aéroacoustique . . . 150
5.6.2 Contribution d'une composante spatialement cohérente . . . 153
5.7 Séparation acoustique/turbulente par la POD . . . 158
5.7.1 Séparation dans le domaine fréquentiel : POD spectrale . . . 159
5.7.1.1 Cas homogène . . . 159
5.7.1.2 Cas inhomogène . . . 163
5.7.2 Séparation dans le domaine temporel . . . 164
5.7.3 Conclusion . . . 167
5.7.4 Séparation des composantes d'un champ issu d'une simulation numérique . . . 167
5.7.4.1 Présentation du champ de pression pariétale . . . 168
5.7.4.2 Décomposition du champ de pression en modes POD . . . 169
5.7.4.3 Corrélation des parties séparées avec la pression acoustique . . . 176

6 Conclusion et perspectives 180

Chapitre 1

Introduction

Aéroacoustique, problématique automobile

Au-delà de la valeur ajoutée sur la qualité perçue d'un véhicule, le confort acoustique des passagers dans l'habitacle d'une voiture est recherché pour des raisons de sécurité. Ce confort acoustique se traduit en partie par la réduction des bruits parasites qui pourraient nuire à l'intelligibilité des signaux du véhicule et qui diminueraient la réactivité du conducteur fatigué au cours des longs trajets. Ces bruits peuvent avoir différentes sources selon les conditions d'utilisation. On peut notamment citer le bruit du système de propulsion (moteur, système de transmission de puissance), le bruit du roulement lié au frottement entre les pneus et la chaussée et le bruit d'origine aérodynamique. Avec la réduction progressive du bruit émis par le système de propulsion et celui lié au roulement, le bruit d'origine aérodynamique est devenu une composante non négligeable de nuisance sonore. Pour les voitures d'aujourd'hui, aux grandes vitesses (> 90 km/h) le bruit aéroacoustique peut sans doute être considéré comme la source principale de bruit dans l'habitacle. Pour les voitures de demain (comme dans le cas du véhicule électrique) c'est même à basses vitesses que la présence du bruit aéroacoustique sera critique. Les caractéristiques du bruit aéroacoustique (spectre large bande) en font un type de nuisance sonore dont l'élimination est la seule voie permettant d'améliorer le confort acoustique. A l'heure actuelle cette élimination se fait en grande partie par le perfectionnement de l'isolation (vitrage plus épais, ou double vitrage, tapis de sol plus isolant, tapis du toit, joints plus isolants). Cela revient à dire que l'on coupe la voie de la transmission des ondes acoustiques sans se soucier à éliminer leur génération par les phénomènes aérodynamiques. Bien que l'isolation soit une solution simple et rapide, elle est une solution coûteuse et augmente le poids du véhicule, ce qui est extrêmement pénalisant en ce qui concerne les limitations de la consommation. Cette solution (a priori peu intelligente et coûteuse) est préférée dans la plupart des cas pour une raison très simple : la complexité et la variété des phénomènes physiques participant à la génération du bruit aéroacoustique ne peuvent pas être entièrement investigués dans les délais courts de développement des projets véhicules d'aujourd'hui. Parmi ces phénomènes physiques on peut notamment souligner : bruit de la turbulence de paroi (excitation des vitrages par les écoulements décollés tels que les tourbillons de montant de baie), bruit de sillage (sillage des accessoires tels que le rétroviseur, les essuie-vitres, l'antenne radio), bruit de ventilateur (ventilateur axial de refroidissement moteur, ventilateur radial du système de climatisation), bruit de conduite (système de climatisation, circuits d'admission d'air et d'échappement) et bruit de cavité (césures de portes, toit ouvrant). Ces phénomènes ne sont pas limités au secteur automobile et selon le phénomène étudié, on connaît des approches diverses et variées allant des modèles analytiques et des approches empiriques aux simulations numériques partielles ou totales. Quelque soit l'approche d'analyse, elle se voit face à deux questions centrales : la génération des ondes acoustiques (les mécanismes transférant l'énergie aérodynamique en énergie acoustique) à laquelle on associe la notion de "sources aéroacoustiques" et la propa-

gation de ces ondes acoustiques. L'étude des phénomènes aéroacoustiques consiste à traiter l'une ou ces deux questions précédentes. C'est plutôt dans une optique d'identification des évènements aérodynamiques à l'origine de l'émission sonore que s'inscrit le présent travail. On note que dans le cas particulier de l'automobile, le problème du bruit d'origine aérodynamique à l'intérieur d'habitacle (à part le bruit du système de climatisation) ne se limite pas à un problème aéroacoustique pur. Le bruit rayonné à l'intérieur de l'habitacle est en effet la réponse vibroacoustique des parois de la voiture à l'excitation engendrée par l'écoulement. Ainsi, notre étude est décomposée en deux parties. D'abord le cas plus simple du rayonnement libre est considéré. Ensuite la contribution des sources au bruit interne est étudiée.

Sources aéroacoustiques, outils d'identification

En absence d'autres sources, la turbulence est la seule génératrice des fluctuations de pression acoustique. On parle du bruit aéroacoustique. Dans la deuxième moitié du siècle dernier notamment avec l'augmentation de l'emploi des turboréacteurs dans l'aviation civile et la nuisance sonore causée par le bruit des jets associés, de nombreuses études ont été menées afin de déterminer le lien entre les grandeurs turbulentes et la génération des ondes acoustiques. Le point d'inflexion de ces analyses peut sans doute être considéré comme les travaux pionniers de Sir James Lighthill [77, 78]. Proposant une reformulation exacte des équations de Navier-Stokes, une équation d'onde est obtenue. Par analogie, les membres de droite de cette équation sont considérés comme les termes sources :

$$(\bigtriangledown^2 - \frac{1}{C_\infty^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\left[c_\infty^2(\rho - \rho_\infty)\right] = -\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \tag{1.1}$$

En distinguant une région source bien localisée où l'écoulement génère le son de manière non linéaire et complexe, un domaine observateur, supposé uniforme, au repos et dominé par un phénomène de propagation linéaire, les fluctuations de pression acoustique dans le domaine observateur peuvent être calculées par la convolution des termes sources avec la fonction de Green adaptée. Depuis, l'analogie de Lighthill a connue plusieurs améliorations. Goldstein [47] étend l'analogie pour un milieu observateur en mouvement uniforme. Lilley [79] prend en compte un milieu observateur en mouvement cisaillé de manière unidirectionnelle. Bechara *et al.* [12] considère un milieu observateur en mouvement stationnaire quelconque. La prise en compte des frontières solides a d'abord commencé par les travaux de Curle avec une formulation adaptée à une surface compacte et immobile [36]. Powell [100] considère la présence d'une surface non compacte et immobile et enfin Ffowcs Williams et Hawkings [42] complètent cette extension par la prise en compte d'une surface quelconque. Un des résultats importants de l'approche analogique est la relation dimensionnelle qui relie la puissance sonore émise dans le cas d'un jet libre à la vitesse du jet U, par la fameuse loi en U^8.

Bien que l'approche analogique fournisse une expression exacte des sources aéroacoustiques, la seule connaissance des termes sources ne signifie pas la connaissance du champ acoustique rayonné car, comme souligné avant, les fluctuations de pression acoustique sont issues de la convolution des termes sources avec la fonction Green adaptée. Cela revient à dire que l'accès aux termes sources ne signifie pas l'accès aux sources du bruit effectivement rayonné. Dans le cadre du bruit d'un jet transsonique (Mach 0.9) en filtrant la partie non rayonnante des termes sources, Freund [44] montre que la partie rayonnante et la totalité des termes n'ont pas la même localisation spatiale. En effet pour beaucoup de configurations d'écoulement, les mécanismes impliqués dans la génération de bruit ne sont toujours pas parfaitement connus et une définition claire et unique de source aéroacoustique n'est pas disponible. Différentes approches ont été entreprises afin d'analyser plus en détails ces mécanismes de production/génération de bruit dans les écoulements. Une famille d'outils d'analyse est basée sur la connaissance a priori du champ aérodynamique et celui de la

pression acoustique rayonnée (outils de post-traitement). Ces outils cherchent à déterminer la localisation des évènements aérodynamiques en lien avec le bruit rayonné et/ou dans certaines méthodes la nature de ces évènements.

L'antennerie acoustique est une de ces méthodes auxiliaires, utilisée souvent pour la localisation des sources et éventuellement la caractérisation du signal acoustique émis par la source localisée. L'antennerie acoustique est une méthode générale de localisation et de caractérisation des sources acoustiques quelconques et son emploi n'est pas limité à l'aéroacoustique. Dans cette approche à partir de la seule connaissance du champ acoustique rayonné, l'information concernant l'éventuelle source dans un point d'espace est récupérée. L'intérêt principal de cette méthode pour l'application dans le cadre de l'aéroacoustique repose essentiellement sur son caractère non-intrusif (seule la connaissance du champ acoustique rayonné est nécessaire). Cet avantage fournit également la possibilité d'étudier les situations très complexes comme les sources mobiles [99]. Dans sa version initiale, l'antennerie acoustique est basée sur l'utilisation des réflecteurs canoniques, comme par exemple dans l'étude de Laufer *et al.* [74] concernant le bruit rayonné par un jet supersonique (Mach 1.5, 1.5 et 2.5). Leur système était constitué d'un réflecteur sphérique permettant de localiser une région source importante. En pointant sur une région source localisée de l'écoulement ils mesuraient le bruit provenant de cette région. A l'aide de leur système ils ont mis en évidence la présence de deux régions importantes et distinctes de production sonore dans le jet. La fonction du réflecteur canonique peut être assurée par un traitement du signal adapté (beamforming ou formation de voies [67]) appliqué à une série de microphones. Connaissant les positions des microphones et la vitesse de propagation des ondes sonores dans le milieu, les signaux mesurés peuvent être retardés et amplifiés selon leur position respective par rapport au point de focalisation. La coïncidence du point de focalisation avec une zone source conduit à une interférence constructive des signaux et le signal résultant caractérise la source.
Dans le cadre de l'aéroacoustique automobile cette méthode est massivement utilisée. Il est même très rare qu'une soufflerie dédiée aux études aéroacoustiques ne soit pas équipée d'une antenne microphonique ou canonique [91]. Récemment Adam *et al.* [2] ont appliqué l'algorithme de formation de voies aux signaux issus d'une simulation numérique directe de l'écoulement et le champ de pression acoustique associé, autour d'un véhicule automobile (cette simulation numérique sera détaillée dans le paragraphe §4.5.1). Cette approche permet d'éviter les délais liés à la préparation de maquettes ou de prototypes véhicules et contourner ainsi une des limitations importantes de l'antennerie expérimentale. L'approche d'antennerie rencontre toutefois quelques limitations pour être une voie suffisante pour l'étude des sources aéroacoustiques. Considérant le rayonnement direct entre la zone source et la zone observateur l'utilisation de cette approche reste limitée aux écoulements non-confinés. En plus, cette méthode est basée sur l'hypothèse de source compacte et peut être limitée par le manque de résolution et la présence des lobes secondaires élevés.

L'investigation des sources aéroacoustiques peut également être effectuée par les méthodes de causalité. Dans cette approche en plus du champ de pression acoustique dans le domaine observateur les informations relatives au champ aérodynamique dans le domaine source sont nécessaires. Connaissant le décalage relatif de ces informations (champ acoustique et champ aérodynamique) sur l'axe du temps, la corrélation entre ces deux champs (aérodynamique et acoustique) est étudiée. On connaît un certain nombre d'opérateurs ou d'outils mathématiques définis dans le domaine temporel ou spectral pour évaluer cette corrélation. Quelque soit l'opérateur ou l'outil mathématique choisi, il est nécessaire de sélectionner une grandeur du champ aérodynamique dans le domaine source pour la corréler avec la pression acoustique.

Ce choix mené sur les entités turbulentes dans la région source est très varié, allant des variables physiques de l'écoulement aux modèles combinant les quantités physiques. De nombreux travaux ont été menés sur l'analyse du bruit des jets turbulents [18,37,62,70,75,93,94,110,113,116] du fait de l'importance de ce phénomène non seulement d'un point de vu de physique mais

également pour son intérêt industriel. De plus, dans cette configuration le rayonnement libre et direct (aucun obstacle entre la région source et la région des ondes acoustiques) permet de comparer facilement le temps de retard maximisant la corrélation entre les signaux en deux points donnés (un point dans la région source et un point dans la région observateur) et le temps nécessaire mis par les ondes acoustiques pour effectuer la distance entre ces deux points.
Dans le cadre d'un jet libre chaud, Panda [93] a utilisé la densité fluctuante (mesurée par une méthode non-intrusive appelée Molecular Rayleigh Scattering). Il a étudié le rayonnement de différentes régions du jet (le long de l'axe du jet) dans les différentes directions à l'aide du coefficient de corrélation ($C_{\rho,p}$) évalué entre la densité fluctuante (mesurée le long de l'axe du jet) et la pression acoustique (mesurée en différentes positions angulaires). Cet outil a permis d'étudier l'évolution du rayonnement acoustique d'une région donnée du jet en fonction de la température et du nombre de Mach du jet.
La vitesse turbulente (ou les modèles basés sur la vitesse turbulente) dans le domaine source a été la variable favorite pour calculer la corrélation avec la pression acoustique. Dans le cadre d'un jet transsonique libre froid (température ambiante) Schaffar [110] a utilisé la vitesse fluctuante dans la région cylindrique du jet (équivalent de 5 à 10 diamètres le long du axe du jet) pour investiguer le bruit perçu en aval du jet. Il a évalué le coefficient de corrélation d'abord entre la pression acoustique et la vitesse fluctuante (composante selon axe du jet), $C_{u,p}$ et ensuite entre la pression acoustique et la vitesse fluctuante au carrée, $C_{u^2,p}$. Ces deux coefficients de corrélation étant associés à deux composantes Shear Noise et Self Noise issus de la solution de l'équation de Lighthill, il a montré que la majorité du bruit rayonné en aval (dans l'intervalle de 20° à 30° par rapport à l'axe du jet) est associé à la partie Shear Noise.
Pour un jet libre subsonique froid Juvé [70] a mis en évidence la relation entre la dérivée seconde du signal de vitesse fluctuante selon l'axe du jet (mesuré dans les zones où la composante Shear Noise est importante) et la pression acoustique (mesurée dans les angles inférieurs à 30°).
Panda *et al.* [94] ont utilisé les différentes combinaisons entre la vitesse fluctuante et la vitesse moyenne et la densité ($C_{\rho Uu,p}$, $C_{\rho uu,p}$, $C_{\rho UU,p}$,...) pour investiguer les régions importantes de production sonore pour les jets libres froids supersoniques et transsoniques (Mach 0.95, 1.4 et 1.8). Ils ont mis en évidence la forte implication de la région située tout à la fin du cône potentiel (d'une largeur de équivalente à quelques diamètres du jet) dans le rayonnement acoustique aux angles inférieur à 30°.
Bogey et Bailly [18] sur la base des résultats fournis par la simulation numérique LES (Large Eddy Simulation) des jets subsoniques (Mach=0.6 et 0.9 et deux nombres de Reynolds 1700 et $\geq 10^5$) ont étudié la corrélation entre le champ acoustique rayonné et les différentes variables de la région source ($C_{u,p}$, $C_{v,p}$, $C_{\omega,p}$, $C_{uu,p}$, $C_{k,p}$, ...). Une des originalités de ce travail repose sur la prise en compte de l'effet d'écoulement sur la propagation des ondes acoustiques (essentiellement la réfraction des ondes) pour calculer le temps de retard. Les résultats obtenus sont pour la majeure partie en accord avec les résultats expérimentaux trouvés précédemment.

Les différents choix faits sur la variable ou le modèle dans la région source pour corréler avec la pression acoustique n'ont pas permis d'en privilégier une/un de manière universelle et la question de la "meilleure" variable (modèle) à utiliser pour le calcul de la corrélation avec le champ acoustique rayonné reste ouverte. Dans la partie 4.3 en considérant le tenseur de Lighthill et la pression fluctuante dans la région source nous essayerons d'apporter une contribution à cette question.

Le lien causal entre le champ aérodynamique et le champ acoustique dans la plupart des cas (comme dans tous les cas cités précédemment) est étudié à l'aide de l'opérateur de corrélation dans le domaine temporel ou fréquentiel. Cet opérateur utilise l'information en deux points (un point dans le domaine source et un point dans le domaine acoustique). Or les évènements aérodynamiques dans la région source ont plutôt une signature spatiale et ont besoin de plus

d'un point pour être décrits. Pour relier la pression acoustique à un évènement aérodynamique, différents techniques ont été entreprises. Juvé *et al.* [70] combinent une technique de mesure dans le champ aérodynamique appelée "*Conditional Measurement*" et la corrélation en deux points avec la pression acoustique pour mieux mettre en évidence le rôle des structures cohérentes de l'écoulement dans la production sonore dans un jet froid subsonique. Dans cette technique la mesure du signal de pression acoustique est déclenchée par un "*trigger*", c'est-à-dire un signal de référence (le signal de vitesse dans le jet) quand celui-ci dépasse un certain seuil. Cette méthode est également utilisée par Dahan *et al.* [37] dans le cadre d'un jet chaud subsonique.

La technique utilisée par Henning *et al.* [57] semble également intéressante. Dans le cadre d'un jet froid subsonique et transsonique (Mach 0.5 à 0.9), ils étudient la corrélation entre la pression acoustique et le champ de vitesse mesuré par la technique de PIV (Particle Image Velocimetry). La PIV permet d'accéder aux informations spatio-temporelles des deux composantes du champ de vitesse dans le plan de mesure. Ils évaluent le coefficient de corrélation entre la pression acoustique en champ lointain (à 35° de l'axe du jet) et la composante selon x et selon y de la vitesse à tous les points du plan de mesure. Ils constituent ainsi une cartographie du coefficient de corrélation dans le plan de mesure en fonction du temps de retard. A l'aide de ces cartographies, l'empreinte des grosses structures tourbillonnaires est mise en évidence. Cette empreinte signifie l'implication de ces structures dans la génération des ondes acoustiques mesurées dans la position considérée (35° de l'axe du jet). Comme pour les différents points du plan de mesure le coefficient de corrélation sera maximum en différents temps de retard, la cartographie du coefficient de corrélation doit être étudiée pour différents temps de retard. Cette étude pourrait être effectuée par une animation de la cartographie en fonction du temps de retard. L'autre possibilité est de regarder la valeur *rms* du coefficient de corrélation pour obtenir une idée globale sur les zones qui possèdent une corrélation élevée avec la pression acoustique. Henning *et al.* [56] ont utilisé cette représentation de la valeur *rms* du coefficient de corrélation dans le cadre du rayonnement acoustique de la cavité située entre un élément hypersustentateur et un profil d'aile (figure 1.1).

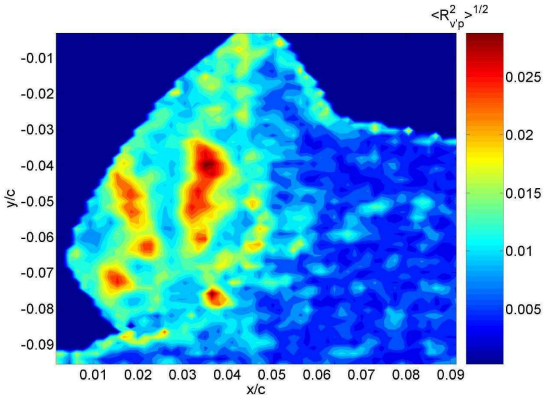

FIG. 1.1 – Valeur *rms* du coefficient de corrélation entre la pression acoustique et une composante du champ de vitesse intégrée entre deux temps de retard. (figure extraite de Henning *et al.* [56])

Parmi les techniques d'analyse basées sur la causalité, on peut également citer celles utilisant des procédures mathématiques avancées telles que l'Estimation Stochastique (ES) et la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD pour Proper Orthogonal Decomposition). Ces outils reposent sur des données statistiques que sont les corrélations spatio-temporelles entre différentes variables de l'écoulement. Des applications particulières peuvent alors être entreprises notamment dans le cadre du contrôle des émissions sonores issues des écoulements turbulents. Par exemple, dans le cadre d'un jet turbulent, Schlegel *et al.* [111] proposent de reconstruire le champ de vitesse via l'Estimation Stochastique Linéaire à partir de la connaissance du champ de

pression acoustique projeté sur certains modes POD. Cette analyse permet la construction d'un modèle d'ordre réduit contenant la majeure partie de l'information "aéroacoustique" intéressante et des processus de contrôle du bruit ont pu être mise en place.

Druault *et al.* [41] proposent une méthode basée sur la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres et l'Estimation Stochastique pour investiguer le lien entre les structures de différentes tailles au sein de l'écoulement turbulent et le rayonnement acoustique. Dans cette approche, le champ de vitesse turbulente est décomposé en une série de modes orthogonaux fournis par la POD. En regroupant les modes en différentes familles (la première famille contenant les premiers modes POD représente les structures cohérentes de l'écoulement), ils évaluent la contribution de chaque famille au rayonnement des ondes acoustiques à l'aide de l'ES.

Dans ce document la relation entre le champ acoustique rayonné et les grandeurs turbulentes quand le signal acoustique est disponible, est investiguée par l'EPOD. La variable turbulente considérée dans la zone source est décomposée par la POD et la contribution des modes au bruit rayonné est étudiée à l'aide des modes étendus. Le choix de cette méthode est essentiellement motivé par la représentation des grosses structures cohérentes par la POD. Si les grosses structures cohérentes sont impliquées dans la génération du bruit, la mise en place des stratégies de contrôle (active ou passive par la simple modification de forme) sera plus facile.

Objectifs de la thèse

Comme nous l'avons souligné, l'ensemble des méthodes de causalité citées dans les paragraphes précédents est basé sur la connaissance a priori du champ de pression acoustique rayonné. Dans le cas automobile l'accès aux champ aérodynamique et celui de la pression acoustique associé peut être fournie par les moyens expérimentaux et en particulier en soufflerie anéchoïque entièrement dédiée aux études acoustiques. Le recours à ce type d'approche rencontre quelques limitations. D'une part, elles nécessitent l'existence d'un prototype de l'élément étudié et, dans la plupart des cas, un prototype du véhicule complet nécessite des délais importants dans la conception d'un nouveau projet véhicule. D'autre part, souvent l'ensemble des informations souhaitées (densité, pression, vitesse) nécessaires pour l'analyse des phénomènes aéroacoustiques ne peut pas être obtenu par les moyens (souvent intrusifs) de mesure. C'est dans ce contexte qu'intervient la simulation numérique, aujourd'hui indispensable dans le cycle de conception des véhicules.

La technologie des calculs parallèles et surtout les méthodes numériques (en particulier la méthode Boltzmann sur réseau) fournissent aujourd'hui la possibilité de simulations directes du rayonnement acoustique d'écoulement autour des véhicules automobiles. Bien que ce progrès soit une étape extrêmement importante dans la prédiction du bruit aéroacoustique, la compréhension et l'identification des évènements aérodynamiques à l'origine de l'émission sonore restent à approfondir. Le développement d'outils de post-traitement sur la base d'informations fournies par la simulation semble alors été nécessaire pour mieux appréhender les mécanismes aérodynamiques générateur du bruit et donc améliorer le confort acoustique des véhicules. En effet, la simulation aéroacoustique directe (accès simultané au champ aérodynamique et au rayonnement acoustique associé) permet de ne pas se limiter aux méthodes visant simplement à localiser les sources d'émission sonore (comme l'antennerie) et d'envisager la mise en place de méthodes permettant d'étudier le rayonnement acoustique du champ aérodynamique de manière plus fine en cherchant à établir son lien avec les évènements aérodynamiques. C'est dans ce contexte que s'inscrit le présent travail. En particulier dans le cas de rayonnement libre nous cherchons à déterminer le rôle des structures cohérentes de l'écoulement dans la production sonore. Cet objectif est suivi par la décomposition du champ aérodynamique en modes POD permettant d'extraire les structures cohérentes du champ. Le lien entre les structures cohérentes extraites ainsi et le champ acoustique est ensuite étudié à l'aide des modes étendus (EPOD). Ces outils mathématiques sont basés sur les opérateurs statistiques. Leur application aux domaines finis sans s'assurer de leur convergence

statistique peut conduire à des résultats faux et sans signification physique. Il est donc nécessaire d'apporter un soin particulier à l'analyse des limitations dues à l'utilisation de domaines finis et surtout d'une durée courte des signaux. De cette manière un des objectifs principaux dans cette thèse est de proposer des méthodes (outils) permettant de s'assurer de la fiabilité statistique des opérateurs.

Les méthodes de causalité, associées éventuellement à des techniques de décomposition des champs de type POD, peuvent être envisagées pour étudier les mécanismes de sources responsables du signal considéré. Comme discuté précédemment, la notion de fonction de transfert en la zone source et le point d'écoute, se traduisant mathématiquement par la fonction de Green adaptée et qui est prise en compte de manière directe dans le cadre des simulations aéroacoustiques directes, est déterminant dans l'évaluation de la source. Dans le cadre automobile, le transfert entre la zone source et le point d'écoute ne se fait généralement pas par propagation aérienne directe mais se fait souvent via la vibration d'un panneau (typiquement un vitrage). De plus, ce panneau est le plus souvent situé dans la zone source elle-même. Il semble donc intuitif que les sources perçues à l'extérieur du véhicule ne sont probablement pas les mêmes que celles perçues dans l'habitacle. Ainsi, dans le cadre expérimental, dans l'optique de prendre en compte cette influence des fonctions de transferts source-point d'écoute dans la localisation et quantification des sources, la technique de formation de voies a été étendue pour prendre en compte ces fonctions de transferts [3]. En enregistrant, simultanément aux microphones de l'antenne, le signal acoustique dans l'habitacle et en utilisant les informations d'interspectres entre les signaux "sources" aux points de focalisation et ce signal intérieur, les cartographies de sources "entendues" par le microphone intérieur peuvent être calculées [3]. Cette méthode, appelée MALIS est désormais appliquée dans la soufflerie automobile S2A [89].
Dans le même esprit, en calculant un signal de bruit intérieur à partir de modèles numériques, on peut envisager d'appliquer des méthodes de causalité pour déterminer les sources d'excitation. L'étude du bruit aéroacoustique intérieur provenant de l'écoulement externe se traduit par l'étude de la transparence aéroacoustique des panneaux (en particulier les vitrages). Ce mécanisme est constitué de trois parties : l'excitation aéroacoustique, la vibration de paroi et le rayonnement acoustique issu de la vibration de la paroi. Dans cette situation, l'établissement du lien entre le champ d'excitation aéroacoustique et le rayonnement acoustique intérieur est souhaité. La possibilité d'établissement de ce lien par les méthodes de causalité forme un autre objectif de ce travail. En d'autres termes, nous souhaitons tester le potentiel des méthodes de causalité (corrélation directe) pour une telle application.

Plan de la thèse

Ce mémoire de thèse s'organise en quatre chapitres en dehors de cette partie introductive et des conclusions. Dans le chapitre 2 la méthode Boltzmann sur réseau est brièvement introduite et ses capacités pour effectuer des simulations directes de bruit dans le cadre de l'aéroacoustique automobile sont montrées.
Le chapitre 3 est consacré à l'introduction des outils d'analyses statistiques et en particulier la POD et l'EPOD qui seront largement utilisés tout au long de ce mémoire.
Dans le chapitre 4 l'application de l'outil EPOD aux domaines finis est d'abord discutée et les limitations de la méthode appliquée aux domaines finis sont démontrées. La question de la convergence des opérations statistiques due aux signaux d'une durée courte et son effet sur les modes POD et les modes étendus sont traités. Certaines précautions très importantes sont soulignées et des méthodes permettant de s'assurer d'une utilisation "saine" de la POD et l'EPOD dans les domaines spatial et temporel finis sont proposées. En termes de choix des variables dans la zone source, les capacités de la pression fluctuante à représenter les évènements aérodynamiques impliqués dans la production sonore sont également discutées. A la fin de ce chapitre deux cas

d'application sont étudiés : un aérateur simplifié et le rétroviseur de la Modus.
Le dernier chapitre est destiné à l'étude des sources rayonnées à l'intérieur de l'habitacle. L'étude est menée sur une plaque simple représentant le vitrage. Dans la première partie les différents mécanismes physiques constituant le chemin aéro-vibro-acoustique (l'excitation, la vibration et le rayonnement acoustique de la plaque) sont détaillés. En soulignant que le champ d'excitation aéroacoustique est constitué de deux composantes "acoustique" et "turbulente", nous présentons des modèles statistiques permettant de décrire un champ d'excitation aéroacoustique. Le comportement vibroacoustique de la plaque vis-à-vis des différentes composantes du champ d'excitation aéroacoustique est étudié par un modèle "éléments finis" simple de la plaque. Cette étude est rendue possible grâce à une démarche de synthèse permettant d'accéder au champ de pression "déterministe" à partir de modèles statistiques. Ensuite la possibilité d'établir un lien entre le bruit rayonné et les différentes composantes du champ d'excitation par les méthodes de causalité est étudiée. Cette étude théorique est rendue possible grâce à la connaissance parfaite des signaux de pression pariétale turbulente et acoustique qui ont été synthétisées à partir de modèles théoriques. Pour envisager ce type d'approche sur un vitrage automobile, une première étape consiste donc à séparer chaque type de signaux (acoustique et turbulent) dans le champ de pression pariétale. Pour réaliser cette opération de séparation, la méthode POD appliquée dans le domaine spectral et temporel est étudiée dans la dernière partie du chapitre 5.

Chapitre 2

Simulations aéroacoustiques par la méthode Boltzmann sur Réseau

Les équations régissant les phénomènes aéroacoustiques sont celles de la mécanique des fluides : les équations de Navier-Stokes (NS). L'aéroacoustique numérique (ou CAA pour Computational AeroAcoustics) consiste à résoudre numériquement ces équations pour la prédiction du bruit rayonné par les écoulements. On distingue deux approches : les méthodes dites hybrides et les méthodes directes.

Les méthodes hybrides sont basées sur l'approche de l'analogie acoustique [36, 42, 77, 78] et couplent un calcul aérodynamique avec un calcul de rayonnement.Le calcul aérodynamique fournit les informations relatives aux sources du bruit qui sont ensuite utilisées par le calcul de propagation afin d'accéder au bruit rayonné. Les méthodes hybrides ont connu plusieurs évolutions et leur progrès a été essentiellement piloté par les progrès atteints dans le domaine de CFD (Computational Fluid Dynamics). La première voie est d'utiliser un calcul aérodynamique stationnaire (type RANS pour Reynolds Averaged Navier-Stokes) qui fournit l'information relative au champ moyen. Cela nécessite l'emploi de modèles représentant le champ turbulent à partir du champ moyen qui va ensuite permettre d'exprimer les termes de source du bruit. La difficulté extrême de cette approche se repose dans la modélisation de des termes source turbulent à partir du champ moyen [12, 47].
La deuxième voie dans l'approche hybride consiste à utiliser un calcul instationnaire (souvent incompressible) qui fournit directement les informations nécessaires pour le calcul des termes sources des analogies acoustique : voir par exemple Peillard et Bailly [97] pour une application de cette technique sur une problématique automobile (bruit dans les conduits de climatisation).
Les principales difficultés des méthodes hybrides résident dans la définition de la région source, le calcul du bruit rayonné dans la région source et la prise en compte des interactions éventuelles entre le champ aérodynamique et la propagation acoustique. Après avoir déterminer les termes source et les zones source, le calcul de la propagation acoustique peut se faire à l'aide de plusieurs techniques : le calcul d'une convolution des sources avec une fonction de Green dans les cas les plus simples, l'utilisation d'un logiciel d'acoustique linéaire [97] par la méthode des éléments finis ou éléments de frontière, ou bien la résolution des équations d'Euler linéarisées [11] pour prendre en compte les effets les plus complexes de convection et de réfraction du champ aérodynamique moyen.

L'approche directe consiste à résoudre numériquement les équations de NS compressibles. Dans ce cas la génération et la propagation des ondes acoustiques sont simultanément considérées. On parle alors de DNC (pour Direct Noise Calculation). Dans le cas idéal où le point d'écoute est situé dans le domaine de calcul, aucun modèle de source et aucune hypothèse sur la propagation acoustique n'est à faire. Les seules limitations viennent de la précision des schémas numériques

utilisés pour la résolution des équations de NS compressibles. Dans le cas où le point d'écoute se situe à des distances trop importantes pour pouvoir mailler l'ensemble du domaine, le champ acoustique calculé autour des régions sources peut être étendu en champ lointain ou très lointain par des modèles d'extrapolation des champs : on parle de WEM pour Wave Extrapolation Method (méthode de Kirchhoff, méthode de Ffowcs Williams & Hawkings poreux, ...). Une revue de ces différentes techniques, ainsi que des modèles aéroacoustiques hybrides basés sur l'analogie acoustique, est présentée dans Gloerfelt [45].
On rappelle que les équations de NS qui décrivent la dynamique du fluide sont obtenues via une vision macroscopique du milieu. Cette dynamique peut également être décrite par l'équation de Boltzmann qui est basée sur une vision mésoscopique. On distingue donc deux écoles pour effectuer des DNC : les méthodes qui résolvent les équations de NS et les méthodes qui résolvent l'équation de Boltzmann et en particulier la méthode de Boltzmann sur Réseau (ou LBM pour Lattice Boltzmann Method).

Dans ce travail le logiciel commercial PowerFLOW basé sur la LBM est utilisé pour effectuer des calculs DNC dans des configurations complexes telles que celle associée au conduit d'aération (sortie du système de ventilation de l'habitacle) ou celle caractérisant l'écoulement autour de véhicules. Dans le paragraphe suivant la méthode Boltzmann sur Réseau est présentée. Le but de ce paragraphe est d'introduire les notions de base de la méthode et sa capacité à réaliser des calculs DNC. Pour plus de détaills sur l'approche de Boltzmann et la méthode de Boltzmann sur Réseau, le lecteur peut se reporter aux références suivantes [30, 61, 83, 84, 105].

2.1 La méthode Boltzmann sur Réseau

Le point de départ de cette approche repose sur l'expression statistique du comportement des particules du fluide par une fonction de distribution : $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$. Cette fonction représente le nombre de particules autour du point $\mathbf{x}$ et au temps t qui possède la vitesse $\mathbf{c}$. Les variables macroscopiques peuvent être exprimées de façon immédiate au point $\mathbf{x}$ et au temps t en faisant la somme sur toutes les vitesses possibles :

$$\rho = \int f d\mathbf{c}$$

$$\rho \mathbf{u} = \int \mathbf{c} f d\mathbf{c}$$

En absence de collision entre les particules et de forces extérieures, les particules possédant la vitesse $\mathbf{c}$ au point $\mathbf{x}$ et eu temps t se déplaceront, en un temps Δt, au point $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ en conservant leur vitesse $\mathbf{c}$. En d'autres termes, il y a conservation de la fonction $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ le long de caractéristique $\mathbf{c}$:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

Bien entendu, les collisions entre les particules se produisent et redistribuent l'énergie entre les particules et jouent ainsi un rôle essentiel dans l'évolution vers l'équilibre thermodynamique. Cette notion de collision est introduite dans l'équation de transport par l'intermédiaire d'un taux de variation $(\frac{\partial f}{\partial t})_{coll.}$ appelé l'opérateur de collision :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = (\frac{\partial f}{\partial t})_{coll.} \tag{2.1}$$

Cette équation est la forme générale de l'équation de Boltzmann.

L'hypothèse de collision élastique entre les particules (pas de création de masse, de quantité de mouvement ou d'énergie au cours de l'interaction entre les particules) permet de montrer [61] que les équations macroscopiques de conservation peuvent être obtenues à partir de l'équation de Boltzmann (2.1). Bhatnagar-Gross-Krook propose une forme linéaire pour approximer l'opérateur de collision [15] :

$$(\frac{\partial f}{\partial t})_{coll.} = -\frac{f - f^{eq}}{\lambda}$$

Cet opérateur appelé l'opérateur de BGK traduit le fait que l'opérateur de collision a pour effet global de faire tendre la fonction de distribution $f(\mathbf{x}, c, t)$ vers sa valeur d'équilibre local $f^{eq}(\mathbf{x}, c, t)$. Cette relaxation de f vers f^{eq} se fait avec un temps caractéristique λ qui peut s'interpréter comme le temps moyen entre deux collisions successives pour une particule donnée. $f^{eq}(\mathbf{x}, c, t)$ (la distribution de Maxwell-Boltzmann) qui décrit l'état d'équilibre thermodynamique du fluide est donnée de manière explicite en fonction des variables macroscopiques de l'écoulement. Le développement multi-échelle de Chapman-Enskog [26, 61] de l'équation de Boltzmann ayant pour opérateur de collision, l'opérateur de BGK, permet de retrouver les équations non-linéaires de NS compressibles.

La résolution numérique de l'équation de Boltzmann nécessite que l'ensemble des variables $\mathbf{x}$, t et $\mathbf{c}$ présentes dans cette équation soit discrétisé et borné. Contrairement au cas des équations de NS au-delà du temps et de l'espace, ici, on fait face à une variable supplémentaire $\mathbf{c}$ qui doit être discrétisée et bornée. Cette discrétisation et cette réduction du nombre de vitesse des particules ($\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c}_\alpha$) doit se faire dans le respect de l'équivalence entre les descriptions microscopique/macroscopique, c'est-à-dire que la remontée aux équations de NS à partir de l'équation de Boltzmann à vitesses discretes doit être assurée. Ainsi l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + c_{\alpha,i}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = -\frac{1}{\tau}(f_\alpha - f_\alpha^{eq})$$

($\tau = \epsilon\lambda$ avec ϵ le nombre de Knudsen) peut maintenant être discrétisée en temps et en espace et résolue à l'aide de schémas numériques classiques de différences finies ou volumes finis. Mais grâce à ses propriétés spécifiques [105], c'est sa forme explicite intégrée le long de caractéristique c_α pendant un intervalle de temps Δt et soumis à un changement de variable qui est souvent utilisée. On parle de l'équation de Boltzmann sur Réseau (ou LBE pour Lattice Boltzmann Equation) :

$$g_\alpha(\mathbf{x} + c_\alpha\Delta t, t + \Delta t) = (1 - \frac{\Delta t}{\tau_g})g_\alpha(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{\tau_g}g_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) \tag{2.2}$$

avec $g_\alpha^{eq} = f_\alpha^{eq}$ et $\tau_g = \tau + \Delta t/2$.
Les variables macroscopiques de l'écoulement sont calculées dans le domaine des vitesses discrètes par :

$$\rho = \sum_\alpha g_\alpha,$$

$$\rho u_i = \sum_\alpha g_\alpha c_{\alpha,i}.$$

L'équation de Boltzmann sur Réseau nécessite donc qu'un modèle à vitesses discrètes et une expression explicite de la fonction d'équilibre (en fonction des variables macroscopiques de l'écoulement) pour être numériquement résolue en temps et en espace. De nombreux modèles à vitesses discrètes et de fonctions d'équilibre (qui leur sont propres) sont proposés dans la littérature [28, 31]. Dans le code PowerFLOW, le modèle D3Q19 [76, 102] est implémenté. Les vitesses discrètes du modèle D3Q19 sont représentés sur la figure 2.1.

Concernant la discrétisation spatiale et temporelle, on remarque que l'équation de Boltzmann sur Réseau impose le point $\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha\Delta t$ pour lequel la fonction de distribution est calculée au temps

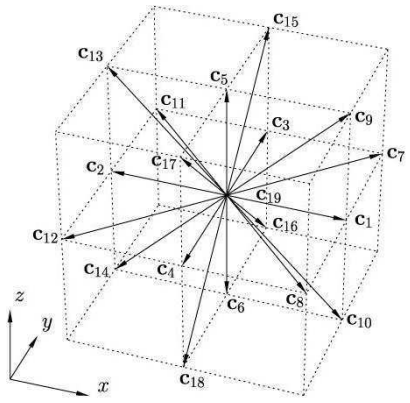

FIG. 2.1 – Vitesses discrètes du modèle D3Q19

$t + \Delta t$. Le maillage spatial va donc nécessairement dépendre du système de vitesses $\mathbf{c}_\alpha$. Pour calculer les moments de g_α au point $\mathbf{x}_k$ et au temps $t + \Delta t$, on doit appliquer l'équation (2.2) pour toutes les vitesses c_α aux points $\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{x}_k - c_\alpha \Delta t$. Ces points doivent donc être également un nœud du maillage. Cette condition fixe alors la discrétisation spatiale du domaine : $\Delta \mathbf{x} = c_\alpha \Delta t$. En repassant aux dimensions physiques des variables il est possible de montrer que le pas de discrétisation spatiale est lié au pas de temps via la vitesse de son (c_s) :

$$\Delta x = \frac{c_s}{\tilde{c}_s} \Delta t,$$

où $\tilde{c}_s$ représente le nombre de CFL. La valeur du nombre de CFL ($\tilde{c}_s = c_s \Delta t / \Delta \mathbf{x}$) est obtenue selon le modèle à vitesses discrètes considéré. Il vaut $\tilde{c}_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$ pour le modèle D3Q19. On note au passage que l'expression de la viscosité est la même pour tous les modèles de Boltzmann sur Réseau :

$$\nu = \theta(\frac{\tau_g}{\Delta t} - \frac{1}{2})\frac{\Delta x^2}{\Delta t}, \tag{2.3}$$

avec θ la température généralisée adimensionnelle du fluide.

Après avoir défini le modèle à vitesses discrètes (en conséquence la fonction de distribution d'équilibre associée) et les discrétisations spatiale et temporelle, l'algorithme numérique de calcul de LBE peut être explicité. Au temps t, on suppose que $g_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $g_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)$, $\rho(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ sont connus. Pour le cas isotherme, les différentes variables peuvent être calculées au temps $t + 1$ par l'algorithme :

Etape 1 : Collision : $g_\alpha^{coll.}(\mathbf{x}, t) = (1 - \frac{\Delta t}{\tau_g}) g_\alpha(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{\tau_g} g_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)$

Etape 2 : Propagation : $g_\alpha(\mathbf{x} + c_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = g_\alpha^{coll.}(\mathbf{x}, t)$

Etape 3 : Calcul de $\rho(\mathbf{x}, t + \Delta t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ (moments de $g_\alpha((\mathbf{x}, t + \Delta t))$

Etape 4 : Calcul de $g_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ en fonction de ρ et $\mathbf{u}$.

Dans PowerFLOW la fonction d'équilibre associée au modèle D3Q19 a une forme polynomiale d'ordre 3 :

$$g_\alpha^{eq} = \rho \omega_\alpha \left[1 + \frac{\mathbf{c}_\alpha . \mathbf{u}}{T} + \frac{(\mathbf{c}_\alpha . \mathbf{u})^2}{2T^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2T} + \frac{(\mathbf{c}_\alpha . \mathbf{u})^3}{6T^3} - \frac{\mathbf{c}_\alpha . \mathbf{u}}{2T^2} \mathbf{u}^2 \right].$$

On peut tout de suite remarquer que cet algorithme général de la LBM est très avantageux pour un calcul parallèle en décomposant le domaine de calcul en plusieurs sous-domaines. La seule étape nécessitant un échange d'information est l'étape 2 : les variables $g_\alpha^{coll.}$ dont les indices α correspondent à des vitesses discrètes qui traversent la frontière entre les sous-domaines doivent être transférées.

Evidemment l'utilisation d'un maillage uniforme (imposé par la LBM) dans tout le domaine de calcul est une contrainte très importante car les échelles caractéristiques aérodynamiques peuvent être très différentes selon la zone considérée. Une des solutions pour adapter le maillage au problème physique est d'utiliser un maillage par blocs [27, 43, 129]. Pour deux blocs B_1 et B_2 dont les mailles sont de taille $\Delta_1 x$ et $\Delta_2 x$ le rapport de $\Delta_1 x/\Delta_2 x = n$ est un entier de telle sorte qu'un nœud sur n de la frontière du bloc B_2 coïncide avec un nœud du bloc B_1. Dans le logiciel PowerFLOW, ce type de maillage est utilisé avec $n = 2$ (figure 2.2) [27]. Dans chaque bloc l'équation de Boltzmann sur Réseau est calculée en adaptant le temps de relaxation de telle sort que la viscosité et la vitesse du son soient constantes dans tout le fluide. On a donc les relations :

$$\tau_{g,2} = \frac{1}{2} + n(\tau_{g,1} - \frac{1}{2}),$$

et

$$\frac{\Delta_1 t}{\Delta_2 t} = n.$$

Cette méthode a donc le double avantage de réduire le nombre d'éléments du maillage et de réduire le nombre d'itérations effectuées dans les zones de résolution les plus faibles. L'évaluation du coût de calcul d'un maillage donné, ne doit donc pas être basée sur le nombre total des nœuds. Par exemple on considère un maillage constitué de m blocs de différentes résolutions avec B_1 et B_m les blocs de résolution la plus élevée et la plus faible, respectivement. Aux nœuds appartenant au bloc B_1 le nombre d'itérations temporelles équivaut n^m fois le nombre d'itérations pour les nœuds appartenant au bloc B_m. Pour évaluer le coût de calcul numérique en fonction du nombre de points la notion de "Fine Equivalent" est introduite : on pondère les nœuds selon la résolution du bloc auquel ils appartiennent. Bien entendu, la principale difficulté de cette méthode multirésolution est de calculer la fonction de distribution à l'interface des blocs. Les fonctions de distribution des nœuds du maillage fin qui ne coïncident pas avec des nœuds du maillage grossier sont calculées par interpolations spatiale et temporelle [43, 129].
L'utilisation de mailles obligatoirement cubiques oblige à effectuer un traitement spécial des conditions de parois. Dans les méthodes LBM, des techniques du type frontières immergées sont utilisées : les mailles cubiques sont simplement coupées par les mailles surfaciques qui ont pour unique fonction de représenter la géométrie de la surface. Des algorithmes spéciaux sont alors utilisés pour traiter la première maille fluide au-dessus de la surface [20, 29]. Cette indépendance totale entre le maillage surfacique et le maillage volumique permet de mailler de manière très simple des géométries très complexes.

On note enfin que pour les écoulements à nombre de Reynolds élevé, PowerFLOW utilise un modèle de turbulence. L'effet des échelles de sous-maille sur l'écoulement moyen est intégré via une viscosité turbulente ν_T. La modélisation de turbulence est directement intégrée dans l'équation de Boltzmann sur Réseau en agissant sur le temps de relaxation τ_g pour fournir une échelle de temps de relaxation étendue. La viscosité turbulente (et par conséquent le temps de relaxation) est calculée par une variante des équations $k-\epsilon$ RNG dans PowerFLOW [96, 121]. Par rapport à leur formulation standard, les équations $k-\epsilon$ RNG sont modifiées par une correction de "*swirl*". Cette correction diminue la viscosité turbulente dans les zones de forte vorticité, permettant la résolution de tourbillons de plus petites échelles dans les zones où ces tourbillons peuvent être supportés par le maillage. En proche paroi une loi de type logarithmique modifiée pour prendre en compte les gradients de pression adverse est utilisée [96].

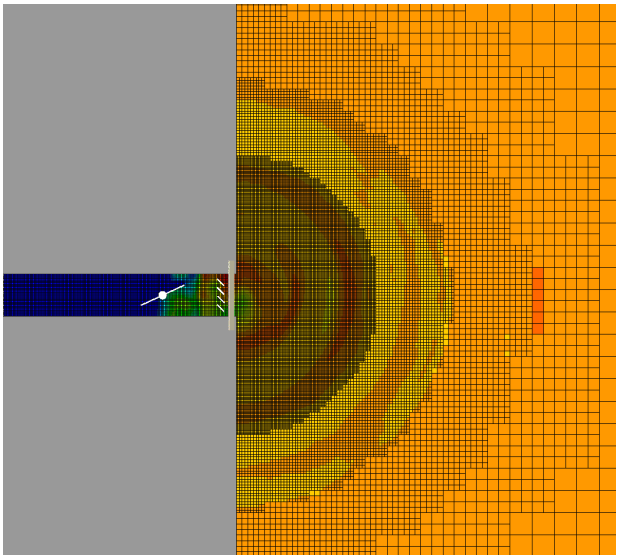

FIG. 2.2 – Exemple de maillage non uniforme par blocs utilisé dans PowerFLOW (cinq zones de résolution sont visibles)

Précision de LBM et PowerFLOW pour les simulations acoustiques et aéroacoustiques

Même avec des modèles isothermes, la LBM peut simuler les équations de la conservation de masse et la conservation de la quantité de mouvement complètement compressibles. La pression est liée à la densité via l'équation d'état $P = \rho rT$, avec $rT = cte$. Ainsi les fluctuations de pression sont liées aux fluctuations de densité via l'équation de $P' = c_s\rho'$ avec $c_s = \sqrt{rT}$. La propagation de pulses Gaussiens ont été simulés dans les cas 2D [108] et 3D [86] et comparées avec la solution analytique. Conformément à la prévision théorique, le taux de convergence de LBM est d'ordre deux. Malgré ce taux de convergence relativement faible, l'erreur absolue pour un problème donné, ayant une taille de maille fixée est plus faible par rapport à celle obtenue par les schémas standards de deuxième ordre appliqués aux équations de Navier-Stokes [85]. En particulier, l'analyse linéaire de Von Neumann et les expérimentations numériques [85] ont montré que la dissipation numérique de LBM est plus faible que celle de schémas aux différences finies centrées couplés à une discrétisation en temps de Runge-Kutta d'ordre élevé. En ce qui concerne l'erreur de dispersion, la performance de LBM reste meilleure comparée à celle des schémas aux différences finies centrées d'ordre deux, mais, évidemment les schémas optimisés de type DRP (Dispersion Relation Preserving) conduisent à une meilleure précision pour une taille de maille fixée. Cependant, la même précision peut être obtenue en augmentant le nombre de point par longueur d'onde dans la simulation LBM. Comme LBM est plus économe en termes de ressources de calcul, une simulation avec 12 à 15 points par longueur d'onde reste moins coûteuse qu'une simulation avec des schémas Navier-Stokes d'ordre élevé qui ne nécessitent que 4 à 6 points par longueur d'onde.

Plusieurs exemples de DNC effectués à l'aide de la LBM peuvent être trouvés dans la littérature. Skordos [118] a simulé la génération 3D de bruit dans un conduit (application à la flute à bec). Buick *et al.* [22] ont étudié la propagation des ondes sonores d'amplitude élevée et comparé les résultats avec les prédictions analytiques données par l'équation de Burgers. Ricot *et al.* [108] ont simulé l'émission sonore de l'écoulement sur une cavité rectangulaire 2D. La comparaison des résultats obtenus à des simulations aéroacoustiques basées sur les schémas différences finies d'ordre élevés est satisfaisante. Wilde [126] a simulé la propagation d'ondes dans un conduit 2D

avec et sans l'écoulement moyen. Les résultats sont en bon accord avec les données expérimentales pour différentes vitesses moyennes.

Les capacités purement acoustiques de PowerFLOW ont été investiguées par la simulation de cas simples comme la propagation d'un pulse acoustique [35, 107], le calcul de la résonance acoustique des cavités [35, 107]. Adam *et al.* [1] ont étudié le coefficient de réflexion acoustique de la terminaison de conduits. Pour le cas d'un conduit circulaire simple l'accord entre le résultat obtenu et l'expression analytique du coefficient de réflexion est remarquablement bon (figure 2.3). Pour le cas d'un conduit de géométrie complexe (conduit d'aération d'un véhicule) le résultat est comparé à celui fourni par le logiciel de propagation Sysnoise (Le logiciel Sysnoise est un logiciel d'acoustique linéaire basé sur la méthode des éléments de frontière). Un accord tout à fait satisfaisant est également obtenu entre les résultats de PowerFLOW et Sysnoise.

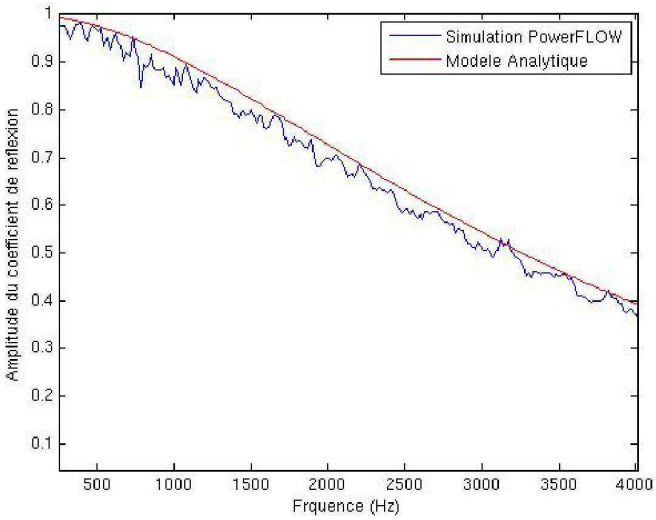

FIG. 2.3 – Comparaison entre le résultat de simulation PowerFLOW et l'expression analytique du coefficient de réflexion d'un conduit circulaire non-bafflé (figure extraite d'Adam *et al.* [1])

Les capacités de PowerFLOW pour effectuer de calculs DNC ont également été investiguées. Lafitte *et al.* [73] ont étudié le rayonnement de l'écoulement autour d'un cylindre de section circulaire 2D à bas nombres de Reynolds ($Re = [40, 200]$) et à bas nombres de Mach (M=[0.1,0.3]). Ce cas académique a fourni la possibilité de valider la simulation avec les simulations de référence et les expressions analytiques données dans la littérature. D'abord le champ aérodynamique a été étudié. La plupart des paramètres étudiés (champ de vorticité, coefficients de la traînée et de portance, l'angle de séparation, coefficient de pression sur la surface du cylindre, ...) montre un accord très satisfaisant avec les données de la littérature. L'écart maximum observé concerne l'angle de séparation avec 2.5% d'écart avec les données de référence. Le champ de pression acoustique a été ensuite étudié. Les champs instantanés de la pression acoustique (figure 2.4(a)) possèdent une très bonne corrélation avec ceux disponibles dans la littérature. De plus l'amplitude de ces fluctuations est aussi bien prédite que celle donnée par les simulations DNC de référence. Cette amplitude est comparée en des points fixes (situés sur la ligne de $\theta = 90°$, c'est-à-dire la ligne tracée en continuité du rayon du cylindre qui est perpendiculaire à l'écoulement) avec une expression analytique proportionnelle à $r^{-0.5}$ (figure 2.4(b)). En considérant la dissipation numérique, le bruit rayonné est prédit de manière très satisfaisante.
Pérot *et al.* [95] ont étudié le rayonnement direct d'un système complet d'aération de voiture (figure 2.5). Le bruit rayonné par l'écoulement a été enregistré en aval (à 0.85 m des sorties) en différentes positions pour cinq différents débits d'entrée d'air. Sur une installation expérimentale équivalente le bruit rayonné a également été mesuré aux mêmes positions que dans la simulation.

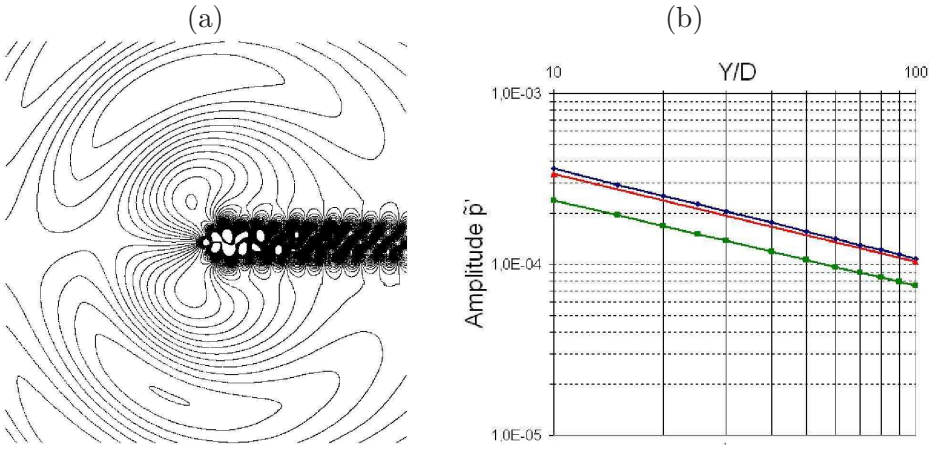

FIG. 2.4 – (a) Champ instantané de la pression fluctuante acoustique. (b) Amplitude des fluctuations de pression sur la ligne de $\theta = 90°$: (——) Simulation PowerFLOW effectuée par Laffite *et al.* [73], (——) Inoue et Hatakeyama [64], (——) fonction proportionnelle à $r^{-0.5}$ (figure extraite de Laffite *et al.* [73])

Les spectres de bruit simulé et mesuré ont été ensuite comparés pour deux configurations avec et sans les ailettes pour un débit donné. L'accord entre les résultats de la simulation et ceux issus de la mesure est satisfaisant pour une plage assez large des fréquences(figure 2.6). Dans le paragraphe 4.1 et 4.5.1, on présente plus en détails les travaux antérieurs effectués dans la Direction de la Recherche de RENAULT qui ont démontré la validité des calculs effectués par PowerFLOW pour les configurations étudiées dans ce document, à savoir le bruit rayonné par un aérateur simplifié de ventilation et par un rétroviseur.

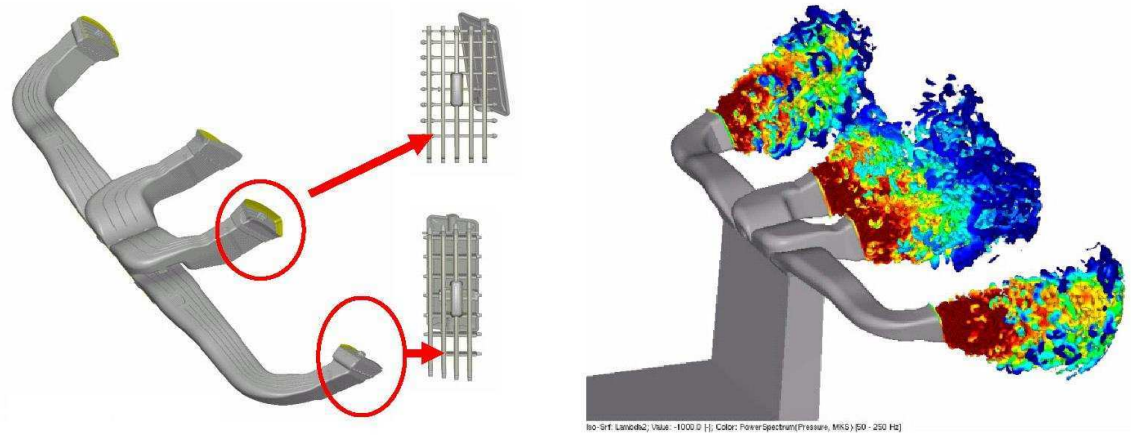

FIG. 2.5 – Configuration géométriques du système d'aération étudié par Pérot *et al.* [95]

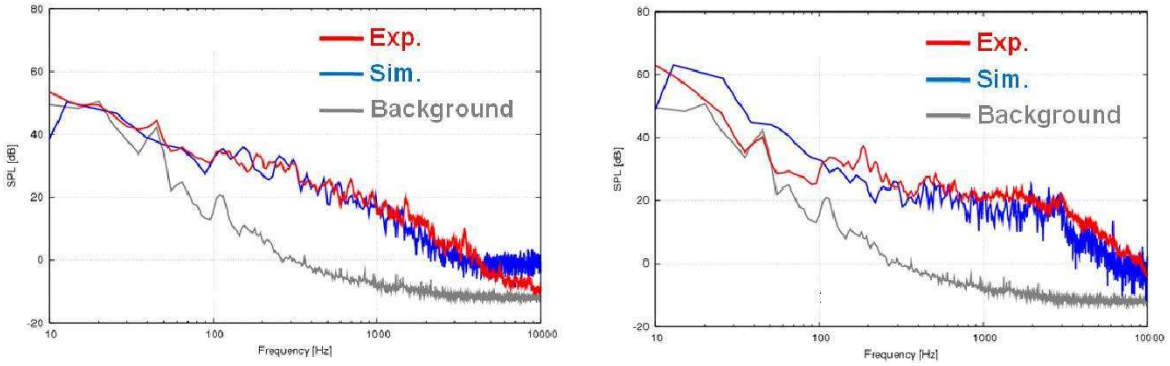

FIG. 2.6 – Comparaison calcul/mesure du spectre de bruit rayonné à 0.85 m de sortie des conduits (figure extraite de Pérot *et al.* [95])

Chapitre 3

Les outils d'analyse

3.1 Signaux aléatoires et convergence statistique

Dans ce chapitre, les notions de base et les outils mathématiques du traitement du signal qui sont largement utilisés tout au long de ce document sont introduits. L'objectif de cette partie n'est évidemment pas de définir de nouveaux outils d'analyse mais il consiste à unifier le vocabulaire et à définir des notions associées à l'utilisation de ces outils d'analyse. Nous essayons de souligner les limitations de chaque outil quand ils sont appliqués aux signaux de durée finie et plus particulièrement aux signaux issus de simulation numérique des écoulements.

3.1.1 Signaux aléatoires, notion de réalisation et d'ergodicité

D'un point de vue mathématique une grandeur physique mesurée au cours d'une expérience de l'écoulement est une variable aléatoire. Soit $U^{(n)}(\mathbf{x},t)$ la grandeur considérée dépendante du temps et de l'espace, issue de la réalisation n. Dû au caractère aléatoire, la valeur de U à un instant donné et en un point fixé ne peut pas être prédite en la connaissant à tous les instants précédents. La variable U est alors aléatoire vis-à-vis des réalisations et du temps. On appelle espérance mathématique, ou moyenne d'ensemble, la grandeur statistique $E[U]$ calculée en effectuant une moyenne sur un grand nombre de réalisations de U :

$$E[U(\mathbf{x},t)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U^{(n)}(\mathbf{x},t). \tag{3.1}$$

On définit d'autre part la moyenne temporelle de u par :

$$\bar{U}(\mathbf{x}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T U^{(n)}(\mathbf{x},t)dt. \tag{3.2}$$

Pour un processus ergodique, la moyenne temporelle est égale à l'espérance, soit $\bar{U}(\mathbf{x}) = E[U(\mathbf{x},t)]$.
Le signal U est dit stationnaire en temps si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\forall\ t : \qquad E[U(\mathbf{x},t)] = constante$$

et

$$\forall\ t : \qquad E[U(\mathbf{x},t+\tau)U^*(\mathbf{x},t)] = R(\mathbf{x},\tau),$$

où * désigne le complexe conjugé et R représente l'autoacorrélation.

Dans le cadre des phénomènes turbulents et acoustiques, et par conséquent aéroacoustiques, les signaux sont supposés vérifier l'hypothèse d'ergodicité. De plus on ne manipule que la partie fluctuante des signaux c'est-à-dire qu l'on retranche leur valeur moyenne déduite par la décomposition de Reynolds :

$$u(\mathbf{x},t) = U(\mathbf{x},t) - \bar{U}(\mathbf{x}). \tag{3.3}$$

Ils ont donc une valeur moyenne nulle. Ils sont également supposés être des signaux causaux, c'est-à-dire qu'ils sont nuls pour des temps négatifs.

3.1.2 Intercorrélation, transformée de Fourier, cohérence

Les phénomènes aéroacoustiques sont associés aux variables aléatoires que sont les champs de vitesse et de pression fluctuante. Or ces variables aléatoires ne sont pas indépendantes les unes des autres sur le plan temporel et spatial. Elles constituent ce que l'on appelle un processus stochastique qui peut être décrit, entre autre, par des fonctions de corrélations temporelles, spatiales et spatio-temporelles. Par la transformée de Fourier temporelle et spatiale, ces corrélations peuvent également s'exprimer dans les domaines fréquentiel et nombre d'onde.

Soient $u(\mathbf{x},t)$ et $p(\mathbf{x},t)$ deux signaux physiques dépendant de l'espace et du temps, associés par exemple aux champs de vitesse et de pression respectivement. La fonction d'intercorrélation temporelle entre ces deux signaux est définie par :

$$R_{up}(\mathbf{x},t,\tau) = E[u(\mathbf{x},t)p^*(\mathbf{x},t+\tau)] = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(\mathbf{x},t)p^*(\mathbf{x},t+\tau)dt. \tag{3.4}$$

Pour des champs u et p stationnaires la fonction d'intercorrélation temporelle ne dépend plus du temps d'observation, $R_{up}(\mathbf{x},t,\tau) = R_{up}(\mathbf{x},\tau)$.
La puissance moyenne d'un signal, ou la valeur quadratique moyenne est définie par :

$$u_{rms} = \sqrt{E\left[u(\mathbf{x}_i,t)u^*(\mathbf{x}_i,t)\right]} = \sqrt{\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |u(\mathbf{x},t)|^2\,dt}. \tag{3.5}$$

On notera que la fonction d'autocorrélation de u à temps de retard nul, $R_{uu}(\mathbf{x},\tau=0)$ représente la puissance moyenne élevée au carré du signal u.
La fonction d'intercorrélation spatiale entre deux signaux est définie par :

$$R_{up}(\mathbf{x},\mathbf{r},t) = E[u(\mathbf{x},t)p^*(\mathbf{x}+\mathbf{r},t)] = \lim_{D\to+\infty}\frac{1}{D}\int_D u(\mathbf{x},t)p^*(\mathbf{x}+\mathbf{r},t)d\mathbf{x}, \tag{3.6}$$

avec D domaine spatial. Pour des champs u et p spatialement homogènes, la fonction d'intercorrélation spatiale ne dépend pas du point d'observation, $R_{up}(\mathbf{x},\mathbf{r},t) = R_{up}(\mathbf{r},t)$.
Dans le cas de phénomènes inhomogènes spatialement et stationnaires en temps, on peut définir, par extension, la fonction d'intercorrélation temporelle calculée entre les points $\mathbf{x}_i$ et $\mathbf{x}_j$:

$$R_{up}(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j,\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(\mathbf{x}_i,t)p^*(\mathbf{x}_j,t+\tau)dt. \tag{3.7}$$

On appelle parfois cette fonction, la fonction d'intercorrélation. La normalisation de la fonction d'intercorrélation par la puissance moyenne des signaux conduit à la définition du coefficient d'intercorrélation :

$$C_{up}(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j,\tau) = \frac{E\left[u(\mathbf{x}_i,t)p^*(\mathbf{x}_j,t+\tau)\right]}{\sqrt{E\left[u(\mathbf{x}_i,t)u^*(\mathbf{x}_i,t)\right]}\sqrt{E\left[p(\mathbf{x}_j,t+\tau)p^*(\mathbf{x}_j,t+\tau)\right]}}. \tag{3.8}$$

Le coefficient d'intercorrélation permet d'exprimer le taux de ressemblance linéaire entre deux signaux d'une manière adimensionnelle.

Le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel peut être effectué à l'aide de la transformée de Fourier fréquentielle définie par :

$$\tilde{u}(\mathbf{x}, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t} dt \tag{3.9}$$

et

$$\tilde{u}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \tilde{u}(\mathbf{x}, f). \tag{3.10}$$

On définit la transformée de Fourier inverse par :

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\mathbf{x}, f) e^{i2\pi f t} df. \tag{3.11}$$

Pour des signaux bornés, on peut écrire la transformée de Fourier par :

$$\tilde{u}(\mathbf{x}, f, T) = \int_{0}^{T} u(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t} dt. \tag{3.12}$$

La part de l'énergie d'un signal portée par une harmonique peut être quantifiée par la Densité Spectrale de Puissance (DSP) définie par :

$$\tilde{S}_{uu}(\mathbf{x}, f) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} E\left[|\tilde{u}(\mathbf{x}, f, T)|^2 \right]. \tag{3.13}$$

De la même manière pour deux signaux aléatoires, la Densité InterSpectrale de Puissance (DISP) est définie par :

$$\tilde{S}_{up}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, f) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} E\left[\tilde{u}(\mathbf{x}_i, f, T) \tilde{p}^*(\mathbf{x}_j, f, T) \right] \tag{3.14}$$

ou bien :

$$\tilde{S}_{up}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \omega) = \lim_{T \to +\infty} \frac{(2\pi)^2}{T} E\left[\tilde{u}(\mathbf{x}_i, \omega, T) \tilde{p}^*(\mathbf{x}_j, \omega, T) \right]. \tag{3.15}$$

Pour des signaux stationnaires et ergodiques en temps, la densité (inter)spectrale de puissance peut être également obtenue via la théorème de Wiener-Khinchin par

$$\tilde{S}_{up}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{up}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{3.16}$$

Pour des signaux réels, $\tilde{S}_{up}$ est symétrique en f. On définit alors la densité (inter)spectrale unilatérale :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{up}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, f) &= 2\tilde{S}_{up}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, f) \qquad f > 0, \\ \tilde{G}_{up}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, 0) &= \tilde{S}_{up}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, 0) \qquad f = 0. \end{aligned}$$

On a la relation importante suivante pour la densité spectrale de puissance :

$$u^2_{rms}(\mathbf{x}_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{S}_{uu}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i, \omega) d\omega = \int_{0}^{+\infty} \tilde{G}_{uu}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i, \omega) d\omega. \tag{3.17}$$

De la même manière que le coefficient de corrélation, dans le domaine fréquentiel on peut identifier le taux de ressemblance linéaire de deux signaux à une fréquence donnée par la version normalisée de la densité inter-spectrale appelée la fonction de cohérence définie par :

$$\tilde{\gamma}^2_{up}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \omega) = \frac{E\left[\tilde{u}(\mathbf{x}_i, \omega) \tilde{p}^*(\mathbf{x}_j, \omega) \right]}{E\left[\tilde{u}(\mathbf{x}_i, \omega) \tilde{u}^*(\mathbf{x}_i, \omega) \right] E\left[\tilde{p}(\mathbf{x}_j, \omega) \tilde{p}^*(\mathbf{x}_j, \omega) \right]} = \frac{\left| \tilde{G}_{up}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \omega) \right|^2}{\tilde{G}_{uu}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i, \omega) \tilde{G}_{pp}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j, \omega)} \tag{3.18}$$

3.1.3 Passage dans le domaine nombre d'onde : transformée de Fourier spatiale

La transformée de Fourier dans le domaine spatial est définie par :

$$\hat{u}(\mathbf{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\Re^n} u(\mathbf{x},t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x} \tag{3.19}$$

et la transformée inverse est :

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\Re^n} \hat{u}(\mathbf{k},t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{k}. \tag{3.20}$$

Les intégrations sont effectuées dans l'espace réel ($\Re^n$) de dimension $n = 1, 2$ ou 3.
On définit la transformée de Fourier spatiale d'un signal borné par :

$$\hat{u}(\mathbf{k},t,D) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{D} u(\mathbf{x},t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x}, \tag{3.21}$$

où D représente le domaine spatial borné. Généralement, la transformée de Fourier spatiale se calcule après avoir effectué des transformées de Fourier temporelles des signaux :

$$\breve{u}(\mathbf{k},\omega,D,T) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{D} \tilde{u}(\mathbf{x},\omega,T)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x}. \tag{3.22}$$

La densité spectrale de nombre d'onde est définie par :

$$\breve{\Phi}_u(\mathbf{k},\omega) = \lim_{T\to+\infty}\lim_{D\to+\infty}\frac{2\pi}{T}\frac{(2\pi)^2}{D}E\left[\breve{u}(\mathbf{k},\omega,D,T)\breve{u}^*(\mathbf{k},\omega,D,T)\right]. \tag{3.23}$$

Dans le cas d'un champ spatialement homogène, le théorème de Wiener-Khinchin permet d'exprimer la densité spectrale en nombre d'onde à partir de la densité interspectrale de puissance :

$$\breve{\Phi}_u(\mathbf{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\Re^n} \tilde{S}_{uu}(\mathbf{r},\omega)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r}, \tag{3.24}$$

avec $\mathbf{r} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$. Dans cette définition, $\tilde{S}_{uu}(\mathbf{r},\omega)$ est la transformée de Fourier temporelle de la fonction d'autocorrélation spatio-temporelle. Grâce à la propriété de symétrie Hermitienne de $\tilde{S}_{uu}(\mathbf{r},\omega)$ (c'est-à-dire $\tilde{S}_{uu}(-\mathbf{r},\omega) = \tilde{S}^*_{uu}(\mathbf{r},\omega)$) le spectre en nombre d'onde $\breve{\Phi}_u$ est réel.

En intégrant la densité spectrale en nombre d'onde sur l'ensemble des nombres d'onde, on obtient la densité spectrale de puissance moyenne :

$$\tilde{S}_{uu}(\omega) = \tilde{S}_{uu}(\mathbf{r}=0,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\breve{\Phi}_u(\mathbf{k},\omega)d\mathbf{k} \tag{3.25}$$

Evidemment pour un champ homogène la valeur de cette intégration ($\tilde{S}_{uu}(\omega)$) peut être associée à un point quelconque du champ mais dans le cas d'un champ non homogène elle représente un niveau moyen.

Il convient d'insister que pour appliquer l'équation (3.23) l'homogénéité spatiale du champ n'est pas nécessaire et cette équation peut s'appliquer à un champ quelconque. En effet la densité spectral de nombre d'onde peut toujours être calculée à partir du moment où l'information temporelle (ou fréquentielle) du champ est connue en chaque point d'espace. Dans la partie 5.5.2, en s'appuyant sur cette équation, le spectre en nombre d'onde d'un champ inhomogène est calculé. Comme il a été démontré par Arguillat [8] dans le cadre des champs de pression pariétale, le calcul du spectre en nombre d'onde d'un champ inhomogène à partir de l'information de l'inter-spectre

via l'équation (3.24) peut conduire à des résultats complètement erronés. On peut également écrire une équivalence entre une intégration spatiale et une intégration dans l'espace des nombres d'onde sans aucune hypothèse sur l'homogénéité du champ :

$$\int_{\mathbf{D}} \tilde{u}(\mathbf{x},\omega,T)\tilde{u}^*(\mathbf{x},\omega,T)d\mathbf{x} = (2\pi)^2 \int_{\mathbf{k}} \breve{u}(\mathbf{k},\omega,D,T)\breve{u}^*(\mathbf{k},\omega,D,T)d\mathbf{k}$$

3.1.4 Signaux finis, estimation des grandeurs statistiques, problème de convergence

Dans la réalité l'accès à une infinité de réalisations (une durée temporelle ou/et une étendue spatiale infinies) est impossible. Nous disposons de signaux "finis", c'est-à-dire accessibles sur un domaine d'espace fini (domaine borné et discret) et un nombre fini d'instants. Les opérations statistiques définies dans les paragraphes précédents qui portent sur une infinité de réalisations ne peuvent être qu'estimées quand un nombre limité de réalisations ou d'échantillons temporels est disponible. Il est donc nécessaire de vérifier la convergence de cette estimation pour l'opération statistique considérée.

3.1.4.1 Domaine temporel, effet de la durée

Il n'existe pas de véritable critère ou de théorème mathématique permettant de vérifier la fiabilité du résultat de la plupart des opérations statistiques portées sur un nombre limité d'échantillons temporels. La plupart des critères, comme on le verra pour le domaine spectral, nécessite la connaissance de la valeur exacte (déduite d'un nombre d'échantillons infini) de l'opération. Entre autres, cela nécessite la connaissance de la loi probabiliste du phénomène aléatoire considéré qui n'est pas disponible pour les événements turbulents. On vérifie alors la convergence d'une opération par des méthodes empiriques inspirées de la physique de problème. A titre d'exemple, la convergence d'estimation de l'intercorrélation entre les signaux issus d'une simulation numérique de l'écoulement dans un conduit d'aérateur est investiguée. Cette simulation sera présentée en détail dans la partie § 4.1. Les signaux bruts fournis par la simulation possèdent une fréquence d'échantillonnage $F_s = 2.97\times10^6$ Hz et un nombre total de $N_T = 17720$ échantillons (après l'établissement de l'écoulement). On trace le coefficient d'intercorrélation entre les signaux de pression pour un temps de retard égal à zéro sur une section (une ligne) de l'écoulement (figure 3.1). Le coefficient d'intercorrélation est évalué entre les couples de points constitués du point au milieu et successivement des autres points de la section considérée. L'hypothèse de base pour

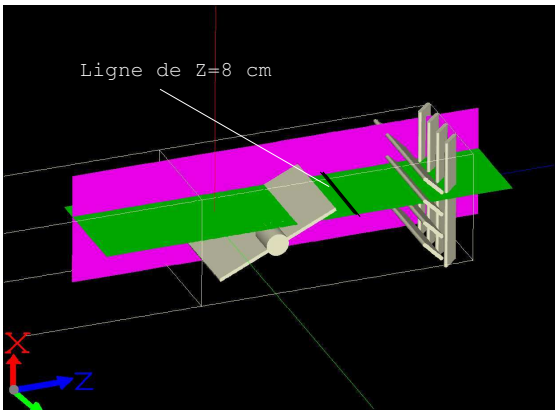

FIG. 3.1 – Conduit d'un aérateur simplifié. La ligne $z = 0.08$ m est choisie pour effectuer l'analyse de convergence

l'investigation de la convergence de l'estimation est la suivante : si la limite de convergence est atteinte et dépassée avec N échantillons temporels le résultat de cette estimation ne changera pas pour un nombre légèrement supérieur à N. On recalcule alors les coefficients d'intercorrélation pour des durées plus courtes. Cette analyse montre la sensibilité de l'estimation aux longueurs

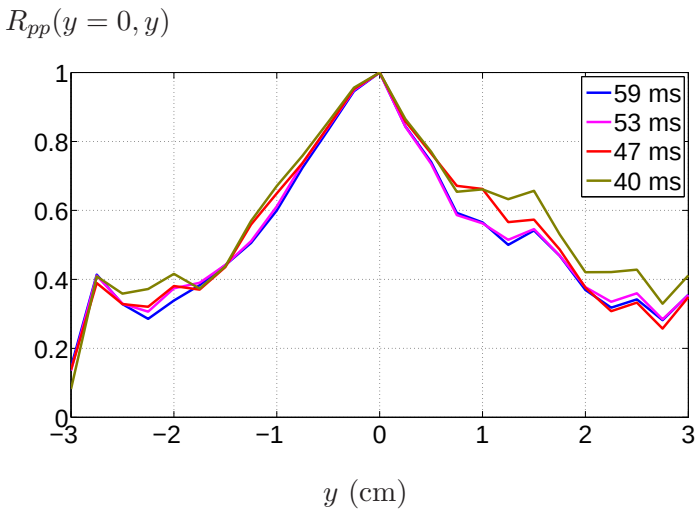

FIG. 3.2 – Effet de la durée sur l'estimation du coefficient d'intercorrélation $R_{pp}(y = 0, y)$ de la pression évaluée sur une section de l'écoulement et le point central de cette section

du signal. La courbe présente quasiment la même allure pour 53 ms et 59 ms (figure 3.2) ce qui permet d'admettre que le calcul de l'intercorrélation n'est convergé qu'à partir de 53 ms.

3.1.4.2 Propriété du signal issu de la simulation numérique, fréquence d'échantillonnage et dépendance des échantillons

On note qu'actuellement, le coût élevé d'une simulation numérique de l'écoulement *(puissance des ordinateurs de calcul, matériel de stockage des données,. . .)* est un facteur très limitant pour obtenir des durées physiques importantes. En aéroacoustique, la tendance (et en particulier chez Renault) est de faire des simulations instationnaires cherchant à modéliser le maximum d'échelle pour une meilleure prise en compte des phénomènes haute fréquence. En aérodynamique pure, on peut envisager de faire des simulations moins coûteuses en temps de calcul telles que les simulations RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes) ou URANS (Unsteady Reynolds Averaged Navier Stokes) ou DES (Detached Eddy Simulation), sans nécessairement chercher à déterminer précisément les petites structures de l'écoulement. L'accès aux grandes structures pour certaines applications peut suffire. En aéroacoustique, en plus du champ aérodynamique, la prise en compte des fluctuations haute fréquence est indispensable. En effet, les contraintes concernant la pertinence et le réalisme physique des simulations imposent une résolution en temps et en espace très élevées. En ce qui concerne l'intervalle temporel entre deux itérations successives (ou la fréquence d'échantillonnage) on fait souvent face à des signaux sur-échantillonnés. Les signaux contiennent plus de deux points par période, exigée par le théorème de Nyquist-Shannon. Ces échantillons supplémentaires n'apportent pas un plus à la qualité de l'estimation des grandeurs statistiques. Ils sont statistiquement dépendants et ne doivent pas être considérés comme des réalisations indépendantes. A titre d'exemple l'estimation de l'intercorrélation présentée dans le paragraphe précédent est effectuée pour différentes fréquences d'échantillonnage (figure 3.3). Dans cet exemple le signal est échantillonné au moins 50 fois plus de ce qui sera nécessaire pour l'estimation l'intercorrélation.

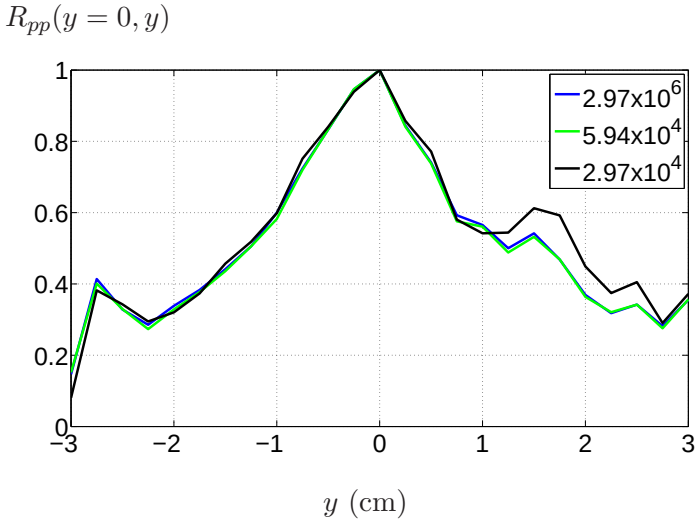

FIG. 3.3 – Effet de la fréquence d'échantillonnage sur l'estimation du coefficient d'intercorrélation de la pression évaluée sur une section de l'écoulement et le point central de cette section.

On note que la convergence de l'estimation est une notion relative à l'ordre des opérations statistiques considérées. Deux signaux pour lesquels l'estimation d'une opération statistique d'ordre deux converge, ne satisferont pas forcément une convergence statistique des opérations d'ordre supérieur.

3.1.5 Ergodicité et bloc FFT, erreur aléatoire, erreur de biais

Dans le domaine fréquentiel on effectue la transformée de Fourier d'une réalisation du signal d'une durée en théorie infinie et en pratique finie (par exemple Γ). A une fréquence donnée, pour obtenir plusieurs échantillons, il est alors nécessaire d'effectuer d'abord plusieurs réalisations de durée Γ dans le domaine temporel. En pratique en faisant l'hypothèse de stationnarité et d'ergodicité du phénomène étudié chaque fraction de durée de $T = \frac{\Gamma}{N}$ du signal est considérée comme une réalisation indépendante. Dans la suite ces fractions sont appelées blocs FFT. Les grandeurs statistiques introduites dans la partie précédente (équations (3.13) - (3.18)) peuvent être calculées par une moyenne d'ensemble menée sur les blocs FFT : c'est la méthode des moyennes de périodogramme. Par exemple la densité inter-spectrale est calculée par

$$\tilde{S}_{up}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \omega) = \frac{2\pi}{NT} \sum_{n=1}^{N} \tilde{u}^{(n)}(\mathbf{x}_i, \omega, T)\tilde{p}^{*(n)}(\mathbf{x}_j, \omega, T). \tag{3.26}$$

Dans cette méthode du périodogramme, on peut éventuellement utiliser un recouvrement des blocs et appliquer des fenêtres de pondération (méthode de Welch). On distingue deux erreurs dans l'estimation d'une grandeur statistique par la méthode du périodogramme : erreur aléatoire et erreur de biais.

Erreur aléatoire

Cette erreur est normale et inhérente à l'analyse des signaux aléatoires finis. Elle est liée à l'insuffisance du nombre de réalisations, ici les blocs FFT. Dans certains cas, il existe des critères analytiques permettant de déterminer cette erreur de manière exacte pour différentes grandeurs statistiques [13]. On définit l'écart type de l'estimation et l'erreur aléatoire normalisée commise

par la troncature de l'estimateur statistique par

$$\sigma_{\tilde{u}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\tilde{u}^{(n)} - E\left[\tilde{u}\right])^2},$$

$$\epsilon_r = \frac{\sigma_{\tilde{u}}}{E\left[\tilde{u}\right]}. \tag{3.27}$$

Pour un signal large bande à énergie constante (type bruit blanc) la convergence de l'erreur peut être estimée en fonction de nombre de blocs FFT considérés. Elle dépend également de la grandeur estimée [13] :

$$\epsilon_r(\tilde{S}_{uu}(x_i, x_i, \omega)) = \frac{1}{\sqrt{N}},$$

$$\epsilon_r(\tilde{S}_{up}(x_i, x_j, \omega)) = \frac{1}{|E\left[\tilde{\gamma}_{up}\right]|\sqrt{N}},$$

$$\epsilon(\tilde{\gamma}^2_{up}) = \frac{\sqrt{2}(1 - \tilde{\gamma}^2_{up_\infty})}{|E\left[\tilde{\gamma}_{up}\right]|\sqrt{N}}.$$

On constate avec ces relations que l'erreur normalisée varie comme la racine carrée du nombre de blocs N, *ce qui signifie que pour diviser l'erreur par deux, il faut multiplier N par 4.*

Erreur de biais

Contrairement à l'erreur de convergence, l'erreur de biais est une erreur "intrinsèque" de l'estimateur qui n'est pas réduite lorsqu'on augmente le nombre de blocs N. En effet la durée des blocs étant finie, le passage au domaine fréquentiel se fait avec une certaine résolution $\Delta f = \frac{1}{T}$ et donc une certaine précision. Si le spectre fréquentiel qu'on cherche à estimer présente des pics marqués, une résolution fréquentielle insuffisante entraînera une erreur systématique d'estimation de l'amplitude autour de ce pic. Comme pour l'erreur de convergence, on peut donner un ordre de grandeur de l'erreur introduite par la résolution fréquentielle.

On définit l'erreur de biais b et l'erreur normalisée ϵ_b par

$$b = (\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\tilde{u}^{(n)}) - E\left[\tilde{u}\right]$$

et

$$\epsilon_b = \frac{b}{E\left[\tilde{u}\right]}.$$

La limite haute de l'estimation de l'erreur normalisée pour différentes grandeurs est donnée par

$$\epsilon_r(\tilde{S}_{uu}(x_i, x_i, \omega)) = -\frac{1}{3}\left(\frac{B_e}{B_r}\right)^2,$$

$$\epsilon_r(\tilde{S}_{up}(x_i, x_j, \omega)) = -\frac{1}{3}\left(\frac{B_e}{B_r}\right)^2,$$

$$\epsilon(\tilde{\gamma}^2_{up}) = \mathit{indéterminable},$$

avec B_e la résolution fréquentielle de l'estimateur (c'est-à-dire Δf) et B_r la largeur fréquentielle du pic à -3 dB.

Ces deux erreurs se retrouvent liées si les blocs FFT sont issus d'une réalisation du signal avec une durée fixée Γ. Le nombre de blocs et la durée temporelle de chaque bloc varient de manière inverse $T = \frac{\Gamma}{N}$. Un nombre élevé de blocs conduit à la diminution de l'erreur aléatoire. En revanche, la durée de chaque bloc ou la résolution fréquentielle diminuent et par conséquent l'erreur de biais augmente. Le choix de nombre de blocs est un compromis à trouver entre une bonne résolution fréquentielle et la convergence de la grandeur estimée.

3.2 Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres, POD

La décomposition orthogonale aux valeurs propres (ou POD pour Proper Orthogonal Decomposition) est la réponse à la recherche de la représentation optimale (au sens énergétique) et déterministe d'une variable aléatoire. En effet, elle fournit une base de fonctions déterministes appelées modes sur laquelle la fonction aléatoire peut être décomposée. Les fonctions de base de POD sont les valeurs propres du tenseur de corrélation de la variable aléatoire étudié en deux points. Elles sont donc définies a posteriori contrairement à la plupart des décompositions comme la décomposition de Fourier ou Laplace. L'avantage de cette définition a posteriori est qu'elle permet de définir les fonctions de base telles qu'elles forment la base optimale, au sens énergétique, pour décrire le phénomène aléatoire étudié. En effet la base POD reste propre au phénomène étudié pour lequel elle a été obtenue et elle peut difficilement être employée pour décrire un autre phénomène. L'optimalité et certaines autres propriétés avantageuses de la POD qui seront présentées au cours de ce sous-chapitre expliquent qu'elle ait été étudiée de manière régulière au siècle dernier. En effet la POD est encore connue dans d'autres domaines scientifiques sous le nom de Décomposition de Karhunen-Loève [71,80] ou analyse de Hotelling [60] et elle possède des liens très étroits avec l'analyse en Composantes Principales [68] et surtout avec la Décomposition aux Valeurs Singulières [49]. Les domaines d'application de la POD sont aujourd'hui larges et variés. On la retrouve par exemple dans des applications de traitement d'images, pour la caractérisation de visages humains [72] ou pour l'étude de l'activité neuronale [119], en analyse de signal [5], en compression de données [6].

La turbulence fait partie des premiers domaines d'application de la théorie de la POD. Elle a été introduite par Lumley [81] en 1967 pour les écoulements turbulents. Lumley a présenté la POD comme une méthode objective d'analyse dont l'application aux champs de vitesse fluctuante permet d'identifier les structures cohérentes de l'écoulement. Cette propriété d'extraction des structures cohérentes de l'écoulement turbulent est le point central de la plupart des applications de cet outil mathématique dans ce domaine. Mais son application aux écoulements turbulents ne se limite pas à l'extraction des structures cohérentes. Elle a été également utilisée en contrôle optimal de l'écoulement [4, 25, 103, 104] ou dans le cadre du développement de modèle d'ordre réduit [21, 46, 65, 125]. Cette dernière application est souvent utilisée pour réduire les coûts de la simulation numérique. Dans cette approche les fonctions propres obtenues par la POD fournissent une base sur laquelle les équations de NS sont projetées à l'aide d'une projection Galerkin. Cette projection fournit un système d'Equations Différentielles Ordinaires dont la résolution (cette fois beaucoup moins coûteuse) permet d'approximer les équations de départ. Iollo *et al.* [65] ont montré l'efficacité de cette approche pour la simulation de l'écoulement dans des cas relativement complexes comme la formation des lâchers tourbillonnaires laminaires dans le sillage d'un profil d'aile en incidence ou dans le sillage d'un cylindre de section carrée.

3.2.1 Idée de base, équation de Fredholm

La motivation initiale pour appliquer la POD aux écoulements turbulents était d'extraire les structures cohérentes et énergétiques. Mais la théorie générale de cette décomposition vise à fournir une méthode d'approximation, il s'agit de trouver : *une fonction déterministe qui représente au mieux une fonction aléatoire*. On considère la fonction aléatoire $\mathbf{u}$ (par exemple la vitesse fluctuante), fonction du temps et de l'espace, et on cherche à l'approcher par la fonction déterministe $\boldsymbol{\phi}$, d'une manière optimale. On va donc chercher *la fonction déterministe* $\boldsymbol{\phi}$ *sur laquelle* ***la projection*** *de la fonction aléatoire* ***u sera maximale en moyenne***. En respectant certaines conditions [82] cette projection peut être réalisée par le produit scalaire ainsi défini :

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) = \int \mathbf{u}(\mathbf{X})\boldsymbol{\phi}^*(\mathbf{X})d\mathbf{X}, \qquad \mathbf{X} \in R^3 \times R^+ \tag{3.28}$$

où * représente le complexe conjugué. Pour rester dans le cas le plus général la fonction $\mathbf{u}$ est considérée complexe, en conséquence ce produit scalaire est aussi complexe. Mathématiquement la maximisation de cette projection, en moyenne, peut être écrite sous la forme suivante :

$$max \left\{ \frac{E[(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})^2]}{\| \boldsymbol{\phi} \|^2} \right\} \tag{3.29}$$

où

$$\| \boldsymbol{\phi} \|^2 = (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}^*) = \int \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X})\boldsymbol{\phi}^*(\mathbf{X})d\mathbf{X}. \tag{3.30}$$

L'opérateur de moyenne $E[\ ]$ est considéré dans le cas le plus général comme une moyenne d'ensemble. Plus tard on discutera des différents types de moyenne qui peuvent être employés. Elle est pour l'instant considérée comme une moyenne d'ensemble mais, quelque soit la définition associée à la moyenne, la même solution déterministe sera retrouvée à condition que l'opérateur de moyenne commute avec l'intégrale définie par l'équation (3.28). Compte-tenu de l'équation (3.28) et le fait que la fonction $\boldsymbol{\phi}$ est déterministe ($E[\boldsymbol{\phi}] = \boldsymbol{\phi}$), on peut écrire :

$$\begin{aligned} E[(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})^2] = E[\int \mathbf{u}(\mathbf{X})\boldsymbol{\phi}^*(\mathbf{X})d\mathbf{X} \int \mathbf{u}^*(\mathbf{X}')\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}')d\mathbf{X}'] = \\ \int (\int E[\mathbf{u}(\mathbf{X})\mathbf{u}^*(\mathbf{X}')]\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}')d\mathbf{X}')\boldsymbol{\phi}^*(\mathbf{X})d\mathbf{X} \end{aligned} \tag{3.31}$$

En introduisant la corrélation en deux points $R_{u_iu_j}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = E[u_i(\mathbf{X})u_j^*(\mathbf{X}')]$, où les u_i (avec $i = 1, \ldots, n_c$) sont les composantes du vecteur $\mathbf{u}$, et un opérateur Hermitien A (dont $R_{u_iu_j}$ est le noyau) tel que :

$$A.\phi_i = \sum_{j=1}^{n_c} \int R_{u_iu_j}(\mathbf{X}, \mathbf{X}')\phi_j(\mathbf{X}')d\mathbf{X}'$$

on peut écrire l'équation (3.31) sous la forme :

$$E[(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})^2] = \sum_{i=1}^{n_c} (A.\phi_i, \phi_i)$$

Le problème de la POD se ramène donc à maximiser :

$$max \left\{ \frac{(A.\phi_i, \phi_i)}{\| \boldsymbol{\phi} \|^2} \right\} \tag{3.32}$$

On peut alors ramener la recherche de $\boldsymbol{\phi}$, à un problème d'optimisation pouvant s'énoncer de la manière suivante : chercher $\boldsymbol{\phi}$ maximisant l'équation (3.32) sous la contrainte $\| \boldsymbol{\phi} \| = 1$. Cette dernière contrainte est tout simplement liée au fait que l'on ne s'intéresse qu'à la "forme" des fonctions propres. Ce problème classique peut être résolu par la méthode des multiplicateurs de Lagrange ou par analyse variationnelle. Il se ramène à un problème aux valeurs propres :

$$A.\phi_i = \lambda \phi_i$$

qui, reécrit sous la forme intégrale, se représente sous la forme d'une équation intégrale de Fredholm :

$$\sum_{j=1}^{n_c} \int R_{u_i u_j}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \phi_j(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' = \lambda \phi_i(\mathbf{X}) \tag{3.33}$$

3.2.2 Propriétés des fonctions de base POD

Au-delà de l'optimalité, la POD possède d'autres propriétés intéressantes et très adaptées à certaines applications :

1. L'équation de Fredholm peut être résolue via la théorie de Hilbert-Schmidt [7] dans le cas d'un domaine d'intégration borné. On obtient une infinité dénombrable de solution et non pas une solution unique :

$$\sum_{j=1}^{n_c} \int R_{u_i u_j}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \phi_j^n(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' = \lambda^n \phi_i^n(\mathbf{X}).$$

où les λ^n et $\boldsymbol{\phi}^n$ sont les n^{eme} valeurs propres et les fonctions propres. Chaque nouvelle fonction propre est déterminée comme solution du problème de maximisation (équation (3.32)) en imposant comme contrainte supplémentaire d'être orthogonale à toutes les fonctions propres trouvées précédemment.

2. Les fonctions propres sont orthogonales par construction mais, pour des raisons pratiques, elles sont choisies comme orthonormales :

$$(\boldsymbol{\phi}^p, \boldsymbol{\phi}^{*q}) = \sum_{i=1}^{n_c} \int \phi_i^p(\mathbf{X}) \phi_i^{*q}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \delta_{pq}, \tag{3.34}$$

où δ représente le symbole de Kronecker.

3. Les valeurs propres λ^n sont réelles et positives :

$$\lambda^1 \geq \lambda^2 ... \geq \lambda^\infty \geq 0.$$

Leur somme est finie et leur série converge. De plus, l'utilisation de l'orthonormalité des fonctions propres POD permet de montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n_c} \int R_{u_i u_i}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') d\mathbf{X} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n = E_c. \tag{3.35}$$

Dans le cas d'un champ de vitesse fluctuante, si les trois composantes de vitesse sont considérées, cette entité représente l'énergie cinétique turbulente, E_c. Chaque mode d'ordre (n) contribue donc de manière indépendante à l'énergie cinétique turbulente. L'amplitude des valeurs propres λ^n mesure l'importance relative des différents modes pour la représentation de l'écoulement.

4. Les fonctions propres POD formant une base complète, toute réalisation $\mathbf{u}$ peut alors être reconstruite à partir des fonctions propres déterministes :

$$u_i(\mathbf{X}) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \phi_i^n(\mathbf{X}). \tag{3.36}$$

Etant donné que les fonctions propres $\boldsymbol{\phi}^n$ sont orthonormales, les coefficients aléatoires de projection a^n peuvent être évalués par :

$$a^n = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}^n) = \sum_{i=1}^{n_c} \int u_i(\mathbf{X}) \phi_i^{*n}(\mathbf{X}) d\mathbf{X}. \tag{3.37}$$

5. Cette décomposition converge au sens des moindres carrés et les coefficients a^n sont non corrélés entre eux :

$$E[a^n . a^{*m}] = \delta_{mn} \lambda^n. \tag{3.38}$$

6. Le tenseur de corrélation (le noyau) peut être décomposé en une double série de ϕ^n :

$$R_{u_i u_j}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \phi_i^n(\mathbf{X}) \phi_j^{*n}(\mathbf{X}'). \tag{3.39}$$

3.2.3 POD classique et Snapshot-POD

Comme on l'a vu dans la section 3.2.1, l'optimalité de la base introduite par la POD s'est traduite par la recherche d'une fonction déterministe $\boldsymbol{\phi}$ sur laquelle la projection de la fonction aléatoire $\mathbf{u}$, en moyenne, est maximale. Dans la formulation présentée, la fonction $\mathbf{u}$ a été considérée comme complètement aléatoire et aucune propriété statistique ne lui a été associée. L'espérance est définie comme une moyenne d'ensemble.
Supposons que la fonction aléatoire $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ soit la vitesse fluctuante, fonction du temps et l'espace ($\mathbf{X} = (\mathbf{x}, t) \in R^3 \times R^+$). Pour calculer cette moyenne d'ensemble on doit considérer un nombre infini de réalisations identiques de l'écoulement et à chaque réalisation la valeur de $\mathbf{u}$ est retenue pour chaque point d'espace $\mathbf{x}$ et pour chaque temps t. Ainsi la variable aléatoire $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ appartenant à l'espace des réalisations peut être exprimée par l'équation (3.36). Les coefficients a_n sont des coefficients aléatoires et appartiennent à l'espace des réalisations. En effet ils évaluent le poids de chaque mode dans la représentation de la fonction aléatoire $\mathbf{u}$: ils sont calculés par la projection de chaque réalisation sur les fonctions propres. Il faut noter que dans ce cas les fonctions propres seront de la même dimension que la fonction aléatoire, c'est-à-dire une fonction de l'espace et le temps. Maintenant, si la fonction aléatoire $\mathbf{u}$ est statistiquement stationnaire et ergodique, on peut remplacer la moyenne d'ensemble par une moyenne temporelle :

$$E[u_i(\mathbf{X}) u_j^*(\mathbf{X})] = \frac{1}{T} \int_T u_i(\mathbf{x}, t) u_j^*(\mathbf{x}', t) dt = R_{u_i u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \tag{3.40}$$

Cela revient à dire que la valeur de la fonction aléatoire $\mathbf{u}$ à chaque instant peut être considérée équivalente à une réalisation. Par conséquent, les coefficients aléatoires a^n seront obtenus par la projection de $\mathbf{u}$ à chaque instant (au lieu de chaque réalisation) sur les fonctions propres qui ne dépendent plus du temps et qui sont uniquement fonction de l'espace $\mathbf{x}$.

$$a^n(t) = \sum_{i=1}^{n_c} \int u_i(\mathbf{x}, t)\phi_i^n(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{3.41}$$

La fonction aléatoire $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ ou $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est alors décomposée en espace et en temps :

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n(t)\phi_i^n(\mathbf{x}). \tag{3.42}$$

L'hypothèse d'ergodicité est très vite (dès le départ) intégrée dans l'introduction initiale de POD aux écoulements turbulents, faite par Lumley [81]. Cette approche est appelée la POD classique.

En 1987, Sirovich [117] a proposé une formulation tout à fait équivalente, appelée "Snapshot-POD". Cette formulation a pour avantage l'allègement du calcul des vecteurs propres quand la base de donnée contient plus de points spatiaux que d'échantillons temporels. Grossièrement on peut considérer que dans cette méthode la recherche de la base optimale commence d'abord par l'évaluation des coefficients temporels de projection de manière à satisfaire l'équation (3.42). Ils sont calculés grâce à l'équation d'intégrale aux valeurs propres suivante :

$$\int_T C_{u_i u_i}(t, t')\vartheta^n(t')dt' = \lambda^n \vartheta^n(t), \tag{3.43}$$

où le noyau de l'intégrale $C(t, t')$ est le tenseur des corrélations temporelles défini par la relation suivante :

$$C_{u_i u_i}(t, t') = \sum_{i=1}^{n_c} \frac{1}{\Omega} \int_\Omega u_i(\mathbf{x}, t)u_i^*(\mathbf{x}, t')d\mathbf{x}. \tag{3.44}$$

De telle manière les variables $\vartheta^n(t)$ ne sont plus des coefficients de projection : elles seront appelées les **modes Snapshot**. Les variables $b_i^n(\mathbf{x})$ peuvent être évaluées par :

$$b_i^n(\mathbf{x}) = \int_T u_i(\mathbf{x}, t)\vartheta^n(t)dt. \tag{3.45}$$

Effectivement les modes obtenus via la formulation Snapshot, comme ceux issus de l'approche classique, vérifient la propriété d'orthonormalité :

$$\int \vartheta^p(t)\vartheta^{*q}(t)dt = \delta_{pq} \tag{3.46}$$

et les coefficients de projection restent non corrélés entre eux :

$$E[\sum_{i=1}^{n_c} b_i^n(\mathbf{x}).b_i^m(\mathbf{x})] = \delta_{mn}\lambda^n. \tag{3.47}$$

La Snapshot-POD est exactement symétrique à la POD classique et conduit à une base complète fournissant la même décomposition de la variable aléatoire $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Cette équivalence est présentée dans la section suivante en utilisant une base de données numérique.

3.2.4 Equivalence des formulations classique et Snapshot

Dans cette partie la fonction aléatoire considérée est une variable physique, fluctuante. En conséquence, l'hypothèse d'ergodicité est naturellement respectée et la formulation introduite en section 3.2.3 est valable. On rappelle que l'application de POD à un domaine continu et borné (domaine infini) conduit à une infinité de modes continus tandis que pour un domaine discret et borné le nombre des modes discrets est limité par le nombre d'échantillons. Soit $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ la vitesse fluctuante, appartenant au domaine discret $\Omega = \{(\mathbf{x}_i, t_j), i = 1,2,\ldots,N_\mathbf{x}, j = 1,2,\ldots,N_t\}$. Où $\mathbf{x}_i$ représente le vecteur des coordonnées spatiales $\mathbf{x}_i = (x_p, y_q, z_m)$ avec p,q et $m = 1,2,...,N_x; N_y$ et N_z ($N_\mathbf{x} = N_x \times N_y \times N_z$). Le vecteur $\mathbf{u}$ peut-être représenté par la matrice suivante appelée la matrice des Snapshots :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \overline{\overline{\mathbf{u}}} = \begin{pmatrix} u(\mathbf{x}_1,t_1) & u(\mathbf{x}_1,t_2) & \cdots & u(\mathbf{x}_1,t_{N_t}) \\ u(\mathbf{x}_2,t_1) & u(\mathbf{x}_2,t_2) & \cdots & u(\mathbf{x}_2,t_{N_t}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_1) & u(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_2) & \cdots & u(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_{N_t}) \\ v(\mathbf{x}_1,t_1) & v(\mathbf{x}_1,t_2) & \cdots & v(\mathbf{x}_1,t_{N_t}) \\ v(\mathbf{x}_2,t_1) & v(\mathbf{x}_2,t_2) & \cdots & v(\mathbf{x}_2,t_{N_t}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_1) & v(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_2) & \cdots & v(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_{N_t}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_1) & w(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_2) & \cdots & w(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_{N_t}) \end{pmatrix}_{(n_c \times N_\mathbf{x}) \times N_t} \tag{3.48}$$

où n_c représente le nombre de composantes du vecteur $\mathbf{u}$. On regarde plus précisément les deux formulations de POD classique et Snapshot-POD appliquées à ce champ de variables. Dans la formulation classique, le noyau de l'équation intégrale aux valeurs propres est le tenseur de corrélation spatial en deux points, il peut donc être écrit :

$$R_{u_i u_j}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \overline{\overline{R}} = \frac{\overline{\overline{\mathbf{u}}} * \overline{\overline{u}}^T}{N_t} \times = \frac{1}{N_t} \times \tag{3.49}$$

$$\begin{pmatrix} u(\mathbf{x}_1,t_1) & u(\mathbf{x}_1,t_2) & \cdots & u(\mathbf{x}_1,t_{N_t}) \\ u(\mathbf{x}_2,t_1) & u(\mathbf{x}_2,t_2) & \cdots & u(\mathbf{x}_2,t_{N_t}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_1) & u(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_2) & \cdots & u(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_{N_t}) \\ v(\mathbf{x}_1,t_1) & v(\mathbf{x}_1,t_2) & \cdots & v(\mathbf{x}_1,t_{N_t}) \\ v(\mathbf{x}_2,t_1) & v(\mathbf{x}_2,t_2) & \cdots & v(\mathbf{x}_2,t_{N_t}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_1) & v(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_2) & \cdots & v(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_{N_t}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_1) & w(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_2) & \cdots & w(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_{N_t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\mathbf{x}_1,t_1) & \cdots & u(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_1) & \cdots & v(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_1) & \cdots & w(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_1) \\ u(\mathbf{x}_1,t_2) & \cdots & u(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_2) & \cdots & v(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_2) & \cdots & w(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_2) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u(\mathbf{x}_1,t_{N_t}) & \cdots & u(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_{N_t}) & \cdots & v(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_{N_t}) & \cdots & w(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_{N_t}) \end{pmatrix}$$

Ce noyau dans la formulation de Snapshot-POD est de la forme :

$$C_{u_iu_i}(t,t') = \overline{\overline{C}} = \frac{\overline{\overline{\mathbf{u}}}^T * \overline{\overline{\mathbf{u}}}}{(n_c \times N_\mathbf{x})} \times = \frac{1}{(n_c \times N_\mathbf{x})} \times \tag{3.50}$$

$$\begin{pmatrix} u(\mathbf{x}_1,t_1) & \cdots & u(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_1) & \cdots & v(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_1) & \cdots & w(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_1) \\ u(\mathbf{x}_1,t_2) & \cdots & u(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_2) & \cdots & v(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_2) & \cdots & w(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_2) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u(\mathbf{x}_1,t_{N_t}) & \cdots & u(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_{N_t}) & \cdots & v(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_{N_t}) & \cdots & w(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_{N_t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\mathbf{x}_1,t_1) & u(\mathbf{x}_1,t_2) & \cdots & u(\mathbf{x}_1,t_{N_t}) \\ u(\mathbf{x}_2,t_1) & u(\mathbf{x}_2,t_2) & \cdots & u(\mathbf{x}_2,t_{N_t}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_1) & u(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_2) & \cdots & u(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_{N_t}) \\ v(\mathbf{x}_1,t_1) & v(\mathbf{x}_1,t_2) & \cdots & v(\mathbf{x}_1,t_{N_t}) \\ v(\mathbf{x}_2,t_1) & v(\mathbf{x}_2,t_2) & \cdots & v(\mathbf{x}_2,t_{N_t}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_1) & v(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_2) & \cdots & v(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_{N_t}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_1) & w(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_2) & \cdots & w(\mathbf{x}_{N_\mathbf{x}},t_{N_t}) \end{pmatrix}$$

Très rapidement on remarque tout d'abord que, le problème aux valeurs propres n'est pas de même taille pour les deux cas. Ensuite on voit que dans le cas de la Snapshot-POD, les corrélations croisées entre les différentes composantes de vitesse ne sont pas prises en compte. La taille du problème aux valeurs propres est égal à $(n_c \times N_\mathbf{x}) \times (n_c \times N_\mathbf{x})$ dans le cas de POD classique et elle est $N_t \times N_t$ pour la Snapshot-POD. Le problème POD classique conduit à l'obtention de $(n_c \times N_\mathbf{x})$ vecteurs propres. La Snapshot-POD générera quant à elle N_t vecteurs et valeurs propres. La POD classique se trouve donc être mieux adaptée pour les données issues de mesures telles que HWA (Hot-Wire Anemometry) ou LDV (Laser Doppler Velocimetry) où on est souvent face à un nombre limité de points de mesure [1] par rapport au nombre plus important d'échantillons temporels. Par contre la Snapshot-POD est plus adaptée aux résultats de simulations numériques où souvent le nombre des points est beaucoup plus important que celui des échantillons temporels.

L'exemple suivant montre l'application de POD classique et Snapshot au champ de vitesse fluctuante, $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, obtenu via la simulation numérique de l'écoulement dans un aérateur de voiture (cette simulation sera présentée dans la partie 4.1.1). On regarde plus précisément l'allure des modes, la quantité d'énergie turbulente contenue dans chaque mode et la courbe de convergence de cette énergie pour chaque méthode dans le cas scalaire et vectoriel. On note que si la POD est basée sur une seule composante de la vitesse, elle sera appelée scalaire et dans le cas où deux ou plusieurs composantes sont impliquées on parle de POD vectorielle. La figure 3.4 représente le champ de vitesse u dans un plan parallèle au plan xz (plan rose sur la figure 3.1). On dispose de $N_\mathbf{x} = 525$ points de mesure répartis sur un maillage cartésien régulier (x,z) et $N_t = 443$ échantillons temporels (ce domaine spatial est situé entre le clapet et les ailettes sur la figure 3.1).

Pour la POD classique les modes propres sont appelés $\phi^n(\mathbf{x})$. La composante suivant x de vitesse fluctuante, $u_1(\mathbf{x},t)$, s'exprime par la relation suivante :

$$u_1(\mathbf{x},t) = \sum_{n=1}^{N_\mathbf{x}} a^n(t)\phi_1^n(\mathbf{x})$$

Les modes issus de la Snapshot-POD sont appelés $\gamma^n(t)$. Ils constituent une base complète permettant de reécrire la fonction aléatoire $u_1(\mathbf{x},t)$, comme :

$$u_1(\mathbf{x},t) = \sum_{n}^{N_\mathbf{t}} b_1^n(\mathbf{x})\vartheta^n(t)$$

[1] mise à part des méthodes de mesure comme la PIV, (Particule Image Velocimetry) où le nombre de points de mesure peut être supérieur au nombre d'échantillons temporels

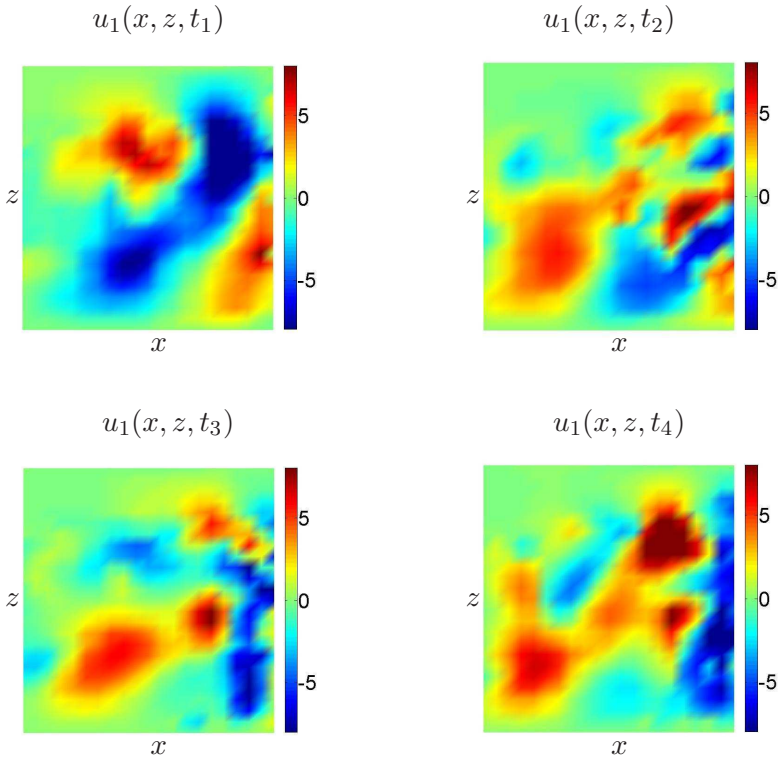

FIG. 3.4 – Cartographie de la composante suivante x de vitesse fluctuante, à différents instants

Application sur un champ scalaire

Dans cette partie on ne considère que la composante selon x de champ de vitesse, $u_1(\mathbf{x},t)$ et on calcule les modes POD issus du tenseur de corrélation $R_{u_1u_1} = E\left[u_1(\mathbf{x},t)u_1^*(\mathbf{x},t)\right]$. Dans ce cas la POD est appelée scalaire. Naturellement, on obtient $N_\mathbf{x}$ modes POD classiques. Certains sont présentés sur la figure 3.5. Ils sont rangés par ordre décroissant en fonction des valeurs propres. Les

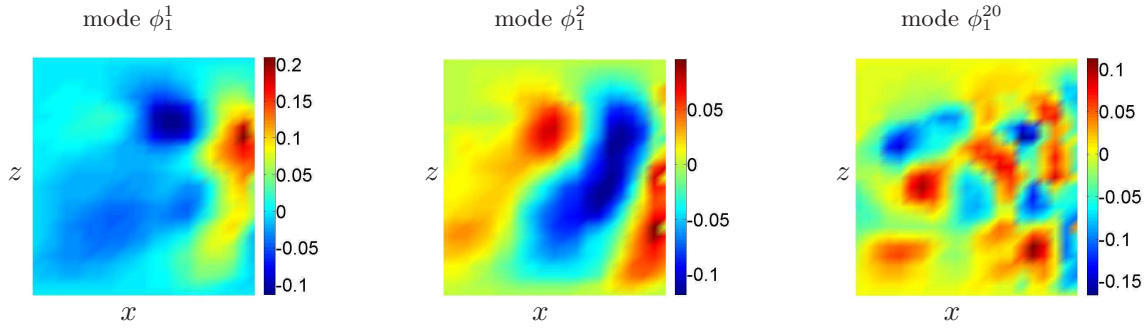

FIG. 3.5 – Modes POD classique scalaires issus de la composante selon x de vitesse, $\phi_1^n(\mathbf{x})$

modes Snapshot étant des modes temporels, on en obtient autant que d'échantillons temporels. De la même manière que pour les modes classiques, ils sont rangés par ordre décroissant et certains entre eux sont présentés sur la figure 3.6. Les premiers modes font apparaître des variations temporelles plus lentes car ils sont associés aux structures de grande taille énergétique.

Bien que ces deux familles de modes soient de nature différente, elles forment une base complète et les modes homologues de chaque famille contiennent la même quantité d'énergie de leur champ respectif. Notons que les i^{eme} modes de chaque famille sont appelés les modes

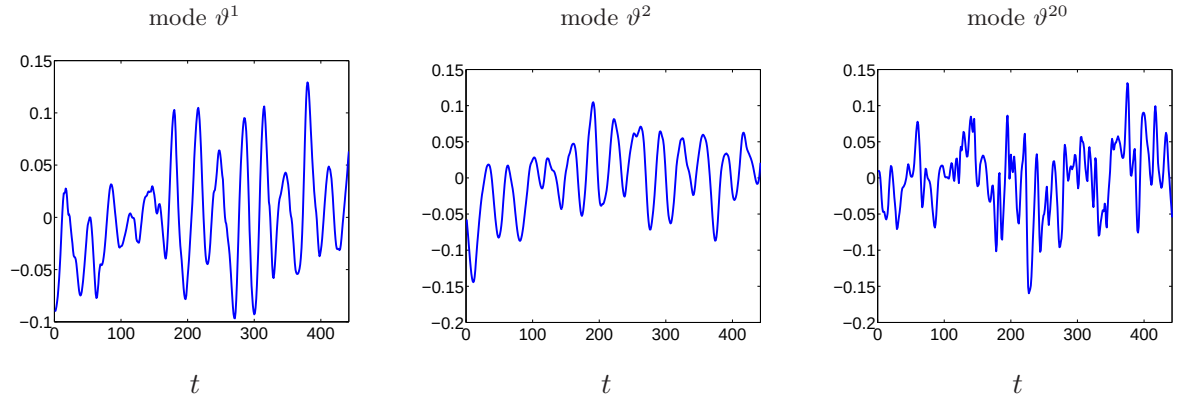

FIG. 3.6 – Modes Snapshot-POD scalaires issus de la composante selon x de vitesse, $\gamma^n(t)$

homologues. La figure 3.7(a) et (b) représentent l'énergie contenue dans les 50 premiers modes classiques et Snapshot. Ces deux courbes sont superposées pour la totalité des modes sur la figure 3.7(c).

En regardant la figure 3.7(c) on constate que les modes "classiques" après le dernier mode Snapshot ne contiennent plus d'énergie : la totalité d'énergie est déjà représentée par les modes précédents. En diminuant le nombre de points tel que N_x (en conséquence le nombre des modes classique) soit inférieur à celui des échantillons temporels, N_t, et en comparant les courbes de convergence on retrouve que ces deux courbes sont encore parfaitement superposées. Ainsi, comme dans le cas précédent, on peut dire que les modes Snapshot supérieurs au dernier mode classique ne contiennent pas d'énergie et la somme des projections de $u_1(x,t)$ sur ces modes est nulle. On peut alors écrire :

$$u_1(\mathbf{x},t) = \sum_{n}^{N_{mode}} b_1^n(\mathbf{x})\vartheta^n(t) = \sum_{n}^{N_{mode}} a^n(t)\phi_1^n(\mathbf{x}), \qquad N_{mode} = min\left\{N_{\mathbf{x}}, N_t\right\} \tag{3.51}$$

Vu que le même nombre de modes de chaque famille représente le même pourcentage de la totalité de l'énergie turbulente, on analyse maintenant les champs reconstruits par un nombre donné des modes "classique" et "Snapshot". La figure 3.8 confirme que la projection de u_1 sur le même nombre de mode Snapshot ou classique est tout à fait équivalente.

Cela revient à dire que la projection de $u_1(x,t)$ sur les deux modes homologues de chaque approche est strictement identique. On peut donc s'attendre à ce que les coefficients de projection dans un cas soit de la même allure que les modes dans l'autre cas et vice-versa. Les coefficients de projection de $u_1(x,t)$ sur chacun des modes Snapshot sont présentés sur la figure 3.9 et ceux des modes classiques sur la figure 3.10.

En comparant la figure 3.9 avec la figure 3.5 et la figure 3.10 avec la figure 3.6, on remarque que les coefficients de projection dans chaque approche sont exactement ceux issus de l'autre approche à un facteur multiplicatif près. Ce facteur vient du processus de la normalisation intégré dans le calcul du tenseur de corrélation. On peut alors écrire :

$$\forall n : b_1^n(x)\vartheta^n(t) = a^n(t)\phi_1^n(\mathbf{x})$$

Application sur un champ vectoriel

Dans cette partie on considère le champ de vitesse fluctuante complet et on effectue une POD vectorielle sur les trois composantes de vitesse. Pour la POD classique, la base des modes et des valeurs propres est calculée via le tenseur de corrélation exprimé par l'équation (3.49) et pour la

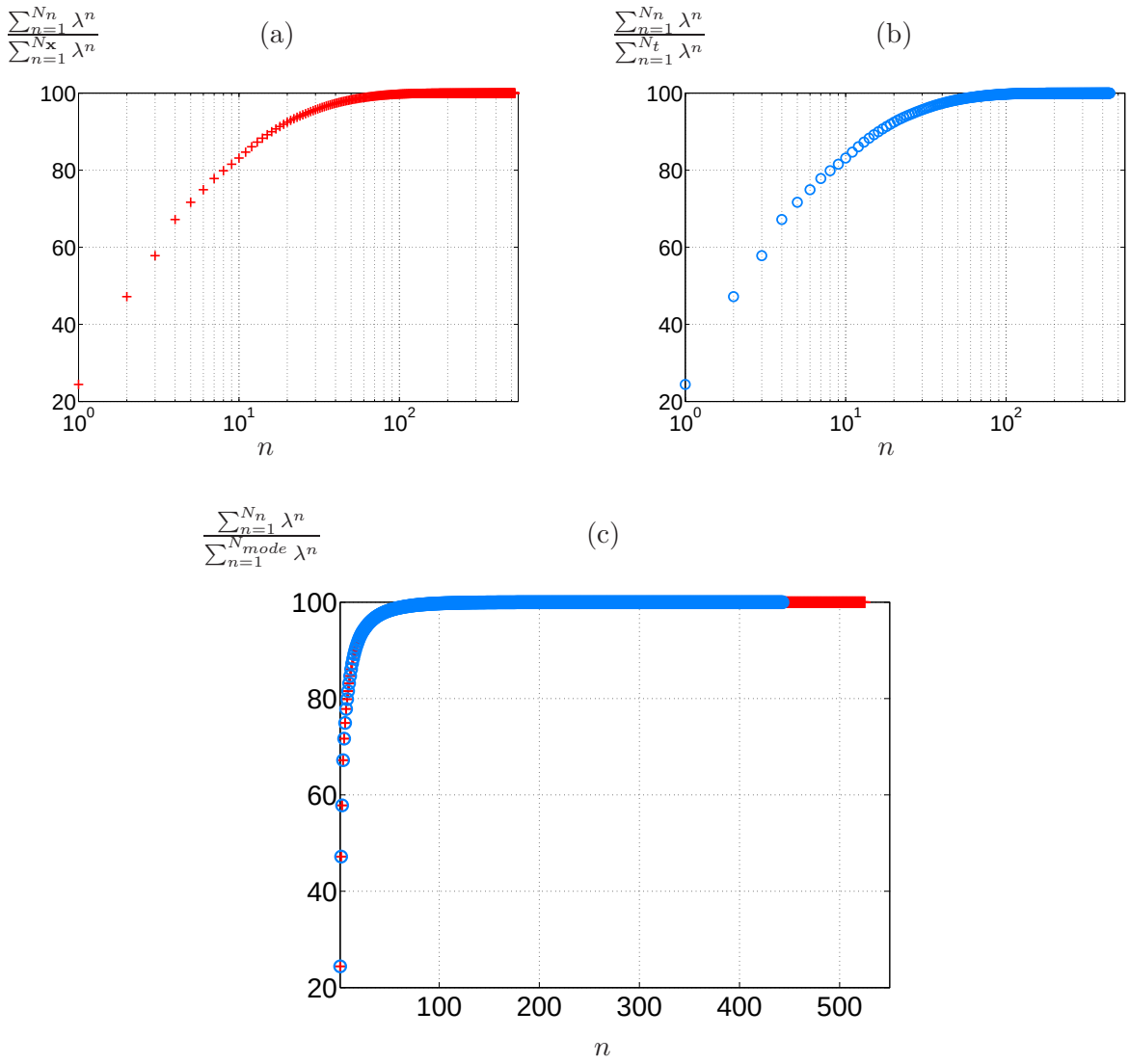

FIG. 3.7 – Evaluation cumulée des valeurs propres des modes, la composante selon x du champ de vitesse : (a) POD classique, (b) Snapshot-POD, (c) superposition des deux résultats

Snapshot-POD par l'équation (3.50). La figure 3.11 démontre que comme dans le cas scalaire les deux modes homologues calculés via la méthode classique et Snapshot contiennent la même quantité d'énergie et la totalité de l'énergie du signal est contenue dans $N_{mode} = min\{n_c \times N_\mathbf{x}, N_t\}$ modes.

On précise que la POD étant calculée via les trois composantes de vitesse, les modes propres issus de l'approche classique sont vectoriels et constitués également de trois composantes. La figure 3.12 montre la composante selon x de quelques modes issus de la démarche classique. De la même manière, selon la composante de vitesse qui sera projetée sur les modes Snapshot (les modes temporels, figure 3.14), les coefficients de projection seront indépendamment obtenus pour chaque composante. La figure 3.15 présente quelques coefficients de projection de la composante selon x de vitesse, u_1, sur les modes temporels issus de l'approche Snapshot. De la même manière que pour le cas scalaire les modes issus de la formulation classique correspondent, à un facteur multiplicatif près, aux coefficients de projection dans l'approche Snapshot et vice-versa, figures 3.12 - 3.15. On a donc : $a^n(t)\phi_i^n(x) = \vartheta^n(t)b_i^n(x)$.

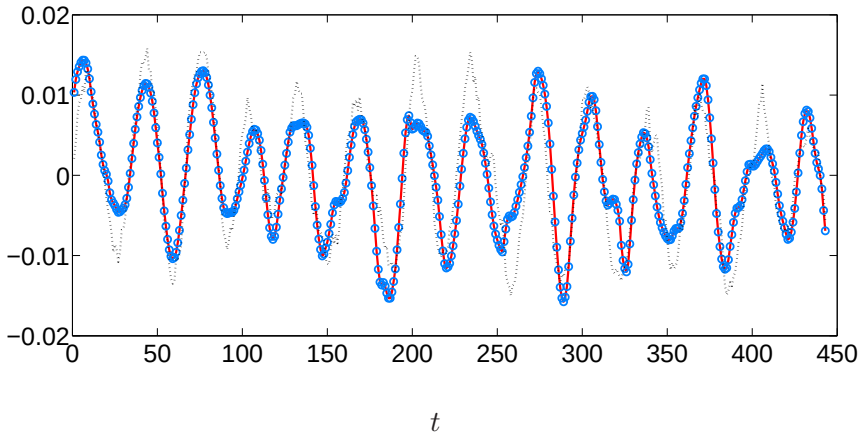

FIG. 3.8 – Composant selon x de vitesse au point (x_0, z_0), reconstruite par les 10 premiers modes scalaires Snapshot (•) et classiques (——) et le signal entire (- - - - -)

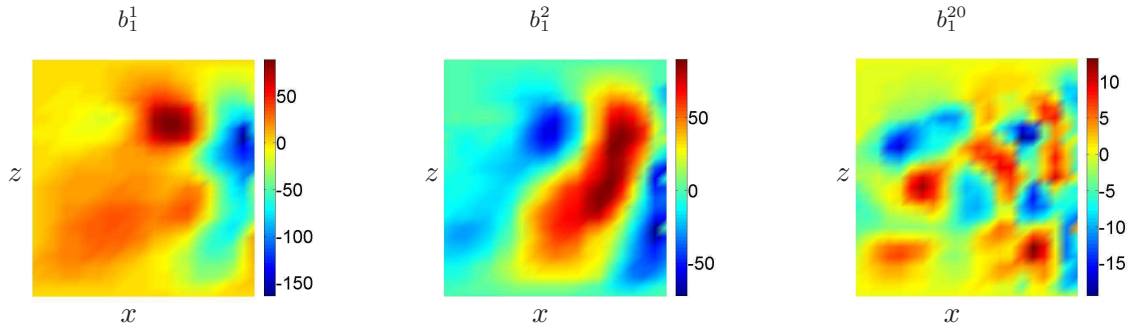

FIG. 3.9 – Coefficients de projection de $u_1(\mathbf{x}, t)$ sur les modes Snapshot, $b_1(\mathbf{x})$

Notons qu'il est difficile de comparer directement les résultats issus des deux formulations scalaire et vectorielle de la POD.
En effet, dans chacune de ces décompositions, l'énergie fluctuante considérée n'est pas la même justifiant une répartition énergétique différente des modes. Toutefois, il est clair que pour une représentation satisfaisante des mouvements tourbillonnaires tridimensionnels, la POD dans sa formulation vectorielle semble plus appropriée. Elle permet de mieux 'retranscrire' non seulement l'aspect tridimensionnel de l'écoulement mais également de mieux prendre en compte l'énergie turbulente (associée à chacune des composantes fluctuantes du champ de vitesse).

3.3 POD Etendue (Extended POD)

La POD étendue ou EPOD est une des extensions récentes de la théorie de la POD fournissant un outil d'analyse des évènements corrélés issus de deux domaines indépendants. Le concept d'EPOD a été en premier défini par Maurel [87] et utilisé dans une étude de l'interaction de l'écoulement de jet-vortex sur un modèle représentatif de l'écoulement dans un moteur à combustion interne. En 2003, Borée [19] donne une définition mathématique plus générale et complète de l'EPOD. Tout comme la POD, bien que l'EPOD ait été en premier appliquée aux écoulements turbulents, son domaine d'application ne se limite pas à la turbulence et elle peut être appliquée à n'importe quel phénomène aléatoire.

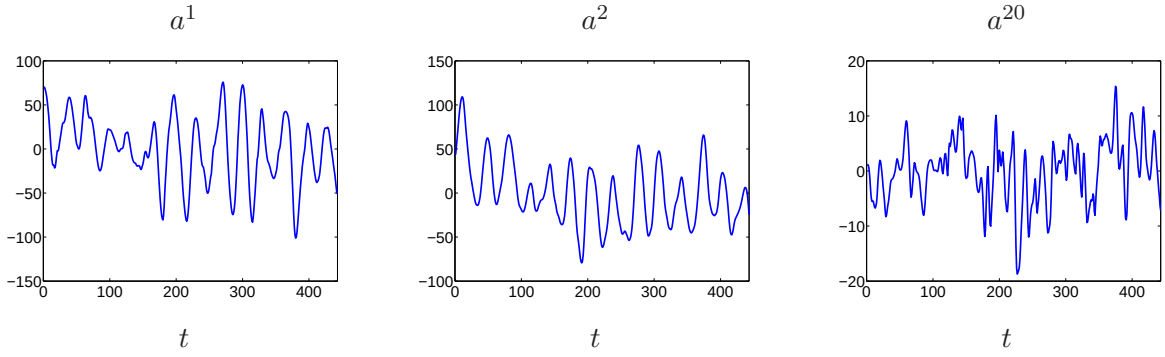

FIG. 3.10 – Coefficients de projection de $u(\mathbf{x}, t)$ sur les modes scalaires classiques, $a(t)$

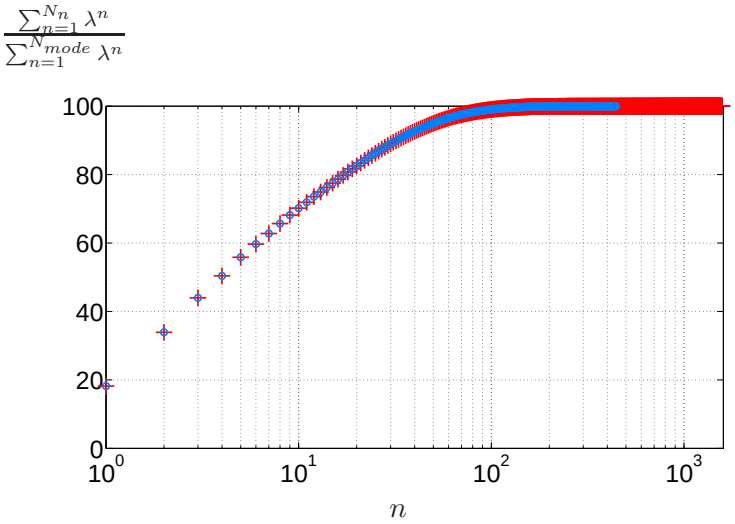

FIG. 3.11 – Evaluation cumulée des valeurs propres : (+) POD Classique vectorielle basée sur les trois composantes de vitesse, (•) Snapshot-POD vectorielle basée sur les trois composantes de vitesse

On considère le domaine S, domaine de définition de la fonction aléatoire $\mathbf{u}(\mathbf{X})$, qui est dans notre cas la vitesse fluctuante. Elle peut donc être exprimée par une base POD calculée via le tenseur de corrélation en deux points $R_{u_i u_j} = E[u_i(\mathbf{X}) u_j^*(\mathbf{X}')]$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \sum_n a^n \boldsymbol{\phi}^n(\mathbf{X}) \qquad \mathbf{X} \in S \tag{3.52}$$

Le tenseur de corrélation vérifie la propriété (6) introduite dans la section 3.2.2 et il peut donc être écrit par une décomposition diagonale :

$$R_{u_i u_j} = E[u_i(\mathbf{X}) u_j^*(\mathbf{X}')] = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \phi_i^n(\mathbf{X}) \phi_j^{*n}(\mathbf{X}')$$

La relation suivante (équation (3.53)) est dérivée directement des propriétés générales et elle sera utile pour la définition des modes étendus. En moyennant la multiplication de l'équation (3.52) par le coefficient aléatoire a^p associé à la projection de $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ sur le mode $\boldsymbol{\phi}^p$ et au vu de la non-corrélation des coefficients de projection, $E[a^n . a^p] = \delta_{pn} \lambda^p$, on peut écrire :

$$E[a^p \mathbf{u}(\mathbf{X})] = E\left[a^p \sum_n a^n \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X})\right] = \sum_n E\left[a^n a^p\right] \boldsymbol{\phi}^n(\mathbf{X}) = \lambda^p \boldsymbol{\phi}^p(\mathbf{X}) \tag{3.53}$$

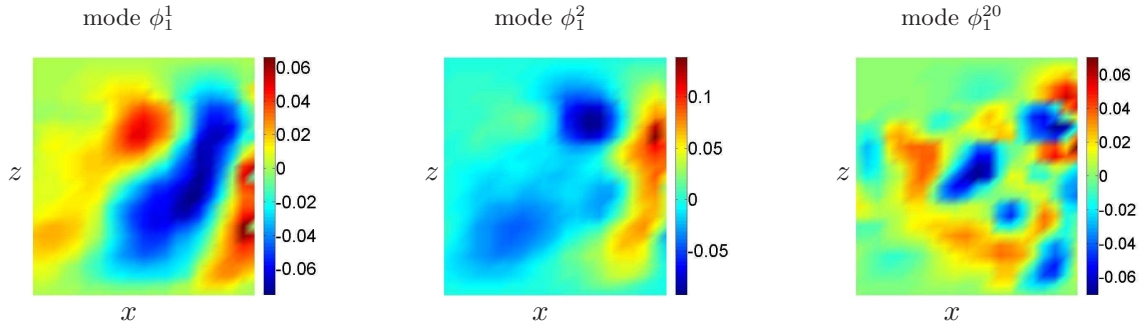

FIG. 3.12 – Composante selon x des modes propres issus de la POD vectorielle basée sur les trois composante de vitesse

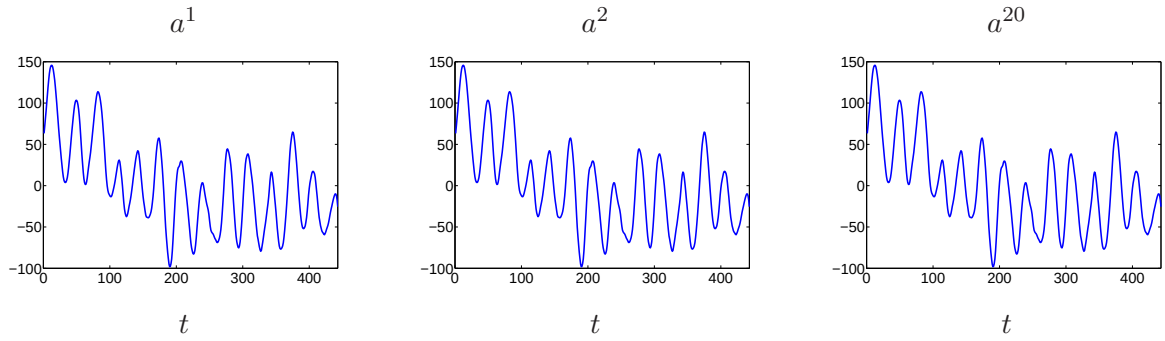

FIG. 3.13 – Coefficient de projection $a^n(t)$ de la POD vectorielle classique

ou encore :

$$\boldsymbol{\phi}^p(\mathbf{X}) = \frac{E\left[a^p \mathbf{u}(\mathbf{X})\right]}{\lambda^p} \tag{3.54}$$

Considèrons maintenant $\boldsymbol{v}(\mathbf{Y})$ une variable aléatoire quelconque (par exemple la vitesse ou la pression ou la température ...) définie sur le domaine Ω. Le domaine Ω est indépendant de S, il peut donc contenir le domaine S ou être une partie ou même équivalent de S ou complètement séparé de S. De plus, il ne doit pas forcément être de la même dimension que S. Cependant, on suppose que chaque réalisation de $\boldsymbol{v}(\mathbf{Y})$ peut être associée à une réalisation de $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ en S.

On définit le mode étendu numéro p par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\psi}^p(\mathbf{Y}) = \frac{E\left[a^p \boldsymbol{v}(\mathbf{Y})\right]}{\lambda^p} \qquad \mathbf{Y} \in \Omega \tag{3.55}$$

Evidemment si $\mathbf{Y}$ appartient au domaine S et si $\boldsymbol{v}$ est la même variable physique que $\mathbf{u}$, le mode $\boldsymbol{\psi}^p(\mathbf{X})$ sera strictement identique au mode $\boldsymbol{\phi}^p(\mathbf{X})$ via l'équation (3.53). Borée [19] propose de décomposer chaque réalisation de la fonction aléatoire $\boldsymbol{v}(\mathbf{Y})$ en deux parties :

$$\boldsymbol{v}(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{v}^{(C)}(\mathbf{Y}) + \boldsymbol{v}^{(D)}(\mathbf{Y}) \tag{3.56}$$

avec :

$$\boldsymbol{v}^{(C)}(\mathbf{Y}) = \sum_n a^n \boldsymbol{\psi}^n(\mathbf{Y}) \tag{3.57}$$

En rappelant que a^n sont les coefficients aléatoires issus de la projection de $\mathbf{u}$ sur les modes $\boldsymbol{\phi}^n$ dans le domaine S et que ces coefficients a^n sont décorrélés, trois résultats peuvent facilement être démontrés :

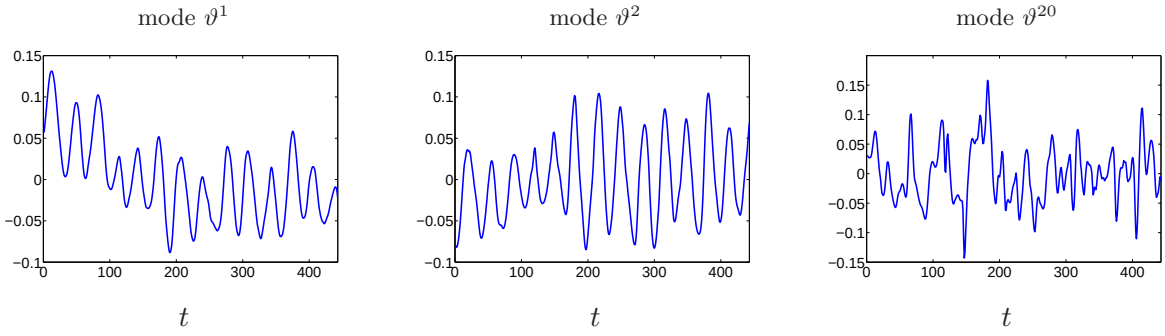

FIG. 3.14 – Modes Snapshot vectoriels issus des trois composantes de vitesse

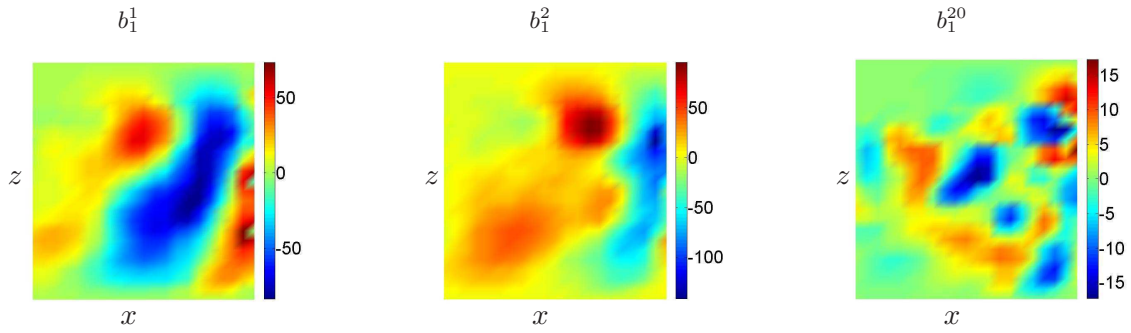

FIG. 3.15 – Coefficients de projection de la composante selon x de vitesse, u_1, sur les modes Snapshot vectoriels calculés via les trois composantes de vitesse

1. $\boldsymbol{v}_C$ est la seule partie du signal $\boldsymbol{v}$ corrélée avec $\mathbf{u}$. Ce qui revient à dire que $\boldsymbol{v}^{(D)}$ est complètement décorrélé de $\mathbf{u}$:

$$E\left[\boldsymbol{v}^{(D)}(\mathbf{Y})\mathbf{u}(\mathbf{X})\right] = 0 \tag{3.58}$$

2. $a^n\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{n}}(Y)$ est la seule contribution à $\boldsymbol{v}^{(C)}$ corrélée avec la projection de $\mathbf{u}$ sur le mode n de S.

$$E\left[\boldsymbol{v}^{(C)}(\mathbf{Y})\mathbf{u}(\mathbf{X})\right] = \sum_n \lambda^n \boldsymbol{\psi}^n(\mathbf{Y})\boldsymbol{\phi}^n(\mathbf{X}) \tag{3.59}$$

3. L'énergie de la partie corrélée du signal $\boldsymbol{v}$ est décomposée en une somme des contributions de chaque mode étendu.

$$E\left[\boldsymbol{v}(\mathbf{Y})\boldsymbol{v}(\mathbf{Y})\right] = E\left[\boldsymbol{v}^{(D)}(\mathbf{Y})\boldsymbol{v}^{(D)}(\mathbf{Y})\right] + \sum_n \lambda^n \boldsymbol{\psi}^n(\mathbf{Y})\boldsymbol{\psi}^n(\mathbf{Y}) \tag{3.60}$$

3.4 POD spectrale

Dans cette partie, on introduit les éventuelles relations entre la décomposition de Fourier et la décomposition orthogonale aux valeurs propres. Le lien entre ces deux outils d'analyse est fait dans le cas où la fonction aléatoire possède des propriétés statistiques particulières. Dans cette étude on distingue deux cas, d'abord le cas où la fonction aléatoire possède des propriétés statistiques en espace et ensuite le cas où ces propriétés sont temporelles. La raison de cette distinction est surtout due à la propriété d'ergodicité qui est une propriété temporelle et non pas spatiale.

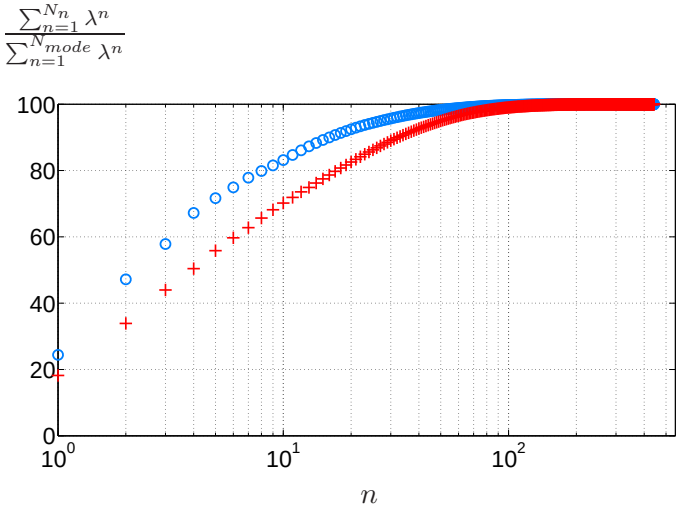

FIG. 3.16 – Evaluation cumulée des valeurs propres : (+) POD vectorielle basée sur les trois composantes de vitesse, (•) POD scalaire basée sur la composante selon x de vitesse, u

3.4.1 POD spectrale, cas général

Comme on l'a vu dans la section 3.2.1, l'idée de base de la décomposition POD est d'exprimer une fonction aléatoire $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}(x, y, z, t)$ à l'aide de fonctions déterministes et optimales d'un point de vue énergétique. En conséquence on cherche à maximiser la moyenne du produit scalaire défini par l'équation (3.28).

Soit la fonction $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{Y}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, k_x)$ avec $\{(\mathbf{y}) = (y, z, t) \in R^2 \times R^+\}$ transformée Fourier de $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ ($\{(\mathbf{X}) = (x, y, z, t) \in R^3 \times R^+\}$) dans la direction x, chaque composante $\hat{u}_i$ de $\hat{u}$ s'écrit alors de la façon suivante :

$$\hat{u}_i(k_x, y, z, t) = \int u_i(x, y, z, t) e^{ik_x x} dx \tag{3.61}$$

On cherche à retrouver la base POD qui ne sera plus optimale pour l'expression de toutes les variables impliquées dans $\hat{\mathbf{u}}$ mais la base optimale pour chaque k_x isolé, menée sur les variables restantes $\mathbf{y}$. Ainsi le problème est formulé de manière suivante :

$$\forall k_x : \sum_{j=1}^{n_c} \int \hat{R}_{\hat{u}_i \hat{u}_j}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', k_x) \hat{\varphi}_j^n(\mathbf{y}', k_x) d\mathbf{y}' = \hat{\lambda}^n(k_x) \hat{\varphi}_i^n(\mathbf{y}, k_x) \tag{3.62}$$

avec le noyau d'intégration :

$$\forall k_x : \hat{R}_{\hat{u}_i \hat{u}_j}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', k_x) = E[\hat{u}_i(\mathbf{y}, k_x) \hat{u}_j^*(\mathbf{y}', k_x)]$$

Toutes les propriétés introduites dans la section 3.2.2 restent valables pour les solutions de l'équation (3.62), en particulier :

– les modes sont orthonormaux :

$$\forall k_x : \sum_{i=1}^{n_c} \int \hat{\varphi}_i^p(\mathbf{y}, k_x) \hat{\varphi}_i^{*q}(\mathbf{y}, k_x) d\mathbf{y} = \delta_{pq} \tag{3.63}$$

– les fonctions $\hat{\varphi}_i^n$ forment une base complète permettant l'expression exacte de la fonction $\hat{\mathbf{u}}$ pour chaque k_x :

$$\forall k_x : \hat{u}_i(\mathbf{y}, k_x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{l}^n(k_x) \hat{\varphi}_i^n(\mathbf{y}, k_x) \tag{3.64}$$

avec

$$\hat{l}^n(k_x) = \sum_{i=1}^{n_c} \int \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, k_x)\hat{\varphi}_i^n(\mathbf{y}, k_x)d\mathbf{y}$$

– les coefficients de la décomposition vérifient :

$$\forall k_x : E[\hat{l}^n(k_x)\hat{l}^{*m}(k_x)] = \delta_{nm}\hat{\lambda}^n(k_x) \tag{3.65}$$

Lien avec la POD classique

La résolution du problème avec le tenseur de corrélation $R_{u_iu_j}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = E[u_i(\mathbf{X})u_j^*(\mathbf{X}')]$ conduit également à une base POD qu'on représente par les fonctions $\phi_i^n(\mathbf{X})$. La fonction $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ peut donc être écrite sous la forme suivante :

$$u_i(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \phi_i^n(x, y, z, t) \tag{3.66}$$

En remplaçant u_i dans l'équation (3.61) par son expression donnée par l'équation (3.66) et en prenant en compte l'équation (3.64), on obtient la relation suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \hat{l}^n(k_x)\hat{\varphi}_i^n(\mathbf{y}, k_x) = \int \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \phi_i^n(x, y, z, t) \right\} e^{ik_x x} dx$$

ou encore :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \hat{l}^n(k_x)\hat{\varphi}_i^n(\mathbf{y}, k_x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int a^n \phi_i^n(x, y, z, t) e^{ik_x x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \hat{\phi}_i^n(\mathbf{y}, k_x)$$

Cette équation ne garantit pas que chacun des modes $\hat{\varphi}_i^n$ obtenus via la POD effectuée sur $\hat{\mathbf{u}}$ (la transformée de Fourier de $\mathbf{u}$) soit forcément égal à la transformée de Fourier de son homologue $TF[\phi_i^n]$, issu d'une POD effectuée sur $\mathbf{u}$.

Il est toutefois possible de trouver une relation plus utile entre $\phi_i^n(x, y, z, t)$ et λ^n associés à $\mathbf{u}$ d'un côté et $\hat{\varphi}_i^n(k_x, y, z, t)$ et $\hat{\lambda}^n(k_x)$ issus de $\hat{\mathbf{u}}$ de l'autre côté. Pour cela il faut que la fonction $\mathbf{u}$ contienne des propriétés statistiques supplémentaires. On s'intéresse plus particulièrement à "l'homogénéité". Cette propriété statistique est un type particulier de symétrie de groupe souvent utilisé dans les hypothèses de la turbulence. Il s'agit de l'invariance des propriétés statistiques du champ par translation en espace. On peut montrer (voir par exemple Lumley [82]) que dans la direction de homogénéité (x par exemple), les modes de Fourier $e^{ik_x x}$ sont les modes POD. C'est pourquoi en présence d'une direction homogène, la plupart des auteurs réalise une transformée de Fourier dans cette direction au lieu d'une décomposition POD. Pour les autres directions inhomogènes, c'est donc une POD (spectrale) qui est effectuée.

Dans de nombreux cas d'étude, les écoulements sont stationnaires (c'est-à-dire "homogène" en temps). La POD spectrale temps/fréquence est donc souvent mise à l'œuvre.

3.4.2 POD spectrale, temps/fréquence

Comme il souvent avantageux de travailler dans le domaine fréquentiel au lieu de manipuler les informations temporelles, dans cette partie les liens entre la transformée de Fourier temporelle et la décomposition POD sont présentés. On distingue deux cas :

– Soit on calcule la transformée de Fourier de la variable aléatoire et on effectue la POD sur cette variable transformée (POD spectrale présentée en 3.4.1).

– Soit la POD est calculée via la variable aléatoire elle-même et, ensuite, la transformée de Fourier est appliquée aux fonctions et valeurs propres.

Dans un premier temps on suit la même démarche que celle entreprise dans la section 3.4.1 où la moyenne est calculée via une moyenne d'ensemble. Ensuite, on regarde l'effet du remplacement de la moyenne d'ensemble par une moyenne temporelle (sous réserve d'ergodicité des signaux). Ainsi on considère la fonction $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\omega)$, transformée de Fourier temporelle de $\mathbf{u}$, et on cherche la base optimale, au sens énergétique, pour exprimer $\tilde{\mathbf{u}}$ à chaque ω fixé. Ce qui conduit à l'équation de Fredholm suivante :

$$\forall\omega : \sum_{j=1}^{n_c} \int \tilde{R}_{\tilde{u}_i\tilde{u}_j}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega)\tilde{\chi}_j^n(\mathbf{x}',\omega)d\mathbf{x}' = \tilde{\lambda}^n(\omega)\tilde{\chi}_i^n(\mathbf{x},\omega) \tag{3.67}$$

avec le noyau d'intégration :

$$\forall\omega : \tilde{R}_{\tilde{u}_i\tilde{u}_j}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega) = E[\tilde{u}_i(\mathbf{x},\omega)\tilde{u}_j^*(\mathbf{x}',\omega)] \tag{3.68}$$

On rappelle que $E[\ ]$ représente l'espérance mathématique et, ici, elle est calculée à partir d'une moyenne d'ensemble. Comme on l'a vu dans la section 3.2.1, la résolution de cette équation de Fredholm conduit à une infinité de solutions pour lesquelles toutes les propriétés introduites en section 3.2.2 sont valables. Elles vérifient donc la propriété d'orthonormalité :

$$\forall\omega : \sum_{i=1}^{n_c} \int \tilde{\chi}_i^p(\mathbf{x},\omega)\tilde{\chi}_i^{*q}(\mathbf{x},\omega)d\mathbf{x} = \delta_{pq} \tag{3.69}$$

Elles forment également une base complète et permet d'écrire la fonction $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\omega)$ d'une façon exacte. Chaque composante de vitesse peut donc être écrite :

$$\forall\omega : \tilde{u}_i(\mathbf{x},\omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{c}^n(\omega)\tilde{\chi}_i^n(\mathbf{x},\omega) \tag{3.70}$$

avec :

$$\tilde{c}^n(\omega) = \sum_{i=1}^{+\infty} \int \tilde{u}_i(\mathbf{x},\omega)\tilde{\chi}_i^n(\mathbf{x},\omega)d\mathbf{x}$$

et les coefficients de la décomposition vérifient :

$$\forall\omega : E[\tilde{c}^n(\omega)\tilde{c}^m(\omega)] = \delta_{nm}\tilde{\lambda}^n(\omega) \tag{3.71}$$

Jusqu'ici aucune propriété statistique n'est associée à la fonction aléatoire $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\omega)$. Maintenant on considère qu'elle est stationnaire en temps. Dans ce cas le théorème de Wiener-Khinchin peut être appliqué et le noyau d'intégration, le tenseur de corrélation $\tilde{R}_{\tilde{u}_i\tilde{u}_j}(\mathbf{x},\omega)$, peut être calculé via la relation suivante :

$$\forall\omega : \tilde{R}_{\tilde{u}_i\tilde{u}_j}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega) = E[\tilde{u}_i(\mathbf{x},\omega)\tilde{u}_j^*(\mathbf{x}',\omega)] =$$
$$\int R_{u_iu_j}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\tau)e^{i\omega\tau}d\tau = \int E[u_i(\mathbf{x},t)u_j^*(\mathbf{x}',t+\tau)]e^{i\omega\tau}d\tau \tag{3.72}$$

L'utilisation de l'hypothèse d'ergodicité permet de remplacer la moyenne d'ensemble par une moyenne temporelle. Ainsi le noyau de l'équation (3.67), le tenseur de corrélation fréquentiel, s'écrit sous la forme suivante :

$$\tilde{R}_{\tilde{u}_i\tilde{u}_j}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega) = \frac{1}{T}\lim_{T\to+\infty} \int\int_0^T u_i(\mathbf{x},t)u_j^*(\mathbf{x}',t+\tau)e^{i\omega\tau}dtd\tau \tag{3.73}$$

La formulation présentée jusqu'ici est souvent appelée "Spectral Proper Transformation" (SPT). En effet la démarche suivie dans le cas de SPT, c'est-à-dire la décomposition orthogonale de la transformée de Fourier de la variable $\mathbf{u}$, n'est pas équivalente à la transformée de Fourier de la décomposition orthogonale de $\mathbf{u}$. En fait la décomposition orthogonale de $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ étant basée sur le calcul de la covariance est souvent appelée "Covariance Proper Transformation" (CPT) et contrairement à la SPT elle ne prend en compte qu'un seul temps de retard, $\tau = 0$. Grâce à la CPT, on rappelle que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_n a^n(t)\phi_i^n(\mathbf{x})$$

En réalisant la transformée de Fourier temps/fréquence de cette expression on obtient donc une autre expression de $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega)$:

$$\tilde{u}_i(\mathbf{x}, \omega) = \sum_n \tilde{a}^n(\omega)\phi_i^n(\mathbf{x})$$

Il faut cependant bien noter que les modes et les coefficients de la SPT et de la transformée de Fourier de la CPT ne sont pas égaux deux à deux : $\tilde{a}^n(\omega) \neq \tilde{c}^n(\omega)$ et $\phi_i^n(\mathbf{x}) \neq \tilde{\chi}_i^n(\mathbf{x}, \omega)$.

Chapitre 4

Méthodologie POD/EPOD pour l'analyse des sources aéroacoustiques

Ce chapitre vise à proposer et à appliquer une méthodologie d'analyse statistique basée sur les techniques POD/EPOD afin d'identifier les évènements aérodynamiques impliqués dans la génération des ondes acoustiques. La connaissance a priori du champ aérodynamique et du champ acoustique associé est alors indispensable. Plus précisément, seules les configurations pour lesquelles les fluctuations de pression acoustique pures sont disponibles, peuvent être considérées. Le cas plus problématique dans lequel le signal acoustique doit être préalablement extrait d'un signal total aérodynamique / acoustique (cas des pressions pariétales sur les vitrages) est considéré dans le chapitre 5. Dans un premier temps, l'approche POD/EPOD est mise au point dans une application concernant un aérateur simplifié de voiture. En suivant la vision conventionnelle de la POD, le champ de vitesse dans la zone source est décomposée en une série des vecteurs propres. La contribution de chaque vecteur propre (décrivant éventuellement un mode de l'écoulement turbulent) au champ acoustique est ensuite évaluée par le mode étendu associé. Les précautions à prendre quant à la manipulation des signaux finis pour l'application de l'EPOD sont alors mises en évidence. Ces précautions concernent essentiellement la convergence des opérateurs statistiques. Ce problème de convergence est ensuite étudié pour l'évaluation des vecteurs propres POD eux-mêmes.
Le choix de la variable dans le domaine source de l'écoulement est ensuite considéré. Le tenseur de Lighthill est calculé dans la zone source de l'écoulement et comparé avec la pression fluctuante. Enfin, la simulation numérique d'écoulement autour d'un véhicule est présentée et le rayonnement acoustique du rétroviseur est étudié.

4.1 Bruit du système de ventilation : Aérateur

Le bruit généré par le système de ventilation peut être une composante non négligeable de bruit à l'intérieur des habitacles automobiles. Plusieurs parties contribuent à la génération de bruit aérodynamique dans une unité de ventilation de véhicule, mais celui causé par les conduits et les aérateurs sont d'une importance particulière. Un aérateur est typiquement équipé d'un clapet situé en amont de l'ouverture, et une cascade d'ailettes horizontales et verticales (voir la figure 4.3). Ces dispositifs génèrent des niveaux élevés de bruit large-bande quand ils obstruent le passage de l'écoulement d'air, par exemple, quand le clapet est partiellement fermé pour ajuster le débit de l'écoulement ou quand les ailettes sont inclinées pour changer la direction du jet de sortie. Les autres sources de bruit dans une unité de ventilation sont le ventilateur et les autres discontinuités dans les conduits comme les coudes, les changements de section ou les jonctions entre les tuyaux.

Plusieurs travaux précédents visant à étudier le bruit généré par un aérateur et à proposer des modèles simplifiés existent dans la littérature. Iudin [66] a proposé une première loi de prédiction déduite de l'analyse dimensionnelle et des mesures effectuées sur plusieurs éléments d'aérateur. Selon la formule proposée, la puissance de bruit généré est proportionnelle à la perte de charge à la puissance trois et à la dimension géométrique caractéristique de l'aérateur au carré. En négligeant l'effet du confinement sur la propagation des ondes, une relation similaire a été retrouvée par Gordon [50, 51] qui a remplacé les sources de bruit par les dipôles dont la puissance est proportionnelle à la perte de charge.

L'effet de confinement dans un conduit a été souligné par Heller et Windnall [55] et Nelson et Morfey [92]. Ces deux auteurs ont démontré que les dipôles se comportent comme des monopôles en champ libre pour les fréquences inférieures à celle correspondante au premier mode transversal, avec une dépendance de la puissance acoustique rayonnée à la vitesse en puissance quatre (U^4) pour les conduits infinis. L'effet du confinement sur la puissance acoustique rayonnée peut être négligé pour les fréquences plus élevées où les longueurs d'ondes acoustiques sont plus petites que la section de conduit ; dans ce cas la puissance rayonnée est proportionnelle à U^6.

Nelson et Morfy [92] ont modélisé les sources de bruit générées par un spoiler (le spoiler représente une ailette) vertical avec une distribution de dipôles axiaux. Sous des hypothèses réalistes sur la turbulence et en utilisant une distribution spatiale des forces, la puissance acoustique rayonnée est associée à la traînée fluctuante totale du spoiler.

Le présent travail étudie le problème sous un angle différent, visant à identifier les évènements aérodynamiques impliqués dans la génération de bruit en ayant accès à l'ensemble des variables du champ aérodynamique et du champ acoustique résultant. La difficulté extrême (voire l'impossibilité) d'accéder aux variables d'écoulement dans une configuration aussi complexe (écoulement confiné, étendu spatiale vaste) par les moyens expérimentaux ne laisse d'autre choix que d'avoir recours à la simulation numérique. Dans cette optique, les travaux précédents [1] effectués au sein de la direction de recherche de Renault ont eu pour objectif de prouver la fiabilité et la représentativité physique des simulations numériques de l'écoulement faites à l'aide de la LBM (code PowerFLOW) pour une telle configuration.

Dans ce travail précédent, les capacités de PowerFLOW à simuler la propagation d'une onde plane acoustique sans écoulement moyen ont d'abord été examinées. Ensuite, en imposant un débit d'entrée constant les capacités du code à simuler la génération de bruit par la turbulence ont été vérifiées.

A l'issue d'un plan d'expérience visant à étudier conjointement l'influence du nombre d'ailettes, leur angle et la position du clapet sur le bruit rayonné, 18 configurations différentes ont été étudiées. Chacune des 18 configurations a été d'abord physiquement construite. L'écoulement d'air a été introduit par une soufflerie silencieuse. Le rayonnement acoustique a été mesuré dans le conduit en amont du clapet et en aval, en dehors du conduit, dans une salle semi-anéchoïque. La figure 4.1 montre le banc de mesure et la position des microphones utilisés pour la mesure de bruit rayonné. La corrélation entre la simulation et la mesure directe du champ acoustique rayonné a été satisfaisante pour la plupart des configurations étudiées. Les cas pour lesquels la corrélation n'est pas satisfaisante ont conduit à augmenter la résolution du maillage spatial (réduction de la taille des mailles) dans les zones potentiellement sources. Cela a conduit à l'amélioration des résultats. L'augmentation de la résolution du maillage a également repoussé la fréquence de coupure de calcul (fréquence à laquelle les résultats du calcul diffèrent des mesures). La figure 4.2 montre les spectres de pression acoustique en amont (dans le conduit) et en aval (en dehors du conduit) issus de la mesure et ceux obtenus par la simulation numérique avec un maillage de résolution élevée. Plus de détails concernant ce travail peuvent être trouvés dans Adam *et al.* [1].

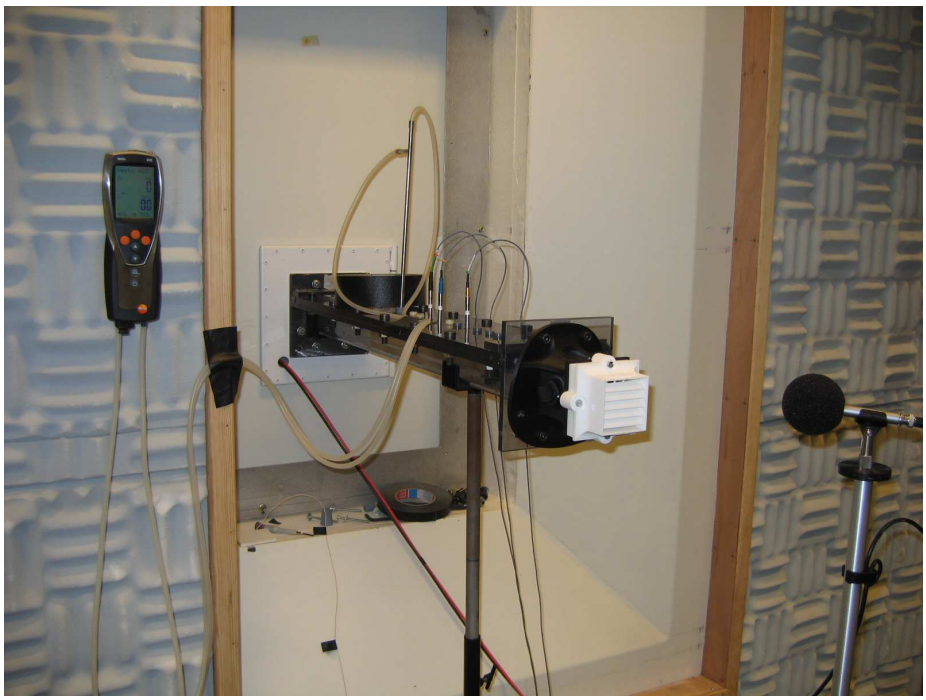

FIG. 4.1 – Banc de mesure

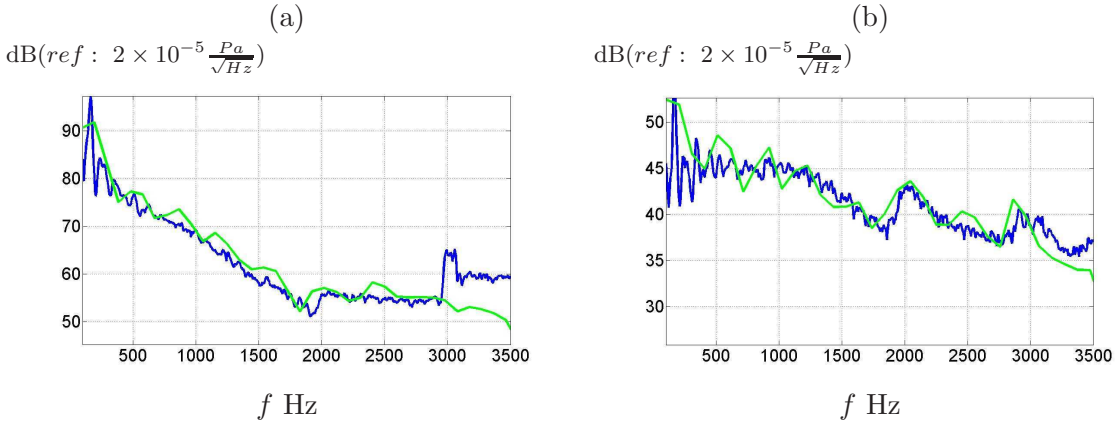

FIG. 4.2 – Spectre de pression acoustique (a) en position amont du clapet et (b) en position aval, en dehors de l'écoulement : (—) simulation numérique, (—) donné expérimentale

4.1.1 Présentation de la configuration considérée et des paramètres de simulation

La configuration choisie dans cette étude est présentée sur la figure 4.3. Elle est constituée de quatre ailettes horizontales et quatre ailettes verticales. Le clapet est incliné à 45°. La section de conduit est un carré de coté 0.06 m.

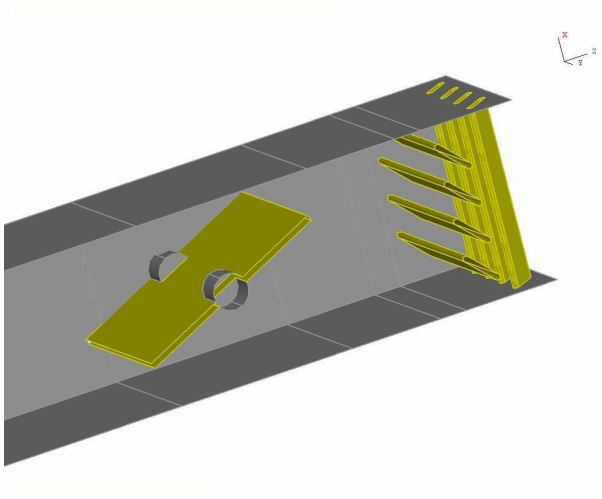

FIG. 4.3 – Conduit d'un aérateur simplifié de voiture

Pour effectuer la simulation de l'écoulement, 23 millions de mailles cubiques sont considérées dans le conduit et dans un volume de détente (figure 4.4). Le maillage est formé de 8 zones de résolution différente. Dans le cas présent le nombre de mailles "*Fine Equivalent*" correspond à 11.3 millions. La résolution maximale est considérée autour des ailettes et du clapet. Elle correspond à Δ**x**0.2 mm. Cette résolution est indispensable pour la bonne prise en compte de la turbulence à l'origine de l'émission sonore [1]. Le pas de temps de la simulation est imposé par la résolution spatiale via la relation $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\Delta x}{\Delta t}$ (voir chapitre 2). Pour une vitesse de propagation des ondes sonores de 343.25 m/s et pour $\Delta x = 0.2$ mm, le pas de temps équivaut 3.364×10^{-7} s.
Un débit constant de masse de 150 kg/h est imposé à l'entrée du conduit, cela représente une vitesse moyenne d'environ 10 m/s dans le conduit. L'écoulement d'entrée est supposé stationnaire, aucune perturbation n'est ajoutée. A la sortie du conduit l'écoulement est simulé dans un grand volume de détente (figure 4.4). La condition de pression atmosphérique est imposée aux frontières de ce volume. Le nombre de Reynolds correspond à Re=38900 à l'entrée de conduit. Il est calculé avec une viscosité de l'air $\nu = 1.49 \times 10^{-5}$ m^2/s et une longueur caractéristique L=0.06 m qui correspond à la dimension du coté de la section de conduit.
Cette configuration, avec les paramètres de simulation présentés, faisait partie des configurations de l'étude de validation du code PowerFLOW par comparaison aux données expérimentales [1]. La figure 4.5 représente la comparaison entre les résultats de la simulation et ceux obtenus par la mesure. Le spectre de pression acoustique issu de la simulation représente une corrélation assez satisfaisante avec celui issu de la mesure en position amont (dans le conduit). En position aval, le premier pic à 240 Hz est bien restitué par la simulation. En revanche le spectre de la pression simulée à 450 et 930 Hz possède un niveau d'énergie supérieur à celui de spectre mesuré. 2×10^5 itérations (dans la zone de meilleure résolution) ont été effectuées. En retirant la phase d'établissement de l'écoulement pendant les premières itérations une durée physique totale de 59.6 ms est disponible. L'ensemble des grandeurs physiques utiles (la pression et les trois composantes de vitesse) sont enregistrées toutes les 40 itérations dans le volume présenté sur la

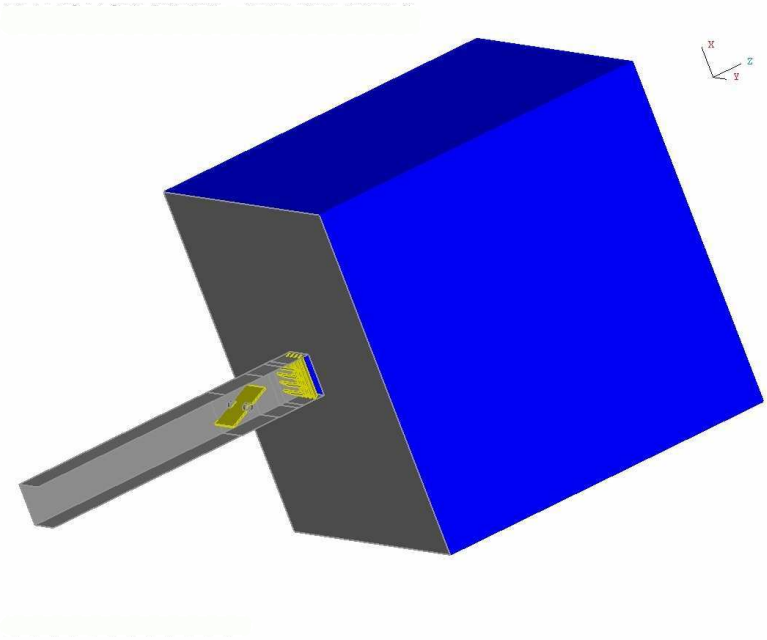

FIG. 4.4 – Volume de détente

figure 4.6.

Une analyse de convergence des opérations statistiques d'ordre deux comme l'intercorrélation (§ 3.1.4.1) montre que les signaux obtenus peuvent être sous-échantillonnés davantage. Finalement 443 échantillons temporels séparés d'un pas de temps de $dt = 1.34 \times 10^{-4}$ s correspondant à une fréquence d'échantillonnage de $F_s = 7.43$ kHz sont retenus.
Les fluctuations de pression acoustique sont mesurées à l'extérieur de l'écoulement aux points de mesure montrés sur la figure 4.7.

La figure 4.8 montre la DSP des fluctuations de pression acoustique en un point donné. Il possède deux pics à 234 Hz et 930 Hz. L'analyse spectrale entre les différents points de mesure confirme que le champ acoustique rayonné est principalement omnidirectionnel. En effet la même allure de DSP est obtenue pour les autres points de mesure situés en champ lointain.
Dans la prochaine partie on s'intéresse à l'identification des évènements aérodynamiques impliqués

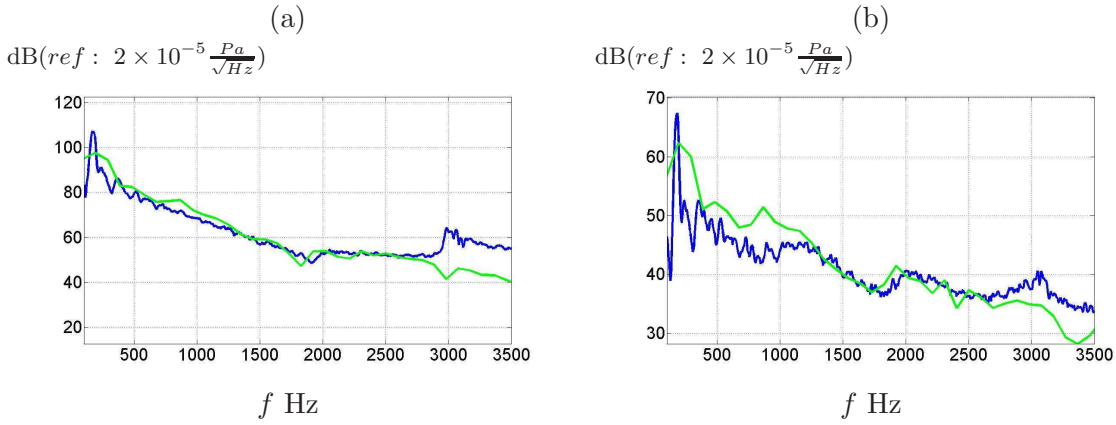

FIG. 4.5 – Spectre de pression acoustique (a) en position amont du clapet et (b) en position aval, en dehors de l'écoulement : (—) simulation numérique, (—) donnée expérimentale

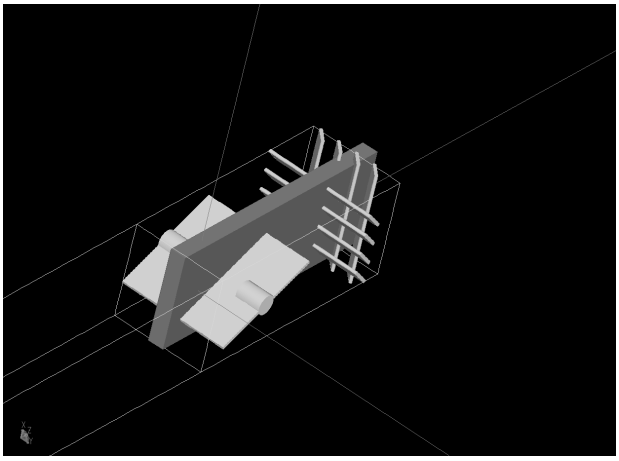

FIG. 4.6 – Volume de mesure dans lequel l'ensemble des grandeurs physiques est enregistré sur chaque point de maillage tous les 40 itérations. Il contient $2,73 \times 10^5$ mailles fluides.

dans la génération de bruit.

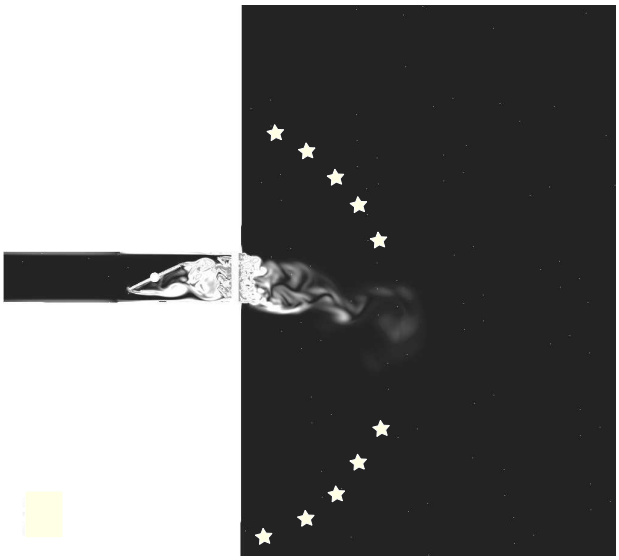

FIG. 4.7 – Points de mesures (indiqués par $\star$) utilisés pour extraire les fluctuations de pression en dehors de l'écoulement (fluctuations de pression purement acoustique)

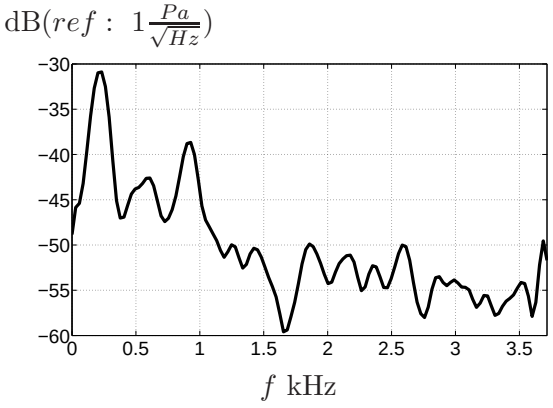

FIG. 4.8 – Densité Spectrale de Puissance de pression acoustique

4.2 Mise au point POD/EPOD

Afin de limiter les coûts de calcul on se contente d'un plan 2D au centre du volume de mesure et le périmètre d'étude est limité à la zone indiquée sur la figure 4.9 appelée "*zone source*". Evidemment cette région n'inclut pas tous les évènements turbulents contribuant au bruit. Dans ce cas l'appellation *zone source* de cette région est abusive et elle est seulement utilisée pour des raisons pratiques d'écriture. La symétrie du conduit et du clapet assure la pseudo-deux dimensionnalité des grosses structures tourbillonnaires situées dans la zone source considérée, entre le clapet et les ailettes. Cela signifie que le plan 2D choisi est capable d'extraire la signature des grosses structures. La formation des gros lâchers tourbillonnaires au bord de clapet devrait impliquer une activité turbulente importante dans cette zone.

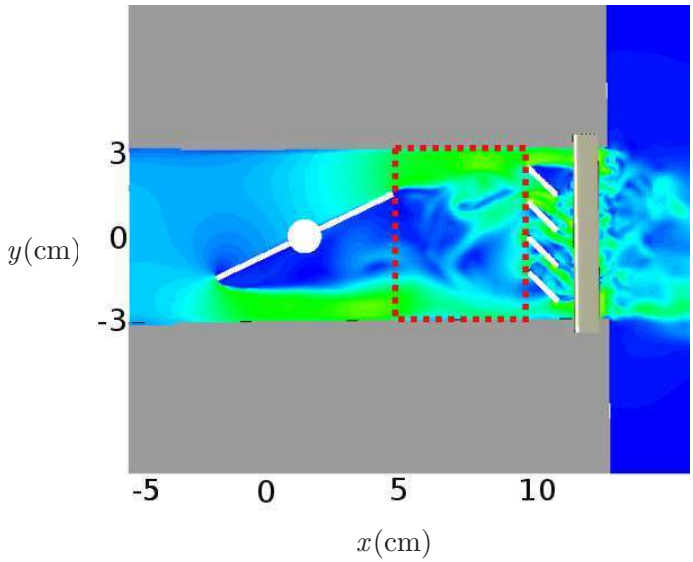

FIG. 4.9 – Champ instantané de vitesse dans le plan (x, y). "*Zone source*" indiquée par des traits en pointillé rouge

Dans une première approche, en suivant la vision traditionnelle de l'application de POD, on cherche à représenter les structures cohérentes de l'écoulement par la décomposition du champ de vitesse turbulente. La validité du choix de la vitesse comme variable de décomposition dans la zone source sera discutée dans la partie § 4.3. On vérifie l'éventuelle implication des structures turbulentes (présentes dans cette zone) dans la génération des fluctuations de pression acoustique à l'aide des modes étendus (EPOD).

4.2.1 Application de la POD

La figure 4.10 représente la composante normale au plan de la vorticité, $\omega_z(x, y, t)$ en 3 instants différents. Un sous-échantillonnage spatial est considéré afin d'alléger le processus de post-traitement. Le pas d'espace est fixé de manière équivalente à $dx = dy = 25$ mm dans les deux directions du plan xy, fournissant un nombre total de $N_S = 525$ points spatiaux. De plus, seules les deux composantes de vitesse U et V dans ce plan sont retenues pour déterminer les modes propres. Ce choix se justifie par la bidimensionnalité de l'écoulement dans la zone source. Sous cette condition, la formulation Snapshot qui conduit à un problème aux valeurs propres de taille $N_T \times N_T = 443 \times 443$ est préférée à la formulation classique qui ferait appel à la résolution d'un problème aux valeurs propres de taille $(2 \times N_S) \times (2 \times N_S) = (2 \times 525) \times (2 \times 525)$. La POD est appliquée au champ fluctuant de vitesse (u, v) déduit de la décomposition de Reynolds.

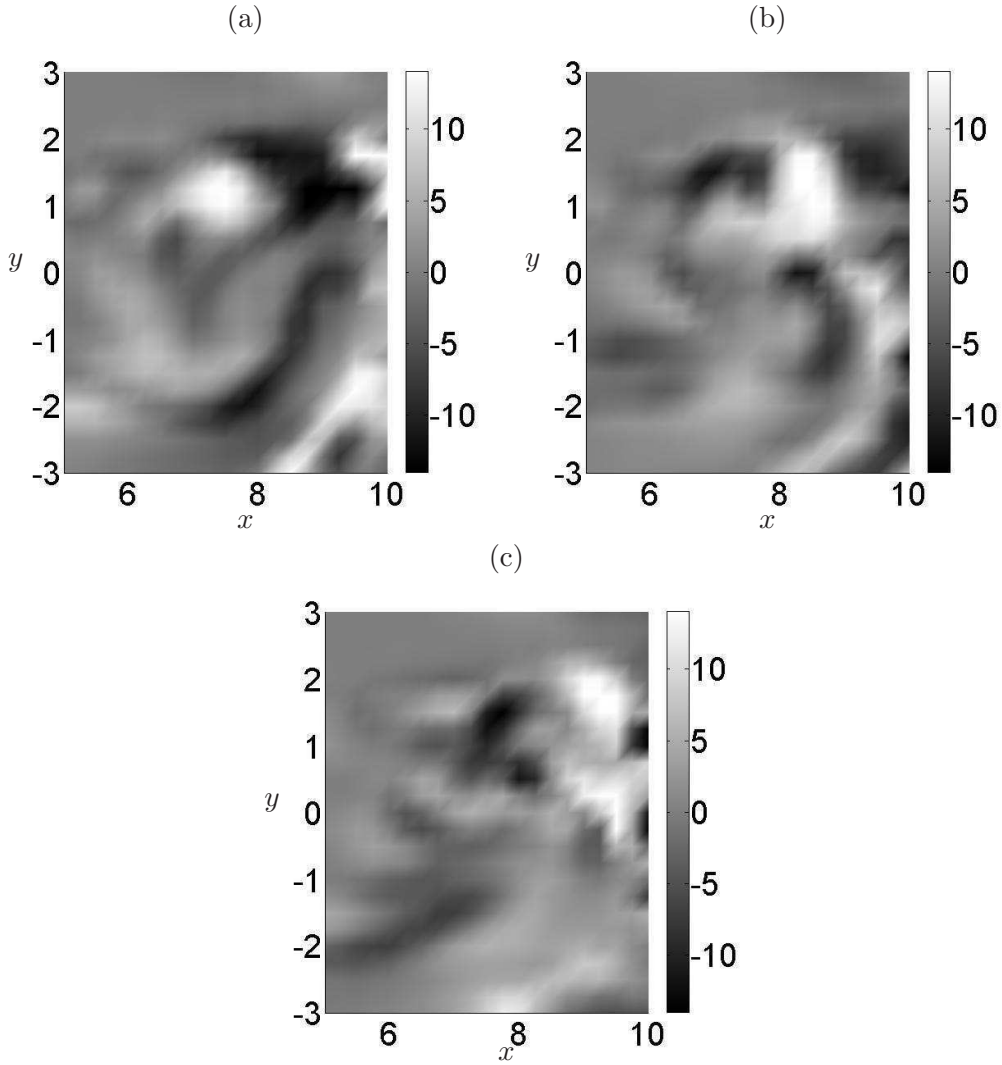

FIG. 4.10 – La composante normale de vorticité (ω_z) à trois instants différents

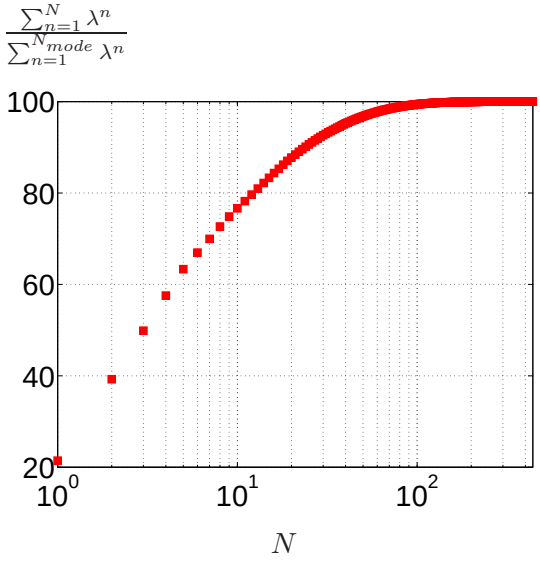

FIG. 4.11 – Evaluation cumulée des valeurs propres : POD snapshot du champ de vitesse (composantes u et v) dans la zone source

Les modes sont rangés selon leurs valeurs propres associées dans l'ordre énergétique descendant. La somme cumulée des valeurs propres est représentée sur la figure 4.11. Les quatre premiers modes captent environ 60% de l'énergie cinétique fluctuante du champ $(\bar{u}^2+\bar{v}^2)$ et les 12 premiers modes en contiennent 80%. Cette forte cohérence observée dans les premiers modes POD est directement liée à l'existence des grosses structures cohérentes régulières quasi bidimensionnelles transportées par l'écoulement moyen dans la direction de l'écoulement. La figure 4.12 montre le champ de vorticité reconstruit par la projection du champ de vitesse sur les 24 premiers modes Snapshot représentant 90% de l'énergie du champ de vitesse.

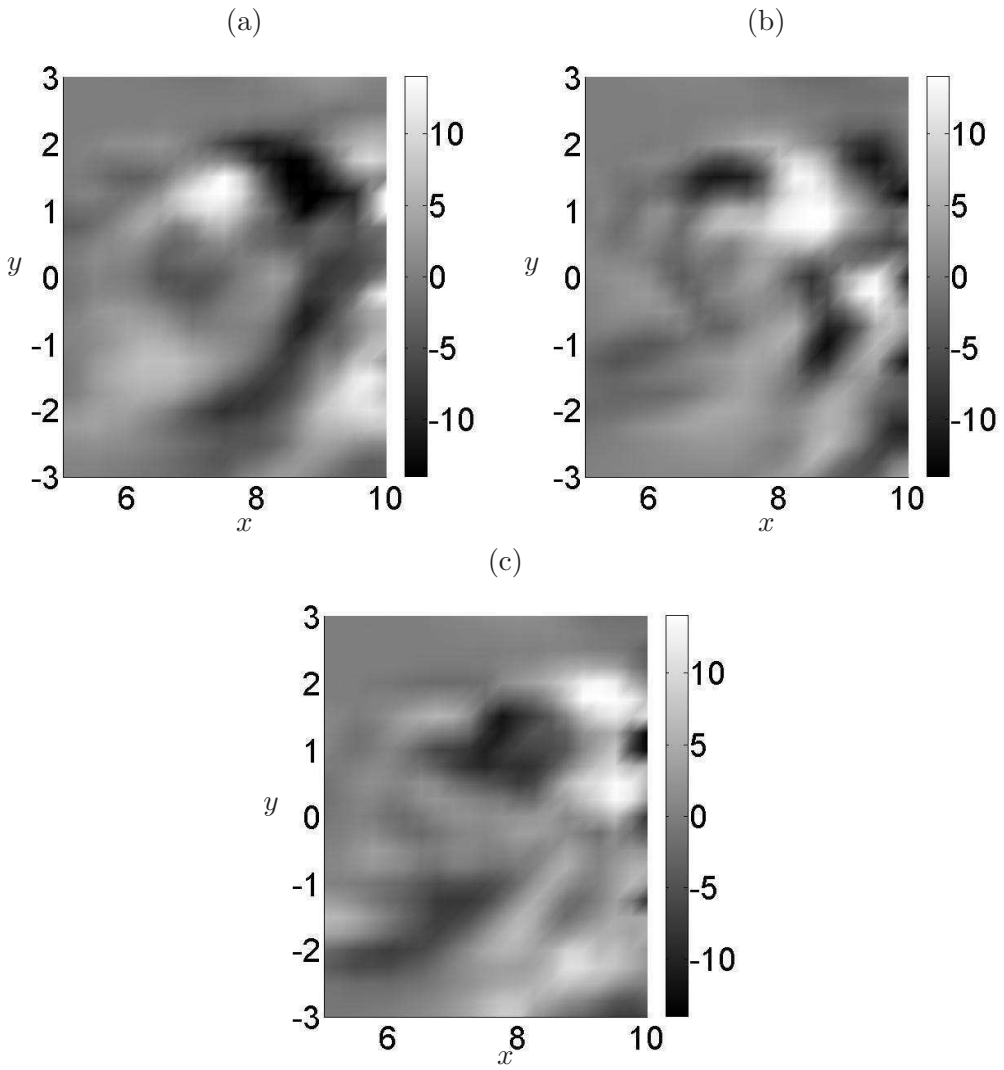

FIG. 4.12 – La composante normale de vorticité (ω_z) aux mêmes trois instants de la figure 4.10, projetée sur les 24 premiers modes représentant 90% de l'énergie totale de champ de vitesse

4.2.2 Application de l'EPOD

L'EPOD va maintenant être utilisée pour caractériser le lien de causalité entre le champ de pression acoustique et le champ aérodynamique projeté sur certains modes POD.
Suivant la définition de la POD étendue (équation (3.56)), l'application de l'EPOD entre le champ de vitesse dans la zone source et le champ acoustique rayonné doit permettre d'identifier la partie corrélée du champ de vitesse avec le champ de pression. Pour faciliter la lecture, la variable d'espace dans la zone source est appelée $\mathbf{x}_p$: $\mathbf{x}_p \in S = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \cdots, (x_{N_S}, y_{N_S}, z_{N_S})\}$. Dans la zone d'observation de la pression acoustique (nommée Ω) la variable d'espace est appelée $\mathbf{x}_h^{'}$ avec : $\mathbf{x}_h^{'} \in \Omega = \left\{(x_1^{'}, y_1^{'}, z_1^{'}), (x_2^{'}, y_2^{'}, z_2^{'}), \cdots, (x_{N_\Omega}^{'}, y_{N_\Omega}^{'}, z_{N_\Omega}^{'})\right\}$. Le temps étant la variable commune des deux domaines est représenté par $t_h \in T = \{t_1, t_2, \cdots, t_{N_T}\}$.

En considérant la propriété d'orthonormalité des vecteurs propres Snapshot (équation (3.46)) et en remplaçant la moyenne d'ensemble par la moyenne temporelle dans les équations (3.53) et (3.54) le mode étendu numéro m est défini par

$$\psi^m(X_h^{'}) = \overline{\vartheta^m(t_q) p_{ac}(x_h^{'}, t_q)} \tag{4.1}$$

et d'après l'équation (3.56) la partie corrélée entre les deux variables est identifiée par

$$p_{ac}^{(C)}(x_h^{'}, t_q) = \sum_{n=1}^{N_T} \vartheta^n(t_q)\psi^n(x_h^{'}), \quad q = \{1, 2, \cdots, N_T\}\,;$$

La figure 4.13 montre la DSP du signal de pression acoustique brut et celle reconstruite par les modes étendus. On observe une parfaite reconstruction de signal de pression acoustique par les

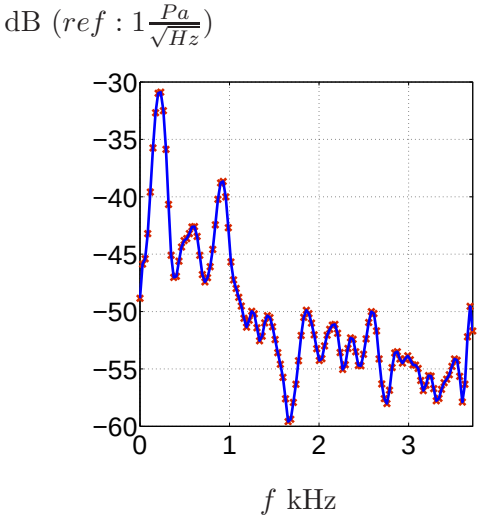

FIG. 4.13 – Densité spectrale de puissance de pression acoustique : (—) signal original, (×) signal reconstruit avec les 443 modes étendus

modes étendus ce qui signifierait une parfaite corrélation entre le champ de vitesse et la pression acoustique.

$$p_{ac}^{(C)}(x_h^{'}, t_q) = p_{ac}(x_h^{'}, t_q)$$

et

$$p_{ac}^{(D)}(x_h^{'}, t_q) = 0.$$

Ce résultat est physiquement incorrect car d'un point de vue de la notion de cause à effet, cela signifierait que la turbulence décrite par les deux composantes de vitesse dans la zone source

considérée serait la seule cause de la génération des fluctuations de pression acoustique. Cette hypothèse ne peut pas être acceptable car la contribution de la turbulente dans les autres parties (autour des ailettes notamment) au bruit généré n'est certainement pas nulle et elle est très probablement responsable de certaines parties du spectre de bruit, en haute fréquence notamment. Ce résultat a priori surprenant est lié à l'utilisation de l'EPOD basée sur la formulation Snapshot de POD, qui n'avait pas été formulée auparavant. Dans les paragraphes suivants, des explications mathématiques relatives à la formulation Snapshot et plus généralement à toutes les formulations POD/EPOD (classique, Snapshot ou spectrale) pour les domaines finis sont apportées.

4.2.3 Limitations de l'EPOD appliquée à des domaines finis

Afin de s'assurer du fait que la reconstruction parfaite de signal de pression par l'ensemble des modes étendus ne représente pas une corrélation physique, on remplace le signal de pression par un bruit blanc de même taille, $r(t_q)$ avec $q = 1, 2, \cdots, N_T$. A priori ce signal n'a aucune corrélation avec le champ de vitesse de la zone source et une démarche d'EPOD ne doit pas permettre d'obtenir une partie corrélée $r^{(C)}(t_q) = 0$, car :

$$si \qquad \overline{\mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t_q) r(t_q)} = \sum_{n=1}^{N_{mod}} \mathbf{b}^n(\mathbf{x}_p) \overline{\vartheta^n(t_q) r(t_q)} = 0,$$

alors

$$r^{(C)}(t_q) = \sum_{n=1}^{N_{mod}} \vartheta^n(t_q) \left(\overline{\vartheta^n(t_q) r(t_q)} \right) = 0.$$

Mais contrairement au raisonnement précédent, la figure 4.14 montre que le signal r est parfaitement reconstruit et aucune partie non corrélée n'est obtenue, $r^{(D)}(t_q) = 0$. Cela s'explique par

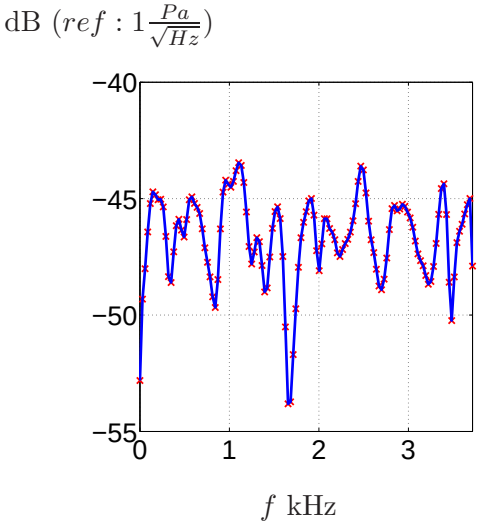

FIG. 4.14 – Densité spectrale de puissance d'un signal temporel de type bruit blanc : (—) signal original, (×) signal reconstruit avec tous les modes étendus associés

l'argument suivant :
Ayant N vecteurs orthonormaux discrets de longueur N, ils forment une base de vecteurs propres appartenant à l'espace de Hilbert. Tout vecteur de longueur N appartenant à cet espace peut parfaitement être projeté sur cette base et les coefficients de projection sont uniques. Dans l'approche Snapshot les N_T vecteurs propres $\vartheta^n(t_q)$ avec $n = \{1, 2, \cdots, N_T\}$ forment une base complète et

un vecteur comme $p_{ac}(x_h^{'}, t_q)$ avec $q = \{1, 2, \cdots, N_T\}$ peut toujours être parfaitement projeté sur cette base. Autrement dit la partie non corrélée disparaît.

$$p_{ac}(x_h^{'}, t_q) = p_{ac}^{(C)}(x_h^{'}, t_q) = \sum_{n=1}^{N_T} \vartheta^n(t_q)\psi^n(x_h^{'}), \quad q = \{1, 2, \cdots, N_T\};$$

$$p_{ac}^{(D)}(x_h^{'}, t_q) = 0. \tag{4.2}$$

La partie non corrélée a souvent été observée dans les études expérimentales où le nombre de points de mesure reste très faible par rapport au nombre d'échantillons temporels et la formulation classique de POD est préférée. Mais, même pour la formulation classique avec une durée temporelle des signaux fixée, la partie non corrélée diminue ou même disparaît complètement en augmentant le nombre de points de mesure. En effet il suffit que le nombre de modes étendus soit égal ou dépasse le nombre d'échantillons temporels pour qu'aucune partie non corrélée ne soit trouvée.

$$si \;\; (n_c \times N_s) > N_T : \qquad p_{ac}(x_h^{'}, t_q) = p_{ac}^{(C)}(x_h^{'}, t_q) = \sum_{n=1}^{n_c \times N_S} a^n(t_q)\psi^n(x_h^{'}), \quad q = \{1, 2, \cdots, N_T\};$$

$$p_{ac}^{(D)}(x_h^{'}, t_q) = 0. \tag{4.3}$$

Le même raisonnement peut être effectué pour la formulation spectrale de l'EPOD. Comme il a été mentionné dans la partie § 3.4 le nombre d'évènements non corrélés dans le domaine spectral se détermine par le nombre de blocs FFT. Ainsi, si $(n_c \times N_S) \geq N_b$, la partie non corrélée de la variable considérée dans le domaine étendu disparaît. Rappelons que dans les études expérimentales le nombre d'échantillons temporels est habituellement beaucoup plus grand que nombre de points spatiaux : $N_b \geq (n_c \times N_S)$. Par exemple Hoarau et al. [58] ont observé l'existence d'une partie non corrélée dans leur application d'EPOD formulée dans le domaine spectral. Ils ont mesuré le signal de pression dans $N_S = 5$ points de mesures de la zone source et considéré $N_b = 250$ nombre de blocs FFT.

Compte tenu de l'observation précédente l'utilisation de l'EPOD pour établir une relation de cause à effet pour les domaines finis semble limitée. L'explication mathématique de cette observation peut être recherchée dans le fait que la POD est un outil mathématique et satisfait toujours les contraintes qui lui sont imposées c'est-à-dire que le nombre de modes POD correspond toujours au rang de l'espace de la base de données sans aucune contrainte supplémentaire sur la réalité physique de chaque mode.

La proposition de Druault *et al.* [41] dans leur application de la POD-LSE semble intéressante. Ils suggèrent de regrouper d'abord les modes POD dans la zone source en différentes familles. Par exemple, il est montré qu'il est possible d'isoler les modes associés aux fluctuations turbulentes qui possèdent des propriétés statistiques quasi-gaussiennes. Ils considèrent alors qu'une interprétation (ou signification) physique peut difficilement lui être accordée. Ils proposent que les modes étendus basés sur les modes POD qui décrivent cette partie du champ de vitesse soient exclus de la reconstruction du signal acoustique. Cette proposition est intéressante mais il reste à s'assurer que la corrélation entre la partie restante du champ du vitesse et le signal acoustique demeure quant à elle bien physique.

Dans les deux paragraphes suivants une explication précise du "problème" de reconstruction parfaite est donnée et une démarche systématique pour une utilisation plus rigoureuse de l'EPOD dans les domaines discrets est proposée.

4.2.4 Convergence des modes étendus

Les limitations de l'EPOD liées à la reconstruction parfaite du signal acoustique sous les conditions qui ont été précisées dans la partie précédente sont liées à la convergence de l'opérateur de corrélation. Le nombre limité d'échantillons est à l'origine de ce problème de convergence. Deux signaux discrets, finis et complètement non corrélés peuvent présenter une valeur très petite mais non nulle de corrélation qui n'est liée à aucune corrélation physique. Ce problème de convergence est traité sous deux angles dans les paragraphes suivants. D'abord une présentation du problème et une solution dans le domaine temporel sont faites. Ensuite une limitation liée à la non-prise en compte de différents temps de retard dans l'approche temporelle est soulignée et une amélioration via l'utilisation de la fonction de cohérence est proposée.

4.2.4.1 Critère de convergence basé sur le coefficient de corrélation

Pour démontrer ce problème de convergence on calcule le coefficient de corrélation $C_{rr'}$ entre deux signaux aléatoires. Ces signaux (r et $r^{'}$ sont de taille $N_T = 443$) n'ont a priori aucune raison d'être corrélés. Le calcul du coefficient de corrélation entre ces signaux :

$$C_{rr'} = \frac{1}{N_T}\sum_{i=1}^{N_T}(r(t_i) \times r^{'}(t_i))/(\sqrt{r(t_i) \times r(t_i)}\sqrt{r'(t_i) \times r'(t_i)})$$

est alors effectué pour $N_{C_{rr'}} = 10^5$ réalisations. Si le nombre d'échantillons temporels (la longueur des signaux) était suffisant la valeur de coefficient de corrélation devrait être égale à zéro. La figure 4.15 montre l'évaluation de la valeur absolue de $C_{rr'}$ pour chaque réalisation. 10^5 points ont alors été tracés.

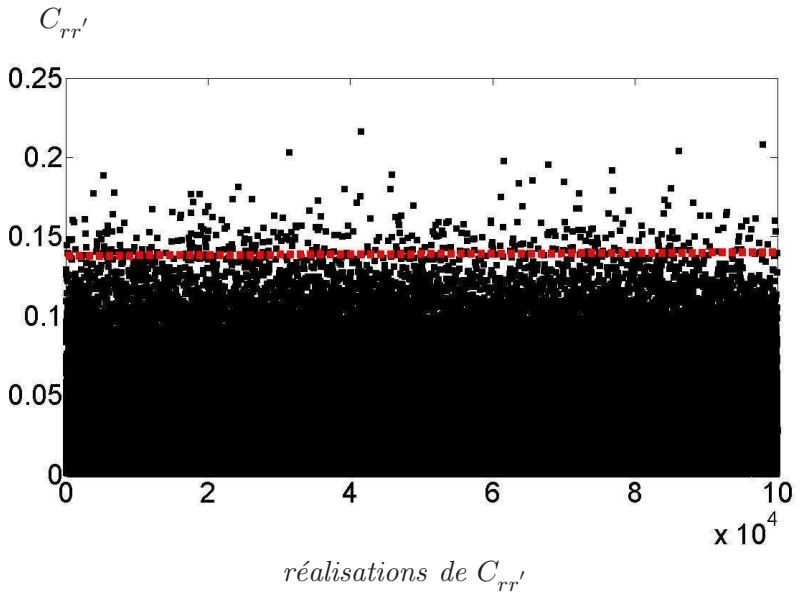

FIG. 4.15 – Valeur absolue du coefficient de corrélation entre deux signaux complètement aléatoires de taille 443. 10^5 réalisations sont effectuées

On peut observer que 99.6% des valeurs de $C_{rr'}$ sont inférieures à un seuil de $\epsilon = 0.14$. Cela signifie que quand le coefficient de corrélation possède une valeur en dessous de ϵ l'interprétation physique d'une telle corrélation est discutable en raison d'un problème de convergence. On note que la définition du seuil est indépendante de la nature des signaux aléatoires utilisés. Les seuils

définis par les signaux aléatoires issus d'une distribution gaussienne ou une distribution uniforme possèdent 0.01% d'écart.

En se basant sur ces remarques, on propose d'appliquer le critère de corrélation (seuil de convergence) à notre base de données. La figure 4.16 montre la valeur absolue du coefficient de corrélation entre les vecteurs propres Snapshot du champ de vitesse $\vartheta^n(t)$ et le signal de pression acoustique.

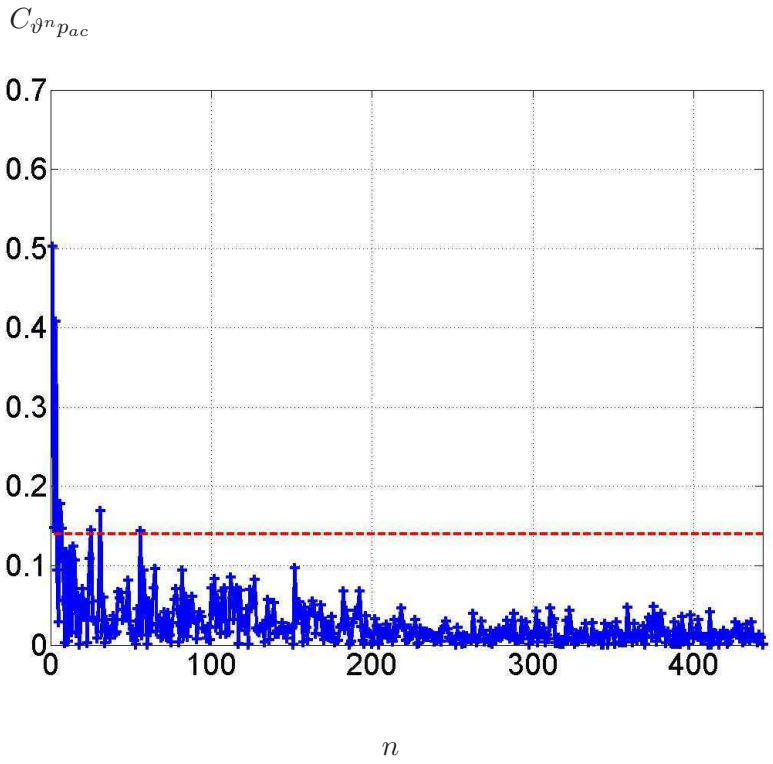

FIG. 4.16 – Valeur absolue du coefficient de corrélation entre la pression acoustique et les vecteurs propres Snapshot, $C_{\vartheta^n p_{ac}}$

Sur cette figure la ligne en pointillée indique le seuil au-dessus duquel les coefficients de corrélation peuvent être utilisés avec 99,6% de confiance. Seuls les modes numéro 1, 2, 3, 6, 7, 25, 31 et 56 ont un niveau de corrélation supérieur à ϵ. Le reste des modes ne peut pas être exploités avec certitude. Deux raisons distinctes permettent de caractériser ces modes restants :

- La non corrélation physique : les modes non convergés représentent la partie physiquement non corrélée du champ de vitesse avec le champ de pression acoustique. Dans ce cas une durée temporelle plus longue ne changerait pas les résultats obtenus : le seuil de confiance diminuerait mais le niveau de corrélation résiduel de ces modes diminuerait également dans les mêmes proportions.

- Le manque d'échantillons temporels : les modes non convergés possèdent peut-être un certain niveau de corrélation réel mais le problème purement numérique dû à l'insuffisance d'échantillons temporels empêche de déterminer cette valeur de corrélation réelle. La valeur du niveau de corrélation obtenue donne une valeur maximale du niveau de corrélation réelle : une augmentation du nombre d'échantillons aurait pour conséquence soit de réduire la valeur de l'estimation de corrélation, soit de la laisser inchanger si sa valeur réelle était déjà atteinte. Dans tous les cas, cette valeur ne pourrait être considérée comme une estima-

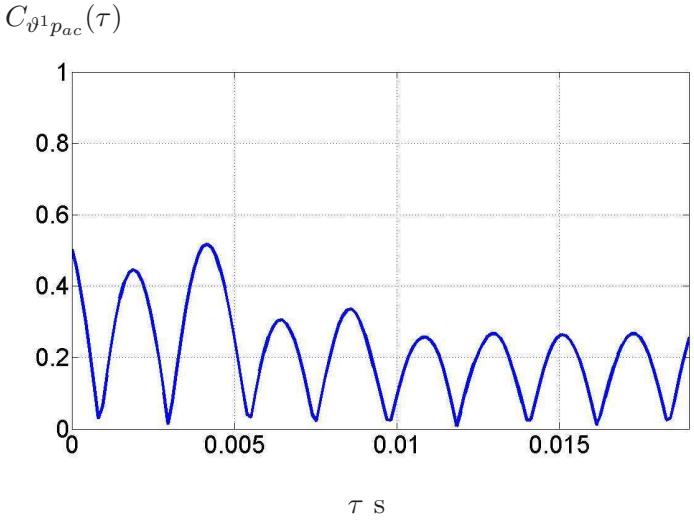

FIG. 4.17 – La valeur absolue de coefficient de corrélation entre la pression acoustique et le premier vecteur propre Snapshot en fonction de différents temps de retard, $C_{\vartheta^1 p_{ac}}(\tau)$

tion réelle fiable que dans le cas où le seuil de confiance à un niveau inférieur à l'estimation de la corrélation.

Remarquons que dans l'application d'un critère de convergence pour l'exclusion des modes étendus incertains, aucune notion de temps de retard n'a pas été considérée. En effet, on a utilisé jusqu'ici l'application standard de la formulation EPOD, issue de la formulation Snapshot définie dans le paragraphe § 4.2.2. Celle-ci définit le mode étendu par le calcul d'une corrélation temporelle pour un temps de retard fixé égal à zéro.
D'un point de vue physique, l'utilisation de temps de retard non nuls pour analyser la ressemblance de deux signaux source-récepteur est beaucoup plus pertinente pour prendre en compte le temps de retard due à la propagation de l'onde acoustique entre les deux zones.
De plus, notons que pour deux signaux harmoniques de même fréquence le coefficient de corrélation est harmonique en fonction des différents temps de retard.
Si on considère que les signaux manipulés sont d'une nature semi-périodique (le nombre limité d'harmoniques contenant la majorité de l'énergie du signal de pression acoustique est déjà mis en évidence), la valeur du coefficient de corrélation peut varier pour des temps de retard différents. Il est alors possible que certains modes éliminés pour le temps de retard égal à zéro soient parmi les modes convergés si un autre temps de retard non nul était considéré. On sort ici du cadre purement formel de la formulation EPOD pour se donner l'opportunité de sélectionner les modes POD les plus corrélés à partir des coefficients de corrélation à temps de retard non nuls :

$$C_{\vartheta^n p_{ac}}(\tau) = C_{\vartheta^n p_{ac}}(\mathbf{x}^{'}, \tau) = \frac{\overline{\vartheta^n(t) p_{ac}(\mathbf{x}', t+\tau)}}{\sqrt{\overline{\vartheta^n(t)\vartheta^n(t)}}\sqrt{\overline{p_{ac}(\mathbf{x}', t+\tau) p_{ac}(\mathbf{x}', t+\tau)}}}$$

La figure 4.17 représente la valeur absolue du coefficient de corrélation entre le premier mode et la pression acoustique en fonction de différents temps de retard. La figure 4.17 démontre bien l'exactitude de l'hypothèse précédente, le coefficient de corrélation varie avec le temps de retard. Ce tracé est d'autant plus intéressant pour le mode numéro 4 qui avait été identifié comme un mode non convergé (figure 4.18). On observe sur la figure 4.18 que ce mode représente une valeur de corrélation ($C_{\vartheta^4 p_{ac}}(0.0006) = 0.21$) supérieure au seuil de $\epsilon = 0.14$ pour un temps de retard de $\tau = 0.6$ ms. Il pourrait donc être considéré comme un mode convergé. De cette manière,

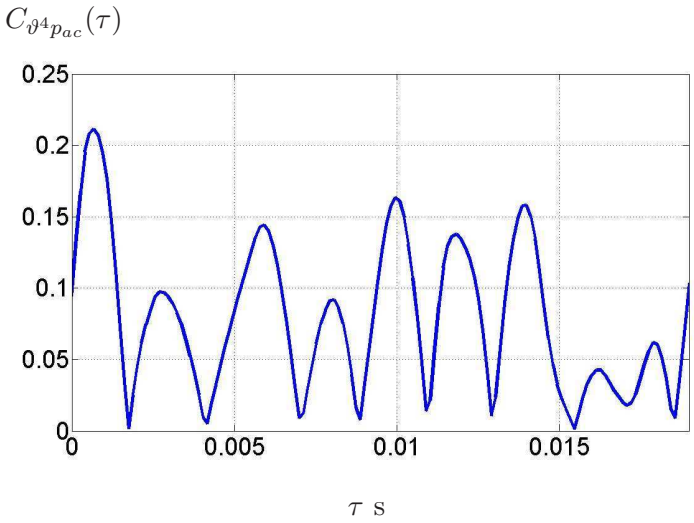

FIG. 4.18 – La valeur absolue de coefficient de corrélation entre la pression acoustique et le quatrième vecteur propre Snapshot en fonction de différents temps de retard, $C_{\vartheta^4 p_{ac}}(\tau)$

pour la vérification de la convergence des modes étendus, il semble donc nécessaire de contrôler l'ensemble des temps de retard. Dans ce cas une attention supplémentaire doit être accordée à la valeur du seuil de convergence. En effet, la prise en compte d'un temps retard conduit à réduire le nombre d'échantillon temporel disponible. Par exemple pour la prise en compte $\tau = 0.0222$ s les 165 premiers échantillons du signal retardé doivent être éliminés, ce qui ne laisse que 278 échantillons temporels utilisables. Il est alors nécessaire de définir la nouvelle valeur du seuil pour le nombre d'échantillons disponibles. La figure 4.19 montre l'évaluation de la valeur absolue du coefficient de corrélation entre deux signaux aléatoires avec 278 échantillons. La comparaison des

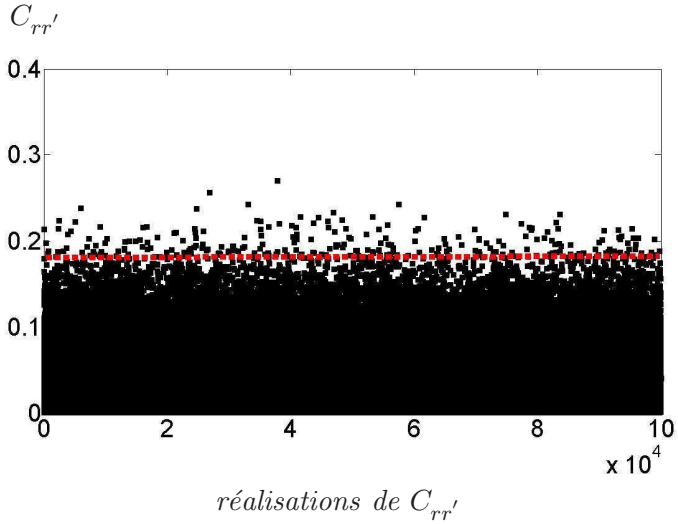

FIG. 4.19 – La valeur absolue de coefficient de corrélation entre deux signaux complètement aléatoires de taille 278. 10×10^5 réalisations sont effectuées

figure 4.15 et 4.19 confirme que le seuil de corrélation passe de 0.14 à 0.19 pour un changement de nombre d'échantillons de 443 à 278. Le résultat de l'exercice précédent impose que le seuil de convergence soit vérifié pour chaque temps de retard. La valeur de seuil de 99.6% de certitude pour 100000 réalisations de calcul du coefficient de corrélation en fonction de nombre d'échantillons est

représenté sur la figure 4.20. En prenant en compte l'observation précédente, un mode étendu peut

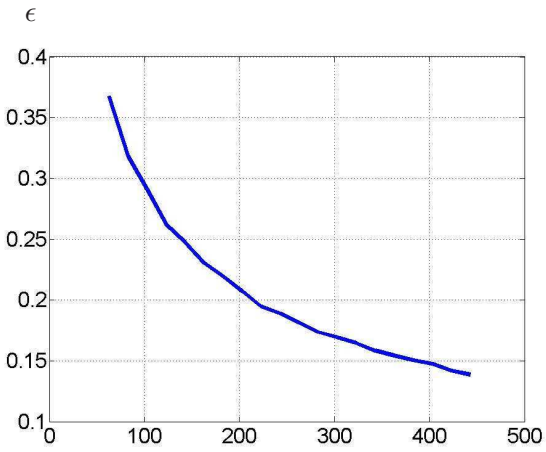

FIG. 4.20 – Seuil de 99.6% pour 100000 réalisations du calcul du coefficient de corrélation en fonction du nombre d'échantillons

être considéré statistiquement fiable s'il présente une valeur de corrélation pour certains temps de retard supérieur au seuil de convergence pour les temps de retard associés. On doit alors superposer les figure 4.18 et 4.20 pour déterminer la convergence ou non d'un mode étendu. Cela est représenté pour le mode 4 sur la figure 4.21. En répétant l'exercice précédent pour l'ensemble des modes et en soulignant que le coefficient de corrélation est quasi-périodique en fonction de temps de retard trois catégories de modes peuvent être distingués :

1. Les modes étendus pour lesquels le coefficient de corrélation dépasse à chaque période le seuil de convergence. C'est le cas des 3 premiers modes représentés sur la figure 4.22 (a). Ces modes sont certainement convergés et sont représentatifs d'une corrélation physique entre le champ de vitesse et le champ de pression acoustique.
2. Les modes étendus pour lesquels le coefficient de corrélation ne dépasse pas du tout le seuil de convergence (figure 4.22 (b)). Un grand nombre des modes rentre dans cette catégorie. Ces modes ne peuvent pas être pris en compte avec certitude pour la reconstruction du signal de pression.
3. Les modes étendus pour lesquels le coefficient de corrélation ne dépasse le seuil de convergence que pour certains temps de retard. Plusieurs modes entrent dans cette catégorie. Certains d'entre eux sont représentés sur la figure 4.22 (c). La détermination de la fiabilité statistique de ces modes est plus délicate. Leur prise en compte pour la détermination de la partie corrélée entre la pression acoustique et le champ de vitesse pourrait en grande partie dépendre du choix de l'utilisateur. Nous proposons de ne pas classer ces modes parmi les modes convergés. Comme nous le verrons par la suite, ceci concerne des modes POD d'ordre élevé qui ne sont pas eux-mêmes statistiquement convergés (voir la partie 4.2.5).

En résumé la détermination des modes étendus statistiquement fiables dans le domaine temporel via la démarche proposée nécessite certaines précautions et dépend également du degré de prudence de l'utilisateur. La vérification de cette fiabilité statistique via une autre approche pourrait mettre plus de lumière sur la pertinence des choix faits au cours de la démarche précédente. Nous proposons alors de vérifier cette fiabilité dans le domaine fréquentiel.

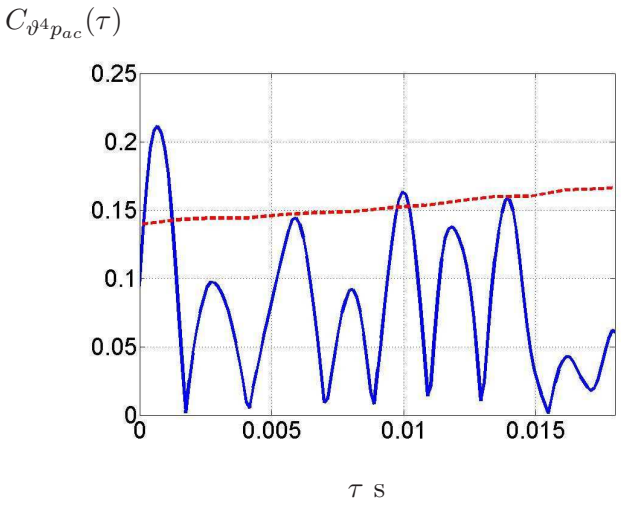

FIG. 4.21 – Valeur absolue de coefficient de corrélation entre la pression acoustique et le quatrième vecteur propre Snapshot en fonction de différents temps de retard (—), seuil de 99.6% pour 100000 réalisations de coefficient de corrélation en fonction de nombre d'échantillons (· · ·)

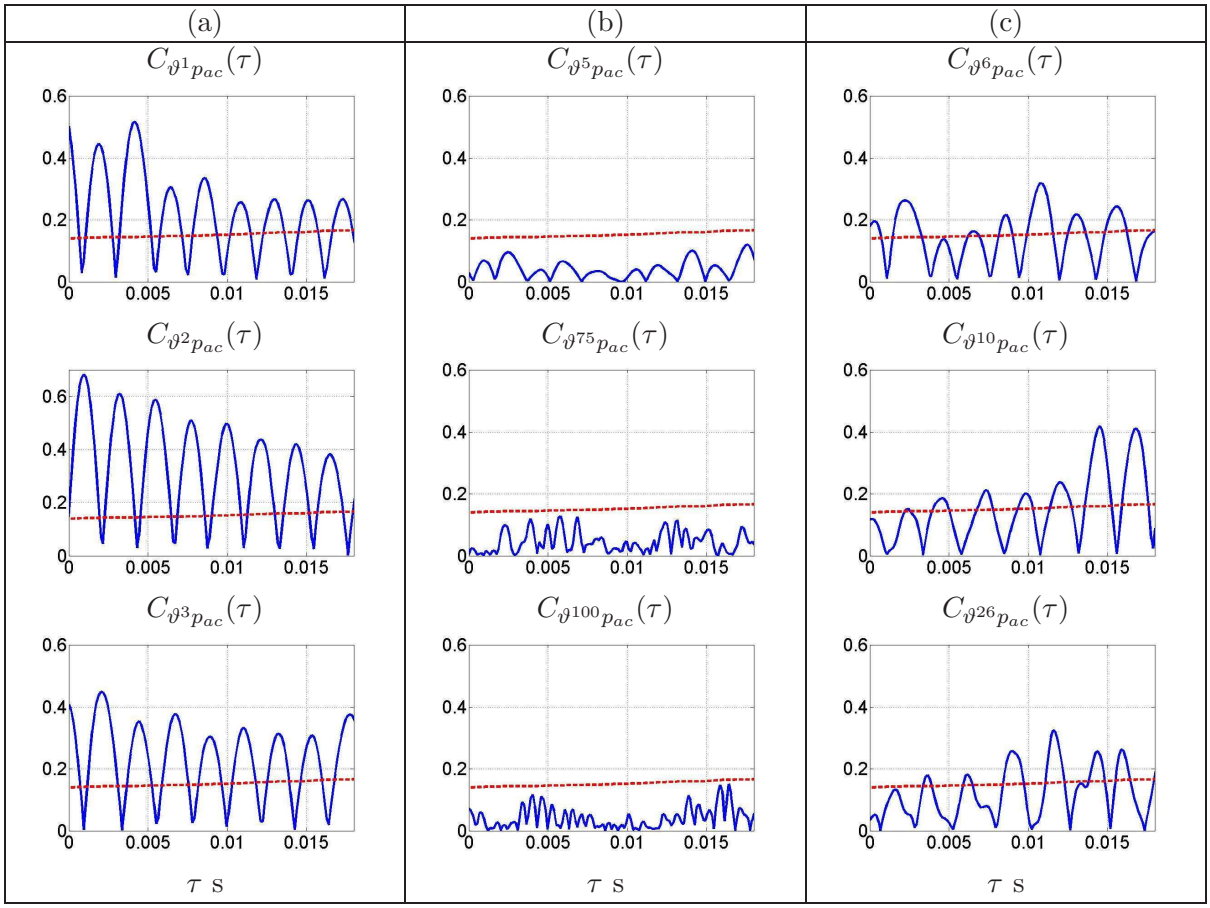

FIG. 4.22 – Trois catégories de modes étendus peuvent être distingués, les modes pour lesquels le coefficient de corrélation : (a) satisfait le critère de convergence, (b) ne satisfait jamais le critère de convergence et (c) satisfait le critère de convergence pour certains temps de retard

4.2.4.2 Critère de convergence basé sur la fonction de cohérence

Les limitations de l'EPOD dues aux domaines finis a conduit à la vérification de la convergence de l'opérateur de corrélation entre les vecteurs propres Snapshot et la pression acoustique. Cette investigation rencontre certaines complexités, dans le domaine temporel, avec le problème des temps de retard, qui physiquement permettent de prendre en compte le temps de propagation de l'information entre la zone source et le récepteur. Une autre possibilité pour s'affranchir du temps de retard pourrait être le passage en domaine fréquentiel : en passant par le biais du calcul de la fonction de cohérence, l'information de décalage temporel est directement incluse dans la phase des densités interspectrales de puissance entre les signaux. Le domaine fréquentiel est d'autant plus intéressant qu'il peut permettre la recherche directe des modes qui sont impliqués dans la génération du bruit à des fréquences qui nous intéressent (dans le cas présent les deux pics à 243 et 930 Hz).

Dans cette partie nous proposons de vérifier la fiabilité statistique entre les vecteurs propres temporels et la pression acoustique via la fonction de cohérence. Pour ce faire, on sélectionne les modes étendus les plus cohérents avec le signal acoustique en passant dans le domaine fréquentiel. Ce passage en fréquence est fait a posteriori : la décomposition POD reste faite dans le domaine temporel (formulation Snapshot dans notre cas). On rappelle que la fonction de cohérence est définie par

$$\tilde{\gamma}^2_{up}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \omega) = \frac{|E\left[\tilde{u}(\mathbf{x}_i, \omega)\tilde{p}^*(\mathbf{x}_j, \omega)\right]|^2}{E\left[\tilde{u}(\mathbf{x}_i, \omega)\tilde{u}^*(\mathbf{x}_i, \omega)\right] E\left[\tilde{p}(\mathbf{x}_j, \omega)\tilde{p}^*(\mathbf{x}_j, \omega)\right]}.$$

La démarche proposée ressemble à celle suivie pour le coefficient de corrélation et sa première étape consiste à déterminer le seuil de confiance pour deux signaux complètement aléatoires avec les mêmes caractéristiques (nombre d'échantillons et fréquence d'échantillonnage) que le signal de pression et les vecteurs propres temporels. Ces deux signaux étant complètement aléatoires, ils doivent présenter une cohérence nulle. Mais en raison du nombre limité d'échantillons, cette opération statistique ne converge que jusqu'à un certain seuil.

En considérant la définition de fonction de cohérence, le seuil doit normalement être défini pour chaque fréquence de manière indépendante et un seuil unique ne doit pas être considéré pour toutes les fréquences. Mais, en choisissant les signaux de départ comme complètement aléatoires (type bruit blanc) leur énergie sera répartie de manière uniforme sur toutes les fréquences. Dans cette situation les signaux n'ont aucune raison de se comporter différemment pour une fréquence particulière et donc un seuil unique pour toutes les fréquences sera obtenu.

Comme, il a été expliqué dans le premier chapitre, dans le domaine temporel l'opérateur de moyenne (espérance mathématique) peut être remplacé par une moyenne temporelle en faisant l'hypothèse d'ergodicité. Cette hypothèse permet également de considérer la transformée de Fourier d'un bloc temporel de signal comme une réalisation dans le domaine fréquentiel. Pour les signaux de taille finie le nombre limité d'échantillons et, par conséquent, le nombre limité de blocs (ou réalisations du signal dans le domaine des fréquences) entraîne une incertitude sur le niveau de cohérence.

Pour mieux aborder ce problème, la fonction de cohérence entre deux signaux aléatoires avec les mêmes caractéristiques que les signaux issus de la simulation ($N_T = 443$ et $F_s = 7431.6$ Hz) est évaluée et représentée sur la figure 4.23 pour différents nombres de blocs. Pour ces calculs, le pourcentage de recouvrement entre les blocs est de 70% et les signaux sont pondérés par une fenêtre de Hann. La figure 4.23 montre que l'erreur de l'estimation de $\tilde{\gamma}^2$ est très fortement influencée par le choix du nombre de blocs. Plus le nombre de blocs considérés est élevé plus l'erreur de l'estimation est faible et le seuil de convergence est bas. Mais l'augmentation de nombre de blocs signifie la diminution de la durée de chaque bloc (due au nombre limité d'échantillons) et de la résolution fréquentielle. Il faut alors trouver un compromis entre la convergence de l'estimation et la résolution fréquentielle. Pour trouver ce compromis on s'appuie sur le contenu

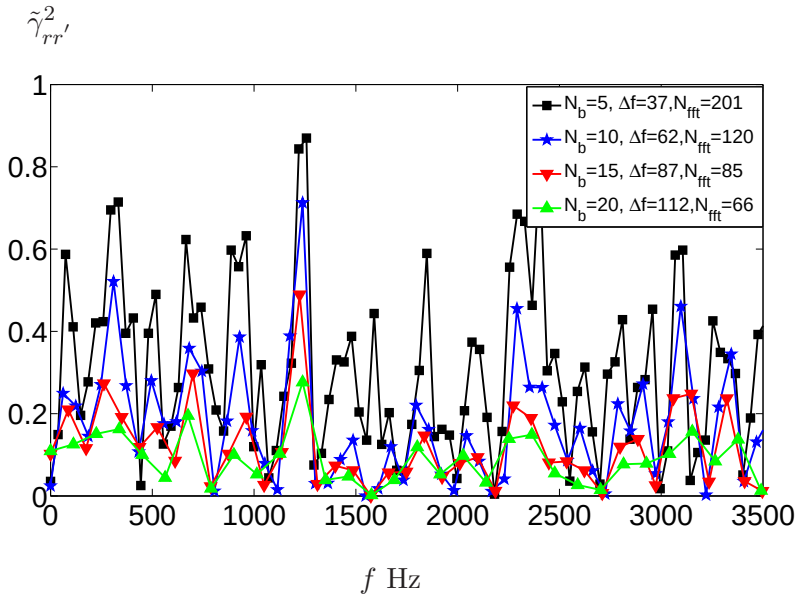

FIG. 4.23 – Evaluation de la fonction de cohérence entre deux signaux aléatoires de $N_T = 443$ échantillons et de fréquence d'échantillonnage $F_s = 7431.6$ Hz en utilisant différents nombres de blocs FFT

fréquentiel du signal de pression et on choisit la résolution fréquentielle minimale qui permet de reconstruire les deux pics du spectre. Après analyse, il s'avère qu'un découpage en $N_b = 18$ blocs avec un taux de recouvrement entre les blocs de 70% conduisant à des blocs de taille $N_{fft} = 72$ permet d'obtenir une forme suffisamment convergée et résolue ($\Delta f = 103.21$ Hz) de spectre de pression acoustique.

Après avoir choisi les paramètres convenables pour le calcul de fonction de cohérence ($N_T = 443$, $F_s = 7431.6$ Hz, $N_{fft} = 72$ et taux de recouvrement de 70%), de la même manière que pour le coefficient de corrélation, on effectue plusieurs réalisations des signaux aléatoires. La figure 4.24 montre l'évaluation de la fonction de cohérence pour 10^4 réalisations des signaux aléatoires. 99.93 % des réalisations possèdent une valeur de cohérence inférieure au seuil de $\epsilon = 0.5$. En se basant sur le seuil $\epsilon = 0.5$, seuls les modes étendus pour lesquels $\tilde{\gamma}^2_{\vartheta^n p_{ac}}(\omega)$ est supérieur à 0.5 peuvent être considérés comme convergés pour la fréquence étudiée.

La figure 4.25 montre la cohérence entre les 6 premiers modes et la pression acoustique en fonction de la fréquence. Contrairement aux résultats obtenus pour le coefficient de corrélation, on distingue 2 catégories de modes :

1. Les trois premiers modes représentent une cohérence supérieure au seuil de convergence pour les fréquences allant de 150 Hz jusqu'à 350 Hz. Cette plage de fréquence correspond au premier pic dans le spectre de la pression acoustique. Ces trois modes peuvent participer à la reconstruction de la partie corrélée du champ de vitesse avec la pression acoustique. En revanche le signal reconstruit ne doit être exploité que pour la plage de fréquence convergée (150−350 Hz).
2. Le reste des modes (les modes 4−443) possède une cohérence inférieure au seuil de convergence pour toutes les fréquences. Ces modes ne sont pas statistiquement fiables et ne doivent pas être employés dans le processus d'EPOD. Comme pour le cas de la corrélation temporelle, cette non convergence peut être liée à une non corrélation physique ou à un manque d'échantillons.

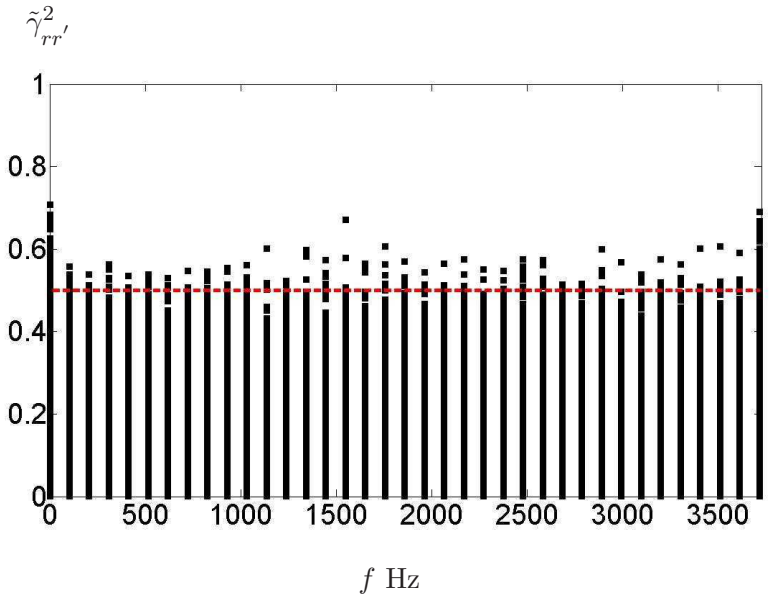

FIG. 4.24 – Fonction de cohérence évaluée entre deux signaux aléatoires (r et $r^{'}$) avec N_T = 443 échantillons et F_s = 7431.6 Hz (18 blocs FFT de longueur 72 échantillons avec 70% de recouvrement entre les blocs). 10^4 couples de signaux sont considérés.

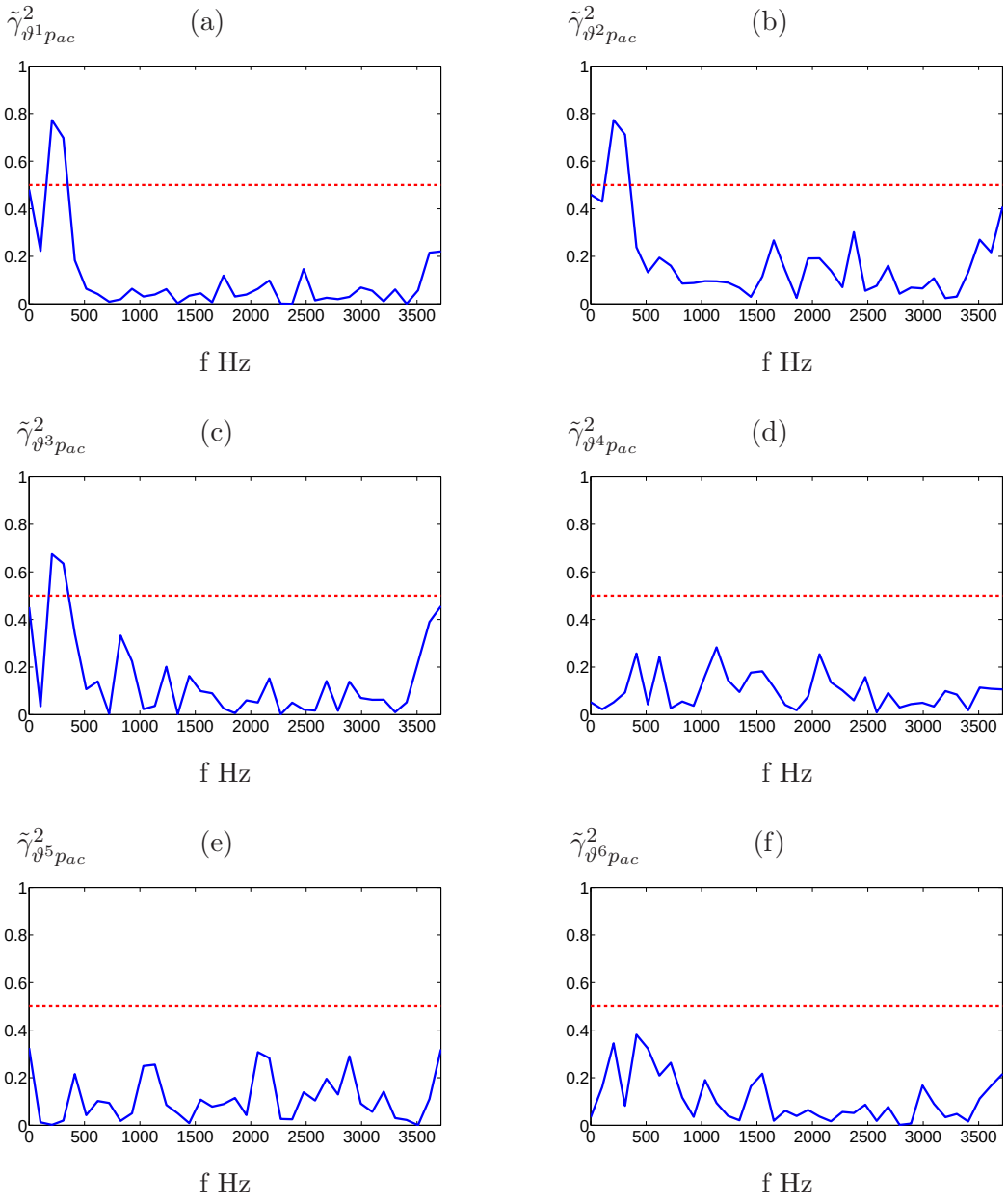

FIG. 4.25 – Fonction de cohérence évaluée entre le signal de pression acoustique et les vecteurs propres Snapshot numéro : (a) - (f) = 1 - 6

4.2.4.3 Reconstruction de la partie corrélée de champ de vitesse avec la pression acoustique

L'analyse de convergence de l'opérateur de corrélation (utilisé classiquement pour le calcul des modes étendus) dans le domaine temporel pour le temps de retard zéro a permis d'éliminer des modes statistiquement non fiables. L'utilisation des modes convergés dans le processus d'EPOD permet de reconstruire la partie certainement corrélée de la pression acoustique avec le champ de vitesse. La figure 4.26 montre le spectre de signal de pression acoustique et celui de la partie corrélée avec le champ de vitesse.

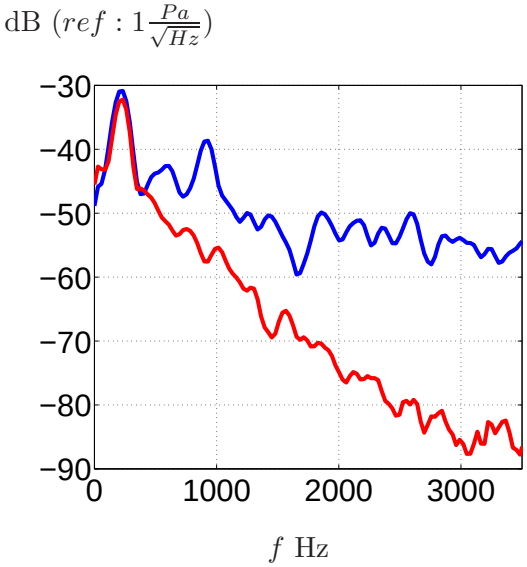

FIG. 4.26 – Densité Spectrale de Puissance de la pression acoustique : (——) signal original (——) reconstruite par les modes étendus satisfaisant les critères de convergence à temps de retard égal à zéro (les modes numéro : 1, 2, 3, 6, 7, 25, 31 et 56)

La pression acoustique est corrélée avec le champ de vitesse dans la *zone source* essentiellement en basses fréquences. On insiste encore sur le fait qu'on n'a peut-être pas reconstruit toute la partie corrélée de la pression acoustique avec le champ de vitesse à cause du nombre insuffisant d'échantillons temporels.

Dans un deuxième temps, nous avons dans le paragraphe précédent extrait les modes convergés de manière plus fine puisque le temps de retard (ou le déphasage dans l'espace des fréquences) a été pris en compte. Les modes ainsi extraits peuvent être considérés comme convergés pour tous les temps de retard considérés. Une fois sélectionnés, ces modes convergés peuvent être utilisés pour reconstruire un signal de pression acoustique à partir des modes étendus, mais que l'on peut calculer, cette fois, en injectant un temps de retard. Dans la définition de base d'EPOD [19] la prise en compte du temps de retard n'a pas été proposée. En considérant le phénomène de propagation acoustique, il est même fortement probable que la corrélation maximale entre les phénomènes corrélés ne soit pas obtenue pour le temps de retard égale à zéro. Le temps de propagation des ondes sonores depuis la zone source jusqu'au point d'observation pourrait être un bon candidat pour maximiser la corrélation entre les deux phénomènes étudiés. Dans le reconstruction d'un signal de pression partiele à partir de modes étendus "décalés", le même temps de retard est bien sûr utilisé pour tous les modes participant à la reconstruction. On doit donc bien distinguer le processus de sélection des modes convergés (paragraphe précédent) et le calcul d'un signal de pression reconstruit. La sélection des modes convergés, en temporel, est basée sur un balayage de tous les temps de retard possibles pour chaque mode de manière indépendante. Tandis que le

processus de reconstruction va exploiter des modes étendus décalés de manière synchrone.

De cette manière le mode étendu retardé numéro m est défini par :

$$\psi^m(\mathbf{x}^{'},\tau) = \overline{\vartheta^m(t)p_{ac}(\mathbf{x}^{'},t+\tau)}. \tag{4.4}$$

Il faut noter que le calcul des vecteurs propres Snapshot se fait de la même manière que précédemment et aucun temps de retard n'est considéré dans la décomposition POD du champ de vitesse dans la zone source. La partie corrélée de cette pression retardée avec le champ de vitesse s'obtient par

$$p_{ac}^{(C)}(\mathbf{x}^{'},t+\tau) = \sum_{n=1}^{N_{conv}} \vartheta^n(t)\psi^n(\mathbf{x}^{'},\tau).$$

Ayant intégré le temps de retard on s'appuie sur les résultats des deux analyses précédentes (l'analyse temporelle avec le temps de retard et l'analyse fréquentielle de convergence des modes étendus) et on ne considère donc que les trois premiers modes pour la reconstruction de la partie corrélée ($N_{conv} = 3$).

Naturellement l'étape suivante est de connaître le temps de retard approprié qui maximisera la corrélation entre le champ de vitesse et la pression acoustique. Pour cela on propose de calculer la corrélation entre le signal de pression acoustique total retardé et sa partie "corrélée" reconstruite à partir des modes EPOD décalés :

$$C_{p_{ac}p_{ac}^{(C)}}(\tau) = \frac{\overline{p_{ac}(\mathbf{x}^{'},t+\tau)\ p_{ac}^{(C)}(\mathbf{x}^{'},t+\tau)}}{\left(\overline{p_{ac}(\mathbf{x}^{'},t+\tau)p_{ac}(\mathbf{x}^{'},t+\tau)}\right)\ \left(\overline{p_{ac}^{(C)}(\mathbf{x}^{'},t+\tau)p_{ac}^{(C)}(\mathbf{x}^{'},t+\tau)}\right)}$$

Plus cette corrélation est élevée, plus la part de la partie corrélée avec le champ de vitesse de signal de pression est importante. Pour trouver le meilleur temps de retard, la valeur absolue de coefficient de corrélation entre la pression acoustique retardée et sa partie corrélée avec le champ de vitesse est tracée sur la figure 4.27 en fonction de différents temps de retard.

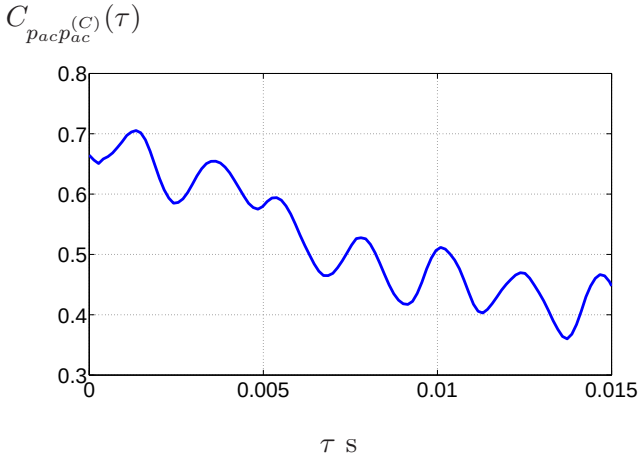

FIG. 4.27 – Valeur absolue du coefficient de corrélation évaluée entre le signal de pression acoustique et sa partie reconstruite avec les trois premiers modes étendus en fonction de différents temps de retard

Le temps de retard correspondant au premier pic de cette courbe correspond au temps de retard pour lequel la pression est la plus corrélée avec le champ de vitesse. Ce temps de retard $\tau = 0.0016$ s correspond au temps mis par les ondes acoustique pour effectuer la distance $r = c_s \times \tau = 54$ cm (avec c_s=343.25 m/s la vitesse de propagation des ondes sonore utilisée dans

la simulation). Cette distance correspond approximativement à celle entre le centre de la zone source et le point de mesure de la pression acoustique $l = 41$ cm.

Il faut noter que l est une valeur approximative et sa précision peut être discutable sur deux points. D'abord, ne connaissant pas la trajectoire empruntée par les ondes acoustique, un enchaînement de lignes droites reliant le centre de la zone source au point de mesure a été choisi. Ce choix peut ne pas correspondre à la réalité. Ensuite le choix du centre de la zone source est complètement arbitraire et n'importe quel autre point pourrait être choisi à sa place. En effet, la proximité des deux valeurs l et r est une vérification simple de l'interprétation de cause à effet entre le champ de vitesse et la pression acoustique mais cette estimation de distance reste trop grossière pour une application de localisation.

La figure 4.28 représente le spectre de la pression acoustique retardée de $\tau = 0.0016$ s, $p_{ac}(\mathbf{x}', t+\tau)$ (nous restons bien conscient que la DSP est une propriété du signal et (si convergé) ne varie pas pour des différents temps de retard ou de la durée de signal) et celui de sa partie corrélée avec le champ de vitesse $p_{ac}^{(C)}(\mathbf{x}', t+\tau)$. Le résultat montre que la pression acoustique est certainement corrélée avec le champ de vitesse en basses fréquences.

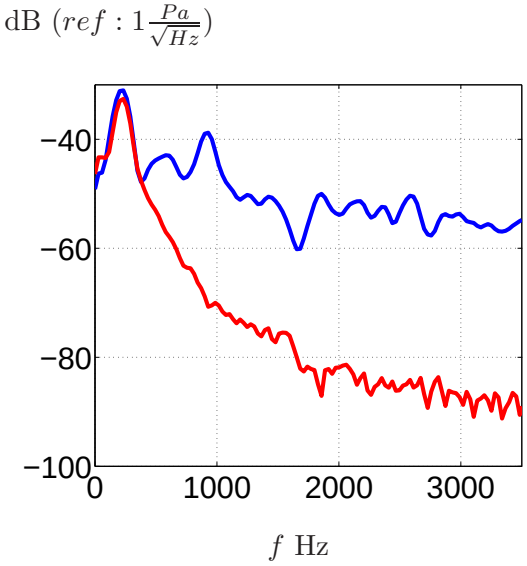

FIG. 4.28 – Densité Spectrale de Puissance de signal de pression acoustique retardé de $\tau = 0.0016$: (——) signal original (——) reconstruit à l'aide des trois modes étendus retardés

Nous rappelons que la mise en œuvre de l'EPOD faite dans cette partie à partir de la décomposition POD du champ de vitesse n'a pour objectif que l'illustration des outils proposés. Dans la partie 4.3, les variables permettant de représenter de manière plus robuste le champ source aéroacoustique sont discutées et les techniques EPOD présentées dans cette partie (et dans le paragraphe 4.2.5 suivant) sont appliquées dans le paragraphe 4.4 sur ce même cas de l'aérateur avec ces nouvelles variables sources.

4.2.5 Convergence des modes POD

Dans la partie précédente, la prise en compte du seuil de convergence des modes étendus a permis d'identifier les vecteurs propres POD dans la région source qui présentent une corrélation physique avec le champ de pression acoustique. Dans l'ordre logique, l'étape suivante consiste à étudier ce que ces vecteurs propres représentent (en termes de la dynamique de l'écoulement) dans la région source. La réponse à cette question étant a priori simple nécessite certaines précautions importantes. Cette partie propose d'étudier la question de la fiabilité statistique des vecteurs et valeurs propres POD.

Structures cohérentes, modes POD, convergence

Dans un écoulement turbulent le signal de vitesse turbulente est une variable aléatoire. Malgré ce caractère aléatoire, dans la plupart des écoulements turbulents les signaux temporels de vitesse aux différents points d'espace possèdent une corrélation spatiale entre eux. L'existence de cette corrélation se manifeste sous la forme de mouvements plus ou moins organisés appelés structures cohérentes. En effet la plupart des analyses en turbulence, comme l'analyse fréquentielle par exemple, sont basées sur l'existence d'un certain "ordre" dans le désordre turbulent. Parmi les outils statistiques utilisés, la POD vise à caractériser les structures les plus énergétiques et donc, souvent, les plus cohérentes. En effet, la plupart du temps les grosses structures cohérentes sont également les plus énergétiques (c'est-à-dire que leur trace lors de leur passage en un point donné marque les variations d'amplitude les plus élevées). Ainsi le tenseur de corrélation (le noyau de l'équation de Fredholm (équation (3.33)) est dominé par ces structures et les premiers vecteurs propres les plus énergétiques décrivent les structures cohérentes de l'écoulement. De la même manière les structures plus petites contenant des niveaux d'énergie plus faibles correspondent aux vecteurs propres moins énergétiques. Mais pour qu'un vecteur propre soit représentatif d'un mode physique d'écoulement (autrement dit un modèle sur lequel l'écoulement dans la zone considérée puisse être projeté à n'importe quel instant) il doit être issu d'un tenseur de corrélation statistiquement convergé.

Analyse de convergence

La région source représentée sur la figure 4.9 qui contient $N_S = 525$ points de maillage et $N_T = 443$ échantillons temporels est considérée dans la suite comme la base de données de référence. L'approche choisie dans cette partie pour évaluer la convergence des modes POD est basée sur la définition empirique et conventionnelle de l'état de convergence d'un opérateur statistique : l'estimation d'une grandeur statistique peut être considérée comme convergée si une augmentation du nombre de réalisations ne change pas la valeur obtenue.

Dans le cas présent le nombre d'échantillons temporels N_T et la résolution spatiale N_S ne peuvent pas être augmentés pour appliquer de manière directe la procédure de test de convergence classique. L'étude de convergence est donc effectuée avec une procédure inverse basée sur le même principe général : un vecteur propre spatial ou/et temporel calculé par la base de données de référence sera considéré comme convergé s'il n'est pas modifié quand le nombre d'échantillons temporels et/ou points spatiaux est réduit. Cette démarche inversée fournie les vecteurs propres qui sont effectivement convergés pour la base de donnée de référence. Bien entendu, il est probable que d'autres vecteurs propres issus de la base de données de référence soient convergés mais cela ne peut pas être vérifié avec suffisamment de confiance. Cette procédure est donc une "approche prudente" pour lister les vecteurs propres convergés issus de la base de données de référence.

Dans la suite l'effet de la discrétisation spatiale et la durée des signaux sur la convergence des modes POD sont séparément étudiés. Nous allons donc :

1. Construire différents cas tests indicés par p, en dégradant l'information spatiale et en gardant la durée temporelle maximale ($N_T = 443$). Pour ce faire l'espacement entre les points spatiaux (tout en couvrant le même domaine spatial S) est augmenté : $d_{x_p} \geq d_x$ et/ou $d_{y_p} \geq d_y$ conduisant à $N_{S_p} \leq N_S$.
2. Construire différents cas tests numérotés avec l'indice q, en diminuant le nombre d'échantillons temporels tout en gardant la résolution spatiale maximale et la même fréquence d'échantillonnage. Ce qui conduit à $N_{T_q} \leq N_T$.

Les vecteurs propres issus de chaque cas tests sont comparés entre eux en termes de contenu énergétique et de structure spatiale.

4.2.5.1 Influence de la résolution spatiale sur la convergence des vecteurs propres POD

Dans cette partie, la durée temporelle des signaux de vitesse est maintenue constante ($N_T = 443$). Les cas tests investigués sont listés dans le Tab. 4.1.

p numéro de cas test	N_{S_p}	$i \times dy$	$j \times dx$	N_t
1	275	1	2	443
2	273	2	1	443
3	189	3	1	443
4	143	2	2	443
ref.	525	1	1	443

TAB. 4.1 – Détails des cas tests sélectionnés pour étudier l'effet de résolution spatiale sur le calcul des vecteurs propres POD.

La figure 4.29 montre un instantané de la composante selon x de vitesse pour chaque base de donnée. On observe que les structures de plus petite taille ne peuvent être correctement restituées lorsqu'un maillage grossier est considéré.

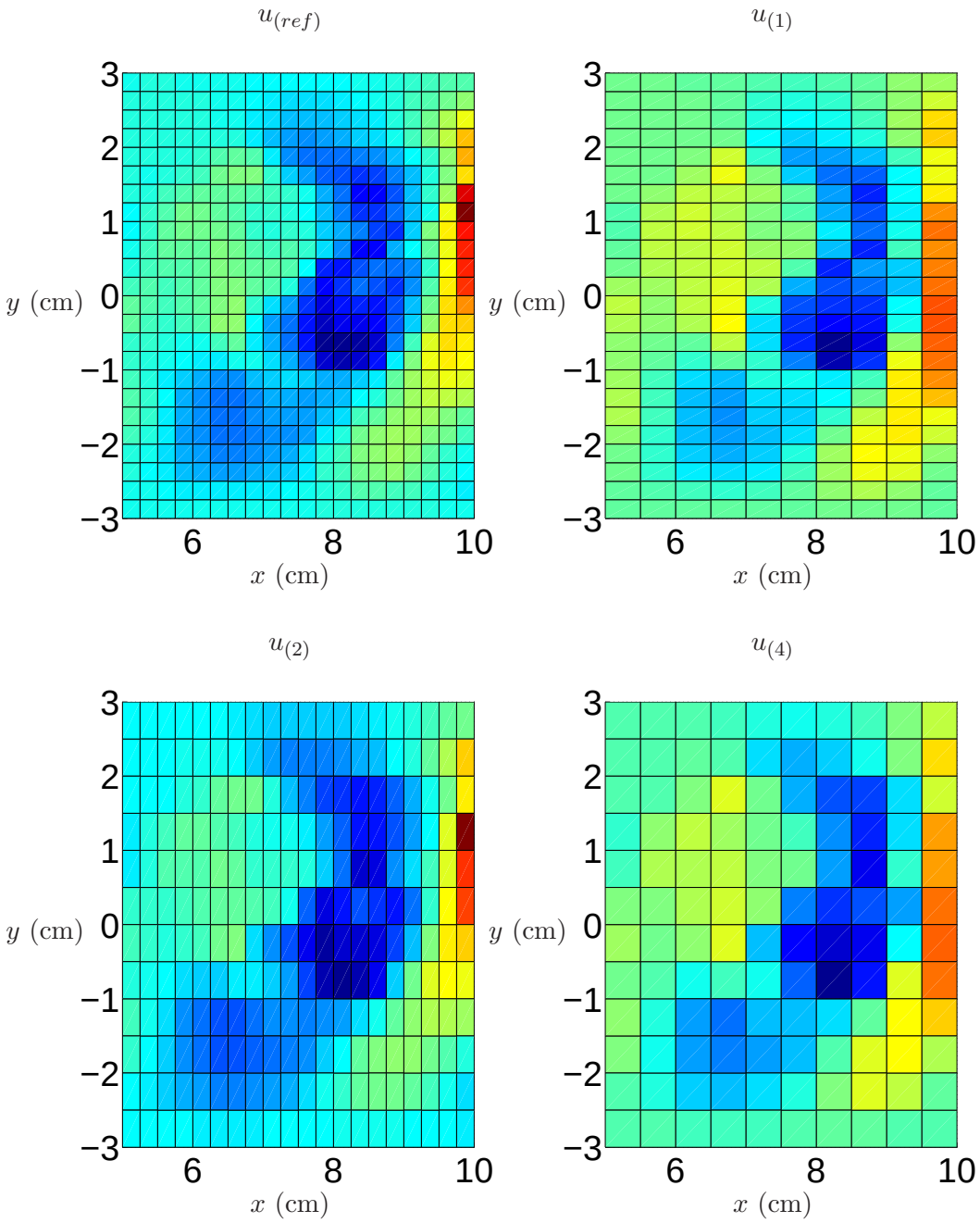

FIG. 4.29 – La composante selon x de vitesse ($u(\mathbf{x}, t_1)$) représentée pour différentes résolutions spatiales renseignées dans le Tab. 4.1

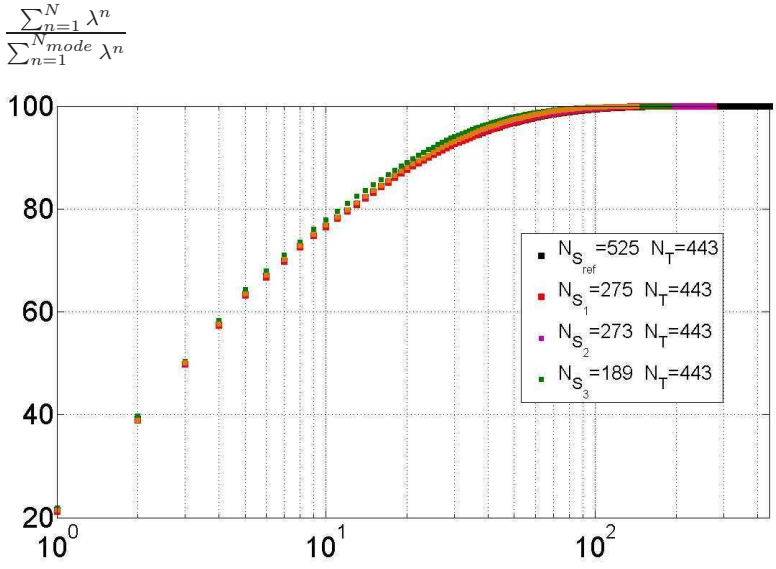

FIG. 4.30 – Somme cumulée des valeurs propres

Pour chaque cas test p la formulation classique de POD est considérée :

$$u_{(p)}(\mathbf{x}_{ij}, t_k) = \sum_{n=1}^{N_{mod(p)}} a^n_{(p)}(t_k)\phi^n_{1(p)}(\mathbf{x}_{ij}), \tag{4.5}$$

où $N_{mod(p)}$ est égal à $min\left\{N_{S_p}, N_T\right\}$. On a donc $N_{mod(p)} = N_{S_p}$ pour tous les cas tests sauf pour la base de données de référence. La contribution du premier vecteur propre à l'énergie totale du champ est de 21.4%. La figure 4.30 représente la somme cumulée des valeurs propres associées à chaque cas test.
La distribution énergétique des modes est tout d'abord étudiée. On se concentre sur le nombre de modes $N^{\alpha\%}_{(p)}$, qui représente $\alpha\%$ de l'énergie du domaine. Chaque valeur de $N^{\alpha\%}_{(p)}$ est normalisée par le nombre de vecteurs propres issus de la base de données de référence nécessaire pour représenter $\alpha\%$ de l'énergie noté $N^{\alpha\%}_{(ref)}$. Par exemple pour la base de données de référence $N^{95\%}_{(ref)} = 38$, c'est-à-dire que les 38 premiers vecteurs propres contiennent $\alpha = 95\%$ de l'énergie tandis que pour les cas tests 1 et 2 il faut respectivement 36 et 33 vecteurs propres pour représenter $\alpha = 95\%$ de l'énergie. Sur l'image de gauche de la figure 4.31 l'évolution de $N^{95\%}_{(p)}$ en fonction de $N_{S_{(p)}}$ est représentée. Sur l'image de droite, l'évolution $N^{\alpha\%}_{(p)}/N^{\alpha\%}_{(ref)}$ en fonction de $N_{S_{(p)}}$ est tracée pour plusieurs valeurs de α. Quelque soit le cas test considéré, jusqu'à $\alpha = 60\%$, le même nombre de vecteurs propres est nécessaire pour récupérer $\alpha\%$ de l'énergie. Quand $\alpha > 60\%$ le nombre de modes nécessaires pour représenter la même quantité d'énergie dans le domaine varie en fonction de la résolution spatiale considérée. Sachant que $N^{60\%}_{ref} = 5$ ce résultat montre que seuls les cinq premiers vecteurs propres peuvent être considérés comme convergés en se basant sur l'énergie contenue dans les valeurs propres.

Pour une étude plus approfondie de ce résultat, une analyse de l'allure spatiale des vecteurs propres est maintenant effectuée. Tout d'abord la composante selon x des vecteurs propres spatiaux est considérée. La figure 4.32 montre le premier mode issu des différents cas tests. La figure 4.33 représente les mêmes modes (que ceux de la figure 4.32) interpolés sur le maillage de la base de données de référence ($N_S = 525$). Une interpolation spline cubique est utilisée pour effectuer ce calcul. Les figures 4.35 et 4.34 montrent respectivement les modes 2 et 20 calculés

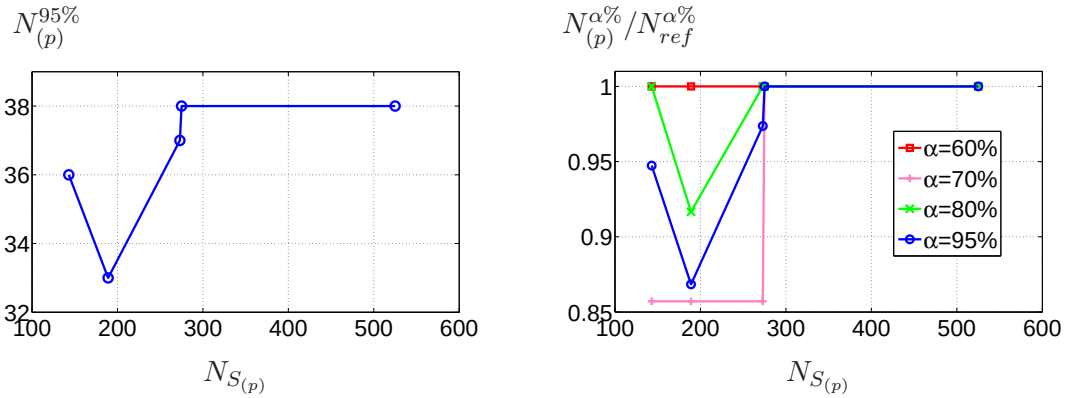

FIG. 4.31 – A gauche : le nombre de modes nécessaire pour représenter 95% de l'énergie de champ pour différents résolution spatiale. A droit : le nombre de modes nécessaire pour représenter $\alpha\%$ pourcent d'énergie de domaine normalisé par celui nécessaire pour représenter $\alpha\%$ pourcent d'énergie du domaine de référence

pour différents cas tests. Bien que la résolution spatiale soit plus faible (cas test numéro 4 par exemple) les deux premiers modes d'écoulement sont bien représentés par les deux premiers vecteur propres. Inversement, l'allure du $20^{ème}$ vecteur propre varie en fonction du cas test considéré.

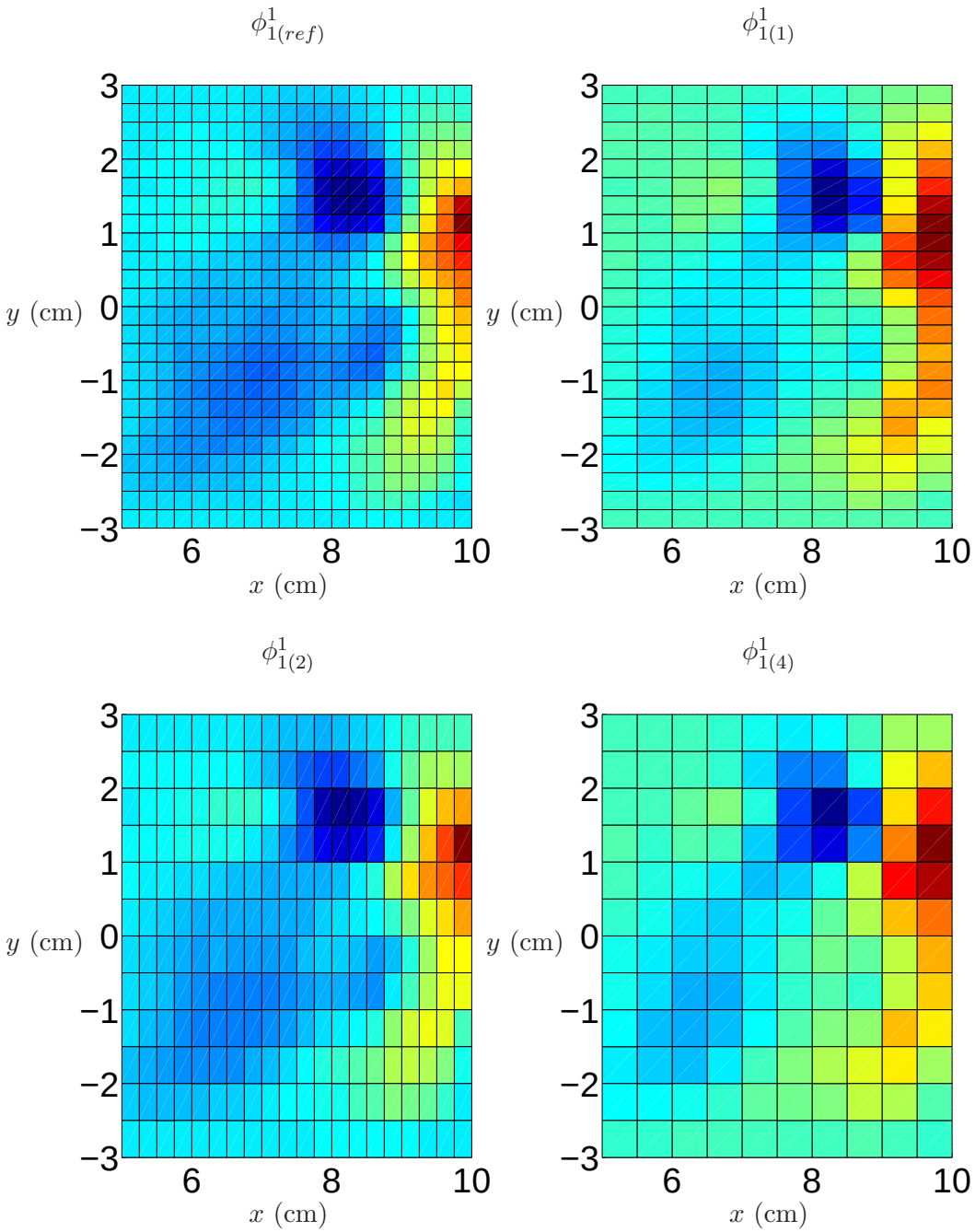

FIG. 4.32 – La composante selon x du premier mode issu d'un cas test donné, représenté sur le maillage correspondant

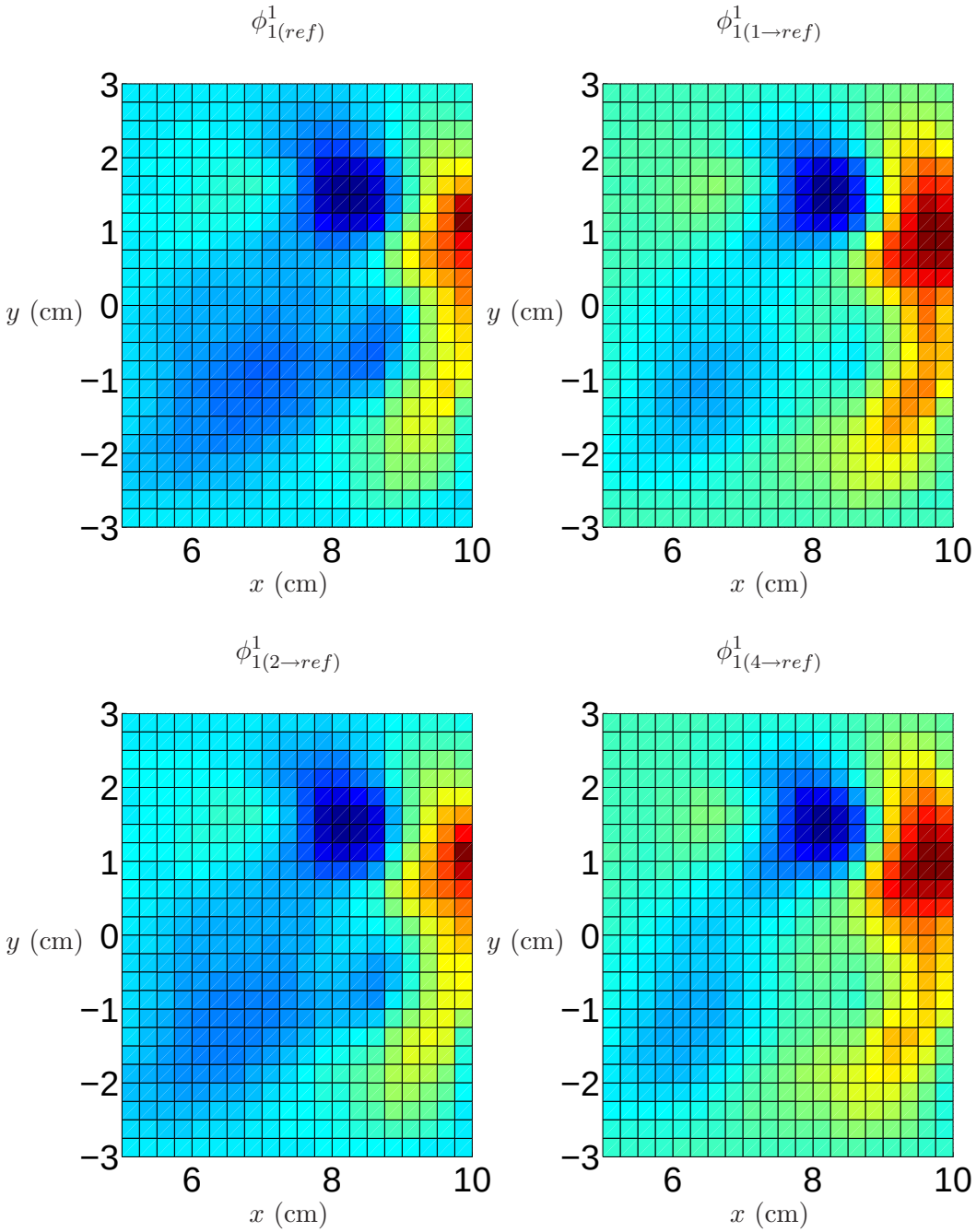

FIG. 4.33 – La composante selon x du premier mode issu d'un cas test donné, représentée (interpolée) sur le maillage de référence

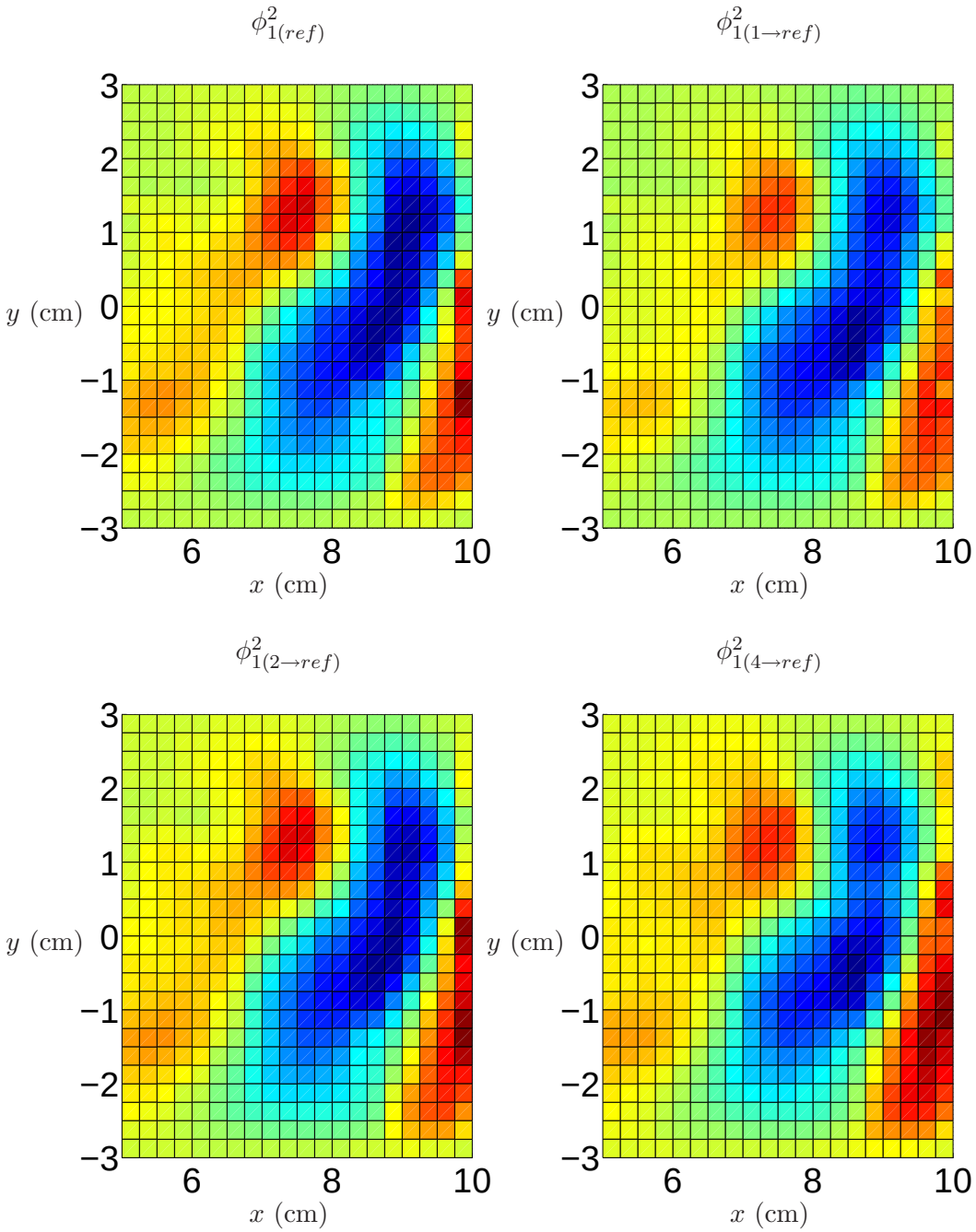

FIG. 4.34 – La composante selon x du deuxième mode issu d'un cas test donné, représentée (interpolée) sur le maillage de référence

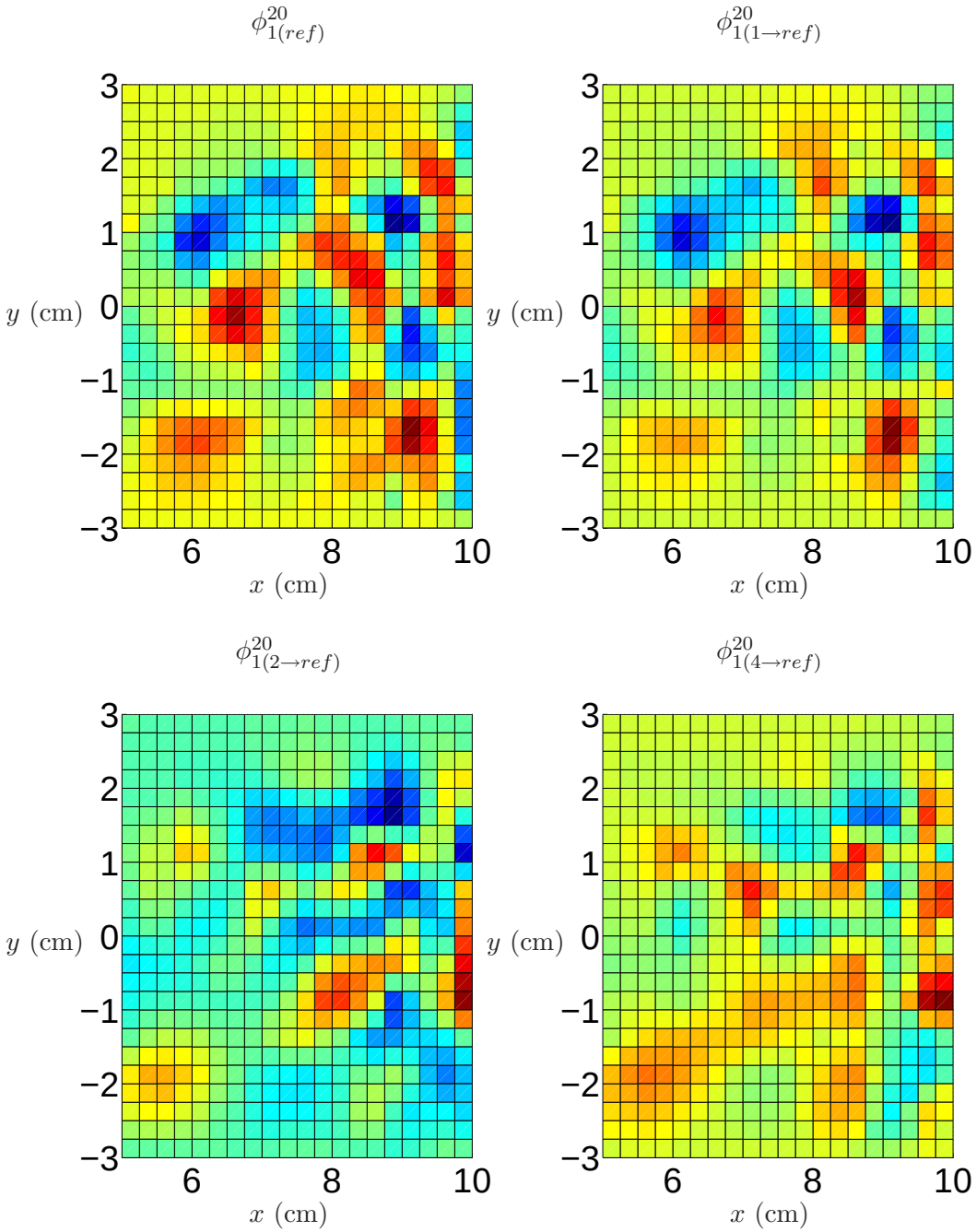

FIG. 4.35 – La composante selon x du vingtième mode issu d'un cas test donné, représentée (interpolée) sur le maillage de référence

Pour avoir un critère quantitatif, et pas seulement qualitatif basé sur la comparaison visuelle des modes, une analyse statistique est effectuée afin de comparer la ressemblance des vecteurs propres entre eux. Le coefficient de corrélation spatiale est calculé entre chaque mode individuel issu des différents cas tests et celui issu de la base de données de référence :

$$C_{\phi^n_{i(ref)}\phi^n_{i(p)}} = \frac{\left\langle \phi^n_{i(ref)}\phi^n_{i(p)} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \phi^n_{i(ref)}\phi^n_{i(ref)} \right\rangle}\sqrt{\left\langle \phi^n_{i(p)}\phi^n_{i(p)} \right\rangle}}, \tag{4.6}$$

où n indique le numéro de vecteur propre, (p) le cas test et i est l'indice des composantes. Pour calculer ce coefficient, les données doivent être disponibles aux mêmes points. Deux calculs ont été effectués : $C_{\phi^n_{i(ref)}\phi^n_{i(p)}}$ a été calculé soit en interpolant les modes issus des cas tests moins résolus sur le maillage de référence, soit en sous-échantillonnant les modes issus de la base de référence sur les maillages des cas tests. Dans les deux cas les mêmes résultats sont obtenus. La figure 4.36 montre l'évolution de $C_{\phi^n_{i(ref)}\phi^n_{i(p)}}$ en fonction de N_{S_p} pour la composante selon x de mode numéro n. Les premiers vecteurs propres des différents cas tests présentent une corrélation

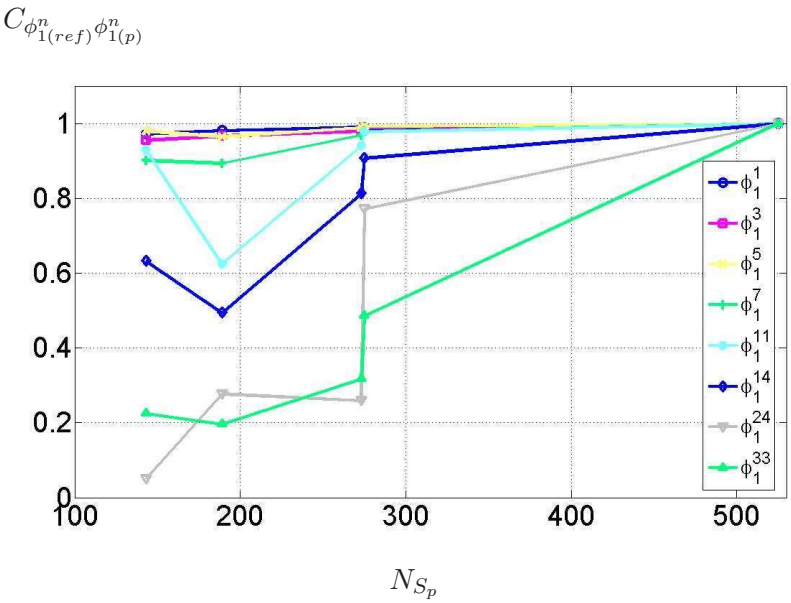

FIG. 4.36 – La valeur absolue du coefficient de corrélation $C_{\phi^n_{1(ref)}\phi^n_{1(p)}}$ pour différents n en fonction de N_{S_p}

spatiale élevée entre eux. La résolution spatiale du maillage utilisé pour le calcul de la matrice de corrélation n'a pas une influence sensible sur les premiers vecteurs propres. Ce résultat est en accord avec l'analyse énergétique précédente. En effet la taille des grandes structures cohérentes de l'écoulement est suffisamment grande pour qu'elles puissent être captées dans chacun des cas tests même ceux spatialement peu résolus. En revanche, pour les vecteurs propres d'ordre élevé, la valeur du coefficient de corrélation spatial diminue. La même tendance est observée (figure 4.37) pour la composante selon y des modes et à partir de 5 modes, la valeur absolue du coefficient de corrélation diminue de manière considérable. Au vu des analyses précédentes, en première conclusion, toute analyse basée sur l'utilisation des modes d'écoulement ne peut être effectuée qu'au plus sur les 5 premiers vecteurs propres. Ces vecteurs propres sont statistiquement convergés et représentent de manière certaine des modes de l'écoulement pour le domaine spatial considéré.

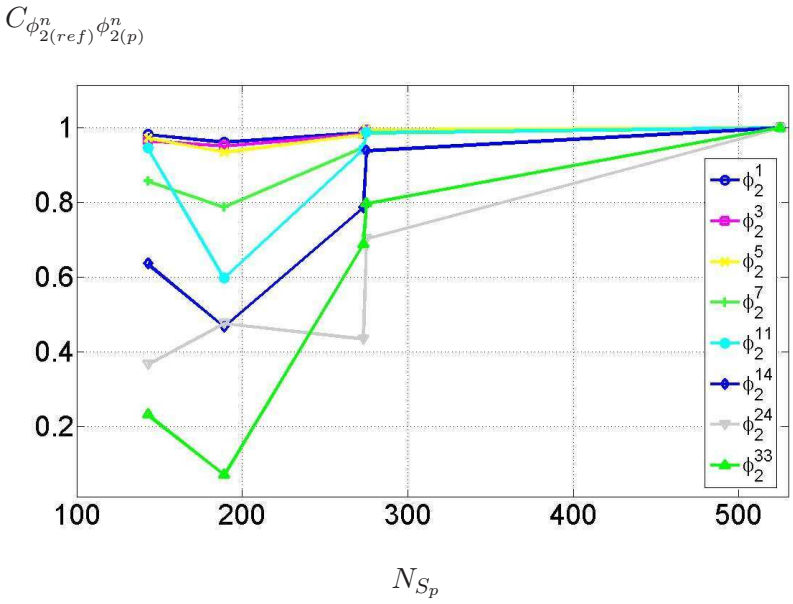

FIG. 4.37 – La valeur absolue du coefficient de corrélation $C_{\phi^n_{2(ref)}\phi^n_{2(p)}}$ pour différents n en fonction de N_{S_p}

4.2.5.2 Influence de la durée temporelle sur la convergence des vecteurs propres POD

Dans cette partie la discrétisation spatiale est fixée et correspond à celle de la base de donnée de référence : $N_S = 525$. Pour étudier l'influence de la durée temporelle, différents cas tests numérotés par q et contenant N_{T_q} échantillons temporels sont considérés. La fréquence d'échantillonnage étant gardée constante pour tous les cas tests, le nombre d'échantillons de chaque cas test représente sa durée temporelle. Le nombre d'échantillons N_{T_q}, retenu pour les futures analyses, varie entre 343 et 443 avec un pas de 5, et de 100 à 340 avec un pas de 15 échantillons. De cette manière un nombre total de 38 cas tests sont effectués. Chaque cas test q, est soumis à la POD :

$$u_{(q)}(\mathbf{x},t) = \sum_{n=1}^{N_{mod}(q)} a^n_{(q)}(t)\phi^n_{1(q)}(\mathbf{x}), \tag{4.7}$$

où $N_{mod}(q)$ est le minimum de (N_{T_q}, N_S). La figure 4.38 montre la somme cumulée des valeurs propres de quelques cas tests. En comparant cette figure à celle obtenue pour différentes

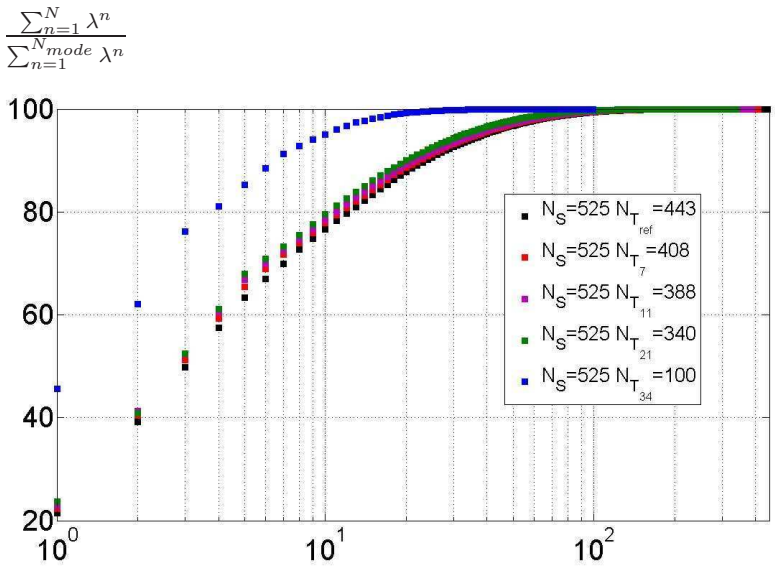

FIG. 4.38 – Somme cumulée des valeurs propores

résolutions spatiales (figure 4.30) une sensibilité plus élevée des valeurs propres à la durée temporelle est immédiatement remarquée.

Cela confirme que la base de données de référence est bien plus (trop) résolue vis-à-vis des échelles spatiales par rapport à la durée temporelle disponible. La durée disponible ne fournit pas suffisamment d'échantillons temporels statistiquement indépendants pour que les échelles de plus petites tailles captées spatialement soient extraites par les modes POD de manière fiable. Pour approfondir ce premier résultat, de la même manière que dans la partie précédente, une analyse statistique comparative des vecteur propres est effectuée à l'aide d'un coefficient de corrélation spatial $C_{\phi^n_{i(ref)}\phi^n_{i(q)}}$:

$$C_{\phi^n_{i(ref)}\phi^n_{i(q)}} = \frac{\left\langle \phi^n_{i(ref)}\phi^n_{i(q)} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \phi^n_{i(ref)}\phi^n_{i(ref)} \right\rangle}\sqrt{\left\langle \phi^n_{i(q)}\phi^n_{i(q)} \right\rangle}}, \tag{4.8}$$

où n indique le numéro de vecteur propre et q le cas test. La figure 4.39 montre l'évolution de $C_{\phi^n_{i(ref)}\phi^n_{i(q)}}$ en fonction de N_{T_q} pour la composante selon x du mode numéro n. Les composantes

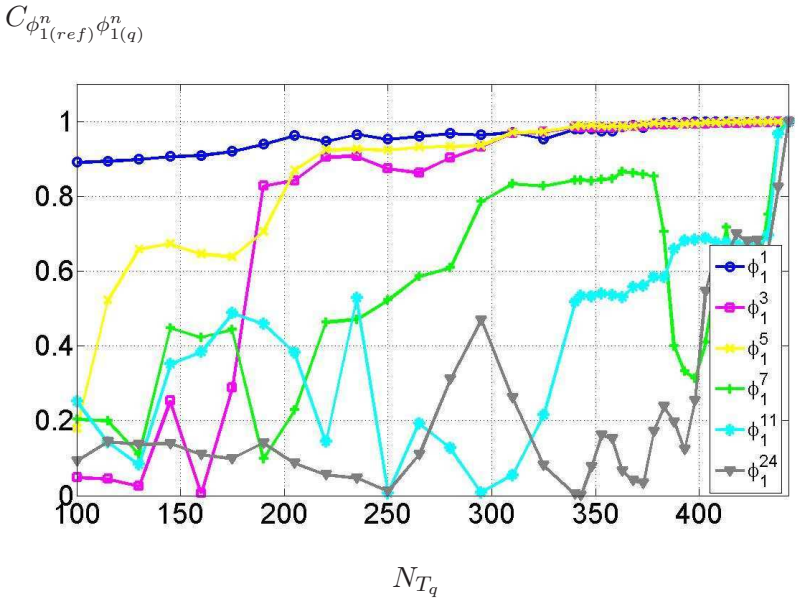

FIG. 4.39 – Valeur absolue du coefficient de corrélation $C_{\phi^n_{1(ref)}\phi^n_{1(q)}}$ pour différents n en fonction de N_{T_q}

selon x des cinq premiers vecteurs propres sont relativement bien corrélées pour $N_{T_q} > 370$. A partir du sixième mode la valeur absolue de coefficient de corrélation décroit très rapidement pour une petite réduction de la durée des signaux. Le même comportement est observé (figure 4.40) pour la composante selon y des modes et à partir du $5^{\text{ème}}$ mode, la valeur absolue du coefficient de corrélation diminue de manière considérable. La comparaison entre les figures 4.36 et 4.39 confirme la sensibilité plus élevée des vecteurs propres au nombre de réalisations indépendantes (durée temporelle) qu'à la résolution spatiale. Quand un nombre faible d'échantillons temporels est utilisé ($N_{T_q} < 370$) même les premiers vecteur propres (qui sont bien représentés spatialement même avec les résolutions spatiale faibles) ne sont pas correctement convergés. En effet, les grosses structures (modes) de l'écoulement peuvent bien être prises en compte par un maillage peu résolu mais elles ne peuvent pas être recensées avec une durée limitée en raison d'un problème de convergence.

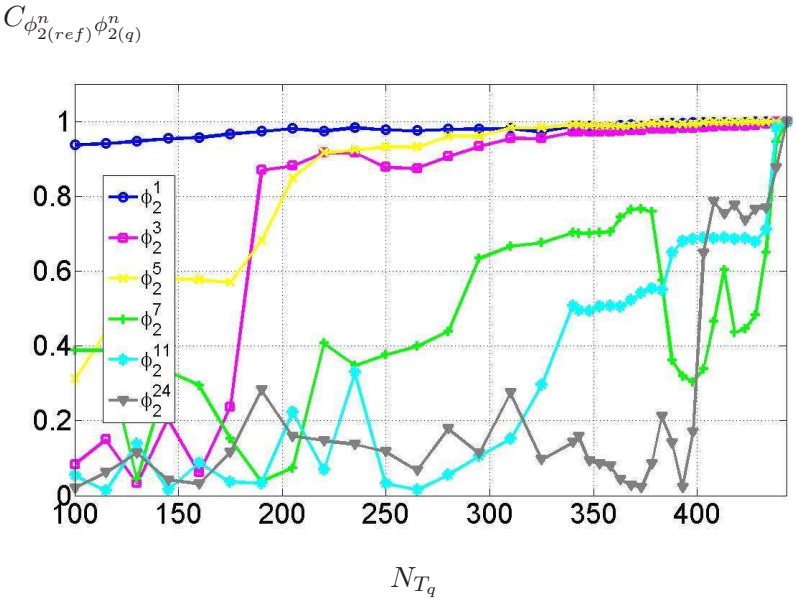

FIG. 4.40 – La valeur absolue du coefficient de corrélation $C_{\phi^n_{2(ref)}\phi^n_{2(q)}}$ pour différents n en fonction de N_{T_q}

4.2.5.2.1 Conclusion

Les analyses temporelle et spatiale précédentes des modes POD ont démontré que seuls les cinq premiers vecteurs propres (dû à leur convergence statistique) peuvent être utilisés pour une analyse basée sur les modes de l'écoulement. En effet pour la base de données de référence, la durée temporelle des signaux (N_T échantillons temporels) par rapport à la résolution spatiale n'est pas suffisante pour représenter de manière certaine l'ensemble des modes d'écoulement qui peuvent être captés par le maillage spatial. Il est alors possible de conclure que l'application présente de la POD peut être effectuée avec un maillage moins fin (par exemple les cas tests $p = 3$ ou $p = 4$) sans modifier les résultats associés aux cinq premiers modes.

Les autres modes d'ordre $n > 5$ obtenus ne doivent pas être considérés pour effectuer des analyses physiques. En effet, leur très grande sensibilité aux paramètres spatiaux et temporels montrent que ces modes ne peuvent pas être considérés comme étant intrinsèquement liés à la dynamique de l'écoulement dans cette zone. Cependant, la POD étant une décomposition parfaite (équation (3.36)), le champ de vitesse peut être parfaitement reconstruit en tous les points et à tout instant par l'ensemble des vecteurs propres. Ainsi, les modes propres d'ordre élevés, pris dans leur ensemble, représente donc une part (la part restante) de la dynamique de l'écoulement. Ils pourraient être exploités éventuellement de manière collective pour analyser ce qui ne peut pas être expliqué par les quelques modes convergés mais ne doivent pas être analyser individuellement.

Remarquons pour finir que cette analyse de convergence des modes POD calculés à partir de données numériques accessibles pendant une durée limitée peut trouver un intérêt pour quelques applications particulières. En effet, les modes d'ordre élevé plus sensibles à la notion de convergence statistique peuvent être parfois utilisés pour certaines études.

Par exemple, des études précédentes ont montré le potentiel de la POD pour générer des conditions réalistes en entrée des calculs. Ainsi quand un modèle réduit basé sur les premiers modes POD est utilisé pour spécifier ces conditions [**?**], il est nécessaire de superposer à ce modèle une partie résiduelle associée aux petites échelles peu énergétiques. Les modes d'ordre élevé statistiquement convergés peuvent alors être utilisés pour modéliser cette partie résiduelle. Dans le même registre, lorsque des données expérimentales sont utilisées pour être spécifiées en

entrée des calculs [40], il est également nécessaire de spécifier une partie aléatoire superposée à ces données expérimentales. Une solution peut également consister à utiliser le résidu des modes POD pour spécifier cette partie aléatoire à la condition que ces modes caractérisant cette partie incohérente soient statistiquement fiables.

De plus des analyses précédentes ont permis de montrer que non seulement les structures tourbillonnaires de grande taille peuvent jouer un rôle non négligeable sur tous les processus de mélange, de calcul de trainée, d'émissions sonores, ... mais également les structures tourbillonnaires de petites tailles. Par exemple dans le cas d'application en aéroacoustique, il a été montré les rôles différents que peuvent jouer les petites et les grosses structures tourbillonnaires [41, 69]. Dans ce cadre, l'utilisation de la POD pour extraire les grandes et les petites structures nécessite de s'assurer de la bonne convergence statistique des modes POD associées à chacune de ces structures tourbillonnaires. Ceci reste également valable lorsque la POD est utilisée pour décomposer le champ de vitesse en différentes contributions telles que les grosses structures tourbillonnaires, les petites structures et la partie résiduelle incohérente [109].

Pour finir, on peut évoquer les méthodes d'interpolation des données expérimentales basées sur la POD [53]. Ces méthodes dites "'gappy POD" proposent d'utiliser les informations statistiques des données expérimentales valides pour reconstruire les données en des points où la mesure n'a pas été possible. Dans ce type d'approche l'utilisation d'un grand nombre de modes peut être un atout pour améliorer la reconstruction. Dans ce cas, il sera nécessaire de s'assurer de la convergence statistique de tous les modes retenus pour une telle reconstruction.

Ces différents exemples montrent l'intérêt et la nécessité de faire une telle analyse de convergence lorsque des modes POD d'ordre élevé doivent être utilisés pour une analyse physique quelconque.

4.3 Choix de la variable représentant les sources

Dans l'application de la POD, de façon habituelle, le champ de vitesse a été décomposé pour extraire les structures cohérentes de l'écoulement. La contribution de ces évènements au champ acoustique a été ensuite investiguée par les modes étendus. En rappelant que l'EPOD est une méthode de corrélation, la démarche suivie dans la partie précédente pourrait être interprétée comme la corrélation existant entre le champ de vitesse et la pression acoustique. De cette manière, le champ de vitesse a été considéré comme la variable représentant des évènements sources. Hors, mise à part pour le cas du bruit de jet et pour des angles d'observation d'environ 30° par rapport à l'axe principal du jet pour lequel le signal de vitesse peut être considéré comme un marqueur satisfaisant des sources aéroacoustiques (dans cette configuration, il a été établi que c'est les termes de Shear Noise qui dominent [70]), les termes quadratiques U_iU_j apparaissant dans le tenseur de Lighthill doivent être pris en compte pour exprimer les sources [18, 94, 110]. Ainsi, dans ce sous-chapitre, grâce à la connaissance de toutes les composantes de vitesse dans tout le domaine source, le tenseur de Lighthill complet va être utilisé pour évaluer les sources. On verra que son calcul génère des erreurs numériques non négligeables et que le champ de pression aérodynamique peut être considéré également comme un bon marqueur des sources aéroacoustiques.

4.3.1 Calcul des termes sources de Lighthill, T_{ij}

Dans le volume de mesure présenté sur la figure 4.6 l'ensemble des variables de l'écoulement est disponible en tous les points de maillage. Cela fournit la possibilité de calculer les termes de Lighthill (voir l'équation 1.1). Ce calcul faisant appel à des dérivées d'ordre deux, l'utilisation de schémas de différences finies centrées d'ordre 2 exige la présence des 36 voisins autour de point où le tenseur de Lighthill doit être calculé. En choisissant les points situés sur le plan central

du volume (plan 2D), on trie ceux pour lesquels les 36 voisins sont disponibles. A chacun de ces points, la dérivée est estimée par un schéma centré adapté à un maillage éventuellement non-uniforme :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\beta}\left[y_2 + (\frac{\beta}{\alpha} - 1)y - \frac{\beta}{\alpha}y_1\right],$$

avec $\alpha = x - x_1$ et $\beta = x_2 - x$.

Dans la formulation initiale, le tenseur de Lighthill est défini à l'aide des variables totales (incluant le champ moyen) :

$$T_{ij} = \frac{\partial^2(\rho U_i U_j)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

La figure 4.41 représente la cartographie du tenseur de Lighthill pour un instant fixé. Sur cette cartographie les lâchers tourbillonnaires générés sur le bord supérieur du clapet peuvent être identifiés comme un évènement qui maximise le tenseur de Lighthill. De même, le sillage des ailettes verticales et horizontales sont des zones où une valeur importante de tenseur de Lighthill est obtenue.

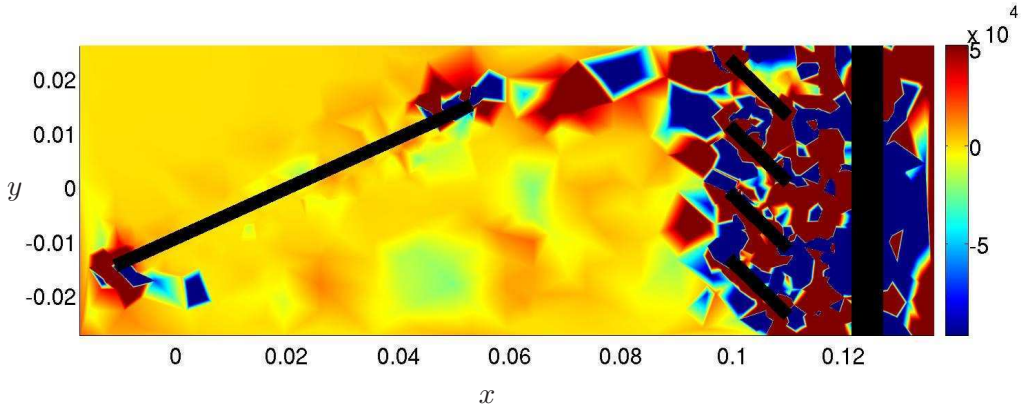

FIG. 4.41 – Tenseur de Lighthill pour un instant donné

Un test est effectué pour vérifier l'effet de la densité dans la représentation des termes sources. Dans le premier cas, la valeur locale instantanée de la densité est considérée (résultat déjà présenté sur la figure 4.41). Dans le deuxième cas, une valeur unique de densité est considérée pour tous les points. Cette valeur est arbitrairement fixée à $\rho = constante$. La figure 4.42 représente la cartographie du tenseur de Lighthill calculé avec une valeur constante de densité au même instant. La comparaison entre les figures 4.41 et 4.42 montre que la prise en compte d'une densité locale ou constante conduit aux cartographies quasi-identiques : aucune différence notable ne peut être observée.

4.3.2 Corrélation pression acoustique - T_{ij}

Le tenseur de Lighthill est ensuite utilisé pour investiguer sa corrélation avec la pression acoustique. La figure 4.43 montrent la cartographie de la valeur absolue du coefficient de corrélation évaluée entre la pression acoustique et les termes de Lighthill pour un temps de retard égal à zéro. Le niveau maximum de la corrélation obtenu pour le temps de retard zéro est suffisamment élevé pour que les critères de convergence (pour la durée disponible) soient satisfaits. La corrélation étant étudiée pour un temps de retard égal à zéro, il est possible qu'elle soit plus élevée et/ou avec une localisation différente pour un autre temps de retard. La figure 4.44 représente la cartographie du coefficient de corrélation entre le champ de pression acoustique et les termes de Lighthill pour deux autres temps de retard.

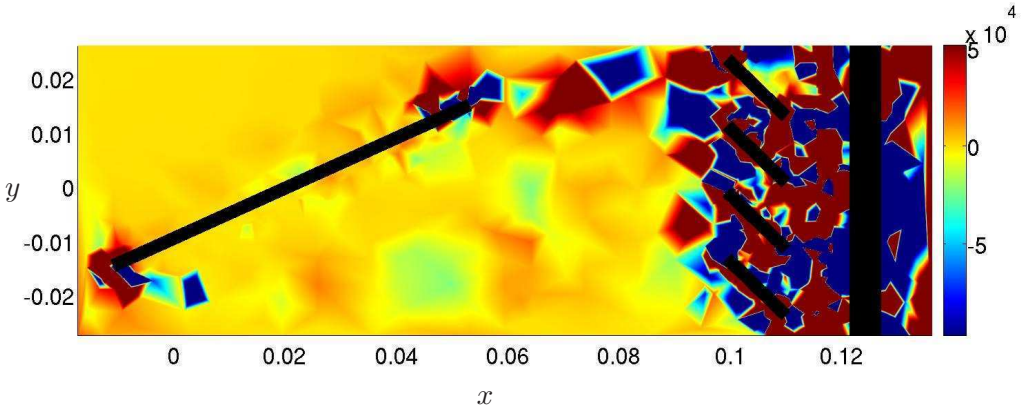

FIG. 4.42 – Tenseur de Lighthill au même instant considéré pour la figure 4.41 calculé avec une valeur fixée de densité ($\rho = 1$) en tous les points

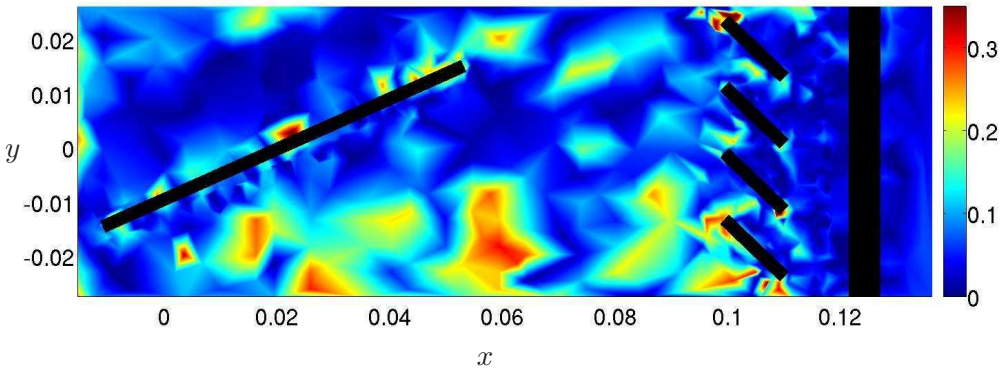

FIG. 4.43 – Valeur absolue du coefficient de corrélation évaluée pour un temps de retard égal à zéro entre la pression acoustique et le tenseur Lighthill

Les zones de haute corrélation changent de position au cours de temps ce qui montre qu'elles sont transportées par l'écoulement moyen. Leur forme est plus ou moins bien conservée et la valeur maximale de corrélation ne varie pas de façon remarquable. Comme il a été expliqué dans la partie 4.2.4, le coefficient de corrélation entre deux phénomènes quasi-périodiques varie de façon quasi-périodique en fonction du temps de retard. De cette manière, sur une cartographie, pour détecter les zones à forte corrélation il vaut mieux que l'ensemble des temps de retard soit étudié. Pour s'affranchir de ce problème et trouver les zones dans lesquelles la corrélation est, de manière générale et en moyenne, plus élevée par rapport aux autre zones, la valeur *rms* du coefficient de corrélation en fonction du temps retard est introduite :

$$C^{rms}_{T_{ij}P_{ac}}(\mathbf{x},\mathbf{x}^{'}) = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left|C_{T_{ij}P_{ac}}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\tau)\right|^2 d\tau}.$$

La figure 4.45 représente la valeur *rms* du coefficient de corrélation évalué entre la pression acoustique et les termes du tenseur de Lighthill. Tout d'abord il faut noter que la valeur de cet indicateur ne doit pas être interprétée de manière absolue. En effet la valeur absolue de cet indicateur reste beaucoup trop faible pour satisfaire les critères de convergence. Mais en considérant le niveau suffisamment élevé du coefficient de corrélation (de l'ordre de 0.47) pour

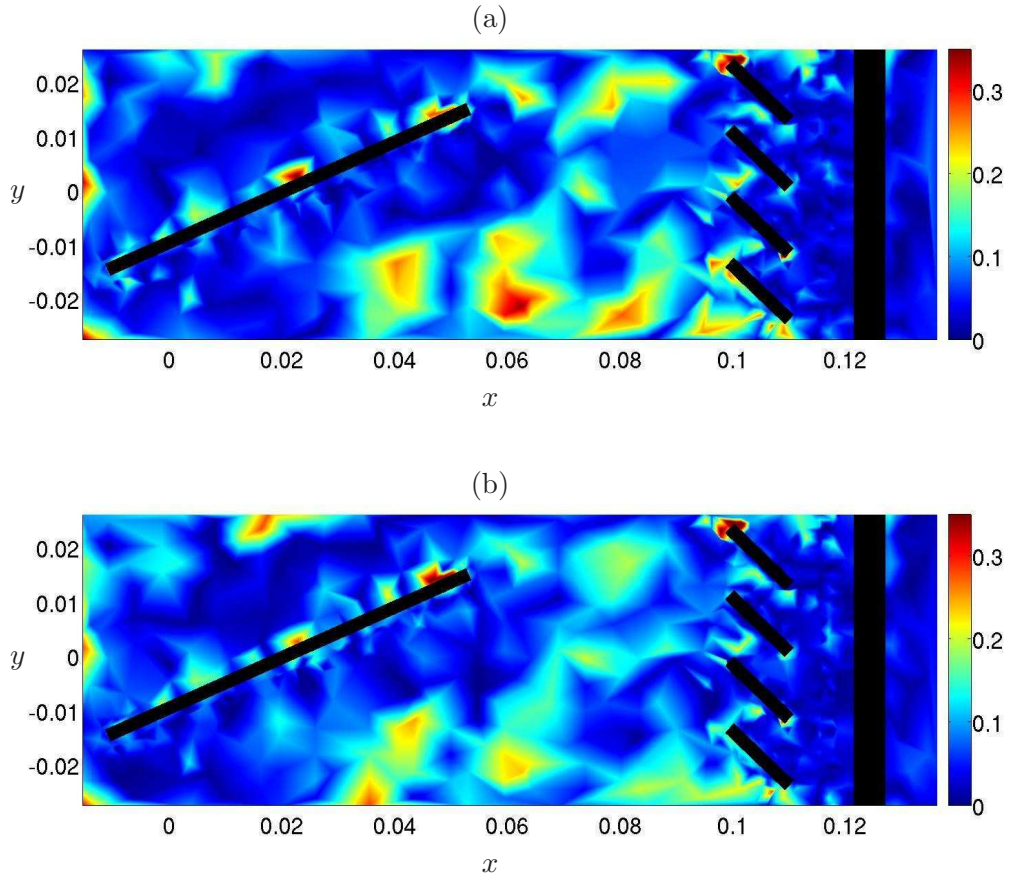

FIG. 4.44 – Valeur absolue du coefficient de corrélation évalué entre la pression acoustique et le tenseur Lighthill calculé pour un temps de retard égal à : (a) $\tau = 0.08$ ms (b) $\tau = 0.16$ ms

un temps de retard fixé, la valeur *rms* peut être utilisée pour une comparaison relative. Sur la cartographie de la valeur *rms*, le sillage du lâcher inférieur semble contenir des évènements ayant une corrélation élevée avec le champ acoustique rayonné. Au niveau du bord supérieur du clapet où les lâchers tourbillonnaires se forment et au niveau de la première ailette horizontale où les lâchers tourbillonnaires supérieurs s'écrasent, une assez bonne corrélation est visible également. Les zones très localisées de l'enroulement et de l'écrasement des tourbillons font partie des zones éventuellement sources.

4.3.3 Comparaison entre le tenseur de Lighthill et la pression dans la région source

L'accès au tenseur de Lighthill est souvent très difficile (par la mesure) et assez coûteux en termes de stockage des données et nécessite des calculs de dérivées. La question de pouvoir remplacer ces termes par une autre variable plus facile d'accès et moins coûteuse mérite donc être étudiée. La pression est un bon candidat pour cette investigation. On pense plus précisément à la pression aérodynamique, associée au champ incompressible. Hors, comme on peut le noter dès maintenant, les simulations Boltzmann sur Réseau ne donnent pas accès à la pression incompressible seule mais bien à la pression totale qui est la somme de la pression incompressible, associé au champ turbulent, et de la pression acoustique. On peut cependant supposer que dans les zones sources c'est bien la pression aérodynamique qui domine la pression totale. Comme on le verra dans la suite, l'impossibilité d'extraire uniquement la part incompressible du champ de pression

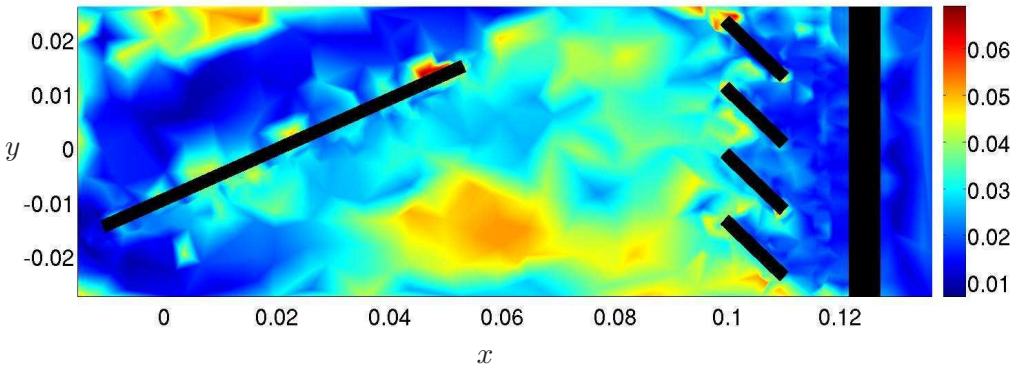

FIG. 4.45 – Valeur *rms* du coefficient de corrélation évalué entre la pression acoustique et le tenseur Lighthill

amène à des résultats qui peuvent compliquer l'interprétation des résultats dans les régions où, justement, la pression aérodynamique devient faible devant la pression acoustique.
Pour justifier de l'utilisation de la pression associée au champ incompressible comme variable caractéristique des sources aéroacoustiques, on peut tout d'abord remarquer que cette variable est reliée, dans la zone aérodynamique non-linéaire, au tenseur de Lighthill via l'équation de Poisson. L'équation de Poisson peut être considérée comme la version incompressible de l'équation proposée par Lighthill. La pression incompressible (la pression aérodynamique) est donc directement issue du tenseur de Lighthill via l'équation de Poisson.
Un autre argument pour justifier de l'utilisation de la pression aérodynamique comme variable source provient d'une formulation particulière des termes sources basée sur une séparation formelle du champ compressible et du champ incompressible associé à une linéarisation des équations de Navier-Stokes. Cette approche amorcée par Hardin et Pope [54] en 1994 a été formulée de manière plus complète récemment par Seo et Moon [114] et s'appuie théoriquement sur une formulation générale de l'analogie acoustique proposée par Goldstein en 2003 [48]. Après avoir combiné la version incompressible des équations de Navier-Stokes avec leurs versions compressibles et en faisant une linéarisation des équations obtenues en supposant un nombre de Mach faible, Seo et Moon [114] ont montré que les équations linéaires compressibles perturbées (Linearized Compressible Perturbed Equations, LCPE) pouvaient s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\mathbf{U}.\nabla)\,\rho' + \rho_0\,(\nabla.\mathbf{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\,(\mathbf{u}.\mathbf{U}) + \frac{1}{\rho_0}\nabla p = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{U}.\nabla)\,p + \gamma P\,(\nabla.\mathbf{u}) + (\mathbf{u}.\nabla)\,P = -\frac{DP}{Dt} \tag{4.9}$$

Dans ces équations, les termes ρ_0, $\mathbf{U}$ et P sont la densité (constante), la vitesse et la pression associées au champ incompressible supposé connu, alors que les variables ρ', $\mathbf{u}$ et p sont les variations compressibles des variables issues d'une linéarisation faible nombre de Mach des équations. Les termes de gauche des équations LPCE représentent les effets de propagation et de réfraction des ondes acoustiques dans l'écoulement inhomogène instationnaire, supposé connu. Les termes de droite ne contiennent que les termes sources acoustiques. Pour les écoulements bas nombre de Mach, on constate que la variation globale de la pression aérodynamique incompressible $\frac{DP}{Dt}$ est le seul terme source. Cette technique de calcul aéroacoustique basée sur les équations LCPE a

été validée pour des cas de sources canoniques dipolaires et quadripolaires, mais aussi pour des configurations plus complexes [90, 115].
L'équation 4.9 montre donc que les fluctuations de pression acoustique, éventuellement observée en champ lointain, sont issues des fluctuations de pression aérodynamique, purement incompressible, générées par l'écoulement turbulent.

La figure 4.46 représente les cartographies des fluctuations de pression et du tenseur de Lighthill pour un instant donné.

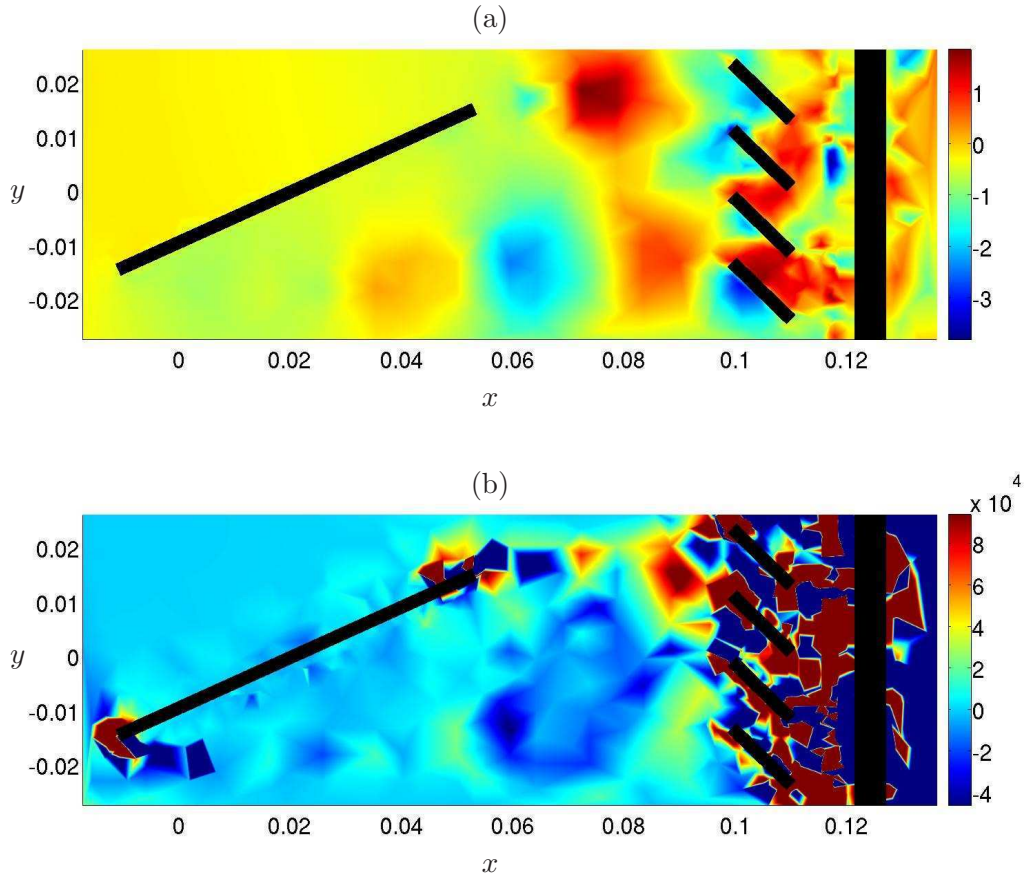

FIG. 4.46 – (a) Tenseur de Lighthill (b) Pression fluctuante, pour un instant donné

Ces deux figures présentent certaines ressemblances, essentiellement au niveau de la couche de cisaillement supérieure derrière le clapet. Elles se différencient de manière remarquable entre les deux rangées d'ailettes où le tenseur de Lighthill possède une valeur relative très élevée presque partout : ceci peut être attribué à l'aspect très bruité du calcul des termes de Lighthill. Pour la couche de cisaillement inférieure derrière le clapet, l'interprétation est plus délicate. Bien que le sillage soit représenté par le tenseur de Lighthill, les centres de dépression et surpression des lâchers tourbillonnaires (bien présents dans la cartographie de pression) ne peuvent pas être distingués correctement sur la cartographie des termes source de Lighthill. Cette comparaison étant faite pour un instant précis pourrait éventuellement conduire à des résultats différents si un autre instant est considéré. Pour s'affranchir de ce biais, il est préférable de vérifier la ressemblance entre ces deux champs en calculant un taux de corrélation spatiale. La figure 4.47 représente la valeur absolue du coefficient de corrélation évalué entre la pression et le tenseur de Lighthill. En premier lieu, la valeur maximale du coefficient de corrélation étant remarquablement élevée (0.8) montre que les variations de pression suivent celles du tenseur de Lighthill dans les zones à haut niveau de corrélation. Par ailleurs, le sillage inférieur qui était difficilement identifié comme une

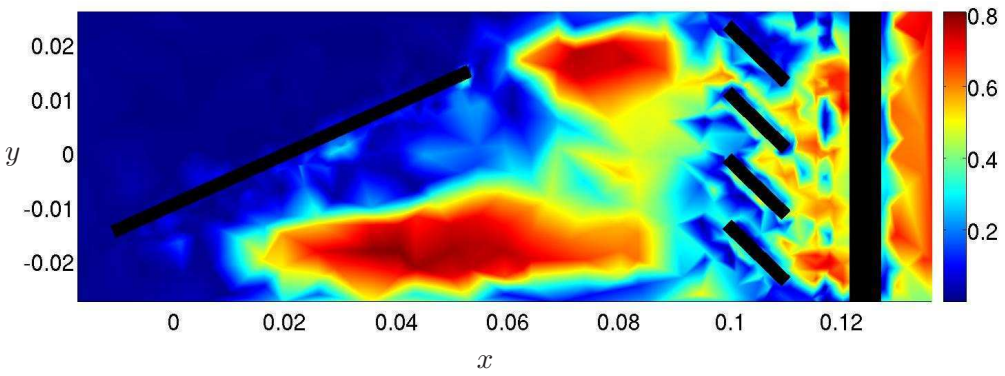

FIG. 4.47 – Valeur absolue de coefficient de corrélation évalué entre la pression et le tenseur Lighthill

zone de forte ressemblance par la comparaison visuelle des cartographies instantanées, montre une corrélation tout aussi (voire plus) élevée que le sillage supérieur. En effet, comme le coefficient de corrélation décrit la ressemblance des signaux au cours de temps de manière adimensionnelle, il permet d'éviter les difficultés d'interprétation éventuellement liées à la comparaison des images instantanées. De toute évidence, les variations de pression dans les zones éventuellement sources suivent bien celles du tenseur de Lighthill et elles pourraient donc très bien remplacer le tenseur de Lighthill dans une analyse basée sur les corrélations afin de satisfaire à notre objectif de détection des sources.

4.3.4 Utilisation de la pression pour les corrélations avec le champ de pression acoustique

La pression ayant montré une bonne corrélation avec le tenseur de Lighthill, on étudie maintenant la possibilité de recenser les évènements générateurs de bruit par la corrélation de pression acoustique en champ lointain avec la pression dans la région source. La figure 4.48 montre les cartographies du coefficient de corrélation entre la pression acoustique en champ lointain et la pression autour de l'aérateur pour trois temps de retard différents. Ces temps de retard sont choisis identiques à ceux considérés pour les corrélations directes entre la pression acoustique et le tenseur de Lighthill présentées sur la figure 4.44. De cette manière, il est possible de comparer les images des figures 4.48 et 4.44. A l'issue de cette comparaison on constate que la valeur maximale du coefficient de corrélation est plus élevée lorsque la variable pression est utilisée que lorsque l'on utilise le tenseur de Lighthill. De plus, les zones à forte corrélation sont plus étalées, plus lisses que celles obtenues avec le tenseur de Lighthill. Ceci est du au caractère bruité du tenseur de Lighthill qui conduit à cet aspect très marqué des zones de corrélation.

Comme précédemment, selon le temps de retard considéré la localisation des évènements à forte corrélation comme les lâchers tourbillonnaires inférieurs, varie. En rappelant que la valeur maximale de chaque cartographie est suffisamment élevée pour qu'une signification physique puisse y être attachée, on vérifie la valeur *rms* du coefficient de corrélation (figure 4.49). La localisation d'une région particulière à haut niveau de corrélation sur la cartographie de valeur *rms* est encore plus imprécise. En revanche, l'apparition d'une région à très faible corrélation dans le sillage inférieur (entre $x = 3$ et 4.3 cm) peut être remarquée. L'observation importante concerne le niveau uniformément élevé de corrélation pour la zone amont de clapet. Cette zone étant a priori soumise à un écoulement uniforme ne doit pas contenir des variations turbulentes considérables. La seule justification de ce niveau élevé est la présence des ondes acoustiques qui

remontent le conduit dans la direction amont. Dans cette zone, ce sont effectivement les mêmes informations qui sont corrélées et conduisent à une valeur très élevée de corrélation.

Fonction de Cohérence

L'opération de corrélation dans le domaine temporel a permis d'effectuer certaines études avec une démarche basée sur la comparaison des résultats. Mais, de manière générale, l'opérateur de corrélation dans le domaine temporel souffre d'un problème de domination par la fréquence fondamentale, la plus énergétique. Cela pourrait être démontré pour deux signaux dont 20% de leur énergie est répartie sur une fréquence commune et les 80% restant sur les autres fréquences. Ils doivent normalement posséder un niveau de corrélation de 0.2. L'exemple suivant montre que les deux signaux définis comme

$$x = 8 \times sin(2\pi \times 10 \times t) + 2 \times sin(2\pi \times 2 \times t)$$

et

$$y = 8 \times sin(2\pi \times 5 \times t) + 2 \times sin(2\pi \times 2 \times t)$$

ne possèdent une valeur de coefficient de corrélation que de l'ordre de $C_{xy} = 0.059$ au lieu de 0.2. Pour éviter ce problème et pour pouvoir investiguer proprement le niveau de corrélation à chaque fréquence, le passage au domaine fréquentiel et l'utilisation de fonction de cohérence au lieu de coefficient de corrélation semble plus judicieux. Dans un premier temps la fréquence fondamentale du signal de pression acoustique $f = 240$ Hz est choisie pour évaluer la fonction de cohérence entre le signal de pression acoustique et le champ de pression à chaque point du plan d'étude. Les paramètres utilisés pour le calcul de la cohérence sont choisis identiques à ceux considérés dans la partie 4.2.4 ($N_T = 443$, $F_s = 7431,6$ Hz, $N_{fft} = 72$ et un taux de recouvrement de 70%). Le résultat est présenté sur la figure 4.50. La valeur maximum de la fonction de cohérence à 240 Hz est remarquablement élevée (0.91). Comme précédemment, le niveau uniformément élevé de cohérence dans la zone amont du clapet où les activités turbulentes sont très faibles montre la présence des ondes acoustiques dans cette zone. La ressemblance de la cartographie de cohérence à $f = 240$ Hz, la fréquence fondamentale du signal acoustique, à celle obtenue pour la valeur rms de coefficient de corrélation (figure 4.49) confirme également l'hypothèse de domination de la corrélation temporelle par la composante du signal correspondant à la fréquence fondamentale. De la même manière que pour la cartographie de coefficient de corrélation, la localisation d'une région particulière sur la cartographie de cohérence à 240 Hz est difficile. On peut simplement remarquer la présence de deux régions à faible niveau de cohérence entre $x = 0.03$ et 0.04 et $x = 0.08$ et 0.095.

En profitant de la possibilité d'étudier la corrélation à une fréquence particulière par la fonction de cohérence, on étudie la cohérence entre la pression acoustique et le champ de pression dans le plan d'étude à une fréquence autre que celles associées aux pics du spectre de pression acoustique. La figure 4.51 représente la fonction de cohérence évaluée entre la pression acoustique et le champ de pression à 375 Hz. Sur cette image, le niveau de cohérence est assez faible dans les zones où l'activité turbulente est importante. Cela confirme que les fluctuations de pression turbulente ne sont pas cohérentes avec celles de la pression acoustique (d'un niveau très faible à cette fréquence). Dans les régions calmes (essentiellement en amont de clapet) le niveau élevé de cohérence montre une fois encore la présence des ondes acoustiques.

A 830 Hz, le deuxième pic de spectre de pression acoustique, la fonction de cohérence représente un niveau assez faible dans les sillages inférieur et supérieur de clapet (voir la figure 4.52). Cette observation montre que les grosses structures tourbillonnaires générées aux bords de clapet ne sont certainement pas responsables de génération de bruit à cette fréquence.

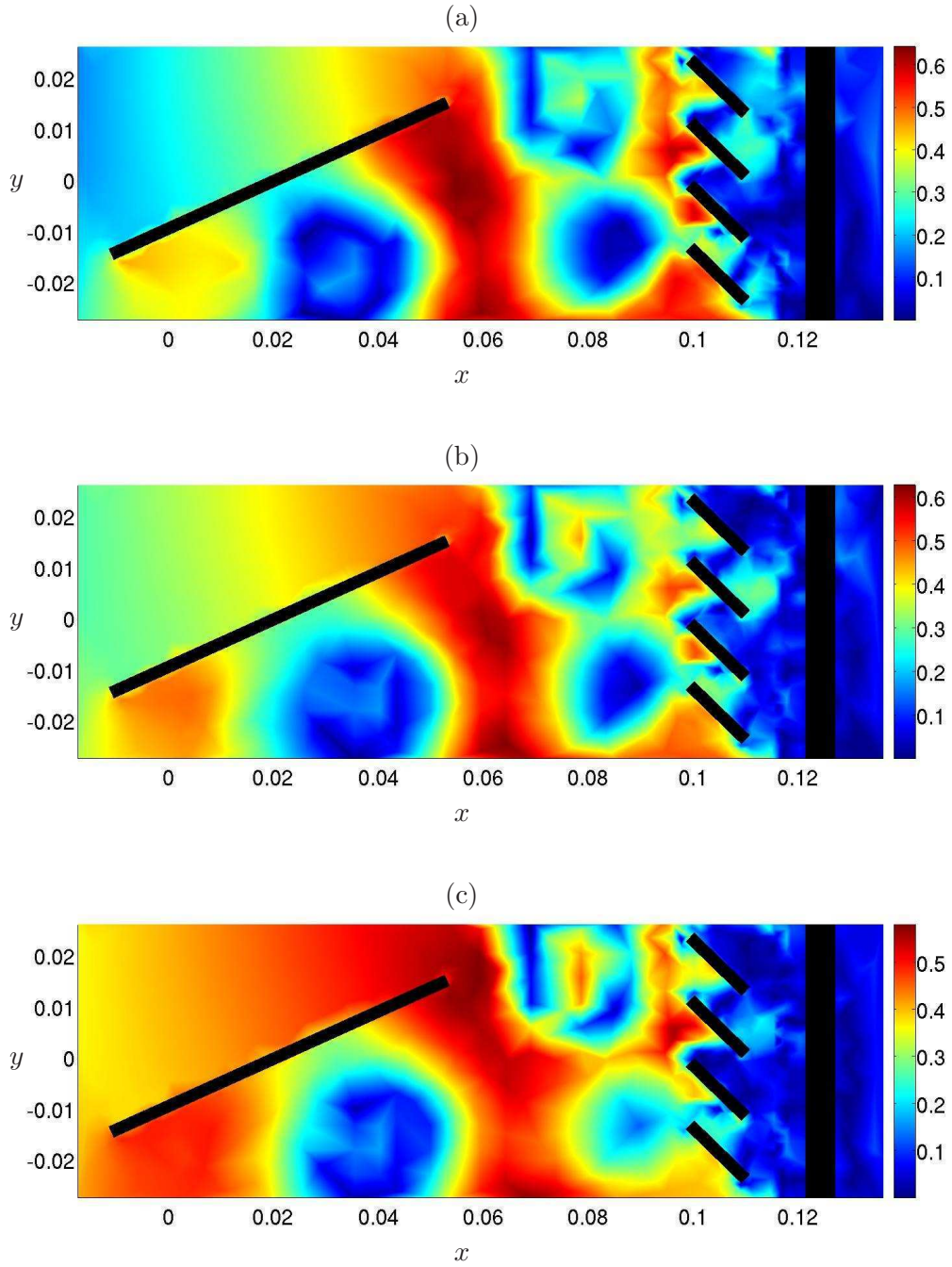

FIG. 4.48 – Valeur absolue de coefficient de corrélation évalué entre la pression acoustique et le champ de pression pour un temps de retard égal à : (a) $\tau = 0$ ms (b) $\tau = 0,08$ ms et (c) $\tau = 0,16$ ms

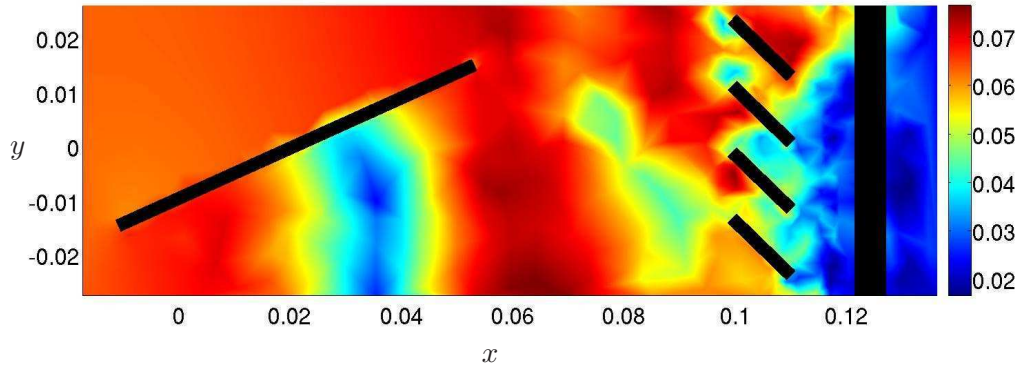

FIG. 4.49 – Valeur *rms* du coefficient de corrélation évalué entre la pression acoustique et le champ de pression

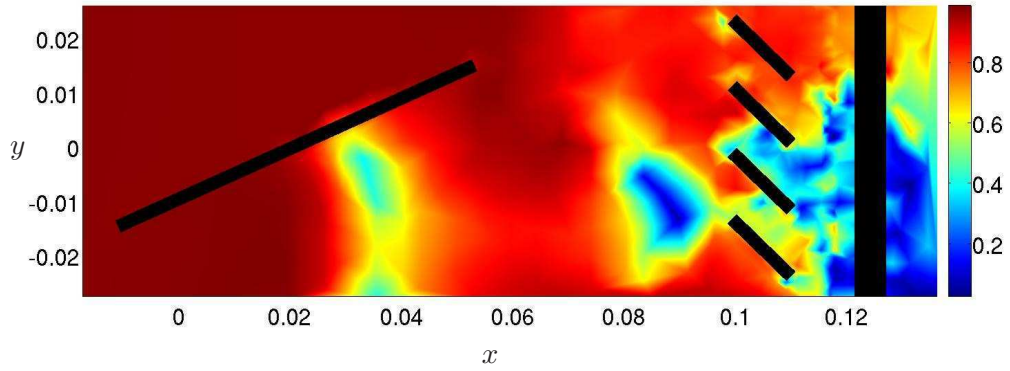

FIG. 4.50 – Fonction de cohérence évaluée entre la pression acoustique et le champ de pression à 240 Hz

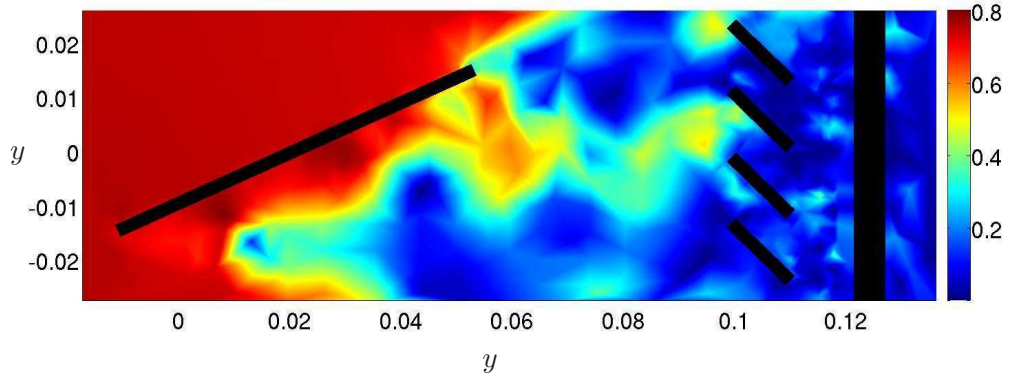

FIG. 4.51 – Fonction de cohérence évaluée entre la pression acoustique et le champ de pression à 375 Hz

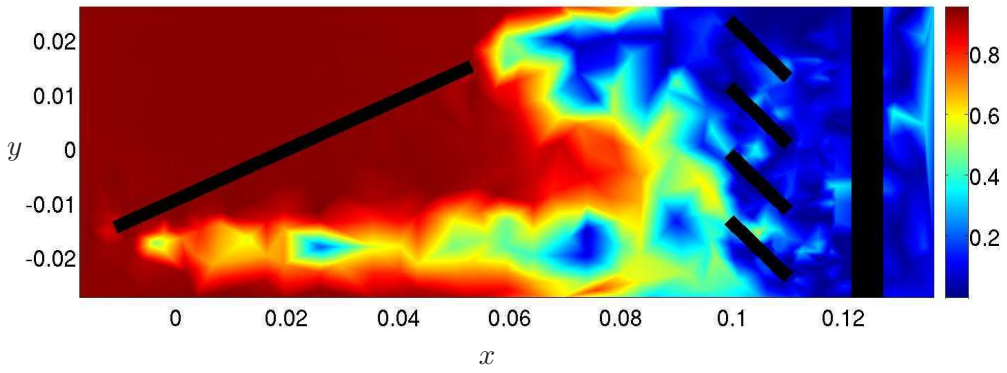

FIG. 4.52 – Fonction de cohérence évaluée entre la pression acoustique et le champ de pression à 830 Hz

4.4 Analyse de source aérateur par l'outil EPOD

Dans les parties § 4.2.4 et § 4.2.5 les précautions à prendre en compte lors de l'implémentation de la POD et l'EPOD ont été soulignées. Par ailleurs, dans la partie § 4.3 nous avons vu que la variable pression est un bon candidat pour représenter les évènements en relation avec la production sonore. Dans cette partie, nous allons essayer de mettre en place une analyse EPOD entre la pression dans le plan de mesure et la pression acoustique en champ lointain. Le but d'une telle analyse est de mettre en évidence les évènements aérodynamiques décrits (de manière statistiquement fiables) par les modes POD qui représentent une corrélation (statistiquement fiable) avec les ondes acoustiques.

La région d'application de la POD comprend tout le plan de mesure (la région considérée dans la partie § 4.3) elle n'est donc pas limitée à une zone particulière comme cela a été fait dans la partie §4.2. On note que les modes POD sont sensibles à la région d'étude et ils représentent les évènements les plus énergétiques du domaine considéré. De cette manière la prise en compte de tout le plan de mesure permet de représenter les évènements globalement les plus énergétiques par les premiers modes POD. Pour avoir une idée sur la répartition spatiale des fluctuations les plus énergétiques de la pression, la valeur rms de champ de pression est représentée sur la figure 4.53. Sur cette figure les couches de cisaillement supérieure et inférieure du clapet se dis-

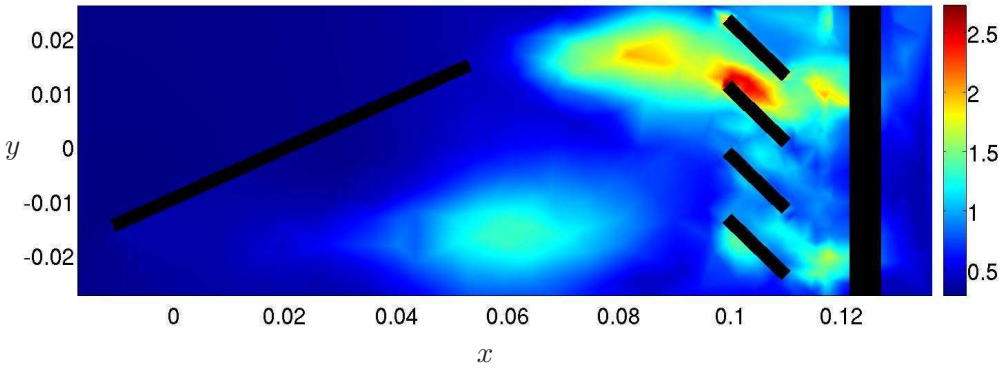

FIG. 4.53 – Valeur rms de la pression

tinguent comme des zones de haut niveau de fluctuations de pression. La couche de cisaillement supérieure représente un niveau plus élevé de fluctuation. Ce niveau s'amplifie davantage dans la zone d'impact avec la deuxième ailette horizontale (la première rangée d'ailettes en aval du clapet sont des ailettes horizontales). Cette amplification correspond à l'éclatement des structures tourbillonnaires présentes dans la couche de cisaillement supérieure (déjà mises en évidence dans la partie 4.2) sur le coin de deuxième ailette et probablement à la formation des nouveaux tourbillons de plus petites tailles et assez énergétiques sur ce coin. Toujours en aval de cette couche de cisaillement supérieur, on trouve une zone de haut niveau de fluctuation entre les deux rangées d'ailettes. Les fluctuations de pression dans la couche de cisaillement inférieure sont moins énergétiques. ces structures tourbillonnaires ne subissent pas un éclatement aussi important sur les ailettes horizontales que celui des structures tourbillonnaires de la couche de cisaillement supérieure. Entre les deux rangées d'ailettes, la couche de cisaillement inférieure génère tout de même un niveau important de fluctuations de pression.

Le champ de pression est ensuite décomposé par la POD. Les trois premiers modes sont représentés sur la figure 4.54. Comme attendu les premiers modes décrivent la dynamique des fluctuations les plus importantes : les couches de cisaillement du clapet et les structures formées au niveau des ailettes.

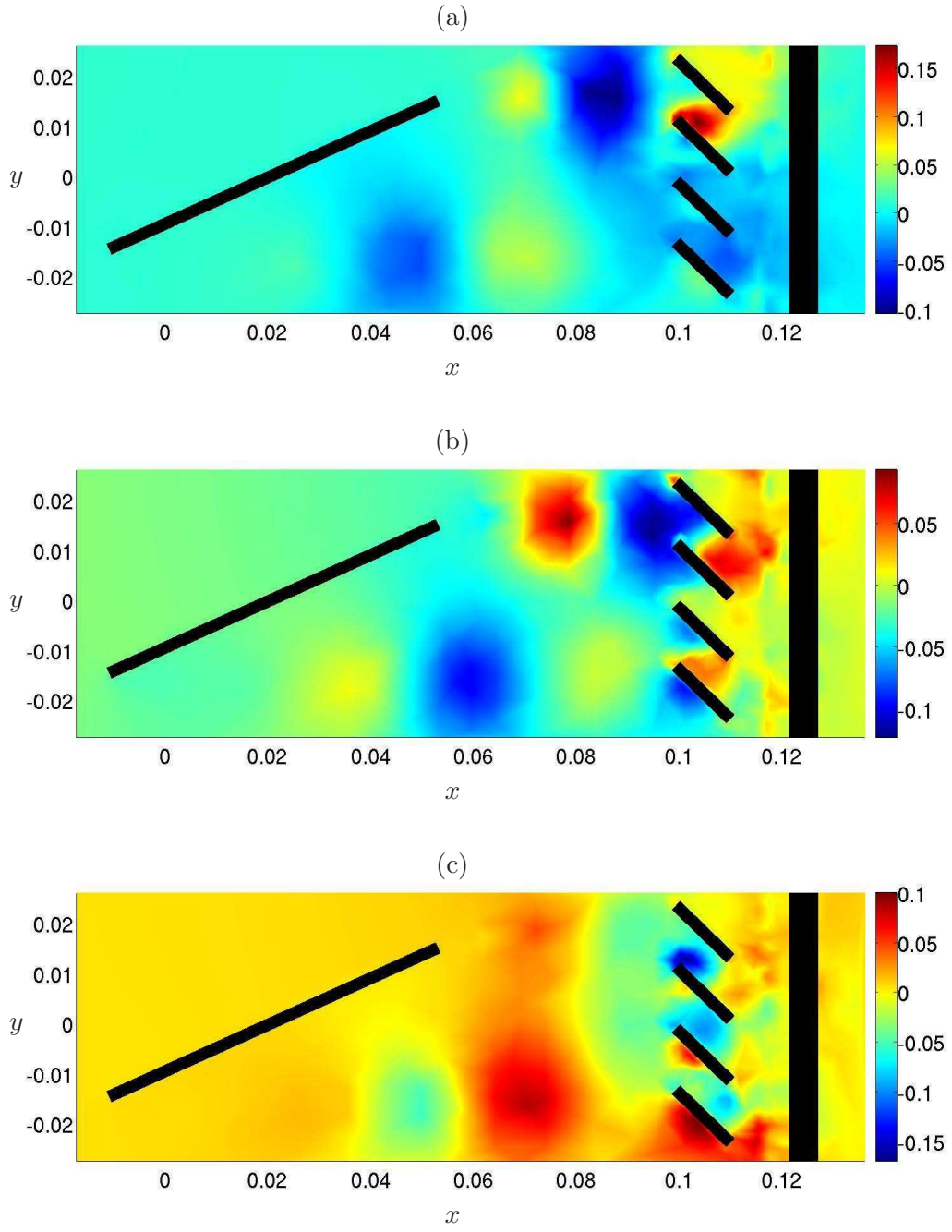

FIG. 4.54 – Les trois premiers modes POD de champ de pression : (a) - (c) = mode 1 - mode 3

En suivant la démarche détaillée dans la partie § 4.2.5 on vérifie d'abord la fiabilité statistique des modes POD. Comme il a été démontré dans les parties § 4.2.5.1 et 4.2.5.2 pour la base de données disponible, les modes sont plus sensibles à la durée temporelle qu'à la résolution spatiale. L'analyse de convergence n'est donc mise en place que pour les différentes durées temporelles et l'effet de la résolution spatiale n'est pas vérifié. La sensibilité des modes à la durée temporelle est évaluée par la valeur absolue du coefficient de corrélation et représentée pour quelques modes sur la figure 4.55. On observe que seuls les trois premiers modes peuvent être considérés comme convergés. Une divergence remarquable se produit à partir de quatrième mode. Comme il a été conclu dans la partie § 4.2 une application faisant appel à l'emploi indépendant des modes (comme l'EPOD) ne peut être basée que sur les modes convergés. Ainsi, seuls les trois premiers

modes sont retenus pour être utilisés dans la démarche EPOD. Après avoir identifié les modes

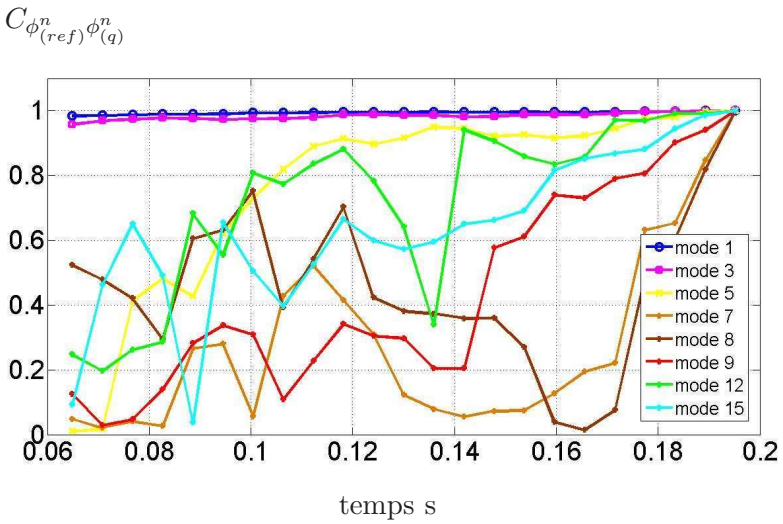

FIG. 4.55 – La valeur absolue du coefficient de corrélation évaluée entre le mode numéro n de la base de données de référence et le mode numéro n issu des autres bases de données

POD convergés et en considérant le signal de pression acoustique en champ lointain, on calcule les modes étendus associés aux trois premiers modes POD. Une nouvelle fois, il est nécessaire de vérifier la convergence statistique des modes étendus. Cette dernière est vérifiée selon la démarche détaillée dans la partie § 4.2.4. On calcule la fonction de cohérence entre la pression acoustique et les vecteurs propres Snapshot. Le résultat est présenté sur la figure 4.56. L'évaluation de la fonction de cohérence montre que parmi les trois modes étendus, seuls les deux premiers peuvent être exploités de manière statistiquement fiable. Pour une vérification supplémentaire de la convergence des modes étendus, la valeur absolue du coefficient de corrélation en fonction du temps de retard est évaluée entre les vecteurs propres Snapshot et la pression acoustique. Le résultat obtenu, qui n'est pas présenté ici, est conforme à celui de l'analyse avec la fonction de cohérence et confirme que seuls les deux premiers modes étendus sont exploitables.

Il est maintenant possible d'admettre que la pression acoustique est certainement corrélée avec la projection du champ de pression sur les deux premiers modes POD.

Pour connaître la part corrélée de la pression acoustique avec le champ de pression, en suivant la même procédure que dans la partie § 4.2.4.3, on identifie d'abord le temps de retard pour lequel la pression acoustique est mieux corrélée avec le champ de pression décrit par la combinaison des deux premiers modes POD. Ce temps de retard (figure 4.57) correspond à $\tau = 0.0017$ s. Il représente le temps pris par les ondes acoustiques pour parcourir une distance de 58 cm. Ayant déterminé le temps de retard optimal, on reconstruit le signal de pression acoustique retardé. Finalement, on compare le spectre de ce signal avec celui du signal original. Comme on peut l'observer sur la figure 4.58, le premier pic fréquentiel du spectre de pression acoustique est corrélé avec la projection de champ de pression sur les deux premiers modes.

La dernière étape sera de reconstruire le champ de pression avec les deux premiers modes POD afin d'identifier les évènements aérodynamiques représentés par ces deux modes. Sur la figure 4.59, la valeur *rms* du champ de pression décrit par les deux premiers modes POD est représentée. Sur cette cartographie on retrouve les deux couches de cisaillement du clapet ainsi que la zone d'impact de la couche supérieure sur la deuxième ailette horizontale. En premier lieu, on note qu'il est tout à fait normal de retrouver les mêmes évènements présentés par la valeur *rms* de champ de pression (figure 4.53) sur la cartographie de la valeur *rms* de champ reconstruit par les deux premiers modes. On rappelle que la POD est une décomposition optimale d'un point

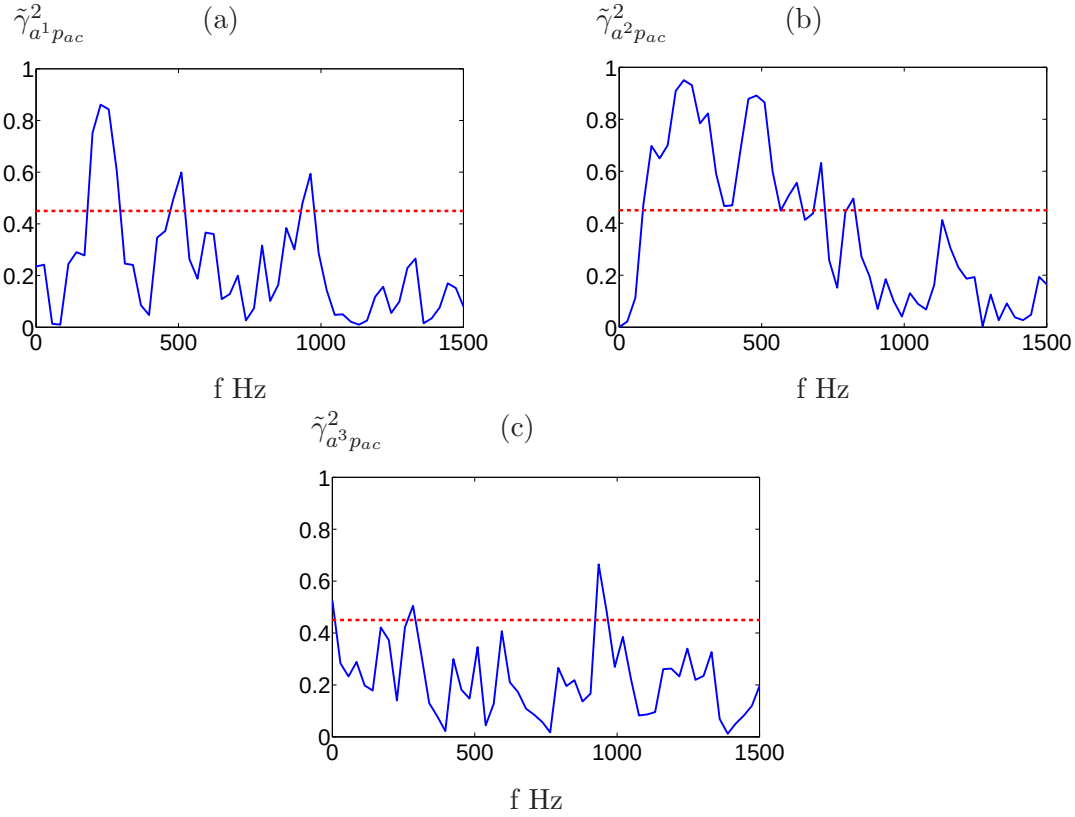

FIG. 4.56 – Fonction de cohérence évaluée entre le signal de pression acoustique et les vecteurs propres Snapshot numéro : (a) - (f) = 1 - 3

de vue énergétique. Cependant, on peut remarquer certaines différences entre les deux images. En particulier les zones de haut niveau entre les deux rangées d'ailettes présentes sur la cartographie de la valeur rms du champ total ne sont plus présentes sur celle du champ reconstruit avec les deux premiers modes. L'absence de ces évènements peut être liée à leur caractère moins cohérent, associé à des tailles caractéristiques de structures plus petites. Ces évènements sont représentés par les modes d'ordre supérieur qui ne sont malheureusement pas statistiquement exploitables et qui sont probablement corrélés avec les fluctuations plus haute fréquence de la pression acoustique.

En conclusion, l'application de l'EPOD sur ce cas permet d'évaluer la corrélation entre la pression acoustique et le champ de pression présenté avec certains modes POD. Cette démarche (telle qu'elle a été suivie avec la sélection rigoureuse des modes POD et EPOD convergés) est bien différente d'une corrélation directe entre le signal de pression et le champ total et la comparaison entre ces deux approches doit donc être faite avec précaution. En effet, dans la démarche EPOD le champ de pression est d'abord soumis à une opération de filtrage. Ce filtrage qui consiste à trier les évènements aérodynamiques"énergétiques" et "cohérents". La corrélation est ensuite évaluée à l'aide des modes étendus convergés. Cette démarche est donc préférable à la corrélation directe avec le champ total dans le sens où :

- il est possible d'extraire les évènements aérodynamiques remarquables qui sont à la fois les plus énergétiques et cohérents dans le champ aérodynamique, mais qui contribuent aussi réellement au champ rayonné
- même si la procédure de vérification de la convergence des modes EPOD peut être appliquée à une corrélation temporelle directe, le fait de réaliser cette vérification mode par mode permet d'obtenir un résultat plus fiable. En effet, une corrélation directe entre le champ total

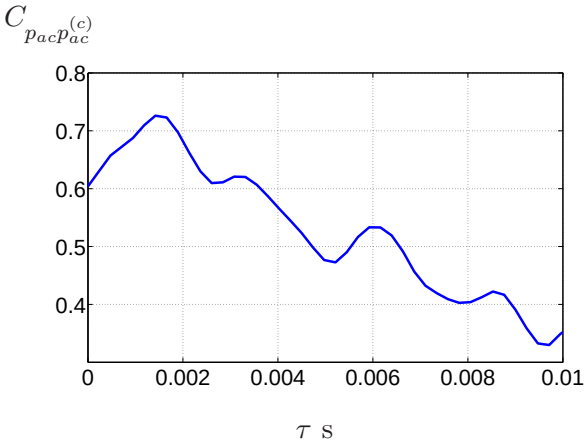

FIG. 4.57 – Valeur absolue de coefficient de corrélation évalué entre le signal de pression acoustique et sa partie reconstruite avec les deux premiers modes étendus en fonction de différents temps de retard

et le signal acoustique peut apparaître comme convergée car le calcul fait ressortir une composante énergétique basse fréquence (le pic à 240Hz dans notre cas). Mais la cartographie complète de la corrélation mettra en évidence l'ensemble des informatiques de corrélation, sans distinguer les informations fiables et celles qui ne le sont pas.

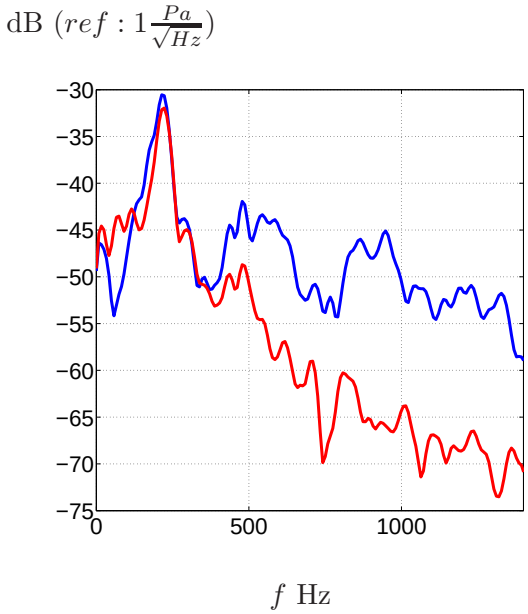

FIG. 4.58 – Densité spectrale de puissance de signal de pression acoustique : (–) signal original (–) signal reconstruit avec les deux premiers modes étendus retardés

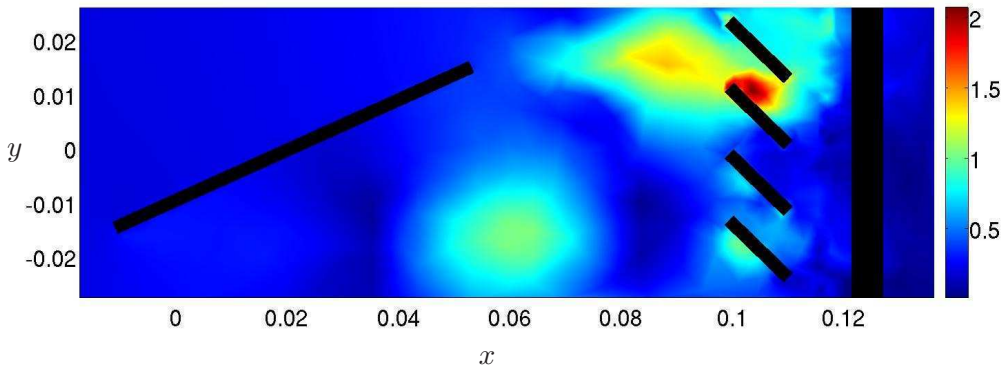

FIG. 4.59 – Valeur rms de la pression reconstruite par les 2 premiers modes POD

4.5 Rayonnement aéroacoustique de l'écoulement autour d'un retroviseur

Dans cette partie on s'intéresse à une des sources importantes potentiellement contributrice au bruit dans l'habitacle, la source "rétroviseur". La forme du rétroviseur engendre un sillage très important dans lequel la génération des ondes acoustiques peut être localisée [2]. La position du rétroviseur par rapport à la vitre latérale implique que cette dernière soit inclue en partie dans son sillage. En conséquence, la composante turbulente de l'excitation issue du rétroviseur est également importante sur la vitre latérale. Le dernier point qui contribue à l'importance de cette source est la position très proche des points "oreille conducteur" par rapport à la vitre latérale qui est impactée par les deux composantes acoustique et turbulente de cette source.

Au-delà du problème aéroacoustique et des fluctuations de pression sur la paroi, le rétroviseur est une source de vibration (couplage vibratoire entre la structure du rétroviseur et l'écoulement turbulent) et pourrait engendrer des bruits parasite par la voie solidienne [123]. Cette dernière contribution n'est pas du tout examinée dans ce travail.

4.5.1 Présentation de la simulation numérique et objectifs de l'analyse

Le cas d'étude concerne un véhicule de type Modus qu'on peut actuellement rencontrer sur les routes de France et d'Europe. La simulation réalisée avec PowerFLOW est effectuée à échelle réelle (échelle 1). Les paramètres utilisés pour la mise en place de la simulation numérique sont ceux employés dans une étude antérieure [2] visant à étudier la contribution acoustique du rétroviseur par une méthode basée sur la formation des voix (Beamforming). Les signaux de pression ont été enregistrés par une antenne 2D positionnée en parallèle du véhicule, coté conducteur (voir la figure 4.60). La position de plan de l'antenne, a été choisie de manière à être en dehors de l'écoulement turbulent afin de ne mesurer que les fluctuations de pression acoustique.

La technique de formation de voie permet de déterminer sur un plan de focalisation (un plan source), des sources monopolaires équivalentes qui génèrent les signaux mesurés sur l'antenne. En combinant la technique classique avec un algorithme de nettoyage (algorithme CLEAN [124]) et en intégrant sur des zones spatiales les niveaux des sources monopolaires ponctuelles, on peut déterminer le niveau acoustique réel des sources acoustiques dans cette zone. Cette procédure a été appliquée à la fois pour les résultats issus des mesures en soufflerie S2A et pour les données issues des simulations numériques. La figure 4.61 montre que l'on obtient une bonne corrélation entre 400 et 2000 Hz.

Les résultats de simulation approchent (jusqu'à 2000 Hz) de manière très satisfaisante ceux issus des mesures (voir la figure 4.61). Cela garantit la représentativité physique de la simulation numérique dans la région étudiée.

Les détails complets du maillage et la mise en place de la soufflerie numérique ne seront pas communiqués pour des raisons de confidentialité. Toutefois, on peut noter que cette simulation est constituée de 53 millions mailles volumiques avec le maximum de concentration autour du rétroviseur. La région autour de rétroviseur allant de la vitre latérale jusqu'à l'antenne possède également une résolution élevée du maillage. Ceci est effectué pour une meilleure prise en compte des événements générateurs des fluctuations de pression acoustique et pour assurer la bonne propagation des ondes acoustique jusqu'à l'antenne. Le nombre de Reynolds correspond à 4.2×10^6 à l'entrée de la soufflerie. Il est calculé avec une viscosité de l'air $\nu = 1.49 \times 10^{-5}$ m^2/s et une longueur caractéristique L=1.4 m qui correspond à la diagonale de section de l'entrée et la vitesse de l'écoulement d'air d'entrée est de 162 km/h (45 m/s). Sur la figure 4.62 une image de l'amplitude du champ de vitesse instantané dans le plan de symétrie de véhicule est représentée. Le pas de temps entre deux itérations successives (pour la zone la plus résolue) correspond à $8.23\times$

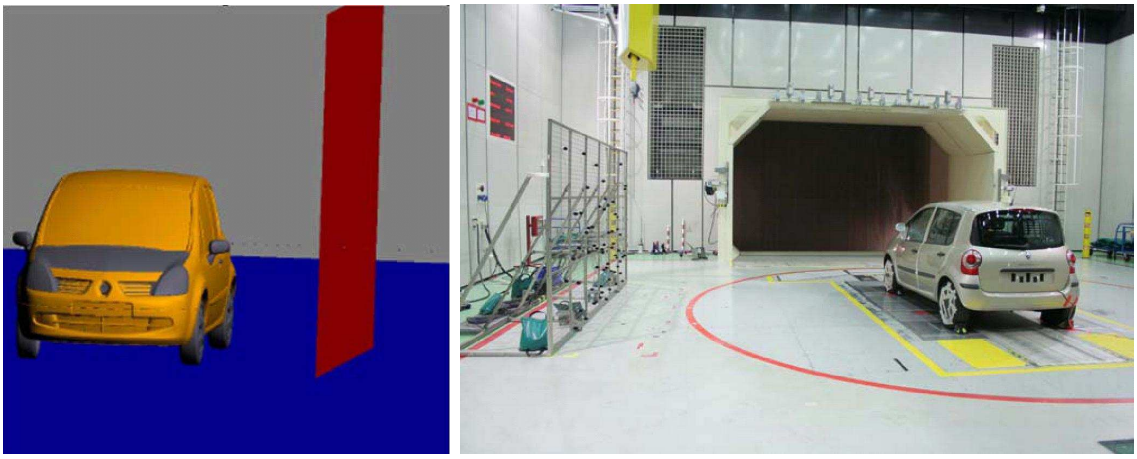

FIG. 4.60 – Antennerie par la formation des voix : à gauche simulation numérique, à droite donnée expérimentale

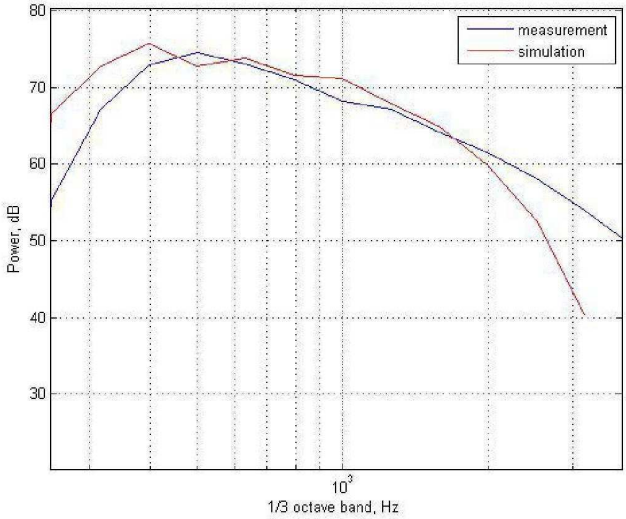

FIG. 4.61 – Comparaison mesure/simulation numérique du spectre de pression acoustique rayonnée de "source rétroviseur" obtenu par la formation des voix

10^{-7} s. En retranchant les premières itérations nécessaires pour l'établissement de l'écoulement, 2.4×10^5 itérations représentant l'état bien établi de l'écoulement sont disponibles. Ce nombre d'itérations correspond à une durée physique de 0.198 s.

Dans cette étude, on s'intéresse à l'analyse des évènements aérodynamiques autour du rétroviseur qui sont en relation avec le champ de pression acoustique rayonné. On suit les mêmes analyses que celles conduites pour l'étude du rayonnement acoustique de l'aérateur. Tout d'abord, on s'intéresse à l'efficacité de la pression dans la région source à représenter les évènements responsables de la production sonore. Cette analyse est menée par une comparaison avec les différentes versions du tenseur de Lighthill et, également, en calculant la corrélation de ces deux grandeurs avec le champ de pression acoustique rayonné. Dans un deuxième temps, en décomposant le champ de pression totale par la POD, l'outil EPOD est employé afin de vérifier la corrélation existante entre les modes POD de l'écoulement et la pression acoustique.

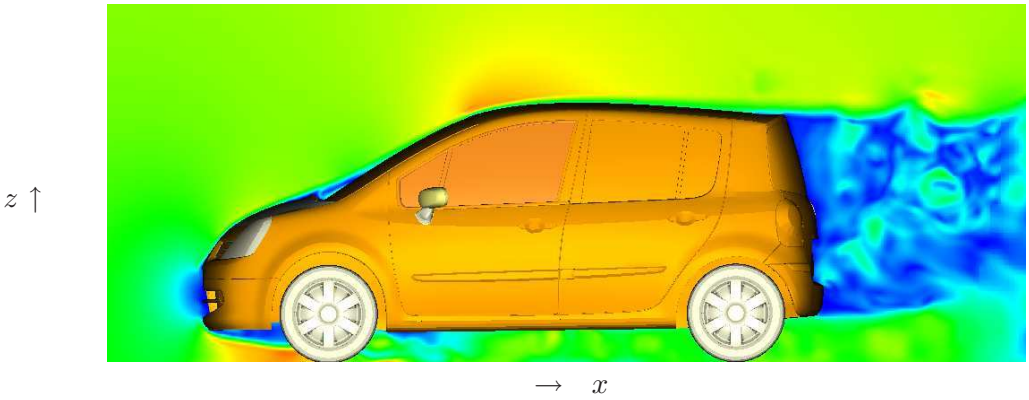

FIG. 4.62 – Image instantanée du module du champ de vitesse dans le plan de symétrie du véhicule

4.5.2 Zones d'étude, caractéristiques des signaux enregistrés

Les limitations en termes de ressource informatique pour le stockage et le post-traitement des données ont restreint l'étendue des régions d'études des évènements aérodynamiques.

Pour le calcul des termes de Lighthill, un volume de mesure au niveau de la couche de mélange supérieure de rétroviseur est considéré (voir la figure 4.63). L'ensemble des variables physiques (vitesse, pression, densité) sont enregistrées en tous les points de maillage situés dans ce volume et toutes les 20 itérations. Nous avons également choisi plusieurs plans 2D (voir la figure 4.64)

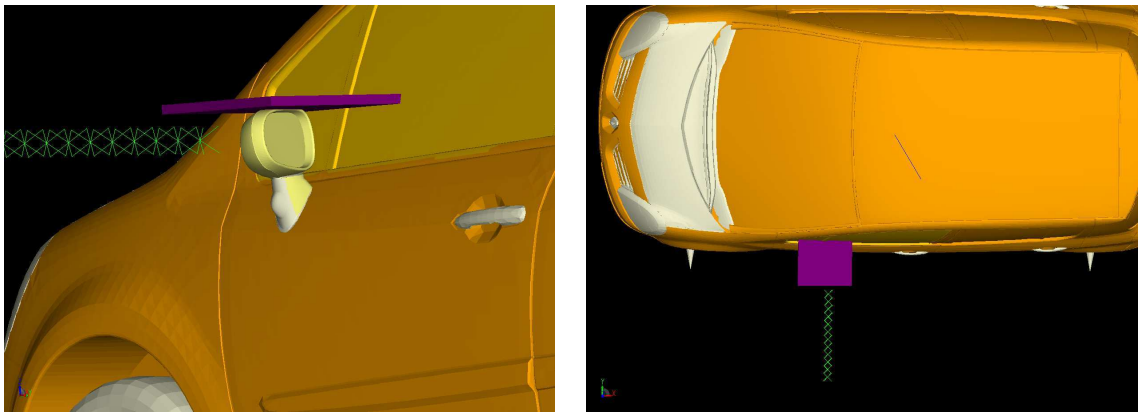

FIG. 4.63 – La position du volume de mesure des variables physiques

dans lesquels seule la pression est enregistrée. On précise que ces plans et ce volume de mesure ne sont pas des frontières solides (objets solides) et ils sont simplement considérés de manière virtuelle pour déterminer la zone d'enregistrement des variables de l'écoulement. La pression est également sondée en des points situés sur une ligne qui s'éloigne du véhicule dans la direction perpendiculaire à la vitre latérale. Ces capteurs sont montrés sur la figure 4.63 à l'aide de croix vertes. La mise place d'une telle configuration de capteurs a été motivée pour accéder au point le plus proche au véhicule qui ne contient que des fluctuations de pression acoustique (absence des fluctuations de pression turbulente).

La fréquence d'enregistrement pour tous les signaux correspond à 60 kHz. Au vu de la représentativité physique de la simulation jusqu'à 2 kHz l'ensemble des signaux sont filtrés à 2 kHz. Ce filtrage fréquentiel est effectué afin de réduire des fluctuations parasites et améliorer la qualité des corrélations dans le domaine temporel. Avec le filtrage effectué, il est inutile de garder tous les échantillons car une fréquence d'échantillonnage de 4 kHz suffit pour respecter le

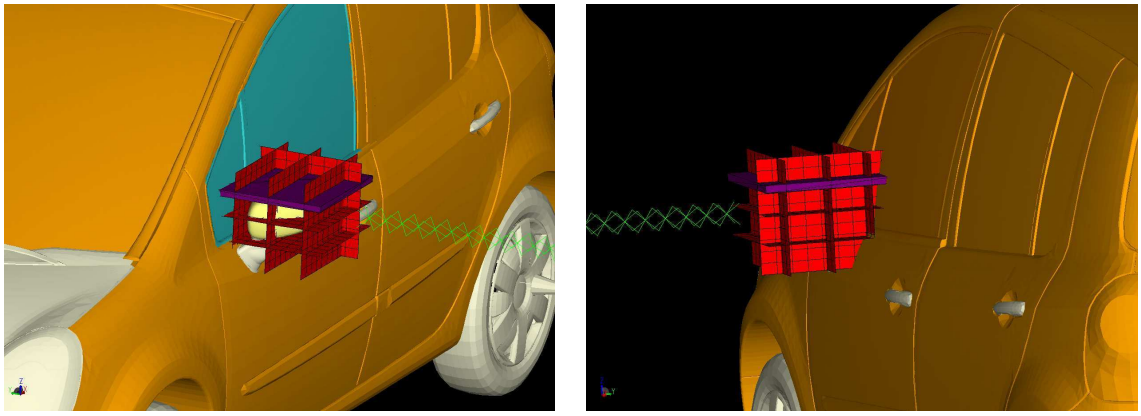

FIG. 4.64 – La position des plans de mesure de la pression

critère de Shannon. Tous les signaux sont donc sous-échantillonnés et, au final, les signaux sont constitués de 1000 échantillons temporels avec une fréquence d'échantillonnage de $f_s = 5$ kHz.

4.5.3 Détection des fluctuations de pression acoustique

Entre les signaux de pression sondés aux points situés sur la ligne s'éloignant du véhicule (les croix vertes sur la figure 4.63) une analyse de phase est mise en place. Cette analyse vise à déterminer le premier point où les fluctuations de pression turbulentes sont absentes. Plus précisément la phase relative entre les signaux de pression mesurés en deux points voisins est calculée. Cette différence de phase est ensuite comparée à la différence de phase liée au passage d'une onde plane acoustique, provenant du plan latéral du véhicule. Pour calculer la phase relative, on calcule la densité interspectrale de puissance entre les points $\mathbf{x}_m$ et $\mathbf{x}_n$:

$$E[\tilde{p}^{(l)}(\mathbf{x}_n, f)\tilde{p}^{*(l)}(\mathbf{x}_m, f)] = E[\left|\tilde{p}_n^{(l)}\right| e^{i\phi_n^{(l)}} \left|\tilde{p}_m^{*(l)}\right| e^{i\phi_m^{(l)}}];$$

$$\tilde{\Delta\phi}_{mn} = E[\phi_n^{(l)} - \phi_m^{(l)}];$$

où,$E[\ ]$ représente la moyenne d'ensemble menée sur les blocs FFT indiqués par (l). Un nombre total de 7 blocs FFT contenant chacun 256 échantillons temporels avec un taux de recouvrement de 50% est considéré. Chaque bloc représente 0.05 s de temps physique.

Cette valeur de phase est ensuite comparée à la phase relative associée à une onde plane qui se propage dans la direction y, la direction perpendiculaire au côté latéral du véhicule :

$$\tilde{\Delta\phi}_{mn} = k_y.(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m) = \frac{2\pi f(y_n - y_m)}{c_s}$$

Sur la figure 4.65 la phase relative est tracée pour les deux points situés successivement à 45 et 50 cm de véhicule. Sur la même figure la phase théorique pour une vitesse de propagation de $c_s = 340$ m/s est également tracée. La phase relative entre ces deux points confirme bien la propagation des ondes acoustiques jusqu'à environ 2 kHz. Pour les fréquences supérieures la phase est beaucoup trop confuse pour qu'une conclusion puisse être donnée.

4.5.4 Comparaison pression / tenseur de Lighthill

Dans cette partie la pression et le tenseur de Lighthill dans la région détaillée sur la figure 4.63 sont comparés. On note que l'étude est limitée à un plan 2D situé au milieu du volume. Dans ce plan, 855 points parmi tous les points disponibles, sont sélectionnés (voir la figure 4.66).

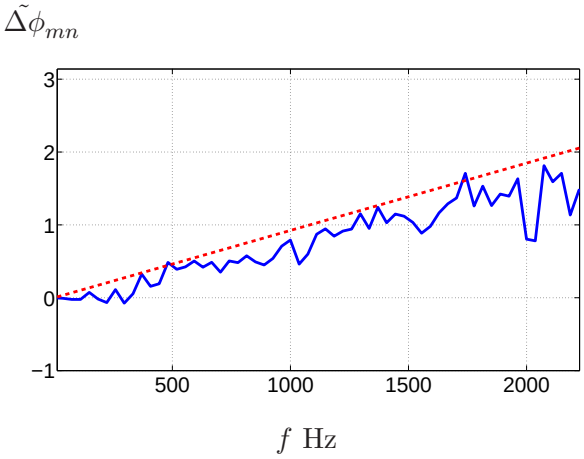

FIG. 4.65 – Phase relative entre les fluctuations de pression aux deux points situés successivement le long de l'axe des y et séparés de 5 cm : (- - -) onde plane se propageant dans la direction de y, (—) la pression issue de la simulation numérique

On rappelle que pour déterminer les termes de Lighthill en chacun de ces 855 points, les voisins immédiats disponibles sur le maillage original (maillage utilisé pour la simulation de l'écoulement) sont utilisés. Ce qui explique la nécessité de sauvegarder les variables dans le volume de mesure.

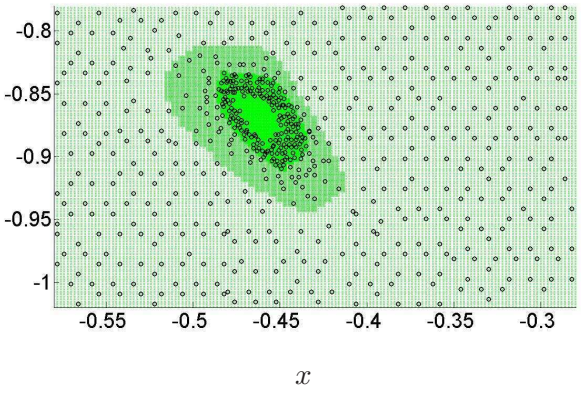

FIG. 4.66 – Maillage de calcul (×), Les points utilisés pour le post-traitement (•)

La figure 4.67 représente la valeur rms de tenseur de Lighthill. Cette cartographie possède une valeur maximale au niveau d'affleurement du plan de mesure et le rétroviseur. Cette zone correspond à l'extrémité haute de rétroviseur où l'écoulement d'air s'enroule et génère un fort niveau de vorticité.

Le coefficient de corrélation entre le tenseur de Lighthill et la pression acoustique rayonnée est ensuite évaluée. Le résultat pour un temps de retard égal zéro est représenté sur la figure 4.68. Sur cette figure la valeur rms de ce coefficient intégrée sur les temps de retard allant de zéro jusqu'à 0.08 s est également représentée. Comme on peut observer sur la figure 4.68 le niveau de corrélation obtenu n'est pas très élevé. La cartographie de valeur rms de coefficient de corrélation représente une région de haute corrélation avec la pression acoustique dans le coin en bas à gauche de la figure. Comme on le verra plus tard (figure 4.70) dans cette région les fluctuations turbulentes sont absentes et la majorité des fluctuations sont de nature acoustique. Cela veut dire que les termes de Lighthill ne permettent pas de filtrer totalement les fluctuations de pression acoustique.

Même si les résultats ne sont pas présentés ici, on peut noter que la prise en compte de la valeur locale instantanée ou une valeur uniforme et invariante en temps pour la densité ($\rho = constante$)

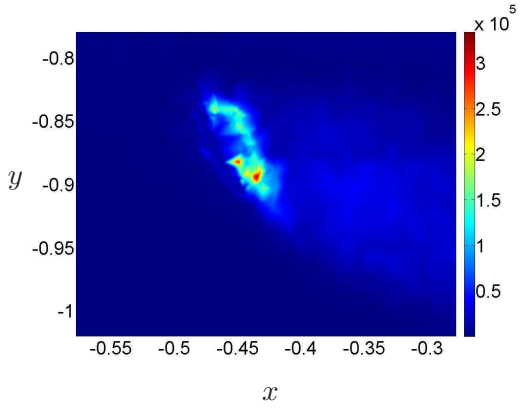

FIG. 4.67 – La valeur *rms* de tenseur de Lighthill

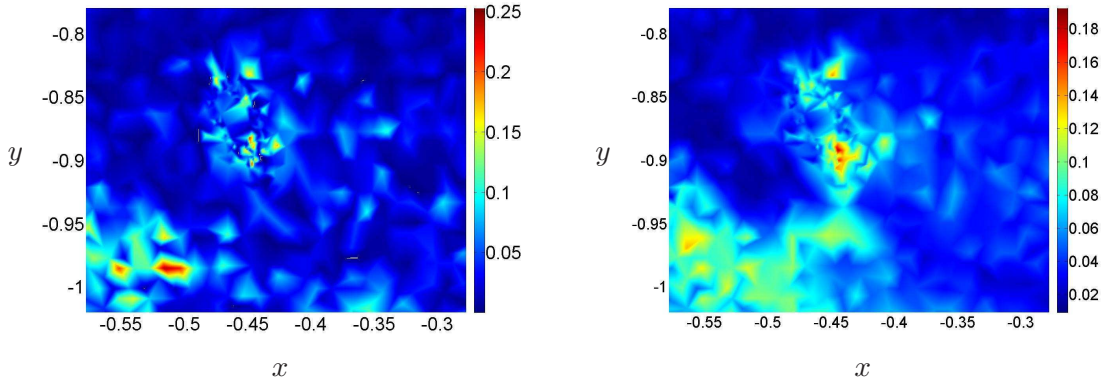

FIG. 4.68 – A gauche : Valeur absolue du coefficient de corrélation évaluée au temps de retard zéro entre la pression acoustique et le tenseur de Lighthill. A droite : Valeur *rms* du coefficient de corrélation entre la pression acoustique et le tenseur de Lighthill

n'a pas un effet notable sur les variations du tenseur de Lighthill.

Dans la suite on s'intéresse à la pression pour identifier les évènements aérodynamiques corrélés avec la production sonore. D'abord, on compare la pression et le tenseur de Lighthill dans la région source. La valeur *rms* de pression est représentée sur la figure 4.69 (à gauche). La répartition énergétique de la pression avec une forte concentration dans le sillage reste assez différente de celle du tenseur de Lighthill (où le niveau maximum est au niveau d'affleurement du plan de mesure avec le haut du rétroviseur). Les cartographies de la valeur *rms* permettent d'obtenir une idée sur les zones où les fluctuations les plus énergétiques sont présentes. Pour connaître la corrélation entre les deux variables, la valeur absolue du coefficient de corrélation est présentée sur la figure 4.69 (à droite). Sur cette cartographie on retrouve un bon niveau de corrélation entre la pression et le tenseur de Lighthill dans la région d'affleurement du plan de mesure avec le haut de rétroviseur. Cela montre que la pression suit les mêmes variations en temps que le tenseur de Lighthill dans cette région. On observe également une région (une tâche) entre $-0.5 < x < -0.45$ et $-1 < y < -0.95$ où le tenseur de Lighthill et la pression représentent un niveau élevé de corrélation. L'interprétation de cette tâche est plus délicate, elle pourrait probablement correspondre à une zone de faible activité turbulente où les fluctuations sont plutôt de nature acoustique. Pour finaliser la question de l'efficacité de la pression à représenter les évènements corrélés avec les ondes sonores, la valeur absolue du coefficient de corrélation est évaluée entre la pression acoustique et la pression dans le plan de mesure. Le résultat pour le temps

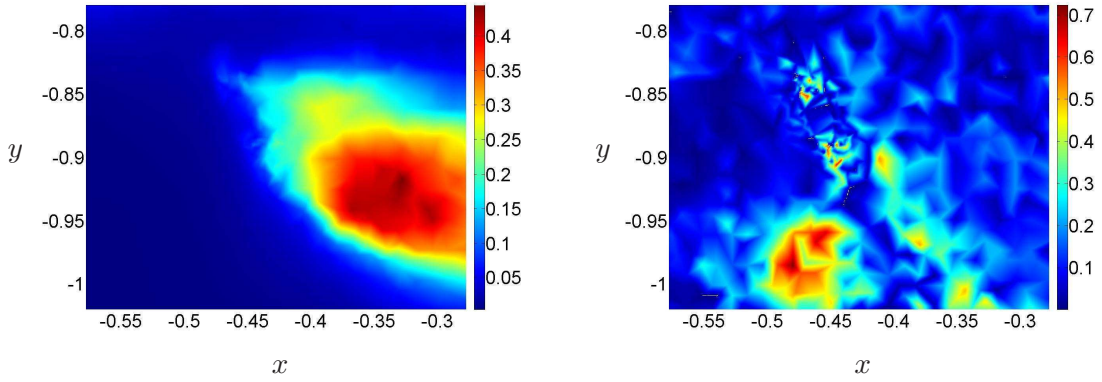

FIG. 4.69 – A gauche : Valeur *rms* de pression. A droite : la valeur absolue du coefficient de corrélation évalué entre la pression et la version totale de tenseur de Lighthill

de retard égal à zéro est représenté sur la figure 4.70 (à gauche). La valeur *rms* de ce coefficient intégrée sur les temps de retard allant de zéro jusqu'à 0.08 s est représentée sur la figure 4.70 (à droite). D'abord on remarque le niveau très élevé de corrélation dans le coin en bas à gauche de la

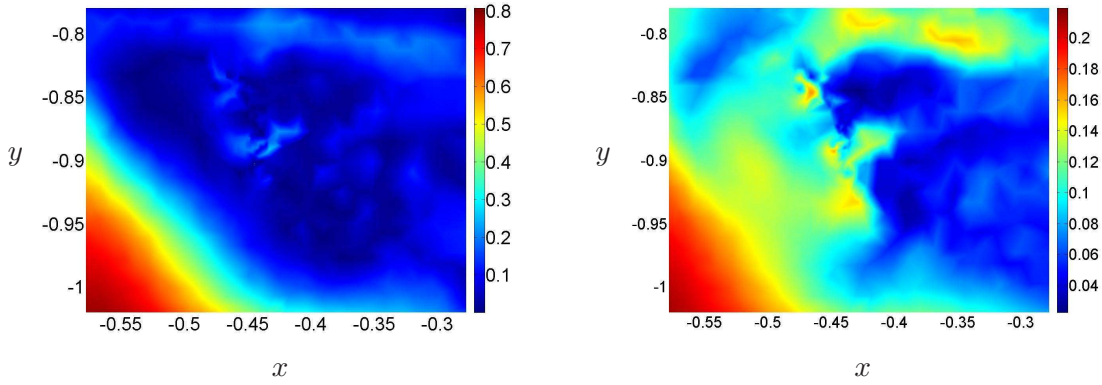

FIG. 4.70 – Coefficient de corrélation évalué entre la pression sur le plan de mesure et la pression acoustique : (à gauche) la valeur absolue pour le temps de retard égale zéro, (à droite) la valeur *rms* intégrée entre le temps de retard égale zéro et 0.08 s

cartographie de valeur absolue. Cette région met en évidence la nature purement acoustique des fluctuations de pression existante dans cette région. En effet dans cette région ce sont les même informations (la pression acoustique rayonnée par le rétroviseur) qui sont corrélées. Au niveau de l'affleurement du plan de mesure avec le haut de rétroviseur on retrouve également un niveau relativement élevé de corrélation. Dans cette zone les fluctuations turbulentes de l'écoulement ne sont pas absentes et il est possible de les considérer comme impliquées dans la production sonore. A la différence du tenseur de Lighthill, on observe une région de haute corrélation proche de la vitre latérale. L'interprétation de cette observation est très délicate. Une justification possible pourrait être donnée par le fait que probablement cette région pourrait contenir des fluctuations turbulentes moins importantes. Comme les ondes acoustiques une fois générées se propagent dans toutes les directions, on peut imaginer que dans cette zone les fluctuations acoustiques ne sont pas noyées dans la turbulence. De cette manière la qualité de corrélation est améliorée et on observe un niveau de corrélation plus élevé.

4.6 Analyse des sources “retroviseur” par l’outil EPOD

Dans cette partie la mise en place de l’analyse EPOD est proposée. Nous essayons de trouver le lien entre les évènements aérodynamiques décrits par la pression sur les plans présentés sur la figure 4.64 et la pression acoustique en champ lointain. Sur chaque plan le champ de pression est décomposé en une série de modes POD. Les modes étendus associés à ces modes POD sont ensuite calculés. Malheureusement, après avoir tester tous les plans disponibles, le critère de convergence des modes étendus (défini dans la partie § 4.2.4) n’est satisfait que pour un seul plan 2D. On ne présente donc les résultats d’analyse que sur ce plan, à savoir le plan parallèle à la vitre latérale et le plus proche au véhicule (figure 4.64). La figure 4.71 représente la cartographie de la valeur *rms* de champ de pression sur ce plan. On observe un niveau élevé des fluctuations de pression dans le

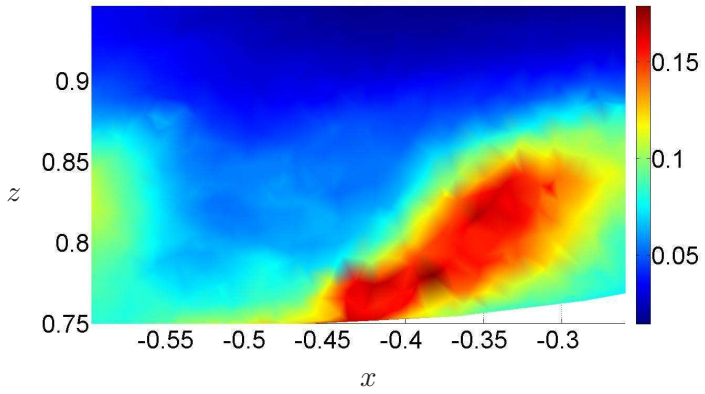

FIG. 4.71 – Valeur *rms* de champ de pression

sillage du pied du rétroviseur. L’interprétation de l’orientation montante de cette tâche est assez compliquée et nécessite une analyse approfondie de la topologie de l’écoulement qui ne fait pas l’objet de nos travaux de thèse. Cependant cela démontre bien l’importance de l’écoulement en aval et son influence sur la forme et l’orientation du sillage.
Le champ de pression étant constitué de 990 points spatiaux et 1000 échantillons temporels, la formulation classique de la POD est utilisée. Sur la figure 4.72 les deux premiers modes sont présentés. En suivant la procédure présentée dans la partie 4.2.5, la convergence des premiers

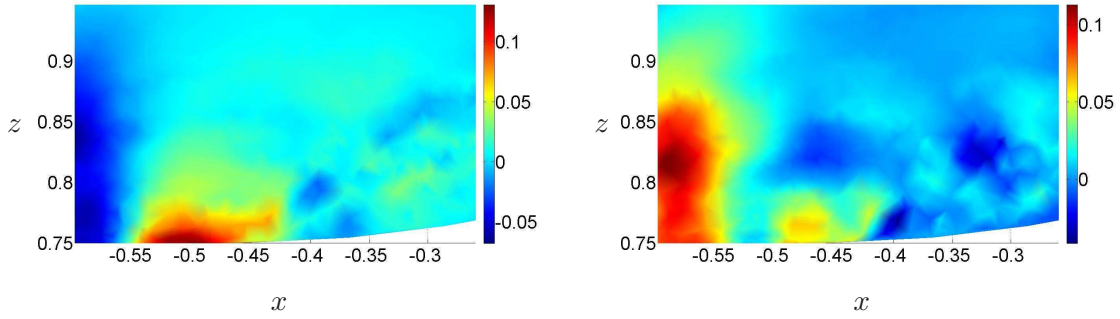

FIG. 4.72 – Deux premiers modes POD du champ de pression (de gauche à droite)

modes POD est d’abord étudiée. Sur la figure 4.73 la valeur absolue du coefficient de corrélation évalué entre le mode n issu du domaine de référence (la résolution spatiale et la durée temporelle

maximum disponible) et le mode n issu des domaines plus courts est représentée pour les cinq premiers modes. Sur cette figure on observe que les trois premiers modes peuvent être considérés

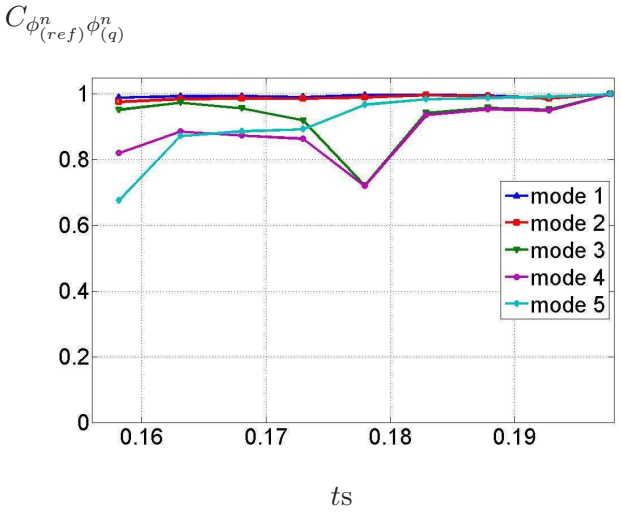

FIG. 4.73 – Valeur absolue du coefficient de corrélation évalué entre le mode numéro n du domaine de référence (la durée temporelle maximum disponible) et le mode numéro n issu des domaines ayant une durée plus courte.

comme statistiquement convergés pour la durée temporelle disponible. L'analyse de convergence des modes en fonction de la résolution spatiale du domaine (qui n'est pas présentée) conduit également à la même conclusion. Les trois premiers modes peuvent être considérés comme statistiquement convergés pour la résolution spatiale disponible. On note toutefois que comme dans le cas d'aérateur les modes sont plus sensibles à la durée temporelle qu'à la résolution spatiale.

A l'aide du signal de pression acoustique, les modes étendus associés aux modes POD sont calculés. En suivant la procédure définie dans la partie 4.2.4 la convergences statistique des modes étendus est étudiée. Sur la Figure 4.74 la fonction de cohérence évaluée entre le signal de pression acoustique et les coefficients temporels de projection (pour les deux premiers modes) est représentée. Le critère de convergence n'est "satisfait" que pour les deux premiers modes étendus (pour une plage limitée de fréquences).

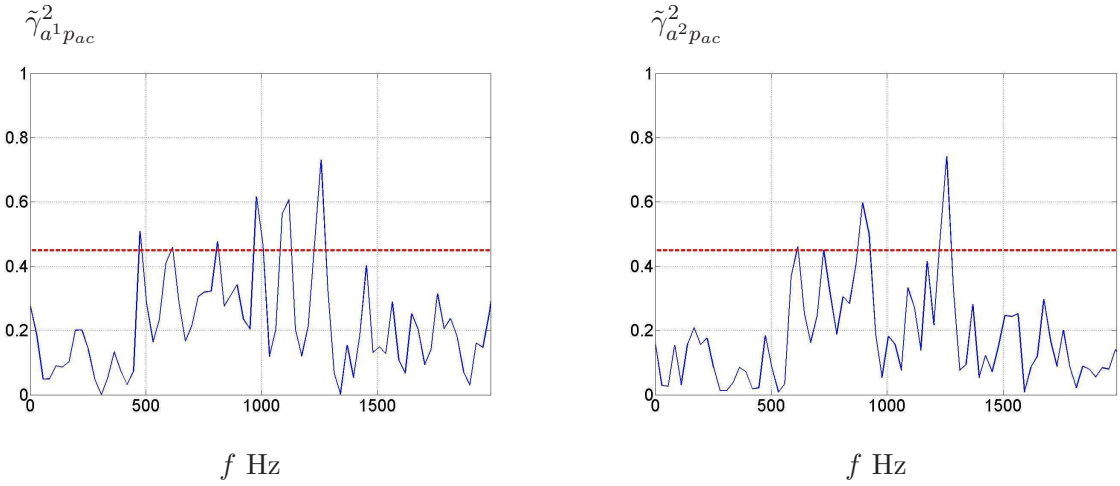

FIG. 4.74 – Fonction de cohérence évaluée entre le signal de pression acoustique et les coefficients de projection des modes numéro 1 (à gauche) et 2 (à droite)

Prenant en compte un temps de retard pour le signal de pression, sa partie (certainement) corrélée avec le champ de pression sur le plan d'étude ne peut être reconstruite qu'avec les deux premiers modes. En utilisant les deux premiers modes étendus la partie corrélée de la pression acoustique avec le champ de pression fluctuante est calculée. Sur le figure 4.75 le spectre de cette partie corrélée pour le temps de retard optimal est comparé à celui du signal de pression acoustique originale.

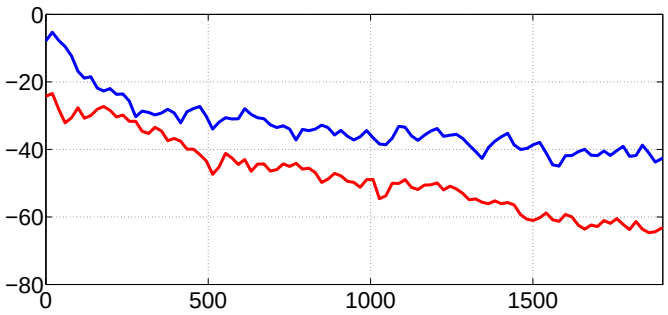

FIG. 4.75 – Densité spectrale de puissance du signal de pression acoustique (−) signal original (−) signal reconstruit à l'aide des deux premiers modes étendus retardés

Aucune partie du spectre de signal original n'est bien représentée par le signal reconstruit avec les deux premiers modes. Cette observation se traduit par le fait qu'avec la durée temporelle disponible aucune corrélation remarquable ne peut être obtenue entre le champ de pression fluctuante dans le plan 2D choisi et la pression acoustique en champ lointain. Il est alors possible qu'avec une durée plus longue certaines parties du spectre soient reconstruites. La durée plus longue des signaux permet de décrire les fluctuations de pression dans la zone source par les modes POD de manière plus précise. Autrement dit un nombre plus élevé de modes POD convergés sera obtenu. La description précise des petites échelles dans la zone source est surtout importante car les fluctuations de pression acoustique (dans le cas présent) possèdent un spectre large bande et elles sont potentiellement générées par les structures de petites tailles. Les deux premiers modes (la valeur rms du champ de pression reconstruit avec les deux modes POD est représentée sur la figure 4.76) ne suffisent peut-être pas pour représenter toutes les échelles impliqués dans l'émission sonore.

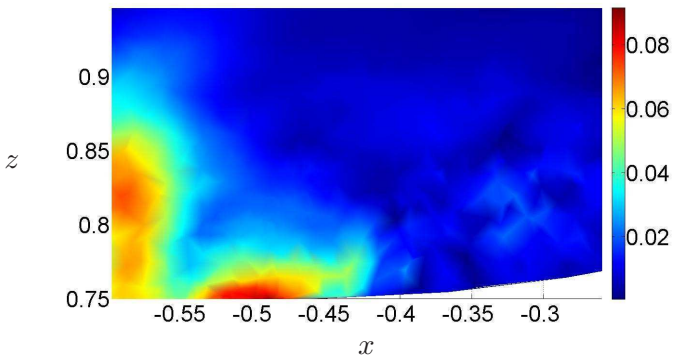

FIG. 4.76 – Valeur *rms* de champ de pression reconstruit avec les deux premiers modes POD

L'autre conséquence d'une durée de signal plus longue serait la convergence de plus de modes étendus sous réserve de l'existence d'une corrélation physique entre les deux phénomènes.

Dans le cadre des deux applications précédentes (en tenant compte de la durée courte des

signaux disponibles), il ainsi été montré que l’EPOD permet d’obtenir une analyse physique des sources seulement dans le cas d’une émergence d’un signal assez cohérent comme dans le cas de sifflement de l’aérateur. La mise en œuvre de l’EPOD à partir des données numériques du cas test “rétroviseur” a mis en évidence la difficulté d’une telle analyse en présence d’un spectre acoustique large bande.

Chapitre 5

Détection de sources rayonnées à l'intérieur du véhicule

Dans la partie précédente, nous avons tenté d'identifier les sources aéroacoustiques à l'origine d'un signal acoustique enregistré à l'extérieur du véhicule, à quelques dizaines de centimètre sur le côté. Pour les constructeurs automobiles, la priorité est le signal acoustique à l'intérieur des véhicules. En négligeant la transmission des sources extérieures par les joints, les traversées, les fuites, etc... qui ne sont pas considérées dans cette étude, le champ acoustique à l'intérieur des véhicules issu de l'écoulement externe est transmis par la vibration des panneaux, et en particulier des vitrages.

L'objectif de ce chapitre est d'analyser les phénomènes physiques qui participent à la transmission vibro-acoustique des excitations d'origine aérodynamique au travers des panneaux. La figure 5.1 présente le schéma général du problème du couplage aéro-vibro-acoustique. Sur ce schéma

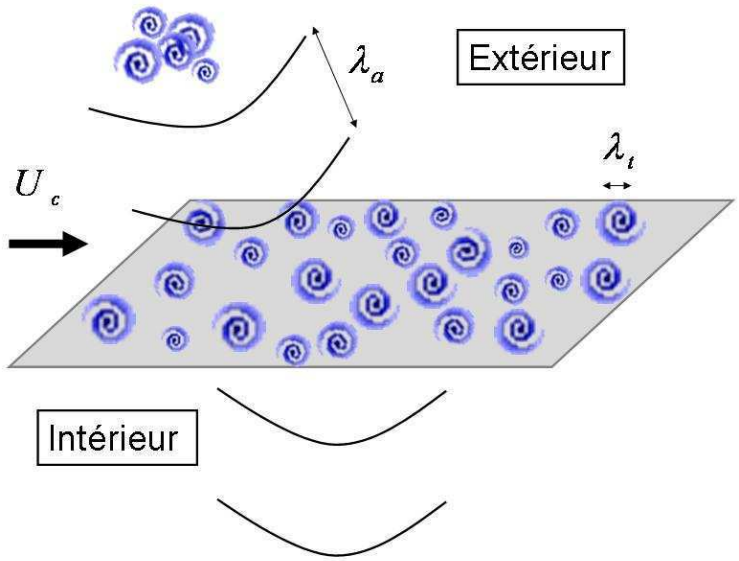

FIG. 5.1 – Représentation schématique du problème de couplage vibro-aéroacoustique. U_c est la vitesse de convection des structures turbulentes, λ_t est la longueur d'onde des tourbillons et λ_a est la longueur d'onde acoustique

on distingue trois blocs : l'excitation, la vibration de paroi et le champ acoustique rayonné. L'excitation et ses différentes caractéristiques sont étudiées dans la première partie de ce chapitre. Comme l'ont montré des études physiques basées sur des modèles analytiques simplifiés [14] et sur des modèles énergétiques de type SEA [24] (Statistical Energy Analysis), la puissance acoustique rayonnée par une plaque de type vitrage soumis à un champ acoustique à un niveau donné est de 15 à 30 dB supérieur à la puissance acoustique rayonnée par ce même panneau soumis à un champ turbulent de même niveau. C'est pour cette raison qu'en aéroacoustique automobile, la prise en compte du champ pariétal "acoustique" est important, même si son niveau est très nettement inférieur au champ pariétal "aérodynamique".

En soulignant l'aspect aléatoire des phénomènes d'excitation, les outils statistiques habituellement utilisés pour les caractériser sont détaillés. On présente les principaux modèles statistiques caractérisant les différentes composantes de l'excitation. Ces modèles statistiques vont servir de base dans la suite pour étudier la vibration de la plaque et le champ acoustique rayonné sous une excitation avec des caractéristiques connues et maitrisées.
Dans la partie §5.3 l'étude théorique de la vibration de la plaque et du champ acoustique rayonné est présentée. Les mécanismes de couplage entre le champ d'excitation, la vibration de la plaque et le champ acoustique rayonné sous certaines hypothèses simplificatrices sont présentés.
Les voix courantes de calcul de rayonnement sous une charge aléatoire (comme l'excitation aéroacoustique) sont ensuite listées dans la partie §5.4 et la méthode de calcul par éléments finis (FEM pour Finite Element Method) est privilégiée dans la suite de l'étude. La FEM fait appel à la connaissance du champ d'excitation à chaque point de la plaque. Ainsi, ayant choisi de décrire le champ d'excitation aéroacoustique par des modèles statistiques, il est nécessaire de disposer d'une procédure de synthèse des champs d'excitation à partir de la connaissance de leur caractéristique statistique. Cette démarche de synthèse, présentée dans la partie §5.4.1, permet d'obtenir le champ d'excitation déterministe à partir d'un modèle statistique.
En complément de l'étude théorique, dans la partie §5.5, à l'aide d'un modèle FEM, le rayonnement d'une plaque sous l'excitation aéroacoustique est étudié. Dans cette partie on s'intéresse également à l'étude de l'effet de l'inhomogénéité du champ d'excitation sur le rayonnement de la plaque.
Dans la partie §5.6, dans l'objectif de détecter les sources à l'aide d'une analyse de causalité, on s'intéresse à l'analyse des contributions au rayonnement à l'aide de la fonction de cohérence. Le but de cette démarche consiste à vérifier la possibilité d'identifier une source à partir du champ rayonné à l'intérieur de l'habitacle. La première étape consiste donc à vérifier que, connaissant parfaitement les champs pariétaux d'excitation, on peut associer une partie du signal acoustique intérieur à chaque contribution du champ pariétal. Une alternative consiste à ne pas utiliser directement le signal acoustique intérieur comme signal de référence, mais à utiliser les signaux de pression pariétale. Dans cette optique, le premier travail consiste donc à extraire du champ de pression total les signaux associés au champ acoustique et au champ aérodynamique respectivement. Cette étape de séparation est décrite dans la paragraphe 5.7 : elle est basée sur une décomposition POD des champs pariétaux.

5.1 Définition des champs d'excitation

On rappelle que les fluctuations de pression pariétale sont associées à deux mécanismes physiques distincts. En effet, une partie des fluctuations de pression générées en un point donné de la plaque est due au passage des structures tourbillonnaires à proximité immédiate de ce point. Ces fluctuations de pression sont donc directement liées aux fluctuations turbulentes locales et peuvent être décrites ou calculées à l'aide de modèles incompressibles de l'écoulement. Ce type de fluctuations de pression sera appelé *pression d'excitation turbulente*. Le second mécanisme physique

qui conduit à des pressions instationnaires sur les parois est la génération de sources acoustiques par l'écoulement turbulent. Ces sources acoustiques d'origine turbulente se comportent exactement comme toutes les autres sources acoustiques aériennes extérieures vis à vis des panneaux du véhicule. Les fluctuations de pression pariétale issues des sources de bruit aérodynamique seront appelées *pressions d'excitation acoustique*.

5.1.1 Hypothèses sur le champ de pression d'excitation

On suppose dans cette partie que l'excitation des panneaux est parfaitement connue. Les panneaux sont excités par un champ de pression instationnaire qui est supposé uniformément réparti sur la plaque. Dans le cas d'un vitrage latéral avant d'un véhicule, cette hypothèse de champ uniforme n'est évidemment pas vérifiée. Cependant, pour l'analyse théorique présentée dans la partie §5.3, elle est nécessaire afin de caractériser plus simplement l'excitation. L'étude de l'effet de l'inhomogénéité est reportée dans la partie §5.5.2 où le champ d'excitation inhomogène sera décrit en combinant des sous-parties de champs homogènes.

5.1.2 Représentation de l'excitation dans le domaine des nombres d'onde

Le champ d'excitation spatialement distribué sur une plaque peut être défini par la pression d'excitation $p(\mathbf{x}_i, t)$ qui dépend du temps t et de la position $\mathbf{x}_i$ sur la plaque. La pression peut aussi être représentée dans le domaine fréquentiel $\tilde{p}(\mathbf{x}_i, \omega)$. Pour une excitation de type turbulente ou acoustique en champ diffus, les fluctuations temporelles sont aléatoires et stationnaires. L'énergie de l'excitation est évaluée par la densité spectrale de puissance de la pression $\tilde{S}_{pp}(\mathbf{x}_i, \omega)$. Entre deux points de la plaque, le champ d'excitation n'est en général pas décorrélé. Pour caractériser le taux de corrélation spatiale de l'excitation en pression, on utilise la densité interspectrale de puissance (DISP) notée $\tilde{S}_{pp}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \omega)$.

On rappelle que dans le cas d'un champ d'excitation spatialement homogène, la DSP et la DISP des signaux de pression ne dépendent pas du point considéré :

$$\tilde{S}_{pp}(\mathbf{x}_i, \omega) = \tilde{S}_{pp}(\omega)$$

et

$$\tilde{S}_{pp}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \omega) = \tilde{S}_{pp}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i + \mathbf{r}, \omega) = \tilde{S}_{pp}(\mathbf{r}, \omega)$$

avec $\mathbf{r} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$. La DISP est une grandeur complexe. Son amplitude détermine l'énergie cohérente des signaux de pression obtenus en deux points de la plaque. Sa phase indique les longueurs d'onde sur lesquelles est répartie cette énergie. Pour analyser et interpréter la répartition de l'énergie sur les différentes longueurs d'ondes, il est avantageux de représenter la densité interspectrale de puissance des pressions dans le domaine des nombres d'onde. La grandeur $\breve{\Phi}_p(\mathbf{k}, \omega)$ représente la densité spectrale de puissance de l'excitation associée à une onde qui se propage dans la direction $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ et qui a une longueur d'onde $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$.

Il est important de bien distinguer les grandeurs complexes $\tilde{p}(\mathbf{x}_i, \omega)$ (qui sont les transformées de Fourier directes des variables physiques) des grandeurs énergétiques tels que la DSP, la DISP ou la densité spectrale en nombre d'onde qui sont obtenues par moyennage statistique. La connaissance des transformées de Fourier complexes $\tilde{p}(\mathbf{x}_i, \omega)$ ou $\breve{p}(\mathbf{k}, \omega)$ des variables équivaut à la connaissance totale du champ en tout point et à tout instant. Dans la plupart des modèles existants, on ne s'intéresse pas à cette information pour au moins deux bonnes raisons : d'une part, les grandeurs utiles et perçues sont les grandeurs énergétiques moyennes et de plus, pour des processus stochastiques tels que l'excitation aéroacoustique, on n'a accès (par mesures ou modélisations

analytiques) qu'aux propriétés statistiques des champs. Ainsi, la plupart des modèles analytiques présentés dans ce travail fournit des grandeurs énergétiques moyennes. Mais, ces modèles sont issus des équations physiques qui gèrent des variables déterministes. Pour éviter les erreurs, il est nécessaire d'être rigoureux sur le passage de l'un à l'autre.

5.2 Différents exemples de champs d'excitation

5.2.1 Le champ diffus acoustique

La densité interspectrale de puissance des pressions associées à une excitation par un champ diffus acoustique s'écrit [98] :

$$\tilde{S}_{pp}(\mathbf{r},\omega) = \tilde{S}_{pp}(\omega)\,\frac{\sin(k_s r)}{k_s r}, \tag{5.1}$$

avec $k_s = \frac{\omega}{c_s}$. Le calcul de la transformée de Fourier spatiale permet d'obtenir son expression dans l'espace fréquence - nombre d'onde :

$$\begin{aligned} \breve{\Phi}_p(\mathbf{k},\omega) &= \frac{\tilde{S}_{pp}(\omega)}{2\pi {k_s}^2}\frac{1}{\sqrt{1-k^2/{k_s}^2}} \quad \text{si} \quad |k| < k_s \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{si} \quad |k| > k_s \end{aligned} \tag{5.2}$$

La cartographie en nombre d'onde de ce champ est présentée sur la figure 5.2.

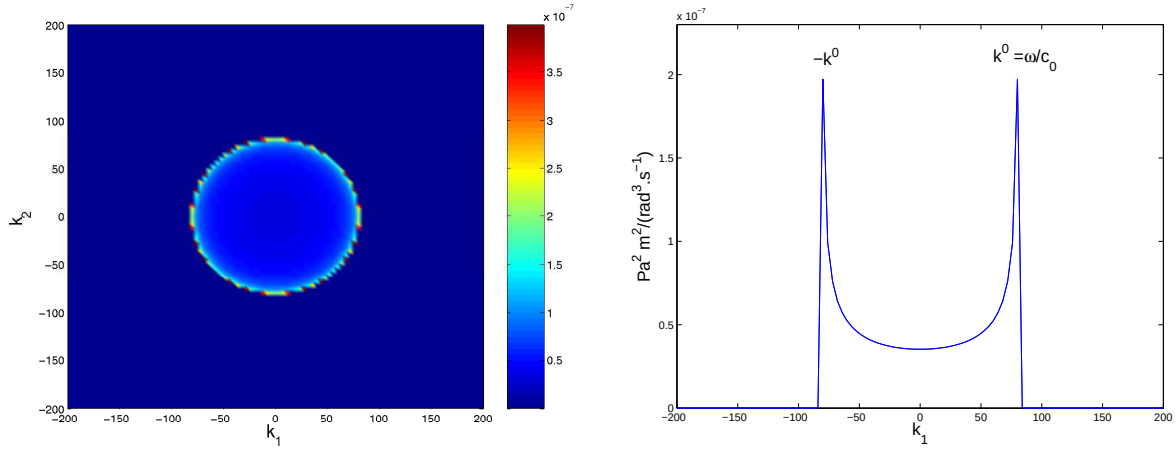

FIG. 5.2 – Densité spectrale en nombre d'onde à 4400 Hz des fluctuations de pression générées par un champ diffus acoustique. A gauche, cartographie dans le plan $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$; à droite, spectre nombre d'onde pour $k_2 = 0$

5.2.2 L'onde plane acoustique

Le champ d'excitation le plus simple est celui associé à une onde plane acoustique $\mathbf{k}_s = (k_{s_1}, k_{s_2}, k_{s_3})$ avec $k_s = \omega/c_s$. La densité interspectrale de puissance de la pression associée à cette onde plane sur la surface est alors :

$$\tilde{S}_{pp}(\mathbf{r},\omega) = \tilde{S}_{pp}(\omega)\,e^{-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}} = \tilde{S}_{pp}(\omega)\,e^{-ik_{s_1}r_1}e^{-ik_{s_2}r_2}$$

En calculant la transformée de Fourier spatiale de cette grandeur, il vient :

$$\breve{\Phi}_p(\mathbf{k},\omega) = \tilde{S}_{pp}(\omega)\,\delta(k_1 - k_{s_1})\,\delta(k_2 - k_{s_2})$$

La densité spectrale en nombre d'onde de ce type d'excitation est donc un Dirac au nombre d'onde qui correspond à la projection du vecteur $\mathbf{k}_s$ de l'onde plane sur la plaque.

5.2.3 Excitation générée par une couche limite homogène : modèle de Corcos

Il existe de très nombreuses expressions de la densité interspectrale de puissance associée à une couche limite plane homogène pleinement développée [23, 52]. Le premier modèle qui est encore très utilisé à cause de sa simplicité est le modèle de Corcos [33]. Il s'écrit :

$$\tilde{S}_{pp}(\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{r},\omega) = \tilde{S}_{pp}(\mathbf{r},\omega) = \tilde{S}_{pp}(\omega)\,e^{-|\omega r_1|/(\alpha_1 U_c)}e^{-|\omega r_2|/(\alpha_2 U_c)}e^{-i\omega r_1/U_c} \tag{5.3}$$

Dans cette expression, la direction principale de l'écoulement est suivant $\mathbf{x}_1$. Le terme $e^{-i\omega r_1/U_c}$ décrit le déphasage des fluctuations de pression en deux points dû à la convection des structures turbulentes à la vitesse U_c. Selon les études expérimentales [16, 33], U_c varie entre $0.6 \times U_0$ et $0.8 \times U_0$. Les deux autres exponentielles décrivent la décroissance de la corrélation des fluctuations dans les deux directions x_1 et x_2. Les valeurs caractéristiques [16] des coefficients de décroissance sont $\alpha_1 = 8$ et $\alpha_2 = 1.1$. Les coefficients des exponentielles peuvent se définir également à partir de la notion de longueurs longitudinale et transverse de corrélation $l_1 = (\alpha_1 U_c)/\omega$ et $l_2 = (\alpha_2 U_c)/\omega$.

L'expression analytique de la densité spectrale nombre d'onde du modèle de Corcos est :

$$\breve{\Phi}_p(\mathbf{k},\omega) = \frac{\tilde{S}_{pp}(\omega)}{\pi^2}\frac{l_1}{\left[(k_1 - \omega/U_c)^2 l_1^2 + 1\right]}\frac{l_2}{\left[(k_2 l_2)^2 + 1\right]} \tag{5.4}$$

Ce spectre nombre d'onde est tracé sur la figure 5.3.

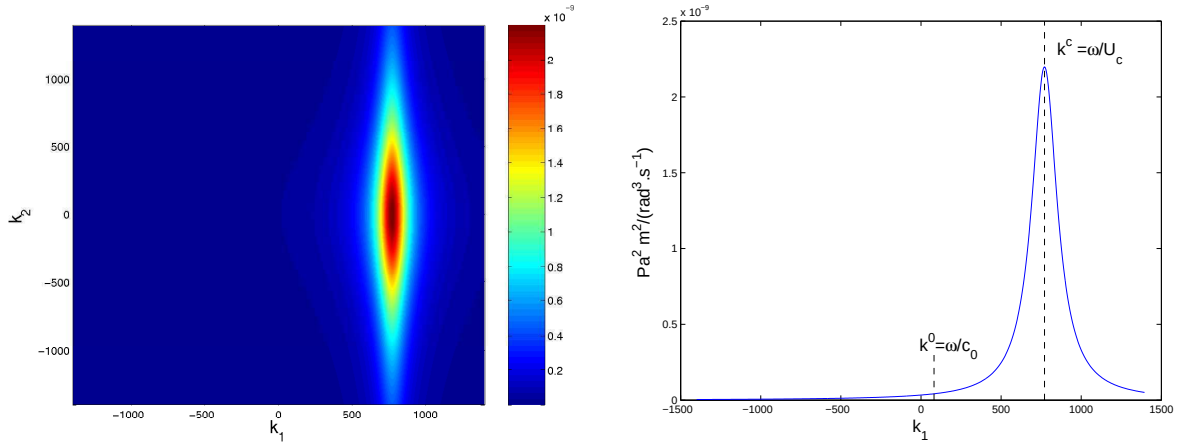

FIG. 5.3 – Densité spectrale en nombre d'onde à 4400 Hz des fluctuations de pression générées par une couche limite (modèle de Corcos). A gauche, cartographie dans le plan $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$; à droite, spectre nombre d'onde pour $k_2 = 0$.

5.3 Vibration d'une plaque sous chargement aléatoire

Dans la partie précédente nous avons présenté les modèles les plus souvent utilisés décrivant la partie excitation sur la plaque. Dans cette partie, une étude théorique de la vibration de plaque

et du champ acoustique rayonné sous une excitation aléatoire est présentée. Plus précisément le comportement vibroacoustique de la plaque vis-à-vis des différentes composantes du champ d'excitation, décrites par les modèles présentés précédemment, est étudié.
Cette partie reprend, de manière synthétique, les éléments théoriques classiques déjà décrits dans les références [8] et [106].

Hypothèses de couplage faible

Couplage faible entre l'excitation aérodynamique et la vibration de la plaque

Les déplacements transverses de la plaque sont très faibles par rapport à la taille des structures turbulentes principales de l'écoulement. Comme cela est réalisé dans la quasi-totalité des modèles [17], on peut négliger l'effet de la vibration de la structure sur le champ aérodynamique. Les pressions pariétales d'origine turbulente peuvent donc être modélisées en supposant que la paroi est parfaitement rigide : c'est l'hypothèse de *pression bloquée*.

Couplage faible entre le champ acoustique extérieur et la vibration de la plaque

De manière rigoureuse, le champ acoustique sur la face externe de la plaque se décompose en deux parties. Il y a d'une part la pression acoustique d'excitation qui est générée par les sources acoustiques dans l'écoulement et d'autre part, la pression acoustique générée par le rayonnement de la plaque elle-même. De façon classique, on peut montrer [38, 88, 120] que cette seconde contribution acoustique se traduit par des termes de masse ajoutée et de dissipation par rayonnement dans le modèle de vibration de la plaque. En faisant une étude plus poussée [128], il est également possible de prendre en compte l'effet de l'écoulement moyen sur le rayonnement acoustique et le comportement vibratoire de la plaque. Ces mécanismes de couplage sont généralement négligeables dans le cas d'un fluide léger tel que l'air.

Couplage faible entre la vibration de la plaque et le champ acoustique dans l'habitacle

Comme dans le cas du champ acoustique extérieur, on peut supposer que le champ acoustique rayonné par la plaque dans la cavité n'agit pas sur le comportement vibratoire de celle-ci. On supposera donc que le phénomène de couplage vibro-acoustique fort n'est pas important pour analyser les phénomènes physiques de transmission des excitations aéroacoustiques par les panneaux.

On considère une plaque mince (d'épaisseur h, petit devant les autres dimensions) dans le plan (x, y). Sous les hypothèses simplificatrices précédentes, l'équation qui réagit son déplacement ξ selon l'axe des z en vibration de flexion sous l'effet d'une chargement répartie en surface $p(x, y, t)$ s'écrit [122] :

$$D\nabla^4\xi + \beta\frac{\partial\xi}{\partial t} + m_s\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = p(x, y, t) \tag{5.5}$$

où

- D est la raideur en flexion de la plaque
- β est l'amortissement par unité de surface
- $m_s = \rho_s h$ est la masse surfacique de la plaque

Après transformée de Fourier temporelle et spatiale, puis décomposition en modes normaux, l'équation 5.5 devient :

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(D\left|k_{mn}\right|^4+i\beta\omega-m_s\omega^2)\tilde{\zeta}_{mn}(\omega)\hat{\Psi}_{mn}(\mathbf{k})=\breve{p}(\mathbf{k},\omega) \tag{5.6}$$

où k_{mn} est le nombre d'onde caractéristique du mode (m,n) (par exemple $|k_{mn}|^4=((\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2)^2$ dans le cas d'une plaque rectangulaire de dimension $a\times b$), $\hat{\Psi}_{mn}(\mathbf{k})$ est la transformée nombre d'onde de la déformée modale $\Psi_{mn}(\mathbf{x})$ (le mode (m,n)).

En se basant sur l'équation 5.6 et après quelques calculs, la vitesse de vibration modale en fonction de l'excitation de pression s'écrit :

$$\tilde{V}_{mn}(\omega)=\tilde{H}_{mn}(\omega)\tilde{p}_{mn}(\omega) \tag{5.7}$$

avec

$$\tilde{p}_{mn}(\omega)=\int_S\tilde{p}(x,y,\omega)\Psi_{mn}(x,y)ds \tag{5.8}$$

et

$$\tilde{H}_{mn}(\omega)=\frac{-i\omega}{m_s((\omega_{mn}^2-\omega)+i\eta\omega\omega_{mn})}, \tag{5.9}$$

où η représente le facteur d'amortissement.

La densité de puissance de la vitesse vibratoire moyenne sur la surface S de la plaque vaut alors :

$$<\tilde{S}_{vv}(\omega)>=\frac{\tilde{S}_{pp}(\omega)}{S}\sum_{m,n=0}^{\infty}\left|\tilde{H}_{mn}(\omega)\right|^2\tilde{\Phi}_{p_{mn}(\omega)}, \tag{5.10}$$

avec l'acceptance de couplage définie par :

$$\tilde{\Phi}_{p_{mn}}(\omega)=\frac{(2\pi)^4}{\tilde{S}_{pp}(\omega)}\int_{-\infty}^{+\infty}\breve{\Phi}_p(\mathbf{k},\omega)\left|\hat{\Psi}_{mn}(\mathbf{k})\right|^2d\mathbf{k}. \tag{5.11}$$

La réponse vibratoire de la plaque donnée par l'équation (5.10) dépend de la réponse fréquentielle des différents modes $|H_{mn}(\omega)|^2$. On distingue deux comportements fréquentiels principaux pour un mode donné. Ainsi, si $\omega\approx\omega_{mn}$, le mode est dit résonnant et la réponse du mode dépend essentiellement du coefficient d'amortissement η. Pour $\omega>\omega_{mn}$ et $\omega<\omega_{mn}$, le mode est non résonnant : sa réponse $|H_{mn}(\omega)|^2$ est beaucoup plus faible. Pour $\omega\gg\omega_{mn}$, l'amplitude de $|H_{mn}(\omega)|^2$ est pilotée par la masse m_s de la plaque.

Les modes résonnants ont des nombres d'onde caractéristiques k_{mn} proche du nombre d'onde de flexion de la plaque $k_f=\left(m_s\omega^2/D\right)^{1/4}$. Sur le graphe nombre d'onde présenté sur la figure 5.5, on peut donc représenter une zone circulaire de rayon moyen k_f qui délimite une région de modes résonnants. Le nombre d'onde de flexion k_f varie en $\sqrt{\omega}$ alors que $k_s=\omega/c_s$ (pour une excitation de type acoustique) et $k_c=\omega/U_c$ (pour une excitation de type turbulent) varient linéairement par rapport à la fréquence. Il existe donc une fréquence pour laquelle $k_f=k_c$, c'est la fréquence de coïncidence aérodynamique :

$$f_c=\frac{U_c^2}{2\pi}\sqrt{\frac{m_s}{D}} \tag{5.12}$$

De même il existe une fréquence pour laquelle $k_f = k_s$, c'est la fréquence de coïncidence acoustique :

$$f_s = \frac{c_s^2}{2\pi}\sqrt{\frac{m_s}{D}} \tag{5.13}$$

Pour les panneaux de type vitrage automobile et pour des vitesses d'écoulements classiques, la fréquence de coïncidence aérodynamique est de l'ordre de quelques dizaines de Hertz. La fréquence de coïncidence acoustique est de l'ordre de quelques milliers de Hertz (typiquement autour de $3000 - 3500$ Hz).

Pour une fréquence donnée, les modes tels que $k_{mn} < k_s$ sont dits acoustiquement rapides, et les modes tels que $k_{mn} > k_s$ sont dits acoustiquement lents. De la même manière pour les modes aérodynamiques, $k_{mn} < k_c$ et $k_{mn} > k_c$ décrivent respectivement les modes aérodynamiquement rapides et lents. Ce mécanisme, lié à une correspondance entre nombres d'onde, est appelé coïncidence spatiale. Notons que la fréquence de coïncidence dépend des paramètres structurels de la plaque.

5.3.1 Rayonnement acoustique de plaques vibrantes

Le calcul de la pression rayonnée dans de l'air par une plaque vibrante se fait grâce à l'équation de Helmholtz régissant la propagation des ondes acoustiques, et à la condition aux limites de continuité de la vitesse à la surface de la plaque. L'expression de la puissance acoustique rayonnée par la plaque est donnée par [8]

$$\tilde{\Pi}(\omega) = \rho c_s \sum_{m,n=0}^{\infty} \tilde{\phi}_{v_{mn}}(\omega)\tilde{\sigma}_{mn}(\omega), \tag{5.14}$$

où le facteur de rayonnement modal est défini par

$$\tilde{\sigma}_{mn}(\omega) = (2\pi)^2 \int_{-k_0}^{+k_0} \frac{\left|\hat{\Psi}_{mn}(\mathbf{k})\right|^2}{\sqrt{1-(\frac{k}{k_0})^2}} d\mathbf{k} \tag{5.15}$$

D'après l'équation (5.15), le rayonnement de chaque mode est maximal lorsque $k_{mn} = k_0$ (coïncidence spatiale). L'efficacité de rayonnement d'un mode traduit le couplage entre la déformée modale, dont le maximum se situe autour de k_{mn}, et le champ acoustique rayonné, dont le maximum se situe autour de k_0. Pour $k_{mn} = k_0$ le mode est alors coïncident et il rayonne fortement. Pour $k_{mn} < k_0$, l'efficacité de σ_{mn} est proche de 1 et le mode rayonne de façon très efficace. Pour $k_{mn} > k_0$ l'efficacité de rayonnement de mode est plus faible, mais non nulle.

5.3.2 Expression finale de la puissance acoustique rayonnée par une plaque sous excitation aéroacoustique

Les différentes expressions analytiques permettant de modéliser le phénomène complet de rayonnement acoustique d'une plaque soumise à une excitation aéroacoustique ont été exprimées dans les paragraphes précédents. En introduisant dans l'équation (5.14) les différents relations exprimées, la puissance acoustique rayonnée par la plaque est :

$$\tilde{\Pi}_{ac}(\omega) = \rho c_s \tilde{S}_{pp}(\omega) \sum_{mn} \tilde{\Phi}_{p_{mn}}(\omega) \left|\tilde{H}_{mn}(\omega)\right|^2 \tilde{\sigma}_{mn}(\omega) \tag{5.16}$$

Cette expression représente les trois filtres détaillés sur la figure 5.4.

Que ce soit avec une excitation de type aérodynamique, ou une excitation de type acoustique, le couplage avec un panneau se décompose de manière similaire en trois filtres :

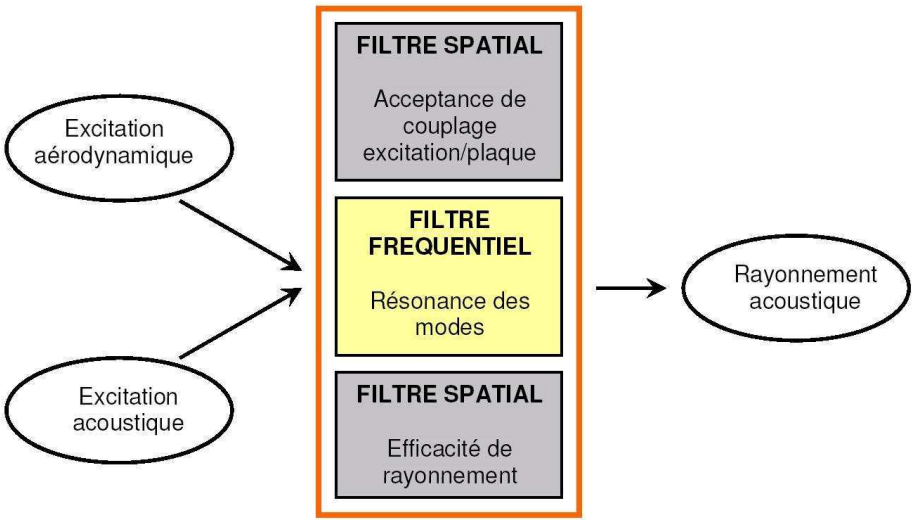

FIG. 5.4 – Schéma de principe des mécanismes de couplage entre l'excitation aéroacoustique, la vibration de la plaque et son rayonnement acoustique (figure extraite d'Arguillat [8])

- Un filtre spatial, caractérisé par l'acceptance de couplage $\tilde{\Phi}_{p_{mn}}(\omega)$. Celle-ci traduit, pour un mode donné, la capacité de la plaque à être excitée par le nombre d'onde excitateur. L'acceptance de couplage entre un mode (m, n) et une excitation caractérisée par un nombre d'onde k_{ex} est maximale lorsque $k_{mn} \approx k_{ex}$.
- Un filtre fréquentiel, caractérisé par la réponse fréquentielle de la plaque $\left|\tilde{H}_{mn}(\omega)\right|^2$. Celle-ci représente, pour un mode donné, la faculté de répondre à la fréquence excitatrice. La réponse fréquentielle d'un mode de la plaque est maximale lorsque le mode est résonnant, c'est-à-dire que sa fréquence propre correspond à la fréquence d'excitation.
- Un deuxième filtre spatial, caractérisé par le facteur de rayonnement $\tilde{\sigma}_{mn}(\omega)$. Celui-ci traduit l'acceptance de couplage de la plaque avec un champ acoustique diffus. Les modes dont le nombre d'onde caractéristique est inférieur au nombre d'onde acoustique possèdent un rayonnement important : ce sont les modes dits rayonnants.

Il apparaît donc que les modes qui influencent le plus la puissance rayonnée sont les modes résonnants et les modes rayonnants. En basse et moyenne fréquences ($f < f_s$), les modes résonnants sont excités par les nombres d'onde aérodynamique de la zone subconvective ($k < k_s$). En haute fréquence, les modes résonnants sont excités par les nombres d'onde acoustique (grandes longueurs d'onde). Les modes rayonnants correspondent quant à eux, à toutes les fréquences, aux nombres d'onde acoustique. Le mécanisme d'excitation d'un panneau automobile est résumé sur le diagramme en nombre d'onde présenté sur la figure 5.5. Cette figure montre que, pour un écoulement subsonique, le spectre en nombre d'onde de pression pariétale se compose d'une partie convective, de nombre d'onde caractéristique $k_c = \omega/U_c$, et d'une partie acoustique de nombre d'onde caractéristique $k_s = \omega/c_s$. Sur ce diagramme, la distance entre les "taches" acoustique et aérodynamique dépend du nombre de Mach M puisque $k_s = Mk_c$. Comme on peut le voir sur la figure, en haute fréquence, les nombres d'onde de l'excitation acoustique correspondent mieux à celui de la résonance des vitrages. Ainsi, la composante acoustique joue un rôle très important dans l'excitation des vitrages. Pour le rayonnement, les seuls nombres d'onde aptes à rayonner en champ lointain sont ceux qui, pour chaque fréquence, sont situés dans le disque acoustique. Ainsi, les petits nombres d'onde jouent un rôle particulièrement important dans le couplage fluide-structure.

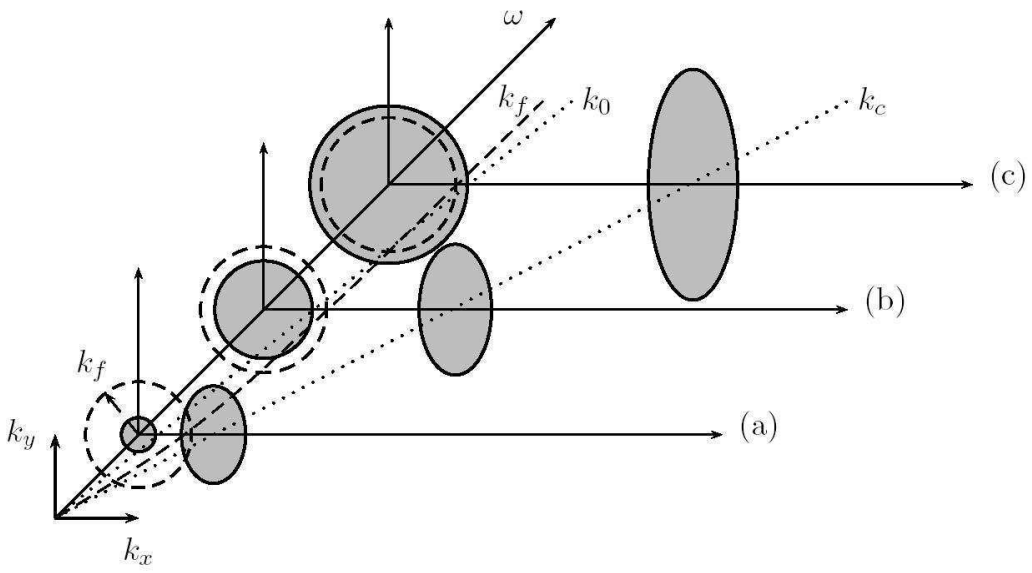

FIG. 5.5 – Diagramme en nombre d'onde des fluctuations de pression pariétale d'un écoulement subsonique à une fréquence fixée (sur cette figure k_0 représente k_s) : (a) pour $k_s \leq k_f \approx k_c$ (b) pour $k_s \leq k_f \leq k_c$ et (c) $k_f \leq k_s \leq k_c$ (figure extraite d'Arguillat *et al.* [9])

5.4 Méthodes de calcul de bruit rayonné, méthode éléments finis FEM

De manière générale, on peut distinguer deux voix principales pour calculer le rayonnement acoustique d'un panneau soumis à une excitation aéroacoustique :

- La méthode SEA est un outil simple et rapide qui consiste à écrire le bilan statistique de l'énergie entre l'excitation, la vibration et l'émission du panneau [17, 38]. L'utilisation de la SEA reste souvent limitée aux géométries et les conditions aux limites simples. On note que dans cette approche toutes les grandeurs physiques sont exprimées de manière statistique. Pour le champ d'excitation l'expression de la DISP ou spectre en nombre d'onde est nécessaire pour chaque type d'excitation. On utilise généralement des modèles simplifiés tels qu'un champ diffus pour l'excitation acoustique et un champ de type Corcos pour l'excitation turbulente (le logiciel commercial AutoSEA utilise par exemple le modèle de Cockburn et Robertson [32] qui introduit l'effet d'épaisseur de couche limite dans le modèle de Corcos). L'obtention des paramètres des DISP de chaque champ d'excitation sur un panneau automobile est un travail très complexe. En particulier, l'évaluation expérimentale de l'amplitude du champ acoustique reste encore très approximative [63] à cause de la très faible énergie de cette composante par rapport au champ turbulent. Concernant le modèle d'excitation turbulente, quelque soit le modèle choisi pour représenter cette composante, il doit être judicieusement adapté en fonction de l'énergie d'excitation et des paramètres de convection et de corrélation. Ces paramètres peuvent être choisis à partir des données issues de mesures microphoniques sur la paroi [10] ou à partir des données issues de calcul instationnaire de l'écoulement [101].

- La FEM (Finite Element Method) est basée sur la discrétisation des équations gouvernant la dynamique du système. Les géométries et les conditions aux limites complexes peuvent être

plus facilement prises en compte par cette approche. En revanche, selon le nombre de dégrés de liberté considéré pour le modèle, elle peut être très coûteuse en terme de ressources de calcul. Contrairement à la SEA, dans cette approche toutes les variables physiques doivent être disponibles à chaque nœud du modèle. Il est alors nécessaire de fournir le champ d'excitation dans le domaine physique (espace-temps ou bien espace-fréquence). De cette manière la distinction et la modélisation des composantes acoustique et turbulente (perte de la physique de l'excitation) ne sont plus nécessaires. En particulier, on évite le problème liée à la détermination du niveau d'énergie de la composante acoustique.

Dans ce travail, l'approche FEM est choisie pour accéder au rayonnement acoustique d'un panneau soumis à une excitation aéroacoustique. La FEM a été préférée à la SEA ou d'autres méthodes basées sur l'expression statistique de champ d'excitation [24,88] d'une part pour étudier l'effet de l'inhomogénéité du champ d'excitation, d'autre part et principalement pour mettre en place une analyse de causalité détaillée plus loin. L'expression statistique des champs d'excitation et rayonné n'est pas utile pour une telle analyse et l'accès à différentes réalisations est obligatoire. Toutefois, il est nécessaire de disposer de champs d'excitation avec les caractéristiques connues. On part donc d'un modèle statistique pour représenter chaque composante pour obtenir les différentes réalisations du champ d'excitation.

5.4.1 Synthèse d'un champ spatio-temporel déterministe via l'expression de la DISP d'un champ pseudo-aléatoire

On rappelle que pour le champ spatio-temporel de pression, $p^{(n)}(\mathbf{x}_i, t)$, où (n) représente les différentes réalisations, la DISP bilatérale est donnée par la relation suivante :

$$\tilde{S}_{pp}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \omega) = \frac{2\pi}{T}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \tilde{p}^{(n)}(\mathbf{x}_i, \omega, T)\tilde{p}^{(n)*}(\mathbf{x}_j, \omega, T),$$

où $\tilde{p}^{(n)}(x_i, \omega, T)$ représente la transformée Fourier de $p^{(n)}(x_i, t)$, T représente la durée temporelle de chaque réalisation sur laquelle la transformée de Fourier est effectuée et N désigne le nombre total de réalisations. La forme unilatérale de DISP est définie comme :

$$\tilde{G}_{pp}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \omega) = 2\tilde{S}_{pp}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \omega) \qquad \omega > 0$$

$$\tilde{G}_{pp}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, 0) = \tilde{S}_{pp}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, 0) \qquad \omega = 0$$

Pour une fréquence fixée et pour un maillage spatial $(\mathbf{x}_k)$ contenant M points au total $(k = 1, 2, \cdots, M)$, la forme unilatérale de DISP peut être écrite sous la forme d'une matrice carrée de taille $M \times M$. Cette matrice est par définition positive et transconjuguée, par conséquent c'est une matrice hermitienne. Elle remplie donc les conditions nécessaires à une décomposition de Cholesky. Wittig *et al.* [127] ont proposé une démarche basée sur cette décomposition afin d'accéder à différentes réalisations d'un champ pseudo-aléatoire. Plus récemment, Coyette [34] a repris cette procédure en l'appliquant à des champs de pression pariétale. La première étape consiste à décomposer la DISP en deux parties triangulaires haute et basse (décomposition de Cholesky) :

$$\tilde{G}_{pp}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \omega) = \tilde{L}_{pp}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \omega)\tilde{L}^*_{pp}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i, \omega)\ . \tag{5.17}$$

La matrice triangulaire basse est ensuite utilisée [127] pour définir une réalisation du champ de pression via l'équation :

$$\tilde{p}^{(n)}(\mathbf{x}_i, \omega) = \sum_{j=1}^{M} \tilde{L}_{pp}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \omega)\Gamma_j^{(n)}, \tag{5.18}$$

où

$$\Gamma_j^{(n)} = e^{i\phi_j}. \tag{5.19}$$

Pour chaque réalisation (n), la phase ϕ_j est choisie de manière aléatoire :

$$\phi_j = rand\,[0,1] \times 2\pi, \qquad j = 1, 2, \cdots, M. \tag{5.20}$$

Utilisant une représentation matricielle, la démarche peut être résumée à l'aide des 4 étapes suivantes :

1. **Génération de la matrice de DISP à une fréquence donnée.**
2. **Décomposition Cholesky de la matrice de DISP.**

$$\tilde{G}_{pp}(\omega) = \begin{pmatrix} \tilde{L}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{L}_{21} & \tilde{L}_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{L}_{M1} & \tilde{L}_{M2} & \cdots & \tilde{L}_{MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{L}_{11}^* & \tilde{L}_{12}^* & \cdots & \tilde{L}_{1M}^* \\ 0 & \tilde{L}_{22}^* & \cdots & \tilde{L}_{2M} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{L}_{MM} \end{pmatrix}$$

3. **Génération de phase aléatoire.**

$$\phi_j = rand\,[0,1] \times 2\pi \quad \longrightarrow \quad \Gamma_j = e^{i\phi_j}$$

4. **Génération d'une réalisation de champ.**

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \cdots \\ \tilde{p}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{L}_{21} & \tilde{L}_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{L}_{M1} & \tilde{L}_{M2} & \cdots & \tilde{L}_{MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \cdots \\ \Gamma_M \end{pmatrix}$$

Dans ce processus, seules les étapes 3 et 4 doivent être répétées pour calculer les champs associés aux différentes réalisations (n). Les étapes 1 et 2 sont calculées une seule fois, en début de processus.

L'équation (5.18) n'est toujours pas l'expression du champ de pression dans le domaine physique (espace-temps). Pour accéder à l'expression spatio-temporelle du champ une dernière étape, la transformée Fourier inverse de l'équation (5.18), est nécessaire.

On note que le passage dans le domaine temporel par FFT inverse nécessite que l'équation (5.18) soit calculée fréquence par fréquence et pour une répartition régulière de fréquences. Le passage au domaine temporel se fait indépendamment pour chaque réalisation et le nombre d'échantillons temporels obtenus correspond au nombre de fréquences considérées. Le champ étant considéré comme pseudo-aléatoire, les signaux temporels des réalisations en chaque point d'espace peuvent être éventuellement mis les uns derrière les autres afin d'obtenir une durée de signal plus longue. De cette manière le nombre d'échantillons temporels total correspond au produit du nombre de fréquences et du nombre de réalisations.

Dans la présente étude, l'expression spectrale $\tilde{p}^{(n)}(\mathbf{x}_i, \omega)$ est retenue pour les calculs FEM effectués avec Actran. En effet, ces derniers se font dans le domaine spectral, de manière

indépendante pour chaque fréquence. Pour chaque fréquence, l'excitation complexe $\tilde{p}^{(n)}(\mathbf{x}_i, \omega)$ est calculée par la procédure de synthèse pour chaque point du maillage de la plaque $\mathbf{x}_i$. Cet effort de pression est appliqué au nœud correspondant sous Actran et le calcul vibro-acoustique est réalisé en calcul direct. Le passage dans le domaine temporel ne sera utile que pour l'étude de séparation des deux composantes présentée dans le paragraphe §5.7.2.

5.4.2 Validation de la procédure de synthèse

Le bon fonctionnement de la démarche de synthèse doit permettre de retrouver les mêmes propriétés statistiques pour le champ synthétisé que ceux du modèle de départ. En choisissant le modèle de Corcos et le champ diffus acoustique pour représenter les deux composantes de champ d'excitation, et en suivant la procédure de synthèse, on effectue plusieurs réalisations du champ d'excitation sur une plaque ($L_x = 0.6$ m et $L_y = 0.4$ m). Chaque composante du champ de pression est synthétisée de manière indépendante et le champ total est simplement obtenu en faisant la somme des deux signaux :

$$\tilde{p}^{(n)}(\mathbf{x}_i, \omega) = \tilde{p}^{Corcos(n)}(\mathbf{x}_i, \omega) + \tilde{p}^{Diffus(n)}(\mathbf{x}_i, \omega)$$

avec

$$\tilde{p}^{Corcos(n)}(\mathbf{x}_i, \omega) = \sum_{j=1}^{M} \tilde{L}_{pp}^{Corcos}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \omega)\Gamma_j^{(n)}$$

et

$$\tilde{p}^{Diffus(n)}(\mathbf{x}_i, \omega) = \sum_{j=1}^{M} \tilde{L}_{pp}^{Diffus}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \omega)\Gamma_j^{(n)}.$$

Evidemment, plus le nombre des réalisations est élevé plus l'estimation de la DISP via les réalisations se rapproche de l'expression analytique de départ. Sur la figure 5.6 la somme des DISP du modèle de Corcos et du champ diffus acoustique est présentée. La figure 5.6(a) montre la DISP en fonction de fréquence pour une distance de séparation fixée ($\mathbf{x}_1 = (0, 0, 0)$ et $\mathbf{x}_2 = (0.08, 0, 0)$). Sur la figure 5.6(b) la DISP est tracée entre le point central de la plaque $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 0)$ et l'ensemble des points situés sur la ligne de $(x_1, 0, 0)$ pour une fréquence fixée : $f = 520$ Hz.

On peut remarquer que pour la distance de séparation fixée l'estimation de DISP converge plus vite aux basses fréquences. De la même manière, à la fréquence fixée, plus la distance de séparation est faible plus l'estimation converge vite. Ces deux observations sont liées à un fait commun : la longueur de corrélation des fluctuations de pression. Cette longueur correspond à la distance pour laquelle les fluctuations de pression gardent leur cohérence. Cette longueur décroît avec l'augmentation de la fréquence des fluctuations.

5.4.3 Modèle éléments finis de la plaque

Une plaque de dimensions $L_x = 0.6$ m, $L_y = 0.4$ m et d'épaisseur $L_z = 0.0035$ m est considérée pour représenter le panneau. Le matériau considéré est du verre ayant pour propriétés : module d'Young $E = 4.85 \times 10^{10} + i2.425 \times 10^9$ Pa, coefficient de poisson $\nu = 0.2398$ et densité $\rho = 2500$ kg/m^3. La partie imaginaire dans le module d'Young représente l'amortissement qui est donc de 5%. La fréquence de coïncidence acoustique calculée par l'équation suivante :

$$f_s = \frac{c_s^2}{2\pi}\sqrt{\frac{12\rho(1-\upsilon^2)}{Eh^2}} \tag{5.21}$$

est de 3512 Hz. Le logiciel ACTRAN est utilisé pour effectuer les calculs éléments finis. Dans ce logiciel commercial les calculs vibratoire et acoustique (rayonnement) se font de manière directe

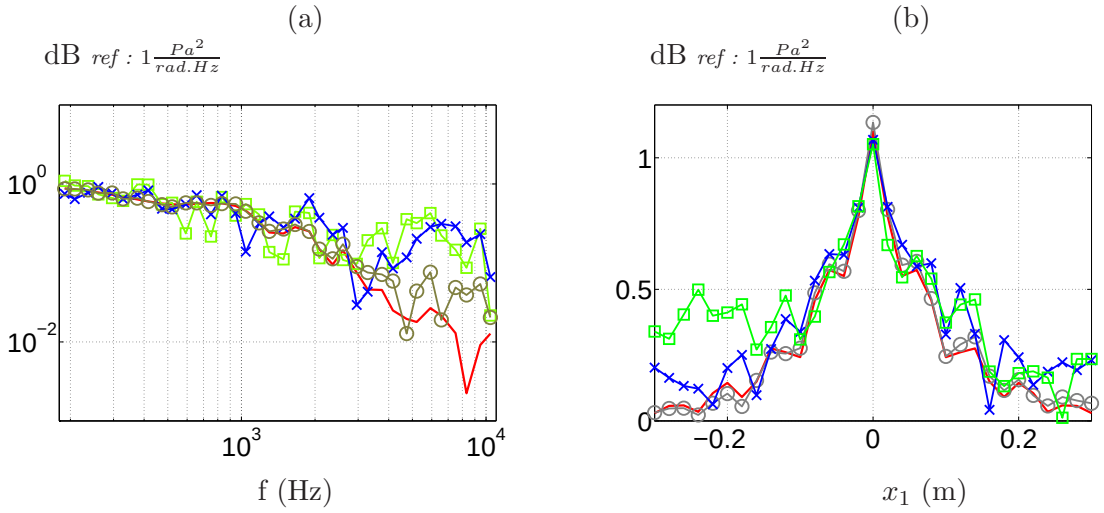

FIG. 5.6 – Expression analytique de la DISP Corcos + champ diffus acoustique (—) et son estimation utilisant (□) 20, (×) 30 et (○) 1000 réalisations. (a) En fonction de la fréquence pour la distance de séparation de 0.08 m. (b) En fonction de la distance de séparation à la fréquence fixée de $f = 520$ Hz.

et indépendante pour chaque fréquence. La plaque est supportée en appuis simples sur les bords et un baffle infini est considéré sur son périmètre. Un pas de maillage de 2 cm dans les trois directions de l'espace pour le maillage du fluide dans le demi-espace de rayonnement de dimension : $-0.4 \leq x \leq 0.4$, $-0.3 \leq y \leq 0.3$ et $0 \leq z \leq 0.4$. Au-delà des éléments finis, le rayonnement est calculé par les éléments finis/infinis. Les lignes séparatrices de chaque élément infini sont normales à la surface de l'ellipsoïde du support et commencent par un nœud des éléments finis (figure 5.7). La plaque est maillée avec des éléments coques d'épaisseur L_z et de côté 2 cm. Ceci correspond à un ensemble de 24600 éléments finis en comptant les mailles fluide et les mailles de la plaque. Un ensemble de 50 points repartis dans le demi-espace coté rayonnement sont considérés pour des mesures ponctuelles du champ rayonné. Les calculs sont effectués pour 36 fréquences allant de 185 au 10000 Hz. On note que la discrétisation spatiale sur la surface d'excitation induit une longueur d'onde (ou bien nombre d'onde) limite à partir de laquelle le critère de Shannon-Nyquist n'est plus respecté. En dessous de cette longueur d'onde limite (de manière équivalente : au-delà du nombre d'onde limite) le mécanisme du repliement spatial survient. Pour un phénomène convectif, la longueur d'onde est liée à la fréquence par la relation : $\lambda = U_c/f$. Si on considère que les fluctuations de pression turbulente se propagent à la vitesse $U_c = 36$ m/s, pour la taille des mailles considérée, la fréquence maximum pour laquelle l'étude reste fiable correspond à 900 Hz. Cette fréquence limite pour les fluctuations de pression acoustique qui se propagent à $c = 340$ m/s correspond à 8500 Hz.

Pour faciliter la dénomination des champs, les points de l'espace côté excitation sont indiqués par $\mathbf{x} = (x, y, z)$ et les points côté rayonnement par $\mathbf{x}' = (x', y', z')$.

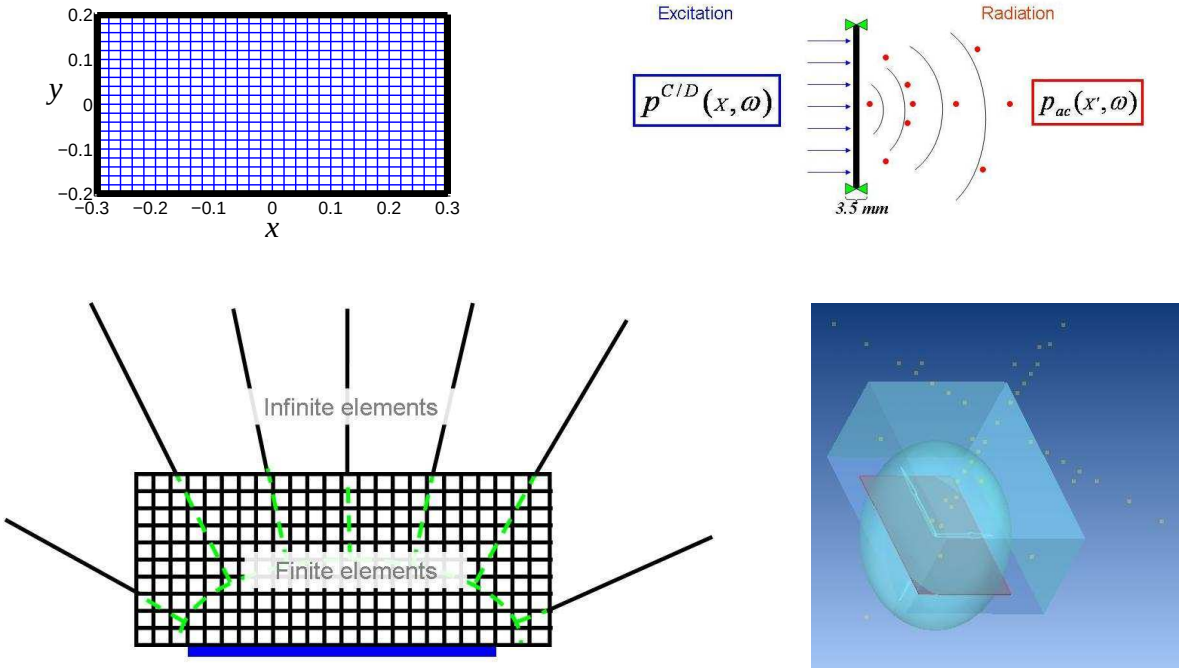

FIG. 5.7 – Configuration des calculs. La plaque est discrétisée à l'aide d'un maillage de pas 0.02 m dans les directions de (x, y) et de pas 0.0035 m en z constituant un nombre total de 600 mailles sur chaque surface de la plaque. Le champ rayonné est mesuré sur 50 points répartis dans le demi-espace de rayonnement.

5.5 Efficacité des excitations à faire rayonner la plaque

5.5.1 Champ d'excitation homogène

Dans un premier temps on s'intéresse à l'efficacité des composantes d'un champ d'excitation aéroacoustique homogène à faire rayonner la plaque. Le cas d'étude concerne un champ d'excitation dans lequel l'énergie totale de la composante acoustique du champ est fixée à $\tilde{S}_{pp}^{Diffus}(\omega)$ $=0.1 \times \tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega)=0.6283$ Pa^2/(rad.Hz), ce qui se traduit par un niveau de 92 dB pour le champ diffus acoustique et 102 dB pour le champ d'excitation aérodynamique (Corcos). Ce niveau est considéré comme constant pour toutes les fréquences. Les paramètres du modèle de Corcos sont les suivants : $U_c = 36, \alpha_1 = 8, \alpha_2 = 1.1$. Les coefficients de corrélation sont les coefficients standards proposés par Corcos [33]. La représentation dans le domaine des nombres d'onde de ce champ est donnée sur la figure 5.8 pour une fréquence donnée, $f = 600$ Hz. Afin d'identifier le comportement vibroacoustique de la plaque vis-à-vis de chaque composante, trois familles de calcul sont effectuées. Une famille de calcul correspond à 30 réalisations d'un champ d'excitation. La plaque est alors soumise à :

1. Uniquement à la composante acoustique du champ d'excitation (*excitation acoustique*).
2. La composante aérodynamique seule (*excitation aérodynamique*).
3. La somme des deux composantes précédentes (*excitation aéroacoustique*).

La figure 5.9 représente la DSP du signal de pression en un point $(x, y, z) = (0.1, 0.16, 0)$ sur la surface de la plaque pour ces trois familles d'excitation. On rappelle que le champ d'excitation est homogène spatialement, des spectres similaires (à l'aspect aléatoire près) sont obtenus pour les autres points de la plaque.
La démarche de synthèse de chaque composante (acoustique/aérodynamique) est effectuée via

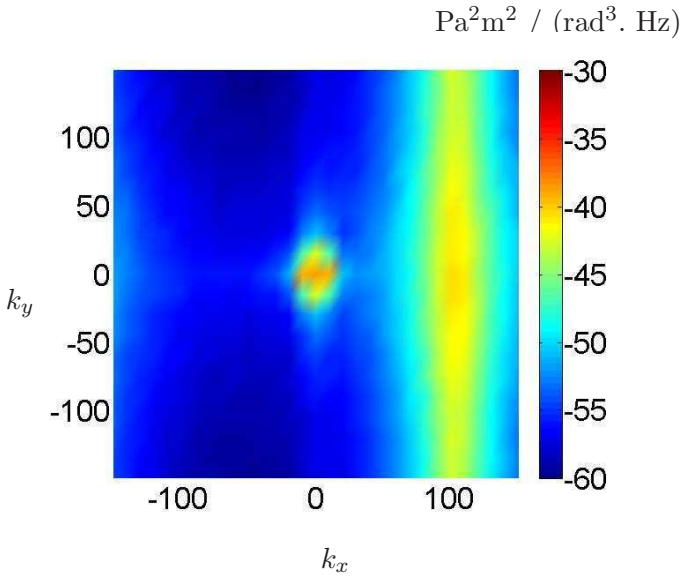

FIG. 5.8 – Densité spectrale en nombre d'onde à 600 Hz des fluctuations de pression générées par un modèle de Corcos (la tâche située aux grands nombres d'onde) et un champ diffus acoustique (la tâche centrale autour des petits nombres d'onde), $\tilde{S}_{PP}^{Diffus}(\omega) = 0.1\ \tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega) = 0.6283$ Pa^2/(rad.Hz)

son expression de DISP, c'est-à-dire que pour une réalisation donnée, ce n'est pas la même phase aléatoire qui est utilisée pour la composante acoustique et la composante aérodynamique. Cette phase est générée pour chaque composante de manière indépendante. Par contre, une réalisation du champ total (excitation aéroacoustique) est construite par la somme des réalisations correspondantes de chaque composante. Ainsi, trois familles de calcul de rayonnement sont effectuées par Actran en fonction des trois cas d'excitation. La figure 5.10 montre la DSP de pression acoustique pour un point situé à 60 cm de la plaque, $\mathbf{x}' = (0, 0, 0.6)$. Pour un spectre d'excitation constant, le spectre du champ émis doit diminuer de manière régulière en fonction de la fréquence. Ceci est dû à l'augmentation de l'efficacité d'isolation globale typique d'une plaque standard. Ce spectre décroissant peut clairement être observé pour le cas d'excitation acoustique sur la figure 5.10(a). Sur les images (b) et (c) de la figure 5.10, l'augmentation du niveau du spectre à partir de 900 Hz pour le champ turbulent et à partir de 3000-4000 Hz pour le champ aéroacoustique est liée au problème de repliement spatial du champ d'excitation. Ce problème de repliement engendre la répartition de l'énergie des petites longueurs d'onde du champ d'excitation aérodynamique (qui ne peuvent pas être proprement prises en compte par le maillage) sur les grandes longueurs d'onde. Ces dernières sont bien plus efficaces pour exciter la plaque et pour rayonner. Cet effet de repliement est également visible pour le champ rayonné lié à l'excitation aéroacoustique (figure 5.10(c)), mais il semble se produire à une fréquence plus élevée comparativement à celle associée à l'excitation purement turbulente. Ceci est principalement lié à la partie acoustique présente dans l'excitation aéroacoustique dont le niveau de pression rayonnée est très influencé par la composante acoustique du champ d'excitation. Une solution pour éviter l'effet de repliement tout en conservant le même maillage de la plaque serait d'appliquer un filtre spatial anti-repliement sur le champ synthétisé avant la projection sur le maillage plaque.

En regardant la figure 5.10, on remarque que le niveau du champ acoustique rayonné associé à l'excitation du champ diffus est près de 10 dB supérieur à celui lié au champ d'excitation turbulente. Les figures 5.9 et 5.10 montrent donc que l'excitation acoustique est beaucoup plus efficace que l'excitation turbulente dans la production du rayonnement acoustique. En effet, si l'excita-

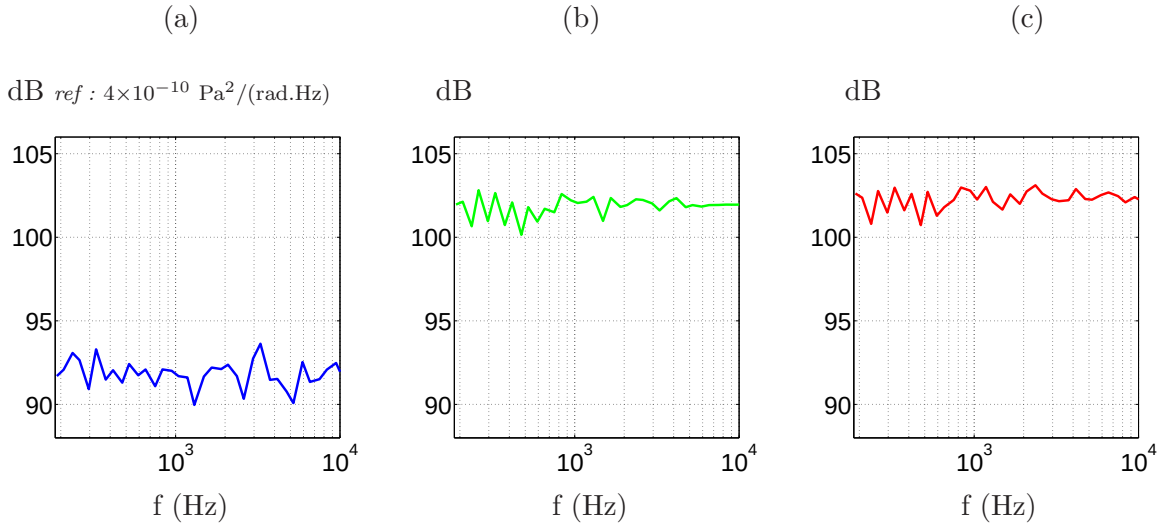

FIG. 5.9 – DSP du champ de pression en un point de la surface d'excitation de la plaque issue des N=30 réalisations du champ d'excitation : (a) purement acoustique (b) purement aérodynamique (c) aéroacoustique.

tion acoustique possède 10 fois moins d'énergie que l'excitation turbulente, le champ rayonné lié à l'excitation acoustique contient 10 fois plus d'énergie que celui associé à l'excitation turbulente. Cela signifie que l'excitation acoustique est 100 fois plus efficace que l'excitation turbulente pour la plupart des fréquences valides étudiées.

La pression acoustique sondée en une direction et une position particulière ne peut pas représenter avec précision le champ complet rayonné. L'analyse de l'efficacité du rayonnement à partir de la pression acoustique rayonnée en un seul point pourrait alors être inappropriée. Pour une étude plus précise l'efficacité de transmission est en général évaluée par le rapport de la puissance acoustique rayonnée et la "puissance" de l'excitation. Ici, cette efficacité est évaluée par une expression plus simple dans laquelle la puissance de l'excitation est représentée par l'énergie de l'excitation $\tilde{S}_{pp}(\omega)$, en faisant l'hypothèse de couplage faible entre fluide et structure :

$$\tilde{\Upsilon}(\omega) = \frac{\tilde{\Pi}_{ray}(\omega)}{L_x L_y \tilde{S}_{pp}^{excit}(\omega)}, \tag{5.22}$$

La valeur de la puissance rayonnée est calculée directement dans Actran. Elle est obtenue sur la surface de la plaque, côté rayonnement. Pour obtenir une valeur statistique moyenne de l'efficacité de rayonnement $\tilde{\Upsilon}(\omega)$, il est nécessaire que plusieurs réalisations de chaque famille soient disponibles. Nous avons donc effectué $N_r = 30$ réalisations pour chaque famille d'excitation, la puissance moyenne et la DSP d'excitation (déjà connue car imposée) sont donc obtenues par :

$$\tilde{\Pi}_{ray}(\omega) = \frac{1}{N_r} \sum_{n=1}^{N_r} \tilde{\Pi}_{ray}(\omega)^{(n)}$$

$$\tilde{S}_{pp}(\omega) = \frac{1}{N_r} \sum_{n=1}^{N_r} \tilde{S}_{pp}(\omega)^{(n)}$$

La figure 5.11(a) représente la transparence de la plaque issue des trois familles d'excitation pour différentes réalisations. Ces courbes moyennées sur les réalisations sont présentées sur la figure 5.11(b). En accord avec l'analyse précédente l'efficacité de la transmission de l'excitation

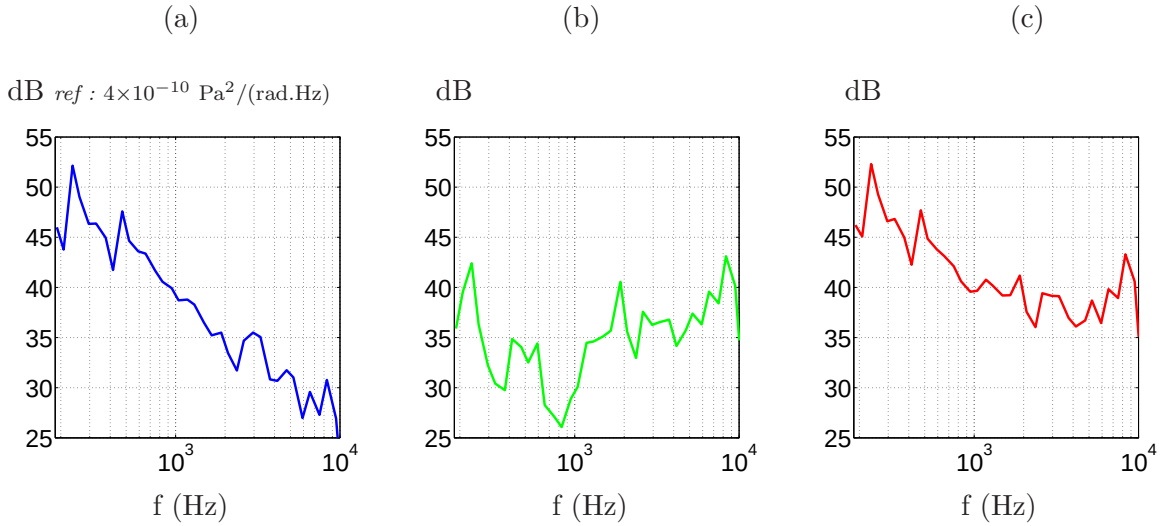

FIG. 5.10 – DSP des fluctuations de pression rayonnée en un point situé à 60 cm de la plaque. La plaque est soumise au champ d'excitation : (a) purement acoustique (b) purement aérodynamique (c) aéroacoustique.

acoustique apparaît clairement comme étant 100 fois plus élevée que celle de l'excitation turbulente. Nous pouvons également observer que le mécanisme de fréquence de coïncidence pour l'excitation acoustique apparaît autour de 3900 Hz, une bonne estimation de la valeur théorique, 4136 Hz, donnée par l'équation 5.21.

Dans la gamme de fréquences 200-900 Hz, qui n'est pas soumise aux erreurs de repliement, la figure 5.11(b) montre clairement que l'efficacité de la transmission du champ acoustique est 100 fois (soit 20 dB) supérieure à celle du champ d'excitation turbulente (modèle de Corcos avec les caractéristiques considérées). Ce résultat est en accord avec l'étude de Bremner et Wilby [14] et DeJong *et al.* [39] basée sur la SEA. Ils ont montré que la puissance acoustique rayonnée par un panneau de verre soumis à un champ acoustique à un niveau donné est de 15 à 30 dB supérieure à la puissance acoustique rayonnée associée à un champ d'excitation turbulent avec le même niveau d'énergie. Des conclusions similaires sont obtenues par Cacciolati *et al.* [24] à partir d'une approche analytique simplifiée du comportement vibroacoustique d'une plaque de duralumin rectangulaire mince.

L'efficacité supérieure du champ d'excitation acoustique est principalement liée à ses grandes longueurs d'onde qui peuvent être plus facilement couplées aux modes rayonnants de la plaque qui incluent principalement les grandes longueurs d'onde. En-dessous de la fréquence de coïncidence acoustique, les modes rayonnants sont les modes non-résonnants de la structure dont la réponse fréquentielle $\tilde{H}_{mn}(\omega)$ est pilotée la masse (loi de masse). Pour l'excitation turbulente, le rayonnement acoustique est dû au couplage entre les modes résonants de la plaque et le champ aérodynamique. Pour la plaque considérée, la fréquence de coïncidence aérodynamique est autour de 45 Hz. Par conséquent, pour les fréquences supérieures à 100-200 Hz, les longueurs d'onde caractéristiques du champ turbulent (pic convectif) sur lesquelles la majeure partie de l'énergie est concentrée deviennent très petites par rapport aux longueurs d'onde caractéristiques de flexion des modes résonnants. Par conséquent, seule une très petite fraction de l'énergie aérodynamique est transmise aux modes résonnants de la structure. Pour le cas de l'excitation aéroacoustique, l'efficacité de transmission est fortement influencée par sa composante acoustique jusqu'à 1000 Hz.

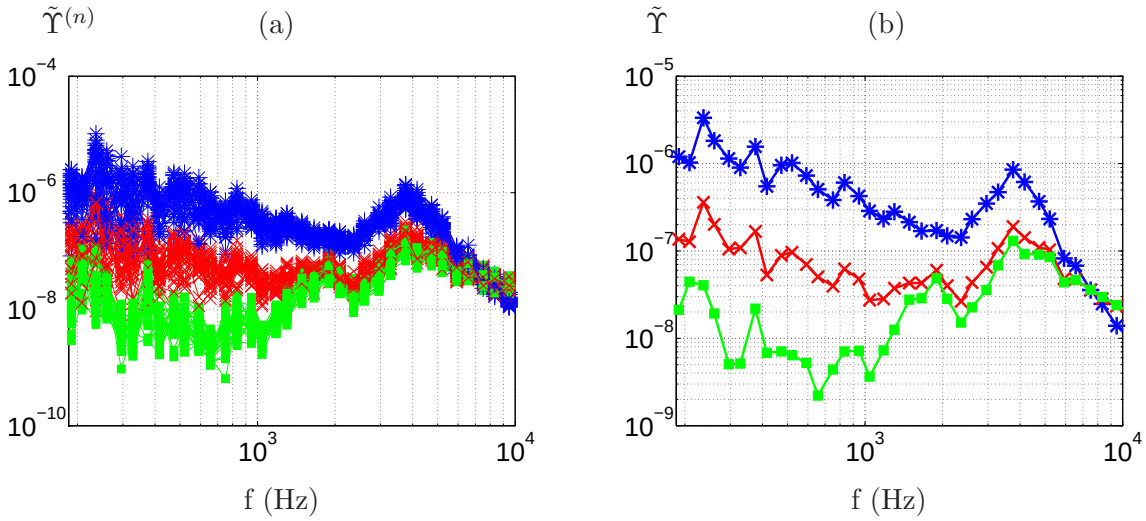

FIG. 5.11 – Efficacité à faire rayonner la plaque d'une excitation (∗) acoustique, (■) aérodynamique (×) aéroacoustique : (a) différentes réalisations (b) valeurs moyennées sur les réalisations. Pour l'excitation aérodynamique (et par conséquent pour l'aéroacoustique également) les courbes ne sont valides que jusqu'à 900 Hz dû à l'impossibilité de représenter les petites longueurs d'onde par le maillage de 0.02 m de la plaque.

5.5.2 Champ d'excitation inhomogène

En réalité le champ d'excitation aéroacoustique sur les panneaux automobile n'est jamais homogène. Cette inhomogénéité concernerait essentiellement la composante turbulente du champ d'excitation dû aux aspects locaux des décollements / recollements de l'écoulement. Par exemple dans le cas de la vitre latérale on distingue la région soumise aux fortes fluctuations de pression turbulentes générées par le tourbillon de montant de baie. Cette région (comme on peut l'observer sur la figure 5.12) peut être différenciée du reste de la vitre par une ligne qu'on appelle souvent "la ligne de séparation". La région soumise au sillage de rétroviseur marque également des fluctuations de pression importantes.

Cet effet d'inhomogénéité peut également être observé sur le pare brise. La région inférieure (figure 5.12) est soumise au tourbillon généré par la cavité d'emplacement des essuies glace et représente des fluctuations de pression plus importantes.
La vérification de l'homogénéité ou de l'inhomogénéité de la composante acoustique est aujourd'hui impossible. Toutefois, l'inhomogénéité de cette composante serait moins probable en raison des grandes longueurs d'onde sur lesquelles l'énergie de cette composante est portée. L'étude d'inhomogénéité est donc effectuée sur la seule composante turbulente. Le modèle de Corcos est considéré afin de synthétiser un champ d'excitation inhomogène et deux champs d'excitation homogènes "équivalents".

5.5.2.1 Génération d'un champ d'excitation inhomogène

Comme le montre la figure 5.13(a), la surface de la plaque est divisée en deux régions où les deux directions de l'écoulement font un angle de 60° entre elles. Le contenu énergétique du champ de pression dans le domaine Ω_2 ($\tilde{S}_{pp_2}(\omega)$) est de 15 dB supérieur à celui du champ de pression dans le domaine Ω_1 ($\tilde{S}_{pp_1}(\omega)$). Les mêmes valeurs sont considérées pour les paramètres du modèle de Corcos utilisé pour les deux régions : $\alpha_1 = 8$, $\alpha_2 = 1,1$ et $U_c = 36$. Pour obtenir une transition plus douce entre des deux régions homogènes, une fonction en tangente hyperbolique est utilisée ($y = 0,066$ m indique la ligne de séparation entre Ω_1 et Ω_2). Une réalisation du champ de pression

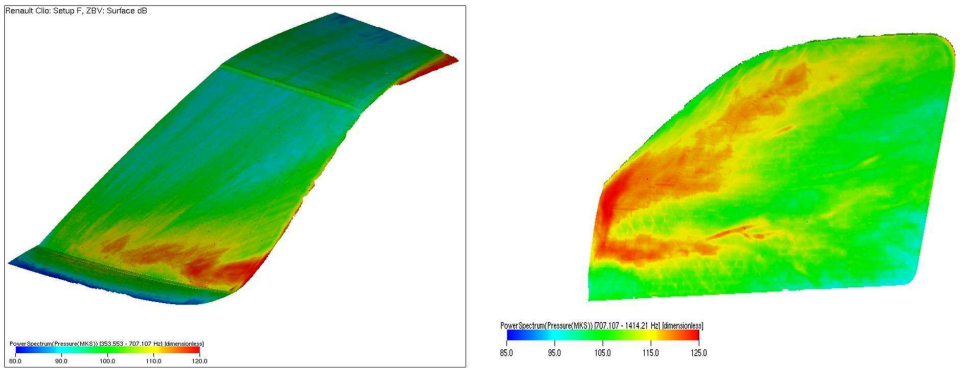

FIG. 5.12 – Cartographie de pression à 1000 Hz sur : (a) Pare brise. (b) Vitre latérale. Résultats issus d'une simulation numérique instationnaire PowerFLOW.

inhomogène est donc obtenue par :

$$\tilde{p}^{(n)}(\mathbf{x},\omega) = tanh(y \times H(0.08 - y)) \times \tilde{p}_1^{(n)}(\mathbf{x},\omega) + tanh(y \times H(y - 0.04)) \times \tilde{p}_2^{(n)}(\mathbf{x},\omega),$$

où H représente la fonction d'Heaviside, $\tilde{p}_1^{(n)}$ et $\tilde{p}_2^{(n)}$ sont des réalisations indépendantes du champ de pression homogène respectivement sur Ω_1 et Ω_2. Sur la figure 5.14 la représentation

(a) (b)

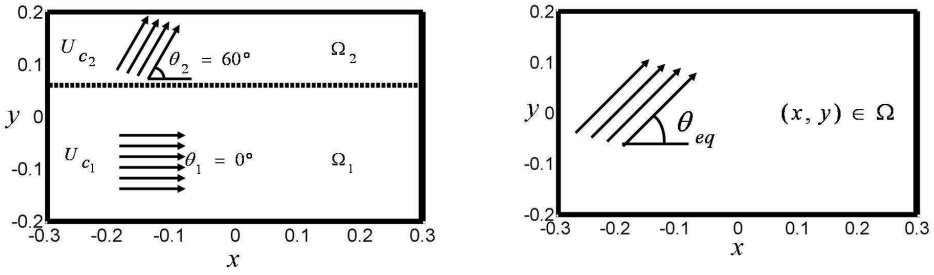

FIG. 5.13 – (a) Champ d'excitation de pression aérodynamique inhomogène constitué de deux sous-champs homogènes. (b) Champ homogène équivalent

dans le domaine des nombres d'onde de ce champ inhomogène est montrée pour 260 Hz.

Afin d'analyser la réponse vibroacoustique de ce champ inhomogène d'excitation turbulente, deux champs d'excitation homogènes "équivalents" seront également considérés. La réponse et le rayonnement de la plaque seront également calculés pour ces domaines équivalents et seront comparés aux résultats obtenus avec le champ inhomogène.

Pour déterminer les domaines équivalents homogènes, nous avons tout d'abord fixé le niveau d'énergie égal à l'énergie moyenne du champ inhomogène :

$$\tilde{S}_{pp_{eq}}(\omega) = \frac{1}{L_x \times L_y}\left(\int_{\Omega_1} \tilde{S}_{pp_1}(\mathbf{x}_1,\omega)d\mathbf{x}_1 + \int_{\Omega_2} \tilde{S}_{pp_2}(\mathbf{x}_2,\omega)d\mathbf{x}_2\right).$$

Pour le premier champ homogène équivalent, les paramètres du modèle de Corcos et le sens de l'écoulement moyen sont choisis de manière à mieux approcher le champ inhomogène en termes de comparaison visuelle des spectres en nombre d'onde. Une bonne approximation est obtenue pour

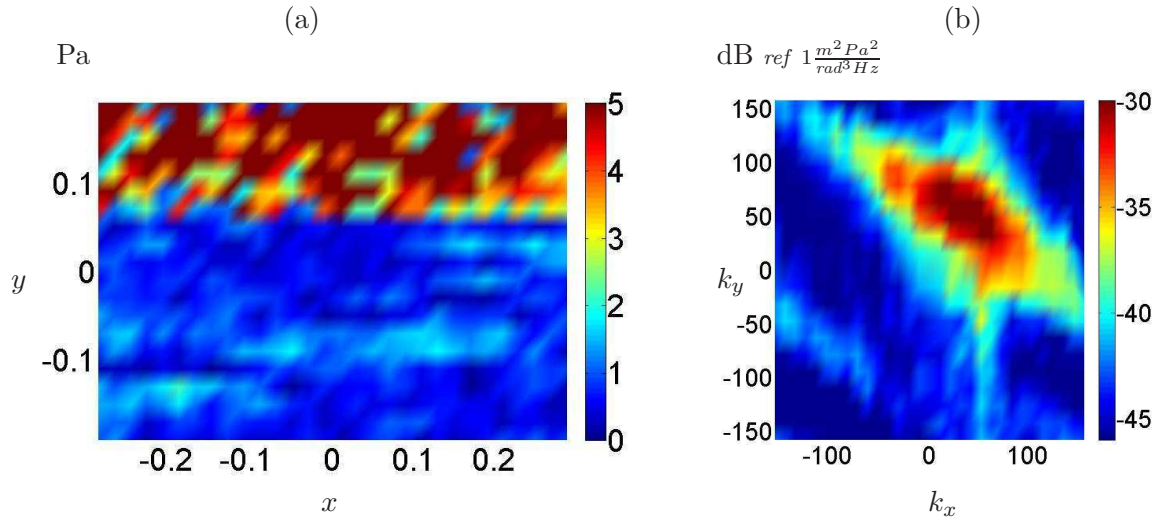

FIG. 5.14 – (a) Une réalisation donnée (m) du champ inhomogène d'excitation $p^{(m)}(x,\omega)$ à 260 Hz. Dans les deux sous-champs homogènes le modèle de Corcos avec $\alpha_1 = 8$, $\alpha_2 = 1.1$ et $U_C = 36$ est considéré. Le contenu énergétique de champ d'excitation dans la région Ω_2 est 15 dB supérieur à celui de la région Ω_1 : $\tilde{S}_{pp1}(\omega) = 1$ Pa^2/(rad.Hz) et $\tilde{S}_{pp2}(\omega) = 31.62$ Pa^2/(rad.Hz). (b) Représentation dans le domaine des nombres d'onde de ce champ inhomogène à 260 Hz

une direction d'écoulement moyen de $\theta_{eq} = 53°$, pour des coefficients de corrélation $\alpha_{1,eq} = 2$, $\alpha_{2,eq} = 0.7$, et pour une même vitesse de convection $U_{c,eq} = U_c = 36$ m/s. (b) La figure 5.15 (a) montre la représentation en nombre d'onde de ce champ homogène équivalent à 260 Hz.

Un deuxième champ homogène équivalent est généré en gardant les mêmes longueurs de corrélation que celles du champ inhomogène : $\alpha_{1,eq} = \alpha_1 = 8$, $\alpha_{2,eq} = \alpha_2 = 1.1$ et $U_{c,eq} = U_c = 36$ m/s. Le niveau d'énergie de ce champ est également supposé être le même que celui de l'énergie moyenne du champ inhomogène. La direction d'écoulement moyenne est fixée à $\theta_{eq} = 53°$. La représentation en nombre d'onde de ce champ à 260 Hz est donnée sur la figure 5.15(b).

5.5.2.2 Efficacité du champ d'excitation inhomogène à faire rayonner la plaque

Afin d'éviter le problème de repliement survenant à partir de 900 Hz pour le champ d'excitation turbulent, la fréquence d'étude est limitée à 1180 Hz. Le comportement vibratoire de la plaque et le champ rayonné est étudié pour le champ d'excitation inhomogène et pour les deux champs d'excitation homogènes équivalents présentés dans la partie précédente. Pour chaque champ d'excitation, 30 réalisations sont effectuées. Nous rappelons que le niveau d'énergie des deux champs d'excitation homogène équivalent correspond à l'énergie moyenne du champ inhomogène. Les deux champs d'excitation homogène équivalents possèdent la même direction de l'écoulement "moyen" inhomogène $\theta = 53°$ mais possèdent différentes longueurs de corrélation. La figure 5.16 représente l'efficacité de transmission et la vitesse vibratoire quadratique moyenne, moyennée sur la surface de la plaque. Pour ces deux quantités, nous pouvons conclure que l'inhomogénéité du champ d'excitation a un faible effet sur la vibration de la plaque et sur le champ rayonné. La meilleure similitude est obtenue avec le champ équivalent homogène qui a les mêmes longueurs de corrélation que celles des deux sous champ homogènes constituant le champ inhomogène. Comme expliqué dans la section précédente, pour les fréquences supérieures à la fréquence de coïncidence aérodynamique, la plaque est excitée par la partie subconvective du champ de pression dont l'énergie est pilotée par la valeur des coefficients de corrélation. Les valeurs $\alpha_{1,eq} = 2$, $\alpha_{2,eq} = 0.7$ choisies pour le premier champ homogène équivalent conduisent à une répartition d'énergie d'ex-

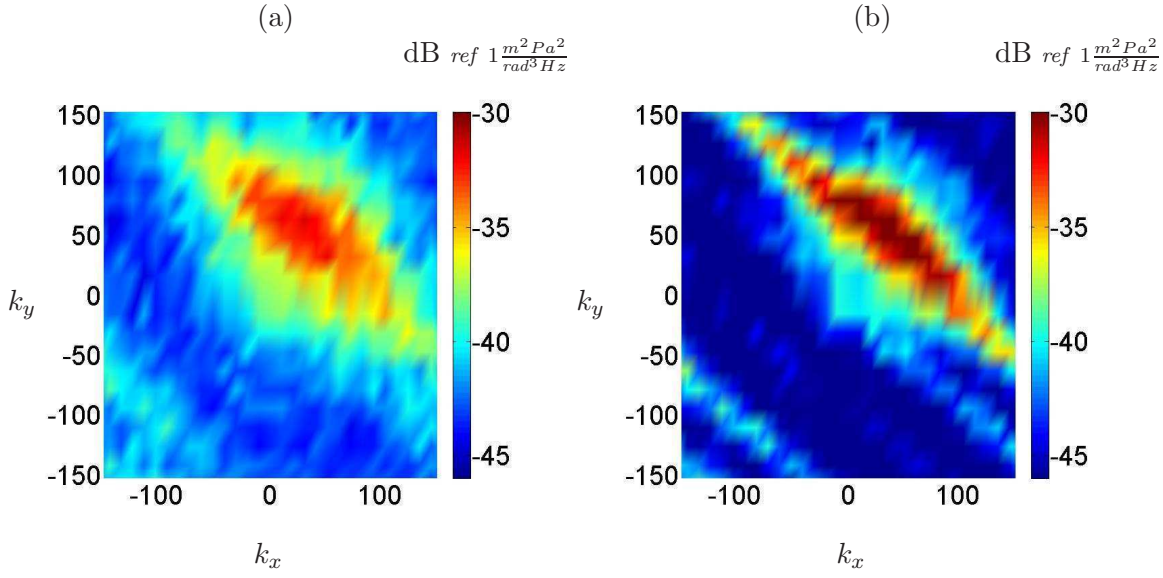

FIG. 5.15 – Représentation en nombre d'onde des champs homogènes équivalents à 260 Hz. Le même niveau d'énergie est considéré pour les deux champs correspondant au niveau moyen d'énergie du champ inhomogène $\tilde{S}_{pp}(\omega) = 10.7$ Pa^2/(rad.Hz). Les paramètres du modèle de Corcos sont fixés : (a) $\alpha_{1,eq} = 2$, $\alpha_{2,eq} = 0.7$, $\theta_{eq} = 53°$ et $U_{c,eq} = 36$. (b) $\alpha_{1,eq} = 8$, $\alpha_{2,eq} = 1.1$, $\theta_{eq} = 53°$ et $U_{c,eq} = 36$

citation plus élevée dans la région des petits nombres d'onde par rapport aux valeurs standards du modèle de Corcos ($\alpha_{1,eq} = 8$, $\alpha_{2,eq} = 1.1$) choisies pour le deuxième champ homogène équivalent et pour le champ inhomogène. En conséquence, l'énergie transmise par le premier champ homogène équivalent est plus élevée que l'énergie transmise par les deux autres champs. Nous rappelons que les valeurs du premier champ homogène équivalent n'ont été choisies que par une simple comparaison visuelle des spectres en nombre d'onde. Dû à la combinaison de deux champs de Corcos avec des directions de l'écoulement moyen différentes pour construire le champ inhomogène, le spectre de nombre d'onde du champ inhomogène (voir la figure 5.14(b)) semble être plus étalé par rapport au spectre nombre d'onde du champ homogène équivalent synthétisé avec les valeurs standards ($\alpha_{1,eq} = 8$, $\alpha_{2,eq} = 1.1$). D'après les représentations graphiques, les valeurs $\alpha_{1,eq} = 2$, $\alpha_{2,eq} = 0.7$ permettent d'approcher au mieux celle associée au champ inhomogène. Cependant, les résultats de la figure 5.16 montrent que la plaque ne semble pas réagir à cet étalement "visuel" de l'énergie : le niveau d'énergie d'excitation de la plaque dans le domaine des petits nombres d'onde est bien défini par l'énergie imposée dans le domaine des petits nombres d'onde imposée dans chaque zone du champ inhomogène.

Les figures 5.17(a) et (b) représentent la DSP du champ de pression acoustique rayonnée, en deux points $\mathbf{x}_1^{'} = (x^{'}, y^{'}, z^{'}) = (0, 0, 0.6)$ and $\mathbf{x}_2^{'} = (-0.3, 0.3, 0.6)$. De manière générale, conformément aux résultats issus des analyses des puissances globales acoustiques rayonnées, le deuxième champ homogène équivalent donne un spectre de bruit plus proche de celui obtenu avec l'excitation inhomogène. Toutefois, pour certaines fréquences, des différences parfois importantes peuvent se produire (voir par exemple la gamme de fréquences 300 - 400 Hz dans la figure 5.17(a)). Par ailleurs le comportement est différent pour les deux points d'observation. La différence entre le champ inhomogène et deuxième champ homogène équivalent peut être expliquée par la réponse détaillée et le rayonnement de chaque mode de plaque. Notons que la réponse vibratoire de la plaque n'est pas strictement la même pour les deux champs d'excitation. Le spectre de bruit à un

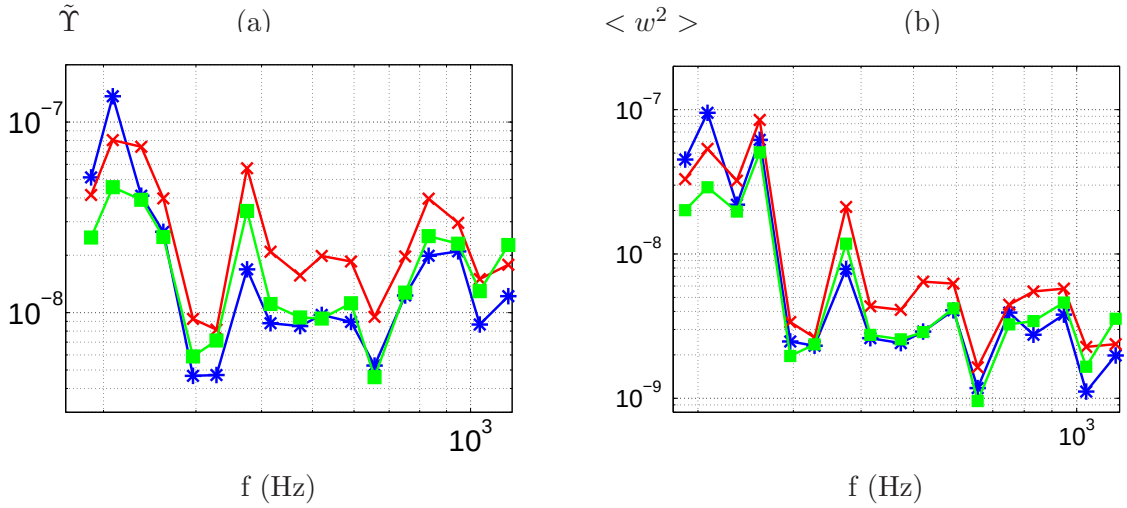

FIG. 5.16 – (a) Efficacité de transmission et (b) Vitesse quadratique au carrée moyennée sur la surface d'émission de la plaque : (∗) Champ inhomogène ; (×) Premier champ homogène équivalent $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0.7$, $\theta_{eq} = 53°$; (■) Deuxième champ homogène équivalent $\alpha_1 = 8$, $\alpha_2 = 1.1$, $\theta_{eq} = 53°$

point d'observation particulier dépend des détails de l'efficacité de rayonnement et de la directivité de chaque mode particulier. En appliquant la moyenne spatiale pour calculer la puissance rayonnée globale ou la vitesse quadratique moyenne (figure 5.16), ces effets sont lissés.

5.5.3 Conclusion

Dans cette partie, une technique de synthèse des champs de pression pseudo-aléatoires a été utilisée pour générer des champs d'excitation parfaitement maîtrisés. Ces champs d'excitation ont été appliqués au cas d'une plaque rectangulaire ayant les caractéristiques typiques d'un vitrage. La résolution par Eléments Finis pour le cas des champs homogènes montre, comme cela était attendu, que les champs d'excitation acoustique sont beaucoup plus efficaces (on a un facteur 100 dans notre cas) pour exciter et faire rayonner la plaque que les champs d'excitation aérodynamique. Contrairement aux autres méthodes d'analyse (approche analytique, méthode SEA), la technique de synthèse des champs pariétaux associée à la résolution par Eléments Finis du problème vibro-acoustique a permis d'analyser l'effet d'inhomogénéité du champ d'excitation. On observe que cette caractéristique d'inhomogénéité ne semble pas être un paramètre d'ordre un pour la transparence aéroacoustique : c'est bien l'énergie moyenne contenue dans le domaine des nombres d'onde proches des nombres d'onde de flexion qui pilote la transparence moyenne de la plaque.
Dans la suite, nous allons exploiter un autre avantage de la technique de synthèse des champs pariétaux. En effet, la connaissance des signaux déterministes en chaque point de la plaque permet d'utiliser de manière naturelle les outils de traitement du signal classiques. Dans la suite, les champs d'excitation seront supposés homogènes.

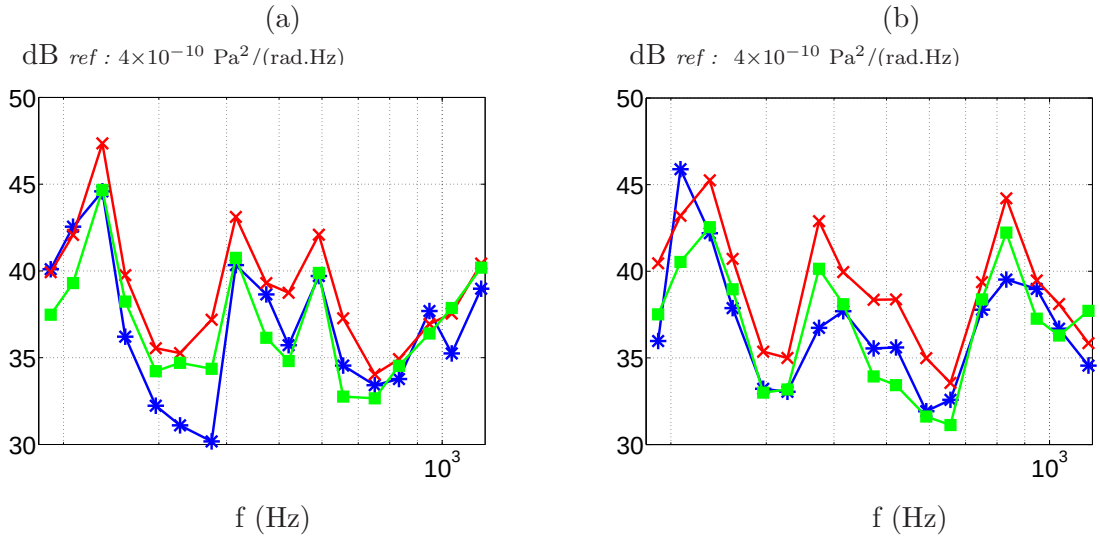

FIG. 5.17 – DSP de champ de pression acoustique rayonné aux points (a) $(x^{'}, y^{'}, z^{'}) = (0, 0, 0.6)$, (b) $(x^{'}, y^{'}, z^{'}) = (-0.3, 0.3, 0.6)$. ($*$) Champ inhomogène ; ($\times$) Premier champ homogène équivalent $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0.7$, $\theta_{eq} = 53°$; ($\blacksquare$) Deuxième champ homogène équivalent $\alpha_1 = 8$, $\alpha_2 = 1.1$, $\theta_{eq} = 53°$

5.6 Analyse des contributions au rayonnement à l'aide de la fonction de cohérence

On rappelle que dans le domaine fréquentiel la corrélation entre deux phénomènes aléatoires est quantifiée par la fonction de cohérence donnée par l'équation :

$$\tilde{\gamma}^2_{p_e p_r}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}^{'}_j, \omega) = \frac{\left|\sum_{n=1}^{N} \tilde{p}_e^{(n)}(\mathbf{x}_i, \omega)\tilde{p}_r^{(n)*}(\mathbf{x}^{'}_j, \omega)\right|}{(\sum_{n=1}^{N} \tilde{p}_e^{(n)}(\mathbf{x}_i, \omega)\tilde{p}_e^{(n)*}(\mathbf{x}_i, \omega))(\sum_{n=1}^{N} \tilde{p}_r^{(n)}(\mathbf{x}^{'}_j, \omega)\tilde{p}_r^{(n)*}(\mathbf{x}^{'}_j, \omega))} \tag{5.23}$$

Dans cette partie en profitant de l'accès aux différentes réalisations du champ spatial d'excitation, la fonction de cohérence est évaluée entre le champ rayonné et le champ d'excitation total ou le champ d'excitation associé à une de ses composantes. Dans un second temps (paragraphe 5.6.2), la fonction de cohérence est utilisée pour étudier la possibilité de distinguer des sources localisables par rapport aux autres composantes du champ via leur contribution au bruit rayonné.

L'équation (5.23) fournie la cohérence entre deux points. Pour obtenir une tendance moyenne, cette fonction est évaluée pour l'ensemble des combinaisons possibles entre les $N_{\mathbf{x}} = 600$ points d'excitation sur la plaque et les $N_{\mathbf{x}'} = 50$ points de mesures du champ rayonné ce qui représente un nombre total de 30000 combinaisons. L'équation suivante représente l'expression de la cohérence moyenne entre le champ d'excitation et le champ rayonné :

$$\left\langle \tilde{\gamma}^2_{p_e p_r}(\omega) \right\rangle = \frac{1}{N_{\mathbf{x}} N_{\mathbf{x}'}} \sum_{i=1}^{N_{\mathbf{x}}} \sum_{j=1}^{N_{\mathbf{x}'}} \tilde{\gamma}^2_{p_e p_r}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}^{'}_j, \omega) \tag{5.24}$$

5.6.1 Contribution des différentes composantes du champ aéroacoustique

De la même manière que dans la partie 5.5.1 trois familles de calcul sont considérées. Pour la première famille, l'excitation est purement acoustique et la deuxième famille repose sur une

excitation purement aérodynamique. La cohérence moyenne est simplement évaluée entre le champ d'excitation et le champ rayonné. On rappelle que le niveau d'énergie moyenne considérée pour la composante turbulente est 20 dB supérieur à celui de la composante acoustique. La figure 5.18 montre la cohérence moyenne en fonction de la fréquence pour ces deux excitations. La même

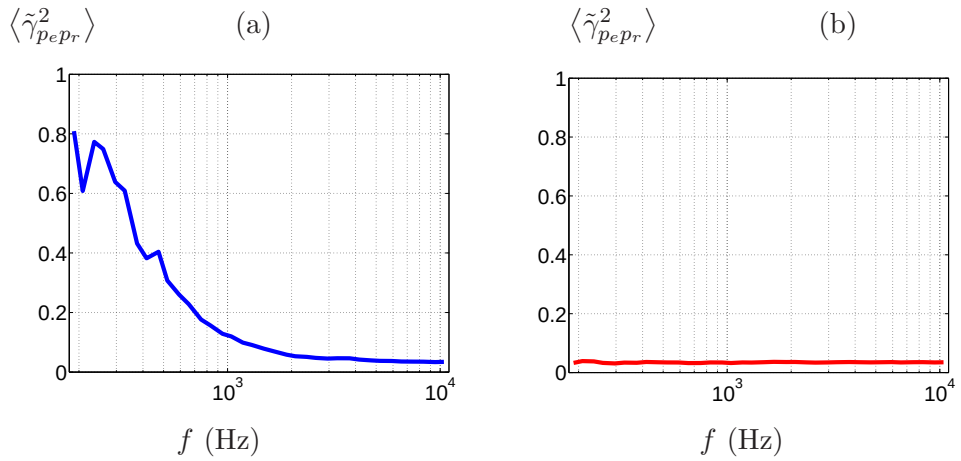

FIG. 5.18 – Cohérence moyenne entre : (a) le champ d'excitation purement acoustique (champ diffus) et le rayonnement associé, (b) le champ d'excitation purement aérodynamique (modéle de Corcos) et le rayonnement associé.

analyse est effectuée pour l'excitation aéroacoustique pour laquelle le champ est constitué des deux composantes aérodynamique et acoustique. La cohérence moyenne est évaluée entre le champ total d'excitation et le champ rayonné. La connaissance exacte des deux composantes (acoustique et aérodynamique) présentes dans le champ total permet d'analyser séparément la cohérence moyenne évaluée entre le champ total rayonné (issu de l'excitation aéroacoustique) et chacune des composantes acoustique et aérodynamique constituant ce champ d'excitation aéroacoustique. Les résultats sont montrés sur la figure 5.19.

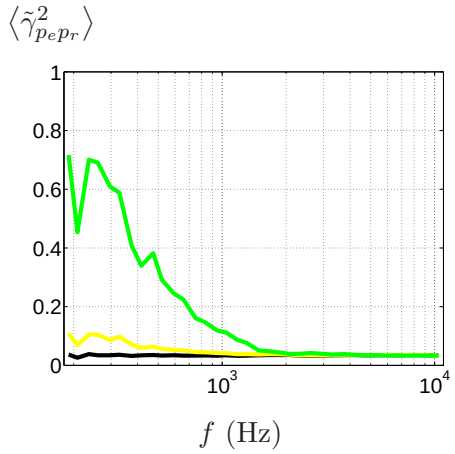

FIG. 5.19 – Cohérence moyenne entre le champ total rayonné associé à une excitation aéroacoustique et : (-) la composante acoustique, (-) la composante aérodynamique et (-) le champ d'excitation aéroacoustique total.

La figure 5.20 montre la superposition des courbes précédemment obtenues (figures 5.18 et 5.19). L'allure équivalente des courbes de cohérence sur la figure 5.20 pour les composantes associées montre que le comportement vibroacoustique de plaque vis-à-vis d'un champ d'excitation

n'est pas influencé par l'ajout d'un autre champ d'excitation. Ce résultat, attendu, confirme que la réponse vibroacoustique de la plaque est linéaire pour chaque composante du champ d'excitation. Rappelons que les différentes composantes des champs d'excitation sont statistiquement indépendantes (décorrélation parfaite entre les composantes). Il n'est donc pas réellement nécessaire d'effectuer des calculs indépendants pour chaque composante comme on l'a fait dans cette étude. On constate tout de même sur la figure 5.20 que les courbes de cohérence ne sont pas strictement identiques. Plus clairement pour le champ diffus, on peut remarquer (en basses fréquences) un écart de niveau de cohérence entre une excitation purement acoustique et une excitation aéroacoustique. Cet écart est lié à la participation de la composante aérodynamique dans le rayonnement pour l'excitation aéroacoustique.

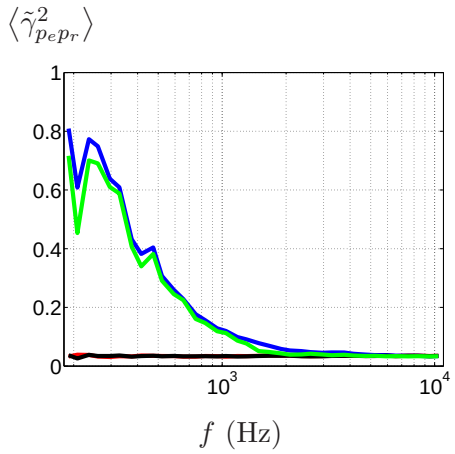

FIG. 5.20 – Cohérence moyenne entre (-) excitation acoustique et rayonnement associé, (-) rayonnement d'une excitation aéroacoustique et la composante acoustique, (-) excitation aérodynamique et rayonnement associé, (-) rayonnement d'une excitation aéroacoustique et la composante aérodynamique.

Il faut souligner que l'interprétation du niveau de cohérence moyenne et son lien avec la causalité pour une excitation spatialement étendue reste très délicate. En effet la fonction de cohérence détermine le taux de ressemblance linéaire entre deux phénomènes. Si on considère l'événement A comme une éventuelle source de l'événement B, le niveau de cohérence renseigne sur la relation de cause à effet entre eux. Dans ce cas une valeur de cohérence de 1 indique que A est la seule source de B et un niveau de cohérence de 0 montre que A ne participe pas dans la génération de B. Les valeurs intermédiaires de cohérence traduisent le fait que A n'est pas le seul contributeur à l'événement B. Il est donc raisonnable de s'interroger sur le niveau très faible de cohérence moyenne entre le champ d'excitation aérodynamique et le rayonnement associé (voir figure 5.18(b)). Sachant qu'il est le seul contributeur au champ rayonné dans ce cas, on pourrait s'attendre à une cohérence de "1". En réalité, l'interprétation de causalité via la fonction de cohérence ne peut être considérée que pour une source ponctuelle. Plus précisément, le signal représentant la "source" que l'on étudie doit représenter la totalité de l'information de cette source. Si l'évènement "source" est décrit par un ensemble de points comme c'est le cas pour les champs spatialement étendus sur les plaques, l'interprétation sur la causalité ne peut être effectuée que si la source est cohérente entre ces points d'espace. Dans ce cas, en chaque point, le signal représente la totalité de l'information "source". Dans le cas d'un champ aérodynamique, la cohérence entre le champ rayonné et un seul point de la plaque est quasi-nulle, étant donné que, d'une manière caricaturale, chaque point de la plaque reçoit une excitation "indépendante". Plus précisément, pour un champ d'excitation unique, le niveau de cohérence entre le champ rayonné et le champ d'excitation sera de l'ordre de grandeur de $L_c(\omega)/L_{xy}$ où $L_c(\omega)$ est la longueur

de corrélation caractéristique du champ d'excitation et L_{xy} est la longueur caractéristique de la plaque. Pour une onde plane acoustique, $L_c(\omega) = L_{xy}$ quelles que soient les fréquences, la cohérence sera donc de 1. C'est ce que confirme la figure 5.21 qui montre la cohérence moyenne évaluée sur 30 réalisations d'une onde plane acoustique (chaque réalisation possède une phase indépendante) et les rayonnements associés.

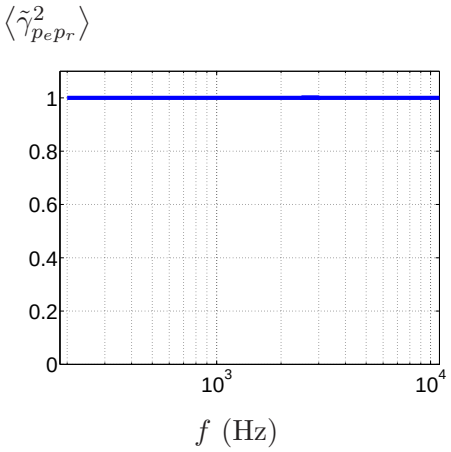

FIG. 5.21 – Cohérence moyenne d'un champ d'excitation de type onde plane et le rayonnement associé

Dans le cas d'un champ diffus, la longueur de corrélation décroît en sinus cardinal en fonction de la fréquence ce qui explique la décroissance progressive observée sur la figure 5.18(a). Dans le cas d'un champ aérodynamique, la longueur de corrélation caractéristique est beaucoup plus petite que pour les champs acoustiques et elle décroît exponentiellement en fonction de la fréquence. On peut considérer que les très faibles valeurs observées sur la figure 5.18(b) sont liées à la limite de convergence de l'estimateur de cohérence et que la valeur réelle de la cohérence est encore plus faible que celle observée sur cette figure.

Cette expérience montre que la contribution au champ rayonné d'une source étendue faiblement cohérente ne peut pas être correctement évaluée par une analyse de corrélation. En effet la limite de cohérence entre le champ d'excitation et le champ rayonné est fixée par la cohérence du champ d'excitation sur la surface de l'excitation. Plus la source est cohérente plus sa contribution au champ rayonné peut être évaluée par l'analyse de corrélation. La détermination de la contribution des composantes du champ d'excitation aéroacoustique telles qu'elles sont choisies semble être impossible. En fait, la composante acoustique de l'excitation pourrait être la somme de plusieurs sources compactes spatialement cohérentes sur la surface d'excitation mais incohérentes entre elles : le choix du champ diffus (une infinité d'ondes planes) comme champ d'excitation acoustique n'est qu'une simple hypothèse. Supposons que l'on dispose d'un signal représentant parfaitement chacune de ces sources. Il serait alors possible de relier leur contribution au rayonnement à l'aide de leur niveau de cohérence avec le champ rayonné. Cela fait l'objet de la partie suivante.

5.6.2 Contribution d'une composante spatialement cohérente

Pour que la contribution d'une excitation au bruit rayonné puisse être évaluée par une analyse de cohérence, la première condition nécessaire est qu'elle soit d'abord parfaitement cohérente sur la surface de l'excitation. Or, une source va plus ou moins contribuer au rayonnement selon son contenu énergétique. Dans cette partie nous allons donc étudier la contribution d'une composante cohérente de l'excitation en fonction de son contenu énergétique.

Le champ d'excitation est constitué de trois composantes : un champ diffus acoustique, un champ aérodynamique (modèle de Corcos) et une onde plane acoustique, où l'onde plane représente la composante cohérente connue du champ qui serait issue d'une source acoustique bien identifiée. Le champ diffus représente dans cet partie la somme des autres sources acoustiques éventuellement présentes. Pour s'affranchir du problème de repliement spatial de l'excitation aérodynamique à partir de 900 Hz, on n'analyse les spectres que jusqu'à cette fréquence.

Dans un premier temps le niveau d'énergie de l'onde plane est fixé égal au niveau d'énergie du champ diffus : $\tilde{S}_{pp}^{Diffus}(\omega) = \tilde{S}_{pp}^{Plane}(\omega) = 0.1 \times \tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega) = 0.6283$ Pa^2/(rad.Hz).

Il faut noter que l'onde plane étant parfaitement cohérente sur la surface d'excitation, elle possède une efficacité de rayonnement très élevée. La figure 5.22(a) montre le spectre de bruit rayonné à 60cm de la plaque pour 1) l'excitation aéroacoustique conventionnelle introduite dans la partie précédente et 2) pour cette même excitation à laquelle on a ajouté l'onde plane. On observe une nette augmentation du niveau de bruit rayonné, jusqu'à 7 dB dans les hautes fréquences, bien que le niveau total de l'énergie de l'excitation n'ait augmenté que de 0.38 dB. La figure 5.22(b) présente la comparaison de l'efficacité de ces deux champs à faire rayonner la plaque. Cela confirme l'augmentation de l'efficacité du champ d'excitation dû à la présence d'une composante "onde plane".

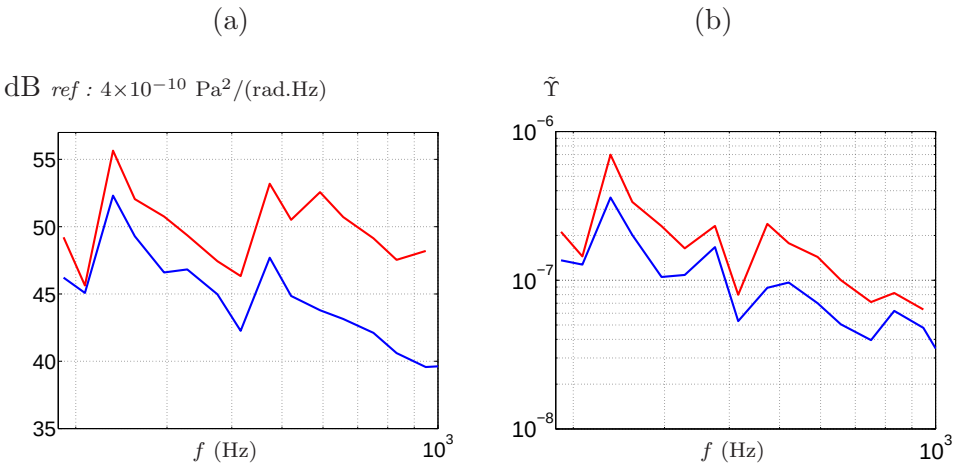

FIG. 5.22 – (a) DSP de la pression rayonnée pour un point à 0.6 m de la plaque. (b) Efficacité à faire rayonner la plaque. (-) champ diffus, modèle de Corcos avec $\tilde{S}_{pp}^{Diffus}(\omega) = 0.1 \times \tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega) = 0.6283$ Pa^2/(rad.Hz), (-) champ diffus, modèle de Corcos et onde plane avec $\tilde{S}_{pp}^{Plane}(\omega) = \tilde{S}_{pp}^{Diffus}(\omega) = 0.1 \times \tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega) = 0.6283$ Pa^2/(rad.Hz).

De la même manière que dans les parties précédentes, la cohérence moyenne entre le champ total rayonné et chaque composante est calculée sur les 30 réalisations et tracée en fonction de la fréquence (figure 5.23).

Dans ce cas test, les niveaux des deux composantes acoustiques sont de 10 dB inférieurs au niveau de la composante aérodynamique. Or on a vu dans la partie 5.5.1 que la transparence de la plaque sous excitation acoustique (diffus) était de l'ordre de 20 dB plus élevée que la transparence sous excitation aérodynamique. Cette différence est même plus grande pour une excitation acoustique de type onde plane. Ainsi, la puissance rayonnée par la plaque sera générée quasi-exclusivement par les deux composantes acoustiques du champ. Etant donné que l'onde plane a une cohérence spatiale de 1, la cohérence moyenne $\langle \tilde{\gamma}^2_{p_e p_r} \rangle$ de cette composante avec le champ rayonné indique strictement le niveau de sa contribution. Cela est bien vérifié sur la figure 5.23 puisque le niveau de cohérence moyenne est de l'ordre de 0.5. Cela signifie bien que

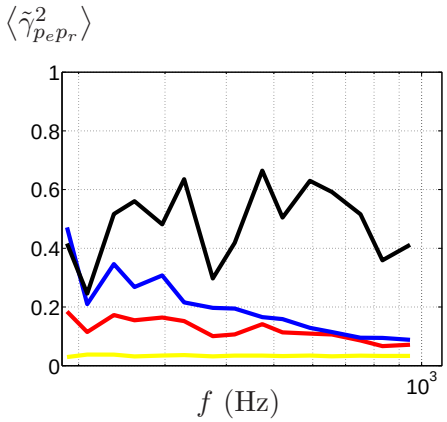

FIG. 5.23 – Cohérence moyenne du champ rayonné associé à une excitation composée d'une onde plane, d'un champ diffus et d'un champ aérodynamique (modèle de Corcos) : (-) onde plane, (-) champ diffus, (-) modèle de Corcos et (-) champ total. Le niveau d'énergie des composantes est fixé à : $\tilde{S}_{pp}^{Diffus}(\omega) = \tilde{S}_{pp}^{Plane}(\omega) = 0.1 \times \tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega) = 0.6283$ Pa^2/(rad.Hz)

la moitié de l'énergie rayonnée provient de l'onde plane. L'autre moitié provient du champ diffus (l'onde plane et le champ diffus ont le même niveau). Mais pour cette composante diffuse, étant donnée sa plus faible cohérence spatiale, le niveau de cohérence avec le champ rayonnée est plus faible. Il décroît avec la fréquence : ce niveau de cohérence moyenne "sous-estime" donc le niveau réel de la contribution du champ diffus au champ total rayonné.

Comme on l'a souligné précédemment, la nature de la composante acoustique de l'excitation réelle sur un véhicule, et plus généralement de l'excitation aux petits nombres d'onde, n'est pas très bien connue et le choix d'un champ diffus pour représenter cette composante n'est qu'une simple hypothèse. En effet, le champ diffus symbolise une infinité d'ondes planes qui arrive de toutes les directions de l'espace. Mais on peut imaginer qu'une infinité d'ondes planes n'est jamais atteignable et qu'en réalité on fait face à un nombre fini d'ondes planes ou de sources ponctuelles. Si on considère que ces sources ont à peu près le même niveau d'énergie, alors le niveau d'énergie d'une seule source correspondrait à une fraction de l'énergie totale. On effectue donc un deuxième test dans lequel la composante acoustique est encore représentée par un champ diffus et une onde plane mais l'énergie associée à l'onde plane est maintenant 10 fois inférieure à l'énergie du champ diffus. Les niveaux énergétiques des trois composantes de l'excitation totale sont donc fixés à : $\tilde{S}_{pp}^{Plane}(\omega) = 0.1 \times \tilde{S}_{pp}^{Diffus}(\omega) = 0.01 \times \tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega) = 0.06283$ Pa^2/(rad.Hz).

Dans cette configuration, les spectres de bruit rayonné pour un point situé à 60 cm de plaque pour l'excitation sans et avec l'onde plane sont donnés sur la figure 5.24(a). On observe qu'une faible augmentation de l'énergie totale de l'excitation (0.04 dB par une onde plane) conduit à une augmentation du niveau de bruit rayonné non négligeable. Cette augmentation va jusqu'à 2 dB pour les fréquences supérieures à 500 Hz. La figure 5.24(b) montre encore une fois que l'ajout d'une composante cohérente, une onde plane dans notre cas, malgré son énergie relativement faible par rapport aux autres composantes, augmente considérablement l'efficacité du champ d'excitation à faire rayonner la plaque.

Les cohérences moyennes entre le champ total rayonné et le champ total d'excitation ou les composantes de ce champ d'excitation sont représentées sur la figure 5.25. A l'aide des analyses précédentes, on peut déduire de ces courbes les résultats suivants :

- La contribution de l'onde plane au champ total rayonné est, de manière certaine, de l'ordre de 15 à 25 % suivant les fréquences.
- Aux très basses fréquences (fréquence pour lesquelles $L_c(\omega)/L_{xy}$ est de l'ordre de 1 pour

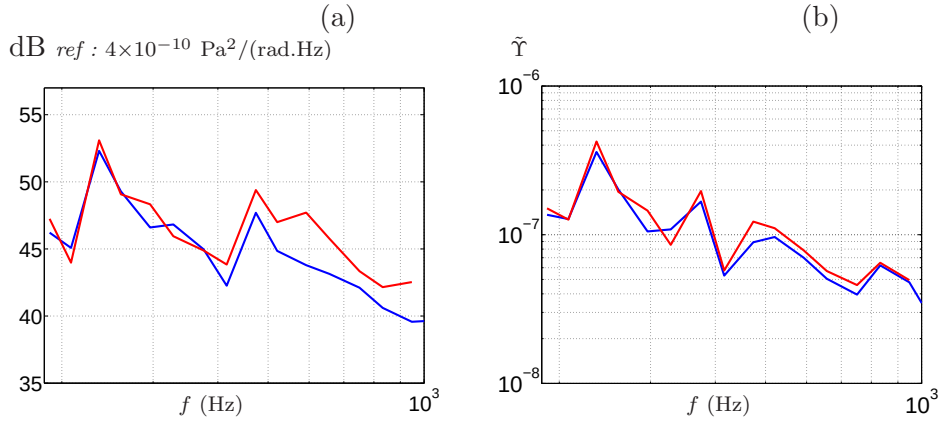

FIG. 5.24 – (a) DSP de la pression rayonnée en un point situé à 0.6 m de la plaque. (b) Efficacité à faire rayonner la plaque. (-) champ diffus, modèle de Corcos avec $\tilde{S}_{pp}^{Diffus}(\omega) = 0.1 \times \tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega) = 0.6283$ Pa^2/(rad.Hz), (-) champ diffus, modèle de Corcos et onde plane avec $\tilde{S}_{pp}^{Plane}(\omega) = 0.1 \times \tilde{S}_{pp}^{Diffus}(\omega) = 0.01 \times \tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega) = 0.06283$ Pa^2/(rad.Hz)

le champ diffus), la contribution du champ diffus est de l'ordre de 50%. A plus hautes fréquences, la valeur de la cohérence moyenne donne la limite minimale de la contribution du champ diffus mais ne donne pas sa valeur réelle.

– Concernant la composante aérodynamique, la cohérence moyenne ne permet pas de déterminer la part de contribution de cette composante dans le champ rayonné. De plus dans ce cas, la valeur de la cohérence moyenne ne peut pas être interprétée comme une part de contribution minimale car on atteint le seuil de convergence de l'opérateur de cohérence pour notre configuration de données.

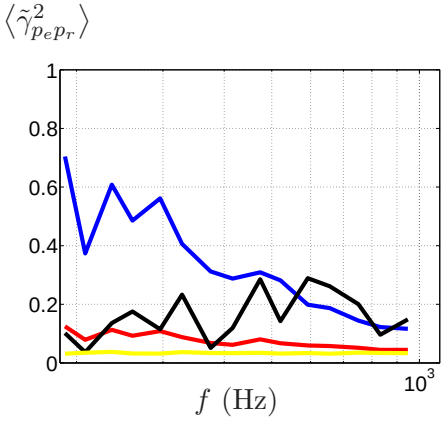

FIG. 5.25 – Cohérence moyenne du champ total rayonné associé à une excitation composée d'une onde plane, d'un champ diffus et d'un champ aérodynamique (modèle de Corcos) avec : (-) onde plane, (-) champ diffus, (-) modèle de Corcos et (-) champ total. Le niveau d'énergie des composantes est fixé à : $\tilde{S}_{pp}^{Plane}(\omega) = 0.1 \times \tilde{S}_{pp}^{Diffus}(\omega) = 0.01 \times \tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega) = 0.06283$ Pa^2/(rad.Hz)

En synthèse, on peut donc dire que la mesure de la cohérence moyenne permet de déterminer la contribution de la composante du champ d'excitation pondérée par la cohérence spatiale de l'excitation. Dans un style mathématique, on peut donc écrire une relation du type :

$$\left\langle \tilde{\gamma}^2_{ray-i}(\omega) \right\rangle \quad \cong \quad \left\langle \tilde{\gamma}^2_{excit-i}(\omega) \right\rangle \quad \text{“}\times\text{”} \quad \frac{\tilde{\Pi}_{ray-i}(\omega)}{\tilde{\Pi}_{ray}(\omega)}, \tag{5.25}$$

où $\left\langle \tilde{\gamma}^2_{ray-i}(\omega) \right\rangle$ représente la cohérence moyenne entre le champ total rayonné et la composante d'excitation i, $\left\langle \tilde{\gamma}^2_{excit-i}(\omega) \right\rangle$ désigne le cohérence spatiale de la composante i sur la surface de l'excitation (qui est globalement égale à $L_c(\omega)/L_{xy}$). Le ratio $\tilde{\Pi}_{ray-i}/\tilde{\Pi}_{ray}$ représente le taux de contribution de la composante i au champ total rayonné.

Comme on l'a vu précédemment, ce taux de contribution dépend de la valeur des efficacités de rayonnement des différentes composantes et du niveau d'énergie respectif de ces composantes. La mesure de la cohérence moyenne ne permet que de donner une valeur minimale de ce taux de contribution, en gardant à l'esprit la limite basse de la valeur de la cohérence imposée par la convergence statistique de cet opérateur.

5.7 Séparation des composantes acoustique et turbulente du champ d'excitation par la POD

Dans la partie précédente, à l'aide des modèles statistiques nous avons pu représenter les deux composantes du champ d'excitation de manière indépendante et séparée. Le champ total est obtenu par la sommation des deux composantes. Mais, en pratique, par la mesure ou la simulation numérique, la seule information disponible est le champ total.

Dans cette partie nous nous intéressons à la possibilité de séparer les deux composantes acoustique et aérodynamique du champ de pression sur le vitrage. Cette séparation est intéressante pour plusieurs raisons.
La première concerne l'analyse des évènements aérodynamiques à l'origine des émissions sonores dans l'habitacle et tous les outils mathématiques d'analyse et de post-traitement qui s'y rapportent. Pour de telles analyses, une extraction de chacune de ces composantes permettrait alors d'accéder à une caractérisation fine de chacune d'entre elles (amplitude, énergie, signatures spectrales, ...) améliorant la compréhension des mécanismes de production et d'émission du bruit à l'intérieur de l'habitacle.
La seconde raison est associée au calcul du rayonnement à l'intérieur de l'habitacle. Tout d'abord, si une méthode de type SEA est entreprise, la connaissance du niveau d'énergie et des longueurs de corrélation pour les modèles représentants chaque composante est indispensable. Ces informations ne peuvent être obtenues qu'à partir de la connaissance de chaque composante séparée. Ensuite, si une méthode de type FEM est utilisée, la séparation des signaux associés à chaque composante peut permettre de mettre en œuvre le calcul de la cohérence moyenne. Ceci permettra alors de quantifier la contribution relative de chaque composante, comme présenté dans la partie précédente. Il faut néanmoins remarquer que cette approche est très limitée, comme cela a été vu dans le chapitre précédent. Cette méthode permet, dans le cas général, de donner une borne inférieure de contribution de la composante la plus cohérente spatialement, à savoir la composante acoustique.
Des précédents travaux basés sur une exploitation de la transformée en nombre d'onde ont permis de montrer qu'à une fréquence fixée, les deux composantes du champ de pression pariétale peuvent être distinguées dans le plan des nombres d'onde [8, 9]. Cet outil sera donc utilisé à des fins de validation de la nouvelle méthode proposée dans ce qui suit pour séparer ces deux contributions.

Dans cette partie, la possibilité d'utiliser la méthode "POD" pour séparer ces deux composantes est examinée. En effet, l'inhomogénéité du champ de pression pariétale peut laisser présager que la POD est plus adaptée qu'une approche classique par transformées de Fourier [59]. De plus, une des propriétés fondamentales de la décomposition POD est son optimalité d'un point de vue énergétique. Tenant compte de ces deux propriétés et plus particulièrement de la dernière, il s'agit alors d'optimiser (c'est-à-dire utiliser à bon escient) l'application POD pour parvenir à notre objectif. Rappelons que pour des applications aux écoulements turbulents, les premiers modes POD permettent l'extraction des grosses structures tourbillonnaires cohérentes et énergétiques. Or la difficulté d'analyse des champs de pression pariétale est que ses deux composantes se distinguent sur deux caractéristiques : la longueur de corrélation (ou la cohérence spatiale) et l'énergie. La composante acoustique est plus cohérente et moins énergétique et la composante turbulente est moins cohérente et plus énergétique. De cette manière pour le champ de pression pariétale, les deux aspects "énergétiques" et "cohérentes" ne sont pas conjointement respectés pour aucune des composantes. L'application POD aux champs de pression pariétal devra alors tenir compte de cette dualité et s'en affranchir pour mieux distinguer les deux contributions.

S'agissant d'une nouvelle application POD, il est nécessaire au préalable de la valider à partir de données synthétiques parfaitement connues. On propose donc dans ce qui suit deux applications de la POD (domaine spectral puis domaine temporel) utilisant ces bases de données synthétiques et traitant des configurations d'écoulements aussi bien homogènes qu'inhomogènes. Puis une fois l'outil mathématique mis en place, une application à des données de pression pariétale plus réalistes issues d'une simulation numérique sera présentée.

5.7.1 Séparation dans le domaine fréquentiel : POD spectrale

La démarche de synthèse (§5.4.1) permet d'obtenir le champ de pression dans le domaine espace-fréquence ($\tilde{p}(x,\omega)$). Sans aucune étape supplémentaire ce champ synthétisé peut être décomposé en utilisant la formulation spectrale (espace-fréquence) de la POD (§3.4.2). L'étude de la séparation des composantes du champ de pression pariétale par la POD peut donc être effectuée de manière indépendante pour chaque fréquence. On fixe alors la fréquence de l'étude à 600 Hz. A cette fréquence les deux composantes du champ peuvent être très clairement distinguées sur la cartographie du spectre en nombre d'onde (figure 5.26(a)). Le champ (total) de pression est généré de la même manière que le champ d'excitation total sur la plaque utilisée dans le paragraphe 5.5. Plus précisément, il est obtenu par la somme des deux composantes issues du modèle de Corcos et du champ diffus acoustique. L'ensemble des paramètres utilisés dans la partie 5.5 pour le modèle de Corcos ($\alpha_1 = 8$, $\alpha_2 = 1.1$ et $U_c = 36$) et le champ diffus acoustique ($c_s = 340$ m/s) sont considérés pour la suite. L'étendue et la résolution spatiale du champ de pression correspondent également à celles appliquées à la plaque. C'est seulement le nombre de réalisations qui est augmenté à 1000 réalisations pour diminuer les éventuels problèmes liés à la convergence des opérateurs statistiques.

5.7.1.1 Cas homogène

Dans un premier temps le cas d'un champ dont la majorité d'énergie est portée par les grandes longueurs d'ondes est étudié. On fixe le niveau d'énergie de la composante "champ diffus acoustique" à $\tilde{S}_{pp}^{diffus}(\omega) = 1.25$ Pa^2/(rad.Hz) qui correspond à 95 dB avec une référence de 2×10^{-5} Pa^2/(rad.Hz). Pour le modèle de Corcos ce niveau est choisi égal à $\tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega) = 1$ Pa^2/(rad.Hz) ou 94 dB avec la même référence. En recalculant le niveau moyen d'énergie après la synthèse (1000 réalisations de chaque composante), on retrouve $\tilde{S}_{pp}^{diffus}(\omega) = 1.24$ Pa^2/(rad.Hz) et $\tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega) = 0.99$ Pa^2/(rad.Hz). De cette manière 55.1% de l'énergie du champ synthétisé total est répartie sur les grandes longueurs d'ondes présentes dans la composante "champ diffus". La cartographie du spectre en nombre d'onde du champ total est représentée sur la figure 5.26(a) pour une fréquence donnée égale à 600Hz. La Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres est alors appliquée à ces données générées à 600Hz et constituées de 600 points spatiaux pour chacune des 1000 réalisations indépendantes. Cela conduit à 600 valeurs propres significatives dont leur somme cumulée est présentée sur la figure 5.26(b).
Les 8 premiers modes contiennent 55.4% de l'énergie du champ, ce qui approche le niveau de contribution énergétique de la partie acoustique. On projette alors le champ synthétique sur ces 8 premiers modes :

$$\tilde{p}^{(1-N_C)}(\mathbf{x},\omega) = \sum_{n=1}^{N_C} \tilde{c}^n(\omega)\tilde{\chi}^n(\mathbf{x},\omega),$$

Une analyse dans le domaine des nombres d'onde de ce champ de pression $\tilde{p}^{(1-N_C)}$ est donnée sur la figure 5.27(a). Le champ de pression projeté sur le résidu des modes POD est également présenté sur cette figure (b). Les premiers modes POD permettent donc d'extraire les fluctuations les plus énergétiques et les plus cohérentes (grandes longueurs d'onde) du champ total correspondant ainsi

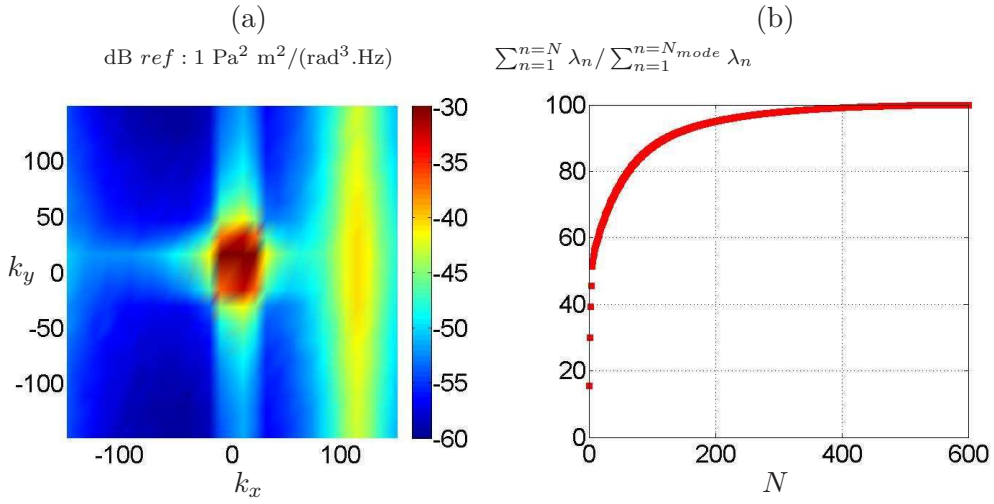

FIG. 5.26 – Champ de pression synthétisé à 600 Hz composé d'un champ diffus acoustique avec $\tilde{S}_{pp}^{diffus}(\omega) = 1.25$ Pa^2/(rad.Hz) et d'un modèle de Corcos avec $\tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega) = 1$ Pa^2/(rad.Hz) : (a) densité spectrale en nombre d'onde (b) Répartition énergétique de la POD spectrale appliquée aux données synthétiques (600Hz).

à la partie acoustique du signal. A l'inverse, les modes d'ordre supérieur sont associés à la partie aérodynamique moins cohérente et moins énergétique que la partie acoustique.

Pour ce cas test favorable, il ressort que la POD a permis une décomposition presque parfaite du champ de pression initiale en deux contributions (acoustique et aérodynamique) :

$$\tilde{p}(\mathbf{x},\omega) = \tilde{p}_{acou}(\mathbf{x},\omega) + \tilde{p}_{aero}(\mathbf{x},\omega) = \tilde{p}^{(1-N_C)}(\mathbf{x},\omega) + \tilde{p}^{(N_C+1-N_{mode})}(\mathbf{x},\omega),$$

$$\tilde{p}(\mathbf{x},\omega) = \sum_{n=1}^{N_C} \tilde{c}^n(\omega)\tilde{\chi}^n(\mathbf{x},\omega)(\mathbf{x}) + \sum_{n=1+N_C}^{N_{mode}} \tilde{c}^n(\omega)\tilde{\chi}^n(\mathbf{x},\omega).$$

Notons que la répartition énergétique choisie initialement pour les champs diffus et aérodynamique n'est pas réaliste. On choisit donc dans ce qui suit une répartition énergétique plus proche de celle effectivement mesurée et obtenue pour un champ de pression pariétale de véhicules automobiles : c'est-à-dire un champ constitué d'une composante acoustique cohérente et peu énergétique et d'une composante aérodynamique énergétique et peu cohérente.
On fixe alors $\tilde{S}_{pp}^{diffus}(\omega) = 0.01$ Pa^2/(rad.Hz) (74 dB) et $\tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega) = 1$ Pa^2/(rad.Hz) (94 dB). Cela signifie une différence de 20 dB entre l'énergie moyenne associée à chacune des composantes. Pour une fréquence fixée à 600Hz, le spectre en nombre d'onde de ce champ est calculé. La figure 5.28 présentant ce spectre met clairement en évidence les deux tâches ainsi que les niveaux d'énergie associés à chacune des deux contributions. La POD est alors appliquée à ces données. La répartition énergétique est donnée sur la figure 5.28(b). Par comparaison avec la figure 5.26(b), on remarque que la répartition énergétique diffère du cas précédent. Les premiers modes POD sont dans ce cas beaucoup moins énergétiques que ceux obtenus précédemment. Dans le cas précédent, les trois premiers modes contenaient 40% de l'énergie alors que dans ce dernier cas pour restituer 40% de l'énergie, il faut 33 modes. Ceci s'explique par la plus faible cohérence du champ de pression entier comparativement au précédent où l'essentiel de l'énergie était porté par les petits nombres d'onde.

Le champ de pression a alors été successivement projeté sur différents modes POD. Les nombreuses combinaisons et choix des modes POD n'ont pas permis de conclure quant à une éventuelle séparation des deux contributions. A titre d'illustration, nous avons choisi de tracer les spectres

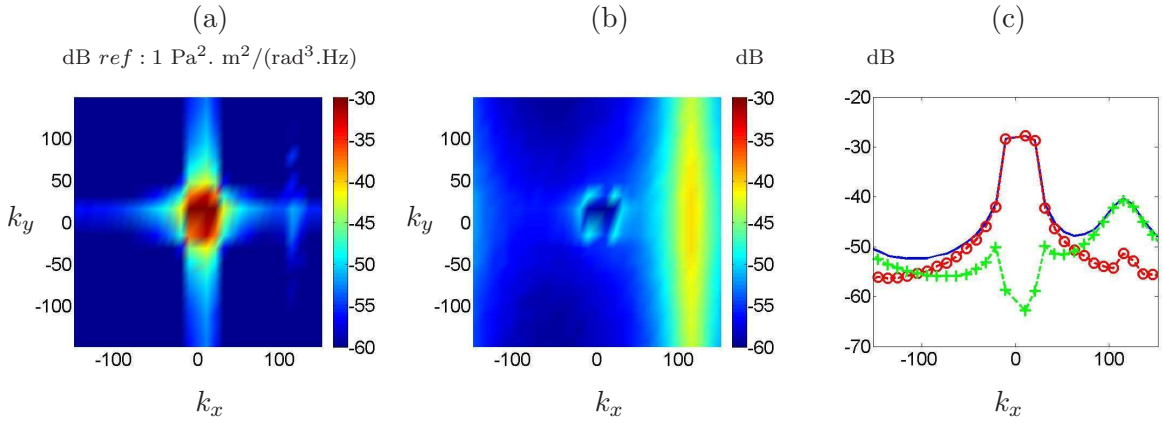

FIG. 5.27 – Densité spectrale en nombre d'onde : (a) $\tilde{p}^{(1-8)}$ (b) $\tilde{p}^{(9-1000)}$ (c) sur la ligne $k_y = 0$: champ total (—), $\tilde{p}^{(1-8)}$ (•) et $\tilde{p}^{(9-1000)}$ (+)

en nombre d'onde issu des champs de pression projetés sur le premier mode POD et sur le résidu de ces modes. Le premier mode permet alors de restituer la partie la plus énergétique (partie aérodynamique) constitué des grands nombres d'onde. En fait, dans ce cas d'étude, la POD ne peut pas extraire du champ de pression entier, la composante "acoustique" la plus cohérente sachant que son contenu énergétique est faible comparativement au reste du champ de pression.

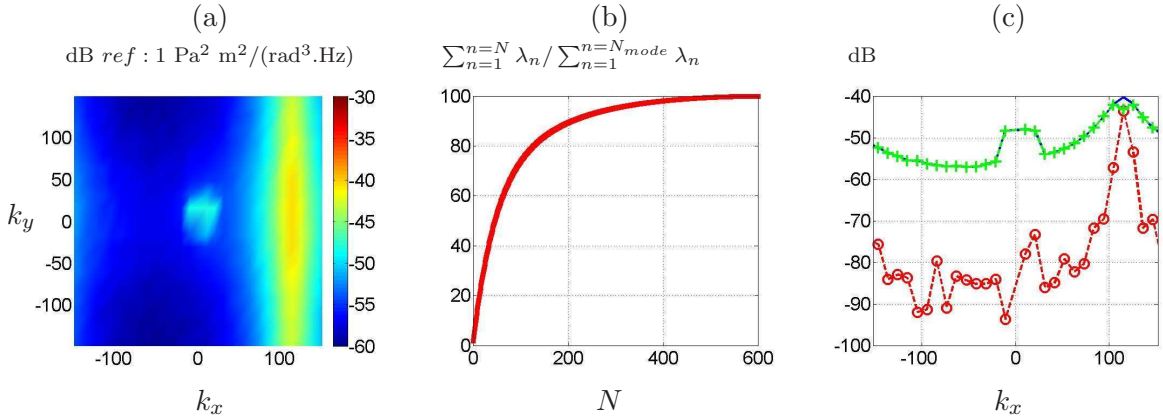

FIG. 5.28 – Champ de pression synthétisé à 600 Hz composé d'un champ diffus acoustique avec $\tilde{S}_{pp}^{diffus}(\omega) = 0.01$ Pa^2/(rad.Hz) et d'un modèle de Corcos avec $\tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega) = 1$ Pa^2/(rad.Hz) : (a) densité spectrale en nombre d'onde, (b) Répartition énergétique de la POD spectrale, (c) densité spectrale en nombre d'onde sur la ligne $k_y = 0$: champ total (—), $\tilde{p}^{(1)}$ (•) et $\tilde{p}^{(2-N_{mode})}$ (+)

Suite à ces deux précédents cas-tests, un troisième cas est maintenant proposé. En rappelant qu'une composante du champ de pression est définie à l'aide d'un ensemble limité de longueurs d'onde, l'énergie globale de cette composante (fixée par $\tilde{S}_{pp}$) est répartie sur cet ensemble de longueurs d'onde. Il est alors nécessaire de distinguer l'énergie globale d'une composante et la part de cette énergie globale portée par une longueur d'onde individuelle. En gardant toujours le niveau global d'énergie plus élevé de la composante moins cohérente, on définit alors un troisième champ synthétisé toujours à 600Hz et possédant les caractéristiques suivantes :$\tilde{S}_{pp}^{diffus}(\omega) = 0.063$ Pa^2/(rad.Hz)(82 dB) et $\tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega) = 1$ Pa^2/(rad.Hz)(94 dB). L'écart entre l'énergie globale des deux composantes correspond à 12 dB. Le spectre en nombre d'onde de ce champ est présenté sur la figure 5.29(a). Seule 5.9% de l'énergie totale est répartie sur les plus grandes longueurs d'onde de ce champ (composante champ diffus). L'application de la POD conduit à 600 modes

propres dont la somme cumulée des valeurs propres associées est présentée sur la figure 5.29(b). Cette répartition énergétique est proche de celle obtenue dans le cas précédent (figure 5.28(b)). La

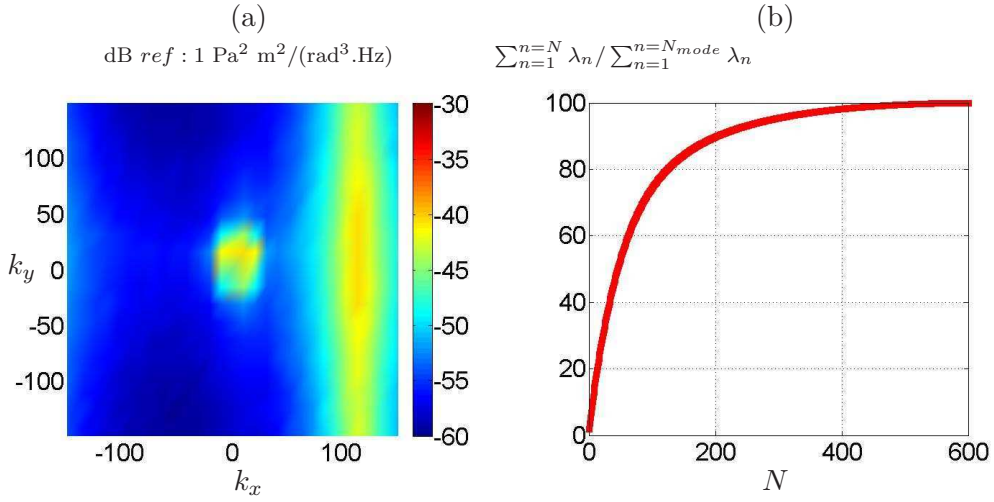

FIG. 5.29 – Champ de pression synthétisé à 600 Hz composé d'un champ diffus acoustique avec $\tilde{S}_{pp}^{diffus}(\omega) = 0.063$ Pa^2/(rad.Hz) et d'un modèle de Corcos avec $\tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega) = 1$ Pa^2/(rad.Hz) : (a) densité spectrale en nombre d'onde (b) Répartition énergétique des valeurs propres de la POD spectrale.

figure 5.30 représente les spectres en nombre d'onde suivant la ligne $k_y = 0$ pour le champ total et les champs recomposés avec différents nombres de modes. Ainsi sur un même graphe de cette figure, sont superposés les spectres associés au champ de pression entier, au champ de pression projeté sur les N_C premiers modes et au champ de pression projeté sur le résidu des modes POD. Sur cette figure, N_C a pour valeurs 1, 2, 3 et 4. Cette représentation met alors en évidence que les premiers modes POD permettent de restituer non seulement le champ diffus associé aux petits nombres d'onde mais également une partie du champ aérodynamique. Comme cela a été remarqué

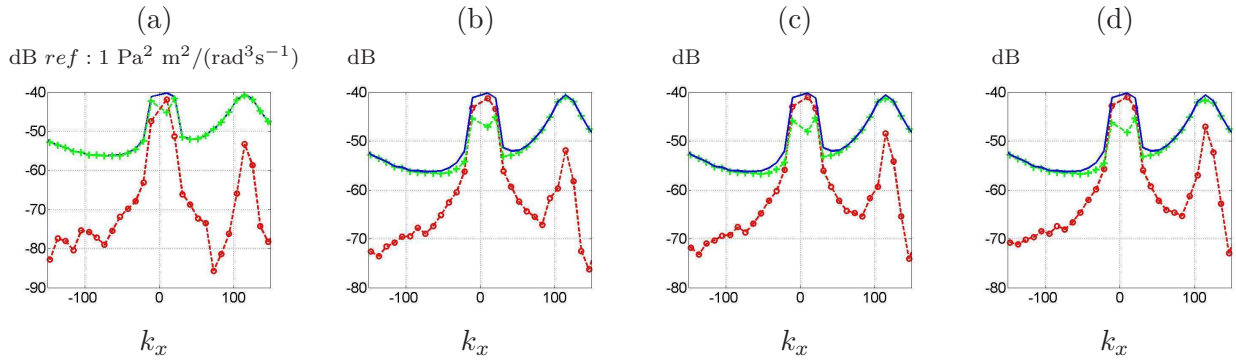

FIG. 5.30 – Densité spectrale en nombre d'onde sur la ligne $k_y = 0$ du champ de pression projeté sur certains modes modes POD, (—) champ total (figure 5.29), (•) $\tilde{p}^{(1-N_C)}$ (+) $\tilde{p}^{(N_C+1-N_{mode})}$: (a) – (d) = $N_C = 1 - 4$

dans le cas d'étude précédent, on constate qu'il n'est pas possible dans ce contexte d'extraire séparément les deux composantes du champ de pression à l'aide des modes POD. Ces modes représentent à la fois une partie de la composante cohérente et moins énergétique et une partie de la composante énergétique et moins cohérente. Toutefois, dans ce dernier cas d'étude même si le champ diffus est moins énergétique que la contribution aérodynamique, les premiers modes POD

arrivent mieux à capter la partie “champ diffus” que la partie “aérodynamique”. Il semble donc que les modes POD cherchent à représenter les longueurs d'ondes les plus énergétiques. Ainsi entre deux longueurs d'onde possédant un niveau d'énergie similaire, les premiers modes POD vont plus favorablement détecter la partie du signal associée à la plus grande longueur d'onde. En synthèse, ces précédents résultats semblent indiquer que les premiers modes POD représentent la part des fluctuations dont la quantité : “longueur d'ondes × énergie” est maximale. En rappelant qu'une longueur d'onde n'est rien d'autre qu'un mode de Fourier, on peut noter que le mode de Fourier le plus énergétique peut ne pas correspondre au mode POD le plus énergétique.

5.7.1.2 Cas inhomogène

Comme il a été souligné dans la partie §5.5.2 le champ d'excitation de pression pariétale est souvent inhomogène. Cette inhomogénéité est beaucoup plus importante pour la composante turbulente du champ. On vérifie dans cette partie le comportement des modes POD vis-à-vis des champs inhomogènes. Le champ est généré de la même manière que dans la partie §5.5.2. Une composante acoustique homogène et une composante turbulente inhomogène constituée de deux sous-champs homogènes (issus du modèle de Corcos) composent le champ total. On se place directement dans le cas d'un champ de pression synthétisé à 600Hz et qui possède une composante turbulente inhomogène et plus énergétique que la composante acoustique. Les niveaux d'énergie des sous-champs turbulents sont fixés à $\tilde{S}_{pp_1}(\omega) = 1$ Pa^2/(rad.Hz) (94 dB) et $\tilde{S}_{pp_2}(\omega) = 10$ Pa^2/(rad.Hz) (104 dB). En rappelant que le premier sous-champ est deux fois plus étendu que le deuxième sous-champ, l'énergie moyenne de la composante turbulente correspond à 3.958 Pa^2/(rad.Hz). L'énergie de la composante acoustique est fixée à $\tilde{S}_{pp_1}(\omega) = 0.25$ Pa^2/(rad.Hz) (78 dB) soit 12 dB inférieure à celle de la composante turbulente (inhomogène). Le spectre en nombre d'onde de ce champ est présenté sur la figure 5.31 où l'effet de l'inhomogénéité du champ est clairement visible. Comme dans le paragraphe précédent une POD spectrale (600Hz) est

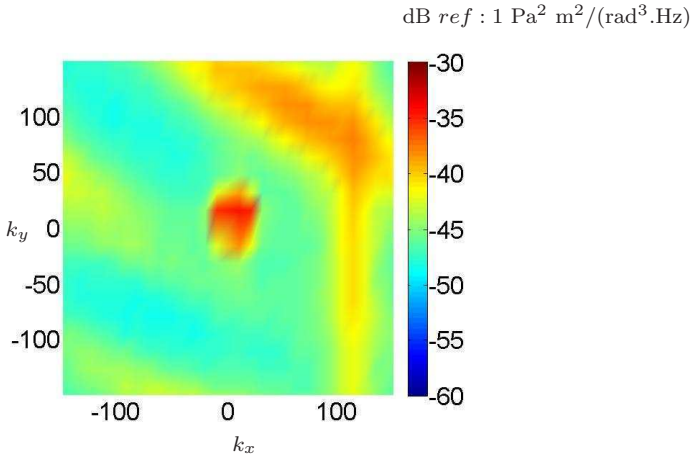

FIG. 5.31 – Densité spectrale en nombre d'onde du champ de pression synthétisé à 600 Hz composé d'un champ diffus acoustique avec $\tilde{S}_{pp}^{diffus}(\omega) = 0.25$ Pa^2/(rad.Hz) et d'une composante turbulente inhomogène ayant pour énergie moyenne $\tilde{S}_{pp}^{Tu}(\omega) = 3.95$ Pa^2/(rad.Hz)

réalisée à partir des données synthétiques. La figure 5.32 représente le spectre en nombres d'onde (sur la ligne $k_x = k_y$) du champ recomposé avec différents nombres de modes (N_c=1, 3, 6 et 9). Sur cette figure on peut observer que le comportement des modes POD face à ce champ inhomogène reste identique à celui obtenu pour les champs homogènes. Les premiers modes POD cherchent à représenter les longueurs d'ondes les plus grandes et les plus énergétiques indépendamment de la

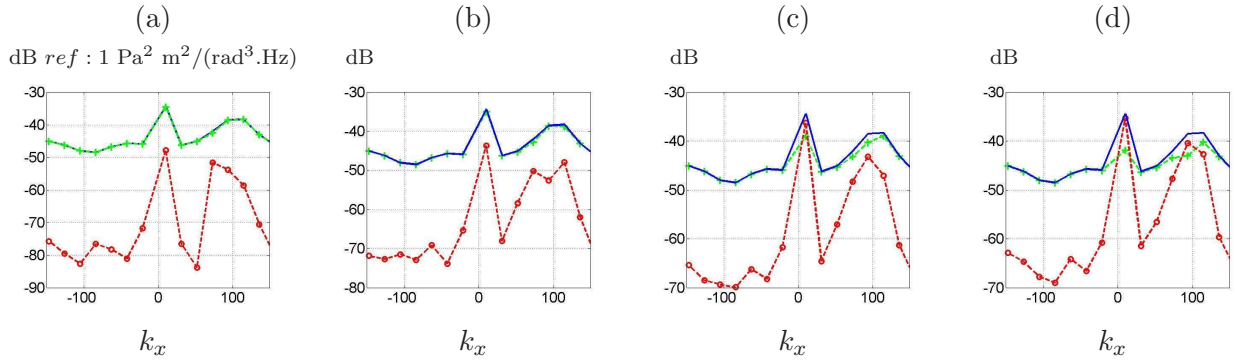

FIG. 5.32 – Densité spectrale en nombre d'onde sur la ligne $k_y = k_x$ du champ de pression projeté sur certains modes POD, (—) champ total (figure 5.31), (•) $\tilde{p}^{(1-N_C)}$, (+) $\tilde{p}^{(N_C+1-N_{mode})}$: (a) $N_C = 1$, (b) $N_C = 3$,(c) $N_C = 6$ et (d) $N_C = 9$

composante à laquelle elles appartiennent. L'inhomogénéité du champ turbulent n'a alors aucun effet sur l'application POD qui en découle.

Synthèse

Les modèles statistiques et la démarche de synthèse permettant d'exprimer le champ de pression pariétale dans le domaine espace-fréquence. Grâce à cette information l'utilisation de la formulation spectrale de la POD permet de décomposer le champ spatial pour chacune des fréquences. Les exemples donnés ci-dessus étaient considérés à 600Hz. Des résultats et des conclusions tout à fait similaires ont été obtenus pour les autres fréquences. En fait la synthèse du champ à une fréquence fixée revient à considérer que le champ physique (ou le champ exprimé dans le domaine espace-temps) est d'abord soumis à un premier filtre (de Fourier) avant l'application de la POD. Ainsi, il a été montré que les champs de pression homogènes ou inhomogènes, synthétisés à une fréquence donnée (par exemple 600Hz) et utilisées pour tester l'application POD en vue d'une séparation de ces composantes possèdent des caractéristiques aéroacoustiques (cohérence et énergie) qui ne peuvent pas être isolées par des modes POD. En effet, on peut considérer que dans le domaine spectral les variables physiques (espace et temps) sont en quelque sorte déjà séparées (filtrées) et la POD spectrale ne peut traiter que l'aspect spatial du champ. On propose alors dans la suite une alternative à cette application POD en l'appliquant maintenant dans le domaine temporel.

5.7.2 Séparation dans le domaine temporel

L'alternative proposée consiste à réaliser une POD dans le domaine physique (espace-temps) afin de traiter l'ensemble des signaux disponibles. En effet, l'opération de séparation des composantes acoustique et aérodynamique du champ de pression pariétal ne peut pas se concevoir comme une action limitée à l'espace spectral. Cette séparation doit être réalisée dans tout le domaine. En effet, en fonction de la fréquence, la répartition énergie-cohérence n'est pas identique pour les champs diffus et aérodynamique respectivement. Il s'agit alors de tirer profit de cet aspect pour mieux séparer chacune des contributions du champ de pression total. Cette nouvelle application POD permettra alors d'obtenir des vecteurs propres du tenseur d'inter-corrélation décrivant les fluctuations les plus cohérentes et les plus énergétiques à la fois en temps et en espace.

Génération d'un champ de pression synthétique dans le domaine physique

L'expression du champ de pression dans le domaine physique ($p(x,t)$) peut être obtenue par une transformée de Fourier inverse de son expression dans le domaine spectral ($\tilde{p}(x,\omega)$). Numériquement cette opération nécessite que les signaux fréquentiels soient symétriques et que l'écart entre deux fréquences successives soit constant. Ainsi, dans un premier temps le champ est synthétisé pour les fréquences allant de 100 jusqu'à 600 Hz avec un pas de 100 Hz. L'effet de la résolution fréquentielle considérée sera discuté plus tard. Comme la partie fluctuante du champ est seulement traitée, à $f = 0$ la valeur des signaux est considérée égale à zéro. On se place dans le cas habituel du champ de pression pariétale automobile avec une composante turbulente (pour l'instant homogène) contenant plus d'énergie que la composante acoustique. Le niveau de l'énergie moyenne du champ ($\tilde{S}_{pp}(\omega)$) est considéré identique pour toutes les fréquences. Pour la composante turbulente il est fixé à $\tilde{S}_{pp}^{Corcos}(\omega) = 1$ Pa^2/(rad.Hz) (94 dB) et à $\tilde{S}_{pp}^{diffus}(\omega) = 0.01$ Pa^2/(rad.Hz) (74 dB) pour la composante acoustique. Le choix du niveau d'énergie moyenne identique pour toutes les fréquences est évidemment loin d'une réalité physique et son effet sera discuté dans la suite.
Pour chacune des fréquences retenues, 1000 réalisations ont été effectuées. Une fois ces signaux générés et "passés" dans le domaine temporel, ils sont utilisés pour réaliser une Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres.
La figure 5.33 montre la somme cumulée des valeurs propres. Les quatre premiers modes contiennent 1.8%, 1.7%, 1.3% et 1.2% de l'énergie totale du champ.

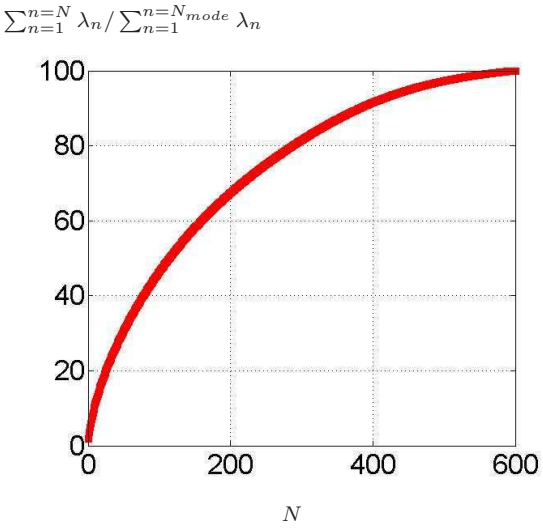

FIG. 5.33 – La somme cumulée des valeurs propres

Comme précédemment, il s'agit de trouver un nombre de mode de coupure N_C permettant de séparer le champ initial en deux contributions différentes et associées aux champs diffus et acoustique :

$$p(\mathbf{x},t) = p^{(1-N_C)}(\mathbf{x},t) + p^{(N_C+1-N_{mode})}(\mathbf{x},t) = \sum_{n=1}^{N_C} a_n(t)\phi^{(n)}(\mathbf{x}) + \sum_{n=1+N_C}^{N_{mode}} a^{(n)}n(t)\phi_n(\mathbf{x}). \quad (5.26)$$

Afin d'analyser séparément les deux champs $p^{(1-N_C)}$ et $p^{(N_C+1-N_{mode})}$, l'utilisation du spectre en nombre d'onde est encore nécessaire. Ainsi, chaque terme de l'équation (5.26) est soumis individuellement à la transformée de Fourier en temps-fréquence et ensuite en espace-nombres

d'onde. A des fins de comparaison avec les résultats précédents, nous présentons dans ce qui suit les spectres en nombres d'onde issus des champs préalablement filtrés à 600Hz. Ces spectres en nombre d'ondes sont présentés sur la figure 5.34 pour différents nombres de mode de coupure (N_C).

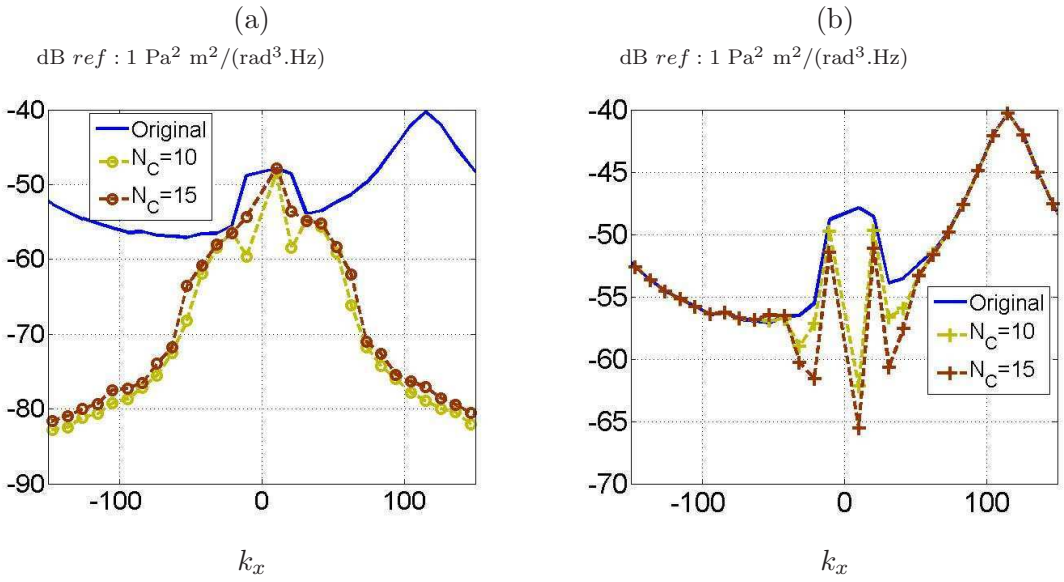

FIG. 5.34 – Densité spectrale en nombre d'onde sur la ligne $k_y = 0$, du champ de pression à 600Hz (—) et projeté sur certains modes POD obtenus dans le domaine temporel : (a) projeté sur les N_C premiers modes POD ($p^{(1-N_C)}$), (b) projeté sur les modes allant de N_C à N_{mode} ($p^{(N_C+1-N_{mode})}$)

La figure 5.34 montre que la décomposition dans le domaine temporel fournie des résultats assez différents de ceux de la décomposition du champ dans le domaine fréquentiel. En effet à cette fréquence (600 Hz) les premiers modes POD issus de la décomposition dans le domaine temporel décrivent plutôt les grandes longueurs d'onde bien que ces nombres d'ondes soient très peu énergétiques à cette fréquence. Cette "contradiction" est expliquée par les résultat présentés sur la figure 5.35. Sur cette figure les spectres en nombres d'onde des composantes séparées (avec $N_C = 10$) sont présentés à différentes fréquences. Sur la figure 5.35(a) est représenté le spectre

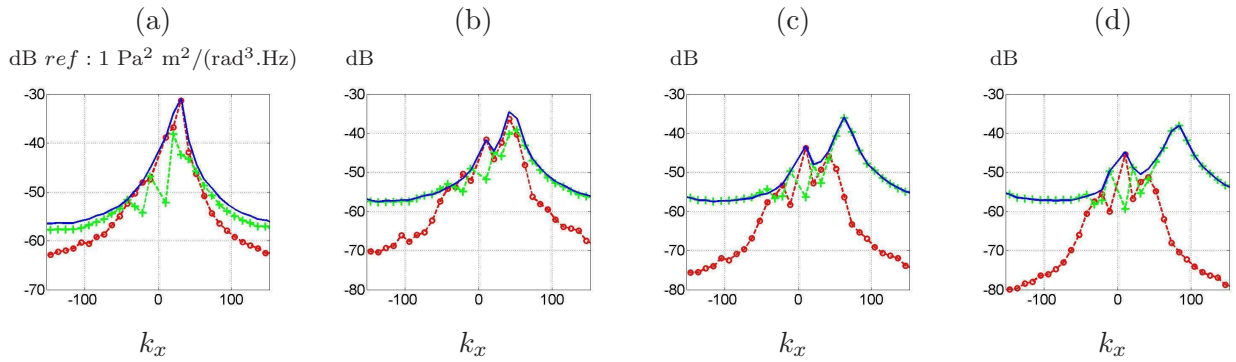

FIG. 5.35 – Densité spectrale en nombre d'onde sur la ligne $k_y = 0$ du champ de pression total (—), (•) $p^{(1-10)}$, (+) $p^{(11-N_{mode})}$. (a) – (d) : f= 100, 200 ,300 et 400 Hz

en nombre d'onde du champ de pression projeté sur les N_C premiers modes et sur le résidu des modes avec $N_C = 10$ à 100 Hz. Cette fréquence est la fréquence la plus basse présente dans le champ. A cette fréquence les longueurs d'onde les plus grandes et les plus énergétiques

du champ total sont présentes (et elles appartiennent à la composante turbulente du champ). Conformément aux résultats de la décomposition obtenus pour le domaine fréquentiel les premiers modes POD temporels cherchent à représenter les longueurs d'onde les plus grandes et les plus énergétiques. La signature spatiale des premiers modes est donc dominée par ces longueurs d'onde. Aux fréquences plus élevées, la composante turbulente s'éloigne du centre du plan des nombres d'onde et son énergie n'est plus portée par les mêmes longueurs d'onde (qui sont captées par les premiers modes POD). En revanche les longueurs d'ondes présentes dans les premiers modes POD correspondent de plus en plus à celle présentes dans la composante acoustique. Par conséquent, à 600 Hz comme la figure 5.34 le montre, le champ recomposé à l'aide des premiers modes décrivent plutôt la composante acoustique du champ.

5.7.3 Conclusion

Pour réaliser la séparation des composantes acoustiques et turbulentes d'un champ de pression pariétal, la décomposition POD a été mise en œuvre à partir de données synthétiques. Un premier avantage de cette technique est qu'elle s'applique indépendamment du caractère homogène ou non du champ et sur des maillages quelconques.

Des premiers cas tests ont été effectués à partir d'une POD spectrale c'est-à-dire que les champs de pression ont été synthétisés à une fréquence fixée et décomposés à cette même fréquence par la POD. Il a alors été montré que cette méthode n'était pas appropriée pour effectuer une séparation des composantes acoustique et turbulente. En effet, une telle application dite "POD spectrale" ne permet pas de traiter la séparation des deux composantes dans le domaine espace-fréquence. Pour une tentative de séparation de ces deux composantes, l'intérêt de la POD spectrale semble limité.
Toutefois, ces résultats ont conduit à effectuer une POD dans le domaine temporel prenant alors en compte l'information disponible dans tout le domaine (espace temps). Ainsi les résultats obtenus mettent alors en évidence le potentiel d'une telle application pour séparer la partie acoustique de celle liée à l'écoulement turbulent. En effet, il a été montré que le spectre en nombre d'ondes du champ de pression projeté sur les premiers modes POD correspond aux plus petits nombres d'onde. Ce résultat a été observé pour l'ensemble des fréquences retenues.

On note cependant que dans l'exemple traité, l'énergie du champ est arbitrairement considérée uniformément répartie sur toutes les fréquences allant de 100 jusqu'à 600 Hz avec un pas de 100 Hz. Pour un champ de pression pariétale d'une voiture ce choix n'est évidemment pas assuré. De plus à une fréquence donnée la répartition spatiale de l'énergie du champ de pression n'est pas uniforme (le champ n'est pas homogène). Cette répartition inhomogène peut varier d'une fréquence à l'autre. Ainsi, l'étude complète de l'inhomogénéité du champ de pression nécessitant la prise en compte de : différentes fréquences, différents niveaux d'énergie à chaque fréquence et à chaque point pour chaque composante. Cette étude paramétrique peut donc être très vaste et compliquée. Elle n'apportera pas un plus aux conclusions générales tirées dans les parties précédentes sur le comportement des modes POD. Pour cette raison l'étude d'un champ de pression pariétale réel issu de la simulation numérique d'écoulement est préférée. Cette étude est présentée dans la partie suivante.

5.7.4 Séparation des composantes d'un champ issu d'une simulation numérique

Une application de la POD est maintenant réalisée à partir de données de pression pariétale plus réalistes.

5.7.4.1 Présentation du champ de pression pariétale

Le champ de pression pariétale étudié dans cette partie est fournie par la simulation numérique de l'écoulement autour d'un véhicule de type Modus que nous avons déjà présentée dans la partie §4.5.1. Sur la figure 5.36 une image instantanée du champ de pression sur le vitrage latérale gauche du véhicule est présentée.

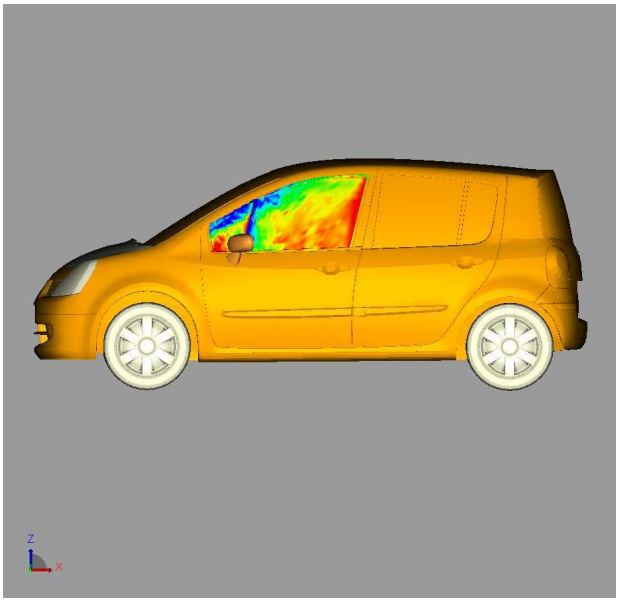

FIG. 5.36 – Instantané du champ de pression pariétale sur la vitre latérale fourni par la simulation numérique d'écoulement autour du véhicule

En raison des limitations imposées par les ressources informatiques nécessaires pour l'enregistrement des données et le post-traitement, l'ensemble de la surface de la vitre n'est pas étudié. La zone d'étude est limitée à un rectangle de $L_x = 18$ cm $\times$ $L_z = 16$ cm présentée sur la figure 5.37(a). Dans cette zone les signaux de pression sont enregistrés en un point sur deux du maillage principal du calcul. Le pas d'espace correspond à $dx = dz = 2$ mm. Ainsi un nombre total de 7200 points de mesure sont disponibles. Comme il a été détaillé dans la partie 4.5.2 la fréquence d'enregistrement des signaux correspond à 60 kHz. Les signaux enregistrés sont filtrés à 2 kHz afin d'éviter les éventuelles fluctuations parasites. Avec le filtrage effectué, il est inutile de garder tous les échantillons car une fréquence d'échantillonnage de 4 kHz suffit pour respecter le critère de Shannon. Tous les signaux sont donc sous-échantillonnés et, au final, les signaux sont constitués de 1000 échantillons temporels avec une fréquence d'échantillonnage de $f_s = 5$ kHz. Sur la figure 5.37(b) la valeur *rms* des fluctuations de pression est représentée. On observe très clairement la répartition inhomogène de l'énergie du champ de pression fluctuante dans cette zone. La région énergétique (la bande du milieu avec une région très énergétique au début) correspond à la fin du sillage du rétroviseur.

On vérifie la présence des deux composantes "acoustique" et "turbulente" du champ de pression fluctuante dans la zone d'étude. Le champ de pression est soumis à une première transformée de Fourier temps-fréquence. Afin d'obtenir plusieurs réalisations dans le domaine des fréquences (nécessaire pour l'estimation du spectre en nombre d'onde) les signaux sont découpés en 12 blocs FFT de taille 233 échantillons avec un taux de recouvrement de 70%. Chaque bloc est soumis à une fenêtre de Hann. Ainsi 117 fréquences allant de 0 Hz jusqu'à 2528.8 Hz avec un pas de 21.8 Hz et 12 réalisations pour chaque fréquence sont disponibles. Chacune des 12 réalisations du champ de pression dans le domaine espace-fréquence est ensuite soumise à une transformée de

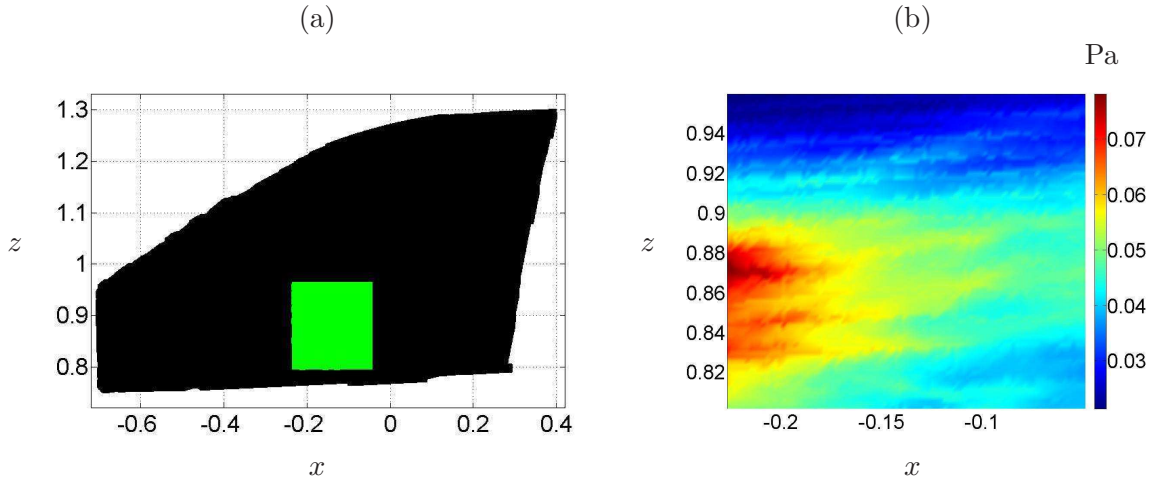

FIG. 5.37 – (a) la zone choisie sur la vitre latérale pour l'étude de séparation des composantes acoustique et turbulente du champ de pression (b) la valeur rms des fluctuations de pression adimensionnelle $C'_p = \frac{P-\bar{P}}{\frac{1}{2}\rho_c u_c}$ (avec $\rho_c = 1.204$ Kg/m^3 et $u_c = 45$ m/s) dans la zone d'étude

Fourier espace-nombres d'onde. Le spectre en nombre d'onde du champ de pression est obtenu via l'équation (3.23) en moyennant sur les 12 réalisations disponibles. Le résultat est présenté sur la figure 5.38 pour quelques fréquences. Sur cette figure, la présence des deux tâches est tout à fait visible mis à part aux très basses fréquences. Une première tâche peu énergétique centrée autour des petits nombres d'onde correspond à la composante acoustique du champ de pression. Une deuxième tâche plus énergétique repartie sur les grands nombres d'onde correspond à la composante turbulente du champ de pression. On note également que la tâche liée à la composante turbulente est beaucoup plus étalée que celle de la composante acoustique. En très basses fréquences (par exemple à 43 Hz) comme les deux composantes sont centrées autour des nombres d'ondes relativement petits, elles sont confondues et leur distinction sur le plan des nombres d'onde n'est pratiquement pas possible.

5.7.4.2 Décomposition du champ de pression en modes POD

Afin de séparer les deux composantes acoustique et turbulente, une POD temporel est appliquée au champ de pression pariétale. Le champ de pression étant constitué de 7200 points spatiaux et 1000 échantillons temporels, la formulation Snapshot de la POD dans le domaine espace-temps est choisie. Sur la figure 5.39, la somme cumulée des valeurs propres est présentée pour les 300 premiers modes.
Le premier mode représente 11.1% de l'énergie fluctuante du champ de pression. Cette quantité d'énergie prédit la présence d'un nombre limité de longueurs d'onde très grandes et énergétiques par rapport au reste des longueurs d'ondes du champ. On décompose le champ de pression selon l'équation 5.26 en deux parties. Le spectre en nombre d'onde de chaque partie est calculé conformément à la démarche suivie et aux paramètres choisis pour le calcul du spectre en nombre d'onde du champ total déjà présenté. Le résultat est présenté sur la figure 5.40 pour différentes fréquences et différents nombres de mode POD de coupure.
Comme une grande fraction de l'énergie du champ est présente aux basses fréquences et les longueurs d'ondes portantes cette énergie sont parmi les plus grandes longueurs d'ondes ($\lambda = U_c/f = 2\pi/k$), les premiers modes POD sont représentatifs de ces longueurs d'onde. Cela peut très bien être observée sur la figure 5.40 pour $f = 43$ Hz. On note également qu'aux basses fréquences, comme la distinction des deux composantes acoustique et turbulente du champ (si

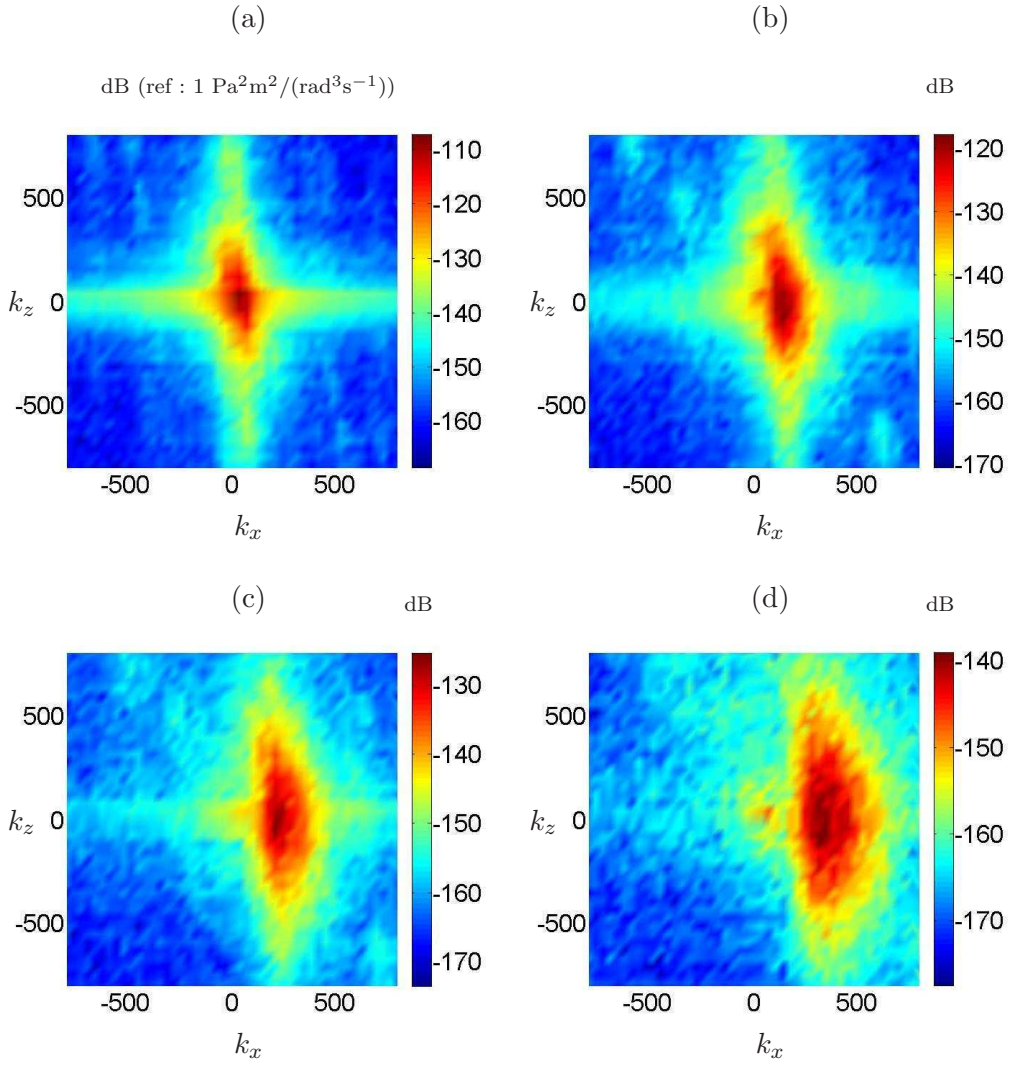

FIG. 5.38 – Densité spectrale en nombre d'onde des fluctuations de pression adimensionnelle $C_p' = \frac{P-\bar{P}}{\frac{1}{2}\rho_c u_c}$ (avec $\rho_c = 1.204$ Kg/m^3 et $u_c = 45$ m/s) pariétale dans la zone d'étude. (a) - (d) estimation à : 43, 501, 1003 et 1700 Hz.

on suppose que les deux existent !) est impossible, on ne peut pas déterminer ce que les premiers modes POD représentent. Ainsi sachant que l'énergie est essentiellement concentrée dans les basses fréquences et les bas nombres d'onde, cette répartition énergétique va piloter la répartition de l'ensemble des modes POD. Etant donné que les premiers modes POD spatiaux sont de longueurs d'ondes fixées et ne varient pas avec la fréquence, on obtient un filtre robuste et efficace en nombres d'onde pour des fréquences élevées.

Il reste maintenant à déterminer le numéro du mode de coupure permettant de séparer au mieux ces deux composantes. Prenant compte du fait que les modes POD spatiaux sont de longueurs d'ondes fixées et ne varient pas avec la fréquence, la qualité de séparation avec un nombre de coupure (N_c) donnée diffère d'une fréquence à l'autre. On se contente donc de comparaisons visuelles entre les spectres en nombres d'onde des champs séparés en utilisant différents nombres de mode de coupure N_c. Dans notre cas, le nombre de mode de coupure ainsi obtenu qui a fourni une bonne séparation pour la plupart des fréquences correspond à $N_c = 3$. Le spectre en nombre d'onde des parties séparées avec ce nombre de coupure est donné pour deux fréquences sur la figure 5.41.

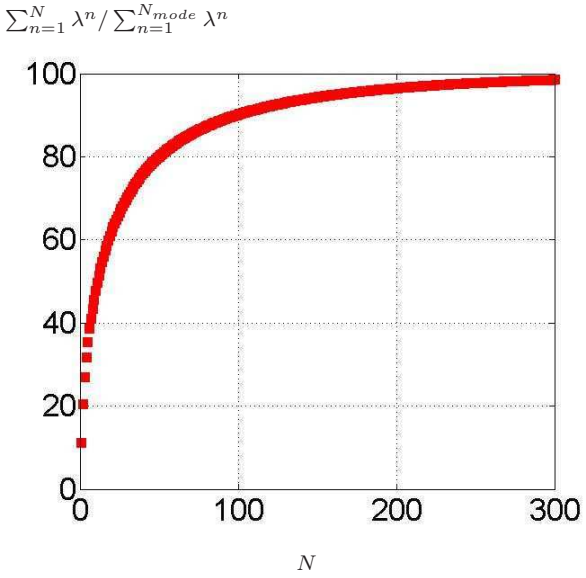

FIG. 5.39 – Evaluation cumulée des valeurs propres

Cette analyse de transformées en nombre d'onde, montre que la POD permet de séparer de manière satisfaisante les composantes acoustique et turbulente pour des fréquences élevées.

Une autre analyse possible pour vérifier la nature (acoustique ou turbulente) de chaque partie des membres de gauche de l'équation 5.26 peut également être effectuée via une analyse de phase. De la même manière que dans la partie 4.5.3 on compare la phase relative entre les signaux de pression extraits en deux points séparés d'une distance Δx avec la phase relative d'une onde plane acoustique ou la phase liée à une onde qui se propage à la vitesse de l'écoulement (ou plus précisément la vitesse de convection des structures turbulentes).

Cette analyse est effectuée pour différents points et pour différentes distances de séparation. Le résultat varie en fonction de l'endroit où les deux points sont considérés. Il varie également en fonction de la distance de séparation entre eux. Cependant, dans la grande majorité des cas, les résultats obtenus sont similaires à ceux présentés dans ce qui suit. Sur la figure 5.42, la phase relative entre les signaux de pression en deux points ($(x, z) = (-0.14, 0.86)$ et $(-0.09, 0.86)$) séparés d'une distance de 5 cm selon l'axe x est représentée pour le champ original et les champ séparés par les modes POD.

En parcourant une distance de séparation relativement grande les structures turbulentes peuvent perdre leur cohérence. En effet, dans ce cas la distance parcourue est plus grande que la longueur de corrélation moyenne des structures turbulentes. Cette perte de cohérence se traduit par la perte de la relation de phase entre les deux signaux mesurés à une telle distance. La figure 5.42(a) montre que la distance de séparation considérée (5 cm) est bien trop grande pour que les fluctuations de pression puissent garder une relation de phase linéaire. En revanche les mêmes signaux projetés sur les trois premiers modes POD montrent un déphasage relatif qui s'approche de manière assez satisfaisante au déphasage lié à une onde plane acoustique. Pour la partie reconstruite avec les modes restants la phase est aussi bruitée que le champ original (figure 5.42(c)). Ce résultat est attendu car les modes restant contiennent la majorité de l'énergie du champ initial. Sur la figure 5.43 une distance de séparation de 1 cm selon l'axe x avec le même point de départ que le cas précédent est considérée. Comme on peut l'observer sur la figure 5.43(a), pour cette distance de séparation les fluctuations de pression possèdent une phase linéaire qui coïncide avec une onde plane possédant une vitesse de propagation de 32 m/s. Cette vitesse de propagation

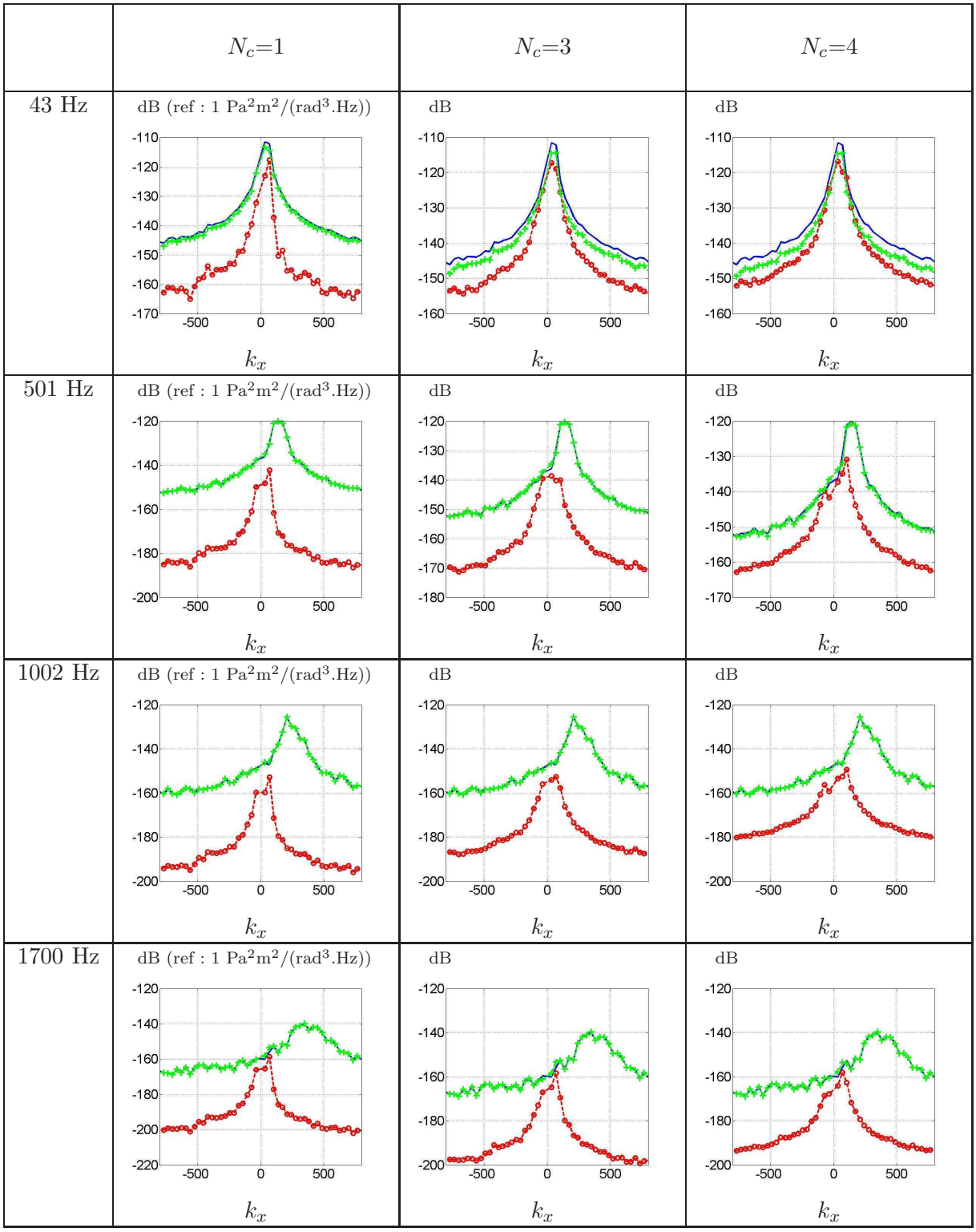

FIG. 5.40 – Densité spectrale en nombre d'onde sur la ligne $k_z = 0$ des fluctuations de pression adimensionnelle $C'_p = \frac{P-\bar{P}}{\frac{1}{2}\rho_c u_c}$ (avec $\rho_c = 1.204$ Kg/m^3 et $u_c = 45$ m/s) pariétale dans la zone d'étude : (-) champ total, (•) la partie reconstruite avec N_c premiers modes et (+) la partie reconstruite avec les modes allant de N_c jusqu'au dernier mode (millième mode).

peut être considérée comme équivalente à la vitesse de convection des structures turbulentes par l'écoulement moyen (la vitesse moyenne correspond à 45 m/s) dans cette direction. Pour cette distance de séparation et aux basses fréquences, les longueurs d'ondes du champ de pression correspondent à ces mêmes longueurs d'onde grandes et énergétiques qui ont été captées par les premiers modes POD. Cela peut très bien être observé sur la figure 5.43(b) où la phase relative est tracée pour le champ projeté sur les 3 premiers modes POD. Sur cette figure la présence d'une phase turbulente (phase d'une onde plane possédant la vitesse de convection de 32 m/s) jusqu'à 250 Hz peut très bien être observée. Pour les fréquences plus élevées une phase proche d'une phase acoustique (phase d'une onde plane acoustique) est obtenue. De la même manière attendue (comme dans le cas précédent) la phase de la partie reconstruite à l'aide des modes restants (figure 5.43(c)) correspond à celle du champ initial.

Ces résultats permettent de valider cette nouvelle procédure de séparation des composantes acoustique et aérodynamique d'un champ de pression pariétal réaliste.

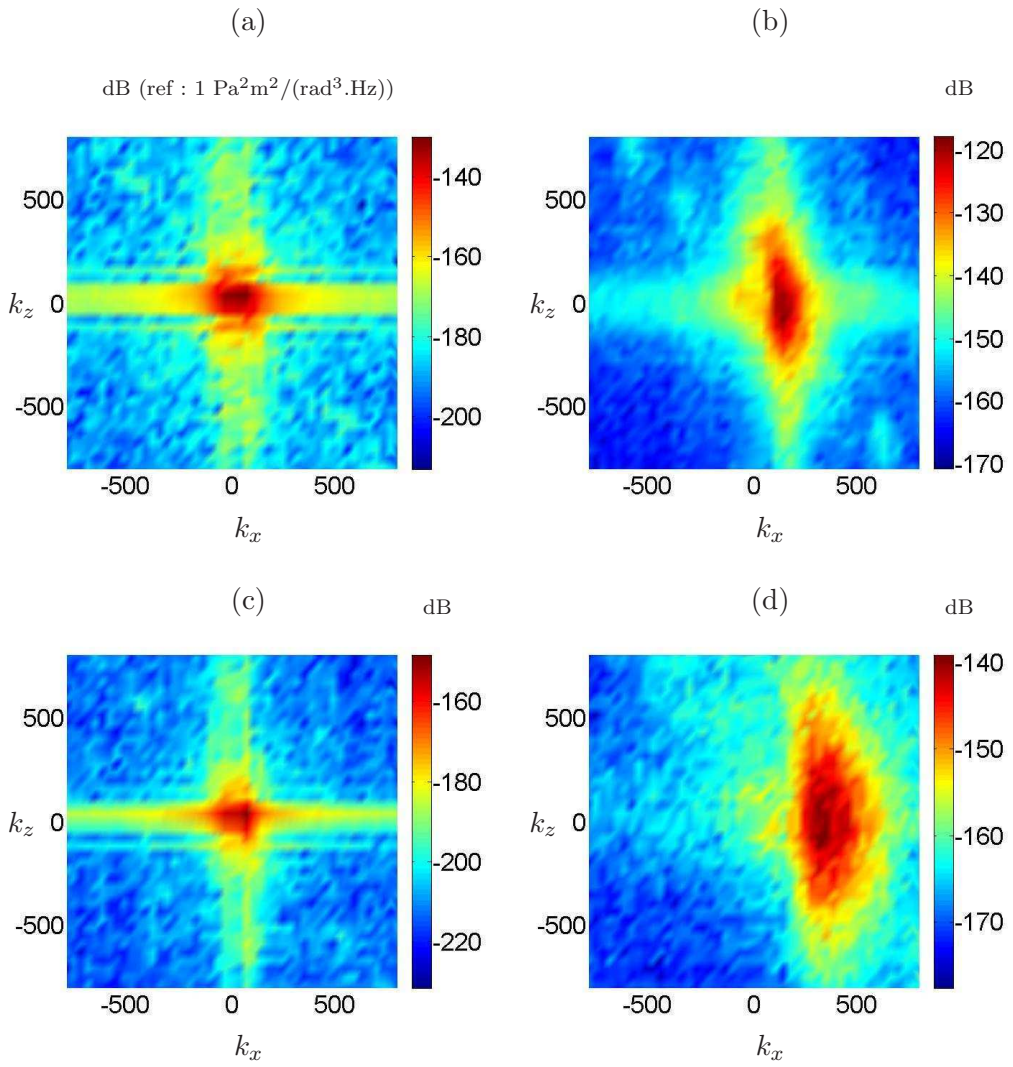

FIG. 5.41 – Densité spectrale en nombre d'onde des fluctuations de pression adimensionnelle $C'_p = \frac{P-\bar{P}}{\frac{1}{2}\rho_c u_c}$ (avec $\rho_c = 1.204$ Kg/m^3 et $u_c = 45$ m/s) pariétale dans la zone d'étude : (a) 501 Hz, fluctuations de pression projetées sur les 3 premiers modes POD ; (b) 501 Hz, fluctuations de pression projetées sur les modes allant de 4 à 1000 ; (c) 1700 Hz, fluctuations de pression projetées sur les 3 premiers modes POD ; (d) 1700 Hz, fluctuations de pression projetées sur les modes allant de 4 à 1000.

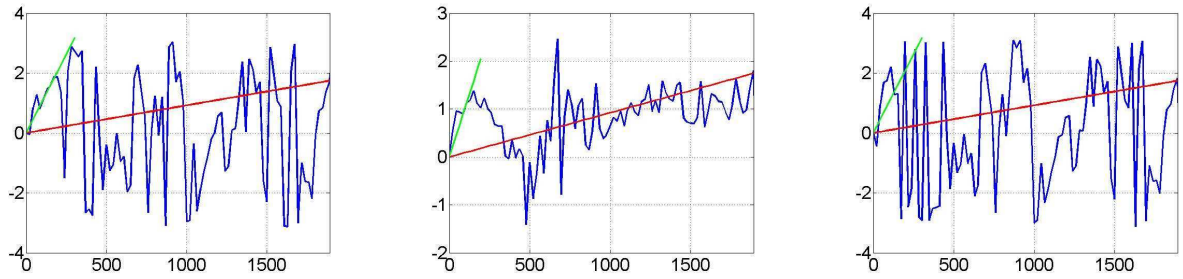

FIG. 5.42 – Phase relative entre les fluctuations de pression aux points $(x, z) = (-0.14, 0.86)$ et $(-0.09, 0.86)$: onde plane se propageant dans la direction de x à (-) 340 m/s et (-) 32 m/s. (-) La pression issue de la simulation numérique : (a) champ total (b) partie reconstruite avec les trois premiers modes et (c) partie reconstruite avec les modes restants

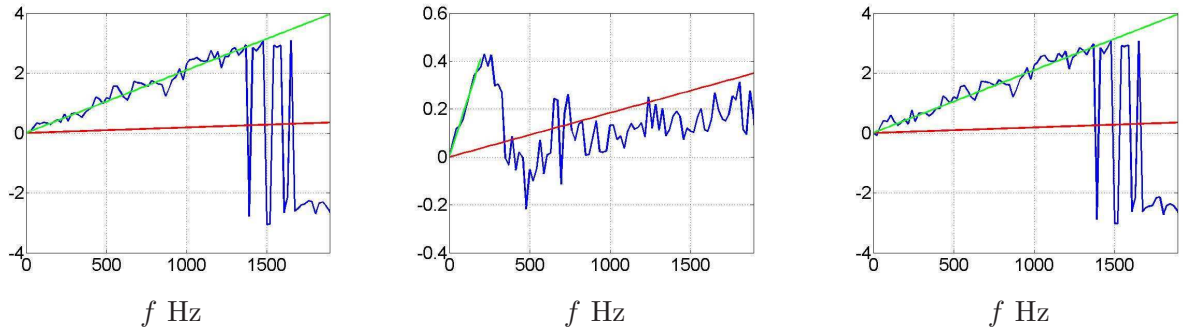

FIG. 5.43 – Phase relative entre les fluctuations de pression aux points $(x, z) = (-0.14, 0.86)$ et $(-0.13, 0.86)$: onde plane se propageant dans la direction de x à (-) 340 m/s et (-) 32 m/s. (-) La pression issue de la simulation numérique : (a) champ total (b) partie reconstruite avec les trois premiers modes et (c) partie reconstruite avec les modes restants

5.7.4.3 Corrélation des parties séparées avec la pression acoustique

Un autre moyen de contrôle du bon fonctionnement du processus de séparation des deux composantes est de vérifier la corrélation des composantes séparées avec un signal dont la nature acoustique est approuvée. Ce signal est obtenu en dehors de l'écoulement à 45 cm de la vitre latérale (voir §4.5.3). On note que même dans le cas d'une séparation idéale des composantes acoustique et turbulente du champ de pression pariétal on n'attend pas une corrélation parfaite entre la composante acoustique du champ de pression pariétale et la pression acoustique en dehors de l'écoulement. Le signal acoustique sur la vitre et le signal acoustique en dehors de l'écoulement se ressemblent plus ou moins selon leurs positions respectives vis-à vis des sources acoustiques. Cependant, les grandes longueurs d'onde des ondes acoustiques devraient garantir une corrélation assez élevée entre ces deux signaux. Sur la figure 5.44 est présentée la valeur absolue du coefficient de corrélation évalué entre la pression acoustique en dehors de l'écoulement et la pression pariétale et ses parties séparées par la POD pour différents temps de retard. On rappelle que la notation $C_{p^{1-3}p_{ac}}$ correspond au coefficient de corrélation entre le champ de pression acoustique en champ lointain et le champ de pression pariétale projeté sur les 3 premiers modes POD.

Le niveau de corrélation de la pression acoustique en dehors de l'écoulement est plus élevé pour la partie reconstruite à l'aide des trois premiers modes. Cette corrélation ($C_{p^{(1-3)}p_{ac}}(\tau = 0.0178)$) possède une valeur maximum de 0.43 pour le point $((x, z) = (0.16, 0.94)$. On note que le seuil de convergence de l'opération de corrélation (défini via la procédure présentée dans la partie §4.2.4) correspond à 0.1 pour le nombre d'échantillons disponibles. Au-delà du seuil de 0.1 les valeurs de corrélation obtenues peuvent être utilisées pour une interprétation physique.

Pour mieux déterminer la corrélation entre la pression acoustique en dehors de l'écoulement et les parties séparées du champ de pression, on étudie la valeur rms de coefficient de corrélation introduite dans la partie 4.3.2. Cette valeur est calculée en intégrant entre $\tau = 0$ s et $\tau = 0.07$ s. Le résultat est présenté sur la figure 5.45. La cartographie de la valeur rms du coefficient de corrélation confirme bien que la partie reconstruite du champ de pression avec les trois premiers modes POD possède en moyenne un niveau plus élevé par rapport à celle du champ total et celle de la partie reconstruite avec les modes restants. De plus, ce niveau plus élevé peut être observé pour la plupart des points sur la surface de la vitre. Ce résultat confirme que la séparation en deux parties du champ de pression pariétale par les modes POD permet d'extraire un signal acoustique sur le vitrage, obtenu en sommant les 3 premiers modes POD, issus de la décomposition POD en temporel.

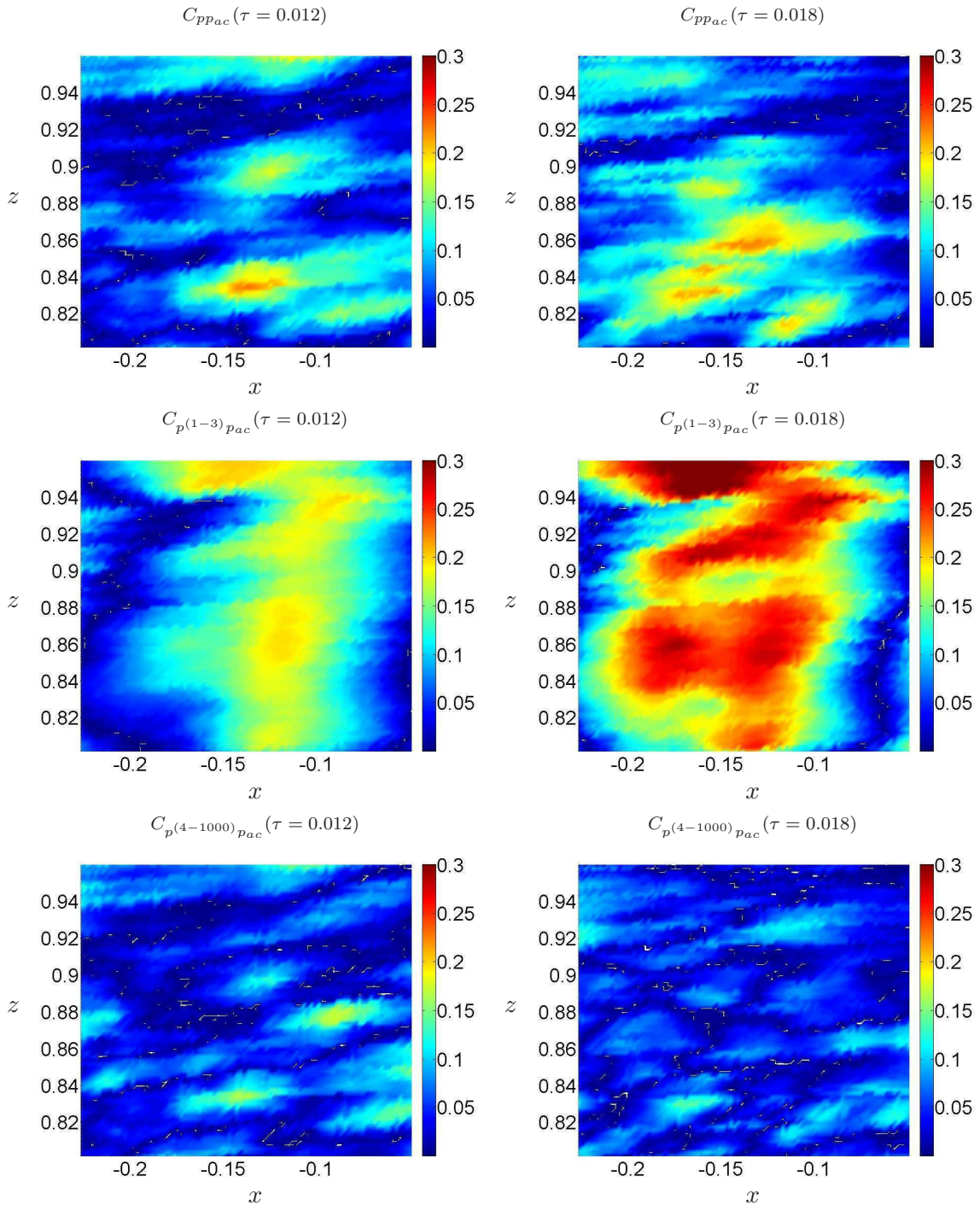

FIG. 5.44 – Valeur absolue du coefficient de corrélation évalué entre la pression acoustique mesurée en dehors de l'écoulement et la pression pariétale et ses composantes fournies par la POD.

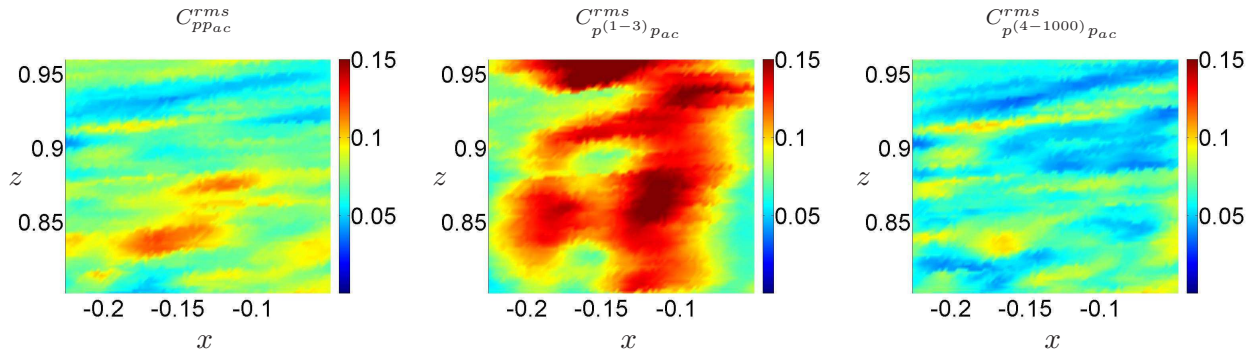

FIG. 5.45 – Valeur *rms* du coefficient de corrélation évalué entre la pression acoustique mesurée en dehors de l'écoulement et la pression pariétale et ses composantes fournies par la POD.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

L'un des principaux objectifs de ces travaux de thèse était de relier les évènements aérodynamiques présents dans les écoulements autour et à l'intérieur des véhicules automobiles et le bruit associé rayonné à l'intérieur de l'habitacle. Des configurations d'écoulements différents ont été donc simulés à l'aide du code de calcul commercial PowerFLOW utilisant la méthode Boltzmann sur réseau. Ces différentes configurations ont permis des analyses aéroacoustiques relatives au rayonnement direct aérien et au rayonnement des panneaux sous l'excitation aéroacoustique.

Concernant le cas du rayonnement direct, les bases des données issues de la simulation numérique directe du bruit (DNC pour Direct Noise Calculation) dans deux configurations d'écoulement ont été étudiées. La première concerne l'écoulement au sein d'un aérateur de voiture, et la seconde est associée à l'écoulement autour d'un rétroviseur de voiture. Deux aspects de l'analyse de causalité doivent être abordés : le choix de l'outil mathématique pour caractériser ces évènements aérodynamiques en rapport avec le champ acoustique lointain et le choix des variables aérodynamiques caractérisant au mieux les mécanismes aéroacoustiques à l'origine des émissions sonores.
Concernant les méthodes permettant d'établir un lien causal entre les évènements aérodynamiques en champ proche et la pression acoustique en champ lointain, nous avons choisi d'utiliser la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres Etendue (ou EPOD pour Extended Proper Orthogonal Decomposition). L'application POD aux données aérodynamiques permet de détecter et d'extraire les mouvements aérodynamiques. Ainsi, le champ aérodynamique "source" est décomposé en une série de modes POD. Par définition, les premiers modes POD sont associés aux structures tourbillonnaires énergétiques des écoulements turbulents. Ceux-ci permettent donc d'extraire différents évènements aérodynamiques en accord avec ces modes POD. Ensuite à l'aide des modes étendus (EPOD) il est possible d'en déduire les évènements aérodynamiques définis à l'aide de la POD qui sont les plus corrélés avec le champ de pression acoustique en champ lointain. Avant la mise en œuvre de ces outils, il a été nécessaire d'effectuer des analyses de convergence des modes POD déduit du tenseur de corrélation spatio-temporelle du champ de vitesse. En effet, disposant de signaux numériques nécessairement de durée limitée, une analyse de la convergence de ce tenseur a été nécessaire. Il a ainsi pu être mis en évidence les limitations de l'application POD aux données accessibles sur des domaines finis. Une méthode systématique et robuste a été mise en place pour déterminer les modes POD et EPOD pour lesquels la convergence statistique (en temps et/ou en espace et/ou en fréquence) est certaine. Cette première analyse a permis de souligner que l'utilisation de données numériques pour des applications POD peut être limitée et conduire à des interprétations physiques erronées en raison d'une non-convergence des opérations statistiques. Cette méthode d'analyse de convergence semble donc être nécessaire avant toute utilisation et analyse des modes POD/EPOD qui en découlent. Une fois la convergence de certains modes établie, la procédure EPOD a été appliquée aux données numériques. La procédure

initiale de l'EPOD ne prenant pas en compte du temps de retarde entre le domaine source et le domaine étendu a été améliorée en introduisant un temps de retard entre la pression acoustique et le champ source. De nouveaux critères de convergence ont alors été définis dans le domaine temporel et spectral afin de s'assurer d'une utilisation fiable des modes étendus retardés. Au final une méthode robuste d'analyses des évènements aérodynamiques qui peuvent être associés de manière certaine au champ acoustique rayonné est mise en place.

Concernant le choix des variables permettant au mieux de caractériser le champ source dans la région de l'écoulement, le champ de vitesse, le tenseur de Lighthill et la pression fluctuante ont été successivement considérés et analysés à l'aide de la procédure EPOD. Un outil de post-traitement a été développé afin de calculer le tenseur de Lighthill sur un maillage cartésien non-uniforme (cas particulier toujours respecté dans la méthode LBM). La comparaison des résultats issus des analyses basées sur le champ de pression fluctuante et sur le tenseur de Lighthill a montré que la variable "pression fluctuante" peut représenter aussi bien le champ source que le tenseur de Lighthill. L'utilisation de la pression fluctuante a pour avantage d'éviter l'erreur liée au bruit numérique supplémentaire dû au calcul des dérivées d'ordre deux. En revanche la pression fluctuante obtenue à partir d'un calcul compressible (le cas d'un calcul direct de bruit) possède également une partie liée à la pression acoustique. Cela peut être très pénalisant pour l'interprétation physique des résultats car la pression acoustique en champ lointain est "toujours" très corrélée avec la pression acoustique en champ proche. Dans les cas étudiés, l'utilisation du tenseur de Lighthill n'a pas permis de filtrer la pression acoustique dans la zone source ni de contourner ce problème. Dans ce cas, l'avantage du calcul aéroacoustique direct se transforme en limitation. Pour une utilisation robuste de ces outils au niveau industriel, des techniques complémentaires devront être mises en œuvre pour éviter les erreurs d'interprétation.

Ces outils d'analyse (POD/EPOD) utilisant différents jeux de variables ont été appliqués à deux bases de données numériques issues de configurations de rayonnement direct : rayonnement d'un aérateur simplifié de voiture et rayonnement d'un rétroviseur. L'analyse spectrale du champ acoustique rayonné dans le cas de l'aérateur a permis de mettre en évidence la présence d'un pic fréquentiel très énergétique (traduisant le sifflement). Cette même analyse menée sur le cas du rétroviseur a montré la nature large bande de signal acoustique.
Les signaux des variables aérodynamiques disponibles étant de courte durée, il a été nécessaire dans un premier temps de s'assurer de la convergence statistique des opérations intervenant dans le calcul des modes POD et EPOD. Une fois les modes convergés déterminés, nous avons observé que l'application de l'EPOD permet d'obtenir une analyse physique des sources seulement dans le cas d'une émergence d'un signal assez cohérent comme dans le cas de sifflement de l'aérateur. Il a ainsi été trouvé que les gros tourbillons énergétiques détectés à l'aide de la POD sont principalement associés au premier pic de fréquence observé dans le spectre de pression acoustique en champ lointain. A l'inverse, la mise en œuvre de la POD à partir des données numériques du cas test "rétroviseur" a mis en évidence la difficulté d'une telle analyse en présence d'un spectre acoustique large bande. Dans notre application, il semble que les signaux disponibles sont d'une durée trop courte pour établir une analyse physique acceptable. De plus, une autre limitation de notre application EPOD est associée au choix de la région "source" issue des plans 2D de l'écoulement tridimensionnel turbulent. Cette analyse aurait certainement apporté de meilleurs résultats si une région tridimensionnelle avait été prise en compte pour isoler les évènements aérodynamiques turbulents à l'origine des émissions sonores. Une telle analyse permettrait de vérifier si les outils d'analyse de causalité mis en place dans cette étude peuvent détecter de tels évènements aérodynamiques même si ceux-ci sont peu corrélés. En effet, dans le cas de l'étude de l'excitation d'une plaque par des champs pseudo-aléatoires, il a été montré (dans le cas du champ de Corcos par exemple) que même quand celui-ci est l'unique source d'excitation, sa cohérence avec le signal acoustique est extrêmement faible.

Dans le cadre d'applications aux écoulements "automobile", le transfert entre la région source et le point d'écoute ne se fait pas par une propagation de type "aérien" directe. La deuxième partie de ce travail a donc été dédiée à l'étude du rayonnement d'une plaque soumis à une excitation aéroacoustique. Pour une telle analyse, il a été nécessaire d'analyser séparément le champ d'excitation aéroacoustique, le champ acoustique rayonné par la plaque et l'outil mathématique pour évaluer le lien causal entre ces deux champs.
Sachant que le champ d'excitation aérodynamique a une composante dite aérodynamique et une dite acoustique, la transparence acoustique de la plaque vis-à-vis de ces deux composantes a été présentée sous un angle théorique. Cette étude analytique est basée sur l'expression analytique et statistique du champ d'excitation, de la vibration de la plaque et du champ acoustique rayonné. Une démarche de synthèse a été développée afin d'accéder aux informations déterministes du champ d'excitation. Le développement de cette démarche de synthèse a été indispensable pour la mise en place d'une analyse de causalité car une telle analyse ne peut pas être effectuée avec les informations moyennées (modèle statistique). Comme le point de départ de cette démarche de synthèse est un modèle statistique connu, le champ synthétisé, en plus d'être déterministe, a des propriétés statistiques maitrisées (énergie moyenne de l'excitation, les longueurs de corrélation). Le champ d'excitation spatio-fréquentiel étant défini à l'aide de modèles statistiques, le rayonnement acoustique a été calculé par un modèle Eléments Finis d'une plaque rectangulaire ayant les caractéristiques typiques d'un vitrage. La résolution par Eléments Finis dans le cas de champs d'excitation homogènes montre, comme cela était attendu, que les champs d'excitation acoustique sont beaucoup plus efficaces (on a un facteur de 100 dans notre cas) pour exciter et faire rayonner la plaque que les champs turbulents. Dans le cas d'un champ d'excitation spatialement inhomogène, nous avons observé que la nature du champ d'excitation (homogène ou pas) ne semble pas être un paramètre d'ordre un pour la transparence aéroacoustique : c'est bien l'énergie moyenne contenue dans le domaine des nombres d'onde proches des nombres d'onde de flexion qui pilote la transparence moyenne de la plaque.

Ayant accès à l'expression déterministe des champs d'excitation sur la surface de la plaque et le champ acoustique associé rayonné en champ lointain, une analyse de causalité via la fonction de cohérence a été effectuée. Cette analyse montre que pour une composante d'excitation donnée on peut seulement déterminer une borne inférieure de contribution au champ acoustique rayonné. Autrement dit même quand le champ est constitué d'une seule composante peu cohérente et que celle-ci est l'unique source d'excitation, sa cohérence avec le signal acoustique rayonné est extrêmement faible. Finalement, il a été conclu que la mesure de cohérence moyenne permet de déterminer la contribution au champ acoustique d'une composante du champ d'excitation pondérée par sa cohérence spatiale.
Cette étude de causalité par la fonction de cohérence n'a été rendue possible que grâce à la connaissance a priori des différentes composantes du champ d'excitation obtenues via les modèles statistiques. Dans le cas d'un champ d'excitation réel ou seulement l'information du champ total (la somme de toutes les composantes) est disponible la mise en place d'une telle procédure d'analyse de causalité nécessite au préalable la séparation des composantes du champ d'excitation. De plus si l'information de la composante acoustique du champ d'excitation est accessible, l'investigation des évènements aérodynamiques dans l'écoulement à l'origine de ce champ acoustique peut être envisagé à l'aide de méthodes telles que l'EPOD détaillée dans ce travail.

Ainsi, la dernière partie de ce travail a permis le développement d'une nouvelle méthodologie capable de séparer des composantes acoustique et turbulente d'un champ de pression pariétal. Cette méthode est la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD). Un premier avantage de cette technique est qu'elle s'applique indépendamment du caractère homogène ou non du champ de données et sur des maillages quelconques. Cette méthode a été appliquée successive-

ment à partir de données synthétiques et à partir de données numériques issues d'une simulation numériques LBM d'un écoulement autour d'une voiture (vitrage).
Des premiers cas tests ont été effectués à partir d'une POD dite "POD spectrale" c'est-à-dire que les champs de pression ont été synthétisés à une fréquence fixée et décomposés à cette même fréquence par la POD. Il a alors été montré que cette méthode n'était pas appropriée pour effectuer une séparation des composantes acoustique et turbulente. En effet, une telle application ne permet pas de traiter la séparation des deux composantes dans le domaine espace-fréquence. Pour une tentative de séparation de ces deux composantes, l'intérêt de la POD spectrale semble limité. Toutefois, ces résultats ont permis de mettre en évidence la nécessité de traiter l'information disponible en espace et en temps (fréquence) simultanément. Ainsi, il a été proposé d'effectuer une POD dans le domaine temporel qui permet alors de prendre en compte l'information disponible dans tout le domaine (espace temps).
Ainsi les résultats obtenus mettent alors en évidence le potentiel d'une telle application pour séparer la partie acoustique de celle liée à l'écoulement turbulent. En effet, à partir de données synthétiques où les parties acoustiques et turbulentes étaient connues et maîtrisées, il a été montré que le spectre en nombres d'onde du champ de pression projeté sur les premiers modes POD correspondait aux plus petits nombres d'onde donc à la partie acoustique du signal total. Ce résultat a été observé pour l'ensemble des fréquences retenues.
Une fois validée à partir de données synthétiques, une application de cette technique à un champ d'excitation obtenu via la simulation numérique de l'écoulement à permis de séparer les deux composantes du champ total de pression pariétale. Ainsi les premiers modes POD de la composition correspondent à la partie acoustique du signal total de pression pariétal. Notons que cette séparation est optimale pour les fréquences plus élevées. Pouvant extraire la contribution acoustique et celle liée au champ aérodynamique, différentes analyses (causalité avec le champ de pression acoustique lointain, analyse de phase, DSP) ont été effectuées et ont confirmées le potentiel de la POD à extraire la contribution acoustique d'un champ de pression pariétal.

Concernant les perspectives à ce travail, on peut noter tout d'abord que les analyses de causalité effectuées à l'aide (ou menées sur) des signaux finis nécessitent la vérification préalable de la convergence des grandeurs statistiques. Ainsi, en vue d'améliorer les différents outils mathématiques utilisés dans le cadre de ce travail, il est nécessaire d'utiliser des signaux numériques (ou expérimentaux) de durée suffisamment longue afin de limiter les éventuels problèmes de non-convergence des opérations statistiques. Une fois les limitations liées à la convergence écartées, ceci permettrait alors de mieux appréhender le potentiel de ces méthodes d'analyse de causalité. Une autre source d'imperfection de l'application de nos outils dans ce travail est liée à l'utilisation de plans 2D pour extraire une information aérodynamique "source". Or, il est admis que la plupart des évènements aérodynamiques sont tridimensionnels. Il serait donc souhaitable d'effectuer de telles analyses en prenant en compte une région source 3D. D'autre part, concernant ces analyses de causalité, les codes numériques de type DNC fournissent une information totale incluant en plus des fluctuations turbulentes, la présence de fluctuations de type acoustique. Ainsi, il serait souhaitable de prendre en compte cet aspect dans l'application des méthodes causales.

D'autre part, ce travail s'inscrit dans une première étape d'analyse des phénomènes aéroacoustiques qui vise à réduire les émissions sonores à l'intérieur de l'habitacle automobile. Ainsi, définir des stratégies afin de contrôler ces émissions sonores doit être envisagé. Ce contrôle peut s'effectuer par la modification de la géométrie ou de manière plus évoluée par l'utilisation de méthode de contrôle actif. Des méthodes promettantes ont déjà été mises en œuvre dans le cas d'un jet turbulent [111]. Elles reposent sur l'utilisation de modèle d'ordre réduit issu de la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres.

De plus, d'autres outils d'analyse récemment développés tels que la Dynamical Mode Decomposition [112] pourraient être envisagés pour étudier leur faisabilité dans le cas d'analyse aéroacoustique.

Pour finir, la mise en place d'un nouvel outil de séparation des parties acoustique et aérodynamique basé sur la POD laisse entrevoir de nombreuses perspectives comme par exemple non seulement la validation des modèles existants mais également la mise en place de nouveaux modèles décrivant les composantes séparées du champ d'excitation. De plus, cette information liée à la séparation permettra d'analyser de façon plus approfondie les mécanismes de génération à l'extérieur de l'habitacle et de transmission à l'intérieur.

Bibliographie

[1] J.L. Adam, D. Ricot, C. Dubief, and C. Guy. Aeroacoustics simulation of automative ventilation outlets. In *Acoustic'08*, pages 1863–1866, 2008.

[2] J.L. Adam, D. Ricot, and A. Menoret. Direct aeroacoustic source identification based on lattice Boltzmann simulation and beamforming technique. *15th AIAA/CEAS Aeroacoustics, Miami, FL (2009)*, AIAA paper 2009-3182.

[3] J.L. Adam, D. Ricot, A. Ménoret, and C. Lambourg. Correlated beamforming method for relevant aeroacoustic sources identification. *SAE/NVH Noise and Vibration conference, Troy, Michigan, USA (2009)*, (2009-01-2234), 2009.

[4] K. Afanasiev and M. Hinze. Adaptive control of a wake flow using proper orthogonal decomposition. *In Shape Optimization and Optimal Design, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, volume 216, Marcel Dekker, 2001.

[5] V.R. Algazi and D.J. Sakarison. On the optimality of the Karhunen-Loeve expansion. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 15, 1969.

[6] C.A. Andrews, J.M. Davies, and G.R. Schwartz. Adaptative data compression. *Proc. IEEE*, 55, 1967.

[7] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, New York, 1970.

[8] B. Arguillat. *Étude expérimentale et numèrique de champs de pression pariétale dans l'espace des nombres d'onde, avec application aux vitrages automobiles*. PhD thesis, Ecole centrale de Lyon, 2006.

[9] B. Arguillat, D. Ricot, C. Bailly, and Robert G. Measured wavenumber : Frequency spectrum associated with acoustic and aerodynamic wall pressure fluctuations. *J. Acoust. Soc.Am*, 128(4) :1647–1655, 2010.

[10] B. Arguillat, D. Ricot, G. Robert, and C. Bailly. Measurements of the wavenumber-frequency spectrum of wall pressure fluctuations under turbulent flows. *11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Monterey, California (2005)*, AIAA paper 2005-2855.

[11] C. Bailly and D. Juvé. Numerical solution of acoustic propagation problems using linearized Euler equations. *AIAA Journal*, 38(1) :22–29, 2000.

[12] W. Béchara, C. Bailly, P. Lafon, and S. Candel. Stochastic approch to noise modeling for free turbulent flows. *AIAA Journal*, 32(3) :455–463, 1994.

[13] J.S. Bendat and A.G. Piersol. *Engineering application of correlation and spectral analysis*. John Wiley, New York, 1993.

[14] P.G. Bermner and J.F. Wilby. Aero-vibro-acoustics : problem statement and methods for simulation-based design solution. *8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Breckenridge, Colorado (2002)*, AIAA paper 2002-2551.

[15] P.L. Bhatnagar, E.P. Gross, and M. Krook. A model for collision processes in gases. I small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Physical Review*, 94(3) :511–525, 1954.

[16] W.K. Blake. Turbulent boundary-layer wall-pressure fluctuations on smooth and rough walls. *J. Fluid Mech.*, 44(4) :637–660, 1970.

[17] W.K. Blake. *Mechanics of flow-induced sound and vibration, volumes I and II.* Academic Press, London, 1986.

[18] C. Bogey and C. Bailly. An analysis of the correlation between the turbulent flow and the sound pressure fields of subsonic jets. *J. Fluid Mech.*, 583 :71–91, 2007.

[19] J. Borée. Extended proper orthogonal decomposition : a tool to analyse correlated events in turbulent flows. *Experiments In Fluids*, 35 :188–192, 2003.

[20] M. Boudizi and P. Lallemand. Momentum transfer on a Boltzmann lattice fluid with boundaries. *Phys. Fluids*, 13 :3452–3459, 2002.

[21] M. Buffoni, S. Camarri, A. Iollo, and M. Salvetti. Low-dimensional modeling of a confined three-dimensional wake flow. *Phys. Fluids*, 569 :141–150, 2006.

[22] J.M. Buick, C.A. Greated, and D.M. Campbell. Lattice BGK simulation of sound waves. *Europhys. Lett.*, 43(3) :235–240, 1998.

[23] M.K. Bull. Wall-pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers : some reflections on forty years of research. *J. Sound Vib.*, 190(3) :299–315, 1996.

[24] C. Cacciolati, P. Neple, E. Guyader, J.-L. Guyader, and N. Totaro. Comparison of the vibroacoustic behaviour of a rectangular thin plate excited by a diffuse sound field and a turbulent boundary layer. *Proceedings of Int. Congress of Sound and Vibration 13*, 2006.

[25] S. Camarri and A. Iollo. Feedback control of the vortex-shedding instability based on sensitivity analysis. *Phys. Fluids*, 22 :094102–14, 2010.

[26] S. Chapman and T.G. Cowling. *The mathematical theory of non-uniform gases.* Cambridge University Press, New York, 1970.

[27] H. Chen, O. Filippova, J. Hoch, K. Molvig, R. Shock, Teixeira, C., and R. Zhang. Grid refinement in lattice boltzmann methods based on volumetric formulation. *Physica A*, 362 :157–167, 2006.

[28] H. Chen, C. Teixeira, and K. Molvig. Digital physics approach to computational fluid dynamics : some basic theoritical features. *Int. J. Modern Phys. C.*, 8(4) :675–684, 1997.

[29] H. Chen, C. Teixeira, and K. Molvig. Realization of fluid boundary conditions via discrete Boltzmann dynamics. *Int. J. Modern Phys. C.*, 9 :1281–1292, 1998.

[30] Sh. Chen and G.D. Doolen. Lattice Boltzmann method for fluid flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30 :329–364, 1998.

[31] Y. Chen and M. Akiyama. Heat transfert in lattice BGK modeled fluid. *J. Stat. Phys*, 81(1) :71–85, 1995.

[32] J.A. Cockburn and J.E. Robertson. Vibration response of spacecraft shrouds to in-flight fluctuating pressures. *Journal of Sound and Vibration*, 33(4) :399–425, 1974.

[33] G.M. Corcos. Resolution of pressure in turbulence. *J. Acoust. Soc. Am*, 35 :192–199, 1963.

[34] J.P. Coyette. Simulation of multi-correlated random processes using the FFT algorithm. *Free Field Technologies Technical report, Mont-Saint-Guibert, Belgium*, 2002.

[35] B. Crouse, D. Freed, G. Balasubramanian, S. Senthooran, P.T. Lew, and L. Mongeau. Fundamental aeroacoustic capabilities of the lattice-Boltzmann method. *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Cambridge, Massachusetts (2006)*, AIAA paper 2006-2571.

[36] N. Curle. The influence of solid boundary upon aerodynamic sound. *Proc. of the Royal Society of London*, A 231 :505–514, 1955.

[37] C. Dahan, G. Elias, J. Maulard, and M. Perulli. Coherent structures in the mixing zone of a subsonic hot free jet. *J. Sound Vib.*, 59 :313–333, 1978.

[38] H.G. Davies. Sound from turbulent-boundary-layer-excited panels. *J. Acoust. Soc. Am.*, 49(3) :878–889, 1971.

[39] R.G. DeJong, T.S. Bharj, and J.J. Lee. Vehicle wind noise analysis using a SEA model with measured source levels. *Soc. Automotive Eng.*, (SAE 2001-01-1629), 2001.

[40] Ph. Druault, S. Lardeau, J. Bonnet, F. Coiffet, J. Delville, E. Lamballais, J. Largeau, and L. Perret. Generation of threedimensional turbulent inlet conditions for large-eddy simulation. *AIAA J.*, 42 :447–456, 2004.

[41] Ph. Druault, M. Yu, and P. Sagaut. Quadratic stochastic estimation of far field acoustic pressure with coherent structure events in a 2D compressible plane mixing layer. *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, 62(8) :906–926, 2010.

[42] J.E. Ffowcs Williams and D.L. Hawkings. Sound generated by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A 264(1151) :321–342, 1969.

[43] O. Filippova and D Hanel. Boundary-fitting and local grid refinement for lattice-BGK models. *Int. J. Modern Phys.*, 9(8) :1271–1279, 1998.

[44] J.B. Freund. Noise sources in a low-Reynolds-number turbulent jet at mach 0.9. *J. Fluid Mech.*, 438 :277–305, 2001.

[45] X. Gloerfelt. *Bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité : simulation aéroacoustique directe et application de méthodes intégrales*. PhD thesis, Ecole centrale de Lyon, 2001.

[46] X. Gloerfelt. Compressible proper orthogonal decomposition/galerkin reduced-order model of self-sustained oscillations in a cavity. *Journal of Physics of Fluids*, 20(115105), 2008.

[47] M.E. Goldstein. *Aeroacoustics*. McGraw-Hill, New York, 1976.

[48] M.E. Goldstein. A generalized acoustic analogy. *J. Fluid Mech.*, 488 :315–333, 2003.

[49] G.H. Golub and Van Loan. *Matrix computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1990.

[50] G.G. Gordon. Spoiler generated flow noise I : the experiments. *Journal of the Acoustical Society of America*, 43 :1041–1048, 1968.

[51] G.G. Gordon. Spoiler-generated flow noise II : results. *Journal of the Acoustical Society of America*, 45 :214–223, 1969.

[52] W.R. Graham. A comparison of models for the wavenumber-frequency spectrum of turbulent boundary layer pressures. *J. Sound Vib.*, 206(4) :541–565, 1997.

[53] Gunes H. and U. Rist. Spatial resolution enhancement/smoothing of stereo-particle-image-velocimetry data using proper-orthogonal-decomposition-based and kriging interpolations methods. *Phys. Fluids*, 19(064101), 2007.

[54] J.C. Hardin and D.S. Pope. An acoustic/viscous splitting technique for computational aeroacoustics. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 6 :323–340, 1994.

[55] H.H. Heller and S.E. Widnall. Sound radiation from rigid flow spoilers correlated with fluctuating forces. *Journal of the Acoustical Society of America*, 47 :924–936, 1970.

[56] A. Henning, K. Kaepernick, K. Ehrenfried, L. Koop, and A. Dillmann. Investigation of aeroacoustic noise sources by simultaneous piv and microphone measurement. *13th Int. Symp. on Application of Laser Techniques To Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal*, (1185), 2006.

[57] A. Henning, A. Schroder, I. Krebs, and J Agocs. Aeroacoustic investigations on a cold jet by means of simultaneous piv and microphone measurements. *15th Int. Symp. on Application of Laser Techniques To Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal*, (1686), 2010.

[58] C. Hoarau, J. Borée, J. Laumonier, and Y. Gervais. Analysis of the wall pressure trace downstream of a separated region using extended proper orthogonal decomposition. *Phys. Fluids*, 18(055107), 2006.

[59] P. Holmes, J.L. Lumley, and G. Berkooz. *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry.* Cambridge monograph on mechanics eds., 1996.

[60] H. Hotelling. Analysis of a complex statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology*, 24 :417–441, 1933.

[61] K. Huang. *Statistical Mechanics*. Wiley, New York, 1963.

[62] P. M. Hurdle, W. C. Meecham, and B. K. Hodder. Investigation of the aerodynamic noise generating region of a jet engine by means of the simple source fluid dilatation model. *J. Acoust. Soc. Am.*, 56 :1708–1721, 1974.

[63] H. Illy and D. Ricot. Etude de la structure de l'excitation aéroacoustique de vitrages automobiles. *In 19th Congrès Français de Mécanique, Marseille*, 2009.

[64] O. Inoue and N. Hatakeyama. Sound generation by a two-dimensional circular cylinder in a uniform flow. *Journal of Fluid Mechanics*, (471), 2001.

[65] A. Iollo, S. Lanteri, and Désidéri. Stability properties of POD-Galerkin approximations for the compressible Navier-Stokes equations. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 13 :377–396, 1999.

[66] E.Ia. Iudin. The acoustic power of the noise created by airduct elements. *Soviet Physics Acoustics*, 1 :383–398, 1995.

[67] D. H. Johnson and D. E. Dudgeon. *Array Signal Prossessing*. Prentice Hall Signal Processing Series, Alan V. OppenHeim Series Editor, 1993.

[68] I.T. Joliffe. *Principal Component Analysis*. Springer-Verlag, 1986.

[69] P. Jordan and Y. Gervais. Subsonic jet aeroacoustics : associating experiment, modelling and simulation. *Exp. Fluids*, 44(1) :1–21, 2008.

[70] D. Juvé, Sunyach M., and G. Comte-Bellot. Intermittency of the noise emission in subsonic cold jets. *J. Sound Vib.*, 71 :319–332, 1980.

[71] K. Karhunen. Zur spektral theorie stochasticher prozesse. *Ann. Acad. Sci Fennicae*, A1, 34, 1946.

[72] M. Kirby and L. Sirovich. Application of the Karhunen-Loève procedure for the characterization of human faces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(1) :103–108, 1990.

[73] A. Laffite and F. Pérot. Investigation of the noise generated by cylinder flows using a direct Lattice-Boltzmann approach. *15th AIAA/CEAS Aeroacoustics, Miami, FL (2009)*, AIAA Paper 2002-3268.

[74] J. Laufer, R. Schlinker, and R.E. Kaplant. Experiments on supersonic jet noise. *AIAA J.*, 14(4) :489–497, 1976.

[75] H. K. Lee and H. S. Ribner. Direct correlation of noise and flow of a jet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 52 :1280–1290, 1972.

[76] Y. Li, R. Shock, R. Zhang, and H. Chen. Numerical study of flow past an impulsively started cylinder by lattice Boltzmann method. *J. Fluid Mech.*, 519 :273–300, 2004.

[77] M.J. Lighthill. On sound generated aerodynamically : I. general theory. *Proc. R. Soc. London*, 211 :564–587, 1952.

[78] M.J. Lighthill. On sound generated aerodynamically : II. turbulence as a source of sound. *Proc. R. Soc. London*, 222 :1–32, 1954.

[79] G.M. Lilley. On the noise from air jets. *Aeronautical Research Council Reports and Memoranda*, 376(20), 1958.

[80] M. Loève. *Probability Theory*. Van Nostrand, 1955.

[81] J.L. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulent flows. In Yaglom and Tatarsky, editors, *Atm. Turb. and Radio wave Prop.*, pages 166–178, 1967.

[82] J.L. Lumley. *Stochastic Tools in Turbulence*. Academic Press, New York, 1970.

[83] O. Malaspinas. *Lattice Boltzmann Method for the simulation of viscoelastic fluid flows*. PhD thesis, Ecole Ploythechnique Fédérale de Lausanne, 2009.

[84] S. Marié. *Etude de la méthode Boltzmann sur Réseau pour simulation en aéroacoustique*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2008.

[85] S. Marié, D. Ricot, and P. Sagaut. Comparison between lattice Boltzmann method and Navier-Stokses high order schemes for computational aeroacoustics. *J. Comput. Phys.*, 228 :1056–1070, 2009.

[86] S. Marié, D. Ricot, and P. Sagaut. Accuracy of lattice Boltzmann method for aeroacoustics simulations. *13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Rome, Iltay (2007)*, AIAA paper 2007-3515.

[87] S. Maurel, J. Borée, and Lumley J.L. Extended proper orthogonal decomposition : application to jet/vortex interaction. *Flow Turbulence Combust*, 67 :125–136, 2001.

[88] C. Maury, P. Gardonio, and S.J. Elliot. A wavenumber approach to modelling the response of a randomly excited panel, part I : general theory. *J. Sound Vib.*, 252(1) :83–113, 2002.

[89] A. Ménoret, N. Gorilliot, and J.L. Adam. Imagerie acoustique en soufflerie S2A. *10eme congrès Français d'Acoustique, Lyon, France*, 2010.

[90] Y.J. Moon, J.H. Seo, Y. M. Bae, M. Roger, and Becker S. A hybrid prediction for low-subsonic turbulent flow noise. *Computers and Fluids*, 39 :1125–1135, 2010.

[91] T.J. Muller. *Aeroacoustic Measurments*. Berlin, Germany : Springer-Verlag, 2002.

[92] P.A. Nelson and C.L. Morfey. Aerodynamic sound production in low speed flow duct. *Journal of Sound and Vibration*, 79 :263–289, 1981.

[93] J. Panda. Experimental investigation of turbulent density fluctuations and noise generation from heated jets. *J. Fluid Mech.*, 591 :73–96, 2007.

[94] J. Panda, R.G. Seasholtz, and K.A. Elam. Investigation of noise sources in high-speed jets via correlation measurements. *J. Fluid Mech.*, 537 :349–385, 2005.

[95] F. Pérot, M.S. Kim, D.M Freed, D. Lee, K.D. Ih, and M.S. Kim. Direct aeroacoustic prediction of ducts and vents noise. *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Stockholm, Sweden (2010)*, AIAA Paper 2010-2532.

[96] M. Pervaiz and C. Teixeira. Two equation turbulence modeling with the lattice Boltzmann method. *Proceeding of ASME PVP Division Conference : 2nd International Symposium on Computational Technologies for Fluid/Thermal/Chemical Systems with Industrial Applications, August, Boston, MA, USA*, 1999.

[97] M. Piellard and C. Bailly. Several computational aeroacoustics solutions for the ducted diaphragm at low Mach number. *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Stockholm, Sweden (2010)*, AIAA Paper 2002-3996.

[98] A.D. Pierce. Acoustics : an introduction to its physical principles and applications. *Acoustical Society of America*, pages 305–310, 1989.

[99] J. F. Piet, U. Michel, and P. Böhning. Localization of the acoustic sources of the A340 with a large phased microphone array during flight tests. *8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Breckenridge, Colorado (2002)*, AIAA paper 2002-2506.

[100] A. Powell. Aerodynamic niose and the plane boundary. *J. Acoust. Soc. Am.*, 38(8) :982–990, 1960.

[101] R. E. Powell, S. Senthooran, and D. Freed. Statistical analysis of correlation between simulation and measurement of interior wind noise. In *FEDSM-ICNMM2010-31050, ASME 3rd Joint US-European Fluids Engineering Summer Meeting*, 2010.

[102] Y. H. Qian, D. D'Humières, and P. Lallemand. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation. *Europhys. Lett.*, 17(6) :479–484, 1992.

[103] S.S. Ravindran. Reduced-order adaptive controllers for fluid flows using POD. *J. of Scientific Computing*, 15(4) :457–478, 2000.

[104] S.S. Ravindran. A reduced-order approach for optimal control of fluids using proper orthogonal decomposition. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 34 :425–448, 2000.

[105] D. Ricot. *Simulation numérique d'un écoulement affleurant une cavité par la méthode Boltzmann sur Réseau et application au toit ouvrant de véhicules automobiles.* PhD thesis, Ecole centrale de Lyon, 2002.

[106] D. Ricot. Transparance aéroacoustique des panneaux. *Note Technique RENAULT*, (64260-2005-0871), 2005.

[107] D. Ricot, V. Maillard, and C Bailly. Numerical simulation of the unsteady flow past a cavity and application to sunroof buffeting. *7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Maastricht, The Netherlands (2001)*, AIAA Paper 2001-2112.

[108] V. Ricot, D. Maillard and C. Bailly. Numerical simulation of unsteady cavity flow using lattice Boltzmann method. *8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Breckenridge, Colorado (2002)*, AIAA Paper 2002-2532.

[109] S. Roudnitzky, Ph. Druault, and Ph. Guibert. Proper orthogonal decomposition of in-cylinder engine flow into mean component, coherent structures and random gaussian fluctuations. *J. of Turbulence*, 7(70) :1–19, 2006.

[110] M. Schaffar. Direct measurements of the correlation between axial in-jet velocity fluctuations and far field noise near the axis of a cold jet. *J. Sound Vib.*, 64 :73–83, 1979.

[111] M. Schlegel, B.R. Noack, P. Comte, D. Kolomenskiy, K. Schneider, M. Farge, J. Scouten, D.M. Luchtenburg, and G. Tadmor. Reduced-order modelling of turbulent jets for noise control. *C. Brun et al. (Eds) : Numerical Simulation of Turbulent Flows and Noise Generation, Series Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design (NNFM), Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 104 :3–27, 2009.

[112] P.J Schmid. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *J. Fluid Mech.*, 656 :5–28, 2010.

[113] J. M. Seiner. *The distribution of jet source strength intensity by means of direct correlation technique*. PhD thesis, Pennsylvania State University, 1974.

[114] J.H. Seo and Y.J. Moon. The perturbed compressible equations for aeroacoustic noise prediction at low mach numbers. *AIAA Journal*, 43 :1716–1724, 2005.

[115] J.H. Seo and Y.J. Moon. Aerodynamic noise prediction for long-span bodies. *J. Sound and Vibration*, 306 :564–579, 2007.

[116] T. E. Siddon and R. Rackl. Cross-correlation analysis of flow noise with fluid dilatation as source fluctuation. *82nd Meeting of the Acoustical Society of America,*, 1971.

[117] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. part I : Coherent structures. *Q. Appl. Math*, XLV :561–571, 1987.

[118] P.A. Skordos. *Modeling flue organ pipes : subsonic flow, Lattice Boltzmann, and parallel distributed computers*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1995.

[119] A. Sornborger, C. Sailstad, E. Kaplan, and L. Sirovich. Spatio-temporal analysis of optical imaging data. *NeuroImage*, 18 :610–621, 2003.

[120] W.A. Strawderman and R.A. Christman. Turbulence-induced plate vibrations : some effects of fluid loading on finite and infinite plates. *J. Acoust. Soc. Am.*, 52(5) :1537–1552, 1972.

[121] C.M. Teixeira. Incorporating turbulence models into the lattice-Boltzmann method. *Int. J. Modern Phys. C*, 9(8) :1159–1175, 1998.

[122] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger. *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill, New York, 1959.

[123] M. N. Tomac, K. Yugulis, and J. W. Gergory. Investigation of side-view mirror flow-induced vibration phenomena. In *FEDSM-ICNMM2010-31050, ASME 3rd Joint US-European Fluids Engineering Summer Meeting*, 2010.

[124] Y. Wang and J. Li. Wideband relax and wideband clean for aeroacoustic imaging. *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Hiton Head, California (2003)*, AIAA Paper 2003-3197.

[125] J. Weller, E. Lombardi, M. Bergmann, and A. Iollo. Numerical methods for low-order modeling of fluid flows based on POD. *Int. J. Meth. Fluids*, 63 :249–268, 2010.

[126] A. Wilde. Flow acoustic simulations using the lattice-Boltzmann method. *22nd CAD-FEM User's Meeting, International Congress on FEM Technolog with ANSYS CFX & ICEM CFD Conference*, Dresden, Germany, 2004.

[127] L.E. Wittig and K. Sinha. Simulation of multicorrelated random processes using the FFT algorithm. *J. Acoust. Soc. Am*, 58(3) :630–634, 1963.

[128] S.F. Wu and J. Zhu. Effect of mean flow on responses of a fluid-loaded plate. *J. Acoust. Soc. Am.*, 93(3) :1786–1795, 1995.

[129] D. Yu, R. Mei, and W. Shyy. A multi-block lattice Boltzmann method for viscous fluid flows. *Int. J. Meth. Fluids*, 39 :99–120, 2002.