

N° d'ordre : D.U. : 2180  
EDSPIC : 539

Université BLAISE PASCAL - Clermont II  
École Doctorale  
Sciences pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand  
**T H È S E**

Présentée pour obtenir le grade de :

**Docteur d'Université**

**Spécialité : Génie Mécanique**

par

**Cécile MATTRAND**

**Approche probabiliste  
de la tolérance aux dommages -  
Application au domaine aéronautique**

Soutenue publiquement le 30 novembre 2011 devant le jury :

M. Pierre BERNARD	Université Blaise Pascal	Examineur
M. Jean-Marc BOURINET	IFMA	Co-encadrant de thèse
M. Gilles FLEURY	Supélec	Examineur
M. Maurice LEMAIRE	IFMA	Directeur de thèse
Mme. Sylvie POMMIER	LMT Cachan	Rapporteur
M. Carsten PROPPE	Karlsruher Institut für Technologie	Président
M. Bruno TUFFIN	INRIA	Rapporteur
M. Bertrand JOURNET	EADS-IW	Invité
M. Damien THERET	DGA	Invité

**Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI)  
Université Blaise Pascal et Institut Français de Mécanique Avancée**



## Résumé

En raison de la gravité des accidents liés au phénomène de fatigue-propagation de fissure, les préoccupations de l'industrie aéronautique à assurer l'intégrité des structures soumises à ce mode de sollicitation revêtent un caractère tout à fait essentiel. Les travaux de thèse présentés dans ce mémoire visent à appréhender le problème de sûreté des structures aéronautiques dimensionnées en tolérance aux dommages sous l'angle probabiliste. La formulation et l'application d'une approche fiabiliste menant à des processus de conception et de maintenance fiables des structures aéronautiques en contexte industriel nécessitent cependant de lever un nombre important de verrous scientifiques. Les efforts ont été concentrés au niveau de trois domaines dans ce travail. Une méthodologie a tout d'abord été développée afin de capturer et de retranscrire fidèlement l'aléa du chargement de fatigue à partir de séquences de chargement observées sur des structures en service et monitorées, ce qui constitue une réelle avancée scientifique. Un deuxième axe de recherche a porté sur la sélection d'un modèle mécanique apte à prédire l'évolution de fissure sous chargement d'amplitude variable à coût de calcul modéré. Les travaux se sont ainsi appuyés sur le modèle PREFFAS pour lequel des évolutions ont également été proposées afin de lever l'hypothèse restrictive de périodicité de chargement. Enfin, les analyses probabilistes, produits du couplage entre le modèle mécanique et les modélisations stochastiques préalablement établies, ont entre autre permis de conclure que le chargement est un paramètre qui influe notablement sur la dispersion du phénomène de propagation de fissure. Le dernier objectif de ces travaux a ainsi porté sur la formulation et la résolution du problème de fiabilité en tolérance aux dommages à partir des modèles stochastiques retenus pour le chargement, constituant un réel enjeu scientifique. Une méthode de résolution spécifique du problème de fiabilité a été mise en place afin de répondre aux objectifs fixés et appliquée à des structures jugées représentatives de problèmes réels.

## Abstract

Ensuring the integrity of structural components subjected to fatigue loads remains an increasing concern in the aerospace industry due to the detrimental accidents that might result from fatigue and fracture processes. The research works presented here aim at addressing the question of aircraft safety in the framework of probabilistic fracture mechanics. It should be noticed that a large number of scientific challenges requires to be solved before performing comprehensive probabilistic analyses and assessing the mechanical reliability of components or structures in an industrial context. The contributions made during the PhD are reported here. Efforts are provided on each step of the global probabilistic methodology. The modeling of random fatigue load sequences based on real measured loads, which represents a key and original step in stochastic damage tolerance, is first addressed. The second task consists in choosing a model able to predict the crack growth under variable amplitude loads, *i.e.* which accounts for load interactions and retardation/acceleration effects, at a moderate computational cost. The PREFFAS crack closure model is selected for this purpose. Modifications are brought in order to circumvent the restrictive assumption of stationary load sequences. Finally, probabilistic analyses resulting from the coupling between the PREFFAS model and the stochastic modeling are carried out. The following conclusion can especially be drawn. Scatter in fatigue loads considerably affects the dispersion of the crack growth phenomenon. Then, it must be taken into account in reliability analyses. The last part of this work focuses on phrasing and solving the reliability problem in damage tolerance according to the selected stochastic loading models, which is a scientific challenge. A dedicated method is established to meet the required objectives and applied to structures representative of real problems.



# Table des matières

Table des matières	iii
Remerciements	1
Introduction	5
<b>1 Modèle de fissuration sous chargement d'amplitude variable</b>	<b>11</b>
1.1 Prédiction de la fissuration sous chargement d'amplitude variable . . . . .	13
1.1.1 Phénomène de fermeture de fissure - Concept d'Elber . . . . .	13
1.1.2 Aspects phénoménologiques des effets d'interaction . . . . .	16
1.1.2.1 Surcharge . . . . .	16
1.1.2.2 Sous-charge . . . . .	17
1.1.2.3 Interactions combinées . . . . .	17
1.1.3 Etat de l'art succinct . . . . .	18
1.1.3.1 Définition de la stationnarité des spectres de chargement . . . . .	19
1.1.3.2 Modèles liés à la taille de zone plastique . . . . .	19
1.1.3.3 Modèles liés à la fermeture de fissure . . . . .	21
1.1.3.4 Modèles Strip Yield . . . . .	23
1.1.3.5 Modèle incrémental de S. Pommier . . . . .	24
1.1.4 Choix du modèle de propagation de fissure . . . . .	25
1.1.4.1 Limites du modèle Strip Yield . . . . .	26
1.1.4.2 Choix du modèle PREFFAS . . . . .	28
1.2 Modèle PREFFAS . . . . .	29
1.2.1 Principe . . . . .	29
1.2.2 Calcul de l'ouverture $K_{ouv, i}$ . . . . .	30
1.2.3 Historique de chargement . . . . .	31
1.2.4 Effet Rainflow . . . . .	33
1.2.4.1 Principe du comptage Rainflow . . . . .	33
1.2.4.2 Adaptation pour PREFFAS . . . . .	34
1.2.5 Procédure de calcul . . . . .	36
1.2.5.1 Calcul de l'avancée de fissure . . . . .	36
1.2.5.2 Hypothèse de stationnarité . . . . .	36
1.2.5.3 Résultat PREFFAS et algorithme . . . . .	37
1.2.6 Calibrage des paramètres du modèle . . . . .	39
1.2.6.1 Coefficients de la loi de Paris . . . . .	39
1.2.6.2 Paramètres de la loi d'ouverture d'Elber . . . . .	39
1.2.7 Synthèse sur l'utilisation du modèle PREFFAS . . . . .	40

1.2.8	Avantages et limites du modèle PREFFAS . . . . .	41
1.2.8.1	Avantages . . . . .	41
1.2.8.2	Limites générales . . . . .	41
1.2.8.3	Spécificités liées aux analyses probabilistes . . . . .	42
1.3	Modèle PREFFAS modifié - PREFFAS- $m$ . . . . .	43
1.3.1	Modifications apportées . . . . .	43
1.3.1.1	Évanescence de l'effet d'histoire . . . . .	44
1.3.1.2	Variation du nombre de surcharges . . . . .	46
1.3.1.3	Algorithmes . . . . .	47
1.3.2	Limites . . . . .	48
1.3.3	Comparaison entre PREFFAS- $m$ et PREFFAS . . . . .	48
1.4	Analyse du modèle PREFFAS- $m$ . . . . .	49
1.4.1	Analyse des résultats obtenus par simulations . . . . .	49
1.4.1.1	Définition de la structure étudiée . . . . .	49
1.4.1.2	Analyse qualitative du comportement de PREFFAS- $m$ . . . . .	52
1.4.1.3	Comparaison PREFFAS- $m$ vs. PREFFAS . . . . .	58
1.4.2	Conclusion . . . . .	61
1.5	Conclusion . . . . .	61
<b>2</b>	<b>Outils et données pour la modélisation stochastique du chargement</b>	<b>63</b>
2.1	Introduction/Objectifs de la modélisation . . . . .	65
2.2	Quelques exemples de processus stochastiques . . . . .	66
2.2.1	Processus aléatoire . . . . .	67
2.2.1.1	Définition . . . . .	67
2.2.1.2	Loi du processus . . . . .	68
2.2.1.3	Moments statistiques du premier et second ordres . . . . .	68
2.2.1.4	Stationnarité du second ordre . . . . .	69
2.2.2	Processus gaussien stationnaire . . . . .	69
2.2.2.1	Définition . . . . .	69
2.2.2.2	Représentation spectrale . . . . .	70
2.2.2.3	Processus gaussiens pour des chargements de fatigue . . . . .	71
2.2.3	Processus de Markov . . . . .	74
2.2.3.1	Définition . . . . .	74
2.2.3.2	Chaînes de Markov à temps discret d'ordre 1 . . . . .	74
2.2.3.3	Applications . . . . .	75
2.2.4	Processus AR à changements de régimes markoviens . . . . .	76
2.2.4.1	Modélisation . . . . .	76
2.2.4.2	Cas particuliers : chaînes de Markov cachées . . . . .	76
2.2.4.3	Applications . . . . .	77
2.2.5	Conclusion . . . . .	77
2.3	Base de données de chargement . . . . .	77
2.3.1	Introduction . . . . .	77
2.3.2	Caractéristiques principales des enregistrements . . . . .	79
2.3.3	Groupes de trajectoires . . . . .	82
2.3.4	Analyse temporelle des données . . . . .	83
2.3.4.1	Introduction . . . . .	83
2.3.4.2	Caractéristiques globales . . . . .	83

---

2.3.4.3	Moments statistiques du premier et second ordres, lois . . .	83
2.3.4.4	Conclusion . . . . .	86
2.4	Choix des chaînes de Markov . . . . .	87
2.4.1	Motivation . . . . .	87
2.4.2	Définition des modèles proposés . . . . .	87
2.5	Conclusion . . . . .	89
<b>3</b>	<b>Modélisation markovienne du chargement de fatigue</b>	<b>91</b>
3.1	Introduction . . . . .	93
3.2	Modélisation stochastique d'une séquence de $N_c$ cycles . . . . .	94
3.2.1	Chaînes de Markov du 1 <sup>er</sup> ordre homogènes (FMC) . . . . .	94
3.2.1.1	Présentation . . . . .	94
3.2.1.2	Qualité de l'estimation de la matrice de transition $\mathbf{P}$ . . . . .	97
3.2.2	Chaînes de Markov cachées (HMM) . . . . .	100
3.2.2.1	Présentation . . . . .	100
3.2.2.2	Inférence des distributions $f_{s_n}$ . . . . .	102
3.3	Inférence des modèles stochastiques . . . . .	102
3.3.1	Inférence des modèles FMC . . . . .	103
3.3.1.1	Définition de l'espace des états . . . . .	103
3.3.1.2	Estimation de la matrice de transition $\mathbf{P}$ . . . . .	105
3.3.1.3	Qualité des estimations des matrices de transition $\mathbf{P}$ . . . . .	106
3.3.1.4	Distributions de $X_1$ et de $N_c$ . . . . .	108
3.3.2	Inférence des modèles HMM . . . . .	109
3.3.2.1	Chaîne de Markov non-observée ( $S$ ) . . . . .	110
3.3.2.2	Distributions de probabilité $f_{s_n}$ . . . . .	110
3.3.3	Autres solutions . . . . .	114
3.4	Modélisation d'une séquence de $N_v$ vols . . . . .	115
3.5	Validation des modèles FMC et HMM . . . . .	116
3.5.1	Introduction et méthodologie . . . . .	116
3.5.1.1	Introduction . . . . .	116
3.5.1.2	Méthodologie . . . . .	118
3.5.2	Matériau à effet retard - fonction PREFFAS $\sigma_{\text{eq}}^m$ . . . . .	119
3.5.2.1	Précision des modèles FMC et HMM (groupes "A" et "B") . . . . .	119
3.5.2.2	Adéquation du modèle HMM <sup>0</sup> . . . . .	124
3.5.3	Matériau sans effet retard - fonction Paris $\gamma^m$ . . . . .	127
3.6	Conclusions et perspectives . . . . .	131
3.6.1	Conclusions . . . . .	131
3.6.2	Perspectives . . . . .	132
<b>4</b>	<b>Analyse probabiliste de la tolérance aux dommages</b>	<b>135</b>
4.1	Introduction . . . . .	137
4.2	Paramètres de chargement impactant l'avancée de fissure . . . . .	137
4.2.1	Présentation de la structure étudiée . . . . .	137
4.2.1.1	Géométrie . . . . .	137
4.2.1.2	Propriétés matériau et modèle de fissuration . . . . .	139
4.2.2	Représentation stochastique du chargement de fatigue . . . . .	139
4.2.3	Démarche appliquée . . . . .	139

---

4.2.4	Résultats . . . . .	142
4.2.5	Influence des paramètres des séquences de chargement . . . . .	144
4.2.5.1	Effet du nombre de cycles appliqués par séquence . . . . .	144
4.2.5.2	Effet des charges extrêmes . . . . .	146
4.3	Poids respectifs de l'aléa de chargement et de celui du matériau . . . . .	149
4.3.1	Présentation de la structure étudiée . . . . .	150
4.3.2	Modélisations stochastiques des aléas matériau et de chargement . . . . .	150
4.3.2.1	Représentation de l'aléa matériau . . . . .	150
4.3.2.2	Représentation de l'aléa de chargement . . . . .	152
4.3.3	Simulations . . . . .	152
4.3.3.1	Analyse n° 1 : aléa de chargement seul . . . . .	152
4.3.3.2	Analyse n° 2 : aléa matériau seul . . . . .	153
4.3.3.3	Analyse n° 3 : aléas de chargement et matériau combinés . . . . .	155
4.3.4	Résultats . . . . .	155
4.4	Conclusion . . . . .	157
<b>5</b>	<b>Analyse de fiabilité de la tolérance aux dommages</b>	<b>159</b>
5.1	Introduction . . . . .	161
5.2	Formulation classique du problème de fiabilité en mécanique . . . . .	161
5.2.1	Principe de l'étude de fiabilité . . . . .	162
5.2.2	Scénario de défaillance et probabilités . . . . .	162
5.2.3	Méthodes de calcul de la probabilité de défaillance . . . . .	164
5.2.3.1	Simulations classiques de Monte Carlo . . . . .	166
5.2.3.2	Simulations d'importance . . . . .	167
5.2.3.3	Méthode basée sur l'entropie croisée IS-CE . . . . .	168
5.3	Spécificités du problème de fiabilité traité . . . . .	171
5.3.1	Modèles stochastiques . . . . .	171
5.3.2	Analyse de fiabilité fonction du temps . . . . .	173
5.3.2.1	Scénario de défaillance . . . . .	173
5.3.2.2	Probabilités de défaillance . . . . .	174
5.3.3	Simplification du problème de fiabilité . . . . .	175
5.4	Résolution du problème de fiabilité . . . . .	177
5.4.1	Méthode IS-CE appliquée aux chaînes de Markov (FMC) . . . . .	178
5.4.1.1	Loi d'une chaîne de Markov . . . . .	178
5.4.1.2	Problème de maximisation . . . . .	179
5.4.2	Extension de la méthode IS-CE aux HMM . . . . .	181
5.4.2.1	Définition du modèle HMM et loi de probabilité . . . . .	182
5.4.2.2	Objectif de l'approche IS-CE appliquée aux HMM . . . . .	184
5.4.2.3	Problème de maximisation . . . . .	185
5.4.2.4	Algorithme CE multi-niveaux . . . . .	186
5.4.3	Conclusion . . . . .	188
5.5	Applications . . . . .	189
5.5.1	Présentation de la structure étudiée . . . . .	189
5.5.2	Analyses de fiabilité et critères de validation . . . . .	192
5.5.3	Résultats des analyses avec les chaînes de Markov (FMC) . . . . .	193
5.5.4	Résultats des analyses avec les chaînes de Markov cachées (HMM) . . . . .	197
5.5.4.1	Analyses n° 2 et 3 - loi de Paris . . . . .	197



5.5.4.2	Analyse n° 4 - modèle PREFFAS . . . . .	200
5.6	Conclusions et perspectives . . . . .	204
	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>207</b>
<b>A</b>	<b>Calibrage des paramètres du modèle PREFFAS</b>	<b>223</b>
A.1	Coefficients de la loi de Paris . . . . .	223
A.2	Paramètres de la loi d'ouverture d'Elber . . . . .	223
<b>B</b>	<b>Algorithme du modèle PREFFAS-<math>m</math></b>	<b>227</b>
B.1	Notations . . . . .	227
B.2	Organigramme du modèle PREFFAS- $m$ . . . . .	228
B.3	Principales modifications . . . . .	230
B.3.1	Calcul de l'avancée de fissure pour le premier cycle . . . . .	230
B.3.2	Initialisation . . . . .	230
B.3.3	Points clés . . . . .	230
<b>C</b>	<b>Groupes de trajectoires basés sur une analyse de classification</b>	<b>235</b>
C.1	Démarche . . . . .	235
C.2	Application . . . . .	236
C.3	Résultats . . . . .	238
<b>D</b>	<b>Détails de l'inférence des modèles HMM</b>	<b>241</b>
D.1	Inférence des distributions $f_{c_K}$ , $k \in \{1, 2, \dots, K_c\}$ . . . . .	241
D.1.1	Distributions $f_{c_K}$ pour HMM <sup>(A)</sup> ( $K_c = 6$ ) et HMM <sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ ) . . . . .	242
D.1.2	Distributions $f_{c_K}$ pour HMM <sup>(A)</sup> ( $K_c = 8$ ) et HMM <sup>(B)</sup> ( $K_c = 7$ ) . . . . .	244
D.2	Modèle HMM <sup>(A)'</sup> . . . . .	246
<b>E</b>	<b>Détails de la méthode IS-CE appliquée aux modèles FMC et HMM</b>	<b>251</b>
E.1	Problème de maximisation - cas FMC . . . . .	252
E.2	Problème de maximisation - cas HMM . . . . .	254



# Remerciements

Le travail présenté dans ce manuscrit de thèse a été réalisé au Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI) de l'Institut Français de Mécanique Avancée (IFMA). Je tiens ainsi à remercier en premier lieu Monsieur Pascal RAY, directeur de l'IFMA et Monsieur Grigore GOGU, directeur du LaMI, de m'avoir permis d'accomplir mon projet de thèse dans l'infrastructure qui a donné naissance à ce dernier. L'idée d'une thèse sur la thématique de la tolérance aux dommages abordée sous l'angle probabiliste s'est en effet amorcée lors de ma formation d'ingénieur à l'IFMA et plus particulièrement lors d'un stage que j'ai effectué à l'Agence Spatiale Européenne aux Pays-Bas.

A Madame Sylvie POMMIER et Monsieur Bruno TUFFIN, rapporteurs de thèse, à Monsieur Pierre BERNARD et Monsieur Gilles FLEURY, examinateurs, et à Monsieur Carsten PROPPE, président du jury, j'adresse maintenant mes plus sincères et chaleureux remerciements. Je les remercie de m'avoir fait l'honneur d'évaluer mon travail à travers mon manuscrit de thèse et ma présentation. Je les remercie également pour l'excellent accueil qu'ils ont réservé à mes travaux et pour les échanges enrichissants qui ont eu lieu à la suite de la soutenance. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude.

Je tiens ensuite à remercier Monsieur Maurice LEMAIRE, directeur de thèse. Je le remercie tout particulièrement d'avoir accepté de diriger mon projet de thèse. Je tiens aussi à lui exprimer mes remerciements les plus respectueux pour les conseils avisés qu'il a su me prodiguer, ses encouragements et pour avoir valorisé mes qualités. Enfin, je le remercie de m'avoir fait partager quelques unes de ses nombreuses réflexions philosophiques sur la mécanique et le savoir en général. La citation d'Edgar Morin "La connaissance est une navigation dans un océan d'incertitudes à travers des archipels de certitudes." aurait pu être la base de l'une d'entre elles. Je lui dédie.

Mes remerciements vont maintenant à Monsieur Jean-Marc BOURINET, encadrant de thèse. Jean-Marc, je te remercie sincèrement d'avoir été soucieux du bon déroulement de mes travaux. Tu m'as permis de les mener à bien dans le temps imparti qu'est celui de l'exercice de la thèse. Je te remercie aussi de la confiance que tu as su m'accorder tout au long de ce projet en appuyant mes divers choix. Travailler à tes côtés a été très formateur : tu as su me transmettre, je crois, les qualités et compétences requises chez un chercheur. Au-delà de tes compétences et qualités scientifiques, je tiens enfin à te remercier pour ta disponibilité, ton soutien permanent, ta bonne humeur et ta gentillesse, qui ont, j'en suis sûre, contribué à l'aboutissement de ma thèse dans les meilleures conditions. J'ai pris un réel plaisir à travailler avec toi depuis mon stage de fin d'études jusqu'à aujourd'hui, sur

la partie recherche comme sur la partie enseignement.

Je suis profondément reconnaissante à la DGA et au CNRS d'avoir financé mes travaux. Je souhaite vivement remercier l'ensemble des personnes de la DGA et celles de DGA/TA qui ont été d'une façon ou d'une autre impliquées dans mes travaux de thèse. Merci en particulier à Monsieur Naim EL-HBARI, à Monsieur Olivier BRUNAGEL, à Monsieur Fabrice TARRERIAS et à Monsieur Pierre MADELPECH pour l'intérêt qu'ils ont démontré à l'égard de ma recherche. Merci à Monsieur Sébastien RICHARD, Monsieur Hubert GROIZARD et Monsieur Jean-Fred BEGUE pour leur implication et leur contribution à mes travaux de thèse. Je tiens enfin à remercier chaleureusement Monsieur Damien THERET, responsable DGA de mes travaux de thèse. Merci Damien de m'avoir accordé de ton temps pour nos discussions et réunions extrêmement enrichissantes. Merci aussi de t'être démené pour que je puisse travailler à partir de données sur un exemple représentatif d'une structure réelle. Tout ceci m'a ainsi permis de mener un travail scientifique visant à répondre à une problématique industrielle, ce que j'ai particulièrement apprécié.

J'exprime maintenant ma gratitude à Monsieur Daniel ALIAGA et à Monsieur Bertrand JOURNET d'EADS-IW avec qui j'ai travaillé conjointement sur l'évolution du modèle PREFFAS. Je garderai un excellent souvenir de notre première rencontre qui a débouché sur une collaboration très fructueuse. J'ai énormément appris à vos côtés et admire votre passion et compétences pour ce sujet.

Je tiens maintenant à remercier Monsieur Pierre BERNARD et Monsieur Michel FOLLI pour m'avoir guidée dans mes réflexions sur la modélisation stochastique du chargement. Nos précieux échanges m'ont inévitablement permise d'aboutir aux résultats proposés.

Un immense et chaleureux merci est maintenant adressé à tous mes co-bureaux : Agnès, Benjamin, grand Greg, Rodrigue, Su, Sylvain, Thomas et Vincent et à l'ensemble des doctorants et post-doctorants du LaMI avec qui j'ai partagé des moments magiques en salle de pause mais également en dehors des heures de travail. Merci donc à Benjamin, Carole, Claudine, Cédric, Damien, David, Fabien, petit Greg, Guigui, Guillaume (le 2<sup>ème</sup> ponot du groupe), Hamid, Julien, Kevin, Khaled, Ksneiya, Mahmoud, Maïté, Matthieu, Miguel, Moncef, Nicolas, Olivier, Pascal, Paul, Pierre l'auvergnat, Pierre le breton ;), Ricardo, ... et aux petits nouveaux Antoine, Arnaud, Julien, Nathalie, Sami et Vincent ... Je n'oublierai jamais nos nombreux fou rires. A tous, je vous exprime toute ma sympathie. La liste étant longue je m'excuse pour les éventuels oublis...

J'ai plaisir à remercier l'ensemble des enseignants, chercheurs et personnels administratifs du LaMI et de l'IFMA que j'ai pu côtoyer durant ces trois années de thèse mais également lors de ma formation IFMA. Nombreux d'entre eux me connaissent en effet depuis mon entrée à l'IFMA en 2004 et m'ont vue évoluer jusqu'à maintenant.

Plus personnellement, je souhaite remercier tous mes amis qui m'ont supportée et soutenue toutes ces années et qui ont toujours cru en moi. Je pense notamment à Marion et Magali, Hélène, Olivier et Fanfan.

Une agréable pensée va également à tous mes amis du club alpin français de Clermont et d'Issoire avec qui je partage des moments extraordinaires que ce soit dans nos activités de montagne ou autour d'un verre. Nombreux d'entre eux m'ont fait l'honneur d'être présents le jour de ma soutenance, je les en remercie. Je remercie en particulier Bernard qui m'a convié à un camp d'escalade dans le Mercantour cet été. Malgré nos reveils plus que matinaux (4h, 7h ou 8h : "de vraies des grasses mat' "), cette unique semaine de vacances m'a donnée un second souffle pour la dernière ligne droite de la rédaction et des corrections.

Je souhaite maintenant profondément remercier mes parents Françoise et Pascal, mes deux frères Julien et David, leurs conjointes Ludivine et Marine, mes beaux-parents Nadou et Thierry et ma belle-soeur Laura pour leur soutien et amour inconditionnel dans les moments les plus joyeux mais également les plus difficiles.

Enfin, mes plus forts remerciements sont adressés à l'homme qui partage ma vie et pour qui le temps de la thèse n'a pas toujours été facile à vivre. Merci pour ta patience, ta confiance et l'amour que tu me portes.

Je dédie mon manuscrit à ma maman et à mon amour Thibault.



# Introduction

## Contexte

L'existence de défauts dans une structure métallique a une double origine. Des défauts peuvent tout d'abord être initialement présents avant exploitation de la structure. C'est le cas des imperfections liées aux processus de fabrication (craquelures, rayures, entailles) et aux discontinuités métallurgiques (inclusions, imperfections internes, etc). Ils peuvent aussi être le résultat de sollicitations en fatigue (intrusion-extrusion dans les grains) au niveau des discontinuités géométriques, comme par exemple les alésages ou les congés de raccordement, où les contraintes peuvent être localement élevées et proches de la limite d'élasticité des matériaux. Sous l'application d'un chargement répété, les défauts peuvent évoluer en fissures qui, sans surveillance, détection ou réparation, peuvent provoquer une rupture brutale de la structure et donc conduire à un accident. En raison de la gravité des accidents liés au phénomène de fatigue, ou plus généralement des processus de dégradation des matériaux, les préoccupations de l'industrie aéronautique à assurer l'intégrité des structures soumises à ce mode de sollicitation revêtent un caractère tout à fait essentiel et ce plus spécifiquement depuis les années 50.

Le concept "durée de vie sûre" (*safe life* en anglais) est le premier concept permettant de prévenir le risque de rupture des structures par fatigue à avoir été introduit à cet effet dans les réglementations dans les années 50. Dans cette approche, la pièce ou la structure est dimensionnée de telle sorte qu'aucune fissure ne s'amorce pendant la phase d'exploitation de l'avion. La durée de vie à rupture, c'est-à-dire la durée de vie totale, est déterminée à partir d'essais en laboratoire sous chargements d'amplitude constante (permettant de déterminer les courbes de Wöhler) et un coefficient dit de "sécurité" (souvent supérieur à 5) permet de définir la durée de vie en service. Cette approche n'est aujourd'hui utilisée que pour dimensionner les pièces ne pouvant pas être inspectées, comme les pièces moteurs par exemple.

Le concept tolérance aux dommages (*damage tolerance* en anglais) est apparu dans les années 70 avec l'amélioration des méthodes de calcul en mécanique de la rupture et l'évolution des techniques de contrôle non-destructif. La philosophie de ce concept s'oppose radicalement à celui de "durée de vie sûre". Dans cette approche, il est en effet fait l'hypothèse que des défauts ou fissures sont inévitablement présents dans la structure avant sa mise en exploitation et que ceux-ci n'ont pas été détectés lors de contrôles d'inspection précédant la mise en service, dû à la limite de résolution du moyen de contrôle mis en œuvre. Afin d'éviter les accidents, il doit alors être vérifié, grâce à un programme d'inspection

spécifique, que tout dommage sera détecté avant qu'il ne devienne critique pour l'intégrité de la structure. Il s'agit ainsi de garantir que les fissures non-détectées n'atteindront pas leur longueur critique entre deux inspections, c'est-à-dire les longueurs de fissures pour lesquelles l'intégrité de la structure n'est plus assurée sous l'effet des charges maximales pouvant être rencontrées en service, appelées charges limites en aéronautique. Dans ce programme, les dommages détectés au cours d'une inspection sont immédiatement réparés. Cette méthodologie s'applique aujourd'hui à la conception de la plupart des éléments structuraux des nouveaux avions et à la maintenance des flottes en service.

Malgré le caractère dispersif des phénomènes de fatigue et de propagation de fissures, cette procédure conventionnelle de dimensionnement dans le domaine aéronautique reste à l'heure actuelle principalement déterministe. La variabilité des sollicitations extérieures, l'aléa inhérent à la phase d'amorçage, aux vitesses de propagation, aux propriétés matériau ainsi que le caractère aléatoire des dommages (répartition spatiale, orientation et taille) sont en pratique couverts par un ensemble de critères essentiellement déterministes. Ceux-ci comprennent le choix de valeurs conservatives, la définition de configurations de sollicitation défavorables et l'emploi de coefficients dits de "sécurité", déterminés de manière empirique et/ou sur la base de jugements d'experts. Par cette pratique, il est supposé que la durée de vie d'une structure en service ne peut être inférieure à une durée de vie visée qu'avec une probabilité jugée suffisamment faible, même si cette probabilité n'est jamais évaluée en pratique. Ce type de démarche purement déterministe s'avère par nature insuffisant pour quantifier l'impact de l'aléa des divers paramètres du problème sur le niveau de sûreté visé ou encore pour définir des plans de maintenance optimaux vis-à-vis des coûts et du niveau de sûreté minimal requis en service. La formulation et la résolution du problème de fiabilité au cours des processus de conception (justification de la tenue de la structure aéronautique) et de maintenance (suivi de la tenue en service) constituent ainsi des enjeux majeurs et le recours aux méthodes probabilistes devient ainsi incontournable. De par leur nature, ces outils fournissent en effet des bases théoriques indispensables aux industriels et aux concepteurs pour la compréhension et le traitement des risques induits par l'exploitation des structures aéronautiques sollicitées en fatigue.

## Objectifs

Les premières discussions sur la nécessité d'aborder la tolérance aux dommages dans les domaines aéronautique et spatial sous l'angle probabiliste ont principalement été initiées ces dix dernières années [Ton01, MR06, Whi06, Pro08, RMM08]. Les travaux de recherche menés dans cette thèse s'inscrivent dans ce contexte et représentent une contribution sur cette thématique. D'une manière générale, ils visent à proposer une approche complémentaire aux techniques traditionnelles de prédiction de durée de vie en fatigue-propagation en se basant sur l'utilisation de méthodes probabilistes appliquées à la tolérance aux dommages. Un des objectifs majeurs est de mettre en exergue les avantages potentiels qui peuvent être tirés de l'application de telles méthodes à la problématique de tolérance aux dommages des structures aéronautiques.

En raison d'un intérêt tardif pour ces méthodes, les verrous scientifiques à lever sont encore nombreux pour parvenir à une mise en œuvre complète d'une approche fiabiliste de la tolérance aux dommages et ainsi atteindre l'objectif d'une maintenance optimisée sous contrainte de fiabilité en contexte industriel. Dans ce mémoire, les efforts ont été dirigés



vers les trois niveaux suivants :

- la modélisation stochastique du chargement de fatigue à partir d'enregistrements en vol sur avions militaires,
- le choix et l'amélioration d'un modèle de propagation de fissure pertinent pour prédire les effets des chargements d'amplitude variable auxquels les structures sont soumises,
- la formulation du problème de fiabilité et la mise en place d'une stratégie de résolution adaptée aux modèles stochastiques proposés pour le chargement en fatigue, permettant d'évaluer des probabilités de défaillance faibles à coût de calcul modéré.

Il est important de noter que la modélisation stochastique des défauts initiaux (répartition spatiale, orientation, taille) ainsi que celle des phases d'amorçage et de propagation de fissures dites courtes ne sont pas abordées dans ce mémoire, bien que des réflexions aient été initiées. L'intégration de l'aléa sur les données matériau (vitesses de propagation de fissure) dans les analyses probabilistes réalisées dans ce mémoire s'appuie sur des travaux existants. Dans ces travaux, l'aléa sur les paramètres de la loi de propagation est caractérisé à partir d'essais sous chargement d'amplitude constante réalisés dans des conditions expérimentales supposées identiques. Il est important de souligner qu'il n'y a pas eu de tentative de modéliser l'aléa propre aux paramètres de la loi de propagation à partir d'essais sous chargements d'amplitude variable, dans le cadre des travaux de thèse menés.

Le cœur du travail de thèse concerne la modélisation de l'aléa des charges de fatigue observées en service, point très rarement abordé dans la littérature. Afin de proposer un modèle stochastique pertinent, un effort particulier est fourni pour prendre en compte l'aléa sur les niveaux de charges mais également celui présent sur le séquençement de ces niveaux, ce séquençement pouvant conduire à des effets d'interaction entre cycles en fatigue-propagation qui impactent directement les vitesses d'avancée de fissure. Les modèles proposés s'appuient sur les chaînes de Markov et les chaînes de Markov cachées et sont alimentés par des données issues d'enregistrements en vol fournies par DGA/Techniques Aéronautiques (ministère de la défense), ce qui confère à ces modèles un caractère réaliste.

L'évaluation de l'avancée de fissure sous chargements d'amplitude variable nécessite l'emploi d'outils spécifiques de prévision de la fissuration par fatigue. Le second niveau d'effort a porté sur le choix d'un modèle apte à prédire l'évolution de fissures sous chargement d'amplitude variable avec une précision jugée acceptable mais également compatible avec des simulations probabilistes en termes de coût de calcul. Le modèle PREFFAS (PRévision de la Fissuration en Fatigue AéroSpatiale) est choisi à cet effet. Il s'agit d'un modèle assez simple de mise en œuvre qui a donné satisfaction pour des applications industrielles et qui a été validé par des essais sous chargements d'amplitude variable. Ce modèle à faible nombre de paramètres à calibrer est actuellement utilisé par EADS, Dassault Aviation et DGA/TA. Une variante de ce modèle est également utilisée par SNECMA. Cependant, ce modèle ne permet de traiter que des séquences de chargement stationnaires, c'est-à-dire répétitives. Des développements complémentaires visant à lever l'hypothèse restrictive de périodicité du chargement et à introduire l'évanescence des effets de la plasticité en pointe de fissure ont ainsi été suggérés afin d'être cohérent avec une démarche probabiliste faisant intervenir des spectres de chargement aléatoires sur l'ensemble de leur longueur. L'enjeu

est de pouvoir traiter les spectres non-stationnaires avec le nouveau modèle sans trop augmenter le nombre de paramètres à calibrer et sans trop élever le degré de complexité de la méthode initiale. Il s'agit à la fois de répondre aux besoins de l'industriel qui désire un modèle mécanique robuste, précis, performant et facilement utilisable et d'avoir un modèle également compatible avec des analyses probabilistes et fiabilistes.

Enfin, la dernière problématique abordée dans ce travail de thèse porte sur la formulation et la résolution du problème de fiabilité basé sur les modèles stochastiques du chargement préalablement établis. Le choix des chaînes de Markov et chaînes de Markov cachées pour la modélisation de l'aléa du chargement de fatigue impose le choix et la mise en œuvre d'une méthode de calcul de fiabilité spécifique qui sort du cadre classique des méthodes de fiabilité traditionnellement utilisées en mécanique. Il s'agit d'un réel enjeu scientifique. La méthode de l'entropie croisée est sélectionnée pour résoudre le problème de fiabilité tel que posé.

### **Cadre des travaux**

Ce travail de thèse financé par la DGA constitue une première approche fiabiliste de la tolérance aux dommages pour DGA/TA. Il a permis de créer des synergies entre divers acteurs des secteurs académique et industriel en rassemblant sur cette thématique DGA/TA, EADS-IW et le Laboratoire de Mécanique et Ingénieries de l'Institut Français de Mécanique Avancée (IFMA) et de l'Université Blaise Pascal (UBP) de Clermont-Ferrand. DGA/TA a notamment fourni les enregistrements en vol sur une flotte d'avions de combat, bases de la modélisation stochastique du chargement de fatigue. Les pistes d'évolution du modèle PREFFAS ont conjointement été proposées avec EADS-IW.

### **Organisation du mémoire**

Les développements réalisés dans ce travail de thèse s'organisent en cinq chapitres. Le premier chapitre propose un état de l'art succinct des modèles de prévision de la fissuration sous chargement d'amplitude variable ainsi que les raisons qui ont conduit à retenir le modèle PREFFAS sur lequel s'appuient la validation des modèles stochastiques proposés pour le chargement de fatigue (chapitre 3) et les analyses probabiliste (chapitre 4) et fiabiliste (chapitre 5) réalisées dans ce mémoire. Les évolutions proposées pour outrepasser les limitations de ce modèle (stationnarité du chargement et cas à surcharges multiples) sont également explicitées. Ces développements devront être validés par des essais avant leur intégration dans les processus de conception et de maintenance fiabilistes.

Une méthodologie est ensuite proposée pour prendre en compte l'aléa présent naturellement dans les sollicitations de fatigue appliquées aux structures aéronautiques en service. Le chapitre 2 introduit les processus stochastiques qui ont été jugés les plus pertinents pour modéliser des séquences de chargement de fatigue et il présente également les données à disposition. Les modèles stochastiques de chargement proposés, basés sur des enregistrements en vol d'aéronefs militaires, sont ensuite détaillés au chapitre 3.

Le quatrième chapitre est quant à lui consacré à des analyses probabilistes de la tolérance aux dommages. Le travail consiste à identifier les paramètres de chargement impactant fortement l'avancée de fissure et analyser le poids de l'aléa de chargement par rapport

à celui propre au matériau (aléa sur la loi de propagation), sur un exemple industriel.

A partir des analyses paramétriques du chapitre 4, il est déduit que le chargement influe fortement sur la dispersion des résultats de propagation de fissure. Il paraît alors primordial d'en tenir compte dans la formulation du problème de fiabilité. Le chapitre 5 propose ainsi une démarche pour estimer les probabilités de défaillance de structures sollicitées en fatigue-propagation et soumises à des séquences de chargement aléatoires modélisées par chaînes de Markov. Cette démarche est mise en œuvre sur plusieurs exemples académiques.

Il est recommandé de lire chronologiquement l'ensemble des chapitres, ceux-ci s'enchaînant logiquement et formant un ensemble cohérent. Les chapitres 2 et 3 peuvent néanmoins être lus de manière assez indépendante.



# Chapitre 1

## Modèle de fissuration sous chargement d'amplitude variable

*Dans le cadre probabilisé de la tolérance aux dommages, l'étude d'une pièce fissurée soumise à des chargements aléatoires d'amplitude variable nécessite l'emploi d'outils aptes à prédire l'évolution de fissures sous chargement d'amplitude variable, d'une part, et compatibles avec des simulations probabilistes en termes de coût de calcul, d'autre part. Le modèle de Prédiction de la Fissuration en Fatigue AéroSpatiale PREFFAS est apparu pertinent pour une telle utilisation compte tenu de sa simplicité de mise en œuvre et de son faible coût de calcul. Toutefois, ce modèle ne permet pas de traiter les séquences de chargement non-répétitives dans sa version actuelle, caractéristiques de spectres d'amplitude et de longueur aléatoires. Des évolutions sont envisagées afin de remédier à cette limitation. Ce chapitre introduit les modèles de propagation de fissures de la littérature les plus utilisés ainsi que les raisons qui ont amené à retenir le modèle PREFFAS. Les évolutions apportées à ce modèle pour traiter des spectres non-stationnaires sont développées en dernière partie de chapitre.*

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Prévision de la fissuration sous chargement d'amplitude variable .</b>	<b>13</b>
1.1.1	Phénomène de fermeture de fissure - Concept d'Elber . . . . .	13
1.1.2	Aspects phénoménologiques des effets d'interaction . . . . .	16
1.1.3	Etat de l'art succinct . . . . .	18
1.1.4	Choix du modèle de propagation de fissure . . . . .	25
<b>1.2</b>	<b>Modèle PREFFAS . . . . .</b>	<b>29</b>
1.2.1	Principe . . . . .	29
1.2.2	Calcul de l'ouverture $K_{\text{ouv}, i}$ . . . . .	30
1.2.3	Historique de chargement . . . . .	31
1.2.4	Effet Rainflow . . . . .	33
1.2.5	Procédure de calcul . . . . .	36
1.2.6	Calibrage des paramètres du modèle . . . . .	39
1.2.7	Synthèse sur l'utilisation du modèle PREFFAS . . . . .	40
1.2.8	Avantages et limites du modèle PREFFAS . . . . .	41
<b>1.3</b>	<b>Modèle PREFFAS modifié - PREFFAS-<math>m</math> . . . . .</b>	<b>43</b>
1.3.1	Modifications apportées . . . . .	43
1.3.2	Limites . . . . .	48
1.3.3	Comparaison entre PREFFAS- $m$ et PREFFAS . . . . .	48
<b>1.4</b>	<b>Analyse du modèle PREFFAS-<math>m</math> . . . . .</b>	<b>49</b>
1.4.1	Analyse des résultats obtenus par simulations . . . . .	49
1.4.2	Conclusion . . . . .	61
<b>1.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>61</b>

---

## 1.1 Prévision de la fissuration sous chargement d'amplitude variable

La prédiction de la durée de vie des structures fissurées soumises à des chargements d'amplitude variable est complexe en raison des nombreux phénomènes impliqués tels que le retard et l'accélération de propagation de fissures, phénomènes souvent difficiles à modéliser. L'intensité de ces phénomènes de retard et d'accélération dépend entre autres de divers paramètres tels que le nombre de surcharges et de sous-charges, le taux de surcharge, le taux de sous-charge, etc. Les aspects phénoménologiques de ces effets d'interaction liés au chargement sont brièvement introduits avant de réaliser un état de l'art des méthodes de propagation de fissures sous chargement d'amplitude variable et de présenter les raisons qui ont amené à retenir le modèle PREFFAS.

### 1.1.1 Phénomène de fermeture de fissure - Concept d'Elber

W. Elber [Elb71] est le premier à avoir montré qu'une fissure soumise à un chargement d'amplitude constante de rapport positif n'est pas toujours entièrement ouverte durant le cycle. Il fait l'hypothèse que les déformations plastiques créées en pointe de fissure (par l'application d'une charge  $\sigma_{\max}$ ) et introduites dans le sillage de la fissure sont responsables de contraintes résiduelles de compression. Ces contraintes résiduelles font, qu'au chargement, la singularité en pointe de fissure ne peut pas être obtenue à  $\sigma_{\min}$  (chargement minimal) mais à une charge supérieure  $\sigma_{\text{ouv}}$ , appelée point d'ouverture<sup>1</sup> à partir de laquelle l'avancée est possible, voir figure 1.1. Il s'agit de la fermeture induite par plasticité.

Il résulte que seule la partie supérieure du cycle contribue donc à l'avancée de fissure et que la vitesse de propagation d'une fissure n'est pas proportionnelle à l'amplitude de variation du facteur d'intensité des contraintes  $\Delta K$  mais à l'amplitude de variation du facteur d'intensité des contraintes effectif  $\Delta K_{\text{eff}}$  vu par la fissure.

---

<sup>1</sup>L'expression "point d'ouverture" est indifféremment utilisée par la suite pour désigner à la fois la contrainte d'ouverture  $\sigma_{\text{ouv}}$  et le facteur d'intensité de contrainte d'ouverture associé  $K_{\text{ouv}}$ .

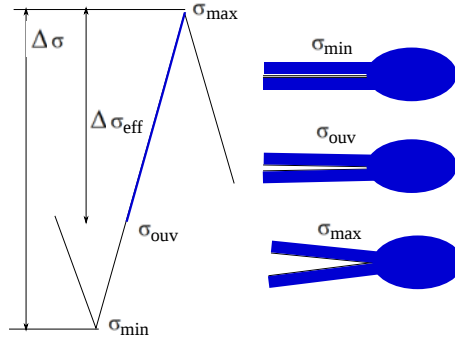


Figure 1.1 – Principe d'ouverture selon Elber.

La loi de Paris [PGD61] formulée à l'équation (1.1) est ainsi modifiée en la relation (1.2).

$$\frac{da}{dN} = C_R (\Delta K)^m = C_R (K_{\max} - K_{\min})^m \quad (1.1)$$

$$\frac{da}{dN} = C_{\text{eff}} (\Delta K_{\text{eff}})^m \quad (1.2)$$

où  $a$  et  $N$  sont respectivement la longueur de fissure et le nombre de cycles et, où  $\Delta K_{\text{eff}}$  est défini par :

$$\Delta K_{\text{eff}} = K_{\max} - K_{\text{ouv}} = \Delta \sigma_{\text{eff}} F(a) \sqrt{\pi a} \quad (1.3)$$

avec :

$$\Delta \sigma_{\text{eff}} = \sigma_{\max} - \sigma_{\text{ouv}} \quad (1.4)$$

La constante de propagation  $C_{\text{eff}}$  est définie par la relation (1.5).

$$C_{\text{eff}} = \frac{C_R}{[U(R)]^m} \quad (1.5)$$

où  $R$  est le rapport de sollicitation défini par  $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ .

La quantité  $U(R)$  correspond au taux d'ouverture de la fissure. Elle est définie comme



le rapport entre  $\Delta K_{\text{eff}}$  et  $\Delta K$  :

$$U(R) = \frac{\Delta K_{\text{eff}}}{\Delta K} = \frac{\Delta \sigma_{\text{eff}}}{\Delta \sigma} \quad (1.6)$$

Elber montre empiriquement que, dans le domaine de Paris et pour la plupart des alliages d'aluminium utilisés en aéronautique,  $U(R)$  suit une relation linéaire en fonction du rapport  $R$  telle que définie à l'équation (1.7) :

$$U(R) = aR + b \quad \text{et} \quad a + b \simeq 1 \quad (1.7)$$

L'ouverture écrite en termes de facteur d'intensité de contrainte est alors donnée par :

$$K_{\text{ouv}} = K_{\text{max}} - U(R) (K_{\text{max}} - K_{\text{min}}) \quad (1.8)$$

### Caractéristiques de $U(R)$

- Il est important de souligner que l'influence du rapport  $R$  sur les cinétiques de fissuration est souvent convenablement modélisée par  $U(R)$ , fonction linéaire et croissante de  $R$ . Il est intéressant de noter que les courbes  $da/dN$  en fonction de  $\Delta K_{\text{eff}}$ , c'est-à-dire corrigées de la fermeture, se superposent alors pour différents rapports  $R$ , comme illustré sur la figure 1.2.
- L'effet de l'épaisseur de l'éprouvette sur la taille de la zone plastique et donc implicitement sur les niveaux d'ouverture (en fonction d'un état prédominant en contraintes planes (CP) ou en déformations planes (DP)) est intégré dans la relation  $U(R)$  par le biais des coefficients  $a$  et  $b$ . Les valeurs de ces coefficients varient avec le matériau considéré et l'épaisseur de la structure fissurée.

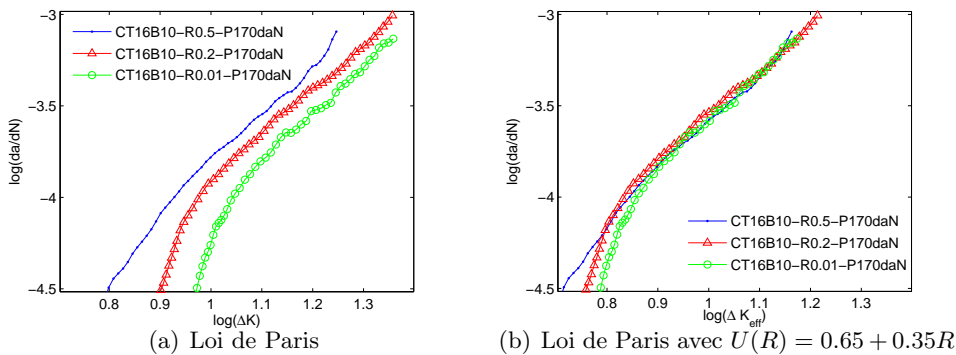


Figure 1.2 – Essais de propagation de fissure, éprouvette CT, matériau aluminium 2024-T351, source DGA/Techniques Aéronautiques.

### 1.1.2 Aspects phénoménologiques des effets d'interaction

La fonction d'ouverture  $U(R)$  introduite par Elber permet d'exprimer le niveau d'ouverture  $\sigma_{ouv}$ , dit naturel, en fonction des charges  $\sigma_{min}$  et  $\sigma_{max}$  du chargement d'amplitude constante et de déterminer ainsi la partie du cycle qui contribue réellement à l'avancée de fissure.

Dans le cas d'un chargement d'amplitude variable, il vient alors évidemment l'idée de calculer l'ouverture naturelle cycle-à-cycle de manière à ne prendre en compte que les parties efficaces des cycles dans le calcul de l'avancée de fissure. Si cette méthode peut s'avérer pertinente pour certains types de chargement, des différences significatives ont été relevées entre les durées de vie prédites par cette méthode et celles observées expérimentalement pour de nombreux chargements d'amplitude variable. Les effets d'interaction entre les cycles de différents niveaux de chargement, c'est-à-dire les effets d'histoire du chargement, en sont à l'origine.

Les principaux effets d'interaction observés sous chargement d'amplitude variable ainsi que leur impact sur la propagation de fissure présentés dans la thèse d'A.Davy [Dav85] sont brièvement reportés ici.

#### 1.1.2.1 Surcharge

La surcharge peut être caractérisée comme une élévation brutale (sur un ou plusieurs cycles) du niveau de chargement associé à un retour aux niveaux d'avant surcharge(s). Le(s) cycle(s) avec surcharge se distingue(nt) des autres cycles par une plastification plus importante en pointe de fissure, notée  $z_{OL}$ , due à la contrainte appliquée  $\sigma_{OL}$  (OL pour *overload*). Les contraintes résiduelles de compression dans cette zone plastique sont plus élevées et génèrent un niveau d'ouverture  $\sigma_{ouv}$  plus important qu'à la normale : c'est le phénomène de retard.

Le point d'ouverture étant plus élevé, la partie efficace des cycles succédant à la surcharge s'en trouve réduite, ce qui implique un nombre de cycles nécessaire pour faire avancer la fissure d'un incrément donné plus grand que celui obtenu avec un cas sans surcharge.

L'effet de la surcharge est sensible à son intensité, caractérisée par le rapport  $\tau = \sigma_{OL}/\sigma$ , et à l'épaisseur de la pièce (état de contraintes planes ou déformations planes),  $\sigma$  représentant le niveau de contrainte maximal du chargement d'amplitude constante avant et après surcharge.

### 1.1.2.2 Sous-charge

Par effet de sous-charge, il convient de considérer la modification d'avancée résultant d'un abaissement momentané du niveau de chargement. Cet abaissement peut correspondre à un passage en compression ( $R < 0$ ). D'une manière simplifiée, une sous-charge quelconque introduite dans un chargement d'amplitude constante ne modifie pas la cinétique de la fissuration et se comporte comme un cycle rajouté à amplitude constante correspondant [Dav85].

### 1.1.2.3 Interactions combinées

Une sous-charge associée à une surcharge unique a significativement un effet réducteur du retard lorsqu'elle succède à la surcharge. L'effet de sous-charge est alors fonction du minimum atteint et peut correspondre soit à un "non-effet de sous-charge" (effet négligeable de la sous-charge par rapport à la surcharge), soit à une annulation totale de l'effet de surcharge. Une sous-charge placée avant une surcharge n'a pas d'effet significatif sur les avancées de fissure par rapport au même cas sans sous-charge.

Une zone plastique se forme lorsque la charge varie de  $\sigma_{\min}$  à  $\sigma_{OL}$  et est proportionnelle à  $z_{OL} \propto 1/\sigma_y^2$ , où  $\sigma_y$  représente la limite d'élasticité du matériau. Lors de la décharge ( $\sigma_{OL} \rightarrow \sigma_{UL}$ ), voir figure 1.3, des contraintes résiduelles de compression s'appliquent sur la zone plastique. Si la contrainte  $\sigma_{UL}$  est inférieure au seuil de fermeture de la fissure voire négative, une relaxation des contraintes résiduelles s'effectue en avant de la pointe de fissure sur une zone proportionnelle à  $z_{UL} \propto (1/2\sigma_y)^2$  et vient donc en partie annuler, sur cette zone, l'effet de retard généré par la surcharge précédente.  $2\sigma_y$  correspond à la limite d'élasticité pour une charge appliquée à partir de  $\sigma_y$  et dans la direction inverse de la traction ( $\sigma_y \rightarrow -\sigma_y$ ). Ce phénomène est connu sous le nom de *reversed plasticity* [Sch09]. L'effet de sous-charge ne se manifeste donc que par rapport à une surcharge éventuelle.

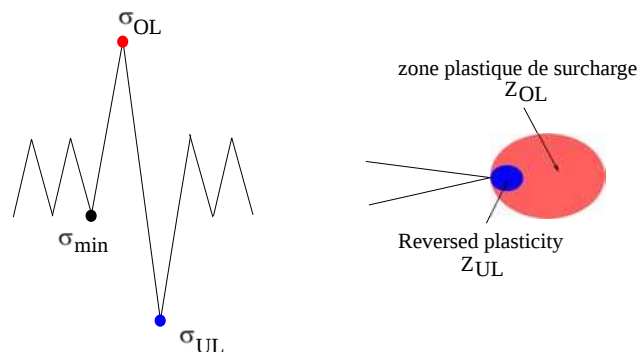


Figure 1.3 – Zone plastique causée par une surcharge et zone dite de “reversed plasticity”.

Au travers de cette brève présentation des principaux facteurs conditionnant les vitesses de fissuration on se rend bien compte que les effets d'interaction inhérents aux spectres de chargement d'amplitude variable doivent être considérés cycle-à-cycle afin de prédire au mieux les durées de vie.

### 1.1.3 Etat de l'art succinct

L'interprétation donnée aux phénomènes exposés à la section précédente ainsi que le degré de prise en compte des effets qui en découlent conduisent à une large gamme de modèles de prévision de durée de vie des structures fissurées sous chargement d'amplitude variable, voir figure 1.4. Ces modèles ont des niveaux de complexité très différents et ajuster les modèles les plus évolués aux données se révèle parfois difficile. Un bref état de l'art des méthodes existantes est ici réalisé. Le lecteur est invité à consulter les références [SR06] et [Sch09] pour une revue plus approfondie des méthodes évoquées ci-après.

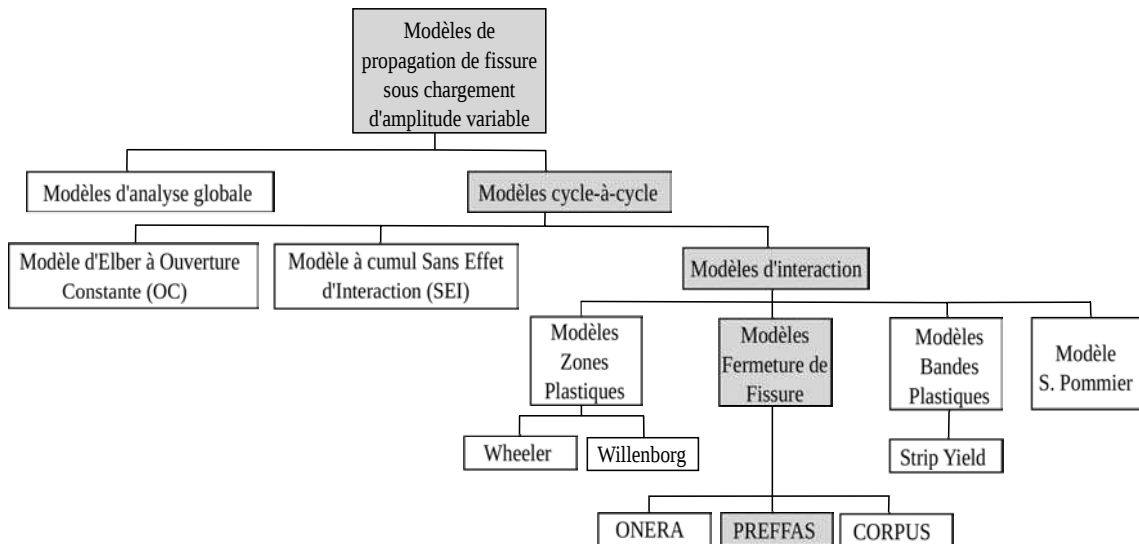


Figure 1.4 – Classification des différents modèles de propagation de fissure sous chargement d'amplitude variable.

Les méthodes pour prédire la durée de vie sous chargement d'amplitude variable peuvent tout d'abord être divisées en deux grandes catégories : les modèles d'analyse globale et les modèles cycle-à-cycle.

Lors d'une analyse globale, le chargement d'amplitude variable est considéré dans sa globalité. La moyenne quadratique de la variation du facteur d'intensité de contraintes  $\Delta K_{rms}$  est par exemple calculée à partir du spectre de chargement d'amplitude variable

et intégrée dans la relation de Paris, [Bar76, Hud81, BSV88, KD88].

Les modèles cycle-à-cycle se distinguent des modèles d'analyse globale par le choix de lois d'évolution cycle-à-cycle.

Le modèle le plus simple est celui à cumul linéaire SEI (cumul linéaire Sans prise en compte d'Effet d'Interaction) qui consiste à associer à chacun des cycles l'avancée due à la partie du cycle supérieure à son ouverture naturelle et à cumuler linéairement les avancées de fissure. Ce modèle n'est pas apte à traduire les effets d'interaction [Dav85], ce qui n'est pas réaliste pour la plupart des chargements. Le modèle à Ouverture Constante (OC) proposé par Elber s'appuie sur un niveau d'ouverture global, caractéristique de la séquence. Cette modélisation qui s'applique dans le cas précis de séquences répétitives courtes reste valide lorsque la variation du point d'ouverture reste faible au cours de la séquence et que cette ouverture est imposée par un niveau de surcharge dominant.

Nous nous intéresserons dans la suite aux modèles d'interaction qui tiennent compte des variations des cinétiques de fissuration sous chargement d'amplitude variable pour prédire l'avancée de fissure.

### 1.1.3.1 Définition de la stationnarité des spectres de chargement

Lors d'analyses déterministes de la tolérance aux dommages, le spectre de chargement appliqué à la structure étudiée est dit stationnaire lorsqu'il est défini par la répétition d'une même séquence de chargement composée de  $N_s$  cycles. Sa période est égale à la longueur de la séquence de chargement  $N_s$ , répétée le long du spectre.

### 1.1.3.2 Modèles liés à la taille de zone plastique

Les modèles dits de "zones plastiques", *Yield Zone models* en anglais, les plus connus sont proposés par O.E. Wheeler [Whe72] et J. Willenborg [WEW71]. Pour ces deux modèles, le retard après surcharge unique est considéré comme immédiat. Le retour à la vitesse nominale de propagation est lié à la progression de la fissure à travers la zone plastique monotone de surcharge. Le retard est évanescent lorsque la zone plastique créée par le cycle courant  $i$  tangente la zone plastique monotone créée par la surcharge, voir figure 1.5.

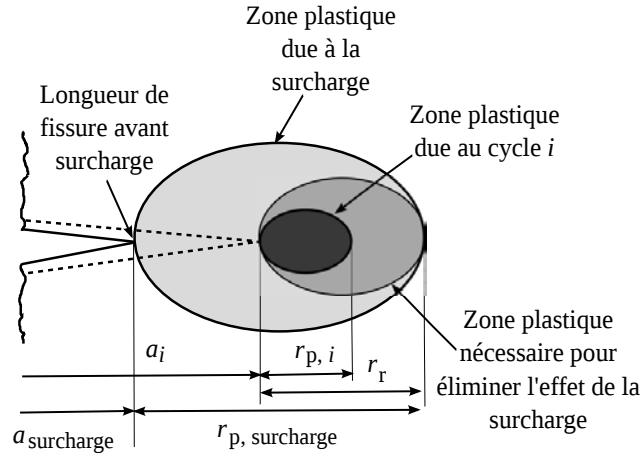


Figure 1.5 – Représentation des zones plastiques dans les modèles de Wheeler et Willenborg.

Ces modèles s'appuient de fait sur le calcul des tailles de zones plastiques.

**Modèle de Wheeler.** Pour Wheeler, le retard est traduit par un coefficient  $\gamma$  tel que :

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{\text{retard}} = \gamma \left(\frac{da}{dN}\right)_{\text{nominal}} \quad (1.9)$$

avec  $\gamma = \left(\frac{r_{p,i}}{r_r}\right)^p \leq 1$ .

Si la taille de la zone plastique  $r_{p,i}$  créée par le cycle courant  $i$  est suffisamment grande pour être égale à  $r_r$  alors  $\gamma = 1$  et donc le retard engendré par la surcharge disparaît. L'exposant  $p$  est déterminé expérimentalement par rapport au retard induit par des essais à surcharge unique.

**Modèle de Willenborg.** Willenborg traduit le retard par l'abaissement du rapport de sollicitation  $R$  dû aux contraintes résiduelles de compression qui sont engendrées par la zone plastique de la surcharge.

Il est important de souligner que ces deux modèles ne sont pas aptes à traiter le retard différé et les effets d'interaction.

### 1.1.3.3 Modèles liés à la fermeture de fissure

Les modèles dits de “fermeture de fissure”, *Crack Closure models* en anglais, s'appuient sur le concept de fermeture de fissure d'Elber. Les plus connus sont les modèles PREF-FAS [Dav85, ADS88], ONERA [BR84] et CORPUS [dKvdL81], initialement développés pour répondre aux besoins de l'industrie aéronautique. Cette génération de modèles est apparue dans les années 80 afin de proposer des solutions plus réalistes que les modèles non-interactifs, pour lesquels les prédictions de durées de vie étaient trop conservatives, mais aussi plus physiques que les modèles de Wheeler et Willenborg des années 70.

Le calcul de l'avancée de fissure cycle-à-cycle  $\delta a_i$  s'écrit :

$$\delta a_i = C (\Delta K_{\text{eff}, i})^m \quad (1.10)$$

Il repose sur l'évaluation de la quantité  $\Delta K_{\text{eff}, i}$  :

$$\Delta K_{\text{eff}, i} = K_{\text{max}, i} - K_{\text{ouv}, i} \quad (1.11)$$

où  $K_{\text{ouv}, i}$  est le point d'ouverture au cycle courant  $i$  à déterminer à chaque cycle  $i$ .

Un point fondamental de ces modèles réside dans le calcul cycle-à-cycle de l'ouverture de fissure  $K_{\text{ouv}, i}$  qui dépend du chargement antérieur. Pour ce faire, les modèles de “fermeture de fissure” déterminent les valeurs significatives des niveaux  $K_{\text{ouv}}$  du chargement qui varient entre les deux situations extrêmes suivantes : l'ouverture  $K_{\text{ouv}}$  est faible dans le cas d'une surcharge unique et l'ouverture  $K_{\text{ouv}}$  est élevée dans le cas d'un chargement constant ou à surcharges multiples.

Une comparaison des caractéristiques de ces modèles est donnée dans le tableau 1.1.

Tableau 1.1 – Principales caractéristiques et comparaison des modèles de “fermeture de fissure”.

<b>PREFFAS</b> [Dav85, ADS88]	<b>ONERA</b> [BR84]	<b>CORPUS</b> [dKvdL81]
- Ouverture basée sur un état à surcharges multiples	- Ouverture basée sur un état constant, mixte entre surcharge unique et surcharges multiples	- Ouverture basée sur un état à surcharge unique
- Loi d'ouverture d'Elber	- Loi d'ouverture autre que celle d'Elber	- Loi d'ouverture autre que celle d'Elber
- Pas d'évanescence des effets d'interaction (principe de stationnarité)	- Évanescence type modèle de Willenborg	- Stationnarité sur 70% de la zone plastique due à la surcharge, puis évanescence
- Transition de l'état DP à CP non modélisée, mais prise en compte dans les paramètres de la loi d'Elber déterminés expérimentalement	- Modélisation du passage DP à CP explicite en fonction des tailles de zones plastiques	- Modélisation du passage DP à CP explicite en fonction des tailles de zones plastiques
- Comptage Rainflow inclus	- Comptage Rainflow inclus	- Pas de comptage Rainflow inclus
- Retard différé non pris en compte	- Retard différé non pris en compte	- Retard différé non pris en compte
- Nombre de paramètres = 3	- Nombre de paramètres = 9	- Nombre de paramètres > 10
- Simple et peu coûteux en temps de calcul	- Simple	- Complexe

D'après [Pad90] ces trois modèles conduisent globalement à de bons résultats pour une grande variété de spectres en termes de prévision de fissuration par comparaison aux résultats expérimentaux ( $0.5 < N_{\text{exp}}/N_{\text{prévision}} < 2$ ). Le modèle CORPUS apparaît néanmoins plus précis mais nettement plus complexe à mettre en œuvre que les deux autres. Le modèle ONERA repose sur certaines hypothèses discutables (ouverture basée sur un état de surcharge mixte) et semble être extrêmement sensible à plusieurs paramètres d'entrée. Le lecteur est invité à consulter les références [UA99, Sch09] pour une revue détaillée et critique de ces modèles.



### 1.1.3.4 Modèles Strip Yield

Pour les modèles dits à “bandes plastiques” [tHdK91, WB91, IA96], connus sous le nom de *Strip Yield models* en anglais, ce sont les déformations plastiques laissées dans le sillage de la fissure, vestiges des effets d'interaction, qui sont responsables du phénomène de fermeture de fissure. Contrairement aux modèles de “fermeture de fissure”, l'ouverture  $K_{OUV}$  est déterminée numériquement à l'aide d'une modélisation mécanique simple du sillage plastique de la fissure et de la zone plastique en avant du front de fissure (éléments barres). Les éléments barres de la zone plastique en avant du front de fissure peuvent supporter à la fois des charges de compression et de traction alors que les éléments barres disposés le long de la fissure et qui sont coupés en deux lors de l'avancée de fissure ne peuvent supporter que des charges de compression lorsqu'ils rentrent en contact, voir figure 1.6.

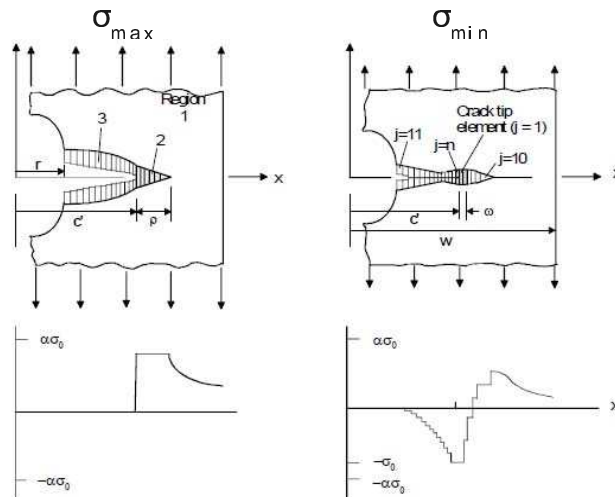


Figure 1.6 – Distribution des contraintes, modèle Strip Yield, version *constraint factor*  $\alpha$  constant (modèle CCL) [NAS06].

L'ouverture est alors calculée à partir des contraintes calculées dans les éléments barres du sillage plastique de la fissure et en pointe de fissure. Celles-ci sont déterminées de manière itérative avec la méthode de Gauss-Seidel à partir des déplacements verticaux des éléments barres. La résolution s'appuie sur le principe de superposition du modèle de bandes plastiques de Dugdale [Dug60]. Il est à noter qu'en raison de temps de calcul trop longs et d'une réactualisation difficile du nombre d'éléments, le calcul de  $K_{OUV}$  ne se fait pas cycle-à-cycle mais après une certaine avancée de fissure définie arbitrairement.

### Remarques

- Pour prendre en compte l'influence de l'état de contrainte tridimensionnel ainsi que l'état de contraintes planes (CP) ou de déformations planes (DP), il est d'usage de faire intervenir un coefficient  $\alpha$  qui prend les valeurs limites de 1 en CP et de 3 en DP. Ce coefficient  $\alpha$ , appelé *constraint factor*, permet de modéliser l'état de contrainte en avant du front de fissure. Il est constant dans le modèle proposé par Newmann (modèle CCL), voir figure 1.6, alors qu'il est supposé avoir une décroissance parabolique le long de l'axe de la fissure pour le modèle de de Koning (modèle VCL), voir figure 1.7.

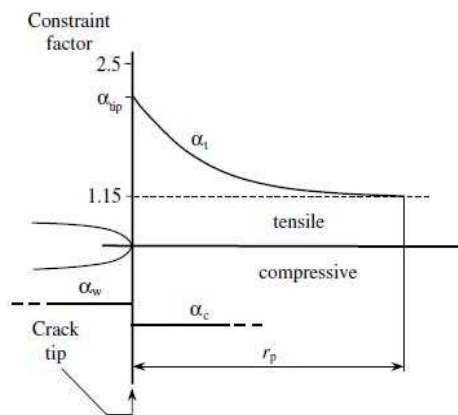


Figure 1.7 – Distribution des contraintes, modèle Strip Yield, version *constraint factor*  $\alpha$  variable (modèle VCL) [NAS06].

- La transition des CP aux DP est prise en compte par l'intermédiaire de ce paramètre  $\alpha$  qui est modifié en fonction des vitesses de propagation.
- Le modèle Strip Yield s'avère être extrêmement sensible au paramètre  $\alpha$  en pratique.
- Ce modèle permet de modéliser en théorie le retard différé.

#### 1.1.3.5 Modèle incrémental de S. Pommier

Un des modèles de prévision de la fissuration par fatigue sous chargement d'amplitude variable les plus récents est le modèle incrémental de S. Pommier initialement proposé par S. Pommier et M. Risbet [PR05]. Ce modèle a ensuite été développé par R. Hamam et S.

Pommier [Ham06, PH07].

Des calculs numériques par éléments finis sont utilisés dans cette approche. Les évolutions des contraintes et des déformations en pointe de fissure sont tout d'abord calculées en fonction du comportement du matériau (loi de comportement à renseigner) et du chargement appliqué. Le passage de l'échelle locale de l'analyse du matériau à la structure globale fissurée est ensuite réalisé en appliquant une approximation sur le champ de déplacement. Par ce biais, il est possible de calculer l'évolution de l'*émoussement plastique*, ou CTOD (*crack tip opening displacement*) à chaque calcul par éléments finis. La loi de fissuration pour un chargement quelconque est ensuite obtenue à l'aide de deux lois :

- une loi de fissuration qui relie la vitesse instantanée de fissuration par fatigue en fonction de la vitesse instantanée d'émoussement plastique de la fissure,
- une loi d'émoussement plastique permettant de déterminer la vitesse d'émoussement plastique en fonction du chargement appliqué et dont les paramètres sont identifiés par éléments finis.

La mise en œuvre du modèle incrémental nécessite deux essais de base, un essai de comportement cyclique du matériau et un essai de fissuration par fatigue à amplitude constante. Cette méthode, qui combine les avantages des approches locales et globales, a en particulier été appliquée avec succès dans le domaine ferroviaire où le chargement biaxial est variable. Plusieurs millions de cycles sont traités en quelques dizaines de minutes.

#### 1.1.4 Choix du modèle de propagation de fissure

Afin de réaliser des analyses probabilistes de propagation de fissure sous chargements d'amplitude variable et d'analyser l'impact de l'aléa du chargement sur l'avancée de fissure, il est nécessaire d'utiliser un modèle qui soit d'une part capable de prédire l'avancée sous chargement d'amplitude variable et qui soit d'autre part compatible avec des simulations numériques en grand nombre. De ce fait, il s'agit d'établir un compromis entre complexité du modèle et rapidité des calculs.

La présentation des principaux effets d'interaction du chargement d'amplitude variable sur les cinétiques de fissuration a mis en évidence l'importance de choisir un modèle apte à traduire ces phénomènes. L'ordre des cycles et les niveaux de contraintes appliqués déterminent l'amplitude de ces effets d'interaction. Le modèle choisi doit permettre d'en rendre compte. Il s'agit donc de choisir entre les modèles PREFFAS, ONERA, CORPUS, Strip Yield et le modèle incrémental de S. Pommier.

Le modèle ONERA qui repose sur des hypothèses plus nombreuses que les autres

modèles a volontairement été écarté. Le modèle incrémental de S. Pommier et le modèle CORPUS ont également été écartés pour les raisons suivantes :

- complexité de mise en œuvre et nombre important de paramètres à identifier,
- absence d'expérience sur ces modèles au sein du laboratoire de recherche.

Le choix s'est finalement porté sur les deux modèles suivants : PREFFAS et Strip Yield. Il est à noter qu'une information suffisante était disponible pour l'implémentation et la mise en œuvre de ces deux modèles :

- concernant PREFFAS : description complète de l'algorithme PREFFAS, extraite de la note technique n°5/M/90 du Centre d'Essais Aéronautique de Toulouse [Ren90],
- concernant Strip Yield : description de l'algorithme dans la thèse d'Ibso [IA96] et mise à disposition par l'ESA des sources du code NASGRO, développé conjointement par la NASA et l'ESA (version 3.0.23), mettant en œuvre la seule version de Strip Yield avec état de contraintes constant en avant du front de fissure (modèle CCL).

#### 1.1.4.1 Limites du modèle Strip Yield

Malgré la capacité du modèle Strip Yield à prendre en compte le phénomène d'évanescence du retard ainsi que les effets liés à la surcharge unique<sup>2</sup> et au retard différé, ce modèle souffre de plusieurs limites dont certaines sont difficilement compatibles avec des analyses probabilistes.

**Remarques issues de la bibliographie.** Comme la plupart des modèles de propagation de fissure sous chargement d'amplitude variable, le modèle Strip Yield fait l'objet de critiques quant à la qualité de ses résultats et au calibrage de ses paramètres. Reconnu comme supérieur aux modèles de "fermeture de fissure" d'un point de vue modélisation physique, le modèle Strip Yield présente néanmoins des problèmes pour régler ses paramètres et notamment le *constraint factor*  $\alpha$ . De plus ce modèle est difficile à maîtriser de part son niveau de complexité et donc difficile à utiliser. Il n'est d'autre part pas complètement validé [Sch09] et son champ d'application reste confus pour l'auteur de cette référence.

Les critiques les plus virulentes sont formulées dans l'article proposé par M. Skorupta *et al.* [SMSS07] dont l'objectif est d'évaluer les capacités de prédiction du modèle Strip

---

<sup>2</sup>Nous verrons au paragraphe 1.2.5.2 que le phénomène d'évanescence du retard et l'état à surcharge unique ne peuvent pas être traités avec le modèle PREFFAS étant donnée l'hypothèse de stationnarité.

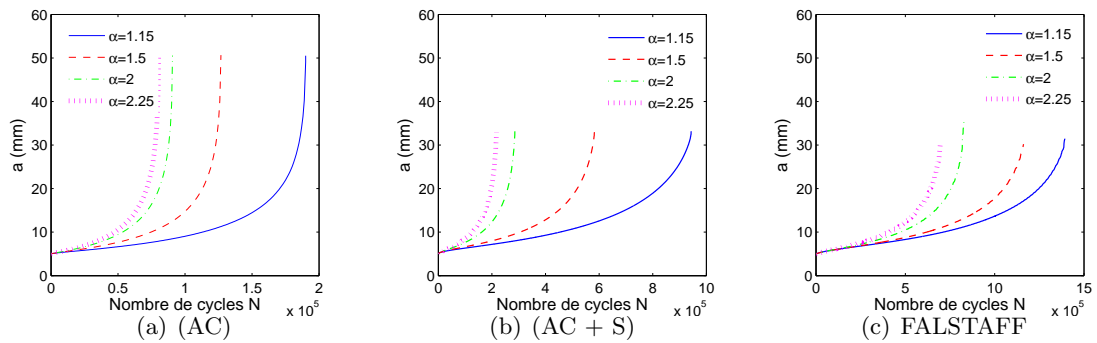
Yield implémenté sous NASGRO à la fois pour des chargements d'amplitude constante et pour des chargements d'amplitude variable plus ou moins représentatifs de vols réels. Les résultats de prévision de propagation de fissure des deux modèles Strip Yield implémentés sous NASGRO (version avec  $\alpha$  constant et version avec  $\alpha$  variable) sont confrontés aux résultats d'essais réalisés par ces auteurs. Ces résultats ont été retrouvés partiellement avec la version de NASGRO disponible au LaMI.

Selon la littérature, les principales conclusions sont :

- Le modèle Strip Yield implémenté sous NASGRO ne permet pas de reproduire le retard dû à l'application d'une surcharge unique et a tendance à sous-estimer les prédictions sous chargement d'amplitude variable.
- La procédure de calibrage du paramètre  $\alpha$  est très loin d'être robuste malgré les recommandations du manuel NASGRO qui conseille de choisir le paramètre  $\alpha$  qui donne des prévisions au plus près des résultats d'essais réalisés sous chargements d'amplitude constante pour différents rapports de sollicitation  $R$ .
- Pour améliorer les prédictions, il faudrait modifier la procédure de calibrage du paramètre  $\alpha$  (choix recommandé entre 1.15 et 2.5) en fonction du type de chargement appliqué.
- Le modèle avec  $\alpha$  qui varie (VCL) donne de meilleurs résultats que le modèle avec  $\alpha$  constant (CCL).
- Les données de la base NASGRO doivent être utilisées avec une extrême prudence car les paramètres sont fixés automatiquement et peuvent donc ne pas convenir. Il est souvent par ailleurs difficile d'en obtenir les sources.

**Influence du paramètre  $\alpha$ .** Un des problèmes majeurs du modèle Strip Yield est lié au réglage du *constraint factor*  $\alpha$ . Afin d'étudier l'impact de ce paramètre sur les résultats de propagation, une étude paramétrique a été menée en plus des calculs réalisés sur la base de la référence [SMSS07]. Quelques résultats sont brièvement présentés ci-après.

L'évolution de la longueur de fissure  $a$  en fonction du nombre de cycles appliqués  $N$  est portée sur la figure 1.8. Trois types de chargement sont appliqués à une éprouvette CCT en aluminium 2024 T351 : un chargement d'amplitude constante à  $R = 0.1$  (AC), un chargement d'amplitude constante à  $R = 0.1$  avec surcharges à  $\tau = 1.7$  espacées tous les  $n = 1000$  cycles (AC+S) et une séquence standard de chargement FALSTAFF. FALSTAFF [ABvD<sup>+</sup>76, dJ79] est une séquence de chargement normalisée développée en 1976 pour les éléments de structure des avions militaires de combat situés au niveau des attaches voilure-fuselage. Le chargement FALSTAFF est considéré représentatif des niveaux de charges vus par ces éléments de structure. Il correspond à 200 vols et contient 17883 cycles.

Figure 1.8 – Influence du paramètre  $\alpha$  sur les prévisions de fissuration.

Pour les trois types de chargement étudiés il est noté une grande dispersion sur les résultats en fonction du paramètre  $\alpha$  choisi. Les durées de vie varient dans des rapports allant de 1.5 à 5.5 pour  $\alpha$  variant entre 1.15 et 2.25. Un choix approximatif de  $\alpha$  peut ainsi conduire à des résultats qui s'éloignent fortement des résultats expérimentaux lors d'analyses déterministes. Cette extrême sensibilité du modèle à un paramètre a été jugée critique pour des analyses probabilistes et a conduit à rejeter le modèle Strip Yield au profit de PREFFAS.

#### 1.1.4.2 Choix du modèle PREFFAS

Malgré l'hypothèse restrictive de stationnarité, analysée en détails au paragraphe 1.2.5.2, le modèle PREFFAS a été choisi car :

- il s'agit d'un modèle de mise en œuvre assez simple qui a donné satisfaction pour des applications industrielles et qui a été validé par rapport à des essais sous chargement d'amplitude variable (modèle actuellement utilisé par EADS, Dassault Aviation, DGA et SNECMA),
- il comporte un faible nombre de paramètres à calibrer. Le seul paramètre à régler en plus des coefficients de la loi de Paris est le paramètre de la loi d'Elber  $a$  (sous la condition  $a + b = 1$ ), qui varie entre 0.3 (structures épaisses) et 0.5 (structures minces), et
- il est extrêmement compétitif en termes de coût de calcul moyennant quelques adaptations informatiques. Plusieurs calculs d'avancée de fissure peuvent aussi être réalisés simultanément, comme détaillé au paragraphe 1.2.5.3, ce qui permet de valider la modélisation stochastique du chargement dans des temps acceptables.

## 1.2 Modèle PREFFAS

Dans ses travaux de thèse [Dav85], A. Davy a étudié les mécanismes et les relations caractérisant les cinétiques de fissuration par fatigue sous chargement d'amplitude constante puis sous chargement d'amplitude variable pour le secteur aéronautique. Ces travaux ont permis l'élaboration d'un modèle de prévision de la fissuration sous chargement d'amplitude variable performant et adéquat pour une utilisation industrielle. Ce modèle justifié expérimentalement parvient à s'affranchir des facteurs suivants : type de spectre (en partie), sévérité des chargements, matériau et épaisseur de la pièce, tout en ne nécessitant qu'un nombre minimal de paramètres pour sa mise en œuvre ce qui lui confère un caractère relativement pragmatique. Ce modèle connu sous le nom de **PREFFAS** (**PRE**vision de la **F**issuration en **F**atigue **A**éro**S**patiale) a été publié à l'ASTM en 1988 [ADS88]. Il repose essentiellement sur le principe de fermeture de fissure décrit à l'origine par Elber et est applicable aux alliages d'aluminium et également à certains aciers selon A. Davy [Dav85].

### 1.2.1 Principe

Le modèle PREFFAS réalise un calcul séquentiel sur le chargement de l'avancée de fissure en utilisant le concept d'ouverture d'Elber intégré à la loi de Paris (calcul cycle-à-cycle). Chaque cycle  $i$  est défini par un couple de facteurs d'intensité de contraintes minimal et maximal ( $K_{\min, i}$  et  $K_{\max, i}$ ), correspondant aux contraintes minimale et maximale  $\sigma_{\min, i}$  et  $\sigma_{\max, i}$  du spectre de chargement, voir figure 1.9.

D'après le concept d'Elber développé au paragraphe 1.1.1, l'incrément de propagation  $\delta a_i$  dépend du facteur d'intensité de contrainte  $K_{\text{ouv}, i}$  du point d'ouverture  $\sigma_{\text{ouv}, i}$  :

$$\delta a_i = C_{\text{eff}} (K_{\max, i} - K_{\text{ouv}, i})^m = C_{\text{eff}} (\Delta K_{\text{eff}, i})^m \quad (1.12)$$

Il est important de noter que toute autre loi de propagation, c'est-à-dire autre que Paris, donnant l'avancée de fissure à partir de  $K_{\max, i}$  et  $K_{\text{ouv}, i}$  pourrait être utilisable, ce n'est pas le cas dans l'implémentation actuelle de PREFFAS.

Les points clés du modèle PREFFAS résident dans l'estimation du point d'ouverture  $K_{\text{ouv}, i}$  pour chaque cycle  $i$ , l'enregistrement des valeurs significatives du chargement nécessaires au calcul des  $K_{\text{ouv}, i}$  appelé l'histoire du chargement et le cumul de l'avancée de fissure. Le cumul n'est pas simplement linéaire, il intègre l'effet Rainflow afin de ne pas sous-estimer l'avancée de fissure. Un dernier aspect remarquable de PREFFAS concerne sa procédure de calcul qui est simple et rapide sous l'hypothèse de stationnarité du spectre de chargement, fondamentale dans ce modèle.

La description des principales caractéristiques de PREFFAS est issue de la thèse d'A. Davy [Dav85], des notes personnelles de D. Aliaga, de la référence [ADS88] et des rapports de l'université de Delft [Sch87, Pad90]. Le lecteur est invité à consulter ces références pour de plus amples détails sur les spécificités de ce modèle.

### 1.2.2 Calcul de l'ouverture $K_{\text{ouv}, i}$

Au cycle  $i$ , l'ouverture  $K_{\text{ouv}, i}$  doit traduire les effets d'interaction induits par l'histoire de la fissuration. La position de l'ouverture au cycle  $i$  nécessite donc la prise en compte de tous les chargements et déchargements des cycles antérieurs au cycle  $i$ .

Pour chaque cycle  $j$  tel que  $j < i$ , PREFFAS calcule une ouverture associée au maximum de ce cycle  $K_{\text{max}, j}$  combiné au minimum rencontré depuis  $K_{\text{max}, j}$  et qui se produit avant le maximum  $K_{\text{max}, i}$ . Notons  $k$  le cycle ayant un tel minimum ( $j < k \leq i$ ) et  $K_{\text{min}, k}$  le facteur d'intensité de contrainte minimum associé. La valeur de  $K_{\text{min}, k}$  détermine la réduction maximale du retard engendré par  $K_{\text{max}, j}$ . C'est le phénomène de *reversed plasticity* décrit au paragraphe 1.1.2.3. L'effet d'interaction associé au maximum du cycle  $j$  est en effet maximal avec le minimum du cycle  $k$ , voir figure 1.9.

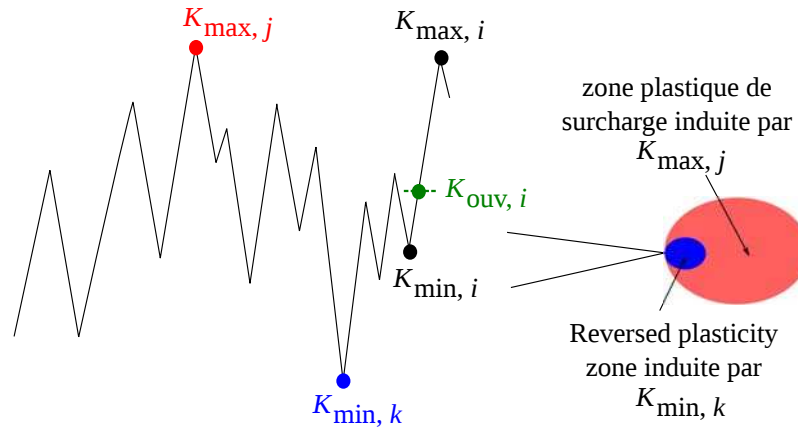


Figure 1.9 – Calcul de l'ouverture  $K_{\text{ouv}, i}$  cycle-à-cycle.

La loi d'Elber permet ensuite de modéliser l'ouverture résultant d'une telle interaction, notée  $K_{\text{ouv}, i, j}$ , par :

$$K_{\text{ouv}, i, j} = K_{\text{max}, j} - U(R) (K_{\text{max}, j} - K_{\text{min}, k}) \quad (1.13)$$

où  $R = K_{\text{min}, k}/K_{\text{max}, j}$  et  $U(R) = aR + b$ .

Dans ce modèle, on utilise une loi du type de celle proposée par Elber, capable de



prendre en compte l'effet du rapport de sollicitation  $R$  mais là encore toute autre loi d'ouverture serait utilisable (par exemple celle proposée par Newman).

$K_{\text{ouv}, i}$  représente la position d'ouverture la plus haute ainsi engendrée par les cycles antérieurs au cycle  $i$ . D'après l'équation (1.13), on a donc :

$$K_{\text{ouv}, i} = \max_{j \in \{1, \dots, (i-1)\}} K_{\text{ouv}, i, j} \quad (1.14)$$

**Analyse des mécanismes et modélisation.** Il est important de noter que les équations du calcul du point d'ouverture ne font pas directement intervenir la taille de la zone plastique  $r_p$ . La physique des mécanismes du retard générés par la plasticité en avant du front de fissure est ici prise en compte par l'intermédiaire des valeurs  $K_{\text{max}, j}$  et  $K_{\text{min}, k}$ . Elles déterminent les niveaux d'ouverture possibles de la fissure  $K_{\text{ouv}, i, j}$  au cycle  $i$  grâce à la loi d'ouverture et traduisent bien les effets d'interaction.

Calculer les niveaux d'ouverture de la fissure  $K_{\text{ouv}, i, j}$  de cette manière n'est correct que si la zone plastique induite par  $K_{\text{max}, j}$  est toujours la zone plastique dominante pour le cycle  $i$  et donc que l'incrément de fissure entre le cycle  $j$  et  $i$  est petit devant la taille de la zone plastique.

Cette hypothèse impose des spectres de chargement avec des séquences courtes, c'est-à-dire répétées un grand nombre de fois pendant la propagation de fissure. C'est le principe de stationnarité, fondamental dans le modèle PREFFAS.

### 1.2.3 Historique de chargement

D'après la relation (1.14), tous les cycles  $j < i$  doivent être considérés pour le calcul de l'ouverture au cycle  $i$ , ce qui n'est pas le cas en pratique. Seule une série de triplets significatifs  $\{K_{\text{max}, j}, K_{\text{min}, k}, K_{\text{ouv}, i, j}\}$  des cycles antérieurs est enregistrée pour déterminer l'ouverture  $K_{\text{ouv}, i}$ . Cette série, qui capture uniquement les valeurs du chargement antérieures au cycle  $i$  influant sur le calcul du niveau de l'ouverture et donc l'avancée de fissure, porte le nom d'historique du chargement ou d'histoire du chargement.

Les valeurs  $K_{\text{max}, j}$ ,  $K_{\text{min}, k}$  et l'ouverture associée  $K_{\text{ouv}, i, j}$  sont considérées comme significatives du chargement antérieur sous les deux hypothèses suivantes :

- Il n'existe pas de cycle postérieur au cycle  $j$  qui présente un  $K_{\text{max}}$  supérieur à  $K_{\text{max}, j}$ , c'est-à-dire qu'il n'y a pas eu de surcharge depuis  $K_{\text{max}, j}$ . Dans le cas contraire, cette nouvelle valeur  $K_{\text{max}}$  conduit à effacer  $K_{\text{max}, j}$ .

Pour comprendre ce phénomène considérons deux cycles  $j_1$  et  $j_2$  tels que  $j_1 < j_2$  et  $K_{\max, j_2} > K_{\max, j_1}$ . Considérons également  $K_{\min, k_2} > K_{\min, k_1}$ . L'ouverture  $K_{\text{ouv}, i, j_1}$  est calculée à partir du couple  $(K_{\max, j_1}, K_{\min, k_1})$  et l'ouverture  $K_{\text{ouv}, i, j_2}$  à partir du couple  $(K_{\max, j_2}, K_{\min, k_2})$ . Cette dernière combinaison conduit nécessairement à un niveau d'ouverture  $K_{\text{ouv}, i, j_2}$  supérieur à  $K_{\text{ouv}, i, j_1}$  et est donc retenu comme valeur d'ouverture du cycle  $i$ . Il n'est donc pas nécessaire de conserver le couple  $(K_{\max, j_1}, K_{\min, k_1})$  ainsi que l'ouverture correspondante  $K_{\text{ouv}, i, j_1}$ . Par ailleurs, si  $K_{\min, k_2} \leq K_{\min, k_1}$ , les ouvertures  $K_{\text{ouv}, i, j_1}$  et  $K_{\text{ouv}, i, j_2}$  sont respectivement calculées à partir des couples  $(K_{\max, j_1}, K_{\min, k_2})$  et  $(K_{\max, j_2}, K_{\min, k_2})$ . A nouveau  $K_{\text{ouv}, i, j_2}$  est supérieur à  $K_{\text{ouv}, i, j_1}$  et il n'est pas utile d'enregistrer le maximum  $K_{\max, j_1}$ .

- Il n'existe pas de cycle antérieur à  $j$  qui donne une ouverture  $K_{\text{ouv}}$  supérieure à  $K_{\text{ouv}, i, j}$ , auquel cas c'est cette ouverture  $K_{\text{ouv}}$  que l'on choisit comme ouverture  $K_{\text{ouv}, i}$ .

La série des maximums du chargement antérieur au cycle  $i$  qui sont enregistrés dans l'historique du chargement est donc décroissante alors que les séries des minimums et des ouvertures enregistrés sont croissantes. Dans la suite, ces valeurs d'histoire sont respectivement notées  $KH_{\max}$ ,  $KH_{\min}$  et  $KH_{\text{ouv}}$  en fonction de leur nature : maximums, minimums ou ouvertures. Une illustration des valeurs du chargement antérieures au cycle  $i$  et significatives pour le calcul de l'ouverture  $K_{\text{ouv}, i}$  est donnée en figure 1.10. Elles sont au nombre de  $n$  dans l'exemple donné.

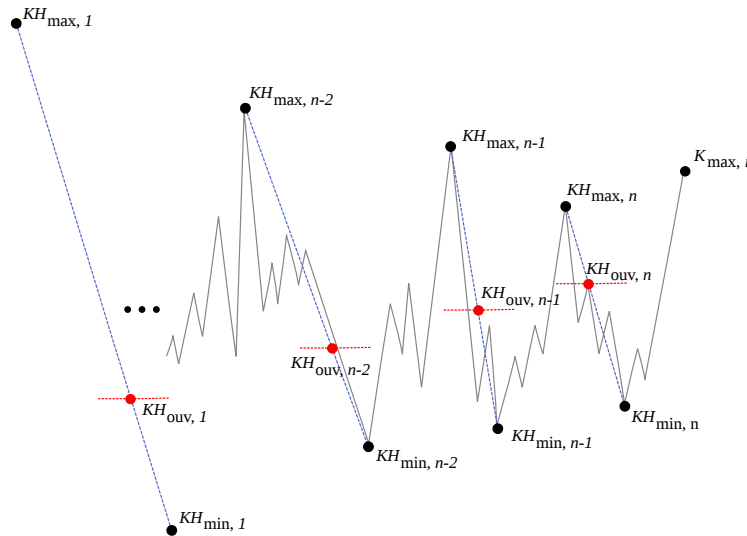


Figure 1.10 – Illustration de l'histoire du chargement significative pour le calcul de  $K_{\text{ouv}, i}$ .

### 1.2.4 Effet Rainflow

L'avancée au cycle  $i$  se calcule d'après la relation (1.12) tant que  $K_{\max, i}$  est inférieur au dernier maximum de l'histoire  $KH_{\max, n}$ . L'ouverture du cycle  $i$  correspond à l'ouverture  $KH_{\text{ouv}, n}$  et l'équation (1.12) se réécrit comme suit :

$$\delta a_i = C_{\text{eff}} (K_{\max, i} - KH_{\text{ouv}, n})^m \quad (1.15)$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque  $K_{\max, i}$  dépasse un ou plusieurs maximums de l'histoire du chargement, la modélisation intègre un principe de comptage réaliste et conservatif de l'avancée sous spectre. Il s'agit d'une technique de comptage Rainflow.

#### 1.2.4.1 Principe du comptage Rainflow

Les méthodes de comptage linéaire considèrent en principe l'ensemble des variations ( $\sigma_{\min} - \sigma_{\max}$ ) dans le calcul du dommage  $y$  compris dans le cas où une petite variation de charge se trouve entre deux plus grandes variations de charge comme illustré sur la figure 1.11.

Dans le cas d'un comptage linéaire, l'avancée de fissure est alors calculée à partir des variations AB et CD. La validité de cette hypothèse est discutable pour un calcul de propagation de fissure qui élève à la puissance  $m$  généralement supérieur à 2 les variations de charges. Cela peut en effet conduire à des prédictions d'avancée de fissure non-conservatives.

D'autres méthodes telle que la méthode du Rainflow permettent de s'affranchir de ce type de problème en considérant que la variation de charge AD est interrompue par la variation BC. Ce sont donc les variations de charge AD et BC qui sont choisies pour le calcul de l'avancée de fissure. Cette technique repose sur le cumul des déformations oligocycliques en pointe de fissure [Dow82].

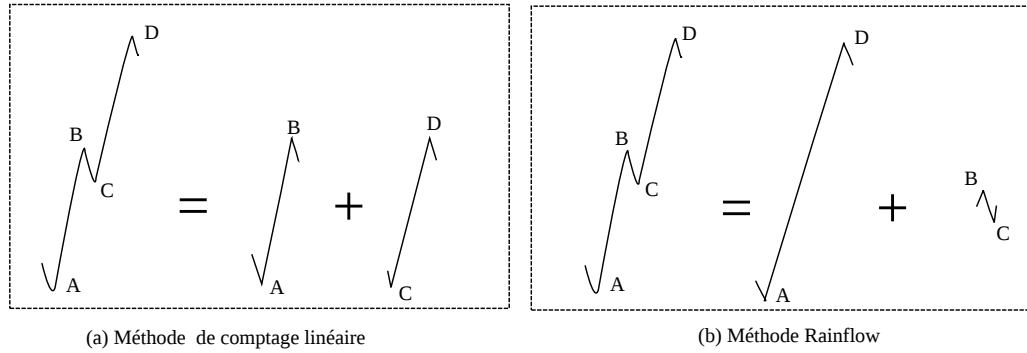


Figure 1.11 – Illustration de deux méthodes de comptage dans une situation caractéristique.

Même si cette méthode de comptage semble conservative et réaliste pour ce type de situation, il est nécessaire d'adapter la modélisation pour prendre en compte l'histoire de la fissuration, ce qui est réalisé dans le modèle PREFFAS.

#### 1.2.4.2 Adaptation pour PREFFAS

Dans la méthode PREFFAS, la technique Rainflow n'est plus directement appliquée aux variations  $(\sigma_{\min} - \sigma_{\max})$  mais aux variations  $(\sigma_{\text{ouv}} - \sigma_{\max})$  afin de prendre en compte les effets de fermeture de fissure.

Si l'on nomme respectivement  $O_1$  et  $O_2$  les points d'ouverture des cycles AB et CD (voir figure 1.12) et si l'on a  $O_1 < O_2$  et  $D > B$  alors, d'après la méthode Rainflow, il faut tenir compte des variations de cycles  $O_1D$  et  $BO_2$  pour le calcul de l'avancée de fissure.

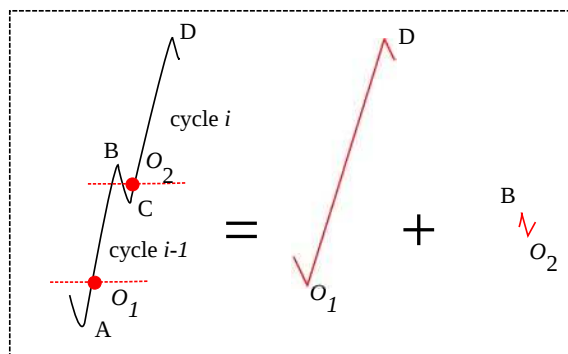


Figure 1.12 – Méthode Rainflow appliquée au concept d'ouverture.

Etant donné que le modèle PREFFAS réalise un calcul séquentiel de l'avancée de fissure, il ne peut pas être prédit au cycle  $i$  que l'estimation de l'avancée de fissure pour ce cycle nécessite le comptage Rainflow. Il faut donc retrancher l'avancée due à  $O_1B$  calculée

au cycle  $i - 1$ , ce qui conduit à la relation (1.16) :

$$\delta a \propto C (D - O_1)^m + C (B - O_2)^m - C (B - O_1)^m \quad (1.16)$$

En appliquant cette procédure lorsque  $K_{\max, i}$  dépasse la dernière valeur d'histoire  $KH_{\max, n}$ , où  $n$  représente le dernier indice des valeurs d'histoire, on considère que l'ouverture au cycle  $i$  est donnée par  $KH_{\text{ouv}, n-1}$  et l'avancée correspond à :

$$\delta a_i = C_{\text{eff}} \{ (K_{\max, i} - KH_{\text{ouv}, n-1})^m + (KH_{\max, n} - KH_{\text{ouv}, n})^m - (KH_{\max, n} - KH_{\text{ouv}, n-1})^m \} \quad (1.17)$$

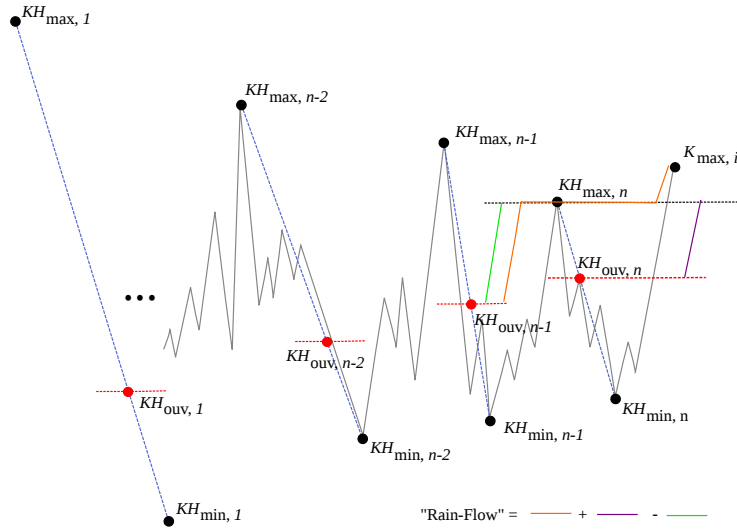


Figure 1.13 – Illustration de la méthode Rainflow adaptée à l'histoire du chargement.

Dans le cas où le maximum  $K_{\max, i}$  dépasse la  $p^{\text{ème}}$  valeur d'histoire  $KH_{\max, p}$  tel que  $p < n$  et  $KH_{\max, p} < K_{\max, i} < KH_{\max, p-1}$ , la relation (1.17) se généralise alors en :

$$\delta a_i = C_{\text{eff}} \{ (K_{\max, i} - KH_{\text{ouv}, p-1})^m + \sum_{l=p}^n [(KH_{\max, l} - KH_{\text{ouv}, l})^m - (KH_{\max, l} - KH_{\text{ouv}, l-1})^m] \} \quad (1.18)$$

## 1.2.5 Procédure de calcul

### 1.2.5.1 Calcul de l'avancée de fissure

L'avancée de fissure  $\Delta a$  sur une séquence de chargement de  $N_s$  cycles est simplement donnée par :

$$\Delta a = \sum_{i=1}^{N_s} \delta a_i = C_{\text{eff}} \sum_{i=1}^{N_s} (\Delta K_{\text{eff}, i})^m \quad (1.19)$$

où  $\Delta K_{\text{eff}, i}$  est calculée à partir des relations (1.15) ou (1.18) suivant que le Rainflow s'applique ou non.

En utilisant l'expression du facteur d'intensité de contrainte  $K(a) = \sigma F(a) \sqrt{\pi a}$ , où  $F(a)$  est un facteur de forme qui dépend de la géométrie de l'éprouvette considérée et des dimensions de la fissure, la relation (1.19) devient :

$$\Delta a = \sum_{i=1}^{N_s} \delta a_i = C_{\text{eff}} \sum_{i=1}^{N_s} (\Delta K_{\text{eff}, i})^m = C_{\text{eff}} \sum_{i=1}^{N_s} [F(a_i) \Delta \sigma_{\text{eff}, i} \sqrt{\pi a_i}]^m \quad (1.20)$$

### 1.2.5.2 Hypothèse de stationnarité

L'état de stationnarité caractérise ici l'évolution des niveaux d'ouverture  $K_{\text{ouv}}$  d'une fissure. Le spectre de chargement est considéré comme stationnaire si les niveaux d'ouverture  $K_{\text{ouv}}$  significatifs restent constants sur ce dernier, en d'autres termes s'ils ne dépendent pas de l'avancée de fissure.

Au sens d'Elber, on peut considérer les niveaux d'ouverture constants pour des séquences répétitives dès lors que la fissuration par séquence reste contenue dans la zone plastique des maximums dominants (c'est-à-dire  $KH_{\text{max}, m}$   $m=1, \dots, n$ ), en raison de l'aspect répété de ces maximums. A.U. de Koning et H.H. van der Linden [dKvdL81] considèrent que la position d'ouverture est stable sur 70 % de la zone plastique monotone engendrée par le maximum (unique ou non).

**Légitimité de l'hypothèse.** Le modèle PREFFAS fait l'hypothèse que, de par l'aspect très perturbé des spectres aéronautiques, les surcharges sont nombreuses et répétitives à court terme. A. Davy et D. Aliaga considèrent donc que les spectres aéronautiques peuvent être simplifiés en une séquence représentative des niveaux de charges vus par les

structures aéronautiques répétée le long du spectre. Sous cette hypothèse, ils peuvent ainsi légitimement considérer un état stationnaire des effets d'interaction.

**Effets modélisés.** L'hypothèse de stationnarité des effets d'interaction permet de modéliser un état à surcharges multiples, pour lequel l'effet d'évanescence des maximums est négligé. D'une manière générale, l'évanescence de l'effet de surcharge porte sur la zone plastique monotone de surcharge et est atteinte lorsque la zone plastique générée par le cycle en cours, *i. e.* le cycle *i*, vient tangenter la zone plastique monotone de surcharge. Pour un état à surcharges multiples avec séquences courtes, la zone plastique monotone de surcharge est recréée avant que la zone plastique créée par le cycle *i* ne vienne la tangenter.

**Impact sur le calcul de l'avancée.** L'hypothèse de stationnarité qui est retenue dans le modèle PREFFAS nécessite d'avoir des séquences de chargement courtes pour lesquelles l'avancée de fissure est faible. Sur de telles séquences, on peut supposer que le facteur de forme  $F(a)$  reste constant et donc transformer l'équation (1.20) en :

$$\Delta a = \sum_{i=1}^{N_s} \delta a_i = C_{\text{eff}} [F(a_i) \sqrt{\pi a_i}]^m \sum_{i=1}^{N_s} [\Delta \sigma_{\text{eff}, i}]^m = C_{\text{eff}} [F(a_i) \sqrt{\pi a_i}]^m \text{EF} \quad (1.21)$$

ce qui permet de dissocier les effets du chargement des effets géométriques.

La quantité EF traduit les effets d'interaction de la séquence de chargement et les niveaux de contraintes  $\sigma_{\text{min}}$  et  $\sigma_{\text{max}}$  vus par la structure fissurée. Son calcul est réalisé cycle-à-cycle à partir des  $\Delta \sigma_{\text{eff}, i} = \sigma_{\text{max}, i} - \sigma_{\text{ouv}, i}$ . L'ouverture de chaque cycle  $\sigma_{\text{ouv}, i}$  exprimée en termes de contrainte est déterminée de la même manière que  $K_{\text{ouv}, i}$ , c'est-à-dire à partir des valeurs d'histoire exprimées en termes de contraintes  $\{\sigma H_{\text{max}} ; \sigma H_{\text{min}} ; \sigma H_{\text{ouv}}\}$ . EF est appelée *efficacité de la séquence*, [Ren90].

### 1.2.5.3 Résultat PREFFAS et algorithme

**Résultat PREFFAS.** Le modèle PREFFAS permet de calculer l'*efficacité de la séquence* EF à partir d'une séquence de chargement d'amplitude variable sur laquelle  $\Delta a$  est supposée petite. La donnée de EF permet de transformer la séquence de chargement d'amplitude variable en une séquence de chargement d'amplitude constante équivalente en termes d'avancée de fissure, c'est-à-dire qui donne la même avancée de fissure que le chargement d'amplitude variable avec la loi de Paris, voir figure 1.14.

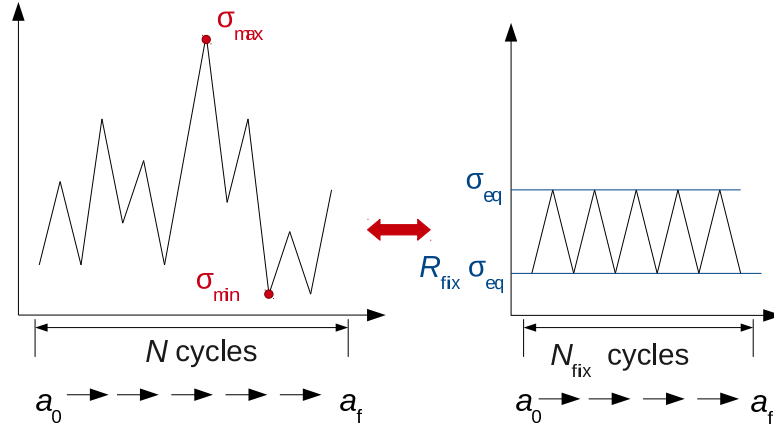


Figure 1.14 – Equivalence avec chargement d'amplitude constante avec PREFFAS.

Si l'on fixe le nombre de cycles  $N_{\text{fix}}$  de cette séquence d'amplitude constante ainsi que le rapport de charge  $R_{\text{fix}}$ , l'équivalence en termes d'avancée de fissure s'écrit :

$$\Delta a = C_{R_{\text{fix}}} [F(a)\sqrt{\pi a} (1 - R_{\text{fix}})\sigma_{\text{eq}}]^m N_{\text{fix}} = C_{\text{eff}} [F(a)\sqrt{\pi a}]^m \text{EF} \quad (1.22)$$

où  $\sigma_{\text{eq}}$  est la contrainte maximale du chargement équivalent à déterminer.

La contrainte  $\sigma_{\text{eq}}$ , appelée dans la suite *sévérité de la séquence*, est obtenue simplement à partir de l'expression (1.22) :

$$\sigma_{\text{eq}} = \left( \frac{\text{EF}}{N_{\text{fix}}} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{1}{U(R_{\text{fix}})(1 - R_{\text{fix}})} \quad (1.23)$$

Il est important de noter que la contrainte  $\sigma_{\text{eq}}$  ne dépend que du chargement et pas de la géométrie de la structure étudiée. Ce résultat de PREFFAS sert dans la suite pour la validation de la modélisation stochastique du chargement, basée sur des données enregistrées en vol.

**Temps de calcul.** La dissociation des effets du chargement des effets géométriques dans PREFFAS, rendue possible grâce à l'hypothèse de stationnarité, conduit à des procédures de calcul relativement simples et rapides, par comparaison à la méthode Strip Yield par exemple. L'efficacité EF est calculée à partir des valeurs d'ouverture de l'histoire du chargement  $KH_{\text{ouv}, n}$  et de la méthode Rainflow lorsque celle-ci s'avère nécessaire. En principe, elle ne devrait être calculée qu'une fois sur la séquence. Cependant pour initialiser les va-



leurs d'histoire de chargement  $KH_{ouv, n}$ , le calcul doit être effectué deux fois. L'efficacité de la séquence calculée la deuxième fois est ainsi correctement évaluée.

**Algorithme.** A partir d'une description complète de l'algorithme obtenue auprès de DGA/Techniques Aéronautiques dont la version correspond au PV Aérospatiale n°47904, le modèle PREFFAS, tel que présenté, a dû être programmé sous Matlab sous une forme vectorisée afin de rendre possible les calculs probabilistes menés dans la suite des travaux de thèse. Il est ainsi possible de traiter simultanément plusieurs chargements d'amplitude variable. La fonctionnalité de cette subroutine est donnée sur la figure 1.15.

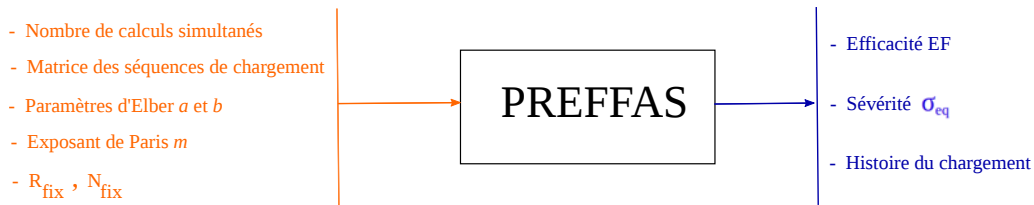


Figure 1.15 – Entrées/ sorties de la fonction PREFFAS.

### 1.2.6 Calibrage des paramètres du modèle

Le modèle PREFFAS conjointement utilisé avec la loi de Paris n'implique la détermination que de quatre paramètres, à savoir : l'exposant de la loi de Paris  $m$ , la constante de fissuration  $C_R$  et les coefficients de la relation d'Elber notés  $a$  et  $b$ . Les auteurs du modèle ont souhaité proposer un modèle assez général et facilement utilisable en contexte industriel, c'est-à-dire nécessitant peu d'essais pour le calibrer. Les paramètres ( $C_R$ ,  $m$ ,  $a$ ,  $b$ ) sont obtenus par trois essais, qui peuvent être réduits au nombre de deux tel qu'expliqué ci-après.

#### 1.2.6.1 Coefficients de la loi de Paris

Les coefficients  $C_R$  et  $m$  de la loi de Paris sont généralement donnés en aéronautique par un essai à chargement d'amplitude constante à  $R = 0.1$ .

#### 1.2.6.2 Paramètres de la loi d'ouverture d'Elber

L'obtention des paramètres  $a$  et  $b$  de la loi d'ouverture d'Elber, retenue dans le modèle PREFFAS et dont l'expression est rappelée ci-dessous, est donnée par un essai à surcharges

régulièrement espacées et un essai à rapport  $R$  élevé, en plus de l'essai à chargement d'amplitude constante servant à la détermination des coefficients de la loi de Paris.

$$U(R) = aR + b \tag{1.24}$$

En général, sur les alliages d'aluminium utilisés en aéronautique, l'hypothèse  $a + b = 1$  postulée par les auteurs du modèle PREFFAS permet d'éviter l'essai à fort rapport  $R$ , sans trop dégrader la qualité du modèle. Une méthode pour déterminer le coefficient  $b$  de la relation d'Elber est décrite en annexe A.

Les paramètres  $a$  et  $b$  dépendent du matériau mais aussi de l'épaisseur de la structure fissurée. Le tableau 1.2 ci-dessous extrait de [ADS88] donne l'évolution des valeurs du paramètre  $a$  en fonction de l'épaisseur pour des alliages d'aluminium.

Tableau 1.2 – Valeurs de  $a$  en fonction de l'épaisseur de la structure fissurée pour divers alliages d'aluminium.

Matériau	Valeur de $a$ ( $a + b = 1$ )				
	1 mm	...	8 mm	...	15 mm
2024 T3 et T351	$\approx 0.45$		$\approx 0.4$		$\approx 0.35$
7075/7010/7050 (T6... et T7...)		$\approx 0.35$		$\approx 0.25$	

Finalement deux essais simples à mettre en œuvre sont nécessaires pour calibrer les paramètres du modèle PREFFAS, ce qui est un avantage certain par rapport aux modèles concurrents. Pour plus de détails sur l'identification des paramètres  $a$  et  $b$ , le lecteur est entre autres invité à se référer aux travaux de thèse d'A. Davy [Dav85] pages 45 - 48 et pages 86 - 89.

### 1.2.7 Synthèse sur l'utilisation du modèle PREFFAS

Les différentes étapes d'utilisation du modèle PREFFAS pour la prévision de la fissuration sont :

1. **Le calibrage des paramètres** : deux essais au minimum doivent être menés pour déterminer les paramètres  $(C_R, m, a, b)$ .
2. **La donnée des séquences de chargement** : vérifier qu'elles satisfont à la condition de stationnarité, c'est-à-dire qu'elles sont relativement courtes.

3. **Le calcul de EF et  $\sigma_{eq}$**  : l'algorithme PREFFAS permet d'obtenir rapidement ces deux résultats après deux analyses répétées des chargements.
4. **L'intégration de la loi de Paris** : utilisation de la relation  $\frac{da}{dN} = C_R [F(a)\sqrt{\pi a}]^m [(1 - R)\sigma_{eq}]^m$  pour déterminer l'avancée de fissure  $a$  ou une durée de vie  $N$ .

## 1.2.8 Avantages et limites du modèle PREFFAS

### 1.2.8.1 Avantages

PREFFAS est un outil de prédiction de la fissuration qui peut être vu comme une approche intermédiaire entre les modèles simples à cumul linéaire et les modèles plus sophistiqués tels que Strip Yield qui peuvent traiter des chargements non-stationnaires, mais dont le contenu et le calibrage est difficilement maîtrisable. PREFFAS s'avère être pertinent pour les alliages d'aluminium utilisés en aéronautique.

Le modèle auquel nous avons eu accès par DGA/TA a été programmé de manière à pouvoir calculer simultanément l'avancée de fissure sous plusieurs chargements à des fins probabilistes, ce qui en fait un avantage principal par rapport à ses concurrents. La séparation des effets du chargement des effets géométriques conduit aussi à des économies de temps de calcul. Enfin, la maîtrise des paramètres du modèle, obtenus pour les exemples traités à partir de résultats d'essais menés par DGA/TA, rend son utilisation cohérente avec des analyses probabilistes.

### 1.2.8.2 Limites générales

Les principales limites du modèle PREFFAS sont les suivantes :

- L'évanescence des effets d'interaction n'est pas prise en compte puisque les spectres sont supposés stationnaires, *i.e* l'ouverture à un cycle donné ne dépend pas de l'avancée de fissure. Le modèle est fait pour des séquences de chargement courtes.
- Le modèle dans sa version actuelle ne permet donc pas de traiter le cas d'une surcharge unique.
- Le modèle PREFFAS n'est applicable qu'au domaine de fissuration de Paris pour lequel il est possible de définir une pente commune de fissuration  $m$  pour différents rapports  $R$  et lorsque les mécanismes de propagation sont dominés par la striation.

Si ce n'est pas le cas (coefficient  $m$  trop élevé par exemple ou vitesse de fissuration ne pouvant pas être approximée par une droite) les relations d'Elber et de Paris ne sont alors plus adaptées.

- Le modèle tel que présenté est développé pour une utilisation avec la loi de Paris. Les domaines de non-propagation de fissure et de propagation instable ne sont donc pas pris en compte.
- Toute loi de propagation non-linéaire autre que la loi de Paris pourrait être utilisée mais ne permettrait pas la séparation des effets du chargement des effets géométriques.
- L'effet de l'épaisseur sur les tailles de zone plastique et sur la transition  $DP \rightarrow CP$  se manifeste globalement par une modification de l'expression de  $U(R)$  contrairement aux modèles ONERA, CORPUS et Strip Yield qui calculent explicitement des tailles de zones plastiques.
- Les charges de compression ne sont pas prises en compte dans le modèle PREFFAS en raison du choix de la relation  $U(R)$  pour le calcul de l'ouverture ce qui impose une troncature des spectres à zéro. Une version de PREFFAS a été proposée par EADS (non diffusée) pour intégrer le calcul de l'ouverture pour des charges de compression.
- La prévision donnée par PREFFAS n'est pas correcte lorsque la fissure se propage par déchirure ductile, c'est-à-dire lorsque  $K_{\max}$  est de l'ordre du facteur d'intensité de contrainte critique  $K_{Ic}$ .

### 1.2.8.3 Spécificités liées aux analyses probabilistes

Ces travaux de thèse s'inscrivent dans le cadre d'une approche probabiliste de la propagation de fissure où l'effort est en particulier porté sur la modélisation stochastique du chargement en fatigue à partir de mesures en vol. Les modèles de chargement proposés au chapitre 3 permettent ainsi de générer des spectres de chargement aléatoires sur l'ensemble de la durée de vie de la structure. Ces spectres ne peuvent cependant pas être traités par le modèle PREFFAS dans son état actuel, qui impose des spectres de chargement définis par un grand nombre de répétitions d'une même séquence de chargement. Cette pratique courante (voire unique) en tolérance aux dommages déterministe n'est plus recevable pour des analyses probabilistes, faisant intervenir des hypothèses moins restrictives (chargements aléatoires sur la totalité de leur longueur).

De ce fait, il est envisagé d'utiliser le modèle PREFFAS pour valider le modèle stochas-

tique du chargement proposé dans cette thèse de part sa compatibilité avec des analyses probabilistes d'un point de vue temps de simulation. Il est cependant aussi envisagé de suggérer des pistes d'évolution du modèle afin de remédier à la limitation de la répétitivité des spectres et ainsi pouvoir traiter des spectres aléatoires sur l'ensemble de leur longueur, générés avec les modèles proposés.

### 1.3 Modèle PREFFAS modifié - PREFFAS- $m$

L'objet de cette section est de présenter les évolutions apportées au modèle PREFFAS, pour en faire un modèle utilisable avec des chargements non répétitifs, c'est-à-dire un modèle qui calcule l'avancée cycle-à-cycle sans présager des cycles à venir. L'idée principale est de pouvoir traiter les spectres non-stationnaires avec le modèle PREFFAS- $m$  sans augmenter le nombre de paramètres à calibrer et sans trop élever le degré de complexité de la méthode initiale. Le phénomène de retard différé après surcharge unique n'est donc pas modélisé et la loi d'ouverture d'Elber est conservée.

#### 1.3.1 Modifications apportées

Les modifications apportées doivent permettre une prise en compte de l'évanescence de l'effet d'histoire lorsque la fissure progresse. Ainsi, si l'on considère une surcharge, l'effet de retard engendré par cette surcharge doit s'atténuer au fur et à mesure de la progression de la fissure. Il y a lieu de tenir compte de l'atténuation de l'effet de cette surcharge d'un point de vue retard mais également d'un point de vue Rainflow lorsque le chargement dépasse cette surcharge. Rappelons que le Rainflow permet de déterminer l'ouverture du cycle courant  $i$  et permet un calcul conservatif de l'avancée de fissure.

De plus, puisqu'une surcharge peut "s'effacer" lorsqu'elle ne s'est pas reproduite suffisamment souvent, cela nous amène à considérer naturellement le cas d'une surcharge unique alors que le modèle PREFFAS ne traite que le cas de surcharges multiples (*i.e.* répétées).

Nous sommes donc amenés à résoudre les deux problèmes suivants :

- l'évanescence du retard avec adaptation pour le Rainflow, et
- la variation des effets de retard en fonction du nombre de surcharges.

### 1.3.1.1 Évanescence de l'effet d'histoire

L'effet d'évanescence peut être traité de deux façons différentes :

- La première façon consiste à considérer que la physique des mécanismes est gérée par la plasticité en avant du front de fissure comme dans les modèles de Wheeler et Willenborg. L'évanescence est dans ce cas gouvernée par les tailles de zones plastiques engendrées par la surcharge et le cycle en cours, voir figure 1.5.
- La deuxième manière de traiter l'effet d'évanescence est de considérer que c'est l'allongement résiduel dans le sillage qui contrôle l'ouverture  $K_{ouv}$ . L'évanescence est ici pilotée par les déplacements verticaux des lèvres de la fissure, *crack opening displacement* en anglais. Le modèle Strip Yield s'appuie sur cette physique.

Afin d'être cohérent avec le modèle PREFFAS pour lequel les effets de retard sont gouvernés par la plasticité en avant du front de fissure et par souci de simplicité, nous supposons que l'évanescence du retard est aussi gérée par la plasticité en avant du front de fissure, voir figure 1.16.

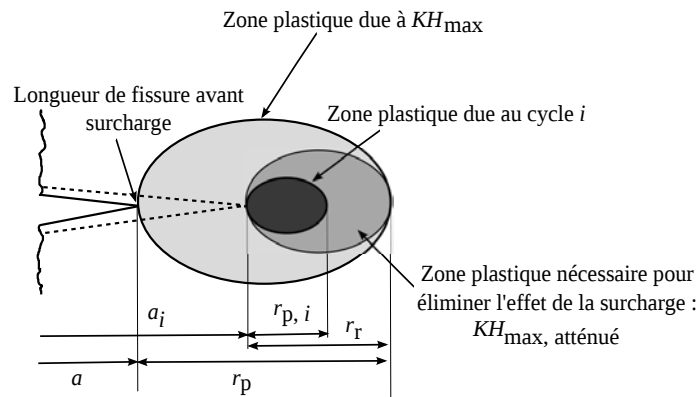


Figure 1.16 – Zone plastique résiduelle après avancée de fissure.

**Évanescence des effets d'interaction, diminution du point d'ouverture.** L'évanescence est ainsi simplement décrite par la soustraction de l'avancée de fissure à la taille de la zone plastique initiale. Les valeurs significatives d'histoire  $KH_{max}$  pourront être corrigées, en conséquence, en considérant la zone plastique résiduelle  $r_r$  de la manière suivante :

$$r_r = r_p - \delta a \quad (1.25)$$

où  $\delta a = a_i - a$

avec :

$$r_p = \frac{1}{\pi} \left( \frac{KH_{\max}}{\sigma_y} \right)^2 \quad \text{et} \quad r_r = \frac{1}{\pi} \left( \frac{KH_{\max, \text{attenué}}}{\sigma_y} \right)^2 \quad (1.26)$$

De l'équation (1.26), on déduit :

$$KH_{\max, \text{attenué}} = (KH_{\max}^2 - \beta \delta a)^{1/2} \quad (1.27)$$

où le coefficient  $\beta$  dépend de l'état de contraintes (contraintes planes ou de déformations planes).

Tous les paramètres d'histoire  $KH_{\max}$  enregistrés dans PREFFAS-*m* sont ainsi atténués au fur et à mesure de l'avancée de fissure  $a$  et, comme pour les modèles de Wheeler et Willenborg, l'évanescence totale d'une surcharge se produit lorsque la zone plastique du cycle courant vient tangenter la zone plastique créée par cette surcharge.

Dans cette correction, il n'y a pas lieu d'inclure les valeurs d'histoire  $KH_{\min}$ . En effet, si le facteur d'intensité de contrainte  $KH_{\min}$  se produit après la valeur  $KH_{\max}$  sans qu'il n'y ait eu une propagation significative depuis l'apparition de cette valeur  $KH_{\max}$ , alors l'ouverture  $KH_{\text{ouv}}$  est calculée comme dans le modèle PREFFAS par  $KH_{\max}$  et  $KH_{\min}$ . L'effet d'évanescence est ensuite décrit par l'atténuation de  $KH_{\max, \text{attenué}}$  et  $KH_{\text{ouv}}$  est calculé avec la relation d'Elber  $U(R)$  à partir de  $KH_{\max, \text{attenué}}$  et  $KH_{\min}$ . S'il y a eu une propagation significative depuis l'apparition de  $KH_{\max}$ , l'effet d'évanescence intervient dès le début par le calcul de  $KH_{\max, \text{attenué}}$  et  $KH_{\text{ouv}}$  est calculé avec la relation d'Elber  $U(R)$  à partir de  $KH_{\max, \text{attenué}}$  et  $KH_{\min}$ .

Dans une première approche, on suppose que  $\beta$  est piloté en CP et que par conséquent  $\beta = \pi \sigma_y^2$  où  $\sigma_y$  représente la limite d'élasticité du matériau.

**Anticipation de l'effet Rainflow.** Avec l'atténuation de l'effet d'histoire, c'est-à-dire la diminution des valeurs  $KH_{\max}$ , il y a lieu de considérer que l'effet Rainflow intervient plus tôt dans les calculs d'avancée. Les calculs d'avancée de fissure se font donc à partir de la série des valeurs  $KH_{\max, \text{attenués}}$  et des  $KH_{\text{ouv}}$  correspondants.

### 1.3.1.2 Variation du nombre de surcharges

Afin de traiter l'effet du nombre de surcharges sur le phénomène de fissuration, la notion de *taux de blocage* est introduite. Une surcharge est considérée comme bloquante pour l'avancée de fissure lorsque son taux conduit à des vitesses de propagation inférieures à  $10^{-10}$  m/cycle, [FNF05]. Ce taux de surcharge est alors défini comme étant le taux de blocage.

Le taux de surcharge qui bloque l'avancée de fissure diffère s'il s'agit d'une surcharge unique ou d'un cas à surcharges multiples. Pour les alliages d'aluminium et selon des constatations expérimentales, D. Aliaga rappelle que le taux de blocage de la fissure est proche de  $\tau = 2.5$  dans le cas d'une surcharge unique alors qu'il est de  $\tau = 2$  dans le cas d'un grand nombre de surcharges. Il y a donc lieu de prendre en compte cette différence pour le calcul du point d'ouverture qui est plus faible dans le cas de la surcharge unique que dans le cas de surcharges répétées.

Afin de tenir compte de l'effet dû à une seule surcharge, il est ainsi proposé d'affecter un abattement du niveau de la surcharge  $K_{\max}$  pour le calcul de  $K_{\text{ouv}}$ . Nous appelons  $KH_{\text{réduit}}$  cette nouvelle variable.  $KH_{\text{réduit}}$  est actualisé par la relation suivante :

$$KH_{\text{réduit}} = KH_{\text{réduit, antérieur}} + \frac{2}{3} (K_{\max} - KH_{\text{réduit, antérieur}}) \quad (1.28)$$

Cette réduction s'applique à chaque fois que  $K_{\max}$  dépasse  $KH_{\text{réduit, antérieur}}$ , c'est-à-dire que le niveau  $K_{\max}$  est considéré comme surcharge unique lorsqu'il dépasse ce seuil qui est croissant à chaque surcharge.

Le coefficient  $2/3$  est choisi de telle sorte que les problèmes à surcharge unique et à surcharges multiples soient équivalents en termes de méthode de calcul de l'ouverture. En effet, soit un chargement d'amplitude constante à  $R = 0$  tel que  $K_{\max} = k$  et  $K_{\min} = 0$ . Lorsque l'on fait une seule surcharge à  $2.5k$ , cela équivaut à  $n$  surcharges au taux de  $2k$  :

$$KH_{\text{réduit}} = k + \frac{2}{3} (2.5k - k) \text{ soit } KH_{\text{réduit}} = 2k \quad (1.29)$$

Il s'agit d'une relation empirique pour les seuls alliages d'aluminium. Il y aurait lieu de la modifier pour les alliages de titane et les aciers.

C'est la valeur de  $KH_{\text{réduit}}$  calculée à l'aide de la relation (1.29) qui est utilisée pour le calcul de l'ouverture. Cette relation d'équivalence permet de conserver la relation d'ouverture d'Elber  $U(R)$ . Il est important de noter que la valeur de  $KH_{\text{réduit}}$  est toujours inférieure à la première valeur d'histoire  $KH_{\max, 1}$ . De plus  $KH_{\text{réduit}}$  est atténué lors de



la propagation de fissure comme l'ensemble des valeurs significatives d'histoire  $KH_{\max}$ , c'est-à-dire avec la relation (1.27).

### 1.3.1.3 Algorithme

Dans cette section, un cycle  $i$  est composé d'un minimum noté  $K_{\min, i-1}$  et d'un maximum noté  $K_{\max, i}$ .

Le schéma simplifié des modifications apportées au modèle PREFFAS-*m* est proposé en figure 1.17. Les cases de couleur permettent de visualiser les principales différences entre le modèle PREFFAS initialement proposé et le modèle PREFFAS-*m*.

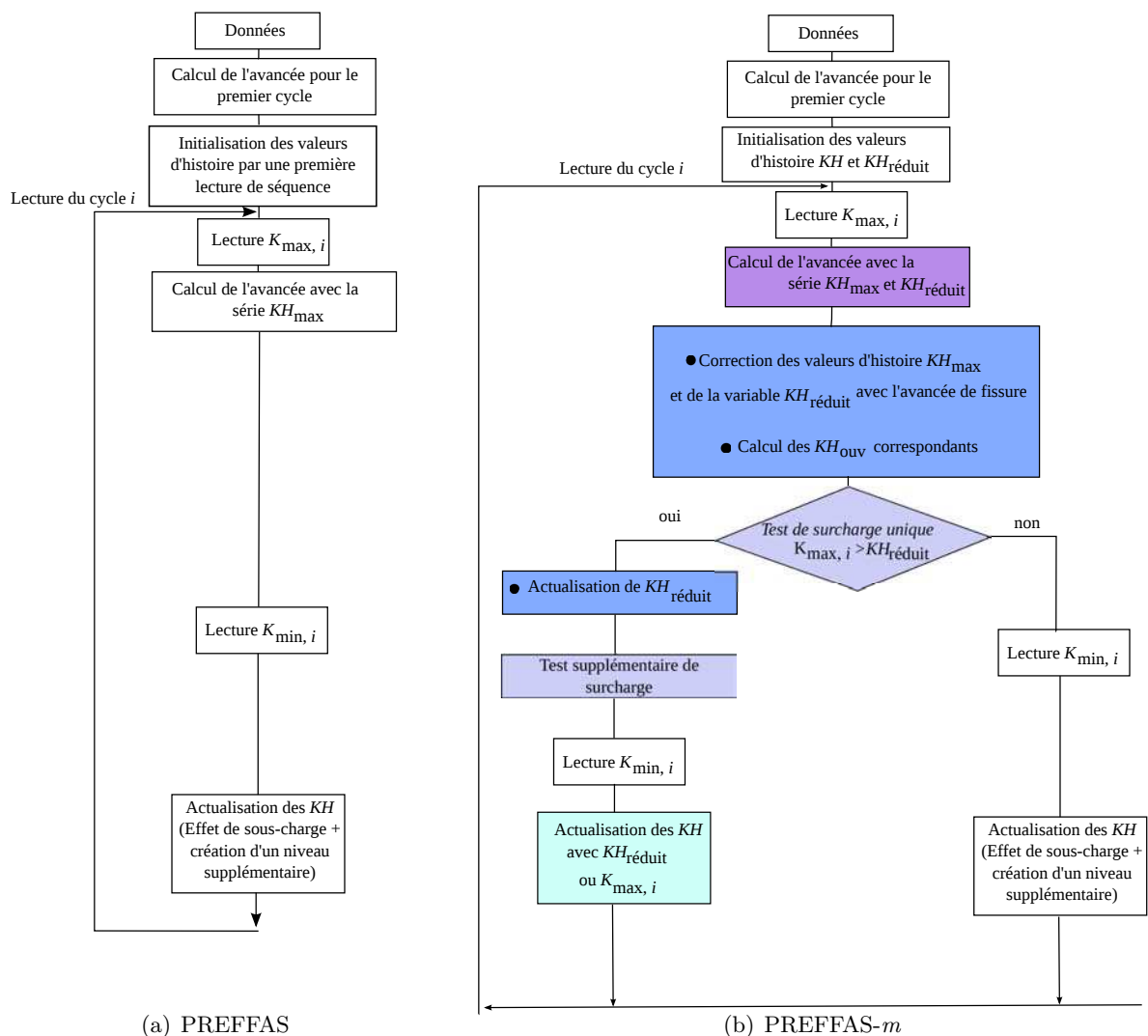


Figure 1.17 – Schéma simplifié des modifications apportées à PREFFAS-*m*.

L'annexe B donne les détails des modifications algorithmiques apportées afin de prendre en compte l'effet d'évanescence et l'effet de surcharge unique, suivant les différentes configurations possibles de chargement.

### 1.3.2 Limites

Les évolutions proposées pour le modèle PREFFAS modélisent de manière simplifiée l'évanescence de l'effet de surcharge et l'effet à surcharge unique par comparaison avec les modèles Strip Yield et incrémental de S. Pommier qui s'appuient sur une physique des phénomènes.

Certains phénomènes tels que le retard différé ne sont par ailleurs pas explicitement pris en compte. On pourrait également remettre en question le choix de la relation d'Elber pour le calcul de l'ouverture dans le cas d'une surcharge unique malgré le principe d'équivalence adopté entre surcharges multiples et surcharge unique. Une autre limitation du modèle réside dans le calibrage du nouveau paramètre  $\beta$  qui intervient dans le calcul des zones plastiques. Dans un premier temps, on a choisi de modéliser un état dominé en contraintes planes. On pourrait également envisager de proposer une valeur limite pour un état dominé en déformations planes ainsi qu'une relation de transition des contraintes planes aux déformations planes comme c'est le cas dans les modèles ONERA et CORPUS.

### 1.3.3 Comparaison entre PREFFAS-*m* et PREFFAS

Le modèle PREFFAS-*m* s'intègre pleinement dans la philosophie initiale du modèle PREFFAS en s'appuyant sur des principes simples pour traiter l'évanescence et le cas à surcharge unique. Les modifications apportées sont par ailleurs cohérentes avec les principes de base de PREFFAS, à savoir : une physique gérée par la plasticité en pointe de fissure, l'utilisation de la relation d'Elber et le comptage Rainflow.

Dans le cas de surcharges multiples rapprochées, il est important de souligner que PREFFAS-*m* doit être équivalent à PREFFAS. Cependant, dans le cas d'un calcul d'une séquence répétitive, PREFFAS-*m* donne des résultats différents de PREFFAS même si l'évanescence est négligeable tant que le maximum de la séquence ne s'est pas reproduit.

Une différence majeure entre les deux modèles se situe au niveau de la mise en œuvre. Le modèle PREFFAS-*m* proposé ne repose plus sur l'hypothèse de stationnarité et donc la dissociation entre les effets de la géométrie et ceux du chargement n'est plus possible. Les calculs menés avec le modèle PREFFAS-*m* sont donc plus longs que ceux menés avec PREFFAS pour des chargements identiques et spécifiques à une structure donnée. Cependant, le modèle PREFFAS-*m* permet de traiter des spectres de chargement aléatoires

sur l'ensemble de leur longueur ce qui n'est pas possible avec le modèle PREFFAS.

## 1.4 Analyse du modèle PREFFAS- $m$

Les modifications apportées au modèle PREFFAS- $m$  ont été développées afin de traiter des séquences de chargement non-répétitives. Après implémentation du modèle PREFFAS- $m$  sous Matlab sous une version vectorisée, c'est-à-dire afin de traiter simultanément plusieurs chargements d'amplitude variable, l'objectif est d'analyser la pertinence des modifications proposées.

### 1.4.1 Analyse des résultats obtenus par simulations

Dans un premier temps et en l'absence de résultats expérimentaux, des simulations avec le modèle PREFFAS- $m$  sont réalisées. Des simulations avec les mêmes chargements sont également réalisées, pour comparaison avec le modèle PREFFAS. L'objectif est de vérifier qualitativement les effets des nouvelles implémentations du modèle PREFFAS- $m$  pour des chargements simplifiés dont les caractéristiques sont spécifiées au paragraphe 1.4.1.1.

#### 1.4.1.1 Définition de la structure étudiée

**Éprouvette et matériau.** Les simulations ont été réalisées sur des éprouvettes standards ASTM CT20B10 ( $W = 40$  mm,  $B = 10$  mm,  $D = 10$  mm,  $a_0 = 12$  mm) en alliage d'aluminium 2024-T351 prélevées dans le sens long-travers (LT).

Le facteur d'intensité de contrainte est calculé en utilisant la formule de la norme ASTM E647 :

$$K(a) = \frac{P}{B\sqrt{W}} \frac{(2 + a/W)}{(1 + a/W)^{3/2}} \left[ 0.886 + 4.64 (a/W) - 13.32 (a/W)^2 + 14.72 (a/W)^3 - 5.6 (a/W)^4 \right] \quad (1.30)$$

Les propriétés du matériau extraites de la note technique n°5/M/90 [Ren90] sont reportées dans le tableau 1.3 ci-dessous. L'amplitude de variation du facteur d'intensité de contraintes  $\Delta K$  est homogène à des  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  et les vitesses  $da/dN$  sont données en mm/cycle.

Tableau 1.3 – Propriétés matériau de l'éprouvette CT.

Limite d'élasticité	$\sigma_y = 312 \text{ MPa}$
Coefficients de Paris	$C_R = 3.26 \cdot 10^{-8}$ , $m = 3.42$
Coefficients d'Elber	$a = 0.39$ , $b = 0.61$

D'après cette même note technique, les coefficients d'Elber  $a$  et  $b$  ont été calibrés par un essai à chargement d'amplitude constante de rapport  $R = 0.1$  et un essai à surcharges répétées à taux  $\tau = 1.7$ , espacées tous les  $n = 1000$  cycles. Nous disposons des courbes  $\frac{da}{dN} = f(\Delta K)$  pour ces deux essais.

**Chargements.** Afin d'étudier le comportement du modèle PREFFAS- $m$ , des chargements d'amplitude variables (AV) simplifiés sont appliqués aux éprouvettes CT :

- type I : séquences de chargement d'amplitude constante (AC) avec surcharges périodiques,
- type II : séquences de chargement d'amplitude constante (AC) avec sous-charges périodiques,
- type III : séquences de chargement d'amplitude constante (AC) avec sous-charges et surcharges périodiques,
- type IV<sup>3</sup> : séquences de chargement d'amplitude constante (AC) avec surcharges et sous-charges périodiques.

Un essai à chargement d'amplitude constante et un essai sous spectre FALSTAFF sc (sans compression) sont également considérés. L'effort de la sollicitation appliquée est  $P = 310 \text{ daN}$  conformément à la note technique de référence.

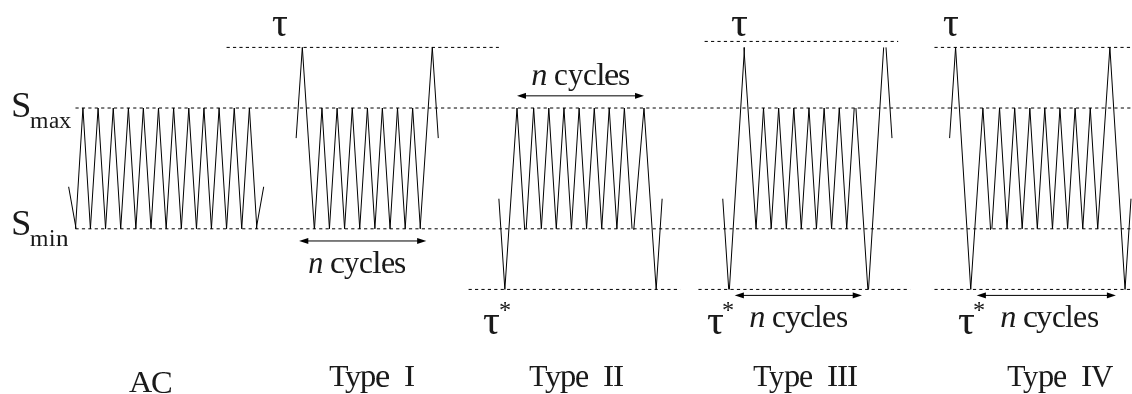
Les caractéristiques des séquences normalisées étudiées sont données dans le tableau 1.4.

---

<sup>3</sup>Dans la suite on appelle interaction une surcharge suivie d'une sous-charge ou une sous-charge suivie d'une surcharge.

Tableau 1.4 – Propriétés des séquences de chargement étudiées.

Type de chargement	cycles de référence			$n$	$\tau$	$\tau^*$	$S_{\max}$ (F sc)
	$S_{\max}$	$S_{\min}$	$R$				
AC	1	0.1	0.1	-	-	-	-
AV Type I	1	0.1	0.1	1000	1.2; 1.5; 1.7; 1.9	-	-
	1	0.1	0.1	1000	2	-	-
	1	0.1	0.1	1000	2.5	-	-
	1	0.1	0.1	10000	1.2; 1.5; 1.7; 1.9	-	-
	1	0.1	0.1	10000	2	-	-
	1	0.1	0.1	10000	2.5	-	-
	1	0.1	0.1	20000	1.2; 1.5; 1.7; 1.9	-	-
	1	0.1	0.1	20000	2	-	-
	1	0.1	0.1	20000	2.5	-	-
Type II	1	0.1	0.1	1000	-	0	-
	1	0.1	0.1	1000	-	0.5	-
	1	0.1	0.1	10000	-	0	-
	1	0.1	0.1	10000	-	0.5	-
	1	0.1	0.1	20000	-	0	-
	1	0.1	0.1	20000	-	0.5	-
Types III - IV	1	0.1	0.1	1000	1.7	0	-
	1	0.1	0.1	1000	1.7	0.5	-
	1	0.1	0.1	1000	2	0	-
	1	0.1	0.1	10000	1.7	0	-
	1	0.1	0.1	10000	1.7	0.5	-
	1	0.1	0.1	10000	2	0	-
	1	0.1	0.1	20000	1.7	0	-
	1	0.1	0.1	20000	1.7	0.5	-
	1	0.1	0.1	20000	2	0	-
FALSTAFF sc (F sc)	-	-	-	-	-	-	1



**Résultats de la propagation de fissure** Deux résultats peuvent être obtenus à la fin d'une analyse en propagation de fissure :

- la longueur de fissure  $a_f$ , pour un nombre de cycles en entrée imposé,
- le nombre de cycles  $N$  nécessaire pour propager d'une fissure initiale de longueur  $a_0$  jusqu'à une longueur finale  $a_f$ . On choisit ici  $a_0 = 12$  mm et  $a_f = 30$  mm.

#### 1.4.1.2 Analyse qualitative du comportement de PREFFAS- $m$

Les principaux effets modélisés dans PREFFAS- $m$  sont étudiés, à savoir l'effet d'éva-  
nescence des surcharges et la variation du nombre de surcharges (surchage unique et  
surchages multiples). Une analyse par type de chargement appliqué est réalisée ci-dessous.

**Chargement d'amplitude constante - AC.** Le calcul de la durée de vie  $N$  (pour  
 $a_f = 30$  mm) sous chargement d'amplitude constante (AC) avec d'une part la loi de Paris  
(relation 1.1) et d'autre part le modèle PREFFAS- $m$  donne des résultats très proches.  
PREFFAS- $m$  sous-estime de 0.66% la durée de vie  $N_{\text{Paris}} = 113815$  cycles. Les écarts  
relatifs<sup>4</sup> entre la longueur de fissure obtenue avec le modèle Paris (cas R) et la longueur  
de fissure simulée avec le modèle PREFFAS- $m$  (cas S) sont tracés en fonction de l'avancée  
de fissure.

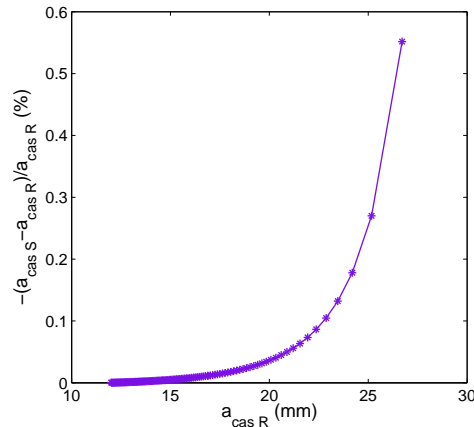


Figure 1.18 – Valeur signée de l'erreur relative (en %) de l'avancée de fissure entre la loi de Paris (cas R) et le modèle PREFFAS- $m$  (cas S).

D'après la figure 1.18, l'écart cumulé augmente rapidement avec la longueur de fissure lorsque l'on approche la durée de vie de l'éprouvette. Le paramètre de surcharge unique

<sup>4</sup>L'écart relatif entre deux calculs, l'un dit de référence (cas R) et l'autre de simulation (cas S) est défini par  $(\bullet_{\text{cas S}} - \bullet_{\text{cas R}}) / \bullet_{\text{cas R}}$ .

$KH_{\text{réduit}}$  est fortement atténué avec l'avancée de fissure pour les grandes longueurs de fissure et l'ouverture (calculée à partir de  $KH_{\text{réduit}}$ ) est donc plus basse dans le modèle PREFFAS-*m*. Une part plus importante de l'amplitude des cycles contribue donc à l'avancée de fissure pour le modèle PREFFAS-*m* par rapport au modèle de Paris. L'écart relatif final de  $-0.66\%$  correspond à un cumul des écarts lors de l'avancée de fissure.

**Chargement AV effet de surcharge - type I.** L'effet de surcharge se manifeste par une diminution brutale de la vitesse de fissuration et donc un ralentissement de l'avancée de fissure, comme illustré sur les schémas 1.19.

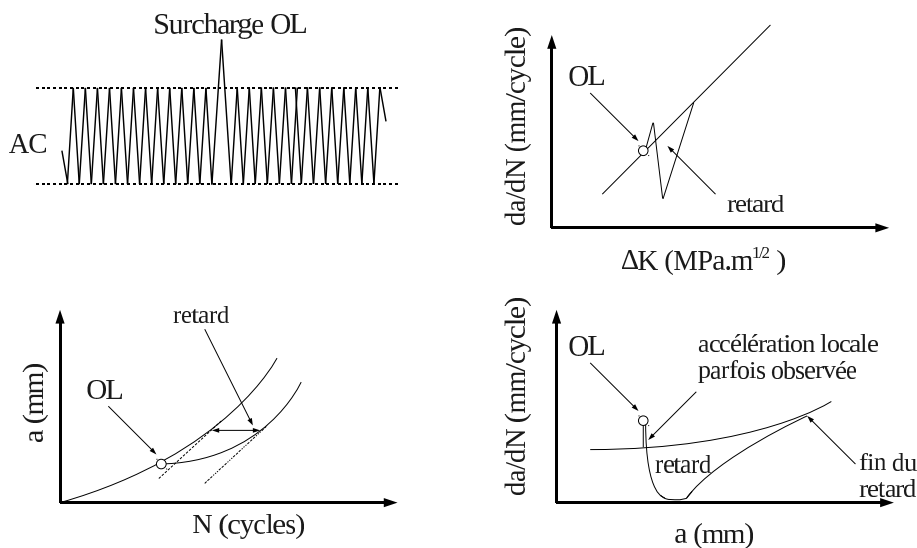


Figure 1.19 – Effet d'une surcharge dans un chargement d'amplitude constante (AC).

*Effet du taux de surcharge - variation du nombre de surcharges.*

L'intensité du retard, définie par le nombre de cycles après surcharge nécessaire pour retrouver la vitesse de fissuration avant surcharge, est une fonction croissante du taux de la surcharge appliquée  $\tau$ . Le modèle PREFFAS-*m* prend bien en compte le niveau de surcharge appliqué  $\tau$  en ralentissant en conséquence la progression de la fissure par rapport au chargement (AC) comme illustrée sur la figure 1.20.

Dans le modèle PREFFAS-*m*, il est fait l'hypothèse, pour des alliages d'aluminium, que le taux de blocage de la fissure est voisin de  $\tau = 2$  dans le cas de surcharges multiples alors qu'une fissure se bloque après application d'une surcharge unique au taux de  $\tau = 2.5$ .

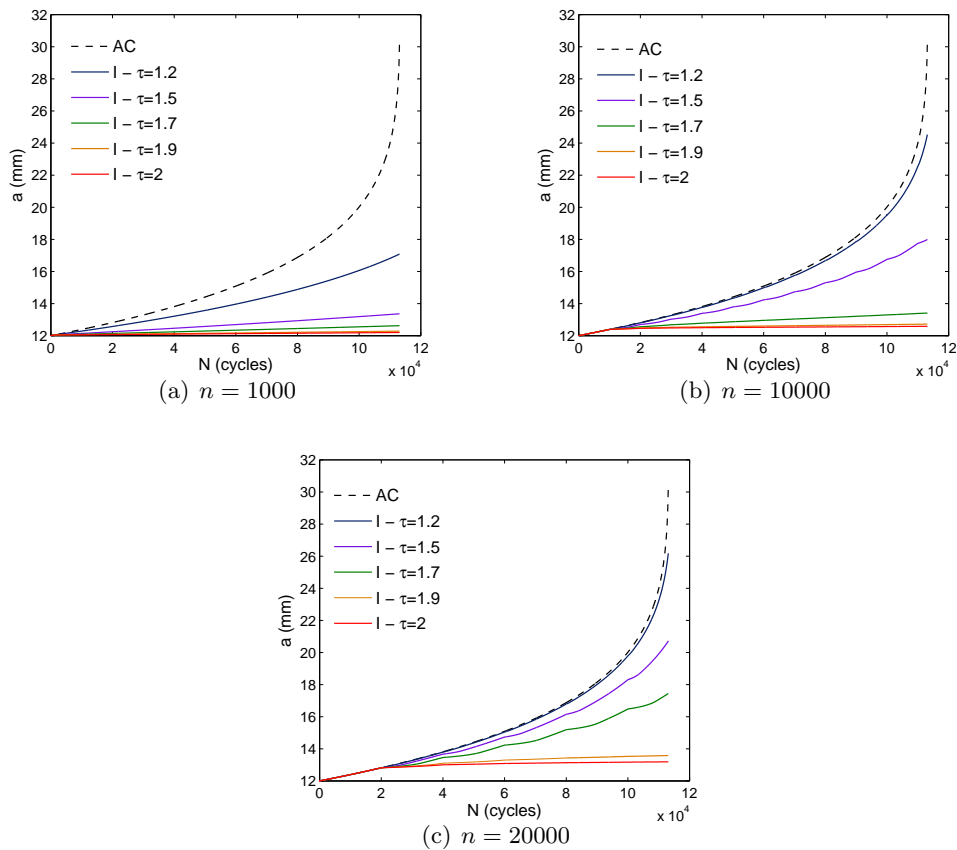


Figure 1.20 – Evolution de l'avancée de fissure pour différents taux de surcharge et un espacement variable des surcharges tous les  $n$  cycles.

Lors des simulations avec PREFFAS- $m$ , la fissure ne progresse seulement que d'environ 0.1 mm pour  $10^6$  cycles appliqués dans le cas d'une surcharge grandement espacée (ex :  $n = 20000$  cycles) au taux  $\tau = 2.5$ , voir tableau 1.5. La vitesse de propagation chute à  $10^{-13}$  mm/cycle après application d'une telle surcharge, voir figure 1.22(a).

Tableau 1.5 – Avancée de fissure  $a_f$  (mm) pour  $10^6$  cycles appliqués.

chargement	$n$ (cycles)		
	1000	10000	20000
Type I - $\tau = 2$	13.645	13.748	14.711
Type I - $\tau = 2.5$	13.11	12.508	12.901
avancée avant la 1 <sup>ère</sup> surcharge	12.037	12.390	12.816

Dans le cas de surcharges répétées rapprochées ( $n = 1000$  cycles), le taux de blocage est supposé de  $\tau = 2$  dans le modèle PREFFAS- $m$ . Il est difficile de prédire précisément le taux



de blocage dans ce cas là, car les surcharges régulièrement appliquées et apparaissant donc en grand nombre ont certes un effet retardateur mais permettent aussi une progression de l'avancée plus rapide que les cycles courants lorsqu'elles apparaissent, voir figure 1.22(b). Ceci explique les avancées  $a_f = 13.645$  mm pour  $\tau = 2$  et  $a_f = 13.110$  mm pour  $\tau = 2.5$ . Étant données ces valeurs et la vitesse minimale proche de  $10^{-6}$  mm/cycle pour  $\tau = 2$ , le taux de blocage semble être légèrement supérieur à 2 pour obtenir une vitesse inférieure à  $10^{-7}$  mm/cycle, souvent considérée comme seuil de non-propagation pour des fissures longues [FNF05].

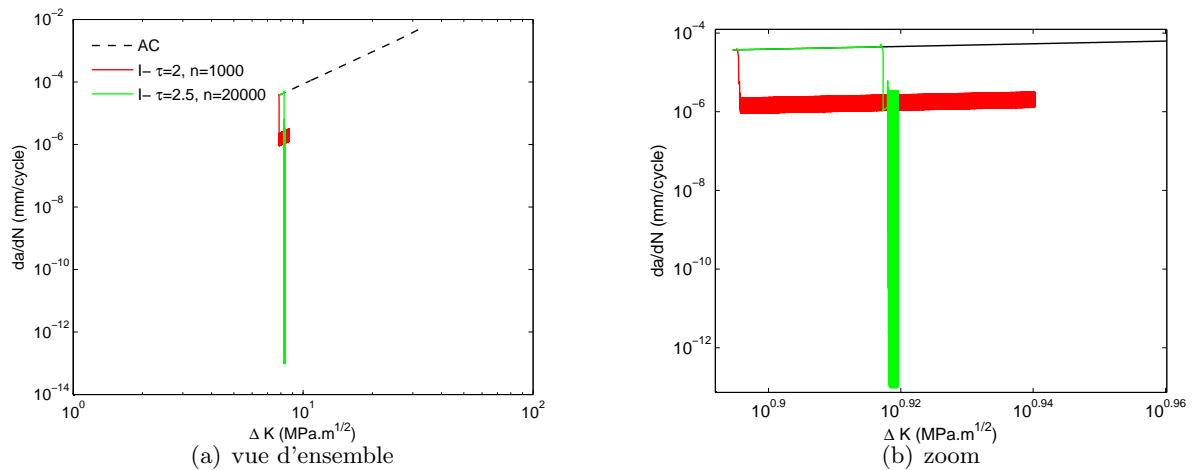


Figure 1.21 – Vitesse de propagation pour taux de surcharge blocant.

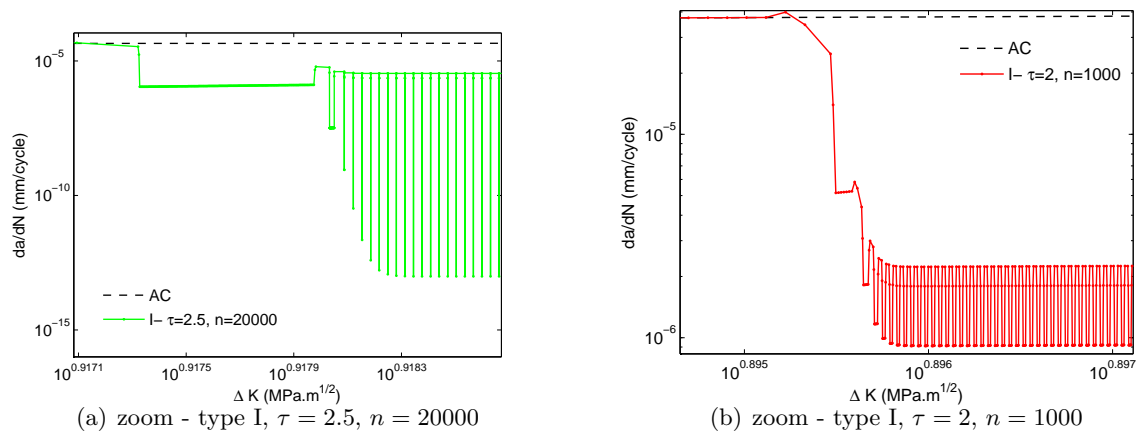


Figure 1.22 – Vitesse de propagation pour taux de surcharge blocant.

Pour conclure, les taux de blocage choisis dans le modèle PREFFAS- $m$  de  $\tau = 2$  et  $\tau = 2.5$  dans les cas respectifs de surcharges multiples et de surcharge unique sont rela-

vement bien retrouvés par simulations. Il faudra cependant confirmer ces valeurs par des résultats expérimentaux.

*Effet d'évanescence.*

Une surcharge, si elle n'est pas répétée suffisamment tôt, est dite évanescente lorsque la fissure a traversé la zone plastique engendrée par cette surcharge, ce qui se traduit par un retour à la vitesse normale de fissuration avant une nouvelle surcharge. Le modèle PREFFAS- $m$  traduit bien cet effet d'évanescence lorsque les surcharges sont suffisamment éloignées. Pour un taux de surcharge  $\tau = 1.7$ , l'évanescence complète de la surcharge est ainsi observée après environ 15000 cycles, voir figures 1.23(b) et 1.23(c). Pour un taux de surcharge de  $\tau = 1.2$  (respectivement de  $\tau = 1.5$  et  $\tau > 1.7$ ), il y a évanescence complète de la surcharge lorsque  $n < 5000$  (respectivement  $n \simeq 10000$  et  $n > 20000$ ), voir figure 1.20.

Pour un même taux de surcharge  $\tau = 1.7$ , les rapports des durées de vie entre le chargement d'amplitude constant et le chargement d'amplitude variable avec espacement tous les  $n$  cycles varient entre 7.5 ( $n = 1000$ ) et 1.29 ( $n = 20000$ ), d'où l'importance de modéliser cet effet, voir figure 1.23(a).

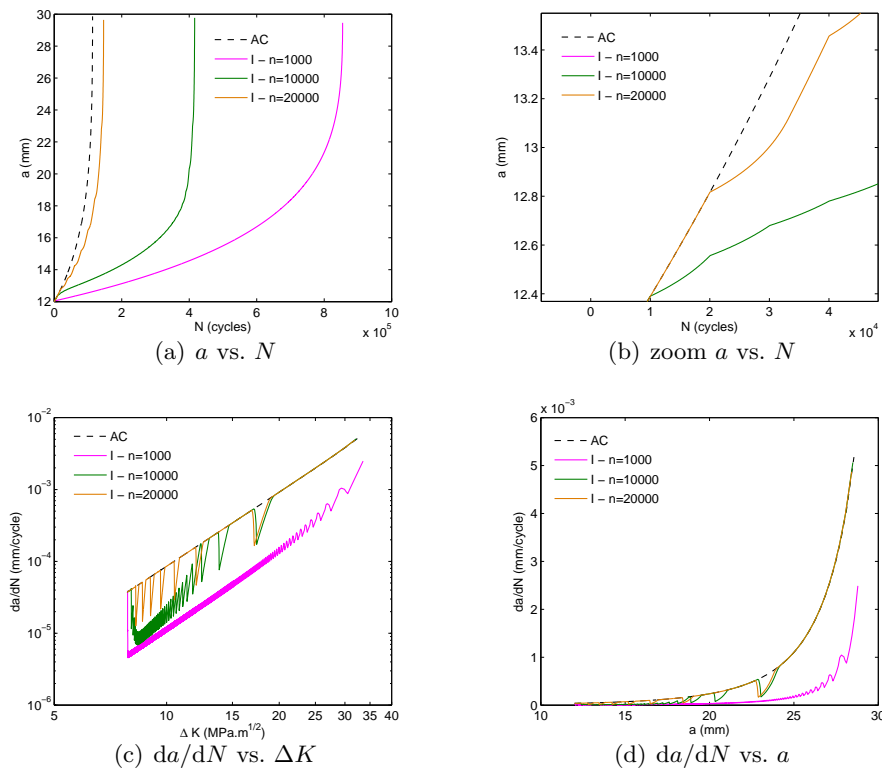


Figure 1.23 – Avancée de fissure et vitesse de propagation pour différents espacements des surcharges à taux  $\tau = 1.7$ .

**Chargement AV effet de sous-charge - type II.** Pour les deux niveaux de sous-charges testés  $\tau^* = \{0; 0.5\}$  et quelle que soit la fréquence de la sous-charge  $n = \{1000; 10000; 20000\}$ , les calculs de durée de vie avec ou sans sous-charges sont extrêmement proches, voir tableau 1.6. La sous-charge seule (qui reste positive) n'a donc pas d'effet sur les cinétiques de fissuration.

Tableau 1.6 – Durées de vie  $N$  pour les chargements d'amplitude constante et les chargements avec sous-charges.

chargement	$n$ (cycles)	1000	10000	20000
	AC			113063
Type II - $\tau^* = 0$		113045	113061	113062
Type II - $\tau^* = 0.5$		113053	113062	113062

**Chargement AV effets combinés - types III - IV.** Il est ici redémontré, à travers le modèle PREFFAS- $m$ , qu'une sous-charge associée à une surcharge a significativement un effet réducteur du retard lorsqu'elle succède à la surcharge (cas de chargement type IV), voir tableau 1.7 et figure 1.24. En effet, une réduction entre 9% et 40% est estimée pour cet exemple avec  $\tau = 1.7$  et  $\tau^* = 0$ . L'effet de retard est également fonction du taux de sous-charge  $\tau^*$ , voir tableau 1.7. Dans certains cas, la sous-charge peut même complètement annuler l'effet de la surcharge.

Lorsque la sous-charge précède la surcharge (cas de chargement type III), les cinétiques de fissuration sont extrêmement voisines de celles du cas de chargement avec surcharge seule (cas de chargement type I). La sous-charge n'a pas d'effet dans ce cas là.

Tableau 1.7 – Durées de vie  $N$  pour les chargements d'amplitude variable type I, III et IV.

chargement	$\tau$	$\tau^*$	$n = 1000$	$n = 10000$	$n = 20000$
Type I	1.7	-	854854	416225	146540
Type III	1.7	0	851283	416091	146537
		0.5	853011	416157	146537
Type IV	1.7	0	661323	249129	133583
		0.5	745794	321263	138392

La figure 1.24 illustre encore la pertinence du modèle PREFFAS- $m$  pour modéliser les effets d'interaction caractéristiques des chargements d'amplitude variable. Pour  $n = 1000$ ,

cela se traduit par une pente de fissuration parallèle et translatée vers le haut (par rapport au chargement de type I). Pour  $n = 10000$  et  $n = 20000$ , l'évanescence de l'effet de la surcharge est observée plus tôt.

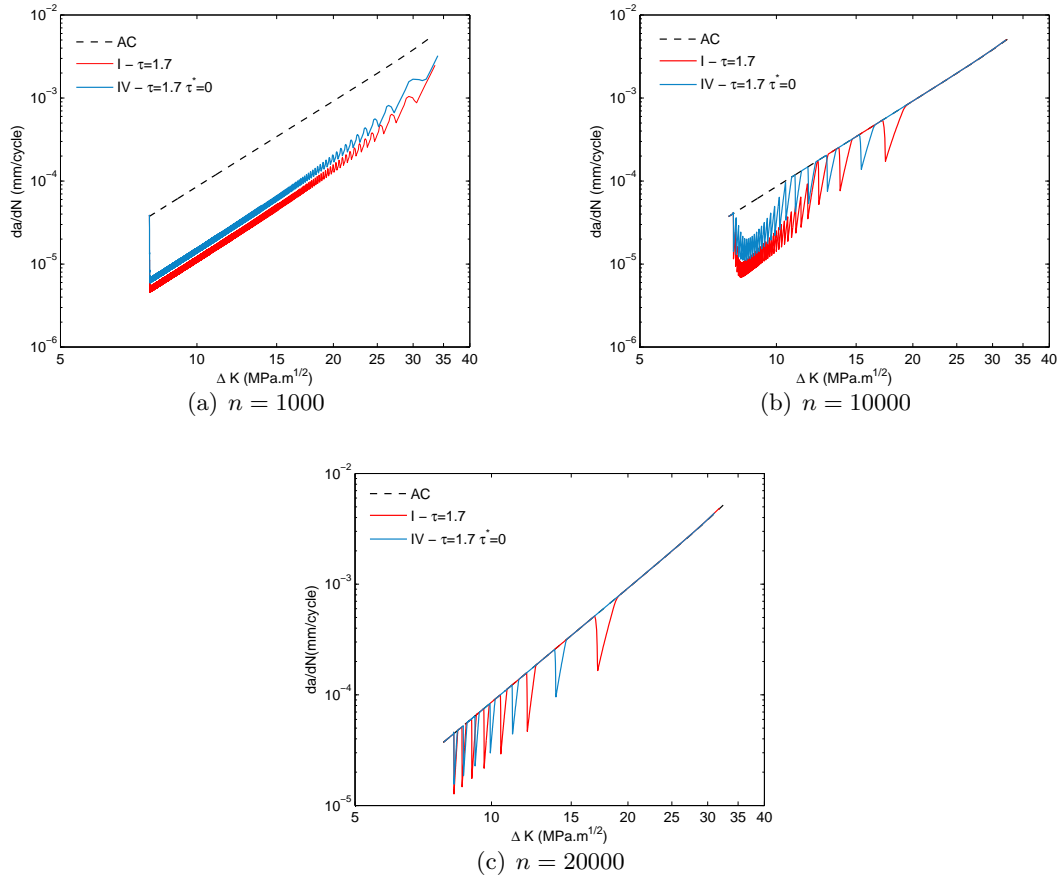


Figure 1.24 – Vitesse de propagation de fissure pour les chargements I et IV et différents espacements des surcharges et interactions surcharges/sous-charges  $n$ .

### 1.4.1.3 Comparaison PREFFAS- $m$ vs. PREFFAS

Les deux versions du modèle PREFFAS sont maintenant comparées afin de montrer les apports de la nouvelle version (PREFFAS- $m$ ) par rapport à la précédente (PREFFAS).

## Présentation des résultats

Les écarts relatifs  $(\bullet_{\text{cas S}} - \bullet_{\text{cas R}})/\bullet_{\text{cas R}}$  entre les résultats obtenus avec d'une part le modèle PREFFAS-*m* (cas S) et, d'autre part, le modèle PREFFAS (cas R) sont reportés sur les figures 1.25(a) et 1.25(b) pour les divers cas de chargements d'amplitude variable étudiés.

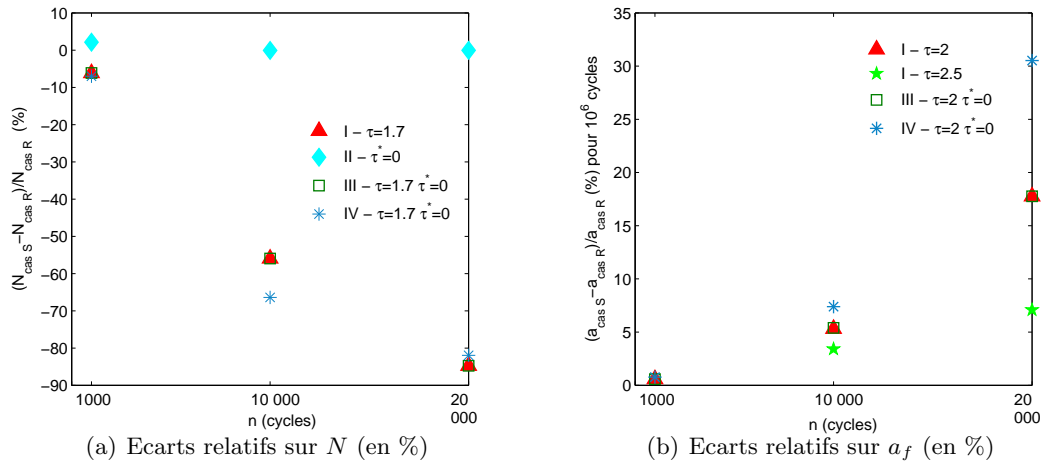


Figure 1.25 – Écarts relatifs sur la durée de vie  $N$  (cycles) ou sur l'avancée de fissure  $a_f$  (mm) entre les modèles PREFFAS-*m* (cas S) et PREFFAS (cas R).

Les différences en termes de vitesses de propagation de fissure en fonction de l'avancée  $a$  (mm) sont également reportées sur la figure 1.26 pour le chargement FALSTAFF sc.

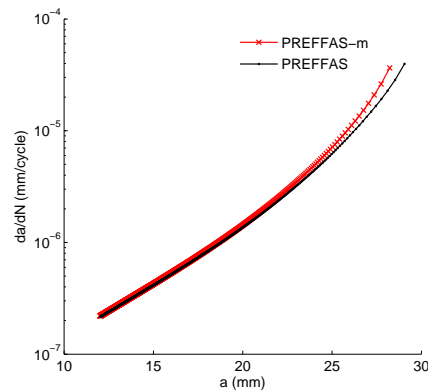


Figure 1.26 – Écarts sur les vitesses de fissuration entre les modèles PREFFAS-*m* et PREFFAS pour le chargement FALSTAFF sc.

## Interprétation

*Cas avec surcharges multiples.*

Dans le cas où les surcharges et les interactions sont appliquées de manière rapprochée, c'est-à-dire pour  $n = 1000$  cycles, les écarts simulés entre les deux versions de PREFFAS sont inférieurs à 10% en valeur absolue, figures 1.25(a) et 1.25(b). Pour la séquence FALSTAFF sc le même constat peut être dressé : on obtient par exemple  $N_{\text{PREFFAS}-m} = 1.904 \cdot 10^7$  cycles et  $N_{\text{PREFFAS}} = 1.970 \cdot 10^7$  cycles, soit un écart de  $-3.39\%$ . Dans le cas de surcharges multiples, PREFFAS- $m$  s'avère donc très proche de PREFFAS.

Il est cependant observé que PREFFAS- $m$  sous-estime systématiquement la durée de vie de la structure étudiée par rapport au modèle PREFFAS. Ce phénomène est dû à l'évanescence progressive de la surcharge qui engendre un niveau d'ouverture plus faible de la fissure et donc une propagation plus rapide.

*Cas avec surcharge unique : évanescence.*

Lorsque les surcharges ou interactions sont appliquées de manière suffisamment espacées pour qu'il y ait évanescence des effets ( $n = 10000$  et  $n = 20000$  cycles), les différences de résultats entre les deux modèles sont fondamentales. L'écart relatif maximal sur la durée de vie  $N$  est proche de 85%, figures 1.25(a) et 1.25(b).

Dans les situations où l'avancée de fissure entre deux effets (surcharge ou interaction) n'est pas négligeable, PREFFAS surestime considérablement la durée de vie par rapport à PREFFAS- $m$ , en raison d'un niveau d'ouverture calculé élevé et qui est gardé constant pour l'ensemble des cycles. Quel que soit l'espacement des surcharges, la durée de vie estimée est sensiblement la même avec le modèle PREFFAS alors qu'elle converge vers le cas à chargement d'amplitude constant (AC) avec le modèle PREFFAS- $m$ .

Ainsi le modèle PREFFAS n'est pas applicable lorsque les effets dominants du chargement d'amplitude variable sont évanescents, c'est-à-dire lorsque l'avancée de fissure entre deux effets n'est plus négligeable. Les modifications apportées au modèle PREFFAS- $m$  semblent fournir des solutions adéquates à ces situations compte tenu des résultats obtenus par simulations. Les résultats expérimentaux devront confirmer ces tendances.

### 1.4.2 Conclusion

Les simulations réalisées avec les modèles PREFFAS- $m$  et PREFFAS soulignent l'intérêt de PREFFAS- $m$  dans le cas où les effets d'interaction et de surcharges apparaissent de manière suffisamment espacés dans le temps, c'est-à-dire lorsque l'hypothèse de stationnarité n'est plus vérifiée. Ces premières analyses purement qualitatives permettent en effet de confirmer la capacité du modèle PREFFAS- $m$  à traiter l'évanescence des surcharges et le problème de surcharge unique, ce qui n'était pas le cas de PREFFAS. Dans le cas où les surcharges sont suffisamment rapprochées, PREFFAS- $m$  se confond avec PREFFAS, même s'il tend à légèrement sous-estimer la durée de vie par rapport au modèle PREFFAS, dû au phénomène d'évanescence.

Un plan d'expérience d'essais complet devra cependant être établi afin de vérifier quantitativement les modifications apportées au modèle PREFFAS- $m$ . Un essai à chargement d'amplitude constante à faible rapport de sollicitation  $R = 0.1$  permettra, dans un premier temps, d'identifier les paramètres de propagation  $C_R$ ,  $m$  du matériau retenu. Un essai à chargement d'amplitude constante avec surcharges à taux  $\tau = 1.7$  espacées tous les  $n = 1000$  cycles ainsi qu'éventuellement un essai à chargement d'amplitude constante à fort rapport de sollicitation (par exemple  $R = 0.7$ ) permettront ensuite de déterminer les paramètres d'Elber  $a$  et  $b$ . Différents essais à chargements d'amplitude variable simplifiés de types I (surcharge), II (sous-charge), III (sous-charge surcharge) et IV (surcharge sous-charge), avec différents taux de surcharge et de sous-charge, seront ensuite étudiés. Ils permettront en particulier de déterminer les taux de blocage d'avancée de fissure dans les cas avec surcharges multiples et celui avec surcharge unique. Divers chargements composés de blocs d'amplitude constante de niveaux et rapports de sollicitation différents ainsi que quelques spectres de chargement d'amplitude variable plus complexes devront également être testés. Enfin, des essais sur des éprouvettes d'épaisseurs différentes devront aussi être réalisés pour calibrer le paramètre  $\beta$ , coefficient modélisant l'état de contraintes (CP ou DP) de la loi d'évanescence des effets d'interaction.

## 1.5 Conclusion

L'objectif de ce chapitre a en partie consisté à choisir un modèle de propagation de fissure apte à traduire les principaux phénomènes physiques associés à la propagation de fissure sous chargement d'amplitude variable et compatible avec des analyses probabilistes. Il est en effet essentiel que le modèle de propagation de fissure retenu permette de modéliser les effets d'interaction, caractéristiques des chargements d'amplitude variable, à temps de calcul maîtrisé pour pouvoir aborder le problème de la tolérance aux dommages sous l'angle probabiliste.

Le modèle PREFFAS a été retenu pour ces raisons. Il permet de dissocier les effets du chargement des effets géométriques grâce à l'hypothèse de stationnarité. La modélisation stochastique du chargement proposé dans les chapitres ultérieurs pourra ainsi être validée en s'affranchissant du type de structure, donc de la géométrie, et du niveau de charge appliqué, tout en prenant en compte les effets d'interaction propres au chargement. Il s'agit d'un réel avantage par rapport aux modèles type Paris qui ne prennent pas en compte ces effets d'interaction et aux modèles plus complexes et difficiles à mettre en œuvre pour lesquels il faut spécifier la géométrie et les niveaux de chargement. Le choix du modèle PREFFAS confère ainsi un caractère relativement général à la validation du modèle stochastique de chargement développé dans la suite du manuscrit.

L'hypothèse de stationnarité du modèle PREFFAS constitue cependant une limite majeure du modèle. Des spectres de chargement constitués de séquences non-répétées ne peuvent en effet pas être traités avec PREFFAS, ce qui représente un obstacle pour une analyse probabiliste de la tolérance aux dommages. La solution consiste alors soit à avoir recours à d'autres modèles (Strip Yield, CORPUS, ONERA, ...), soit à proposer un modèle alternatif qui lève cette hypothèse de stationnarité. Des évolutions du modèle PREFFAS ont ainsi été proposées pour permettre de calculer les avancées cycle-à-cycle en prenant en compte l'effet d'évanescence des effets d'interaction aussi bien pour les effets de surcharge que pour les effets Rainflow et d'aborder les cas de surcharge unique aussi bien que celui de surcharges multiples.

Cette extension du modèle PREFFAS (PREFFAS- $m$ ), développée en deuxième partie de ce chapitre, devrait rendre son utilisation compatible avec des études probabilistes faisant intervenir des spectres de chargement aléatoires sur l'ensemble de leur longueur. Le modèle (PREFFAS- $m$ ) devrait également convenir à des applications déterministes spécifiques où les surcharges sont peu fréquentes. Les premiers résultats de simulations suggèrent une bonne pertinence des évolutions proposées, devant être confirmées par essais.



## Chapitre 2

# Outils et données pour la modélisation stochastique du chargement

*Une contribution majeure de ces travaux de recherche est la proposition de modèles stochastiques capables de capturer et de retranscrire l'aléa du chargement de fatigue à partir de séquences de chargement observées sur des structures en service et monitorées. La première partie du chapitre présente essentiellement les motivations qui nous ont conduit à développer de tels modèles ainsi que les outils de la littérature les plus appropriés pour répondre aux problèmes de fatigue sous chargement aléatoire. La deuxième partie du chapitre présente la base de données exploitée dans le cadre de ces travaux de thèse. Une première analyse de ces données a conduit à retenir les modèles markoviens pour représenter l'aléa expérimentalement observé. Ces modèles sont ensuite développés au chapitre 3.*

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction/Objectifs de la modélisation . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>2.2</b>	<b>Quelques exemples de processus stochastiques . . . . .</b>	<b>66</b>
2.2.1	Processus aléatoire . . . . .	67
2.2.2	Processus gaussien stationnaire . . . . .	69
2.2.3	Processus de Markov . . . . .	74
2.2.4	Processus AR à changements de régimes markoviens . . . . .	76
2.2.5	Conclusion . . . . .	77
<b>2.3</b>	<b>Base de données de chargement . . . . .</b>	<b>77</b>
2.3.1	Introduction . . . . .	77
2.3.2	Caractéristiques principales des enregistrements . . . . .	79
2.3.3	Groupes de trajectoires . . . . .	82
2.3.4	Analyse temporelle des données . . . . .	83
<b>2.4</b>	<b>Choix des chaînes de Markov . . . . .</b>	<b>87</b>
2.4.1	Motivation . . . . .	87
2.4.2	Définition des modèles proposés . . . . .	87
<b>2.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>89</b>

---

## 2.1 Introduction/Objectifs de la modélisation

Les charges supportées par un aéronef sont de nature aléatoire en raison de la diversité de ses activités (type d'usage principal : avion commercial ou avion militaire, avion de transport militaire ou avion de combat, fluctuations liées aux différentes missions confiées à l'avion, etc) et des incertitudes inhérentes à l'environnement dans lequel il évolue (perturbations atmosphériques, intensité des manœuvres liées au pilotage, charges sol-air-sol, etc).

Le premier chapitre de thèse a permis de mettre en évidence la sensibilité du phénomène de fatigue propagation (et plus généralement de fatigue) aux spécificités des charges rencontrées (séquençement, surcharges et sous-charges). Des essais avec des séquences de chargement réalistes sont ainsi souvent nécessaires pour évaluer la sensibilité de ces phénomènes et démontrer l'intégrité en service des structures. Il semble alors naturel de chercher à modéliser ou tout du moins en première approche à prendre en compte d'une manière simplifiée les charges réellement supportées par une structure pour l'analyse de sa tenue à la fatigue ou à la propagation de fissures.

Afin de répondre à cette problématique, une approche purement déterministe consiste à développer des séquences de chargements de fatigue d'amplitude variable caractéristiques (également appelées spectres normalisés ou standards) qui soient représentatives des charges complexes réellement subies en service. Les premières séquences normalisées de chargement de fatigue ont été développées dans les années 70-80 dans un certain nombre de domaines intéressés par le dimensionnement en fatigue : automobile, aéronautique, offshore, etc. Le lecteur est invité à consulter l'article de P. Heuler [HK05] pour une synthèse de ces chargements types. Deux exemples de séquences de charges normalisées largement utilisées dans le domaine spécifique de l'aéronautique sont TWIST (Transport Wing STandard) [dJSL73, LdJFS79] développée pour les avions de transport civil et FALSTAFF (Fighter Aircraft Loading STandard For Fatigue) [ABvD<sup>+</sup>76, dJ79] développée pour les avions de combat. Dans les deux cas, ces spectres sont utilisés pour modéliser les contraintes dans les intrados de voilure près de la jonction avec le fuselage. Ils sont respectivement composés de 4000 et 200 vols. Ces spectres génériques sont aujourd'hui rarement utilisés en aéronautique. Le concepteur d'aéronefs préfère en général construire des séquences de chargement propres à chaque nouvel aéronef à partir d'enregistrements en vol dont il dispose, en appliquant un degré de conservatisme par rapport aux charges que la structure est susceptible de rencontrer. Il convient ainsi de souligner que ces séquences sont déterministes malgré le contenu statistique des observations expérimentales à partir desquelles elles sont construites. Par conséquent, elles ne peuvent pas être utilisées pour simuler aléatoirement de nouveaux historiques de contraintes. Il est également à noter que le calcul de la probabilité qu'un scénario de défaillance se produise, tel que la rupture

d'une pièce sous chargements aléatoires en un endroit donné par exemple, est également exclu.

Afin de remédier à de telles limites, le recours à une modélisation stochastique de ces phénomènes devient incontournable. Afin de modéliser convenablement l'aléa des charges observées, il est nécessaire de prendre en compte à la fois l'aléa sur les niveaux de charges et celui également présent sur le séquençement de ces niveaux, ce séquençement pouvant conduire à des effets dit d'interaction entre cycles en fatigue/propagation qui impactent directement les vitesses d'avancée de fissure. L'approche simple et usuelle qui consiste à modéliser le facteur de charge d'une séquence de chargement déterministe, préalablement définie, par une variable aléatoire, n'est donc pas suffisante. Ceci nous amène à nous orienter vers les processus aléatoires.

Basée sur une étude bibliographique, la section 2.2 introduit les processus stochastiques qui sont apparus les plus pertinents pour modéliser des séquences de chargement de fatigue aléatoires. La section 2.3 est ensuite consacrée à la présentation de la base de données mise à disposition et à partir de laquelle des modèles stochastiques de chargement de fatigue réalistes sont développés. Enfin, la section 2.4 statue sur le type de processus à retenir compte tenu des données présentées et des objectifs qui sont déclinés. Le plan de ce chapitre est résumé sur la figure 2.1. Les applications s'appuyant sur la modélisation stochastique du chargement proposée y sont également présentées.

## 2.2 Quelques exemples de processus stochastiques

Lorsqu'un statisticien ou un praticien dispose de données, l'un des premiers problèmes qu'il se propose de résoudre est de savoir comment ajuster un modèle aux observations. Ainsi, face à une ou plusieurs réalisations d'un processus, il cherche à choisir le meilleur modèle possible et à estimer les paramètres de ce modèle de manière la plus précise possible. Les familles de processus étant extrêmement vastes, choisir un modèle peut s'avérer être une étape délicate. Par souci de concision, l'étude s'est ici restreinte aux processus utilisés pour modéliser les chargements de fatigue dans les domaines d'intérêt, c'est-à-dire la propagation de fissure ou la fatigue de manière plus générale, ainsi qu'à des domaines connexes tels que la modélisation des actions du vent et de la houle où les données sont recueillies en grand nombre. Après avoir introduit la notion de processus aléatoire, les processus gaussiens, les chaînes de Markov à temps discret, les chaînes de Markov cachées et les modèles autorégressifs à changements de régimes markoviens sont brièvement présentés.

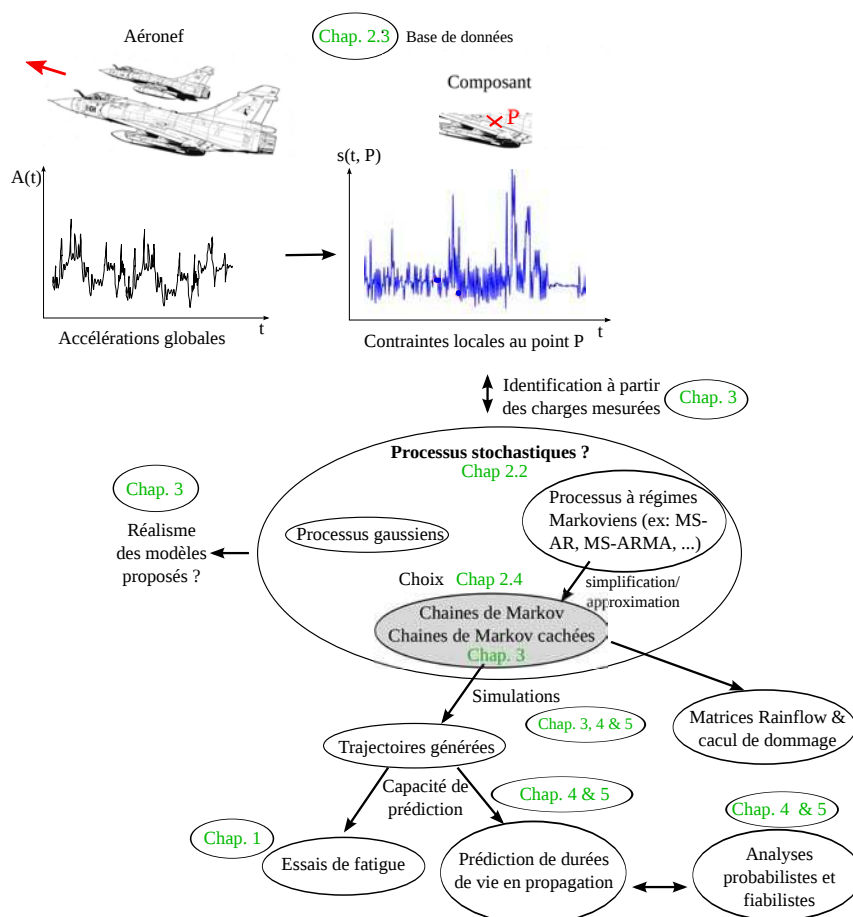


Figure 2.1 – Vue d’ensemble de la modélisation stochastique du chargement et des applications - lien avec les parties abordées dans ce mémoire.

### 2.2.1 Processus aléatoire

Une multitude d’ouvrages et de cours abordent la théorie des probabilités et des processus. A titre d’exemple nous pouvons citer les ouvrages de H. Cramèr [Cra46], N. Bouleau [Bou88], B. Lacaze [LMT97] et de G. Saporta [Sap06] pour la théorie des probabilités, les ouvrages de H. Cramèr [CL67], N. Bouleau [Bou00] et de B. Solaiman [Sol06] et les cours de J.-F. Delmas [DJL] et de J. Walrand [Wal04] pour la description des principales familles de processus stochastiques. Les définitions abordées dans la suite de ce manuscrit sont extraites de ces ouvrages.

#### 2.2.1.1 Définition

Un processus est un phénomène dépendant de l’aléa  $\omega \in \Omega$  et d’un autre paramètre. Ce paramètre peut être le temps (discret ou continu), une coordonnée spatiale ou toute autre

variable. Dans ce mémoire, lorsque nous parlons de processus stochastique, nous faisons référence à des processus temporels, c'est-à-dire indexés sur le temps.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $\mathcal{T}$  un intervalle de temps (par exemple la demi-droite  $\mathbb{R}_+$ ),  $X$  est appelé *processus aléatoire* défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  indexé par  $\mathcal{T}$ , à valeurs dans  $E$ , appelé espace d'états, si  $X$  vérifie l'une des définitions suivantes :

- $X$  est une application mesurable de  $\Omega$  dans  $E^{\mathcal{T}}$ , c'est à dire si  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans l'espace  $E^{\mathcal{T}}$  des fonctions définies sur  $\mathcal{T}$  à valeurs dans  $E$  :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow E^{\mathcal{T}} \\ \omega &\rightarrow X_\omega : \mathcal{T} \rightarrow E \\ &\quad t \rightarrow X_\omega(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

- $X$  est une application de  $\mathcal{T}$  dans  $\mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; E)$  (espace vectoriel des variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à valeur dans  $E$ ) :

$$\begin{aligned} X : \mathcal{T} &\rightarrow \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; E) \\ t &\rightarrow X_t : \Omega \xrightarrow{\text{mes}} E \\ &\quad \omega \rightarrow X_t(\omega) \end{aligned} \tag{2.2}$$

La deuxième définition décrit le processus  $X$  comme la donnée d'une infinité de variables aléatoires  $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$  définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Si l'ensemble  $\mathcal{T}$  est dénombrable (fini ou infini), le processus est dit à *temps discret*. Dans le cas contraire, il est dit à *temps continu*. Pour un aléa  $\omega$  fixé, l'application qui à  $t$  associe la valeur  $X_t(\omega)$  est une réalisation du processus  $X$  appelée également *trajectoire du processus*.

### 2.2.1.2 Loi du processus

La loi d'un processus aléatoire est caractérisée par la donnée des *lois fini-dimensionnelles*. En fait, on parle de la loi du processus  $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$  lorsque l'on connaît la loi du vecteur  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  pour toute suite finie croissante de temps  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ . Il est difficile de manipuler ce type de définition en pratique.

### 2.2.1.3 Moments statistiques du premier et second ordres

La *fonction moyenne* ou encore *espérance* d'un processus stochastique  $X$  est la fonction déterministe  $t \rightarrow m_X(t)$  de  $\mathcal{T}$  dans  $E$  qui, pour chaque valeur de  $t \in \mathcal{T}$ , prend pour valeur

l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X_t(\omega)$  soit,  $\forall t \in \mathcal{T}$  :

$$m_X(t) = \mathbb{E}[X_t(\omega)] \quad (2.3)$$

Notons qu'il s'agit d'un moyennage statistique et non d'un moyennage temporel.

La *fonction d'autocorrélation* d'un processus stochastique  $X$  est la fonction déterministe  $(t, t') \rightarrow R_X(t, t')$ , qui pour chaque couple  $(t, t') \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ , prend pour valeur le moment du second ordre du couple aléatoire  $(X_t(\omega), X_{t'}(\omega))$  soit,  $\forall t$  et  $t' \in \mathcal{T}$  :

$$R_X(t, t') = \mathbb{E}[X_t(\omega)X_{t'}(\omega)] \quad (2.4)$$

La *fonction de covariance* d'un processus stochastique  $X$  correspond à la fonction d'autocorrélation du processus centré associé. C'est donc la fonction  $(t, t') \rightarrow C_X(t, t')$  définie par,  $\forall t$  et  $t' \in \mathcal{T}$  :

$$C_X(t, t') = \mathbb{E}[(X_t(\omega) - m_X(t))(X_{t'}(\omega) - m_X(t'))] \quad (2.5)$$

Il est important de noter que la fonction d'autocorrélation d'un processus  $X$ ,  $R_X(t, t')$  ainsi que la fonction de covariance  $C_X(t, t')$  existent si et seulement si le processus  $X$  est un processus du second ordre, c'est-à-dire qui vérifie :  $\mathbb{E}[X^2(t)] < \infty$ ,  $\forall t \in \mathcal{T}$ .

#### 2.2.1.4 Stationnarité du second ordre

Un processus stochastique est dit *stationnaire du second ordre* si le caractère de stationnarité n'est vérifié que jusqu'aux moments d'ordre 2 :

- la fonction moyenne est constante :  $m_X(t) = m_X = \text{cste}$ ,  $\forall t \in \mathcal{T}$ ,
- la fonction d'autocorrélation ne dépend que de la différence  $\tau = t' - t$  :  $R_X(t, t') = \mathbb{E}[X_t(\omega)X_{t'}(\omega)] = R_X(t' - t) = R_X(\tau)$  (on note encore  $R_X$  par abus de notation).

### 2.2.2 Processus gaussien stationnaire

#### 2.2.2.1 Définition

Un processus stochastique stationnaire du second ordre  $X$ , défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , indexé par  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ , à valeur dans  $\mathbb{R}$ , est un *processus gaussien stationnaire* si les lois fini-

dimensionnelles de  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  sont des lois gaussiennes. Ainsi un processus est gaussien si et seulement si pour chaque ensemble fini d'instants  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ , toute combinaison linéaire  $\alpha_1 X_{t_1} + \alpha_2 X_{t_2} + \dots + \alpha_n X_{t_n}$  est distribuée suivant une loi gaussienne. Un processus gaussien est complètement défini par ses moments du premier ordre  $m_X$  et du second ordre  $C_X(t, t')$ .

### 2.2.2.2 Représentation spectrale

La densité spectrale de puissance est un outil usuellement employé pour décrire les processus stationnaires du second ordre (tels que  $\mathbb{E}[X^2(t)] < \infty, \forall t \in \mathcal{T}$ ). Elle permet d'étudier la répartition de l'énergie ( $\mathbb{E}[X^2(t)]$ ) dans l'espace des fréquences  $f$ . D'une manière analogue à l'étude des signaux déterministes, on cherche ainsi à exploiter l'espace des fréquences qui est l'espace dual du temps.

Dans le cas continu, la densité spectrale de puissance  $S_X(f)$  d'un processus stationnaire du second ordre est la *transformée de Fourier*, notée *TF*, de sa fonction d'autocorrélation  $R_X(\tau)$ . On utilise parfois la notion de pulsation  $\omega = 2\pi f$  dans les formulations ci-dessous.

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.6)$$

On a réciproquement :

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) e^{+j2\pi f\tau} df \quad (2.7)$$

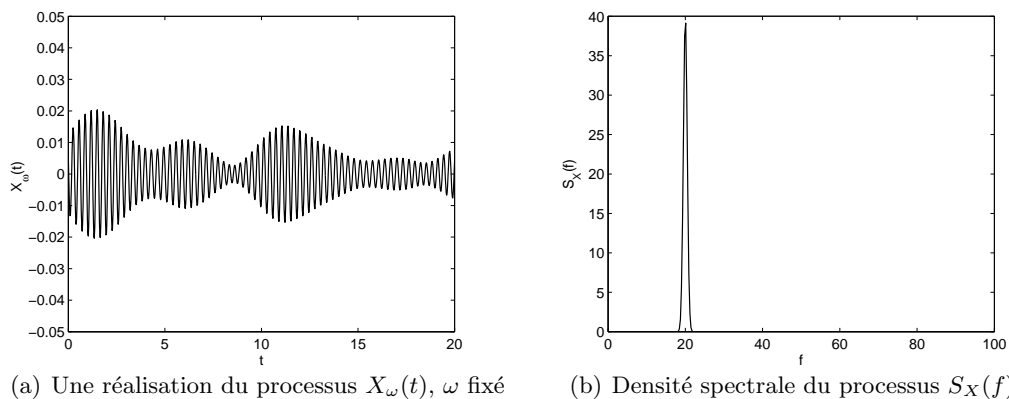


Figure 2.2 – Simulation d'un processus gaussien à bande étroite et sa densité spectrale de puissance.



Un processus gaussien stationnaire  $X$  est ainsi complètement caractérisé par sa moyenne  $m_X$  et sa densité spectrale  $S_X$ . On peut distinguer deux types de processus gaussiens : les processus à bandes étroites (figure 2.2) et les processus à bandes larges (figure 2.3).

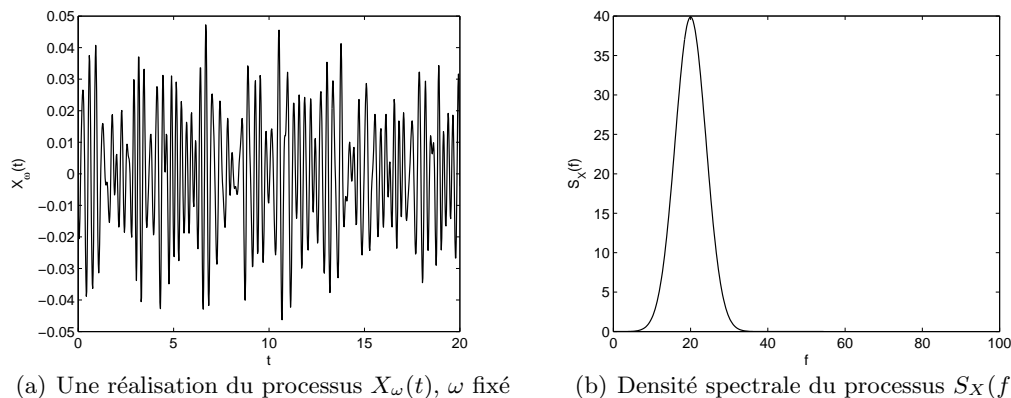


Figure 2.3 – Simulation d'un processus gaussien à bande large et sa densité spectrale de puissance.

### 2.2.2.3 Processus gaussiens pour des chargements de fatigue

**Applications en fatigue.** Les processus gaussiens stationnaires ont trouvé des applications en fatigue dans les secteurs aérospatial et automobile. Nous pouvons par exemple citer les travaux de X. Pitoiset [Pit01], de D. Benasciutti [BT05] et de G. Genet [Gen06].

La thèse de X. Pitoiset [Pit01] est consacrée au développement de méthodes spectrales pour le calcul de l'endommagement de structures soumises à des vibrations aléatoires supposées gaussiennes. Un des objectifs de ses travaux est de réduire les temps de calculs associés aux calculs d'endommagement de structures soumises à des chargements uniaxiaux et multiaxiaux, traditionnellement établis dans le domaine temporel, en résolvant le problème dans le domaine fréquentiel. La validité des méthodes développées et les gains de temps ont été démontrés par rapport aux approches temporelles, approches exactes, à partir d'exemples éléments finis de grande taille (ex : étude de la tuyère divergente du moteur Vulcain II d'Ariane V).

De manière analogue au deuxième chapitre de thèse de X. Pitoiset, D. Benasciutti [BT05] compare les différentes méthodes spectrales d'approximation du calcul de durée de vie existantes aux résultats exacts des simulations temporelles. Les exemples traités considèrent des chargements uniaxiaux modélisés par des processus gaussiens de différentes largeurs de bande. Il propose également une méthode alternative aux approches existantes. L'objectif est d'éviter la génération d'historiques et la procédure de comptage des cycles Rainflow qui sont très coûteuses en temps.

Dans sa thèse appliquée à la fatigue automobile, G. Genet [Gen06] travaille également sur les relations théoriques entre calcul de dommages et paramètres de chargements gaussiens uniaxiaux et multiaxiaux. Dans ses travaux de thèse, dédiés aux approches probabilistes du dimensionnement en fatigue thermique des structures, Z. Guédé [Gué05] utilise quant à lui les processus gaussiens pour modéliser les incertitudes sur le chargement de fatigue thermique.

**Applications en propagation de fissure.** Les processus gaussiens ont également trouvé leur utilité en propagation de fissure.

S. Ustilovsky [UA99] et W.F. Wu [WN07] investiguent par exemple la dispersion du phénomène de propagation de fissure observée dans les alliages d'aluminium 2024-T3, 2024-T351 et 7075-T6. Des éprouvettes contenant une ou plusieurs fissures soumises à des chargements d'amplitude constante et à des chargements d'amplitude variable sont pour cela testées. Les chargements d'amplitude variables sont ici générés à l'aide de processus gaussiens.

L'impact de la variabilité du chargement sur la dispersion du processus de propagation de fissure a été étudié expérimentalement et numériquement à Séville et à Málaga en Espagne [DZP97, ZMD97, MZD03, ZMGHD05]. Dans ces études, les structures fissurées sont modélisées par des éprouvettes CT ( $W = 50$  mm,  $B = 12$  mm) soumises à des séquences de chargement d'amplitude variable aléatoires simulées à l'aide de processus gaussiens. Les caractéristiques des processus gaussiens des différentes séries de tests sont reportées sur la figure 2.4.

Le paramètre  $\epsilon$ , appelé facteur d'irrégularité, est défini par :

$$\epsilon = \frac{M_2}{\sqrt{M_0 M_4}} \quad (2.8)$$

où  $M_n$  est le moment spectral d'ordre  $n$  du processus gaussien stationnaire de densité spectrale  $S(\omega)$  ( $\omega = 2\pi f$ ) défini comme suit (cas du temps continu) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^n S(\omega) d\omega \quad (2.9)$$

Les auteurs étudient en particulier l'effet de la largeur de bande du processus gaussien, celui du nombre de cycles appliqués par séquence et celui des valeurs extrêmes sur la dispersion du phénomène de propagation de fissure. Ils explorent aussi les poids respectifs de l'aléa de chargement et de l'aléa matériau sur les dispersions des résultats de propagation.

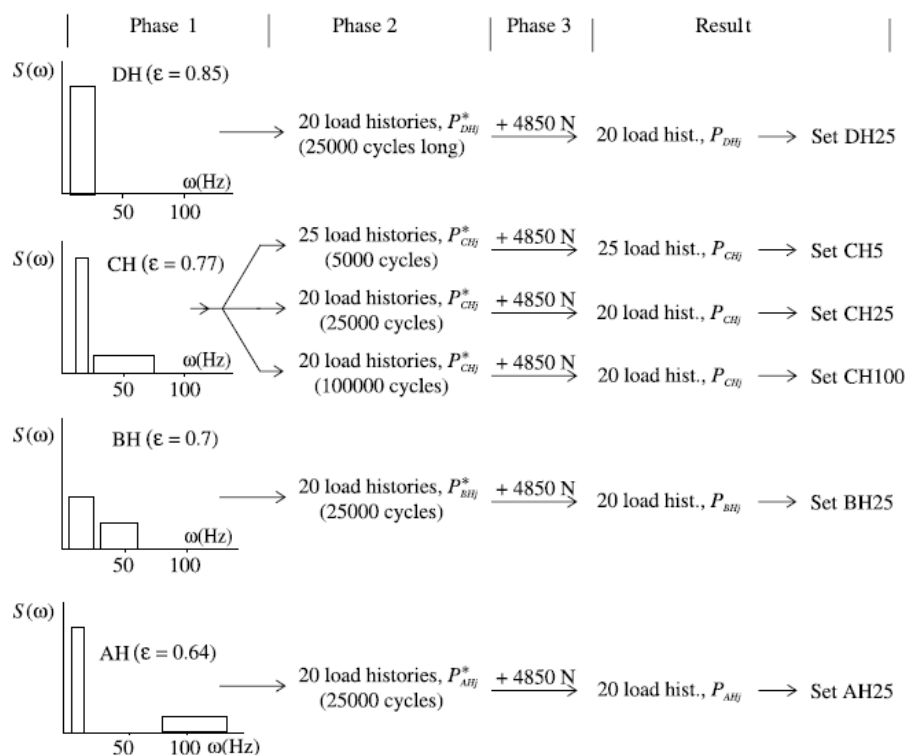


Figure 2.4 – Séries de chargement d'amplitude variable simulées par processus gaussiens, référence [ZMGHD05].

De ces études paramétriques il ressort principalement que la dispersion sur la durée de vie en propagation de fissure est essentiellement sensible à la longueur des séquences de chargement (qui sont ensuite répétées jusqu'à rupture) et aux valeurs extrêmes rencontrées dans ces séquences. La part de l'aléa de chargement par rapport à celle de l'aléa matériau, contribuant à la dispersion du phénomène de fatigue, semble dépendre des longueurs des séquences de chargements répétées jusqu'à rupture.

Il est important de noter que, pour l'ensemble de ces études, les paramètres (moyennes et densités spectrales) des processus gaussiens utilisés sont arbitrairement définis. De ce fait ces analyses ne contiennent aucune information statistique relative à des charges réellement rencontrées en service sur des structures. Les résultats présentés doivent donc être examinés avec toute la réserve nécessaire, en l'absence d'un vrai contenu statistique.

### 2.2.3 Processus de Markov

#### 2.2.3.1 Définition

Un processus stochastique  $X$  est appelé *processus de Markov*, si pour tout sous-ensemble fini d'instants  $\{t_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  tel que  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , la distribution conditionnelle de  $X_{t_n}$  connaissant  $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{n-1}}$  dépend seulement de  $X_{t_{n-1}}$  :

$$P(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \dots, X_{t_1} = x_1) = P(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) \quad (2.10)$$

Cela signifie que le futur ne dépend du passé que par l'intermédiaire du présent. C'est la *propriété de Markov*. Cette définition peut être généralisée au cas où la distribution conditionnelle de  $X_{t_n}$  dépend des  $r$  précédentes variables aléatoires. Le processus est alors qualifié de *processus de Markov d'ordre  $r$* .

Suivant la nature de l'espace des états  $E$  (discret ou continu) ainsi que de l'espace des temps  $\mathcal{T}$  (discret ou continu), les processus de Markov sont divisés en 4 classes : *les chaînes de Markov à temps discret* ( $E$  et  $\mathcal{T}$  discrets), *les chaînes de Markov à temps continu* ( $E$  discret et  $\mathcal{T}$  continu), *les processus de Markov à temps discret* ( $E$  continu et  $\mathcal{T}$  discret) et *les processus de Markov à temps continu* ( $E$  et  $\mathcal{T}$  continus).

#### 2.2.3.2 Chaînes de Markov à temps discret d'ordre 1

Une chaîne de Markov à temps discret  $(X_n = X_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$  d'ordre 1 est une suite de variables aléatoires  $X(\omega)$  à valeurs dans un espace fini et discret  $E$ , dont l'évolution dépend des probabilités de transiter entre les états  $e_k$  de l'espace des états  $E$  noté par :

$$E = \{e_k, k \in \{1, 2, \dots, K\}\} \quad (2.11)$$

La loi d'une chaîne de Markov est définie par la donnée des *probabilités de transition* qui forment la *matrice de transition*  $\mathbf{P}$  et la loi de  $X_1$ . Si  $K$  est le cardinal de l'espace des états  $E$  ( $\text{card}(E) = K$ ), la matrice de transition  $\mathbf{P}$  d'une chaîne de Markov d'ordre 1 s'écrit :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,K} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,K} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{K,1} & p_{K,2} & \dots & p_{K,K} \end{pmatrix}$$

où  $p_{i,j} = P(X_{n+1} = e_j | X_n = e_i)$ .

Chaque ligne de la matrice est une distribution de probabilité qui vérifie :

$$\sum_{j=1}^K p_{i,j} = 1 \quad , \quad 0 \leq p_{i,j} \leq 1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, K \quad (2.12)$$

Le nombre de probabilités de transition à estimer dépend du nombre  $K$  d'états possibles de la chaîne mais également de l'ordre de la chaîne [SBWH<sup>+</sup>05].

### 2.2.3.3 Applications

L'estimation du dommage en fatigue à partir de chargements de fatigue modélisés par des chaînes de Markov a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. Les avancées les plus connues dans ce domaine concernent les travaux de I. Rychlik [Ryc96] et P. Johannesson [Joh99]. Un des objectifs principaux de leurs travaux est le calcul des dommages à partir des matrices Rainflow (des chargements de fatigue) préalablement calculées à partir des matrices de transition des chaînes de Markov d'ordre 1 à temps discret, utilisées pour modéliser le chargement de fatigue. I. Rychlik et P. Johannesson ont ainsi proposé des relations explicites qui lient les matrices Rainflow aux matrices de transition. Des relations inverses ont également été développées permettant de reconstruire des séquences de chargement modélisées par des chaînes de Markov à partir d'une matrice Rainflow. Une méthode est aussi proposée pour assurer l'alternance des contraintes maximales et minimales, caractéristiques des chargements de fatigue, lors des simulations de séquences de chargement à partir des chaînes de Markov. Il s'agit d'alterner à chaque pas de la chaîne deux matrices de transition, respectivement notées  $F$  et  $\hat{F}$  dans ces références, l'une traduisant les probabilités de passer d'un minimum à un maximum et l'autre les probabilités de passer d'un maximum à un minimum.

D'autres auteurs comme G. Genet [Gen06] ont également développé des outils pour le calcul du dommage à partir des chaînes de Markov. Récemment enfin, Y. Ling *et al.* [LSMS11] ont étudié les méthodes de comptage Rainflow, les chaînes de Markov et les processus ARMA [BJR94] pour caractériser et reconstruire des chargements de fatigue.

Les chaînes de Markov, qui voient quelques applications en fatigue, sont largement utilisées dans d'autres domaines : économie, réseaux et communications, biologie, santé, alimentaire, reconnaissance de la parole, etc. Elles sont aussi couramment utilisées pour décrire les phénomènes météorologiques (vent, états de mer, pluie) où les données sont nombreuses [JL86, PNML00, SBWH<sup>+</sup>05].

## 2.2.4 Processus AR à changements de régimes markoviens

### 2.2.4.1 Modélisation

Un processus autorégressif (AR) à changement de régimes markoviens (noté MS-AR pour *Markov Switching AutoRegressive model*) est un processus bivarié  $\{S_t, X_t\}$  où  $S_t$  désigne une chaîne de Markov d'ordre 1, et pour lequel, conditionnellement à  $S_t$ ,  $X_t$  est un processus AR non nécessairement homogène et non nécessairement linéaire d'ordre  $r$ . La distribution conditionnelle de  $X_t$  sachant  $\{S_{t'}\}_{t' \leq t}$  et  $\{X_{t'}\}_{t' \leq t}$  dépend uniquement de la connaissance de  $\{X_{t'}\}_{t-r \leq t' \leq t-1}$  et de  $S_t$ , comme illustré sur la figure 2.5. Le processus  $S_t$  est dit *processus caché* alors que  $X_t$  est dit *processus observable*.

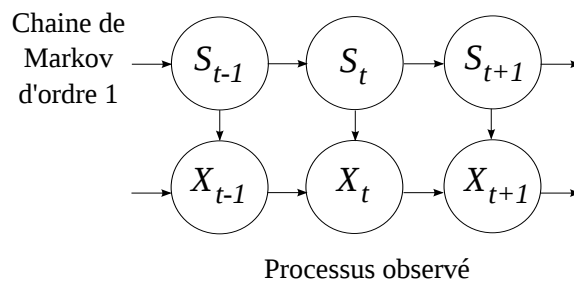


Figure 2.5 – Graphe d'indépendance conditionnelle pour le modèle AR à changements de régimes markoviens d'ordre  $r = 1$ .

Les modèles AR les plus couramment utilisés dans la littérature s'écrivent sous la forme :

$$X_t = f(X_{t-r}, X_{t-r+1}, \dots, X_{t-1}) + \epsilon_t \quad (2.13)$$

où  $\epsilon_t$  est un processus temporel (par exemple un bruit blanc) et  $f$  une fonction linéaire ou non-linéaire de  $E^r$  dans  $E$ . Le lecteur est invité à consulter les références [Gué94, Ham94] pour plus de détails sur les modèles de régression (AR) utilisés pour modéliser des séries temporelles.

### 2.2.4.2 Cas particuliers : chaînes de Markov cachées

Les modèles AR à changements de régimes markoviens regroupent un grand nombre de modèles. Dans le cas particulier où  $r = 0$ , le processus  $\{S_t, X_t\}$  devient une *chaîne de Markov cachée* (notée HMM pour *Hidden Markov Model*). La loi conditionnelle de  $X_t$  sachant  $\{X_{t'}\}_{t-r \leq t' \leq t-1}$  et  $S_t$  dépend ici uniquement de  $S_t$ , comme illustré sur la figure 2.6.

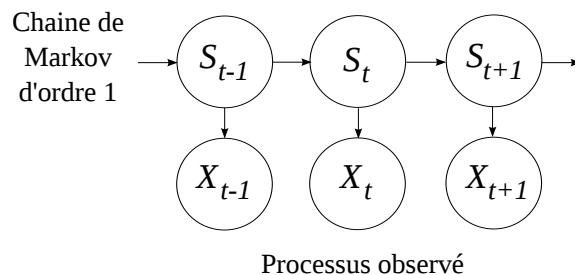


Figure 2.6 – Graphe d'indépendance conditionnelle pour le modèle HMM.

### 2.2.4.3 Applications

Les modèles autorégressifs (AR) à changements de régimes introduits il y a 20 ans par Hamilton [Ham90, Ham93] ont largement été utilisés en économétrie mais également en reconnaissance de la parole (voir [Rab90] pour une vue d'ensemble des modèles utilisés dans ce domaine). Ils ont aussi récemment été employés pour modéliser les séries temporelles de vent par P. Ailliot [Ail04]. L'auteur explique néanmoins que l'identification et la mise en œuvre de tels modèles sont des étapes parfois longues et qui n'aboutissent pas toujours suivant la complexité des modèles retenus. Il souligne par ailleurs l'intérêt des chaînes de Markov pour modéliser et générer des séries temporelles du vent, qualifiées de méthodes rapides et faciles à mettre en œuvre.

### 2.2.5 Conclusion

Les classes de processus brièvement introduites précédemment représentent des candidats potentiels pour la modélisation des chargements de fatigue. L'étude des données mises à disposition et les objectifs de la modélisation permettent de sélectionner le ou les modèles les plus adéquats parmi ceux évoqués, ce qui fait l'objet de la partie 2.3. Il s'agit ensuite de proposer une formulation pertinente pour une utilisation en propagation de fissure, ce qui est traité au chapitre 3.

## 2.3 Base de données de chargement

### 2.3.1 Introduction

Le travail de thèse s'appuie sur un ensemble de données mesurées en vol sur une flotte d'avions de combat. L'objectif de cette section est de présenter ces données et le traitement qui en est fait. L'analyse de ces données fournit des éléments pour orienter le choix de la modélisation stochastique du chargement en fatigue. Ce choix est fait à la section 2.4.

Les données brutes sont constituées d'un ensemble de 27458 enregistrements temporels d'accélération en un point spécifique des avions de la flotte. On suppose que l'échantillonnage est uniforme et que ces données sont donc représentatives de l'activité de la flotte. Les enregistrements commencent au décollage lorsque les roues ne touchent plus le sol et stoppent automatiquement 30 secondes après atterrissage physique de l'appareil (top train avant). Ces données d'accélération ont été post-traitées par DGA/TA afin de fournir des séquences temporelles représentatives d'une contrainte en un point spécifique de la structure de l'avion (bord d'un alésage sur un longeron principal de voilure, qui représente un élément structural de l'avion, voir figure 2.7).

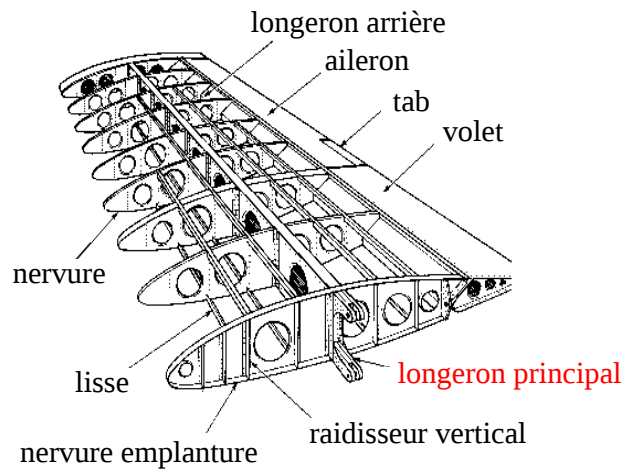


Figure 2.7 – Éléments principaux de voilure.

Il est à noter que la variabilité observée sur les niveaux de chargements en contrainte, leur séquençement et la durée d'un vol est liée à celles :

- sur le choix de l'avion au sein de la flotte,
- sur les missions confiées aux avions de la flotte,
- sur les techniques de pilotage liées au pilote, et
- sur les conditions environnementales dans lesquelles l'avion évolue (rafales par exemple).



### 2.3.2 Caractéristiques principales des enregistrements

**Allure des trajectoires.** Chaque série temporelle est caractérisée par une série de contraintes enregistrées à des instants qui varient automatiquement en fonction de l'activité de l'avion (de base toutes les 30 secondes, au minimum toutes les 0.01 secondes en cas de manœuvres sévères par exemple) et une durée du vol. Elle peut ainsi être vue comme la réalisation d'un processus et constitue donc *une trajectoire*. La figure 2.8 illustre deux trajectoires observées.

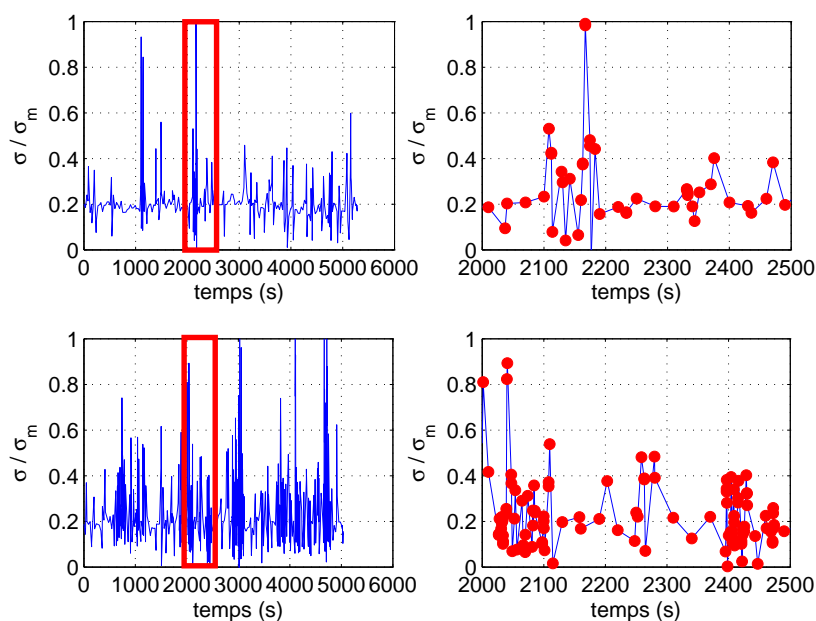


Figure 2.8 – Exemples de trajectoires de contraintes observées (contraintes normées par rapport à la contrainte maximale  $\sigma_m$  sur l'ensemble des données).

**Répartition par classes des trajectoires.** Les 27458 vols sont répartis en 27 classes de vols représentatives de l'activité de la flotte d'avions considérée et définies par DGA/TA, voir figure 2.9. Chaque classe contient les vols qui ont été enregistrés sur des structures qui effectuent le même type de mission et qui ont une même configuration d'emports externes, c'est-à-dire avec un même nombre de réservoirs de carburant supplémentaires et un armement (par exemple missiles) similaire. En ne considérant que le critère "type de configuration d'emports externes", l'ensemble des trajectoires peut être scindé en 4 grandes classes :

- Configuration légère (373 vols)
- Configuration avec un unique réservoir supplémentaire ou sans emport annexe (2765

- vols)
- Configuration avec 2 réservoirs supplémentaires et emports annexes lourds (23025 vols)
  - Configuration avec 2 réservoirs supplémentaires et emports annexes très lourds (1295 vols)

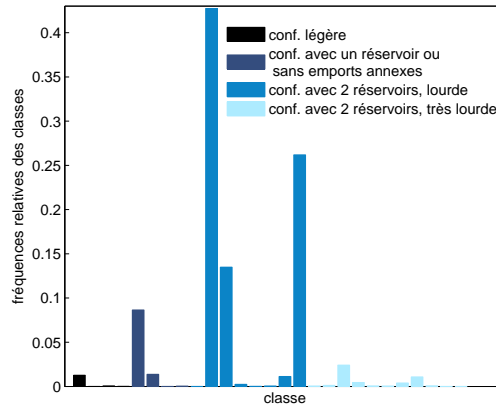
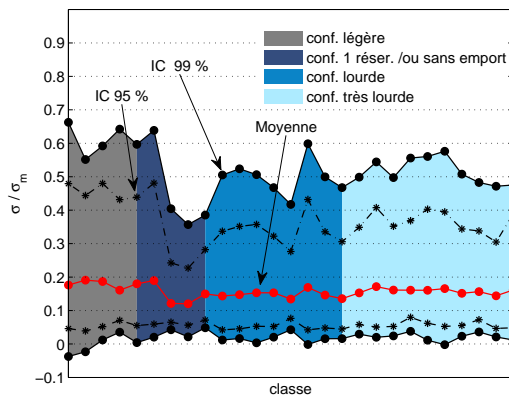
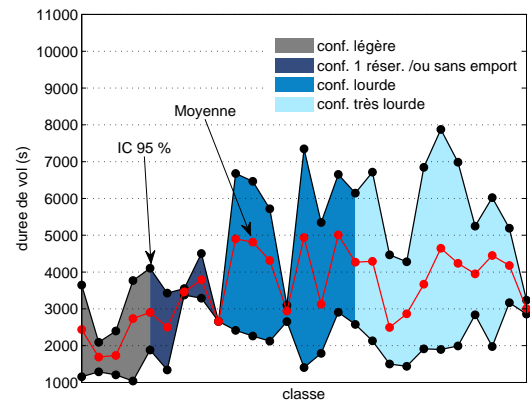


Figure 2.9 – Diagramme des fréquences relatives pour les classes de vols.

**Niveaux de contrainte et durées des vols par classe.** La moyenne des contraintes  $\sigma$  normées par rapport à la valeur maximale des charges observée  $\sigma_m$  ainsi que les intervalles de confiance empiriques (IC) à 95% et à 99% sur les contraintes sont reportés sur la figure 2.10(a) pour chacune des classes de vols. De même, la durée moyenne des vols par classe et l'intervalle à 95% sont illustrés sur la figure 2.10(b).



(a) Niveaux de contraintes



(b) Durée des vols

Figure 2.10 – Intervalles de confiance et moyennes des niveaux de contraintes et des durées des vols pour chacune des classes.

Les contraintes les plus sévères sont relevées pour les configurations légère et avec un réservoir ou sans emport additionnel. Les niveaux de charges sont également en moyenne plus élevés pour ces deux configurations lorsque les durées de vol sont les plus courtes, ce qui est cohérent avec des réserves moindres en carburant par rapport aux deux configurations les plus lourdes. Enfin la dispersion sur les charges observées, ici caractérisée par l'étendue de l'intervalle de confiance (IC), est également plus large pour les deux configurations les plus légères.

Les deux catégories les plus légères présentent ainsi des charges en vol potentiellement plus sévères et plus dispersées que les deux catégories les plus lourdes, ce qui suggère deux domaines de vol distincts.

**Niveaux de contrainte avec ou sans réserve de carburant.** Les instants où les réservoirs de carburant supplémentaires emportés sont vides sont également relevés pour chacune des trajectoires. Il paraît intéressant d'observer si les niveaux de contraintes mesurés avant et après cet instant, appelé "top carburant" sont foncièrement différents puisque le domaine de vol pour les appareils allégés devient plus étendu et donc potentiellement plus sévère. Dans un tel cas, un processus pour chaque phase devrait être proposé. Les moyennes des contraintes et les IC à 99% sont portés sur la figure 2.11 pour chacune des deux phases et pour chacune des classes.

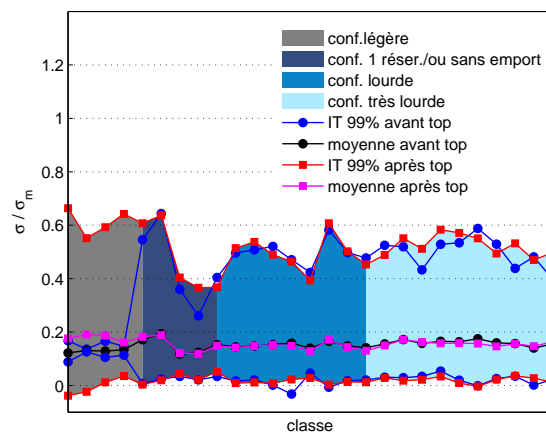


Figure 2.11 – Niveaux de contrainte avant et après "top carburant" pour chacune des classes.

Globalement les mêmes niveaux de contraintes sont observés avant et après le "top carburant" pour les deux configurations les plus lourdes et la configuration avec un réservoir ou sans emports annexes. Concernant la configuration légère, il n'y a pas de réservoir supplémentaire et donc le "top carburant" est relevé immédiatement après le décollage,

soit donc après enregistrement de quelques contraintes uniquement. Ainsi l'IC pour cette configuration est très resserré autour de la moyenne.

Finalement il n'y a pas un impact fort de l'évolution du volume de carburant des réservoirs additionnels sur la sévérité des charges observées. Ainsi il est choisi de ne pas séparer les deux phases de vol dans la construction du modèle stochastique de chargement.

### 2.3.3 Groupes de trajectoires

Étant données les différentes exigences opérationnelles de la flotte d'avions de combat étudiée, le modèle stochastique de chargement idéal devrait être capable de traduire ces différentes utilisations de la flotte en offrant un modèle stochastique pour chacune des 27 catégories. Cependant de nombreuses classes ne contiennent que quelques vols d'après le diagramme des fréquences, voir figure 2.9. 13 classes contiennent en effet moins de 30 vols. Ces faibles tailles d'échantillons laissent présager des difficultés pour l'identification d'un processus adéquat avec une précision satisfaisante.

L'ensemble des vols a ainsi été précédemment réparti en quatre classes suivant le critère "type de configuration d'emports externes". Ces quatre grandes classes de vol sont plus peuplées mais la répartition des données reste très inégale. La configuration légère rassemble par exemple 373 vols contre 23025 vols pour la catégorie lourde.

Il est finalement choisi de répartir l'ensemble des données en deux grands groupes de vols, avec domaines de vol distincts, de manière à augmenter la taille des échantillons. Les deux groupes formés rassemblent respectivement les configurations lourde et très lourde (soit 24320 vols), appelé groupe "A" et les configurations légère et avec un réservoir (soit 3138 vols), appelé groupe "B". Ces deux groupes sont supposés dans la suite représentatifs de deux utilisations principales de la flotte. Cette sélection a été réalisée sur la base de l'expertise de DGA/ TA. Une analyse de classification, reportée en annexe C et menée de manière indépendante, confirme ce choix. Un modèle stochastique de chargement est ainsi proposé pour chacune de ces exigences opérationnelles.

Regrouper les données permet ainsi de lever partiellement voir complètement le problème du manque de données pour l'identification de processus. Cependant le rédacteur a conscience que des difficultés d'identification des processus stochastiques peuvent aussi être sous-jacentes à une telle hypothèse. Il peut en effet être délicat de "caler" un modèle stochastique sur des réalisations qui proviennent en fait de processus stochastiques très différents les uns des autres.

## 2.3.4 Analyse temporelle des données

### 2.3.4.1 Introduction

Les analyses préliminaires des données ont conduit à considérer deux groupes de trajectoires distinctes et à ne pas séparer les deux phases de vol (avant et après “top carburant”). Il s’agit donc maintenant de proposer un modèle stochastique de chargement pour chacun des deux groupes “A” et “B”.

Une approche usuelle consiste à vouloir identifier un processus aléatoire continu sur les séquences temporelles mesurées. Une telle approche est grandement simplifiée si le processus à identifier possède des propriétés bien spécifiques. On peut citer pour exemple le cas des processus gaussiens stationnaires pour lesquels il existe des méthodes et outils performants pour leur identification et leur simulation. Il est également à noter que ces processus peuvent être utilisés dans des analyses de fiabilité assez classiques, même s’il faut souvent envisager des méthodes de simulation qui se révèlent assez coûteuses en temps de calcul.

L’objectif de la section 2.3.4 est d’analyser les trajectoires mesurées afin d’en appréhender leurs caractéristiques et *in fine* voir s’il est possible et judicieux d’envisager une utilisation de processus aléatoires continus, voire gaussiens et stationnaires.

### 2.3.4.2 Caractéristiques globales

Le tableau 2.1 résume les principales caractéristiques des trajectoires de chargement observées pour les deux utilisations de la flotte étudiée, c’est-à-dire pour les deux groupes de données “A” et “B”.

### 2.3.4.3 Moments statistiques du premier et second ordres, lois

L’identification de processus scalaires continus stationnaires du second ordre  $X$  commence par l’étude de la stationnarité du processus étudié. Un processus du second ordre est dit faiblement stationnaire si sa fonction moyenne  $m_X(t)$  est constante  $\forall t$  et sa fonction de covariance  $C_X(t, t')$  ne dépend que de la différence entre les instants  $t$  et  $t'$ . La seconde étape consiste ensuite à étudier le système des lois fini-dimensionnelles, voir 2.2.1.

La fonction moyenne  $m_X(t)$  et la fonction de covariance  $C_X(t, t')$  d’un processus stochastique estimées à partir de trajectoires observées sont en pratique évaluées aux instants de mesures des trajectoires, ce qui impose une discrétisation commune de l’ensemble des trajectoires et une longueur (durée) identique. Chaque instant  $t_i$  des mesures est ainsi

Tableau 2.1 – Caractéristiques des trajectoires de chargements pour chacun des deux groupes.

		groupe "A" (24320 vols)	groupe "B" (3138 vols)
CONTRAINTES $\sigma/\sigma_m$	$\sigma_{\min}$	-0.598	-0.479
	$\sigma_{\max}$	0.845	1.0
	$\sigma_{\text{moyen}}$	0.146	0.181
	Écart-type	0.093	0.126
	% $\sigma < 0$	0.54	0.91
DURÉE des vols $d$ (s)	$d_{\min}$	472.1	500.9
	$d_{\max}$	8592	6400
	$d_{\text{moyenne}}$	4801.6	2798.4
	Écart-type	1313.6	743.4

pourvu d'un  $N$ -échantillon de réalisations de la variable aléatoire  $X_{t_i}(\omega)$ , où  $N$  est constant pour l'ensemble des instants de discrétisation  $t_i$ .

D'après le tableau 2.1 et le paragraphe 2.3.2, les trajectoires à disposition ne vérifient pas ces deux critères, ce qui exclut une analyse directe à partir des données en contraintes fournies. Une première idée est alors d'adopter la démarche usuelle suivante :

1. **Troncature des trajectoires** : afin d'avoir un même nombre de réalisations à chaque instant  $t_i$ , seule la partie commune des trajectoires est étudiée.
2. **Interpolation statistique entre les instants de mesure** : les mesures étant réalisées à des instants variables d'une trajectoire à l'autre, une interpolation linéaire entre les instants de mesures est réalisée pour chacune des trajectoires. Une interpolation par Krigeage [Mat62, Mat63] pourrait également être envisagée mais cela supposerait qu'on admette l'hypothèse de stationnarité.
3. **Discrétisation à pas constant** : les trajectoires continues (obtenues par interpolation) sont ensuite discrétisées avec un pas de temps constant. Cette discrétisation doit respecter le critère d'échantillonnage de Nyquist-Shannon.
4. **Analyse statistique** : Les fonctions moyenne et covariance ainsi que les lois aux instants  $t_i$  sont enfin étudiées.

Une telle analyse a été initiée pour chacun des groupes "A" et "B". On ne présente ici que les résultats obtenus à partir du groupe "B" de données, par souci de concision.

A l'étape 1, les trajectoires n'ont pas été tronquées à leur partie commune. Cette plage commune étant restreinte (500.9 secondes pour le groupe "B") il a été décidé de conserver uniquement les trajectoires les plus longues. On sélectionne ici les trajectoires du groupe "B" qui ont une durée minimale de 2250 secondes (choix arbitraire). Cela permet de conserver 75% des trajectoires du groupe pour l'analyse statistique. Les fonctions moyenne  $m_X(t)$  et écart-type  $\sigma_X(t)$  du processus sous-jacent au groupe "B", estimées à partir de ces trajectoires, sont tracées sur les figures 2.12(a) et 2.12(b). Des allures similaires sont obtenues pour les estimées des fonctions moyenne et écart-type à partir du groupe de données "A".

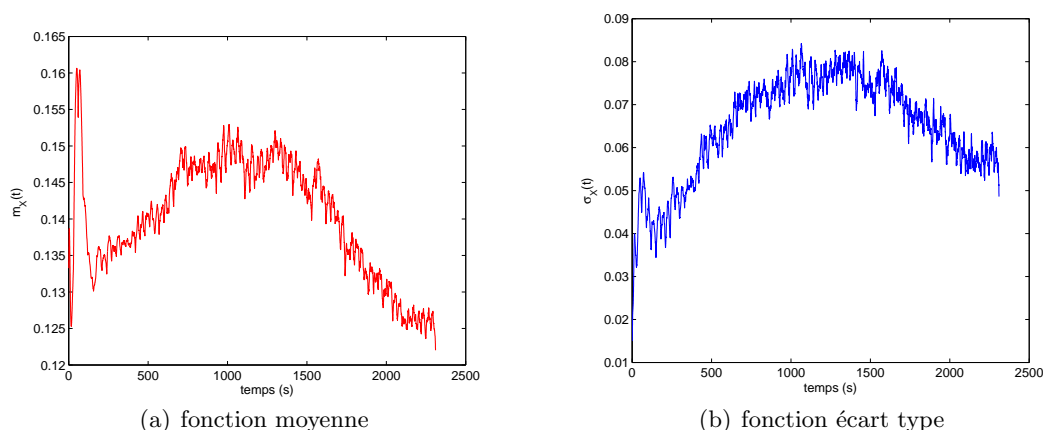


Figure 2.12 – Estimations des fonctions moyenne et écart-type pour le groupe "B".

D'après ces figures, les processus ne sont visiblement pas stationnaires en moyenne et en variance. Afin de réduire le degré de non-stationnarité, le processus sous-jacent  $Y$  défini par  $(X - m_X)/\sigma_X$  est considéré. Le processus  $Y$  défini de cette manière est stationnaire en moyenne et en variance. Il s'agit ensuite d'examiner si celui-ci est stationnaire en covariance. Pour ce faire, on trace l'estimation de la covariance  $C_Y(t, t')$  du groupe "B", voir figure 2.13 et on regarde si les covariances  $C_Y(t, t')$  calculées entre les variables aléatoires  $Y_t$  et  $Y_{t'} \forall t$  et  $t'$  vérifiant  $\tau = t' - t = \text{cste}$  sont les mêmes. On observe ici que la covariance  $C_Y(t, t')$  n'est pas constante pour une différence  $\tau = t' - t$  donnée et donc que celle-ci ne dépend pas uniquement de cette différence. Le processus  $Y$  n'est donc pas stationnaire en covariance. Des observations similaires sont obtenues pour le groupe "A".

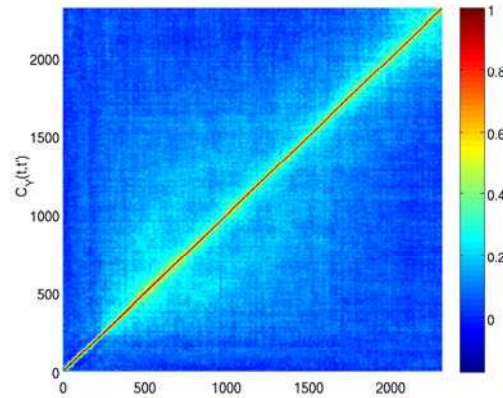


Figure 2.13 – Covariance du processus  $Y = \frac{X - m_X}{\sigma_X}$  pour le groupe “B”.

Par ailleurs les allures des lois des variables aléatoires  $Y_{t_i}$ , non reportées ici, diffèrent les unes des autres et ne peuvent pas être considérées gaussiennes de manière satisfaisante.

#### 2.3.4.4 Conclusion

Cette brève étude temporelle permet de montrer qu’il n’est pas immédiat d’identifier un processus scalaire continu et stationnaire du second ordre, à partir des deux groupes de séries temporelles disponibles. L’analyse des deux premiers moments statistiques montre par ailleurs que les processus ne sont pas stationnaires et que les lois identifiées à quelques instants ne sont ni gaussiennes, ni du même type.

On peut également douter de la validité d’une telle approche d’identification qui d’une part ne prend en compte qu’une partie de l’information disponible (la troncature des trajectoires engendre une perte importante de l’information) et d’autre part crée de l’information entre les instants de mesures lors de l’interpolation, où l’évolution des contraintes n’est pas connue.

Enfin, on peut s’interroger sur la pertinence d’une approche en temps continu puisque les chargements de fatigue et de propagation de fissure ne sont définis que par des séquences de cycles. Les trajectoires simulées avec de tels processus continus devraient donc en plus être filtrées pour obtenir des séquences de “maximums-minimums”.

Pour l’ensemble des raisons évoquées, il semble assez illusoire et peu pertinent d’aborder les données de chargement à disposition sous l’angle des processus à temps continu. L’utilisation de processus gaussiens stationnaires est également à proscrire, les hypothèses requises n’étant pas vérifiées.



## 2.4 Choix des chaînes de Markov

### 2.4.1 Motivation

Compte tenu des remarques faites en conclusion au 2.3.4.4 et de l'objectif qui est de modéliser des suites de cycles de fatigue dans lesquelles la notion de temps n'est pas explicite, les processus gaussiens sont exclus des candidats potentiels pour modéliser l'aléa des chargements de fatigue présentés au paragraphe 2.2. Les chaînes de Markov du premier ordre à temps discret et les chaînes de Markov cachées (également à temps discret), supposées relativement faciles à utiliser, sont quant à elles sélectionnées pour répondre à la problématique. Il est important de noter que dans le cadre de ce mémoire il n'est pas choisi d'investiguer la piste des processus autorégressifs à changements de régimes markoviens, plus complexes à mettre en œuvre.

Il n'est également pas envisagé de modéliser les phénomènes physiques tels que les turbulences, les rafales ou encore les phases de vol comme J.Y. Plantec le propose dans ses travaux de thèse [Pla94]. Ces phases sont difficiles à identifier à partir des données à disposition. Par ailleurs, ce sont les manœuvres qui sont principalement responsables des charges les plus sévères pour la flotte d'avions de combat considérée ici. La modélisation des séquences de chargement de fatigue à partir des séries temporelles observées est ainsi le seul but recherché dans les travaux présentés.

### 2.4.2 Définition des modèles proposés

La formulation des chaînes de Markov, présentée au 2.2.3.2, permet d'envisager une infinité de modèles. La difficulté réside tout d'abord dans la définition de la variable aléatoire  $X_n$  (que représente cette quantité?) et dans la définition de l'espace des états  $E$  (nombre et choix des états).

Différentes pistes ont ainsi été initialement explorées lors de ces travaux de recherche pour modéliser des chargements de fatigue. Elles sont résumées sur la figure 2.14. Quatre types de chaînes de Markov ont en particulier été proposés pour la définition d'une séquence de cycles de fatigue :

1.  $X_n$  représente une contrainte quelconque de la séquence, "min" ou "max". La plage des contraintes observées est séparée en  $K_c$  classes et chacune des classes est remplacée par une contrainte unique notée  $e_k$ . L'espace des états  $E$  est donc fini de cardinal  $K_c$ , à définir à partir des données. Les probabilités de la matrice de transition  $\mathbf{P}$  correspondent aux probabilités de passer d'un niveau de contrainte  $e_k$  à un autre. Une telle définition de  $X_n$  n'implique pas nécessairement la simulation alternée des mi-

nimums et maximums.

2.  $X_n$  représente également une contrainte quelconque de la séquence, “min” ou “max”, et l’espace des états  $E$  est identique à celui du modèle 1. Deux matrices de transition  $\mathbf{P}$  (“min”  $\rightarrow$  “max”) et  $\mathbf{P}'$  (“max”  $\rightarrow$  “min”) sont ici construites pour assurer l’alternance des contraintes “max-min” caractéristique des chargements de fatigue, ce qui n’est pas le cas du modèle 1. Cette définition a initialement été proposée par I. Rychlik [Ryc96] et P. Johannesson [Joh99] pour des applications en fatigue. Il est important de noter qu’une telle modélisation ne correspond pas rigoureusement à la définition des chaînes de Markov de par l’alternance des matrices de transition le long de la séquence.
3.  $X_n = \{M_n; m_n\}$  représente ici un cycle de fatigue où  $M_n$  et  $m_n$  sont respectivement le maximum et le minimum de ce cycle  $X_n$ . L’espace des états est constitué de  $K = K_c(K_c - 1)/2$  cycles, où  $K_c$  correspond toujours au nombre total de classes de contraintes choisies pour discrétiser la distribution des contraintes “min” et “max” observées. Les classes sont là aussi remplacées par des contraintes uniques  $e_k$ . Par construction le maximum  $M_n$  du cycle  $X_n$  est nécessairement plus grand que son minimum  $m_n$ , ce qui conduit à  $K = K_c(K_c - 1)/2$  états possibles. La matrice de transition  $\mathbf{P}$  rassemble de cette manière les probabilités de transiter d’un cycle à un autre cycle. Des termes de la matrice sont nuls afin d’assurer, toujours par construction, que le maximum du cycle  $X_{n+1}$  soit toujours plus grand que le minimum du cycle  $X_n$ .
4. Ce modèle correspond exactement au modèle 3 excepté que les valeurs observées des minimum et maximum de  $X_n$  ne sont plus les valeurs discrètes  $e_k$  des  $K_c$  classes de contraintes. Les variables  $X_n$  suivent une loi de probabilité prise dans une classe de lois estimées en utilisant des méthodes d’estimation paramétriques.

Les premières études réalisées à partir des modèles 1, 2 et 3, non développées ici, ont montré la pertinence du modèle 3 par rapport aux modèles 1 et 2. Les chaînes de Markov telles que définies impliquent les probabilités de transiter d’un cycle à un autre, soit une dépendance d’ordre 1 en termes de cycles. Cela correspond ainsi à une dépendance d’ordre supérieur en termes de niveaux de contrainte. La définition même du modèle 3 implique donc un ordre de dépendance supérieur par rapport à celles des modèles 1 et 2, ce qui semble avoir une influence sur la qualité des résultats obtenus. Pour ces raisons, le modèle 3 a ainsi été choisi comme candidat pour modéliser les chargements de fatigue.

L’impact du nombre de classes  $K_c$  choisi pour la discrétisation de la plage des contraintes

observées ainsi que la manière de répartir ces classes ont ensuite été étudiés. Un découpage uniforme de la plage des contraintes en  $K_c$  classes a tout d'abord été proposé. Un découpage en fonction des particularités des distributions empiriques de contraintes (modes évidents par exemple) a ensuite été réalisé. Les résultats des diverses analyses ont montré qu'il existe des écarts persistants entre les résultats de propagation de fissures obtenus d'une part avec les trajectoires simulées avec le modèle 3 et ceux d'autre part obtenus directement à partir d'un choix aléatoire au sein de l'ensemble des séquences de chargement observées.

Le modèle 4 a ainsi été développé dans le but d'apporter une réponse à la limitation du modèle 3. Il est montré au chapitre 3 que ce modèle est pertinent pour modéliser l'aléa observé dans les séquences de chargement de fatigue pour des applications en aéronautique.

La description précise des modèles markoviens retenus (3 et 4) ainsi que les résultats obtenus avec ces modèles sont exposés au chapitre 3.

## 2.5 Conclusion

Un état de l'art succinct des différents travaux de recherche consacrés aux outils stochastiques potentiellement aptes à modéliser des séquences de chargements de fatigue d'amplitude variables est réalisé dans ce chapitre et met en avant les efforts déjà réalisés dans ce domaine. Ces études se limitent cependant souvent soit à la mise en place de relations théoriques de calcul du dommage à partir de modèles stochastiques, soit à des analyses de distribution d'avancées de fissure sous chargements aléatoires, simulés à partir de processus continus dont les caractéristiques sont arbitrairement définies.

L'objectif des travaux présentés dans ce manuscrit consiste à proposer une modélisation du chargement de fatigue réaliste à partir d'enregistrements temporels de contraintes issus de mesures en vol. Après avoir introduit quelques processus stochastiques candidats à la modélisation aléatoire du chargement de fatigue à partir des travaux recensés dans la littérature, l'étude des données à disposition a ensuite conduit à réaliser un certain nombre de choix concernant la classification des données (deux groupes) et les familles de processus qui semblent les plus appropriées à la nature des données disponibles. Un ensemble de calculs préliminaires a enfin contribué à la sélection de deux types de processus pour modéliser des séquences de chargement à partir de données : les chaînes de Markov du premier ordre à espace d'états discret et les chaînes de Markov cachées, développés au chapitre 3. La construction même de ces processus a été adaptée de manière à modéliser des séquences de cycles de fatigue.

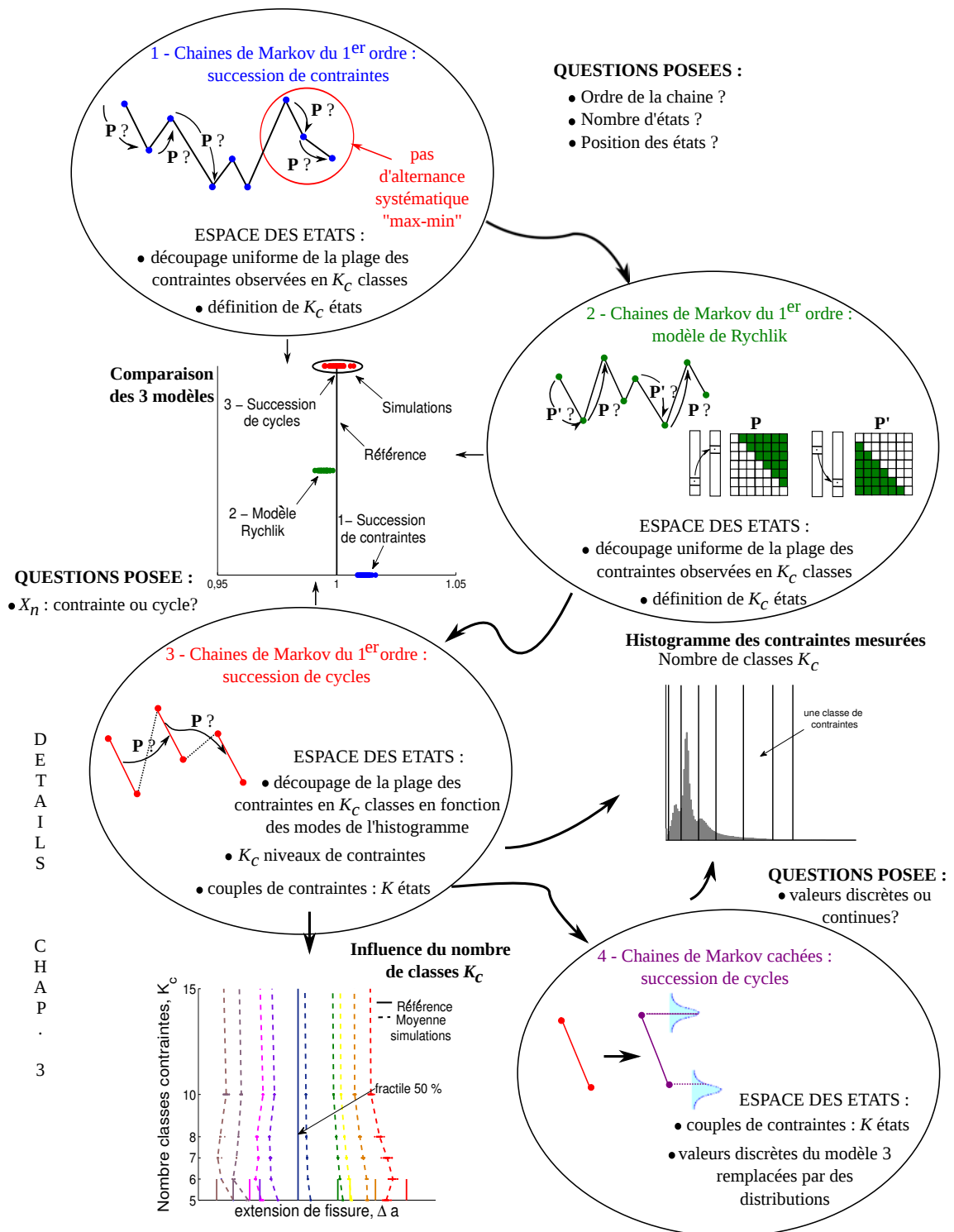


Figure 2.14 – Cheminement suivi pour le choix des modèles markoviens pour la modélisation des chargements de fatigue.

## Chapitre 3

# Modélisation markovienne du chargement de fatigue

*La modélisation stochastique du chargement de fatigue basée sur des enregistrements en vol d'aéronefs militaires est détaillée dans ce chapitre. Elle s'appuie d'une part sur les chaînes de Markov du premier ordre et d'autre part sur les chaînes de Markov cachées, outils mathématiques retenus à partir des analyses effectuées au chapitre 2. La pertinence des modélisations proposées pour des applications en propagation de fissure en aéronautique est ensuite étudiée. Il est montré que les chaînes de Markov cachées se révèlent être des outils adéquats et précis pour les applications visées. Enfin, des perspectives d'évolution des modèles développés et validés sont déclinées.*

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>93</b>
<b>3.2</b>	<b>Modélisation stochastique d'une séquence de <math>N_c</math> cycles</b>	<b>94</b>
3.2.1	Chaînes de Markov du 1 <sup>er</sup> ordre homogènes (FMC)	94
3.2.2	Chaînes de Markov cachées (HMM)	100
<b>3.3</b>	<b>Inférence des modèles stochastiques</b>	<b>102</b>
3.3.1	Inférence des modèles FMC	103
3.3.2	Inférence des modèles HMM	109
3.3.3	Autres solutions	114
<b>3.4</b>	<b>Modélisation d'une séquence de <math>N_v</math> vols</b>	<b>115</b>
<b>3.5</b>	<b>Validation des modèles FMC et HMM</b>	<b>116</b>
3.5.1	Introduction et méthodologie	116
3.5.2	Matériau à effet retard - fonction PREFFAS $\sigma_{eq}^m$	119
3.5.3	Matériau sans effet retard - fonction Paris $\gamma^m$	127
<b>3.6</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>131</b>
3.6.1	Conclusions	131
3.6.2	Perspectives	132

---

## 3.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est de construire le modèle aléatoire de chargement en fatigue le plus représentatif des données de chargement collectées en vol au sein de la flotte d'avions de combat étudiée. Ce modèle aléatoire doit traduire à la fois l'aléa du type d'activité d'un aéronef au sein de la flotte (lié à la catégorie d'usage ou ici plus exactement au groupe d'usage) et celui des fluctuations de charges vues en vol par un aéronef lors d'une activité donnée. Une séquence de chargement est vue comme une suite de  $N_v$  vols où un vol est défini comme une suite de  $N_c$  cycles.

La solution envisagée s'appuie sur une modélisation à deux niveaux, comme illustré sur la figure 3.1 :

1. **Niveau 0** : modélisation d'une séquence de  $N_v$  vols représentative de l'activité de l'avion au sein de la flotte.
2. **Niveau 1** : modélisation d'une suite de  $N_c$  cycles constituant un vol pour une utilisation donnée de l'appareil.

Au "niveau 1" de la modélisation, un processus stochastique est défini pour modéliser une séquence de  $N_c$  cycles, correspondant à un vol, pour chaque activité de l'avion. D'après le chapitre 2, les données ont été regroupées en deux catégories, ce qui impose ici de proposer deux processus stochastiques pour modéliser des suites de  $N_c$  cycles, un pour chacune des activités "A" et "B" de la flotte.

Deux types de processus sont utilisés pour modéliser les séquences de cycles de fatigue de chacune des deux activités de l'avion. Les chaînes de Markov du premier ordre (FMC pour *First order Markov Chain*) et les chaînes de Markov cachées (HMM pour *Hidden Markov Model*) ont été sélectionnées à cet effet comme candidats potentiels suite aux études réalisées et brièvement présentées au paragraphe 2.4. Elles sont respectivement notées  $FMC^{(A)}$  et  $HMM^{(A)}$  pour le groupe "A", et  $FMC^{(B)}$  et  $HMM^{(B)}$  pour le groupe "B". Les caractéristiques de ces modèles proposés pour modéliser un vol lors d'une utilisation donnée de l'aéronef au sein de la flotte sont identifiées à partir des données collectées en vol et sont présentées dans les sections 3.2 et 3.3.

Le modèle correspondant au "niveau 0", détaillé dans la section 3.4, permet ensuite de générer des séquences de  $N_v$  vols, où chaque vol correspond à une utilisation précise de la flotte.

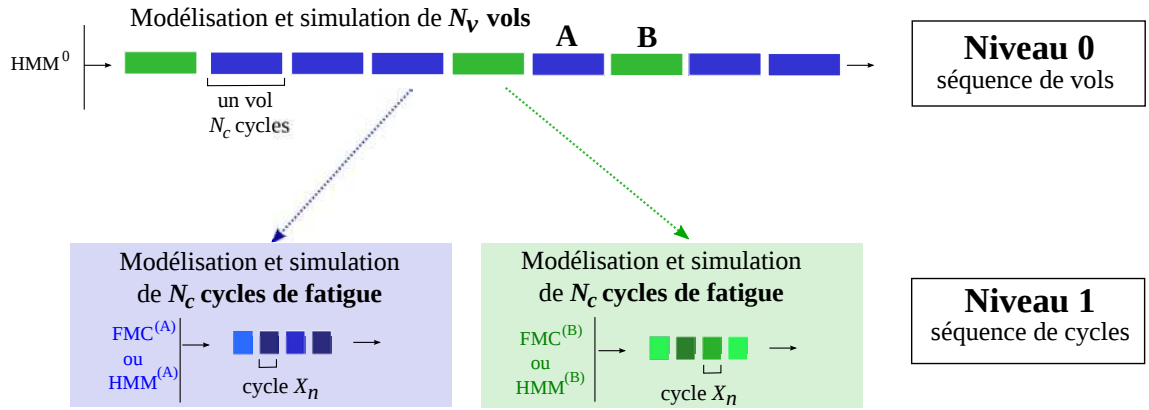


Figure 3.1 – Niveaux de la modélisation stochastique du chargement de fatigue, groupes d’usage “A” et “B”.

## 3.2 Modélisation stochastique d’une séquence de $N_c$ cycles

Cette section introduit d’une manière théorique les processus FMC et HMM candidats à la modélisation des suites de cycles de fatigue. Les outils mathématiques utilisés dans ces travaux de thèse pour vérifier la qualité de l’inférence dans la section 3.3 sont également présentés.

### 3.2.1 Chaînes de Markov du 1<sup>er</sup> ordre homogènes (FMC)

#### 3.2.1.1 Présentation

**Propriété de Markov.** Une chaîne de Markov du premier ordre à temps discret [AG57, Ber98, BB02] est une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  à valeurs dans un espace fini (discret)  $E$  telle que la distribution conditionnelle de  $X_{n+1}$  connaissant  $(X_m)_{m \leq n}$  soit égale à la distribution de  $X_{n+1}$  connaissant  $X_n$  :

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n) \quad (3.1)$$

C’est la *propriété de Markov* pour les chaînes de Markov que l’on a introduit de manière générale pour les processus de Markov à la section 2.2.3.1.



**Définition de  $X_n$ .** Une idée originale de ces travaux de thèse consiste à définir  $X_n$  comme un cycle de fatigue  $X_n = \{M_n; m_n\}$ , où  $M_n$  et  $m_n$  désignent respectivement le maximum et le minimum du cycle courant  $X_n$ . Comme indiqué au chapitre 2, cette définition diffère des travaux de la littérature portant sur les chaînes de Markov en fatigue. Elle implique une dépendance d'ordre 1 en termes de cycles ce qui en fait correspond à un ordre de dépendance supérieur en termes de contraintes, voir illustration sur la figure 3.2.

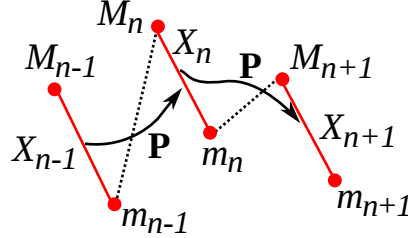


Figure 3.2 – Définition de la variable aléatoire  $X_n$  du modèle FMC.

**Homogénéité temporelle.** Dans la suite, on fait l'hypothèse que les chaînes de Markov sont homogènes, ce qui implique que les probabilités conditionnelles  $P(X_{n+1} = e_l | X_n = e_k)$ ,  $(e_k, e_l) \in E \times E$  sont indépendantes de  $n$  :

$$P(X_{n+1} = e_l | X_n = e_k) = P(X_2 = e_l | X_1 = e_k) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (e_k, e_l) \in E \times E \quad (3.2)$$

La distribution de  $X_1$  qui est la distribution initiale de la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et les probabilités conditionnelles  $P(X_2 = e_l | X_1 = e_k)$  définissent ainsi complètement la distribution de la chaîne  $X$ . En effet, à partir des équations (3.1) et (3.2) et par conditionnements successifs on obtient  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  et  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$  :

$$P(X_n = x_n, \dots, X_1 = x_1) = P(X_1 = x_1) \prod_{i=1}^{n-1} P(X_{i+1} = x_{i+1} | X_i = x_i) \quad (3.3)$$

L'hypothèse d'homogénéité paraît ici raisonnable étant donnée qu'aucune phase temporelle liée au niveau de carburant emporté (et donc à la masse de l'appareil) n'a été clairement identifiée sur les trajectoires de contraintes observées. C'est d'autre part l'approche la plus naturelle, en l'absence d'information supplémentaire.

La connaissance de la distribution du nombre de cycles  $N_c$  détermine enfin la longueur de la séquence (un vol).

**Espace des états.** Étant donnée la définition adoptée pour  $X_n$ , l'espace des états  $E$  est composé d'un nombre fini de cycles de fatigue  $e_k = (s_i, s_j)$  :

$$E = \{ e_k = (s_i, s_j), i > j \text{ et } i, j \in \{ 1, 2, \dots, K_c \} \} \quad (3.4)$$

où  $s_i$  et  $s_j$  sont les niveaux de contraintes sélectionnés à partir des données et  $K_c$  est le nombre de classes de contraintes choisies.

L'espace  $E$  contient ainsi  $K = K_c(K_c - 1) / 2$  cycles de fatigue états afin qu'un maximum  $M_{n+1}$  succède à un minimum  $m_n$ .

**Matrice de transition  $\mathbf{P}$ .** L'ensemble des probabilités conditionnelles  $P(X_2 = e_l | X_1 = e_k)$   $\forall (e_k, e_l) \in E \times E$  avec  $\text{card}(E) = K$  forme la *matrice de transition*  $\mathbf{P}_{K \times K}$  :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,l} & \dots & p_{1,K} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,l} & \dots & p_{2,K} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{k,1} & p_{k,2} & \dots & p_{k,l} & \dots & p_{k,K} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{K,1} & p_{K,2} & \dots & p_{K,l} & \dots & p_{K,K} \end{pmatrix}$$

où  $p_{k,l} = P(X_2 = e_l | X_1 = e_k)$ .

Il est important de noter que certaines probabilités de la matrice  $\mathbf{P}$  sont des zéros par construction pour assurer l'alternance des maximums et minimums, voir figure 3.3. Ces zéros, appelés *zéros structurels*, sont obtenus pour le cas suivant :

$$p_{(s_i, s_j), (s_{i'}, s_{j'})} = 0 \text{ pour } s_j \geq s_{i'} \quad (3.5)$$

Configuration modélisée :      Configuration exclue :

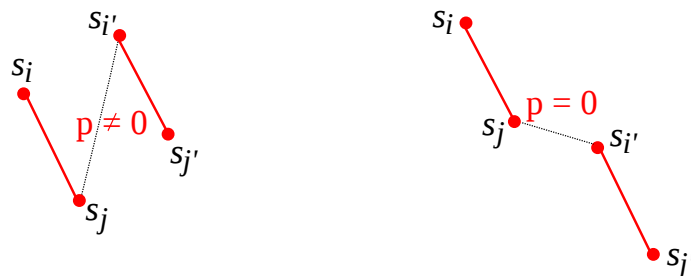


Figure 3.3 – Alternance des contraintes ‘max-min’.

Chaque ligne est une distribution de probabilité qui vérifie :

$$\sum_{l=1}^K p_{k,l} = 1 \quad , \quad 0 \leq p_{k,l} \leq 1 \quad \text{pour } k = 1, \dots, K \quad (3.6)$$

Les probabilités de la matrice de transition  $\mathbf{P}$  peuvent être estimées à partir des trajectoires observées de  $X$  par la méthode du Maximum de Vraisemblance (MV). Si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{N_c})$  est une séquence de chargement de  $N_c$  cycles, réalisation de la chaîne de Markov  $X$ , la fonction de vraisemblance associée  $L(x, \mathbf{P})$  s'écrit :

$$L(x, \mathbf{P}) = \prod_{k,l} p_{k,l}^{n_{k,l}} \quad (3.7)$$

où  $n_{k,l}$  correspond au nombre de transitions observées de l'état  $e_k$  à l'état  $e_l$  de  $x$ .

Maximiser le logarithme de la fonction de vraisemblance  $\ln L(x, \mathbf{P}) = \sum_{k,l=1}^K n_{k,l} \ln p_{k,l}$  par rapport aux paramètres  $p_{k,l}$  de la matrice de transition  $\mathbf{P}$  sous les contraintes  $\sum_{l=1}^K p_{k,l} = 1$  et  $0 \leq p_{k,l} \leq 1$  conduit aux estimations  $\hat{p}_{k,l}$  suivantes des probabilités  $p_{k,l}$  :

$$\hat{p}_{k,l} = \frac{n_{k,l}}{\sum_{l=1}^K n_{k,l}} \quad (3.8)$$

Les probabilités estimées  $\hat{p}_{k,l}$  sont simplement les rapports du nombre de transitions observées de  $e_k$  à  $e_l$  sur le nombre total de transitions partant de l'état  $e_k$ .

### 3.2.1.2 Qualité de l'estimation de la matrice de transition $\mathbf{P}$

Si le calcul des probabilités d'une matrice de transition ne pose aucun problème, rien ne permet d'affirmer en revanche que l'estimation est de bonne qualité. Concrètement, il est nécessaire de se demander si le nombre de données utilisées est suffisamment grand pour permettre une estimation robuste de la matrice. Une mauvaise estimation de la matrice  $\mathbf{P}$  est par exemple obtenue pour un nombre de paramètres  $K^2$  à estimer trop élevé par rapport à un volume de données imposé. Il est ainsi nécessaire de réaliser un compromis entre finesse du modèle et qualité des estimations.

Un tel compromis est ici réalisé à partir de deux indicateurs de qualité : le coefficient de variation et les mesures de stabilité.

**Coefficient de variation**  $c_{\hat{p}_{i,j}}$ . En 1998, E. Bode [Bod98, BB02] définit l'écart-type des probabilités estimées  $\hat{p}_{i,j}$  par :

$$\sigma_{\hat{p}_{k,l}} = \sqrt{\hat{p}_{k,l}(1 - \hat{p}_{k,l})/n_k} \quad (3.9)$$

Le coefficient de variation  $c_{\hat{p}_{k,l}}$  s'écrit comme suit :

$$c_{\hat{p}_{k,l}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{(1-\hat{p}_{k,l})}{n_k \hat{p}_{k,l}}} & \text{si } \hat{p}_{k,l} \leq 0.5 \\ \sqrt{\frac{\hat{p}_{k,l}}{n_k(1-\hat{p}_{k,l})}} & \text{si } \hat{p}_{k,l} > 0.5 \end{cases} \quad (3.10)$$

Ainsi, si la probabilité  $\hat{p}_{k,l} \rightarrow 0$  par manque de données, alors  $c_{\hat{p}_{k,l}} \rightarrow \infty$ . De même si  $\hat{p}_{k,l} \rightarrow 1$  alors  $c_{\hat{p}_{k,l}} \rightarrow \infty$ . Finalement, cet indicateur donne simplement les probabilités de la matrice les moins bien estimées.

B.A. Craig [CS02] propose alternativement d'utiliser les techniques de *bootstrap* [ET93] pour estimer empiriquement l'intervalle de confiance des probabilités  $\hat{p}_{k,l}$ . Cette technique n'est pas utilisée dans ce mémoire.

**Mesures de stabilité.** A. Berchtold et G. Ritschard [BR97, Ber98] proposent en 1997 une mesure permettant d'évaluer la stabilité, autrement dit la qualité, de l'estimation d'une distribution de probabilité discrète et par extension d'une matrice de transition. Cette mesure permet également de comparer plusieurs distributions ou matrices de tailles différentes entre elles, et ainsi de déterminer la plus fiable en regard du nombre de données disponibles.

La mesure de stabilité, qui prend en compte le nombre de modalités  $K$ , c'est-à-dire le nombre de valeurs possibles de la distribution discrète, est basée sur l'effet induit par l'introduction d'une donnée supplémentaire lors de l'estimation d'une distribution de probabilité discrète.

Si l'on note  $(p_1, \dots, p_K)$ , une distribution de probabilité théorique admettant  $K > 1$  modalités, alors la mesure de stabilité s'écrit :

$$D = \frac{K}{n+1} \left( 1 - \min_k p_k \right) \quad (3.11)$$

où  $\min_k p_k$  est la plus petite probabilité de la distribution théorique considérée, et  $n$  désigne

la taille d'échantillon ( $p_k = n_k/n$  où  $n = \sum_{j=1}^K n_k$  et  $n_k$  est le nombre d'observations de la modalité  $k$ ).

La mesure de stabilité est bornée par :

$$0 < D \leq \frac{K}{2} \quad (3.12)$$

L'estimation de la distribution de probabilité est d'autant plus stable que la mesure  $D$  est petite.

Une estimation  $\hat{D}$  de la mesure  $D$  est obtenue en remplaçant le terme  $\min_k p_k$  par son estimation du Maximum de Vraisemblance :

$$\hat{D} = \frac{K}{n+1} \left( 1 - \min_k \hat{p}_k \right) \quad (3.13)$$

$$= \frac{K}{n+1} \left( 1 - \frac{\min_k n_k}{n} \right) \quad (3.14)$$

où  $\min_k \hat{p}_k$  est le minimum de la distribution de fréquence empirique.

La matrice de transition  $\mathbf{P}$  étant formée d'un ensemble de distributions discrètes, il est légitime de mesurer sa stabilité d'une façon analogue à ce qui est proposé pour une distribution discrète.

Il est cependant important de souligner qu'une mesure de stabilité ne doit s'effectuer que sur les éléments d'une matrice pouvant réellement être différents de zéro. Les zéros structurels de la matrice  $\mathbf{P}$  doivent donc être exclus du calcul.

Nous notons dans la suite  $\bar{K}_k$  le nombre de probabilités n'étant pas des zéros structurels sur chaque ligne  $k$  de  $\mathbf{P}$ ,  $\bar{p}_{k,l}$  les probabilités n'étant pas des zéros structurels et  $n_k$  le nombre de données par ligne  $k$ .

Trois mesures de stabilité sont alors proposées :

- **mesure de stabilité maximale  $D_M$**

$$D_M(\mathbf{P}) = \max_k D_k = \max_k \left( \frac{\bar{K}_k}{n_k + 1} \left( 1 - \min_l \bar{p}_{k,l} \right) \right) \quad (3.15)$$

Il s'agit du maximum des mesures de stabilité obtenues sur toutes les lignes de la matrice.

- **mesure de stabilité moyenne**  $D_E$

$$D_E(\mathbf{P}) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K D_k = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left( \frac{\bar{K}_k}{n_k + 1} \left( 1 - \min_l \bar{p}_{k,l} \right) \right) \quad (3.16)$$

Cette mesure est définie comme étant la moyenne arithmétique des  $D_k$  sur l'ensemble des lignes de la matrice.

- **mesure de stabilité pondérée**  $D_P$

La troisième mesure est une moyenne pondérée des  $D_k$ , les pondérations étant proportionnelles au nombre de données de chaque ligne de la matrice  $\mathbf{P}$ .

$$D_P(\mathbf{P}) = \sum_{k=1}^K \frac{n_k}{n} D_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K \left( \frac{n_k \bar{K}_k}{n_k + 1} \left( 1 - \min_l \bar{p}_{k,l} \right) \right) \quad (3.17)$$

Les mesures  $D_M$ ,  $D_E$  et  $D_P$  sont toutes bornées par :

$$0 < D \leq \frac{\bar{K}_k}{2} \quad (3.18)$$

Les probabilités  $\bar{p}_{k,l}$  peuvent être estimées par la méthode du Maximum de Vraisemblance, ce qui permet ensuite d'obtenir les estimations  $\hat{D}_M$ ,  $\hat{D}_E$  et  $\hat{D}_P$  de  $D_M$ ,  $D_E$  et  $D_P$ .

## 3.2.2 Chaînes de Markov cachées (HMM)

### 3.2.2.1 Présentation

Une deuxième solution plus élaborée est envisagée pour modéliser des séquences de  $N_c$  cycles de fatigue. Ce modèle consiste à considérer la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  comme la deuxième composante d'une chaîne de Markov cachée [Rab90, CMR05]  $(S_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  d'espace d'état  $E^h \times E$ , où la première composante  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  n'est pas observée. Les observations de la séquence  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont ensuite obtenues à l'aide de distributions de probabilités.

Ce modèle de Markov caché (HMM) est ainsi décrit par un processus bivarié  $(S_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et une famille paramétrée de probabilités sur  $E$  ( $P_{s_n}$ ,  $s_n \in E^h$ ) où :

- $(S_n)_{n>0}$  avec  $S_n = \{M'_n; m'_n\}$  est une chaîne de Markov **non-observable** à valeurs dans  $E^h$ . Ici,  $(S_n)_{n>0}$  est la chaîne de Markov homogène du premier ordre introduite précédemment excepté que les niveaux de contraintes  $s_i$  et  $s_j$  ne sont plus affectés au cycle état  $e_k$ . On rappelle que l'espace des états d'une telle chaîne de Markov homogène du premier ordre avait été défini par :

$$E = \{ e_k = (s_i, s_j), i > j \text{ et } i, j \in \{ 1, 2, \dots, K_c \} \} \quad (3.19)$$

où  $s_i$  et  $s_j$  sont les niveaux de contraintes choisis comme étant représentatifs des classes de contraintes (un par classe).

Ici le cycle état  $e_k$  est défini par le couple  $(c_i, c_j)$ , où  $c_i$  et  $c_j$  sont simplement les libellés des classes. Aucune valeur de contrainte n'est donc choisie pour représenter une classe. L'espace des états de la chaîne de Markov du premier ordre non-observable rassemble les cycles états suivants :

$$E^h = \{ e_k = (c_i, c_j), i > j \text{ et } i, j \in \{ 1, 2, \dots, K_c \} \} \quad (3.20)$$

La matrice de transition  $\mathbf{P}$ , la distribution initiale de la chaîne  $S_1$  et la distribution de la longueur de la chaîne  $N_c$  de  $(S_n)_{n>0}$  sont les mêmes que celles du modèle FMC défini à la section 3.2.1.

- Conditionnellement à  $(S_n)_{n>0}$ , la suite  $(X_n)_{n>0}$  avec  $X_n = \{M_n; m_n\}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans l'espace  $E = \mathbb{R}_+^2$ , telle que la loi de  $X_n$  conditionnée par  $(S_k)_{k \leq n}$  soit  $P_{s_n}$  de densité de probabilité  $f_{s_n}$  (on admet qu'elle existe), voir figure 3.4.

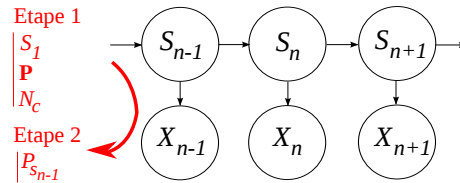


Figure 3.4 – Représentation graphique de la structure HMM,  $X$  est le processus observé et  $S$  le processus caché.

Un schéma générique du modèle HMM proposé est graphiquement illustré sur la figure 3.5.

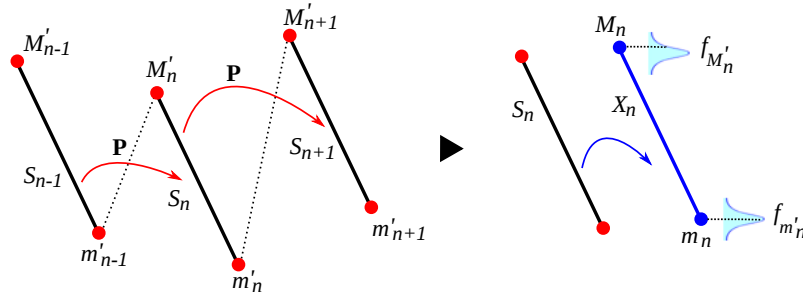


Figure 3.5 – Représentation du modèle HMM adopté pour la modélisation de séquences de cycles.

### 3.2.2.2 Inférence des distributions $f_{s_n}$

Une démarche paramétrique est ici utilisée pour identifier une loi de probabilité à partir d'un échantillon de points supposés être des réalisations d'une même variable aléatoire. Cette démarche consiste classiquement à sélectionner des distributions paramétriques  $f_X(x, \theta)$  candidates pour modéliser l'échantillon : gaussienne, lognormale, exponentielle, lois des valeurs extrêmes, etc, à partir des histogrammes et ensuite à identifier le vecteur de paramètres  $\theta$  à partir de méthodes dédiées [Sap06, Per08].

La méthode du Maximum de Vraisemblance est ici utilisée pour identifier les paramètres des distributions retenues. La plausibilité de l'ajustement d'une distribution empirique à une loi théorique est vérifiée graphiquement en utilisant la méthode du graphique quantile-quantile, encore appelée *QQplot*, [Wik11].

D'autres méthodes existent pour évaluer la qualité de l'inférence. Les critères d'ajustement statistique de la vraisemblance AIC (Akaike Information Criteria) [Aka73] et BIC (Bayesian Information Criteria) [Sch78] ainsi que l'information de Fisher pourraient être utilisés à cet effet. Les tests d'ajustement permettent encore de tester le risque que les hypothèses formulées soient acceptables ou rejetables.

## 3.3 Inférence des modèles stochastiques

Les paramètres des modèles FMC et HMM présentés à la section 3.2 sont inférés à partir des séquences de chargement de fatigue présentées au chapitre 2.



### 3.3.1 Inférence des modèles FMC

#### 3.3.1.1 Définition de l'espace des états

La première étape de l'inférence des chaînes de Markov du premier ordre (FMC) repose sur le choix des valeurs des états observés de la chaîne de Markov. Il n'existe pas de méthode systématique et universelle pour les définir, cette étape est fonction du type et de la répartition des données disponibles ainsi que des applications souhaitées de la modélisation.

**Classes de contraintes.** De manière analogue à des calculs Rainflow en fatigue, les niveaux de contraintes maximales et minimales des cycles de fatigue issus des séquences de chargement observées sont ici répartis en un nombre fini de classes de contraintes. Le découpage en classes (nombre et répartition) est déterminé d'après les distributions empiriques des contraintes (maximales et minimales) des groupes "A" et "B", respectivement tracées sur les figures 3.6(a) et 3.6(b). Il est important de souligner qu'on ne cherche pas à dissocier les distributions des minimums et celles des maximums dans cette première approche. On considère les minimums et maximums ensembles pour orienter le découpage.

Les classes  $c_1$  à  $c_4$  pour le groupe "A", respectivement  $c_1$  à  $c_3$  (cas  $K_c = 7$ ) pour le groupe "B", sont facilement choisies en raison des modes apparents, bien que les frontières soient elles définies arbitrairement. Les autres classes ainsi que leur nombre sont déterminés de façon à réaliser un compromis entre quantité de données disponibles et nombre de paramètres de la matrice de transition  $\mathbf{P}$  à estimer.

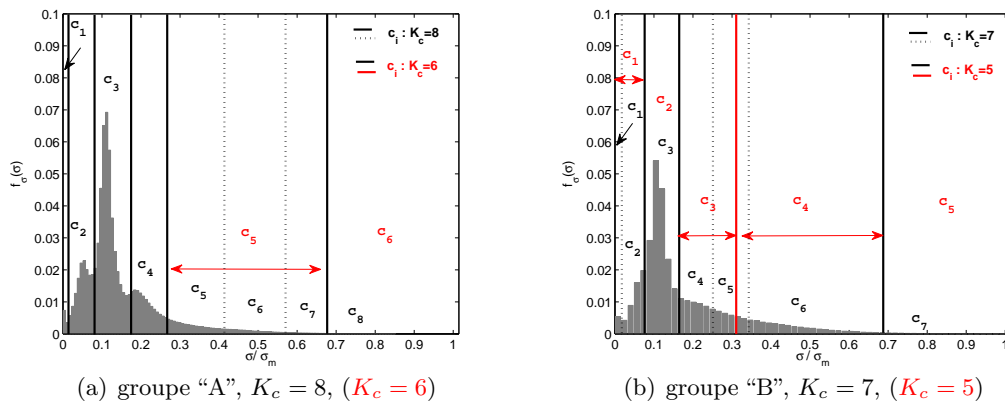


Figure 3.6 – Distributions des contraintes normalisées des groupes "A" et "B" discrétisées en  $c_k$ -classes  $k \in \{1, 2, \dots, K_c\}$  (les contraintes sont divisées par la contrainte maximale  $\sigma_m$  enregistrées sur l'ensemble des données). Max et min sont considérés ensemble.

Afin d'étudier l'impact du nombre de classes de contraintes  $K_c$  sur la qualité des matrices  $\mathbf{P}$  et sur la qualité des résultats de propagation, deux discrétisations des contraintes sont présentées dans ce mémoire. Le nombre de classes de contraintes retenu est de  $K_c = 8$  puis  $K_c = 6$  pour le groupe "A" et de  $K_c = 7$  puis  $K_c = 5$  pour le groupe "B".

**Espace état des cycles de fatigue.** Les contraintes (min ou max) des séquences de chargement observées qui appartiennent à une classe  $c_i$  sont ensuite remplacées par une contrainte unique  $s_i$  qui est soit le mode de la classe, quand celui-ci apparaît clairement sur l'histogramme, soit le centre de la classe quand il n'y a pas de mode. Les valeurs retenues pour les contraintes  $s_i$  pour chacun des groupes "A" et "B" sont présentées dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 – Cardinal de l'espace des états et niveaux de contraintes  $s_i$  pour les modèles  $\text{FMC}^{(A)}$  et  $\text{FMC}^{(B)}$ .

$\text{FMC}^{(A)}$	$K_c = 8, K = 28$	$s_i, s_j \in \{0, 0.0535, 0.113, 0.186, 0.321, 0.479, 0.620, 0.761\}$
	$K_c = 6, K = 15$	$s_i, s_j \in \{0, 0.0535, 0.113, 0.186, 0.465, 0.761\}$
$\text{FMC}^{(B)}$	$K_c = 7, K = 21$	$s_i, s_j \in \{0, 0.0535, 0.113, 0.186, 0.355, 0.564, 0.840\}$
	$K_c = 5, K = 10$	$s_i, s_j \in \{0.039, 0.113, 0.248, 0.507, 0.840\}$

Pour un nombre  $K_c$  de classes de contraintes, l'espace des états comprend alors  $K = K_c(K_c - 1)/2 = 28$  pour  $K_c = 8$  (ou  $K = 15$  pour  $K_c = 6$ ) cycles de fatigue états pour le groupe "A" et  $K = K_c(K_c - 1)/2 = 21$  pour  $K_c = 7$  (ou  $K = 10$  pour  $K_c = 5$ ) cycles de fatigue états pour le groupe "B".

Il est important de noter que les cycles observés dont les maximums et minimums appartiennent à une même classe  $c_i$  disparaissent par le biais de cette modélisation (groupe "A" :  $\approx -40\%$  cycles sur l'ensemble des trajectoires pour  $K_c = 8$ ,  $\approx -40.8\%$  cycles pour  $K_c = 6$ ; groupe "B" :  $\approx -37.3\%$  cycles pour  $K_c = 7$ ,  $\approx -39.4\%$  cycles pour  $K_c = 5$ ). Les cycles supprimés sont principalement des cycles de faibles amplitudes, d'après les graphes 3.7(a) et 3.7(b). Ils peuvent donc conduire à un calcul de propagation non-conservatif avec la loi de Paris car ces petites variations se trouvent souvent entre deux plus grandes variations de charge (effet Rainflow). Pour un calcul PREFFAS, ce sont les maximums des cycles et non les amplitudes qui sont responsables des avancées de fissure ( $K_{\max} - K_{\text{ouv}}$ ). Or, seulement 4% des cycles supprimés (soit moins de 2% de l'ensemble total des cycles observés) ont des maximums supérieurs au point d'ouverture le plus bas et contribuent donc à l'avancée de fissure.

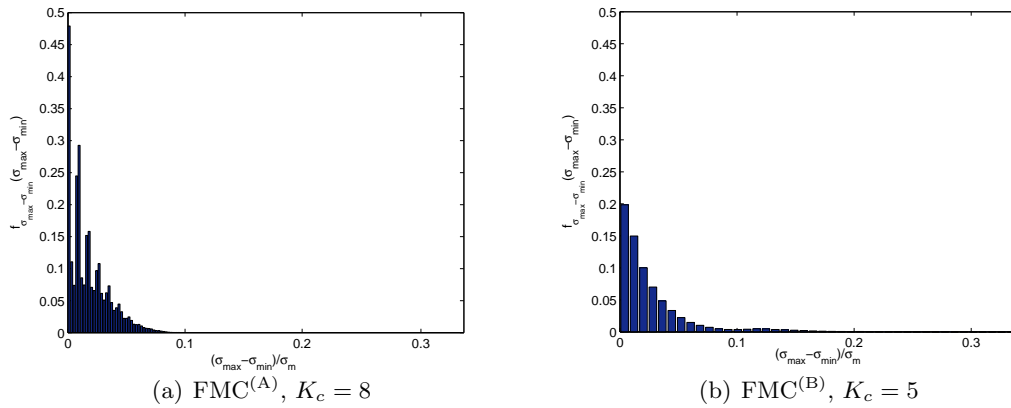
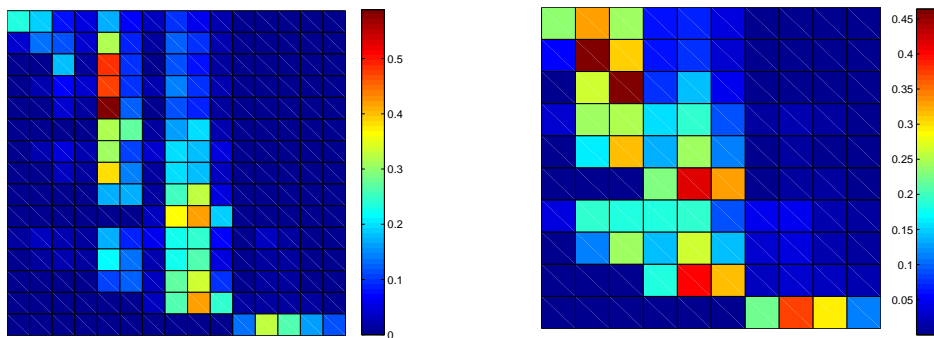


Figure 3.7 – Distributions des amplitudes normalisées  $(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/\sigma_m$  supprimées avec les modèles FMC<sup>(A)</sup> et FMC<sup>(B)</sup>.

Ainsi, même si la modélisation proposée réduit considérablement le nombre de cycles de fatigue, elle permet de prendre en compte les cycles les plus endommageants pour un calcul de dommage ou d’avancée de fissure, ce qui présente d’ores et déjà un intérêt certain.

### 3.3.1.2 Estimation de la matrice de transition $\mathbf{P}$

Les séquences de chargement de fatigue observées transformées en séquences de cycles états  $(s_i, s_j)$  où  $i, j \in \{1, 2, \dots, K_c\}$  permettent ensuite d’obtenir simplement les matrices de transition  $\mathbf{P}$  pour chacun des groupes “A” et “B”. Les probabilités de transition  $p_{i,j}$  des matrices  $\mathbf{P}$  sont estimées en utilisant la relation (3.8) obtenue par MV. Les figures 3.8(a) et 3.8(b) donne un aperçu de la composition des matrices de transition  $\mathbf{P}$  pour les modèles FMC<sup>(A)</sup> ( $K_c = 6$ ) et FMC<sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ ).



(a) groupe “A”,  $K_c = 6$ ,  $K = 15$  cycles états

(b) groupe “B”,  $K_c = 5$ ,  $K = 10$  cycles états

Figure 3.8 – Matrices de transition  $\mathbf{P}$ .

Les cycles états de la matrice de transition  $\mathbf{P}$  pour le modèle FMC<sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ ) sont rangés comme suit (lignes et colonnes de la matrice) :

$$\{(s_2, s_1); (s_3, s_1); (s_3, s_2); (s_4, s_1); (s_4, s_2); (s_4, s_3); (s_5, s_1); (s_5, s_2); (s_5, s_3); (s_5, s_4)\}$$

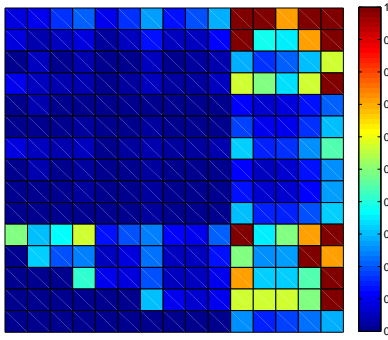
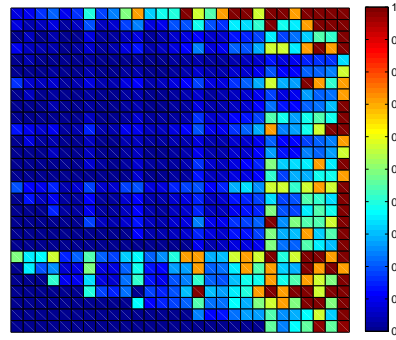
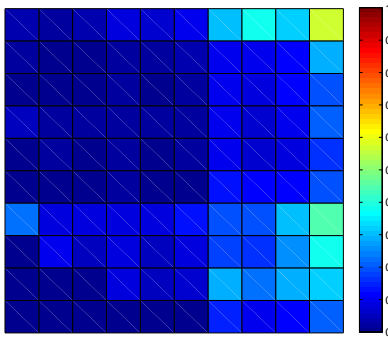
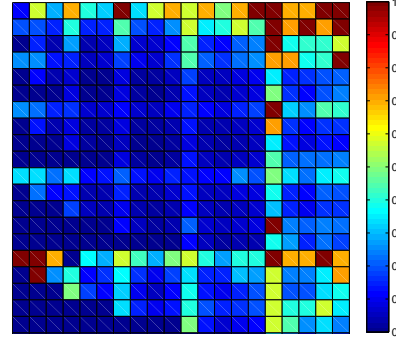
Un ordre similaire est utilisé pour le modèle FMC<sup>(A)</sup> ( $K_c = 6$ ).

### 3.3.1.3 Qualité des estimations des matrices de transition $\mathbf{P}$

La qualité des estimations des probabilités des matrices de transition  $\mathbf{P}$  est maintenant vérifiée à l'aide du coefficient de variation empirique  $c_{\hat{\mathbf{P}}}$  et des mesures de stabilité  $D_M$ ,  $D_E$  et  $D_P$  présentés à la sous-section 3.2.1.2.

**Matrices coefficient de variation  $c_{\hat{\mathbf{P}}}$ .** Les coefficients de variation associés aux probabilités de transition estimées  $\hat{p}_{i,j}$  des groupes “A” et “B” sont reportés sur les figures 3.9 et 3.10. Les valeurs  $c_{\hat{p}_{i,j}}$  supérieures à 100% ( $c_{\hat{p}_{k,l}} \rightarrow \infty$  lorsque  $\hat{p}_{k,l} \rightarrow 0$  ou  $\hat{p}_{k,l} \rightarrow 1$ ) sont bornées à 100% pour une représentation graphique plus lisible. Celles-ci sont obtenues par manque de données lorsqu'aucune transition  $i \rightarrow j$  n'a été enregistrée.

Les matrices de coefficients de variation des probabilités estimées  $c_{\hat{\mathbf{P}}}$  montrent que les estimations sont inévitablement sensibles aux nombres de paramètres à estimer. Une plus faible dispersion sur les probabilités estimées est dans l'ensemble observée lorsque  $K$  diminue. Cette remarque est particulièrement vraie pour le groupe “B” où une bonne estimation des probabilités de transition est obtenue lorsque  $K_c = 5$ . Cependant, diminuer le nombre de paramètres  $K$  à estimer n'implique pas forcément que l'ensemble des nouveaux paramètres est bien estimé, comme illustré sur la figure 3.9 pour le groupe “A”. En effet, malgré une réduction de 46% des paramètres  $K$  à identifier pour le groupe “A” ( $K = 28 \rightarrow K = 15$ ), certaines probabilités restent très mal estimées ( $c_{\hat{p}_{i,j}} > 100\%$ ). Celles-ci sont difficiles à estimer car elles impliquent les cycles les plus sollicitants pour lesquels le maximum appartient à la classe  $c_{K_c}$  (valeurs extrêmes). Augmenter le nombre de trajectoires observées n'implique pas forcément une augmentation du nombre de cycles ( $c_{K_c}, c_j$ ) (de maximum appartenant à la classe  $c_{K_c}$ ) où  $j \in \{1, 2, \dots, K_c - 1\}$ .

(a)  $K_c = 6$  classes,  $K = 15$  cycles états(b)  $K_c = 8$  classes,  $K = 28$  cycles étatsFigure 3.9 – Matrices des coefficients de variation  $c_{\mathbf{P}}$  du groupe “A” en fonction du nombre de classes de contraintes  $K_c$ .(a)  $K_c = 5$  classes,  $K = 10$  cycles états(b)  $K_c = 7$  classes,  $K = 21$  cycles étatsFigure 3.10 – Matrices des coefficients de variation  $c_{\mathbf{P}}$  du groupe “B” en fonction du nombre de classes de contraintes  $K_c$ .

**Mesures de stabilité.** Les mesures de stabilité  $D_M$ ,  $D_E$ , et  $D_P$  sont reportées dans le tableau 3.2 pour chacune des configurations.

Les mesures de stabilité  $D_M$  (stabilité maximale),  $D_E$  (stabilité moyenne) et  $D_P$  (stabilité pondérée) ont des significations différentes et s'utilisent dans un contexte précis.  $D_M$  s'utilise lorsqu'il est essentiel que toutes les distributions de la matrice soient bien estimées.  $D_E$  est utilisée lorsqu'une bonne estimation globale de la matrice est souhaitée tout en tolérant que certaines distributions puissent être sous-estimées. Enfin,  $D_P$  s'utilise lorsqu'une importance n'est accordée qu'aux distributions correspondantes aux données les plus fréquentes.

Il est ici préféré que toutes les distributions soient estimées de la meilleure façon pos-

sible. L'importance est donc donnée à la mesure maximale  $D_M$  en priorité, puis à la mesure moyenne  $D_E$ . La mesure pondérée  $D_P$  n'est reportée que pour information.

Tableau 3.2 – Mesures de stabilité des matrices de transition  $\mathbf{P}$ .

	groupe "A"			groupe "B"			
	$D_M$	$D_E$	$D_P$		$D_M$	$D_E$	$D_P$
$K_c = 8, K = 28$	0.212	0.027	$5.29 \cdot 10^{-4}$	$K_c = 7, K = 21$	0.25	0.039	$1.66 \cdot 10^{-4}$
$K_c = 6, K = 15$	0.054	0.013	$1.03 \cdot 10^{-5}$	$K_c = 5, K = 10$	0.021	0.007	$8.24 \cdot 10^{-5}$

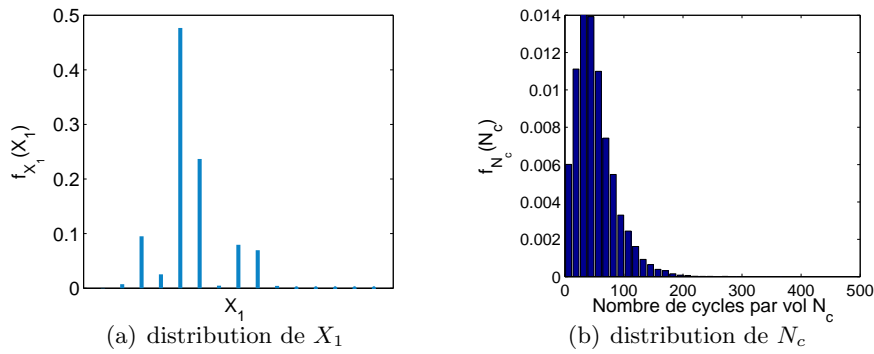
D'après A. Berthold [Ber98] les mesures de stabilité traduisent une bonne qualité d'inférence de la matrice de transition  $\mathbf{P}$  lorsque celles-ci sont comprises entre 0.005 et 0.05, ce qui est le cas pour les matrices de transition estimées lorsque  $K_c = 6$  pour le groupe "A" et  $K_c = 5$  pour le groupe "B". On observe par ailleurs qu'une meilleure stabilité est mesurée pour le groupe "B" ( $K_c = 5$ ) que pour le groupe "A" ( $K_c = 6$ ), malgré un nombre de données plus faible. L'analyse des matrices des coefficients de variation  $c_{\mathbf{P}}$  avait conduit aux mêmes conclusions.

D'après les figures 3.9 et 3.10 et le tableau 3.2, les matrices de transition  $\mathbf{P}$  peuvent ainsi être considérées comme relativement bien estimées lorsque  $K_c = 6$  pour le groupe "A" et  $K_c = 5$  pour le groupe "B". Les matrices de transition  $\mathbf{P}$  des modèles FMC<sup>(A)</sup> ( $K_c = 8$ ) et FMC<sup>(B)</sup> ( $K_c = 7$ ) sont considérées comme bien estimées en moyenne. Certaines probabilités sont cependant sous-estimées compte tenu des valeurs prises par la mesure  $D_M$ .

#### 3.3.1.4 Distributions de $X_1$ et de $N_c$

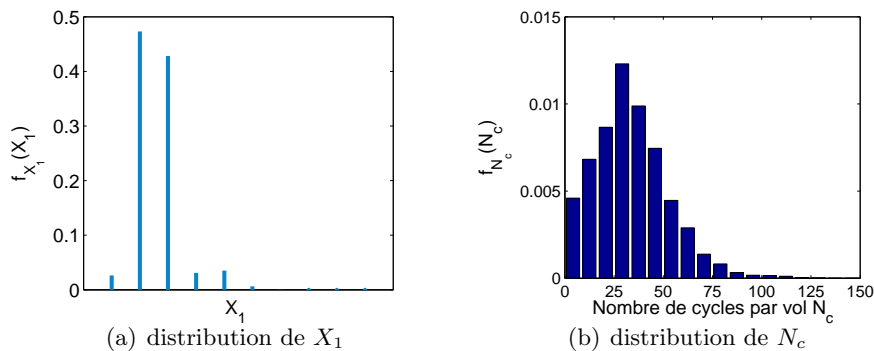
La chaîne de Markov homogène du premier ordre (FMC) est complètement définie par les probabilités de transition d'un cycle état  $e_k$  à un autre cycle état  $e_l$  (matrice  $\mathbf{P}$ ) et la distribution initiale des cycles états  $X_1$ . La longueur d'un vol, c'est-à-dire le nombre de cycles de la séquence de chargement, est une variable aléatoire  $N_c$ .

Les distributions empiriques de  $X_1$  et du nombre de cycles  $N_c$  par vol, reportées sur les figures 3.11 et 3.12, sont ici obtenues directement à partir des séquences de cycles états observées.

Figure 3.11 – Distributions empiriques de  $X_1$  et  $N_c$  pour le groupe “A”.

La moyenne et l'écart-type du nombre de cycles par vol sont respectivement de 52.04 cycles et de 33.99 cycles pour le groupe “A”. La moyenne du nombre de cycles est de 33.52 et celui de l'écart-type de 18.85 pour le groupe “B”. On note que les écarts-types sont proches des moyennes, ce qui indique une dispersion importante sur la longueur des vols en termes de nombre de cycles.

Il est choisi dans la suite du travail de ne pas inférer une loi théorique pour la distribution du nombre de cycles  $N_c$ , mais de considérer directement sa distribution empirique.

Figure 3.12 – Distributions empiriques de  $X_1$  et  $N_c$  pour le groupe “B”.

### 3.3.2 Inférence des modèles HMM

Les modèles de chaînes de Markov cachées  $HMM^{(A)}$  et  $HMM^{(B)}$ , tels qu'ils ont été introduits à la sous-section 3.2.2, représentent une extension des modèles  $FMC^{(A)}$  et  $FMC^{(B)}$  inférés à la sous-section précédente. L'idée consiste à remplacer les observations  $s_i$  des modèles FMC, valeurs ponctuelles en nombre fini, par des distributions continues  $f_{c_i}$ .

Il est important de noter qu'il s'agit d'une démarche inverse de celle utilisée classique-

ment pour les modèles HMM [CMR05] qui, à partir d'une réalisation  $x$  du processus  $X$  détermine les états les plus probables de la chaîne cachée  $S$ .

### 3.3.2.1 Chaîne de Markov non-observée ( $S$ )

Les processus sous-jacents des modèles  $\text{HMM}^{(A)}$  et  $\text{HMM}^{(B)}$ , appelés processus non-observés, sont choisis en exacte correspondance avec les modèles  $\text{FMC}^{(A)}$  et  $\text{FMC}^{(B)}$ , excepté qu'aucune valeur de contrainte n'est affectée à  $M_n$  et  $m_n$  mais uniquement le libellé des classes  $c_i$  et  $c_j$ . Les matrices de transition  $\mathbf{P}$ , les distributions initiales  $S_1$  et les distributions des longueurs de chaînes  $N_c$  des processus cachés  $(S_n)_{n>0}$  sont donc les mêmes que celles des modèles  $\text{FMC}^{(A)}$  et  $\text{FMC}^{(B)}$  présentées à la sous-section 3.3.1.

### 3.3.2.2 Distributions de probabilité $f_{s_n}$

Les valeurs observées du maximum  $M_n$  et du minimum  $m_n$  du cycle  $X_n$  sont maintenant des réalisations de variables aléatoires dont les distributions de probabilités  $f_{c_k}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, K_c\}$ , dépendent des classes  $c_k$  prises par les variables cachées du processus  $M'_n$  et  $m'_n$ , voir figure 3.5. Une unique distribution de probabilité est ici proposée pour chacune des classes de contraintes  $c_k$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, K_c\}$ , maximums et minimums confondus. Par souci de concision, seules les familles de probabilités des modèles  $\text{HMM}^{(A)}$  ( $K_c = 6$ ) et  $\text{HMM}^{(B)}$  ( $K_c = 5$ ) sont ici présentées. Les familles de distributions des modèles  $\text{HMM}^{(A)}$  ( $K_c = 8$ ) et  $\text{HMM}^{(B)}$  ( $K_c = 7$ ) sont reportées en annexe D.

Les zéros résultant des troncatures des parties négatives des trajectoires observées pour le groupe "A" forment une classe évidente. La classe  $c_1$  leur est dédiée. La troncature des parties négatives des trajectoires observées du groupe "B" ne conduit pas de manière aussi prononcée à un mode en zéro. Il est ainsi choisi de ne pas créer de classe spécifique lorsque  $K_c = 5$ .

**Distribution Gaussienne Tronquée (DGT).** Les distributions empiriques des classes  $c_k$ ,  $k \in \{2, 3, 4, K_c - 1 = 5\}$  du groupe "A" et les distributions empiriques des classes  $c_k$ ,  $k \in \{1, 2, 3, K_c - 1 = 4\}$  du groupe "B", sont modélisées par des lois gaussiennes tronquées.

La densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne tronquée  $Y$  de souche  $W$  et de support  $[a, b]$  est donnée par :

$$f_Y(y) = \frac{f_W(y)}{F_W(b) - F_W(a)} \mathbb{1}_{[a,b]}(y) \quad (3.21)$$



où  $f_W$  et  $F_W$  sont respectivement la densité de probabilité et la fonction de répartition d'une variable aléatoire gaussienne  $W \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ , dite *souche*, de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ .

Le support  $[a, b]$  de la loi gaussienne tronquée affectée à la classe  $c_k$  est choisie afin de correspondre aux bornes de cette classe  $c_k$ . Les moyennes et les écarts-types des DGT, respectivement  $\mu$  et  $\sigma$ , sont estimés à partir des données par la méthode du MV. Les résultats sont reportés dans le tableau D.1, en annexe D pour chacune des utilisations "A" et "B" de la flotte.

Les DGT sont jugées de qualité acceptable d'après les figures 3.13(a) et 3.13(b) et les diagrammes *QQplot* D.2 et D.3 reportés en annexe D. Il faut cependant noter que des discontinuités existent aux frontières des classes, ce qui pourrait constituer un point d'amélioration de la modélisation.

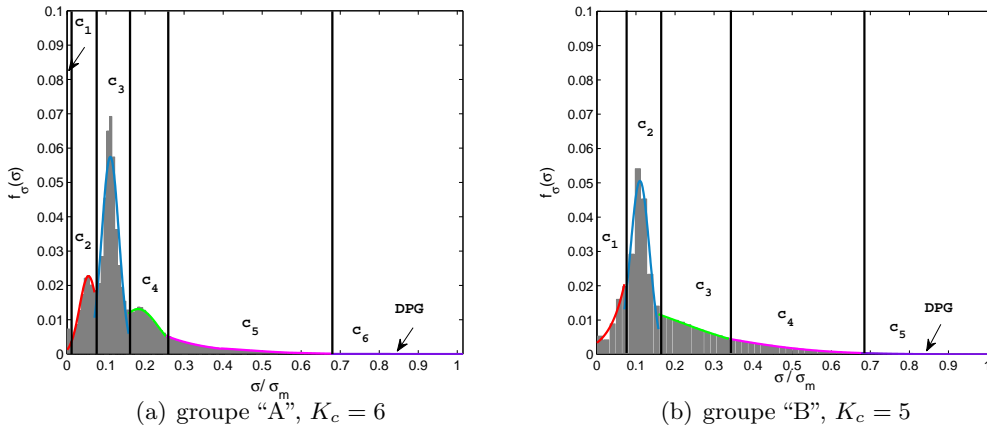


Figure 3.13 – Densités de probabilité gaussiennes tronquées et densités de Pareto généralisées associées aux distributions empiriques des contraintes normalisées "max-min" des groupes "A" et "B".

**Distribution de Pareto Généralisée (DPG).** Afin de modéliser les queues des distributions de contraintes  $\sigma/\sigma_m$  des données "A" et "B", il est nécessaire de recourir à la théorie des valeurs extrêmes (TVE). L'objectif premier n'étant pas de modéliser la loi du maximum de  $n$  copies i.i.d de la variable aléatoire  $\sigma/\sigma_m$ , mais bien la queue de la loi de  $\sigma/\sigma_m$ , la distribution de Pareto généralisée est ici choisie. D'après M.P. Martinez [MVW<sup>+</sup>06, Mar08], la distribution de Pareto généralisée est en effet appropriée lorsque l'on souhaite modéliser les valeurs d'une variable aléatoire  $X$  plus grandes qu'un certain

seuil  $u$  suffisamment grand :

$$F_u(x) = P(X - u \leq x \mid X > u) = 1 - \left(1 + \xi \frac{x}{\beta(u)}\right)^{-1/\xi} \quad (3.22)$$

où  $u$ ,  $\xi$  et  $\beta$  sont les paramètres de la DPG à identifier à partir des données.

La méthode *Peaks Over Threshold* (POT) [DS90] est utilisée pour estimer les paramètres  $u$ ,  $\xi$  et  $\beta$  de la loi de Pareto généralisée, en vertu de son caractère intuitif et de la simplicité de sa mise en œuvre. D'autres méthodes existent pour estimer les paramètres de la loi de Pareto généralisée. Le lecteur est invité à consulter les références [BK10a] et [BK10b] pour une revue détaillée de ces méthodes.

La première étape de cette approche consiste à déterminer un seuil  $u$  pertinent pour assurer le caractère asymptotique de l'approximation de la queue de distribution par la loi de Pareto généralisée. La méthode graphique du *mean excess plot* est utilisée à cet effet. On procède en étudiant l'évolution de la moyenne des dépassements en fonction du seuil  $u$ , donnée par la relation [Col01] :

$$\mathbb{E}[X - u \mid X > u] = \frac{\beta(u)}{1 - \xi} = \frac{\beta(u^*) + \xi u}{1 - \xi} \quad (3.23)$$

où la distribution de Pareto généralisée est supposée valable pour les dépassements du seuil  $u^*$ .

Ceci veut dire que pour  $u > u^*$ ,  $\mathbb{E}[X - u \mid X > u]$  est une fonction affine de  $u$ . Or, l'espérance  $\mathbb{E}[X - u \mid X > u]$  peut être estimée par  $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{x_i > u\}}(x_i - u)$ , où  $k$  est le nombre de dépassements du seuil  $u$ . Le graphe suivant :

$$\left\{u, \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{x_i > u\}}(x_i - u)\right\} \quad (3.24)$$

appelé *mean excess plot*, doit alors être affine pour des valeurs de  $u > u^*$ , où  $u^*$  représente une valeur seuil à partir de laquelle le modèle DPG est valide.

D'après [MVW<sup>+</sup>06], il faut choisir  $\hat{u}$  le plus grand possible (meilleure approximation du seuil de la densité de Pareto généralisée) mais également de telle sorte que le nombre de dépassements  $k$  observé reste suffisamment grand afin de réduire la variance des estimations. Il s'agit donc de réaliser un compromis.

La figure 3.14(a) nous conduit ainsi à choisir  $\hat{u} = 0.676$  (correspondant à une valeur

entière de la contrainte non-normalisée) pour le groupe “A”. On considère que la courbe est affine après ce seuil et que la variance des estimations est suffisamment faible. Pour le groupe “B”, la courbe de la figure 3.15(a) est jugée affine au delà de la valeur 0.406. On choisit cependant à nouveau la valeur  $\hat{u} = 0.676$  (en analogie avec le groupe “A”) car on considère que la variance des estimations reste toujours assez faible pour ce seuil. La valeur de  $\hat{u} = 0.676$  est alors la valeur imposée à la frontière gauche de la classe  $c_{K_c}$  pour l’ensemble des modèles FMC et HMM.

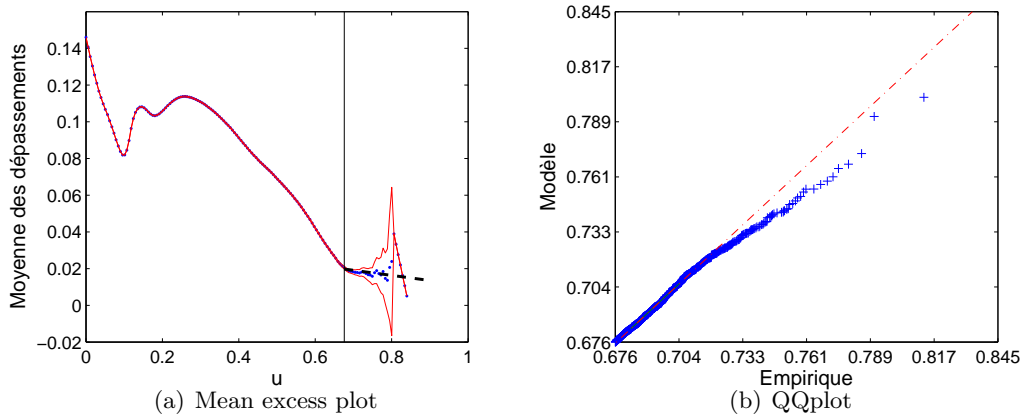


Figure 3.14 – Mean excess plot / QQplot pour la classe  $c_6$ , groupe “A”.

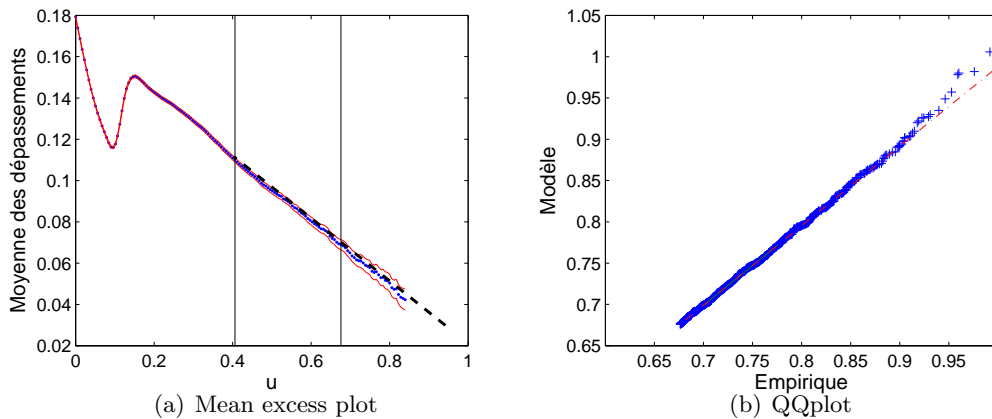


Figure 3.15 – Mean excess plot / QQplot pour la classe  $c_5$ , groupe “B”.

La deuxième étape consiste ensuite à estimer les paramètres  $\xi$  et  $\beta(\hat{u})$  par la méthode du MV, qui fournit un estimateur consistant et asymptotiquement efficace si  $\xi > -0.5$

[Smi85]. Dans ce cas, les estimateurs  $\hat{\xi}$  et  $\hat{\beta}(u)$  convergent vers une loi normale :

$$\begin{pmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\beta}(u) \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left[ \begin{pmatrix} \xi \\ \beta(u) \end{pmatrix} ; \frac{1}{k} \begin{pmatrix} (1+\xi)^2 & (1+\xi)\beta(u) \\ (1+\xi)\beta(u) & 2(1+\xi)\beta^2(u) \end{pmatrix} \right] \quad (3.25)$$

Ceci permet d'obtenir simplement les intervalles de confiance sur ces paramètres. Les estimations de  $\xi$  et  $\beta$  ainsi que les intervalles de confiance à 95% associés sont donnés dans le tableau D.1 de l'annexe D pour chacun des groupes "A" et "B". On vérifie bien que  $\hat{\xi} > -0.5$  pour les deux groupes de données. Par ailleurs  $\hat{\xi} < 0$  signifie que le domaine d'attraction est de Weibull. Enfin, la qualité de l'inférence des DPG est illustrée sur les figures 3.14(b) et 3.15(b). On note que le résultat est très moyen pour le groupe "A" alors qu'il est plutôt satisfaisant pour le groupe "B".

### 3.3.3 Autres solutions

Lors de l'inférence des modèles HMM<sup>(A)</sup> et HMM<sup>(B)</sup> à la section 3.3.2, une distribution théorique a été associée à chaque classe de contraintes  $c_k$  de la distribution empirique des minimums et maximums des séquences,  $k \in \{1, 2, \dots, K_c\}$ . Cela veut dire que lorsque le minimum  $m'_n$  ou le maximum  $M'_n$  de la chaîne de Markov cachée  $(S_n)_{n>0}$  prend l'état caché  $c_k$ , l'observation  $m_n$  ou  $M_n$  de la chaîne observée  $(X_n)_{n>0}$  est une réalisation de la variable aléatoire de densité  $f_{c_k}$  et ce quel que soit le cycle état de la chaîne de Markov cachée.

Il est possible de raffiner le modèle HMM présenté en envisageant par exemple de différencier les distributions des maximums et des minimums. Il s'agit alors dans ce cas d'identifier  $2K_c$  distributions  $f_{c_k}$ . Une autre solution, plus élaborée mais également plus complexe, consiste à associer deux distributions à chaque cycle état  $e_k = (c_i, c_j)$ ,  $\forall k \in \{1, 2, \dots, K\}$ , une pour le minimum  $c_j$  et une pour le maximum  $c_i$  pour l'ensemble des  $K$  cycles états, soit  $2K$  distributions à identifier. Cette solution est proposée en annexe D.2 pour le groupe "A" de données et  $K_c = 6$ . Elle est notée HMM<sup>(A)'</sup>. Le processus caché est le même que pour le modèle HMM<sup>(A)</sup> ( $K_c = 6$ ). Seules les distributions de probabilité  $f_{c_k}$  sont différentes.

Il a été trouvé que le modèle HMM<sup>(A)'</sup>, qui possède un niveau de complexité plus élevé que les autres modèles introduits jusqu'ici, peut éventuellement trouver des applications en propagation de fissures lorsque les matériaux sont sans retard ou qu'une loi de Paris est utilisée pour le calcul d'avancée de fissure, voir section 3.5.3. Il faut néanmoins noter que le nombre de paramètres à estimer est plus élevé pour une même quantité de données. Il est donc attendu que la qualité de l'inférence des distributions soit moins bonne.

### 3.4 Modélisation d'une séquence de $N_v$ vols

Deux types de modèles markoviens ont été proposés pour la modélisation d'un vol, c'est-à-dire une séquence de  $N_c$  cycles représentative d'une activité donnée de la flotte. Le premier modèle est une chaîne de Markov homogène du premier ordre (FMC). Le second modèle, plus raffiné, est une chaîne de Markov homogène cachée (HMM). Il s'agit du "niveau 1" de la modélisation.

La seconde étape de la modélisation des séquences de chargement appliquées à une flotte ("niveau 0") consiste à définir des séquences de  $N_v$  vols qui respectent la statistique d'utilisation de la flotte. Le modèle HMM<sup>0</sup> proposé pour simuler l'activité globale de l'avion, c'est-à-dire l'alternance de vols appartenant à l'une ou l'autre des deux activités définies, est encore spécifié sur la base des modèles de Markov cachés.

Les deux processus sous-jacents au modèle HMM<sup>0</sup> sont ici :

- une chaîne de Markov du premier ordre à temps discret et à espace d'états discret  $E^g$  où  $\text{card}(E^g) = r$  (processus **non-observable**).

L'espace des états  $E^g$  de la chaîne de Markov non-observable du premier ordre est composé des différents types d'activités de la flotte, soit les  $r = 27$  classes de vols présentées à la section 2.3.2.

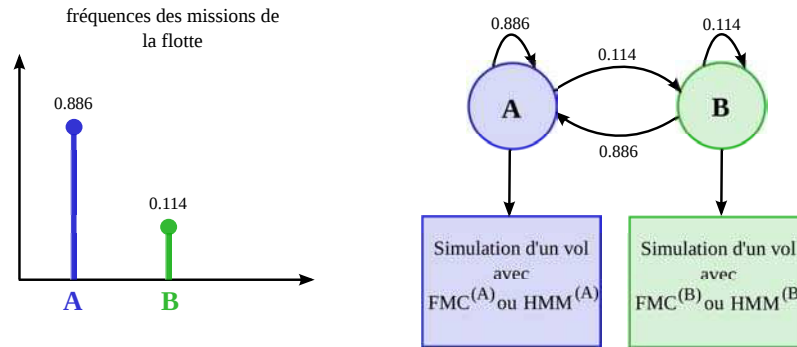
$$E^g = \{ I_k, k \in \{ 1, 2, \dots, r \} \} \quad (3.26)$$

où  $I_k$  est une classe de vols (type de mission).

- une famille de processus observés  $(F_{I_k}, I_k \in E^g)$  dont les caractéristiques sont connues et dépendent du type de mission  $I_k$ .

Pour palier le manque de données de certaines catégories d'utilisation de la flotte, deux activités principales "A" et "B" ont été proposées à la sous-section 2.3.3. Le cardinal de l'espace des états  $E^g$  est donc ici réduit à  $r = 2$  et  $E^g = \{ A ; B \}$ . La famille des processus observés  $(F_{I_k}, I_k \in E^g)$  est donc soit  $\{ \text{HMM}^{(A)} ; \text{HMM}^{(B)} \}$  soit  $\{ \text{FMC}^{(A)} ; \text{FMC}^{(B)} \}$ .

Les suites de  $N_v$  vols sont ainsi simulées avec l'une ou l'autre des deux familles de modèles. Les modèles d'une famille donnée (par exemple  $\{ \text{HMM}^{(A)} ; \text{HMM}^{(B)} \}$ ) s'alternent le long de la séquence de  $N_v$  vols en fonction des probabilités de transition des types de mission (états "A" et "B" non observés), voir figure 3.16.

Figure 3.16 – Modèle  $HMM^0$ .

## 3.5 Validation des modèles FMC et HMM

### 3.5.1 Introduction et méthodologie

#### 3.5.1.1 Introduction

Une méthodologie générale basée sur l'utilisation des chaînes de Markov et des chaînes de Markov cachées a été proposée pour modéliser des séquences de chargement de fatigue vues par une flotte d'avions de combat. Celle-ci a ensuite été déclinée et appliquée aux enregistrements en vol à disposition. L'objectif de cette section est de tester la capacité des modèles FMC et HMM, développés pour chaque utilisation de la flotte ("A" et "B"), à retranscrire les propriétés statistiques des séquences de chargement de fatigue observées, ainsi que celle du modèle global ( $HMM^0$ ) à prendre en compte la statistique d'utilisation de la flotte, [MB11, MBL<sup>+</sup>11].

Etant donné que les paramètres des modèles  $FMC^{(A)}$ ,  $FMC^{(B)}$ ,  $HMM^{(A)}$ ,  $HMM^{(B)}$  et  $HMM^{(A)'}$  ont été identifiés de façon optimale à partir des données, il est attendu que les séquences de chargement simulées avec ces modèles présentent des propriétés statistiques très proches des séquences observées.

Il est tout d'abord vérifié, à l'aide de la distance symétrique de Kullback-Leibler<sup>1</sup>, que les différences entre les matrices de transition simulées et les matrices de transition estimées à partir des données sont dues à des erreurs statistiques de simulation. Ensuite, afin de contrôler l'aptitude des modèles à restituer les propriétés statistiques des cycles observés (moyennes et amplitudes) pour des applications en fatigue-propagation de fissures, deux

<sup>1</sup>La distance asymétrique de Kullback-Leibler entre deux distributions  $\mathbf{P}_k$  et  $\mathbf{Q}_k$  des matrices de transition  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q} \forall k \in \{1, 2, \dots, K\}$  est définie par :  $d(\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k) = \sum_{l=1}^K \mathbf{P}_{k,l} \ln(\mathbf{P}_{k,l}/\mathbf{Q}_{k,l})$ . La distance symétrique de Kullback-Leibler entre deux matrices  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  s'exprime alors par :  $D(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \sum_{k=1}^K [d(\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k) + d(\mathbf{Q}_k, \mathbf{P}_k)]/2$ .

fonctions des séquences de chargement sont étudiées :

1.  $\sigma_{\text{eq}}^m$  : sévérité de la séquence de chargement de fatigue ( $\sigma_{\text{eq}}$ ) à la puissance  $m$ , exposant de la loi de Paris. Cette quantité permet de traduire la contribution du chargement d'amplitude variable à l'avancée de fissure  $\Delta a$  en prenant en considération les effets de surcharges et les effets d'interaction, voir section 1.1.2. Elle est ainsi adaptée à la plupart des matériaux utilisés en aéronautique, qui présentent un effet de retard important.

Issue du modèle PREFFAS présentée à la sous-section 1.2.5.3, son expression est rappelée ci-dessous :

$$\sigma_{\text{eq}} = \left( \frac{\text{EF}}{N_{\text{fix}}} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{1}{U(R_{\text{fix}})(1 - R_{\text{fix}})} \quad (3.27)$$

où  $\text{EF} = \sum_{i=1}^{N_s} [\sigma_{\text{max}, i} - \sigma_{\text{ouv}, i}]^m$ .  $N_s$  est le nombre de cycles de la séquence de chargement d'amplitude variable et  $\sigma_{\text{ouv}, i}$  est le point d'ouverture au cycle  $i$ , qui dépend de l'histoire du chargement.

Pour des séquences de chargements suffisamment courtes où l'on suppose que le facteur de forme est constant, l'avancée de fissure  $\Delta a$  est proportionnelle à la quantité  $\sigma_{\text{eq}}^m$  :

$$\Delta a = C_{R_{\text{fix}}} [F(a)\sqrt{\pi a}(1 - R_{\text{fix}})]^m \sigma_{\text{eq}}^m N_{\text{fix}} \propto \sigma_{\text{eq}}^m \propto \text{EF} \quad (3.28)$$

Le nombre de cycles  $N_{\text{fix}}$  des chargements d'amplitude constante équivalents est choisi identique pour toutes les trajectoires. Les contraintes maximales des chargements d'amplitude constante équivalents à la puissance  $m$ ,  $\sigma_{\text{eq}}^m$ , caractérisent ainsi entièrement les sévérités des séquences de chargement. Les chargements de fatigue peuvent alors être directement comparés entre eux par le biais de cette quantité.

2.  $\gamma^m$  : quantité obtenue avec la loi de Paris, pour les matériaux ne présentant pas d'effet retard, définie par :

$$\gamma^m = \sum_{i=1}^{N_s} [\sigma_{\text{max}, i} - \sigma_{\text{min}, i}]^m \quad (3.29)$$

L'amplitude entière du cycle  $i$  est ici prise en compte. On peut souligner que l'efficacité de la séquence EF correspond exactement à  $\gamma^m$  en imposant  $\sigma_{\text{ouv}, i} = \sigma_{\text{min}, i}$ .

Pour des séquences de chargements suffisamment courtes où l'on suppose que le facteur de forme est constant, l'avancée de fissure  $\Delta a$  est ici proportionnelle à la quantité  $\gamma^m$  :

$$\Delta a = C_R [F(a)\sqrt{\pi a}]^m \gamma^m \propto \gamma^m \quad (3.30)$$

Ces deux quantités sont introduites afin de traduire les phénomènes de propagation de fissure sous chargements d'amplitude variable en s'affranchissant de la géométrie de la structure. Ceci confère un caractère général aux résultats présentés. Il est ici important de noter que l'exposant  $m$  de la loi de Paris, intégré dans ces deux grandeurs, a un rôle amplificateur des différences mesurées entre les amplitudes et moyennes des cycles observés et celles qui sont simulées à partir des modèles.

### 3.5.1.2 Méthodologie

La précision des modèles FMC ( $\text{FMC}^{(A)}$ ,  $\text{FMC}^{(B)}$ ) et HMM ( $\text{HMM}^{(A)}$ ,  $\text{HMM}^{(B)}$  et  $\text{HMM}^0$ ) est tout d'abord évaluée en comparant les propriétés statistiques de la distribution  $\sigma_{\text{eq}}^m$  obtenue d'une part à partir des séquences observées et d'autre part à partir des séquences simulées. Les caractéristiques de la démarche adoptée sont :

- La quantité  $\sigma_{\text{eq}}^m$ , correspondant à une séquence de chargement d'amplitude variable est, soit simulée avec l'un des modèles proposés (FMC, HMM ou  $\text{HMM}^0$ ), soit constituée par tirages aléatoires à partir des 27458 séquences de chargement de fatigue observées.
- Le matériau considéré pour l'étude est celui du longeron principal de voilure pour lequel les enregistrements ont été fournis. Il s'agit de l'aluminium 2024-T351, d'exposant de Paris  $m = 3.42$  et de paramètres d'Elber  $a = 0.35$  et  $b = 0.65$  (valeurs pour structures épaisses choisies d'après la référence [ADS88]).
- Des séquences de chargement de longueurs différentes (constituées de  $N_v$  vols) sont simulées afin d'étudier l'influence de ce paramètre sur les résultats probabilistes de propagation de fissure. Nous choisissons à cet effet  $N_v = \{1, 200, 500, 1000\}$  pour les séquences de chargements représentatives d'une seule activité de l'avion, c'est-à-dire composées de  $N_v$  vols du même groupe ("A" ou "B"). Nous retenons  $N_v = \{200, 500, 1000, 2000\}$  pour des séquences de chargements représentatives de l'activité globale de l'avion, c'est-à-dire composées de l'alternance de vols appartenant aux groupes "A" et "B" suivant le schéma 3.16.



- Pour chaque modèle testé (“niveau 1” :  $FMC^{(A)}$ ,  $FMC^{(B)}$ ,  $HMM^{(A)}$ ,  $HMM^{(B)}$  ou “niveau 0” :  $HMM^0$ ) et pour  $N_v$  fixé, les calculs de  $\sigma_{eq}^m$  sont répétés  $N_{sim} = 10000$  fois afin de générer un échantillon  $\sigma_{eq}^m$  de taille suffisante pour estimer les deux premiers moments statistiques (moyenne et écart-type) de la distribution de  $\sigma_{eq}^m$  et les fractiles suivants : 0.1, 1, 10, 50, 90, 99 et 99.9%. Il faut bien noter que les  $N_{sim} = 10000$  simulations réalisées correspondent dans chaque cas à  $N_{sim} = 10000$  simulations de chaînes différentes qui conduisent, via PREFFAS, à  $N_{sim} = 10000$  contraintes  $\sigma_{eq}$  différentes.
- Les erreurs relatives entre les moments ou les fractiles des distributions de  $\sigma_{eq}^m$  obtenus d’une part à partir des séquences de chargement de fatigue observées (tirage aléatoire uniforme) et d’autre part à partir des séquences simulées avec les modèles proposés sont ensuite quantifiées. Ces deux cas sont respectivement notés cas S (pour simulations à partir des modèles) et cas R (pour référence par rapport aux données) dans la suite.

Pour un matériau sans effet retard, c’est-à-dire peu sensible aux effets d’interactions du chargement, il est ensuite choisi d’apprécier la pertinence des modèles  $HMM^{(A)}$  et  $HMM^{(A)'}$  pour le groupe “A” de données uniquement. Le modèle de Paris est alors substitué au modèle PREFFAS dans la méthodologie précédente et les propriétés statistiques des distributions de  $\gamma^m$  obtenues soit avec les séquences de chargement de référence (cas R), soit avec des séquences de chargement simulées (cas S), sont comparées.

### 3.5.2 Matériau à effet retard - fonction PREFFAS $\sigma_{eq}^m$

#### 3.5.2.1 Précision des modèles FMC et HMM (groupes “A” et “B”)

Les propriétés statistiques des distributions de  $\sigma_{eq}^m$  générées à partir des séquences de  $N_v$  vols observés (tirage aléatoire uniforme dans la base de données - cas R), où  $N_v = \{1, 200, 500, 1000\}$  sont reportées dans les tableaux 3.3 et 3.4. Il est choisi  $N_{fix} = 5000$  cycles comme longueur du chargement équivalent d’amplitude constante et ceci quelle que soit la longueur de la séquence de chargement d’amplitude variable d’entrée. Le rapport du chargement équivalent d’amplitude constante est fixé à  $R_{fix} = 0.1$ . Par ce biais, les quantités  $\sigma_{eq}^m$  caractérisent à elles seules les séquences de chargement de fatigue et il est possible de comparer les différents résultats trouvés entre eux.

Tableau 3.3 – Propriétés statistiques de la distribution  $\sigma_{\text{eq}}^m$  obtenues à partir des séquences de chargement observées (cas R) pour le groupe “A”.

Nombre de vols $N_v$	Moy.	E. T.	Fractiles (%)						
			0.1	1	10	50	90	99	99.9
1	$3.5 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$9.9 \cdot 10^{-7}$	$6.5 \cdot 10^{-6}$	$4.5 \cdot 10^{-5}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$7.6 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-3}$
200	0.0414	0.0052	0.0259	0.0291	0.0347	0.0415	0.0481	0.0536	0.0583
500	0.0965	0.0133	0.0617	0.0688	0.0833	0.0970	0.1094	0.1187	0.1247
1000	0.1836	0.0187	0.1238	0.1304	0.1605	0.1851	0.2058	0.2205	0.2305

Tableau 3.4 – Propriétés statistiques de la distribution  $\sigma_{\text{eq}}^m$  obtenues à partir des séquences de chargement observées (cas R) pour le groupe “B”.

Nombre de vols $N_v$	Moy.	E. T.	Fractiles (%)						
			0.1	1	10	50	90	99	99.9
1	$4.5 \cdot 10^{-4}$	$5.3 \cdot 10^{-4}$	$5.9 \cdot 10^{-7}$	$4.5 \cdot 10^{-6}$	$3.0 \cdot 10^{-5}$	$2.9 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$4.9 \cdot 10^{-3}$
200	0.0405	0.0062	0.0244	0.0275	0.0327	0.0403	0.0487	0.0559	0.0624
500	0.0934	0.0103	0.0653	0.0720	0.0803	0.0930	0.1070	0.1184	0.1267
1000	0.1784	0.0151	0.1390	0.1477	0.1594	0.1775	0.1987	0.2147	0.2271

**Groupe “A” - modèles FMC<sup>(A)</sup> et HMM<sup>(A)</sup>.** Les erreurs relatives  $(\bullet_{\text{cas S}} - \bullet_{\text{cas R}}) / \bullet_{\text{cas R}}$  entre les propriétés statistiques des distributions de  $\sigma_{\text{eq}}^m$  simulées (modèle FMC<sup>(A)</sup> ou HMM<sup>(A)</sup> avec  $K_c = 6$ ) et celles de référence sont reportées sur la figure 3.17. Les erreurs relatives entre les propriétés statistiques des distributions de  $\sigma_{\text{eq}}^m$  simulées (modèle FMC<sup>(A)</sup> ou HMM<sup>(A)</sup> avec  $K_c = 8$ ) et celles de référence sont reportées sur la figure 3.18.

Pour  $N_v = 1$  vol, aucun des modèles (FMC et HMM) ne permet d’ajuster convenablement la distribution  $\sigma_{\text{eq}}^m$  de référence. L’écart-type est considérablement sous-estimé pour l’ensemble des modèles HMM :  $-33.5\%$  pour  $K_c = 6$  ( $-31.9\%$  pour  $K_c = 8$ ). Il est également largement sous-estimé pour le modèle FMC avec  $K_c = 8$  :  $-30.3\%$  alors qu’il est paradoxalement très largement surestimé pour le modèle FMC avec  $K_c = 6$  :  $+43.3\%$ . La moyenne obtenue avec le modèle FMC avec  $K_c = 6$  est par ailleurs complètement erronée ( $+115.5\%$ ) par comparaison avec les modèles HMM et FMC ( $K_c = 8$ ) où l’erreur est inférieure à  $1\%$ . Enfin, les fractiles estimés avec les modèles HMM et FMC présentent des écarts conséquents.

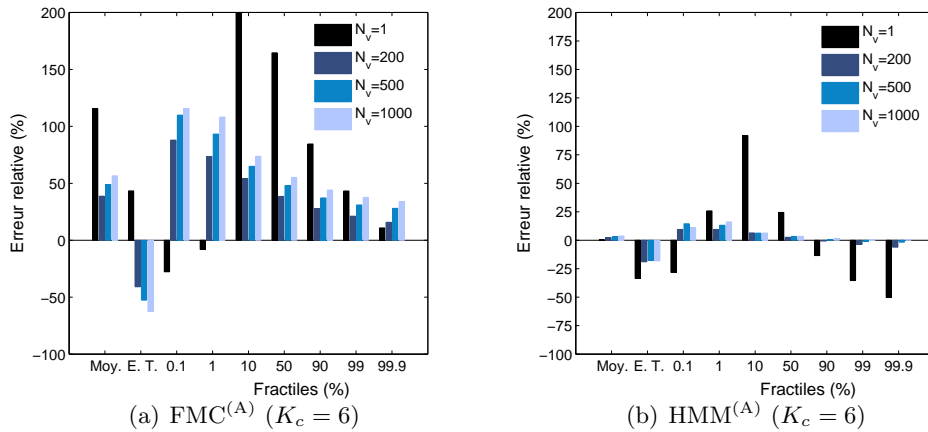


Figure 3.17 – Erreur relative (en %) sur les propriétés statistiques des distributions de  $\sigma_{eq}^m$  (Cas S *vs.* Cas R) pour le groupe “A” de données ( $K_c = 6$ ).

Pour des séquences de plusieurs vols cumulées,  $N_v = \{200, 500, 1000\}$ , les modèles HMM ( $K_c = 6$  et  $K_c = 8$ ) paraissent satisfaisants pour modéliser l’aléa des chargements de fatigue observés même s’ils réduisent l’écart-type d’environ 18%. L’erreur maximale mesurée sur la moyenne est de 3.8%. Les fractiles très élevés (par exemple à 99.9%) sont relativement bien estimés (erreur < 3%). Il est cependant observé que les fractiles les plus faibles (0.1% et 1%) sont surestimés (erreur maximale de 16%). Les différences entre les écarts-types mesurés et simulés ainsi que les écarts entre les estimations des fractiles à 0.1% et 1% sont principalement liés aux écarts entre les valeurs maximales des contraintes simulées et celles observées. Le lecteur est invité à se référer à la partie 4.2.5 du mémoire pour plus de détails sur ce point spécifique.

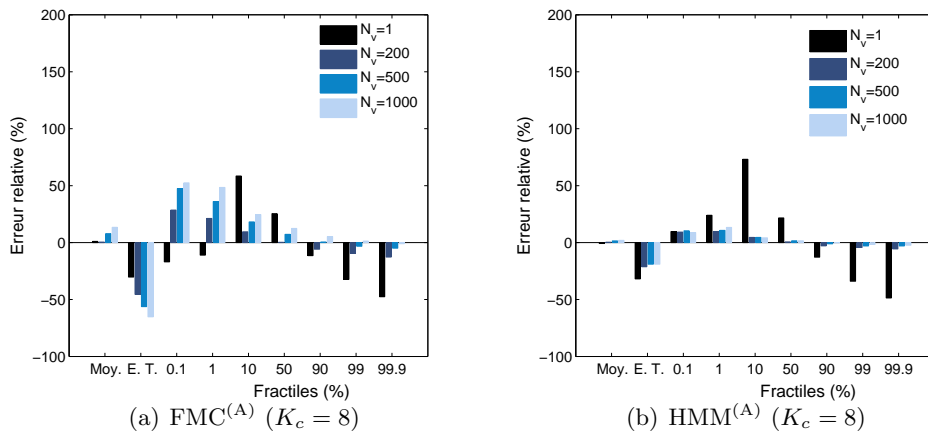


Figure 3.18 – Erreur relative (en %) sur les propriétés statistiques des distributions de  $\sigma_{eq}^m$  (Cas S *vs.* Cas R) pour le groupe “A” de données ( $K_c = 8$ ).

D’après les graphes 3.17 et 3.18 (erreurs relatives) et 3.19 (fonctions de répartition)

les modèles FMC ( $K_c = 6$  et  $K_c = 8$ ) ne permettent pas de modéliser correctement la distribution  $\sigma_{eq}^m$  de référence. L'écart-type est en effet amplement sous-estimé (max. :  $-65\%$ ). Ceci est certainement dû à la forte sensibilité du phénomène de retard aux valeurs extrêmes (pris en compte dans PREFFAS), qui ne sont pas correctement modélisées à travers les modèles FMC. Il est par ailleurs important de souligner que le modèle FMC est d'autant plus mauvais (ensemble des fractiles mal évalué) que le nombre de classes de contraintes  $K_c$  diminue. En effet, même si la matrice de transition  $\mathbf{P}$  estimée pour  $K_c = 8$  est de moins bonne qualité que celle obtenue avec  $K_c = 6$ , les résultats obtenus par propagation de fissure sont de meilleure qualité. Les modèles FMC sont donc très sensibles aux nombres de classes de contraintes  $K_c$ .

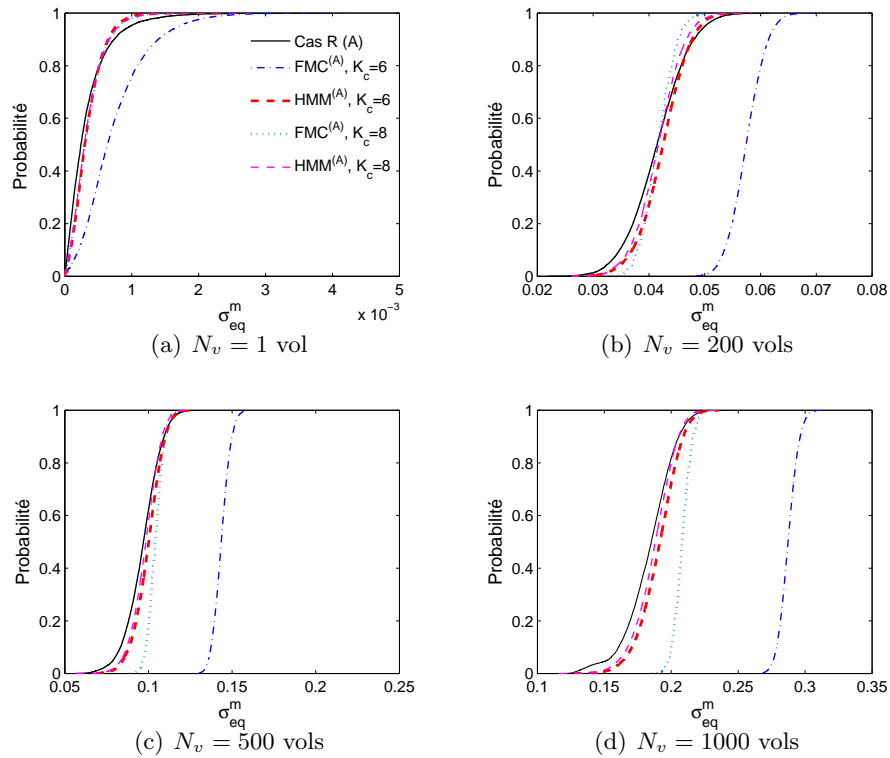


Figure 3.19 – Fonctions de répartition empirique de  $\sigma_{eq}^m$  pour le groupe “A”, cas R et cas S. Le trait noir continu représente la distribution obtenue à partir des chargements observés, noté Cas R (A).

**Groupe “B” - modèles FMC<sup>(B)</sup> et HMM<sup>(B)</sup>.** Les remarques déclinées pour les modèles FMC et HMM du groupe “A” s’appliquent aux modèles FMC et HMM de l’utilisation “B” de la flotte considérée, voir figures 3.20, 3.21 et 3.22.

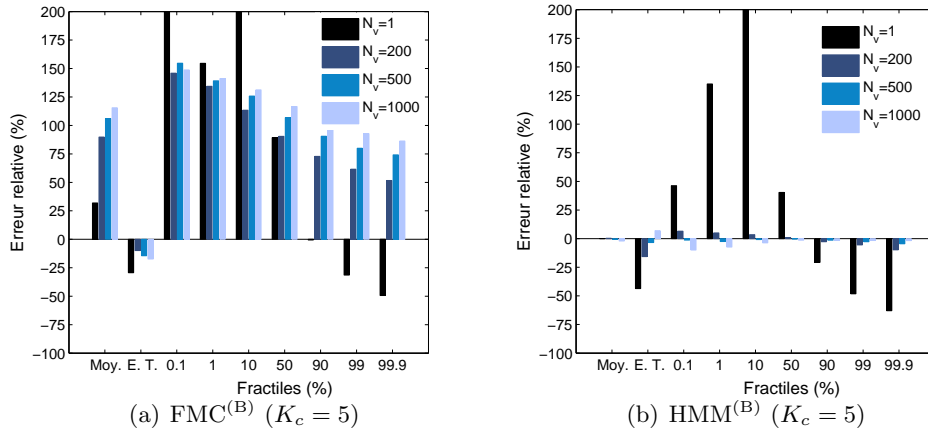


Figure 3.20 – Erreur relative (en %) sur les propriétés statistiques des distributions de  $\sigma_{\text{eq}}^m$  (Cas S *vs.* Cas R) pour le groupe “B” de données ( $K_c = 5$ ).

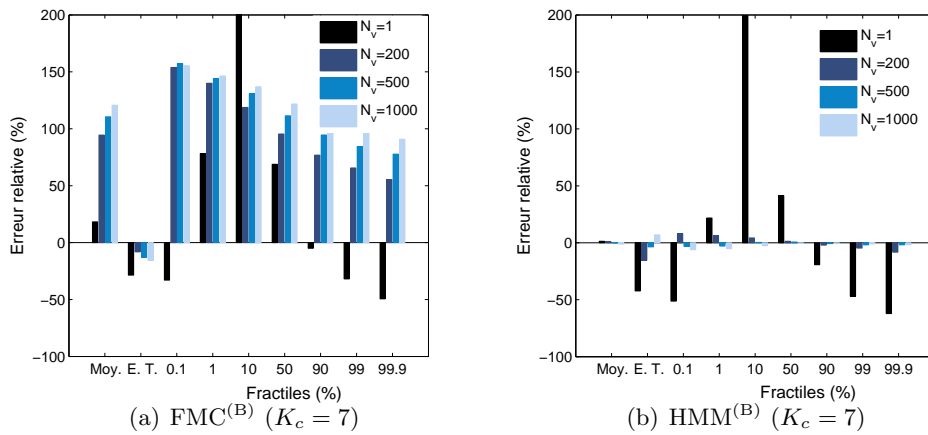


Figure 3.21 – Erreur relative (en %) sur les propriétés statistiques des distributions de  $\sigma_{\text{eq}}^m$  (Cas S *vs.* Cas R) pour le groupe “B” de données ( $K_c = 7$ ).

On peut juste ici préciser que les modèles FMC sont encore moins adaptés à la modélisation du chargement. Un biais croissant est en particulier observé sur la moyenne, quel que soit le nombre de classes  $K_c$  choisi, voir figure 3.22. Les modèles HMM<sup>(B)</sup> donnent quant à eux de meilleurs résultats par comparaison au groupe “A”, malgré une quantité plus faible de données. Il est également intéressant de noter, que contrairement aux modèles HMM<sup>(A)</sup>, les fractiles les plus faibles (0.1% et 1%) sont sous-estimés (erreur maximale absolue de 10%) lorsque  $N_v = 500$  et  $N_v = 1000$ .

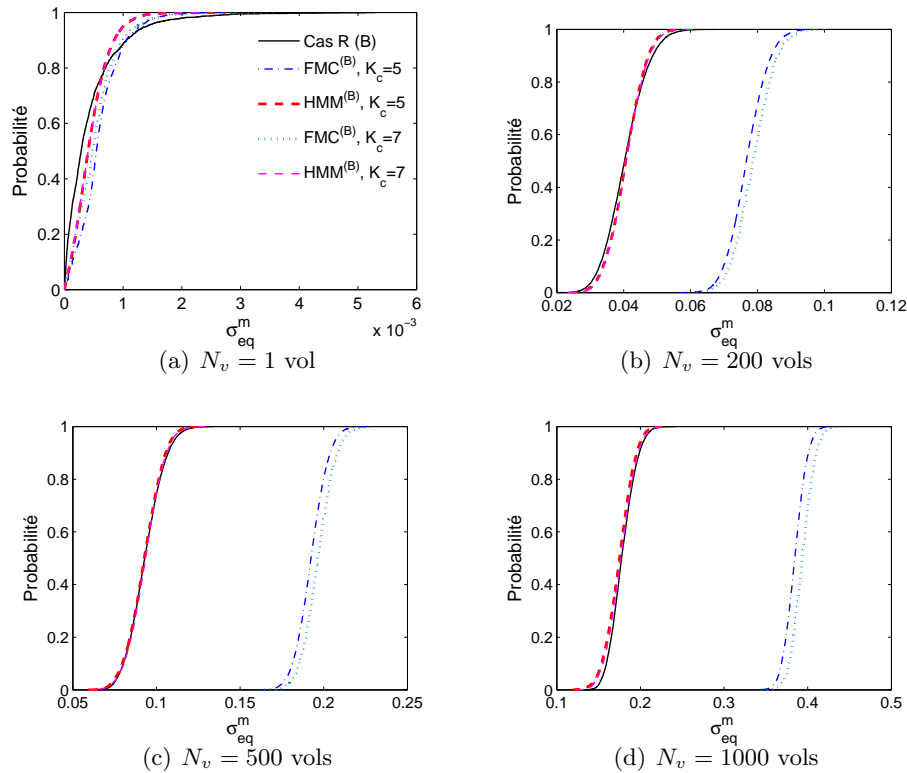


Figure 3.22 – Fonctions de répartition empirique de  $\sigma_{eq}^m$  pour le groupe “B”, cas S et cas R. Le trait noir continu représente la distribution obtenue à partir des chargements observés, noté cas R (B).

Pour conclure, malgré les écarts relevés entre simulations et observations, les modèles HMM<sup>(A)</sup> et HMM<sup>(B)</sup> tels qu’ils ont été définis peuvent être considérés comme des premières approches relativement satisfaisantes pour modéliser l’aléa de chargement en fatigue pour les structures dont le matériau constitutif présente un effet retard non négligeable. Rappelons que ceci concerne la plupart des alliages aluminium utilisés en aéronautique. En revanche, les modèles FMC<sup>(A)</sup> et FMC<sup>(B)</sup> ne sont pas aptes à traduire correctement l’aléa de chargement pour des applications en propagation de fissure en raison des écarts importants entre les simulations et le cas de référence correspondant aux données observées.

### 3.5.2.2 Adéquation du modèle HMM<sup>0</sup>

La famille de processus  $(F_{I_k}, I_k \in E^g)$  retenue pour le modèle HMM<sup>0</sup> est la famille  $\{\text{HMM}^{(A)} (K_c = 6); \text{HMM}^{(B)} (K_c = 5)\}$  compte tenu des résultats obtenus au paragraphe 3.5.2.1 et afin de satisfaire également aux propriétés de bonne estimation des matrices de transition  $\mathbf{P}$ .

La capacité du modèle  $HMM^0$  à traduire l'aléa de chargement observé pour la flotte d'avions étudiée dépend évidemment de l'aptitude des modèles  $HMM^{(A)}$  et  $HMM^{(B)}$  à modéliser l'aléa de chargement au sein même d'une utilisation de l'avion. La précision de ces modèles, étudiée à la sous-section 3.5.2.1, est considérée suffisante pour des analyses probabilistes en propagation de fissure. L'idée de cette section est de vérifier qu'une séquence de  $N_v$  vols de chargement simulée avec le modèle  $HMM^0$  permet de retranscrire l'aléa de chargement observé sur l'ensemble des activités de la flotte (activités associées au groupe "A" et au groupe "B"). Les erreurs relatives entre les propriétés statistiques des distributions de  $\sigma_{eq}^m$  obtenues pour les cas R et S sont à cet effet tracées sur la figure 3.23.

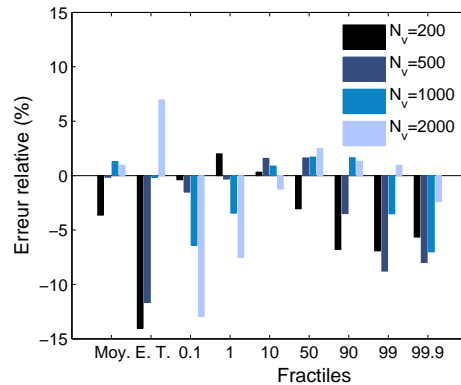


Figure 3.23 – Erreur relative (en %) entre les propriétés statistiques des distributions de  $\sigma_{eq}^m$  (cas S *vs.* cas R) pour le modèle stochastique de chargement de "niveau 0".

Il peut être noté que l'erreur maximale sur la moyenne est de 3.5% en valeur absolue. Elle est obtenue pour  $N_v = 200$ . La plus forte erreur enregistrée sur l'écart-type et sur les fractiles est de 14%. Les erreurs relatives entre les avancées de fissures obtenues par simulations (modèle  $HMM^0$ ) et celles de référence (tirages aléatoires uniformes des vols dans la base de données) peuvent en partie être liées aux écarts entre les lois du maximum  $P_{max}$  de la séquence de chargement de  $N_v$  vols de référence (cas R) et celle simulée (cas S), voir figures 3.24 et 3.25.

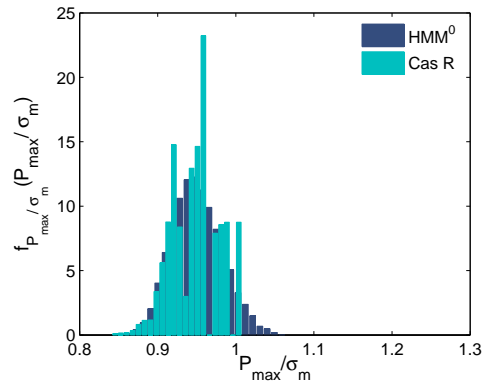


Figure 3.24 – Distributions des maximums globaux  $P_{\max}$  des séquences de chargement de  $N_v$  vols observées et simulées (cas  $N_v = 2000$ ).

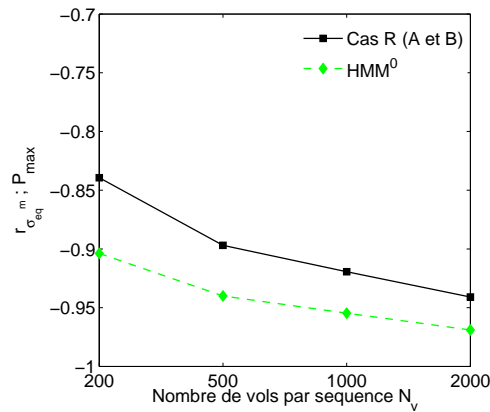


Figure 3.25 – Coefficient linéaire de Bravais-Pearson  $r_{\sigma_{eq}^m; P_{\max}}$  entre  $\sigma_{eq}^m$  et le plus grand maximum  $P_{\max}$  de la séquence de  $N_v$  vols.

Les écarts entre les fractiles à 0.1% et 1% des distributions de  $\sigma_{eq}^m$  (cas S *vs.* cas R) sont, par exemple, expliqués par une forte corrélation négative mesurée entre  $P_{\max}$  et  $\sigma_{eq}^m$ , figure 3.25 et les écarts entre les distributions de  $P_{\max}$  (cas R et cas S), voir figure 3.24 pour  $N_v = 2000$ . Les valeurs de  $P_{\max}$  sont nécessairement bornées à la valeur maximale  $\sigma_m$  pour le cas de référence (cas R), ce qui n'est pas le cas pour les simulations grâce à l'utilisation des lois de valeurs extrêmes (DPG). Des valeurs de  $P_{\max}/\sigma_m$  supérieures à 1 peuvent ainsi être simulées avec les lois DPG et donc des retards plus importants peuvent être générés (confirmés par la corrélation négative proche de  $-1$ ). Ceci conduit ainsi à des avancées de fissures  $\sigma_{eq}^m$  plus faibles. Or ce sont celles-ci qui correspondent aux fractiles les plus faibles à 0.1% et 1%. De même, l'écart-type de la distribution de  $P_{\max}$  obtenue à partir des séquences simulées (cas S) est surestimé par rapport au cas de référence (cas R), pour  $N_v = 2000$  entraînant ainsi un écart-type de  $\sigma_{eq}^m$  surestimé par les simulations.



Ainsi, il est important de noter que l'avancée de fissure est très sensible aux valeurs extrêmes pour les matériaux dont l'effet retard n'est pas négligeable. Celui-ci est ici pris en compte à travers le modèle PREFFAS. Les écarts entre les valeurs de  $P_{\max}$  observées et celles simulées sont principalement responsables des écarts entre les distributions d'avancée de fissure. Ces derniers sont causés par l'utilisation d'une loi aux valeurs extrêmes pour modéliser la queue de distribution des contraintes observées qui permet de prédire de nouvelles valeurs de  $P_{\max}$  en "extrapolant" les valeurs réellement observées. Les modèles HMM proposés possèdent donc à la fois un caractère reproductif des charges observées mais également un caractère prédictif de nouvelles charges plus élevées que celles mesurées en service.

### 3.5.3 Matériau sans effet retard - fonction Paris $\gamma^m$

Pour les matériaux sans effet retard, les surcharges et les interactions du chargement de fatigue ainsi que leur ordre d'apparition influent dans une moindre mesure sur les vitesses de propagation de fissure. Dans ce cas précis, il n'est alors pas nécessaire d'utiliser les modèles d'interaction tels que PREFFAS et Strip Yield pour le calcul d'avancée de fissure. Le modèle à cumul linéaire SEI, voir paragraphe 1.1.3, ou la loi de Paris peuvent par exemple être préférés.

D'après les études réalisées précédemment pour des matériaux à effet retard, les modèles HMM proposés et inférés à partir des données à disposition sont considérés comme satisfaisants pour simuler l'aléa observé sur le chargement malgré une variance sous estimée. Il est ici souhaité tester la pertinence de la modélisation stochastique du chargement basée sur l'utilisation des chaînes de Markov cachées (HMM) en utilisant la loi de Paris pour les matériaux qui ne présentent pas ou peu d'effet retard.

La quantité  $\gamma^m$  introduite à la section 3.5.1.1 est ainsi substituée à  $\sigma_{\text{eq}}^m$ . Étant définie comme la somme des amplitudes des cycles de la séquence du chargement à la puissance  $m$ , ce paramètre est donc en particulier sensible à l'exactitude de tous les niveaux de charges simulés ainsi qu'au nombre de cycles de la séquence. Le nombre de cycles (d'un vol)  $N_c$  étant simulé suivant sa densité empirique (aucune loi n'a été identifiée), celui-ci n'est ici pas responsable des écarts entre les résultats de simulations et ceux de référence observés ci-dessous. L'impact de l'ordre d'apparition des cycles dans le chargement n'a également aucune influence sur la qualité des résultats étant donné que  $\gamma^m$  n'est pas apte à traduire cet effet. Finalement, seuls les nombres de transitions d'un cycle à un autre ainsi que la qualité des distributions de contraintes des modèles HMM sont testés.

**Précision des modèles  $HMM^{(A)}$  et  $HMM^{(A)'}$ .** La capacité des deux modèles  $HMM^{(A)}$  et  $HMM^{(A)'}$ , développés aux sections 3.3.2 et 3.3.3, à retranscrire l'aléa observé pour l'utilisation "A" de la flotte est ici étudiée. Rappelons que le modèle  $HMM^{(A)'}$  apparaît comme une solution plus évoluée du modèle  $HMM^{(A)}$ , la seule différence entre ces modèles portant sur leurs familles de distributions (processus observé).

Les distributions de probabilité de la quantité  $\gamma^m$  obtenues par simulations (cas S :  $HMM^{(A)}$  ou  $HMM^{(A)'}$ ) sont comparées à la distribution de  $\gamma^m$  de référence obtenue à partir des séquences de chargement de fatigue observées pour lesquelles les cycles appartenant à une même classe  $c_k$  ont été supprimés. Il est par ce biais souhaité éviter l'effet Rainflow, présenté à la sous-section 1.2.4.1, pour les cycles qui disparaissent lors de la modélisation HMM et qui ne sont donc pas simulés.

Les erreurs relatives entre les propriétés statistiques des distributions de  $\gamma^m$  simulées (modèle  $HMM^{(A)}$  ou  $HMM^{(A)'}$ ) et celles de référence sont reportées sur la figure 3.26.

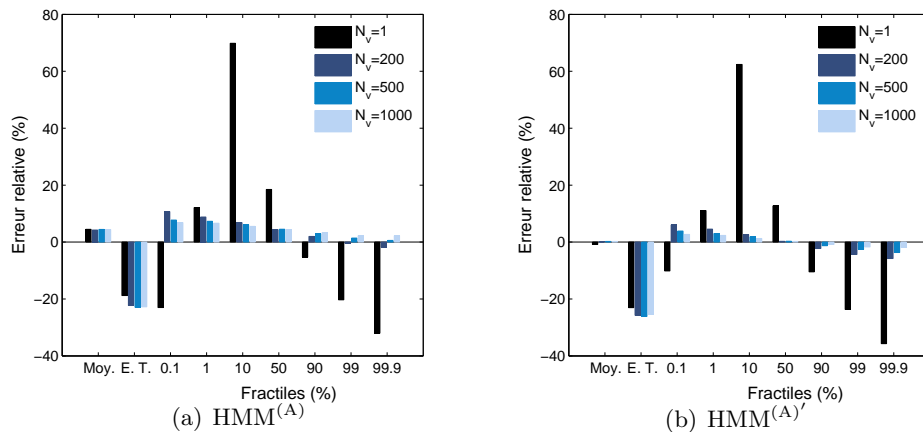


Figure 3.26 – Erreur relative (en %) sur les propriétés statistiques des distributions de  $\sigma_{eq}^m$  (Cas S *vs.* Cas R) pour le groupe "A" de données ( $K_c = 6$ ).

D'après les figures 3.26 et 3.27(a) à 3.27(d), la modélisation plus fine des distributions de probabilité pour les contraintes "min" et "max" des cycles états du modèle  $HMM^{(A)'}$  contribue à l'obtention de meilleurs résultats par rapport au modèle  $HMM^{(A)}$ . L'erreur sur la moyenne avec le modèle  $HMM^{(A)'}$  est inférieure à 1% et les fractiles sont bien estimés (erreur comprise entre 0.3% et 5%). Pour le modèle  $HMM^{(A)}$  un biais d'environ 4.5% est mesuré sur la moyenne et les fractiles les plus faibles (0.1% et 1%) sont un peu plus surestimés (erreur supérieure à 6.5%).

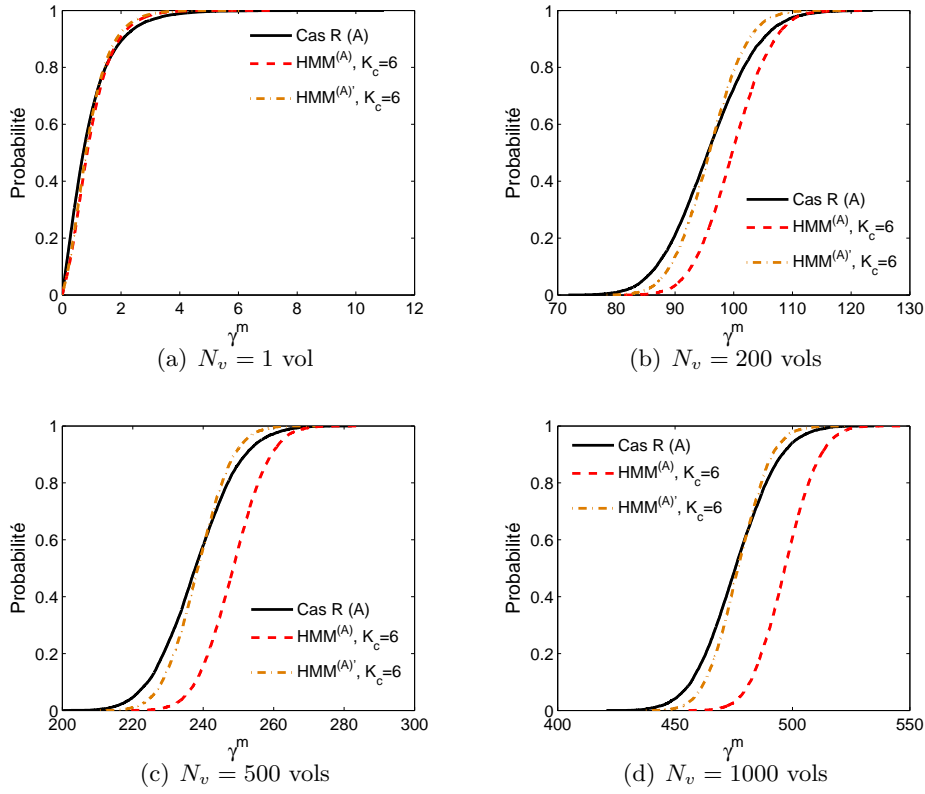


Figure 3.27 – Fonctions de répartition empirique de  $\gamma^m$  pour le groupe “A”, cas S ( $\text{HMM}^{(A)}$  ou  $\text{HMM}^{(A)'}$ ) et cas R. Le trait noir continu représente la distribution obtenue à partir des chargements observés, noté Cas R (A).

Les propriétés statistiques de la moyenne et des fractiles de  $\gamma^m$  sont ainsi relativement bien estimées par les deux modèles  $\text{HMM}^{(A)}$  et  $\text{HMM}^{(A)'}$ . Une réduction importante (entre 20% et 25%) de l'écart-type est cependant mesurée dans les deux cas malgré des fractiles (faibles ou élevés) plutôt bien estimés.

Cette différence entre l'écart-type de la distribution de  $\gamma^m$  de référence et celui ici issu des simulations avec le modèle  $\text{HMM}^{(A)'}$  est expliquée comme suit.

On considère la variable aléatoire  $X$  définie par l'amplitude d'un cycle de fatigue  $X = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})^m$  et un échantillon i.i.d de la v.a.  $X$  de taille  $n$ . La moyenne empirique de cet échantillon est notée  $\bar{x}$  et les variances suivantes sont définies :

- la “variance entre fractiles” :  $s_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n_i} (x_j - \bar{x})^2$  où les  $x_j$ , en nombre  $n_i$ , sont les amplitudes comprises entre deux fractiles (par exemple entre 0.1% et 1%) de la distribution de  $X$ .

- la variance totale :  $s_T^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$ .

Les poids des variances entre fractiles par rapport à la variance totale,  $s_i^2/s_T^2$ , sont reportés sur la figure 3.28(a) pour les amplitudes  $x$  observées (cas R) et celles qui ont été simulées avec le modèle HMM<sup>(A)'</sup>.

La différence entre les quantités  $s_i^2/s_T^2$  simulées, notées  $(s_i^2/s_T^2)_S$ , et celles observées, notées  $(s_i^2/s_T^2)_R$  est ensuite reportée sur la figure 3.28(b).

Les amplitudes les plus grandes (valeurs extrêmes supérieures au fractile à 99%) contribuent majoritairement à la variance totale d'après la figure 3.28(a). Or, d'après la figure 3.28(b), les variances relatives à ces plus grandes amplitudes simulées sont sous-estimées par rapport à celles observées, expliquant ainsi pourquoi l'écart-type de la distribution de  $\gamma^m = \sum X$  est sous estimée par les simulations.

Il est ainsi important de noter que les valeurs extrêmes, qui impactent peu l'évaluation des fractiles, influent fortement sur l'estimation de la variance et donc sur celle sur l'écart-type. Un effort devrait nécessairement être porté pour améliorer la modélisation de ces valeurs (ici en termes d'amplitude) malgré la rareté des valeurs extrêmes figurant parmi les données.

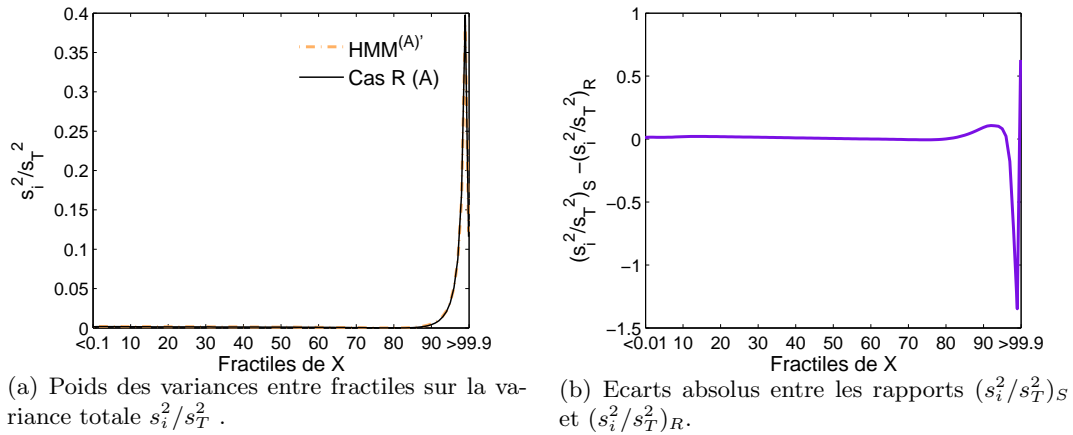


Figure 3.28 – Influence des valeurs extrêmes sur la variance.

### Pertinence des modèles HMM pour une application avec un modèle type Paris.

Plusieurs solutions basées sur les chaînes de Markov cachées ont été proposées pour simuler des séquences de chargement les plus fidèles possibles aux chargements réels d'un point de vue statistique. Ces modélisations permettent de prendre en compte, avec des degrés de finesse plus ou moins élevés, l'aléa sur les niveaux de charges minimales et maximales, la longueur des séquences de chargement de fatigue ainsi que le séquençage des cycles. Ce

dernier point constitue un véritable apport des modèles HMM (et FMC) par rapport à des approches basées sur l'utilisation de variables aléatoires qui viennent uniquement moduler le niveau de contrainte maximal.

Toutefois, dans le cas où il n'est pas fondamental de prendre en compte l'ordre des cycles, comme dans une approche type Paris ou pour un calcul de cumul linéaire du dommage en fatigue, il n'est pas pertinent de s'appuyer sur les modèles stochastiques développés.

## 3.6 Conclusions et perspectives

### 3.6.1 Conclusions

Deux modèles markoviens, les chaînes de Markov homogènes du premier ordre à espace d'états discret (FMC) et les chaînes de Markov cachées (HMM), ont été proposés dans ce chapitre afin de représenter l'aléa inhérent aux chargements vus par des éléments structuraux d'aéronefs militaires. Leurs paramètres ont été identifiés à partir de 27458 séries temporelles de contraintes issues d'enregistrements en vol, l'ensemble étant supposé représentatif de l'activité globale de la flotte. Ceci confère aux modèles inférés un caractère réaliste.

Concernant la qualité des estimations, en particulier de la matrice de transition et des distributions des lois des valeurs extrêmes, il peut être mentionné que celle-ci est sensible à la quantité de données. Il s'avère donc nécessaire d'effectuer un compromis entre complexité du modèle et nombre de données à disposition.

La pertinence des modèles proposés à représenter l'aléa de chargement pour des applications en propagation de fissure a été investiguée dans la dernière partie du chapitre. Le modèle PREFAS présenté au chapitre 1, apte à prendre en compte les effets de surcharge et les effets d'interaction entre cycles d'une séquence de chargement, et la loi de Paris, fonction des amplitudes des cycles, ont été choisis à cet effet.

Les conclusions suivantes peuvent être dégagées :

- Les modèles HMM sont plus précis pour simuler les séquences de chargements observées que les modèles FMC, d'un point de vue statistique. En effet, ils modélisent non seulement le séquençage des cycles mais également les niveaux de contraintes observés et en particulier les valeurs extrêmes qui ont une importance fondamentale sur l'avancée de fissure.

- Les modèles FMC peuvent être vus comme un cas particulier des modèles HMM certes plus simple mais surtout moins précis pour les matériaux à effet retard (cas des aluminium en aéronautique).
- Les modèles HMM permettent de reproduire convenablement les propriétés statistiques des séquences de chargement observées pour des applications en propagation de fissure, malgré un écart-type souvent sous-estimé. Les différences observées sont principalement liées aux écarts entre les valeurs extrêmes simulées et celles observées. Ceci invite à des efforts supplémentaires pour une modélisation plus fine de ces valeurs extrêmes.
- L'utilisation de la loi de Pareto généralisée pour modéliser les contraintes dans la queue de distribution permet de simuler des valeurs plus élevées que celles collectées en vol. Ceci confère aux modèles HMM un caractère prédictif en plus de leur caractère reproductif.

De manière plus générale, les modèles HMM peuvent être considérés comme des outils suffisamment adaptés pour modéliser l'aléa de chargement de fatigue. Les modélisations proposées sont particulièrement pertinentes dans le cadre d'un suivi des charges en service où les données sont nombreuses. De tels modèles pourraient également être applicables à d'autres domaines que celui des charges de fatigue sur structures aéronautiques, sous réserve que des données soient mesurables en quantité suffisante. Ce pourrait par exemple être le cas pour les charges subies par des constructions dues au vent et/ou à la houle, les charges générées par la conduite et/ou l'état de la route et subies par les véhicules, etc.

#### 3.6.2 Perspectives

Les études menées dans ce chapitre ont démontré le potentiel des modèles HMM pour modéliser des chargements de fatigue lorsque l'ordre des cycles et des vols importe. Cependant, il est primordial de remarquer que l'utilisation de ces outils nécessite une bonne connaissance du problème avant de pouvoir les mettre en œuvre de façon efficace et proposer des solutions qui permettent de répondre aux exigences posées. Il n'existe pas a priori de solution unique pour un jeu de données disponible.

Dans le cadre de ce mémoire, un certain nombre de solutions basées sur les HMM ont ainsi été balayées mais les perspectives d'amélioration et de développement des solutions proposées restent nombreuses. L'influence de la position des frontières des classes et en particulier celle des valeurs extrêmes sur la précision des résultats pourrait par exemple être étudiée. Une méthode d'actualisation des modèles à partir de données supplémentaires

pourrait également être étudiée. Les méthodes d'actualisation Bayésienne pourraient par exemple être envisagées pour mettre à jour les paramètres des lois utilisées et en particulier ceux de la loi de Pareto généralisée. L'étude de l'effet de l'actualisation des paramètres sur la qualité des résultats serait alors envisageable.





## Chapitre 4

# Analyse probabiliste de la tolérance aux dommages

*Ce chapitre est consacré à l'analyse probabiliste de la tolérance aux dommages sous chargements aléatoires d'amplitude variable. Deux analyses de distribution de propagation de fissures au bord d'un alésage d'un longeron principal de voilure d'avion de combat sont réalisées. Il s'agit dans un premier temps d'identifier les paramètres de chargement impactant fortement l'avancée de fissure : intensité des valeurs extrêmes, nombre de vols cumulés, nombre de cycles dans la séquence de chargement, et ensuite d'analyser les poids respectifs de l'aléa de chargement et de celui propre au matériau.*

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>137</b>
<b>4.2</b>	<b>Paramètres de chargement impactant l'avancée de fissure</b>	<b>137</b>
4.2.1	Présentation de la structure étudiée	137
4.2.2	Représentation stochastique du chargement de fatigue	139
4.2.3	Démarche appliquée	139
4.2.4	Résultats	142
4.2.5	Influence des paramètres des séquences de chargement	144
<b>4.3</b>	<b>Poids respectifs de l'aléa de chargement et de celui du matériau</b>	<b>149</b>
4.3.1	Présentation de la structure étudiée	150
4.3.2	Modélisations stochastiques des aléas matériau et de chargement	150
4.3.3	Simulations	152
4.3.4	Résultats	155
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>157</b>

---

## 4.1 Introduction

Le chapitre 3 a permis de proposer des modèles stochastiques de chargement en fatigue représentatifs des chargements réels vus en service par une flotte d'aéronefs. L'influence de l'aléa de chargement sur la dispersion du processus de propagation de fissure est désormais étudiée à partir d'une série d'études paramétriques. Les séquences de chargement de fatigue sont générées à partir des modèles aléatoires développés au chapitre 3.

## 4.2 Paramètres de chargement impactant l'avancée de fissure

Cette section présente l'analyse probabiliste de la propagation de fissure d'un dommage correspondant à une fissure au bord d'un alésage de longeron principal des avions de combat appartenant à la flotte étudiée. Seuls les chargements de fatigue d'amplitude variable sont supposés incertains dans cette étude. Les effets respectifs du plus grand maximum des séquences de chargement noté  $P_{\max}$ , du nombre de cycles  $N_s$  par séquence et du nombre de vols cumulés  $N_v$  par séquence, sur la dispersion de l'avancée de fissure sont analysés, [MB11, MBL<sup>+</sup>11, MBT11].

### 4.2.1 Présentation de la structure étudiée

#### 4.2.1.1 Géométrie

Le dommage considéré correspond à une fissure en pied de tête de fraisure d'alésage d'un longeron principal de l'avion de combat étudié. Il est représenté sur le schéma de la figure 4.1. Cette géométrie est modélisée de manière simplifiée par une fissure de coin s'amorçant au bord libre d'un trou d'une plaque, ce qui correspond au modèle CC02 implémenté sous le logiciel NASGRO [NAS06].

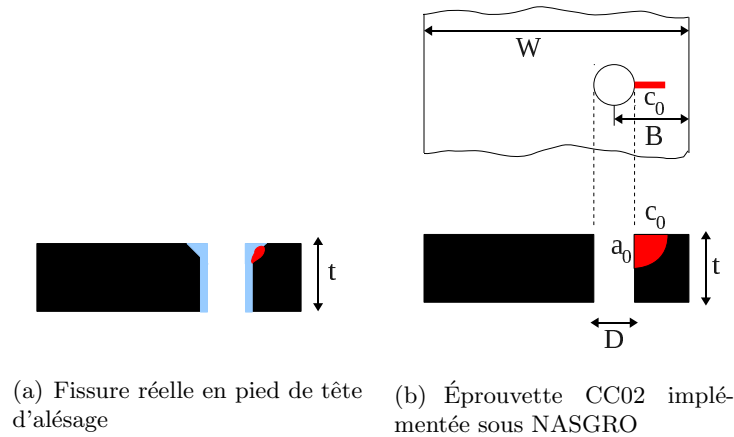


Figure 4.1 – Géométrie de la structure fissurée.

Les expressions des facteurs d'intensité de contraintes sont :

$$\begin{cases} K_a(a, c) = \sigma f_a(a, c) \sqrt{\pi a} \\ K_c(a, c) = \sigma f_c(a, c) \sqrt{\pi a} \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $f_a(a, c)$  et  $f_c(a, c)$  sont les facteurs de forme associés à l'éprouvette CC02. Les solutions implémentées sous NASGRO codées en Fortran sont ici reprogrammées sous Matlab par nécessité, afin de pouvoir mener les approches probabilistes.

Toutes les éprouvettes sont ici supposées contenir une unique fissure de même forme et dont les dimensions initiales sont les mêmes pour toutes les éprouvettes. Le seuil de détection étant de 0.5 mm pour le moyen de contrôle non-destructif (CND) mis en œuvre (multi-élément (US) <sup>1</sup>), on suppose que la profondeur et la longueur initiales de la fissure sont déterministes et égales à 0.5 mm. Les dimensions géométriques de la structure sont reportées dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1 – Données géométriques de l'éprouvette (en mm).

Largeur	$W = 59$
Épaisseur	$t = 21$
Diamètre du trou	$D = 10$
Position du trou	$B = 25$
Profondeur initiale de la fissure	$a_0 = 0.5$
Ratio de forme initiale de la fissure	$a_0/c_0 = 1$

<sup>1</sup>La méthode multi-élément est calibrée sur des dommages étalons de forme circulaire ( $a = c$ ) obtenus par électro-érosion. Lors de la mesure, le contrôleur détecte un signal qui est plus grand, plus petit ou égal au signal étalon.

### 4.2.1.2 Propriétés matériau et modèle de fissuration

Le matériau considéré pour l'ensemble des études de ce mémoire est l'aluminium 2024-T351 dont les propriétés matériau extraites de la note technique n°5/M/90 [Ren90] sont rappelées dans le tableau 4.2. Le modèle de propagation de fissure choisi pour l'étude est le modèle PREFFAS. Les paramètres  $a$  et  $b$  d'Elber du modèle PREFFAS, fonctions du matériau et de l'épaisseur  $t$  de la structure, sont choisis en accord avec les recommandations de D. Aliaga [ADS88].

Tableau 4.2 – Propriétés matériau de l'éprouvette CC02.

Limite d'élasticité	$\sigma_y = 312 \text{ MPa}$
Facteur d'intensité critique	$K_{Ic} = 1185.8 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$
Coefficient de Paris	$C = 3.26 \cdot 10^{-8}$ , $m = 3.42$
Coefficients d'Elber	$a = 0.35$ $b = 0.65$

### 4.2.2 Représentation stochastique du chargement de fatigue

Les chargements endurés en vol par l'alésage du longeron principal de l'avion de combat considéré ont été modélisés au chapitre 3 à l'aide de chaînes de Markov homogènes du premier ordre et de chaînes de Markov cachées. Pour chaque usage "A" et "B" de l'avion, deux modèles (FMC et HMM) ont été proposés pour modéliser l'aléa inhérent aux séquences de chargement observées. Un modèle global  $\text{HMM}^0$  s'appuyant sur les modèles  $\text{HMM}^{(A)}$  et  $\text{HMM}^{(B)}$  a ensuite été défini pour modéliser des séquences de  $N_v$  vols représentatives des deux activités "A" et "B" de la flotte.

Les modèles  $\text{FMC}^{(A)}$  ( $K_c = 6$ ) et  $\text{HMM}^{(A)}$  ( $K_c = 6$ ) sont ici utilisés pour générer des séquences de chargement de fatigue de  $N_v$  vols représentatives de l'activité "A". De même, les modèles  $\text{FMC}^{(B)}$  ( $K_c = 5$ ) et  $\text{HMM}^{(B)}$  ( $K_c = 5$ ) sont ici employés pour la simulation de séquences de chargement reproduisant l'aléa observé dans le groupe "B". Enfin, le modèle  $\text{HMM}^0$  s'appuyant sur les modèles  $\text{HMM}^{(A)}$  ( $K_c = 6$ ) et  $\text{HMM}^{(B)}$  ( $K_c = 5$ ) permet de générer des chargements de fatigue prenant en compte à la fois l'aléa mesuré sur les charges du groupe "A" et celui sur celles du groupe "B". Les caractéristiques de ces modèles sont données aux paragraphes 3.3 et 3.4.

### 4.2.3 Démarche appliquée

Plusieurs analyses de distribution de l'avancée de fissure sous spectres de chargement aléatoires d'amplitude variable sont ici réalisées. Les différents éléments d'un spectre de

chargement sont présentés ci-dessous et sur la figure 4.2.

- Un spectre de chargement est défini par la répétition d'une même séquence de chargement afin de respecter les hypothèses d'utilisation du modèle PREFFAS (stationnarité). Soit  $F$  le nombre de fois où la séquence est répétée.
- Une séquence de chargement est composée de  $N_v$  vols (de l'activité "A", de l'activité "B" ou des activités "A et B"). Elle contient un total de  $N_s$  cycles.
- Le nombre total de vols  $N_T$  du spectre de chargement est donc de  $N_T = F \times N_v$ .
- Un vol ("A" ou "B") contient  $N_c$  cycles de fatigue. Une séquence de  $N_v$  vols est ainsi constituée de  $N_s = \sum_{i=1}^{N_v} N_c^{(i)}$  cycles, où  $N_c^{(i)}$  est le nombre de cycles du vol  $i$  (variable aléatoire).
- Le nombre total de cycles  $N$  d'un spectre de chargement est enfin donné par :  $N = F \times N_s = F \times \sum_{i=1}^{N_v} N_c^{(i)}$ .

Les variables  $N_c$ ,  $N_s$  et  $N$  sont aléatoires.

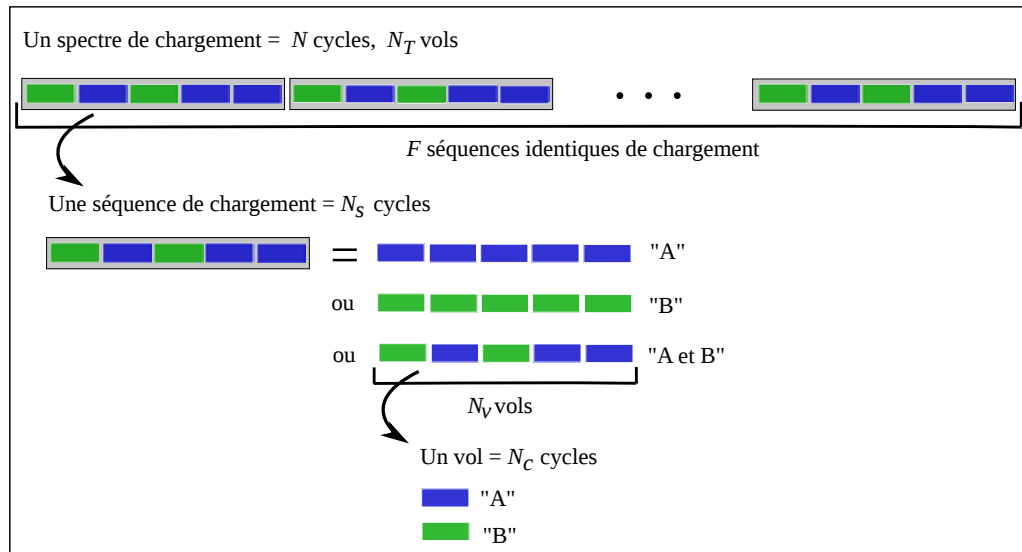


Figure 4.2 – Définitions d'un spectre de chargement, d'une séquence de chargement, d'un vol et notations utilisées.

Tous les spectres de chargement de fatigue générés lors des analyses de distribution sont composés d'un même nombre choisi de  $N_T = 6000$  vols. Il est choisi de faire varier le nombre de vols  $N_v$  par séquence parmi les valeurs  $\{1, 200, 500, 1000\}$ , lorsque la séquence est constituée uniquement de vols d'un même groupe "A" ou "B", et parmi

{200, 500, 1000, 2000}, lorsque la séquence est constituée de vols des deux groupes "A" et "B". Ceci permet d'étudier l'impact du nombre de vols par séquence  $N_v$  sur la dispersion des résultats de propagation.

Les analyses de distribution de l'avancée de fissure sont finalement caractérisées par le type d'aléa de chargement pris en compte dans les simulations ("A", "B" ou "A et B"), la méthode de simulations des séquences de vols (cas S : FMC ou HMM ; cas R : tirage aléatoire des vols dans la base de données) et le nombre de vols par séquence qui est répété jusqu'à l'obtention des  $N_T = 6000$  vols ( $N_v = \{1, 200, 500, 1000\}$  (aléa "A" ou "B") ou  $N_v = \{200, 500, 1000, 2000\}$  (aléa "A et B")). Chaque distribution est obtenue à partir de  $N_{sim} = 10000$  réalisations de  $a_f$  et  $c_f$  (taille de l'échantillon statistique).

La figure 4.3 synthétise l'ensemble des analyses de distribution réalisées.

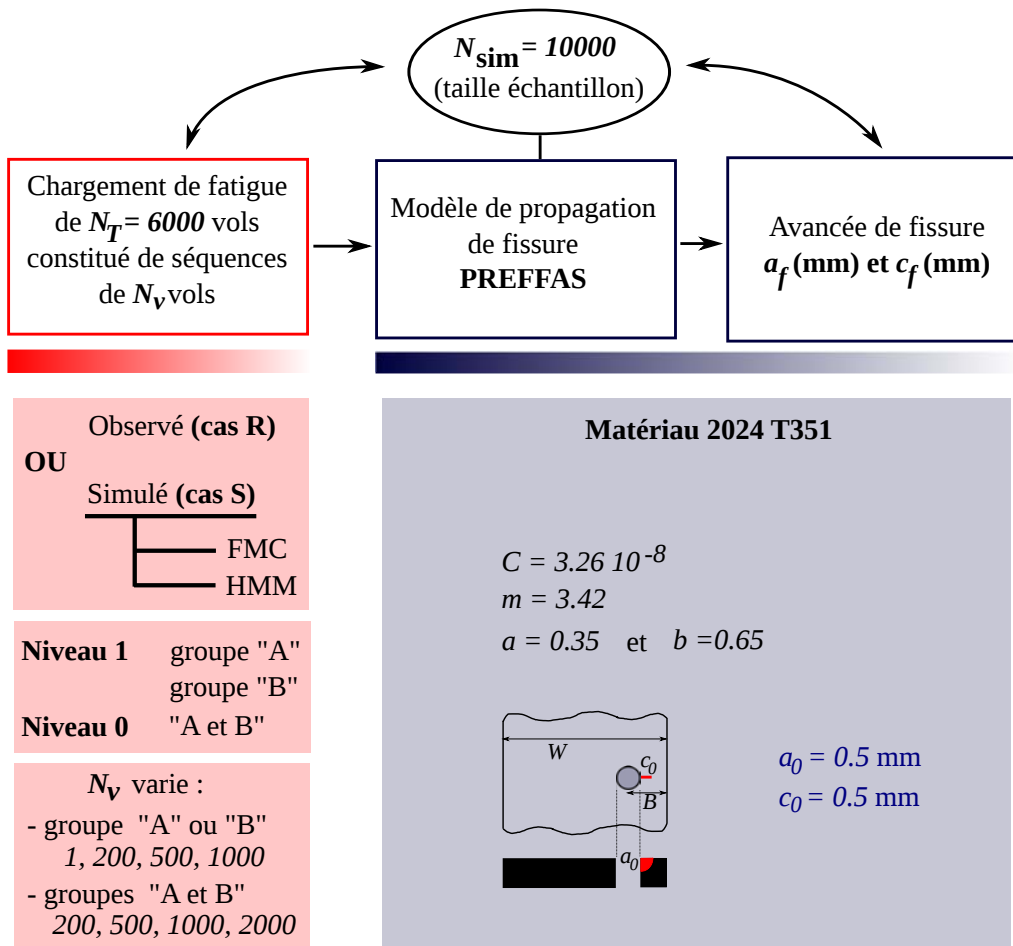


Figure 4.3 – Analyses de distribution réalisées.

Les dispersions sur les avancées de fissure ( $a_f$  et  $c_f$ ) en termes de coefficient de variation sont comparées lors des différentes analyses. L'étude porte sur l'influence des paramètres du

chargement suivants sur l'avancée de fissure : valeur maximale  $P_{\max}$  de la séquence, nombre de vols  $N_v$  par séquence et nombre de cycles  $N_s$  appliqués par séquence de chargement.

Il est important de noter que les simulations probabilistes de propagation de fissure nécessitent des temps de calcul significatifs. Chacune des étapes de calcul : génération des séquences de chargement avec les modèles de Markov, analyse cycle-à-cycle du chargement d'amplitude variable avec le modèle PREFFAS et calcul séquentiel de l'avancée de fissure du modèle CC02 avec la loi de Paris, mobilisent les capacités informatiques pendant une durée conséquente. Tous les algorithmes ont ainsi été programmés de manière optimale afin de pouvoir traiter simultanément plusieurs calculs de propagation de fissure sous chargement d'amplitude variable aléatoires (calculs vectorisés sous Matlab et distribution de calculs sur machines multi-processeurs).

#### 4.2.4 Résultats

Les moyennes et dispersions (coefficient de variation) de la profondeur de fissure  $a_f$ , obtenues après propagation des  $N_{\text{sim}} = 10000$  chargements de fatigue de  $N_T = 6000$  vols sont respectivement reportées sur les figures 4.4 et 4.5. Les propriétés statistiques de la longueur de fissure  $c_f$  sont voisines de celles obtenues pour  $a_f$  et elles ne sont pas mentionnées pour des raisons de concision.

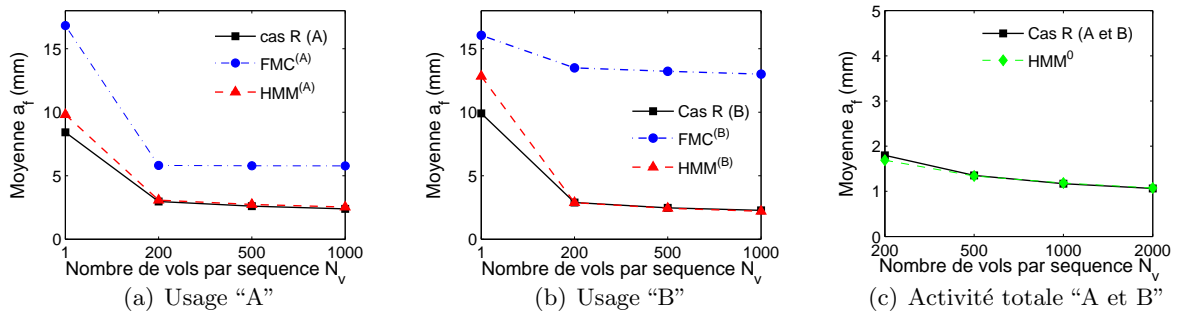


Figure 4.4 – Moyenne de la profondeur de fissure  $a_f$  (pour  $N_T = 6000$  vols) en fonction du nombre de vols par séquence  $N_v$  et du mode de simulation choisi (cas R, cas S : FMC ou HMM).

**Cas R.** La moyenne et le coefficient de variation obtenus à partir de chargements de fatigue composés de la répétition de séquences de  $N_v = 1$  vol observé (cas R) sont très largement supérieurs aux moyennes et coefficients de variation calculés à partir des spectres de chargement composés de séquences plus longues  $N_v = \{200, 500, 1000, 2000\}$ . Les moyennes de  $a_f$  et  $c_f$  plus élevées pour  $N_v = 1$  s'expliquent par une répétition plus fréquente de la surcharge maximale  $P_{\max}$  qui est, par ailleurs, moins élevée en moyenne



que celle observée pour  $N_v = \{200, 500, 1000, 2000\}$ . L'ouverture associée est ainsi plus faible et l'effet retardateur de cette surcharge, pris en compte dans PREFFAS, est donc moindre. De plus, la répétition très rapprochée de  $P_{\max}$  provoque une progression de la fissure plus rapide par rapport aux autres cycles.

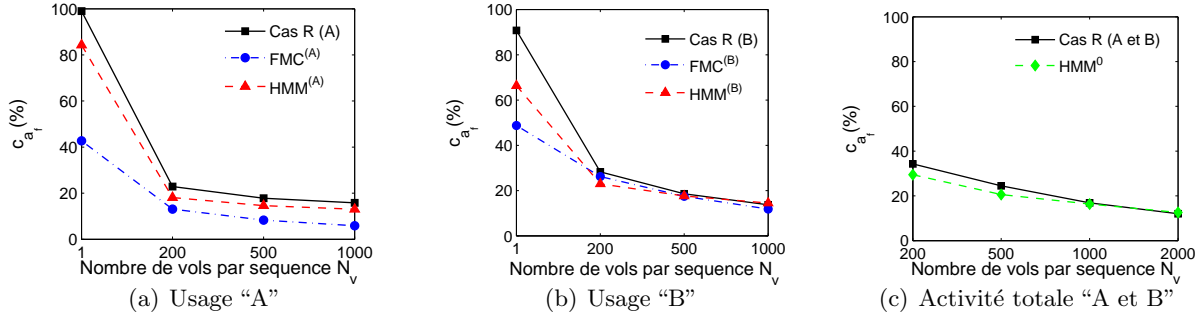


Figure 4.5 – Coefficient de variation  $c_{a_f}$  de la profondeur de fissure  $a_f$  (pour  $N_T = 6000$  vols) en fonction du nombre de vols par séquence  $N_v$  et du mode de simulation choisi (cas R, cas S : FMC ou HMM).

D'après la figure 4.5, le coefficient de variation de la taille de fissure  $a_f$  diminue notablement en fonction du nombre de vols  $N_v$  par séquence (répétée jusqu'à l'obtention de  $N_T$  vols) et ce quel que soit l'aléa pris en compte ("A", "B" ou "A et B"). Le coefficient de variation est par exemple de 34.3% lorsque  $N_v = 200$ , contre 12% lorsque  $N_v = 2000$  (aléa "A et B"). Il est de 99% ( $N_v = 1$ ), 22.9% ( $N_v = 200$ ) et de 15.8% ( $N_v = 1000$ ) lorsque seul l'aléa du chargement de l'utilisation "A" de la flotte est pris en compte. Le paramètre  $N_v$  apparaît donc comme un paramètre critique pour les analyses de propagation de fissure soumise à des séquences de chargement répétées, ce qui est le cas avec le modèle de PREFFAS. Des évolutions du modèle PREFFAS ont été présentées au chapitre 1 afin de pouvoir traiter des spectres de chargement aléatoires sur leur longueur et ainsi éviter la sensibilité du phénomène de propagation de fissure au paramètre  $N_v$  (modèle PREFFAS- $m$ ).

**Cas S.** Les simulations à partir des modèles FMC et HMM donnent des propriétés statistiques éloignées de celles estimées à partir des vols observés (cas R) lorsque  $N_v = 1$ . La moyenne est très largement surestimée alors que la variance est sous-estimée, ce qui confirme la médiocrité des modèles proposés à reproduire les propriétés statistiques observées lorsque  $N_v = 1$ , cf. paragraphe 3.5.2.1. Les propriétés statistiques (moyenne et coefficient de variation) des dimensions de fissure  $a_f$  et  $c_f$  obtenues à partir des séquences de chargement simulées avec les modèles HMM<sup>(A)</sup>, HMM<sup>(B)</sup> et HMM<sup>0</sup> sont quant à elles très proches de celles obtenues à partir des trajectoires de référence lorsque  $N_v > 1$ , ce qui confirme l'adéquation de tels modèles pour ce type d'application. On peut toutefois

modérer ces propos en soulignant que le coefficient de variation est souvent légèrement sous-estimé par les simulations. Les écarts entre les résultats de propagation de fissure (moyenne et coefficient de variation) obtenus dans le cas R et ceux obtenus à partir des modèles FMC sont eux importants, ce qui permet de confirmer que les modèles FMC ne sont pas satisfaisants.

#### 4.2.5 Influence des paramètres des séquences de chargement

L'impact du nombre de cycles  $N_s$  contenus dans une séquence de  $N_v$  vols et celui du plus grand maximum de la séquence noté  $P_{\max}$  sur la propagation de fissure de l'éprouvette CC02 sont maintenant analysés.

##### 4.2.5.1 Effet du nombre de cycles appliqués par séquence

**Analyse du coefficient de variation de  $N_s$ .** Avant d'étudier l'effet du nombre de cycles  $N_s$  par séquence sur les longueurs de fissure finales  $a_f$  et  $c_f$ , le coefficient de variation du nombre de cycles  $N_s$  par séquence est tout d'abord analysé. L'évolution du coefficient de variation de  $N_s$  en fonction du nombre de vols par séquence  $N_v$  est tracée sur la figure 4.6.

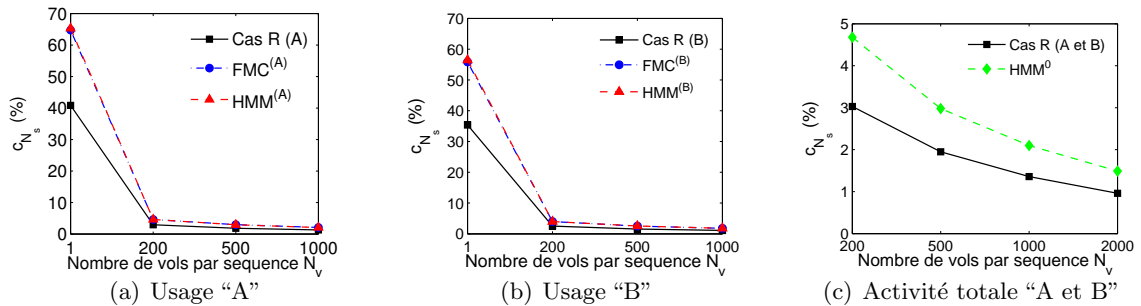


Figure 4.6 – Coefficient de variation  $c_{N_s}$  du nombre de cycles  $N_s$  par séquence de  $N_v$  vols (en %).

Pour un vol ( $N_v = 1$ ), les modèles FMC et HMM surestiment le coefficient de variation de  $N_s$  quelle que soit l'activité de la flotte ("A" ou "B"). L'erreur est proche de 60%. Cet écart considérable peut en partie être attribué aux cycles observés, dont les minimums et les maximums appartiennent à une même classe  $c_k$  et qui disparaissent lors de la modélisation avec les approches markoviennes présentées.

Pour des séquences de chargement de fatigue composées de plusieurs vols ( $N_v = \{200, 500, 1000, 2000\}$ ), le coefficient de variation de  $N_s$  est petit ( $\leq 5\%$ ) et décroît

jusqu'à 1% pour les séquences observées (cas R) et simulées (cas S). Ce phénomène est expliqué par le Théorème Central Limite (TCL).

Chaque vol  $i$  de la séquence de  $N_v$  vols est composé de  $N_c^{(i)}$  cycles de fatigue, où  $N_c^{(i)}$  est une variable aléatoire qui représente soit le nombre de cycles du vol observé, tiré aléatoirement dans la base de données (cas R), soit une réalisation de la distribution empirique du nombre de cycles par vol (cas S), voir figures 3.11(b) et 3.12(b). Le nombre de cycles de fatigue  $N_s$  d'une séquence de  $N_v$  vols est donc une variable aléatoire définie par  $N_s = \sum_{i=1}^{N_v} N_c^{(i)}$ .

Les nombres de cycles  $N_c^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, N_v$ , sont indépendants et identiquement distribués suivant la loi de la variable aléatoire parente  $N_c \sim \mathcal{L}(\mu_{N_c}; \sigma_{N_c})$ . D'après le TCL, la variable aléatoire  $N_s = \sum_{i=1}^{N_v} N_c^{(i)}$  est donc asymptotiquement distribuée suivant la loi normale lorsque  $N_v$  tend vers l'infini :

$$\frac{\frac{1}{N_v} \sum_{i=1}^{N_v} N_c^{(i)} - \mu_{N_c}}{\sigma_{N_c}} \sqrt{N_v} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0; 1) \text{ lorsque } N_v \rightarrow +\infty \quad (4.2)$$

Le coefficient de variation de  $N_s$  est ainsi approché par l'expression (4.3). Ceci explique pourquoi ce dernier diminue lorsque  $N_v$  augmente.

$$c_{N_s} = \frac{\sigma_{N_c}}{\sqrt{N_v} \mu_{N_c}} \quad (4.3)$$

La figure 4.7 fournit une illustration de ces propos pour des séquences de chargement de longueur  $N_v = 200$  vols représentatives de l'aléa du groupe "A". Dans ce cas,  $N_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(200\mu_{N_c}; \sqrt{200}\sigma_{N_c})$ .

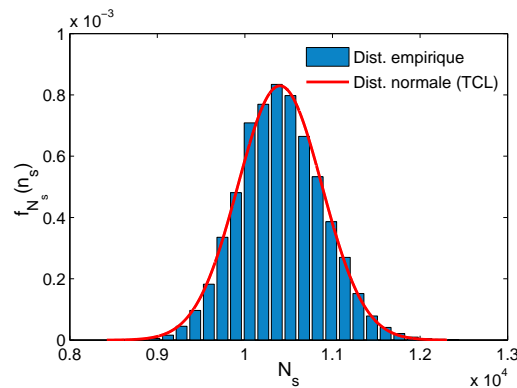


Figure 4.7 – Distribution empirique de  $N_s$  obtenue à partir des séquences de chargement de  $N_v = 200$  vols observées du groupe "A" vs. distribution normale par TCL.

**Étude de la corrélation entre  $N_s$  et  $a_f$ .** Dans une seconde analyse, la corrélation entre le nombre de cycles  $N_s$  par séquence et l'avancée de fissure  $a_f$  est étudiée, voir figure 4.8. Une corrélation supérieure à 0.5 est mesurée entre  $N_s$  et  $a_f$  pour les deux groupes de données "A" et "B" et pour les séquences de  $N_v = 1$  vol observées (cas R) ou simulées (cas S : FMC et HMM). Les modèles markoviens FMC et HMM surestiment cette corrélation tout comme le coefficient de variation de  $N_s$ .

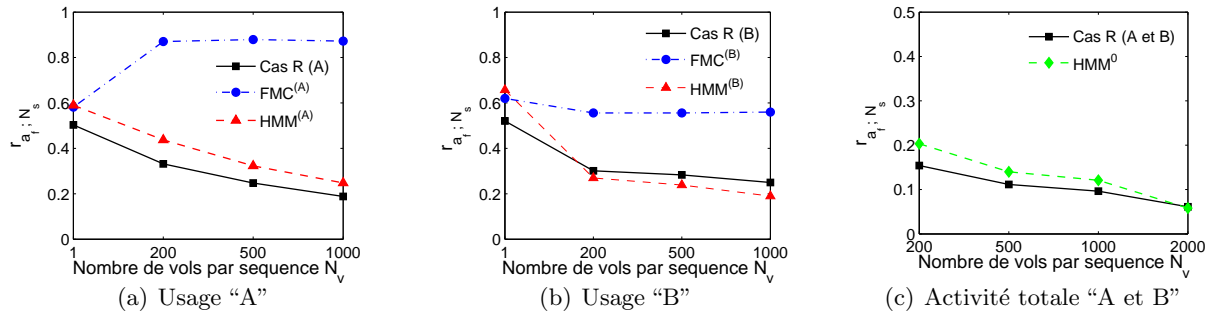


Figure 4.8 – Coefficient linéaire de Bravais-Pearson  $r_{a_f; N_s}$  entre la profondeur de fissure finale  $a_f$  et le nombre de cycles  $N_s$  par séquence de  $N_v$  vols.

Lorsque les séquences de chargement sont plus longues ( $N_v = \{200, 500, 1000, 2000\}$ ), la corrélation entre la profondeur de fissure  $a_f$  et le nombre de cycles  $N_s$ , obtenue soit à partir des chargements du cas R, soit à partir des chargements du cas S avec le modèle HMM, diminue avec  $N_v$  et devient négligeable. Il est cependant important de noter que le modèle FMC surestime notablement le coefficient de corrélation entre  $a_f$  et  $N_s$  par rapport aux autres cas (cas R et cas S : HMM) et cela quel que soit  $N_v$ . Ceci semble signifier que  $N_s$  est un paramètre important pour le processus de propagation de fissure dans ce cas là (cas S : FMC).

#### 4.2.5.2 Effet des charges extrêmes

L'effet des valeurs extrêmes présentes au sein des séquences de chargements de  $N_v$  vols sur le phénomène de propagation de fissure est maintenant étudié. Dans un premier temps, l'analyse porte sur le coefficient de variation du maximum par séquence noté  $P_{\max}$  ainsi que sur la corrélation entre le maximum  $P_{\max}$  et la longueur de fissure finale  $a_f$ . Dans une deuxième étude, on s'intéresse à la sensibilité du processus de propagation de fissure aux paramètres  $\xi$  et  $\beta$  de la loi des valeurs extrêmes DGP, ici utilisée pour modéliser la queue de distribution des contraintes maximales.

**Effet de  $P_{\max}$  sur l'avancée de fissure ( $a_f$  et  $c_f$ ).** D'après les figures 4.9(a) et 4.9(b) une corrélation positive élevée est mesurée entre  $P_{\max}$  et  $a_f$  lorsque la séquence de chargement répétée n'est composée que d'un seul vol, pour les séquences observées et celles simulées (FMC et HMM). Ceci signifie que l'effet retard est moins fort que la fréquence de répétition du maximum  $P_{\max}$ . Le maximum  $P_{\max}$  contribue plus à l'avancée de fissure.

A contrario une forte corrélation négative qui tend vers  $-1$  est mesurée pour des séquences de chargement constituées de plusieurs vols observés (cas R) ou simulés avec le modèle HMM (cas S : HMM). Ceci signifie que plus le maximum de la séquence  $P_{\max}$  est grand, moins la fissure progresse vite (à nombre de vols imposé). Ce maximum  $P_{\max}$  est responsable de l'effet de retard principal pris en compte dans le modèle PREFFAS. Rappelons que le facteur d'intensité de contrainte d'ouverture  $K_{\text{ouv}}$  minimal sur la séquence de chargement est calculé à partir de la valeur  $P_{\max}$  associée au minimum global, voir chapitre 1.

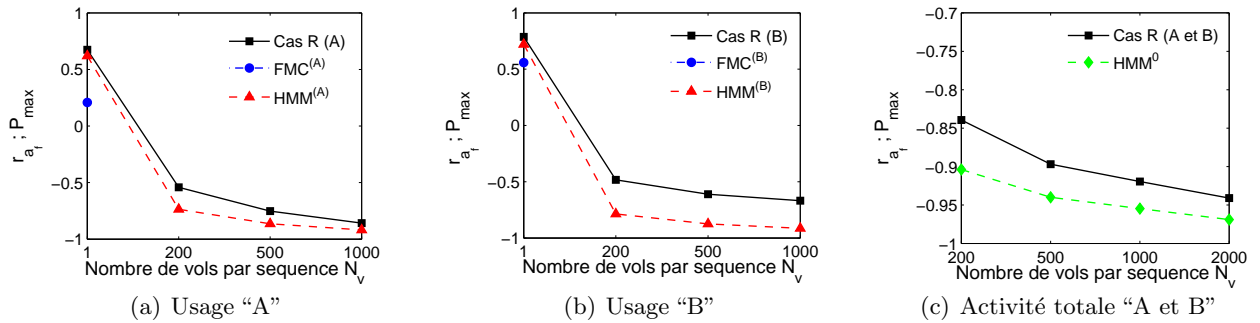


Figure 4.9 – Coefficient linéaire de Bravais-Pearson  $r_{a_f; P_{\max}}$  entre la profondeur de fissure finale  $a_f$  et le plus grand maximum  $P_{\max}$  de la séquence de  $N_v$  vols.

Aucune corrélation entre  $P_{\max}$  et  $a_f$  n'est mesurée avec le modèle FMC pour  $N_v > 1$ , toutes les valeurs extrêmes de la classe  $c_{K_c}$  étant remplacées par une valeur unique. Pour les mêmes raisons  $c_{P_{\max}}=0$ , voir figure 4.10. Le phénomène de fissuration n'est donc pas sensible aux valeurs extrêmes lorsque le chargement est simulé avec le modèle FMC. Dans ce cas il est plutôt sensible au nombre de cycles  $N_s$  par séquence, ce qui est mis en évidence par la forte corrélation mesurée entre  $N_s$  et  $a_f$ , voir figure 4.8.

D'après les figures 4.10(a), 4.10(b) et 4.10(c) on peut souligner que les modèles HMM estiment assez bien le coefficient de variation de  $P_{\max}$  pour  $N_v = \{200, 500, 1000, 2000\}$ . La pertinence des modèles HMM à retranscrire les propriétés statistiques du chargement observé et celles de l'avancée de fissure est ainsi une nouvelle fois démontrée.

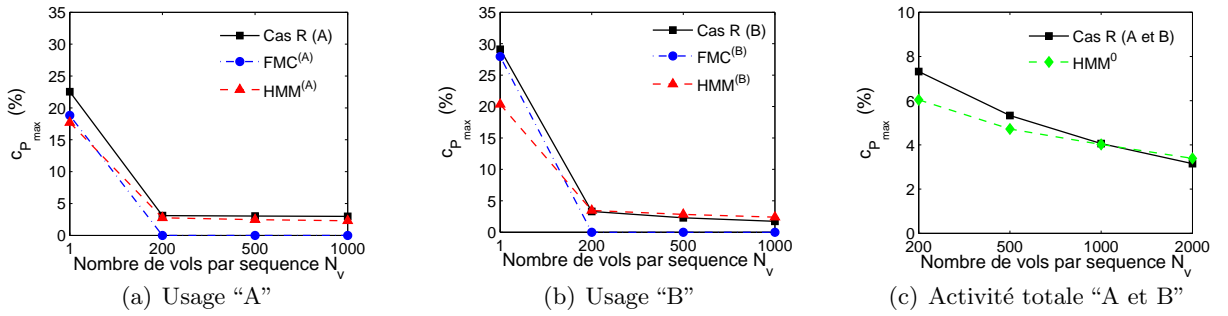


Figure 4.10 – Coefficient de variation  $c_{P_{\max}}$  du plus grand maximum  $P_{\max}$  de la séquence de  $N_v$  vols (en %).

**Sensibilité de  $a_f$  et  $c_f$  aux paramètres de la loi DPG.** Deux autres couples de paramètres  $(\xi, \beta) \in \{(0, 3.9); (-0.01, 5)\}$  de la loi DPG sont proposés pour modéliser la queue de distribution des contraintes du groupe “A” (distribution  $f_{c_{K_c}}$  du modèle HMM) en plus du couple estimé par le MV à partir des données ( $\xi = -0.08$  et  $\beta = 3.9$ ), voir figure 4.11. Ces deux couples (choisis arbitrairement) ont des queues plus lourdes que celle de la distribution identifiée à partir des données. Le seuil  $\hat{u} = 0.676$  est le même pour les trois lois (celle identifiée et celles correspondant aux 2 couples choisis).

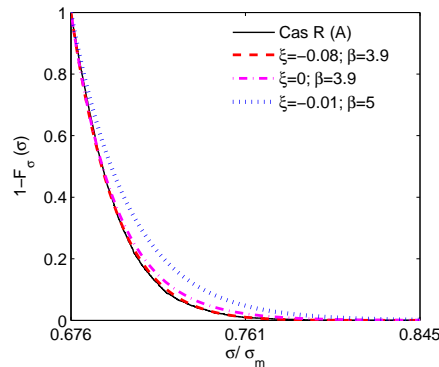


Figure 4.11 – Distribution empirique des contraintes normalisées  $\sigma/\sigma_m$  de la classe  $c_{K_c}$  du groupe “A” et lois de DPG.

Les différents graphes de la figure 4.12 soulignent une nouvelle fois l’impact de la modélisation de la distribution  $f_{c_{K_c}}$  sur les résultats de propagation de fissure menées avec PREFFAS. On remarque que les distributions à queues lourdes sont responsables d’avancées de fissure  $a_f$  plus faibles que celles obtenues à partir de la distribution d’origine (décalage des fonctions de répartition vers la gauche). Ces distributions permettent de générer plus fréquemment des valeurs de  $P_{\max}$  plus élevées que celles de la distribution

d'origine et donc de simuler des retards plus importants. Les valeurs extrêmes  $P_{\max}$  doivent ainsi être vues comme un paramètre fondamental pour des analyses de propagation de fissures sous chargements d'amplitude variable répétés.

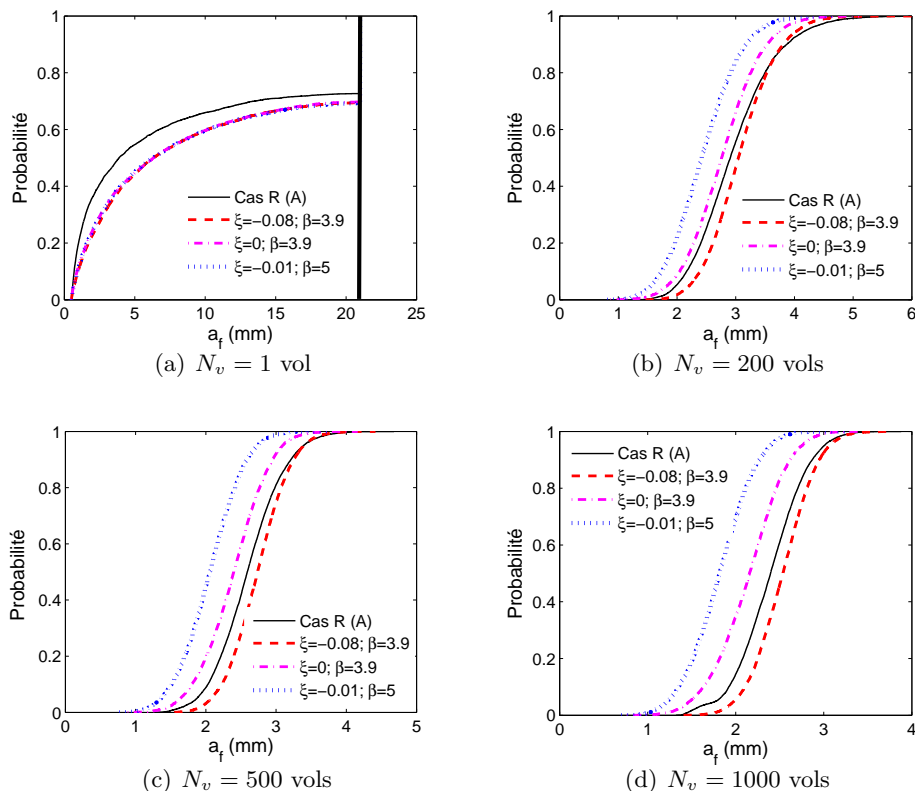


Figure 4.12 – Fonctions de répartition empiriques de la profondeur de fissure  $a_f$  (en mm), obtenues soit à partir des trajectoires de chargement de référence, soit à partir des trajectoires simulées avec le modèle HMM, la DPG  $f_{cK_c}$  prenant différents couples de paramètres.

### 4.3 Poids respectifs de l'aléa de chargement et de celui du matériau

Cette section présente l'analyse de distribution de l'avancée d'une fissure amorcée en bord d'alésage d'un longeron principal de l'avion de combat étudié, soumise à des chargements d'amplitude variable. L'effet de l'aléa matériau ainsi que l'effet de l'aléa de chargement sur la dispersion des résultats de propagation de fissure sont étudiés, [MB11]. Dans un premier temps, l'effet de chacun de ces aléas est investigué séparément. Les incertitudes sur le chargement et sur les propriétés matériau sont ensuite simultanément prises en compte.

Les chargements supposés incertains sont ici simulés avec le modèle  $HMM^{(A)}$  ( $K_c = 6$ ), développé au paragraphe 3.2.2 et inféré au paragraphe 3.3.2 du chapitre 3. Pour un souci de concision, les analyses sont restreintes à la seule activité “A” de la flotte. L’aléa sur les données matériau intègre uniquement les incertitudes sur les vitesses de propagation entre éprouvettes, référé en tant que “*between specimen scatter*” dans la littérature. Les paramètres de la loi de fissuration sont simplement modélisés par des variables aléatoires. L’aléa sur les paramètres de la loi de fissuration, ici la loi de Paris-Erdogan, est caractérisé sur la base d’un traitement statistique d’essais de propagation de fissure extrait de la littérature.

### 4.3.1 Présentation de la structure étudiée

La structure étudiée est identique à celle de l’exemple 4.2. La géométrie de fissuration correspond au modèle CC02. Les paramètres géométriques sont reportés dans le tableau 4.1. Le matériau considéré dans cet exemple est l’aluminium 2024-T351 dont les propriétés sont présentées dans le tableau 4.2.

### 4.3.2 Modélisations stochastiques des aléas matériau et de chargement

#### 4.3.2.1 Représentation de l’aléa matériau

Les incertitudes intrinsèques au comportement du matériau sont mises en évidence par le biais de tests réalisés dans des conditions identiques : même matériau, même longueur initiale de fissure, même chargement, fabrication et préparation identiques des éprouvettes, même opérateur, même environnement climatique, etc. Seuls quelques travaux sont dédiés à la caractérisation de ces incertitudes à partir de résultats expérimentaux obtenus dans des conditions identiques de tests. Les travaux les plus connus sont ceux de D.A. Virkler *et al.* [VHG79] et ceux de H. Ghonem et S. Dore [GD87]. L’aléa présent lors de tels essais a une double origine : *intra* éprouvette et *inter* éprouvettes. En effet, différentes vitesses de propagation sont à la fois mesurées au sein même d’une éprouvette mais également d’une éprouvette à une autre. Des processus stochastiques sont usuellement utilisés pour modéliser l’aléa *intra* éprouvette, c’est-à-dire pour représenter les variations internes de vitesses au cours du processus de fissuration alors qu’une approche consistant à modéliser les paramètres de la loi de propagation de fissure par des variables aléatoires est considérée comme suffisante pour prendre en compte l’incertain sur les essais de propagation *inter* éprouvettes.

Seules les incertitudes sur les vitesses de propagation de fissures sont ici prises en compte. Les paramètres  $C$  et  $m$  de la loi de Paris sont modélisés à cet effet par des va-



riables aléatoires. La dispersion observée sur les paramètres  $C$  et  $m$  de la loi de Paris pour l'aluminium 2024-T3 lors des essais menés par D.A. Virkler [VHG79] sur 68 éprouvettes CCT soumises à un même chargement d'amplitude constante <sup>2</sup> est ici utilisée pour caractériser l'incertain sur les paramètres  $C$  et  $m$  de l'aluminium 2024-T351.

D'après la référence [BL07], les variables  $\ln C$  et  $m$  de l'aluminium 2024-T3 peuvent être approchées par des lois normales  $\ln C \sim \mathcal{N}(-26.056; 0.972)$  et  $m \sim \mathcal{N}(2.855; 0.166)$ . Les coefficients de variation de  $\ln C$  et  $m$  sont respectivement de 3.73% et 5.81%. Une très forte corrélation négative est mesurée entre ces deux variables aléatoires :  $-0.99795$ .

On suppose ici que les paramètres  $\ln C$  et  $m$  de l'aluminium 2024-T351 ont respectivement les mêmes coefficients de variation que ceux de l'aluminium 2024-T3 issus des données de D.A. Virkler. On suppose également que la corrélation entre  $\ln C$  et  $m$  est identique. Les moyennes de  $\ln C$  et  $m$ , respectivement de  $-26.056$  et de  $2.855$ , sont remplacées par  $\ln(2.417 \cdot 10^{-13}) = -29.05^3$  et  $3.42$ .

Afin de simplifier les procédures de simulations, une solution basée sur l'expression de la régression linéaire de  $\ln C$  en  $m$  est envisagée pour transformer le problème des deux variables aléatoires corrélées en un problème à deux variables aléatoires non corrélées. La régression de  $\ln C$  en  $m$  proposée par O. Ditlevsen et R. Olesen [DO86] s'écrit :

$$\hat{\mathbb{E}}[\ln C | m] = \mathbb{E}[\ln C] + \frac{\text{Cov}[m, \ln C]}{\text{Var}[m]}(m - \mathbb{E}[m]) \quad (4.4)$$

Le résidu  $\varepsilon_{\ln C}$  donné par  $\varepsilon_{\ln C} = \ln C - \hat{\mathbb{E}}[\ln C | m]$  n'est pas corrélé à  $m$ .

Ici la régression de  $\ln C$  en  $m$  à partir des données s'écrit :

$$\hat{\mathbb{E}}[\ln C | m] = -5.4421m - 10.438 \quad (4.5)$$

Le résidu  $\varepsilon_{\ln C}$  devient donc :

$$\varepsilon_{\ln C} = \ln C + 5.4421m + 10.438 \quad (4.6)$$

Le problème est ainsi exprimé par deux variables aléatoires  $m$  et  $\varepsilon_{\ln C}$ , voir tableau 4.3,

---

<sup>2</sup>On fait ici implicitement l'hypothèse que les incertitudes sur les paramètres  $C$  et  $m$  de la loi de Paris sous chargement d'amplitude variable sont semblables à celles observées sur les paramètres  $C$  et  $m$  lorsque les essais sont réalisés à chargement d'amplitude constante, par manque de données.

<sup>3</sup> $C = 3.26 \cdot 10^{-8}$  correspond au coefficient de la droite de Paris lorsque  $da/dN$  est exprimé en mm/cycle et  $K$  en  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ .  $C = 2.417 \cdot 10^{-13}$  est ici utilisé pour être en accord avec les unités de la référence [BL07]. Dans ce cas  $da/dN$  est exprimé en mm/cycle et  $K$  en  $\text{MPa}\sqrt{\text{mm}}$ .

normales et indépendantes. La corrélation entre  $m$  et  $\varepsilon_{\ln C}$  est en effet estimée à  $-9.29 \cdot 10^{-7}$ . Le paramètre  $C$  de la loi de Paris est ensuite simplement obtenu avec l'expression  $C = \exp(\varepsilon_{\ln C} - 5.4421m - 10.438)$ .

Tableau 4.3 – Distributions des variables aléatoires matériau.

Variable	Distribution	Moyenne	Écart-type
$\varepsilon_{\ln C}$	Normale	$-1.770 \cdot 10^{-4}$	0.0693
$m$	Normale	3.42	0.1988

#### 4.3.2.2 Représentation de l'aléa de chargement

Le modèle  $\text{HMM}^{(A)}$  ( $K_c = 6$ ), considéré comme satisfaisant pour prendre en compte l'aléa des chargements subis par la flotte lors de l'activité "A", est utilisé pour générer des séquences aléatoires de chargement de  $N_v$  vols. La chaîne de Markov cachée  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  du modèle  $\text{HMM}^{(A)}$  ( $K_c = 6$ ) est caractérisée par la donnée de  $(\mathbf{P}, S_1)$  présenté à la section 3.3.2.1. La famille des distributions de probabilités  $f_{s_n}$  est introduite au paragraphe 3.3.2.2. Les paramètres de la distribution de Pareto généralisée (DPG)  $f_{c_{K_c}}$  sont  $\hat{u} = 0.676$ ,  $\hat{\xi} = -0.08$  et  $\hat{\beta} = 3.9$ .

L'effet de la longueur des séquences  $N_v$  sur la dispersion des résultats de propagation de fissures réalisées avec PREFFAS ayant été étudié dans l'exemple précédent, paragraphe 4.2, nous définissons ici une longueur unique pour toutes les séquences. Nous choisissons  $N_v = 500$  vols afin de respecter l'hypothèse de stationnarité du modèle PREFFAS. Les spectres de chargement de longueur  $N_T = 6000$  vols, appliqués à la structure fissurée, sont ensuite composés de la répétition de ces séquences aléatoires de  $N_v = 500$  vols (soit  $F = 12$  répétitions pour atteindre  $N_T = 6000$  vols).

#### 4.3.3 Simulations

Chaque distribution est obtenue à partir de  $N_{\text{sim}} = 10000$  simulations, correspondant à la taille de l'échantillon statistique.

##### 4.3.3.1 Analyse n° 1 : aléa de chargement seul

La première analyse ne prend en compte que les incertitudes sur le chargement. Les paramètres matériau  $m$  et  $\varepsilon_{\ln C}$  de la loi de Paris sont affectés de leurs valeurs moyennes, 3.42 et  $-1.770 \cdot 10^{-4}$  respectivement. Les séquences de chargement de  $N_v = 500$  vols

sont elles générées de manière aléatoire avec le modèle HMM<sup>(A)</sup> ( $K_c = 6$ ). Le spectre de chargement de  $N_T = 6000$  vols est ensuite obtenu par répétition de la séquence aléatoire générée.

#### 4.3.3.2 Analyse n° 2 : aléa matériau seul

Lors de la seconde analyse, seul l'aléa matériau est simulé. Les distributions des variables aléatoires  $m$  et  $\varepsilon_{\ln C}$  sont données dans le tableau 4.3. Pour cette analyse, il est nécessaire de définir un spectre de chargement dit moyen. Ce chargement est défini à partir de :

- l'identification d'une séquence ( $N_v = 500$  vols) générée aléatoirement et supposée représentative de ce chargement moyen (voir ci-après) et,
- la répétition de cette séquence de manière à former un spectre de chargement de  $N_T = 6000$  vols (soit  $F = 12$  répétitions de la séquence), stationnaire au sens de PREFFAS.

La séquence générée aléatoirement et supposée représentative du chargement moyen est identifiée comme suit, à partir des  $N_{\text{sim}} = 10000$  séquences générées pour l'analyse n° 1 :

- elle est supposée conduire à une avancée de fissure  $a_f$  proche de celle moyenne notée  $a_{f_{\text{moy}}}$  :  $a_f^{(i)} \simeq a_{f_{\text{moy}}}$  et,
- elle est supposée avoir une matrice des transitions observées, notée  $\mathbf{P}_s^{(i)}$ , proche de la matrice de transition du processus cachée de la chaîne HMM, notée  $\mathbf{P}$  et identifiée à partir des données :  $\mathbf{P}_s^{(i)} \simeq \mathbf{P}$ .

Les  $N_{\text{sim}} = 10000$  séquences générées pour l'analyse n° 1 sont ainsi classées en fonction d'une distance pour chacun de ces deux critères. Cette distance représente :

- l'écart non-signé entre  $a_f^{(i)}$  et  $a_{f_{\text{moy}}}$ , soit  $|a_f^{(i)} - a_{f_{\text{moy}}}|$  pour le premier critère,
- la distance symétrique de Kullback-Leibler entre  $\mathbf{P}_s^{(i)}$  et  $\mathbf{P}$  pour le second critère.

La distance asymétrique de Kullback-Leibler entre deux distributions discrètes  $\mathbf{P}_{s_k}^{(i)}$  et  $\mathbf{P}_k$  (lignes des matrices de transition  $\mathbf{P}_s^{(i)}$  et  $\mathbf{P}$ ),  $\forall k \in \{1, 2, \dots, K\}$ , est définie par :

$$d(\mathbf{P}_{s_k}^{(i)}, \mathbf{P}_k) = \sum_{l=1}^K \mathbf{P}_{s_k,l}^{(i)} \ln (\mathbf{P}_{s_k,l}^{(i)} / \mathbf{P}_{k,l}) \quad (4.7)$$

où  $K$  est le nombre de colonnes des matrices de transition  $\mathbf{P}_s^{(i)}$  et  $\mathbf{P}$ .

La distance symétrique de Kullback-Leibler entre deux matrices  $\mathbf{P}_s^{(i)}$  et  $\mathbf{P}$  s'exprime alors par :

$$d_{\text{sym}}(\mathbf{P}_s^{(i)}, \mathbf{P}) = \sum_{k=1}^K \left[ d(\mathbf{P}_{s k}^{(i)}, \mathbf{P}_k) + d(\mathbf{P}_k, \mathbf{P}_{s k}^{(i)}) \right] / 2 \quad (4.8)$$

Les cinq séquences de chargement minimisant au mieux ces deux critères sont sélectionnées parmi les  $N_{\text{sim}} = 10000$  séquences générées. Les rangs de ces trajectoires dans les classements des  $N_{\text{sim}} = 10000$  séquences par rapport à chacun des deux critères sont les suivants :

- Trajectoire n° 1 : (27, 38)
- Trajectoire n° 2 : (30, 497)
- Trajectoire n° 3 : (77, 244)
- Trajectoire n° 4 : (156, 48)
- Trajectoire n° 5 : (157, 167)

où la première composante de chaque couple correspond au rang de la séquence dans le classement des séquences suivant le premier critère (distance à l'avancée moyenne  $a_{f_{\text{moy}}}$ ), et la seconde composante au rang de la séquence dans le classement des séquences suivant le deuxième critère (distance à la matrice moyenne  $\mathbf{P}$ ).

Les distributions empiriques des contraintes normalisées des cinq trajectoires sont tracées sur la figure 4.13.

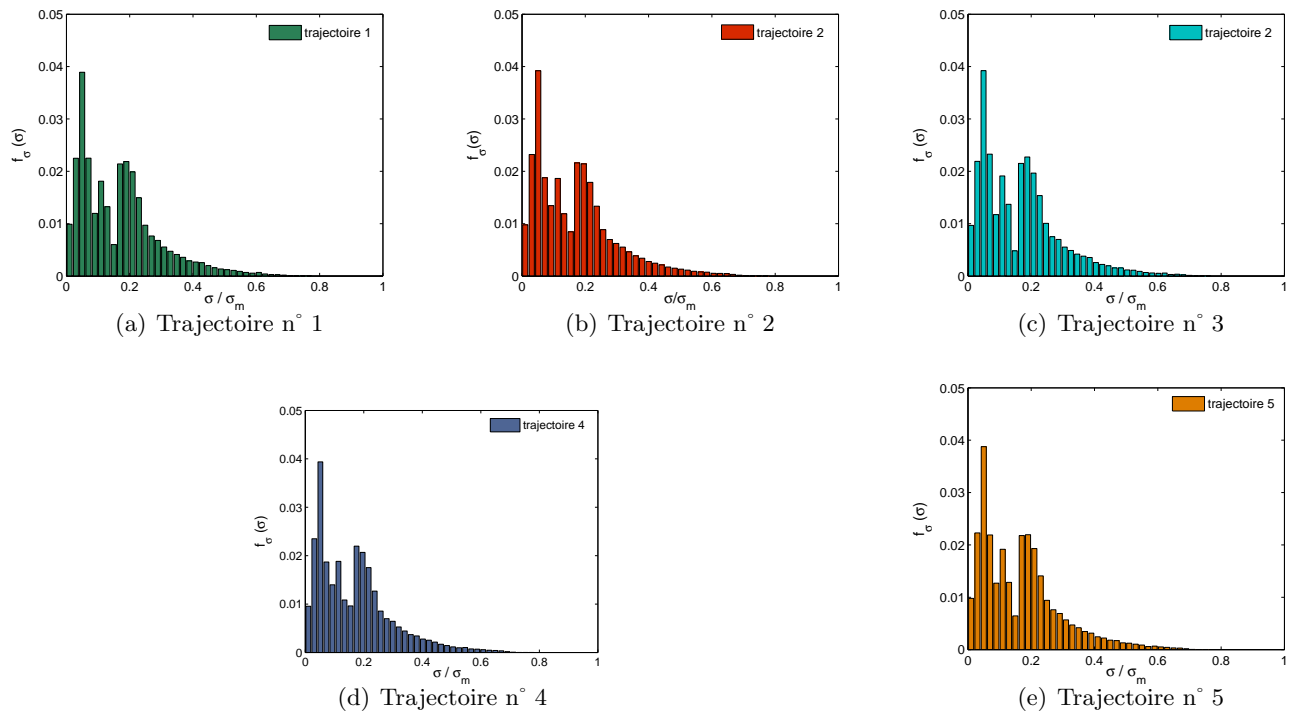


Figure 4.13 – Distributions des contraintes normalisées des cinq séquences de chargement dites moyennes (max et min considérés ensemble).

#### 4.3.3.3 Analyse n° 3 : aléas de chargement et matériau combinés

Enfin la dernière analyse de distribution simule à la fois l'aléa sur le chargement et celui supposé propre au matériau.

Les contributions respectives des deux aléas sur la dispersion du phénomène de propagation de fissure sont déduites de ces trois analyses.

#### 4.3.4 Résultats

Les moyennes des avancées de fissures  $a_f$  et  $c_f$  sont données sur les figures 4.14(a) et 4.14(b).

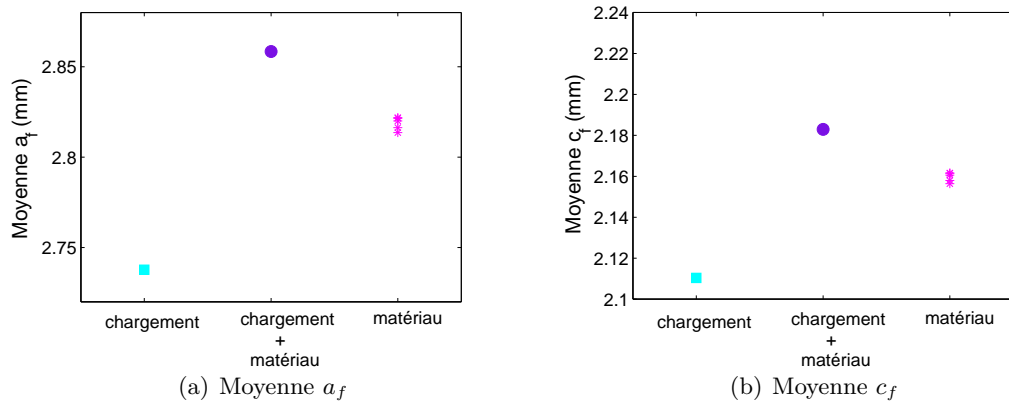


Figure 4.14 – Moyenne de la profondeur et de la longueur de fissure (respectivement  $a_f$  et  $c_f$ ) en fonction des aléas pris en compte.

La prise en compte simultanée des aléas matériau et chargement conduit à des avancées de fissure en moyenne sensiblement plus élevées que lorsque ces aléas sont pris en compte séparément. Les cinq séquences de chargement supposées “moyennes” conjointement avec la dispersion matériau conduisent quasiment aux mêmes moyennes pour les dimensions finales de la fissure, voir figure 4.14.

Les coefficients de variation de  $a_f$  et  $c_f$  sont reportés sur la figure 4.15.

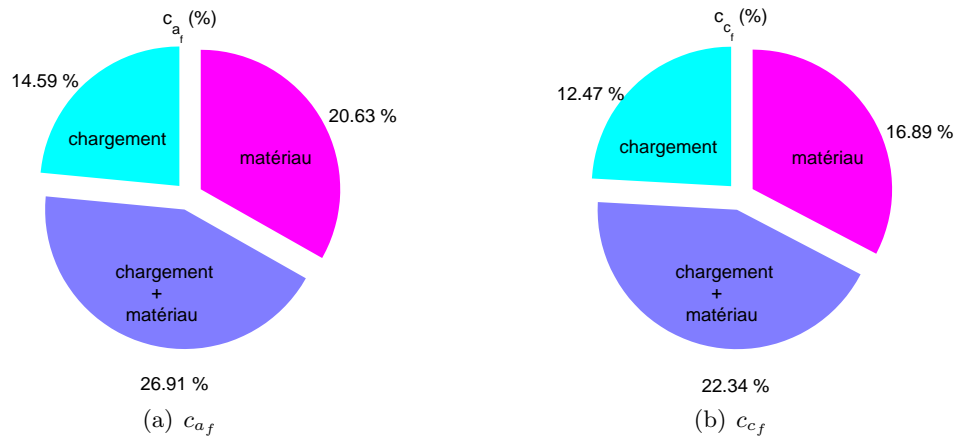


Figure 4.15 – Coefficient de variation de la profondeur et de la longueur de fissure en fonction de l'aléa pris en compte.

La dispersion sur les résultats de propagation de fissure est notablement plus importante lorsque les aléas matériau et chargement sont simultanément pris en compte. En effet, le coefficient de variation de  $a_f$  et celui de  $c_f$  augmentent respectivement d'environ 84% et 79% lorsque les aléas matériau et de chargement sont pris en compte simultanément.

par rapport au cas où seule la dispersion sur le chargement est modélisée. Ils augmentent respectivement de 30% et 32% lorsque les aléas matériau et de chargement sont pris en compte simultanément par rapport au cas où seule la dispersion sur le matériau est considérée. Pour l'étude réalisée ici, les deux sources d'incertitudes jouent un rôle important sur la dispersion en propagation de fissure. Le poids des incertitudes sur les paramètres de la loi de propagation semble cependant supérieur à celui lié au seul aléa de chargement.

Les conclusions sont bien sûr spécifiques à l'exemple traité et il serait hasardeux d'extrapoler à d'autres structures, matériaux ou chargements.

## 4.4 Conclusion

Ce chapitre présente des simulations de la propagation de fissure d'un dommage en bord d'alésage d'un longeron principal de voilure d'avion de combat soumis à des chargements d'amplitude variable aléatoires avec ou sans prise en compte des incertitudes sur les paramètres de la loi de propagation de fissure. Les modélisations stochastiques du chargement et des paramètres de la loi de propagation sont basées sur des données expérimentales, ce qui confère un caractère réaliste aux études réalisées. Le choix du modèle de propagation s'est porté vers le modèle PREFFAS qui présente de bonnes aptitudes à prendre en compte le phénomène de fermeture de fissure ainsi que les phénomènes de retard et d'accélération de vitesse de fissuration. L'hypothèse dite de stationnarité du modèle PREFFAS constitue cependant une limite majeure de ce modèle en imposant que les spectres de chargement soient constitués de répétitions de séquences générées aléatoirement.

L'étude de l'influence des paramètres du chargement sur le processus de propagation de fissure a conduit aux conclusions suivantes, similaires aux travaux des références [ZMD97, MZD03] :

- Le phénomène de propagation de fissure est hautement sensible aux valeurs extrêmes présentes au sein des séquences de chargement, qui sont séquentiellement répétées le long du chargement dans le cas de réplication de séquences.
- Le degré de sensibilité du processus de propagation de fissure aux valeurs extrêmes dépend cependant de la longueur de la séquence répétée (constituée de  $N_v$  vols), qui impacte fortement la dispersion sur l'avancée de fissure.
- La répétition des séquences de chargement introduit un effet de séquence artificiel car le maximum global est répété à intervalles réguliers.

L'analyse des poids respectifs de l'aléa de chargement et de celui propre au matériau

permet de conclure que les deux sources d'incertitudes impactent fortement la dispersion des résultats de propagation de fissure. Cette conclusion n'est cependant valable que pour l'élément de structure étudié. Il serait intéressant de réaliser d'autres études sur d'autres éléments de structure afin de confronter les résultats. Enfin, on peut souligner qu'une méthode a été proposée pour définir un chargement d'amplitude variable dit "moyen" en termes d'avancée de fissure. Cette démarche s'appuie sur la distance entre les matrices de transition observées (déterminées à partir des trajectoires simulées) et la matrice de transition moyenne (celle du modèle HMM) ainsi que sur la distance entre l'avancée propre à une trajectoire de chargement et celle moyenne obtenue sur l'ensemble des trajectoires.



## Chapitre 5

# Analyse de fiabilité de la tolérance aux dommages

*Ce dernier chapitre est dédié à l'approche fiabiliste de la tolérance aux dommages sous chargement d'amplitude variable aléatoires. Le choix d'une modélisation par chaînes de Markov du chargement de fatigue, introduite au chapitre 3, impose de mettre au point une méthode de résolution spécifique afin de réduire le coût de calcul de l'analyse de fiabilité, caractérisée par des probabilités de défaillance supposées faibles. Cette méthode, différant des approches classiquement utilisées dans la communauté du calcul fiabiliste en mécanique, est basée sur la méthode de l'entropie croisée. Elle rend possible le calcul de fiabilité dans le contexte de modèles basés sur les chaînes de Markov. Des premiers résultats encourageants ont été obtenus sur des exemples académiques de propagation de fissure.*

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>161</b>
<b>5.2</b>	<b>Formulation classique du problème de fiabilité en mécanique</b>	<b>161</b>
5.2.1	Principe de l'étude de fiabilité	162
5.2.2	Scénario de défaillance et probabilités	162
5.2.3	Méthodes de calcul de la probabilité de défaillance	164
<b>5.3</b>	<b>Spécificités du problème de fiabilité traité</b>	<b>171</b>
5.3.1	Modèles stochastiques	171
5.3.2	Analyse de fiabilité fonction du temps	173
5.3.3	Simplification du problème de fiabilité	175
<b>5.4</b>	<b>Résolution du problème de fiabilité</b>	<b>177</b>
5.4.1	Méthode IS-CE appliquée aux chaînes de Markov (FMC)	178
5.4.2	Extension de la méthode IS-CE aux HMM	181
5.4.3	Conclusion	188
<b>5.5</b>	<b>Applications</b>	<b>189</b>
5.5.1	Présentation de la structure étudiée	189
5.5.2	Analyses de fiabilité et critères de validation	192
5.5.3	Résultats des analyses avec les chaînes de Markov (FMC)	193
5.5.4	Résultats des analyses avec les chaînes de Markov cachées (HMM)	197
<b>5.6</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>204</b>

---

## 5.1 Introduction

L'étude mécanique conventionnelle d'une structure fissurée sous le seul angle déterministe, c'est-à-dire sans prise en compte des aléas éventuellement présents, ne permet pas de démontrer que le niveau de sûreté visé par les concepteurs est assuré. La démarche traditionnelle de tolérance aux dommages est en effet incapable de renseigner le concepteur sur les effets associés aux dispersions des grandeurs d'intérêt sur ces structures (ex : durée de vie, longueur finale de fissure, tenue résiduelle, ... ) engendrées par l'aléa sur les variables d'entrée du modèle mécanique considéré (ex : géométrie, propriétés matériau, chargement, etc). Il est alors impossible d'évaluer les risques encourus lors de l'application des règles classiques de dimensionnement s'appuyant sur le choix de valeurs conservatives, la définition de configurations de sollicitation défavorables et/ou l'emploi de coefficients dits de "sécurité". Enfin, une telle approche ne permet pas de fournir une aide à la décision pour la maintenance, afin d'assurer un niveau de fiabilité donné tout en minimisant le coût total des opérations de maintenance.

L'objectif de ce chapitre est tout d'abord de formuler le problème de fiabilité en tolérance aux dommages et de présenter le scénario de défaillance correspondant. Les analyses paramétriques réalisées au chapitre 4 ont permis de conclure que le chargement est un paramètre qui influe fortement sur la dispersion des résultats de propagation de fissure. Il paraît donc fondamental de prendre en compte les incertitudes du chargement de fatigue dans le problème de fiabilité. Un point important du chapitre consiste ainsi à mettre en place des stratégies de résolution du problème de fiabilité adaptées aux modèles stochastiques de chargement développés dans ces travaux de thèse et de les mettre en œuvre sur des applications jugées représentatives de problèmes réels. Ces stratégies doivent permettre d'évaluer des probabilités de défaillance faibles à coût de calcul le plus modéré possible.

## 5.2 Formulation classique du problème de fiabilité en mécanique

Avant de définir le problème de fiabilité spécifique à l'approche de tolérance aux dommages, ce paragraphe présente le principe de l'étude de fiabilité classiquement menée en mécanique. Les notions essentielles permettant de formuler le problème de fiabilité, telles que le scénario de défaillance et la probabilité de défaillance, sont introduites.

### 5.2.1 Principe de l'étude de fiabilité

D'une manière générale, une analyse de fiabilité est basée sur la donnée d'un scénario de défaillance, défini par une fonction dite d'état-limite notée  $g$ , encore appelée fonction de performance. Cette fonction est définie à partir de variables aléatoires regroupées dans un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$ , défini sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et à valeurs dans  $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$ , qui caractérise les paramètres incertains du modèle mécanique étudié. Les variables aléatoires peuvent correspondre à des caractéristiques matériaux, géométriques ou mécaniques, à des sollicitations extérieures, à des paramètres du modèle mécanique, etc. Les résultats fournis par le calcul mécanique doivent permettre d'évaluer la fonction d'état-limite à valeurs scalaires  $g(\mathbf{x})$ , où  $\mathbf{x}$  représente une réalisation du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$ . Ces évaluations, dont le choix est piloté par la méthode retenue pour résoudre le problème de fiabilité, permettent d'estimer la probabilité de défaillance de la structure étudiée mais également, dans certains cas d'obtenir des résultats complémentaires comme le point de défaillance le plus probable et les sensibilités de cette probabilité à certains paramètres (paramètres des distributions de probabilité des variables d'entrée, par exemple).

### 5.2.2 Scénario de défaillance et probabilités

On considère un espace de probabilité noté  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et on considère le vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , à valeurs dans  $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$ , correspondant au vecteur des variables d'entrée dans l'espace physique. Pour tout aléa  $\omega \in \Omega$ , on note  $\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{x} \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$  une réalisation du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$ . La fonction d'état-limite  $g$  définit deux sous-ensembles complémentaires de  $\mathbb{X}$  : l'un dit de sûreté  $D_s$  et l'autre dit de défaillance  $D_f$ , tels que :

$D_s = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} : g(\mathbf{x}) > 0\}$  : le *domaine de sûreté* correspond à l'état non-défaillant de la structure,

et

$D_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} : g(\mathbf{x}) \leq 0\}$  : le *domaine de défaillance* correspond à l'état défaillant de la structure.

A ces deux sous-ensembles sont associés les événements de sûreté  $E_s \in \mathcal{F}$  et de défaillance  $E_f \in \mathcal{F}$  définis comme suit (système complet d'événements) :

$$E_s = \{\omega \in \Omega : g(\mathbf{X}(\omega)) > 0\} \text{ et } E_f = \{\omega \in \Omega : g(\mathbf{X}(\omega)) \leq 0\}$$

et vérifiant :

$$E_s \cup E_f = \Omega, \quad E_s \cap E_f = \emptyset \quad (5.1)$$

L'objectif de l'analyse de fiabilité est d'évaluer la probabilité  $P(E_f)$ , appelée *probabilité de défaillance*,  $E_f$  désignant généralement un événement redouté. Cette probabilité est définie de la manière suivante :

$$P_f = P(E_f) = P(\omega \in \Omega : g(\mathbf{X}(\omega)) \leq 0) \quad (5.2)$$

$E_s$  et  $E_f$  étant complémentaires, la probabilité de sûreté (ou fiabilité) est obtenue simplement par :

$$P(E_s) = 1 - P(E_f) = 1 - P_f \quad (5.3)$$

En pratique, la probabilité de défaillance est réécrite comme suit :

$$P_f = \int_{E_f} dP(\omega) = \int_{D_f} P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{x}) \quad (5.4)$$

où  $P_{\mathbf{X}}$  représente la loi du vecteur  $\mathbf{X}$ , c'est-à-dire la probabilité image de  $P$  par  $\mathbf{X}$  ( $P_{\mathbf{X}} = \mathbf{X}(P)$ ).

Dans le cas d'un vecteur aléatoire à support continu, si la loi  $P_{\mathbf{X}}$  admet une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue "d $\mathbf{x}$ ", notée  $p_{\mathbf{x}}$ , on a alors :  $P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{x}) = p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ .

La relation (5.4) devient :

$$P_f = \int_{D_f} P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{x}) = \int_{D_f} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (5.5)$$

Cette probabilité peut être réécrite comme suit :

$$P_f = \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x})p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (5.6)$$

où  $\mathbb{1}_{D_f}$  est la fonction indicatrice du domaine de défaillance  $D_f$  telle que  $\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}) = 1$  si  $\mathbf{x} \in D_f$  et  $\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}) = 0$  sinon.

### 5.2.3 Méthodes de calcul de la probabilité de défaillance

Les probabilités de défaillance recherchées étant celles d'événements supposés rares, leur ordre de grandeur est par conséquent très petit. Le calcul exact de l'intégrale (5.6) est alors, sauf cas académique, impossible, les probabilités calculées étant de l'ordre de grandeur de l'erreur d'intégration. La plupart des méthodes développées pour la fiabilité cherchent ainsi à estimer la probabilité de défaillance  $P_f$  sans passer par le calcul numérique de l'intégrale. Deux types de méthodes se distinguent [DM05, LCM09] :

- Les *méthodes d'approximation* basées sur la substitution de la frontière réelle entre les domaines de sûreté et de défaillance (correspondant à l'état-limite  $g(\mathbf{x}) = 0$ ) par une frontière approchée.

Les méthodes les plus connues sont FORM (First-Order Reliability Method) et SORM (Second-Order Reliability Method), respectivement basées sur le développement de Taylor au premier et second ordre de la fonction d'état-limite au voisinage du point de défaillance le plus probable, supposé unique de manière assez générale. La première étape de la méthode FORM consiste à rechercher ce point de défaillance le plus probable dont les coordonnées sont la solution d'un problème d'optimisation sous contraintes. Le problème d'optimisation est résolu par des méthodes itératives nécessitant le calcul des gradients. Ceci permet d'obtenir simplement une approximation de la probabilité de défaillance  $P_f$  recherchée. La méthode SORM s'appuie sur le résultat FORM et l'état-limite est cette fois-ci approché par une fonction du second ordre. Cette méthode requiert le calcul des dérivées du second ordre (hessien) au point de défaillance le plus probable, par différences finies généralement.

Des méthodes spécifiques de substitution de modèles plus complexes peuvent également être utilisées pour approcher l'état-limite  $g(\mathbf{x}) = 0$  ou plus généralement la fonction d'état-limite  $g$ . Parmi les méthodes recensées nous pouvons citer les surfaces de réponse polynomiales (RS) (*Response Surface* en anglais) ainsi que les méthodes issues de l'apprentissage statistique tels que les réseaux de neurones (NN) (*Neural Network* en anglais), la méthode du krigeage (*kriging* en anglais) et les machines à vecteurs à supports (SVM) (*Support Vector Machine* en anglais). L'objectif des surfaces de réponse polynomiales consiste à substituer l'état-limite par une fonction analytique polynomiale, souvent quadratique, dont les coefficients sont déterminés à partir d'un plan d'expérience. Pour les méthodes d'apprentissage de manière plus générale, l'approximant de l'état-limite ne possède pas d'expression analytique. Ces méthodes s'appuient sur un algorithme d'apprentissage et sur le choix des points de la base d'apprentissage. Il est important de noter que le coût de calcul dépend du nombre d'évaluations de  $g$  nécessaire pour construire cette base d'apprentissage. Le

coût de l'approximant, ou substitut du modèle original, est généralement très faible ce qui autorise l'emploi d'une grande variété de méthodes pour évaluer  $P_f$  notamment celles des simulations.

- Les *méthodes de simulations* basées sur le calcul direct de la fonction d'état-limite.

L'approche classique de Monte Carlo reste aujourd'hui la méthode de simulation la plus robuste en termes d'estimation de  $P_f$  et fait ainsi office de référence. Cette méthode nécessite l'évaluation de la fonction d'état-limite pour un échantillon représentatif et souvent de grande taille de la population. Dans le cas d'estimation de probabilités de défaillance faibles, avec une précision acceptable, le nombre de calculs nécessaire devient rapidement très élevé. Pour cette raison, des variantes de cette méthode, moins consommatrices en termes de calculs requis ont été développées. Ces variantes visent en général à réduire la variance de l'estimation de cette probabilité, à effort de simulation donné (nombre d'appels à  $g$  fixé).

C'est le cas par exemple des tirages d'importance (IS) et leurs nombreuses variantes. Le principe est de produire des échantillons dans les régions qui contribuent le plus à la probabilité de défaillance. Le concept des tirages d'importance sera explicité au paragraphe 5.2.3.2.

D'autres méthodes de simulations ont été introduites plus récemment, telles que les *subset simulations* [AB01] (plus généralement connues sous le nom de *Splitting Method*) et la méthode d'entropie croisée (CE) [Rub97]. L'idée de base des *subset simulations* est d'exprimer la probabilité de défaillance  $P_f$  comme un produit de probabilités conditionnelles, chacune de ces probabilités (plus élevée que  $P_f$ ) pouvant être estimée assez précisément avec un coût de calcul modéré. La méthode d'entropie croisée, détaillée dans la suite, est une variante des simulations d'importance basée sur la recherche itérative d'une loi des tirages qui approche la loi optimale, pour laquelle la variance des estimations de  $P_f$  est nulle.

Les paragraphes suivants détaillent les méthodes de fiabilité qui permettent d'évaluer la probabilité de défaillance  $P_f$  du problème traité, introduit à la section 5.3. Il s'agit des simulations classiques de Monte Carlo, des tirages d'importance et de la méthode d'entropie croisée.

### 5.2.3.1 Simulations classiques de Monte Carlo

En notant  $\mathbb{E}_{p_{\mathbf{X}}}$  l'espérance mathématique sous la loi  $P_{\mathbf{X}}$  (de densité associée  $p_{\mathbf{X}}$ ), la probabilité de défaillance à estimer (5.6) n'est autre que  $\mathbb{E}_{p_{\mathbf{X}}} [\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X})]$ <sup>1</sup> :

$$P_f = \mathbb{E}_{p_{\mathbf{X}}} [\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X})] = \int_{\mathbf{X}} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5.7)$$

Pour  $N_{\text{sim}}$  copies indépendantes  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(N_{\text{sim}})}$  de  $\mathbf{X}$ , un estimateur de  $P_f$  est donné par :

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N_{\text{sim}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}^{(k)}) \quad (5.8)$$

On note simplement que cet estimateur est non-biaisé ( $\mathbb{E}_{p_{\mathbf{X}}} [\hat{P}_f] = P_f$ ) et que sa variance s'écrit :

$$\text{Var} [\hat{P}_f] = \frac{1}{N_{\text{sim}}} P_f (1 - P_f) \quad (5.9)$$

On peut alors définir le coefficient de variation de l'estimateur  $\hat{P}_f$ , noté  $c_{\hat{P}_f}$  et défini par :

$$c_{\hat{P}_f} = \frac{\sqrt{\text{Var} [\hat{P}_f]}}{\mathbb{E}_{p_{\mathbf{X}}} [\hat{P}_f]} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{N_{\text{sim}} P_f}} \quad (5.10)$$

La qualité de l'estimateur de la probabilité de défaillance  $P_f$  dépend à la fois du nombre de simulations  $N_{\text{sim}}$  et de la probabilité de défaillance  $P_f$  à déterminer. D'après la relation (5.10), le nombre de simulations requis pour atteindre un coefficient de variation donné  $c_{\hat{P}_f} = c$  est de l'ordre  $N_{\text{sim}} = (1 - P_f)/(c^2 P_f)$ . Ainsi, pour estimer une probabilité de défaillance  $P_f$  avec coefficient de variation égale à  $c = 10\%$ , il faut classiquement un échantillon de taille  $N_{\text{sim}} \approx 100/P_f$ . En fiabilité des structures, les probabilités recherchées sont faibles ( $< 10^{-3}$ ) et il faut donc un grand nombre de simulations. Cette méthode est ainsi excessivement consommatrice en termes de nombre de calculs requis lorsque  $P_f$  est faible.

<sup>1</sup>On choisit de noter  $\mathbb{E}_{p_{\mathbf{X}}}$  l'espérance  $\mathbb{E}$  encore notée  $\mathbb{E}_P$  pour souligner que les valeurs  $\mathbf{x}$  sont des réalisations du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  de loi  $P_{\mathbf{X}}$  admettant la densité de probabilité  $p_{\mathbf{X}}$ .



De nombreux problèmes industriels ne pouvant pas être traités analytiquement, l'évaluation de la fonction d'état-limite  $g$  requiert souvent un temps de calcul unitaire important. C'est le cas par exemple en analyse de tolérance aux dommages lorsque le nombre de cycles  $N$  imposé en entrée est important et que le modèle de propagation de fissure est complexe (cas de PREFFAS notamment). Les temps de calculs sont d'autant plus longs que ceux-ci nécessitent l'appel à des codes numériques EF (pour l'évaluation des facteurs de forme  $F(a)$  par exemple). La méthode classique de Monte Carlo n'est alors pas pertinente, car inabordable d'un point de vue temps de calcul.

### 5.2.3.2 Simulations d'importance

Les simulations d'importance (IS) [Rip87] sont une variante des simulations de MC permettant de réduire la variance des estimations à nombre de simulations imposé. Le principe est de simuler des échantillons qui contribuent le plus à la mesure de l'intégrale  $P_f$ , c'est-à-dire tels que les tirages appartenant au domaine de défaillance  $D_f$  ne soient pas rares. Il s'agit ainsi de choisir judicieusement une loi des tirages  $Q_{\mathbf{X}}$  (de densité  $q_{\mathbf{X}}$ ) de support incluant celui de la loi  $P_{\mathbf{X}}$  (de densité  $p_{\mathbf{X}}$ ) telle que les probabilités associées à  $Q_{\mathbf{X}}$  tendent vers zéro dans les zones où les probabilités associées à  $P_{\mathbf{X}}$  sont élevées et les probabilités associées à  $Q_{\mathbf{X}}$  soient importantes dans les zones où les probabilités associées à  $P_{\mathbf{X}}$  tendent vers zéro. La densité  $q_{\mathbf{X}}$  doit également vérifier la condition  $q_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 0 \implies \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x})p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x})p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \neq 0 \implies q_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \neq 0$  ( $q_{\mathbf{X}}$  doit dominer  $\mathbb{1}_{D_f}p_{\mathbf{X}}$ ).

L'intégrale à évaluer est donnée sous la forme :

$$P_f = \int_{\mathbf{X}} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}) \frac{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{q_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} q_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbb{E}_{q_{\mathbf{X}}} [\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X})W(\mathbf{X})] \quad (5.11)$$

où  $q_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  est une nouvelle fonction de densité des tirages, appelée *densité d'importance* (ou densité instrumentale) et  $W(\mathbf{x}) = p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})/q_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  est appelé *rapport de vraisemblance*.

L'estimateur de  $P_f$  s'exprime alors comme suit :

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N_{\text{sim}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}^{(k)}) W(\mathbf{X}^{(k)}) \quad (5.12)$$

L'estimateur ainsi proposé est sans biais et sa variance vaut :

$$\text{Var} [\hat{P}_f] = \frac{1}{N_{\text{sim}}} \left( \mathbb{E}_{q_{\mathbf{X}}} \left[ (\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X})W(\mathbf{X}))^2 \right] - P_f^2 \right) \quad (5.13)$$

Le choix de la densité d'importance  $q_{\mathbf{X}}$  détermine la variance de l'estimateur  $\hat{P}_f$ . La densité optimale  $q_{\mathbf{X}}^*$  est solution du problème d'optimisation suivant :

$$q_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x}) = \underset{q_{\mathbf{X}}}{\operatorname{argmin}} \operatorname{Var} \left[ \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}) \frac{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{q_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} \right] \quad (5.14)$$

Il peut être démontré que la densité optimale  $q_{\mathbf{X}}^*$  prend la forme suivante :

$$q_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x}) = \frac{\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{P_f} \quad (5.15)$$

On vérifie bien que :

$$\operatorname{Var} [\hat{P}_f] = \operatorname{Var} \left[ \frac{1}{N_{\text{sim}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}^{(k)}) \frac{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^{(k)})}{q_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{X}^{(k)})} \right] = \operatorname{Var} [P_f] = 0 \quad (5.16)$$

La densité optimale  $q_{\mathbf{X}}^*$  est en pratique impossible à trouver puisqu'elle dépend de la probabilité  $P_f$  à évaluer. Ce type de problème a orienté certains chercheurs vers le développement de techniques permettant de déterminer la densité d'importance  $q_{\mathbf{X}}$  la plus proche possible de la densité optimale  $q_{\mathbf{X}}^*$  (en termes de réduction de variance des estimations), à coût de simulations restreint. R.Y. Rubinstein et D.P. Kroese [RK08], P. L'Ecuyer et B. Tuffin [LT08], et A.D. Ridder et B. Tuffin [RT10] donnent, par exemple, une revue de quelques techniques classiquement utilisées.

La méthode basée sur l'*entropie croisée*, notée dans la suite IS-CE (*Importance Sampling based on Cross-Entropy*) correspond à l'une des techniques présentées dans ces références. Celle-ci est retenue dans le cadre de ces travaux de recherche. Elle est présentée à la section suivante.

### 5.2.3.3 Méthode basée sur l'entropie croisée IS-CE

La méthode d'entropie croisée (CE) a initialement été développée par R.Y. Rubinstein [Rub97] pour évaluer des probabilités liées à des événements rares ( $P_f < 10^{-3}$ ) dans les réseaux en télécommunication. Les éléments de cette section sont principalement inspirés de la référence [dBKMR05].

**Principe.** Il est difficile de mettre en œuvre les tirages d'importance à partir de la densité de probabilité optimale  $q_{\mathbf{X}}^*$  puisque celle-ci dépend du paramètre inconnu  $P_f$ . Par

commodité [dBKMR05], la densité d'importance  $q_{\mathbf{X}}$  est souvent choisie dans la famille des densités de probabilité  $\{p_{\mathbf{X}}(\cdot, v)\}$  de la densité initiale  $p_{\mathbf{X}}(\cdot, u)$  où  $u$  et  $v$  représentent des vecteurs de paramètres. L'idée de base de la méthode d'entropie croisée consiste alors à choisir  $p_{\mathbf{X}}(\cdot, v)$  telle que la distance entre  $p_{\mathbf{X}}(\cdot, v)$  et la solution optimale  $q_{\mathbf{X}}^*$  soit minimale. La distance de Kullback-Leibler, également appelée entropie croisée, est utilisée à cet effet. Elle est définie par <sup>2</sup> :

$$\mathcal{D}(q_{\mathbf{X}}^*, p_{\mathbf{X}}(\cdot, v)) = \mathbb{E}_{q_{\mathbf{X}}^*} \left[ \ln \left( \frac{q_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{X})}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, v)} \right) \right] = \int q_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x}) \ln q_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int q_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x}) \ln p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, v) d\mathbf{x} \quad (5.17)$$

Minimiser la distance de Kullback-Leibler entre  $q_{\mathbf{X}}^*$  et  $p_{\mathbf{X}}(\cdot, v)$  revient à choisir le vecteur de paramètres  $v$  tel que  $-\int q_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x}) \ln p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, v) d\mathbf{x}$  soit minimal, ce qui est équivalent à résoudre le problème suivant :

$$\max_v \int q_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x}) \ln p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, v) d\mathbf{x} \quad (5.18)$$

En remplaçant  $q_{\mathbf{X}}^*$  par son expression (5.15), le problème (5.18) devient :

$$\max_v \int \frac{\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, u)}{P_f} \ln p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, v) d\mathbf{x} \quad (5.19)$$

Il s'agit alors de résoudre :

$$\max_v D(v) = \max_v \mathbb{E}_{p_{\mathbf{X}}(\cdot, u)} [\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}) \ln p_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, v)] \quad (5.20)$$

En utilisant à nouveau le principe des tirages d'importance (substitution de la densité de probabilité  $p_{\mathbf{X}}(\cdot, u)$  par la densité  $p_{\mathbf{X}}(\cdot, w)$ ), l'équation (5.20) se réécrit :

$$\max_v D(v) = \max_v \mathbb{E}_{p_{\mathbf{X}}(\cdot, w)} [\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}) W(\mathbf{X}, u, w) \ln p_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, v)] \quad (5.21)$$

où le rapport de vraisemblance  $W(\mathbf{x}, u, w)$  est défini par :

$$W(\mathbf{x}, u, w) = \frac{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, u)}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, w)} \quad (5.22)$$

---

<sup>2</sup>Il est important de noter qu'il ne s'agit pas d'une vraie distance puisque la formulation proposée n'est pas symétrique.

Un estimateur  $\hat{v}^*$  de la solution  $v^*$  du problème (5.21) est obtenue en résolvant :

$$\max_v \hat{D}(v) = \max_v \frac{1}{N_{\text{sim}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \left[ \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}^{(k)}) W(\mathbf{X}^{(k)}, u, w) \ln p_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^{(k)}, v) \right] \quad (5.23)$$

où  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(N_{\text{sim}})}$  est un échantillon aléatoire indépendant et identiquement distribué (*i.i.d*) de densité de probabilité  $p_{\mathbf{X}}(\cdot, w)$ . Dans le cas où la fonction  $\hat{D}$  est convexe et différentiable, il s'agit alors de résoudre le système d'équations suivant :

$$\frac{1}{N_{\text{sim}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \left[ \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}^{(k)}) W(\mathbf{X}^{(k)}, u, w) \nabla_v \ln p_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^{(k)}, v) \right] = 0 \quad (5.24)$$

Ce problème peut parfois être résolu analytiquement. C'est le cas par exemple lorsque les distributions de probabilité  $p_{\mathbf{X}}(\cdot, u)$  appartiennent à la famille des exponentielles naturelles (*Natural Exponential Family* NEF). Il est également important de noter que la résolution du système (5.24) fonctionne avec  $w = u$  uniquement lorsque la probabilité visée n'est pas trop petite. Dans le cas contraire, la plupart des réalisations  $\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}^{(k)})$  de la variable aléatoire  $\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}^{(k)})$  sont des zéros pour un nombre de simulations  $N_{\text{sim}}$  modéré. L'algorithme multi-niveaux exposé ci-après est alors proposé pour résoudre le cas des probabilités faibles. L'idée est de construire une suite de paramètres  $\{v_t, t \geq 0\}$  et de seuils  $\{\gamma_t, t \geq 1\}$  actualisés de manière itérative.

**Algorithme CE multi-niveaux.** Le premier niveau consiste à choisir  $v_0 = u$  et à définir une probabilité  $\rho$  facile à évaluer sous la densité  $p_{\mathbf{X}}(\cdot, u)$ . Cette probabilité vaut par exemple  $\rho = 0.1$ . Le seuil  $\gamma_1 > 0$  est alors défini tel que :

$$P(g(\mathbf{X}) \leq \gamma_1) \geq \rho$$

La simulation d'un échantillon aléatoire de taille  $N_{\text{sim}}$  permet ensuite de déterminer un estimateur  $\hat{\gamma}_1$  de  $\gamma_1$ .

Le jeu de paramètres optimal  $v_1$  pour estimer la probabilité  $P_{f_1} = \mathbb{E}_{p_{\mathbf{X}}(\cdot, v_1)} [\mathbb{1}_{\{g(\mathbf{X}) \leq \gamma_1\}}(\mathbf{X})]$  est ensuite obtenu en résolvant le problème de maximisation suivant :

$$\max_v D(v) = \max_v \mathbb{E}_{p_{\mathbf{X}}(\cdot, v)} [\mathbb{1}_{\{g(\mathbf{X}) \leq \gamma_1\}}(\mathbf{X}) \ln p_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, v)] \quad (5.25)$$

qui se décline sous la forme :

$$\frac{1}{N_{\text{sim}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \left[ \mathbb{1}_{\{g(\mathbf{X}^{(k)}) \leq \hat{\gamma}_1\}} \left( \mathbf{X}^{(k)} \right) \nabla_v \ln p_{\mathbf{X}} \left( \mathbf{X}^{(k)}, v \right) \right] = 0 \quad (5.26)$$

à partir de la génération d'un  $N_{\text{sim}}$ -échantillon aléatoire. La résolution de l'équation (5.26) fournit un estimateur  $\hat{v}_1$  de  $v_1$ .

Ces deux derniers niveaux sont ensuite répétées de manière itérative jusqu'à trouver le couple  $\{P_f, v^*\}$ .

Tant que  $\hat{\gamma}_t > 0$  :

1. Actualiser  $\hat{\gamma}_t$  : générer un  $N_{\text{sim}}$ -échantillon de  $g(\mathbf{X})$  sous la distribution  $p_{\mathbf{X}}(\cdot, \hat{v}_{t-1})$ . Choisir  $\hat{\gamma}_t$  comme le  $\rho^{\text{ième}}$ -fractile de la distribution de  $g(\mathbf{X})$  obtenu à partir des  $N_{\text{sim}}$  simulations tel que :  $P(g(\mathbf{X}) \leq \hat{\gamma}_t) = \rho$ .
2. Actualiser  $\hat{v}_t$  : à partir du couple donné  $\{\hat{\gamma}_t, \hat{v}_{t-1}\}$ , résoudre le système d'équations suivant pour trouver  $\hat{v}_t$  :

$$\frac{1}{N_{\text{sim}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \left[ \mathbb{1}_{\{g(\mathbf{X}^{(k)}) \leq \hat{\gamma}_t\}} \left( \mathbf{X}^{(k)} \right) W \left( \mathbf{X}^{(k)}, u, \hat{v}_{t-1} \right) \nabla_v \ln p_{\mathbf{X}} \left( \mathbf{X}^{(k)}, v \right) \right] = 0 \quad (5.27)$$

La probabilité de défaillance  $P_f$  est ensuite évaluée à partir de  $N_{\text{sim}}$  simulations et de la densité d'importance  $p_{\mathbf{X}}(\cdot, \hat{v}^*)$ , où  $\hat{v}^* = \hat{v}_t$  lorsque  $\hat{\gamma}_t \leq 0$ .

## 5.3 Spécificités du problème de fiabilité traité

Le problème de fiabilité en tolérance aux dommages diffère du problème de fiabilité communément posé en mécanique compte tenu des modélisations stochastiques des entrées du modèle de propagation de fissure préalablement établies et de sa dimension évolutive en fonction du temps. Les spécificités du problème traité amènent à choisir la méthode de résolution la plus pertinente par rapport à celles exposées à la section 5.2.

### 5.3.1 Modèles stochastiques

Le problème de fiabilité en tolérance aux dommages fait intervenir dans sa globalité un ensemble de variables aléatoires continues caractérisant l'aléa sur les données matériau

(loi de propagation, facteur d'intensité de contrainte critique (ténacité par exemple), limite d'élasticité, etc) et l'aléa sur les dimensions initiales de la fissure <sup>3</sup>, ainsi qu'un processus stochastique modélisant l'aléa des spectres de chargement de fatigue. Le choix du processus stochastique pour modéliser l'aléa du chargement de fatigue s'est porté aux chapitres 2 et 3 vers les processus de Markov à temps discret : chaînes de Markov à espace d'états discret (FMC) ou chaînes de Markov cachées à espace d'états continu (HMM). On considère donc les éléments aléatoires suivants dans le problème de fiabilité traité :

- une chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  (ici à temps discret et à espace des états discret, homogène et d'ordre 1) caractérisée par : sa matrice de transition  $\mathbf{P}$  et la loi de son état initial  $X_1$ . Il est important de souligner que la longueur de la chaîne  $N$  (nombre de cycles) est une variable aléatoire. Une telle chaîne de Markov est donc constituée d'un nombre aléatoire de variables aléatoires discrètes.

Ou

- une chaîne de Markov cachée  $(S_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , où  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une chaîne de Markov régissant des états dits cachés (ici considérée homogène, d'ordre 1, à temps discret et à espace d'états discret) et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une séquence de variables aléatoires continues, indépendantes et conditionnées sur la chaîne de Markov cachée  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Cette chaîne fait donc intervenir un nombre aléatoire de variables aléatoires discrètes et continues.

Et

- Un ensemble de variables aléatoires continues : la longueur initiale de la fissure  $a_0$ , les coefficients de la loi de Paris  $C$  et  $m$ , le facteur d'intensité de contrainte critique et la limite d'élasticité respectivement notés  $K_c$  et  $\sigma_y$ , regroupées dans un vecteur aléatoire  $\mathbf{Y} = \{a_0, C, m, K_c, \sigma_y\}$ .

On note  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  l'espace de probabilité sous-jacent à l'ensemble de ces éléments et  $n \in \mathbb{N}^*$  l'indexation sur le temps.

---

<sup>3</sup>On fait l'hypothèse qu'il n'y a pas d'aléa sur la répartition spatiale du dommage.

### 5.3.2 Analyse de fiabilité fonction du temps

#### 5.3.2.1 Scénario de défaillance

Le critère de rupture d'une pièce fissurée sous chargement de fatigue est obtenu en aéronautique à partir de l'évaluation du critère de tenue résiduelle formulé comme suit :

$$K(a, \sigma) \geq K_c \quad (5.28)$$

où  $a$  est la longueur courante de la fissure à un instant donné  $n$ ,  $\sigma$  est la contrainte appliquée à la structure à ce même instant  $n$  ou une valeur prédéfinie appelée *charge limite* et  $K_c$  est le facteur d'intensité de contrainte critique, paramètre caractéristique du matériau fonction de l'épaisseur de l'élément de structure et de la limite d'élasticité  $\sigma_y$ .  $K(a, \sigma)$  est par définition le facteur d'intensité de contrainte. On rappelle que  $K(a, \sigma) = \sigma F(a) \sqrt{\pi a}$  où  $F(a)$  est le facteur de forme, fonction de la longueur de fissure  $a$  et spécifique à la géométrie de la structure fissurée étudiée.

Lors d'analyses probabilistes et fiabilistes, l'avancée de fissure  $a$  résulte du processus de propagation de fissure (modèle mécanique) dont les entrées (longueur de fissure initiale  $a_0$ , paramètres de la loi de propagation  $C$  et  $m$ , facteur d'intensité de contrainte critique  $K_c$ , limite d'élasticité  $\sigma_y$ ) sont des variables aléatoires, regroupées dans un vecteur aléatoire noté  $\mathbf{Y}$  et le chargement de fatigue  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est un processus stochastique à temps discret (FMC ou HMM). En conséquent,  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_n = a(\mathbf{Y}, X_{1 \leq n' \leq n})$ , où  $X_{1 \leq n' \leq n} = (X_1, X_2, \dots, X_{n'}, \dots, X_n)$  et où  $n$  est l'instant courant, est également un processus stochastique.  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est donc une fonction du temps discret  $n$  et de l'aléa  $\omega \in \Omega$ .

La variable  $K$  du critère de rupture, fonction de  $a$  et de  $\sigma$  est aussi un processus discret  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  :

$$K_n = K(A_n, \sigma) = K(a(\mathbf{Y}, X_{1 \leq n' \leq n}), \sigma) \quad (5.29)$$

La fonction d'état-limite est alors introduite indifféremment comme :

- un processus stochastique à temps discret  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  en tant que fonction d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{Y}$  et d'un processus à temps discret  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , tel que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  :

$$G_n = g(\mathbf{Y}, X_{1 \leq n' \leq n}) = K_c - K(a(\mathbf{Y}, X_{1 \leq n' \leq n}), \sigma) \quad (5.30)$$

- une fonction d'une réalisation  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  ( $d = 5$  ici) de  $\mathbf{Y}$  et d'une trajectoire  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n'}, \dots, x_n) \in E^n$  de  $X = (X_1, X_2, \dots, X_{n'}, \dots, X_n)$ , auquel cas  $g = (g_1, g_2, \dots, g_{n'}, \dots, g_n)$ , réalisation de  $G = (G_1, G_2, \dots, G_{n'}, \dots, G_n)$ , est une fonction du temps à valeurs scalaires.

Deux fonctions d'états-limites  $g^{(1)}$  et  $g^{(2)}$  sous-jacentes à l'état-limite  $g$  peuvent être définies, suivant que la contrainte  $\sigma$  correspond à la contrainte maximale du cycle  $x_n = \{M_n, m_n\}$ <sup>4</sup> réellement observée à l'instant  $n$  (réalisation de  $X_n$ ), c'est-à-dire  $\sigma = M_n$  ou que la contrainte  $\sigma$  est définie par la charge limite notée  $\sigma_l$  (constante).

On a,  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  ( $d = 5$  ici),  $\forall x \in E^n$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{cases} g_n^{(1)} = g^{(1)}(\mathbf{y}, x_{1 \leq n' \leq n}) = K_c - K(a(\mathbf{y}, x_{1 \leq n' \leq n}), M_n) \\ g_n^{(2)} = g^{(2)}(\mathbf{y}, x_{1 \leq n' \leq n}) = K_c - K(a(\mathbf{y}, x_{1 \leq n' \leq n}), \sigma_l) \end{cases} \quad (5.31)$$

### 5.3.2.2 Probabilités de défaillance

La fonction d'état-limite  $g$  ( $g^{(1)}$  ou  $g^{(2)}$  donc) dépendante du temps  $n$  conduit à un *domaine de défaillance*  $D_f$  évoluant au cours du temps :

$$D_{f_n} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, x \in E^n, : g_n = g(\mathbf{y}, x_{1 \leq n' \leq n}) \leq 0\}$$

A ce sous-ensemble est associé l'événement de défaillance  $E_f \in \mathcal{F}$  défini comme suit :

$$E_{f_n} = \{\omega \in \Omega, : g_n = g(\mathbf{Y}(\omega), X_{1 \leq n' \leq n}(\omega)) \leq 0\}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Le problème de fiabilité ainsi défini dépend du temps. Nous introduisons alors deux probabilités de défaillance [Rac97, Rac98, AL02, ALS04] : une *probabilité instantanée de défaillance*  $P_{f,i}$  et une *probabilité cumulée de défaillance*  $P_{f,c}$ .

L'analyse de fiabilité indépendante du temps évalue la probabilité que la structure soit défaillante à l'instant  $n$  :

---

<sup>4</sup>Par souci de simplicité on choisit de ne pas différencier les notations des variables aléatoires  $M_n$  et  $m_n$  des réalisations de ces variables aléatoires. On note ainsi  $M_n$  et  $m_n$  les réalisations des variables aléatoires  $M_n$  et  $m_n$  du cycle  $X_n = \{M_n, m_n\}$  défini au chapitre 3.



$$P_{f,i}(n) = P(E_{f_n}) = P(\omega \in \Omega : g_n = g(\mathbf{Y}(\omega), X_{1 \leq n' \leq n}(\omega)) \leq 0)$$

Cette probabilité de défaillance instantanée  $P_{f,i}$  diffère de la probabilité de défaillance cumulée  $P_{f,c}$  qui correspond à l'évaluation de la probabilité que la structure soit défaillante sur  $[1, n]$  :

$$P_{f,c}(1, n) = P(\omega \in \Omega, \exists n_t \in [1, n] : g_{n_t} = g(\mathbf{Y}(\omega), X_{1 \leq n' \leq n_t}(\omega)) \leq 0)$$

Si la fonction d'état-limite  $g$  est décroissante sur  $[1, n]$ , le problème est dit à *marge décroissante* et on a  $P_{f,c}(1, n) = P_{f,i}(n)$ . La probabilité cumulée de défaillance s'identifie simplement à la probabilité instantanée.

C'est le cas de la fonction d'état-limite  $g^{(2)}$ . L'avancée de fissure  $a(\mathbf{y}, x_{1 \leq n' \leq n})$  est en effet croissante avec le temps  $n$ ,  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  ( $d = 5$  ici),  $\forall x \in E^n$ . Par ailleurs la charge limite  $\sigma_l$  étant constante, le facteur d'intensité de contrainte  $K(a, \sigma_l) = \sigma_l F(a) \sqrt{\pi a}$  où  $F(a)$  est le facteur de forme, fonction croissante de la longueur de fissure  $a$ , est une fonction croissante du temps. La fonction d'état-limite  $g^{(2)} = K_c - K$  est donc décroissante en fonction du temps.

En revanche ce n'est pas le cas pour la fonction d'état-limite  $g^{(1)}$ . La fonction  $g^{(1)}$  n'est pas monotone au cours du temps en raison de la fluctuation de la contrainte maximale  $M_n$  en fonction de  $n$ . Dans ce cas, la probabilité de défaillance cumulée  $P_{f,c}$  diffère de la probabilité de défaillance instantanée  $P_{f,i}$ .

### 5.3.3 Simplification du problème de fiabilité

D'après le paragraphe 5.3.1, le problème de fiabilité en tolérance aux dommages basé sur les modèles stochastiques de chargement préalablement construits au chapitre 3 fait intervenir un nombre aléatoire de variables aléatoires discrètes et continues. Celui-ci est ainsi relativement complexe et sort du cadre classique des problèmes mécano-fiabilistes, généralement définis par un nombre fixé de variables aléatoires continues. Le principe de transformation, dite isoprobabiliste, de l'espace physique des variables aléatoires vers un espace dit standard, où le vecteur image des paramètres suit une loi gaussienne standard multivariée, est impossible à mettre en œuvre dans le cas spécifique que l'on cherche à traiter. La plupart des approches traditionnellement utilisées dans la communauté du calcul fiabiliste en mécanique, telles que les méthodes d'approximation FORM et SORM et les subset simulations [AB01], qui s'appuient sur cette transformation, ne peuvent ainsi pas être utilisées dans le cadre des travaux de recherche présentés.

L'objectif de ce chapitre de thèse consiste donc à lever, au moins partiellement, un tel verrou scientifique. Il s'agit de mettre en place des méthodes de fiabilité permettant d'évaluer des probabilités de défaillance à coût de simulation restreint adaptées aux modélisations stochastiques du chargement de fatigue par chaînes de Markov et chaînes de Markov cachées.

**Hypothèses.** Afin d'atteindre un tel objectif, le problème de fiabilité général est simplifié comme suit :

- L'aléa sur les paramètres matériau (coefficients de la loi de propagation, facteur d'intensité de contrainte critique et limite d'élasticité) et les incertitudes sur les dimensions de fissures sont volontairement ignorés en première approche afin de réduire la complexité du problème. Le vecteur aléatoire  $\mathbf{Y}$  disparaît ainsi des formulations.
- Le nombre de cycles  $N$  des spectres de chargement simulés est aussi supposé identique pour toutes les trajectoires  $x$ , réalisations du processus  $X$ . La longueur de la chaîne est donc considérée comme une variable déterministe.
- Enfin, le critère de tenue résiduelle est vérifié à la seule charge limite  $\sigma_l$ . On considère donc le scénario de défaillance associé à la fonction d'état-limite  $g^{(2)}$ .

En notant  $a_c$  la longueur de fissure critique correspondant au facteur d'intensité de contrainte critique  $K_c$ , la fonction d'état-limite  $g^{(2)}$  du problème simplifié s'écrit ainsi,  $\forall x \in E^n$  et  $\forall n \in \{1, \dots, N\}$  :

$$g_n^{(2)} = g^{(2)}(x_{1 \leq n' \leq n}) = a_c - a(x_{1 \leq n' \leq n}) \quad (5.32)$$

où  $a_c$  est la solution de l'équation  $K(a_c, \sigma_l) = \sigma_l F(a_c) \sqrt{\pi a_c} = K_c$ .

La fonction d'état-limite  $g^{(2)}$  est décroissante en fonction du temps. Le problème de fiabilité ainsi défini est donc à marge décroissante et les probabilités de défaillance instantanée et cumulée sont égales. On a  $\forall n \in \{1, \dots, N\} : P_{f,c}(1, n) = P_{f,i}(n)$  avec :

$$P_{f,i}(n) = P(E_{f_n}) = P(\omega \in \Omega : g_n^{(2)} = g^{(2)}(X_{1 \leq n' \leq n}(\omega)) \leq 0) \quad (5.33)$$

En pratique, on calcule cette probabilité pour  $n = N$ , c'est-à-dire au dernier cycle des spectres de chargement simulés ( $\forall x \in E^N$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n'}, \dots, x_n, \dots, x_N)$  avec  $N$  fixé), soit :

$$\begin{aligned}
P_{f,i}(N) = P(E_{f_N}) &= P(\omega \in \Omega : g_N^{(2)} = g^{(2)}(X_{1 \leq n \leq N}(\omega)) \leq 0) \\
&= P(\omega \in \Omega : a_c - a(X_{1 \leq n \leq N}(\omega)) \leq 0)
\end{aligned} \tag{5.34}$$

La relation (5.34) peut se réécrire comme suit :

$$P_f = P_{f,i}(N) = \int_{E_{f_N}} dP(\omega) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{E_{f_N}}(\omega) dP(\omega) = \mathbb{E}_P [\mathbb{1}_{E_{f_N}}] \tag{5.35}$$

où  $\mathbb{1}_{E_{f_N}}$  est la fonction indicatrice de l'événement  $E_{f_N}$  telle que  $\mathbb{1}_{E_{f_N}}(\omega) = 1$  si  $\omega \in E_{f_N}$  et  $\mathbb{1}_{E_{f_N}}(\omega) = 0$  sinon.

## 5.4 Résolution du problème de fiabilité

Ce paragraphe introduit les méthodes de fiabilité qui permettent d'évaluer la probabilité de défaillance  $P_f$  (5.35) associée à la fonction d'état-limite (5.32). De par les modèles stochastiques considérés, seules les méthodes fiabilistes par simulations peuvent être envisagées. La méthode classique des simulations de Monte Carlo (MC) est l'approche la plus robuste pour évaluer cette probabilité  $P_f$ . Elle fait ainsi office de référence. Néanmoins, le nombre de calculs nécessaire à l'estimation des probabilités de défaillance faibles avec une précision acceptable (en termes de coefficient de variation de cette estimation) devient rapidement très élevé. Cette méthode est ainsi excessivement coûteuse en termes de temps de calcul. Une variante aux simulations de Monte Carlo, basée sur les simulations d'importance et l'entropie croisée (IS-CE) présentée au paragraphe 5.2.3.3 dans le cadre d'un vecteur aléatoire continu, est ici envisagée. Elle est étendue dans un premier temps au cas où le modèle stochastique est une chaîne de Markov (FMC) et dans un second temps à celui associé à une chaîne de Markov cachée (HMM).

Il faut noter que la méthode IS-CE a été appliquée avec succès au calcul de la défaillance de réseaux de télécommunication, la défaillance étant modélisée par des chaînes de Markov à temps discret et à espace d'états discret, par exemple dans la référence [Rid05]. Dans cette référence, la défaillance d'un système technologique constitué de  $d$  types différents de composants est modélisée par une chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  où  $X_n = (X_n^1, X_n^2, \dots, X_n^d)$  et  $X_n^i, \forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$  est le nombre de composants défaillants d'un même type  $i$  donné. La défaillance est atteinte lorsque tous les composants d'un même type  $i$  sont défaillants ou, par conséquent, lorsque tous les composants de tous les types sont défaillants. A chaque instant  $n$  de la chaîne, le système est donc soit défaillant, soit en état de marche. Les

probabilités de transition de la chaîne de Markov font intervenir les taux de défaillance et de réparation des composants de type  $i$ .

La pertinence de la méthode IS-CE ayant été démontrée pour ce type de problème, il est ainsi choisi d'explorer cette piste pour résoudre notre problème de fiabilité en tolérance aux dommages où l'aléa de chargement est modélisé à l'aide de chaînes de Markov (FMC ou HMM). Les éléments du paragraphe 5.4.1 sont principalement inspirés des références [dBKMR05, Rid05].

#### 5.4.1 Méthode IS-CE appliquée aux chaînes de Markov (FMC)

L'objectif des tirages d'importance est d'évaluer l'intégrale (5.35) en simulant les échantillons qui contribuent le plus à la défaillance, via l'intégrale suivante :

$$P_f = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{E_{fN}}(\omega) \frac{dP(\omega)}{dQ(\omega)} dQ(\omega) \quad (5.36)$$

où  $Q$  est une probabilité dite d'importance permettant de simuler les échantillons dans les régions qui contribuent le plus au calcul de  $P_f$ . On utilise ici la méthode d'entropie croisée (CE) pour déterminer la meilleure approximation de la probabilité d'importance optimale  $Q^*$  appartenant à une classe de lois de probabilité choisie a priori.

##### 5.4.1.1 Loi d'une chaîne de Markov

Dans le cas où  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est modélisé par une chaîne de Markov homogène de matrice de transition  $\mathbf{P}$ , la loi de  $X$  est donnée par les quantités suivantes, définies  $\forall N \in \mathbb{N}^*$  :

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N) = P(X_1 = x_1) \prod_{n=1}^{N-1} P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \quad (5.37)$$

Or, les variables aléatoires  $X_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , prennent leurs valeurs dans un espace d'états discret fini  $E = \{e_k, k \in \{1, 2, \dots, K\}\}$  ( $\text{card}(E) = K$ ) et l'ensemble des probabilités  $p_{i,j} = P(X_{n+1} = e_j | X_n = e_i) \forall (e_i, e_j) \in E \times E$  forme la matrice de transition  $\mathbf{P}$ .

Ainsi la relation (5.37) peut se réécrire de la manière suivante :

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N) = \prod_{i,j=1}^K p_{i,j}^{n_{i,j}(x,N)} \quad (5.38)$$

où  $n_{i,j}(x, N)$  est le nombre de transitions du cycle état  $e_i$  au cycle état  $e_j$  de la réalisation  $x \in E^N$ . On notera  $n_{i,j}(X, N)$  le nombre de transitions du cycle état  $e_i$  au cycle état  $e_j$  de la chaîne de Markov  $X$  avant l'instant  $N$ . Dans cette formulation, on suppose que  $P(X_1 = x_1) = 1$ , soit que la réalisation  $x_1$  est la même pour toutes les simulations.  $X_1$  est donc une variable déterministe.

De manière analogue à la référence [dBKMR05] on utilise désormais la notation  $p_X(x, N, \mathbf{P})$  pour la densité de probabilité de paramètres  $\mathbf{P}$  :

$$p_X(x, N, \mathbf{P}) = \prod_{i,j=1}^K p_{i,j}^{n_{i,j}(x, N)} \quad (5.39)$$

#### 5.4.1.2 Problème de maximisation

Un principe identique à celui de la méthode IS-CE formulée au paragraphe 5.2.3.3 pour un vecteur aléatoire continu de densité de probabilité initiale  $p_X(\cdot, u)$  est ici appliqué. L'objectif consiste à déterminer la densité d'importance  $p_X(\cdot, \mathbf{Q}^*)$ , appartenant à la famille des densités de probabilité de la densité d'origine  $p_X(\cdot, \mathbf{P})$ , la plus proche possible de la solution optimale  $q_X^*$ . Il s'agit donc de trouver les paramètres  $q_{i,j}^*$  de la matrice de transition  $\mathbf{Q}^*$  solutions du problème de maximisation sous-contraintes suivant :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{Q}} D(\mathbf{Q}) &= \max_{\mathbf{Q}} \mathbb{E}_{p_X(\cdot, \mathbf{R})} [\mathbb{1}_{D_f}(X) W(X, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}) \ln p_X(X, N, \mathbf{Q})] \\ \text{sous :} & \begin{cases} 0 \leq q_{i,j} \leq 1 \\ \sum_{j=1}^K q_{i,j} = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.40)$$

où  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  sont respectivement équivalents à  $u$ ,  $v$  et  $w$  dans la formulation (5.21) et  $D_f = D_{fN} = \{x \in E^N : g_N^{(2)} = g^{(2)}(x) \leq 0\}$  avec  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \forall x \in E^N$  ( $N$  fixé).

Le rapport de vraisemblance  $W(x, N, \mathbf{P}, \mathbf{R})$  s'écrit :

$$W(x, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}) = \frac{p_X(x, N, \mathbf{P})}{p_X(x, N, \mathbf{R})} = \prod_{i,j=1}^K \left( \frac{p_{i,j}}{r_{i,j}} \right)^{n_{i,j}(x, N)} \quad (5.41)$$

Les probabilités de la matrice  $\mathbf{Q}^*$ , solution du problème (5.40), sont données par :

$$q_{i,j}^* = \frac{\mathbb{E}_{p_X(\cdot, \mathbf{R})} [\mathbb{1}_{D_f}(X) W(X, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}) n_{i,j}(X, N)]}{\mathbb{E}_{p_X(\cdot, \mathbf{R})} [\mathbb{1}_{D_f}(X) W(X, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}) n_i(X, N)]} \quad (5.42)$$

où  $n_i(X, N) = \sum_{j=1}^K n_{i,j}(X, N)$  est le nombre de transitions partant de l'état  $e_i$  de la chaîne de Markov  $X$  avant l'instant  $N$ .

Les détails de résolution du problème de maximisation sont fournis à la section E.1 de l'annexe E.

A partir d'un échantillon  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(N_{\text{sim}})}$  distribué suivant la densité  $p_X(\cdot, \mathbf{R})$ , l'estimateur  $\hat{q}_{i,j}^*$  associé à la relation (5.42) s'écrit :

$$\hat{q}_{i,j}^* = \frac{\sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \left[ \mathbb{1}_{D_f}(X^{(k)}) \left( \prod_{i,j=1}^K \left( \frac{p_{i,j}}{r_{i,j}} \right)^{n_{i,j}(X^{(k)}, N)} \right) n_{i,j}(X^{(k)}, N) \right]}{\sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \left[ \mathbb{1}_{D_f}(X^{(k)}) \left( \prod_{i,j=1}^K \left( \frac{p_{i,j}}{r_{i,j}} \right)^{n_{i,j}(X^{(k)}, N)} \right) n_i(X^{(k)}, N) \right]} \quad (5.43)$$

Pour l'estimation de probabilités de défaillance  $P_f$  faibles, l'algorithme multi-niveaux IS-CE permet de trouver de manière itérative la densité d'importance optimale  $p_X(\cdot, \mathbf{Q}^*)$ . Les niveaux sont les suivants :

1. Définir  $\hat{\mathbf{Q}}_0 = \mathbf{P}$  et  $t = 1$ .
2. Actualiser  $\hat{\gamma}_t$  : générer un  $N_{\text{sim}}$ -échantillon de  $g(X)$  sous la distribution  $p_X(\cdot, \hat{\mathbf{Q}}_{t-1})$ . Choisir  $\hat{\gamma}_t$  comme le  $\rho^{\text{ième}}$ -fractile de la distribution aléatoire de  $g(X)$ , tel que :  $P(G(X) \leq \hat{\gamma}_t) = \rho$ .
3. Actualiser  $\hat{\mathbf{Q}}_t$  : pour le couple donné  $\{\hat{\gamma}_t, \hat{\mathbf{Q}}_{t-1}\}$ ,  $\hat{\mathbf{Q}}_t$  est défini par,  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, K\}$  :

$$\hat{q}_{t,i,j} = \frac{\sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \left[ \mathbb{1}_{\{g(X^{(k)}) \leq \hat{\gamma}_t\}}(X^{(k)}) \left( \prod_{i,j=1}^K \left( \frac{p_{i,j}}{\hat{q}_{t-1,i,j}} \right)^{n_{i,j}(X^{(k)}, N)} \right) n_{i,j}(X^{(k)}, N) \right]}{\sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \left[ \mathbb{1}_{\{g(X^{(k)}) \leq \hat{\gamma}_t\}}(X^{(k)}) \left( \prod_{i,j=1}^K \left( \frac{p_{i,j}}{\hat{q}_{t-1,i,j}} \right)^{n_{i,j}(X^{(k)}, N)} \right) n_i(X^{(k)}, N) \right]} \quad (5.44)$$

4. Si  $\hat{\gamma}_t \leq 0$ , stopper l'algorithme et passer au niveau 5, sinon poser  $t = t + 1$ , et retourner au niveau 2.
5. Poser  $\hat{\mathbf{Q}}^* = \hat{\mathbf{Q}}_t$  et  $\hat{\gamma}_t = 0$ . Évaluer la probabilité de défaillance  $P_f$  à partir d'un  $N_{\text{sim}}$ -échantillon de  $g(X)$  généré sous la distribution  $p_X(\cdot, \hat{\mathbf{Q}}^*)$  :

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N_{\text{sim}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \mathbb{1}_{D_f}(X^{(k)}) W(X^{(k)}, N, \mathbf{P}, \mathbf{Q}^*) \quad (5.45)$$

Le nombre de simulations par niveau  $N_{\text{sim}}$  étant généralement faible, certaines transitions  $e_i \rightarrow e_j$  peuvent ne pas être observées à un niveau  $t - 1$  alors que les probabilités  $p_{i,j}$  d'origine sont non nulles. Ceci conduit à  $\hat{q}_{t,i,j} = 0$ , d'après la relation (5.44), ce qui n'est pas souhaitable. En effet, une fois  $\hat{q}_{t,i,j} = 0$ , les probabilités  $\hat{q}_{t',i,j} \forall t' > t$  sont nulles jusqu'à la fin de l'algorithme, ce qui peut conduire à de très mauvaises estimations de  $P_f$ .

Deux solutions ont été suggérées par A.D. Ridder [Rid05] de manière à éviter ce type de problème :

- Pondération (ou lissage) avec les probabilités d'origine  $\mathbf{P} : \forall i, j \in \{1, 2, \dots, K\}$ ,

$$\hat{q}_{t,i,j} = (1-\alpha)p_{i,j} + \frac{\sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \left[ \mathbb{1}_{\{g(X^{(k)}) \leq \hat{\gamma}_t\}}(X^{(k)}) \left( \prod_{i,j=1}^K \left( \frac{p_{i,j}}{\hat{q}_{t-1,i,j}} \right)^{n_{i,j}(X^{(k)}, N)} \right) n_{i,j}(X^{(k)}, N) \right]}{\sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \left[ \mathbb{1}_{\{g(X^{(k)}) \leq \hat{\gamma}_t\}}(X^{(k)}) \left( \prod_{i,j=1}^K \left( \frac{p_{i,j}}{\hat{q}_{t-1,i,j}} \right)^{n_{i,j}(X^{(k)}, N)} \right) n_i(X^{(k)}, N) \right]} \quad (5.46)$$

où  $\alpha \in (0, 1)$  est un coefficient de lissage.

- Pondération avec les probabilités du niveau précédent  $\hat{\mathbf{Q}}_{t-1} : \forall i, j \in \{1, 2, \dots, K\}$ ,

$$\hat{q}_{t,i,j} = (1-\alpha)\hat{q}_{t-1,i,j} + \frac{\sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \left[ \mathbb{1}_{\{g(X^{(k)}) \leq \hat{\gamma}_t\}}(X^{(k)}) \left( \prod_{i,j=1}^K \left( \frac{p_{i,j}}{\hat{q}_{t-1,i,j}} \right)^{n_{i,j}(X^{(k)}, N)} \right) n_{i,j}(X^{(k)}, N) \right]}{\sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \left[ \mathbb{1}_{\{g(X^{(k)}) \leq \hat{\gamma}_t\}}(X^{(k)}) \left( \prod_{i,j=1}^K \left( \frac{p_{i,j}}{\hat{q}_{t-1,i,j}} \right)^{n_{i,j}(X^{(k)}, N)} \right) n_i(X^{(k)}, N) \right]} \quad (5.47)$$

où  $\alpha \in (0, 1)$  également.

## 5.4.2 Extension de la méthode IS-CE aux HMM

Les chapitres 3 et 4 ont mis en évidence la pertinence des chaînes de Markov cachées (HMM) à représenter l'aléa des chargements de manière réaliste pour des applications en

tolérance aux dommages, de par leur capacité à modéliser les valeurs extrêmes notamment. Il est ainsi souhaitable d'adapter la méthode fiabiliste d'entropie croisée IS-CE, uniquement appliquée aux cas des chaînes de Markov à temps discret et à espace d'états discret dans la littérature, à une utilisation avec des modélisations stochastiques basées sur les HMM. Ces nouveaux développements sont ainsi initiés dans le cadre de ces travaux de thèse afin de pouvoir traiter des problèmes de fiabilité en tolérance aux dommages basés sur l'utilisation de modèles HMM.

#### 5.4.2.1 Définition du modèle HMM et loi de probabilité

**Rappel.** Les séquences de cycles de fatigue modélisées par des chaînes de Markov cachées peuvent être vues comme la deuxième composante d'un processus bivarié  $(S_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , où la première composante  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une chaîne de Markov non-observable à espace d'états discret  $E^h$  et de matrice de transition  $\mathbf{P}$ , voir paragraphe 3.2.2.

Le  $n^{\text{ième}}$  cycle de fatigue de la séquence cachée  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est défini par  $S_n = \{M'_n, m'_n\}$ , où  $M'_n$  et  $m'_n$  sont respectivement le maximum et le minimum du cycle caché  $S_n$ . L'espace des états  $E^h$  de la chaîne de Markov cachée  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est l'ensemble de cardinal  $\text{card}(E^h) = K = K_c(K_c - 1)/2$  :

$$E^h = \{ e_j = (c_k, c_l), k > l \text{ et } k, l \in \{ 1, 2, \dots, K_c \} \} \quad (5.48)$$

où  $c_k$  et  $c_l$  sont les classes des contraintes auxquelles appartiennent les contraintes non-observées  $M'_n$  et  $m'_n$ , voir paragraphe 3.3.2.

Le  $n^{\text{ième}}$  cycle de fatigue de la séquence observée  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est défini par  $X_n = \{M_n, m_n\}$ , où  $M_n$  et  $m_n$  sont respectivement le maximum et le minimum du cycle  $X_n$ . Les observations du maximum  $M_n$  et du minimum  $m_n$  sont conditionnées par celles de  $M'_n$  et  $m'_n$ . Elles sont obtenues à partir de  $K_c$  distributions de probabilité  $f_{c_k}, k \in \{1, 2, \dots, K_c\}$ , où  $c_k$  est la classe à laquelle appartient la contrainte non-observée  $M'_n$  ou  $m'_n$ . Par le biais de cette modélisation, on suppose que les minimums et les maximums des séquences de fatigue suivent les mêmes distributions.

**Probabilités et densités.**  $\forall N \in \mathbb{N}^*$ , on cherche à calculer la probabilité

$P(X_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, X_N \in \mathcal{B}_N \cap S_1 = s_1, \dots, S_N = s_N)$ , où  $\mathcal{B}_n$  est un borélien de  $\mathbb{R}_+$ ,  $\forall n \in \{1, \dots, N\}$ , et à exprimer la densité de probabilité de  $(X_1, \dots, X_N \cap S_1, \dots, S_N)$ , soit la densité conjointe de  $X$  et  $S$  notée  $p_{XS}$ . Par souci de concision on note aussi  $P(X \in \mathcal{B}^N \cap S = s)$  la probabilité  $P(X_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, X_N \in \mathcal{B}_N \cap S_1 = s_1, \dots, S_N = s_N)$  où  $\mathcal{B}^N$  est défini par  $\mathcal{B}^N = \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_N$ ,  $X = (X_1, \dots, X_N)$  et  $S = (S_1, \dots, S_N)$ .



D'après le théorème de Bayes, on a :

$$P\left(X \in \mathcal{B}^N \cap S = s\right) = P\left(X \in \mathcal{B}^N | S = s\right) P(S = s) \quad (5.49)$$

D'après la définition de la chaîne de Markov cachée on peut également écrire [DJ08] :

$$\begin{aligned} P\left(X \in \mathcal{B}^N | S = s\right) &= \prod_{n=1}^N P\left(X_n \in \mathcal{B}_n | S = s\right) \\ &= \prod_{n=1}^N P_{s_n}(\mathcal{B}_n) \end{aligned} \quad (5.50)$$

Finalemnt, d'après la relation (5.38), la probabilité  $P(S = s)$  est formulée de la manière suivante :

$$P(S = s) = P(S_1 = s_1, \dots, S_N = s_N) = \prod_{i,j=1}^K p_{i,j}^{n_{i,j}(s,N)} \quad (5.51)$$

en imposant  $P(S_1 = s_1) = 1$ .  $n_{i,j}(s, N)$  est le nombre de transitions du cycle état  $e_i$  au cycle état  $e_j$  d'une réalisation  $s$  de la chaîne de Markov non-observée  $S$ .

Ainsi, d'après les relations (5.50) et (5.51), la relation (5.49) s'écrit :

$$P\left(X \in \mathcal{B}^N \cap S = s\right) = \left(\prod_{n=1}^N P_{s_n}(\mathcal{B}_n)\right) \left(\prod_{i,j=1}^K p_{i,j}^{n_{i,j}(s,N)}\right) \quad (5.52)$$

En supposant que toutes les lois conditionnelles  $P_{s_n}$  admettent une densité de probabilité  $f_{s_n}$  (ce qui est le cas ici), la loi conjointe de  $X$  et  $S$  admet une densité de probabilité  $p_{XS}$  qui s'écrit :

$$p_{XS}(x, s, N, \mathbf{P}, u) = \left(\prod_{n=1}^N f_{s_n}(x_n, u)\right) \left(\prod_{i,j=1}^K p_{i,j}^{n_{i,j}(s,N)}\right) \quad (5.53)$$

où  $u$  représente le vecteur de paramètres de l'ensemble des densités  $f_{s_n}$  mises en jeu et  $\mathbf{P}$  est la matrice de transition de la chaîne non-observée  $S$  qui contient les probabilités  $p_{i,j}$ .

$S_n = \{M'_n, m'_n\}$  représentant un cycle de la séquence cachée  $S$ , le terme  $f_{s_n}(x_n, u)$  s'écrit comme suit :

$$f_{s_n}(x_n, u) = f_{M'_n}(M_n, u) f_{m'_n}(m_n, u) \quad (5.54)$$

où les notations  $M'_n, m'_n, M_n$  et  $m_n$  désignent respectivement des réalisations des variables aléatoires  $M'_n, m'_n, M_n$  et  $m_n$ . On conserve les mêmes notations pour les réalisations et les variables aléatoires, pour simplifier les écritures.

La densité conjointe de  $X$  et  $S$  s'écrit donc comme suit :

$$p_{XS}(x, s, N, \mathbf{P}, u) = \left( \prod_{n=1}^N f_{M'_n}(M_n, u) f_{m'_n}(m_n, u) \right) \left( \prod_{i,j=1}^K p_{i,j}^{n_{i,j}(s, N)} \right) \quad (5.55)$$

#### 5.4.2.2 Objectif de l'approche IS-CE appliquée aux HMM

L'approche fiabiliste IS-CE appliquée aux HMM a pour but de déterminer de manière itérative un couple de paramètres  $\{\mathbf{Q}^*, v^*\}$  telle que la densité  $p_{XS}(\cdot, \mathbf{Q}^*, v^*)$  soit la plus proche possible de la densité d'importance optimale  $q_{XS}^*$  des tirages d'importance (IS), en pratique impossible à utiliser.

Au vu du nombre de distributions de probabilité  $f_{M'_n}, f_{m'_n}$  et de la taille des matrices de transition  $\mathbf{P}$  mises en jeu dans les modélisations stochastiques des données réelles du chargement (chapitre 3), le problème IS-CE associé à la densité de probabilité (5.55) est relativement complexe. Résoudre un tel problème nous a semblé trop ambitieux pour une première approche de l'entropie-croisée adaptée aux chaînes de Markov cachées. Nous proposons donc ici de simplifier le problème afin d'aborder l'approche IS-CE appliquée aux HMM dans un cadre certes moins général mais simplifié et dans l'optique de voir aboutir nos développements théoriques et numériques.

Ainsi, nous limitons notre étude à l'actualisation de la matrice de transition  $\mathbf{Q}$  et des paramètres  $v$  de la densité de probabilité de Pareto généralisée modélisant les valeurs extrêmes (appartenant à la classe  $c_{K_c}$ ) dont l'expression est rappelée en (5.56) :

$$f(x, u) = \frac{1}{\beta} \left[ 1 + \xi \frac{(x - u_s)}{\beta} \right]^{-1-1/\xi} \quad (5.56)$$

où  $u_s$  est ici le seuil de la loi et  $u = \{\xi, \beta\}$ .

D'après les chapitres 3 et 4, les valeurs extrêmes sont en effet d'une importance fondamentale lors d'analyses de propagation de fissure sous chargement d'amplitude variable. Ceci a ainsi orienté notre choix vers l'actualisation des paramètres de la densité modélisant ces valeurs extrêmes lors de la méthode IS-CE, plutôt que celle des paramètres des autres densités du problème (gaussiennes tronquées). Cependant, il est décidé de ne pas actualiser le seuil  $u_s$  dans l'algorithme IS-CE afin de respecter les bornes des classes  $c_k$ ,  $\forall k \in \{1, 2, \dots, K_c\}$ . Le vecteur de paramètres  $v$  à actualiser est ainsi réduit à  $v = \{\xi, \beta\}$ .

### 5.4.2.3 Problème de maximisation

De manière analogue aux chaînes de Markov, le problème de maximisation sous-contraintes s'écrit ici :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{Q}, v} D(\mathbf{Q}, v) &= \max_{\mathbf{Q}, v} \mathbb{E}_{p_{XS}(\cdot, \mathbf{R}, w)} [\mathbb{1}_{D_f}(X) W(X, S, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}, u, w) \ln p_{XS}(X, S, N, \mathbf{Q}, v)] \\ \text{sous :} &\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq q_{i,j} \leq 1 \\ \sum_{j=1}^K q_{i,j} = 1 \\ -0.5 < \xi < 0 \\ \beta > 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (5.57)$$

où  $v = \{\xi, \beta\}$ .

On impose  $-0.5 < \xi < 0$  de manière à ce que la densité de Pareto généralisée de la densité d'importance appartienne au domaine d'attraction de Weibull, comme la distribution initiale  $f(\cdot, u)$  identifiée à partir des données réelles de chargement.

Le rapport de vraisemblance  $W(x, s, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}, u, w)$  s'écrit :

$$W(x, s, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}, u, w) = \left( \prod_{i,j=1}^K \left( \frac{p_{i,j}}{r_{i,j}} \right)^{n_{i,j}(s, N)} \right) \left( \prod_{n=1}^N \frac{f_{M'_n}(M_n, u) f_{m'_n}(m_n, u)}{f_{M'_n}(M_n, w) f_{m'_n}(m_n, w)} \right) \quad (5.58)$$

Le problème de maximisation, sa résolution et les solutions sont détaillés à la section E.2 de l'annexe E.

#### 5.4.2.4 Algorithme CE multi-niveaux

Lorsque la probabilité de défaillance à estimer est faible, disons  $P_f < 10^{-3}$ , la densité d'importance  $p_{XS}(\cdot, \mathbf{Q}^*, v^*)$  est là encore déterminée de manière itérative à l'aide de l'algorithme multi-niveaux suivant :

1. Définir  $\hat{\mathbf{Q}}_0 = \mathbf{P}$ ,  $\hat{v}_0 = \{\xi^0, \beta^0\}$  (où  $\xi^0$  et  $\beta^0$  sont les paramètres de la loi de Pareto généralisée du modèle stochastique d'origine) et  $t = 1$ .
2. Actualiser  $\hat{\gamma}_t$  : générer un  $N_{\text{sim}}$ -échantillon aléatoire de  $g(X)$  sous la distribution  $p_{XS}(\cdot, \hat{\mathbf{Q}}_{t-1}, \hat{v}_{t-1})$ . Choisir  $\hat{\gamma}_t$  comme le  $\rho^{\text{ième}}$ -fractile de la distribution empirique de  $g(X)$ , tel que :  $P(g(X) \leq \hat{\gamma}_t) = \rho$ .
3. Actualiser  $\hat{\mathbf{Q}}_t$  : pour le triplet donné  $\{\hat{\gamma}_t, \hat{\mathbf{Q}}_{t-1}, \hat{v}_{t-1}\}$ , l'estimateur  $\hat{\mathbf{Q}}_t$  de  $\mathbf{Q}_t$  est défini par,  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, K\}$  :

$$\hat{q}'_{t,i,j} = \frac{\sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \left[ \mathbb{1}_{\{g(X^{(k)}) \leq \hat{\gamma}_t\}} (X^{(k)}) W \left( X^{(k)}, S^{(k)}, N, \mathbf{P}, \hat{\mathbf{Q}}_{t-1}, u, \hat{v}_{t-1} \right) n_{i,j}(S^{(k)}, N) \right]}{\sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \left[ \mathbb{1}_{\{g(X^{(k)}) \leq \hat{\gamma}_t\}} (X^{(k)}) W \left( X^{(k)}, S^{(k)}, N, \mathbf{P}, \hat{\mathbf{Q}}_{t-1}, u, \hat{v}_{t-1} \right) n_i(S^{(k)}, N) \right]} \quad (5.59)$$

En raison d'un nombre de simulations  $N_{\text{sim}}$  faible, utiliser la règle de pondération (ou de lissage) proposée par A.D. Ridder [Rid05], afin de ne pas converger vers des probabilités nulles  $\hat{q}'_{t,i,j} = 0$  :

- Pondération avec les probabilités d'origine  $\mathbf{P} : \forall i, j \in \{1, 2, \dots, K\}$ ,

$$\hat{q}_{t,i,j} = (1 - \alpha)p_{i,j} + \alpha\hat{q}'_{t,i,j} \quad (5.60)$$

où  $\alpha \in (0, 1)$  est un coefficient de lissage.

- Pondération avec les probabilités du niveau précédent  $\hat{\mathbf{Q}}_{t-1} : \forall i, j \in \{1, 2, \dots, K\}$ ,

$$\hat{q}_{t,i,j} = (1 - \alpha)\hat{q}_{t-1,i,j} + \alpha\hat{q}'_{t,i,j} \quad (5.61)$$

où  $\alpha \in (0, 1)$ .

4. Actualiser  $\hat{v}_t$  : pour le triplet donné  $\{\hat{\gamma}_t, \hat{\mathbf{Q}}_{t-1}, \hat{v}_{t-1}\}$ , les paramètres  $\hat{v}'_t = \{\hat{\xi}'_t, \hat{\beta}'_t\}$  sont obtenus en résolvant numériquement le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \left[ \mathbb{1}_{\{g(X^{(k)}) \leq \hat{\gamma}_t\}} (X^{(k)}) W \left( X^{(k)}, S^{(k)}, N, \mathbf{P}, \hat{\mathbf{Q}}_{t-1}, u, \hat{v}_{t-1} \right) \times \right. \\ \quad \left. \times \frac{\partial}{\partial \xi} (\ln p_{XS} (X^{(k)}, S^{(k)}, N, \mathbf{Q}, \xi, \beta)) \right] = 0 \\ \sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \left[ \mathbb{1}_{\{g(X^{(k)}) \leq \hat{\gamma}_t\}} (X^{(k)}) W \left( X^{(k)}, S^{(k)}, N, \mathbf{P}, \hat{\mathbf{Q}}_{t-1}, u, \hat{v}_{t-1} \right) \times \right. \\ \quad \left. \times \frac{\partial}{\partial \beta} (\ln p_{XS} (X^{(k)}, S^{(k)}, N, \mathbf{Q}, \xi, \beta)) \right] = 0 \end{array} \right. \quad (5.62)$$

Le système (5.62) sous les conditions :  $-0.5 < \xi < 0$  et  $\beta > 0$  pouvant être délicat à résoudre numériquement, on peut aussi choisir de résoudre le problème de maximisation sous contraintes (5.57), qui intègre la solution  $\hat{\mathbf{Q}}_t$ .

A partir d'un  $N_{\text{sim}}$ -échantillon aléatoire de  $X$  distribué suivant  $p_{XS}(\cdot, \hat{\mathbf{Q}}_{t-1}, \hat{v}_{t-1})$ , il s'agit de résoudre :

$$\begin{aligned} \max_v \hat{D}(v) &= \max_v \sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \left[ \mathbb{1}_{\{g(X^{(k)}) \leq \hat{\gamma}_t\}} (X^{(k)}) W \left( X^{(k)}, S^{(k)}, N, \mathbf{P}, \hat{\mathbf{Q}}_{t-1}, u, \hat{v}_{t-1} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \ln p_{XS} \left( X^{(k)}, S^{(k)}, N, \hat{\mathbf{Q}}_t, v \right) \right] \\ \text{sous :} &\quad \left\{ \begin{array}{l} -0.5 < \xi < 0 \\ \beta > 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Une règle de pondération ou de lissage est également appliquée au couple  $\{\hat{\xi}'_t, \hat{\beta}'_t\}$  solution du problème (5.63) :

- Pondération avec les paramètres d'origine  $u = \{\xi^0, \beta^0\} : \forall i, j \in \{1, 2, \dots, K\}$ ,

$$\hat{\xi}_t = (1 - \alpha_1)\xi^0 + \alpha_1\hat{\xi}'_t \quad (5.64)$$

$$\hat{\beta}_t = (1 - \alpha_1)\beta^0 + \alpha_1\hat{\beta}'_t \quad (5.65)$$

où  $\alpha_1 \in (0, 1)$  est un coefficient de lissage.

- Pondération avec les probabilités du niveau précédent  $\hat{v}_{t-1} = \{\hat{\xi}_{t-1}, \hat{\beta}_{t-1}\} :$

$$\hat{\xi}_t = (1 - \alpha_1)\hat{\xi}_{t-1} + \alpha_1\hat{\xi}'_t \quad (5.66)$$

$$\hat{\beta}_t = (1 - \alpha_1)\hat{\beta}_{t-1} + \alpha_1\hat{\beta}'_t \quad (5.67)$$

où  $\alpha_1 \in (0, 1)$ .

5. Si  $\hat{\gamma}_t \leq 0$  stopper l'algorithme et passer au niveau 6, sinon poser  $t = t + 1$ , et retourner au niveau 2.
6. Poser  $\hat{\mathbf{Q}}^* = \hat{\mathbf{Q}}_t$ ,  $\hat{v}^* = \hat{v}_t$  et  $\hat{\gamma}_t = 0$ . Évaluer la probabilité de défaillance  $P_f$  à partir d'un  $N_{\text{sim}}$ -échantillon de  $g(X)$  générer sous la distribution  $p_{XS}(\cdot, \hat{\mathbf{Q}}^*, \hat{v}^*)$  :

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N_{\text{sim}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} \mathbb{1}_{D_f}(X^{(k)}) W(X^{(k)}, S^{(k)}, N, \mathbf{P}, \hat{\mathbf{Q}}^*, u, \hat{v}^*) \quad (5.68)$$

### 5.4.3 Conclusion

Les méthodes de résolution du problème de fiabilité en tolérance aux dommages avec modélisation markovienne du chargement de fatigue ont été présentées dans cette section. Elles s'appuient sur les simulations de Monte Carlo (MC) et sur les simulations d'importance basées sur la méthode d'entropie-croisée (IS-CE). L'approche IS-CE déjà appliquée aux chaînes de Markov dans les problèmes de fiabilité des réseaux de télécommunications a été déclinée au cas des chaînes de Markov cachées.

La méthode IS-CE est supposée compenser les limites de l'approche classique de Monte Carlo en réduisant le nombre d'appels à la fonction d'état-limite. L'intérêt de cette méthode réside également dans la richesse des informations fiabilistes obtenues : en plus de l'approximation de la probabilité de défaillance, elle fournit en effet les paramètres de la densité de probabilité des variables aléatoires d'entrée qui conduisent à la défaillance. Dans le cas où les entrées sont modélisées par des chaînes de Markov, on obtient ainsi, en fin d'algorithme, la matrice de transition qui permet de générer les chargements les plus sévères en termes d'avancée de fissure, pour un niveau de fiabilité donné. Dans le cas des chaînes de Markov cachées, on obtient à la fois la matrice de transition des chargements les plus sévères et les paramètres de la distribution des valeurs extrêmes de ces mêmes chargements. Un inconvénient majeur de cette approche est qu'elle ne permet toutefois pas de déterminer analytiquement le coefficient de variation de l'estimation de la probabilité de défaillance  $P_f$ . Dans le cadre des travaux de thèse, les calculs de  $P_f$  sont répétés un certain nombre de fois (on prendra  $n_r = 30$  fois) afin d'obtenir une estimation empirique de son coefficient de variation  $c_{\hat{P}_f} = s_{\hat{P}_f}^* / \bar{P}_f$ , où  $s_{\hat{P}_f}^*$  et  $\bar{P}_f$  sont respectivement l'écart-type empirique non-biaisé et la moyenne empirique de la série statistique composée de  $n_r$  réalisations de  $\hat{P}_f$ .

La section suivante compare les probabilités de défaillance calculées avec la méthode IS-CE par rapport à celles obtenues avec Monte Carlo sur des exemples académiques de propagation de fissure. Ces derniers permettent en partie de démontrer la pertinence de l'approche IS-CE proposée.

## 5.5 Applications

Cette dernière section est consacrée à la mise en œuvre et aux couplages des modélisations stochastiques du chargement de fatigue (FMC et HMM) développées au chapitre 3 avec les approches fiabilistes (MC et IS-CE) présentées aux sections 5.2.3 et 5.4. Des exemples académiques de propagation de fissure sous chargements d'amplitude variable markoviens sont proposés afin de juger l'applicabilité de la méthode fiabiliste IS-CE aux problèmes fiabilistes de tolérance aux dommages. Le scénario de défaillance, défini dans la suite de ce paragraphe, fait intervenir la longueur de fissure finale  $a_f$ , obtenue par application d'un spectre de chargement variable composé d'un nombre de cycles  $N$  imposé (variable déterministe) et qui est calculée, pour chaque réalisation, à l'aide de la loi de Paris ou du code de calcul PREFFAS. Le scénario de défaillance intègre également une longueur de fissure critique  $a_c$ , choisie arbitrairement pour ces calculs afin de garantir des niveaux de défaillance suffisamment faibles.

### 5.5.1 Présentation de la structure étudiée

**Géométrie.** La structure étudiée est une plaque mince, d'épaisseur  $t = 2$  mm, de largeur  $W = 150$  mm, soumise à des chargements de traction et contenant une fissure traversante de demi-longueur initiale  $a_0 = 5$  mm. Cette structure correspond à l'éprouvette standard CCT, représentée sur la figure 5.1.

Le facteur d'intensité de contrainte est calculé en utilisant la formule suivante :

$$K(a, \sigma) = \frac{1 - 0.025(a/W)^2 + 0.06(a/W)^4}{\sqrt{\cos(\pi a/W)}} \sigma \sqrt{\pi a} \quad (5.69)$$

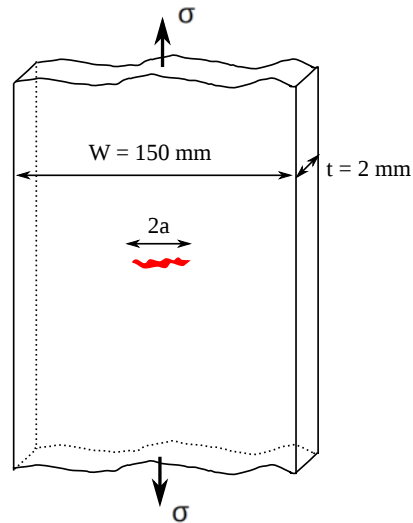


Figure 5.1 – Éprouvette CCT.

**Propriétés matériau et modèles de propagation de fissure.** Les éprouvettes CCT sont réalisées en aluminium 2024-T351. Deux modèles de propagation de fissure sont choisis pour conduire les différentes analyses de propagation fiabilistes : la loi de Paris, étant le modèle de fissuration le plus simple et le plus rapide à mettre en œuvre, et le modèle PREFFAS, plus évolué et permettant de prendre en compte le phénomène de fermeture de fissure ainsi que les phénomènes de retard et/ou d'accélération des vitesses de fissuration associés. Les paramètres matériau de ces modèles, extraits de la note technique n°5/M/90 [Ren90], sont résumés dans le tableau 5.1. L'amplitude de variation du facteur d'intensité de contraintes  $\Delta K$  est homogène à des  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  et les vitesses  $da/dN$  sont exprimées en  $\text{mm}/\text{cycle}$ .

Tableau 5.1 – Propriétés matériau de l'éprouvette CCT.

Limite d'élasticité	$\sigma_y = 312 \text{ MPa}$
Coefficient de Paris	$C_R = 3.26 \cdot 10^{-8}$ , $m = 3.42$
Coefficients d'Elber	$a = 0.45$ , $b = 0.55$

Les coefficients d'Elber  $a$  et  $b$  du modèle PREFFAS sont choisis pour une structure mince d'après la référence [ADS88].

**Chargement.** Les chargements de fatigue appliqués aux éprouvettes CCT sont supposés incertains dans cette étude. On considère que l'aléa des séquences de chargement appliquées



à la structure correspond à l'aléa de chargement de l'activité "B" de la flotte d'avions monitorée, voir chapitres 2 et 3. On choisit deux options pour modéliser l'aléa sur le chargement de fatigue : 1) on utilise le modèle des chaînes de Markov FMC<sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ ) ; 2) on retient la modélisation par chaînes de Markov cachées HMM<sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ ). Les caractéristiques de ces deux modèles sont respectivement données aux paragraphes 3.3.1 et 3.3.2 du chapitre 3. Les contraintes (maximums et minimums) des vols de la base de données ont été réparties en  $K_c = 5$  classes, ce qui conduit à  $K = 10$  cycles états. La matrice de transition  $\mathbf{P}$  des chaînes de Markov (FMC) et celle du processus non-observé des chaînes de Markov cachées (HMM) rassemblent donc  $K^2 = 100$  probabilités. Les paramètres de la distribution de Pareto généralisée qui modélise la classe de contraintes  $c_{K_c}$  (c'est-à-dire les valeurs extrêmes) sont ici notés  $u_s = 0.676$ ,  $\xi^0 = -0.2$  et  $\beta^0 = 14.7$ .

On suppose ici, par souci de simplicité, qu'au sein même d'une analyse de fiabilité, toutes les séquences de chargement  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in E^N$ , générées soit avec le modèle FMC<sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ ), soit avec le modèle HMM<sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ ), ont le même cycle de départ  $x_1 = \{0.248; 0.039\}$  ( $P(X_1 = x_1) = 1$ ) et un même nombre de cycles de fatigue  $N$ . Un même facteur de charge  $C_l$  ( $C_l \times \sigma_m$ , où  $\sigma_m$  est la contrainte maximale observée sur l'ensemble des vols enregistrés) est également appliqué à toutes les séquences de chargement de fatigue  $x$ . Les paramètres  $N$  et  $C_l$  sont donnés au prochain paragraphe pour chacune des analyses de fiabilité réalisées, voir tableau 5.2.

**Fonction d'état-limite.** Les analyses de fiabilité menées cherchent à évaluer la probabilité que la demi-longueur de fissure finale  $a_f(x)$ , obtenue après propagation d'une fissure initiale de demi-longueur  $a_0$  soumise à un chargement d'amplitude variable de  $N$  cycles, réalisation  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  du processus du chargement de fatigue  $X$  modélisé par les modèles FMC et HMM, dépasse la longueur critique  $a_c$ , arbitrairement définie. Il est important de noter que les incertitudes sur les propriétés matériau ainsi que l'aléa sur les propriétés géométriques (ex : longueur initiale du dommage) ne sont pas prises en compte dans ces analyses.

Ainsi, on se propose d'estimer la probabilité de défaillance  $P_f$  associée au domaine de défaillance  $D_f = \{x \in E^N : g^{(2)}(x) = a_c - a_f(x) \leq 0\}$ , soit  $P_f = P(a_f(X) > a_c)$ , où  $X$  est le processus stochastique du chargement de fatigue.

### 5.5.2 Analyses de fiabilité et critères de validation

Quatre exemples mettant en jeu la structure CCT présentée au paragraphe 5.5.1 sont définis afin d'étudier progressivement l'applicabilité de la méthode fiabiliste des tirages d'importance basée sur l'entropie-croisée (IS-CE) aux problèmes fiabilistes de tolérance aux dommages sous chargements aléatoires d'amplitude variable markoviens. Les séquences de chargement simulées sont souvent relativement courtes ( $N$  ou  $N_s$  petits) de manière à accéder aux résultats dans des temps de simulations raisonnables. Les longueurs de fissure critiques  $a_c$  sont choisies arbitrairement afin d'estimer des probabilités faibles ( $10^{-3}$  –  $10^{-4}$ ) et très faibles ( $10^{-6}$ ). Le tableau 5.2 rassemble les différents exemples exploratoires étudiés.

Les résultats des simulations d'importance basées sur l'entropie-croisée (IS-CE), utilisées pour résoudre le problème de fiabilité en tolérance aux dommages avec chaînes de Markov et chaînes de Markov cachées, sont confrontés aux résultats des simulations de Monte Carlo aux paragraphes 5.5.3 et 5.5.4 par rapport aux critères suivants :

- le biais éventuel entre la probabilité de défaillance calculée par l'algorithme (IS-CE) (valeur moyenne obtenue sur  $n_r = 30$  analyses) et la valeur supposée de référence obtenue par simulation de Monte Carlo (MC),
- la dispersion de l'estimation de la probabilité de défaillance obtenue autour de la valeur moyenne<sup>5</sup>,
- le nombre d'évaluations de la fonction d'état-limite nécessaire à l'évaluation de la probabilité de défaillance.

---

<sup>5</sup>Le coefficient de variation  $c_{P_f}$  de  $P_f$  calculé avec la méthode IS-CE est défini par le rapport de l'écart-type non-biaisé et de la moyenne arithmétique estimés à partir d'un échantillon de  $n_r = 30$  réalisations de  $\hat{P}_f$ . Pour l'analyse de Monte Carlo (MC) la probabilité  $P_f$  est directement calculée à partir de la relation (5.8) et le coefficient de variation  $c_{P_f}$  est estimé à partir de la relation (5.10) sur l'unique échantillon généré.

Tableau 5.2 – Informations complémentaires au paragraphe 5.5.1 relatives aux analyses de fiabilité effectuées.

	Section	Modèle de propagation	Chargement		Longueur de fissure critique (mm)
<b>Analyse n° 1</b>	5.5.3	Paris	$N = 500$	$C_l = 1.44$	FMC <sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ ) $a_c = 5.08$
<b>Analyse n° 2</b>	5.5.3	Paris	$N = 500$	$C_l = 1.44$	FMC <sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ ) $a_c = 5.09053$
	5.5.4.1				HMM <sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ ) $a_c = 5.07$
<b>Analyse n° 3</b>	5.5.3	Paris	$N = 102000$	$C_l = 1.1$	FMC <sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ ) $a_c = 25.2$
	5.5.4.1			$C_l = 1.2$	HMM <sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ ) $a_c = 24.9$
<b>Analyse n° 4</b>	5.5.3	PREFFAS	$N_s = 525$ $F = 100$ <sup>6</sup>	$C_l = 1.2$	FMC <sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ ) $a_c = 9.34$
	5.5.4.2		$N = 52500$		HMM <sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ ) $a_c = 6.9$

### 5.5.3 Résultats des analyses avec les chaînes de Markov (FMC)

Les probabilités de défaillance  $P_f$  des quatre analyses fiabilistes définies dans le tableau 5.2, où les séquences de chargement de fatigue sont simulées avec le modèle FMC<sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ ), sont reportées dans le tableau 5.3. L'algorithme IS-CE mis œuvre dans ces exemples est celui décrit au paragraphe 5.4.1.

**Analyse des résultats.** D'après le tableau des résultats 5.3, les simulations d'importance associées à l'entropie-croisée (IS-CE) s'avèrent être extrêmement efficaces par rapport aux simulations de Monte Carlo, considérées comme références, pour l'ensemble des problèmes de fiabilité traités mettant en œuvre des chaînes de Markov. Les gains en termes de nombre d'appels aux modèles mécaniques sont conséquents. Les simulations IS-CE nécessitent pour les analyses n° 1 et 3 environ 33 fois moins de simulations que la méthode MC, à coefficient de variation quasi-similaire (IS-CE : n° 1 :  $N_{\text{total}} = 3 \cdot 10^4$ , n° 3 :  $N_{\text{total}} = 3 \cdot 10^3$  vs. MC : n° 1 :  $N_{\text{total}} = 10^6$ , n° 3 :  $N_{\text{total}} = 10^5$ ). Pour l'analyse n° 2 on

<sup>6</sup>Les spectres de chargement de  $N = F \times N_s = 52500$  cycles sont composés de séquences de chargement de  $N_s = 525$  cycles répétées  $F = 100$  fois pour constituer des spectres stationnaires, entrées du modèle PREFFAS.

observe un rapport de 1250 entre le nombre de simulations IS-CE nécessaire à l'obtention de la probabilité de défaillance  $P_f$  et celui nécessaire à l'obtention de  $P_f$  avec la méthode MC, à coefficient de variation identique (IS-CE :  $N_{\text{total}} = 8 \cdot 10^4$  vs. MC :  $N_{\text{total}} = 10^8$ ). Enfin, les simulations IS-CE nécessitent environ 17 fois moins de simulations que la méthode de MC (IS-CE :  $N_{\text{total}} = 6 \cdot 10^3$  vs. MC :  $N_{\text{total}} = 10^5$ ) pour l'analyse n° 4. On note cependant qu'un très faible biais est parfois observé. La référence MC peut en partie être responsable de celui-ci, compte tenu de la précision atteinte sur l'estimation de MC, voir tableau 5.3.

La pertinence de la méthode IS-CE pour les exemples de fiabilité traités est à nouveau illustrée sur les figures 5.2(a) à 5.2(d). La distribution de  $\hat{P}_f$  obtenue à partir des calculs IS-CE est supposée gaussienne, ce qui permet de centrer l'intervalle de confiance autour de la moyenne.

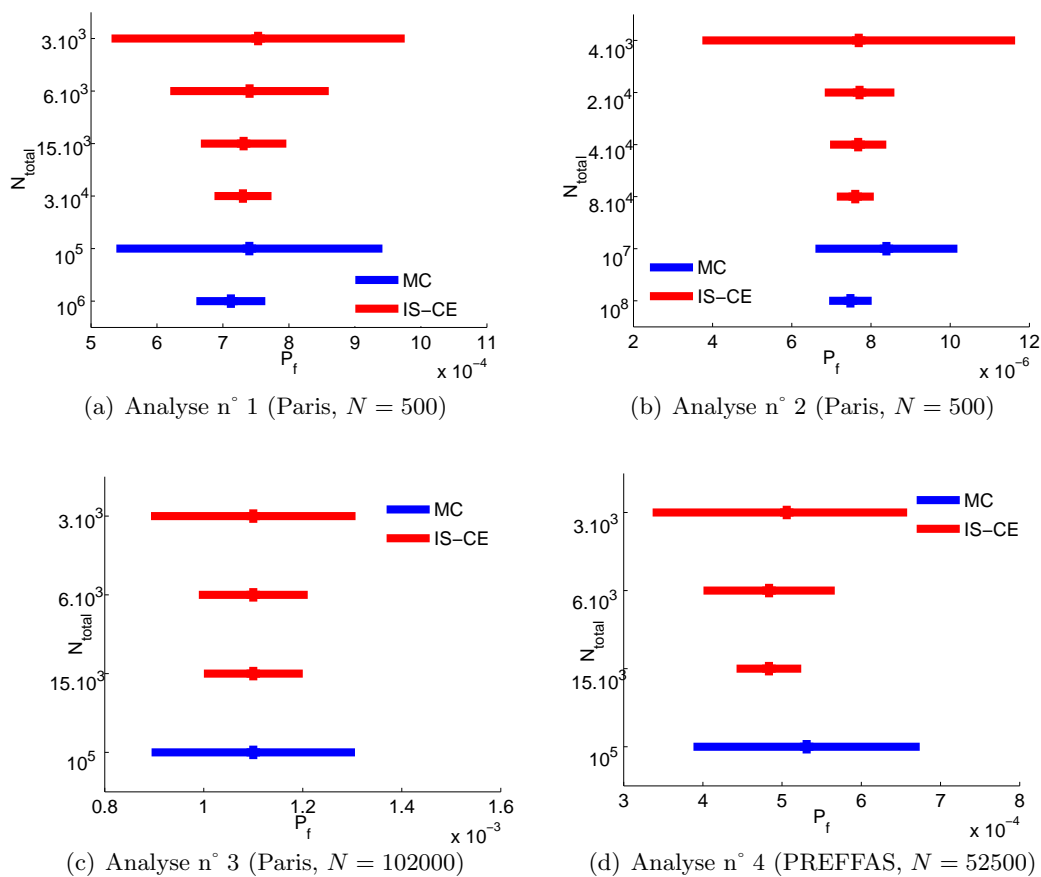


Figure 5.2 – Probabilités de défaillance  $P_f$  (moyenne arithmétique) et intervalles de confiance à 95% fonction du nombre total d'appels à la fonction d'état-limite  $g$ , obtenus à partir des méthodes MC et IS-CE.

Tableau 5.3 – Résultats des calculs de fiabilité avec modélisation stochastique du chargement par chaînes de Markov.

		MC			IS-CE <sup>7</sup>		
Analyse n°1	$N_{\text{total}}$ appels	$10^5$	$10^6$	$3 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^4$
	$N_{\text{sim}}$	/	/	1000	2000	5000	10000
				3 niveaux	3 niveaux	3 niveaux	3 niveaux
	$P_f$	$7.4 \cdot 10^{-4}$	$7.12 \cdot 10^{-4}$	$7.53 \cdot 10^{-4}$	$7.40 \cdot 10^{-4}$	$7.31 \cdot 10^{-4}$	$7.30 \cdot 10^{-4}$
	$c_{P_f}$ (%)	13.9	3.75	15.0	8.28	4.52	3.02
Analyse n°2 <sup>8</sup>	$N_{\text{total}}$ appels	$10^7$	$10^8$	$4 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^4$
	$N_{\text{sim}}$	/	/	1000	5000	10000	20000
				4 niveaux	4 niveaux	4 niveaux	4 niveaux
	$P_f$	$8.39 \cdot 10^{-6}$	$7.48 \cdot 10^{-6}$	$7.69 \cdot 10^{-6}$	$7.71 \cdot 10^{-6}$	$7.68 \cdot 10^{-6}$	$7.60 \cdot 10^{-6}$
	$c_{P_f}$ (%)	10.9	3.66	26.2	5.82	4.73	3.13
Analyse n°3	$N_{\text{total}}$ appels	$10^5$	/	$3 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^4$	/
	$N_{\text{sim}}$	/	/	1000	2000	5000	/
				3 niveaux	3 niveaux	3 niveaux	/
	$P_f$	$1.10 \cdot 10^{-3}$	/	$1.11 \cdot 10^{-3}$	$1.11 \cdot 10^{-3}$	$1.11 \cdot 10^{-3}$	/
	$c_{P_f}$ (%)	9.53	/	10	5.19	4.77	/
Analyse n°4	$N_{\text{total}}$ appels	$10^5$	/	$3 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^4$	/
	$N_{\text{sim}}$	/	/	1000	2000	5000	/
				3 niveaux	3 niveaux	3 niveaux	/
	$P_f$	$5.31 \cdot 10^{-4}$	/	$5.06 \cdot 10^{-4}$	$4.84 \cdot 10^{-4}$	$4.84 \cdot 10^{-4}$	/
	$c_{P_f}$ (%)	13.7	/	17.1	8.75	4.31	/

En plus de l'évaluation de la probabilité de défaillance  $P_f$ , la méthode IS-CE fournit une information supplémentaire sur l'allure des matrices de transition de chargement à chaque niveau de l'algorithme. Cette approche donne en effet l'évolution des matrices de transition  $\hat{\mathbf{Q}}_t$  qui permettent de générer les séquences de chargement responsables des plus grandes avancées de fissure. Les figures 5.3 et 5.4 illustrent l'évolution des matrices de

<sup>7</sup>La méthode de pondération avec le niveau précédent est ici choisie pour actualiser les paramètres des matrices de transition  $\hat{\mathbf{Q}}_t$  des chaînes de Markov.  $\alpha = 0.6$  permet de converger en 3 niveaux de  $N_{\text{sim}}$  simulations pour les analyses n°1, 3 et 4 et en 4 niveaux pour l'analyse n°2. Les seuils  $\hat{\gamma}_t$  correspondent aux probabilités  $\rho = 0.1$  faciles à évaluer sous les densités  $p_X(\cdot, \hat{\mathbf{Q}}_t)$ .

<sup>8</sup>Un nombre aussi élevé de simulations est rendu possible pour cet exemple car :

- la durée d'un calcul est inférieure à une minute (séquences de chargement générées courtes,  $N = 500$ ),
- les programmes informatiques ont été implémentés de manière à pouvoir traiter simultanément plusieurs simulations sur un même processeur, et
- les calculs ont été distribués sur une machine à plusieurs processeurs pour réduire les temps de calculs.

transition pour les analyses n° 3 et 4 en traçant les différences  $(\hat{\mathbf{Q}}_t - \mathbf{P})$  à chaque niveau  $t$ .

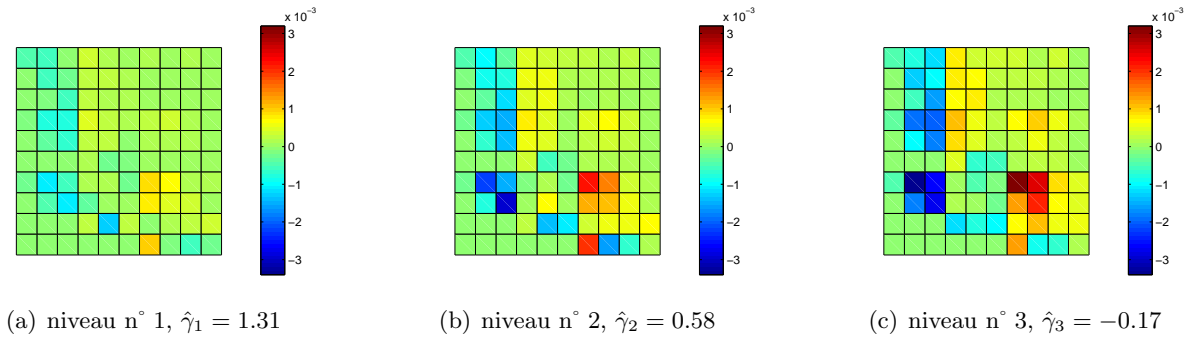


Figure 5.3 – Évolution des matrices de transition  $(\hat{\mathbf{Q}}_t - \mathbf{P})$ , analyse n° 3 (Paris,  $N = 102000$ ),  $N_{\text{sim}} = 5000$ .

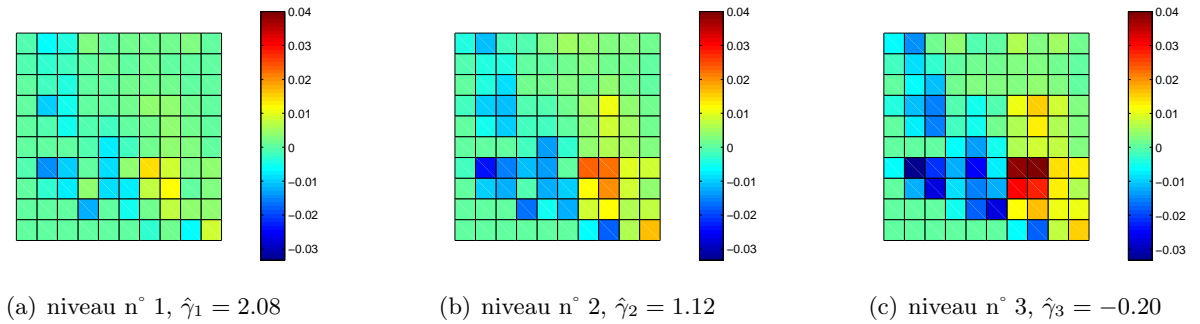


Figure 5.4 – Évolution des matrices de transition  $(\hat{\mathbf{Q}}_t - \mathbf{P})$ , analyse n° 4 (PREFFAS,  $N = 52500$ ),  $N_{\text{sim}} = 5000$ .

Les cycles états des matrices de transition  $(\hat{\mathbf{Q}}_t - \mathbf{P})$  sont rangés (ligne et colonne) comme suit :

$$\{(s_2, s_1); (s_3, s_1); (s_3, s_2); (s_4, s_1); (s_4, s_2); (s_4, s_3); (s_5, s_1); (s_5, s_2); (s_5, s_3); (s_5, s_4)\}$$

où  $\forall i$  et  $j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ ,  $s_i, s_j \in \{0.039, 0.113, 0.248, 0.507, 0.840\}$ .

Pour l'analyse n° 3 menée avec la loi de Paris, les probabilités de transition qui augmentent le plus à la défaillance sont celles qui permettent de générer des cycles de grandes amplitudes comme par exemple la probabilité de transition  $p_{(s_5, s_1) \rightarrow (s_5, s_1)}$ . Pour chaque distribution de probabilité, c'est-à-dire pour chaque ligne  $i$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, K = 10\}$ , les probabilités les plus à droite augmentent donc, et celles les plus à gauche diminuent.

Pour l'analyse n° 4 menée avec PREFFAS, les probabilités de transition qui augmentent

le plus à la défaillance sont celles qui permettent de passer d'un cycle état quelconque à un cycle état de maximum  $s_5$ . Un tel cycle donne en effet la plus grande amplitude  $K_{\max} - K_{\text{ouv}}$ , où  $K_{\text{ouv}}$  est le niveau d'ouverture du cycle.

**Conclusion.** Les critères de validation de la méthode IS-CE : absence de biais par rapport aux résultats de référence et faible dispersion des estimations autour de la moyenne à faible nombre d'évaluations de la fonction d'état-limite sont respectés, et cela quels que soit le degré de complexité du modèle mécanique impliqué (loi de Paris ou PREFFAS) et la longueur des chaînes de Markov générées (500, 525 et 102000 cycles). Ces premiers exemples démontrent ainsi le potentiel et la robustesse de la méthode IS-CE par rapport aux simulations de MC pour des analyses de fiabilité de la propagation de fissure. Il est important de souligner que les états des chaînes de Markov ne donnent pas ici directement l'issue (*i.e.* défaillant ou non défaillant) pour les analyses menées. Ce résultat est en effet une fonction plus ou moins complexe (modèle mécanique) de l'ensemble des états de la chaîne. Enfin, cette méthode permet d'obtenir des informations fiabilistes supplémentaires par rapport à la méthode de MC telles que les matrices de transition des chaînes de Markov à chaque niveau des simulations.

#### 5.5.4 Résultats des analyses avec les chaînes de Markov cachées (HMM)

L'adéquation de l'approche fiabiliste IS-CE, à nombre de simulations réduit, aux problèmes de tolérance aux dommages sous chargements aléatoires modélisés par chaînes de Markov est avérée pour les exemples académiques traités. Cette dernière section vise à explorer la pertinence de la méthode IS-CE lorsque le chargement est non plus modélisé par des chaînes de Markov mais par des chaînes de Markov cachées. Il s'agit en particulier de tester les développements de la partie 5.4.2. Nous montrons que, malgré des résultats encourageants, des problèmes de robustesse de l'algorithme ont été identifiés et restent à lever dans le cadre de futurs travaux.

##### 5.5.4.1 Analyses n° 2 et 3 - loi de Paris

Ces deux premiers exemples de propagation de fissure avec modèle de Paris permettent de traiter :

- le calcul d'une probabilité de l'ordre de  $10^{-3}$  (les chargements sont composés de  $N = 102000$  cycles) et
- le calcul d'une probabilité faible ( $\approx 10^{-6}$ ) (les chargements sont composés de  $N =$

500 cycles).

**Paramètres de l'algorithme IS-CE.** Étant donné que le modèle de Paris n'est pas particulièrement sensible aux valeurs extrêmes mais plutôt à l'amplitude des cycles, il est choisi de tester si l'algorithme IS-CE décliné pour les chaînes de Markov, voir paragraphe 5.4.1, fonctionne lorsque des chaînes de Markov cachées sont les entrées de la loi de Paris. Seuls les paramètres de la matrice de transition  $\mathbf{Q}$  sont actualisés. Les paramètres  $v$  des densités de probabilités  $f_{m'_n}$  et  $f_{M'_n}$ ,  $y$  compris ceux de la distribution des valeurs extrêmes, sont quant à eux figés à leurs valeurs d'origine  $u$ .

La méthode de pondération de la nouvelle solution  $\hat{\mathbf{Q}}_t$  par rapport aux niveaux précédents est à nouveau choisie, relation (5.47). Le couple de paramètres  $\rho = 0.1$  et  $\alpha = 0.6$  est retenu car il conduit à de bons résultats. Le coefficient  $\alpha = 0.6$  permet de suffisamment prendre en compte la nouvelle solution par rapport au niveau précédent. Il s'agit d'un bon compromis pour obtenir des vitesses de convergence satisfaisantes à nombre de simulations par niveau  $N_{\text{sim}}$  limité.

**Résultats.** Les résultats des calculs fiabilistes obtenus, d'une part avec les simulations de Monte Carlo et d'autre part avec les simulations d'importance basées sur l'entropie croisée, sont présentés dans le tableau 5.4 et sur les figures 5.5(a) et 5.5(b).

Tableau 5.4 – Résultats des calculs de fiabilité avec modélisation stochastique du chargement par chaînes de Markov cachées.

		MC		IS-CE		
Analyse n°2	$N_{\text{total}}$ appels	$10^8$	$1.4 \cdot 10^4$	$3.5 \cdot 10^4$	$7 \cdot 10^4$	$1.4 \cdot 10^5$
	$N_{\text{sim}}$	/	2000	5000	10000	20000
			7 niveaux	7 niveaux	7 niveaux	7 niveaux
	$P_f$	$1.14 \cdot 10^{-6}$	$9.16 \cdot 10^{-7}$	$1.27 \cdot 10^{-6}$	$1.14 \cdot 10^{-6}$	$1.13 \cdot 10^{-6}$
	$c_{P_f}$ (%)	9.36	65.2	45.8	17.3	13.5
Analyse n°3	$N_{\text{total}}$ appels	$10^5$	$4 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^4$	/
	$N_{\text{sim}}$	/	1000	2000	5000	/
			4 niveaux	4 niveaux	4 niveaux	/
	$P_f$	$1.47 \cdot 10^{-3}$	$1.42 \cdot 10^{-3}$	$1.35 \cdot 10^{-3}$	$1.35 \cdot 10^{-3}$	/
	$c_{P_f}$ (%)	8.24	30.4	14.2	6.48	/

La méthode IS-CE, avec actualisation des paramètres de la matrice de transition des chaînes de Markov cachées uniquement, fonctionne pour ces deux exemples de propagation de fissure avec la loi de Paris. L'algorithme converge pour chaque calcul réalisé ce qui



montre sa robustesse.

Les commentaires suivants peuvent être formulés compte tenu des résultats obtenus :

- il n'y a pas de biais prononcé entre les probabilités estimées par la méthode IS-CE et les résultats de Monte Carlo considérés comme références,
- à coefficient de variation quasi-similaire, les gains en termes de simulations sont toujours importants par rapport au nombre de simulations nécessaire à l'obtention des résultats de référence,
- la méthode IS-CE est particulièrement performante dans le cas où de très faibles probabilités ( $10^{-6}$ ) doivent être évaluées : elle nécessite environ 700 fois moins d'appels au modèle mécanique que les simulations de MC sur l'exemple traité,
- elle satisfait ainsi aux critères d'absence de biais et de faible dispersion à nombre d'appels mécaniques restreint,
- le nombre de niveaux nécessaire à la convergence de l'algorithme IS-CE avec actualisation des paramètres de la seule matrice de transition est cependant plus élevé, respectivement de 7 et 4 niveaux pour les analyses n° 2 et 3, contre 4 et 3 dans les exemples où les chargements sont simulés avec les chaînes de Markov.

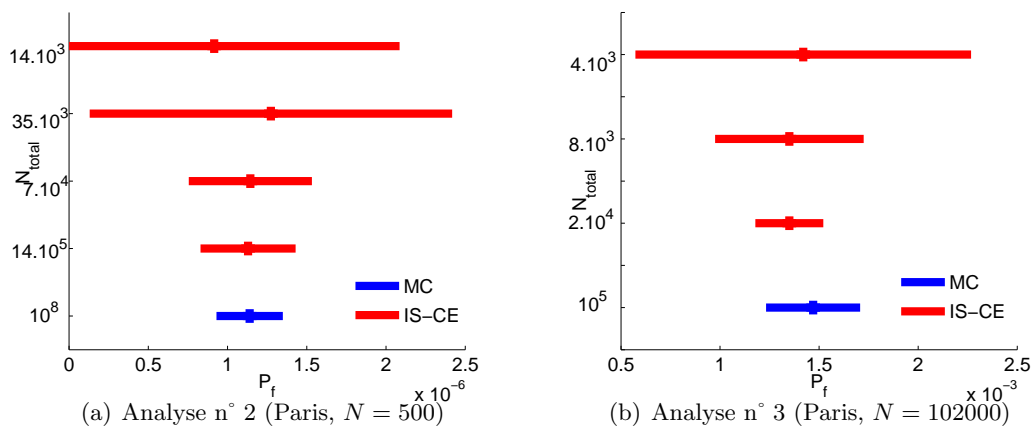


Figure 5.5 – Probabilités de défaillance  $P_f$  et intervalles de confiance à 95% fonction du nombre total d'appels à la fonction d'état-limite  $g$ , obtenus à partir des méthodes MC et IS-CE.

La méthode IS-CE, avec actualisation de la matrice de transition uniquement, reste ainsi efficace pour ce type de problème même si les gains en termes de simulations par rapport aux résultats de Monte Carlo sont moindres que dans les deux mêmes exemples avec chargements simulés par chaînes de Markov. Il est rappelé que l'algorithme développé à la section 5.4.2.4 pour les chaînes de Markov caché n'est pas appliqué ici.

#### 5.5.4.2 Analyse n° 4 - modèle PREFFAS

**Choix de l’algorithme IS-CE et de ses paramètres.** L’algorithme des tirages d’importance associés à l’entropie-croisée IS-CE avec actualisation de la matrice de transition uniquement (algorithme du paragraphe 5.4.1) ne converge pas pour cet exemple impliquant le modèle PREFFAS, sensible aux valeurs extrêmes. En effet, les seuils  $\hat{\gamma}_t$  croissent et décroissent successivement sans parvenir à devenir négatifs. Il est ainsi choisi de tester si les développements apportés à la méthode IS-CE pour une utilisation avec les chaînes de Markov cachées, voir 5.4.2, apportent une solution à cet exemple. Ceux-ci ont été proposés afin d’actualiser simultanément la matrice de transition  $\hat{\mathbf{Q}}_t$  et les paramètres des valeurs extrêmes  $\hat{v}_t$ , à chaque niveau de simulations  $t$ .

Concrètement, l’algorithme du paragraphe 5.4.2.4 est appliqué à ce problème de propagation de fissure avec modèle PREFFAS et pour lequel les séquences de chargement d’amplitude variable sont générées par des chaînes de Markov cachées. Les paramètres sont les suivants :

- la probabilité  $\rho$  permettant de déterminer les seuils  $\hat{\gamma}_t$  est fixée à 0.1 pour chaque niveau de simulation  $t$ ,
- le nombre de simulations par niveau  $N_{\text{sim}}$  est successivement égal à 1000, 2000 puis 5000 dans les analyses menées,
- la méthode de lissage des probabilités, relation (5.61) avec coefficient  $\alpha = 0.6$ , est utilisée pour déterminer les nouvelles probabilités de transition  $\hat{\mathbf{Q}}_t$  et ainsi éviter les problèmes d’estimation de  $P_f$ ,
- la méthode de lissage, relations (5.66) et (5.67), est également retenue pour corriger les solutions  $\hat{\xi}_t$  et  $\hat{\beta}_t$  du problème de maximisation sous contraintes (5.57). On choisit de faire varier la valeur du paramètre  $\alpha_1$  entre 0.2 et 0.8 pour tester son influence sur les estimations de  $P_f$ .

**Résultats.** Malgré la convergence numérique de l’algorithme IS-CE, les estimations de la probabilité de défaillance  $P_f$  sont très dispersées, ce qui indique un manque évident de robustesse de l’algorithme proposé pour cet exemple. Seules les estimations de  $P_f$  les plus proches des résultats de Monte Carlo sont reportées sur la figure 5.6 en fonction du coefficient de lissage  $\alpha_1$  et du nombre de simulations par niveau  $N_{\text{sim}}$ . Les résultats indiquent que peu de calculs convergent vers la solution de référence du problème parmi les  $n_r = 30$  calculs d’une même configuration  $(\alpha_1, N_{\text{sim}})$ .

Les difficultés rencontrées peuvent avoir plusieurs origines d’après les références [Rid05, CK11] :

- **le problème traité lui même** [Rid05] : le modèle PREFFAS est extrêmement sensible aux valeurs extrêmes et donc aux paramètres  $\xi$  et  $\beta$  de la distribution de Pareto généralisée. Cette forte sensibilité aux valeurs extrêmes du processus de propagation avec modèle PREFFAS a déjà été mise en évidence au paragraphe 4.2.5.2 du chapitre 4. Dans le cas de séquences courtes répétées un grand nombre de fois ( $F = 100$  pour cet exemple), le plus grand maximum de la séquence  $P_{\max}$  génère l'effet de retard principal, donc un ralentissement de l'avancée, mais contribue également plus que les autres maximums à l'avancée de fissure. Ces effets contradictoires peuvent perturber la méthode IS-CE.
- **le choix de la famille des densités** [CK11] : la famille des densités de probabilité candidates peut s'avérer trop restreinte. Dans ce cas, la solution optimale  $p_{XS}(\cdot, \hat{\mathbf{Q}}^*, \hat{v}^*)$  de l'algorithme multi-niveaux reste trop éloignée de la densité d'importance optimale  $q_{XS}^*$ . Le paramètre  $\xi$  de la loi de Pareto généralisée est ici borné entre  $-0.5$  et  $0$  afin que la nouvelle solution DPG appartienne au même domaine d'attraction que la distribution DPG d'origine.
- **la dégénérescence du rapport de vraisemblance en grande dimension** [CK11] : les paramètres  $\hat{v}_t = \{\hat{\xi}_t, \hat{\beta}_t\}$  estimés à partir de l'algorithme multi-niveaux peuvent ne pas être optimaux (*suboptimal problem* en anglais) et sont donc des mauvais estimateurs de la solution  $p_{XS}(\cdot, \hat{\mathbf{Q}}^*, \hat{v}^*)$ . C'est le cas des problèmes de grandes dimensions et lorsque le problème de maximisation ne se résout pas analytiquement, ce qui est aussi le cas ici. C'est la dégénérescence du rapport de vraisemblance qui est alors à l'origine du problème selon la [CK11].
- On biaise la matrice de transition et les paramètres de la loi de Pareto généralisée sur l'ensemble de la séquence. Rien ne permet de dire que la solution optimale correspond à un tel cas de figure. On pourrait avoir une évolution de ces paramètres le long de la séquence.
- La résolution numérique (et non analytique) du problème de maximisation sous contraintes (ou du système d'équations sous-jacent) constitue une difficulté supplémentaire. On pourrait étudier plus en détails le processus d'optimisation et vérifier que la solution trouvée correspond bien au maximum global et non pas à une solution locale.

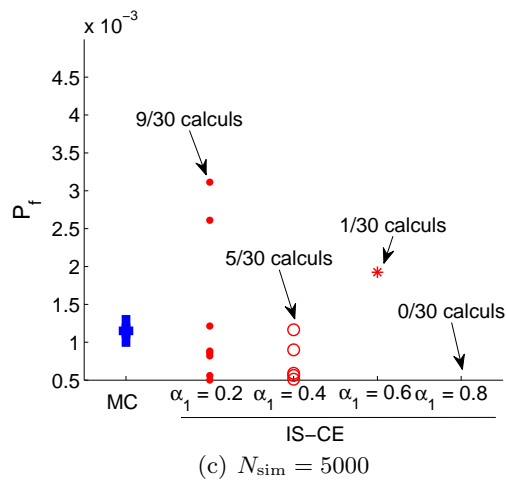
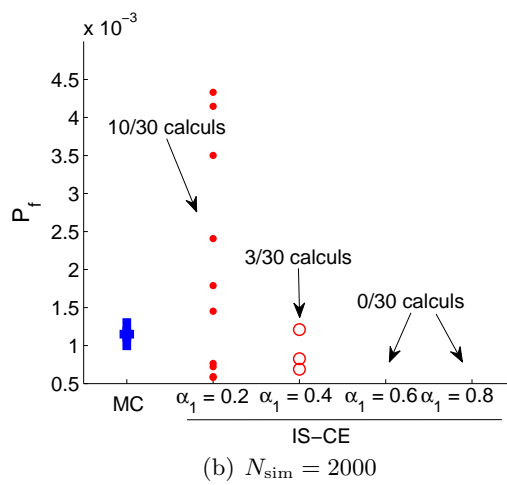
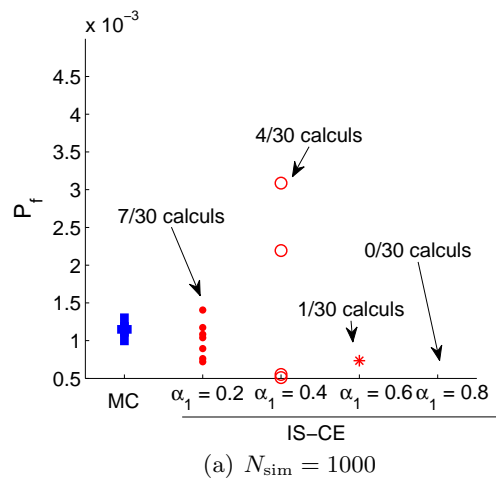


Figure 5.6 – Confrontation des résultats jugés pertinents de la méthode IS-CE aux résultats de Monte Carlo, en fonction du coefficient de lissage  $\alpha_1$  et du nombre de simulations par niveau  $N_{sim}$ .

Lorsque le calcul avec les simulations d'importance IS-CE donne une estimation de la probabilité de défaillance  $P_f$  jugée correcte (*i.e.* suffisamment proche du résultat de référence obtenu par MC), il est possible de savoir quelles sont les matrices de transition et les densités de Pareto généralisées qui permettent de générer les séquences de chargement les plus sévères et qui conduisent donc à la défaillance. Une illustration est donnée ci-après. La probabilité estimée<sup>9</sup> vaut  $1.21 \cdot 10^{-3}$  et le nombre de simulations par niveau est de  $N_{\text{sim}} = 5000$ . L'algorithme converge en 4 niveaux. Les matrices  $\hat{\mathbf{Q}}_t - \mathbf{P}$  sont présentées à chaque niveau  $t$  sur la figure 5.7 et les densités de Pareto généralisées correspondantes sont graphiquement reportées sur la figure 5.8.

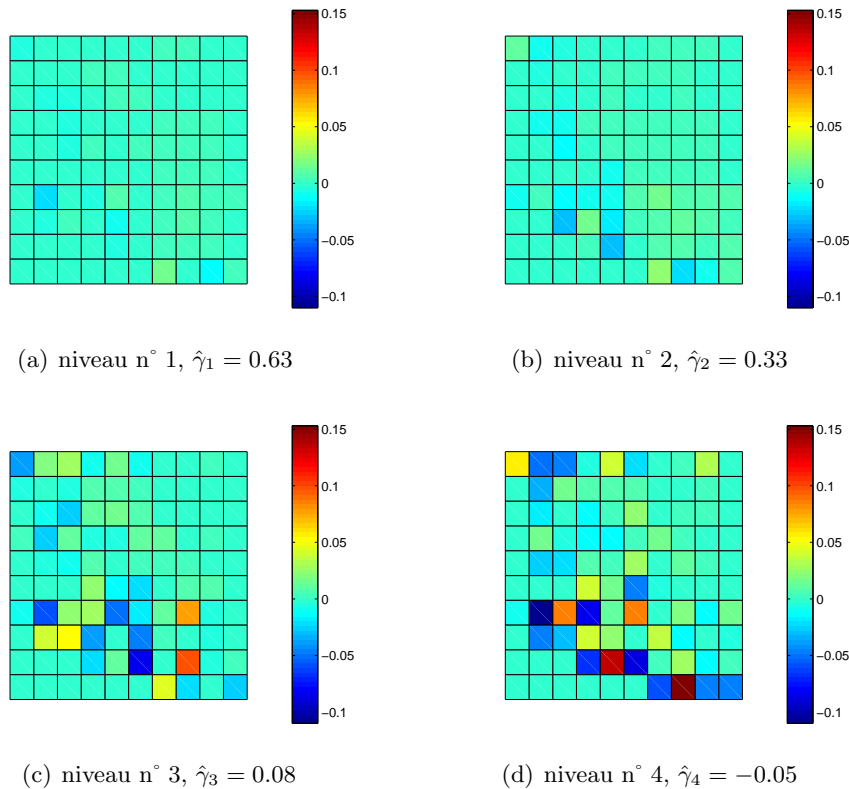


Figure 5.7 – Évolution des matrices  $(\hat{\mathbf{Q}}_t - \mathbf{P})$ , analyse n° 4 (PREFFAS,  $N = 52500$ ),  $N_{\text{sim}} = 5000$ .

On constate que c'est la distribution des valeurs extrêmes qui subit le plus de changements dans une première phase. La queue de la loi DPG devient de moins en moins lourde (niveaux n° 1 à 3). Il y a donc moins de charges élevées, ralentissant le plus l'avancée de fissure par le biais du modèle PREFFAS, qui sont simulées. Ainsi les avancées de fissure sont plus grandes et il y a plus de réalisations défaillantes. Les termes de la matrice de transition évoluent très peu pour les niveaux n° 1 et 2. Au niveau n° 3, des changements

<sup>9</sup>La probabilité de référence estimée par les simulations de MC est de  $1.15 \cdot 10^{-3}$ .

sont simultanément observés sur la matrice de transition et sur la densité de Pareto. Enfin, au dernier niveau, la densité de Pareto n'évolue quasiment plus, ce sont les termes de la matrice de transition qui changent le plus.

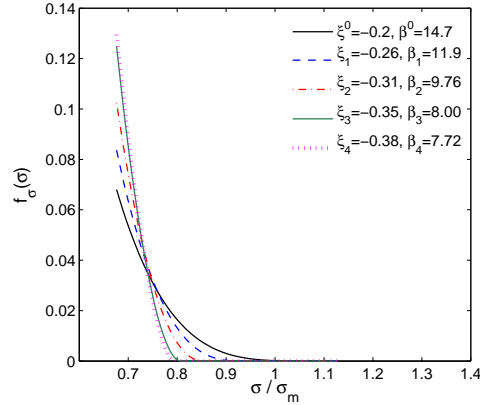


Figure 5.8 – Evolution des distributions de Pareto généralisées, analyse n° 4 (PREFFAS,  $N = 52500$ ),  $N_{\text{sim}} = 5000$ .

**Conclusion.** Pour conclure, ces résultats sont donc à la fois décevants car cet exemple démontre que l'algorithme proposé manque de robustesse, mais cependant encourageants car, quand il parvient néanmoins à trouver une solution acceptable, les gains en nombre d'appels sont significatifs. De plus, l'algorithme fournit les matrices de transition ainsi que les allures des distributions des valeurs extrêmes à la défaillance, contrairement à la méthode MC. Des efforts supplémentaires doivent donc être fournis pour identifier la source exacte du manque de robustesse et proposer un algorithme qui fournit une estimation de  $P_f$  suffisamment proche de celle recherchée. Les raisons avancées ici sont uniquement des hypothèses qui doivent être analysées en profondeur.

## 5.6 Conclusions et perspectives

La première partie de ce dernier chapitre de thèse a tout d'abord permis d'introduire les notions essentielles à la formulation du problème de fiabilité en tolérance aux dommages et d'établir le cadre d'application de l'approche fiabiliste basée sur les modèles stochastiques du chargement de fatigue construits au chapitre 3. Le choix d'une modélisation par chaînes de Markov et chaînes de Markov cachées a conduit à développer une méthode de résolution spécifique afin de réduire les coûts de calcul par rapport à l'approche traditionnelle des simulations de Monte Carlo. Cette méthode, différant des approches classiquement utilisées dans la communauté du calcul fiabiliste en mécanique, est basée sur les tirages d'importance associés à l'entropie-croisée (méthode IS-CE). Une version de cette méthode a été

déclinée dans la littérature aux chaînes de Markov utilisées pour modéliser des réseaux de télécommunications [Rid05]. Des développements de cette approche ont ici été proposés afin d'aborder les calculs de fiabilité faisant intervenir des chaînes de Markov cachées. La méthode IS-CE rend ainsi envisageable le calcul des probabilités de défaillance lors d'analyses de fiabilité en tolérance aux dommages dans un contexte de modèles basés sur les chaînes de Markov ou chaînes de Markov cachées. Elle fournit également des informations fiables intéressantes et complémentaires à la probabilité de défaillance calculée, tels que les paramètres des modèles stochastiques responsables des simulations les plus sévères.

L'applicabilité de la méthode IS-CE aux problèmes de fiabilité d'intérêt a été investiguée dans la deuxième partie du chapitre. Il est ici important de rappeler que contrairement aux réseaux de télécommunications, les chaînes de Markov et les chaînes de Markov cachées ne constituent pas la réponse directe de la fonction d'état-limite (défaillant / non défaillant) mais les entrées d'un modèle de propagation de fissure plus ou moins sophistiqué. Résoudre un tel problème de fiabilité constitue ainsi un réel enjeu scientifique. Les principales conclusions des tests réalisés sont les suivantes :

- Des résultats très concluants ont été obtenus sur les exemples de propagation fiable de fissure mettant en œuvre les chaînes de Markov, quel que soit le modèle mécanique utilisé (loi de Paris ou modèle PREFFAS). Les gains en termes de nombre d'appels au modèle mécanique nécessaire à l'évaluation de probabilités de défaillance faibles sont conséquents par rapport à la méthode de Monte Carlo pour une précision donnée des estimations. Ils démontrent ainsi le potentiel de la méthode IS-CE.
- L'algorithme IS-CE appliqué aux chargements de fatigue modélisés par chaînes de Markov cachées, entrées du modèle de propagation de fissure PREFFAS, ne conduit quant à lui pas systématiquement à de bons résultats. Les tests menés méritent donc d'être approfondis afin de vérifier, entre autres, s'il ne s'agit pas d'un problème dépendant du modèle mécanique mis en œuvre (PREFFAS ici). La réussite de la méthode IS-CE semble en effet parfois dépendre du problème traité d'après la référence [Rid05]. Il s'agit aussi de vérifier si le problème de dégénérescence du rapport de vraisemblance dans l'algorithme multi-niveaux évoqué par J.C.C. Chan et D.P. Kroese [CK11] n'est pas à l'origine du manque de robustesse de la méthode IS-CE.

D'une manière plus globale, des actions à différents niveaux sont à prévoir pour améliorer l'applicabilité de la méthode IS-CE aux problèmes de fiabilité en tolérance aux dommages sous chargements aléatoires modélisés par chaînes de Markov cachées. Celles-ci concernent :

- une étude plus détaillée des méthodes de résolution du problème de maximisation,

- l'actualisation des paramètres de toutes les distributions et pas seulement celles des valeurs extrêmes,
- le choix d'un autre modèle mécanique pour calculer l'avancée de fissure, par exemple la nouvelle version de PREFFAS (PREFFAS- $m$ ) développée au chapitre 1.
- la mise en œuvre de la solution proposée par J.C.C. Chan et D.P. Kroese [CK11] pour éviter le problème de "sous-optimalité" dans le cas de grandes dimensions. L'idée est de s'affranchir du rapport de vraisemblance dans le problème de maximisation de la méthode IS-CE en échantillonnant suivant la densité d'importance optimale  $q_{XS}^*$  approchée (méthode *Markov Chain Monte Carlo* ou méthode de minimisation de la variance de  $p_{XS}(\cdot, \hat{\mathbf{Q}}, \hat{v})$ ).



# Conclusions et Perspectives

## Conclusions

La pratique industrielle en aéronautique s'appuie actuellement sur des procédures conventionnelles de dimensionnement en fatigue qui sont, de manière générale, basées sur l'utilisation de facteurs dits de "sécurité" supposés couvrir l'aléa inhérent aux phénomènes de fatigue et de propagation de fissure. Le thème de ce travail de recherche s'inscrit dans une perspective globale d'introduction de la culture de l'incertain dans les métiers de conception et de maintenance fiables des structures aéronautiques dimensionnées en tolérance aux dommages. D'une manière générale, il s'agit de sensibiliser la communauté industrielle aux bénéfices potentiels qui peuvent être tirés de l'application d'approches probabilistes et fiabilistes en complément des méthodes déterministes sous-tendant les actuels règlements.

La formulation du problème de fiabilité et l'évaluation de la probabilité de défaillance en mécanique, que ce soit au cours du processus de conception ou de celui de maintenance, constituent des enjeux majeurs et les challenges qu'ils suscitent nécessitent des compétences pluridisciplinaires. La démarche de fiabilité en mécanique s'appuie sur trois grandes étapes : la modélisation stochastique la plus adéquate possible des paramètres d'entrée du modèle mécanique (savoir-faire du statisticien et du probabiliste), le choix d'un modèle mécanique robuste et suffisamment précis pour décrire la réalité physique des phénomènes mis en jeu (savoir-faire du mécanicien) et l'analyse du scénario de défaillance (savoir-faire de l'expert en fiabilité). Le couplage entre le modèle mécanique et les modélisations stochastiques des entrées constituent alors le problème de fiabilité à résoudre.

L'objectif de la thèse a consisté à traiter le problème de tolérance aux dommages sous l'angle probabiliste. Les enjeux à résoudre sont nombreux avant une mise en œuvre complète d'une approche fiabiliste de la tolérance aux dommages. Sur la base de l'état de l'art existant, ces travaux ont permis des avancées scientifiques sur les plans suivants : le choix et l'amélioration d'un modèle de propagation de fissure existant (PREFFAS), la modélisation stochastique du chargement de fatigue à partir d'enregistrements en vol sur avions militaires et la mise en place d'une stratégie de résolution du problème de fiabilité

adaptée aux modèles stochastiques proposés pour le chargement en fatigue.

L'étude de la propagation de fissure sous chargement d'amplitude variable nécessite l'utilisation de modèles mécaniques appropriés qui permettent de prendre en compte le phénomène de fermeture de fissure ainsi que les phénomènes de retard et d'accélération de vitesse de fissuration associés. Les travaux de thèse se sont appuyés sur le modèle PREFFAS qui représente un compromis jugé acceptable entre les modèles à cumul linéaire et des modèles plus sophistiqués pouvant traiter des chargements non-stationnaires. Le modèle PREFFAS tel qu'initialement proposé par ses concepteurs a permis d'apprécier la précision des modèles stochastiques de chargement développés dans le cadre des travaux de thèse sur la base d'une réelle approche en tolérance aux dommages. Les différentes analyses probabilistes et de fiabilité réalisées dans le cadre de ces travaux ont également été menées sur la base de ce modèle mécanique. L'hypothèse dite de stationnarité du modèle PREFFAS (périodicité des séquences de chargement appliquées) constitue cependant une limite majeure de ce modèle qui n'est pas cohérente avec la philosophie probabiliste dont l'objectif est de faire intervenir des spectres de chargement composés de séquences non répétitives. Pour cette raison, des évolutions de ce modèle ont été proposées pour un calcul cycle-à-cycle de l'avancée de fissure avec prise en compte de l'évanescence des effets d'interaction aussi bien pour les effets de surcharge que pour les effets Rainflow. Ces modifications permettent aussi d'aborder le cas de surcharge unique aussi bien que le cas de surcharges multiples. Le comportement du modèle développé a été évalué numériquement et sa validation expérimentale fera l'objet de travaux dans un futur proche.

Il est impératif de baser la modélisation stochastique du chargement de fatigue sur des données réelles recueillies en service pour une approche probabiliste de la tolérance aux dommages pertinente et réaliste. Ce type d'approche n'ayant pas été abordé dans la littérature, il a été jugé important de proposer une modélisation stochastique originale pour le chargement en fatigue-propagation s'appuyant sur des enregistrements temporels de contraintes issus de mesures en vol. Un état de l'art dans des disciplines variées (fatigue, propagation de fissure, vent, houle, offshore, économie, etc) a tout d'abord permis de référencer les processus stochastiques candidats à la modélisation des séquences de chargement de fatigue. L'analyse des données à disposition (séries temporelles de contraintes) a ensuite permis de dégager une piste de travail répondant aux objectifs fixés.

Le choix s'est porté vers les processus de Markov à temps discrets. Deux types de processus ont été étudiés, l'un basé sur des chaînes de Markov du premier ordre à espace d'états discret et l'autre basé sur des chaînes de Markov cachées à espace d'états continu. Le type de construction retenu permet à ces deux processus de modéliser des séquences de chargements en fatigue, *i.e.* des alternances de contraintes maximum et minimum, ce qui constitue entre autres une originalité des modèles proposés. Les paramètres de ces processus ont été identifiés à partir d'un ensemble de 27458 séries temporelles, correspondant

chacune à un vol d'un aéronef au sein de la flotte étudiée. La précision des modèles proposés a été évaluée par comparaison aux données réelles recueillies en vol. Cette comparaison n'a pas porté directement sur les trajectoires générées aléatoirement à l'aide de ces deux processus, mais sur la réponse d'un modèle mécanique (modèle PREFFAS ou loi de Paris) fonction de ces trajectoires. Ce choix a été fait de manière à analyser plus finement les écarts entre les trajectoires générées par les processus identifiés et celles correspondant aux données dans le cadre de la tolérance aux dommages, ces écarts pouvant être amplifiés par le modèle mécanique. Les résultats ont tout particulièrement démontré la pertinence de la représentation continue basée sur les chaînes de Markov cachées à reproduire l'aléa de chargement mais aussi à prédire de nouveaux chargements. Le potentiel de la méthodologie développée dépasse le cadre de l'utilisation qui en est faite dans ce mémoire. Elle pourrait par exemple être utilisée lors d'études probabilistes menées en phase de propagation de fissures courtes. Les modèles stochastiques proposés pourraient également être utilisés dans d'autres domaines que celui des charges subies en vol par les structures aéronautiques militaires et pour lesquelles les données sont disponibles : les charges dues au vent et à la houle subies par des constructions, les charges générées par la conduite ou l'état de la route sur des véhicules, etc.

Le couplage entre le modèle de propagation de fissure et la modélisation stochastique des séquences de chargement de fatigue a ensuite permis de réaliser un ensemble de simulations de propagation de fissure d'un dommage en bord d'alésage d'un longeron principal de l'avion de combat étudié. Le travail a consisté à analyser les points suivants :

- identification des paramètres des séquences de chargement impactant fortement l'avancée de fissure : fréquence et intensité des valeurs extrêmes, nombre de vols cumulés, longueur de la séquence de chargement,
- poids respectifs de l'aléa de chargement et de celui propre au matériau (aléa sur la loi de propagation).

Ces analyses paramétriques ont permis de conclure que l'aléa de chargement influe notablement sur la dispersion des résultats de propagation de fissure. Il paraît donc légitime et essentiel de prendre en compte les incertitudes sur le chargement de fatigue dans le problème de fiabilité.

La dernière partie des travaux de thèse a ainsi porté sur la formulation et la résolution du problème de fiabilité en tolérance aux dommages à partir des modèles stochastiques retenus pour le chargement de fatigue. Le choix d'une modélisation par chaînes de Markov et chaînes de Markov cachées a imposé la mise au point d'une méthode performante et économe en termes de coût de calcul, permettant d'évaluer la probabilité de défaillance des structures étudiées. Ceci a constitué le troisième objectif de ces travaux. La méthode de Monte Carlo classique s'avérant trop coûteuse en temps de calcul, une méthode alternative a été envisagée : les tirages d'importance basés sur l'entropie croisée. Cette méthode inno-

vante pour la communauté de la mécanique probabiliste rend possible le calcul de fiabilité dans le contexte de modèles basés sur les chaînes de Markov. Des résultats encourageants ont été obtenus sur des exemples académiques de propagation de fissure démontrant ainsi le potentiel de cette méthode. Des travaux complémentaires sont néanmoins encore nécessaires pour résoudre le problème de fiabilité basé sur les modèles de Markov cachés et ce de manière satisfaisante et robuste.

### Perspectives

Les travaux de thèse présentés dans ce mémoire s'inscrivent dans le développement d'une méthodologie fiabiliste de la tolérance aux dommages pour DGA/TA. Bien que les développements réalisés aient permis d'apporter quelques éléments de réponse à différents niveaux de la démarche générale, il est nécessaire de garder à l'esprit que les verrous scientifiques à lever sont encore nombreux avant d'envisager son intégration dans un contexte industriel. Par conséquent ces travaux offrent de nombreuses perspectives. Celles-ci concernent les éléments abordés dans ce mémoire, les différentes étapes de la démarche fiabiliste d'une manière générale, ainsi que l'exploitation et l'intégration des résultats de fiabilité dans les processus de conception et de maintenance.

**A court et moyen termes.** Les modèles de Markov proposés pour modéliser l'aléa des séquences de chargement d'amplitude variable sont adaptés dans le cadre d'un suivi des charges en service où les données sont nombreuses. Il est important de souligner que les modèles markoviens exploités exigent des données en nombre suffisant afin d'assurer une estimation précise de leurs paramètres. Il est ainsi primordial de rappeler le rôle essentiel des campagnes de mesures sur avions qui permettent de construire des représentations stochastiques les plus pertinentes possible. En l'absence d'enregistrements en vol, il serait néanmoins intéressant de proposer une alternative à la méthodologie développée en se basant sur les statistiques des paramètres de vols issues du retour d'expérience et/ou de jugements d'experts. Il serait également intéressant d'avoir quelques éléments sur les limites des modèles markoviens en termes d'applicabilité. Une des perspectives consiste donc en un travail de veille sur ces méthodes afin de les adapter au mieux aux objectifs visés et de définir un ensemble de recommandations pour une utilisation optimale de ces méthodes.

Une extension du modèle PREFFAS (PREFFAS-*m*) a été proposée pour rendre son utilisation compatible avec des études probabilistes mettant en œuvre des spectres de chargement complètement aléatoires mais également avec des applications particulières où les surcharges seraient peu fréquentes. Les premières simulations numériques ont suggéré une bonne pertinence des évolutions proposées. Cependant celles-ci doivent impérativement être confortées par des essais avant de pouvoir utiliser le modèle PREFFAS-*m* en

tolérance aux dommages.

Enfin, la résolution du problème de fiabilité abordée dans le chapitre 5 nécessite d'être approfondie. Il s'agit dans un premier temps de poursuivre la validation de la méthode d'entropie croisée pour les problèmes de fiabilité en tolérance aux dommages basés sur les chaînes de Markov cachées. Le dernier exemple traité a en effet mis en évidence les limites de cette méthode en grande dimension. Les causes exactes du manque de robustesse de la méthode n'ayant cependant pas encore été identifiées, celles-ci doivent faire l'objet de recherches supplémentaires. Une perspective à plus long terme pourrait également concerner l'implémentation d'outils permettant la résolution du problème de fiabilité lorsque celui-ci dépend de manière complexe du temps. Ceci est le cas lorsque la tenue résiduelle est évaluée aux charges réelles et non aux charges limites. Dans ce cas, la fonction de performance n'est plus décroissante avec le temps et la probabilité cumulée de défaillance ne se calcule plus comme la probabilité instantanée. Des techniques adaptées pourraient ainsi être envisagées pour répondre à ce type de problème.

**A plus long-terme.** Au delà des perspectives évoquées précédemment, les réflexions menées sur l'ensemble de la démarche fiabiliste ont permis d'identifier les points critiques suivants sur lesquels des efforts conséquents doivent être fournis. En premier lieu, un travail complémentaire significatif devrait permettre d'appréhender la fiabilité d'une structure de manière globale, c'est-à-dire en prenant en compte l'aléa de chargement et des paramètres matériau (loi de propagation) mais aussi l'aléa sur d'autres paramètres tels que les défauts initiaux et les propriétés matériau caractérisant la phase de rupture (facteur d'intensité de contraintes critique, par exemple). Concernant l'aléa sur les défauts initiaux, le modèle stochastique devrait à la fois intégrer l'aléa propre aux dimensions de ceux-ci mais également la variabilité spatiale des fissures plus difficile à appréhender d'un point de vue stochastique. Sous réserve de données disponibles en nombre suffisant, ceci imposerait aussi d'aborder des points délicats tels que le seuil de non-propagation des fissures longues et les phases d'amorçage et de propagation de fissures courtes. Les faibles dimensions de fissures sont en effet incompatibles avec les modèles de propagation de fissures longues pour lesquels un état de l'art succinct a été présenté dans ce mémoire.

Malgré les nombreux efforts déployés pour prédire au mieux la fissuration sous chargement d'amplitude variable, les écarts entre les prévisions obtenues à partir des modèles actuellement utilisés, mêmes les plus sophistiqués, et les mesures peuvent être importants dans certains cas. Il serait ainsi intéressant de choisir le modèle de prévision de la fissuration en accord avec des essais expérimentaux pour l'application souhaitée afin de limiter au mieux l'erreur mesure/prévision. De manière générale, l'erreur statistique (épistémique) liée aux tailles d'échantillons considérés (nombre de trajectoires, nombre d'essais de propagation sous chargements d'amplitude constante, nombre d'essais de tenue résiduelle, etc)

pourrait également être prise en compte dans la démarche probabiliste/fiabiliste.

Enfin, il serait intéressant à la fois pour l'aéronautique militaire et civile d'envisager l'intégration de l'ensemble des méthodes développées dans les processus de conception et d'optimisation de la maintenance des structures sollicitées en fatigue, sous contrainte de fiabilité. Une méthodologie pourrait tout d'abord être définie pour analyser les marges implicitement prises dans l'approche basée sur l'utilisation de coefficients de sécurité. Une autre devrait ensuite permettre de dégager les éléments permettant de guider les choix en phase de conception (sur la base de l'interprétation de sensibilités fiabilistes, par exemple). Le travail consisterait enfin à proposer une méthodologie permettant de minimiser les coûts sur l'ensemble de la durée de vie de la structure, tout en garantissant un niveau de sûreté minimal. Elle pourrait entre autres s'appuyer sur l'approche *Risk-Based Inspection* utilisée notamment dans les domaines offshore et naval, intégrant les types d'inspections, leur qualité, leur fréquence, etc.

# Bibliographie

- [AB01] S.-K. Au and J.L. Beck. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16 :263–277, 2001.
- [ABvD<sup>+</sup>76] W. Aicher, J. Branger, G.M. van Dijk, J. Ertelt, M. Hück, J.B. de Jonge, H. Lowak, H. Rhomberg, D. Schütz, and W. Schütz. Description of a fighter aircraft loading standard for fatigue evaluation FALSTAFF. Technical report, Common report of FCW Emmen, LBF, NLR, IABG, 1976.
- [ADS88] D. Aliaga, A. Davy, and H. Schaff. A simple crack closure model for predicting fatigue crack growth under flight simulation loading. *ASTM STP*, 982 :491–504, 1988.
- [AG57] T.W. Anderson and L.A. Goodman. Statistical inference about Markov chains. *Annals of Mathematical Statistics*, 28(3) :89–110, 1957.
- [Ail04] P. Ailliot. *Modèles autorégressifs à changements de régimes markoviens. Applications aux séries temporelles de vent*. PhD thesis, Université de Rennes I, 2004.
- [Aka73] H. Akaike. Information theory and maximum likelihood principle. In *2nd International Symposium on Information, Budapest*, pages 281–297, 1973.
- [AL02] C. Andrieu and M. Lemaire. A new method to assess reliability for a structure deteriorating with time. In *IABMAS'02*, 2002.
- [ALS04] C. Andrieu, M. Lemaire, and B. Sudret. The PHI2 method : A way to compute time-variant reliability. *Reliability Enginnering and System Safety*, 84 :75–86, 2004.
- [Bar76] J.M. Barsom. Fatigue crack growth under variable amplitude loading in various bridge steels. *Fatigue Crack growth Under Spectrum Loads. ASTM STP*, 595 :217–235, 1976.

- [BB02] F. Bickenbach and E. Bode. Markov or not Markov - This should be a question. In *42nd Congress of the European Regional Science Association*, 2002.
- [Ber98] A. Berchtold. *Chaînes de Markov et modèles de transition*. Hermès, 1998.
- [BJR94] G.E.P. Box, G.M. Jenkins, and G.C. Reinsel. *Time series analyses : forecasting and control*. Third Edition, Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1994.
- [BK10a] P.Z. Bermudez and S. Kotz. Parameter estimation of generalized Pareto distribution - Part I. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140 :1353–1373, 2010.
- [BK10b] P.Z. Bermudez and S. Kotz. Parameter estimation of generalized Pareto distribution - Part II. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140 :1374–1388, 2010.
- [BL07] J.-M. Bourinet and M. Lemaire. FORM sensitivities to correlation : application to fatigue crack propagation based on Virkler data. In *4th International ASRANet Colloquium*, 2007.
- [Bod98] E. Bode. Lokale wissensdiffusion und regionale divergenz in deutschland. In *Kieler Studien 293*. Tübingen : Mohr, 1998.
- [Bou88] N. Bouleau. *Probabilités de l'ingénieur*. Hermann, 1988.
- [Bou00] N. Bouleau. *Processus stochastiques et applications*. Hermann, 2000.
- [BR84] G. Baudin and M. Robert. Crack growth model for flight type loading. In *5th EFC in Lisbon*, 1984.
- [BR97] A. Berchtold and G. Ritschard. Stabilité de l'estimation d'une distribution de probabilité. In *Recueil des Résumés des Communications des 29ème Journées de Statistique*, pages 142–145, 1997.
- [BSV88] A. Bignonnet, Y. Sixou, and J.-M. Verstavel. Equivalent loading approach to predict fatigue crack growth under random loading. *International Journal of Fatigue*, 1 :372–383, 1988.
- [BT05] D. Benasciutti and R. Tovo. Spectral methods of lifetime prediction under wide-band stationary random processes. *International Journal of Fatigue*, 27 :867–877, 2005.
- [CK11] J.C.C. Chan and D.P. Kroese. Improved cross-entropy method for estimation. *Statistics and Computing*, 2011.



- 
- [CL67] H. Cramèr and M.R. Leadbetter. *Stationary and related stochastic processes*. Dover, 1967.
- [CMR05] O. Cappé, E. Moulines, and T. Rydén. *Inference in Hidden Markov Models*. Springer Series in Statistics, 2005.
- [Col01] S.G. Coles. *An introduction to statistical modeling of extreme values*. Springer, 2001.
- [Cra46] H. Cramèr. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton Series, 1946.
- [CS02] B.A. Craig and P.P. Sendi. Estimation of the transition matrix of a discrete-time Markov chain. *Health Economics*, 11 :33–42, 2002.
- [Dav85] A. Davy. *Modélisation de la fissuration en fatigue sous chargements d'amplitude variable ; Application aux spectres d'avions civils*. PhD thesis, Université de Compiègne, 1985.
- [dBKMR05] P.T. de Boer, D. Kroese, S. Mannor, and R.Y. Rubinstein. A tutorial on the cross-entropy method. *Annals of Operations Research*, 134 :19–67, 2005.
- [dJ79] J.B. de Jonge. Additional information about FALSTAFF. Technical Report NLR-TR-79056-U, National Aerospace Laboratory (NLR), Amsterdam, 1979.
- [DJ08] A. Doucet and A.M. Johansen. A tutorial on the cross-entropy method. 2008.
- [DJL] J.F. Delmas, B. Jourdain, and B. Lapeyre. Processus aléatoires.
- [dJSL73] J.B. de Jonge, D. Schütz, and H. Lowak. A standardized load sequence for flight simulation tests on transport aircraft wing structures. Technical Report NLR-TR-73029-U, National Aerospace Laboratory (NLR), Amsterdam, 1973.
- [dKvdL81] A.U. de Koning and H.H. van der Linden. Prediction of fatigue crack growth rates under variable amplitude loading. *ASTM STP*, 743 :63–85, 1981.
- [DM05] O. Ditlevsen and H.O. Madsen. *Structural reliability methods*. Wiley, 2005.
- [DO86] O. Ditlevsen and R. Olesen. Statistical analysis of the Virkler data on fatigue crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(2) :177–195, 1986.
- [Dow82] S.D. Dowing. Simple rainflow counting algorithms. *International Journal of Fatigue*, 4 :31–41, 1982.

- [DS90] A.C. Davison and R.L. Smith. Models for exceedances over high thresholds (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society*, 52(3) :393–442, 1990.
- [Dug60] D.S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 8 :100–104, 1960.
- [Dun73] J.C. Dunn. A fuzzy relative of the ISODATA process and its use in detecting compact well-separated clusters. *Cybernetics and Systems*, 3 :32–57, 1973.
- [DZP97] J. Dominguez, J. Zapatero, and J. Pascual. Effect of load histories on scatter of fatigue crack growth in aluminum alloy 2024-T351. *Engineering Fracture Mechanics*, 56(1) :65–76, 1997.
- [Elb71] W. Elber. The significance of fatigue crack closure. *ASTM STP*, 486 :230–242, 1971.
- [ET93] B. Efron and R.J. Tibshirani. *An introduction to the bootstrap*. Chapman & Hall, 1993.
- [FNF05] S.C. Forth, J.C. Newman, and R.G. Forman. Evaluation of fatigue crack thresholds using various experimental methods. *Journal of ASTM International*, 2(6), 2005.
- [GD87] H. Ghonem and S. Dore. Experimental study of the constant-probability crack growth curves under constant amplitude loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 27(1) :1–25, 1987.
- [Gen06] G. Genet. *A statistical approach to multi-input equivalent fatigue loads for the durability of automotive structures*. PhD thesis, Göteborg University, 2006.
- [Gué94] D. Guégan. *Séries chronologiques non linéaires à temps discret*. Economica, 1994.
- [Gué05] Z. Guédé. *Approche probabiliste de la durée de vie des structures sollicitées en fatigue thermique*. PhD thesis, Université Blaise Pascal, Clermont II, 2005.
- [Ham90] J.D. Hamilton. Analysis of time series subject to changes in regime. *Journal of Econometrics*, 45 :39–70, 1990.
- [Ham93] J.D. Hamilton. Estimation, inference, and forecasting of time series subject to changes in regime. *Handbook of Statistics*, 11 :231–260, 1993.
- [Ham94] J.D. Hamilton. *Time series analysis*. Princeton University Press, 1994.

- 
- [Ham06] R. Hamam. *Simulation de la propagation des fissures par fatigue dans les toiles des roues de train sous chargement à amplitude variable*. PhD thesis, ENS Cachan, Paris 6, 2006.
- [HK05] P. Heuler and H. Kläütschke. Generation and use of standardised load spectra and loadtime histories. *International Journal of Fatigue*, 27(8) :974–990, 2005.
- [Hud81] C.M. Hudson. A root-mean-square approach for predicting fatigue crack growth under random loading. *ASTM STP*, 748 :41–52, 1981.
- [IA96] J.B. Ibsø and H. Agerskov. An analytical model for fatigue life prediction based on fracture mechanics and crack closure. *Journal of Constructional Steel Research*, 37 :229–261, 1996.
- [JL86] D.I. Jones and M.H. Lorenz. An application of Markov chain noise model to wind generator simulation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 28 :391–402, 1986.
- [Joh99] P. Johannesson. *Rainflow analysis of switching Markov loads*. PhD thesis, Lund University, Centre for Mathematical Sciences Mathematical Statistics, 1999.
- [KD88] J. Kam and W. Dover. Fatigue crack growth in offshore welded tubular joints under real live variable amplitude loading. In *International Conference on Fatigue Crack Growth Under Variable Amplitude Loading*, French Metallurgical Society, 1988.
- [LCM09] M. Lemaire, A. Chateaufneuf, and J.C. Mitteau. *Structural reliability*. Wiley, 2009.
- [LdJFS79] H. Lowak, J.B. de Jonge, T. Franz, and D. Schütz. MiniTWIST - a shortened version of TWIST. Technical Report NLR-Report MP 79018, National Aerospace Laboratory (NLR), Amsterdam, 1979.
- [Ler04] P. Leray. Le clustering en 3 leçons. Technical report, INSA Rouen - Laboratoire PSI, 2004.
- [Lia05] T.W. Liao. Clustering of time series data - A survey. *Pattern Recognition*, 38 :1857–1874, 2005.
- [LMT97] B. Lacaze, M. Maubourguet, and J.-Y. Tourneret. *Probabilités et statistiques appliquées*. Cépaduès Editions, 1997.

- [LSMS11] Y. Ling, C. Shantz, S. Mahadevan, and S. Sankararaman. Stochastic prediction of fatigue loading using real-time monitoring data. *International Journal of Fatigue*, 33 :868–879, 2011.
- [LT08] P. L’Ecuyer and B. Tuffin. Approximate zero-variance simulation. In *Winter Simulation Conference*, 2008.
- [Mac67] J.B. MacQueen. Some methods for classification and analysis of multivariate observations. In *5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 281–297, 1967.
- [Mar08] M.P. Martinez. *Modélisation des comportements extrêmes en ingénierie*. PhD thesis, Université de Paris Sud Orsay, 2008.
- [Mat62] G. Matheron. *Traité de géostatistique appliquée, Tome I*. No. 14. Editions Technip, Paris, 1962.
- [Mat63] G. Matheron. *Traité de géostatistique appliquée, Tome II : Le Krigeage*. No. 24. Editions B. R. G. M., Paris, 1963.
- [MB11] C. Mattrand and J.-M. Bourinet. Random load sequences and stochastic crack growth based on measured load data. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(17) :3030–3048, 2011.
- [MBL<sup>+</sup>11] C. Mattrand, J.-M. Bourinet, M. Lemaire, P. Bernard, and M. Fogli. Modeling and simulation of stochastic fatigue load sequences derived from in-flight load data. In *13th AIAA Non-Deterministic Approaches Conference, Denver, Colorado*, 2011.
- [MBT11] C. Mattrand, J.-M. Bourinet, and D. Théret. Analysis of fatigue crack growth under random load sequences derived from military in-flight load data. In *32nd ICAF Conference, Montréal, Canada*, 2011.
- [MR06] R.S. McClung and D.S. Riha. Probabilistic fracture mechanics guidelines and templates. Technical report, Southwest Research Institute, September 2006.
- [MVW<sup>+</sup>06] M.P. Martinez, E. Vazquez, E. Walter, G. Fleury, and R. Kielbasa. Estimation of extreme values, with application to uncertain systems. In *Symposium on System Identification, Newcastle, Australia*, pages 1027–1032, 2006.
- [MZD03] B. Moreno, J. Zapatero, and J. Dominguez. An experimental analysis of fatigue crack growth under random loading. *International Journal of Fatigue*, 25 :597–608, 2003.
- [NAS06] NASGRO Manual. <http://www.nasgro.swri.org/>, Version 5.0, 2006.

- 
- [Pad90] U.H. Padmadinata. Investigation of crack-closure prediction models for fatigue in aluminum alloy sheet under flight simulation loading. Technical Report LR-619, TU Delft, Faculty of Aerospace Engineering, 1990.
- [PBM04] M.K. Pakhira, S. Bandyopadhyay, and U. Maulik. Validity index for crisp and fuzzy clusters. *Pattern Recognition*, 37 :487–501, 2004.
- [Per08] F. Perrin. *Prise en compte des données expérimentales dans les modèles probabilistes pour la prévision de la durée de vie des structures*. PhD thesis, Université Blaise Pascal, Clermont II, 2008.
- [PGD61] P.C. Paris, J. Gomez, and R.E. Dominguez. A rational theory of fatigue. *The Trend in Engineering*, 13(1) :9–14, 1961.
- [PH07] S. Pommier and R. Hamam. Incremental model for fatigue crack growth based on displacement partitioning hypothesis of mode I elastic-plastic displacement fields. *Fatigue and Fracture of Engineering Material and Structures*, 30(7) :582–598, 2007.
- [Pit01] X. Pitoiset. *Méthodes spectrales pour une analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 2001.
- [Pla94] J.Y. Plantec. *Construction d'une démarche probabiliste généralisée d'évaluation de la fiabilité d'une structure aéronautique appliquée à l'élaboration de plannings de maintenance*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 1994.
- [PNML00] P. Poggi, G. Notton, M. Muselli, and A. Louche. Stochastic study of hourly total solar radiation in Corsica using Markov model. *International Journal of Climatology*, 20 :1843–1860, 2000.
- [PR05] S. Pommier and M. Risbet. Time-derivative equations for fatigue crack growth in metals. *International Journal of Fracture*, 131 :79–106, 2005.
- [Pro08] J.W. Provan. Fracture, fatigue and mechanical reliability. MECH 471 & 571 Lecture Notes, 2008.
- [Rab90] L.R. Rabiner. A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition. In *Readings in Speech Recognition*, 1990.
- [Rac97] R. Rackwitz. Time-variant reliability for non-stationary processes by the outcrossing approach. *Probabilistic Methods for Structural Design*, 1 :245–260, 1997.

- [Rac98] R. Rackwitz. Computational techniques in stationary and non-stationary load combination - A review and some extensions. *Journal of Structural Engineering*, 25 :1–20, 1998.
- [Ren90] O. Renne. Evaluation des modèles de prévision de propagation de fissures sous chargements complexes. Technical Report 5/M/90, Centre d’Essais Aéronautiques de Toulouse, 1990.
- [Rid05] A.D. Ridder. Importance sampling simulations of Markovian reliability systems using cross-entropy. *Annals of Operations Research*, 134 :119–136, 2005.
- [Rip87] B.D. Ripley. *Stochastic simulation*. Wiley, 1987.
- [RK08] R.Y. Rubinstein and D.P. Kroese. *Simulation and the Monte Carlo method*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2008.
- [RMM08] D.S. Riha, J.M. McFarland, and R.S. McClung. Initial assessment for level 1 probabilistic fracture mechanics analysis approach. Technical report, Southwest Research Institute, 2008.
- [RT10] A.D. Ridder and B. Tuffin. Efficiency of the cross-entropy method in Markov chain problems. In *8th International Workshop on Rare Event Simulation (RESIM 2010)*, Cambridge, UK, 2010.
- [Rub97] R.Y. Rubinstein. Optimization of computer simulation models with rare events. *Engineering Fracture Mechanics*, 99 :89–112, 1997.
- [Ryc96] I. Rychlik. Simulation of load sequences from rainflow matrices : Markov method. *International Journal of Fatigue*, 18 :429–438, 1996.
- [Sap06] G. Saporta. *Probabilités, analyses des données et statistique*. Editions Technip., 2006.
- [SBWH<sup>+</sup>05] A. Shamshad, M.A. Bawadi, W.M.A. Wan Hussin, T.A. Majid, and S.A.M. Sanusi. First and second order Markov chain models for synthetic generation of wind speed time series. *Energy*, 30 :693–708, 2005.
- [Sch78] G. Schwartz. Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2) :461–464, 1978.
- [Sch87] J. Schijve. An evaluation of a fatigue crack growth prediction model for variable-amplitude loading (PREFFAS). Technical Report LR-537, TU Delft, Faculty of Aerospace Engineering, 1987.
- [Sch09] J. Schijve. *Fatigue Structures and materials*. Springer, Second Edition with CD-ROM, 2009.

- [Smi85] R.L. Smith. Maximum likelihood estimation in a class of nonregular cases. *Biometrika*, 72 :67–90, 1985.
- [SMSS07] M. Skorupta, T. Machniewicz, J. Schijve, and A. Skorupta. Application of the Strip-Yield model from the NASGRO software to predict fatigue crack growth in aluminium alloys under constant and variable amplitude loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 74 :291–313, 2007.
- [Sol06] B. Solaiman. *Processus stochastiques pour l'ingénieur*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2006.
- [SR06] M. Sander and H.A. Richard. Fatigue crack growth under variable amplitude loading. Part II : analytical and numerical investigations. *Engineering Fracture Mechanics*, 29 :303–319, 2006.
- [tHdK91] H.J. ten Hoeve and A.U. de Koning. Implementation of the improved Strip-Yield model into the NASGRO software - Architecture and detailed design document. Technical Report NLR CR 95312 L, NLR, 1991.
- [Ton01] Y.C. Tong. Literature review on aircraft structural risk and reliability analysis. Technical Report DSTO-TR-1110, DSTO Aeronautical and Maritime Research Laboratory, Airframes and Engines Division, 2001.
- [UA99] S. Ustilovsky and R. Arone. Random fatigue crack growth in aluminum alloy. *International Journal of Fatigue*, 21 :275–282, 1999.
- [VHG79] D.A. Virkler, B.M. Hillberry, and P.K. Goel. The statistical nature of fatigue crack propagation. *Journal of Engineering Material and Technology*, 101(2) :148–153, 1979.
- [Wal04] J. Walrand. Lecture notes on probability theory and random processes, 2004.
- [WB91] G.S. Wang and A.F. Blom. A Strip Yield model for fatigue crack growth predictions under general load conditions. *Engineering Fracture Mechanics*, 40(3) :507–533, 1991.
- [WEW71] J. Willenborg, R.M. Engle, and H.A. Wood. A crack growth retardation model using an effective stress concept. Technical Report AFFDL-TR71-1, Air Force Flight Dynamic Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, 1971.
- [Whe72] O.E. Wheeler. Spectrum loading and crack growth. *Journal Basic Engineering*, 94(3) :181–186, 1972.

- [Whi06] P. White. Review of methods and approaches for the structural risk assessment of aircraft. Technical Report DSTO-TR-1916, DSTO Platforms Sciences Laboratory, Air vehicle Division, 2006.
- [Wik11] Wikipedia. Q-Q plot - wikipedia. *The Free Encyclopedia*, 2011.
- [WN07] W.F. Wu and C.C. Ni. Statistical aspects of some fatigue crack growth data. *Engineering Fracture mechanics*, 74 :2952–2963, 2007.
- [ZMD97] J. Zapatero, B. Moreno, and J. Dominguez. On the use of the Strip-Yield model to predict fatigue crack growth under irregular loading. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 20(5) :759–770, 1997.
- [ZMGHD05] J. Zapatero, B. Moreno, A. Gonzalez-Herra, and J. Dominguez. Numerical and experimental analysis of fatigue crack growth under random loading. *International Journal of Fatigue*, 27 :878–890, 2005.



## Annexe A

# Calibrage des paramètres du modèle PREFFAS

Le modèle PREFFAS, conjointement utilisé avec la loi de Paris, n'implique la détermination que de quatre paramètres, à savoir : l'exposant de la loi de Paris  $m$ , la constante de fissuration  $C_R$  et les coefficients de la relation d'Elber notés  $a$  et  $b$ . Les auteurs du modèle ont souhaité proposer un modèle à caractère général et industriellement utilisable, c'est-à-dire nécessitant peu d'essais pour le calibrer.

Les paramètres  $(C_R, m, a, b)$  sont obtenus par trois essais, qui peuvent être réduits au nombre de deux tel qu'expliqué ci-après.

### A.1 Coefficients de la loi de Paris

Les coefficients  $C_R$  et  $m$  de la loi de Paris sont simplement donnés par un essai à chargement d'amplitude constante à rapport  $R = 0.1$  en général.

### A.2 Paramètres de la loi d'ouverture d'Elber

Les paramètres  $a$  et  $b$  de la loi d'ouverture d'Elber, qui est retenue dans le modèle PREFFAS et dont l'expression est rappelée ci-dessous (A.1), sont obtenus à partir d'un essai à chargement d'amplitude constante, d'un essai à chargement d'amplitude constante avec surcharges régulièrement espacées et d'un essai à chargement d'amplitude constante

à fort rapport de sollicitation  $R$ .

$$U(R) = aR + b \quad (\text{A.1})$$

En général, sur les alliages d'aluminium utilisés en aéronautique, l'hypothèse  $a + b = 1$  postulée par les auteurs du modèle PREFFAS permet d'éviter l'essai à fort rapport  $R$ , sans trop dégrader la qualité du modèle. De plus, comme l'ouverture  $U(R)$  doit être croissante avec le rapport de charge  $R$ , la condition limite théorique s'énonce :

$$R \longrightarrow 1 \Rightarrow U(R) \longrightarrow 1 \quad (\text{A.2})$$

afin de vérifier  $K_{\text{ouv}} \longrightarrow K_{\text{min}}$  lorsque  $R \longrightarrow 1$ .

De ce fait, il vient :  $a + b = 1$ .

Le coefficient  $b$  de la loi d'ouverture peut ainsi être déterminé de la manière suivante. Il s'agit de mettre en équation le retard produit par application d'une surcharge unique dans une séquence à  $N$  cycles et de rapport  $R = 0.1$ , par rapport à cette même séquence sans surcharge. L'essai à surcharges espacées tous les  $n = 1000$  cycles avec un taux de surcharge à  $\tau = 1.7$  permet de bonnes mesures expérimentales. Le taux de surcharge  $\tau = 1.7$  apparaît comme étant un bon compromis entre une surcharge à taux élevée ( $\tau > 1.5$ ) sans pour autant bloquer la fissure ( $\tau < 2$ ).

Le retard  $T_R$  engendré par la surcharge est défini par :

$$T_R = \frac{(da/dN)_{AC}}{(da/dN)_{AC+S}} \quad (\text{A.3})$$

où  $(da/dN)_{AC}$  correspond à la vitesse de fissuration pour le chargement d'amplitude constant et  $(da/dN)_{AC+S}$  correspond à la vitesse de fissuration pour le chargement d'amplitude constante avec surcharges appliquées tous les  $n = 1000$  cycles.

D'après les notations adoptées sur la figure A.1, la relation (A.3) devient :

$$T_R = \frac{1000 (\sigma_{\text{max1}} - \sigma_{\text{ouv1}})^m}{1000 (\sigma_{\text{max1}} - \sigma_{\text{ouv2}})^m + (\sigma_{\text{max2}} - \sigma_{\text{ouv2}})^m} \quad (\text{A.4})$$

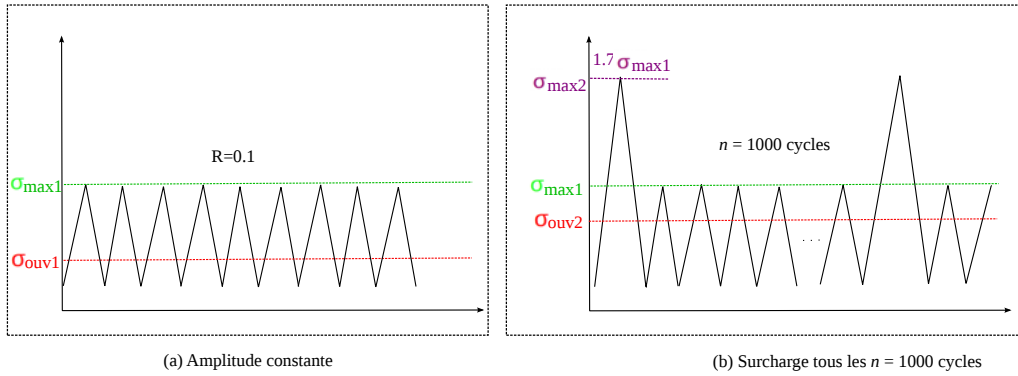


Figure A.1 – Essai à amplitude constante  $R = 0.1$  et essai avec surcharge  $\tau = 1.7$  tous les  $n = 1000$  cycles.

Comme  $\sigma_{\max 2} = 1.7\sigma_{\max 1}$ ,  $a + b = 1$ , et  $R = 0.1$ , l'équation (A.4) s'écrit :

$$T_R = \frac{1000 [0.9 ((1 - b)R + b)]^m}{1000 [1.6 ((1 - b)\frac{R}{1.7} + b)]^m + [1.6 ((1 - b)\frac{R}{1.7} + b) - 0.7]^m} \quad (\text{A.5})$$

La mesure expérimentale de  $T_R$  et les données de  $m$  et  $R$  permettent ainsi de déterminer le paramètre  $b$  et donc également le paramètre  $a = 1 - b$ .

Les paramètres  $a$  et  $b$  dépendent du matériau mais aussi de l'épaisseur de la structure fissurée. Le tableau A.1 ci-dessous extrait de [ADS88] donne l'évolution des valeurs du paramètre  $a$  en fonction de l'épaisseur pour des alliages d'aluminium.

Tableau A.1 – Valeurs de  $a$  en fonction de l'épaisseur de la structure fissurée pour divers alliages d'aluminium.

Matériau	Valeur de $a$ ( $a + b = 1$ )				
	1 mm	...	8 mm	...	15 mm
2024 T3 et T351	$\approx 0.45$		$\approx 0.4$		$\approx 0.35$
7075/7010/7050 (T6... et T7...)		$\approx 0.35$		$\approx 0.25$	

Finalement deux essais simples à mettre en œuvre sont nécessaires pour calibrer les paramètres du modèle PREFFAS, ce qui représente un avantage certain par rapport aux modèles concurrents. Pour plus de détails sur l'identification des paramètres  $a$  et  $b$ , le lecteur est invité à se référer aux travaux de thèse d'A. Davy [Dav85].



## Annexe B

# Algorithme du modèle PREFFAS- $m$

Cette annexe fournit une présentation détaillée des modifications apportées au modèle PREFFAS- $m$ .

### B.1 Notations

Avant de présenter les principales étapes de l'algorithme, il est important de définir les notations employées pour la description des cycles.

Un cycle  $i$  est composé d'un minimum  $K_{\min, i-1}$  et d'un maximum  $K_{\max, i}$ , voir figure B.1.

L'ouverture naturelle du cycle  $i$ , notée  $K_{\text{ouv. nat.}, i}$ , est calculée en utilisant la relation d'Elber appliquée aux niveaux  $K_{\min, i-1}$  et  $K_{\max, i}$  :

$$K_{\text{ouv. nat.}, i} = K_{\max, i} - U(R) (K_{\max, i} - K_{\min, i-1}) \quad (\text{B.1})$$

où  $R = K_{\min, i-1}/K_{\max, i}$ .

Ce calcul d'ouverture ne fait pas intervenir les effets d'interaction. Il s'agit de l'ouverture constante formulée par Elber dans le cas de chargements d'amplitude constante.

L'ouverture du cycle  $i$ ,  $K_{\text{ouv}, i}$ , prend en compte les effets d'histoire du chargement et est déterminée par les relations (1.13) et (1.14) comme dans le modèle PREFFAS.

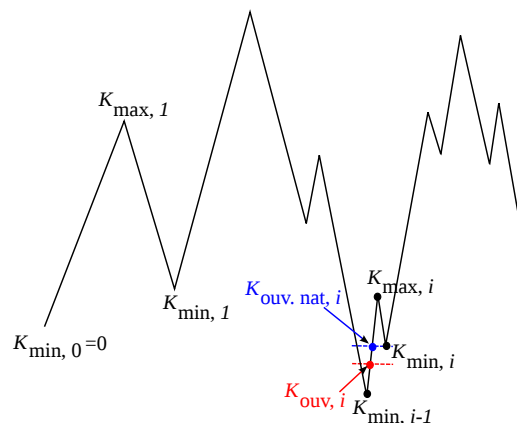


Figure B.1 – Notations pour les cycles.

## B.2 Organigramme du modèle PREFFAS- $m$

L'organigramme du modèle PREFFAS- $m$  intègre l'effet d'évanescence des effets d'interaction et l'effet à surcharges variables respectivement présentés dans les sections 1.3.1.1 et 1.3.1.2. Il est donné sur la figure B.2.

Les changements majeurs par rapport à l'ancien modèle sont représentés par les boîtes colorées.

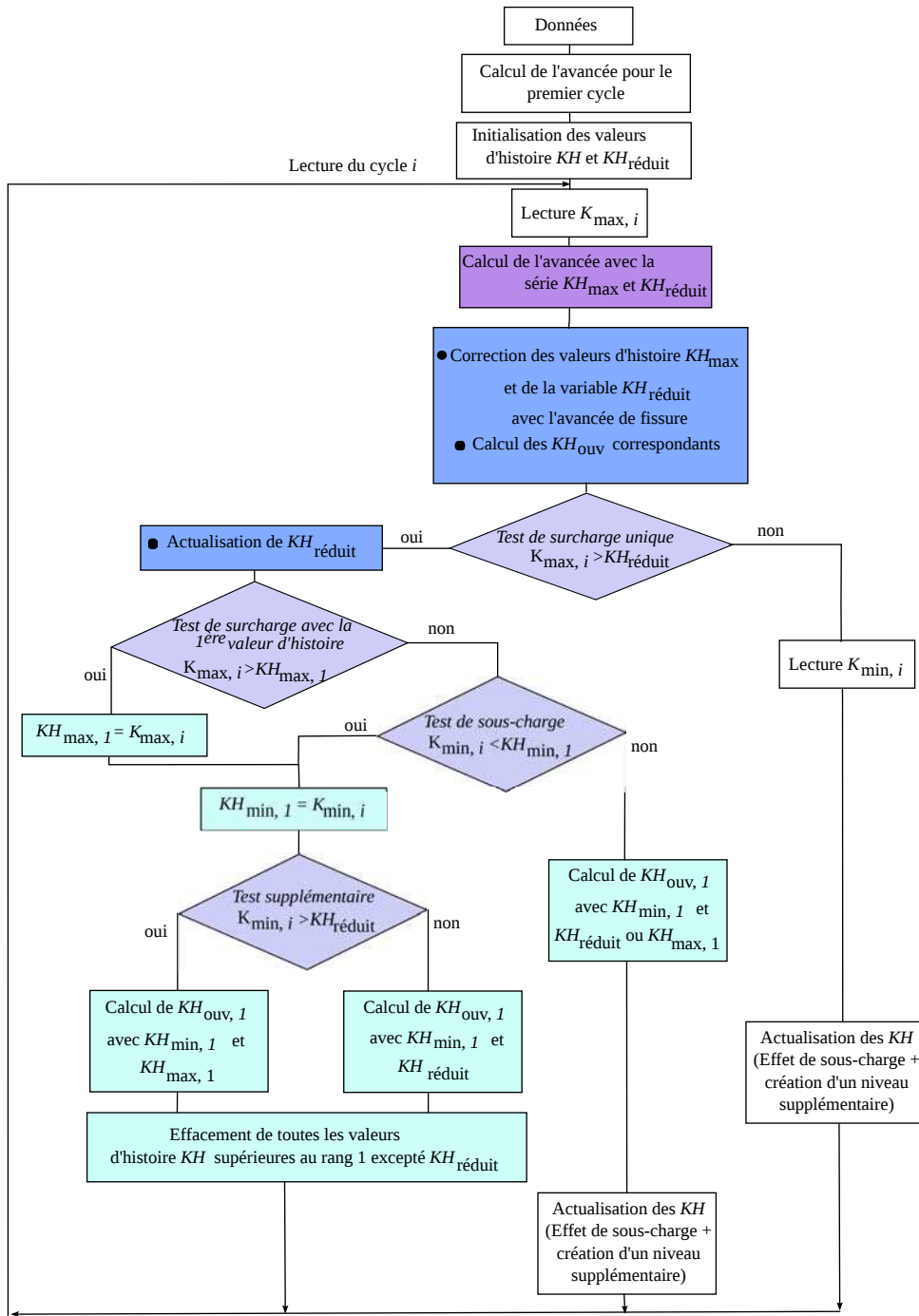


Figure B.2 – Schéma des modifications apportées au modèle PREFFAS-*m*.

### B.3 Principales modifications

#### B.3.1 Calcul de l'avancée de fissure pour le premier cycle

L'avancée due au premier cycle est calculée à partir de l'ouverture naturelle du cycle de la manière suivante :

$$\delta a_1 = C_{\text{eff}} (K_{\text{max}, 1} - K_{\text{ouv. nat.}, 1})^m \quad (\text{B.2})$$

où  $K_{\text{ouv. nat.}, 1} = K_{\text{max}, 1} - U(0)K_{\text{max}, 1}$  car le niveau de charge initial est zéro.

#### B.3.2 Initialisation

Les valeurs d'histoires  $KH_{\text{min}}$ ,  $KH_{\text{max}}$ ,  $KH_{\text{ouv}}$  et la variable  $KH_{\text{réduit}}$ , qui représente le seuil pour la surcharge unique, sont ensuite initialisées par :

$$\left\{ \begin{array}{l} KH_{\text{max}, 1} = K_{\text{max}, 1} \\ KH_{\text{min}, 1} = K_{\text{min}, 1} \\ KH_{\text{ouv}, 1} = K_{\text{max}, 1} - U(K_{\text{min}, 1}/K_{\text{max}, 1})(K_{\text{max}, 1} - K_{\text{min}, 1}) \\ KH_{\text{réduit}} = K_{\text{max}, 1} \end{array} \right. \quad (\text{B.3})$$

Les valeurs d'histoire se génèrent automatiquement avec les premiers cycles et s'actualisent à chaque cycle chaque fois que  $K_{\text{max}, i}$  est supérieur à une valeur d'histoire  $KH_{\text{max}}$ , au seuil de surcharge  $KH_{\text{réduit}}$  ou lorsque l'ouverture  $K_{\text{ouv}}$  calculée à partir de  $K_{\text{max}, i}$  et  $K_{\text{min}, i}$  est supérieure au plus grand des  $KH_{\text{ouv}}$ .

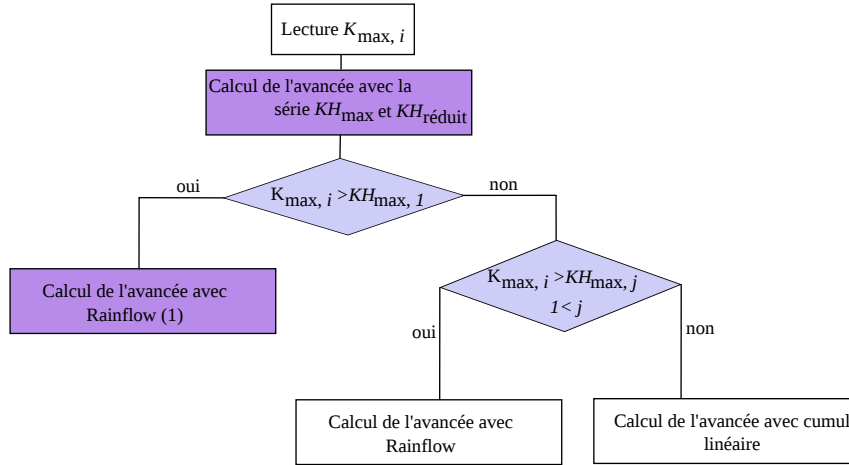
#### B.3.3 Points clés

##### Calcul de l'avancée au cycle $i$

L'avancée s'effectue comme dans le modèle PREFFAS à partir des équations (1.15) et (1.18) lorsque  $K_{\text{max}, i}$  est inférieur au dernier maximum de l'histoire et avec le calcul Rainflow lorsque  $K_{\text{max}, i}$  dépasse au moins un maximum de l'histoire mais reste inférieur à la plus grande valeur d'histoire  $KH_{\text{max}, 1}$ .

Lorsque  $K_{\text{max}, i}$  dépasse la plus grande valeur d'histoire  $KH_{\text{max}, 1}$ , le Rainflow, noté




 Figure B.3 – Calcul de l'avancée au cycle  $i$ .

Rainflow (1) sur la figure B.3, s'écrit :

$$\delta a_i = C_{\text{eff}} \{ (K_{\text{max}, i} - K_{\text{ouv. nat.}, 1})^m + \sum_{l=1}^n [(KH_{\text{max}, l} - KH_{\text{ouv}, l})^m - (KH_{\text{max}, l} - KH_{\text{ouv}, l-1})^m] \} \quad (\text{B.4})$$

### Correction des valeurs d'histoire et actualisation de $KH_{\text{réduit}}$

- Pour prendre en compte le phénomène d'évanescence, les valeurs d'histoire  $KH_{\text{max}}$  ainsi que le seuil de surcharge  $KH_{\text{réduit}}$  doivent être diminués. Cet abaissement est fonction de l'avancée de fissure et s'effectue à l'aide de la relation (B.5).

$$KH_{\text{max, atténué}} = (KH_{\text{max}}^2 - \beta \delta a)^{1/2} \quad (\text{B.5})$$

où le coefficient  $\beta$  dépend de l'état de contraintes planes ou de déformations planes.

Toutes les ouvertures d'histoire sont ensuite recalculées avec les nouvelles valeurs d'histoire diminuées  $KH_{\text{max, atténué}}$  et  $KH_{\text{réduit}}$ . Les minimums de l'histoire  $KH_{\text{min}}$  ne sont pas modifiés.

- Si un cas de surcharge se produit au cycle  $i$ , il y a lieu d'en tenir compte et d'effectuer une réduction de  $K_{\text{max}, i}$  avec la relation (B.6). Cette nouvelle quantité est notée  $KH_{\text{réduit}}$ . Le calcul de l'ouverture due à cette surcharge unique est effectuée avec

cette valeur de  $KH_{\text{réduit}}$ .

$$KH_{\text{réduit}} = KH_{\text{réduit, antérieur}} + \frac{2}{3}(K_{\text{max}, i} - KH_{\text{réduit, antérieur}}) \quad (\text{B.6})$$

Il est raisonnable d'incrémenter la valeur de  $KH_{\text{réduit}}$  au cours du spectre car le maximum  $K_{\text{max}, i}$  a moins de chance d'être vu comme une surcharge unique au fil du temps contrairement aux premières valeurs. Si la surcharge extrême intervient rapidement au début du spectre et est répétée suffisamment tôt pour considérer l'avancée comme négligeable, alors le modèle PREFFAS- $m$  converge vers le modèle PREFFAS.

### Actualisation des valeurs d'historie

Les mêmes principes que ceux utilisés dans le modèle PREFFAS sont adoptés excepté en cas de nouvelle surcharge. La suite des valeurs  $KH_{\text{max}}$  doit toujours être décroissante, celles des  $KH_{\text{min}}$  et  $KH_{\text{ouv}}$  croissantes.

Les trois nouveaux cas provoqués par une surcharge unique ( $K_{\text{max}, i} > K_{\text{réduit}}$ ) sont les suivants :

- Le maximum du cycle courant  $K_{\text{max}, i}$  excède la plus grande des valeurs d'historie  $KH_{\text{max}, 1}$ .

Toutes les valeurs d'histoires sont alors effacées à l'exception de  $KH_{\text{réduit}}$  qui vient d'être incrémenté. La première valeur d'historie est alors recrée par  $K_{\text{max}, i}$  et  $K_{\text{min}, i}$ . L'ouverture est calculée à partir de  $KH_{\text{réduit}}$  et  $K_{\text{min}, i}$  lorsque  $K_{\text{min}, i}$  est inférieur à  $KH_{\text{réduit}}$  pour tenir compte de l'effet à une seule surcharge. Dans le cas où  $K_{\text{min}, i}$  est supérieur à  $KH_{\text{réduit}}$ , il y a lieu de calculer l'ouverture avec  $K_{\text{max}, i}$  (**qui est enregistré en  $KH_{\text{max}, 1}$** ) et  $K_{\text{min}, i}$ .

Il est important de noter que  $KH_{\text{réduit}}$  est toujours plus petit que  $KH_{\text{max}, 1}$ . Cette quantité est uniquement utilisée pour le calcul de l'ouverture. Il ne serait pas consistant de l'utiliser pour le calcul du Rainflow. C'est la valeur  $KH_{\text{max}, 1}$  qui est utilisée dans ce cas là.

- Il y a effet de sous-charge pour la première valeur d'historie  $KH_{\text{max}, 1}$ .

Toutes les valeurs d'historie de rang supérieur à 1 sont effacées et  $KH_{\text{min}, 1}$  prend la valeur  $K_{\text{min}, i}$ . L'ouverture  $KH_{\text{ouv}, 1}$  est alors calculée comme dans le point précédent en considérant les deux possibilités.

- La valeur  $K_{\max, i}$  excède  $KH_{\text{réduit}}$  mais reste inférieure à  $KH_{\max, 1}$  et  $K_{\min, i}$  est supérieur à  $KH_{\min, 1}$ .

Il faut tout d'abord réactualiser le calcul de l'ouverture  $KH_{\text{ouv}, 1}$  lorsque celle-ci est calculée avec  $KH_{\text{réduit}}$  car il vient d'être augmenté. Ensuite l'actualisation s'effectue comme dans PREFAS : un nouveau triplet d'histoire peut être créé si l'ouverture  $K_{\text{ouv}, i}$ , calculée avec  $K_{\max, i}$  et  $K_{\min, i}$  est plus grande que la dernière valeur d'histoire. Il faut enfin vérifier les conditions  $KH_{\max}$  décroissants,  $KH_{\min}$  et  $KH_{\text{ouv}}$  croissants.



## Annexe C

# Groupes de trajectoires basés sur une analyse de classification

La sélection des deux groupes “A” et “B” formés sur la base de jugements d’experts s’appuie essentiellement sur un critère de masse des appareils en vol. Ce critère permet à priori de différencier les domaines de vol, c’est-à-dire les plages d’accélérations pouvant être subies par l’avion et donc les niveaux contraintes qui peuvent en résulter.

Une analyse de classification basée sur les niveaux de contraintes observés est ici réalisée afin de confirmer la sélection réalisée sur la base de jugements d’experts.

### C.1 Démarche

Lors d’une analyse de classification de données, c’est-à-dire lors de la séparation des données en groupes distincts ou flous, la démarche adoptée est la suivante :

1. **Choix du nombre de classes  $k$  (*clusters* en anglais)** : la plupart des algorithmes de classification impose de définir le nombre de groupes à priori.
2. **Choix d’une distance/mesure entre les données** : c’est sur ce critère que les données les plus éloignées sont séparées.
3. **Choix d’un algorithme de classification** : suivant l’algorithme de séparation des données, la classification est distincte ou floue.
4. **Choix d’un critère de validation** : il permet de vérifier à la fois que le nombre de

clusters sélectionné est le plus approprié et que les groupes sont correctement formés.

Une présentation des principales méthodes de classification avec exemples est disponible en référence [Ler04]. Une revue détaillée des méthodes de classification utilisées pour les séries temporelles de données est en particulier réalisée par T.W. Liao [Lia05].

## C.2 Application

L'objectif de la démarche de classification réside ici dans la formation de groupes homogènes de trajectoires à partir d'un critère autre que le critère de masse des appareils, précédemment utilisé pour former les groupes. Concrètement, on souhaite regrouper les 27 classes de vol représentatives de l'activité de l'avion et définies par DGA/TA en un nombre de groupes restreint, contenant par conséquent plus de trajectoires, à partir d'un critère à spécifier. Le critère de classification ici choisi porte sur les niveaux de contraintes observés dans chacune des classes car ceux-ci sont directement liés au domaine de vol des aéronefs (plages des accélérations pouvant être subies) et donc au type de mission à effectuer.

La procédure définissant les éléments à classifier est la suivante. Elle est illustrée sur la figure C.1 pour une classe de vols. Une échelle uniforme de  $n = 20$  niveaux de contraintes, allant de la contrainte minimale observée sur l'ensemble des 27458 trajectoires au maximum observé est tout d'abord définie. Les contraintes mesurées au sein d'une même classe de vols sont ensuite réparties entre ces  $n = 20$  niveaux. Le nombre de valeurs de contraintes appartenant à un niveau donné est ensuite comptabilisé. Cette opération est réalisée pour les 20 niveaux. On obtient donc un vecteur de dimension 20 pour chacune des 27 classes. Chacun des 27 vecteurs obtenus (un pour chaque classe) est ensuite normé par la somme de ses composantes et constitue ainsi un vecteur "fréquences des niveaux de contraintes observées". La classification des 27 classes de vols en groupes plus importants consiste donc à séparer les 27 vecteurs "fréquences des niveaux de contraintes" en utilisant un algorithme de classification. Il est important de noter qu'une telle classification ne prend pas en compte le séquençement des charges mais seulement les niveaux de contraintes enregistrées.

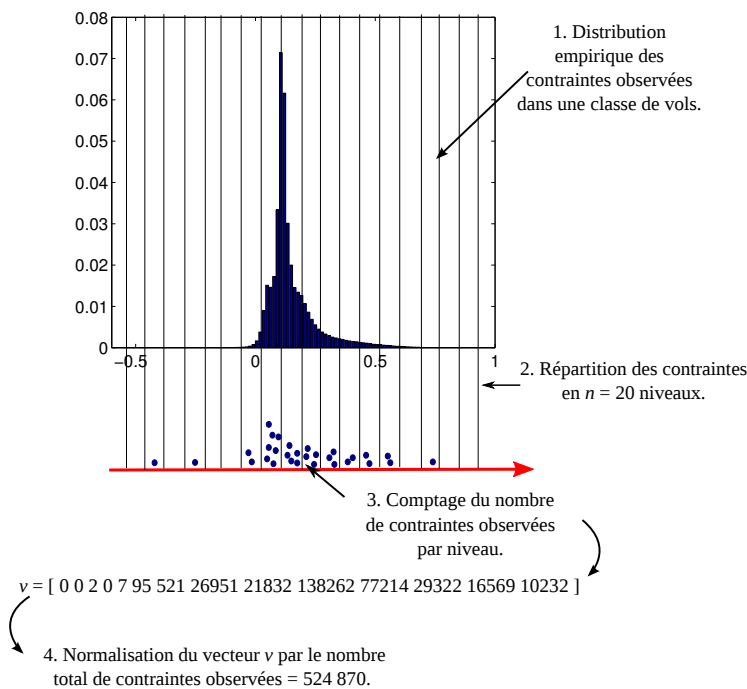


Figure C.1 – Procédure d’obtention du vecteur “fréquences des niveaux de contraintes” pour une classe de vols où 524870 valeurs de contraintes sont enregistrées.

L’algorithme de classification *k-means* [Mac67] appliqué à la distance euclidienne est ici choisi pour former des groupes distincts. L’algorithme *k-means* est une méthode itérative qui, quel que soit le point de départ, converge vers une solution. La solution obtenue n’est cependant pas nécessairement la même en fonction du point de départ. Pour cette raison, les calculs doivent être répétés plusieurs fois (ici 100 fois) pour obtenir des formes de clusters stables.

Le critère de validation, qui permet en particulier de déterminer le nombre optimal de clusters, correspond ici à la maximisation de l’indice de Dunn [Dun73] et celui dit PBM [PBM04]. L’indice de Dunn a été proposé afin d’identifier des clusters compacts et bien séparés. Il s’agit ainsi du rapport entre la valeur minimale des distances entre les clusters et la valeur maximale de la distance au sein d’un cluster. Il faut donc maximiser la distance *inter* clusters et minimiser la distance *intra* clusters pour obtenir les meilleurs clusters. L’indice PBM proposé par M.K. Pakhira est, d’après l’auteur, plus robuste que les autres indices (Dunn, Xie-Beni,...) et en particulier pour un grand nombre de données à classifier. C’est pour cette raison que ce critère a été choisi.

Finalement, les étapes de l’analyse de classification menée sont les suivantes :

1. Effectuer la classification des 27 vecteurs “fréquences des niveaux contraintes” avec

l'algorithme *k-means* (distance euclidienne) pour un nombre de clusters fixé  $k = \{2, \dots, 10\}$ . Calculer et enregistrer les valeurs des indices de Dunn et PBM correspondants.

2. Répéter  $N_k = 100$  fois l'étape 1 pour obtenir l'intervalle de confiance des indices de Dunn et PBM à nombre de clusters  $k$  imposé. Le résultat est porté sur la figure C.2.
3. Sélectionner le nombre de cluster  $k_{\text{opt}}$  qui maximise les critères de Dunn et PBM sur les  $N_k$ -échantillons obtenus.
4. Pour le nombre de clusters choisi  $k_{\text{opt}}$ , trouver les centres des clusters qui maximisent les critères de Dunn et PBM en répétant  $N_c = 100$  fois l'algorithme *k-means*.
5. Répéter  $N = 100$  fois l'étape 4 afin de former les clusters les plus stables. Les groupes formés et les centres de ces groupes dépendent en effet du point de départ de l'algorithme.

### C.3 Résultats

Les étapes 1 et 2 conduisent aux résultats tracés sur les figures C.2(a) et C.2(b). D'après ces analyses, le nombre de clusters optimal est 2 si l'on choisit la moyenne des  $N_k$  simulations comme critère pour les deux indices ou 3 si l'on considère le fractile à 95% des  $N_k$  simulations pour l'indice PBM. Il est ici choisi de retenir  $k_{\text{opt}} = 2$  comme nombre optimal de clusters (étape 3).

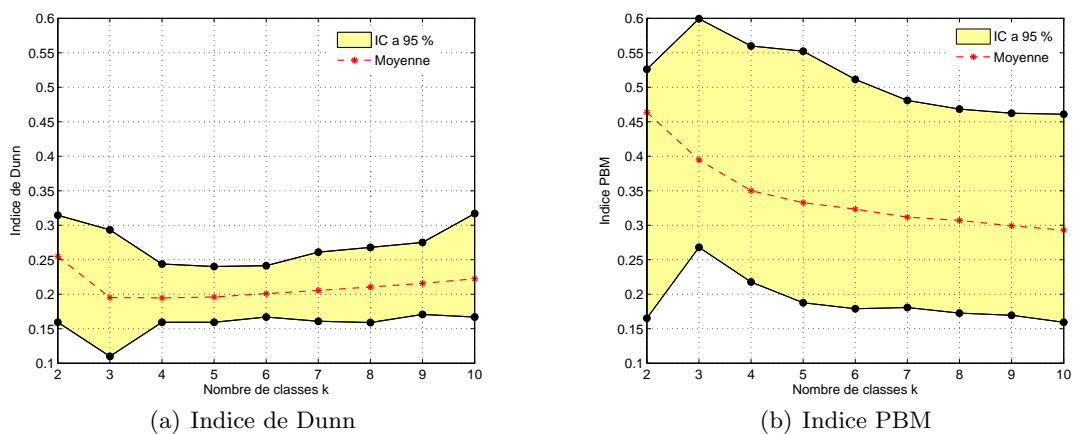


Figure C.2 – Critères de validité de l'algorithme de classification.



Les étapes 4 et 5 conduisent ensuite à former les deux groupes stables ci-dessous, voir figure C.3(b).

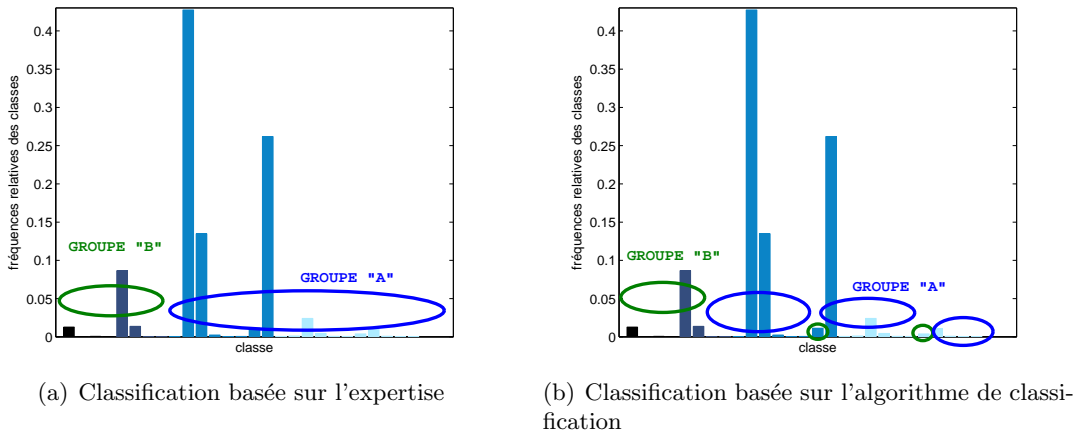


Figure C.3 – Comparaison des groupes formés à partir de l'expertise et ceux obtenus par l'algorithme de classification.

Les deux groupes de classes de vol formés par l'analyse de classification sur le critère "fréquences des niveaux de contraintes" observées correspondent relativement bien aux groupes "A" et "B" formés par les experts et confirment ainsi la sélection proposée. On observe toutefois que deux classes de la configuration avec un réservoir ou sans emports annexes ainsi qu'une classe de la configuration lourde et une classe de la configuration très lourde sont classées différemment avec cette analyse de classification basée sur les niveaux de contraintes.

Ce résultat aurait déjà pu être prédit d'après la figure 2.10(a) des fractiles à 99% des contraintes mesurées. En effet, pour les deux classes avec un réservoir ou sans emports annexes "mal regroupées" les fractiles observés à 99% sont les plus faibles. A l'inverse, les fractiles à 99% des contraintes des deux catégories configurations lourde et très lourde différemment classées sont relativement élevés par rapports aux autres classes des mêmes configurations. Il est enfin important de noter que les deux classes de vol avec un réservoir ou sans emports annexes mal "classées" sont très faiblement peuplées (respectivement 2 et 11 vols) ce qui peut en partie biaiser l'analyse.

Pour conclure, les groupes "A" et "B" formés sur la base de l'expertise sont assez bien confirmés par l'analyse de classification.



## Annexe D

# Détails de l'inférence des modèles HMM

### D.1 Inférence des distributions $f_{c_k}$ , $k \in \{1, 2, \dots, K_c\}$

Une distribution de probabilité théorique est inférée pour chacune des classes  $c_k$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, K_c\}$  et ce pour chaque modèle HMM<sup>(A)</sup> et HMM<sup>(B)</sup>.

L'allure des distributions empiriques des contraintes normalisées et les découpages en classes sont reportés sur la figure D.1 pour rappel.

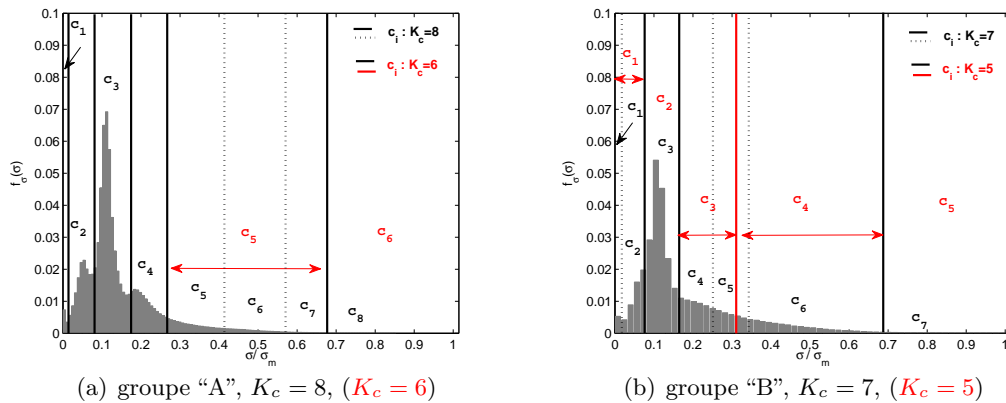


Figure D.1 – Distributions des contraintes normalisées “max et min” des groupes “A” et “B” discrétisées en  $c_k$ -classes  $k \in \{1, 2, \dots, K_c\}$  (les contraintes sont divisées par la contrainte maximale  $\sigma_m$  enregistrées sur l'ensemble des données).

**D.1.1 Distributions  $f_{c_K}$  pour HMM<sup>(A)</sup> ( $K_c = 6$ ) et HMM<sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ )**

Le tableau D.1 présente les estimations des paramètres des distributions gaussiennes tronquées et de Pareto généralisée, identifiées à partir des données suivant les méthodes décrites à la sous-section 3.3.2.

Tableau D.1 – Paramètres des distributions  $f_{c_k}$  pour les modèles HMM<sup>(A)</sup> ( $K_c = 6$ ) et HMM<sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ ),  $k \in \{1, 2, \dots, K_c\}$ .

	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$
groupe "A"	<b>DGT : <math>\mathcal{NT}(a, b, \mu, \sigma)</math></b>				<b>DPG :</b>	
						$G(u, \xi, \beta)$
distribution $f_{c_k}$	0	$a = 0$ $b = 0.070$	$a = 0.070$ $b = 0.156$	$a = 0.156$ $b = 0.254$	$a = 0.254$ $b = 0.676$	$\hat{u} = 0.676$ $\hat{\xi} = -0.08$ [-0.0806; -0.074]
		$\hat{\mu} = 0.055$	$\hat{\mu} = 0.111$	$\hat{\mu} = 0.182$	$\hat{\mu} = -2.630$	$\hat{\beta} = 3.9$ [3.879; 3.921]
		$\hat{\sigma} = 0.023$	$\hat{\sigma} = 0.022$	$\hat{\sigma} = 0.052$	$\hat{\sigma} = 0.626$	
groupe "B"	<b>DGT : <math>\mathcal{NT}(a, b, \mu, \sigma)</math></b>				<b>DPG :</b>	
						$G(u, \xi, \beta)$
distribution $f_{c_k}$	$a = 0$ $b = 0.070$	$a = 0.070$ $b = 0.156$	$a = 0.156$ $b = 0.338$	$a = 0.338$ $b = 0.676$	$\hat{u} = 0.676$ $\hat{\xi} = -0.20$ [-0.0206; -0.0194]	
	$\hat{\mu} = 2.166$	$\hat{\mu} = 0.110$	$\hat{\mu} = -0.010$	$\hat{\mu} = 0.088$	$\hat{\beta} = 14.7$ [14.383; 15.017]	
	$\hat{\sigma} = 0.288$	$\hat{\sigma} = 0.024$	$\hat{\sigma} = 0.222$	$\hat{\sigma} = 0.239$		

La qualité de l'ajustement des lois gaussiennes tronquées (DGT) aux distributions empiriques des classes  $c_k$ ,  $k \in \{2, 3, 4, K_c - 1 = 5\}$  pour le groupe "A" et  $k \in \{1, 2, 3, K_c - 1 = 4\}$  pour le groupe "B" est graphiquement vérifiée sur les diagrammes *QQplot* D.2 et D.3.

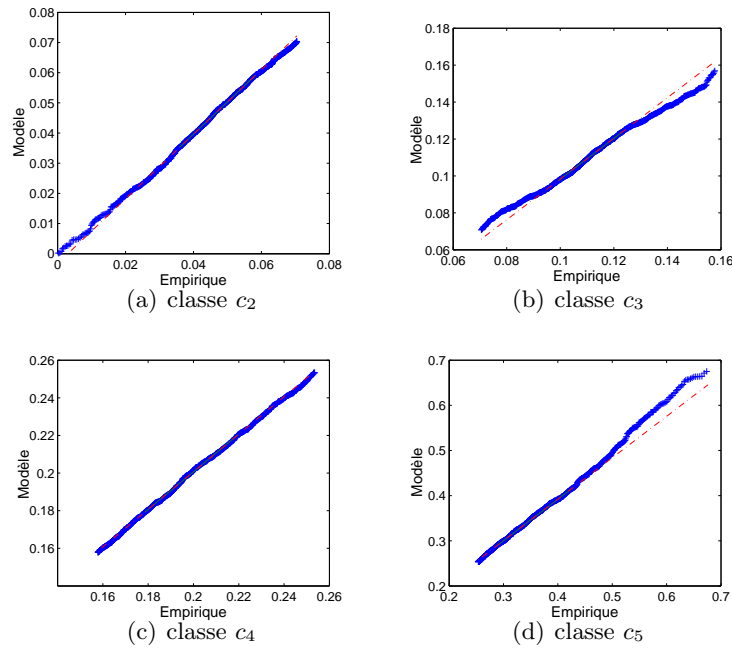


Figure D.2 – QQplots pour les classes  $c_2 - c_5$  du modèle HMM<sup>(A)</sup>.

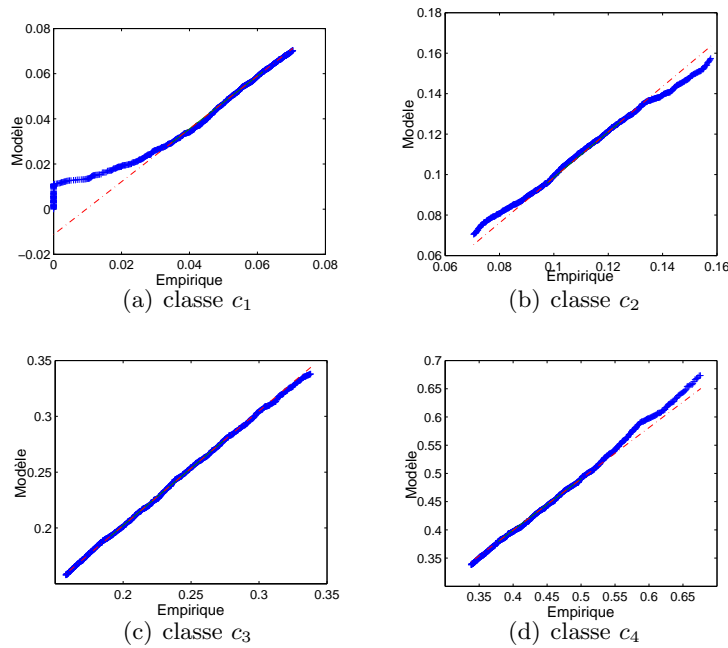


Figure D.3 – QQplots pour les classes  $c_1 - c_4$  du modèle HMM<sup>(B)</sup>.

Il faut noter que la modélisation à l'aide d'une loi gaussienne tronquée constitue une réelle approximation de la densité empirique observée pour la classe  $c_1$  du groupe "B", qui

contient entre autre les zéros des troncatures. Il est cependant décidé de conserver cette modélisation qui est facile à mettre en œuvre.

### D.1.2 Distributions $f_{c_K}$ pour HMM<sup>(A)</sup> ( $K_c = 8$ ) et HMM<sup>(B)</sup> ( $K_c = 7$ )

Les lois gaussiennes tronquées et les distributions de Pareto généralisées sont ici aussi utilisées pour modéliser les classes de contraintes “min et max”. Les paramètres des lois identifiées pour ces deux modèles sont reportés dans le tableau D.2.

Tableau D.2 – Paramètres des distributions  $f_{c_k}$  pour les modèles HMM<sup>(A)</sup> ( $K_c = 6$ ) et HMM<sup>(B)</sup> ( $K_c = 5$ ),  $k \in \{1, 2, \dots, K_c\}$ .

	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$	$c_8$
groupe “A”	<b>DGT : <math>\mathcal{NT}(a, b, \mu, \sigma)</math></b>							<b>DPG :</b>
								$G(u, \xi, \beta)$
distribution $f_{c_k}$	0	$a = 0$	$a = 0.070$	$a = 0.156$	$a = 0.254$	$a = 0.395$	$a = 0.564$	$\hat{u} = 0.676$
		$b = 0.070$	$b = 0.156$	$b = 0.254$	$b = 0.395$	$b = 0.564$	$b = 0.676$	$\hat{\xi} = -0.08$
		$\hat{\mu} = 0.055$	$\hat{\mu} = 0.111$	$\hat{\mu} = 0.182$	$\hat{\mu} = -4.902$	$\hat{\mu} = 0.311$	$\hat{\mu} = 0.480$	$\hat{\beta} = 3.9$
		$\hat{\sigma} = 0.023$	$\hat{\sigma} = 0.022$	$\hat{\sigma} = 0.052$	$\hat{\sigma} = 0.773$	$\hat{\sigma} = 0.147$	$\hat{\sigma} = 0.116$	
groupe “B”	<b>DGT : <math>\mathcal{NT}(a, b, \mu, \sigma)</math></b>						<b>DPG :</b>	
								$G(u, \xi, \beta)$
distribution $f_{c_k}$	0	$a = 0$	$a = 0.070$	$a = 0.156$	$a = 0.254$	$a = 0.451$	$\hat{u} = 0.676$	
		$b = 0.070$	$b = 0.156$	$b = 0.254$	$b = 0.451$	$b = 0.676$	$\hat{\xi} = -0.20$	
		$\hat{\mu} = 0.113$	$\hat{\mu} = 0.110$	$\hat{\mu} = 0.0008$	$\hat{\mu} = -6.845$	$\hat{\mu} = 0.083$	$\hat{\beta} = 14.7$	
		$\hat{\sigma} = 0.044$	$\hat{\sigma} = 0.024$	$\hat{\sigma} = 0.0517$	$\hat{\sigma} = 1.132$	$\hat{\sigma} = 0.241$		

La qualité des ajustements des lois gaussiennes tronquées du tableau D.2 aux distributions empiriques des classes  $c_k$  est ici également vérifiée en utilisant l’outil *QQplot*. Les résultats reportés sur les figures D.4 et D.5 montrent une bonne adéquation des densités inférées aux distributions empiriques.

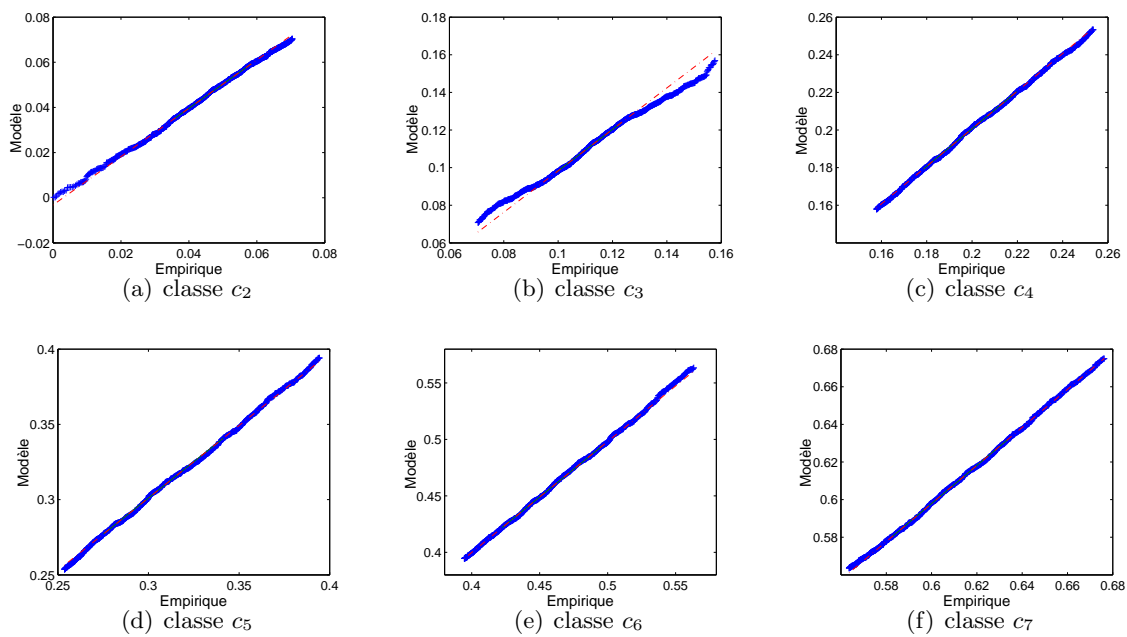


Figure D.4 – QQplots pour les classes  $c_2 - c_7$  du modèle HMM<sup>(A)</sup>.

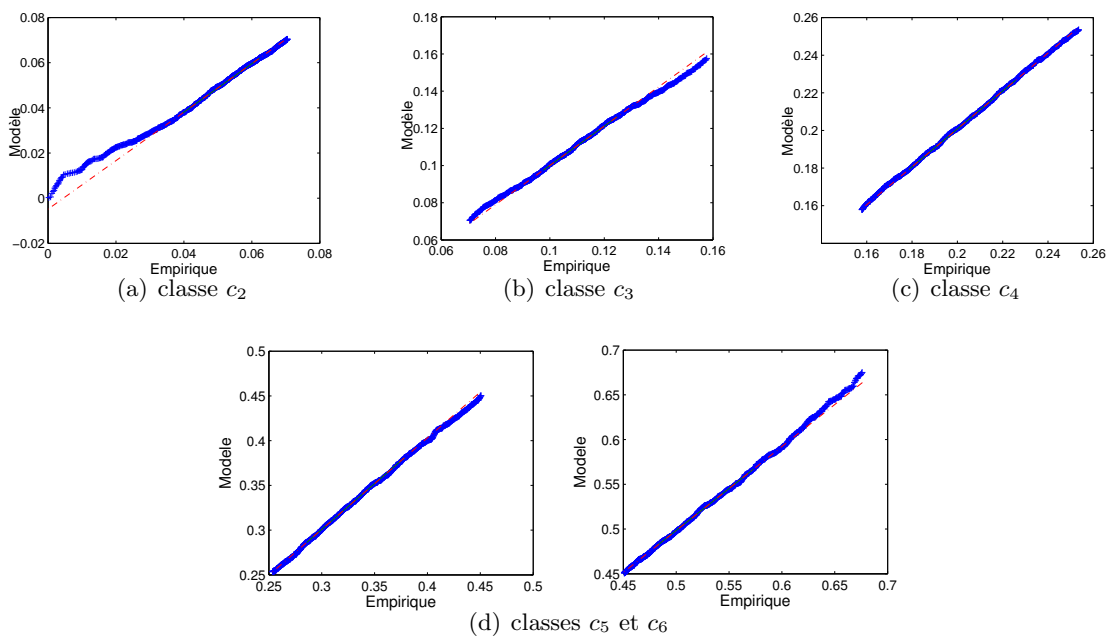


Figure D.5 – QQplots pour les classes  $c_2 - c_6$  du modèle HMM<sup>(B)</sup>.

## D.2 Modèle HMM<sup>(A)</sup>'

Un modèle supplémentaire basé sur les chaînes de Markov cachées est proposé pour le groupe "A". Le nombre et la répartition des classes de contraintes sont les mêmes que ceux proposés sur la figure D.1(a). Le processus caché du modèle HMM<sup>(A)</sup>' est identique au processus caché du modèle HMM<sup>(A)</sup>. Il s'agit du modèle FMC<sup>(A)</sup> excepté que les cycles états  $(s_i, s_j)$  sont remplacés par les libellés des classes  $(c_i, c_j)$ .

La différence avec le modèle HMM<sup>(A)</sup> réside dans la définition de la famille des distributions de probabilité. Deux distributions sont ici associées à chaque cycle état  $e_k = (c_i, c_j)$ , une pour le minimum  $c_j$  et une pour le maximum  $c_i$ , ce qui implique d'identifier un total de  $2K$  distributions contrairement au modèle HMM<sup>(A)</sup> où  $K_c$  distributions doivent être identifiées.

Avant d'inférer les distributions pour chaque couple  $(c_i, c_j)$ , il est souhaité vérifier que le maximum du couple  $(c_i, c_j)$  n'est pas corrélé à son minimum. Le coefficient linéaire de Bravais-Pearson entre les maximums et les minimums observés pour chaque cycle état  $(c_i, c_j)$  est à cet effet estimé. Les résultats sont reportés dans le tableau D.3.

Tableau D.3 – Coefficients de corrélation de Bravais-Pearson  $r_{M_n; m_n}$  entre les maximums  $M_n$  et les minimums  $m_n$  observés.

cycle état	$r_{M_n; m_n}$	cycle état	$r_{M_n; m_n}$	cycle état	$r_{M_n; m_n}$
$(c_2, c_1)$	/ <sup>1</sup>	$(c_4, c_3)$	-0.323	$(c_6, c_1)$	/
$(c_3, c_1)$	/	$(c_5, c_1)$	/	$(c_6, c_2)$	0.003
$(c_3, c_2)$	-0.408	$(c_5, c_2)$	-0.060	$(c_6, c_3)$	0.036
$(c_4, c_1)$	/	$(c_5, c_3)$	0.045	$(c_6, c_4)$	0.076
$(c_4, c_2)$	0.17	$(c_5, c_4)$	0.094	$(c_6, c_5)$	0.156

Une faible corrélation est mesurée entre les minimums et les maximums des cycles observés. L'inférence des distributions des minimums et des maximums pour l'ensemble des couples  $(c_i, c_j)$  est donc réalisée de manière indépendante. L'ensemble des  $2K = 30$  distributions du modèle HMM<sup>(A)</sup>' est reporté dans les tableaux D.4, D.5 et D.6. Les types des distribution choisis pour inférer les classes  $c_1$ - $c_5$  sont des lois gaussiennes tronquées ( $\mathcal{NT}$ ) et des lois lognormales tronquées ( $\mathcal{LNT}$ ). Ces lois donnent globalement une bonne satisfaction. Elles constituent néanmoins de fortes approximations dans certains cas lorsque plusieurs modes sont présents. Ceci est le cas des couples  $(c_3, c_2)$  et  $(c_4, c_3)$  par exemple. Les classes de valeurs extrêmes sont inférées par des lois de Pareto généralisée ( $G$ ).

<sup>1</sup>la classe  $c_1$  ne contient que des zéros, aucune corrélation n'est donc calculée.



Tableau D.4 – Distributions de probabilité pour les cycles  $(c_i, c_j)$ .

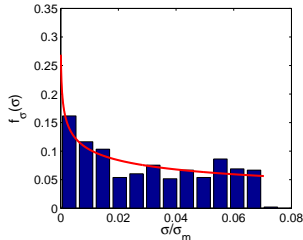
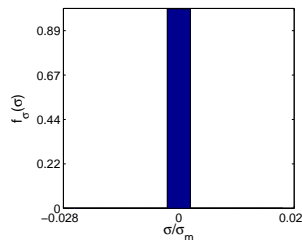
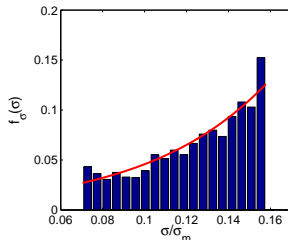
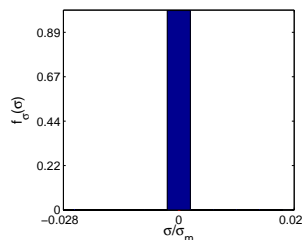
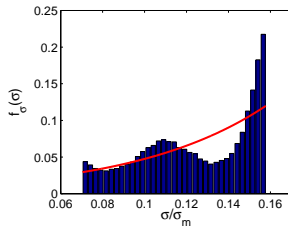
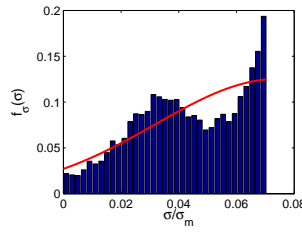
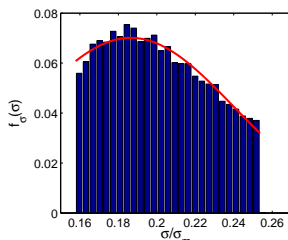
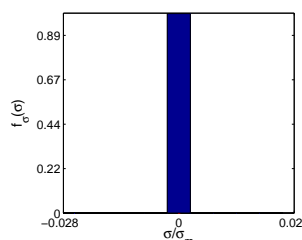
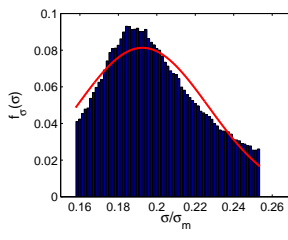
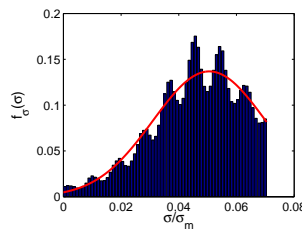
couple $(c_i, c_j)$	$c_i$	$c_j$
$(c_2, c_1)$	$c_2$ 	$c_1$ 
449 cycles	$\sim \mathcal{LNT}(0.1283, 0.0312, 0, 0.0704)$	0
$(c_3, c_1)$	$c_3$ 	$c_1$ 
3134 cycles	$\sim \mathcal{NT}(3.0668, 0.4096, 0.0704, 0.1578)$	0
$(c_3, c_2)$	$c_3$ 	$c_2$ 
40504 cycles	$\sim \mathcal{NT}(3.3102, 0.4456, 0.0704, 0.1578)$	$\sim \mathcal{NT}(0.0747, 0.0427, 0, 0.0704)$
$(c_4, c_1)$	$c_4$ 	$c_1$ 
13635 cycles	$\sim \mathcal{NT}(0.1864, 0.0536, 0.1578, 0.2536)$	0
$(c_4, c_2)$	$c_4$ 	$c_2$ 
522826 cycles	$\sim \mathcal{NT}(0.1925, 0.0343, 0.1578, 0.2536)$	$\sim \mathcal{NT}(0.0506, 0.0196, 0, 0.0704)$

Tableau D.5 – Distributions de probabilité pour les cycles  $(c_i, c_j)$ .

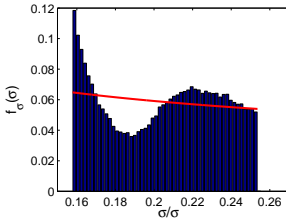
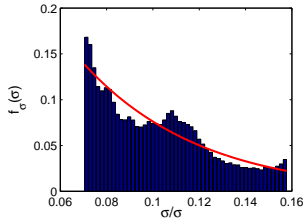
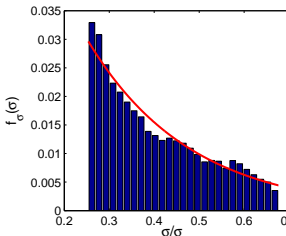
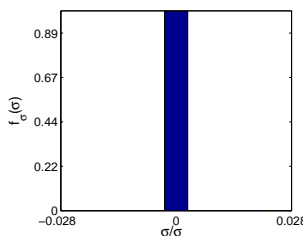
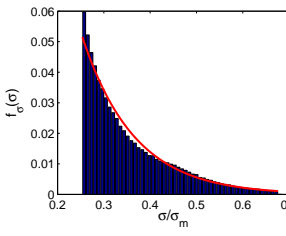
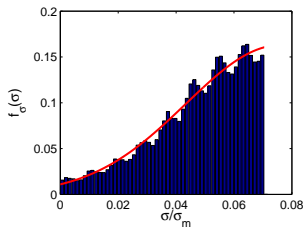
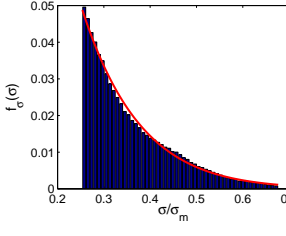
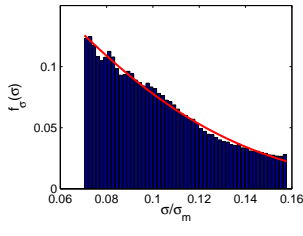
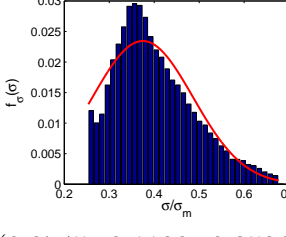
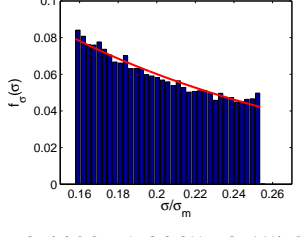
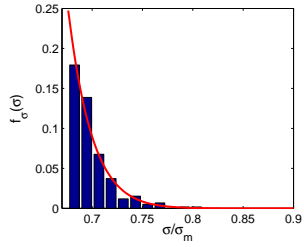
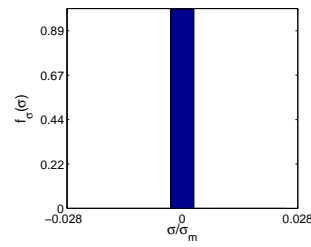
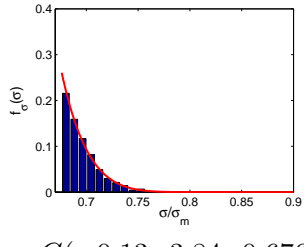
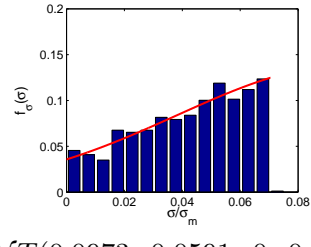
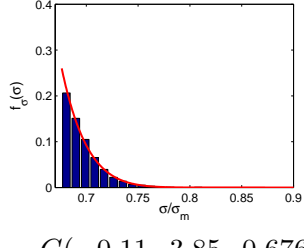
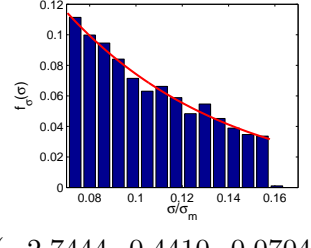
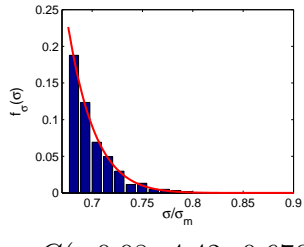
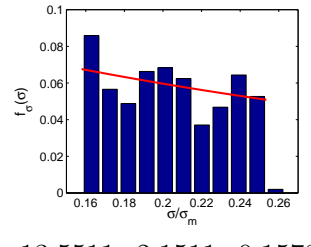
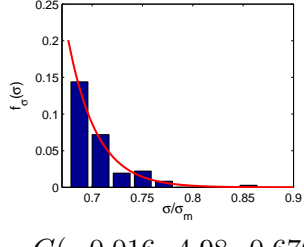
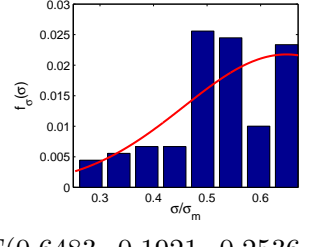
couple $(c_i, c_j)$	$c_i$	$c_j$
$(c_4, c_3)$	$c_4$ 	$c_3$ 
193121 cycles	$\sim \mathcal{LNT}(0.4974, 0.0661, 0.1578, 0.2536)$	$\sim \mathcal{NT}(-0.7584, 0.2043, 0.0704, 0.1578)$
$(c_5, c_1)$	$c_5$ 	$c_1$ 
14295 cycles	$\sim \mathcal{NT}(-10.1259, 1.5346, 0.2536, 0.6763)$	0
$(c_5, c_2)$	$c_5$ 	$c_2$ 
211672 cycles	$\sim \mathcal{NT}(-6.2759, 0.8589, 0.2536, 0.6763)$	$\sim \mathcal{NT}(0.0762, 0.0328, 0, 0.0704)$
$(c_5, c_3)$	$c_5$ 	$c_3$ 
209712 cycles	$\sim \mathcal{NT}(-1.4557, 0.4629, 0.2536, 0.6763)$	$\sim \mathcal{NT}(-0.0498, 0.0912, 0.0704, 0.1578)$
$(c_5, c_4)$	$c_5$ 	$c_4$ 
38566 cycles	$\sim \mathcal{NT}(0.3745, 0.1120, 0.2536, 0.6763)$	$\sim \mathcal{NT}(-6.4698, 1.0065, 0.1578, 0.2536)$

Tableau D.6 – Distributions de probabilité pour les cycles ( $c_i, c_j$ ).

couple ( $c_i, c_j$ )	$c_i$	$c_j$
$(c_6, c_1)$	$c_6$	$c_1$
		
275 cycles	$\sim G(-0.05, 4.04, 0.676)$	0
$(c_6, c_2)$	$c_6$	$c_2$
		
964 cycles	$\sim G(-0.13, 3.84, 0.676)$	$\sim NT(0.0973, 0.0591, 0, 0.0704)$
$(c_6, c_3)$	$c_6$	$c_3$
		
862 cycles	$\sim G(-0.11, 3.85, 0.676)$	$\sim NT(-2.7444, 0.4410, 0.0704, 0.1578)$
$(c_6, c_4)$	$c_6$	$c_4$
		
303 cycles	$\sim G(-0.08, 4.42, 0.676)$	$\sim NT(-13.5511, 2.1511, 0.1578, 0.2536)$
$(c_6, c_5)$	$c_6$	$c_5$
		
97 cycles	$\sim G(-0.016, 4.98, 0.676)$	$\sim NT(0.6483, 0.1921, 0.2536, 0.6763)$



## Annexe E

# Détails de la méthode IS-CE appliquée aux modèles FMC et HMM

La méthode d'entropie croisée (IS-CE), initialement développée par R.Y. Rubinstein [Rub97] pour évaluer des probabilités liées à des événements rares, a été appliquée avec succès dans les réseaux de télécommunication où la défaillance du système technologique étudié est modélisée par une chaîne de Markov du premier ordre à temps discret et à espace d'états discret (modèle FMC).

La section 5.4.1 présente le principe de la méthode IS-CE lorsque le modèle stochastique du problème de fiabilité est une chaîne de Markov (FMC) en s'appuyant sur les références [dBKMR05, Rid05]. La section 5.4.2 introduit le principe de résolution de la méthode IS-CE lorsque le modèle stochastique du problème de fiabilité est cette fois-ci une chaîne de Markov cachée (HMM), ce qui est, selon les travaux répertoriés dans la littérature, un problème nouveau. Cette annexe a pour objectif de fournir les détails de résolution du problème de maximisation de la méthode IS-CE présenté au paragraphe 5.4.1.2 pour les chaînes de Markov FMC et au paragraphe 5.4.2.3 pour les chaînes de Markov cachées HMM.

## E.1 Problème de maximisation - cas FMC

On rappelle que la densité de probabilité <sup>1</sup> d'origine de la chaîne de Markov  $X$  de longueur  $N$  (entrée du problème de fiabilité) s'écrit sous la forme suivante :

$$p_X(x, N, \mathbf{P}) = \prod_{i,j=1}^K p_{i,j}^{n_{i,j}(x, N)} \quad (\text{E.1})$$

où  $n_{i,j}(x, N)$  est le nombre de transitions du cycle état  $e_i$  au cycle état  $e_j$  de la réalisation  $x \in E^N$ .

L'idée de la méthode IS-CE est de déterminer la matrice  $\mathbf{Q}^*$  telle que la densité de probabilité  $p_X(\cdot, \mathbf{Q}^*)$  soit la plus proche possible de la densité optimale des tirages d'importance  $q_{\mathbf{X}}^*$ , impossible à trouver en pratique.

Le problème à résoudre est le suivant : trouver les paramètres  $q_{i,j}^*$  de la matrice de transition  $\mathbf{Q}^*$ , solutions du problème de maximisation sous contraintes suivant :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{Q}} D(\mathbf{Q}) &= \max_{\mathbf{Q}} \mathbb{E}_{p_X(\cdot, \mathbf{R})} [\mathbb{1}_{D_f}(X) W(X, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}) \ln p_X(X, N, \mathbf{Q})] \\ \text{sous :} & \begin{cases} 0 \leq q_{i,j} \leq 1 \\ \sum_{j=1}^K q_{i,j} = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

où  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  sont respectivement équivalents à  $u$ ,  $v$  et  $w$  dans la formulation (5.21) et  $D_f = D_{fN} = \{x \in E^N : g_N^{(2)} = g^{(2)}(x) \leq 0\}$  avec  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \forall x \in E^N$  ( $N$  fixé).

Le rapport de vraisemblance  $W(x, N, \mathbf{P}, \mathbf{R})$  s'écrit :

$$W(x, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}) = \frac{p_X(x, N, \mathbf{P})}{p_X(x, N, \mathbf{R})} = \prod_{i,j=1}^K \left( \frac{p_{i,j}}{r_{i,j}} \right)^{n_{i,j}(x, N)} \quad (\text{E.3})$$

En introduisant les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, K\}$ , avec  $\text{card}(E) =$

---

<sup>1</sup>Usage abusif.

$K$ , le problème d'optimisation (E.2) devient :

$$\max_{\mathbf{Q}} \min_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K} \left[ \mathbb{E}_{p_X(\cdot, \mathbf{R})} \left[ \mathbb{1}_{D_f}(X) W(X, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}) \ln p_X(X, N, \mathbf{Q}) \right] + \sum_{i=1}^K \lambda_i \left( \sum_{j=1}^K q_{i,j} - 1 \right) \right] \quad (\text{E.4})$$

En remplaçant  $p_X(X, \mathbf{Q})$  par son expression, la relation (E.4) devient :

$$\max_{\mathbf{Q}} \min_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K} \left[ \mathbb{E}_{p_X(\cdot, \mathbf{R})} \left[ \mathbb{1}_{D_f}(X) W(X, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}) \sum_{i,j=1}^K n_{i,j}(X, N) \ln q_{i,j} \right] + \sum_{i=1}^K \lambda_i \left( \sum_{j=1}^K q_{i,j} - 1 \right) \right] \quad (\text{E.5})$$

En dérivant le terme à minimiser par rapport aux paramètres  $q_{i,j}$ , on obtient,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, K\}$  :

$$\frac{\mathbb{E}_{p_X(\cdot, \mathbf{R})} \left[ \mathbb{1}_{D_f}(X) W(X, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}) n_{i,j}(X, N) \right]}{q_{i,j}^*} + \lambda_i = 0 \quad (\text{E.6})$$

On a ainsi :

$$-\lambda_i q_{i,j}^* = \mathbb{E}_{p_X(\cdot, \mathbf{R})} \left[ \mathbb{1}_{D_f}(X) W(X, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}) n_{i,j}(X, N) \right] \quad (\text{E.7})$$

En sommant par rapport à  $j$ , on obtient,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, K\}$  :

$$-\lambda_i \sum_{j=1}^K q_{i,j}^* = \mathbb{E}_{p_X(\cdot, \mathbf{R})} \left[ \mathbb{1}_{D_f}(X) W(X, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}) \sum_{j=1}^K n_{i,j}(X, N) \right] \quad (\text{E.8})$$

Et comme  $\sum_{j=1}^K q_{i,j}^* = 1$ , on a :

$$-\lambda_i = \mathbb{E}_{p_X(\cdot, \mathbf{R})} \left[ \mathbb{1}_{D_f}(X) W(X, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}) n_i(X, N) \right] \quad (\text{E.9})$$

où  $n_i(X, N) = \sum_{j=1}^K n_{i,j}(X, N)$  est le nombre de transitions partant de l'état  $e_i$ .

En injectant l'expression trouvée pour  $\lambda_i$  dans la relation (E.7), on trouve :

$$q_{i,j}^* = \frac{\mathbb{E}_{p_X(\cdot, \mathbf{R})} [\mathbb{1}_{D_f}(X) W(X, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}) n_{i,j}(X, N)]}{\mathbb{E}_{p_X(\cdot, \mathbf{R})} [\mathbb{1}_{D_f}(X) W(X, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}) n_i(X, N)]} \quad (\text{E.10})$$

Les paramètres  $q_{i,j}^*$  de la relation (E.10) définissent complètement la matrice  $\mathbf{Q}^*$ , solution du problème de maximisation (E.2).

## E.2 Problème de maximisation - cas HMM

La densité de probabilité conjointe de la chaîne de Markov cachée  $(S_n, X_n)_{1 \leq n \leq N}$  considérée s'écrit :

$$p_{XS}(x, s, N, \mathbf{P}, u) = \left( \prod_{n=1}^N f_{M'_n}(M_n, u) f_{m'_n}(m_n, u) \right) \left( \prod_{i,j=1}^K p_{i,j}^{n_{i,j}(s, N)} \right) \quad (\text{E.11})$$

Le principe de la méthode IS-CE consiste ici à trouver les paramètres  $\mathbf{Q}^*$  et  $v^*$  tels que la densité  $p_{XS}(\cdot, \mathbf{Q}^*, v^*)$  appartenant à la famille des densités de probabilité de la densité d'origine  $p_{XS}(\cdot, \mathbf{P}, u)$  soit la plus proche possible de la densité d'importance optimale  $q_{XS}^*$  des tirages d'importance (IS).

De manière analogue aux chaînes de Markov, le problème de maximisation sous contraintes s'écrit ici :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{Q}, v} D(\mathbf{Q}, v) &= \max_{\mathbf{Q}, v} \mathbb{E}_{p_{XS}(\cdot, \mathbf{R}, w)} [\mathbb{1}_{D_f}(X) W(X, S, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}, u, w) \ln p_{XS}(X, S, N, \mathbf{Q}, v)] \\ \text{sous :} &\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq q_{i,j} \leq 1 \\ \sum_{j=1}^K q_{i,j} = 1 \\ -0.5 < \xi < 0 \\ \beta > 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.12}) \end{aligned}$$

où  $v = \{\xi, \beta\}$ .



On impose  $-0.5 < \xi < 0$  afin que la densité de Pareto généralisée de la densité d'importance appartienne au domaine d'attraction de Weibull, comme la distribution initiale  $f(\cdot, u)$  identifiée à partir des données réelles de chargement.

Le rapport de vraisemblance  $W(x, s, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}, u, w)$  s'écrit :

$$W(x, s, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}, u, w) = \left( \prod_{i,j=1}^K \left( \frac{p_{i,j}}{r_{i,j}} \right)^{n_{i,j}(s, N)} \right) \left( \prod_{n=1}^N \frac{f_{M'_n}(M_n, u) f_{m'_n}(m_n, u)}{f_{M'_n}(M_n, w) f_{m'_n}(m_n, w)} \right) \quad (\text{E.13})$$

En introduisant les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, K\}$ , le problème d'optimisation (5.57) devient :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{Q}, v} \min_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K} & \left[ \mathbb{E}_{p_{XS}(\cdot, \mathbf{R}, w)} \left[ \mathbb{1}_{D_f}(X) W(X, S, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}, u, w) \ln p_{XS}(X, S, N, \mathbf{Q}, v) \right] \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^K \lambda_i \left( \sum_{j=1}^K q_{i,j} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

En remplaçant la densité  $p_{XS}(X, S, N, \mathbf{Q}, v)$  par son expression, on a :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{Q}, v} \min_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K} & \left[ \mathbb{E}_{p_{XS}(\cdot, \mathbf{R}, w)} \left[ \mathbb{1}_{D_f}(X) W(X, S, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}, u, w) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left( \sum_{i,j=1}^K n_{i,j}(S, N) \ln q_{i,j} + \sum_{n=1}^N (\ln f_{M'_n}(M_n, v) + \ln f_{m'_n}(m_n, v)) \right) \right] \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^K \lambda_i \left( \sum_{j=1}^K q_{i,j} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

La matrice  $\mathbf{Q}^*$  et le vecteur de paramètre  $v^* = \{\xi^*, \beta^*\}$  sont obtenus en annulant le système sous-jacent aux dérivées partielles du terme à minimiser par rapport aux coefficients  $q_{i,j}$ ,  $\xi$  et  $\beta$ .

En dérivant tout d'abord le terme entre crochets de l'équation (E.15) par rapport aux

paramètres  $q_{i,j}$ , on obtient,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, K\}$  :

$$\frac{\mathbb{E}_{p_{XS}(\cdot, \mathbf{R})} [\mathbb{1}_{D_f}(X)W(X, S, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}, u, w) n_{i,j}(S, N)]}{q_{i,j}^*} + \lambda_i = 0 \quad (\text{E.16})$$

Cette équation est découplée des paramètres  $v = \{\xi, \beta\}$ , ce qui permet sa résolution.

L'expression des coefficients de Lagrange  $\lambda_i$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, K\}$  sont tout d'abord déterminés en sommant l'équation E.16 suivant l'indice  $j$ , ce qui permet ensuite d'en déduire les paramètres  $q_{i,j}^*$  solutions.  $\forall i$  et  $j \in \{1, 2, \dots, K\}$  on obtient :

$$q_{i,j}^* = \frac{\mathbb{E}_{p_{XS}(\cdot, \mathbf{R}, w)} [\mathbb{1}_{D_f}(X)W(X, S, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}, u, w) n_{i,j}(S, N)]}{\mathbb{E}_{p_{XS}(\cdot, \mathbf{R}, w)} [\mathbb{1}_{D_f}(X)W(X, S, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}, u, w) n_i(S, N)]} \quad (\text{E.17})$$

En dérivant maintenant le terme entre crochets de l'équation (E.15) par rapport aux paramètres  $v = \{\xi, \beta\}$ , on obtient le système suivant à résoudre, à deux équations et deux inconnues :

$$\begin{cases} \mathbb{E}_{p_{XS}(\cdot, \mathbf{R}, w)} \left[ \mathbb{1}_{D_f}(X)W(X, S, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}, u, w) \frac{\partial}{\partial \xi} (\ln p_{XS}(X, S, N, \mathbf{Q}, \xi, \beta)) \right] = 0 \\ \mathbb{E}_{p_{XS}(\cdot, \mathbf{R}, w)} \left[ \mathbb{1}_{D_f}(X)W(X, S, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}, u, w) \frac{\partial}{\partial \beta} (\ln p_{XS}(X, S, N, \mathbf{Q}, \xi, \beta)) \right] = 0 \end{cases} \quad (\text{E.18})$$

Soit, de manière plus explicite, il s'agit de résoudre :

$$\begin{cases} \mathbb{E}_{p_{XS}(\cdot, \mathbf{R}, w)} \left[ \mathbb{1}_{D_f}(X)W(X, S, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}, u, w) \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial \xi} \ln f_{M'_n}(M_n, \xi, \beta) \right] = 0 \\ \mathbb{E}_{p_{XS}(\cdot, \mathbf{R}, w)} \left[ \mathbb{1}_{D_f}(X)W(X, S, N, \mathbf{P}, \mathbf{R}, u, w) \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln f_{M'_n}(M_n, \xi, \beta) \right] = 0 \end{cases} \quad (\text{E.19})$$

car la famille des densités de probabilité des minimums  $f_{m'_n}$  ne contient pas la densité de Pareto généralisée.

Ce système d'équations ne fait pas intervenir les paramètres  $q_{i,j}$  de la matrice de transition  $\mathbf{Q}$ . Les paramètres  $\xi^*$  et  $\beta^*$  de la densité d'importance  $p_{XS}(\cdot, \mathbf{Q}^*, v^*)$ , où  $v^* = \{\xi^*, \beta^*\}$ , sont obtenus par résolution de ce système.