



Thermodynamique du gaz de Bose à deux dimensions

Tarik Yefsah

► To cite this version:

Tarik Yefsah. Thermodynamique du gaz de Bose à deux dimensions. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2011. Français. NNT: . tel-00737502v2

HAL Id: tel-00737502

<https://theses.hal.science/tel-00737502v2>

Submitted on 4 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

LABORATOIRE KASTLER BROSSEL



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Spécialité : PHYSIQUE QUANTIQUE

présentée par

Tarik YEFSAH

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris VI

Sujet :

Thermodynamique du gaz de Bose à deux dimensions

Soutenue le 29/09/2011 devant le jury composé de :

M. PHILIPPE BOUYER	Examineur
M. IACOPO CARUSOTTO	Examineur
M. ROLAND COMBESCOT	Examineur
M. JEAN DALIBARD	Directeur de thèse
M. JEAN-CLAUDE GARREAU	Rapporteur
M. ROBIN KAISER	Rapporteur

Table des matières

Introduction générale	5
1 Le gaz de Bose à 2D : éléments de théorie	15
1.1 Condensation de Bose–Einstein dans un gaz de Bose idéal à 2D	16
1.1.1 Rappels sur la condensation de Bose–Einstein à 3D	16
1.1.2 La condensation de Bose-Einstein à 2D	18
1.2 Equation d’état du gaz de Bose homogène à 2D	20
1.2.1 Le régime quasi-2D	20
1.2.2 Invariance de l’équation d’état	21
1.2.3 Équation d’état dans les régimes asymptotiques	22
1.2.4 Théorie de Prokof’ev et Svistunov	24
1.2.5 Prise en compte des états excités	25
1.2.6 Équation d’état en termes de pression réduite	28
1.2.7 Connexion avec le cas du piège harmonique : l’approximation de densité locale	29
1.3 Réduction des fluctuations de densité	30
1.3.1 Approche de type Bogoliubov	30
1.3.2 Théorie de Prokof’ev et Svistunov pour les fluctuations de densité	32
1.4 Transition superfluide dans un gaz de Bose à 2D	34
1.4.1 Critère de Landau pour un gaz 2D	35
1.4.2 Origine microscopique de la transition et saut universel	36
1.4.3 Température critique de transition	37
2 Imagerie non saturante de nuages denses	39
2.1 Cadre de l’étude	40
2.2 Modélisation de l’interaction photon-atome	42
2.2.1 Le champ électromagnétique	42
2.2.2 Le milieu atomique	42
2.2.3 Couplage photon-atomes	43
2.3 Interaction entre un faisceau sonde et nuage quasi-2D dense	44
2.3.1 Absorption traitée par la théorie de la diffusion	44
2.3.2 Propagation d’une onde à travers une assemblée de dipôles.	48
2.3.3 Remarques	50
2.4 Résultats numériques	51

2.4.1	«Limite thermodynamique»	52
2.4.2	Déviations à la loi de Beer–Lambert	53
2.4.3	Effet des interactions dipôle-dipôle sur la raie d’absorption	54
2.4.4	Prolongements	57
2.5	Remarques et questions ouvertes.	58
3	Imagerie fortement saturante de nuages denses	61
3.1	Formalisme	62
3.1.1	Imagerie d’un gaz atomique étendu	62
3.1.2	Imagerie d’un gaz atomique plan	66
3.2	Mise en œuvre expérimentale	68
3.2.1	Dispositif d’imagerie	68
3.2.2	Calibrations pour l’imagerie haute intensité	75
3.2.3	Imagerie de nuages 2D denses	79
4	Equation d’état du gaz de Bose 2D	83
4.1	Préparation expérimentale d’un gaz 2D	83
4.1.1	Confinement des atomes dans un plan	84
4.1.2	Caractérisation du potentiel	91
4.2	Acquisition et analyse des images	95
4.3	Mesure de l’équation d’état	99
4.3.1	Équation d’état pour la pression	99
4.3.2	Équation d’état pour la densité	103
4.3.3	Entropie dans le régime d’invariance d’échelle	105
4.4	Effets de la troisième dimension	106
4.4.1	Effet des niveaux excités	107
4.4.2	Effet des interactions intra-niveau à haute densité	108
5	Énergie d’interaction et fluctuations de densité d’un gaz 2D piégé	113
5.1	Théorème du viriel pour les gaz piégés en interaction	113
5.1.1	Relation du viriel pour des interactions de contact	114
5.1.2	Application au gaz de Bose 2D	115
5.2	Mesurer les énergies potentielle, cinétique et d’interaction de gaz piégés	118
5.2.1	Exemples de mesures sur des condensats	118
5.2.2	Décomposition de l’énergie d’un gaz piégé à 2D	119
5.3	Mise en œuvre expérimentale	121
5.3.1	Coupage des interactions	121
5.3.2	Mesure de l’énergie d’interaction	123
5.4	Énergie d’interaction et fluctuations de densité	126
5.4.1	Énergie d’interaction et corrélations du deuxième ordre	127
5.4.2	Ce que nous apprend notre mesure de E_{int}	131

6	Signatures de vortex dans un gaz de Bose 2D	133
6.1	Introduction	134
6.2	Détection de trous de densité durant l'expansion libre d'un gaz 2D	135
6.2.1	Peut-on croire à des vortex ?	135
6.2.2	Vortex ou fluctuations de densité ?	138
6.3	Répartition des vortex dans un gaz piégé	142
6.3.1	Recherche systématique des minima	142
6.3.2	Trous de densité et bruit de grenaille photonique	144
6.4	Corrélations entre défauts de phase en expansion	150
6.4.1	Distance minimale entre deux défauts de phase	151
6.4.2	Anti-groupement ou artefact ?	152
6.5	Bilan général	155
	 Conclusion générale	 156
	 Annexes	 169
A	Origine du facteur $\kappa^{(I_i)}$	169
	 Bibliographie	 180
	 Resumé - Abstract	 182

Introduction générale

Les premières réalisations expérimentales de condensats de Bose–Einstein [8,21,31] ont ouvert la voie à un nouveau domaine de la physique atomique : celui des gaz ultra-froids. Les premières investigations expérimentales de ce domaine se sont orientées vers les propriétés de cohérence de gaz ultra-froids constitués de bosons en interaction faible qui, lorsqu'ils sont amenés à suffisamment basse température, se comportent comme une onde de matière cohérente. D'un point de vue formel, un tel système est décrit par une fonction macroscopique $\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n(\mathbf{r})}e^{i\theta(\mathbf{r})}$, où $n(\mathbf{r})$ est la densité spatiale et $\theta(\mathbf{r})$ la phase qui caractérise la cohérence du système. Cette cohérence a été mise en évidence de façon spectaculaire via des expériences d'interférence entre deux condensats [9] et entre différentes régions d'un même condensat [17]. Cette description est donc très analogue à celle rencontrée dans les domaines plus familiers de la supraconductivité et de la superfluidité. En particulier, dans la théorie phénoménologique de Ginzburg–Landau [39] appliquée à un système superfluide, le rôle de paramètre d'ordre est joué par la fonction d'onde complexe du superfluide $\Psi_s(\mathbf{r}) = \sqrt{n_s(\mathbf{r})}e^{i\theta_s(\mathbf{r})}$. Ce lien étroit entre l'état superfluide et l'état condensé (au sens de Bose–Einstein) a été mis en évidence de façon très élégante dans des expériences majeures du domaine des atomes froids par l'observation de réseaux réguliers de vortex dans des condensats en rotation [3,76]. La connexion précise entre condensation de Bose–Einstein et superfluidité reste néanmoins une des grandes questions ouvertes du problème à N -corps [74].

Indépendamment de la nature de ce lien, les gaz ultra-froids apportent un nouveau support expérimental aux questions de la superfluidité et de la supraconductivité. En effet, avant les premières réalisations de condensats de Bose–Einstein, le seul superfluide bosonique observé dans la nature était l'Helium 4 liquide. Or, en raison des distances inter-atomiques qui sont très courtes dans ce système, il est difficile de modéliser les interactions entre atomes de ^4He et donc de fournir une assise microscopique à la description de ce système. En particulier, sa description en termes de fonction d'onde macroscopique n'est que phénoménologique. Il en est de même pour les systèmes supraconducteurs où la modélisation des systèmes expérimentaux est très complexe. La situation est considérablement plus simple dans les gaz de bosons ultra-froids dilués qui, dans le régime d'interactions faibles peuvent être décrits de façon simple et précise. En effet, la fonction d'onde macroscopique associée à un condensat pur créé en laboratoire est très bien décrite par la célèbre équation de Gross–Pitaevskii [43,95] où les interactions sont décrites en champ moyen. Dans ce formalisme, l'effet des interactions se traduit par la modification du potentiel dans lequel évoluent les particules en un potentiel effectif comportant un terme additionnel proportionnel à la densité spatiale. Dès lors, les propriétés du problème à N -corps se réduisent à celles d'une particule fictive dans ce potentiel effectif. De plus, le formalisme de Bogoliubov [18] prenant en

compte l'effet des fluctuations du système de manière perturbative, permet de rendre compte de la physique du gaz de Bose en interaction faible avec une précision très satisfaisante. La plupart des propriétés des condensats de Bose-Einstein à trois dimensions ont été étudiées durant les premières années qui ont suivi leur première observation tant sur le plan expérimental que sur le plan théorique et ont permis d'établir une compréhension précise de ces systèmes.

La recherche dans le domaine des gaz ultra-froids a par la suite connu un second souffle extraordinaire en s'orientant vers l'étude des systèmes quantiques dans des états dits *fortement corrélés*. Ces états de la matière correspondent à une organisation particulière du système où le comportement de chaque particule dépend fortement de celui de toutes les autres particules du système. Cette orientation nouvelle du domaine a été possible grâce à trois avancées majeures que nous allons brièvement décrire.

Contrôle des interactions. En exploitant des résonances de Feshbach [25] par l'application d'un champ magnétique externe, il est possible de contrôler le signe et la force des interactions entre atomes. La mise en œuvre de cette technique permet donc de produire des gaz en interaction forte dans lesquelles les corrélations entre particules sont importantes. Si les collisions inélastiques sont un obstacle à la réalisation de gaz de Bose stables en interaction forte [30], celles-ci sont inhibées dans le cas d'un gaz fermions en interaction forte en vertu du principe d'exclusion de Pauli [92]. Ceci a permis la production de gaz de Fermi ultra-froids dans le régime d'interaction forte [20, 86].

Réseaux optiques. En créant des ondes de lumière stationnaires dans les trois directions de l'espace grâce à des faisceaux laser fortement désaccordés, il est possible de réaliser un potentiel périodique tri-dimensionnel aux nœuds duquel se placent les atomes [40, 61]. Le gaz est alors décrit par l'hamiltonien de Hubbard qui est un modèle fondamental de la matière condensée où les particules placées aux creux (ou sites) d'un potentiel périodique peuvent se déplacer par effet tunnel d'un site à l'autre. Lorsque les interactions, qui se produisent lorsque deux particules se retrouvent sur un même site, sont énergétiquement moins favorables que l'effet tunnel entre deux sites voisins, elles induisent de fortes corrélations entre atomes. Ce système a été mis en œuvre expérimentalement sur un gaz de bosons avec un succès retentissant par Greiner *et al.* [40] qui ont mis en évidence la transition entre l'état superfluide et l'état d'isolant de Mott, en variant le poids relatif des interactions par rapport à celui de l'effet tunnel. Récemment, cette procédure a été étendue à des systèmes fermioniques [64, 108] ce qui permettra à terme d'établir le diagramme de phase du modèle de Fermi-Hubbard et laisse entrevoir la possibilité d'accroître notre compréhension de la supraconductivité à haute température.

Basse dimension. En confinant fortement un nuage atomique selon une ou deux directions de l'espace, il est possible de geler les degrés de liberté correspondants et de créer un environnement de dimensionnalité effective réduite. Ces systèmes «uni-dimensionnels» (1D) et «bi-dimensionnels» (2D) se distinguent de leurs analogues tri-dimensionnels par le fait que les corrélations entre atomes y jouent un rôle plus important [19, 52, 77, 88]. Les recherches expérimentales en atomes froids ont ainsi permis d'observer des gaz de Bose 1D dans le régime de Tonks-Girardeau

où les atomes présentent un comportement fermionique décrit par la théorie des liquides de Luttinger. Récemment cette géométrie 1D a été étendue à des gaz de Fermi avec des populations de spin déséquilibrées [73]. Un autre grand succès expérimental de ces systèmes de dimensionnalité réduite est l'observation de la transition superfluide de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless dans des gaz de ^{87}Rb piégés [46]. Cette observation a constitué la première signature expérimentale du rôle des vortex libres dans la transition de l'état superfluide vers l'état normal, et confirme de façon non ambiguë la théorie de Berezinskii [13] et Kosterlitz et Thouless [70] élaborée trois décennies plus tôt. Dans le courant de l'année dernière, les premières études sur des gaz de fermions en géométrie bi-dimensionnelle ont été entamées [36].

Ces développements majeurs permettent donc non seulement d'accéder à des états qui étaient jusque là réservés à certains systèmes de la matière condensée, mais offrent une nouvelle perspective au problème à N -corps. En fait, les gaz ultra-froids constituent désormais un outil d'une flexibilité et d'une pureté uniques pour explorer des questions ouvertes de la matière condensée. En effet, grâce à un excellent contrôle des potentiels [12] et une modélisation simple des interactions entre particules, il est possible de réaliser des systèmes modèles qui sont des réalisations idéales d'hamiltoniens de problèmes fondamentaux de la matière condensée tels que l'hamiltonien de Fermi-Hubbard mentionné plus haut ou l'hamiltonien d'une chaîne de spin. Ces modèles théoriques qui sont des cas simplifiés de situations rencontrées dans les systèmes réels de matière condensée restent néanmoins non résolus. Le support des simulations numériques à ces problèmes reste marginal en raison de la taille de l'espace de Hilbert associé aux systèmes considérés. Les gaz ultra-froids constituent une sorte de simulation analogique de ces systèmes où il «suffit» d'observer la solution du problème comme ce fut suggéré par Richard Feynman en 1982 [34].

Ces avancées ont également soulevé la question des propriétés macroscopiques de ces systèmes. En effet, si la compréhension des condensats de Bose-Einstein est complète, ce n'est pas le cas pour les gaz de Fermions ou les gaz de basse dimension en interaction. En particulier, les équations d'état de ces systèmes étaient encore inconnues il y a quelques années (hormis dans un intervalle restreint de paramètres). Dans un article de référence publié en février 2010, T.-L. Ho et Q. Zhou [115] ont attiré l'attention de la communauté des atomes froids sur la possibilité d'établir l'équation d'état de systèmes homogènes à partir de leurs équivalents piégés¹. Cette proposition a été mise en œuvre avec succès sur des gaz de fermions [83,84] et de bosons en interactions fortes [85].

C'est dans ce cadre général des gaz ultra-froids que s'inscrit mon travail de thèse, qui est consacré à l'étude de la thermodynamique du gaz de Bose à deux dimensions.

A. Le gaz de Bose à deux dimensions

La dimensionnalité d'un système composé d'une assemblée de particules constitue une donnée essentielle dans le degré d'organisation de ce système et dans les processus d'interactions entre particules. Le gaz de Bose bi-dimensionnel constitue un système aux propriétés fascinantes par

1. Cette idée, qui s'appuie sur la possibilité d'extraire certaines quantités thermodynamiques locales à partir de la densité intégrée, a en fait été proposée plusieurs années auparavant par J. N. Fuchs, X. Leyronas et R. Combescot [37].

ces deux aspects.

Lorsque l'on abaisse la température d'une assemblée de particules, celle-ci peut subir dans certaines conditions des transitions de phases vers des états fortement ordonnés. En général, ces états ordonnés sont plus stables à 3D qu'en basse dimension, où les fluctuations thermiques et quantiques tendent à détruire cet ordre. Le gaz de Bose 2D est particulièrement intéressant de ce point de vue car il présente un comportement intermédiaire. S'il est vrai qu'à température T non nulle, les fluctuations thermiques empêchent l'établissement d'un ordre à longue portée associé à la formation d'un condensat de Bose–Einstein dans un gaz homogène idéal, elles ne sont toutefois pas assez fortes pour empêcher l'existence d'un état superfluide en présence d'interactions répulsives, où règne un ordre à quasi-longue portée.

Le gaz de Bose bi-dimensionnel en interaction faible se distingue également par des invariances remarquables dans ses propriétés macroscopiques. Dans la géométrie expérimentalement pertinente où les atomes évoluent non pas dans un plan, mais dans un volume de très faible épaisseur, les interactions atomiques sont décrites par un paramètre sans dimension et constant [91, 93]. Dans ce régime dit *quasi-2D*, la présence des interactions n'introduit donc aucune échelle de longueur ou d'énergie et l'équation d'état associée aux grandeurs thermodynamiques sans dimension ne dépend que du rapport $\mu/k_B T$ entre potentiel chimique μ et l'énergie thermique, k_B étant la constante de Boltzmann. Ce résultat est connecté au fait que les interactions sont exclusivement binaires et décrites par des interactions de contact, à une bonne approximation. À deux dimensions, ces interactions de contact donnent lieu à une propriété d'invariance dynamique de la distribution de densité d'un gaz piégé dans un potentiel harmonique isotrope [66, 96].

A.1 Transition BKT superfluide

Lorsque l'on abaisse la température d'un gaz de Bose homogène à deux dimensions avec des interactions atomiques répulsives, le système passe de l'état normal vers un état superfluide en dessous d'une température critique $T_c \neq 0$. À la transition, la densité superfluide n_s passe brutalement de 0 à $4/\lambda_T^2$ où λ_T est la longueur d'onde thermique. Ceci contraste avec le cas 3D où la densité superfluide augmente continûment lorsque l'on abaisse la température. En fait, la transition superfluide à 2D se distingue par nature de la plupart des transitions de phase à trois dimensions. En particulier, les grandeurs thermodynamiques usuelles (énergie, pression, entropie, etc.) ne présentent pas de discontinuité au point de transition (seul n_s est discontinue) ce qui lui vaut le qualificatif de transition d'ordre «infini».

En général, les transitions de phases usuelles à 3D telles que la condensation de Bose–Einstein, la transition ferromagnétique ou tout simplement la cristallisation de l'eau sont associées à l'établissement d'un ordre à longue portée dans le régime de basse température, *i.e.* en dessous de la température critique pour laquelle se produit la transition. Typiquement, dans le cas d'un condensat de Bose–Einstein, cet ordre à longue portée est caractérisé par sa fonction d'onde macroscopique qui est uniforme sur toute l'étendue du système. L'établissement de l'ordre à longue portée dans ces systèmes est due à une brisure spontanée de symétrie continue de l'hamiltonien décrivant le système. Dans le cas d'un condensat de Bose–Einstein par exemple c'est la phase de la fonction d'onde macroscopique qui est spontanément fixée. Dans le gaz de Bose homogène

bi-dimensionnel en interaction, l'établissement d'un ordre à longue portée est impossible (à la limite thermodynamique). Ce résultat est la conséquence du célèbre théorème de Mermin–Wagner qui prédit que pour tous les systèmes 1D et 2D décrits par un hamiltonien de symétrie continue et pour des interactions à courte portée, l'établissement d'un véritable ordre à longue portée est impossible à la limite thermodynamique.

Le théorème de Mermin–Wagner n'est toutefois pas en contradiction avec l'existence d'une transition superfluide, le point étant que celle-ci n'est associée à aucune brisure spontanée de symétrie et qu'il n'existe pas d'ordre à longue portée associé à l'état superfluide. De façon plus formelle, l'ordre à longue portée est caractérisé par la fonction de corrélation du premier ordre :

$$g_1(\mathbf{r}) \equiv \langle \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{0}) \rangle, \quad (1)$$

où $\Psi^\dagger(\mathbf{r})$ est l'opérateur champ qui crée une particule en $\mathbf{r}$. En l'absence d'ordre à longue portée $\lim_{r \rightarrow \infty} g_1(\mathbf{r}) = 0$, alors que cette limite a une valeur finie dans le cas contraire. La situation est néanmoins plus subtile à 2D : malgré l'absence de véritable ordre à longue portée de part et d'autre de la transition, le comportement asymptotique de la fonction de corrélation $g_1(\mathbf{r})$ change de forme lorsque le système passe de l'état normal à l'état superfluide. Alors que dans l'état normal $g_1(\mathbf{r})$ décroît exponentiellement et tend rapidement vers 0, dans le régime superfluide elle prend la forme algébrique :

$$g_1(r) \propto \left(\frac{1}{r} \right)^{1/(n_s \lambda_T^2)}, \quad (2)$$

où l'exposant $1/(n_s \lambda_T^2)$ est au plus égal à $1/4$. Cette décroissance de $g_1(r)$ est donc extrêmement lente et l'état superfluide à 2D s'accompagne d'un ordre à *quasi-longue portée*. Ce résultat repose essentiellement sur l'hypothèse que les fluctuations de densités sont fortement réduites, ce qui est une notion essentielle pour expliquer le mécanisme de la transition [45].

La théorie microscopique de la transition superfluide à 2D a été développée par Berezinskii [13] et Kosterlitz et Thouless [70]. Dans cette théorie, communément appelée théorie BKT, l'ingrédient essentiel permettant d'expliquer le mécanisme microscopique de la transition superfluide sont les vortex : des singularités dans la phase θ de la fonction d'onde décrivant le fluide. Un vortex se manifeste dans le fluide comme un trou de densité autour duquel θ varie continûment entre 0 et $2\pi q$ où l'entier relatif q désigne la «charge» du vortex. Chaque vortex est donc entouré par un champ de vitesse créant une circulation de densité autour du vortex. À basse température ($T < T_c$), ces vortex ne peuvent exister que par paires de vortex de charges opposées (cf chapitre 1.4). Le vortex et l'«antivortex» constituant la paire sont très rapprochés et la taille de l'ensemble est de l'ordre de la longueur de cicatrisation ξ . Ces paires n'ont qu'un effet local (sur une échelle de longueur de l'ordre de ξ) et elles n'affectent donc pas le comportement à grande distance de $g_1(r)$, ni l'établissement de courants de densité permanents associés à l'état superfluide. Lorsque $T \gtrsim T_c$, l'existence de vortex individuels devient énergétiquement plus favorable et les paires se disloquent. En proliférant, les vortex brouillent la phase du système, détruisent l'ordre à quasi-longue portée et perturbent la circulation de courants permanents. La superfluidité est alors détruite et le gaz entre dans la phase normale. À plus haute température, où les fluctuations de phase et de densité deviennent importantes, la notion de vortex perd son sens.

A.2 Invariances d'échelle et universalité

Les gaz de Bose bi-dimensionnels produits en laboratoire sont réalisés en confinant fortement un nuage 3D selon une direction de l'espace (Oz) grâce à un confinement harmonique de pulsation $\omega_z \gg \omega_\perp$, où $\omega_\perp$ désigne la pulsation du potentiel radial. À température suffisamment basse, lorsque l'énergie thermique est très petite devant le quantum de vibration $\hbar\omega_z$, les degrés de liberté selon cette direction sont gelés et le nuage est thermodynamiquement 2D. Dans la plupart des expériences sur les gaz bi-dimensionnels réalisées à ce jour [27, 46, 59, 71, 103, 116, 121], l'extension du nuage dans la direction fortement confinée ℓ_z est très grande devant la longueur de diffusion à trois dimensions a qui caractérise les interactions à basse énergie. Dans ces conditions, les interactions dans ces gaz 2D sont décrites de façon effective par un paramètre de couplage $\tilde{g}$ sans dimension et constant. Contrairement aux cas 3D et 1D, les interactions n'introduisent donc aucune échelle de longueur ou d'énergie. Dès lors, les seules échelles d'énergie du système sont le potentiel chimique μ et l'énergie thermique $k_B T$. Ceci a une conséquence remarquable propre au gaz bi-dimensionnel (en interaction faible) : l'équation d'état peut se présenter sous forme invariante par changement d'échelle.

Plus précisément, une équation d'état permet de relier certaines propriétés thermodynamiques telles que la densité l'énergie libre ou l'entropie en fonction du potentiel chimique μ et de la température T . En exprimant l'équation d'état pour une grandeur sans dimension telle que la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} \equiv n\lambda_T^2$, celle-ci ne peut faire intervenir que le rapport $\mu/k_B T$. Par conséquent, tout changement d'échelle simultané du potentiel chimique et de la température ($\mu \rightarrow \kappa\mu$ et $T \rightarrow \kappa T$) laisse $\mathcal{D}$ invariante.

Au voisinage de la transition superfluide, l'équation d'état en plus d'être invariante par changement d'échelle prend une forme universelle. En effet, en utilisant des simulations du type Monte-Carlo classique, Prokof'ev et Svistunov ont montré [101] que l'écart de la densité dans l'espace des phases à la valeur critique $\mathcal{D} - \mathcal{D}_c$ ne dépend que de la variable $(\mu - \mu_c)/(\tilde{g}k_B T)$ où μ_c est la valeur du potentiel chimique au point de transition.

La nature des interactions dans le régime quasi-2D est aussi responsable de deux propriétés dynamiques remarquables pour les gaz piégés dans un potentiel harmonique isotrope de pulsation $\omega_\perp$. La première est que la réponse d'un tel système à une excitation radiale donne lieu à un mode collectif monopolaire non amorti [66, 96]. La seconde est l'existence d'une invariance dynamique de la distribution de densité dans une évolution libre bi-dimensionnelle. Si l'on coupe le potentiel de confinement radiale et que l'on laisse le nuage s'étaler, la distribution à chaque instant de l'évolution est reliée à la distribution à l'équilibre par un simple changement d'échelle. Plus précisément, si l'on note $n_{\text{eq}}(r)$ la distribution à l'équilibre, alors la distribution après une expansion de durée t est donnée par la loi d'échelle :

$$n(r, t) = \kappa_t^2 n_{\text{eq}}(\kappa_t r) \quad \text{avec} \quad \kappa_t = (1 + \omega_\perp^2 t^2)^{-1/2}. \quad (3)$$

B. Travaux expérimentaux sur le gaz de Bose 2D

Nous allons à présent faire un bref état des lieux de la recherche expérimentale sur le gaz de Bose à deux dimensions. Les systèmes expérimentaux dans le domaine des atomes froids sont généralement classifiés en deux catégories : (i) les systèmes dits *bulk* où le potentiel externe est typiquement harmonique et ne présente pas de minima locaux, (ii) les systèmes sur réseau optique où les atomes évoluent dans un potentiel de structure (quasi-)périodique et qui ont en général vocation à simuler des systèmes modèles de la matière condensée. Récemment de très belles expériences ont été menées sur des gaz bi-dimensionnels dans des réseaux optiques [1, 2], mais nous ne les présenterons pas ici. Nous nous limiterons en effet aux expériences sur des systèmes *bulk* qui sont reliées aux propriétés du gaz de Bose homogène décrites plus haut. Bien que la présence d'un potentiel non uniforme rende l'interprétation des résultats plus complexes par rapport à ce qui est attendu pour un gaz homogène, elle s'avère être d'une grande utilité. Nous verrons dans le corps de ce manuscrit que les potentiels harmoniques sont particulièrement adaptés à l'étude de l'équation d'état du gaz homogène.

B.1 Transition BKT - Vortex et Cohérence

L'une des premières études expérimentales sur les gaz 2D a donné lieu à un résultat majeur avec l'observation de la transition BKT dans un gaz piégé de ^{87}Rb par Hadzibabic *et al.* [46]. La procédure mise en œuvre s'inspire d'une proposition de Polkovnikov *et al.* [98], et consiste à étudier les variations du contraste dans les profils d'interférence résultant du recouvrement de deux nuages atomiques bi-dimensionnels en expansion libre. L'analyse du contraste moyen qui est relié à la fonction de corrélation du premier ordre $g_1(r)$ a permis d'identifier deux régimes distincts. D'une part, un régime de haute température correspondant à une décroissance exponentielle de $g_1(r)$ et d'autre part un régime de basse température avec une décroissance algébrique en $r^{-\alpha}$ où le coefficient α mesuré est voisin de $1/4$, en bon accord avec le résultat attendu au voisinage de la transition du côté $T < T_c$. L'étude de ces profils d'interférence a également donné lieu à une observation spectaculaire qui est l'apparition de dislocations. Ces dislocations sont la signature de la présence de vortex libres dans les nuages à l'équilibre, avant leur expansion [112]. En étudiant la fréquence d'apparition de ces dislocations avec la température, Hadzibabic *et al.* ont montré que la prolifération de vortex libres coïncidaient avec la destruction de l'ordre à quasi-longue portée caractérisé par la décroissance algébrique de $g_1(r)$.

Dans la continuité de cette expérience Cladé *et al.* [27] ont développé une méthode très élégante permettant de faire interférer un nuage bi-dimensionnel avec lui-même. La procédure employée consiste plus précisément à préparer un gaz bi-dimensionnel à l'équilibre dans un état de spin $|1\rangle$, puis à transférer la moitié des atomes dans un état de spin $|2\rangle$ de façon cohérente à l'aide d'une impulsion Raman qui, par la même occasion, communique une impulsion $\hbar\mathbf{k}$. La moitié du nuage qui est dans $|2\rangle$ est donc en mouvement par rapport à la composante du nuage dans $|1\rangle$ qui elle est au repos avec une vitesse $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}/m$. Après une durée variable t cette dernière composante est transférée à son tour dans l'état $|2\rangle$ de façon cohérente. Immédiatement après ce transfert, la distribution de densité mesurée présente une modulation résultant de l'interférence entre une fraction du nuage initial et son analogue translaté de la distance $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$. Le contraste

de l'interférence est ici directement relié à la fonction de corrélation du premier ordre. Cladé *et al.* ont ainsi pu observer une augmentation progressive de la longueur de cohérence lorsque la température approche T_c par valeurs supérieures. En deçà de la température de transition, les interférences sont caractérisées par un meilleur contraste dans la partie centrale du nuage.

B.2 Phase pré-superfluide

À la section précédente, nous avons vu que l'une des conditions requises pour la mise en place du mécanisme BKT était que les fluctuations de densités soient significativement réduites dans le système. En effet, la notion de vortex n'a de sens que si la densité varie peu sur une échelle de longueur plus grande que la taille des vortex. En analysant des gaz bi-dimensionnels à l'équilibre, Tung *et al.* [116] ont mis en évidence une augmentation significative de la compressibilité locale dans des régions du nuage où la densité dans l'espace des phases est bien inférieure à la valeur critique $\mathcal{D}_c$. La compressibilité locale étant qualitativement reliée aux fluctuations de densité, ce résultat s'interprète par l'existence d'une phase «pré-superfluide» distincte de l'état normal, qui s'établit avant la transition BKT.

B.3 Équation d'état et invariances

Au début de cette introduction nous avons mentionné l'article de référence de T.- L Ho et Q. Zhou [115] qui montre comment tirer parti de la nature harmonique des potentiels de piégeage utilisés dans les expériences d'atomes froids pour mesurer l'équation d'état des systèmes homogènes correspondants. En fait, cette idée qui s'est avérée providentielle pour les systèmes tri-dimensionnels, est moins essentielle pour les systèmes de basse dimension. En effet, le point clé de ces propositions est qu'elle permet de donner accès à une mesure locale de la pression dans un gaz tridimensionnel, là où on ne dispose que de la densité intégrée le long de l'axe d'imagerie. À 2D ou 1D on a directement accès à la densité locale puisque le nuage n'a pas d'étendue le long de l'axe d'imagerie. Aussi, avant la publication de cet article notre groupe s'est-il penché sur la question de la mesure expérimentale de l'équation d'état d'un gaz de Bose bi-dimensionnel [103].

Dans notre tentative de démontrer l'invariance d'échelle statique de l'équation d'état, nous nous sommes heurtés à un problème jusque là ignoré de la communauté travaillant sur les gaz bi-dimensionnels (ou tout au moins passé sous silence) : le régime de dégénérescence n'est pas compatible avec les techniques usuelles d'imagerie en raison des densités élevées dans les nuages à l'équilibre. Nous avons contourné cette difficulté grâce à la propriété d'invariance dynamique décrite plus haut. Notre approche a consisté à couper le potentiel de piégeage radial tout en laissant le potentiel assurant le confinement fort. Le nuage subit alors une expansion libre bi-dimensionnelle. Pour des temps suffisamment longs, la densité centrale du nuage chute et les problèmes d'imagerie mentionnés plus haut disparaissent. En utilisant l'équation 3, nous avons d'une part vérifié cette propriété d'invariance dynamique à l'échelle du bruit expérimental et d'autre part fourni une première mesure expérimentale de l'équation d'état du gaz de Bose homogène.

Dans le prolongement de ce travail, Hung *et al.* [59] ont démontré à travers un très bel effort expérimental d'une part l'invariance d'échelle de l'équation d'état $\mathcal{D}(\mu/k_B T, \tilde{g})$ et d'autre part

l'universalité au voisinage de la transition superfluide en comparant les équations d'états obtenues pour quatre valeurs différentes du paramètre d'interaction $\tilde{g}$. L'élément clé de cette belle réussite est l'utilisation d'une imagerie par absorption fortement saturante qui s'inspire d'une méthode développée pour des nuages tri-dimensionnels denses [105].

Plan de la thèse

Ce manuscrit de thèse porte essentiellement sur des études expérimentales de la thermodynamique du gaz de Bose à deux dimensions. Nous présenterons d'abord au chapitre 1 un bilan des connaissances théoriques concernant le gaz de Bose à deux dimensions. Ce chapitre n'a pas la prétention de fournir un état de l'art exhaustif, mais simplement de fournir au lecteur les concepts fondamentaux reliés aux résultats expérimentaux qui seront présentés plus loin.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous présenterons au chapitre 2 une étude théorique portant sur le processus d'interaction entre un photon et un nuage atomique dense. Cette question a été soulevée par l'observation de distorsions dans la densité mesurée sur des nuages bi-dimensionnels que nous avons mentionnées plus haut [103]. En nous appuyant sur des simulations, nous verrons que l'imagerie par absorption non saturante sur des nuages denses donne lieu à un déficit de détectivité significatif. Cette étude invalide définitivement l'utilisation de l'imagerie par absorption non-saturante sur des nuages denses.

Le chapitre 3 a vocation à fournir une solution fiable à la mesure de la distribution d'équilibre d'un nuage dense. Pour cela, nous opterons pour la même stratégie que celle utilisée par Hung *et al.* [59] qui consiste à utiliser un faisceau sonde fortement saturant. Nous prendrons soin toutefois de lever toute zone d'ombre qui existait jusque là dans l'application de cette méthode à un gaz bi-dimensionnel. D'une part, nous établirons de façon auto-consistante la façon d'extraire la densité atomique à partir des images d'absorption. D'autre part, nous nous assurerons de la fiabilité de la distribution de densité mesurée sur nos nuages en balayant un large intervalle d'intensité du faisceau sonde.

Les chapitres 4, 5 et 6 correspondent aux résultats principaux de ce travail de thèse. Au chapitre 4 nous présenterons une mesure des équations d'états en termes de trois grandeurs thermodynamiques sans dimension : la densité dans l'espace des phases, la pression réduite et l'entropie par particule. Nous exposerons dans un premier temps nos mesures pour la pression réduite et la densité dans l'espace des phases qui confirment la propriété d'invariance d'échelle. Nous verrons ensuite que dans le cadre de cette invariance d'échelle, nous pouvons déduire l'équation d'état pour l'entropie par particule.

Au chapitre 5, nous nous intéresserons à la mesure de l'énergie d'interaction dans des gaz 2D. Dans un premier temps, nous présenterons une méthode permettant de décomposer l'énergie totale d'un gaz piégé de basse dimension (1D ou 2D) en ses différentes composantes : l'énergie potentielle, l'énergie cinétique et l'énergie d'interaction. Nous décrirons ensuite la mise en œuvre expérimentale de cette méthode qui nous permettra de déterminer les différentes contributions à l'énergie totale, et en particulier l'énergie d'interaction. Nous relierons enfin cette mesure aux fluctuations de densité de nos nuages. Nous verrons que pour les nuages considérés, bien que comportant une fraction «non superfluide» significative, les fluctuations de densité sont considé-

ablement réduites. Nous connecterons ce résultat à l'existence d'une phase intermédiaire, entre la phase normale et la phase superfluide, où les fluctuations de densité sont quasiment gelées confirmant l'observation de Tung *et al.* [116].

Enfin, nous décrirons au chapitre 6 l'observation de signatures de vortex dans nos gaz 2D. Nous présenterons d'abord de façon très factuelle l'observation de trous de densité de contraste significatif dans des nuages sondés après une courte expansion libre. En nous appuyant sur des simulations, nous verrons que ces trous de densité peuvent être reliés à la présence de défauts de phase dans la distribution d'équilibre du nuage. Dans un deuxième temps, nous étudierons la répartition de ces trous de densité dans nos nuages, *in situ* et en expansion. Cette analyse, dont le résultat est consistant avec la détection de vortex *in situ*, constitue une approche originale de la recherche de vortex dans un gaz Bose à deux dimensions. Enfin, nous présenterons les premiers résultats d'une étude des corrélations entre trous de densité dans des gaz 2D en expansion.

En conclusion, nous ferons un récapitulatif des résultats présentés dans ce manuscrit et nous terminerons sur deux propositions d'expériences qui se situent dans la continuité du présent travail.

Chapitre 1

Le gaz de Bose à 2D : éléments de théorie

Dans ce chapitre, nous allons donner une vue d'ensemble des connaissances théoriques actuelles sur le gaz de Bose à deux dimensions en interaction faible. Le but de ce chapitre n'est pas de présenter un état de l'art exhaustif, mais uniquement d'introduire les concepts fondamentaux nécessaires à la compréhension des expériences que nous décrirons aux prochains chapitres.

Nous commencerons par faire un bref rappel sur la condensation de Bose–Einstein dans un gaz 2D idéal. Ce cas simple nous permettra d'établir un certain nombre de résultats de référence qui nous seront utiles dans la suite du chapitre et de nous familiariser avec un formalisme et des notions que nous retrouverons tout au long de ce manuscrit. Nous entrerons ensuite dans le vif du sujet en section 1.2 où nous nous intéresserons à l'équation d'état du gaz de Bose 2D en interaction faible. Nous verrons que dans le régime dit *quasi-2D*, qui correspond au régime des gaz bi-dimensionnels produits en laboratoire, l'équation d'état pour une grandeur sans dimension est invariante par changement d'échelle. Dans un deuxième temps, nous présenterons l'état des connaissances théoriques sur l'équation d'état. Cette section est directement reliée au chapitre 4 où nous présenterons nos mesures de l'équation d'état. À la section 1.3, nous nous intéresserons aux fluctuations de densité dans le gaz 2D en interaction faible. Nous verrons que malgré l'absence de condensation de Bose–Einstein à température non nulle, le gaz de Bose 2D se caractérise par une réduction importante des fluctuations de densité dans le régime dégénéré. Cette propriété, qui joue un rôle essentiel dans le mécanisme responsable de la transition superfluide, sera à mettre en regard des résultats expérimentaux que nous exposerons au chapitre 5. Enfin, nous ferons une description détaillée de la transition superfluide à 2D en nous appuyant sur des arguments simples et en nous limitant au formalisme minimal. Les notions que nous introduirons dans cette dernière section pour décrire le mécanisme microscopique responsable de la transition superfluide seront utiles pour l'interprétation des résultats du chapitre 6.

1.1 Condensation de Bose–Einstein dans un gaz de Bose idéal à 2D

Cette section est consacrée au gaz de Bose idéal à deux dimensions. Après avoir rappelé les résultats de base sur la condensation de Bose–Einstein à trois dimensions, nous verrons pourquoi cette transition n'est pas possible à 2D dans le cas homogène¹. Cette section nous permettra également de nous familiariser avec plusieurs aspects des gaz à basse température que nous utiliserons tout au long de ce manuscrit. Nous y introduirons en particulier les expressions des équations d'état en terme de densité dans l'espace des phases et de pression réduite. Nous connecterons également à plusieurs endroits les résultats obtenus pour le gaz homogène avec ceux du cas piégé. Cette connection jouera un rôle essentiel dans la suite de ce manuscrit.

1.1.1 Rappels sur la condensation de Bose–Einstein à 3D

Avant d'aborder le cas bi-dimensionnel, nous allons rappeler ici les quelques résultats essentiels de la condensation de Bose–Einstein à trois dimensions².

Considérons une assemblée de N bosons sans interactions dans un volume de taille finie, à température T et potentiel chimique μ donnés. D'après la statistique de Bose–Einstein, le nombre d'atomes occupant le niveau d'énergie ϵ_i associé à l'état propre $|i\rangle$ est :

$$N_i = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} \quad (1.1)$$

où $\beta = 1/k_B T$, k_B étant la constante de Boltzmann. Le nombre d'atome $N^{(\text{exc})}$ dans les niveaux excités est donc borné supérieurement :

$$N^{(\text{exc})} = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} < \underbrace{\sum_{i \geq 1} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \epsilon_0)} - 1}}_{\equiv N_{\text{max}}^{(\text{exc})}} \quad (1.2)$$

puisque le potentiel chimique μ varie entre $-\infty$ et l'énergie du niveau fondamental ϵ_0 . Dès lors, en ajoutant des atomes dans le système jusqu'à ce que le nombre d'atome total N devienne supérieur à $N_{\text{max}}^{(\text{exc})}$, les niveaux excités tendent à être saturés et au moins $N - N_{\text{max}}^{(\text{exc})}$ s'accumulent dans le niveau fondamental. Lorsque $N \gg N_{\text{max}}^{(\text{exc})}$, la quasi-totalité des atomes occupent donc le niveau fondamental. La question est alors de savoir si cette saturation des niveaux excités survit au passage à la limite thermodynamique, où l'écart entre les niveaux d'énergie se réduit.

Dans le cas particulier d'une boîte³ de côté L , on peut montrer que la saturation se produit lorsque le nombre d'atomes atteint la valeur critique :

$$N_c = \frac{L^3}{\lambda_T^3} g_{3/2}(1), \quad (1.3)$$

1. À température non nulle.

2. Les ouvrages expliquant la condensation de Bose–Einstein étant nombreux, nous n'en détaillerons pas ici la démonstration théorique, et nous nous contenterons de rappeler les quelques résultats essentiels qui seront utiles à notre propos.

3. C'est la situation considérée par Einstein lors de la formulation originale du problème [33].

où $g_{3/2}$ est la fonction polylogarithme⁴ de degré $3/2$. Lorsque l'on prend la limite thermodynamique à densité spatiale $n \equiv N/L^3$ constante ($L \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ et $N/L^3 = \text{cste}$), on constate qu'il existe une densité critique n_c , indépendante de la taille du système, au-delà de laquelle une fraction macroscopique des atomes s'accumule dans l'état fondamental :

$$n_c = \frac{g_{3/2}(1)}{\lambda_T^3}. \quad (1.4)$$

Ce résultat peut être également exprimé en termes de densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} \equiv n\lambda_T^3$:

$$\mathcal{D}_c = g_{3/2}(1), \quad (1.5)$$

qui fournit un critère universel, indépendant de la température. Le fait qu'une population macroscopique occupe le niveau fondamental du système à la limite thermodynamique définit le phénomène de condensation de Bose–Einstein.

Le formalisme qui permet de trouver les expressions (1.3)-(1.5), que nous ne détaillerons pas ici, permet également d'obtenir l'expression générale de la densité dans l'espace des phases en fonction de la fugacité $Z = e^{\beta\mu}$ en deçà de la valeur critique :

$$\mathcal{D} = g_{3/2}(Z). \quad (1.6)$$

Sachant que pour des bosons le potentiel chimique varie entre $-\infty$ et l'énergie de l'état fondamental, que l'on fixe à 0 par commodité, la fugacité varie entre 0 et 1. On approche donc la transition lorsque $Z \rightarrow 1$, valeur pour laquelle on retrouve la valeur critique $\mathcal{D}_c$.

Considérons à présent le cas d'atomes confinés dans un piège harmonique isotrope⁵ de pulsation ω , et intéressons-nous au régime où $k_B T \gg \hbar\omega$, qui correspond à la limite semi-classique où le quantum de vibration est très petit devant l'énergie thermique⁶. Dans ces conditions, il existe, comme dans le cas homogène, un nombre d'atomes critique qui sature les niveaux excités :

$$N_c^{\text{harm}} = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(1). \quad (1.7)$$

Qu'en est-il à la limite thermodynamique ? Pour un piège harmonique, la limite thermodynamique consiste à prendre $N \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$ et garder $N\omega^3$ constante, ce qui revient à garder la densité au centre du nuage constante. Dans cette limite, la densité centrale $n(\mathbf{r} = \mathbf{0}) \propto N\omega^3$ reste donc bornée supérieurement pour les niveaux excités.

Dans le cadre de l'approximation semi-classique, on peut également montrer⁷ que la densité dans l'espace des phases prend la forme :

$$\mathcal{D}(\mathbf{r}) = g_{3/2} \left(Z e^{-\beta V(\mathbf{r})} \right), \quad (1.8)$$

4. La fonction polylogarithme de degré ν est définie par $g_\nu(Z) = \sum_l \frac{Z^l}{l^\nu}$.

5. Nous considérons le cas isotrope par simplicité, mais tout le raisonnement qui suit reste valable pour le cas général.

6. Noter que la limite opposée $k_B T \ll \hbar\omega$ n'est pas pertinente pour nous, car l'existence d'une population macroscopique dans l'état fondamental est triviale.

7. Il suffit pour cela de partir de la forme approchée de la fonction de Wigner :

$$w(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \approx \frac{1}{h^3} \frac{1}{Z^{-1} e^{(p^2/2m + V(\mathbf{r}))/k_B T} - 1}$$

et d'intégrer sur les impulsions. La validité de cette approximation est discutée dans [11].

où $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ est le potentiel de piégeage. On reconnaît la forme de l'équation (1.6) où la fugacité a été remplacée par $Ze^{-\beta V(\mathbf{r})}$ ⁽⁸⁾. Il est intéressant de noter que dans le cas harmonique, la dépendance spatiale de la densité va se traduire par un critère local pour la transition. En effet, lorsque $Z \rightarrow 1$, d'une part le nombre total d'atomes approche la valeur critique N_c^{harm} et d'autre part la densité dans l'espace des phases au centre du piège tend vers $\mathcal{D}_c$. Ce résultat est remarquable car il permet d'établir une connexion directe entre les critères de transition dans le cas homogène et le cas piégé.

1.1.2 La condensation de Bose-Einstein à 2D

Le cas homogène

Contrairement au cas tri-dimensionnel, à deux dimension, il n'y a pas⁹ de condensation de Bose-Einstein à la limite thermodynamique pour un gaz de Bose homogène sans interactions. On peut en effet montrer que lorsque $L \rightarrow \infty$, on a :

$$N_{\text{max}}^{(\text{exc})} \rightarrow \frac{L^2}{\lambda_T^2} g_1(1). \quad (1.9)$$

Or, la fonction polylogarithme d'ordre 1 pour laquelle on a la forme analytique simple $g_1(Z) = -\ln(1-Z)$ diverge en $Z = 1$. Par conséquent, il n'y a pas de borne supérieure à la densité dans les niveaux excités à la limite thermodynamique ($L, N \rightarrow \infty$ avec $N/L^2 = \text{cste}$), ce qui exclut l'existence d'un condensat de Bose-Einstein.

De façon corollaire, on peut montrer que l'expression générale de la densité dans l'espace des phases à 2D s'écrit :

$$\mathcal{D} = g_1(Z) = -\ln(1-Z), \quad (1.10)$$

qui diverge lorsque $Z \rightarrow 1$.

Le cas du piège harmonique

Intéressons-nous à présent à la situation où les atomes sont confinés dans un piège harmonique isotrope de pulsation ω . En nous plaçant à la limite $k_B T \gg \hbar\omega$, comme précédemment, nous pouvons montrer que le nombre d'atomes critique est donné par :

$$N_c^{\text{harm}} = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^2 g_2(1), \quad g_2(1) = \frac{\pi^2}{6}. \quad (1.11)$$

On voit donc que dans le cas harmonique, la saturation des niveaux excités reste valable à la limite thermodynamique ($N \rightarrow \infty, \omega \rightarrow 0$ avec $N\omega^2 = \text{cste}$), ce qui permet l'accumulation d'une population macroscopique dans l'état fondamental, contrairement au cas homogène. L'origine

8. Cette connexion entre le cas homogène et le cas piégé apparaît naturellement via l'approximation semi-classique. Nous verrons plus loin que, de façon similaire, l'approximation dite de densité locale permet de relier les résultats d'un gaz homogène à son équivalent dans un potentiel $V(\mathbf{r})$.

9. Excepté à température nulle.

de cette différence provient du fait que la densité d'états dans un piège harmonique est plus favorable à la saturation des niveaux excités que dans le cas homogène.

De façon similaire au cas tri-dimensionnel, on obtient la relation entre la densité dans l'espace des phases et la fugacité Z :

$$\mathcal{D}(\mathbf{r}) = g_1 \left(Ze^{-\beta V(\mathbf{r})} \right) = -\ln \left(1 - Ze^{-\beta V(\mathbf{r})} \right). \quad (1.12)$$

Notons encore une fois que cette équation est analogue à celle obtenue pour le cas homogène (Eq. (1.10)), avec le changement $Z \rightarrow Ze^{-\beta V(\mathbf{r})}$. En fait cette relation dissimule un comportement pathologique dans la mesure où lorsque $Z \rightarrow 1$, la densité dans l'espace des phases au centre du piège diverge. Contrairement au cas 3D, il n'existe donc pas de critère local sur la densité pour la condensation de Bose-Einstein dans un piège harmonique.

Pression réduite d'un gaz 2D

Pour l'étude des gaz de Bose à 2D il est intéressant de transposer les résultats précédents à la tension de surface. Dans la suite, nous utiliserons le terme «pression» plutôt que «tension de surface» par commodité, mais en prenant garde au fait qu'il s'agit en fait d'une force par unité de longueur.

Afin de traduire certains de nos résultats précédents en termes de pression, nous prendrons comme point de départ la relation de Gibbs–Duhem $dP = nd\mu + sdT$, où s désigne l'entropie par unité de surface. À température fixée on a donc simplement $dP = nd\mu = ndZ/Z\beta$.

Considérons d'abord le cas homogène, pour lequel nous avons vu que la densité spatiale s'écrit $n = g_1(Z)/\lambda_T^2$ (Eq. (1.10)). En injectant cette expression dans la relation de Gibbs–Duhem et en intégrant, on obtient :

$$P(Z) = \frac{1}{\beta\lambda_T^2} \int_0^Z \frac{g_1(Z')}{Z'} dZ' = \frac{1}{\beta\lambda_T^2} g_2(Z), \quad (1.13)$$

où on a utilisé la propriété des fonctions polylogarithmes $\frac{dg_\nu(Z)}{dZ} = \frac{g_{\nu-1}(Z)}{Z}$ et le fait que, par définition, $g_\nu(0) = 0$, quel que soit ν . En introduisant la pression réduite $\mathcal{P} \equiv P\lambda_T^2/k_B T$, qui est une grandeur sans dimension, l'équation (1.13) s'écrit :

$$\mathcal{P} \equiv \frac{P\lambda_T^2}{k_B T} = g_2(Z). \quad (1.14)$$

La fonction g_2 étant croissante, elle est bornée par les valeurs $g_2(0) = 0$ et $g_2(1) = \frac{\pi^2}{6}$. Ce résultat révèle donc une propriété remarquable du gaz de Bose idéal homogène à 2D : la pression réduite ne peut excéder la valeur $\mathcal{P}_{\max} = \frac{\pi^2}{6}$.

Le résultat (1.14) s'étend au cas harmonique, où, comme nous l'avons fait plus haut, il suffit de procéder au changement $Z \rightarrow Ze^{-\beta V(\mathbf{r})}$. La pression réduite dépend donc maintenant de la position et s'écrit :

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}) = g_2 \left(Ze^{-\beta V(\mathbf{r})} \right). \quad (1.15)$$

Par conséquent, au point de transition, lorsque $Z = 1$ et que le nombre d'atomes atteint le nombre critique N_c^{harm} , la pression réduite au centre du piège atteint la valeur $\mathcal{P}_{\max} = \frac{\pi^2}{6}$. Cette description en terme de pression réduite a donc le mérite de fournir un critère local pour la transition dans un piège harmonique : la condensation se produit lorsque $\mathcal{P}(\mathbf{0}) = \frac{\pi^2}{6}$.

1.2 Equation d'état du gaz de Bose homogène à 2D

Nous allons à présent prendre en compte les interactions entre atomes, que nous avons négligées jusqu'ici. Tout au long de cette section, sauf indication contraire, nous considérerons un gaz de Bose à deux dimensions à température non nulle.

Dans le cas idéal, nous avons vu qu'il n'y a pas de condensation de Bose-Einstein pour le gaz homogène à la limite thermodynamique. Les interactions entre atomes ne changent pas ce résultat, mais il existe néanmoins une transition vers un état superfluide lorsque l'on abaisse la température, ce qui modifie radicalement la physique du système. Nous traiterons les aspects liés à la transition superfluide à la section 1.4. Dans ce qui suit, nous adopterons un point de vue thermodynamique centré sur l'équation d'état plutôt que sur la description du point critique. Après avoir rappelé l'état des connaissances théoriques sur l'équation d'état du gaz homogène, nous discuterons la connexion avec le cas piégé.

1.2.1 Le régime quasi-2D

Il est plus réaliste de considérer la situation où les atomes évoluent, non pas dans un environnement strictement bi-dimensionnel, mais plutôt dans une géométrie tri-dimensionnelle avec un confinement fort selon une direction donnée, de sorte que l'épaisseur du système dans cette direction est très petite devant sa taille dans les directions transverses. Dans toute la suite, nous choisirons l'axe (Oz) comme direction de confinement fort et nous noterons l_z l'épaisseur caractéristique du nuage atomique dans cette direction.

Dans le cas d'un confinement harmonique¹⁰ de pulsation caractéristique ω_z , et dans la limite où $k_B T \ll \hbar \omega_z$, les atomes occupent essentiellement l'état fondamental de l'oscillateur harmonique selon l'axe (Oz), si bien que leur dynamique est complètement gelée dans cette direction. Dans une telle configuration, le système est 2D au sens thermodynamique.

Si l'on tient compte des interactions, il faut également prendre en considération l'aspect collisionnel du problème. À 3D, pour les systèmes et températures qui nous intéressent, les collisions entre atomes mettent principalement en jeu des collisions binaires dans l'onde s [94], caractérisées par la longueur de diffusion a . On peut alors distinguer deux régimes en comparant la longueur de diffusion a à l'épaisseur l_z . Dans le cas où $a \lesssim l_z$, les collisions se produisent dans le plan et leur description nécessite de traiter la théorie de la diffusion à 2D qui est en général un problème difficile [4]. En revanche, dans la limite $a \ll l_z$, il n'y a pas de direction privilégiée pour les collisions. Dans cette limite, le problème reste donc 3D du point de vue des collisions [93] et cela correspond à la situation rencontrée dans les expériences d'atomes froids réalisées jusqu'ici sur des bosons¹¹ [27, 46, 59, 103, 116]. Ce régime où le système est thermodynamiquement 2D mais dans lequel les collisions se produisent dans toutes les directions de l'espace est dit *quasi-2D*¹².

10. C'est le cas dans les expériences actuelles sur les gaz quasi-2D.

11. Récemment une expérience pionnière sur les gaz de Fermi à deux dimensions [36] a exploré le régime $a \rightarrow -\infty$.

12. Dans la littérature cette terminologie est parfois utilisée pour parler des systèmes dans une géométrie bi-dimensionnelle avec des populations non négligeables dans les niveaux excités selon (Oz).

1.2.2 Invariance de l'équation d'état

L'interaction entre deux bosons à 3D, repérés respectivement par les vecteurs positions $\mathbf{r}_i$ et $\mathbf{r}_j$ est, dans le cadre qui nous intéresse, bien décrite par le potentiel de contact¹³ :

$$w(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = g^{(3D)} \delta^{(3D)}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (1.16)$$

où $g^{(3D)} = 4\pi\hbar^2 a/m$ est le paramètre de couplage. L'énergie d'interaction prend alors la forme simple :

$$E_{\text{int}} = \frac{g^{(3D)}}{2} \int \left[n^{(3D)} \right]^2 d^3\mathbf{r}, \quad (1.17)$$

expression qui est également valable pour un gaz quasi-2D. Dans le cas considéré ici, la densité spatiale est séparable sous la forme suivante

$$n^{(3D)}(\mathbf{r}) = n(x, y) |\Psi(z)|^2, \quad (1.18)$$

où n désigne la densité spatiale à 2D et $\Psi(z)$ est la fonction propre normalisée associée au niveau fondamental du mouvement selon (Oz). En injectant l'expression (1.18) de la densité dans l'équation (1.17), on a donc :

$$E_{\text{int}} = \frac{g}{2} \int n^2 d^2\mathbf{r} \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a \int |\Psi(z)|^4 dz \quad (1.19)$$

où l'on reconnaît la forme de l'énergie d'interaction pour un gaz bi-dimensionnel¹⁴ avec un paramètre de couplage g .

En posant :

$$g = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g}, \quad (1.20)$$

on voit que l'amplitude du couplage est contenue dans le paramètre $\tilde{g} \equiv 4\pi a \int |\Psi(z)|^4 dz$ qui est une grandeur sans dimension. Dans le régime quasi-2D, les interactions n'introduisent donc pas d'échelle de longueur, contrairement aux cas 3D et quasi-1D¹⁵. De façon corollaire, la longueur de cicatrisation ξ qui donne l'échelle de longueur caractéristique associée aux interactions¹⁶ ne dépend que de la densité surfacique :

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{mgn}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}n}}. \quad (1.21)$$

13. En toute rigueur, la «fonction» $\delta^{(3D)}(\mathbf{r})$ doit être régularisée (voir par exemple [58]).

14. Cette expression de l'énergie d'interaction pour un gaz 2D suppose également un potentiel de contact. L'utilisation du potentiel δ à deux dimensions est discutée dans [7, 87]

15. Le régime quasi-1D est l'analogue uni-dimensionnel du régime quasi-2D. Il correspond à la situation où un nuage est fortement confiné selon deux directions de l'espace, de telle sorte que les degrés de libertés correspondants sont gelés et où les collisions restent 3D. Ce dernier critère est valable lorsque $a \ll \ell_\perp$ où $\ell_\perp$ est l'extension transverse du nuage. Lorsque le confinement fort est assuré par un potentiel harmonique de pulsation $\omega_\perp$, le paramètre de couplage à 1D s'écrit $g_{1D} = 2\hbar\omega_\perp a = 2\frac{\hbar^2}{m} \frac{a}{\ell_\perp^2}$ avec $\ell_\perp = \sqrt{\hbar/m\omega_\perp}$.

16. La longueur de cicatrisation représente l'échelle de longueur typique sur laquelle la densité d'un système uniforme s'annule en présence d'une barrière infinie.

Dans le cas d'un confinement harmonique selon (Oz) , qui est celui des expériences actuelles, la densité spatiale du fondamental est $|\Psi(z)|^2 = e^{-z^2/\ell_z^2}/\sqrt{\pi\ell_z^2}$ avec $\ell_z = \sqrt{\hbar/m\omega}$ et on trouve :

$$\tilde{g} = \sqrt{8\pi} \frac{a}{\ell_z}. \quad (1.22)$$

Dès lors que les interactions sont caractérisées par un paramètre sans dimension, la température T et le potentiel chimique μ représentent les seules échelles d'énergie. Par conséquent, toute grandeur sans dimension décrivant le système est une fonction du rapport :

$$\alpha \equiv \frac{\mu}{k_B T}. \quad (1.23)$$

Typiquement la densité dans l'espace des phases et la pression réduite prennent la forme générale :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\alpha, \tilde{g}) \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}(\alpha, \tilde{g}) \quad (1.24)$$

où $\tilde{g}$ est un paramètre. Donc, si l'on change simultanément le potentiel chimique et la température par un même facteur ($\mu \rightarrow \kappa\mu$ et $T \rightarrow \kappa T$), les valeurs de la densité dans l'espace des phases et de la pression réduite restent inchangées. C'est en ce sens que l'équation d'état du gaz de Bose quasi-2D est invariante par changement d'échelle, ce qui est remarquable pour un système en interaction ¹⁷.

Dans les sections qui suivent, nous allons nous intéresser à la forme de cette équation d'état dans le régime d'interaction faible $\tilde{g} \ll 1$ (¹⁸), qui est le régime des expériences actuelles d'atomes froids sur les bosons où $\tilde{g}$ varie entre $\sim 10^{-1}$ [59, 103, 116] et $\sim 10^{-2}$ [27]. Le régime d'interaction faible correspond aussi aux efforts théoriques les plus aboutis concernant l'équation d'état du gaz homogène [101].

1.2.3 Équation d'état dans les régimes asymptotiques

Au sens strict, il n'existe pas de prédiction théorique pour les équation d'état $\mathcal{D}(\alpha, \tilde{g})$ et $\mathcal{P}(\alpha, \tilde{g})$ qui couvre tout l'intervalle du rapport $\alpha = \frac{\mu}{k_B T}$ accessible expérimentalement. Nous verrons néanmoins qu'il est possible de construire une équation d'état «composite» pour $\mathcal{D}$, en raccordant les régimes asymptotiques connus à la prédiction [101] résultant de simulations Monte-Carlo, valable dans une région intermédiaire.

Nous allons nous intéresser dans un premier temps à l'équation d'état pour $\mathcal{D}$ qui est la grandeur thermodynamique usuelle dans la littérature, nous retranscrivons ensuite ces résultats en termes de pression réduite.

17. L'équation d'état du gaz de Fermi 3D à la limite unitaire ($a \rightarrow +\infty$) présente également ce type d'invariance. Dans ce cas l'invariance provient du fait que la longueur de diffusion qui diverge n'intervient plus explicitement dans le problème [49].

18. On peut en effet montrer qualitativement [45] que le régime d'interaction forte correspond à $\tilde{g} \sim 2\pi$. Remarquons que la force relative des interactions est ici indépendante de la densité, contrairement au cas 3D où le paramètre d'interaction est $n^{(3D)} a^3$. Ceci vient naturellement du fait que $\tilde{g}$ est sans dimension.

Cas du gaz dilué : modèle Hartree-Fock de champ moyen.

La façon la plus élémentaire de traiter le problème à N -corps en présence d'interactions, consiste à utiliser, d'une part, l'approximation dite de Hartree-Fock, et, d'autre part, de considérer un potentiel de portée nulle. L'hypothèse sous-jacente est que les particules sont très faiblement corrélées, ce qui est justifié dans la limite de faible densité dans l'espace des phases. La fonction d'onde décrivant le système est donc factorisable comme le produit de N fonctions d'onde à une particule $\phi(\mathbf{r})$. Il est alors possible de montrer par une approche variationnelle que chaque particule est solution de l'équation :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + 2gn\right)\phi(\mathbf{r}) = E\phi(\mathbf{r}), \quad (1.25)$$

où g est le paramètre de couplage à 2D. Le problème ainsi décrit correspond à celui du gaz idéal avec un décalage en énergie $2gn$. D'un point de vue formel, nous retrouvons l'équation d'état (1.10) en remplaçant μ par $\mu - 2gn$, ce qui donne $\mathcal{D} = -\ln(1 - Ze^{-2gn/k_B T})$. Cette équation peut se mettre sous la forme implicite :

$$\mathcal{D} = -\ln\left(1 - Ze^{-\tilde{g}\mathcal{D}/\pi}\right), \quad Z = e^{\mu/k_B T}. \quad (1.26)$$

Cas du gaz dense : approximation de Thomas-Fermi.

L'équation d'état du gaz quasi-2D prend également une forme simple dans la limite des hautes densités dans l'espace des phases. Pour cela notre point de départ est l'équation de Gross-Pitaevskii à 2D [43,95] :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + gn\right)\psi(\mathbf{r}) = \mu\psi(\mathbf{r}), \quad (1.27)$$

qui décrit la physique du problème à N -corps à température nulle, où $\psi(\mathbf{r})$ est la fonction d'onde macroscopique du système. À température non nulle, cette équation reste néanmoins valide dans une très bonne approximation dans limite $\mathcal{D} \gg 1$. Dans ces conditions, nous pouvons également appliquer l'approximation de Thomas-Fermi qui consiste à négliger l'énergie cinétique dans le hamiltonien, de sorte que l'équation se simplifie sous la forme $gn = \mu$. En multipliant les deux membres de l'équation par λ_T^2 , on aboutit à l'équation d'état :

$$\mathcal{D} = \frac{2\pi}{\tilde{g}}\alpha. \quad (1.28)$$

Notons que ces deux limites correspondent à des théories de champ moyen comme l'indique la forme des équations (1.27) et (1.25). Ces deux équations ne diffèrent que par le coefficient qui précède le terme d'interaction gn qui vaut 1 dans le régime de Thomas-Fermi et 2 dans le régime Hartree-Fock. Ce coefficient est relié à la nature des corrélations entre particules que nous discuterons plus en détail à la section 5.4.1. Le facteur 2 qui apparaît dans le régime de Hartree-Fock est associé à la notion de groupement bosonique¹⁹ qui résulte de termes d'échange dans le calcul du terme d'interaction.

19. Ce facteur est l'analogue du facteur 2 qui apparaît dans la description de l'effet Hanbury-Brown et Twiss.

1.2.4 Théorie de Prokof'ev et Svistunov

Il n'existe pas de forme analytique de l'équation d'état $\mathcal{D}(\alpha, \tilde{g})$ permettant de relier les deux régimes asymptotiques mentionnés précédemment. Dans le régime d'interactions faibles $\tilde{g} \ll 1$, Prokof'ev et Svistunov [101] ont proposé un calcul numérique de $\mathcal{D}(\alpha, \tilde{g})$ à partir de simulations de type Monte-Carlo classique.

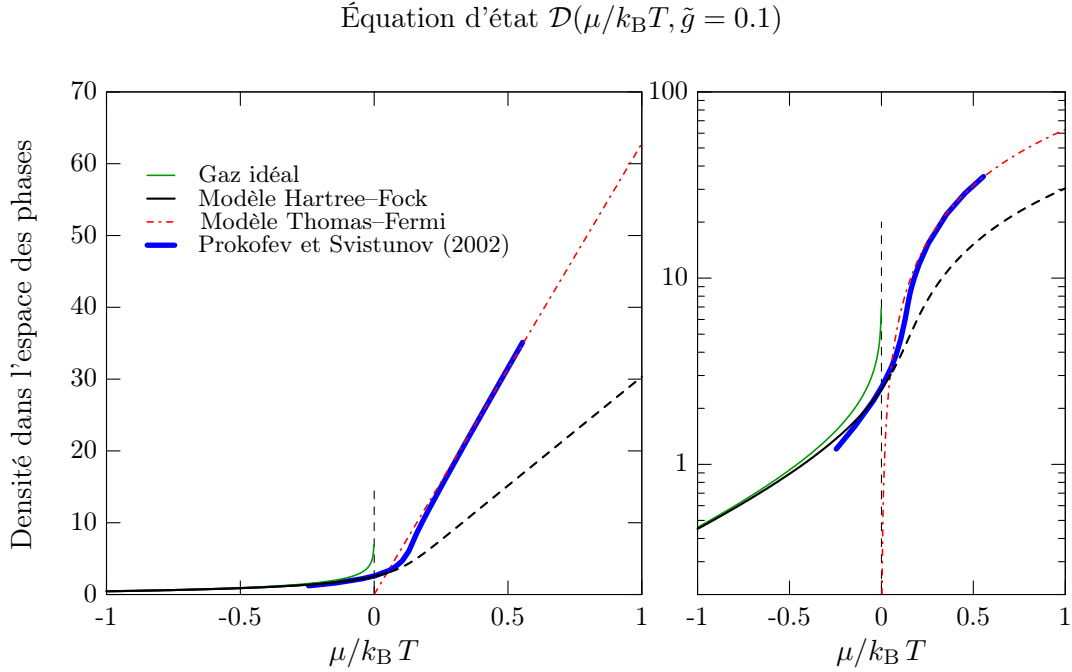


FIGURE 1.1 – Équation d'état $\mathcal{D}(\mu/k_B T, \tilde{g} = 0.1)$: régimes asymptotiques et prédiction de Prokof'ev et Svistunov ($\tilde{g} = 0.1$). La ligne noire continue correspond à l'équation implicite (1.26) dérivée dans le cadre de l'approximation Hartree-Fock de champ moyen. Elle est prolongée en tirets dans la région $\mu/k_B T > 0.1$ où l'approximation n'est plus valide. La ligne rouge en tirets-pointillés est la prédiction Thomas-Fermi (Eq. (1.28)). La ligne bleue continue épaisse est la prédiction de Prokof'ev et Svistunov [101]. La ligne verte continue qui diverge en $\mu/k_B T = 0$ est la fonction $g_1(e^{\mu/k_B T})$ correspondant au cas idéal (Eq. (1.10)).

En introduisant la quantité sans dimension :

$$X = \frac{\alpha - \alpha_c}{\tilde{g}}, \quad (1.29)$$

où α_c est une quantité connue²⁰, Prokof'ev et Svistunov présentent l'équation d'état sous la forme :

$$\mathcal{D} = \pi [\Theta(X) + X] + \frac{\pi}{\tilde{g}} \alpha_c. \quad (1.30)$$

20. α_c est la valeur de α pour laquelle se produit la transition superfluide. Ces aspects n'étant pas utiles à notre propos pour l'instant, nous y reviendrons plus loin.

où la fonction Θ est tabulée dans l'intervalle $X = [-4.0056, 3.9944]$. Pour nos paramètres expérimentaux, le paramètre d'interaction vaut $\tilde{g} = 0.1$ (et $\alpha_c = 0.15$), la prédiction [101] couvre donc l'intervalle $\alpha = [-0.25, 0.55]$. La figure 1.1 représente l'équation d'état $\mathcal{D}(\alpha, \tilde{g} = 0.1)$ correspondant à cette prédiction ainsi qu'aux régimes asymptotiques.

La prédiction [101] se raccorde assez naturellement avec le régime Thomas–Fermi dans le régime $\mathcal{D} \gg 1$. L'accord avec la théorie Hartree–Fock n'est pas aussi bon dans la région $\alpha < -0.1$. Prokof'ev et Svistunov indiquant que leur résultat est moins précis dans les régions de basse densité, nous considérons la théorie Hartree–Fock comme étant plus fiable jusqu'au point de croisement. Les deux théories sont en revanche en bon accord dans l'intervalle $\alpha = [-0.1, 0.1]$, ce qui indique que les corrections au modèle Hartree–Fock sont négligeables jusque $\alpha \sim 0.1$ (ce qui correspond à $\mathcal{D} \sim 3$, pour nos paramètres).

En conclusion, en combinant les résultats analytiques des régimes asymptotiques et la prédiction [101], nous pouvons construire une équation d'état «composite», en raccordant les différents morceaux aux points de croisement.

1.2.5 Prise en compte des états excités

Jusqu'ici nous avons considéré que les particules du gaz occupent l'état fondamental de l'oscillateur harmonique selon (Oz) en partant de l'hypothèse $k_B T \ll \hbar \omega_z$. Or dans les expériences actuelles, le régime de température atteint est tel que $k_B T \sim \hbar \omega_z$ et la population des niveaux excités selon (Oz) n'est alors plus négligeable. Comment la présence de ces populations des niveaux excités modifie-t-elle l'équation d'état ?

En première approximation, nous pouvons considérer que la densité spatiale des particules dans chaque état excité reste suffisamment faible pour négliger les interactions mettant en jeu ces particules. Chacun des niveaux excités $j \geq 1$ est donc occupé par un gaz idéal et la densité dans l'espace des phases associée au niveau j s'écrit :

$$\mathcal{D}_j = -\ln \left(1 - Z e^{-j\hbar\omega_z/k_B T} \right) \quad (1.31)$$

où nous avons repris l'équation (1.10) en retranchant l'énergie d'oscillateur ($\mu \rightarrow \mu - j\hbar\omega_z$). De plus, comme les particules des différents niveaux sont traitées comme des gaz indépendants, on peut sommer les densités, ce qui donne pour la densité dans l'espace des phases totale :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 - \sum_{j \geq 1} \ln(1 - Z e^{-j\beta\hbar\omega_z}). \quad (1.32)$$

où $\mathcal{D}_0$ est la densité dans l'espace des phases du niveau fondamental. Ce résultat est donc très intéressant d'un point de vue expérimental puisqu'il permet, par simple soustraction de la population des états excités, de retrouver l'équation d'état du régime quasi-2D au sens strict.

Bien évidemment, on peut apporter à ce modèle naïf plusieurs niveaux de raffinement, en prenant en compte les interactions intra-niveaux des particules des niveaux excités ainsi que les interactions inter-niveaux. Dans ce cas, le problème devient bien plus complexe et il convient de considérer deux cas. Celui où les atomes occupant le niveau fondamental sont dans le régime dilué de Hartree–Fock et le cas où ils forment un gaz dégénéré.

L'influence des niveaux excités sur le niveau fondamental est une question cruciale d'un point de vue expérimental et doit être traitée avec soin. Comme nous le verrons au chapitre 4, la détermination précise des paramètres thermodynamiques μ et T des échantillons atomiques repose sur la connaissance de l'équation d'état à faible densité. Ensuite, il est essentiel d'estimer l'effet des interactions inter-niveaux sur la distribution atomique du niveau fondamental. Nous ne pouvons en effet mesurer l'équation d'état du régime quasi-2D que si $\mathcal{D}_0$ n'est pas modifiée de manière significative par la population résiduelle d'atomes dans les niveaux $j \geq 1$.

Niveau fondamental dans le régime de Hartree–Fock

Plusieurs propositions [16, 47, 54–56] ont été faites pour traiter de façon plus précise le problème quasi-2D dans le régime Hartree–Fock en présence d'excitations résiduelles selon l'axe (Oz). L'approche la plus élaborée est sans doute celle développée dans [47] que nous allons décrire en détail.

L'idée de cette méthode et de déterminer de manière auto-cohérente les populations des différents niveaux (typiquement $j = 0$ à $j = 9$), où tous les atomes sont décrits dans le régime Hartree–Fock de champ moyen. Le point de départ de cette méthode, qui repose sur une résolution itérative, consiste à se donner une distribution initiale de densité volumique $n_{\text{it}}^{(3D)}(z)$ (une distribution de Boltzmann typiquement), qui est uniforme dans le plan (xOy) pour le cas qui nous intéresse. Nous pouvons alors calculer pour cette densité, les fonctions et énergie propres associées à l'hamiltonien décrivant le mouvement selon (Oz) (dans le régime de champ moyen), qui s'écrit :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 + 2g^{(3D)}n_{\text{it}}^{(3D)}(z). \quad (1.33)$$

Les fonctions et énergies propres de cet hamiltonien sont de la forme :

$$\psi_{\mathbf{k},j}(x, y, z) = \phi_j(z) \frac{e^{i(k_x x + k_y y)}}{2\pi}, \quad E_{\mathbf{k},j} = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2) + \epsilon_j, \quad (1.34)$$

où l'énergie ϵ_j contient l'énergie d'oscillateur $j\hbar\omega_z$ et un terme d'interaction proportionnel au recouvrement entre les fonctions $\phi_j(z)$. Par ailleurs, dans le cadre de l'approximation de Hartree–Fock l'occupation moyenne de chaque état $\psi_{\mathbf{k},j}$ est donnée par la statistique de Bose et vaut $\frac{1}{e^{(E_{\mathbf{k},j}-\mu)/k_B T} - 1}$. On peut donc calculer la densité totale qui vaut :

$$\sum_j \int d^2k |\psi_{\mathbf{k},j}|^2 \frac{1}{e^{(E_{\mathbf{k},j}-\mu)/k_B T} - 1} = -\frac{1}{\lambda_T^2} \sum_j |\phi_j(z)|^2 \ln \left(1 - Z e^{-\epsilon_j/k_B T} \right). \quad (1.35)$$

En itérant ainsi la procédure jusqu'à obtenir un point fixe, nous obtenons la densité $n^{(3D)}(z)$ du système et nous pouvons en déduire la densité surfacique n par intégration sur z . Comme les fonction $\phi_j(z)$ sont normalisées, nous trouvons :

$$n = \int n^{(3D)}(z) dz = -\frac{1}{\lambda_T^2} \sum_j \ln \left(1 - Z e^{-\epsilon_j/k_B T} \right) = \sum_j n_j \quad (1.36)$$

où nous avons introduit les populations n_j de chaque niveau j selon (Oz) . Notons bien que cette méthode prend en compte la déformation des fonctions $\phi_j(z)$ due aux interactions.

Dans une version simplifiée de cette méthode, nous pouvons négliger cette déformation. Les fonctions $\phi_j(z)$ sont alors simplement les fonctions propres de l'oscillateur harmonique. Nous avons par conséquent une expression analytique des énergies ϵ_j qui s'écrivent :

$$\epsilon_j = j\hbar\omega_z + 2 \sum_i g_{ij} n_j \quad (1.37)$$

où les coefficients g_{ij} sont connus. Ils correspondent au paramètre de couplage g (Eq. 1.20) pondéré par le recouvrement des fonctions $\phi_j(z)$:

$$g_{ij} = g \int dz |\phi_i(z)|^2 |\phi_j(z)|^2. \quad (1.38)$$

En se limitant à un nombre de niveaux j donné, nous pouvons donc déterminer les populations n_j (et donc la densité totale $n = \sum_j n_j$) en résolvant le système d'équations couplées :

$$n_j = -\frac{1}{\lambda_T^2} \ln \left(1 - Z e^{-(j\hbar\omega_z + 2 \sum_i g_{ij} n_j)/k_B T} \right) \quad \text{avec } j = \{0, 1, \dots, j_{\max}\}. \quad (1.39)$$

Notons que l'expression (1.39) pour la densité correspond à l'équation (Eq. (1.26)), avec un terme additionnel dans l'exponentielle qui prend en compte les interactions avec les atomes des autres niveaux (et l'énergie d'oscillateur $j\hbar\omega_z$).

Pour une valeur donnée du rapport $k_B T / \hbar\omega_z$, nous pouvons ainsi déterminer les corrections à l'équation d'état du système dues à la présence de niveaux excités. Précisons que l'expression (1.39) introduit une dépendance explicite en température et brise l'invariance d'échelle.

Pour les valeurs du rapport $k_B T / \hbar\omega_z$ typiques des expériences, l'équation d'état obtenue par cette méthode est en excellent accord [47] avec celle obtenue par la version plus élaborée décrite plus haut. Au chapitre 4, cette équation d'état, valable dans le régime non dégénéré, sera utilisée pour déterminer la température et le potentiel chimique central de nos nuages.

Niveau fondamental dans le régime dégénéré

Lorsque $\mathcal{D}_0 \gg 1$, il est difficile de fournir une forme générale rigoureuse de l'équation d'état en présence de populations excitées. Néanmoins, dans le cadre des expériences, nous pouvons adapter la méthode auto-cohérente décrite au paragraphe précédent à ce cas plus complexe, pour estimer l'effet des interactions sur la distribution atomique du niveau fondamental. Plus précisément, nous résolvons le système d'équations (1.39) en remplaçant l'équation associée à la population du fondamental par :

$$n_0 = n_{\text{mesure}} - \sum_{j \geq 1} n_j \quad (1.40)$$

où n_{mesure} est la densité atomique totale mesurée sur des échantillons atomiques. Nous pouvons alors estimer le potentiel ressenti par les atomes du fondamental. Si ce potentiel est négligeable, la relation (1.40) est donc justifiée *a posteriori* et n_0 donne accès à l'équation d'état du gaz homogène.

1.2.6 Équation d'état en termes de pression réduite

Dans ce qui précède nous avons présenté l'équation d'état en utilisant la densité dans l'espace des phases comme fonction thermodynamique, mais il est également intéressant de retranscrire ces résultats en termes de pression réduite²¹. Au paragraphe 1.1.2, nous avons introduit la relation de Gibbs-Duhem à température fixe qui s'écrit $dP = nd\mu$ que l'on peut écrire $d\mathcal{P} = \mathcal{D}d\alpha$ en multipliant les deux membres de l'équation par $\lambda_T^2/k_B T$. Dans le cadre de l'invariance d'échelle, la pression réduite est donc simplement la primitive de la densité dans l'espace des phases :

$$\mathcal{P} = \int \mathcal{D} d\alpha \quad (1.41)$$

Compte tenu de ce qui précède, nous pouvons donc aisément déduire les régimes asymptotiques pour $\mathcal{P}$. À la limite Thomas-Fermi, nous obtenons l'expression analytique très simple :

$$\mathcal{P} = \int_0^\alpha \mathcal{D}(\alpha') d\alpha' = \frac{\pi}{\tilde{g}} \alpha^2, \quad (1.42)$$

en intégrant l'équation (1.28) à partir de $\alpha = 0$, car $\mu = gn > 0$ dans ce régime. Dans le régime faiblement dégénéré, l'équation d'état s'obtient en intégrant numériquement l'équation implicite (1.26) pour $\mathcal{D}$. Dans la région intermédiaire, il n'y a pas d'équivalent publié de la théorie [101] de Prokof'ev et Svistunov. Nous pouvons néanmoins obtenir une prédiction théorique «du pauvre», en intégrant numériquement l'équation d'état composite pour $\mathcal{D}$. La figure 1.2 présente l'équation d'état pour la pression réduite dans les différents régimes.

Développement du viriel

L'équation d'état est souvent exprimée sous la forme dite d'expansion du viriel [58], qui, pour la pression réduite, s'écrit :

$$\mathcal{P} = \sum_{l=1}^{\infty} b_l Z^l, \quad (1.43)$$

où les coefficients b_l sont appelés les coefficients du viriel. Pour un gaz 2D idéal par exemple, on a $b_l = \frac{1}{l^2}$ (cf. Eq. 1.14). En présence d'interactions atomiques, dans le régime quasi-2D, l'invariance d'échelle de l'équation d'état va se traduire par le fait que ces coefficients sont indépendants de la température et du potentiel chimique. Seul le paramètre d'interaction sans dimension $\tilde{g}$ va intervenir dans l'expression des b_l .

L'intérêt du développement du viriel est de construire l'équation d'état de systèmes en interactions pour lesquels il n'y a pas de théorie simple, les coefficients étant déterminés par des méthodes diagrammatiques. Bien entendu, ces méthodes sont adaptées pour le calcul des premiers coefficients du viriel qui permettent de prendre en compte l'effet des interactions aux ordres les plus bas. Dans le cas du gaz de Bose à deux dimensions, les premières corrections du viriel [106] ne permettent pas d'aller au-delà du régime de validité de l'approximation de Hartree-Fock.

21. Compte tenu de la relation de Gibbs-Duhem $dp = nd\mu + sdT$ où s est l'entropie par unité de surface, on peut obtenir toutes les fonctions thermodynamiques par dérivation de la pression.

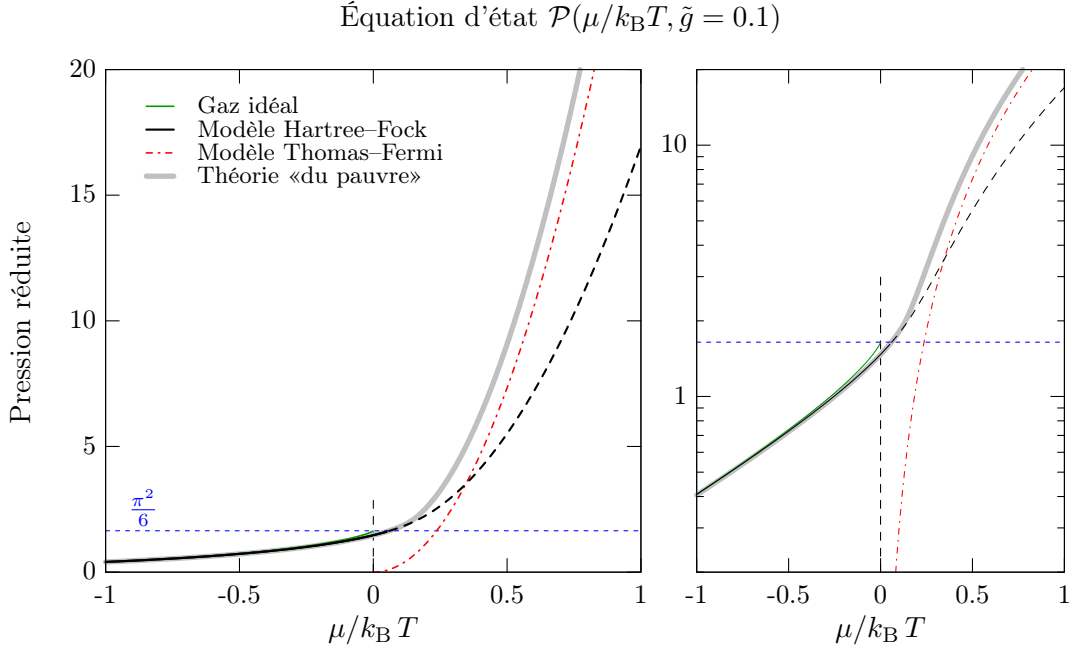


FIGURE 1.2 – Équation d'état $\mathcal{P}(\mu/k_B T, \tilde{g} = 0.1)$: régimes asymptotiques et prédiction de Prokof'ev et Svistunov ($\tilde{g} = 0.1$). La ligne noire continue correspond au régime de Hartree-Fock, obtenue par intégration numérique de l'équation implicite (1.26), elle est prolongée en tirets en dehors du régime de validité. La ligne rouge en tirets-pointillés est la prédiction Thomas-Fermi (Eq. (1.42)). La ligne grise continue épaisse correspond au résultat de l'intégration numérique de l'équation composite pour $\mathcal{D}$, nous l'avons baptisée «théorie du pauvre». La ligne verte continue est la fonction $g_2(e^{\mu/k_B T})$ correspondant au cas idéal (Eq. (1.14)). Celle-ci est bornée supérieurement par la valeur $\frac{\pi^2}{6}$ en $\mu/k_B T = 0$.

1.2.7 Connexion avec le cas du piège harmonique : l'approximation de densité locale

Dans la plupart des expériences d'atomes froids réalisées aujourd'hui, les particules sont confinées dans un piège harmonique, dont la réalisation est simple et bien contrôlée. Comment alors relier les résultats expérimentaux aux équations établies pour le cas homogène ? La réponse à cette question est fournie par *l'approximation de densité locale* (ADL), qui consiste à considérer le volume au voisinage de chaque comme un gaz homogène, où un équilibre local est établi. Dès lors, toutes les équations dérivées pour le cas homogène s'appliquent au cas piégé : la densité uniforme n est remplacée par la densité locale $n(\mathbf{r})$ et le potentiel chimique μ par le potentiel chimique local $\mu(\mathbf{r}) = \mu_0 - V(\mathbf{r})$, où $V(\mathbf{r})$ est le potentiel de piégeage et μ_0 le potentiel chimique au centre du piège.

En appliquant l'ADL dans le cas d'un piège harmonique 2D, avec $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$, les équations (1.24) se réécrivent :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\alpha(\mathbf{r}), \tilde{g}), \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}(\alpha(\mathbf{r}), \tilde{g}), \quad (1.44)$$

avec

$$\alpha(\mathbf{r}) = \alpha_0 - \frac{1}{2} \frac{m\omega^2 r^2}{k_B T}, \quad \alpha_0 \equiv \frac{\mu_0}{k_B T}. \quad (1.45)$$

Ce résultat est très intéressant dans la mesure où on balaye la valeur de α en se déplaçant du centre vers la périphérie du nuage. En d'autres termes, un seul échantillon expérimental contient l'équation d'état pour les valeurs de α allant de $-\infty$ à α_0 .

La validité de l'ADL pour nos systèmes a été démontrée avec une très bonne précision par des simulations de type Monte-Carlo quantique [57]. De façon générale, cette approximation est *a priori* valide dès lors que le potentiel $V(\mathbf{r})$ est suffisamment mou pour que l'échelle de distance sur laquelle varie la densité soit grande devant les échelles de longueur microscopiques du problème : typiquement la longueur de cicatrization ξ , la longueur d'onde thermique λ_T et la portée des interactions. Pour la plupart des situations où les interactions sont bien décrites par un potentiel de contact, l'ADL est donc valide. Cette approximation en revanche n'est pas applicable dans les systèmes avec des interactions à longue portée tels que les gaz dipolaires [72].

1.3 Réduction des fluctuations de densité

Dans cette section nous allons nous intéresser aux fluctuations de densité dans le gaz de Bose à deux dimensions. À trois dimensions, le phénomène de condensation de Bose-Einstein se traduit par l'établissement d'un ordre à longue portée caractérisé par la fonction d'onde macroscopique du condensat $\Psi = \sqrt{n}e^{i\theta}$, n étant la densité atomique et θ la phase²². Cette fonction d'onde, uniforme sur toute l'étendue du système, joue alors le rôle de paramètre d'ordre avec une densité et une phase bien définies²³. À 2D, comme nous l'avons vu dans la section 1.1.2, il n'y a pas de condensation de Bose-Einstein à température finie et la densité comme la phase sont des quantités fluctuantes. Néanmoins, nous verrons qu'en présence d'interactions atomiques répulsives, les fluctuations de densité sont fortement réduites dans le régime dégénéré. Ce phénomène joue un rôle essentiel dans le processus de mise en place de la transition superfluide que nous décrirons à la section 1.4.

En parallèle de leurs simulations pour l'équation d'état, Prokof'ev et Svistunov [101] ont présenté une prédiction quantitative des fluctuations de densité au voisinage de la transition superfluide. Avant de décrire ce résultat numérique, nous présenterons une approche analytique de type Bogoliubov développée dans [45] qui fournit une description plus intuitive de ce phénomène.

1.3.1 Approche de type Bogoliubov

Pour déterminer dans quelle mesure les fluctuations de densité sont réduites dans un gaz de Bose bi-dimensionnel à basse température, on peut faire un traitement de type Bogoliubov. Cette approche consiste, comme dans le cas 3D, à décrire le système par une fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_0 + \Psi_{\text{ex}}$, où $\Psi_0 = \sqrt{n}e^{i\theta}$ est la fonction d'onde décrivant le système à $T = 0$ et Ψ_{ex} est la fonction d'onde décrivant les particules des modes excités. Notons qu'à 2D, cette approche n'est a

22. Ceci est également vrai à 2D à température rigoureusement nulle.

23. À température non nulle, les excitations thermiques induisent de faibles fluctuations qui ne détruisent pas l'ordre à longue portée à 3D.

a priori pas adaptée car le passage de $T = 0$ à $T \neq 0$ s'accompagne de fluctuations thermiques qui détruisent l'ordre à longue portée caractérisé par Ψ_0 . C. Mora et Y. Castin [23,80] ont cependant montré que ce traitement reste justifié à 2D, ce qui repose sur le fait que l'on peut définir un paramètre d'ordre local, dès lors que l'ordre n'est détruit qu'à grandes distances. Les auteurs de [45] ont mené une étude analytique dans ce sens que nous allons détailler ici.

On considère une assemblée d'atomes évoluant dans une boîte bi-dimensionnelle de côté L avec des interactions de contact. L'hamiltonien décrivant le système est alors donné par :

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \int (\nabla \Psi^*(\mathbf{r})) (\nabla \Psi(\mathbf{r})) d^2\mathbf{r} + \frac{g}{2} \int (\Psi^*(\mathbf{r}))^2 (\Psi(\mathbf{r}))^2 d^2\mathbf{r}, \quad (1.46)$$

où $\Psi(\mathbf{r})$ est la fonction d'onde décrivant le système dans son ensemble. Pour rendre compte des fluctuations thermiques, on définit d'une part une phase locale $\theta(\mathbf{r})$ telle que $\Psi(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})| e^{i\theta(\mathbf{r})}$, et on introduit d'autre part le paramètre η tel que :

$$|\Psi(\mathbf{r})|^2 = n(1 + 2\eta(\mathbf{r})). \quad (1.47)$$

Les fluctuations de densité étant supposées faibles et le nombre de particules constant, on a $\eta \ll 1$ et $\int \eta(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = 0$. Compte tenu de ces approximations, on obtient, à une constante additive près :

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} n \int (\nabla \theta(\mathbf{r}))^2 d^2\mathbf{r} + \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} n (\nabla \eta(\mathbf{r}))^2 + 2gn^2 (\eta(\mathbf{r}))^2 \right] d^2\mathbf{r}. \quad (1.48)$$

En exprimant $\theta(\mathbf{r})$ et $\eta(\mathbf{r})$ sous la forme de développement de Fourier, on a :

$$\theta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \eta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.49)$$

où l'on a introduit la variable $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(j_x, j_y)$, j_x et j_y étant des entiers car on considère pour le moment une boîte de taille finie. De plus, $\theta(\mathbf{r})$ et $\eta(\mathbf{r})$ étant des fonctions réelles, on a $c_{\mathbf{k}}^* = c_{-\mathbf{k}}$ et $d_{\mathbf{k}}^* = d_{-\mathbf{k}}$, ce qui conduit à l'hamiltonien :

$$H = nL^2 \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m} |c_{\mathbf{k}}|^2 + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2gn \right) |d_{\mathbf{k}}|^2 \right]. \quad (1.50)$$

Dans ce traitement, les coefficients $c_{\mathbf{k}}$ et $d_{\mathbf{k}}$ sont des variables conjuguées puisqu'ils correspondent respectivement aux coefficients de Fourier de la phase et des fluctuations de densité. De plus, ils apparaissent dans l'hamiltonien (1.50) comme des degrés de liberté quadratique. On a donc pour chaque valeur de $\mathbf{k}$ un hamiltonien de type oscillateur harmonique. En appliquant le théorème du viriel²⁴, on a donc :

$$\frac{\langle |d_{\mathbf{k}}|^2 \rangle}{\langle |c_{\mathbf{k}}|^2 \rangle} = \frac{\hbar^2 k^2 / 2m}{\hbar^2 k^2 / 2m + 2gn}. \quad (1.51)$$

On peut alors distinguer des comportements différents dans les régimes asymptotiques de k :

$$\begin{cases} \langle |d_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \ll \langle |c_{\mathbf{k}}|^2 \rangle & \text{si } k \rightarrow 0 \\ \langle |d_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \langle |c_{\mathbf{k}}|^2 \rangle & \text{si } k \rightarrow \infty \end{cases}, \quad (1.52)$$

24. Pour un hamiltonien du type $H_{\text{osc}} = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \frac{p^2}{2m}$, on a $\langle m\omega^2 x^2 \rangle = \langle p^2 / m \rangle$.

et on voit en particulier que pour les modes de basse énergie les fluctuations thermiques sont dominées par les fluctuations de phases. Comme ces modes correspondent à des grandes longueurs d'onde, l'hypothèse de départ selon laquelle il existe un ordre local n'est pas remise en cause.

Cette analyse permet également d'estimer les fluctuations de densité. Celles-ci sont caractérisées par la variance :

$$\sigma_n^2 = \langle n^2(\mathbf{r}) \rangle - \langle n(\mathbf{r}) \rangle^2 = \langle n^2(\mathbf{r}) \rangle - n^2, \quad (1.53)$$

où $\langle \dots \rangle$ est la moyenne d'ensemble et $n = \langle n(\mathbf{r}) \rangle$. En incorporant l'expression de la densité (1.47) dans la définition (1.53), on obtient :

$$\frac{\sigma_n^2}{n^2} \approx 4\eta = 4 \sum_{\mathbf{k}} |d_{\mathbf{k}}|^2. \quad (1.54)$$

En première approximation, on peut ignorer les particules d'énergie supérieure à $k_B T$ et appliquer le théorème d'équipartition au second terme de l'équation (1.50), ce qui donne pour chaque valeur de $\mathbf{k}$:

$$nL^2 \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2gn \right) \langle |d_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \frac{k_B T}{2}. \quad (1.55)$$

Si on se limite au cas où l'énergie d'interaction gn est petite devant $k_B T$, qui est la situation rencontrée dans la plupart des expériences, on peut borner supérieurement les modules des vecteurs d'onde par $k_T \sim \frac{\sqrt{m k_B T}}{\hbar}$. L'équation (1.54) se met alors sous la forme :

$$\frac{\sigma_n^2}{n^2} \approx 4 \sum_{\mathbf{k}} \langle |d_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \approx \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \int_{k < k_T} \frac{k_B T/2}{nL^2(\hbar^2 k^2/2m + 2gn)} d^2 \mathbf{k}, \quad (1.56)$$

ce qui donne²⁵ :

$$\frac{\sigma_n^2}{n^2} \approx \frac{2}{n\lambda_T^2} \ln \left(\frac{k_B T}{2gn} \right). \quad (1.57)$$

On voit donc que lorsque le rapport $k_B T/gn$ n'excède pas quelques unités, les fluctuations de densités sont fortement réduites pour $\mathcal{D} = n\lambda_T^2 \gg 1$.

1.3.2 Théorie de Prokof'ev et Svistunov pour les fluctuations de densité

Afin de décrire le régime dans lequel les fluctuations de densité sont fortement réduites mais les fluctuations de phases encore présentes, Prokof'ev et Svistunov introduisent [100] la notion de *quasi-condensat*²⁶, dont la densité est donnée par :

$$n_Q \equiv \sqrt{2n^2 - \langle n(\mathbf{r})^2 \rangle}, \quad (1.58)$$

où n est la densité moyenne totale. Dans le régime faiblement dégénéré, où les interactions sont négligeables, on a des fluctuations gaussiennes telles que $\langle n(\mathbf{r})^2 \rangle = 2n^2$ et donc $n_Q = 0$. En revanche, dans le régime fortement dégénéré les interactions conduisent à la suppression des fluctuations de densité et l'on a $\langle n(\mathbf{r})^2 \rangle = n^2$, soit $n_Q = n$.

25. On néglige ici un terme additif qui vaut 1 dans le logarithme.

26. Nous insistons sur le fait que cette notion n'est pas reliée aux propriétés de phase mais uniquement aux fluctuations de densité.

Dans la référence [101] citée plus haut pour le calcul numérique de l'équation d'état, Prokof'ev et Svistunov fournissent également une prédiction pour la densité du quasi-condensat sous la forme :

$$n_Q = \frac{4}{\lambda_T^2} g(X), \quad (1.59)$$

où X est définie dans l'équation (1.29) et $g(X)$ une fonction tabulée. En introduisant la quantité $D_Q \equiv n_Q \lambda_T^2$, qui correspond à la densité dans l'espace des phases associée au quasi-condensat, on peut exprimer les fluctuations relatives sous la forme suivante :

$$\frac{\sigma_n^2}{n^2} = \frac{n^2 - n_Q^2}{n^2} = 1 - \frac{D_Q^2}{D^2}. \quad (1.60)$$

Cette quantité varie donc entre 0 et 1 : elle prend sa valeur maximale dans le régime faiblement dégénéré de Hartree–Fock, et sa valeur minimale dans le régime de Thomas–Fermi, où la densité quasi-condensée coïncide avec la densité totale. Les simulations de Prokof'ev et Svistunov permettent de calculer numériquement σ_n^2/n^2 dans la région intermédiaire pour toute valeur de $\tilde{g} \ll 1$. La figure 1.3 représente les fluctuations relatives de densité en fonction de la densité dans l'espace des phases.

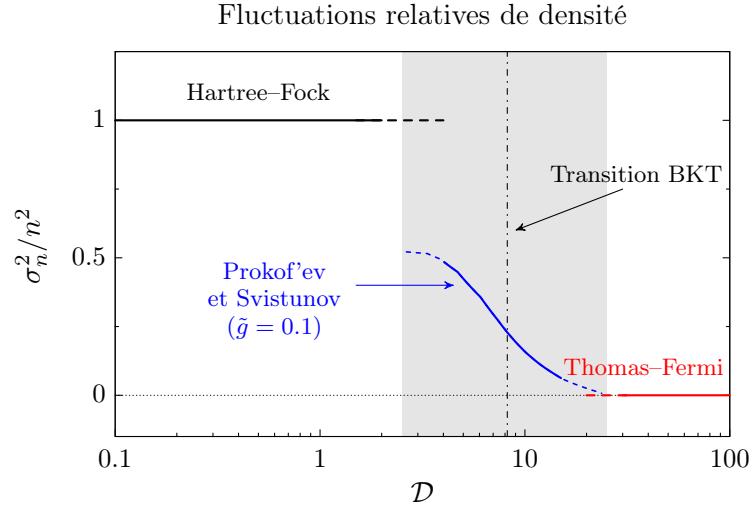


FIGURE 1.3 – Fluctuations relatives de densité en fonction de la densité dans l'espace des phases. Les lignes épaisses horizontales correspondent aux régimes asymptotiques de Hartree–Fock (en noir) et de Thomas–Fermi (en rouge). La ligne bleue est prédiction de Prokof'ev et Svistunov [101] pour $\tilde{g} = 0.1$ qui est valable dans la région critique. La zone grisée représente la zone de transition entre des fluctuations maximales et des fluctuations complètement gelées. La ligne verticale en tirets-pointillés indique le point de transition superfluide [101] pour $\tilde{g} = 0.1$.

Les lignes horizontales noire et rouge correspondent aux limites asymptotiques de Hartree–Fock et de Thomas–Fermi. La courbe en trait bleu est le résultat des simulation Monte-Carlo pour $\tilde{g} = 0.1$, ce qui correspond au paramètre d'interaction dans nos expériences. Nous constatons

que lorsque $\mathcal{D}$ est de l'ordre de quelques unités, les fluctuations de densité sont considérablement réduites et tendent continûment vers zéro lorsque $\mathcal{D}$ augmente. Ce résultat est donc en accord qualitatif avec l'estimation plus naïve obtenue à la section précédente.

Nous verrons à la section 1.4 que Prokof'ev et Svistunov prédisent que la transition superfluide se produit lorsque $\mathcal{D}$ atteint la valeur critique $\mathcal{D}_c \approx 8.2$ (pour $\tilde{g} = 0.1$). Ce point de transition est indiqué sur la figure 1.3 par la ligne verticale en tirets-pointillés et nous voyons que la réduction des fluctuations de densité survient bien avant la transition superfluide. Au point de transition, la valeur précise de la fraction quasi-condensée est donnée par la relation générale [100] :

$$\frac{n_Q}{n} = \frac{7.16}{\mathcal{D}_c}, \quad (1.61)$$

ce qui donne $n_Q/n \approx 0.87$ pour $\tilde{g} = 0.1$.

Les résultats de ces simulations indiquent qu'à l'approche de la transition, le gaz entre dans une phase où les fluctuations sont fortement réduites. Cette phase, qui peut être qualifiée de milieu «pré-superfluide», constitue une étape indispensable au processus microscopique conduisant à la transition superfluide.

1.4 Transition superfluide dans un gaz de Bose à 2D

Pour un système bi-dimensionnel à température non nulle, le théorème de Mermin–Wagner [77] exclut l'existence de transitions de phase associées à l'établissement d'un ordre à longue portée à la limite thermodynamique. C'est en particulier la raison pour laquelle il ne peut pas y avoir de condensat de Bose–Einstein à $T \neq 0$. Cependant, en présence d'interactions atomiques répulsives, il existe une transition vers un état superfluide à basse température présentant un ordre à *quasi-longue portée*. L'origine microscopique de la transition superfluide a été découvert par Berezinskii [13] et Kosterlitz et Thouless [70] qui ont donné leur nom à la théorie correspondante.

L'ingrédient clé de la théorie BKT sont les vortex : des points du gaz où la densité s'annule et autour desquelles la phase θ de la fonction d'onde associée tourne de $\pm 2\pi$ (²⁷). À basse température, les vortex n'existent que par paires de circulation opposées, qui sont énergétiquement favorisées. Sur un contour de diamètre supérieur à l'extension spatiale d'une paire, qui est de l'ordre de la longueur de cicatrisation ξ , la circulation effective est donc nulle. Par conséquent, ces paires de vortex-antivortex n'ont qu'un effet local et ne perturbent pas la superfluidité. Lorsque la température augmente, la taille de ces paires augmente progressivement et elles finissent par se disloquer en vortex individuels. Cette prolifération de vortex individuels détruit la superfluidité et marque la transition vers l'état normal.

Notons que la notion de vortex n'a de sens que si la densité est essentiellement lisse sur une échelle de longueur plus grande que la taille ξ du vortex. La présence de vortex dans le gaz requiert donc que les fluctuations de densité soient très faibles, ce qui est consistant avec nos conclusions de la section précédente.

Maintenant que les idées générales liées à la transition BKT ont été introduites, nous allons en traiter les divers points plus en détail. Dans un premier temps, nous allons aborder les aspects

27. En général, la phase peut tourner par multiple de $\pm 2\pi$, mais nous ne considérons ici que des vortex de «charge» unité, qui sont énergétiquement.

dynamiques du traitement de Bogoliubov présenté à la section 1.3.1, ce qui nous permettra de comprendre pourquoi l'on s'attend à l'existence d'un état superfluide dans le gaz 2D. Nous décrirons ensuite le mécanisme microscopique de la transition en expliquant, à base d'arguments simples, en quoi la prolifération de vortex libres détruit l'état superfluide. Ce raisonnement fera apparaître de façon naturelle le *saut universel* qui se produit à la transition, où la densité superfluide n_s passe brutalement de 0 à $4/\lambda_T^2$. Enfin, nous terminerons avec la prédiction de Prokof'ev et Svistunov pour la température critique de transition, qui est un résultat essentiel auquel nous nous référons à plusieurs endroits dans ce manuscrit.

1.4.1 Critère de Landau pour un gaz 2D

Nous pouvons aller plus loin dans le traitement de Bogoliubov présenté en 1.3 et s'intéresser à la dynamique²⁸ de la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r}, t)$, pour laquelle nous indiquons maintenant explicitement la dépendance en t . Partant du Hamiltonien (1.46), on peut montrer que la dynamique du problème est décrite par l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + g|\Psi|^2\right)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (1.62)$$

que l'on peut réécrire sous forme d'équations couplées pour $\theta(\mathbf{r}, t)$ et $\eta(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\hbar}{2m}\nabla^2\eta - \frac{gn}{\hbar}(1+2\eta) \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\theta \end{cases}. \quad (1.63)$$

En injectant les développements de Fourier (1.49), où les coefficients de Fourier dépendent maintenant du temps, on a pour $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} \dot{c}_{\mathbf{k}} = -\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{2gn}{\hbar}\right)c_{\mathbf{k}} \\ \dot{d}_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}c_{\mathbf{k}} \end{cases}. \quad (1.64)$$

Pour $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ on a $d_0 = 0$, car on a imposé $\int \eta d^2\mathbf{r} = 0$, et $\dot{c}_0 = -gn/\hbar$, qui correspond à l'évolution de la phase globale. On reconnaît dans le couple d'équation (1.64), les équations du mouvement d'un oscillateur harmonique, dont les fréquences propres sont :

$$\omega_k = \sqrt{\frac{\hbar k^2}{2m} \left(\frac{\hbar k^2}{2m} + \frac{2gn}{\hbar}\right)}. \quad (1.65)$$

Aux petites valeurs de k , on retrouve la loi de dispersion des phonons $\omega_k = ck$, avec $c = \sqrt{\frac{gn}{m}}$, qui ont donc une vitesse minimale non nulle. On s'attend donc, compte tenu du critère de Landau [89], à ce que le système soit superfluide avec une vitesse critique c . Notons que le résultat (1.65) et les conclusions qui s'ensuivent sont tout à fait analogues au cas traditionnel du gaz de Bose à 3D. Cela n'a rien de surprenant car, comme nous l'avons souligné au début de la section 1.3, cette description repose essentiellement sur l'hypothèse générale selon laquelle il existe un paramètre d'ordre bien défini au moins localement.

28. Comme nous l'avons précisé plus haut, nous reprenons ici l'approche décrite dans [45].

1.4.2 Origine microscopique de la transition et saut universel

Nous allons reprendre ici une approche utilisée par Kosterlitz et Thouless [70] qui montre de façon simple comment la prolifération de vortex individuels explique le passage de l'état superfluide à l'état normal. Nous considérons un gaz de Bose bidimensionnel homogène avec une fraction superfluide non nulle. Nous supposons de plus, par simplicité, une géométrie circulaire de rayon R que nous ferons tendre vers l'infini à la fin des calculs. Nous nous intéressons à l'énergie libre F_v qui accompagne l'apparition d'un vortex individuel dans ce système.

Un vortex placé au centre du disque atomique est entouré par un champ de vitesse $\hbar \nabla \theta / m = \hbar / m r$ où r est la distance au centre. L'énergie associée à ce vortex est donnée par son énergie cinétique et vaut :

$$E_v = \int_{\xi}^R \frac{1}{2} n_s \left(\frac{\hbar}{m r} \right)^2 d^2 \mathbf{r} = n_s \frac{\pi \hbar^2}{m} \ln \left(\frac{R}{\xi} \right), \quad (1.66)$$

où ξ est la taille caractéristique du vortex. Nous avons supposé ici que le vortex n'induit en rotation que la composante superfluide. La partie normale n'ayant pas de phase définie, nous admettons qu'elle est insensible à la présence du vortex. Notons que ce résultat restera inchangé pour un vortex non centré lorsque l'on fera tendre R vers l'infini.

Calculons à présent l'entropie créée par un vortex individuel. Celle-ci peut s'obtenir à partir du nombre N_p de configurations possibles qu'a une pastille de taille ξ d'occuper un disque de rayon R :

$$S_v = k_B \ln N_p = k_B \ln \left(\frac{\pi R^2}{\pi \xi^2} \right) = 2 k_B \ln \left(\frac{R}{\xi} \right). \quad (1.67)$$

Nous pouvons alors en déduire l'énergie libre $F_v = E_v - T S_v$ soit :

$$\frac{F_v}{k_B T} = \frac{1}{2} (n_s \lambda_T^2 - 4) \ln \left(\frac{R}{\xi} \right). \quad (1.68)$$

Nous constatons donc que l'énergie libre associée à l'apparition d'un vortex individuel change de signe lorsque $n_s \lambda_T^2 = 4$. Comme $\ln(R/\xi)$ diverge avec la taille du système, on peut distinguer deux régimes qualitativement différents. Pour $n_s \lambda_T^2 > 4$, $F_v \rightarrow +\infty$, ce qui rend la création de vortex individuels énergétiquement défavorable. En revanche, pour $n_s \lambda_T^2 < 4$, $F_v \rightarrow -\infty$, ce qui favorise l'apparition d'un vortex et réduit n_s par renormalisation de l'énergie. L'apparition d'autres vortex est donc progressivement facilitée, ce qui résulte en la prolifération de vortex individuels qui s'accompagne de l'effondrement simultané de la densité superfluide à $n_s = 0$.

Nous pouvons appliquer les mêmes arguments pour une paire de vortex-antivortex et nous convaincre que l'existence de paires de vortex est toujours possible à $T \neq 0$. Le champ de vitesse v autour d'une paire de vortex est tel que $v \propto 1/r^2$, l'énergie associée est donc proportionnelle à l'intégrale $\int v^2 d^2 r$ qui est une intégrale convergente. Par ailleurs, comme la taille d'une paire est également de l'ordre de ξ , le calcul de l'entropie donne un résultat analogue à celui de l'équation 1.67 qui diverge pour $R \rightarrow \infty$. Par conséquent, l'énergie libre associée à une paire de vortex est toujours négative.

Ce raisonnement simple, bien qu'il ne permette pas d'expliquer comment les paires de vortex se disloquent en vortex individuels²⁹, permet de comprendre les trois points essentiels du

29. Le traitement rigoureux de cet aspect de la théorie BKT sort du cadre de ce chapitre.

mécanisme BKT :

- Le saut universel à la transition : $n_s \lambda_T^2 = 0 \rightarrow 4$.
- L’effondrement de n_s avec la prolifération de vortex individuels.
- L’existence de paires de vortex-antivortex dans le superfluide.

Enfin nous terminerons ce paragraphe sur deux remarques. Notons d’une part que le saut universel est indépendant du paramètre d’interaction. Ce fait est assez surprenant dans la mesure où la transition superfluide est induite par les interactions. D’autre part, ce saut universel contraste avec l’établissement de la superfluidité à 3D, où la densité superfluide croît continûment en dessous de la température transition pour la condensation de Bose–Einstein.

1.4.3 Température critique de transition

L’équation $n_s \lambda_T^2 = 4$ est remarquable par son caractère universel, mais ne permet de pas de prédire la température de transition T_c pour un système donné avec une densité totale n et une force d’interaction $\tilde{g}$ données. Fisher et Hohenberg [35] ont montré, par un calcul analytique, que dans la limite $\tilde{g} \ll 1$, la transition se produit lorsque la densité dans l’espace des phases atteint la valeur critique :

$$D_c = \ln \left(\frac{C}{\tilde{g}} \right), \quad (1.69)$$

où C est une constante universelle. Prokof’ev et Svistunov [100] ont déterminé cette constante à une très bonne précision par des simulations de type Monte-Carlo classique qui donnent $C = 380 \pm 3$. Prokof’ev et Svistunov fournissent également une valeur du potentiel chimique critique μ_c qui est donné par la relation :

$$\alpha_c = \frac{\tilde{g}}{\pi} \ln \left(\frac{C_\mu}{\tilde{g}} \right) \quad \text{où} \quad \alpha_c \equiv \frac{\mu_c}{k_B T}, \quad (1.70)$$

avec $C_\mu = 13.2 \pm 0.4$.

Chapitre 2

Imagerie non saturante de nuages denses

Avant de décrire nos études expérimentales sur les gaz de Bose à deux dimensions, nous allons présenter dans ce chapitre une étude théorique portant sur la propagation d'un photon à travers un gaz atomique dense de faible épaisseur dans la direction de propagation.

Les mesures effectuées sur des gaz d'atomes froids reposent généralement sur un diagnostic optique. La méthode la plus courante est l'imagerie par absorption. Elle consiste à envoyer sur un gaz atomique un faisceau laser accordé sur la transition atomique et à projeter l'ombre ainsi créée sur une caméra. Dans nombre de situations rencontrées dans les expériences, l'interaction entre le faisceau sonde et le gaz atomique peut être traitée en considérant que chaque atome répond individuellement à l'impulsion lumineuse. Il existe alors une relation simple entre l'atténuation du faisceau enregistrée sur la caméra et la distribution atomique du nuage : la loi de Beer–Lambert. L'étude que nous présentons ici est motivée par des mesures expérimentales récentes [103] sur des gaz bi-dimensionnels, où nous avons observé un déficit significatif de la densité optique mesurée par rapport au résultat attendu par la loi de Beer–Lambert. Une des causes possibles de cette déviation est la présence d'effets collectifs entre atomes voisins durant l'imagerie. En particulier, les interactions induites par la lumière entre deux atomes proches peuvent jouer un rôle important dans un gaz dense lorsqu'il est traversé par un faisceau laser résonnant de faible intensité.

La propagation de la lumière cohérente dans un milieu atomique dense a été l'objet de nombreuses études (voir [6] par exemple pour une description d'ensemble). Dans ce chapitre, nous présentons un traitement quantitatif microscopique des effets collectifs qui ont lieu lorsqu'un faisceau sonde de faible intensité interagit avec un échantillon atomique 2D. Des approches similaires à celles que nous présentons ici ont été appliquées pour étudier la propagation d'un faisceau laser dans un échantillon atomique 3D de petite taille en présence de diffusion multiple [5, 38, 82, 111, 113]. Cependant, l'extension de ce type d'études au cas 2D ne figure pas dans la littérature.

Après avoir situé le contexte de notre étude, nous entrerons dans le vif du sujet à la section 2.2 en décrivant l'hamiltonien modélisant l'interaction entre un photon et une assemblée de N atomes. Nous expliquons ensuite dans la section 2.3 le calcul de l'atténuation d'un faisceau sonde à la traversée d'une fine tranche atomique. Nous y présenterons deux approches équivalentes :

(i) la première utilise le formalisme usuel de matrice T pour la théorie de la diffusion ; (ii) la seconde approche est basée sur le calcul du champ rayonné par une assemblée de N dipôles, où le mouvement de chaque dipôle est influencé par le champ rayonné par les $N - 1$ autres dipôles. Nous verrons que dans les deux cas, la réponse optique du milieu atomique peut être calculée en résolvant le même système linéaire de $3N$ équations, que nous pouvons résoudre numériquement. Nous présenterons l'ensemble de nos résultats numériques dans la section 2.4. Enfin nous terminerons sur quelques remarques générales en section 2.5.

2.1 Cadre de l'étude

La mesure de la densité spatiale $n(\mathbf{r})$ d'un nuage repose sur l'interaction entre les atomes et un faisceau laser quasi-résonant avec une des transitions atomiques. La méthode la plus utilisée dans le domaine des atomes froids est l'imagerie dite *par absorption*. Elle consiste à projeter sur une caméra l'ombre du nuage atomique sur lequel on envoie un faisceau sonde de faible intensité¹.

Modèle simple et loi de Beer–Lambert

Dans sa version la plus simple, la modélisation de l'imagerie par absorption suppose que la réponse de chaque atome à l'impulsion lumineuse est indépendante de la présence des autres atomes. La densité atomique peut alors être reliée de façon simple à l'atténuation du faisceau sonde I_f/I_i , où I_f et I_i sont les intensités sortante et entrante respectivement. Cette relation est donnée par la loi de Beer–Lambert qui relie la densité optique $\mathcal{D}_O(x, y) \equiv -\ln[I_f(x, y)/I_i(x, y)]$ à la densité atomique sous la forme :

$$\text{cas (3D) :} \quad -\ln \left[\frac{I_f(x, y)}{I_i(x, y)} \right] = \sigma \tilde{n}(x, y) \quad (2.1)$$

$$\text{cas (2D) :} \quad -\ln \left[\frac{I_f(x, y)}{I_i(x, y)} \right] = \sigma n(x, y) \quad (2.2)$$

où nous avons distingué les cas tri-dimensionnel (3D) et bi-dimensionnel (2D). Dans le cas 3D, l'atténuation du faisceau est reliée à la densité intégrée $\tilde{n}(x, y) \equiv \int n(\mathbf{r}) dz$ le long de l'axe de propagation (Oz) du faisceau tandis qu'elle est reliée directement à la densité surfacique² $n(x, y)$ à 2D. Le coefficient σ qui entre dans les équations (2.1-2.2) est la section efficace d'absorption qui caractérise le processus d'interaction entre un atome et le faisceau sonde. La loi de Beer–Lambert suppose que σ est indépendant de l'intensité incidente I_i du faisceau sonde, ce qui est valable dans le régime de faible intensité. Plus précisément, pour une transition atomique à «deux niveaux» de pulsation ω_0 et de largeur naturelle Γ , la section efficace d'absorption s'écrit :

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + 4\Delta^2/\Gamma^2 + I_i/I_{\text{sat}}} \quad (2.3)$$

1. (i) L'intensité est comparée à l'intensité de saturation I_{sat} que nous définirons plus loin, (ii) Le régime d'intensité forte est aussi utilisé [59, 105, 121] mais ce régime correspond à un développement récent dans le domaine. Ce sujet fera l'objet du chapitre 3.

2. Ceci représente un des avantages des systèmes de basse dimension où l'on accède directement à la densité locale.

où $\Delta = \omega_L - \omega_0$ est le désaccord, ω_L étant la pulsation du laser. L'intensité de saturation I_{sat} et σ_0 sont définies par :

$$\sigma_0 = \frac{3\lambda_0^2}{2\pi}, \quad I_{\text{sat}} = \frac{\hbar\omega^3\Gamma}{12\pi c^2} = \frac{\hbar\omega}{\sigma_0(\Gamma/2)}. \quad (2.4)$$

La section efficace est donc indépendante de l'intensité dans le régime faiblement saturant où $I_i \ll I_{\text{sat}}$, qui est le régime de l'imagerie par absorption traditionnelle. L'expression générale de la densité optique dans le cadre de validité de la loi de Beer–Lambert s'écrit donc :

$$\mathcal{D}_{\text{BL}} = \frac{\sigma_0 n}{1 + 4\Delta^2/\Gamma^2} \quad (2.5)$$

où la densité surfacique n doit être remplacée par la densité intégrée $\tilde{n}$ dans le cas d'une épaisseur ℓ_z non nulle.

Limitations

L'imagerie par absorption non saturante n'est cependant pas toujours adaptée. C'est par exemple le cas pour des nuages 3D sondés à l'équilibre. Lorsque l'on sonde un nuage d'épaisseur ℓ_z dans la direction de propagation du faisceau et qui se trouve dans le régime dégénéré, *i.e.* $n^{(3D)}\lambda_T^3 \gg 1$ où $\lambda_T \equiv \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T}$ la longueur d'onde thermique, la densité optique est telle que $\sigma_0\tilde{n} \sim \lambda_0^2\ell_z/\lambda_T^3$ (à résonance). Or pour les paramètres expérimentaux typiques $\lambda_T \sim \lambda_0$ dans le régime de dégénérescence³, et nous avons $\sigma_0\tilde{n} \sim \ell_z/\lambda_0$. Par conséquent, dès lors que l'épaisseur de nuage ℓ_z est très grande devant λ_0 , l'atténuation du faisceau est très grande et I_f est réduit au niveau du bruit de grenaille photonique. Dans ce cas, il est préférable de recourir à l'imagerie par contraste de phase en utilisant un faisceau fortement désaccordé [67], ou à l'imagerie par absorption fortement saturante [105]. À basse dimension les densités optiques sont notablement plus faibles qu'à 3D mais il y a dans ce cas aussi une importante limitation à l'imagerie non saturante. En particulier, à deux dimensions pour une densité optique $\sigma_0 n = 1$, la distance interatomique n'est que de $0.7\lambda_0$ et l'on s'attend dans ces conditions à ce que la réponse optique de chaque atome du milieu dévie significativement de celle d'un atome isolé. Pour des milieux très denses, la probabilité qu'un photon émis par un atome dans l'état excité soit réabsorbé par un atome voisin est non négligeable. Ce phénomène d'échange de photons dans le gaz atomique peut donner lieu à des interactions dipôle-dipôle qui se produisent entre un atome excité et un atome dans le niveau fondamental, lorsqu'ils sont séparés par une distance r suffisamment petite. Ces interactions s'accompagnent d'un déplacement des niveaux d'énergie proportionnel à $\hbar\Gamma/(k_0 r)^3$ ($k_0 = 2\pi/\lambda_0$). Les densités spatiales obtenues dans les gaz 2D en laboratoire atteignent $n \sim 10\sigma_0$ et ces interactions dipôle-dipôle peuvent donc conduire à des déplacements bien plus grands que $\hbar\Gamma$. Par conséquent, la réponse atomique à résonance ($\Delta = 0$) est réduite par rapport à ce que l'on attend de la loi de Beer–Lambert ($\mathcal{D}_O \neq \sigma_0 n$) et la raie d'absorption est modifiée par rapport à la raie lorentzienne prédite par la relation (2.5). Cette réduction de détectivité a été observée dans notre groupe [103, 121] sur des nuages quasi-2D denses de ^{87}Rb . Dans le prolongement de cette observation, nous présentons ici une étude théorique du processus d'interaction entre un

3. Pour le ^{87}Rb $\lambda_T \approx 780 \text{ nm} = \lambda_0$ pour $T = 60 \text{ nK}$.

faisceau sonde de faible intensité et un gaz 2D (ou de faible épaisseur ℓ_z) en prenant en compte les effets collectifs liés à la diffusion multiple.

Prise en compte des effets collectifs : position du problème

Pour traiter cette question, nous considérons un ensemble de N atomes au repos ayant une position aléatoire dans un plan ou dans une tranche de faible épaisseur, et nous nous intéressons à la probabilité de transmission d'un faisceau sonde quasi-résonant en incidence normale sur cet échantillon atomique. La structure interne de l'atome est modélisée par une transition du type $J_f = 0 \leftrightarrow J_e = 1$ où les indices (f) et (e) font respectivement référence aux états fondamental et excité. Bien que dans les expériences les transitions sont en général plus complexes ($J_f = 2 \leftrightarrow J_e = 3$ pour le ^{87}Rb par exemple dans [103, 121]), nous avons choisi de traiter ici le cas d'une transition $J_f = 0 \leftrightarrow J_e = 1$ qui simplifie grandement les calculs. Nous nous attendons néanmoins à ce que l'essentiel des effets physiques liés aux comportements collectifs des atomes vis-à-vis d'un faisceau sonde soient contenus dans ce modèle simplifié⁴.

2.2 Modélisation de l'interaction photon-atome

Dans la section qui suit nous posons le problème de façon formelle en écrivant l'hamiltonien du problème considéré.

2.2.1 Le champ électromagnétique

Nous utilisons le formalisme standard de quantification du champ électromagnétique dans la jauge de Coulomb [29], et nous prenons des conditions aux limites périodiques dans un volume de quantification parallélépipédique $\mathcal{V} = L_x L_y L_z$. Nous introduisons l'opérateur $a_{\mathbf{k}, \epsilon}$ qui détruit un photon dans le mode $\mathbf{k}$ et de polarisation ϵ (avec $\epsilon \perp \mathbf{k}$). L'hamiltonien associé au champ quantifié est

$$H_F = \sum_{\mathbf{k}, \epsilon} \hbar \omega a_{\mathbf{k}, \epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}, \epsilon} , \quad (2.6)$$

et l'opérateur champ électrique s'écrit $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r})$ avec

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}) = i \sum_{\mathbf{k}, \epsilon} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 \mathcal{V}}} a_{\mathbf{k}, \epsilon} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \boldsymbol{\epsilon} , \quad (2.7)$$

et $\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}) = \left(\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}) \right)^\dagger$. Le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ prend les valeurs discrètes $k_i = 2\pi n_i / L_i$, $i = x, y, z$, où n_i est un entier relatif.

2.2.2 Le milieu atomique

Nous considérons une assemblée de N atomes identiques au repos que nous indexons par les entiers $j = 1, \dots, N$, confinés dans une fine tranche d'épaisseur $\ell_z \ll L_z$ entre les plans de

4. Voir par exemple [63] pour un traitement de la diffusion multiple avec des transitions atomiques plus complexes.

coordonnées $z = 0$ et $z = \ell_z$. Nous supposons que les atomes sont uniformément répartis sur une aire $L_x L_y$. Chaque atome est modélisé par une transition à «deux niveaux»⁵ dont le niveau fondamental $|f\rangle$ possède un moment angulaire $J_f = 0$ et le niveau excité un moment angulaire $J_e = 1$. Le niveau excité qui est décomposé en trois sous-niveaux Zeeman est décrit dans la base des états propres $|e_\alpha\rangle$, $\alpha = x, y, z$, où $|e_\alpha\rangle$ correspond à l'état de valeur propre 0 de la composante J_α de l'opérateur moment angulaire. En posant que la différence d'énergie entre les niveaux $|e\rangle$ et $|f\rangle$ vaut $\hbar\omega_0$, l'hamiltonien décrivant le milieu atomique s'écrit alors à une constante additive près :

$$H_A = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=x,y,z} \hbar\omega_0 |j : e_\alpha\rangle \langle j : e_\alpha|. \quad (2.8)$$

2.2.3 Couplage photon-atomes

L'interaction entre le champ de photons et les atomes est traitée de façon usuelle, en utilisant deux approximations : (i) l'approximation dipolaire, qui est légitime puisque la longueur d'onde associée à la transition atomique λ_0 est très supérieure à la taille de l'atome ; (ii) nous négligeons les termes anti-résonants (approximation de l'onde tournante) qui est justifiée dès lors que $\Delta \ll \omega_0$ (⁶). L'opérateur de couplage photon-atome s'écrit alors :

$$V = - \sum_j \mathbf{D}_j^{(+)} \cdot \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_j) + \text{h.c.}, \quad (2.9)$$

où h.c. fait référence à l'hermitique conjugué du premier terme dans le second membre. L'opérateur $\mathbf{D}_j^{(+)}$ représente l'opérateur dipôle électrique pour un atome j :

$$\mathbf{D}_j^{(+)} = d \sum_{\alpha=x,y,z} |j : e_\alpha\rangle \langle j : f| \hat{\mathbf{u}}_\alpha, \quad (2.10)$$

où d est le dipôle électrique associé à la transition atomique et $\hat{\mathbf{u}}_\alpha$ désigne le vecteur unitaire dans la direction α .

Remarque 1. Notons que l'approximation de l'onde tournante simplifie le traitement de l'interaction photon-atomes de façon significative dans la mesure où le nombre total d'excitations est conservé. Plus précisément l'annihilation d'un photon est toujours associé à la transition $f \rightarrow e$ d'un atome (et la création d'un photon associée à une transition $e \rightarrow f$), ce qui n'aurait pas été le cas en présence des termes non-résonants dans l'opérateur de couplage V .

Remarque 2. Sur le plan formel, l'utilisation de l'interaction dipolaire électrique nécessite d'ajouter un terme de contact entre les dipôles [28, 82]. Ce terme ne jouera aucun rôle dans les simulations où nous utiliserons une sphère d'exclusion autour de chaque atome pour modéliser les interactions répulsives à courte portée. Les résultats des simulations ne dépendent pas du choix du diamètre de cette sphère d'exclusion tant qu'il reste plus petit que la distance inter-atomique moyenne.

5. L'approximation du système à «deux niveaux» est justifiée dès lors que le désaccord $\Delta = \omega_L - \omega_0$ est très petit devant ω_0 .

6. En pratique, dans les expériences le paramètre Δ/ω_0 varie dans l'intervalle $10^{-6} - 10^{-9}$.

2.3 Interaction entre un faisceau sonde et nuage quasi-2D dense

Dans cette section nous présentons le formalisme général permettant de calculer l'atténuation d'un faisceau sonde quasi-résonant après la traversée d'un échantillon atomique de petite épaisseur dans la direction de propagation du faisceau. Pour cela nous présentons deux approches différentes. La première repose sur le traitement standard de la théorie de la diffusion en termes de matrice T [78]. Dans cette approche, nous considérons un photon incident sur l'échantillon atomique et nous nous intéressons à l'amplitude de probabilité T_{ii} que le photon sortant soit dans le même mode que le photon incident [38, 111]. Pour prendre en compte la diffusion multiple qui se produit dans le milieu atomique avant la sortie du photon, nous utilisons la méthode de la résolvante. Dans la seconde approche, nous posons le problème en termes de comportement collectif d'une assemblée de dipôles oscillants [82]. L'équation du mouvement de chaque dipôle est obtenue à partir des équations d'évolution des opérateurs $\mathbf{D}_j^{(-)}$ et $a_{\mathbf{k}, \epsilon}$ dans le point de vue de Heisenberg. Nous verrons que l'équation associée à chaque dipôle contient deux termes d'oscillations forcées, l'un provenant du champ incident et l'autre provenant du champ rayonné par les autres dipôles. Nous montrerons que l'état stationnaire de cette assemblée d'oscillateurs s'obtient en résolvant le même système d'équation que celui obtenu par la première approche. De plus, nous verrons que la connexion entre ces deux approches fournit l'équivalent du théorème optique appliqué à notre milieu atomique. Enfin, nous obtenons une expression pour la densité optique $\mathcal{D}_O$ dans la configuration considérée.

2.3.1 Absorption traitée par la théorie de la diffusion

Nous nous intéressons à un faisceau de faible intensité se propageant le long de l'axe (Oz) à travers un milieu atomique. Pour décrire ce problème nous utilisons dans un premier temps le formalisme de la théorie quantique de la diffusion. Le hamiltonien décrivant le problème est

$$H = H_A + H_F + V = H_0 + V, \quad (2.11)$$

où nous avons introduit le hamiltonien non perturbé $H_0 = H_A + H_F$. La situation initiale considérée est celle de N atomes dans l'état atomique fondamental $|f\rangle$ et d'un photon incident de vecteur d'onde $\mathbf{k}_L$ (parallèle à l'axe (Oz)) et de polarisation ϵ_L . L'état quantique initial du système s'écrit donc

$$|\Psi_i\rangle = |\mathcal{G}\rangle \otimes |\mathbf{k}_L, \epsilon_L\rangle \quad \text{avec} \quad |\mathcal{G}\rangle \equiv |1 : f, 2 : f, \dots, N : f\rangle \quad (2.12)$$

et est un état propre de H_0 d'énergie propre $\hbar\omega_L$.

L'interaction du photon incident avec le milieu atomique décrite par l'opérateur de couplage V , peut être vue comme un ensemble de collision élémentaires successives. Comme il y a au plus un seul photon dans le milieu, il ne peut se produire que deux types d'événements :

- (i) L'absorption d'un photon dans le mode $\mathbf{k}, \epsilon$ par un atome j , qui passe alors de l'état $|j : f\rangle$ à l'un des états excités $|j : e_\alpha\rangle$. L'état quantique du système est alors

$$|\mathcal{E}_{j,\alpha}\rangle = |1 : f, \dots, j : e_\alpha, \dots, N : f\rangle \otimes |0\rangle \quad (2.13)$$

où $|0\rangle$ est le vide du champ électromagnétique. Notons que le sous-espace associé aux états $|\mathcal{E}_{j,\alpha}\rangle$ est de dimension $3N$.

- (ii) L'émission d'un photon dans un mode $(\mathbf{k}', \epsilon')$ par un atome j , qui revient dans son état fondamental.

Lorsque le photon quitte le milieu atomique, le système se retrouve dans un état $|\Psi_f\rangle = |\mathcal{G}\rangle \otimes |\mathbf{k}, \epsilon\rangle$ qui est aussi état propre de H_0 . Nous nous intéressons à l'amplitude de probabilité pour que $|\Psi_f\rangle = |\Psi_i\rangle$, qui correspond à la situation où le photon sort dans le même mode $|\mathbf{k}_L, \epsilon_L\rangle$ que le photon incident.

Matrice T

Pour calculer cette amplitude de probabilité, nous utilisons la matrice T qui est définie par

$$T(E) = V + V \frac{1}{E - H + i\eta} V, \quad (2.14)$$

où η est un petit nombre positif que nous ferons tendre vers zéro à la fin des calculs. L'amplitude de probabilité de trouver le système dans l'état $|\Psi_f\rangle$ après le processus de diffusion est donnée par

$$T_{if} = \langle \Psi_f | T(E_i) | \Psi_i \rangle \quad (2.15)$$

où E_i est la valeur propre associée aux états propres $|\Psi_i\rangle$ et $|\Psi_f\rangle$ de l'hamiltonien non perturbé H_0 . Dans le cas présent, nous nous intéressons à l'élément de matrice T_{ii} qui correspond à $|\Psi_f\rangle = |\Psi_i\rangle$.

En prenant la moyenne de $T(E)$ sur l'état $|\Psi_i\rangle$, nous voyons que le premier terme de l'équation (2.14) ne contribue pas compte tenu de l'action de V (Eq. 2.9), et nous trouvons :

$$T_{ii} = \frac{\hbar\omega_L d^2}{2\epsilon_0 \mathcal{V}} \sum_{j,\alpha} \sum_{j',\alpha'} \epsilon_{L,\alpha} \epsilon_{L,\alpha'}^* e^{ik_L(z_j - z_{j'})} \langle \mathcal{E}_{j',\alpha'} | \frac{1}{\hbar\omega_L - H + i\eta} | \mathcal{E}_{j,\alpha} \rangle. \quad (2.16)$$

Il s'agit donc de calculer les $(3N) \times (3N)$ éléments de matrice de l'opérateur $1/(z - H)$, où $z = \hbar\omega_L + i\eta$, qui interviennent dans (2.16).

Méthode des projecteurs

Pour mener ce calcul nous allons utiliser la méthode des projecteurs [29]. Nous introduisons les projecteurs orthogonaux P et Q , où P projette sur le sous-espace à zéro photon et Q projette sur le sous-espace orthogonal. Formellement nous avons

$$P|\mathcal{E}_{j,\alpha}\rangle = |\mathcal{E}_{j,\alpha}\rangle \quad P|\mathcal{G}\rangle \otimes |\mathbf{k}, \epsilon\rangle = 0, \quad (2.17)$$

$$Q|\mathcal{E}_{j,\alpha}\rangle = 0 \quad Q|\mathcal{G}\rangle \otimes |\mathbf{k}, \epsilon\rangle = |\mathcal{G}\rangle \otimes |\mathbf{k}, \epsilon\rangle. \quad (2.18)$$

En introduisant de plus l'opérateur déplacement [29]

$$R(z) = V + V \frac{Q}{z - QH_0Q - QVQ} V \quad (2.19)$$

$$= V + V \frac{Q}{z - H_0} V + V \frac{Q}{z - H_0} V \frac{Q}{z - H_0} V + \dots \quad (2.20)$$

nous avons la relation générale

$$P \frac{1}{z - H} P = \frac{P}{z - PH_0P - PR(z)P} \quad (2.21)$$

qui est l'opérateur dont nous voulons calculer les éléments de matrice. En notant $[M]$ la matrice correspondant au dénominateur du membre droit de l'équation (2.21), nous avons :

$$\begin{aligned} [M]_{(j',\alpha'),(j,\alpha)} &= \langle \mathcal{E}_{j',\alpha'} | [z - PH_0P - PR(z)P] | \mathcal{E}_{j,\alpha} \rangle \\ &= (\hbar\Delta + i\eta) \delta_{j,j'} \delta_{\alpha,\alpha'} - \langle \mathcal{E}_{j',\alpha'} | R(z) | \mathcal{E}_{j,\alpha} \rangle. \end{aligned} \quad (2.22)$$

L'expression (2.16) de l'élément de matrice T_{ii} se réécrit alors en fonction des éléments de la matrice $[M^{-1}]$:

$$T_{ii} = \frac{\hbar\omega_L d^2}{2\varepsilon_0 \mathcal{V}} \sum_{j,\alpha} \sum_{j',\alpha'} \epsilon_{L,\alpha} \epsilon_{L,\alpha'}^* e^{i\mathbf{k}_L \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'})} [M^{-1}]_{(j',\alpha'),(j,\alpha)}. \quad (2.23)$$

L'amplitude de probabilité T_{ii} nécessite donc de calculer explicitement les éléments de matrice de $[M^{-1}]$.

Éléments de la matrice $[M]$.

En pratique, il est plus simple de calculer les éléments de matrice de $[M]$ et d'en déduire les éléments de matrice de $[M^{-1}]$ dans un deuxième temps. Nous voyons dans l'équation (2.22) que le calcul des éléments de $[M]$ se ramène à celui des éléments de matrice de l'opérateur $R(z)$.

Dans le cas présent, le calcul de ces éléments est simple car seul le deuxième terme du développement (2.20) de $R(z)$ a une contribution non nulle.

$$PR(z)P = V \frac{Q}{z - H_0} V. \quad (2.24)$$

En effet, dès lors que l'opérateur V se retrouve entre deux opérateurs Q , le résultat total de l'action est nécessairement nulle. Les éléments de matrice de $R(z)$ sont donc :

$$\langle \mathcal{E}_{j',\alpha'} | R(z) | \mathcal{E}_{j,\alpha} \rangle = \frac{\hbar d^2}{2\varepsilon_0 \mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}, \epsilon} \omega \epsilon_{\alpha}^* \epsilon_{\alpha'} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_{j'} - \mathbf{r}_j)}}{z - \hbar\omega} \quad (2.25)$$

Nous pouvons donc calculer explicitement les éléments de matrice (2.25) à la limite $\eta \rightarrow 0_+$ en utilisant la relation usuelle :

$$\frac{1}{z - \hbar\omega} = \mathcal{PP} \left(\frac{1}{\hbar\omega_L - \hbar\omega} \right) - i\pi\delta(\hbar\omega_L - \hbar\omega) \quad (2.26)$$

où $\mathcal{PP}$ désigne la partie principale et δ la distribution de Dirac. Dans la suite nous placerons de plus dans le cas $\omega_L \approx \omega_0$.

Éléments diagonaux de $R(z)$. Pour $j = j'$, les éléments de matrices (2.25) s'écrivent :

$$\langle \mathcal{E}_{j',\alpha'} | R(z) | \mathcal{E}_{j,\alpha} \rangle = \frac{\hbar d^2}{2\varepsilon_0 \mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}, \epsilon} \omega \epsilon_{\alpha}^* \epsilon_{\alpha'} \left[\mathcal{PP} \left(\frac{1}{\hbar\omega_L - \hbar\omega} \right) - i\pi\delta(\hbar\omega_L - \hbar\omega) \right] \quad (2.27)$$

où la partie réelle donne lieu au déplacement de Lamb. Par commodité, nous prendrons en compte ce déplacement en l'incluant dans la définition de ω_0 et il n'apparaîtra donc pas explicitement dans la suite. Le calcul de la partie imaginaire donne

$$\langle \mathcal{E}_{j,\alpha'} | R(z) | \mathcal{E}_{j,\alpha} \rangle = -i \frac{d^2 \omega_L^3}{6\pi \epsilon_0 \hbar c^3} \delta_{\alpha,\alpha'} = -i \frac{\hbar \Gamma}{2} \delta_{\alpha,\alpha'} , \quad (2.28)$$

où nous avons utilisé l'expression la largeur naturelle du niveau excité $|j : e_\alpha\rangle$ qui s'écrit :

$$\Gamma = \frac{d^2 \omega_0^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3} . \quad (2.29)$$

Compte tenu de cette partie imaginaire non nulle, nous ignorerons dans la suite le terme $i\eta$ dans (2.22).

Éléments non diagonaux de $R(z)$. Pour $j \neq j'$, la somme sur $(\mathbf{k}, \epsilon)$ qui intervient dans (2.25) est le propagateur d'un photon partant d'un atome en $\mathbf{r}_j$ dans l'état interne $|e_\alpha\rangle$ vers un autre atome en $\mathbf{r}_{j'}$ dans l'état interne $|e_{\alpha'}\rangle$. L'expression de ce propagateur est donc à une constante multiplicative près, celle du champ rayonné en $\mathbf{r}_{j'}$ par un dipôle situé en $\mathbf{r}_j$ [60]. En introduisant le vecteur $\mathbf{u}_{j,j'} = k_L |\mathbf{r}_{j'} - \mathbf{r}_j|$ (avec $k_L = k_0$) les éléments de matrices (2.25) s'écrivent :

$$\langle \mathcal{E}_{j',\alpha'} | R(z) | \mathcal{E}_{j,\alpha} \rangle = -\frac{\hbar \Gamma}{2} g_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{u}_{j,j'}), \quad (2.30)$$

avec

$$g_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{u}) = h_1(u) \delta_{\alpha,\alpha'} + h_2(u) \frac{u_\alpha u_{\alpha'}}{u^2}, \quad (2.31)$$

et

$$h_1(u) = \frac{3}{2} \frac{e^{iu}}{u^3} (u^2 + iu - 1), \quad h_2(u) = \frac{3}{2} \frac{e^{iu}}{u^3} (-u^2 - 3iu + 3). \quad (2.32)$$

En résumé, la matrice $[M]$ qui apparaît dans (2.22) a des éléments diagonaux $\hbar(\Delta + i\Gamma/2)$ et ses éléments non diagonaux (pour $j \neq j'$) sont donnés par (2.30). Maintenant que nous avons obtenu une expression explicite des éléments de la matrice $[M]$, nous pouvons calculer T_{ii} numériquement.

Retour sur l'expression de T_{ii} .

La relation (2.23) établie pour T_{ii} peut se mettre sous la forme plus parlante :

$$\frac{T_{ii} L_z}{\hbar c} = \frac{1}{2} \sigma_0 \tilde{n} \underbrace{\frac{\hbar \Gamma}{2N} \sum_{j,\alpha} \sum_{j',\alpha'} \epsilon_{L,\alpha} \epsilon_{L,\alpha'}^* e^{ik_L(z_j - z_{j'})} [M^{-1}]_{(j',\alpha'),(j,\alpha)}}_{\equiv \Pi} \quad (2.33)$$

en introduisant la densité intégrée $\tilde{n} = N/(L_x L_y)$, la section efficace $\sigma_0 = 3\lambda_0/2\pi = 6\pi c^2/\omega_0^2$ et la largeur naturelle Γ de l'état excité. Nous verrons à la section 2.3.2 que la quantité $T_{ii} L_z/\hbar c$ est la seule quantité pertinente pour le calcul de la transmission du faisceau laser.

En pratique, pour le calcul de la quantité $T_{ii} L_z/\hbar c$, nous résolvons d'abord numériquement le système d'équations :

$$\sum_{j,\alpha} M_{(j',\alpha'),(j,\alpha)} X_{j,\alpha} = Y_{j',\alpha'} \quad \text{avec} \quad Y_{j',\alpha'} = \epsilon_{L,\alpha'} e^{i\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r}_{j'}} . \quad (2.34)$$

où $X_{j,\alpha}$ sont les inconnues. Ensuite, nous en déduisons la valeur du coefficient sans dimension :

$$\Pi = \frac{1}{N} \frac{\hbar\Gamma}{2} \sum_{j',\alpha'} Y_{j',\alpha'}^* X_{j',\alpha'} = \frac{1}{N} \frac{\hbar\Gamma}{2} \sum_{j,\alpha} \sum_{j',\alpha'} Y_{j',\alpha'}^* [M^{-1}]_{(j',\alpha'),(j,\alpha)} Y_{j,\alpha} , \quad (2.35)$$

qui intervient dans le second membre de l'équation (2.33), pour en déduire finalement la quantité :

$$\frac{T_{ii}L_z}{\hbar c} = \frac{1}{2} \sigma_0 n^{(2D)} \Pi . \quad (2.36)$$

Insistons sur le fait que tous les effets liés à la diffusion multiple d'un photon à la traversée des atomes sont contenus dans le coefficient sans dimension Π .

Notons enfin que l'élément de matrice T_{ii} n'est pas une quantité physique puisque il dépend de la taille L_z du volume de quantification. À ce stade il est difficile d'interpréter ce résultat en terme de transmission du faisceau qui est la quantité d'intérêt dans cette étude. Dans la section qui suit, nous posons le problème en termes d'une assemblée de dipôles soumis à un rayonnement externe. Nous verrons que cette description est plus adaptée à une interprétation physique. Elle nous permettra également de relier la quantité $T_{ii}L_z/\hbar c$ à la transmission du faisceau.

2.3.2 Propagation d'une onde à travers une assemblée de dipôles.

Nous proposons à présent une description alternative à la théorie de la diffusion pour traiter le problème. Nous considérons une onde plane monochromatique de la forme $E_L \epsilon_L e^{i(k_L z - \omega_L t)}$ incidente sur une assemblée de N dipôles atomiques. Nous nous intéressons alors aux équations du mouvement de ces dipôles lorsqu'ils sont soumis au rayonnement de l'onde incidente. Pour cela, nous nous plaçons dans le point de vue de Heisenberg pour l'hamiltonien H de l'équation (2.11) [82]. L'amplitude E_L est choisie suffisamment petite pour que les populations stationnaires des états excités $e_{j,\alpha}$ soient plus petites que 1. Ceci assure que la réponse du dipôle atomique à E_L reste dans le régime linéaire. Plus précisément, cette approximation est valide lorsque la fréquence de Rabi $dE_L/\hbar$ est très petite devant Γ ou le désaccord Δ .

Dans cette approche, la quantité d'intérêt est le coefficient de transmission complexe $\mathcal{T}$ du champ à travers le milieu atomique. Pour calculer $\mathcal{T}$, nous nous intéressons à la valeur moyenne $\tilde{\mathbf{E}}(z)$ du champ diffusé (vers l'avant) dans un plan de coordonnée z situé après le milieu atomique ($z > \ell_z$) :

$$\tilde{\mathbf{E}}(z) = \frac{1}{L_x L_y} \int \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) dx dy. \quad (2.37)$$

où $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ est le champ diffusé en tout point. Le coefficient de transmission complexe $\mathcal{T}$ est alors donné par :

$$\mathcal{T} = \frac{\epsilon_L^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}(z)}{E_L e^{ik_L z}}, \quad (2.38)$$

où nous ne considérons que la composante parallèle au champ incident de $\tilde{\mathbf{E}}(z)$. Nous allons donc chercher à calculer l'expression explicite du champ $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$.

Équations du mouvement des dipôles couplés

Nous commençons par écrire les équation d'évolution des opérateurs dipôle $\mathbf{D}_j^{(-)}$ et annihilation $a_{\mathbf{k},\epsilon}$ dans le point de vue de Heisenberg. Pour les opérateurs $a_{\mathbf{k},\epsilon}$ nous obtenons ainsi un

ensemble d'équations du type :

$$\dot{a}_{\mathbf{k},\epsilon}(t) = -i\omega a_{\mathbf{k},\epsilon}(t) + \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar\epsilon_0\mathcal{V}}} \sum_{j',\alpha'} \epsilon_{\alpha'} D_{j',\alpha'}^{(-)}(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{j'}}. \quad (2.39)$$

En intégrant cette équation entre l'instant initial t_0 et l'instant t , puis en injectant le résultat dans l'expression de l'opérateur champ électrique, nous obtenons sa valeur à chaque instant et en tout point $\mathbf{r}$:

$$E_{\alpha}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = E_{\text{libre},\alpha}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \sum_{j',\alpha'} \sum_{\mathbf{k},\epsilon} \int_0^{t-t_0} d\tau \frac{i\omega}{2\epsilon_0\mathcal{V}} D_{j',\alpha'}^{(-)}(t-\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{j'})-i\omega\tau} \epsilon_{\alpha} \epsilon_{\alpha'}^*, \quad (2.40)$$

où $E_{\text{libre}}^{(+)}$ serait le résultat obtenu pour l'onde plane seule (*i.e.* en l'absence de dipôles). Nous allons maintenant écrire l'équation (2.40) en termes des valeurs moyennes des opérateurs dans le régime stationnaire :

$$\langle D_j^{(-)}(t) \rangle = d_j e^{-i\omega_L t} \quad \langle E_{\text{libre}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle = E_L \epsilon_L e^{i(k_L z - \omega_L t)} \quad \langle E^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle = \bar{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_L t} \quad (2.41)$$

où $\bar{E}(\mathbf{r})$ est le champ que nous cherchons à déterminer. Nous trouvons finalement :

$$\bar{E}_{\alpha}(\mathbf{r}) = E_L \epsilon_{L,\alpha} e^{ik_L z} + \frac{k_L^3}{6\pi\epsilon_0} \sum_{j',\alpha'} g_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{u}_{j'}) d_{j',\alpha'}, \quad (2.42)$$

où $\mathbf{u}_j = k_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ et nous retrouvons ici de façon naturelle la fonction $g_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{u})$ introduite plus haut qui correspond au champ rayonné par un dipôle à une distance $\mathbf{u}$.

En suivant la même procédure pour les équations d'évolution des opérateurs $D_j^{(-)}$ nous trouvons en prenant la valeur moyenne

$$\hbar(\Delta + i\Gamma/2)d_{j,\alpha} = \kappa E_L \epsilon_{L,\alpha} e^{ik_L z_j} - \frac{\hbar\Gamma}{2} \sum_{j' \neq j, \alpha'} g_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{u}_{jj'}) d_{j',\alpha'}, \quad (2.43)$$

où $\kappa = -3\pi\hbar\epsilon_0\Gamma/k_L^3$. Cette équation a une interprétation physique simple : l'état stationnaire de chaque dipôle d_j résulte du champ total créé par le champ incident E_L et le champ rayonné par tous les autres dipôles. L'effet du champ rayonné par le dipôle j sur lui-même donne lieu au déplacement de Lamb (réintroduit dans la définition de Δ) et le terme imaginaire $i\Gamma/2$.

Le calcul du champ $\bar{E}(\mathbf{r})$ (Eq. (2.42)) passe donc par la résolution du système à $3N$ équations (2.43).

Dipôles et matrice $[M]$

En faisant passer le second terme du second membre de l'équation (2.43) dans le premier membre, nous avons :

$$\sum_{j',\alpha'} [M]_{(j,\alpha),(j',\alpha')} d_{(j',\alpha')} = \kappa E_L e^{ik_L z_j} \epsilon_{L,\alpha}, \quad (2.44)$$

où nous retrouvons la matrice $[M]$ introduite à la section précédente. Nous retrouvons, à un coefficient multiplicatif près, le système d'équation (2.34) pour les inconnues $X_{j,\alpha}$. Nous avons donc :

$$d_{j',\alpha'} = \kappa E_L X_{j,\alpha} \quad \text{avec} \quad X_{j,\alpha} = \sum_{j,\alpha} [M^{-1}]_{(j',\alpha'),(j,\alpha)} e^{ik_L z_j} \epsilon_{L,\alpha}, \quad (2.45)$$

où les $X_{j,\alpha}$ sont déterminés par la résolution numérique du système d'équation (2.34).

Retour au coefficient $\mathcal{T}$

Les valeurs des dipôles étant déterminées, il ne reste qu'à exprimer le champ moyen $\tilde{\mathbf{E}}(z)$ en fonction des dipôles $\mathbf{d}_j$. En injectant l'expression (2.42) de $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ dans l'équation (2.37) et prenant z tel que $k_L(z - z_j) \gg 1$ nous trouvons⁷ :

$$\mathbf{E}(z) \approx E_L \epsilon_L e^{ik_L z} + i \frac{k_L}{2\varepsilon_0 L_x L_y} \sum_{j'} \mathbf{d}_{j'} e^{ik_L(z - z_{j'})}. \quad (2.46)$$

Nous pouvons alors en déduire le coefficient de transmission :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \equiv \frac{\epsilon_L^* \cdot \mathbf{E}(z)}{E_L e^{ik_L z}} &= 1 + i \frac{k_L}{2\varepsilon_0 L_x L_y} \sum_{j',\alpha'} \frac{d_{j',\alpha'}}{E_L} \epsilon_{L,\alpha'}^* e^{-ik_L z_{j'}} \\ &= 1 + i \frac{k_L}{2\varepsilon_0 L_x L_y} \kappa \sum_{j',\alpha'} X_{j',\alpha'} \epsilon_{L,\alpha'}^* e^{-ik_L z_{j'}} \end{aligned} \quad (2.47)$$

où nous reconnaissons la somme qui intervient dans la définition (2.35) du coefficient sans dimension Π . Finalement la transmission du faisceau à travers l'échantillon atomique s'écrit :

$$\mathcal{T} = 1 - \frac{i}{2} \sigma_0 \tilde{n} \Pi \quad (2.48)$$

où dans le cas strictement bi-dimensionnel, la densité intégrée $\tilde{n}$ doit être remplacée par la densité surfacique n . Nous en déduisons donc l'expression générale pour la densité optique

$$\mathcal{D}_O \equiv \ln |\mathcal{T}|^{-2} = -2 \ln \left| 1 - \frac{i}{2} \sigma_0 \tilde{n} \Pi \right|. \quad (2.49)$$

Ce résultat constitue le résultat essentiel de ce chapitre et servira de point de départ pour notre étude numérique que nous présenterons à la section suivante.

2.3.3 Remarques

Avant de présenter les résultats numériques, nous ferons deux remarques importantes.

Cas dilué. Dans la limite où le système est suffisamment dilué pour pouvoir négliger la diffusion multiple, nous pouvons ignorer les termes non diagonaux de $[M]$. La matrice $[M]$ est alors

7. Nous supposons prenons pour cela la limite où $L_{x,y} \rightarrow \infty$ et nous utilisons le fait que dans l'expression (2.31) de $g_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{u})$ seul le terme e^{iu}/u contribue significativement à l'intégrale.

simplement la matrice identité multipliée par le coefficient complexe $\hbar(\Delta + i\hbar\Gamma/2)$. Dans ce cas le coefficient Π (cf. 2.35) s'écrit simplement :

$$\Pi = \frac{1}{i + 2\Delta/\Gamma} \frac{1}{N} \sum_{j,\alpha} |\epsilon_{L,\alpha}|^2 = \frac{1}{i + 2\Delta/\Gamma}, \quad (2.50)$$

et nous retrouvons la loi de Beer–Lambert (2.5) pour la densité optique :

$$\sigma_0 \tilde{n} \ll 1 : \quad \mathcal{D}_O \approx \frac{\sigma_0 \tilde{n}}{1 + 4\Delta^2/\Gamma^2}. \quad (2.51)$$

Théorème optique. L'expression de $\mathcal{T}$ nous fournit aussi l'équivalent du théorème optique pour notre cible étendue. En combinant l'expression (2.48) de la transmission et celle de l'élément de matrice T_{ii} (Eq. (2.36)) nous obtenons :

$$\mathcal{T} = 1 - i \frac{T_{ii} L_z}{\hbar c}. \quad (2.52)$$

2.4 Résultats numériques

Dans la section précédente, nous avons obtenu une relation entre la densité optique $\mathcal{D}_O$ et la densité spatiale n d'un nuage 2D (ou la densité intégrée $\tilde{n}$ pour un nuage d'épaisseur $\ell_z \neq 0$). Cette relation fait intervenir le coefficient sans dimension Π qui contient tous les effets liés à la diffusion multiple d'un photon lors de sa traversée du milieu atomique. Les résultats que nous présenterons ici se limiteront au cas strictement 2D où $\ell_z = 0$.

Afin d'étudier les variations de $\mathcal{D}_O$ avec la densité décrites par l'équation (2.49), nous avons réalisé des simulations numériques qui s'appuient sur des tirages aléatoires de type Monte-Carlo. Notre procédure se décompose en trois étapes : (i) nous réalisons un tirage aléatoire des positions de N atomes ; (ii) nous résolvons numériquement le système linéaire à $3N$ équations (2.34) ; (iii) nous en déduisons alors le coefficient Π qui permet de calculer la quantité souhaitée $\mathcal{D}_O$.

Les positions des atomes sont uniformément distribuées sur un disque centré sur l'origine des coordonnées et de rayon R . Nous définissons autour de chaque atome un petit disque d'exclusion de diamètre de l'ordre de $10^{-2} k_0^{-1}$. Nous avons vérifié que les résultats sont indépendants de la valeur précise de ce diamètre, dès lors qu'il est bien plus petit que la distance moyenne entre particules. Hormis cette condition, aucune forme de corrélation entre les positions des atomes n'a été introduite. Ceci est motivé par le fait que dans le régime fortement dégénéré d'un gaz de Bose 2D, qui correspond aux distances entre atomes considérées dans cette étude, les fluctuations de densité sont fortement réduites et la fonction de corrélation du deuxième ordre $g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est telle que $g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \approx 1$.

La polarisation du faisceau sonde est prise linéaire $\epsilon_L = \hat{\mathbf{u}}_x$. Dans le cas de la transition $J_f = 0 \leftrightarrow J_e = 1$ considérée ici, le choix de la polarisation n'a pas beaucoup d'importance⁸.

Dans cette section, nous allons d'abord nous intéresser à la valeur de N pour atteindre la «limite thermodynamique» pour laquelle la densité optique déterminée $\mathcal{D}_O$ ne dépend pas

8. Nous avons par ailleurs vérifié que les résultats obtenus avec une polarisation circulaire sont similaires à ceux présentés ici. La polarisation jouerait naturellement un rôle plus important dans le cas d'une transition avec des moments angulaires J_g et J_e plus élevés en raison des effets de pompage optique mis en jeu.

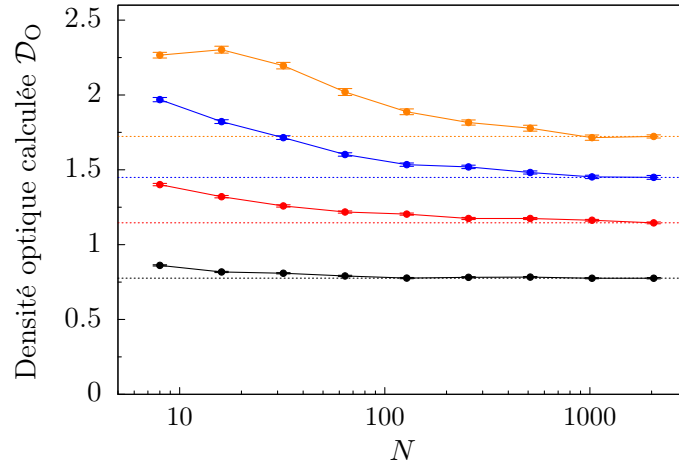


FIGURE 2.1 – Dépendance de la densité optique $\mathcal{D}_O$ calculée à partir de l'équation (2.49) avec le nombre d'atomes N , pour 4 valeurs de la densité : $\sigma_0 n = 1$ (noir), 2 (rouge), 4 (bleu) and 8 (orange). Les barres d'erreurs indiquent la déviation standard. Les lignes horizontales en pointillés donnent les valeurs «asymptotiques» obtenues $N = 2048$. Ces résultats ont été obtenus à résonance ($\Delta = 0$) pour un gaz strictement 2D ($\ell_z = 0$).

explicitement du nombre d'atomes N et du rayon du disque R mais uniquement de la densité spatiale $n = N/\pi R^2$. Nous verrons que cette condition nécessite un grand nombre d'atomes ($N \sim 1000$). Nous nous intéresserons ensuite à la question principale de chapitre qui est la dépendance de $\mathcal{D}_O$ avec n pour des valeurs typiques de nos expériences. Enfin, nous nous intéresserons à l'influence des interactions dipôle-dipôle sur la forme de la raie d'absorption en variant le paramètre Δ .

2.4.1 «Limite thermodynamique»

Nous commençons notre étude par la détermination du nombre minimal d'atomes nécessaire pour le calcul fiable de la densité optique. Pour cela, nous fixons une valeur donnée de la densité spatiale $n = N/\pi R^2$, en nous plaçant à résonance pour simplifier ($\Delta = 0$), et nous nous intéressons à la dépendance de $\mathcal{D}_O$ avec le nombre d'atomes N . En pratique, nous faisons varier N par puissances de 2 entre $N = 8$ et $N = 2048$ et nous cherchons à déterminer la valeur de N à partir de laquelle $\mathcal{D}_O$ ne varie plus au bruit numérique près.

Le résultat de cette étude est représenté sur la figure 2.1 où nous traçons $\mathcal{D}_O$ en fonction de nombre d'atomes N . Les différentes courbes ont été obtenues pour différentes valeurs de n , qui correspondent à $\sigma_0 n = 1, 2, 4$ and 8, qui sont des valeurs typiques de densités spatiales des gaz bi-dimensionnels produits en laboratoire. Nous voyons que pour la plus faible valeur de n , la densité optique calculée dépend uniquement $N/\pi R^2$ à partir de $N = 100$ (au bruit numérique près). Pour les valeurs les plus élevées, ce n'est qu'à partir de $N \sim 1000$ que cette condition est remplie. Notons toutefois que l'écart à la valeur asymptotique est inférieure à 5% pour $N = 256$ pour les densités considérées ici.

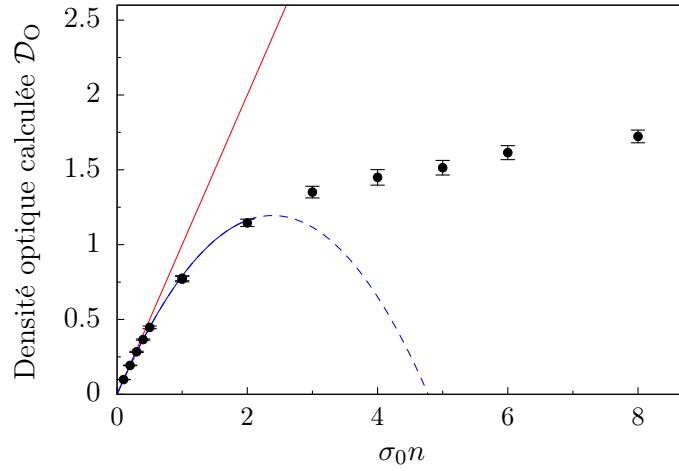


FIGURE 2.2 – Variations de $\mathcal{D}_O$ avec la densité surfacique. Les points calculés (en noir) ont été obtenus avec $N = 2048$ et les barres d’erreur indiquent la déviation standard. La ligne continue rouge est la droite de pente 1 qui correspond à $\mathcal{D}_{BL}$. La ligne continue bleue est un ajustement de la forme $\mathcal{D}_O = \sigma_0 n (1 - \mu \sigma_0 n)$ sur les premiers points. Nous trouvons $\mu \approx 0.2$ comme paramètre optimal. Ces résultats ont été obtenus pour $\ell_z = 0$ et $\Delta = 0$.

2.4.2 Déviations à la loi de Beer–Lambert

Comme nous l’avons mentionné dans le paragraphe d’introduction de ce chapitre, la densité optique détectée en sondant un gaz 2D est significativement réduite par rapport à la valeur attendue à partir de la loi de Beer-Lambert $\mathcal{D}_{BL} = \sigma_0 n$ dès lors que cette dernière devient proche de l’unité [103]. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux variations de la densité optique $\mathcal{D}_O$ en fonction de $\mathcal{D}_{BL}$. Comme précédemment, nous considérons pour l’instant un faisceau résonnant ($\Delta = 0$).

Le résultat obtenu est représenté sur la figure 2.2. Nous constatons que la densité optique $\mathcal{D}_O$ déterminée par notre modèle varie de façon très non-linéaire avec $\mathcal{D}_{BL}$. Pour $\mathcal{D}_{BL} \approx 1$ la densité optique $\mathcal{D}_O$ est environ 25% plus faible. Notons que ce résultat est qualitativement très analogue à celui que nous avons observé expérimentalement dans [103]. Nous avons également réalisé un ajustement des variations de $\mathcal{D}_O$ pour $\mathcal{D}_{BL} < 1$ (ligne bleue pointillée) par un polynôme de degré 2, ce qui donne :

$$\mathcal{D}_O \approx \mathcal{D}_{BL} (1 - 0.2 \mathcal{D}_{BL}). \quad (2.53)$$

Cet ajustement est motivé par le fait que l’on peut, en principe, déterminer ce résultat analytiquement par un développement diagrammatique d’ordre 2 (cf. section 2.5).

Pour la densité la plus élevée considérée dans cette étude, nous avons $\mathcal{D}_{BL} = 8$ et $\mathcal{D}_O \approx 1.7$, soit une réduction de $\sim 80\%$. Pour une telle densité spatiale, la distance inter-atomique moyenne est d’environ $0.8k_0^{-1}$ et le décalage des niveaux d’énergie dû aux interactions dipôle-dipôle est notablement plus élevé que la largeur Γ de la raie d’absorption. Le milieu atomique est donc beaucoup moins absorbant vis-à-vis d’un faisceau résonnant, ce qui explique cette réduction significative de $\mathcal{D}_O$ par rapport à la loi de Beer–Lambert qui ignore les interactions dipôle-dipôle.

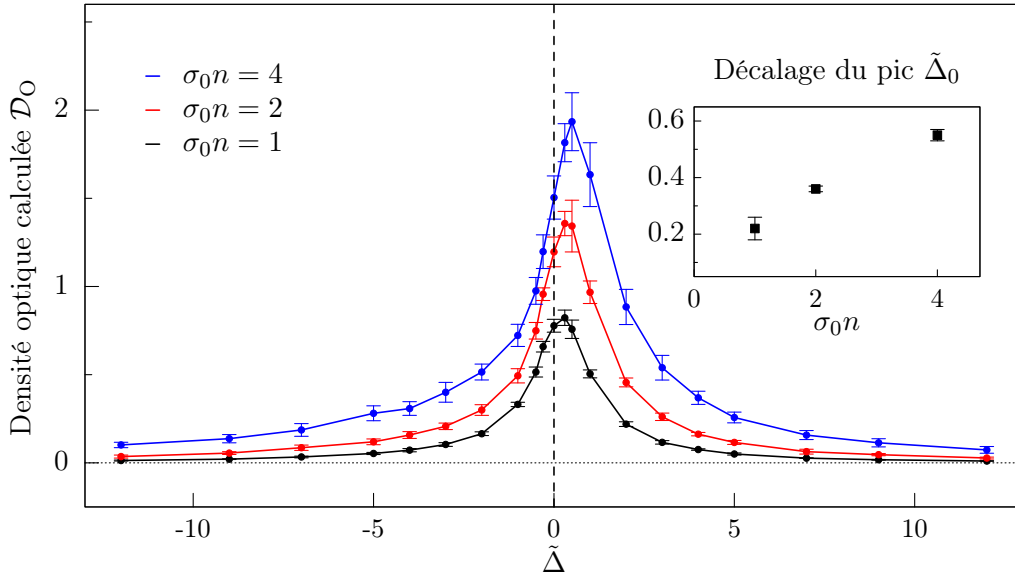


FIGURE 2.3 – Variations de $\mathcal{D}_O$ avec le désaccord $\tilde{\Delta} \equiv \Delta/(\Gamma/2)$ du faisceau sonde pour 3 valeurs de densité surfacique : $\sigma_0 n = 1$ (noir), 2 (rouge) et 4 (bleu). Les barres d'erreur indiquent la déviation standard. Ces résultats ont été obtenus pour $N = 256$ et $\ell_z = 0$.

2.4.3 Effet des interactions dipôle-dipôle sur la raie d'absorption

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à présent à la dépendance de la densité optique avec le désaccord. Par commodité, nous caractériserons le désaccord par le paramètre sans dimension $\tilde{\Delta} \equiv \Delta/(\Gamma/2)$. Nous avons représenté sur la figure 2.3 les variations de $\mathcal{D}_O$, pour trois valeurs de la densité⁹ : $\sigma_0 = 1, 2$ et 4. Nous constatons deux effets simultanés lorsque la densité n augmente : (i) les variations de $\mathcal{D}_O$ de part et d'autre du pic deviennent de plus en plus asymétriques ; (ii) le pic de la raie d'absorption se décale vers le bleu de la transition (i.e. vers la région $\tilde{\Delta} > 0$). Ce dernier point est illustré par l'insert de la figure 2.3 où nous avons représenté le décalage en fréquence $\tilde{\Delta}_0$ du pic de la raie d'absorption pour chaque valeur de la densité. Nous voyons que ce décalage de la résonance est déjà significatif pour $\sigma_0 n = 1$ et qu'il vaut $\sim \Gamma/4$ pour $\sigma_0 n = 4$. Précisons que ce décalage a été obtenu par un ajustement parabolique sur le sommet de la raie d'absorption, méthode que nous avons préférée à un ajustement de la courbe entière par une fonction lorentzienne. La raison de ce choix est que la fonction lorentzienne ne permet pas de reproduire les variations de $\mathcal{D}_O$ avec le désaccord y compris pour la densité la plus faible ($\sigma_0 n = 1$). Ceci nous amène au point (ii) que nous venons de mentionner.

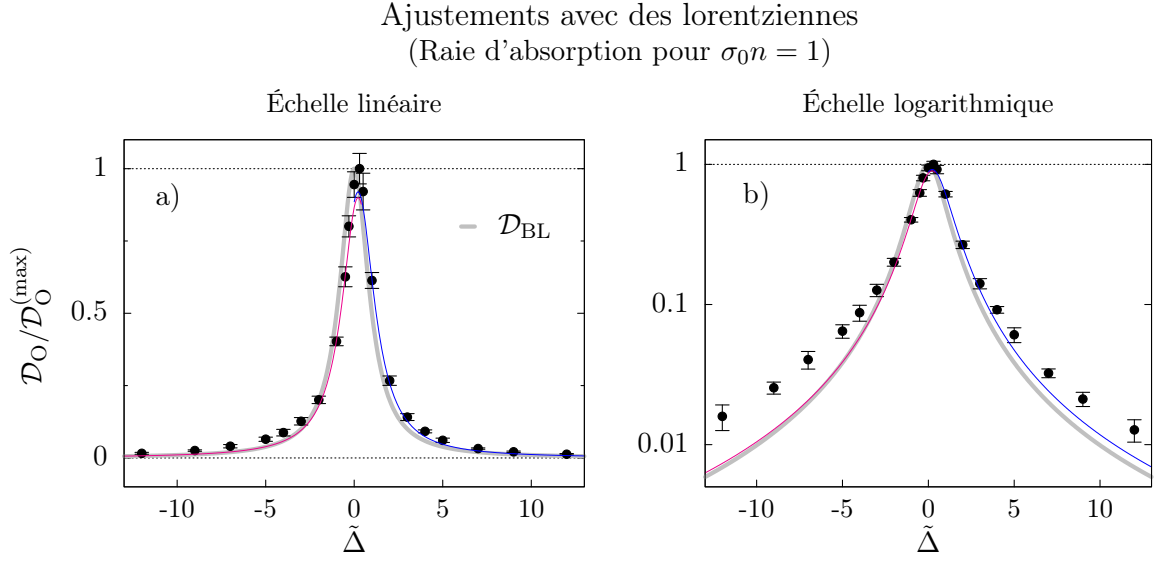


FIGURE 2.4 – Raie d'absorption normalisée correspondant à $\sigma_0 n = 1$ en échelles linéaire (a) et logarithmique (b). La courbe épaisse grise en arrière plan est la lorentzienne correspondant à la loi de Beer–Lambert (Eq. 2.5). Les lignes continues rose et bleue sont des ajustements par une lorentzienne des régions «rouges» et «bleues» respectivement.

Déviations à la fonction lorentzienne

Nous allons à présent caractériser de façon plus quantitative les variations de densité optique et les asymétries observées sur les raies d'absorption de la figure 2.3. Pour cela nous traitons désormais indépendamment la partie à «rouge» (à gauche du pic) et la partie «bleue» (à droite du pic) de chacune des trois raies d'absorption. Nous commençons par réaliser un ajustement par la fonction lorentzienne :

$$\mathcal{L}(\tilde{\Delta}) = \frac{A}{1 + \left(\frac{\tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}_0}{\tilde{\gamma}} \right)^2}, \quad (2.54)$$

où $\tilde{\Delta}_0$ est fixé à sa valeur déterminée plus haut, l'amplitude A et la largeur $\tilde{\gamma}$ étant les paramètres d'ajustement. Le paramètre sans dimension $\tilde{\gamma}$ est donc relié à la «vraie» largeur γ (en s^{-1}) par $\gamma = \tilde{\gamma}\Gamma$. La figure 2.4 montre le résultat des ajustements obtenus sur les parties «rouge» et «bleue» de la raie d'absorption calculée pour $\sigma_0 n = 1$. Nous avons également représenté pour comparaison le résultat 2.5 attendu pour $\mathcal{D}_{\text{BL}}$. Nous constatons qu'aucun des deux ajustements n'est satisfaisant. Si les variations de $\mathcal{D}_O$ sont relativement bien décrites par des lorentziennes dans la région centrale (malgré une légère différence au niveau du maximum de la courbe), la courbure à la base du pic et les ailes de la raie d'absorption diffèrent qualitativement, comme nous pouvons le voir sur la figure 2.4b où nous avons utilisé une échelle logarithmique. Les effets de diffusion multiple ne se traduisent donc pas par un simple élargissement de la raie

9. Afin de nous limiter à des durées de simulation raisonnables le nombre d'atomes a été fixé à $N = 256$ ce qui reste suffisant pour les densités considérées ici. Pour les points de densité les plus élevées $\mathcal{D}_O \approx 2$, l'erreur relative par rapport à ce que nous aurions obtenu pour $N = 2048$ est d'environ 5%.

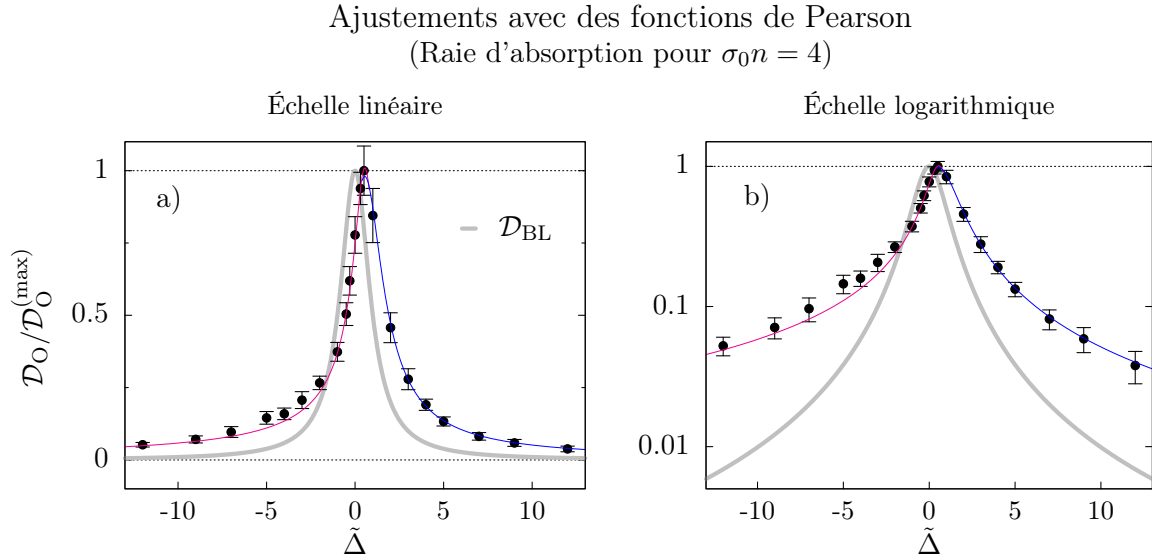


FIGURE 2.5 – Raie d’absorption normalisée correspondant à $\sigma_0 n = 4$ en échelles linéaire (a) et logarithmique (b). La courbe épaisse grise en arrière plan est la lorentzienne correspondant à la loi de Beer–Lambert (Eq. 2.5). Les lignes continues rose et bleue sont des ajustements par une fonction de Pearson (Eq. 2.55) des régions «rouges» et «bleues» respectivement.

d’absorption, mais par une modification qualitative des variations de la densité optique par rapport à la fonctionnelle lorentzienne usuelle. En appliquant cette procédure aux cas $\sigma_0 n = 2$ et 4, nous avons confirmé que ces déviations sont d’autant plus marquées que la densité augmente comme nous pouvions nous y attendre. Notons enfin que la différence qualitative observée dans les ailes indique que la densité optique (normalisée) décroît plus lentement que $1/|\tilde{\Delta}|^2$ aux grands désaccords.

Dépendance asymptotique avec le désaccord

Afin d’étudier le comportement asymptotique de $\mathcal{D}_O$ avec le désaccord de façon quantitative, nous avons utilisé une fonction d’ajustement spéciale qui est une forme généralisée de la fonction lorentzienne. Il s’agit de la fonction de Pearson qui, dans sa forme simplifiée s’écrit :

$$\mathcal{P}_m(\tilde{\Delta}) = \frac{A}{\left[1 + \left(\frac{\tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}_0}{\tilde{\gamma}}\right)^2\right]^m}, \quad (2.55)$$

où l’exposant m est un paramètre d’ajustement supplémentaire qui caractérise le comportement asymptotique¹⁰. Pour $m = 1$ nous retrouvons la fonction lorentzienne et une décroissance asymptotique en $1/|\tilde{\Delta}|^2$.

La figure 2.5 représente le résultat des ajustements des régions rouge et bleue de la raie d’absorption calculée pour $\sigma_0 n = 4$ qui est la plus distordue parmi celles présentées sur la

10. Pour qu’une distribution de probabilité de type Pearson soit normalisable il faut que $m > 0.5$.

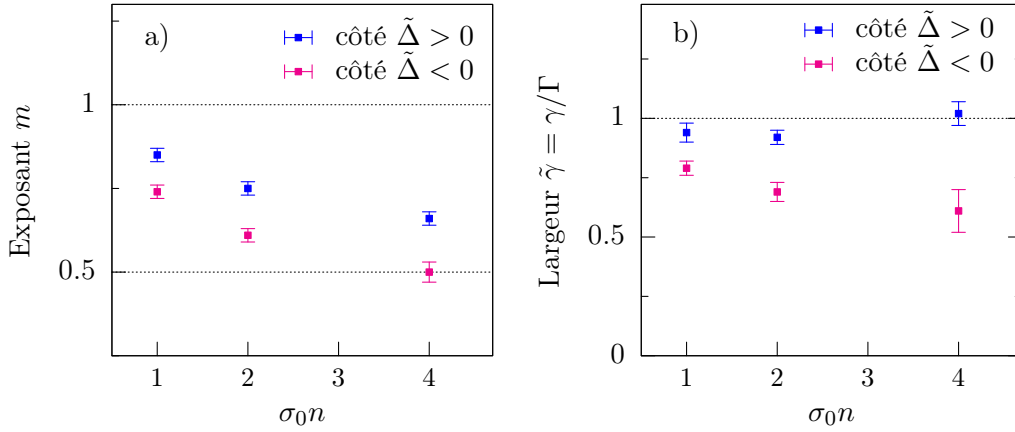


FIGURE 2.6 – Paramètres d’ajustement optimaux m (a) et $\tilde{\gamma} \equiv \gamma/\Gamma$ (b) obtenus sur les parties «rouges» (en rose) et «bleues» (en bleu) des raies d’absorption calculées (cf. Fig. 2.3). Les barres d’erreurs indiquent l’erreur fournie par la procédure d’ajustement.

figure 2.3. Nous constatons que l’ajustement est très satisfaisant y compris dans les ailes où le comportement asymptotique de la densité optique $\mathcal{D}_O$ est bien reproduit. Nous obtenons des ajustements de qualité similaire voire meilleure pour les cas $\sigma_0 n = 1$ et 2. Pour comparaison, nous avons tracé en arrière plan des graphes 2.5ab le raie d’absorption attendue par la loi de Beer-Lambert 2.5. Sur cet exemple, la densité optique $\mathcal{D}_O$ décroît significativement plus lentement que $\mathcal{D}_{BL}$. Ces «longues» ailes constituent une signature des décalages des niveaux d’énergie due aux interactions dipôle-dipôle qui se produisent entre deux atomes voisins.

Le résultat des ajustements pour les trois cas $\sigma_0 n = 1, 2$ et 4 sont rassemblés sur la figure 2.6, où nous avons tracé la valeur de l’exposant m (Fig. 2.6a) et la largeur $\tilde{\gamma}$ (Fig. 2.6b) déterminées dans les partie rouge et bleue de la raie d’absorption. Nous constatons d’abord une différence systématique entre les paramètres de la partie rouge et de la partie bleue, ce qui confirme quantitativement l’impression d’asymétrie que l’on a visuellement. La figure 2.6a permet de suivre l’évolution de l’exposant m en fonction de la densité. Lorsque la densité varie entre $\sigma_0 n = 1$ et $\sigma_0 n = 4$, l’exposant m décroît continûment de 0.85 ± 0.02 à 0.66 ± 0.02 dans la partie bleue et de 0.74 ± 0.02 à 0.50 ± 0.03 dans la partie rouge. De façon assez remarquable, le comportement asymptotique de $\mathcal{D}_O$ s’écarte donc significativement de la décroissance usuelle en $1/|\tilde{\Delta}|^2$ pour des densités aussi petites que $\sigma_0 n = 1$. Pour une densité $\sigma_0 n = 4$, la densité décroît en $1/|\tilde{\Delta}|$ dans la partie rouge et un peu plus rapidement dans la partie bleue.

2.4.4 Prolongements

Tous les résultats présentés ici correspondent à un gaz de Bose strictement 2D ($\ell_z = 0$). Un prolongement naturelle de l’analyse que nous venons de présenter est d’étudier les variations de $\mathcal{D}_O$ avec l’épaisseur du gaz. En augmentant ℓ_z , le gaz est devient de plus en plus dilué et les effets dus aux interactions dipôle-dipôle se réduisent progressivement. En faisant varier ℓ_z à $\sigma_0 \tilde{n}$ fixé, nous nous attendons donc à ce que $\mathcal{D}_O$ augmente jusqu’à coïncider avec $\mathcal{D}_{BL}$. Il sera

intéressant de déterminer à partir de quelle épaisseur ℓ_z les interactions dipôle-dipôle deviennent négligeables.

2.5 Remarques et questions ouvertes.

Développement diagrammatique. Le formalisme de la théorie quantique de la diffusion basé sur la matrice T que nous avons utilisé en section 2.3 est également adapté pour le calcul perturbatif de la densité optique. Ce type de calcul consiste à utiliser un développement de l'équation (2.21) qui se met sous la forme

$$\frac{P}{z - PH_0P - PR(z)P} = \frac{P}{z - H_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P}{z - H_0} \left(PR(z)P \frac{1}{z - H_0} \right)^n. \quad (2.56)$$

Le premier terme correspond aux «diagrammes» à une collision où le photon visite un seul atome et quitte le milieu atomique, et permet de retrouver le résultat $\mathcal{D}_O \approx \tilde{n}\sigma = \mathcal{D}_{BL}$. En prenant en compte les «diagrammes» à deux collisions il est en principe possible d'estimer les premières corrections à la loi de Beer–Lambert. Ce développement diagrammatique se prête également bien à l'étude du cas limite $k_0\ell_z \gg 1$. Ceci permet de retrouver la loi de Beer–Lambert à 3D, qui est valable pour des densités intégrées $\tilde{n}$ arbitrairement grandes.

Dépendance avec le désaccord. L'étude des variations de la densité optique $\mathcal{D}_O$ avec le désaccord a révélé un comportement inhabituel : aux grands désaccords, $\mathcal{D}_O$ décroît comme $1/|\Delta|$ au lieu de $1/|\Delta|^2$ à partir de densités spatiales de l'ordre de $4/\sigma_0$. Il serait intéressant d'aller au delà de la caractérisation heuristique présentée ici, et de fournir un résultat analytique qui permettrait de donner une interprétation physique de ces comportements asymptotiques. L'étude de la distribution des valeurs propres de la matrice symétrique complexe $[M]$ pourrait être une bonne voie d'approche pour ce problème [26].

Interactions dipôle-dipôle et mouvement des atomes. Tout au long de ce chapitre, nous avons attribué le déficit de la densité optique $\mathcal{D}_O$ par rapport à la valeur $\mathcal{D}_{BL}$ prédite par la loi de Beer–Lambert à une réduction de l'absorption due à l'interaction dipôle-dipôle entre deux atomes proches. Le potentiel d'interaction correspondant est de la forme $\hbar\Gamma/(k_0r)^3$ où r est la distance qui sépare les deux atomes (pour des distances courtes, *i.e.* $k_0r < 1$). Le déplacement des atomes soumis à la force d'interaction $F_{d-d} = 3\hbar k_0\Gamma/(k_0r)^4$ correspondante s'écrit donc :

$$\ell_{d-d} = \frac{1}{2} \frac{F_{d-d}}{m} \Gamma^{-2} = \frac{3}{2} \frac{\hbar k_0}{m} \Gamma^{-1}. \quad (2.57)$$

Pour les densités spatiales les plus élevées considérées ici, la distance inter-atomique moyenne $\bar{d} \equiv \sqrt{n}$ est telle que $k_0\bar{d} \approx 0.6$, ce qui correspond à un déplacement $\ell_{d-d} \approx 1.8$ nm. Ce déplacement qui est négligeable par rapport à ω_L , ne remet donc pas en cause l'approximation dipolaire utilisée pour ce traitement.

Comparaison aux expériences. Cette étude a permis d'expliquer qualitativement le déficit de détectivité observé expérimentalement sur des gaz 2D [103], elle ne permet pas toutefois de faire une comparaison qualitative, ce qui constitue une des limitations de notre étude. Cette limitation est en particulier liée au fait que les transitions atomiques utilisées dans les expériences sont plus complexes que celle considérée ici ($J_f = 0 \leftrightarrow J_e = 1$). Un des prolongements de ce travail consisterait à étudier le cas de moments angulaires plus élevés.

Chapitre 3

Imagerie fortement saturante de nuages denses

Au chapitre 2 nous avons vu que l'imagerie par absorption non saturante n'est pas adaptée aux mesures sur des nuages denses. En effet, lorsque la distance moyenne entre atomes devient de l'ordre de k_L^{-1} , où k_L est le module du vecteur d'onde associé au faisceau sonde, la diffusion multiple joue un rôle important lors de la propagation du faisceau dans le milieu atomique. En particulier, elle donne lieu à des interactions dipôle-dipôle entre atomes voisins, qui s'accompagnent d'un déplacement des niveaux de la transition atomique. Dès lors, la relation de Beer–Lambert qui permet de relier de manière simple la densité optique à la densité spatiale n'est plus valable. En effet, celle-ci repose sur une modélisation simplifiée de l'interaction entre le faisceau sonde et le milieu atomique, où l'on suppose que la réponse optique de chaque atome n'est pas influencée par la présence des autres atomes.

Une manière de s'affranchir de ces effets collectifs serait d'utiliser l'imagerie par contraste de phase [67]. Cette méthode consiste à envoyer un faisceau sonde désaccordé et à mesurer le déphasage induit par le nuage sur le champ incident. Le déphasage peut alors être relié à la densité spatiale du nuage. L'utilisation d'un faisceau désaccordé permet de réduire considérablement les effets collectifs des atomes vis-à-vis du faisceau sonde. Cette méthode présente cependant une limitation : elle ne fournit une mesure fiable de la densité atomique que sur une région limitée autour de l'axe optique. En effet, dans la pratique les ailes des nuages sondés en imagerie par contraste de phase sont dégradées par des artefacts liés au montage optique. Or, comme nous le verrons au chapitre 4, ces ailes jouent un rôle essentiel dans l'étude expérimentale de la thermodynamique du gaz 2D. Cette méthode n'est donc pas adaptée dans notre cas.

La stratégie que nous avons retenue est l'imagerie par absorption fortement saturante. Cette méthode a été initiée par Reinaudi *et al.* [105] pour l'étude de gaz tri-dimensionnels optiquement épais. L'objectif était alors, non pas de s'affranchir des effets de diffusion multiple, mais de trouver une solution à la forte atténuation du faisceau sonde à la sortie d'un nuage dilué mais étendu dans la direction de propagation. L'utilisation d'un faisceau fortement saturant constitue également une solution aux effets collectifs rencontrés pendant l'imagerie d'un gaz 2D dense. Dans ce cas, l'idée est de saturer la transition atomique de façon à limiter l'échange de photons entre atomes. De plus, en utilisant des intensités suffisamment élevées, nous pouvons nous ramener à

une situation où la fréquence de Rabi associée au faisceau sonde devient bien plus grande que les déplacements de niveaux induits par les interactions dipôle-dipôle. Cette méthode a également été utilisée avec succès par Hung *et al.* [59]. Notons toutefois que la relation entre l'atténuation du faisceau et la densité atomique proposée par Reinaudi *et al.* [105] pour une intensité incidente quelconque, ne s'étend pas de façon immédiate au cas bi-dimensionnel et ce résultat n'a jamais été établi.

Dans ce chapitre, nous établirons par une approche auto-cohérente la relation entre l'atténuation du faisceau incident et la densité atomique à 2D pour une intensité quelconque. Nous verrons que nous retrouvons l'exact analogue de la relation utilisée par Reinaudi *et al.* [105] pour un gaz 3D. Dans un second temps, nous décrirons à la section 3.2 la mise en œuvre expérimentale de cette méthode sur nos gaz bi-dimensionnels. Après avoir présenté le dispositif d'imagerie autour de la cellule de science, nous présenterons les calibrations nécessaires à l'utilisation de l'imagerie fortement saturante. Enfin, nous terminerons en déterminant le régime de paramètres permettant de mesurer de façon fiable la densité de nos gaz 2D.

3.1 Formalisme

Cette section est consacrée à la modélisation de l'interaction entre un faisceau sonde et un milieu atomique. Contrairement au chapitre précédent, nous négligerons ici tous les aspects liés aux effets collectifs lors de la propagation du faisceau dans le milieu atomique. Nous traiterons d'abord le cas d'un nuage étendu dans la direction de propagation du faisceau. Après avoir rappelé la célèbre relation de Beer–Lambert, valable à faible intensité, nous présenterons la modélisation plus générale proposée par Reinaudi *et al.* [105]. Nous aborderons ensuite le cas d'un milieu atomique plan qui est le cas qui nous intéresse. Nous verrons que les relations établies à 3D s'étendent au cas bi-dimensionnel en remplaçant simplement la densité intégrée par la densité surfacique.

3.1.1 Imagerie d'un gaz atomique étendu

Nous nous intéressons ici à la relation entre l'atténuation d'un faisceau sonde à la traversée d'un nuage atomique étendu et la densité atomique.

Section efficace d'absorption

La section efficace d'absorption d'un atome soumis à un flux de photon Φ est reliée au taux de diffusion de photons par l'atome par la relation :

$$\gamma = \Phi\sigma, \quad (3.1)$$

où le flux Φ est le nombre de photons par unité de surface et de temps. Pour un faisceau incident d'intensité I et de pulsation ω , on a $\Phi = \frac{I}{\hbar\omega}$ et :

$$\sigma = \frac{\hbar\omega}{I}\gamma. \quad (3.2)$$

Par ailleurs, on sait des équations de Bloch optiques que le taux de diffusion de photons par un atome à «deux niveaux» soumis à un faisceau laser résonnant d'intensité I est donné par :

$$\gamma = \frac{\Gamma}{2} \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + I/I_{\text{sat}}}, \quad (3.3)$$

où Γ est la largeur naturelle du niveau excité et I_{sat} l'intensité de saturation. On peut donc en déduire l'expression de la section efficace à partir de l'équation (3.2), ce qui donne :

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + I/I_{\text{sat}}} \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{\hbar\omega}{2I_{\text{sat}}} \Gamma, \quad (3.4)$$

Bien que la structure interne d'un atome réel soit plus complexe, il est possible de se ramener à une situation proche de ce modèle simple. Pour cela il suffit de se mettre dans la configuration d'une transition cyclante, typiquement $|F = 2, m_F = 2\rangle \leftrightarrow |F = 3, m_F = 3\rangle$ pour le ^{87}Rb , en utilisant une polarisation circulaire ($\sigma^\pm$). Dans ce cas, nous avons les expressions simples suivantes :

$$I_{\text{sat}} = \frac{\hbar\omega^3\Gamma}{12\pi c^2}, \quad \sigma_0 = \frac{3\lambda^2}{2\pi}. \quad (3.5)$$

Dans toute la suite, nous considérerons ces valeurs lorsque nous ferons référence à I_{sat} et σ_0 respectivement.

La situation rencontrée dans les expériences est toutefois plus complexe. Typiquement, en raison de la présence de champs magnétiques de piégeage ou de la géométrie spécifique de l'expérience, il n'est pas toujours possible de reproduire le modèle simple que nous venons de décrire. En particulier, le processus d'absorption met alors en jeu différentes configurations de polarisation ($\sigma^\pm$ et π). Pour prendre en compte ces effets, nous introduisons de façon heuristique le paramètre α^* associé à une intensité de saturation effective $\alpha^* I_{\text{sat}}$. Le taux de diffusion de photon s'écrit alors :

$$\gamma = \frac{\Gamma}{2} \frac{I/I_{\text{sat}}}{\alpha^* + I/I_{\text{sat}}}, \quad (3.6)$$

ce qui correspond à la section efficace effective

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\alpha^* + I/I_{\text{sat}}}. \quad (3.7)$$

Dans le régime non saturant ($I \ll \alpha^* I_{\text{sat}}$) la section efficace est indépendante de l'intensité comme dans le cas de l'atome à deux niveaux, et vaut σ_0/α^* où le facteur $1/\alpha^*$ donne lieu à un élargissement de la raie d'absorption. À la limite opposée ($I \gg \alpha^* I_{\text{sat}}$), on a $\sigma \approx I_{\text{sat}}\sigma_0/I$ et le taux de diffusion sature à la valeur $\Gamma/2$.

Loi de Beer–Lambert

La relation entre la densité atomique et le nombre de photons absorbés est traditionnellement donnée par la loi de Beer–Lambert qui décrit de façon satisfaisante un grand nombre de situations rencontrées dans les expériences d'atomes froids. Nous allons en reprendre ici la dérivation traditionnelle qui nous sera utile tout au long de cette section.

Considérons un échantillon atomique sur lequel on envoie un faisceau lumineux d'intensité uniforme I_i le long de l'axe (Oz) comme illustré sur la figure 3.1. Nous nous intéressons au cas

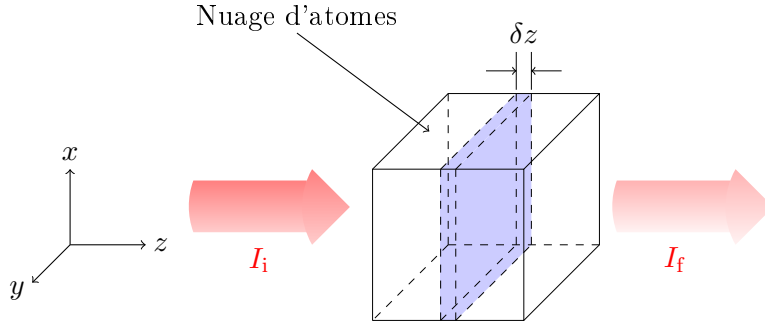


FIGURE 3.1 – Imagerie par absorption d'un nuage étendu. Un faisceau d'intensité I_i s'atténue progressivement lors de sa propagation dans le nuage. Quelle est la relation entre l'atténuation I_f/I_i et la densité intégrée du nuage dans la direction de propagation (Oz) ?

d'un nuage dilué tel que $k_L \bar{d} \gg 1$, où $k_L = 2\pi/\lambda^2$ est le vecteur d'onde associé au faisceau et $\bar{d}$ est la distance inter-atomique moyenne. Sous ces hypothèses, nous pouvons considérer chaque atome comme un objet absorbant classique et négliger les effets collectifs comme la diffusion multiple, les interactions assistées par la lumière ou autres effets quantiques tels que la diffusion stimulée par la statistique bosonique [97].

En se propageant dans le nuage, l'intensité du faisceau va décroître progressivement, et nous cherchons à déterminer l'expression de l'intensité en sortie du milieu atomique. Pour cela, isolons par la pensée une fine tranche du nuage δz dans la direction de propagation (Fig. 3.1). Le déficit d'intensité dû à la traversée de cette tranche est donné par¹ :

$$I(x, y, z + \delta z) - I(x, y, z) = -I(x, y, z) \sigma n^{(3D)}(x, y, z) \delta z. \quad (3.8)$$

Notons que nous traitons le cas général d'une densité atomique non uniforme $n(x, y, z)$, ce qui implique que l'intensité à l'intérieur du milieu dépend des trois coordonnées de l'espace. À limite $\delta z \rightarrow 0$, on aboutit à l'équation différentielle :

$$dI(x, y, z) = -I(x, y, z) \sigma n^{(3D)}(x, y, z) dz. \quad (3.9)$$

Dans le cas où le faisceau est non saturant, nous avons vu que la section efficace est indépendante de l'intensité, et l'équation différentielle (3.9) s'intègre alors aisément et donne :

$$\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} n^{(3D)}(x, y, z) dz = -\ln \left(\frac{I_f(x, y)}{I_i} \right), \quad (3.10)$$

où nous retrouvons la relation de Beer-Lambert introduite au chapitre 2 qui permet de relier directement le déficit de photons après la traversée du nuage à la densité intégrée le long de l'axe d'imagerie. Le fait est que cette relation est adaptée à l'imagerie d'un nuage atomique dilué sondé par un faisceau non saturant. Or, dans de nombreuses expériences, on est fatalement amené à

1. Notons que cette égalité (3.8) suppose implicitement que le système est dilué. En effet, nous considérons ici que chaque atome en (x, y, z) « voit » une intensité $I(x, y, z)$ ce qui suppose que les atomes ne se « recouvrent » pas. Ceci n'est vrai que si la distance inter-atomique moyenne est très grande devant le rayon de la section efficace $\sqrt{\sigma/\pi}$, ce qui est consistant avec la condition $k_L \bar{d} \gg 1$.

utiliser des intensités plus élevées. Typiquement si le nuage atomique, bien que dilué, est très épais dans la direction de propagation du faisceau, il faut envoyer suffisamment de photons pour le sonder sur toute son étendue. C'est dans cet esprit que Reinaudi *et al.* [105] ont développé et mis en œuvre une méthode d'imagerie à intensité saturante.

Imagerie à haute intensité

Nous allons reprendre ici la modélisation de l'interaction d'un faisceau saturant avec un atome telle qu'elle a été proposée dans [105]. On part de l'équation (3.9) pour laquelle nous n'avons imposé aucune contrainte sur l'intensité du faisceau sonde. On y injecte l'expression générale de σ donnée par l'équation (3.7), et en intégrant on trouve :

$$\sigma_0 \int_{-\infty}^{+\infty} n^{(3D)}(x, y, z) dz = \underbrace{-\alpha^* \ln \left(\frac{I_f(x, y)}{I_i} \right) + \frac{I_i - I_f(x, y)}{I_{\text{sat}}}}_{\equiv d_O(x, y)}. \quad (3.11)$$

ce qui constitue une forme généralisée de la relation de Beer–Lambert, valable à haute intensité. La quantité $d_O(x, y)$ qui apparaît au second membre interviendra tout au long de ce chapitre et nous la nommerons *la densité optique généralisée*.

À la limite de très faible intensité $I_i \ll \alpha^* I_{\text{sat}}$, le second terme dans le second membre de l'égalité (3.11) est négligeable et on retrouve la loi de Beer–Lambert (Eq. 3.10). Dans la limite opposée $I_i \gg \alpha^* I_{\text{sat}}$, la conclusion est moins immédiate et dépend du nombre de photons absorbés. Si l'on pose $\delta I = I_i - I_f$, la densité optique généralisée s'écrit :

$$d_O = -\alpha^* \ln \left(1 - \frac{\delta I}{I_i} \right) + \frac{\delta I}{I_{\text{sat}}}, \quad (3.12)$$

où nous omettons d'indiquer la dépendance en (x, y) par commodité. Dans le cas où l'absorption est faible, c'est-à-dire $\delta I \ll I_i$, on obtient l'expression approchée :

$$d_O \approx \delta I \left(\frac{\alpha^*}{I_i} + \frac{1}{I_{\text{sat}}} \right), \quad (3.13)$$

ce qui dans la limite $I_i \gg \alpha^* I_{\text{sat}}$ donne $d_O \approx \delta I / I_{\text{sat}}$. Le second terme du second membre de l'égalité (3.11) est donc dominant. Cette conclusion n'est évidemment pas vraie pour $\delta I / I_i$ quelconque. Pour clarifier ce point, il est commode de distinguer les deux termes contribuant à la densité optique généralisée en posant :

$$d_O^{(b)} = -\alpha^* \ln \left(\frac{I_f}{I_i} \right) \quad \text{et} \quad d_O^{(h)} = \frac{I_i - I_f}{I_{\text{sat}}}, \quad (3.14)$$

qui correspondent aux termes dominants à *basse intensité* et *haute intensité* respectivement. En pratique, l'absorption relative $\delta I / I_i$ à haute intensité peut aller jusque $\sim 30\%$ pour les mesures que nous présenterons ici et $\alpha^* \sim 3$. Nous avons tracé sur la figure 3.2, les poids relatifs de $d_O^{(b)}$ et $d_O^{(h)}$ en fonction $\delta I / I_i$, pour différentes valeurs du rapport I_i / I_{sat} avec $\alpha^* = 3$.

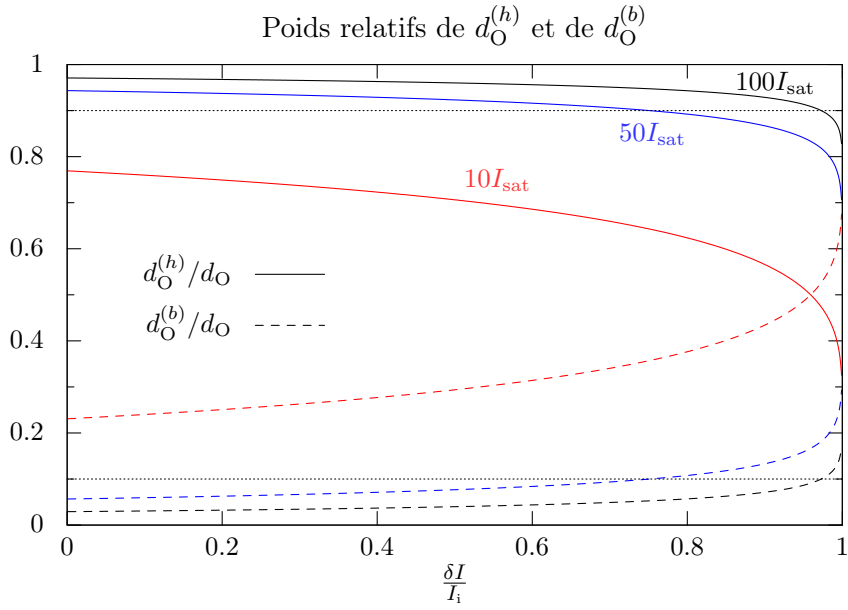


FIGURE 3.2 – Poids relatifs de $d_O^{(h)}$ (lignes continues) et $d_O^{(b)}$ (lignes tiretées) en fonction de l'absorption relative $\delta I / I_i$. Nous comparons la contribution de chaque terme pour trois valeurs de l'intensité incidente, correspondant à : $I_i / I_{\text{sat}} = 10, 50$ et 100 (lignes rouge, bleue et noire respectivement). La contribution de $d_O^{(b)}$ est calculée pour $\alpha^* = 3$.

3.1.2 Imagerie d'un gaz atomique plan

Intéressons-nous maintenant au cas où les atomes sont répartis dans un plan que l'on sonde à l'aide d'un faisceau en incidence normale comme illustré sur la figure 3.3. Dans ce cas, il n'y a pas d'intégration selon l'axe de propagation (Oz) du faisceau et, de façon similaire au résultat (3.8), on obtient :

$$I_f(x, y) = I_i (1 - \sigma n(x, y)), \quad (3.15)$$

où $n(x, y)$ désigne à présent la densité surfacique. Tout comme dans le cas d'un nuage étendu dans la direction (Oz), ce résultat est valable dans le cas d'un nuage dilué, ce qui correspond à la limite $n\sigma \ll 1$ dans le cas présent. Or, expérimentalement, lorsque l'on confine des atomes dans une fine couche, cette condition n'est généralement pas réalisée et le résultat (3.15) n'est pas valide.

Nous proposons donc une approche plus adaptée aux cas de nuages bi-dimensionnels non dilués mais nous continuons d'ignorer tout effet lié aux comportements collectifs des atomes vis-à-vis du faisceau sonde. La situation considérée est toujours celle d'un faisceau sonde en incidence normale sur un nuage bi-dimensionnel (Fig. 3.3). Comme dans le cas précédent, on veut relier la distribution de photons obtenue sur le réseau CCD d'une caméra à la distribution spatiale des atomes. On s'intéresse pour cela à la probabilité qu'un photon de traverser le nuage atomique et d'atteindre un pixel donné de la caméra. Notons A l'aire d'un pixel rapportée dans le plan atomique. Si $\sigma \ll A$ (en pratique on a typiquement $A \sim 1 \mu\text{m}^2$ et $\sigma \sim 0.1 \mu\text{m}^2$), alors la

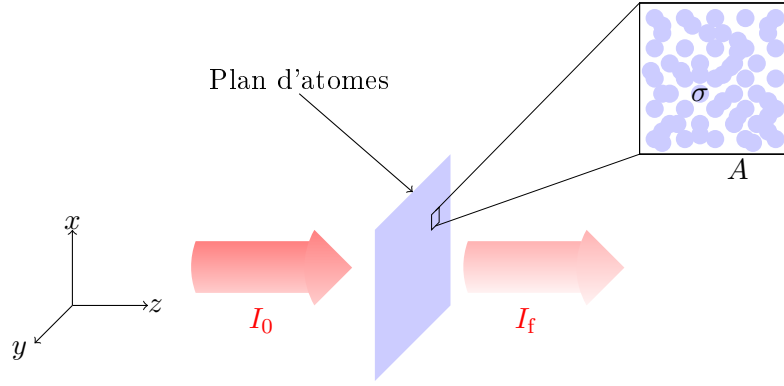


FIGURE 3.3 – Imagerie par absorption d'un plan d'atomes. Nous considérons un gaz dense où les atomes se «recouvrent» et où la densité varie peu sur une aire de taille $A \gg \sigma$.

probabilité pour un photon d'être absorbé par un atome est simplement σ/A et la probabilité de transmission $(1 - \sigma/A)$. Si l'on néglige toute corrélation en position des atomes, la probabilité de transmission d'un atome à travers une cible d'aire A contenant N atomes est donnée par :

$$P_t = \left(1 - \frac{\sigma}{A}\right)^N = \exp\left(N \ln\left(1 - \frac{\sigma}{A}\right)\right) \approx \exp\left(-N \frac{\sigma}{A}\right), \quad (3.16)$$

où on a utilisé le fait que $\sigma \ll A$. En supposant que la densité ne varie que très peu sur une échelle de distance de l'ordre de $\sqrt{A}$, ce qui est tout à fait raisonnable pour les expériences actuelles, le rapport N/A est équivalent à la densité surfacique et $P_t \approx \exp(-\sigma n)$. On peut alors aisément relier l'intensité en sortie du nuage à la densité surfacique puisque $I_f = P_t I_i$, ce que l'on peut mettre sous la forme familière :

$$\sigma n(x, y) = -\ln\left(\frac{I_f(x, y)}{I_i}\right), \quad (3.17)$$

qui est l'analogue bi-dimensionnel de la loi de Beer-Lambert (Eq. 3.10) où la densité intégrée est remplacée par la densité surfacique. Notons cependant que le résultat (3.17) dérivé pour le cas bi-dimensionnel est plus général que son équivalent à 3D, dans la mesure où nous n'avons pas supposé ici que la section efficace σ est indépendante de l'intensité. Nous pouvons donc déduire l'expression générale de la densité optique en injectant la dépendance de σ avec l'intensité. Dans le cas d'un nuage dilué, il suffit de remplacer I par I_i dans l'équation (3.7) puisque chaque atome est isolé des autres. Pour un nuage dense, chaque atome subit l'effet d'écran des atomes voisins et reçoit de ce fait une intensité effective I_{eff} inférieure à I_i et la section efficace s'écrit :

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\alpha^* + I_{\text{eff}}/I_{\text{sat}}}. \quad (3.18)$$

Afin de déterminer l'expression de I_{eff} , on peut partir d'un raisonnement similaire à celui utilisé pour obtenir le résultat (3.15). Dans le cas où chaque atome perçoit non pas I_i , mais I_{eff} , on a :

$$I_f = I_i - n\sigma I_{\text{eff}}. \quad (3.19)$$

En remplaçant I_f par son expression déduite de (3.17), on obtient une relation simple entre intensité effective et intensité incidente :

$$I_{\text{eff}} = \frac{1 - e^{-n\sigma}}{n\sigma} I_i. \quad (3.20)$$

Notons que dans la limite $n\sigma \ll 1$, $I_{\text{eff}} \rightarrow I_i$ et l'équation (3.19) redonne le résultat (3.15) obtenu directement pour le gaz dilué.

En combinant l'expression de I_{eff} et l'équation (3.17), on aboutit à l'expression générale suivante :

$$\sigma_0 n = -\alpha^* \ln \left(\frac{I_f}{I_i} \right) + \frac{I_f - I_i}{I_{\text{sat}}}, \quad (3.21)$$

qui relie la densité spatiale n aux intensités incidente et sortante. On reconnaît l'analogue bi-dimensionnel de l'expression (3.11), où la densité intégrée à été remplacée par la densité surfacique. Notons toutefois que dans ce cas, le cadre de validité est plus général puisque le résultat obtenu est valable en dehors de la limite $n\sigma \ll 1$ (si l'on ignore les effets collectifs).

Comme nous l'avons dit au début de ce paragraphe, cette modélisation repose sur le fait qu'il n'y a pas de phénomènes collectifs. En pratique, pour des densités telles que $n\sigma \sim 1$ le phénomène de diffusion multiple n'est pas négligeable de même que le déplacement des niveaux d'énergie dû aux interactions dipolaires induites par la lumière [103]. Une solution pour limiter ces effets consiste à utiliser un faisceau sonde fortement saturant. En effet, (i) en saturant un atome, on réduit fortement la probabilité qu'il absorbe un photon réémis par un atome voisin, (ii) dans le régime de saturation forte la fréquence de Rabi Ω associée au faisceau sonde est telle que $\Omega/\Gamma \equiv \sqrt{I/2I_{\text{sat}}} \gg 1$, le processus d'absorption tend donc à être insensible aux déplacements des niveaux qui sont de l'ordre de $\hbar\Gamma$ pour les paramètres des expériences actuelles. À haute intensité on entre donc dans le cadre de validité du résultat (3.21) pour des systèmes denses.

3.2 Mise en œuvre expérimentale

Cette section est consacrée à la mise en œuvre expérimentale de l'imagerie fortement saturante sur des gaz 2D. Nous commencerons par décrire le dispositif d'imagerie autour de la chambre de science. Nous prendrons le temps de détailler en particulier les caractéristiques de l'objectif de microscope et de la caméra que nous utilisons, et qui nous permettent de disposer d'un système d'imagerie très performant. Nous entrerons ensuite dans le vif du sujet en décrivant la procédure de calibration de l'imagerie à haute intensité. Enfin, nous exposerons notre démarche pour la détermination des paramètres d'imagerie optimaux pour une mesure fiable de la densité atomique dans nos gaz bi-dimensionnels.

3.2.1 Dispositif d'imagerie

Tous les résultats que nous allons présenter dans ce manuscrit ont été obtenus en imagerie par absorption. Elle nécessite un montage optique qui, dans sa version la plus simple, se réduit à l'utilisation d'une lentille qui permet de faire l'image des atomes² sur le réseau CCD d'une caméra. Sur notre montage expérimental, nous avons mis en place deux montages optiques qui permettent de sonder les nuages atomiques selon deux axes (Fig. 3.4) et ainsi d'avoir accès aux

2. Plus précisément la distribution de photons manquants due aux atomes.

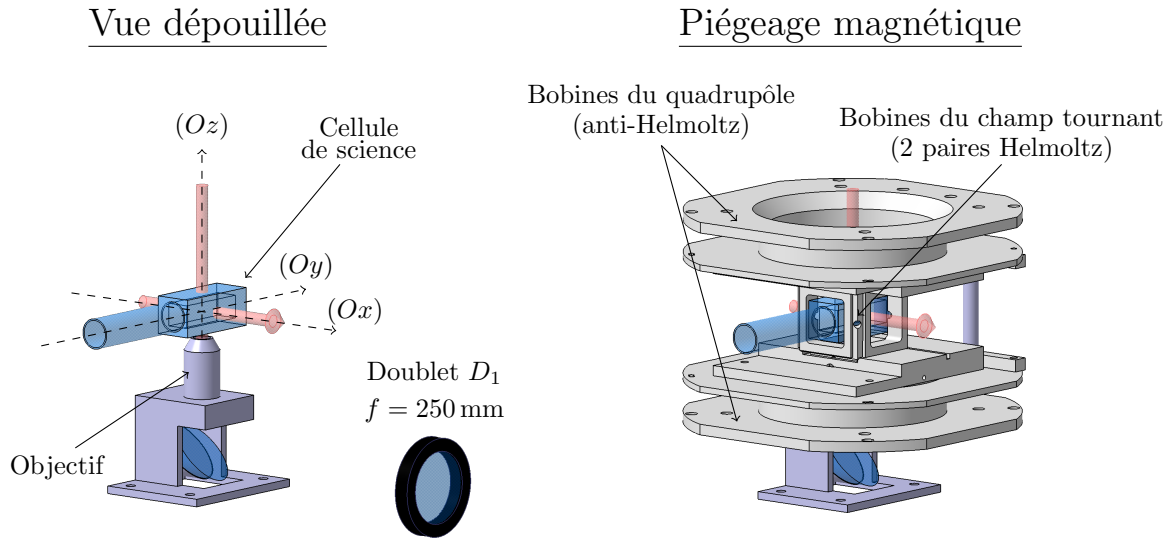


FIGURE 3.4 – Voisinage de la cellule. À gauche : une vue dépillée avec les faisceaux d'imagerie vertical et horizontal (axes (Oz) et (Ox) respectivement). À droite : géométrie du piégeage magnétique.

distributions de densité dans les trois directions de l'espace. Les nuages bidimensionnels produits dans notre expérience étant dans le plan horizontal³ (xOy) , l'axe d'imagerie verticale constitue notre axe privilégié et contient de ce fait un certain nombre de sophistications nécessaires pour une imagerie performante.

Le schéma de principe du montage est représenté sur la figure 3.5. Il s'agit d'un montage en deux parties indépendantes. La première partie du montage (représentée de façon plus fidèle à la réalité dans la figure 3.4) est constituée d'un objectif de microscope de focale 10 mm et d'un doublet de focale 250 mm et permet de faire une première image des atomes avec un grandissement $G_1 = 25$. Cette image est en fait une image intermédiaire car elle joue le rôle d'objet pour la seconde partie du montage. Cette dernière comporte deux doublets de focales 400 mm et 200 mm respectivement, formant l'image définitive sur le réseau CCD d'une caméra avec grandissement $G_2 = 0.5$, soit un grandissement total $G = 12.5$. La raison d'être de la seconde partie du montage est la nécessité d'ajouter un masque dans le plan intermédiaire afin de bloquer les photons issus d'une région bien définie de l'espace, comme illustré sur la figure 3.5. Cela permet de n'exploiter que la région utile du réseau CCD et de préserver les pixels restants, ce qui donne la possibilité d'acquérir des images successives très rapprochées dans le temps en exploitant le mode *Frame Transfer* de notre caméra que nous décrirons plus loin.

Dans ce montage, l'objectif de microscope et la caméra sont deux éléments de haute performance, et constituent de ce fait les éléments clés de notre imagerie. Les trois doublets sont aussi des éléments optiques de qualité⁴, mais ils sont moins cruciaux et ont été choisis de façon

3. Ce chapitre étant dédié à l'imagerie, nous ne présenterons pas ici la manière dont nous produisons les gaz bidimensionnels sur notre expérience, ces informations n'étant pas nécessaires à ce stade.

4. Produits standards du fournisseur *Melles-Griot*.

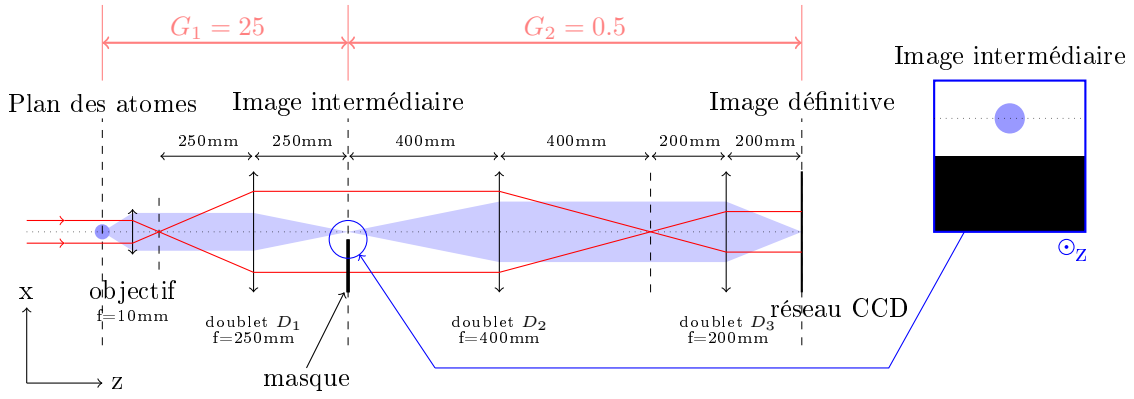


FIGURE 3.5 – Schéma de principe du dispositif d'imagerie.

à préserver les performances de l'objectif en tenant compte des contraintes imposées par la géométrie de l'expérience. Les paragraphes qui suivent sont consacrés à la description détaillée des caractéristiques de l'objectif de microscope et de la caméra.

Objectif pour imagerie de haute résolution

L'objectif de microscope a été conçu et réalisé sur mesure pour notre expérience par le fabricant de systèmes optiques *Nachet* pour permettre une résolution spatiale meilleure que le micron. Nous avons établi le cahier des charges de l'objectif à partir d'une étude préliminaire à l'aide du logiciel OSLO⁵ qui nous a permis de simuler son utilisation en prenant en compte les contraintes de l'expérience. Notre principale contrainte est liée à la cellule en verre isolant les atomes de l'air ambiant, ce qui empêche de s'approcher à moins de 12.5 mm des atomes dont 5 mm correspondent à la face de la cellule. Outre le fait qu'il faut corriger l'astigmatisme introduit par la lame de verre, la distance minimale entre les atomes et l'objectif implique l'utilisation de lentilles de diamètre de l'ordre de 15 mm afin d'avoir une ouverture numérique suffisante, ce qui en contrepartie augmente les aberrations géométriques.

L'objectif permet de résoudre deux points distants d'un micron à travers une lame de verre⁶ de 5 mm d'épaisseur et d'indice de réfraction $n_r = 1.458$ pour une longueur d'onde de travail de 780 ± 10 nm. L'objectif doit être positionné à ~ 1.6 mm de la face de la cellule en verre soit environ 14 mm des atomes. Dans cette configuration l'ouverture numérique de l'objectif à 780 nm est de 0.45. La résolution au micron près est garantie sur un champ objet de diamètre $400 \mu\text{m}$ avec une profondeur de champ de $\pm 2 \mu\text{m}$ et une distorsion de champ inférieure $0.5 \pm 0.2\%$. La longueur focale mesurée est 10.01 ± 0.02 mm à 780 nm. L'objectif fonctionne en configuration foyer-infini et doit être associé à un élément optique focalisant pour former une image, comme l'illustre le schéma 3.5. Ceci présente l'intérêt de pouvoir changer de façon simple le grandissement du système optique en adaptant la focale du second élément optique. Enfin, un traitement anti-reflet pour la longueur d'onde 780 nm a été appliqué à tous les éléments optiques constituant l'objectif.

5. Optics Software for Layout and Optimization.

6. Il s'agit plus précisément de VYCOR.

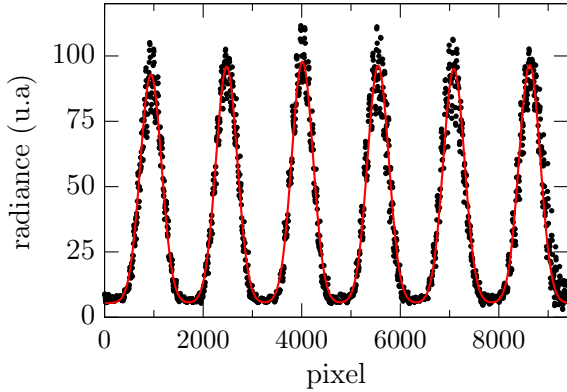


FIGURE 3.6 – Une coupe de l’image d’une mire obtenue à l’aide de notre objectif de microscope. La mire est constituée d’un réseau de lignes espacées de $2\,\mu\text{m}$. La ligne continue rouge est un ajustement par une somme de gaussiennes dont les centres sont régulièrement espacés et de même largeur optique w . L’ajustement optimal donne $w = 0.56 \pm 0.03\,\mu\text{m}$.

Nous avons mesuré la résolution de l’objectif indépendamment dans un montage annexe similaire au montage prévu pour l’imagerie de nos nuages atomiques. Ce test a été réalisé à l’aide d’une mire graduée et d’une lame de verre BK7 de 5 mm d’épaisseur jouant le rôle de la face de la cellule en verre. L’indice de réfraction du BK7 vaut $n_r = 1.511$ soit 3.6% plus élevé que celui des faces de notre cellule, ce qui a pour effet principal de changer sensiblement la position de mise au point de l’objectif. La région de la mire que nous avons exploitée est constituée de lignes droites distantes de $2 \pm 0.1\,\mu\text{m}$. La figure 3.2.1 représente une coupe effectuée sur une image enregistrée de la mire. Afin d’estimer le pouvoir de résolution de notre objectif, nous réalisons un ajustement de l’ensemble de distribution d’intensité par la fonction :

$$f(x) = y_0 + \sum_{n=1}^6 A_n \exp\left(-2\frac{(x - \mu_n)^2}{w^2}\right), \quad \text{avec} \quad \mu_n = \mu + n\delta \quad (3.22)$$

ce qui revient à modéliser la fonction de réponse de notre système optique par une gaussienne. Les paramètres d’ajustement sont le décalage à l’origine y_0 , les amplitudes A_n , la *largeur optique* w , le décalage horizontal μ et la distance entre deux pics successifs δ . Les deux paramètres qui nous intéressent sont w , qui caractérise la résolution du système optique, et δ qui sert de calibration du grandissement, l’espacement entre les pics étant connu. L’ajustement, représenté en rouge sur la figure 3.2.1, est très satisfaisant et donne pour les paramètres optimaux qui nous intéressent, $\delta = 1536.8 \pm 0.6$ pixels et $w = 433 \pm 3$ pixels. Pour une séparation entre pics successifs de $2 \pm 0.1\,\mu\text{m}$ annoncée par le fabricant, on a donc $w = 0.56 \pm 0.03\,\mu\text{m}$ dans le plan objet. Notons que cette largeur est en fait légèrement surestimée car chaque trait de la mire a une épaisseur finie de l’ordre de $0.2\,\mu\text{m}$. Par conséquent, chaque pic de la coupe représentée sur la figure 3.2.1, ne représente pas la réponse impulsionnelle du système optique mais la convolution de celle-ci avec un créneau de largeur $\sim 0.2\,\mu\text{m}$, ce qui naturellement élargit la réponse mesurée.

En pratique, la résolution optique est une notion assez vague. Dans le cas académique où la réponse d’un système est décrite par une fonction d’Airy, la résolution est souvent définie par le rayon du premier zéro de la fonction, ce qui correspond au célèbre critère de Rayleigh. Lorsque la fonction est bien modélisée par une gaussienne, elle est plutôt associée à la largeur optique w qui correspond à la distance du pic où l’intensité est atténuée de $\sim 86\%$. Pour caractériser le

pouvoir de résolution de notre objectif, nous adoptons ici une approche plus pratique. Comme nous l'avons évoqué plus haut, nous souhaitons pouvoir résoudre deux points lumineux distants d'un micron. Compte tenu de la fonction de réponse déterminée plus haut, nous pouvons calculer la distribution d'intensité qu'on obtiendrait en faisant l'image de deux points source. Celle-ci est représentée sur la figure où l'on voit que l'on a deux pics distincts et que le rapport $I_{\min}/I_{\max}$ vaut ~ 0.4 . Notre pouvoir de résolution se traduit donc en terme de signal sur bruit et nous voyons que si nous parvenons à limiter le bruit de détection à $\sim 10\%$ du signal maximal, nous pouvons résoudre spatialement deux points distants d'un micron sans ambiguïté.

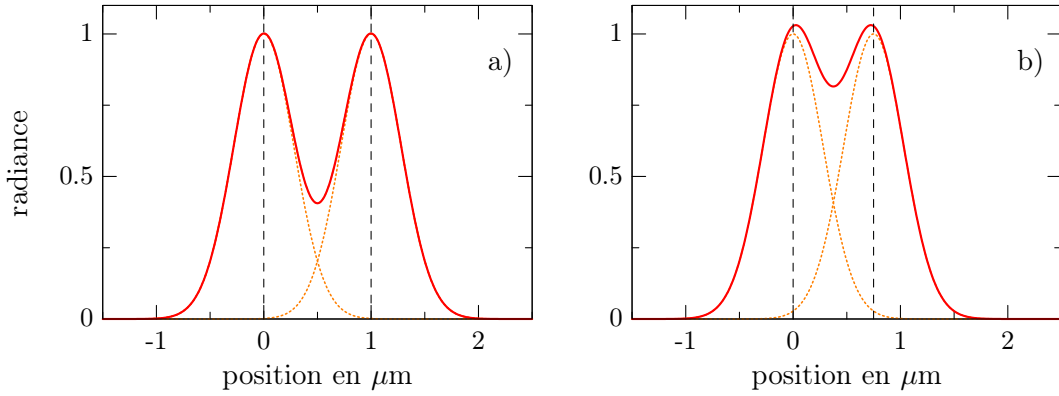
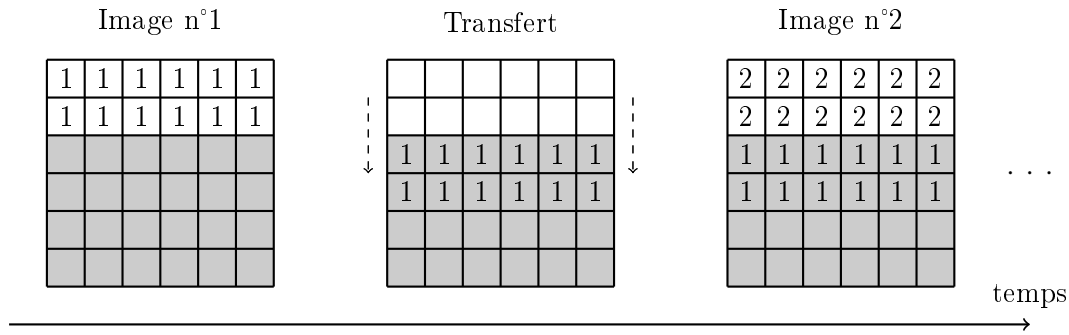


FIGURE 3.7 – Modélisation de la réponse optique de notre objectif pour deux points source distants de $1\mu\text{m}$ (a) et de $0.75\mu\text{m}$ (b). Dans le premier cas (a), le contraste est d'environ 60%, nous pouvons donc détecter ces deux points sans problème. Dans le second cas (b), le contraste n'est que de 15%, pour un bruit de détection de l'ordre de 10% il sera difficile de distinguer ces deux points.

Caméra et séquence d'imagerie

Nous utilisons une caméra de la série *PIXIS 1024* de *Princeton Instruments*, équipée d'un réseau CCD de 1024×1024 pixels, chaque pixel étant un carré de $13\mu\text{m}$ de côté. Le réseau CCD est protégé par une fenêtre en verre de 3 mm d'épaisseur et son exposition à la lumière est contrôlée par un obturateur mécanique. L'efficacité quantique de la caméra est de 95% pour la longueur d'onde 780 nm qui nous intéresse et le bruit électronique par pixel de 2.6 photo-électron par pixel. Pour une utilisation optimale de la caméra, le circuit électronique est maintenu à -70°C à l'aide d'un système de refroidissement par liquide.

Comme nous l'avons expliqué en section 3.1, pour reconstruire un profil de densité atomique en imagerie par absorption, il est nécessaire d'acquérir une image du faisceau sonde en plus de l'image d'absorption elle-même. Comme cette image joue le rôle de référence, il est souhaitable de l'enregistrer un temps très court après l'image d'absorption pour ne pas être sensible aux fluctuations d'intensité et de position du faisceau sonde. Si l'on utilise l'ensemble du réseau CCD de la caméra pour chaque image, le temps minimal séparant deux images successives est de l'ordre

FIGURE 3.8 – Principe du mode *Frame Transfer*.

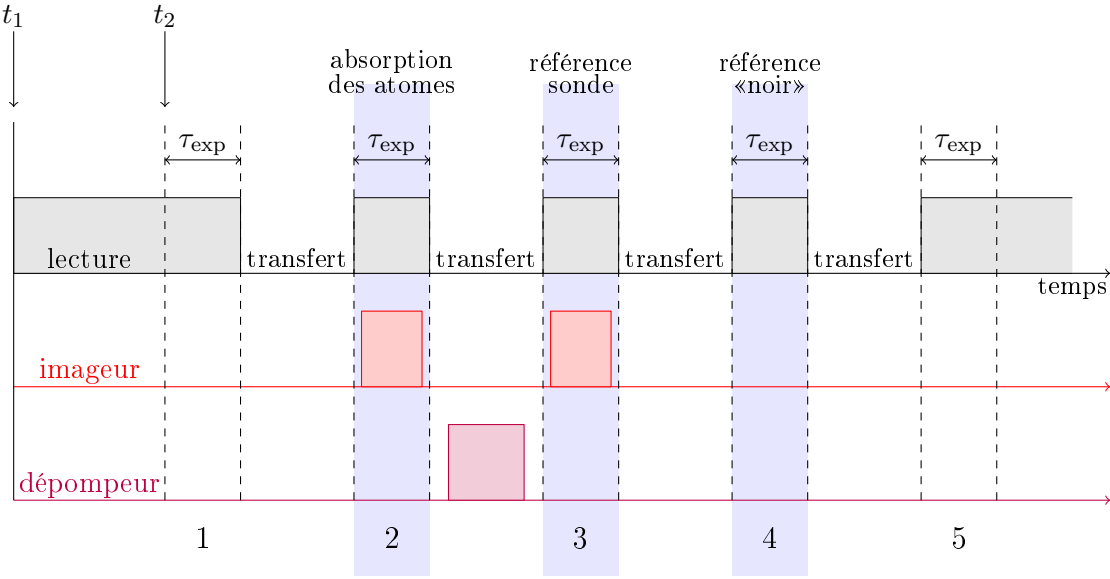
de la seconde⁷, ce qui est beaucoup trop long. Pour pouvoir prendre deux images rapprochées dans le temps, nous utilisons donc le mode *Frame Transfer* de la caméra qui permet de transférer rapidement le contenu d'une région limitée du réseau CCD sur une autre région du réseau. À l'issue du transfert, la région initialement exposée est alors vierge. En masquant physiquement la région complémentaire du réseau CCD, ceci permet donc d'acquérir des images successives sans que les pixels ne soient lus, la lecture étant le processus limitant. La figure 3.8 schématise le fonctionnement du mode *Frame Transfer* en présence d'un masque. Le masque est disposé de façon à préserver la majeure partie sur réseau CCD des photons incidents, la partie non protégée est notre région d'intérêt. Dans une séquence d'imagerie avec le mode *Frame Transfer*, cette région d'intérêt est donc exposée une première fois pendant une durée τ_{exp} , puis le contenu des pixels correspondants est transféré de façon à laisser la région d'intérêt vierge, et ainsi de suite. La lecture des pixels qui est le processus limitant en temps intervient à l'issue de la séquence d'imagerie.

Notre séquence d'imagerie, qui est décrite dans la figure 3.9, nécessite cinq phases d'expositions que nous numérotions de 1 à 5. En pratique, seules les images correspondant aux phases 2,3 et 4 contiennent une information pertinente pour nous, soit respectivement : l'image d'absorption, une image de référence du faisceau sonde et une image de référence du fond d'obscurité. L'existence des phases 1 et 5 est motivée par l'ouverture et la fermeture de l'obturateur mécanique de la caméra. L'ouverture de l'obturateur générant des vibrations mécaniques qui se répercutent sur la stabilité en position du faisceau sonde, nous l'effectuons quelques secondes en avance de façon à les laisser s'amortir. Le fait est que les pixels du réseau CCD détectent les photons d'obscurité pendant ce temps, ce qui rend la première image inutilisable pour nous. La phase n°5 a été ajoutée en raison du temps de fermeture de l'obturateur qui est de 8 ms. En effet, en raison de ce délai, la dernière phase est systématiquement affectée par une surexposition au fond d'obscurité et ne peut pas jouer le rôle de référence d'obscurité.

Comme le réseau CCD compte 1024 lignes de pixels⁸, une séquence en 5 phases permet

7. De façon générale, les caméras de faible bruit électronique ont un temps de lecture de l'ordre de $\sim 1 \mu\text{s}$ par pixel, il faut donc une seconde pour lire l'ensemble du réseau qui compte $\sim 10^6$ pixels. Dans notre cas, si nous souhaitons fonctionner avec le bruit minimal de notre caméra (qui est de 2.6 photo-électrons par pixel), le temps de lecture d'un pixel est de l'ordre de $10 \mu\text{s}$.

8. En réalité les 8 premières lignes sont à exclure dans le mode *Frame Transfer*.

FIGURE 3.9 – Séquence d'imagerie avec le mode *Frame Transfer*.

d'acquérir des images contenant 203 lignes de pixels chacune. Sachant que la taille d'un pixel ramenée au niveau des atomes est de $1.04 \mu\text{m}$, cela est tout à fait confortable pour l'étude de nuages atomiques de taille caractéristique $50 \mu\text{m}$. Par ailleurs, nous utilisons le taux de transfert le plus rapide soit une ligne en $3.2 \mu\text{s}$ d'où une durée de transfert $650 \mu\text{s}$ pour l'image entière, ce qui nous met à l'abri d'importantes fluctuations en intensité ou en position du faisceau sonde. Naturellement, il est possible de réduire encore davantage (si nécessaire) ce temps de transfert en réduisant la taille des images⁹.

En une durée aussi courte que $650 \mu\text{s}$, les atomes n'ont pas le temps de quitter le champ de la caméra. Pour pouvoir prendre une image de référence du faisceau sonde, il nous faut donc rendre les atomes invisibles, ce que l'on fait en envoyant une impulsion lumineuse d'un faisceau «dépompeur» accordé sur la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$, entre l'image d'absorption et l'image de référence. Ce faisceau de dépompage est envoyé horizontalement sur les atomes pour que les photons dépompeurs n'atteignent pas le réseau CCD, ce qui permet de réaliser le dépompage pendant le transfert de l'image d'absorption.

La séquence d'imagerie se produit donc de la façon suivante. Quelques secondes après l'ouverture de l'obturateur, la séquence d'imagerie est activée par un déclencheur électronique externe (instant t_2 sur le schéma). L'acquisition commence par la première phase d'exposition. La durée d'exposition τ_{exp} est fixe et est commune à toutes les images. Nous avons fixé $\tau_{\text{exp}} = 70 \mu\text{s}$, ce qui est légèrement plus grand que la durée maximale de l'impulsion lumineuse, de façon à prévenir tout problème de synchronisation. Juste après la phase d'exposition, la première image est transférée pour laisser la région d'intérêt vierge. Comme nous l'avons expliqué plus haut, cette première image contient les photons d'obscurité accumulés entre les instants t_1 et t_2 , et de ce fait

9. Pour la plupart des données que nous présenterons la taille maximale a néanmoins été préférée, dans la mesure où les ailes lointaines du nuage jouent un rôle cruciale pour une analyse thermodynamique fine.

ne sera pas utilisée. À l'issue du transfert la phase d'exposition n°2 est activée et on enregistre l'image d'absorption des atomes qui est transférée à son tour. Pendant ce transfert, les atomes sont dépompés grâce à une impulsion lumineuse de $300\ \mu\text{s}$, ce qui permet d'enregistrer la référence du faisceau sonde pendant la troisième phase d'exposition. Enfin, on enregistre la référence de «noir» dans les mêmes conditions que les deux images précédentes. La dernière image qui contient les photons accumulés pendant la fermeture de l'obturateur ne sera pas utilisée.

3.2.2 Calibrations pour l'imagerie haute intensité

Nous allons à présent décrire la procédure de calibration de l'imagerie à haute intensité en appliquant la procédure développée par Reinaudi *et al.* [105]. Avant cela, nous allons caractériser l'effet des champs magnétiques de piégeages utilisés dans notre expérience sur la détectivité pendant la phase d'imagerie.

Influence du piégeage magnétique

L'étude des distributions d'équilibre de nuages atomiques nécessitant d'acquérir des images *in situ*, c'est-à-dire avec les champs magnétiques de piégeage allumés, l'influence de ces derniers doit être prise en compte dans le processus d'absorption entre le faisceau sonde et les atomes.

Le piégeage magnétique au niveau de la cellule est assuré par un piège TOP (*Time-averaged orbiting Potential*) [90], combinant un piège quadrupolaire d'axe vertical (Oz) et un champ magnétique homogène tournant dans le plan horizontal. Le piège quadrupolaire est constitué d'une paire de bobines circulaires d'axe vertical, disposées en configuration anti-Helmoltz (Fig.3.4). Le champ tournant est produit à l'aide de deux paires de bobines d'axes (Ox) et (Oy) respectivement (Fig. 3.4) en configuration Helmotlz. Dans chaque paire de bobines circule un courant d'amplitude sinusoïdale de fréquence 10 kHz, l'un étant en quadrature de phase par rapport à l'autre, créant ainsi un champ magnétique tournant d'amplitude B_0 avec une période de rotation de $100\ \mu\text{s}$. Durant la séquence expérimentale, le gradient vertical prend des valeurs allant de $\sim 160\ \text{G/cm}$ à $\sim 90\ \text{G/cm}$ et B_0 varie entre $\sim 10\ \text{G}$ et $\sim 3\ \text{G}$, les dernières valeurs indiquées étant celles en fin de séquence expérimentale.

L'influence du piège quadrupolaire dans le processus d'imagerie est négligeable. En effet, nos nuages ayant une taille typique de $50\ \mu\text{m}$, les atomes les plus éloignés du centre du piège ressentent un champ de l'ordre de $0.1\ \text{G}$ seulement. De même, le déplacement vertical des atomes dû à la gravité est de l'ordre de $50\ \mu\text{m}$ et le champ ressenti est là aussi négligeable. En revanche, le champ tournant est suffisamment fort pour orienter le spin des atomes (le principe du piège TOP repose sur cela). Par conséquent lorsque le faisceau sonde vertical, qui est de polarisation linéaire, arrive sur les atomes, ceux-ci ressentent une polarisation qui dépend du temps. La section efficace d'absorption oscille donc entre deux valeurs extrêmes, l'une correspondant à l'absorption d'une superposition de photons σ^+ et σ^- et l'autre à l'absorption de photons π . Cela signifie que le paramètre α^* qui rentre dans le calcul de la densité optique généralisée d_O (Eq. 3.11) prend une valeur différente à chaque position du champ sur une demi-période.

Afin de caractériser la détectivité, nous avons pris des images de nuages thermiques tridimensionnels à des instants différents de la rotation du champ tournant. L'impulsion lumineuse est

choisie de façon à être nettement plus courte que la période de rotation et dure $10\ \mu\text{s}$. L'intensité est de l'ordre de $1.5 I_{\text{sat}}$. Pour chaque image nous calculons le nombre d'atomes détectés à partir de la densité optique généralisée d_O calculée avec $\alpha^* = 3.0$ ⁽¹⁰⁾. La figure 3.10 représente le nombre d'atomes effectif en fonction de l'instant de mesure. La ligne continue rouge est un ajustement par une fonction sinusoïdale de période $50\ \mu\text{s}$, soit la demi-période du champ tournant. La tendance du nombre d'atomes est donc en bon accord avec la description faite plus haut.

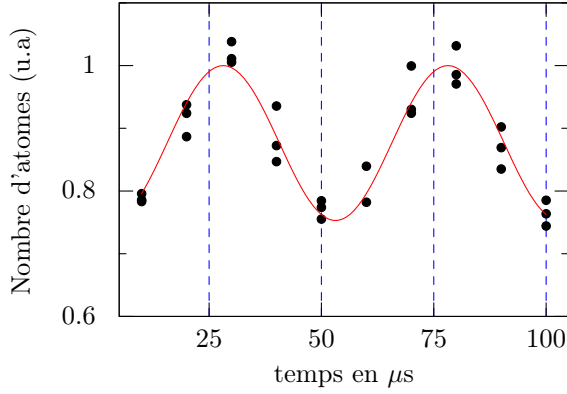


FIGURE 3.10 – Nombre d'atomes détecté en fonction de l'instant de la mesure. La ligne rouge est un ajustement avec une fonction sinusoïdale de période $50\ \mu\text{s}$, soit la demi-période du champ tournant. Ces variations de la détectivité sont la conséquence d'effets de polarisation dans le processus d'imagerie.

Cette observation montre qu'il faut en général être vigilant sur la synchronisation de l'impulsion lumineuse avec la phase du champ tournant du piège TOP. Il est néanmoins possible de s'affranchir de cette contrainte en fixant la durée de l'impulsion à un multiple de $50\ \mu\text{s}$ et en attribuant au coefficient α^* sa valeur moyenne au cours de la rotation.

Durée des impulsions lumineuses

En pratique, la durée de l'impulsion est contrainte par le régime d'intensité considéré. À basse intensité, le nombre de photons détectés par unité de temps par un pixel est faible et la durée de l'impulsion doit être suffisante pour sortir du bruit électronique de la caméra. À haute intensité, la force de pression de radiation est importante et la durée doit être suffisamment courte pour limiter le mouvement des atomes pendant la prise d'image.

Dans le régime de basse intensité, une impulsion de $50\ \mu\text{s}$ est tout à fait adaptée. En effet, la taille du pixel de la caméra ramenée au niveau du plan des atomes étant de $1.04\ \mu\text{m}$, un faisceau incident d'intensité $I_i = I_{\text{sat}}/10$ correspond à $N_i = 340$ photons par pixel et le nombre de photons transmis $N_f \approx N_i e^{-n\sigma}$ vaut, pour une densité optique typique comprise entre 1 et 2, $N_f \approx 45$ à 125. Dans le mode de lecture rapide de la caméra, qui est le mode que nous avons utilisé, le bruit électronique est d'environ 8 photo-électrons par pixel. Le nombre N_f de photons détectés est donc 5 fois plus grand que le bruit électronique dans le cas le moins favorable.

Dans le régime de haute intensité, la transition est proche de saturation et le taux de diffusion vaut $\gamma \approx \Gamma/2$. La force de pression de radiation vaut alors $\hbar k_L \Gamma/2$ et le déplacement des

10. À ce stade, la valeur exacte n'a pas d'importance dès lors qu'elle est du bon ordre de grandeur.

atomes dans la direction de propagation du faisceau s'écrit $\Delta z = \frac{1}{2} \frac{\hbar k_L \Gamma}{2m} \tau^2$, où τ est la durée de l'impulsion. Pour une impulsion de $10 \mu\text{s}$, ce déplacement vaut déjà $\Delta z \approx 5.5 \mu\text{m}$, nous nous limiterons donc à une durée de $2.5 \mu\text{s}$ à $5 \mu\text{s}$. Enfin, précisons que l'étalement transverse du nuage est négligeable pour des durées aussi courtes¹¹.

Détermination de α^*

Pour la détermination du coefficient α^* , nous suivons la procédure développée par Reinaudi *et al.* [105]. L'idée de cette méthode s'appuie sur le fait que la densité optique généralisée $d_O(x, y)$ ne dépend que des propriétés du nuage (cf. Eqs. (3.11)-(3.21)) et par conséquent prend la même valeur quelle que soit l'intensité du faisceau sonde.

On commence par acquérir des images d'un nuage tridimensionnel pour différentes valeurs d'intensité allant du régime non saturant au régime de saturation forte. Comme nous l'avons expliqué plus haut, chacune de ces images contient d'une part le profil d'absorption $I_f(x, y)$ et d'autre part la référence du faisceau laser¹² $I_i(x, y)$. Pour chaque image on calcule la quantité :

$$\tilde{d}_\alpha(x, y) = -\alpha \ln \left(\frac{I_f(x, y)}{I_i(x, y)} \right) + \frac{I_i(x, y) - I_f(x, y)}{I_{\text{sat}}}, \quad (3.23)$$

pour différentes valeurs du paramètre α , sachant que lorsque ce paramètre prend la valeur α^* , la quantité $\tilde{d}_{\alpha^*}(x, y)$ coïncide avec $d_O(x, y) = \sigma_0 \int n^{(3D)} dz$ et a donc la même valeur indépendamment de l'intensité incidente sur les atomes. Pour identifier la valeur α^* , on calcule donc, pour chaque valeur de α , la déviation standard sur les valeurs de $\tilde{d}_\alpha(x, y)$ obtenues pour les différentes intensités. La valeur de α pour laquelle la déviation est minimale correspond à α^* .

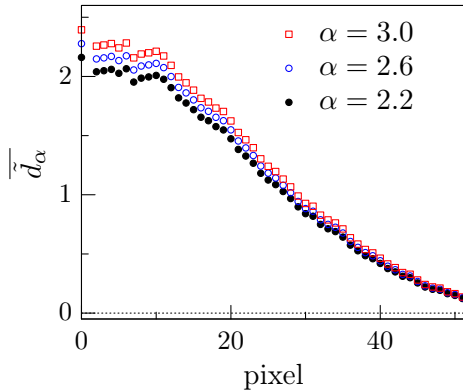


FIGURE 3.11 – Exemples de profils radiaux de la quantité $\tilde{d}_\alpha$ pour trois valeurs de α . Chacun de ces profils sera comparé à ceux obtenus avec d'autres intensités incidentes I_i et pour la même valeur de α . Nous nous intéressons alors à la dispersion de la quantité $\tilde{d}_\alpha$ en chaque point. Lorsque $\alpha = \alpha^*$, la dispersion doit être minimale.

Cette procédure peut être améliorée en travaillant non pas sur des pixels individuels mais

11. Pour estimer cet étalement transverse Δx , nous pouvons partir de la description du mouvement des atomes dans le plan par une marche aléatoire dans l'espace des impulsions. Nous pouvons alors montrer que $\Delta x = \Delta v \tau / 3$, avec la dispersion en vitesse qui vaut $\Delta v \approx (\hbar k_L / m) \sqrt{N_{\text{diff}}} / 3$ où N_{diff} est le nombre de photons diffusés. Pour $\tau = 10 \mu\text{s}$, nous avons $N_{\text{diff}} \approx 190$ et $\Delta x \approx 0.3 \mu\text{m}$.

12. En pratique, le faisceau n'ayant pas une intensité uniforme, nous introduisons ici la dépendance en position de l'intensité.

sur des profils radiaux obtenus par moyenne angulaire prenant en compte l'anisotropie du nuage (Fig. 3.11). On produit donc à partir de chaque image des profils radiaux de la quantité $\tilde{d}_\alpha(r)$ qui est la valeur moyenne de $\tilde{d}_\alpha(x, y)$ sur une équipotentielle de rayon $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ce qui a l'avantage de réduire considérablement le bruit.

Dans notre cas, la valeur de α^* dépend en général de la durée et de l'instant de l'impulsion lumineuse, pour les raisons évoquées plus haut. Nous avons donc mis en œuvre cette procédure pour des impulsions lumineuses de $50\ \mu\text{s}$ et $10\ \mu\text{s}$. Les intensités exploitées sont uniformément réparties dans l'intervalle de $\sim 0.1 I_{\text{sat}}$ à $\sim 6 I_{\text{sat}}$. Le résultat obtenu est représenté sur la figure 3.12, où l'on trace la valeur du paramètre α optimal (*i.e* donnant la déviation standard minimale) en fonction de la distance au centre du nuage. La graphe de la figure 3.12a correspond à l'impulsion de $50\ \mu\text{s}$ et montre que la valeur optimale de α est remarquablement stable. En particulier, il est rassurant de constater qu'elle ne dépend pas de d_O . En effet, chaque position correspond à une valeur donnée de la densité optique généralisée, qui varie continûment de $d_O = 0$ à $d_O \sim 3$ sur les échantillons étudiés (3.11). Les barres d'erreur correspondent à la dispersion statistique sur plusieurs réalisations expérimentales. En moyennant sur l'intervalle de pixels pertinent, situé entre les lignes verticales, on trouve $\alpha^* = 2.6 \pm 0.3$. L'intervalle sur lequel on calcule la moyenne exclut la partie centrale et les ailes, qui sont des régions peu fiables. En effet, la partie centrale étant optiquement dense, l'absorption totale des photons incidents peut survenir à basse intensité, ce qui fausse la densité au centre. Dans les ailes, la densité atomique est très faible et le signal sur bruit est de ce fait fortement réduit.

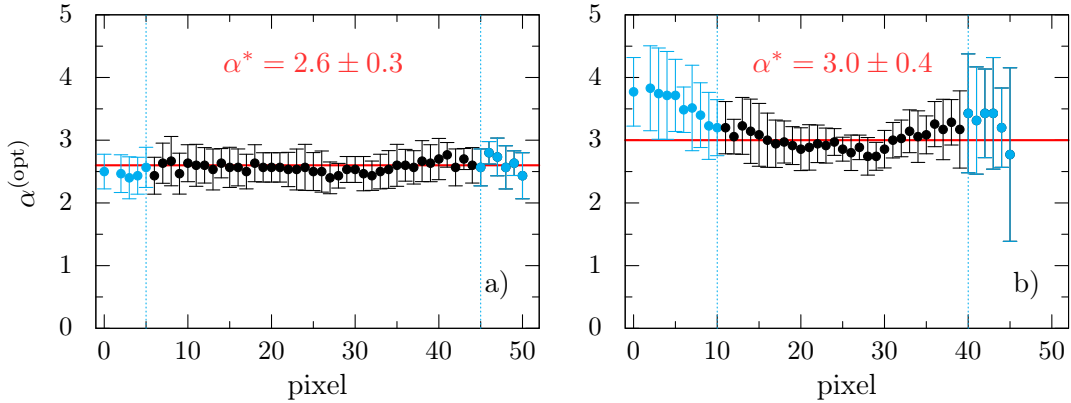


FIGURE 3.12 – Valeur optimale de α en fonction de la distance au centre pour une impulsion de $50\ \mu\text{s}$ (a) et une impulsion de $10\ \mu\text{s}$ (b) à un instant donné de la rotation du TOP. Les régions de haute et basse densités sont ignorées pour le calcul de α^* .

Pour l'impulsion de $10\ \mu\text{s}$ (Fig. 3.12b) on obtient $\alpha^* = 3.0 \pm 0.4$ en moyennant ici aussi sur l'intervalle délimité par les lignes verticales. Le fait que les régions extrêmes sont encore plus pathologiques dans ce cas précis est dû au fait que le nombre de photons est réduit d'un facteur 5 par rapport au cas précédent, ce qui amplifie le problème d'absorption totale au centre et réduit encore davantage le signal sur bruit dans les ailes. Notons bien que cette valeur de α^* est valable à un instant précis de la rotation du champ tournant.

Nous n'avons pas répété la procédure pour des impulsions plus courtes car nous nous attendons à un changement relatif bien inférieur à la précision de la méthode.

3.2.3 Imagerie de nuages 2D denses

Nous allons à présent nous rapprocher davantage de notre sujet central qui est l'étude des gaz bi-dimensionnels à l'équilibre thermodynamique. Comme nous l'avons évoqué plus haut, les densités atomiques que nous atteignons dans ce genre de systèmes sont suffisamment élevées pour que surviennent d'une part, le phénomène de diffusion multiple de photons par les atomes et, d'autre part, le déplacement des niveaux par interaction dipolaire. Afin de limiter ces effets, on peut recourir à l'utilisation d'un faisceau sonde fortement saturant. En effet, la diffusion multiple de photons est fortement réduite puisque la probabilité qu'un atome saturé réabsorbe un photon émis par un atome voisin est très faible. En ce qui concerne le déplacement des niveaux, qui est de l'ordre de $\hbar\Gamma$ pour nos paramètres, il devient négligeable à haute intensité puisque la fréquence de Rabi associée au champ de photons incident devient plus grande que Γ .

Dans ce qui suit, nous nous proposons de voir dans quelle mesure il est possible de s'affranchir de ces effets et de définir les conditions d'imagerie qui nous permettront d'étudier de manière fiable des gaz de Bose bi-dimensionnels.

Dans un premier temps, nous cherchons à mettre en évidence expérimentalement l'effet de la saturation des atomes sur la détectivité lors de l'imagerie de nuages atomiques 2D denses. Pour cela, nous prenons des images de nuages préparés dans les mêmes conditions en alternant entre intensité faiblement saturante et intensité saturante. Les nuages atomiques sont produits de façon à avoir des densités atomiques centrales de l'ordre de $75 \text{ at./}\mu\text{m}^2$, qui sont les densités centrales typiques que l'on atteint pour le régime de paramètres thermodynamiques que nous souhaitons étudier.

À partir de chaque image, nous produisons des profils radiaux de la quantité $\tilde{d}_{\alpha^*}$ (*i.e.* la quantité (3.23) avec $\alpha = \alpha^*$) qui coïncide avec la densité optique généralisée d_O . L'imagerie basse intensité est réalisée à l'aide d'une impulsion de $50 \mu\text{s}$ ($\alpha^* \approx 2.6$) et une intensité de $0.6 I_{\text{sat}}$, et l'imagerie haute intensité avec une impulsion courte de $5 \mu\text{s}$ (synchronisée telle que $\alpha^* \approx 3.0$) d'intensité $8.3 I_{\text{sat}}$. Les valeurs d'intensité incidente fournies ici ne sont qu'indicatives, elles correspondent à la valeur moyenne de l'intensité sur une région donnée de la caméra (100×100 pixels typiquement) centrée sur la position du centre du nuage. La quantité $\tilde{d}_{\alpha^*}$ est calculée localement par un comptage de photons sur chaque pixel.

Nous avons tracé sur la figure 3.13a les profils radiaux moyens (moyenne sur ~ 8 profils radiaux pour chaque cas) correspondant à ces deux configurations d'imagerie. Alors que l'accord est excellent dans les ailes, la densité optique mesurée au centre du nuage est plus élevée à haute intensité. Cette observation correspond au résultat attendu et illustre le fait qu'en saturant les atomes, on réduit les effets collectifs dans le processus d'absorption. Sur la figure 3.13b, nous représentons les mêmes données en traçant la densité optique $d_O^{(0.6 I_{\text{sat}})}$ mesurée à basse intensité en fonction de celle mesurée à haute intensité, où l'on voit que le déficit de détectivité se manifeste à partir de $d_O^{(8.3 I_{\text{sat}})} \sim 1.5$. Ceci contraste avec le cas 3D dans lequel ces effets collectifs apparaissent en général pour des densités optiques bien plus élevées. Le point étant

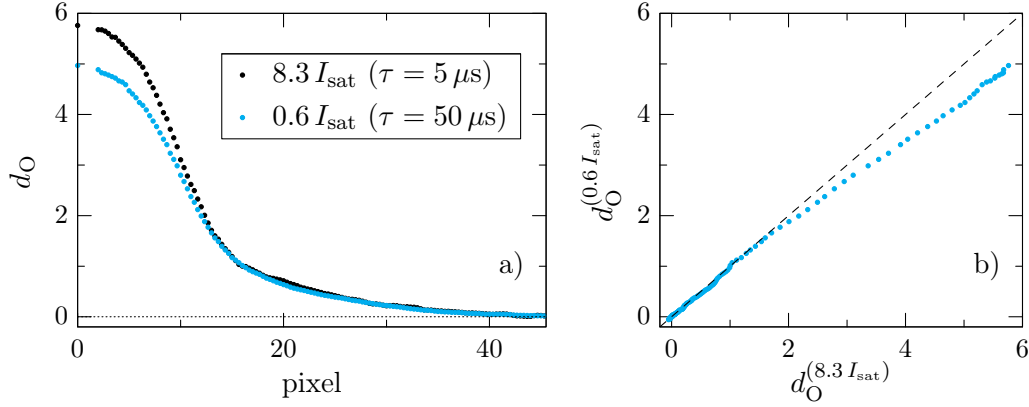


FIGURE 3.13 – (a) Profils de densité optique généralisée obtenus sur un nuage 2D dense avec $I_i = 8.3 I_{\text{sat}}$ (en noir) et $I_i = 0.6 I_{\text{sat}}$ (en bleu ciel). (b) Densité optique généralisée mesurée à basse avec $I_i = 0.6 I_{\text{sat}}$ en fonction de celle mesurée à $I_i = 8.3 I_{\text{sat}}$. La ligne tiretée est la droite de pente 1.

qu'à deux dimensions, une densité optique généralisée d_O de l'ordre de l'unité (*i.e.* $n\sigma_0 \sim 1$) correspond à des densités spatiales élevées.

Ce gain en détectivité, obtenu pour une intensité du faisceau sonde de $8.3 I_{\text{sat}}$, ne signifie pas pour autant que nous mesurons la densité réelle. Pour répondre à cette question, nous avons réalisé des mesures similaires à celles décrites précédemment en variant l'intensité sur deux ordres de grandeur dans le régime de saturation forte, entre $\sim I_{\text{sat}}$ et $\sim 100 I_{\text{sat}}$. L'idée de cette expérience étant d'identifier une intensité seuil au dessus de laquelle, il n'y a plus de perte de détectivité.

La valeur maximale de l'intensité de $\sim 100 I_{\text{sat}}$ est essentiellement motivée par des raisons de qualité de signal. En effet, comme nous l'avons vu en section 3.1.1, lorsque $I_i \gg I_{\text{sat}}$, le terme dominant dans l'expression de la densité optique est $d_O^{(h)} = (I_i - I_f)/I_{\text{sat}} = (N_i - N_f)/N_{\text{sat}}$, où $N_{\text{sat}} \approx 170$ pour nos paramètres (taille de pixel $1.04 \mu\text{m}$ et impulsion de $2.5 \mu\text{s}$). Le bruit dû aux fluctuations poissonniennes des champs de photons s'écrit donc $(\sqrt{N_i} + \sqrt{N_f})/N_{\text{sat}} \approx \sqrt{2N_i}/N_{\text{sat}}$, puisque $N_f \approx N_i$ pour nos densités optiques qui sont de quelques unités. On voit donc que pour $N_i \approx 100 N_{\text{sat}}$ le bruit sur la densité optique vaut ~ 1.1 , ce qui est relativement élevé.

Configuration	1	2	3	4	5	6	7
I_i	$1.7 I_{\text{sat}}$	$2.2 I_{\text{sat}}$	$6 I_{\text{sat}}$	$12 I_{\text{sat}}$	$18 I_{\text{sat}}$	$42 I_{\text{sat}}$	$108 I_{\text{sat}}$
τ	$50 \mu\text{s}$	$50 \mu\text{s}$	$5 \mu\text{s}$	$2.5 \mu\text{s}$	$2.5 \mu\text{s}$	$2.5 \mu\text{s}$	$2.5 \mu\text{s}$

TABLE 3.1 – Configurations d'imagerie dans le régime de saturation forte.

Les différentes configurations d'imagerie utilisées pour cette étude comparative sont décrites dans le tableau 3.1 où nous avons indiqué l'intensité incidente I_i et la durée d'impulsion corres-

pondantes. Le choix des durées des impulsions dépend de l'intensité pour les raisons évoquées à la section précédente. Essentiellement, à basse intensité, le signal sur bruit est le facteur limitant et une impulsion de $50\mu\text{s}$ est bien adaptée. À haute intensité l'accélération des atomes due au faisceau sonde induit un mouvement non négligeable pendant la durée de l'impulsion lumineuse. Il est alors préférable d'utiliser des impulsions courtes. Notons que les impulsions les plus courtes, qui sont de $2.5\mu\text{s}$, sont à la limite des performances de nos appareils de contrôle pour les impulsions lumineuses. Pour chaque configuration d'imagerie, nous produisons un profil radial moyen à partir de plusieurs profils obtenus pour des nuages préparés de façon identique. La densité optique $d_O = \tilde{d}_{\alpha^*}$ étant calculée avec $\alpha^* = 2.6$ pour les impulsions de durée $\tau = 50\mu\text{s}$ et $\alpha^* = 3.0$ pour $\tau \leq 5\mu\text{s}$.

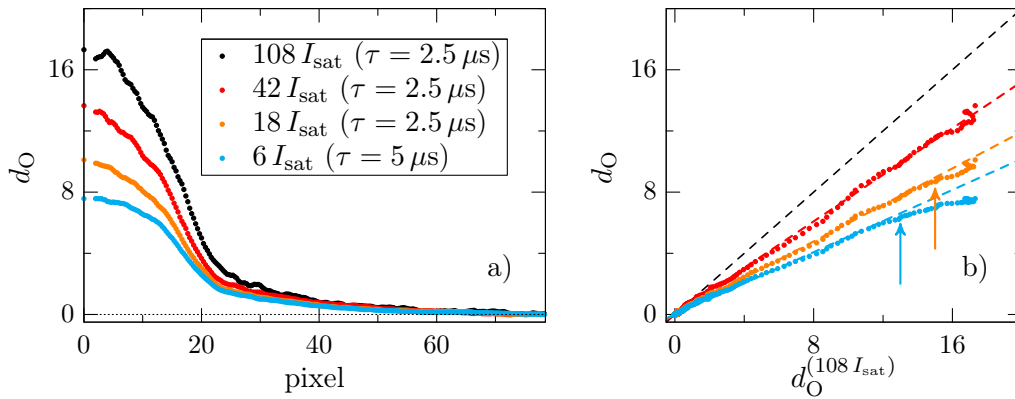


FIGURE 3.14 – (a) Profils de densité optique généralisée pour plusieurs intensités dans le régime de saturation forte : $I_i = 6 I_{\text{sat}}$, $18 I_{\text{sat}}$, $42 I_{\text{sat}}$ et $108 I_{\text{sat}}$ (en bleu ciel, orange, rouge et noir respectivement). (b) Comparaison avec $d_O^{(108 I_{\text{sat}})}$. La ligne tiretée noire est la droite de pente 1, les autres lignes tiretées sont des ajustements linéaires sur les régions de basse densité. Les flèches verticales indiquent les points où d_O dévie de la loi linéaire pour $I_i = 6 I_{\text{sat}}$ (flèche bleu ciel) et $I_i = 18 I_{\text{sat}}$ (flèche orange).

Le graphe de la figure 3.14a, représente les profils correspondant aux configurations 3, 5, 6 et 7. La densité optique mesurée augmente avec l'intensité incidente y compris dans les régions de faible densité, ce qui semble à première vue en contradiction avec la figure 3.13a, où les profils haute et basse intensités sont en très bon accord dans les ailes. La figure 3.14b correspond aux mêmes données où l'on a tracé $d_O^{(6 I_{\text{sat}})}$, $d_O^{(18 I_{\text{sat}})}$, $d_O^{(42 I_{\text{sat}})}$ en fonction de $d_O^{(108 I_{\text{sat}})}$, cette dernière configuration étant *a priori* la plus fiable. Un premier résultat intéressant est le fait que la relation entre $d_O^{(42 I_{\text{sat}})}$ et $d_O^{(108 I_{\text{sat}})}$ est parfaitement linéaire mais de pente inférieure à 1. Les deux quantités ne diffèrent donc que par un facteur global. Ensuite, nous voyons que $d_O^{(18 I_{\text{sat}})}$ et $d_O^{(6 I_{\text{sat}})}$ suivent d'abord une loi linéaire avant de dévier pour des densités optiques telle que $d_O^{(108 I_{\text{sat}})} \sim 13$ et $d_O^{(108 I_{\text{sat}})} \sim 15$ respectivement. Comme précédemment, nous attribuons ces déviations à l'apparition des phénomènes collectifs qui augmentent quand l'intensité diminue. Dans les parties linéaires (ou de faible densité optique), l'interprétation de la valeur des pentes est moins immédiate. Pour être plus quantitatifs, nous introduisons le facteur $\kappa^{(I_i)}$ qui correspond au

facteur global entre $d_O^{(I_i)}$ et $d_O^{(6 I_{\text{sat}})}$ dans les régions de basse densité. Pour les données présentées ici, nous avons $\kappa^{(18 I_{\text{sat}})} = 1.18$, $\kappa^{(42 I_{\text{sat}})} = 1.46$ et $\kappa^{(108 I_{\text{sat}})} = 1.96$. L'origine de ce facteur $\kappa^{(I_i)}$ est de nature technique et décrite en détail dans l'annexe A. Plus précisément, ce facteur global est dû à la forme temporelle imparfaite de l'impulsion lumineuse de $2.5 \mu\text{s}$ (qui n'est pas de forme rectangulaire). Il s'ensuit que les profils $d_O^{(18 I_{\text{sat}})}(r)$, $d_O^{(42 I_{\text{sat}})}(r)$ et $d_O^{(108 I_{\text{sat}})}(r)$ qui ont été calculés en supposant une impulsion rectangulaire sont affectés d'un facteur multiplicatif. Les «vrais» profils sont donc donnés par $d_O^{(I_i)}(r)/\kappa^{(I_i)}$ pour les configurations avec $\tau = 2.5 \mu\text{s}$.

La figure 3.15a représente les profils obtenus après division par le coefficient $\kappa^{(I_i)}$. Les profils à $42 I_{\text{sat}}$ et $108 I_{\text{sat}}$ se superposent parfaitement. À $18 I_{\text{sat}}$, un léger déficit de détectivité demeure dans la région centrale. Pour $I_i \gtrsim 40 I_{\text{sat}}$ nous réduisons donc les effets collectifs au niveau du bruit expérimental et nous atteignons la détectivité maximale pour les densités spatiales de nos nuages 2D. Le graphe 3.15b permet de faire le bilan de cette étude. Nous y représentons la valeur moyenne de la densité optique généralisée (après division par $\kappa^{(I_i)}$) au centre du nuage en fonction de l'intensité du faisceau sonde.

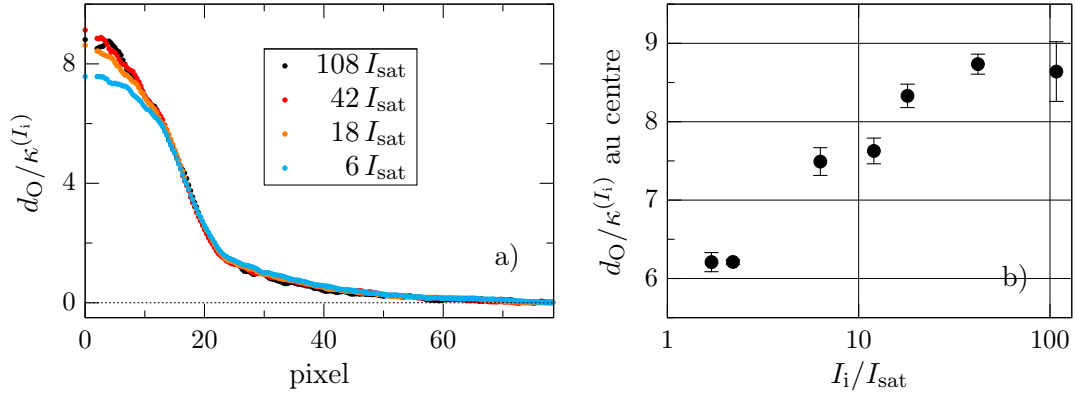


FIGURE 3.15 – (a) Profils normalisés. Les profils de densité obtenus à $42 I_{\text{sat}}$ (en rouge) et $108 I_{\text{sat}}$ (en noir) se superposent parfaitement à l'échelle du bruit. Il n'y a donc plus de déficit de détectivité pour un faisceau sonde d'intensité supérieure à $\sim 40 I_{\text{sat}}$. (b) Bilan de l'étude : valeur de d_O mesurée au centre du nuage pour les différentes configurations d'imagerie (cf. Tab. 3.1).

Dans la suite nous utiliserons des valeurs d'intensité incidente de l'ordre de $50 I_{\text{sat}}$, soit légèrement au dessus du seuil de détection maximal, afin de limiter les inconvénients dus à la haute intensité que nous avons évoqué plus haut (faible signal sur bruit). Pour une intensité aussi élevée, nous avons vu que le terme $d_O^{(h)} = \delta I/I_{\text{sat}}$ est dominant et que, comme l'illustre la figure 3.2, le poids relatif du terme $d_O^{(b)}$ est quasiment constant (à mieux que 1%) pour $\delta I/I_i < 0.3$. La contribution du terme additif $d_O^{(b)}$ est donc analogue à celle d'un facteur multiplicatif (≈ 1.06 pour $50 I_{\text{sat}}$). Nous ignorerons donc systématiquement le terme $d_O^{(b)}$ à haute intensité, ce qui présente l'avantage d'éliminer une source de bruit sur le signal de densité, sachant que sa contribution peut être prise en compte par un facteur multiplicatif.

Chapitre 4

Equation d'état du gaz de Bose 2D

Une propriété remarquable du gaz de Bose à deux dimensions est l'invariance d'échelle (approximative) de son équation d'état dans le régime d'interaction faible. Dans ce chapitre, nous présentons des mesures d'équations d'état pour plusieurs grandeurs thermodynamiques : la pression réduite $\mathcal{P}$, la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D}$ et l'entropie par particule $\mathcal{S}$. Nous verrons que nos mesures confirment l'invariance d'échelle attendue, et qui a été observée par ailleurs par Hung *et al.* [59]. Notre équation d'état pour $\mathcal{D}$ est en très bon accord quantitatif avec les mesures de Hung *et al.* et la prédiction théorique de Prokof'ev et Svistunov [101]. Les équations d'état pour $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ constituent des résultats originaux et sont en très bon accord avec les prédictions existantes, valables dans les régimes faiblement dégénéré d'une part et fortement dégénéré d'autre part.

Avant de présenter le résultat de ces mesures, nous décrirons à la section 4.1 le dispositif expérimental et la procédure permettant de produire des gaz 2D sur notre expérience. Nous y détaillerons également notre méthode pour caractériser finement le potentiel ressenti par les atomes. La section 4.2 sera consacrée à la procédure d'acquisition et d'analyse des images. Nous verrons qu'en combinant les techniques d'imagerie par absorption non-saturante et fortement saturante, il est possible d'obtenir une mesure optimale de la distribution atomique de nos nuages. L'ensemble de nos résultats expérimentaux seront présentés à la section 4.3. Nous montrerons qu'en vertu de l'approximation de densité locale et de la nature harmonique du potentiel radial, l'équation d'état du gaz homogène peut être obtenue à partir de mesures de la distribution atomique de gaz piégés¹. Nous obtiendrons ainsi les équations d'état pour $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$. Grâce à l'invariance de ces deux équations d'état, nous déduirons celle de l'entropie par particule $\mathcal{S}$. Enfin, nous terminerons ce chapitre par une étude détaillée sur la prise en compte de la troisième dimension dans nos systèmes.

4.1 Préparation expérimentale d'un gaz 2D

La préparation des échantillons expérimentaux que nous étudions se décompose en plusieurs étapes. Nous commençons par produire un condensat de Bose–Einstein tri-dimensionnel piégé

1. La condition sur la nature harmonique du potentiel radial est nécessaire pour la mesure de $\mathcal{P}$. Pour $\mathcal{D}$, il suffit d'avoir une bonne connaissance du potentiel.

magnétiquement au niveau de la cellule en verre, qui est le lieu physique où sont réalisées les mesures. Nous branchons ensuite le potentiel dipolaire permettant de réaliser un confinement fort selon l'axe vertical (Oz) et d'atteindre le régime quasi-2D. En pratique, la présence simultanée du potentiel dipolaire et du piège magnétique, donne lieu, en plus du plan atomique central d'intérêt, à deux lobes atomiques non souhaités (l'un au dessus et l'autre en dessous du plan) empêchant de sonder directement le plan central en imagerie verticale. Une dernière étape consiste donc à rendre non détectables les atomes occupant ces lobes.

Bien qu'en théorie le potentiel optique n'est pas censé modifier le potentiel harmonique (xOy), nous verrons qu'en pratique il introduit de légères rugosités. Il est néanmoins possible de reconstruire précisément ce potentiel qui présente de légères déviations par rapport à un potentiel parfaitement harmonique.

4.1.1 Confinement des atomes dans un plan

Le potentiel dipolaire produisant le confinement selon (Oz) est réalisé à l'aide d'un laser de longueur d'onde 532 nm, qui est donc désaccordé vers le bleu de la transition atomique D_2 du ^{87}Rb . Grâce à une méthode holographique [110] que nous décrivons ci-après, nous créons deux nappes de lumières répulsives très rapprochées. Les atomes confinés entre ces deux barrières de potentiel ressentent alors un confinement harmonique de grande raideur permettant d'atteindre, à basse température, le régime quasi-2D.

Mise en forme du potentiel optique

La réalisation du potentiel dipolaire repose sur l'utilisation d'une *lame de phase* qui, lorsqu'elle est traversée par un faisceau laser, y imprime une phase dépendant de la position dans le plan de la lame. Il s'agit d'une lame de verre ($25\text{ mm} \times 25\text{ mm} \times 1\text{ mm}$ dans notre cas) sur laquelle a été appliqué un dépôt lithographique² dont l'épaisseur varie avec la position dans le plan de la lame. Elle engendre un déphasage dépendant de la position sur un faisceau laser qui la traverse. Le principe d'utilisation de cette lame de phase sur notre montage expérimental est illustré dans le schéma de la figure 4.1. L'idée de ce dispositif est d'envoyer un faisceau collimaté à travers la lame de phase et de le focaliser ensuite sur les atomes à l'aide d'une lentille convergente. La modification de la phase du faisceau avant la lentille se traduit donc, au point focal (c'est-à-dire dans le plan de Fourier associé à la lentille) par une modulation spatiale de l'intensité.

Dans notre cas, nous utilisons une lame à marche de phase imprimant une phase de π sur sa moitié supérieure (Fig. 4.2). À l'approximation paraxiale, nous pouvons montrer par un calcul analytique³ que la distribution d'intensité dans le plan focal $x = 0$ est :

$$I(x = 0, y, z) = I_0 e^{-2y^2/w_y^2} \underbrace{\left[\frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin\left(2u \frac{z}{w_z}\right) e^{-u^2} du \right]}_{\mathcal{J}(z)}, \quad (4.1)$$

2. Ce type de produits a été fait réaliser sur mesure auprès du fabricant SILIOS.

3. Le raisonnement et le calcul aboutissant à ce résultat ont été présentés de façon détaillée dans la thèse de S. P. Rath [102].

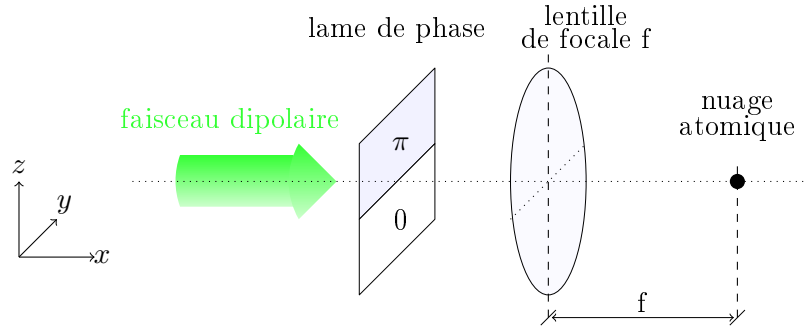


FIGURE 4.1 – Schéma de principe du montage permettant de réaliser deux nappes de lumière répulsives. Le faisceau dipolaire est envoyé collimaté sur une lame de phase avant d'être focalisé sur les atomes par une lentille. La phase imprimée sur le faisceau se traduit, au niveau du plan focal, par une modulation d'intensité créant des nappes de lumières très rapprochées.

où I_0 est l'intensité au col du faisceau (en l'absence de lame de phase). Le long de l'axe horizontal (Oy) la distribution d'intensité n'est pas modifiée et reste gaussienne, ce qui est attendu compte tenu de la symétrie de la lame de phase. Le long de l'axe vertical (Oz), l'intégrale $\mathcal{J}(z)$ se calcule numériquement et a la forme représentée sur la figure 4.2 (ligne continue). Comme on peut le voir $\mathcal{J}(z)$ se présente sous la forme de deux pics d'intensité séparés par un minimum d'intensité nul en $z = 0$.

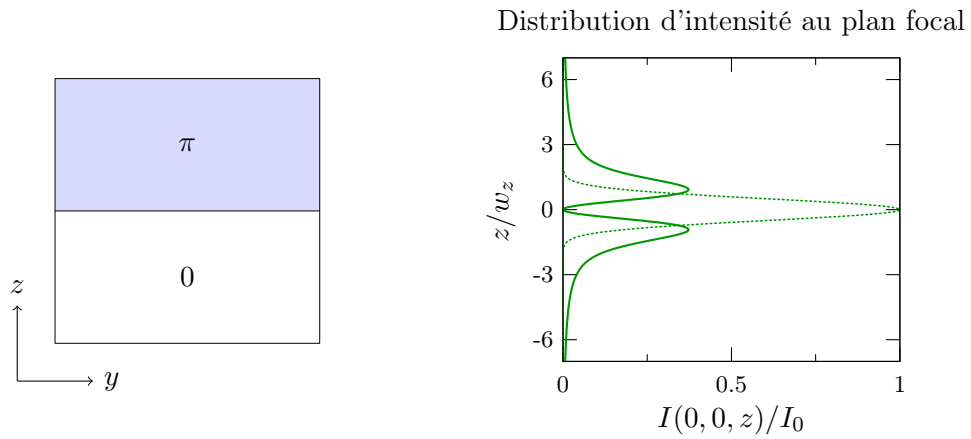


FIGURE 4.2 – À gauche : lame à marche de phase $0-\pi$. À droite : coupe en $y = 0$ de la distribution d'intensité normalisée dans le plan focal (ligne verte continue). Le profil du faisceau en l'absence de lame de phase est tracé en ligne pointillée.

On peut montrer analytiquement qu'au voisinage de ce minimum la distribution d'intensité prend la forme (en $x = y = 0$) :

$$I(0, 0, z \ll w_z) \approx \frac{4}{\pi} \frac{I_0}{w_z^2} z^2, \quad (4.2)$$

où w_z est la largeur optique⁴ du faisceau selon (Oz) au point focal en l'absence de lame de phase. Comme le potentiel dipolaire ressenti par les atomes est proportionnel à l'intensité, le confinement vertical au voisinage du minimum d'intensité est harmonique avec une pulsation caractéristique ω_z telle que :

$$\omega_z \propto \frac{I_0}{w_z^2} \propto \frac{P_0}{w_y w_z^3}. \quad (4.3)$$

La fréquence de confinement vertical est donc fixée par la puissance P_0 du faisceau laser et les largeurs optiques w_y et w_z . Idéalement, nous souhaiterions que ce confinement soit uniforme dans le plan (xOy) , de façon à ce que tous les atomes du plan ressentent le même potentiel vertical. En pratique, cela n'est évidemment pas possible compte tenu de la taille finie du faisceau dans la direction (Oy) et de la divergence du faisceau de part et d'autre du point focal le long de l'axe de propagation (Ox) . Ces inhomogénéités peuvent néanmoins être minimisées par un choix judicieux des largeurs optiques w_y et w_z du faisceau dans le plan focal⁵, de façon à ce que les variations du confinement soient faibles sur une distance de l'ordre de $50 \mu\text{m}$, ce qui correspond au diamètre typique des nuages bi-dimensionnels que nous souhaitons étudier.

Typiquement, une configuration avec des largeurs optiques $w_y = 150 \mu\text{m}$ et $w_z = 5 \mu\text{m}$, soit une longueur de Rayleigh⁶ $L_R^{(z)} \approx 150 \mu\text{m}$, est confortable en ce sens et expérimentalement faisable. Avec ces valeurs de w_y et w_z et une puissance laser $P_0 = 1 \text{ W}$, on trouve⁷ $\omega_z = 2\pi \times 3.5 \text{ kHz}$ au point focal. Ceci correspond à une extension verticale $\ell_z = \sqrt{\hbar/m\omega_z} = 180 \text{ nm}$ pour les atomes dans le niveau fondamental de l'oscillateur. La condition de validité de l'approximation harmonique $\ell_z \ll w_z$ est donc bien vérifiée. Pour ces mêmes paramètres, le calcul numérique de la distribution d'intensité donne une hauteur de barrière de $\sim 20 \mu\text{K}$ soit plus de deux ordres de grandeurs au dessus des températures typiques ($50 - 100 \text{ nK}$) de nos condensats.

Mise en place sur le montage expérimental

Le faisceau laser à 532 nm est produit par un module *Verdi 10W* du fabricant *Coherent*. Le faisceau en sortie du Verdi est guidé à travers un modulateur acousto-optique (MAO) avant d'être injecté dans une fibre optique. Le recours à ce type de montage est motivé par la nécessité de pouvoir éteindre le faisceau laser dans un temps très court, ce que permet de faire le MAO avec un temps de coupure inférieur à la microseconde, limité par l'électronique de contrôle. Le profil du faisceau étant dégradé par la traversée du MAO, le filtrage spatial par une fibre optique monomode est indispensable. La puissance maximale que nous obtenons en sortie de fibre sature aux alentours de 1 W (pour 4 W en sortie du module Verdi) et constitue un des facteurs limitants de l'expérience⁸. Un système d'asservissement électronique permet de contrôler la puissance en

4. La largeur optique w d'un faisceau gaussien est définie telle que $I(r) = I_0 e^{-2r^2/w^2}$, où $I(r)$ est la distribution d'intensité dans un plan donné.

5. Notons bien qu'il s'agit là des largeurs optiques du faisceau en l'absence de lame de phase.

6. On utilise ici la définition usuelle de la longueur de Rayleigh : pour une propagation selon (Ox) et une largeur optique w_0 au col du faisceau on a $w(x) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{L_R}\right)^2}$ avec $L_R = \pi w^2/\lambda$.

7. Le potentiel dipolaire au voisinage du minimum s'écrivant $U(z) = \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 = \kappa I(z)$ avec $\kappa = 8.09 \times 10^{-37} \text{ Jm}^2/\text{W}$ pour un laser à 532 nm (nous prenons ici en compte le terme anti-résonant).

8. La raison de cette faible efficacité d'injection est liée à la technologie des fibres usuelles qui ne sont pas adaptées pour des puissances de l'ordre de quelques Watts. Des tests sont actuellement en cours pour résoudre ce

sortie de fibre (entre 0 et $P_{\max} \approx 1\text{ W}$) par rétroaction sur le MAO. Le principe est assez standard et repose sur la comparaison du signal fournit par une photodiode mesurant l'intensité du faisceau laser avec un signal de référence fourni par l'ordinateur de contrôle de l'expérience. Le signal de rétroaction du système d'asservissement agit sur l'efficacité de diffraction du MAO de façon à égaliser les deux signaux. Ce système permet non seulement de contrôler le branchement du potentiel dipolaire mais aussi d'éliminer le bruit d'intensité qui conduirait à un chauffage indésirable du nuage atomique.

En sortie de fibre, le faisceau a un profil gaussien isotrope et passe par un objectif de microscope qui permet de le collimater tout en préservant la qualité du profil. Le faisceau passe ensuite par un système optique constitué de diverses lentilles cylindriques conçu⁹ pour remplir les contraintes de forme décrites plus haut, avant de traverser la lame de phase et d'être focalisé sur les atomes.

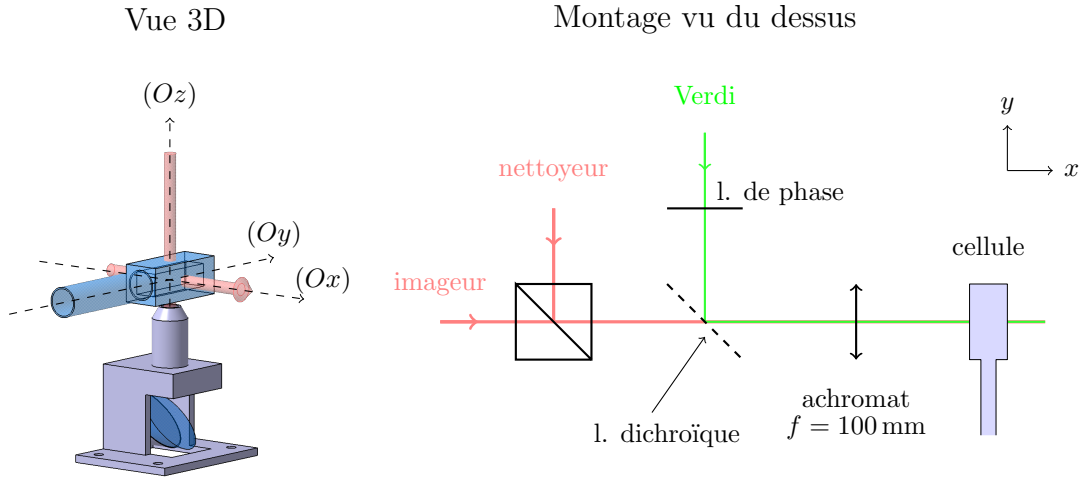


FIGURE 4.3 – À gauche : représentation dans l'espace des axes d'imagerie par rapport à la cellule en verre. À droite : schéma du montage optique au voisinage de la cellule vu du dessus. Après la traversée de la lame de phase, le faisceau dipolaire est réfléchi sur une lame dichroïque qui lui permet de suivre le même parcours optique que l'imageur horizontal. Le faisceau nettoyeur est mélangé en amont à l'aide d'un cube polarisant. L'achromat remplit deux offices : (i) il focalise le faisceau dipolaire sur les atomes ; (ii) complète le système optique que traverse le faisceau nettoyeur pour former l'image d'une corde à piano dans le plan des atomes. L'imageur diverge légèrement avant l'achromat pour arriver quasiment collimaté sur les atomes.

Le faisceau dipolaire est amené au niveau des atomes selon l'axe d'imagerie horizontale (Fig. 4.3). Ceci a facilité le positionnement grossier du faisceau dipolaire lors de sa mise en place. Nous l'avons en effet superposé au faisceau imageur déjà en place (qui évidemment passe par la position des atomes). De plus, en faisant ainsi suivre au faisceau dipolaire le parcours

problème. La stratégie retenue pour le futur consiste à utiliser une fibre à cristaux photoniques combinée avec un coupleur d'entrée adapté aux hautes puissances.

9. Ce montage est décrit en détail dans la thèse de S.P. Rath [102].

optique du faisceau imageur, nous avons la possibilité d'observer le profil du faisceau dipolaire avec le système d'imagerie horizontale et de mesurer la distribution d'intensité dans le plan des atomes¹⁰.

La superposition de ces deux faisceaux est permise par l'utilisation d'une lame dichroïque traitée pour transmettre la longueur d'onde 780 nm et réfléchir la longueur d'onde 532 nm. Un schéma du montage est représenté sur la figure 4.3. Après la traversée de la lame de phase, le faisceau dipolaire est réfléchi par la lame dichroïque puis focalisé par un doublet achromatique¹¹ de focale $f = 100$ mm. Comme le faisceau imageur, lui, doit être collimaté au niveau des atomes, nous le faisons diverger sensiblement avant la traversée de la lame dichroïque afin de compenser l'effet de l'achromat. Le positionnement précis du faisceau dipolaire sur les atomes est effectué à l'aide des vis de la monture de la lame dichroïque, grâce auxquelles nous avons un contrôle en position à l'échelle de $5\text{ }\mu\text{m}$ dans le plan des atomes.

Nettoyage des lobes «parasites»

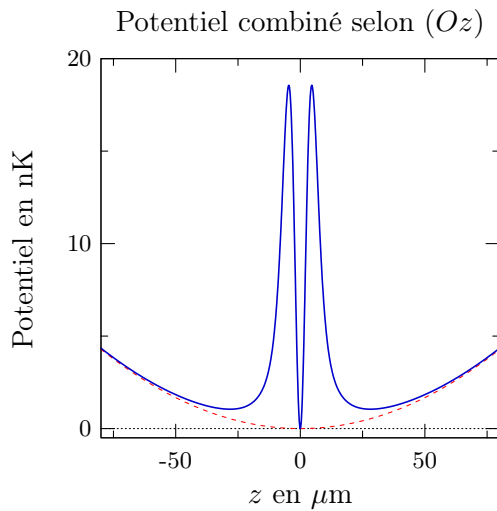


FIGURE 4.4 – Potentiel combiné (magnétique et optique) selon l'axe (Oz). Le minimum central correspond au potentiel fortement confinant. Les minima latéraux résultent de la présence du piège TOP, nécessaire pour le confinement radial. Pour nos paramètres, la hauteur de part et d'autre du minimum central est de $\sim 20\text{ }\mu\text{K}$.

Le faisceau dipolaire ne fournissant de confinement que dans la direction verticale, il est nécessaire de maintenir le piégeage magnétique. Celui-ci est assuré par un potentiel harmonique tridimensionnel de type TOP¹² [90] avec des pulsations caractéristiques $\omega_x^{\text{TOP}} \approx \omega_y^{\text{TOP}} \approx 2\pi \times 20\text{ Hz}$ et $\omega_z^{\text{TOP}} \approx 2\pi \times 57\text{ Hz}$. En présence de ce piège mixte, les atomes voient donc dans la direction verticale le potentiel représenté figure 4.4 qui présente trois minima, et se répartissent dans trois lobes spatialement distincts, parmi lesquels seul le plan central nous intéresse. La figure 4.5a représente la distribution de densité atomique mesurée en imagerie horizontale, *i.e.* le long de l'axe de propagation du faisceau dipolaire. Les lobes supérieur et inférieur sont évidemment in-

10. Dans les faits il faut également réajuster la mise au point pour tenir compte des aberrations chromatiques dues à la différence de longueur d'onde entre 532 nm (piège) et 780 nm (imageur). Ceci peut être fait de façon réversible puisque le doublet d'imagerie est disposé sur une platine de translation graduée.

11. Newport PAC073 AR.14.

12. Pour *Time-averaged Orbiting Potential*.

désirables dans la mesure où ils empêchent l'accès à la distribution atomique centrale en imagerie verticale.

Notre solution à ce problème consiste à envoyer sur ces atomes un faisceau laser *nettoyeur* accordé sur la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ qui permet, au bout de quelques cycles d'absorption-emission, de dépomper les atomes dans un état magnétique non piégeant ou dans l'état hyperfin $|F = 1\rangle$ ce qui les rend non détectables par le faisceau sonde accordé sur la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$. Pour être rigoureux cela n'est vrai que lorsque la polarisation est π ou non définie¹³, puisque la même transition est utilisée pour le pompage optique dans l'état $|F = 2, m_F = 2\rangle$ pour une polarisation rigoureusement ajustée en σ^+ vis-à-vis d'un champ magnétique directeur. Sur notre montage ce faisceau nettoyeur suit le même parcours que le faisceau sonde (Fig. 4.3), avec une polarisation linéaire selon (Oz) . Il s'ensuit que la présence du champ tournant du TOP (qui tourne dans le plan horizontal (xOy)) conduit à la configuration souhaitée pour le nettoyage des atomes.



FIGURE 4.5 – Images de deux nuages en présence du potentiel combiné (magnétique et optique). À gauche : image obtenue juste après branchement du potentiel optique. À droite : image obtenue après dépompages des atomes occupants les lobes supérieur et inférieur.

Naturellement le faisceau nettoyeur n'est pas envoyé tel quel sur le nuage puisque tous les atomes seraient dépompés, y compris ceux du plan central. Afin d'atteindre les lobes «parasites» uniquement, nous faisons passer en amont du montage le faisceau nettoyeur à travers un masque constitué d'une corde à piano en acier de $100\ \mu\text{m}$ de diamètre. Un système optique permet alors de conjuguer optiquement le plan de la corde à piano avec le plan des atomes dans un rapport $1/5$. On obtient ainsi au niveau des atomes une distribution d'intensité gaussienne parcourue par une ligne horizontale noire de $20\ \mu\text{m}$ de d'épaisseur. Avant la traversée de corde à piano, le faisceau passe à travers des prismes anamorphoseurs donnant au faisceau un rapport d'aspect similaire à celui du nuage dans la direction d'observation, ce qui permet d'accroître l'efficacité du nettoyage.

Dans les faits, la ligne noire ne l'est évidemment pas parfaitement et le plan central n'est pas complètement épargné. On a typiquement un photon qui atteint le plan central pour 50 photons dans chaque lobe. Bien que le rapport soit confortable, l'intensité du faisceau nettoyeur est limitée au strict minimum permettant de se débarrasser des lobes parasites pour les configurations expérimentales avec le plus d'atomes.

De même que pour le faisceau dipolaire, le fait que le faisceau nettoyeur suive le même parcours que le faisceau sonde facilite grandement son positionnement par rapport aux atomes. Pour cela, nous commençons par centrer le faisceau dipolaire sur le nuage de façon à obtenir

13. Ici les atomes sont dans $|F = 2, m_F = 2\rangle$, donc nous ignorons l'état noir $|F = 2, m_F = 0\rangle$.

un nuage avec un plan central bien peuplé, puis nous notons sur la caméra la position du plan central. Il suffit alors d'ajuster la position du faisceau nettoyeur de façon à superposer la ligne noire avec la position du plan central. La corde à piano étant disposée sur un support rotatif et une platine de translation, nous avons la possibilité d'ajuster finement son orientation et sa position afin de pouvoir optimiser son recouvrement avec le plan atomique central. La figure 4.5b montre un exemple de plan atomique après la phase de nettoyage sondé en imagerie horizontale.

Défocalisation du faisceau dipolaire

Lorsque l'on observe avec la caméra la distribution d'intensité créée par le faisceau dipolaire dans le plan atomique, celle-ci semble correspondre à la prédiction théorique dans le plan focal. Néanmoins, en observant par le dessus un nuage atomique chargé dans le plan central, on constate que le nuage est fortement anisotrope et que son centre de masse est déplacé $\sim 20 \mu\text{m}$ par rapport au centre du piège magnétique. Ces deux effets disparaissent progressivement à mesure que l'on s'écarte du point focal. Nous avons donc choisi de décaler le potentiel dipolaire de $\sim 50 \mu\text{m}$ le long de son axe de propagation au prix d'une réduction de la fréquence verticale de confinement. Nous fournirons une explication à cette observation à la section 4.1.2.

Description de la phase finale de la séquence expérimentale

Ayant présenté les différents ingrédients intervenant dans la préparation d'un plan unique d'atomes, nous allons à présent décrire la phase finale de notre séquence expérimentale¹⁴.

Les atomes sont amenés jusqu'à la dégénérescence quantique par refroidissement évaporatif alors qu'ils sont dans le piège TOP, à l'aide d'un champ magnétique radio-fréquence (RF). À l'issue du refroidissement évaporatif, le piège est décomprimé adiabatiquement en réduisant les fréquences du piège de 30% (via une rampe linéaire de 1 s sur le gradient du champ quadrupolaire), de façon à réduire la densité atomique au centre du nuage. Après cette décompression, nous allumons le faisceau dipolaire en augmentant lentement sa puissance. La rampe temporelle de branchement dure 1 s et suit une arche de sinus entre 0 et la puissance de consigne. La durée et la forme de la rampe ont été optimisées pour limiter le chauffage du nuage lors du branchement du piège dipolaire. La puissance de consigne est généralement fixée à 90% de la puissance maximale ($\sim 1 \text{ W}$), de façon à travailler dans un intervalle de puissance bien contrôlé par le système d'asservissement. Nous envoyons alors une impulsion lumineuse du faisceau nettoyeur qui dure¹⁵ 11 ms, l'intensité ayant été préalablement ajustée pour dépomper tous les atomes des lobes parasites. Enfin, nous branchons un champ magnétique RF de fréquence constante qui, en éliminant les atomes les plus énergétiques, empêche le chauffage dû au faisceau dipolaire et complète l'évaporation dans le nuage bi-dimensionnel. Ce bouclier RF est maintenu pendant 3 s, ce qui permet au nuage d'atteindre l'équilibre thermique, et fixe ainsi la température finale du

14. Le dispositif expérimental dans son ensemble ainsi que les principales étapes permettant d'atteindre la condensation de Bose-Einstein ont été décrits en détail dans les manuscrits de thèse M. Cheneau [24] et S. P. Rath [102].

15. La durée a été choisie pour des raisons pratiques qu'il n'est pas essentiel d'expliquer ici. Notons que c'est le nombre de photons absorbés qui importe dans cette étape de dépompage et non l'intensité du faisceau.

nuage. Nous prenons alors une image par absorption du nuage suivant la séquence d'imagerie décrite en 3.2.1.

4.1.2 Caractérisation du potentiel

Oscillations du centre de masse

Étant en mesure de charger un plan unique d'atomes, il s'agit à présent de caractériser le potentiel dans lequel évolue ce nuage atomique. En particulier, il est important de vérifier que le confinement vertical est suffisamment fort et qu'il nous permet d'atteindre le régime quasi-2D. Pour cela nous réalisons des mesures d'oscillation du centre de masse en excitant un mouvement vertical dans le potentiel dipolaire. Comme il est impossible de résoudre l'amplitude du mouvement d'oscillation *in situ* (compte tenu de la force du confinement vertical), nous effectuons la mesure après un temps de vol de 8 ms. Un exemple de cette mesure est représentée en figure 4.6 où nous montrons également un ajustement par une fonction sinusoïdale amortie.

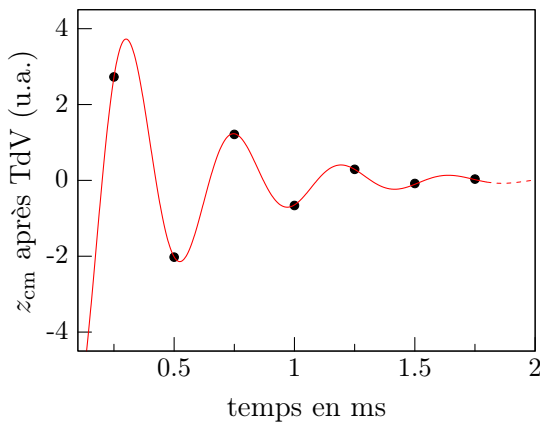


FIGURE 4.6 – Mouvement d'oscillation du centre de masse après une excitation dans la direction verticale (Oz). Comme le mouvement ne peut pas être résolu *in situ*, la position du nuage est mesurée après un temps de vol de 8 ms. L'amortissement est dû au fait que le nuage explore les anharmonicités du potentiel. L'ajustement par une sinusoïde amortie donne une fréquence de 2.2 kHz. Ce confinement est obtenu pour une puissance laser de 1.3 W.

Sur cet exemple, l'ajustement donne $\omega_z = 2\pi \times 2.2 \text{ kHz}$ et un temps caractéristique d'amortissement¹⁶ de $400 \mu\text{s}$. Nous attribuons l'amortissement au fait que le nuage explore, à cause de l'excitation, les régions anharmoniques du potentiel dipolaire. La fréquence ainsi mesurée a été obtenue pour une puissance laser de 1.3 W. Sur l'ensemble des données présentées ici, $\omega_z/2\pi \times$ varie entre 1.8 kHz et 2.2 kHz. Le fait que la fréquence de confinement verticale est plus faible que les valeurs annoncées initialement (3.5 kHz) est lié à la défocalisation décrite plus haut. Cette valeur de $2.0 \pm 0.2 \text{ kHz}$ qui correspond à un quantum de vibration $\hbar\omega_z/k_B \approx 100 \text{ nK}$, reste confortable pour étudier le régime quasi-2D, nos températures les plus basses¹⁷ étant de 40 nK. L'extension verticale du nuage vaut donc $\ell_z = 240 \pm 10 \text{ nm}$ et le paramètre d'interaction vaut $\tilde{g} = \sqrt{8\pi a}/\ell_z = 0.11 \pm 0.05$, valeur qui nous place à la limite du régime de couplage faible.

16. Ce temps est donné par la constante τ pour une amplitude décroissante $e^{-t/\tau}$.

17. Nous verrons qu'en pratique, que même pour des températures comparables au quantum de vibration, le nuage est essentiellement dans le régime quasi-2D.

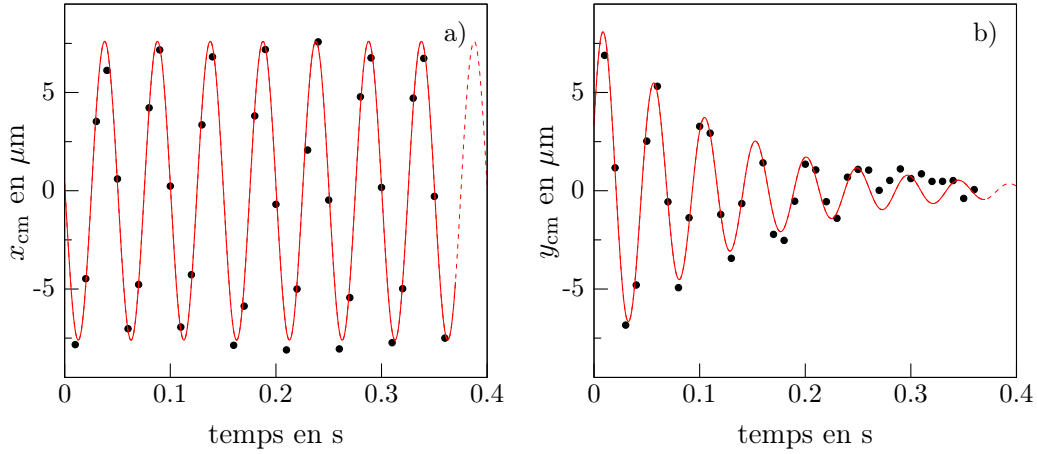


FIGURE 4.7 – Mouvement d'oscillation du centre de masse après une excitation à 45° des axes (Ox) et (Oy) . Chaque couple $(x_{cm}(t), y_{cm}(t))$ provient de la même image. Les fréquences selon les deux axes sont comparables, mais le mouvement selon l'axe (Oy) (b) est vite amorti. Cette observation s'explique par la présence de rugosités dans le potentiel optique.

De la même façon, les fréquences dans le plan sont mesurées par oscillations du centre de masse et valent $\omega_x = 2\pi \times 20.0\text{Hz}$ et $\omega_y = 2\pi \times 21.4\text{Hz}$, selon les axes (Ox) et (Oy) respectivement. La figure 4.7 montre les mesures effectuées après une excitation à 45° des axes propres (Ox) et (Oy) du potentiel magnétique, le nuage étant sondé en imagerie verticale (in situ). Alors que le mouvement selon (Ox) se présente sous la forme d'une oscillation non amortie, le mouvement selon (Oy) est rapidement amorti avec un temps caractéristique d'amortissement de 186 ms.

Des mesures d'oscillations réalisées par ailleurs dans le piège purement magnétique ne présentent pas d'amortissement anormal. L'observation de la figure 4.7b indique donc vraisemblablement la présence de rugosités du potentiel dipolaire qui s'ajoutent au potentiel magnétique dans le plan (xOy) . Notons que le potentiel selon l'axe de propagation (Ox) du faisceau n'est pas affecté, ces rugosités pourraient donc être dues à des interférences entre le faisceau dipolaire et ses réflexions sur les faces de la cellule en verre ou un autre élément optique. Ces rugosités peuvent aussi être la conséquence d'une séparation irrégulière des deux régions de la lame de phase. L'existence de ces imperfections du potentiel dipolaire explique, par ailleurs, la déformation des nuages lorsqu'ils sont chargés au niveau du point focal, puisque si rugosités il y a, elles seront naturellement amplifiées au voisinage du point focal où l'intensité du faisceau est maximale.

Reconstruction du potentiel

On peut ajouter un niveau de raffinement dans la caractérisation du potentiel en tirant parti du fait que le potentiel dans le plan (xOy) est séparable avec un potentiel selon (Ox) connu. En effet, on peut écrire le potentiel dans le plan sous la forme :

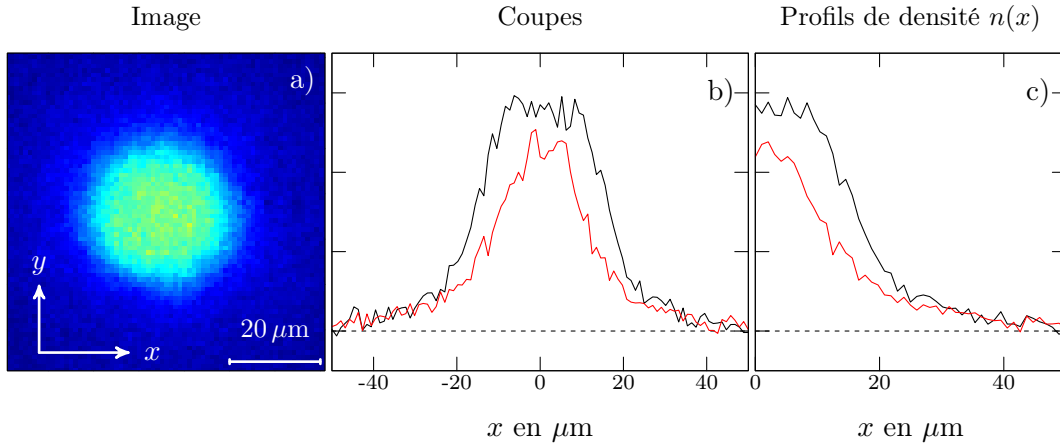


FIGURE 4.8 – Point de départ de la reconstruction du potentiel. (a) Image d'un nuage atomique vu de dessus. (b) Deux coupes selon l'axe (Ox) . (c) On produit deux profils de densité en repliant chaque coupe par rapport à son centre.

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + U(y), \quad (4.4)$$

où $U(y)$ est le potentiel résultant du confinement harmonique dû au piège magnétique et des rugosités dues au faisceau dipolaire. Par conséquent, il est possible de reconstruire le potentiel $U(y)$ à partir de la distribution de densité d'un nuage, puisque les équipotentiels correspondent aux lignes de densité constante.

Pour expliquer le principe de cette reconstruction, partons d'une image de la distribution de densité d'un nuage donné (Fig. 4.8a), sur laquelle nous faisons deux coupes selon l'axe (Ox) , l'une en y_1 et l'autre en y_2 (Fig. 4.8b). À partir de ces coupes, nous produisons deux profils de densité comme illustré sur la figure 4.8c (de façon à améliorer le signal sur bruit, nous replions la coupe sur elle-même plutôt que de prendre seulement l'une des moitiés de la coupe).

Comme le potentiel est quadratique il est plus commode d'utiliser les profils $n_1(x^2)$ et $n_2(x^2)$ (Fig. 4.9a). Pour un potentiel séparable, les deux profils doivent se superposer par une simple translation $x^2 \rightarrow x^2 + \delta$. Comme les lignes de densité constante correspondent aux équipotentiels, on a $V(x, y_1) = V(x, y_2) + m\omega_x^2 \delta / 2$. La différence de potentiel entre y_1 et y_2 à x fixé vaut donc :

$$U(y_1) - U(y_2) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 \delta. \quad (4.5)$$

La figure 4.9b montre la superposition obtenue entre les profils $n_1(x^2)$ et $n_2(x^2)$ par une méthode de moindres-carrés où on a utilisé le coefficient de translation δ comme paramètre d'ajustement.

En appliquant la procédure pour plusieurs coupes y_i d'une même image, on peut ainsi obtenir un ensemble de coefficients de translation δ_i et donc la valeur du potentiel $U(y_i) = m\omega_x^2 \delta_i / 2$. En pratique, nous utilisons les 31 coupes centrales d'une même image (soit 15 coupes de part et d'autre du centre du nuage ; au-delà le signal sur bruit est trop faible).

Afin de tester la robustesse de cette méthode nous l'avons appliquée sur un ensemble de

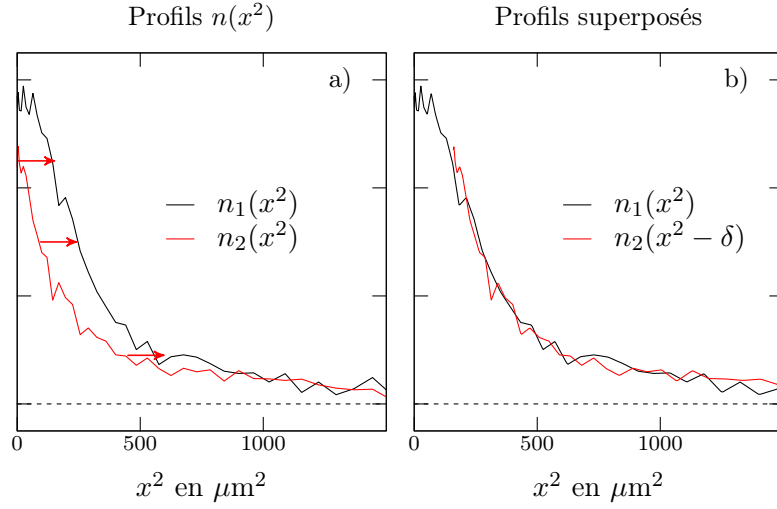


FIGURE 4.9 – (a) Profils $n_1(x^2)$ (en noir) et $n_2(x^2)$ (en rouge) obtenus respectivement à partir d'une coupe centrale en $y = y_1$ et d'une coupe plus éloignée du centre en $y = y_2$. (b) Le profil $n_2(x^2)$ se superpose au profil $n_1(x^2)$ par une simple translation.

86 images enregistrées à la suite, et comportant 6 configurations expérimentales différentes où l'on varie la température et le nombre d'atomes des échantillons atomiques. En principe, le potentiel est indépendant de ces paramètres thermodynamiques et nous pourrions contraindre l'optimisation pour avoir un seul ensemble de valeurs δ_i pour toute la série. Pour vérifier cela, nous avons appliqué une routine d'optimisation plus souple en traitant les différentes configurations indépendamment. On utilise néanmoins un seul ensemble δ_i pour toutes les images correspondant à une même configuration expérimentale. Le résultat de cette reconstruction est représenté sur la figure 4.10 où l'on a représenté la moyenne des $U(y_i)$ sur l'ensemble de la série de données avec des barres d'erreur statistique. Ces dernières correspondent aux différentes configurations expérimentales et témoignent de la robustesse de méthode.

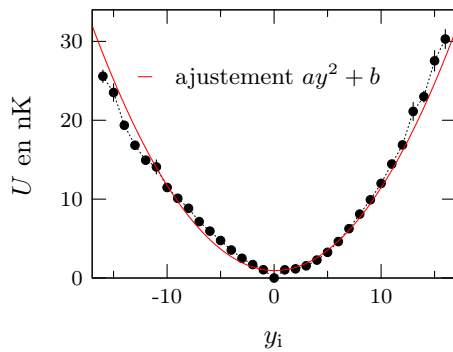


FIGURE 4.10 – Potentiel reconstruit. Les barres d'erreur correspondent à l'erreur statistique sur plusieurs images. La ligne continue rouge est un ajustement parabolique qui correspond à une fréquence de 21.9 ± 0.04 Hz.

Le potentiel reconstruit montre effectivement des déviations au potentiel harmonique et confirme l'existence de rugosités le long de l'axe (Oy). Un ajustement parabolique (ligne pleine de la figure 4.10) permet de quantifier les écarts à un potentiel parfaitement harmonique, où l'on voit qu'il s'agit de petits effets, même s'ils peuvent causer l'amortissement des oscillations du centre de masse. Notons, de plus, que cet ajustement fournit une fréquence d'oscillation de 21.9 ± 0.04 Hz, en bon accord avec la valeur mesurée de 21.4 ± 0.02 Hz par les oscillations du centre de masse, l'erreur indiquée étant celle fournie par les ajustements respectifs.

Dans les faits, la forme du potentiel peut varier d'un jour sur l'autre puisque cela dépend de l'alignement du faisceau dipolaire qui est repris quotidiennement. Aussi, avons-nous reconstruit le potentiel $U(y)$ pour chaque ensemble de données. L'exemple montré en figure 4.10 correspond en fait au cas le plus «pathologique» rencontré pour les données que nous présentons ici.

Profils de densité

Bien que l'approximation harmonique dans le plan ne semble pas déraisonnable, nous avons renoncé à fabriquer des profils de densité par la méthode usuelle [103] de moyenne angulaire. En effet, comme nous le verrons, l'étude que nous allons présenter ici dépend de façon cruciale des ailes des profils de densité, à partir desquelles nous extrayons les paramètres thermodynamiques μ et T de chaque nuage. Pour ne pas introduire de biais, nous utilisons donc l'axe purement harmonique (Ox) pour produire les profils de densité à partir de coupes le long de cet axe. Dans la situation idéale d'un signal sur bruit infini, la coupe passant par le centre du nuage suffirait. Dans la pratique, nous utilisons l'ensemble des 31 coupes prises en compte pour la reconstruction du potentiel en tirant parti de la superposition des profils résultant de la procédure décrite ci-dessus. En moyennant les profils ainsi superposés nous obtenons des profils de densité avec un signal sur bruit tout à fait raisonnable, en particulier dans les ailes où toutes les coupes contribuent. Les profils de densité présentés et étudiés dans ce chapitre sont tous préparés de cette façon.

4.2 Acquisition et analyse des images

Imagerie haute et basse intensité

Nous avons vu au chapitre 3 que l'imagerie par absorption usuelle (non saturante) n'est pas adaptée à l'étude de nos nuages bi-dimensionnels. En effet, compte tenu des densités au centre de ces nuages, qui sont de l'ordre de 50 atomes par μm^2 , le processus d'interaction entre le faisceau sonde et les atomes met en jeu des effets collectifs qui rend l'interprétation du signal d'absorption complexe. L'analyse naïve des images consistant à utiliser la loi de Beer-Lambert (Eq. 3.10) donne lieu à un déficit significatif de la détectivité au centre des nuages atomiques [103]. Une solution à ce problème, qui a également été utilisée dans [59] pour des systèmes atomiques similaires, consiste à utiliser un faisceau sonde fortement saturant qui permet de limiter ces effets à l'échelle du bruit de la mesure expérimentale.

Cette imagerie fortement saturante que nous avons décrite et étudiée au chapitre 3 nécessite d'utiliser, dans notre cas, des intensités de l'ordre de $50 I_{\text{sat}}$ pour mesurer de façon fiable la distribution de densité atomique de nos nuages bi-dimensionnels. Pour une intensité aussi élevée,

nous avons vu en section 3.2.3 que la densité atomique est proportionnelle à la quantité $d_O^{(h)} = (I_i - I_f)/I_{\text{sat}}$, où I_f désigne l'intensité transmise par le nuage atomique et I_i l'intensité incidente. Comme dans l'ensemble de ce manuscrit $I_{\text{sat}} = 1.6 \text{ mW/cm}^2$ désigne l'intensité de saturation associée à la transition cyclante $|F = 2, m_F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3, m_F' = 3\rangle$. L'inconvénient de cette technique est qu'elle s'accompagne d'un bruit de grenaille photonique non négligeable qui se répercute directement sur la mesure de densité atomique, en particulier dans les régions de faible densité. Or, comme nous l'avons souligné précédemment, ces régions jouent un rôle important dans notre traitement.

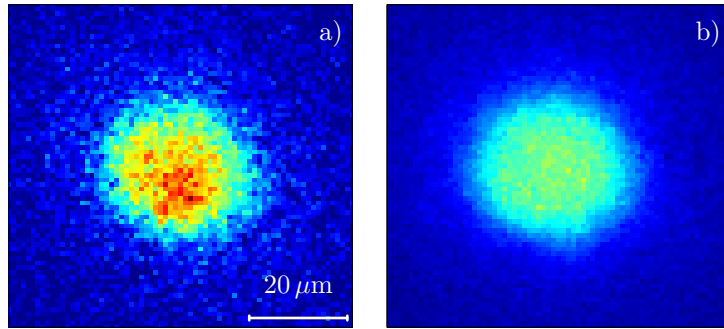


FIGURE 4.11 – Images de deux nuage 2D préparés dans les mêmes conditions, l'un sondé à haute intensité (a) et l'autre à basse intensité (b). Nous voyons que la distribution de densité mesurée à haute intensité est plus piquée.

Pour remédier à cela, nous complétons l'acquisition de chaque image à intensité saturante par celle d'une image à intensité non saturante d'un nuage préparé exactement dans les mêmes conditions. Cette image, bien que présentant un déficit de détectivité dans la partie dense du nuage, fournit une mesure fiable de la distribution de densité dans les ailes avec l'avantage d'un très bon signal sur bruit. Pour chaque préparation du nuage, nous enregistrons donc une paire d'image, l'une à «haute intensité» sur un premier nuage et l'autre à «basse intensité» sur un second nuage. La première image fournit la distribution de densité atomique et la seconde sera utilisée pour déterminer les paramètres μ et T du nuage. Un exemple de paire d'images haute intensité et basse intensité est représenté en 4.11a et 4.11b respectivement.

Pour les données que nous présentons ici, l'imagerie basse intensité est réalisée avec un faisceau d'intensité $I_i \sim 0.5I_{\text{sat}}$ en une impulsion lumineuse de $50 \mu\text{s}$. Dans ces conditions, nous avons vu en section 3.1.2 que la densité atomique est donnée par $n = d_O/\sigma_0$ avec :

$$d_O = -\alpha^* \ln \left(\frac{I_f}{I_i} \right) + \frac{I_i - I_f}{I_{\text{sat}}}, \quad (4.6)$$

et $\alpha^* = 2.6 \pm 3$. En pratique, nous nous autorisons également un paramètre de calibration global β^* tel que $n = d_O/(\beta^*\sigma_0)$. Nous verrons que la calibration de β^* est fournie par la procédure d'ajustement qui permet aussi de déterminer les paramètres thermodynamiques μ et T , en utilisant les ailes des profils basse intensité. La figure 4.12 montre les profils de densités correspondant aux images haute et basse intensités de la figure 4.11, obtenus par la méthode

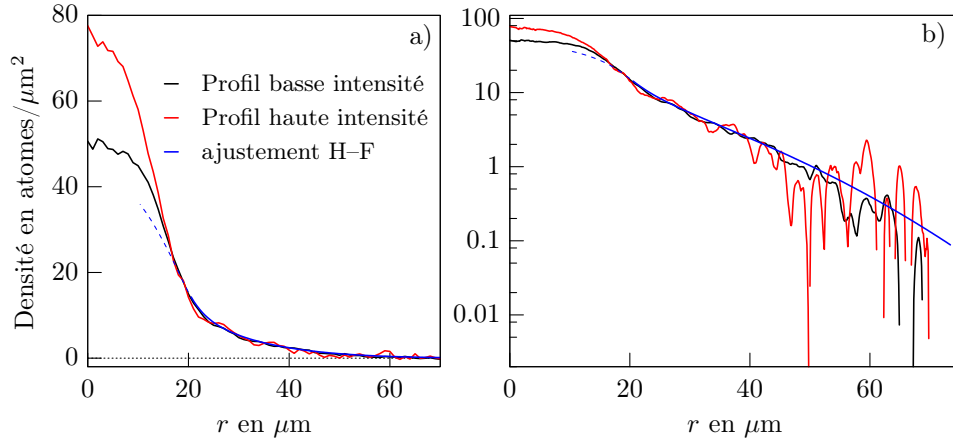


FIGURE 4.12 – Comparaison des profils de densité obtenus à haute intensité (en rouge) et basse intensité (en noir). La ligne bleu est ajustement des ailes par le modèle de Hartree-Fock. (a) Échelle linéaire. (b) Échelle logarithmique.

décrite plus haut. La calibration de la densité atomique pour les profils haute intensité est réalisée en ajustant leurs ailes sur celles des profils basse intensité par un facteur multiplicatif¹⁸. Pour les données présentées ici ce facteur vaut typiquement 0.8 et est déterminé avec une erreur relative de l'ordre de 5%. La figure 4.12b illustre la différence de qualité notable entre les ailes des profils basse intensité et celles des profils haute intensité.

Ajustement au modèle de Hartree-Fock

Dans la tradition de l'étude des nuages tri-dimensionnels, la température d'un nuage atomique piégé dans un potentiel harmonique est déterminée par un ajustement d'une fonction gaussienne à la distribution de densité dans les régions où le nuage est suffisamment dilué pour être décrit par la statistique classique de Boltzmann. Pour les gaz bi-dimensionnels, cette approche, valable en théorie, n'est pas applicable en pratique car la région décrite par la physique classique correspond à des densités très faibles et habituellement noyées dans le bruit de mesure. Une approche moins naïve, consisterait à utiliser l'équation d'état $\mathcal{D} = g_1(Z)$, $Z = \exp(\mu/k_B T)$ étant la fugacité, qui décrit le gaz de Bose idéal 2D dans le cadre de la statistique quantique et appliquer l'approximation de densité locale $Z \rightarrow Z \exp(-V(r)/k_B T)$. Cette description reste néanmoins insuffisante pour décrire les régions avec un signal sur bruit suffisant.

Pour une détermination fiable du couple (μ, T) nous utilisons donc le modèle de Hartree-Fock qui décrit le problème à N -corps en présence d'interactions atomiques à courte portée (cf. section 1.2.3). Dans ce régime, l'équation d'état du gaz homogène, pour un nuage n'occupant que le niveau fondamental de l'oscillateur selon (Oz) , se met sous la forme implicite :

$$\mathcal{D}_0 = -\ln(1 - Z e^{-\bar{g}\mathcal{D}_0/\pi}) \quad (4.7)$$

18. L'origine de ce facteur multiplicatif a été discuté en section 3.2.3.

que nous pouvons résoudre numériquement. Pour attribuer un potentiel chimique central μ_0 et une température T à un nuage piégé, la procédure que nous utilisons consiste à convertir les profils de densité $n(r)$ sous la forme de profils «redimensionnés» :

$$n(r) \longrightarrow n \left(\frac{\mu_0 - V(r)}{k_B T} \right) \lambda_T^2, \quad (4.8)$$

où μ_0 et T sont des paramètres d'ajustement sur la prédiction théorique. L'intervalle de fit est restreint à la région où les corrections à la théorie de champ moyen sont négligeables (et, s'agissant des images à basse intensité, dans la région où la réponse atomique au faisceau sonde n'est pas affectée par les effets collectifs).

Comme la fonction $\mathcal{D}(\alpha)$ varie de façon non-linéaire avec la densité spatiale, cet ajustement peut également fournir une calibration de la densité atomique. Le coefficient β^* intervenant dans l'expression de la densité ($n = d_0/(\beta^* \sigma_0)$) est donc également laissé comme paramètre libre. Comme tous les nuages sont sondés dans les mêmes conditions¹⁹ β^* est contraint à prendre la même valeur pour l'ensemble des images d'une même série de données. Sur l'ensemble des données présentées ici, nous trouvons $\beta^* = 0.40 \pm 0.02$ comme valeur optimale, avec une erreur statistique de 5%.

Nous verrons plus loin que les températures de nos nuages bi-dimensionnels varient de 40 nK à 150 nK, alors que le quantum de vibration associé au mouvement selon (Oz) vaut $\hbar\omega_z/k_B \approx 100$ nK. La condition $k_B T \ll \hbar\omega_z$ n'est donc pas satisfaite et la population des niveaux excités n'est pas négligeable pour nos échantillons les plus chauds. Au paragraphe 1.2.5, nous avons vu qu'il était possible de déterminer la correction à l'équation d'état 4.7, par une méthode auto-cohérente prenant en compte la population des états excités. Cette méthode consiste à traiter tous les niveaux dans l'approximation Hartree-Fock de champ moyen en prenant en compte les interactions intra-niveaux et inter-niveaux. Les profils redimensionnés (Eq. 4.8) sont donc ajustés sur cette équation d'état corrigée pour la détermination des couples (μ_0, T) .

Soustraction des niveaux excités

Ayant attribué les paramètres μ_0 et T associés à chaque nuage à partir des profils basse intensité, nous passons à l'analyse des images haute intensité. Pour chaque image, nous déterminons la contribution des différents niveaux j à la distribution atomique mesurée en utilisant une approche similaire à la méthode auto-cohérente décrite en 1.2.5 et que nous avons utilisée pour l'ajustement des ailes. Ici, la procédure est sensiblement différente. Elle consiste à ne traiter que les niveaux excités dans le régime Hartree-Fock et ajouter la contrainte supplémentaire $n_0 = n_{\text{mesure}} - \sum_j n_j$ en utilisant la distribution atomique mesurée n_{mesure} . Précisons qu'en pratique nous nous limitons aux 10 premiers niveaux ($j = 1$ à 9). Cette procédure a également été appliquée dans [116] sur des nuages marginalement bi-dimensionnels avec $k_B T \sim 2\hbar\omega_z$.

Notons que dans ce régime de température où $k_B T \lesssim \hbar\omega_z$, la question importante n'est pas tant l'existence ou non d'une population dans les niveaux excités que l'influence du potentiel d'interaction créé par ces atomes sur la distribution du niveau fondamental. La méthode

19. Cet ajustement est réalisé sur les profils produits à partir des images à basse intensité.

auto-cohérente que nous utilisons permet de répondre à cette question puisqu'elle fournit la distribution atomique de chaque niveau j . Nous verrons à la section 4.4, où nous présentons une étude dédiée à ce problème, que ces effets sont négligeables pour les nuages bi-dimensionnels que nous étudions ici.

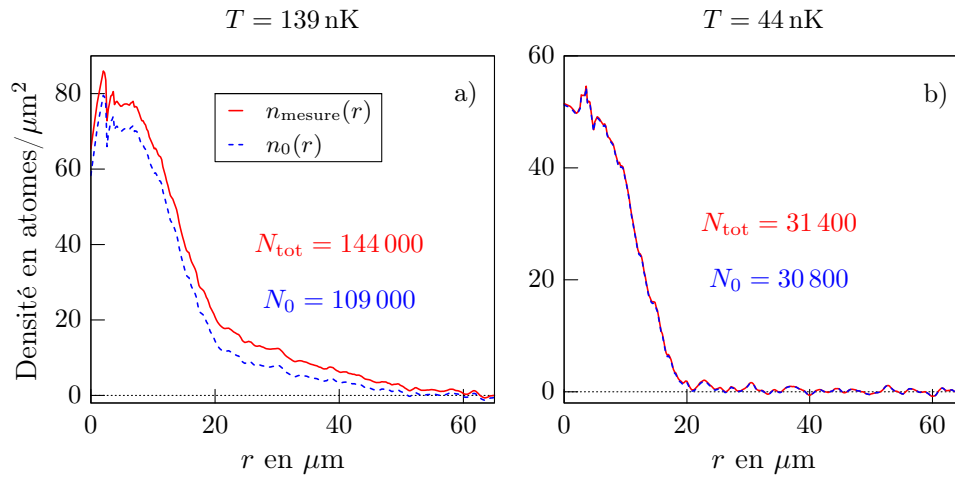


FIGURE 4.13 – Soustraction des populations des niveaux excités. (a) Profil d'un nuage «chaud» : 25% des atomes occupent les niveaux excités. (b) Profil d'un nuage «très froid» : il y a moins de 2% des atomes dans les niveaux excités. Les lignes continues représentent les profils mesurés, et les lignes tiretées représentent les profils associés aux atomes dans le niveau fondamental.

Nous montrons sur la figure 4.13 les profils de densité mesurés (obtenus à partir d'images à haute intensité) et la contribution du niveau fondamental déduite par cette méthode pour des nuages à 139 nK et 44 nK, qui correspondent à nos températures extrêmes. Comme on peut le voir, la contribution des niveaux excités est négligeable pour les nuages les plus froids. La procédure est néanmoins appliquée de façon systématique à l'ensemble des échantillons atomiques. Pour chaque nuage, nous obtenons ainsi la distribution spatiale des atomes dans le niveau fondamental de l'oscillateur selon l'axe (Oz) que nous allons pouvoir relier au gaz homogène quasi-2D via l'approximation de densité locale.

4.3 Mesure de l'équation d'état

4.3.1 Équation d'état pour la pression

L'équation d'état d'un système thermodynamique peut être établie pour diverses grandeurs thermodynamiques telles que l'énergie, l'entropie, la densité ou encore la pression. La pression est d'un intérêt particulier puisqu'elle permet via la relation de Gibbs–Duhem $dP = n d\mu + s dT$ de déduire l'équation d'état pour la densité spatiale n et l'entropie par unité de surface s . Dans le cas du gaz de Bose à 2D, la pression présente aussi l'intérêt de fournir un critère intuitif pour la condensation de Bose–Einstein dans un piège harmonique (cf section 1.1.2). Notons, comme

nous l'avons précisé au chapitre 1 qu'en toute rigueur le terme tension de surface est plus adapté dans le cas bi-dimensionnel, mais nous nous permettrons cet abus de langage dans ce manuscrit.

Mesurer la pression dans un piège harmonique

La pression présente aussi un intérêt du point de vue de la mesure expérimentale pour des pièges harmoniques. En effet, T.-L. Ho et Q. Zhou ont présenté dans [50] une méthode permettant de mesurer l'équation d'état d'un gaz tri-dimensionnel homogène à partir d'un gaz dans un piège harmonique, qui est la situation usuelle dans les expériences d'atomes froids²⁰. Cette méthode, qui repose sur la nature quadratique du potentiel et l'approximation de densité locale, permet de relier la pression du gaz homogène à la densité intégrée dans deux directions de l'espace, en attribuant un potentiel chimique local en chaque point du nuage. Ce résultat est intéressant par deux aspects pour les gaz tri-dimensionnels. D'abord, les techniques usuelles d'imagerie ne permettent pas d'accéder directement à la densité locale mais uniquement la densité intégrée le long de l'axe d'imagerie, or cette méthode fournit la pression locale le long de la troisième direction. Ensuite, l'intégration double permet d'améliorer considérablement le signal sur bruit ce qui est essentiel pour réaliser des mesures précises. Cette méthode a d'ailleurs été mise en oeuvre expérimentalement avec succès sur des expériences avec des fermions [83,84] et bosons [85] à 3D.

À deux dimensions, un résultat analogue²¹ permet de relier directement la pression $P(\mu, T)$ du gaz homogène au nombre d'atomes N dans un piège harmonique à température T avec un potentiel chimique local μ au centre du nuage. Comme dans le cas 3D, cette propriété repose sur l'approximation de densité locale où l'on suppose qu'au voisinage de chaque point $\mathbf{r}$ du nuage atomique, on peut appliquer les relations thermodynamiques établies pour le cas homogène pour la densité locale $n(\mathbf{r})$ et le potentiel chimique local $\mu(\mathbf{r}) = \mu_0 - V(\mathbf{r})$.

Pour établir cette relation, nous partons de la définition du nombre d'atomes dans le piège $N = \int n(\mathbf{r}) d^2r$. Dans l'approximation de densité locale on a $n(\mathbf{r}) = n_{\text{hom}}(\mu_0 - V(\mathbf{r}), T)$, où n_{hom} désigne la densité du gaz homogène. Pour un potentiel harmonique isotrope $V(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2/2$, le nombre d'atomes s'écrit donc :

$$N = 2\pi \int_0^\infty n(r) r dr = 2\pi \int_0^\infty n_{\text{hom}}\left(\mu_0 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right) r dr. \quad (4.9)$$

En appliquant le changement de variable $\mu' = \mu_0 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ on a

$$\begin{cases} d\mu' = -m\omega^2 r dr \\ \mu'(r=0) = \mu_0 \\ \mu'(r \rightarrow \infty) \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (4.10)$$

et le nombre d'atomes s'écrit :

$$N = \frac{2\pi}{m\omega^2} \int_{-\infty}^{\mu_0} n_{\text{hom}}(\mu', T) d\mu'. \quad (4.11)$$

Enfin, en utilisant la relation de Gibbs–Duhem $n_{\text{hom}}(\mu, T) = (\partial P(\mu, T)/\partial \mu)_T$ on trouve :

20. Le point clé de cette méthode est d'extraire des quantités thermodynamiques locales à partir de la densité intégrée ce qui avait déjà été introduit par J. N. Fuchs, X. Leyronas et R. Combescot [37] en 2003.

21. Établi par Yvan Castin (communication privée).

$$N = \frac{2\pi}{m\omega^2} P(\mu_0, T), \quad (4.12)$$

ce qui relie le nombre d'atome dans un piège harmonique à la pression du gaz homogène. En utilisant la pression réduite $\mathcal{P} \equiv P\lambda_T^2/k_B T$ introduite au chapitre 1, ce résultat se met sous la forme :

$$\mathcal{P}(\mu_0, T) = \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 N. \quad (4.13)$$

Cette relation reste vraie pour un piège harmonique anisotrope, auquel cas il suffit de remplacer ω par la moyenne géométrique $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y)^{1/2}$. Connaissant les pulsations ω_x et ω_y du piège harmonique, il suffit donc, à deux dimensions, de mesurer le nombre d'atomes pour accéder à la pression. On peut ainsi reconstruire l'équation d'état du gaz homogène en préparant plusieurs nuages bi-dimensionnels, piégés dans un potentiel harmonique, avec des températures et potentiels chimiques différents.

Acquisition des données

Nous avons mis en œuvre expérimentalement la méthode décrite ci-dessus en l'appliquant à un ensemble de nuages atomiques, préparés dans des conditions différentes de manière à balayer un large domaine de l'espace des paramètres thermodynamiques μ et T . Le paramètre d'interaction est en revanche gardé constant et vaut $\tilde{g} \approx 0.11$ sur l'ensemble des données présentées ici²². Au niveau de la séquence expérimentale, ces différentes configurations sont réalisées en variant la durée de chargement du piège magnéto-optique (PMO), la fréquence finale d'évaporation ainsi que la fréquence du bouclier radio-fréquence. Ce dernier fixe la température du nuage, tandis que les deux autres paramètres permettent d'avoir un contrôle indépendant du nombre d'atomes. Pour chaque configuration, nous enregistrons deux images, sur deux réalisations successives de l'expérience, la première étant prise à basse intensité et l'autre à haute intensité. Comme nous l'avons expliqué plus haut, ces deux images sont utilisées de manière complémentaire, compte tenu de la bonne reproductibilité du dispositif expérimental à court terme. L'image haute intensité, qui reproduit fidèlement la distribution atomique, permet d'extraire le nombre d'atomes et l'image basse intensité fournit les paramètres μ_0 et T associés au nuage. Pour les nuages faiblement ou non dégénérés, dont les densités centrales sont compatibles avec l'imagerie basse intensité standard, nous n'enregistrons qu'une seule image (à basse intensité) qui fournit à la fois le nombre d'atomes et la température.

Equation d'état et invariance d'échelle

Le résultat de ces mesures est présenté en figure 4.14, où l'on trace la pression réduite en fonction du rapport²³ $\mu/k_B T$. Il est remarquable que tous les points expérimentaux se répartissent sur la même courbe, alors même qu'ils correspondent à des températures et potentiels

22. Nous verrons par ailleurs en fin de ce chapitre que pour les nuages de densité centrale élevée, le paramètre $\tilde{g}$ peut varier de $\sim 10\%$ entre le centre du nuage et les ailes.

23. Notre convention est ici d'utiliser le symbole μ lorsque nous les présentons les résultats associés au gaz homogène tandis que nous utilisons l'indice 0 pour désigner le potentiel chimique au centre de nos nuages piégés.

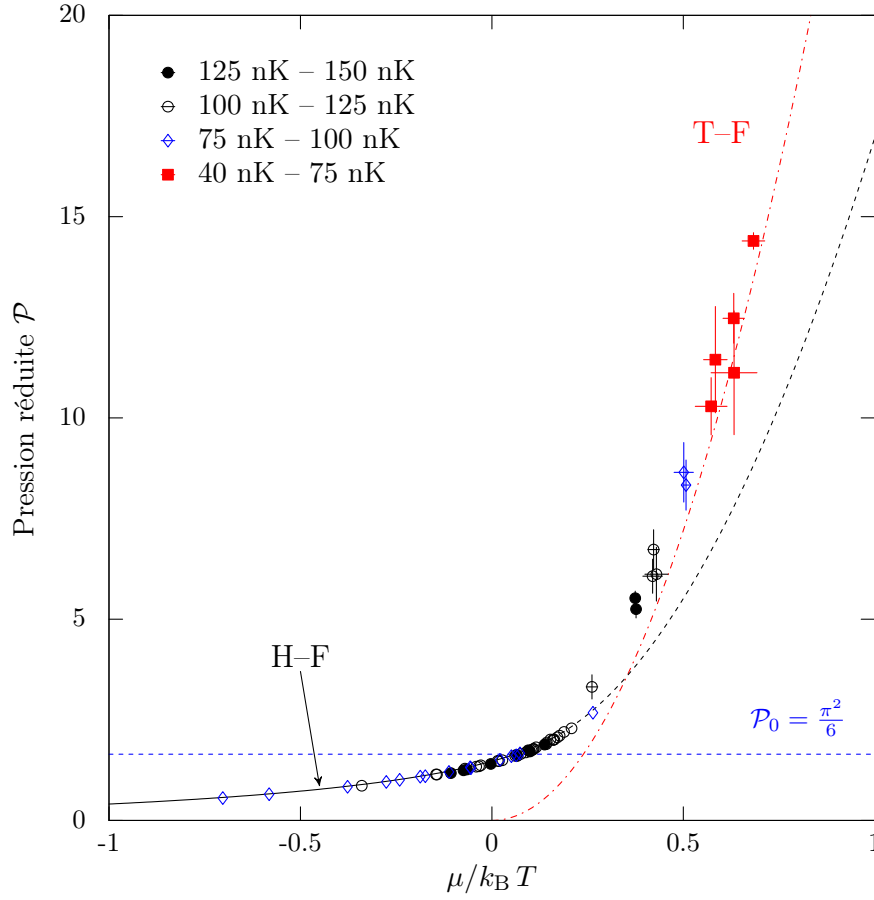


FIGURE 4.14 – Équation d'état pour la pression réduite. Dans la région $\mu/k_B T > 0.2$ les points qui correspondent à une même préparation ont été regroupés. Les barres d'erreurs correspondent à l'erreur statistique. Dans la région $\mu/k_B T < 0.2$ nous avons laissé les points individuels (la séquence expérimentale étant moins reproductible pour les paramètres de préparation correspondants). La ligne horizontale tiretée bleue est la borne supérieure pour un gaz idéal $\mathcal{P}_0 = \pi^2/6$. La ligne continue noire représente la théorie de Hartree–Fock et est prolongée en tirets en dehors de sa région de validité. La ligne en tirets-pointillés rouge est la prédiction de Thomas–Fermi.

chimiques différents. Ce résultat démontre expérimentalement la propriété d'invariance d'échelle de l'équation d'état du gaz de Bose homogène, dans la mesure où $\mathcal{P}$ ne dépend que du rapport $\mu/k_B T$. Comme nous l'avons vu, il n'existe pas de théorie pour la pression réduite d'un gaz homogène, nous comparons néanmoins les données expérimentales aux modèles de champ moyen de Hartree–Fock et de Thomas–Fermi, qui correspondent aux régimes asymptotiques de faible et haute densités respectivement. L'accord obtenu avec la théorie Hartree–Fock est attendu puisque la détermination des paramètres thermodynamiques repose sur un ajustement des données dans les régions de basse densité sur cette théorie. Dans la limite opposée, on obtient un bon accord avec le modèle Thomas–Fermi pour $\mu/k_B T \gtrsim 0.6$. Enfin, pour comparaison, nous avons aussi indiqué sur la figure 4.14 la valeur maximale de la pression réduite pour un gaz idéal $\mathcal{P}_0 = \pi^2/6$.

4.3.2 Équation d'état pour la densité

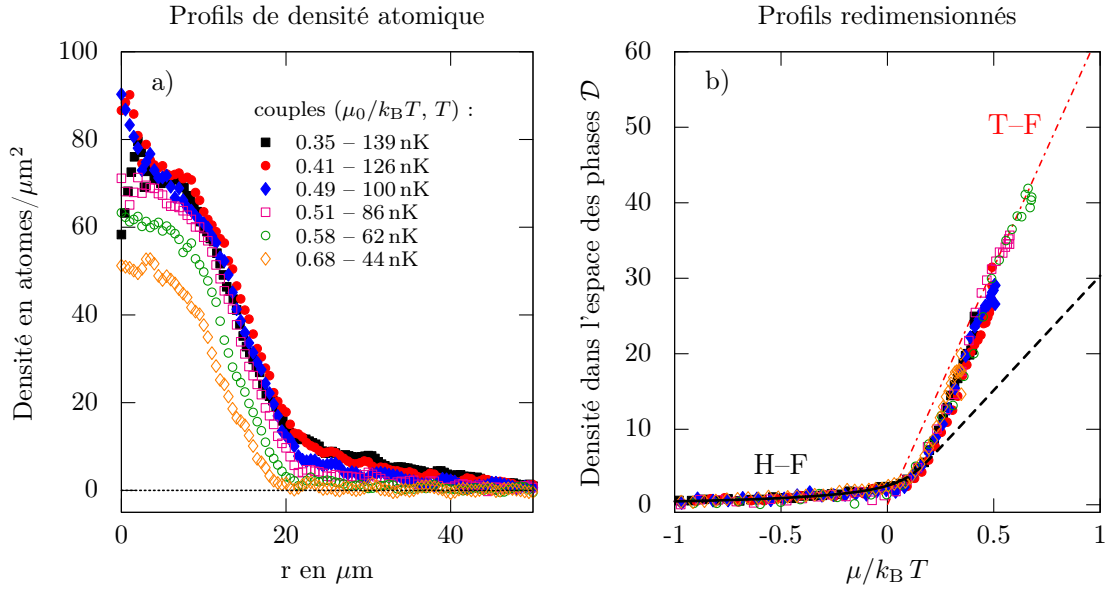


FIGURE 4.15 – (a) Profils de densité correspondant à des nuages de paramètres variables. (b) Profils redimensionnés. La ligne continue est la prédiction Hartree–Fock et est prolongée en ligne tiretée en dehors de sa région de validité. La ligne en tirets-pointillés est la prédiction de Thomas–Fermi.

Les mêmes données peuvent être exploitées autrement pour obtenir l'équation d'état en termes de densité dans l'espace des phases (DEP) $\mathcal{D}$. Mieux encore, si l'on croit l'approximation de densité locale et à l'invariance d'échelle, un seul nuage atomique peut fournir l'équation d'état $\mathcal{D}(\mu/k_B T)$. En effet, en déterminant le potentiel chimique central μ_0 et la température T d'un nuage donné, on peut associer à chaque point du profil de densité $n(r)$, une densité dans l'espace des phases $\mathcal{D}(r)$ et un potentiel chimique $\mu(r) = \mu_0 - V(r)$, où le potentiel de piégeage $V(r)$ est connu. On peut ainsi établir l'équation d'état $\mathcal{D}(\mu/k_B T)$, où le potentiel chimique est balayé entre $-\infty$ et μ_0 . Dans le régime d'invariance d'échelle, ce profil «redimensionné» contient donc à lui seul l'équation d'état puisque $\mathcal{D}$ ne dépend que du rapport $\mu/k_B T$. De façon corollaire, si l'on prépare deux nuages avec des paramètres $(\mu_0^{(1)}, T^{(1)})$ et $(\mu_0^{(2)}, T^{(2)})$ respectivement, alors les profils redimensionnés associés $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ doivent se superposer.

Cette propriété fournit donc un moyen complémentaire de tester l'invariance d'échelle, en comparant les profils redimensionnés associés à des nuages avec des paramètres thermodynamiques différents. Nous avons testé cette propriété sur quelques profils de densité choisis parmi les données présentées précédemment. Le résultat obtenu est illustré sur la figure 4.15. Sur la figure 4.15a, sont représentés les profils de densité $n(r)$, auxquels nous avons attribué un potentiel chimique central et une température par la procédure décrite 4.2. La figure 4.15b représente les mêmes données après redimensionnement. Les différents profils se confondent en une seule courbe à l'échelle du bruit expérimental, ce qui confirme l'invariance d'échelle observée pour la

pression réduite. Cette approche a également été utilisée dans [59] pour démontrer l'invariance d'échelle de l'équation d'état d'un gaz de Bose dans le régime quasi-2D.

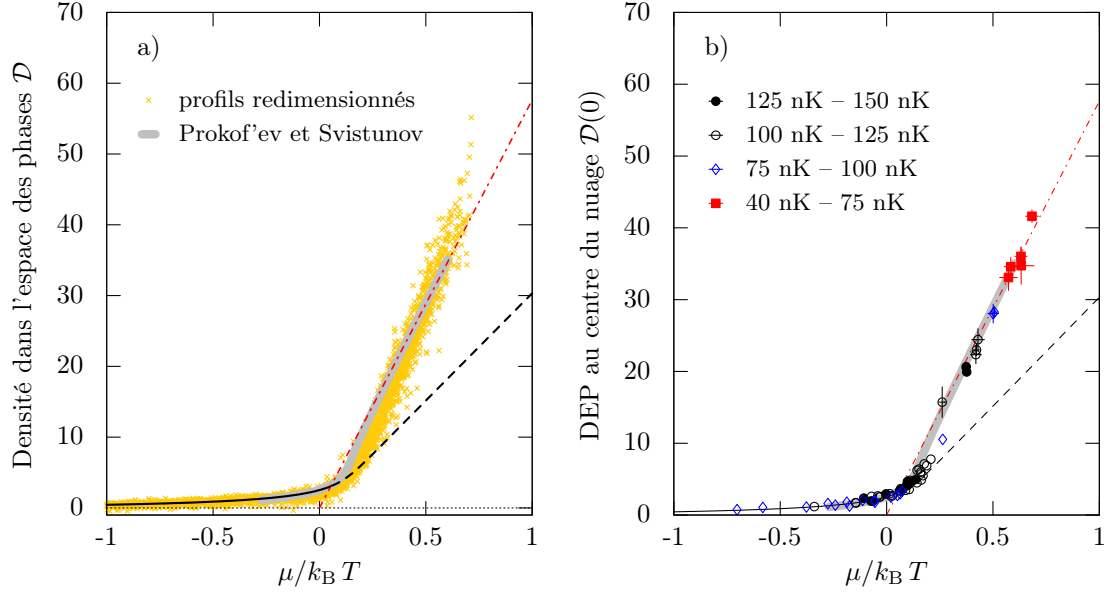


FIGURE 4.16 – Équation d'état pour la densité dans l'espace des phases. (a) Équation d'état obtenue à partir de profils redimensionnés. (b) Équation d'état obtenue à partir de la densité centrale des nuages. Les barres d'erreur correspondent à l'erreur statistique sur plusieurs nuages préparés de façon identique. Dans la région $\mu/k_B T < 0.2$, nous avons représenté des points individuels. La ligne épaisse grise est la prédiction de Prokof'ev et Svistunov pour $\tilde{g} = 0.11$. Nous avons également représenté les régimes asymptotiques de Hartree-Fock (en noir) et de Thomas-Fermi (en rouge).

La figure 4.16a présente un ensemble (~ 70) de profils redimensionnés correspondant à un de nos nuages les plus dégénérés. On constate un très bon accord avec les régimes asymptotiques et la prédiction théorique de Prokof'ev et Svistunov [101]. Une mesure similaire de l'équation d'état a été produite indépendamment dans le groupe de C. Chin à Chicago [59]. Dans cette étude, qui a été réalisée sur du Césium, l'équation d'état $\mathcal{D}(\mu/k_B T, \tilde{g})$ a été mesurée pour quatre valeurs du paramètre d'interaction²⁴ entre $\tilde{g} = 0.05$ et $\tilde{g} = 0.26$. Pour la valeur de $\tilde{g}$ la plus proche de la nôtre, la densité dans l'espace des phases mesurée dans [59] n'excède pas 20, ce qui correspond à $\mu/k_B T \lesssim 0.4$. Le résultat que nous présentons ici explore donc davantage le régime fortement dégénéré.

Dans la figure 4.16b nous présentons une mesure plus directe de cette équation d'état, que nous avons établie à partir de la densité mesurée au centre de chaque nuage atomique. Les données présentées ici correspondent à celles utilisées pour la mesure de la pression réduite.

24. Ceci a été réalisé en changeant la longueur de diffusion a via des résonances de Feshbach.

4.3.3 Entropie dans le régime d'invariance d'échelle

D'après la loi de Gibbs–Duhem que nous avons rappelée plus haut, l'entropie par unité de surface s est reliée à la pression P par la relation thermodynamique $s = (\partial P / \partial T)_\mu$. Dans le cadre de l'invariance d'échelle où nous utilisons des grandeurs sans dimension, il est commode d'introduire l'entropie par particule $\mathcal{S} \equiv s/n$. En utilisant la pression réduite $\mathcal{P} = P\lambda_T^2/k_B T$, on a donc :

$$\mathcal{S}n = \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{k_B T}{\lambda_T^2} \mathcal{P} \right]_\mu = \frac{k_B}{\lambda_T^2 T} \left[\frac{\partial (T^2 \mathcal{P})}{\partial T} \right]_\mu = \frac{k_B}{\lambda_T^2 T} \left[2T\mathcal{P} + T^2 \left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T} \right]_\mu \right]. \quad (4.14)$$

Dans le régime d'invariance d'échelle, $\mathcal{P}$ ne dépend que du rapport $\alpha = \mu/k_B T$ et :

$$\left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T} \right]_\mu = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial T} \right]_\mu = \mathcal{D} \left[-\frac{\mu}{k_B T^2} \right], \quad (4.15)$$

puisque $\partial \mathcal{P} / \partial \alpha = \mathcal{D}$ (cf. section 1.2.6). On aboutit finalement à la relation simple :

$$\frac{\mathcal{S}}{k_B} = 2 \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{D}} - \frac{\mu}{k_B T}. \quad (4.16)$$

À partir des mesures précédentes, nous avons donc également accès à l'équation d'état pour l'entropie par particule. En combinant les résultats pour $\mathcal{P}$ (Fig. 4.14) et ceux pour $\mathcal{D}$ (Fig. 4.16b) nous obtenons l'équation d'état présentée figure 4.17. Nous y avons également tracé la prédiction de Hartree–Fock que nous avons calculée numériquement. La ligne d'entropie nulle correspond au régime de Thomas–Fermi.

Nous constatons que l'entropie par particule décroît d'abord lentement avant de chuter plus rapidement au voisinage de $\mu/k_B T \sim 0.15$, point qui correspond à la transition superfluide selon la prédiction [100]. D'après cette prédiction, le potentiel chimique critique μ_c vaut en effet (cf. équation 1.70) :

$$\frac{\mu_c}{k_B T} = \frac{\tilde{g}}{\pi} \ln \left(\frac{13.2}{\tilde{g}} \right) \approx 0.17 \quad (4.17)$$

pour $\tilde{g} = 0.11$. Notons que l'entropie ne présente pas de discontinuité au point de transition, de même que la pression ou la densité dans l'espace des phases, comme on a pu le voir précédemment. Cette absence de discontinuité dans les grandeurs thermodynamiques usuelles est consistante avec une transition de type BKT qui est d'ordre infini, et où seul le paramètre d'ordre, c'est-à-dire la densité superfluide, présente une discontinuité à la transition.

Les points les plus dégénérés approchent la valeur asymptotique d'entropie nulle. En prenant la moyenne des points au-delà de $\mu/k_B T = 0.5$, nous trouvons $\mathcal{S} = 0.06 \pm 0.01$ (l'erreur indiquée ici est l'erreur statistique). Notons que la mesure de l'entropie est relativement précise car elle est indépendante des erreurs systématiques dues à la calibration de la densité. En effet, $\mathcal{S}$ dépend du rapport $\mathcal{P}/\mathcal{D}$, ce qui élimine le coefficient de détectivité β^* . La seule source d'incertitude provient donc de la détermination de $\mu/k_B T$; cette incertitude est typiquement de ± 0.01 (en valeur absolue) d'après l'erreur fournie par la procédure d'ajustement. Une autre conséquence intéressante de la dépendance en $\mathcal{P}/\mathcal{D}$ est que dans le régime dégénéré $\mathcal{S}$ ne dépend que faiblement de la force des interactions, puisque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ varient quasiment comme $1/\tilde{g}$.

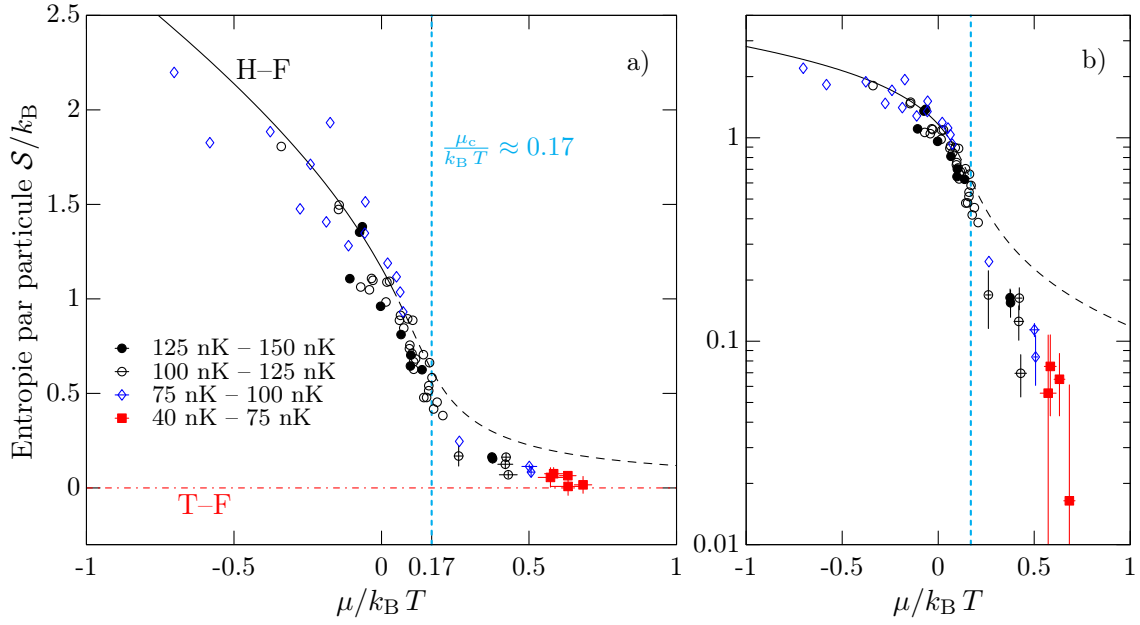


FIGURE 4.17 – Équation d'état pour l'entropie par particule : échelles linéaire (a) et logarithmique (b). Le régime Thomas–Fermi correspond à la ligne de zéro (en rouge). La prédiction Hartree–Fock est représentée par la ligne noire continue et est prolongée en ligne tiretée en dehors de sa région de validité. La ligne tiretée verticale en cyan correspond à la valeur du potentiel chimique critique pour la transition superfluide.

L'accès à des entropies aussi basses constitue aujourd'hui un des principaux défi expérimentaux des systèmes sur réseau optique qui ont vocation à simuler des systèmes modèles de la matière condensée [1, 64, 108]. Pour comparaison l'entropie par particule la plus basse mesurée sur des gaz bi-dimensionnels sur réseau dans le régime d'isolant de Mott [1] est de l'ordre de $0.3k_B$. Pour les systèmes fermioniques sur réseau la possibilité d'atteindre des entropies inférieures à $0.1k_B$ permettrait de réaliser en laboratoire la phase antiferromagnétique du modèle de Fermi–Hubard [69, 118]. La mesure que nous venons de présenter laisse donc envisager l'utilisation de gaz de Bose 2D comme «réfrigérant» pour des gaz bi-dimensionnels sur réseau.

Nous allons à présent revenir plus en détail sur la prise en compte de la troisième dimension, qui est une question essentielle dans notre procédure.

4.4 Effets de la troisième dimension

Comme nous l'avons souligné dans la section 4.2, les nuages atomiques étudiés sont à des températures de l'ordre de $\hbar\omega_z/k_B$ et de ce fait, ne sont pas rigoureusement thermodynamiquement 2D. Quels sont alors les effets de la troisième dimension ?

4.4.1 Effet des niveaux excités

La connexion que nous avons établie entre nos mesures et l'équation d'état du gaz de Bose quasi-2D, repose sur le fait que, malgré la présence d'une population non négligeable dans les niveaux excités $j \geq 1$ selon (Oz), nous pouvons accéder à la distribution atomique du niveau fondamental $j = 0$ et, sur le fait tout aussi essentiel que cette distribution n'est pas significativement modifiée par le potentiel d'interaction créé par les atomes des niveaux excités.

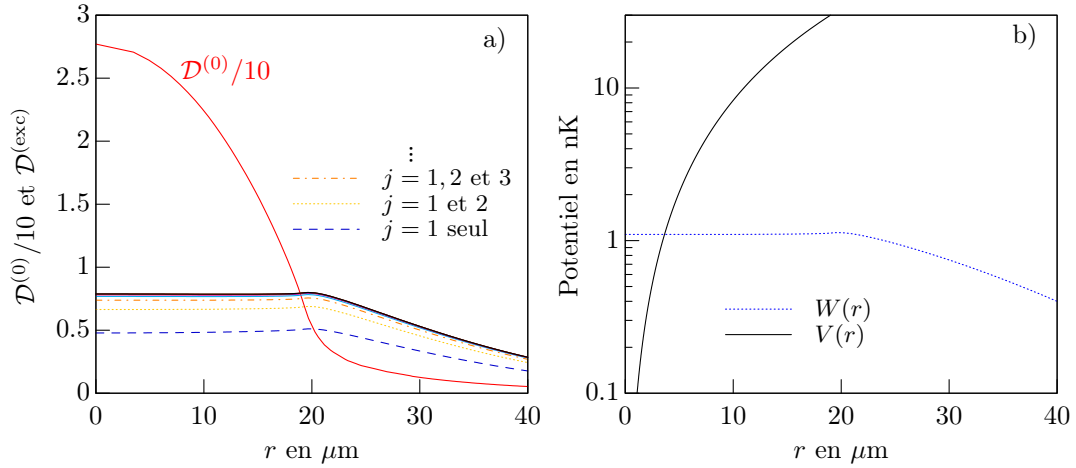


FIGURE 4.18 – Influence des niveaux excités. (a) Populations des niveaux excités déterminées par notre méthode auto-cohérente à partir d'un profil $\mathcal{D}^{(0)}$ généré numériquement. La $n^{\text{ième}}$ ligne à partir du bas correspond à la densité dans l'espace des phases cumulée des n premiers niveaux excités. Le profil du fondamental $\mathcal{D}^{(0)}$ est également représenté (divisé par 10 par commodité). (b) Potentiel de piégeage $V(r)$ (ligne continue noire) et potentiel $W(r)$ (ligne pointillée bleue) ressenti par les atomes du niveau fondamental en présence des atomes des niveaux excités.

Pour estimer cet effet, nous appliquons la procédure de détermination auto-cohérente des populations excitées, en fixant la densité du niveau fondamental. L'idée de cette démarche est de vérifier *a posteriori* que le potentiel d'interaction répulsif ressenti par les atomes du fondamental est négligeable. En pratique, nous utilisons pour le niveau fondamental un profil $\mathcal{D}_0(r)$ généré numériquement²⁵ à partir de ce que nous avons appelé la prédiction composite²⁶ (cf. section 1.2.4) et en utilisant la LDA avec notre fréquence de piège pour un couple (μ_0, T) donné.

La figure 4.18 montre le résultat de cette procédure appliquée pour les paramètres $\mu_0/k_B T = 0.45$ et $T = 100$ nK. Ces paramètres correspondent à des nuages à la fois chauds et denses pour lesquels l'influence des niveaux $j \geq 1$ est la plus importante. Sur la figure 4.18a, nous avons tracé les profils $\mathcal{D}^{(exc)}(r)$ correspondant aux contributions des niveaux $j = 1$, $j = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, etc. Pour comparaison la distribution du fondamental $\mathcal{D}_0(r)$, que nous avons divisée par un facteur 10 par commodité, est également tracée. Notons d'abord que la contribution des niveaux $j > 4$

25. Sur les distributions mesurées, nous ne connaissons pas *a priori* la distribution du niveau fondamental.

26. Rappel : cette prédiction théorique est obtenue par raccordement des régimes asymptotiques de Hartree-Fock et Thomas-Fermi avec la prédiction [101] de Prokof'ev et Svistunov.

est négligeable et justifie que nous nous limitons aux 10 premiers niveaux. Ensuite, nous voyons que la DEP de chaque niveau excité est inférieure à 0.5 et valide le fait de traiter les atomes de ces niveaux dans l'approximation Hartree–Fock de champ moyen²⁷. Enfin, nous remarquons l'allure aplatie des profils $\mathcal{D}^{(\text{exc})}(r)$ dans la région centrale, ce qui est la signature de l'interaction répulsive avec les atomes du niveau fondamental. L'effet réciproque est évalué en calculant le potentiel répulsif $W(r)$ créé par les atomes des niveaux excités en chaque point r avec :

$$W(r) = \frac{g}{2} \sum_{j \geq 1} c_{j,0} n_j(r), \quad (4.18)$$

où $n_j(r)$ est la densité spatiale dans le niveau j et $c_{j,0}$ l'intégrale de recouvrement de la fonction d'onde correspondante selon (Oz) et celle du niveau fondamental. Comme nous pouvons le voir sur la figure 4.18b, $W(r)$ est de l'ordre de 1 nK ce qui est négligeable vis-à-vis de l'énergie thermique. Nous avons appliqué cette procédure à un ensemble de couples (μ_0, T) caractéristiques de nos nuages atomiques et obtenu des résultats qualitativement similaires.

En conclusion, pour les paramètres thermodynamiques des nuages que nous avons étudiés : (i) la population des états excités selon (Oz) est bien dans le domaine de validité de l'approximation Hartree–Fock ; (ii) la distribution spatiale des atomes dans le niveau fondamental n'est pas affectée par leur interaction avec les atomes des niveaux excités (la réciproque n'étant pas vraie).

4.4.2 Effet des interactions intra-niveau à haute densité

Au paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés à l'effet des interactions inter-niveaux sur le fondamental. Il est également pertinent d'estimer les effets des interactions intra-niveau dans le fondamental. A haute densité l'énergie d'interaction gn n'est plus négligeable par rapport à $\hbar\omega_z$ et l'état propre du niveau fondamental $\Psi(z)$ ne correspond plus à celui de l'oscillateur harmonique, ce qui modifie le paramètre d'interaction $\tilde{g} \propto \int |\Psi(z)|^4$ (cf. section 1.2.2). Les interactions étant répulsives, nous nous attendons à un élargissement de l'extension du nuage (selon (Oz)) et donc à une réduction de $\tilde{g}$ par rapport à la valeur canonique $\tilde{g}^{(0)} = \sqrt{8\pi}a/\ell_z$.

En présence d'interactions, la fonction propre $\Psi(z)$ est solution de l'équation de Gross–Pitaevskii uni-dimensionnelle :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2\Psi + g_{3D}n|\Psi|^2\Psi = E\Psi, \quad (4.19)$$

où $g_{3D} = 4\pi\hbar^2 a/m$ est la force d'interaction à 3D et n la densité atomique dans le plan. Cette équation peut être résolue analytiquement par un traitement perturbatif au premier ordre en n . Pour cela, nous développons la fonction d'onde sur les fonctions propres de l'oscillateur harmonique $\phi_\nu(z)$:

$$\Psi(z) = \sum_{\nu} \kappa_{\nu} \phi_{\nu}(z), \quad (4.20)$$

où les coefficients κ_{ν} sont à déterminer. L'équation 4.19 se met alors sous la forme :

27. Nous avons vu en section 1.2.4 que l'approximation Hartree–Fock est valide jusque $\mathcal{D} \sim 3$

$$\sum_{\nu} \kappa_{\nu} (\epsilon_{\nu} - E) \phi_{\nu} + g_{3D} n \sum_{\lambda, \mu, \nu} \kappa_{\lambda} \kappa_{\mu} \kappa_{\nu} \phi_{\lambda} \phi_{\mu} \phi_{\nu} = 0, \quad (4.21)$$

où nous avons introduit les énergies propres de l'oscillateur harmonique $\epsilon_{\nu} = \hbar\omega_z(\nu + 1/2)$. Compte tenu du fait que les énergies thermique et d'interaction sont au plus de l'ordre de $\hbar\omega_z$, nous supposons que $\kappa_0 \approx 1$ et $\kappa_{\nu>0} \ll 1$, ces derniers restant à déterminer. En utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonction ϕ_{ν} et en ne gardant que les termes qui contribueront à l'ordre 1 en n , à l'issue du calcul, nous trouvons²⁸ :

$$\kappa_{\nu} \approx -n (4\pi a \ell_z^2) \frac{1}{\nu} \int \phi_0^3 \phi_{\nu} dz. \quad (4.25)$$

Ayant déterminé les coefficients κ_{ν} , nous pouvons revenir au calcul de $\tilde{g}$. En injectant le développement 4.20 dans la définition de $\tilde{g} = 4\pi a \int |\Psi|^4 dz$, et en ne gardant que les termes d'ordre 1 en κ_{ν} pour $\nu > 0$, nous avons :

$$\tilde{g} = 4\pi a \int \left[\phi_0 + \sum_{\nu>0} \kappa_{\nu} \phi_{\nu} \right]^4 dz \quad (4.26)$$

$$\approx 4\pi a \int \left[\phi_0^4 + 4\phi_0^3 \sum_{\nu>0} \kappa_{\nu} \phi_{\nu} \right] dz, \quad (4.27)$$

ce qui, en utilisant l'expression 4.25 pour les κ_{ν} , donne :

$$\tilde{g} \approx \underbrace{4\pi a \int \phi_0^4 dz}_{\tilde{g}^{(0)}} - n \left[4 (4\pi a \ell_z^2) \underbrace{\sum_{\nu>0} \frac{1}{\nu} \left(\int \phi_0^3 \phi_{\nu} dz \right)^2}_{\equiv \Sigma_{\nu}} \right]. \quad (4.28)$$

On reconnaît l'expression de $\tilde{g}^{(0)}$ dans le premier terme. En utilisant les propriétés des fonctions ϕ_{ν} , on montre²⁹ que la somme qui apparaît dans le second terme vaut :

$$\Sigma_{\nu} = \frac{1}{2\pi \ell_z^2} \ln \left(\frac{4}{2 + \sqrt{3}} \right). \quad (4.33)$$

28. **Détail du calcul.** En ne gardant que les termes qui contribuent à l'ordre 1 en n , l'équation 4.21 s'écrit :

$$\sum_{\nu} \kappa_{\nu} (\epsilon_{\nu} - E) \phi_{\nu} \approx -g_{3D} n \phi_0^3. \quad (4.22)$$

En multipliant par ϕ_{μ} et en intégrant on a :

$$\sum_{\nu} \kappa_{\nu} (\epsilon_{\nu} - E) \underbrace{\int \phi_{\nu} \phi_{\mu} dz}_{\delta_{\mu\nu}} \approx -g_{3D} n \int \phi_0^3 \phi_{\mu} dz \quad (4.23)$$

$$\kappa_{\mu} \underbrace{(\epsilon_{\mu} - \epsilon_0)}_{\mu \hbar \omega_z} \approx -g_{3D} n \int \phi_0^3 \phi_{\mu} dz, \quad (4.24)$$

où on a utilisé l'orthogonalité des fonctions ϕ_{ν} et le fait que $E \approx \epsilon_0$. On retrouve ainsi le résultat 4.25.

29. **Détail du calcul.** Les fonctions propres de l'oscillateur harmonique de pulsation ω_z sont définies par :

$$\phi_{\nu}(z) = \sqrt{\frac{1}{2^{\nu} \nu!}} \left(\frac{1}{\pi \ell_z} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{z^2}{2\ell_z^2}} H_{\nu} \left(\frac{z}{\ell_z} \right), \quad (4.29)$$

où $\ell_z = \sqrt{\hbar/m\omega_z}$ et les H_{ν} sont les polynômes d'Hermite. Nous avons donc :

Nous trouvons finalement pour l'expression de $\tilde{g}$ à l'ordre 1 en n :

$$\tilde{g} \approx \tilde{g}^{(0)} (1 - 1.39 a \ell_z n). \quad (4.34)$$

Par conséquent, à haute densité, l'invariance d'échelle est brisée puisque $\tilde{g} = \tilde{g}(DT)$ introduit une dépendance explicite en température dans l'équation d'état.

Qu'en est-il pour nos données ?

Dans notre cas, où nous utilisons du ^{87}Rb et une fréquence de confinement vertical $\omega_z = 2\pi \times 2.0 \text{ kHz}$, on a $a\ell_z \approx 1.29 \times 10^{-15}$. Pour nos densités centrales les plus élevées ($\sim 70 \text{ at./}\mu\text{m}^2$), la correction sur $\tilde{g}$ est donc de l'ordre de 10%. Sur ces échantillons le paramètre d'interaction n'est donc pas rigoureusement uniforme sur l'ensemble du nuage et est légèrement réduit dans la partie centrale par rapport à sa valeur dans les ailes. La figure 4.19 illustre cette dépendance spatiale de $\tilde{g}$ en fonction de la position pour un de nos nuages les plus denses.

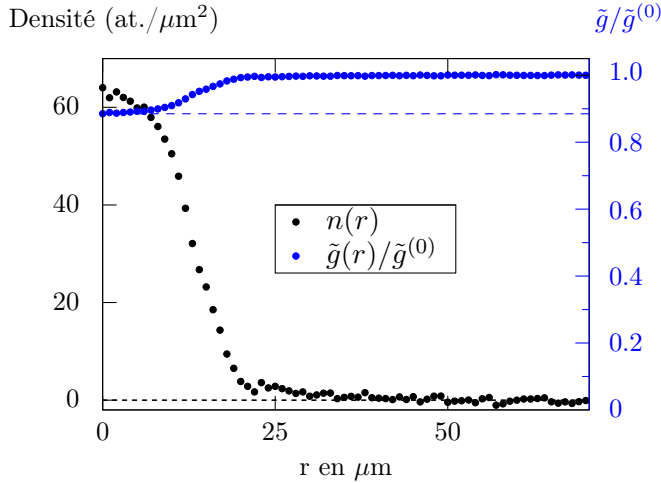


FIGURE 4.19 – Modification de $\tilde{g}$ dans un nuage dense. Les variations de densité (en noir) s'accompagnent de variations du paramètre $\tilde{g}$ (en bleu). Au centre du nuage la modification de $\tilde{g}$ est de 10%.

Quelles sont les conséquences sur nos mesures ?

Au premier abord, le fait que $\tilde{g}$ n'est pas uniforme sur nos échantillons est problématique. En pratique, comme on peut le voir sur la figure 4.19, la correction sur $\mathcal{D}$ est négligeable dans

$$\phi_0^3 \phi_\nu = \frac{1}{\pi \ell_z^2} \sqrt{\frac{1}{2^\nu \nu!}} e^{-\frac{2z^2}{\ell_z^2}} H_\nu \left(\frac{z}{\ell_z} \right) = \frac{1}{\pi \ell_z^2} \sqrt{\frac{\nu!}{2^\nu}} e^{-\frac{2z^2}{\ell_z^2}} \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{e^{-t^2+2tz/\ell_z}}{t^{\nu+1}} dt \quad (4.30)$$

où nous avons écrit le polynôme d'Hermite sous forme d'intégrale complexe. Nous intégrons à présent sur z :

$$\int \phi_0^3 \phi_\nu dz = \frac{1}{\pi \ell_z^2} \sqrt{\frac{\nu!}{2^\nu}} \frac{1}{2i\pi} \oint \left[\int e^{-\frac{2z^2}{\ell_z^2}} \frac{e^{-t^2+2tz/\ell_z}}{t^{\nu+1}} dz \right] dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \ell_z} \sqrt{\frac{\nu!}{2^\nu}} \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{e^{-t^2/2}}{t^{\nu+1}} dt. \quad (4.31)$$

En calculant l'intégrale complexe, on trouve finalement :

$$\sum_{\nu>0} \frac{1}{\nu} \left[\int \phi_0^3 \phi_\nu dz \right]^2 = \frac{1}{2\pi \ell_z^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p} \frac{(2p)!}{6! p!} = \frac{1}{2\pi \ell_z^2} \ln \left(\frac{4}{2 + \sqrt{3}} \right), \quad (4.32)$$

la somme sur p étant tabulée.

la partie de faible densité, région qui est utilisée pour extraire μ_0 et T . La détermination des paramètres thermodynamiques n'est donc pas affectée par cet effet de densité. Il est vrai en revanche que la densité dans l'espace des phases mesurée au centre du nuage n'est pas celle attendue pour $\tilde{g} = \tilde{g}^{(0)}$. Néanmoins, la dépendance de $\mathcal{D}$ en $\tilde{g}$ étant en bonne approximation linéaire³⁰ pour $\mathcal{D} \gg 1$, l'écart est de l'ordre de 10% ce qui est juste à la limite du bruit de nos mesures.

Cet effet est par ailleurs fortement amoindri sur la mesure de pression. Cette dernière repose en effet sur la mesure du nombre total d'atomes. Or, comme on peut le voir sur la figure 4.19 la modification de $\tilde{g}$ est significative pour des rayons $r \lesssim 10 \mu\text{m}$, région dont la contribution au nombre total d'atomes est relativement faible. Notre mesure de l'équation d'état pour la pression est en ce sens très robuste.

30. On a en effet $\mathcal{D} = \frac{2\pi}{g} \frac{\mu}{k_B T}$ dans le régime Thomas-Fermi.

Chapitre 5

Énergie d'interaction et fluctuations de densité d'un gaz 2D piégé

Le chapitre précédent a été consacré à l'étude des propriétés thermodynamiques du gaz 2D homogène. Dans ce chapitre, nous présenterons une étude portant sur les propriétés statiques de gaz piégés, où nous mesurons les différentes contributions à l'énergie totale. Nous verrons que les gaz de basse dimension se prêtent particulièrement bien à ce type de mesures et permettent d'accéder séparément à l'énergie potentielle, l'énergie cinétique et l'énergie d'interaction.

Nous commencerons ce chapitre en rappelant l'expression du théorème du viriel pour les gaz piégés dans des potentiels harmoniques en présence d'interactions de contact. Nous discuterons ensuite la validité de cette relation à 2D, où la modélisation des interactions par un potentiel de contact doit être soigneusement justifiée. À la section 5.2 nous nous intéresserons à la mesure des énergies potentielle, cinétique et d'interactions dans les gaz piégés. Après avoir fait un bref rappel de ce qui a été fait sur ce sujet pour des gaz 3D, nous présenterons une méthode permettant de décomposer toutes les contributions à l'énergie totale dans des gaz de basse dimension. Nous décrirons ensuite la mise en œuvre de cette méthode sur des gaz 2D piégés. À la section 5.4 nous mettrons en relation notre mesure de l'énergie d'interaction avec l'amplitude des fluctuations de densité. Nous verrons que pour les nuages considérés, qui se trouvent dans un régime intermédiaire entre le régime thermique et le régime de Thomas–Fermi, les fluctuations de densité sont essentiellement gelées. Nous connecterons cette réduction «prématurée» des fluctuations de densité aux propriétés du gaz homogène à l'approche de la transition superfluide.

5.1 Théorème du viriel pour les gaz piégés en interaction

Le théorème du viriel permet de relier l'énergie potentielle moyenne E_{pot} , l'énergie cinétique moyenne E_{cin} et l'énergie d'interaction moyenne E_{int} d'un ensemble de particules à l'équilibre thermodynamique. Le cas le plus trivial est celui d'un ensemble de particules sans interactions évoluant dans un piège harmonique pour lequel on a la relation $E_{\text{pot}} = E_{\text{cin}}$, qui est valable aussi bien en mécanique classique qu'en mécanique quantique. Dans ce qui suit, nous allons donner une expression plus générale du théorème du viriel, qui inclut les interactions entre particules, en nous limitant à des interactions binaires de portée nulle décrites par des potentiels du type

$w(\mathbf{r}) \propto \delta(\mathbf{r})$, ce qui correspond à la description usuelle dans les atomes froids¹.

5.1.1 Relation du viriel pour des interactions de contact

On considère un ensemble de particules de masse m gouvernées par l'opérateur hamiltonien :

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} + \hat{W}, \quad (5.1)$$

avec

$$\hat{T} = \sum_j \frac{\hat{p}_j^2}{2m} \quad \hat{V} = \frac{1}{2} m \omega^2 \sum_j \hat{r}_j^2 \quad \hat{W} = \frac{1}{2} \sum_{j,k}^{j \neq k} w(\hat{\mathbf{r}}_j - \hat{\mathbf{r}}_k), \quad (5.2)$$

qui désignent respectivement les opérateurs associés à l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie d'interaction. Les opérateurs $\hat{\mathbf{p}}_j$ et $\hat{\mathbf{r}}_j$ sont les opérateurs impulsion et position associés à la particule j , le potentiel de piégeage est pris harmonique isotrope de pulsation ω et les interactions sont décrites par des collisions binaires. L'opérateur associé au viriel total s'écrit :

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \sum_j \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{p}}_j + \hat{\mathbf{p}}_j \hat{\mathbf{r}}_j \quad (5.3)$$

et l'évolution temporelle de sa valeur moyenne $\langle \hat{J} \rangle$ est régie par le théorème d'Ehrenfest :

$$\frac{d\langle \hat{J} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{J}, \hat{H}] \rangle, \quad (5.4)$$

où le commutateur $[\hat{J}, \hat{H}]$ se décompose sous la forme de trois commutateurs que nous pouvons calculer indépendamment

$$[\hat{J}, \hat{H}] = \underbrace{[\hat{J}, \hat{T}]}_{\equiv \hat{C}_T} + \underbrace{[\hat{J}, \hat{V}]}_{\equiv \hat{C}_V} + \underbrace{[\hat{J}, \hat{W}]}_{\equiv \hat{C}_W}. \quad (5.5)$$

Le commutateur $\hat{C}_T$ est une somme de termes du type :

$$\frac{1}{4m} [(\hat{x}_j \hat{p}_{x,j} + \hat{p}_{x,j} \hat{x}_j), \hat{p}_{x,j}^2] = i\hbar \frac{\hat{p}_{x,j}^2}{m} \quad (5.6)$$

où $\hat{x}_j$ est l'opérateur correspondant à la première coordonnée de l'espace d'une particule j donnée et $\hat{p}_{x,j}$ l'opérateur impulsion associé, tel que $[\hat{x}_i, \hat{p}_{x,i}] = i\hbar$. De façon analogue le commutateur $\hat{C}_V$ contient des termes du type :

$$\frac{1}{4} m \omega^2 [(\hat{x}_j \hat{p}_{x,j} + \hat{p}_{x,j} \hat{x}_j), \hat{x}_j^2] = -m \omega^2 i\hbar \hat{x}_j^2. \quad (5.7)$$

En sommant sur les trois coordonnées et toutes les particules, on trouve :

$$\hat{C}_T = 2i\hbar \hat{T} \quad \hat{C}_V = -2i\hbar \hat{V}. \quad (5.8)$$

1. Comme nous l'avons précisé au chapitre 1.2.2, ce type de potentiels doivent en toute rigueur être régularisés à 2D et 3D [58, 87], ce qui correspond à la prise en compte de termes correctifs dans l'amplitude de diffusion et dans l'énergie d'interaction. En pratique, le poids relatif de ces corrections dépend des conditions expérimentales et s'avère négligeable dans nombre de cas.

Le commutateur $\hat{C}_W$ s'écrit :

$$\hat{C}_W = \frac{1}{2} \sum_{j,k}^{j \neq k} [\hat{J}, w(\hat{\mathbf{r}}_j - \hat{\mathbf{r}}_k)] \quad (5.9)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{j,k}^{j \neq k} [(\hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{p}}_j + \hat{\mathbf{p}}_j \hat{\mathbf{r}}_j), w(\hat{\mathbf{r}}_j - \hat{\mathbf{r}}_k)] + [(\hat{\mathbf{r}}_k \hat{\mathbf{p}}_k + \hat{\mathbf{p}}_k \hat{\mathbf{r}}_k), w(\hat{\mathbf{r}}_j - \hat{\mathbf{r}}_k)] \quad (5.10)$$

$$= \sum_{j,k}^{j \neq k} (-i\hbar \hat{\mathbf{r}}_j \nabla w(\hat{\mathbf{r}}_j - \hat{\mathbf{r}}_k) + i\hbar \hat{\mathbf{r}}_k \nabla w(\hat{\mathbf{r}}_k - \hat{\mathbf{r}}_k)) \quad (5.11)$$

$$= \sum_{j,k}^{j \neq k} -i\hbar (\hat{\mathbf{r}}_j - \hat{\mathbf{r}}_k) \nabla w(\hat{\mathbf{r}}_j - \hat{\mathbf{r}}_k). \quad (5.12)$$

Cette expression se simplifie dès lors que le potentiel d'interaction w est décrit par une fonction homogène au sens mathématique². En effet, en utilisant les propriétés des fonctions homogènes³, on peut montrer que si w est homogène de degré ν on a :

$$(\hat{\mathbf{r}}_j - \hat{\mathbf{r}}_k) \nabla w(\hat{\mathbf{r}}_j - \hat{\mathbf{r}}_k) = \nu w(\hat{\mathbf{r}}_j - \hat{\mathbf{r}}_k) \quad (5.13)$$

et

$$\hat{C}_W = -\nu i\hbar \hat{W}. \quad (5.14)$$

Or pour les systèmes atomiques considérés ici, les interactions sont bien décrites par le potentiel de contact $w(\hat{\mathbf{r}}_j - \hat{\mathbf{r}}_k) \propto \delta^{(d)}(\hat{\mathbf{r}}_j - \hat{\mathbf{r}}_k)$ où d est la dimensionnalité du système. Comme la «fonction» $\delta^{(d)}$ est homogène de degré $-d$, l'équation d'évolution du viriel (5.4) s'écrit :

$$\frac{d\langle \hat{J} \rangle}{dt} = 2\langle \hat{T} \rangle - 2\langle \hat{V} \rangle + d\langle \hat{W} \rangle. \quad (5.15)$$

À l'équilibre thermodynamique le premier membre s'annule et nous aboutissons à la relation simple :

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{cin}} + \frac{d}{2} E_{\text{int}}, \quad (5.16)$$

où d est la dimensionnalité du système. Précisons que nous avons considéré ici que le coefficient de proportionnalité entre $w(\mathbf{r})$ et $\delta^{(d)}(\mathbf{r})$ est fini. En particulier, cette relation n'est pas valable à la limite unitaire [75, 114, 119, 120] où $w(\mathbf{r}) = g^{(3D)} \delta^{(3D)}(\mathbf{r})$ avec $g^{(3D)} \rightarrow \infty$.

5.1.2 Application au gaz de Bose 2D

Compte tenu de l'équation générale (5.16), la relation du viriel pour un gaz piégé à deux dimensions s'écrit simplement :

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{int}} \quad \text{soit} \quad E = 2E_{\text{pot}}, \quad (5.17)$$

où $E = E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}} + E_{\text{int}}$ est l'énergie totale. Comme nous l'avons indiqué plus haut, ce résultat suppose que les interactions sont décrites par un potentiel d'interaction en delta⁴. Or, les poten-

2. Une fonction $f(x)$ est dite homogène de degré ν si elle possède la propriété $f(\kappa x) = \kappa^\nu f(x)$ où le nombre réel κ est un paramètre de changement d'échelle.

3. Toute fonction $f(x)$ homogène de degré ν étant reliée à sa dérivée première par la relation $x(df/dx) = \nu f$.

4. Ou plus généralement pour un potentiel homogène de degré -2.

tiels d'interaction de la forme $w(\mathbf{r}) \propto \delta(\mathbf{r})$ sont pathologiques à 2D et à 3D car ils conduisent à une divergence ultra-violette de l'énergie ainsi qu'à d'autres inconsistances [14,41]. Ces potentiels doivent donc en toute rigueur être régularisés en utilisant un pseudo-potentiel adapté [58,87], ce qui conduit essentiellement à la prise en compte d'un terme correctif dans l'énergie d'interaction. Plus loin, nous présenterons une description plus rigoureuse des interactions à 2D et nous estimerons les corrections à l'équation (5.17) pour nos paramètres expérimentaux. Avant cela, nous nous permettons une digression concernant la dynamique des gaz 2D car elle découle directement du résultat général (5.15).

Mode de respiration et invariance dynamique

La relation (5.15) établie plus haut pour un système hors équilibre, conduit à un résultat remarquable dans le cas bi-dimensionnel. En effet dans le cas d'un potentiel homogène de degré -2, on a :

$$\frac{d\langle\hat{J}\rangle}{dt} = 2E - 4E_{\text{pot}}. \quad (5.18)$$

Or $\frac{d\langle\hat{J}\rangle}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d^2\langle\hat{I}\rangle}{dt^2}$ où $\hat{I} = \sum_j m \hat{\mathbf{r}}_j^2$ est l'opérateur associé au moment d'inertie par rapport à l'axe de symétrie du nuage⁵. Par conséquent, dans le cas d'un potentiel de piégeage harmonique isotrope qui s'écrit $\hat{V} = \omega^2 \hat{I}/2$ l'équation (5.18) devient :

$$\frac{d^2\langle\hat{I}\rangle}{dt^2} = -4\omega^2\langle\hat{I}\rangle + 4E. \quad (5.19)$$

Ce résultat fait donc apparaître l'existence d'un mode de «respiration» du gaz 2D de pulsation 2ω . Cette propriété remarquable du gaz 2D avait été mise en évidence théoriquement par Kagan *et al.* dans [65] par la résolution de l'équation de Gross–Pitaevskii dépendant du temps, et réinterprétée par Pitaevskii et Rosch [96] en terme de symétrie cachée dans les systèmes bi-dimensionnels où les potentiels d'interactions sont homogènes de degré -2.

Une autre conséquence de ce type de potentiels d'interaction⁶ est que l'évolution libre du système à la coupure du potentiel harmonique présente une forme d'invariance dynamique. Plus précisément, la forme fonctionnelle de la distribution atomique est invariante et suit la loi d'évolution :

$$n(\mathbf{r}, t) = \kappa_t^2 n_{\text{eq}}(\kappa_t \mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad \kappa_t = (1 + \omega^2 t^2)^{-1/2}, \quad (5.20)$$

où $n_{\text{eq}}(\mathbf{r})$ est la distribution à l'équilibre. La distribution de densité $n(\mathbf{r}, t)$ à chaque instant est donc reliée à la distribution d'équilibre par un simple changement d'échelle. Cette propriété a été vérifiée dans notre groupe [103]. En pratique, les nuages étudiés présentaient une anisotropie résiduelle $|\omega_x - \omega_y|/\sqrt{\omega_x \omega_y} \approx 0.11$, mais nous n'avons pas observé de déviation significative à la relation d'invariance (5.20) à l'échelle du bruit expérimental.

5. En effet, en appliquant le théorème d'Ehrenfest à l'opérateur $\hat{I}$ on obtient :

$$\frac{d\langle\hat{I}\rangle}{dt} = \frac{m}{i\hbar} \sum_j \langle [\hat{\mathbf{r}}_j^2, \hat{H}] \rangle = \frac{m}{i\hbar} \sum_j \langle [\hat{\mathbf{r}}_j^2, \hat{T}] \rangle = \frac{1}{2i\hbar} \sum_j \langle [\hat{\mathbf{r}}_j^2, \hat{\mathbf{p}}_j^2] \rangle = 2\langle\hat{J}\rangle.$$

6. Le lien est ici moins direct à mettre en évidence.

Interactions à 2D

Nous revenons à présent à la description plus rigoureuse des interactions dans un gaz atomique à 2D. Dans un système rigoureusement bi-dimensionnel, l'état stationnaire de diffusion à basse énergie $\psi_{\mathbf{k}}$ entre deux bosons identiques avec un vecteur d'onde relatif $\mathbf{k}$ est donné, à grandes distances, par l'expression [4] :

$$\psi_{\mathbf{k}} \propto e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \sqrt{\frac{i}{8\pi}} f(k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}, \quad \frac{1}{f(k)} \approx -\frac{1}{4\pi} \ln(k^2 a_{2D}^2) + \frac{i}{4} \quad (5.21)$$

où $f(k)$ est l'amplitude de diffusion et a_{2D} la longueur de diffusion à 2D. Notons qu'il y a une différence fondamentale avec le cas 3D où l'amplitude de diffusion a une limite non nulle quand $k \rightarrow 0$ qui correspond à la longueur de diffusion $a \equiv -\lim_{k \rightarrow 0} f(k)$ (⁷). Au chapitre 1 nous avons vu qu'en pratique les gaz bi-dimensionnels sont réalisés en confinant fortement un nuage 3D selon un axe à l'aide d'un potentiel harmonique de grande raideur. Nous avons également souligné le fait que dans les expériences réalisées jusqu'ici, l'extension ℓ_z du nuage dans cette direction est très grande devant la longueur de diffusion à 3D. Typiquement $\ell_z/a > 30$ et les collisions gardent un caractère 3D dans les systèmes considérés. Le traitement rigoureux des collisions dans ce régime a été étudié par Petrov *et al.* [91,93] qui montrent que l'état stationnaire de diffusion $\psi_{\mathbf{k}}$ garde la forme de l'équation (5.21) avec une amplitude de diffusion $f(k)$ telle que :

$$\frac{1}{f(k)} = \frac{1}{\tilde{g}} - \frac{1}{4\pi} \ln(\eta k^2 \ell_z^2) + \frac{i}{4}, \quad (5.22)$$

où $\tilde{g} = \sqrt{8\pi}a/\ell_z$ et $\eta \approx 3.4$ [93]. Pour nos paramètres expérimentaux $\tilde{g} \approx 0.1$ on voit donc bien que le terme logarithmique ⁸ et le terme imaginaire sont négligeables dans l'équation (5.22). Par conséquent la constante de couplage qui intervient dans l'expression de l'énergie d'interaction $(g/2) \int n^2(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r}$ vaut $g \equiv \frac{\hbar^2}{m} f(k) = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g}$. On retrouve ainsi le résultat (1.20)–(1.22) que nous avons obtenu par un raisonnement plus naïf.

L'amplitude de diffusion (5.22) revient en fait à définir une longueur de diffusion a_{2D} effective de la forme :

$$a_{2D} = \ell_z \sqrt{\eta} e^{-2\pi/\tilde{g}}. \quad (5.23)$$

Les valeurs de a_{2D} correspondant aux expériences actuelles (pour lesquelles $\tilde{g} \ll 1$) sont donc extrêmement petites ⁹ et celle-ci n'intervient donc pas comme échelle de longueur pertinente ¹⁰ du problème.

7. À deux dimensions la longueur de diffusion s'écrit $a_{2D} \equiv be^C$ où b est une échelle de longueur microscopique qui dépend des détails du potentiel [93] et $C \approx 0.577$ est la constante d'Euler.

8. Le module du vecteur d'onde k typique est donné par $1/\xi$ au centre du nuage et $1/\lambda_T$ dans la partie thermique. Pour nos paramètres expérimentaux ceci correspond à $k \approx 2 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$. Par ailleurs, nous avons $\ell_z = 0.24 \times 10^{-6} \text{ m}$. Le terme logarithmique de l'équation 5.22 vaut donc $\ln(\eta k^2 \ell_z^2)/4\pi \approx 0.04$.

9. Pour nos paramètres $\tilde{g} = 0.11$ et $\ell_z = 240 \text{ nm}$, on trouve $a_{2D} = 7 \times 10^{-32} \text{ m}$.

10. Notons que le paramètre na_{2D}^2 qui intervient dans les corrections de l'équation d'état (voir par exemple [10,81,99]) est lui aussi négligeable. Pour nos densités surfaciques qui sont de l'ordre de 10^{13} at/m^2 on a $na_{2D}^2 \sim 5 \times 10^{-50}$.

Relation du viriel à 2D

De même que la description des interactions par un potentiel $\delta(\mathbf{r})$ n'est pas rigoureuse à 2D, la relation du viriel (5.17) est une approximation de la relation exacte¹¹ dérivée par F. Werner [119] :

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{int}} + \frac{\partial E_{\text{int}}}{\partial [\ln(a^2)]}, \quad (5.24)$$

où E_{int} dépend de l'amplitude de diffusion (5.22). On peut montrer que la contribution du dernier terme est de l'ordre de $\frac{\tilde{g}}{4\pi} E_{\text{int}}$. Pour $\tilde{g} = 0.11$, on retrouve donc le résultat (5.17) à une très bonne approximation.

5.2 Mesurer les énergies potentielle, cinétique et d'interaction de gaz piégés

Cette section est consacrée à la description de quelques méthodes permettant de mesurer les différentes contributions à l'énergie totale de gaz atomiques piégés dans des potentiels harmoniques. Nous commencerons par rappeler quelques études expérimentales réalisées il y a une quinzaine d'années sur des condensats dans des pièges harmoniques. Ces expériences nous permettront de donner un aperçu des méthodes utilisées à 3D et de montrer le type d'informations que l'on peut en extraire. Ces exemples nous permettront également de voir en quoi les gaz piégés de plus basse dimension se prêtent mieux à ce type de mesures. Ensuite, nous présenterons une méthode originale, applicable à la plupart des systèmes de basse dimension, permettant d'accéder directement à l'énergie cinétique et de déduire (via la relation du viriel) à l'énergie d'interaction.

5.2.1 Exemples de mesures sur des condensats

Peu après les premières observations de condensats de Bose–Einstein [8, 32], plusieurs expériences ont été réalisées [48, 53, 79] pour caractériser les interactions atomiques et/ou mettre en évidence leur importance relative dans les propriétés d'équilibre des condensats piégés.

Le premier effort expérimental dans ce sens a été réalisé par Mewes *et al.* [79] et repose sur la mesure de l'énergie d'interaction de condensats de Sodium. La stratégie utilisée consiste à mesurer la distribution de vitesse du nuage pendant une expansion libre (ou temp de vol), à des temps longs¹² après la coupure du piège. L'énergie d'interaction est convertie en énergie cinétique aux premiers instants de l'expansion et s'annule continûment du fait de la dispersion des atomes. Par conséquent, pour des temps suffisamment longs l'énergie cinétique du nuage est égale à l'énergie interne initiale $U = E_{\text{cin}} + E_{\text{int}}$ du système. Or dans le régime de Thomas–Fermi, qui correspond aux paramètres expérimentaux de [79], l'énergie cinétique est négligeable et donc $U \approx E_{\text{int}}$. En appliquant cette méthode pour des condensats avec des nombres d'atomes

11. En réalité la relation établie par F. Werner dans [119] est valable pour tous les systèmes avec des interactions de portée nulle (ou sans interactions) où l'état stationnaire de diffusion ne dépend que la longueur de diffusion (parfois appelés «états universels» de diffusion). La relation s'étend aux autres dimensions en remplaçant a_{2D} par la longueur de diffusion correspondante.

12. Devant la période d'oscillation dans le piège typiquement.

N_0 différents, Mewes *et al.* ont montré que l'énergie d'interaction moyenne suit la loi d'échelle $E_{\text{int}} \propto N_0^{2/5}$, ce qui constitue la première confirmation expérimentale du modèle Thomas–Fermi de champ moyen à 3D. À partir du coefficient de proportionnalité entre E_{int} et $N_0^{2/5}$, Mewes *et al.* déduisent par ailleurs la longueur de diffusion du sodium qui intervient dans le coefficient de proportionnalité¹³.

Une étude similaire a été réalisée par Holland *et al.* avec des mesures en bon accord avec [79] et s'appuient sur des simulations numériques qui indiquent l'échelle de temps sur laquelle les interactions s'annulent après la coupure des champs.

Notons qu'à la limite de Thomas–Fermi la donnée de E_{int} donne aussi accès à l'énergie potentielle moyenne par la relation $E_{\text{pot}} = 3E_{\text{int}}/2$ qui est un cas particulier de la relation du viriel :

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{cin}} + \frac{3}{2}E_{\text{int}}, \quad (5.25)$$

qui se déduit directement du résultat général (5.16).

Alors que les premières mesures décomposant l'énergie totale dans les condensats piégés à 3D est survenue l'année suivant les premières observations de condensats [8, 32], ce type de mesures n'a jamais été réalisé sur les systèmes de basse dimension. Dans la section qui suit nous proposons une procédure pour décomposer les contributions à l'énergie totale d'un gaz 2D dans un piège harmonique. Cette procédure s'étend par ailleurs aux gaz uni-dimensionnels.

5.2.2 Décomposition de l'énergie d'un gaz piégé à 2D

Dans les études [53, 79] sur des condensats 3D présentées au paragraphe précédent, les systèmes considérés sont essentiellement dans le régime de Thomas–Fermi, l'énergie cinétique est négligeable et la mesure de l'énergie interne et la relation du viriel permettent de décomposer les deux contributions à l'énergie totale que sont l'énergie d'interaction et l'énergie potentielle. Cette approche est tout à fait adaptable à des gaz 2D dans le régime de Thomas–Fermi, mais comme nous l'avons évoqué dans la section 1.3, le gaz de Bose bi-dimensionnel présente une physique riche dans un régime intermédiaire entre le régime thermique et le régime de Thomas–Fermi. Dans ce régime l'énergie cinétique moyenne E_{cin} n'est *a priori* pas négligeable. Dans ce qui suit, nous allons montrer comment décomposer chacune des contributions (E_{pot} , E_{cin} et E_{int}) dans un gaz de Bose 2D dans un piège harmonique «raisonnablement isotrope».

Énergie potentielle

L'un des avantages des systèmes de plus basse dimension (1D et 2D) pour ce type de mesures est que l'on a directement accès à la distribution de densité locale. Dès lors, il suffit de connaître le potentiel de piégeage $V(\mathbf{r})$, pour en déduire l'énergie potentielle :

$$E_{\text{pot}} = \int V(\mathbf{r}) \langle n(\mathbf{r}) \rangle d^2\mathbf{r}, \quad (5.26)$$

13. En toute rigueur la quantité déterminée est $g^{(2)}(\mathbf{0})a_{\text{Na}}$ où $g^{(2)}(\mathbf{0})$ est la fonction de corrélation d'ordre 2 $g^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ prise au même point et a_{Na} la longueur de diffusion du Sodium. Nous y reviendrons plus loin.

où $\langle \dots \rangle$ désigne ici une moyenne d'ensemble. En particulier, dans le cas d'un piège harmonique isotrope de pulsation ω :

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m \omega^2 \int r^2 \langle n(r) \rangle d^2 \mathbf{r}. \quad (5.27)$$

Énergie cinétique et énergie d'interaction

Pour décomposer l'énergie, il nous faut déterminer au moins l'une des deux autres contributions. Nous proposons ici une méthode qui tire parti du fait que l'on a accès directement à l'énergie potentielle pour mesurer l'énergie cinétique moyenne.

Considérons un nuage bi-dimensionnel en interaction à l'équilibre thermodynamique dans un potentiel harmonique isotrope de pulsation ω . Si l'on coupe les interactions à l'instant $t = 0$, alors chaque atome du nuage (indexé par un entier j) suit une évolution libre dans le piège harmonique décrite par :

$$\mathbf{r}_j(t) = \mathbf{r}_j(0) \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \mathbf{v}_j(0) \sin(\omega t), \quad (5.28)$$

où r_j et v_j désignent la position et la vitesse dans le plan (xOy). L'énergie potentielle moyenne à un instant t s'écrit donc :

$$E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 \langle r^2(t) \rangle \quad (5.29)$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 \langle r^2(0) \rangle \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} m \langle v^2(0) \rangle \sin^2(\omega t) + m \omega \underbrace{\langle \mathbf{r}(0) \cdot \mathbf{v}(0) \rangle}_{=0} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \quad (5.30)$$

où $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne sur un grand nombre de particules¹⁴. Dans le second membre de l'égalité, on reconnaît les expressions des énergies potentielle et cinétique moyennes à $t = 0$. Comme la position et la vitesse ne sont pas corrélées ($\langle \mathbf{r}(0) \cdot \mathbf{v}(0) \rangle = 0$) on obtient :

$$E_{\text{pot}}(t) = E_{\text{pot}}(0) \cos^2(\omega t) + E_{\text{cin}}(0) \sin^2(\omega t). \quad (5.31)$$

Par conséquent, en mesurant l'énergie potentielle moyenne à différents instants après la coupure des interactions et connaissant la fréquence de piégeage ω , on peut obtenir une mesure précise de l'énergie cinétique initiale. Enfin, grâce à la relation du viriel (5.17) on peut déduire l'énergie d'interaction moyenne et obtenir ainsi pour n'importe quel régime du gaz 2D piégé les différentes contributions à l'énergie totale.

14. Nous faisons ici un raisonnement classique, mais comme l'hamiltonien est quadratique nous obtiendrions la même chose par un raisonnement quantique en se plaçant dans le point de vue de Heisenberg.

Cas d'un piège anisotrope. Pour un piège avec des pulsations ω_x et ω_y différentes suivant les axes propres (Ox) et (Oy), l'évolution de l'énergie potentielle s'écrit¹⁵ :

$$E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2}m [\omega_x^2 \langle x_t^2 \rangle + \omega_y^2 \langle y_t^2 \rangle] \quad (5.32)$$

$$= \frac{1}{2}m [\omega_x^2 \langle x_0^2 \rangle \cos^2(\omega_x t) + \omega_y^2 \langle y_0^2 \rangle \cos^2(\omega_y t)] \\ + \frac{1}{2}m [\langle v_{x,0}^2 \rangle \sin^2(\omega_x t) + \langle v_{y,0}^2 \rangle \sin^2(\omega_y t)] , \quad (5.33)$$

où nous avons utilisé le fait que $\langle x_0 \cdot v_{x,0} \rangle = \langle y_0 \cdot v_{y,0} \rangle = 0$. Afin de quantifier la modification du résultat(5.31) dû à l'anisotropie du piège, nous posons $\omega_x = \omega + \delta\omega/2$ et $\omega_y = \omega - \delta\omega/2$. En nous limitant à des temps t tels que $\delta\omega t \ll 1$, un développement au premier ordre en ces deux paramètres donne :

$$E_{\text{pot}}(t) = E_{\text{pot}}(0) \cos^2(\omega t) + E_{\text{cin}}(0) \sin^2(\omega t) \\ + \frac{m}{4} \underbrace{[\omega_x^2 \langle x_0^2 \rangle - \omega_y^2 \langle y_0^2 \rangle]}_0 \sin(2\omega t) \delta\omega t \\ - \frac{m}{4} \underbrace{[\langle v_{x,0}^2 \rangle - \langle v_{y,0}^2 \rangle]}_0 \sin(2\omega t) \delta\omega t + O[(\delta\omega t)^2] \quad (5.34)$$

où les termes du premier ordre s'annulent. Pour une anisotropie de l'ordre $\frac{\delta\omega}{\omega} \sim 10\%$ la correction relative à l'équation (5.31) qui est du second ordre n'est que de quelques pour-cents après deux périodes d'oscillation dans le plan ($t = 2\bar{\omega}^{-1}$). Cette méthode est donc très robuste vis-à-vis d'une anisotropie résiduelle. Notons enfin que cette procédure est tout à fait adaptable aux expériences sur les gaz uni-dimensionnels.

5.3 Mise en œuvre expérimentale

Dans cette section nous allons décrire la réalisation expérimentale de la méthode décrite à la section précédente. Nous avons choisi de présenter ici un régime typique de nos gaz de Bose 2D avec une densité dans l'espace des phases au centre du nuage $\mathcal{D} \sim 40$ (sachant que la transition superfluide est attendue à $\mathcal{D} \sim 8$ [100] pour nos paramètres) et une composante thermique non négligeable. Avant de présenter le résultat de cette mesure, nous allons décrire notre méthode pour couper les interactions dans nos nuages. Cette procédure présente une alternative à l'utilisation d'une résonance de Feshbach [25] pour éteindre les interactions et est applicable à tous les systèmes de basse dimension¹⁶.

5.3.1 Coupure des interactions

La technique traditionnellement utilisée dans le domaine des atomes froids pour le contrôle des interactions est l'utilisation de résonances de Feshbach. Pour couper les interactions dans nos

15. Par commodité, nous avons choisi d'indiquer la dépendance temporelle par un indice : $x_t \equiv x(t)$, etc.

16. La seule condition requise est que le potentiel assurant le confinement de grande raideur soit indépendant de celui qui produit le confinement mou.

gaz piégés, nous avons opté pour une autre stratégie, plus facile à mettre en œuvre, qui consiste à couper le potentiel qui assure le confinement vertical. Comme le confinement est de grande raideur, les atomes s'étendent très vite dans la direction verticale (Fig. 5.1) et les interactions s'annulent du fait de la distance entre les atomes. Les atomes évoluent alors librement dans le potentiel harmonique tri-dimensionnel créé par le TOP. Comme le mouvement dans le plan (xOy) est découplé du mouvement selon (Oz), la distribution spatiale mesurée en imagerie verticale (qui est maintenant une densité intégrée sur l'extension verticale du nuage) n'est pas modifiée par rapport à ce que l'on mesurerait avec un mouvement purement 2D.

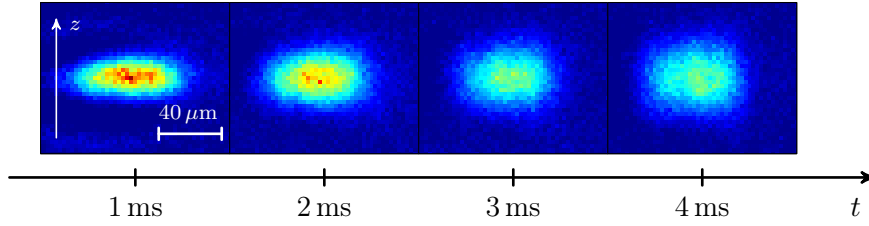


FIGURE 5.1 – «Film» d'un temps de vol 1D suivant l'axe d'imagerie horizontale.

Temps d'extinction des interactions. En l'absence d'interactions, un nuage confiné dans le niveau fondamental d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_z , a une extension verticale $\delta z_0 = \ell_z = \sqrt{\hbar/m\omega_z}$ et une dispersion en vitesse $\delta v_0 = \hbar/m\delta z_0$. À la coupure du confinement, le nuage s'étend suivant une loi balistique et son extension à l'instant t vaut :

$$\delta z_t = \sqrt{\delta z_0^2 + \delta v_0^2 t^2} = \delta z_0 \sqrt{1 + \omega_z^2 t^2}. \quad (5.35)$$

La distance moyenne entre atomes augmente donc significativement au bout d'un temps de l'ordre de quelques ω_z^{-1} . En présence d'interactions, du fait de la répulsion entre atomes l'expansion est accélérée aux premiers instants par rapport au cas idéal. Pour notre fréquence de piégeage verticale qui vaut 2 kHz, on a $\omega_z^{-1} = 80 \mu\text{s}$ et on s'attend donc à ce que les interactions deviennent négligeables au bout de quelques centaines de microsecondes. L'extinction des interactions est donc instantanée vis-à-vis du mouvement dans le plan dont l'échelle de temps caractéristique est $\omega^{-1} = 8 \text{ ms} = 100\omega_z^{-1}$.

L'extinction du faisceau laser permettant le piégeage est réalisée en désactivant le modulateur acousto-optique (MAO) contrôlé par un interrupteur électronique lui-même piloté par ordinateur. Le temps de réponse de l'ensemble du système est de l'ordre de la microseconde et ne constitue pas un facteur limitant.

Mouvement vertical dans le TOP. Lors de l'évolution libre des atomes dans le TOP, ceux-ci ressentent également le potentiel vertical produit par celui-ci. Par conséquent, après un temps égal à la demi-période d'oscillation verticale dans le TOP, les atomes reviennent dans le plan

central $z = 0$. Ceci correspond à un re-branchement effectif des interactions qui n'est pas souhaité, le temps d'évolution libre est donc limité dans cette procédure. L'évolution libre des atomes peut également être perturbé avant cela, car après avoir atteint le point de rebroussement (selon l'axe vertical), une partie des atomes se déplacent essentiellement en sens opposés, ce qui favorise les collisions. Nous nous limiterons donc à des temps plus courts que le quart de la période du mouvement vertical soit $t < 4 \text{ ms}$, la fréquence verticale du piège TOP étant de 57 Hz .

Cette procédure qui consiste à couper le potentiel de confinement vertical et laisser les atomes évoluer librement dans le potentiel magnétique a également été utilisée par Tung *et al.* [116] pour mesurer la distribution en impulsion d'équilibre de gaz bi-dimensionnels. Cette distribution d'impulsion est obtenue en sondant le nuage au temps $t = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega}$ après la coupure des interactions, soit après un quart de période du mouvement d'oscillation dans le plan (xOy) . À cet instant précis la distribution spatiale coïncide à un facteur ω près avec la distribution de vitesse initiale. Ce résultat qui découle directement de l'équation (5.28) est simplement la conséquence du fait que la position et la vitesse sont en quadrature phase, dans un mouvement d'oscillation libre¹⁷.

Dans ce qui suit nous allons appliquer cette méthode, que nous avons nommée *temps-de-vol uni-dimensionnel* (TdV 1D), à la mesure de l'énergie d'interaction de gaz bi-dimensionnels.

5.3.2 Mesure de l'énergie d'interaction

Au chapitre 4 nous avons mesuré l'équation d'état du gaz 2D homogène à partir de la distribution de densité de nuages bi-dimensionnels piégés à l'équilibre thermodynamique. Ici, nous allons présenter une mesure de certaines propriétés statiques du gaz 2D piégé à partir d'un film de la dynamique de ces gaz pendant un TdV 1D.

Pour l'étude de cette dynamique, nous commençons par préparer un gaz 2D suivant la procédure que nous avons décrite au chapitre 4. Après quelques secondes où nous laissons le nuage atteindre l'équilibre thermodynamique, le faisceau dipolaire qui assure le confinement vertical est éteint et les atomes évoluent librement dans le potentiel harmonique du TOP. Le nuage est alors sondé après un TdV 1D de durée variable entre 1 ms et 3.5 ms . Les distributions de densité sont mesurées à haute intensité¹⁸ avec $I_i \sim 50I_{\text{sat}}$.

Pour chaque durée t de TdV 1D, nous pouvons calculer en principe l'énergie potentielle moyenne à partir de la distribution atomique $n(r, t)$

$$E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 \int r^2 \langle n(\mathbf{r}, t) \rangle d^2r = \pi m \omega^2 \int r^3 \langle n(r, t) \rangle dr, \quad (5.36)$$

où $\langle \dots \rangle$ correspond à une moyenne d'ensemble qui peut s'obtenir ici par intégration angulaire. En pratique, le calcul numérique de cette quantité à partir de nos profils ne converge pas. Ceci est dû au fait que les régions éloignées du centre sont très bruitées et ont un poids relatif important dans le calcul de l'intégrale en raison du terme en r^3 . Nous procédons donc à un lissage des profils de

17. La distribution en impulsion a aussi été mesurée directement sur des nuages très allongés [109] et des gaz quasi-1D [117] en combinant l'excitation d'un mode quadrupolaire suivant l'axe du nuage et une expansion libre du nuage.

18. Nous avons observé que la densité optique mesurée à basse intensité après un TdV de quelques ms souffre toujours d'artefacts d'imagerie dans la région centrale des nuages.

densité en modélisant de façon heuristique la forme de nos profils par la somme d'une distribution gaussienne avec une parabole inversée. Ces formes fonctionnelles correspondent respectivement aux composantes diluée et dégénérée du nuage, comme cela est traditionnellement fait sur les condensats 3D avec une composante thermique.

À partir de chaque image, nous produisons donc un profil de densité par moyenne angulaire sur lequel nous pratiquons un ajustement par la fonction

$$n^{(\text{heur})}(r) = A_T \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_T^2}\right) + A_0 \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) \Theta\left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right), \quad (5.37)$$

où A_T , σ_T , A_0 et R_0 sont les paramètres¹⁹ et Θ est la fonction de Heaviside qui assure que le second terme reste positif. Un exemple d'ajustement est représentée sur la figure 5.3.2. Comme nous pouvons le voir, la modélisation de ce profil par la fonction heuristique $n^{(\text{heur})}(r)$ est très satisfaisante, hormis une légère déviation à l'endroit du raccordement entre la gaussienne et la parabole. Nous obtenons un accord de cette qualité sur l'ensemble de nos profils.

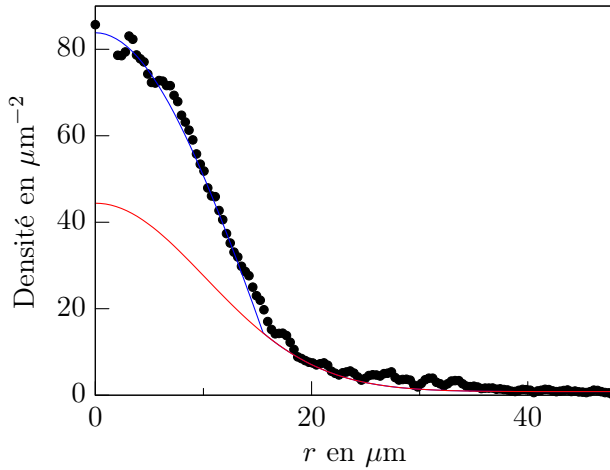


FIGURE 5.2 – Profil de densité d'un nuage sondé après un TdV de 1.5 ms. La ligne continue est un ajustement bimodal : la somme d'une parabole et d'une gaussienne.

Comme la fonction $n^{(\text{heur})}(r)$ qui modélise nos profils s'intègre analytiquement, le calcul de l'énergie potentielle au temps t (Eq. 5.36) est simplifié et s'obtient directement des paramètres d'ajustement :

$$E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 \left[N_T \sigma_T^2(t) + \frac{1}{3} N_0 R_0^2(t) \right], \quad (5.38)$$

où $N_T = 2\pi A_T \sigma_T^2$ et $N_0 = \pi A_0 R_0^2/2$ sont respectivement les nombres d'atomes des composantes diluée et dégénérée. N_T et N_0 sont des quantités constantes au cours du TdV alors que σ_T et R_0 dépendent *a priori* de t . Le résultat des ajustements indique que seules les valeurs de R_0 varient significativement avec le TdV et il n'apparaît pas de tendance claire pour la taille σ_T de la composante diluée. Ceci s'interprète par le fait que les interactions sont négligeables dans

19. En pratique, il y a également une constante additionnelle qui permet de prendre en compte un éventuel décalage des ordonnées, mais nous ignorerons ce détail par souci de fluidité.

cette composante et par conséquent son équilibre n'est quasiment pas perturbé par la coupure effective des interactions. L'évolution de $E_{\text{pot}}(t)$ est donc contenue dans celle des rayons $R_0(t)$ de la parabole.

La figure 5.3 représente l'évolution temporelle de $E_{\text{pot}}(t)$ obtenue²⁰ pour un nuage très dégénéré. Les barres d'erreur correspondent à l'erreur statistique sur plusieurs répétitions (5 à 6 par configuration). Comme on peut le voir, aux premiers instants de l'évolution libre l'extension radiale du nuage et donc l'énergie potentielle moyenne diminuent. Cette implosion se comprend de façon assez intuitive. L'état initial du nuage résultait de l'équilibre entre l'énergie potentielle, qui tend à comprimer le nuage au centre du piège, et l'énergie cinétique et d'interaction, qui tendent à étendre le nuage. À la coupure des interactions, cet équilibre est rompu et l'on sait de la relation du viriel (5.17) que $E_{\text{pot}}(0) > E_{\text{cin}}(0)$, les atomes vont donc naturellement être attirés vers le centre du nuage.

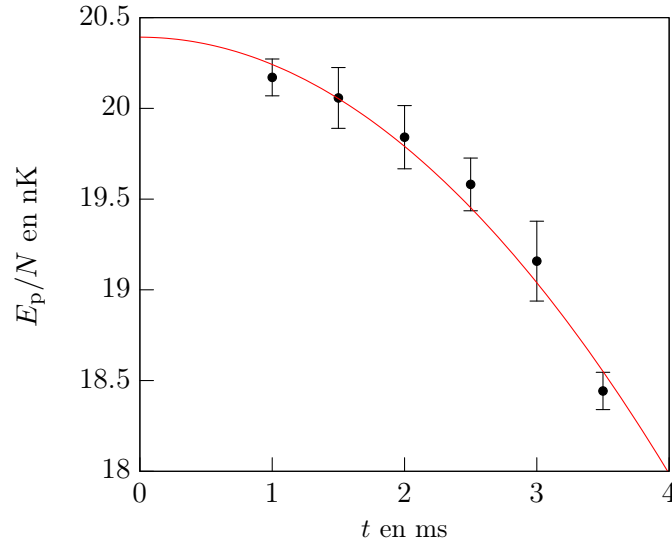


FIGURE 5.3 – Évolution de l'énergie potentielle par particule E_{pot}/N en fonction du temps de vol. Les barres d'erreurs correspondent à l'erreur statistique. La ligne continue rouge est ajustement de la forme $f(t) = A - (A - B) \sin^2(\omega t)$ où $\omega = 2\pi \times 20$ Hz est fixée.

La ligne continue rouge représente l'ajustement par la loi d'évolution (5.31) avec $\omega = 2\pi \times 20$ Hz qui est la fréquence moyenne du piège TOP dans le plan (xOy) , et permet d'extraire²¹ $E_{\text{cin}}(0)$. L'anisotropie résiduelle du potentiel radial créé par le TOP vaut $\frac{\delta\omega}{\omega} = 1\%$, et est donc négligeable compte tenu du développement (5.34).

En principe l'ajustement de l'évolution de $E_{\text{pot}}(t)$ fournit à la fois l'énergie potentielle et l'énergie cinétique du système à l'équilibre $E_{\text{pot}}(0)$ et $E_{\text{cin}}(0)$. Nous verrons au paragraphe suivant

20. $E_{\text{pot}}(t)$ est calculée à partir de la relation (5.38) où σ_T , N_T et N_0 (qui n'évoluent pas au cours du TdV) sont fixés à leur valeur moyenne.

21. Plus précisément, comme l'équation (5.31) s'écrit aussi $E_{\text{pot}}(t) = E_{\text{pot}}(0) - [E_{\text{pot}}(0) - E_{\text{cin}}(0)] \sin^2(\omega t)$, nous ajustons les points expérimentaux par la fonction $f(t) = A - (A - B) \sin^2(\omega t)$ où A et B sont les paramètres d'ajustement et ω est fixée.

que seule la mesure de $E_{\text{cin}}(0)$ est fiable dans notre cas. La valeur de $E_{\text{pot}}(0)$ est donc obtenue par ailleurs grâce à la distribution atomique de nuages sondés *in situ* (préparés dans les mêmes conditions que pour l'étude dynamique). Ayant déterminé $E_{\text{pot}}(0)$ et $E_{\text{cin}}(0)$, nous en déduisons l'énergie d'interaction $E_{\text{int}}(0)$ grâce à la relation du viriel (5.17). Les résultats de cette analyse ainsi que les données thermodynamiques²² sont rassemblés dans le tableau 5.1.

$\mathcal{D}(0)$	$\mu_0/k_{\text{B}}T$	T	N	$N^{(\text{exc})}/N$
37 ± 2	0.67 ± 0.03	$62 \pm 2 \text{ nK}$	$(66 \pm 2) \times 10^3$	$(3.6 \pm 0.3)\%$

E_{pot}/N	$E_{\text{cin}}/E_{\text{pot}}$	$E_{\text{int}}/E_{\text{pot}}$
$18.5 \pm 0.9 \text{ nK}$	0.54 ± 0.06	0.46 ± 0.06

TABLE 5.1 – Propriétés d'équilibre d'un gaz 2D avec les différentes contributions à l'énergie totale.

Nous constatons que $E_{\text{int}} \approx E_{\text{pot}}$ alors que la densité dans l'espace des phases au centre du nuage est très élevée. Ceci contraste avec ce que l'on a habituellement à 3D où pour des densités dans l'espace aussi élevées, le système est en général profondément dans le régime de Thomas–Fermi. Enfin, précisons que pour nos paramètres la transition superfluide est attendue à $\mathcal{D}_c \approx 8.2$, le système comporte donc *a priori* une composante superfluide non négligeable.

Conséquences de la modification du potentiel radial. À la section 4.1.2, nous avons vu que sur notre montage le potentiel dipolaire modifie légèrement la forme du potentiel créé par le TOP dans le plan (xOy). L'effet du potentiel optique se résume essentiellement à une augmentation de 7% de la fréquence de piégeage ($20.0 \text{ Hz} \rightarrow 21.4 \text{ Hz}$) selon l'axe (Oy). À la coupure du confinement vertical, le potentiel radial est donc soudainement modifié dans la direction (Oy) mais l'évolution des trajectoires (5.28) reste toujours valable pour $\mathbf{r}(t)$ où ω est la pulsation du TOP et non celle du potentiel initial. En introduisant la quantité $\tilde{E}_{\text{pot}}(t) \equiv m\omega^2 \langle r^2(t) \rangle$ on a donc :

$$\tilde{E}_{\text{pot}}(t) = \tilde{E}_{\text{pot}}(0) \cos^2(\omega t) + E_{\text{cin}}(0) \sin^2(\omega t) \quad (5.39)$$

où $\tilde{E}_{\text{pot}}(0)$ est différent de l'énergie potentielle initiale du système $E_{\text{pot}}(0)$. En pratique, puisque l'on détermine séparément les coefficients des termes en $\cos^2(\omega t)$ et en $\sin^2(\omega t)$, la modification du potentiel radial n'empêche pas de mesurer de $E_{\text{cin}}(0)$.

5.4 Énergie d'interaction et fluctuations de densité

Dans cette section nous allons chercher à relier le résultat de la mesure de l'énergie d'interaction aux fluctuations de densité dans le système. Dans la première partie de cette section, nous verrons que l'énergie d'interaction moyenne d'un système atomique est étroitement liée à la fonction de corrélation d'ordre 2 [68], qui elle-même est reliée aux fluctuations de densité. En

22. Toutes les grandeurs étant associées à l'état d'équilibre nous omettons de préciser l'instant $t = 0$: $E_{\text{pot}} \equiv E_{\text{pot}}(0)$, etc.

particulier, nous établirons le lien entre ces quantités et démontrerons quelques résultats sur les fonction de corrélations²³.

En appliquant le formalisme ainsi établi à notre mesure, nous verrons que notre mesure de l'énergie d'interaction fournit une mesure des fluctuations moyennes de densité sur l'ensemble du nuage. Enfin nous verrons que le résultat obtenu s'interprète comme la signature d'une phase particulière où les fluctuations sont fortement réduites, et qui précède la transition superfluide [13,70]. La mise en évidence de cette phase «pré-superfluide» confirme les prédictions théoriques [101] sur l'établissement de la transition superfluide et une récente observation expérimentale par Tung *et al.* [116].

5.4.1 Énergie d'interaction et corrélations du deuxième ordre

L'énergie d'interaction moyenne d'un gaz atomique est une quantité globale mais elle est étroitement reliée à certaines propriétés locales de ce même système. Pour mettre en évidence ce lien, nous allons nous placer dans le cadre de la seconde quantification où l'opérateur champ $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ crée une particule au point de coordonnée $\mathbf{r}$. L'opérateur $\hat{W}$ associé au potentiel d'interaction entre deux particules situés en $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ respectivement s'écrit :

$$\hat{W} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \hat{W}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1). \quad (5.40)$$

L'énergie d'interaction moyenne d'un système dans l'état quantique $|\Phi\rangle$ est donné par :

$$E_{\text{int}} = \langle \hat{W} \rangle = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \hat{W}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1) \rangle, \quad (5.41)$$

où $\langle \hat{A} \rangle \equiv \langle \Phi | \hat{A} | \Phi \rangle$ est la valeur moyenne de l'opérateur $\hat{A}$ sur l'état $|\Phi\rangle$. Le terme dans l'intégrale de l'équation (5.41) peut s'écrire en fonction de la fonction de corrélation d'ordre 2 qui est proportionnelle à la probabilité de trouver une particule au point $\mathbf{r}_2$ sachant qu'il y en a une en $\mathbf{r}_1$ et qui est définie par :

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1) \rangle}{n(\mathbf{r}_1) n(\mathbf{r}_2)}, \quad (5.42)$$

où $n(\mathbf{r}) \equiv \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \rangle$ est la densité moyenne. L'énergie d'interaction moyenne (5.41) s'écrit donc :

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \hat{W}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) n(\mathbf{r}_1) n(\mathbf{r}_2) g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (5.43)$$

Lorsque les interactions sont décrites par un potentiel de contact du type $\hat{W}(\mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r})$, l'expression générale (5.43) se met sous la forme simplifiée :

$$E_{\text{int}} = \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} n^2(\mathbf{r}) g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (5.44)$$

Si l'on considère un système homogène où l'on peut supposer que $g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ ne dépend que de la distance $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ alors $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = g^{(2)}(0)$ est constant sur toute l'étendue du système.

23. La plupart de ces résultats sont connus et couramment utilisés dans le domaine des atomes froids mais leurs démonstrations sont souvent sommaires dans la littérature. Nous avons donc jugé utile de démontrer ces résultats.

Pour les systèmes atomiques que nous étudions, la mesure de l'énergie d'interaction moyenne peut donc fournir la valeur de $g^{(2)}(0)$. Cette relation entre E_{int} et $g^{(2)}(0)$ a été discuté dans [68] dans un commentaire sur les expériences [53, 79] que nous avons brièvement décrites au début de ce chapitre. Il est assez remarquable qu'une quantité globale donne accès à une propriété microscopique du système de façon aussi directe. Cette relation entre E_{int} et $g^{(2)}(0)$ est toutefois assez intuitive dans la mesure où l'on s'attend, pour un potentiel à courte portée, à ce que l'énergie d'interaction soit proportionnelle à la probabilité que deux atomes se trouvent au même endroit.

En général le calcul de $g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ du problème à N -corps à température non nulle est complexe. Le calcul est néanmoins simplifié dans les cas où l'état du système $|\Phi\rangle$ se factorise en un produit d'états à une particule $|\phi_i\rangle$ tel que $|\Phi\rangle = |\phi_0 : N_0; \phi_1 : N_1; \dots\rangle$. Les deux paragraphes qui suivent sont consacrés au calcul de $g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ dans deux cas simples pertinents pour les systèmes que nous étudions ici : (i) l'état complètement condensé, (ii) l'état thermique dans l'approximation de Hartree-Fock.

Pour cela, il est commode d'introduire les opérateurs création $\hat{a}_i^\dagger$ et annihilation $\hat{a}_i$ qui créent et enlèvent une particule dans l'état $|\phi_i\rangle$ tels que :

$$\hat{a}_i^\dagger | \dots; \phi_i : N_i; \dots \rangle = \sqrt{N_i + 1} | \dots; \phi_i : N_i + 1; \dots \rangle \quad (5.45)$$

$$\hat{a}_i | \dots; \phi_i : N_i; \dots \rangle = \sqrt{N_i} | \dots; \phi_i : N_i - 1; \dots \rangle \quad (5.46)$$

$$\hat{a}_i | \dots; \phi_i : 0; \dots \rangle = 0. \quad (5.47)$$

Les opérateurs champs se décomposent alors sous la forme :

$$\Psi^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_i \langle \phi_i | \mathbf{r} \rangle a_i^\dagger = \sum_i \phi_i^*(\mathbf{r}) a_i^\dagger \quad \Psi(\mathbf{r}) = \sum_i \langle \mathbf{r} | \phi_i \rangle a_i = \sum_i \phi_i(\mathbf{r}) a_i. \quad (5.48)$$

Nous rappelons par ailleurs les relations de commutation suivantes :

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}^K \quad [\Psi(\mathbf{r}_1), \Psi^\dagger(\mathbf{r}_2)] = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (5.49)$$

où δ_{ij}^K correspond au δ de Krœnecker et $\delta(\mathbf{r})$ à la distribution de Dirac. À partir de la seconde relation de commutation dans (5.49) on a :

$$\langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1) \rangle = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_2) \rangle - \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1) \rangle \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (5.50)$$

Cas du condensat

Le cas le plus simple est celui du condensat où les N atomes du système sont dans l'état fondamental $|\phi_0\rangle$ du système soit $|\Phi\rangle = |\phi_0 : N; \phi_1 : 0; \phi_2 : 0; \dots\rangle$ dans la notation précédente. Dans ce cas précis on peut calculer $g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ pour une assemblée d'atomes piégés dans un potentiel de forme quelconque. Le calcul du numérateur dans l'expression (5.42) de $g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ donne :

$$\langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1) \rangle = |\phi_0(\mathbf{r}_1)|^2 |\phi_0(\mathbf{r}_2)|^2 \underbrace{\langle a_0^\dagger a_0^\dagger a_0 a_0 \rangle}_{N(N-1)}. \quad (5.51)$$

D'où l'on déduit la valeur de $g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$:

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \frac{\langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1) \rangle}{n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2)} = \frac{N(N-1)|\phi_0(\mathbf{r}_1)|^2|\phi_0(\mathbf{r}_2)|^2}{N^2|\phi_0(\mathbf{r}_1)|^2|\phi_0(\mathbf{r}_2)|^2} = 1 - \frac{1}{N} \approx 1, \quad (5.52)$$

où l'on a négligé les contributions d'ordre $1/N$. Dans la limite des grands nombres d'atomes la fonction de corrélation d'un condensat est donc constante et vaut $g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 1$. De façon générale on peut montrer que la fonction de corrélation $g^{(k)}$ d'ordre k vaut toujours 1 pour un état de Fock avec un seul mode peuplé $|\dots; \phi_i : N; \dots\rangle$, tant que $k \ll N$.

Régime de Hartree–Fock

Nous nous plaçons à présent dans le cadre de l'approximation de Hartree–Fock, où les atomes peuvent maintenant occuper tous les états à une particule. L'état du système se met alors sous la forme générale $|\Phi\rangle = |\phi_0 : N_0; \phi_1 : N_1; \dots\rangle$ avec la contrainte $\sum_i N_i = N$. Dans ce cas, le numérateur de l'expression (5.42) s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1) \rangle &= \sum_{i,j,k,l} \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_j^*(\mathbf{r}_2) \phi_k(\mathbf{r}_2) \phi_l(\mathbf{r}_1) \langle a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l \rangle \\ &\approx \sum_{i,j,k,l} \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_j^*(\mathbf{r}_2) \phi_k(\mathbf{r}_2) \phi_l(\mathbf{r}_1) \underbrace{(\langle a_i^\dagger a_j^\dagger \rangle \langle a_k a_l \rangle)}_{=0} \\ &\quad + \underbrace{\langle a_i^\dagger a_k \rangle \langle a_j^\dagger a_l \rangle}_{N_i N_j \delta_{ik}^K \delta_{jl}^K} + \underbrace{\langle a_i^\dagger a_l \rangle \langle a_j^\dagger a_k \rangle}_{N_i N_l \delta_{il}^K \delta_{jk}^K} \quad (5.53) \\ &\approx \sum_{i,j} N_i N_j |\phi_i(\mathbf{r}_1)|^2 |\phi_j(\mathbf{r}_2)|^2 \\ &\quad + \sum_{i,j} N_i N_j \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_i(\mathbf{r}_2) \phi_j^*(\mathbf{r}_2) \phi_j(\mathbf{r}_1) \\ &\approx n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2) + \left(\sum_i N_i \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_i(\mathbf{r}_2) \right)^2, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le théorème de Wick pour des bosons pour décomposer le terme $\langle a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l \rangle$. La fonction de corrélation d'ordre 2 s'écrit donc :

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \approx 1 + \frac{[\sum_i N_i \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_i(\mathbf{r}_2)]^2}{n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2)}. \quad (5.54)$$

Le second terme du second membre correspond au carré de la fonction de corrélation du premier ordre. En effet :

$$\begin{aligned} g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &\equiv \frac{\langle \Psi^\dagger(\mathbf{r}_1) \Psi^\dagger(\mathbf{r}_2) \rangle}{\sqrt{n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2)}} = \frac{1}{\sqrt{n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2)}} \sum_{i,j} \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_j(\mathbf{r}_2) \langle a_i^\dagger a_j \rangle \\ &= \frac{\sum_i N_i \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_i(\mathbf{r}_2)}{\sqrt{n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2)}}. \quad (5.55) \end{aligned}$$

Dans le cas d'un gaz thermique bien décrit par l'approximation de Hartree–Fock, on a donc :

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \approx 1 + \left[g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right]^2, \quad (5.56)$$

et en particulier, comme $g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 1$, on trouve :

$$g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \approx 2. \quad (5.57)$$

Ce résultat contraste donc avec le régime condensé et correspond au phénomène connu sous le nom de groupement bosonique. En appliquant la même démarche pour des fermions, le théorème de Wick fait apparaître une alternance de signe dans la décomposition du terme $\langle a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l \rangle$, ce qui conduit à la compensation de deux termes égaux. On trouve donc $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 0$ ce qui traduit simplement le principe d'exclusion de Pauli.

Lien avec les fluctuations de densités

L'amplitude des fluctuations de densités est caractérisée par la quantité :

$$\sigma_n^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_2) \rangle - \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1) \rangle \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_2) \rangle. \quad (5.58)$$

En utilisant la relation de commutation (5.49), on peut réécrire cette quantité en fonction de la fonction de corrélation d'ordre 2 :

$$\sigma_n^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2) \left[g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - 1 \right] + \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)n(\mathbf{r}_1), \quad (5.59)$$

où le terme $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)n(\mathbf{r}_1)$ est le bruit de grenaille atomique. Pour un système dans le régime de Hartree–Fock on peut aussi écrire :

$$\sigma_n^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2) \left[g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right]^2 + \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)n(\mathbf{r}_1). \quad (5.60)$$

Dans un condensat nous avons vu que $g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 1$, les fluctuations de densité sont donc réduites au terme de bruit de grenaille.

En raison du terme $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, la quantité $\sigma_n^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ n'est pas définie pour $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$. Il est important de noter que ce terme provient des relations de commutation (5.49) propres au formalisme de seconde quantification. Le passage au formalisme classique se traduit essentiellement par la disparition du terme de bruit de grenaille. Les fluctuations de densité s'écrivent

$$\sigma_n^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2) \left[g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - 1 \right] \quad (5.61)$$

où on a maintenant $g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2) \rangle / n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_1)$. En particulier $\sigma_n^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 0$ pour un condensat et $\sigma_n^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = n(\mathbf{r})^2$ dans le régime de Hartree–Fock.

Retour à l'énergie d'interaction

Compte tenu de la relation (5.44) l'énergie d'interaction est donc intimement liée aux fluctuations de densité du système. En particulier si $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = g^{(2)}(\mathbf{0})$ est uniforme, comme dans le cas d'un système homogène, ou d'un condensat pur dans un potentiel quelconque, E_{int} lui est directement proportionnel :

$$E_{\text{int}} = \frac{g}{2} g^{(2)}(\mathbf{0}) \int d\mathbf{r} n^2(\mathbf{r}). \quad (5.62)$$

En pratique $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ dépend explicitement de la position $\mathbf{r}$. Typiquement, pour un condensat dans un piège harmonique avec une fraction thermique, on aura $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \approx 1$ au centre du nuage et $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \approx 2$ dans les régions éloignées du centre. Dans ces conditions la relation entre E_{int} et $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ est moins directe, mais l'amplitude des fluctuations moyennes sur l'ensemble du nuage est néanmoins contenue dans mesure de E_{int} . Pour quantifier ces fluctuations moyennes nous pouvons réécrire l'équation (5.44) sous la forme :

$$E_{\text{int}} = \frac{g}{2} \mathcal{F} \int d\mathbf{r} n^2(\mathbf{r}), \quad (5.63)$$

où nous avons introduit le coefficient $\mathcal{F}$ défini comme :

$$\mathcal{F} = \frac{\int d\mathbf{r} n^2(\mathbf{r}) g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r})}{\int d\mathbf{r} n^2(\mathbf{r})}, \quad (5.64)$$

qui vaut $\mathcal{F} = 1$ pour un condensat pur et $\mathcal{F} = 2$ pour un nuage thermique.

5.4.2 Ce que nous apprend notre mesure de E_{int}

La mesure de l'énergie d'interaction réalisée plus haut nous permet donc en principe de mesurer l'amplitude des fluctuations moyennes dans le régime considéré. Afin de déterminer le coefficient $\mathcal{F}$ correspondant, nous complétons la mesure d'interaction par celle de la quantité :

$$E_{\text{int}}^{(T=0)} \equiv \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} n^2(\mathbf{r}), \quad (5.65)$$

qui serait l'énergie d'interaction mesurée à température nulle où $g^{(2)} = 1$, et telle que $\mathcal{F} = E_{\text{int}}/E_{\text{int}}^{(T=0)}$. À partir des mêmes images *in situ* qui nous ont permis de déterminer E_{pot} , nous obtenons $E_{\text{int}}^{(T=0)}/N = 8.4 \pm 0.5 \text{ nK}$ ce qui donne :

$$\mathcal{F} = 1.02 \pm 0.23. \quad (5.66)$$

Le degré de réduction des fluctuations de densité dans le régime considéré correspond donc à celui d'un condensat pur. Or, nous avons vu à la section 5.3.2 que les nuages considérés sont loin du régime de Thomas–Fermi puisque $E_{\text{int}} \approx E_{\text{cin}}$ (cf. Tab. 5.1). L'observation de ce gel des fluctuations de densité dans ce régime «semi-thermique» confirme donc les simulations de Prokof'ev et Svistunov [101], qui prédisent une réduction significative des fluctuations de densité lorsque $\mathcal{D}$ est de l'ordre de quelques unités (cf. Fig. 1.3). Cette réduction «prématurée» des fluctuations de densité a également été observée expérimentalement par Tung *et al.* [116] qui se sont appuyés sur une étude de la compressibilité de gaz 2D à l'équilibre. Leur analyse a révélé une augmentation progressive de la compressibilité à partir de $\mathcal{D} \sim 4$ pour un paramètre d'interaction $\tilde{g} = 0.093$, qui est donc comparable au nôtre.

L'étude de Tung *et al.* [116] ainsi que celle que nous venons de présenter confirment donc l'existence d'une phase «pré-superfluide» de fluctuations réduites, distincte de l'état normal. D'un point de vue conceptuel, ce phénomène de réduction des fluctuations de densité dans le système constitue une étape indispensable pour que se produise la transition vers l'état superfluide. Cette propriété permet en effet l'existence de vortex, qui entrent en jeu dans le mécanisme microscopique de la transition.

Ultimement, il serait intéressant de compléter ces mesures par celle de la fraction superfluide des gaz considérés, ce qui constitue un défi expérimental. Cependant, plusieurs propositions d'expériences ont été faites [22, 44, 62] sur ce sujet et nous pouvons espérer franchir dans les prochaines années ce palier dans l'étude expérimentale des gaz 2D.

Chapitre 6

Signatures de vortex dans un gaz de Bose 2D

Note. *Durant les mois qui ont suivi la soumission de ce manuscrit, l'analyse des données présentées dans ce chapitre a été considérablement approfondie. Il est ressorti de cette analyse, plus complète, une interprétation plus nuancée des observations décrites ici. Par souci d'exhaustivité, certaines des conclusions exposées dans la version initiale de ce chapitre ont donc été annotées ou nuancées dans la présente version. Pour l'essentiel, ce chapitre garde cependant la forme et le contenu de la version soumise au jury de thèse.*

Dans ce chapitre, nous décrivons l'observation de signatures de vortex individuels ou appariés dans des gaz bi-dimensionnels piégés. Dans un gaz à l'équilibre, un vortex se manifeste par un trou de densité autour duquel la phase de la fonction d'onde décrivant le système varie continûment de 0 à $2\pi q$ où l'entier relatif q désigne la charge du vortex. La preuve ultime de la présence de ces vortex consisterait donc en principe à mesurer simultanément les distributions de densité et de phase du système. Pour l'instant il est malheureusement difficile d'imaginer une procédure expérimentale permettant de répondre à ces exigences. De plus, la taille typique attendue pour un vortex dans un nuage à l'équilibre est de l'ordre de $0.5\,\mu\text{m}$ pour les gaz 2D produits en laboratoire. Pour toutes ces raisons, l'observation la plus directe possible de vortex constitue un défi expérimental. Dans ce chapitre nous présenterons des mesures de la distribution de densité de gaz 2D en combinaison avec une analyse numérique fine que nous interprétons par l'existence de vortex dans nos gaz de Bose bi-dimensionnels.

Nous commencerons par introduire le contexte de notre étude en rappelant brièvement le mécanisme microscopique de la transition superfluide dans un gaz de Bose bi-dimensionnel. Nous décrivons également les grandes lignes de la première confirmation expérimentale du rôle des vortex dans la transition BKT réalisée dans notre groupe par Hadzibabic *et al.* [46]. Nous entrerons ensuite dans le vif du sujet en décrivant notre observation de trous dans la distribution de gaz 2D pendant un temps de vol 1D. En nous appuyant sur des simulations numériques, nous nous convaincrons que la présence de ces trous de densité après un temps de vol de quelques millisecondes peut être attribuée à celle de défauts de phase à l'équilibre. Grâce à une procédure de recherche systématique des minima sur une distribution de densité donnée, nous analyserons de façon quantitative la répartition de ces trous de densité dans les nuages en expansion et à

l'équilibre. De façon assez inattendue notre analyse mettra en évidence la présence de trous de densité y compris dans les nuages à l'équilibre, ce que nous interpréterons comme des traces de vortex. Enfin, nous terminerons sur une étude des corrélations en position entre trous de densité voisins. Cette dernière est toutefois dans un état d'avancement préliminaire.

6.1 Introduction

La transition superfluide qui se produit à basse température dans un gaz de Bose 2D est une transition atypique. En particulier, elle ne s'accompagne pas de l'établissement d'un véritable ordre à longue portée dans le régime de basse température, comme c'est le cas pour les transitions de phase usuelles à 3D. L'état superfluide présente toutefois un ordre à quasi-longue portée caractérisé par une décroissance algébrique de la fonction de corrélation d'ordre 1 qui s'écrit :

$$g_1(r) \propto \left(\frac{\xi}{r}\right)^{-1/n_s \lambda_T^2}, \quad (6.1)$$

où ξ est la longueur de cicatrization et n_s la densité superfluide. De façon corollaire, la transition superfluide à 2D ne s'explique pas en termes de brisure spontanée de symétrie continue, ce qui constitue l'interprétation générale des transitions de phase usuelles. Le mécanisme microscopique de cette transition particulière a été élucidé par Berezinskii [13] et Kosterlitz et Thouless [70] qui ont introduit une nouvelle forme d'excitations thermiques dans la description du gaz 2D : les vortex. En dessous de la température critique, ces vortex ne peuvent exister que sous forme de paires de charges opposées : les paires vortex-antivortex. L'existence de ces paires n'a qu'une influence locale, sur une échelle de distance de l'ordre de ξ , et ne perturbe pas la superfluidité ni l'ordre à quasi-longue portée qui lui est associé. Lorsque la température augmente, la taille de ces paires augmente progressivement. Lorsque la température critique T_c est atteinte, la taille de ces paires diverge et s'accompagne de la prolifération de vortex individuels. Cette assemblée de vortex de charges positives et négatives détruisent la superfluidité : au point de transition la densité superfluide passe brutalement de $n_s = 4/\lambda_T^2$ à zéro.

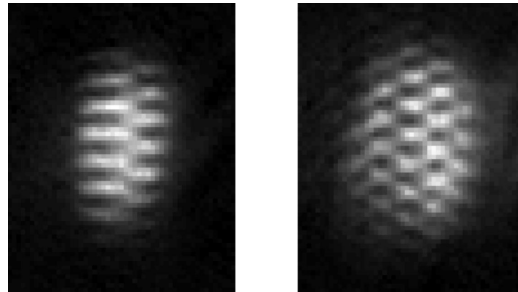


FIGURE 6.1 – Dislocations lors de l'interférence de deux gaz de Bose bi-dimensionnels en expansion. Ces dislocations indiquent la présence de discontinuités de phase dans la fonction d'au moins un des deux nuages.

Cette transition a été observée de façon très spectaculaire par Hadzibabic *et al.* [46] sur des

gaz piégés de ^{87}Rb . La procédure suivie consistait à préparer deux plans atomiques à l'équilibre avant de couper tous les champs de piégeage. Chaque plan atomique s'étend alors rapidement dans la direction de confinement, se recouvrent et interfèrent. L'étude de ces interférogrammes a révélé, d'une part, l'existence d'un ordre à quasi-longue portée dans un régime de basse température, et d'autre part, que la destruction de cet ordre à quasi-longue portée coïncidait avec la prolifération de vortex individuels. Ces derniers se manifestent par l'apparition de dislocations dans les interférogrammes. Deux exemples de ces dislocations observées par Hadzibabic et ses collaborateurs sont représentées sur la figure 6.1. Bien qu'aucun élément nouveau ne remette en cause cette interprétation et ce beau succès expérimental, nous allons présenter dans ce qui suit des observations nouvelles qui viennent compléter l'observation indirecte de vortex réalisée par Hadzibabic *et al.* [46].

6.2 Détection de trous de densité durant l'expansion libre d'un gaz 2D

Au chapitre 5 nous avons mesuré l'énergie d'interaction moyenne d'un nuage 2D en étudiant sa contraction pendant un temps de vol 1D (TdV 1D). Si l'on s'intéresse aux détails de la distribution de densité pendant cette dynamique, nous voyons apparaître une structure inhabituelle qui se manifeste par une variation brutale de la densité sur une échelle de longueur de l'ordre du micron. La figure 6.2 représente un ensemble d'images correspondant à la distribution de densité de nuages préparés dans des conditions identiques, et sondés à différents instants d'un TdV 1D.

Alors que la distribution d'équilibre du nuage semble relativement régulière, nous voyons que des trous de densité apparaissent après 1 ms d'expansion libre¹. Ces trous de densité deviennent de plus en plus marqués à mesure que la durée du temps de vol augmente. Dans un gaz atomique bi-dimensionnel en interaction il est assez tentant d'identifier ces trous de densité à des vortex pour les raisons évoquées au paragraphe d'introduction.

6.2.1 Peut-on croire à des vortex ?

L'état d'équilibre des nuages correspondant aux images présentées plus haut (Fig. 6.2) est caractérisé² par un potentiel chimique central $\mu_0/k_B T = 0.67$ et une température $T = 62 \text{ nK}$. Nous avons représenté sur la figure 6.3 le profil moyen de densité dans l'espace des phases $\mathcal{D}(r)$ obtenu à partir d'images *in situ*. Nous constatons que la densité centrale du nuage est de l'ordre de 40, soit 5 fois plus élevée que la valeur critique $\mathcal{D}_c \approx 8.2$ pour laquelle la transition superfluide est prédite [100]. Comme nous l'avons souligné à la fin du chapitre 5, l'étude quantitative de la composante superfluide dans un gaz piégé est un problème compliqué. Néanmoins, par application de l'approximation de densité locale, nous pouvons définir un rayon critique r_c défini tel que

1. En toute rigueur il s'agit d'un temps de vol 1D où le confinement radial est maintenu. Mais aux temps de vol courts, la différence quantitative entre des TdV 1D et 3D est négligeable pour les aspects qui nous intéressent ici.

2. Il s'agit là de paramètres thermodynamiques moyens obtenus à partir des profils correspondant aux images *in situ* (cf section 4.2).

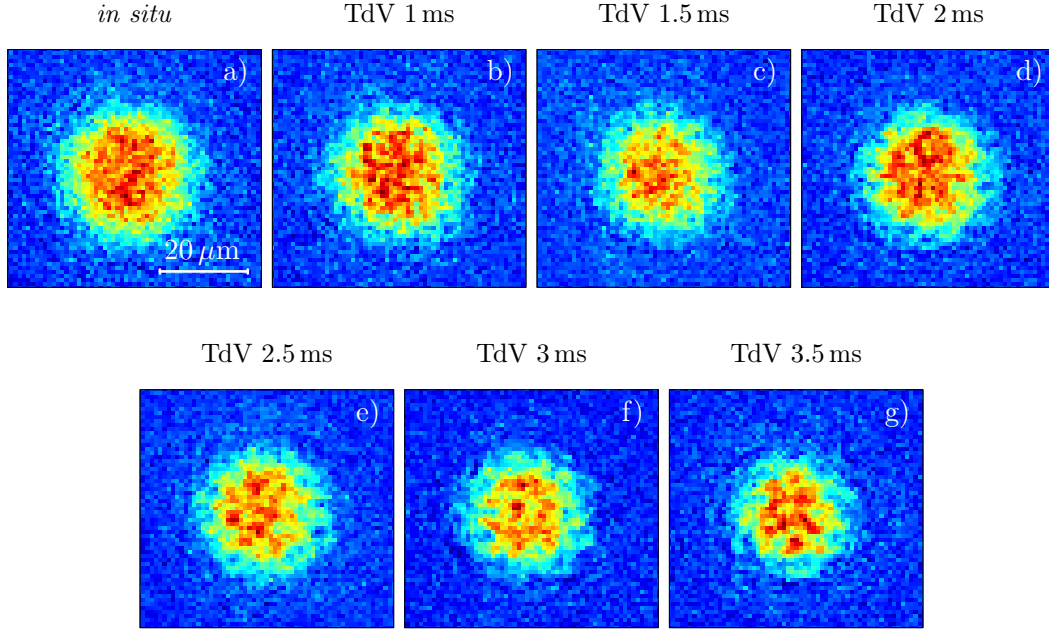


FIGURE 6.2 – Images de la distribution de densité d'un nuage à l'équilibre (a) et de nuages sondés à différents instants d'un temps de vol 1D (b-g). Tandis que la distribution de densité *in situ* est relativement régulière, des variations importantes de densité apparaissent après 1 ms de TdV. Pour les temps de vol les plus longs, ces trous de densité semblent plus gros et ont un contraste significatif.

$\mathcal{D}(r_c) = \mathcal{D}_c$, au voisinage duquel le nuage se comporte localement comme un gaz 2D homogène dans le régime critique de transition superfluide [45]. De plus, dans la région $r < r_c$ une fraction non négligeable des atomes se comporte comme un ensemble superfluide. Dès lors que nous acceptons cette image, nous nous attendons à l'existence de vortex libres au voisinage de r_c et de paires de vortex-antivortex dans la région centrale du nuage. Cependant, notre système optique d'imagerie, dont la résolution est de l'ordre du micron (cf. chapitre 3), ne permet pas *a priori* de discerner avec précision des détails de la taille d'un vortex dans un nuage à l'équilibre.

La taille d'un vortex³ est fixée par la longueur de cicatrisation $\xi = 1/\sqrt{gn}$ (Eq. (1.21)) qui est l'échelle de longueur microscopique caractéristique du système dans le régime dégénéré. Dans nos échantillons piégés, où la densité $n(r)$ décroît avec la distance au centre du nuage r , la taille des vortex augmente continûment entre $r = 0$ et $r = r_c$. Au delà, la phase devient de moins en moins définie pour des r croissants et la notion de vortex perd «progressivement» son sens. La figure 6.3b représente la variation de ξ avec la distance dans nos échantillons. Nous pouvons voir que dans la région où les vortex ont un sens ($r \lesssim r_c$), leur taille est *a priori* en dessous ou à la limite du pouvoir de résolution de notre objectif qui est de l'ordre du micron⁴.

3. Nous précisons ce à quoi correspond la taille d'un vortex plus loin.

4. Notons de plus que pour ce type d'études, l'objectif n'est pas réellement exploité au mieux de ses capacités dans la mesure où la taille du pixel de la caméra rapportée au niveau du plan atomique est de $1.04 \mu\text{m}$. Ce choix d'une taille de pixel de l'ordre de la résolution avait été fait dans le cadre d'une étude sur la détection d'atomes

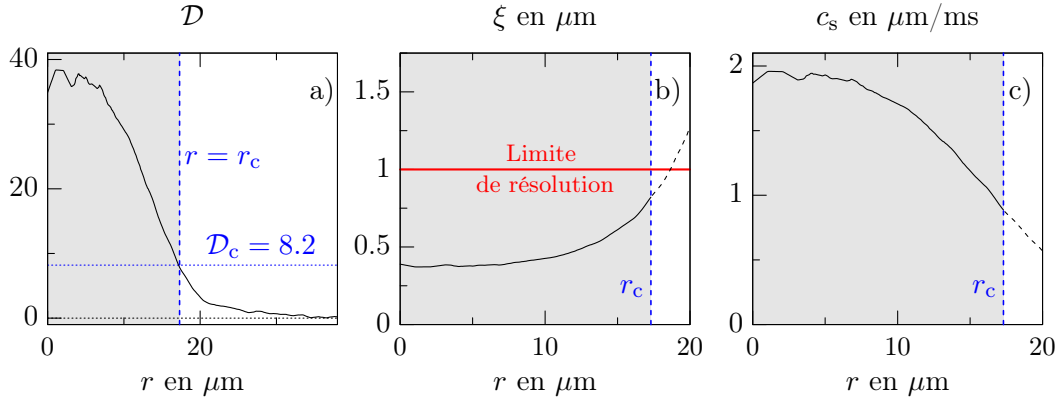


FIGURE 6.3 – Quelques caractéristiques du nuage à l'équilibre : (a) densité dans l'espace des phases $\mathcal{D}$, (b) longueur de cicatrisation ξ et (c) vitesse du son en fonction de la distance au centre r . La transition superfluïde se produit au voisinage de $r = r_c \approx 17 \mu\text{m}$ où $\mathcal{D}$ atteint la valeur critique $\mathcal{D}_c = 8.2$ (pour nos paramètres). Nous nous attendons à la présence de vortex individuels au voisinage de r_c , et la présence de paires de vortex-antivortex dans la partie centrale. Dans toute la région où les vortex ont un sens, leur taille que nous estimons de l'ordre de ξ est *a priori* inférieure au pouvoir de résolution de notre objectif.

En ce qui concerne les images des nuages sondés en temps de vol, il est difficile de donner une description précise de la dynamique (il n'existe à notre connaissance aucun travail théorique publié relié à ce problème pour les gaz atomiques). Cette dynamique du nuage en expansion en présence des vortex est complexe et fait intervenir plusieurs types d'événements. Si l'on considère deux vortex initialement appariés, ceux-ci peuvent soit se rapprocher l'un de l'autre et s'annihiler, soit au contraire se séparer et évoluer comme des vortex libres. De plus, chaque vortex libre (quel que soit son état initial) subit à la fois un déplacement de son centre de masse pendant l'évolution, et une expansion. L'étude théorique de cette dynamique dans son ensemble constitue un projet en soi et nécessite une analyse numérique lourde que nous ne pouvons pas réaliser dans le temps qui nous est imparti. Nous présenterons toutefois en section 6.2.2 une étude numérique simplifiée sur laquelle nous pourrions nous appuyer.

Avant cela, nous pouvons d'ores et déjà estimer par un raisonnement très simple l'ordre de grandeur de la taille d'un vortex après quelques millisecondes d'expansion. Nous nous attendons à ce qu'un cœur de vortex de taille ξ , qui est la plus petite échelle de longueur pertinente, s'étende bien plus rapidement que les autres échelles de longueur. En première approximation nous pouvons supposer que la taille des vortex augmente linéairement avec le temps avec une vitesse $v \sim \hbar/m\xi$. Pour un vortex initialement au centre du nuage où $\xi \approx 0.3 \mu\text{m}$, nous prédisons donc par ce raisonnement que sa taille vaut $\sim 2.4 \mu\text{m}$ au bout d'une milliseconde, ce qui le rend

uniques dans un réseau optique, mais cette configuration n'est pas adaptée dans le cas qui nous intéresse ici, où une taille de pixel bien inférieure à la résolution de l'objectif serait souhaitable. Une amélioration en ce sens est prévue pour de futures expériences.

tout à fait détectable par notre système d'imagerie⁵. Au regard de cet argument simple, il n'est pas déraisonnable d'associer les trous de densité observés pendant les TdV 1D de nos nuages à des cœurs de vortex en expansion. Néanmoins, il est difficile d'être formel à ce stade dans la mesure où il n'est pas possible d'établir une cartographie de la phase à partir de ces images.

6.2.2 Vortex ou fluctuations de densité ?

Les arguments avancés plus haut peuvent être justifiés de façon plus quantitative en s'appuyant sur des simulations numériques. Nous verrons que les ordres de grandeur fournis précédemment pour la taille des vortex *in situ* et après expansion libre sont corrects. De plus, en comparant l'évolution de vortex avec celle de simples trous de densité pendant une expansion nous verrons que l'hypothèse des vortex est tout à fait raisonnable.

Taille d'un vortex *in situ*

Nous nous intéressons dans un premier temps à la taille prévue d'un vortex *in situ* que nous attendons pour nos paramètres expérimentaux. Pour répondre à cette question, nous déterminons l'état fondamental d'un gaz 2D en interaction en résolvant numériquement l'équation de Gross–Pitaevskii dépendant du temps⁶. Nous considérons un ensemble de N particules de masse m évoluant dans un piège harmonique bi-dimensionnel⁷. Le potentiel est pris isotrope de pulsation ω et le vortex placé au centre du piège pour simplifier. L'existence d'un vortex est assurée par une contrainte sur la phase du système qui varie continûment de 0 à 2π autour de l'origine du repère. Pour une fonction d'onde $\psi(r)$ normalisée, l'équation de Gross–Pitaevskii dépendant du temps s'écrit alors :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + gN|\psi|^2 \right] \psi, \quad (6.2)$$

où $g = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g}$ est le paramètre de couplage. Afin d'étudier la dépendance de la taille du vortex avec la densité⁸, nous varions le paramètre gN (ce qui revient à varier la densité centrale du nuage simulé à g fixé). En ce qui nous concerne, nous nous intéressons à deux valeurs de ce paramètre : $gN = v_{\max}$ et $gN = v_{\min}$ (⁹), qui correspondent respectivement à la densité spatiale $n(r=0)$ et $n(r=r_c)$ de nos nuages et donc aux valeurs extrêmes de taille de vortex *in situ*.

La figure 6.4a présente le résultat obtenu pour $gN = v_{\min}$ qui correspond à nos plus «gros» vortex. Sur la figure 6.4b, nous avons représenté le profil associé au vortex seul. Pour produire un tel profil, nous normalisons le profil total (figure 6.4a en ligne continue) par les variations

5. Nous verrons plus loin que cet argument est un peu naïf mais qu'il donne néanmoins le bon ordre de grandeur et que la conclusion reste valable.

6. Ces simulations ont été réalisées par Lauriane Chomaz.

7. Notons que la présence d'un potentiel harmonique n'est pas obligatoire et qu'un potentiel uniforme aurait aussi pu être utilisé. La raison de ce choix n'est pas essentielle, et celui-ci n'a qu'une influence mineure sur le résultat qui nous intéresse.

8. Notons bien que dans ces simulations le vortex est toujours placé en $r = 0$.

9. Nous préférons l'usage des notations $v_{\max}$ et $v_{\min}$ qui facilite notre argumentation à celle des valeurs numériques. Ces valeurs numériques n'apporteraient aucune information nécessaire à la compréhension de cette étude.

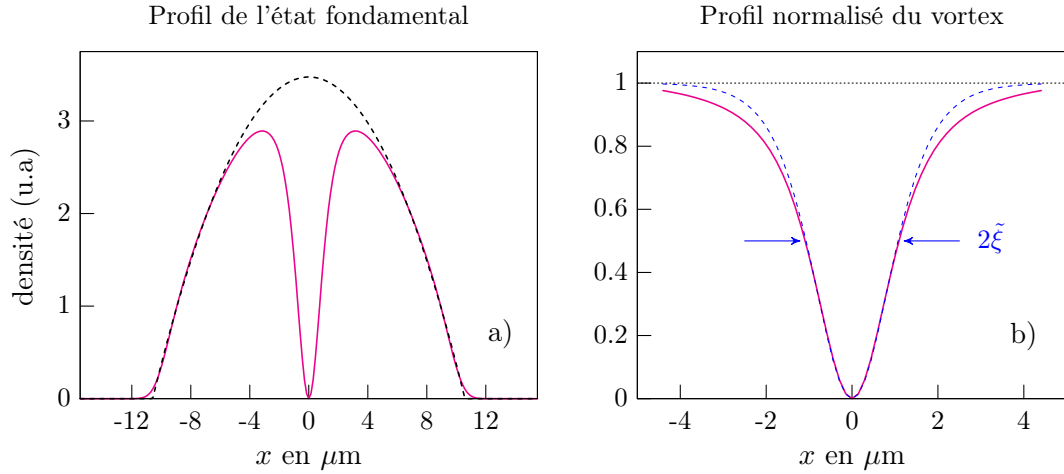


FIGURE 6.4 – (a) Solution de l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps pour $gN = v_{\min}$ (ligne continue rose) et ajustement Thomas-Fermi sur la partie parabolique (ligne tiretée noire). La densité au centre correspond à la densité $n(r_c)$ dans la région critique de nos nuages expérimentaux. (b) Variations de densité dues au vortex seul (ligne continue rose) et ajustement par la fonction $\tanh^2(r/\tilde{\xi})$ (ligne tiretée bleue). Ce profil est obtenu en divisant le profil total de la figure a) par le profil Thomas-Fermi. Dans ce cas le «diamètre» du vortex vaut $2\tilde{\xi} \approx 2.4 \mu\text{m}$.

connues de densité (profil Thomas-Fermi illustré sur la figure 6.4a en ligne pointillée). Pour les simulations que nous présenterons dans la section 6.4.2, nous avons choisi de modéliser ce profil par la fonction $\tanh^2(r/\tilde{\xi})$, par analogie avec la solution de l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire dans une boîte semi-infinie à 1D¹⁰. Le paramètre $\tilde{\xi}$ est un paramètre d'ajustement par lequel nous caractériserons la taille du vortex tout au long de ce chapitre. Plus précisément, nous définissons le «rayon» d'un vortex par $\tilde{\xi}$, qui correspond à la demi-largeur à mi-hauteur du profil¹¹.

Nous avons représenté sur la figure 6.4b un ajustement du profil du vortex par la fonction $\tanh^2(r/\tilde{\xi})$. L'ajustement optimal donne $\tilde{\xi} = 1.22 \mu\text{m}$ dans ce cas précis qui correspond aux vortex en $r = r_c$. Pour $gN = v_{\max}$ qui correspond à la densité au centre du nuage nous trouvons $\tilde{\xi} = 0.41 \mu\text{m}$. Le rayon de nos vortex *in situ* varie donc entre $\sim 0.4 \mu\text{m}$ et $\sim 1.2 \mu\text{m}$. Notons que d'après ces simulations la longueur de cicatrisation $\xi = 1/\sqrt{\tilde{g}n}$ tracée sur la figure 6.3a est inférieure au «rayon» $\tilde{\xi}$. Nous pouvons donc être plus optimistes quant à la détection de vortex *in situ*, en particulier au voisinage de la région critique.

10. La solution de l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire dans une boîte 1D semi-infinie (*i.e.* la fonction est telle que $\psi(x < 0) = 0$) est de la forme $\tanh(x/\xi)$ où ξ définit la longueur de cicatrisation [89].

11. Pour être plus rigoureux, si l'on note σ la demi-largeur à mi-hauteur de la fonction $\tanh^2(r/\tilde{\xi})$, alors $\tilde{\xi} \approx 1.1\sigma$.

Évolution de la taille d'un vortex durant l'expansion libre

Ayant déterminé l'état d'équilibre $\psi_{\text{vx}}(r)$ d'un nuage piégé en présence d'un vortex, nous pouvons également simuler son évolution pendant un TdV 1D. Pour cela, nous résolvons numériquement l'équation de Schrödinger dépendant du temps :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right] \psi. \quad (6.3)$$

Notons, à ce stade, que du fait de la position initiale du vortex qui est situé en $r = 0$ à $t = 0$, la position de celui-ci ne changera pas au cours de l'évolution du fait de la symétrie axiale du problème. Nous ne nous intéressons ici qu'à l'évolution de sa taille au cours du temps de vol. L'équation 6.3 est résolue en prenant $\psi(r, t = 0) = \psi_{\text{vx}}(r)$ comme état initial pour une taille de vortex $\tilde{\xi}$ donnée. La figure 6.5a montre les profils de densité obtenus pour des TdV entre $t = 0.5$ et $t = 3.5$ ms, avec une taille initiale de vortex $\tilde{\xi} = 0.41 \mu\text{m}$. Cette taille de vortex correspond à la plus petite valeur attendue dans un nuage à l'équilibre, et correspond aux cœurs de vortex qui s'étendent le plus rapidement. Pour chaque durée de TdV simulée nous appliquons la procédure décrite plus haut pour déterminer la taille des vortex (*i.e.* normalisation par le profil Thomas–Fermi et ajustement par $\tanh^2(r/\tilde{\xi})$). Nous avons représenté sur la figure 6.5b l'évolution des tailles pour deux valeurs initiales de $\tilde{\xi}$ qui correspondent aux valeurs extrêmes du paramètre $\tilde{g}n$ de nos nuages *in situ* (entre $r = 0$ et $r = r_c$).

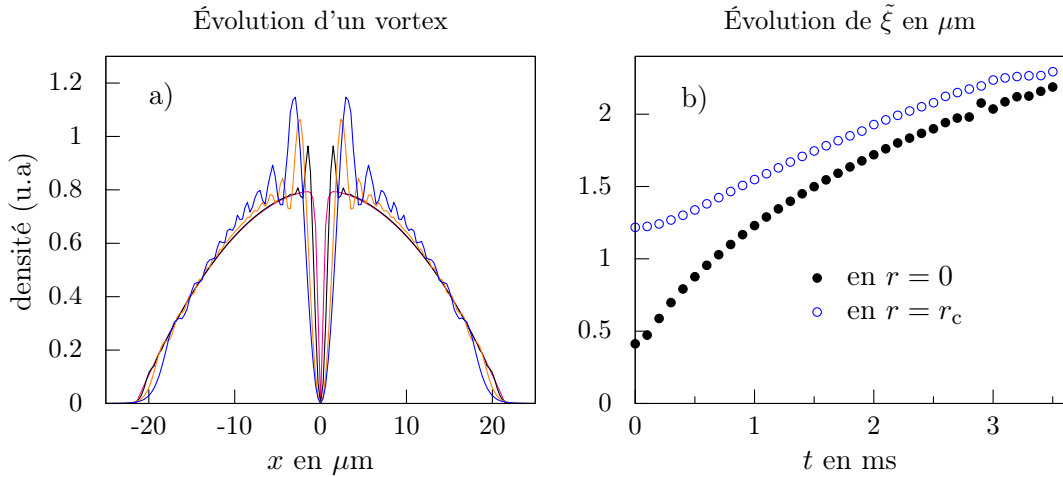


FIGURE 6.5 – (a) Résultats numériques de l'évolution temporelle d'un vortex placé au centre du nuage pour $t = 1, 2$ et 3 ms (resp. en noir, orange et bleu), la ligne rose correspond au profil à $t = 0$. (b) Évolution du rayon $\tilde{\xi}$ avec le temps de vol pour $\tilde{\xi}(t = 0) = 0.41 \mu\text{m}$ (boules noires) et $\tilde{\xi}(t = 0) = 1.22 \mu\text{m}$ (cercles bleus) correspondant à $r = 0$ et $r = r_c$ respectivement.

Nous voyons donc qu'après seulement 1 ms d'expansion libre, le rayon des vortex vaut $\tilde{\xi} \approx 1.1$ à $1.6 \mu\text{m}$ et qu'il est de l'ordre de $2.2 \mu\text{m}$ pour les temps de vol les plus longs considérés ici. Le résultat obtenu à la fin de section 6.2.1 par un raisonnement plus naïf était donc légèrement sur-estimé mais la conclusion reste inchangée. Ces simulations confirment que nous pouvons détecter

sans ambiguïté le trou de densité créé par des vortex après quelques millisecondes d'expansion 1D.

Évolution d'un «faux» vortex

Comme nous l'avons souligné plus haut, l'une des limitations de cette étude est le fait qu'on ne peut pas avoir accès à la distribution de phase dans les images. Ceci empêche de distinguer avec certitude les vortex de simples trous de densités. S'il paraît assez intuitif qu'un simple trou de densité se referme plus rapidement qu'un vortex (car il n'est pas «protégé» par un tour de phase), il n'est pas évident d'estimer cette échelle de temps. Dans ce qui suit nous allons nous appuyer à nouveau sur des simulations numériques pour distinguer les deux cas en caractérisant l'évolution temporelle d'un simple trou de densité.

Pour cela, nous procédons comme précédemment à la résolution de l'équation (6.3) décrivant l'évolution d'un condensat 2D piégé pendant un TdV 1D. Pour simuler la présence d'un trou de densité à l'instant initial, nous prenons $\psi(r, t = 0) = \psi_{\text{trou}}(r)$ où $\psi_{\text{trou}}(r)$ ne diffère de $\psi_{\text{vx}}(r)$ que par la distribution spatiale de phase qui est uniforme dans ce cas. La figure 6.6a représente l'évolution d'un trou de densité de taille initiale $\tilde{\xi} = 0.41 \mu\text{m}$ en fonction du temps. Nous constatons qu'après 1 ms d'expansion le trou s'est déjà refermé. Pour être plus quantitatif, nous allons introduire la notion de contraste que nous utiliserons à nouveau par la suite. Comme nous l'avons fait pour les profils de vortex, nous nous intéressons aux variations de densité dues au trou uniquement en normalisant les profils de densité obtenus (Fig. 6.6a) par le profil de Thomas-Fermi correspondant. Le contraste du trou $\mathcal{C}_{\text{tr}}$ est alors défini comme l'écart entre 1 et la profondeur du minimum. Nous avons représenté dans la figure 6.6b l'évolution du contraste en $\mathcal{C}_{\text{tr}}$ en fonction du temps d'expansion.

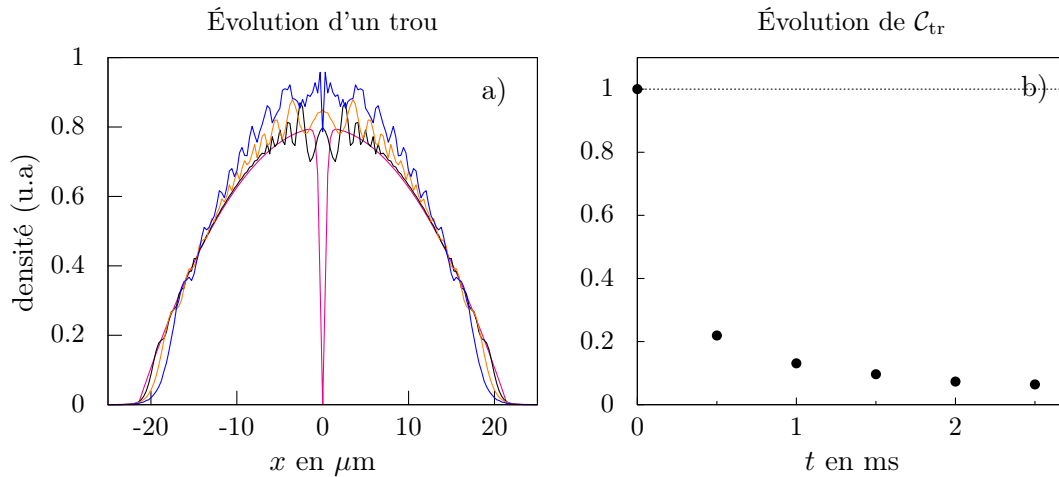


FIGURE 6.6 – (a) Résultats numériques de l'évolution temporelle d'un trou simple placé au centre du nuage pour $t = 1, 2$ et 3 ms (respectivement en noir, orange et bleu), la ligne rose correspond au profil à $t = 0$. (b) Évolution du contraste du trou $\mathcal{C}_{\text{tr}}$ avec un rayon initial de $\tilde{\xi} = 0.41 \mu\text{m}$.

Nous constatons que le contraste du trou chute brutalement, et ne vaut que $\mathcal{C}_{\text{tr}} \approx 0.13$ après

1 ms d'expansion. Nous verrons à la section 6.3 que les trous de densité observés sur nos nuages ont un contraste significativement plus élevé.

Bilan des simulations.

À l'issu de cette étude nous retiendrons trois informations :

- le rayon de nos vortex *in situ* varie dans l'intervalle $\tilde{\xi} \sim 0.4\text{--}1.2\,\mu\text{m}$.
- le rayon de nos vortex durant un TdV 1D varie entre $\tilde{\xi} \sim 1.1\text{--}1.6\,\mu\text{m}$ pour $t = 1\text{ ms}$ et sature à $\tilde{\xi} \sim 2.2\,\mu\text{m}$ pour $t = 3.5\text{ ms}$.
- un simple trou de densité se referme en moins d'une milliseconde de temps de vol. Les trous de densité que nous observons après temps de vol sont donc vraisemblablement - du moins en partie - dus à la présence de vortex dans les nuages à l'équilibre¹².

Nous allons à présent étudier de façon plus quantitative la répartition de ces vortex dans nos nuages en utilisant un algorithme de recherche systématique des minima sur nos images.

6.3 Répartition des vortex dans un gaz piégé

À la section précédente, nous avons vu qu'en vertu de l'approximation de densité locale appliquée à un nuage piégé à l'équilibre, nous nous attendons à trouver des vortex appariés dans la région centrale du nuage et des vortex individuels autour de $r \approx r_c$. Après une expansion libre, la situation est *a priori* plus complexe et il n'existe à notre connaissance aucun travail théorique publié permettant de décrire ce qui se passe durant une telle expansion. Dans cette section, nous allons présenter une recherche systématique de trous de densité sur un ensemble de nuages préparés de façons identiques et sondés *in situ* ou durant un TdV 1D. Nous chercherons en particulier à préciser la répartition de ces trous de densité en fonction de la distance au centre du nuage r dans ces deux cas.

6.3.1 Recherche systématique des minima

Nous nous intéressons à des images contenant typiquement 60×60 pixels centrées sur le nuage, le diamètre du nuage étant de l'ordre de $50\,\mu\text{m}$ soit environ 52 pixels ($1\text{ pixel} = 1.04\,\mu\text{m}$). Chaque pixel de l'image est désigné par un couple d'entiers (i, j) , auquel on associe une distance au centre du nuage $\mathbf{r} = r(i, j)$ et une densité $n(\mathbf{r}) = n(i, j)$.

Densité normalisée et définition du contraste

La première étape de la procédure consiste à normaliser la distribution de densité mesurée par la distribution $n^{(\text{pot})}(\mathbf{r})$ qui correspond aux variations connues de la densité, *i.e.* les variations dues uniquement au potentiel dans le plan (xOy) . Cette distribution de densité peut être obtenue :

12. Des simulations numériques, réalisées après la soumission de ce manuscrit au jury de thèse, ont montré que la présence de phonons dans un gaz 2D peut également générer un profil de densité chahuté après expansion libre. La présence de trous de densité après temps de vol devrait donc être interprétée plus généralement par la présence, à l'équilibre, de fluctuations de phase, incluant phonons et vortex.

(i) soit à partir d'un profil théorique¹³ connaissant les paramètres thermodynamiques ($\mu_0/k_B T$, T), (ii) soit à partir d'un profil expérimental obtenu par moyenne angulaire¹⁴, ce qui lisse les trous dus aux vortex. Les deux solutions donnent des résultats similaires, mais les résultats que nous présenterons ici ont été obtenus avec des profils expérimentaux. La distribution $n^{(\text{pot})}(\mathbf{r})$ est alors obtenue par révolution de ce profil autour de l'origine en tenant compte de l'ellipticité du nuage. On produit alors notre observable de travail :

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{n(\mathbf{r})}{n^{(\text{pot})}(\mathbf{r})}. \quad (6.4)$$

La distribution $\mathcal{N}(\mathbf{r})$ est donc essentiellement uniforme hormis à l'endroit des trous de densité, où elle présente des minima. La figure 6.7 illustre la procédure de normalisation sur un profil fictif. Un minimum de densité situé en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m$ est caractérisé par son contraste $\mathcal{C} = 1 - \mathcal{N}(\mathbf{r}_m)$ (cf 6.7b). Le contraste vaut donc 0 en l'absence de trou et vaut 1 pour un trou de densité centrale rigoureusement nulle.

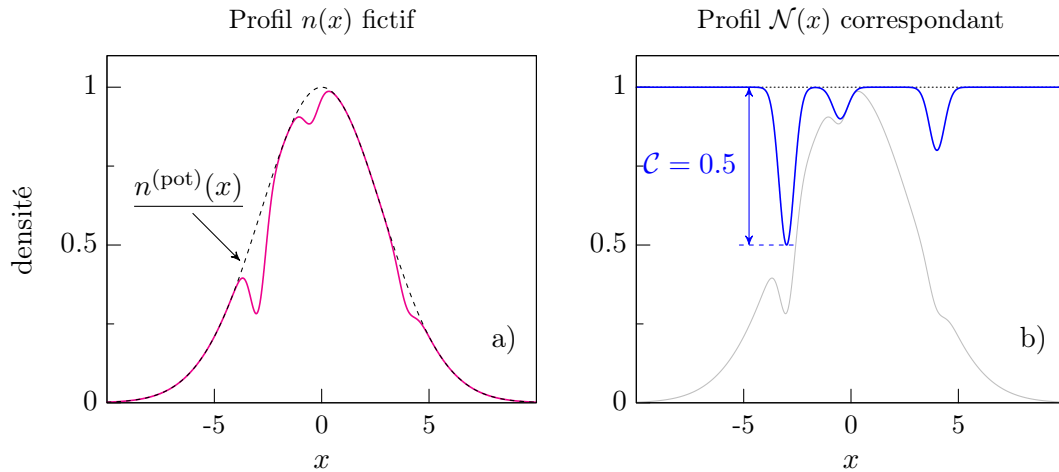


FIGURE 6.7 – Illustration de la procédure de renormalisation. (a) Profil de densité fictif présentant des minima locaux (ligne continue rose) et profil $n^{(\text{pot})}(x)$ des variations connues dues au potentiel (ligne tiretée noire). (b) Profil renormalisé $\mathcal{N}(x) = n(x)/n^{(\text{pot})}(x)$ (ligne continue bleue). Ce profil se prête mieux à la détection des minima. Chaque minimum est caractérisé par son contraste $\mathcal{C} = 1 - \mathcal{N}(x_m)$ où x_m désigne sa position.

13. Nous avons vu en section 4.4 comment obtenir un profil théorique à partir des paramètres thermodynamiques T et $\mu_0/k_B T$ des nuages.

14. Au chapitre 4 cette procédure n'a pas été retenue en raison des rugosités du potentiel optique selon une direction. Nous avons alors eu recours à une autre technique plus adaptée à notre analyse thermodynamique qui nécessite une plus grande précision dans les ailes des profils. Cette exigence n'est pas nécessaire pour la présente étude. De plus, pour les images obtenues après TdV le problème des rugosités ne se pose pas, le potentiel radial étant purement magnétique.

Définition d'un minimum

Les minima sont déterminés en deux étapes. Considérons un pixel candidat (i_1, j_1) , nous procédons comme suit :

- La valeur $\mathcal{N}(i_1, j_1)$ correspondante est comparée à celle de ses premiers voisins indexés par les couples (i'_1, j'_1) appartenant à l'ensemble des pixels $\mathcal{V}_1$ qui désigne les 8 pixels entourant le pixel (i_1, j_1) (cf Fig. 6.8). Si $\mathcal{N}(i_1, j_1) < \mathcal{N}(i'_1, j'_1)$ (avec $(i'_1, j'_1) \in \mathcal{V}_1$) alors (i_1, j_1) est potentiellement un minimum local, mais cette condition, nécessaire, n'est pas suffisante pour accepter définitivement le pixel (i_1, j_1) comme un minimum.
- La seconde étape de l'algorithme consiste à sélectionner le pixel (i_2, j_2) tel que $\mathcal{N}(i_2, j_2) = \min[\mathcal{N}(i'_1, j'_1)]$. La valeur de ce pixel (i_2, j_2) est alors comparée à celle de l'ensemble $\mathcal{V}_2$ de ses 8 premiers voisins. Si $\mathcal{N}(i_2, j_2) < \mathcal{N}(i'_2, j'_2)$ où $(i'_2, j'_2) \in \mathcal{V}_2 - \{(i_1, j_1)\}$, alors le couple $[(i_1, j_1) - (i_2, j_2)]$ est considéré comme un minimum¹⁵.

La raison de cette double contrainte est liée au fait qu'un vortex détecté à la caméra occupe en principe 2 pixels. En effet, nous avons vu à la section précédente que le diamètre d'un vortex après 1 ms d'expansion est d'environ $1.4 \mu\text{m}$. Cette double contrainte constitue donc un premier filtre aux «faux» minima qui sont dus au bruit de grenaille photonique.

Enfin, les minima ainsi déterminés peuvent être retenus ou rejetés en ajoutant une contrainte sur leur contraste, en le comparant à un contraste seuil $\mathcal{C}_{\text{seuil}}$. Ceci permet de quantifier la robustesse relative des minima. Le contraste correspond au contraste moyen des deux pixels adjacents (i_1, j_1) et (i_2, j_2) , soit $\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)/2$ où $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont les contrastes de (i_1, j_1) et (i_2, j_2) respectivement. Le couple $[(i_1, j_1) - (i_2, j_2)]$ sera donc retenu si $\mathcal{C} > \mathcal{C}_{\text{seuil}}$. La figure 6.9 représente les minima trouvés sur une image par deux méthodes avec $\mathcal{C}_{\text{seuil}} = 0.25$.

La figure 6.9b représente par des cercles noirs la position des minima trouvés avec une contrainte simple, *i.e.* correspondant à la première étape de notre procédure. La figure 6.9c représente les minima trouvés avec notre procédure à double contrainte. Nous constatons que le méthode simple trouve des minima en excès, en particulier dans les ailes lointaines du nuage où le bruit de grenaille domine. Les minima trouvés par notre méthode, en revanche, se situent tous dans la région intéressante de l'image et ceux-ci semblent correspondre aux minima que nous repérons à l'oeil directement sur l'image de la figure 6.9a.

6.3.2 Trous de densité et bruit de grenaille photonique

La procédure de recherche des minima de densité étant établie, nous allons à présent l'appliquer à nos images pour déterminer la position des vortex. Pour repérer un vortex sans ambiguïté, il faut pouvoir distinguer un «vrai» minimum de densité d'un minimum de densité résultant d'un artefact dû au diagnostic optique. Au chapitre 3 où nous avons détaillé notre procédure d'imagerie, nous avons vu que la distribution de densité est reliée¹⁶ aux intensités incidente I_i et sortante I_f par la relation :

$$n(x, y) = \frac{I_i(x, y) - I_f(x, y)}{\zeta I_{\text{sat}}}, \quad (6.5)$$

15. Dans le traitement qui suivra, ce minimum double sera repéré par la position du pixel (i_1, j_1)

16. Dans cette étude nous ne considérons que des images obtenues à haute intensité.

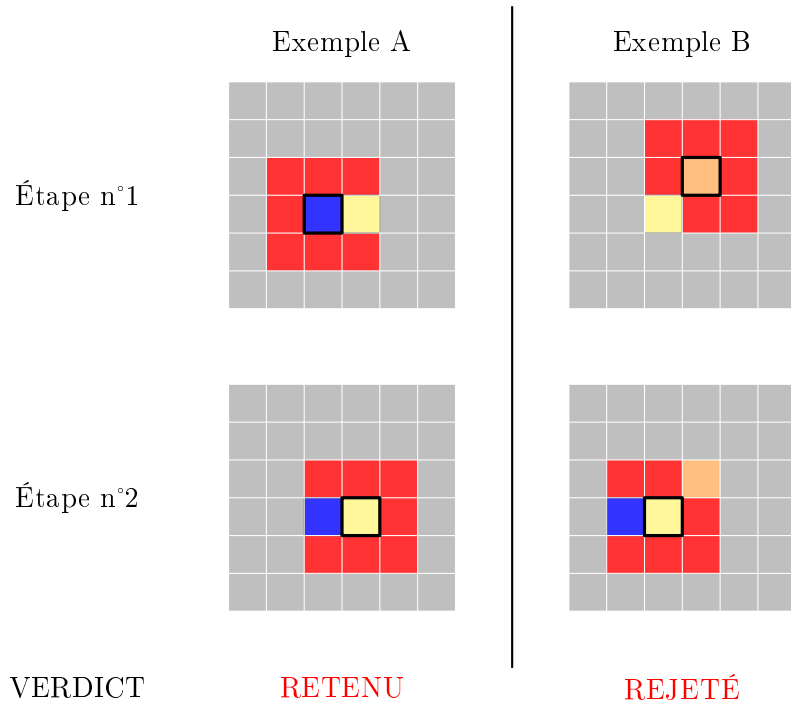


FIGURE 6.8 – Procédure de recherche des minima : deux exemples. Pour un pixel donné (encadré en trait noir épais) nous isolons par la pensée son voisinage immédiat. Les couleurs indiquent la valeur d'un pixel avec une échelle de couleur usuelle où le bleu foncé correspond à une valeur faible et le rouge à une valeur élevée. L'exemple A satisfait la double condition. Dans l'exemple B la seconde condition n'est pas satisfaite.

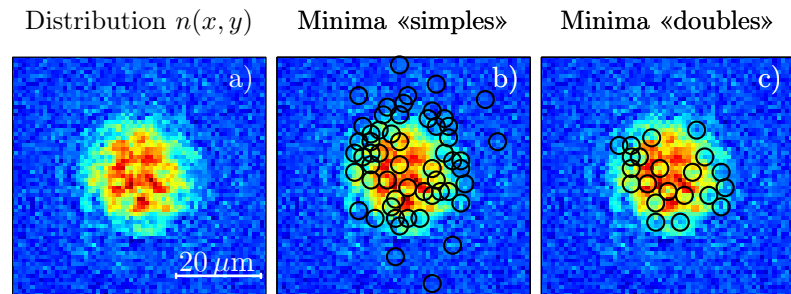


FIGURE 6.9 – Recherche des minima de densité sur une image : comparaison de deux méthodes. (a) Image brute. (b) Détection de minima (cercles noirs) par une contrainte simple : un pixel est un minimum si sa valeur est inférieure à celle de ses 8 premiers voisins (*i.e.* étape n°1 seulement). (c) Détection de minima par notre double contrainte. Une grande partie des minima «simples» se trouvent dans des régions inintéressantes de l'image où le bruit de grenaille photonique domine.

où ζ est une constante et I_{sat} l'intensité de saturation. La distribution de densité reconstruite à partir des distributions de photons détectées à la caméra¹⁷ peut donc présenter des «faux»

17. L'une correspondant à l'ombre du nuage atomique projetée sur la caméra et l'autre à la distribution spatiale de photons du faisceau sonde qui sert de référence (cf section 3.2.1).

minima qui résultent des fluctuations poissonniennes de ces champs de photons.

Comment alors savoir si un minimum est un trou de densité ou un «faux» minimum? La stratégie que nous avons adoptée consiste à comparer le résultat de la recherche de minima sur nos images (expérimentales) à celui obtenu sur des images simulées «sans trous». Ces dernières sont produites à partir de la distribution de densité lissée $n^{(\text{pot})}(\mathbf{r})$ et en y introduisant le bruit de grenaille photonique qui résulte de notre procédure d'imagerie, qui est bien caractérisée.

Images simulées

Ces images simulées doivent répondre à deux critères : d'une part, elles doivent reproduire les variations de densité dues au potentiel uniquement (*i.e.* sans trous de densité) ; d'autre part, elles doivent prendre en compte le bruit de grenaille photonique provenant du processus d'imagerie. Afin de produire des images les plus réalistes possibles, nous les construisons à partir de la différence de deux distributions de photons $N_i(\mathbf{r})$ et $N_f(\mathbf{r})$ qui correspondent respectivement à l'image de référence du faisceau sonde et à l'image de l'ombre des atomes sur la caméra. La distribution $N_i(\mathbf{r})$ est produite par un tirage aléatoire selon une loi de probabilité poissonnienne de valeur moyenne $\overline{N_i(\mathbf{r})} = \overline{N_i} = 10\,000$ uniforme sur l'ensemble de l'image¹⁸, qui est la valeur moyenne du nombre de photons détectés par la caméra sur les images expérimentales de référence du faisceau sonde.

La simulation de la distribution spatiale $N_f(\mathbf{r})$ est moins directe. Par définition, $N_f(\mathbf{r}) = N_i(\mathbf{r}) - N_{\text{abs}}(\mathbf{r})$ où $N_{\text{abs}}(\mathbf{r})$ est le nombre de photons absorbés en $\mathbf{r}$. À haute intensité et pour un faisceau sonde résonnant, $N_{\text{abs}}(\mathbf{r})$ suit une loi de probabilité poissonnienne [107]. Sur les images expérimentales le nombre de photons absorbés en moyenne au point $\mathbf{r}$ est $\zeta N_{\text{sat}} n(\mathbf{r})$ (cf. Eq. 6.5), où N_{sat} est le nombre de photons correspondant à l'intensité de saturation I_{sat} pour nos paramètres (temps d'exposition et taille de pixel). Pour les images simulées nous créons la quantité $\overline{N_{\text{abs}}(\mathbf{r})} = \zeta N_{\text{sat}} n^{(\text{pot})}(\mathbf{r})$, où $n^{(\text{pot})}(\mathbf{r})$ reproduit les variations de densité qui sont uniquement dues au potentiel de piégeage. Nous pouvons ainsi produire une distribution spatiale $N_f(\mathbf{r})$ et donc une image simulée de nos nuages sans vortex.

Nous montrons sur la figure 6.10 deux exemples d'images simulées correspondant à la distribution d'équilibre et en temps de vol 1D, que nous comparons à leurs équivalents expérimentaux. Pour les images *in situ*, bien que l'image simulée et l'image expérimentale soient globalement très ressemblantes, nous observons dans cette dernière quelques petites structures que nous ne retrouvons pas dans l'image simulée. Pour ce qui est des images en temps de vol, comme attendu, la différence entre l'image simulée et l'image expérimentale est frappante. Cette procédure s'annonce donc prometteuse pour distinguer les contributions aux minima dues aux vortex de celles dues au bruit de grenaille photonique.

Localisation de vortex dans un nuage 2D *in situ*

La procédure de recherche des minima est donc appliquée d'une part aux images expérimentales, et d'autre part, à un ensemble d'images simulées pour une valeur de contraste seuil $\mathcal{C}_{\text{seuil}}$

18. Dans les expériences, ce n'est pas le cas puisque le faisceau suit une distribution spatiale de forme gaussienne, mais nous pouvons négliger cette variation sur l'échelle de longueur que nous considérons ici.

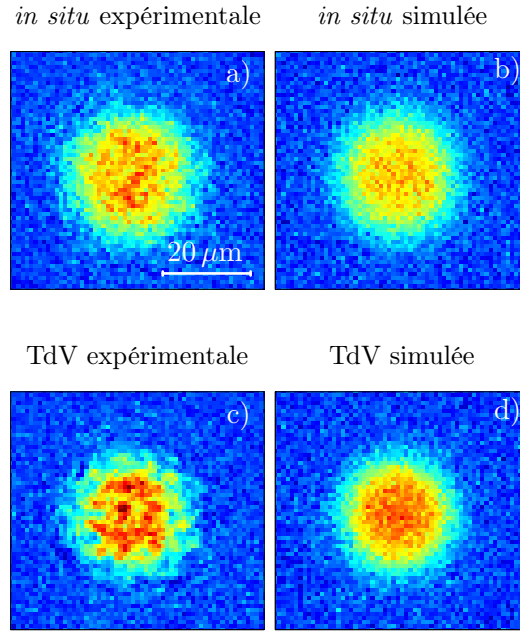


FIGURE 6.10 – Comparaison entre images simulées et images expérimentales. (a)-(b) Images *in situ* : dans les images expérimentales nous distinguons des structures qui n'apparaissent pas dans les images simulées où nous avons introduit les fluctuations de densité dues au bruit de grenaille photonique. (c)-(d) Images en temps de vol : ici la différence est claire, les images expérimentales présentent des trous de densité très marqués tandis que l'image simulée est très similaire à l'image simulée d'un nuage *in situ*.

donnée. Chaque image est subdivisée en couronnes concentriques¹⁹ régulièrement espacées de rayon moyen r . Nous nous intéressons alors pour chaque image au nombre de minima déterminés dans une couronne donnée, que nous rapportons au nombre total de pixels contenus dans cette couronne. Pour chaque image nous pouvons ainsi établir un histogramme qui représente la probabilité P_m qu'un pixel d'une couronne donnée soit un minimum.

Les histogrammes correspondant aux données simulées sont obtenus à partir d'un lot de données similaires en nombre aux données expérimentales. Nous produisons 50 lots de données simulées de façon identique à partir desquels nous calculons un histogramme moyen.

La figure 6.11 représente les résultats obtenus à partir d'images correspondant à des nuages *in situ* (expérimentales et simulées), pour $\mathcal{C}_{\text{seuil}} = 0.25$ (Fig. 6.11a), $\mathcal{C}_{\text{seuil}} = 0.30$ (Fig. 6.11b) et $\mathcal{C}_{\text{seuil}} = 0.40$ (Fig. 6.11c). Pour chaque contraste nous représentons l'histogramme de P_m en fonction de la distance r au centre du nuage. Les barres d'erreur correspondent à l'erreur statistique.

Dans chaque graphe, la ligne continue qui représente la distribution simulée correspond à tous les minima «inintéressants», *i.e.* qui sont dus au bruit de grenaille photonique. Aussi nous

19. Par souci de fluidité, nous ne mentionnerons pas ici tous les aspects liés à l'anisotropie du nuage. En pratique celle-ci est prise en compte dans l'analyse.

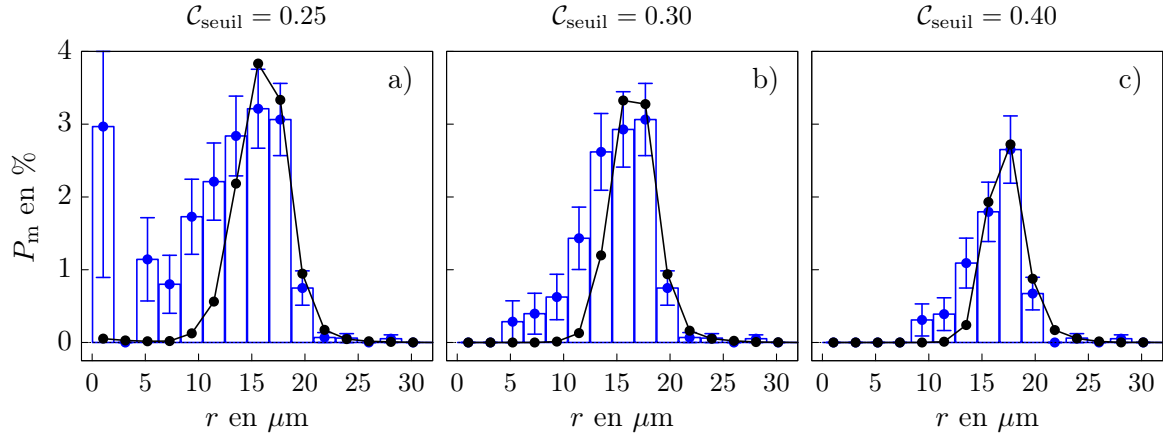


FIGURE 6.11 – Probabilité P_m qu'un pixel à une distance r du centre soit un minimum : images *in situ*. Les histogrammes expérimentaux (barres évidées bleues) sont comparés aux histogrammes simulés (ligne continue noire). De gauche à droite la contrainte sur le contraste C_{seuil} est de plus en plus forte. Pour $C_{\text{seuil}} = 0.25$ (a) l'histogramme expérimentale dépasse les simulations dans la région centrale ce qui est la signature de vortex. Pour une contrainte de $C_{\text{seuil}} = 0.40$ (c) seuls les minima au voisinage de $r \approx 9\text{--}13\ \mu\text{m}$ survivent. Dans cette région la taille attendue des vortex est plus grande.

attendons-nous à ce que les histogrammes expérimentaux dépassent cette ligne continue, du fait de la présence de véritables trous dans la distribution de densité. Il s'agit alors de quantifier cet excès de minima d'une part, et de déterminer leur robustesse d'autre part en variant le contraste seuil C_{seuil} .

Le résultat obtenu est très intéressant. Nous détectons dans la région centrale des nuages des minima qui ne sont pas dus au bruit de grenaille photonique et que nous pouvons donc attribuer à la présence de vortex²⁰. Nous notons également que la robustesse de ces minima dépend de leur position r dans le nuage. Prenons par exemple les minima détectés à $r \approx 5\ \mu\text{m}$ avec une contrainte de contraste $C_{\text{seuil}} = 0.25$. Nous voyons que ces minima ne sont plus détectés pour la contrainte plus forte $C_{\text{seuil}} = 0.40$. En revanche, en $r \approx 13\ \mu\text{m}$ nous détectons des minima quelle que soit la contrainte sur le contraste. Ce constat est en accord avec l'idée que la taille des vortex augmente avec la distance au centre du nuage. Il semble qu'à des distances suffisamment éloignées du centre, la taille des vortex dépasse donc la limite de résolution de notre système optique, ce qui nous permet de détecter des trous de contraste significatif. De plus, dans la partie centrale, nous nous attendons à ce que les nuages à l'équilibre contiennent des paires de vortex-antivortex. La taille effective de l'ensemble peut donc dépasser ou être à la limite du seuil de détection, ce qui dans ce dernier cas conduit à un trou de faible contraste. Ceci correspond à ce que nous observons pour les petites valeurs de r . Bien que l'impression visuelle que donnent les images ne soit pas aussi spectaculaire que pour les images en temps vol, cette étude fine semble indiquer la

20. Rappelons que la partie centrale de nos nuages est dans le régime fortement dégénéré, où les fluctuations de densité (autres que celles liées à la présence de vortex) sont complètement gelées (cf. chapitre 5).

présence de vortex dans nos gaz de Bose à l'équilibre.

Relevons néanmoins que nous n'obtenons pas d'excès de minima au voisinage de $r_c \approx 17 \mu\text{m}$, contrairement à ce que nous aurions pu attendre. Nous attribuons cela au fait que les fluctuations de densité détectée dues au bruit de grenaille sont importantes au voisinage de r_c , comme l'illustre l'aspect piqué des histogrammes correspondant aux simulations. Il y a donc une forte concentration de minima et maxima locaux qui peuvent alors brouiller la structure produite par les vortex et les rendre non détectables par notre procédure.

Localisation de trous de densité dans un nuage en expansion

Nous nous intéressons à présent aux images des nuages sondés après TdV et leurs analogues simulées. La procédure de construction des histogrammes est en tout point identique à la précédente. Les images expérimentales correspondent à des TdV de $t = 1 \text{ ms}$ à $t = 3.5 \text{ ms}$ par pas de 0.5 ms (5 à 6 pour chaque TdV) et sont traitées sans distinction comme un même ensemble. L'histogramme moyen correspondant aux données simulées est obtenu à partir de 20 lots préparés de façon identique, chaque lot contenant le même nombre d'images que la série de données expérimentales²¹. La figure 6.12 montre le résultat obtenu pour $C_{\text{seuil}} = 0.25$, $C_{\text{seuil}} = 0.30$ et $C_{\text{seuil}} = 0.40$.

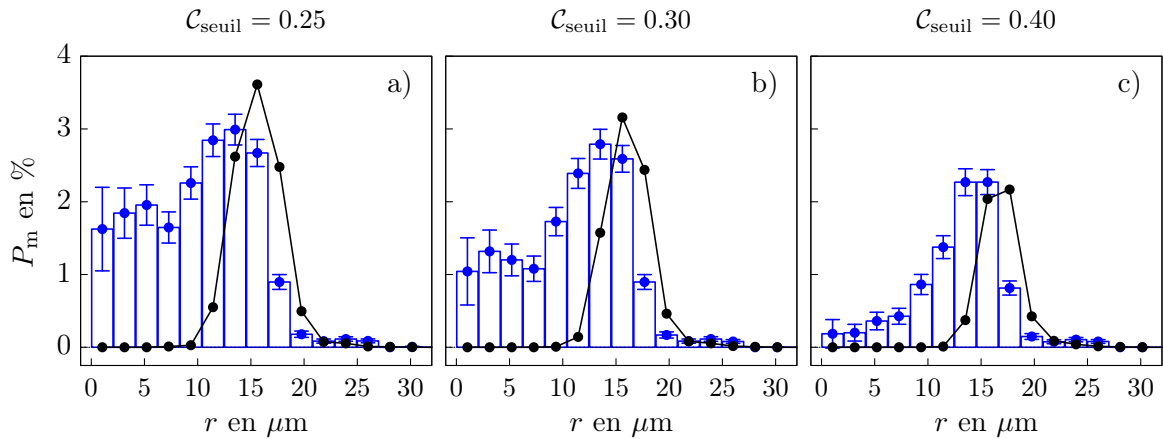


FIGURE 6.12 – Probabilité P_m qu'un pixel à une distance r du centre soit un minimum : images en temps de vol. Quelle que soit la valeur de C_{seuil} entre 0.25 et 0.40, les histogrammes expérimentaux dépassent les simulations dans la région centrale jusque $r \approx 13 \mu\text{m}$. Ceci confirme que les trous marqués observés sur les images de nuages en temps de vol sont des vortex en expansion.

Par comparaison avec les histogrammes obtenus à partir des images *in situ*, nous constatons que l'excès de minima par rapport à la distribution simulée est notablement plus élevée dans la région centrale. De plus, cet excès de minima résiste à une forte contrainte sur le contraste. Nous voyons en effet sur le graphe 6.12a qui correspond au contraste le plus élevé ($C_{\text{seuil}} = 0.40$),

21. Notons que pour ces données simulées, nous ne prenons pas en compte le fait que la contraction du nuage varie avec le temps de vol. Les images simulées de nuages en TdV sont toutes produites avec le même profil $n^{(\text{pot})}(r)$ obtenu en moyennant tous les profils radiaux entre eux.

que nous détectons des vrais minima à toutes les positions depuis le centre jusque $r \approx 13 \mu\text{m}$. Cette observation est donc consistante avec notre impression visuelle sur les images brutes en temps de vol et confirme l'interprétation de ces trous de densité de contraste élevé comme des défauts de phase en expansion. Notons toutefois que nous trouvons une légère inconsistance dans la région où la distribution simulée est piquée. Nous attribuons cela à un brouillage des minima qui est justement dû aux fluctuations importantes de densité induites par le bruit de grenaille photonique.

Cette analyse permet donc de dégager la signature, au moins partielle, de défauts de phase sur des nuages *in situ* et en expansion. Dans ce dernier cas, l'interprétation est toutefois plus difficile en raison de la complexité de la dynamique soulignée plus haut, mais nous n'avons malheureusement aucune référence théorique qui nous permettrait d'affiner notre analyse à ce stade²².

Dans une étude annexe que nous n'avons pas discutée dans ce manuscrit par manque de temps, nous nous sommes intéressés à l'évolution en temps de vol de deux vortex de charges opposées, initialement séparés d'une distance variable mais de l'ordre de $\tilde{\xi}$. Cette analyse a révélé que pour des temps de vol 1D de l'ordre de quelques millisecondes, la paire de vortex n'est pas complètement annihilée. Plus précisément, nous avons en effet observé que les cœurs des deux vortex se rapprochent et fusionnent en laissant un trou de densité en forme de croissant. Pour donner un exemple précis, pour deux vortex de charges opposées de rayon $\tilde{\xi} = 0.72 \mu\text{m}$ et à une distance $\tilde{\xi}$ l'un de l'autre, nous trouvons que le trou laissé après 3.5 ms d'expansion a un contraste de $\mathcal{C} \approx 0.5$ et une taille effective de $\approx 1 \mu\text{m}$. Pour cet exemple si nous prenons en compte la pixelisation de nos images, nous obtiendrions un trou de contraste $\mathcal{C} \approx 0.4$. Une partie significative des minima observés dans la région centrale des nuages après un temps de vol correspond donc possiblement à des paires de vortex-antivortex en cours d'annihilation.

6.4 Corrélations entre défauts de phase en expansion

Note. *Au moment où la présente étude a été rédigée, le rôle des phonons aux temps de vol courts avait été négligé. Des simulations numériques, réalisées dans le prolongement de ce travail, ont montré que les phonons affectent, au contraire, significativement la distribution de densité en temps de vol. Bien que la démarche et les résultats de l'étude préliminaire présentée dans cette section ne soient pas remis en cause, nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que l'interprétation des trous de densité observés en temps de vol, uniquement en termes de défauts de phase, ne doit pas être considérée comme définitive.*

À la section précédente, nous avons déterminé la position absolue de trous de densité dans nos nuages bi-dimensionnels. Dans cette section, nous nous intéressons à la position relative de ces trous de densité pendant l'expansion du nuage²³. Cette question peut être traitée de

22. Les simulations réalisées dans le prolongement de ce travail de thèse montrent que la contribution des phonons mériterait d'être prise en compte dans l'analyse des images en temps de vol.

23. Compte-tenu de notre résolution, ce type d'études n'est pertinent que pour nos images de nuages en expansion. En effet, dans les nuages *in situ* une partie *a priori* importante des vortex n'est pas détectable par notre système d'imagerie et une étude des positions relatives des vortex serait biaisée.

différents points de vue. Nous pouvons par exemple rechercher l'existence d'un ordre éventuel en identifiant des symétries dans l'organisation positionnelle des trous de densité dans un même nuage. Dans une perspective où ces trous de densité sont interprétés comme des défauts de phase, une autre question intéressante est celle du groupement ou anti-groupement : ces défauts de phase s'attirent-ils ou se repoussent-ils ? C'est à cette dernière question que nous tenterons de répondre en établissant des histogrammes de corrélation en position entre trous de densité voisins dans les nuages en expansion.

En pratique il est assez difficile de fournir des réponses précises à ces questions du fait de la complexité de la dynamique de l'expansion. En effet, comme nous l'avons souligné en section 6.2.1 les trous de densité observés peuvent être aussi bien des vortex individuels qu'une paire de vortex-antivortex en cours d'annihilation²⁴. Ces deux types de défauts de phase sont indiscernables l'un de l'autre par notre analyse et nous nous y référerons par le terme *vortex* en gardant à l'esprit la subtilité de la situation.

6.4.1 Distance minimale entre deux défauts de phase

L'étude décrite à la section précédente nous a permis d'identifier la position des vortex sur chacune de nos images expérimentales. Nous nous intéressons ici aux positions de vortex déterminées sur les nuages sondés en temps de vol avec un contraste seuil $C_{\text{seuil}} = 0.25$. Pour chaque vortex nous pouvons rechercher la distance d_{min} qui le sépare de son premier voisin et construire ainsi un histogramme de corrélation en position entre premiers voisins. Le résultat obtenu est représenté sur la figure 6.13 où l'on a tracé un histogramme du nombre de vortex se trouvant à une distance donnée de leurs premiers voisins. La distance entre premiers voisins est discrétisée par intervalles de la taille d'un pixel ($1.04 \mu\text{m}$).

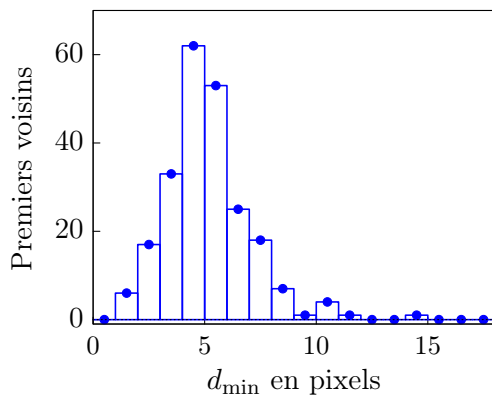


FIGURE 6.13 – Histogramme des corrélations entre premiers voisins. Cet histogramme présente deux caractéristiques consistantes avec une propriété d'anti-groupement entre défauts de phase : (i) il présente un pic à $d_{\text{min}} \approx 4 \mu\text{m}$; (ii) le nombre de premiers voisins à courte distance tend vers zéro. Cet anti-groupement est-il réel ou est-ce un artefact ?

Cet histogramme fournit deux informations intéressantes. D'une part, l'allure piquée de distribution montre qu'il y a une distance privilégiée entre premiers voisins qui est de l'ordre de

24. Comme annoté plus haut, il s'ajoute à cela la contribution des phonons qui tendent à chahuter le profil de densité en temps de vol.

5 μm . D'autre part, la probabilité de présence d'un premier voisin aux courtes distances tend vers zéro ce qui est la signature d'une forme de répulsion entre défauts de phases pendant l'expansion.

À ce stade, nos observations souffrent de l'absence d'appui théorique comme pour les observations précédentes et nous devons nous contenter de ces conclusions empiriques. De plus, il y a un certain nombre de questions ouvertes : cet anti-groupement est-il réel ou est-ce un artefact ? Qu'en est-il de la position du pic de l'histogramme ? Ces questions se posent en particulier en raison de notre procédure de détermination des minima. En effet, nous avons vu à la section 6.3.1 que les minima étaient obtenus à partir d'une double contrainte sur deux pixels adjacents, ce qui introduit forcément une zone d'exclusion autour d'un minimum. En l'occurrence, l'absence de voisins à une distance de 1 pixel dans l'histogramme en est une conséquence directe.

Pour tenter de répondre à cette question de façon quantitative nous allons nous appuyer à nouveau sur des images simulées en y introduisant des trous de densité simulant la présence de vortex.

6.4.2 Anti-groupement ou artefact ?

L'idée de notre approche est d'appliquer dans un premier temps notre procédure de recherche des minima à des données simulées où les positions des vortex suivent une loi de probabilité uniforme. Dans un second temps nous établirons l'histogramme des corrélations de ces données simulées. Comme dans ce cas il n'y a aucun anti-groupement réel aux courtes distances, la comparaison de cet histogramme avec celui de la figure 6.13 nous permettra de distinguer les effets dus à notre algorithme de recherche des minima et les effets reliés aux corrélations entre vortex voisins.

Images simulées avec vortex

Nous avons vu à la section 6.3.2 comment construire des images simulées de nuages sondés en temps de vol où la distribution de densité $n^{(\text{pot})}(\mathbf{r})$ reproduit uniquement les variations dues au potentiel de piégeage. Nous avons à nouveau appliqué cette procédure dans l'étude que nous présentons ici en introduisant en plus des vortex artificiels. Pour simuler la présence d'un vortex en un point $\mathbf{r}_0$, nous multiplions $n^{(\text{pot})}(\mathbf{r})$ par la distribution de densité :

$$n_{\text{vx}}(\mathbf{r}) = 1 - \mathcal{C}_{\text{vx}} \left[1 - \tanh^2 \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{\tilde{\xi}} \right) \right], \quad (6.6)$$

où le contraste $\mathcal{C}_{\text{vx}}$ associé au vortex et la taille $\tilde{\xi}$ sont des paramètres ajustables.

Pour chaque image on introduit ainsi un certain nombre de vortex dont les positions sont obtenues par un tirage aléatoire suivant une loi de probabilité uniforme dans la partie centrale du nuage. Le nombre de vortex introduit dans chaque image est lui aussi tiré aléatoirement et suit une loi de probabilité poissonnienne centrée sur un nombre moyen $\overline{N}_{\text{vx}} = 7$. La figure 6.14 représente quelques exemples d'images simulées avec des vortex.

Afin de produire un histogramme de référence que nous pouvons comparer directement à l'histogramme de la figure 6.13, nous préparons 20 lots de données simulées qui correspondent

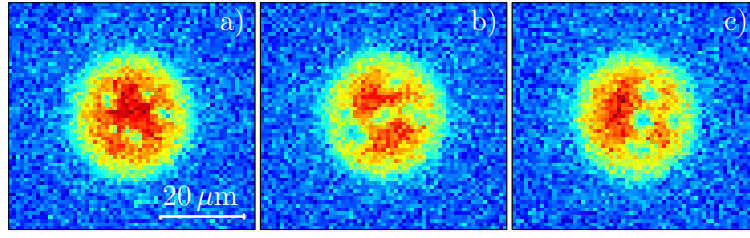


FIGURE 6.14 – Images avec vortex simulées. Les vortex peuvent être introduits avec une taille $\tilde{\xi}$ et un contraste $\mathcal{C}_{vx}$ variables. Ici $\mathcal{C}_{vx} = 0.5$. (a) Image avec des petits vortex : $\tilde{\xi} = 1.2 \mu\text{m}$ qui correspond au rayon attendu pour un TdV de 1 ms. (b)-(c) Images avec des gros vortex : $\tilde{\xi} = 2.2 \mu\text{m}$ ce qui correspond au rayon attendu pour un TdV de 3.5 ms. L'image c) est un cas spécial. Les vortex sont regroupés à droite du nuage ; cette situation n'est jamais rencontrée dans les images expérimentales.

chacun à la série de données expérimentales en nombre d'images et de vortex. À partir des positions des minima déterminées sur ces lots de données simulées, nous établissons un histogramme moyen des corrélations entre premiers voisins.

Premiers résultats

La figure 6.15 montre la comparaison de l'histogramme «expérimental» avec trois histogrammes obtenus à partir de données simulées. Chacun des trois graphiques correspond à des données simulées qui diffèrent par les paramètres $(\mathcal{C}_{vx}, \tilde{\xi})$ de la distribution $n_{vx}(\mathbf{r})$ (Eq. 6.6). Hormis cette différence, les autres paramètres des simulations sont identiques. Les positions des vortex sont tirées dans la région centrale telle que $r \leq 10$ pixels, le contraste seuil pour la recherche des minima vaut $\mathcal{C}_{seuil} = 0.25$, comme pour les images expérimentales.

Les histogrammes simulés des graphes 6.15a et 6.15b correspondent à la même taille de vortex $\tilde{\xi} = 2.4 \mu\text{m}$ et diffèrent par le contraste des vortex : $\mathcal{C}_{vx} = 0.4$ et $\mathcal{C}_{vx} = 0.5$ respectivement. Les histogrammes simulés 6.15b et 6.15c diffèrent par la taille des vortex qui vaut $\tilde{\xi} = 1.75 \mu\text{m}$ dans ce dernier cas. Les tailles considérées sont voisines des tailles extrêmes déterminées dans nos simulations d'évolution de vortex (cf figure 6.5b).

Dans les trois cas que nous avons présenté figure 6.15, la comparaison avec l'histogramme expérimental montre un décalage des histogrammes simulés vers les courtes distances. Cet effet est très marqué pour des tailles de vortex de $\tilde{\xi} = 2.4 \mu\text{m}$ (graphes 6.15a et 6.15b) et semble peu sensible au contraste $\mathcal{C}_{vx}$. Pour $\tilde{\xi} = 1.75 \mu\text{m}$ (graphe 6.15c) cet effet est plus marginal, mais nous voyons tout de même une différence significative à $d_{\min} \sim 3$ pixels. Ces résultats semblent donc indiquer que l'effet d'anti-groupement des défauts de phases est bien réel.

À ce stade de l'étude, nous ne pouvons pas apporter un verdict définitif sur cette question d'anti-groupement. Nous nous restreindrons toutefois aux résultats présentés ici par manque de temps. Nous terminerons ce chapitre en décrivant les études actuelles et les prolongements envisagés pour fournir une étude comparative aussi pertinente que possible entre les histogrammes simulés et l'histogramme expérimental.

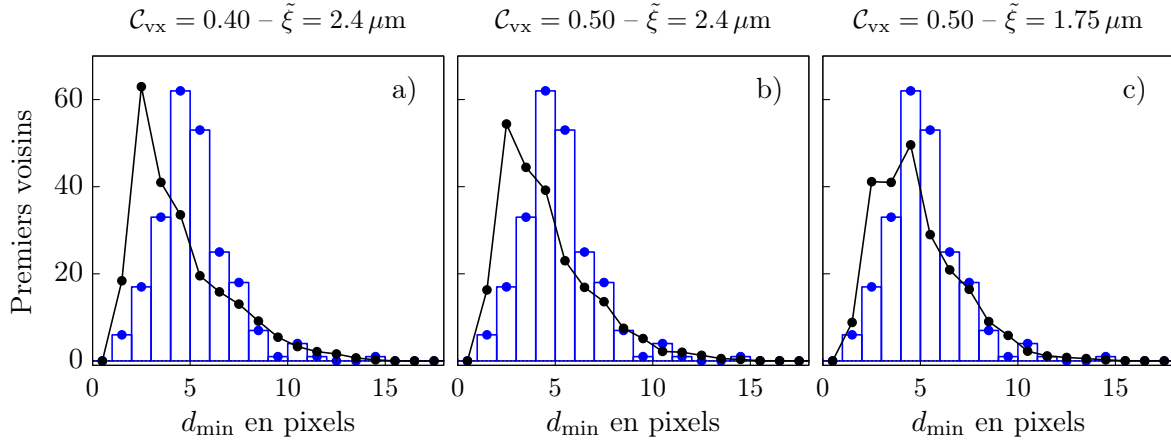


FIGURE 6.15 – Histogramme de corrélations entre premiers voisins : comparaison entre expérience (barres évidées bleues) et simulation (ligne continue noire). Les trois histogrammes simulés diffèrent par les paramètres des vortex artificiels introduits dans les images. Les simulations des graphes (a) et (b) diffèrent par le contraste $\mathcal{C}_{vx}$ des vortex. Celles des graphes (b) et (c) par le rayon $\tilde{\xi}$ des vortex. Dans les trois cas les histogrammes simulés sont décalés vers la gauche. Ceci indique que l’anti-groupement est bien réel.

Prolongements

Les études en cours ainsi que les prolongements de cette analyse ont pour but de créer des lots de données simulées aussi proches que possible des données expérimentales.

Actuellement, une nouvelle solution est exploitée pour modéliser les trous de densité créés par les défauts de phases. Les premiers résultats que nous venons de présenter ont été obtenus en modélisant les trous de densité par la distribution de densité heuristique $n_{vx}(\mathbf{r})$ de l’équation (6.6). Si cette description constitue une assez bonne approximation pour les vortex individuels, elle est moins adaptée pour décrire une paire de vortex-antivortex en cours d’annihilation. La méthode actuelle consiste à utiliser la distribution de densité $n_{vxa}(\mathbf{r})$ de paires en cours d’annihilation obtenue à partir des simulations numériques que nous avons évoquées à la fin de la section 6.3.2.

Enfin voici une brève description des raffinements qui sont envisagés dans un avenir proche.

- **Taille de vortex variable.** Dans l’étude précédente nous avons utilisé une même taille de vortex pour chaque lot de données. Nous pouvons rendre les données simulées plus fidèles aux données expérimentales en adaptant la taille $\tilde{\xi}$ en fonction : (i) de la densité atomique $n^{(pot)}(\mathbf{r}_0)$ où est tiré le vortex, (ii) du temps de vol supposé de l’image simulée²⁵.
- **Distinguer vortex individuels et paires.** Dans les études présentées ici et les études en cours que nous venons de mentionner, nous avons simulé les trous de densité soit en utilisant la forme $n_{vx}(\mathbf{r})$ de l’équation (6.6) soit en utilisant la solution numérique $n_{vxa}(\mathbf{r})$ d’une paire qui s’annihile. Nous pouvons appliquer les deux méthodes simultanément en

25. Cette seconde condition est d’ores et déjà utilisée dans des études en cours.

fixant l'une ou l'autre des formes en fonction de la région du nuage où est tiré le vortex. Par exemple, un vortex tiré dans une couronne au voisinage de r_c sera simulé par $n_{vx}(\mathbf{r})$ avec $\mathcal{C}_{vx} \approx 1$ tandis qu'un minimum tiré au centre, qui est plus probablement une paire, sera simulé par $n_{vxa}(\mathbf{r})$ pour le temps de vol adéquat.

6.5 Bilan général

Nous concluons par un résumé des principaux résultats présentés dans ce chapitre.

Vortex ou fluctuation de densité ? À la section 6.2.2 nous avons comparé l'évolution temporelle d'un vortex et d'un trou pendant un TdV 1D en résolvant numériquement l'équation de Gross–Pitaevskii dépendant du temps avec des paramètres qui correspondent à ceux de nos nuages. Nous avons considéré deux états initiaux qui ne diffèrent que par leurs caractéristiques de phase : l'état $\Psi_{vx}(r, t = 0)$ associé au vortex caractérisé par un tour de phase de 0 à 2π d'une part, et l'état $\Psi_{tr}(r, t = 0)$ qui a exactement la même amplitude que $\Psi_{vx}(r, t = 0)$ mais qui a une phase uniforme d'autre part. Le résultat de cette simulation a montré que le contraste associé chute à $\mathcal{C}_{tr} \approx 0.13$ en une milliseconde tandis que le vortex, tout en s'étendant rapidement, garde un contraste égal à 1 (le vortex et le trou ont tous deux été placés au centre du nuage). Pour nos paramètres, nous trouvons que les rayons de vortex varient de $\tilde{\xi} = 1.1 \mu\text{m}$ à $1.6 \mu\text{m}$ après une milliseconde d'expansion seulement. Nous avons donc conclu de cette étude que les trous observés dans les distributions de densité des nuages sondés en temps de vol peuvent raisonnablement être interprétés comme des vortex en expansion.

Vortex ou bruit de grenaille ? À la section 6.3, nous nous sommes intéressés à la répartition de ces vortex dans les nuages *in situ* et en expansion. Pour cela nous avons utilisé une méthode de recherche systématique de minima d'une part sur ces images expérimentales et d'autre part sur des images simulées. Ces images simulées sont les «équivalents» de nos images expérimentales, sans vortex. À partir des positions des minima nous avons établi des histogrammes expérimentaux et simulés d'autre part. Ces derniers rendent compte des minima dus au bruit de grenaille photonique : des «faux» minima de densité. En comparant les deux types d'histogramme nous avons pu distinguer les vortex des «faux» minima de densité. Ainsi, avons-nous pu identifier sans ambiguïté la présence de vortex dans les images des nuages *in situ*, là où visuellement les variations de densité sont difficilement discernables du bruit. Ces vortex sont répartis dans la partie centrale du nuage $r \lesssim 13 \mu\text{m}$, le rayon critique correspondant à $r_c \approx 17 \mu\text{m}$. Cette observation est confirmée par les histogrammes associés aux images en temps de vol, où la distinction entre les histogrammes expérimentaux et les histogrammes simulés est spectaculaire. Dans ce cas, toutefois, il ne nous a pas été possible de fournir une interprétation complète, du fait de l'absence de support théorique sur le sujet.

Anti-groupement entre vortex ? Enfin, à la section 6.4, nous avons étudié les corrélations en position entre défauts de phase voisins en établissant un histogramme du nombre de trous de densité en fonction de la distance au premier voisin. Cet histogramme, représenté sur la figure

6.13, se présente sous la forme d’une distribution piquée avec une annulation progressive aux courtes distances, signalant un possible anti-groupement. Afin de distinguer les effets réels des éventuels artefacts introduits par notre procédure de recherche des minima, nous avons entamé une étude comparative avec des histogrammes de références correspondant à des images simulées. Les premiers résultats de cette étude semblent être en faveur d’un anti-groupement réel de ces défauts de phase, mais cette étude doit encore être approfondie.

Conclusion générale

Dans ce manuscrit de thèse, nous avons traité différents aspects du gaz de Bose à deux dimensions. Nos trois résultats essentiels sont : (i) la mesure de l'équation d'état pour plusieurs grandeurs thermodynamiques ; (ii) la mesure de l'énergie d'interaction de gaz piégés ; (iii) l'observation directe de vortex dans la distribution de densité d'équilibre avec une composante superfluide. Nous avons également présenté deux études traitant de l'imagerie de gaz 2D denses qui joue un rôle crucial dans nos expériences. Nous allons rappeler les lignes principales de ce travail.

Figures choisies du chapitre 2

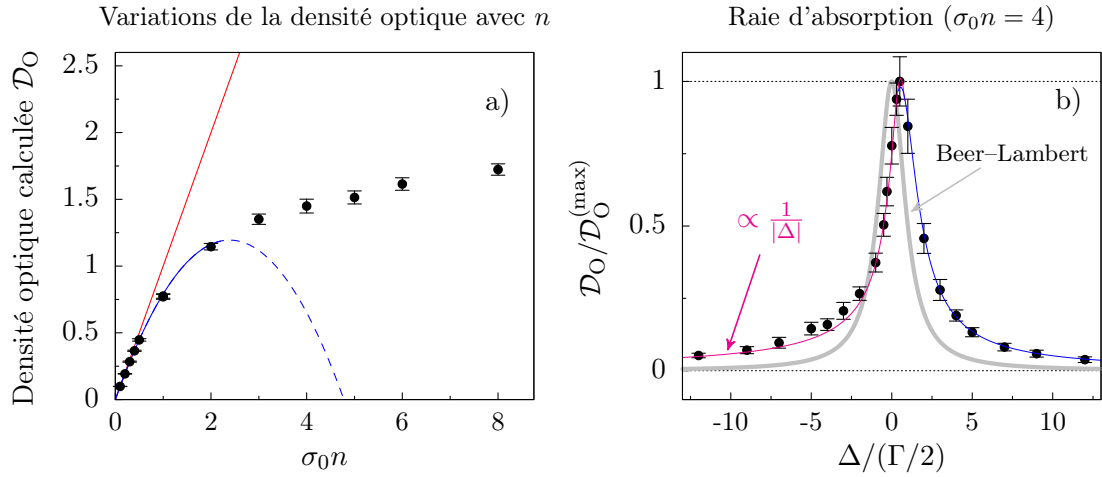


FIGURE 6.16 – Résultats numériques des simulations présentées au chapitre 2. (a) Variation de la densité optique calculée (points noirs) avec la densité surfacique. Nous voyons une déviation significative à la loi de Beer–Lambert qui correspond à la droite de pente 1 (ligne continue rouge). (b) Raie d’absorption calculée pour une densité surfacique $n = 4/\sigma_0$. La différence avec la lorentzienne obtenue par la loi de Beer–Lambert (ligne grise épaisse) est spectaculaire. Aux grands désaccords, la densité optique décroît comme en $1/|\Delta|$.

Au chapitre 2 nous avons présenté une étude théorique traitant de l’interaction entre un faisceau sonde et une assemblée d’atomes répartis dans un volume de faible épaisseur dans la direction de propagation du faisceau. Cette étude a été motivée par des expériences antérieures

menées dans notre groupe [103], où nous avons observé une réduction significative de la densité optique mesurée par rapport au résultat prédit par la fameuse relation de Beer–Lambert. L’objectif de cette étude était de rendre compte des effets collectifs entre atomes qui se produisent lors de l’imagerie par absorption non saturante de gaz bi-dimensionnels denses. Rappelons que ces effets sont négligés dans la dérivation de la loi de Beer–Lambert. Grâce à un traitement microscopique quantitatif, nous avons obtenu l’expression générale de la densité optique qui peut être calculée numériquement par la résolution d’un système de $3N$ équations où N est le nombre d’atomes considéré. En réalisant des simulations numériques où les positions des atomes sont tirées aléatoirement par une méthode Monte-Carlo, nous avons étudié les variations de la densité optique avec la densité surfacique de l’échantillon atomique. Nous avons ainsi pu mettre en évidence une non linéarité très marquée, analogue à celle observée expérimentalement. Nous nous sommes également intéressés à la forme de la raie d’absorption en variant le désaccord du faisceau sonde. Nous avons observé que la dépendance de la densité optique avec le désaccord est qualitativement très différente de la forme lorentzienne qui correspond à la réponse optique d’un atome individuel. Toutes ces observations sont la signature d’interactions dipôle-dipôle qui se produisent entre un atome excité par un photon et un atome voisin dans son état interne fondamental. Cette étude invalide donc définitivement l’utilisation de l’imagerie par absorption non saturante pour des nuages atomiques denses.

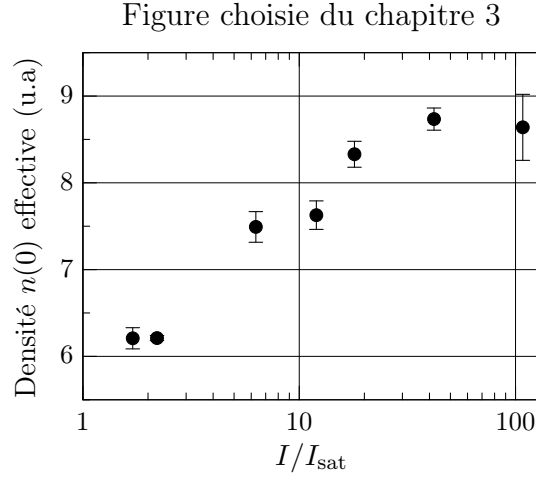


FIGURE 6.17 – Densité effective mesurée au centre d’un nuage dense en fonction de l’intensité I du faisceau sonde. La densité détectée augmente avec I puis sature. Pour nos densités maximales, nous retrouvons la détectivité maximale à partir de $I \sim 40 I_{\text{sat}}$.

Au chapitre 3 nous avons décrit notre alternative à l’imagerie par absorption traditionnelle. La stratégie retenue consiste à utiliser un faisceau sonde qui sature la transition atomique, ce qui a pour effet d’une part de limiter la diffusion multiple de photon et d’autre part de réduire l’effet des interactions dipôle-dipôle, les déplacements d’énergie associés étant bien inférieure à la fréquence de Rabi du faisceau sonde. Cette stratégie a été utilisée avec succès par Hung *et al.* [59] qui a étendu à l’imagerie de gaz 2D, la méthode initiée par Reinaudi *et al.* [105] sur des gaz 3D

optiquement épais. La transposition de cette méthode au cas 2D n'est toutefois pas immédiate d'un point de vue formel : la relation entre la densité optique et la densité spatiale établie par Reinaudi *et al.* pour un faisceau fortement saturant n'a jamais été établie (à notre connaissance) à 2D. Dans ce chapitre, nous avons présenté une dérivation auto-cohérente qui permet d'étendre cette relation au cas bi-dimensionnel. Dans une deuxième étape nous avons décrit la mise en œuvre expérimentale de cette imagerie à haute intensité sur des gaz 2D ainsi que la procédure et le résultat des calibrations. Nous avons en particulier observé un gain progressif de la détectivité avec l'intensité croissante du faisceau sonde. Enfin, nous avons identifié une intensité seuil au delà de laquelle la détectivité sature, ce qui nous a permis de déterminer les paramètres d'imagerie optimaux pour une détection fiable de la densité atomique.

Figures choisies du chapitre 4

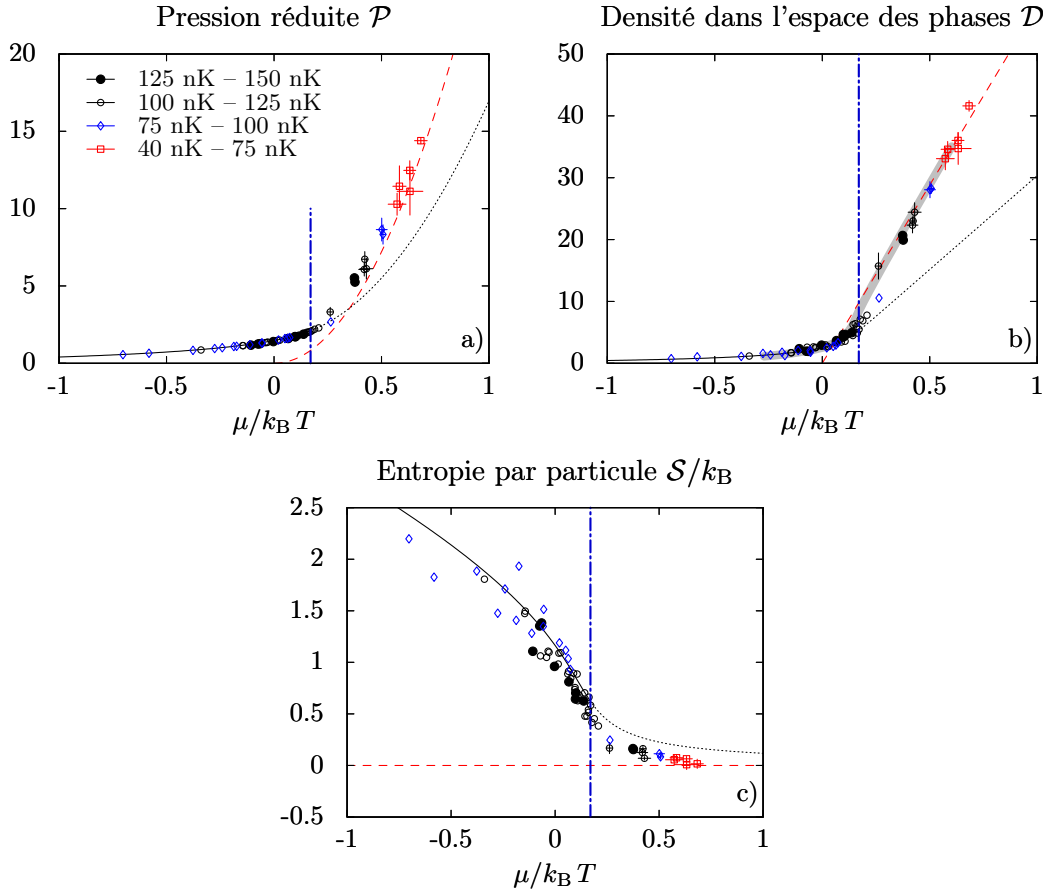


FIGURE 6.18 – Équations d'état pour la pression réduite $\mathcal{P}$ (a), la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D}$ (b) et l'entropie par particule $\mathcal{S}$. Le fait que des points correspondant à des régimes différents de température tombent sur la même courbe est une preuve de l'invariance d'échelle. Dans les trois cas, l'accord avec les régimes asymptotiques est excellent. Dans le cas de $\mathcal{D}$ pour laquelle il existe une prédiction théorique dans la région intermédiaire (en trait gris épais) l'accord est également très bon.

Le résultat principal de ce travail de thèse est décrit dans le chapitre 4. À partir de la distribution de densité de gaz piégés dans le régime quasi-2D, nous avons établi l'équation d'état du gaz homogène pour un paramètre d'interaction qui vaut $\tilde{g} \approx 0.1$. Nous avons obtenu l'équation d'état pour les trois grandeurs sans dimension que sont la pression réduite $\mathcal{P}$, la densité dans l'espace des phase $\mathcal{D}$ et l'entropie par particule $\mathcal{S}/k_B$ définies par :

$$\mathcal{P} = \frac{P\lambda_T^2}{k_B T} \quad \mathcal{D} = n\lambda_T^2 \quad \mathcal{S} = s/n \quad (6.7)$$

où P est la pression (ou plus précisément la tension de surface), n la densité surfacique et s l'entropie par unité de surface. Nos mesures des équations d'état pour $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ qui ont été obtenues pour un large intervalle de paramètres thermodynamique μ et T , montrent que celles-ci ne dépendent que du rapport $\mu/k_B T$ à l'échelle du bruit expérimental et confirme l'invariance observée par Hung *et al.* [59] pour $\mathcal{D}$. Notre mesure de $\mathcal{D}(\mu/k_B T)$ est en très bon accord quantitatif avec cette mesure [59] ainsi qu'avec les prédictions théoriques des différents régimes et en particulier avec la prédiction de Prokof'ev et Svistunov [101] pour la région critique. Grâce à la propriété d'invariance de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$, nous avons pu obtenir l'équation d'état pour l'entropie par particule $\mathcal{S}$. Les équations d'états $\mathcal{P}(\mu/k_B T)$ et $\mathcal{S}(\mu/k_B T)$ constituent des mesures originales et il n'existe pas à notre connaissance de prédictions théoriques auxquelles nous pourrions les comparer directement. Dans le régime fortement dégénéré, nous mesurons des entropies par particules remarquablement faibles ($\mathcal{S}/k_B = 0.06 \pm 0.01$ pour $\mu/k_B T \geq 0.5$). Ceci laisse entrevoir la possibilité d'utiliser ces systèmes comme réfrigérant pour des systèmes fermioniques sur réseau, où l'accès à une entropie inférieure à $0.1k_B$ ouvrirait la voie à des régions inexplorées du diagramme de phase de Fermi-Hubbard.

Au chapitre 5 nous nous sommes intéressés aux propriétés thermodynamiques du gaz piégé et plus particulièrement à la mesure de l'énergie d'interaction. Nous avons présenté une méthode originale permettant de décomposer les différentes contributions à l'énergie totale d'un gaz piégé dans un potentiel harmonique. Cette méthode est particulièrement simple à mettre en œuvre sur des gaz de basse dimension (1D ou 2D) où l'on a directement accès à la densité spatiale locale. En appliquant cette méthode à nos nuages bi-dimensionnels, nous avons ainsi pu mesurer l'énergie potentielle, l'énergie cinétique et l'énergie d'interaction moyennes de nos gaz. Nous avons expliqué en quoi la mesure de l'énergie d'interaction est d'un intérêt particulier en la reliant formellement au coefficient $\mathcal{F}$ qui permet de caractériser les fluctuations de densité dans un gaz piégé. Nous avons vu que pour un gaz complètement dans le régime thermique, ce coefficient vaut $\mathcal{F} = 2$, tandis qu'un gaz complètement condensé où les fluctuations de densités sont réduites au bruit de grenaille atomique ce qui conduit à $\mathcal{F} = 1$. Grâce à notre mesure de l'énergie d'interaction, nous avons pu évaluer ce coefficient pour les nuages considérés, qui comportent une fraction thermique significative. Nous avons mesuré $\mathcal{F} = 1.02 \pm 0.23$, ce qui correspond à des fluctuations de densité fortement réduites sur la quasi-totalité du nuage. Ce gel «prématuré» des fluctuations de densités confirme la prédiction de Prokof'ev et Svistunov [101] et la récente observation de Tung *et al.* [116].

Le dernier chapitre de ce manuscrit a été consacré à l'observation de signatures de vortex dans des gaz de Bose 2D. Nous nous sommes intéressés aux détails des distributions de densité de nuages sondés *in situ* et durant un temp de vol 1D. En combinant des simulations numériques et

Figures choisies du chapitre 5

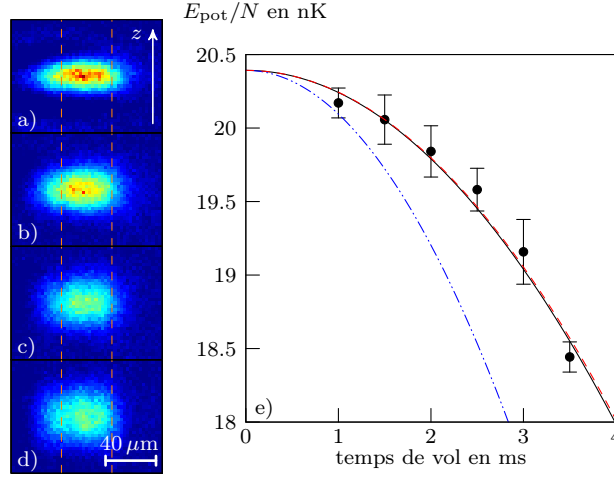


FIGURE 6.19 – Mesure de l’énergie d’interaction. (a)–(d) Images prises selon l’axe horizontal d’un nuage 2D sondé à différents instants t d’un temps de vol 1D ($t = 1, 2, 3$ et 4 ms). Ce temps de vol 1D simule la coupure des interactions. (e) Évolution de l’énergie potentiel E_{pot} avec le temps de vol. Aux premiers instants qui suivent la coupure des interactions, le nuage se contracte et E_{pot} décroît. Cette variation de E_{pot} permet de mesurer l’énergie cinétique et d’en déduire l’énergie d’interaction.

une analyse fine de ces distributions de densité, nous avons mis en évidence la présence de vortex dans les régions centrales du nuages. Dans le cas des images *in situ* la répartition des vortex est en bon accord avec l’état actuel des connaissances sur le gaz 2D piégé. Pour ce qui est de la répartition des vortex après un temps de vol, pour laquelle nous n’avons pas d’assise théorique, il est plus difficile de fournir une interprétation complète et satisfaisante. Enfin, nous avons obtenu une trace d’anti-groupement entre trous de densité dans des nuages en expansion par une analyse des corrélations entre premiers voisins. Cette étude des corrélations en est toutefois à ses débuts et nécessite des approfondissements. Ce dernier chapitre ouvre la voie à deux questions concernant le gaz de Bose 2D piégé : (i) comment évoluent l’ensemble des vortex appariés ou non durant une expansion libre ? (ii) Y a-t-il un anti-groupement de vortex ou de paires à l’équilibre, qu’en est-il pendant l’expansion ?

Perspectives

Il reste de nombreuses questions ouvertes et voies d’investigations du gaz de Bose à deux dimensions [45]. Dans cette section de perspective nous choisirons de décrire deux expériences qui sont dans le prolongement du présent travail et qui peuvent être réalisées à moyen terme dans notre laboratoire. Enfin, nous terminerons en décrivant brièvement les investigations qui y sont menées actuellement.

Figures choisies du chapitre 6

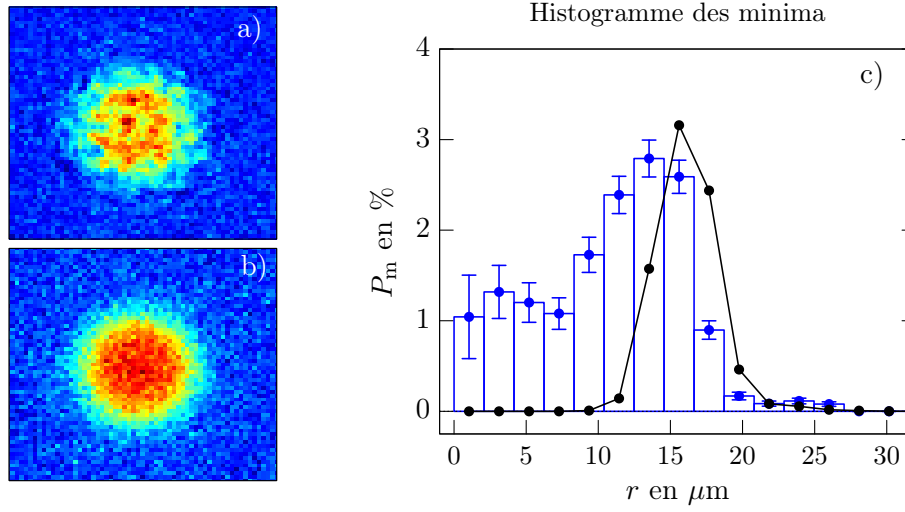


FIGURE 6.20 – (a) Image d'un nuage après 3 ms de temps de vol. (b) Image simulée sans vortex prenant en compte le bruit de grenaille photonique. Cette image sert de témoins pour distinguer les vortex de «faux» trous de densité. (c) Probabilité qu'un pixel en r soit un minimum : comparaison entre expériences (barres évidées bleue) et simulations (ligne continue noire). Les minima au centre du nuage ($r \lesssim 13 \mu\text{m}$) ne sont pas dus au bruit de grenaille photonique : ce sont des vortex.

Interférences en deux plans atomiques et cohérence locale

Une des questions que nous n'avons pas abordées dans ce travail est l'étude des propriétés de cohérence du gaz de Bose à deux dimensions. Cette question a été étudiée dans notre groupe par Hadzibabic *et al.* [46] par l'analyse d'interférogrammes de gaz bi-dimensionnels. Le point de départ de cette expérience consiste à confiner un condensat tridimensionnel dans deux plans horizontaux parallèles. Une fois l'équilibre atteint, tous les champs de piégeage sont coupés et les deux plans s'étendent rapidement dans la direction verticale, se recouvrent et interfèrent. Les images de ces profils d'interférences sont obtenus par imagerie par absorption le long de l'axe horizontal (Oy). En étudiant le contraste moyen de ces profils d'interférence, Hadzibabic *et al.* ont mis en évidence la décroissance algébrique de la fonction de corrélation du premier ordre $g_1(r)$, caractéristique de l'état superfluide à deux dimensions. Cette mesure ne donne toutefois pas accès à la cohérence locale du fait de l'intégration le long de l'axe d'imagerie. Dans l'introduction générale nous avons présentée une méthode interférométrique originale et très élégante développée par Cladé *et al.* [27] qui consiste à faire interférer un nuage à l'équilibre avec lui-même et à enregistrer le profil d'interférence en imagerie verticale. L'avantage de cette méthode est qu'il n'y a pas d'effet d'intégration dans la procédure d'imagerie et elle donne donc accès à une mesure plus locale de la cohérence. Malgré ce progrès, il n'existe pas encore de mesure quantitative satisfaisante de la cohérence locale dans un gaz de Bose 2D.

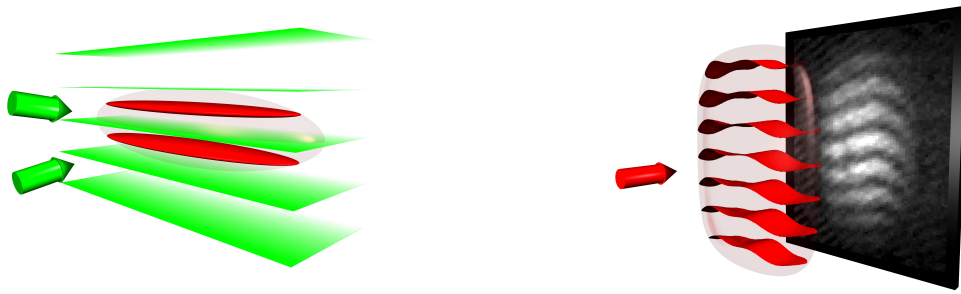


FIGURE 6.21 – Procédure de Hadzibabic *et al.* [46]. Deux plans atomiques quasi-identiques sont préparés dans leur état d'équilibre (image de gauche). À la coupure de tous les champs de piégeage, les plans atomiques s'étendent rapidement dans la direction verticale, se recouvrent et interfèrent (image de droite). Les interférogrammes permettent de caractériser les propriétés de cohérence à l'équilibre. Avec cette approche, la résolution du contraste souffre toutefois de l'effet d'intégration le long de l'axe d'imagerie.

Nous proposons ici une procédure qui devrait permettre d'étudier la cohérence locale par une méthode relativement simple. Le point de départ est la production d'un profil d'interférence tel que ceux obtenus par Hadzibabic *et al.* [46]. L'idée est ensuite de sélectionner une tranche centrale d'épaisseur δy de ce profil d'interférence dans la direction de propagation du faisceau sonde. Pour cela nous envisageons d'utiliser un faisceau « nettoyeur » vertical dont le rôle sera de dépomper tous les atomes sauf ceux de la tranche centrale. Ce but peut être atteint en envoyant le faisceau à travers un masque comme nous le faisons dans la préparation de nos gaz 2D. L'utilisation d'un objectif de haute résolution pourra permettre de sélectionner des tranches de l'ordre de quelques microns. La procédure expérimentale se déroulerait alors en trois étapes : (i) préparation d'un interférogramme ; (ii) sélection d'une tranche centrale d'épaisseur δy en dépompant les autres régions ; (iii) imagerie selon l'axe (Oy). Nous obtenons ainsi interférogramme « propre » (*i.e.* sans effet d'intégration) que nous caractériserons par un contraste quasi-local $\mathcal{C}(x)$.

Dès lors que nous disposons de ces interférogrammes « propres », nous pouvons étudier la dépendance de la cohérence locale avec la position (selon l'axe (Ox)) par une étude statistique sur plusieurs préparations identiques. Nous nous attendons alors à observer une évolution de la distribution de contraste entre deux cas limites. Celui d'une distribution piquée autour de la valeur 1 (contraste maximal) correspondant à une cohérence parfaite, et celui d'une distribution exponentielle correspondant à une phase fluctuante. Ce type d'analyse a été réalisé avec succès sur des gaz 1D [51] en bon accord avec la prédiction théorique de Gritsev *et al.* [42] qui décrivent une étude quantitative de l'évolution spatiale de la distribution de contraste dans un gaz 1D. Ce problème est encore ouvert à 2D [104].

Mesurer la phase et la densité en présence de vortex

Une autre expérience dans le prolongement de ce travail de thèse consisterait à combiner la détection de trous de densité décrite au chapitre 6 avec la méthode que nous venons de décrire. Considérons une situation où l'un des plans atomiques contient un vortex à l'équilibre. Si ce

vortex se trouve dans la tranche centrale d'épaisseur δy , alors l'interférogramme correspondant devrait présenter une dislocation. L'idée de cette expérience est de produire, pour une préparation donnée du gaz à l'équilibre, un grand nombre d'images de la distribution de densité d'un gaz unique, et d'autre part un grand nombre d'interférogrammes («propres»). Il sera alors intéressant de comparer le nombre de minima de densité contenus dans la tranche centrale d'épaisseur δy et le nombre de dislocations dans les interférogrammes correspondant. La procédure expérimentale que nous imaginons consiste à alterner entre la production d'un interférogramme «propre» sondé horizontalement et celle d'un nuage unique *in situ* (ou après expansion) sondé en imagerie verticale. Dans les deux cas, le point de départ sera la préparation de plans atomiques à l'équilibre. Dans le cas de la mesure de la distribution d'équilibre, il est nécessaire de se débarrasser de l'un des deux plans. Nous envisageons donc de faire précéder l'étape d'imagerie verticale par une phase de «nettoyage» d'un des deux plans. L'étude des corrélations entre le nombre et les positions des minima de densité à l'équilibre avec ceux des dislocations dans les interférogrammes fournirait une caractérisation très fine de la fonction d'onde du système au voisinage des vortex mis en jeu dans la transition BKT.

Superfluidité et critère de Landau

Tandis que les expériences pionnières sur la superfluidité portaient sur les propriétés de transport de films d'Hélium [15], les mesures réalisées sur les gaz atomiques à deux dimensions ont sondé les propriétés de cohérence associées à la superfluidité. Le lien entre les propriétés de cohérence et les propriétés de transport n'est cependant pas évident d'un point de vue conceptuel et constitue une question ouverte de la superfluidité. Une réponse expérimentale pourrait être apportée par la communauté travaillant sur les atomes froids en réalisant d'une part des mesures de cohérence et d'autre part des mesures des propriétés de transport sur des échantillons atomiques préparés de façon identiques. Si le premier type de mesure est bien maîtrisé, la mesure de la composante superfluide au sens traditionnel reste inachevée. Plusieurs voies d'approches de ce problème ont été récemment proposées [22, 44, 115] mais qui, bien que prometteuses, nécessitent un dispositif expérimental conséquent.

Nous avons récemment mis en place dans notre laboratoire un dispositif assez simple qui permet d'aborder cette question de transport. La stratégie retenue consiste à étudier le mouvement d'une impureté dans le gaz. Dans notre cas, cette impureté est simulée par un trou de densité créé par un faisceau laser désaccordé vers le bleu de la transition atomique. Le mouvement de l'impureté dans le nuage est assuré par un miroir motorisé, piloté par ordinateur. L'idée est ici de mettre en mouvement cette impureté le long d'une trajectoire circulaire, et donc de densité constante, et d'étudier l'échauffement du nuage ainsi occasionné en fonction de la vitesse de rotation. Nous nous ramenons donc à une situation où nous pouvons sonder la superfluidité de notre système par le critère de Landau. Si l'impureté se déplace sur une ligne de densité où le système est superfluide, alors nous nous attendons à ne pas observer d'échauffement significatif en dessous d'une certaine vitesse critique. En variant le rayon de la trajectoire, nous pouvons donc en principe établir une cartographie de la vitesse critique. Les premiers résultats obtenus sont prometteurs et nous espérons que cette étude constituera un premier pas vers la compréhension

du lien entre la cohérence et la superfluidité au sens traditionnel.

Annexes

Annexe A

Origine du facteur $\kappa^{(I_i)}$

Cette annexe est reliée à la section 3.2.3 où nous présentons l'utilisation de l'imagerie haute intensité sur des gaz de Bose bi-dimensionnels denses. Nous nous intéressons ici à l'origine du facteur global $\kappa^{(I_i)}$ introduit à la fin de la section 3.2.3.

Le facteur global $\kappa^{(I_i)}$ est apparu avec les configurations d'imagerie avec $\tau = 2.5 \mu\text{s}$. Or, comme nous l'avons évoqué plus haut, nous n'avons pas un contrôle optimal sur ces impulsions courtes. Précisons néanmoins que ces impulsions courtes ont une forme temporelle $I(t)$ reproductible. Un enregistrement d'une impulsion de « $2.5 \mu\text{s}$ » est représenté sur la figure A.1a, avec une comparaison au créneau attendu. Pour la suite de notre propos, il est utile d'introduire les quantités sans dimension $f(t)$ et η définies telles que :

$$I(t) = I_{\max} f(t) \quad \text{avec} \quad I_{\max} = \eta I_{\text{sat}}. \quad (\text{A.1})$$

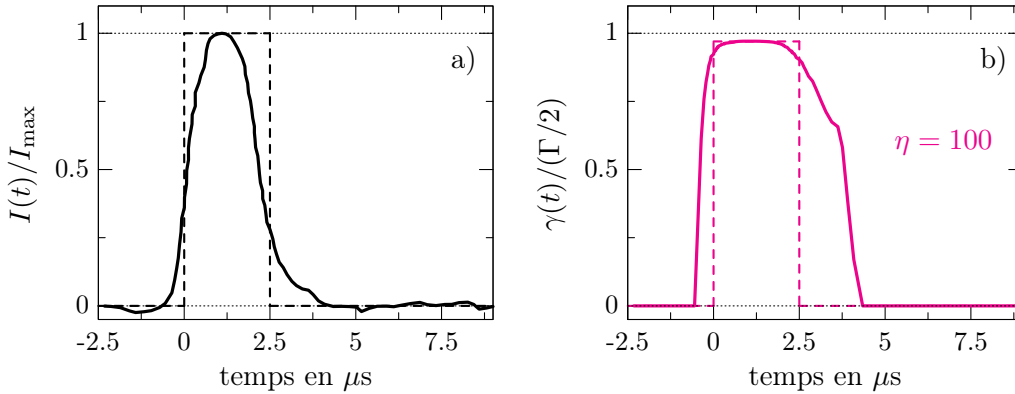


FIGURE A.1 – (a) Enregistrement d'une impulsion lumineuse de « $2.5 \mu\text{s}$ ». Le créneau en ligne tiretée représente l'impulsion attendue. (b) Taux de diffusion correspondant pour $\eta = 100$. Le créneau en ligne tiretée est le taux de diffusion attendu pour une impulsion lumineuse parfaitement rectangulaire.

Il s'agit à présent de déterminer la durée effective de l'interaction correspondant à cette forme $f(t)$, pour une intensité donnée. Comme l'intensité dépend du temps, il en est de même du taux

de diffusion qui s'écrit (cf. Eq. (3.6)) :

$$\gamma(t) = \frac{\Gamma}{2} \frac{I(t)/I_{\text{sat}}}{\alpha^* + I(t)/I_{\text{sat}}} = \frac{\Gamma}{2} \frac{f(t)}{f(t) + \alpha^*/\eta}. \quad (\text{A.2})$$

Nous avons tracé $\gamma(t)$ sur la figure A.1b pour $\eta = 100$ avec $\alpha^* = 3.0$. Comme on peut le voir l'aire sous la courbe est près de 2 fois plus grande que l'aire attendue pour un créneau parfait de $2.5 \mu\text{s}$. La durée effective d'interaction τ_{eff} est donc plus grande que la durée $\tau = 2.5 \mu\text{s}$ attendue, ce qui explique l'apparition d'un facteur global dans la densité optique calculée à haute intensité.

Pour comprendre plus précisément comment ce facteur global intervient dans notre calcul de la densité optique, il faut revenir à l'équation (3.21). Le premier terme est indépendant de τ . En revanche le passage de τ à $\tau_{\text{eff}} > \tau$ se traduit par un facteur global $\tau_{\text{eff}}/\tau > 1$ sur le deuxième terme. Or, nous avons vu que pour $I_i \gg I_{\text{sat}}$ la contribution du premier terme est analogue à celle d'un facteur multiplicatif. L'effet d'une durée effective plus grande se traduit donc comme un facteur global > 1 sur la densité optique calculée à haute intensité.

Intéressons-nous à présent à la dépendance de cette durée effective avec l'intensité incidente. La figure A.2a représente $\gamma(t)$ pour trois valeurs de η correspondant au régime fortement saturant. Les allures des $\gamma(t)$ pour les différentes intensités nous indiquent que la durée effective augmente avec I_i , ce qui est en accord avec la tendance des coefficients $\kappa^{(I_i)}$ donnés plus haut. Nous avons également tracé la fonction normalisée $f(t)$ en arrière plan afin de comparer l'évolution temporelle de celle-ci avec les taux de diffusion. Nous voyons ainsi que c'est l'aile droite de l'impulsion qui contribue de façon croissante avec l'intensité.

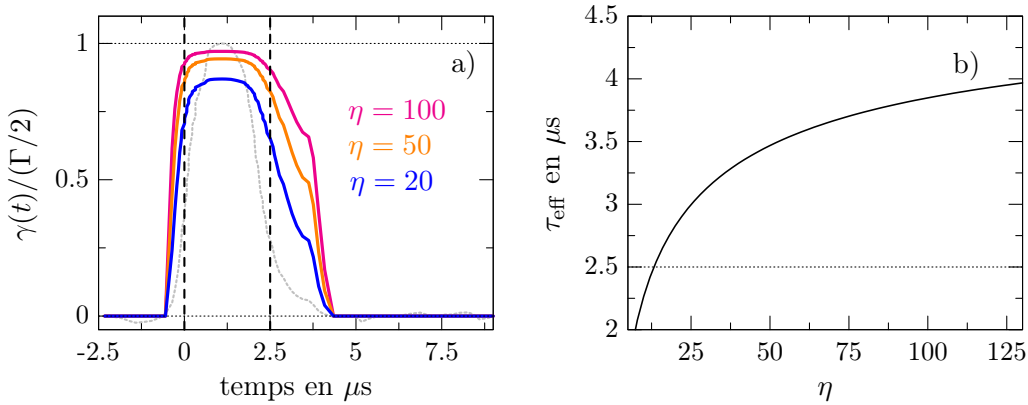


FIGURE A.2 – (a) Taux de diffusion pour $\eta = 20, 50$ et 100 représentés par les courbes bleue, orange et rouge respectivement. (b) Durée effective de l'impulsion lumineuse en fonction du paramètre η .

De façon plus quantitative, nous pouvons définir τ_{eff} à partir du nombre de photons N_{diff} diffusés pendant l'impulsion $I(t)$. Pour une impulsion lumineuse parfaitement rectangulaire de durée τ , le taux de diffusion γ est constant pendant la durée τ et le nombre de photons diffusé s'écrit :

$$N_{\text{diff}} = \gamma\tau = \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{1 + \alpha^*/\eta} \tau. \quad (\text{A.3})$$

Dans le cas présent, la forme imparfaite de l'impulsion lumineuse conduit à un taux de diffusion dépendant du temps et nous avons :

$$N_{\text{diff}} = \int \gamma(t) dt = \frac{\Gamma}{2} \int \frac{f(t)}{f(t) + \alpha^*/\eta} dt, \quad (\text{A.4})$$

Nous pouvons définir la durée effective d'interaction en mettant l'équation (A.4) sous la forme :

$$N_{\text{diff}} = \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{1 + \alpha^*/\eta} \tau_{\text{eff}}, \quad (\text{A.5})$$

qui correspond à l'expression (A.3) où τ a été remplacé par la durée effective :

$$\tau_{\text{eff}} = (1 + \alpha^*/\eta) \int \frac{f(t)}{f(t) + \alpha^*/\eta} dt, \quad (\text{A.6})$$

où τ_{eff} peut être calculé par intégration numérique pour différentes valeurs de η . La figure A.2b montre la dépendance de τ_{eff} pour $\eta = 5 - 130$. Nous constatons que lorsque η augmente, nous passons continûment d'une durée effective réduite à durée effective rallongée presque de $\sim 60\%$. Le tableau A.1 permet de situer plus précisément nos configurations d'imagerie sur cette courbe. La valeur de η indiquée dans la deuxième ligne du tableau prend en compte la forme de l'impulsion¹. La quantité τ_{eff}/τ indiquée à la troisième ligne correspond au facteur multiplicatif par lequel nous surestimons $d_{\text{O}}^{(h)}$ en supposant une impulsion de forme rectangulaire. Cette ligne du tableau est donc à comparer à la dernière ligne qui contient les valeurs de $\kappa^{(I_i)}$. Comme on peut le voir, l'accord est relativement bon.

Configuration	$18I_{\text{sat}}$	$42I_{\text{sat}}$	$108I_{\text{sat}}$
$\eta = I_{\text{max}}/I_{\text{sat}}$	21	49	125
τ_{eff}	$2.86 \mu\text{s}$	$3.45 \mu\text{s}$	$3.95 \mu\text{s}$
τ_{eff}/τ	1.21	1.46	1.68
$\kappa^{(I_i)}$	1.18	1.49	1.96

TABLE A.1 – Durées effectives et facteurs globaux en fonction de l'intensité incidente.

L'observation faite sur la figure 3.14, où nous avons constaté un facteur global entre les profils de densité optique généralisée d_{O} obtenus avec les différentes configurations d'imagerie provient donc de la forme imparfaite des impulsions courtes.

1. Les valeurs d'intensités incidente fournies plus haut, sous la forme $I_i = x I_{\text{sat}}$, sont déduites d'un comptage de photons en supposant une impulsion parfaite de $2.5 \mu\text{s}$. Or, l'intégration numérique $\int f(t) dt = 2.16 \times 10^{-6}$, ce qui correspondrait à une impulsion en créneau de hauteur 1 et de durée $2.16 \mu\text{s}$. Les intensités pic sont donc telles que $I_{\text{max}} = (2.5/2.16)I_i = 1.16I_i$.

Bibliographie

- [1] Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic mott insulator.
- [2] Single-spin addressing in an atomic mott insulator.
- [3] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels, and W. Ketterle. Observation of vortex lattices in Bose–Einstein condensates. *Science*, 292 :476–479, 2001.
- [4] Sadhan K. Adhikari. Quantum scattering in two dimensions. *American Journal of Physics*, 54(4) :362–367, 1986.
- [5] E. Akkermans, A. Gero, and R. Kaiser. Photon localization and dicke superradiance in atomic gases. *Phys. Rev. Lett.*, 101(10) :103602, Sep 2008.
- [6] E. Akkermans and G. Montambaux. *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 2007.
- [7] U. Al Khawaja, J. O. Andersen, N. P. Proukakis, and H. T. C Stoof. Low dimensional Bose gases. *Phys. Rev. A*, 66(1) :013615, 2002.
- [8] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269 :198, 1995.
- [9] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H. J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Observation of interference between two Bose condensates. *Science*, 275 :637, 1997.
- [10] G. E. Astrakharchik, J. Boronat, J. Casulleras, I. L. Kurbakov, and Yu. E. Lozovik. Equation of state of a weakly interacting two-dimensional bose gas studied at zero temperature by means of quantum monte carlo methods. *Phys. Rev. A*, 79(5) :051602, 2009.
- [11] V. Bagnato, D. E. Pritchard, and D. Kleppner. Bose–Einstein condensation in an external potential. *Phys. Rev. A*, 35 :4354, 1987.
- [12] W. S. Bakr, A. Peng, S. Folling, and M. Greiner. A quantum gas microscope for detecting single atoms in a Hubbard-regime optical lattice. *Nature*, 462 :74–77, 2009.
- [13] V. L. Berezinskii. Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional system possessing a continous symmetry group - ii. quantum systems. *Soviet Physics JETP*, 34 :610, 1971.
- [14] M. Bijlsma and H. T. C. Stoof. Renormalization group theory of the three-dimensional dilute Bose gas. *Phys. Rev. A*, 54 :5085, 1996.
- [15] D. J. Bishop and J. D. Reppy. Study of the superfluid transition in two-dimensional ^4He films. *Phys. Rev. Lett.*, 40(26) :1727–1730, 1978.

- [16] R. N. Bisset, D. Baillie, and P. B. Blakie. Analysis of the holzmann-chevallier-krauth theory for the trapped quasi-two-dimensional bose gas. *Phys. Rev. A*, 79(1) :013602, 2009.
- [17] I. Bloch, T. W. Hänsch, and T. Esslinger. Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition. *Nature*, 403 :166, 2000.
- [18] N. N. Bogoliubov. On the theory of superfluidity. *J. Phys. (USSR)*, 11 :23, 1947.
- [19] N. N. Bogoliubov. *Physica*, 26 :S1, 1960.
- [20] T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Khaykovich, K.M.F. Magalhaes, S.J.J.M.F. Kokkelmans, G.V. Shlyapnikov, and C. Salomon. *Phys. Rev. Lett.*, 91(2) :020402, 2003.
- [21] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet. Evidence of Bose–Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :1687, 1995.
- [22] Iacopo Carusotto and Yvan Castin. Non-equilibrium and local detection of the normal fraction of a trapped two-dimensional bose gas. preprint arXiv :1103.1818v1.
- [23] Y. Castin. Simple theoretical tools for low dimension Bose gases. *Journal de Physique IV, France*, 116 :87, 2004.
- [24] M. Cheneau. *Transition superfluide et potentiels géométriques dans le gaz de Bose bidimensionnel*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2009.
- [25] Cheng Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga. Feshbach resonances in ultracold gases. *Rev. Mod. Phys.*, 82(2) :1225–1286, Apr 2010.
- [26] L. Chomaz. *Vers une modélisation de la diffusion de photons par un gaz d’atomes ultrafroids bidimensionnel dense, application à la mesure de densité par absorption*. PhD thesis, École polytechnique, 2010.
- [27] P. Cladé, C. Ryu, A. Ramanathan, K. Helmerson, and W. D. Phillips. Observation of a 2d Bose gas : From thermal to quasicondensate to superfluid. *Phys. Rev. Lett.*, 102(17) :170401, 2009.
- [28] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Photons and Atoms Introduction to Quantum Electrodynamics, Year = 1989*. Wiley, New York.
- [29] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Atom-Photon Interactions*. Wiley, New York, 1992.
- [30] S. L. Cornish, N. R. Claussen, J. L. Roberts, E. A. Cornell, and C. E. Wieman. Stable 85rb Bose–Einstein condensates with widely tunable interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :1795, 2000.
- [31] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :3969, 1995.
- [32] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Bose–Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :3969, 1995.
- [33] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen gases. *Sitzungsberichte/Physikalische Klasse, Preussische Akademie der Wissenschaften*, 22 :261, 1924.

- [34] R. P. Feynman. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21 :467–488, 1982.
- [35] D. S. Fisher and P. C. Hohenberg. Dilute Bose gas in two dimensions. *Phys. Rev. B*, 37 :4936, 1988.
- [36] Bernd Fröhlich, Michael Feld, Enrico Vogt, Marco Koschorreck, Wilhelm Zwerger, and Michael Köhl. Radio-frequency spectroscopy of a strongly interacting two-dimensional fermi gas. *Phys. Rev. Lett.*, 106(10) :105301, Mar 2011.
- [37] J. N. Fuchs, X. Leyronas, and R. Combescot. Hydrodynamic modes of a one-dimensional trapped bose gas. *Phys. Rev. A*, 68 :043610, Oct 2003.
- [38] A. Gero and E. Akkermans. Superradiance and multiple scattering of photons in atomic gases. *Phys. Rev. A*, 75(5) :053413, May 2007.
- [39] V. L. Ginzburg and L. D. Landau. Theory of superconductivity. *JETP*, 20 :1064, 1950.
- [40] M. Greiner, M. O. Mandel, T. Esslinger, T. Hänsch, and I. Bloch. Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 415 :39, 2002.
- [41] A. Griffin. Conserving and gapless approximations for an inhomogeneous Bose gas at finite temperatures. *Phys. Rev. B*, 53 :9341, 1996.
- [42] V. Gritsev, E. Altman, E. Demler, and A. Polkovnikov. Full quantum distribution of contrast in interference experiments between interacting one-dimensional Bose liquids. *Nature Physics*, 2 :705–709, 2006.
- [43] E. P. Gross. Structure of quantized vortex. *Il Nuovo Cimento*, 20 :454, 1961.
- [44] Z. Hadzibabic. Private communication. 2011.
- [45] Z. Hadzibabic and J. Dalibard. Two-dimensional Bose fluids : An atomic physics perspective. In R. Kaiser and D. Wiersma, editors, *Nano optics and atomics : transport of light and matter waves*, volume CLXXIII of *Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, 2009*. IOS Press, 2010. arXiv :0912.1490.
- [46] Z. Hadzibabic, P. Krüger, M. Cheneau, B. Battelier, and J. Dalibard. Berezinskii-Kosterlitz-Thouless crossover in a trapped atomic gas. *Nature*, 441 :1118–1121, 2006.
- [47] Z. Hadzibabic, P. Krüger, M. Cheneau, S. P. Rath, and J. Dalibard. The trapped two-dimensional Bose gas : from Bose–Einstein condensation to Berezinskii–Kosterlitz–Thouless physics. *New Journal of Physics*, 10(4) :045006, 2008.
- [48] L. V. Hau, B. D. Busch, C. Liu, Z. Dutton, M. M. Burns, and J. A. Golovchenko. Near resonant spatial images of confined Bose–Einstein condensates in the ‘4d’ magnetic bottle. *Phys. Rev. A*, 58 :R54, 1998.
- [49] T. L. Ho. Universal thermodynamics of degenerate quantum gases in the unitarity limit. *Phys. Rev. Lett.*, 92 :090402, 2004.
- [50] T.-L. Ho and Qi Zhou. Obtaining the phase diagram and thermodynamic quantities of bulk systems from the densities of trapped gases. *Nature Physics*, 6 :131, 2009.

- [51] S. Hofferbeth, I. Lesanovsky, T. Schumm, A. Imambekov, V. Gritsev, E. Demler, and J. Schmiedmayer. Probing quantum and thermal noise in an interacting many-body system. *Nature Physics*, 4 :489–495, 2008.
- [52] P. C. Hohenberg. Existence of long-range order in one and two dimensions. *Phys. Rev.*, 158 :383, 1967.
- [53] M. Holland, D. S. Jin, M. L. Chiofalo, and J. Cooper. Emergence of interaction effects in Bose–Einstein condensation. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :3801, 1997.
- [54] M. Holzmann, M. Chevallier, and W. Krauth. Semiclassical theory of the quasi two-dimensional trapped gas. *Europhys. Lett.*, 82 :30001, 2008.
- [55] M. Holzmann and W. Krauth. Kosterlitz-Thouless transition of the quasi two-dimensional trapped Bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 100(19) :190402, 2008.
- [56] Markus Holzmann, Maguelonne Chevallier, and Werner Krauth. Universal correlations and coherence in quasi-two-dimensional trapped bose gases. arXiv :0911.1704, 2009.
- [57] Markus Holzmann, Maguelonne Chevallier, and Werner Krauth. Universal correlations and coherence in quasi-two-dimensional trapped bose gases. *Phys. Rev. A*, 81(4) :043622, Apr 2010.
- [58] K. Huang. *Statistical Mechanics*. Wiley, New York, 1987.
- [59] Chen-Lung Hung, Xibo Zhang, Nathan Gemelke, and Cheng Chin. Observation of scale invariance and universality in two-dimensional Bose gases. *Nature*, 470 :236, 2011.
- [60] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley, New York, 1998.
- [61] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller. *Phys. Rev. Lett*, 81 :3108, 1998.
- [62] S. T. John, Z. Hadzibabic, and N. R. Cooper. Spectroscopic method to measure the superfluid fraction of an ultracold atomic gas. *Phys. Rev. A*, 83(2) :023610, Feb 2011.
- [63] Thibaut Jonckheere, Cord A. Müller, Robin Kaiser, Christian Miniatura, and Dominique Delande. Multiple scattering of light by atoms in the weak localization regime. *Phys. Rev. Lett.*, 85(20) :4269–4272, Nov 2000.
- [64] Robert Jordens, Niels Strohmaier, Kenneth Gunter, Henning Moritz, and Tilman Esslinger. A mott insulator of fermionic atoms in an optical lattice. *Nature*, 455 :204–207, Jan. 2008.
- [65] Y. Kagan, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven. Bose–Einstein condensation in trapped atomic gases. *Phys. Rev. Lett.*, 76 :2670, 1996.
- [66] Y. Kagan, B. V. Svistunov, and G. V. Shlyapnikov. Evolution of a Bose-condensed gas under variations of the confining potential. *Phys. Rev. A*, 54 :R1753, 1987.
- [67] W. Ketterle, D. S. Durfee, and D. M. Stamper-Kurn. *Bose–Einstein condensation in atomic gases*. Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Course CXL. IOS Press, Amsterdam, 1999.
- [68] W. Ketterle and H.-J. Miesner. Coherence properties of Bose–Einstein condensates and atom lasers. *Phys. Rev. A*, 56 :3291, 1996.

- [69] Arnaud Koetsier, R. A. Duine, Immanuel Bloch, and H. T. C. Stoof. Achieving the néel state in an optical lattice. *Phys. Rev. A*, 77(2) :023623, Feb 2008.
- [70] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless. Ordering, metastability and phase transitions in two dimensional systems. *J. Phys. C : Solid State Physics*, 6 :1181, 1973.
- [71] P. Krüger, Z. Hadzibabic, and J. Dalibard. Critical point of an interacting two-dimensional atomic Bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 99(4) :040402, 2007.
- [72] T Lahaye, C Menotti, L Santos, M Lewenstein, and T Pfau. The physics of dipolar bosonic quantum gases. *Reports on Progress in Physics*, 72(12) :126401, 2009.
- [73] Yean-an Liao, Ann Sophie C. Rittner, Tobias Paprotta, Wenhui Li, Guthrie B. Partridge, Randall G. Hulet, Stefan K. Baur, and Erich J. Mueller.
- [74] F. London. The λ -phenomenon of liquid helium and the Bose–Einstein degeneracy. *Nature*, 141 :643, 1938.
- [75] L. Luo, B. Clancy, J. Joseph, J. Kinast, and J. E. Thomas. Measurement of the entropy and critical temperature of a strongly interacting fermi gas. *Phys. Rev. Lett.*, 98(8) :080402, 2007.
- [76] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard. Vortex formation in a stirred Bose–Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :806, 2000.
- [77] N. D. Mermin and H. Wagner. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models. *Phys. Rev. Lett.*, 17 :1133, 1966.
- [78] A. Messiah. *Quantum Mechanics, Chapter XIX*, volume II. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1961.
- [79] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, and W. Ketterle. Bose–Einstein condensation in a tightly confining dc magnetic trap. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :416, 1996.
- [80] C. Mora and Y. Castin. Extension of bogoliubov theory to quasicondensates. *Phys. Rev. A*, 67 :053615, 2003.
- [81] Christophe Mora and Yvan Castin. Ground state energy of the two-dimensional weakly interacting bose gas : First correction beyond bogoliubov theory. *Phys. Rev. Lett.*, 102(18) :180404, 2009.
- [82] O. Morice, Y. Castin, and J. Dalibard. Refractive index of a dilute Bose gas. *Phys. Rev. A*, 51 :3896, 1995.
- [83] S. Nascimbène, N. Navon, K. J. Jiang, F. Chevy, and C. Salomon. Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas. *Nature*, 463 :1057, 2010.
- [84] N. Navon, S. Nascimbène, F. Chevy, and C. Salomon. The equation of state of a low-temperature fermi gas with tunable interactions. *Science*, 328(5979) :729–732, 2010.
- [85] N. Navon, S. Piatecki, K. J. Günter, B. Rem, T.-C. Nguyen, F. Chevy, W. Krauth, and C. Salomon. Dynamics and thermodynamics of the low-temperature strongly interacting bose gas. arXiv :1103.4449, 2011.

- [86] K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade, and J. E. Thomas. Observation of a strongly interacting degenerate fermi gas of atoms. *Science*, 298 :2179, 2002.
- [87] M. Olshanii and L. Pricoupenko. Rigorous approach to the problem of ultraviolet divergencies in dilute Bose gases. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :010402, 2002.
- [88] R. E. Peierls. *Surprises in Theoretical Physics*. Princeton University Press, 1979.
- [89] C.J. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2002.
- [90] W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Ensher, and E. A. Cornell. A stable, tightly confining magnetic trap for evaporative cooling of neutral atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 74 :3352, 1995.
- [91] D. S. Petrov, M. Holzmann, and G. V. Shlyapnikov. Bose-Einstein condensation in quasi-2D trapped gases. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :2551, 2000.
- [92] D. S. Petrov, C. Salomon, and G. V. Shlyapnikov. Weakly bound dimers of fermionic atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :090404, 2004.
- [93] D. S. Petrov and G. V. Shlyapnikov. Interatomic collisions in a tightly confined Bose gas. *Phys. Rev. A*, 64 :012706, 2001.
- [94] L. Pitaevskii and S. Stringari. *Bose-Einstein Condensation*. Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [95] L. P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 13 :451, 1961.
- [96] L. P. Pitaevskii and A. Rosch. Breathing mode and hidden symmetry of trapped atoms in two dimensions. *Phys. Rev. A*, 55 :R853, 1997.
- [97] H. D. Politzer. Bose-stimulated scattering off a cold atom trap. *Phys. Rev. A*, 55 :1140, 1997.
- [98] A. Polkovnikov, E. Altman, and E. Demler. Interference between independent fluctuating condensates. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 103 :6125, 2006.
- [99] V. N. Popov. On the theory of the superfluidity of two- and one-dimensional bose systems. *Theoretical and Mathematical Physics*, 11(3) :565–573, 1972.
- [100] N. V. Prokof'ev, O. Ruebenacker, and B. V. Svistunov. Critical point of a weakly interacting two-dimensional Bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :270402, 2001.
- [101] N. V. Prokof'ev and B. V. Svistunov. Two-dimensional weakly interacting Bose gas in the fluctuation region. *Phys. Rev. A*, 66 :043608, 2002.
- [102] S. P. Rath. *Production and investigation of quasi-two-dimensional Bose gases*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2010.
- [103] Steffen P. Rath, Tarik Yefsah, Kenneth J. Günter, Marc Cheneau, Rémi Desbuquois, Markus Holzmann, Werner Krauth, and Jean Dalibard. Equilibrium state of a trapped two-dimensional bose gas. *Phys. Rev. A*, 82(1) :013609, Jul 2010.
- [104] Steffen Patrick Rath and Wilhelm Zwerger. Full counting statistics of the interference contrast from independent bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 82(5) :053622, Nov 2010.

- [105] G. Reinaudi, T. Lahaye, Z. Wang, and D. Guéry-Odelin. Strong saturation absorption imaging of dense clouds of ultracold atoms. *Optics Letters*, 32(21) :3143, Nov 2007.
- [106] H-C. Ren. The virial expansion of a dilute bose gas in two dimensions. *Journal of Statistical Physics*, 114 :481, 2004.
- [107] S. Reynaud. *L'interaction résonnante d'un atome avec une onde laser monochromatique et intense. Étude théorique par la méthode de l'atome habillé. Étude expérimentale de quelques effets nouveaux suggérés par cette méthode*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1981.
- [108] U. Schneider, L. Hackermüller, S. Will, Th. Best, I. Bloch, T. A. Costi, R. W. Helmes, D. Rasch, and A. Rosch. Metallic and insulating phases of repulsively interacting fermions in a 3d optical lattice. *Science*, 322(5907) :1520–1525, 2008.
- [109] I. Shvarchuck, C. Buggle, D. S. Petrov, K. Dieckmann, M. Zielonkowski, M. Kemmann, T. G. Tiecke, W. von Klitzing, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven. Bose–Einstein condensation into nonequilibrium states studied by condensate focusing. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :270404, 2002.
- [110] N. L. Smith, W. H. Heathcote, G. Hechenblaikner, E. Nugent, and C. J. Foot. Quasi-2D confinement of a BEC in a combined optical and magnetic potential. *Journal of Physics B*, 38 :223, 2005.
- [111] I. M. Sokolov, M. D. Kupriyanova, D. V. Kupriyanov, and M. D. Havey. Light scattering from a dense and ultracold atomic gas. *Phys. Rev. A*, 79(5) :053405, 2009.
- [112] S. Stock, Z. Hadzibabic, B. Battelier, M. Cheneau, and J. Dalibard. Observation of phase defects in quasi-two-dimensional Bose–Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :190403, 2005.
- [113] Anatoly A. Svidzinsky, Jun-Tao Chang, and Marlan O. Scully. Dynamical evolution of correlated spontaneous emission of a single photon from a uniformly excited cloud of n atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 100(16) :160504, Apr 2008.
- [114] J. E. Thomas, A. Turlapov, and J. Kinast. Virial theorem and universality in a unitary fermi gas. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :120402, 2005.
- [115] Shizhong Zhang Tin-Lun Ho. Bose-einstein condensates in non-abelian gauge fields. *cond-mat, arXiv :1007.0650*, 2010.
- [116] S. Tung, G. Lamporesi, D. Lobser, L. Xia, and E. A. Cornell. Observation of the pre-superfluid regime in a two-dimensional bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 105(23) :230408, Dec 2010.
- [117] A. H. van Amerongen, J. J. P. van Es, P. Wicke, K. V. Kheruntsyan, and N. J. van Druten. Yang-yang thermodynamics on an atom chip. *Phys. Rev. Lett.*, 100(9) :090402, Mar 2008.
- [118] F. Werner, O. Parcollet, A. Georges, and S. R. Hassan. Interaction-induced adiabatic cooling and antiferromagnetism of cold fermions in optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :056401, 2005.
- [119] Félix Werner. Virial theorems for trapped cold atoms. *Phys. Rev. A*, 78(2) :025601, Aug 2008.

- [120] Felix Werner and Yvan Castin. Unitary gas in an isotropic harmonic trap : Symmetry properties and applications. *Phys. Rev. A*, 74(5) :053604, 2006.
- [121] Tarik Yefsah, Rémi Desbuquois, Lauriane Chomaz, Kenneth J. Günter, and Jean Dalibard. Exploring the thermodynamics of a two-dimensional bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :130401, Sep 2011.

Résumé

Les propriétés physiques d'un système de particules homogène à l'équilibre thermodynamique sont caractérisées par son équation d'état : une relation entre différentes grandeurs thermodynamiques. Le gaz de Bose bi-dimensionnel est un système particulier de ce point de vue car son équation d'état est invariante par changement d'échelle en présence d'interactions atomiques répulsives. Une autre caractéristique remarquable du gaz de Bose 2D est l'existence d'une transition de phase vers un état superfluide à basse température.

Dans ce manuscrit de thèse, je présente une mesure de l'équation d'état du gaz de Bose homogène pour trois grandeurs thermodynamiques : la pression réduite, la densité dans l'espace des phases et l'entropie par particule. Je présente également une mesure de l'énergie d'interaction d'un gaz 2D piégé dans un potentiel harmonique. Cette mesure a permis de mettre en évidence l'existence d'une phase précédant la phase superfluide où les fluctuations de densité sont fortement réduites. Cette phase constitue une étape essentielle dans l'établissement de la transition superfluide. Enfin, je décris l'observation de signatures de vortex dans des gaz de Bose 2D. Ces vortex constituent l'ingrédient clé du mécanisme microscopique de la transition superfluide à deux dimensions.

Mots-clés : gaz bi-dimensionnel - imagerie par absorption - équation d'état - invariance d'échelle - énergie d'interaction - fluctuations de densité réduites - transition superfluide - vortex

Abstract

The physical properties of homogeneous matter at thermal equilibrium are characterized by its equation of state : a relationship between different thermodynamic quantities. The two-dimensional Bose gas is particular in this respect because its equation of state is scale invariant in the presence of repulsive atomic interactions. Another remarkable feature of the 2D Bose gas is the existence of a phase transition to a superfluid state at low temperature.

In this PhD thesis I present a measurement of the equation of state of the homogeneous 2D Bose gas for three thermodynamic quantities : the reduced pressure, the phase-space density and the entropy per particle. I also present a measurement of the interaction energy of a 2D gas trapped in a harmonic potential. This measurement highlighted the existence of a phase preceding the superfluid phase, in which density fluctuations are strongly reduced. This phase is an essential step in the establishment of the superfluid transition. Finally, I describe the observation of signatures of vortices in 2D Bose gases. These vortices are the key ingredient in the microscopic mechanism of the superfluid transition in two dimensions.

Keywords : two-dimensional gas - absorption imaging - equation of state - scale invariance - interaction energy - reduced density fluctuations - superfluid transition - vortices