Assimilation de données pour l'estimation de l'état hydraulique d'un aménagement hydroélectrique du Rhône équipé de la commande prédictive

Nelly Jean-Baptiste Dit Parny

▶ **To cite this version:**

Nelly Jean-Baptiste Dit Parny. Assimilation de données pour l'estimation de l'état hydraulique d'un aménagement hydroélectrique du Rhône équipé de la commande prédictive. Automatique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2011. Français. NNT : . tel-00734758

HAL Id: tel-00734758

https://theses.hal.science/tel-00734758

Submitted on 24 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par
l'Université Toulouse III - Paul Sabatier
Discipline ou spécialité : Automatique

Présentée et soutenue par Nelly JEAN-BAPTISTE DIT PARNY

Le 21 Septembre 2011

Assimilation de données pour l'estimation de l'état hydraulique d'un aménagement hydroélectrique du Rhône équipé de la commande prédictive

---

JURY

Rapporteur : M. Jacques SAU (Université Lyon 1)
Rapporteur : M. Fabien CAMPILLO (INRIA Montpellier)

Examinateur : M. Christophe DOREE (Compagnie Nationale du Rhône)
Examinateur : Mme. Ivana VINCOVIC (Université Lyon 1)

Directeur de thèse : M. Pierre-Olivier MALATERRE (Irstea Montpellier)
Directeur de thèse : M. Jean-Louis CALVET (Université Toulouse III)

Ecole doctorale : EDSYS
Unité de recherche : UMR G-eau (Irstea)
Directeurs de Thèse : Pierre-Olivier MALATERRE & Jean-Louis CALVET

Remerciements

Ce travail de thèse est le fruit d'une collaboration entre la Compagnie Nationale du Rhône, l'unité mixte de recherche GEAU de l'IRSTEA (Cemagref) de Montpellier et le LAAS. Tous les membres de ces équipes ont contribué à la réalisation de ce travail et pour cela je les en remercie.

Je remercie tout particulièrement Christophe Dorée, responsable du Pôle courant fort à la CNR, qui est à l'origine de ce projet. Je lui suis très reconnaissante d'avoir eu confiance en moi et d'avoir défendu ce projet tout au long de sa réalisation. Grâce à lui, cette thèse a pu intégrer des exemples concrets et ainsi donner à ce travail une dimension industrielle.

Je remercie aussi très sincèrement Pierre-Olivier Malaterre, directeur de recherche de l'IRSTEA (Cemagref), qui a accepté d'être mon directeur de thèse. Je tiens à souligner que malgré ses occupations, il a suivi de très près ce travail et s'est toujours rendu disponible pour répondre à mes questions. Cela m'a permis de ne pas m'égarer dans des voies sans issues et d'avoir des pistes pertinentes à explorer. Merci de sa forte implication dans ce travail (pour l'aspect académique comme pour le côté industriel).

Merci à Monsieur Calvet, professeur de l'Université Paul Sabatier de Toulouse, mon co-directeur de thèse, qui a apporté son regard d'automaticien pour l'avancée de mes travaux.

Je remercie Monsieur Sau, d'avoir accepté d'être rapporteur de ce travail. Je lui dois beaucoup car il est à l'origine du stage de fin d'étude que j'ai réalisé à la CNR, ce qui m'a permis de poursuivre sur cette thèse.

Je remercie Monsieur Campillo d'avoir accepté d'être rapporteur de ce mémoire et Madame Vincovic d'avoir été examinatrice de mon travail.

Un travail de thèse est une expérience professionnelle mais aussi une aventure personnelle. Mon attention se tourne donc naturellement vers mon fiancé qui m'a toujours aidée et soutenue, et d'avantage à partir de la naissance de notre adorable fille Leyla. Pour leur écoute, conseils relectures et encouragements, je remercie ma famille : mes parents, ma soeur (et ses collègues relecteurs anonymes), mon frère, Nathalie et Erwan.

Merci à mes collègues de DI-HEL et plus particulièrement ceux du bureau A450, qui ont rendu mon quotidien agréable grâce à leur bonne humeur et leur humour (parfois limite !)... Merci à eux qui, jusqu'au bout (c'est à dire l'oral), ont été des supporters fidèles !

Et enfin merci à ma nouvelle équipe de travail (DI-SFA, de la CNR), qui m'a chaleureusement accueillie et avec qui j'apprends beaucoup en hydraulique.

Table des matières

1 Positionnement du sujet **15**
- 1.1 Contexte industriel . . . 17
  - 1.1.1 Présentation de l'entreprise . . . 17
  - 1.1.2 Répartition des aménagements . . . 18
  - 1.1.3 Fonctionnement d'un aménagement hydroélectrique typique . . . 20
- 1.2 Contexte scientifique . . . 21
  - 1.2.1 Régulation des aménagements . . . 21
  - 1.2.2 Les techniques d'assimilation de données . . . 28
  - 1.2.3 Choix de la modélisation . . . 31
- 1.3 Questions de recherche et plan du manuscrit . . . 32

2 Aménagement support de l'étude - Baix Le Logis Neuf **35**
- 2.1 Introduction . . . 36
- 2.2 Description des ouvrages et caractéristiques hydrauliques . . . 37
- 2.3 Points de réglages et consignes d'exploitation pour l'aménagement de Baix-Le-Logis-Neuf . . . 40

3 Modèle non linéaire **43**
- 3.1 Introduction . . . 44
- 3.2 Réseaux filaires et casiers . . . 45
- 3.3 Équations du modèle . . . 46
  - 3.3.1 Équations de Barré de Saint Venant . . . 46
  - 3.3.2 Loi pour les casiers . . . 48
- 3.4 Données nécessaires à la modélisation . . . 49
  - 3.4.1 Répartition des sections en travers . . . 49
  - 3.4.2 Accessibilité des données géométriques . . . 49
  - 3.4.3 Accessibilité des données hydrauliques . . . 49
- 3.5 Discrétisation et méthodes numériques . . . 50
  - 3.5.1 Schéma de Preissmann . . . 51
  - 3.5.2 Propriétés du schéma de Preissmann . . . 52
- 3.6 Lits multiples . . . 54
  - 3.6.1 Découpage en lits de la section en travers . . . 54
  - 3.6.2 Choix de l'interaction entre les lits . . . 54
  - 3.6.3 Divided Channel Method . . . 55
  - 3.6.4 Formule de Debord . . . 56

3.7 Conclusion 57

4 Modèle linéaire dans l'espace d'état 59
4.1 Introduction 60
4.2 Linéarisation du modèle non linéaire 60
4.2.1 Equations linéarisées 60
4.2.2 Les conditions limites amont et aval 61
4.2.3 Les conditions limites internes 63
4.2.4 Modélisation des réseaux maillés 68
4.3 Représentation dans l'espace d'état 69
4.3.1 Système linéaire 69
4.3.2 Ordre du système 71
4.3.3 Observations 72
4.4 Exemple de régime de référence pour la linéarisation 73
4.4.1 Répartition 73
4.4.2 Comparaison modèle linéaire et modèle non-linéaire 74
4.5 Système augmenté 79
4.6 Conclusion 83

5 Filtre de Kalman et convergence de l'estimation 85
5.1 Introduction 87
5.2 Les outils indispensables 88
5.2.1 Description du modèle 88
5.2.2 Définitions et notations 88
5.2.3 Théorie de l'estimation 90
5.3 Best Linear Unbiased Estimation - BLUE 91
5.3.1 Best Linear Unbiased Estimation - BLUE sans ébauche 91
5.3.2 Best Linear Unbiased Estimation - BLUE avec ébauche 92
5.4 Filtre de Kalman 95
5.4.1 Equations du filtre de Kalman 95
5.4.2 Filtre de Kalman et équations de Riccati 97
5.4.3 Calcul du gain optimal 97
5.4.4 Filtre de Kalman asymptotique 98
5.5 Convergence du filtre de Kalman 99
5.5.1 Conditions nécessaires et suffisantes à la convergence 99
5.6 Choix des matrices de covariance 100
5.6.1 Matrice de covariance du modèle - Q_k 100
5.6.2 Matrice de covariance des mesures - R_k 101
5.7 Algorithme du filtre de Kalman et perturbations inconnues 102
5.7.1 Système augmenté bruité 102
5.7.2 Algorithme du filtre de Kalman 104
5.8 Tests et illustrations des résultats - Exemple 1 106
5.8.1 Configuration choisie 106
5.8.2 Hypothèses 106
5.8.3 Gain optimal 107

5.8.4 Résultats de l'estimation . . . 108
5.8.5 Vérification de la convergence du filtre . . . 109
5.8.6 Choix d'une matrice Q "opportuniste" . . . 109
5.9 Tests et illustrations des résultats - Exemple 2 . . . 113
5.9.1 Configuration choisie . . . 113
5.9.2 Résultats de l'estimation . . . 113
5.9.3 Vérification de la convergence du filtre . . . 114
5.9.4 Choix d'une matrice Q "opportuniste" . . . 114
5.10 Conclusion . . . 115

6 Observabilité et calculs numériques 117
6.1 Introduction . . . 118
6.2 Observabilité . . . 120
6.3 Calcul du rang et méthode SVD . . . 122
6.3.1 Définition du rang . . . 122
6.3.2 Méthode SVD . . . 122
6.3.3 Calcul du rang - Exemple 1 . . . 123
6.3.4 Calcul du rang - Exemple 2 . . . 123
6.3.5 Interprétations des résultats . . . 124
6.4 Décomposition canonique . . . 125
6.4.1 Principe . . . 125
6.4.2 Algorithme utilisé par Matlab . . . 127
6.4.3 Décomposition canonique - Exemple 1 . . . 130
6.4.4 Décomposition canonique - Exemple 2 . . . 130
6.4.5 Interprétation des résultats . . . 130
6.5 Calcul du grammien d'observabilité . . . 130
6.5.1 Calcul du grammien d'observabilité - Exemple 1 . . . 131
6.5.2 Calcul du grammien d'observabilité - Exemple 2 . . . 132
6.5.3 Interprétation des résultats . . . 132
6.6 Détectabilité . . . 132
6.6.1 Détectabilité - Exemple 1 . . . 133
6.6.2 Détectabilité - Exemple 2 . . . 133
6.6.3 Interprétation des résultats . . . 134
6.7 Condition suffisante à la convergence . . . 134
6.7.1 Théorème . . . 134
6.7.2 Application . . . 135
6.8 Conclusion . . . 136

7 Applications 139
7.1 Introduction . . . 141
7.2 Applications sur expériences jumelles - Article de MATCOM . . . 142
7.3 Plateforme de simulation . . . 160
7.3.1 Le procédé . . . 160
7.3.2 Le logiciel de régulation . . . 161
7.3.3 Le PC de suivi . . . 162

7.3.4 Introduction du filtre de Kalman au sein de la plateforme 162
7.4 Applications 164
7.4.1 Simulation d'une erreur de mesure 164
7.4.2 Simulation d'un déclenchement 169
7.5 Conclusion 171

8 Conclusion générale **173**

A Linéarisation **177**
A.1 Discrétisation de l'équation de continuité 179
A.2 Discrétisation de l'équation dynamique 181
A.2.1 Membre de gauche - Premier terme 181
A.2.2 Membre de gauche - Deuxième terme 181
A.2.3 Membre de gauche - Troisième terme 183
A.2.4 Membre de gauche - Quatrième terme 183
A.2.5 Membre de droite 185
A.2.6 Équation dynamique linéarisée 186

B Comparaison du modèle linéaire avec le modèle non-linéaire **189**
B.1 Non-linéarités liées aux amplitudes des débits d'entrée - Scénarii étudiés 191
B.2 Non-linéarités liées aux amplitudes des débits d'entrée - Graphiques . . . 192
B.3 Norme de l'erreur entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire et tolérances acceptées 197

Table des figures

1.1 Répartition des aménagements 18
1.2 Aménagement local 20
1.3 Emplacement typique des points de réglage sur un aménagement du Rhône 22
1.4 Stratégie de la commande prédictive 23
1.5 Scénario lâché et scénario forcé 25
1.6 Calcul du débit de correction 27

2.1 Aménagements de la CNR et zoom sur Baix-Le-Logis-Neuf 37
2.2 Aménagement de Logis-Neuf 38
2.3 Vannes du barrage du Pouzin 39
2.4 Plaine d'inondation de Logis-Neuf 42

3.1 Réseaux simples 45
3.2 Réseaux ramifiés 45
3.3 Réseaux maillés 46
3.4 Représentation des casiers 46
3.5 Frédéric Mistral 50
3.6 Approximation par le schéma de Preissmann 51
3.7 Découpage des lits 54

4.1 Condition limite interne 63
4.2 Perturbation de type prélèvement d'eau entre deux sections en travers . . 66
4.3 Perturbation de type apport d'eau entre deux sections en travers 66
4.4 Schématisation d'un réseau maillé 68
4.5 Trois types d'observations possibles pour notre cas d'étude 72
4.6 Régime de référence considéré 74
4.7 Ligne d'eau de référence 75
4.8 Hydrogramme d'entrée pour l'usine amont entre le 11 août 2008 et le 14 août 2008 76
4.9 Diagramme de Bode pour l'entrée "débit à l'usine amont" et la sortie "cote au PR1" entre les modèles linéaires de 1700 $m^3.s^{-1}$ et 800 $m^3.s^{-1}$. 77
4.10 Répartition des débits de l'Eyrieux sur l'année 2010 78
4.11 Répartition des débits de la Drôme sur l'année 2003 78

4.12 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit au barrage amont . . . 79
4.13 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'usine amont . . . 80
4.14 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'usine amont . . . 81
4.15 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'usine amont . . . 82

5.1 Structure du filtre de Kalman discret . . . 96
5.2 Répartitions des observations le long de l'aménagement . . . 106
5.3 Différence entre gain asymptotique par itération et par Riccati . . . 107
5.4 Estimation de deux apports inconnus . . . 108
5.5 Répartition des valeurs propres . . . 110
5.6 Influence du choix de la matrice Q sur la convergence du filtre . . . 111
5.7 Répartition des valeurs propres pour un choix de matrice Q opportuniste 111
5.8 Estimation de deux apports inconnus pour un choix de matrice Q opportuniste . . . 112
5.9 Localisation de l'observation y1 . . . 113
5.10 Estimation de deux apports inconnus avec une observation . . . 114
5.11 Répartition des valeurs propres . . . 115
5.12 Influence du choix de la matrice Q sur la convergence du filtre . . . 116

6.1 Répartition des observations pour l'exemple 1 . . . 124
6.2 Valeurs singulières pour l'exemple 1 . . . 125
6.3 Répartition des observations pour l'exemple 2 . . . 126
6.4 Valeurssingulières pour l'exemple 2 . . . 127
6.5 Système décomposé selon l'observabilité . . . 128
6.6 Valeurs propres de Go pour l'exemple 1 . . . 131
6.7 Valeurs propres de Go pour l'exemple 2 . . . 132
6.8 Répartition des valeurs propres non observables pour l'exemple 1 . . . 134
6.9 Répartition des valeurs propres non observables pour l'exemple 2 . . . 135
6.10 Répartition des modules des valeurs propres de la partie non observable pour l'exemple 2 . . . 136
6.11 Evolution du rang en fonction de la paire (A, Γ) pour l'exemple 1 . . . 137

7.1 Représentation schématique des éléments constituant la plateforme de simulations . . . 160
7.2 Simulation d'une erreur de mesure avec la méthode actuelle de la CNR . 165
7.3 Simulation d'une erreur de mesure avec un Filtre de Kalman global . . . 167

7.4 Simulation d'une erreur de mesure avec un Filtre de Kalman adapté spécifiquement à cette situation 168
7.5 Simulation d'un déclenchement d'usine avec la méthode actuelle de la CNR169
7.6 Simulation d'un déclenchement d'usine avec un Filtre de Kalman global . 171

B.1 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit au barrage amont 192
B.2 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'usine amont 193
B.3 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'Eyrieux193
B.4 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à la Drôme194
B.5 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'Ouvèze194
B.6 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'usine aval 195
B.7 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit au barrage aval 195
B.8 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit au barrage amont 197
B.9 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'usine amont 198
B.10 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'Eyrieux198
B.11 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à la Drôme199
B.12 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'Ouvèze199
B.13 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'usine aval 200
B.14 Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit au barrage aval 200

Liste des tableaux

1.1 Calcul de l'information synthétique d'une mesure doublée 19

2.1 Affluents de l'aménagement de Baix - Le - Logis - Neuf 39
2.2 Points de réglages de l'aménagement de Baix - Le - Logis - Neuf 40
2.3 Consignes aux points de réglage en fonctionnement normal 40
2.4 Consigne au point de réglage en crue rapide 41

Chapitre 1

Positionnement du sujet

Sommaire

1.1 Contexte industriel 17
1.1.1 Présentation de l'entreprise 17
1.1.2 Répartition des aménagements 18
1.1.3 Fonctionnement d'un aménagement hydroélectrique typique . 20
1.2 Contexte scientifique 21
1.2.1 Régulation des aménagements 21
1.2.2 Les techniques d'assimilation de données 28
1.2.3 Choix de la modélisation 31
1.3 Questions de recherche et plan du manuscrit 32

1.1 Contexte industriel

1.1.1 Présentation de l'entreprise

Créée en 1933, la Compagnie Nationale du Rhône (CNR) détient la concession du Rhône depuis 1934 pour assurer plusieurs missions dont les deux principales sont la production d'hydroélectricité et garantir le bon fonctionnement de la navigation en aval de l'agglomération lyonnaise. Pour cela, elle a dû concevoir, faire réaliser et gérer les équipements et aménagements sur 530 km de longueur. Actuellement, la CNR dispose de 18 aménagements hydroélectriques soit :

- 19 usines
- 19 barrages

Ces équipements lui permettent de fournir 25 % de l'hydroélectricité française, soient 3 GW de puissance installée. Avec son expansion à l'exploitation de parcs éoliens et photovoltaïques, cette entreprise produit 15.7 TWh en moyenne sur une année.

Pour assurer la navigation, la CNR gère :

- 14 écluses de grand gabarit sur le bas Rhône
- 29 sites et ports industriels

La CNR est une Société Anonyme d'intérêt général, administrée par un Directoire et Conseil de Surveillance. Son capital majoritairement public est structuré autour de trois pôles :

- GDF SUEZ à $49,97$ %
- Caisse des Dépôts et Consignations à $33,20$ %
- Collectivités locales à $16,83$ %

La CNR est une entreprise qui s'intéresse à la totalité des processus, de la conception des outils de production à l'exploitation et la commercialisation.

1.1.2 Répartition des aménagements

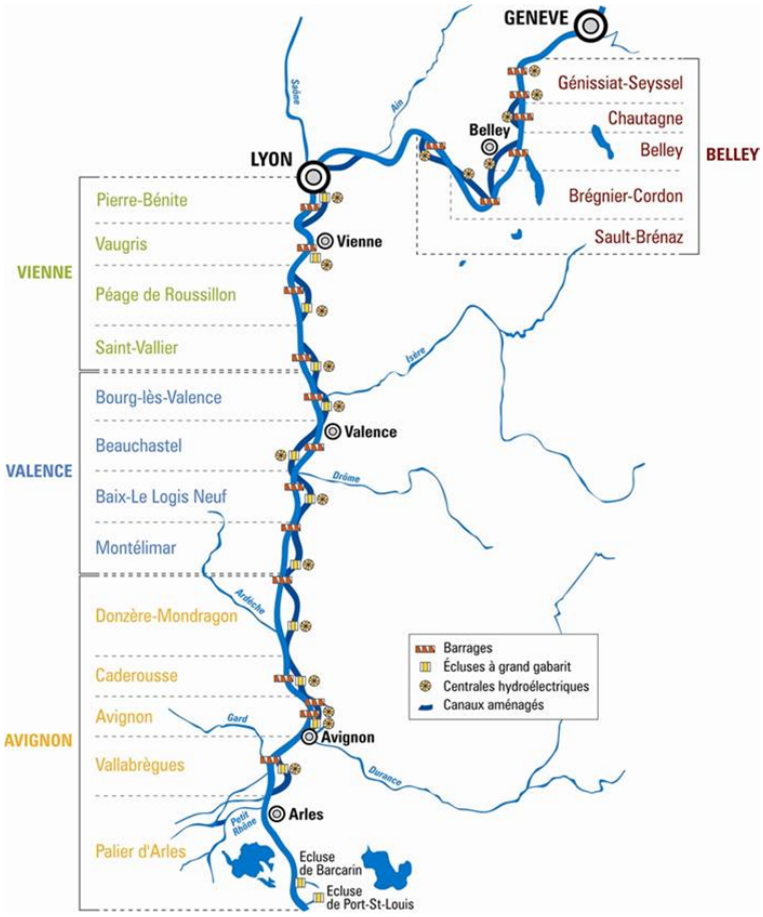


FIGURE 1.1 – Répartition des aménagements

Pour une meilleure gestion, les 18 aménagements sont répartis dans quatre directions régionales (Cf. FIGURE 1.1), qui sont de l'amont vers l'aval :

- la direction régionale de Belley
- la direction régionale de Vienne
- la direction régionale de Valence
- la direction régionale d'Avignon

Elles sont en charge de l'exploitation et de la maintenance journalière des aménagements hydroélectriques et des parcs domaniaux qui lui sont rattachés. Le siège de l'entreprise, basé à Lyon, s'occupe lui de la maintenance globale, de la stratégie et de la politique de l'entreprise.

Pour les aménagements du Bas-Rhône, les informations telles que les observations en cote (en amont et aval des ouvrages, au niveau des affluents et des points de réglages) sont acheminées toutes les 100 s via des réseaux filaires et des réseaux LAC [1] au PA (Poste Aménagement), qui est un automate local qui possédant le logiciel de régulation par commande prédictive (Cf. section 1.2.1). Pour l'avenir, la CNR a opté pour un transport des données par fibre optique au PA ainsi qu'au siège. Le changement a déjà été effectué pour les aménagements de Beauchastel, Donzère-Mondragon et Vallabrègue.

La plupart des données sont obtenues par deux voies différentes. Ainsi, les incohérences d'informations entre ces deux voies rendent souvent possible la détermination des pannes de capteurs (Cf. 1.1).

Etat de l'information 1 voie 1	Etat de l'information 2 voie 2	Elaboration de l'information synthétique sans priorité	Elaboration de l'information synthétique voie 1 prioritaire	Etat de l'information synthétique
Sûr	Sûr	(voie 1+voie 2)/2	voie 1	Sûr
Sûr	Douteux	voie 1	voie 1	Sûr
Douteux	Sûr	voie 2	voie 2	Sûr
Douteux	Douteux	(voie 1+voie 2)/2	voie 1	Douteux

TABLE 1.1 – Calcul de l'information synthétique d'une mesure doublée

On verra section 1.2.1 comment fonctionne le calcul de la commande prédictive réalisé au sein du PA local. Les informations sont acheminées (soit par réseaux filaires soit par fibre optique) au siège de façon à réaliser les programmes journaliers de production et à garder un historique des situations. On verra également que pour le calcul de la commande prédictive, le PA possède un modèle dit embarqué décrit au chapitre 3. Les méthodes de corrections utiles au calcul de la commande devront donc être intégrées localement au PA.

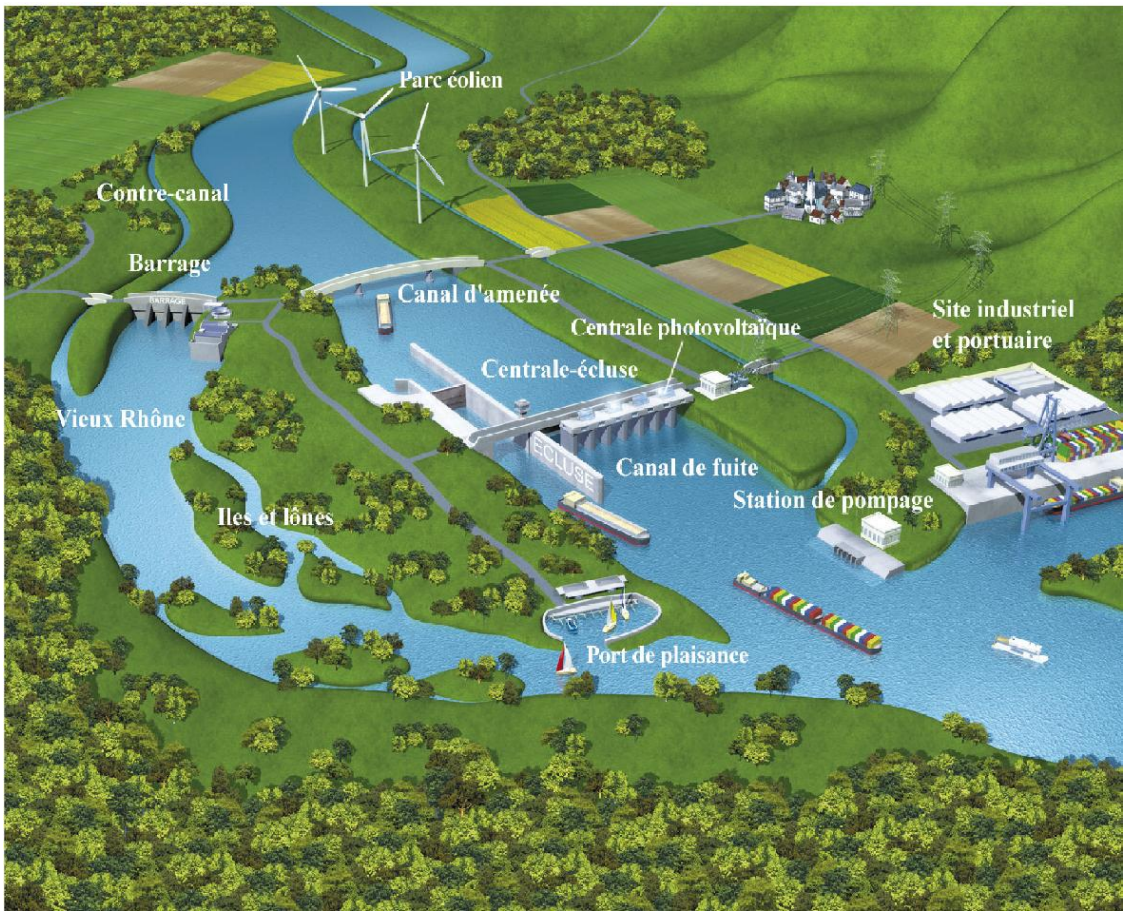


FIGURE 1.2 – Aménagement local

1.1.3 Fonctionnement d'un aménagement hydroélectrique typique

Comme l'illustre la FIGURE 1.2, un barrage sur le Rhône naturel détourne, hors période de crue, l'essentiel du débit vers le canal d'amenée [2] où sont implantées une centrale et une écluse [3]. Au fur et mesure de son arrivée, l'eau passe par les turbines qui captent l'énergie fournie par la chute d'eau et le débit, puis la transmettent instantanément à l'alternateur qui la convertit en énergie électrique, livrée ensuite aux consommateurs par le réseau haute tension. Les eaux sont restituées au Rhône à l'aval de la centrale via le canal de fuite [4]. Le barrage crée une faible retenue d'eau et laisse

1. Le nom "LAC" a été donné du fait de l'implantation géographique (Annecy) de la société à l'origine de ce réseau . Ce réseau est utilisé pour les liaisons inter automates chez EDF, ainsi que dans bcp d'autres sociétés.
2. Le canal d'amenée est un canal artificiel construit en parallèle du vieux Rhône pour conduire l'eau à l'usine et à l'écluse.
3. Les écluses sont présentes uniquement sur le bas Rhône.
4. Le canal de fuite est un canal artificiel créé en parallèle du vieux Rhône pour évacuer l'eau après l'usine.

s'écouler en permanence un débit minimum (appelé débit réservé [5]) différent selon les aménagements en direction du Rhône naturel.

1.2 Contexte scientifique

1.2.1 Régulation des aménagements

16 aménagements sur 18 sont régulés de manière automatique par un algorithme appelé commande prédictive avec modèle embarqué ([PAG00], [CP97], [CPS97]). Le déploiement de cette méthode de régulation est achevé pour les aménagements du bas-Rhône et est en cours pour les aménagements du haut-Rhône. Après un retour d'expérience, on s'aperçoit que la commande prédictive a optimisé la gestion des aménagements, mais il existe tout de même encore aujourd'hui des pistes d'améliorations ([JB07], [DJB09]). Notamment dans les situations où interviennent des erreurs de mesures [6] ou des erreurs de structure [7]. L'objectif principal de cette thèse est de proposer une méthode capable de détecter, d'estimer et de corriger ces erreurs. Avant de traiter à la section 1.2.2 les différentes pistes existantes pour parer à ces erreurs, on décrit succinctement le fonctionnement de la commande prédictive et la méthode de correction mise en place actuellement.

Régulation par commande prédictive - Généralités

La régulation a pour but de déterminer le débit à évacuer par l'usine et le barrage pour suivre "la consigne d'exploitation" notée Zc (Cf. FIGURE 1.4), tout en respectant les "consignes de référence" à partir de :

– la cote au point de réglage [8] (Cf. FIGURE 1.3)

– les débits issus de l'aménagement amont et de l'aménagement local

Sous le terme de "consignes de référence" sont regroupées les contraintes résultant des divers objectifs d'exploitation garantissant la sécurité des personnes et des biens. Ces consignes sont :

5. Le débit réservé à été instauré pour des motifs écologiques. Il est déterminé par les pouvoirs publics, il varie de 5 m^3s^{-1} (au barrage de Saint-Vallier) à 100 m^3s^{-1}(au barrage de Pierre-Benite).

6. On appelle erreurs de mesures les pannes de capteurs ou bien les biais sur les mesures effectuées

7. On appelle une erreur de structure, la différence entre le modèle et la réalité. Cette erreur existe toujours car il est impossible de modéliser parfaitement les phénomènes réels.

8. Chaque aménagement possède deux points de réglage (notés PR1 et PR2) dotés de capteurs de cote. Ils sont stratégiquement placés pour le calcul de la commande prédictive et ne sont pas utilisés simultanément. En fonctionnement courant PR1 est utilisé par défaut, PR2 est choisi lors de forts débits. Le chapitre 2 donnera plus de détails concernant le choix entre PR1 et PR2

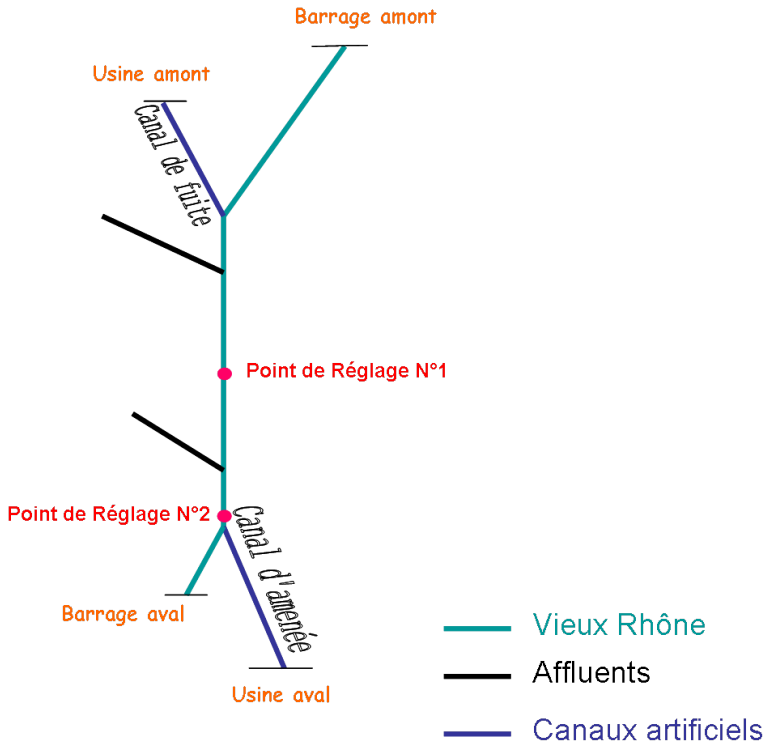


FIGURE 1.3 – Emplacement typique des points de réglage sur un aménagement du Rhône

- respect de la consigne d'exploitation Zc avec une certaine tolérance
- respect du gradient limite (variation maximum) sur les débits des ouvrages (soit 1500 $m^3.s^{-1}.h^{-1}$ pour des conditions hydrauliques normales, c'est à dire hors période de crue)
- respect de la vitesse de variation limite du plan d'eau (13 $cm.h^{-1}$) pour des conditions hydrauliques normales.
- optimisation du débit turbiné
- respect du débit minimum aménagement
- respect du débit réservé
- respect du débit minimum usine

Pour le respect de la consigne d'exploitation, une zone de marnage (Cf. FIGURE 1.4) définie de part et d'autre du niveau de consigne (Zc) constitue la tolérance admise. La zone de marnage varie en fonction du mode de régulation. Actuellement, il existe cinq modes de régulation :

- le mode "crue" impose une zone de marnage de $\pm 3\ cm$. Comme son nom l'indique il est appliqué lorsque le Rhône est en crue

- le mode "programme de débit" impose une zone de marnage de $\pm 25\ cm$. Ce mode de régulation basé sur des prévisions en débits faites 24 h en avance, applique des scénarii de répartition des débits entre barrage et usine

- le mode "fil de l'eau" impose une zone de marnage de $\pm 5\ cm$. Il s'applique lorsque le débit amont est égal au débit aval, notamment au démarrage et à l'arrêt de la régulation ou lorsque les programmes de débits n'ont pas pu être faits. Il est considéré comme le mode de régulation par défaut

- le mode "visée" impose une zone de marnage de$\pm 25\ cm$. Il a pour objectif de rattraper la consigne d'exploitation en un minimum de pas de temps tout en respectant les contraintes de gradients limites sur les débits et sur la vitesse de variation limite du plan d'eau

- le mode "interversion locale" impose une zone de marnage de $\pm 25\ cm$. Il s'applique lorsque l'opérateur local prend la main sur la régulation

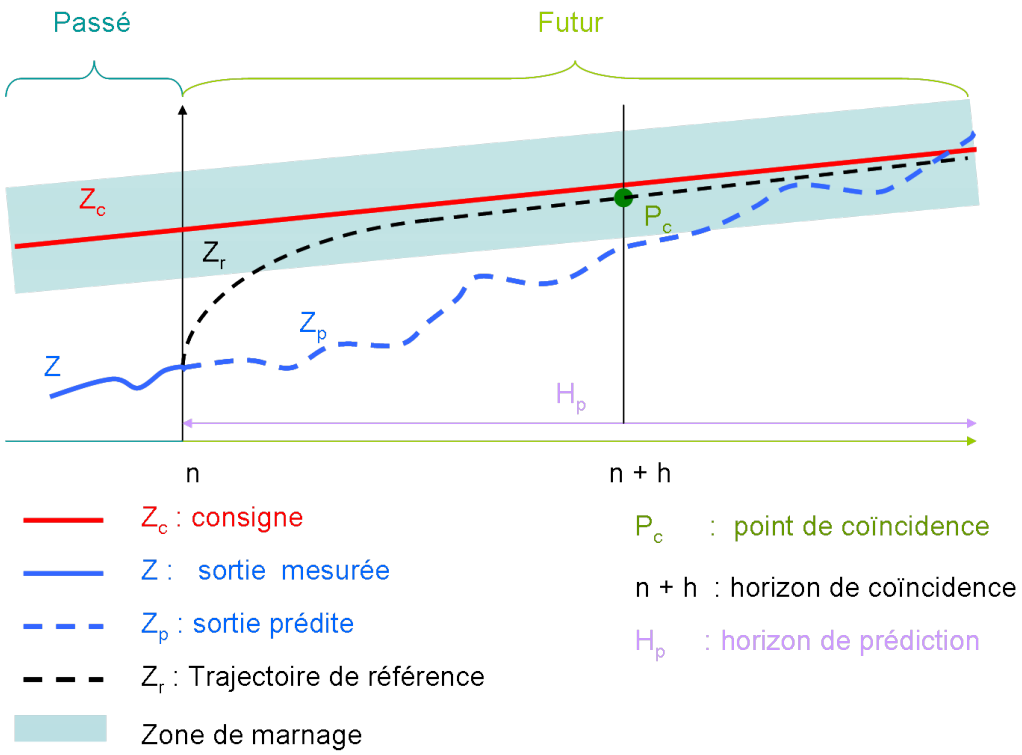


FIGURE 1.4 – Stratégie de la commande prédictive

Les modes de régulation "crue", "programme de débit", "fil de l'eau" et "visée" calculent des débits objectifs pour l'usine aval et le barrage aval par la commande prédictive, à partir d'un modèle mathématique du processus (détaillé chapitre 3). En fonction des débits amonts et locaux, le modèle mathématique embarqué dans la régulation prédit la sortie (cote au point de réglage) sur un horizon futur appelé horizon de coïncidence [9] (Cf. FIGURE 1.4). Le débit de commande est celui qui minimise l'écart entre la trajectoire de référence [10] et la cote prédite pour le point de réglage à l'horizon de coïncidence.

Régulation par commande prédictive - Calcul de la commande

La première étape est de calculer la consigne d'exploitation correspondant à la position du point de coïncidence. Si la consigne future est connue, on va la chercher dans la table des consignes prévisionnelles, sinon on considère que la consigne future reste constante et égale à la dernière valeur connue.

Ensuite, le calcul de la cote au point de coïncidence Pc notée Z_{P_c} s'effectue suivant la formule :

$$Z_{P_c} = Z_c(n+h) - \lambda^h(Z_c(n) - Z(n)) \tag{1.1}$$

Avec

- Z_{P_c} : cote calculée au point de coïncidence
- n : instant présent
- h : horizon de coïncidence
- Z_c : consigne
- Z : cote mesurée
- λ : coefficient de réglage de la trajectoire de référence

La variable λ est définie par :

$$\lambda = e^{(\frac{-3T_e}{T_r})} \tag{1.2}$$

Où

- T_e : est la période d'échantillonnage, soit 100 s pour la régulation
- T_r : est le temps de réponse en boucle fermée

Une fois tous ces paramètres déterminés, le modèle embarqué calcule un "scénario lâché" et un "scénario forcé" indispensables pour établir la commande à appliquer (Cf. FIGURE 1.5).

9. L'horizon de coïncidence ne peut pas être fixé de façon précise. Il doit cependant se trouver après toute partie délicate de la réponse en boucle ouverte (retard pur, déphasage non minimal par exemple) et avant le plus petit des temps de réponse en boucle ouverte et fermée. Chaque aménagement à son horizon de coïncidence particulier.

10. La trajectoire de référence est une exponentielle qui permet de rallier la cote mesurée à la consigne d'exploitation sur l'horizon.

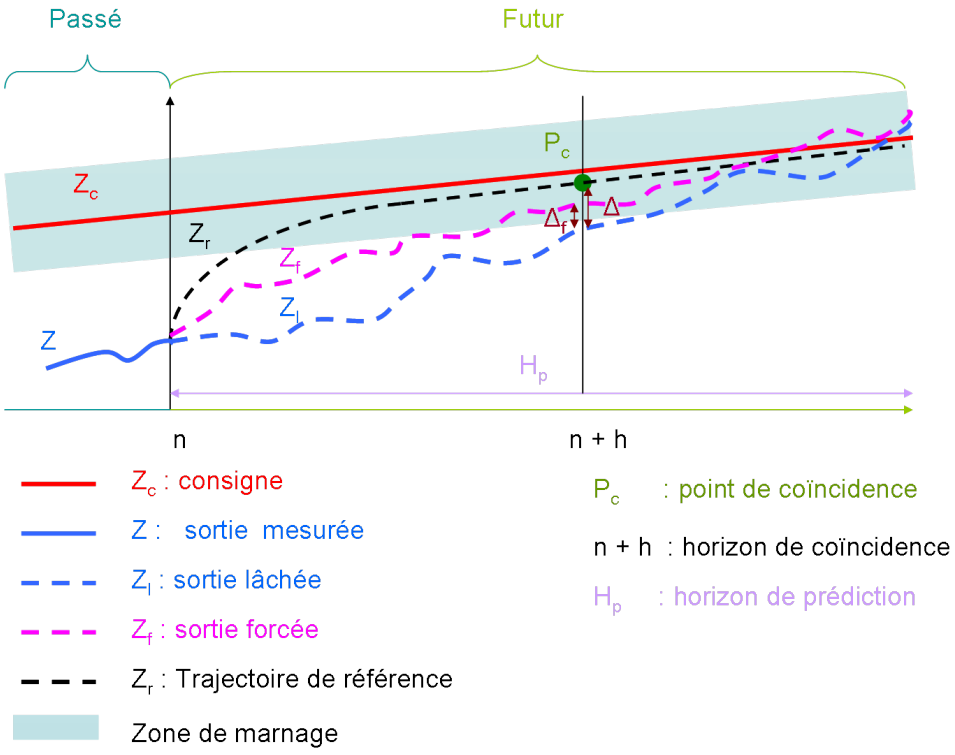


FIGURE 1.5 – Scénario lâché et scénario forcé

Le scénario lâché réalise une simulation hydraulique (avec le modèle mathématique embarqué dans la régulation) basée sur des conditions limites (débits aux usines amont et aval,débits aux barrages amont et aval, et débit aux affluents) considérées constantes sur tout l'horizon.

Le scénario forcé réalise une simulation hydraulique (avec le modèle mathématique embarqué dans la régulation) basée sur des conditions limites considérées constantes sauf pour l'organe réglant qui est incrémenté d'un échelon de débit [11] de 42 $m^3.s^{-1}$. Avec ce scénario, à l'horizon de coïncidence, la cote prévue par le scénario forcé est à la distance Δ_f de la cote prévue par le scénario lâché.

A l'aide d'une règle de trois, on calcule la commande incrémentale dq nécessaire pour que la sortie prédite équivalente à la sortie lâchée rejoigne la consigne de référence au point de coïncidence :

$$dq = \frac{42 \times \Delta}{\Delta_f} \tag{1.3}$$

Avec $\Delta = Z_r - Z_l$ au point de coïncidence $= Z_r(n+h) - Z_f(n+h)$.

11. L'échelon de débit de 42 $m^3.s^{-1}$ correspond à l'ouverture ou la fermeture d'un pas de vanne.

Régulation par commande prédictive - Méthode de correction

La régulation par commande prédictive telle que décrite précédemment s'appuie sur les conditions aux limites en débit aux aménagements situés à l'amont et à l'aval et aux affluents ainsi que les cotes aux points de réglages PR1 ou PR2. Ces données sont issues de capteurs et sont donc soumises à :

- des pannes
- des bruits
- des biais

De plus, le calcul de la commande nécessite l'utilisation d'un modèle mathématique embarqué dans la régulation. C'est pourquoi, on parle d'erreurs de "mesures" (celles liées aux capteurs) et de "structure" (celles liées au modèle embarqué).

Actuellement, pour parer à ces erreurs, la CNR dispose d'une méthode de correction appelée "calcul du Qcor" (Cf.FIGURE 1.6) qui présente des inconvénients notables cités ci-dessous :

- Cette méthode impose une condition limite interne (la cote du point de réglage) et réalise deux calculs hydrauliques pour les deux tronçons situés à l'amont et à l'aval de ce point de réglage. Cela fait apparaître une discontinuité des débits (résultat des deux calculs) lors de manifestations d'erreurs de mesures ou de structure. Actuellement, cette discontinuité est comblée par une variable fictive de correction appelée "débit de correction" ou "Qcor".

- Dans ([JB07]), il est mis en avant que les forts transitoires, c'est à dire lors d'un déclenchement [12] (cet évènement engendre une variation de débit qui peut aller jusqu'à $\pm$ 400 $m^3 s^{-1}$), la méthode de calcul du Qcor ne peut pas dissocier les erreurs de mesures des variations de débit engendrées par le phénomène transitoire. Ce souci de correction a pour conséquence de fausser le calcul de la commande prédictive ce qui ne permet pas à la cote du point de réglage de se maintenir à la consigne d'exploitation. Dans ce cas, la production hydroélectrique n'est pas optimale et surtout la sécurité hydraulique peut être remise en question.

- Hydrauliquement, cette méthode n'est pas correcte pour le calcul hydraulique du tronçon en aval du point de réglage. Plus précisément, pour ce tronçon, la condition limite interne au point de réglage, impose un calcul de ligne d'eau avec une condition limite en cote à l'amont et une condition limite en débit à l'aval, ce qui n'est pas conforme à la nature des conditions limites nécessaires au calcul des lignes d'eau en hydraulique fluviale.

12. On appelle "déclenchement" l'arrêt brutal d'une turbine.

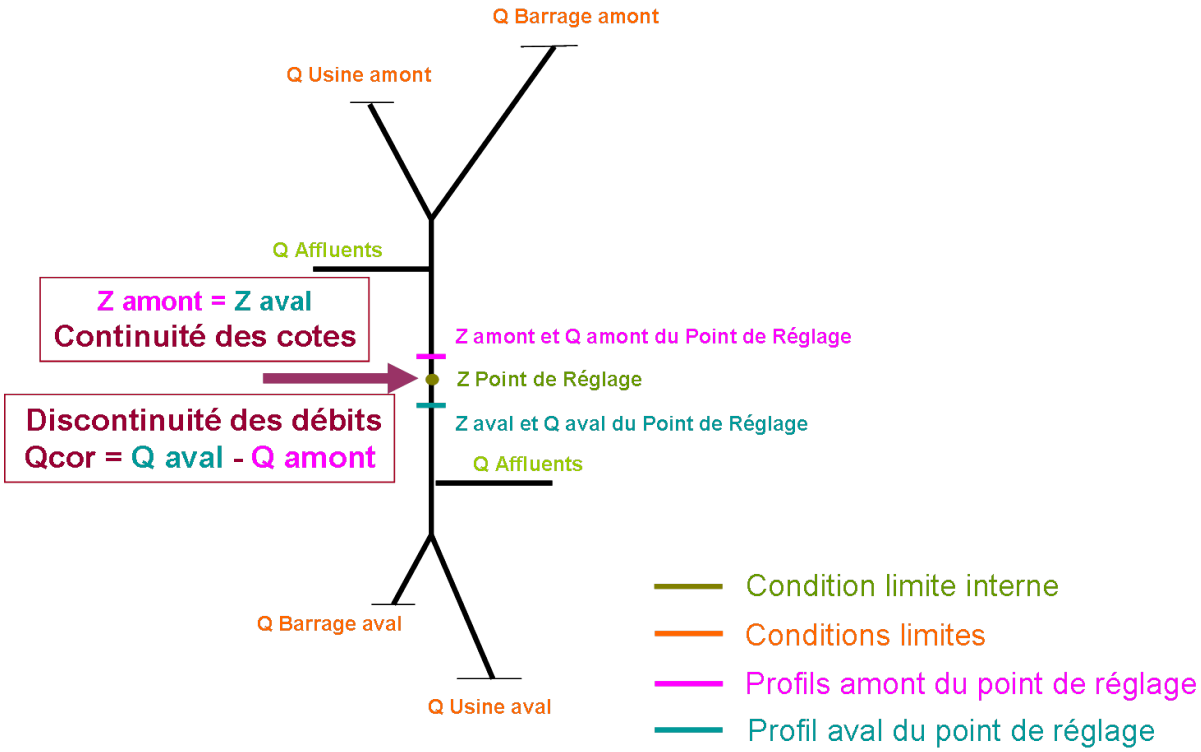


FIGURE 1.6 – Calcul du débit de correction

L'objectif de ce travail de recherche est principalement de déterminer une méthode apte, en régime permanent comme en régime transitoire, à fournir une estimation correcte de l'état hydraulique des aménagements (débits et cotes le long du tronçon). Ce travail doit être réalisé de manière suffisamment générique (quelques soient le nombre et l'emplacement des conditions limites) pour s'appliquer à la totalité des configurations des 18 aménagements de la CNR.
Cette estimation sera basée sur l'utilisation de mesures de terrain, ainsi que du modèle mathématique embarqué. Elle devra être capable de détecter et corriger aussi bien les erreurs de mesures que de structure. Les techniques mathématiques permettant d'atteindre cet objectif s'appellent "l'assimilation de données".

1.2.2 Les techniques d'assimilation de données

Pour estimer les états d'un système, il existe de nombreuses techniques d'assimilation de données ([DAG07],[BC99]). Bien que ces différentes techniques aient de nombreux liens entre elles, et souvent différentes manières d'arriver aux mêmes algorithmes, il existe un certain nombre de critères de classification de ces techniques, comme par exemple des techniques :

- de type variationnel
- de type stochastique

Les premières applications de ces techniques d'assimilation de données sont apparues dans le domaine de la météorologie et de l'océanographie ([SAS70]). Elle s'étendent à de nombreux autres domaines depuis quelques années : géosciences, spatial, médical ([MOI08]), mécanique ([ZM05]), etc. Dans le domaine des géosciences on peut citer en particulier l'hydrologie et l'hydraulique.

En hydraulique fluviale, ces méthodes ont permis d'estimer :
- les cotes ([MAL94], [JB09], [JB08], [JBMDS09], [MON07], [GM07], [HON07],[PTJ+10], [SMB10])
- les débits ([MAL94], [MON07], [HLDLM05], [HON07],[SMB10])
- les coefficients de Manning ([MAZ03], [MON07], [AEMA99],[HLDML05], [HON07], [ROU04], [SMB10])
- les conditions initiales ([MAZ03])
- la géométrie des sections ([MON07], [HLDLM05])
- les conditions limites ([MAZ03], [HLDLM05], [RPT+10], [MAL94])
- les vitesses d'écoulement ([MON07], [GM07])

Ces méthodes utilisent des observations de différentes natures : principalement des cotes, parfois des débits, mais aussi des images aériennes ou satellites ([ROU04]).

L'approche variationnelle

L'approche variationnelle basée sur la théorie du contrôle optimal est très utilisée en océanographie et en météorologie car elle permet de combiner, dans un même critère à minimiser, tout un ensemble d'informations provenant de diverses observations et modèles. Le minimum du critère est calculé en général à partir de méthodes de descente de type Gradient. Pour des problèmes de petite dimension (jusqu'à quelques

centaines d'états), ce gradient peut être obtenu par calcul matriciel. Cependant, dans les domaines météorologique et océanographique, les systèmes sont de très grande taille (plusieurs centaines de millions d'états) et les matrices impliquées dans le calcul du gain ne seraient ni stockables ni manipulables. Ces méthodes calculent directement le gradient du critère à minimiser par la méthode adjointe. Pour plus de détails, se référer à [BN11].

Il existe de nombreuses variantes de cette approche variationnelle, en fonction du critère choisi, et en particulier des instants considérés pour les observations ainsi que du modèle choisi pour propager les états au cours du temps. On peut citer en particulier deux grandes familles :

- Le 3D-VAR : cette approche suppose que les diverses observations sont faites à un instant donné et en général il est utilisé pour corriger l'état ($3D$) simulé par le modèle à cet instant pour tenir compte des nouvelles informations

- Le 4D-VAR : il prend en compte la quatrième dimension que constitue le temps en considérant des observations réalisées à des temps différents et en cherchant la trajectoire temporelle qui passe le plus près possible de ces observations

D'autres variantes (3DFGAT, 4DVAR Incrémental, 4DVAR multi-incrémental) existent. Leur choix est guidé par les informations et les capacités de calcul disponibles .

Ces méthodes, qui sont basées sur la théorie de l'optimisation et grâce aux techniques dites de "l'adjoint", sont adaptées aux systèmes de grande dimension. L'inconvénient est qu'elles sont gourmandes en temps de calcul (plusieurs heures même sur un système de dimension réduite [VIA08]). De ce fait, elles ne correspondent pas aux exigences de la régulation temps réel par commande prédictive qui travaille avec un pas de temps de 100 s. Par ailleurs, l'étude de la robustesse et de la convergence de ces méthodes est très difficile, voire impossible, contrairement à d'autres méthodes que nous retiendrons (Cf. section 5.5).

L'approche stochastique

Les approches de type stochastique sont basées sur la théorie de l'estimation statistique. Elles tiennent compte explicitement d'erreurs sur les observations, ainsi que sur les modèles, et cherchent à corriger des états ou paramètres du système considéré en satisfaisant des propriétés statistiques de l'erreur d'estimation (minimum de la variance, maximum de l'estimation a posteriori, maximum de vraissemblance, etc.). Les principaux estimateurs stochastiques sont :

- Le Best Linear Unbiaised Estimate (BLUE), est un estimateur linéaire sous optimal. Il tient compte des bruits sur les observations et sur le modèle linéaire. L'avantage de ce filtre est sa facilité d'implémentation. En revanche, il impose

l'utilisation d'un vecteur d'ébauche (cette notion est définie chapitre 5) supposé non biaisé. Cela représente une hypothèse trop forte pour la problématique traitée dans cette thèse. Ce filtre présenté chapitre 5 introduit les équations des techniques d'assimilation de données stochastiques.

– Le filtre de Kalman ([KAL59]) : L'avantage prédominant du filtre de Kalman est, outre ses propriétés mathématiques, sa rapidité de calcul, y compris pour les systèmes qui nous intéressent ici (plusieurs centaines d'états) ([JB09]). Plus précisément, pour les cas testés (détaillés chapitre 5), le temps CPU utilisé avec un ordinateur PC classique est inférieur au dixième de seconde. Il est donc compatible avec le calcul de la commande qui a lieu toutes les 100 s par des machines plus puissantes. De plus, il est tout à fait possible de travailler avec le filtre de Kalman asymptotique (aussi appelé filtre de Kalman stationnaire ou filtre de Kalman permanent, défini chapitre 5) pour lequel le temps de calcul devient négligeable ($<$ milliseconde). L'inconvénient majeur pour la régulation par commande prédictive avec modèle non linéaire embarqué, est que cette méthode nécessite une linéarisation du modèle non-linéaire. Cette linéarisation sera décrite et détaillée (chapitre 4).

– Le filtre de Kalman étendu ([ZM05], [DAG07]) : il a été développé pour tenir compte des non linéarités des systèmes étudiés. Bien que le filtre de Kalman soit une analyse optimale, le filtre de Kalman étendu perd cette qualité car il ne fournit pas la solution de variance minimale. Néanmoins, l'utilisation du filtre de Kalman étendu dans un cadre faiblement non-linéaire permet d'obtenir de bonnes analyses. En revanche, comme pour le filtre de Kalman classique, celui-ci n'est pas adapté à des grands systèmes comme ceux manipulés en océanographie et météorologie ([DAG07]).

– Le filtre de Kalman d'ensemble : il a été proposé par Evensen en 1994 [EVE03]. Cette technique d'assimilation présente une alternative au filtre de Kalman étendu sans faire d'hypothèse sur le caractère Gaussien des bruits. Cette technique est une alliance entre une méthode de Monté Carlo et une méthode du filtre de Kalman étendu. Cela présente l'avantage d'être plus adapté aux grands systèmes et de mieux traiter les fortes non-linéarités.

– Les filtres de Kalman réduits ([HOT01], [DAG07]) : Dans les cas des grands systèmes, le filtre de Kalman de rang plein ne peut être utilisé car les multiplications, les inversions et le stockage des matrices sont impossibles. Pour résoudre ce problème, il est possible de faire l'hypothèse que la physique du modèle est contrôlée par un nombre réduit de variables. Dans cette catégorie on trouve les filtres de Kalman réduits RRSQRT, SEEK, SEIK, etc. Nous ne nous intéresserons pas à eux car cette thèse ne traite pas des systèmes de grandes tailles tels que ceux utilisés en océanographie et météorologie.

– Le filtre particulaire de Monte Carlo ([SMB10]) : il constitue une alternative au filtre de Kalman étendu car il ne nécessite pas d'hypothèse de linéarité. En revanche, ce filtre est très gourmand en temps de calcul. Par ailleurs dans certains cas nous avons observé qu'il converge moins rapidement que le filtre de Kalman ([JBMDS09]).

Il existe encore de nombreuses autres méthodes d'assimilation de données. Nous n'évoquerons en plus que l'observateur de Luenberger ([LUE66]) qui a également déjà été utilisé en hydraulique ([MAL94], [RED95]). Cette méthode aboutit à une formulation pour la correction des états proche de celle du filtre de Kalman asymptotique, tout en basant sa synthèse sur la vitesse de convergence de l'estimation. Cette méthode construit la matrice de gain par placement de pôles. Elle nécessite des propriétés d'observabilité (notion détaillée chapitre 6) ainsi qu'un algorithme de placement de pôles potentiellement difficile à mettre en œuvre sur des systèmes de dimension moyenne (notre cas) ou grande.

Au vu de cette liste non exhaustive des techniques d'assimilation de données, il apparait que le filtre de Kalman (présenté plus en détail chapitre 5) est la méthode, a priori la plus adaptée pour répondre aux problèmes d'estimations d'erreurs de mesures et de structure que rencontre la régulation par commande prédictive de la CNR.

1.2.3 Choix de la modélisation

Comme il a déjà été dit précédemment, le modèle mathématique embarqué dans la régulation par commande prédictive est non-linéaire, il sera détaillé chapitre 3. Or le filtre de Kalman nécessite un modèle linéaire. De ce fait, il faut choisir une approche de modélisation adaptée. Il existe en général deux types d'approches concernant la modélisation :

– Modèle de représentation (ou boîte noire) : il est construit par identification des paramètres de fonctions de transfert à partir de données terrain ou de la simulation d'un scénario sur le modèle non-linéaire d'origine ([GEO94]). L'inconvénient de ce choix de modélisation est que son domaine de validité est en général limité aux conditions prévalant dans le scénario utilisé pour le calage. Par ailleurs tout changement des variables d'entrée ou de sortie du modèle nécessite de refaire le travail de calage des fonctions de transfert.

– Modèle de connaissance (ou à base physique) : il est issu des équations physiques décrivant le comportement dynamique du système étudié (ex. : équations de Barré de Saint-Venant dans notre cas). Il peut être synthétisé suite à une discrétisation explicite [JRDA92] ou implicite [MAL94] des équations de l'hydraulique fluviale. Ce type de modèle s'adapte naturellement à toutes les configurations de réseau et est modulable au niveau du nombre et de l'emplacement des mesures. De plus, il

est générique pour la prise en compte des géométries ainsi que du nombre d'états. Cette méthode est donc adaptée pour tous les aménagements de la CNR. Nous choisirons cette approche pour le modèle non-linéaire (Cf. chapitre 3) et pour le modèle linéaire (Cf. chapitre 4)

1.3 Questions de recherche et plan du manuscrit

Cette thèse est financée par un industriel (la Compagnie Nationale du Rhône). De ce fait, les recherches réalisées devaient être testées sur des configurations existantes avec des données réelles. Pour cela, il a fallu choisir un aménagement support, qui est typique des 18 aménagements gérés par la CNR :

L'aménagement de Baix-Le-Logis-Neuf .

Le chapitre 2 présente les caractéristiques en termes d'ouvrages, de diffluences, de confluences et autres particularités présentes sur Baix-Le-Logis-Neuf .

Comme il a été dit section 1.2.1, la régulation par commande prédictive embarque un modèle mathématique non-linéaire. Ce logiciel de modélisation, décrit chapitre 3, a été créé et est toujours exploité par la CNR.

Les aménagements de la CNR sont conçus pour faire face aux crues. De ce fait, il existe des lits majeurs et des zones d'inondations sur de nombreux sites. Il existe plusieurs façons de prendre en compte les lits multiples. On verra dans cette partie comment ils sont gérés par le logiciel de calculs hydrauliques de la CNR.

L'hypothèse forte du filtre de Kalman est le fait qu'il s'appuie sur un modèle linéaire. Pour répondre à cette nécessité, on fait le choix de s'appuyer sur un modèle linéaire de connaissance qui offre la possibilité de changer facilement de configuration. Ainsi la méthodologie développée pour la synthèse du modèle pourra être appliquée sur les 18 aménagements du Rhône. Dans la littérature il existe déjà des études en hydraulique fluviale traitant de synthèse de modèle linéaire de connaissance. Ces études étaient réalisées pour des canaux d'irrigation ([MAL94], [MAL03]) ou des rivières sans ramification ([SHR+08]). Les réseaux considérés étaient non maillés c'est à dire qu'ils ne présentaient ni confluence ni diffluence. Or les aménagements de la CNR sont architecturés de façon maillée :

- un bief pour le vieux Rhône
- un bief pour le canal de fuite de l'usine amont
- un bief pour le canal d'amenée de l'usine locale

– autant de biefs que d'affluents

Ces biefs n'étant a priori pas toujours de longueur négligeable, il parait essentiel d'en tenir compte dans la modélisation. De ce fait, on présentera dans le chapitre 4 comment gérer les confluences et les diffluences lors de la synthèse d'un modèle linéaire de connaissance.

Après analyse des avantages et des inconvénients des différentes méthodes d'assimilation de données présentées section 1.2.2, on a fait le choix de s'intéresser au filtre de Kalman (décrit dans le chapitre 5). En effet, la régulation par commande prédictive de la CNR nécessite une méthode de correction des données à caractère stochastique et rapide en temps de calcul. Ce dernier point orienta les recherches vers un filtre de Kalman asymptotique présenté section 5.4.4.

Les pannes des capteurs présents sur les aménagements hydroélectriques peuvent avoir lieu simultanément. Pourtant, les recherches menées jusqu'à présent en hydraulique fluviale ([GEO94], [MAL94], [RED95], [ROU04], [VIA04], [VSG04]) traitent uniquement d'informations à corriger ou reconstituer isolées. De ce fait, nous avons étudié section 5.7 la possibilité d'estimer plusieurs données manquantes simultanément à l'aide du filtre de Kalman.

Cependant, un trop grand nombre d'inconnues à corriger ou reconstituer, allié à un manque d'observations peut empêcher la convergence du filtre. En effet, le filtre de Kalman assure la minimisation de l'erreur d'estimation mais il ne garantit pas que celle-ci converge vers zéro. Une étude de la convergence du filtre est donc réalisée section 5.5 afin d'étudier une possible condition nécessaire et suffisante à la convergence du filtre.

L'étude de la convergence du filtre peut être réalisée a posteriori de la synthèse du filtre de Kalman. Or il serait plus adapté industriellement d'avoir a priori l'estimation l'assurance que le filtre de Kalman est capable de fournir une reconstruction exacte. Pour cela, une étude de l'observabilité est menée chapitre 6.

Dès lors que l'on utilise un filtre de Kalman, ou toute méthode utilisant des pondérations, même lorsqu'elles sont basées sur des considérations physiques, une question récurrente est posée : "Comment établir les matrices de covariance des erreurs de mesures et des erreurs de modèle ?". On verra section 5.8.6 qu'il existe un critère de choix pour ces matrices.

Une fois toutes ces questions traitées, il était indispensable pour la CNR de tester le filtre de Kalman sur des données réelles. Pour cela, cette entreprise dispose d'une plateforme de simulation présentée chapitre 7. Cet environnement de travail permit de tester sur des scenarii réels l'apport du filtre de Kalman pour la détection et l'estimation d'erreurs. Cette étape permet de valider la mise en place d'une telle méthode de correction pour la régulation par commande prédictive.

Chapitre 2

Aménagement support de l'étude - Baix Le Logis Neuf

Sommaire

2.1 Introduction 36
2.2 Description des ouvrages et caractéristiques hydrauliques 37
2.3 Points de réglages et consignes d'exploitation pour l'aménagement de Baix-Le-Logis-Neuf 40

2.1 Introduction

Le Rhône, long de 812 km, prend sa source dans le glacier du Rhône, à Gletsch, en Suisse, à l'extrémité Est du canton du Valais, dans les Alpes uranaises. Il parcourt 290 km dans ce pays, alimente le lac Léman, puis peu après son passage à Genève, il entre en France où il parcourt 530 km.

Le Rhône est le fleuve le plus dynamique de France, et a le second débit (après le Nil) de tous les fleuves s'écoulant en Méditerranée. Se jetant dans une mer sans marée, le fleuve a formé un delta avec des bras qui se sont déplacés globalement d'Ouest en Est au cours de la période historique. Désormais endigué, son delta situé en Camargue est figé hormis lors de crues exceptionnelles.

L'aménagement du Rhône qui sert de support pour cette étude est celui de Baix-Le-Logis-Neuf. Il se situe entre les aménagements de Beauchastel et de Montélimar (Cf. FIGURE 2.1). On a choisi cet aménagement car il est typique de tous les autres aménagements du Rhône.

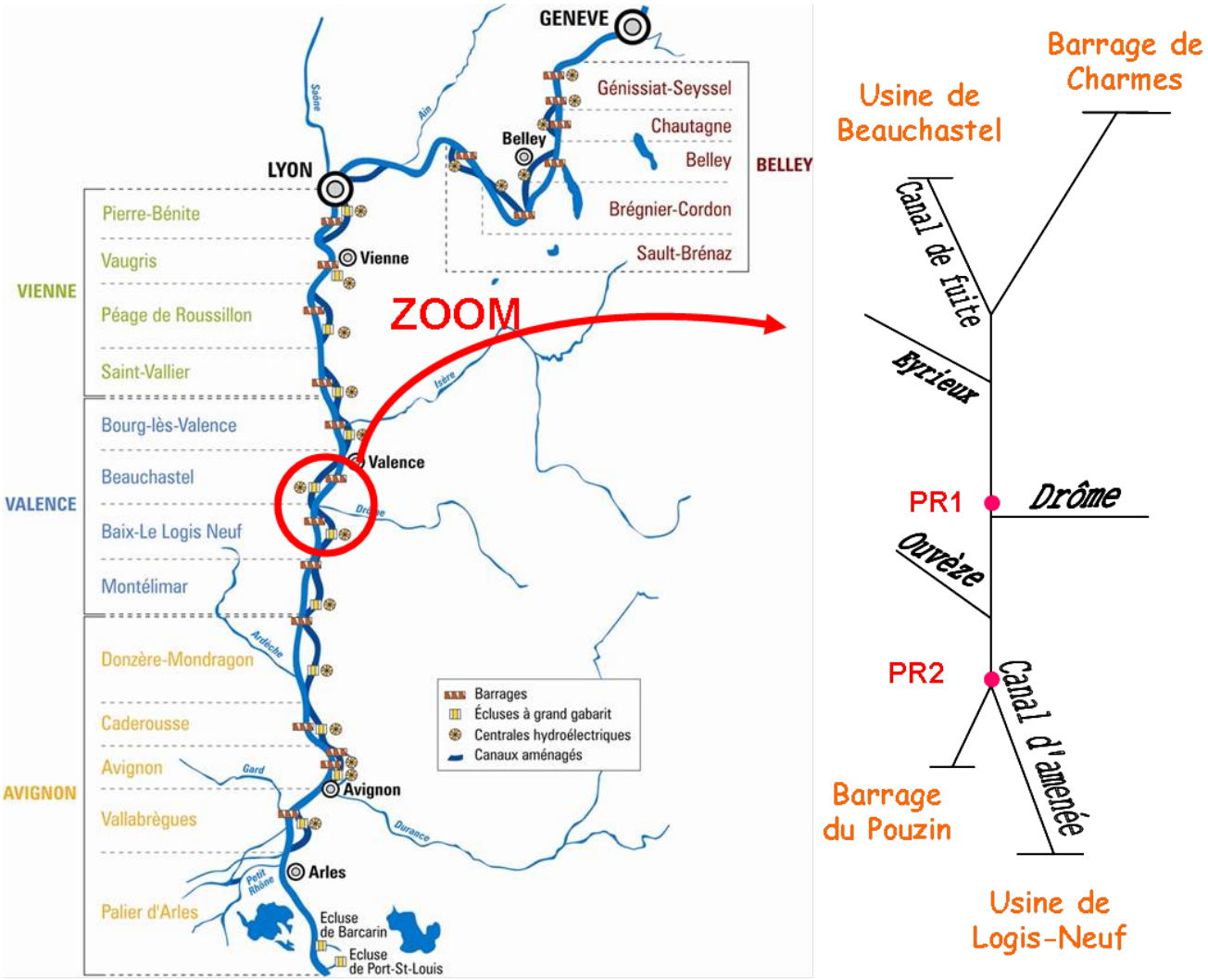


FIGURE 2.1 – Aménagements de la CNR et zoom sur Baix-Le-Logis-Neuf

2.2 Description des ouvrages et caractéristiques hydrauliques

L'aménagement de Baix-Le-Logis-Neuf est délimité en amont par une usine et un barrage (Cf. FIGURE 2.2) :

- L'usine de Beauchastel : elle est pourvue de six turbines Kaplan et un bulbe réglant lui permettant de turbiner 2100 $m^3 s^{-1}$ au maximum ce qui représente une productibilité moyenne annuelle de 1211 GWh.

- Le barrage de Charmes : il peut évacuer un débit du Rhône d'environ 10000 $m^3 s^{-1}$ par six passes de 26 m de large. Chaque passe est équipée d'une vanne supérieure de 13, 50 m de haut et d'une vanne inférieure de type Wagon. Le débit réservé est

imposé : $\geq 20\ m^3s^{-1}$ du 1^{er} Avril au 31 Août et $\geq 10\ m^3s^{-1}$ du 1^{er} Septembre au 31 Mars.

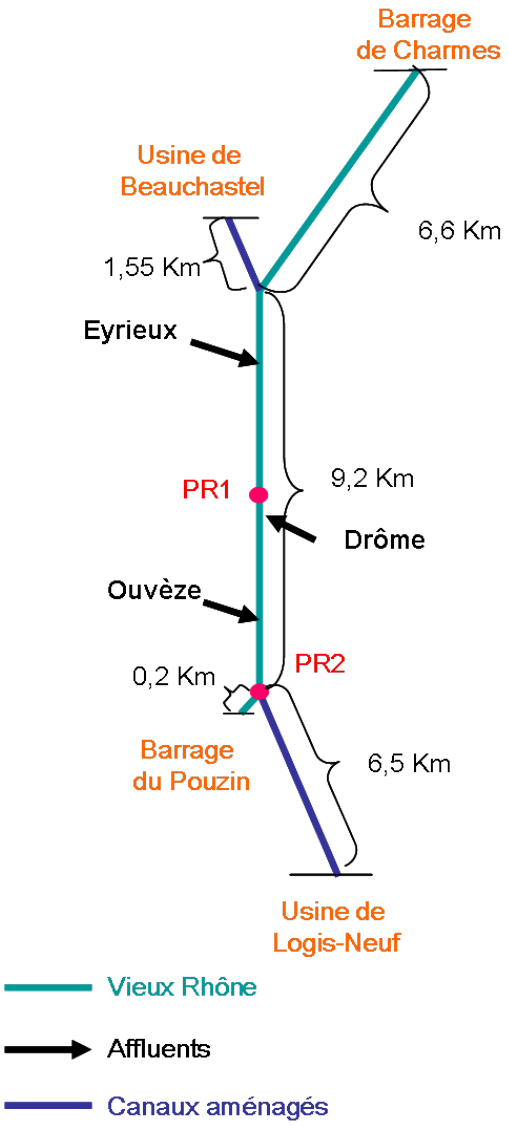


FIGURE 2.2 – Aménagement de Logis-Neuf

En aval, l'aménagement est également délimité par une usine et un barrage (Cf. FIGURE 2.2) :

- L'usine de Logis-Neuf pourvue de six turbines Kaplan permet de turbiner 2230 m^3s^{-1} au maximum, ce qui représente une productibilité moyenne annuelle de 1177 GWh.

- Le barrage du Pouzin : il comprend six passes de 26 m de large, fermées par des vannes wagons à deux corps, dites "à crochets", de 13,50 m de haut (Cf. FIGURE 2.3). Lorsque le Rhône est en crue, le barrage s'ouvre d'abord progressivement

par les vannes supérieures, puis par les vannes inférieures. Lorsqu'il est complètement ouvert, il peut évacuer jusqu'à 9500 m^3s^{-1} (ce qui correspond à une crue millennale). Comme pour le barrage de Charmes, le débit réservé est imposé : $\geq 20\ m^3s^{-1}$ du 1^{er} Avril au 31 Août et $\geq 10\ m^3s^{-1}$ du 1^{er} Septembre au 31 Mars.

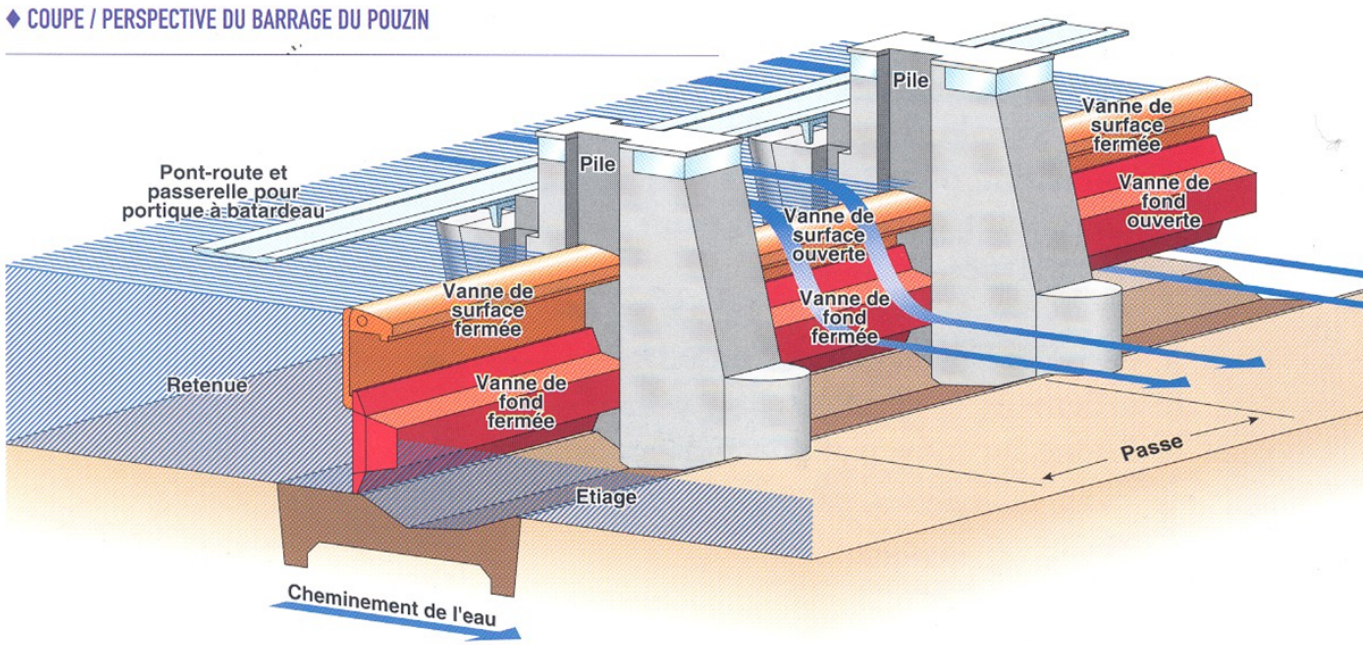


FIGURE 2.3 – Vannes du barrage du Pouzin

Sur cet aménagement arrivent trois affluents (Cf. FIGURE 2.2) décrits dans le tableau (2.1)

Affluent	PK	Rive
Eyrieux	PK 126,5	droite
Drôme	PK 131,6	gauche
Ouvèze	PK 133,7	droite

TABLE 2.1 – Affluents de l'aménagement de Baix - Le - Logis - Neuf

L'aménagement de Baix-Le-Logis-Neuf comporte en amont de la Drôme, sur la rive gauche du Rhône un endiguement submersible s'étendant depuis la confluence de la Drôme au Sud jusqu'au hameau des Petits Robins au Nord, et désigné sous le nom d'endiguement submersible de Printegarde (Cf. FIGURE 2.4).

2.3 Points de réglages et consignes d'exploitation pour l'aménagement de Baix-Le-Logis-Neuf

Pour respecter les consignes de référence rappelées chapitre 1 qui assurent sûreté, sécurité et production, l'aménagement de Baix-Le-Logis-Neuf est doté de deux points de réglage décrits dans le tableau (2.2).

Localisation	PK	Point de réglage
Musoir de la Drôme	PK 131	PR1
Entrée du canal	PK 135,5	PR2

TABLE 2.2 – Points de réglages de l'aménagement de Baix - Le - Logis - Neuf

Pour la régulation par commande prédictive expliquée section 1.2.1, le réglage doit respecter les consignes d'exploitation. Celles-ci correspondent aux cotes marquées en gras dans les tableaux (2.3) et (2.4). Les autres cotes sont données à titre indicatif. Le changement de point de réglage se fait sur indication de cote.

Débit du Rhône	Point de réglage actif	Objectif au Point de réglage actif en $mNGF$	Cote approximative au PR2 $mNGF$
$\leq 2500\ m^3.s^{-1}$	PR1	**90,75**	90,45
$3000\ m^3.s^{-1}$	PR1	**90,75**	90,25
$3500\ m^3.s^{-1}$	PR1	**90,63**	89,95
$4000\ m^3.s^{-1}$	PR1	**90,50**	89,60
$4500\ m^3.s^{-1}$	PR1	**90,50**	89,10
$4800\ m^3.s^{-1}$	PR1	**90,50**	88,75
$> 4800\ m^3.s^{-1}$	PR2	**88,75** jusqu'à ouverture complète du barrage	**88,75**

TABLE 2.3 – Consignes aux points de réglage en fonctionnement normal

Débit du Rhône	Point de régalge actif	Objectif au Point de réglage actif en $mNGF$	Cote approximative au PR2 $mNGF$
$\leq 2500\ m^3.s^{-1}$	PR1	**90,75**	90,40
$3000\ m^3.s^{-1}$	PR1	**90,75**	90,25
$4000\ m^3.s^{-1}$	PR1	**90,75**	89,85
$4500\ m^3.s^{-1}$	PR1	**90,75**	89,55
$4800\ m^3.s^{-1}$	PR1	**90,75**	89,35
$5200\ m^3.s^{-1}$	PR2	**89,75**	89,75
$> 5200\ m^3.s^{-1}$	PR2	**88,75** jusqu'à ouverture complète du barrage	**88,75**

TABLE 2.4 – Consigne au point de réglage en crue rapide

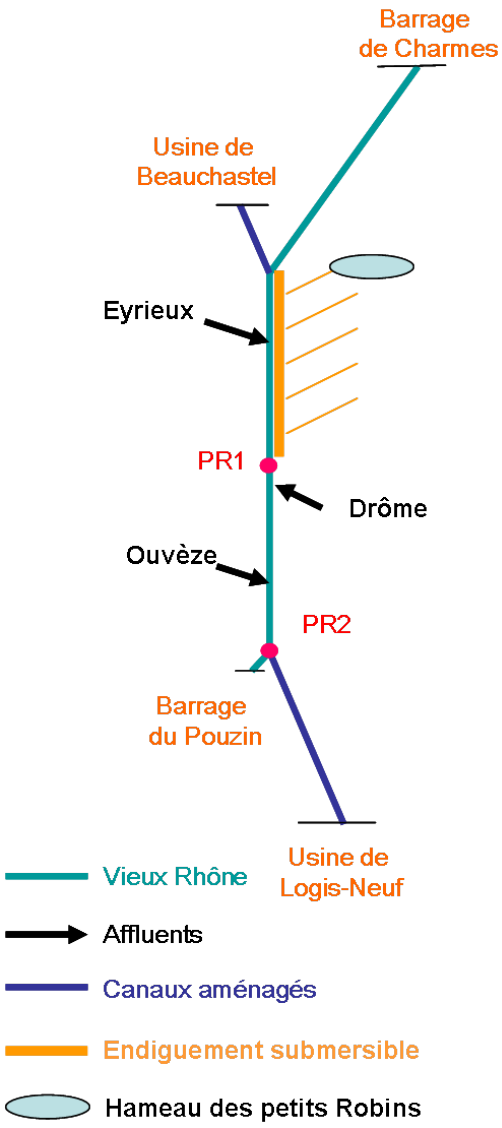


FIGURE 2.4 – Plaine d'inondation de Logis-Neuf

Chapitre 3

Modèle non linéaire

Sommaire

3.1 Introduction 44
3.2 Réseaux filaires et casiers 45
3.3 Équations du modèle 46
3.3.1 Équations de Barré de Saint Venant 46
3.3.2 Loi pour les casiers 48
3.4 Données nécessaires à la modélisation 49
3.4.1 Répartition des sections en travers 49
3.4.2 Accessibilité des données géométriques 49
3.4.3 Accessibilité des données hydrauliques 49
3.5 Discrétisation et méthodes numériques 50
3.5.1 Schéma de Preissmann 51
3.5.2 Propriétés du schéma de Preissmann 52
3.6 Lits multiples 54
3.6.1 Découpage en lits de la section en travers 54
3.6.2 Choix de l'interaction entre les lits 54
3.6.3 Divided Channel Method 55
3.6.4 Formule de Debord 56
3.7 Conclusion 57

3.1 Introduction

Au début des années 1980, la Compagnie Nationale du Rhône a décidé de développer son propre logiciel de modélisation 1D et de calcul hydraulique des écoulements permanents et transitoires à surface libre. Depuis la création de la régulation par commande prédictive, ce modèle mathématique appelé CRUE est utilisé pour calculer les lignes d'eau nécessaires au calcul de la commande.

Il existe plusieurs sortes de réseaux filaires illustrés dans la section 3.2 :

- les réseaux simples (souvent utilisés pour modéliser des canaux d'irrigation ou des rivières linéaires)
- les réseaux ramifiés (présentant des confluences)
- les réseaux maillés (présentant des diffluences)

Pour gérer les confluences et les diffluences du Rhône, CRUE est capable de modéliser des réseaux de topologie quelconques. Les tronçons du fleuve sont modélisés par des biefs reliés par des nœuds. A ces nœuds peuvent aussi être reliés des casiers modélisées en 2D qui symbolisent les plaines d'inondation. CRUE effectue donc une modélisation dite 1D à casiers pour résoudre les équations de l'hydraulique à surface libre.

Les équations de Barré de Saint-Venant sont utilisées pour le calcul des lignes d'eau en régime transitoire. Ces équations, ainsi que les hypothèses associées sont présentées section 3.3.1. Pour les casiers (qui eux aussi font partie du modèle), les échanges sont modélisés par une loi de volume décrite section 3.3.2.

Chaque bief est décrit par plusieurs sections en travers détaillées section 3.4.1. Les données géométriques et hydrauliques évoquées section 3.4.2 permettent le calcul des lignes d'eau à partir d'une intégration numérique des équations de Barré de Saint-Venant. En effet, le Rhône possédant une géométrie très complexe, il est impossible de calculer une solution analytique de ces équations. Il existe plusieurs méthodes de résolution numérique de ces équations. Nous étudierons section 3.5 les techniques de résolutions les plus utilisées pour les équations de l'hydraulique à surface libre.

Comme il a déjà été dit dans le chapitre 1, le Rhône est confronté à des crues plus ou moins importantes que la CNR se doit de gérer en garantissant la sécurité des personnes et des biens. En cas de petites crues, seuls les lits mineurs et majeurs sont remplis. Les lits multiples (lits majeurs gauches, lit mineur, lits majeurs droits) définis sections 3.6 sont découpés en fonction de la différence des coefficients de frottement. Ces zones correspondent à des traitements différents des berges (enrochement, en-gazonnage, etc.) ou à des développements différenciés de la végétation, dus notamment aux différents niveaux d'eau présents dans ces zones. On verra section 3.7 comment sont découpés les lits dans un profil en travers ainsi que les lois hydrauliques qui gèrent les échanges entre lit mineur et lit majeur.

REMARQUE : Les lits appelés "majeurs" dans CRUE sont appelés "moyens" dans SIC. Les lits appelés "de stockage" dans CRUE sont appelés "majeurs" dans SIC. Pour la suite de ce document les terminologies de CRUE seront utilisées.

3.2 Réseaux filaires et casiers

La CNR a choisi un modèle mono-dimensionnel (1D) à casiers pour représenter les aménagements du Rhône. Ce modèle mono-dimensionnel aussi appelé "modèle filaire" peut prendre en compte :

– des réseaux simples décrits FIGURE 3.1

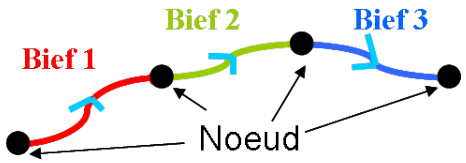


FIGURE 3.1 – Réseaux simples

– des réseaux ramifiés décrits FIGURE 3.2

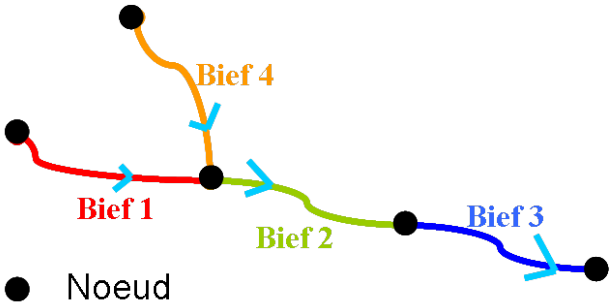


FIGURE 3.2 – Réseaux ramifiés

– des réseaux maillés décrits FIGURE 3.3

Les casiers décrits FIGURE 3.4 complètent la représentation mono-dimensionnelle en donnant la possibilité de modéliser les plaines d'inondation sollicitées lors de grandes crues. La définition d'un casier consiste à définir un volume de stockage associé à un nœud, cela représente un intermédiaire entre une modélisation mono-dimensionnelle (1D) et bidimensionnelle (2D) [MAZ03].

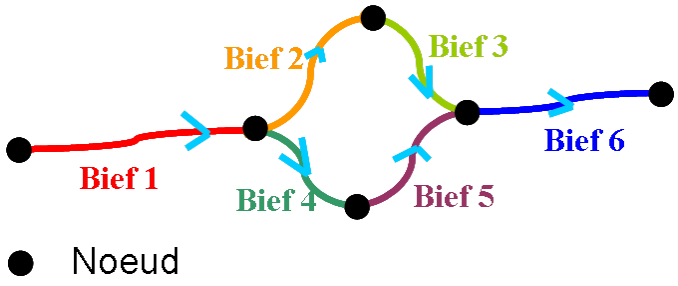


FIGURE 3.3 – Réseaux maillés

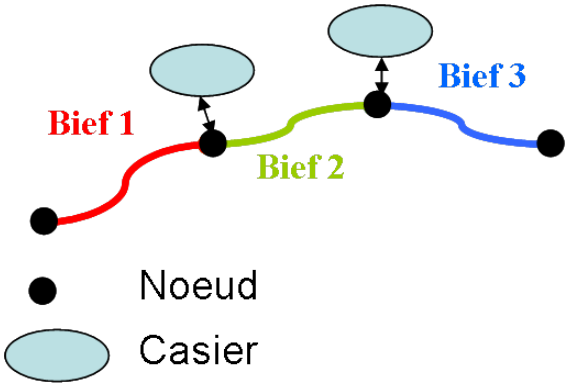


FIGURE 3.4 – Représentation des casiers

3.3 Équations du modèle

3.3.1 Équations de Barré de Saint Venant

Les logiciels de modélisation 1D en hydraulique fluviale tels que CRUE, SIC, MIKE 11, MASCARET, HEC-RAS, SOBEK, INFOWORKS, etc. se basent sur les équations de Barré de Saint-Venant mono-dimensionnelles [BDSV71], [CHV80]. Elles se décomposent en une équation de conservation de la masse aussi appelée équation de continuité et en une équation de conservation de la quantité de mouvement communément appelée équation de la dynamique :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \qquad \text{équation de continuité} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \beta Q V}{\partial x} + gS(\frac{\partial Z}{\partial x} + J) = kqV \qquad \text{équation dynamique} \tag{3.2}$$

Avec :

- Q : débit du bief $(m^3.s^{-1})$
- q : débit latéral par unité de longueur $(m^2.s^{-1})$

  - $q > 0$ pour un apport d'eau
  - $q < 0$ pour un prélèvement d'eau
- S : surface mouillée (m^2)
- x : abscisse curviligne (m)
- t : temps (s)
- Z : niveau dans le bief ($mNGF$)
- g : gravité ($m.s^{-2}$)
- k : Coefficient qui permet de tenir compte de la variation de quantité de mouvement due aux apports latéraux qui ont une vitesse différente de celle de l'écoulement moyen
  - $k = 0$ si q≥ 0
  - $k = 1$ si q≤ 0
- J : pente
- V : vitesse ($m.s^{-1}$)
- β : coefficient adimensionnel de répartition de la vitesse dans la section, dit coefficient de Boussinesq.

Ces équations supposent que les hypothèses suivantes soient satisfaites [CHO59] :

- l'écoulement est mono-dimensionnel : la cote de l'eau et la vitesse sont supposées uniformes dans toute section perpendiculaire à l'écoulement
- l'écoulement est graduellement varié le long du cours d'eau de telle sorte que la répartition est hydrostatique
- l'axe de l'écoulement est considéré comme étant une ligne droite, c'est à dire que le rayon de courbure de l'axe du cours d'eau est très grand
- les pertes par frottements peuvent être calculées à l'aide de formule traditionnelle comme l'équation de Manning-Strickler
- en cas de débit latéral de type fuite ($q < 0$), la vitesse correspondante est égale

à la vitesse de l'écoulement. En cas de débit latéral de type apport ($q > 0$), la vitesse correspondante est nulle en projection sur l'axe de l'écoulement, l'apport de quantité de mouvement est donc nul.

REMARQUE : Dans l'équation de la dynamique de Barré de Saint-Venant on peut choisir le terme Q^2/S au lieu du terme QV, ainsi l'équation 3.2 s'écrirait :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \beta(Q^2/S)}{\partial x} + gS(\frac{\partial Z}{\partial x} + J) = kqV \quad \text{équation dynamique} \tag{3.3}$$

3.3.2 Loi pour les casiers

Un casier est défini par une loi de volume telle que :

$$\text{volume} = f(Z) \tag{3.4}$$

L'équation de continuité au nœud comporte un terme supplémentaire correspondant au débit ayant participé au remplissage ou à la vidange du casier :

$$\sum Q_{\text{bief}} + Q_{\text{casier}} = 0 \tag{3.5}$$

Avec :

- $\sum Q_{\text{bief}}$: la somme de tous les débits entrant ou partant du nœud par les biefs connectés à ce nœud
- Q_{casier} : débit de remplissage ou de vidange du casier
  - Q_{casier} >0 pour un remplissage de casier
  - Q_{casier} <0 pour une vidange de casier

Q_{casier} est calculé à partir de la loi de volume (3.4)

$$Q_{\text{casier}} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial t} = S_c\frac{\partial Z}{\partial t} \tag{3.6}$$

Avec :

- Z : la cote du casier
- S_c : surface du plan d'eau dans le casier

Pour calculer la ligne d'eau d'un modèle mono-dimensionnel à casier, il est nécessaire de disposer de données géométriques et hydrauliques.

3.4 Données nécessaires à la modélisation

3.4.1 Répartition des sections en travers

Le calcul des lignes d'eau se fait pour chaque profil en travers réparti le long d'un bief. Ces profils sont séparés par un pas d'espace Δx variable d'un profil à l'autre.

Pour une meilleure modélisation, les profils en travers doivent être placés de façon pertinente, surtout lorsqu'il intervient un changement tel que :

- un rétrécissement ou
- un élargissement ou
- un changement de rugosité

- etc.

Dans le cas de la modélisation des aménagements du Rhône par la CNR, les profils sont espacés de 200 m en moyenne. Pour les canaux artificiels qui ont une géométrie et une rugosité homogènes, comme pour le canal d'amenée et le canal de fuite des aménagements, la CNR considère que le pas d'espace Δx peut aller jusqu'à 500 m.

3.4.2 Accessibilité des données géométriques

La modélisation des sections en travers nécessite de connaître les données concernant la géométrie du tronçon. Pour tous les aménagements de la CNR, ces données sont disponibles car des relevés topographiques sont régulièrement effectués par le "Frédéric Mistral" dont la photo apparait FIGURE 3.5. Ce bateau équipé de 48 sondeurs sillonne le Rhône afin d'avoir les relevés bathymétriques du fleuve.

3.4.3 Accessibilité des données hydrauliques

Les données hydrauliques telles que les cotes et les débits des sections en travers situées juste en amont et en aval des ouvrages sont disponibles. En effet, la CNR, en tant que producteur d'hydroélectricité, se doit de connaitre quelle quantité d'énergie elle produit pour chaque aménagement. Cela signifie que les hauteurs d'eau en amont et en aval de chaque usine sont connues car ces données déterminent la hauteur de chute.

De plus, comme il a été vu dans la section 1.2.1, la régulation par commande prédictive s'appuie sur les observations des cotes aux points de réglages. Ces données sont donc disponibles toutes les 100 s.

En résumé, une fois la modélisation des biefs réalisée, la CNR s'appuie sur les données hydrauliques qu'elle possède pour calculer les lignes d'eau avec son modèle mathématique CRUE à l'aide des méthodes présentées ci-dessous.

FIGURE 3.5 – Frédéric Mistral

3.5 Discrétisation et méthodes numériques

Plusieurs types d'approches sont envisageables pour résoudre numériquement les équations d'écoulement à surface libre ([MAL03], [GRA09]). On rencontre par exemple :

- la méthode des caractéristiques
- des méthodes aux différences finies avec schémas implicites, telles que celles mises en place dans CRUE, SIC, MIKE 11 et le module des écoulements fluviaux permanents et transitoires de MASCARET
- des méthodes aux différences finies ou aux volumes finis avec schémas explicites, telles que celles mises en place dans le module des écoulements transcritiques de MASCARET.

Les modèles 1D tels que CRUE, SIC et MIKE 11 ont opté pour un schéma implicite aux différences finies. Ces schémas sont en particulier peu contraignants au niveau des choix des pas de temps et d'espace. En revanche ils n'utilisent pas tous le même schéma numérique :

- le schéma implicite de Preissmann, décrit section 3.5.1 (appliqué dans CRUE et dans SIC)

– le schéma implicite de Abbott-Ionescu (appliqué dans MIKE11)

3.5.1 Schéma de Preissmann

Soit la fonction de classe C^1 :

$$f : [0, L] \times [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{3.7}$$

La fonction f et ses dérivées partielles par rapport à la variable d'espace x et la variable de temps t sont approchées par le schéma de Preissmann [CUN66], [CHV80] tel que l'illustre la FIGURE 3.6

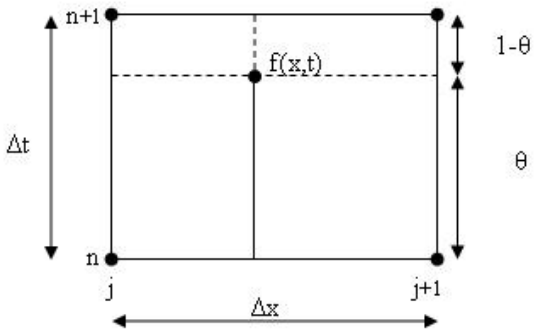


FIGURE 3.6 – Approximation par le schéma de Preissmann

Cela se traduit par :

$$f(x,t) \approx \frac{\theta}{2}(f_{j+1}^{n+1} + f_j^{n+1}) + \frac{1-\theta}{2}(f_{j+1}^{n} + f_j^{n}) \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \approx \theta \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta)\frac{f_{j+1}^{n} - f_j^{n}}{\Delta x} \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \approx \frac{1}{2}\frac{f_{j+1}^{n+1} - f_{j+1}^{n}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\frac{f_j^{n+1} - f_j^{n}}{\Delta t} \tag{3.10}$$

Avec :

– j : indice d'espace correspondant à l'emplacement de la section en travers prise en compte

– n : indice de temps

– θ : coefficient de pondération

REMARQUE : Bien que les équations 3.2 (utilisée dans CRUE) et 3.3 (utilisée dans SIC) soient formellement équivalentes, le résultat de la discrétisation selon le schéma implicite de Preissmann pour l'équation 3.2 est différent de celui obtenu pour l'équation 3.3. Cela est une des raisons pour lesquelles les résultats de simulation de CRUE et de SIC ne sont pas exactement identiques. Pour ce travail de thèse, une comparaison de ces deux logiciels a été faite. En effet, dans le cadre de la thèse, le logiciel SIC sera utilisé pour bénéficier de ses fonctionnalités de génération des modèles linéaires tangents et CRUE qui est en phase de réécriture sera utilisé pour les tests et les validations (Cf. chapitre 7). Les résultats de simulations obtenus étant quasi similaires, on a conclu que cette différence dans les équations n'a pas beaucoup d'impact sur le calcul des ligne d'eau.

3.5.2 Propriétés du schéma de Preissmann

Consistance :

En analyse numérique, la consistance d'un schéma numérique aux différences finies est une propriété locale contrairement à la convergence du schéma qui, elle, est une propriété globale. La consistance concerne essentiellement la capacité du schéma à représenter une solution régulière satisfaisant localement les équations aux dérivées partielles lorsque les pas de discrétisation (Δt et Δx) tendent tous vers 0.
Dans le cas du schéma de Preissmann, l'ordre d'approximation par un développement de Taylor est :

- du premier ordre en espace (c'est à dire $o(\Delta x)$), pour $\theta \neq 0.5$
- du deuxième ordre en temps (c'est à dire $o(\Delta t^2)$), pour $\theta \neq 0.5$

- du deuxième ordre en espace (c'est à dire $o(\Delta x^2)$), pour $\theta = 0.5$
- du deuxième ordre en temps (c'est à dire $o(\Delta t^2)$), pour $\theta = 0.5$

REMARQUE : Plus l'ordre de l'approximation est élevé, moins il existe de diffusion numérique. Pour une approximation du deuxième ordre ($\theta = 0.5$), il n'y a pas diffusion numérique (Cf. [MAL94]).

Stabilité :

En analyse numérique, la stabilité d'un schéma numérique aux différences finies est une propriété globale de l'algorithme qui en découle. Elle se réfère à la propagation des erreurs au cours des étapes du calcul, à la capacité de l'algorithme à ne pas trop

amplifier d'éventuels écarts, à la précision des résultats obtenus. Elle concerne essentiellement le comportement numérique qui se manifeste lorsque les pas de discrétisation (Δt et Δx) tendent tous vers 0. Sous certaines hypothèses, le théorème de Lax [1] montre que la stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour assurer la convergence. Dans le cas du schéma de Preissmann, il a été montré que pour un canal horizontal à géométrie régulière et sans frottement, le schéma est inconditionnellement stable si $0.5 \leq \theta \leq 1$ et inconditionnellement instable si $\theta < 0.5$ [CUN66].

Avantages du schéma de Preissmann (Cf. [MAL94]) :

- Le schéma de Preissmann est stable pour $0.5 \leq \theta \leq 1$ indépendamment des pas Δt et Δx. On peut donc choisir un pas d'espace irrégulier qui s'adapte donc aux géométries naturelles et un pas de temps plus grand que pour les schémas explicites.

- Les variables Q et Z sont connues à chaque point du maillage, de ce fait, les conditions limites internes et externes peuvent être introduites facilement.

- Pour $\theta = 0.5$, ce schéma n'introduit pas de dissipation [2], mais une dispersion [3] est présente si le nombre de courant est différent de un.

- Pour $\theta = 0.5$ et un nombre de courant égal à un, le schéma de Preissmann fournit la solution exacte.

Il a été prouvé que ces pas de discrétisation n'influent pas sur la stabilité du schéma de Preissmann. Avoir la possibilité de travailler avec un pas d'espace variable permet de ne pas être contraint de choisir les profils en travers de manière équidistante mais en fonction de leur pertinence hydraulique (lorsqu'il y a une forte modification géométrique ou un changement de rugosité). Concernant le pas de temps, il est donc possible de le choisir en fonction des dispositifs de relevés de mesures déjà utilisés. La Compagnie Nationale du Rhône dispose de moyens sophistiqués qui lui permettent de travailler avec un pas de temps de 100 s. Mais cette méthode est aussi adéquate avec un pas de temps de 15 min (comme c'est le cas à la Société du Canal de Provence).

1. En analyse numérique, le théorème de Lax prévoit que, pour résoudre un problème évolutif, avec condition initiale supposée être bien posée, ceci à l'aide d'un schéma numérique consistant, la stabilité du schéma est une condition nécessaire et suffisante pour assurer sa convergence.

2. Amortissement de l'amplitude des ondes. [MAL94]

3. La discrétisation de calcul entraine l'apparition d'une dispersion non physique des signaux qui se propagent sur la grille de calcul. Cette dispersion varie avec la fréquence, la direction de propagation sur la grille et la discrétisation spatiale. Pour réduire cet effet à des valeurs de précision acceptables, la discrétisation spatiale doit être suffisante pour "échantillonner" la longueur d'onde des signaux avec un nombre suffisant de points. [DES01]

3.6 Lits multiples

3.6.1 Découpage en lits de la section en travers

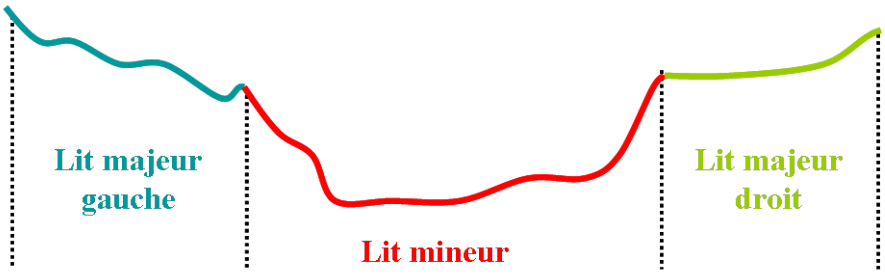


FIGURE 3.7 – Découpage des lits

Pour faire face aux petites crues, les aménagements de la CNR sont pourvus de lits majeurs. Ces zones n'étant pas toujours sollicitées, la végétation y est différente de celle présente dans le lit mineur. Cette différence de rugosité nécessite un découpage en lits multiples des sections en travers tel que cela est illustré FIGURE 3.7.

Lors de grandes crues, la CNR sollicite des plaines d'inondation aussi appelées zones de stockage ou casier afin d'épargner les villes, les industries, et autres zones sensibles. Les plaines d'inondation placées derrière des digues submersibles sont modélisées par des casiers dans lesquelles les vitesse d'écoulement sont supposées négligeables. Ces zones interviennent pour le calcul des volumes d'eau stockés ou écoulés mais n'interviennent pas dans le calcul de la débitance de la section. Les échanges entre lits majeurs $\leftrightarrow$ casiers et casiers $\leftrightarrow$ casiers sont régis par des lois hydrauliques de déversement.

3.6.2 Choix de l'interaction entre les lits

Selon les logiciels, les échanges turbulents entre lits sont pris en compte ou pas. Si on considère qu'il n'y a pas d'interaction entre les lits, la Divided Channel Method est appliquée pour calculer chaque débit partiel propre à chaque lit [PRO05]. Cette méthode décrite section 3.6.3 est appliquée dans le modèle mathématique CRUE ainsi que dans MIKE 11 et HEC-RAS.

En revanche, certains logiciels tels que SIC et MASCARET tiennent compte des échanges turbulents qui peuvent exister entre deux lits. Pour cela, la formule de Debord présentée section 3.6.4 est préférée.

3.6.3 Divided Channel Method

En 1933, Lotter propose de diviser les profils en travers en plusieurs lits homogènes en terme de géométrie, de frottement et donc de vitesse. C'est ainsi qu'est née la DCM (Divided Channel Method).

Equations locales

Pour chaque lit, on calcule le débit à l'aide de la formule de Manning Strickler :

$$Q_i = K_i S_i R h_i^{\frac{2}{3}} \sqrt{J_i} \tag{3.11}$$

Avec :

- Q_i : débit ($m^3.s^{-1}$) du lit considéré
- K_i : coefficient de Strickler du lit considéré
- S_i : surface mouillée (m^2) du lit considéré
- Rh_i : rayon hydraulique (m) du lit considéré
- J_i : pente d'énergie du lit considéré

L'équation 3.11 permet de déduire la débitance du lit, elle est notée D_i :

$$D_i = \frac{Q_i}{\sqrt{J_i}} \tag{3.12}$$

Généralisation à la section en travers

Le débit total de la section est obtenu en sommant les débits partiels de chaque lit :

$$Q_{TOT} = Q_1 + Q_2 + ...Q_{n_i} \text{avec } n_i \text{ le nombre de lits de la section en travers} \tag{3.13}$$

Dans le découpage appliqué pour la DCM, les interfaces entre les écoulements ne sont pas incluses dans les termes suivants :

- les périmètres mouillés, noté P (il représente la longueur de paroi au contact de l'eau (berges et fond), mais ne comporte pas le contact entre l'eau et l'atmosphère)
- les rayons hydrauliques ($Rh = S/P$)

De ce fait, on ne peut pas considérer l'interaction turbulente qui existe normalement aux interfaces de ces lits (ref. [PRO05]).
Étant donné qu'il n'existe pas d'interaction entre les lits, on considère que la débitance du lit mineur n'est pas affectée par la débitance des lits adjacents. Donc la perte de

charge par lit est égale à la pente de frottement sur le fond. Cette pente de frottement sur le fond est identique pour tous les lits :

$$J = J_1 = J_2 = ... = J_{n_i} \text{avec } n_i \text{ le nombre de lits de la section en travers} \quad (3.14)$$

Comme la somme des débits de chaque lit équivaut au débit total (Cf. équation 3.13) et que la pente J est jugée identique pour tous les lits, alors la somme des débitances de chacun des lits est égale à la débitance totale :

$$D_{TOT} = D_1 + D_2 + ...D_{n_i} \text{avec } n_i \text{ le nombre de lits de la section} \quad (3.15)$$

3.6.4 Formule de Debord

Cette formulation décrite dans [NU79] et [PRO05] tient compte de l'interaction entre le lit mineur et le lit majeur. Ce phénomène est modélisé par :

- un coefficient $\phi \simeq 0.9(\frac{K_{min}}{K_{maj}})^{1/6}$ introduit dans le calcul du débit du lit mineur
- et par $\sqrt{1 + \frac{S_{min}}{S_{maj}}(1-\phi^2)}$ introduit dans le calcul du lit majeur

$$Q_{min} = \phi K_{min} Rh_{min}^{\frac{2}{3}} S_{min} \sqrt{J} \quad (3.16)$$

$$Q_{maj} = K_{maj} Rh_{maj}^{\frac{2}{3}} \sqrt{S_{maj}^2 + S_{maj} S_{min}(1-\phi^2)} \sqrt{J} \quad (3.17)$$

Avec :

- Q_{maj} : débit du lit majeur $(m^3.s^{-1})$
- Q_{min} : débit du lit mineur $(m^3.s^{-1})$
- ϕ : coefficient déterminé expérimentalement par [NU79]
- S_{min} : section mouillée du lit mineur (m^2)
- S_{maj} : section mouillée du lit majeur (m^2)
- Rh_{min} : rayon hydraulique du lit mineur (m)
- Rh_{maj} : rayon hydraulique du lit majeur (m)
- K_{min} : coefficient de Strickler du lit mineur

– K_{maj} : coefficient de Strickler du lit majeur

Le débit total (Q_{TOT}) de la section en travers est donc :

$$Q_{TOT} = \phi K_{min} R h_{min}^{\frac{2}{3}} S_{min} \sqrt{J} + K_{maj} R h_{maj}^{\frac{2}{3}} \sqrt{S_{maj}^2 + S_{maj} S_{min}(1-\phi^2)} \sqrt{J} \quad (3.18)$$

On en déduit(D_{TOT}), la débitance globale :

$$D_{TOT} = \frac{Q_{TOT}}{\sqrt{J}} = \phi K_{min} R h_{min}^{\frac{2}{3}} S_{min} + K_{maj} R h_{maj}^{\frac{2}{3}} \sqrt{S_{maj}^2 + S_{maj} S_{min}(1-\phi^2)} \quad (3.19)$$

Le rapport entre les débits du lit mineur et du lit majeur s'écrit alors :

$$\eta = \frac{Q_{min}}{Q_{maj}} = \frac{\phi K_{min} R h_{min}^{\frac{2}{3}} S_{min}}{K_{maj} R h_{maj}^{\frac{2}{3}} \sqrt{S_{maj}^2 + S_{maj} S_{min}(1-\phi^2)}} \quad (3.20)$$

Les équations 3.19 et 3.20 constituent la formulation de Debord.

3.7 Conclusion

On a vu dans ce chapitre que le logiciel CRUE embarqué dans la régulation, a été conçu pour modéliser les réseaux maillés. Il effectue une modélisation 1D basé sur les équations de Barré De Saint-Venant et intègre la prise en compte de casiers. Il tient compte de lits multiples et des plaines d'inondations présentes dans de nombreux aménagement du Rhône. Du point de vue du modélisateur hydraulique, ce logiciel est robuste et adapté aux particularités des aménagements de la CNR.

Pour la régulation par commande prédictive, embarquer ce logiciel est un plus. Seulement, on a vu section 1.2.1 que celui-ci n'est pas employé de manière optimale. L'objectif de cette thèse, fixé par la CNR, est donc de proposer une méthode alternative au Qcor qui permette de disposer d'une bonne estimation et reconstitution des états hydrauliques. La méthode proposée (décrite chapitre 5) permettrait d'apporter cela. Ainsi la régulation aurait un usage optimal de CRUE et le calcul de la commande prédictive (via les scénarii lâchés et forcés) serait plus fiable.

On verra chapitre 4 la méthodologie employée pour générer un modèle linéaire tangent à partir du modèle non-linéaire et ainsi appliquer un filtre de Kalman pour estimer les états hydrauliques à chaque pas de temps de la régulation.

Chapitre 4

Modèle linéaire dans l'espace d'état

Sommaire

4.1 Introduction 60
4.2 Linéarisation du modèle non linéaire 60
4.2.1 Equations linéarisées 60
4.2.2 Les conditions limites amont et aval 61
4.2.3 Les conditions limites internes 63
4.2.4 Modélisation des réseaux maillés 68
4.3 Représentation dans l'espace d'état 69
4.3.1 Système linéaire 69
4.3.2 Ordre du système 71
4.3.3 Observations 72
4.4 Exemple de régime de référence pour la linéarisation . . . 73
4.4.1 Répartition 73
4.4.2 Comparaison modèle linéaire et modèle non-linéaire 74
4.5 Système augmenté 79
4.6 Conclusion 83

4.1 Introduction

Pour la mise en place d'une technique d'assimilation de données de type le "filtre de Kalman" détaillée chapitre 5, il est nécessaire d'avoir une représentation du tronçon étudié sous forme de modèle linéaire. Comme la Compagnie Nationale du Rhône possède une régulation qui calcule les commandes au pas de temps de 100 s, le modèle linéaire est choisi discret avec un pas de temps d'échantillonnage de 100 s. L'étude bibliographique réalisée chapitre 1 nous a convaincu de réaliser la synthèse du modèle linéaire à partir d'un modèle de connaissance.

L'obtention d'un modèle linéaire pour un système hydraulique à surface libre se fait en deux étapes. La première consiste à discrétiser les équations de Barré de Saint-Venant tel que cela a été présenté chapitre 3. A l'issu de cette manipulation, on dispose d'un modèle discret non-linéaire.

La seconde étape de la synthèse du modèle linéaire présentée section 4.2 est constituée de la linéarisation des équations de continuité et de la dynamique par développement de Taylor au premier ordre, autour d'un régime de référence ([MAL94]. On verra comment cette opération s'effectue lors de particularités telles que :

– les conditions limites externes (en amont et en aval d'un bief)

– les conditions limites internes (de type ouvrage, seuil et perturbations)

– le maillage du réseau

La section 4.4 donnera un exemple de régime de référence pour des conditions typiques d'écoulement.

Enfin la dernière section (section 4.5) traitera du cas particulier qu'est la gestion de perturbations inconnues arrivant sur le tronçon étudié. On verra qu'il existe une modélisation adaptée pour ces phénomènes qui permet aussi la mise en place d'un observateur d'état ou d'une technique d'assimilation de données de type filtre de Kalman.

4.2 Linéarisation du modèle non linéaire

4.2.1 Equations linéarisées

Une fois les équations de Barré de Saint-Venant discrétisées selon un schéma numérique avec comme variables considérées les débits Q et les cotes Z de chaque section en travers du bief, on peut linéariser ces équations autour d'un régime permanent de référence indicé (e). Soit :

$$\begin{aligned} Q &= Q_e + \delta Q \\ Z &= Z_e + \delta Z \end{aligned} \tag{4.1}$$

Avec pour la section en travers considérée :

- Q : la valeur absolue du débit en $m^3.s^{-1}$
- Q_e : le débit du régime de référence en $m^3.s^{-1}$
- δQ : la valeur relative du débit en $m^3.s^{-1}$
- Z : la valeur absolue de la cote en $mNGF$
- Z_e : la valeur absolue de la cote de référence en $mNGF$
- δZ : la valeur relative de la cote de référence en m

En considérant les variables des équations (4.1) on obtient à l'instant k un modèle linéaire entre deux sections en travers (Profil j et Profil $j+1$) tel que :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_j \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+1} \\ \delta Z_{j+1} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_j \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+1} \\ \delta Z_{j+1} \end{bmatrix}_k \tag{4.2}$$

REMARQUE : Pour les détails des coefficients A_{11}, A_{12}, A_{13}, etc., ceux-ci sont donnés en annexe A et dans [MAL94].

La modélisation linéaire (4.2) est valable uniquement si aucune perturbation (apport d'eau ou prise d'eau) et aucun ouvrage en travers n'est présent entre les profils (Profil j et Profil $j+1$). Ces cas particuliers sont traités par la suite (section 4.2.2 et 4.2.3).

4.2.2 Les conditions limites amont et aval

Pour les biefs d'un réseau simple, ou ramifié ou maillé, il existe plusieurs types de conditions limites externes :

- une commande en débit
- une commande en cote
- une courbe de tarage

Condition limite amont - Commande en débit

Pour les aménagements hydroélectriques, les biefs en aval des barrages et des usines ont souvent une condition limite amont U en commande de débit. Dans ce cas, à l'instant considéré, la commande est la variation de débit entre les instants k et $k+1$, soit :

$$U = \delta Q_{k+1} - \lambda \delta Q_k \tag{4.3}$$

avec δQ_{k+1} la variation par rapport au régime de référence du débit amont au temps $k+1$. Et λ est choisi tel que $0 < \lambda < 1$.
Cela se traduit sous forme matricielle pour le profil en travers concerné par la commande, par :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Q \\ \delta Z \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Q \\ \delta Z \end{bmatrix}_{k} + U_k \tag{4.4}$$

- Si $\lambda = 1$, alors la matrice dynamique possède une valeur propre à 1, ce qui engendre des pôles en limite de stabilité.

- Si $\lambda = 0$, alors la matrice dynamique possède une valeur propre à 0, ce qui empêcherait son inversion.

On verra par la suite (chapitre 5 et chapitre 6) qu'il est préférable de ne pas avoir de pôle égal à 1 et nécessaire de ne pas avoir de pôle nul pour la matrice dynamique.

Condition limite aval - Commande en cote

De la même manière que pour la commande en débit, la commande en cote U_k appliquée à l'aval d'un bief, peut être modélisée par :

$$U_k = \delta Z_{k+1} - \lambda \delta Z_k \tag{4.5}$$

avec δZ_{k+1} la variation par rapport au régime de référence de la cote aval au temps $k+1$. Pour les mêmes raisons que précédemment, λ est choisi tel que $0 < \lambda < 1$.

Cela se traduit sous forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Q \\ \delta Z \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Q \\ \delta Z \end{bmatrix}_{k} + U_k \tag{4.6}$$

Condition limite aval - courbe de tarage

La condition limite aval peut aussi s'écrire sous forme d'une courbe de tarage de type $Q = f(Z)$. La linéarisation de cette loi donne :

$$\delta Q_{k+1} - \delta Q_k = \frac{\partial f}{\partial Z}(\delta Z_{k+1} - \delta Z_k) \tag{4.7}$$

Cela se traduit sous forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\partial f}{\partial Z} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q \\ \delta Z \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\partial f}{\partial Z} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q \\ \delta Z \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

4.2.3 Les conditions limites internes

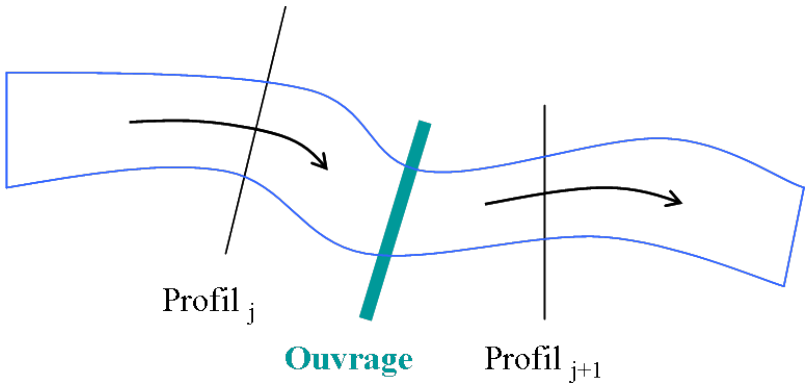


FIGURE 4.1 – Condition limite interne

Les conditions limites internes sont imposées lorsqu'un ouvrage, un seuil (comme le représente la FIGURE 4.1) ou une perturbation Qp (cas traité par la suite) est présent en travers du bief.

Condition limite interne - Loi d'ouvrage

Pour un ouvrage dont l'ouverture de la vanne est notée w, la loi de l'ouvrage s'écrit :

$$\begin{aligned}
&Q_{j\ k} = Q_{j+1\ k} = f(Z_j, Z_{j+1}, w)_k \\
&\Rightarrow \delta Q_{j+1\ k+1} - \delta Q_{j+1_k} = Q_{j+1\ k+1} - Q_{j+1_k} = f(Z_j, Z_{j+1}, w)_{k+1} - f(Z_j, Z_{j+1}, w)_k \\
&= f(e) + \frac{\partial f}{\partial Z_j}\delta Z_{j\ k+1} + \frac{\partial f}{\partial Z_{j+1}}\delta Z_{j+1\ k+1} + \frac{\partial f}{\partial w}\delta w_{k+1} - f(e) \\
&-\frac{\partial f}{\partial Z_j}\delta Z_{j\ k} - \frac{\partial f}{\partial Z_{j+1}}\delta Z_{j+1\ k} - \frac{\partial f}{\partial w}\delta w_k \\
&= \frac{\partial f}{\partial Z_j}(\delta Z_{j\ k+1} - \delta Z_{j\ k}) + \frac{\partial f}{\partial Z_{j+1}}(\delta Z_{j+1\ k+1} - \delta Z_{j+1\ k}) + \frac{\partial f}{\partial w}(\delta w_{k+1} - \delta w_k)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Ainsi on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial f}{\partial Z_j} & 1 & -\frac{\partial f}{\partial Z_{j+1}} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_j \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+1} \\ \delta Z_{j+1} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial f}{\partial Z_j} & 1 & -\frac{\partial f}{\partial Z_{j+1}} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_j \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+1} \\ \delta Z_{j+1} \end{bmatrix}_k + \frac{\partial f}{\partial w}(\delta w_{k+1} - \delta w_k) \tag{4.10}$$

Pour ce type de singularité, on conserve le débit au passage de l'ouvrage ($Q_{j\ k} = Q_{j+1\ k}$), il est donc possible de supprimer δQ_j du vecteur d'état. Cette manipulation est nécessaire, si le système doit être commandable [MAL94]. Mais attention, dans le cas où entre les profils ($Profil_{j-1}$ et $Profil_j$), il n'y a pas de singularité, ce sont les équations de Barré de Saint-Venant qui sont discrétisées avec intervention de la variable Q_j (Cf. équation (4.2)). De ce fait, il faut penser à la manipulation suivante :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} & A_{13} & \\ A_{21} & A_{22} & A_{24} & A_{23} & \\ & & -\frac{\partial f}{\partial Z_j} & 1 & -\frac{\partial f}{\partial Z_{j+1}} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_{j-1} \\ \delta Z_{j-1} \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+1} \\ \delta Z_{j+1} \end{bmatrix}_{k+1}$$
$$= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{14} & B_{13} & \\ B_{21} & B_{22} & B_{24} & B_{23} & \\ & & -\frac{\partial f}{\partial Z_j} & 1 & -\frac{\partial f}{\partial Z_{j+1}} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_{j-1} \\ \delta Z_{j-1} \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+1} \\ \delta Z_{j+1} \end{bmatrix}_k + \frac{\partial f}{\partial w}(\delta w_{k+1} - \delta w_k) \quad (4.11)$$

Condition limite interne - Loi de seuil noyé

Pour un seuil noyé, l'écoulement se comporte comme une perte de charge particulière. La loi "seuil noyé" est donc fonction des cotes présentes à l'amont et à l'aval du seuil, c'est à dire :

$$\begin{aligned} & Q_{j\ k} = Q_{j+1\ k} = f(Z_j, Z_{j+1})_k \\ & \Rightarrow \delta Q_{j+1\ k+1} - \delta Q_{j+1 k} = Q_{j+1\ k+1} - Q_{j+1 k} = f(Z_j, Z_{j+1})_{k+1} - f(Z_j, Z_{j+1})_k \\ & = f(e) + \frac{\partial f}{\partial Z_j}\delta Z_{j\ k+1} + \frac{\partial f}{\partial Z_{j+1}}\delta Z_{j+1\ k+1} - f(e) - \frac{\partial f}{\partial Z_j}\delta Z_{j\ k} - \frac{\partial f}{\partial Z_{j+1}}\delta Z_{j+1\ k} \\ & = \frac{\partial f}{\partial Z_j}(\delta Z_{j\ k+1} - \delta Z_{j\ k}) + \frac{\partial f}{\partial Z_{j+1}}(\delta Z_{j+1\ k+1} - \delta Z_{j+1\ k})) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ainsi on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial f}{\partial Z_j} & 1 & -\frac{\partial f}{\partial Z_{j+1}} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_j \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+1} \\ \delta Z_{j+1} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial f}{\partial Z_j} & 1 & -\frac{\partial f}{\partial Z_{j+1}} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_j \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+1} \\ \delta Z_{j+1} \end{bmatrix}_k \quad (4.13)$$

On retrouve la relation (4.10) sans prise en compte de w. Dans ce cas aussi, si entre les profils ($Profil_{j-1}$ et $Profil_j$), il n'y a pas de singularité, alors on discrétise les équations de Barré de Saint-Venant qui font intervenir Q_j. Si on veut éviter la redondance engendrée par $Q_j = Q_{j+1}$, alors :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} & A_{13} & \\ A_{21} & A_{22} & A_{24} & A_{23} & \\ & & -\frac{\partial f}{\partial Z_j} & 1 & -\frac{\partial f}{\partial Z_{j+1}} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_{j-1} \\ \delta Z_{j-1} \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+1} \\ \delta Z_{j+1} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{14} & B_{13} & \\ B_{21} & B_{22} & B_{24} & B_{23} & \\ & & -\frac{\partial f}{\partial Z_j} & 1 & -\frac{\partial f}{\partial Z_{j+1}} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_{j-1} \\ \delta Z_{j-1} \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+1} \\ \delta Z_{j+1} \end{bmatrix}_k \tag{4.14}$$

Condition limite interne - Loi de seuil dénoyé

Pour un seuil dénoyé, l'écoulement passe par une phase torrentielle au niveau de l'ouvrage et présente un ressaut hydraulique. Dans ce cas, la cote aval n'a plus d'influence sur l'amont ce qui conduit à une loi qui est uniquement fonction de la cote présente à l'amont du seuil, c'est à dire :

$$\begin{aligned} & Q_{j\ k} = Q_{j+1\ k} = f(Z_j)_k \\ & \Rightarrow \delta Q_{j+1\ k+1} - \delta Q_{j+1_k} = Q_{j+1\ k+1} - Q_{j+1_k} = f(Z_j)_{k+1} - f(Z_j)_k \\ & = f(e) + \frac{\partial f}{\partial Z_j} \delta Z_{j\ k+1} - f(e) + \frac{\partial f}{\partial Z_j} \delta Z_{j\ k} \\ & = \frac{\partial f}{\partial Z_j} (\delta Z_{j\ k+1} - \delta Z_{j\ k}) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Sous forme matricielle, cela s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial f}{\partial Z_j} & 1 & 0 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_j \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+1} \\ \delta Z_{j+1} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial f}{\partial Z_j} & 1 & 0 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_j \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+1} \\ \delta Z_{j+1} \end{bmatrix}_k \tag{4.16}$$

On retrouve la relation (4.13) sans prise en compte de Z_{j+1}. Dans ce cas aussi, si entre les profils ($Profil_{j-1}$ et $Profil_j$), on discrétise les équations de Barré de Saint-Venant et que l'on veut éviter la redondance engendrée par $Q_j = Q_{j+1}$, alors :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{24} & A_{23} & 0 \\ & & -\frac{\partial f}{\partial Z_j} & 1 & 0 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_{j-1} \\ \delta Z_{j-1} \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+1} \\ \delta Z_{j+1} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{14} & B_{13} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{24} & B_{23} & 0 \\ & & -\frac{\partial f}{\partial Z_j} & 1 & 0 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_{j-1} \\ \delta Z_{j-1} \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+1} \\ \delta Z_{j+1} \end{bmatrix}_k \tag{4.17}$$

Condition limite interne - Modélisation des perturbations Q_p

Les perturbations Q_p sont modélisées entre deux sections en travers soit par un prélèvement d'eau (Cf. FIGURE 4.2) soit par un apport d'eau (Cf. FIGURE 4.3).

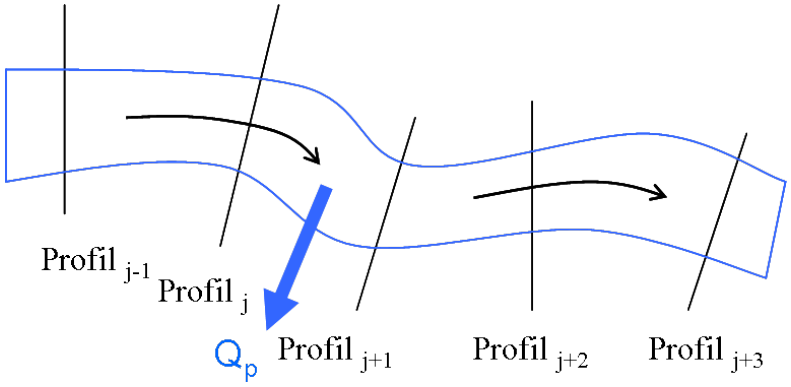


FIGURE 4.2 – Perturbation de type prélèvement d'eau entre deux sections en travers

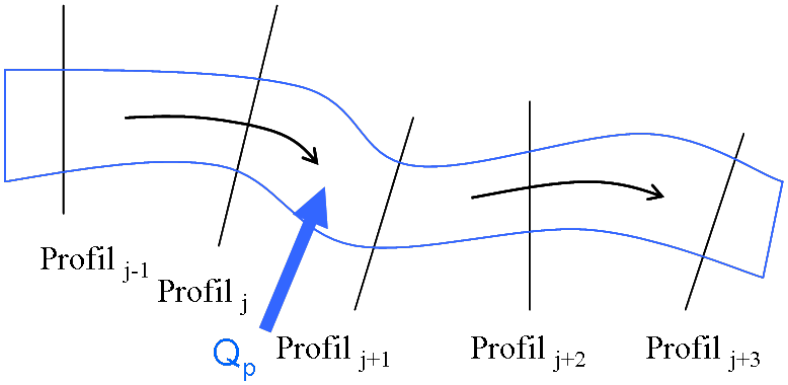


FIGURE 4.3 – Perturbation de type apport d'eau entre deux sections en travers

Les apports d'eau représentent par exemple :

– l'arrivée d'un affluent sur le bief

– une vidange de casier

– etc.

Les prélèvements d'eau symbolisent par exemple :

– une prise d'eau pour l'irrigation

– un remplissage de casier

– etc.

Quelque soit la nature de la perturbation (prélèvement ou apport), la manière de la modéliser est la même. C'est à dire, on impose l'égalité des cotes pour les profils en amont et en aval de la perturbation (il est aussi possible d'imposer l'égalité des charges)

ainsi que la conservation des débits. Soit :

$$\begin{array}{l} Q_{j+1\ k} = Q_{j\ k} + Q_{p\ k} \\ Q_{j+1\ k+1} = Q_{j\ k+1} + Q_{p\ k+1} \\ Z_{j+1\ k} = Z_{j\ k} \\ Z_{j+1\ k+1} = Z_{j\ k+1} \end{array} \tag{4.18}$$

avec $Q_p < 0$ pour les prélèvement d'eau et $Q_p > 0$ pour les apports d'eau.

$$\begin{array}{l} Q_{j+1} = Q_j + Qp \Rightarrow \delta Q_{j+1\ k+1} - \delta Q_{j+1 k} = Q_{j+1\ k+1} - Q_{j+1 k} \\ = f(e) + \delta Q_{j\ k+1} + \delta Qp_{\ k+1} - f(e) - \delta Q_{j\ k} - \delta Qp_{\ k} \\ = (\delta Q_{j\ k+1} - \delta Q_{j\ k}) + (\delta Qp_{\ k+1} - \delta Qp_{\ k}) \end{array} \tag{4.19}$$

Matriciellement, cela s'écrit :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_j \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+1} \\ \delta Z_{j+1} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_j \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+1} \\ \delta Z_{j+1} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Qp_{\ k+1} \\ \delta Qp_k \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

avec δQp_k : la valeur relative du débit en $m^3.s^{-1}$ à l'instant k et δQp_{k+1} : la valeur relative du débit en $m^3.s^{-1}$ à l'instant $k+1$

Pour la suite de ce travail de thèse, afin de mettre en place un filtre de Kalman (Cf. chapitre 5) on s'intéressera à un système linéaire dans l'espace d'état de forme :

$$\begin{cases} X_{k+1} &= A_k X_k + B_k U_k + B p_k U p_k \\ Y_k &= C_k X_k \end{cases} \tag{4.21}$$

Or le système matriciel (4.20), ne permet pas d'avoir un tel système. En effet, la matrice du membre de gauche possède des valeurs propres nulles ce qui ne permet pas d'inverser ce terme. Face à ce problème, il existe une solution qui consiste à supprimer la modélisation du $Profil_{j+1}$. Si entre les profils ($Profil_{j+1}$ et le $Profil_{j+2}$), les équations de Barré de Saint-Venant sont discrétisées, alors il suffit de reporter les relations (4.18) dans (4.2) :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_j \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+2} \\ \delta Z_{j+2} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Q_j \\ \delta Z_j \\ \delta Q_{j+2} \\ \delta Z_{j+2} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} -A_{11} & B_{11} \\ -A_{21} & B_{21} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta Qp_{\ k+1} \\ \delta Qp_k \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Cette fois encore, la redondance d'information a été supprimée.

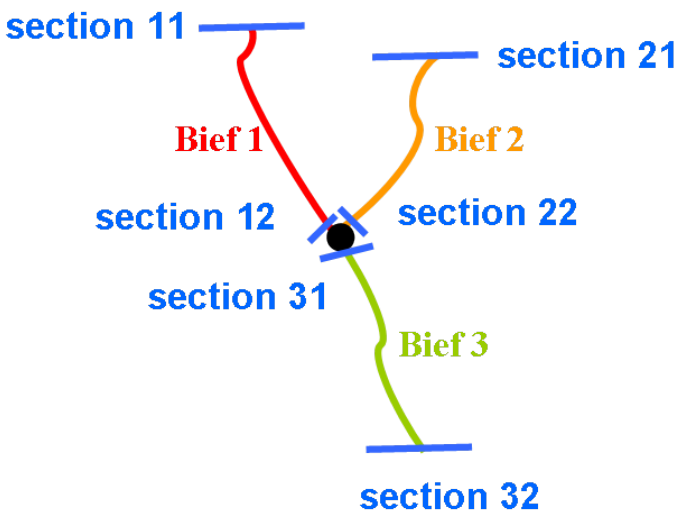


FIGURE 4.4 – Schématisation d'un réseau maillé

4.2.4 Modélisation des réseaux maillés

La modélisation pour des biefs simples, des conditions limites externes et internes et des perturbations a déjà été traitée dans [MAL94]. Pour ce travail de thèse on apporte un plus en traitant le cas des réseaux maillés (Cf. FIGURE 4.4).

Pour ce type de réseaux, il suffit d'utiliser les résultats développés précédemment et de construire des blocs matrices par bief pour la matrice dynamique A. Au nœud commun aux divers biefs se rejoignant, on a choisit de conserver l'égalité des cotes (on peut choisir aussi l'égalité des charges). Ainsi on obtient pour le réseau illustré FIGURE 4.4 :

$$A_1 \ {}_kX_{k+1} = A_2 \ {}_kX_k + B_kU_k + Bp_kUp_k \tag{4.23}$$

Avec :

$$A_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} \delta Q_{11} & \delta Z_{11} & \delta Q_{12} & \delta Q_{21} & \delta Z_{21} & \delta Q_{22} & \delta Z_{31} & \delta Q_{32} & \delta Z_{32} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & & & & A_{14} & & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & & & & A_{24} & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & & \\ & & & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & & \\ & & A_{11} & & & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ & & A_{21} & & & A_{11} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} CL_{11} \\ SV_{cont}Bief1 \\ SV_{dyn}Bief1 \\ CL_{21} \\ SV_{cont}Bief2 \\ SV_{dyn}Bief2 \\ SV_{cont}Bief3 \\ SV_{dyn}Bief3 \\ CL_{32} \end{array} \tag{4.24}$$

$$A_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} \delta Q_{11} & \delta Z_{11} & \delta Q_{12} & \delta Q_{21} & \delta Z_{21} & \delta Q_{22} & \delta Z_{31} & \delta Q_{32} & \delta Z_{32} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \lambda_{11} & & & & & & & & \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & & & & B_{14} & & \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & & & & B_{24} & & \\ & & & \lambda_{21} & & & & & \\ & & & B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & & \\ & & & B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & & \\ & & B_{11} & & & B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ & & B_{21} & & & B_{11} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ & & & & & & & & \lambda_{32} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} CL_{11} \\ SV_{cont}Bief1 \\ SV_{dyn}Bief1 \\ CL_{21} \\ SV_{cont}Bief2 \\ SV_{dyn}Bief2 \\ SV_{cont}Bief3 \\ SV_{dyn}Bief3 \\ CL_{32} \end{matrix} \tag{4.25}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \\ & 1 & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} CL_{11} \\ SV_{cont}Bief1 \\ SV_{dyn}Bief1 \\ CL_{21} \\ SV_{cont}Bief2 \\ SV_{dyn}Bief2 \\ SV_{cont}Bief3 \\ SV_{dyn}Bief3 \\ CL_{32} \end{matrix} \tag{4.26}$$

$$U = \begin{bmatrix} \delta Q_{11}^{+} - \lambda_{11}\delta Q_{11} \\ \delta Q_{21}^{+} - \lambda_{21}\delta Q_{21} \\ \delta Z_{32}^{+} - \lambda_{32}\delta Z_{32} \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

On observe ni prélèvement ni apport d'eau, donc :

$$Bp = 0 \tag{4.28}$$

$$Up = 0 \tag{4.29}$$

4.3 Représentation dans l'espace d'état

4.3.1 Système linéaire

On a vu précédemment que l'on peut écrire l'équation de continuité et l'équation de la dynamique de Barré de Saint-Venant sous forme :

$$A_1 \ {}_kX_{k+1} = A_2 \ {}_kX_k + B_kU_k + Bp_kUp_k \tag{4.30}$$

Testée sur de nombreuses configurations, on sait que la matrice A_1 est inversible (lorsque le problème est bien posé, avec des conditions limites appropriées), on peut donc écrire l'équation (4.30) sous forme :

$$X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k + Bp_k Up_k \tag{4.31}$$

Avec

- $A = A_1^{-1} A_2$
- $B = A_1^{-1} B_1$
- $Bp = A_1^{-1} Bp_1$

En ajoutant le vecteur des sorties observées à l'équation (4.31), on obtient un système (équation 4.32) dans l'espace d'état qui permet d'appliquer la méthode d'assimilation de données de type filtre de Kalman.

$$\begin{cases} X_{k+1} &= A_k X_k + B_k U_k + Bp_k Up_k \\ Y_k &= C_k X_k \end{cases} \tag{4.32}$$

Avec :

- $X_k \in \mathbb{R}^{nx}$: vecteur d'état à l'instant k qui contient les variations des cotes et des débits par rapport à un état de référence de linéarisation pour les sections en travers considérées

$$X_k = \begin{bmatrix} \delta Q_1 \\ \delta Z_1 \\ \delta Q_2 \\ \delta Z_2 \\ \delta Q_3 \\ \delta Z_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \delta Q_{nx} \\ \delta Z_{nx} \end{bmatrix}_k \tag{4.33}$$

- $A_k \in \mathcal{M}_{nx,nx}(\mathbb{R})$: matrice dynamique
- $B_k \in \mathcal{M}_{nx,nu}(\mathbb{R})$: matrice de contrôle
- $U_k \in \mathbb{R}^{nu}$: vecteur de commande U, qui correspond à une ouverture ou fermeture de vanne de barrage ou d'usine

$$U_k = \begin{bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta U_{nu} \end{bmatrix}_k \tag{4.34}$$

– $Up_k \in \mathbb{R}^{np}$: vecteur des perturbations liées aux apports latéraux tels que les affluents et les casiers

$$Up_k = \begin{bmatrix} \delta Qp_{1\ k+1} \\ \delta Qp_1 \\ \delta Qp_{2\ k+1} \\ \delta Qp_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta Qp_{np\ k+1} \\ \delta Qp_{np} \end{bmatrix}_k \tag{4.35}$$

– $Bp_k \in \mathcal{M}_{nx,np}(\mathbb{R})$: matrice de contrôle des perturbations

– $Y_k \in \mathbb{R}^{ny}$: vecteur des sorties observées

$$Y_k = \begin{bmatrix} \delta Y_1 \\ \delta Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta Y_{ny} \end{bmatrix}_k \tag{4.36}$$

– $C_k \in \mathcal{M}_{ny,nx}(\mathbb{R})$: matrice des sorties observées

4.3.2 Ordre du système

Dans notre cas d'étude, l'ordre du système (nx) dépend du nombre de sections en travers considérées (moins les redondances si on décide de les supprimer). Comme on l'a vu dans le chapitre 3, la Compagnie Nationale du Rhône possède des outils sophistiqués qui mettent à disposition la topographie de nombreux profils en travers. Pour l'aménagement de Logis-Neuf, pas moins de 150 profils sont disponibles pour les tronçons du vieux Rhône. Ces éléments permettent d'avoir un modèle linéaire très représentatif du modèle non-linéaire qui lui même est fidèle à la réalité, car il est régulièrement actualisé et calé sur la réalité du terrain [DF09].

4.3.3 Observations

La dimension *ny* du vecteur des observations dépend du nombre de capteurs disponibles pour l'aménagement. Les observations peuvent être de deux natures :

– des cotes

– des débits

A la CNR les cotes observées sont toujours reliées à un profil en travers. En revanche, les débit observés peuvent être ceux d'un profil en travers ou bien être représentatifs d'un apport ou d'une prise tels que les affluents et autres confluences et diffluences qui arrivent entre deux profils (Cf. FIGURE 4.5).

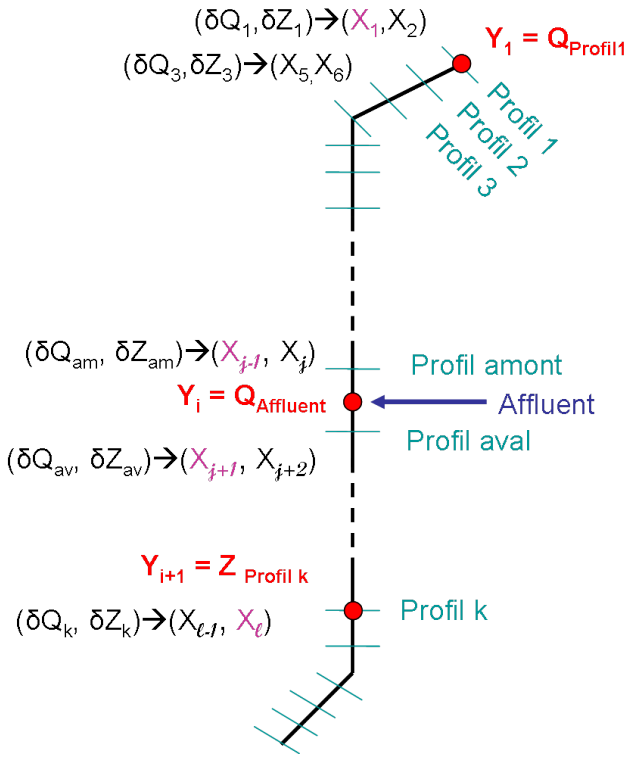


FIGURE 4.5 – Trois types d'observations possibles pour notre cas d'étude

Pour la modélisation linéaire, la matrice des observations C gère différemment les observations liées à un profil en travers de celles qui ne le sont pas. Pour des observations en cote (respectivement en débit) liées à un profil en travers, la matrice C est remplie de coefficient 1 à l'emplacement des états Z (respectivement Q) concernés. Pour les observations en débit liées à des perturbations en débit de type prélèvement et apport d'eau, la matrice des observations C est constituée du coefficient -1 pour le profil amont et 1 pour le profil aval de cette perturbation.
Pour illustrer cela, voici la matrice des observations C adaptée à la configuration de la

FIGURE 4.5

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} Etat_1 & & Etat_{j-1} & Etat_j & Etat_{j+1} & & Etat_l \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & & -1 & 0 & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1^{ere} obs \\ \\ i^{eme} obs \\ i+1^{eme} obs \\ \\ \end{array} \tag{4.37}$$

4.4 Exemple de régime de référence pour la linéarisation

Comme cela a été présenté section (4.2), un régime de référence est nécessaire pour linéariser les équations discrétisées de Barré de Saint-Venant. Pour ce travail de thèse, un des régimes de référence choisi pour les tests présentés par la suite est décrit ci-dessous.

4.4.1 Répartition

On a fait le choix d'un régime typique du fonctionnement courant de l'aménagement de Logis-Neuf, soit :

- débit du barrage amont (barrage de Beauchastel) noté $Q_{barrageBE} = 10\ m^3.s^{-1}$
- débit de l'usine amont (usine de Beauchastel) noté $Q_{usineBE} = 1683\ m^3.s^{-1}$
- débit de l'affluent Eyrieux noté $Q_{Ey} = 1\ m^3.s^{-1}$
- débit de l'affluent Drôme noté $Q_{Dr} = 5\ m^3.s^{-1}$
- débit de l'affluent Ouvèze noté $Q_{Ou} = 1\ m^3.s^{-1}$
- débit de l'usine aval (usine locale) noté $Q_{usineLN} = 999\ m^3.s^{-1}$
- débit du barrage aval (barrage local) noté $Q_{barrageLN} = 701\ m^3.s^{-1}$

Le choix de répartition des débits des ouvrages amont et des affluents respecte les conditions classiques en période énergétique. En revanche le choix des débits de l'usine

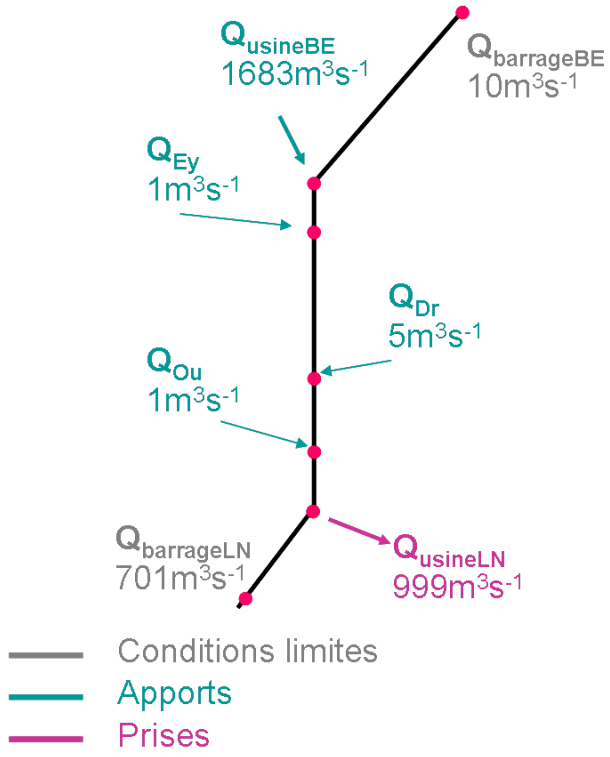


FIGURE 4.6 – Régime de référence considéré

et du barrage aval a été imposé par le logiciel SIC qui possède déjà un module générateur de modèles linéaires. Ce logiciel ne permet pas au modélisateur d'imposer un débit à quatre chiffres pour la prise représentant l'usine aval.

REMARQUE : Entre temps, le logiciel SIC a évolué et n'est plus limité à quatre chiffres dans l'acquisition des données.

Ces conditions en débit induisent une ligne d'eau de référence telle que l'illustre la FIGURE 4.7.

4.4.2 Comparaison modèle linéaire et modèle non-linéaire

Pour notre problématique, il existe deux types de non-linéarités :

– celles liées à la linéarisation du régime de référence

– celles liées à l'amplitude des entrées

Pour évaluer l'importance des non-linéarités liées à la linéarisation du régime de référence, il est possible de faire une analyse fréquentielle entre deux régimes de référence

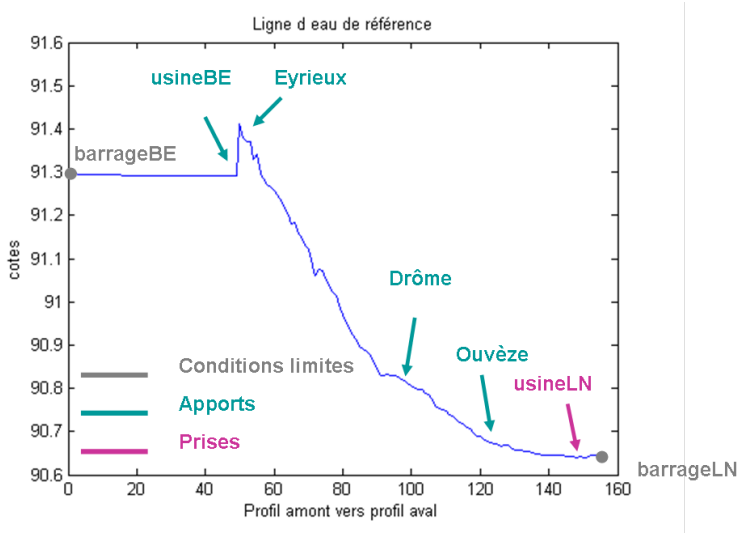


FIGURE 4.7 – Ligne d'eau de référence

tel que cela est réalisé dans [MBJBS10]. Pour cette étude, il a été choisit de réaliser cette analyse entre le régime de référence décrit section 4.4 et un régime de référence en bas débit (c'est à dire, un régime de référence dont la somme des débits entrant est de l'ordre de 800 $m^3 s^{-1}$).

Les systèmes support de cette étude sont des systèmes MIMO (Multiple-Input Multiple-Output). De ce fait, pour l'analyse fréquentielle, il faut choisir un point d'entrée (pour l'aménagement étudié, sept choix sont possibles, Cf. FIGURE 4.6) et un point de sortie (qui correspond à une observation). Dans notre cas d'étude, considérer l'entrée $Q_{\text{usine amont}}$ permet de tenir compte de l'entrée la plus "chahutée" (hydrogramme très varié). Concernant la sortie, il est logique pour la CNR de choisir Z_{PR1}.
Une fois ces paramètres sélectionnés, à partir d'un scénario réel typique (hydrogramme de l'aménagement de Logis-Neuf entre le 11/08/2008 à $12h$ et le 14/08/2008 à $12h$, Cf. FIGURE 4.8), l'analyse fréquentielle est réalisée selon les étapes suivantes :

- convertir l'hydrogramme de l'entrée en transformée de Fourier
- regarder quelle est la plage de fréquences du signal
- à l'aide d'un diagramme de Bode, relever le gain maximum entre les deux régimes de référence (en considérant la plage de fréquence identifiée lors de l'étape précédente)
- convertir ce gain en écart en mètres

L'exemple traité a indiqué un écart maximum en cote de -79.9 db (Cf. FIGURE 4.9). Cela signifie qu'il existe 0.1 mm d'écart entre les régimes de référence étudiés (car $10^{-79.9/20} = 0.0001\ m$) pour un signal d'entrée d'amplitude 1 $m^3.s^{-1}$. Comme ce sont des

systèmes linéaires, on peut considérer que pour des variations de l'ordre de 100 $m^3.s^{-1}$, l'écart n'excède pas 1 cm.

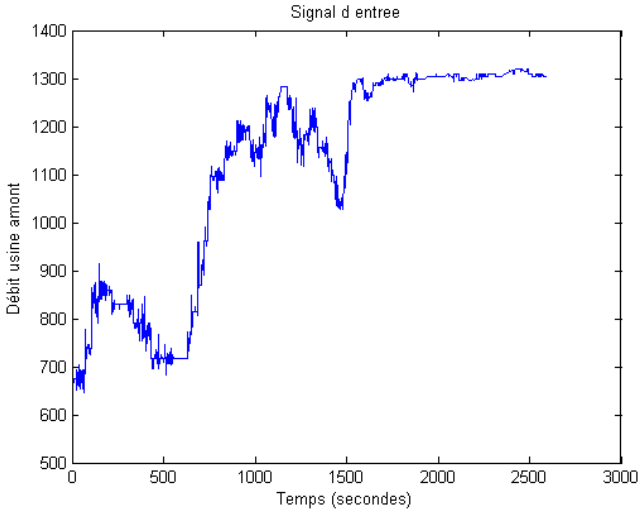


FIGURE 4.8 – Hydrogramme d'entrée pour l'usine amont entre le 11 août 2008 et le 14 août 2008

Concernant les non-linéarités liées aux amplitudes des entrées, on intuite que celles-ci ont un impact non négligeable sur la capacité du modèle linéaire à représenter fidèlement les résultats obtenus avec le modèle non-linéaire. Dans le cadre de cette étude, il s'avère donc nécessaire d'avoir une idée sur les limites du modèle linéaire. En règle générale, la CNR tolère une erreur d'environ 2 cm sur les cotes et d'environ 5 % sur les débits. L'objectif est donc de réaliser un comparatif entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire. Et ainsi, connaitre quelles amplitudes des entrées permettent de respecter ces erreurs.

Amplitude maximale pour les affluents

Comme l'illustre la FIGURE 4.10, selon les sources 2010 de la banque Hydro, à sa station des Ollières, l'Eyrieux présente un débit moyen annuel de 18 $m^3.s^{-1}$ et des crues qui peuvent dépasser 200 $m^3.s^{-1}$.

Comme l'illustre la FIGURE 4.11, selon les sources 2003 de la banque Hydro, à sa station de Loriol, la Drôme présente un débit moyen annuel de 21 $m^3.s^{-1}$ avec des crues qui dépassent 400 $m^3.s^{-1}$ uniquement lors de fortes crues (le débit instantané maximum de la crue de 2003 était de 684 $m^3.s^{-1}$).

Concernant l'Ouvèze, le troisième affluent arrivant sur l'aménagement de Baix-Le-Logis-Neuf, celui-ci n'est pas répertorié dans la banque hydro, probablement du fait de

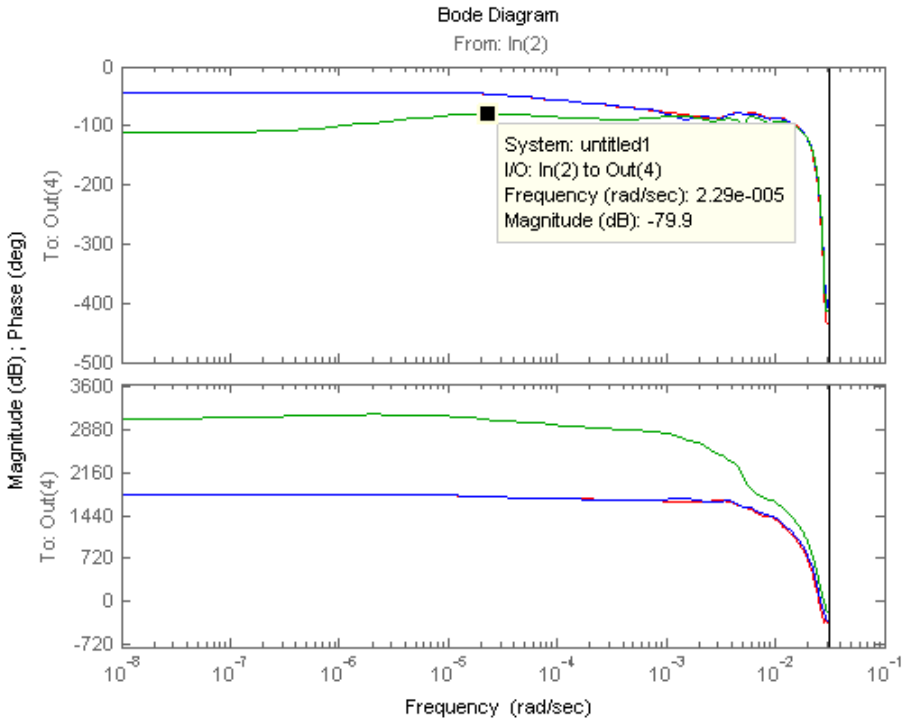


FIGURE 4.9 – Diagramme de Bode pour l'entrée "débit à l'usine amont" et la sortie "cote au PR1" entre les modèles linéaires de 1700 $m^3.s^{-1}$ et 800 $m^3.s^{-1}$

sa taille peu importante.

Cet examen des stations hydrologiques nous conduit à réaliser une comparaison des modèles hydrauliques linéaires et non-linéaires pour un échelon en débit maximal de 400 $m^3.s^{-1}$ pour l'Eyrieux et la Drôme et de 200 $m^3.s^{-1}$ pour l'Ouvèze. Après comparaison entre le modèle hydraulique linéaire et non-linéaire, nous savons qu'en considérant ces débits maximums pour ces trois affluents, l'erreur entre ces modèles hydrauliques reste inférieure aux tolérances de la CNR (Cf. annexe B).

Amplitude maximale pour les usines et les barrages

Comme l'illustrent la FIGURE 4.13 et la FIGURE 4.12, la différence entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire n'est pas négligeable lorsque les débits des entrées (barrages et usines) s'éloignent trop du régime de référence.

Plus précisément, chaque entrée à été testée séparément de la façon suivante :

– de $0h \rightarrow 1h$: régime de référence partout

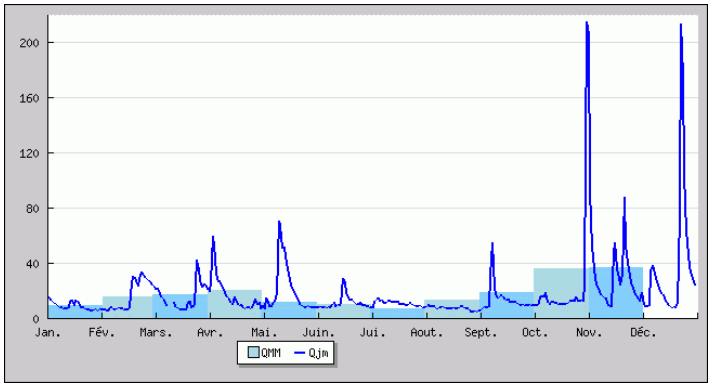


FIGURE 4.10 – Répartition des débits de l'Eyrieux sur l'année 2010

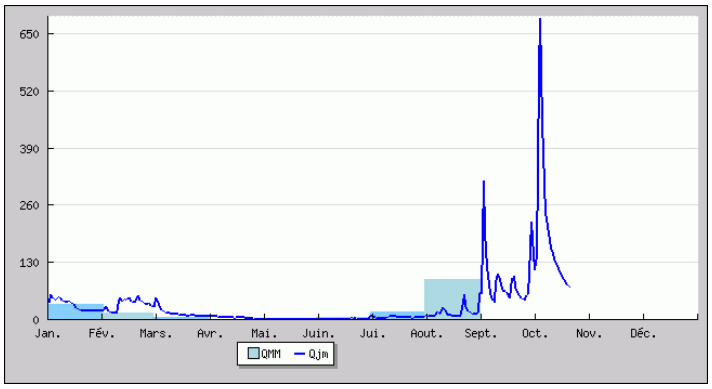


FIGURE 4.11 – Répartition des débits de la Drôme sur l'année 2003

– de $1h \rightarrow 4h$: pour l'entrée testée, échelon de débit de 0 $m^3.s^{-1}$ à 2000 $m^3.s^{-1}$ par pas de 25 $m^3.s^{-1}$ et régime de référence pour toutes les autres entrées

– de $4h \rightarrow$ fin de la simulation : régime de référence partout

Puis, pour chacun de ces échelons, les différences en cote et en débit au point de réglage (PR1) ont été calculées (Cf. FIGURE 4.12 et FIGURE 4.13).

Au vu de ces dernières illustrations, nous avons conclu qu'il était nécessaire de tester quels sont les écarts maximaux, par rapport au régime de référence, qui permettent de respecter les tolérances de l'entreprise. Pour chacune de ces entrées, nous avons étudié, au niveau du PR1, la différence en cote et en débit entre le modèle linéaire et le modèle non linéaire en fonction de l'amplitude de l'entrée (Cf. FIGURE 4.15 et FIGURE 4.14). De cette étude est ressorti que les tolérances de la CNR ne sont plus respectées lorsque le débit s'éloigne trop du régime de référence :

– de plus de 500 $m^3.s^{-1}$ du régime de référence à l'usine amont (pour cette entrée, cela représente une augmentation d'environ 30 % du débit de référence)

– de plus de 100 $m^3.s^{-1}$ du régime de référence au barrage amont (pour cette entrée,

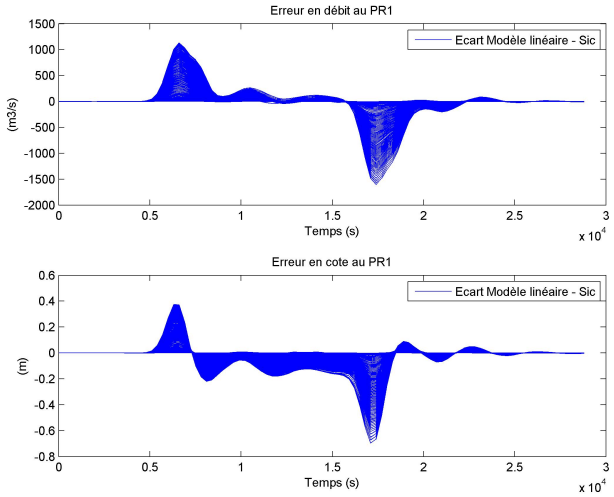


FIGURE 4.12 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit au barrage amont

cela représente une augmentation d'environ 990 % du débit de référence)

– les autres résultats moins significatifs apparaissent en annexe B

4.5 Système augmenté

Comme il a déjà été dit dans le chapitre 1, en cas de panne de capteur, le calcul de la commande prédictive est faussé. Il est donc nécessaire d'avoir un système dans l'espace d'état capable de prendre en compte des perturbations en débits inconnus. Ainsi le système (4.32) devient :

$$\begin{cases} X_{k+1} &= A_k X_k + B_k U_k + Bp_k Up_k + Bp_k Ui_k \\ Y_k &= C_k X_k \end{cases} \tag{4.38}$$

Avec :

– Up_k : perturbations connues

– Ui_k : perturbations inconnues

tel que :

$$Ui_k = \begin{bmatrix} Qi_{k+1} \\ Qi_k \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

Cela signifie que la perturbation réelle est $\delta Qr_k = \delta Qp_k + Qi_k$.

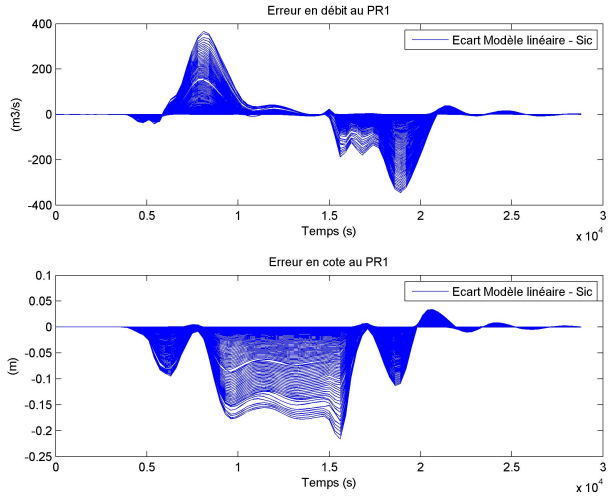


FIGURE 4.13 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'usine amont

Pour estimer les perturbations inconnues à l'aide d'un observateur d'état ou bien par une technique d'assimilation de données, une façon de faire est d'augmenter le système par les perturbations inconnues. Ainsi la méthode de correction du vecteur d'état estimera à chaque pas de temps les perturbations inconnues intégrées au vecteur d'état. De plus comme [MAL94] l'a démontré, sans augmentation du vecteur d'état, en cas de perturbations inconnues, l'observateur ne converge pas.

Le système augmenté s'écrit :

$$\begin{cases} Em_{k+1} = AA_k Em_k + BB_k U_k + BBp_k \begin{bmatrix} \delta Qp_{k+1} \\ \delta Qp_k \end{bmatrix} \\ Y_k = CC_k Em_k \end{cases} \tag{4.40}$$

Avec :

– $Em_k \in \mathbb{R}^{nx+ni}$: vecteur d'état augmenté à l'instant k qui contient les variations des cotes et des débits pour les sections en travers considérées ainsi que les perturbations inconnues

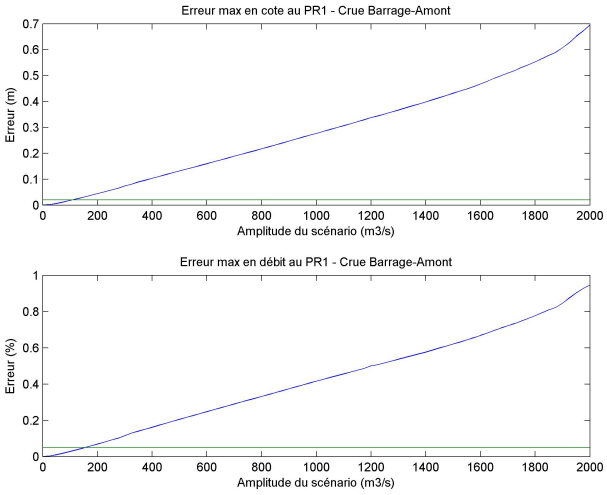


FIGURE 4.14 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'usine amont

$$Em_k = \begin{bmatrix} X \\ Ui \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \delta Q_1 \\ \delta Z_1 \\ \delta Q_2 \\ \delta Z_2 \\ \delta Q_3 \\ \delta Z_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \delta Q_{nx} \\ \delta Z_{nx} \\ Qi_{k+1} \\ Qi \end{bmatrix}_k \tag{4.41}$$

– $AA_k \in \mathcal{M}_{nx+ni,nx+ni}(\mathbb{R})$: matrice dynamique

$$AA_k = \begin{bmatrix} A & Bp \\ 0 & Id_{ni\times ni} \end{bmatrix}_k \tag{4.42}$$

– $BB_k \in \mathcal{M}_{nx+ni,nu}(\mathbb{R})$: matrice de contrôle

$$BB_k = \begin{bmatrix} B \\ 0_{ni\times nu} \end{bmatrix}_k \tag{4.43}$$

– $U_k \in \mathbb{R}^{nu}$: vecteur de commande U, qui correspond à une ouverture ou fermeture de vanne de barrage ou d'usine

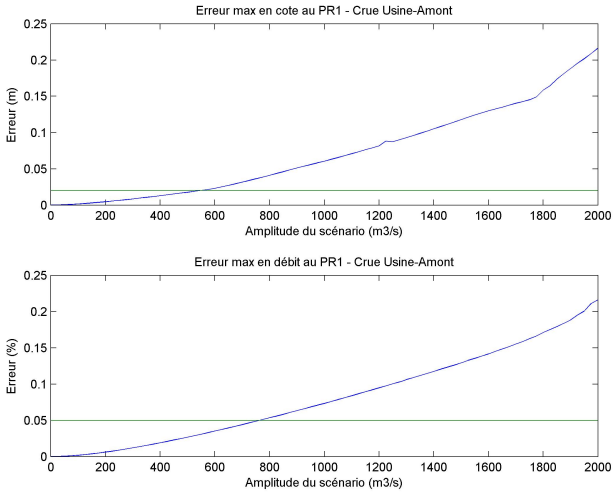


FIGURE 4.15 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'usine amont

$$U_k = \begin{bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta U_{nu} \end{bmatrix}_k \tag{4.44}$$

– $Up_k \in \mathbb{R}^{np}$: vecteur des perturbations connues

$$Up_k = \begin{bmatrix} \delta Qp_{1\ k+1} \\ \delta Qp_1 \\ \delta Qp_{2\ k+1} \\ \delta Qp_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta Qp_{np\ k+1} \\ \delta Qp_{np} \end{bmatrix}_k \tag{4.45}$$

– $BBp_k \in \mathcal{M}_{nx+ni,np}(\mathbb{R})$: matrice de contrôle des perturbations connues

– $Y_k \in \mathbb{R}^{ny}$: vecteur des sorties observées

$$Y_k = \begin{bmatrix} \delta Y_1 \\ \delta Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta Y_{ny} \end{bmatrix}_k \tag{4.46}$$

– $CC_k \in \mathcal{M}_{ny,nx}(\mathbb{R})$: matrice des sorties observées

$$CC_k = \begin{bmatrix} C & 0_{ny \times ni} \end{bmatrix}_k \tag{4.47}$$

Dans le cas des systèmes augmentés, les perturbations inconnues font partie du vecteur d'état. De ce fait, si les perturbations connues sont considérées comme observations, cela nécessite une adaptation de la matrice des observations C. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \delta Qp &= \delta Qr - Qi \\ \delta Qp &= X_{aval} - X_{amont} - Qi \end{aligned} \tag{4.48}$$

donc la ligne de la matrice C correspondante à la mesure d'un débit connu est remplie par les coefficients :

$$\begin{aligned} -1 &\quad : \text{pour le profil amont de la perturbation connue} \\ 1 &\quad : \text{pour le profil aval de la perturbation connue} \\ -1 &\quad : \text{pour l'état augmenté correspondant} \end{aligned} \tag{4.49}$$

D'autre part, il est aussi possible d'intégrer les perturbations inconnues au vecteur des observations Y. Il est vrai qu'imposer les Qi aux observations n'a pas vraiment de sens physique, en revanche d'un point de vue mathématique, cela peut s'avérer utile notamment dans l'étude de la convergence du filtre de Kalman.

4.6 Conclusion

Ce chapitre a exposé la méthodologie développée pour synthétiser un système linéaire dans l'espace d'état. On a vu qu'il est possible de modéliser de nombreuses particularités, ce qui rend cette modélisation fidèle à celle qui peut être faite par un modèle non-linéaire. Ce système linéaire dans l'espace d'état pourra donc servir de support à la méthode d'assimilation de type filtre de Kalman exposée dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Filtre de Kalman et convergence de l'estimation

Sommaire

5.1 Introduction 87
5.2 Les outils indispensables 88
5.2.1 Description du modèle 88
5.2.2 Définitions et notations 88
5.2.3 Théorie de l'estimation 90
5.3 Best Linear Unbiased Estimation - BLUE 91
5.3.1 Best Linear Unbiased Estimation - BLUE sans ébauche . . . 91
5.3.2 Best Linear Unbiased Estimation - BLUE avec ébauche . . . 92
5.4 Filtre de Kalman 95
5.4.1 Equations du filtre de Kalman 95
5.4.2 Filtre de Kalman et équations de Riccati 97
5.4.3 Calcul du gain optimal 97
5.4.4 Filtre de Kalman asymptotique 98
5.5 Convergence du filtre de Kalman 99
5.5.1 Conditions nécessaires et suffisantes à la convergence 99
5.6 Choix des matrices de covariance 100
5.6.1 Matrice de covariance du modèle - Q_k 100
5.6.2 Matrice de covariance des mesures - R_k 101
5.7 Algorithme du filtre de Kalman et perturbations inconnues 102
5.7.1 Système augmenté bruité 102
5.7.2 Algorithme du filtre de Kalman 104
5.8 Tests et illustrations des résultats - Exemple 1 106
5.8.1 Configuration choisie 106
5.8.2 Hypothèses 106
5.8.3 Gain optimal 107
5.8.4 Résultats de l'estimation 108

5.8.5 Vérification de la convergence du filtre 109
5.8.6 Choix d'une matrice Q "opportuniste" 109
5.9 Tests et illustrations des résultats - Exemple 2 113
5.9.1 Configuration choisie 113
5.9.2 Résultats de l'estimation 113
5.9.3 Vérification de la convergence du filtre 114
5.9.4 Choix d'une matrice Q "opportuniste" 114
5.10 Conclusion 115

5.1 Introduction

Pour l'ensemble des raisons évoquées dans la synthèse bibliographique faite autour des techniques d'assimilation de données (Cf. chapitre 1), nous avons fait le choix d'étudier principalement l'application du filtre de Kalman. Avant d'expliquer les détails de l'algorithme du filtre de Kalman, il est important d'introduire dans la section (5.2) les définitions et les notations intervenant dans la synthèse du filtre. La section 5.2.3 expose la théorie de l'estimation à l'origine de la mise en place de l'assimilation de données.

On verra section (5.3) que l'estimateur BLUE est un estimateur linéaire non biaisé, simple d'utilisation, qui permet d'introduire les équations du filtre de Kalman décrites section (5.4). Ces équations calculent un gain de Kalman et une matrice de covariance d'erreur sur l'estimation, qui peuvent aussi être établis "off line" par les équations de Riccati.

Le filtre de Kalman se base sur la minimisation de la matrice de covariance d'erreur d'estimation. Il n'assure donc pas une estimation correcte (dans le sens où l'erreur d'estimation peut être minimum sans pour autant tendre vers 0) quelque soit la configuration. On verra section 5.5 que la convergence du filtre est soumise à certaines conditions. Cette convergence peut être améliorée en jouant sur les deux degrés de liberté du réglage du filtre de Kalman qui seront présentés section (5.6).

On a vu que le réseau de téléconduite de la CNR est confrontée à des pannes de capteurs et donc à l'apparition de perturbations inconnues. Comme cela a été présenté chapitre 4, ces perturbations peuvent être prises en compte dans la modélisation linéaire en augmentant l'état du système. La section (5.7) expose la manière dont fonctionne le filtre de Kalman dans une telle configuration.

Enfin, après avoir étudié la théorie du filtre de Kalman, la dernière section exposera deux cas d'exemples de configuration pour l'aménagement support de cette étude.

5.2 Les outils indispensables

5.2.1 Description du modèle

Pour rendre plus réaliste le modèle utilisé par la suite, on considère le système linéaire obtenu précédemment auquel on ajoute des bruits stochastiques. Les processus modélisés sous forme d'équations d'état entachées par des bruits blancs constituent un cas particulier des processus de Markov. Un bruit blanc peut être considéré comme la source de hasard irréductible, fondamentalement non prédictible([LAR96] p.229). Ces bruits ϵ_k^o sont ajoutés au vecteur de sorties observées, afin de représenter les incertitudes sur les observations. Du bruit η_k est aussi ajouté sur la partie modélisation car le modèle ne reflète pas parfaitement la réalité. On obtient donc un modèle linéaire stochastique dont l'évolution dynamique est modélisée à l'aide du système dans l'espace d'état :

$$\begin{cases} X_{k+1} &= A_k X_k + B_k U_k + \eta_k \\ Y_k &= C_k X_k + \epsilon_k^o \end{cases} \tag{5.1}$$

Avec à l'instant k :

- $X_k \in \mathbb{R}^{nx}$: vecteur d'état, il contient les couples cote/débit des profils en travers considérés.
- $A_k \in \mathcal{M}_{nx,nx}(\mathbb{R})$: matrice dynamique
- $B_k \in \mathcal{M}_{nx,nu}(\mathbb{R})$: matrice de contrôle
- $U_k \in \mathbb{R}^{nu}$: vecteur de commande U
- $\eta_k \in \mathbb{R}^{nx}$: bruit du modèle
- $Y_k \in \mathbb{R}^{ny}$: vecteur des sorties observées
- $C_k \in \mathcal{M}_{ny,nx}(\mathbb{R})$: matrice des sorties observées
- $\epsilon_k^o \in \mathbb{R}^{ny}$: bruit des mesures

Et

- $X_{k+1} \in \mathbb{R}^{nx}$: vecteur d'état à l'instant $k + dt$, avec dt le pas de temps d'échantillonnage

5.2.2 Définitions et notations

Il n'est pas possible de décrire parfaitement la réalité à travers un vecteur d'état. Néanmoins, un vecteur d'état "vrai" $X_k^t \in \mathbb{R}^{nx}$ (l'exposant t fait référence à $true$) est conçu pour symboliser la meilleure représentation possible de la réalité à l'instant k.

L'erreur entre réalité et modélisation est donc supposée contenue dans le vecteur η_k dont la moyenne $\overline{\eta_k}$ est nulle.

$$\overline{\eta_k} = 0 \tag{5.2}$$

Le vecteur "analyse" $X_k^a \in \mathbb{R}^{nx}$ (a pour "analyse") est le résultat de l'estimation de X_k^t et sert à donner une description fiable de l'état "vrai". L'erreur d'analyse $\epsilon_k^a \in \mathbb{R}^{nx}$ est telle que :

$$\epsilon_k^a = X_k^a - X_k^t \tag{5.3}$$

ϵ_k^a est définie comme la différence entre l'état "analyse" et l'état "vrai". Sa moyenne $\overline{\epsilon_k^a}$ permet de calculer la matrice de covariance de cette erreur notée $P_k^a \in \mathcal{M}_{nx,nx}(\mathbb{R})$.

$$P_k^a = E[(\epsilon_k^a - \overline{\epsilon_k^a})(\epsilon_k^a - \overline{\epsilon_k^a})^T] \tag{5.4}$$

La trace de cette matrice permet de définir une estimation de l'erreur de l'état d'analyse qui peut servir comme objet de minimisation.

Lorsque le résultat d'une analyse sert de point de départ à une nouvelle analyse, ce vecteur est noté $X_k^b \in \mathbb{R}^{nx}$ (avec b pour *background*) et est appelé en français "ébauche". Du point de vue d'une analyse future, X_k^b constitue une connaissance a priori de l'état du système. L'erreur d'ébauche $\epsilon_k^b \in \mathbb{R}^{nx}$ est telle que :

$$\epsilon_k^b = X_k^b - X_k^t \tag{5.5}$$

ϵ_k^b est la différence entre la première estimation de l'état du modèle et l'état "vrai". Sa moyenne $\overline{\epsilon_k^b}$ permet de calculer la matrice de covariance de cette erreur notée P_k^b $\in \mathcal{M}_{nx,nx}(\mathbb{R})$.

$$P_k^b = E[(\epsilon_k^b - \overline{\epsilon_k^b})(\epsilon_k^b - \overline{\epsilon_k^b})^T] \tag{5.6}$$

Un système d'estimation doit se nourrir d'observations du système réel afin de réduire l'erreur commise dans l'analyse. Le vecteur des observations $Y_k \in \mathbb{R}^{ny}$ est l'image de l'état "vrai" X_k^t par l'opérateur d'observation $C_k \in \mathcal{M}_{ny,nx}(\mathbb{R})$:

$$Y_k = C_k X_k^t + \epsilon_k^o \tag{5.7}$$

L'erreur d'observation $\epsilon_k^o \in \mathbb{R}^{ny}$, supposée connue est définie comme la différence entre les observations et l'équivalent modèle de l'état "vrai" :

$$\epsilon_k^o = Y_k - C_k X_k^t \tag{5.8}$$

Sa moyenne $\overline{\epsilon_k^o}$ est nulle car ϵ_k^o représente des bruits de mesure supposés blancs gaussiens centrés.

$$\overline{\epsilon_k^o} = 0 \tag{5.9}$$

La matrice de covariance de ces bruits est notée $R_k \in \mathcal{M}_{ny,ny}(\mathbb{R})$.

$$R_k = E[\epsilon_k^o (\epsilon_k^o)^T] \tag{5.10}$$

L'élément essentiel de l'assimilation de données est la comparaison entre les observations (Y_k) et leur estimations obtenues à partir du vecteur d'état $(C_k X_k^t)$. Cette comparaison peut se faire avec le vecteur d'ébauche $(Y_k - C_k X_k^b)$, cela constitue le vecteur d'innovations. Lorsque la comparaison est faite entre les observations et le vecteur d'analyse $(Y_k - C_k X_k^a)$, alors on parle de vecteur des résidus.

REMARQUE : L'assimilation de données a été utilisée en premier lieu par des ingénieurs et des mathématiciens. Maintenant, ces méthodes sont très développées dans le domaine de l'océanographie et de la météorologie et continuent leur extension vers tous les domaines des géosciences (hydrologie, hydraulique, etc.). Ces différents domaines de recherche ont introduit et utilisé des notations différentes. Pour ce document, nous avons fait le choix d'utiliser les notations de la communauté des chercheurs pratiquant l'assimilation de données variationnelle en météorologie et en océanographie, telles que décrites dans [ICGL97] car c'est dans ce domaine que la recherche est très active en terme d'assimilation de données.

5.2.3 Théorie de l'estimation

L'estimation est réalisée de façon à déterminer un vecteur d'analyse X^a le plus représentatif possible de la réalité symbolisée par X^t. La théorie de l'estimation s'appuie sur les informations données par les observations Y afin de corriger le vecteur d'ébauche X^b. L'introduction d'hypothèses sur les erreurs sur l'ébauche, sur l'analyse et sur les observations permettent d'améliorer l'estimation car cela rend la modélisation du système plus réaliste. L'objectif de l'estimation étant de minimiser l'erreur d'analyse en minimisant $Tr(P^a)$ par exemple ou bien en minimisant une fonction coût adéquatement choisie tel que cela est fait dans [BN11].
Selon l'hypothèse faite sur le vecteur d'erreur ϵ^b, on parle d'estimateur non biaisé (BLUE) ou bien de filtre de Kalman. Ces deux techniques d'assimilation de données imposent les hypothèses suivantes :

- Avoir un modèle linéaire.
- Les bruits du modèle et des observations sont blancs et gaussiens

La différence entre ces deux approches concerne l'erreur sur le vecteur d'ébauche (ϵ^b). Pour le BLUE on impose $\epsilon^b = 0$ alors que le filtre de Kalman n'exige pas d'avoir un état initial non biaisé.

5.3 Best Linear Unbiased Estimation - BLUE

Dans la suite de cette section, les vecteurs ϵ^b et ϵ^o sont considérés non biaisés et leurs statistiques sont connues. L'objectif est d'améliorer l'estimation du système X^a à l'aide des observations. On verra dans un premier temps comment s'effectue cette estimation sans considérer de première estimation a priori (c'est à dire sans tenir compte du vecteur d'ébauche X^b), puis en envisageant un vecteur d'ébauche X^b.

5.3.1 Best Linear Unbiased Estimation - BLUE sans ébauche

Dans la méthode BLUE sans ébauche, on fait l'hypothèse que le vecteur d'analyse peut être décomposé sous la forme d'une combinaison linéaire des informations disponibles que sont les observations :

$$X_k^a = K_k Y_k \tag{5.11}$$

Avec $K_k \in \mathcal{M}_{nx,ny}(\mathbb{R})$ matrice à déterminer à l'instant k.

L'erreur d'analyse associée est de la forme :

$$\begin{aligned} \epsilon_k^a &= X_k^a - X_k^t \\ &= K_k Y_k - X_k^t \\ &= K_k(C_k X_k^t + \epsilon_k^o) - X_k^t \\ &= (K_k C_k - Id_{nx\times nx})X_k^t - K_k\epsilon_k^o \end{aligned} \tag{5.12}$$

En cherchant une erreur d'analyse ϵ_k^a non biaisée sachant que ϵ_k^b et ϵ_k^o sont elles aussi par hypothèse non biaisées, l'espérance de (5.12) donne :

$$\begin{aligned} E[\epsilon_k^a] &= (K_k C_k - Id_{nx\times nx})E[X_k^t] + K_k E[\epsilon_k^o] \\ &= (K_k C_k - Id_{nx\times nx})E[X_k^t] \end{aligned} \tag{5.13}$$

Ainsi

$$E[\epsilon_k^a] = 0 \Leftrightarrow K_k C_k = Id_{nx\times nx} \tag{5.14}$$

La relation (5.14) est possible si $nx \leq ny$ (ce qui signifie un nombre d'observations supérieur ou égal à l'ordre du système) [BN11]. Car d'après les propriétés du *Rang* :

$$Rang(K_k C_k) \leq min(Rang(K_k), Rang(C_k)) \tag{5.15}$$

Pour avoir $ny \geq nx$, il est possible soit :

- de tenir compte des observations faites pendant les k pas de temps précédents si $k \times ny \geq nx$
- de s'intéresser à un estimateur qui tient compte d'un vecteur d'ébauche qui apporte des informations supplémentaires.

La dernière proposition nécessite moins de place mémoire que la précédente ce qui rend la méthode moins gourmande en temps de calcul. Pour cette raison, cette solution est présentée par la suite.

5.3.2 Best Linear Unbiased Estimation - BLUE avec ébauche

Dans le méthode BLUE avec ébauche, on fait l'hypothèse qu'un ansatz [1] pour le vecteur "analyse" peut être décomposé sous la forme d'une combinaison linéaire des informations disponibles, qui sont :

- les observations (Y_k).
- le vecteur d'ébauche (X_k^b).

Ainsi

$$X_k^a = L_k X_k^b + K_k Y_k \tag{5.16}$$

Avec $K_k \in \mathcal{M}_{nx,ny}(\mathbb{R})$ et $L_k \in \mathcal{M}_{nx,nx}(\mathbb{R})$, matrices à déterminer.

L'erreur d'analyse associée est de la forme :

$$\begin{aligned} \epsilon_k^a &= X_k^a - X_k^t \\ &= L_k X_k^b + K_k Y_k - X_k^t \\ &= L_k(X_k^b - X_k^t + X_k^t) + K_k(C_k X_k^t + \epsilon_k^o) - X_k^t \\ &= L_k \epsilon_k^b + K_k \epsilon_k^o + (L_k + K_k C_k - Id_{nx\times nx}) X_k^t \end{aligned} \tag{5.17}$$

En cherchant une erreur d'analyse ϵ_k^a non biaisée sachant que ϵ_k^b et ϵ_k^o sont elles aussi par hypothèse non biaisées, l'espérance de (5.17) donne :

$$\begin{aligned} E[\epsilon_k^a] &= (L_k + K_k C_k - Id_{nx\times nx}) E[X_k^t] + L_k E[\epsilon_k^b] + K_k E[\epsilon_k^o] \\ &= (L_k + K_k C_k - Id_{nx\times nx}) E[X_k^t] \end{aligned} \tag{5.18}$$

Ainsi

$$E[\epsilon_k^a] = 0 \Leftrightarrow L_k = Id_{nx\times nx} - K_k C_k \tag{5.19}$$

D'après (5.17) et (5.19),

$$\epsilon_k^a = L_k \epsilon_k^b + K_k \epsilon_k^o \tag{5.20}$$

L'équation (5.20) permet d'écrire la matrice de covariance de l'erreur d'analyse P_k^a tel que :

$$\begin{aligned} P_k^a &= E[(\epsilon_k^a - E[\epsilon_k^a])(\epsilon_k^a - E[\epsilon_k^a])^T] \\ &= E[(\epsilon_k^a)(\epsilon_k^a)^T] \\ &= E[(L_k \epsilon_k^b + K_k \epsilon_k^o)(L_k \epsilon_k^b + K_k \epsilon_k^o)^T] \\ &= L_k E[(\epsilon_k^b)(\epsilon_k^b)^T] L_k^T + K_k E[(\epsilon_k^o)(\epsilon_k^o)^T] K_k^T \\ &= L_k P_k^b L_k^T + K_k R_k K_k^T \end{aligned} \tag{5.21}$$

1. Un ansatz est l'établissement d'une équation (ou de plusieurs équations) décrivant un problème mathématique ou physique.

Il est possible de minimiser la trace de la matrice de covariance de l'erreur d'analyse notée $Tr(P_k^a)$. Il doit donc exister un gain optimal K_k^* qui peut être obtenu en étudiant la variation de l'erreur scalaire d'analyse sous une variation du gain. Comme la *trace* est une fonction scalaire continue et différentiable des coefficients de K_k, il est possible d'exprimer sa dérivée par rapport au gain au premier ordre ([DAG07]) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Tr(P_k^a)}{\partial K_k} &= \frac{\partial Tr(L_k P_k^b L_k^T + K_k R_k K_k^T)}{\partial K_k} \\
&= \frac{\partial L_k}{\partial K_k} P_k^b L_k^T + L_k P_k^b \frac{\partial L_k^T}{\partial K_k} + R_k K_k^T + (K_k R_k)^T \\
&= -C_k P_k^b L_k^T - (L_k P_k^b C_k^T)^T + R_k K_k^T + (K_k R_k)^T \\
&= (-L_k P_k^b C_k^T)^T - (L_k P_k^b C_k^T)^T + (K_k R_k)^T + (K_k R_k)^T \\
&= 2(K_k R_k - L_k P_k^b C_k^T)^T
\end{aligned} \tag{5.22}$$

L'équation (5.22) est obtenue compte tenu des propriétés suivantes :

$$Tr(F + \alpha G) = Tr(F) + \alpha Tr(G) \tag{5.23}$$

$$\frac{\partial Tr(FG)}{\partial G} = \frac{\partial Tr(GF)}{\partial G} = F \tag{5.24}$$

$$\frac{\partial F^T G}{\partial G} = \frac{\partial G^T F}{\partial G} = F^T \tag{5.25}$$

Pour obtenir un gain optimal K_k^*, il faut que :

$$\frac{\partial Tr(P_k^a)}{\partial K_k} = 0 \tag{5.26}$$

Soit :

$$\begin{array}{lll}
 & 2(K_k^* R_k - L_k P_k^b C_k^T)^T & = 0 \\
\Leftrightarrow & K_k^* R_k - (Id_{nx \times nx} - K_k^* C_k) P_k^b C_k^T & = 0 \\
\Leftrightarrow & K_k^* R_k - P_k^b C_k^T + K_k^* C_k P_k^b C_k^T & = 0 \\
\Leftrightarrow & K_k^* (R_k + C_k P_k^b C_k^T) & = P_k^b C_k^T \\
\Leftrightarrow & K_k^* & = P_k^b C_k^T (R_k + C_k P_k^b C_k^T)^{-1}
\end{array} \tag{5.27}$$

Avec ce gain optimal, il est possible d'estimer de façon non biaisée le vecteur "analyse" :

$$X_{k_{BLUE}}^a = X_k^b + K_k^* (Y_k - C_k X_k^b) \tag{5.28}$$

La matrice de covariance d'analyse optimale calculée à partir de (5.27) se simplifie telle que :

$$\begin{aligned}
P_k^a &= L_k P_k^b L_k^T + K_k R_k K_k^T \\
&= (Id_{nx\times nx} - K_k^* C_k) P_k^b (Id_{nx\times nx} - K_k^* C_k)^T + K_k^* R_k K_k^{*T} \\
&= (Id_{nx\times nx} - K_k^* C_k) P_k^b - (Id_{nx\times nx} - K_k^* C_k) P_k^b C_k^T K_k^{*T} + K_k^* R_k K_k^{*T} \\
&= (Id_{nx\times nx} - K_k^* C_k) P_k^b + (K_k^* R_k + K_k^* C_k P_k^b C_k^T - P_k C_k^T) K_k^{*T} \\
&= (Id_{nx\times nx} - K_k^* C_k) P_k^b + (K_k^* (R_k + C_k P_k^b C_k^T) - P_k^b C_k^T) K_k^{*T} \\
&= (Id_{nx\times nx} - K_k^* C_k) P_k^b + (K_k^* (R_k + C_k P_k^b C_k^T) - K_k^* (R_k + C_k P_k^b C_k^T)) K_k^{*T} \\
&= (Id_{nx\times nx} - K_k^* C_k) P_k^b
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Les relations (5.27), (5.28) et (5.29) sont utilisées pour le filtre de Kalman décrit ci-après. Le filtre de Kalman est donc une variante de l'estimateur optimal BLUE. L'estimateur BLUE est simple d'utilisation et d'implémentation, mais il n'est pas adapté aux problématiques de la CNR. En effet, BLUE requiert l'utilisation d'un vecteur d'ébauche X^b non biaisé. Cette hypothèse forte n'est pas réaliste, c'est pourquoi pour la suite de ce travail, nous nous intéressons au filtre de Kalman.

5.4 Filtre de Kalman

Le problème du filtrage consiste à déterminer des estimateurs de variables d'un système lorsque l'environnement présente des perturbations aléatoires (autrement dit, dans un environnement stochastique). Le filtre de Kalman est une technique de traitement séquentielle des observations, déterminée initialement par Kalman [KAL59] dans le cas discret. Le principe de cette méthode est de corriger les variables d'états du modèle afin qu'elles coïncident au mieux avec les observations disponibles [HON07] en utilisant les information fournies par le modèle. En pratique, la méthode revient à minimiser l'erreur entre l'état vrai X^t et l'état filtré X^a.
Les hypothèses nécessaires au bon fonctionnement du filtre de Kalman sont :

- le filtre de Kalman suppose un modèle linéaire
- les bruits sur les mesures et sur le modèle doivent être connus. Ils doivent être par nature blancs gaussiens centrés.

Sous ces hypothèses, le filtre de Kalman est optimal au sens des moindres carrés.

Il utilise toute l'information disponible et présente l'intérêt de fournir directement une estimation de la covariance d'erreur de l'état analysé X^a en tenant compte de sa propagation liée à la dynamique du modèle.

5.4.1 Equations du filtre de Kalman

Le problème du filtrage, au sens de Kalman, est de trouver, pour le système dynamique (équation 5.1), la meilleure estimation X_k^a de l'état X_k^t à l'instant k, à partir d'observations effectuées jusqu'à l'instant t, au sens du critère de variance conditionnelle minimum. Cela signifie que l'estimée X_k^a est telle que :

$$E\{ \parallel X_k^t - X_k^a \parallel^2 /\{Y_0, Y_1, ..., Y_t\}\} \leq E\{ \parallel X_k^t - z \parallel^2 /\{Y_0, Y_1, ..., Y_t\}\} \tag{5.30}$$

pour tout vecteur z fonction des observations $\{Y_0, Y_1, ..., Y_t\}$. (ref [BDTR+90])

Les équations du filtre de Kalman sont scindées en deux groupes :

- **La mise à jour des équations du modèle** (aussi appelée étape de prédiction, ou étape de propagation, [LAR96] p257). Cette première étape prédit, par intégration du modèle, le vecteur d'état X_k^b à partir de l'état d'analyse au pas de temps précédent (X_{k-1}^a). La matrice d'erreur de covariance sur la prévision P_k^b est calculée à partir de la matrice d'erreur de covariance sur l'analyse P_{k-1}^a et la matrice de covariance d'erreur du modèle Q_k.

$$\begin{aligned} X_k^b &= A_{k-1} X_{k-1}^a + B_{k-1} U_{k-1} \\ P_k^b &= A_{k-1} P_{k-1}^a A_{k-1}^T + Q_{k-1} \end{aligned} \tag{5.31}$$

– **La mise à jour des équations des mesures** (aussi appelée étape d'estimation ou étape de recalage, [LAR96]p257). Lors de cette seconde étape, le gain K_k est calculé. Il permet de déterminer la matrice de covariance d'erreur sur l'état d'analyse (P_k^a). Cette étape tient compte des observations Y_k faites au pas de temps courant et corrige l'estimation faite a priori X_k^b pour fournir une estimation a posteriori X_k^a. Cette étape est aussi appelée étape de correction.

$$\begin{aligned} K_k &= P_k^b C_k^T (C_k P_k^b C_k^T + R_k)^{-1} \\ X_k^a &= X_k^b + K_k(Y_k - C_k X_k^b) \\ P_k^a &= (I - K_k C_k) P_k^b \end{aligned} \tag{5.32}$$

Pour initialiser le filtre de Kalman, il n'y a pas d'analyse au pas de temps précédent. On considère donc que le terme "ébauche" X_0^b regroupe les informations a priori sur l'état initial réel du système X_0^t.

– Si l'état initial est parfaitement connu, alors on impose $X_0^a = X_0^b$ qui correspond à l'état initial connu, et on lui associe $P_0^a = P_0^b = Q_0$.

– Sinon, on prend un état initial "vraisemblable" et on lui associe une matrice $P_0^a = P_0^b$ très grande [ZM05].

REMARQUE : Le filtre obtenu est linéaire. Dans le cas discret, il peut être schématisé par la FIGURE 5.1. Il permet un calcul récursif de l'estimation en temps réel sans stockage des observations et des commandes passées.

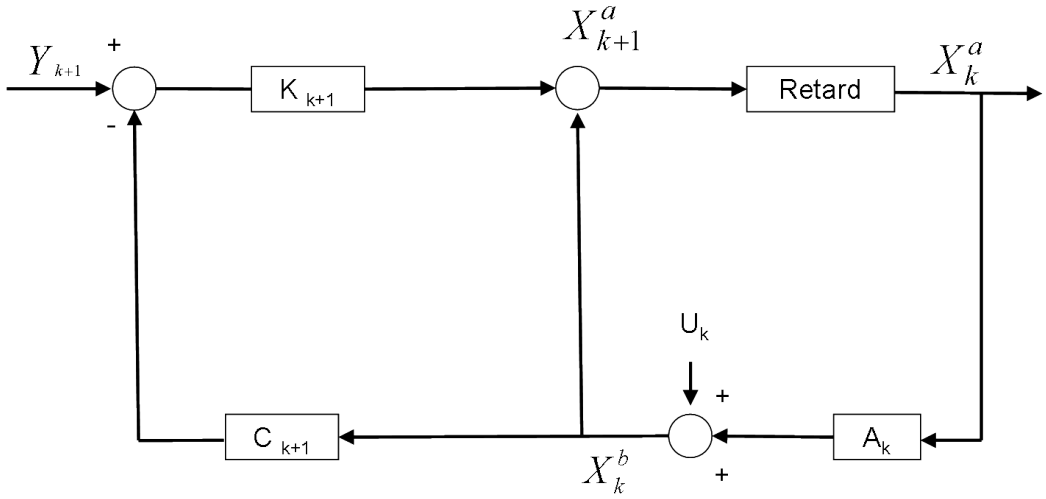


FIGURE 5.1 – Structure du filtre de Kalman discret

5.4.2 Filtre de Kalman et équations de Riccati

Les expressions permettant de calculer le gain K_k et les matrices de covariance P_k^a, P_k^b sont indépendantes des entrées U_k, des mesures Y_k et du vecteur d'état. Cela signifie que K_k, P_k^a et P_k^b peuvent être calculés "off line" du filtre (ref [LKG88]).

On sait d'après (5.31) que :

$$P_k^b = A_{k-1} P_{k-1}^a A_{k-1}^T + Q_{k-1} \tag{5.33}$$

Comme on a (5.32) :

$$\begin{array}{l} P_k^a = (I - K_k C_k) P_k^b = P_k^b - K_k C_k P_k^b \\ K_k = P_k^b C_k^T (C_k P_k^b C_k^T + R_k)^{-1} \end{array} \tag{5.34}$$

Alors

$$P_k^a = P_k^b - [P_k^b C_k^T (C_k P_k^b C_k^T + R_k)^{-1}] C_k P_k^b \tag{5.35}$$

Ainsi (5.33) devient

$$P_{k+1}^b = A_k P_k^b A_k^T + Q_k - A_k P_k^b C_k^T (R_k + C_k P_k^b C_k^T)^{-1} C_k P_k^b A_k^T \tag{5.36}$$

Cette dernière relation (5.36) est une équation de Riccati permettant de calculer P_k^b et K_k est ensuite calculé par (5.32)

5.4.3 Calcul du gain optimal

L'utilisation du lemme matriciel (5.37) dans (5.35)

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B (C^{-1} + DA^{-1} B)^{-1} DA^{-1} \tag{5.37}$$

conduit directement à :

$$(P_k^a)^{-1} = (P_k^b)^{-1} + C_k^T R_k^{-1} C_k \tag{5.38}$$

L'utilisation du lemme matriciel sur $(C_k P_k^b C_k^T + R_k)^{-1}$ (partie de l'expression du gain (5.34)) permet de simplifier l'écriture du gain K_k :

$$K_k = P_k^a C_k^T R_k^{-1} \tag{5.39}$$

Cette forme permet d'interpréter plus facilement la tendance du gain :

- si l'on a confiance dans les précédentes estimations (matrice de covariance P_k^a faible) et que les mesures sont douteuses (matrice R_k forte), alors le gain K_k est faible

- a contrario, si on ne fait pas confiance aux précédentes estimations (matrice de covariance P_k^a forte) et que les mesures sont considérées fiables (matrice R_k faible), alors le gain de correction K_k est élevé

5.4.4 Filtre de Kalman asymptotique

On parle de filtrage stationnaire, asymptotique ou permanent lorsque le gain est constant pour la reconstruction d'état optimal des processus linéaires invariants (matrices A,B,C invariantes), perturbés par des bruits de spectres Q et R également invariants ([LAR96]p250).

La matrice de covariance invariante P^b est calculée à partir de l'équation de Riccati stationnaire :

$$P^b = AP^bA^T + Q - AP^bC^T(R + CP^bC^T)^{-1}CP^bA^T \tag{5.40}$$

D'après (5.35), on obtient P^a qui permet de calculer le gain optimal constant :

$$K = P^aC^TR^{-1} \tag{5.41}$$

REMARQUE : La différence entre le filtre optimal "classique" et le filtre stationnaire se fait sentir en début de fonctionnement (on perd des informations initiales) (Cf. [BDTR$^+$90]). Dans les années 80-90, on faisait la remarque qu'en contrepartie de cette perte d'information, utiliser le filtre stationnaire permettait de gagner en temps de calcul. De nos jours, avec les puissances informatiques disponibles, cette remarque n'est pas toujours vraie. Cela dépend de l'ordre du système avec lequel on travaille.

5.5 Convergence du filtre de Kalman

Quelques soient les configurations (choix des observations, de l'augmentation d'état, des matrices R et Q, etc.), le filtre de Kalman converge toujours vers une valeur car il minimise la variance de l'erreur d'estimation. Seulement, cette minimisation ne converge pas forcément vers 0. L'objectif de cette section 5.5 est donc de trouver une condition nécessaire et suffisante à une convergence vers 0 de l'erreur d'estimation.

5.5.1 Conditions nécessaires et suffisantes à la convergence

L'erreur d'analyse s'écrit :

$$\epsilon^a_{k+1} = X^a_{k+1} - X^t_{k+1} \tag{5.42}$$

En introduisant l'équation (5.32) dans (5.42)

$$\epsilon^a_{k+1} = X^b_{k+1} + K_{k+1}(Y_{k+1} - C_{k+1}X^b_{k+1}) - X^t_{k+1} \tag{5.43}$$

Connaissant la propagation du modèle (équation (5.1)) et la relation du filtre de Kalman (équation (5.32)), il est possible d'écrire l'équation (5.43) telle que :

$$\begin{aligned}
\epsilon^a_{k+1} &= A_kX^a_k + B_kU_k + K_{k+1}(Y_{k+1} - C_{k+1}X^b_{k+1}) - A_kX^t_k - B_kU_k - \eta_k \\
&= A_kX^a_k + K_{k+1}(C_{k+1}X^t_{k+1} + \epsilon^o_{k+1} - C_{k+1}A_kX^a_k - C_{k+1}B_kU_k) - A_kX^t_k - \eta_k \\
&= A_kX^a_k + K_{k+1}(C_{k+1}A_kX^t_k + C_{k+1}B_kU_k + C_{k+1}\eta_k + \epsilon^o_{k+1} - C_{k+1}A_kX^a_k - C_{k+1}B_kU_k) - A_kX^t_k - \eta_k \\
&= A_kX^a_k + K_{k+1}(C_{k+1}A_kX^t_k + C_{k+1}\eta_k + \epsilon^o_{k+1} - C_{k+1}A_kX^a_k) - A_kX^t_k - \eta_k \\
&= A_k(X^a_k - X^t_k) - K_{k+1}C_{k+1}A_k(X^a_k - X^t_k) + K_{k+1}C_{k+1}\eta_k + K_{k+1}\epsilon^o_{k+1} - \eta_k \\
&= (A_k - K_{k+1}C_{k+1}A_k)\epsilon^a_k + K_{k+1}C_{k+1}\eta_k + K_{k+1}\epsilon^o_{k+1} - \eta_k
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Le calcul de l'espérance mathématique de l'expression (5.44) permet d'établir l'expression vers laquelle le filtre de Kalman converge.

$$\begin{aligned}
E[\epsilon^a_{k+1}] &= E[(A_k - K_{k+1}C_{k+1}A_k)\epsilon^a_k + K_{k+1}C_{k+1}\eta_k + K_{k+1}\epsilon^o_{k+1} - \eta_k] \\
&= (A_k - K_{k+1}C_{k+1}A_k)E[\epsilon^a_k] + K_{k+1}C_{k+1}E[\eta_k] + K_{k+1}E[\epsilon^o_{k+1}] + E[\eta_k]
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Les hypothèses du filtre de Kalman imposent des bruits de modèles et d'observation d'espérance nulle d'où les équations déjà énoncées précédemment (équations (5.2) et équation(5.9)). Ces hypothèses permettent de simplifier la relation (5.45) tel que :

$$E[\epsilon^a_{k+1}] = (A_k - K_{k+1}C_{k+1}A_k)E[\epsilon^a_k] \tag{5.46}$$

L'équation (5.46) est équivalente à :

$$E[\epsilon^a_{k+1}] = (A_k - K_{k+1}C_{k+1}A_k)(A_{k-1} - K_kC_kA_{k-1})\dots(A_0 - K_1C_1A_0)E[\epsilon^a_0] \tag{5.47}$$

Pour avoir une erreur du vecteur d'analyse (par rapport au vecteur vrai) non biaisée à tout instant, il faut $E[\epsilon^a_{k+1}] = 0$

Cela signifie :

– soit que l'état initial imposé est non biaisé c'est à dire

$$E[\epsilon_0^a] = 0 \tag{5.48}$$

– soit que

$$\lim_{k\to\infty}(A_k - K_{k+1}C_{k+1}A_k)(A_{k-1} - K_kC_kA_{k-1})\dots(A_0 - K_1C_1A_1) = 0 \tag{5.49}$$

La première condition (équation 5.48) revient à considérer un état "vrai" initial (X_0^t) et une erreur d'ébauche ϵ_0^b non biaisés. Ces hypothèses sont trop fortes et non réalistes. C'est pourquoi nous nous intéresserons uniquement à la deuxième condition (équation 5.49) qui permet d'écrire une condition suffisante à la convergence du filtre :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, \quad (A_{k-1} - K_kC_kA_{k-1}) \text{ Schur}^{\,2} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} E[\epsilon_k^a] = 0 \tag{5.50}$$

5.6 Choix des matrices de covariance

Les équations du filtre de Kalman font appel aux matrices de covariance d'erreur de modèle Q_k et de mesure R_k qui ont été définies section (5.2.2). Ces matrices peuvent être perçues comme des outils de réglage du filtre de Kalman car elles influent sur le calcul du gain, et donc sur la convergence du filtre.
Dans un premier temps, nous détaillerons comment sont établies les matrices Q_k et R_k pour refléter au mieux la réalité. Puis nous verrons s'il est possible de disposer de matrices opportunistes (tout en restant réalistes) afin d'accélérer la vitesse de convergence du filtre.

5.6.1 Matrice de covariance du modèle - Q_k

Les erreurs de modélisation proviennent de sources multiples. Elles sont issues du choix du modèle (modèle de Saint-Venant qui est non linéaire). Elles contiennent des erreurs numériques engendrées par le choix de la méthode de résolution (Preissmann, Ionescu, etc.). Les erreurs de modélisations sont aussi liées au choix des paramètres utilisés, tels que les erreurs sur les géométries, ou sur les coefficients de frottement, etc. Cette multitude de sources d'erreurs rend le travail d'établissement de la matrice Q_k très compliqué. On peut envisager de quantifier un certain nombre de ces erreurs via les méthodes de calcul de norme d'opérateurs (ref. [MBJBS10]).
La matrice de covariance Q_k est considérée diagonale si les bruits sur le modèle ne sont pas corrélés. Dans la réalité, les erreurs de type géométrique ou hydraulique (coefficients de Strickler) ont un impact sur les états (en Z et en Q) à l'amont et à l'aval. Mais pour simplifier le problème, on considère que les bruits sur les états sont indépendants les uns des autres. Ainsi, Q_k s'écrit :

$$Q_k = E(\eta_k\eta_k^T) \tag{5.51}$$

2. En mathématiques, une matrice carrée discrète A est appelée matrice de *Schur* si toutes les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1

$$Q_k = \begin{bmatrix} \sigma^2_{QQ} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2_{QZ} & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \sigma^2_{QQ} & \ddots & & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \sigma^2_{QQ} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \sigma^2_{QZ} \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

Avec :

- σ_{QQ} : bruit sur les états Q.
- σ_{QZ} : bruit sur les états Z.

5.6.2 Matrice de covariance des mesures - R_k

Les bruits sur les observations ϵ^o_k représentent les erreurs dues à la précision des mesures (précision du matériel, des méthodes de calculs de la mesure, etc.). La matrice de covariance des erreurs d'observation R_k est diagonale si les capteurs sont indépendants les uns des autres. En l'absence de corrélation entre bruit de capteurs, R_k s'écrit :

$$R_k = E(\epsilon^o_k \epsilon^{oT}_k) \tag{5.53}$$

$$R_k = \begin{bmatrix} \sigma^2_R & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2_R & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \sigma^2_R & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \sigma^2_R & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \sigma^2_R \end{bmatrix} \tag{5.54}$$

REMARQUE : S'il s'agit d'observations de cote, alors on utilisera la notation σ_{RZ} dans la matrice R_k. Pour les observations de débit, on utilisera la notation σ_{RQ} dans la matrice R_k.

A la Compagnie Nationale du Rhône, les observations de cote proviennent de capteurs limnimétriques répartis le long du Rhône. Les capteurs sont indépendants les uns des autres. Concernant les observations de débit, celles-ci sont déduites de mesures de

cote converties en débit via des abaques. Pour cette étude, on ne considère pas comme composante du vecteur d'observation Y_k les observations de cote utilisées pour avoir des observations de débits. De ce fait, les observations sont statistiquement indépendantes et la matrice de covariance des observations R est diagonale. Pour construire cette matrice il faut connaitre les incertitudes que l'on a sur les observations.

Pour les observations de cote, l'expérience de terrain nous oriente vers une incertitude de 2.10^{-2} m, soit $\sigma_{RZ} = 2.10^{-2}$ m.

Pour le calcul du débit des barrages et des usines amont et aval, la CNR ne dispose pas de formules fiables. Les débits barrages sont calculés à partir de la chute (connue très approximativement) et de l'ouverture des vannes. Pour les usines, les débits sont déduits à partir de la position des pâles des groupes. La CNR est actuellement en "campagne" pour établir des estimations précises des tolérances sur les observations de débit. En attendant les résultats de ces études, tous s'accordent à dire qu'il existe une incertitude d'environ 10% sur les débits des usines et des barrages. Cette information permet d'établir les σ_{RQ} de la matrice de covariance R.

5.7 Algorithme du filtre de Kalman et perturbations inconnues

Comme il a été démontré dans [MAL94], lorsqu'apparaissent des perturbations inconnues, l'observateur ne converge plus. Dans ce cas, il est nécessaire d'augmenter l'état du vecteur d'état (Cf. chapitre 4) pour que les ni perturbations inconnues soient modélisées.

5.7.1 Système augmenté bruité

On rappelle que le système linéaire augmenté des perturbations inconnues s'écrit :

$$\begin{cases} Em_{k+1} = AA_k Em_k + BB_k U_k + BBp_k Up_k \\ Y_k = CC_k Em_k \end{cases} \tag{5.55}$$

Avec :

– $Em_k \in \mathbb{R}^{nx+ni}$: vecteur d'état augmenté à l'instant k

$$Em_k = \begin{bmatrix} X_k \\ Ui_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta Q_1 \\ \delta Z_1 \\ \delta Q_2 \\ \delta Z_2 \\ \delta Q_3 \\ \delta Z_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \delta Q_{nx} \\ \delta Z_{nx} \\ Qi_{k+1} \\ Qi_k \end{bmatrix}_k \tag{5.56}$$

– $AA_k \in \mathcal{M}_{nx+ni,nx+ni}(\mathbb{R})$: matrice dynamique

$$AA_k = \begin{bmatrix} A_k & Bp_k \\ 0 & Id_{ni\times ni} \end{bmatrix}_k \tag{5.57}$$

– $BB_k \in \mathcal{M}_{nx+ni,nu}(\mathbb{R})$: matrice de contrôle

$$BB_k = \begin{bmatrix} B_k \\ 0_{ni\times nu} \end{bmatrix} \tag{5.58}$$

– $U_k \in \mathbb{R}^{nu}$: vecteur de commande U

$$U_k = \begin{bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta U_{nu} \end{bmatrix} \tag{5.59}$$

– $Up_k \in \mathbb{R}^{np}$: vecteur des perturbations connues

$$Up_k = \begin{bmatrix} \delta Qp_1^+ \\ \delta Qp_1 \\ \delta Qp_2^+ \\ \delta Qp_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta Qp_{np}^+ \\ \delta Qp_{np} \end{bmatrix} \tag{5.60}$$

– $BBp_k \in \mathcal{M}_{nx+ni,np}(\mathbb{R})$: matrice de contrôle des perturbations connues

– $Y_k \in \mathbb{R}^{ny}$: vecteur des sorties observées

$$Y_k = \begin{bmatrix} \delta Y_1 \\ \delta Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta Y_{ny} \end{bmatrix} \tag{5.61}$$

– $CC_k \in \mathcal{M}_{ny,nx}(\mathbb{R})$: matrice des sorties observées

$$CC_k = \begin{bmatrix} C & 0_{ny \times ni} \end{bmatrix}_k \tag{5.62}$$

En ajoutant les bruits du modèle (η_k) et les bruits d'observation (ϵ_k^o), on obtient :

$$\begin{cases} Em_{k+1} = AA_k Em_k + BB_k U_k + BBp_k Up_k + \eta_k \\ Y_k = CC_k Em_k + \epsilon_k^o \end{cases} \tag{5.63}$$

Le prélèvement réel (δQr) résulte de la somme de l'apport prévu (Up_k) avec l'apport imprévu estimé (Ui_k)

5.7.2 Algorithme du filtre de Kalman

Les équations du filtre de Kalman correspondant au système augmenté sont :

– **Prédiction :**

$$\begin{aligned} Em_k^f &= AA_{k-1} Em_{k-1}^a + BB_{k-1} U_{k-1} + BBp_{k-1} Up_{k-1} \\ P_k^b &= AA_{k-1} P_{k-1}^a AA_{k-1}^T + Q_{k-1} \end{aligned} \tag{5.64}$$

– **Correction :**

$$\begin{aligned} K_k &= P_k^b CC_k^T (CC_k P_k^b CC_k^T + R_k)^{-1} \\ Em_k^a &= Em_k^f + K_k (Y_k - CC_k Em_k^f) \\ P_k^a &= (I - K_k CC_k) P_k^b \end{aligned} \tag{5.65}$$

Avec :

$$Q_k = \begin{bmatrix} \sigma_{QQ}^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{QZ}^2 & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \sigma_{QQ}^2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \sigma_{QZ}^2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \sigma_{Qi}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \sigma_{Qi}^2 \end{bmatrix} \tag{5.66}$$

$$R_k = \begin{bmatrix} \sigma_R^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_R^2 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \sigma_R^2 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \sigma_R^2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \sigma_R^2 \end{bmatrix} \tag{5.67}$$

Remarque : Dans le cas des systèmes augmentés, les dimensions de P_k^a, K_k et P_k^b sont aussi augmentées de ni.

5.8 Tests et illustrations des résultats - Exemple 1

5.8.1 Configuration choisie

Pour illustrer les points traités ci-dessus, on s'appuie sur l'aménagement de Logisneuf. La configuration choisie impose un système avec deux apports inconnus pris en compte par une augmentation de deux états :

– l'affluent de l'Eyrieux

– l'affluent de l'Ouvèze

et huit observations de cote ($Y_1 ... Y_8$) réparties le long de l'aménagement (Cf. FIGURE 5.2).

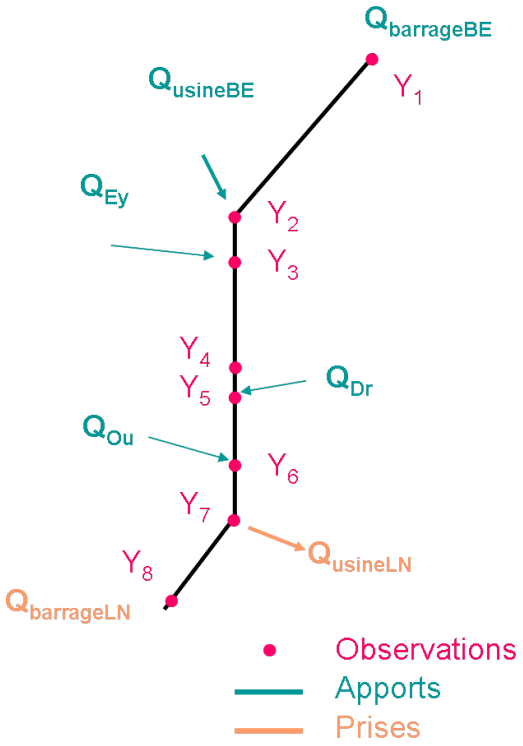


FIGURE 5.2 – Répartitions des observations le long de l'aménagement

5.8.2 Hypothèses

Les hypothèses faites pour la synthèse du modèle linéaire et du filtre de Kalman sont les suivantes :

– le pas de temps de simulation est de 300 s

– l'état initial pris en compte est nul

– l'écart type sur les mesures est $\sigma_{RZ} = 0.02\ m$

– les écarts types sur le modèle sont $\sigma_{QQ} = 2\ m^3.s^{-1}$, $\sigma_{QZ} = 0.001\ m$ et $\sigma_{Qi} = 10\ m^3.s^{-1}$ pour les états supplémentaires

5.8.3 Gain optimal

Pour traiter cet exemple, on peut considérer un gain asymptotique car les matrices du modèle sont constantes. En utilisant les données et les outils de simulation de cet exemple, on peut vérifier que la différence entre le gain asymptotique calculé après un certain nombre d'itérations (50 itérations) et le gain asymptotique optimal issu de l'équation de Riccati sont presque identiques. On voit graphiquement sur la FIGURE 5.3 que la norme de la différence entre ces deux gains converge rapidement vers 0, soit en moins de 20 itérations. Cette différence devient négligeable (c'est à dire inférieure à la précision numérique, 10^{-5}) au bout de 45 itérations.

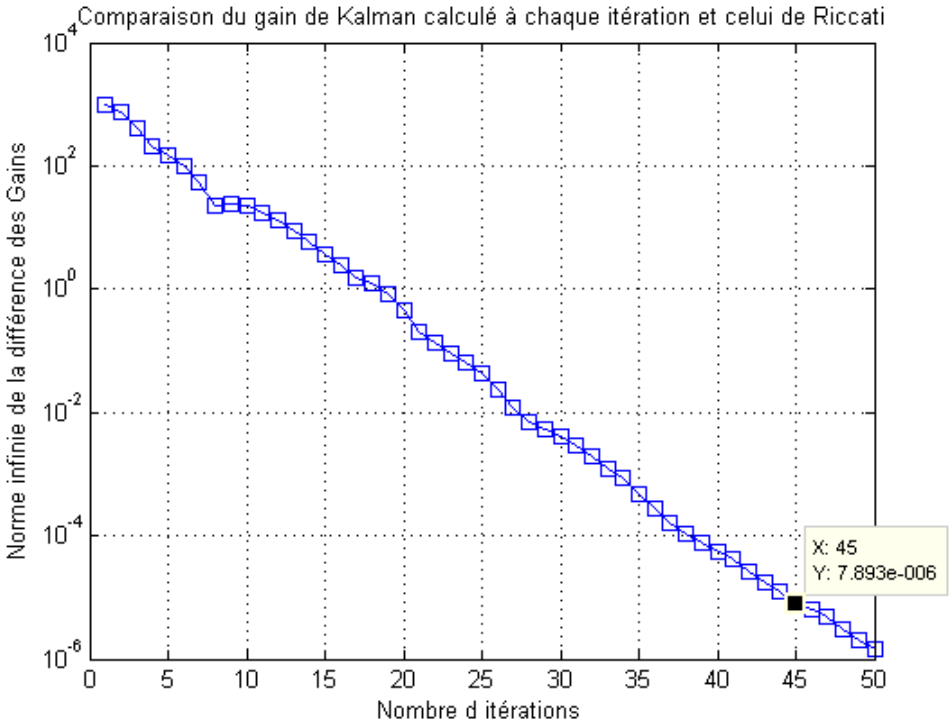


FIGURE 5.3 – Différence entre gain asymptotique par itération et par Riccati

5.8.4 Résultats de l'estimation

Les résultats obtenus en terme d'estimation sont de bonne qualité (Cf. FIGURE 5.4). Les apports imprévus aux affluents sont reconstitués bien que ceux-ci agissent simultanément. En effet, le filtre de Kalman parvient à discriminer les erreurs d'observation entre le débit à l'Eyrieux et à l'Ouvèze et les répartit correctement.

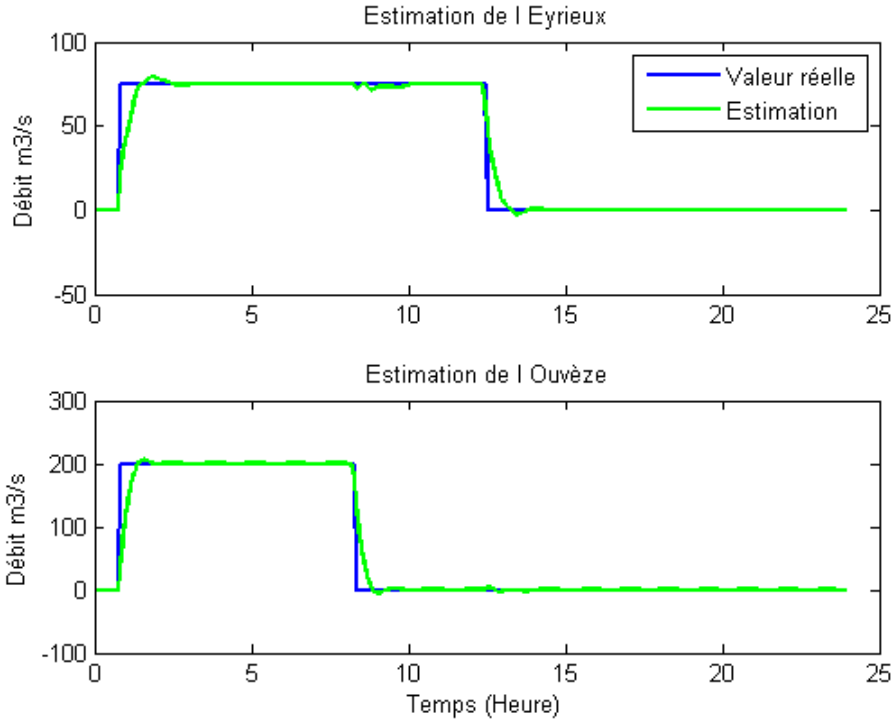


FIGURE 5.4 – Estimation de deux apports inconnus

En hydrologie, le critère de Nash-Sutcliffe (équation (5.68)) est souvent utilisé pour comparer des débits observés et des débits simulés. Ce critère exprime la différence relative entre l'erreur du modèle et l'erreur d'un modèle de référence, défini par la moyenne des débits [HPM09].

$$\text{critère de Nash} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{n}(Q_k - \hat{Q}_k)^2}{\sum_{k=1}^{n}(Q_k - \bar{Q})^2} \tag{5.68}$$

Avec :

- Q_k : débit observé à l'instant i
- $\hat{Q}_k$: débit simulé à l'instant i
- $\bar{Q}$: moyenne des observations

– n_o : nombre d'observations

Plus la valeur du critère de Nash est proche de 1, meilleure est l'accord entre la simulation et les observations. Un critère négatif signifie que le modèle considéré fournit de moins bons résultats de simulation que si on choisit comme modèle la moyenne des observations.

Pour cette étude on utilise cet outil pour comparer les débits réels (courbe bleue de la FIGURE 5.4) et les débits estimés (courbe verte de la FIGURE 5.4). Ainsi pour cet exemple 1, concernant l'estimation des apports inconnus, on a :

– pour l'Eyrieux : critère de Nash = 0.9806

– pour l'Ouvèze : critère de Nash = 0.9723

Au vu de ces résultats, il apparait que l'estimation faite par le filtre de Kalman pour déterminer les débits des apports inconnus est bonne.

5.8.5 Vérification de la convergence du filtre

Bien que l'on s'aperçoive que l'estimation faite par le filtre de Kalman est bonne (Cf. FIGURE 5.4), il est tout de même nécessaire de vérifier a posteriori la convergence du filtre par la méthode développée section 5.5.

Après une étude des valeurs propres de $(A-KCA)$, il en ressort que le rayon spectral est de 0,8343 (Cf. FIGURE 5.5), ce qui signifie que $(A-KCA)$ est Schur. Le filtre est donc convergent, mais peut-être que sa vitesse de convergence peut être optimisée. Une façon de faire est de proposer un choix de la matrice Q déterminé de façon opportuniste.

5.8.6 Choix d'une matrice Q "opportuniste"

Pour ce choix de matrice opportuniste, on a procédé à l'étude de l'influence de la matrice Q sur le rayon spectral[3] de la matrice $(A-KCA)$. Cela permet de choisir la matrice de covariance du modèle Q qui permet la meilleure convergence du filtre. Nous nous autorisons cette liberté, du fait de l'incertitude importante qui existe sur le choix de cette matrice Q, comme indiqué section 5.6. Nous avons vérifié que les valeurs ainsi calculées restent réalistes.

Après analyse de la FIGURE 5.6, on note que la convergence est la plus rapide pour la matrice $Q\text{opportuniste} = 10^1 * Q$. Cela signifie que :

– $\sigma_{QQ} = 20\ m^3.s^{-1}$

3. On appelle rayon spectral, le plus grand module des valeurs propres de la matrice considérée.

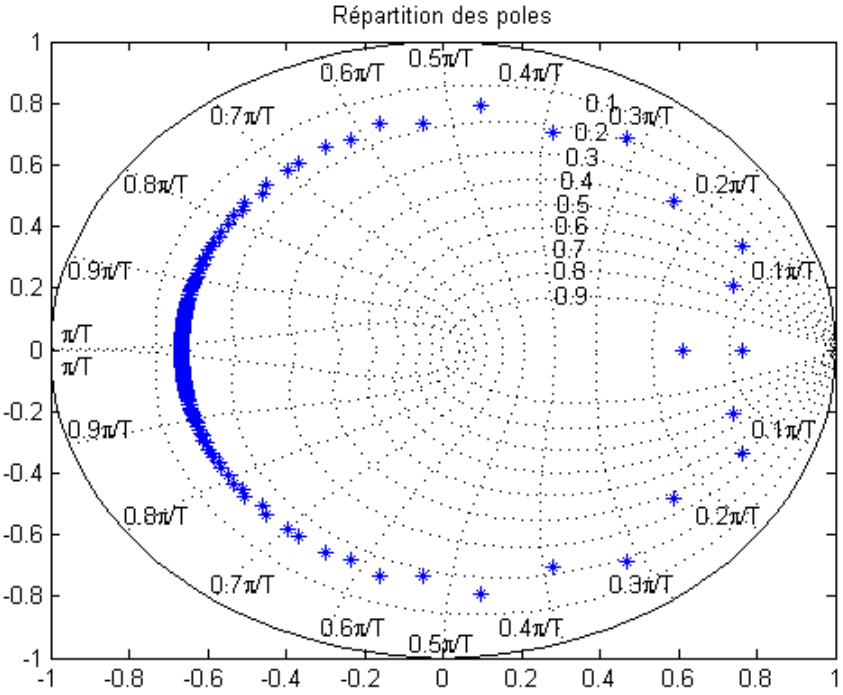


FIGURE 5.5 – Répartition des valeurs propres

– $\sigma_{QZ} = 0.01\ m$

– $\sigma_{Qi} = 100\ m^3.s^{-1}$ pour les états augmentés.

Pour ce choix de matrice, le rayon spectral de la matrice $(A - KCA)$ a une valeur absolue de 0,7822 (Cf. FIGURE 5.6 et FIGURE 5.7).

La FIGURE 5.6 est également intéressante car elle montre que pour des choix particuliers de matrices Q trop "petites", le rayon spectral de $A - KCA$ est égale à 1, ce qui indique que le filtre n'est pas convergent.

Nous avons rejoué la simulation de l'Exemple 1 avec comme matrice de covariance sur le modèle Qopportuniste. Avec cette nouvelle configuration, on voit graphiquement sur la FIGURE 5.8 que l'estimation semble meilleure. On vérifie avec le critère de Nash afin de confirmer cela :

– pour l'Eyrieux : critère de Nash = 0.9959 ce qui représente une amélioration de l'estimation de $1,53\%$

– pour l'Ouvèze : critère de Nash = 0.9924 ce qui représente une amélioration de l'estimation de $2,01\%$

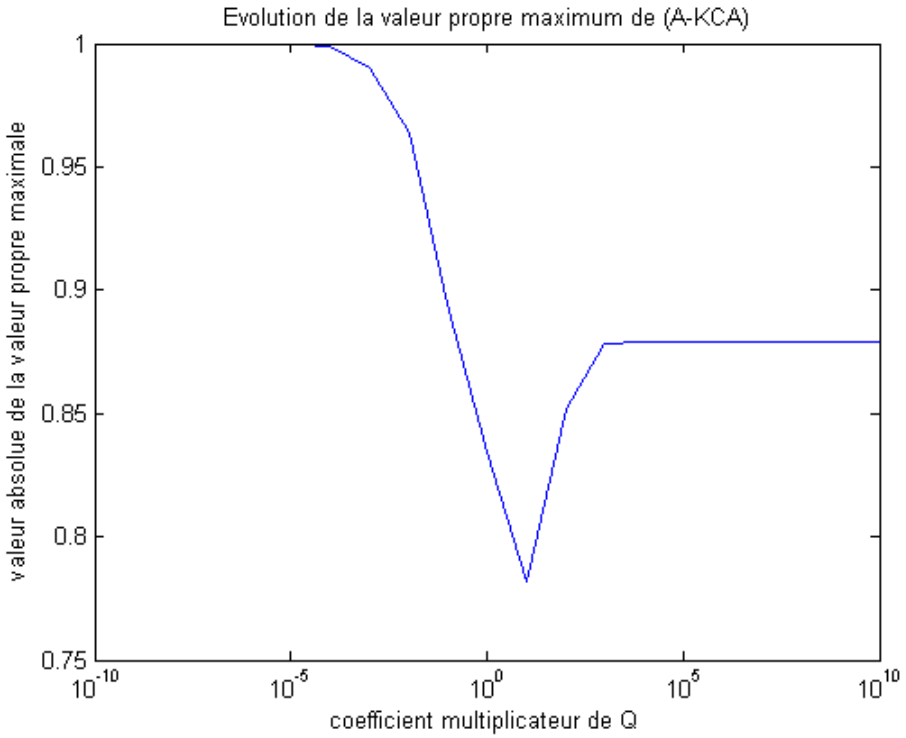


FIGURE 5.6 – Influence du choix de la matrice Q sur la convergence du filtre

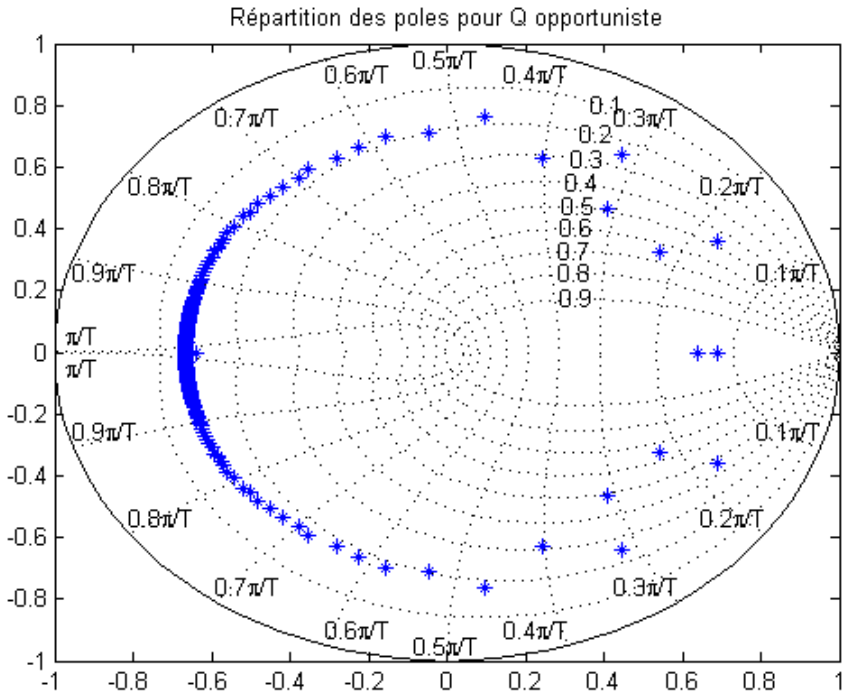


FIGURE 5.7 – Répartition des valeurs propres pour un choix de matrice Q opportuniste

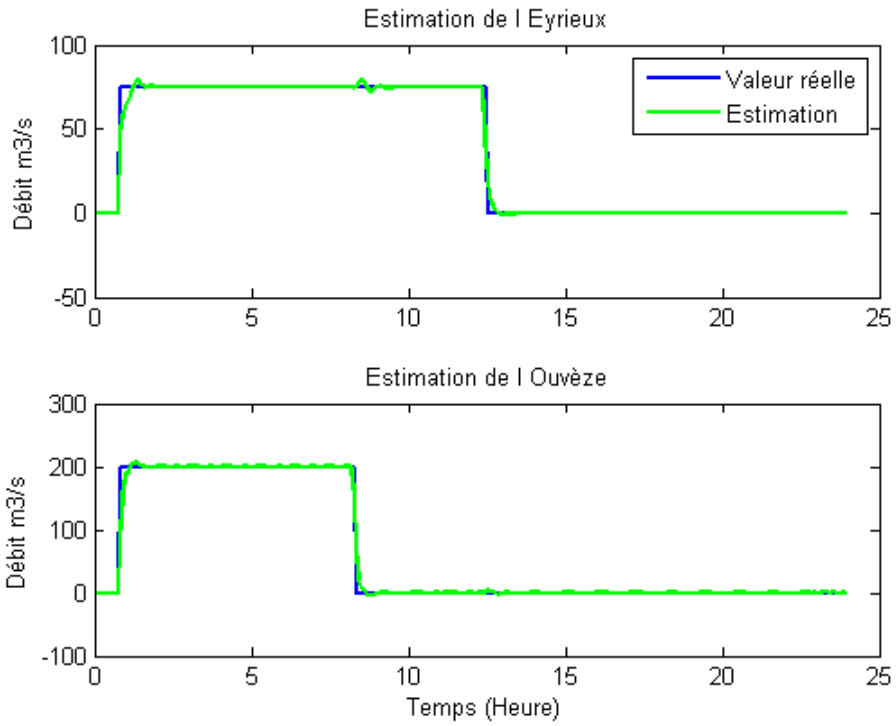


FIGURE 5.8 – Estimation de deux apports inconnus pour un choix de matrice Q opportuniste

5.9 Tests et illustrations des résultats - Exemple 2

5.9.1 Configuration choisie

Testons maintenant un cas plus difficile. Pour cet Exemple 2, on garde la configuration de l'Exemple 1 concernant le choix de la modélisation et l'arrivée des deux apports inconnus (pour les affluents de l'Eyrieux et de l'Ouvèze). Pour cet exemple, on conserve aussi les hypothèses de départ (5.8.2). En revanche on teste une configuration où il n'y a qu'une seule observation (Y1) disponible pour l'estimation (Cf. FIGURE 5.9).

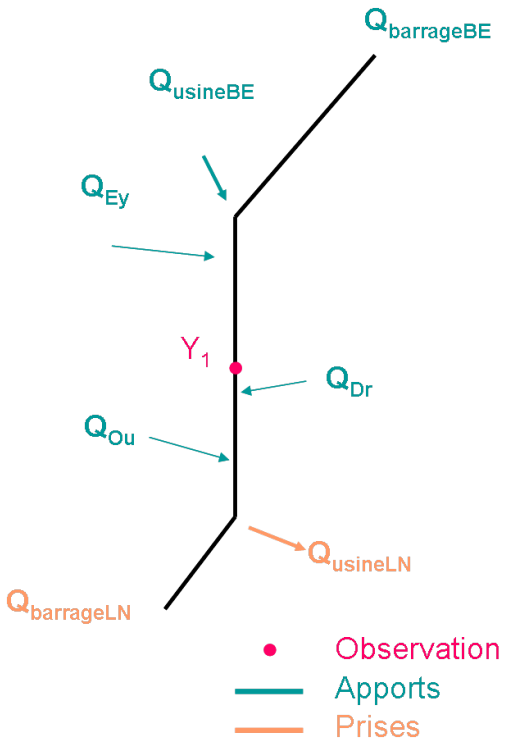


FIGURE 5.9 – Localisation de l'observation y1

5.9.2 Résultats de l'estimation

On voit sur la FIGURE 5.10 que les résultats obtenus en terme d'estimation sont de mauvaise qualité. Les apports imprévus aux affluents ne sont pas bien reconstitués. En effet, pour cet exemple, le filtre de Kalman ne parvient pas à répartir correctement les apports inconnus entre les deux affluents.

Le critère de Nash confirme la mauvaise qualité de l'estimation :

– pour l'Eyrieux : critère de Nash = 0.3880

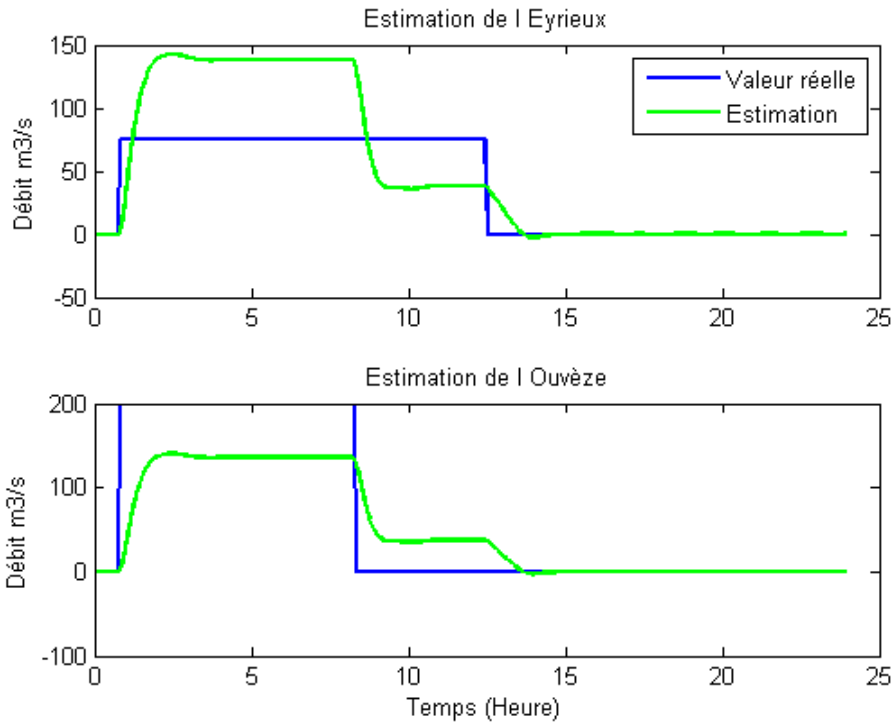


FIGURE 5.10 – Estimation de deux apports inconnus avec une observation

– pour l'Ouvèze : critère de Nash = 0.8018

5.9.3 Vérification de la convergence du filtre

Bien que l'on ait noté que l'estimation des apports inconnus est fausse, il est tout de même intéressant de vérifier a posteriori la convergence du filtre par la méthode développée section 5.5.

Le rayon spectral est égal à 1 (Cf. FIGURE 5.11), la matrice $(A - KCA)$ n'est donc pas Schur. Cela traduit une non convergence du filtre de Kalman pour la configuration de l'Exemple 2.

5.9.4 Choix d'une matrice Q "opportuniste"

On a vu précédemment que la matrice de covariance du modèle Q a une influence sur la rayon spectral de la matrice $(A - KCA)$, donc sur la convergence du filtre. On voit FIGURE 5.12 que quelque soit le choix de la matrice Q, la configuration de l'Exemple 2 ne permet pas d'avoir un filtre de Kalman convergent.

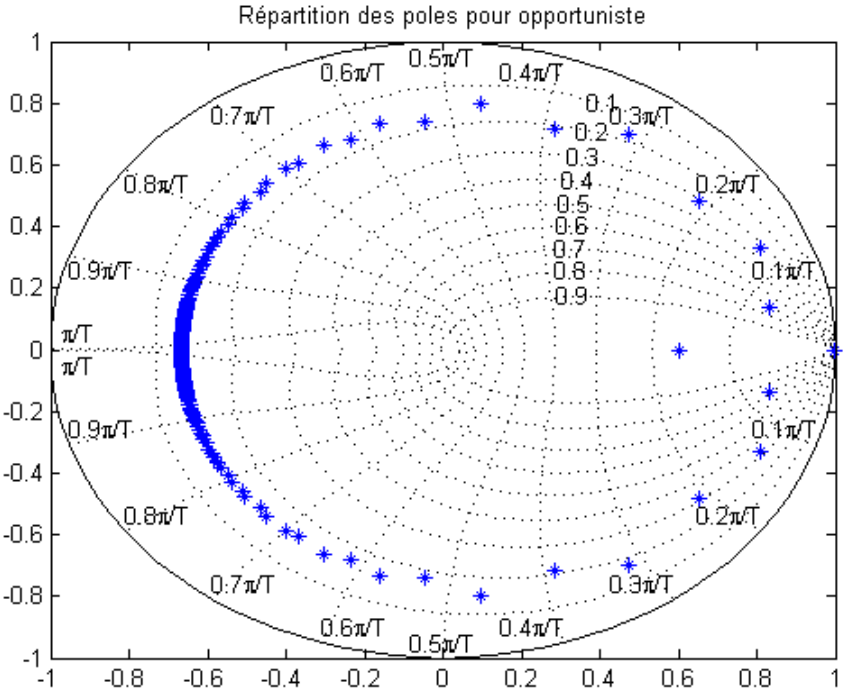


FIGURE 5.11 – Répartition des valeurs propres

5.10 Conclusion

Ce chapitre met bien en avant le fait que le filtre de Kalman n'impose aucune restriction sur la configuration du système. De ce fait, l'étude de la convergence réalisée section 5.5 est indispensable pour s'assurer du bon fonctionnement du filtre.

L'étude de la convergence du filtre de Kalman est une méthode de vérification, elle est donc utilisée a posteriori de la synthèse du filtre. Or, cette synthèse dépend des deux degrés de liberté qui sont les matrices Q et R, on étudiera donc dans le chapitre suivant s'il existe d'autres hypothèses qui permettent avant la synthèse du filtre d'assurer la convergence de celui-ci.

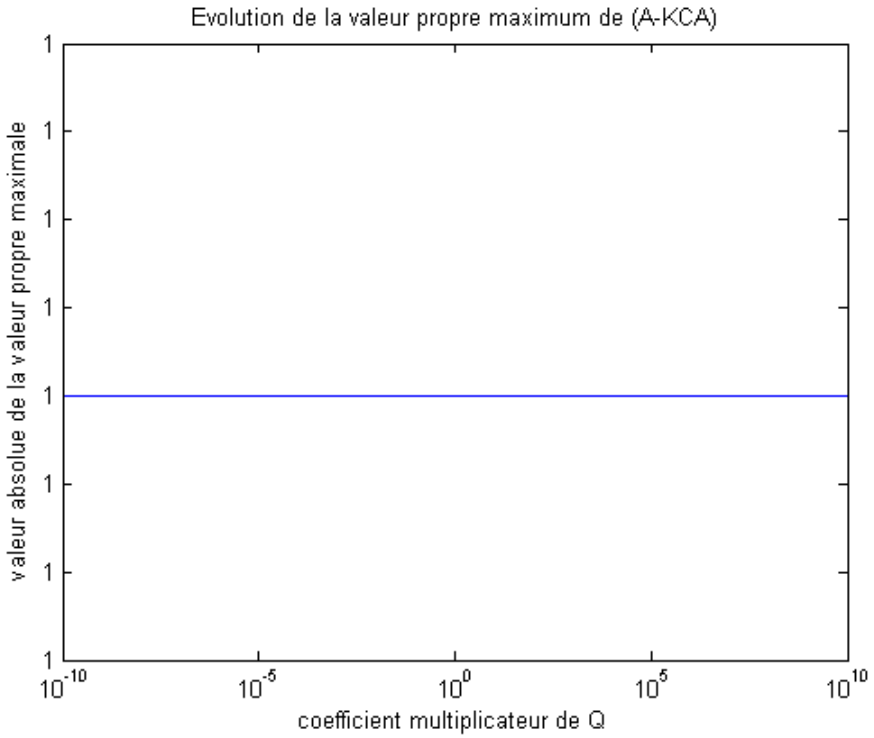


FIGURE 5.12 – Influence du choix de la matrice Q sur la convergence du filtre

Chapitre 6

Observabilité et calculs numériques

Sommaire

6.1 Introduction 118
6.2 Observabilité 120
6.3 Calcul du rang et méthode SVD 122
6.3.1 Définition du rang 122
6.3.2 Méthode SVD 122
6.3.3 Calcul du rang - Exemple 1 123
6.3.4 Calcul du rang - Exemple 2 123
6.3.5 Interprétations des résultats 124
6.4 Décomposition canonique 125
6.4.1 Principe 125
6.4.2 Algorithme utilisé par Matlab 127
6.4.3 Décomposition canonique - Exemple 1 130
6.4.4 Décomposition canonique - Exemple 2 130
6.4.5 Interprétation des résultats 130
6.5 Calcul du grammien d'observabilité 130
6.5.1 Calcul du grammien d'observabilité - Exemple 1 131
6.5.2 Calcul du grammien d'observabilité - Exemple 2 132
6.5.3 Interprétation des résultats 132
6.6 Détectabilité 132
6.6.1 Détectabilité - Exemple 1 133
6.6.2 Détectabilité - Exemple 2 133
6.6.3 Interprétation des résultats 134
6.7 Condition suffisante à la convergence 134
6.7.1 Théorème 134
6.7.2 Application 135
6.8 Conclusion 136

6.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent les raisons pour lesquelles la propriété Schur pour la matrice $(A - KCA)$ était importante. C'est en effet une propriété suffisante qui garantit la convergence du filtre de Kalman, et par conséquent une reconstruction des états (et en particulier des états augmentés). Cela signifie une espérance de l'erreur de reconstruction qui tend asymptotiquement vers zéro ($\lim_{k\to\infty} E[X_k^t - X_k^a] = 0$). Par ailleurs, nous avons vu aussi que rayon spectral de la matrice $(A - KCA)$ donne la vitesse de convergence du filtre. Mais nous avons également vu que le choix de la matrice Q (ou R) pouvait conduire, pour une même paire (A, C), à des filtres convergents ou à des filtres non convergents.

La propriété de convergence ne dépend donc pas uniquement de la paire (A, C), mais également de la matrice de gain K qui elle même dépend du choix de la paire (R, Q). Nous avons proposé de nous intéresser à un choix opportuniste de la matrice de covariance du modèle Q afin de maximiser cette vitesse de convergence. Pour rester dans la philosophie du filtre de Kalman, cette matrice Q doit cependant rester une matrice ayant une signification physique d'erreur de modèle. Mais du fait de la difficulté à estimer cette matrice de manière objective, tant que l'interprétation physique de la matrice $Q_{opportuniste}$ semble réaliste, c'est un choix potentiellement valide et intéressant.

Nous n'avons cependant aucune garantie que cela sera toujours le cas. Par ailleurs, ce calcul est potentiellement fastidieux. Enfin, cette étude de convergence se fait a posteriori du choix des matrices Q et R et de la synthèse des matrices du filtre de Kalman (équations 5.31 à 5.41).

Pour ces différentes raisons on peut évoquer le principe de synthèse des observateurs de Luenberger qui utilisent directement la matrice de gain K comme paramètre de synthèse (la matrice $(A - KCA)$ du filtre de Kalman est remplacée par la matrice $(A - KC)$ pour l'observateur de Luenberger car l'observation n'est pas utilisée au même instant). Pour ce type d'observateur, la matrice de gain K est construite de manière à optimiser ou à choisir la vitesse de convergence de cet observateur ou au minimum de garantir que celui-ci sera convergent.

Si l'objectif est de choisir les pôles de la matrice $(A - KC)$, alors on sait que la synthèse d'un tel observateur est possible si et seulement si la propriété classique de l'observabilité est vérifiée. Cette propriété sera définie section 6.2. Si l'objectif est de garantir la convergence de l'observateur, alors la propriété de détectabilité définie section 6.6 permet la synthèse d'un tel observateur. Ainsi une propriété intrinsèque de la paire (A,C) permet de garantir qu'il sera possible de synthétiser un observateur ayant les caractéristiques souhaitées.

L'objet de ce chapitre est d'étudier les liens qui existent entre ces notions d'observabilité/détectabilité, et la propriété de convergence du Filtre de Kalman. Ce que nous

avons observé au chapitre précédent, c'est que la synthèse du filtre de Kalman n'a nécessité à aucun moment de vérifier une quelconque propriété d'observabilité/détectabilité. Par contre, nous verrons dans ce chapitre que la propriété de convergence dépendra de la combinaison :

- du nombre et de l'emplacement des observations (déterminant la matrice C et de ce fait l'observabilité/détectabilité de la paire (A, C))

- du choix des matrices R et Q de synthèse du filtre (avec une condition suffisante garantissant la convergence)

Nous verrons dans la section 6.2 que l'observabilité ainsi que la détectabilité sont, du fait de leur définition, théoriquement traitées de façon binaire ([BUH83], [LAR96]). Les divers critères de détermination disponibles sont tous basés sur le calcul du rang d'une matrice. Nous présenterons trois de ces méthodes :

- le calcul du rang exposé section 6.3

- la décomposition canonique exposée section 6.4

- le calcul du Grammien exposé section 6.5

La section 6.3 montrera que le calcul de l'observabilité nécessite l'usage d'outils analytiques rigoureux mais qui dépendent beaucoup (lors des applications numériques) de la précision machine disponible.

Nous verrons dans la section (6.4) comment dissocier la partie observable de celle qui ne l'est pas. Cela permettra d'introduire les notions de détectabilité définies dans la section 6.6.

La méthode du Grammien décrite section 6.5 offre la possibilité, dans les cas observables, de quantifier cette observabilité et de ce fait de comparer diverses configurations (ex. : nombre et emplacement des observations) ([STA02], [SHC09]). Ce critère ne dépend que de la paire (A, C).

6.2 Observabilité

Soit le modèle linéaire support de cette étude :

$$\begin{cases} X_{k+1} &= AX_k + BU_k \\ Y_k &= CX_k \end{cases} \tag{6.1}$$

Avec :

- $X_k \in \mathbb{R}^{nx}$: vecteur d'état à l'instant k
- $A \in \mathcal{M}_{nx,nx}(\mathbb{R})$: matrice dynamique invariante
- $B \in \mathcal{M}_{nx,nu}(\mathbb{R})$: matrice de contrôle invariante
- $U_k \in \mathbb{R}^{nu}$: vecteur de commande à l'instant k
- $Y_k \in \mathbb{R}^{ny}$: vecteur des sorties observées à l'instant k
- $C \in \mathcal{M}_{ny,nx}(\mathbb{R})$: matrice d'observation invariante

Définition de l'observabilité
Un système est dit "à état entièrement observable" si, par observation des entrées et sorties pour un nombre fini de période d'échantillonnage k, on peut déterminer l'état initial du système.

Dans le cas discret, la relation liant l'entrée, l'état initial et la sortie peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} X_0 + \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \cdots & CB \\ \vdots & & \cdots & \cdots & CAB \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & CB & CAB & & CA^{k-2}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{k-1} \\ U_{k-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_0 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Avec :

- Le vecteur des sorties $Y_s \in \mathbb{R}^{k \times ny}$:

$$\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{k-1} \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

– La matrice d'observabilité $O \in \mathcal{M}_{k\times ny,nx}(\mathbb{R})$:

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

– La matrice $G_s \in \mathcal{M}_{k\times ny,k\times nu}(\mathbb{R})$:

$$G_s = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \cdots & CB \\ \vdots & & \cdots & \cdots & CAB \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & CB & CAB & & CA^{k-2}B \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

– Le vecteur de commande $U_s \in \mathbb{R}^{k\times nu}$

$$U_s = \begin{pmatrix} U_{k-1} \\ U_{k-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_0 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

Ainsi l'équation (6.2) devient :

$$Y_s = OX_0 + G_sU_s \tag{6.7}$$

Dans le cas d'un système observable, le rang de la matrice O est par définition plein, c'est à dire $Rang(O) = nx$ (aussi appelé "critère de Kalman"). De ce fait, il existe $O_n \in \mathcal{M}_{nx,nx}(\mathbb{R})$ une sous-matrice de O inversible. L'équation (6.7) devient :

$$\begin{bmatrix} Y_{sn} \\ Y_{se} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_n \\ O_e \end{bmatrix} X_0 + \begin{bmatrix} G_{sn} \\ G_{se} \end{bmatrix} U_s \tag{6.8}$$

On obtient ainsi la valeur initiale du vecteur d'état X_0 par :

$$X_0 = O_n^{-1}(Y_{sn} - G_{sn}U_s) \tag{6.9}$$

REMARQUE : Le critère de Kalman a un grand intérêt théorique et permet de comprendre un peu mieux cette notion fondamentale qu'est l'observabilité. Cependant, lorsqu'il n'est pas satisfait c'est à dire ($Rang(O) < nx$) ou ($Rang(O_n) < nx$), il ne donne aucune information sur les composantes du vecteur d'état qui sont observables.

6.3 Calcul du rang et méthode SVD

La définition de l'observabilité repose sur le calcul du rang d'une matrice. Cette notion est détaillée dans cette partie. Puis les outils mathématiques et numériques utilisés pour cette opération seront présentés.

6.3.1 Définition du rang

En algèbre linéaire, le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du sous-espace vectoriel engendrée par cette famille.

Par exemple, pour une famille de vecteurs linéairement indépendants, son rang est le nombre de vecteurs. Cela signifie que le rang d'une matrice O, noté $Rang(O)$, est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

Numériquement, le calcul du rang d'une matrice est effectué par la méthode de Gauss-Jordan ou bien en calculant la SVD (Singular Value Decomposition) de la matrice. Le logiciel Matlab utilisé pour ce travail de thèse utilise le calcul de la SVD, c'est pourquoi uniquement cette méthode est présentée par la suite.

6.3.2 Méthode SVD

Si on suppose $nx \geq r$, la SVD de la matrice O est :

$$O = USV^H \tag{6.10}$$

Avec :

$$U^H U = UU^H = V^H V = VV^H = Id \tag{6.11}$$

et

$$S = diag(\sigma_1, ..., \sigma_r, 0, ..., 0) \tag{6.12}$$

Les notations signifient :

- ^{H} : transposée complexe conjuguée, cette notation peut être remplacée par ^{T} (la transposée) si O est réelle
- σ_i : (i allant de 1 à r), scalaires représentant les valeurs singulières de O classées de façon décroissante ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r \geq 0$)
- $V \in \mathcal{M}_{nx,nx}(\mathbb{R})$: matrice unitaire (ou orthogonale si O est réelle) constituée des vecteurs singuliers de droites (ie $OV = \sigma V$)

– U$\in \mathcal{M}_{k\times ny,k\times ny}(\mathbb{R})$: matrice unitaire (ou orthogonale si O est réelle) dont les colonnes sont les vecteurs singuliers de gauches de O (ie $UO = \sigma U$)

Numériquement, $Rang(O_n)$ est déterminé par le nombre de σ_i supérieurs à la tolérance imposée par l'ordinateur. Si on utilise le logiciel Matlab, la tolérance imposée par défaut est :

$$tol = max((k \times ny), nx) \times \epsilon \times (max(S)) \tag{6.13}$$

Avec $\epsilon = 2.2204e - 016$.

REMARQUE : Lors des applications réelles, la recherche du rang d'une matrice est une opération numérique délicate, qui s'achève toujours par la décision de considérer qu'un certain résidu est nul lorsqu'il est suffisamment petit [LAR96].

6.3.3 Calcul du rang - Exemple 1

Pour l'aménagement de Logis-neuf, on rappelle que l'Exemple 1 contient les hypothèses suivantes :

– modèle linéaire synthétisé pour la plage de débit de 1700 m^3s^{-1} présenté chapitre 4

– le pas de temps considéré pour la discrétisation est de 300 s

– l'ordre du système est $nx = 297$ avec 2 états augmentés (pour les apports inconnus : affluent de l'Eyrieux et affluent de l'Ouvèze)

– le nombre d'observations est $ny = 8$

Dans ce cas de figure, Matlab calcule une matrice d'observation O tel que $Rang(O) = 138$, cela signifie que le rang de la matrice d'observabilité n'est pas plein, il existerait donc pour ce cas 159 états non observables en considérant la tolérance suivante :
$tol = 1.0552e - 012$.

On voit FIGURE (6.2) que les valeurs singulières de O sont toutes strictement positives mais seules 138 sont supérieures à la tolérance.

6.3.4 Calcul du rang - Exemple 2

Pour l'aménagement de Logis-neuf, l'exemple 2 contient les hypothèses suivantes :

– modèle linéaire synthétisé pour la plage de débit de 1700 m^3s^{-1} présenté chapitre 4

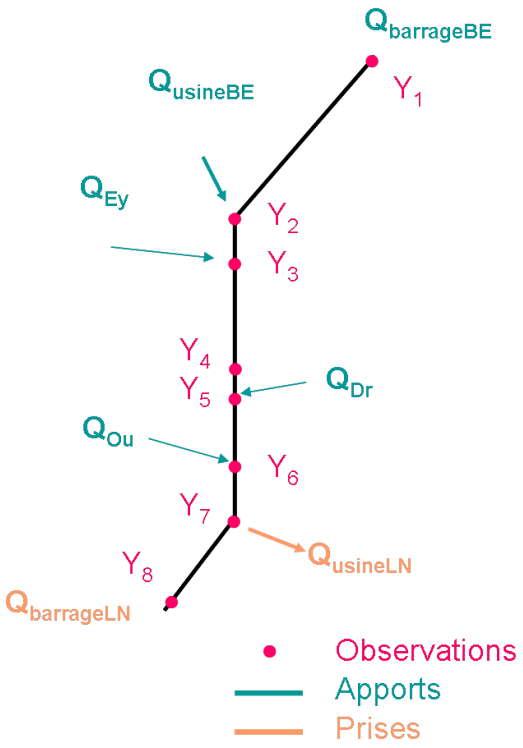


FIGURE 6.1 – Répartition des observations pour l'exemple 1

- le pas de temps considéré pour la discrétisation est de 300 s
- l'ordre du système est $nx = 297$ avec 2 états augmentés (pour les apports inconnus : affluent de l'Eyrieux et affluent de l'Ouvèze)
- le nombre d'observations est $ny = 1$

Pour cet exemple, Matlab calcule une matrice d'observation O tel que $Rang(O) = 51$, cela signifie que le rang de la matrice d'observabilité n'est pas plein, il existerait donc 246 états non observables en considérant la tolérance suivante :
$tol = 6.5947e - 014$.

Comme pour l'Exemple 1, graphiquement (Cf. FIGURE (6.4)), on s'aperçoit que toutes les valeurs singulières de O sont strictement positives et que 246 d'entre elles sont inférieures à la tolérance.

6.3.5 Interprétations des résultats

Cette comparaison de configuration confirme que le nombre d'observations joue un rôle dans l'observabilité car plus il a de mesures, plus il y a d'états "facilement" observables.
Au vu de ces tests, Matlab considère que ces deux exemples de configuration ne sont

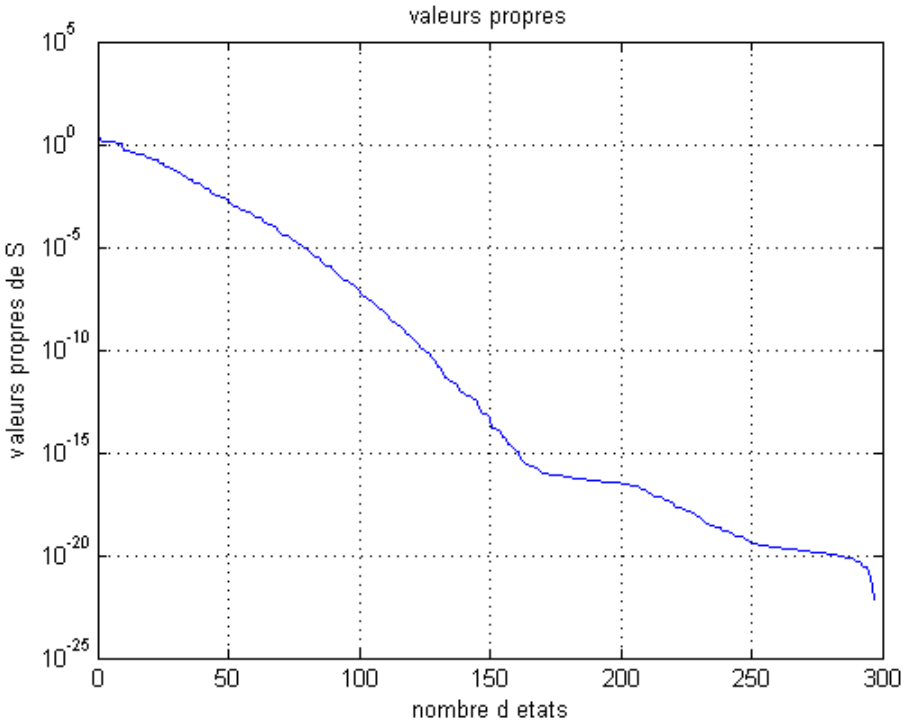


FIGURE 6.2 – Valeurs singulières pour l'exemple 1

pas complètement observables. Même si le nombre d'états non observables est différent entre ces deux exemples, il n'existe pas à ce stade de critère discriminant ces deux situations de manière binaire. Cependant comme ces résultats dépendent d'une tolérance, l'observabilité de ces systèmes mérite d'être testée par d'autres méthodes afin de voir si les résultats obtenus sont identiques.
Nous avons cependant vu au chapitre 5 que ces deux cas étaient très différents puisque dans un cas il était possible de synthétiser un filtre convergent pour une large gamme de matrices Q, alors que dans l'autre cas, cela semblait impossible.

6.4 Décomposition canonique

6.4.1 Principe

Le sous espace non observable du système est l'espace nul de la matrice d'observation O, cela se traduit par un rang non plein de O, soit $Rang(O) = r$ et $r < nx$. Dans ce cas, il existe une transformation orthogonale $\bar{T}$, tel que :

$$\bar{X} = \bar{T}X = \begin{pmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

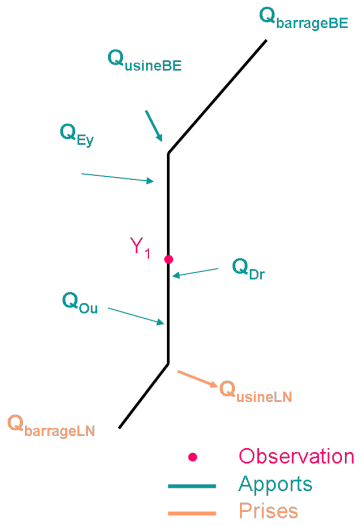


FIGURE 6.3 – Répartition des observations pour l'exemple 2

où :

$$dim(\bar{X_1}) = r$$
$$dim(\bar{X_2}) = nx - r$$

Cela implique :

$$O\bar{T}^T = \begin{pmatrix} C\bar{T}^T \\ C\bar{T}^T\bar{T}A\bar{T}^T \\ C\bar{T}^T(\bar{T}A\bar{T}^T)^2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ C\bar{T}^T(\bar{T}A\bar{T}^T)^{nx-1} \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

$$\bar{A} = \bar{T}A\bar{T}^T = \begin{pmatrix} \bar{A_{11}} & 0 \\ \bar{A_{21}} & \bar{A_{22}} \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

$$\bar{C} = C\bar{T}^T = \begin{pmatrix} \bar{C_1} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

Ainsi à partir d'un système non entièrement observable, il est possible d'obtenir un sous-système S1 entièrement observable $[\bar{A_{11}}, \bar{C_1}]$ et un sous-système S2 non observable $[(\bar{A_{21}}, \bar{A_{22}}), 0]$ (Cf. FIGURE 6.5).

Il existe plusieurs formes canoniques capables de séparer la partie observable de la partie non observable d'un système linéaire dont "la décomposition canonique d'observateur" (Cf. [BUH83]). Dans la section 6.4.2 sera expliquée celle qui est réalisée par le logiciel MatLab.

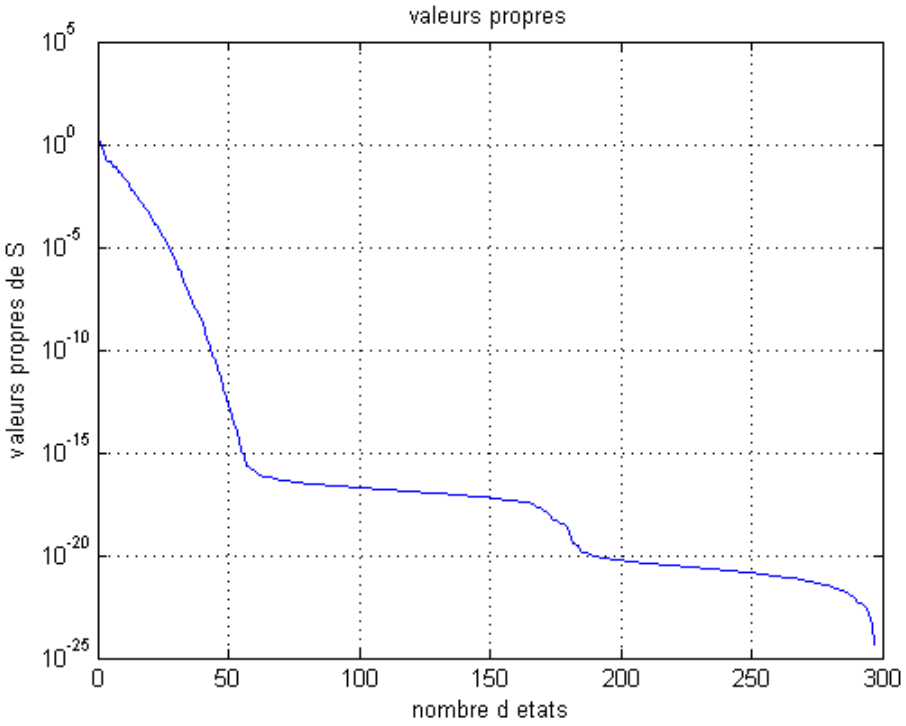


FIGURE 6.4 – Valeurssingulières pour l'exemple 2

6.4.2 Algorithme utilisé par Matlab

Pour calculer la forme canonique de l'observation, MatLab utilise l'algorithme du calcul de la forme canonique de la contrôlabilité (fonction *ctrbf*). Comme observabilité et commandabilité sont deux concepts duaux, alors une simple adaptation du code suffit. Pour calculer la forme canonique de contrôlabilité, MatLab procède à des itérations. La matrice de transformation T change à chaque itération j de la façon suivante :

Pour j = 1
Par la méthode SVD (Singular Value Decomposition), on obtient :

- U_1, la matrice des vecteurs propres de gauche de B
- V_1, la matrice des vecteurs propres de droites de B
- S_1, la matrice des valeurs singulières de B

On obtient ainsi r_1, le rang de la matrice B (le nombre d'états contrôlables) et donc p_1, le nombre d'états non contrôlables.
$abxy = U_1^T A U_1$ De nouvelles matrices a_1 et b_1 sont construites dans la nouvelles base de la manière suivante :

FIGURE 6.5 – Système décomposé selon l'observabilité

$U_1 = U_1 \times rot90$ [1](Id)

$$abxy = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ \times & \times \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

Avec :

- $a_1 \in \mathcal{M}_{p_1,p_1}(\mathbb{R})$.
- $b_1 \in \mathcal{M}_{p_1,r_1}(\mathbb{R})$.

La matrice de transformation est $P_1 = U_1$

Pour j = 2
Par la méthode SVD (Singular Value Decomposition), on obtient :

- U_2, la matrice des vecteurs propres de gauche de $U_1^T a_1 U_1$
- V_2, la matrice des vecteurs propres de droites de $U_1^T a_1 U_1$
- S_2, la matrice des valeurs singulières de $U_1^T a_1 U_1$

On obtient ainsi r_2, le rang de la matrice $U_1^T a_1 U_1$, soit le nombre d'états contrôlables et p_2, le nombre d'états non contrôlables.
De nouvelles matrices a_2 et b_2 sont construites dans la nouvelles base de la manière suivante :
$U_2 = U_2 \times rot90(Id)$

$$abxy = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ \times & \times \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

Avec :

1. La fonction $rot90$ de Matlab permet de faire pivoter une matrice de 90 degrés.

– $a_2 \in \mathcal{M}_{p_2,p_2}(\mathbb{R})$.

– $b_2 \in \mathcal{M}_{p_2,r_2}(\mathbb{R})$.

$$P = P_1 \times \begin{bmatrix} U_2 & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

La matrice identité est de dimension $r_1 \times r_1$.

A chaque itération j (pour j = 1...nx)
La taille de la matrice Uj diminue son nombre de lignes (nj) et de colonnes (mj) tel que :

$$\begin{aligned} n_j &= n_{j\text{précédent}} - r_j \\ m_j &= m_{j\text{précédent}} - r_j \end{aligned} \tag{6.21}$$

et

$$P_j = P_{j\text{précédent}} \times \begin{bmatrix} U_j & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

Au final, on obtient pour la forme canonique de contrôlabilité :

– la matrice de transformation $\bar{T} = P^T$

– $\bar{A}_{\text{commandabilité}} = \bar{T} * A * \bar{T}^T$

– $\bar{B}_{\text{commandabilité}} = \bar{T} * B$

– $\bar{C}_{\text{commandabilité}} = C * \bar{T}^T$

Et la somme des rangs $r_1, r_2, ..., r_{nx}$ donne le rang de la matrice de contrôlabilité.

L'objectif de cette étude est de connaitre la manière de faire du logiciel Matlab pour calculer la forme canonique de l'observabilité. Comme il a déjà été dit précédemment, contrôlabilité et observabilité sont deux concepts duaux, il suffit de remplacer A dans l'algorithme par A^T, B par C^T et C par B^T.
Ainsi on obtient :

– la matrice de transformation $\bar{T} = P^T$

– $\bar{A}_{\text{observabilité}} = \bar{A}^T_{\text{commandabilité}}$

– $\bar{B}_{\text{observabilité}} = \bar{C}^T_{\text{commandabilité}}$

– $\bar{C}_{\text{observabilité}} = \bar{B}^T_{\text{commandabilité}}$

6.4.3 Décomposition canonique - Exemple 1

Pour l'Exemple 1, la somme des rangs calculée par la méthode expliquée ci-dessus donne $r_1+r_2+...+r_{38} = nx$ ce qui signifie que normalement ce système est complètement observable et la matrice de transformation $\bar{T}$ est calculée en 38 itérations. Pour ces calculs on rappelle que la tolérance est :
$tol = 1.0552e-012$.

6.4.4 Décomposition canonique - Exemple 2

Pour l'Exemple 2, la somme des rangs donne $r_1+r_2+...+r_{297} = nx$ ce qui signifie que normalement ce système est complètement observable et la matrice de transformation $\bar{T}$ est calculée en 297 itérations pour une tolérance de :
$tol = 6.5947e-014$.

6.4.5 Interprétation des résultats

Une fois de plus, les tests sur ces deux exemples ont mis en avant le fait que, plus le système dispose d'observations, plus celui-ci est facilement observable (nous observons moins d'itérations pour l'Exemple 1 que pour l'exemple 2). Ce test de l'observabilité fournit des résultats contraires à ceux donnés par le calcul du critère de Kalman. Cette contradiction nécessite de réaliser un autre test afin de voir s'il est possible d'établir la complète observabilité ou non de ces systèmes.

6.5 Calcul du grammien d'observabilité

Une condition nécessaire et suffisante supplémentaire pour déterminer si un système est observable passe par le calcul du grammien d'observabilité :

$$\text{La paire (A,C) est observable} \iff Go = \sum_{k=0}^{nx-1} = (A^T)^k C^T C A^k \text{est défini positif} \tag{6.23}$$

Dans les cas observables, l'étude du grammien d'observation (noté Go) donne la possibilité de comparer a priori la qualité de l'estimation pour différentes configurations (nombre et emplacement des observations). En effet, chacune des valeurs propres (λ_i, $i = 1...nx$) de Go donne un degré d'observabilité au vecteurs propres associés (V_i, $i = 1...n$). L'ensemble observable est un ellipsoïde dont les axes sont donnés par $1/\sqrt{\lambda_i}V_i$. Une direction non-observable correspond à un axe de longueur infinie.
Lors de la comparaison de plusieurs configurations de systèmes (soit des systèmes avec les matrices A, B identiques, et C différentes selon le nombre et l'emplacement des mesures), on calcule le critère $\rho = 1/\sqrt{\lambda_{min}}$. Plus ρ est petit, meilleure est l'estimation, [STA02], [SHC09].

REMARQUE : Cette façon de faire est sujette aux erreurs numériques. Plus précisément, les valeurs propres minimales du grammien d'observabilité peuvent être entachées d'erreurs numériques lorsque le conditionnement (c'est à dire la différence entre la plus forte valeur propre et la plus faible valeur propre) de la matrice Go est de mauvaise qualité.

6.5.1 Calcul du grammien d'observabilité - Exemple 1

Pour cet exemple, on voit FIGURE 6.6 que les valeurs propres du grammien sont toutes réelles positives. Cela signifie que le grammien Go est une matrice définie positive. Cependant, le calcul du déterminant ($det(Go) = 0$) en considérant la tolérance ($tol = 2.6379e - 013$) conclut à une matrice Go non définie positive car non inversible. Puisque les valeurs propres de Go sont toutes positives, il est possible de calculer le critère $\rho_1 = 1.3637e + 013$.

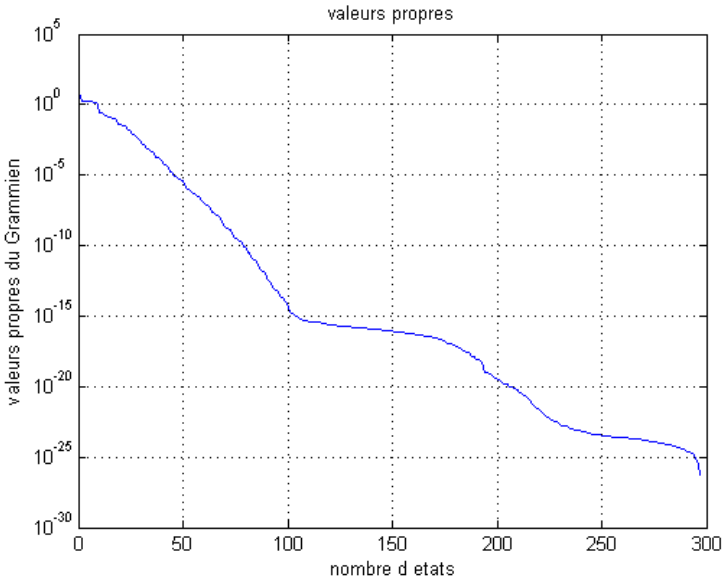


FIGURE 6.6 – Valeurs propres de Go pour l'exemple 1

6.5.2 Calcul du grammien d'observabilité - Exemple 2

Pour cet exemple aussi, les valeurs propres du grammien sont toutes réelles positives. Cela signifie que le grammien Go est une matrice définie positive. Cependant, encore une fois, le calcul du déterminant donne $det(Go) = 0$ pour la tolérance $tol = 6.5947e-014$. Puisque les valeurs propres de Go sont toutes positives, il est possible de calculer le critère $\rho_2 = 0.7909e+014$

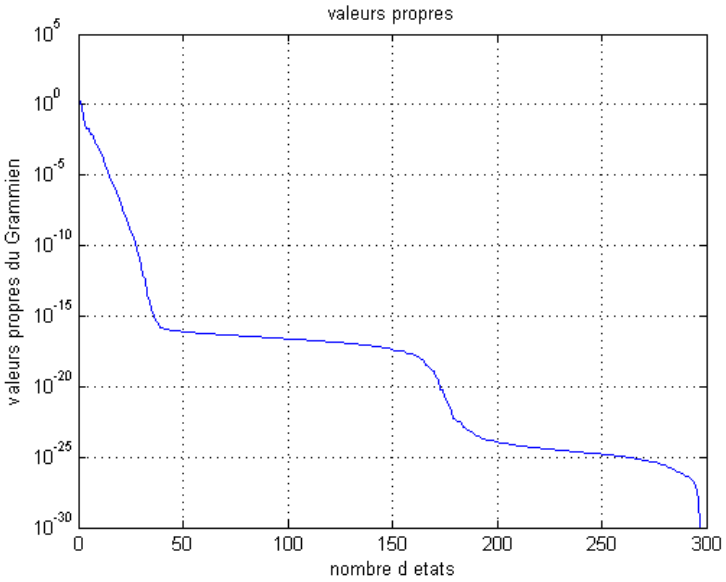


FIGURE 6.7 – Valeurs propres de Go pour l'exemple 2

6.5.3 Interprétation des résultats

Une fois de plus, nous voyons que cette méthode ne permet pas non plus de trancher de manière binaire entre l'Exemple 1 et l'Exemple 2. Cependant, au vu des valeurs ρ_1 et ρ_2 il est possible de dire que la qualité de l'estimation sera meilleure avec le système de l'Exemple 1 plutôt qu'avec celui de l'Exemple 2. Ce dernier résultat confirme les précédentes analyses faites sur la convergence des filtres de Kalman correspondants. Nous avons vu que ce comportement n'était pas étranger au choix de la matrice Q (en tout cas pour l'exemple 1), mais on peut continuer à se poser la question d'une raison liée intrinsèquement à la paire (A, C).

6.6 Détectabilité

La séparation faite entre partie observable et partie non observable par la décomposition canonique d'observabilité permet d'introduire la notion de détectabilité, qui est

une propriété moins forte que l'observabilité. Cependant cela suffit pour construire un estimateur d'état. La détectabilité peut se définir de plusieurs façons équivalentes, un système est dit détectable si et seulement si :

- Les valeurs propres de la partie non observable de la matrice dynamique sont stables [2] ([LAR96], [KS72]).

- Il existe une matrice de gain K tel que la matrice [3] $(A - KCA)$ soit Schur .

Dans le chapitre 5, on a vu qu'il existe pour l'Exemple 1 plusieurs paires (Q, R) (donc plusieurs matrices de gain) qui permettent d'obtenir une matrice $(A - KCA)$ Schur. En revanche, l'Exemple 2, n'offrait pas la possibilité d'avoir une paire (Q, R) (avec $Q = \lambda Q_0$) qui permet d'avoir $(A - KCA)$ Schur (mais on ne sait pas si cela est impossible). Ce qui pourrait signifier, si cela était vrai $\forall K$, que l'exemple 2 ne s'appuie pas sur un système détectable. Voyons si la décomposition canonique faite par Matlab confirme ces résultats. Pour ces tests, on impose une tolérance réaliste, soit :
$tol = 10^{-6}$

6.6.1 Détectabilité - Exemple 1

Selon le calcul du critère de Kalman (défini section 6.3.3) réalisé par Matlab, avec la tolérance réaliste ($tol = 10^{-6}$), il y a 208 états non observables (Cf. FIGGURE 6.2). En utilisant la décomposition canonique de l'observabilité décrite section 6.4.2, il est possible d'isoler la partie non observable et d'étudier l'emplacement des valeurs propres de cette partie afin de voir si celles-ci sont stables.

On voit FIGURE 6.8 que les valeurs propres de la partie non observable sont toutes de modules inférieurs à 1, ce qui confirme que le système de l'exemple 1 est bien détectable (le rayon spectral est de 0.7695).

6.6.2 Détectabilité - Exemple 2

Pour cet exemple, si on considère $tol = 10^{-6}$, alors le calcul du critère de Kalman indique qu'il y a 267 états non observables (Cf. FIGURE 6.4). En utilisant la décomposition canonique de l'observabilité décrite section 6.4.2, on isole la partie non observable on étudie l'emplacement des valeurs propres afin de voir si celles-ci sont stables.

On voit FIGURE (6.9) et FIGURE (6.10) qu'il existe des valeurs propres en limite de stabilité ce qui signifie que le système de l'exemple 2 n'est pas détectable.

2. Une condition nécessaire et suffisante à la stabilité des valeurs propres non observables est que ceux-ci soient de module strictement inférieur à 1.

3. Classiquement, il s'agit de la matrice $A - KC$, mais par le théorème de Cayley Hamilton, on peut montrer que cela est valable aussi pour la matrice $A - KCA$.

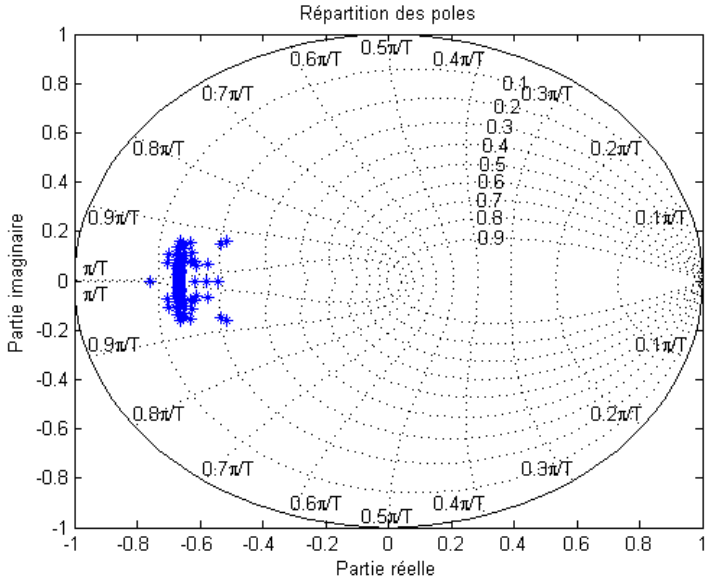


FIGURE 6.8 – Répartition des valeurs propres non observables pour l'exemple 1

6.6.3 Interprétation des résultats

Le résultat concernant la détéctabilité obtenu sur l'Exemple 1 et son lien avec l'existence d'une matrice K tel que $A - KCA$ soit Schur est donc confirmé. En effet, nous avons trouvé un ensemble de matrice (Q, R) qui conduit à une matrice de gain K procurant la propriété de convergence.

Pour les systèmes non détectables (comme le cas de l'Exemple 2), il n'existe pas matrice K tel que $A-KCA$ soit Schur et donc pas de paire (Q, R) (Cf. FIGURE 5.12) qui permette à la méthode d'assimilation de données de type filtre de Kalman de converger.

Pour un observateur d'état de type Luenberger, cette propriété de détectabilité serait suffisante (si l'on est capable de construire le gain K). Mais pour un filtre de Kalman, nous recherchons une propriété sur la paire (Q, R) qui sont nos paramètres de synthèse et non directement sur le gain K, qui dépend certes de (Q, R) via les équations du filtre de Kalman, mais sur lequel on n'a pas de maitrise directe. C'est le théorème suivant qui clarifie ce lien.

6.7 Condition suffisante à la convergence

6.7.1 Théorème

Pour les régimes stationnaires, on a le théorème fondamental suivant ([LAR96]) :

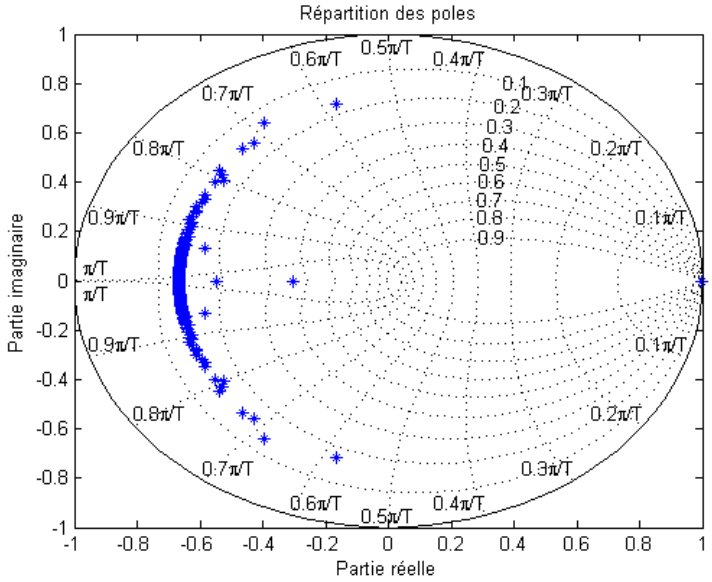


FIGURE 6.9 – Répartition des valeurs propres non observables pour l'exemple 2

– Soit une paire (A, C) détectable.

– Soit une matrice Q, factorisable en $Q = \Gamma\Gamma^T$, telle que la paire (A, Γ) soit stabilisable [a].

– Soit une matrice R définie positive.

Alors l'équation algébrique de Riccati 5.40 possède une et une seule solution positive P^b et la matrice $(A-KC)$ où $K = P^a C^T R^{-1}$, est une matrice de stabilité asymptotique.

a. Un système est stabilisable lorsque la partie non commandable (si elle existe) est stable. La stabilisabilité et la détectabilité sont deux concepts duaux.

Cet ensemble de conditions suffit à permettre une synthèse de filtre de Kalman dont on est sûr qu'il sera convergent et donc dont l'erreur d'estimation tendra asymptotiquement vers une erreur d'estimation de moyenne nulle. La convergence dépend donc de la détectabilité et d'un choix de matrice (Q,R).

6.7.2 Application

En d'autres termes, pour les systèmes stationnaires détectables, comme la matrice R est toujours positive, il s'agit d'imposer une matrice Q telle que la paire (A, Γ) (avec $Q = \Gamma\Gamma^T$) soit stabilisable.

On choisit donc d'étudier la stabilisabilitéé de (A, Γ) pour une variation de Γ.

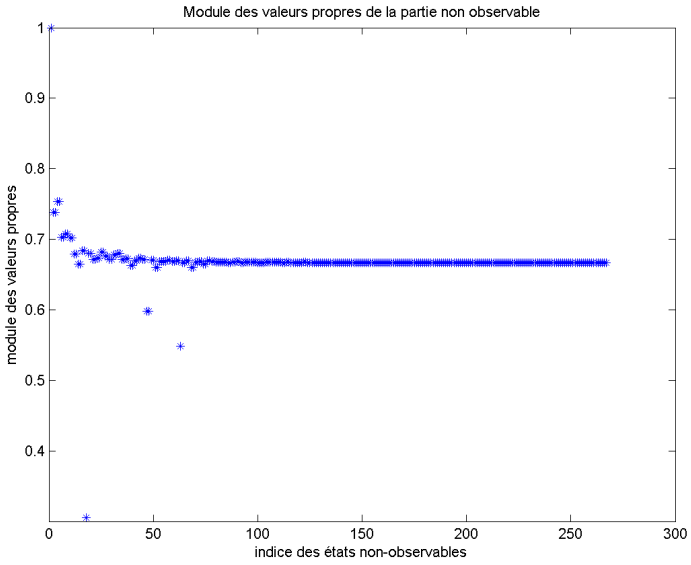


FIGURE 6.10 – Répartition des modules des valeurs propres de la partie non observable pour l'exemple 2

On s'aperçoit FIGURE 6.11, que la paire (A, Γ) de l'Exemple 1 n'est pas stabilisable exactement dans les mêmes conditions que lorsque Q (avec $Q = \lambda Q_0$) ne permet pas de fournir un gain K qui permet d'avoir $(A - KCA)$ Schur.

6.8 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était d'étudier les liens qui existent entre les notions d'observabilité/détectabilité, et la propriété de convergence du Filtre de Kalman. Nous avons vu que la notion d'observabilité nécessite l'usage d'outils analytiques rigoureux qui dépendent énormément de la précision numérique disponible (hardware et software). Les exemples traités ont mis en avant les incohérences liées à la résolution numérique des méthodes employées dans la détermination de la complète observabilité. De ce fait, dans ce chapitre aucun lien n'a pu être établi entre la complète observabilité du système et la convergence du filtre de Kalman.

Cette étude nous a permis de voir que lorsqu'il y a ambiguïté sur la propriété forte de l'observabilité, la notion de détectabilité est une bonne alternative. En effet, un système non complètement observable mais détectable, permet la détermination d'un jeu de matrices Q et$R$ qui assurent la convergence du filtre de Kalman.

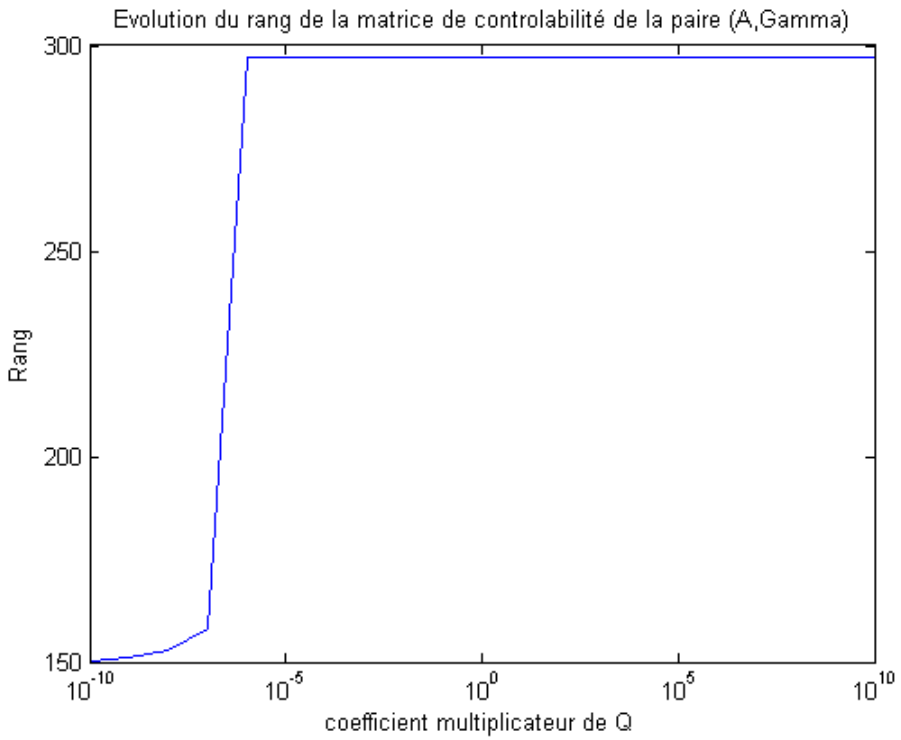


FIGURE 6.11 – Evolution du rang en fonction de la paire (A, Γ) pour l'exemple 1

Chapitre 7

Applications

Sommaire

7.1 Introduction 141
7.2 Applications sur expériences jumelles - Article de MATCOM142
7.3 Plateforme de simulation 160
7.3.1 Le procédé 160
7.3.2 Le logiciel de régulation 161
7.3.3 Le PC de suivi 162
7.3.4 Introduction du filtre de Kalman au sein de la plateforme . . 162
7.4 Applications 164
7.4.1 Simulation d'une erreur de mesure 164
7.4.2 Simulation d'un déclenchement 169
7.5 Conclusion 171

7.1 Introduction

Après avoir étudié la faisabilité de la mise en place d'un filtre de Kalman pour l'estimation des lignes d'eau, une batterie de simulations a été réalisée. Dans un premier temps, on a testé le filtre de Kalman dans le cadre d'expériences jumelles qui offrent des conditions idéales [1] de simulation.

On rappelle qu'une expérience jumelle se réalise en deux temps :

- la première étape consiste à jouer le scénario avec le modèle et d'en extraire les observations $Y_k = C_k X_k$, qui sont, par la suite, bruitées par des bruits (ϵ_k^o) supposés blancs et gaussiens, soit :

$$Y_k = C_k X_k + \epsilon_k^o \tag{7.1}$$

- la seconde étape joue la simulation avec la prise en compte du filtre de Kalman

Dans ces conditions de simulation, on a testé trois types d'erreurs (jugées classiques) :

- estimation à partir d'un état initial faux
- estimation d'un biais sur une observation
- estimation de perturbations inconnues

Ces expériences ont été présentées au colloque MAMERN 2009 à PAU. Suite à cela, l'article présentant ces résultats de simulation a été retenu pour la revue scientifique MATCOM (MATHEMATICS AND COMPUTERS IN SIMULATION). Pour éviter une redondance d'écriture, la première partie de ce chapitre est constituée de cet article.

Ce travail de thèse s'effectuant en entreprise, des outils opérationnels ainsi que des données réelles issues du terrain sont disponibles et exploitables. Les données réelles sont stockées dans une base de données qui est accessible par de nombreux outils opérationnels de l'entreprise telle que la plateforme de simulation présentée section 7.3. Cette plateforme a été mise en place pour effectuer des tests avant le déploiement de la régulation prédictive sur les aménagements du Rhône. Cet outil nous a permis de tester le filtre de Kalman en fonctionnement courant sur des scénarii typiques et ainsi voir comment celui-ci réagit dans les situations suivantes :

- erreur de mesure
- déclenchement à l'usine

1. On parle de conditions idéales car les observations (bien que bruitées) sont générées par le même modèle que celui utilisé par le filtre de Kalman.

7.2 Applications sur expériences jumelles - Article de MATCOM

Data assimilation for real-time estimation of hydraulic states and unmeasured perturbations in a 1D hydrodynamic model

Nelly Jean-Baptiste[a,b], Pierre-Olivier Malaterre[*,a], Christophe Dorée[b], Jacques Sau[c]

[a] *UMR G-eau, Cemagref, 361, rue Jean-François Breton, BP 5095, 34196 Montpellier Cedex 5, France*

[b] *Compagnie Nationale du Rhône, Département Ouvrages Hydroélectriques et Fluviaux, 2, rue André Bonin, 69316 Lyon Cedex 04, France*

[c] *LMFA UMR 5509, Université Lyon 1, 69622 Villeurbanne Cedex, France*

Abstract

Water management, in a variety of contexts and objectives, is a very important issue gaining increasing attention worldwide. In some places and during some periods, this is due to the scarcity of the water resource, and increasing competition for its use. In some others, it can be risk reduction due to flood events, or optimization of hydropower production along rivers. Hydraulic modeling, system analysis and automatic control are now parts of most water management projects. In order to operate hydraulic devices on irrigation canals or rivers, detailed information on the hydraulic state of the system must be available. This is particularly true when the control algorithms are based on Linear Quadratic Gaussian or Predictive Control approaches, using full state space models. Usually, the only known quantities are water levels, measured at limited locations. Sometimes, the discharge is known at specific locations (cross devices with gates, weirs, or hydropower turbines). The design of an observer is a very useful tool for reconstructing unmeasured data, such as discharges or water levels at other locations, unknown perturbations, such as inflows or outflows, and model parameters such as Manning-Strickler

[*]Corresponding author

Email addresses: nelly.jean-baptiste@cemagref.fr (Nelly Jean-Baptiste), pierre-olivier.malaterre@cemagref.fr (Pierre-Olivier Malaterre), c.doree@cnr.tm.fr (Christophe Dorée), jacques.sau@univ-lyon1.fr (Jacques Sau)

or hydraulic device discharge coefficients. Several approaches are able to provide such observers. The paper illustrates and compares the use of sequential Kalman Filter and sequential Particle Filter State Observer on these water management problems. Four scenarios have been selected to test the Filters, based on twin experiences or using real field data. Both approaches proved to be efficient and robust. The Kalman Filter is very fast in terms of calculation time and convergence. The Particle Filter can handle the non-linear features of the model.

Key words: Data Assimilation, Kalman Filter, Monte Carlo, River, Canal

---

1. Introduction

Irrigation is well-known for being responsible of more than 70% of the fresh water withdrawal, in average in the world. But irrigated lands also contribute for more that 40% of the world food production with less than 20% of the cultivated area. Recent FAO figures indicate that for 2030 the food production will have to be increased by more that 80%, but with no more than 12% additional water extraction. Therefore, high levels of efficiencies of water uses are increasingly expected from the managers of irrigation canals or rivers used for irrigation. Hydropower production is also getting more attention in the present context of energy shortage, global change and greenhouse effect. The Rhône river is equipped with 19 hydropower plants representing a total of 3 Giga Watts of installed power (Fig. 1). The power production must be optimized while respecting hydraulic constraints on the river. In these contexts, the water management objectives include (i) to understand the behavior of natural (eg.: rivers) or manmade (eg.: irrigation canals) hydraulic systems, (ii) to predict the behavior of the system over a future time horizon, and (iii) to correct this behavior, if it is not considered as fully satisfactory. This latter corrective action has been done during millenniums through structural static changes (eg.: dams or weirs construction, river recalibration, sediment removal). The first hydromechanical devices based on floats and counter weights (ex.: AMIL, AVIS, AVIO or Mixte gates) have been built by the Neyrpic company created in 1917 in Grenoble, France. Since the early 1970's, this action over hydraulic systems is also done using dynamic operational devices and procedures (eg.: gates or weirs movements, using sensors and actuators). This is particularly true for irrigation canals where control gates can be manipulated in order to distribute water to users,

at the right location, proper time and good quantity. These new technics for the automatic management of open-surface hydraulic systems promoted the development of advanced control algorithms, numerical simulation models and SCADA (Supervisory Control And Data Acquisition) technologies for their implementation. Different approaches have been developed during the latest decades [13]. When a hydraulic system is under automatic control, detailed information on its hydraulic state must be available. This is also true for advanced remote manual control. Usually, the only known quantities are the measurements performed on the hydraulic system, at limited locations, with limited precision, and possible failures. At present, no implementation of real time estimation of the complete hydraulic state of a canal or river has been realized. Only data reconciliation for daily volumes where dynamic effects can be neglected has been carried out [5]. The main causes are the noisy character of the measurements, the size of the systems, and the non-linearity of the cross structure equations and open-channel dynamics. The aim of this paper is to propose, design, evaluate and compare, in the open-channel hydraulic context, two approaches targeting this goal. The first one is based on Kalman Filtering. Its main advantage is the computational speed compatible with real time control constraints, even for large systems with several hundreds of state variables. The second one is a new approach based on a numerical treatment of the open-channel equations associated with a Bayesian filtering using Monte Carlo method [6, 14]. This latest method, also called Particle Filtering, has the great advantage of not being subject to any linearity assumption on the model. Both approaches take into account the stochastic feature of the problem, by considering the noise over the model dynamics and over the measurements.

2. The hydraulic system considered

A portion of the Rhône River, between two hydropower plants managed by the Compagnie Nationale du Rhône (CNR), is selected for this study (Fig. 2). The 19 hydropower plants along the Rhône river have always the same general pattern, with 2 convergent reaches, a linear branch and 2 diversion reaches. Among the 2 convergent or divergent reaches, one is the natural river equipped with hydraulic gates, and the other one is the hydropower plant by-pass equipped with turbines. Most of these 19 systems are controlled, in real time, using predictive controllers based on a full Saint-Venant embedded model (CRUE simulation model from CNR).

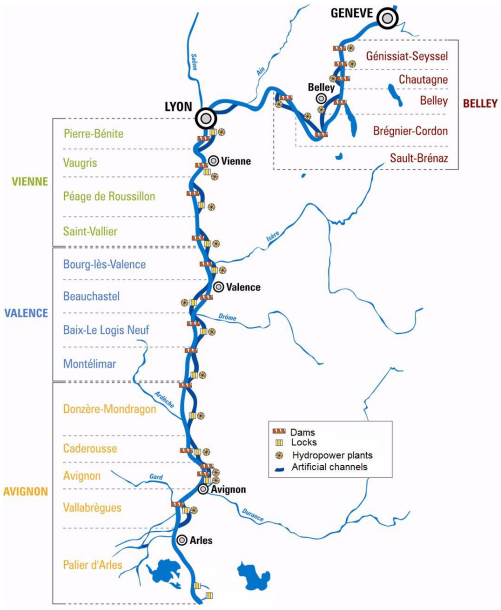


Figure 1: Rhône river and its 19 hydropower plants

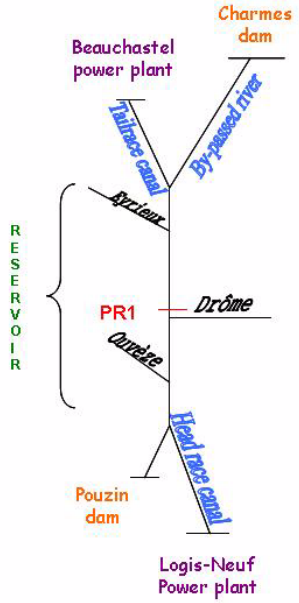


Figure 2: Portion of the Rhône river between 2 hydropower plants

3. The open channel hydraulic model

In order to be well founded, a state estimation must be based on a proper modeling of the physical system. Cemagref (French public Research Institute for Science and Technology in Environment) is developing methodologies and software tools (dedicated to academic partners, consultant companies and canal or river managers) allowing accurate hydrodynamic modeling [2]. The numerical tests carried out hereafter are run on the SIC software developed by Cemagref [3]. This model is based on the 1D Saint-Venant equations describing the dynamic behavior of water (flows and elevations) in an open-channel (1).

The 1D Saint-Venant equations are two hyperbolic, first-order, non-linear, partial-derivative equations:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \frac{Q^2}{S}}{\partial t} + g.S\frac{\partial Z}{\partial t} + g.S.J = 0 \end{cases} \quad (1)$$

where Q is the discharge (m^3/s), S the wetted cross-area (m^2), Z the

water elevation (m), J the friction slope, x the longitudinal abscissa (m) and t the time (s). The friction slope J is usually obtained from the Manning-Strickler formula: $J = \frac{n^2 Q^2}{S^2 R^{\frac{4}{3}}}$, where n is the Manning's coefficient ($K = \frac{1}{n}$ is called the Strickler coefficient) and R is the hydraulic radius (m) ($R = \frac{S}{P}$, where P is the wetted perimeter).

These equations are completed by external and internal boundary conditions such as upstream and lateral inflows, downstream rating curves and weir or gate equations. The equation of the flow through a gate structure is usually taken as:

$$Q = C_d \sqrt{2g} L u \sqrt{z_{up} - z_{dn}}$$

where C_d is the gate discharge coefficient, L the gate width, u the gate opening (m) and z_{up} (resp. z_{dn}) the water level upstream (resp. downstream) of the gate (m). More complex equations are usually used to handle different flow conditions (freeflow/submerged, open-flow/pipe-flow) in a continuous way [3].

Having no known analytical solution (in the general case), they are solved numerically, after being discretized in time (Δt time step) and space (Δx space step) through the implicit Preissmann finite difference scheme (2) [4, 11]. The gate structure equation is linearized and introduced at the proper locations in the scheme.

$$\begin{cases} f(x,t) = \frac{\Theta}{2}(f_{i+1}^{n+1} + f_i^{n+1}) + \frac{1-\Theta}{2}(f_{i+1}^{n} + f_i^{n}) \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \Theta \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}}{\Delta x} + (1-\Theta) \frac{f_{i+1}^{n} - f_i^{n}}{\Delta x} \\ \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^{n} + f_i^{n+1} - f_i^{n}}{2\Delta t} \end{cases} \tag{2}$$

The double sweep method is used to solve the system of discretized equations and iterations are processed to solve the non-linear terms [4].

4. Kalman Filter framework

Since the original work of Luenberger [9], state observers proved to be useful and are widely used in estimation and other engineering applications. It has been used in some cases for hydraulic systems [12]. In this line, the Kalman Filter has dominated the applications in signal processing and control areas. It provides a minimum variance recursive algorithm to optimally estimate the unknown states of a dynamic linear system with Gaussian uncertainties. This type of filter is a set of mathematical equations which estimates the state vector at every time step.

4.1. Linear state space model

The first step is to design an approximate linear model of the true system in state space form:

$$\begin{cases} x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} \\ y_k = Cx_k \end{cases} \tag{3}$$

where A (state transition model), B (control-input model) and C (observation model) are real constant matrices of appropriate dimensions. They could also be varying depending on the current state estimate used for the linearization (A_k, B_k, C_k), leading to the Extended Kalman Filter framework.

The A matrix is obtained as $A = A_1^{-1}A_2$, where A_1 and A_2 are constructed from the discretization of the 2 Saint-Venant equations (1), using the Preissmann implicit numerical scheme (2). The full non-linear model SIC presented in the previous section and the linear state space model are therefore based on some similar principle, except that SIC is using the double sweep algorithm, non-linear iterations and discretization updates, whereas the linear state space model is obtained by a simple matrix inversion and multiplication. This leads to a discrete-time state-space representation [12] of the desired form.

The A_1 and A_2 matrices have both the following bloc diagonal structure:

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda^{(up)} & & & & & & & & & & \\ a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & & & & & & & \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & & & & & & & \\ & & a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & a_{14}^{(2)} & & & & & \\ & & a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & & & & & \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & & & & & a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & a_{13}^{(n)} & a_{14}^{(n)} \\ & & & & & & & a_{21}^{(n)} & a_{22}^{(n)} & a_{23}^{(n)} & a_{24}^{(n)} \\ & & & & & & & & & & \lambda^{(dn)} \end{pmatrix} \tag{4}$$

The x state vector is composed of hydraulic variables (discharges Q and water levels Z) at each calculation cross section, relative to some reference state (δ variables). The parameters $\lambda^{(up,dn)} \in [0..1]$ depend on the choice of

the discretization of the boundary conditions. In our example we used a time step $\Delta t = 300s$ and a space step $\Delta x \approx 150m$. This leads to a number of states $n_x \approx 300$.

$$x = \begin{pmatrix} \delta Q_1 \\ \delta Z_1 \\ \delta Q_2 \\ \delta Z_2 \\ \delta Q_3 \\ \delta Z_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \delta Q_n \\ \delta Z_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

Since the state vector x includes explicitly the discharges at calculation cross sections, and since the control input variables u are, for example, the discharge boundary conditions upstream, downstream and at some intermediate tributaries, the B matrix is obtained easily by putting, for each column corresponding to a variable of the vector u, nil values at all lines except at locations where a discharge boundary conditions is imposed. Following the same principle, boundary conditions in terms of water elevation, or relationships between water elevations and discharges (rating curves) can also be imposed. For the same reason, the C matrix is also easily obtained, since measurements y are usually water elevations or discharges, that is to say components of the state vector x. In the following examples the number of input variables u is 7 (2 upstream discharges, 3 tributaries, 1 downstream discharge, 1 downstream rating curve) leading to a size of a B matrix of $n_x * 7$. The size of the C matrix depends on the number of measurements. For Scenario 4 with 3 water level measurement this size is $3 * n_x$.

In practice, a linear model is not a perfect representation of the reality and the measurements are not perfectly precise. This is the reason why noise is added to the process model and to the measurements. The linear stochastic difference equations become:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \tag{6}$$

with measurement equation:

$$y_k = Cx_k + v_k \tag{7}$$

The random variables w_k and v_k are assumed to be independent to each other, white, and with normal probability distributions:

$$\begin{array}{l} P(w) \sim N(0, Q) \\ P(v) \sim N(0, R) \end{array} \tag{8}$$

The Q and R matrices can be time varying. In our simulations we took these matrices as time invariant and diagonal $R = diag(\sigma^2)$ with $\sigma = 2cm$ for water level measurements (in our scenarios we did not use discharge measurements), and $Q = diag(\sigma^2)$ with $\sigma_Z = 0.1cm$ for water level states and $\sigma_Q = 2m^3s^{-1}$ for discharge states.

4.2. Kalman Filter equations

The equations for the Kalman Filter are divided into two groups: time update equations and measurement update equations. The time update equations (9) project forward in time the current state and error covariance estimates to obtain the a priori estimates for the next time step. The measurement update equations (10) incorporate new measurements into the a priori estimate to obtain an improved a posteriori estimate.

Discrete Kalman filter time update equations:

$$\begin{array}{l} \hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \\ P_k^- = AP_{k-1}A^t + Q \end{array} \tag{9}$$

Discrete Kalman filter measurement update equations:

$$\begin{array}{l} K_k = P_k^- C^t (CP_k^- C^t + R)^{-1} \\ \hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(y_k - C\hat{x}_k^-) \\ P_k = (I - K_k C)P_k^- \end{array} \tag{10}$$

These equations are simple matrix calculations, requiring little CPU time even for $300 * 300$ matrices. The calculation can even be further reduced by using the asymptotic K_k matrix (obtained solving a Riccati equation) without loss of performance (this has been tested and verified, but not presented in this paper).

5. Test on four scenarios

A Kalman Filter is designed and used to reconstruct unmeasured data on four scenarios, representative of real field situations. In these scenarios, the first three ones are based on twin experiences. This means that a first simulation is run to generate data. White noises are then added to the data. The second simulation is then done using the Kalman filter to reconstruct data and detect faults. For this latest phase, incomplete or wrong data can be given depending on the scenario.

During the three first scenarios that have been selected, the upstream hydropower plant is supposed to follow the discharge schedule as depicted on Fig. 3 showing $\pm 100 m^3 s^{-1}$ discharge variations around an initial value of $1683 m^3 s^{-1}$. The other inflows are supposed to stay constant during the simulation: $10 m^3 s^{-1}$ at Charmes dam, $1 m^3 s^{-1}$ at Eyrieux, $5 m^3 s^{-1}$ at Drôme, $1 m^3 s^{-1}$ at Ouvèze, $999 m^3 s^{-1}$ at Logis-Neuf downstream powerplant and $701 m^3 s^{-1}$ at Pouzin dam. In the fourth real scenario, upstream, downstream and inflow conditions are taken from the measurement database of CNR.

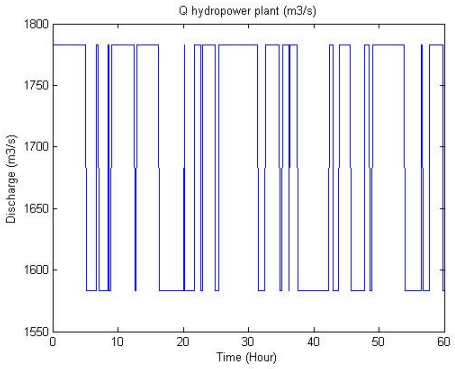


Figure 3: Pumping flow at Beauchastel plant

5.1. Scenarios 1. Convergence of the filter from a wrong initial state

The first scenario aims at reconstructing the complete state vector x_k at any time instant k from an unknown (or false) initial state x_0. This is a realistic scenario, since when the Kalman Filter is initialized, the real initial state vector x_0 is not known. An approximation can be guessed since the state vector components have physical meanings (water elevations and

discharges along the system). But this guess is an approximation of the reality. We choose, in our twin experiences, a x_0 state vector corresponding to the correct initial steady state, and then we added errors of $0.1m$ + white noise on water elevations and $100m^3s^{-1}$ + white noise on discharges. The whites noises are those described in the previous section. This initial state is really far from the true one: $0.1m$ on the whole Rhône River corresponds to a very large volume difference to be cleared.

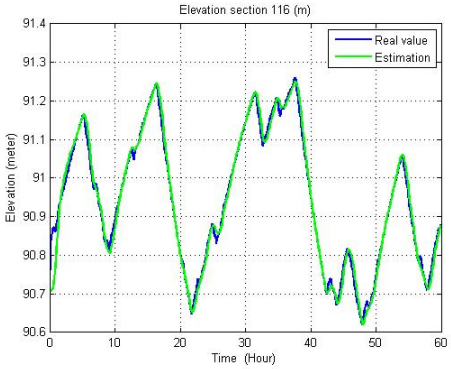


Figure 4: Scenario 1. Convergence of state at section 116

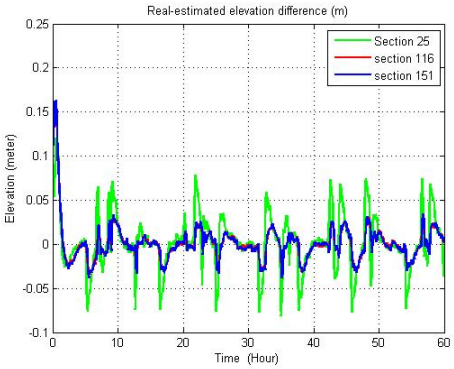


Figure 5: Scenario 1. Convergence error of state at sections 25, 116 and 151

We can observe (Fig. 4) that the state $n°116$ corresponding to the water elevation at location PR1 (Fig. 2) is converging very quickly towards the real value (in less than $1h$). The convergence error is then kept minimum even in the presence of the white noise, at all calculation cross sections (this error is displayed at sections $n°25$, $n°116$ and $n°151$ on Fig. 5). The convergence rate is slower upstream of the system (water level at section $n°25$) compared to the downstream end of the system (water level at section $n°151$). This also implies larger bounds on the error. This is due to the fact that less measurement points are located at the upstream side of the system.

5.2. Scenarios 2. Fault detection

The second scenario aims at detecting and correcting a sensor fault. In this scenario we suppose that the water level sensor at location PR1 (Fig. 2) has a drift of $7cm$ from time $4h$ to $10h$. We can see on Fig. 6 that the re-estimation state at the sensor location is very close to the real value, despite the wrong measurement. The high frequencies changes on the graphs are

due to the white noise added to the measurements. This sensor can then be detected as in default, and removed from the Kalman filter inputs. We observed in this case that the state reconstruction is even slightly improved.

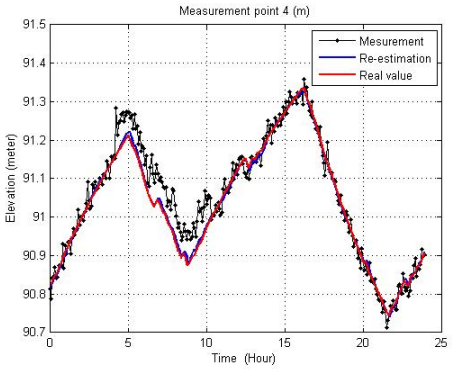


Figure 6: Scenario 2. State estimation at sensor location

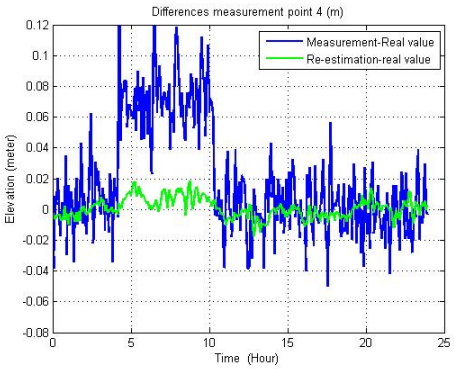


Figure 7: Scenario 2. State estimation error at sensor location

5.3. Scenarios 3. Reconstruction of unknown inflows

The third scenario aims at reconstructing unknown inflows at Eyrieux (node 3) and Ouvèze (node 6) tributaries. We can observe on Fig. 8 that the inflows are correctly reconstructed.

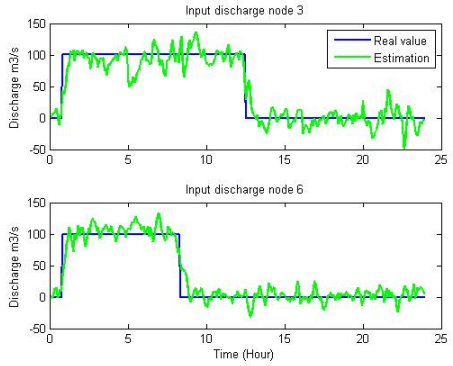


Figure 8: Scenario 3. Differentiated inflow estimation

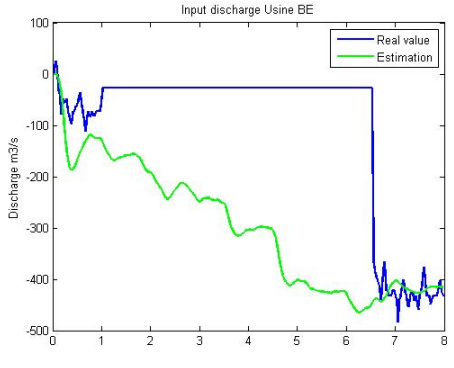


Figure 9: Scenario 4. Reconstruction of inflow at upstream plant

5.4. Scenarios 4. Test on real field data with a sensor failure

The fourth scenario using real data aims at reconstructing unknown upstream flows following sensors breakdowns. This is a realistic scenario, since even thought most sensors are redundant on the Rhône river, they can have simultaneous failures. This event really happened on the field in March 2009 (Fig. 9, sensor failure between time 1h and 6h30). We can observe that the missing discharge measurement at the upstream power plant (obtained using several water level and turbine position sensors located at this plant) is correctly reconstructed (Fig. 9) along with the water measurements at PR1 (Fig. 10) and PR2 (Fig. 11). This has been done using only 3 water level measurements at the upstream confluence, at PR1 and at PR2 (Fig. 2). We can observe that when the discharge measurement at the upstream power plant is functioning again after time 6h30 (Fig. 9) the estimated values (discharge at the upstream plant, water levels at location PR1 and PR2) are very close to the measured ones. This validates the filter and lets us think that the estimated values of the discharge at the upstream plant is correct during the period when the sensors where in default.

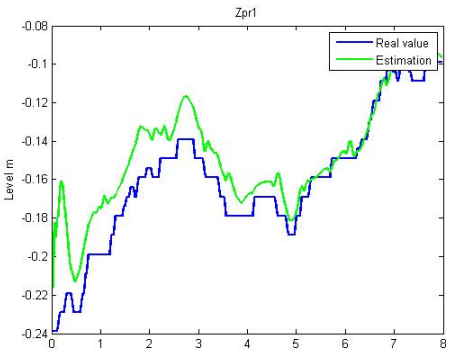


Figure 10: Scenario 4. Reconstruction of water elevation at PR1

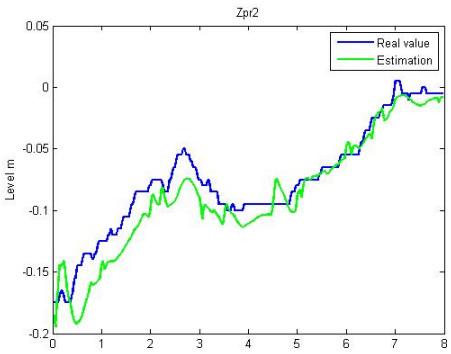


Figure 11: Scenario 4. Reconstruction of water elevation at PR2

6. Sequential Monte Carlo state estimation

We can observe that for large discharge changes (above $+500m^3/s$) that can occur when a turbine is started or stopped, the non-linear effects are strong enough to reduce the performance of the Kalman Filter. In this case

Bayesian filtering based on Monte Carlo (MC) methods also appears to be an interesting alternative. A sequential Monte Carlo state observer is then used to reconstruct unmeasured data. The great increase of computational power allows resorting to MC methods which have the great advantage of not being subject to any linearity hypothesis of the model.

In this line, the dynamic linear state equation (Eq. 6) must be replaced by the complete discretized open channel flow Saint-Venant equations completed by the boundary conditions and hydraulic relations due to the cross-structures present in the system. In order to match the typical field operating conditions, the SIC software will perform successive time steps transitions ($300s$ in our example), which will be called observation time steps. The numerical time step used in these successive calculations can be a smaller one ($60s$ in our example), so as to obtain an accurate enough description of the open channel flow. Then the dynamic state and the observation equations (6) and (7) take now formally the form:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1} \tag{11}$$

$$y_k = Cx_k + v_k \tag{12}$$

The function f, obtained as the result of a numerical calculation, is a complicated and highly non-linear quantity. It is the strength of the Monte Carlo approach to be efficient in such cases and also to deal properly with the stochastic feature of the problem. We recall briefly, in the following, the main elements of the sequential Monte Carlo estimation technique. The aim of a Bayesian state estimation approach is the estimation in real time of the posterior $P(x_k|y_{0:k}, u_{0:k-1})$. The sequential Monte-Carlo approach [6, 14] is a technique for implementing the Bayesian relations by Monte Carlo simulations and in a recursive way. The required posterior density at time k is represented by a set of random state vector samples with associated normalized weights. On each time step, new samples are generated and the weights updated. Since it is impossible to sample from the true posterior, importance sampling is used. A common problem with sequential importance sampling is the degeneracy problem, which cannot be avoided, since the variance of the weights can only increase in time [6]. The choice of the importance function is a determinant step in the design of a particle filter. In the case of a model given by partial Gaussian state space equations (Eq. 11 and 12), an optimal importance function, which minimizes the variance

of the weights, is available in analytic form [6, 7]. We have then used this optimal importance sampling with resampling as described in [1, 14]. The updates of both the samples and the weights take then the following form:

$$\text{Sampling function at time } k\text{: } P(x_k|x_{k-1}, u_{k-1}, y_k) = N(\mu_k, S_k) \tag{13}$$

$$\text{Weight at time } k\text{: } w_k^i \propto w_{k-1}^i P(y_k|x_{k-1}^i, u_{k-1}) \tag{14}$$

with:

$$\begin{cases} P(y_k|x_{k-1}, u_{k-1}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y_k - Cf(x_{k-1}, u_{k-1})\right)^t (R_k + CQ_kC^t)(y_k - Cf(x_{k-1}, u_{k-1}))\right) \\ S_k^{-1} = Q_k^{-1} + C^t R_k^{-1} C \\ \mu_k = S_k Q_k^{-1} f(x_{k-1}, u_{k-1}) + C^t R_k^{-1} y_k \end{cases}$$

the weights being afterwards normalized such that $\sum_i w_k^i = 1$. Once the posterior $P(x_k|y_{0:k}, u_{0:k-1})$ correctly sampled at time k, relevant quantities, in particular estimate of the mean state vector $\hat{x_k}$ can be calculated:

$$\hat{x}_k = \sum_i w_k^i x_k^i \tag{15}$$

since the application is based on Monte Carlo simulations, particular attention was paid on the choice of the random number generator. We used Ranlux, the high quality generator based on the work of M. Luscher [10] and written by F. James [8]. This generator is asserted to have a period of 10^{171}. It is available at the scientific library Cernlib of the CERN (European Center of Nuclear Research).

The CPU time needed (with a Intel Centrino dual core 2 Ghz under Windows Vista) for one estimation time step increases almost linearly with the Monte-Carlo sample size: respectively 1.7 s, 3.2 s and 5 s for 250, 500 and 750 Monte-Carlo sample size. The results remaining approximately constant above 400, the calculations have been done with a sample size of 800.

7. Test on three scenarios

The same first three scenarios, based on twin experiences, are tested for evaluation of the method and comparison with the Kalman filter approach. We can observe similar results (Fig. 14, 15, 16), except for the Scenario 1 where the convergence is slower (Fig. 12, 13). The reasons for this are still under investigation.

8. Conclusion

In this paper, we have proposed two different approaches to estimate, in real time, the hydraulic state of a river reach from measurements. One can understand that this knowledge of the hydraulic state is of first importance in the current context of water resources management. The results are very good with both approaches. The Kalman Filter is converging very quickly and requires few CPU time. The Particle Filter can handle the non-linear features of the real system. In a generic framework both filters can handle all type of scenarios: initialization, sensor fault, reconstruction of unmeasured inflows of tributaries. The method can be extended to the estimation of physical parameters related to the current state of the river or canal such as friction parameters.

References

[1] M.S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, T. Clapp, A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking, IEEE Transactions on Signal Processing, 50:2, (2002), 174-188.

[2] J.-P. Baume, J. Sau, P.-O. Malaterre, Modeling of Irrigation Channel Dynamics for Controller Design, IEEE Int. Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC98), San Diego, California, (October 11 to 14, 1998), 3856-3861.

[3] J.-P. Baume, P.-O. Malaterre, G. Belaud, B. Le Guennec, SIC: a 1D Hydrodynamic Model for River and Irrigation Canal Modeling and Regulation, in: Rui Carlos Vieira da Silva (Eds.), Métodos Numéricos em Recursos Hidricos 7, ABRH (Associacao Brasileira de Recursos Hidricos), Coppetec Fundacao, Brazilla, 2005, pp. 1-81, ISBN 85-88686-14-7.

[4] J.A. Cunge, F.M. Holly, A. Verwey, Practical aspects of computational river hydraulics, Pitman Advanced Publishing Program, London, 1980.

[5] J.-L. Deltour, E. Canivet, F. Sanfilippo, J. Sau, Data Reconciliation on the Complex Hydraulic System of Canal de Provence, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 131:3, (2005), 291-297.

[6] A. Doucet, N. de Freitas, N. Gordon, Sequential Monte Carlo Methods in Practice, Springer, London, 2001.

[7] A. Doucet, On Sequential Simulation-Based methods for Bayesian Filtering, Technical Report CUED/F-INFENG/TR.310, University of Cambridge, 1998.

[8] F. James, RANLUX: A Fortran implementation of the high-quality pseudorandom number generator of Lscher, Computer Phys. Commun., 79, (1994), 111-114.

[9] D.G. Luenberger, Computational methods for resolution of mass spectra, Analytical Chemistry, 38:6, (1966), 715-720.

[10] M. Lüscher, A portable high-quality random number generator for lattice field theory simulations, Computer Phys. Commun., 79, (1994), 100-110.

[11] P.-O. Malaterre, Modélisation, analyse et commande optimale LQG d'un canal d'irrigation, Ph.D. thesis, LAAS - CNRS - ENGREF - Cemagref, ISBN 2-85362-368-8, Etude EEE n°. 14., Cemagref Edition, Paris, 1994

[12] P.-O. Malaterre, PILOTE: linear quadratic optimal controller for irrigation canals, ASCE Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 124:4, (1998), 187-194.

[13] P.-O. Malaterre, D.C. Rogers, J. Schuurmans, Classification of Canal Control Algorithms, ASCE Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 124:1, (1998), 3-10.

[14] R. Ristic, S. Arulampalam, N. Gordon, Beyond the Kalman Filter, Particle Filters for Tracking Applications, Artech House, London, 2004.

[15] D. Rogier, C. Coeuret, J. Brémond, Dynamic Regulation on the canal de Provence, in: D.D. Zimbelman (Eds.), Planning operation, rehabilitation and automation of irrigation water delivery systems, Symposium ASCE, Portland, Oregon, July 28-30, 1987, pp. 180-200.

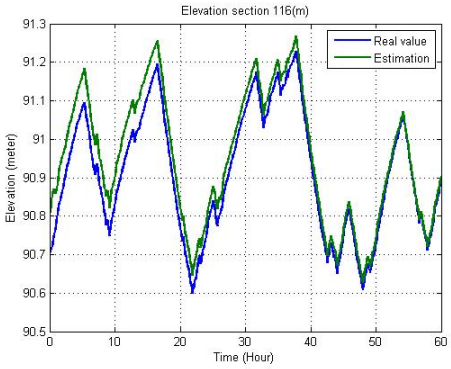


Figure 12: Scenario 1. Convergence of state at section 116

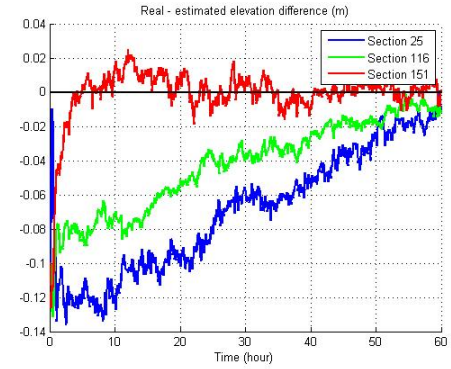


Figure 13: Scenario 1. Convergence error of state at sections 25, 116 and 151

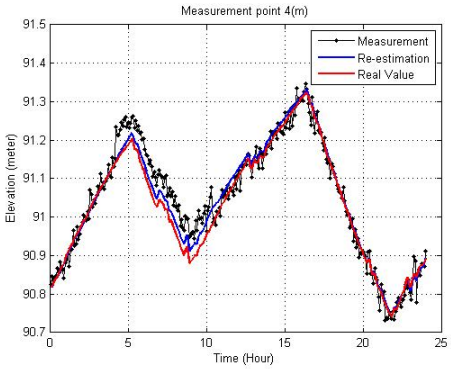


Figure 14: Scenario 2. State estimation at sensor location

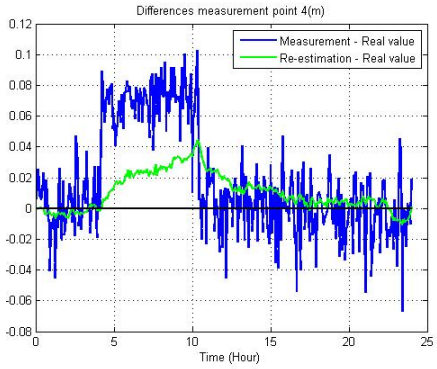


Figure 15: Scenario 2. State estimation error at sensor location

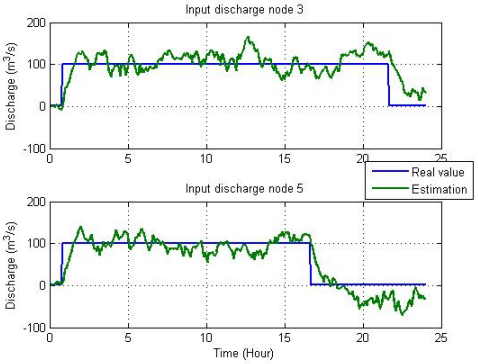


Figure 16: Scenario 1. Differentiated inflow estimation

7.3 Plateforme de simulation

Avant le déploiement de la commande prédictive sur les aménagements du Rhône, la CNR a mis au point un outil, appelé plateforme de simulation. Cet outil servait à simuler des cas tests (déclenchements de groupe, montée en crue, etc.) afin de valider le déploiement de la régulation prédictive sur les aménagements du Rhône. Pour les aménagements déjà équipés de la commande prédictive, cette plateforme de tests leur sert aujourd'hui à :

- la validation de nouvelles versions concernant les logiciels du composant Régulation

- l'analyse d'incidents observés sur le terrain. Pour cela, les équipes de la maintenance rejouent les scénarii durant lesquels sont survenus les incidents. Ces simulations s'appuient sur les données de terrain archivées dans une base de donnée (on rappelle que les données sont acheminées au siège par réseaux filaires classiques ou par fibre optique et stockées dans une base de données).

- la validation de nouvelles courbes de consigne d'exploitation

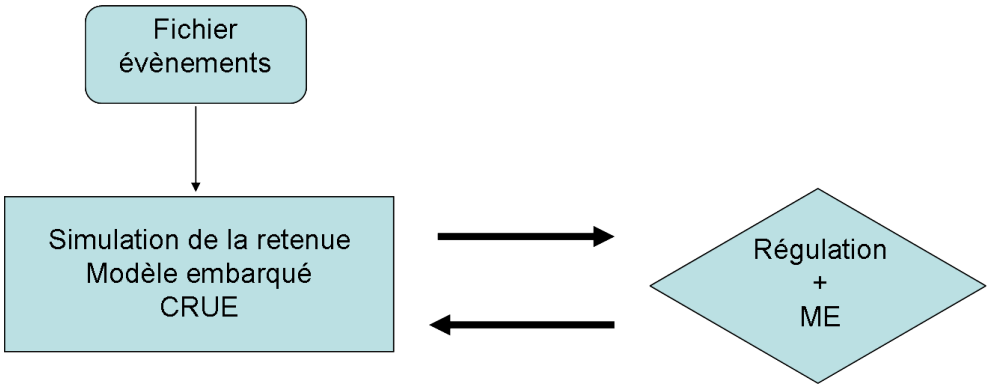


FIGURE 7.1 – Représentation schématique des éléments constituant la plateforme de simulations

Cette plateforme de simulations, schématiquement illustrée FIGURE 7.1, est constituée d'un simulateur de retenue (CRUE, présenté chapitre 3), du procédé (décrit section 7.3.1) et du logiciel de régulation (détaillé section 7.3.2).

7.3.1 Le procédé

Premier appel du procédé

Dans l'enchainement des processus de la plateforme de simulation, le procédé sert à simuler entièrement les fonctionnalités du site (aménagement), il est sollicité deux fois

par pas de temps de 100 s. Plus précisément, après la simulation faite par CRUE, le procédé récupère la ligne d'eau (débit et cote des profils en travers modélisés). Puis, le procédé récupère le fichier évènements (ficEvt.pro), où sont programmés les différents évènements précisés dans le dossier de spécifications générales.

Le fichier ficEvt.pro permet de transmettre un ensemble d'événements du procédé de simulation vers la régulation à un pas de temps donné. Les évènements possibles qui nous intéressent sont les suivants :

- des déclenchements sur l'usine
- des changements de mode de régulation
- des simulations de forçage d'une mesure par l'opérateur
- des décalages du niveau de consigne
- des contraintes en débit sur les ouvrages réglant (débit minimum et maximum, débit réservé)

Les données issues du fichier évènements ainsi que la ligne d'eau fournie par CRUE sont ensuite écrites dans une base de données.

Second appel du procédé

Lors du deuxième appel du procédé dans le processus de la plateforme, celui-ci a pour mission de lire la répartition (barrage/usine) des débits, calculée par la commande prédictive. Il procède ensuite à l'appel du modèle embraqué CRUE pour calculer la ligne d'eau avec la répartition des débits proposées par la régulation.

Entre ces deux appels du procédé intervient le logiciel de régulation présenté ci-dessous (section 7.3.2).

7.3.2 Le logiciel de régulation

A partir des données écrites dans la base de données, le logiciel de régulation met à jour le modèle embarqué. Suite à cela, un débit de correction est déterminé et le calcul de la commande prédictive est effectué. Ces calculs ont déjà été expliqués chapitre 1. En fonction de ces calculs, des différentes contraintes et des données du fichiers évènements, le logiciel de régulation fournit au procédé une répartition des débits pour l'usine et le barrage.

7.3.3 Le PC de suivi

La CNR a mis en place un outil de visualisation des données stockées dans la base de données. Cet outil est nommé le "PC de suivi". Avec cette interface, il est possible de visualiser en temps réel les débits transitant dans chaque aménagement. Il est également possible de visualiser, les résultats des tests simulés sur la plateforme.

Le PC de suivi a pour fonctions principales :

- d'être le support visuel pour l'analyse en temps réel du comportement de la régulation

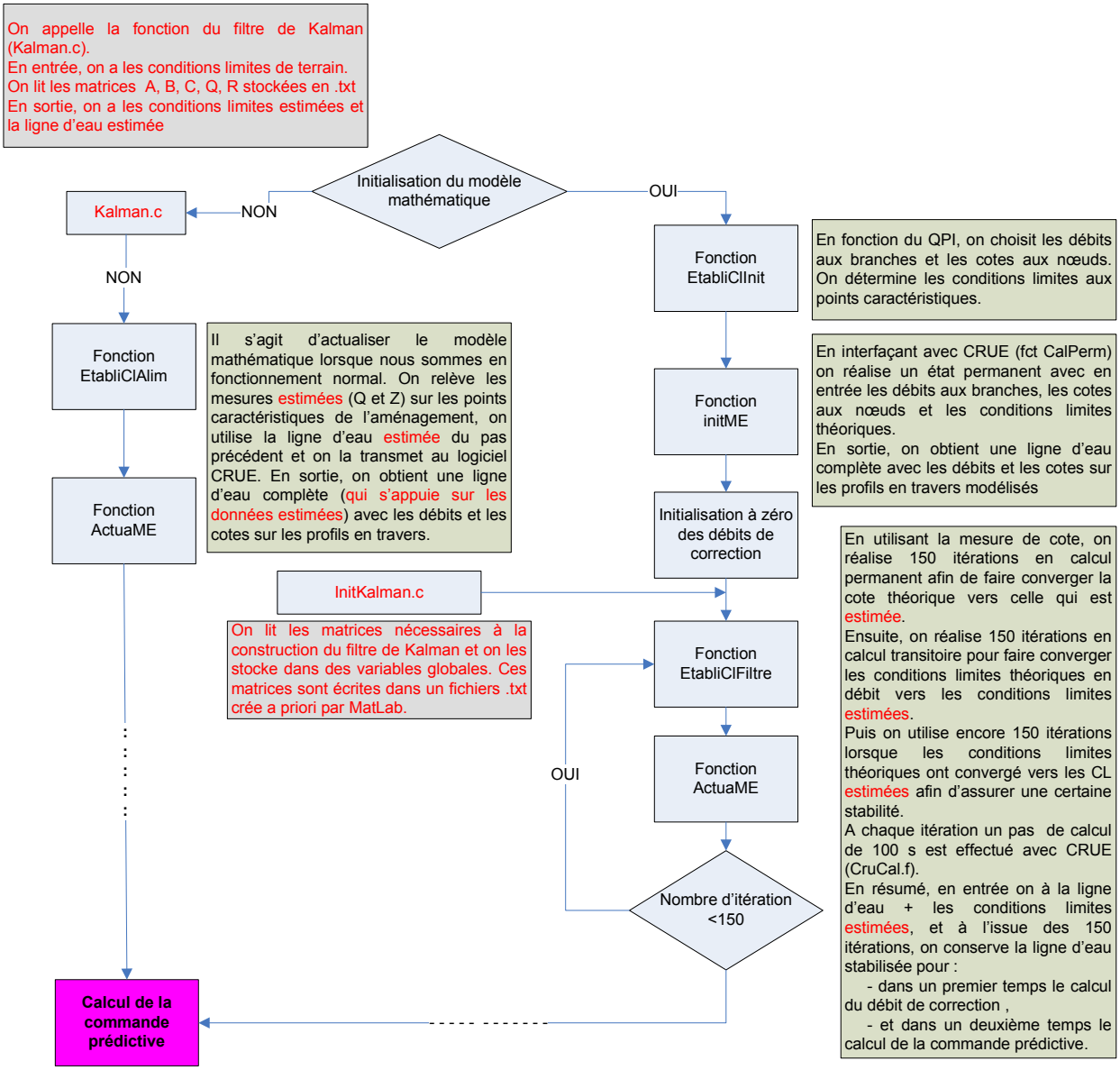
- de garder en historique les informations en entrée et sortie de la régulation pour faire des analyses à posteriori sur la plateforme.

7.3.4 Introduction du filtre de Kalman au sein de la plateforme

L'avantage d'effectuer un travail de thèse en entreprise, est de pouvoir tester les résultats de recherche sur des outils opérationnels (la plateforme de simulation de la CNR). Pour ces tests, il a fallu introduire le filtre de Kalman dans le logiciel de régulation de la plateforme de simulation. Ainsi il fut possible de rejouer des scénarii hydrauliques et ainsi évaluer l'impact de la mise en place d'une telle méthode sur le calcul de la commande prédictive.

L'organigramme figurant ci-après montre schématiquement où interviennent les modifications (notations rouges et encadrés rouges) liées à la mise en place du filtre de Kalman.

Fonction Régul.c de la plateforme avec le filtre de Kalman



7.4 Applications

7.4.1 Simulation d'une erreur de mesure

La plateforme de simulation offre la possibilité de simuler une ou plusieurs erreurs sur les observations, ce qui correspond à la simulation d'erreurs de mesure (Cf. Chapitre 1). Pour cela, le logiciel CRUE est utilisé pour représenter la réalité du terrain. Pour simuler l'erreur, dans le fichier "évènements", l'utilisateur peut imposer à certaines observations le statut "douteux" et ainsi forcer leurs valeurs. Cette manipulation rend les conditions limites renseignées dans CRUE différentes de celles prises en compte pour le calcul de la commande. Ce type de simulation permet à l'utilisateur de la plateforme, de tester la réaction de la régulation par commande prédictive lors qu'apparait une erreur de mesure (c'est à dire une mesure invalide qui fournit une fausse information). Pour plus de compréhension, un exemple simulé sur la plateforme, est présenté ci-après.

Scénario
Pour le scénario hydraulique imposé dans CRUE, les données suivantes ont été considérées :

- un débit entrant constant de 10 $m^3.s^{-1}$ au barrage amont
- un débit entrant constant de 1683 $m^3.s^{-1}$ à l'usine amont
- un débit entrant constant de 1 $m^3.s^{-1}$ pour l'Eyrieux
- un débit entrant constant de 5 $m^3.s^{-1}$ pour la Drôme
- un débit entrant constant de 1 $m^3.s^{-1}$ pour l'Ouvèze
- un débit sortant constant de 10 $m^3.s^{-1}$ au barrage aval
- un débit sortant constant de 1690 $m^3.s^{-1}$ à l'usine aval

L'objectif de ce scénario est d'analyser le comportement de la régulation lors d'une erreur de mesure de 200 $m^3.s^{-1}$ à l'usine amont. La mesure de l'usine amont, considérée douteuse, a été forcée à 1483 $m^3.s^{-1}$ à partir de 1 h de simulation. Sur la FIGURE 7.2, sont illustrées les données considérées ainsi que les commandes calculées pour cette situation :

- un débit entrant constant de 10 $m^3.s^{-1}$ au barrage amont. Cette donnée apparait en courbe bleue claire
- un débit entrant forcé à 1483 $m^3.s^{-1}$ à partir de 1 h de simulation à l'usine amont. Cette donnée erronée de 200 $m^3.s^{-1}$ apparait en courbe rouge

- un débit entrant constant de 1 $m^3.s^{-1}$ pour l'Eyrieux. On ne voit pas la courbe car l'échelle utilisée pour les débits entrants n'est pas adaptée
- un débit entrant constant de 5 $m^3.s^{-1}$ pour la Drôme. On ne voit pas la courbe car l'échelle utilisée pour les débits entrants n'est pas adaptée
- un débit entrant constant de 1 $m^3.s^{-1}$ pour l'Ouvèze. On ne voit pas la courbe car l'échelle utilisée pour les débits entrants n'est pas adaptée
- un débit sortant constant de 10 $m^3.s^{-1}$ au barrage aval. Cette donnée apparait en courbe bleue foncée
- un débit sortant constant de 1690 $m^3.s^{-1}$ à l'usine aval. Cette donnée apparait en courbe rouge

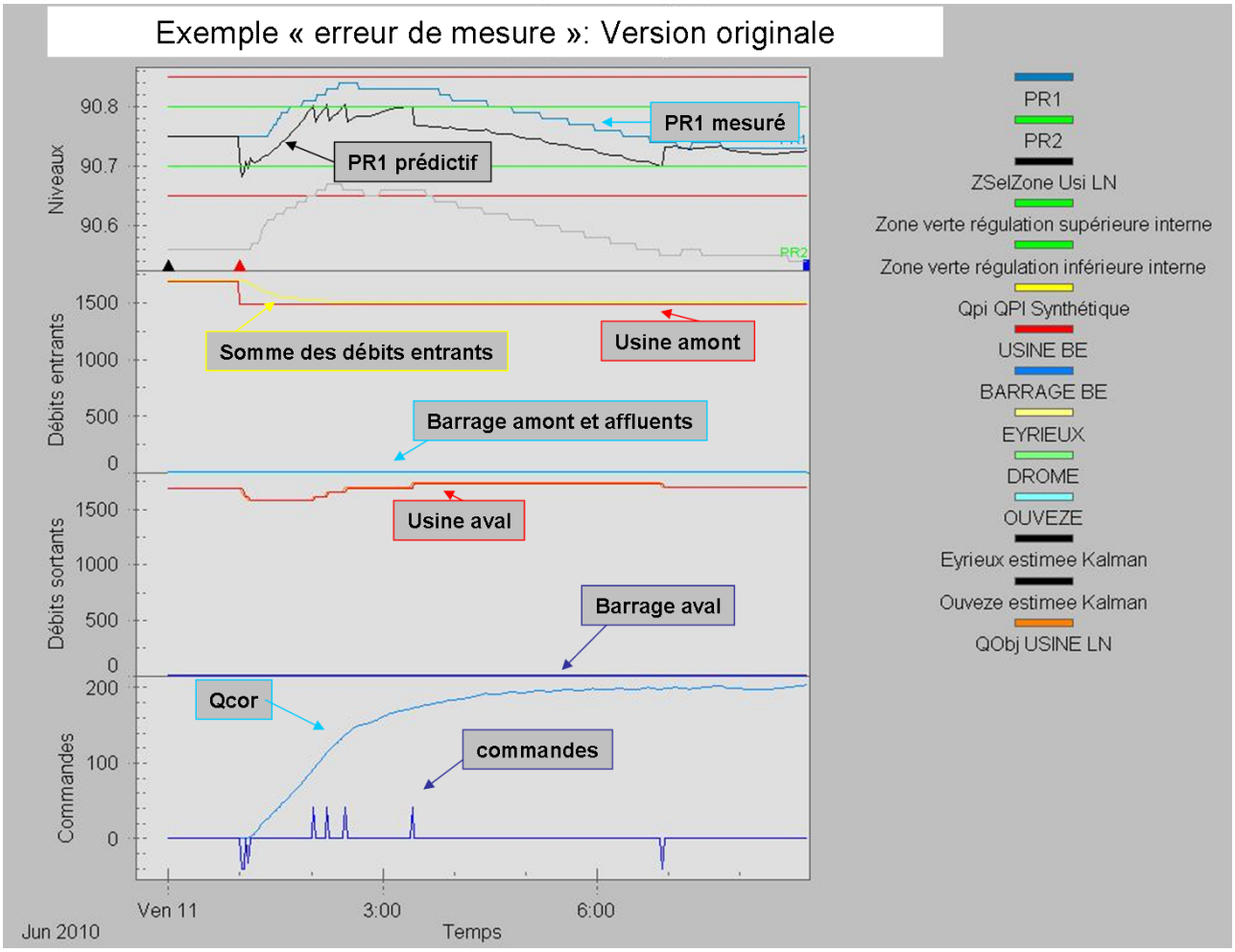


FIGURE 7.2 – Simulation d'une erreur de mesure avec la méthode actuelle de la CNR

La FIGURE 7.2 illustre le comportement de la régulation actuelle face à l'erreur de mesure de 200 $m^3.s^{-1}$ à l'usine amont. Dans cette situation, le débit de correction ($Qcor$) prend 4 heures pour compenser l'erreur. Pendant cet intervalle de temps, la régulation s'appuie sur des données erronées et calcule donc des commandes qui conduisent à des ouvertures injustifiées de vannes de barrage.

Scénario avec un filtre de Kalman global
Pour ce même scénario, la simulation a été rejouée, mais cette fois-ci avec la prise en compte d'un filtre de Kalman. Les hypothèses sont les suivantes :

- on considère un système linéaire augmenté de sept états ($Qi_{\text{barrage amont}}$, $Qi_{\text{usine amont}}$, Qi_{Eyrieux}, $Qi_{\text{Drôme}}$, $Qi_{\text{Ouvèze}}$, $Qi_{\text{usine aval}}$, $Qi_{\text{barrage aval}}$), cela représente 302 états.
- on considère 9 observations ($Qi_{\text{barrage amont}}$, $Qi_{\text{usine amont}}$, Qi_{Eyrieux}, $Qi_{\text{Drôme}}$, $Qi_{\text{Ouvèze}}$, $Qi_{\text{usine aval}}$, $Qi_{\text{barrage aval}}$, Z_{PR1}, Z_{PR2})
- toutes les entrées (U et Up) sont renseignées
- pour plus de simplicité, on considère un filtre de Kalman asymptotique

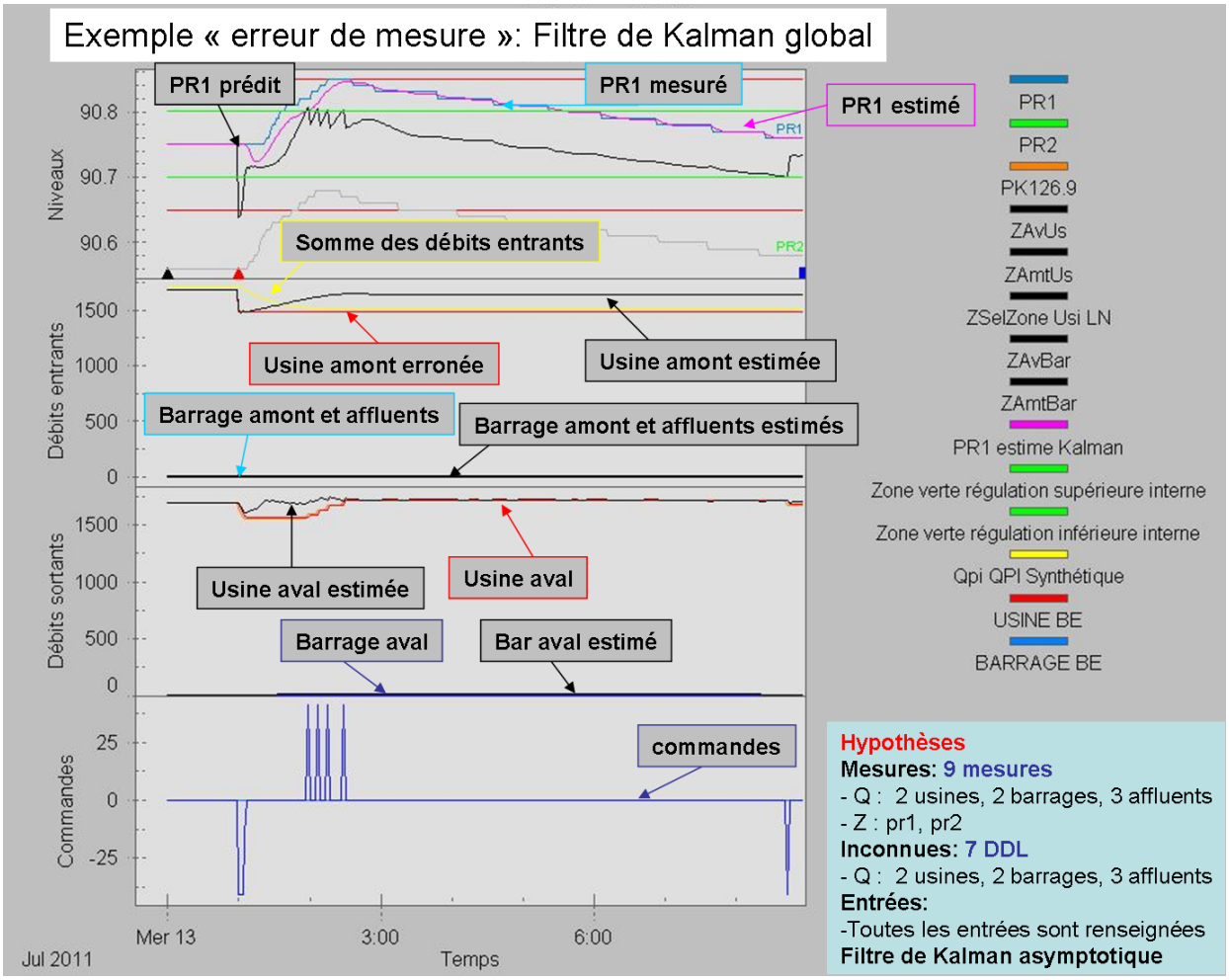


FIGURE 7.3 – Simulation d'une erreur de mesure avec un Filtre de Kalman global

Dans cette situation, le filtre de Kalman global réagit à l'erreur de mesure et fournit un estimation correcte de l'état hydraulique de l'aménagement hydroélectrique de Logis-Neuf. La détection de l'erreur et l'estimation de la ligne d'eau permet d'avoir un calcul de la commande prédictive plus adapté à la situation réelle. La tenue de la cote au PR1 (Cf. FIGURE 7.3, courbe bleue) est meilleure qu'avec la méthode du $Qcor$. Notons, que le filtre de Kalman utilisé ici est non optimal car il considère que toutes les entrées sont inconnues.

Scénario avec un filtre de Kalman spécifique

Il est possible de faire tourner en parallèle du filtre de Kalman global, un filtre de Kalman ciblant uniquement la mesure douteuse (Cf. FIGURE 7.4). Dans ce cas, les hypothèses suivantes ont été considérées :

– on considère un système linéaire augmenté d'un seul état ($Qi_{\text{usine amont}}$), cela représente 296 états

– on considère deux observations (Z_{PR1}, Z_{PR2})

– toutes les entrées (U et Up) sont renseignées

– on considère un filtre de Kalman asymptotique

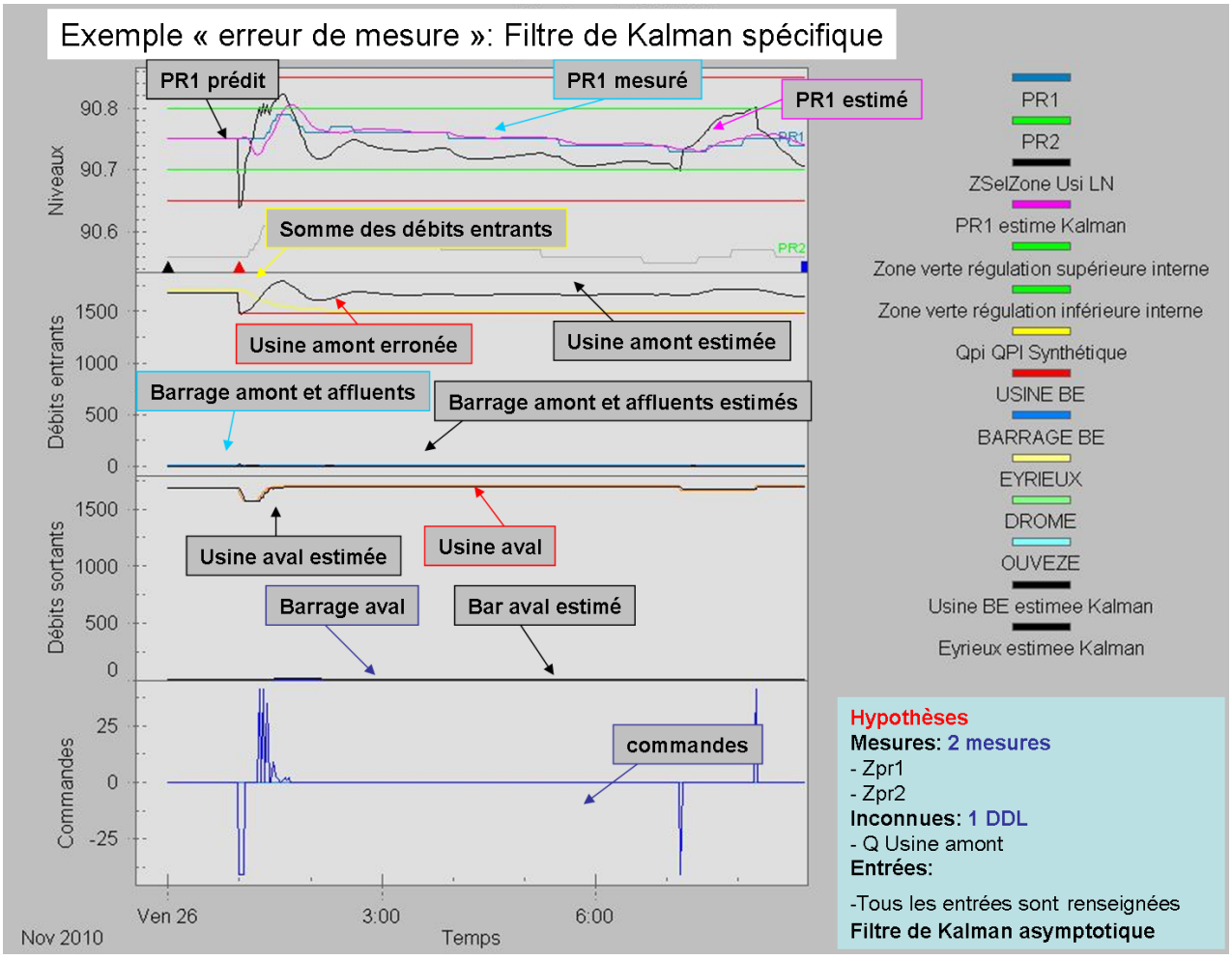


FIGURE 7.4 – Simulation d'une erreur de mesure avec un Filtre de Kalman adapté spécifiquement à cette situation

Dans ce cas, la tenue de la cote au PR1 est encore meilleure qu'avec le filtre de Kalman global. De plus, cette configuration impose à la régulation moins d'applications de commandes. Les organes réglants sont ainsi préservés. Nous pouvons conclure que dans ce type d'erreur de mesure, l'estimation faite avec un filtre de Kalman spécifique permet une meilleure tenue du niveau ainsi qu'une économie de manœuvres (ouverture et fermeture) des organes.

7.4.2 Simulation d'un déclenchement

La plateforme de simulation, permet aussi de visualiser la réaction de la régulation par commande prédictive lors de déclenchements et de reprises de groupes. Une telle situation engendre de nombreuses commandes et une mauvaise tenue du niveau (Cf. FIGURE 7.5).

Scénario La FIGURE 7.5 illustre un cas typique de déclenchement d'usine amont qui passe de 1683 $m^3.s^{-1}$ à 0 $m^3.s^{-1}$.

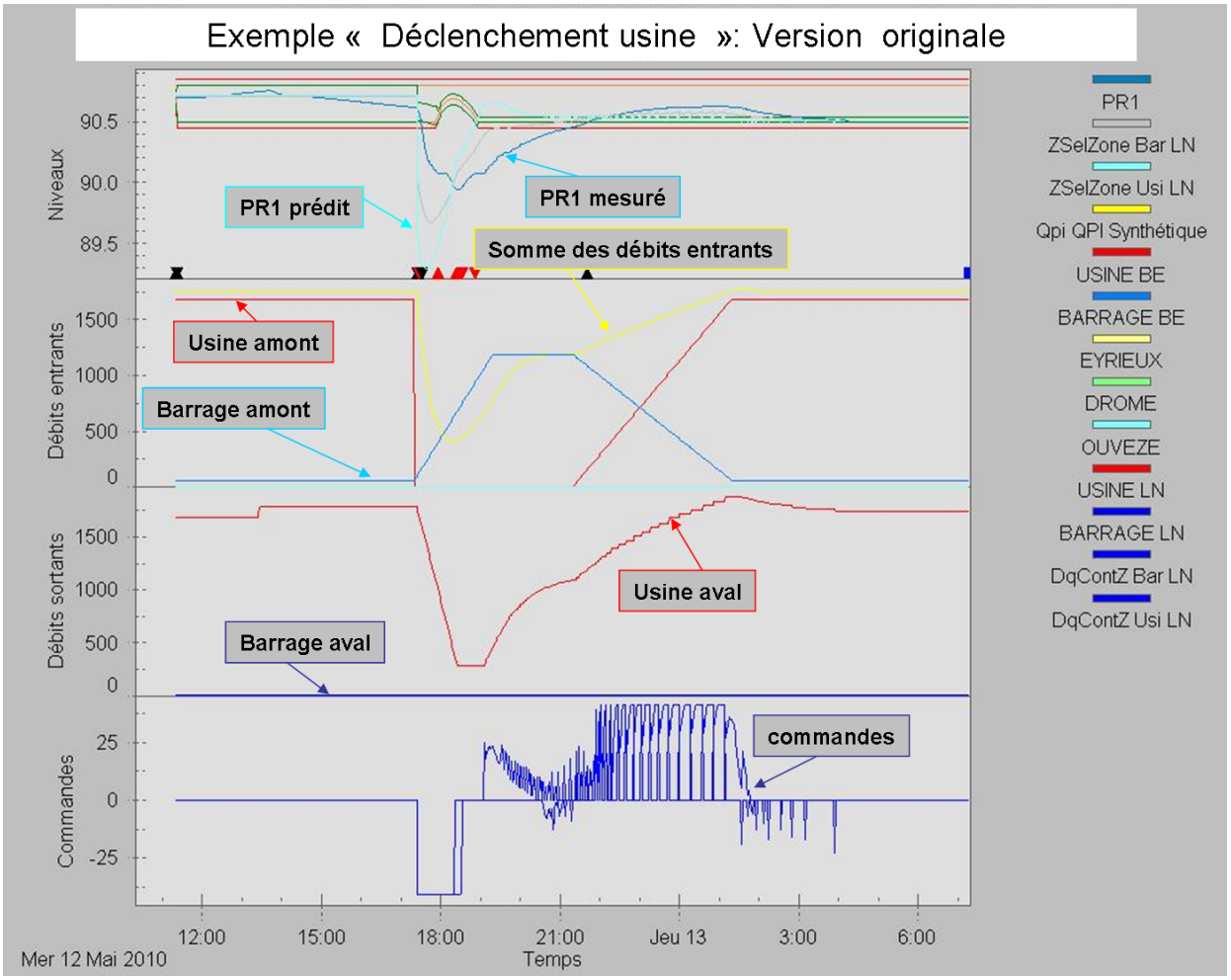


FIGURE 7.5 – Simulation d'un déclenchement d'usine avec la méthode actuelle de la CNR

Scénario avec un filtre de Kalman global

Pour ce même scénario, la simulation a été rejouée, mais cette fois-ci avec la prise en compte d'un filtre de Kalman global. Les hypothèses sont les suivantes :

- on considère un système linéaire augmenté de sept états ($Qi_{\text{barrage amont}}$, $Qi_{\text{usine amont}}$, Qi_{Eyrieux}, $Qi_{\text{Drôme}}$, $Qi_{\text{Ouvèze}}$, $Qi_{\text{usine aval}}$, $Qi_{\text{barrage aval}}$), cela représente 302 états.

- on considère 9 observations ($Qi_{\text{barrage amont}}$, $Qi_{\text{usine amont}}$, Qi_{Eyrieux}, $Qi_{\text{Drôme}}$, $Qi_{\text{Ouvèze}}$, $Qi_{\text{usine aval}}$, $Qi_{\text{barrage aval}}$, Z_{PR1}, Z_{PR2})

- toutes les entrées (U et Up) sont renseignées

- on considère un filtre de Kalman asymptotique

On voit sur la FIGURE 7.6 que le filtre de Kalman global permet une réduction du nombre de commandes. Mais on s'apperçoit que la cote au PR1 n'est pas bien maintenue dans la zone de marnage. Cela est dû au changement brutal de régime de référence. En effet, nous avons vu chapitre 4 que le modèle linéaire est adapté tant que les perturbations sur les usines n'excèdent pas 500 $m^3.s^{-1}$. Or dans cette situation, les perturbations vont jusqu'à 1683 $m^3.s^{-1}$. On suppose donc qu'entre 6h et 12h (du temps de la simulation), un filtre de Kalman synthétisé à partir d'un régime de référence à bas débit, serait plus adapté. Ce test n'a pas pu être effectué pour des contraintes de temps car cela nécessitait des développements informatiques supplémentaires.

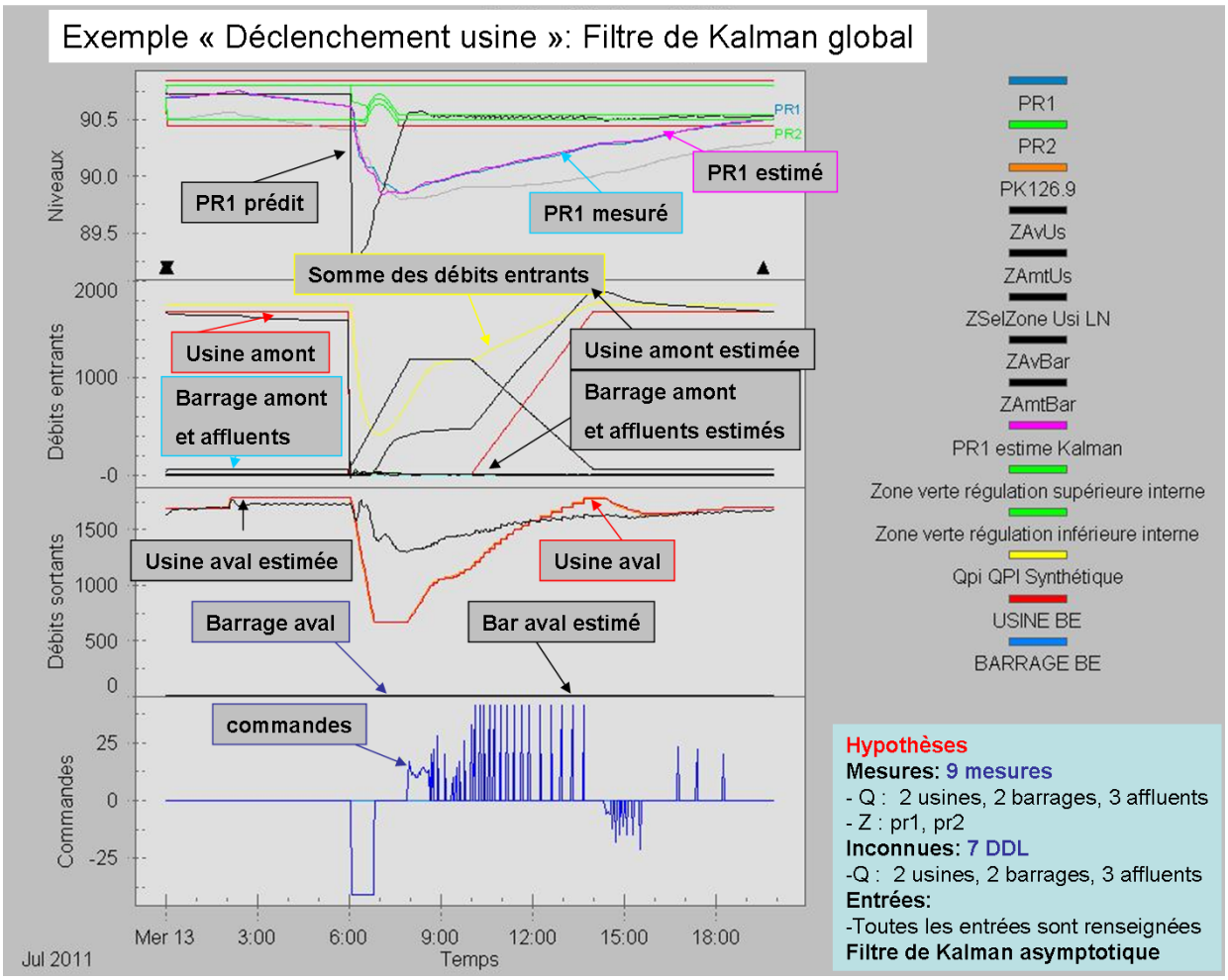


FIGURE 7.6 – Simulation d'un déclenchement d'usine avec un Filtre de Kalman global

7.5 Conclusion

Cette partie avait pour objectif de montrer la faisabilité et la qualité des résultats obtenus lors de la mise en place de filtre de Kalman. Dans le cas des expériences jumelles (Cf. section 7.2) ainsi que sur la plateforme de simulation de la CNR, les résultats obtenus lors de la mise en place d'un filtre de Kalman dans des situations problématiques pour la CNR, sont de bonne qualité. De plus, nous avons vu que si la configuration du filtre de Kalman (ici appelé filtre de Kalman spécifique) est adaptée à la situation, alors les résultats d'estimation sont bien meilleurs. Et comme aujourd'hui, les puissances informatiques permettent de faire tourner plusieurs filtre de Kalman en parallèle, cela permettrait, en temps réel, de choisir le filtre de Kalman spécifique est mieux adapté à la problématique.

Chapitre 8

Conclusion générale

Les trois missions principales de la Compagnie Nationale du Rhône sont d'assurer l'irrigation, la navigation et la production d'électricité, tout en garantissant la sûreté des personnes et des biens. Ces dernières années, les domaines concernant la navigation et la production ont énormément évolué. La gestion des flux (de bateaux pour la navigation et d'eau pour la production hydroélectrique) a été automatisée et à cette occasion optimisée.

La CNR régule 18 aménagements hydroélectriques de manière automatique par un algorithme appelé commande prédictive avec modèle embarqué. Ce mode de gestion (présenté chapitre 1) du fleuve Rhône a nettement optimisé la production d'hydroélectricité. La CNR est aujourd'hui capable de prévoir et d'assurer la vente de l'électricité au moment où les prix du marché sont les plus intéressants.

Cependant, après un état des lieux complet de la régulation par commande prédictive, nous avons remarqué que certaines situations (celles qui faussent le calcul des lignes d'eau), telles que :

– la présence d'une panne ou d'un biais sur un capteur de cote

– la non fidélité du modèle embarqué par rapport à la réalité

sont actuellement difficilement gérées par la régulation et ainsi faussent les prévisions de productions. L'objectif de cette thèse était donc de proposer une méthode d'estimation adaptée à toutes les situations rencontrées sur le Rhône.

Pour mener à bien ce travail de thèse, nous avons choisi un aménagement hydroélectrique typique de tous ceux présents sur le Rhône français. L'aménagement support choisi a été présenté chapitre 2. Comme la majorité des aménagements du Rhône, celui-ci présente des confluences et une diffluence. Nous avons vu que ces particularités sont très bien gérées par le modèle non-linéaire.

Le modèle non-linéaire embarqué pour le calcul de la commande prédictive a été conçu pour pouvoir calculer les lignes d'eau le plus fidèlement possible pour tous les aménagements français du Rhône. Ces calculs doivent être fiables quelques soient les particularités propres à chaque aménagement et la situation hydraulique à laquelle il fait face. En effet, le Rhône est parfois soumis à de fortes crues. Dans ce cas, afin d'éviter une catastrophe naturelle, il est nécessaire que la crue soit écrêtée. Pour réussir cela, une solution est le déversement dans des plaines d'inondations. Nous avons donc présenté, chapitre 3, la méthode utilisée par le modèle non-linéaire pour représenter ces zones d'inondations en 2D. Ainsi ce modèle non-linéaire est en mesure de calculer les lignes d'eau même dans des situations extrêmes.

Après avoir compris l'emploi du modèle embarqué dans le calcul de la commande, il est apparu évident d'employer une méthode d'assimilation de données de type filtre de

Kalman pour estimer les lignes d'eau en temps réel. Seulement, cette méthode nécessite l'emploi d'un modèle linéaire. C'est pourquoi nous avons traité, dans le chapitre 4, la linéarisation des équations utilisées autour d'un régime de référence. Ce travail de thèse a été novateur dans la prise en compte de réseaux maillés lors de la linéarisation du système.

Une fois le modèle linéaire obtenu, nous avons cherché à le comparer au modèle non-linéaire afin d'évaluer les non-linéarités liées à la linéarisation du régime de référence et celles liées aux amplitudes sur les entrées. Pour le premier type de non-linéarité, nous avons procédé à une étude fréquentielle du système alors que pour le second type de non-linéarités, nous avons testé divers scénarii sur les entrées. Ces tests ont révélé que seules de fortes amplitudes sur les débits d'entrée aux usines faussent la modélisation.

Une fois la fidélité du modèle linéaire confirmée, nous avons étudié la mise en place d'un filtre de Kalman. Pour que le filtre de Kalman soit complètement adapté aux situations rencontrées par la CNR, il est nécessaire que celui-ci puisse gérer plusieurs apports et prises inconnues. Le chapitre 5 donne la méthodologie pour pouvoir répondre à cette problématique. Cela inclue une proposition de matrices de covariance sur les états (matrice Q) pertinente.

Nous avons noté aussi que le filtre de Kalman n'assure pas systématiquement une convergence de l'erreur d'estimation vers 0. Nous avons donc cherché les configurations qui permettent d'avoir une convergence parfaite. Cette étude nous a amené à approfondir les calculs associés à l'observabilité et la détectabilité. Il est ressorti qu'il n'est pas nécessaire que le système soit observable pour avoir un filtre de Kalman convergeant vers 0. Nous avons vu que pour un système détectable, il est possible d'obtenir un filtre de Kalman convergent vers une erreur d'estimation de moyenne nulle.

Pour illustrer ces études, nous avons testé le filtre de Kalman à l'aide d'expériences jumelles sur des situations typiquement problématiques pour la CNR. Les résultats obtenus étant concluant, ils ont fait l'objet d'une publication.

Enfin, réaliser une thèse en entreprise offre l'immense privilège de travailler sur des outils opérationnels avec des données réalistes (voir même réelles). Nous avons exploité cette possibilité en testant la réaction du filtre de Kalman lors d'une situation typique et ainsi voir l'impact de l'estimation des états hydrauliques sur le calcul de la commande prédictive.

A travers ces simulations il est apparu que les résultats sont optimums lorsque le filtre de Kalman est spécialement adapté à la configuration. Une solution est donc de faire tourner une batterie de filtres de Kalman en parallèle, et choisir en temps réel celui qui est le plus adapté. Ce choix pourrait être fait à l'aide d'une méthode statistique (telle que celle du $\chi 2$, par exemple). Cela pourra faire l'objet de recherches futures.

Annexe A

Linéarisation

Sommaire

A.1 Discrétisation de l'équation de continuité 179
A.2 Discrétisation de l'équation dynamique 181
A.2.1 Membre de gauche - Premier terme 181
A.2.2 Membre de gauche - Deuxième terme 181
A.2.3 Membre de gauche - Troisième terme 183
A.2.4 Membre de gauche - Quatrième terme 183
A.2.5 Membre de droite 185
A.2.6 Équation dynamique linéarisée 186

A.1 Discrétisation de l'équation de continuité

Pour l'équation

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \tag{A.1}$$

la discrétisation selon le schéma implicite de Preissmann entre le profils j et le profil $j+1$ donne :

$$\frac{S_{j+1}^{+} + S_j^{+}}{2\Delta t} - \frac{S_{j+1} + S_j}{2\Delta t} + \frac{\theta}{\Delta x}(Q_{j+1}^{+} - Q_j^{+}) + \frac{1-\theta}{\Delta x}(Q_{j+1} - Q_j) = \frac{\theta}{2}(q_{j+1}^{+} - q_j^{+}) + \frac{1-\theta}{2}(q_{j+1} - q_j) \tag{A.2}$$

Remarque : Pour plus de simplicité dans les notations, l'exposant " $^{+}$" est choisi pour exprimer les variables au pas de temps suivant (soit à $k+1$).

On suppose par la suite que q est un terme d'infiltration constant dans le temps, c'est à dire :

$$q^{+} = q_j = qe_j \tag{A.3}$$

$$q_{j+1}^{+} = q_{j+1} = qe_{j+1} \tag{A.4}$$

Cette hypothèse est réaliste dans la mesure où les variations d'infiltration dans un canal sont généralement faibles ou lentes par rapport à l'horizon de commande, en particulier si le canal est revêtu. L'équation A.1 devient :

$$\frac{S_{j+1}^{+} + S_j^{+}}{2\Delta t} - \frac{S_{j+1} + S_j}{2\Delta t} + \frac{\theta}{\Delta x}(Q_{j+1}^{+} - Q_j^{+}) + \frac{1-\theta}{\Delta x}(Q_{j+1} - Q_j) = \frac{qe_{j+1} + qe_j}{2} \tag{A.5}$$

Les variables recherchées sont les débits Q et les cotes Z en chaque point du maillage. L'équation ci-dessus est non-linéaire, car en géométrie quelconque S est une fonction non-linéaire de Z. Afin d'obtenir un modèle linéaire, l'équation est linéarisée autour d'un régime permanent de référence indicé (e) par développement de Taylor au premier ordre. On effectue également le changement de variable :

$$Y = Ye + \delta Y \tag{A.6}$$

où $Y = Q_j^{+}, Z_j^{+}, Q_{j+1}^{+}, Z_{j+1}^{+}, Q_j, Q_{j+1}, Z_j$ ou Z_{j+1}
c'est à dire :
Y : valeur absolue de la variable Y,
Ye : valeur de la variable Y pour le régime permanent de référence,
δY : valeur relative de la variable Y par rapport au régime permanent de référence.

Alors,

$$\frac{Le_j(\delta Z_j^+ - \delta Z_j)}{2\Delta t} + \frac{Le_{j+1}(\delta Z_{j+1}^+ - \delta Z_{j+1})}{2\Delta t} + \frac{\theta(\delta Q_{j+1}^+ - \delta Q_j^+)}{\Delta x} + \frac{(1-\theta)(\delta Q_{j+1} - \delta Q_j)}{\Delta x} = -\frac{Qe_{j+1} - Qe_j}{\Delta x} + \frac{qe_{j+1} + qe_j}{2} \quad (A.7)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\theta}{\Delta x}\delta Q_j^+ + \frac{Le_j}{2\Delta t}\delta Z_j^+ + \frac{\theta}{\Delta x}\delta Q_{j+1}^+ + \frac{Le_{j+1}}{2\Delta t}\delta Z_{j+1}^+ = \frac{1-\theta}{\Delta x}\delta Q_j + \frac{Le_j}{2\Delta t}\delta Z_j - \frac{1-\theta}{\Delta x}\delta Q_{j+1} + \frac{Le_{j+1}}{2\Delta t}\delta Z_{j+1} - \frac{Qe_{j+1} - Qe_j}{\Delta x} + \frac{qe_{j+1} + qe_j}{2} \quad (A.8)$$

Soit :

$$A_{11}\delta Q_j^+ + A_{12}\delta Z_j^+ + A_{13}\delta Q_{j+1}^+ + A_{14}\delta Z_{j+1}^+ = B_{11}\delta Q_j + B_{12}\delta Z_j + B_{13}\delta Q_{j+1} + B_{14}\delta Z_{j+1} + C_1 \quad (A.9)$$

avec :

$$A_{11} = -\frac{\theta}{\Delta x} = -\theta\alpha_1 \quad (A.10)$$

$$A_{12} = \frac{Le_j}{2\Delta t} = \alpha_2(j) \quad (A.11)$$

$$A_{13} = \frac{\theta}{\Delta x} = \theta\alpha_1 \quad (A.12)$$

$$A_{14} = \frac{Le_{j+1}}{2\Delta t} = \alpha_2(j+1) \quad (A.13)$$

$$B_{11} = \frac{1-\theta}{\Delta x} = (1-\theta)\alpha_1 \quad (A.14)$$

$$B_{12} = \frac{Le_j}{2\Delta t} = \alpha_2(j) \quad (A.15)$$

$$B_{13} = -\frac{1-\theta}{\Delta x} = -(1-\theta)\alpha_1 \quad (A.16)$$

$$B_{14} = \frac{Le_{j+1}}{2\Delta t} = \alpha_2(j+1) \quad (A.17)$$

$$C_1 = -\frac{Qe_{j+1} - Qe_j}{\Delta x} + \frac{qe_{j+1} + qe_j}{2} \quad (A.18)$$

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{1}{\Delta x}} \quad (A.19)$$

$$\boxed{\alpha_2(j) = \frac{Le_j}{2\Delta t}} \quad (A.20)$$

A.2 Discrétisation de l'équation dynamique

Comme pour l'équation de continuité, chaque terme de l'équation dynamique

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q^2/S}{\partial x} + g\ S(\frac{\partial Z}{\partial x}) + g\ S\ J = k\ q\ V \tag{A.21}$$

est discrétisé selon le schéma de Preissmann, puis linéarisé autour du régime de référence (e).

A.2.1 Membre de gauche - Premier terme

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{Q^+_{j+1} + Q^+_j}{2\Delta t} - \frac{Q_{j+1} + Q_j}{2\Delta t} \\ &= \frac{1}{2\Delta t}\delta Q^+_j + \frac{1}{2\Delta t}\delta Q^+_{j+1} - \frac{1}{2\Delta t}\delta Q_j - \frac{1}{2\Delta t}\delta Q_{j+1} \\ &= \alpha_3(\delta Q^+_j + \delta Q^+_{j+1} - \delta Q_j - \delta Q_{j+1})\end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\boxed{\alpha_3 = \frac{1}{2\Delta t}} \tag{A.23}$$

A.2.2 Membre de gauche - Deuxième terme

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q^2/S}{\partial x} &= \frac{1-\theta}{\Delta x}(\frac{Q^2_{j+1}}{S_{j+1}} - \frac{Q^2_j}{S_j}) + \frac{\theta}{\Delta x}(\frac{Q^{+2}_{j+1}}{S^+_{j+1}} - \frac{Q^{+2}_j}{S^+_j}) \\ &= f_1(Q^+_j, Z^+_j, Q^+_{j+1}, Z^+_{j+1}, Q_j, Q_{j+1}, Z_j, Z_{j+1}) \\ &= f_1(e) + \sum(\frac{\partial f_1}{\partial Y})|_e \delta Y \text{ pour } Y = Q^+_j, Z^+_j, Q^+_{j+1}, Z^+_{j+1}, Q_j, Q_{j+1}, Z_j, Z_{j+1}\end{aligned} \tag{A.24}$$

L'évaluation de ces termes donne :

I. $$f_1(e) = \frac{1}{\Delta x}(\frac{Qe_{j+1}^2}{Se_{j+1}} - \frac{Qe_j^2}{Se_j}) \tag{A.25}$$

II. $$(\frac{\partial f_1}{\partial Q_j^+})|_e = -\frac{2\theta Qe_j}{Se_j \Delta x} = -\theta\alpha_4(j) \tag{A.26}$$

III. $$(\frac{\partial f_1}{\partial Z_j^+})|_e = \frac{\theta Qe_j^2 Le_j}{Se_j^2 \Delta x} = \theta\alpha_4(j)\frac{Ve_j Le_j}{2} = \theta\alpha_4(j)\alpha_5(j) \tag{A.27}$$

IV. $$(\frac{\partial f_1}{\partial Q_{j+1}^+})|_e = \frac{2\theta Qe_{j+1}}{Se_{j+1}\Delta x} = \theta\alpha_4(j+1) \tag{A.28}$$

V. $$(\frac{\partial f_1}{\partial Z_{j+1}^+})|_e = -\frac{\theta Qe_{j+1}^2 Le_{j+1}}{Se_{j+1}^2 \Delta x} = -\theta\alpha_4(j+1)\alpha_5(j+1) \tag{A.29}$$

VI. $$(\frac{\partial f_1}{\partial Q_j})|_e = -\frac{2(1-\theta)Qe_j}{Se_j \Delta x} = -(1-\theta)\alpha_4(j) \tag{A.30}$$

VII. $$(\frac{\partial f_1}{\partial Z_j})|_e = \frac{(1-\theta)Qe_j^2 Le_j}{Se_j^2 \Delta x} = (1-\theta)\alpha_4(j)\alpha_5(j) \tag{A.31}$$

VIII. $$(\frac{\partial f_1}{\partial Q_{j+1}})|_e = \frac{2(1-\theta)Qe_{j+1}}{Se_{j+1}\Delta x} = (1-\theta)\alpha_4(j+1) \tag{A.32}$$

IX. $$(\frac{\partial f_1}{\partial Z_{j+1}})|_e = -\frac{(1-\theta)Qe_{j+1}^2 Le_{j+1}}{Se_{j+1}^2 \Delta x} = -(1-\theta)\alpha_4(j+1)\alpha_5(j+1) \tag{A.33}$$

$$\boxed{\alpha_4(j) = \frac{2Qe_j}{Se_j \Delta x}} \tag{A.34}$$

$$\boxed{\alpha_5(j) = \frac{Ve_j Le_j}{2}} \tag{A.35}$$

Remarque : le terme non-linéaire $\frac{\partial Q^2/S}{\partial x}$ peut être discrétisé de différentes manières. Si le schéma est convergent, la solution numérique tend vers la solution réelle, lorsque les pas de temps Δt et d'espace Δx tendent vers 0. Par contre, pour un pas de temps Δt et un pas d'espace Δx donnés, la solution n'est qu'approchée, avec une erreur en $0(\Delta t^n)$ et $0(\Delta x^m)$, où n (respectivement m) est l'ordre de consistance du schéma en t (respectivement en x). Ainsi, un même schéma appliqué à différentes formulations pourra plus ou moins bien rendre compte de la conservation de certaines quantités physiques (volume, énergie, charge, quantité de mouvement).

A.2.3 Membre de gauche - Troisième terme

$$\begin{aligned} g\ S\frac{\partial Z}{\partial x} &= g[\frac{1-\theta}{2}(S_j+S_{j+1})+\frac{\theta}{2}(S_j^+ + S_{j+1}^+)]\frac{1}{\Delta x}[(1-\theta)(Z_{j+1}-Z_j)+\theta(Z_{j+1}^+ - Z_j^+)] \\ &= \frac{g}{2\Delta x}[(1-\theta)(S_j+S_{j+1})+\theta(S_j^+ + S_{j+1}^+)][(1-\theta)(Z_{j+1}-Z_j)+\theta(Z_{j+1}^+ - Z_j^+)] \\ &= f_2(Z_j^+, Z_{j+1}^+, Z_j, Z_{j+1}) \\ &= f_2(e) + \sum(\frac{\partial f_2}{\partial Y})|_e \delta Y \text{ pour } Y = Z_j^+, Z_{j+1}^+, Z_j, Z_{j+1} \end{aligned} \tag{A.36}$$

L'évaluation de ces termes donne :

I. $$f_2(e) = \frac{g}{2\Delta x}(Se_j + Se_{j+1})(Ze_{j+1} - Ze_j) \tag{A.37}$$

II. $$(\frac{\partial f_2}{\partial Z_j^+})|_e = \frac{g\theta}{2\Delta x}[Le_j(Ze_{j+1}-Ze_j) - (Se_j + Se_{j+1})] = \theta\alpha_6 \tag{A.38}$$

III. $$(\frac{\partial f_2}{\partial Z_{j+1}^+})|_e = \frac{g\theta}{2\Delta x}[Le_{j+1}(Ze_{j+1}-Ze_j) + (Se_j + Se_{j+1})] = \theta\alpha_7 \tag{A.39}$$

IV. $$(\frac{\partial f_2}{\partial Z_j})|e = \frac{g(1-\theta)}{2\Delta x}[Le_j(Ze_{j+1}-Ze_j) - (Se_j + Se_{j+1})] = (1-\theta)\alpha_6 \tag{A.40}$$

V. $$(\frac{\partial f_2}{\partial Z_{j+1}})|_e = \frac{g(1-\theta)}{2\Delta x}[Le_{j+1}(Ze_{j+1}-Ze_j) + (Se_j + Se_{j+1})] = (1-\theta)\alpha_7 \tag{A.41}$$

$$\boxed{\alpha_6 = \frac{g}{2\Delta x}[Le_j(Ze_{j+1}-Ze_j) - (Se_j + Se_{j+1})]} \tag{A.42}$$

$$\boxed{\alpha_7 = \frac{g}{2\Delta x}[Le_{j+1}(Ze_{j+1}-Ze_j) + (Se_j + Se_{j+1})]} \tag{A.43}$$

A.2.4 Membre de gauche - Quatrième terme

$$\begin{aligned} g\ S\ J &= g[\frac{1-\theta}{2}(S_jJ_j + S_{j+1}J_{j+1})+\frac{\theta}{2}(S_j^+J_j^+ + S_{j+1}^+J_{j+1}^+)] \\ &= f_3(Q_j^+, Z_j^+, Q_{j+1}^+, Z_{j+1}^+, Q_j, Z_j, Q_{j+1}, Z_{j+1}) \\ &= f_3(e) + \sum(\frac{\partial f_3}{\partial Y})|_e \delta Y \text{ pour } Y = Q_j^+, Z_j^+, Q_{j+1}^+, Z_{j+1}^+, Q_j, Z_j, Q_{j+1}, Z_{j+1} \end{aligned} \tag{A.44}$$

On évalue d'abord l'expression $S\ J$ ainsi que ses dérivées par rapport aux variables Q et Z :

$$* \qquad S\ J = S\frac{Q^2n^2}{S^2R^{4/3}} = \frac{n^2Q^2}{SR^{4/3}} \tag{A.45}$$

$$* \qquad \frac{\partial(S\ J)}{\partial Q} = \frac{2n^2Q}{SR^{4/3}} \tag{A.46}$$

$$\begin{aligned} * \qquad \frac{\partial(S\ J)}{\partial Z} &= -\frac{n^2Q^2}{S^2R^{8/3}}[LR^{4/3} + \frac{4}{3}SR^{1/3}\frac{\partial R}{\partial Z}] = -\frac{n^2Q^2}{S^2R^{7/3}}[LR + \frac{4}{3}S\frac{LP - S\frac{\partial P}{\partial Z}}{P^2}] \\ &= -\frac{n^2Q^2}{S^2R^{4/3}}[L + \frac{4}{3}(L - R\frac{\partial P}{\partial Z})] \end{aligned} \tag{A.47}$$

L'évaluation des termes du développement de Taylor au premier ordre de f_3 donne donc :

$$\text{I.} \qquad f_3(e) = \frac{g}{2}(Se_jJe_j + Se_{j+1}Je_{j+1}) \tag{A.48}$$

$$\text{II.} \qquad (\frac{\partial f_3}{\partial Q_j^+})|_e = \frac{g\theta}{2}\frac{2n^2Qe_j}{Se_jRe_j^{4/3}} = \theta\alpha_8(j) \tag{A.49}$$

$$\begin{aligned} \text{III.} \qquad (\frac{\partial f_3}{\partial Z_j^+})|_e &= -\frac{g\theta}{2}\frac{n^2Qe_j^2}{Se_j^2Re_j^{4/3}}[Le_j + \frac{4}{3}(Le_j - Re_j(\frac{\partial P_j}{\partial Z_j})|_e)] \\ &= -\theta\alpha_8(j)\alpha_9(j)\alpha_{10}(j) \end{aligned} \tag{A.50}$$

$$\text{IV.} \qquad (\frac{\partial f_3}{\partial Q_{j+1}^+})|_e = \frac{g\theta}{2}\frac{2n^2Qe_{j+1}}{Se_{j+1}Re_{j+1}^{4/3}} = \theta\alpha_8(j+1) \tag{A.51}$$

$$\begin{aligned} \text{V.} \qquad (\frac{\partial f_3}{\partial Z_{j+1}^+})|_e &= -\frac{g\theta}{2}\frac{n^2Qe_{j+1}^2}{Se_{j+1}^2Re_{j+1}^{4/3}}[Le_{j+1} + \frac{4}{3}(Le_{j+1} - Re_{j+1}(\frac{\partial P_{j+1}}{\partial Z_{j+1}})|_e)] \\ &= -\theta\alpha_8(j+1)\alpha_9(j+1)\alpha_{10}(j+1) \end{aligned} \tag{A.52}$$

$$\text{VI.} \qquad (\frac{\partial f_3}{\partial Q_j})|_e = \frac{g(1-\theta)}{2}\frac{2n^2Qe_j}{Se_jRe_j^{4/3}} = (1-\theta)\alpha_8(j) \tag{A.53}$$

$$\begin{aligned} \text{VII.} \qquad (\frac{\partial f_3}{\partial Z_j})|_e &= -\frac{g(1-\theta)}{2}\frac{n^2Qe_j^2}{Se_j^2Re_j^{4/3}}[Le_j + \frac{4}{3}(Le_j - Re_j(\frac{\partial P_j}{\partial Z_j})|_e)] \\ &= -(1-\theta)\alpha_8(j)\alpha_9(j)\alpha_{10}(j) \end{aligned} \tag{A.54}$$

$$\text{VIII.} \qquad (\frac{\partial f_3}{\partial Q_{j+1}})|_e = \frac{g(1-\theta)}{2}\frac{2n^2Qe_{j+1}}{Se_{j+1}Re_{j+1}^{4/3}} = (1-\theta)\alpha_8(j+14) \tag{A.55}$$

$$\begin{aligned} \text{IX.} \qquad (\frac{\partial f_3}{\partial Z_{j+1}})|_e &= -\frac{g(1-\theta)}{2}\frac{n^2Qe_{j+1}^2}{Se_{j+1}^2Re_{j+1}^{4/3}}[Le_{j+1} + \frac{4}{3}(Le_{j+1} - Re_{j+1}(\frac{\partial P_{j+1}}{\partial Z_{j+1}})|_e)] \\ &= -(1-\theta)\alpha_8(j+1)\alpha_9(j+1)\alpha_{10}(j+1) \end{aligned} \tag{A.56}$$

$$\boxed{\alpha_8(j) = \frac{g\ n^2Qe_j}{Se_jRe_j^{4/3}}} \tag{A.57}$$

$$\boxed{\alpha_9(j) = \frac{Ve_j}{2}} \tag{A.58}$$

$$\boxed{\alpha_{10}(j) = [\frac{7}{3}Le_j - \frac{4}{3}Re_j(\frac{\partial P_j}{\partial Z_j})|_e]} \tag{A.59}$$

A.2.5 Membre de droite

$$\begin{aligned} k\ q\ V &= \frac{k}{2}[(1-\theta)(qe_j\frac{Q_j}{S_j} + qe_{j+1}\frac{Q_{j+1}}{S_{j+1}}) + \theta(qe_j\frac{Q_j^+}{S_j^+} + qe_{j+1}\frac{Q_{j+1}^+}{S_{j+1}^+})] \\ &= f_4(Q_j^+, Z_j^+, Q_{j+1}^+, Z_{j+1}^+, Q_j, Z_j, Q_{j+1}, Z_{j+1}) \\ &= f_4(e) + \sum(\frac{\partial f_4}{\partial Y})|_e \delta Y \text{ pour } Y = Q_j^+, Z_j^+, Q_{j+1}^+, Z_{j+1}^+, Q_j, Z_j, Q_{j+1}, Z_{j+1} \end{aligned} \tag{A.60}$$

On évalue d'abord les dérivées de Q/S par rapport aux variables Q et Z :

$$*\frac{\partial Q/S}{\partial Q} = \frac{1}{S} \tag{A.61}$$

$$*\frac{\partial Q/S}{\partial Z} = -\frac{Q\ L}{S^2} \tag{A.62}$$

L'évaluation des termes du développement de Taylor de f_4 au premier ordre donne

donc :

$$\text{I.} \quad f_4(e) = \frac{k}{2}(qe_j \frac{Qe_j}{Se_j} + qe_{j+1}\frac{Qe_{j+1}}{Se_{j+1}}) \tag{A.63}$$

$$\text{II.} \quad (\frac{\partial f_4}{\partial Q_j^+})|_e = \frac{k\theta qe_j}{2Se_j} = \theta\alpha_{11}(j) \tag{A.64}$$

$$\text{III.} \quad (\frac{\partial f_4}{\partial Z_j^+})|_e = -\frac{k\theta qe_j Qe_j Le_j}{2Se_j^2} = -2\theta\alpha_{11}(j)\alpha_5(j) \tag{A.65}$$

$$\text{IV.} \quad (\frac{\partial f_4}{\partial Q_{j+1}^+})|_e = \frac{k\theta qe_{j+1}}{2Se_{j+1}} = \theta\alpha_{11}(j+1) \tag{A.66}$$

$$\text{V.} \quad (\frac{\partial f_4}{\partial Z_{j+1}^+})|_e = -\frac{k\theta qe_{j+1}Qe_{j+1}Le_{j+1}}{2Se_{j+1}^2} = -2\theta\alpha_{11}(j+1)\alpha_5(j+1) \tag{A.67}$$

$$\text{VI.} \quad (\frac{\partial f_4}{\partial Q_j})|_e = \frac{k(1-\theta)qe_j}{2Se_j} = (1-\theta)\alpha_{11}(j) \tag{A.68}$$

$$\text{VII.} \quad (\frac{\partial f_4}{\partial Z_j})|_e = -\frac{k(1-\theta)qe_j Qe_j Le_j}{2Se_j^2} = -2(1-\theta)\alpha_{11}(j)\alpha_5(j) \tag{A.69}$$

$$\text{VIII.} \quad (\frac{\partial f_4}{\partial Q_{j+1}})|_e = \frac{k(1-\theta)qe_{j+1}}{2Se_{j+1}} = (1-\theta)\alpha_{11}(j+1) \tag{A.70}$$

$$\text{IX.} \quad (\frac{\partial f_4}{\partial Z_{j+1}})|_e = -\frac{k(1-\theta)qe_{j+1}Qe_{j+1}Le_{j+1}}{2Se_{j+1}^2} = -2(1-\theta)\alpha_{11}(j+1)\alpha_5(j+1) \tag{A.71}$$

$$\boxed{\alpha_{11}(j) = \frac{k\ qe_j}{2Se_j}} \tag{A.72}$$

A.2.6 Équation dynamique linéarisée

L'équation dynamique s'écrit donc :

$$A_{21}\delta Q_j^+ + A_{22}\delta Z_j^+ + A_{23}\delta Q_{j+1}^+ + A_{24}\delta Z_{j+1}^+ = B_{21}\delta Q_j + B_{22}\delta Z_j + B_{23}\delta Q_{j+1} + B_{24}\delta Z_{j+1} + C_2 \tag{A.73}$$

avec :

$$
\begin{aligned}
A_{21} &= \alpha_3 - \theta[\alpha_4(j) - \alpha_8(j) + \alpha_{11}(j)] \\
A_{22} &= \theta[\alpha_4(j)\alpha_5(j) + \alpha_6 - \alpha_8(j)\alpha_9(j)\alpha_{10}(j) + 2\alpha_{11}(j)\alpha_5(j)] \\
A_{23} &= \alpha_3 + \theta[\alpha_4(j+1) + \alpha_8(j+1) - \alpha_{11}(j+1)] \\
A_{24} &= -\theta[\alpha_4(j+1)\alpha_5(j+1) - \alpha_7 + \alpha_8(j+1)\alpha_9(j+1)\alpha_{10}(j+1) - 2\alpha_{11}(j+1)\alpha_5(j+1)] \\
B_{21} &= \alpha_3 + (1-\theta)[\alpha_4(j) - \alpha_8(j) + \alpha_{11}(j)] \\
B_{22} &= -(1-\theta)[\alpha_4(j)\alpha_5(j) + \alpha_6 - \alpha_8(j)\alpha_9(j)\alpha_{10}(j) + 2\alpha_{11}(j)\alpha_5(j)] \\
B_{23} &= \alpha_3 - (1-\theta)[\alpha_4(j+1) + \alpha_8(j+1) - \alpha_{11}(j+1)] \\
B_{24} &= (1-\theta)[\alpha_4(j+1)\alpha_5(j+1) - \alpha_7 + \alpha_8(j+1)\alpha_9(j+1)\alpha_{10}(j+1) - 2\alpha_{11}(j+1)\alpha_5(j+1)] \\
C_2 &= \frac{k}{2}(qe_j\frac{Qe_j}{Se_j} + qe_{j+1}\frac{Qe_{j+1}}{Se_{j+1}}) - \frac{1}{\Delta x}[\frac{Qe_{j+1}^2}{Se_{j+1}} - \frac{Qe_j^2}{Se_j}] - \frac{g}{2\Delta x}(Se_j + Se_{j+1})(Ze_{j+1} - Ze_j) \\
&\quad - \frac{g}{2}(Se_jJe_j + Se_{j+1}Je_{j+1}) \quad \text{(A.74)}
\end{aligned}
$$

Annexe B

Comparaison du modèle linéaire avec le modèle non-linéaire

Sommaire

B.1 Non-linéarités liées aux amplitudes des débits d'entrée - Scénarii étudiés 191

B.2 Non-linéarités liées aux amplitudes des débits d'entrée - Graphiques 192

B.3 Norme de l'erreur entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire et tolérances acceptées 197

B.1 Non-linéarités liées aux amplitudes des débits d'entrée - Scénarii étudiés

Dans cette annexe, nous avons testé des diverses amplitudes de débit pour chaque entrée. Plus précisément, chaque entrée a été testée séparément de la façon suivante :

Pour les usines et les barrages

- de $0h \rightarrow 1h$: régime de référence partout
- de $1h \rightarrow 4h$: pour l'entrée testée, échelon de débit de 0 $m^3.s^{-1}$ à 2000 $m^3.s^{-1}$ par pas de 25 $m^3.s^{-1}$ et régime de référence pour toutes les autres entrées
- de $4h \rightarrow$ fin de la simulation : régime de référence partout

Pour l'Eyrieux et l'Ouvèze

- de $0h \rightarrow 1h$: régime de référence partout
- de $1h \rightarrow 4h$: pour l'entrée testée, échelon de débit de 0 $m^3.s^{-1}$ à 200 $m^3.s^{-1}$ par pas de 25 $m^3.s^{-1}$ et régime de référence pour toutes les autres entrées
- de $4h \rightarrow$ fin de la simulation : régime de référence partout

Pour la Drôme

- de $0h \rightarrow 1h$: régime de référence partout
- de $1h \rightarrow 4h$: pour l'entrée testée, échelon de débit de 0 $m^3.s^{-1}$ à 400 $m^3.s^{-1}$ par pas de 25 $m^3.s^{-1}$ et régime de référence pour toutes les autres entrées
- de $4h \rightarrow$ fin de la simulation : régime de référence partout

Pour chacun de ces scénarii, les différences en cote et en débit au point de réglage ont été calculées au point de réglage (PR1) (Cf. FIGURE B.8, FIGURE B.9, FIGURE B.10, FIGURE B.11, FIGURE B.12, FIGURE B.13 et FIGURE B.14).

B.2 Non-linéarités liées aux amplitudes des débits d'entrée - Graphiques

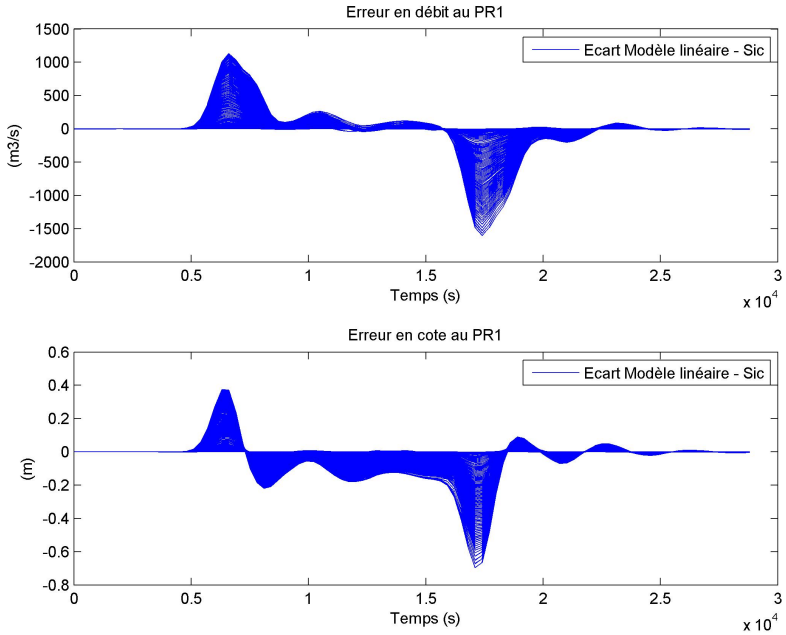


FIGURE B.1 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit au barrage amont

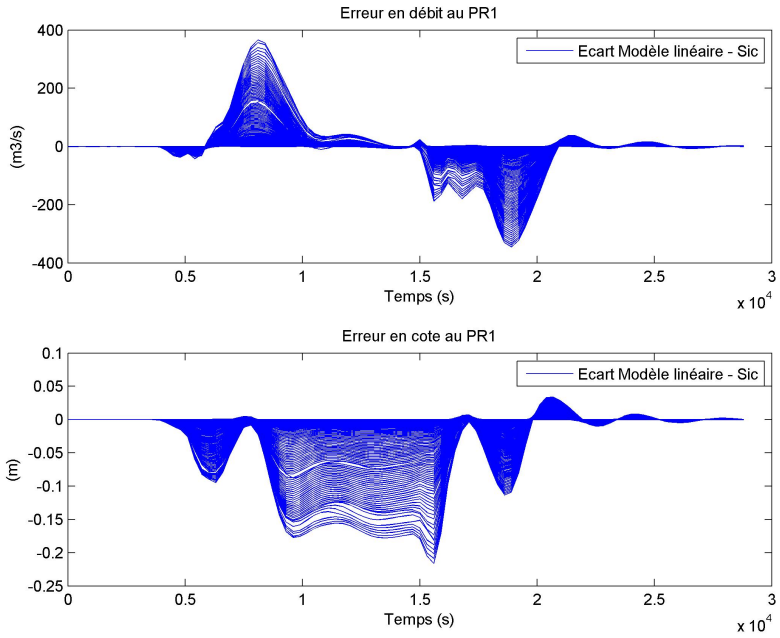


FIGURE B.2 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'usine amont

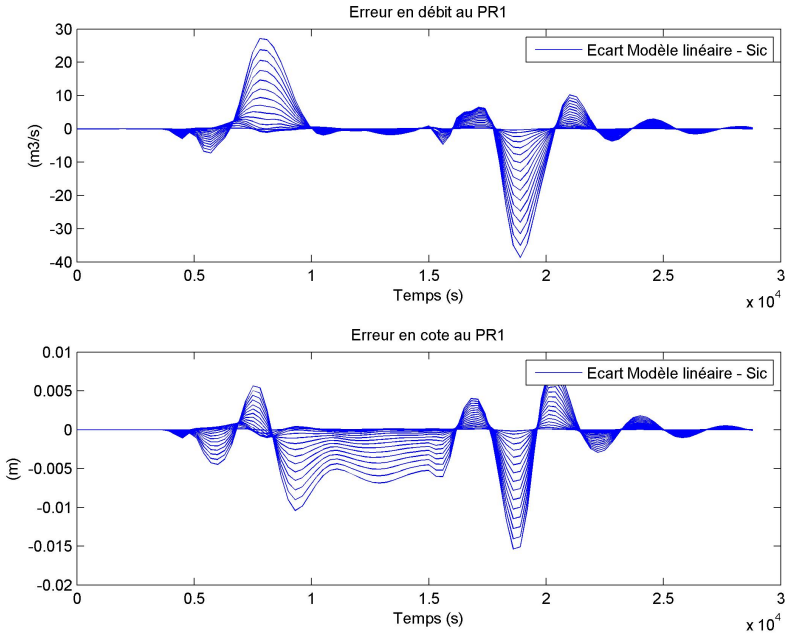


FIGURE B.3 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'Eyrieux

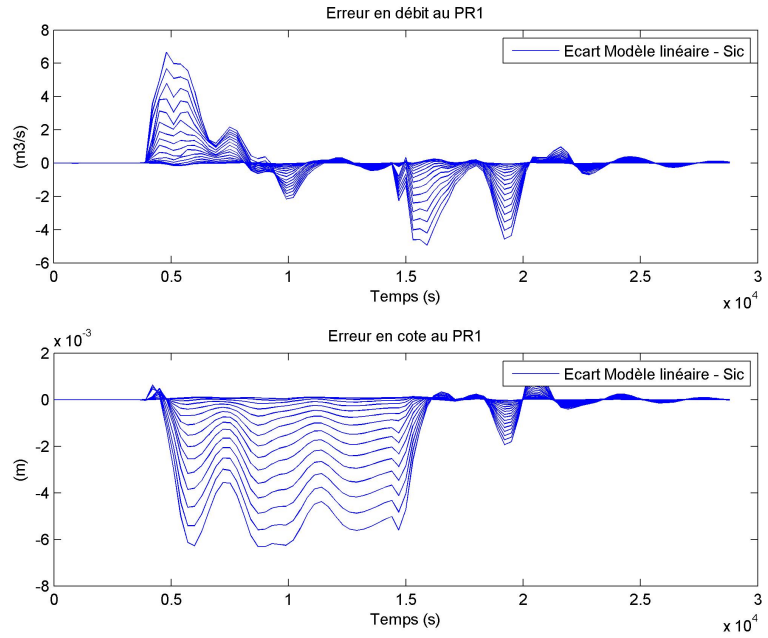


FIGURE B.4 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à la Drôme

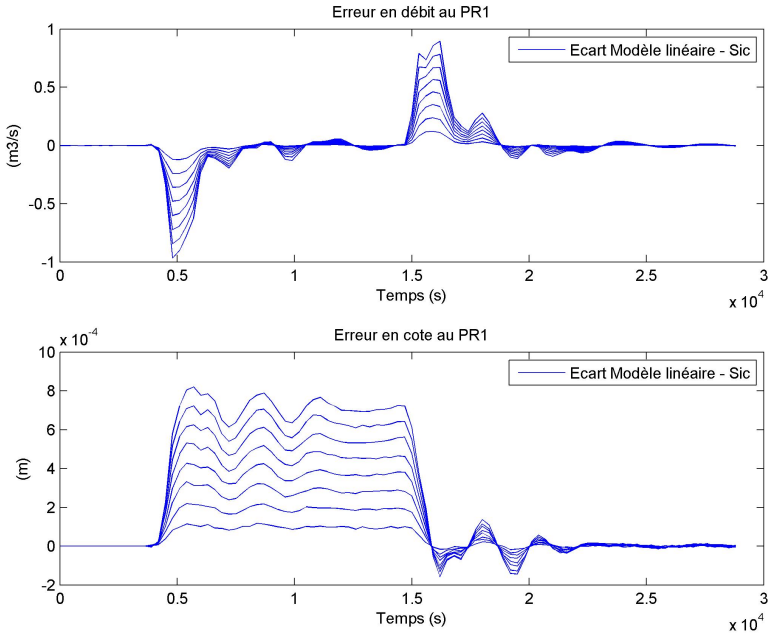


FIGURE B.5 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'Ouvèze

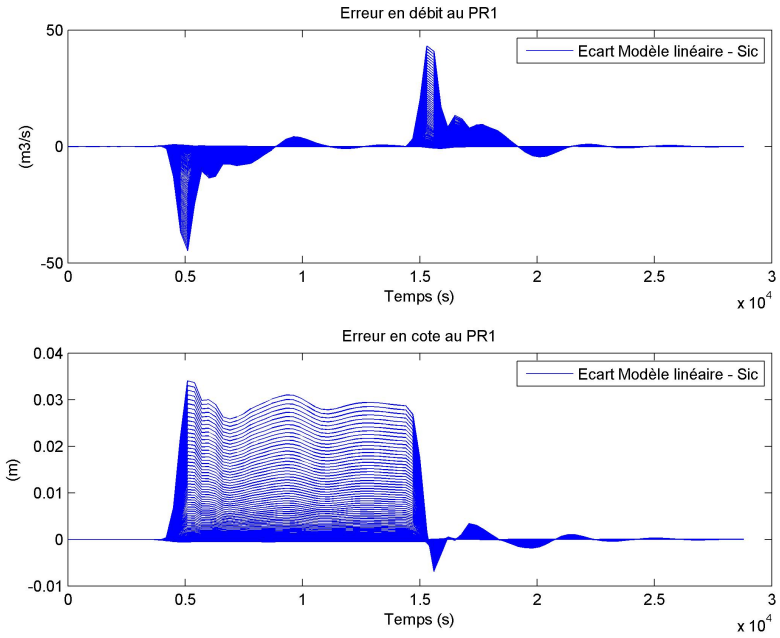


FIGURE B.6 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'usine aval

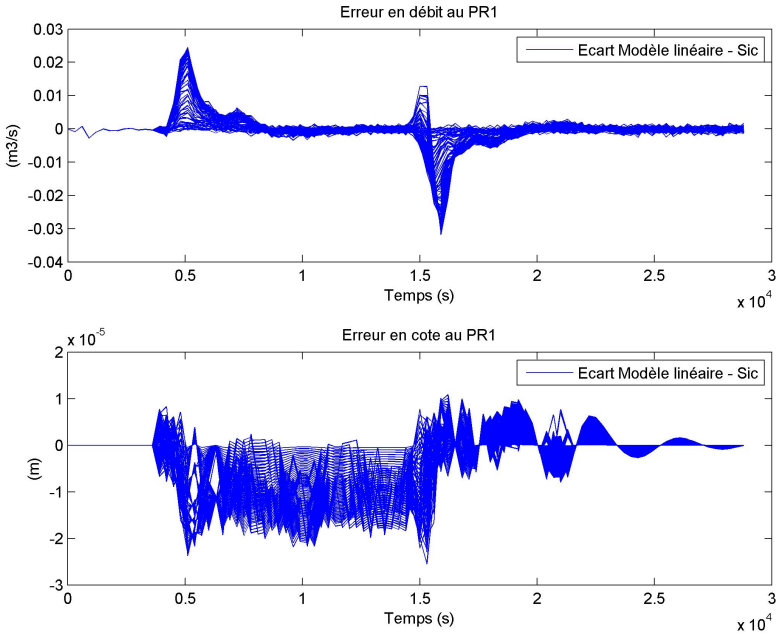


FIGURE B.7 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit au barrage aval

Sur ces figures, nous constatons que l'erreur entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire dépend des amplitudes des débits mais surtout des entrées perturbées.

B.3 Norme de l'erreur entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire et tolérances acceptées

Pour les scénarii précédent, nous avons calculé la norme infinie de l'erreur entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire (courbe bleue). Cela permet d'étudier pour quelle amplitude de débit, l'erreur dépasse les tolérances en débit et en cote de la CNR (courbe verte).

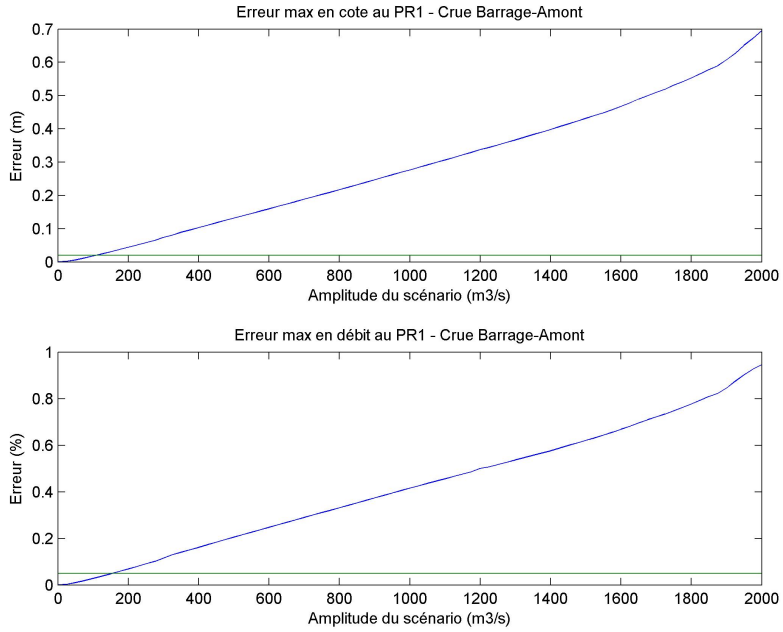


FIGURE B.8 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit au barrage amont

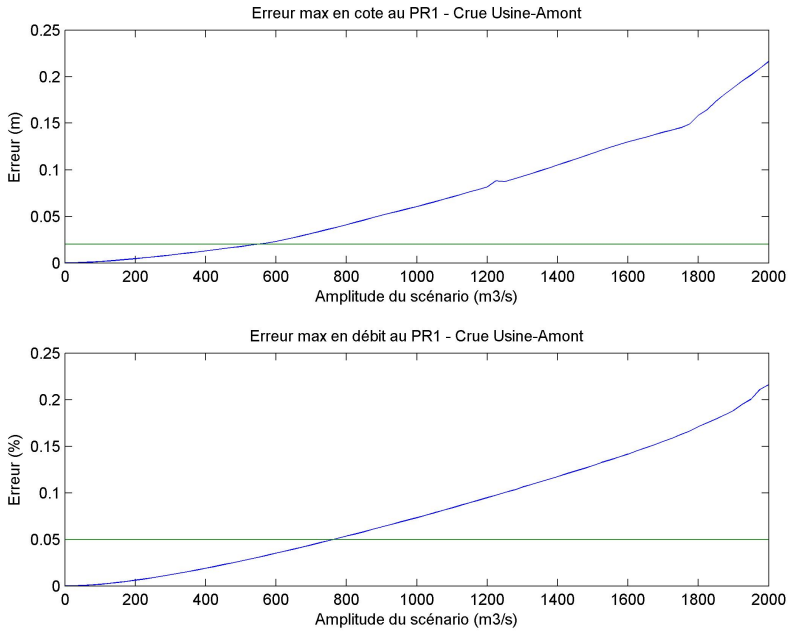


FIGURE B.9 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'usine amont

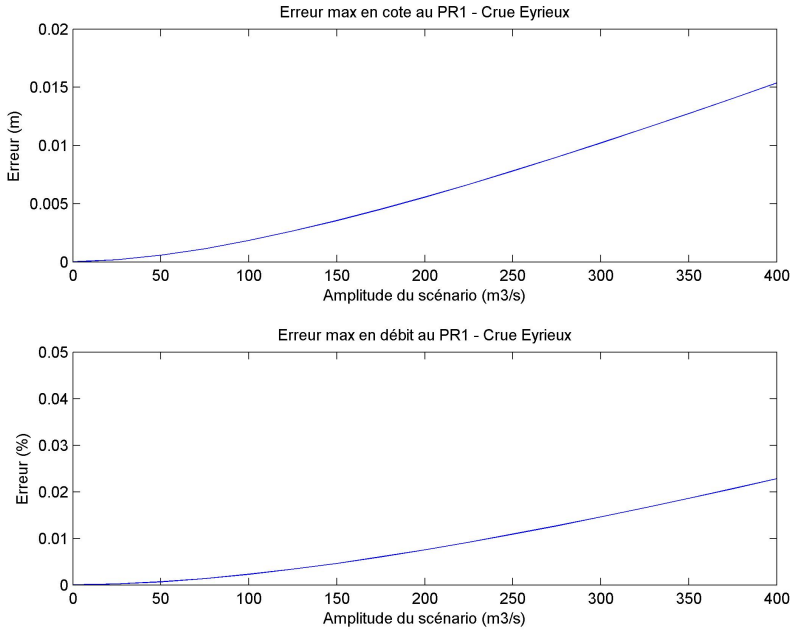


FIGURE B.10 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'Eyrieux

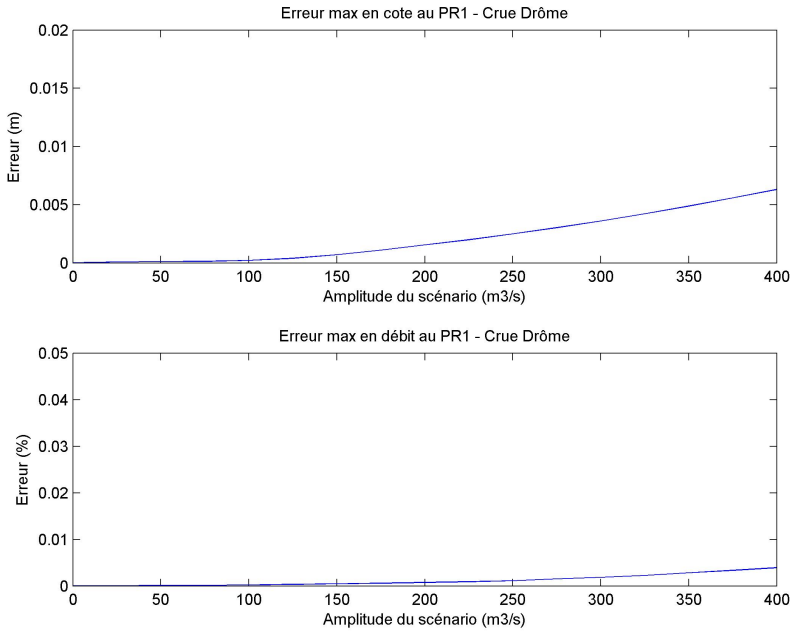


FIGURE B.11 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à la Drôme

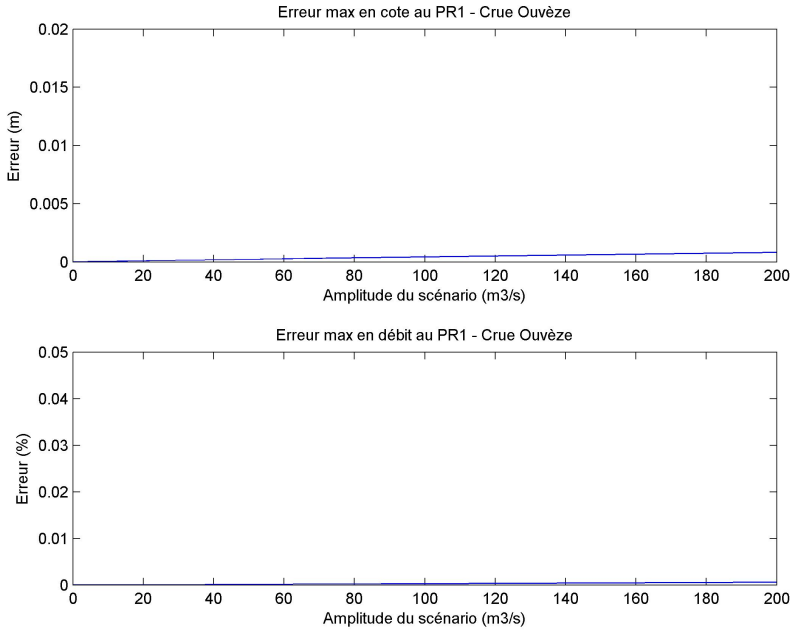


FIGURE B.12 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'Ouvèze

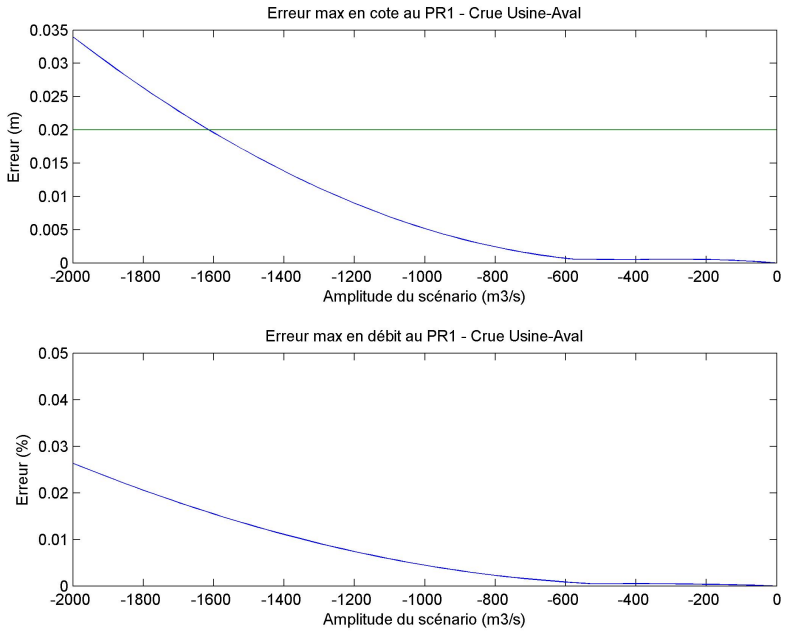


FIGURE B.13 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit à l'usine aval

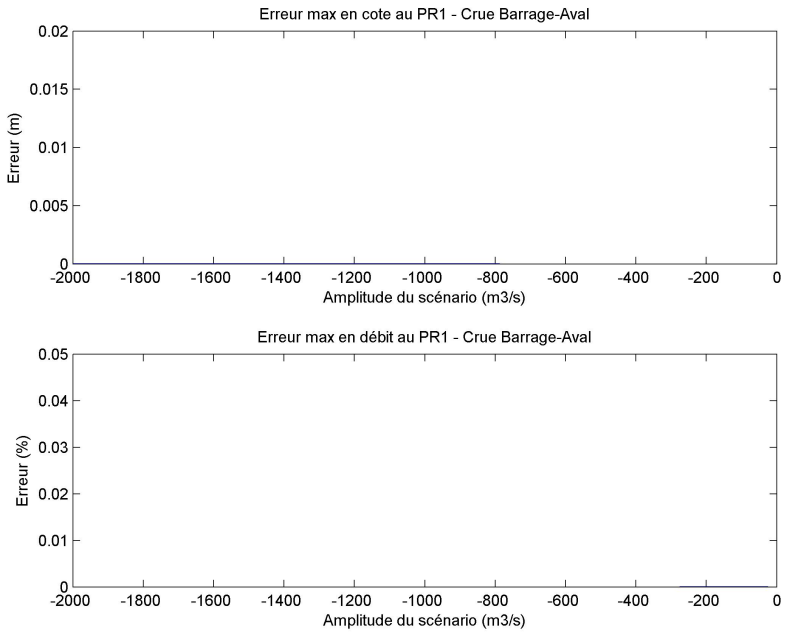


FIGURE B.14 – Évolution de la différence en débit et en cote entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire au PR1 pour différents échelons de débit au barrage aval

On remarque que lorsque l'on applique des échelons d'amplitude importante en

amont de l'aménagement, le modèle linéaire n'est plus suffisamment fidèle à SIC et les non-linéarités sont détectables. On intuite que ce sera pour ce type de scénario (fortes amplitudes d'échelon en amont) que le filtre de Kalman étendu sera nécessaire.
En revanche, quelques soient les échelons appliqués (jusqu'aux amplitudes maximum réalistes) sur l'Eyrieux, la Drôme, l'Ouvèze et les ouvrages aval (Barrage et Usine), le modèle linéaire dans l'espace d'état reste fidèle au modèle non-linéaire SIC aux précisions près souhaitées.

Bibliographie

[AEMA99] G. A. ATANOV, E G. EVSEEVA, E A. MESELHE, and Member ASCE. Estimation of roughness profile in trapezoidal open channels. *JOURNAL OF HYDRAULIC ENGINEERING*, 125 :309–312, Mars 1999.

[BC99] F. BOUTTIER and P. COURTIER. Data assimilation concepts and methods. Technical report, 1999.

[BDSV71] A-J-C. BARRE DE SAINT-VENANT. Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *Comptes rendus de l'académie des sciences*, 73 :147–154, 1871.

[BDTR+90] P. BORNE, G. DAUPHIN-TANGUY, J-P. RICHARD, F. ROTELLA, and I. ZAMBETTAKIS. *Commande et optimisation des processus*. Méthodes et techniques de l'ingénieur, 1990.

[BN11] E. BLAYO and M. NODET. Introduction à l'assimilation de données variationnelle. Technical report, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2011.

[BUH83] H. BUHLER. *Réglages échantillonnés*. Presses Polytechniques romandes, 1983.

[CHO59] V.T CHOW. *Open-channel Hydraulic*. McGraw-Hill Companies, June 1959.

[CHV80] J.A. CUNGE, F.M HOLLY, and A. VERWEY. *Pratical aspects of computational river hydraulics*. Pitman, 1980.

[CP97] J-M. COMPAS and J-C. PAGES. Regulation by predictive control and embedded knowledge based models. International workshop on regulation of irrigation canals, avril 1997.

[CPS97] J-M. COMPAS, J-C. PAGES, and J. SAU. Predictive control based coordinated operation of a series of river developments. International workshop on regulation of irrigation canals, Avril 1997.

[CUN66] J.A. CUNGE. *Etude d'un schéma de différences finies appliqué à l'intégration numérique d'un certain type d'équations hyperboliques d'écoulement*. PhD thesis, Faculté des Sciences de Grenoble, Mai 1966.

[DAG07] N. DAGET. Revue des méthodes d'assimilation. Technical report, CERFACS, Toulouse, Novembre 2007.

[DES01] Y. DESIERES. *Conception et études optiques de composants micro-photoniques sur mathériaux III-V à bande interdite de photon.* PhD thesis, Institut National des sciences appliquées de Lyon, 2001.

[DF09] M. DECACHARD and T. FRETAUD. Surveillance et entretien du lit du rhône et de ses affluents. analyse de l'évolution des fonds et actualisation du modéle mathématique. Technical report, Compagnie Nationale du Rhône, 2009. Document confidentiel.

[DJB09] C. DOREE and N JEAN-BAPTISTE. Predictive control model of a hydropower plant cascade. HYDRO2009, 2009.

[EVE03] G. EVENSEN. The ensemble kalman filter : theoretical formulation and practical implementation. *Ocean Dynamics*, 53 :343–367, May 2003.

[GEO94] D. GEORGES. Descentralized adaptive control for a water distribution system. GLASGOW, 1994. IEEE conference on control applications.

[GM07] I. GEJADZE and J. MONNIER. On a 2d zoom for the 1d shallow water model : Coupling and data assimilation. *Computer methods in applied mechanics and engineering.*, 196 :4628–4643, Juin 2007.

[GRA09] M. S. GRAF, W. H D. ALTINAKAR. *Hydraulique fluviale : écoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple.* 2009.

[HLDLM05] M. HONNORAT, F-X. LE DIMET, Y. LOUKILI, and J. MONNIER. Dassflow : Un modèle direct et inverse d'écoulements saint-venant 2d. Technical report, INRIA, 2005.

[HLDML05] M. HONNORAT, F-X. LE DIMET, J. MONNIER, and X. LAI. Dassflow v1.0 : A variational data assimilation software for 2d river flows. Technical report, INRIA, 2005.

[HON07] M. HONNORAT. *Assimilation de données lagrangiennes pour la simulation numérique en hydraulique fluviale.* PhD thesis, INP, GRENOBLE, Octobre 2007.

[HOT01] I. HOTEIT. *Filtres de Kalman Réduits et Efficaces pour l'assimilation de données en océanographie.* PhD thesis, Université de Joseph Fourrier - Grenoble1, 2001.

[HPM09] B. HINGRAY, C. PICOUET, and A. MUSY. *Hydrologie, Tome 2 : Une science pour l'ingénieur.* 2009.

[ICGL97] K. IDE, P. COURTIER, M. GHIL, and A.C. LORENC. Unified notation for data assimilation : Operational, sequential and variational. *Journal of the Meteorological Society of Japan*, 75 :181–189, 1997.

[JB07] N. JEAN-BAPTISTE. Reconstruction de mesures dans le cadre de la commande prédictive sur un aménagement du rhône. Rapport de fin de master, Université Claude Bernard Lyon 1 et Compagnie Nationale du Rhône, LYON, Septembre 2007.

[JB08] N. JEAN-BAPTISTE. Assimilation de données et estimation de l'état hydraulique d'un aménagement du rhône équipé de la commande prédictive. Ecole Eté, Juin 2008.

[JB09] N. JEAN-BAPTISTE. Assimilation de données et estimation de l'état hydraulique d'un aménagement hydroélectrique du rhône équipé de la commande prédictive. Congrès EDSYS, Juin 2009.

[JBMDS09] N. JEAN-BAPTISTE, P-O. MALATERRE, C. DOREE, and J. SAU. Data assimilation for real-time estimation of hydraulic states and unmeasured perturbations in a 1d hydrodynamic model. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81 :2201–2214, 2009.

[JRDA92] J.M J.M REDDY, A. DIA, and OUSSOU A. Design of control algorithm for operation of irrigation canals. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 118 :852–866, Novembre/Decembre 1992.

[KAL59] R. E. KALMAN. A new approach to linear filtering and prediction problems. Number 59, 1959.

[KS72] H. KWAKERNAAK and D. R. SIVAN. *Linear Optimal Control Systems*. John Wiley and Sons, 1972.

[LAR96] P. LARMINAT. *Automatique : Commande des systèmes linéaires*. Paris, 1996.

[LKG88] M. LABARRERE, J.P KRIEF, and B. GIMONET. *Le filtrage et ses applications*. SUP'AERO, 1988.

[LUE66] D.G. LUENBERGER. Computational methods for resolution of mass spectra. *ANALYTICAL CHEMISTRY*, 38(6) :715–720, Mai 1966.

[MAL94] P-O. MALATERRE. *Modélisation, analyse et commande optimale LQR d'un canal d'irrigation*. PhD thesis, ENGREF, TOULOUSE, 1994.

[MAL03] P-O. MALATERRE. Le contrôle automatique des canaux d irrigation : état de l'art et perspectives. 2003.

[MAZ03] C. MAZAURIC. *Assimilation de données pour les modèles d'hydraulique fluviale. Estimation de paramètres, analyse de sensibilité et décomposition de domaine*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, GRENOBLE, Décembre 2003.

[MBJBS10] P-O. MALATERRE, J-P. BAUME, N. JEAN-BAPTISTE, and J. SAU. Calibration of open channel flow models : A system analysis and control engineering approach. 2010.

[MOI08] P. MOIREAU. *Assimilation de données par filtrage pour les systèmes hyperboliques du second ordre. Application à la mécanique cardiaque*. PhD thesis, Ecole polytechnique, 2008.

[MON07] J. MONNIER. Modèles numériques directs et inverses d'écoulements de fluides. Technical report, Novembre 2007.

[NU79] G. NICOLLET and M. UAN. Ecoulements permanents à surface libre en lits composés. *La Houille Blanche*, 1 :21–30, 1979.

[PAG00] J-C. PAGES. *Modélisation, analyse et régulation des aménagements du Rhône par commande prédictive. Gestion locale et centralisée du passage des crues*. PhD thesis, Universite Claude Bernard Lyon1, LYON, Mars 2000.

[PRO05] S. PROUST. *Ecoulements non uniformes en lits composés : Effets de variations de largeur du lit majeur*. PhD thesis, INSA de LYON, 2005.

[PTJ+10] A. PIACENTINI, O. THUAL, G. JONVILLE, C. IVANOFF, S. RICCI, S. MASSART, and E. LE PAPE. Assimilation de données en hydraulique, maquette pour le modèle mascaret. Technical report, CERFACS, 2010.

[RED95] J.M REDDY. Kalman filtering in the control of irrigation canals. *Appl. Math. Modelling*, 19 :201–209, Avril 1995.

[ROU04] H. ROUX. *Estimation de paramètres en hydraulique fluviale, à partir de données caractéristiques de l'imagerie aérienne*. PhD thesis, INP Toulouse, Décembre 2004.

[RPT+10] S. RICCI, A. PIACENTIN, O. THUAL, E. LE PAPE, and G. JONVILLE. Correction of upstream flow and hydraulic state with data assimilation in the context of flood forecasting. *Hydrology and Earth System Sciences Discussions*, 7 :9067– 9121, 2010.

[SAS70] Y. SASAKI. Some basic formalisms in numerical variational analysis. *Monthly Weather Review*, 98(12) :875–883, December 1970.

[SHC09] V. SIRCOULOMB, G. HOBLOS, and H. CHAFOUK. Dététection et localisation de défauts simultanés de capteurs par estimation. GIS-3SGS, 2009.

[SHR+08] C. SETZ, A. HEINRICH, P. ROSTALSKI, G. PAPAFOTIOU, and M. MORARI. Application of model predictive control to a cascade of river power plants. volume 17, 2008.

[SMB10] J. SAU, P-O. MALATERRE, and J-P. BAUME. Sequential monte carlo hydraulic state estimation of an irrigation canal. *Institut de France Académie des sciences*, 338 :212 –219, 2010.

[STA02] M. STAROSWIECKI. On reconfigurability with respect to actuator failures. 15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain, 2002.

[VIA04] Y. VIALA. *Intégration d'une commande multivariable pour la régulation des canaux d'irrigation : Application à la branche d'Aix Nord du Canal de Provence*. PhD thesis, ENGREF, Juin 2004.

[VIA08] T. VIARD. Assimilation de données pour les modéles hydrauliques à surface libre, utilisation d'une approche variationnelle avec le logiciel dassflow. Master's thesis, Ecole Centrale de Paris, 2008.

[VSG04] M. Von SIEBENTHAL and G. GLANZMANN. Supervisory water level control for cascaded river power plants. Master's thesis, IFA Automatic Control Laboratory, ETH Zurich, Avril 2004.

[ZM05] P. ZARCHAN and H. MUSOFF. *Fundamentals of Kalman filtering : A practical approach*, volume 208. American Institute of aeronautics and Astronautics, Inc, U.S.A, 2005.