

Limite thermodynamique pour un système de particules quantiques en interaction dans un milieu aléatoire

Nikolaj Veniaminov

Directeur de thèse : Frédéric Klopp

Laboratoire Analyse Géométrie et Applications, Université Paris 13

28 septembre 2012

JURY

<i>Président :</i>	Alain Grigis	Université Paris 13 Nord
<i>Rapporteurs :</i>	Mathieu Lewin	Université de Cergy-Pontoise
	Valentin A. Zagrebnov	Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II)
<i>Examineurs :</i>	Eric Cancès	Ecole des Ponts ParisTech
	Jean-Marc Delort	Université Paris 13 Nord
	Frédéric Klopp	Institut de Mathématiques de Jussieu



Plan

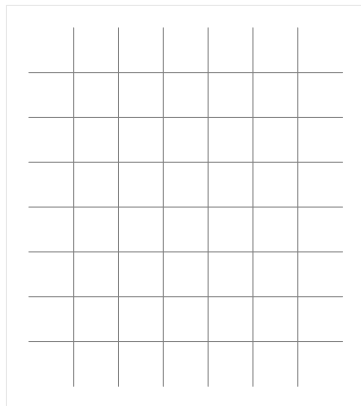
- Introduction : motivation physique
- Modèle général : particules en interaction dans un milieu aléatoire
- Fermions dans le modèle des pièces unidimensionnel
- Perspectives



Introduction : motivation physique

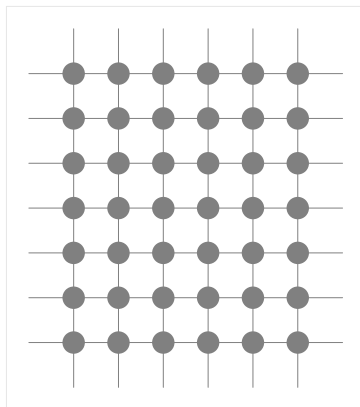


Transport électronique dans des milieux imparfaits



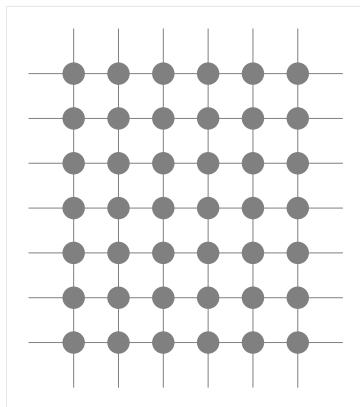
Transport électronique dans des milieux imparfaits

- Cristal parfait : opérateurs périodiques



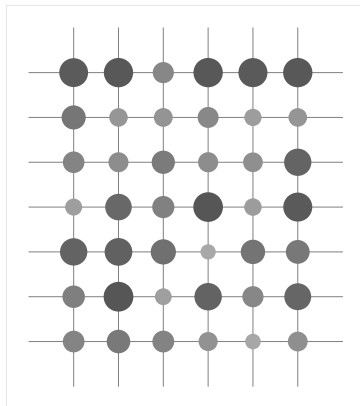
Transport électronique dans des milieux imparfaits

- Cristal parfait : opérateurs périodiques
- Cristal avec des impuretés : opérateurs **aléatoires**



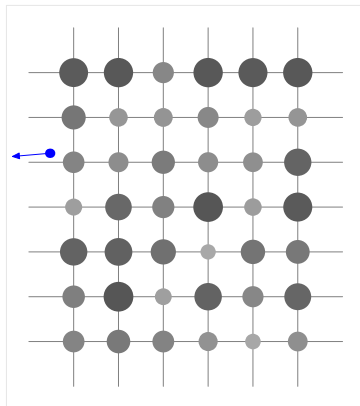
Transport électronique dans des milieux imparfaits

- Cristal parfait : opérateurs périodiques
- Cristal avec des impuretés : opérateurs aléatoires
Exemple : modèle d'Anderson



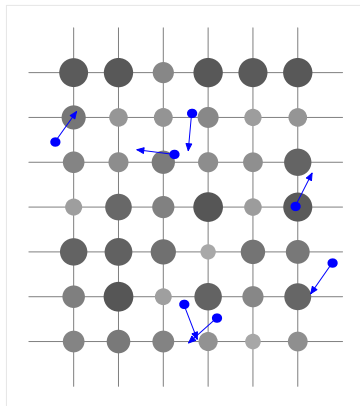
Transport électronique dans des milieux imparfaits

- Cristal parfait : opérateurs périodiques
- Cristal avec des impuretés : opérateurs aléatoires
Exemple : modèle d'Anderson
- Transport **électronique**



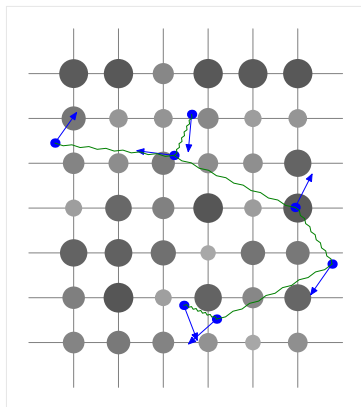
Transport électronique dans des milieux imparfaits

- Cristal parfait : opérateurs périodiques
- Cristal avec des impuretés : opérateurs aléatoires
Exemple : modèle d'Anderson
- Transport électronique
- Plusieurs électrons



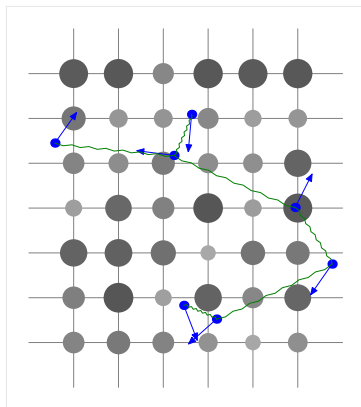
Transport électronique dans des milieux imparfaits

- Cristal parfait : opérateurs périodiques
- Cristal avec des impuretés : opérateurs aléatoires
Exemple : modèle d'Anderson
- Transport électronique
- Plusieurs électrons en interaction



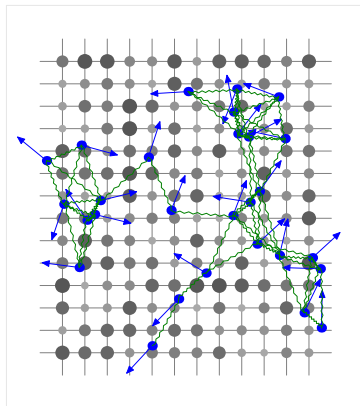
Transport électronique dans des milieux imparfaits

- Cristal parfait : opérateurs périodiques
- Cristal avec des impuretés : opérateurs aléatoires
Exemple : modèle d'Anderson
- Transport électronique
- Plusieurs électrons en interaction
- Limite thermodynamique : volume plus grand \Rightarrow plus de particules



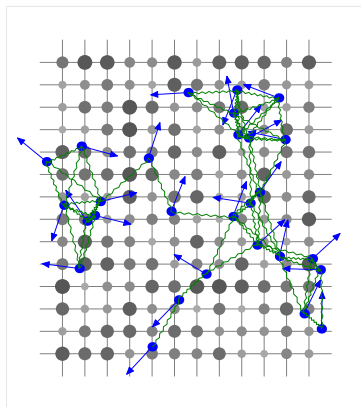
Transport électronique dans des milieux imparfaits

- Cristal parfait : opérateurs périodiques
- Cristal avec des impuretés : opérateurs aléatoires
Exemple : modèle d'Anderson
- Transport électronique
- Plusieurs électrons en interaction
- Limite thermodynamique : volume plus grand \Rightarrow plus de particules



Transport électronique dans des milieux imparfaits

- Cristal parfait : opérateurs périodiques
- Cristal avec des impuretés : opérateurs aléatoires
Exemple : modèle d'Anderson
- Transport électronique
- Plusieurs électrons en interaction
- Limite thermodynamique : volume plus grand \Rightarrow plus de particules



Question

Que se passe-t-il dans la limite thermodynamique ?

Modèle général : particules en interaction dans un milieu aléatoire

- Définition et problème
- Résultats principaux



Opérateurs de Schrödinger aléatoires

Sur l'espace d'Hilbert $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ ou $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$,

$$H_\omega = -\Delta_d + V_\omega,$$

où

- Δ_d opérateur de Laplace continu ou discret,
- V_ω potentiel aléatoire.



Opérateurs de Schrödinger aléatoires

Sur l'espace d'Hilbert $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ ou $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$,

$$H_\omega = -\Delta_d + V_\omega,$$

où

- Δ_d opérateur de Laplace continu ou discret,
- V_ω potentiel aléatoire.

Exemple : **Modèle de déplacement**. Soient $u \geq 0$ à support compact et $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{Z}^d}$ i.i.d.,

$$V_\omega = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} u(\cdot - j - \omega_j)$$



Opérateurs de Schrödinger aléatoires

Sur l'espace d'Hilbert $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ ou $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$,

$$H_\omega = -\Delta_d + V_\omega,$$

où

- Δ_d opérateur de Laplace continu ou discret,
- V_ω potentiel aléatoire.

Exemple : Modèle de déplacement. Soient $u \geq 0$ à support compact et $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{Z}^d}$ i.i.d.,

$$V_\omega = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} u(\cdot - j - \omega_j)$$

En général, on demande l'**ergodicité** :

$$H_{\tau_k(\omega)} = U_k^* H_\omega U_k.$$



Plusieurs particules dans un milieu aléatoire

- ① H_ω un opérateur à une particule sur l'espace d'Hilbert \mathfrak{H}



Plusieurs particules dans un milieu aléatoire

① H_ω un opérateur à une particule sur l'espace d'Hilbert \mathfrak{H}

Exemple : $H_\omega = -\Delta_d + V_\omega$ sur $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$



Plusieurs particules dans un milieu aléatoire

- 1 H_ω un opérateur à une particule sur l'espace d'Hilbert \mathfrak{H}
Exemple : $H_\omega = -\Delta_d + V_\omega$ sur $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$
- 2 Espace d'Hilbert à n particules



Plusieurs particules dans un milieu aléatoire

- ① H_ω un opérateur à une particule sur l'espace d'Hilbert \mathfrak{H}
Exemple : $H_\omega = -\Delta_d + V_\omega$ sur $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$
- ② Espace d'Hilbert à n particules pour **particules classiques** (statistique de Maxwell – Boltzmann) :

$$\mathfrak{H}^n = \bigotimes^n \mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^{nd})$$



Plusieurs particules dans un milieu aléatoire

- ① H_ω un opérateur à une particule sur l'espace d'Hilbert \mathfrak{H}

Exemple : $H_\omega = -\Delta_d + V_\omega$ sur $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$

- ② Espace d'Hilbert à n particules pour **bosons** (statistique de Bose – Einstein) :

$$\mathfrak{H}_+^n = \text{Sym}^n \mathfrak{H} = L_+^2(\mathbb{R}^{nd})$$



Plusieurs particules dans un milieu aléatoire

- ① H_ω un opérateur à une particule sur l'espace d'Hilbert \mathfrak{H}
Exemple : $H_\omega = -\Delta_d + V_\omega$ sur $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$
- ② Espace d'Hilbert à n particules pour **fermions** (statistique de Fermi – Dirac) :

$$\mathfrak{H}_-^n = \bigwedge^n \mathfrak{H} = L_-^2(\mathbb{R}^{nd})$$



Plusieurs particules dans un milieu aléatoire

- ① H_ω un opérateur à une particule sur l'espace d'Hilbert \mathfrak{H}

Exemple : $H_\omega = -\Delta_d + V_\omega$ sur $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$

- ② Espace d'Hilbert à n particules pour fermions (statistique de Fermi – Dirac) :

$$\mathfrak{H}_-^n = \bigwedge^n \mathfrak{H} = L_-^2(\mathbb{R}^{nd})$$

- ③ Opérateur à n particules

$$H_\omega(n) = \sum_{j=1}^n (H_\omega)_{x^j} + W_n(x^1, \dots, x^n) \quad \text{sur } \mathfrak{H}_\#^n$$



Plusieurs particules dans un milieu aléatoire

- ① H_ω un opérateur à une particule sur l'espace d'Hilbert \mathfrak{H}

Exemple : $H_\omega = -\Delta_d + V_\omega$ sur $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$

- ② Espace d'Hilbert à n particules pour fermions (statistique de Fermi – Dirac) :

$$\mathfrak{H}_-^n = \bigwedge^n \mathfrak{H} = L_-^2(\mathbb{R}^{nd})$$

- ③ Opérateur à n particules

$$H_\omega(n) = \sum_{j=1}^n (H_\omega)_{x^j} + W_n(x^1, \dots, x^n) \quad \text{sur } \mathfrak{H}_\#^n$$

- ④ Exemple : interactions par paires invariantes par translations :

$$W_n(x^1, \dots, x^n) = \sum_{\substack{i,j \in \{1, \dots, n\} \\ i < j}} U(x^i - x^j)$$



Limite thermodynamique

- Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné.



Limite thermodynamique

- Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné.
- Soit $\partial_h \Lambda$ le h -voisinage de $\partial\Lambda$.



Limite thermodynamique

- Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné.
- Soit $\partial_h \Lambda$ le h -voisinage de $\partial \Lambda$.
- **Définition** $\Lambda \rightarrow \infty$ **au sens de Fisher** si



- Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné.
- Soit $\partial_h \Lambda$ le h -voisinage de $\partial \Lambda$.
- **Définition** $\Lambda \rightarrow \infty$ **au sens de Fisher** si
 - 1 $\lim |\Lambda| = +\infty$



- Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné.
- Soit $\partial_h \Lambda$ le h -voisinage de $\partial \Lambda$.
- **Définition** $\Lambda \rightarrow \infty$ **au sens de Fisher** si
 - ① $\lim |\Lambda| = +\infty$
 - ② il existe une « fonction de la forme » π telle que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \pi(\alpha) = 0$ et pour tout Λ ,

$$\frac{|\partial_{\alpha} \text{diam}(\Lambda) \Lambda|}{|\Lambda|} \leq \pi(\alpha).$$



- Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné.
- Soit $\partial_h \Lambda$ le h -voisinage de $\partial \Lambda$.
- **Définition** $\Lambda \rightarrow \infty$ au sens de Fisher si
 - ① $\lim |\Lambda| = +\infty$
 - ② il existe une « fonction de la forme » π telle que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \pi(\alpha) = 0$ et pour tout Λ ,

$$\frac{|\partial_{\alpha} \text{diam}(\Lambda) \Lambda|}{|\Lambda|} \leq \pi(\alpha).$$

- **Définition** La limite

$$\Lambda \rightarrow \infty, \quad \frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho > 0$$

s'appelle **la limite thermodynamique**.



- Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné.
- Soit $\partial_h \Lambda$ le h -voisinage de $\partial \Lambda$.
- **Définition** $\Lambda \rightarrow \infty$ au sens de Fisher si
 - 1 $\lim |\Lambda| = +\infty$
 - 2 il existe une « fonction de la forme » π telle que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \pi(\alpha) = 0$ et pour tout Λ ,

$$\frac{|\partial_{\alpha} \text{diam}(\Lambda) \Lambda|}{|\Lambda|} \leq \pi(\alpha).$$

- **Définition** La limite

$$\Lambda \rightarrow \infty, \quad \frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho > 0$$

s'appelle la limite thermodynamique.

- La constante positive ρ est la densité de particules.



Objet de recherche

Sur l'espace d'Hilbert $\mathfrak{H}_{\#}^n(\Lambda) = L_{\#}^2(\Lambda^n)$, l'opérateur $H_{\omega, \#}(\Lambda, n)$ décrit



Objet de recherche

Sur l'espace d'Hilbert $\mathfrak{H}_{\#}^n(\Lambda) = L_{\#}^2(\Lambda^n)$, l'opérateur $H_{\omega, \#}(\Lambda, n)$ décrit

- n particules en interaction,



Objet de recherche

Sur l'espace d'Hilbert $\mathfrak{H}_{\#}^n(\Lambda) = L_{\#}^2(\Lambda^n)$, l'opérateur $H_{\omega, \#}(\Lambda, n)$ décrit

- n particules en interaction,
- dans le domaine Λ ,



Objet de recherche

Sur l'espace d'Hilbert $\mathfrak{H}_{\sharp}^n(\Lambda) = L^2_{\sharp}(\Lambda^n)$, l'opérateur $H_{\omega, \sharp}(\Lambda, n)$ décrit

- n particules en interaction,
- dans le domaine Λ ,
- de la statistique quantique $\sharp \in \{\emptyset, +, -\}$,



Objet de recherche

Sur l'espace d'Hilbert $\mathfrak{H}_{\sharp}^n(\Lambda) = L_{\sharp}^2(\Lambda^n)$, l'opérateur $H_{\omega, \sharp}(\Lambda, n)$ décrit

- n particules en interaction,
- dans le domaine Λ ,
- de la statistique quantique $\sharp \in \{\emptyset, +, -\}$,
- dans le milieu aléatoire V_{ω} .



Objet de recherche

Sur l'espace d'Hilbert $\mathfrak{H}_{\sharp}^n(\Lambda) = L_{\sharp}^2(\Lambda^n)$, l'opérateur $H_{\omega, \sharp}(\Lambda, n)$ décrit

- n particules en interaction,
- dans le domaine Λ ,
- de la statistique quantique $\sharp \in \{\emptyset, +, -\}$,
- dans le milieu aléatoire V_{ω} .

Question

Étudier $H_{\omega, \sharp}(\Lambda, n)$ dans la limite thermodynamique $\Lambda \rightarrow \infty$, $\frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho$.



Objet de recherche

Sur l'espace d'Hilbert $\mathfrak{H}_{\sharp}^n(\Lambda) = L_{\sharp}^2(\Lambda^n)$, l'opérateur $H_{\omega, \sharp}(\Lambda, n)$ décrit

- n particules en interaction,
- dans le domaine Λ ,
- de la statistique quantique $\sharp \in \{\emptyset, +, -\}$,
- dans le milieu aléatoire V_{ω} .

Question

Étudier $H_{\omega, \sharp}(\Lambda, n)$ dans la limite thermodynamique $\Lambda \rightarrow \infty$, $\frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho$.

Exemple : Soit $E_{\omega}(\Lambda, n)$ l'énergie fondamentale de $H_{\omega}(\Lambda, n)$.



Objet de recherche

Sur l'espace d'Hilbert $\mathfrak{H}_{\sharp}^n(\Lambda) = L_{\sharp}^2(\Lambda^n)$, l'opérateur $H_{\omega, \sharp}(\Lambda, n)$ décrit

- n particules en interaction,
- dans le domaine Λ ,
- de la statistique quantique $\sharp \in \{\emptyset, +, -\}$,
- dans le milieu aléatoire V_{ω} .

Question

Étudier $H_{\omega, \sharp}(\Lambda, n)$ dans la limite thermodynamique $\Lambda \rightarrow \infty$, $\frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho$.

Exemple : Soit $E_{\omega}(\Lambda, n)$ l'énergie fondamentale de $H_{\omega}(\Lambda, n)$.

L'énergie fondamentale par particule $\frac{E_{\omega}(\Lambda, n)}{n}$, admet-elle une limite thermodynamique ?



Conditions sur le potentiel d'interaction W_n



Conditions sur le potentiel d'interaction W_n

- ① Les interactions W_n sont **par paires invariantes par translations** si

$$W_n(x^1, \dots, x^n) = \sum_{\substack{i,j \in \{1, \dots, n\} \\ i < j}} U(x^i - x^j), \quad (\text{PI})$$

avec $U : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction symétrique, $U(x) = U(-x)$.



Conditions sur le potentiel d'interaction W_n

- ① Les interactions W_n sont par paires invariantes par translations si

$$W_n(x^1, \dots, x^n) = \sum_{\substack{i, j \in \{1, \dots, n\} \\ i < j}} U(x^i - x^j), \quad (\text{PI})$$

avec $U : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction symétrique, $U(x) = U(-x)$.

- ② Les interactions **(PI)** sont **tempérées** s'ils existent $R_0 > 0$, A et $\lambda > d$ tels que

$$|U(x)| \leq A|x|^{-\lambda} \quad \text{pour } |x| \geq R_0. \quad (\text{PTI})$$



Conditions sur le potentiel d'interaction W_n

- ① Les interactions W_n sont par paires invariantes par translations si

$$W_n(x^1, \dots, x^n) = \sum_{\substack{i,j \in \{1, \dots, n\} \\ i < j}} U(x^i - x^j), \quad (\text{PI})$$

avec $U : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction symétrique, $U(x) = U(-x)$.

- ② Les interactions **(PI)** sont tempérées s'ils existent $R_0 > 0$, A et $\lambda > d$ tels que

$$|U(x)| \leq A|x|^{-\lambda} \quad \text{pour } |x| \geq R_0. \quad (\text{PTI})$$

- ③ Les interactions sont **stables** s'il existe $B > 0$ tel que

$$H_\omega(n) \geq -nB \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega. \quad (\text{SI})$$



Conditions sur le potentiel d'interaction W_n

- ① Les interactions W_n sont par paires invariantes par translations si

$$W_n(x^1, \dots, x^n) = \sum_{\substack{i,j \in \{1, \dots, n\} \\ i < j}} U(x^i - x^j), \quad \text{(PI)}$$

avec $U : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction symétrique, $U(x) = U(-x)$.

- ② Les interactions **(PI)** sont tempérées s'ils existent $R_0 > 0$, A et $\lambda > d$ tels que

$$|U(x)| \leq A|x|^{-\lambda} \quad \text{pour } |x| \geq R_0. \quad \text{(PTI)}$$

- ③ Les interactions sont stables s'il existe $B > 0$ tel que

$$H_\omega(n) \geq -nB \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega. \quad \text{(SI)}$$

- ④ Les interactions **(PI)** sont à support compact si U est à support compact.



Théorèmes d'existence de la limite thermodynamique

Soit $E_\omega(\Lambda, n)$ l'énergie fondamentale de $H_\omega(\Lambda, n)$.

Théorème

Théorèmes d'existence de la limite thermodynamique

Soit $E_\omega(\Lambda, n)$ l'énergie fondamentale de $H_\omega(\Lambda, n)$.

Théorème

Soit l'opérateur à une particule H_ω

Théorèmes d'existence de la limite thermodynamique

Soit $E_\omega(\Lambda, n)$ l'énergie fondamentale de $H_\omega(\Lambda, n)$.

Théorème

Soit l'opérateur à une particule H_ω

- **borné inférieurement** : il existe C t.q. $H_\omega \geq -C$ pour tout ω ,

Théorèmes d'existence de la limite thermodynamique

Soit $E_\omega(\Lambda, n)$ l'énergie fondamentale de $H_\omega(\Lambda, n)$.

Théorème

Soit l'opérateur à une particule H_ω

- *borné inférieurement* : il existe C t.q. $H_\omega \geq -C$ pour tout ω ,
- *décorrélé* : il existe $R_0 > 0$ t.q. si $\text{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2) \geq R_0$ alors $H_\omega(\Lambda_1)$ et $H_\omega(\Lambda_2)$ sont indépendantes.

Théorèmes d'existence de la limite thermodynamique

Soit $E_\omega(\Lambda, n)$ l'énergie fondamentale de $H_\omega(\Lambda, n)$.

Théorème

Soit l'opérateur à une particule H_ω

- *borné inférieurement* : il existe C t.q. $H_\omega \geq -C$ pour tout ω ,
- *décorrélé* : il existe $R_0 > 0$ t.q. si $\text{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2) \geq R_0$ alors $H_\omega(\Lambda_1)$ et $H_\omega(\Lambda_2)$ sont indépendantes.

Soient les interactions W *par paires, invariantes par translations (PI)*,

Théorèmes d'existence de la limite thermodynamique

Soit $E_\omega(\Lambda, n)$ l'énergie fondamentale de $H_\omega(\Lambda, n)$.

Théorème

Soit l'opérateur à une particule H_ω

- *borné inférieurement* : il existe C t.q. $H_\omega \geq -C$ pour tout ω ,
- *décorrélé* : il existe $R_0 > 0$ t.q. si $\text{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2) \geq R_0$ alors $H_\omega(\Lambda_1)$ et $H_\omega(\Lambda_2)$ sont indépendantes.

Soient les interactions W par paires, invariantes par translations **(PI)**,
stables **(SI)**

Théorèmes d'existence de la limite thermodynamique

Soit $E_\omega(\Lambda, n)$ l'énergie fondamentale de $H_\omega(\Lambda, n)$.

Théorème

Soit l'opérateur à une particule H_ω

- *borné inférieurement* : il existe C t.q. $H_\omega \geq -C$ pour tout ω ,
- *décorrélé* : il existe $R_0 > 0$ t.q. si $\text{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2) \geq R_0$ alors $H_\omega(\Lambda_1)$ et $H_\omega(\Lambda_2)$ sont indépendantes.

Soient les interactions W par paires, invariantes par translations **(PI)**, stables **(SI)** et *tempérées* **(PTI)**.

Théorèmes d'existence de la limite thermodynamique

Soit $E_\omega(\Lambda, n)$ l'énergie fondamentale de $H_\omega(\Lambda, n)$.

Théorème

Soit l'opérateur à une particule H_ω

- *borné inférieurement* : il existe C t.q. $H_\omega \geq -C$ pour tout ω ,
- *décorrélé* : il existe $R_0 > 0$ t.q. si $\text{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2) \geq R_0$ alors $H_\omega(\Lambda_1)$ et $H_\omega(\Lambda_2)$ sont indépendantes.

Soient les interactions W par paires, invariantes par translations **(PI)**, stables **(SI)** et **tempérées (PTI)**.

Alors

$$\frac{E_\omega(\Lambda, n)}{n} \rightarrow \mathcal{E}(\rho), \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty \text{ et } \frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho > 0.$$

Théorèmes d'existence de la limite thermodynamique

Soit $E_\omega(\Lambda, n)$ l'énergie fondamentale de $H_\omega(\Lambda, n)$.

Théorème

Soit l'opérateur à une particule H_ω

- *borné inférieurement* : il existe C t.q. $H_\omega \geq -C$ pour tout ω ,
- *décorrélé* : il existe $R_0 > 0$ t.q. si $\text{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2) \geq R_0$ alors $H_\omega(\Lambda_1)$ et $H_\omega(\Lambda_2)$ sont indépendantes.

Soient les interactions W par paires, invariantes par translations **(PI)**, stables **(SI)** et **tempérées (PTI)**.

Alors

$$\frac{E_\omega(\Lambda, n)}{n} \rightarrow \mathcal{E}(\rho), \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty \text{ et } \frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho > 0.$$

- $\Lambda \rightarrow \infty$: au sens de Fisher.

Théorèmes d'existence de la limite thermodynamique

Soit $E_\omega(\Lambda, n)$ l'énergie fondamentale de $H_\omega(\Lambda, n)$.

Théorème

Soit l'opérateur à une particule H_ω

- *borné inférieurement* : il existe C t.q. $H_\omega \geq -C$ pour tout ω ,
- *décorrélé* : il existe $R_0 > 0$ t.q. si $\text{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2) \geq R_0$ alors $H_\omega(\Lambda_1)$ et $H_\omega(\Lambda_2)$ sont indépendantes.

Soient les interactions W par paires, invariantes par translations **(PI)**, stables **(SI)** et **tempérées (PTI)**.

Alors

$$\frac{E_\omega(\Lambda, n)}{n} \rightarrow \mathcal{E}(\rho), \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty \text{ et } \frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho > 0.$$

- $\Lambda \rightarrow \infty$: au sens de Fisher.
- La convergence est dans L_ω^2 .

Théorèmes d'existence de la limite thermodynamique

Soit $E_\omega(\Lambda, n)$ l'énergie fondamentale de $H_\omega(\Lambda, n)$.

Théorème

Soit l'opérateur à une particule H_ω

- borné inférieurement : il existe C t.q. $H_\omega \geq -C$ pour tout ω ,
- décorrélé : il existe $R_0 > 0$ t.q. si $\text{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2) \geq R_0$ alors $H_\omega(\Lambda_1)$ et $H_\omega(\Lambda_2)$ sont indépendantes.

Soient les interactions W par paires, invariantes par translations **(PI)**, stables **(SI)** et à support compact.

Alors

$$\frac{E_\omega(\Lambda, n)}{n} \rightarrow \mathcal{E}(\rho), \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty \text{ et } \frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho > 0.$$

- $\Lambda \rightarrow \infty$: au sens de Fisher et il existe $c > 0$ t.q. $\Lambda \subset B_{c|\Lambda|^{1/d}}$.
- La convergence est dans L_ω^1 et ω -presque sûrement.

Propriétés de base de l'énergie par particule $\mathcal{E}(\rho)$

Rappel : $\frac{E_\omega(\Lambda, n)}{n} \rightarrow \mathcal{E}(\rho)$ quand $\Lambda \rightarrow \infty$ et $\frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho > 0$.



Propriétés de base de l'énergie par particule $\mathcal{E}(\rho)$

Rappel : $\frac{E_\omega(\Lambda, n)}{n} \rightarrow \mathcal{E}(\rho)$ quand $\Lambda \rightarrow \infty$ et $\frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho > 0$.

Proposition

L'énergie par particule $\mathcal{E}(\rho)$ est une fonction



Propriétés de base de l'énergie par particule $\mathcal{E}(\rho)$

Rappel : $\frac{E_\omega(\Lambda, n)}{n} \rightarrow \mathcal{E}(\rho)$ quand $\Lambda \rightarrow \infty$ et $\frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho > 0$.

Proposition

L'énergie par particule $\mathcal{E}(\rho)$ est une fonction

- 1 *déterministe*,



Propriétés de base de l'énergie par particule $\mathcal{E}(\rho)$

Rappel : $\frac{E_w(\Lambda, n)}{n} \rightarrow \mathcal{E}(\rho)$ quand $\Lambda \rightarrow \infty$ et $\frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho > 0$.

Proposition

L'énergie par particule $\mathcal{E}(\rho)$ est une fonction

- 1 déterministe,
- 2 croissante,



Propriétés de base de l'énergie par particule $\mathcal{E}(\rho)$

Rappel : $\frac{E_w(\Lambda, n)}{n} \rightarrow \mathcal{E}(\rho)$ quand $\Lambda \rightarrow \infty$ et $\frac{n}{|\Lambda|} \rightarrow \rho > 0$.

Proposition

L'énergie par particule $\mathcal{E}(\rho)$ est une fonction

- 1 déterministe,
- 2 croissante,
- 3 **convexe** en ρ^{-1} .

► Omettre la démonstration du théorème d'existence



Démonstration du théorème d'existence

Schéma de la démonstration :



Démonstration du théorème d'existence

Schéma de la démonstration :

- (presque) sous-additivité de l'énergie



Démonstration du théorème d'existence

Schéma de la démonstration :

- (presque) sous-additivité de l'énergie

Proposition

Soient les interactions W tempérées. Alors $\text{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2) \geq r \geq R_0$ implique

$$E_\omega(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1 + n_2) \leq E_\omega(\Lambda_1, n_1) + E_\omega(\Lambda_2, n_2) + An_1n_2r^{-\lambda}.$$



Démonstration du théorème d'existence

Schéma de la démonstration :

- (presque) sous-additivité de l'énergie

Proposition

Soient les interactions W tempérées. Alors $\text{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2) \geq r \geq R_0$ implique

$$E_\omega(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1 + n_2) \leq E_\omega(\Lambda_1, n_1) + E_\omega(\Lambda_2, n_2) + An_1n_2r^{-\lambda}.$$

- argument de type théorème sous-additif de Kingman



Fermions dans le modèle des pièces unidimensionnel

- Définition du modèle et problématique
- Cas sans interactions
- Résultats : description de l'état fondamental



Modèle des pièces : définition



Modèle des pièces : définition

- Modèle **unidimensionnel** : $d = 1$, $\Lambda = [0, L]$



Modèle des pièces : définition

- Modèle unidimensionnel : $d = 1$, $\Lambda = [0, L]$
- Considérons le processus de Poisson $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R} d'intensité $\mu > 0$. Les points de ce processus, qui tombent à l'intérieur de $[0, L]$, définissent les positions des « murs » infiniment hauts ; on y impose les conditions de Dirichlet.



Modèle des pièces : définition

- Modèle unidimensionnel : $d = 1$, $\Lambda = [0, L]$
- Considérons le processus de Poisson $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R} d'intensité $\mu > 0$. Les points de ce processus, qui tombent à l'intérieur de $[0, L]$, définissent les positions des « murs » infiniment hauts ; on y impose les conditions de Dirichlet.
- Supposons que $[0, L] = \bigcup_{k=1}^{m(\omega)} \Delta_k(\omega)$. Le hamiltonien à une particule

$$H_\omega(L) = \bigoplus_{k=1}^{m(\omega)} -\frac{d^2}{dx^2} \Big|_{\Delta_k(\omega)}^D$$



Modèle des pièces : définition

- Modèle unidimensionnel : $d = 1$, $\Lambda = [0, L]$
- Considérons le processus de Poisson $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R} d'intensité $\mu > 0$. Les points de ce processus, qui tombent à l'intérieur de $[0, L]$, définissent les positions des « murs » infiniment hauts ; on y impose les conditions de Dirichlet.
- Supposons que $[0, L] = \bigcup_{k=1}^{m(\omega)} \Delta_k(\omega)$. Le hamiltonien à une particule

$$H_\omega(L) = \bigoplus_{k=1}^{m(\omega)} -\frac{d^2}{dx^2} \Big|_{\Delta_k(\omega)}^D$$

- Interactions par paires :

$$U(x) = \mathbb{1}_{[-R_0, R_0]}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$



Modèle des pièces : définition

- Modèle unidimensionnel : $d = 1$, $\Lambda = [0, L]$
- Considérons le processus de Poisson $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R} d'intensité $\mu > 0$. Les points de ce processus, qui tombent à l'intérieur de $[0, L]$, définissent les positions des « murs » infiniment hauts ; on y impose les conditions de Dirichlet.
- Supposons que $[0, L] = \bigcup_{k=1}^{m(\omega)} \Delta_k(\omega)$. Le hamiltonien à une particule

$$H_\omega(L) = \bigoplus_{k=1}^{m(\omega)} -\frac{d^2}{dx^2} \Big|_{\Delta_k(\omega)}^D$$

- Interactions par paires :

$$U(x) = \mathbb{1}_{[-R_0, R_0]}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

- **Fermions** : $\mathfrak{H}(L, n) = L_-^2([0, L]^n)$



Modèle des pièces : définition

- Modèle unidimensionnel : $d = 1$, $\Lambda = [0, L]$
- Considérons le processus de Poisson $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R} d'intensité $\mu > 0$. Les points de ce processus, qui tombent à l'intérieur de $[0, L]$, définissent les positions des « murs » infiniment hauts ; on y impose les conditions de Dirichlet.
- Supposons que $[0, L] = \bigcup_{k=1}^{m(\omega)} \Delta_k(\omega)$. Le hamiltonien à une particule

$$H_\omega(L) = \bigoplus_{k=1}^{m(\omega)} -\frac{d^2}{dx^2} \Big|_{\Delta_k(\omega)}^D$$

- Interactions par paires :

$$U(x) = \mathbb{1}_{[-R_0, R_0]}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

- Fermions : $\mathfrak{H}(L, n) = L_-^2([0, L]^n)$
- **Densité de particules faible** : $\rho \ll 1$



Motivation et questions



Pourquoi le modèle des pièces ?



Pourquoi le modèle des pièces ?

- 1 explicite et relativement simple



Pourquoi le modèle des pièces ?

- 1 explicite et relativement simple
- 2 extrait des caractéristiques clés des modèles plus réalistes :
 - pièces \longleftrightarrow clairières
 - murs infinis \longleftrightarrow barrières de potentiel



Pourquoi le modèle des pièces ?

- 1 explicite et relativement simple
- 2 extrait des caractéristiques clés des modèles plus réalistes :
 - pièces \longleftrightarrow clairières
 - murs infinis \longleftrightarrow barrières de potentiel
- 3 la distribution statistique des longueurs des pièces est correcte



Pourquoi le modèle des pièces ?

- 1 explicite et relativement simple
- 2 extrait des caractéristiques clés des modèles plus réalistes :
 - pièces \longleftrightarrow clairières
 - murs infinis \longleftrightarrow barrières de potentiel
- 3 la distribution statistique des longueurs des pièces est correcte

Soient $E_\omega(L, n)$ et $\Psi_\omega(L, n)$ l'énergie et l'état fondamental de $H_\omega(L, n)$.



Pourquoi le modèle des pièces ?

- 1 explicite et relativement simple
- 2 extrait des caractéristiques clés des modèles plus réalistes :
 - pièces \longleftrightarrow clairières
 - murs infinis \longleftrightarrow barrières de potentiel
- 3 la distribution statistique des longueurs des pièces est correcte

Soient $E_\omega(L, n)$ et $\Psi_\omega(L, n)$ l'énergie et l'état fondamental de $H_\omega(L, n)$.

Quelques questions et problèmes

Pourquoi le modèle des pièces ?

- 1 explicite et relativement simple
- 2 extrait des caractéristiques clés des modèles plus réalistes :
 - pièces \longleftrightarrow clairières
 - murs infinis \longleftrightarrow barrières de potentiel
- 3 la distribution statistique des longueurs des pièces est correcte

Soient $E_\omega(L, n)$ et $\Psi_\omega(L, n)$ l'énergie et l'état fondamental de $H_\omega(L, n)$.

Quelques questions et problèmes

- 1 Décrire l'état fondamental $\Psi_\omega(L, n)$ dans la limite thermodynamique $L \rightarrow +\infty$, $n/L \rightarrow \rho$, pour la densité de particules ρ faible.

Pourquoi le modèle des pièces ?

- 1 explicite et relativement simple
- 2 extrait des caractéristiques clés des modèles plus réalistes :
 - pièces \longleftrightarrow clairières
 - murs infinis \longleftrightarrow barrières de potentiel
- 3 la distribution statistique des longueurs des pièces est correcte

Soient $E_\omega(L, n)$ et $\Psi_\omega(L, n)$ l'énergie et l'état fondamental de $H_\omega(L, n)$.

Quelques questions et problèmes

- 1 Décrire l'état fondamental $\Psi_\omega(L, n)$ dans la limite thermodynamique $L \rightarrow +\infty$, $n/L \rightarrow \rho$, pour la densité de particules ρ faible.
- 2 Quantifier l'influence d'interactions W sur l'énergie par particule $\mathcal{E}(\rho)$ par rapport à celle sans interactions $\mathcal{E}^0(\rho)$.

Énergie de Fermi et longueur de Fermi

Définition Soit N la densité d'états intégrée de H_ω .



Énergie de Fermi et longueur de Fermi

Définition Soit N la densité d'états intégrée de H_ω . L'énergie de Fermi E_ρ est une solution de

$$N(E_\rho) = \rho.$$



Énergie de Fermi et longueur de Fermi

Définition Soit N la densité d'états intégrée de H_ω . L'énergie de Fermi E_ρ est une solution de

$$N(E_\rho) = \rho.$$

La longueur de Fermi

$$\ell_\rho = \pi / \sqrt{E_\rho}.$$



Énergie de Fermi et longueur de Fermi

Définition Soit N la densité d'états intégrée de H_ω . L'énergie de Fermi E_ρ est une solution de

$$N(E_\rho) = \rho.$$

La longueur de Fermi

$$\ell_\rho = \pi / \sqrt{E_\rho}.$$

Remarque : $E_n(L, 1) \rightarrow E_\rho$ quand $L \rightarrow \infty$, $n/L \rightarrow \rho$.



Énergie de Fermi et longueur de Fermi

Définition Soit N la densité d'états intégrée de H_ω . L'énergie de Fermi E_ρ est une solution de

$$N(E_\rho) = \rho.$$

La longueur de Fermi

$$\ell_\rho = \pi / \sqrt{E_\rho}.$$

Remarque : $E_n(L, 1) \rightarrow E_\rho$ quand $L \rightarrow \infty$, $n/L \rightarrow \rho$.

Proposition (asymptotiques de Lifshitz)

Pour le modèle des pièces de Poisson :

$$N(E) = \frac{\mu \exp(-\mu\pi/\sqrt{E})}{1 - \exp(-\mu\pi/\sqrt{E})} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(E)$$

et

$$E_\rho = \pi^2 \mu^2 (\log(\mu\rho^{-1} + 1))^{-2}, \quad \ell_\rho = \mu^{-1} \log(\mu\rho^{-1} + 1).$$

Système de fermions sans interactions



État fondamental pour des fermions libres

Supposons que $U \equiv 0$. Soient $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ les états propres de $H_\omega(L, 1)$.



État fondamental pour des fermions libres

Supposons que $U \equiv 0$. Soient $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ les états propres de $H_\omega(L, 1)$. L'état fondamental $\Psi_\omega^0(L, n)$ de $H_\omega^0(L, n)$ est **le déterminant de Slater** :

$$\Psi_\omega^0(L, n) = \det(\psi_i(x^j))_{i,j=1}^n.$$



État fondamental pour des fermions libres

Supposons que $U \equiv 0$. Soient $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ les états propres de $H_\omega(L, 1)$. L'état fondamental $\Psi_\omega^0(L, n)$ de $H_\omega^0(L, n)$ est le déterminant de Slater :

$$\Psi_\omega^0(L, n) = \det(\psi_i(x^j))_{i,j=1}^n.$$

Alors dans la limite thermodynamique, la plupart des particules $\{\psi_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$

- 1 occupent le niveau fondamental dans les pièces de longueur $\approx \ell_\rho$,



État fondamental pour des fermions libres

Supposons que $U \equiv 0$. Soient $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ les états propres de $H_\omega(L, 1)$. L'état fondamental $\Psi_\omega^0(L, n)$ de $H_\omega^0(L, n)$ est le déterminant de Slater :

$$\Psi_\omega^0(L, n) = \det(\psi_i(x^j))_{i,j=1}^n.$$

Alors dans la limite thermodynamique, la plupart des particules $\{\psi_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$

- 1 occupent le niveau fondamental dans les pièces de longueur $\approx \ell_\rho$,
- 2 sont **toutes seules** dans ces pièces.



État fondamental pour des fermions libres

Supposons que $U \equiv 0$. Soient $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ les états propres de $H_\omega(L, 1)$. L'état fondamental $\Psi_\omega^0(L, n)$ de $H_\omega^0(L, n)$ est le déterminant de Slater :

$$\Psi_\omega^0(L, n) = \det(\psi_i(x^j))_{i,j=1}^n.$$

Alors dans la limite thermodynamique, la plupart des particules $\{\psi_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$

- 1 occupent le niveau fondamental dans les pièces de longueur $\approx \ell_\rho$,
- 2 sont toutes seules dans ces pièces.

Les particules dans l'état fondamental créent $O(n\rho)$ interactions.



État fondamental pour des fermions libres

Supposons que $U \equiv 0$. Soient $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ les états propres de $H_\omega(L, 1)$. L'état fondamental $\Psi_\omega^0(L, n)$ de $H_\omega^0(L, n)$ est le déterminant de Slater :

$$\Psi_\omega^0(L, n) = \det(\psi_i(x^j))_{i,j=1}^n.$$

Alors dans la limite thermodynamique, la plupart des particules $\{\psi_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$

- 1 occupent le niveau fondamental dans les pièces de longueur $\approx \ell_\rho$,
- 2 sont toutes seules dans ces pièces.

Les particules dans l'état fondamental créent $O(n\rho)$ interactions.

Idee/Question : comment cette description se transforme dans le vrai état fondamental $\Psi_\omega(L, n)$?

▶ Direct vers la description du vrai état fondamental



Approche perturbative

Rappelons :

$$H_\omega(L, n) = H_\omega^0(L, n) + W_n$$

$$\text{avec } W_n(x^1, \dots, x^n) = \sum_{\substack{i, j \in \{1, \dots, n\} \\ i < j}} \mathbb{1}_{[-R_0, R_0]}(x^i - x^j).$$



Approche perturbative

Rappelons :

$$H_\omega(L, n) = H_\omega^0(L, n) + W_n$$

avec $W_n(x^1, \dots, x^n) = \sum_{\substack{i, j \in \{1, \dots, n\} \\ i < j}} \mathbb{1}_{[-R_0, R_0]}(x^i - x^j)$. Or,

$$\frac{\inf \text{Spec } H_\omega^0(L, n)}{n} = \frac{E_\omega^0(L, n)}{n} \rightarrow \mathcal{E}^0(\rho) = \rho^{-1} \int_{-\infty}^{E_\rho} E dN(E)$$



Approche perturbative

Rappelons :

$$H_\omega(L, n) = H_\omega^0(L, n) + W_n$$

avec $W_n(x^1, \dots, x^n) = \sum_{\substack{i, j \in \{1, \dots, n\} \\ i < j}} \mathbb{1}_{[-R_0, R_0]}(x^i - x^j)$. Or,

$$\frac{\inf \text{Spec } H_\omega^0(L, n)}{n} = \frac{E_\omega^0(L, n)}{n} \rightarrow \mathcal{E}^0(\rho) = \rho^{-1} \int_{-\infty}^{E_\rho} E dN(E)$$

Proposition

Soit $\Psi_\omega^0(L, n)$ l'état fondamental de $H_\omega^0(L, n)$. Alors

$$\frac{\langle W_n \Psi_\omega^0(L, n), \Psi_\omega^0(L, n) \rangle}{n \|\Psi_\omega^0(L, n)\|^2} \rightarrow \frac{5R_0^3}{6\mu} \cdot \rho \ell_\rho^{-3} \cdot (1 + O(|\log \rho|^{-1})),$$

dans la limite thermodynamique $L \rightarrow +\infty$, $\frac{n}{L} \rightarrow \rho > 0$.

Décomposition par occupation

Rappel : $H_\omega(L, n) = H_\omega^0(L, n) + W_n$



Décomposition par occupation

Rappel : $H_\omega(L, n) = H_\omega^0(L, n) + W_n$

- Soit la configuration des pièces ω fixée : $[0, L] = \bigcup_{j=1}^{m(\omega)} \Delta_j(\omega)$.



Décomposition par occupation

Rappel : $H_\omega(L, n) = H_\omega^0(L, n) + W_n$

- Soit la configuration des pièces ω fixée : $[0, L] = \bigcup_{j=1}^{m(\omega)} \Delta_j(\omega)$.
- **Définition** Pour un état propre Ψ de $H_\omega^0(L, n)$, on définit l'**occupation**

$$Q(\Psi) = (q_1^\omega, \dots, q_m^\omega),$$

où q_j^ω est le nombre de particules que Ψ met dans Δ_j .



Décomposition par occupation

Rappel : $H_\omega(L, n) = H_\omega^0(L, n) + W_n$

- Soit la configuration des pièces ω fixée : $[0, L] = \bigcup_{j=1}^{m(\omega)} \Delta_j(\omega)$.
- **Définition** Pour un état propre Ψ de $H_\omega^0(L, n)$, on définit l'occupation

$$Q(\Psi) = (q_1^\omega, \dots, q_m^\omega),$$

où q_j^ω est le nombre de particules que Ψ met dans Δ_j .

- **Sous-espace d'occupation constante** $\mathfrak{H}_Q = \text{Span}\{\Psi \mid Q(\Psi) = Q\}$



Décomposition par occupation

Rappel : $H_\omega(L, n) = H_\omega^0(L, n) + W_n$

- Soit la configuration des pièces ω fixée : $[0, L] = \bigcup_{j=1}^{m(\omega)} \Delta_j(\omega)$.
- **Définition** Pour un état propre Ψ de $H_\omega^0(L, n)$, on définit l'occupation

$$Q(\Psi) = (q_1^\omega, \dots, q_m^\omega),$$

où q_j^ω est le nombre de particules que Ψ met dans Δ_j .

- Sous-espace d'occupation constante $\mathfrak{H}_Q = \text{Span}\{\Psi \mid Q(\Psi) = Q\}$ engendre la décomposition orthogonale

$$\mathfrak{H}^n = \bigoplus_{Q \in \mathbb{N}^m, \sum_{j=1}^m Q_j = n} \mathfrak{H}_Q.$$



Décomposition par occupation

Rappel : $H_\omega(L, n) = H_\omega^0(L, n) + W_n$

- Soit la configuration des pièces ω fixée : $[0, L] = \bigcup_{j=1}^{m(\omega)} \Delta_j(\omega)$.
- **Définition** Pour un état propre Ψ de $H_\omega^0(L, n)$, on définit l'occupation

$$Q(\Psi) = (q_1^\omega, \dots, q_m^\omega),$$

où q_j^ω est le nombre de particules que Ψ met dans Δ_j .

- Sous-espace d'occupation constante $\mathfrak{H}_Q = \text{Span}\{\Psi \mid Q(\Psi) = Q\}$ engendre la décomposition orthogonale

$$\mathfrak{H}^n = \bigoplus_{Q \in \mathbb{N}^m, \sum_{j=1}^m Q_j = n} \mathfrak{H}_Q.$$

- \mathfrak{H}_Q sont des sous-espaces invariants de $H_\omega(L, n)$ et

$$H_\omega(L, n) = \bigoplus_{Q \in \mathbb{N}^m, \sum_{j=1}^m Q_j = n} H_Q.$$



Séparation des états excités

Fixons $A_1 \geq 0$ et $A_2 > 5$. On décompose l'espace total

$$\mathfrak{H}^n = \mathfrak{H}^- \oplus \mathfrak{H}^+, \quad (1)$$



Séparation des états excités

Fixons $A_1 \geq 0$ et $A_2 > 5$. On décompose l'espace total

$$\mathfrak{H}^n = \mathfrak{H}^- \oplus \mathfrak{H}^+, \quad (1)$$

où \mathfrak{H}^- est un sous-espace engendré par des fonctions propres de $H_\omega^0(L, n)$
t.q.

- 1 au plus $(\rho |\log \rho|^{A_1 + A_2} n)$ particules ont l'énergie plus grande que $(1 + |\log \rho|^{-A_1}) E_\rho$,



Séparation des états excités

Fixons $A_1 \geq 0$ et $A_2 > 5$. On décompose l'espace total

$$\mathfrak{H}^n = \mathfrak{H}^- \oplus \mathfrak{H}^+, \quad (1)$$

où \mathfrak{H}^- est un sous-espace engendré par des fonctions propres de $H_\omega^0(L, n)$
t.q.

- 1 au plus $(\rho |\log \rho|^{A_1 + A_2} n)$ particules ont l'énergie plus grande que $(1 + |\log \rho|^{-A_1}) E_\rho$,
- 2 il y a au plus $Bn\rho$ interactions entre ces particules.



Séparation des états excités

Fixons $A_1 \geq 0$ et $A_2 > 5$. On décompose l'espace total

$$\mathfrak{H}^n = \mathfrak{H}^- \oplus \mathfrak{H}^+, \quad (1)$$

où \mathfrak{H}^- est un sous-espace engendré par des fonctions propres de $H_\omega^0(L, n)$
t.q.

- 1 au plus $(\rho |\log \rho|^{A_1+A_2} n)$ particules ont l'énergie plus grande que $(1 + |\log \rho|^{-A_1})E_\rho$,
- 2 il y a au plus $Bn\rho$ interactions entre ces particules.

Théorème

Sous la décomposition (1), un état fondamental s'écrit $\Psi = \Psi^- + \Psi^+$ avec

$$\frac{\|\Psi^+\|}{\|\Psi^-\|} = O\left(|\log \rho|^{-(A_2-2)}\right).$$

Non dégénérescence de l'état fondamental

Soient L et n fixés.



Non dégénérescence de l'état fondamental

Soient L et n fixés.

Théorème

L'état fondamental $\Psi_\omega(L, n)$ de $H_\omega(L, n)$ est ω -presque sûrement **non dégénéré**.



Non dégénérescence de l'état fondamental

Soient L et n fixés.

Théorème

L'état fondamental $\Psi_\omega(L, n)$ de $H_\omega(L, n)$ est ω -presque sûrement non dégénéré.

Corollaire

ω -presque sûrement, l'état fondamental de $H_\omega(L, n)$ ainsi que ses composantes dans \mathfrak{H}^\pm ,

$$\Psi_\omega(L, n) = \Psi^- + \Psi^+,$$

possèdent la même occupation.



Non dégénérescence de l'état fondamental

Soient L et n fixés.

Théorème

L'état fondamental $\Psi_\omega(L, n)$ de $H_\omega(L, n)$ est ω -presque sûrement non dégénéré.

Corollaire

ω -presque sûrement, l'état fondamental de $H_\omega(L, n)$ ainsi que ses composantes dans \mathfrak{H}^\pm ,

$$\Psi_\omega(L, n) = \Psi^- + \Psi^+,$$

possèdent la même occupation.

Cette occupation est d'un élément de \mathfrak{H}^- .



Définition

Pour deux occupations $Q^1, Q^2 \in \mathbb{N}^m$, $|Q^j| = n$, $Q^j = (Q_1^j, Q_2^j, \dots, Q_m^j)$, $j \in \{1, 2\}$, on définit la distance par

$$\text{dist}_0(Q^1, Q^2) = \sum_{j=1}^m \mathbb{1}(Q_j^1 = Q_j^2).$$



Définition

Pour deux occupations $Q^1, Q^2 \in \mathbb{N}^m$, $|Q^j| = n$, $Q^j = (Q_1^j, Q_2^j, \dots, Q_m^j)$, $j \in \{1, 2\}$, on définit la distance par

$$\text{dist}_0(Q^1, Q^2) = \sum_{j=1}^m \mathbb{1}(Q_j^1 = Q_j^2).$$

Rappel : $\Psi_\omega(L, n)$ est l'état fondamental de $H_\omega(L, n)$.



Définition

Pour deux occupations $Q^1, Q^2 \in \mathbb{N}^m$, $|Q^j| = n$, $Q^j = (Q_1^j, Q_2^j, \dots, Q_m^j)$, $j \in \{1, 2\}$, on définit la distance par

$$\text{dist}_0(Q^1, Q^2) = \sum_{j=1}^m \mathbb{1}(Q_j^1 = Q_j^2).$$

Rappel : $\Psi_\omega^0(L, n)$ est l'état fondamental de $H_\omega^0(L, n)$.



Définition

Pour deux occupations $Q^1, Q^2 \in \mathbb{N}^m$, $|Q^j| = n$, $Q^j = (Q_1^j, Q_2^j, \dots, Q_m^j)$, $j \in \{1, 2\}$, on définit la distance par

$$\text{dist}_0(Q^1, Q^2) = \sum_{j=1}^m \mathbb{1}(Q_j^1 \neq Q_j^2).$$

Rappel : $\Psi_\omega^0(L, n)$ est l'état fondamental de $H_\omega^0(L, n)$.

Théorème

Pour tout $\beta \in (0, 1/2)$, il existe une constante C telle que pour n et L suffisamment grands et n/L suffisamment proche de ρ , avec probabilité supérieure à $1 - e^{-L^\beta}$,

$$C^{-1}n\rho \leq \text{dist}_0(Q(\Psi_\omega(L, n)), Q(\Psi_\omega^0(L, n))) \leq Cn\rho.$$

Influence des interactions sur l'énergie fondamentale

Rappel : $\mathcal{E}(\rho)$ est la limite thermodynamique de l'énergie fondamentale de $H_\omega(L, n)$ par particule.



Influence des interactions sur l'énergie fondamentale

Rappel : $\mathcal{E}^0(\rho)$ est la limite thermodynamique de l'énergie fondamentale de $H_\omega^0(L, n)$ par particule.



Rappel : $\mathcal{E}^0(\rho)$ est la limite thermodynamique de l'énergie fondamentale de $H_\omega^0(L, n)$ par particule.

Théorème

Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour ρ suffisamment petit,

$$\mathcal{E}^0(\rho) + C^{-1}\rho|\log \rho|^{-3} \leq \mathcal{E}(\rho) \leq \mathcal{E}^0(\rho) + C\rho|\log \rho|^{-3}.$$

▶ Omettre la fonction d'autocorrelation



Définition Soit $\Psi \in \mathfrak{H}^n(L)$. La fonction d'autocorrélation

$$\mathcal{L}_\Psi(\mathbf{y}) = \int_{[0,L]^n} |\Psi(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{y})| d\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \in [0, L]^n.$$



Définition Soit $\Psi \in \mathfrak{H}^n(L)$. La fonction d'autocorrélation

$$\mathcal{L}_\Psi(\mathbf{y}) = \int_{[0,L]^n} |\Psi(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x} + \mathbf{y})| d\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \in [0, L]^n.$$

Théorème

Soit Ψ l'état fondamental de $H_\omega(L, n)$. Il existe une constante C t.q. si le vecteur $\mathbf{y} \in [0, L]^n$ a au moins $nB(\rho)$ coordonnées $|y^k| > (1 + 1/C)\ell_\rho$, avec $B(\rho) > C|\log \rho|^{-1}$, alors

$$\mathcal{L}_\Psi(\mathbf{y}) = O(\exp(-nB(\rho)|\log \rho|))$$

dans la limite thermodynamique.



Perspectives



Ce qui n'était pas fait et quoi faire ensuite

- 1 Ce qui manque :



Ce qui n'était pas fait et quoi faire ensuite

- ① Ce qui manque :
 - Existence de la limite thermodynamique pour d'autres conditions au bord sauf celle de **Dirichlet** ;



Ce qui n'était pas fait et quoi faire ensuite

- ① Ce qui manque :
 - Existence de la limite thermodynamique pour d'autres conditions au bord sauf celle de Dirichlet ;
 - Meilleure convergence que dans L^2_ω pour les interactions tempérées.



Ce qui n'était pas fait et quoi faire ensuite

- ① Ce qui manque :
 - Existence de la limite thermodynamique pour d'autres conditions au bord sauf celle de Dirichlet ;
 - Meilleure convergence que dans L^2_ω pour les interactions tempérées.
- ② Les ouvertures :



Ce qui n'était pas fait et quoi faire ensuite

- ① Ce qui manque :
 - Existence de la limite thermodynamique pour d'autres conditions au bord sauf celle de Dirichlet ;
 - Meilleure convergence que dans L^2_ω pour les interactions tempérées.
- ② Les ouvertures :
 - Obtenir **le terme principal** (on connaît l'ordre $\rho |\log \rho|^{-3}$) pour l'asymptotique de $\mathcal{E}(\rho) - \mathcal{E}^0(\rho)$ en ρ petit ;



Ce qui n'était pas fait et quoi faire ensuite

- ① Ce qui manque :
 - Existence de la limite thermodynamique pour d'autres conditions au bord sauf celle de Dirichlet ;
 - Meilleure convergence que dans L^2_ω pour les interactions tempérées.
- ② Les ouvertures :
 - Obtenir le terme principal (on connaît l'ordre $\rho |\log \rho|^{-3}$) pour l'asymptotique de $\mathcal{E}(\rho) - \mathcal{E}^0(\rho)$ en ρ petit ;
 - Généraliser la méthode pour **d'autres modèles**.



Ce qui n'était pas fait et quoi faire ensuite

- ① Ce qui manque :
 - Existence de la limite thermodynamique pour d'autres conditions au bord sauf celle de Dirichlet ;
 - Meilleure convergence que dans L^2_ω pour les interactions tempérées.
- ② Les ouvertures :
 - Obtenir le terme principal (on connaît l'ordre $\rho |\log \rho|^{-3}$) pour l'asymptotique de $\mathcal{E}(\rho) - \mathcal{E}^0(\rho)$ en ρ petit ;
 - Généraliser la méthode pour d'autres modèles.

Merci de votre attention !

